Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

# Un grupo topológico universal para la clase de los grupos segundo numerables

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

Matemático

PRESENTA:

José Luis Flores Garduño

DIRECTOR DE TESIS:

Dra. Natalia Jonard Pérez

2014

Ciudad Universitaria, D. F.

# Índice general

# Introducción

A grandes rasgos, un espacio universal para una clase de espacios topológicos $\mathcal{K}$, es un espacio $U \in \mathcal{K}$ tal que para cualquier $X \in \mathcal{K}$, existe un encaje $j : X \to U$. El ejemplo más simple de un espacio de este tipo, es el cubo de Hilbert $Q = [0,1]^{\mathbb{N}}$, el cual es un espacio universal para todos los espacios regulares segundo numerables. Otro ejemplo es el cubo de Tychonoff $[0,1]^{\kappa}$, el cual es un espacio universal para los espacios de Tychonoff de peso a lo más $\kappa$.

Cuando la clase de espacios topológicos $\mathcal{K}$ tiene alguna estructura adicional, es interesante preguntarse por la existencia de un espacio universal $U$ que *respete esa estructura*. Por ejemplo, si $\mathcal{K}$ es la clase de todos los espacios metrizables y separables, entonces $Q$ es un espacio universal para $\mathcal{K}$, pero el encaje de $j : X \to Q$ (para $X \in \mathcal{K}$) no es una isometría. Sin embargo hay otros ejemplos de espacios universales que si respeta esta estructura. Por ejemplo, el espacio de funciones continuas $C([0,1],\mathbb{R})$ equipado con la norma del supremo es un métrico, separable y completo que contiene copias isométricas de cualquier otro espacio métrico separable (véase teorema 4.3.2). Otro espacio de este tipo es el espacio universal de Urysohn $\mathbb{U}$, el cual un espacio métrico, completo y separable y es el único espacio que satisface las siguientes dos condiciones: 1) todo espacio métrico separable se encaja de manera isométrica en $\mathbb{U}$ y 2) si $A, B \subset \mathbb{U}$ son dos subconjuntos finitos y $j : A \to B$ es una isometría entonces existe una isometría $\tilde{j} : \mathbb{U} \to \mathbb{U}$ que extiende a $j$.

En este trabajo estamos interesados en encontrar un grupo topológico $\Gamma$ que sea universal para la clase de los grupos segundo numerables. Es decir, que $\Gamma$ es un grupo segundo numerable y si $G$ es cualquier grupo topológico segundo numerable, entonces existe $j : G \to \Gamma$ tal que $j$ es a su vez un encaje topológico y un monomorfismo de grupos. Recordemos que un grupo topológico es un grupo $G$ equipado con una topología que hace continua la operación del grupo y la función que manda a cada elemento a su inverso.

Para ello desarrollamos el trabajo de V. V. Uspenskii [10], en el cual se prueba que el grupo de automorfismos del cubo de Hilbert es un grupo universal para la clase de los grupos segundo numerables. La demostración de este resultado requiere varios resultados preliminares. En este trabajo incluimos la mayoría de ellos. Sin embargo, hemos omitido la demostración de aquellos que son muy básicos o conocidos.

Entre los resultados que se necesitan para entender la demostración del resultado principal de esta tesis, está el Teorema de Keller. Este teorema nos dice que todos los subconjuntos compactos, convexos y de dimensión infinita del espacio de Hilbert $\ell_2$, son homeomorfos al cubo de Hilbert. La demostración de este importante teorema excede los propósitos de este trabajo.

El presente trabajo queda enmarcado en el área de los Grupos Topológicos, aunque tiene conexión con el Análisis Matemático (en particular los espacios de Banach), La teoría de las uniformidades, los espacios de funciones y la teoría de estructuras Algebraicas en espacios topológicos. Por esta razón en la primera parte dedicamos un espacio a cada uno de estos temas.

En el capítulo 1 desarrollamos y recordamos varios resultados de topología general y análisis funcional que serán utilizados posteriormente. Damos particular importancia en desarrollar nociones básicas de espacios de funciones ya que este tipo de espacios es básico para nuestros fines. También introducimos brevemente la noción de espacio uniforme, ya que esto ayudará en el siguiente capítulo a desarrollar algunos resultados sobre la topología de los grupos topológicos. En el capítulo 2 se estudia todo lo referente a los grupos topológicos. Se verán algunos ejemplos que serán utilizados posteriormente y se demostrará el teorema de metrizabilidad de Birkhoff-Kakutani, el cual es básico en la demostración de nuestro objetivo principal.

En la segunda parte se demuestra los resultados centrales de este trabajo. El capítulo 4 está dedicado a demostrar que el grupo de automorfismos del cubo de Hilbert es un grupo universal para los grupos de segundo numerables (teorema 3.3.1). La demostración consiste en probar los siguientes dos resultados: 1) todo grupo se encaja topológica y algebraicamente en el grupo de isometrías de un espacio de Banach separable(teorema 3.2.4), y 2) el grupo de isometrías de un espacio de Banach se encaja en el grupo de automorfismos de la bola unitaria del espacio dual equipada con la topología $w^*$ la cual es homeomorfa al cubo de Hilbert (teorema 3.2.5).

Por último, para complementar este trabajo, en el capítulo 4, demostramos que el espacio de funciones continuas $C([0,1],\mathbb{R})$ es un espacio universal para los espacios de Banach separables (teorema 4.3.1). Es decir, para cualquier espacio de Banach separable $X$ existe un encaje lineal e isométrico $j : X \to C([0,1],\mathbb{R})$. Observemos que los espacios de Banach son un caso particular de grupos topológicos. Como corolario demostramos que el espacio $C([0,1],\mathbb{R})$ es un espacio universal para todos los espacios métricos separables (Teorema 4.3.2).

# Capítulo 1

# Preliminares topológicos

## 1.1. Algunos resultados y definiciones básicas

Comenzaremos por recordar algunos resultados de Topología General que serán usados a lo largo del texto.

**Proposición 1.1.1.** *Sea $X$ un espacio topológico compacto, $Y$ un espacio topológico $T_2$ y $f : X \to Y$ una biyección continua. Entonces $f$ es homeomorfismo.*

*Demostración.* Lo único que hay que mostrar es que $f^{-1} : Y \to X$ es continua, para ello se mostrará que la imagen inversa de un cerrado es cerrado. Sea $C$ un subconjunto cerrado de $X$. Como $X$ es compacto entonces $C$ es compacto y como $f$ es biyección entonces existe $C' \subset Y$ tal que $f^{-1}(C') = C$. Además puesto que $f$ es una biyección continua entones $C' = f(f^{-1}(C')) = f(C)$ es compacto y como $Y$ es Hausdorff entonces $C'$ es cerrado por lo que $f^{-1}$ es continua. Con esto se concluye que $f : X \to Y$ es un homeomorfismo. $\square$

**Proposición 1.1.2.** *Sean $X$ un espacio topológico, $D$ un subconjunto denso de $X$, $Y$ un espacio topológico Hausdorff y $f, g$ funciones continuas de $X$ en $Y$ tal que $f(d) = g(d)$ para toda $d \in D$. Entonces $f(x) = g(x)$ para todo $x \in X$.*

*Demostración.* Supongamos que existe $x \in X$ tal que $f(x) \neq g(x)$. Como $Y$ es Hausdorff existen vecindades abiertas $U, V$ ajenas y tales que $f(x) \in U$ y $g(x) \in V$. Notemos que $x \in f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V) := V_x$, por lo que $V_x$ es un vecindad abierta, de $x \in X$. Como $D$ es denso, existe $d \in D_X$ tal que $d \in V_X$, pero esto implica que $f(d) \in U$ y que $g(d) \in V$. Como $f$ y $g$ coinciden en $D_X$, entonces $f(d) = g(d) \in U \cap V$. Pero esto es una contradicción puesto que $U$ y $V$ son abiertos ajenos. Por lo tanto concluimos que $f(x) = g(x)$ para toda $x \in X$. $\square$

Recordemos que un espacio $X$ es localmente compacto, si para todo $x \in X$ y para toda vecindad $U_x$ de $x$, existe una vecindad $V_x$ con cerradura compacta tal que $x \in V_x \subset \overline{V_x} \subset U_x$.

Evidentemente si $X$ es un espacio Hausdorff, $X$ es localmente compacto si y sólo si para cada $x \in X$, existe $K \subset X$ un subespacio compacto de $X$ y un abierto $U_x$ tal que $x \in U_x \subset K$.

### 1.1.1. Topologías débiles

Consideremos una familia de funciones $\mathcal{F} = \{f_\alpha : X \to Y_\alpha\}_{\alpha\in A}$, con $X$ un conjunto y $\{(Y_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ una colección de espacios topológicos. Ahora lo que se pretende es asignar una topología a $X$, que sea la mínima topología que haga continua a cada $f_\alpha$. Notamos que para hacer esto posible, $f_\alpha^{-1}(U_\alpha)$ (con $U_\alpha \in \tau_\alpha$) debe ser un abierto en $X$ para cada $\alpha \in A$. Como la colección $\{f_\alpha^{-1}(U_\alpha) : U_\alpha \in \tau_\alpha\}_{\alpha\in A}$ es una cubierta de $X$, entonces es subbase para una única topologia a la que llamamos topología débil de $X$, generada por la colección de funciones $\mathcal{F}$.

**Definición 1.1.3.** *Sea $X$ un conjunto, decimos que $X$ es un espacio pseudométrico si existe una función $d : X \times X \to \mathbb{R}$ que cumple para cada $x, y, z \in X$:*

**1.** $d(x, x) = 0$

**2.** $d(x, y) = d(y, x)$

**3.** $d(x, y) \leq d(x, z) + d(x, y)$.

*Denotamos por $(X, d)$ al espacio $X$ con una pseudométrica $d$.*

Notemos que la definición anterior es prácticamente la de espacio métrico salvo que la hipótesis de que $d(x, y) = 0$ no necesariamente implica que $x = y$.

Sea $(X, d)$ un espacio métrico y $A$, $B$ un par de subconjuntos no vacíos de $X$. Definimos la distancia de un punto $x \in X$ al conjunto $A$ como
$d_A(x) := d(A, x) := \inf_{a\in A}\{d(x, a)\}$. Como $A$ es no vacío entonces existe $a \in A$, de manera que $0 \leq d(x, A) \leq d(a, x)$. Ahora consideremos la distancia entre dos conjuntos $d(A, B) := \inf\{d(a, b) : (a, b) \in A \times B\}$.

Notemos que las definiciones anteriores nos permiten formalizar la idea de lo que entendemos por una distancia entre conjuntos, sin embargo, estrictamente no son distancias. Lo que si cumplen son los axiomas para una pseudométrica. Para ver esto notemos que $d(A, B)$ puede ser cero sin ser el mismo conjunto. (Evidentemente $d(A, A) = 0$, sin embargo) Sea $X = \mathbb{N}$, $A = \{1\}$ y $B = \{1, 2\}$. Notemos que $d(A, B) = d(1, 1) = 0$ pero $A \neq B$.

Como nota adicional veamos que siempre que $A$ sea un subconjunto cerrado de $X$ entonces $d(x, A) = 0$ si y sólo si $x \in A$. Evidentemente si $x \in A$ entonces

$d(x, A) = 0$. Para la segunda implicación notemos que como $d(x, A) = 0$ entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe $a \in A$ tal que $d(x, a) < \varepsilon$ y consideremos $B(x, \varepsilon)$. Con lo que se deduce que $B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ y por lo tanto $x \in \overline{A} = A$. Además si el conjunto es compacto se pude mostrar que para toda $x \in X$ existe $a \in A$ tal que $d(x, A) = d(x, a)$.

**Definición 1.1.4.** *Sean $X$, $Y$ espacios topológicos, $A \subset X$ y $f : A \to Y$ una función continua. Decimos que $F : X \to Y$ es una extensión continua de $f$ si el siguiente diagrama conmuta.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "F"] & Y \\ A \arrow[u, "i_A"] \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

**Teorema 1.1.5** (Teorema de Dugundji)**.** *Sea $(E, ||\cdot||)$ un espacio vectorial normado. Para cada espacio métrico $X$, para cada subconjunto cerrado $A$ de $X$ y para cada función continua $f : A \to E$, existe una extensión continua $F : X \to E$ de $f$ tal que $F(X) \subset conv(f(A))$.*

## 1.2. Topologías en espacio de funciones

Para empezar consideremos $X, Y$ dos espacios topológicos. Recordemos que $Y^X := \{f : X \to Y\}$ es el conjunto de las funciones de $X$ en $Y$ y denotamos por $C(X, Y) \subset Y^X$ al subconjunto de las funciones continuas.

Existen varias manera de definir una topología en $C(X, Y)$.

Para cada punto $x \in X$ y cada abierto $U \in \tau_Y$ definamos el siguiente conjunto

$$M(x, U) := \{f \in C(X, Y) : f(x) \in U\}.$$

Consideremos la siguiente familia $L := \{M(x, U) : x \in X,\ U \in \tau_Y\}$. Como $Y \in \tau_Y$, $L$ resulta ser una cubierta de $C(X, Y)$, de manera que existe una única topologia para la cual $L$ es subbase. Llamamos a dicha topología la topología *punto abierta*. En otras palabras la topología punto abierta es la que $C(X, Y)$ hereda de la topología producto de $Y^X$.

### 1.2.1. Topología compacto abierta

Para cada compacto $K \subset X$, y cada abierto $U \in \tau_Y$, definimos $M(K, U) := \{f \in C(X, Y) : f(K) \subset U\}$ y sea

$$\Gamma = \{M(K, U) : K \text{ es compacto de } X,\ U \in \tau_Y\}.$$

Al tomar esta cubierta como subbase obtenemos una única topología en $C(X,Y)$ de la cual $\Gamma$ es subbase. Esta topología recibe el nombre de *compacto abierta* y es más fina que la punto abierta. Además, si $X$ es discreto, entonces ambas topologías coinciden y $C(X,Y)=Y^X$. El espacio $C(X,Y)$ equipado con la topología compacto abierta, será denotado por $C_c(X,Y)$.

**Definición 1.2.1.** *Sean $(X,\tau_X)$, y $(Y,\tau_Y)$ espacios topológicos. La función $\Omega : C(X,Y)\times X\to Y$ definida por $\Omega(f,x)=f(x)$ es llamada la función evaluación.*

**Teorema 1.2.2.** *Sean $X$ y $Y$ espacios topológicos. Si $X$ es localmente compacto, entonces la función evaluación es continua en $C_c(X,Y)\times X$.*

*Demostración.* Sea $(f,x)\in C_c(X,Y)\times X$ y $V\subset Y$ una vecindad de $\Omega(f,x)=f(x)$. Como $f$ es continua y $X$ es localmente compacto, existe un abierto $W\subset X$ tal que $\overline{W}$ es un conjunto compacto que cumple:

$$x\in W\subset\overline{W}\subset f^{-1}(V).$$

Entonces $M(\overline{W},V)$ es una vecindad subbásica de $f$ en $C_c(X,Y)$ y por lo tanto $O:=M(\overline{W},V)\times W$ es una vecindad de $(f,x)\in C_c(X,Y)\times X$. Lo que falta es mostrar que $\Omega(O)\subset V$. Sea $(g,z)\in O$, entonces $z\in W\subset\overline{W}$ y $g(\overline{W})\subset V$. Por lo tanto $\Omega(g,z)=g(z)\in V$, con lo que se prueba la continuidad de $\Omega$. $\square$

**Definición 1.2.3.** *Sean $X$ un espacio topológico, $(Y,d)$ un espacio métrico. Consideremos $K\subset X$ un subconjunto compacto de $X$ y definamos para cada $f\in C(X,Y)$ y cada $\varepsilon>0$ el conjunto*

$$B(K,f,\varepsilon):=\{g\in C(X,Y):\sup_{x\in K}\{d(f(x),g(x))\}<\varepsilon\}.$$

**Teorema 1.2.4.** *Sean $X$ un espacio topológico y $(Y,d)$ un espacio métrico. Entonces la familia $\mathcal{B}:=\{B(K,f,\varepsilon):K\subset X$ compacto, $f\in C(X,Y),\varepsilon>0\}$ es una base para la topología compacto abierta en $C(X,Y)$.*

### 1.2.2. Topologia de la convergencia uniforme

**Definición 1.2.5.** *Sea $(X,d)$ un espacio métrico. Diremos que $d$ es acotada si* $\sup\{d(x_1,x_2):x_1,x_2\in X\}<\infty$.

**Definición 1.2.6.** *Sea $X$ un espacio topológico, y $(Y,d)$ un espacio métrico. Decimos que $f:X\to Y$ es una función $d$-acotada si*

$$\sup\{d(f(x_1),f(x_2)):x_1,x_2\in X\}<\infty.$$

El conjunto de todas las funciones $f : X \to Y$, $d$-acotadas y continuas será denotado por $BC(X, Y, d)$ o simplemente por $BC(X, Y)$.

**Proposición 1.2.7.** *Sean $X$ espacio topológico, $(Y, d)$ un espacio métrico y consideremos $BC(X, Y, d)$. Entonces la función $d^* : BC(X, Y, d) \times BC(X, Y, d) \to \mathbb{R}$ dada por $d^*(f, g) = sup\{d(f(x), g(x)) : x \in X\}$ es una métrica en el espacio de funciones $BC(X, Y, d)$, a la que nos referiremos como la métrica del supremo . A la topología generada por $d^*$ se le llamará la topología de la convergencia uniforme.*

Notemos que si $d$ es acotada entonces $d^*$ define una métrica sobre $BC(X, Y) = C(X, Y)$. Decimos que una topología para $C(X, Y)$ es admisible si la función evaluación es continua.

**Teorema 1.2.8.** *Sean $X$ un espacio topológico, $(Y, d)$ un espacio métrico, Entonces la topología de la convergencia uniforme es admisible .*

*Demostración.* Sea $(f_0, x_0) \in C(X, Y) \times X$ y $\varepsilon > 0$. Llamemos $U = B(f_0(x_0), \frac{\varepsilon}{2}) \subset Y$. De manera que la continuidad de $f_0$ nos permite asegurar que $f_0^{-1}(U) := V$ es una vecindad abierta de $x_0$. Sea $W := B_{d^*}(f_0, \frac{\varepsilon}{2}) \subset C(X, Y)$, y consideremos $(f, x) \in W \times V := Z$. Como $f \in W$ entonces $d^*(f, f_0) < \frac{\varepsilon}{2}$ por lo que $d(f(x), f_0(x)) < \frac{\varepsilon}{2}$. Además como $x \in V$ entonces $d(f_0(x), f_0(x_0)) < \frac{\varepsilon}{2}$ y por lo tanto tenemos:

$$\begin{aligned} d(\Omega(f, x), \Omega(f_0, x_0)) &= d(f(x), f_0(x_0)) \\ &\leq d(f(x), f_0(x)) + d(f_0(x), (f_0(x_0))) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Con lo que se concluye la continuidad de la función evaluación. □

**Lema 1.2.9.** *Sean $X$ y $Y$ dos espacios topológicos, $x_0 \in X$ y $A$ un subconjunto compacto de $Y$. Si $W$ es una vecindad de $x_0 \times A \subset X \times Y$, entonces existe una vecindad $U$ de $x_0$ tal que $U \times A \subset W$.*

*Demostración.* Sea $W$ una vecindad de $x_0 \times A \subset X \times Y$. Para cada $(x_0, a) \in \{x_0\} \times A$ existe un básico $W_a = U_a \times V_a$ tal que $(x_0, a) \in W_a \subset W$. Llamemos $\mathcal{W} := \{W_a : a \in A\}$, notemos que $\mathcal{W}$ es una cubierta abierta del compacto $x_0 \times A$ por lo que existe una subcubierta finita $\{W_{a_i}\}_{i=1}^n$. Definamos el abierto $U = \bigcap_{i=1}^n U_{a_i}$. Notemos que $U \times A \subset W$ puesto que $U \times a \subset W$ para toda $a \in A$. □

**Teorema 1.2.10.** *Sean $X$ y $Y$ espacios topológicos. Entonces toda topología admisible es más fina que la topología compacto abierta .*

*Demostración.* Sea $\tau$ una topología admisible en $C(X, Y)$. Basta demostrar que todo subbásico de la topología compacto abierta es abierto de $\tau$. Sea $f \in M(K, U)$, es decir $f(K) \subset U$. De manera que $\Omega(f, K) \subset U$. Con lo que $f \times K \subset \Omega^{-1}(U) \in \tau$ y como consecuencia del lema 1.2.9 tenemos que existe $U_f$ vecindad de $f$ tal que $U_f \times K \subset \Omega^{-1}(U)$. Además para toda $h \in U_f$, $\Omega(h \times K) \subset U$ por lo que $U_f \subset M(K, U)$. Esto nos permite ver que

$$M(K, U) = \bigcup_{f \in M(K,U)} U_f.$$

Por lo que $M(K, U)$ es un abierto de $\tau$.

□

**Corolario 1.2.11.** *La topología de la convergencia uniforme es más fina que la topologia compacto abierta.*

*Demostración.* Por el teorema 1.2.8 la topología de la convergencia uniforme es admisible, de manera que el teorema 1.2.10 nos permite concluir que la topología de la convergencia uniformes es más fina que la topología compacto abierta. □

**Teorema 1.2.12.** *Sea $X$ un espacio topologico compacto y $Y$ un espacio métrico. Entonces la topología compacto abierta coincide con la topología de la convergencia uniforme en $C(X, Y)$.*

*Demostración.* Sabemos que la topología de la convergencia uniforme el más fina que la topología compacto abierta (corolario 1.2.11). Falta demostrar que la topología compacto abierta es más fina que la de la convergencia uniforme. Para ello, sea $f : X \to Y$ una función continua y demostremos que para cualquier vecindad $B(f, \varepsilon)$ existe una vecindad $O$ de la topología compacto abierta tal que $O \subset B(f, \varepsilon)$.

Sea $B(f, \varepsilon)$ una vecindad de radio $\varepsilon > 0$. Para cada $y \in Y$ sea $V_y := B(y, \frac{\varepsilon}{8})$, como $f$ es continua entonces $U_y := f^{-1}(V_y)$ es un abierto en $X$. Por la misma razón, $f^{-1}(\overline{V_y})$ es un conjunto cerrado en $X$. De manera que $U_y \subset \overline{U_y} \subset f^{-1}(V_y)$, por lo que para cualquier par de puntos $x, z \in f(\overline{U_y})$ tenemos que $d(x, z) \leq \frac{\varepsilon}{4} < \frac{\varepsilon}{2}$. Como $\{U_y\}_{y \in Y}$ es una cubierta abierta del compacto $X$ existe una subcubierta abierta $\{U_{y_i}\}_{i=1}^n$.

Para cada $i \in \{1, ..., n\}$ sea $W_i := \{y \in Y : d(y, f(\overline{U_{y_i}})) < \frac{\varepsilon}{4}\}$, es decir $W_i$ es una vecindad del compacto $f(\overline{U_{y_i}})$. Notemos que para cualesquiera dos puntos $z, y \in W_i$ tenemos que $d(z, y) < \frac{3}{4}\varepsilon$.

Por construcción, $f \in \bigcap_{i=1}^{n} M(\overline{U_i}, W_i)$. Por otra parte si $g \in \bigcap_{i=1}^{n} M(\overline{U_i}, W_i)$, entonces dada $x \in X$ existe, $i \in \{1, ..., n\}$ tal que $x \in U_i \subset \overline{U_i}$. De esta manera, como $g(x) \in W_i$ y $f(x) \in W_i$ concluimos que $d(g(x), f(x)) < \frac{3}{4}\varepsilon$. Entonces

$$d^*(f, g) \leq \frac{3}{4}\varepsilon < \varepsilon.$$

De lo que se deduce que $g \in B(f, \varepsilon)$, y por lo tanto la topología compacto abierta coincide con la topología de la convergencia uniforme.

□

**Definición 1.2.13.** *Sea* $(x, d)$ *un espacio topológico y* $(Y, d)$ *un espacio métrico. Se dice que una familia* $\mathcal{F} \subset C(X, Y)$ *es equicontinua en el punto* $x_0 \in X$ *si para todo* $\varepsilon > 0$ *existe una vecindad* $U$ *de* $x_0$ *tal que* $d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ *para toda* $x \in U$ *y toda* $f \in \mathcal{F}$*. Diremos que* $\mathcal{F}$ *es equicontinua si* $\mathcal{F}$ *es equicontinua en* $x$ *para toda* $x \in X$*.*

Como veremos a continuación, las isometrías de un espacio métrico son un ejemplo de una familia equicontinua.
**Teorema 1.2.14.** *Sea* $(X, d)$ *un espacio métrico. Entonces la familia de isometrías de* $X$*,* $Is(X)$*, es una familia equicontinua de funciones.*

*Demostración.* Sea $\varepsilon > 0$, $x \in X$. Entonces, para todo $f \in Is(X)$ se tiene que $d(x, x') = d(f(x), f(x'))$. Así, siempre que $d(x, x') < \varepsilon$ se tiene que $d(f(x), f(x')) < \varepsilon$ para todo $f \in Is(X)$. Esto quiere decir que $Is(X)$ es una familia equicontinua. □

**Teorema 1.2.15.** *Sea* $\mathcal{F} \subset C(X, Y)$ *una familia equicontinua, donde* $X$ *es un espacio topológico y* $Y$ *un espacio métrico. Entonces la topología compacto abierta y la topología punto abierta coinciden.*

*Demostración.* Denotemos por $\tau_p$ a la topolgía punto abierta en $\mathcal{F}$ y por $\tau_c$ a la topología compacto abierta en $\mathcal{F}$. Claramente $\tau_p \subset \tau_c$. Para demostrar la otra contención recordemos que los abiertos de la forma

$$B(K, f, \varepsilon) := \{g \in C(X, Y) : \sup_{x \in K}\{d(f(x), g(x)), K \subset X \text{ compacto}\}\}$$

forman una subbase para la topología compacto abierta (por el teorema 1.2.4). De manera que es suficiente mostrar que para toda $f \in \mathcal{F}$, $B(K, f, \varepsilon) \cap \mathcal{F}$ es un abierto en $\mathcal{F}$ respecto de la topología $\tau_p$.

Como $\mathcal{F}$ es equicontinua también lo es $B(K, f, \varepsilon) \cap \mathcal{F}$. Por lo tanto para cada $x \in K$ existe una vecindad $U_x$ tal que para toda $y \in U_x$ y toda $g \in \mathcal{F}$ se cumple que

$$d(g(x), g(y)) < \frac{\varepsilon}{4}.$$

De esta manera, la colección $\{U_x\}_{x \in K}$ es una cubierta abierta del compacto $K$, por lo que podemos encontrar una subcubierta finita $\{U_{x_i}\}_{i=1}^{n}$.

Para cada $i \in 1, ..., n$ llamemos $V_i$ a la bola abierta en $Y$ con centro en $f(x_i)$ y radio $\frac{\varepsilon}{4}$. Consideremos $M(x_i, V_i)$. Claramente $f \in M(x_i, V_i)$ pues $f(x_i) \in V_i$ para toda $i \in \{1, ..., n\}$. Esto nos dice que

$$O = \bigcap_{i=1}^{n} M(x_i, V_i) \cap \mathcal{F}$$

es una vecindad de $f$ en la topología $\tau_p$. Falta mostrar que $O \subset B(f, K, \varepsilon)$. Sea $h \in O$, entonces $h(x_i) \in V_i$ para toda $i \in \{1, ..., n\}$ de manera que

$$d(h(x_i), f(x_i)) < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Para cada $x \in K$ existe una $j \in \{1, ..., n\}$ tal que $x \in U_{x_j}$. Entonces $d(f(x), f(x_j)) < \frac{\varepsilon}{4}$. Además como $h \in O \subset \mathcal{F}$ se satisface $d(h(x), h(x_j) < \frac{\varepsilon}{4}$.

En consecuencia

$$\begin{aligned} d(f(x), h(x)) &\leq d(f(x), f(x_j)) + d(f(x_j), h(x_j)) + d(h(x_j), h(x)) \\ &< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} \\ &= 3\frac{\varepsilon}{4}. \end{aligned}$$

Por lo que concluimos que $\sup_{x \in K}\{d(h(x), f(x))\} \leq 3\frac{\varepsilon}{4} < \varepsilon$ y por lo tanto $h \in B(f, K, \varepsilon)$. □

**Definición 1.2.16.** *Sea $X$ un espacio topológico y $(Y, d)$ un espacio métrico. Decimos que una sucesión de funciones continuas $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C(X, Y)$ converge uniformemente a $f : X \to Y$. Si para toda $\varepsilon > 0$ existe una $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(f(x), f_n(x)) < \varepsilon$ para toda $n \geq N$ y toda $X \in X$.*

**Teorema 1.2.17.** *Sea $X$ un espacio, $(Y, d)$ un espacio métrico entonces los siguientes enunciados se cumplen:*

**1.** *Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset BC_u(X, Y)$ es una sucesión que converge uniformemente a $f : X \to Y$, entonces $f \in BC_u(X, Y)$.*

**2.** *La sucesión $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a $f$ uniformemente si y sólo si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a $f$ en la topología de la convergencia uniforme de $BC(X, Y)$.*

La prueba de este teorema se puede consultar en [7, Cororalio 46.6, Teorema 46.8].

### 1.2.3. Teorema de la función asociada

Sean $X, Y, Z$ espacios topológicos y $\alpha : X \times Y \to Z$ una función continua. Consideremos la función $\hat{\alpha} : X \to C_c(Y, Z)$ definida como

$$[\hat{\alpha}(x)](y) := \alpha(x, y) \quad \text{para toda } y \in Y.$$

Diremos que $\alpha$ y $\hat{\alpha}$ son funciones asociadas.

**Teorema 1.2.18.** *Sean $X, Y, Z$ espacio topológicos y $\alpha : X \times Y \to Z$ una función. Entonces se cumple*

**a)** *Si $\alpha$ es continua, entonces $\hat{\alpha}$ es continua.*

**b)** *Si $\hat{\alpha} : X \to C_c(Y, Z)$ es continua y $Y$ es localmente compacto, entonces $\alpha$ es continua.*

*Demostración.* (a) Sea $M(A, V) \subset C_c(Y, Z)$ un abierto subbásico. Para demostrar la continuidad de $\hat{\alpha}$ es suficiente demostrar que $\hat{\alpha}^{-1}(M(A, V))$ es abierto en $X$. Sea $\hat{\alpha}(x_0) \in M(A, V)$, entonces

$$\alpha(x_0, A) = [\hat{\alpha}(x_0)](A) \subset V.$$

Además, como $\alpha$ es continua podemos asegurar que $\alpha^{-1}(V)$ es una vecindad abierta del compacto $x_0 \times A$ y por el teorema 1.2.9 existe una vecindad $U \subset X$ de $x_0$ tal que

$$U \times A \subset \alpha^{-1}(V).$$

Ahora veamos que $U \subset \hat{\alpha}^{-1}(M(A, V))$. Si $x \in U$, se cumple que $\{x\} \times A \subset \alpha^{-1}(V)$ de manera que

$$[\hat{\alpha}(x)(A)] = \alpha(x, A) \subset V.$$

Por lo tanto $\hat{\alpha}(x) \in M(A, V)$, lo cual demuestra la continidad de $\hat{\alpha}$.

Ahora demostraremos *b*). Como $\hat{\alpha}$ es continua, también lo es el producto $\hat{\alpha} \times Id_Y : X \times Y \to C_c(Y, Z) \times Y$, donde $Id_Y : Y \to Y$ es la función identidad en $Y$. Además, como $Y$ es localmente compacto, por el teorema 1.2.2, la función evaluación $\Omega : C_c(Y, Z) \times Y \to Z$ es continua. Por lo que $\Omega \circ (\hat{\alpha} \times Id_Y) : X \times Y \to Z$ es una función continua. Notemos que

$$\Omega \circ (\hat{\alpha} \times Id_Y)(x, y) = \Omega(\hat{\alpha}(x), y) = [\hat{\alpha}(x)](y) = \alpha(x, y),$$

para todo $(x, y) \in X \times Y$. Es decir $\Omega \circ (\hat{\alpha} \times Id_Y) = \alpha$, y por lo tanto se concluye que la función $\alpha$ es continua. $\square$

## 1.3. Uniformidades

Sea $X$ un conjunto y consideremos $A, B \subset X \times X$. Definamos los siguientes conjuntos:

$$-A := \{(x, y) : (y, x) \in A\}.$$

$$A + B := \{(x, z) : \text{existe } y \in X \text{ tal que } (x, y) \in A, (y, z) \in B\}.$$

En general $A + (B + C) = (A + B) + C$, pero no siempre se cumple la conmutatividad $A + B \neq B + A$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos $nA$, de la siguiente manera: $1A = A$ y teniendo definido $(n-1)A$ definimos $nA = 1A + (n-1)A$.

La diagonal de $X \times X$ se define como el conjunto $\Delta_X := \{(x,x) : x \in X\} \subset X \times X$. Diremos que $V \subset X \times X$ es un entorno de la diagonal si cumple:

$$\Delta_X \subset V \text{ y } V = -V.$$

Denotamos por $D_X$ a la familia de entornos de la diagonal.

Para cada $(x,y) \in X \times X$ y $V \in D_X$, si $(x,y) \in V \in D_X$ diremos que la *"distancia"* entre $x$ y $y$ es menor que $V$y lo denotamos como $|x - y| < V$. En caso contrario $|x - y| \geq V$.

Decimos que el diámetro de $A \subset X$ es menor que $V \in D_X$ (denotado por $\delta(A) < V$), si para cada par $x, y \in A$ y $V \in D_X$ se cumple que $(x,y) \in V$, es decir, $|x - y| < V$ o equivalentemente $A \times A \subset V$.

De lo anterior podemos ver que para $x, y, z \in X$ y $V, V_1, V_2 \in D_X$ se cumple:

**1)** $|x - x| < V$

**2)** $|x - y| < V$ si y solo si $|y - x| < V$

**3)** Si $|x - y| < V_1$ y $|y - z| < V_2$ entonces $|x - z| < V_1 + V_2$.

Sea $x \in X$, $V \in D_X$, llamamos la bola de radio $r$ y centro en $x$ al siguiente conjunto

$$V[x] := \{y \in X : |x - y| < V\} = \{y \in X : (x,y) \in V\}.$$

Para $y, z \in V[x]$ se tiene $|y-x| < V$ y $|x-z| < V$ por lo tanto $|y-z| < V+V = 2V$, es decir $\delta(V[x]) < 2V$.

Para un conjunto $A \subset X$ y $V \in D_X$, por la bola de radio V con centro en A nos referiremos al conjunto $V[A] = \bigcup\limits_{x \in A} V[x]$.

Ahora veremos que todo espacio uniforme tiene asociada una topología.

**Definición 1.3.1.** *Sea $X$ conjunto, decimos que una subfamilia $\mathbb{U}$ de $D_X$ es una uniformidad si satisface:*

**U1)** *Si $V \in \mathbb{U}, W \in D_X$ es tal que $V \subset W$ entonces $W \in \mathbb{U}$.*

**U2)** *Si $V_1, V_2 \in \mathbb{U}$ entonces $V_1 \cap V_2 \in \mathbb{U}$.*

**U3)** *Para cada $V \in \mathbb{U}$ existe $W \in \mathbb{U}$ tal que $2W \subset V$.*

**U4)** $\cap\mathbb{U} := \bigcap U \in \mathbb{U} = \Delta_X$.

*La pareja $(X, \mathbb{U})$ se llama espacio uniforme .*

**Definición 1.3.2.** *Sea $(X, \mathbb{U})$ un espacio uniforme, decimos que una subfamilia $\beta$ de $\mathbb{U}$ es una base para la uniformidad si para cada $V \in \mathbb{U}$ existe $W \in \beta$ de tal manera que $W \subset V$.*

Para cada $\beta$ base de $\mathbb{U}$ tenemos que si $V_1, V_2 \in \beta \subset \mathbb{U}$, entonces $V_1 \cap V_2 \in \mathbb{U}$, de manera que por la definición de la base $\beta$ existe $V \in \beta$ tal que $V \subset V_1 \cap V_2$. También notemos que para cada $V \subset \beta$ existe $W' \in \mathbb{U}$ que cumple $2W' \subset V$ y para $W'$, existe $W \in \beta$ cumpliendo $W \subset W'$, con lo que $2W \subset V$. También, como $\beta$ es una subfamilia de $\mathbb{U}$, entonces $\cap\mathbb{U} \subset \cap\beta$ y además para toda $V \in \mathbb{U}$ existe $W \in \beta$ de manera que $W \subset V$ y por lo tanto $\cap\beta \subset \cap\mathbb{U}$.

De lo anterior, toda base $\beta$ de $\mathbb{U}$ cumple:

**B1)** Si $V_1, V_2 \in \beta$, entonces existe $V \in \beta$ tal que $V \subset V_1 \cap V_2$.

**B2)** Para cada $V \in \beta$ existe $W \in \beta$ tal que $2W \subset V$.

**B3)** $\cap\beta = \Delta_X$

**Lema 1.3.3.** *Sea $(X, \mathbb{U})$ un espacio uniforme. Sea $V := V_1 \cap V_2$ con $V_i \in \mathbb{U}$ para $i = 1, 2$ entonces $V[x] = V_1[x] \cap V_2[x]$.*

*Demostración.* Sea $y \in V[x]$ entonces de la definición tenemos $(x, y) \in V := V_1 \cap V_2$ por lo que $(x, y) \in V_1$ y $(x, y) \in V_2$ con lo que se puede afirmar que $y \in V_1[x]$ y $y \in V_2[x]$ es decir $y \in V_1[x] \cap V_2[x]$. Ahora sea $y \in V_1[x] \cap V_2[x]$. Es decir $y \in V_1[x]$ y $y \in V_2[x]$, y entonces $(x, y) \in V_i$ para $i \in \{1, 2\}$. Esto último permite afirmar que $(x, y) \in V_1 \cap V_2$ y por lo tanto $y \in V[x]$.

□

Todo espacio uniforme tiene asociada una topología que está muy relacionada al concepto de uniformidad.

**Teorema 1.3.4.** *Sea $(X, \mathbb{U})$ un espacio uniforme. Definimos la siguiente familia*

$$\tau_{\mathbb{U}} := \{U \subset X : \text{ para cada } x \in U \text{ existe } V \in \mathbb{U} \text{ tal que } V[x] \subset U\}.$$

*Entonces $(X, \tau_{\mathbb{U}})$ es un espacio topológico $T_1$.*

*Demostración.* De la definición de $\tau_{\mathbb{U}}$, se tiene que $X, \emptyset \in \tau_{\mathbb{U}}$. Sean $U_1, U_2 \in \tau_{\mathbb{U}}$ y $x \in U_1 \cap U_2$. Entonces existen $V_1[x] \subset U_2$ y $V_2[x] \subset U_2$ respectivamente, tomando $V := V_1 \cap V_2$ tenemos $V[x] = V_1[x] \cap V_2[x] \subset U_1 \cap U_2$, de manera que $U_1 \cap U_2 \in \tau_{\mathbb{U}}$.

Ahora consideramos $\{U_a\}_{a \in A}$ una familia de elementos de $\tau_{\mathbb{U}}$ y sea $x \in \bigcup_{a \in A} U_a$. Entonces existe $a_x \in A$ tal que $x \in U_{a_x}$ y por lo tanto existe $V_{a_x} \in \mathbb{U}$ tal que $V_{a_x}[x] \subset U_{a_x}$. De manera que $x \in V_{a_x}[x] \subset \bigcup_{a \in A} U_a$, lo cual implica que $\bigcup_{a \in K} U_a \in \tau_{\mathbb{U}}$.

Sólo falta ver que es $T_1$. Para esto sea $U = X - \{x\}$ y veamos que es abierto. Por $(U4)$ tenemos que para toda $y \neq x$ existe $V \in \mathbb{U}$ tal que $(x,y) \notin V$ es decir $x \notin V[y]$ por lo que $V[y] \subset U$. Con esto concluimos que $U$ es abierto.

□

De hecho todo espacio es uniforme si y solo si es un espacio de Tychonoff. Este conocido resultado puede consultarse en [4, teorema 8.1.20].

## 1.4. Espacios de Banach

Recordemos que en un espacio vectorial normado $(E, ||\cdot||)$ es un espacio de Banach si es completo; es decir, si toda sucesión de Cauchy es convergente en $X$. Además para $(E, ||\cdot||_E)$, $(F, ||\cdot||_F)$ espacios vectoriales normados decimos que una función lineal $f : E \to F$ es acotada, si existe $C \in \mathbb{R}$ tal que

$$||f(x)||_F \leq C||x||_E$$

para toda $x \in E$.

Sean $(E, ||\cdot||_E)$, $(F, ||\cdot||_F)$ espacios vectoriales normados y $f : E \to F$ una función lineal acotada. Vamos a denotar y definir la norma de $f$ como

$$||f|| := \sup\{C : ||f(x)||_F \leq C||x||_E \text{ para toda } x \in E\} \tag{1.1}$$

Las siguientes expresiones son formas equivalentes de calcular la norma del operador $f$.

· $||f|| := \text{ínf}_{x\in E}\{C : ||f(x)||_F \leq C||x||_E\}$

· $||f|| := \sup\{C : \frac{||f(x)||_F}{||x||_E} \leq C\}$

· $||f|| := \sup\{||f(x)||_F : ||x||_E \leq 1\}$

· $||f|| := \sup\{||f(x)||_F : ||x||_E < 1\}$

Sea $(E, ||\cdot||)$, espacio de Banach. El dual de $E$ es el conjunto $E^* := \{f : E \to \mathbb{R} :$ $f$es lineal y acotada.$\}$ Equipado con la suma de funciones y la multiplicación $E^*$ es un espacio vectorial.

**Definición 1.4.1.** *Sea $(E, ||\cdot||)$ espacio de Banach y $E^*$ su dual. La topología débil del espacio $E$ es la topología débil generada por la familia $E^*$. Es decir, la topología de $E$ es aquella que tiene como elementos subbásicos a la familia $\{f^{-1}(U) : f \in E^*, U \text{ abierto en } \mathbb{R}\}$.*

Dado un espacio de Banach E, el doble dual de $E$ es el espacio

$$E^{**} := \{f : E^* \to \mathbb{R} \quad | \quad f \text{ es lineal y acotada}\} \tag{1.2}$$

donde $f : E^* \to \mathbb{R}$ es acotada si lo es respecto a la norma definida (1.1).

Todo espacio normado se encaja en $E^{**}$ a través de la identificación $x \to x^*$ donde $x^*(f) := f(x)$ para todo $f \in E^*$

**Definición 1.4.2.** *Sea $(E, ||\cdot||)$ espacio de Banach. La topología débil estrella (o débil $*$ ) denotado por $w^*$, es la topología débil en $E^*$ generada por la familia $E \subset E^{**}$. Es decir, la topología de $w^*$ es la que tiene como subbásicos, a los conjuntos:*

$$\{(x^*)^{-1}(U) | U \text{ abierto de } \mathbb{R}\ , x \in E\}$$

$$= \{f | f(x) \in U\}.$$

*En otras palabras, la topología débil $*$, es la restricción de la topología de la convergencia puntual (o punto abierta) en $E^* \subset \mathbb{R}^E$.*

Recordemos que una función $\Lambda : E \to F$, entre espacios vectoriales $E$ y $F$, es afín si para todo $x, y \in E$ y para todo $t \in [0, 1]$, se cumple que $\Lambda(tx + (1 - t)x) = t\Lambda(x) + (1 - t)\lambda(y)$. Evidentemente toda función lineal es afín.

**Definición 1.4.3.** *Sea $E$ un espacio vectorial. Decimos que $B \subset E$ es convexo si para toda $x, y \in B$ y para todo $t \in [0, 1]$ se tiene que $(1 - t)x + ty \in E$.*

**Lema 1.4.4.** *Sean $E$, $F$ espacios espacios vectoriales, $\Lambda : E \to F$ una función afín y $C \subset E$, un conjunto convexo. Entonces $\Lambda(E)$ también es convexo.*

*Demostración.* Para cualesquiera $x, y \in C$ y $t \in [0, 1]$ tenemos que $tx+(1-t)y \in C$, de manera que $t\Lambda(x) + (1 - t)\Lambda(y) = \Lambda(tx + (1 - t)y) \in \Lambda(C)$. Evidentemente esto demuestra el lema. □

**Definición 1.4.5.** *Sea $(X, ||\cdot||)$ un espacio vectorial normado. Sea $A \subset X$ no vació, llamamos casco convexo de $A$, al conjunto convexo más pequeño que contiene a $A$.*

### 1.4.1. Teorema de Alaoglu

**Teorema 1.4.6** (Alaoglu). *Sea $(X, ||\cdot||)$ un espacio vectorial normado. Denotemos por $B_1^*(0) := \{F \in X^* \mid ||F||_{X^*} \leq 1\}$ a la bola unitaria del dual. Entonces $B$ es compacta con la topología $w^*$ .*

*Demostración.* Consideremos el producto topológico

$$K := \prod_{x \in X} D_x \text{ donde } D_x := \{z \in \mathbb{R} : |z| \leq ||x||\}.$$

Para cada $x \in X$ definimos el siguiente conjunto $E_x := \{|F(x)| : F \in B_1^*(0)\}$. Sabemos que $F \in B_1^*(0)$ es equivalente a que $|F(x)| \leq ||x||$ para toda $x \in X$, con lo que se puede afirmar que $E_x \subseteq D_x$ y por lo tanto $B_1^*(0) \subseteq K$. Asignando a cada $D_x$ la topología usual de $\mathbb{R}$ y al producto K, la topología producto, podemos usar el teorema de Tychonoff y concluir que $K$ es compacto.

Observemos que $X^* \subset \mathbb{R}^X$ y $K \subset \mathbb{R}^X$. Así $B_1^*(0) \subseteq K \cap X^*$.

Además la topología $w^*$ en $X^*$ es la heredada e $\mathbb{R}^X$, mientras que la topología producto en $K$ también es la heredada de $\mathbb{R}^X$. Así la topología $w^*$ en $B_1^*(0)$ coincide con la topología heredada de $K$. por lo tanto habría que demostrar que $B_1^c(0)$ es cerrado en $K$.

Tomemos $f_0 \in \overline{B_1^*(0)} \subset K$ donde $\overline{B_1^*(0)}$ denota la cerradura respecto de la topología $\tau_K$ en K. Consideramos $x, y \in X \;\; \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *y* $\varepsilon > 0$. Llamemos

$$V_{f_0} := \{f \in K : |f_0(Z) - f(z)| < \varepsilon\}$$

para $x, y$ y $x = z$, $z = y$, $z = \alpha x + \beta y$ $V_{f_0}$ es una vecindad de $f_0$ y por lo tanto $V_{f_0} \cap B_1^*(0)$ es no vacía, por lo que podemos tomar una $f \in V_{f_0} \cap B_1^*(0)$. De la linealidad de $f$ tenemos que

$$f_0(\alpha x + \beta y) - \alpha f_0(x) + \beta f_0(y) = (f_0 - f)(\alpha x + \beta y) - \alpha(f_0 - f)(x) + \beta(f_0 - f)(y)$$

de manera que

$$|f_0(\alpha x + \beta y) - \alpha f_0(x) + \beta f_0(y)| < (1 + |\alpha| + |\beta|)\varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ puede ser tan cerca a cero como queramos, podemos concluir que $f_0$ es lineal.

Ahora nos tomamos $\varepsilon > 0, x \in X$ y llamamos a $U_{f_0} := \{f \in K : |f(x) - f_0(x)| < \varepsilon\}$, la cual es una vecindad de $f_0$ en $K$. La intersección $U_{f_0} \cap B_1^*(0)$ es no vacía y por lo tanto existe $f \in U_{f_0} \cap B_1^*(0)$. Observemos que

$$|f_0(x)| \leq |f_0(x) - f(x)| + |f(x)| \leq \epsilon + 1$$

ya que $f \in U_{f_0} \cap B_1^*(0)$. Como $\varepsilon$ es arbitrario, tenemos $|f_0(x)| \leq 1$ para toda $x \in X$. Esto prueba que $f_0 \in B_1^*(0)$ y por lo tanto $B_1^*(0) = \overline{B_1^*(0)}$, en el compacto $K$. Así podemos deducir que $B_1^*(0)$ es compacto, como se quería demostrar.

□

**Teorema 1.4.7.** *Sea $(X, ||\cdot||)$ un espacio vectorial normado y separable. Si $K \subset X^*$ es $w^*$-compacto entonces $K$ es metrizable con la topología $w^*$.*

*Demostración.* Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un conjunto denso numerable en X, y consideramos la familia $\{x_n^*\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X^{**}$ donde

$$x_n^*(f) := f(x_n) \text{ para cada } f \in X^*$$

.

Por definición, cada $x_n^*$ es $w^*$-continua. Sean $f$ y $g$ dos elementos de $X^*$. Si $x_n^*(f) = x_n^*(\varphi)$, para todo $n$, entonces $f(x_n) = g(x_n)$ para toda $n$. Tanto $f$ como $g$ son continuas y como $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un conjunto denso en $X$ por la proposición 1.1.2 concluimos que $f = g$. Esto implica que la familia $\{x^*\}_{n\in\mathbb{N}}$ separa puntos. Como $\{x_n^*\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una familia numerable que separa puntos de $X^*$, entonces por el lema **??** se concluye que $K$ es metrizable en la topología $w^*$.

□

### 1.4.2. Teorema de Hahn-Banach

**Definición 1.4.8.** *Sea $(X, ||\cdot||)$ espacio vectorial normado. Dada $\rho : X \to \mathbb{R}$ decimos que $\rho$ es una funcional convexa si:*

**1)** $\rho(x) \geq 0$ *para toda* $x \in X$.

**2)** $\rho(x + y) \leq \rho(x) + \rho(y)$ *para toda* $x, y \in X$.

**3)** $\rho(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot \rho(x)$ *para toda* $\lambda > 0$.

**Teorema 1.4.9** (Teorema de Hanh-Banach)**.** *Sean $(X, ||\cdot||)$ espacio vectorial normado, $M$ un subespacio propio de $X$, $f : M \to \mathbb{R}$ una funcional lineal, $\rho : X \to \mathbb{R}$ una funcional convexa tal que $f(m) \leq \rho(m)$ para toda $m \in M$. Entonces existe $F : X \to \mathbb{R}$ una funcional lineal, acotada tal que $F|_M = f$ y $F(x) \leq \rho(x)$ para toda $x \in X$.*

La demostración del teorema de Hanh-Banach puede ser consultada, por ejemplo, en [6, Teorema 2.2].

**Teorema 1.4.10.** *Sea* $(X, ||\cdot||)$ *un espacio vectorial normado sobre* $\mathbb{R}$. *Sea* $x_0 \in X$ *tal que* $x_0 \neq 0$. *Entonces existe una funcional lineal acotada* $F : X \to \mathbb{R}$ *tal que:*

**1)** $F(x_0) = ||x_0||$

**2)** $||F|| = 1$.

*Demostración.* Sea $M = span(x_0) = \{\lambda \cdot x_0 : \lambda \in \mathbb{R}\}$. Definimos la funcional lineal acotada $f : M \to \mathbb{R}$ como $f(\lambda \cdot x_0) = \lambda \cdot ||x_0||$, claramente $f$ es una funcional lineal. Veamos que es acotada. Para ello notemos que

$$|f(\lambda \cdot x_0)| = ||\lambda \cdot x_0||$$

De manera que $|f(m)| = ||m||$ para toda $m \in M$ y en consecuencia $||f|| = 1$.

Ahora, sea $\rho : X \to \mathbb{R}$ definida por $\rho(x) := ||x||$.

Notemos que $|f(\lambda \cdot x_0)| = |\lambda \cdot ||x_0||| = |\lambda| \cdot ||x_0|| = |\lambda| \cdot \rho(x_0) = \rho(\lambda \cdot x_0)$. Por lo que estamos en la condiciones del teorema de Hanh-Banach 1.4.9, y por lo tanto existe una funcional lineal acotada $F : X \to \mathbb{R}$ tal que $F|_M = f$ y $|F(x)| \leq \rho(x)$ para toda $x \in X$. Lo anterior implica que $|F(x)| \leq \rho(x) = ||x||$ entonces $||F(x)|| \leq 1$ falta mostrar que $||F(x)|| \geq 1$. Para esto recordemos que como $F$ es extensión de $f$ entonces

$$1 = ||f|| = \sup\{|f(m)| : ||m|| = 1\} \leq \sup\{|F(x)| : ||x|| = 1\}.$$

Por lo tanto $||F|| = 1$. Finalmente $F(\lambda \cdot x_0) = f(\lambda \cdot x_0) = \lambda \cdot ||x_0||$. En particular cuando $\lambda = 1$, $F(x_0) = ||x_0||$. $\square$

## 1.5. El cubo de Hilbert

Sea $I := [0, 1]$ con su topología usual. Llamemos cubo de Hilbert al espacio de funciones $I^{\mathbb{N}}$, con la topología punto abierta (o topología producto) que es equivalente a la compacto abierta al ser $\mathbb{N}$ discreto. El cubo de Hilbert será denotado por la letra $Q$, y es un espacio compacto conexo y metrizable. Su topología está generada por la métrica $d : Q \times Q \to \mathbb{R}$, dada por $d(x, y) = \sum\limits_{n \in \mathbb{N}} \frac{|x_n - y_n|}{2^n}$. Además $Q$ es afinmente homeomorfo al subconjunto

$$Q' := \{x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell_2 : x_n \in [0, 1]\}$$

donde $\ell_2 = \{x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} | \sum\limits_{i=1}^{\infty} x_n^2 < \infty\}$ es el espacio de Hilbert.

Uno de los resultados más importantes en topología de dimensión infinita es el Teorema de Keller 1.5.1.

**Teorema 1.5.1** (Teorema Keller)**.** *Sea $K$ un subconjunto compacto, convexo, no vacío y de dimensión infinita de $\ell_2$. Entonces $K$ es homeomorfo al cubo de Hilbert $Q$.*

La demostración del Teorema de Keller puede ser consultada en [11, Teorema 8.2.4].
Recordemos que un espacio métrico completo es aquel en el cual las sucesiones de Cauchy convergen. A continuación veremos que el cubo de Hilbert ($Q$) y $C_c(Q,Q)$ son espacios completamente metrizables.

**Teorema 1.5.2.** *El cubo de Hilbert $Q$ con la métrica $d(x,y) := \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{2^i}$, es completo.*

*Demostración.* Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset Q$ una sucesión de Cauchy. Supongamos que cada elemento de la sucesión es de la forma $x_n = (x_n^j)_{j\in\mathbb{N}}$. Entonces para toda $\varepsilon > 0$ y $j \in \mathbb{N}$ fija existe una $N_j \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n, m \geq N_j$ se cumple que

$$\frac{|x_n^j - x_m^j|}{2^j} \leq d(x_n, x_m) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_n^i - x_m^i|}{2^i} < \frac{\varepsilon}{2^j}.$$

De esta manera $|x_n^j - x_m^j| < \varepsilon$ para toda $n, m \geq N_j$. Por lo que $(x_n^j)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy para cada $j \in \mathbb{N}$. Como $I = [0,1]$ es completo, para cada $j$ existe $y^j \in I$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^j = y^j$. Definamos $y := (y^j)_{j\in\mathbb{N}} \in Q$, y sea $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sum\limits_{i=j_0}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \frac{\varepsilon}{2}$, de esta manera

$$\sum_{i=j_0}^{\infty} \frac{|x_n^i - y^i|}{2^i} \leq \sum_{i=j_0}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \frac{\varepsilon}{2},$$

para toda $n \in \mathbb{N}$. Ahora para cada $1 \leq j < j_0$, sea $N_j$ tal que $|x_n^j - y^j| < \frac{2^{j-1} \cdot \varepsilon}{j_0}$ para todo $n \geq N_j$ y sea $N_0 := \max\{N_j : j < j_0\}$. Así podemos asegurar que

$$\sum_{i<j_0} \frac{|x_n^i - y^i|}{2^i} + \sum_{i=j_0}^{\infty} \frac{|x_n^i - y^i|}{2^i} \leq \sum_{i<j_0} \frac{\varepsilon}{2^i} + \sum_{i=j_0}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{i=j_0}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

para toda $n \geq N_0$ y por lo tanto $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = y$. $\square$

**Teorema 1.5.3.** *Sea $X$ un espacio topológico compacto, $Y$ un espacio métrico completo. Entonces $C_c(X,Y)$ es un espacio completamente metrizable.*

*Demostración.* Como $X$ es compacto la topología de $C_c(X,Y)$ está determinada por la métrica $\rho(f,g) := \sup_{x\in X}\{d(f(x),g(x))\} = \max_{x\in X}\{d(f(x),g(x))\}$. Demostraremos que esta métrica es completa.

Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_c(X,Y)$, una sucesión de Cauchy. Consideremos para cada $x \in X$ la sucesión $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$. De esta manera $d(f_n(x), f_m(x)) \leq \rho(f_n, f_m) < \varepsilon$ para toda $n, m \geq N \in \mathbb{N}$. Así, la sucesión $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \subset Y$ es de Cauchy para cada $x \in X$. Por lo que existe $f(x) \in Y$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

Consideremos la función $f : X \to Y$. Para concluir la demostración, en virtud del teorema 1.2.17, es suficiente demostrar que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a $f$.

Dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m \geq N$, entonces

$$d(f_n(x), f_m(x)) < \rho(f_n, f_m) < \varepsilon/2$$

para toda $x \in X$. Si fijamos $m$ y hacemos tender $n$ a infinito llegamos a que

$$d(f(x), f_m(x)) = \lim_{n\to\infty} d(f_n(x), f_m(x)) \leq \varepsilon/2 < \varepsilon.$$

Como la desigualdad anterior es cierta para todo $m \geq N$ y para todo $x \in X$, concluímos que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a $f$, como se quería demostrar.

□

**Corolario 1.5.4.** *El espacio $C_c(Q,Q)$ es completo.*

# Capítulo 2

# Grupos topológicos

## 2.1. Grupos topológicos

**Definición 2.1.1.** *Decimos que un conjuto $G$ es un grupo si existe una operación $* : G \times G \to G$ que cumple lo siguiente:*

**G1)** *Existe* $e \in G$ *tal que* $e * g = g = g * e$ *para toda* $g \in G$*(existencia del neutro.)*

**G2)** $(g * h) * k = g * (h * k)$ *para toda* $g, h, k \in G$ *(la operación es asociativa).*

**G3)** *Para cada* $g \in G$ *existe un único* $g' \in G$ *tal que* $g * g' = e = g' * g$ *(existencia de un inverso).*

Cuando la operación en el grupo es obvia, el símbolo se suele omitir.

**Definición 2.1.2.** *Sea $(G, e, *)$ un grupo. Decimos que $G$ es un grupo topológico si existe una topología, $\tau_G$ en $G$ que hace continuas a la operación de grupo $* : G \times G \to G$, $(g, h) \to g * h$ y a la función que manda a cada elemento a su inverso $^{-1} : G \to G$, $g \to g^{-1}$*

*Un grupo topológico $G$, será denotado por $(G, \tau_G) = (G, \tau_G, e)$.*

Como ejemplos de estas estructuras tenemos a $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$, cualquier espacio normado, el grupo $GL(n)$ y $O(n)$, con la topología heredada de $\mathbb{R}^{n^2}$ y $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$.

En un grupo topológico, las traslaciones $R_g : G \to G$, y $L_g : G \to G$ dadas por $R_g(x) = xg$ y $L_g(x) = gx$ son continuas para todo $g \in G$. Además satisfacen que $R_g \circ R_h = R_{hg}$, $L_g \circ L_h = L_{gh}$ y $R_e = Id_G = L_e$. En particular $R_g \circ R_{g^{-1}} = R_e = R_{g^{-1}} \circ R_g$ y por lo tanto $R_g$ es una biyección con inversa continua, es decir $R_g$ es un homeomorfismo. Análogamente, cada $L_g$ es un homeomorfismo.

De lo anterior inferimos que dado cualquier subconjunto $O$ de un grupo topólógico $G$ y $x \in G$ el conjunto $xO = \{xo|o \in O\}$ es abierto (cerrado) si y sólo si $O$ es abierto (cerrado). Análogamente, $Ox = \{ox|o \in O\}$ es abierto (cerrado) si y sólo si $O$ es abierto (cerrado).

En particular, si $U$ es una vecindad de la unidad de $G$, entonces $Ux$ y $xU$ serán vecindades de $x$ para todo $x \in G$.

Dados un grupo topológico $G$ y $V \subset G$, definimos $V^{-1}$ como $V^{-1} := \{v^{-1} \mid v \in V\}$.

**Definición 2.1.3.** *Sea $(G, \tau_G, e)$ un grupo topológico. Sea $V$ una vecindad abierta. Decimos que $V$ es simétrica si cumple que $V = V^{-1}$.*

Sean $U, V$ subconjuntos de un grupo topológico $G$. Definimos el conjunto $UV := \{uv \mid u \in U, V \in V\}$.

**Lema 2.1.4.** *Sean $(G, \tau_G, e)$ un grupo topológico y $V$ una vecindad abierta de la unidad. Entonces existe una vecindad simétrica de la unidad $U$ tal que $U \cdot U \subset V$.*

*Demostración.* Sea $V \in \tau_G$ una vecindad de la unidad. Notamos que $e \cdot e = e$, de manera que por la continuidad de la operación tenemos que existen vecindades $V_1, V_2$ de $e$ tales que $V_1 \cdot V_2 \subset V$. Ahora definimos $U = V_1 \cap V_1^{-1} \cap V_2 \cap V_2^{-1}$. Este conjunto es no vacio ya que al menos contiene a $e$. Sea $x \in V_1 \cap V_1^{-1}$ y veamos que esta vecindad es simétrica. Como $x \in V_1$ y $x = y^{-1}$ para algún $y \in V_1$ entonces $x^{-1} = y \in V_1$, es decir $x$ y su inverso $x^{-1}$ están en $V_1$. Además $x^{-1} \in V_1^{-1}$ al ser inverso de $x \in V_1$ y $x \in V_1^{-1}$ por estar en $V_1 \cap V_1^{-1}$, con lo que podemos concluir que tanto $x$ como $x^{-1}$ pertenecen a $V_1 \cap V_1^{-1}$. Esto nos dice que $x \in V_1 \cap V_1^{-1}$ si y solo si $x^{-1} \in V_1 \cap V_1^{-1}$, con lo que $(V_1 \cap V_1^{-1})^{-1} = V_1 \cap V_1^{-1}$. Evidentemente la argumentación anterior sirve también para probar que $(V_2 \cap V_2^{-1})^{-1} = V_2 \cap V_2^{-1}$. Ahora veamos que si $W, W'$, son vecindades simétricas entonces $W \cap W'$ también es simétrica.

Sean $W, W'$ abiertos simétricos no vacíos entonces para $x \in (W \cap W')^{-1}$ se tiene que $x = z^{-1}$ para algún $z \in W \cap W' = W^{-1} \cap W'^{-1}$ por lo tanto $(W \cap W')^{-1} \subset W^{-1} \cap W'^{-1}$. Si $x \in W^{-1} \cap W'^{-1}$ entonces existen $y \in W$ y $z \in W'$ tales que $y^{-1} = x = z^{-1}$ es decir $z = y$. De lo que se concluye $(W \cap W')^{-1} = W^{-1} \cap W'^{-1}$.

Entonces $(W \cap W')^{-1} = W^{-1} \cap W'^{-1} = W \cap W'$, con lo que $W \cap W'$ es simétrica siempre que $W$ y $W'$ lo sean. En nuestro caso podemos concluir que $U = V_1 \cap V_1^{-1} \cap V_2 \cap V_2^{-1}$ es un abierto simétrico, además $U \subset V_1$ y $U \subset V_2$ por como se define $U$ y como $V_1 \cdot V_2 \subset V$ entonces $U \cdot U \subset V$. □

**Lema 2.1.5.** *Sea $G$, un grupo topológico y $V \subset G$ una vecindad del neutro. Entonces existe una sucesión $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de vecindades simétricas de la unidad de manera que $U_{n+1}^2 \subset U_n$.*

*Demostración.* Sea $V \in \tau_G$ una vecindad del neutro, por la proposición 2.1.4 sabemos que existe una vecindad simétrica de la unidad $U$ tal que $U \cdot U = U^2 \subset V$. Ahora definimos $U_0 := V$ y $U_1 = U$. Supongamos que las vecindades están construidas para toda $k \leq n$. Por la proposición 2.1.4 existe una vecindad simétrica del neutro $U_{n+1}$, tal que $U_{n+1}^2 \subset U_n$. Tomándonos la familia así obtenida se concluye la prueba. $\square$

**Teorema 2.1.6.** *Sean $(G, \tau_G, e)$ un grupo topológico $C \subset G$ un subconjunto cerrado y $K \subset G$ un subconjunto compacto tales que $K \cap C = \emptyset$, entonces existe una vecindad $V$ de $e$ tal que*

$$(K \cdot V) \cap (C \cdot V) = \emptyset$$

*Demostración.* Por el lema 2.1.4, para cada vecindad $V$ de la unidad existe una vecindad simétrica $U$ de la unidad tal que $U \cdot U \subset V$. Aplicando nuevamente el lemma a $U$ obtenemos una vecindad simétrica $U'$ de la unidad tal que

$$U' \cdot U' \cdot U' \cdot U' \subset V.$$

Ahora, si $K = \emptyset$ entonces $KV = \emptyset$ y el teorema se cumple. Supongamos que $K \neq \emptyset$, y consideremos $x \in K$. Como la intersección $C \cap K$ es vacía, $x$ no está en $C$, y por lo tanto $G \backslash C$ es un abierto de G que contiene a $x$. Así tenemos que $x^{-1} \cdot G \backslash C$ es una vecindad abierta de la unidad para cada $x \in K$, por lo que existe un vecindad simétrica $V_x$ de la unidad tal que

$$V_x \cdot V_x \cdot V_x \subset V_x \cdot V_x \cdot V_x \cdot V_x \subset x^{-1} \cdot G/C.$$

Esto implica que $x \cdot V_x \cdot V_x \cdot V_x \subset G/C$ y por lo tanto $(x \cdot V_x \cdot V_x \cdot V_x) \cap C = \emptyset$. Ahora notemos que la simetría de la vecindad $V_x$ nos garantiza que

$$x \cdot V_x \cdot V_x \cap C \cdot V_x = \emptyset. \tag{2.1}$$

En efecto, si no fuera así podríamos tomar $z$ en la intersección, elementos $v_1, v_2, v_3 \in V_x$, $c \in C$ de tal manera que $x \cdot v_1 \cdot v_2 = z = c \cdot v_3$, con lo que se tendría que $c = x \cdot v_1 \cdot v_2 \cdot v_3^{-1} \in x \cdot V_x \cdot V_x \cdot V_x \subset G/C$, contradiciendo que $(x \cdot V_x \cdot V_x \cdot V_x) \cap C = \emptyset$.

Notemos ahora que el conjunto $\{x \cdot V_x : x \in K\}$ es una cubierta abierta para K puesto que $x = x \cdot e$ y $V_x$ es un entorno simétrico de la diagonal para toda $x \in K$. Al ser $K$ compacto existe una subcolección finita de puntos $\{x_i : i \in \{1, ..., n\}\}$, tal que $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} x_i \cdot V_{x_i}$. Definamos $V := \bigcap_{i=1}^{n} V_{x_i}$ y supongamos que $(K \cdot V) \cap (C \cdot V) \neq \emptyset$ entonces existen $k_0 \in K$, $v, w \in V$ y $c_0 \in C$ tales que $k_0 \cdot v = c_0 \cdot w$. Además, como $KV \subset K \cdot V_{x_i} \subset K \cdot V_{x_i} \cdot V_{x_i}$ y $C \cdot V \subset V_{x_i}$ para toda $i \in \{1, ..., n\}$, entonces $x_i \cdot V_{x_i} \cdot V_{x_i} \cap C \cdot V_{x_i} \neq \emptyset$ lo cual contradice la igualdad 2.1. $\square$

**Teorema 2.1.7.** *Sean $(G, \tau_G, e_G)$ y $(H, \tau_H, e_H)$ grupos topológicos y $f : G \to H$, un morfismo de grupos. Si $f$ es continuo en el neutro $e_G$, entonces $f$ es continuo en todo $G$.*

*Demostración.* Sea $g \in G$. Llamamos $h = f(g)$ y supongamos que $U$ es una vecindad que contiene a $h$ en $H$. Como la traslación izquierda $L_h$ es un homomeorfismo, existe una vecindad $V \subset H$ de $e_H$, tal que $hV \subset U$. De la continuidad de $f$ en $e_G$ se tiene que $f(W) \subset V$ para alguna vecindad $W$ de $e_G$. Como $L_g$ es un homeomorfismo de G en si mismo, el conjunto $gW$ es una vecindad abierta de $g$. Además tenemos $f(gW) = f(g)f(W) = hf(W) =\subset hV \subset U$ ya que $f$ es homomorfismo. Así concluimos que $f$ es continua en el punto $g \in G$.

□

### 2.1.1. Acciones de grupos

**Definición 2.1.8.** *Sea $X$ un conjunto y $(G, *)$ un grupo. Decimos que $G$ actúa en $X$ por la izquierda si existe una función $\theta : G \times X \to X$ que cumple lo siguiente:*

**A1)** $\theta(e, x) = x$,

**A2)** $\theta((g * h), x) = \theta(g, \theta(h, x))$.

En la práctica y cuando no haya riesgo de confusión, el símbolo de la acción se suele omitir y se sustituye por la yuxtaposición de elementos. Es decir, en lugar de escribir $\theta(g, x)$ escribiremos simplemente $gx$.

Para cada $g \in G$, definimos $\theta_g : X \to X$ como $\theta_g(x) = \theta(g, x)$. Notemos que esta asignación es biyectiva puesto que

$$\theta_{gh}(x) = \theta(gh, x) = \theta(g, \theta(h, x)) \tag{2.2}$$
$$= \theta_g\theta_h(x) \tag{2.3}$$

y por lo tanto $\theta_g\theta_{g^{-1}} = \theta_{gg^{-1}} = \theta_e = \theta_{g^{-1}g}$ y $\theta_e = Id_X$. De esta manera $\theta_{g^{-1}}$, es la inversa bilateral de $\theta_g$ y por lo tanto $\theta_g$ es biyectiva para toda $g \in G$.

Además notemos que la asignación $\Theta : G \to Biy(X)$, dada por $\Theta(g) = \theta_g$, es un morfismo de grupos donde $Biy(X) := \{f : X \to X : f \text{ es biyectiva}\}$.

Para cada $x \in X$ llamamos $G_x := \{g \in G : gx = x\}$ ,al grupo de isotropía o estabilizador de $x$.

**Proposición 2.1.9.** *El morfismo $\Theta : G \to Biy(X)$, inducido por la acción $\theta$ tiene núcleo* $Ker(\Theta) = \bigcap_{x\in X} G_x$

*Demostración.* Notemos que $g \in Ker(\Theta)$ implica que $\theta_g = \theta_e$, de manera que $gx = x$ para toda $x \in X$, por lo que $g \in G_x$ para toda $x \in X$.

Recíprocamente si $g \in \bigcap_{x\in X} G_x$, entonces $gx = x$ para toda $x$ y por lo tanto $\theta_g = \theta_e$, lo cual implica $g \in Ker(\Theta)$.

□

De la proposición 2.1.9 notamos que $\Theta$ es inyectiva si y sólo si $\bigcap_{x\in X} G_x = \{e\}$. Si una acción cumple esto entonces $\Theta : G \to Biy(X)$ es un monomorfismo. En este caso se dice que $\Theta$ es efectiva o fiel.

Si $X$ es un espacio topológico y $G$ es un grupo topológico diremos que $G$ actúa continuamente en $X$ (o equivalentemente que $X$ es un $G$-espacio) si existe una acción continua $\Theta : G \times X \to X$. En este caso cada cada $\theta_g$ es un homeomorfismo y por lo tanto la acción induce un morfismo $\Theta' : G \to Homeo(X)$.

### 2.1.2. Grupos de isometrías y automorfismos

**Definición 2.1.10.** *Sean $(X, d)$ y $(Y, \rho)$ espacios métricos. Decimos que una función $f : X \to Y$ es una isometría si se cumple :*

$$d(x, y) = \rho(f(x), f(y)) \text{ para toda } x, y \in X.$$

Denotemos por $Is(X)$ a la familia de todas las isometrías suprayectivas $f : X \to X$. Notemos que todo elemento $f \in Is(X)$ es un homeomorfismo.

Observemos que si $f \in Is(X)$ entonces $f$ es biyectiva y $f^{-1} \in Is(X)$. Además la composición de isometrías es una isometría y $Id_X \in Is(X)$. Esto implica que $Is(X)$ es un grupo. A continuación veremos que la topología punto abierta hace a $Is(X)$ un grupo topológico.

**Teorema 2.1.11.** *Sea $(X, d)$ un espacio métrico. Entonces $(Is(X), \circ)$ equipado con la topología punto abierta es un grupo topológico,.*

*Demostración.* Necesitamos demostrar que la composición es una operación continua y la función que manda a cada elemento a su inverso también.
Definimos $B(x, f, \varepsilon) := \{g \in Is(X) : d(f(x), g(x)) < \varepsilon\}$ y $U := B_\varepsilon(f(x)) \in \tau_d$. Observando que $B(x, f, \varepsilon) \subset M(x, U)$ con lo que $B(x, f, \varepsilon)$ es un subbásico para la topología punto abierta de $Is(X)$. Reciprocamente, dados $x \in X$, $U \in \tau_X$

y $f \in M(x,U)$ existe un $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(f(x)) \subset U$. Entonces $B(x,f,\varepsilon) \subset M(x,U)$ y por lo tanto la topología punto abierta y la generada por los abiertos $B(x,f,\varepsilon), \varepsilon > 0, x \in X, f \in Is(X)$ coinciden.

Sean $f,g \in Is(X)$ y $B(x, g \circ f, \varepsilon)$, consideramos $V := B(x,f,\frac{\varepsilon}{2})$ y $U := B(y,g,\frac{\varepsilon}{2})$ con $y := f(x)$, y demostraremos que para todo $(g_1, f1) \in U \times V$, se cumple que $g_1 \circ f_1 \in B(x, g \circ f, \varepsilon)$.

Observemos que $d(f_1(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{2}$ y $d(g_1(y), g(y)) < \frac{\varepsilon}{2}$ Como $g_1$ y $f_1$ son isometrías se tiene que:

$$\begin{aligned} d(g_1 \circ f_1(x), g \circ f(x)) \leq& d(g_1 \circ f_1(x), g_1 \circ f(x)) + d(g_1 \circ f(x), g \circ f(x)) \\ =& d(f_1(x), f(x)) + d(g_1 \circ f(x), g \circ f(x)) \\ =& d(f_1(x), f(x)) + d(g_1(y), g(y)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Así se concluye que $d(g_1 \circ f_1(x), g \circ f(x)) < \varepsilon$ y por lo tanto $g_1 \circ f_1 \in B(x, g \circ f, \varepsilon)$, mostrando así la continuidad de la composición.

Para demostrar que la función que manda cada elemento a su inverso es continua veamos que $g \in B(x,f,\varepsilon)$ si y solo si $g^{-1} \in B(f(x), f^{-1}, \varepsilon)$. Para ello recordamos que $g \in Is(X)$ si y sólo si $g^{-1} \in Is(X)$ por lo que $d(x, g^{-1}f(x)) = d(g(x), f(x)) < \varepsilon$. Esto último permite afirmar $(B(x,f,\varepsilon))^{-1} = B(f(x), f^{-1}, \varepsilon)$ es abierto en la topología punto abierta. De manera que tomar inversos es una función continua, y por lo tanto $Is(E)$ es un grupo topológico. □

**Corolario 2.1.12.** *Sea $(X, ||\cdot||)$ un espacio de Banach. Sea $Is(X)$ el grupo topológico de isometrías de $X$ e $Is'(X)$ el subconjuto de las isometrías lineales de $X$. Entonces $Is'(X)$ es un subgrupo topológico de $Is(X)$.*

*Demostración.* Como la composición de transformaciones lineales es lineal entonces $Is'(X)$ es un subgrupo de $Is(X)$ bajo la composición. Por el teorema 2.1.11 la composición es continua con respecto de la topología punto abierta, de esta manera, al restringir la operación a $Is'(X)$ también es continua. De manera análoga la función que toma inversos es continua. Por lo tanto $Is'(X)$ es un subgrupo topológico de $Is(X)$. □

**Definición 2.1.13.** *Sea $(X, \tau_X)$ un espacio topológico. Denotamos por $Aut(X)$ al conjunto de todos los homeomorfismos de $X$ en $X$, equipado con la topología compacto abierta.*

Es evidente que $Aut(X)$ posee estructura de grupo usando la composición de funciones como operación. Lo que se verá enseguida es que bajo ciertas condiciones la topologia compacto abierta hace a $Aut(X)$ un grupo topológico.

**Definición 2.1.14.** *Sea $(X, \tau_X)$ un espacio topológico. Definimos la familia de conjuntos $M(F, W) := \{h \in G \ \text{ tal que } \ h(F) \subset W\}$, donde $F$ es cerrado y $W$ es abierto. Sea $\mathbb{L} := \{M(F, W) : F \text{es cerrado y } W \text{ es abierto}\}$. Esta familia define una subbase para una topología $\tau_{Aut(X)}$ llamada la topología basada en cerrados.*

**Teorema 2.1.15.** *Sea $(X, \tau_X)$ un espacio topológico normal. Entonces $(Aut(X), \tau_{Aut(X)})$, donde $\tau_{Aut(X)}$ es la topologia basada en cerrados, es un grupo topológico.*

*Demostración.* Veamos como se comporta la operación que manda un elemento a su inverso. Sean $F$ y $W$ subconjuntos de $X$ tal que $F$ es cerrado y $W$ es abierto.

$$\begin{aligned}
(M(F,W))^{-1} &= \{h \in Aut(X) : h^{-1} \in M(F,W)\} \\
&= \{h \in Aut(X) : h^{-1}(F) \subset W\} \\
&= \{h \in Aut(X) : F \subset h(W)\} \\
&= \{h \in Aut(X) : h(X \backslash W) = X \backslash h(W) \subset X \backslash F\} \\
&= M(X \backslash W, X \backslash F).
\end{aligned}$$

Como $F$ es cerrado, $X \backslash F$ es abierto. Análogamente, como $W$ es abierto, $X \backslash W$ es cerrado y por lo tanto $(M(F, W))^{-1} = M(X \backslash W, X \backslash F)$ es abierto en $\tau_{Aut(X)}$.

Ahora veamos que la composición es continua. Sean $f, g \in Aut(X)$ llamemos $h = f \circ g$ y supongamos que $U := M(F, W)$ es una vecindad sub-básica de $h$, en $\tau_{Aut(X)}$.

Al estar $h \in U$, se tiene que $f(g(F)) \subset W$, es decir $g(F) \subset f^{-1}(W)$. Como $f, g$ son homeomorfismos, tenemos que $g(F)$ es cerrado y $f^{-1}(W)$ es una vecindad abierta de dicho cerrado. Como $X$ es normal existe una vecindad $V \in \tau_X$ tal que $g(F) \subset V \subset \overline{V} \subset f^{-1}(W)$. Notemos ahora que $M(F, V) \in \tau_{Aut(X)}$ es vecindad de $g$ y como $\overline{V} \subset f^{-1}(W)$, $M(\overline{V}, W)$ es vecindad de $f$. Sea $(f', g') \in M(\overline{V}, W) \times M(F, V)$. Entonces $g'(F) \subset V$ y $f'(\overline{V}) \subset W$, de manera que

$$f'(g'(F)) \subset f'(V) \subset f'(\overline{V}) \subset W$$

y por lo tanto $f' \circ g' \in M(F, W) = U$. Esto hace evidente la continuidad de la composición. $\square$

Observamos que si $X$ es compacto y Hausdorff entonces $K \subset X$ es compacto si y solo si $K$ es cerrado. Esto implica que la topología basada en cerrados y la topología compacto abierta de $Aut(X)$ coinciden.

**Teorema 2.1.16.** *Sea $(X, \tau_X)$ un espacio topológico Hausdorff y compacto. Entonces $Aut(X)$, con la topología compacto abierta es un grupo topológico.*

*Demostración.* Como $X$ es Hausdorff y compacto entonces es normal. El teorema 2.1.15 nos permite concluir que $Aut(X)$ con la topologia compacto abierta es un grupo topológico.

□

Para el siguiente corolario notemos que las hipótesis no asumen que $Aut(X)$ sea grupo topológico.

**Corolario 2.1.17.** *Sea $(X, \tau_X)$ un espacio topológico Hausdorff, localmente compacto y segundo numerable equipado con la topología basada en cerrados (en este caso coincide con la topologia compacto abierta). Entonces $Aut(X)$ es segundo numerable.*

*Demostración.* Sea $\mathcal{B}$ base numerable para $X$, denotemos por $\mathcal{K}$ la familia de cerraduras de $\mathcal{B}$ que evidentemente es numerable. Notemos que podemos suponer que $\mathcal{B}$ y $K$ es cerrada bajo uniones finitas.

Ahora sea $C$ un subconjunto compacto de $X$ y $C \subset U$, con $U$ abierto de $X$. Para cada $c \in C$ existe una vecindad $U_c$ tal que $c \in U_c \subset \overline{U_c} \subset U$, con $\overline{U_c}$ compacto y $U_c \in \mathcal{B}$.

Al ser $C$ un conjunto compacto de $X$ y $\{U_c\}_{c\in C}$ una cubierta de abiertos básicos para $C$, existe una subcubierta finita $\{U_{c_i}\}_{i=1}^n$ de $C$. Como $\mathcal{B}$ es cerrada bajo uniones finitas podemos afirmar que $K := \bigcup_{i=1}^{n} U_{c_i}$ pertenece a la base. Observemos que $C \subset \overline{K} \subset U$ puesto que cada $\overline{U_c}$ esta contenida $U$ y la unión de estos contiene a $C$. En conclusión para cada subconjunto compacto $C$ de $X$ existe $K \in \mathcal{K}$ de tal manera que $C \subset K \subset U$. Por lo que $\{M(K, W) : K \in \mathcal{K},\ W \in \mathcal{B}\}$ es una subbase numerable para la topología compacto abierta de $Aut(X)$ la cual nos induce una base numerable para esta topología.

□

**Corolario 2.1.18.** *Consideremos el cubo de Hilbert $Q := I^{\mathbb{N}}$. Entonces $Aut(Q)$ es un grupo topológico segundo numerable.*

## 2.2. Uniformidades en grupos topológicos

**Teorema 2.2.1.** *Sea $(G, \tau_G, e)$ un grupo topológico. Entonces existe una familia de base local de vecindades simétricas de $e$.*

*Demostración.* Consideramos la familia $\mathcal{W} := \{U : U \in \tau_G, e \in U\}$, la cual es una base local de vecindades del neutro $e \in G$. Sea $N_S(e) := \{\ V : V = U \cap U^{-1} : U \in$

$\mathcal{W}\}$. Observemos que para cada $U \in \mathcal{W}$, el conjunto $U \cap U^{-1}$ es no vacío puesto que ambas son vecindades de la unidad $e$. Además $U \cap U^{-1}$ es abierto en G al ser la intersección de dos abiertos. Si $U \in \mathcal{W}$ entonces $U \cap U^{-1} \subset U$ y $U \cap U^{-1} \in N_s(e)$. Esto prueba que $N_s(e)$ es una base local de vecindades en $e$. Veamos que $N_s(e)$ consiste de vecindades simétricas, esto se deduce de las siguientes igualdades:

$$(U \cap U^{-1})^{-1} := \{y^{-1} : y \in U \cap U^{-1}\} = U \cap U^{-1},$$

ya que $y \in U \cap U^{-1}$ si y solo si $y^{-1} \in U \cap U^{-1}$.

Así concluimos que $N_s(e)$ es una base local de vecindades simétricas en e.

□

**Definición 2.2.2.** *Sean $(G, \tau_G, e)$ un grupo topológico y $N_s(e)$ una familia de vecindades abiertas simétricas de $e$ en $G$. Para cada elemento $V \in N_s(e)$, definimos los siguientes tres subconjuntos:*

$$\begin{aligned} O_V^l :=& \{(g,h) \in G \times G : g^{-1}h \in V\} \\ O_V^r :=& \{(g,h) \in G \times G : gh^{-1} \in V\} \\ O_V :=& O_V^l \cap O_V^r. \end{aligned}$$

Notemos que $O_V^l$ , $O_V^r$ y $O_V$ son no vacíos puesto que $(g, g)$ es elemento de cada uno de ellos, para todo $g \in G$. Esto quiere decir que la diagonal de $G \times G$ está contenida en $O_V^l \cap O_V^r \cap O_V$.

**Teorema 2.2.3.** *Sea $(G, \tau_G, e)$ y $v \in N_s(e)$. Entonces: $O_V^l$, $O_V^r$ y $O_V$ son entornos simétricos de la diagonal, abiertos en la topología producto de $G \times G$.*

*Demostración.* Definimos funciones $i_l, i_r : G \times G \to G \times G$ dadas por

$i_l(g, h) := (g^{-1}, h)$

$i_r(g, h) := (g, h^{-1})$

que evidentemente son continuas pues coordenada a coordenada lo son. Consideremos ahora funciones $\tilde{i_l}, \tilde{i_r} : G \times G \to G$ dadas por

$\tilde{i_l}(g, h) := g^{-1}h$ y $\tilde{i_r}(g, h) := gh^{-1}$.

Ambas funciones son continuas por ser la composición de una función continua y la operación del grupo. Así, tenemos que

$O_V^l := \{(g,h) \in G \times G : g^{-1}h \in V\} = (\tilde{i_l})^{-1}(V)$

$O_V^r := \{(g,h) \in G \times G : h^{-1}g \in V\} = (\tilde{i_r})^{-1}(V)$

Como son la imagen inversa de funciones continuas y $V \subset G$ es abierto, entonces $O_V^l$ y $O_V^r$ son abiertos y por lo tanto también $O_V$ también es abierto. Ahora veremos que son entornos simétricos.

Sea $(g,h) \in O_V^l$. Entonces $g^{-1}h \in V$ e invirtiendo tenemos $(g^{-1}h)^{-1} \in V^{-1} = V$ ya que $V$ es una vecindad simétrica. Esto prueba que $h^{-1}g \in V$, es decir $(h,g) \in O_v^l$. Así tenemos que $O_V^l$ es un entorno simétrico. Los demás casos son análogos. □

**Lema 2.2.4.** *Sea $(G, \tau_G, e)$ un grupo topológico. Sean $U, V$ elementos de $N_s(e)$ y $n \in \mathbb{N}$ tal que $V^n := V \cdot V \cdot V \cdot ... \cdot V \subset U$. Entonces $nO_V^l \subset O_U^l$, $nO_V^r \subset O_U^r$ y $nO_V \subset O_U$.*

*Demostración.* Verificaremos que $nO_V^l \subset O_U^l$, los demás casos son análogos. El caso $n = 1$ es trivial, por lo que se asumirá que $n \geq 2$, si $(x,y) \in nO_V^l$ existen elementos $z_1, ..., z_n$ en $G$ tales que $(z_i, z_{i+1}) \in O_V^l$ para cada $i \in \{0, 1, ..., n-1\}$ donde $z_0 = x$ y $z_n = y$. Entonces $(z_i)^{-1}z_{i+1} \in V$ para $i \in \{0, ..., n-1\}$ por lo que tenemos que

$$x^{-1}y = \prod_{i=0}^{n-1} z_i^{-1} z_{i+1} \in V^n \subset U.$$

Esto implica que $(x,y) \in O_U^l$, que es lo que se quería demostrar.

□

Sea $X$ un espacio topológico y $\mathcal{V}$ una uniformidad en el conjunto $X$. Decimos que la uniformidad es compatible con $X$ si la topología generada por la uniformidad coincide con la topología original de $X$.

Para cada $U \in \mathcal{V}$ y cada $x \in X$, definamos el conjunto

$$U[x] := \{y \in X : (x,y) \in U\}$$

Dicho conjunto será llamado la $U$-bola con centro en $x$. De esta manera diremos que la uniformidad $\mathcal{V}$ es compatible con la topología $X$, si la $U$-bola con centro en $x$ es una vecindad de $x$ para cada $U \in \mathcal{V}$ y la familia de $U$-bolas es una base de vecindades para la topología original de $X$.

Sea $(G, \tau_G, e)$ un grupo topológico y $D_G$ la familia de entornos simétricos de la diagonal de $G \times G$. Definimos los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned} V_G^l &:= \{D \in D_G : O_U^l \subseteq D \text{ para alguna } U \in N_s(e)\}, \\ V_G^r &:= \{D \in D_G : O_U^r \subseteq D \text{ para alguna } U \in N_s(e)\}, \\ V_G &:= \{D \in D_G : O_U \subseteq D \text{ para alguna } U \in N_s(e)\}. \end{aligned}$$

Consideremos las siguientes tres familias de subconjuntos de $G \times G$ :

$$\begin{aligned} B_G^l &:= \{O_V^l : V \in N_s(e)\} \\ B_G^r &:= \{O_V^r : V \in N_s(e)\} \\ B_V &:= \{O_V : V \in N_s(e)\} \end{aligned}$$

Para cada $V \in N_s(e)$, observemos que:

$$\begin{aligned} O_V[x] &= \{y \in G : (x, y) \in O_V\} = \{y \in G : (x, y) \in O_V^l \cap O_V^r\} \\ &= \{y \in G : x^{-1}y \in V\} \cap \{y \in G : xy^{-1} \in V\} = xV \cap Vx. \end{aligned}$$

La última igualdad se justifica por lo siguiente: $xy^{-1} \in V$ si y sólo $xy^{-1} = v \in V$. Como $V$ es simétrica lo anterior sucede si y sólo si $yx^{-1} = v^{-1} \in V$, lo cual implica que $y \in Vx$. Esto prueba que $Vx = \{y \in G : xy^{-1} \in V\}$. Análogamente se prueba que $xV = \{y \in G : x^{-1}y \in V\}$.

**Teorema 2.2.5.** *Sea $G$ un grupo topológico $T_1$. Las familias $V_G^l, V_G^r$ y $V_G$ son uniformidades en el espacio $G$ con $B_G^l, B_G^r$ y $B_G$ como bases respectivamente. Cada una de las tres uniformidades es compatible con la topología original de $G$.*

*Demostración.* Verificaremos el teorema para $V_G^l$ ya que los demás casos son análogos.
Hay que mostrar que $V_G^l$ satisface los siguientes axiomas:

$(U1)$ Si $O \in V_G^l$ *y* $O \subseteq W \in D_G$, *entonces* $W \in V_G^l$.

$(U2)$ Si $O_1, O_2 \in V_G^l$ *entonces* $O_1 \cap O_2 \in V_G^l$.

$(U3)$ Para toda $O \in V_G^l$, existe $W \in V_G^l$ tal que $2W \subset O$.

$(U4)$ $\cap V_G^l = \triangle_G$.

El axioma $(U1)$ es evidente por la definición de $V_G^l$. Para verificar $(U2)$ tomemos elementos arbitrarios $O_1, O_2$ de $V_G^l$. Por la definición de $V_G^l$ existen $V_1, V_2 \in N_s(e)$ tales que $O_{V_i}^l \subset O_i \ \ para \ \ i = 1, 2$. Definamos $V := V_1 \cap V_2$, entonces $V \in N_s(e)$ y $O_V^l \in V_G^l$. Como $O_V^l \subset O_{V_1}^l \cap O_{V_2}^l \subset O_1 \cap O_2$ y $O_1 \cap O_2 \in D_G$ concluimos que $O_1 \cap O_2 \in V_G^l$.

Para probar $(U3)$ consideremos $O \in V_G^l$. Entonces existe $U \in N_s(e)$ tal que $O_U^l \subset O$. Sea $V \in N_s(e)$ tal que $V^2 \subset U$. Luego $W = O_V^l \in V_G^l$, y por el lema anterior $2W \subset O_U^l \subset O$, lo cual prueba $(U_3)$.

Ahora sean $x, y$ elementos distintos de G. Tomemos $V \in N_s(e)$ tal que $y \notin xV$. Esto implica que $(x, y) \notin O_V^l$ y por lo tanto $\cap V_G^l \subseteq \triangle_G$. Como $\triangle_G \subseteq \cap V_G^l$, concluimos que $\triangle_G = \cap V_G^l$, es decir se cumple $(U4)$.

Esto nos dice que $V_G^l$ es una uniformidad en $G$. Se sigue de la definición de $V_G^l$ y de $B_G^l$, que $B_G^l$ es base para la uniformidad $V_G^l$.

Falta ver que $V_G^l$ es compatible con la topología de $G$. Sea $O \in V_G^l$ y $x \in G$. Entonces existe $V \in N_s(e)$ tal que $O_V^l \subseteq O$. Tenemos entonces que $O_V^l[x] \subset O[x]$, y de la definición se sigue que $O_V^l[x] = xV$. Esto implica que $x \in xV \subset O[x]$ y por lo tanto $O[x]$ es una vecindad de $x$ en $G$. Así la familia $\{O[x] : O \in V_G^l\}$ es una base de vecindades para $G$ en $x$. Esto implica que $V_G^l$ es compatible con $G$.

□

**Definición 2.2.6.** *Sea $(G, \tau_G, e)$ un grupo topológico. Decimos que una función $f : G \to \mathbb{R}$ es uniformemente continua por la izquierda si para toda $\epsilon > 0$ existe $O \in V_G^l$ tal que $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ siempre que $(x, y) \in O$. Análogamente se definen la funciones uniformemente continuas por la derecha como las funciones $f : G \to \mathbb{R}$ tal que para toda $\epsilon > 0$ existe $O \in V_G^r$ tal que $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ siempre que $(x, y) \in O$.*

**Lema 2.2.7.** *Sea $(G, \tau_G, e)$ un grupo topológico. Una función $f : G \to \mathbb{R}$ es uniformemente continua por la izquierda si y sólo si para toda $\epsilon > 0$ existe una vecindad $V$ del neutro tal que $|f(xv) - f(x)| < \epsilon$ para toda $x \in G$ y para toda $v \in V$. Análogamente, una función es uniformemente continua por la derecha si y sólo si, para toda $\epsilon > 0$ existe una vecindad $W$ de $e$ tal que $|f(wx) - f(x)| < \epsilon$ para toda $x \in G$ y para toda $w \in W$.*

*Demostración.* Se probará para las funciones uniformemente continuas por la izquierda, la otra afirmación es análoga. Sea $f : G \to \mathbb{R}$ uniformemente continua por la izquierda, entonces existe $V \in N_s(e)$ tal que $|f(y) - f(x)| < \epsilon$ para toda $(x, y) \in O_V^l$. Esto último es equivalente a que $x^{-1}y \in V$, es decir $x^{-1}y = v$ para alguna $v \in V$. Así, $y = xv$ y por lo tanto $y \in xV$ si y sólo si $(x, y) \in O_V^l$. De aquí se deduce que $|f(xv) - f(x)| < \epsilon$ para toda $x \in G, v \in V$. Notando que los argumentos anteriores son reversibles, se tiene el regreso. $\square$

## 2.3. Metrizabilidad en grupos topológicos

**Definición 2.3.1.** *Sea $(G, \tau_G, e)$ un grupo topológico, y sea $N : G \to \mathbb{R}$ una función. Decimos que $N$ es una prenorma si cumple:*

**(n1)** $N(e) = 0$,

**(n2)** $N(xy) \leq N(x) + N(y)$,

**(n3)** $N(x) = N(x^{-1})$.

**Lema 2.3.2.** *Sea $N$ una prenorma en un grupo $G$. Entonces $N(x) \geq 0$*

*Demostración.* Sea $x \in G$. Para toda $x \in G$ tenemos que

$$0 = N(e) = N(xx^{-1}) \leq N(x) + N(x^{-1}) = 2N(x).$$

Por lo tanto podemos afirmar que $N$ es no negativa. $\square$

**Proposición 2.3.3.** *Sea $N$ una prenorma en un grupo $G$. Entonces $|N(x) - N(y)| \leq N(xy^{-1})$, para toda $x, y \in G$.*

*Demostración.* Por $(n2)$ tenemos que $N(y) \leq N(x) + N(x^{-1}y)$. Análogamente, $N(x) \leq N(y) + N(y^{-1}x) = N((y^{-1}x)^{-1}) = N(x^{-1}y)$. De las dos desigualdades concluimos que $|N(x) - N(y)| \leq N(xy^{-1})$. $\square$

**Proposición 2.3.4.** *Para cualquier prenorma $N$ definida en un grupo $G$, se tiene que $Z_N := \{x \in G : N(x) = 0\}$ es un subgrupo de $G$.*

*Demostración.* Sea $x \in Z_N$. Entonces $0 = N(x) = N(x^{-1})$, de manera que $x^{-1} \in G$. Por otro lado si $x, y \in Z_N$ entonces $0 \leq N(xy) \leq N(x) + N(y) = 0$, de lo que se concluye que $xy \in Z_N$, y por lo tanto $Z_N$ es un subgrupo de $G$. $\square$

Si consideramos un $\alpha \geq 0$ y una prenorma $N$, es evidente que $\alpha N$ sigue siendo un prenorma. Tambien es claro que la suma de prenormas es una prenorma. El siguiente lema nos da una manera de construir prenormas a partir de funciones reales acotadas definidas en $G$.

**Lema 2.3.5.** *Sea $f$ una función real acotada definida en un grupo $G$. Definimos la función $N_f : G \to \mathbb{R}$, por $N_f(x) := \sup\{|f(yx) - f(y)| : y \in G\}$. Entonces $N_f$ es una prenorma.*

*Demostración.* Para verificar $(n1)$ observemos que

$$\begin{aligned} N_f(e) &= \sup\{|f(ye) - f(y)| : y \in G\} \\ &= \sup\{|f(y) - f(y)| : y \in G\} = 0. \end{aligned}$$

Para demostrar $(n3)$, consideramos $x \in X$. Entonces $N_f(x^{-1}) = \sup\{|f(yx^{-1}) - f(y)| : y \in G\}$. Haciendo el cambio de variable $y = zx$, notamos que

$$N_f(x^{-1}) = \sup\{|f(zxx^{-1}) - f(zx)| : z \in G\} = \sup\{|f(zx) - f(z)| : z \in G\},$$

ya que $x \to zx$, es un homeomorfismo para toda $z \in G$. Esto prueba que $N_f(x^{-1}) = N_f(x)$.

Para demostrar $(n_2)$ observemos la siguiente desigualdad:

$$|f(zxy) - f(z)| \leq |f(zxy) - f(zx)| + |f(zx) - f(z)|.$$

Haciendo el cambio de variable $w := zx$ obtenemos que

$$\begin{aligned} N_f(xy) &= \sup\{|f(zxy) - f(z)| : z \in G\} \\ &\leq \sup\{|f(zxy) - f(zx)| : z \in G\} + \sup\{|f(zx) - f(z)| : z \in G\} \\ &= \sup\{|f(wy) - f(w)| : w \in G\} + \sup\{|f(zx) - f(z)| : x \in G\} \\ &= N_f(x) + N_f(y). \end{aligned}$$

□

En general, una prenorma no es continua y el siguiente lemma nos ayuda a determinar cuando lo es.

**Lema 2.3.6.** *Sean $(G, \tau_G, e)$ un grupo topológico y $N$ una prenorma definida en $G$. Entonces $N$ es continua si y sólo si para toda $\varepsilon > 0$ existe una vecindad $U$ del neutro $e$ de manera que $N(x) < \varepsilon$ para toda $x \in U$.*

*Demostración.* Evidentemente si $N$ es continua lo es en el neutro $e$ y puesto que $N(e) = 0$, se tiene la afirmación. Para el regreso sea $z_0 \in G$ y $\varepsilon > 0$, entonces existe una $U$ vecindad de $e$, tal que $N(x) < \varepsilon$ para toda $x \in U$. Definamos $V = z_0 U$, de manera que $V$ es una vecindad de $z_0$. Notemos que $y \in V$ si y sólo si $z_0^{-1} y \in U$, por lo que $N(z_0^{-1} y) < \varepsilon$. De la proposición 2.3.3 obtenemos que $|N(z_0) - N(y)| < \varepsilon$, y por lo tanto $N$ es continua en $z_0$. □

**Corolario 2.3.7.** *Sea $(G, \tau_G)$ un grupo topológico y $N$ una prenorma continua en $G$. Entonces $N$ es uniformemente continua tanto por la izquierda como por la derecha.*

*Demostración.* Dado $\varepsilon > 0$ por el lema 2.3.6 existe una vecindad $U$ del neutro tal que $N(x) < \varepsilon$ para toda $x \in U$. Como

$$|N(z_0) - N(uz_0)| \leq N(z_0 z_0^{-1} u^{-1}) = N(u^{-1}) = N(u) < \varepsilon,$$

por lo tanto $N$ es uniformemente continua por la derecha. Análogamente $N$ es uniformemente continua por la izquierda.

□

El lema anterior nos dice que toda prenorma continua en $G$ es, uniformemente continua tanto izquierda como derecha, respecto de las uniformidades derecha e izquierda definidas en $G$.

**Definición 2.3.8.** *Sea $N$ una prenorma definida en $G$.*
*Definimos $B_N(\varepsilon) := \{x \in G : N(x) < \varepsilon\}$, la $N$-bola de radio $\varepsilon$. Denotamos $B_N := B_N(1)$*

Evidentemente, cuando $N$ es continua $B_N(\varepsilon)$ es abierta para toda $\varepsilon > 0$.

**Lema 2.3.9.** *Sea $(G, \tau_G, e)$ un grupo topológico, $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión de vecindades abiertas simétricas de $e$, tal que $U_{n+1}^2 \subset U_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces existe una prenorma $N$ que satisface:*

$$(n4)\{x \in G : N(x) < \frac{1}{2^n}\} \subset U_n \subset \{x \in G : N(x) \leq \frac{2}{2^n}\}.$$

*En particular esta prenorma es continua y acotada.*

*Demostración.* Construiremos recursivamente una sucesión de vecindades $V(r)$, donde $r$ es un racional diadico tales que: $V(\frac{1}{2^k}) = U_k$ y $V(\frac{m}{2^n}) \cdot V(\frac{1}{2^n}) \subset V(\frac{m+1}{2^n})$. Definimos $V(1) = U_0$, y $V(\frac{1}{2}) = U_1$. Evidentemente estas vecindades satisfacen 2.6 ya que:

$$V\Big(\frac{1}{2}\Big) \cdot V\Big(\frac{1}{2}\Big) = U_1^2 \subset U_0 = V(1).$$

Sea $n \in \mathbb{N}$. Asumiendo que tenemos definidas vecindades abiertas $V(\frac{m}{2^n})$ de $e$ para cada $m \in \{0, 1, 2, ..., 2^n\}$. Ahora definimos

$$V\Big(\frac{1}{2^{n+1}}\Big) := U_{n+1}, \quad V\Big(\frac{2m}{2^{n+1}}\Big) := V\Big(\frac{m}{2^n}\Big) \tag{2.4}$$

para cada $m = \{0, 1, 2, ..., 2^n - 1\}$ y

$$V\Big(\frac{2m+1}{2^{n+1}}\Big) := V\Big(\frac{m}{2^n}\Big)\cdot U_{n+1} = V\Big(\frac{m}{2^n}\Big)\cdot V\Big(\frac{1}{2^{n+1}}\Big) \tag{2.5}$$

para cada $m \in \{0,1,2,...,2^n-1\}, n \in \mathbb{N}$. Y definimos $V\Big(\frac{m}{2^k}\Big) := G$, si $m > 2^n$. Esto nos esta definiendo un vecindad abierta $V(r)$ para cada racional diadico $r \leq 1$.

$$V\Big(\frac{m}{2^n}\Big)\cdot V\Big(\frac{1}{2^n}\Big) \subset V\Big(\frac{m+1}{2^n}\Big) \tag{2.6}$$

Si $m+1 > 2^n$, entonces la ecuación 2.6 es evidente.

Supongamos que 2.6 es cierta para todo $k \leq n$ y todo $m \in \{1,...,2^k-1\}$. Demostraremos el resultado para $n+1$. Cuando $m = 2k$, tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} V\Big(\frac{m}{2^{n+1}}\Big)\cdot V\Big(\frac{1}{2^{n+1}}\Big) &= V\Big(\frac{2k}{2^{n+1}}\Big)\cdot V\Big(\frac{1}{2^{n+1}}\Big) = V\Big(\frac{k}{2^n}\Big)\cdot V\Big(\frac{1}{2^{n+1}}\Big) \\ &= V\Big(\frac{2k+1}{2^{n+1}}\Big) = V\Big(\frac{m+1}{2^{n+1}}\Big). \end{aligned}$$

Lo anterior debido a la definición 2.4. de $V(\frac{2k+1}{2^{n+1}})$.

Ahora asumimos que $0 < m = 2k+1 < 2^{n+1}$ para algún entero $k$, entonces:

$$\begin{aligned} V\Big(\frac{m}{2^{n+1}}\Big)\cdot V\Big(\frac{1}{2^{n+1}}\Big) &= V\Big(\frac{2k+1}{2^{n+1}}\Big)\cdot V\Big(\frac{1}{2^{n+1}}\Big) \\ &= V\Big(\frac{k}{2^n}\Big)\cdot V\Big(\frac{1}{2^{n+1}}\Big)\cdot V\Big(\frac{1}{2^{n+1}}\Big) \\ &= V\Big(\frac{k}{2^n}\Big)\cdot U_{n+1}\cdot U_{n+1} \subset V\Big(\frac{k}{2^n}\Big)\cdot U_n \\ &= V\Big(\frac{k}{2^n}\Big)\cdot V\Big(\frac{1}{2^n}\Big). \end{aligned}$$

Por hipótesis de inducción tenemos

$$V\Big(\frac{k}{2^n}\Big)\cdot V\Big(\frac{1}{2^n}\Big) \subset V\Big(\frac{k+1}{2^n}\Big)\cdot V\Big(\frac{k+1}{2^n}\Big) = V\Big(\frac{2k+2}{2^{n+1}}\Big) = V\Big(\frac{m+1}{2^{n+1}}\Big).$$

Con esto se prueba la afirmación.

Ahora definimos la siguiente función real definida en $G$.

$$f(x) := \text{ínf}\{r \geq 0 : x \in V(r)\} \text{ para cada } x \in G.$$

La función esta bien definida ya que $x \in V(2) = G$. De la inclusión antes obtenida deducimos que como $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una colección de vecindades simétricas de la unidad entonces

$$V\Big(\frac{m}{2^n}\Big) \subset V\Big(\frac{m}{2^n}\Big) \cdot V\Big(\frac{1}{2^n}\Big) \subset V\Big(\frac{m+1}{2^n}\Big). \tag{2.7}$$

Sean $0 < r < s$, tal que $r = 2^k, s = 2^l$, con $k < l \in \mathbb{N}$ entonces

$$V(r) \subset V(s).$$

Además notemos que si $f(x) \leq r$ entonces $x \in V(r)$. Así $f$ es una función no negativa acotada superiormente (por 2). En virtud del lema 2.3.5, la función $N$ definida como $N(x) = \sup\{|f(yx) - f(y)| : y \in G\}$ es una prenorma definida en $G$.

Hay que mostrar que $N$ satisface $(n4)$. Supongamos que tenemos un elemento $x \in G$ tal que $N(x) < \frac{1}{2^n}$. Notemos que $f(x) = |f(ex)) - f(e)| \leq N(x) < \frac{1}{2^n}$, lo cual implica que $x \in V(\frac{1}{2_n}) = U_n$. Esto demuestra la primera parte, es decir $\{x \in G : N(x) < \frac{1}{2^n}\} \subset U_n$.

Para la segunda contención, que además implica la continuidad de $N$, sea $x \in V(\frac{1}{2^n}) = U_n$ y notemos que para cualquier punto $y \in G$ existe un $k \in \mathbb{N}$, tal que $\frac{k-1}{2^n} \leq f(y) < \frac{k}{2^n}$. Entonces $y \in V(\frac{k}{2^n})$ por 2.7. Como $x \in V(\frac{1}{2^n})$, tenemos que $x^{-1} \in V(\frac{1}{2^n})$, ya que $N$ es prenorma, de manera que $yx, yx^{-1} \in V(\frac{k}{2})V(\frac{1}{2^n}) \subset V(\frac{k+1}{2^n})$. Con esto tenemos $f(yx) \leq \frac{k+1}{2^n}$ y $f(yx^{-1}) \leq \frac{k+1}{2^n}$. De lo anterior y de la desigualdad $\frac{k-1}{2^n} \leq f(y)$ obtenemos $f(yx) - f(y) \leq \frac{2}{2^n}$, $f(yx^{-1}) - f(y) \leq \frac{2}{2^n}$. Como $f(y) \geq k - 1$ y $f(yx) \leq \frac{k+1}{2^n}$ entonces $f(y) - f(yx) \geq -\frac{2}{2^n}$. Así se obtiene que $|f(yx) - f(y)| \leq \frac{2}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}$, para cada $y \in G$, por lo que $N(x) \leq \frac{1}{2^{n-1}}$. □

**Teorema 2.3.10.** *Sea $(G, \tau_G, e)$ un grupo topológico. Para cada vecindad abierta $U$ del neutro $e$, existe una prenorma continua definida en $G$ de tal manera que la bola unitaria $B_N$ esta contenida en $U$.*

*Demostración.* Por el lema 2.1.5 tenemos una familia $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ de la unidad que satisfacen las condiciones del lema 2.3.9, con $U_0 = U$. Considerando la prenorma $N$ del lemma 2.3.9, entonces $B_N$ esta contenida en $U$ y $N$ es continua. □

A un grupo topológico se le llama uniformemente Tychonoff izquierdo si para cada vecindad abierta $V$ de $e$, se tiene un función uniformente continua izquierda en $G$ tal que $f(e) = 0$ y $f(x) \geq 1$, para toda $x \in G/V$. De manera análoga se puede definir un grupo uniformemente de Tychonoff derecho, con la misma propiedad pero con funciones uniformemente continuas por la derecha. Un espacio $G$, se llama de Tychonoff si para cada vecindad abierta de la unidad se tiene una función uniformente continua izquierda y derecha tal que $f(e) = 0$ y $f(x) \geq 1$, para toda $x \in G/V$.

**Teorema 2.3.11.** *Cada Grupo topológico $G$ es uniformemente Tychonoff.*

*Demostración.* Sea $U$ una vecindad de la identidad $e \in G$ por el teorema 2.3.10, existe una prenorma continua, acotada en G, tal que $B_N \subset U$. De manera que $N(e) = 0$ y $N(x) > 1$ para toda $x \in G \backslash V$. □

### 2.3.1. Teorema de metrizabilidad Birkhoff-Kakutani

**Definición 2.3.12.** *Sea $(G, \tau_G)$ un grupo topológico metrizable. Denotemos por $d_G$ a la métrica de $G$. Decimos que $d_G$ es invariante izquierda si $d_G(x, y) = d_G(gx, gy)$ para cualesquiera $x, y \in G$. De manera análoga decimos que $d_G$ es una métrica invariante derecha si $d_G(x, y) = d_G(xg, yg)$ para cualesquiera $x, y \in G$.*

A continuación demostraremos el teorema de metrizabilidad para grupos topológicos de G.Birkhoff y S.Kakutani.
**Teorema 2.3.13** (G.Birkhoff y S.Kakutani)**.** *Sea $(G, \tau_G, e)$ un grupo topológico $T_1$. Entonces $G$ es metrizable si y sólo si $G$ es primero numerable.*

*Demostración.* Evidentemente si $(G, \tau_G, e)$ es metrizable, es primero numerable. Para la otra implicación consideramos una base numerable $\{W_n : n \in \mathbb{N}\}$ del neutro $e$ de $G$. En virtud del lema 2.1.4 podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que cada $W_n$ es na vecindad simétrica. Definimos la siguiente familia de abiertos $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ donde $U_0 = W_0$ y $U_{k+1}$ se construye de la siguiente manera: Sea $V_k$ una vecindad abierta simétrica de $e$ tal que $V_k^2 \subset U_k$. Definamos $U_{k+1} := V_k \cap W_{k+1}$. Notemos que $U_{k+1}^2 \subset V_k^2 \subset W_k$ y que $U_{k+1} \subset W_{k+1}$. Por lo tanto para toda $n \in \mathbb{N}$ se cumplen las siguientes propiedades:

$$a) U_n \subset W_n$$
$$b) U_{n+1}^2 \subset W_n.$$

Por construcción, esta nueva familia vuelve a ser base local del neutro. Por el lema 2.3.9 existe una prenorma continua tal que $B_N(\frac{1}{2^n}) \subset U_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Esto nos dice que $B_N(\frac{1}{2^n})$ es una base local en $G$ para $e$.

Ahora, dados $x, y \in G$ definimos $\varphi_N(x, y) = N(xy^{-1})$. Hay que mostrar que $\varphi_N$ es una métrica en $G$ que genera la topología de $G$.

Claramente
$$\varphi_N(x, y) = N(xy^{-1}) \geq 0,$$
para toda $x, y \in G$. También $\varphi_N(x, x) = N(xx^{-1}) = N(e) = 0$, para cada $x \in G$. Ahora supongamos que
$$\varphi_N(x, y) = N(xy^{-1}) = 0,$$
es decir $xy^{-1} \in B_N(\frac{1}{2^n}) \subset U_n$ para toda $n$. Como $G$ es $T_1$, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n = \{e\}$ y por lo tanto $xy^{-1} = e$ o, equivalentemente $x = y$.

Para verificar la desigualdad del triángulo, consideremos $x, y, z \in G$. Entonces:

$$\begin{aligned}\varphi_N(x,z) =& N(xz^{-1})\\ =& N(xy^{-1}yz^{-1}) \leq N(xy^{-1}) + N(yz^{-1})\\ =& \varphi_N(x,y) + \varphi_N(y,z).\end{aligned}$$

Para la simetría sólo basta recordar que la prenorma cumple:

$$\varphi_N(x,z) = N(xz^{-1}) = N((xz^{-1})^{-1}) = N(zx^{-1}) = \varphi_N(z,x).$$

De manera que $\varphi_N$, es una métrica en $G$.

Notemos que la métrica del teorema 2.3.13, es una métrica invariante derecha, es decir $\varphi_N(x,y) = \varphi_N(xz,yz)$, para toda $x, y, z \in G$. Esto se justifica usando:

$$\begin{aligned}\varphi_N(xz,yz) =& N(xz(yz)^{-1})\\ =& N(xzz^{-1}y^{-1}) = N(xy^{-1}) = \varphi_N(x,y).\end{aligned}$$

Como $N$ es continua, la vecindad de $e$. $B_N(\varepsilon) := \{y \in G : \varphi_n(e,y) < \varepsilon\}$ es abierta para toda $\varepsilon > 0$, por lo que $B_N(\varepsilon)x$ es la $\varphi_N$-vecindad de radio $\varepsilon$ en $x$ es al ser la traslación un homeomorfismo en un grupo topológico y al ser $\varphi_N$ invariante por la derecha.

Además, por la propiedad $(n4)$ del teorema 2.3.9, concluimos que $\{B_N(\varepsilon)\}_{\varepsilon>0}$ constituye una base local en $e$ (respecto a la topología original de $G$). Así $\{B_N(\varepsilon)x : x \in G, \varepsilon > 0\}$ es una base de vecindades abiertas para la topología generada por de $G$ y por lo tanto la topología generada por $\varphi_N$ coincide con la original. Así concluimos que $G$ es metrizable.

$\square$

**Corolario 2.3.14.** *Sea $(G, \tau_G)$ un grupo topológico primero numerable y $T_1$. Entonces $G$ admite una métrica invariante derecha $\varphi$ y otra invariante izquierda $\lambda$. Ambas generan la topología original de $G$.*

*Demostración.* Consideremos una prenorma continua $N$ en $G$, como en la prueba del Teorema 2.3.13. Definamos $\varphi(x,y) := N(xy^{-1})$ y $\lambda(x,y) := N(x^{-1}y)$, como se vio en el Teorema 2.3.13 $\rho$ es una métrica invariante por la derecha compatible la topología de $G$. Como la inversión en $G$ es un homeomorfismo tenemos que $\lambda$ genera la misma topología que $\varphi$ y es fácil ver que es una métrica. Además cumple ser invariante izquierda ya que:

$$\begin{aligned}\lambda(zx,zy) =& N((zx)^{-1}zy)\\ =& N(x^{-1}z^{-1}zy) = N(x^{-1}y) = \lambda(x,y).\end{aligned}$$

$\square$

# Capítulo 3

# Un grupo universal segundo numerable

En este capítulo demostraremos que el grupo de automorfismos del cubo de Hilbert $Q$, equipado con la topología compacto abierta, es un grupo universal para la clase de los grupos segundo numerables. Comencemos el capítulo describiendo algunos aspectos topológicos de $Aut(Q)$.

## 3.1. El grupo $Aut(Q)$

Denotemos por $Aut(Q)$ al grupo de todos los automorfismos del cubo de Hilbert $Q$. Es decir $Aut(Q)$ es el conjunto de todos los homeomorfismos de $Q$ en $Q$ equipado con la estrucutra de grupo que genera la operación composición de funciones. Al ser $Q$ un espacio compacto, $Aut(Q)$ con la topología compacto abierta es un grupo topológico (teorema 2.1.16). Además, por la misma razón, se deduce que la topología de la convergencia uniforme y la topología compacto abierta en $Aut(Q)$ coinciden (teorema 1.2.12). Esto quiere decir que $Aut(Q)$ es metrizable.

En general, un espacio métrico compacto y la métrica del supremo:

$$\rho(f, g) := \sup_{x \in X} d(f(x), g(x)) \tag{3.1}$$

genera la topología compacto abierta en $Aut(X)$ (teorema 1.2.12).

**Teorema 3.1.1.** *Sean $(X, d)$ un espacio métrico compacto, y $\rho$ la métrica del supremo en $Aut(X)$. Entonces la función $D : Aut(X) \times Aut(X) \to \mathbb{R}$ definida por*

$$D(f, g) := \rho(f, g) + \rho(f^{-1}, g^{-1})$$

*es una métrica compatible con la topología compacto abierta en $Aut(X)$.*

*Demostración.* Claramente $D$ es un métrica en $Aut(X)$. Por otra parte, como $\rho(f,g) \leq D(f,g)$, la identidad $Id_{Aut(X)} : (Aut(X), D) \to (Aut(X), \rho)$ es continua. Así, la topología generada por $D$ es más fina que la topología generada por $\rho$.

Para completar la demostración consideremos $\varepsilon > 0$. y $f \in Aut(X)$. Por el teorema 2.1.16, $Aut(X)$ es grupo topológico, esto nos permite asegurar que la función que manda a cada elemento de $Aut(X)$ a su inverso es continua respecto a la topología compacto abierta, la cual coincide con la topología generada por $\rho$. Por lo tanto existe $\delta' > 0$ tal que si $\rho(f,g) < \delta'$, entonces $\rho(f^{-1}, g^{-1}) < \frac{\varepsilon}{2}$ para toda $g \in Aut(X)$.

Ahora definimos $\delta := \text{mín}\{\delta', \frac{\varepsilon}{2}\}$. Si $\rho(f,g) < \delta$ entonces

$$D(f,g) = \rho(f,g) + \rho(f^{-1}, g^{-1}) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

lo cual prueba que la topología generado por $\rho$ es más fina que la topología generada por $D$. Así, concluimos que $D$ es una métrica compatible con la original. $\square$

**Teorema 3.1.2.** *Sea $Q$ el cubo de Hilbert equipado con la métrica $d$ definida en la sección 1.5. Sea $\rho$ la métrica del supremo en $Aut(Q)$. Entonces la función $D : Aut(Q) \times Aut(Q) \to \mathbb{R}$ definida por*

$$D(f,g) := \rho(f,g) + \rho(f^{-1}, g^{-1})$$

*es una métrica completa compatible con la topología compacto abierta en $Aut(Q)$.*

*Demostración.* Del teorema 3.1.1, $D : Aut(Q) \times Aut(Q) \to \mathbb{R}$ dada por $D(f,g) := \rho(f,g) + \rho(f^{-1}, g^{-1})$ es una métrica compatible con la topología compacto abierta definida en $Aut(Q)$.

Veamos que $(Aut(Q), D)$ es un espacio métrico completo. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset Aut(Q) \subset C_c(Q,Q)$ una sucesión de Cauchy respecto de la métrica $D$. Como $\rho(f_n, f_m) \leq D(f_n, f_m)$ para toda $n, m \in \mathbb{N}$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy respecto de la métrica $\rho$. Así, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_c(Q,Q)$ es una sucesión de Cauchy en el espacio métrico completo $(C_c(Q,Q), \rho)$ (ver corolario 1.5.4), de manera que existe $\varphi \in C_c(Q,Q)$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \rho(f_n, \varphi) = 0.$$

De manera análoga se obtiene $\psi \in C_c(Q,Q)$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \rho(f_n^{-1}, \psi) = 0.$$

Por el teorema 1.2.2, la función evaluación es continua en $C_c(Q,Q)$. Entonces:

$$x = \lim_{n\to\infty} f_n(f_n^{-1}(x)) = \varphi \circ \psi(x) \text{ para toda } x \in Q,$$

por lo que $\varphi \circ \psi = Id_Q$. Análogamente,

$$x = \lim_{n\to\infty} f_n^{-1}(f_n(x)) = \psi \circ \varphi(x) \text{ para toda } x \in Q,$$

por lo que $\psi \circ \varphi = Id_Q$.

De lo anterior se deduce que $\varphi \in Aut(Q)$. Con lo que concluimos que $D$ es una métrica completa en $Aut(Q)$. □

## 3.2. Encaje en un grupo de isometrías

**Lema 3.2.1.** *Sea $(X, d)$ un $G$-espacio, con una acción izquierda y supongamos que $d$ es invariante bajo traslaciones izquierdas para todos $x, y \in X$ y $g \in G$. Sea $A \subset X$ y supongamos que $A$ es $G$-invariante. Entonces $\overline{A}$ también es $G$-invariante.*

*Demostración.* Sea $a \in \overline{A}$. Entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe un $a_\varepsilon \in A$ tal que $d(a, a_\varepsilon) < \varepsilon$. Como $d$ es una métrica invariante $d(g * a, g * a_\varepsilon) = d(a, a_\varepsilon) < \varepsilon$. Esto nos dice que $g * a_\varepsilon \in B(g * a, \varepsilon)$, y por lo tanto $B(g * a, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$, es decir, $g * a \in \overline{A}$. □

**Lema 3.2.2.** *Sean $(G, \tau_G)$ un grupo topológico, $E$ un espacio de Banach y $D \subset E$ un subconjunto denso. Supongamos que $\theta : G \times E \to E$ es una acción que satisface las siguientes condiciones.*

**1)** *$D$ es $G$-invariante,*

**2)** *$\theta|_{G\times\{d\}}$ es continua para toda $d \in D$,*

**3)** *$\theta(g, \cdot) : E \to E$ es una isometría para toda $g \in G$.*

*Entonces $\theta$ es continua.*

*Demostración.* Veamos primero que la función $\theta_x : G \to E$ es continua para toda $x \in E$, donde $\theta_x(g) = \theta(g, x)$. Sea $x \in E$. Como $D$ es denso en $E$, para toda $\varepsilon > 0$, existe $x_D \in D$ tal que $||x - x_D|| < \frac{\varepsilon}{5}$.

Por 2), $\theta_{x_D}$ es continua y por lo tanto, dado $g_o \in G$ existe una vecindad $U_{g_0}$ de $g_0$ tal que $||g_0 * x_D - h * x_D|| < \frac{\varepsilon}{5}$, para toda $h \in U_{g_0}$. Así, si $h \in U_{g_0}$, entonces:

$$\begin{aligned} ||g_0 * x - h * x|| &\leq ||g_0 * x - g_0 * x_D|| + ||g_0 * x_D - h * x_D|| + ||h * x_D - h * x|| \\ &= ||x - x_D|| + ||g_0 * x_D - h * x_D|| + ||x_D - x|| < \frac{\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5} < \varepsilon, \end{aligned}$$

ya que $\theta(g_0, \cdot)$ y $\theta(h, \cdot)$ son isometrías. De aquí se concluye que $\theta_x$ es continua para toda $x \in E$.

Ahora demostraremos la continuidad de $\theta$ en todo $G \times E$. Sean $(g,x) \in G \times E$, $\varepsilon > 0$ y $U := B(x, \frac{\varepsilon}{2})$. Como $\theta_x$ es continua, existe una vecindad $V$ de $g$ en $G$ tal que $||g * x - h * x|| < \frac{\varepsilon}{2}$ para toda $h \in V$. Sea $(h,y) \in V \times U$ entonces

$$||g*x-h*y|| \leq ||g*x-h*x||+||h*x-h*y|| = ||g*x-h*x||+||x-y|| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Esto implica que $\theta : G \times E \to E$ es continua. $\square$

**Teorema 3.2.3.** *Sean $(X, ||\cdot||)$ un espacio normado y $F \subset X$ separable. Entonces $E := \overline{span(F)}$ es separable.*

*Demostración.* Como $F$ es separable, existe $D_F \subset F$ denso y numerable. Definimos el siguiente conjunto $D_E := \{\sum_{i=1}^{n} q_i x_i : q_i \in \mathbb{Q}, x_i \in D_F\}$. Demostraremos que $D_E$ es un subconjunto denso y numerable en $E$. Consideremos $g \in E$. Para todo $\varepsilon > 0$ existe $x \in D := span(F)$ tal que $||x - g|| < \frac{\varepsilon}{2}$. Como $x \in D_F$, existen $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $x_i \in F$ con $i \in \{1, ..., n\}$ tales que:

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot x_i. \tag{3.2}$$

Para cada $i \in \{1, ..., n\}$, sean $q_i \in \mathbb{Q}$ tal que $|\lambda_i - q_i| < \sqrt{\epsilon}$

y $\tilde{x}_i \in D_F$ tal que $||x_i - \tilde{x}_i|| < \frac{\sqrt{\epsilon}}{2n}$.

Definamos $\tilde{x}$ por:

$$\tilde{x} = \sum_{i=1}^{n} q_i \cdot \tilde{x}_i, \tag{3.3}$$

Entonces $\tilde{x} \in D_E$ y

$$||x - \tilde{x}|| \leq \text{máx}\{|\lambda_i - q_i| : i \in \{1, ..., n\}\} \cdot \sum_{i=1}^{n} ||x_i - \tilde{x}_i|| < \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2}\sqrt{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{2} \tag{3.4}$$

Por lo que

$$||g - \tilde{x}|| \leqslant ||g - x|| + ||x - \tilde{x}|| < \varepsilon. \tag{3.5}$$

Esto demuestra que $D_E$ es denso en $E$. Como $D_E$ es numerable, concluimos que $E$ es separable. Además, si $D_E$ es invariante izquierdo entonces $E$ es $G$-invariante.

$\square$

A continuación se presentarán los teoremas base de este trabajo. Hasta ahora $Is(E)$ ha denotado simplemente las isometrías de $E$, en adelante y hasta el término de esta sección $Is(E)$ denotará al subgrupo de *isometrías lineales* de $E$ (Véase corolario 2.1.12).

**Teorema 3.2.4.** *Sea $G$ un grupo topológico $T_1$ con base numerable. Entonces existe un espacio de Banach separable $E$ tal que $G$ es topológicamente isomorfo a un subgrupo de $Is(E)$ (las isometrías lineales de $E$). Es decir, existe un encaje $\psi : G \to Is(E)$ que a su vez es un monomorfismo de grupos.*

*Demostración.* Por el Teorema 2.3.13, existe una métrica acotada $d$, invariante por izquierda que determina la topología de $G$. Sean $x, g \in G$ y definamos $f_x(g) = d(x, g)$. Sean $\mathcal{F} = \{f_g : g \in G\}$ y $C_b(G)$ el conjunto de funciones reales, continuas y acotadas definidas en $G$ con la métrica del supremo:

$$d_*(f, g) := \sup_{x\in G}\{|f(x) - g(x)|\}.$$

Sea $f_g \in \mathcal{F}$, entonces $|f_g(x_1) - f_g(x_2)| = |d(g, x_1) - d(g, x_2)| \leq d(x_1, x_2)$ para toda $x_1, x_2 \in G$. Esto muestra que la familia $\mathcal{F}$ consiste de funciones continuas. Como $d$ es acotada tenemos que $\sup\{|f_g(x_1) - f_g(x_2)| : x_1, x_2 \in G\}$ es finito y por lo tanto $\mathcal{F} \subseteq C_b(G)$. Sea

$$D := span(\mathcal{F})$$

en $C_b(G)$ y

$$E := \overline{D}$$

la cerradura de $D$ en el espacio de Banach $C_b(G)$.

Veamos que $\mathcal{F}$ es separable. Para ello definamos la función $\varphi : G \to C_b(G)$ dada por $\varphi(g) = f_g$. Primero veamos que $\varphi$ es continua. Dada $x \in G$ tenemos que

$$|f_{g_1}(x) - f_{g_2}(x)| = |d(g_1, x) - d(g_2, x)| \leq d(g_1, g_2), \text{ para toda } g_1, g_2 \in G.$$

Tomando supremo sobre $x \in G$, tenemos que:

$$d_*(f_{g_1}, f_{g_2}) \leq d(g_1, g_2) \text{ para toda } g_1, g_2 \in G,$$

y por lo tanto $\varphi$ es continua. Ahora veamos que $\varphi$ es inyectiva. Supongamos que $\varphi(g_1) = \varphi(g_2)$ para ciertas $g_1, g_2 \in G$. Esto quiere decir que:

$$d(g_1, x) = d(g_2, x) \text{ para toda } x \in G.$$

Al evaluar en $x = g_1$ obtenemos:

$$0 = d(g_1, g_1) = d(g_2, g_1).$$

Como $d$ es métrica, podemos asegurar que $g_1 = g_2$ y por lo tanto $\varphi$ es inyectiva.

Ahora como $\varphi$ es inyectiva y continua, resulta que $\varphi$ es continua y biyectiva en la imagen $\varphi(G)$. Como $G$ es segundo numerable $G$ es separable y por lo tanto contiene un denso y numerable. Sea $D$ un subconjunto denso numerable de $G$. Sabemos que la continuidad de $\varphi$ es equivalente a lo siguiente:

$$\varphi(\overline{D}) \subset \overline{\varphi(D)}.$$

Pero como $D$ es denso esto nos da que:

$$\varphi(\overline{D}) = \varphi(G) \subset \overline{\varphi(D)} \cap \varphi(G) \subset \varphi(G).$$

De aquí concluimos que $\varphi(D)$ es denso en $\varphi(G)$. Como $\varphi$ es inyectiva, tenemos que $|\varphi(D)| = |D| = |\mathbb{N}|$. En conclusión, $\mathcal{F} = \varphi(G)$ es separable.

Veamos que $\varphi$ es isometría. Sean $a, b \in G$. Ya observamos que

$$d_*(f_a, f_b) = \sup_{x \in G}\{|f_a(x) - f_b(x)|\} = \sup_{x \in G}\{|d(a,x) - d(b,x)|\} \leq d(a,b).$$

Por otra parte

$$d(a,b) = |d(a,b) - d(b,b)| = |f_a(b) - f_b(b)| \leq \sup_{x \in G}\{|f_a(x) - f_b(x)|\} = d_*(f_a, f_b).$$

De aquí concluimos que $d(a,b) = d_*(f_a, f_b)$ y por lo tanto $\varphi : G \to C_b(G)$ es una isometría.

Para definir el encaje $\psi : G \to Is(E)$, definamos primero la acción $\theta : G \times C_b(G) \to C_b(G)$ definida por $\theta(g,f) := g \cdot f$, donde $(g \cdot f)(x) := f(g^{-1}x)$. Lo primero que hay que hacer es ver que $\theta$ es efectivamente una acción izquierda.

1) $(e \cdot f)(x) = f(e^{-1}x) = f(x)$ para todo $x \in X$ y por lo tanto $e * f = f$.
2) $((gh) \cdot f)(x) = f((gh)^{-1}x) = f(h^{-1}g^{-1}x) = (h \cdot f)(g^{-1}x) = (g \cdot (h \cdot f))(x)$, para todo $x \in X$.
Esto implica que $(gh) \cdot f = g \cdot (h \cdot f)$ y por lo tanto $\theta$ es una acción izquierda.

Aplicando la definición de $\mathcal{F}$ y el hecho de que la métrica $d$ es invariante por la izquierda tenemos que

$$(g \cdot f_a)(x) = d(a, g^{-1}x) = d(ga, x) = f_{ga}(x).$$

Así $g \cdot f_a = f_{ga}$ para todo $a, g \in G$, y por lo tanto $g \cdot f_a \subset \mathcal{F}$. Esto demuestra que $\mathcal{F}$ es invariante bajo la acción $\Theta$.

Ahora notemos que $d_*$ es $G$-invariante. Es decir $d_*(g\cdot f, g\cdot h) = d_*(f,h)$ para todo $f,h \in C_b(G)$ y $g \in G$. Sean $f,h \in C_b(G)$ y $g \in G$. Entonces tenemos lo siguiente:

$$d_*(g\cdot f, g\cdot h) = \sup_{x\in G}\{|f(g^{-1}x) - h(g^{-1}x)|\} = \sup_{y\in G}\{|f(y) - h(y)|\} = d_*(f,h).$$

Ahora veamos que $\theta$ es una acción lineal. Sean $f,h \in C_b(G)$, $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ y $g \in G$. Entonces dado $x \in G$, tenemos que

$$(g\cdot(\alpha f+\beta h))(x) = (\alpha f+\beta h)(g^{-1}x) = \alpha f(g^{-1}x)+\beta h(g^{-1}x) = \alpha(g\cdot f)(x)+\beta(g\cdot h)(x).$$

Es decir, $g\cdot(\alpha f + \beta g) = \alpha(g\cdot f) + \beta(g * h)$. Con esto la función asociada $\psi : G \to Is(E) \subset C(E,E)$ está bien definida.

Además con la linealidad de la acción podemos ver que $D = span(\mathcal{F})$, es $G$-invariante. En efecto si $f = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot f_i \in D$, con $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $f_i \in \mathcal{F}$. Entonces $g\cdot(f) = g\cdot \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot f_i = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i(g\cdot f_i)$, donde $g\cdot f_i \in \mathcal{F}$ ya que $\mathcal{F}$ es $G$-invariante. Así se deduce que $g\cdot f \in D$.

Lo que sigue es ver que $\theta$ es continua en $G\times\mathcal{F}$. Sean $(g, f_a) \in G\times\mathcal{F}$. Como $R_a : G \to G$ definida por $R_a(x) := xa$ es continua, existe una vecindad $O \in \tau_G$ de $g$, tal que $d(ga, ha) < \frac{\varepsilon}{2}$ para toda $h \in O$. Sean $h \in O$ y $f_b \in B(f_a, \frac{\varepsilon}{2})$, entonces:

$$\begin{aligned} d_*(h\cdot f_a, g\cdot f_b) &= \sup_{x\in G}\{|d(a,h^{-1}x) - d(b,g^{-1}x)|\} = \sup_{x\in G}\{|d(ha,x) - d(gb,x)|\} \\ &\leq d(ha,gb) \leq d(ha,ga) + d(ga,gb) \\ &= d(ha,ga) + d(a,b) = d(ha,ga) + d_*(f_a,f_b) < \varepsilon, \end{aligned}$$

y por lo tanto $\theta|_{G\times\mathcal{F}}$ es continua.

Ahora demostraremos que $\theta|_{G\times D}$ es continua. Para ello recordemos que la métrica $d_*$ está inducida por la norma del supremo $C_b(G)$ dada por $||f|| = \sup\{|f(x)| : x \in G\}$. Sea $f \in D$ y consideremos $\theta_f : G \to C_b(G)$ definida por $\theta_f(g) := \theta(g,f) = g*f$. Veamos que $\theta_f$ es continua. Como $f \in D$, existen $f_{a_i} \in \mathcal{F}$ y $\alpha_i \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $n \in \mathbb{N}$, tales que $f = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i f_{a_i}$. Como $\theta|_{G\times\mathcal{F}}$ es continua, para cada $i$ existe una vecindad $U_i$ de $g$ tal que $||g\cdot f_{a_i} - h\cdot f_{a_i}|| < \frac{\varepsilon}{n|\alpha_i|}$ para todo $h \in U_i$. Sea $U := \bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i$ y notemos que $U$ es una vecindad de $g$. Además, para toda $h \in U$ se cumple que

$$||g\cdot f - h\cdot f|| = ||\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(g\cdot f_{a_i} - h\cdot f_{a_i})|| \leq \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|||g\cdot f_{a_i} - h\cdot f_{a_i}|| < \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|\frac{\varepsilon}{n|\alpha_i|} = \varepsilon.$$

Así que $\theta_f$ es continua para todo $f \in D$.

Sea $(g, f) \in G \times D$. Como $\theta_f$ es continua existe una vecindad $U$ de $g$ tal que $||g \cdot f - h \cdot f|| < \frac{\varepsilon}{2}$ para todo $h \in U$. Sea $V = B(f, \frac{\varepsilon}{2})$. Si $(h, \varphi) \in U \times V$, entonces

$$||h \cdot \varphi - g \cdot f|| \leq ||h \cdot \varphi - h \cdot f|| + ||h \cdot f - g \cdot f|| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

ya que $||h \cdot \varphi - h \cdot f|| = ||\varphi - f||$, por ser $d_*$ $G-$invariante. Esto demuestra que $\theta|_{G\times D}$ es continua.

Por el lema 3.2.2, la acción $\theta : G \times E \to E$ es continua, como ya notamos antes su función asociada $\psi$ está bien definida y esta dada por $\psi(g)(f)(x) := f(g^{-1}x)$. De esta manera $\psi : G \to Is(E) \subset C(E, E)$ es continua por el Teorema 1.2.18. Ahora mostraremos que $\psi$ es un monomorfismo.

Dado $f \in E$ y $x \in G$, tenemos que

$$\begin{aligned}\varphi_{ab}(f)(x) &= ((ab) \cdot f)(x) = f((ab)^{-1}x) = f(b^{-1}(a^{-1}x)) \\ &= (b \cdot f)(a^{-1}x) = (a \cdot (b \cdot f))(x) = (\varphi_a \circ \varphi_b)(f)(x)\end{aligned}$$

De las ecuaciones anteriores obtenemos:

$$\varphi_{ab} = \varphi_a \circ \varphi_b \tag{3.6}$$

y por lo tanto $\psi(ab) = \psi(a) \cdot \psi(b)$. Note que $\psi(e) = Id_E$. Ahora veremos que $\psi$ es inyectiva. Sea $g \in G$ tal que $\psi(g) = \psi(e)$, donde $e$ es el neutro de $G$. Entonces $\psi(e) = \varphi_e$, $\varphi_e(f)(x) = f(ex) = f(x)$ para toda $f \in E$, $x \in G$. Por otra parte $\varphi_g(f)(x) = f(g^{-1}x)$, para toda $f \in E$ y para toda $x \in G$. Entonces $f(g^{-1}x) = f(x)$ para toda $f \in F$. Tomando $f := f_{g^{-1}}$ la cual está dada por $f_{g^{-1}}(x) = d(g^{-1}, x)$, concluimos que $d(g^{-1}, g^{-1}x) = f_{g^{-1}}(g^{-1}x) = d(g^{-1}, x)$ y evaluando en $x = e$ tenemos $0 = d(g^{-1}, g^{-1}) = d(g^{-1}, e)$. Como $d$ es métrica, inferimos que $e = g^{-1} = g$ y por lo tanto $Ker(\psi) = \{e\}$.

Para completar esta demostración hay que probar que $\psi$ es un encaje y para esto se tiene que mostrar la continuidad de la inversa $\psi^{-1} : \psi(G) \to G$.

Sea $e \in V$ una vecindad de la unidad en $G$. mostremos que la identidad de $Is(E)$ no está en la cerradura de $\psi(G\backslash V)$.

Sea $\varepsilon > 0$ tal que $B(e, \varepsilon) \subset V$. Entonces para toda $v \in G\backslash V \subset G\backslash B(e, \varepsilon)$ se tiene que $d(v, e) \geq \varepsilon$. Sea $f_e(x) = d(x, e) \in E$ y $v \in G\backslash V$. Entonces tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}d_*(\psi(v)(f_e), \psi(e)(f_e)) &= d_*(\varphi_v(f_e), \varphi_e(f_e)) = \sup_{x\in G}\{|f_e(vx) - f_e(x)|\} \\ &\geq |f_e(v) - f_e(e)| = |f_e(v)| = d(e, v) \geq \varepsilon > 0.\end{aligned}$$

Entonces $d_*(\psi(v)(f_e), (\psi(e)(f_e)) \geq \varepsilon > 0$ para cada $v \in G\backslash V$ y por lo tanto, para toda $\varphi_h \in \psi(G\backslash V)$,

$$\varphi_h \notin B(f, Id_{Is(E)}, \varepsilon) = \{\varphi_h \in Is(E) : d_*(\varphi_h(f)(x), \varphi_e(f)(x))) < \varepsilon\}$$

para toda $\varepsilon \in (0,1)$. Es decir $\psi(G\backslash V) \cap B(f, Id_{Is(E)}, \varepsilon) = \emptyset$. Por lo que $Id_{Is(E)} \notin \overline{\psi(G\backslash V)}$.

Con la propiedad anterior notemos que como $Id_{Is(E)} \notin \overline{\psi(G\backslash V)}$ entonces, $Id_{Is(E)} \in \psi(G)\backslash\overline{\psi(G\backslash V)}$. Por continuidad de $\psi : G \to Is(E)$ tenemos que $\psi(\overline{G\backslash V}) \subset \overline{\psi(G\backslash V)}$ y entonces

$$Id_{Is(E)} \in \psi(G)\backslash\overline{\psi(G\backslash V)} \subset \psi(G)\backslash\psi(\overline{G\backslash V}).$$

Así $Id_{Is(E)} \in \psi(G)\backslash\overline{\psi(G\backslash V)} \subset \psi(G)\backslash\psi(G\backslash V)$. Además como $\psi$ es biyección en la imagen entonces $\psi(G)\backslash\psi(G\backslash V) = \psi(G\backslash(G\backslash V)) = \psi(V)$ de manera que $(Id_{Is(E)}) \in (\psi(G)\backslash\overline{\psi(G\backslash V)} \subset \psi(V)$. Entonces

$$e = \psi^{-1}(Id_E) \in \psi^{-1}(\psi(G)\backslash\overline{\psi(G\backslash V)}) \subset \psi^{-1}(\psi(V)) = V.$$

Por lo que para la vecindad abierta $V$ de $G$ definimos la vecindad abierta $W := \psi(G)\backslash\overline{\psi(G\backslash V)}$ de $Id_{Is(E)}$ y concluimos que $\psi^{-1}(W) \subset V$ por lo tanto $\psi^{-1}$ es continua. Esto nos permite asegurar que $\psi^{-1} : \psi(G) \to G$ es continua y por lo tanto $\psi : G \to \psi(G)$ es un homeomorfismo. $\square$

Sea $T : X \to Y$ un operador lineal entre los espacios vectoriales $X$ y $Y$. Para cada $f \in Y^*$ definiremos el operador $T^*(f) := f \circ T$. Así $T^* : Y^* \to X^*$ es una una transformación lineal entre espacios de Banach.

**Teorema 3.2.5.** *Sean $E$ un espacio de Banach separable, $B$ la bola (compacta) unitaria del espacio dual $E^*$ con la topología $w^*$ y sea $Is(E)$ el grupo de todas las isometrías lineales de $E$. Para cada $T \in Is(E)$, denotamos por $\sigma(T)$ a la restricción a $B$ del operador $(T^{-1})^*$, es decir, $\sigma(T) := (T^{-1})^*|_B$.*
*Si consideramos la topología compacto-abierta en $Aut(B)$, entonces*

$$\sigma : Is(E) \to Aut(B)$$

*es un encaje que además es un monomorfismo de grupos topológicos,.*

*Demostración.* Notemos que $\sigma$ está bien definida, pues

$$||\sigma(T)(f)(x)|| = ||(f \circ T^{-1})(x)|| \leq ||f||||T^{-1}(x)|| = ||x||,$$

pues $f \in B$ y $T \in Is(E)$, para toda $x \in E$. Así $||\sigma(T)(f)|| \leq 1$, o equivalentemente $\sigma(T) \in Aut(B)$, de la definición para la norma de los operadores. Demostremos la parte algebraica. Es decir, que $\sigma$ es un monomorfismo de grupos.

Para ver que $\sigma$ es inyectiva, supongamos que $T \neq H$ con $T, H \in Is(E)$. Entonces existe $x \in E$ tal que $T(x) \neq H(x)$. Llamemos $y = T(x)$ y observemos que $H^{-1}(y) \neq T^{-1}(y)$, ya que, de no ser así, $H^{-1}(T(x)) = x$ y por lo tanto $H(x) = T(x)$, lo cual contradice nuestra hipótesis.

Como $H^{-1}(y) \neq T^{-1}(y)$, por el teorema 1.4.10, existe $f \in B$ tal que $f(H^{-1}(y) - T^{-1}(y)) \neq 0$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}\sigma(T)(f)(y) &= (T^{-1})^*(f)(y) = f(T^{-1}(y)) \\ &\neq f(H^{-1}(y)) = (H^{-1})^*(f)(y) = \sigma(H)(f)(y).\end{aligned}$$

Por lo tanto $\sigma$ es inyectiva.

Para ver que $\sigma$ es morfismo, consideremos $f \in B$. En consecuencia, $\sigma(T \circ H)(f) = ((T \circ H)^{-1})(f) = f((T \circ H)^{-1}) = f(H^{-1} \circ T^{-1})$.

Por otro lado $(\sigma(T) \circ \sigma(H))(f) = \sigma(T)(f(H^{-1})) = f(H^{-1} \circ T^{-1})$. Note que $\sigma(Id_E) = Id_B$. Con esto se concluye que $\sigma$ es morfismo de grupos.

Para demostrar que $\sigma$ es continua, demostraremos que su función asociada $\theta : Is(E) \times B \to B$ definida por $\theta(T, f) = f \circ T^{-1}$ es continua ( Ver Teorema 1.2.18). $B$ tiene la topología $w^*$, generada por la familia de funciones $\{x^* : E^* \to \mathbb{R}\}_{x \in E}$, donde $x^*$ esta definida por $x^*(f) := f(x)$. Sean $U'$ abierto de $B$ y $\theta(T, f) \in U'$. Entonces podemos encontrar un abierto básico $U := \bigcap_{i=1}^{n} x_i^{*-1}(B(y_i, \varepsilon_i))$ tal que $\theta(T, f) \in U \subset U'$. Esto significa que $(f \circ T^{-1})(x_i) \in B(y_i, \varepsilon_i)$, es decir, $|(f \circ T^{-1})(x_i) - y_i| < \varepsilon_i$ para toda $i \in \{1, ..., n\}$.

Sea $\varepsilon := \text{mín}\{\varepsilon_i : i \in \{1, ..., n\}\}$. Para cada $i \in \{1, ..., n\}$ consideremos el subbásico $M(x_i, B(x_i, \frac{\varepsilon}{2}))$ de $Is(E)$ y definamos $M := \bigcap_{i=1}^{n} M(x_i, B(x_i, \frac{\varepsilon}{2}))$. Además consideremos los subbásicos $M(x_i, B(y_i, \frac{\varepsilon}{2}))$ y de manera análoga definamos el básico $M' := \bigcap_{i=1}^{n} M(x_i, B(y_i, \frac{\varepsilon}{2}))$. Consideremos el abierto básico $\mathbb{M} := M \times M'$ en $Is(E) \times B$ y veamos que $\theta(\mathbb{M}) \subset U$.

Recordemos que $||g(x)||_Y \leq ||g|| \cdot ||x||_X$ para todo operador lineal acotado $g : X \to Y$ entre espacios vectoriales normados $X, Y$. Sea $(H, g) \in \mathbb{M} \subset Is(E) \times B$. Como $H \in Is(E)$, tenemos que $||H(x) - x|| = ||H^{-1}(x) - x||$ para toda $x \in E$ y como $g \in B$ es un operador lineal acotado, se cumple que $||g(x)|| \leq ||g|| \cdot ||x||$ para todo $x \in E$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}|(g \circ H^{-1})(x_i) - y_i| &= |(g \circ H^{-1})(x_i) - g(x_i) + g(x_i) - y_i| \\ &\leq |g(H^{-1}(x_i) - x_i)| + |g(x_i) - y_i| \\ &\leq ||g|| \cdot ||H^{-1}(x_i) - x_i|| + |g(x_i) - y_i| \\ &\leq ||H^{-1}(x_i) - x_i|| + |g(x_i) - y_i| \\ &= ||H(x_i) - x_i|| + |g(x_i) - y_i| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Con esto último tenemos que $\theta(\mathbb{M}) \subset U \subset U'$ de donde se deduce que $\theta$ es continua, y por el teorema 1.2.18, el teorema 1.2.15 y el teorema 1.2.14 se concluye que la topolgía compacto abierta y la punto abierta coinciden en $Is(E)$ así que $\sigma$ también es continua.

Para probar la continuidad de $\sigma^{-1} : \sigma(Is(E)) \to Is(E)$, como $\sigma$ es monomorfismo, es suficiente demostrar que $\sigma^{-1}$ es continua en la identidad.

Como $E$ es separable, por el teorema 1.4.7, concluimos que $B$ es metrizable. Sea $d$ una métrica compatible con la topología $w^*$ de $B$. Definamos $\rho : Aut(B) \times Aut(B) \to \mathbb{R}$ por
$$\rho(\psi, \varphi) = \sup_{f \in B}\{d(\psi(f), \varphi(f))\}.$$
Por el teorema 1.2.12 $\rho$ es compatible con la topología compacto abierta en $Aut(B)$.

Consideremos una vecindad subbásica $M(x, B(x, \varepsilon))$ con $x \in E$ de la identidad en $Is(E)$. Evidentemente la función $x^* : B \to \mathbb{R}$ dada por $x^*(f) = f(x)$ es $w^*$-continua y como $B$ es compacto, entonces $x^*$ es uniformemente continua. Esto quiere decir dada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $d(f, g) < \delta$, entonces $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$.

Sea $V = \{\sigma(T) \in \sigma(Is(E)) \mid \rho(\sigma(T), Id_B) < \varepsilon\}$. Afirmamos que para todo $\sigma(T) \in V$ se cumple que $\sigma^{-1}(\sigma(T)) = T \in M(x, B(x, \varepsilon))$. En efecto, si $T(x) = x$, entonces evidentemente $T \in M(x, B(x, \varepsilon))$. Supongamos que $T(x) \neq x$. Entonces $||T(x) - x|| \neq 0$ y como $T \in Is(E)$ entonces
$$||T(x) - x|| = ||T^{-1}(x) - x||.$$
Ahora, por el teorema de Hanh-Banach 1.4.9 existe $f \in B$ tal que
$$||T(x) - x|| = ||T^{-1}(x) - x|| = |f(T^{-1}(x) - x)| = |f(T^{-1}(x)) - f(x)|$$
Como $\sigma(T) \in V$, tenemos que $d(\sigma(T)(f), f) \leq \rho(\sigma(T), Id_B) < \delta$ y por lo tanto $|(T^{-1})^*(f)(x) - f(x)| < \varepsilon$. Esto implica que $||T(x) - x|| < \varepsilon$ para toda $\sigma(T) \in V$. De aquí obtenemos que $\sigma^{-1}(V) \subset M(x, B(x, \varepsilon))$ y por lo tanto $\sigma^{-1}$ es continua.

Finalmente deducimos que $\sigma : Is(E) \to Aut(B)$ es un encaje de grupos topológicos, es decir encaje que además es morfismo de grupos. □

**Teorema 3.2.6.** *Para cada espacio de Banach $E$, separable e infinito dimensional, la bola $B \subset E^*$ unitaria equipada con la topología $w^*$ es homeomorfa al cubo de Hilbert.*

*Demostración.* Sea $D_E := \{d_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ un subconjunto denso numerable de $E$ y supongamos que $d_i \neq 0$ para toda $i \in \mathbb{N}$.
Definamos $\lambda : B \to \ell_2$ como
$$\lambda(f) = \Big(\frac{f(d_k)}{||d_k|| \cdot 2^k}\Big)_{k=1}^{\infty}$$
Recordemos que para $f \in B$, como $|f(x)| \leq ||f|| \cdot ||x||$ para todo $x \in E$, y por lo tanto:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\Big|\frac{f(d_k)}{||d_k||\cdot 2^k}\Big|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2k}} < \infty.$$

Por lo que $\lambda(f) \in \ell_2$, es decir $\lambda$ está bien definida.

Ahora veamos la continuidad de $\lambda$. Sean $\varepsilon > 0$, $f \in B$ y tomemos $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sum\limits_{k=i_0}^{\infty} \frac{1}{2^{2k}} < \frac{\varepsilon}{2}$. Llamemos $U := \bigcap\limits_{k=1}^{i_0} (d_k^*)^{-1}(B(f(d_k), \frac{||d_k||\cdot 2^k \cdot \varepsilon}{2\cdot i_0}))$, de manera que si $g \in U$, entonces

$$||\lambda(f)-\lambda(g)||^2 = \sum_{k=1}^{\infty}\Big|\frac{f(d_k)-g(d_k)}{||d_k||\cdot 2^k}\Big|^2 < \sum_{k=1}^{i_0}\frac{\varepsilon}{2\cdot i_0} + \sum_{k=i_0}^{\infty}\frac{1}{2^{2k}} < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Por lo tanto $\lambda$ es continua. Notemos que $\lambda$ es inyectiva puesto que si $\lambda(f) = \lambda(g)$ entonces $f(d_k) = g(d_k)$ para toda $k \in \mathbb{N}$, de manera que como $\ell_2$ es Hausdorff y $D$ es un denso en $E$, por la proposición 1.1.2, concluimos que $f(x) = g(x)$ para toda $x \in E$. Por lo que $\lambda$ es inyectiva.

Notemos además que $\lambda : B \to \ell_2$ es una biyección continua en la imagen $\lambda(B)$, donde $B$ es compacto y $\ell_2$ es Hausdorff por lo que por la proposición 1.1.1, $\lambda$ es un encaje.

Además $B$ es un convexo pues las bolas en un espacio vectorial normado son convexas. Evidentemente $\lambda$ es una función lineal de manera que $\lambda(B)$ es un subconjunto compacto y convexo de dimensión infinita de $\ell_2$. Por el teorema de Keller 1.5.1, $\lambda(B)$ es homeomorfo al cubo de Hilbert $Q$. Como además $\lambda : B \to \lambda(B)$ es homeomorfismo se concluye que $B$ es homeomorfo a $Q$. □

## 3.3. Un grupo universal segundo numerable

Ahora si estamos en condiciones de demostrar el resultado principal de este trabajo.

**Teorema 3.3.1** (Uspenskii). *Sea $G$ un grupo topológico segundo numerable y $T_1$. Entonces existe un encaje $j : G \to Aut(Q)$ que además es un morfismo de grupos, donde $Q := I^{\mathbb{N}}$ es el cubo de Hilbert. Así, $Aut(Q)$ es un grupo universal para la clase de los grupos topológicos segundo numerables.*

*Demostración.* Por el teorema 3.2.4, existe espacio de Banach separable $E$ y un encaje de $j : G \hookrightarrow Is(E)$ que es un morfismo de grupos.

Por el teorema 3.2.5 existe un encaje $k : Is(E) \hookrightarrow Aut(B)$, que es un morfismo de grupos, donde $B$ es la bola unitaria de $E^*$ con la topología $w^*$.

Además, por el teorema 3,2,6 $B$ es homeomorfo al cubo de Hilbert $Q$ y por lo tanto existe un homeomorfismo $\psi : B \to Q$. Sea $\phi : Aut(B) \to Aut(Q)$ dada por

$$\phi(h) = \psi \circ h \circ \psi^{-1}.$$

Veamos que $\phi$ es un isomorfísmo de grupos. Para ello, sea $h \in Aut(Q)$ y definamos $H := \psi^{-1} \circ h \circ \psi$. Entonces $\phi(H) = \psi \circ \psi^{-1} \circ h \circ \psi \circ \psi^{-1} = h$, ya que $\psi$ es biyección. Por lo tanto $\phi$ es suprayectiva. Notemos que también es inyectiva, puesto que si $\phi(h) = \phi(g)$, entonces $\psi \circ h \circ \psi^{-1} = \psi \circ g \circ \psi^{-1}$ y de nueva cuenta, como $\psi$ es biyección, se tiene que $h = g$.

Notemos que $\phi(Id_B) = Id_Q$ y que

$$\phi(h \circ g) = \psi \circ (h \circ g) \circ \psi^{-1} = (\psi \circ h \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ g \circ \psi^{-1}) = \phi(h) \circ \phi(g).$$

Por lo tanto $\phi$ es un isomorfismo. Ahora veamos que $\psi$ es un homeomofismo. Para esto, basta con ver la continuidad en sub-básicos. Sea $M := M(K, U)$ abierto subbásico de $Aut(Q)$ y consideremos $N := N(\psi^{-1}(K), \psi^{-1}(U))$, que es un abierto subbásico en $Aut(B)$ puesto que $\psi : B \to Q$ es un homeomorfismo. Sea $h \in N$. Entonces $\phi(h)(K) = (\psi \circ h \circ \psi^{-1})(K) \subset (\psi \circ \psi^{-1})(U) = U$. Por lo que $\phi(N) \subset M$, con lo que se justifica la continuidad de $\phi$. La continuidad de $\phi^{-1}$ se demuestra de manera análoga.

Llamando $g := \phi \circ k \circ j$, tenemos que $g : G \hookrightarrow Aut(Q)$ es un monomorfismo que además es un encaje. Por los teoremas 2.1.16 y 2.1.17 se sigue que tanto $Aut(B)$ como $Aut(Q)$ son grupos topológicos segundo numerables. $\square$

# Capítulo 4

# Un espacio de Banach Universal

En este capítulo demostraremos que el espacio $C([0,1],\mathbb{R})$ es un espacio universal para los espacios de Banach separables. Observemos que un espacio de este tipo, es un ejemplo particular de un grupo segundo numerable.

## 4.1. El conjunto de Cantor

Denotamos por $2 = \{0,1\}$ el espacio discreto de 2 puntos, e $I = [0,1]$ con la topología que hereda de $\mathbb{R}$.

**Definición 4.1.1.** *El conjunto de Cantor se define como $\Delta := 2^{\mathbb{N}}$ con la topologia producto.*

Este espacio es compacto, al ser producto de espacios compactos y es metrizable, una métrica explícita para este espacio es la siguiente:

$$d_\Delta(a,b) := \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|a_i - b_i|}{2^i} \tag{4.1}$$

donde $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}, b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

El propósito de la presente sección es demostrar algunas propiedades que satisface el conjunto de cantor, las cuales serán utilizadas más adelante.

**Lema 4.1.2.** *Para toda $n \in \mathbb{N}$, el conjunto de cantor $\Delta$ es homeomorfo a $\Delta^n$*

*Demostración.* Haremos la demostración por inducción. Definimos $f : \Delta \times \Delta \to \Delta$, como $f(a,b) := c = (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donde $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}, b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y

$$c_n := \begin{cases} a_{\frac{n+1}{2}} & \text{si } n \text{ es impar} \\ b_{\frac{n}{2}} & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases}$$

Notemos que la función definida no es más que tomar el punto cuyas coordenadas son las entradas de los puntos $a$ y $b$ ordenadas de la siguiente manera

$$(a,b) \to (a_1, b_1, a_2, b_2, ...).$$

Veremos que en efecto $f$ es un homeomorfismo. La inyectividad se sigue de lo siguiente, $f((a,b)) = f((c,d))$, entonces $(a_1, b_1, a_2, b_2, ...) = (c_1, d_1, c_2, d_2, ...)$ y por lo tanto $a_i = c_i$, $b_i = d_i$, para toda $i \in \mathbb{N}$. Esto implica que $(a,b) = (c,d)$.

Para ver que $f$ es suprayectiva tomemos $h = (h_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Delta$ y definimos $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ por $a_n = h_{2n-1}$ y $b_n = h_{2n}$ para toda $n \in \mathbb{N}$. De esta manera $f(a,b) = (a_1, b_1, ...) = (h_1, h_2, ..., h_{2n-1}, h_{2n}, ...)$. Así concluimos que $f$ es suprayectiva y por lo tanto una biyección.

Ahora veamos que es continua. Para esto consideramos las proyecciones:

$$\vartheta_i : \Delta \times \Delta \to \Delta \quad i \in \{1,2\},$$

donde $\vartheta_1(a,b) = a$, $\vartheta_2(a,b) = b$ son continuas. Llamamos $\pi_i$ a la proyección $\pi_i : \Delta \to 2$ de manera que,

$$(\pi_j \circ \vartheta_i)(a,b) = \begin{cases} a_j & \text{si } i = 1 \\ b_j & \text{si } i = 2. \end{cases}$$

Por otro lado

$$(\pi_j \circ f)(a,b) = \begin{cases} a_{\frac{j+1}{2}} & \text{si } j \text{ es impar} \\ b_{\frac{j}{2}} & \text{si } j \text{ es par.} \end{cases} \tag{4.2}$$

De manera que para los distintos casos: $j = 2k-1$ , $j = 2k$ y de la ecuación anterior obtenemos :

$\pi_{2k-1} \circ f(a,b) = a_{\frac{(2k-1)+1}{2}} = a_k$
$\pi_{2k} \circ f(a,b) = b_{\frac{2k}{2}} = b_k.$

Esto último nos permite asegurar lo siguiente:

$$(\pi_{2k-1} \circ f)(a,b) = \pi_k \circ \vartheta_1(a,b)\ ,\ (\pi_{2k} \circ f)(a,b) = \pi_k \circ \vartheta_2(a,b).$$

Con esto ultimo podemos afirmar de manera clara que cada $\pi_i \circ f$ es continua ya que es la composición de dos proyecciones continuas. Como $f$ es una función al producto $\Delta$ es suficiente ver que cada $\pi_i \circ f$ es continua para toda $i \in \mathbb{N}$, por lo que $f$ resulta ser continua. Para concluir este caso falta decir que como $f : \Delta \times \Delta \to \Delta$, es una biyección continua de un compacto en un Hausdorff, entonces por el lema 1.1.1 $f$ es un homeomorfismo.

Para el paso inductivo supongamos que para toda $i < n$, $\Delta^i$ es homeomorfo a $\Delta$ y sea $\varphi : \Delta^{n-1} \to \Delta$ un homeomorfismo. Así, $f \circ (\varphi \times Id_\Delta) : \Delta^{n-1} \times \Delta \to \Delta$ resulta ser un homeomorfismo, donde $\varphi \times Id_\Delta(a,b) := (\varphi(a), b)$. □

A continuación probaremos que $\Delta^{\mathbb{N}}$ es homeomorfo a $\Delta$. La prueba conserva mucha similitud con la demostración anterior. Utilizaré que $\Delta^{\mathbb{N}} := (2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}} \cong 2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$. Al ser $\mathbb{N}$ un espacio localmente compacto y Hausdorff, se vale el homeomorfismo en los subespacios de funciones continuas, es decir $C_C(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}) \cong C_C(\mathbb{N}\times\mathbb{N}, 2)$. Como $\mathbb{N}$ es discreto sabemos que $C_C(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}) = (2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$ y $C_c(\mathbb{N}\times\mathbb{N}, 2) = 2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$, y por esta razón se concluye que $2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \cong (2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$.

**Teorema 4.1.3.** $\Delta^{\mathbb{N}}$ *es homeomorfo a* $\Delta$

*Demostración.* Recordemos que $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ es numerable de manera que existe una biyección de $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\times\mathbb{N}$. Como se observó anteriormente $\Delta^{\mathbb{N}}$ es homeomorfo a $2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$, donde $2 := \{0,1\}$. Ahora, sea $f : 2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \to 2^{\mathbb{N}}$ definida de la siguiente manera:

$$f(a) = a \circ \alpha.$$

Notemos que $f$ esta bien definida puesto que $a \in 2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$, es decir $a : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to 2$.

Para ver que $f$ es inyectiva recordemos que $\alpha$ es suprayectiva de manera que $a \circ \alpha = b \circ \alpha$ implica $a = b$, pues $\alpha$ es invertible por la derecha. Para ver la suprayectividad, sea $c \in \Delta = 2^{\mathbb{N}}$ y recordamos que $\alpha$ es biyectiva y por lo tanto existe $\alpha^{-1}$. De esta manera definimos $c' = c \circ \alpha^{-1} \in 2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ y observemos que $f(c') = f(c \circ \alpha^{-1}) = c \circ \alpha^{-1} \circ \alpha = c$, por lo que $f$ es suprayectiva.

Para ver que $f$ es continua definimos $\vartheta_i : 2^{\mathbb{N}} \to 2$ como $\vartheta_i(h) = h(i)$, la proyección en la $i$-ésima coordenada. Análogamente nos tomamos $\pi_{(n,m)} : 2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \to 2$ como $\pi_{(n,m)}(x) = x((n,m))$.

Como $2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ y $2^{\mathbb{N}}$, tienen la topología producto de Tychonoff tanto $\pi_{(n,m)}$ como $\vartheta_i$ son continuas.

Ahora consideramos lo siguiente:

$$\vartheta_i \circ f(a) = \vartheta(a \circ \alpha) = a \circ \alpha(i) = \pi_{\alpha(i)}(a)$$

Esto demuestra que $f$ es continua.

Para terminar esta prueba basta recordar que toda biyección continua de un espacio compacto en un Hausdorff es homeomorfismo (Proposición 1.1.1) y por lo tanto $f$ es homeomorfismo. $\square$

**Proposición 4.1.4.** *El conjunto de Cantor es homeomorfo al subespacio de* $[0,1]$ *que consiste de todos los numeros* $x \in [0,1]$ *cuya expansión ternaria consta únicamente de los digitos 0,2. Este conjunto también recibe el nombre de conjunto ternario de Cantor.*

*Demostración.* Consideremos la función $\varphi : \Delta \to [0,1]$, definida por:

$$\varphi((a_i)_{i\in\mathbb{N}}) = 2\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i}.$$

Sea $d_\Delta(a,b) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|a_i - b_i|}{2^i}$ la métrica en $\Delta$ definida en 4.1. Dadas $\varphi(a), \varphi(b) \in \varphi(\Delta)$, tenemos:

$$\begin{aligned} |\varphi(a) - \varphi(b)| &= |2\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i} - 2\sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{3^i}| = 2|\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i - b_i}{3^i}| \\ &\leq 2\sum_{i=1}^{\infty} \frac{|a_i - b_i|}{3^i} \leq 2\sum_{i=1}^{\infty} \frac{|a_i - b_i|}{2^i} = 2d_\Delta(a,b). \end{aligned}$$

De esta manera queda clara la continuidad de $\varphi$. Evidentemente $\varphi$ es inyectiva y en la imagen es una biyección, como es una biyección continua con dominio compacto y el codominio Hausdorff entonces es un homeomorfismo ( Proposición 1.1.1). $\square$

**Proposición 4.1.5.** *Existe una función* $g : \Delta \to [0,1]$ *continua y suprayectiva.*

*Demostración.* Recordemos que cada $x \in [0,1] \subset \mathbb{R}$, tiene una expresión binaria, $x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{2^i}$ con $a_i \in \{0,1\}$ para toda $i \in \mathbb{N}$.

Sea $g : \Delta \to [0,1]$ definida como $g((a_i)_{i\in\mathbb{N}}) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{2^i}$. Evidentemente la función es suprayectiva. La continuidad la obtenemos de la siguiente manera, si $g(a), g(b) \in [0,1]$ y entonces

$$\begin{aligned} d(g(a), g(b)) &= |\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{2^i} - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{2^i}| = |\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i - b_i}{2^i}| \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|a_i - b_i|}{2^i} = d_\Delta(a,b). \end{aligned}$$

□

## 4.2. Teorema de Alexandrov-Urysohn

**Definición 4.2.1.** *Sean $X$ un espacio topológico y $A$ un subconjunto cerrado de $X$. Decimos que $A$ es un retracto de $X$ si existe una función continua $r : X \to A$ tal que $r|_A = Id_A$, es decir el siguiente diagrama :*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "r"] & A \\ A \arrow[u, "i_A"] \arrow[ur, "Id_A"'] & \end{tikzcd}$$

*conmuta. En este caso decimos que $r$ es una retracción.*

**Proposición 4.2.2.** *Cada subespacio cerrado no vacío de $\Delta$ es un retracto de $\Delta$.*

*Demostración.* Sea $A$ un subespacio cerrado no vació de $\Delta$. Definiremos una función $r : \Delta \to \Delta$ coordenada por coordenada.

Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = x \in \Delta$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos la $n$-ésima coordenada de $r(x)$ por:

$$(r(x))_k := \begin{cases} a_k & \text{si existe } a = (a_n)_n \in A \text{ tal que } a_i = x_i \text{ para toda } i \leq k \\ 1 - x_k & \text{en caso contrario .} \end{cases} .$$

Notemos que por la definición de $r$ para cada $x \in \Delta$ y cada $n \in \mathbb{N}$, existe una $a \in A$ de tal manera que $r(x)_i = a_i^n$ para cada $i \leq n$.

De manera que si tomamos la sucesión que correspondiente $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$, se tiene lo siguiente

$$d(r(x), a^n) = \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{|r(x)_i - a_i^n|}{2^i} \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^i}.$$

Por lo que la sucesión de elementos $\{a^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $r(x)$. Como $A$ es un cerrado tenemos que $r(x) \in A$, y por lo tanto $r(\Delta) \subseteq A$. Notemos además que $r(a) = a$ para toda $a \in A$.

Para demostrar que $r : \Delta \to \Delta$ es continua tomemos un abierto básico $U$ de $\Delta$ tal que $r(x) \in U$. Recordemos que $U := \bigcap_{i=1}^{n} \pi^{-1}(U_{\alpha_i})$ con $U_{\alpha_i}$ abierto para todo $i \in \{1, ..., n\}$, entonces $r(x)_i \in U_{\alpha_i}$ para toda $i \in \{1, ..., n\}$. Ahora definimos

$V := \bigcap_{i=1}^{n} \pi_{\alpha_i}^{-1}(\{x_i\})$, como los factores de $\Delta$ son discretos $V$ resulta ser abierto. Además notemos que para toda $y \in V$ tenemos que $y_i = x_i$ para toda $i \leq n$ con lo que $r(x)_i = r(y)_i$ para toda $i \leq n$. Es decir $r(V) \subset U$ y por lo tanto $r$ es continua.

□

**Teorema 4.2.3** (Alexandrov-Urysohn)**.** *Sea $(X, d)$ un espacio métrico compacto. Entonces $X$ es imagen continua de $\Delta$.*

*Demostración.* Como $(X, d)$ es un espacio métrico compacto entonces es Tychonoff y segundo numerable. Por la demostración del teorema de metrizabilidad de Urysonh existe un encaje $j : (X, d) \to I^{\mathbb{N}}$. Como $X$ es compacto entonces $j(X)$ es compacto y por lo tanto es cerrado.

Por la proposición 4.1.5 existe una función continua y suprayectiva de $g : \Delta \to [0, 1]$. Sea $G : \Delta^{\mathbb{N}} \to [0, 1]^{\mathbb{N}}$, dada por:

$$G((c_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (g(c_n))_{n\in\mathbb{N}}, \quad (c_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Delta^{\mathbb{N}}.$$

Ahora, como $g$ es suprayectiva existe $g^* : [0, 1] \to \Delta$, de tal manera que $g \circ g^* = Id_{[0,1]}$. Consideremos $G^* : [0, 1]^{\mathbb{N}} \to \Delta^{\mathbb{N}}$, definida por $G^*((d_n))_{n\in\mathbb{N}}) = (g^*(d_n))_{n\in\mathbb{N}}$. Observemos que $(G \circ G^*)((d_n))_{n\in\mathbb{N}} = (g(g^*(d_n))_{n\in\mathbb{N}} = Id_{[0,1]^{\mathbb{N}}}(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Esto prueba que $G$ es supayectiva. Además es evidente que $G$ es continua.

Por el teorema 4.1.3 existe un homeomorfismo $h : \Delta \to \Delta^{\mathbb{N}}$. Entonces la función

$$f := G \circ h : \Delta \to [0, 1]^{\mathbb{N}}$$

es continua (al ser una composición de funciones continuas), y suprayectiva (al ser composición de una biyección y de un función suprayectiva). Como $j(X)$ es compacto en $I^{\mathbb{N}}$ entonces es cerrado y por lo tanto $f^{-1}(j(X))$ es un conjunto cerrado de $\Delta$. Por la proposición 4.2.2 existe una retracción $r : \Delta \to f^{-1}(j(X))$, de manera que obtenemos

$$f \circ r(\Delta) = f \circ (f^{-1}(j(X))) = j(X)$$

ya que $f$ es una función suprayectiva. Para concluir notamos que como $j : X \to [0, 1]^{\mathbb{N}}$ es encaje entonces existe $j^{-1} : j(X) \to X$ y

$$(j^{-1} \circ f \circ r)(\Delta) = X.$$

Como $j^{-1} \circ f \circ r$ es una función continua, resulta que $X$ es imagen continua de $\Delta$, como se quería probar. □

## 4.3. Teorema de Banach, Frechet y Mazur.

En esta sección hay que aclarar un detalle en la notación.

Definimos es espacio de Banach $C([0,1])$ como el conjunto de todas la funciones continuas $\{f : [0,1] \to \mathbb{R}\}$ equipado con la métrica del supremo. Al ser $[0,1]$ compacto, la topologia de la convergencia puntual coincide con la topología compacto abierta y por lo tanto $C([0,1])$ es un espacio segundo numerable y separable.

**Teorema 4.3.1.** *[Banach-Mazur] Sea $(X, ||\cdot||)$ un espacio de Banach separable. Entonces existe un isomorfísmo, isométrico y lineal de $X$ en un subespacio de $C([0,1])$.*

*Demostración.* Como $X$ es un espacio de Banach separable, por el teorema 1.4.7, la bola unitaria del dual $B_{X^*}$ con la topología $w^*$ es un espacio métrico compacto. Por el teorema de Alexandrov-Urysonh (4.2.3), existe una función continua y suprayectiva $\varphi : \Delta \to (B_{X^*}, w^*)$. Definamos la función $\tilde{T} : X \to C(\Delta, \mathbb{R})$ como

$$\tilde{T}(x) := \tilde{x} \circ \varphi$$

donde $\tilde{x}(f) = f(x)$ para toda $f \in X^*$. Como la topología $w^*$ hace continuas a las funciones $\tilde{x}$ para toda $x \in X$ entonces $\tilde{T}$ esta bien definida.

Ahora definiremos $T : X \to C[0,1]$. Para ello supongamos que $\Delta \subset [0,1]$.

Si $r \notin \Delta$, sea $r_1 := \max\{p \in \Delta : p < r\}$, $r_2 := \min\{p \in \Delta : r < p\}$. Entonces podemos escribir $r$ como una combinación convexa de $r_1$, $r_2$. Concretamente, $r = \alpha_r r_1 + (1-\alpha_r) r_2$, donde

$$\alpha_r = \frac{r_2 - r}{r_2 - r_1}.$$

Notemos que la desigualdad $r_1 < r < r_2$ implica que $\alpha_r \in (0,1)$. Además, se sigue de la definición que $\alpha_r$ depende continuamente de $r$.

Ahora la extensión se define como:

$$T(x)(r) = \begin{cases} \alpha_r \tilde{T}(x)(r_1) + (1-\alpha_r)\tilde{T}(x)(r_2) & \text{si } r \notin \Delta \\ \tilde{T}(x)(r) & \text{si } r \in \Delta. \end{cases} \tag{4.3}$$

Por lo explicado anteriormente, $T(x)$ está bien definida. Lo que sigue es ver que $T(x) : [0,1] \to \mathbb{R}$ es continua para cada $x \in X$.

Observemos que para todo $r \in [0,1] \setminus \Delta$ existe una vecindad $V$ de $r$ tal que $r_1$ y $r_2$ coinciden para toda $r' \in V$. En efecto dado $r \in [0,1] \setminus \Delta$, sean $r_1$ y $r_2$ como se definió previamente. Entonces $r \in V = (r_1, r_2)$ y $V \cap \Delta = \emptyset$. Esto implica que $V$

es la vecindad buscada. De esta manera obtenemos una representación única para $r' \in V$ con los mismos $r_i$, $i \in \{1, 2\}$.

Esto implica que para todo $r \in V = (r_1, r_2)$,

$$T(x)(r) = \alpha_r \tilde{T}(x)(r_1) + (1 - \alpha_r)\tilde{T}(x)(r_2)$$

lo cual implica que $T(x)$ es continua en $V$ y por lo tanto $T(x)$ es continua en $r$ para todo $r \in [0, 1] \setminus \Delta$. Falta demostrar que $T(x)$ es continua en $\Delta$.

Sea $q \in \Delta$ y $\varepsilon > 0$. Como $\tilde{T}(x)$ es continua, existe $\delta_1 > 0$ tal que para todo $r \in \Delta$ tal que $|r - q| < \delta_1$ se cumple que $|\tilde{T}(x)(r) - \tilde{T}(x)(q)| < \varepsilon$. En particular

$$|T(x)(r) - T(x)(q)| = |\tilde{T}(x)(r) - \tilde{T}(x)(q)| < \varepsilon.$$

Escojamos $\delta < \delta_1$ con la siguiente propiedad: si $|r - q| < \delta$ y $r \in [0, 1] \setminus \Delta$, entonces $|r_1 - q| < \delta_1$ y $|r_2 - q| < \delta_1$. En este caso $T(x)(r) = \alpha_r \tilde{T}(x)(r_1) + (1 - \alpha_r)\tilde{T}(x)(r_2)$ y

$$\begin{aligned}
|T(x)(r) - T(x)(q)| &= |\alpha_r \tilde{T}(x)(r_1) + (1 - \alpha_r)\tilde{T}(x)(r_2) - \tilde{T}(x)(q)| \\
&= |\alpha_r \tilde{T}(x)(r_1) + (1 - \alpha_r)\tilde{T}(x)(r_2) - (\alpha_r \tilde{T}(x)(q) + (1 - \alpha_r)\tilde{T}(x)(q))| \\
&\leq |\alpha_r \tilde{T}(x)(r_1) - \alpha_r \tilde{T}(x)(q)| + |(1 - \alpha_r)\tilde{T}(x)(r_2) - (1 - \alpha_r)\tilde{T}(x)(q))| \\
&= \alpha_r |\tilde{T}(x)(r_1) - \tilde{T}(x)(q)| + (1 - \alpha_r)|\tilde{T}(x)(r_2) - \tilde{T}(x)(q)| \\
&< \alpha_r \varepsilon + (1 - \alpha_r)\varepsilon = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Las desigualdades anteriores prueban que $T(x)$ es continua en $q$ y por lo tanto $T(x) \in C([0, 1], \mathbb{R})$.

Es fácil ver $T$ es una función lineal de $X$ en $C([0, 1])$. Sea $r \in \Delta$, y $\varphi_r := \varphi(r) \in B_{X^*}$. Entonces

$$\begin{aligned}
\tilde{T}(\alpha x + x')(r) &= (\alpha \tilde{x} + \tilde{x}') \circ \varphi(r) = \varphi_r(\alpha x + x') \\
&= \alpha \cdot \varphi_r(x) + \varphi_r(x') = \alpha \cdot \tilde{x} \circ \varphi(r) + \tilde{x'} \circ \varphi(r) \\
&= \alpha \cdot \tilde{T}(x)(r) + \tilde{T}(x')(r).
\end{aligned}$$

De aquí se deduce la linealidad de $\tilde{T}$ y en consecuencia $T$ también es lineal. Además cumple

$$\begin{aligned}
||T(x)|| &:= \sup_{r \in [0,1]} |T(x)(r)| = \sup_{d \in \Delta} |\tilde{T}(x)(d)| && (4.4) \\
&= \sup_{d \in \Delta} |\tilde{x} \circ \varphi(d)| = \sup_{f \in B_{X^*}} |\tilde{x}(f)| = ||\tilde{x}|| = ||x||. && (4.5)
\end{aligned}$$

La ultima igualdad se justifica notando que $|\tilde{x}(f)| = |f(x)| \leq ||f||||x|| = ||x||$, por lo que $||\tilde{x}|| \leq ||x||$. Además como consecuencia del teorema Hanh-Banach 1.4.10

existe $f \in B_{X^*}$ tal que $\tilde{x}(f) = f(x) = ||x||$. Es necesario decir que 4.5 se justifica recordando que $\varphi$ es suprayectiva. Por lo tanto $||\tilde{x}|| = ||x||$ y $T$ es una isometría lineal de $X$ en $C[0, 1]$.

□

Por el teorema anterior, se dice que $C([0, 1])$ es isométricamente universal para todos los espacio de Banach separables.

En el siguiente teorema demostraremos que $C([0, 1])$ es un espacio universal para los espacios métricos separables. Recordemos que el espacio $\ell_\infty$ se define como el espacio vectorial de todas las sucesiones $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ acotadas con entradas reales. Este espacio es un espacio de Banach si lo equipamos con la norma: $||x||_\infty := \sup |x_n| : n \in \mathbb{N}$, $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
**Teorema 4.3.2** (Banach, Frechet, Mazur)**.** *Sea $(X, d)$ un espacio métrico separable. Entonces existe un encaje isométrico de $X$ en $C([0, 1])$.*

*Demostración.* Sea $D = (x_n)_{x\in\mathbb{N}}$ un denso numerable en $(X, d)$. Tomemos $x_0 \in X$ y definamos $\rho : X \to \ell_\infty$ como

$$\rho(x) = (d(x, x_n) - d(x_n, x_0))_{n\in\mathbb{N}}$$

Notemos que $\rho$ esta bien definida. La desigualdad del triángulo nos dice que

$$|d(x, x_n) - d(x_n, x_0)| \leq d(x, x_0),$$

por lo que $\rho(x) \in \ell_\infty$.

Ahora mostremos que $\rho$ es una isometría de $X$ en $\ell_\infty$. Para ello sean $x, x' \in X$, entonces

$$\begin{aligned} ||\rho(x) - \rho(x')||_\infty &= \sup_{n\in\mathbb{N}} |d(x, x_n) - d(x_n, x_0) - (d(x', x_n) - d(x_n, x_0))| \\ &= \sup_{n\in\mathbb{N}} |d(x, x_n) - d(x', x_n)| \leq d(x, x'). \end{aligned}$$

Por lo tanto $||\rho(x) - \rho(x')||_\infty \leq d(x, x')$. Falta ver que $||\rho(x) - \rho(x')||_\infty \geq d(x, x')$. Para esto sea $\varepsilon > 0$, como $D$ es denso en $X$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $d(x, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$. Así

$$d(x', x_n) \geq d(x', x) - d(x, x_n) > d(x', x) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} ||\rho(x) - \rho(x')||_\infty &\geq |d(x', x_n) - d(x, x_n)| \geq d(x', x_n) - d(x, x_n) \\ &\geq d(x', x) - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} = d(x', x) - \varepsilon. \end{aligned}$$

Por lo tanto $||\rho(x) - \rho(x')||_\infty = d(x, x')$ pues $\varepsilon > 0$ es arbitraria. De manera que $\rho$ es una encaje isometríco del espacio $X$ en el espacio de Banach $\ell_\infty$. Sea $Y = \overline{span(\rho(X))}$ en $\ell_\infty$. Entonces $Y$ es separable y existe una isometría lineal $T : Y \to C([0,1])$. Por lo tanto la función $T \circ \rho$ es un encaje isométrico de $X$ en un subconjunto de $C([0,1])$. $\square$

# Bibliografía

[1] A. Arangleskii, M. Tkachenco, *Topological Groups and Related Structures*, Atlantis Press, USA, 2008.

[2] Czeslaw. Bessaga, Aleksander. Pelczynsky, *Selected Topics in Infinite-dimensional topology*, PWN-Polish Scientific Publishers, Warszawa, 1975.

[3] J. Dujundji, *Topology*, Allyn and Bacon, Series in Advanced Mathematics, (1966).

[4] R. Engelkin, *General Topology*, Heldermann, Series in Pure Mathematics vol.6, Berlin, 1989.

[5] F. Marián, F. Habala, P. Hájek, P. Montesinos, V. Zizler, *Banach Space Theory: the Basis for Linear and Nonlinear Analysis*, Springer(CMS), Canada, 2010.

[6] F. Marián, F. Habala, P. Hájek, P. Montesinos, V. Zizler, *Functional Analysis and Infinite-Dimensional Geometry*, Springer(CMS), Canada, 2001.

[7] J. Munkres, *Topology*, Prentice Hall, USA, 2000.

[8] W. Rudin, *Functional Analysis*, Mac Graw Hill, USA, 1973.

[9] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, Mac Graw Hill, USA, 1986.

[10] V. V. Uspenskii, *A universal topological group with a countable base*, Functional Analysis and its Applications Vol. 20, (1986) num2, 160-161.

[11] J. Van Mill, *Infinite-Dimensional Topology (Prerequisites and Introduction)*, North-Holland Math. Library 43, Amsterdam 1989.