Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Procesos de Lévy y Teoría de Excursiones

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:
Matemático

PRESENTA:
Martin Bladt Eslava

DIRECTOR DE TESIS:
Dr. José Luis Pérez Garmendia

Ciudad de México Junio, 2015

Hoja de datos del jurado

1. Datos del alumno
Bladt
Eslava
Martin
13 15 88 13
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
310042978

2. Datos del Tutor
Dr.
Pérez
Garmendia
José Luis Ángel

3. Datos del sinodal 1
Dr.
Mena
Chávez
Ramsés Humberto

4. Datos del sinodal 2
Dr.
Baltazar
Larios
Fernando

5. Datos del sinodal 3
Dr.
Uribe
Bravo
Gerónimo

6. Datos del sinodal 4
Dr.
López
Ortega

Sergio Iván

7. Datos del trabajo escrito
Procesos de Lévy y Teoría de Excursiones
113 p
2015.

Índice general

Agradecimientos

Agradezco a mi asesor y mis sinodales por el apoyo recibido durante la realización y conclusión de este trabajo.

Agradezco a mis padres por el apoyo brindado durante toda la carrera.

Investigación realizada gracias al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) de la UNAM IA101014 Procesos Infinitamente Divisibles. Agradezco a la DGAPA-UNAM la beca recibida.

Introducción

La presente tesis tiene como objetivo hacer una exposición ordenada y sistemática de la teoría general de los procesos de Lévy y Teoría de Excursiones.

No se pretende de ninguna manera ser exhaustivo, sin embargo las pruebas se realizaron con más argumentos y cálculos más explícitos que en la literatura. En particular las demostraciones de una descomposición de Lévy-Itô para procesos aditivos, como enunciada en [**3**], y del resultado principal de [**6**] son detalladas y mas claras para el lector no tan familiarizado con la teoría.

Los procesos de Lévy son el equivalente a tiempo continuo de las caminatas aleatorias, i.e., procesos estocásticos con incrementos independientes y estacionarios. Su importancia como procesos de Markov espacialmente homogéneos y como un caso particular de los procesos de Feller hace que su manejo no sea tan complicado. La teoría de análisis de Fourier y análisis funcional, a pesar de no ser fundamental, es de utilidad en muchas de las pruebas, haciéndolas mas elegantes.

Buenos ejemplos de procesos de Lévy son el movimiento browniano y el proceso Poisson compuesto. De hecho, una caracterización importante, la de Lévy-Itô, nos dice todo proceso de Lévy se puede escribir como suma independiente de éstos dos procesos mencionados y un proceso adicional correspondiente a los posibles saltos pequeños. Tal descomposición se enuncia y demuestra en la primera sección del primer capítulo. Este capítulo en su mayoría está basado en [**2**] y [**3**], Inicialmente se demuestra la descomposición de Lévy-Itô, y se procede en las secciones subsecuentes a hacer un tratamiento analítico de algunos funcionales importantes de los procesos de Lévy, demostrando los resultados para procesos de Feller cuando la claridad de la demostración no se ve afectada. De la cuarta a la octava sección de tal capítulo se hace un tratamiento del comportamiento asintótico de los procesos de Lévy y se introducen los conceptos de dualidad, capacidad, polaridad y energía, los cuales resultan estar muy realacionados entre sí. También se define la noción de transitoriedad y recurrencia y se estudia su relación con los demás conceptos introducidos. La identidad de Hunt es un ejemplo de una herramienta de demostración importante en estas secciones. Tal identidad se enuncia y demuestra en su debido momento, pero otros resultados como La identidad de Parseval de análisis de Fourier son utlizadas sin demostración. Se refiere a [**7**] para todos los resultados que se utilizan sobre análisis funcional. La sección final trata a los procesos de Lévy no decrecientes. El estudio de tales procesos, llamados subordinadores, es de crucial importancia para la teoría de excursiones del siguiente capítulo.

El segundo capítulo los subordinadores aparecen de manera natural al considerar las excursiones de un proceso de Markov. La primera sección está enteramente basada en [**2**] y desarrolla la teoría general de excusiones, haciendo precisa esta noción intuitiva. El resultado principal es la fórmula de compesación, la cual es un corolario a un teorema que nos dice que el procesos de excursiones es puntual de Poisson con medida característica dada por la medida de excursión. Para un tratamiento mas exhaustivo de excursiones se refiere al libro ya citado. La segunda sección del segundo capítulo es una sencilla aplicación a la teoría de riesgo de la fórmula de compensación para excursiones. Las funciones de escala son la herramienta mas fuerte que se utiliza sin demostración. Para un tratamiento de funciones de escala en conexión con teoría de excursiones de refiere a [**4**]. Otras referencias importantes para ambas secciones de este capítulo son [**1**], [**5**] y [**6**].

Capítulo 1

Teoría general de procesos de Lévy

Este capítulo aborda la parte teórica del presente trabajo, haciendo un tratamiento detallado de la teoría de los procesos de Lévy. En su mayoría se basa en [**2**] y [**3**], sin embargo el lector podrá apreciar algunas modificaciones en las demostraciones, generalmente siendo mucho más detalladas que en los textos mencionados.

Inicialmente se demuestra la descomposición de Lévy-Itô, una caracterización importante de los procesos de Lévy que es de frecuente utilidad en las secciones subsecuentes. Las secciones dos y tres son tratamientos analíticos de algunos funcionales importantes de los procesos de Lévy, sin embargo la teoría se desarrolla para una clase mas general de procesos: los de Feller.

De la cuarta a la octava sección se hace un tratamiento del comportamiento asintótico de los procesos de Lévy y se introducen los conceptos de dualidad, capacidad, polaridad y energía, los cuales resultan estar muy realacionados entre sí. La identidad de Hunt es un ejemplo de una herramienta de demostración importante en estas secciones. Tal identidad se enuncia y demuestra en su debido momento, pero otros resultados como La identidad de Parseval de análisis de Fourier son utlizadas sin demostración. La sección final trata a los procesos de Lévy no decrecientes. El estudio de tales procesos, llamados subordinadores, es de crucial importancia para la teoría de excursiones del siguiente capítulo.

1. La descomposición de Lévy-Itô

La meta de esta sección es llegar a la descomposición de Lévy-Itô, una caracterización de los procesos de Lévy como una suma independiente de un proceso browniano con deriva, un proceso Poisson compuesto y una martingala cuadrado integrable. Algunos resultados preliminares, tanto técnicos como teóricos, facilitan la exposición.

Lema 1.1. *(Fórmula exponencial) Sea ξ una medida aleatoria de Poisson en R^+ con intensidad $\mu = E\xi$ y $f \geq 0$ medible. Entonces*

$$E \exp\left(-\int f d\xi\right) = \exp\left(-\int (1 - e^{-f}) d\mu\right),$$

y la misma fórmula es válida para if $(i = \sqrt{-1})$*, con* f *una función real, si se tiene* $\int(|f| \wedge 1)d\mu < \infty$*.*

Demostración. Si X es una variable aleatoria Poisson con media m, se tiene

$$Ee^{-cX} = e^{-m} \sum_{k \geq 0} \frac{(me^{-c})^k}{k!} = e^{-m(1-e^{-c})},\ c \in C.$$

Si $f = \sum_{k \leq K} c_k 1_{B_k}$ con B_k medibles ajenos (tales que las variables ξB_k son independientes) tal que $\mu B_k < \infty$, se tiene

$$\begin{aligned} E\exp\left(-\int f d\xi\right) &= E\exp\left(-\sum_{k\leq K} c_k \xi B_k\right) \\ &= \prod_{k\leq K} E\exp\left(-c_k\xi B_k\right) \\ &= \prod_{k\leq K} \exp\left(-(\mu B_k)(1-e^{-c_k})\right) \\ &= \exp\left(-\sum_{k\leq K} \mu B_k(1-e^{-c_k})\right) \\ &= \exp\left(-\int (1-e^{-f})d\mu\right). \end{aligned}$$

Si $f \geq 0$, podemos tomar una sucesión de $f_n \geq 0$ simples con $f_n \uparrow f$. Por convergencia monótona se cumple que

$$\int f_n d\xi \to \int f d\xi, \quad \int (1-e^{-f_n})d\mu \to \int (1-e^{-f})d\mu.$$

Finalmente, por convergencia dominada y por continuidad de la función exponencial, el resultado se cumple para $f \geq 0$.

Supongamos ahora que $\int(|f| \wedge 1)d\mu < \infty$. De la fórmula anterior tenemos, reemplazando f con $c|f|$,

$$E\exp\left(-\int c|f|d\xi\right) = \exp\left(-\int (1-e^{-c|f|})d\mu\right).$$

La función del integrando del lado derecho, cuando $c \downarrow 0$, está dominada por $|f| \wedge 1$, de donde, por convergencia dominada, la expresión de la derecha converge a $e^0 = 1$.

A su vez, la variable aleatoria a la que se le toma esperanza en el lado izquierdo puntualmente va a $e^0 = 1$ si $\int |f| d\xi < \infty$ y se queda en cero en caso contrario, cuando $c \downarrow 0$. Se concluye, aplicando convergencia dominada una vez más, que $P\{\int |f| d\xi < \infty\} = E1\{\int |f| d\xi < \infty\} = 1$, i.e., $\int |f| d\xi < \infty$ c.s.

Tomemos funciones simples $f_n \to f$ tal que $|f_n| \leq |f|$ y $\int |f_n| d\mu < \infty$ (notemos que $\int (|f| \wedge 1) d\mu < \infty \Rightarrow \int (|f| \wedge k) d\mu \leq k \int (|f| \wedge 1) < \infty$, $\forall k \in N$). Por propiedades de números complejos, $|1 - e^{if_n}| \leq |f| \wedge 2$, de donde, aplicando convergencia dominada, la aserción es consecuencia de la versión para las f_n simples. $\square$

El siguiente Lema es útil en la demostración del teorema principal de esta sección, el cual se enuncia y demuestra inmediatamente después.

LEMA 1.2. *Sean X, Y procesos càdlàg en R^d con $X_0 = Y_0 = 0$ tal que (X, Y) tiene incrementos independientes y no tiene saltos fijos. Supongamos que Y es un proceso escalonado c.s. y $\Delta X \cdot \Delta Y = 0$ c.s. Entonces X, Y son independientes.*

DEMOSTRACIÓN. Definimos

$$\eta = \sum_t \delta_{(t, \Delta Y_t)} = \sum_t 1\{(t, \Delta Y_t) \in \cdot\},$$

lo cual, como se hará ver en la primera parte el teorema que sigue de este lema, implica que η es localmente Y-medible y Poisson. Supongamos s.p.g. que los saltos de Y son acotados (de no ser así podemos aplicar una función determinista que transforme los saltos, por ejemplo con $\exp(-|x|)$, la cual no afecta la estructura de independencia/dependencia). Entonces Y tiene variación integrable, ya que, como es escalonado, puede expresarse en términos de η, la cual es Poisson.
Fijemos $a, b \in R^d$ y definamos

$$M_t = \frac{e^{iaX_t}}{Ee^{iaX_t}}, \quad N_t = \frac{e^{ibY_t}}{Ee^{ibY_t}}, \quad t. \geq 0$$

M y N son localmente acotadas (ya que su denominador no se anula, gracias a que tienen incrementos independientes, son càdlàg y sin saltos fijos), N es de variación integrable en intervalos finitos (su denominador es continuo y no se anula y Y es de variación integrable en compactos) y son martingalas ya que, por ejemplo, para M

se tiene, con la filtración natural de X y $s < t$,

$$E(M_t|F_s) = \frac{E(e^{ia(X_t - X_s)}e^{iaX_s}|F_s)}{E(e^{ia(X_t - X_s)}e^{iaX_s})} = \frac{e^{iaX_s}Ee^{ia(X_t - X_s)}}{Ee^{ia(X_t - X_s)}Ee^{iaX_s}} = M_s,$$

por la independencia de los incrementos. Para mayor detalle ver [**3**], cap. 15.

Tiene sentido hablar de la integral de Stieltjes con respecto a N ya que al ser variación integrable, es de variación finita, c.s. Usando convergencia dominada, que una martingala tiene esperanza constante, que N también es escalonado y los incrementos son independientes obtenemos

$$\begin{aligned}
E(M_tN_t) - 1 &= E\sum_{k\leq n}(M_{tk/n} - M_{t(k-1)/n})\sum_{k\leq n}(N_{tk/n} - N_{t(k-1)/n}) \\
&= E(M_0N_0) + E\sum_{k\leq n}(M_{tk/n} - M_{t(k-1)/n})(N_{tk/n} - N_{t(k-1)/n}) \\
&\quad + E\sum_{k\neq j}(M_{tk/n} - M_{t(k-1)/n})(N_{tj/n} - N_{t(j-1)/n}) - 1 \\
&= 1 + E\sum_{k\leq n}(M_{tk/n} - M_{t(k-1)/n})(N_{tk/n} - N_{t(k-1)/n}) \\
&\quad + \sum_{k\neq j}(EM_{tk/n} - EM_{t(k-1)/n})(EN_{tj/n} - EN_{t(j-1)/n}) - 1 \\
&= E\sum_{k\leq n}(M_{tk/n} - M_{t(k-1)/n})(N_{tk/n} - N_{t(k-1)/n}) \\
&= E\int_0^t (M_{t[sn+1-]/n} - M_{t[sn-]/n})dN_s \to E\sum_{s\leq t}\Delta M_s \Delta N_s = 0.
\end{aligned}$$

Se sigue que $Ee^{iaX_t + ibY_t} = Ee^{iaX_t}Ee^{ibY_t}$. Denotaremos por $X \sim Y$ a la igualdad en distribución de X y Y. Ahora, si $X'_t \sim X_t$ y $Y'_t \sim Y_t$ con $X'_t \perp Y'_t$ entonces $Ee^{iaX_t + ibY_t} = Ee^{iaX_t}Ee^{ibY_t} = Ee^{iaX'_t}Ee^{ibY'_t} = Ee^{iaX'_t + ibY'_t}$, por el Teorema de continuidad de Lévy, y entonces se puede afirmar, por el mismo teorema, que $(X'_t, Y'_t) \sim (X_t, Y_t)$, de donde X_t y Y_t son independientes, lo cual es suficiente para concluir que X y Y también lo son. $\square$

Teorema 1.3. *Sea X un proceso càdlàg en R^d con $X_0 = 0$. Entonces X tiene incrementos independientes y no tiene saltos fijos ($P\{X_t \neq X_{t-}\} = 0$, $\forall t > 0$) sii,* *c.s., para cada* $t \geq 0$,

$$X_t = m_t + G_t + \int_0^t \int_{|x|\leq 1} x(\eta - E\eta)(dsdx) + \int_0^t \int_{|x|>1} x\eta(dsdx),$$

para alguna función continua m *con* $m_0 = 0$*, un proceso gaussiano* G *con incrementos independientes y* $G_0 = 0$ *y un proceso de Poisson independiente* η*, con medida de intensidad* $E\eta$*, sobre* $(0, \infty) \times (R^d \backslash \{0\})$*, tal que*

$$\int_0^t \int (|x|^2 \wedge 1) E\eta(dsdx) < \infty, \; t \geq 0.$$

Demostración. Sea $\Delta X_t = X_t - X_{t-}$. Definimos la medida aleatoria

$$\eta(\cdot) = \sum_t \delta_{(t, \Delta X_t)} = \sum_t 1\{(t, \Delta X_t) \in \cdot\},$$

la suma extendiéndose sobre toda $t > 0$ con $\Delta X_t \neq 0$. Sean $s < t$, f, con dominio R^d, una función real, continua y cero en una vecindad del origen y particiones $\{s = t_{n,0} < \cdots < t_{n,n}\}_{n \in N}$ de norma decreciente. Se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_k f(X_{t_{n,k}} - X_{t_{n,k-1}}) = \int f(x)\eta((s,t] \times dx),$$

ya que, dada una trayectoria ω, en los puntos donde es continua, el argumento de f se encuentra, eventualmente, dentro de la vecindad donde esta se anula, mientras que en los puntos de discontinuidad de ω, como X es càdlàg y f continua, los sumandos se aproximan a f evaluada en el tamaño de tales saltos. Notemos que cada variable aleatoria del tipo $\sum_k f(X_{t_{n,k}} - X_{t_{n,k-1}})$ es medible con respecto a la σ-álgebra generada por el proceso $X_r - X_s$, $r \in [s,t]$, ya que cada sumando lo es y f es continua, lo cual la hace medible con respecto a la σ-álgebra boreliana. Por tanto, la integral límite es medible.

Por el Lema de Urysohn podemos aproximar a $\eta((s,t] \times K)$ para cualquier compacto K perteneciente a un conjunto generador de la σ-álgebra boreliana de $R^d \backslash \{0\}$ (por ejemplo cajas cerradas) con integrales del tipo anterior, tomando un sucesión f_n creciente a 1_K de funciones reales continuas que se anulan en una vecindad de cero y, por convergencia monótona,

$$\int f_n(x)\eta((s,t]\times dx)\uparrow\int 1_K(x)\eta((s,t]\times dx)=\eta((s,t]\times K).$$

Esto muestra que $\eta((s,t]\times K)$ es medible, de donde se sigue, por el Teorema de Clases Monótonas, que ηB es medible, con B un conjunto Borel en $(s,t]\times R^d\backslash\{0\}$.

Por la aproximación anterior, $\eta((s,t]\times\cdot)$ es una medida medible con respecto a la σ-álgebra generada por el proceso X_r-X_s, $r\in[s,t]$.

Ahora, por hipótesis X tiene incrementos independientes y no tiene saltos fijos y por lo tanto las mismas propiedades son validas para η. Estas son condiciones suficientes para que η sea Poisson (Teorema 12.10 en [**3**]).

Continuemos con la demostración del Teorema, tomando en cuenta el resultado del Lema anterior a éste Teorema. Mostremos que $\int_0^t\int(|x|^2\wedge 1)E\eta(dsdx)<\infty$, $t\geq 0$. Se define $\eta_t=\eta([0,t]\times\cdot)$, una medida aleatoria sobre $R^d\backslash\{0\}$. Como $[0,t]$ es compacto, todo sub-conjunto infinito tiene un punto de acumulación. Si tal conjunto infinito es el de los saltos de magnitud mayor a una $\epsilon>0$, X no puede ser càdlàg en el punto de acumulación. Se concluye que $\eta_t\{x:|x|>\epsilon\}<\infty, c.s,\ \forall t,\epsilon>0$. Como η es Poisson, la misma relación se cumple para $E\eta_t$ (fórmula exponencial) por lo que basta probar que

$$\int_{|x|\leq 1}|x|^2E\eta_t(dx)<\infty,\ t\geq 0.$$

Para este fin se introduce, para cada $\epsilon>0$, el proceso dado por

$$X_t^\epsilon=\sum_{s\leq t}\Delta X_s 1\{|\Delta X_s|>\epsilon\}=\int_{|x|>\epsilon}x\eta_t(dx),\ t\geq 0.$$

Notemos que $(\Delta X^\epsilon)_t=\Delta X_t 1\{|\Delta X_s|>\epsilon\}$ y $(\Delta(X-X^\epsilon))_t=\Delta X_t-\Delta X_t 1\{|\Delta X_s|>\epsilon\}=\Delta X_t 1\{|\Delta X_s|\leq\epsilon\}$. Se sigue que $\Delta(X-X^\epsilon)\cdot\Delta X^\epsilon=0$, y por como están definidos, también se cumple que $X-X^\epsilon$ y X^ϵ tienen incrementos independientes e inician en cero. También se tiene que, por estar definido como una serie (o bien, porque η_t es de conteo), X^ϵ es escalonado. Así, se cumplen las hipótesis del Lema

1.3 y concluimos que tales procesos son independientes. Los procesos càdlàg con incrementos independientes y sin saltos fijos cumplen que $Ee^{iuX_t} \neq 0$, $\forall \epsilon, t > 0, u \in R^d$. Entonces, por la fórmula exponencial, tenemos que $\forall \epsilon, t > 0$ y $u \in R^d \backslash \{0\}$,

$$0 < |Ee^{iuX_t}| \leq |Ee^{iuX_t^\epsilon}| = \left| E \exp\left(\int_{|x|>\epsilon} iux\eta_t(dx) \right) \right|$$

$$= \left| \exp\left(\int_{|x|>\epsilon} (e^{iux} - 1) E\eta_t(dx) \right) \right| = \exp\left(\int_{|x|>\epsilon} (\cos(ux) - 1) E\eta_t(dx) \right).$$

Se usó la independencia probada de $X - X^\epsilon$ y X^ϵ en el segundo paso. Haciendo $\epsilon \to 0$, por Taylor y la estricta positividad del término de la derecha se obtiene

$$\int_{|ux|\leq 1} |ux|^2 E\eta_t(dx) \leq K \int (1 - \cos(ux)) E\eta_t(dx) < \infty,$$

para alguna constante K. Tomando $u = x/|x|$ se obtiene el resultado.
Sea $\epsilon \in [0, 1]$ y definimos

$$M_t^\epsilon = \int_0^t \int_{\epsilon<|x|\leq 1} x(\eta - E\eta)(dsdx),\ t \geq 0,$$

$$J_t = \int_0^t \int_{|x|>1} x\eta(dsdx),\ t \geq 0.$$

Al inicio de la prueba se mostró que η es localmente X- medible. Usando que los incrementos de X son independientes se obtiene, para $s < t$,

$$E(M_t^\epsilon | F_s) = E\left(\int_s^t \int_{\epsilon<|x|\leq 1} x(\eta - E\eta)(dsdx) \right) + \int_0^s \int_{\epsilon<|x|\leq 1} x(\eta - E\eta)(dsdx)$$

$$= \int_0^s \int_{\epsilon<|x|\leq 1} x(\eta - E\eta)(dsdx),$$

ya que $E\eta$ es la intensidad de η, y $|x|$ es $E\eta$-integrable en la región dada (tomando $u = x/|x|^{3/2}$ en la prueba inmediata anterior). Así M^ϵ es martingala.

Notemos que en lo anterior hemos usado que si $X = \int f d\eta$ se cumplen dos cosas (se prueban de la misma manera que se probo la fórmula exponencial):

a) Si $\int |f| dE\eta < \infty$ entonces $EX = \int f dE\eta$;

b) Si $\int |f| dE\eta < \infty$ y $\int f^2 dE\eta < \infty$ entonces $EX^2 = \int f^2 dE\eta + (\int fE\eta)^2$.

Se afirma que M^ϵ no sólo es martingala sino también cuadrado integrable. Para esto basta ver que, por b),

$$\begin{aligned} E\left(\left\{M_t^\epsilon + \int_0^t \int_{\epsilon<|x|\le 1} xE\eta(dsdx)\right\}^2\right) &= E\left(\left\{\int_0^t \int_{\epsilon<|x|\le 1} x\eta(dsdx)\right\}^2\right) \\ &= \int_0^t \int_{\epsilon<|x|\le 1} |x|^2 E\eta(dsdx) \\ &+ \left(\int_0^t \int_{\epsilon<x\le 1} xE\eta(dsdx)\right)^2 < \infty. \end{aligned}$$

Ahora consideremos el espacio de martingalas cuadrado integrables de media cero (como M^ϵ) sobre $[0,T]$ con respecto a una filtración dada F_t y lo denotaremos por M_T^2. Se define el producto interno $\langle M, N\rangle = EM_T N_T$, con el cual M_T^2 es un espacio de Hilbert (una consecuencia de que L^2 es completo).

Por la desigualdad maximal de Doob se tiene, para t arbitraria,

$$E\left(\sup_{0\le s\le t} |M_s^\epsilon - M_s|^2\right) \le 4||M_t^\epsilon - M_t||_2^2 \to 0, \quad \epsilon \to 0,$$

para alguna martingala M cuadrado integrable, que tiene los mismos saltos que todas las M^ϵ y tiene incrementos independientes ya que es el límite (casi seguro bajo una subsucesión decreciente de ϵ_n) de procesos que cumplen tal característica.

Se sigue que $M + J$ tiene los mismos saltos, c.s., que X (los pequeños y grandes) por lo que el proceso resultante $Y = X - M - J$ es continuo, c.s. Como X y η son localmente X-medibles, Y es un proceso con incrementos independientes y continuo c.s., lo cual implica que es gaussiano, con funciones de media y covarianza continuas (Teorema 13.4 en [**3**]). Sustrayendo las medias, m_t, se tiene un proceso gaussiano centrado, G. Como $\Delta G_t = 0$, c.s, las condiciones Lema 1.3 se satisfacen para mostrar que G y $(M^\epsilon + J)$ son independientes. Se sigue que G y η son independientes también. Esto prueba una implicación.

La otra implicación es inmediata, ya que de la teoría de medidas aleatorias de Poisson, la existencia de las integrales es consecuencia de la finitud de $\int_0^t \int (|x|^2 \wedge 1) E\eta(dsdx)$. El proceso resultante tendrá incrementos independientes. $\square$

Una discusión sobre un caso particular importante, los procesos de Lévy, debe destacarse.

DEFINICIÓN 1.4. *A un proceso estocástico càdlàg, que comienza en el origen y con incrementos independientes y estacionarios se le llama un proceso de Lévy.*

Notemos que de la definición se puede probar que el proceso es continuo en probabilidad y que la estacionariedad excluye la posibilidad de que haya saltos fijos. Algunos autores no requieren que el proceso sea càdlàg y requieren que el proceso sea continuo en probabilidad, sin embargo, esta ultima condición junto con los incrementos independientes, asegura que el proceso tiene una versión càdlàg sin saltos fijos.

COROLARIO 1.5. *(Lévy-Itô) Un X un proceso càdlàg en R^d es de Lévy si y sólo si, c.s., para cada $t \geq 0$,*

$$X_t = bt + \sigma B_t + \int_0^t \int_{|x|\leq 1} x(\eta - E\eta)(dsdx) + \int_0^t \int_{|x|>1} x\eta(dsdx),$$

para algún vector b, matrix $(d \times d)$ σ, un movimiento Browniano B y un proceso independiente de Poisson η, con medida de intensidad $E\eta = \lambda \otimes \nu$, con ν sobre $R^d \backslash \{0\}$, tal que

$$\int (|x|^2 \wedge 1)\nu(dx) < \infty.$$

A ν se le conoce como la medida de Lévy del proceso. λ es la medida de Lebesgue.

DEMOSTRACIÓN. Un proceso de Lévy satisface las condiciones del Teorema 1.2, de donde tiene la representación probada. Notemos que la homogeneidad en el tiempo implica que que la medida $E\eta$ es invariante bajo transformaciones rígidas del tiempo sobre $(0, \infty) \times (R^d \backslash \{0\})$, ya que η es localmente X-medible (ver demostración del Teorema 1.2). Se sigue, por caracterización de la medida de Lebesgue, que $E\eta = \lambda \otimes \nu$ (Teorema 2.6 en [**3**]). Como $t \int (|x|^2 \wedge 1)\nu(dx) = \int_0^t \int (|x|^2 \wedge 1)\lambda \otimes \nu(dsdx) =$

$\int_0^t \int (|x|^2 \wedge 1) E\eta(dsdx) < \infty$, $t \geq 0$ tenemos $\int (|x|^2 \wedge 1)\nu(dx) < \infty$. Como un proceso gaussiano con incrementos independientes y estacionarios es necesariamente un movimiento browniano con deriva (ver, por ejemplo, Teorema 13.4 en [**3**]), se siguen la representación e independencia afirmadas.

La implicación inversa se sigue de inmediato (lo único que falta probar es homogeneidad en tiempo, lo cual se sigue de tales propiedades para la medida de Lebesgue y el browniano con deriva). □

Notemos que, como η es localmente X-medible, ν esta determinada de manera única por la distribución del proceso. Por sustracción, b y σ también lo están.

Se concluye la sección con algunos resultados sobre el exponente característico.

COROLARIO 1.6. *(Lévy-Khintchine) Sea X de Lévy. Entonces $Ee^{iuX_t} = e^{-t\Psi(u)}$, donde*

$$\Psi(u) = -iub + \frac{1}{2}u\sigma u + \int (1 - e^{iux} + iux1\{|x| \leq 1\})\nu(dx),$$

donde (b, σ, ν) son la triada asociada a la descomposición de Lévy-Itô del proceso. Mas aún, la ley de X_1 determina de manera única a Ψ.

DEMOSTRACIÓN. La representación es inmediata de la fórmula exponencial aplicada a la descomposición de Lévy-Itô. Por la unicidad de las funciones características y notando que, por la independencia de los incrementos, Ψ determina de manera única las distribuciones unidimensionales y consecuentemente finito-dimensionales de X. La unicidad de Ψ ahora es consecuencia de la unicidad de la triada (b, σ, ν). □

DEFINICIÓN 1.7. *A Ψ de la descomposición de Lévy-Khintchine la llamamos el exponente característico del proceso de Lévy X.*

PROPOSICIÓN 1.8. *Supongamos que un proceso de Lévy X es real con triada característica (b, σ, ν). Entonces*

$$\lim_{|\lambda| \to \infty} \frac{\Psi(\lambda)}{\lambda^2} = \frac{\sigma}{2}.$$

Si X tiene variación acotada, ocurre

$$\lim_{|\lambda|\to\infty} \frac{\Psi(\lambda)}{\lambda} = -id,$$

para algún d fijo, que llamaremos el coeficiente de deriva.

Si X toma valores en R^d, lo mismo se cumple para cada coordenada de Ψ, lo cual, por cálculo, es suficiente para que la proposición se cumpla para el caso d-dimensional.

Demostración. Por suma de límites,

$$\lim_{|\lambda|\to\infty} [1 - \exp(i\lambda x) + i\lambda x 1\{|x| < 1\}]/\lambda^2 = 0$$

para cada x fija. Por una expansión de Taylor se tiene

$$[1 - \exp(i\lambda x) + i\lambda x 1\{|x| < 1\}]/\lambda^2 \leq 4(1 \wedge x^2)$$

para $|\lambda| \geq 1$ y todo x. Recordando que $\int (1 \wedge x^2)\nu(dx) < \infty$, por convergencia dominada

$$\lim_{|\lambda|\to\infty} \int [1 - \exp(i\lambda x) + i\lambda x 1\{|x| < 1\}]\nu(dx)/\lambda^2 = 0.$$

De la fórmula de Lévy-Khintchine ahora es clara la primera aserción, ya que el término lineal gaussiano desaparece y el término cuadrático es constante.

Supongamos ahora que X tiene variación acotada, esto es, las trayectorias del proceso tienen variación acotada en cada intervalo compacto, c.s.. La fórmula exponencial nos dice que, c.s.,

$$\sum_{0\leq s\leq t} |\Delta X_s| < \infty, \ \forall t \geq 0 \Leftrightarrow \int (1 \wedge |x|)\nu(dx) < \infty.$$

Así, tenemos que, c.s., $\int (1 \wedge |x|)\nu(dx) < \infty$. Notemos que en este caso, la función

$$\lambda \to \int \lambda x 1\{|x| < 1\}\nu(dx) =: \lambda b_1$$

es lineal y está bien definida. Pero la parte continua del proceso es la del movimiento Browniano, la cual sabemos que tiene variación (no cuadrática) infinita. Luego, debe suceder que $\sigma = 0$. Combinando a b y b_1 en un mismo producto (escalar) tenemos la representación

$$\Psi(\lambda) = -id\lambda + \int (1 - e^{i\lambda x})\nu(dx)$$

Entonces, de manera análoga al caso anterior tenemos que suma de límites y Taylor nos garantizan ahora que

$$\lim_{|\lambda|\to\infty} [1 - \exp(i\lambda x)]/\lambda = 0,$$
$$[1 - \exp(i\lambda x)]/\lambda \leq 4(1 \wedge |x|)$$

para $|\lambda| \geq 1$ y todo x. Utilizando convergencia dominada como anteriormente se hizo, se obtiene la segunda aseveración por Lévy-Khintchine. $\square$

Proposición 1.9. *Un proceso X de Lévy es Poisson compuesto si y sólo si Ψ es acotada.*

Demostración. Si X es Poisson compuesto entonces su exponente característico es de la forma

$$\Psi(\lambda) = c \int (1 - e^{i\lambda x})\nu(dx) \tag{1}$$

y como $|1 - e^{i\lambda x}| \leq 2 \wedge |x|^2$ y $\int (2 \wedge |x|^2)\nu(dx) < \infty$, Ψ es acotado.

Supongamos ahora que Ψ es acotada. Como la distribución conjunta de procesos independientes de Poisson compuestos es de nuevo Poisson compuesta, basta con considerar el caso en el que X es real. Por la proposición anterior debe suceder que $\sigma = 0$, para que Ψ permanezca acotado. Así, la parte real de Ψ toma la forma

$$Re(\Psi(\lambda)) = \int (1 - \cos(\lambda x))\nu(dx).$$

Recordando la densidad y la transformada de Fourier de una variable aleatoria normal de media cero y varianza t obtenemos la igualdad

$$1 - e^{-tx^2/2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_R (1 - \cos(sx))e^{-s^2/2t} ds, \ \forall x \in R, \ t \geq 0,$$

y entonces el teorema de Fubini (el integrando es no negativo y los espacios σ-finitos) sustenta

$$\begin{aligned}\int(1-e^{-tx^2/2})\nu(dx) &= \int \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_R (1-\cos(sx))e^{-s^2/2t}ds\,\nu(dx),\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_R Re(\Psi(s))e^{-s^2/2t}ds \le ||Re(\Psi)||_\infty,\end{aligned}$$

de donde, por convergencia monótona, cuando $t\to\infty$, $\nu(R\backslash\{0\})<\infty$. Pero entonces se cumple que tanto $\sigma=0$ como $\int(1\wedge|x|)\nu(dx)<\infty$, por lo que X es de variación acotada (fórmula exponencial), lo cual, por la proposición anterior, nos dice que el coeficiente de deriva debe ser cero para que Ψ permanezca acotado y el exponente característico toma la forma $\Psi(\lambda)=\int(1-e^{i\lambda x})\nu(dx)$, i.e., X se distribuye Poisson compuesto. □

2. Operadores de transición y su generador infinitesimal

Definición 2.1. *Sea μ un kernel de probabilidad sobre un espacio medible (S,Σ), $f:S\to R$ medible y acotada (o no negativa medible en algunos casos). Sea, para $x\in S$,*

$$Tf(x)=(Tf)(x)=\int f(y)\mu(x,dy).$$

Entonces decimos que T es el operador de transición asociado a μ.

Notemos que como μ es kernel de probabilidad, una aproximación con funciones simples muestra, por convergencia monótona o dominada (dependiendo de f), que $Tf:S\to R$ es medible. También se cumple, trivialmente, que $f\in[0,1]\Rightarrow Tf\in[0,1]$ (se dice entonces que T es un operador de contracción positiva). Notemos que si el kernel dado es $\mu(x,\cdot)=\delta_x$, entonces $Tf=f$ para toda f.

Recordemos que para kerneles de probabilidad μ y ν sobre S se definen los kerneles

$$\mu\nu(s,B):=\int\nu(t,B)\mu(s,dt),\ B\in\Sigma, s\in S$$
$$(\mu\otimes\nu)(s,B):=\int\int 1_B(t,u)\nu(t,du)\mu(s,dt),\ B\in\Sigma\otimes\Sigma, s\in S,$$

de S en si mismo y de S en S^2, respectivamente.

Proposición 2.2. *La familia* $\{\mu_t\}_{t\geq 0}$*, donde* μ_t *es un kernel de probabilidad, satisface la relación Chapman-Kolmogorov,*

$$\mu_s\mu_t = \mu_{s+t},$$

si y sólo si los operadores de transición asociados satisfacen la propiedad de semigrupo,

$$T_sT_t = T_{s+t},$$

$\forall s, t \geq 0$*.*

Demostración. Sea $B \in \Sigma$. Entonces

$$T_{s+t}1_B(x) = \int_B \mu_{s+t}(x, dy) = \mu_{s+t}(x, B),$$

$$(T_sT_t)1_B = T_s(T_t1_B)(x) = \int (T1_B)(y)\mu_s(x, dy) = \int \mu_t(y, B)\mu_s(x, dy) = (\mu_s\mu_t)(x, B).$$

De las dos afirmaciones anteriores queda probado el resultado para indicadoras. El resultado para f medible no negativa o acotada se sigue de convergencia monótona o dominada, respectivamente. □

Notemos que si $S = R^d$ y $\Sigma = B(R^d)$, el espacio $C_0 = C_0(S) := \{f \in L_\infty(S) \cap C(S) : \lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0\}$ es de Banach (con la norma uniforme), donde $L_\infty(S)$ es el espacio de las funciones $f : S \to R$ con supremo esencial finito y $C(S)$ el espacio de las funciones $f : S \to R$ continuas.

Definición 2.3. *Un semigrupo de operadores de contracción positiva* (T_t) *sobre* C_0 *es llamado un semigrupo de Markov y si además cumple*

$$(F1): \ T_tC_0 \subset C_0,\ \forall t \geq 0,$$
$$(F2): \ \lim_{t\to 0} T_tf(x) = f(x),\ f \in C_0,\ x \in R^d,$$

es llamado un semigrupo de Feller. Además, es posible mostrar (Teorema 19.6 en [**3**]*) que estas dos condiciones y la propiedad de semigrupo implican conjuntamente*

$$(F3): \ \lim_{t\to 0} T_tf = f,\ f \in C_0.$$

Si X es un proceso de Lévy entonces, por tener incrementos independientes, cumple la propiedad simple de Markov. En particular sus kerneles de probabilidad, (μ_t), cumplen $\mu_t(X_0, B) = P(X_t \in B|X_0)$ (en general $\mu_{t,s}(X_s, B) = P(X_t \in B|X_s)$ para un proceso de Markov no necesariamente homogéneo en el tiempo) y satisfacen la relación Chapman-Kolmogorov. Entonces los operadores de transición (u operadores de convolución) asociados satisfacen la propiedad de semigrupo. Estos están dados por

$$P_t f(x) = \int f(y)\mu_t(x, dy) = \int_{R^d} f(y)P(X_t \in dy|X_0 = x) = \int_{R^d} f(y + x)P(X_t \in dy).$$

Recordemos que el semigrupo de kerneles de probabilidad, μ_t, y la distribución inicial ν de un proceso markoviano determinan las distribuciones finito-dimensionales, a saber (usando la homogeneidad temporal), si L se refiere a la ley,

$$L(X_{t_0}, \cdots, X_{t_n}) = \nu\mu_{t_0} \otimes \mu_{t_1-t_0} \otimes \cdots \otimes \mu_{t_n-t_{n-1}}$$
$$P[(X_{t_0}, \cdots, X_{t_n}) \in \cdot|F_{t_0}] = (\mu_{t_1-t_0} \otimes \cdots \otimes \mu_{t_n-t_{n-1}})(X_{t_0}, \cdot).$$

Entonces, dada una distribución inicial ν, existe una única ley, digamos P_ν, que determina la distribución del proceso sobre el espacio canónico de trayectorias. Claramente para un proceso de Lévy, $\nu = \delta_0$. Denotaremos $P_x = P_{\delta_x}$ a la ley del proceso $(X_t + x)_{t\geq 0}$ (usamos la homogeneidad espacial) con $x \in R^d$ fijo.

Con esta notación podemos escribir $P_t f(x) = E_x f(X_t)$, $x \in R^d$, $f \in C_0$, donde E_x es la esperanza con respecto a la medida de probabilidad P_x sobre el espacio canónico de trayectorias.

PROPOSICIÓN 2.4. *El semigrupo de operadores de convolución de un proceso de Lévy X es un semigrupo de Feller.*

DEMOSTRACIÓN. Claramente es de contracción positiva. Como

$$|P_t f(x) - P_t f(y)| \leq E(|f(X_t + x) - f(X_t + y)|),$$

y f es acotada y continua, convergencia dominada es aplicable al lado derecho cuando $y \to x$, de donde $P_t f(y) \to P_t f(x)$ en tal caso. Si f es no negativa se consideran las funciones $f_n := f \wedge n$ y se aplica el caso anterior. Como $x, y \in R^d$ fueron arbitrarios se sigue que $P_t f \in C_0$.

Como las trayectorias son continuas por la derecha, por consecuentemente convergencia dominada (la cual es aplicable por las mismas razones como antes),

$$\lim_{t\to 0} P_t f(x) = \lim_{t\to 0} E(f(X_t + x)) = E(f(x)) = f(x).$$

Notemos que además la convergencia uniforme es consecuencia que, como f tiene límite cero al infinito, es uniformemente continua y consecuentemente el papel de x en el límite anterior es inmaterial. $\square$

Mostremos ahora un Lema de carácter general.

LEMA 2.5. *La filtración inducida (y completada) por un proceso de Lévy es continua por la derecha, i.e.,* $\bigcap_{t<s} F_s = F_t$, $\forall t \geq 0$.

DEMOSTRACIÓN. Definamos

$$Y_n = (X_{s+2^{-n}} - X_{2^{-n}},\ 0 \leq s \leq 2^{-n}),\ \forall n \geq 1.$$

Tales elementos aleatorios son independientes ya que los incrementos de X son independientes y la propiedad simple de Markov es aplicable. Sea $G_n = \sigma(Y_{n+i}, i \geq 1)$. Se afirma que $G_n = F_{2^{-n}}$. En efecto, como Y_{n+i} es $F_{2^{-n}}$ medible $\forall i \geq 1$, $G_n \subset F_{2^{-n}}$. Por otro lado, para $s \in [0, 2^{-n}]$, $X_s = (Y_{n+j})_{s(j)} + (Y_{n+j+1})_{2^{-(n+j+1)}}$, con j tal que $2^{-(n+j)} < s$ y con $s(j) := s - 2^{-(n+j)}$, por lo que $F_{2^{-n}} \subset G_n$. Por la Ley Cero-Uno de Kolmogorov se tiene entonces que

$$G_\infty := \bigcap_{n \in N} G_n = \bigcap_{s>0} F_s$$

es P-trivial, i.e., $P(A) = 0, 1$, $\forall A \in G_\infty$. Como $X_0 = 0$, c.s., $F_0 \subset G_\infty$ es también P-trivial y como además F_0 se obtiene de $\sigma(X_0)$ al completar, $F_0 = G_\infty$. Esto prueba el resultado para $t = 0$.

Sea $t \geq 0$. Notemos que, por un argumento idéntico al que se hizo en el caso anterior, $\forall \epsilon > 0$, $F_{t+\epsilon} = \sigma(F_t, F'_\epsilon)$, donde F' es la compleción de $\sigma(X_{t+\cdot} - X_t)$ y, de nuevo, la propiedad simple de Markov implica que F_t y F'_ϵ son independientes. Mas aún, la filtración F', por el caso anterior, cumple que $\bigcap_{\epsilon>0}(F'_\epsilon)$ es P-trivial. Definiendo una nueva ley (condicional) como $P^*(\cdot) := P(\cdot|F_t)$ y usando que $F_s \in F_t$, $\forall s < t$ y también $F_t \perp F'_\epsilon$, $\forall \epsilon > 0$, se concluye que

$$\bigcap_{\epsilon>0} F_{t+\epsilon} = \bigcap_{\epsilon>0} \sigma(F_t, F'_\epsilon) = \sigma(F_t, F'_\infty) = F_t,$$

ya que F'_∞ es P^*-trivial y en particular $F'_\infty \subset F_t$. $\square$

Antes de mostrar un resultado bastante importante, la quasi-continuidad por la izquierda, es necesario mostrar que los procesos de Lévy satisfacen la propiedad fuerte de Markov. La prueba de este resultado es muy sencilla gracias a las propiedades de los procesos de Lévy.

El operador de traslación $\theta_t : \Omega \to \Omega$ sobre el espacio de trayectorias, $\Omega = (R^d)^{[0,\infty)}$, está dado por $(\theta_t \omega)_s = \omega_{s+t}$, $s, t \in [0, \infty)$ y $\omega \in \Omega$.

Si τ es un tiempo de paro se define $F_\tau = \{A \in F : \{\tau \leq t\} \cap A \in F_t, \ \forall t \geq 0\}$, donde $\{F_t\}_{t\geq 0}$ es la filtración inducida y F la σ-álgebra sobre Ω.

Recordemos que si dos σ-algebras F, G son iguales al restringirse a un conjunto $A \in F \cap G$ y dos variables aleatorias X, $Y \in L_1$ son tales que $X = Y$ en A, entonces $E(X|F) = E(Y|G)$, c.s., sobre A. A esta propiedad se le conoce como propiedad local de la esperanza condicional.

Proposición 2.6. *(Propiedad fuerte de Markov) Sea X un proceso de Lévy y τ un tiempo de paro tal que $P(\tau < \infty) > 0$. Entonces*

$$P(\theta_\tau X \in A|F_\tau) = P(X \in A|X_\tau),$$

c.s., sobre $\{\tau < \infty\}$, $A \in F$.

En otras palabras, para $A \in F$, c.s, $P(X_{\tau+\cdot} \in A|F_\tau) = P(X_\cdot \in A|X_\tau)$. Aquí F es una σ-álgebra sobre Ω, el espacio canónico de trayectorias. Si $\tau = t$ fijo, la fórmula anterior se reduce a la propiedad simple de Markov, $P(X_{t+\cdot} \in A|F_t) = P(X_\cdot \in A|X_t)$ (en este caso se cumple que $F_t = F_\tau$ con $\tau = t$).

Demostración. En lugar de condicionar con el evento $B := \{\tau < \infty\}$, supondremos de entrada que $PB = 1$. Si $\tau = t$, como ya se mencionó, no hay nada que probar ya que la aserción se reduce a la propiedad simple de Markov. Se sigue que para cualquier tiempo aleatorio $\tau = \sum_{k=1}^{K} t_k 1_{A_k}$ simple se cumple la aserción, por la propiedad local de la esperanza condicional, ya que $F_\tau = F_{t_k}$ sobre $\{\tau = t_k\} = A_k$. Si τ es un tiempo de paro arbitrario, $\tau_n := [2^n\tau + 1]/2^n$ es una aproximación estándar por simples tales que $\tau_n \downarrow \tau$. En este caso, usando que las trayectorias son càdlàg, se tiene $X_{\tau_n} \to X_\tau$ y convergencia dominada para esperanzas condicionales es aplicable, lo cual concluye la prueba. $\square$

PROPOSICIÓN 2.7. *(Quasi-continuidad) Sean $\tau_n \uparrow \tau$ tiempos aleatorios. Entonces*

$$\lim_{n\to\infty} X_{\tau_n} = X_\tau,$$

c.s., sobre $\{\tau < \infty\}$.

DEMOSTRACIÓN. Como en la proposición anterior, podemos suponer que $P(\tau < \infty) = P(\tau_n < \infty) = 1$, $\forall n \geq 1$. Denotemos $X_{\tau^-} := \lim_{n\to\infty} X_{\tau_n}$. Sean $a, b \in C_0$. Convergencia dominada se usa en casi todas las igualdades a continuación. Se tiene

$$\lim_{n\to\infty} E(a(X_{\tau_n})b(X_{\tau_n+t})) = E(a(X_{\tau^-})b(X_{(\tau+t)^-})),\ \forall t > 0,$$

y por la continuidad de las trayectorias por la derecha también

$$\lim_{t\to 0+} E(a(X_{\tau^-})b(X_{(\tau+t)^-})) = E(a(X_{\tau^-})b(X_\tau)).$$

Ahora, por la propiedad de Markov, usando que X_{τ_n} es F_{τ_n} medible,

$$\begin{aligned} E(a(X_{\tau_n})b(X_{\tau_n+t})) &= E[a(X_{\tau_n})E(b(X_{\tau_n+t})|F_{\tau_n})] \\ &= E[a(X_{\tau_n})E_{X_{\tau_n}}(b(X_t))] \\ &= E(a(X_{\tau_n})P_t b(X_{\tau_n})), \end{aligned}$$

y entonces

$$\lim_{n\to\infty} E(a(X_{\tau_n})P_t b(X_{\tau_n})) = E(a(X_{\tau^-})b(X_{(\tau+t)^-})) = E(a(X_{\tau^-})P_t b(X_{\tau^-})).$$

Por propiedad de Feller

$$\lim_{t\to 0+} E(a(X_{\tau^-})P_t b(X_{\tau^-})) = E(a(X_{\tau^-})b(X_{\tau^-})).$$

Se concluye que

$$E(a(X_{\tau^-})b(X_{\tau^-})) = E(a(X_{\tau^-})b(X_\tau)),$$

$\forall a, b \in C_0$. Entonces mediante una aproximación a la indicadora de la exponencial de ambos lados y el teorema de convergencia monótona se sigue que $X_{\tau^-} = X_\tau$ c.s. □

Si tomamos $\tau_n < \tau$, $\forall n$, se tiene que un Proceso de Lévy es continuo en T, c.s. En particular en todo $t \geq 0$.

La proposición anterior tiene como consecuencia ciertas propiedades de tiempos de paro muy particulares e importantes, a saber, $\tau_B := \inf\{t \geq 0 : X_t \in B\}$ y $\tau'_B := \inf\{t > 0 : X_t \in B\}$, $B \in B(R^d)$. Los llamaremos primer tiempo de entrada a B y primer tiempo de arribo a B, respectivamente. En general B será abierto o cerrado. De la propiedad fuerte de Markov y la continuidad por la derecha de las trayectorias se desprende el siguiente corolario.

COROLARIO 2.8. *i) Si B es abierto entonces τ_B es de paro y $X_{\tau_B} \in \bar{B}$, c.s. sobre $\{\tau_B < \infty\}$.*
ii) Si B es cerrado y B_n abiertos con $\bar{B}_n \downarrow B$ entonces $\tau_{B_n} \uparrow \tau_B$. En particular τ_B es de paro y $X_{\tau_B} \in B$, c.s. sobre $\{\tau_B < \infty\}$.
iii) Si B es abierto o cerrado entonces τ'_B es de paro y $X_{\tau'_B} \in \bar{B}$, c.s. sobre $\{\tau'_B < \infty\}$.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que B es abierto. $\tau_B = \text{ínf}\{s \geq 0 : X_s \in B\} < t$ si y sólo si existe racional s con $s < t$ con $X_s \in B$. Luego $\{\tau_B < t\} \in F_t$ ya que F es filtración. Esto es suficiente para que τ_B sea de paro, ya que la filtración es continua por la derecha. Sobre $\{\tau_B < \infty\}$ si ocurre $X_{\tau_B} \notin B$ debe suceder que $\forall \epsilon > 0$, $\exists t \in [\tau_B, \tau_B + \epsilon]$ tal que $X_t \in B$, de donde $X_{\tau_B} \in \bar{B}$, ya que las trayectorias son continuas por la derecha.

Si en cambio B es cerrado y B_n abiertos con $\bar{B}_n \downarrow B$, supongamos que $\tau_{B_n} \uparrow \tau$, para algun τ, el cual debemos mostrar que es τ_B. Si $t < \tau_{B_n}$ entonces $X_t \notin B_n$, por lo cual $\tau_{B_n} \leq \tau_B$ y así $\tau \leq \tau_B$. Por otro lado, como B_n es abierto se cumple $X_{\tau_{B_n}} \in \bar{B}_n$ sobre $\{\tau < \infty\}$, por el inciso anterior. Por la quasi-continuidad se sigue que $X_\tau \in B$ y entonces $\tau_B \leq \tau$.

Supongamos finalmente que B es cerrado o abierto. Sea $\tau_B^\epsilon := \text{ínf}\{t \geq \epsilon : X_t \in B\}$ para $\epsilon > 0$, un tiempo de paro por los incisos anteriores, ya que por la propiedad Markoviana se tiene

$$\text{ínf}\{t \geq \epsilon : X_t \in B\} = \text{ínf}\{t - \epsilon \geq 0 : X_{(t-\epsilon)+\epsilon} \in B\} = \text{ínf}\{t - \epsilon \geq 0 : X_{(t-\epsilon)} \in B - x\},$$

con $x := X_\epsilon$. Como $\tau_B^\epsilon \downarrow \tau'_B$ cuando $\epsilon \downarrow 0$ entonces τ'_B es de paro. También $X_{\tau_B^\epsilon} \in \bar{B} - X_\epsilon$, c.s., y por continuidad por la derecha y usando que $X_0 = 0$ se tiene $X_{\tau'_B} \in \bar{B}$, c.s., sobre $\{\tau'_B < \infty\}$. □

Se introduce ahora un nuevo tipo de operadores lineales asociados a un semigrupo de Feller.

Definición 2.9. *Sea (T_t) un semigrupo de Feller. Se asocia el correspondiente resolvente (o potencial) R_λ, $\lambda > 0$, al tomar la transformada de Laplace, esto es,*

$$R_\lambda f = \int_0^\infty e^{-\lambda t}(T_t f)dt, \;\; f \in C_0.$$

Notemos que $R_\lambda f(x)$ existe para todo $x \in R^d$ por las propiedades que definen al semigrupo de Feller (T_t). A veces la definición se usará también sobre el espacio de f no-negativas medibles.

Otra observación frecuentemente útil que se sigue directo de la definición es que si X es un proceso cuyo semigrupo de convolución asociado es (P_t) entonces

$$R_\lambda f(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}(P_t f(x))dt = E_x\left(\int_0^\infty e^{-\lambda t} f(X_t)dt\right).$$

Lema 2.10. *(Ecuación resolvente) El resolvente de un semigrupo de Feller (T_t) satisface*

$$R_\mu - R_\nu = (\nu - \mu)R_\mu R_\nu, \;\; \mu, \nu > 0.$$

Demostración. Sea $f \in C_0$. Si $\mu = \nu$ no hay nada que probar. Por Fubini, si $\nu \neq \mu$,

$$\begin{aligned} R_\mu R_\nu f(x) &= \int_0^\infty e^{-\mu s} T_s \left(\int_0^\infty e^{-\nu t}(T_t f(x))dt\right) ds \\ &= \int_0^\infty e^{-\mu s} \left(\int_0^\infty e^{-\nu t}(T_{t+s} f(x))dt\right) ds \\ &= \int_0^\infty \int_s^\infty e^{-\mu s} e^{-\nu(u-s)} T_u f(x) du ds \\ &= \int_0^\infty T_u f(x) \int_0^u e^{-\mu s} e^{-\nu(u-s)} ds du \\ &= \int_0^\infty T_u f(x) \frac{e^{-\mu u} - e^{-\nu u}}{\nu - \mu} du \\ &= \frac{1}{\nu - \mu} R_\mu - R_\nu. \end{aligned}$$

□

Teorema 2.11. *Sea (T_t) un semigrupo de Feller sobre C_0 con resolventes R_λ, $\lambda > 0$. Entonces los operadores λR_λ son contracciones inyectivas sobre C_0 tales que*

$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda R_\lambda \to I$, *la convergencia entendida en el sentido fuerte (en la norma de los operadores). Mas aún, el rango* $D = R_\lambda C_0$ *es independiente de* λ *y denso en* C_0 *y existe un operador* $A : D \to C_0$ *tal que* $R_\lambda^{-1} = \lambda - A$ *sobre* D, $\forall \lambda > 0$. A *conmuta con cada* T_t *sobre* D.

Demostración. Como (T_t) es semigrupo de Feller entonces $T_t f \in C_0$, $\forall t \geq 0$ y $\forall f \in C_0$. Entonces es claro que $\lim_{|x|\to\infty} R_\lambda f(x) = 0$ ya que la misma propiedad es cierta para $T_t f$. La continuidad también se hereda, por convergencia dominada. Se concluye que $R_\lambda f \in C_0$. Además es contracción ya que

$$||\lambda R_\lambda f|| \leq \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} ||T_t f|| dt = \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} \left|\left| \int f(y) \mu_t(\cdot, dy) \right|\right| dt \leq \lambda ||f|| \int_0^\infty e^{-\lambda t} dt = ||f||,$$

donde μ_t es kernel de probabilidad.
De la ecuación resolvente es inmediato que los operadores conmutan. Mas aún, tienen el mismo rango D. Por la misma ecuación y usando la propiedad de contracción, dejando $f = R_1 g$ con $g \in C_0$, se tiene que cuando $\lambda \to \infty$,

$$||\lambda R_\lambda f - f|| = ||(\lambda R_\lambda - I) R_1 g|| = ||(R_1 - I) R_\lambda g|| \leq \frac{||R_1 - I|| \, ||g||}{\lambda} \to 0.$$

Como el rango es independiente de λ, la convergencia es válida para toda $f \in \bar{D}$.

Haciendo una compactación de un punto de R^d se obtiene $K := R^d \cup \{\infty\}$, compacto y segundo numerable con la topología usual de compactaciones de un punto. También $f \in C_0$ si y sólo si la extensión $f' : k \to R$ dada por $f'(x) = f(x)$, cuando $x \in R^d$, y $f'(\infty) = 0$ es continua.

Recordemos que, por una aplicación de Hahn-Banach (Teorema 3.5 en [**7**]), si D no es denso en C_0 entonces existe un funcional lineal acotado, $\Delta : C_0 \to R$ con $\Delta f = 0$ si $f \in D$ y $\Delta g \neq 0$ para alguna $g \in C_0 \backslash \bar{D}$. Pero por una versión para funciones C_0 del Teorema de Representación de Riesz (Teorema 2.2 en [**3**]) sabemos que $\Delta f = \int f d\mu$, $\forall f \in C_0$, con μ una medida con signo. Entonces se tiene, por la segunda propiedad de semigrupo de Feller y convergencia dominada, cuando $\lambda \to \infty$,

$$0 = \lambda \Delta R_\lambda g = \int \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} T_t g(x) dt \mu(dx) = \int \int_0^\infty e^{-s} T_{s/\lambda} g(x) ds \mu(dx) \to \Delta g \neq 0,$$

lo cual es absurdo. Entonces $\bar{D} = C_0$.

Sea $f \in C_0$ con $R_\nu f = 0$, $\nu > 0$ fijo. De la ecuación resolvente se sigue que $R_\mu f = 0$, $\forall \mu > 0$. Sin embargo, se probó que $\lim_{\lambda\to\infty} \lambda R_\lambda f = f$, de donde $f = 0$ y queda probada la inyectividad. Pero entonces existe la inversa $R_\lambda^{-1} : D \to C_0$ y la ecuación resolvente sobre D se transforma en $R_\nu^{-1} - R_\mu^{-1} = \nu - \mu$. Así la definición del operador $A := \lambda - R_\lambda^{-1}$ es independiente de λ.
Lo unico que falta probar es la conmutatividad de A y T_t sobre D. Pero como T_t conmuta con R_λ y $(\lambda - A)R_\lambda = I$,

$$T_t(\lambda - A)R_\lambda = (\lambda - A)R_\lambda T_t = (\lambda - A)T_t R_\lambda,$$

y sobre D podemos aplicar R_λ^{-1} por la derecha obteniendo $AT_t = T_t A$. □

Como consecuencia inmediata se tiene la buena definición del siguiente concepto.

Definición 2.12. *Dado (T_t) un semigrupo de Feller y R_λ, $\lambda > 0$, su resolvente, definimos el generador (infinitesimal) del semigrupo (o del proceso asociado al semigrupo si es tal el caso) de dominio $D = R_\lambda C_0$ mediante la relación*

$$R_\lambda(\lambda I - A) = I.$$

La siguiente proposición justifica el nombre del operador recién definido.

Proposición 2.13. *(Caracterización de semigrupos) Un semigrupo de Feller está determinado de manera única por su generador.*

Demostración. El generador, A, determina a cada $R_\lambda = (\lambda - A)^{-1}$ sobre D, para cada $\lambda > 0$ y por lo tanto sobre C_0. Por el Teorema de unicidad 5.3 de [**3**], las medidas $\mu(dt) := T_t f(x)$ sobre R^+, $f \in C_0$, $x \in R^d$, también están determinadas por A. Luego $T_t f(x)$ esta determinada c.s. por A, pero como de antemano sabemos que tal densidad debe ser continua por la derecha se sigue que $T_t f(x)$ esta completamente determinada por A. □

Ahora mostraremos una propiedad de continuidad fuerte que satisfacen los semigrupos de Feller. También se derivan las ecuaciones de Kolmogorov. Un Lema preliminar está en orden.

Definimos a la aproximación de Yosida como sigue:

$$A^\lambda := \lambda A R_\lambda = \lambda(\lambda R_\lambda - I), \;\; \lambda > 0,$$

el cual es acotado, y al semigrupo asociado $T_t^\lambda = e^{tA^\lambda}$, $t \geq 0$. El siguiente Lema justifica su nombre.

LEMA 2.14. *(Aproximación de Yosida) Si $f \in D$, $t, \lambda > 0$ se cumple*

$$||T_t f - T_t^\lambda f|| \leq t||Af - A^\lambda f||.$$

Además, cuando $\lambda \to \infty$,

$$A^\lambda f \to Af, \;\; \forall f \in D,$$
$$T_t^\lambda f \to T_t f, \;\; \forall f \in C_0.$$

DEMOSTRACIÓN. Ya sabemos que (en la norma de C_0) $A^\lambda = \lambda R_\lambda A f \to Af$, $\forall f \in D$. También se tiene que en la topología inducida por la norma de los operadores

$$\lim_{h \to 0} h^{-1}(T_h^\lambda - I) = A^\lambda.$$

Sean X, Y dos operadores arbitrarios de contracción que además conmutan. Se tiene

$$||X^n f - Y^n f|| \leq ||\sum_{i=1}^{n} X^{n-i} Y^{i-1}|| \; ||Xf - Yf|| \leq n||Xf - Yf||.$$

Consideremos ahora $f \in C_0$, $t, \mu, \nu > 0$. Cuando $h := t/n \to 0$ ocurre

$$\begin{aligned}
||T_t^\mu f - T_t^\nu f|| &= ||T_{nh}^\mu f - T_{nh}^\nu f|| \\
&= ||(T_h^\mu)^n f - (T_h^\nu)^n f|| \\
&\leq n||T_h^\mu f - T_h^\nu f|| \\
&= t||h^{-1}(T_h^\mu f - f) - h^{-1}(T_h^\nu f - f)|| \\
&\to t||A^\mu f - A^\nu f||.
\end{aligned}$$

Fijando a t y haciendo $\mu, \nu \to \infty$, el lado derecho de la desigualdad anterior converge a $t||Af - Af|| = 0$ siempre y cuando $f \in D$, de donde se concluye que $\{T_t^\lambda f\}_{\lambda > 0}$ es de Cauchy para toda $f \in D$ y consecuentemente para toda $f \in C_0$, ya que $\bar{D} = C_0$.

Como C_0 es de Banach, en particular existe una función límite, digamos $U_t f$. En la desigualdad anterior, al hacer $\nu \to \infty$ y fijando a μ se obtiene

$$||T_t^\mu f - U_t f|| \leq t||A^\mu f - Af||, \ \ t \geq 0$$

para $f \in D$ ya que Af debe estar definido. Haciendo ahora $\mu \to \infty$ se obtiene que $T_t^\mu f \to U_t f$ uniformemente para t acotada para $f \in D$ y consecuentemente para $f \in C_0$.

Lo unico que falta probar es que $U_t f$ es precisamente $T_t f$. Utilicemos la ecuación resolvente. Sea $\eta := \mu\nu/(\mu+\nu)$ Entonces es inmediato de la definición de A^ν que

$$R_\nu - R_\eta = (\eta - \nu)R_\nu R_\eta \ \Leftrightarrow \ (\mu - A^\nu)^{-1}\nu R_\nu = \frac{\nu}{\mu+\nu}R_\eta$$

De lo anterior, si $f \in C_0$, $\mu, \nu > 0$, se cumple

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-\mu t} T_t^\nu \nu R_\nu f dt &= \int_0^\infty e^{-\mu t} e^{tA^\nu} \nu R_\nu f dt \\ &= (\mu - A^\nu)^{-1}\nu R_\nu f \\ &= \frac{\nu}{\mu+\nu} R_\eta f.\end{aligned}$$

Pero como $\lim_{\nu\to\infty} \eta = \mu$ entonces $\lim_{\nu\to\infty} R_\eta f = R_\mu f$ (usando la continuidad de la transformada de Laplace). Recordemos que una de las primeras consecuencias de la ecuación resolvente fue que $||\lambda R_\lambda f - f|| \leq \frac{||R_1 - I||\,||g||}{\lambda}$, donde $f = R_1 g$. Se sigue que $||\lambda R_\lambda f - f|| \to 0$, con al menos la velocidad de λ^{-1}. Así, por la desigualdad mencionada, existe $K = K(f) \in R^+$ tal que

$$\begin{aligned}||T_t^\nu \nu R_\nu f - U_t f|| &\leq ||T_t^\nu \nu R_\nu f - T_t^\nu f|| + ||T_t^\nu f - U_t f|| \\ &\leq t||A^\nu||\,||\nu R_\nu f - f|| + ||T_t^\nu f - U_t f|| \\ &\leq t\nu\,\frac{K^2}{\nu^2} + ||T_t^\nu f - U_t f|| \to 0,\end{aligned}$$

cuando $\nu \to \infty$. Pero entonces por convergencia dominada (cuando $\nu \to \infty$) se tiene que

$$\int_0^\infty e^{-\mu t} U_t f dt = \int_0^\infty \lim_{\nu\to\infty} e^{-\mu t} T_t^\nu \nu R_\nu f dt = \lim_{\nu\to\infty} \frac{\nu}{\mu+\nu} R_\eta f = R_\mu.$$

Esto dice que los operadores resolventes de los semigrupos (T_t) y (U_t) son los mismos. Luego tienen el mismo generador y por lo tanto son el mismo.

Notemos también que la desigualdad postulada ahora se sigue al hacer $\nu \to \infty$ en $||T_t^\mu f - T_t^\nu f|| \leq t||A^\mu f - A^\nu f||$. $\square$

Se enuncia ahora un resultado acerca de la continuidad de un semigrupo de Feller y también las ecuaciones diferenciales de Kolmogorov.

TEOREMA 2.15. *Sea (T_t) un semigrupo de Feller y $A : D \to C_0$ su generador infinitesimal. Entonces (T_t) es fuertemente continuo (en la norma de operadores) y se cumple, para $f \in D$ y $t \geq 0$,*

$$T_t f - f = \int_0^t T_s A f ds.$$

Mas aún, $T_t f$ es diferenciable (respecto a t) en cero sii $f \in D$. En tal caso también se tiene que

$$\frac{d}{dt} T_t f = T_t A f = A T_t f.$$

DEMOSTRACIÓN. Usemos la aproximación de Yosida. El semigrupo (T_t^λ), por como está definido, es continuo en t, para $\lambda > 0$ fijo. Entonces, por aproximación, lo mismo es cierto para (T_t). Como ya se había hecho notar, $h^{-1}(T_h^\lambda - I) \to A^\lambda$, cuando $h \downarrow 0$, en norma. De hecho,

$$\frac{d}{dt} T_t^\lambda = \lim_{u \to t} (u-t)^{-1}(T_u^\lambda - T_t^\lambda) = \lim_{u \to t} (u-t)^{-1} T_t^\lambda (T_{u-t}^\lambda - I\lambda) = T_t^\lambda A^\lambda,\ t \geq 0,$$

o bien, para $f \in C_0$, puntualmente

$$T_t^\lambda f - If = \int_0^t T_s^\lambda A^\lambda f ds,\ t \geq 0.$$

Dejando $\lambda \to \infty$ y tomando $f \in D$ se obtiene, por aproximación de Yosida, tanto del generador como del semigrupo,

$$\begin{aligned} ||T_s^\lambda A^\lambda f - T_s A f|| &\leq ||T_s^\lambda A^\lambda f - T_s^\lambda A f|| + ||T_s^\lambda A f - T_s A f|| \\ &\leq K||A^\lambda f - Af|| + ||T_s^\lambda A f - T_s A f|| \to 0, \end{aligned}$$

uniformemente, para s acotada y $K \in R^+$ (de hecho $K \leq 1$). Entonces, en norma, para $f \in C_0$,

$$T_t f - If = \lim_{\lambda\to\infty} T_t^\lambda f - If = \lim_{\lambda\to\infty} \int_0^t T_s^\lambda A^\lambda f ds = \int_0^t T_s A f ds,\ t \geq 0.$$

Esto a su vez implica que $\frac{d}{dt} T_t f = T_t A f$ y como sabemos que T_t conmuta con A sobre D entonces $\frac{d}{dt} T_t f = A T_t f$. Esto prueba una implicación. Si ahora se supone que $h^{-1}(T_h f - f) \to g$, cuando $h \downarrow 0$, para funciones $f, g \in C_0$ entonces, como los operadores resolventes y el semigrupo conmutan, se tiene la siguiente relación:

$$R_\lambda g = \lim_{h\to 0} R_\lambda \frac{T_h f - f}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{T_h R_\lambda f - f}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{T_h - I}{h} R_\lambda f = A R_\lambda f,$$

ya que R_λ es un operador acotado sobre un espacio de Banach. Se concluye, por definición del operador A y la igualdad anterior, que $f = (\lambda - A) R_\lambda f = \lambda R_\lambda f - R_\lambda g = R_\lambda(\lambda f - g) \in D$. Esto prueba la implicación contraria. $\square$

Se dice que un operador F arbitrario con dominio $D \subset B$, B de Banach, es cerrado si su gráfica $G = \{(x, Fx) \in B^2 : x \in D\}$ es un conjunto cerrado en la topología producto sobre B^2, inducida por la norma en B. F es cerrable si $\bar{G}$ es la gráfica de un operador $\bar{F}$, denotado la cerradura de F. Es facil ver que F es cerrable si y sólo si $\{x_n\} \subset D,\ x_n \to 0,\ Fx_n \to y$ implican $y = 0$. Consecuentemente, esta última condición se puede considerar como definición alterna. Si F es cerrado y $D^0 \subset D$ es tal que $F|_{D^0}$ tiene cerradura F entonces se dice que D^0 es un núcleo de F.

En el caso particular donde el espacio de Banach es C_0 y $T = A$ es el generador infinitesimal de un semigrupo de Feller (T_t) se tiene el siguiente Lema, el cual caracteriza los núcleos de A.

Lema 2.16. *El generador $A : D \to C_0$ de un semigrupo de Feller es cerrado (de hecho continuo si $D = C_0$). Mas aún, $D^0 \subset D$ es núcleo de A si y sólo si $(\lambda - A)D^0$ es denso en C_0, para alguna (y entonces para toda) $\lambda > 0$.*

Demostración. Si se tiene $\{x_n\} \subset D$, $x_n \to x$ y $Ax_n \to y$ entonces $(x_n - Ax_n) \to x - y$. Pero sabemos que R_λ es acotado (y como C_0 es de Banach entonces también continuo) para $\lambda > 0$ fija y por definición se cumple $R_\lambda(\lambda I - A) = I$. Tomando $\lambda = 1$ se obtiene $x_n = R_1(I - A)x_n \to R_1(x - y)$. Por unicidad de límite en espacios de Hausdorff, $x = R_1(x - y) \in D$. Finalmente $(I - A)x = R_1^{-1} x = x - y$, i.e., $Ax = y$, y por lo tanto A es cerrado.

Como C_0 es de Banach, en particular su topología es inducida por una métrica completa e invariante bajo traslaciones. Como A es lineal y cerrado si $D = C_0$ entonces, por el Teorema de la Gráfica Cerrada (Teorema 2.15 en [**7**]), A también es continuo.

Supongamos que $D^0 \subset D$ es núcleo de A y sea $\lambda > 0$. Por definición de núcleo, si $x \in C_0$ entonces existen x_n en D^0, con $x_n \to R_\lambda x =: y \in D$, y por lo anterior, $Ax_n \to Ay$. Por lo tanto $(\lambda I - A)x_n \to (\lambda I - A)y = (\lambda I - A)R_\lambda y = y$. Como $R_\lambda C_0 = D$ se concluye que $(\lambda I - A)D^0$ es denso en D y por lo tanto en C_0.

Supongamos en cambio que $(\lambda I - A)D^0$ es denso en C_0 y $x \in D$. Por hipótesis existen $x_n \in D^0$ con $y_n := (\lambda I - A)x_n \to (\lambda)x =: y$. Pero como R_λ es acotado, de hecho $x_n = R_\lambda y_n \to R_\lambda g = x$. Se concluye que $Ax_n = \lambda x_n - y_n \to \lambda x - y = Ax$ y entonces D^0 es núcleo. $\square$

Ahora daremos otra condición suficiente para que un subespacio sea núcleo.

PROPOSICIÓN 2.17. *Sea $A : D \to C_0$ el generador de un semigrupo de Feller (T_t). Si $D^0 \subset D$ es un subespacio denso e invariante (bajo el semigrupo) entonces es núcleo.*

DEMOSTRACIÓN. Sabemos que el semigrupo es fuertemente continuo. Notemos que entonces existen

$$C_n := \sum_{i=0}^{M_n} c_i T_{t_i} \to \int e^{-t} T_t dt = R_1,$$

en la topología fuerte, cuando $n \to \infty$. Si $f \in D^0$ entonces, como las sumas que componen a cada C_n son finitas y A conmuta con T_t sobre D,

$$(I - A)C_n f = C_n(I - A)f \to R_1(I - A)f = f.$$

para $f \in D^0$ y entonces $C_n f \in D^0$, por invariancia. Basta notar ahora que, como por hipótesis $\bar{D}^0 = C_0$, hemos probado que $(I - A)D^0$ es denso en D^0 y por tanto en C_0. Así, D^0 es núcleo. $\square$

Finalmente hemos arribado al último resultado de esta sección, el cual únicamente se enuncia, ya que se requiere un poco de la teoría subsecuente para demostrarlo. El teorema da un núcleo para el generador infinitesimal de un proceso de Lévy y también da una forma general del mismo.

Definimos $C_0^\infty = \{x \in C^\infty : x^{(n)} \in C_0,\ n \in \{0, 1, \cdots\}\}$, donde C^∞ es el conjunto de funciones infinitamente diferenciables con derivadas continuas.

Teorema 2.18. *(Núcleo y generador de un proceso de Lévy) Supongamos que (T_t) es el semigrupo de Feller (el semigrupo de convolución) de un proceso de Lévy con triada característica (b, σ, ν). Entonces C_0^∞ es un núcleo para el generador A y, para $f \in C_0^\infty$ y $x \in R^d$, se tiene*

$$Af(x) = \frac{1}{2}\sum_{i,j}\sigma_{i,j}f''_{ij}(x) + \sum_i b_i f'_i(x) + \int (f(x+y) - f(x) - \sum_i y_i f'_i(x) 1\{|y| \leq 1\})\nu(dy)$$

3. Kernel resolvente

Nótese que, a lo largo de la exposición, muchas veces las propiedades de los semigrupos de Feller son suficientes para el desarrollo de la teoría y sólo a veces es necesario recordar que estamos trabajando con procesos de Lévy.

Consideremos el resolvente R_λ, $\lambda > 0$, asociado a un semigrupo de Feller (T_t), a su vez asociado a un proceso de Lévy. Como

$$R_\lambda f(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T_t f(x) dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \int f(y)\mu_t(x, dy) dt,$$

se introducen la medidas (finitas) γ_λ dadas por

$$\gamma_\lambda(dy) := \int_0^\infty e^{-\lambda t}\mu_t(0, -dy) dt$$

que cumple, (usando la independencia de los incrementos o equivalentemente la homogeneidad espacial)

$$\begin{aligned}(\gamma_\lambda * f)(x) &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} \int f(x-y)\mu_t(0,-dy)dt \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} \int f(u)\mu_t(0,du-x)dt \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} \int f(u)\mu_t(x,du)dt \\ &= R_\lambda f(x).\end{aligned}$$

De esta manera la ecuación resolvente toma la siguiente forma:

$$\gamma_\mu - \gamma_\nu = (\nu - \mu)\gamma_\mu * \gamma_\nu.$$

Notemos también que si

$$\rho_\lambda(x,dy) := \int_0^\infty e^{-\lambda t}\mu_t(x,dy)dt,$$

entonces $R_\lambda f = \int f d\rho_\lambda$. La existencia de tales ρ_λ también se puede deducir de manera abstracta a partir del Teorema de Representación de Riesz.

Definición 3.1. *Dado un resolvente asociado a un semigrupo de Feller, al conjunto*

$$\{\rho_\lambda(x,dy) : x \in R^d\},\ \lambda > 0 : \quad R_\lambda f(x) = \int f(y)\rho_\lambda(x,dy)$$

se le llama kernel resolvente.

Nos interesará ahora estudiar los resolventes que satisfacen la condición adicional de ser absolutamente continuos.

Proposición 3.2. *Sea Λ la medida de Lebesgue y $(\rho_\lambda(x))$ un kernel resolvente. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

i) Existen $\lambda > 0$ y $x \in R^d$ tales que $\rho_\lambda(x) \ll \Lambda$.

ii) $\forall \lambda > 0$ y $\forall x \in R^d$ se cumple que $\rho_\lambda(x) \ll \Lambda$.

iii) Los operadores resolventes, R_λ, satisfacen la propiedad fuerte de Feller:

$$R_\lambda f \in C(R^d),\ \forall \lambda > 0,\ \forall f \in L_\infty(R^d).$$

Demostración. Supongamos que $\rho_{\lambda_0}(x_0) \ll \Lambda$. Esto es, si $B \in B(R^d)$ con $\Lambda B = 0$ entonces $R^B_{\lambda_0} f(x_0) := \int_B f(y)\rho_{\lambda_0}(x_0, dy) = 0$, $\forall f \geq 0$. Esto es, si $\gamma^B_\lambda := \gamma_\lambda|_B$, entonces $(\gamma^B_{\lambda_0} * f)(x_0) = R^B_{\lambda_0} f(x_0) = 0$, lo cual a su vez implica que $\gamma^B_{\lambda_0} = 0$, o bien $\gamma_{\lambda_0} B = 0$. Para $\lambda > 0$ arbitraria notemos, por la euación resolvente, que

$$\gamma_\lambda B = \gamma_{\lambda_0} B + (\lambda_0 - \lambda)\gamma_\lambda * \gamma_{\lambda_0} B = 0.$$

Luego $\int_B f(y)\rho_\lambda(x, dy) = (\gamma^B_\lambda * f)(x) = 0$, $\forall f \geq 0$ (o en C_0), de donde $\rho_\lambda(x, B) = 0$, o bien $\rho_\lambda(x) \ll \Lambda$, $\forall \lambda > 0$ y $\forall x \in R^d$. Esto muestra que i) implica ii). La implicación inversa es inmediata.

Supongamos ahora ii). Por Radon-Nikodym existen densidades $\bar{g}_\lambda \in L_1(R^d)$ tales que $\gamma_\lambda(dy) = \bar{g}_\lambda dt$. Como la convolución $(\bar{g}_\lambda * f)(\cdot)$ es continua para toda función acotada f y precisamente $\bar{g}_\lambda * f = R_\lambda f$ se sigue que la propiedad fuerte de Feller se cumple. Para la implicación inversa consideremos un conjunto N, Λ-nulo, y consideremos $f = 1_N$. Claramente $f \in L_\infty$ por lo que $R_\lambda f$ es continua y en particular integrable. Así,

$$\int R_\lambda f(x)dx = \int_N R_\lambda 1 dx = \int_N (\gamma_\lambda * 1)(x)dx = \gamma_\lambda(R^d)\Lambda B = 0,$$

ya que γ_λ es medida finita (de masa λ^{-1}). Pero $R_\lambda f \geq 0$ por lo que $R_\lambda f = 0$, Λ-c.d. y como es una función continua debe suceder que $R_\lambda f = 0$ idénticamente. En otras palabras $\rho_\lambda(x, N) = 0$, o bien $\rho_\lambda(x) \ll \Lambda$, $\forall x \in R^d$ y $\forall \lambda > 0$. Así, ii) y iii) también son equivalentes. □

Se tiene entonces la siguiente definición, la cual puede ser modificada según la proposición anterior. Notemos que si $\bar{g}_\lambda$ es como en la proposición anterior y g_λ como en la definición siguiente entonces, para casi toda x, $g_\lambda(x) = \bar{g}_\lambda(-x)$.

Definición 3.3. *Si $\rho(x) \ll \Lambda$ decimos que el kernel resolvente $R_\lambda f(x) = \int f(y)\rho(x, dy)$ es absolutamente continuo (o bien si satisface la propiedad fuerte de Feller). En este caso, por Radon-Nikodym,*

$$R_\lambda f(x) = (\gamma_\lambda * f)(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \int f(u)\mu_t(0, du - x)dt = \int g_\lambda(y - x)f(y)dy,$$

para alguna $g_\lambda \geq 0$ medible, $\forall x \in R^d$, $f \geq 0$ y $\lambda > 0$. A tal funcion se le llama densidad resolvente.

Como una buena motivación para la intuición detrás de la siguiente definición recordemos que λR_λ es una contracción sobre C_0 tal que $\lim_{\lambda\to\infty} \lambda R_\lambda \to I$.

Definición 3.4. *Una función $f \geq 0$ es λ-excesiva si se satisfacen las siguientes dos condiciones:*

$$rR_{r+\lambda}f \leq f,\ \forall r > 0, \qquad \lim_{r\to\infty} rR_{r+\lambda}f(x) = f(x),\ \forall x \in R^d.$$

*Equivalentemente (ver p.26 de [**2**]) una función $f \geq 0$ es λ-excesiva si y sólo si*

$$e^{-\lambda t}T_t f \leq f,\ \forall r > 0, \qquad \lim_{t\to 0+} e^{-\lambda t}T_t f(x) = f(x),\ \forall x \in R^d.$$

Se dan dos ejemplos importantes de funciones λ-excesivas.

Ejemplo 3.5. *Si $f \geq 0$ entonces $R_\lambda f$ es λ-excesiva.*

Demostración. Sea $r > 0$. Por la ecuación resolvente se tiene que

$$rR_{r+\lambda}R_\lambda f = R_\lambda f - R_{r+\lambda}f \leq R_\lambda f$$

$$\lim_{r\to\infty} rR_{r+\lambda}R_\lambda f = R_\lambda f - \lim_{r\to\infty}(r+\lambda)\frac{R_{r+\lambda}f}{r+\lambda} = R_\lambda f - \frac{f}{\lim_{r\to\infty}(r+\lambda)} = R_\lambda f.$$

□

Ejemplo 3.6. *$f(x) = E_x e^{-\lambda\tau'}$, con $\tau' = \tau'_B$ un tiempo de primer arribo a un conjunto B, es una función λ-excesiva.*

Demostración. Para $t > 0$ es evidente que puntualmente $\tau' \circ \theta_t \geq \tau' - t$. Entonces también se tiene

$$\begin{aligned} P_t f(x) = E_x f(X_t) = E_x E_{X_t} e^{-\lambda\tau'} &= E_x \exp(-\lambda\tau' \circ \theta_t) \\ &\leq E_x \exp(-\lambda(\tau' - t)) = e^{\lambda t} E_x \exp(-\lambda\tau') = e^{\lambda t} f(x), \end{aligned}$$

y entonces basta escribir

$$rR_{r+\lambda}f(x) = \int_0^\infty re^{-(r+\lambda)t}P_t f(x)dt \leq \int_0^\infty re^{-(r+\lambda)t}e^{\lambda t}f(x)dt = f(x).$$

Como $\lim_{t\to 0+} \tau' \circ \theta_t = \tau'$ y consecuentemente $P_t f \uparrow f$, por convergencia dominada se tiene

$$\lim_{r\to\infty} rR_{r+\lambda} f(x) = \lim_{r\to\infty} \int_0^\infty e^{-u-(\lambda u)/r} P_{u/r} f(x) du = f(x),$$

$\forall x \in R^d$. $\square$

La siguiente proposición muestra una relación entre el concepto de kernel absolutamente continuo y las funciones excesivas.

PROPOSICIÓN 3.7. *Sea R_λ un kernel resolvente absolutamente continuo. Entonces las funciones λ-excesivas son continuas por debajo. También se cumple que si f, g son funciones λ-excesivas que cumplen $f \geq g$, c.s., entonces $f \geq g$ idénticamente.*

Por completitud se menciona que cualquiera de las dos conclusiones es suficiente para que el kernel resolvente resulte absolutamente continuo.

DEMOSTRACIÓN. Sea f una función λ-excesiva. Se tiene que $\sup_{k>0} R_{r+\lambda}(f \wedge k) = R_{r+\lambda} f$, por convergencia monótona, y por hipótesis $\sup_{r>0} rR_{r+\lambda} f = f$. Pero el kernel resolvente es absolutamente continuo y entonces satisface la propiedad fuerte de Feller. Luego $rR_{r+\lambda}(f \wedge k)$ es continua, $\forall r, k > 0$. Se sigue por las dos observaciones anteriores que $\sup_{r,k>0} rR_{r+\lambda}(f \wedge k) = f$, y, por ser supremo de continuas, es continua por debajo. Supongamos ahora que g también es λ-excesiva, con $g \leq f$, c.s. Por hipótesis $\rho_\lambda(x, dy) \ll \Lambda$ (donde Λ es la medida de Lebesgue), $\forall x \in R^d$ y $\forall \lambda > 0$. Luego

$$rR_{r+\lambda} f \geq rR_{r+\lambda} g \Leftrightarrow \int g_{r+\lambda}(y-x) f(y) dy \geq \int g_{r+\lambda}(y-x) g(y) dy,$$

con $g_{r+\lambda} \geq 0$ densidad resolvente. La desigualdad de la derecha se cumple idénticamente ya que f, g son continuas por debajo y la desigualdad se cumple c.s., por hipótesis. Entonces en todos lados se tiene

$$f = \lim_{r\to\infty} rR_{r+\lambda} f \geq \lim_{r\to\infty} rR_{r+\lambda} g = g.$$

$\square$

Se continúa el estudio de kerneles absolutamente continuos.

PROPOSICIÓN 3.8. *Sea R_λ un kernel absolutamente continuo. Entonces existe una única función (medible) r_λ tal que $\bar{r}_\lambda(x) := r_\lambda(-x)$ es λ-excesiva y*

$$R_\lambda f(x) = \int f(y) r_\lambda(y-x) dy.$$

Evidentemente se busca alguna versión de la densidad resolvente.

DEMOSTRACIÓN. Sea g_r la densidad resolvente. Si $h = 1_A$, $A \in B(R^d)$, entonces se cumple

$$\int_0^\infty e^{-rt} \mu_t(0,A) dt = \int_0^\infty e^{-rt} \int 1_A(y) \mu_t(0,dy) dt = R_r h(0) = \int_A g_r(y) dy.$$

Se sigue que si $\lambda \leq r$ entonces $g_r \leq g_\lambda$, c.s. y por convergencia dominada que $g_r \to 0$ en media (tomando $A = R^d$).

Como ya se había hecho notar, si $f \geq 0$ entonces $R_r f = \bar{g}_r * f$ y la ecuación resolvente se lee $(r-\lambda)\bar{g}_r * \bar{g}_\lambda = \bar{g}_\lambda - \bar{g}_r$, c.s., y por tanto

$$(r-\lambda) R_r \bar{g}_\lambda = (r-\lambda)\bar{g}_r * \bar{g}_\lambda = \bar{g}_\lambda - \bar{g}_r \leq \bar{g}_\lambda,$$

c.s. Definamos $f := (r-\lambda)\bar{g}_\lambda$. Para $s > 0$, por la ecuación resolvente y la desigualdad anterior,

$$\begin{aligned} (r-\lambda) R_r \bar{g}_\lambda = R_r f = R_{r+s} f + s R_{r+s} R_r f &= (r-\lambda) R_{r+s} \bar{g}_\lambda + s R_{r+s} (r-\lambda) R_r \bar{g}_\lambda \\ &\leq (r-\lambda) R_{r+s} \bar{g}_\lambda + s R_{r+s} \bar{g}_\lambda \\ &= (r+s-\lambda) R_{r+s} \bar{g}_\lambda, \end{aligned}$$

y como el operador resolvente es excesivo entonces la desigualdad no solo es c.s., sino puntual. Se ha probado que $(r-\lambda) R_r \bar{g}_\lambda$ es creciente en r. Entonces proponemos

$$\bar{r}_\lambda := \lim_{r\to\infty} (r-\lambda) R_r \bar{g}_\lambda = \lim_{r\to\infty} (r-\lambda) \bar{g}_r * \bar{g}_\lambda = \lim_{r\to\infty} (\bar{g}_\lambda - \bar{g}_r).$$

El límite es único y $\bar{r}_\lambda = \bar{g}_\lambda$, c.s., ya que $\bar{g}_r \to 0$ en media. Se sigue por esta razón y de su propia definición que $\bar{r}_\lambda$ es λ-excesiva. Finalmente, $r_\lambda(x) := \bar{r}_\lambda(-x)$ cumple la igualdad deseada ya que lo mismo es cierto para la densidad resolvente. $\square$

El siguiente resultado relaciona a las funciones excesivas integrables y las medidas finitas. Recordemos que una medida Radon es aquella que es localmente finita y regular por dentro. Si el espacio sobre el cual se define tal medida es localmente compacto (lo cual evidentemente satisface R^d) entonces la medida también resulta ser regular por fuera y simplemente se dice que es regular. Toda medida finita y boreliana sobre R^d es regular.

Por el Teorema de Representación de Riesz, el espacio de medidas Radon, $M = M(R^d)$, y el dual de C_0 son isometricamente isomorfos, por lo que M hereda una topología de C_0^*, la topología vaga. Una familia S de medidas finitas (de masa k) es relativamente compacta en la topología vaga si toda sucesión de elementos en S tiene una subsucesión vagamente convergente.

Por el Teorema de Prohorov, en R^d (de hecho en cualquier espacio separable y completo) una familia S de medidas finitas es relativamente compacta si y sólo si $\forall \epsilon > 0$, existe K, compacto, tal que $\mu(K) \geq k - \epsilon$, $\forall \mu \in S$. Si S cumple esta última condición se dice que S es tensa.

Teorema 3.9. *Sea R_λ, $\lambda > 0$, un resolvente absolutamente continuo.*

i) Si r_λ es la versión excesiva de la densidad resolvente y μ una medida Radon, entonces

$$R_\lambda \mu(x) := (\bar{r}_\lambda * \mu)(x) = \int r_\lambda(y-x)\mu(dy), \;\; x \in R^d,$$

es λ-excesiva y si μ es finita entonces también Lebegue integrable.

ii) Si f es Lebesgue integrable y λ-excesiva (en particular $f \geq 0$) entonces existe una medida finita μ con

$$f(x) = (\bar{r}_\lambda * \mu)(x) = \int r_\lambda(y-x)\mu(dy), \;\; x \in R^d,$$

i.e., $f = R_\lambda \mu$.

Notemos que el teorema dice que existe una correspondencia biunívoca entre las medidas finitas y las funciones excesivas e integrables, siempre y cuando el kernel resolvente sea absolutamente continuo. La fortaleza de este último concepto empieza a manifestarse.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos las hipótesis de i). Como $\bar{r}_\lambda$ es λ-excesiva, tambien lo son las traslaciones $r_\lambda(y-x)$. Como consecuencia, si $r > 0$ y $x \in R^d$ entonces

$$\begin{aligned}
(r-\lambda)R_r R_\lambda \mu(x) &= (r-\lambda)R_r \int r_\lambda(y-\cdot)\mu(dy)(x) \\
&= (r-\lambda)\int R_r r_\lambda(y-\cdot)\mu(dy)(x) \\
&\leq (r-\lambda)\int r_\lambda(y-\cdot)\mu(dy)(x) \\
&= R_\lambda \mu(x),
\end{aligned}$$

utilizando Fubini, (aplicable ya que, como las medidas son Radon y R^d es segundo numerable, entonces en particular son σ-finitas). Por convergencia monótona

$$\begin{aligned}
\lim_{r\to\infty}(r-\lambda)R_r R_\lambda \mu(x) &= (r-\lambda)\int \lim_{r\to\infty} R_r r_\lambda(y-\cdot)\mu(dy)(x) \\
&= (r-\lambda)\int r_\lambda(y-\cdot)\mu(dy)(x) \\
&= R_\lambda \mu(x),
\end{aligned}$$

y queda mostrado que $R_\lambda\mu$ es λ-excesiva. Si μ además es finita entonces, utilizando Fubini, se tiene

$$\int R_\lambda \mu(x)dx = \int\int r_\lambda(y-x)\mu(dy)dx = \int (r_\lambda dx)\otimes \mu(dy) = \lambda^{-1}\mu(R^d) < \infty,$$

i.e., $R_\lambda\mu$ es Lebesgue integrable. Esto muestra i). Supongamos ahora las hipótesis de ii). Como consecuencia de la λ-excesividad de la función f se tiene que $r(f - (r-\lambda)R_r f)$ es una función no-negativa medible. Notemos que para $g \geq 0$ medible arbitraria se tiene

$$\int R_r g(x)dx = \int\int g(y)r_r(y-x)dxdy = \int r^{-1}g(y)dy,$$

por lo que,

$$\int r(f(x)-(r-\lambda)R_r f(x))dx = \int rf(x)dx - \int \frac{r(r-\lambda)}{r}f(x)dx = \lambda\int f(x)dx.$$

Se tiene entonces una familia $\{r(f(x)-(r-\lambda)R_r f(x))dx\}_{r>0}$ de medidas finitas, ya que f es integrable. Por este mismo hecho se cumple que tal familia es tensa y por tanto relativamente compacta en la topología vaga. Sea μ la medida límite de una subsucesión convergente, cuando $r \to \infty$. Si h es cualquier función continua con soporte compacto entonces $h * r_\lambda \in C_0$. Por un lado, a lo largo de la subsucesión se tiene, por Fubini,

$$\begin{aligned}\int h(x)R_\lambda\mu(x)dx &= \int h(x)\int r_\lambda(y-x)\mu(dy)dx \\ &= \int\left(\int h(x)r_\lambda(y-x)dx\right)\mu(dy) \\ &= \int (h*r_\lambda)(x)\mu(dx) \\ &= \lim_{r\to\infty}\int r(h*r_\lambda)(x)(f(x)-(r-\lambda)R_rf(x))dx,\end{aligned}$$

y, por otro lado, de la ecuación resolvente se obtiene que

$$\begin{aligned}\int r(h*r_\lambda)(x)(f(x)-(r-\lambda)R_rf(x))dx &= \int rR_\lambda h(x)(f(x)-(r-\lambda)R_rf(x))dx \\ &= \int rh(x)R_rf(x)dx.\end{aligned}$$

Por hipótesis, f es λ-excesiva así que, por convergencia monótona (considerando primero el caso en que $h \geq 0$) y dominada, $\lim_{r\to\infty}\int h(x)rR_rf(x)dx = \int h(x)f(x)dx$. Pero entonces

$$\begin{aligned}\int h(x)R_\lambda\mu(x)dx &= \lim_{r\to\infty}\int r(h*r_\lambda)(x)(f(x)-(r-\lambda)R_rf(x))dx \\ &= \lim_{r\to\infty}\int h(x)rR_rf(x)dx = \int h(x)f(x)dx.\end{aligned}$$

Aproximando indicadoras mediante la función h se obtiene (utilizando convergencia monótona o dominada) $\int_B R_\lambda\mu(x)dx = \int_B f(x)dx$, para $B \in B(R^d)$. Esto nos dice que $R_\lambda\mu = f$, c.s. Pero en la implicación contraria de este teorema se probó que $R_\lambda\mu$ es λ-excesiva, así que la igualdad se debe cumplir puntualmente.

Lo único que resta probar es la unicidad de μ. Pero es inmediato de las definiciones y Fubini que $\int R_\lambda\mu(x)h(x)dx = \int(r_\lambda * h)(x)\mu(x)$ y también las funciones $r_\lambda * h = \int h(y)r_\lambda(y-\cdot)dy$, $h \in C_0$ conforman un conjunto denso en C_0, ya que el rango de los operadores R_λ es denso en C_0 (y de hecho independiente de λ). Luego, si μ, ν son tales que $R_\lambda\mu = f$ y $R_\lambda\nu = f$, entonces los funcionales lineales acotados asociados a tales medidas a través del isomorfismo isométrico entre el espacio de medidas Radon y C_0^* coinciden en un conjunto denso y por tanto son el mismo. El mismo isomorfismo entonces nos dice que $\mu = \nu$. □

En lo que resta de la sección podremos apreciar algunos resultados de la teoría en curso pero ahora para procesos de Lévy, los cuales hasta ahora no se han manifestado en demasía si no es como casos específicos de procesos de Feller o incluso de Markov.

Recordemos que una medida arbitraria μ sobre un espacio S con σ-álgebra de Borel es difusa si $\mu\{x\} = 0$, $\forall x \in S$.

Supongamos que X es de Lévy y real. Sabemos que la σ-álgebra F_0 es P-trivial. Como la filtración natural es continua por la derecha entonces el conjunto $\{\omega \in \Omega : X_{t_n} > 0, \forall t_n\}$, para alguna sucesión $t_n \downarrow 0$, pertenece a $\bigcap_{s>0} F_s = F_0$ y por tanto tiene probabilidad cero o uno. Si X no es Poisson compuesto entonces el proceso abandona el origen, c.s., inmediatamente después del cero y por tanto entra al semiplano superior o al inferior inmediatamente, c.s..

Proposición 3.10. *Sea X de Lévy pero no Poisson compuesto. Entonces las medidas resolventes ρ_λ son difusas, i.e., $\rho_\lambda(x, \{y\}) = 0$, $\forall \lambda > 0$ y $\forall x, y \in R^d$.*

Demostración. Bastará probar que las proyecciones son difusas, i.e., supongamos de inicio que X es real. Si sucede que, c.s., $\tau_{(0,\infty)} = 0$ entonces el proceso entra de inmediato al semiplano superior y, como las trayectorias son continuas por la derecha, también, c.s., $\tau_{(0,\epsilon)} = 0$, $\forall \epsilon > 0$. Notemos que como $\tau_{(\delta,\epsilon)} \downarrow \tau_{(0,\epsilon)}$, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $E \exp(-\lambda \tau_{(\delta,\epsilon)}) > 2^{-1}$. Si se toma entonces a δ como la nueva ϵ se construye recursivamente una sucesión $\epsilon_n \downarrow 0$ que cumple $E e^{-\lambda \tau_n} > 2^{-1}$, donde $\tau_n := \tau_{(\epsilon(n+1),\epsilon(n))}$. Si además $B_n := (\epsilon_{n+1}, \epsilon_n)$, entonces

$$\rho_\lambda(0, B_n) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \mu_t(0, B_n) dt = E \int_{\tau_n}^\infty 1_{\{X_t \in B_n\}} e^{-\lambda t} dt$$

y además

$$\begin{aligned} E\int_{\tau_n}^{\infty} 1_{\{X_t\in B_n\}}e^{-\lambda t}dt &= EE\left(\int_{\tau_n}^{\infty} 1_{\{X_t\in B_n\}}e^{-\lambda t}dt|F_{\tau_n}\right) \\ &= EE_{X_{\tau_n}}\int_0^{\infty} 1_{\{X_t\in B_n\}}e^{-\lambda t}dt \\ &= \int_{\bar{B}_n}\int_0^{\infty} e^{-\lambda t}\mu_t(x,B_n)dt\int_0^{\infty} e^{-\lambda s}P(\tau_n\in ds, X_{\tau_n}\in dx) \\ &= \int_{\bar{B}_n} R_\lambda 1_{B_n}(x)\int_0^{\infty} e^{-\lambda s}P(\tau_n\in ds, X_{\tau_n}\in dx) \\ &= \int_{\bar{B}_n} \rho_\lambda(x,B_n)\int_0^{\infty} e^{-\lambda s}P(\tau_n\in ds, X_{\tau_n}\in dx), \end{aligned}$$

ya que la propiedad Fuerte de Markov nos dice que $E_{X_\tau}\xi = E_\nu(\xi\circ\theta_\tau|F_\tau)$, para τ de paro, ξ medible y ν distribución inicial arbitraria. Entonces por la monotonía de medidas y homogeneidad espacial se obtiene

$$\rho_\lambda(0,B_n) = E\int_{\tau_n}^{\infty} 1_{\{X_t\in B_n\}}e^{-\lambda t}dt \geq \int_{B_n}\rho_\lambda(x,\{x\})\int_0^{\infty} e^{-\lambda s}P(\tau_n\in ds, X_{\tau_n}\in dx) \geq 2^{-1}\rho_\lambda(0,\{0\}).$$

Notemos que además se cumple

$$\sum_n \rho_\lambda(r,B_n) \leq \rho_\lambda(0,R) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t}\mu_t(0,R)dt = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t}dt = \lambda^{-1},$$

Por lo que $\rho_\lambda(0,\{0\}) = 0$, ya que $0 \leq \rho_\lambda(0,\{0\}) \leq 2\rho_\lambda(r,B_n) \to 0$.

Si $P_x(\tau_{\{y\}} < \infty) = 0$, entonces $\rho_\lambda(x,\{y\}) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\mu_t(x,\{y\})dt = 0$. En caso contrario se puede aplicar la propiedad fuerte de Markov, haciendo $\tau := \tau_{\{y\}}$,

$$\rho_\lambda(x,\{y\}) = E_x\int_{\tau}^{\infty} 1_{\{X_t\in\{y\}\}}e^{-\lambda t}dt = \int_{\{y\}}\rho_\lambda(u,\{y\})\int_0^{\infty} e^{-\lambda s}P_x(\tau\in ds, X_\tau\in du) = 0.$$

Como, con excepción de un proceso Poisson compuesto, todo Lévy satisface que $P(\tau_{(0,\infty)} = 0) = 1$, o bien $P(\tau_{(-\infty,0)} = 0) = 1$, se sigue de lo anterior la conclusión deseada, considerando (posiblemente) a $-X$. □

Corolario 3.11. *Sea X de Lévy. Si existen $t > 0$ y $x^t \in R^d$ tales que $P(X_t = x^t) > 0$ entonces X es Poisson compuesto con deriva.*

DEMOSTRACIÓN. La convolución de una medida difusa con otra medida arbitraria sigue siendo difusa. Entonces por la ecuación Chapman-Kolmogorov debe existir x^s tal que $P(X_s = x^s) > 0$, $\forall s \leq t$. Si Y es una simetrización de X entonces $P(Y_t > 0) \geq P(X_s = x^s)^2 > 0$. Luego la medida resolvente es atómica también y por lo tanto Y debe ser Poisson compuesto y se concluye que X es Poisson con deriva. □

4. Comportamiento asintótico

El límite de medidas es medida. Por convergencia monótona el siguiente concepto está bien definido.

DEFINICIÓN 4.1. *Consideremos la familia de medidas resolventes $\rho_\lambda(x,\cdot)$, $x \in R^d$. Definimos las medidas potenciales, $\rho(x,\cdot)$, para $B \in B(R^d)$,*

$$\rho(x,B) = \lim_{\lambda\to 0} \rho_\lambda(x,B) = \lim_{\lambda\to 0} R_\lambda 1_B(x) = \lim_{\lambda\to 0} \int_0^\infty e^{-\lambda t}\mu_t(x,B)dt = \int_0^\infty \mu_t(x,B)dt.$$

Notemos que por Fubini (condicional) se tiene también que $\rho(x,\cdot) = \int_0^\infty P_x(X_t \in \cdot)dt = E_x \int_0^\infty 1_{\{X_t\in\cdot\}}dt$. La medida resultante toma valores reales extendidos.

Igualdades del siguiente tipo ya han sido usadas anteriormente, sin embargo la siguiente fórmula es útil y frecuentemente usada; se incluye por completitud. Supongamos que $A \in B(R^d)$ y consideremos a τ_A. Si $u \leq \tau_A$ entonces claramente $\int_0^u 1_{\{X_t\in A\}}dt = 0$. Si además A es cerrado o abierto, en particular la propiedad de Markov es aplicable y se tiene por la fórmula de probabilidad total que

$$\begin{aligned}
\rho(x,A) = E_x\int_0^\infty 1_{\{X_t\in A\}}dt &= E_x\int_{\tau_A}^\infty 1_{\{X_t\in A\}}dt \\
&= \int_{\bar{A}} E_y\int_0^\infty 1_{\{X_t\in A\}}dtP_x(X_{\tau_A}\in dy) \\
&= \int_{\bar{A}} \rho(y,A)P_x(X_{\tau_A}\in dy).
\end{aligned}$$

Se prosigue a definir recurrencia y transitoriedad en términos de las medidas potenciales de un proceso de Lévy.

DEFINICIÓN 4.2. *Sean $(\rho(x,\cdot)$, $x \in R^d)$ las medidas potenciales de un proceso de Lévy X. Decimos que:*

X es transitorio si $((\rho(x,\cdot), x \in R^d))$ son de Radon (localmente finitas y regulares por dentro), i.e. $\rho(x,K) < \infty$, $\forall K$ compacto y $x \in R^d$.

X es recurrente si $\rho(0,U) = \infty$, $\forall U$ vecindad acotada del origen.

Notemos que si $\rho(0,K) < \infty$ para todo K compacto entonces, como todo proceso con incrementos independientes es homogéneo espacial,

$$\rho(0,K-x) = \int_0^\infty \mu_t(0,K-x)dt = \int_0^\infty \mu_t(x,K)dt = \rho(x,K),$$

de donde basta verificar el caso cuando $x = 0$ para decidir si un proceso de Lévy es transitorio o no.

Es importante mencionar que los resultados anteriores sobre medidas resolventes son válidos también para las medidas potenciales si el proceso de Lévy es transitorio. Esto se debe a que la mayoría de las pruebas son válidas gracias a Fubini, el cual está garantizado, en este caso, localmente, gracias a la finitud de la integral que representa a las medidas potenciales y las extensiones a todo el espacio se siguen de la σ-finitud de R^d. La única diferencia está (y se hace evidente en la prueba) en que la propiedad fuerte de Feller ahora no se sigue de la continuidad absoluta de las medidas potenciales, sin embargo, la propiedad (modificada) de Feller para funciones que no solo están en L_∞, sino también en F_K (las funciones con soporte compacto) sí es consecuencia de tal condición.

Intuitivamente la definición nos dice que un proceso de Lévy no puede ser transitorio y recurrente a la vez. La intuición en este caso es verificada por la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN 4.3. *Un proceso de Lévy siempre es transitorio o recurrente, pero nunca ambos a la vez.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que existe una vecindad acotada del origen, U, tal que $\rho(0,U) < \infty$, negando así que X sea recurrente. Supongamos sin pérdida de generalidad que U es una bola abierta con centro en el origen y de radio ϵ, para algun $\epsilon > 0$. Si V es la bola cerrada con mismo centro pero de radio $\epsilon/4$ entonces claramente $V - V \subset U$. Considere el tiempo de paro τ_V. Entonces, por la propiedad fuerte de Markov (como está indicado al comienzo de esta sección)

$$\rho(x,V) = E_x \int_0^\infty 1_{\{X_t \in V\}} dt = \int_V \rho(y,V) P_x(X_{\tau_V} \in dy),$$

para $x \in R^d$. Pero por monotonía de una medida (ya que $V - z \subset V - V \subset U$) se tiene, por otro lado, que

$$\int_V \rho(y,V) P_x(X_{\tau_V} \in dy) \leq \sup_{z \in V} \rho(z,V) = \sup_{z \in V} \rho(0, V - z) \leq \rho(0, V - V) \leq \rho(0,U) < \infty,$$

por lo que se concluye que $\rho(x,V) < \infty$, $\forall x \in R^d$. Si K es compacto, tomando una cubierta abierta $\{V_\alpha\}$ y de ahí una subcubierta finita $\{V_i\}_{i=1}^n$, donde cada $V_i = V + z_i,\ z_i \in R^d$, se obtiene, para $x \in R^d$,

$$\rho(x,K) = \int_0^\infty \mu_t(x,K) dt \leq \sum_{i=1}^n \int_0^\infty \mu_t(x - z_i, V) dt = \sum_{i=1}^n \rho(x - z_i, V) < \infty,$$

i.e., el proceso es recurrente. □

Antes de probar una caracterización de los procesos recurrentes mediante el exponente característico es conveniente tener expresiones para la transformada de Fourier del semigrupo asociado a un proceso de Lévy, así como para los operadores resolventes. $\hat{F}g$ denota la transformada de Fourier de $g \in L_1(R^d)$.

LEMA 4.4. *Para el semigrupo de convolución (P_t), kernel resolvente R_λ, $\lambda > 0$, y generador infinitesimal $A : D \to C_0$, de un proceso de Lévy, se cumple, para $f \in L_1 \cap L_\infty$, $g \in D$ con $Ag \in L_1$ y $s \in R^d$,*

$$\hat{F}P_t f(s) = \exp(-t\Psi(-s))\hat{F}f(s), \quad \hat{F}R_\lambda f(s) = \frac{\hat{F}f(s)}{(\lambda + \Psi(-s))}, \quad \hat{F}Ag(s) = -\Psi(s)\hat{F}g(s),$$

donde Ψ es el exponente característico.

DEMOSTRACIÓN. Por Lévy-Khintchine,

$$\begin{aligned} \hat{F}P_t f(s) = \int e^{isx} E_x f(X_t) dx &= E \int e^{isx} f(X_t + x) dx \\ &= E \int e^{is(u - X_t)} f(u) du \\ &= \left(\int e^{isu} f(u) du \right) E \exp(-isX_t) \\ &= \hat{F}f(s) \exp(-t\Psi(-s)). \end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned}\hat{F}R_\lambda f(s) = \int e^{isx}\int_0^\infty e^{-\lambda t}P_t f(x)dtdx &= \int_0^\infty e^{-\lambda t}\int e^{isx}P_t f(x)dxdt \\ &= \int_o^\infty \hat{F}f(s)\exp(-t(\Psi(-s)+\lambda))dt \\ &= \frac{\hat{F}f(s)}{(\lambda+\Psi(-s))}.\end{aligned}$$

Si $g \in D$ entonces $g = R_\lambda f$, por lo que de lo anterior se obtiene

$$\begin{aligned}\hat{F}Ag(s) = \hat{F}(\lambda I - R_\lambda^{-1})g(s) &= \hat{F}\lambda g(s) - \hat{F}f(s) \\ &= \hat{F}\lambda g(s) - (\lambda+\Psi(-s))\hat{F}g(s) = -\Psi(s)\hat{F}g(s).\end{aligned}$$

□

Ahora se da la caracterización mencionada anteriormente.

TEOREMA 4.5. *Un proceso de Lévy con exponente característico Ψ es transitorio si y sólo si existe una vecindad U del origen tal que*

$$\limsup_{\lambda\to 0+}\int_U Re\{(\lambda+\Psi(u))^{-1}\}du < \infty.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $B_r = [-r, r]$ (la demostración es análoga para $d > 1$ si se reemplaza B_r con $[-r, r]^d$ y se utiliza Fubini). Si $f := 1_{B_r} * 1_{B_r}$ es claro que es un función continua, no-negativa y con soporte $B_r + B_r$. Además

$$\hat{F}f(s) = (\hat{F}1_{B_r}(s))^2 = \left(\int_{B_r} e^{isx}dx\right)^2 = \left(2\int_{B_r\cap R^+}\cos(su)du\right)^2 = (2\sin(rs)/s)^2,$$

siempre y cuando $s \neq 0$ y por continuidad, $\hat{F}f(0) = 4r^2$. Por este mismo hecho, $\hat{F}f$ es acotada. Por la fórmula de Lévy-Khintchine $Re\Psi(u) = u\sigma u/2 + \int(1-\cos(ux))\nu(dx) \geq 0$, $\forall u \in R$, donde (b, σ, ν) es la triada característica del proceso de Lévy. Entonces $|\lambda+\Psi| \geq \lambda > 0$ y así $|\lambda+\Psi|^{-1}$ es acotada. Se sigue que, como $R_\lambda f \in L_1$ y $\hat{F}R_\lambda f(s) = \hat{F}f(s)(\lambda+\Psi(-s))^{-1} \in L_1$ entonces podemos aplicar inversión de Fourier:

$$\begin{aligned} R_\lambda f(0) = \frac{1}{2\pi}\int \hat{F}R_\lambda f(s)e^{i\cdot 0\cdot s}ds = \frac{1}{2\pi}\int \frac{\hat{F}f(s)}{(\lambda+\Psi(-s))}ds &= \frac{1}{2\pi}\int \frac{(2\sin(rs)/s)^2}{(\lambda+\Psi(-s))}ds \\ &= \frac{1}{2\pi}\int Re\frac{(2\sin(rs)/s)^2}{(\lambda+\Psi(-s))}ds, \end{aligned}$$

ya que $R_\lambda f$ es real.

Como $f = 1_{B_r} * 1_{B_r} = \int_{B_r} 1_{B_r}(\cdot - y)dy \leq \Lambda(B_r)1_{B_r+B_r} = 2r1\{[-2r,2r]\}$, donde Λ es la medida de Lebesgue, entonces

$$2r\rho(0,B_r+B_r) = \lim_{\lambda\to 0+} R_\lambda\{2r1_{[-2r,2r]}(0)\} \geq \lim_{\lambda\to 0+} R_\lambda f(0) = \frac{1}{2\pi}\lim_{\lambda\to 0+}\int Re\frac{(2\sin(rs)/s)^2}{(\lambda+\Psi(-s))}ds.$$

Como $(2\sin(rs)/s)^2$ es acotada por debajo en entornos pequeños del origen, si $r>0$ fija es suficientemente pequeña, existe $M>0$ tal que

$$\rho(0,[-2r,2r]) \geq \limsup_{\lambda\to 0+} M\int_{B_r} Re\frac{1}{(\lambda+\Psi(-s))}ds = \limsup_{\lambda\to 0+} M\int_{B_r} Re\frac{1}{(\lambda+\Psi(s))}ds.$$

Si la ultima cantidad es infinita entonces $\rho(0,[-2r,2r]) = \infty$ y como $r>0$ fue arbitrariamente pequeña entonces $\rho(0,U)=\infty$ para cualquier vecindad acotada U del origen, i.e., X es recurrente.

Si en cambio $\limsup_{\lambda\to 0+}\int_{B_r+B_r} Re\{(\lambda+\Psi(u))^{-1}\}du < \infty$, para alguna $r>0$, considere $g(s) := (2\sin(rs)/s)^2$ si $s\neq 0$ y naturalmente $g(0)=(2r)^2$. También, por inversión de Fourier (aplicable ya que g, $1_{B_r} * 1_{B_r} \in L_1$),

$$\hat{F}g(s) = \int g(x)e^{isx}dx = \int \hat{F}(1_{B_r} * 1_{B_r})(x)e^{isx}dx = 2\pi(1_{B_r} * 1_{B_r})(s),$$

c.s., y, consecuentemente, por continuidad, la igualdad es puntual. Por esta razón, aplicando una vez mas inversión de Fourier,

$$\begin{aligned} R_\lambda g(0) = \frac{1}{2\pi}\int \hat{F}R_\lambda g(s)e^{i\cdot 0\cdot s}ds = \frac{1}{2\pi}\int \frac{\hat{F}g(s)}{(\lambda+\Psi(-s))}ds &= \int_{B_r+B_r} \frac{(1_{B_r} * 1_{B_r})(s)}{(\lambda+\Psi(-s))}ds \\ &\leq \int_{B_r+B_r} \frac{2r}{(\lambda+\Psi(-s))}ds \end{aligned}$$

y notando que $(2\sin(rs)/s)^2 \geq r^2$ si $s \in V$, para un entorno V suficientemente pequeño del origen (por continuidad de g en cero), se obtiene

$$r^2\rho(0,V) = \lim_{\lambda\to 0+} R_\lambda(r^2 1_V)(0) \leq \lim_{\lambda\to 0+} R_\lambda g(0) \leq \limsup_{\lambda\to 0+} \int_{B_r+B_r} \frac{2r}{(\lambda+\Psi(-s))} ds < \infty,$$

de donde X no puede ser recurrente y por tanto debe ser transitorio. □

Supongamos ahora que la medida potencial tiene soporte S_ρ. Decimos que $x \in R^d$ es posible si $x \in S_\rho$. Notemos que x es posible si y sólo si $\int \mu_t(0,U)dt = \rho(0,U) > 0$ para cualquier entorno U de x, lo cual sucede si y sólo si (por la continuidad por la derecha de las trayectorias) para todo entorno U de x existe $t > 0$ tal que $P(X_t \in U) = \mu_t(0,U) > 0$, o bien sii $P(\tau_U < \infty) > 0$ para todo entorno U de x, por la propiedad fuerte de Markov (para la necesidad).

Si $x, y \in S_\rho$ y $|x-z| \leq \epsilon$ entonces $z + B_\epsilon(y) \subset B_{2\epsilon}(x+y)$, por lo que $0 < P(\tau_{B_\epsilon(y)} < \infty) \leq P_z(\tau_{B_{2\epsilon}(x+y)} < \infty)$ y así

$$P(\tau_{B_{2\epsilon}(x+y)} < \infty) \geq P(\tau_{B_\epsilon(x)} < \infty) E P_{X_{\tau_{B_\epsilon(x)}}}(\tau_{B_{2\epsilon}(x+y)} < \infty | \tau_{B_\epsilon(x)} < \infty) > 0,$$

de donde $x+y \in S_\rho$ y S_ρ adopta una estructura de semigrupo. Por conveniencia supondremos que tal semigrupo coincide con R_d, i.e. que $S_\rho = R^d$, en cual caso diremos que todo el espacio (de estados) es posible. Por lo anterior, basta fijarnos en el grupo generado por el soporte de $P(X_t \in \cdot)$ para determinar si todo el espacio es posible.

Si, para toda vecindad U del origen, x es tal que $P(\exists s \geq t : X_s \in x+U) = 1, \forall t \geq 0$, entonces decimos que $x \in S'$. Tomando $t = 0$ se tiene $S' \subset S_\rho$. Una relación mas íntima entre S' y S_ρ es la siguiente.

Lema 4.6. *Si $S_\rho = R^d$ entonces S' es abierto y cerrado.*

Demostración. Si $S' \neq \emptyset$, sean $y \in S'$ y $x \in S_\rho$. Sean U, V entornos del origen con $U - \bar{U} \subset V$ y sea $t \geq 0$. Entonces

$$P(\exists s \geq t + \tau_{x+U} : X_s \in y + U | \tau_{x+U} < \infty) = 1,$$

ya que $y \in S'$. Aplicando ahora la propiedad fuerte de Markov y usando que $U - \bar{U} \subset V$ se tiene

$$1 = \int_{x+U} P_v(\exists s \geq t : X_s \in y+U) P(X_{\tau_{x+U}} \in dv | \tau_{x+U} < \infty) \leq P(\exists s \geq t : X_s \in y - x + V),$$

por lo que incluso $y - x \in S'$. Así, si $x, y \in S' \subset S_\rho$, entonces $0 = y - y \in S'$, $-y = 0 - y \in S'$ y $x - y \in S'$. Se concluye que, como S' es grupo y contiene a S_ρ, $R^d = S_\rho \subset S' \subset R^d$ y por tanto S' es abierto y cerrado. $\square$

Ahora podemos dar una caracterización asintótica de los procesos de Lévy a través de S' y S_ρ.

TEOREMA 4.7. *Si $S_\rho = R^d$ entonces el proceso de Lévy subyacente es transitorio si y sólo si $S' = \emptyset$, o bien si y sólo si $\lim_{t\to\infty} |X_t| = \infty$, c.s.*

DEMOSTRACIÓN. Sean U, V vecindades cerradas del origen (se puede pensar en bolas) tales que $U + U \subset V$. Se tiene trivialmente $\inf\{t \geq 0 : X_t + y \notin V\} \geq \inf\{t \geq 0 : X_t \notin U\}$, $\forall y \in U$, por lo que $E_y\tau'_{V^c} \geq E\tau'_{U^c} > 0$, $\forall y \in U$, e incluso $K := \inf_{y\in U} E_y\tau'_{V^c} > 0$.

Considérese ahora la sucesión de tiempos de paro $(\sigma_i, \nu_i)_i$ donde $\sigma_1 = \tau'_{V^c}$ y recursivamente $\nu_i = \tau'_U \circ \theta_{\sigma_i}$, $\sigma_{i+1} = \tau'_{V^c} \circ \theta_{\nu_i}$, $i = 1, 2, \cdots$. Como, por hipótesis $R^d = S_\rho$ entonces S' es abierto y cerrado. Si $S' = R^d$ entonces, por definición de S', con probabilidad uno los tiempos de paro definidos anteriormente (de hecho cualquier tiempo de entrada o salida a abiertos o cerrados) son finitos. Así, la propiedad fuerte de Markov es aplicable y se cumple que X es recurrente:

$$\rho(0, V) = \int_0^\infty \mu_t(0, V)dt \geq E\sum_{n=1}^\infty [\sigma_{n+1} - \nu_n] \geq E\sum_{n=1}^\infty [E_{X_{\nu_n}}\tau'_{V^c}] \geq \sum_{n=1}^\infty K = \infty.$$

Si en cambio $S' = \emptyset$, por definición debe existir $\epsilon > 0$, un entorno del origen cerrado V y $s > 0$ tales que $P(\exists t \geq s : X_t \in V) < 1 - \epsilon$. Sea U vecindad cerrada del origen con $U - U \subset V$. Para todo $y \in U$ se tiene, por monotonía de la medida,

$$P_y(\exists t \geq s : X_t \in U) \leq P(\exists t \geq s : X_t \in V) < 1 - \epsilon.$$

Se introducen recursivamente los tiempos de paro $\tau_0 = 0$, $\tau_{i+1} = \tau'_U \circ \theta_{s+\tau_i}$, $i = 0, 1, \cdots$, con la propiedad que $\forall \tau_n < \infty$, $\bigcup_n [\tau_n, \tau_n + s] \supset \{u : X_u \in U\}$, por lo que

$$\rho(0, U) = \int_0^\infty \mu_t(0, U)dt \leq \int_0^\infty \sum_{n=0}^\infty E(1_{[\tau_n, \tau_n+s]}(t)|\tau_n < \infty)P(\tau_n < \infty)dt = \sum_{n=0}^\infty sP(\tau_n < \infty).$$

Pero por la propiedad fuerte de Markov

$$P(\tau_{n+1} < \infty | \tau_n < \infty, X_{\tau_n} = y) = P_y(\exists t \geq s : X_t \in U) < 1 - \epsilon,$$

de donde $P(\tau_n < \infty) = P(\tau_n < \infty | \tau_{n-1} < \infty) P(\tau_{n-1} < \infty) < (1-\epsilon) P(\tau_{n-1} < \infty)$, e iterando la desigualdad de obtiene $P(\tau_n < \infty) \leq (1-\epsilon)^n$. Así se cumple que X es transitorio:

$$\rho(0, U) \leq \sum_{n=0}^{\infty} s(1-\epsilon)^n = \frac{s}{\epsilon} < \infty.$$

Para la otra equivalencia notemos primero que si $\lim_{t\to\infty} |X_t| = \infty$, c.s., entonces no hay puntos cuya base local topológica sea visitada en tiempos arbitrariamente grandes, i.e., $S' = \emptyset$. Si en cambio se asume esta última condición entonces, por lo anterior, $\lim_{n\to\infty} P(\tau_n < \infty) \leq \lim_{n\to\infty} (1-\epsilon)^n = 0$. Sea W un entorno cerrado del origen con $W - W \subset U$. Entonces, para todo $x \in W$ se tiene

$$\lim_{t\to\infty} P_x(\exists u \geq t : X_u \in W) \leq \lim_{n\to\infty} P(\tau_{n+1} < \infty) = 0,$$

concluyendo la prueba, notando que el anterior limite se extiende a $x \in R^d$ y W compacto arbitrarios mediante una homotecia de V, U, W. □

Notemos que la caracterización anterior nos dice también que si $S_\rho = R^d$ entonces X es recurrente si y sólo si $S' = R^d$, o bien si y sólo si, con probabilidad uno, $\lim_{t\to\infty} |X_t| \neq \infty$. A continuación caracterizamos la recurrencia de un proceso de Lévy de otra manera.

TEOREMA 4.8. *Un proceso de Lévy con $S_\rho = R^d$ es recurrente si y sólo si para todo boreliano K con $\Lambda K > 0$ se cumple $\rho(x, K) = \infty$, para casi todo $x \in R^d$.*

Nótese que la suficiencia es inmediata, por definición de recurrencia, así que basta probar la necesidad de la condición acertada. Es de apreciarse la gran extensión que este teorema brinda a la noción de recurrencia, ya que, por ejemplo, existen conjuntos que se construyen de manera análoga al conjunto de Cantor que tienen medida de Lebesgue positiva.

DEMOSTRACIÓN. Sean U, V vecindades abiertas y acotadas del origen tales que $\bar{U} - \bar{U} \subset V$, por lo que trivialmente $U \subset x - y + V$ si $y \in x + \bar{U}$ y en tal caso

$\rho(0, x-y+V) \geq \rho(0, U)$. Si $x \in S' = R^d$ entonces $P(\tau_{x+U} < \infty) = 1$, por lo que la propiedad fuerte de Markov es aplicable y

$$\begin{aligned}
\rho(0, x+V) = \int_{\overline{x+V}} \rho(y, x+V) P(X_{\tau_{x+V}} \in dy) \quad &\geq \quad \int_{\overline{x+U}} \rho(0, x-y+V) P(X_{\tau_{x+U}} \in dy) \\
&\geq \quad \inf_{y \in x+\bar{U}} \rho(0, x-y+V) P(X_{\tau_{x+U}} \in \overline{x+U}) \\
&= \quad \inf_{y \in x+\bar{U}} \rho(0, x-y+V) P(\tau_{x+U} < \infty) \\
&\geq \quad \rho(0, U) P(\tau_{x+U} < \infty) = \rho(0, U),
\end{aligned}$$

lo cual muestra que $\rho(z, U) = \infty$ para cualquier punto $z := -x \in R^d$.

Si K_1, K_2 son compactos con $\Lambda K_i > 0$ se obtiene

$$\begin{aligned}
\int_{K_1} \rho(x, K_2) dx = \int_{K_1} \rho(0, K_2 - x) dx \quad &= \quad \int_{K_1} \int 1_{K_2}(x+y) \rho(0, dy) dx \\
&= \quad \int \int_{K_1} 1_{K_2}(x+y) dx \rho(0, dy)
\end{aligned}$$

y como ambos compactos tienen medida de Lebesgue positiva se cumple que $g(y) := \int_{K_1} 1_{K_2}(x+y) dx$ es una función continua y $g \neq 0$. Así existe n tal que $g^{-1}(1/n, \infty) =: A$ es abierto no vacío, por lo que lo anterior sustenta la ultima igualdad en lo que sigue:

$$\int_{K_1} \rho(x, K_2) dx = \int g(y) \rho(0, dy) \geq n^{-1} \rho(0, A) = \infty.$$

Dejando correr a K_1 sobre el conjunto de compactos (conjunto que bastará ya que la medida de Lebesgue es regular) con $\Lambda K_1 > 0$ se concluye que $\rho(x, K_2) = \infty$ para casi toda $x \in R^d$ (c.r.a Λ). Finalmente, si K es como el el enunciado del teorema entonces $\exists K' \subset K$ compacto con $\Lambda K' > 0$ y se usa la monotonía de la medida ρ. $\square$

Se cierra la sección con un teorema importante sobre el comportamiento asintótico de un proceso de Lévy, el cual solo se enuncia. La demostración se puede encontrar, por ejemplo, en p. 38 de [**2**].

TEOREMA 4.9. *(Teorema de renovación) Si $S_\rho = R$, $E|X_1| < \infty$ y $k := EX_1 > 0$ entonces, vagamente,*

$$k\rho(x, \cdot) \to \Lambda(\cdot), \ x \downarrow -\infty, \qquad k\rho(x, \cdot) \to 0, \ x \uparrow \infty.$$

5. Dualidad

La discusión se torna a la teoría potencial de los procesos de Lévy. Los siguientes resultados son válidos para procesos de Markov mas generales con algunas restricciones especiales, sin embargo los procesos de Lévy no requieren ninguna hipótesis extra.

DEFINICIÓN 5.1. *Sea X de Lévy. Se dice que $-X =: \hat{X}$ es el proceso dual de X. Se adopta la misma notación para el proceso dual que para X con la única diferencia siendo que todos sus elementos adquieren un gorro (p.ej. $\hat{P}_x$ es la ley de $x + X$ bajo $\hat{P}$, o equivalentemente la ley de $\hat{X}$ bajo P_{-x}) Además se dice que X es simétrico si $\Psi \in R$, en cual cuyo también $\hat{\Psi} = \overline{\Psi} = \Psi$ y por tanto $P = \hat{P}$.*

La siguiente proposición sirve como buena motivación para el término recién definido (dual).

PROPOSICIÓN 5.2. *Para todas $f, g \geq 0$ medibles, $t \geq 0$ y $\lambda > 0$ se tiene*

$$\int P_t f(x) g(x) dx = \int f(x) \hat{P}_t g(x) dx, \qquad \int R_\lambda f(x) g(x) dx = \int f(x) \hat{R}_\lambda g(x) dx.$$

DEMOSTRACIÓN. Fubini es aplicable en este contexto. Para la primera igualdad se tiene

$$\begin{aligned} \int P_t f(x) g(x) dx = E \int f(X_t + x) g(x) dx &= E \int f(u) g(u - X_t) du \\ &= \hat{E} \int f(u) g(u + X_t) du = \int f(u) \hat{P}_t g(u) du. \end{aligned}$$

Consecuentemente se obtiene

$$\begin{aligned} \int R_\lambda f(x) g(x) dx = &= \int_0^\infty \int e^{-\lambda t} P_t f(x) g(x) dx dt \\ &= \int_0^\infty \int e^{-\lambda t} f(x) \hat{P}_t g(x) dx dt = \int f(x) \hat{R}_\lambda g(x) dx. \end{aligned}$$

□

En particular, si $g = 1$ se obtiene $\int f(x)dx = \int P_t f(x)dx$, para $f \geq 0$, propiedad a la que se le conoce como invariancia de la medida de Lebesgue para el semigrupo (P_t).

LEMA 5.3. *(Dualidad) El proceso revertido* $(X_{(t-s)-} - X_t)_{0\leq s\leq t}$ *y el proceso dual* $(\hat{X}_s)_{0\leq s\leq t}$ *se distribuyen igual.*

DEMOSTRACIÓN. El proceso revertido es c.s. càdlàg que comienza en cero y con incrementos independientes y estacionarios. Así basta notar que $(X_{(t-s)-} - X_t) \sim (X_{-(t-s)+(t-s)-} - X_{t-(t-s)}) \sim -X_s$. □

El siguiente resultado nos dice, informalmene, que al revertir un puente de Lévy se obtiene un puente del proceso dual. La definición formal de un puente de Lévy no será necesaria para la discusión que sigue.

COROLARIO 5.4. *La ley del proceso* $(X_{(t-s)-})_{0\leq s\leq t}$ *bajo* $P_x(\cdot|X_t = y)$ *es una versión de la ley condicional de* $(X_s)_{0\leq s\leq t}$ *bajo* $\hat{P}_y(\cdot|X_t = x)$*, para todo* $x, y \in R^d$.

DEMOSTRACIÓN. Si $0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n \leq t$ y $f : R^{nd} \to R^+$ medible entonces simplemente

$$\begin{aligned}
&\int E_x(f(X_{(t-t_1)-}, \cdots, X_{(t-t_n)-})|X_t = y)\hat{P}_y(X_t \in dx) \\
= &\int E(f(X_{(t-t_1)-} + x, \cdots, X_{(t-t_n)-} + x)|X_t = y - x)P(y - X_t \in dx) \\
= &\; Ef(X_{(t-t_1)-} + [y - X_t], \cdots, X_{(t-t_n)-} + [y - X_t]) \\
= &\; \hat{E}_y f(X_{t_1}, \cdots, X_{t_n}) \\
= &\int \hat{E}_y(f(X_{t_1}, \cdots, X_{t_n})|X_t = x)\hat{P}_y(X_t \in dx),
\end{aligned}$$

donde se usó que el proceso revertido tiene incrementos independientes y también se aplicó el lema de dualidad. Como f es arbitraria se concluye la demostración. □

Consideremos ahora una función F_t-medible, $g : \Omega \to R^+$. El resultado recién probado nos asegura que si $Y_s = X_{(t-s)-}$ entonces

$$\begin{aligned}
\int E_x g(Y)dx &= \int\int E_x(g(Y)|X_t = y)P_x(X_t \in dy)dx \\
&= \int\int \hat{E}_y(g(X)|X_t = x)P_x(X_t \in dy)dx.
\end{aligned}$$

Pero si hacemos $f = 1_A$, $h = 1_B$, indicadoras de medibles, y como

$$\begin{aligned}\int_B P_x(X_t \in A)dx &= \int E_x f(X_t)h(x)dx \\ &= \int f(x)\hat{E}_x h(X_t)dx = \int_A \hat{P}_x(X_t \in B)dx,\end{aligned}$$

se sigue que $P_x(X_t \in dy)dx$ y $\hat{P}_y(X_t \in dx)dy$ son la misma medida. Entonces la expresión anterior se puede escribir como

$$\begin{aligned}\int E_x g(Y)dx &= \int\int \hat{E}_y(g(X)|X_t = x)P_x(X_t \in dy)dx \\ &= \int\int \hat{E}_y(g(X)|X_t = x)\hat{P}_y(X_t \in dx)dy \\ &= \int \hat{E}_y g(X)dy,\end{aligned}$$

y como g es arbitraria se concluye que los procesos Y y $\hat{X}$ se distribuyen igual bajo la medida $\int P_x(\cdot)dx$.

Se busca ahora dar resultados duales para procesos matados en un cierto tiempo de entrada a un conjunto abierto o cerrado. Recordemos que el operador κ_t sobre Ω es tal que $\kappa_t\omega(s) = \omega(s)$ si $s < t$ y en caso contrario mapea la trayectoria a un punto cementerio. Si X es un proceso, la distribución del proceso matado en el tiempo de la primera entrada a $B \in B(R^d)$, $X \circ \kappa_{\tau_B}$, bajo la medida P_x, se denotará P_x^B. Se denota por ζ al tiempo de la primera (y única) entrada al cementerio, el tiempo de vida.

$X \circ \kappa_{\tau_B}$ resulta ser un proceso de Markov, según se muestra a continuación. La extensión para mostrar que de hecho la propiedad fuerte de Markov se cumple, es clara de la demostración para procesos de Lévy en general y de la siguiente proposición.

Proposición 5.5. *El proceso trasladado $X \circ \theta_t$, condicional a $t < \zeta$ (y entonces considerado sobre $[t, \zeta)$) con $X_t = y$ y bajo P_x^B tiene ley P_y^B y es independiente de F_t.*

Demostración. Puntualmente, si $t < \tau_B$, $X \circ \theta_t \circ \kappa_{\tau_B} = X \circ \kappa_{\tau_B} \circ \theta_t$. Pero entonces, si $A \in F_t$, $\omega \in A$ si y solo si $\kappa_{\tau_B}\omega \in A$, c.s. sobre $\{t < \tau_B\}$. Así, si $g \geq 0$ es

Ω-medible,

$$\begin{aligned} E_x^B(g(X\circ\theta_t);A,t<\zeta) &= E_x(g(X\circ\theta_t\circ\kappa_{\tau_B});A,t<\tau_B) \\ &= E_x(g(X\circ\kappa_{\tau_B}\circ\theta_t);A,t<\tau_B) \\ &= \int E_y^B g(X)P_x^B(A,t<\zeta,X_t\in dy), \end{aligned}$$

donde la propiedad de Markov (simple) se usó en la última igualdad. □

Se extienden a continuación los conceptos de semigrupo y operadores resolventes para procesos matados. Sea $f\geq 0$ Ω-medible con $f(B)=\{0\}$. Se definen

$$P_t^B f(x) = E_x^B(f(X_t);t<\zeta) = E_x(f(X_t);t<\tau_B),$$
$$R_\lambda^B f(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}P_t^B(x)dt = E_x\int_0^{\tau_B} e^{-\lambda t}f(X_t)dt,$$

y similarmente se definen el semigrupo y operadores resolventes del proceso dual matado al tiempo de primera entrada a B de la manera esperada y se denotan $(\hat{P}_t^B)$ y $(\hat{R}_\lambda^B)$.

Ahora se da un resultado dual para procesos matados.

Teorema 5.6. *(Identidad de Hunt) Sean $f,g\geq 0$ medibles y $B\subset R^d$ abierto o cerrado. Entonces*

$$\int P_t^B f(x)g(x)dx = \int f(x)\hat{P}_t^B g(x)dx, \qquad \int R_\lambda^B f(x)g(x)dx = \int f(x)\hat{R}_\lambda^B g(x)dx.$$

Demostración. Sea B abierto. Por quasi-continuidad, $(X_s)_{0\leq s\leq t}$ entra a B si y sólo si $(X_{(t-s)-})_{0\leq s\leq t}$ lo hace. Así, por la reversibilidad de puentes y recordando que las medidas $P_x(X_t \in dy)dx$ y $\hat{P}_y(X_t \in dx)dy$ son la misma,

$$\begin{aligned}
\int g(x)P_t^B f(x)dx &= \int E_x(f(X_t); t < \tau_B)g(x)dx \\
&= \int\int f(y)P_x(t < \tau_B | X_t = y)P_x(X_t \in dy)g(x)dx \\
&= \int\int f(y)\hat{P}_y(t < \tau_B | X_t = x)P_x(X_t \in dy)g(x)dx \\
&= \int\int g(x)\hat{P}_y(t < \tau_B | X_t = x)\hat{P}_y(X_t \in dx)f(y)dy \\
&= \int \hat{E}_y(g(X_t); t < \tau_B)f(y)dy = \int f(y)\hat{P}_t^B g(y)dy.
\end{aligned}$$

Si en cambio B es cerrado existen $B_n \supset B$ abiertos con $\bigcap \overline{B}_n = B$ y consecuentemente $\tau_{B_n} \uparrow \tau_B$, c.s. y por tanto $P_t^{B_n} f(x) \uparrow P_t^B f(x)$. Lo mismo es cierto bajo las medidas $\hat{P}_x$, $x \in R^d$, por lo que convergencia dominada se encarga del resto. Finalmente la segunda igualdad por probar es una consecuencia trivial de Fubini.

□

6. Capacidad

Se introducen las medidas λ-capacitarias. En las demostraciones de los resultados se encuentra la noción extendida correspondiente a un proceso transitorio con $\lambda = 0$.

Definición 6.1. *Sean X de Lévy, A boreliano, B abierto o cerrado y $\lambda > 0$. Se define la medida λ-capacitaria de B como*

$$\mu_\lambda^B(A) = \lambda \int E_x(e^{-\lambda \tau_B}; X_{\tau_B} \in A)dx.$$

Notemos que tal medida está relacionada con la distribución del primer punto de B que el proceso visita. Es un resultado fino el hecho que la definición no cambia si se usa el primer tiempo de arribo a B, τ'_B, en lugar de τ_B.

La segunda aserción del siguiente resultado es intuitivamente clara a partir de la definición.

Lema 6.2. *La medida λ-capacitaria de B es de Radon y tiene soporte en $\bar{B}$.*

Demostración. Sean $R > 0$ y $A = \bar{B}_R(0)$, $C = \bar{B}_{R/2}(0)$ para que así $\rho_\lambda(y, A) \geq \rho_\lambda(0, C) > 0$, $\forall y \in C$, la positividad estricta por la inviariancia de la medida de Lebesgue para el semigrupo asociado. Además por la propiedad fuerte de Markov en F_{τ_C} se tiene

$$\begin{aligned}
\rho_\lambda(x, A) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} P_x(X_t \in A) dt &= E_x \int_0^\infty e^{-\lambda t} 1_{\{X_t \in A\}} dt \\
&\geq E_x \int_{\tau_C}^\infty e^{-\lambda t} 1_{\{X_t \in A\}} dt \\
&\geq \int_C \rho_\lambda(y, A) \int_0^\infty e^{-\lambda s} P_x(\tau_C \in ds, X_{\tau_n} \in dy) \\
&= \int_C \rho_\lambda(y, A) E_x(e^{-\lambda \tau_C}; X_{\tau_C} \in dy) \\
&\geq E_x e^{-\lambda \tau_C} \inf_{y \in C} \rho(y, A) \geq \rho_\lambda(0, C) E_x e^{-\lambda \tau_C}
\end{aligned}$$

$\forall x \in R^d$. Si $K^{-1} := \rho_\lambda(0, C)$ la expresión anterior es $E_x e^{-\lambda \tau_C} \leq K \rho_\lambda(x, A)$, $\forall x \in R^d$. Así, de la definición de la medida λ-capacitaria y por la inviariancia de la medida de Lebesgue para el semigrupo asociado se obtiene

$$\begin{aligned}
\mu_\lambda^B(C) &= \lambda \int E_x(e^{-\lambda \tau_B}, X_{\tau_B} \in C) dx \\
&\leq \lambda \int E_x e^{-\lambda \tau_{B \cap C}} dx \\
&\leq \lambda \int E_x e^{-\lambda \tau_C} dx \\
&\leq \lambda K \int \rho_\lambda(x, A) dx \\
&= \lambda K \int R_\lambda 1_A(x) 1 dx = \lambda K \int 1_A(x) \hat{R}_\lambda 1 dx = K \Lambda(A).
\end{aligned}$$

La extensión para cualquier compacto se sigue por Heine-Borel y se concluye a partir de la desigualdad probada que la medida λ-capacitaria es de Radon, ya que la medida de Lebesgue lo es. Finalmente, como B es cerrado o abierto,

$$\mu_\lambda^B(\bar{B}^c) = \lambda \int E_x(e^{-\lambda \tau_B}, X_{\tau_B} \in \bar{B}^c) dx = 0,$$

ya que, sobre $\{\tau_B < \infty\}$ se cumple que $X_{\tau_B} \in \bar{B}$ y en caso contrario se tiene $e^{-\lambda \tau_B} = e^{-\infty} = 0$. Queda probado que $\mu_\lambda^B(\cdot)$ tiene soporte en $\bar{B}$. □

Para trabajar con la medida λ-capacitaria es necesario encontrar métodos que faciliten su evaluación sobre conjuntos borelianos, ya que en general no es una medida de fórmula explícita o de cálculo sencillo. Si μ es una medida Borel entonces $(\mu R_\lambda)(\cdot) := \int \rho_\lambda(x,\cdot)\mu(dx)$ es la medida λ-resolvente de μ. Con esta notación se puede caracterizar a la medida λ-capacitaria, con ayuda de la identidad de Hunt.

Teorema 6.3. *La medida λ-capacitaria de B (abierto o cerrado) es la única medida de Radon μ cuya medida λ-resolvente está dada por*

$$\mu R_\lambda(\cdot) = \int_\cdot \hat{E}_x e^{-\lambda \tau_B} dx.$$

Demostración. Por dualidad se tiene que, $\forall f \geq 0$,

$$\int R_\lambda f(x)dx = \int f(x)\hat{R}_\lambda 1_{R^d}(x)dx = \lambda^{-1}\int f(x)dx.$$

Ahora, aplicando la propiedad fuerte de Markov en τ_B, como siempre, se obtiene (recordando la notación de procesos matados)

$$\begin{aligned} R_\lambda f(x) &= E_x \int_0^\infty e^{-\lambda t} f(X_t)dt \\ &= E_x \int_0^{\tau_B} e^{-\lambda t} f(X_t)dt + \int R_\lambda f(y) E_x(e^{-\lambda \tau_B}; X_{\tau_B} \in dy) \\ &= R_\lambda^B f(x) + \int R_\lambda f(y) E_x(e^{-\lambda \tau_B}; X_{\tau_B} \in dy), \end{aligned}$$

y consecuentemente, por lo anterior, al integrar sobre R^d,

$$\begin{aligned} \lambda^{-1}\int f(x)dx = \int R_\lambda f(x)dx &= \int R_\lambda^B f(x)dx + \int\int R_\lambda f(y)E_x(e^{-\lambda\tau_B}; X_{\tau_B} \in dy)dx \\ &= \int R_\lambda^B f(x)dx + \lambda^{-1}\int R_\lambda f(x)\mu_\lambda^B(dx). \end{aligned}$$

Pero la identidad de Hunt para procesos matados nos dice que

$$\begin{aligned} \int R_\lambda^B f(x)dx = \int f(x)\hat{R}_\lambda^B 1_{R^d}(x)dx &= \int\int_0^\infty e^{-\lambda t}\hat{P}_x(t < \tau_B)dt f(x)dx \\ &= \int\int_0^\infty e^{-\lambda t}(1 - \hat{P}_x(\tau_B \leq t))dt f(x)dx \\ &= \lambda^{-1}\int (1 - \hat{E}_x e^{-\lambda\tau_B}) f(x)dx. \end{aligned}$$

De las ultimas dos identidades se concluye que

$$\int R_\lambda f(x)\mu_\lambda^B(dx) = \int \hat{E}_x e^{-\lambda\tau_B} f(x)dx.$$

Tomando A boreliano y haciendo $f = 1_A$ se obtiene lo deseado. Solo falta probar la unicidad. Supongamos que μ y ν son medidas Radon con la misma medida λ-resolvente, i.e., $\forall f \in C_0$ se tiene $\int R_\lambda f(x)\mu(dx) = \int R_\lambda f(x)\nu(dx)$. Pero $D = R_\lambda(C_0) \subset C_0$ es denso en C_0. Entonces, como μ, ν son localmente finitas y regulares por dentro se concluye que $\mu = \nu$. $\square$

En el contexto de medidas Radon es natural pensar en la caracterización que se dió anteriormente en términos de funciones λ-excesivas. A detalle, supongamos que el kernel resolvente, R_λ, es absolutamente continuo. Entonces sabemos que existe una versión de la densidad resolvente, r_λ, tal que, $\forall f \geq 0$ medible,

$$R_\lambda f(x) = \int f(y) r_\lambda(y-x)dy,$$

y además $\bar{r}_\lambda(x) := r_\lambda(-x)$ es λ-excesiva. Entonces, por el teorema recién probado se obtiene

$$\int \hat{E}_x e^{-\lambda\tau'_B} f(x)dx = \int R_\lambda f(x)\mu_\lambda^B(dx) = \int\int f(y) r_\lambda(y-x)dy\mu_\lambda^B(dx),$$

de donde se concluye que $\hat{E}_x e^{-\lambda\tau'_B} = r_\lambda * \mu_\lambda^B(x)$, c.s., y, como $\hat{E}_\cdot e^{-\lambda\tau'_B}$ es λ-excesiva, la igualdad es puntual.

Se prosigue a definir la medida de equilibrio, correspondiente a la medida λ-capacitaria con $\lambda = 0$. Es posible definirla para conjuntos acotados, pero haremos la restricción (innecesaria) adicional de que el conjunto sea cerrado también.

Corolario 6.4. *Sea X transitorio de Lévy y K compacto. Entonces, μ_λ^K converge débilmente, cuando $\lambda \downarrow 0$. La medida limitante, $\mu_K = \mu_0^K$, tiene la propiedad de ser la única medida Radon que satisface*

$$\mu R(\cdot) := \int \rho(x,\cdot)\mu(dx) = \int_\cdot \hat{P}_x(\tau_K < \infty)dx.$$

A la medida μ^K se le llama medida de equilibrio de K.

Demostración. Sea K compacto, $L := K + \bar{B}_1(0)$ y $\tau := \tau_{\{x \in R^d : |x|>1\}}$. Como, para $x \in K$,

$$\rho_\lambda(x, L) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \mu_t(x, L) dt, \geq \lambda^{-1} E(1 - e^{-\lambda \tau}) \to E\tau > 0, \qquad \lambda \downarrow 0,$$

y así $I := \inf_{\lambda \in (0,1]} \lambda^{-1} E(1 - e^{-\lambda\tau}) > 0$. Por otro lado, si Λ es la medida de Lebesgue,

$$I \mu_\lambda^K(R^d) = I \mu_\lambda^K(K) \leq \int_K \rho_\lambda(x, L) \mu_\lambda^K(dx) \leq \int_L \hat{E}_x e^{-\lambda \tau_K} dx \leq \Lambda(L),$$

de donde se concluye que existe $M > 0$ tal que $\sup_{\lambda \in (0,1]} \mu_\lambda^K(R^d) \leq M$. Entonces las medidas, definidas sobre K, $\{\mu_\lambda^K\}_{\lambda \in (0,1]}$ son trivialmente tensas y, por Prohorov, relativamente compactas en la topología débil.

Ahora, sea $f \geq 0$ continua con soporte compacto. Se tiene que, cuando $\lambda \downarrow 0$,

$$R_\lambda f(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \int f(y) \mu_t(x, dy) dt \uparrow \int_0^\infty \int f(y) \mu_t(x, dy) dt = \int f(y) \rho(x, dy) = Rf(x),$$

y el teorema de Dini nos dice que incluso $R_\lambda f \to Rf$ uniformemente, por lo que $\lim_{\lambda \downarrow 0} \int (Rf(x) - R_\lambda f(x)) \mu_\lambda^K(dx) = 0$. Convergencia monótona muestra que

$$\lim_{\lambda \downarrow 0} \int Rf(x) \mu_\lambda^K(dx) = \lim_{\lambda \downarrow 0} \int R_\lambda f(x) \mu_\lambda^K(dx) = \lim_{\lambda \downarrow 0} \int \hat{E}_x e^{-\lambda \tau_B} f(x) dx = \int f(x) \hat{P}_x(\tau_K < \infty) dx.$$

Como el proceso es transitorio, $R(C_0) = R_\lambda(C_0)$ es denso en C_0, por lo que el límite de cualquier subsucesión de la familia débilmente relativamente compacta de medidas es único, la medida de equilibrio de K.

□

7. Conjuntos polares

En esta sección se busca dar criterios para discernir si un proceso visita o no un conjunto dado.

Definición 7.1. *Sea B un conjunto cerrado. Se dice que es (esencialmente) polar si $P_x(\exists t > 0 : X_t \in B) = 0$ para (casi) todo $x \in R^d$.*

La distinción entre los dos conceptos es innecesaria en el caso en que el kernel resolvente asociado al proceso de Lévy es absolutamente continuo.

Se define, en la notación de la sección anterior la λ-capacidad de un conjunto (abierto o cerrado) B como la masa de su medida λ-capacitaria. A saber,

$$C_\lambda(B) := \mu_\lambda^B(R^d) = \lambda \int E_x e^{-\lambda\tau_B} dx,$$

el concepto siendo extensible para $\lambda = 0$, cuando X es transitorio y B compacto, definiendo la 0-capacidad como la masa de la medida de equilibrio: $C(B) := C_0(B) := \lim_{\lambda\downarrow 0} C_\lambda(B)$. La notación no debe ser confundida con la de las funciones continuas o las continuas que desaparecen al infinito, ya que, a pesar de que es la misma, el contexto esclarece cualquier duda. Algunas propiedades básicas se tienen preliminarmente:

Lema 7.2. *Para $\lambda > 0$ se cumple que la λ-capacidad es monótona, continua por debajo por abiertos si B es abierto, regular por afuera por abiertos si B es cerrado y para A, B abiertos o cerrados (o uno y uno)*

$$C_\lambda(A \cup B) + C_\lambda(A \cap B) \leq C_\lambda(A) + C_\lambda(B).$$

Demostración. Sean A abierto o cerrado y B abierto o cerrado. Si $A \subset B$ entonces $\tau_B \leq \tau_A$ y se tiene la monotonía:

$$C_\lambda(A) = \lambda \int E_x e^{-\lambda\tau A} dx \leq \lambda \int E_x e^{-\lambda\tau B} dx = C_\lambda(B).$$

De la monotonía y por convergencia dominada se sigue la continuidad por debajo por abiertos.

Para mostrar regularidad por fuera supongamos primero que B es compacto y $B + B_{n^{-1}}(0) =: B_n \downarrow B$ por lo que $\tau_{B_n} \uparrow \tau_B$ y se sigue el resultado por convergencia dominada. Para B cerrado arbitrario con $C_\lambda(B) < \infty$ (ya que si $C_\lambda(B) = \infty$ se cumple trivialmente la regularidad) se expresa a $B = \cup B_n$ con B_n compactos y se aplica, de manera idéntica, convergencia dominada, habiendo encontrado un entorno de B de λ-capacidad finita (recordemos que la λ-capacidad de compactos es finita siempre, la identidad enunciada es útil).

Finalmente la identidad deseada se obtiene de $P_x(\tau_{A\cap B} \leq t) \leq P_x(\tau_A \leq t, \tau_B \leq t) \leq P_x(\tau_A \leq t) + P_x(\tau_B \leq t) - P_x(\tau_{A\cup B} \leq t)$. $\square$

La liga entre los dos conceptos recién introducidos, conjuntos polares y capacidad, se encuentra en el siguiente resultado.

PROPOSICIÓN 7.3. *Sea X de Lévy (y transitorio). Si para algún $\lambda > 0$ ($\lambda \geq 0$) se cumple que $C_\lambda(B) = 0$ entonces $\forall\lambda > 0$ se cumple la misma relación y B es esencialmente polar. Inversamente, si B es esencialmente polar entonces $C_\lambda(B) = 0$.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $C_\lambda(B) = 0$, i.e., $0 = \mu_\lambda^B(R^d) = \lambda \int E_x e^{-\lambda\tau_B} dx$, lo cual sucede si y sólo si $E.e^{-\lambda\tau_B} = 0$, Λ-c.d., o en otras palabras $0 = P.(\tau_B' < \infty) = P.(\exists t > 0 : X_t \in B)$, Λ-c.d., lo cual es la definición de un conjunto esencialmente polar. $\square$

Es natural pensar que los puntos posibles juegan algún papel en la determinación de los conjuntos polares (y por tanto en la capacidad del conjunto). En efecto esto sucede. Para fortalecer la aserción anterior recordemos que un punto $x \in R^d$ es posible si $x \in S_\rho := Supp(\rho(0,\cdot))$, el soporte de la medida potencial.

PROPOSICIÓN 7.4. *Supongamos que todo punto es posible, i.e., $S_\rho = R^d$. Bajo este supuesto, $C_\lambda(B) > 0$ si sólo si $P.(\tau_B' < \infty) > 0$, Λ-c.d. (no-polaridad).*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos primero que $C_\lambda(B) > 0$, por lo que existe un conjunto A con $\Lambda(A) > 0$ y $P_x(\tau_B' < \infty) > 0$, $\forall x \in A$. Por la regularidad (interior) de la medida de Lebesgue podemos encontrar un compacto $K \subset A$ con $\Lambda(K) > 0$ y $\inf_{x\in K} P_x(\tau_B' < \infty) > \delta$ para algún $\delta > 0$. Pero, para $x \in R^d$ y $t > 0$,

$$\begin{aligned} tP_x(\tau_B' < \infty) &= \int_{R^d}\int_0^t P_x(X_s \in dy)P_y(\tau_B' < \infty)ds \\ &\geq \int_K\int_0^t P_x(X_s \in dy)P_y(\tau_B' < \infty)ds \geq \delta\int_0^t P_x(X_s \in K)ds, \end{aligned}$$

por lo que para mostrar que $P.(\tau_B' < \infty) > 0$, Λ-c.s., bastará mostrar que, Λ-c.s., $\rho_1(x,K) = \int_0^\infty e^{-s}P_x(X_s \in K)ds > 0$, ya que esto implica que la expresión de la derecha de la igualdad recién mostrada es positiva. Suponiendo lo contrario, sea D boreliano con $\Lambda(D) > 0$ y $0 = \int_A \rho_\lambda(x,K)dx = \int\int_A 1_K(x+y)dx\rho_\lambda(0,dy)$. Ahora, como la aplicación $y \to \int_A 1_K(x+y)dx$ es continua y positiva en alguna vecindad no vacía $U \subset R^d$, ya que tanto A como K son Λ-positivos. Así debe suceder que $\rho(0,U) = 0$, lo cual contradice el hecho que el soporte de $\rho(0,\cdot)$ es R^d. Esto prueba una implicación.

La proposición anterior muestra la implicación contraria, sin necesidad de utilizar que todo punto es posible. □

8. Energía

Se caracterizan ahora los conjuntos esencialmente polares mediante el concepto de energía. Recordemos que por el Teorema de Representación de Riesz, el espacio de medidas finitas, $M' = M'(R^d)$, y el dual de C_K (continuas con soporte compacto) son isometricamente isomorfos, por lo que M' hereda una topología de C_K^*, a saber, la topología débil.

Supongamos por un momento que se tiene un operador λ-resolvente R_λ de un proceso de Markov arbitrario que posee un kernel de densidad resolvente r_λ. Es usual definir entonces la λ-energía de una medida finita μ por $\int\int r_\lambda(x,y)\mu(dy)\mu(dx)$.

Si ahora nos especializamos en el caso en el que el proceso de Markov es además de Lévy entonces podemos remover la necesidad de que el kernel resolvente tenga densidad resolvente de la siguiente forma. Sea μ una medida finita con densidad $f \in L_1 \cap L_2$. Entonces la energía está dada por

$$e_\lambda(\mu) := \int\int r_\lambda(x,y)\mu(dy)\mu(dx) = \int\left[\int r_\lambda(x,y)\mu(dy)\right] f(x)dx = \int [R_\lambda f(x)]f(x)dx.$$

Pero en secciones anteriores se mostró que, en este caso, $Re\Psi \geq 0$ y $R_\lambda f \in L_1 \cap L_2$.

Así, por la identidad de Parseval, se tiene

$$\begin{aligned}(2\pi)^d e_\lambda(\mu) = (2\pi)^d \int [R_\lambda f(x)]f(x)dx &= \int \hat{F}f(s)\hat{F}(R_\lambda f(s))ds \\ &= \int (\hat{F}f(s))\left(\frac{\hat{F}f(s)}{\lambda+\Psi(s)}\right)ds = \int \frac{|\hat{F}\mu(s)|^2}{\lambda+\Psi(s)}ds,\end{aligned}$$

y como esta última expresión es real y está definida sin necesidad de mencionar que el kernel resolvente es absolutamente continuo (posee densidad resolvente), una definición satisfactoria, por lo menos intuitivamente, de la energía es la siguiente.

DEFINICIÓN 8.1. *Sea $\lambda > 0$ y una medida de probabilidad μ sobre R^d. La λ-energía de μ se define como*

$$e_\lambda(\mu) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int |\hat{F}\mu(s)|^2 Re\left(\frac{1}{\lambda + \Psi(s)}\right) ds,$$

y la de un conjunto boreliano B como

$$e_\lambda(B) = \inf_{\mu\in\zeta} e_\lambda(\mu),$$

donde $\zeta := \{\mu : \mu(R^d) = \mu(B) = 1\}$.

Para procesos de Markov simétricos (como el browniano) se tiene que $e_\lambda(B) = C_\lambda(B)^{-1}$ (no trivial). Para procesos de Lévy se tiene el siguiente resultado:

PROPOSICIÓN 8.2. *Sea B abierto con $\bar{B}$ compacto y $\epsilon > 0$. Entonces $e_\lambda(B) > 0$ y existe $\nu \in \zeta$ con densidad h tal que*

$$e_\lambda(\nu) = \int h(x) R_\lambda h(x) dx \leq (1+\epsilon) e_\lambda(B).$$

DEMOSTRACIÓN. Supongamos primero que $e_\lambda(B) = 0$. Por definición existen $\mu_n \in \zeta$ con $e_\lambda(\mu_n) \leq n^{-1}$. Como la bola unitaria cerrada siempre es compacta en la topología débil, podemos asumir, pasando por una subsucesión, que μ_n es convergente en la topología débil, digamos a μ, de probabilidad sobre el compacto $\bar{B}$ (ver discusión al principio de esta sección). Por Fatou y la convergencia débil se tiene

$$\begin{aligned}
\int |\hat{F}\mu(s)|^2 Re\left(\frac{1}{\lambda + \Psi(s)}\right) ds &\leq \liminf_n \int |\hat{F}\mu_n(s)|^2 Re\left(\frac{1}{\lambda + \Psi(s)}\right) ds \\
&\leq \liminf_n (2\pi)^d n^{-1} = 0,
\end{aligned}$$

y como $Re\Psi \geq 0$ entonces $Re(\lambda + \Psi) \geq \lambda > 0$ y por tanto debe suceder que, Λ-c.d., $\hat{F}\mu(s) = 0$, lo cual únicamente sucede si $\mu = 0$, lo cual es absurdo y por tanto $e_\lambda(B) > 0$.

Ahora sea $\mu \in \zeta$ con $e_\lambda(\mu) \leq e_\lambda(B) + \epsilon$. Si $\delta > 0$ y $B_\delta := \{x : d(x, B^c) > \delta\} \subset B$ y de hecho, como B es abierto, $B = \bigcup_\delta B_\delta$. Si δ es pequeño entonces $\mu(B_\delta) \geq 1 - \epsilon$, por continuidad de la medida. Sea f cualquier función de densidad con soporte en

$\bar{B}_\delta(0)$ y $g := f * 1_{B_\delta}\mu \geq 0$ con soporte dentro de B y

$$\int g(x)dx = \int\int_{B_\delta} f(y-x)\mu(dx)dy = \mu(B_\delta) \geq 1-\epsilon.$$

Como trivialmente $|\hat{F}f| \leq 1$, entonces por Parseval

$$\begin{aligned}\int (f*\mu)(x)R_\lambda(f*\mu)(x)dx = \frac{1}{(2\pi)^d}\int |\hat{F}(f*\mu)(s)|^2 Re\left(\frac{1}{\lambda+\Psi(s)}\right)ds &\leq e_\lambda(\mu)\\ &\leq e_\lambda(B)+\epsilon.\end{aligned}$$

Definimos $h = g/\mu(B_\delta)$, que tiene soporte en B al igual que g, integra a uno y

$$\int h(x)R_\lambda h(x)dx = \frac{1}{\mu(B_\delta)^2}\int g(x)R_\lambda g(x)dx \leq \frac{e_\lambda+\epsilon}{(1-\epsilon)^2},$$

lo cual muestra la aserción del teorema, ajustando la ϵ inicial. La medida ν se obtiene definiéndola como aquella que tiene densidad h. □

La proposición anterior ahora nos ayuda a obtener cotas de la capacidad de un conjunto en términos de la energía.

TEOREMA 8.3. *Si un conjunto acotado B es abierto o cerrado (para poder definir su capacidad) entonces*

$$C_\lambda(B)^{-1} \in [e_\lambda(B), 4e_\lambda(B)].$$

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que B es abierto y sea a_δ una densidad de probabilidad en $B_\delta(0)$, con $\hat{F}a_\delta \geq 0$. Sea $\epsilon > \delta > 0$ y definimos $B_\epsilon := \{x \in R^d : d(x, B^c) > \epsilon\} \subset B$, su medida λ-capacitaria $\mu_\lambda^{B_\epsilon} =: \mu_\lambda^\epsilon$ y $f = a_\delta * \mu_\lambda^\epsilon$, continua y se anula fuera de B, por construcción, por lo que

$$\begin{aligned}\int R_\lambda f(x)\mu_\lambda^B(dx) = \int f(x)\hat{E}_x e^{-\lambda\tau_B}dx &= \int f(x)dx\\ &= \int\int a_\delta(y-x)dx\mu_\lambda^\epsilon(dy)\\ &= \int 1\mu_\lambda^\epsilon(dy) = \mu_\lambda^\epsilon(R^d) = C_\lambda(B_\epsilon).\end{aligned}$$

Pero por otro lado

$$\int R_\lambda f(x)\mu_\lambda^B(dx) = \int f(x)\hat{E}_x e^{-\lambda\tau_B}dx \geq \int f(x)\hat{E}_x e^{-\lambda\tau_{B_\epsilon}}dx = \int R_\lambda f(x)\mu_\lambda^\epsilon(dx),$$

y así, por Parseval,

$$\int R_\lambda f(x)\mu_\lambda^B(dx) \geq \frac{1}{(2\pi)^d}\int |\hat{F}\mu_\lambda^\epsilon(s)|^2 \hat{F}a_\delta(s) Re\left(\frac{1}{\lambda+\Psi(s)}\right).$$

Trivialmente $\hat{F}a_\delta \to 1$ cuando $\delta \downarrow 0$, por continuidad del producto interior en L_2. Entonces, por Fatou,

$$\begin{aligned} C_\lambda(B_\epsilon) &\geq \frac{1}{(2\pi)^d}\int |\hat{F}\mu_\lambda^\epsilon(s)|^2 \hat{R}e\left(\frac{1}{\lambda+\Psi(s)}\right) ds \\ &= \frac{C_\lambda(B_\epsilon)^2}{(2\pi)^d}\int \left|\hat{F}\left(\frac{\mu_\lambda^\epsilon(s)}{C_\lambda(B_\epsilon)}\right)\right|^2 \hat{R}e\left(\frac{1}{\lambda+\Psi(s)}\right) ds \geq C_\lambda(B_\epsilon)^2 e_\lambda(B), \end{aligned}$$

ya que μ_λ^ϵ concentra su masa, $C_\lambda(B_\epsilon)$, en $B_\epsilon \subset B$. Se concluye de lo anterior que $C_\lambda(B_\epsilon)^{-1} \in [e_\lambda(B), \infty]$ y como $B_\epsilon \uparrow B$, abiertos, cuando $\epsilon \downarrow 0$, una propiedad básicas de la capacidad nos dice que $C_\lambda(B_\epsilon) \uparrow C_\lambda(B)$, cuando $\epsilon \downarrow 0$, por lo que incluso $C_\lambda(B)^{-1} \in [e_\lambda(B), \infty]$.

Obtengamos ahora la otra cota. Sea h una densidad como la de la proposición anterior, i.e., tal que

$$\int h(x)R_\lambda h(x)dx \leq e_\lambda(B)(1+\epsilon),$$

y $\epsilon > 0$. Definimos $A := \{x \in B : R_\lambda h(x) < 2e_\lambda(B)\}$ y notemos que, como B es acotado y h es densidad continua soportada por B, $h \in C_0$, por lo que la propiedad de Feller (en particular para procesos de Lévy) nos dice que $R_\lambda h \in C_0$, por lo que entonces A es abierto (es preimagen continua de abierto). Así

$$e_\lambda(B)(1+\epsilon) \geq \int h(x)R_\lambda h(x)dx \geq 2e_\lambda(B)\int_{B\setminus A} h(x)dx,$$

y así, como $A \subset B$,

$$\int_A h(x)dx = \int_B h(x)dx - \int_{B\setminus A} h(x)dx \geq 1 - \frac{1+\epsilon}{2} = \frac{1-\epsilon}{2}.$$

Pero también tenemos que

$$\int h(x)\hat{E}_x e^{-\lambda\tau_A}dx = \int R_\lambda h(x)\mu_\lambda^A(dx).$$

Y como en el soporte de μ_λ^A (el cual no es mas que $\bar{A}$) se tiene $E_{\cdot}(e^{-\lambda\tau_A}) = 1$, de las dos identidades anteriores se obtiene

$$\frac{1-\epsilon}{2} \leq \int R_\lambda h(x)\mu_\lambda^A(dx) \leq 2e_\lambda(B)\mu_\lambda^A(\bar{A}) = 2e_\lambda(B)C_\lambda(A) \leq 2e_\lambda(B)C_\lambda(B),$$

la última desigualdad cumpliéndose por la monotonía de la capacidad. Haciendo $\epsilon \downarrow 0$ se obtiene que $C_\lambda(B)^{-1} \in [e_\lambda(B), 4e_\lambda(B)]$, como requerido.

Supongamos ahora que B es cerrado (y como es acotado entonces compacto). Por la regularidad interior de la capacidad de conjuntos cerrados mediante abiertos se obtiene la cota superior, mediante una aproximación de abiertos acotados y usando el caso anterior.

Para la cota inferior sea $B_n := \{x \in R^d : d(x,B) < n^{-1}\}$. B_n es acotado y abierto, con $\bar{B}_n$ acotado y por tanto compacto. Por definición de energía, dado $\epsilon > 0$, podemos encontrar, para cada n, una medida de probabilidad μ_n soportada por B_n tal que $e_\lambda(\mu_n) \leq e_\lambda(B_n) + \epsilon$. Usando el argumento estándar ya utilizado tenemos que (pasando por una subsucesión) podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\mu_n \to \mu$ vagamente, μ de probabilidad sobre B. En particular $\hat{F}\mu_n \to \hat{F}\mu$ puntualmente. Así, por Fatou y como B_n es abierto,

$$e_\lambda(\mu) \leq \liminf_n e_\lambda(\mu_n) \leq \liminf_n e_\lambda(B_n) + \epsilon \leq \liminf_n C(B_n)^{-1} + \epsilon \leq C(B)^{-1} + \epsilon,$$

estableciendo de esta manera la cota inferior, ya que $\epsilon > 0$ fue arbitrario. □

El resultado anterior es el principal de la sección en cuestión. Su importancia se manifiesta en los siguientes corolarios, los relacionan a los conjuntos esencialmente polares con la energía.

Corolario 8.4. *Sea B cerrado (para que la polaridad esté bien definida). Entonces es esencialmente polar si y sólo si $e_\lambda(B) = \infty$.*

Demostración. Recordemos que B es esencialmente polar si y sólo si $C_\lambda(B) = 0$. □

El siguiente resultado es famoso.

COROLARIO 8.5. *Sean P, Q las distribuciones procesos de Lévy X, Y con exponentes característicos Ψ, Ξ con la propiedad de que existe $M > 0$ tal que*

$$Re\left(\frac{1}{\lambda+\Xi}\right) \geq M Re\left(\frac{1}{\lambda+\Psi}\right).$$

Entonces para cualquier conjunto abierto o cerrado B se tiene $4C_\lambda^X(B) \geq C_\lambda^Y(B)$. En particular si un conjunto es esencialmente polar con respecto a P, también lo es con respecto a Q.

DEMOSTRACIÓN. Se sigue de la definición de energía que $Me_\lambda^X(B) \leq e_\lambda^Y(B)$, de donde la desigualdad deseada ahora es obvia.

□

A partir de este momento y hasta la conclusión de la sección se especializará en el caso en que $B = \{0\}$ ($B = \{x\}$ siendo análogo). Sea $C_\lambda := C_\lambda(\{0\})$.

Se tienen las siguientes cuatro equivalencias:

TEOREMA 8.6. *(No-polaridad de puntos) Las siguientes condiciones son equivalentes:*
1. $C_\lambda > 0$,
2. $\rho_\lambda(0, \cdot) \ll \Lambda$ *con derivada Radon-Nikodym acotada*
3. Se tiene

$$\liminf_{\epsilon \downarrow 0} \frac{\rho_\lambda(0, B_\epsilon(0))}{\epsilon^d} < \infty, \quad \Leftrightarrow \quad \int Re\left(\frac{1}{\lambda+\Psi(s)}\right) ds < \infty.$$

DEMOSTRACIÓN. Como existe una única medida de probabilidad sobre el conjunto cerrado $\{0\}$ (la medida de Dirac), del primer corolario anterior se obtiene que $C_\lambda > 0$ si y sólo si $e_\lambda(\{0\}) < \infty$ si y sólo si $\int Re\left(\frac{1}{\lambda+\Psi(s)}\right) ds = e_\lambda(\delta_0) < \infty$.

Sea A boreliano. Notemos que $\mu_\lambda^{\{0\}}(\cdot) = C_\lambda \cdot \delta_0(\cdot)$, por lo que

$$C_\lambda \rho_\lambda(0, A) = \int R_\lambda 1_A(x) \mu_\lambda^{\{0\}}(dx) = \int \hat{E}_x e^{-\lambda \tau_{\{0\}}} dx,$$

por lo que si $C_\lambda > 0$ podemos dividir de ambos lados con esta cantidad, concluyendo que $\rho_\lambda(0, \cdot) \ll \Lambda$, con derivada Radon-Nikodym $\hat{E}_x e^{-\lambda \tau_{\{0\}}} / C_\lambda$, acotada por

$C_\lambda^{-1} < \infty$.

Si en cambio $\rho_\lambda(0,\cdot) \ll \Lambda$ con derivada Radon-Nikodym acotada entonces el kernel resolvente es absolutamente continuo, de donde existe una (única) versión de la densidad resolvente, r_λ, que es λ-excesiva y por tanto continua por debajo. Si $r_\lambda(-x) > 0$ entonces para ϵ pequeño se tiene, por continuidad por debajo, que

$$\rho_\lambda(x, \bar{B}_\epsilon(0)) = \int_{\bar{B}_\epsilon(0)} r_\lambda(y-x)dy \geq \frac{r_\lambda(-x)\Lambda(\bar{B}_\epsilon(0))}{2}.$$

Pero, como $\rho_\lambda(y, \bar{B}_\epsilon(0)) \leq ||r_\lambda||\Lambda(\bar{B}_\epsilon(0))$, por la propiedad fuerte de Markov

$$\begin{aligned}
\rho_\lambda(x, \bar{B}_\epsilon(0)) &= E_x \int_0^\infty e^{-\lambda t} 1_{\{X_t \in \bar{B}_\epsilon(0)\}} dt \\
&= E_x E\left(\int_{\tau_{\bar{B}_\epsilon(0)}}^\infty e^{-\lambda t} 1_{\{X_t \in \bar{B}_\epsilon(0)\}} dt \,|F_{\tau_{\bar{B}_\epsilon(0)}} \right) \\
&= E_x \rho_\lambda(X_{\tau_{\bar{B}_\epsilon(0)}}, \bar{B}_\epsilon(0)) e^{-\lambda \tau_{\bar{B}_\epsilon(0)}} \\
&\leq ||r_\lambda||\Lambda(\bar{B}_\epsilon(0)) E_x e^{-\lambda \tau_{\bar{B}_\epsilon(0)}},
\end{aligned}$$

y uniendo las dos desigualdades anteriores se obtiene

$$E_x e^{-\lambda \tau_{\bar{B}_\epsilon(0)}} \geq \frac{r_\lambda(-x)}{2||r_\lambda||} > 0.$$

Haciendo $\epsilon \downarrow 0$ se concluye que $E_x e^{-\lambda \tau_{\{0\}}} > 0$ y entonces debe suceder que $P_x(\tau_{\{0\}} < \infty) > 0$. Como el conjunto de x tal que $r_\lambda(-x) > 0$ tiene medida de Lebesgue positiva entonces $\{0\}$ no puede ser un conjunto esencialmente polar, por lo que $C_\lambda > 0$.

Bajo el mismo supuesto sobre ρ_λ,

$$\begin{aligned}
\liminf_{\epsilon\downarrow 0} \frac{\rho_\lambda(0, \bar{B}_\epsilon(0))}{\epsilon^d} = \liminf_{\epsilon\downarrow 0} \epsilon^{-d} \int_{\bar{B}_\epsilon(0)} (d\rho_\lambda/d\lambda)(x)dx &\leq \liminf_{\epsilon\downarrow 0} \epsilon^{-d}\Lambda(\bar{B}_\epsilon(0))||d\rho_\lambda/d\Lambda|| \\
&= K||d\rho_\lambda/d\Lambda|| < \infty,
\end{aligned}$$

donde $K := \epsilon^{-d}\Lambda(\bar{B}_\epsilon(0))$, constante para todo $\epsilon > 0$.

Inversamente, si existen $\epsilon_n \downarrow 0$ con $\epsilon^{-d}\rho_\lambda(0, \bar{B}_\epsilon(0)) < M$ entonces

$$\begin{aligned} \rho_\lambda(0, x + \bar{B}_{\epsilon_n/2}(0)) &= E\int_0^\infty e^{-\lambda t} 1\{X_t \in x + \bar{B}_{\epsilon_n/2}(0)\}dt \\ &\leq \int_{x+\bar{B}_{\epsilon_n/2}(0)} \rho_\lambda(y, x + \bar{B}_{\epsilon_n/2}(0)) P(X_{\tau_{x+\bar{B}_{\epsilon_n/2}(0)}} \in dy) \\ &\leq \rho_\lambda(0, \bar{B}_{\epsilon_n}(0)) P(\tau_{x+\bar{B}_{\epsilon_n/2}(0)} < \infty) \leq M\epsilon_n^d. \end{aligned}$$

Por la arbitrariedad de $x \in R^d$, la densidad de ρ_λ es acotada. □

Es posible probar (ver p.63 de [**2**]) que para $d \geq 2$ siempre se tiene $C_\lambda = 0$, i.e., todos los puntos son esencialmente polares. Supongamos ahora que $C_\lambda > 0$, implícitamente asumiendo que el proceso de Lévy en cuestión está en R^1. Se denotará por r_λ (como siempre) a la versión λ-excesiva de la densidad resolvente. Por simplicidad se escribe $\tau' = \tau'_{\{0\}}$. Se tiene la siguiente consecuencia del teorema anterior, cuya prueba está parcialmente contenida en la del mismo.

COROLARIO 8.7. *Si* $C_\lambda > 0$ *entonces* $E.e^{-\lambda\tau'} = C_\lambda r_\lambda(-\cdot)$, *para todo* $\lambda > 0$.

Similarmente, si el proceso es transitorio y $C > 0$, $P.(\tau' < \infty) = Cr(-\cdot)$.

DEMOSTRACIÓN. Ya se probó que una versión de la densidad de $\rho_\lambda(0, \cdot)$ es $\hat{E}.e^{-\lambda\tau'}/C_\lambda$, la cual es λ-excesiva. Como lo mismo se puede decir de r_λ entonces la igualdad acertada no solo es casi segura, sino puntual. □

La ley cero-uno de Blumenthal nos dice que $P(\tau' = 0) = 0, 1$. Decimos que 0 es irregular por si mismo o regular por si mismo, dependiendo si la probabilidad anterior es 0 o 1. Un proceso de Lévy entonces tiene al origen como punto irregular por si mismo si y sólo si casi toda trayectoria visita el origen en tiempos arbitrariamente pequeños. Se tiene el siguiente teorema para procesos de Lévy reales.

TEOREMA 8.8. *Supóngase que* $C_\lambda > 0$. *Entonces* $P(\tau' = 0) = 1$ *(*0 *es regular por si mismo) si y sólo si existe una versión continua de la densidad de* $\rho_\lambda(0, \cdot)$. *En tal caso* $r_\lambda > 0$ *es continua, lo cual, a su vez, implica que*

$$\begin{aligned} r_\lambda(0) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty Re\left(\frac{1}{\lambda + \Psi(s)}\right) ds \\ &= \frac{r_\lambda(x) + r_\lambda(-x)}{2} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty (1 - \cos(sx)) Re\left(\frac{1}{\lambda + \Psi(s)}\right) ds, \quad \forall x \in R. \end{aligned}$$

Demostración. Sean $x, y \neq 0$. Supongamos primero que $P(\tau' = 0) = 1$. Pero como estamos suponiendo que $C_\lambda > 0$,

$$1 = E_0 e^{-\lambda\tau'} = C_\lambda r_\lambda(-0),$$

de donde

$$1 \geq E_x e^{-\lambda\tau'} = C_\lambda r_\lambda(-x) = r_\lambda(0)^{-1} r_\lambda(-x).$$

Como, por definición, r_λ es la versión continua por debajo de la densidad resolvente, $r_\lambda(x) \uparrow r_\lambda(0)$, cuando $x \to 0$. Por la propiedad fuerte de Markov

$$E_x e^{-\lambda\tau'} \geq E_{x+y} e^{-\lambda\tau'} E_{-y} e^{-\lambda\tau'},$$

por lo que

$$\begin{aligned} r_\lambda(-x) &= E_x e^{-\lambda\tau'} r_\lambda(0) \\ &\geq E_{x+y} e^{-\lambda\tau'} E_{-y} e^{-\lambda\tau'} r_\lambda(0) = r_\lambda(-x-y) r_\lambda(y)/r_\lambda(0) = r_\lambda(-x-y) r_\lambda(y) C_\lambda, \end{aligned}$$

y así $r_\lambda(-x) \geq \limsup_{y\to 0} r_\lambda(-x-y)$, e incluso r_λ es continua en x. Veamos que $r_\lambda > 0$. Aplicando la propiedad fuerte de Markov de la misma manera, se obtiene $C_\lambda r_\lambda(nx) = E e^{-\lambda\tau'_{nx}} \geq E^n e^{-\lambda\tau'_x} = (r_\lambda(-x)/r_\lambda(0))^n > 0$, para x pequeña, pero n arbitraria, ya que r_λ es continua y $r_\lambda(0) > 0$.

Inversamente, supongamos que existe una versión, s_λ de la densidad resolvente que es continua. Notemos que, por la propiedad fuerte de Markov, haciendo $\tau^\epsilon := \tau_{(-\epsilon,\epsilon)}$,

$$\int_{-\epsilon}^{\epsilon} s_\lambda(y-x)dy = \rho_\lambda(x, (-\epsilon, \epsilon)) = \int_{[-\epsilon,\epsilon]} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} s(y-z)dz \int_0^\infty e^{-\lambda w} P_x(\tau^\epsilon \in dw, X_{\tau^\epsilon} \in dz).$$

Dividiendo por ϵ y tomando el límite cuando $\epsilon \downarrow 0$ se obtiene, como consecuencia de la convergencia vaga de las medidas $\int_0^\infty e^{-\lambda w} P_x(\tau^\epsilon \in dw, X_{\tau^\epsilon} \in \cdot)$ a $E_x e^{-\lambda\tau'} \delta_0(\cdot)$ y la hipótesis que s_λ es continua, $s_\lambda(-x) = s_\lambda(0) E_x e^{-\lambda\tau'}$.

Por λ-excesividad,

$$E_0 e^{-\lambda\tau'} \geq r R_{r+\lambda} E_{\cdot} e^{-\lambda\tau'}(0) = r \int E_x e^{-\lambda\tau'} \rho_{r+\lambda}(0, dx), \quad r > 0.$$

Como se está suponiendo que $C_\lambda > 0$, el kernel resolvente es absolutamente continuo, por lo que la propiedad fuerte de Feller se cumple y como consecuencia $\{0\}$ es difuso para la medida $(r+\lambda)\rho_{r+\lambda}(0,\cdot)$, la cual converge a δ_0, cuando $r \to \infty$. Entonces $E_0 e^{-\lambda\tau'} \geq \text{lím}_{x\to 0} s_\lambda(-x)/s_\lambda(0) = 1$, por continuidad, i.e., 0 es regular por si mismo.

Supongamos ahora que r_λ es continua. Mostremos las representaciones de $r_\lambda(0)$ enunciadas. Sea la densidad $g_\epsilon \sim N(0, \epsilon^{1/2})$ y notemos que, por la hipótesis de continuidad y la simetría de la densidad gaussiana,

$$\lim_{\epsilon\downarrow 0} R_\lambda g_\epsilon(0) = \lim_{\epsilon\downarrow 0} \int g_\epsilon(y) r_\lambda(y)dy = r_\lambda(0).$$

Como $R_\lambda g_\epsilon \in C_0$ entonces, recordando la transformada de Fourier de la distribución normal,

$$\hat{F}R_\lambda g_\epsilon(s) = \frac{\hat{F}g_\epsilon(s)}{\lambda + \Psi(-s)} = \frac{e^{-\epsilon s^2/2}}{\lambda+\Psi(-s)} \in L_1,$$

por lo que el Teorema de Inversión de Fourier es aplicable de la siguiente manera:

$$R_\lambda g_\epsilon(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 1\cdot \hat{F}R_\lambda g_\epsilon(s)ds = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\epsilon s^2/2}}{\lambda+\Psi(-s)}ds = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\epsilon s^2/2} Re\frac{1}{\lambda+\Psi(s)}ds.$$

Por convergencia monótona, cuando $\epsilon \downarrow 0$, el resultado deseado se sigue de las dos representaciones distintas del mismo limite. Aplicando todo lo anterior a la combinación lineal Gaussiana $2g_\epsilon(\cdot) - g_\epsilon(\cdot + x) - g_\epsilon(\cdot - x)$ se llega a la segunda representación de $r_\lambda(0)$. □

Finalmente se dan criterios para reconocer la (ir)regularidad de puntos aislados en términos del exponente característico.

COROLARIO 8.9. *Sea un proceso de Lévy real. Si* $\int |1+\Psi(s)|^{-1}ds < \infty$ *entonces* $C_\lambda > 0$ *y* 0 *es regular por si mismo.*

DEMOSTRACIÓN. La condición de integrabilidad implica que $\int Re[1+\Psi(s)]^{-1}ds < \infty$, de donde $C_\lambda > 0$ (ya que $C_1 > 0$). Aplicando el Teorema de Inversión de Fourier se obtiene una densidad continua de $\rho_1(0,\cdot)$ (con respecto a la medida de Lebesgue) y por tanto 0 es regular por si mismo.

□

Recordemos que cuando un proceso de Lévy es de variación acotada entonces no hay componente gaussiano y los saltos pequeños pueden ser integrados al factor lineal del exponente característico, el cuál entonces tiene la siguiente representación:

$$\Psi(s) = -ids + \int (1 - e^{isx})\nu(dx),$$

de manera que a tal coeficiente, d, se le llama el coeficiente de deriva.

COROLARIO 8.10. *Sea un proceso de Lévy de variación acotada y con coeficiente de deriva d. Entonces $C_\lambda > 0$ si y sólo si $d \neq 0$, en cual caso 0 es irregular por si mismo.*

Notemos que la irregularidad de 0 cuando hay deriva es intuitivamente obvia, por la Markovianidad de un proceso de Lévy.

DEMOSTRACIÓN. Recordemos que en el escenario que tenemos se cumple $\lim_{|s|\to\infty} \Psi(s)/s = id$, de donde

$$\lim_{t\downarrow 0} E e^{isX_t/t} = \lim_{t\downarrow 0} e^{-t\Psi(s/t)} = e^{-isd},$$

y por tanto, en probabilidad, $\lim_{t\downarrow 0} X_t/t = d$.

Si $d = 0$, dado $\epsilon > 0$, existe T tal que $P(|X_t/t| < \epsilon) \geq 1/2$ si $0 \leq t \leq T$. De esta manera, por Taylor,

$$\rho_1(0, [-\delta, \delta]) = \int_0^\infty e^{-t} P(|X_t| < \delta)dt \geq \int_0^{\delta/\epsilon} e^{-t} P(|X_t| < T\epsilon)dt \geq \frac{\delta}{2\epsilon},$$

para $\delta \in (0, \epsilon T)$ suficientemente pequeño para que la primera desigualdad sea válida. Entonces

$$\liminf_{\delta\downarrow 0} \rho_1(0, B_\delta(0)) \geq (2\epsilon)^{-1},$$

cantidad que es infinita, ya que $\epsilon > 0$ es arbitrariamente pequeña. Se sigue que $C_\lambda = 0$.

Inversamente supongamos que $d \neq 0$. Como el proceso es de variación acotada, $\int (1 \wedge |x|)\nu(dx) < \infty$, lo cual implica que, para algún número natural M, por Taylor,

$$\int \frac{Re\Psi(s)}{1+s^2} = \int\int \frac{1-\cos(sx)}{1+s^2} ds\, \nu(dx) \leq \int M(1 \wedge |x|)\nu(dx) < \infty$$

Lo cual garantiza que $\int Re[1+\Psi(s)]^{-1}ds < \infty$, por la manera de crecer al infinito del exponente característico, descrita por $\lim_{|s|\to\infty} \Psi(s)/s = id$. Esta condición nos garantiza que $C_\lambda > 0$. En la teoría subsecuente (o bien en la proposición VI.11(ii) en [**2**]) se hace notar que $\lim_{t\downarrow 0} X_t/t = d$ no solo se cumple en probabilidad, sino casi seguramente, de donde emana la irregularidad de 0 por si mismo.

$\square$

9. Subordinadores

Una clase importante de procesos de Lévy es la de los subordinadores, en particular con la conexión que tiene a la teoría de excursiones que se desarrolla en el siguiente capítulo.

Definición 9.1. *(Subordinadores) Un subordinador es un proceso de Lévy no-decreciente.*

Si $\tau \sim Exp(\lambda)$ y X es subordinador, independiente de τ, entonces se define el proceso X^λ por

$$X^\lambda(\omega,t) := X(\omega,t)1_{[0,\tau(\omega))}(t) + \infty 1_{[\tau(\omega),\infty]}(t),$$

y se le llama un subordinador matado a tasa λ.

Por la independencia y estacionariedad de los incrementos es claro que las trayectorias de un subordinador son no-decrecientes.

A partir de ahora se supondrá que X es un subordinador. En particular es de Lévy y por la distribución infinitamente divisible podemos definir (de manera análoga al exponente característico) el exponente de de Laplace, $\Phi : R^+ \cup \{0\} \to R^+ \cup \{0\}$, que cumple

$$Ee^{-sX_t} = e^{-t\Phi(s)},$$

o bien $\Phi(s) = \Psi(is)$, para $s \geq 0$, por continuación analítica.

La representación de Lévy-Itô en el caso de un proceso aditivo, sin saltos fijos, real y no-decreciente es

$$X_t = a_t + \int_0^t \int_0^\infty x\eta(dsdx),$$

con a una función no-decreciente y un proceso de Poisson η con soporte en el primer cuadrante del plano, con la propiedad de que

$$\int_0^t \int_0^\infty (x \wedge 1) E\eta(dsdx) < \infty,$$

y entonces la fórmula de Lévy-Khintchine para un subordinador es

$$\Psi(s) = -isd + \int_0^\infty (1 - e^{isx})\nu(dx),$$

y así

$$\Phi(s) = sd + \int_0^\infty (1 - e^{-sx})\nu(x).$$

Por la independencia del tiempo de muerte en un subordinador matado a tasa λ se obtiene que su exponente de Laplace está dado por $\Phi^\lambda = \Phi + \lambda$, donde Φ es el correspondiente exponente de Laplace del subordinador subyacente.

Un subordinador (no trivial) es transitorio. Sea ρ la medida potencial. Entonces se tiene la siguiente representación de su transformada de Laplace:

$$\begin{aligned} \hat{L}\rho(s) = \int_0^\infty e^{-st}\rho(0,dt) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-st} P(X_u \in dt) du &= E\int_0^\infty e^{-sX_u} du \\ &= \int_0^\infty e^{-u\Phi(s)} du = \frac{1}{\Phi(s)}. \end{aligned}$$

Sea $\rho(\cdot) := \rho(0, \cdot)$. También se puede caracterizar a la distribución de la medida potencial haciendo $\tau(x) := \tau_{(x,\infty)}$:

$$\begin{aligned} F_\rho(x) := \rho([-\infty, x]) = \rho([0,x]) = E\int_0^\infty 1_{X_t \in [0,x]} dt &= \int_0^\infty P(X_t \in [0,x]) dt \\ &= \int_0^\infty P(\tau(x) > t) dt = E\tau(x). \end{aligned}$$

A F_ρ se le llama función de renovación y a veces se le denota por $\hat{R}$. La propiedad fuerte de Markov trivialmente nos dice que la función de renovación es sub-aditiva:

$$\hat{R}(x+y) \leq \hat{R}(x) + \hat{R}(y), \quad x, y \geq 0.$$

Diremos que dos funciones a, b son comparables $a \asymp b$ si existe $k > 0$ tal que se cumple $ka \leq b \leq k^{-1}a$. A cola de la medida de Lévy se le denota $\bar{\nu}(x) := \nu((x, \infty))$. Se tienen las siguientes relaciones entre la función de renovación y el exponente de Laplace:

Teorema 9.2. *Para un subordinador con función de renovación $\hat{R}$, exponente de Laplace Φ, deriva d y medida de Lévy ν se cumple*

$$\hat{R}(x) \asymp \Phi(x^{-1})^{-1}, \qquad x^{-1}\Phi(x) \asymp d + \int_0^{x^{-1}} \nu((t,\infty))dt = d + \int_0^{x^{-1}} \bar{\nu}(t)dt.$$

Notemos que las funciones anteriores no deberían estar evaluadas, sin embargo la exposición es más clara de esta manera.

Demostración. Se cumple

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-u}\hat{R}(u/s)du &= \int_0^\infty e^{-u}\int_0^\infty P(X_t \le u/s)dtdu \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty se^{-vs}P(X_t \le v)dvdt \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty se^{-vs}(1 - P(X_t > v))dvdt \\
&= \int_0^\infty (1 + [Ee^{-sX_t} - 1])dt = \int_0^\infty Ee^{-sX_t}dt = \int_0^\infty e^{-t\Phi(s)}dt = \Phi(s)^{-1}.
\end{aligned}$$

Pero por ser función de distribución, $\hat{R}$ es no-decreciente, de donde $e^{\cdot}\Phi(s)^{-1} \ge \hat{R}(\cdot/s)$. En particular, evaluando la función anterior en 1 y tomando $x = s^{-1}$ se obtiene la primera desigualdad, $k\hat{R}(x) \le \Phi(x^{-1})^{-1}$, con $k := e^{-1}$.

Para probar la otra desigualdad notemos que el exponente de Laplace es no negativo y cóncavo, propiedades que se siguen de la definición tanto de subordinador como del mismo exponente de Laplace, de donde $\alpha\Phi(s) \le \Phi(\alpha s)$ para $s > 0$ y

$0 < \alpha < 1$. Así, para $w > 0$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Phi(s)} &= \int_0^w e^{-u}\hat{R}(u/s)du + \int_w^\infty e^{-u}\hat{R}(u/s)du \\
&\leq \hat{R}(w/s)\int_0^w e^{-u}du + \int_w^\infty e^{-u}\hat{R}(u/s)du \\
&\leq \hat{R}(w/s) + \int_w^\infty e^{-u}\hat{R}(u/s)du \\
&\leq \hat{R}(w/s) + \int_w^\infty e^{-u}[e^{u/1{,}1}/\Phi(s/1{,}1)]du \\
&= \hat{R}(w/s) + \frac{1}{\Phi(s/1{,}1)}((1-1/1{,}1)^{-1}e^{-w\cdot(1-1/1{,}1)}) \\
&\leq \hat{R}(w/s) + \frac{1{,}1}{\Phi(s)}((1-1/1{,}1)^{-1}e^{-w/(1-1/1{,}1)}).
\end{aligned}$$

Haciendo $x = s^{-1}$ y $w = 1$ se obtiene

$$\frac{1}{\Phi(x^{-1})} \leq \hat{R}(x) + \frac{1{,}1}{\Phi(x^{-1})}((1-1/1{,}1)^{-1}e^{-1/(1-1/1{,}1)}) \leq \hat{R}(x) + \frac{1}{2\Phi(x^{-1})},$$

por lo que $k^{-1}\hat{R}(x) \geq \Phi(x^{-1})^{-1}$, con $k := 1/2$. Coordinando las dos k obtenidas se obtiene la primera relación y la segunda se realiza de la misma manera, partiendo de que, como $\Phi(s) = sd + \int_0^\infty (1 - e^{-sx})\nu(x)$, entonces

$$\frac{\Phi(s)}{s} = \int_0^\infty e^{-u}\left(d + \int_0^{u/s} \nu((y,\infty))dy\right)du.$$

$\square$

Ahora consideraremos el problema de especificar el momento cuando un subordinador rebasa un nivel fijo real (positivo) de manera que no sea mediante un salto, sino que sea precisamente cuando el proceso cruza ta nivel. De la sección anterior recordamos que si un proceso es de variación acotada y de Lévy (en particular, en este caso, un subordinador) entonces $C_\lambda > 0$ si y sólo si $d \neq 0$, en cual caso 0 (un punto que se tomó como ejemplo para simplificar notación) es irregular por si mismo, de donde podemos concluir que para que la probabilidad del evento que estamos considerando sea positiva debemos considerar un subordinador con deriva no-nula. Recordemos que se definió $\tau(x) := \tau_{(x,\infty)}$.

El siguiente resultado es en la dirección deseada, proporcionando la probabilidad de que el proceso cruce un franja alrededor del nivel deseado en términos de la medida potencia y la de Lévy. También nos dice que un salto no puede ocurrir en el instante en el que se está en un nivel dado.

TEOREMA 9.3. *Sea $x \geq 0$ un nivel fijo, X de Lévy con medida potencial ρ y medida de Lévy ν. Entonces*

$$P(X_{\tau(x)-} \in dy, X_{\tau(x)} \in dz) = \rho(dy)\nu(dz-y), \quad 0 \leq t \leq x < z,$$

y también

$$P(X_{\tau(x)-} < X_{\tau(x)} = x) = 0 \quad \forall x > 0.$$

DEMOSTRACIÓN. Sean $f, g \geq 0$ borelianas (la imagen inversa de abiertos es boreliano) con $g(x) = 0$. Como

$$\begin{aligned} E(f(X_{\tau(x)-})g(X_{\tau(x)})) &= E\sum_{t\geq 0} f(X_{t-})g(X_{t-}+\Delta X_t)1\{X_t- \leq x, \Delta X_t > x - X_{t-}\} \\ &= E\int_0^\infty \int_0^\infty f(X_{t-})1\{X_t \leq x\}g(X_{t-}+\Delta X_t)1\{s > x - X_{t-}\}\nu(ds)dt, \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} &\int_{0\leq y\leq x<z} f(y)g(z)P(X_{\tau(x)-} \in dy, X_{\tau(x)} \in dz) \\ = &\int_0^\infty \int_{0\leq y\leq x,\, s>x-y} f(y)g(y+s)P(X_t \in dy)\nu(ds)dt \\ = &\int_{0\leq y\leq x<z} f(y)g(z)\rho(dy)\nu(dz-y), \end{aligned}$$

por lo que por la arbitrariedad de las funciones f, g, o bien por aproximación a indicadoras se sigue la primera igualdad de distribuciones.

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que X no es Poisson compuesto. Del inciso anterior se tiene

$$P(X_{\tau(x)-} < x = X_{\tau(x)}) = \int_0^x \nu(\{x-y\})\rho(dy) = 0$$

ya que, como $\nu(\{x-y\}) = 0$ excepto para un numero contable de $y \in [0, x)$ y ρ es difusa (ya que el proceso no es Poisson compuesto y es transitorio). $\square$

El siguiente caso excluye el caso Poisson compuesto.

Lema 9.4. *Si $P(X_{\tau(x)} = x) > 0$ para algún $x > 0$ entonces $\forall \epsilon > 0, \exists y \in (0, \epsilon)$ con $P(X_{\tau(y)} = y) > 1 - \epsilon$.*

Demostración. Por la proposición anterior sabemos que el proceso no salta al nivel x exacto cuando lo cruza. Pero como X es subordinador entonces $\{X_{\tau(x)} = x\} \subset \bigcap_n \{X_{\tau(x-n^{-1})} < x\}$, c.s. Se afirma que la igualdad de hecho se da. En efecto, sobre el evento

$$\bigcup_n \bigcap_{k \geq n} \{X_{\tau(x-k^{-1})} < x\}$$

se cumple $X_{\tau(x-)} = x$, por quasi-continuidad, y entonces por la propiedad fuerte de Markov si $t > \tau(x-)$ entonces $X_t > x$ por lo que debe suceder que $\tau(x-) = \tau(x)$ y la otra inclusión queda probada. Ahora,

$$\begin{aligned} P(X_{\tau(x)} = x) &= \int_{[x-n^{-1},\, x)} P(X_{\tau(x-z)} = x - z) P(X_{\tau(x-n^{-1})} \in dz) \\ &\leq P(X_{\tau(x-n^{-1}) < x}) \sup_{y \in (0, n^{-1}]} P(X_{\tau(y)} = y). \end{aligned}$$

Si suponemos que el lado izquierdo es positivo entonces, por un lado, por la igualdad de conjuntos mostrada, para todo n sucede $P(X_{\tau(x-n^{-1}) < x}) > 0$ y el cociente $P(X_{\tau(x)} = x)/P(X_{\tau(x-n^{-1}) < x})$ tiende a la unidad. Por otro lado, la igualdad anterior se debe cumplir, por lo que, dado $\epsilon > 0$ tomamos el máximo entre la n que hace que $n^{-1} < \epsilon$ y la que hace que el cociente indicado sea mayor a $1 - \epsilon$, terminando así la prueba por propiedades del supremo. □

Con este lema ahora se está en posición para mostrar que un subordinador con deriva nula rebasa cualquier nivel mediante un salto, P-c.s. Aquí la diferencia con lo que ya sabíamos que se cumplía Λ-c.d.

Teorema 9.5. *Si X es un subordinador con deriva nula entonces $P(X_{\tau(x)} > x) = 1$, $\forall x > 0$.*

Demostración. Notemos primero que si $0 < a < b$, por la propiedad fuerte de Markov,

$$\begin{aligned} P(X_{\tau(b)} = b) &\leq P(X_{\tau(a)} = a) P(X_{\tau(b-a)} = b - a) + P(X_{\tau(a)} \neq a) \\ &= P(X_{\tau(a)} = a) P(X_{\tau(b-a)} = b - a) + 1 - P(X_{\tau(a)} = a). \end{aligned}$$

Supongamos que para algún $x' > 0$ se cumple $P(X_{\tau(x')} = x') > 0$. Entonces el lema anterior es aplicable y podemos encontrar x con $P(X_{\tau(x)} = x) > 7/10$ y a partir de tal x, una sucesión $0 \downarrow y_n < x$ con $P(X_{\tau(y_n} = y_n) > 9/10$. Aplicando la primera desigualdad con $a = y_n$ y $b = x$ se obtiene

$$\begin{aligned} 6/10 < P(X_{\tau(x)} = x) - 1 + P(X_{\tau(y_n)} = y_n) &\leq P(X_{\tau(y_n)} = y_n)P(X_{\tau(x-y_n)} = x - y_n) \\ &\leq P(X_{\tau(x-y_n)} = x - y_n). \end{aligned}$$

Se introducen $k_n := \text{ínf}\{k \in N : P(X_{\tau(x-ky_n)} = x - ky_n) < 1/2\}$ y se afirma que $\text{lím sup}_n k_n y_n > 0$.

Supongamos lo contrario, que $\text{lím}_{n\to\infty} k_n y_n = 0$. Aplicando la primera desigualdad con $a = y_n$ y $b = x - (k_n - 1)y_n$ y por definición de k_n se obtiene

$$\begin{aligned} 2/5 &< P(X_{\tau(x-(k_n-1)y_n)} = x - (k_n - 1)y_n) - 1 + P(X_{\tau(y_n)} = y_n) \\ &\leq P(X_{\tau(y_n)} = y_n)P(X_{\tau(x-k_n y_n)} = x - k_n y_n) \\ &\leq P(X_{\tau(x-k_n y_n)} = x - k_n y_n) < 1/2. \end{aligned}$$

Aplicando la misma desigualdad para $a = x - k_n y_n$ y $b = x$ y usando la desigualdad recién probada se obtiene

$$\begin{aligned} 1/10 &< P(X_{\tau(x)} = x) - 1 + P(X_{\tau(x-k_n y_n)} = x - k_n y_n) \\ &\leq P(X_{\tau(x-k_n y_n)} = x - k_n y_n)P(X_{\tau(k_n y_n)} = k_n y_n) \leq P(X_{\tau(k_n y_n)} = k_n y_n). \end{aligned}$$

Definimos $A_n := \{k_0 y_0, \cdots, k_n y_n\}$, $A = \bigcup A_n = \bigcup\{k_n y_n\}$. Es claro que los tiempos de paro $\tau_{A_n} \downarrow \tau_A$ y como $\tau_A \leq \tau(k_n y_n)$, sobre el evento $\{X_{\tau(k_n y_n)} = k_n y_n\}$, de lo anterior se sigue que $P(\tau_A \leq \tau(k_n y_n)) \geq 1/10$. Pero como estamos suponiendo que $k_n y_n \to 0$ entonces $\text{lím}_{n\to\infty} P(\delta < \tau(k_n y_n) < \infty) = 0$, $\forall \delta > 0$. Por el lema de Fatou para medidas, $P(\tau_A = 0) \geq 1/10$. Por la ley cero-uno de Blumenthal incluso $P(\tau_A = 0) = 1$, de donde podemos elegir n tal que $P(\tau_{A_n} < \infty) > 9/10$. Por la propiedad fuerte de Markov y la hipótesis inicial se tiene

$$\begin{aligned} 7/10 < P(X_{\tau(x)} = x) &\le P(\tau_{A_n} = \infty) + \sum_{n\ge i\ge 0} P(X_{\tau_{A_n}} = k_i y_i) P(X_{\tau(x-k_i y_i} = x - k_i y_i) \\ &< (1 - 9/10) + 5/10 \sum_{n\ge i\ge 0} P(X_{\tau_{A_n}} = k_i y_i) \le 6/10, \end{aligned}$$

lo cual es absurdo y por tanto $\limsup_n k_n y_n > 0$. Se prosigue a aplicar la propiedad fuerte de Markov al tiempo $\tau(x - (i+1)y_n)$, utilizando propiedades básicas de una medida y la definición de las y_n,

$$\begin{aligned} \rho([0,\ x)) \ge \rho([x - (k_n + 1)y_n,\ x)) &= \sum_{k_n - 2\ge i\ge 0} \rho([x - (i+1)y_n,\ x - iy_n)) \\ &\ge \sum_{k_n - 2\ge i\ge 0} \rho([0,\ y_n)) P(X_{\tau(x-(i+1)y_n)} = x - (i+1)y_n) \\ &\ge \frac{(k_n - 1)\rho([0,\ y_n)}{2}. \end{aligned}$$

De lo anterior

$$\liminf_n \frac{\rho([0,\ y_n)}{y_n} \le \liminf_n \frac{2\rho([0,\ x)}{(k_n - 1)y_n} < \infty,$$

de donde uno de los cuatro criterios para discernir si puntos tiene capacidad positiva se cumple y así debe suceder que $d > 0$. Pero esto es imposible, de donde no puede suceder que para algún $x > 0$ se cumpla $P(X_{\tau(x)} = x) > 0$ y se concluye que, $\forall x > 0$, $P(X_{\tau(x)} > x) = 1$. □

Recordemos que si la deriva es positiva entonces $\rho \ll \Lambda$ con densidad co-excesiva y con capacidad de puntos positiva. Ahora se enuncia un teorema fuerte, el cual especifica la probabilidad que se buscó de un inicio.

TEOREMA 9.6. *Si X es un subordinador con deriva $d > 0$ y r es la versión co-excesiva de la densidad potencial entonces $r(R^+) \subset R^+$, es continua sobre R^+, $r(0+) = d^{-1}$ y $P(X_{\tau(x)} = x) = r(x)d$.*

Notemos que r necesariamente no es continua, pues $r(0) = \rho(\{0\}) = \int_0^\infty P(X_t \in \{0\})dt = 0$ pero $r(0+) = d^{-1} > 0$.

DEMOSTRACIÓN. Porque el proceso en cuestión es un subordinador entonces $\{\tau(x) < \infty\} = \{X_{\tau(x)} = x\}$. Pero el proceso es de variación acotada por lo que

$d \neq 0$ sii $C_\lambda > 0$ ($\lambda \geq 0$, ya que es un proceso transitorio), lo cual implica que el kernel resolvente es absolutamente continuo con densidad acotada y por tanto $P(X_{\tau(x)} = x) = P_{-x}(\tau'_0 < \infty) = r(x)C$.

Sean $0 < x_n \downarrow x$, $0 < y_n \uparrow x$ y así $\tau(x_n) \downarrow \tau(x)$, $\tau(y_n) \uparrow \tau(x)$. Entonces por quasi-continuidad de las trayectorias y el lema de Fatou para medidas, $\limsup_n P(X_{\tau(x_n)} = x_n) \leq P(X_{\tau(x)} = x)$, $\limsup_n P(X_{\tau(y_n)} = y_n) \leq P(X_{\tau(x)} = x)$., lo cual es equivalente a $\limsup_n r(x_n) \leq r(x)$, $\limsup_n r(y_n) \leq r(x)$ y de hecho r es continua en x ya que es una función continua por debajo (consecuencia de la co-excesividad). Recordando que

$$P(X_{\tau(x)-} \in dy, X_{\tau(x)} \in dz) = \rho(dy)\nu(dz - y), \quad 0 \leq t \leq x < z,$$

se tiene

$$P(X_{\tau(x)} = x) = 1 - P(X_{\tau(x)} > x) = 1 - \int_0^x \int_x^\infty \nu(dz - y)\rho(dy) = 1 - \int_0^x r(y)\bar{\nu}(x - y)dy$$

y por tanto

$$\begin{aligned}
\frac{C}{\Phi(s)} = C\hat{L}r(s) = \hat{L}P(X_{\tau(x)} = x)(s) &= \hat{L}\left(1 - \int_0^x r(y)\bar{\nu}(x - y)dy\right)(s) \\
&= \frac{1}{s} - \int_0^\infty \int_0^t r(y)\bar{\nu}(t - y)e^{-st}dydt \\
&= \frac{1}{s} - \int_0^\infty \int_y^\infty r(y)\bar{\nu}(t - y)e^{-st}dtdy \\
&= \frac{1}{s} - \int_0^\infty r(y)e^{-sy} \int_y^\infty \bar{\nu}(t - y)e^{-s(t-y)}dtdy \\
&= \frac{1}{s} - \int_0^\infty r(y)e^{-sy} \int_0^\infty \bar{\nu}(w)e^{-sw}dwdy \\
&= \frac{1}{s} - \frac{1}{\Phi(s)} \int_0^\infty \bar{\nu}(w)e^{-sw}dw.
\end{aligned}$$

Por otro lado, Lévy-Khintchine dice

$$\Phi(s) = sd + \int_0^\infty (1 - e^{-sx})\nu(x),$$

o bien

$$\frac{1}{s} = \frac{d}{\Phi(s)} + \frac{1}{\Phi(s)} \int_0^\infty (1 - e^{-sx})\nu(x) = \frac{d}{\Phi(s)} + \frac{1}{\Phi(s)} \int_0^\infty \bar{\nu}(w) e^{-sw} dw.$$

por lo que necesariamente $d = C$ y así $P(X_{\tau(x)} = x) = r(x)C = r(x)d$.

Notemos que, por ser densidad, existe $x > 0$ con $r(x) > 0$ y se puede suponer sin pérdida de generalidad que $y := \inf\{u > x : r(u) = 0\} < \infty$, por continuidad y, de hecho, $r(y) = 0$, $y > x$, $r([x, y)) \subset R^+$ y entonces, por el lema de esta sección, $\exists z \in (0, y - x)$ con $r(z) > 0$. Por la propiedad fuerte de Markov

$$r(y)C = P(X_{\tau(y)} = y) \geq P(X_{\tau(z)} = z) P(X_{\tau(y-z} = y - z) = r(z) r(y - z) C^2 > 0,$$

lo cual es absurdo ya que $r(y) = 0$. Luego $\inf\{u > x : r(u) = 0\} = \infty$, o bien $r([x, \infty)) \subset R^+$ y por el mismo lema $r(R^+) \subset R^+$ y $r(0+)d = \lim_{x \downarrow 0} P(X_{\tau(x)} = x) = 1$. □

Se menciona (la demostración se encuentra, por ejemplo, en la sección 3 del capítulo 3 en [**2**]) que los subordinadores cumplen las leyes arcoseno:

TEOREMA 9.7. *En distribución* $\lim_{x \to \infty} X_{\tau(x)-}/x$, $\lim_{x \downarrow 0} X_{\tau(x)-}/x$ *existen. Más aún, si* $\lim_{x \to \infty} EX_{\tau(x)-}/x = a$, $\lim_{x \downarrow 0} EX_{\tau(x)-}/x = b$ *entonces* Φ *varía regularmente tanto en* $0+$ *como* ∞, *con indices* $a, b \in [0, 1]$, *respectivamente.*

Ahora interesa, en el espíritu del teorema mencionado, el comportamiento asintótico en el origen y al infinito de los subordinadores. El siguiente resultado ha aparecido con anterioridad con convergencia en probabilidad. También es válido (ver 85 de [**2**]) casi seguramente:

PROPOSICIÓN 9.8. *Sea* X *un subordinador. Entonces* $\lim_{t \downarrow 0} t^{-1} X_t = d$, *c.s.*

Se analiza el comportamiento asintótico en el origen.

TEOREMA 9.9. *Sea* X *un subordinador con deriva nula,* ν *su medida de Lévy y* $h : R^+ \cup \{0\} \to R^+ \cup \{0\}$ *tal que* $g(s) = h(s)/s$ *es creciente. Son equivalentes*

1.

$$\limsup_{t \downarrow 0} \frac{X_t}{h(t)} = \infty, \quad c.s.$$

2.
$$\int_0^1 \bar{\nu}(h(t))dt = \infty$$

3.
$$\int_0^1 \left\{ \Phi\left(\frac{1}{h(t)}\right) - \frac{\Phi'\left(\frac{1}{h(t)}\right)}{h(t)} \right\} dt = \infty.$$

En caso contrario
$$\limsup_{t\downarrow 0} \frac{X_t}{h(t)} = 0, \quad c.s.$$

Si además $EX_1 < \infty$ entonces el mismo teorema es válido, las convergencias siendo ahora al infinito y las integrales de uno a infinito.

Demostración. Supongamos válida la segunda igualdad. Como ν es medida, en particular es monótona, por lo que
$$\infty = \int_0^\epsilon \bar{\nu}(h(ct))dt \le \int_0^\epsilon \bar{\nu}(ch(t))dt, \qquad c-1, \epsilon > 0,$$
ya que h es creciente. ΔX es un proceso de Poisson puntual de medida característica ν por lo que si $|\{t \in [a,\epsilon] : \Delta X_t > ch(t)\}| =: Z_a$, $0 < a < \epsilon$, entonces
$$Z_a \sim \text{Poiss}\left(\int_a^\epsilon \bar{\nu}(ch(t))\right).$$
Se sigue que, c.s. hay infinitos instantes $s \in (0,\epsilon)$ con $X_s \ge \Delta X_s > ch(s)$. Por la arbitrariedad de $c > 1$, la primera condición se cumple.

Supongamos que la segunda igualdad no es válida. Como h es creciente entonces es inyectiva y se puede definir (restringiendo el dominio en caso de ser necesario) la función inversa h^{-1}. Trivialmente $h^{-1}(\Delta X)$ es proceso de Poisson puntual con medida característica μ dada por $\bar{\mu}(t) := \mu([t,\infty)) = \bar{\nu}(h(t))$. Con esta notación, por hipótesis,
$$\int_0^\infty (1 \wedge x)\mu(dx) = \int_0^1 \bar{\mu}(t)dt = \int_0^1 \bar{\nu}(h(t))dt < \infty,$$

y Lévy-Itô implica que μ es medida de Lévy de un subordinador. En particular corresponde al proceso

$$Y_t := \sum_{0\le s\le t} h^{-1}(\Delta X_s).$$

Como h es creciente, es súper-aditiva, por lo que, como X no tiene deriva

$$h(Y_t) = h\left(\sum_{0\le s\le t} h^{-1}(\Delta X_s)\right) \ge \sum_{0\le s\le t} h(h^{-1}(\Delta X_s)) = \sum_{0\le s\le t} \Delta X_s = X_t.$$

Pero, c.s., $\text{lím}_{t\downarrow 0} t^{-1}Y_t = d = 0$ y así, para t pequeña $h(\epsilon t) \ge X_t$, c.s. Por otro lado, como $g(s) = h(s)/s$ es creciente, $h(\epsilon t) \le \epsilon h(t)$. Se concluye la cuarta condición del teorema, por la arbitrariedad de ϵ, y a la vez que no se cumple la primera. Falta ver la equivalencia de 2 y 3.

Recordando que

$$\frac{1}{s} = \frac{d}{\Phi(s)} + \frac{1}{\Phi(s)}\int_0^\infty \bar{\nu}(w)e^{-sw}dw,$$

se tiene $\hat{L}\bar{\nu}(s) = \Phi(s)/s$. Así, derivando bajo la integral,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left\{\Phi\left(\frac{1}{h(t)}\right) - \frac{\Phi'\left(\frac{1}{h(t)}\right)}{h(t)}\right\}dt &= \int_0^1\int_0^\infty \frac{xe^{-x/h(t)}\bar{\nu}(x)}{h(t)^2}dxdt \\ &= \int_0^\infty ye^{-y}\int_0^1 \bar{\nu}(yh(t))dtdy.\end{aligned}$$

Por la monotonía tanto de h como de ν, se cumple $\bar{\nu}(h(yt)) \ge \bar{\nu}(yh(t)) \ge \bar{\nu}(h(t))$, $y \in (0,1)$, $t > 0$, concluyendo la demostración. $\square$

Restringiendo las hipótesis se obtiene un resultado más fuerte (para la clase de funciones crecientes).

Diremos que una función f tiene incremento positivo si $\text{lím inf}_{x\downarrow 0} f(2x)/f(x) > 1$. La cola integrada es la función $I(s) := \int_0^s \bar{\nu}(x)dx$.

Teorema 9.10. *Sea X un subordinador con cola integrada de incremento positivo, deriva nula y $h : R^+ \cup \{0\} \to R^+ \cup \{0\}$ creciente. Son equivalentes*

1.
$$\limsup_{t\downarrow 0} \frac{X_t}{h(t)} = \infty, \quad c.s.$$
2.
$$\int_0^1 \bar{\nu}(h(t))dt = \infty$$
3.
$$\int_0^1 \Phi\left(\frac{1}{h(t)}\right) dt = \infty.$$

En caso contrario
$$\limsup_{t\downarrow 0} \frac{X_t}{h(t)} = 0, \quad c.s.$$

Demostración. Como
$$I(x) \geq x\bar{\nu}(x), \qquad I(2x) = I(x) + \int_x^2 x\bar{\nu}(t)dt \leq I(x) + x\bar{\nu}(x),$$
y por la hipótesis entonces $\liminf_{x\downarrow 0} x\bar{\nu}(x)/I(x) > 0$. Además como el exponente de Laplace varía regularmente en $0+$ con índice en $[0,1]$ entonces $\Gamma(1-\alpha)\bar{\nu}(x) \sim \Phi(x^{-1})$, cuando $x \downarrow 0$, (ver p.75 de [**2**]) por lo que 3 y 2 son equivalentes.

Supongamos la segunda condición. De la demostración del teorema anterior se puede rescatar (en particular) que $\limsup_{t\downarrow 0} X_t/h(t) \geq 1$, c.s. y como el exponente de Laplace es cóncavo, si $k > 1$,
$$\int_0^1 \Phi\left(\frac{1}{kh(t)}\right) dt = \infty,$$
y la arbitrariedad de k implica que la primera condición se cumple.

Ahora, como
$$P(X_t \geq a) \leq \frac{E(1-e^{-X_t/a})}{1-1/e} = \frac{1-e^{-t\Phi(1/a)}}{1-1/e},$$
haciendo $t = 2^{1-n}$ y $a = h(2^{-n})$ se obtiene, por Taylor,
$$P(X_{2^{1-n}} \geq h(2^{-n})) \leq \frac{1-e^{-(2^{1-n})\Phi(1/h(2^{-n}))}}{1-1/e} \leq \frac{2^{1-n}\Phi(1/h(2^{-n}))}{1-1/e}.$$

Si

$$\int_0^1 \Phi\left(\frac{1}{h(t)}\right) dt < \infty$$

entonces (por la monotonía del exponente de Laplace)

$$\sum_n 2^{-n}\Phi\left(\frac{1}{h(2^{-n})}\right) dt < \infty,$$

lo cual, por Borel-Cantelli, implica que $X_{2^{1-n}} < h(2^{-n})$, c.s. a partir de cierta n y por tanto $X_t < h(t)$ para t pequeña, c.s. Así, si suponemos que la tercera condición no se cumple y como incluso

$$\int_0^1 \Phi\left(\frac{1}{\epsilon h(t)}\right) dt < \infty, \quad \epsilon \in (0,1)$$

se concluye la prueba, por la arbitrariedad de ϵ, mostrando que la primera condición no se cumple y la cuarta sí. $\square$

El comportamiento asintótico inferior es más fino para si se considera una cierta función en el denominador (la cual no es creciente). Se trata de la famosa Ley del Logaritmo Iterado, la cual se restringe a cierta clase de subordinadores con exponente de Laplace variando regularmente al infinito. La demostración es larga y elemental, usando un cambio de medida. Se refiere al lector interesado en la demostración a la p.88 de [**2**].

Teorema 9.11. *(Ley del Logaritmo Iterado) Si el exponente de Laplace Φ de un subordinador X varía regularmente al infinito con índice $\alpha \in (0,1)$, entonces, c.s.,*

$$\liminf_{t\downarrow 0} \frac{\Phi^{-1}\left(\frac{\log|\log t|}{t}\right) X_t}{\log|\log t|} = \alpha(1-\alpha)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}},$$

donde Φ^{-1} es la inversa del exponente de Laplace. La misma relación se cumple al infinito si el exponente de Laplace varía regularmente en el origen con tal índice.

La Ley de los grandes números también es válida y se sigue por monotonía y discretización (ya que se esta trabajando con subordinadores). Para mayor detalle se refiere a [**2**].

Teorema 9.12. *(Ley de los Grandes Números) Sea X subordinador. Entonces, c.s.,*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{X_t}{t} = EX_1.$$

Capítulo 2

Teoría de Excursiones

1. Teoría general

En esta sección los subordinadores aparecen de manera natural al considerar las excursiones de un proceso de Markov. Ahora bien, nos interesa cierta clase de procesos de Markov para que la teoría se pueda desarrollar. Se requiere un proceso de Markov que empieza en el origen, càdlàg y adaptado a una filtración continua por la derecha. En particular es progresivamente medible. La propiedad fuerte de Markov es también un requerimiento.

Sea M un proceso con tales características. La propiedad fuerte de Markov implica que la ley cero-uno de Blumenthal se cumple: $P(\forall\epsilon > 0\, \exists t > 0 : M_t = 0, t < \epsilon) = 0, 1$. Respectivamente diremos que 0 es irregular o regular. En caso de regularidad $\sigma := \tau_{R^d \setminus \{0\}}$ es de paro y $P(\sigma = 0) = 0, 1$. Respectivamente diremos que 0 es un punto de retención o instantáneo. Por regularidad, notemos que un punto es de retención cuando el proceso, al ser iniciado, se mantiene en el origen un intervalo de tiempo de medida positiva, c.s.

Analicemos el caso regular e instantáneo: $P(\forall\epsilon > 0\, \exists t > 0 : M_t = 0, t < \epsilon) = 1$, $P(\sigma = 0) = 1$. Sea la variable aleatoria N_M el núcleo de M_t. Las componentes (conexas, evidentemente) de $(\bar{N}_M)^c$ son llamadas intervalos de excursión. Los conjuntos conexos sobre la recta real son intervalos y como las componentes mencionadas son disjuntas podemos imponer un orden de manera natural. En general una componente arbitraria será denotada por (g, d), $g, d \in \bar{N}_M$. Denotemos al conjunto de componentes de $(\bar{N}_M)^c$ por C_M.

Como 0 es instantáneo, el proceso no puede ser idénticamente nulo. Por otro lado, por ser càdlàg, si no existiera un intervalo de excursión de medida positiva con probabilidad positiva de ocurrir entonces $M \equiv 0$. Se sigue que $\exists c > 0$ tal que con probabilidad positiva existe al menos un intervalo de excursión con $l_A = l := d - g > c$, donde $A = (g, d)$. Ahora sea $t > 0$ fijo y $A_t = \{\omega \in \Omega : A \in C_M, l_A \leq c, A < t\}$. Por lo anterior, $\exists t > 0$ tal que $PA_t < 1$. Si el proceso no regresa al origen después de la primera vez que se le visita entonces $P(\exists A \in C_M : l_A > c) = 1$. Si tal tiempo de paro es finito con probabilidad positiva entonces se aplica la propiedad fuerte de Markov para notar que $PA_{3t} \leq P^2 A_t$, por lo que, por iteración, se obtiene, de nuevo, que $P(\exists A \in C_M : l_A > c) = 1$.

El orden que se impone sobre cualquier subclase de C_M estará indexado por los naturales y se denota $l_n(c) := d_n(c) - g_n(c) > c$, la longitud el enésimo intervalo de excursión mayor a c. Supongamos que $P(l_1(a) > c) = 0$ para algun $a \in (0, c)$. Entonces $d_1(a) < g_1(c)$, c.s., y $d_1(a) < \infty$, c.s. Entonces se puede aplicar la propiedad fuerte de Markov en tal tiempo de paro para deducir que $d_n(a) < g_1(c)$, $\forall n$ y por tanto $g_1(c) = \infty$, c.s., contradiciendo el resultado del párrafo anterior. Se sigue que $P(l_1(a) > c) > 0$, $\forall a \in (0, c)$.

Sea $c > 0$ fija. Por lo anterior es posible definir la siguiente función sin necesidad de pasar a valores extendidos en el rango:

$$\bar{\pi}(a) := \frac{1_{\{a \leq c\}}}{P(l_1(a) > c)} + P(l_1(c) > a)1_{\{a > c\}}.$$

Es inmediato que $\bar{\pi}$ es continua por la derecha, decreciente, positiva, $\pi(c) = 1$ y que N_M es acotado, c.s., si $0 < \bar{\pi}(\infty)$ y no-acotado, c.s., si $0 = \bar{\pi}(\infty)$.

Definición 1.1. *Se dice que* 0 *es transitorio si* $\bar{\pi}(\infty) > 0$ *o bien si* N_M *es acotado. Se dice que* 0 *es recurrente si* $\bar{\pi}(\infty) = 0$ *o bien si* N_M *es no-acotado.*

Por otro lado $\lim_{a \downarrow 0} P(l_1(a) > c) = 0$ ya que 0 es regular e instantáneo y por tanto $\bar{\pi}(0+) = \infty$.

Algunos lemas preliminares son de utilidad para construir el tiempo local.

Lema 1.2. *Sean* $0 < b \leq a \leq \infty$. *Si* $\bar{\pi}(b) > 0$ *entonces* $P(l_1(b) > a) = \bar{\pi}(a)/\bar{\pi}(b)$.

Demostración. Se analiza solo el caso $b < c < a$, siendo los otros muy similares. Se tiene, por la propiedad fuerte de Markov a los tiempos de paro $l_1(\cdot)$,

$$\begin{aligned} P(l_1(b) > a) = P(l_1(b) > c, l_1(c) > a) &= P(l_1(c) > a) - P(l_1(b) \leq c, l_1(c) > a) \\ &= P(l_1(c) > a) - P(l_1(b) \leq c)P(l_1(c) > a) \\ &= \bar{\pi}(a) - (1 - 1/\bar{\pi}(b))\bar{\pi}(a) = \bar{\pi}(a)/\bar{\pi}(b). \end{aligned}$$

$\square$

Notemos que $\bar{\pi}$ es independiente de la elección arbitraria de $c > 0$ fija excepto por un factor multiplicativo.

Se define $N_a(t) := \sup\{n : g_n(a) < t\}$, $a, t > 0$, es decir, el número de intervalos de excursión de longitud mayor a a que inician antes del tiempo t.

LEMA 1.3. *Sean* $0 < b < a \leq \infty$. *Si* $\bar{\pi}(b) > 0$ *entonces* $N_b(g_1(a))$ *es independiente de* $M \circ \theta_{g_1(a)}$. *Mas aún, para* k *un entero no-negativo,*

$$P(N_b(g_1(a)) \geq k) = (1 - \bar{\pi}(a)/\bar{\pi}(b))^k.$$

DEMOSTRACIÓN. Como $d_n(b)$ es de paro, la propiedad fuerte de Markov nos dice que, condicionalmente sobre $\{d_n(b) < \infty\}$, $M^n := M \circ \theta_{d_n(b)} \sim M$ y $M^n \perp F_{d_n(b)}$. Entonces para $F \geq 0$ medible

$$E(F(M^n); N_b(g_1(a)) \geq n) = E(F(M^n); d_n(b) < g_1(a)) = EF(M)P(d_n(b) < g_1(a)),$$

lo cual nos dice que, sobre $\{d_n(b) < g_1(a)\}$, $M \circ \theta_{g_1(a)} \sim M^n \circ \theta_{g_1^n(a)}$. Se sigue que $N_b(g_1(a)) \perp M \circ \theta_{g_1(a)}$. Para la segunda parte del lema basta ver que, por la propiedad fuerte de Markov y el lema anterior,

$$P(d_{n+1}(b) < g_1(a) | d_n(b) < g_1(a)) = P(d_1(b) < g_1(a)) = P(l_1(b) \leq a) = (1 - \bar{\pi}(a)/\bar{\pi}(b)).$$

Así,

$$P(N_b(g_1(a)) \geq k) = \prod_{n=0}^{k-1} P(N_b(g_1(a)) \geq n+1 | N_b(g_1(a)) \geq n) = (1 - \bar{\pi}(a)/\bar{\pi}(b))^k.$$

$\square$

LEMA 1.4. *Sea* $0 < u \leq \infty$. *Si* $\bar{\pi}(u) > 0$ *entonces* $N_a(d_1(u))/\bar{\pi}(a)$, $a \in (0, u)$, *es una martingala reversa. Además es continua por la izquierda, uniformemente integrable, convergente c.s. y en media en el origen y tal límite tiene distribución exponencial de parámetro* $\bar{\pi}(u)$ *y es independiente de la variable* $l_1(u)$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $G_a := \sigma(l_k(a), k = 1, \cdots, N_a(d))$, donde $d = d_1(u)$, filtración revertida para $N_\cdot(d)$, por construcción. Condicionalmente sobre $N_a(d) = n$ y $l_k(a) = c_k$, los procesos $Y^k := (M \circ \theta_{d_{k-1}(a)})_{t \in [0, d_k(a) - d_{k-1}(a)]}$ se distribuyen como $(M_t)_{t \in [0, d_1(a)]}$, condicional a $l_1(a) = c_k$, y son independientes, por la propiedad fuerte de Markov.

Por el lema anterior también sabemos que $N_b(d_1(a))-1 = N_b(g_1(a)) \sim Geom(1-\bar{\pi}(a)/\bar{\pi}(b))$, siempre y cuando $b < a$. Entonces, de las dos observaciones anteriores, se tiene que $E(N_b(d)|G_a) = N_a(d)[E(1+H)]$, donde $H \sim Geom(1-\bar{\pi}(a)/\bar{\pi}(b))$. Pero

$$E(1+H) = 1 + (1-\bar{\pi}(a)/\bar{\pi}(b))/\bar{\pi}(a)/\bar{\pi}(b) = \bar{\pi}(b)/\bar{\pi}(a),$$

por lo que $E(N_b(d)|G_a) = N_a(d)\bar{\pi}(b)/\bar{\pi}(a)$, la propiedad de martingala revertida aseverada.

Las demás propiedades son evidentes o se siguen de teoremas elementales de probabilidad, por ejemplo que distribuciones geométricas convergen a exponencial y que si el limite c.s. tiene esperanza finita y las medias convergen a ella entonces la martingala es uniformemente integrable. □

Se construye ahora el tiempo local.

TEOREMA 1.5. *Para $t \geq 0$, c.s. existe, $L(t) := \lim_{a\downarrow 0} N_a(t)/\bar{\pi}(a)$, la cual es una función creciente, continua y la medida de Lebesgue-Stieltjes asociada tiene soporte $\bar{N}_M$.*

DEFINICIÓN 1.6. *A tal función L se le llama el tiempo local de M en 0. Su inversa (generalizada) está dada por*

$$L^{-1}(t) = \inf\{s \geq 0 : L(s) > t\}.$$

DEMOSTRACIÓN. Si $t = d_1(u)$ ya se probó que $N_a(t)/\bar{\pi}(a)$ converge y, de hecho, por la propiedad fuerte de Markov, converge para

$$t \in D := \bigcup_{u>0}\bigcup_{k}\{d_k(u)\}.$$

Sobre D, L es creciente, por definición de $N_a(t)$. Se afirma que existe una extensión continua única de L a $R^+ \cup \{0\}$. Sean $\epsilon > 0$ y $A := \{L(d_k(a)) - L(d_{k-1}(a))) \leq \epsilon, \forall k \leq N_a(d_1(c))\}$. Por los lemas anteriores y una aplicación de la propiedad fuerte de Markov sabemos que

$$N_a(d_1(c)) - 1 \sim Geom(1 - \bar{\pi}(c)/\bar{\pi}(a))$$
$$[L(d_k(a)) - L(d_{k-1}(a))]|N_a(d_1(c)) = n \sim Exp(\bar{\pi}(a)) \ \ (i.i.d.),$$

de donde es inmediato que

$$\begin{aligned} P(A) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{\pi}(c)}{\bar{\pi}(a)} \left(1 - \frac{\bar{\pi}(c)}{\bar{\pi}(a)}\right)^n (1 - e^{-\epsilon\bar{\pi}(a)})^{n+1} \\ &= \frac{\bar{\pi}(c)(1 - e^{-\epsilon\bar{\pi}(a)})}{\bar{\pi}(a)\left(1 - \left[\left(1 - \frac{\bar{\pi}(c)}{\bar{\pi}(a)}\right)(1 - e^{-\epsilon\bar{\pi}(a)})\right]\right)} \to 1, \quad a \downarrow 0, \end{aligned}$$

ya que $\lim_{a\downarrow 0} \bar{\pi}(a) = \infty$. En otras palabras, es casi seguro que el rango de L, sobre $D \cap [0, d_1(c)]$, es conexo al tomar cerradura. Por la propiedad fuerte de Markov, lo mismo es cierto para L sobre D y la extensión continua se construye de manera estándar. También es claro que, para tal extensión, $N_a(t)/\bar{\pi}(a) \to L(t)$, c.s.

Sea Λ_L la medida Lebesgue-Stieltjes asociada a L y su soporte S_L. Para $\epsilon, \delta > 0$, $\exists a > 0$ con $P(d_1(a) < \delta) > 1 - \epsilon$, ya que 0 es instantáneo, por hipótesis. Pero $P(L(d_1(a)) = 0) = 1/\infty = 0$. Así $P(L(\delta) = 0) < \epsilon$, por la monotonía de L. Por arbitrariedad se tiene que $P(L(\delta) = 0) = 0, \ \ \forall \delta > 0$. Por la propiedad fuerte de Markov se concluye que $P(L(s) = L(t) \ \&\ M_w = 0, w \in (s,t)) = 0$, i.e. $L(s) < L(t)$, c.s. y por tanto $\bar{N}_M \subset S_L$. Para la otra contención basta tomar $a > 0$ pequeña para que $L(s) < L(t)$ implique $N_a(t) - N_a(s) > 0$ y por tanto $\exists w \in (s,t)$ con $M_w = 0$. $\square$

Claramente el tiempo local $L(t) = L(t,c) = f(t)g(c)$, donde $c > 0$ es la constante usada para definir a $\bar{\pi}$, sin embargo, para los resultados posteriores no necesitaremos esta expresión explícita.

Se dice que el tiempo local es un funcional aditivo en el siguiente sentido. Sea $\tau < \infty$ de paro. Si $M' = M \circ \theta_\tau$ y L' su correspondiente tiempo local (definido de manera análoga utilizando markovianidad en el primer retorno al origen). Entonces

$$L(\tau + t) = \lim_{a\downarrow 0} N_a(t+\tau)/\bar{\pi}(a) = \lim_{a\downarrow 0}[N_a(\tau) + N'_a(t)]/\bar{\pi}(a) = L(\tau) + L'(t), \ \ c.s.$$

Si τ es de paro con $M_\tau = 0$ sobre $\{\tau < \infty\}$, entonces (usando la probabilidad $P(\cdot|\tau < \infty)$)

$$F_\tau \perp (M \circ \theta_\tau, L(\tau + \cdot) - L(\tau)) \sim (M, L).$$

Es importante saber que si se tiene un proceso K, adaptado, continuo, creciente tal que el soporte de la medida asociada de Lebsegue-Stieltjes cumple $S_K \subset \bar{N}_M$, c.s. y si τ es de paro con $M_\tau = 0$ sobre $\{\tau < \infty\}$, entonces (usando la probabilidad $P(\cdot|\tau < \infty)$)

$$F_\tau \perp (M \circ \theta_\tau, K(\tau + \cdot) - K(\tau)) \sim (M, K).$$

Se sigue que $K = Ld$, para alguna constante fija $d \geq 0$, i.e., el tiempo local está caracterizado de manera única (módulo una constante multiplicativa) mediante el teorema precedente y la propiedad aditiva. (Para más detalles sobre esta caracterización se puede consultar p.111 en [**2**]).

Ahora, como M es càdlàg, tiene a lo más una cantidad numerable de saltos, por lo que $\bar{N}_M \backslash N_M$ es numerable, en particular Lebesgue nulo y así

$$\int_0^t 1_{\{M_s=0\}} ds = \int_0^t 1_{\{s \in \bar{N}_M\}} ds =: K(t),$$

un proceso creciente, continuo, adaptado y cuyo soporte $S_K \subset \bar{N}_M$. La propiedad fuerte de Markov muestra que K es un funcional aditivo (en el sentido usado arriba) y por tanto $\exists d \geq 0$ tal que $K = Ld$. Se concluye lo siguiente, que, de hecho, es una definición aletrnativa de un tiempo local (para una constante adecuada):

$$L(t)d = \int_0^t 1_{\{M_s=0\}} ds.$$

Analizamos ahora el tiempo local inverso, iniciando con propiedades básicas. Se define, de manera esperada, $L_-^{-1}(t) := L^{-1}(t-) = \lim_{s \uparrow t} L^{-1}(s) = \inf\{s \geq 0 : L(s) \geq t\}$.

Proposición 1.7. *El proceso L^{-1} es creciente, càdlàg y adaptado. $L^{-1}(t)$, $L^{-1}(t-)$ son de paro. Además se cumplen las siguientes propiedades, c.s.,*

$$(L^{-1} \circ L)(t) = \inf\{L^{-1}(u) : L^{-1}(u) > t\} = \inf\{s > t : M_s = 0\},$$
$$(L_-^{-1} \circ L)(t) = \sup\{L^{-1}(u) : L^{-1}(u) < t\} = \sup\{s < t : M_s = 0\}.$$

Notemos que como M es càdlàg entonces, sobre $\{L^{-1}(t) < \infty\}$, $L^{-1}(t) \in N_M$.

Demostración. De la definición, las primeras tres características de L^{-1} son evidentes. Por continuidad de L es fácil deducir que $L^{-1}(t)$ es de paro y por tanto $\lim_{s\uparrow t} L^{-1}(s) = L^{-1}_{-}(t)$ también. Se prueba una de las identidades, la otra siendo análoga.

Sea $D_t = \inf\{s > t : M_s = 0\}$. Si $D_t > t$ entonces L es constante sobre $[t, D_t)$ y entonces, por definición de la inversa, $D_t \leq (L^{-1} \circ L)(t)$. Si $D_t = \infty$, la igualdad se da. Si $D_t < \infty$, $D_t \in \bar{N}_M = S_L$, el soporte de L y por continuidad (y definición de D_t) debe existir vecindad $U \geq D_t$ con $D_t \in U \subset S_L$, de donde $L(s) > L(D_t) = L(t)$, $\forall s > D_t$ y por tanto $D_t \geq (L^{-1} \circ L)(t)$.

Si en cambio $t = D_t \in S_L$ entonces, como anteriormente, $t = D_t \geq (L^{-1} \circ L)(t)$. Pero, por definición, $t \leq (L^{-1} \circ L)(t)$. $\square$

Notemos que, como L es continua, $S_L = \bar{N}_M$ no tiene componentes singulares, por lo que no solo los intervalos del tipo $(L^{-1}_{-}(t), L^{-1}(t))$ son excursiones (según la proposición anterior, siempre y cuando $L^{-1}_{-}(t) < L^{-1}(t)$), sino que todo intervalo de excursión es de este tipo. En otras palabras, L caracteriza a los intervalos de excursión.

Es momento de enunciar un teorema importante, el cual da significado a la notación utilizada anteriormente. Recordemos que $\bar{\pi}$ es decreciente, por lo que la podemos considerar la cola de una medida. Mas específicamente podemos recuperar (definir) la medida subyacente (asociada):

$$\pi((s,t]) := \bar{\pi}(s) - \bar{\pi}(t), \qquad (s,t] \subset (0,\infty).$$

Teorema 1.8. *El proceso L^{-1} es un subordinador con medida de Lévy $\nu = \pi$, deriva d y matado a tasa $\lambda = \bar{\pi}(\infty)$. En otras palabras, tiene la representación*

$$L^{-1}(\omega, t) := S(\omega, t)1_{[0,\tau(\omega))}(t) + \infty 1_{[\tau(\omega),\infty]}(t),$$

donde S es subordinador (π, d) y $\tau \sim Exp(\bar{\pi}(\infty))$. Más aún, su exponente de Laplace está dado por

$$\Phi(s) = sd + \int_0^\infty s e^{-sr} \bar{\pi}(r) dr.$$

En lo anterior, cabe aclarar que d es la constante que hace que

$$L(t)d = \int_0^t 1_{\{M_s=0\}} ds.$$

También notemos que como L^{-1} es subordinador entonces (η es proceso/medida aleatoria de Poisson y λ medida de Lebesgue)

$$t\int_0^{\infty}(x\wedge 1)\pi(dx) = \int_0^t\int_0^{\infty}(x\wedge 1)(\lambda\otimes\nu)(dsdx) = \int_0^t\int_0^{\infty}(x\wedge 1)E\eta(dsdx) < \infty,$$

Demostración. Supongamos primero que $0 = \bar{\pi}(\infty) = P(l_1(c) > \infty)$, por lo que, por la propiedad fuerte de Markov, $d_n(c) < \infty$, c.s. Por la misma propiedad y la definición de L, $L(d_n) = \sum_1^n \xi_k$, donde $\xi_k \sim \text{Exp}(\bar{\pi}(c) = 1)$, (i.i.d.). Esto muestra que

$$L(\infty) = \lim_{n\to\infty} L(d_n(c)) = \lim_{n\to\infty}\sum_1^n \xi_k = \infty,$$

c.s., y como $L^{-1}(t)$ es de paro entonces se puede aplicar la propiedad fuerte de Markov:

$$F_{L^{-1}(t)} \perp M' := M\circ\theta_{L^{-1}(t)} \sim M,$$

de donde el tiempo local de M' está dado, por la propiedad aditiva, por

$$L'(s) = L(L^{-1}(t)+s) - L(L^{-1}(t)) = L(L^{-1}(t)+s) - t,$$

y así, por definición de inversa generalizada, $L'^{-1}(s) = L^{-1}(t+s) - L^{-1}(t)$. En otras palabras, L^{-1} es un proceso càdlàg con incrementos independientes y estacionarios, i.e., de Lévy. Claramente es no-negativo, por lo que incluso es subordinador. Sea ν su medida de Lévy, i.e., la medida característica del proceso de Poisson puntual ΔL^{-1}. Se define $\tau_a := \inf\{t \geq 0 : \Delta L^{-1}(t) > a\}$. Como se vio, L caracteriza a los intervalos de excursión, por lo que $\tau_a = L(s) \sim Exp(\bar{\pi}(a))$, $s \in (g_1(a), d_1(a))$ y así

$\nu((a,\infty)) = \bar{\pi}(a)$, i.e., $\nu = \pi$. Por la misma caracterización

$$\begin{aligned} L^{-1}(t) &= \int_0^{L^{-1}(t)} 1_{\{s\in\bar{N}_M\}} ds + \int_0^{L^{-1}(t)} 1_{\{s\in\bar{N}_M^c\}} ds \\ &= \int_0^{L^{-1}(t)} 1_{\{s\in\bar{N}_M\}} ds + \sum_{s\le t} \Delta L^{-1}(s) \\ &= td + \sum_{s\le t} \Delta L^{-1}(s). \end{aligned}$$

Por tanto la deriva es tal d y la representación deseada se sigue de Lévy-Khintchine. Notemos que, en este caso, L^{-1} es el subordinador S del teorema, ya que, en este caso $\tau = \infty$ ya que $\bar{\pi}(\infty) = 0$, es decir, es un subordinador no matado.

Analicemos ahora el caso $\bar{\pi}(\infty) > 0$. Sea $s > t$. Similarmente al caso anterior, condicionalmente sobre $\{L^{-1}(t) < \infty\}$ o sobre $\{L^{-1}(s) < \infty\}$, $(L^{-1}(u))_{u\in[0,t]}$ tiene distribución fija, la de algún subordinador $(S_s)_{s\in[0,t]}$. Basta notar que $\{L^{-1}(t) < \infty\} = \{L(\infty) > t\}$, por lo que el subordinador S se mata a tasa $\tau := L(\infty) = L(d(\infty)) \sim Exp(\bar{\pi}(\infty))$. Caractericemos ahora ν de S, ya que d se hace de la misma forma. Ya notamos que (en particular) $\tau_a = L(d_1(a))$, $a > 0$, por lo que

$$\begin{aligned} 1 - e^{-t\nu((a,\infty))} &= P(\exists s < t : \Delta S_s > a) \\ &= P(\tau_a < t | L(\infty) > t) = P(L(d_1(a)) < t, L(\infty) > t)/e^{-t\bar{\pi}(\infty)}. \end{aligned}$$

Pero entonces, por la propiedad de Markov,

$$\begin{aligned} P(L(d_1(a)) < t, L(\infty) > t) &= P(L(d_1(a)) < t, L(\infty) > t | d_1(a) < \infty) P(d_1(a) < \infty) \\ &= \int_0^t \bar{\pi}(a) e^{-s\bar{\pi}(a)} e^{-(t-s)\bar{\pi}(\infty)} ds (1 - \bar{\pi}(\infty)/\bar{\pi}(a)) \\ &= e^{-t\bar{\pi}(\infty)}(1 - e^{-t\bar{\pi}(a)+t\bar{\pi}(\infty)}), \end{aligned}$$

por lo que

$$1 - e^{-t\nu((a,\infty))} = e^{-t\bar{\pi}(\infty)}(1 - e^{-t\bar{\pi}(a)+t\bar{\pi}(\infty)})/e^{-t\bar{\pi}(\infty)} = 1 - e^{-t\pi((a,\infty))},$$

lo cual basta para concluir que $\nu = \pi$. $\square$

Definición 1.9. *Se define la vida de una excursión como la longitud de un intervalo de excursión, $\zeta := d - g$ y la excursión asociada como $(M(\omega, t-g))_{t\in(0,\zeta)}$, $\omega \in \Omega$ fija.*

Entonces se puede escribir al conjunto de excursiones como

$$\bigcup_{a>0} \bigcup_{(g,d)} \{\omega|_g^d : \omega \in \Omega, \zeta(\omega) > a, 0 \notin \omega((g,d))\} =: E.$$

Recordemos que Ω es el conjunto de todas las trayectorias càdlàg matadas, por lo que podemos considerar $E \subset \Omega$ y se le puede asignar la topología subespacio inducida por la topología (de Skorohod) que tiene Ω. Para este fin, se (re)define

$$E := \bigcup_{a>0} E^a := \bigcup_{a>0} \{\omega \in \Omega : \zeta(\omega) > a, 0 \notin \omega((0,\zeta))\}$$

y similarmente se le puede asignar tal topología a cada E^a. La importancia de remarcar este detalle es simplemente garantizar la existencia de leyes condicionales.

Definición 1.10. *Sea $a > 0$ un número tal que la cola de la medida de Lévy de L^{-1} es positiva, i.e., $\bar{\pi}(a) > 0$ (para que así $g_1(a) < \infty$, c.s.). Se define, sobre E^a, la medida (de probabilidad) conocida como la ley de excursiones de M con vida $\zeta > a$:*

$$n(N'^{-1}(A)|\zeta > a) := P(N' \in A),$$

A boreliano y $N' = M \circ \theta_{g_1(a)} \circ \kappa_{l_1(a)}$.

El siguiente lema muestra una íntima relación entre $\bar{\pi}$ y $n(\cdot|\zeta > a)$.

Lema 1.11. *Si $a, \bar{\pi}(a) > b > 0$ y $B \in E^a$ es medible entonces se cumple*

$$\bar{\pi}(a)n(B|\zeta > a) = \bar{\pi}(b)n(B|\zeta > b).$$

Demostración. Recordemos que $N_b(g_1(a)) \sim Geom(1 - \bar{\pi}(a)/\bar{\pi}(b))$, por lo que $P(N_b(g_1(a)) = 0) = \bar{\pi}(a)/\bar{\pi}(b)$, es decir, la probabilidad de que no haya intervalos de excursión de longitud mayor a b antes del inicio del primer intervalo de excursión de longitud mayor que a. Así, esta probabilidad esta asociada precisamente el evento donde el primer intervalo de excursión con longitud mayor que b también es el primero con longitud mayor que a. Así, para A boreliano,

$$\begin{aligned}
\frac{\bar{\pi}(b)}{\bar{\pi}(a)} n(N'^{-1}(A)|\zeta > b) &= \frac{\bar{\pi}(b)}{\bar{\pi}(a)} n(N'^{-1}(A), \zeta > a|\zeta > b) \\
&= \frac{P(N' \in A, \zeta > a)}{P(N_b(g_1(a)) = 0)} \\
&= P(N' \in A|N_b(g_1(a)) = 0) = P(N' \in A) = n(N'^{-1}(A)|\zeta > a),
\end{aligned}$$

ya que $N' \perp N_b(g_1(a))$. La extensión a medibles arbitrarios es inmediata. □

Ahora se puede definir una medida de excursión de manera satisfactoria. Notemos que si $A \in E$, entonces $A \in E^a$ para algún $a > 0$, pero no necesariamente para sólo una $a > 0$, sin embargo, haciendo $n(A) := \bar{\pi}(a)n(A|\zeta > a)$ se obtiene una medida bien definida, gracias al lema anterior.

DEFINICIÓN 1.12. *La medida de excursión n está dada por*

$$n(A) = \bar{\pi}(a)n(A|\zeta > a),$$

si $A \in E^a \subset E$.

Con esta nueva definición se justifica la notación utilizada para la ley de excursiones con vida $\zeta > a$. Como $\{\zeta > a\} \cap E = E^a$ entonces podemos aplicar n a tal evento: $n(\zeta > a) = \bar{\pi}(a)n(\zeta > a|\zeta > a) = \bar{\pi}(a)P(N' \in \{\zeta > a\}) = \bar{\pi}(a)$, y por tanto podemos considerar a $n(\cdot|\zeta > a)$ como una verdadera ley condicional derivada a partir de n y el evento mencionado. Las propiedades de regularidad y simple de Markov de M se transmiten a la medida n.

Nos interesa ahora definir un proceso que permita analizar las excursiones en conexión con la caracterización que tienen los intervalos de excursión y el tiempo local inverso de M, el proceso subyacente de Markov.

DEFINICIÓN 1.13. *Sea Γ cementerio para E. Se define el proceso de excursión e mediante la relación*

$$e_t = M \circ \theta_{L^{-1}(t-)} \circ \kappa_{L^{-1}(t) - L^{-1}(t-)},$$

si $L^{-1}(t) > L^{-1}(t-)$, y $e_t = \Gamma$ en otro caso.

Notemos que e_t es un proceso estocástico para cada t. También que toma valores en E, ya que manda a cada trayectoria a la (posible) excursión correspondiente al intervalo de excursión $(L^{-1}(t-), L^{-1}(t))$.

El siguiente teorema es el resultado principal de esta sección, ligando al proceso e y a la medida n. La demostración es muy similar a la del otro teorema importante de esta sección (la caracterización de L^{-1} como subordinador).

TEOREMA 1.14. *El proceso e es de Poisson puntual con medida característica n, cuando $\bar{\pi}(\infty) = 0$ (cero es recurrente). Si $\bar{\pi}(\infty) > 0$ (cero es transitorio) entonces $e \circ \kappa_{L(\infty)}$ es de Poisson puntual con medida característica n y detenido al primer punto en E^∞, i.e., $e \circ \kappa_{L(\infty)} = e \circ \kappa_{\tau_{E^\infty}}$.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que cero es recurrente. El caso cuando cero es transitorio es similar. Como $L^{-1}(t)$ es de paro podemos observar que $F_{L^{-1}(t)}$ es filtración. Sean $B_1, \cdots B_k \subset E$ medibles disjuntos y notemos la independencia de los procesos N^{B_i}, dados por

$$N_t^{B_i} := |\{s \in (0,t] : e_s \in B_i\}|, \quad , i = 1, \cdots, k.$$

Sea B medible. La interpretación de tales procesos es la esperada: $N_{t+s}^B - N_t^B$ es simplemente el número de excursiones de M que pertenecen a B y tales que su intervalo de excursión está contenido en $(L^{-1}(t), L^{-1}(t+s)]$. Ahora la propiedad fuerte de Markov de M implica que

$$F_{L^{-1}(t)} \perp M' := M \circ \theta_{L^{-1}(t)} \sim M,$$

ya que $M_{L^{-1}(t)} = 0$. Sean L' y L'^{-1} los tiempos local e inverso de M', respectivamente. La propiedad aditiva del tiempo local implica mediante una cuenta hecha varias veces antes que $L'^{-1}(s) = L^{-1}(t+s) - L^{-1}(t)$. Se sigue (definiendo los procesos N'^B correspondientes a M' de la manera esperada y análoga) que $N'^B_s = N_{t+s}^B - N_t^B$. Pero entonces $N_{t+s}^B - N_t^B$ también es el número de excursiones de M' cuyo intervalo de excursión está contenido en $(0, L'^{-1}(s)]$. Utilizando Markov (como se enunció recién)

$$F_{L^{-1}(t)} \perp N_{t+s}^B - N_t^B = N'^B_s \sim N_s^B,$$

lo cual caracteriza al proceso N^B como $(F_{L^{-1}(t)})$-Poisson y a su vez a e como Poisson puntual. Solo falta encontrar su medida característica.

Supongamos que la medida característica del proceso de Poisson puntual e es μ. Sea $a > 0$. Para la medida condicional $\mu(\cdot|E^a)$ se cumple (ver [**2**] p. 7 para la segunda igualdad siguiente)

$$\mu(\cdot|E^a) = \frac{\mu(\cdot \cap \zeta > a)}{\mu(\zeta > a)} = P(e_{\tau_{\{\zeta>a\}}} \in \cdot) = n(\cdot|\zeta > a) = \frac{n(\cdot \cap \zeta > a)}{n(\zeta > a)}$$

y además $Exp(\bar{\pi}(a)) \sim L(d_1(a)) = \tau_{\{\zeta>a\}}$ (para el proceso e), por lo que necesariamente $\mu(\zeta > a) = \bar{\pi}(a)$. Pero también $n(\zeta > a) = \bar{\pi}(a)$, de donde $\mu(\cdot \cap \zeta > a) = n(\cdot \cap \zeta > a)$ y, por arbitrariedad de E^a, $\mu = n$. $\square$

COROLARIO 1.15. *Sea F medible y no-negativa, sobre $R^+ \times \Omega' \times E$, tal que para cada excursión fija se tiene un proceso continuo por la izquierda y adaptado. Entonces*

$$E \sum_{t \in G} F_t(\epsilon_t) = E \int_0^\infty \int_E F_s(\epsilon) n(d\epsilon) dL(s),$$

donde G es el conjunto de extremos izquierdos de intervalos de excursión, $\epsilon_t = \epsilon \circ \theta_t^{-1}$, con $\epsilon \in E$ y (g, d) su intervalo de excursión correspondiente.

DEMOSTRACIÓN. Recordemos que los intervalos de excursión están en correspondencia con los saltos del tiempo local inverso. Así

$$\sum_{t \in G} F_t(\epsilon_t) = \sum_{t \le L(\infty)} F_{L^{-1}(t-)}(e_t),$$

y como $L(\infty) = \tau_{E^\infty}$, de paro, $1_{t \le L(\infty)}$ es predecible (adaptado a la σ-álgebra generada por todos los procesos continuos por la izquierda), al igual que $F_{L^{-1}(\cdot-)}$ (por las condiciones impuestas sobre ella), entonces, aplicando la fórmula de compensación para procesos de Poisson puntuales regular, se obtiene

$$\begin{aligned} \sum_{t \in G} F_t(\epsilon_t) = E \sum_t 1_{t \le L(\infty)} F_{L^{-1}(t-)}(e_t) &= E \int_0^\infty \int_E 1_{t \le L(\infty)} F_{L^{-1}(t-)}(\epsilon) n(d\epsilon) dt \\ &= E \int_0^\infty \int_E F_s(\epsilon) n(d\epsilon) dL(s). \end{aligned}$$

$\square$

2. Aplicaciones a Teoría de Riesgo

Se considera una generalización de el proceso Cramér-Lundeberg con la idea de pago de impuestos. Para un tratamiento más detallado, incluyendo los casos particulares que se derivan de lo que se presenta a continuación ver [**6**].

Sea X un proceso de Lévy espectralmente negativo, i.e., un proceso de Lévy unidimensional y con trayectorias que no son monótonas, sin embargo, con saltos únicamente negativos. Tal proceso tiene triada de Lévy (b, σ, ν) que satisface $b \in R$, $\sigma \geq 0$ y ν es una medida que satisface $\int_{(-\infty,0)}(1 \wedge x^2)\nu(dx) < \infty$, ya que, por hipótesis ν tiene soporte en los reales negativos. Por Lévy-Itô tal proceso se puede representar de la siguiente forma

$$X_t = \sigma B_t - bt + X_t^{(1)} + X_t^{(2)},$$

donde B es un movimiento browniano estándar, $X^{(1)}$ es un proceso Poisson compuesto con saltos mayores o iguales a la unidad (por ejemplo) y $X^{(2)}$ corresponde al procesos de saltos pequeños, i.e., una martingala cuadrado integrable con saltos mas pequeños que la unidad. Los tres procesos son estocásticamente independientes.

Ahora, si X tiene variación acotada no hay término browniano y, de hecho, $X_t = dt - Y_t$, donde $d > 0$ es la deriva y Y es un subordinador (Lévy no-decreciente) que carece de deriva. Es sabido que si Ψ denota el exponente de Laplace de X entonces el proceso converge en valor absoluto a infinito o bien oscila si $|\Psi(0+)| > 0$ o bien $\Psi(0+) = 0$, respectivamente.

Introducimos ahora un proceso esencial en la discusión, el proceso del supremo (acumulado), dado por $S_t = \sup_{s \leq t} X_s$. La manera en la que vamos a entender el pago de impuestos y, por lo tanto, perturbar al proceso X es mediante S. Así nuestro nuevo modelo que nos interesa estudiar y que emula al clásico Cramér-Lundberg es el proceso dado por

$$U_t := X_t - \int_{(0,t]} \gamma(S_u) dS_u, \quad t \geq 0,$$

donde $\gamma : R^+ \to R$ es arbitraria (localmente integrable). La integral es la Lebesgue-Stieltjes, ya que S es no-decreciente. La interpretación en términos de riesgo es que X es el proceso superávit o de capital de una aseguradora y γ caracteriza la manera o regla bajo la cual se pagan los impuestos. Intuitivamente se quiere generalizar la idea de pagar una cantidad fija de impuestos si el capital máximo de la aseguradora es fijo. Simplificaciones de la teoría subsecuente son obvias si se restringe a γ de manera natural, como por ejemplo $\gamma : R^+ \to (0, 1)$ o bien $\gamma \equiv \gamma_0 \in (0, 1)$. Mas aún, si $\gamma \equiv 0$ entonces se tiene una generalización del modelo Cramér-Lundberg en el contexto de Teoría de Ruina donde se utiliza un proceso de Lévy espectralmente negativo como el capital.

Se hace una observación que, a pesar de ser obvia, es sumamente útil para trabajar con U. Específicamente que

$$U_t = A_t - (S_t - X_t), \quad A_t := S_t - \int_{(0,t]} \gamma(S_u) dS_u, \quad t \geq 0.$$

Supongamos que el proceso X de Lévy inicia no (necesariamente) en cero, sino en $X_0 \equiv x$, el cual representa en capital inicial de la aseguradora y típicamente es positivo. Entonces, definiendo

$$\bar{\gamma}(s) = s - \int_x^s \gamma(v) dv,$$

se tiene la representación $A_t = \bar{\gamma}(S_t)$. Al ser S un proceso no-decreciente, es de variación acotada y, consiguientemente, lo mismo se puede decir sobre A_t. Como las medidas con signo están en correspondencia con las funciones de variación acotada, dA define una medida con signo, la cual, tiene soporte contenido en el de la medida (no-negativa) dS.

Sea S_A el soporte de dA. Sea B_{S-X} el conjunto de intervalos (abiertos y ajenos) sobre los cuales $S - X$ se encuentra en R^+, i.e., fuera de cero, correspondiente a los intervalos de excursión de X fuera de su máximo. Notemos $S_A \cap B_{S-X} = \emptyset$, puesto que incluso $S_S \cap B_{S-X} = \emptyset$, donde S_S es el soporte de dS. Como consecuencia de esta discusión tenemos que la descomposición $U = A - (S - X)$ puede ser visualizada como tener excursiones fuera de cero de $S - X$ justamente en el tiempo cuando A no varía.

A continuación de introducen las funciones de escala. Un tratamiento completo de funciones de escala se encuentra en [**2**] y [**4**]. Aquí solo serán mencionadas las propiedades que se necesitan para la teoría de excursiones en cuestión. Sea $W^{(q)} = W^{(q)} 1_{[0,\infty)}$ la única función continua por la derecha cuya transformada de Laplace es

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} W^{(q)}(t) dt = \frac{1}{\Psi(\lambda) - q}, \quad \lambda > s(q),$$

donde $s(q)$ es la solución más grande a la ecuación $\Psi(\lambda) = q$ (a lo más tiene dos soluciones, por convexidad de Ψ). $W^{(q)}$ es estrictamente creciente y tiene densidad ($W^{(q)\prime}$) con respecto a la medida de Lebesgue. Si X es de variación acotada, $W^{(q)} \in C^1$. Adicionalmente, se tienen caracterizados los siguientes límites: $W^{(q)}(0+) = d^{-1}, 0$ si, respectivamente, X es de variación acotada o no-acotada; la derivada por la derecha $W_+^{(q)\prime}(0+) = \frac{q+\pi(R)}{d^2}, \frac{2}{\sigma^2}$ si $\sigma = 0, \nu(R) < \infty$ para el primer caso y, para el segundo, $\sigma > 0$ o bien $\nu(R) = \infty$.

Adicionalmente, en [**5**] se encuentra el siguiente resultado útil (n es la medida de excursión para el proceso $S-X$ y $\bar{\epsilon} := \sup_{s<\eta} \epsilon(s)$):

$$n(\bar{\epsilon} > x) = \frac{W'(x)}{W(x)},$$

siempre y cuando x no sea punto de discontinuidad de W, lo cual solo puede suceder si X es de variación acotada, en cuyo caso solo existe un número a lo más numerable de discontinuidades. Mas aún, sea el cambio de variable $dP^{s(q)}/dP|_{F_t} = e^{s(q)X_t - qt}$. Entonces, denotando por $n^{s(q)}$ a la medida de excursión de $S-X$ bajo la medida $P^{s(q)}$, ocurre

$$n^{s(q)}(\bar{\epsilon} > x) = \frac{W^{(q)\prime}(x)}{W^{(q)}(x)} - s(q).$$

La importancia de las funciones de escala es grande y en lo subsecuente será aún mas notorio.

Se usará la siguiente convención de tiempos de paro: $\sigma_a = \operatorname{ínf}\{t > 0 : S_t = a\}$ (la primera visita de S, o bien de X, al estado a) y $\tau_0^- = \operatorname{ínf}\{t > 0 : U_t < 0\}$ (el tiempo de ruina del proceso U).

En el contexto en el que estamos se establece el resultado principal:

Teorema 2.1. *Sean $0 < x \leq a < a^*(x) := \operatorname{ínf}\{s \in [x, \infty) : \bar{\gamma}(s) < 0\}$ y $q \geq 0$. Definimos*

$$Z^{(q)}(x) := 1 + q\int_0^x W^{(q)}(y)dy, \quad f(x) := \frac{Z^{(q)}(x)W^{(q)\prime}(x)}{W^{(q)}(x)} - qW^{(q)}(x).$$

Entonces son válidas las siguientes identidades:

$$E_x(e^{-q\sigma_a} 1_{\{\sigma_a < \tau_0^-\}}) = e^{-\int_x^a W^{(q)\prime}(\bar{\gamma}(s))/W^{(q)}(\bar{\gamma}(s))ds},$$
$$E_x(e^{-q\sigma_a} 1_{\{\tau_0^- < \sigma_a\}}) = \int_x^a e^{-\int_x^t W^{(q)\prime}(\bar{\gamma}(s))/W^{(q)}(\bar{\gamma}(s))ds} f(\bar{\gamma}(t))dt,$$

donde permitimos que $a = \infty$ si $a^*(x) = \infty$. En particular, en este caso, la probabilidad de ruina de U tiene forma explícita:

$$P_x(\tau_0^- < \infty) = 1 - e^{-\int_x^\infty W'(\bar{\gamma}(s))/W(\bar{\gamma}(s))ds}.$$

Demostración. Notemos que $a^*(x)$ es el primer instante cuando $\bar{\gamma}(s)$ entra a los reales negativos. Esto sucede cuando no se está en una excursión de X fuera de su máximo y por lo tanto también es el máximo valor que puede tomar S antes de la ruina de U, ya que en tal momento $U_t = A_t = \bar{\gamma}(S_t)$. Más aún, $\sigma_a < \tau_0^-$ sii $\bar{\epsilon}. \leq \bar{\gamma}(x + \cdot)$ sobre $[0, a - x]$.

Se hace la siguiente traducción a lenguaje de excursiones

$$E_x(e^{-q\sigma_a} 1_{\{\sigma_a < \tau_0^-\}}) = E_x(e^{-qL^{-1}(a-x)} 1_{\{\bar{\epsilon}_s \leq \bar{\gamma}(x+s), s \in [0,a-x]\}}),$$

lo cual se traduce, aplicando el cambio de medida exponencial (como $L^{-1}(a - x)$ es de paro), a

$$\begin{aligned} E_x(e^{-q\sigma_a} 1_{\{\sigma_a < \tau_0^-\}}) &= E_x(e^{s(q)X_{L^{-1}(a-x)} - qL^{-1}(a-x) - s(q)X_{L^{-1}(a-x)}} 1_{\{\bar{\epsilon}_s \leq \bar{\gamma}(x+s), s \in [0,a-x]\}}) \\ &= e^{-(a-x)s(q)} E_x^{s(q)}(1_{\{\bar{\epsilon}_s \leq \bar{\gamma}(x+s), s \in [0,a-x]\}}) \\ &= e^{-(a-x)s(q)} P_x^{s(q)}(\bar{\epsilon}_s \leq \bar{\gamma}(x+s), s \in [0, a-x]). \end{aligned}$$

Pero la fórmula exponencial del primer capítulo nos dice

$$P_x^{s(q)}(\bar{\epsilon}_s \leq \bar{\gamma}(x+s), s \in [0, a-x]) = e^{-\int_0^{a-x} n^{s(q)}(\bar{\epsilon} > \bar{\gamma}(x+s)) ds}.$$

Uniendo lo todo lo anterior se obtiene

$$\begin{aligned} E_x(e^{-q\sigma_a} 1_{\{\sigma_a < \tau_0^-\}}) &= e^{-(a-x)s(q)} e^{-\int_0^{a-x} n^{s(q)}(\bar{\epsilon} > \bar{\gamma}(x+s)) ds} \\ &= e^{-\int_0^{a-x} [s(q) + n^{s(q)}(\bar{\epsilon} > \bar{\gamma}(x+s))] ds} \\ &= e^{-\int_0^{a-x} W^{(q)\prime}(\bar{\gamma}(x+s)) / W^{(q)}(\bar{\gamma}(x+s)) ds}, \end{aligned}$$

lo cual prueba la primera identidad. La segunda se realiza de una manera similar, como sigue. Sea $\rho_k = \inf\{s > 0 : \epsilon(s) > k\}$. Primero traducimos a excursiones, sin embargo, ahora se deben considerar todos los posibles tiempos de ruina (la suma corre sobre los distintos tiempos de excursión):

$$E_x(e^{-q\tau_0^-} 1_{\{\tau_0^- < \sigma_a\}}) = E_x \sum_{0 < t \leq a-x} e^{-qL^{-1}(t-) - q\rho_{\bar{\gamma}(t+x)}(\epsilon_t)} 1_{\{\bar{\epsilon}_s \leq \bar{\gamma}(x+s), s \in [0,t)\} \cap \{\bar{\epsilon}_t > \bar{\gamma}(t+x)\}},$$

para ahora aplicar la fórmula de compensación del capítulo anterior, (el conjunto E es, como siempre, el espacio de excursiones) obteniendo

$$E_x \int_0^{a-x} \int_E e^{-qL^{-1}(t-) - q\rho_{\bar{\gamma}(t+x)}(\epsilon)} 1_{\{\bar{\epsilon}_s \leq \bar{\gamma}(x+s), s \in [0,t)\} \cap \{\bar{\epsilon}(t) > \bar{\gamma}(t+x)\}} n(d\epsilon) dt.$$

En este punto, como en el caso anterior, debemos usar un resultado de funciones de escala, para hacerlas aparecer. Específicamente, que (ver [**1**])

$$f(x) = \int_E e^{-q\rho_x(\epsilon)} 1_{\{\bar{\epsilon}>x\}} n(d\epsilon).$$

Así, lo anterior se convierte, aplicando el mismo cambio de medida exponencial, en

$$E_x \int_0^{a-x} e^{-qL^{-1}(t)} 1_{\{\bar{\epsilon}_s \leq \bar{\gamma}(x+s), s\in[0,t)\}} f(\bar{\gamma}(t+x))dt$$
$$= \int_0^{a-x} e^{-s(q)t} E_x^{s(q)}[1_{\{\bar{\epsilon}_s \leq \bar{\gamma}(x+s), s\in[0,t)\}}] f(\bar{\gamma}(t+x))dt.$$

Similarmente al caso anterior, la fórmula exponencial se lee

$$P_x^{s(q)}(\bar{\epsilon}_s \leq \bar{\gamma}(x+s), s \in [0,t)) = e^{-\int_0^t n^{s(q)}(\bar{\epsilon}>\bar{\gamma}(s+x))ds},$$

de donde

$$\begin{aligned}
E_x(e^{-q\tau_0^-} 1_{\{\tau_0^- < \sigma_a\}}) &= \int_0^{a-x} e^{-s(q)t} e^{-\int_0^t n^{s(q)}(\bar{\epsilon}>\bar{\gamma}(s+x))ds} f(\bar{\gamma}(t+x))dt \\
&= \int_0^{a-x} e^{-\int_0^t [s(q)+n^{s(q)}(\bar{\epsilon}>\bar{\gamma}(s+x))]ds} f(\bar{\gamma}(t+x))dt \\
&= \int_0^{a-x} e^{-\int_0^t W^{(q)\prime}(\bar{\gamma}(x+s))/W^{(q)}(\bar{\gamma}(x+s))ds} f(\bar{\gamma}(t+x))dt,
\end{aligned}$$

lo cual prueba la segunda identidad. Notemos su validez para $a = \infty$, bajo las condiciones aseveradas, por convergencia dominada. En particular, si es permisible que $a = \infty$ y se hace $q = 0$, la primera identidad se lee

$$P_x(\sigma_\infty < \tau_0^-) = e^{-\int_x^\infty W'(\bar{\gamma}(s))/W(\bar{\gamma}(s))ds}.$$

Tomando complementos se obtiene la probabilidad de ruina

$$P_x(\tau_0^- < \infty) = 1 - e^{-\int_x^\infty W'(\bar{\gamma}(s))/W(\bar{\gamma}(s))ds}.$$

$\square$

Bibliografía

[1] F. Avram, A.E. Kyprianou, and M.R. Pistorius. *Exit problems for spectrally negative Lévy processes and application to (Canadized) Russian options.* Annals of Applied Probability, 2004.

[2] Jean Bertoin. *Lévy Processes.* Cambridge University Press, 1996.

[3] Olav Kallenberg. *Foundations of Modern Probability.* Springer, 2002.

[4] A. Kuznetsov, A.E. Kyprianou, and V. Rivero. *The theory of scale functions for spectrally negative Lévy processes.* 2011.

[5] A.E. Kyprianou. *Introductory lectures on fluctuations of Lévy process with applications.* Springer, 2006.

[6] A.E. Kyprianou and C. Ott. *Spectrally negative Lévy processes perturbed by functionals of their running supremum.* 2012.

[7] Walter Rudin. *Functional Analysis.* McGraw-Hill, 1991.