



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS

TEOREMA DE LA ESFERA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A:

ANDRÉS AHUMADA GÓMEZ



DIRECTORA DE TESIS:  
DRA. MÓNICA ALICIA CLAPP JIMÉNEZ LABORA

Cd. Universitaria, D. F. 2015



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**Datos del alumno**

Ahumada  
Gómez  
Andrés  
(775) 755 38 36  
Universidad Nacional Autónoma de México  
Facultad de Ciencias  
Matemáticas  
411037000

**Datos del tutor**

Dra.  
Mónica Alicia  
Clapp  
Jiménez Labora

**Datos del sinodal 1**

Dra.  
Laura  
Ortiz  
Bobadilla

**Datos del sinodal 2**

Dr.  
Pablo  
Suárez  
Serrato

**Datos del sinodal 3**

Dr.  
Rodolfo  
San Agustín  
Chi

**Datos del sinodal 4**

Dr.  
Vinicio Antonio  
Gómez  
Gutiérrez

**Datos del trabajo escrito**

Teorema de la esfera  
72 p.  
2015

# TEOREMA DE LA ESFERA

*Andrés Ahumada Gómez*



*A mi familia,  
mis axiomas.*



## Agradecimientos

Primero quiero agradecer a la Doctora Mónica Alicia Clapp Jimenez Labora por haber sido una grandiosa profesora, que me ha dado una visión más amplia de las matemáticas. Disfruté muchísimo cada uno de sus cursos, especialmente el de Geometría Riemanniana. También le quiero agradecer por haber dirigido mi tesis y por todo su apoyo a través del proceso.

A la Doctora Laura Ortiz Bobadilla por haber sido una maravillosa profesora, que me presentó a las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Le quiero agradecer por su ayuda tanto en el servicio social como en la revisión de este trabajo.

A mis sinodales: los Doctores Pablo Suárez Serrato, Vinicio Antonio Gómez Gutiérrez y Rodolfo San Agustín Chi. Por su asistencia en la revisión de esta tesis, sus correcciones y sugerencias.

Al Doctor Leobardo Fernández Román y al Maestro Rubén Antonio Molina Hernández por su ayuda en el inicio de la carrera.

A mis amigos, Alexander y Arely, por su gran amistad. También a mis amigos de la facultad y del CELE.

Finalmente el agradecimiento más grande es a mis geniales papás, pilares fundamentales de mi vida, cuyo apoyo ha sido incommensurable. Sin ustedes no habría podido, todo esto es por y para ustedes.

Muchas gracias a todos.





# Índice general

Agradecimientos	I
Introducción	1
Capítulo 1. Nociones y resultados básicos	3
1. Variedades suaves	3
1.1. Funciones diferenciables	3
2. Espacio tangente	4
2.1. Vectores tangentes a curvas	6
3. Subvariedades	6
3.1. Espacio tangente a una subvariedad	7
3.2. Transversalidad	7
4. Propiedades topológicas de una variedad	7
4.1. Variedades compactas	7
4.2. Variedad simplemente conexa	7
4.3. Orientabilidad	8
5. Tensores	8
6. Haces vectoriales	9
6.1. Haz tangente	10
6.2. Haz tensorial	11
6.3. Campo Tensorial	11
6.4. Campos Vectoriales	11
6.5. Corchete de Lie	12
7. Métrica Riemanniana	13
8. Conexiones	14
9. Campos vectoriales a lo largo de curvas	16
10. Geodésicas	16
11. Transporte paralelo	17
12. Conexión Riemanniana	17
13. Mapeo Exponencial	18
14. Distancia geodésica	20
15. Geodésicas y curvas minimizantes	20
16. Completitud	22
17. Curvatura	22
18. Campos de Jacobi	23
18.1. Puntos conjugados	24
19. Índices	25

20. Fórmula de la Segunda Variación	25
21. Teorema del Índice de Morse	26
22. Teorema de Sard	26
Capítulo 2. Teorema de Rauch	27
Capítulo 3. Lugar de Corte	35
Capítulo 4. Estimación de Klingenberg	45
1. Caso par	45
2. Caso general	46
Capítulo 5. Los tres resultados fundamentales	55
Capítulo 6. Demostración del teorema de la esfera	61
Bibliografía	63

## Introducción

La matemática es una ciencia que a lo largo de la historia ha ayudado a la humanidad a entender su realidad, desde su forma de pensar hasta la naturaleza que lo rodea. Esta manera de entendimiento, el conocimiento matemático, muchas veces tiene su origen en lo que el ser humano observa, pero es transformado y parecería que es totalmente ajeno a la realidad. El objetivo de esta tesis es probar el teorema de la esfera, que por su enunciado parecería un resultado muy abstracto, pero a través de su demostración uno se da cuenta de que no es así y que hay muchos conceptos absolutamente relacionados con lo que se ve en la vida normal.

El teorema de la esfera es un resultado de geometría riemanniana que da una equivalencia topológica. Además, este teorema, como muchos en matemáticas, emplea diversas herramientas de distintas ramas de las matemáticas. En este caso se usan resultados de álgebra, análisis, topología general, diferencial y algebraica, e incluso ecuaciones diferenciales.

El teorema de la esfera, un resultado extraordinario de geometría diferencial global, dice lo siguiente:

**TEOREMA DE LA ESFERA.** *Sea  $(M, g)$  una  $n$ -variedad riemanniana compacta y simplemente conexa, cuya curvatura seccional  $K$  es tal que*

$$(1) \quad \frac{1}{4r^2} < K \leq \frac{1}{r^2}.$$

*Entonces  $M$  es homeomorfa a  $\mathbb{S}_r^n$ , donde  $\mathbb{S}_r^n$  denota la esfera de radio  $r$  en  $\mathbb{R}^{n+1}$ .*

No obstante, para un mejor desarrollo de la demostración, si a la métrica se la multiplica por la constante  $1/r$ , se puede suponer que la desigualdad (1) es:

$$(2) \quad a := \frac{1}{4} < K \leq 1.$$

Históricamente, estimar la constante  $a$  siguió un proceso de aproximadamente una década. El primer intento fue de Henry Ernest Rauch con  $a \approx 3/4$  en 1951. Luego Wilhelm Klingenberg hizo grandes contribuciones, usando nuevas técnicas y el Teorema de Rauch, demostró el teorema con  $n$  par y  $a \approx 0,74$  en 1959. Al año siguiente, Marcel Berger demostró el teorema con  $n$  par y  $a = 1/4$ . Finalmente, de nuevo Klingenberg en 1961 con ayuda de los últimos resultados de Berger, demostró el teorema tal como está enunciado arriba.

Con respecto a si  $K$  puede considerársele en el intervalo  $[1/4, 1]$ , se ha probado que si la dimensión es par, el teorema es falso. Y si la dimensión es impar, sí se tiene el resultado, pero no se sabe si se puede mejorar. Para los casos  $n = 2$  y  $n = 3$ , el teorema es cierto simplemente suponiendo que  $K$  sea positivo, usando en el caso  $n = 2$  el teorema de Gauss-Bonnet y en el caso  $n = 3$  el teorema de Hamilton.

Por otro lado, el teorema se puede mejorar a difeomorfismo, como se puede consultar en [Cheeger-Ebin], pero no se abordará en esta tesis.

La tesis está estructurada en seis capítulos y un apéndice. En el capítulo 1 se abordan las definiciones y resultados básicos necesarios para entender el enunciado del teorema de la esfera, así como para seguir de la mejor manera la demostración de éste. Todos estos han sido obtenidos de las Notas del Curso de Geometría Riemanniana de Mónica Clapp, del libro “Riemannian Manifolds” de John Lee y del libro “Riemannian Geometry” de Manfredo do Carmo.

Sigue el capítulo 2, que es sobre el teorema de Rauch, una herramienta muy poderosa que permite comparar la curvatura de dos variedades. En el capítulo 3 se introduce “el lugar de corte de un punto”, éste es básicamente donde las geodésicas que parten de ese punto dejan de ser minimizantes.

En el capítulo 4 se desarrolla la estimación de Klingenberg, que es en esencia un número que mide hasta dónde el mapeo exponencial es difeomorfismo. Es en el capítulo 5 donde se demuestran tres proposiciones que se usan directamente en la demostración del teorema de la esfera.

Finalmente, en el capítulo 6 se da la demostración del teorema de la esfera.

## Nociones y resultados básicos

En este capítulo se hará un recuento de las definiciones y resultados de geometría riemanniana necesarios para entender de la mejor manera el desarrollo del teorema de la esfera. No se demostrará ningún resultado, pero las demostraciones se encuentran en [Carmo], [Clapp] y [Lee].

Así, lo primero que se debe hacer es definir el objeto básico a estudiar. En este caso son las variedades suaves.

### 1. Variedades suaves

DEFINICIÓN. Un *atlas* en un espacio topológico  $M$  consiste de

- una cubierta abierta  $\{U_i \mid i \in \mathcal{I}\}$  de  $M$ , es decir, una familia de abiertos tal que

$$M \subset \bigcup_{i \in \mathcal{I}} U_i;$$

- una familia de homeomorfismos  $\{\varphi_i: U_i \rightarrow \Omega_i \mid i \in \mathcal{I}\}$ , donde  $\Omega_i$  es un abierto en  $\mathbb{R}^n$ , tales que la función de transición

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}: \varphi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j)$$

es un difeomorfismo (suave) para cualesquiera  $i, j \in \mathcal{I}$ .

A la pareja  $(U_i, \varphi_i)$  se le llama una *carta* del atlas, a  $n$  se le llama la *dimensión* de  $M$  y se dirá que  $M$  es una  $n$ -variedad suave.

DEFINICIÓN. Dos atlas  $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in \mathcal{I}}$  y  $\{(V_j, \psi_j)\}_{j \in \mathcal{J}}$  en  $M$  son *equivalentes* si su unión es también un atlas en  $M$ , i. e., si

$$\psi_j \circ \varphi_i^{-1}: \varphi_i(U_i \cap V_j) \rightarrow \psi_j(U_i \cap V_j)$$

es un difeomorfismo para cualesquiera  $i \in \mathcal{I}$  y  $j \in \mathcal{J}$ .

Una *estructura diferenciable* en  $M$  es una clase de equivalencia de atlas de  $M$ . Siempre se va a tomar un atlas representante de la clase de equivalencia.

DEFINICIÓN. Una *variedad (suave)* es un espacio topológico de Hausdorff  $M$ , que satisface el segundo axioma de numerabilidad, i. e., tiene una base topológica numerable; y una estructura diferenciable en  $M$ .

**1.1. Funciones diferenciables.** Otra cosa básica es la relación entre variedades, es decir, funciones.

DEFINICIÓN. Sean  $M$  y  $N$  variedades. Una función  $F: M \rightarrow N$  es *suave* si para cada  $x \in M$  existen cartas  $(U, \varphi)$  de  $M$  y  $(V, \psi)$  de  $N$  alrededor de  $x$  y  $F(x)$ , respectivamente, tales que  $F(U) \subset V$  y

$$\psi \circ F \circ \varphi^{-1}: \varphi(U) \rightarrow \psi(V)$$

es suave.

Un *difeomorfismo* es una función  $F: M \rightarrow N$  que es suave y biyectiva; y cuya inversa  $F^{-1}: N \rightarrow M$  es suave. Dos variedades  $M$  y  $N$  se dice que son *difeomorfas* si existe un difeomorfismo entre ellas.

## 2. Espacio tangente

Ahora que ya se definió variedad suave, uno se pregunta cómo se ve ésta. Con este objetivo se define el espacio tangente, un espacio vectorial que localmente se parece mucho a la variedad.

Sea  $M$  una variedad y  $p \in M$ . Se denota por  $\mathcal{C}^\infty(M)$  a las funciones suaves  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ . Este conjunto  $\mathcal{C}^\infty(M)$  es una  $\mathbb{R}$ -álgebra con las operaciones  $f + g$ ,  $\lambda f$  y  $fg$  definidas puntualmente para  $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$  y  $\lambda \in \mathbb{R}$ , cuya unidad es la función constante 1.

DEFINICIÓN. Una *derivación* en  $p$  es una función lineal  $X_p: \mathcal{C}^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$  que satisface

$$X_p(fg) = f(p)X_p(g) + g(p)X_p(f) \quad \forall f, g \in \mathcal{C}^\infty(M).$$

A esta propiedad se le llama *regla de Leibniz*.

Obsérvese que si  $X_p$  y  $Y_p$  son derivaciones en  $p$ , su suma y su producto por escalar  $\lambda \in \mathbb{R}$ , definidos de la siguiente manera

$$(X_p + Y_p)(f) := X_p(f) + Y_p(f), \quad (\lambda X_p)(f) := \lambda X_p(f),$$

son derivaciones en  $p$ . Es decir, las derivaciones en  $p$  forman un espacio vectorial.

DEFINICIÓN. Al espacio vectorial de las derivaciones en  $p$  se le llama *espacio tangente a  $M$  en  $p$* . Se denota por  $T_p M$  y a sus elementos se les llama *vectores tangentes a  $M$  en  $p$* .

Una función suave  $F: M \rightarrow N$  induce una función  $F_*: T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$  dada por

$$(F_* X_p)(f) := X_p(f \circ F), \quad f \in \mathcal{C}^\infty(N), \quad X_p \in T_p M.$$

Esta función cumple las siguientes propiedades:

PROPOSICIÓN 1.1. Si  $F: M \rightarrow N$  y  $G: N \rightarrow \tilde{N}$  son funciones suaves y  $p \in M$  se cumple

- $F_*: T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$  es lineal,
- $(G \circ F)_* = G_* \circ F_*$ .
- $(Id_M)_* = Id_{T_p M}$

Gracias a esta proposición, si  $F: M \rightarrow N$  es un difeomorfismo, entonces

$$F_*: T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$$

es un isomorfismo.

DEFINICIÓN. La función  $F_*$  se llama el *diferencial* de  $F$  en  $p$  (en inglés "*pushforward*") y también se denota como  $dF_p$ .

Ahora, a partir de lo anterior, se quiere describir localmente el espacio tangente a  $M$  en  $p$  y para esto antes se verá cómo es el espacio tangente a  $\mathbb{R}^n$  en  $p$ . Para esto último se requiere los siguientes lemas.

LEMA 1.2. Si  $X_p: \mathcal{C}^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$  es una derivación en  $p$ , entonces  $X_p(\mu) = 0$  para cualquier función constante  $\mu: M \rightarrow \mathbb{R}$ .

LEMA 1.3. Sea  $X_p \in T_p\mathbb{R}^n$ . Entonces

$$X_p = \sum_{j=1}^n X_p(x^j) \left. \frac{\partial}{\partial x^j} \right|_p,$$

donde  $x^j: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es la  $j$ -ésima proyección y  $\left. \frac{\partial}{\partial x^j} \right|_p$  es la derivación que a cada  $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$  le asocia su  $j$ -ésima derivada parcial en  $p$ .

PROPOSICIÓN 1.4. Sea  $p \in \mathbb{R}^n$ .

- La función de  $\mathbb{R}^n$  a  $T_p\mathbb{R}^n$  dada por

$$v \mapsto D(\_)(p)v = \sum_{j=1}^n v^j \left. \frac{\partial}{\partial x^j} \right|_p$$

es un isomorfismo.

- Si  $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  es suave, la función  $F_*: T_p\mathbb{R}^n \rightarrow T_{F(p)}\mathbb{R}^k$  corresponde a la derivada  $DF(p)$  bajo dicho isomorfismo, es decir, conmuta el diagrama

$$\begin{array}{ccc} T_p\mathbb{R}^n & \xrightarrow{F_*} & T_{F(p)}\mathbb{R}^k \\ \cong \downarrow & & \downarrow \cong \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow{DF(p)} & \mathbb{R}^k \end{array}$$

Con la proposición anterior y las dos siguientes el espacio tangente a  $M$  en  $p$  quedará expresado localmente.

PROPOSICIÓN 1.5. Sea  $X_p \in T_pM$ . Si dos funciones  $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$  coinciden en una vecindad de  $p$ , entonces  $X_p(f) = X_p(g)$ .

PROPOSICIÓN 1.6. La inclusión  $\iota: U \rightarrow M$  induce un isomorfismo

$$\iota_*: T_pU \rightarrow T_pM,$$

donde  $U$  es un abierto en  $M$  y  $p \in U$ . Es decir,  $T_pU \cong T_pM$ , con  $U$  vecindad de  $p$ .

Si  $(U, \varphi)$  es una carta de  $M$  y  $p \in U$ , entonces  $\varphi: U \rightarrow \varphi(U)$  es un difeomorfismo y  $\varphi_*: T_pU \rightarrow T_{\varphi(p)}(\varphi(U))$  es un isomorfismo. Además, la Proposición 1.4 asegura que las derivaciones

$$\partial_j|_p := (\varphi^{-1})_* \left. \frac{\partial}{\partial x^j} \right|_{\varphi(p)}, \quad j = 1, \dots, n,$$

forman una base de  $T_pM$ . Explícitamente, para  $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$ ,

$$\partial_j|_p(f) = \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^j}(\varphi(p)).$$

NOTACIÓN. Para evitar cargar demasiada notación en lugar de escribir  $\partial_j|_p$ , se escribirá simplemente  $\partial_j$ , siempre y cuando no haya confusión con respecto al punto de anclaje.

DEFINICIÓN. A esta base se le llama *sistema de coordenadas en  $p$*  y a cada  $\partial_j|_p$  se le llama *vector coordinado en  $p$* . Así, todo  $X_p \in T_pM$  se escribe de manera única como

$$(3) \quad X_p = \sum_{j=1}^n X_p^j \partial_j|_p, \text{ con } X_p^j = X_p(\varphi^j),$$

donde  $\varphi^j := x^j \circ \varphi$  es la  $j$ -ésima componente de  $\varphi$ . Los números  $X_p^1, \dots, X_p^n$  se llaman *componentes de  $X_p$* .

NOTACIÓN (Convención de sumatoria de Einstein). Se denotará a una suma  $\sum_{j=1}^n x^j E_j$  en cuyos términos aparece dos veces el mismo índice simplemente como  $x^j E_j$ . Es decir,

$$x^j E_j := \sum_{j=1}^n x^j E_j.$$

**2.1. Vectores tangentes a curvas.** La siguiente definición presenta a las curvas, objetos básicos para el estudio de una variedad. En esta subsección se utilizan para dar una versión alternativa del espacio tangente.

DEFINICIÓN. Sea  $M$  una variedad. Una *curva en  $M$*  es una función suave  $\alpha: (a, b) \rightarrow M$ . Si  $t_0 \in (a, b)$ , el *vector tangente a  $\alpha$  en  $t_0$*  es la derivación

$$\dot{\alpha}(t_0) := \alpha_* \left. \frac{d}{dt} \right|_{t_0} \in T_{\alpha(t_0)}M,$$

donde  $\left. \frac{d}{dt} \right|_p$  es la base estándar de  $T_{t_0}\mathbb{R}$ . Esta derivación está dada por

$$\dot{\alpha}(t_0)(f) = \left. \frac{d(f \circ \alpha)}{dt} \right|_{t_0}, \quad f \in \mathcal{C}^\infty(M).$$

Si  $(U, \varphi)$  es una carta de  $M$  en  $\alpha(t_0)$  y  $\varphi \circ \alpha = (\alpha^1, \dots, \alpha^n)$ , entonces

$$\dot{\alpha}(t_0) = \dot{\alpha}^j(t_0) \partial_j|_{\alpha(t_0)}.$$

En los cursos de geometría diferencial se define el espacio tangente a una variedad  $M$  en un punto  $p$  como el conjunto de vectores tangentes en  $p$  a todas las curvas que pasan por éste. La siguiente proposición da justamente esta caracterización a partir de la definición dada en la sección 2 de este capítulo.

PROPOSICIÓN 1.7. *Si  $M$  es una variedad y  $p \in M$ , entonces todo  $X_p \in T_pM$  es el vector tangente a alguna curva  $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  en 0, i. e.,  $\alpha(0) = p$ .*

De esta manera, la diferencial de una función suave  $F: M \rightarrow N$  se expresa de manera sencilla en términos de curvas: si  $X_p \in T_pM$  es el vector tangente a la curva  $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  en 0, entonces  $F_*: T_pM \rightarrow T_{F(p)}N$  está dada por

$$F_*X_p = (F \circ \alpha)'(0).$$

### 3. Subvariedades

A continuación se introduce lo que es una subvariedad, cuyo objetivo en esta tesis es comprender mejor el concepto de transversalidad.



DEFINICIÓN. Si  $M$  es una variedad suave, una *subvariedad* de  $M$  es una variedad suave  $\tilde{M}$  junto con un encaje  $i: \tilde{M} \rightarrow M$ , es decir,  $\tilde{M}$  es homeomorfa a su imagen  $i(\tilde{M})$  y

$$i_*: T_p\tilde{M} \rightarrow T_pM$$

es inyectiva.

**3.1. Espacio tangente a una subvariedad.** Sea  $\tilde{M}$  una  $n$ -subvariedad de una  $m$ -variedad  $M$ . Para cada punto  $p \in \tilde{M}$  existe un sistema de coordenadas  $\{\partial_1, \dots, \partial_m\}$  en una carta  $(U, \varphi)$  de  $M$  tal que  $U \cap \tilde{M}$  está dado por

$$\{x \in M \mid \varphi^{n+1}(x) = \dots = \varphi^m(x) = 0\}$$

y  $\{\partial_1, \dots, \partial_n\}$  forman un sistema de coordenadas local para  $\tilde{M}$ . En cada  $q \in U \cap \tilde{M}$ ,  $T_q\tilde{M}$  puede ser identificado como el subespacio de  $T_qM$  generado por  $\{\partial_1, \dots, \partial_n\}$ .

**3.2. Transversalidad.** Una propiedad de subvariedades utilizada es la transversalidad, que se define a continuación.

DEFINICIÓN. Sean  $N$  y  $\tilde{N}$  dos subvariedades suaves de  $M$ , variedad suave.  $N$  es *transversal* a  $\tilde{N}$  si para todo  $x \in N \cap \tilde{N}$ ,

$$T_xN + T_x\tilde{N} = T_xM.$$

Veáse [Guillemin-Pollack].

#### 4. Propiedades topológicas de una variedad

En esta sección se describirán ciertas propiedades topológicas que puede tener una variedad.

##### 4.1. Variedades compactas.

DEFINICIÓN. Una variedad  $M$  es *compacta* si toda cubierta abierta  $\{U_i \mid i \in \mathcal{I}\}$  de  $M$  tiene una subcubierta abierta finita, es decir, existen  $U_{i_1}, \dots, U_{i_n}$  elementos de la cubierta tal que

$$M \subset U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}.$$

##### 4.2. Variedad simplemente conexa.

DEFINICIÓN. Dos curvas  $\gamma: [0, 1] \rightarrow M$  y  $\tilde{\gamma}: [0, 1] \rightarrow M$  son *homotópicas* si existe una función continua

$$H: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow M$$

tal que

$$\begin{aligned} H(0, t) &= \gamma(t) \text{ y} \\ H(1, t) &= \tilde{\gamma}(t). \end{aligned}$$

Si además

$$\begin{aligned} H(s, 0) &= \gamma(0) = \tilde{\gamma}(0) \text{ y} \\ H(s, 1) &= \gamma(1) = \tilde{\gamma}(1), \end{aligned}$$

entonces se dirá que son *homotópicas con extremos fijos*.

DEFINICIÓN. Una variedad  $M$  es *conexa por trayectorias* si para cualesquiera  $p, q \in M$ , existe una curva que los une, no necesariamente suave.

DEFINICIÓN. Una variedad  $M$  es *simplemente conexa* si es conexa por trayectorias y para cualesquiera dos curvas, éstas son homotópicas.

### 4.3. Orientabilidad.

DEFINICIÓN. Sea  $M$  una variedad diferenciable. Se dirá que  $M$  es *orientable* si admite una estructura diferenciable  $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in \mathcal{I}}$  tal que para todo par  $j, k \in \mathcal{I}$  que cumplen que  $U_j \cap U_k \neq \emptyset$ , entonces el determinante del jacobiano de la función

$$\varphi_k \circ \varphi_j^{-1}: \varphi_j(U_j \cap U_k) \rightarrow \varphi_k(U_j \cap U_k)$$

es positivo.

PROPOSICIÓN 1.8. *Si una variedad  $M$  es simplemente conexa, entonces es orientable.*

## 5. Tensores

Los tensores se incluyen para entender perfectamente lo que es la métrica riemanniana y el tensor de curvatura, intruducidos posteriormente.

Considérese  $V$  un espacio de dimensión finita sobre  $\mathbb{R}$ . Sea  $V^*$  es espacio dual de  $V$ , i. e.,  $V^* = \{f: V \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ es lineal}\}$ . Recuérdese que a los elementos de  $V$  se le llama *vectores* y a los elementos de  $V^*$  se les llama *covectores*.

DEFINICIÓN. Un  $k$ -tensor covariante en  $V$  es una función  $k$ -multilineal a  $\mathbb{R}$ :

$$F: \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k \text{ copias}} \longrightarrow \mathbb{R}$$

Un  $l$ -tensor contravariante en  $V$  es una función  $l$ -multilineal a  $\mathbb{R}$ :

$$G: \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{l \text{ copias}} \longrightarrow \mathbb{R}$$

Un tensor del tipo  $\binom{k}{l}$ ,  $k$ -covariante  $l$ -contravariante, es una función  $(k+l)$ -multilineal a  $\mathbb{R}$ :

$$H: \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k \text{ copias}} \times \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{l \text{ copias}} \longrightarrow \mathbb{R}$$

Se van a denotar al conjunto de todos los  $k$ -tensores covariantes como  $T^k(V)$ , al conjunto de todos los  $l$ -tensores contravariantes como  $T_l(V)$  y al conjunto de los tensores del tipo  $\binom{k}{l}$  como  $T_l^k(V)$ . Y se hacen varias identificaciones:

$$T^1(V) = V^*, \quad T_1(V) = V^{**} = V \quad \text{y} \quad T^0(V) = \mathbb{R}.$$

DEFINICIÓN. Sean  $F \in T_l^k(V)$  y  $G \in T_q^p(V)$ . Se define el *producto tensorial de  $F$  y  $G$*  como

$$(F \otimes G)(\overbrace{\omega^1, \dots, \omega^{l+q}}^{\text{covectores}}, \overbrace{V_1, \dots, V_{k+p}}^{\text{vectores}})$$

$$F(\omega^1, \dots, \omega^l, V_1, \dots, V_k) G(\omega^{l+1}, \dots, \omega^{l+q}, V_{k+1}, \dots, V_{k+p})$$

Si  $\{E_1, \dots, E_n\}$  es base de  $V$ . Considérese  $\{\varphi^1, \dots, \varphi^n\}$  la base dual correspondiente para  $V^*$ , definida por  $\varphi^i(E_j) = \delta_{ij}$ , donde

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Una base para  $T_l^k(V)$  está dada por los tensores de la forma

$$E_{j_1} \otimes \cdots \otimes E_{j_l} \otimes \varphi^{i_1} \otimes \cdots \otimes \varphi^{i_k},$$

con  $i_p, j_q \in \{1, \dots, n\}$ . Estos tensores se evalúan en la base de la siguiente manera:

$$(E_{j_1} \otimes \dots \otimes E_{j_l} \otimes \varphi^{i_1} \otimes \dots \otimes \varphi^{i_k})(\varphi^{s_1}, \dots, \varphi^{s_l}, E_{r_1}, \dots, E_{r_k})$$

$$\parallel$$

$$\delta_{s_1 j_1} \dots \delta_{s_l j_l} \delta_{i_1 r_1} \dots \delta_{i_k r_k}.$$

Así, cualquier tensor  $F \in T_l^k(V)$  puede ser escrito como

$$F = F_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l} E_{j_1} \otimes \dots \otimes E_{j_l} \otimes \varphi^{i_1} \otimes \dots \otimes \varphi^{i_k},$$

donde

$$F_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l} = F(\varphi^{j_1}, \dots, \varphi^{j_l}, E_{i_1}, \dots, E_{i_k}).$$

Hay una clase especial de tensores, aquellos que son alternantes, es decir, que cambian de signo cuando dos argumentos son intercambiados.

DEFINICIÓN. Se llaman *k-formas* a los *k*-tensores covariantes alternantes. Y al espacio de todas las *k*-formas se denota como  $\Lambda^k(V)$ .

## 6. Haces vectoriales

DEFINICIÓN. Un *haz vectorial* de dimensión *k* es una pareja de variedades *E* y *M*, junto con una función suprayectiva  $\pi: E \rightarrow M$ , que satisfacen las siguientes propiedades:

1. Cada conjunto  $E_p := \pi^{-1}(p)$  está dotado con la estructura de un espacio vectorial.
2. Para cada  $p \in M$ , existe una vecindad *U* de *p* y un difeomorfismo

$$\varphi: \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^k,$$

tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\varphi} & U \times \mathbb{R}^k \\ \pi \downarrow & & \pi_1 \downarrow \\ U & = & U \end{array}$$

donde  $\pi_1$  es la proyección en el primer factor.

3. Con *U* y  $\varphi$  como antes, para cada  $q \in U$ , la restricción  $\varphi|_{E_q}: E_q \rightarrow \mathbb{R}^k$ , es un isomorfismo lineal.

A *E* se le llama *espacio total*, a *M* *espacio base*, a  $\pi$  *proyección*, a  $E_p$  *fibra de E sobre p* y a  $\varphi$  *trivialización local de E*.

Muchas veces uno se encuentra una colección de espacios vectoriales, uno para cada punto de una variedad. Y se quiere pegarlos de una manera adecuada para que formen un haz vectorial. Para probar que esta colección forma un haz vectorial se puede usar el siguiente lema evitando mostrar que el espacio base es una variedad suave.

LEMA 1.9. *Sea M una variedad suave, E un conjunto y  $\pi: E \rightarrow M$  una función suprayectiva. Supóngase que se tiene una cubierta abierta  $\{U_\alpha\}$  de M junto con funciones biyectivas  $\varphi_\alpha: \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^k$  que satisfacen  $\pi_1 \circ \varphi_\alpha = \pi$ , tal que cuando  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ , la función de transición*

$$\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}: U_\alpha \cap U_\beta \times \mathbb{R}^k \rightarrow U_\alpha \cap U_\beta \times \mathbb{R}^k$$

es de la forma

$$\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}(p, V) = (p, \tau(p)V)$$

para alguna función suave  $\tau: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow GL(k, \mathbb{R})$ . Entonces  $E$  tiene una única estructura como haz vectorial suave de dimensión  $k$  sobre  $M$  para el cual las funciones  $\varphi_\alpha$  son las trivializaciones locales.

DEFINICIÓN. Si  $\pi: E \rightarrow M$  es un haz vectorial sobre  $M$ , una *sección de  $E$*  es una función  $\Sigma: M \rightarrow E$  tal que  $\pi \circ \Sigma = Id_M$ , donde  $Id_M$  es la identidad en  $M$ . Dicho de otra manera, que  $\Sigma(p) \in E_p$  para todo  $p \in M$ . Se dice que  $\Sigma$  es una *sección suave* si es suave como función entre variedades.

A una función suave  $\Sigma: U \rightarrow E$  definida en una vecindad abierta  $U$  de  $M$  tal que  $\pi \circ \Sigma = \iota: U \hookrightarrow M$  se le llama *sección local de  $\pi$* .

DEFINICIÓN. Sea  $\pi: E \rightarrow M$  un haz vectorial sobre  $M$  de dimensión  $k$ . Un *marco local de  $\pi$*  es un conjunto de  $k$  secciones locales  $\sigma_1, \dots, \sigma_k: U \rightarrow E$  de  $\pi$  que son linealmente independientes, i. e.,  $\sigma_1(p), \dots, \sigma_k(p)$  son linealmente independientes en  $E_p$  para cada  $p \in U$ . Si  $U = M$ , se le llama *marco de  $\pi$* .

OBSERVACIÓN 1. Nótese que el conjunto de secciones de un haz vectorial forma un espacio vectorial con la suma  $\sigma_1 + \sigma_2: M \rightarrow E$  y el producto por escalares  $\lambda\sigma: M \rightarrow E$  definidos de la siguiente manera:

$$(\sigma_1 + \sigma_2)(p) := \sigma_1(p) + \sigma_2(p) \in E_p, \quad (\lambda\sigma)(p) := \lambda\sigma(p) \in E_p.$$

Si además con  $f \in C^\infty(M)$  se considera la operación

$$(f\sigma)(p) := f(p)\sigma(p) \in E_p,$$

entonces el espacio de las secciones de un haz vectorial forma un  $C^\infty(M)$ -módulo.

**6.1. Haz tangente.** Como primer ejemplo de haz vectorial se tiene al haz tangente. En cada punto  $p \in M$  se considera el espacio tangente a  $M$  en  $p$ .

DEFINICIÓN. Sea  $M$  una variedad. Se define como *haz tangente a  $M$*  al conjunto

$$TM := \coprod_{p \in M} T_p M.$$

Y se define la *proyección* del haz tangente como la función

$$\pi = \pi_M: TM \rightarrow M$$

dada por

$$\pi(V(p)) := p.$$

A este objeto  $TM$ , le es heredado por  $M$  cierta estructura descrita en la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN 1.10. Sean  $M$  una  $m$ -variedad y  $N$  una  $n$ -variedad.

1.  $TM$  tiene una topología y una estructura diferenciable naturales con las cuales  $TM$  es una  $2m$ -variedad y  $\pi$  es una función suave.
2. Si  $F: M \rightarrow N$  es una función suave, entonces su diferencial o "pushforward"  $F_*: TM \rightarrow TN$  es una función suave.

DEFINICIÓN. Un *campo vectorial  $V$*  en una variedad  $M$  es una sección del haz tangente  $TM$ , i. e.,  $\pi_M \circ V = Id_M$ .

OBSERVACIÓN 2. Si  $(U, \varphi)$  es una carta de  $M$  en  $p$ , con  $p \in U$ . Entonces los vectores  $\{\partial_j\}$  forman un marco local en  $p$ .

**6.2. Haz tensorial.** Como segundo ejemplo de haz vectorial se tiene al haz tensorial. En cada punto  $p \in M$  se considera el espacio de los tensores del tipo  $\binom{k}{l}$  en  $T_p M$ .

DEFINICIÓN. Sea  $M$  una variedad. Se define como *haz tensorial* al conjunto

$$T_l^k M := \coprod_{p \in M} T_l^k(T_p M).$$

Y se define la *proyección* del haz tensorial como la función

$$\pi: T_l^k M \rightarrow M$$

dada por

$$\pi(F) := p,$$

con  $F \in T_l^k(T_p M)$ .

De manera totalmente análoga se define el *haz de  $k$ -formas* como el conjunto

$$\Lambda^k M := \coprod_{p \in M} \Lambda^k(T_p M).$$

Para mostrar que éste es un haz vectorial se usa el Lema 1.9.

Si  $(U, \varphi)$  es una carta de  $M$  y  $p \in U$ , se sabe que  $\{\partial_i\}$  forman una base de  $T_p M$ . Así, se considera su base dual  $\{dx^i\}$  y, por lo tanto, cualquier tensor  $F \in T_l^k M$  se puede escribir en términos de la base como:

$$F = F_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l} \partial_{j_1} \otimes \dots \otimes \partial_{j_l} \otimes dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_k}$$

DEFINICIÓN. Un *campo tensorial en  $M$*  es una sección suave del haz tensorial  $T_l^k M$ . Y una  *$k$ -forma diferencial* es una sección suave del haz de  $k$ -formas  $\Lambda^k M$ .

**6.3. Campo Tensorial.** Un campo tensorial, como ya se vió, es una sección suave del haz tensorial. El conjunto de campos tensorial se denotará como  $\mathcal{T}_l^k M$ .

Si  $(U, \varphi)$  es una carta de  $M$ , cualquier campo tensorial se escribe

$$F(p) = F_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l}(p) \partial_{j_1} \otimes \dots \otimes \partial_{j_l} \otimes dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_k}.$$

Se va escribir  $F(p)$  para especificar donde está basado el campo tensorial.

**6.4. Campos Vectoriales.** Recuérdese que un campo vectorial es una sección suave del haz tangente. Al conjunto de todos los campos vectoriales en  $M$  se denota por  $\mathcal{T}(M)$  y, como se vio en la última observación, éste es un espacio vectorial con las operaciones  $V + W$  y  $\lambda V$  definidas puntualmente:

$$(V + W)(x) := V(x) + W(x), \quad (\lambda V)(x) := \lambda V(x),$$

que están bien definidas porque  $V(x), W(x) \in T_x M$  y éste es espacio vectorial. Más aún, si  $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$  se define

$$(fV)(x) := f(x)V(x).$$

Y junto con esta última operación  $\mathcal{T}(M)$  es un  $\mathcal{C}^\infty(M)$ -módulo.

Ahora se expresará localmente a un campo vectorial. Si  $(U, \varphi)$  es una carta de  $M$ , cualquier campo vectorial  $V$  se expresa en  $U$  como

$$V = V^j \partial_j,$$

donde  $V^j \in \mathcal{C}^\infty(U)$ ,  $j = 1, \dots, n$ , i. e.,

$$\begin{aligned} V(\varphi^{-1}(q))f &= (V^j \circ \varphi^{-1})(q) \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^j}(q) \\ (4) \qquad \qquad &= [D(f \circ \varphi^{-1})(V \circ \varphi^{-1})](q) \quad \forall q \in \varphi(U) \end{aligned}$$

Sin embargo se pueden expresar los campos vectoriales globalmente en términos de derivaciones.

DEFINICIÓN. Una *derivación en  $M$*  es una función lineal  $\chi: \mathcal{C}^\infty(M) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$  que cumple la regla de Leibniz, i. e.,

$$\chi(fg) = f\chi(g) + g\chi(f), \quad \forall f, g \in \mathcal{C}^\infty(M).$$

PROPOSICIÓN 1.11.  $\chi: \mathcal{C}^\infty(M) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$  es una derivación en  $M$  si y sólo si ésta es de la forma  $\chi(f)(p) := V(p)(f)$  para algún  $V \in \mathcal{T}(M)$ .

Es así, que se identifican los campos vectoriales en  $M$  con las derivaciones en  $M$ . Si  $V \in \mathcal{T}(M)$  y  $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ , se escribirá

$$Vf \in \mathcal{C}^\infty(M)$$

para denotar a la imagen de  $f$  bajo la derivación asociada a  $V$ ,  $(Vf)(p) = V(p)(f)$ . De la igualdad 4, se tiene que  $Vf$ , en coordenadas locales, es la derivada direccional de  $f$  en la dirección de  $V$ .

DEFINICIÓN. Un difeomorfismo  $F: M \rightarrow N$  induce  $F_*: \mathcal{T}M \rightarrow \mathcal{T}N$  un isomorfismo que hace conmutar al diagrama

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{F} & N \\ V \downarrow & & \downarrow F_*V \\ \mathcal{T}M & \xrightarrow{F_*} & \mathcal{T}N \end{array}$$

para todo  $V \in \mathcal{T}(M)$ .  $F_*V$  se le llama el *diferencial de  $V$  por  $F$* . A  $F_*$  también se denota por  $dF$ .

**6.5. Corchete de Lie.** La siguiente herramienta se utiliza entre otras cosas en la definición del tensor de curvatura.

DEFINICIÓN. Sean  $V, W \in \mathcal{T}(M)$ . El *corche de Lie de  $V$  y  $W$*  se define como  $[V, W] := VW - WV$ .

PROPOSICIÓN 1.12.  $[V, W] \in \mathcal{T}(M)$  para cualesquiera  $V, W \in \mathcal{T}(M)$ .

Si se expresa localmente a  $V$  y  $W$  en una carta  $(U, \varphi)$  de  $M$  como  $V = V^j \partial_j$  y  $W = W^j \partial_j$ , entonces

$$[V, W] = (V^i \partial_i W^j - W^i \partial_i V^j) \partial_j.$$

PROPOSICIÓN 1.13. Sean  $V, W, Z \in \mathcal{T}(M)$ ,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  y  $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$ . El corchete de Lie tiene las siguientes propiedades:

1. *Antisimetría:*

$$[V, W] = -[W, V].$$

2. *Bilinealidad:*

$$[\lambda V + \mu W, Z] = \lambda[V, Z] + \mu[W, Z].$$

3. *Identidad de Jacobi:*

$$[V, [W, Z]] + [W, [Z, V]] + [Z, [V, W]] = 0.$$

4.  $[fV + gW] = fg[V, W] + (fVg)W - (gWf)V$ .

## 7. Métrica Riemanniana

DEFINICIÓN. Una *métrica riemanniana* en una variedad suave  $M$  es un 2-campo tensorial  $g \in \mathcal{T}^2M$  que cumple:

- Simetría

$$g(V, W) = g(W, V) \quad \forall V, W \in T_pM.$$

- Positividad

$$g(V, V) > 0 \quad \text{si } V \neq 0.$$

Es decir, una métrica riemanniana determina un producto interior en cada espacio tangente  $T_pM$ . Se denotará  $\langle V, W \rangle_g := g(V, W)$ .

Una variedad suave  $M$  junto con una métrica riemanniana dada se llamará *variedad riemanniana*. Se dirá métrica en lugar de métrica riemanniana cuando no haya oportunidad de confusión.

PROPOSICIÓN 1.14. *A toda variedad suave se le puede dar una métrica riemanniana.*

DEFINICIÓN. Sea  $p$  en una variedad riemanniana  $(M, g)$ . Se define la *longitud* o *norma* de un vector tangente  $V \in T_pM$  como

$$|V|_g := \langle V, V \rangle_g^{\frac{1}{2}}.$$

Se define el *ángulo* entre dos vectores no cero  $V, W \in T_pM$  como el único  $\theta \in [0, \pi]$  que satisface

$$\cos \theta = \frac{\langle V, W \rangle_g}{(|V|_g |W|_g)}.$$

Se dirá que  $V$  y  $W$  son *ortogonales* si  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , i. e., si  $\langle V, W \rangle_g = 0$ .

A los vectores  $\{F_1, \dots, F_n\}$  se les dirá *ortonormales* si su longitud es 1 y cualquier par de ellos son ortogonales entre sí, i. e.,

$$\langle F_i, F_j \rangle_g = \delta_{ij}.$$

Si  $\{E_1, \dots, E_n\}$  es un marco local de  $TM$  y  $\{\varphi^1, \dots, \varphi^n\}$  es su marco dual local, entonces la métrica riemanniana puede ser escrita como

$$g = g_{ij} \varphi^i \otimes \varphi^j,$$

donde  $g_{ij} = \langle E_i, E_j \rangle_g$ .

La matriz de coeficientes  $(g_{ij})$  es simétrica y depende suavemente de  $p \in M$ . En particular, si  $(U, \varphi)$  es una carta de  $M$ , entonces  $g$  se escribe

$$(5) \quad g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j.$$

Por la simetría de  $(g_{ij})$ , (5) se puede escribir

$$g = g_{ij} dx^i dx^j.$$

EJEMPLO.  $\mathbb{S}_r^n$  con la métrica  $\hat{g}_r = e$  inducida por la métrica euclidiana en  $\mathbb{R}^{n+1}$  es una variedad riemanniana.

DEFINICIÓN. Sean  $(M, g)$  y  $(N, h)$  dos variedades riemannianas. Una función suave  $F: M \rightarrow N$  es una *isometría local* si

$$h(F_*X, F_*Y) = g(X, Y) \quad \text{para todo } X, Y \in T_pM.$$

Si además  $F$  es difeomorfismo, se dice que  $F$  es *isometría*.

DEFINICIÓN. Sea  $M$  una variedad riemanniana.  $M$  es una *variedad riemanniana homogénea* si existe un grupo de Lie  $G$  (un grupo que admite estructura de variedad diferenciable) que actúa suavemente y transitivamente por isometrías.

Dado un punto  $p \in M$ ,  $M$  es *isotrópica en  $p$*  si existe un grupo de Lie  $G$  actuando suavemente por isometrías tal que el grupo de isotropía  $G_p \subset G$ , el subgrupo de  $G$  que fija a  $p$ , actúa transitivamente en el conjunto de vectores unitarios en  $T_pM$  (donde  $h \in G_p$  actúa en  $T_pM$  por  $G_*: T_pM \rightarrow T_pM$ ).

PROPOSICIÓN 1.15.  $\mathbb{S}_r^n$  es homogénea e isotrópica.

## 8. Conexiones

Lo que se busca es ver que tan derecha es una curva, para esto se necesita una forma de “derivar” campos vectoriales. Sin embargo, se tienen dos problemas para conseguirlo. Por un lado la derivación usual de geometría diferencial usa el espacio ambiente de la variedad, cosa que aquí no se tiene. Por otro lado, cada vector del campo vectorial yace en un espacio tangente distinto. Así, se necesita un operador de diferenciación que no dependa del espacio ambiente, ni de las coordenadas. Así, se llega al concepto de conexión, un objeto que podría decirse que “conecta” espacios tangentes cercanos.

DEFINICIÓN. Sea  $\pi: E \rightarrow M$  un haz vectorial sobre una variedad  $M$  y sea  $\mathcal{E}(M)$  el espacio de las secciones suaves de  $E$ . Una *conexión en  $E$*  es una función

$$\begin{aligned} \nabla: \mathcal{T}(M) \times \mathcal{E}(M) &\longrightarrow \mathcal{E}(M) \\ (V, W) &\longmapsto \nabla_V W \end{aligned}$$

que satisface las siguientes propiedades:

1.  $\nabla_V W$  es lineal sobre  $\mathcal{C}^\infty(M)$  en  $V$ :

$$\nabla_{fV_1+gV_2} W = f\nabla_{V_1} W + g\nabla_{V_2} W \quad \forall f, g \in \mathcal{C}^\infty(M);$$

2.  $\nabla_V W$  es lineal sobre  $\mathbb{R}$  en  $W$ :

$$\nabla_V (aW_1 + bW_2) = a\nabla_V W_1 + b\nabla_V W_2 \quad \forall a, b \in \mathbb{R};$$

3.  $\nabla$  satisface la regla de Leibniz:

$$\nabla_V fW = f\nabla_V W + (Vf)W \quad \forall f \in \mathcal{C}^\infty(M).$$

A  $\nabla_V W$  se le llama *la derivada covariante de  $W$  en dirección de  $V$* .

Aunque una conexión se define para cualquier haz vectorial, aquí sólo se ocuparán las conexiones para el haz tangente.

DEFINICIÓN. Una *conexión lineal en  $M$*  es una función

$$\begin{aligned} \nabla: \mathcal{T}(M) \times \mathcal{T}(M) &\longrightarrow \mathcal{T}(M) \\ (V, W) &\longmapsto \nabla_V W \end{aligned}$$

que satisface las propiedades de ser conexión.

El siguiente objetivo es ver como se expresan en coordenadas locales estas conexiones lineales. Para esto considérese  $\{E_1, \dots, E_n\}$  un marco local de  $TM$  en un abierto  $U \subset M$ . Así, para cualquier  $i$  y  $j$  se tiene

$$\nabla_{E_i} E_j = \Gamma_{ij}^k E_k.$$

Esto define  $n^3$  funciones  $\Gamma_{ij}^k$  en  $U$ .



DEFINICIÓN. A estas  $n^3$  funciones se le llama *símbolos de Christoffel de  $\nabla$  con respecto a ese marco local*.

LEMA 1.16. *Sea  $\nabla$  una conexión local y sean  $V, W \in \mathcal{T}(U)$  expresado en términos de un marco local como  $V = V^i E_i$  y  $W = W^j E_j$ . Entonces*

$$\nabla_V W = (VW^k + V^i W^j \Gamma_{ij}^k) E_k.$$

PROPOSICIÓN 1.17. *Toda variedad admite una conexión lineal.*

Cualquier conexión lineal automáticamente induce conexiones en todos los haces tensoriales sobre  $M$ .

LEMA 1.18. *Sea  $\nabla$  una conexión lineal en  $M$ . Existe una única conexión en cada haz tensorial  $\mathcal{T}_l^k M$ , también denotada  $\nabla$ , tal que satisface las siguientes propiedades:*

1. *En  $TM$ , las dos conexiones coinciden.*
2. *En  $T^0 M$ ,  $\nabla$  está dada por la diferenciación común de funciones:*

$$\nabla_V f = Vf.$$

3.  *$\nabla$  satisface la siguiente regla con respecto al producto tensorial:*

$$\nabla_V (F \otimes G) = (\nabla_V F) \otimes G + F \otimes (\nabla_V G).$$

4.  *$\nabla$  satisface la siguiente propiedad con respecto a la pareja covector  $\omega$  y vector  $W$ :*

$$\nabla_V \omega(W) = \nabla_V \omega(W) + \omega(\nabla_V W).$$

5. *Para cualquiera  $F \in \mathcal{T}_l^k M$ ,  $W_i$  campos vectoriales y  $\omega^j$  1-formas,*

$$\begin{aligned} (\nabla_V F)(\omega^1, \dots, \omega^l, W_1, \dots, W_k) &= V(F(\omega^1, \dots, \omega^l, W_1, \dots, W_k)) \\ &\quad - \sum_{j=1}^l F(\omega^1, \dots, \nabla_V \omega^j, \dots, \omega^l, W_1, \dots, W_k) \\ &\quad - \sum_{i=1}^k F(\omega^1, \dots, \omega^l, W_1, \dots, \nabla_V W_i, \dots, W_k) \end{aligned}$$

Así, si  $(M, g)$  es una variedad riemanniana, entonces

$$\nabla_V g = V(g(W_1, W_2)) - g(\nabla_V W_1, W_2) - g(W_1, \nabla_V W_2)$$

para cualesquiera  $V, W_1, W_2 \in \mathcal{T}(M)$ .

DEFINICIÓN. Se define como *tensor de torsión de la conexión* al  $\binom{2}{1}$ -campo tensorial

$$\tau: \mathcal{T}(M) \times \mathcal{T}(M) \rightarrow \mathcal{T}(M)$$

dado por

$$\tau(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y].$$

DEFINICIÓN. Se dice que la conexión es *simétrica* si su tensor de torsión es idénticamente cero.

### 9. Campos vectoriales a lo largo de curvas

DEFINICIÓN. Un *campo vectorial a lo largo de una curva*  $\gamma: [a, b] \rightarrow M$  es una función suave  $V: [a, b] \rightarrow TM$  tal que  $V(t) \in T_{\gamma(t)}M \forall t \in [a, b]$ . Se denotará como  $\mathcal{T}(\gamma)$  al espacio de todos los campos vectoriales a lo largo de  $\gamma$ .

DEFINICIÓN. Un campo vectorial  $V$  a lo largo de  $\gamma: [a, b] \rightarrow M$  se dice que es *extendible* si existe un campo vectorial  $\tilde{V} \in \mathcal{T}(M)$  tal que para cada  $t \in [a, b]$  se tiene  $V(t) = \tilde{V}(\gamma(t))$ .

Lo siguiente que se quiere ver es cómo un campo vectorial a lo largo de una curva varía direccionalmente, que es la razón por la cual se definieron originalmente las conexiones. Para esto, se restringe la conexión a la curva.

LEMA 1.19. *Sea  $\nabla$  una conexión lineal en  $M$ . Para cada curva  $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ , esta conexión  $\nabla$  determina un único operador*

$$D_t: \mathcal{T}(\gamma) \rightarrow \mathcal{T}(\gamma)$$

que satisface las siguientes propiedades:

1. *Linealidad sobre  $\mathbb{R}$ :*

$$D_t(aV + bW) = aD_tV + bD_tW \quad \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

2. *Regla de Leibniz:*

$$D_t(fV) = \dot{f}V + fD_tV \quad \forall f \in C^\infty(M).$$

3. *Si  $V$  es extendible, entonces para cualquier extensión  $\tilde{V}$  de  $V$  se tiene*

$$D_tV(t) = \nabla_{\dot{\gamma}(t)}\tilde{V}.$$

DEFINICIÓN. Si  $V \in \mathcal{T}(\gamma)$ , a  $D_tV$  se le llama la *derivada covariante de  $V$  a lo largo de  $\gamma$* .

### 10. Geodésicas

Uno de los conceptos básicos de la Geometría Riemanniana es el de geodésica, que se definen como las curvas más “derechas” en una variedad.

DEFINICIÓN. Sean  $M$  una variedad con una conexión lineal  $\nabla$  y  $\gamma: [a, b] \rightarrow M$  una curva en  $M$ . La *aceleración* de  $\gamma$  es el campo vectorial  $D_t\dot{\gamma}$ . Una curva  $\gamma$  se llamará *geodésica* con respecto a  $\nabla$  si su aceleración es cero:

$$D_t\dot{\gamma} \equiv 0.$$

TEOREMA 1.20 (Existencia y Unicidad de Geodésicas). *Sea  $M$  una variedad suave con una conexión lineal. Para cualquier  $p \in M$ , cualquier  $V \in T_pM$  y cualquier  $t_0 \in \mathbb{R}$  existen un intervalo abierto  $(a, b) \subset \mathbb{R}$  que contiene a  $t_0$  y una geodésica  $\gamma: (a, b) \rightarrow M$  que satisface  $\gamma(t_0) = p$  y  $\dot{\gamma}(t_0) = V$ . Si hay dos geodésicas que satisfacen lo anterior, entonces coinciden en su dominio común.*

De la última parte del teorema se tiene que existe un única geodésica maximal, i. e., no se puede extender su intervalo de definición.

DEFINICIÓN. A la geodésica maximal se le llama simplemente la *geodésica con punto inicial  $p$  y velocidad inicial  $V$* , y se le denota como  $\gamma_V$ .

### 11. Transporte paralelo

DEFINICIÓN. Sea  $M$  una variedad suave con una conexión lineal  $\nabla$ . Un campo vectorial  $V$  a lo largo de una curva  $\gamma$  se dice que es *paralelo a lo largo de  $\gamma$*  con respecto a  $\nabla$  si  $D_t V \equiv 0$ .

Se dice que un campo en  $M$  es *paralelo* si es paralelo a lo largo de cualquier curva.

TEOREMA 1.21. *Dada una curva  $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ ,  $t_0 \in [a, b]$  y  $V_0 \in T_{\gamma(t_0)}M$ , existe un único campo vectorial paralelo  $V$  a lo largo de  $\gamma$  tal que  $V(t_0) = V_0$ .*

DEFINICIÓN. Al campo vectorial  $V$  del teorema anterior se le llama *transporte paralelo*.

Para concluir esta sección, es importante hacer la siguiente observación.

OBSERVACIÓN 3. Si  $\gamma: [a, b] \rightarrow M$  es una curva y  $t_0, t_1 \in [a, b]$ , entonces el transporte paralelo define un isomorfismo lineal

$$P_{t_0 t_1}: T_{\gamma(t_0)}M \rightarrow T_{\gamma(t_1)}M$$

dado por  $P_{t_0 t_1} V = V(t_1)$ , donde  $V$  es el transporte paralelo de  $V_0$  a lo largo de  $\gamma$ .

### 12. Conexión Riemanniana

El siguiente paso es mostrar que existe una conexión que refleja las propiedades de la métrica.

DEFINICIÓN. Sea  $(M, g)$  una variedad riemanniana. Se dice que una conexión lineal  $\nabla$  es *compatible con la métrica  $g$*  si para cualesquiera  $X, Y, Z \in \mathcal{T}(M)$  se satisface:

$$\nabla_X g(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z).$$

LEMA 1.22. *Los siguientes enunciados son equivalentes:*

1.  $\nabla$  es compatible con  $g$ .
2.  $\nabla g \equiv 0$ .
3. Sea  $\gamma$  una curva. Si  $V$  y  $W$  son campos vectoriales a lo largo de  $\gamma$ , entonces

$$\frac{d}{dt} g(V, W) = g(D_t V, W) + g(V, D_t W).$$

4. Sea  $\gamma$  una curva. Si  $V$  y  $W$  son campos vectoriales paralelos a lo largo de  $\gamma$ , entonces  $g(V, W)$  es constante.
5. El transporte paralelo  $P_{t_0 t_1}: T_{\gamma(t_0)}M \rightarrow T_{\gamma(t_1)}M$  es una isometría para cualesquiera  $t_0$  y  $t_1$ .

TEOREMA 1.23 (Teorema Fundamental de la Geometría Riemanniana). *Sea  $(M, g)$  una variedad riemanniana. Existe una única conexión lineal  $\nabla$  en  $M$  que es compatible con  $g$  y que es simétrica.*

DEFINICIÓN. A esta conexión se le llama *conexión riemanniana* o *conexión de Levi-Civita* de  $g$ .

En la demostración del teorema se obtiene la siguiente fórmula para la conexión riemanniana:

$$\begin{aligned} g(\nabla_X Y, Z) &= \frac{1}{2} (Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) + Zg(X, Y) \\ &\quad - g(Y, [X, Z]) - g(Z, [Y, X]) + g(X, [Z, Y])) \end{aligned}$$

E igualmente, se obtiene una fórmula para los símbolos de Christoffel en una carta  $(U, \varphi)$  de  $M$ :

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} (\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}),$$

donde  $(g^{kl})$  es la matriz inversa de la matriz de coeficientes de la métrica.

DEFINICIÓN. A las curvas que son geodésicas con respecto a la conexión riemanniana se le denomina *geodésicas riemannianas*.

DEFINICIÓN. Sea  $\gamma$  una curva. A la longitud del vector velocidad  $|\dot{\gamma}(t)|$  se le llama la *velocidad* de  $\gamma$  al tiempo  $t$ . Se dice que  $\gamma$  tiene *velocidad constante* si  $|\dot{\gamma}(t)|$  no depende de  $t$ . Y se dice que  $\gamma$  tiene *velocidad unitaria* si  $|\dot{\gamma}(t)| = 1$ .

LEMA 1.24. *Todas las geodésicas riemannianas son curvas de velocidad constante.*

Una propiedad muy importante de la conexión riemanniana que se preserva bajo isometrías, es decir, una isometría manda la conexión riemanniana del dominio a la conexión riemanniana del contradominio. Esto se ve en la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN 1.25 (Naturalidad de la conexión riemanniana). *Supóngase que  $\varphi: (M, g) \rightarrow (\tilde{M}, \tilde{g})$  es una isometría.*

1.  $\varphi$  lleva la conexión riemanniana  $\nabla$  de  $g$  a la conexión riemanniana  $\tilde{\nabla}$  de  $\tilde{g}$ :

$$\varphi_*(\nabla_V W) = \tilde{\nabla}_{\varphi_* V}(\varphi_* W).$$

2. Si  $\gamma$  es una curva en  $M$  y  $V$  un campo vectorial a lo largo de  $\gamma$ , entonces

$$\varphi_* D_t V = \tilde{D}_t(\varphi_* V).$$

3.  $\varphi$  lleva geodésicas en geodésicas: si  $\gamma$  es geodésica en  $M$  con punto inicial  $p$  y velocidad inicial  $V$ , entonces  $\varphi \circ \gamma$  es la geodésica en  $\tilde{M}$  con punto inicial  $\varphi(p)$  y velocidad inicial  $\varphi_* V$ .

### 13. Mapeo Exponencial

La herramienta desarrollada en esta sección es el mapeo exponencial, un mapeo que permite dar unas coordenadas “mejores” a la variedad y que tiene varias propiedades muy importantes.

DEFINICIÓN. Se define el subconjunto  $\mathcal{E}$  de  $TM$ , *el dominio del mapeo exponencial*, como

$$\mathcal{E} := \{V \in TM \mid \gamma_V \text{ está definida en un intervalo que contiene al } [0, 1]\}.$$

donde  $\gamma_V$  es la geodésica con punto inicial  $\gamma_V(0)$  y velocidad inicial  $V$ , es decir,  $\dot{\gamma}_V(0) = V$ . Y se define el *mapeo exponencial*  $\exp: \mathcal{E} \rightarrow M$  dado por

$$\exp(V) := \gamma_V(1).$$

Para cada  $p \in M$  se define el *mapeo exponencial restringido*  $\exp_p$  como la restricción de  $\exp$  a  $\mathcal{E}_p := \mathcal{E} \cap T_p M$ .

Ahora se describen las propiedades de este mapeo en la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN 1.26.

1.  $\mathcal{E}$  es abierto en  $TM$ , contiene a la sección cero y cada  $\mathcal{E}_p$  es un conjunto estrellado con respecto al origen en  $T_p M$ .

2. Para cada  $V \in TM$ , la geodésica  $\gamma_V$  está dada por

$$\gamma_V(t) = \exp(tV)$$

para toda  $t$  tal que cualquiera de los lados está definido.

3. El mapeo exponencial es suave.

Recuérdese que un subconjunto  $S$  de un espacio vectorial  $V$  es estrellado con respecto a  $x \in S$  si para cualquier  $y \in S$  el segmento de  $x$  a  $y$  está contenido en  $S$ .

LEMA 1.27. *Para cualquier  $p \in M$ , hay una vecindad  $V$  del origen en  $T_pM$  y una vecindad  $U$  de  $p$  en  $M$  tal que  $\exp_p: V \rightarrow U$  es un difeomorfismo.*

DEFINICIÓN. Cualquier vecindad abierta  $U$  de  $p \in M$  que es la imagen difeomorfa bajo  $\exp_p$  de una vecindad abierta estrellada de  $0 \in T_pM$  como en el lema anterior se llama *vecindad normal* de  $p$ .

DEFINICIÓN. Si  $\varepsilon > 0$  es tal que el mapeo  $\exp_p$  es un difeomorfismo en la bola  $B(\varepsilon, 0) \subset T_pM$ , la bola con centro en  $0$ , radio  $\varepsilon$  y el radio es medido con la norma definida por  $g$ ; entonces el conjunto  $\exp_p(B(\varepsilon, 0))$  es llamado *la bola geodésica con centro en  $p$  y radio  $\varepsilon$*  y se denotará como  $B_g(\varepsilon, p)$ . Además, si la bola cerrada  $\bar{B}(\varepsilon, 0) \subset T_pM$  está contenida en una vecindad abierta  $V \subset T_pM$  en donde  $\exp_p$  es un difeomorfismo, entonces el conjunto  $\exp_p(\bar{B}(\varepsilon, 0))$  es llamado *la bola geodésica cerrada con centro en  $p$  y radio  $\varepsilon$*  y al conjunto  $\exp_p(\partial\bar{B}(\varepsilon, 0))$  se le llama *esfera geodésica con centro en  $p$  y radio  $\varepsilon$* . Estos últimos se denotan como  $\bar{B}_g(\varepsilon, p)$  y  $S_g(\varepsilon, p)$ , respectivamente.

Una base ortonormal  $\{E_i\}$  para  $T_pM$  induce un isomorfismo  $E: \mathbb{R}^n \rightarrow T_pM$  dado por  $E(x^1, \dots, x^n) = x^i E_i$ . Sea  $U$  una vecindad normal de  $p$ , si se combina este isomorfismo y el mapeo exponencial se consigue una carta  $(U, \varphi)$  con

$$\varphi := E^{-1} \circ \exp_p^{-1}: U \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

DEFINICIÓN. A estas coordenadas se le llama *coordenadas normales riemannianas* centradas en  $p$ . En cualesquiera coordenadas normales riemannianas centradas en  $p$  se define la *función de distancia radial*  $r$  como

$$r(q) := \left( \sum_i (\varphi^i(q))^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

y el *campo vectorial radial unitario*  $\frac{\partial}{\partial r}$  como

$$\frac{\partial}{\partial r} := \frac{\varphi^i(q)}{r} \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Así, estas coordenadas tienen ciertas propiedades muy convenientes para muchos cálculos y éstas son expuestas en la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN 1.28. *Sea  $(U, \varphi)$  una carta normal riemanniana centrada en  $p$ .*

1. Sean  $V = V^j \partial_j \in T_pM$  y  $\gamma_V$  la geodésica que empieza en  $p$  con velocidad inicial  $V$ , i.e.,  $\dot{\gamma}(0) = V$ . Entonces la geodésica  $\gamma_V$  se representa en coordenadas normales riemannianas como

$$\gamma_V(t) = (tV^1, \dots, tV^n)$$

*siempre y cuando  $\gamma_V$  esté contenido en  $U$ .*

2. Las coordenadas de  $p$  son  $(0, \dots, 0)$ , i. e.,  $\varphi(p) = (0, \dots, 0)$ .
3. Las componentes de la métrica en  $p$  son  $g_{ij} = \delta_{ij}$ .
4. Las bolas  $\{p \mid r(q) < \varepsilon\}$  contenidas en  $U$  son bolas geodésicas en  $M$ .
5. En cualquier punto  $q \in U \setminus p$ ,  $\frac{\partial}{\partial r}$  es el campo vectorial de velocidades sobre la geodésica con velocidad unitaria de  $p$  a  $q$  y por lo tanto,  $\frac{\partial}{\partial r}$  tiene longitud 1 con respecto a  $g$ .
6. Las derivadas parciales de  $g_{ij}$  y de los símbolos de Christoffel son cero en  $p$ .

DEFINICIÓN. Un conjunto  $W \subset M$  es llamado *totalmente normal* si existe alguna  $\delta > 0$  tal que  $W$  está contenida en una bola geodésica de radio  $\delta$  para todos sus puntos.

LEMA 1.29. *Para todo  $p \in M$  y  $U$  vecindad de  $p$ , existe una vecindad totalmente normal  $W$  de  $p$  contenida en  $U$ .*

#### 14. Distancia geodésica

Ahora, en esta sección, se da una estructura de espacio métrico a la variedad sin cambiar la topología original.

DEFINICIÓN. Sea  $\gamma: [a, b] \rightarrow M$  un segmento de curva, se define la *longitud* de  $\gamma$  como

$$L(\gamma) := \int_a^b |\dot{\gamma}(t)|_g dt.$$

Cabe destacar que la longitud no depende de la parametrización de la curva.

DEFINICIÓN. Una *curva regular* es una curva suave  $\gamma: [a, b] \rightarrow M$  tal que  $\dot{\gamma}(t) \neq 0$ .

Una curva  $\gamma: [a, b] \rightarrow M$  se dice que es *admisibile* si existe una subdivisión  $a = a_0 < a_1 < \dots < a_k = b$  tal que  $\gamma|_{[a_{i-1}, a_i]}$  es regular para  $i = 1, \dots, k$ . También se considerarán como curvas admisibles a las curvas constantes. La longitud de estas curvas es simplemente la suma de las longitudes de los pedazos suaves.

Sea  $(M, g)$  una variedad riemanniana conexa. Para cualesquiera dos puntos  $p, q \in M$  se define el siguiente conjunto

$$curv(p, q) := \{\gamma: [a, b] \rightarrow M \mid \gamma(a) = p, \gamma(b) = q \text{ y } \gamma \text{ es admisibile}\}.$$

DEFINICIÓN. Se define la *distancia riemanniana*  $d(p, q)$  como

$$d_g(p, q) := \inf_{\gamma \in curv(p, q)} L(\gamma).$$

LEMA 1.30. *Con la función de distancia riemanniana, cualquier variedad riemanniana es un espacio métrico cuya topología inducida es la misma que la dada.*

#### 15. Geodésicas y curvas minimizantes

En esta sección se busca ver que relación hay entre las geodésicas y las curvas minimizantes. Además se desarrolla una herramienta para averiguar cuando una curva es geodésica.

DEFINICIÓN. Una curva admisibile  $\gamma$  en una variedad riemanniana se dice que es *minimizante* si  $L(\gamma) \leq L(\tilde{\gamma})$  para cualquier otra curva admisibile  $\tilde{\gamma}$  que tenga los mismos extremos.

Se sigue de la definición de distancia que  $\gamma$  es minimizante si y sólo si  $L(\gamma)$  es igual a la distancia entre sus extremos.

Las curvas minimizantes tienen la propiedad de que son geodésicas pero no al revés, i.e., no todas las geodésicas son minimizantes. Para probar esta propiedad se pensará a la función de longitud  $L$  como un funcional en el conjunto de las curvas admisibles y se buscarán mínimos de este funcional. Para diferenciar la función del funcional, el funcional se denotará como  $\mathcal{L}$ .

DEFINICIÓN. Una *familia de curvas admisibles* es una función continua

$$\Gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a, b] \rightarrow M$$

que es suave en cada rectángulo de la forma  $(-\varepsilon, \varepsilon) \times [a_{i-1}, a_i]$  para alguna subdivisión  $a = a_0 < a_1 < \dots < a_k = b$  y tal que  $\Gamma_s(t) := \Gamma(s, t)$  es una curva suave para toda  $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ .

Si  $\Gamma$  es una familia admisible, un *campo vectorial a lo largo de  $\Gamma$*  es una función continua  $V: (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a, b] \rightarrow TM$  tal que  $V(s, t) \in T_{\Gamma(s, t)}M$  para cada  $(s, t)$  y tal que  $V|_{(-\varepsilon, \varepsilon) \times [\tilde{a}_{i-1}, \tilde{a}_i]}$  es suave para alguna subdivisión  $a = a_0 < a_1 < \dots < a_k = b$ .

Cualquier familia admisible  $\Gamma$  define dos clases especiales de curvas: las *curvas principales* definidas en  $[a, b]$  con  $s$  constante, denotadas  $\Gamma_s(t)$ , y las *curvas transversales* definidas en  $(-\varepsilon, \varepsilon)$  con  $t$  constante, denotadas  $\Gamma^t(s)$ . En donde  $\Gamma$  es suave, los campos vectoriales tangentes a estas familias de curvas son ejemplos de campos vectoriales a lo largo de  $\Gamma$  y se denotan como

$$\partial_t \Gamma(s, t) := \frac{d}{dt} \Gamma_s(t) \quad \text{y} \quad \partial_s \Gamma(s, t) := \frac{d}{ds} \Gamma^t(s).$$

Si  $V$  es un campo vectorial a lo largo de  $\Gamma$ , se pueden calcular la derivadas covariantes a lo largo de las curvas principales o a lo largo de las curvas transversales, denotadas  $D_t V$  y  $D_s V$  respectivamente. Estas derivadas covariantes dan una relación de simetría entre los campos vectoriales tangentes a las curvas principales y transversales, heredada de la conexión riemanniana. Esta relación está dada por el siguiente lema.

LEMA 1.31 (Lema de Simetría). *Sea  $\Gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a, b] \rightarrow M$  una familia admisible de curvas en una variedad riemanniana. En cualquier rectángulo  $(-\varepsilon, \varepsilon) \times [a, b]$  donde  $\Gamma$  es suave se tiene*

$$D_s \partial_t \Gamma = D_t \partial_s \Gamma.$$

DEFINICIÓN. Sea  $\gamma: [a, b] \rightarrow M$  una curva admisible. Una *variación* de  $\gamma$  es una familia admisible de curvas  $\Gamma$  tal que  $\Gamma_0(t) = \gamma(t)$  para todo  $t \in [a, b]$ . Se llama *variación propia* si además  $\Gamma_s(a) = \gamma(a)$  y  $\Gamma_s(b) = \gamma(b)$  para todo  $s$ .

Si  $\Gamma$  es una variación de  $\gamma$ , el *campo de variación* de  $\Gamma$  es el campo vectorial  $V(t) = \partial_s \Gamma(0, t)$  a lo largo de  $\gamma$ . Si además  $V(a) = V(b) = 0$ , entonces se dice que es *propio*.

Así, con esta propiedad de simetría se puede calcular la derivada del funcional de longitud.

PROPOSICIÓN 1.32 (Fórmula de Primera Variación). *Sea  $\gamma: [a, b] \rightarrow M$  una curva admisible de velocidad unitaria,  $\Gamma$  una variación (propia) de  $\gamma$  y  $V$  su campo de variación. Entonces*

$$\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \mathcal{L}(\Gamma_s) = - \int_a^b \langle V, D_t \dot{\gamma} \rangle_g dt - \sum_{i=1}^k \langle V(a_i), \Delta_i \dot{\gamma} \rangle_g - \langle V(a), \dot{\gamma}(a) \rangle_g + \langle V(b), \dot{\gamma}(b) \rangle_g,$$

donde  $\Delta_i \dot{\gamma} = \dot{\gamma}(a_i^+) - \dot{\gamma}(a_i^-)$  es el "brinco" en el campo vectorial tangente  $\dot{\gamma}$  en  $a_i$ . A la derivada del funcional se le llama primera variación.

Esta fórmula permite demostrar el siguiente teorema.

TEOREMA 1.33. *Toda curva minimizante es una geodésica cuando se le da una parametrización unitaria.*

Como corolario se tiene el siguiente resultado.

COROLARIO 1.34.  *$\gamma$  es una geodésica si y sólo si es una curva admisible con velocidad unitaria y es punto crítico de  $\mathcal{L}$ , i. e., la derivada de  $\mathcal{L}$  con respecto a  $s$  es cero.*

Finalmente, no se puede dar una equivalencia entre geodésicas y curvas minimizantes, pero se tiene el siguiente resultado.

TEOREMA 1.35. *Toda geodésica riemanniana es localmente minimizante.*

## 16. Completitud

DEFINICIÓN. Una variedad riemanniana se dice que es *geodésicamente completa* si toda geodésica maximal está definida  $\forall t \in \mathbb{R}$ .

TEOREMA 1.36 (Hopf-Rinow). *Sea  $M$  una variedad riemanniana y sea  $p \in M$ . Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- $\exp_p$  está definido en todo  $T_pM$ .
- Los conjuntos cerrados y acotados de  $M$  son compactos.
- $M$  es completo como espacio métrico.
- $M$  es geodésicamente completo.
- Supóngase que  $M$  no es compacto. Existe una sucesión de subconjuntos compactos  $K_n \subset M$ ,  $K_n \subset \text{int}(K_{n+1})$  y  $\bigcup_n K_n = M$ , tal que si  $q_n \notin K_n$ , entonces  $d(p, q_n) \rightarrow \infty$ .

Además cualquiera de las afirmaciones anteriores implica la siguiente.

- Para cualquier  $q \in M$  existe una geodésica  $\gamma$  de  $p$  a  $q$  tal que  $L(\gamma) = d(p, q)$ .

## 17. Curvatura

Una pregunta muy importante que surge en las variedades riemannianas es si éstas son o no localmente isométricas a  $\mathbb{R}^n$ . Para esto se hace un estudio de la extensión paralela de campos vectoriales en  $\mathbb{R}^n$  y uno se da cuenta que en  $\mathbb{R}^n$  se cumple lo siguiente:

$$(6) \quad \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z = \nabla_{[X, Y]} Z$$

para todo  $X, Y, Z \in T\mathbb{R}^n$ .

Por la naturalidad de la conexión riemanniana, se tiene que toda variedad riemanniana que es localmente isométrica a  $\mathbb{R}^n$  también cumple (6). A (6) se le llama criterio de planaridad.

Esto motiva la siguiente definición.

DEFINICIÓN. Si  $M$  es una variedad riemanniana, el *endomorfismo de curvatura (de Riemann)* es la función

$$\mathcal{R}: \mathcal{T}(M) \times \mathcal{T}(M) \times \mathcal{T}(M) \rightarrow \mathcal{T}(M)$$

dado por

$$\mathcal{R}(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z.$$

PROPOSICIÓN 1.37. *El endomorfismo de curvatura es un  $\binom{3}{1}$ -campo tensorial.*

El endomorfismo de curvatura puede escribirse localmente como

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_{ijk}{}^l dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k \otimes \partial_l$$

donde los coeficientes  $\mathcal{R}_{ijk}{}^l$  están dados por

$$\mathcal{R}(\partial_i, \partial_j)\partial_k = \mathcal{R}_{ijk}{}^l \partial_l.$$

También, se obtiene un 4-campo tensorial a partir del endomorfismo de curvatura.

DEFINICIÓN. Se define el *tensor de curvatura (de Riemann)* como el 4-campo tensorial covariante

$$\mathcal{RM}: \mathcal{T}(M) \times \mathcal{T}(M) \times \mathcal{T}(M) \times \mathcal{T}(M) \rightarrow \mathbb{R}$$

dado por

$$\mathcal{RM}(X, Y, Z, W) = g(\mathcal{R}(X, Y)Z, W).$$



Localmente este tensor se puede escribir como

$$\mathcal{R}\mathcal{M} = \mathcal{R}_{ijkl} dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k \otimes dx^l,$$

donde  $\mathcal{R}_{ijkl} = \mathcal{R}_{ijk}{}^l$ .

Además, este tensor de curvatura tiene varias simetrías.

PROPOSICIÓN 1.38 (Simetrías del Tensor de Curvatura). *El tensor de curvatura tiene las siguientes simetrías para cualesquiera campos vectoriales  $X, Y, Z$  y  $W$ :*

1.  $\mathcal{R}\mathcal{M}(W, X, Y, Z) = -\mathcal{R}\mathcal{M}(X, W, Y, Z)$ .
2.  $\mathcal{R}\mathcal{M}(W, X, Y, Z) = -\mathcal{R}\mathcal{M}(W, X, Z, Y)$ .
3.  $\mathcal{R}\mathcal{M}(W, X, Y, Z) = \mathcal{R}\mathcal{M}(Y, Z, W, X)$ .
4.  $\mathcal{R}\mathcal{M}(W, X, Y, Z) + \mathcal{R}\mathcal{M}(X, Y, W, Z) + \mathcal{R}\mathcal{M}(Y, W, X, Z) = 0$ .

Inspirado en la curvatura gaussiana y en el teorema egregio de Gauss, se puede dar una interpretación geométrica al tensor de curvatura en cualquier dimensión, definiendo la curvatura seccional.

DEFINICIÓN. Sean  $M$  una  $n$ -variedad riemanniana y  $p \in M$ . Si  $\Pi$  es un subespacio 2-dimensional de  $T_p M$  y  $V \subset T_p M$  es una vecindad del cero donde  $\exp_p$  es difeomorfismo, entonces  $S_\Pi := \exp(\Pi \cap V)$  es una 2-subvariedad de  $M$  que contiene a  $p$  y se llama *sección plana determinada por  $\Pi$* .

Se define la *curvatura seccional de  $M$*  asociada a  $\Pi$ , denotada por  $K(\Pi)$ , como la curvatura gaussiana de  $S_\Pi$ . Es decir, si  $\{X, Y\}$  es una base de  $\Pi$ , entonces

$$K(\Pi) = K(X, Y) = \frac{\mathcal{R}\mathcal{M}(X, Y, Y, X)}{|X|_g^2 |Y|_g^2 - g(X, Y)^2}.$$

Está bien definida pues por un análogo al teorema egregio de Gauss, no depende de la base que se tome de  $\Pi$ .

EJEMPLO. La curvatura seccional de  $\mathbb{S}_r^n$  es  $1/r^2$ . Para ver esto nótese que por la homogeneidad de la esfera, basta con calcular la curvatura seccional con respecto a cualquier subespacio  $\mathbf{P}$  de dimensión 2 de  $T_p \mathbb{S}_r^n$ , donde  $p \in \mathbb{S}_r^n$ . Así,  $\exp_p(\mathbf{P}) = 2$ -esfera de radio  $r$  en el espacio generado por  $p$  y  $\mathbf{P}$ , que es isométrica a una 2-esfera en  $\mathbb{R}^3$ . Finalmente, se sabe que la curvatura gaussiana de una 2-esfera en  $\mathbb{R}^3$  es  $1/r^2$ .

## 18. Campos de Jacobi

El siguiente objetivo de este capítulo es ver cómo se comportan las geodésicas que están cercanas.

DEFINICIÓN. Sean  $\gamma: [a, b] \rightarrow M$  un segmento geodésico y  $\Gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a, b] \rightarrow M$  una variación de  $\gamma$ . Se dice que  $\Gamma$  es una *variación por geodésicas* si cada curva principal  $\Gamma_s(t)$  es un segmento geodésico.

LEMA 1.39. *Si  $\Gamma$  es una familia admisible suave de curvas y  $V$  es un campo vectorial suave a lo largo de  $\Gamma$ , entonces*

$$D_s D_t V - D_t D_s V = \mathcal{R}(\partial_s \Gamma, \partial_t \Gamma) V.$$

Se observa que las variaciones por geodésicas cumplen que sus campos de variación satisfacen una ecuación, la ecuación de Jacobi.

TEOREMA 1.40 (Ecuación de Jacobi). *Sea  $\Gamma$  una geodésica y  $V$  es el campo de variación de una variación por geodésicas, entonces  $V$  satisface*

$$D_t^2 V + \mathcal{R}(V, \dot{\gamma})\dot{\gamma} = 0.$$

DEFINICIÓN. Un campo vectorial a lo largo de una geodésica que satisface la ecuación de Jacobi se llama *campo de Jacobi*

PROPOSICIÓN 1.41 (Existencia y Unicidad de Campos de Jacobi). *Sea una geodésica  $\gamma: (b, c) \rightarrow M$ ,  $a \in (b, c)$  y  $p = \gamma(a)$ . Para cualesquiera  $X, Y \in T_p M$ , existe un único campo de Jacobi  $J$  tal que*

$$J(a) = X \quad y \quad D_t J(a) = Y.$$

COROLARIO 1.42. *A lo largo de una geodésica  $\gamma$ , el conjunto de campos de Jacobi es un  $2n$ -subespacio vectorial de  $\mathcal{T}(\gamma)$ .*

DEFINICIÓN. Un *campo vectorial tangencial* a lo largo de  $\gamma$  es un campo vectorial  $V$  tal que  $V(t)$  es un múltiplo de  $\dot{\gamma}(t)$  para toda  $t$ . Un *campo vectorial normal* es uno tal que  $V(t)$  es  $g$ -ortogonal a  $\dot{\gamma}(t)$  para todo  $t$ . Obsérvese que cualquier campo vectorial  $V$  a lo largo de  $\gamma$  se puede descomponer de manera única en suma de un campo vectorial tangencial  $V^\top$  y un campo vectorial normal  $V^\perp$ . Explícitamente,

$$V^\top = g(V, \dot{\gamma})\dot{\gamma} \quad y \quad V^\perp = V - V^\top.$$

A manera de ejemplo sobre campos de Jacobi, la siguiente proposición da una expresión particular de éstos en  $\mathbb{S}_r^n$ .

PROPOSICIÓN 1.43. *Considérese la esfera  $\mathbb{S}_r^n$ . Si  $J$  es un campo de Jacobi normal a lo largo de una geodésica  $\gamma$  y  $J(0) = 0$ , entonces  $J$  es de la forma*

$$J(t) = u(t)E(t),$$

donde  $E$  es un campo paralelo normal a lo largo de  $\gamma$  y

$$u(t) = r \operatorname{sen} \frac{t}{r}.$$

**18.1. Puntos conjugados.** La principal aplicación de los campos de Jacobi en este trabajo es que ayudan a ver cuándo el mapeo exponencial es localmente difeomorfismo.

DEFINICIÓN. Si  $\gamma: [a, b] \rightarrow M$  es un segmento geodésico que une a  $p$  y  $q$  en  $M$ ,  $q$  se dice que es *conjugado a  $p$  a lo largo de  $\gamma$*  si existe un campo de Jacobi a lo largo de  $\gamma$  tal que  $J(a) = J(b) = 0$  pero que no es idénticamente cero.

El hecho más importante de los puntos conjugados que son los puntos críticos del mapeo exponencial, i. e., donde el diferencial de éste se hace cero.

PROPOSICIÓN 1.44. *Supóngase que  $p \in M$ ,  $V \in T_p M$  y  $q = \exp_p(V)$ . Entonces  $\exp_p$  es un difeomorfismo local en una vecindad de  $V$  si y sólo si  $q$  no es conjugado de  $p$  a lo largo de la geodésica  $\gamma(t) = \exp_p(tV)$ ,  $t \in [0, 1]$ .*

Ahora se darán algunas propiedades elementales de los campos de Jacobi y los puntos conjugados.

PROPOSICIÓN 1.45. *Sea  $J$  un campo de Jacobi a lo largo de la geodésica  $\gamma: [0, a] \rightarrow M$ . Entonces*

$$g(J(t), \dot{\gamma}(t)) = g(D_t J(0), \dot{\gamma}(0))t + g(J(0), \dot{\gamma}(0)), \quad t \in [0, a].$$

PROPOSICIÓN 1.46.  $q$  es punto conjugado de  $p$  a lo largo de  $\gamma$  si y sólo si  $p$  es conjugado de  $q$  a lo largo de  $-\gamma$ , donde  $-\gamma$  es  $\gamma$  recorrida al revés.

PROPOSICIÓN 1.47. Sea  $\gamma: [a, b] \rightarrow M$  un segmento geodésico. Si  $\gamma(a)$  y  $\gamma(b)$  no son conjugados, entonces un campo de Jacobi a lo largo de  $\gamma$  está determinado por sus valores en  $\gamma(a)$  y  $\gamma(b)$ .

Un resultado topológico muy importante que es demostrado usando campos de Jacobi es el siguiente.

TEOREMA 1.48 (Bonnet). Sea  $M$  una variedad riemanniana completa y conexa tal que sus curvaturas seccionales están acotadas por debajo por una constante positiva  $1/R^2$ . Entonces  $M$  es compacta con grupo fundamental finito y con diámetro menor o igual a  $\pi R$ .

## 19. Índices

Ahora se mencionarán algunos índices que serán usados a lo largo de la tesis.

DEFINICIÓN. Dada una forma bilineal simétrica  $B$  sobre un espacio vectorial  $\mathcal{V}$ , se define el *índice de  $B$*  como la dimensión máxima de todos los subespacios de  $\mathcal{V}$  en los cuales la forma cuadrática asociada de  $B$  es negativa.

La *nulidad de  $B$*  se define como la dimensión del subespacio de  $\mathcal{V}$  formado por los elementos  $V \in \mathcal{V}$  tales que  $B(V, W) = 0$  para todo  $W \in \mathcal{V}$ . Este subespacio se llama el *espacio nulo de  $B$* .

Un ejemplo inmediato de esto son las siguientes definiciones. En la primera se tiene una forma bilineal simétrica llamada la forma de índice y después se da el índice de ésta.

DEFINICIÓN. Si  $V$  y  $W$  son campos propios normales a lo largo de una geodésica  $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ , se define la *forma de índice* como

$$I(V, W) := \int_a^b g(D_t V, D_t W) - \mathcal{R}(V, \dot{\gamma}, \dot{\gamma}, V) dt.$$

Ésta es simétrica y bilineal.

DEFINICIÓN. Sea  $\gamma: [a, b] \rightarrow M$  una geodésica en  $M$ . Denótese por  $\mathbb{V}$  al espacio vectorial formado por los campos vectoriales propios y normales a lo largo de  $\gamma$ . Se define como el *índice de  $\gamma$*  a la máxima dimensión de todos los subespacios de  $\mathbb{V}$  en donde la forma cuadrática asociada a  $I$ , definida en la sección anterior, es negativa.

## 20. Fórmula de la Segunda Variación

Como se vio en la sección 15, el funcional de longitud tiene siempre puntos críticos en las geodésicas. Pero como ya se ha observado, éstas no son necesariamente mínimos locales. Así, se calcula la segunda derivada del funcional de longitud para ver si lo son o no.

TEOREMA 1.49 (Fórmula de Segunda Variación). Sea  $\gamma: [a, b] \rightarrow M$  una geodésica,  $\Gamma$  una variación propia de  $\gamma$  y  $V$  su campo de variación. La segunda derivada del funcional de longitud o la segunda variación está dada por la fórmula:

$$\left. \frac{d^2}{ds^2} \right|_{s=0} \mathcal{L}(\Gamma_s) = \int_a^b (|D_t V^\perp|^2 - \mathcal{R}\mathcal{M}(V^\perp, \dot{\gamma}, \dot{\gamma}, V^\perp)) dt,$$

donde  $V^\perp$  es la componente normal de  $V$ .

COROLARIO 1.50. Si  $\Gamma$  es la variación propia de una geodésica  $\gamma: [a, b] \rightarrow M$  y  $V$  es su campo variacional normal y propio, entonces

$$\left. \frac{d^2}{ds^2} \right|_{s=0} \mathcal{L}(\Gamma_s) = I(V, V).$$

En particular, si  $\gamma$  es minimizante, entonces  $I(V, V) \geq 0$  para cualquier campo vectorial normal y propio a lo largo de  $\gamma$ .

Una propiedad importante de los puntos conjugados que se demuestra con la fórmula de segunda variación es la siguiente.

TEOREMA 1.51. Si  $\gamma$  es un segmento geodésico de  $p$  a  $q$  que tiene un punto interior conjugado a  $p$ , entonces existe un campo vectorial normal propio  $X$  a lo largo de  $\gamma$  tal que  $I(X, X) < 0$ . En particular,  $\gamma$  no es minimizante.

Como consecuencia del este teorema, se tiene que ninguna geodésica es minimizante después de pasar el primer punto conjugado.

## 21. Teorema del Índice de Morse

Un resultado muy importante es el siguiente, el cual detalla el número de puntos conjugados sobre una geodésica.

TEOREMA 1.52. Sea  $\gamma: [0, a] \rightarrow M$ . El índice de la forma  $I$  es finito y es igual al número de puntos  $\gamma(t)$ ,  $t \in (0, a)$ , conjugados a  $\gamma(0)$ , contados con multiplicidad.

DEMOSTRACIÓN. Es el Teorema 2.2 del capítulo 11 de [Carmo], página 243. Q. E. D.

COROLARIO 1.53. El conjunto de puntos conjugados a lo largo de una geodésica es un conjunto discreto.

## 22. Teorema de Sard

DEFINICIÓN. Sea  $f: M \rightarrow N$  una función al menos  $C^1$  entre dos variedades  $M$  y  $N$ . Un punto  $x \in M$  es punto crítico de  $f$  si  $df_x$  no es suprayectiva. Un punto es regular si no es crítico.

Al conjunto de puntos críticos de  $f$  se le denota como  $\Sigma_f$ .

TEOREMA 1.54. Sean  $M$  y  $N$  variedades de dimensiones  $m$  y  $n$ , respectivamente, y sea  $f: M \rightarrow N$  una función  $C^r$ ,  $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ . Si

$$r > \max\{0, m - n\},$$

entonces  $f(\Sigma_f)$  tiene medida cero en  $N$ . Así, el conjunto de valores regulares es denso en  $N$ .

DEMOSTRACIÓN. Es el Teorema 1.3 del capítulo 3 en [Hirsch], página 69. Q. E. D.

## Teorema de Rauch

Para demostrar los tres resultados fundamentales previos a la demostración del teorema de la esfera, así como para calcular la estimación de Klingenberg, se usa el Teorema de Rauch y unas aplicaciones de éste. En este capítulo se demuestra el Teorema de Rauch, un gran resultado que permite comparar la curvatura seccional de dos variedades riemannianas, y dichas aplicaciones.

Antes de probar el teorema de Rauch, se necesitan un par de resultados. El primero es un resultado muy simple y el segundo, llamado el lema del Índice, es esencial para el teorema de Rauch.

LEMA 2.1. *Sea  $h: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable tal que  $h(0) = 0$ . Entonces existe una función diferenciable  $\phi: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\phi(0) = \frac{dh}{dt}(0)$  y  $h(t) = t\phi(t)$ .*

DEMOSTRACIÓN. Se define, para  $t$  fijo,

$$\phi(t) = \int_0^1 h'(ts) ds.$$

Si se hace el cambio de variable  $r = ts$ , se obtiene:

$$t\phi(t) = \int_0^t h'(r) d(r) = h(t).$$

Q. E. D.

Sea  $M$  una variedad riemanniana y sea  $\gamma: [0, a] \rightarrow M$  una geodésica de  $M$ . Sea  $V$  un campo vectorial a lo largo de  $\gamma$  diferenciable por pedazos. Para todo  $t_0 \in [0, a]$ , se escribe como antes:

$$I_{t_0}(V, V) = \int_0^{t_0} \{g(D_t V, D_t V) + g(\mathcal{R}(\dot{\gamma}, V)\dot{\gamma}, V)\} dt.$$

LEMA 2.2 (Lema del Índice). *Sea  $\gamma: [0, a] \rightarrow M$  una geodésica sin puntos conjugados a  $p = \gamma(0)$  en  $(0, a]$ . Sea  $J$  un campo de Jacobi a lo largo de  $J$  tal que  $g(J, \dot{\gamma}) = 0$  y  $V$  un campo vectorial diferenciable por pedazos a lo largo de  $\gamma$  tal que  $g(V, \dot{\gamma}) = 0$ . Supóngase que  $J(0) = V(0) = 0$  y que  $J(t_0) = V(t_0)$ ,  $t_0 \in (0, a]$ . Entonces*

$$I_{t_0}(J, J) \leq I_{t_0}(V, V)$$

*y la igualdad se da si y sólo si  $V = J$  en  $[0, t_0]$ .*

DEMOSTRACIÓN. Se sabe, por el Corolario 1.42, que el conjunto de campos de Jacobi  $\mathbb{J}$  a lo largo de una geodésica  $\gamma$  es un espacio vectorial  $2n$ -dimensional, donde  $n$  es la dimensión de  $M$ . Si a éstos se les pide que  $J(0) = 0$  y que  $g(J, \dot{\gamma}) = 0$ , entonces  $\mathbb{J}_0$ , el subconjunto de  $\mathbb{J}$  que cumplen esas dos condiciones, tiene dimensión  $n - 1$ . Esto se tiene de la demostración del Corolario 1.42, donde, por el Teorema de Existencia y Unicidad de Campos de Jacobi, para cualquier punto  $q = \gamma(t_1)$  de

la geodésica se construye una función biyectiva de  $\mathbb{J}$  a  $T_q M \oplus T_q M$  que envía  $J$  a  $(J(t_1), D_t J(t_1))$ . De ahí, la condición  $J(0) = 0$  reduce la dimensión a  $n$  y la condición  $g(J, \dot{\gamma}) = 0$  a  $n - 1$ .

Sea  $J_1, \dots, J_{n-1}$  una base de  $\mathbb{J}_0$ . Entonces  $J = \alpha^i J_i$ . Como no hay puntos conjugados a  $p$  en  $(0, a]$ , los vectores  $J_1(t), \dots, J_{n-1}(t)$  forman una base del complemento ortogonal de  $\dot{\gamma}(t)$  en  $T_{\gamma(t)} M$  para  $t \neq 0$ . Así, para  $t \neq 0$  se tiene

$$V(t) = f^i(t) J_i,$$

donde las  $f^i$  son funciones diferenciables por trozos en  $(0, a]$ . Recuérdese que se está usando la notación de Einstein. Ahora se mostrará que estas  $f^i$  pueden ser extendidas continua y diferenciablemente a  $[0, a]$ .

Con este propósito, por el Lema 2.1, se escribe  $J_i(t) = t A_i(t)$ . Entonces se tiene  $A_i(0) = D_t J_i(0)$ . Por lo tanto, usando la linealidad de la derivada covariante, las  $A_i(0)$  son linealmente independientes. Por eso, las  $A_i(t)$  son linealmente independientes en  $[0, a]$  y

$$V(t) = k^i(t) A_i(t),$$

donde las  $k^i$  son funciones diferenciables por pedazos en  $[0, a]$ . Aplicando de nuevo el Lema 2.1  $k^i(t) = t h^i$ , donde  $h^i(t)$  son funciones diferenciables por pedazos en  $[0, a]$ . Como  $f^i(t) = h^i(t)$  para  $t \neq 0$ , entonces se tiene la extensión deseada.

El siguiente paso será probar la siguiente identidad en cada subintervalo donde las  $f^i$  son diferenciables:

$$(7) \quad g(D_t V, D_t V) + g(\mathcal{R}(\dot{\gamma}, V)\dot{\gamma}, V) = g(\dot{f}^i J_i, \dot{f}^j J_j) + \frac{d}{dt} g(f^i J_i, f^j D_t J_j).$$

En efecto, pues

$$\mathcal{R}(\dot{\gamma}, V)\dot{\gamma} = \mathcal{R}(\dot{\gamma}, f^i J_i \dot{\gamma}) = f^i \mathcal{R}(\dot{\gamma}, J_i)\dot{\gamma} = f^i D_t^2 J_i$$

por ser  $J$  campo de Jacobi y entonces

$$\begin{aligned} g(D_t V, D_t V) + g(\mathcal{R}(\dot{\gamma}, V)\dot{\gamma}, V) &= g(\dot{f}^i J_i + f^i D_t J_i, \dot{f}^j J_j + f^j D_t J_j) \\ &\quad + g(\mathcal{R}(\dot{\gamma}, V)\dot{\gamma}, V) \\ &= g(\dot{f}^i J_i, \dot{f}^j J_j) + g(\dot{f}^i J_i, f^j D_t J_j) \\ &\quad + g(f^i D_t J_i, \dot{f}^j J_j) + g(f^i D_t J_i, f^j D_t J_j) \\ &\quad + g(f^i D_t^2 J_i, f^j J_j). \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} g(f^i J_i, f^j D_t J_j) &= g(\dot{f}^i J_i + f^i D_t J_i, f^j D_t J_j) \\ &\quad + g(f^i J_i, \dot{f}^j D_t J_j + f^j D_t^2 J_j) \\ &= g(\dot{f}^i J_i, f^j D_t J_j) + g(f^i D_t J_i, f^j D_t J_j) \\ &\quad + g(f^i J_i, \dot{f}^j D_t J_j) + g(f^i J_i, f^j D_t^2 J_j). \end{aligned}$$

Así, para probar (7), es suficiente probar

$$(8) \quad g(f^i D_t J_i, \dot{f}^j J_j) = g(f^i J_i, \dot{f}^j D_t J_j).$$

Para ello, se define

$$b(t) := g(D_t J_i, J_j) - g(J_i, D_t J_j).$$

Como  $b(0) = 0$  y

$$\begin{aligned} b'(t) &= g(D_t^2 J_i, J_j) + g(D_t J_i, D_t J_j) - g(D_t J_i, D_t J_j) - g(J_i, D_t^2 J_j) \\ &= -g(\mathcal{R}(\dot{\gamma}, J_i)\dot{\gamma}, J_j) + g(J_i, \mathcal{R}(\dot{\gamma}, J_j)\dot{\gamma}) = 0, \end{aligned}$$

por la simetría del tensor de curvatura, se tiene que  $b \equiv 0$ . Y, por la bilinealidad de  $g$ , se tiene (8) y por ende (7).

Ahora bien, aplicando (7) a  $V$  y  $J$  se obtiene:

$$I_{t_0}(V, V) = g(f^i J_i, f^j D_t J_j)(t_0) + \int_0^{t_0} g(\dot{f}^i J_i, \dot{f}^j J_j) dt$$

y

$$I_{t_0}(J, J) = g(\alpha^i J_i, \alpha^j D_t J_j)(t_0).$$

Como  $J(t_0) = V(t_0)$ , se tiene que  $\alpha^i = f^i(t_0)$  y

$$(9) \quad I_{t_0}(V, V) = I_{t_0}(J, J) + \int_0^{t_0} |\dot{f}^i J_i|^2 dt.$$

De (9), se tiene la primera parte del lema.

Si  $I_{t_0}(V, V) = I_{t_0}(J, J)$ , entonces  $\dot{f}^i J_i = 0$ , que además, porque las  $J_i$  son linealmente independientes si  $t \neq 0$  y por la continuidad de las  $\dot{f}^i$ , se tiene que las  $\dot{f}^i = 0$  para todo  $i$  y para todo  $t \in [0, t_0]$ . Por lo tanto, las  $f^i$  son constantes y, como  $f^i(t_0) = \alpha^i$ , entonces  $f^i(t) = \alpha^i$ , i. e.,  $V = J$ . Q. E. D.

El teorema de Rauch es un resultado muy importante de comparación entre dos variedades. Éste permite dar una desigualdad de sus campos de Jacobi, mediante la comparación de sus curvaturas. Intuitivamente dice que si se tienen dos variedades  $M$  y  $\tilde{M}$ , y  $M$  “restringida” a una geodésica  $\gamma$  tiene una curvatura menor a  $\tilde{M}$  “restringida” a una geodésica  $\tilde{\gamma}$ , entonces la norma del campo de Jacobi a lo largo de  $\gamma$  es mayor a la norma del campo de Jacobi a lo largo de  $\tilde{\gamma}$ . Es decir, que sobre la geodésica  $\tilde{\gamma}$  se podría llegar primero al primer punto conjugado que sobre la geodésica  $\gamma$ .

**TEOREMA 2.3 (Rauch).** Sean  $M$  una  $n$ -variedad riemanniana y  $\tilde{M}$  una  $(n+k)$ -variedad riemanniana, con  $k \geq 0$ . Sean  $\gamma: [0, a] \rightarrow M$  y  $\tilde{\gamma}: [0, a] \rightarrow \tilde{M}$  geodésicas unitarias. Y sean  $J$  y  $\tilde{J}$  los campos de Jacobi a lo largo de  $\gamma$  y  $\tilde{\gamma}$ , respectivamente, tal que

$$\begin{aligned} J(0) &= \tilde{J}(0) = 0, \\ g(D_t J(0), \dot{\gamma}(0)) &= \tilde{g}(D_t \tilde{J}(0), \dot{\tilde{\gamma}}(0)), \\ |D_t J(0)|_g &= |D_t \tilde{J}(0)|_{\tilde{g}}. \end{aligned}$$

Supóngase que  $\tilde{\gamma}$  no contiene puntos conjugados en  $(0, a]$  y que, para todo  $t$  y para todo  $x \in T_{\gamma(t)}M$ ,  $\tilde{x} \in T_{\tilde{\gamma}(t)}\tilde{M}$ , se tiene

$$\tilde{K}(\tilde{x}, \dot{\tilde{\gamma}}(t)) \geq K(x, \dot{\gamma}(t)),$$

donde  $K(x, y)$  denota la curvatura seccional con respecto al plano generado por  $x$  y  $y$ . Entonces

$$|\tilde{J}|_{\tilde{g}} \leq |J|_g.$$

Además, si para algún  $t_0 \in (0, a]$ , se tiene que  $|\tilde{J}(t_0)| = |J(t_0)|$ , entonces

$$\tilde{K}(\tilde{J}(t), \dot{\tilde{\gamma}}(t)) = K(J(t), \dot{\gamma}(t)), \quad \forall t \in [0, t_0].$$

DEMOSTRACIÓN. Antes que nada, obsérvese que por la Proposición 1.45 la condición

$$(10) \quad g(D_t J(0), \dot{\gamma}(0)) = \tilde{g}(D_t \tilde{J}(0), \dot{\tilde{\gamma}}(0))$$

junto con  $J(0) = \tilde{J}(0) = 0$  implica que

$$g(J, \dot{\gamma}) = \tilde{g}(\tilde{J}, \dot{\tilde{\gamma}}).$$

Como  $g(J, \dot{\gamma})$  es la longitud de la componente tangencial de  $J$ , las componentes tangenciales de  $J$  y  $\tilde{J}$  tienen la misma longitud. Así, se puede suponer que

$$g(J, \dot{\gamma}) = \tilde{g}(\tilde{J}, \dot{\tilde{\gamma}})$$

pues en la desigualdad que se quiere mostrar las componentes tangenciales tienen la misma longitud.

Si  $|D_t J(0)|_g = |D_t \tilde{J}(0)|_{\tilde{g}} = 0$ , entonces  $|J|_g = |\tilde{J}|_{\tilde{g}}$ . En caso contrario, considérese

$$h(t) = |J(t)|_g^2 \quad \text{y} \quad \tilde{h}(t) = |\tilde{J}(t)|_{\tilde{g}}^2.$$

Como  $\tilde{\gamma}$  no tiene puntos conjugados en el intervalo  $(0, a]$ , la función

$$\frac{h}{\tilde{h}}$$

está bien definida para  $t \in (0, a]$ . Usando la regla de L'Hôpital,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{h(t)}{\tilde{h}(t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{h''(t)}{\tilde{h}''(t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(D_t J(t), D_t J(t))}{\tilde{g}(D_t \tilde{J}(t), D_t \tilde{J}(t))} = \frac{|D_t J(0)|_g^2}{|D_t \tilde{J}(0)|_{\tilde{g}}^2} = 1.$$

Así, para probar que  $|\tilde{J}|_{\tilde{g}} \leq |J|_g$  es suficiente con probar que

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{h(t)}{\tilde{h}(t)} \right) \geq 0$$

para  $t \in (0, a]$ . Que a su vez es equivalente a

$$h' \tilde{h} \geq h \tilde{h}'.$$

Sea  $t_0 \in (0, a]$ . Si  $h(t_0) = 0$ ,

$$h'(t_0) = 2g(D_t J(t_0), J(t_0)) = 0$$

y la desigualdad se satisface trivialmente. Si  $h(t_0) \neq 0$ , considérese

$$H(t) = \frac{1}{\sqrt{h(t_0)}} J(t) \quad \text{y} \quad \tilde{H}(t) = \frac{1}{\sqrt{\tilde{h}(t_0)}} \tilde{J}(t).$$

Nótese que

$$\begin{aligned} \frac{h'(t_0)}{h(t_0)} &= \frac{2g(D_t J(t_0), J(t_0))}{g(J(t_0), J(t_0))} = 2g(D_t H(t_0), H(t_0)) = \frac{d}{dt} g(H, H)(t_0) \\ &= \int_0^{t_0} \frac{d^2}{dt^2} g(H, H) dt = 2 \int_0^{t_0} \{g(D_t H, D_t H) + g(D^2 H, H)\} dt \\ &= \int_0^{t_0} \{g(D_t H, D_t H) - g(\mathcal{R}(\dot{\gamma}, H)\dot{\gamma}, H)\} dt \\ &= 2I_{t_0}(H, H). \end{aligned}$$



Análogamente

$$\frac{\tilde{h}'(t_0)}{\tilde{h}(t_0)} = 2I_{t_0}(\tilde{H}, \tilde{H}).$$

Como se tomó a  $t_0$  arbitrariamente, entonces será suficiente probar que

$$I_{t_0}(\tilde{H}, \tilde{H}) \leq I_{t_0}(H, H)$$

para tener la desigualdad deseada.

Con este propósito, ahora considérese  $\{e_1, \dots, e_n\}$  y  $\{\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_{n+k}\}$  bases ortonormales para las a lo largo de  $\gamma$  y  $\tilde{\gamma}$ , respectivamente, tal que:

$$e_1(t) = \frac{\dot{\gamma}(t)}{|\dot{\gamma}(t)|_g}, \quad e_2(t) = H(t), \quad \tilde{e}_1(t) = \frac{\dot{\tilde{\gamma}}}{|\dot{\tilde{\gamma}}|_{\tilde{g}}} \quad \text{y} \quad \tilde{e}_2(t) = \tilde{H}(t).$$

A cada campo vectorial  $V(t) = \sum g_i(t)e_i(t)$  a lo largo de  $\gamma$  se le asocia el campo vectorial  $\phi V$  a lo largo de  $\tilde{\gamma}$  dado por

$$(\phi V)(t) = \sum_{i=0}^n g_i(t)\tilde{e}_i(t).$$

Esta función  $\phi$  satisface:

$$(11) \quad \tilde{g}(\phi V_1, \phi V_2) = g(V_1, V_2)$$

$$(12) \quad D_t(\phi V) = \phi(D_t V).$$

De ésto y de la hipótesis sobre la curvatura se sigue que

$$\begin{aligned} I_{t_0}(\phi H, \phi H) &= \int_0^{t_0} \{\tilde{g}(D_t(\phi H), D_t(\phi H)) - \tilde{g}(\mathcal{R}(\dot{\tilde{\gamma}}, \phi H)\dot{\tilde{\gamma}}, \phi H)\} dt \\ &= \int_0^{t_0} \{g(D_t H, D_t H) - \tilde{g}(\mathcal{R}(\dot{\tilde{\gamma}}, \phi H)\dot{\tilde{\gamma}}, \phi H)\} dt \\ &\leq \int_0^{t_0} \{g(D_t H, D_t H) - g(\mathcal{R}(\dot{\gamma}, H)\dot{\gamma}, H)\} dt \\ &= I_{t_0}(H, H). \end{aligned}$$

Asimismo, obsérvese que  $\tilde{H}$  y  $\phi H$  son campos vectoriales que satisfacen las hipótesis del lema del índice y que  $\tilde{H}$  es campo de Jacobi. Por lo tanto,

$$I_{t_0}(\tilde{H}, \tilde{H}) \leq I_{t_0}(\phi H, \phi H) \leq I_{t_0}(H, H).$$

Esto demuestra la desigualdad del teorema.

Supóngase ahora que

$$(13) \quad |J(t_0)|_g = |\tilde{J}(t_0)|_{\tilde{g}},$$

para algún  $t_0 \in (0, a]$ . Para  $t \neq 0$ ,

$$I_t(\tilde{H}, \tilde{H}) \leq I_t(H, H).$$

Lo cual implica que

$$h'\tilde{h}(t) \geq h\tilde{h}'(t)$$

y, por (13),

$$h'\tilde{h}(t) = h\tilde{h}'(t), \quad t \in (0, t_0].$$

Por lo tanto,

$$I_t(\tilde{H}, \tilde{H}) = I_t(\phi H, \phi H) = I_t(H, H), \quad t \in (0, t_0].$$

Finalmente, por la hipótesis sobre la curvatura y como se cumplen (11), (12) y la igualdad anterior, se tiene que

$$\begin{aligned} I_t(\tilde{H}, \tilde{H}) &= \int_0^{t_0} \{\tilde{g}(D_t \tilde{H}, D_t \tilde{H}) - \tilde{g}(\mathcal{R}(\dot{\tilde{\gamma}}, \tilde{H})\dot{\tilde{\gamma}}, \tilde{H})\} dt \\ &\stackrel{||}{=} \int_0^{t_0} \{g(D_t H, D_t H) - g(\mathcal{R}(\dot{\gamma}, H)\dot{\gamma}, H)\} dt. \end{aligned}$$

Lo que implica que

$$\tilde{g}(\mathcal{R}(\dot{\tilde{\gamma}}, \tilde{H})\dot{\tilde{\gamma}}, \tilde{H}) = g(\mathcal{R}(\dot{\gamma}, H)\dot{\gamma}, H).$$

Es decir,

$$K(J(t), \dot{\gamma}(t)) = \tilde{K}(\tilde{J}(t), \dot{\tilde{\gamma}}).$$

Q. E. D.

Una primera aplicación del teorema de Rauch es la siguiente:

PROPOSICIÓN 2.4. *Supóngase que la curvatura seccional  $K$  de una  $n$ -variedad riemanniana  $M$  satisface*

$$0 < L \leq K \leq H,$$

donde  $L$  y  $H$  son constantes. Sea  $\gamma$  una geodésica en  $M$ . Entonces la distancia  $d$  a lo largo de  $\gamma$  entre dos puntos conjugados de  $\gamma$  satisface

$$\frac{\pi}{\sqrt{H}} \leq d \leq \frac{\pi}{\sqrt{L}}.$$

DEMOSTRACIÓN. Para la primera parte de la desigualdad,

$$\frac{\pi}{\sqrt{H}} \leq d,$$

se compara a  $M$  con la esfera  $\mathbb{S}_H^n$  de curvatura seccional  $H$ . Sea  $\gamma: [0, l] \rightarrow M$  una geodésica en  $M$  con  $\gamma(0) = p$  y sea  $J$  un campo de Jacobi a lo largo de  $\gamma$  tal que  $J(0) = 0$  y  $g(J, \dot{\gamma}) = 0$ . Sean  $\tilde{p} \in \mathbb{S}_H^n$ ,  $\tilde{\gamma}: [0, l] \rightarrow \mathbb{S}_H^n$  una geodésica en  $\mathbb{S}_H^n$  con  $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{p}$  y  $\tilde{J}$  un campo de Jacobi a lo largo de  $\tilde{\gamma}$  tal que  $\tilde{J}(0) = 0$ ,  $e(\tilde{J}, \dot{\tilde{\gamma}}) = 0$  y  $|D_t J(0)|_g = |D_t \tilde{J}(0)|_e$ . Recuerdese que  $e$  es la métrica inducida de la métrica euclidiana de  $\mathbb{R}^{n+1}$  en la esfera.

Como  $\tilde{\gamma}$  no tiene puntos conjugados en el intervalo  $(0, \frac{\pi}{\sqrt{H}})$ , por la Proposición 1.43, entonces, por el teorema de Rauch,

$$|J(t)|_g \geq |\tilde{J}(t)|_e > 0,$$

con  $t \in (0, \frac{\pi}{\sqrt{H}})$ . Así pues la distancia  $d$  de  $p$  a su primer punto conjugado sobre  $\gamma$  es mayor o igual a  $\frac{\pi}{\sqrt{H}}$ .

Para la otra desigualdad,

$$d \leq \frac{\pi}{\sqrt{L}},$$

se hace el mismo tipo de comparación pero con  $M$  y  $\mathbb{S}_L^n$ , la esfera de curvatura seccional  $L$ . Si no se cumpliera la desigualdad, es decir,  $d > \frac{\pi}{\sqrt{L}}$ , entonces usando el teorema de Rauch se tiene que un punto en  $\mathbb{S}_L^n$  tiene a sus puntos conjugados a una distancia mayor a  $\frac{\pi}{\sqrt{L}}$ , que es una contradicción a la Proposición 1.43.

Q. E. D.

PROPOSICIÓN 2.5. Sean  $M$  y  $\tilde{M}$   $n$ -variedades riemannianas. Supóngase que para todo  $p \in M$ ,  $\tilde{p} \in \tilde{M}$ ,  $\sigma \subset T_p M$ ,  $\tilde{\sigma} \subset T_{\tilde{p}} \tilde{M}$ , se tiene que

$$\tilde{K}_{\tilde{p}}(\tilde{\sigma}) \leq K_p(\sigma).$$

Sean  $p \in M$ ,  $\tilde{p} \in \tilde{M}$  y una isometría lineal fija  $i: T_{\tilde{p}} \tilde{M} \rightarrow T_p M$ . Sea  $r > 0$  tal que las restricciones  $\exp_{\tilde{p}}|_{\tilde{B}_e(r,0)}$  y  $\exp_p|_{B_e(r,0)}$  sean funciones difeomorfas. Sea  $\tilde{c}: [0, a] \rightarrow \exp_{\tilde{p}}(\tilde{B}_e(r,0)) \subset \tilde{M}$  una curva diferenciable y se define la curva diferenciable  $c: [0, a] \rightarrow \exp_p(B_e(r,0)) \subset M$  como

$$c(s) = \exp_p \circ i \circ \exp_{\tilde{p}}^{-1}(\tilde{c}(s)), \quad s \in [0, a].$$

Entonces  $L(\tilde{c}) \geq L(c)$ .

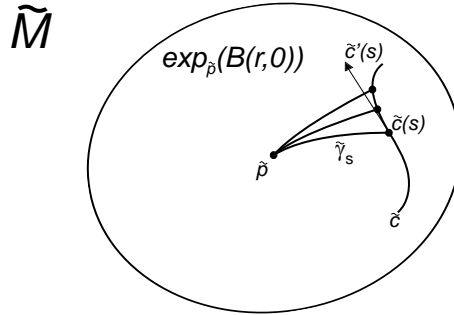
DEMOSTRACIÓN. Sea  $\bar{c}(s) = \exp_{\tilde{p}}^{-1}(\tilde{c}(s))$  en  $T_{\tilde{p}} \tilde{M}$ . Para  $s$  fijo considérese la geodésica

$$\tilde{\gamma}_s(t) = \exp_{\tilde{p}}(t\bar{c}(s)).$$

Además considérese la función

$$\tilde{f}(t, s) = \tilde{\gamma}_s(t) \quad \text{con } s \in [0, a] \quad \text{y } t \in [0, 1],$$

que es una superficie parametrizada en  $\tilde{M}$ .



Ésta cumple que para toda  $s$

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial s}(t, s) := \tilde{J}_s(t)$$

es un campo de Jacobi a lo largo de  $\tilde{\gamma}_s$ . Ya que  $\tilde{f}$  es una variación por geodésicas,

$$D_t \frac{\partial \tilde{f}}{\partial t} = 0,$$

aplicando el Lema 1.39 y el lema de simetría, se tiene que  $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial s}$  satisface la ecuación de Jacobi. Además  $\tilde{J}_s(t)$  cumple que  $\tilde{J}_s(0) = 0$  y que

$$\begin{aligned} \tilde{J}_s(1) &= \left. \frac{\partial \tilde{f}}{\partial s}(t, s) \right|_{t=1} = \left. \frac{\partial}{\partial s} \exp_{\tilde{p}}(t\bar{c}(s)) \right|_{t=1} \\ &= \left. (d \exp_{\tilde{p}})_{t\bar{c}(s)}(t\bar{c}'(s)) \right|_{t=1} = \left. (d \exp_{\tilde{p}})_{\bar{c}(s)}(\bar{c}'(s)) \right|_{t=1} \\ &= \bar{c}'(s). \end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned}
D_t \tilde{J}_s(0) &= D_t \tilde{J}_s |_{t=0} = D_t \left\{ \frac{\partial \tilde{f}}{\partial s}(t, s) \right\}_{t=0} \\
&= D_t \left\{ (d \exp_{\tilde{p}})_{t\tilde{c}(s)}(t\tilde{c}'(s)) \right\}_{t=0} \\
&= D_t \left\{ t(d \exp_{\tilde{p}})_{t\tilde{c}(s)}(\tilde{c}'(s)) \right\}_{t=0} \\
&= \left\{ (d \exp_{\tilde{p}})_{t\tilde{c}(s)}(\tilde{c}'(s)) + t D_t (d \exp_{\tilde{p}})_{t\tilde{c}(s)}(\tilde{c}'(s)) \right\}_{t=0} \\
&= (d \exp_{\tilde{p}})_0(\tilde{c}'(s)) = \tilde{c}'(s).
\end{aligned}$$

Por otro lado, considérese la superficie parametrizada en  $M$  dada por

$$f(t, s) = \exp_p(ti(\tilde{c}(s))) = \gamma_s(t).$$

Obsérvese antes que nada que  $\gamma_s$  es geodésica para todo  $s$ . Procediendo análogamente con la curva  $c$  y notando que  $\exp_p^{-1}(c(s)) = i(\tilde{c}(s))$ , se tiene que

$$\frac{\partial f}{\partial s}(t, s) := J_s(t)$$

es un campo de Jacobi a lo largo de  $\gamma_s$  satisfaciendo que

$$\begin{aligned}
J_s(0) &= 0, \\
J_s(1) &= c'(s)
\end{aligned}$$

y

$$D_t J_s(0) = i\tilde{c}'(s).$$

Gracias a que  $i$  es una isometría, se tiene lo siguiente:

$$|J_s(0)|_g = |\tilde{J}_s(0)|_{\tilde{g}} = 0, \quad |D_t J_s(0)|_g = |D_t \tilde{J}_s(0)|_{\tilde{g}}$$

y

$$\begin{aligned}
g(D_t J_s(0), \dot{\gamma}_s(0)) &= g(i\tilde{c}'(s), i\dot{\tilde{\gamma}}(0)) \\
&= \tilde{g}(\tilde{c}'(s), \dot{\tilde{\gamma}}(0)) \\
&= \tilde{g}(D_t \tilde{J}_s(0), \dot{\tilde{\gamma}}(0)).
\end{aligned}$$

Así, aplicando el teorema de Rauch,

$$|c'(s)|_g = |J_s(1)|_g \leq |\tilde{J}_s(t)|_{\tilde{g}} = |\tilde{c}'(s)|_{\tilde{g}}$$

y, por lo tanto, integrando se tiene

$$L(\tilde{c}) \geq L(c).$$

Q. E. D.

## Lugar de Corte

Un hecho muy importante en la demostración del teorema de la esfera es el saber para cada punto  $p \in M$  hasta donde la función  $\exp_p$  es un difeomorfismo. Para este propósito se define el lugar de corte.

Sea  $M$  una variedad riemanniana completa, sea  $p \in M$  y sea  $\gamma: [0, \infty) \rightarrow M$  una geodésica con  $\gamma(0) = p$ . Se sabe que para  $t > 0$  suficientemente pequeño,  $d(\gamma(0), \gamma(t)) = t$ , i. e.,  $\gamma$  es minimizante en el intervalo  $[0, t]$ . Además, si  $\gamma$  no es minimizante en el intervalo  $[0, t_1]$ , entonces tampoco lo es para  $t > t_1$ . Así, el conjunto  $O = \{t \in \mathbb{R} \mid t > 0 \text{ y } d(\gamma(0), \gamma(t)) = t\}$  es de la forma  $[0, t_0]$  o  $[0, \infty)$ , gracias a la continuidad de  $\gamma$ .

DEFINICIÓN. Si  $O$  es de la forma  $[0, t_0]$ ,  $\gamma(t_0)$  es llamado *punto de corte de  $p$  a lo largo de  $\gamma$* . Y si  $O$  es de la forma  $[0, \infty)$ , entonces se dice no hay puntos de corte de  $p$  a lo largo de  $\gamma$ .

Se define *el lugar de corte de  $p$*  a la unión de los puntos de corte de  $p$  a lo largo de todas las geodésicas que parten de  $p$ . Este conjunto se denotado como  $C_M(p)$ .

OBSERVACIÓN 4. Si  $M$  es compacta, su diámetro es finito y, por lo tanto, existe un punto de corte de  $p$  a lo largo de cualquier geodésica.

Un resultado importante para entender lo que es el lugar de corte de un punto es la siguiente proposición. Pero antes de ésta, se presenta el siguiente lema que se usará varias veces y entre ellas para la demostración de la proposición.

LEMA 3.1. *Sea  $\gamma_n$  una sucesión de geodésicas minimizantes que parten de un mismo punto  $q$  a un punto  $p_n$ . Supóngase que esta sucesión  $p_n$  converge a un punto  $p$ . Entonces la sucesión  $\{\gamma_n\}$  contiene una subsucesión que converge a una geodésica minimizante  $\gamma$  tal que  $\gamma(0) = p$  y  $\gamma(L(\gamma)) = q$ .*

DEMOSTRACIÓN. Como la sucesión de geodésicas parte de un mismo punto  $q$ , éstas geodésicas están determinadas por su vector tangente en  $q$ . Considérese  $\dot{\gamma}_i(0)$  el vector tangente unitario a  $\gamma_i$  en  $q$ . Estos vectores  $\dot{\gamma}_i(0)$  están en la esfera unitaria de  $T_q M$  y esta esfera es compacta. Eso implica que  $\dot{\gamma}_i(0)$  contiene una subsucesión convergente. Sea  $V$  el límite de esta subsucesión y  $\gamma$  la geodésica tal que  $\dot{\gamma}(0) = V$ .

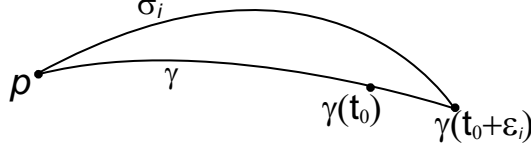
Considérese  $d_i = d(q, p_i)$ . Así, como  $p_n \rightarrow p$ , entonces  $\gamma$  pasa por  $p$ . Y por la continuidad de  $d(q, \_)$ ,  $d_i$  converge a  $d(q, p)$  y, finalmente,  $\gamma$  es minimizante. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 3.2. *Supóngase que  $\gamma(t_0)$  es punto de corte de  $p = \gamma(0)$  a lo largo de  $\gamma$ . Entonces se cumple una de las siguientes afirmaciones:*

- (a)  $\gamma(t_0)$  es el primer punto conjugado de  $p = \gamma(0)$  a lo largo de  $\gamma$ .
- (b) Existe una geodésica  $\sigma$  distinta a  $\gamma$  de  $p$  a  $\gamma(t_0)$  tal que  $L(\sigma) = L(\gamma)$ .

*De manera inversa, si (a) o (b) se satisfacen, entonces existe  $\bar{t} \in (0, t_0]$  tal que  $\gamma(\bar{t})$  es punto de corte de  $p$  a lo largo de  $\gamma$ .*

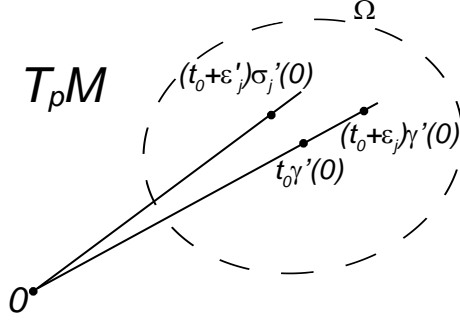
DEMOSTRACIÓN. Sea  $t_0$  tal que  $\gamma(t_0)$  es el punto de corte de  $p = \gamma(0)$  a lo largo de  $\gamma$ . Sea, además,  $t_0 + \varepsilon_i$  una sucesión tal que  $\varepsilon_i > 0$  y  $\varepsilon_i$  converge a cero. Ahora, considérese una sucesión de geodésicas minimizantes  $\sigma_i$  que unen a  $p = \sigma_i(0)$  con  $\gamma(t_0 + \varepsilon_i)$  y la sucesión  $\dot{\sigma}_i(0)$  de vectores tangentes en  $T_p M$ .



Por el Lema 3.1 existe una geodésica minimizante  $\sigma$  tal que une a  $p$  y  $\gamma(t_0)$ , y  $L(\gamma) = L(\sigma)$ .

Si  $\gamma \neq \sigma$ , se cumple el enunciado (b). Si  $\gamma = \sigma$ , se mostrará que el enunciado (a) se cumple. Como  $\gamma$  es minimizante hasta  $\gamma(t_0)$ , es suficiente mostrar que  $(\exp_p)_*$  es singular en  $t_0 \dot{\gamma}(0)$ .

Así, supóngase que  $\dot{\sigma}(0) = \dot{\gamma}(0)$  y que  $(\exp_p)_*$  no es singular en  $t_0 \dot{\gamma}(0)$ . Entonces existe una vecindad  $\Omega$  de  $t_0 \dot{\gamma}(0)$  donde  $\exp_p$  es difeomorfismo.



Como se definió a  $\sigma_j$ ,  $\gamma(t_0 + \varepsilon_j) = \sigma_j(t_0 + \varepsilon'_j)$  con  $\varepsilon'_j \leq \varepsilon_j$ , i. e.,  $\sigma_j$  es minimizante y tiene que llegar antes a  $\gamma(t_0 + \varepsilon_j)$ . Tómese  $\varepsilon_j$  suficientemente pequeño para que  $(t_0 + \varepsilon'_j) \dot{\sigma}_j(0)$  y  $(t_0 + \varepsilon_j) \dot{\gamma}(0)$  estén en  $\Omega$ .

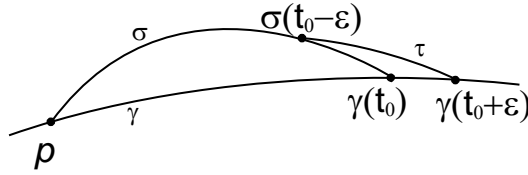
Entonces

$$\begin{aligned} \exp_p((t_0 + \varepsilon_j) \dot{\gamma}(0)) &= \gamma(t_0 + \varepsilon_j) \\ &= \sigma_j(t_0 + \varepsilon'_j) \\ &= \exp_p((t_0 + \varepsilon'_j) \dot{\sigma}_j(0)). \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $(t_0 + \varepsilon_j) \dot{\gamma}(0) = (t_0 + \varepsilon'_j) \dot{\sigma}_j(0)$ , i. e.,  $\dot{\gamma}(0) = \dot{\sigma}_j(0)$ . Eso implica que  $\gamma$  es una geodésica minimizante que une a  $p$  y  $\gamma(t_0 + \varepsilon_j)$ . Lo cual es una contradicción a la definición de  $t_0$ . Y así, se tiene el enunciado (a).

Por otro lado, supóngase que se cumple el enunciado (a), como una geodésica no es minimizante después del primer punto conjugado, el punto de corte de  $p$  a lo largo de  $\gamma$  tiene que ocurrir en  $\gamma(\bar{t})$  con  $\bar{t} \leq t_0$ .

Y ahora supóngase que el enunciado (b) se cumple. Sea  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeño para que  $\sigma(t_0 - \varepsilon)$  y  $\gamma(t_0 + \varepsilon)$  estén contenidos en una vecindad totalmente normal de  $\gamma(t_0)$  y considérese  $\tau$  la única geodésica minimizante que los une.



La curva que es unión del segmento geodésico sobre  $\sigma$  de  $p$  a  $\sigma(t_0 - \varepsilon)$  y  $\tau$  tiene longitud estrictamente menor a  $t_0 + \varepsilon$ . Esto porque si tuviera longitud mayor o igual a  $t_0 + \varepsilon$ ,

$$L(\sigma|_{[0, t_0 - \varepsilon]} \cup \tau) = t_0 - \varepsilon + L(\tau) \geq t_0 + \varepsilon,$$

querría decir que

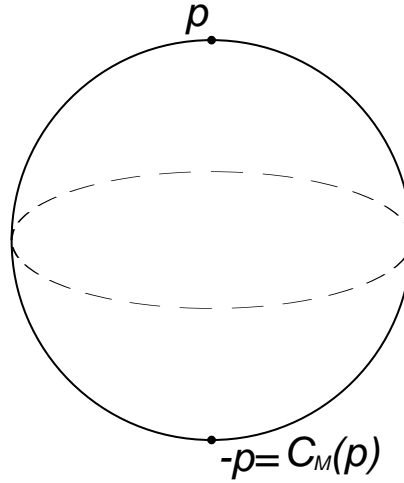
$$L(\tau) \geq 2\varepsilon.$$

Pero

$$L(\gamma|_{[t_0, t_0 + \varepsilon]}) + L(\sigma|_{[t_0 - \varepsilon, t_0]}) = 2\varepsilon \leq L(\tau).$$

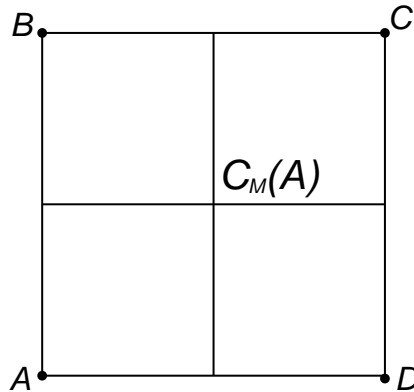
Así,  $\sigma(t_0 - \varepsilon)$  tendría que estar sobre  $\gamma$  y eso es una contradicción a que  $\gamma \neq \sigma$ . Por lo tanto, el punto de corte de  $p$  a lo largo de  $\gamma$  ocurre en  $\gamma(\bar{t})$  con  $\bar{t} \leq t_0$ . Q. E. D.

EJEMPLO. Si  $M = \mathbb{S}^n$  y  $p \in M$ , entonces  $C_M(p) = \{-p\}$ , el punto antipodal.



En este ejemplo cumple la afirmación (a) de la Proposición 3.2, porque  $-p$  es el primer punto conjugado a lo largo de cualquier geodésica que parte de  $p$ .

EJEMPLO. Sea  $M$  el toro plano que se obtiene al identificar los lados de opuestos de  $[0, 1] \times [0, 1]$ . Si  $A, B, C$  y  $D$  son los vértices del cuadrado, el mismo punto después de la identificación, entonces  $C_M(A)$  es la unión de los segmentos medianos de los segmentos  $AB$  y  $DA$ .



En este ejemplo cumple la afirmación (b) de la Proposición 3.2. En efecto, ningún punto de  $C_M(p)$  es punto conjugado y porque para todo punto de  $C_M(A)$  hay dos geodésicas minimizantes



distintas que unen a él con  $A$ . Por ejemplo, el centro del cuadrado es punto de corte de  $A$  y las dos mitades de la diagonal del cuadrado son geodésicas minimizantes distintas que los unen.

**COROLARIO 3.3.** *Si  $q$  es punto de corte de  $p$  a lo largo de  $\gamma$ , entonces  $p$  es punto de corte de  $q$  a lo largo de  $-\gamma$ , donde  $-\gamma$  es la geodésica  $\gamma$  recorrida en sentido contrario. Es decir,  $q \in C_M(p)$  si y sólo si  $p \in C_M(q)$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** Si  $q$  es un punto de corte de  $p$  a lo largo de  $\gamma$ , por la Proposición 3.2, se cumple uno de los siguientes enunciados:

- si  $q$  es el primer conjugado de  $p$  a lo largo de  $\gamma$ , entonces, por la Proposición 1.46,  $p$  es el primer punto conjugado de  $q$  a lo largo de  $-\gamma$  y de nuevo aplicando de manera inversa la Proposición 3.2, el punto de corte de  $q$  a lo largo de  $-\gamma$  no ocurre antes de  $p$ ;
- si existe una geodésica  $\sigma$  distinta a  $\gamma$  tal que  $L(\gamma) = L(\sigma) = d(p, q)$ , aplicando la proposición de manera inversa desde  $q$  usando  $-\gamma$  y  $-\sigma$ , entonces el punto de corte de  $q$  a lo largo de  $-\gamma$  no ocurre antes de  $p$ .

Pero además,  $L(-\gamma) = L(\gamma) = d(p, q)$  y, por lo tanto,  $p$  es el punto de corte de  $q$  a lo largo de  $-\gamma$ . Q. E. D.

**COROLARIO 3.4.** *Si  $q \in M \setminus C_M(p)$ , existe una única geodésica que une a  $p$  y  $q$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** Por la completitud de  $M$ , existe una geodésica minimizante de  $p$  a  $q$ . Si  $\gamma$  es tal geodésica, es única. Ésto porque si existiese otra, por la Proposición 3.2, el punto de corte de  $p$  a lo largo de  $\gamma$  ocurre antes de  $q$ , lo cual es una contradicción a que  $q \notin C_M(p)$  o a que  $\gamma$  sea minimizante. Q. E. D.

Gracias a esto, se tiene que  $\exp_p$  es inyectiva en una bola  $B_g(p, r)$  si y sólo si  $r$  es menor o igual a la distancia de  $p$  a  $C_M(p)$ . Así, a

$$i(M) = \inf_{p \in M} d(p, C_M(p))$$

se le llama el *radio de inyectividad de  $M$* .

Ahora, se va a definir una función que permitirá obtener varias propiedades más del lugar de corte. Defínase la función  $f: SM \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  de la siguiente manera:

$$f(p, V) = \begin{cases} t_0 & \text{si } \gamma_V(t_0) \text{ es punto de corte de } p \text{ a lo largo de } \gamma_V, \\ \infty & \text{si no existe el punto de corte de } p \text{ a lo largo de } \gamma_V, \end{cases}$$

donde

$$SM := \{(p, V) \in TM \mid |V|_g = 1\}$$

es el haz tangente unitario y a  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$  se le da la topología inducida por la base

$$\mathcal{B} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\} \cup \{(a, \infty) = (a, \infty) \cup \{\infty\} \mid a \in \mathbb{R}\}.$$

**OBSERVACIÓN 5.**  $[a, \infty]$  es compacto y que una sucesión  $t_n \rightarrow \infty$  si  $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \infty$

Antes de demostrar que  $f$  es continua, se mostrará el siguiente lema sobre sucesiones de puntos conjugados necesario para la demostración.

**LEMA 3.5.** *Sea  $\gamma_i$  una sucesión de geodésicas que converge a una geodésica  $\gamma$ , es decir,*

$$\gamma_i(0) \longrightarrow \gamma(0) = p$$

y

$$\dot{\gamma}_i(0) \longrightarrow \dot{\gamma}(0).$$

Si  $\gamma_i(t_0^i)$  es el primer punto conjugado de  $\gamma_i(0)$  a lo largo de  $\gamma_i$  y son tales que

$$\gamma_i(t_0^i) \longrightarrow \gamma(t_0).$$

Entonces  $\gamma(t_0)$  es el primer punto conjugado de  $p$  a lo largo de  $\gamma$ .

DEMOSTRACIÓN. Por la Proposición 1.44,  $\gamma_i(t_0^i)$  es punto conjugado de  $\gamma_i(0)$  si y sólo si  $V_0^i = t_0^i \dot{\gamma}_i(0)$  es punto crítico de  $(\exp_p)_*$ , i. e.,

$$(\exp_p)_* |_{V_0^i} W_i = 0$$

para algún  $W_i \in T_{V_0^i} T_p M \cong T_p M$ . Sin pérdida de generalidad se puede suponer que  $W_i$  tiene norma uno. Ahora, como  $\{W_i\}$  están en la esfera unitaria, un compacto, tienen una subsucesión convergente que se denotará igual.

Y si  $i$  tiende a infinito se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} 0 &= (\exp_p)_* |_{V_0^i} W_i = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \exp_p(V_0^i + sW_i) \\ &\quad \downarrow \\ (\exp_p)_* |_{V_0} W_i &= \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \exp_p(t_0 \dot{\gamma}(0) + sW). \end{aligned}$$

Eso implica que  $(\exp_p)_* |_{\dot{\gamma}(0)t_0} W = 0$ , donde  $W$  es el límite de la sucesión  $\{W_i\}$ . Que a su vez implica que  $t_0 \dot{\gamma}(0)$  es punto crítico de  $(\exp_p)_*$ . Por lo tanto,  $\gamma(t_0)$  es punto conjugado de  $p$  a lo largo de  $\gamma$ . Q. E. D.

PROPOSICIÓN 3.6. *f es continua.*

DEMOSTRACIÓN. Considérese las sucesiones  $\gamma_i(0) \rightarrow \gamma(0)$  y  $\dot{\gamma}_i(0) \rightarrow \dot{\gamma}(0)$ , donde  $\gamma_i$  y  $\gamma$  son geodésicas. Sean  $\gamma_i(t_0^i)$  los puntos de corte de  $\gamma_i(0)$  a lo largo de  $\gamma_i$ . Además, sea  $\gamma(t_0)$  el punto de corte de  $\gamma(0)$  a lo largo de  $\gamma$ . Por la definición de punto de corte nótese que  $t_0, t_0^i \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ .

Se demostrará que  $t_0^i \rightarrow t_0$  si  $i \rightarrow \infty$  y así se tendría la continuidad. El primer paso será demostrar que  $\limsup t_0^i \leq t_0$ . Si  $t_0 = \infty$ , se tiene ya el resultado. Si  $t_0 \neq \infty$ , sea  $\varepsilon > 0$  y obsérvese que  $t_0 + \varepsilon < t_0^j$  para un número finito de  $j$ . Si no fuera un número finito, se tendría que

$$d(\gamma_j(0), \gamma_j(t_0 + \varepsilon)) = t_0 + \varepsilon$$

para un número infinito de  $j$ , porque  $\gamma_j(t_0 + \varepsilon)$  no es punto de corte y  $t_0 + \varepsilon < t_0^j$ . Y por la continuidad de  $d$ ,

$$d(\gamma(0), \gamma(t_0 + \varepsilon)) = t_0 + \varepsilon.$$

Lo cual es una contradicción a la definición de  $t_0$ . Así,  $\limsup t_0^i \leq t_0 + \varepsilon$  para todo  $\varepsilon$  y, por lo tanto,

$$\limsup t_0^i \leq t_0.$$

Como segundo paso, si  $\bar{t} = \liminf t_0^i$ , se demostrará que  $t_0 \leq \bar{t}$  y así,

$$t_0 \leq \liminf t_0^i \leq \limsup t_0^i \leq t_0,$$

i. e.,  $t_0^i$  converge a  $t_0$  y se tiene lo que se quería.

Si  $\bar{t} = \infty$ , entonces el resultado ya se tiene. Si  $\bar{t} < \infty$ , sea  $\bar{t}_0^i$  subsucesión de  $t_0^i$  tal que  $\bar{t}_0^i$  converge a  $\bar{t}$ . Por el Lema 3.5, si para una subsucesión como antes se tiene que  $\gamma_i(\bar{t}_0^i)$  es punto conjugado de  $\gamma_i(0)$  a lo largo de  $\gamma_i$ , entonces  $\gamma(\bar{t})$  es punto conjugado de  $\gamma(0)$  a lo largo de  $\gamma$  y por lo tanto, por la Proposición 3.2,  $\bar{t} \geq t_0$ .

Si no se cumple que  $\gamma_i(\bar{t}_0^i)$  sea el punto conjugado de  $\gamma_i(0)$  a lo largo de  $\gamma_i$ , por la Proposición 3.2, existen geodésicas minimizantes  $\sigma_i$  distintas a  $\gamma_i$  tal que  $\sigma_i(0) = \gamma_i(0)$ ,  $\sigma_i(\bar{t}_0^i) = \gamma_i(\bar{t}_0^i)$  y  $L(\sigma_i) = L(\gamma_i)$ .

Además, por el Lema 3.1,  $\sigma_i$  contiene una subsucesión que converge a  $\sigma$ , donde  $\sigma$  es una geodésica minimizante que une a  $\gamma(0)$  y  $\gamma(\bar{t})$ . A esta subsucesión se le denotará igual. Si  $\gamma \neq \sigma$ , por la Proposición 3.2,  $t_0 \leq \bar{t}$ . Si  $\gamma = \sigma$ , de manera análoga a como se demostró la Proposición 3.2, se tiene que  $\gamma(0)$  es punto conjugado de  $\gamma(\bar{t})$  y  $t_0 \leq \bar{t}$ . Q. E. D.

**COROLARIO 3.7.** *Para todo  $p \in M$ ,  $C_M(p)$  es cerrado. Si además  $M$  es compacta, entonces  $C_M(p)$  es compacto.*

**DEMOSTRACIÓN.** Lo primero a observar es que a  $C_M(p)$  se le puede ver como

$$C_M(p) = \{\gamma(t) | \gamma: [0, \infty) \rightarrow M \text{ es geodésica tal que } \gamma(0) = p \text{ y } t = f(p, \dot{\gamma}(0)) < \infty\}.$$

Sea  $q \in M$  tal que  $\gamma_i(t_0^i)$  converge a  $q$  y donde  $\gamma_i(t_0^i)$  es el punto de corte de  $p$  a lo largo de la geodésica  $\gamma_i$  que parte de  $p$  y  $t_0^i = f(p, \dot{\gamma}_i(0))$ . Se demostrará que  $q \in C_M(p)$ .

Usando el Lema 3.1, se puede obtener una subsucesión de geodésicas  $\gamma_i$ , denotada igual, que converge a  $\gamma$ . Como  $f$  es continua

$$\begin{aligned} q &= \lim_{i \rightarrow \infty} \gamma_i(f(p, \dot{\gamma}_i(0))) = \lim_{i \rightarrow \infty} \exp_p(f(p, \dot{\gamma}_i(0))\dot{\gamma}_i(0)) \\ &= \exp_p(f(p, \dot{\gamma}(0))\dot{\gamma}(0)) = \gamma(f(p, \dot{\gamma}(0))). \end{aligned}$$

Así,  $q \in C_M(p)$  y, por lo tanto,  $C_M(p)$  es cerrada.

Si  $M$  es compacta, como  $C_M(p)$  es cerrado,  $C_M(p)$  es compacto. Q. E. D.

**COROLARIO 3.8.** *Si  $M$  es completa y tiene un punto  $p$  tal que tiene puntos de corte en todas las geodésicas, entonces  $M$  es compacta.*

**DEMOSTRACIÓN.** Como existe  $p \in M$  que tiene punto de corte en cada geodésica que parte de  $\gamma$ , obsértese que

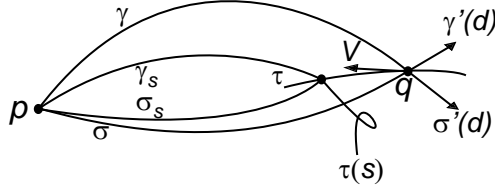
$$M = \bigcup \{\gamma(t) | \gamma: [0, \infty) \rightarrow M \text{ es geodésica tal que } \gamma(0) = p \text{ y } t \leq f(p, \dot{\gamma}(0))\}.$$

Así,  $M$  es cerrada. Como  $f$  es continua y por la existencia de  $p$ ,  $f$  es acotada. Y, por lo tanto,  $M$  es acotada. Finalmente, por el teorema de Hopf-Rinow,  $M$  es compacta. Q. E. D.

**PROPOSICIÓN 3.9.** *Sea  $p \in M$ . Supóngase que existe un punto  $q \in C_M(p)$  tal que  $d(p, q) = d(p, C_M(p))$ . Entonces se cumple uno de los siguientes enunciados:*

- (a) *Existe una geodésica minimizante  $\gamma$  de  $p$  a  $q$  tal que a lo largo de ella  $q$  es punto conjugado de  $p$ .*
- (b) *Existen exactamente dos geodésicas minimizantes  $\gamma$  y  $\sigma$  de  $p$  a  $q$ . Además,  $\dot{\gamma}(d) = -\dot{\sigma}(d)$  con  $d = d(p, q)$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** Sea  $\gamma$  una geodésica minimizante de  $p$  a  $q$ . Por la Proposición 3.2, o  $q$  es punto conjugado de  $p$  y se cumple (a) o existe  $\sigma$  geodésica minimizante distinta a  $\gamma$  de  $p$  a  $q$  con  $L(\sigma) = L(\gamma)$  y se demostrará que se cumple (b). Así, supóngase que  $q$  no es punto conjugado de  $p$  a lo largo de  $\gamma$  y  $\sigma$ , y que  $\dot{\gamma}(d) \neq -\dot{\sigma}(d)$ .



Como  $\dot{\gamma}(d) \neq -\dot{\sigma}(d)$ , entonces existe  $V \in T_q M$  tal que  $|V|_g = 1$ ,  $g(V, \dot{\gamma}(d)) < 0$  y  $g(V, \dot{\sigma}(d)) < 0$ . Sea  $\tau: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  una curva tal que  $\tau(0) = q$  y  $\dot{\tau}(0) = V$ .

Existe  $U \subset T_p M$  vecindad de  $d\dot{\gamma}(0)$  donde  $\exp_p$  es difeomorfismo, pues  $q$  no es punto conjugado de  $p$  a lo largo de  $\gamma$ . Sea  $\eta: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$  la curva en  $U$  dada por  $\eta(s) = \exp_p^{-1}(\tau(s))$  y sea  $\gamma_s(t) = \exp_p(\frac{t}{d}\eta(s))$ ,  $t \in [0, d]$ , una variación por geodésicas de  $\gamma$ . Por la fórmula de primera variación,

$$\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \mathcal{L}(\gamma_s) = g(V, \dot{\gamma}(d)) < 0.$$

Análogamente, como  $q$  no es punto conjugado de  $p$  a lo largo de  $\sigma$ , se tiene la variación por geodésicas  $\sigma_s(t)$  que cumple lo siguiente:

$$\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \mathcal{L}(\sigma_s) = g(V, \dot{\sigma}(d)) < 0.$$

Por lo tanto, si  $s$  es suficientemente pequeña,

$$L(\gamma_s) < L(\gamma) \quad \text{y} \quad L(\sigma_s) < L(\sigma).$$

Se tienen tres casos, el primero es si  $L(\sigma_s) = L(\gamma_s)$ . Por la Proposición 3.2, el punto  $\tau(s) = \gamma_s(d)$  es punto de corte de  $p$  a lo largo de  $\gamma_s$ . Y,

$$d(p, \gamma_s(d)) = L(\gamma_s) < L(\gamma) = d(p, C_M(p)).$$

Lo cual es una contradicción, ya que  $d(p, C_M(p)) = \inf_{q \in C_M(p)} d(p, q)$ .

Si  $L(\gamma_s) < L(\sigma_s)$ , entonces  $\sigma_s$  no es minimizante. Por lo tanto, existe  $\sigma_s(\bar{t})$ ,  $\bar{t} < d$ , tal que  $\sigma_s(\bar{t})$  es el punto de corte de  $p$  a lo largo de  $\sigma_s$  y así,

$$d(p, \sigma_s(\bar{t})) < d(p, \sigma_s(d)) < L(\sigma_s) < L(\sigma) = d(p, C_M(p)).$$

Lo que es de nuevo una contradicción.

Finalmente, el caso  $L(\gamma_s) > L(\sigma_s)$  es totalmente análogo al anterior. Obsérvese que la contradicción salió de suponer que  $\dot{\gamma}(d) \neq -\dot{\sigma}(d)$ , entonces tienen que ser iguales y, por lo tanto, sólo son dos geodésicas de  $p$  a  $q$ . Q. E. D.

**LEMA 3.10.** *El haz tangente unitario  $SM$  de una  $n$ -variedad riemanniana compacta es compacto.*

**DEMOSTRACIÓN.** Por la trivialidad local de haz tangente, para cada  $p \in M$  existe  $U_p \subset M$  vecindad de  $p$  tal que  $\pi^{-1}(U_p)$  es difeomorfo a  $U_p \times \mathbb{R}^n$ , donde  $\pi$  es la proyección del haz.

Para cada  $U_p$  se puede escoger una vecindad  $V_p$  tal que

$$V_p \subset \bar{V}_p \subset U_p.$$

Así,  $\{V_p\}_{p \in M}$  es una cubierta abierta de  $M$  y, por la compacidad de  $M$ , ésta tiene una subcubierta finita  $\{V_{p_i}\}_{i \in \{1, \dots, N\}}$ . Más aún,

$$M \subset \bar{V}_{p_1} \cup \dots \cup \bar{V}_{p_N}.$$

En consecuencia,  $TM$  es difeomorfo localmente a  $\bar{V}_{p_i} \times \mathbb{R}^n$  para todo  $i \in \{1, \dots, N\}$ .

Finalmente, el haz tangente unitario puede verse como

$$\bigcup_{i \in \{1, \dots, N\}} \bar{V}_{p_i} \times S^{n-1},$$

que es compacto.

Q. E. D.

**PROPOSICIÓN 3.11.** *Si la curvatura seccional  $K$  de una variedad riemanniana completa  $M$  satisface*

$$0 < K_{\min} \leq K \leq K_{\max},$$

entonces

(a)  $i(M) \geq \frac{\pi}{\sqrt{K_{\max}}}$ , o

(b) existe  $\gamma$  una geodésica cerrada en  $M$  cuya longitud es menor o igual a la de cualquier otra geodésica cerrada en  $M$  y es tal que

$$i(M) = \frac{1}{2}L(\gamma).$$

**DEMOSTRACIÓN.** Por el teorema de Bonnet, ya que  $K \geq K_{\min}$ ,  $M$  es compacta. Como  $SM$  es compacto, entonces existe  $p \in M$  tal que

$$d(p, C_M(p)) = \inf_{r \in M} d(r, C_M(r)).$$

Además, como  $C_M(p)$  es compacto, existe  $q \in C_M(p)$  tal que  $d(p, C_M(p)) = d(p, q)$ . De aquí se obtienen dos casos, que  $q$  sea punto conjugado de  $p$  o que no lo sea.

Supóngase primero que  $q$  es punto conjugado de  $p$ . Por la Proposición 2.4,

$$d(p, q) \geq \frac{\pi}{\sqrt{K_{\max}}}.$$

Ahora supóngase que  $q$  no es punto conjugado de  $p$ . Por la proposición anterior, existen exactamente dos geodésicas minimizantes distintas  $\gamma$  y  $\sigma$  que unen a  $p$  y  $q$  tales que  $\dot{\gamma}(d) = -\dot{\sigma}(d)$ , donde  $d = d(p, q)$ .

Como  $q \in C_M(p)$ , entonces  $p \in C_M(q)$  y, por definición de  $C_M(q)$ ,  $p$  es tal que

$$d(p, C_M(q)) = d(p, q).$$

Así,  $\dot{\gamma}(0) = -\dot{\sigma}(0)$  y finalmente  $\gamma$  y  $\sigma$  forman una geodésica cerrada. Esta geodésica cumple, por como se encontró, que

$$i(M) = \frac{1}{2}L(\gamma \cup \sigma).$$

Q. E. D.



## Estimación de Klingenberg

El siguiente paso es, a partir de lo ya desarrollado, calcular hasta donde el mapeo exponencial es difeomorfismo, i. e., estimar el radio de inyectividad. La estimación que se da aquí se llama estimación de inyectividad de Klingenberg y se calcula en dos casos, el primero para variedades dimensión par mayor que dos y el segundo para variedades de cualquier dimensión mayor o igual a 3.

### 1. Caso par

PROPOSICIÓN 4.1. *Si la curvatura seccional  $K$  de una  $n$ -variedad riemanniana  $M$  compacta, simplemente conexa y de dimensión par, satisface que*

$$\frac{1}{4} < K \leq 1.$$

Entonces  $i(M) \geq \pi$ .

DEMOSTRACIÓN. Como  $M$  es compacta, existen  $p, q \in M$  tal que  $q \in C_M(p)$  e  $i(M) = d_g(p, q) = d$ . Así, se procede por contradicción y se supone que  $d < \pi$ .

Si  $q$  es conjugado de  $p$ , entonces, por la Proposición 2.4,  $\pi \leq d$ . Lo cual es una contradicción. En consecuencia,  $q$  no puede ser punto conjugado de  $p$  y, por las Proposiciones 3.9 y 3.11, existe una geodésica cerrada  $\gamma: [0, l] \rightarrow M$  que pasa por  $p = \gamma(0)$  y por  $q$  tal que  $L(\gamma) < 2\pi$ .

En  $p$  considérese el conjunto de vectores unitarios en  $T_p M$  tales que son ortogonales a  $\dot{\gamma}(0)$ . Estos forman una esfera de dimensión  $n - 2$ , porque son unitarios y esto reduce en uno la dimensión, y son ortogonales, que también reduce en uno la dimensión. Así, usando el transporte paralelo de estos vectores dando una vuelta, se obtiene una transformación ortogonal de la  $n - 2$ -esfera en si misma. Como  $M$  es de dimensión par y es orientable, la dimensión de la esfera también es par y la transformación tiene determinante 1. Esto último implica que al menos uno de sus eigenvalores es uno, i.e., existe un vector  $f$  fijo bajo la transformación. Ahora, haciendo el transporte paralelo de  $f$  a lo largo de  $\gamma$ , se obtiene en cada punto de  $\gamma$  un vector unitario  $g$ -ortogonal a  $\gamma$ . Se define una banda de dimensión 2, delimitada por  $\gamma$ , asignando a cada punto de  $\gamma$  un segmento geodésico en la dirección del vector  $f$  trasladado a ese punto. En esta banda se considera la familia de curvas cerradas  $\gamma_s$  que consisten en los puntos que están a una distancia fija de  $\gamma$ . Claramente, estas curvas tienen como curva límite a  $\gamma$ .

Cada una de estas curvas  $\gamma_s$  tienen longitud menor a la de  $\gamma$ . Para ver esto, nótese primero que como  $\gamma$  es geodésica, entonces

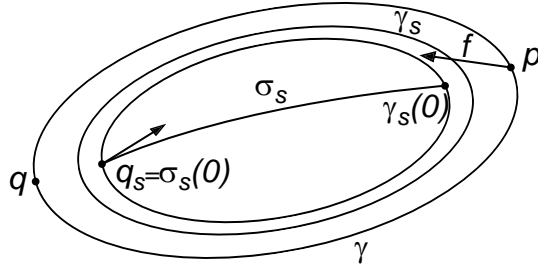
$$\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \mathcal{L}(\Gamma_s) = 0,$$

donde  $\Gamma_s$  es la variación dada por las  $\gamma_s$ . Usando la fórmula de segunda variación y recordando que la curvatura es positiva se tiene que

$$\frac{d^2}{ds^2} \Big|_{s=0} \mathcal{L}(\Gamma_s) = \int_a^b -\mathcal{R}\mathcal{M}(V^\perp, \dot{\gamma}, \dot{\gamma}, V^\perp) dt < 0,$$

donde  $V$  es el campo de variaciones de  $\Gamma_s$ , el campo paralelo generado por  $f$  y extendido a todo la banda con el campo vectorial tangente a todos los segmentos geodésicos de la construcción de la banda. Por lo tanto,  $\gamma$  maximiza el funcional de longitud, i. e.,

$$L(\gamma_s) < L(\gamma).$$



Sea  $q_s$  el punto de  $\gamma_s$  a distancia máxima de  $\gamma_s(0)$ . Como  $d(\gamma_s(0), q_s) < i(M)$ , existe una única geodésica minimizante  $\sigma_s$  que une a  $q_s = \sigma_s(0)$  y  $\gamma_s(0)$ . Ya que  $q$  es el único punto de  $\gamma$  con distancia máxima a  $p$ ,  $q_s \rightarrow q$ . Además, por la compacidad local de haz tangente, que se tiene porque localmente el haz tangente es  $U \times \mathbb{R}^n$  con  $U \subset M$ , existe  $\omega \in T_q$  tal que es punto de acumulación de los vectores  $\dot{\sigma}_s(0)$ . Por la continuidad de la variedad, la geodésica  $\sigma(t) = \exp_q(t\omega)$  es una geodésica minimizante que une a  $q$  con  $p$ .

Por otro lado, sean  $\sigma_{s,t}$  geodésicas minimizantes que unen a  $\gamma_s(0)$  con  $\gamma_s(t)$ , con  $t$  de manera que  $\gamma_s(t)$  es muy cerca de  $q_s$ . Por consiguiente,  $\sigma_{s,t}$  es una variación de  $\sigma_s$  y, usando la fórmula de primera variación de manera análoga al Lema 5.3, se tiene que  $\dot{\sigma}_s(0)$  es  $g$ -ortogonal a  $\dot{\gamma}_s$  en  $q_s$ . Y, por lo tanto,  $\sigma(0)$  es  $g$ -ortogonal a  $\dot{\gamma}$  en  $q$ . De esta manera, habrían tres geodésicas minimizantes de  $p$  a  $q$  y, como  $q$  no es conjugado de  $p$ , contradice la Proposición 3.9. Q. E. D.

## 2. Caso general

Ahora, se procede con el segundo caso, para lo cual se utiliza herramienta de la teoría de Morse. Antes de hacer propiamente el cálculo, se demuestran los siguientes lemas.



LEMA 4.2. Sean  $M$  y  $\tilde{M}$  variedades riemannianas de la misma dimensión y tales que sus curvaturas seccionales  $K$  y  $\tilde{K}$ , respectivamente, satisfacen

$$\sup \tilde{K} \leq \inf K.$$

Considérese una geodésica  $\sigma: [0, l] \rightarrow M$ ,  $\sigma(0) = p$ , y fíjese un punto  $\tilde{p} \in \tilde{M}$ . Sean  $i: T_p M \rightarrow T_{\tilde{p}} \tilde{M}$  una isometría lineal y sea  $\tilde{\sigma}: [0, l] \rightarrow \tilde{M}$  dada por

$$\tilde{\sigma}(t) = \exp_{\tilde{p}} t(i\dot{\sigma}(0)).$$

Entonces el índice de  $\sigma$  es mayor o igual al índice de  $\tilde{\sigma}$ .

DEMOSTRACIÓN. Sea  $\tilde{W}$  un campo diferenciable por pedazos a lo largo de  $\tilde{\sigma}$ . Defínase un campo vectorial  $W$  a lo largo de  $\sigma$  como

$$W(t) := \phi^{-1}(\tilde{W})(t) = P_t \circ i^{-1} \circ \tilde{P}_t^{-1}(\tilde{W}),$$

donde  $P_t$  es el transporte paralelo a lo largo de  $\sigma$ , y  $\phi$  satisface (11) y (12). De ahí que

$$g(W, \dot{\sigma}) = \tilde{g}(\tilde{W}, \dot{\tilde{\sigma}}), \quad |W(t)|_g = |\tilde{W}(t)|_{\tilde{g}} \quad \text{y} \quad g(D_t W, D_t W) = \tilde{g}(D_t \tilde{W}, D_t \tilde{W}).$$

Debido al hecho de que  $\sup \tilde{K} \leq \inf K$ , se tiene que

$$I(W, W) \leq \tilde{I}(\tilde{W}, \tilde{W}).$$

Así, si  $\tilde{I}(\tilde{W}, \tilde{W}) < 0$ , entonces  $I(W, W) < 0$ .

Por lo tanto, la dimensión máxima de los subespacios de  $\mathbb{V}$  donde  $I$  es negativa es al menos siempre la dimensión máxima de los subespacios de  $\tilde{\mathbb{V}}$  donde  $\tilde{I}$  es negativa. Q. E. D.

Ahora, como ya se había mencionado, se hará uso de herramientas de teoría de Morse que se puede consultar para más detalles en [Milnor].

DEFINICIÓN. Sea  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable, donde  $M$  es una variedad diferenciable. Un punto  $p \in M$  es un *punto crítico* de  $f$  si  $df(p) = 0$ . A  $f(p)$  se le llama *valor crítico* de  $f$  en  $p$ . Si  $(U, \varphi)$  es una carta en  $M$  y  $p \in U$ , a la matriz  $(\partial_i \partial_j|_p(f))$  se le llama el *hessiano* de  $f$ , que representa una forma simétrica bilinear en  $T_p M$  y no depende de las coordenadas. Se dice que un punto crítico  $p$  es *no-degenerado* si el determinante del hessiano es distinto de cero.

Un punto crítico  $p \in M$  no-degenerado de una función diferenciable  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  es aislado y se puede escoger una carta  $(U, \varphi)$  en  $p$  y por ende un sistema de coordenadas,  $\{\partial_1, \dots, \partial_{n-\lambda}, \partial_{n-\lambda+1}, \dots, \partial_n\}$ , de manera que en este sistema  $f$  es escrita como

$$f(x_1, \dots, x_n) = f(p) + x_1^2 + \dots + x_{n-\lambda}^2 - x_{n-\lambda+1}^2 - \dots - x_n^2,$$

donde  $(x_1, \dots, x_n) = \varphi(q)$  con  $q \in U$ .

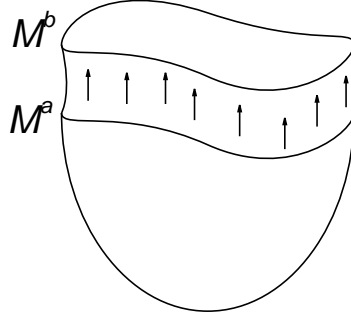
DEFINICIÓN. A este  $\lambda$  se le llama el *índice* del punto crítico no-degenerado.

OBSERVACIÓN 6. Este  $\lambda$  es la dimensión del espacio vectorial donde el hessiano es negativo, es decir, el índice del hessiano como forma bilinear simétrica.

OBSERVACIÓN 7. Supongase que  $f^{-1}([a_1, a_2])$  es compacto y no contiene puntos críticos de  $f$ . Usando el campo vectorial gradiente de  $f$  caracterizado por

$$df(Y) = g(\text{grad} f, Y) \quad \text{para todo } Y \in TM,$$

localmente dado por  $\text{grad} f = g^{ij} \partial_i f \partial_j$ , se obtiene una función  $h: M^{a_2} \rightarrow M^{a_1}$  que es una retracción por deformación, i. e.,  $h|_{M^{a_1}} = Id|_{M^{a_1}}$  y existe una función continua, llamada homotopía,  $H: [0, 1] \times M^{a_2} \rightarrow M^{a_2}$  tal que  $H(0, x) = x$  y  $H(1, x) = h(x)$ .



LEMA 4.3. Sea  $M$  una  $n$ -variedad diferenciable y sea  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable cuyos puntos críticos son no-degenerados. Sean  $p, q \in M$  y una curva diferenciable  $\gamma: [0, 1] \rightarrow M$  con  $\gamma(0) = p$  y  $\gamma(1) = q$ . Sea  $a = \max\{f(p), f(q)\}$  y considérese

$$M^a = \{x \in M \mid f(x) \leq a\},$$

además sea

$$b = \max_{t \in [0, 1]} \{f \circ \gamma(t)\}.$$

Supóngase que  $f^{-1}([a, b])$  es compacto y no contiene puntos críticos no-degenerados de índice 0 ó 1. Entonces para todo  $\delta > 0$ ,  $\gamma$  es homotópica con extremos fijos a una curva  $\tilde{\gamma}$  tal que  $\tilde{\gamma}([0, 1]) \subset M^{a+\delta}$ .

DEMOSTRACIÓN. Sea  $g$  una métrica para  $M$ .

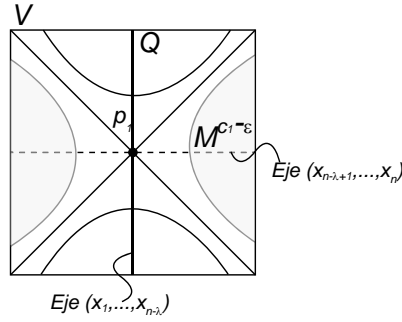
Si  $b \leq a$ , entonces para toda  $\delta > 0$  se tiene  $\tilde{\gamma}([0, 1]) = \gamma([0, 1]) \subset M^{a+\delta}$ . Así, supóngase que  $b > a$ . Sean  $p_1, \dots, p_k$  los puntos críticos de  $f$  en  $M^b \setminus M^a$  con valores críticos de  $f(p_i) = c_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ . Como los puntos críticos son aislados, entonces se puede perturbar a  $f$  de modo que los  $c_i$  sean distintos dos a dos. Supóngase pues que

$$b \geq c_1 > c_2 > \dots > c_k > a.$$

Si  $b$  no es valor crítico de  $f$ , entonces  $f^{-1}([c_1 + \varepsilon, b])$  no contiene puntos críticos de  $f$  para  $\varepsilon$  suficientemente pequeña. De la Observación 7 se tiene una retracción por deformación  $h^1: M^b \rightarrow M^{c_1+\varepsilon}$  y la curva  $\gamma_1 = h^1 \circ \gamma$  está en  $M^{c_1+\varepsilon}$ . De aquí se continuaría el proceso con  $c_1$  usando el siguiente caso.

Si  $b = c_1$  es valor crítico de  $f$ , por hipótesis, el punto crítico correspondiente  $p_1$  tiene índice  $\lambda \geq 2$ . Sea  $V$  una vecindad de  $p_1$  tal que  $f$  puede ser escrita ahí como

$$f(x_1, \dots, x_n) = c_1 + x_1^2 + \dots + x_{n-\lambda}^2 - x_{n-\lambda+1}^2 - \dots - x_n^2.$$



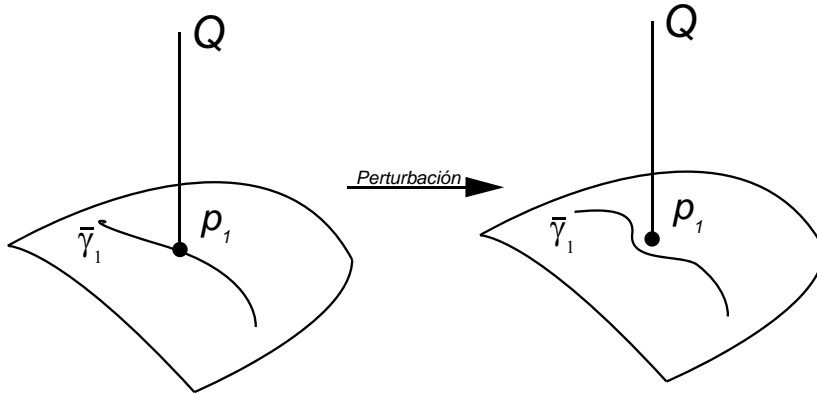
Supóngase que  $V$  y  $\epsilon > 0$  son tales que  $M^{c_1+\epsilon} \setminus (M^{c_1-\epsilon} \cup V)$  no contiene puntos críticos. Así, de la misma manera que en la Observación 7, con el campo vectorial gradiente a  $f$  se obtiene una retracción por deformación  $\bar{h}^1: M^{c_1+\epsilon} \rightarrow M^{c_1-\epsilon} \cup V$ . Considérese ahora  $\bar{\gamma}_1 = \bar{h}^1 \circ \gamma \subset M^{c_1-\epsilon} \cup V$ .

Ahora, sea  $Q$  el conjunto de puntos de  $V$  donde  $x_{n-\lambda} = x_{n-\lambda+1} = \dots = x_n = 0$ . Como

$$\dim(\text{generado por } \dot{\bar{\gamma}}_1) + \dim Q \leq 1 + n - 2 < \dim(M),$$

es decir, la codimensión de  $Q$  es al menos 2. Entonces, por transversalidad, se puede perturbar a  $\bar{\gamma}_1$  de modo que

$$\bar{\gamma}_1([0, 1]) \cap Q = \emptyset.$$



Además esta perturbación se puede hacer en  $V$  haciendo que los extremos de  $\bar{\gamma}_1$  queden fijos, ya que los extremos no están en  $Q$ .

Obsérvese que para los puntos fuera de  $Q$ , i.e., los puntos de  $M^{c_1-\epsilon} \cup (V \setminus Q)$ , las trayectorias tangentes al campo vectorial gradiente  $\text{grad } f$  se alejan del punto crítico  $p_1$ . Por lo tanto, existe una retracción por deformación

$$h^2: M^{c_1-\epsilon} \cup (V \setminus Q) \rightarrow M^{c_1-\epsilon}.$$

Así, la curva  $\gamma_2 = h^2 \circ \bar{\gamma}_1$  es homotópica con extremos fijos a  $\bar{\gamma}_1$  y  $\gamma_2[0, 1] \subset M^{c_1-\epsilon}$ .

Continuando este proceso inductivamente, se obtiene una curva  $\gamma_j \subset M^{c_k - \varepsilon}$ . Dado  $\delta > 0$ , no hay puntos críticos en  $M^{c_k - \varepsilon} \setminus M^{a+\delta}$ , porque  $M^{c_k - \varepsilon} \setminus M^{a+\delta}$  es vacío o por como se construyó  $M^{c_k - \varepsilon}$ .

Finalmente, lo anterior induce un retracto de deformación

$$h^{j+1}: M^{c_k - \varepsilon} \rightarrow M^{a+\delta}$$

y  $\tilde{\gamma}[0, 1] = h^{j+1} \circ \gamma_j([0, 1]) \subset M^{a+\delta}$ .

Q. E. D.

OBSERVACIÓN 8. Si la función llega a tener puntos críticos de índice 0 ó 1 en  $f^{-1}([a, b])$  y  $c$  es el valor crítico mayor, entonces, usando el mismo argumento que en el lema, se obtiene una curva  $\tilde{\gamma}$  homotópica a  $\gamma$  tal que  $\tilde{\gamma}([0, 1]) \subset M^{c+\delta}$ .

LEMA 4.4 (Klingenberg). *Sea  $M$  una variedad riemanniana completa con curvatura seccional  $K \leq K_0$ , donde  $K_0$  es una constante positiva. Sean  $p, q \in M$ . Además sean  $\gamma_0$  y  $\gamma_1$  dos geodésicas distintas que unen a  $p$  y  $q$  tal que  $L(\gamma_0) \leq L(\gamma_1)$ . Supóngase que estas curvas son homotópicas, es decir, existe una función continua  $H: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow M$ ,  $H(t, s) = H_t(s)$ , tal que  $H_0 = \gamma_0$  y  $H_1 = \gamma_1$ ,  $H_t(0) = p$  y  $H_t(1) = q$  para toda  $t \in [0, 1]$ . Entonces existe  $t_0 \in [0, 1]$  tal que*

$$L(\gamma_0) + L(H_{t_0}) \geq \frac{2\pi}{\sqrt{K_0}}.$$

DEMOSTRACIÓN. Si  $L(\gamma_0) \geq \frac{\pi}{\sqrt{K_0}}$ , entonces  $t_0 = 0$ , i. e.,

$$L(\gamma_0) + L(H_0) = L(\gamma_0) + L(\gamma_0) \geq \frac{2\pi}{\sqrt{K_0}}.$$

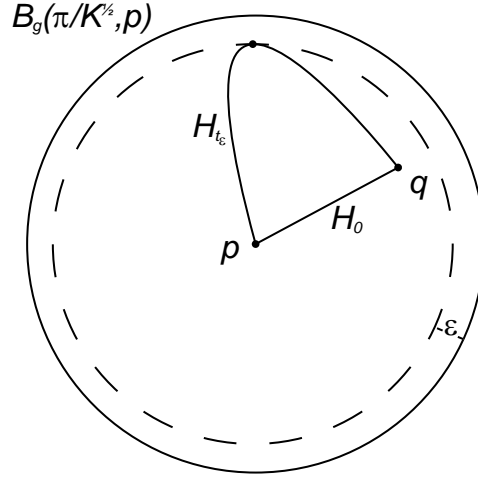
Supóngase entonces que

$$L(\gamma_0) < \frac{\pi}{\sqrt{K_0}} - \varepsilon \quad \text{con } \varepsilon > 0.$$

Por la Proposición 2.4, como  $K \leq K_0$ ,

$$\exp_p: B_e\left(\frac{\pi}{\sqrt{K_0}}, 0\right) \rightarrow B_g\left(\frac{\pi}{\sqrt{K_0}}, p\right)$$

es un difeomorfismo y  $\gamma_0(t) = \exp_p(tV)$ , con  $V = \dot{\gamma}_0(0)$ . Como  $\gamma_0(0) = \gamma_1(0) = p$ ,  $\gamma_0(1) = \gamma_1(1) = q$  y son geodésicas distintas, entonces la curva  $\gamma_1$  no está contenida en  $\bar{B}_g(\frac{\pi}{\sqrt{K_0}} - \varepsilon, p)$ . Sea  $t_\varepsilon$  el mínimo punto de  $[0, 1]$  tal que la curva  $H_{t_\varepsilon}$  interseca a  $\partial B_g(\frac{\pi}{\sqrt{K_0}}, p)$ . Entonces la curva  $H_{t_\varepsilon}$  está contenida en  $\bar{B}_g(\frac{\pi}{\sqrt{K_0}} - \varepsilon, p)$ .



Sean  $\tilde{M} = \mathbb{S}_{r_0}^n$ , con  $r_0 = 1/\sqrt{K_0}$  y  $S = (0, \dots, 0, -r_0)$ , el polo sur. Fíjese una isometría  $i: T_p M \rightarrow T_S \tilde{M}$  y considérense las curvas en  $\tilde{M}$

$$\tilde{\gamma}_0 := \exp_S \circ i \circ \exp_p^{-1} \circ \gamma_0$$

y

$$\tilde{H}_{t_\epsilon} := \exp_S \circ i \circ \exp_p^{-1} \circ H_{t_\epsilon}.$$

Por la construcción de  $\tilde{H}_{t_\epsilon}$ , ésta contiene un punto que dista  $\epsilon$  del polo norte y termina en el mismo punto que  $\tilde{\gamma}_0$ . Además nótese que  $\tilde{\gamma}_0$  es un segmento de un meridiando de la esfera  $\tilde{M}$ . Por lo tanto,

$$L(\tilde{H}_{t_\epsilon}) + L(\tilde{\gamma}_0) \geq 2\left(\frac{\pi}{\sqrt{K_0}} - \epsilon\right).$$

Aplicando la Proposición 2.5,

$$L(H_{t_\epsilon}) + L(\gamma_0) \geq 2\left(\frac{\pi}{\sqrt{K_0}} - \epsilon\right).$$

Sea  $\epsilon_k \rightarrow 0$ . Como  $\{t_{\epsilon_k}\} \subset [0, 1]$ , ésta contiene una subsucesión denotada igual que converge a  $t_0 \in [0, 1]$ . Finalmente se cumple que

$$L(H_{t_0}) + L(\gamma_0) \geq \frac{2\pi}{\sqrt{K_0}}.$$

Q. E. D.

### Reducción a dimensión finita

Considérese el conjunto de trayectorias de  $p$  a  $q$

$$\Sigma_{p,q}^c := \{\sigma: [0, 1] \rightarrow M \mid \sigma(0) = p, \sigma(1) = q, \sigma \text{ es admisible y } L(\sigma) \leq c\}.$$

Este conjunto se puede remplazar por una variedad de dimensión finita como sigue.

Las curvas en  $\Sigma_{p,q}^c$  están contenidas en un subconjunto compacto  $Q$  de  $M$ . Sea  $\delta > 0$  tal que, para cualesquiera dos puntos en  $Q$  cuya distancia es menor a  $\delta$ , existe una única geodésica

minimizante que los une. Con esta  $\delta$  se subdivide  $[0, 1]$  por  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$  de manera que  $|t_i - t_{i-1}| < \frac{\delta}{c}$  para toda  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Se define ahora

$$\Gamma_{p,q}^c := \left\{ \gamma \in \Sigma_{p,q}^c \mid \gamma|_{[t_{i-1}, t_i]} \text{ es una geodésica} \right\}.$$

La función

$$\begin{aligned} \Gamma_{p,q}^c &\longrightarrow M \times \dots \times M \\ \gamma &\longmapsto (\gamma(t_1), \dots, \gamma(t_{n-1})) \end{aligned}$$

es biyectiva y su imagen es un conjunto abierto de  $M \times \dots \times M$ , lo que permite dotar a  $\Gamma_{p,q}^c$  de una estructura diferenciable.

Las geodésicas en  $M$  de  $p$  a  $q$  pertenecen a  $\Gamma_{p,q}^c$  porque por pedazos siguen siendo geodésicas y son los puntos críticos del funcional longitud

$$L|_{\Gamma_{p,q}^c} : \Gamma_{p,q}^c \rightarrow \mathbb{R},$$

restringido a  $\Gamma_{p,q}^c$  y, por el Corolario 1.50, el índice del hessiano de  $L|_{\Gamma_{p,q}^c}$  coincide con el índice de  $I$ .

Además si los puntos  $p$  y  $q$  no son conjugados, por el Teorema 1.51, entonces el índice de  $\gamma$  es positivo y, por lo tanto, la geodésica es un punto crítico no degenerado del funcional de longitud.

Por otro lado, es posible dar una retracción por deformación entre  $\Sigma_{p,q}^c$  y  $\Gamma_{p,q}^c$ . Consúltese [Milnor], página 90, Teorema 16.2.

Ahora es momento de hacer el cálculo de la estimación de inyectividad.

**PROPOSICIÓN 4.5.** *Sea  $M$  una  $n$ -variedad riemanniana compacta y simplemente conexa,  $n \geq 3$ , tal que*

$$\frac{1}{4} < K \leq 1.$$

*Entonces  $i(M) \geq \pi$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** Procediendo por contradicción, supóngase que  $i(M) < \pi$ . Por la Proposición 3.11, existe una geodésica cerrada  $\gamma$  en  $M$  de longitud  $l = L(\gamma) < 2\pi$ .

Del Corolario 1.53, el conjunto de puntos conjugados a  $\gamma(0) = p$  a lo largo de  $\gamma$  es discreto. Considérese  $\varepsilon > 0$  que satisface las siguientes condiciones:

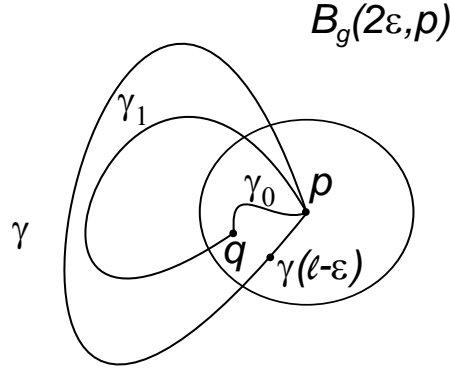
- (a)  $\gamma(l - \varepsilon)$  no es punto conjugado a  $p$  a lo largo de  $\gamma$ ;
- (b)  $\exp_p$  es difeomorfismo en  $B_g(2\varepsilon, p)$ ;
- (c)  $3\varepsilon < 2\pi - \pi/\sqrt{\tilde{K}}$ , donde  $\tilde{K} = \inf_M K$ ;
- (d)  $3\varepsilon < 2\pi - l$ ;
- (e)  $5\varepsilon < 2\pi$ .

Por el teorema de Sard, Teorema 1.54, existe un valor regular  $q \in B_g(\varepsilon, \gamma(l - \varepsilon))$  de  $\exp_p$ . Por la condición (a), existe una vecindad  $U \subset T_p M$  de  $(l - \varepsilon)\dot{\gamma}(0)$  donde  $\exp_p$  es difeomorfismo. Se escogen un vector  $W$  tal que  $g(W, \dot{\gamma}(l - \varepsilon)) < 0$  y una curva  $\tau: (-\theta, \theta) \rightarrow M$  tal que  $\tau(0) = \gamma(l - \varepsilon)$  y  $\dot{\tau}(0) = W$ . Ahora se considera la curva  $v: (-\theta, \theta) \rightarrow M$  en  $U$  tal que  $\exp_p(v(r)) = \tau(r)$ . Se construye una variación de  $\gamma$  dada por  $\Gamma_r(t) = \exp_p((t/r)v(r))$ ,  $t \in [0, l - \varepsilon]$ . Por la fórmula de primera variación,

$$\left. \frac{d}{dr} \right|_{r=0} \mathcal{L}(\Gamma_r) = g(W, \dot{\gamma}(d)) < 0.$$

De esto, es posible escoger a  $q$  de manera que  $q = \gamma_1(t_1)$ , donde  $\gamma_1$  es una geodésica que parte de  $p$  y  $3\varepsilon < L(\gamma_1) < l$ .

OBSERVACIÓN 9. El uso del teorema de Sard hace que no sea necesario pedir a las geodésicas que tengan velocidad 1.



Sea  $\gamma_0$  una geodésica minimizante que une a  $p$  con  $q$ . Por la condición (b) y por la desigualdad del triángulo se tiene

$$(14) \quad L(\gamma_0) \leq d_g(p, \gamma(l-\varepsilon)) + d_g(q, \gamma(l-\varepsilon)) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

y, por lo tanto,  $\gamma_0 \neq \gamma_1$ .

Ahora bien, considérese el conjunto  $\Sigma_{p,q}^c$  y su aproximación finita  $\Gamma_{p,q}^c$ , con  $c = L(\gamma_1)$ . Por el hecho de que  $q$  es valor regular de  $\exp_p$ , i.e.,  $q$  no es punto conjugado de  $p$ , los puntos críticos en  $\Sigma_{p,q}^c$  de  $\mathcal{L}$  son no-degenerados.

Ya que  $M$  es simplemente conexa, existe una homotopía  $\gamma_s$  entre  $\gamma_0$  y  $\gamma_1$ , manteniendo los extremos fijos. Como  $\Gamma_{p,q}^c$  es retracts de deformación de  $\Sigma_{p,q}^c$ , la curva  $\gamma_s$  es deformada en una curva en  $\Gamma_{p,q}^c$ . De la Observación 8, para todo  $\delta > 0$ ,  $\gamma_s$  puede ser deformada por una homotopía  $\tilde{\gamma}_s$  de  $\gamma_0$  a  $\gamma_1$  de manera que la curva de mayor longitud  $\tilde{\gamma}$  de  $\tilde{\gamma}_s$  satisface que

$$L(\tilde{\gamma}) < a + \delta,$$

donde  $a = \max\{L(\gamma_0), L(\gamma_1), L(\sigma)\}$  y  $\sigma$  es la geodésica de mayor longitud tal que el índice de ella es menor a dos en  $\Sigma_{p,q}^c$ , que recuérdese es el mismo índice del hessiano de  $\mathcal{L}$  en  $\Sigma_{p,q}^c$ .

Sea  $\delta = \varepsilon$ . Ya se han estimado cotas para  $L(\gamma_0)$  en (14) y para  $L(\gamma_1)$  en (d), esto último debido a que de (d) se tiene que  $L(\gamma_1) < l < 2\pi - 3\varepsilon$ . Falta estimar o acotar a  $L(\sigma)$ , para esto aplíquese el Lema 4.2 usando a la  $n$ -esfera de curvatura  $\tilde{K}$ , con  $n \leq 3$  y  $\tilde{K} = \inf_M K$ , como  $\tilde{M}$  y obteniendo

$$\text{índice de } \tilde{\sigma} \leq \text{índice de } \sigma < 2,$$

donde  $\tilde{\sigma}$  es una geodésica de  $\tilde{M}$  tal que  $L(\sigma) = L(\tilde{\sigma})$ .

Si

$$L(\sigma) > \frac{\pi}{\sqrt{\tilde{K}}},$$

entonces  $\tilde{\sigma}$  contiene dos puntos antipodales que son conjugados y, por el teorema de índice de Morse, Teorema 1.52, el índice de  $\tilde{\sigma}$  es mayor o igual a 2. Así, por (c),

$$L(\sigma) \leq \frac{\pi}{\sqrt{\tilde{K}}} < 2\pi - 3\varepsilon.$$

En consecuencia, por (e), es decir,  $2\pi - 3\varepsilon > 2\varepsilon$ ,

$$(15) \quad L(\tilde{\gamma}) < a + \varepsilon \leq 2\pi - 3\varepsilon + \varepsilon = 2\pi - 2\varepsilon.$$

Por otro lado, del lema de Kingenberg, en la homotopía  $\tilde{\gamma}_s$  existe  $s_0$  tal que

$$L(\gamma_0) + L(\tilde{\gamma}_{s_0}) \geq 2\pi.$$

Por consiguiente

$$L(\tilde{\gamma}) \geq L(\tilde{\gamma}_{s_0}) \geq 2\pi - L(\gamma_0) > 2\pi - \varepsilon,$$

que contradice (15). Y por lo tanto

$$i(M) \geq \pi.$$

Q. E. D.



## Los tres resultados fundamentales

PROPOSICIÓN 5.1 (Berger). *Sea  $M$  una variedad riemanniana compacta y sean  $p, q \in M$  tal que  $d(p, q) = \text{diam}(M)$ . Entonces para todo  $W \in T_p M$  existe una geodésica minimizante  $\gamma$  de  $p = \gamma(0)$  a  $q$  tal que  $g(\dot{\gamma}(0), W) \geq 0$ .*

DEMOSTRACIÓN. Sea  $\lambda(t) = \exp_p tW$  y sea  $\gamma_t: [0, L(\gamma_t)] \rightarrow M$  la geodésica minimizante tal que  $\gamma_t(0) = \lambda(t)$  y  $\gamma_t(L(\gamma_t)) = q$ . Supóngase que  $\forall n \in \mathbb{N}$  existe  $t_n \in [0, \frac{1}{n}]$  tal que  $g(\dot{\gamma}_{t_n}(0), \dot{\lambda}(t_n)) \geq 0$ . Por el Lema 3.1,  $\gamma_{t_n}$  converge a una geodésica minimizante  $\gamma$ . Esta geodésica cumple

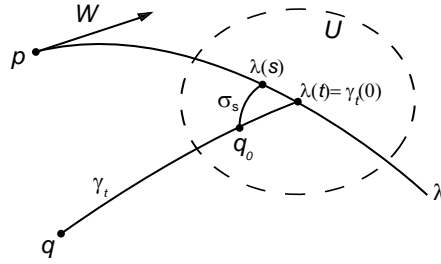
$$g(\dot{\gamma}(0), \dot{\lambda}(0)) = g(\dot{\gamma}(0), W) \geq 0$$

por la continuidad de la métrica riemanniana y la diferenciabilidad de  $\lambda$ . Y por lo tanto, se tendría el resultado.

Ahora bien, se procede por contradicción para probar que sí existe tal sucesión de geodésicas. Supóngase que existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $\forall t \in [0, \frac{1}{n}]$

$$g(\dot{\gamma}_t(0), \dot{\lambda}(t)) < 0.$$

Considérese una vecindad totalmente normal  $\Omega$  de  $\lambda(t)$  y sea  $q_0 \in \Omega$  un punto de  $\gamma_t$ . Sea  $\varepsilon > 0$  suficiente pequeño para que  $\lambda(s) \in \Omega$ ,  $\forall s \in (t - \varepsilon, t + \varepsilon)$ , y sea  $\sigma_s$  la geodésica minimizante que une a  $q_0$  y  $\lambda(s)$ .



Usando la fórmula de primera variación de energía, se obtiene

$$\frac{1}{2} \frac{d}{ds} \mathcal{L}(\sigma_s) \Big|_{s=t} = -g(\dot{\gamma}_t(0), \dot{\lambda}(t)) > 0.$$

Esto implica que  $\mathcal{L}$  es creciente, i. e., la longitud de las curvas  $\sigma_s$  aumenta conforme  $s$  aumenta. Entonces, para  $s < t$ ,  $d(q_0, \lambda(s)) < d(q_0, \lambda(t))$  y, por lo tanto,

$$\begin{aligned} d(q, \lambda(s)) &\leq d(q, q_0) + d(q_0, \lambda(s)) \\ &< d(q, q_0) + d(q_0, \lambda(t)) \\ &= d(q, \lambda(t)) \leq d(q, \lambda(0)) = d(q, p) \\ &< d(q, \lambda(s)). \end{aligned}$$

Lo cual es absurdo e implica la contradicción deseada.

Q. E. D.

LEMA 5.2.  $\partial B_g(r, p)$  es conexa por trayectorias  $\forall p \in M$  y  $r < i(M)$  si la dimensión de  $M$  es menor o igual a 2.

DEMOSTRACIÓN. Como  $r < i(M)$ , entonces existe  $R$  tal que  $r < R < i(M)$  y

$$\bar{B}_g(r, p) \subset B_g(R, p).$$

Así,  $B_g(R, p)$  es difeomorfa a  $B_e(R, 0)$  y, por lo tanto,  $\bar{B}_g(r, p)$  es difeomorfa a  $\bar{B}_e(r, 0)$ . De ahí que  $\bar{B}_g(r, p) \setminus B_g(r, p)$  es difeomorfa a  $\bar{B}_e(r, 0) \setminus B_e(r, 0)$ . Y esta última es conexa por trayectorias.

Q. E. D.

LEMA 5.3. Sean  $p \in M$ ,  $\lambda: [a, b] \rightarrow M$  curva suave en  $M$  que no pasa por  $p$  y  $q \in \lambda([a, b])$  tal que  $d(p, q) = d(p, \lambda([a, b]))$ . Si  $\gamma: [0, L(\gamma)] \rightarrow M$  es una geodésica que une a  $q = \gamma(0)$  y  $p$ , es decir, minimiza la distancia. Entonces ésta es  $g$ -ortogonal a  $\lambda$  en  $q$ .

DEMOSTRACIÓN. Sea  $s_0$  tal que  $\lambda(s_0) = q$ . Procediendo por contradicción, supóngase que  $\lambda$  y  $\gamma$  no son  $g$ -ortogonales en  $q$ . Entonces  $g(\dot{\lambda}(s_0), \dot{\gamma}(0)) \neq 0$ . Sin pérdida de generalidad, supóngase que  $g(\dot{\lambda}(s_0), \dot{\gamma}(0)) < 0$ . El otro caso es totalmente análogo. Así, usando la fórmula de primera variación se tiene que

$$\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=s_0} \mathcal{L}(\Gamma_s) = -g(\dot{\gamma}(0), \dot{\lambda}(s_0)) > 0,$$

con  $\Gamma_s$  una variación por geodésicas que unen a  $p$  con  $\lambda(s)$ ,  $s \in (s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon)$ .

Esto implica que para  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeño, el funcional de longitud  $\mathcal{L}$  es creciente  $\forall s \in (s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon)$ . Y por lo tanto, existe  $s_1 < s_0$  que cumple  $d(\lambda(s_1), p) < d(\lambda(s_0), p)$ . Lo cual es una contradicción, ya que  $\lambda(s_0)$  minimiza la distancia.

Q. E. D.

Los siguientes dos lemas son aplicaciones de la Proposición 2.5, que a su vez es aplicación del teorema de Rauch.

LEMA 5.4. Sea  $M$  una  $n$ -variedad riemanniana compacta y simplemente conexa, cuya curvatura seccional  $K$  satisfice

$$\frac{1}{4} < \delta \leq K \leq 1.$$

Sean  $p \in M$  y  $r \in (\pi/2\sqrt{\delta}, \pi)$ . Sean  $v_0$  y  $v_1$  en la esfera geodésica con centro en  $p$  y radio  $r$ . Supóngase que las geodésicas radiales que unen a  $p$  con  $v_0$  y a  $p$  con  $v_1$  forman un ángulo menor o igual a  $\pi/2$ . Entonces

$$d(v_0, v_1) \leq \frac{\pi}{2\sqrt{\delta}}.$$

DEMOSTRACIÓN. Lo primero a observar es que  $d(v_0, v_1)$  es menor o igual a la longitud de cualquier curva que una a  $v_0$  con  $v_1$ .

Por otro lado, como  $r < \pi \leq i(M)$ , entonces el mapeo  $\exp_p$  restringido a  $\bar{B}(r, 0)$  es difeomorfismo.

Ahora, considérese  $\tilde{M} = \mathbb{S}_{r_0}^n$ ,  $r_0 = 1/\sqrt{\delta}$ . Esta variedad tiene curvatura seccional  $\delta$ . Sea  $i: T_N \tilde{M} \rightarrow T_p M$  una isometría lineal fija, donde  $N = (0, \dots, 0, r_0)$ . Recuérdese que  $\exp_N$  es difeomorfismo en  $B(\pi r_0, 0)$ .

Sean  $\tilde{v}_0 = \exp_N \circ i \circ \exp_p^{-1}(v_0)$  y  $\tilde{v}_1 = \exp_N \circ i \circ \exp_p^{-1}(v_1)$ . Sea  $\tilde{c}: [0, a] \rightarrow \tilde{M}$  un arco geodésico que une a  $\tilde{v}_0$  con  $\tilde{v}_1$ . Como  $\pi/\sqrt{\delta} > \pi > r > \pi/2\sqrt{\delta}$ , el ángulo formado por las geodésicas radiales que unen a  $N$  con  $\tilde{v}_0$  y a  $N$  con  $\tilde{v}_1$  es menor o igual a  $\pi/2$ , y  $\tilde{v}_0$  y  $\tilde{v}_1$  están en la esfera geodésica con centro en  $N$  y radio  $r$ , entonces

$$L(\tilde{c}) \leq \frac{\pi}{2\sqrt{\delta}}.$$

Considése  $c: [0, a] \rightarrow M$  dada por

$$c(s) = \exp_p \circ i^{-1} \circ \exp_N^{-1}(\tilde{c}(s)).$$

Ésta es una curva que une a  $v_0$  con  $v_1$ . Aplicando la Proposición 2.5, se tiene

$$d(v_0, v_1) \leq L(c) \leq L(\tilde{c}) \leq \frac{\pi}{2\sqrt{\delta}}.$$

Q. E. D.

LEMA 5.5. *Sea  $M$  una  $n$ -variedad riemanniana compacta y simplemente conexa, cuya curvatura seccional  $K$  satisfice*

$$\frac{1}{4} < \delta \leq K \leq 1.$$

Sean  $p \in M$ , y  $v_0$  y  $v_1$  en la bola geodésica con centro en  $p$  y radio  $\pi/2\sqrt{\delta}$ . Supóngase que las geodésicas radiales que unen a  $p$  con  $v_0$  y a  $p$  con  $v_1$  forman un ángulo de  $\pi/2$ . Entonces

$$d(v_0, v_1) \leq \frac{\pi}{2\sqrt{\delta}}.$$

DEMOSTRACIÓN. Nótese que  $d(v_0, v_1)$  es menor o igual a la longitud de cualquier curva que una a  $v_0$  y  $v_1$ .

Como  $\pi/2\sqrt{\delta} < \pi \leq i(M)$ , entonces el mapeo  $\exp_p$  restringido a  $\bar{B}(\pi/2\sqrt{\delta}, 0)$  es difeomorfismo.

Considérese  $\tilde{M} = \mathbb{S}_{r_0}^n$ ,  $r_0 = 1/\sqrt{\delta}$ . Esta variedad tiene curvatura seccional  $\delta$ . Sea  $i: T_N \tilde{M} \rightarrow T_p M$  una isometría lineal fija, donde  $N = (0, \dots, 0, r_0)$ . El mapeo  $\exp_N$  restringido a  $B(\pi r_0, 0)$  es difeomorfismo.

Sean  $\tilde{v}_0 = \exp_N \circ i \circ \exp_p^{-1}(v_0)$  y  $\tilde{v}_1 = \exp_N \circ i \circ \exp_p^{-1}(v_1)$ . Considérese  $\tilde{c}: [0, a] \rightarrow \tilde{M}$  el arco geodésico que los une. Como  $\tilde{v}_0$  y  $\tilde{v}_1$  están en la bola geodésica  $B(\pi/2\sqrt{\delta}, N)$  y las geodésicas radiales que unen a  $N$  con  $\tilde{v}_0$  y a  $N$  con  $\tilde{v}_1$  forman un ángulo de  $\pi/2$ , entonces

$$L(\tilde{c}) \leq \frac{\pi}{2\sqrt{\delta}}.$$

Considérese ahora  $c: [0, a] \rightarrow M$  dada por

$$c(s) = \exp_p \circ i^{-1} \circ \exp_N^{-1}(\tilde{c}(s)).$$

Aplicando la Proposición 2.5, se tiene

$$d(v_0, v_1) \leq L(c) \leq L(\tilde{c}) \leq \frac{\pi}{2\sqrt{\delta}}.$$

Q. E. D.

PROPOSICIÓN 5.6 (Tsukamoto). *Sea  $(M, g)$  una  $n$ -variedad riemanniana compacta y simplemente conexa, cuya curvatura seccional  $K$  satisfice*

$$\frac{1}{4} < \delta \leq K \leq 1.$$

Además sean  $p, q \in M$  tales que  $d(p, q) = \text{diam}(M)$ . Entonces

$$M = B_g(r, p) \cup B_g(r, q)$$

donde  $B_g(r, p)$  denota la bola geodésica abierta con radio  $r$  y centro en  $p$ , y  $r$  es tal que  $\pi/2\sqrt{\delta} < r < \pi$ .

DEMOSTRACIÓN. Por la estimación de inyectividad o estimación de Klingenberg,  $B_g(r, p)$  y  $B_g(r, q)$  no contienen puntos del lugar de corte de  $p$  y  $q$ , respectivamente, si  $r < \pi = i(M)$ . Por esto,  $B_g(r, p)$  y  $B_g(r, q)$  son difeomorfas, a través del mapeo exponencial, a  $B_e(r, 0) \subset \mathbb{R}^n$ .

Procediendo por contradicción, supóngase que existe  $v \in M$  tal que  $d(p, v) \geq r$  y  $d(q, v) \geq r$ . Sin pérdida de generalidad se puede suponer que  $d(p, v) \geq d(q, v) \geq r$ .

Una geodésica minimizante de  $q$  a  $v$  interseca a  $\partial B_g(r, q)$ , la frontera de  $B_g(r, q)$ , en un punto  $q' \notin B_g(r, p)$ . De otra forma se tendría, como  $v \notin B_g(r, p)$ , que

$$d(v, q') > d(v, B_g(r, p)) \geq d(v, B_g(r, q)) = d(v, q').$$

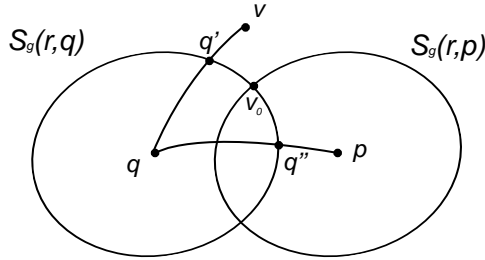
Lo cual es absurdo.

Por otro lado, usando el Teorema 1.48 de Bonnet,  $\text{diam}(M) \leq \frac{\pi}{\sqrt{\delta}} < 2r$ . Esta última parte de la desigualdad es la segunda condición que se impone sobre  $r$ .

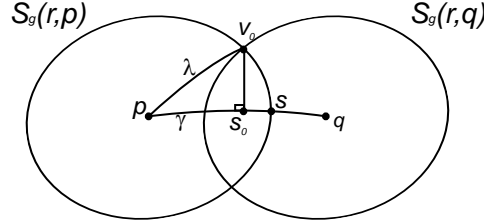
Por lo tanto, si  $q''$  es un punto de intersección de una geodésica minimizante de  $q$  a  $p$  con  $\partial B_g(r, q)$ , entonces  $q'' \in B_g(r, p)$ , porque

$$d(p, q'') = d(p, q) - d(q, q'') < 2r - r = r.$$

Por el Lema 5.2,  $\partial B_g(r, q)$  es conexa por trayectorias y  $\partial B_g(r, p) \cap \partial B_g(r, q) \neq \emptyset$ . Por lo tanto, existe  $v_0 \in M$  tal que  $d(p, v_0) = d(q, v_0) = r$ .



Considérese una geodésica minimizante  $\lambda$  que una a  $p$  y  $v_0$ . Por la proposición de Berger, existe una geodésica minimizante  $\gamma$  de  $p$  a  $q$  tal que  $g(\dot{\gamma}(0), \dot{\lambda}(0)) \geq 0$ , es decir, el ángulo entre ellos es menor o igual a  $\pi/2$ . Sea  $s$  el punto de  $\gamma$  que cumple que  $d(p, s) = r$ .



Aplicando el Lema 5.4 al ángulo  $\sphericalangle v_0 p s \leq \frac{\pi}{2}$ , entonces se concluye que

$$d(v_0, s) \leq \frac{\pi}{2\sqrt{\delta}}.$$

Como  $d(p, v_0) = r = d(q, v_0)$  y existe un punto  $s$  en  $\gamma$  con  $d(v_0, s) < r$ , existe  $s_0$  en el interior de  $\gamma$  tal que minimiza la distancia de  $v_0$  a  $\gamma$ . Además, la geodésica minimizante de  $v_0$  a  $s_0$  es  $g$ -ortogonal a  $\gamma$ , por el Lema 5.3, y

$$d(v_0, \gamma) = d(v_0, s_0) \leq d(r_0, s) \leq \frac{\pi}{2\sqrt{\delta}}.$$

Como  $d(p, q) \leq \frac{\pi}{\sqrt{\delta}}$ , se tiene que  $d(p, s_0) \leq \frac{\pi}{2\sqrt{\delta}}$  o que  $d(q, s_0) \leq \frac{\pi}{2\sqrt{\delta}}$ . Considérese el caso  $d(p, s_0) \leq \frac{\pi}{2\sqrt{\delta}}$ , el otro caso es totalmente análogo. Como  $d(v_0, s_0) \leq \frac{\pi}{2\sqrt{\delta}}$  y el ángulo  $\sphericalangle p s_0 v_0 = \frac{\pi}{2}$ , se tiene, por el Lema 5.5, que  $d(p, v_0) \leq \frac{\pi}{2\sqrt{\delta}} < r$ , lo cual contradice el hecho de que  $d(p, v_0) = r$ . Por lo tanto, no existe tal  $v_0$ . Q. E. D.

PROPOSICIÓN 5.7. *Sea  $M$  una  $n$ -variedad riemanniana simplemente conexa y compacta, cuya curvatura seccional  $K$  satisfice*

$$\frac{1}{4} < \delta \leq K \leq 1.$$

*Sean  $p, q \in M$  tal que  $d(p, q) = \text{diam}(M)$ . Entonces en cada geodésica de longitud  $r$ , con  $r \in (\pi/2\sqrt{\delta}, \pi)$ , que empieza en  $p$  existe un único punto  $m$  tal que*

$$d(p, m) = d(q, m) < r.$$

*De la misma manera, en cada geodésica que parte de  $q$  existe un único punto  $n$  cuya distancia a  $p$  es equidistante a  $p$  y  $q$ .*

DEMOSTRACIÓN. Sea  $\gamma$  una geodésica que parte de  $p$ , i. e.,  $\gamma(0) = p$ . Considérese

$$f(s) = d(q, \gamma(s)) - d(p, \gamma(s)).$$

Esta función es claramente continua y

$$f(0) = d(q, \gamma(0) = p) - d(p, \gamma(0) = p) = d(q, p) > 0.$$

Como  $M$  es compacta, existe  $s_0$  tal que  $\gamma(s_0)$  es punto de corte de  $p$  a lo largo de  $\gamma$ . Por la estimación de inyectividad,  $d(p, \gamma(s_0)) \geq \pi > r$ . Entonces, por el teorema de Tsukamoto,

$$d(q, \gamma(s_0)) < r.$$

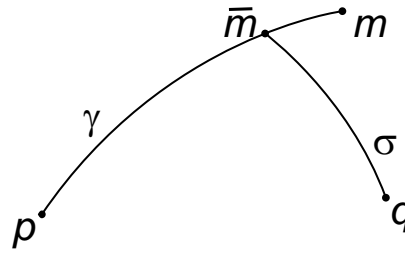
Así,

$$f(s_0) = d(q, \gamma(s_0)) - d(p, \gamma(s_0)) < r - d(p, \gamma(s_0)) < 0.$$

Eso implica que  $f$  se hace cero para algún  $s_1 \in (0, s_0)$ , es decir, existe  $m = \gamma(s_1)$  tal que  $d(q, m) = d(m, p) < r$ .

Para probar la unicidad, supóngase que existe un punto  $\bar{m}$  distinto a  $m$  tal que  $d(q, \bar{m}) = d(\bar{m}, p) < r$ . Supóngase que  $\bar{m}$  está entre  $p$  y  $m$ . Entonces

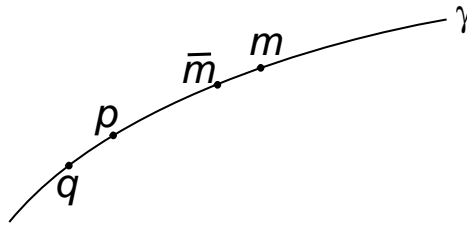
$$(16) \quad d(q, m) = d(p, m) = d(p, \bar{m}) + d(\bar{m}, m) = d(\bar{m}, q) + d(\bar{m}, m).$$



Sea  $\sigma$  la única geodésica minimizante de  $q$  a  $\bar{m}$ , existe porque  $d(q, \bar{m}) < r$ . Por (16),  $q$ ,  $m$  y  $\bar{m}$  son colineales, i. e.,  $\gamma$  coincide con  $\sigma$ . Si no,

$$d(q, m) < d(q, \bar{m}) + d(m, \bar{m}) \stackrel{(16)}{=} d(q, m).$$

Lo cual es una contradicción.



Así,  $q$  pertenece a  $\gamma$ . Como  $m$  y  $\bar{m}$  son equidistantes a  $p$  y  $q$ , y son todos colineales en  $\gamma$ , entonces hay dos opciones  $m$  y  $\bar{m}$  son iguales ó  $p$  y  $q$  son iguales. Por lo tanto,  $m$  y  $\bar{m}$  son el mismo.

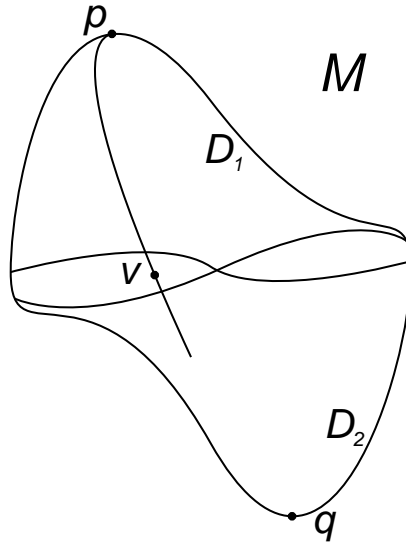
Q. E. D.

## Demostración del teorema de la esfera

Finalmente se va a proceder a la demostración del teorema de la esfera.

**TEOREMA DE LA ESFERA.** *Si  $(M, g)$  es una  $n$ -variedad riemanniana compacta y simplemente conexa, cuya curvatura seccional toma valores en el intervalo  $(\frac{1}{4}, 1]$ , entonces  $M$  es homeomorfa a  $\mathbb{S}^n$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** Sean  $p, q \in M$  tal que  $\text{diam}(M) = d(p, q)$ . Sean  $D_1$  y  $D_2$  los subconjuntos de  $M$  formados por todos los segmentos geodésicos  $\overline{pm}$  y  $\overline{qn}$ , respectivamente, donde los puntos  $m$  y  $n$  están dados por la Proposición 5.7. Debido a que los puntos  $m$  y  $n$  son únicos y éstos dependen únicamente de la geodésica que los contiene o de la dirección de ésta, entonces la función que asigna a cada geodésica los puntos  $m$  y  $n$  es continua. Por lo tanto, los conjuntos  $D_1$  y  $D_2$  son cerrados de  $M$ .



Lo siguiente por demostrar es que  $M = D_1 \cup D_2$  y  $\partial D_1 = \partial D_2 = D_1 \cap D_2$ .

Primero se mostrará que  $D_1 \cup D_2 \subset M$ , que es muy sencillo, ya que claramente cada uno está contenido en  $M$ .

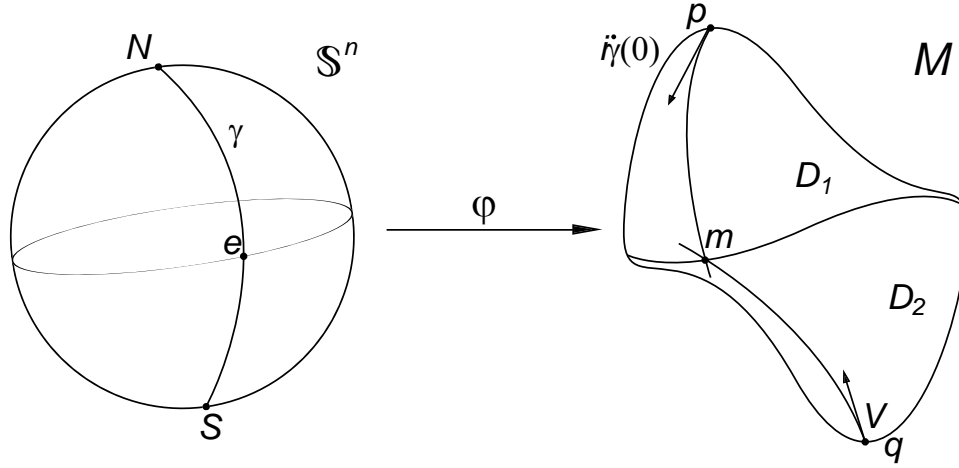
Ahora se probará que  $D_1 \cup D_2 \supset M$ . Sea  $v \in M$ . Por la Proposición 5.6,  $d(v, p) < r$  ó  $d(q, v) < r$ , con  $\pi/2\sqrt{\delta} < r < \pi$ . Considérese  $d(p, v) < r$  ( $d(q, v) < r$  es totalmente análogo). Como  $d(p, C_M(p)) \geq \pi > r$ , por la estimación de Klingenberg, existe un única geodésica minimizante  $\gamma$  que

une a  $p$  y a  $v$ . De nuevo, por la Proposición 5.7, existe un única  $m$  en  $\gamma$  tal que  $d(p, m) = d(q, m) < r$ . Así, se cumple uno de los siguientes casos:

- Si  $d(p, v) < d(q, v)$ , entonces  $v \in \overline{pm}$ , pues quiere decir que  $v$  está más cerca de  $p$  que  $m$ . Esto significa que  $v \in D_1$ .
- Si  $d(q, v) < d(p, v)$ , entonces  $d(q, v) < r$  y siguiendo el mismo razonamiento anterior pero con  $q$  se tiene que  $v \in \overline{qn}$ . Y así  $v \in D_2$ .
- Si  $d(p, v) = d(q, v)$ , entonces, por unicidad,  $m = v$ . Es decir,  $v \in \partial D_1$ .

Por lo tanto,  $v \in D_1 \cup D_2$ . Esto muestra que  $M = D_1 \cup D_2$ .

Para probar la segunda afirmación, si  $v \in D_1 \cap D_2$ , entonces  $v \in \overline{pm}$  y  $v \in \overline{qn}$ . Y, por lo tanto,  $v = m = n$ . Lo que significa que  $v \in \partial D_1$  y  $v \in \partial D_2$ .



Por otra parte, ahora se definirá una función  $\varphi: \mathbb{S}^n \rightarrow M$ , que actuará como el homeomorfismo entre  $\mathbb{S}^n$  y  $M$ , de la siguiente manera: a un punto fijo  $N \in \mathbb{S}^n$  se le asocia  $p$  y a su punto antipodal  $S \in \mathbb{S}^n$  se le asocia  $q$ . Se escoge una isometría lineal  $i: T_N \mathbb{S}^n \rightarrow T_p M$ . Para cada punto  $e$  en el ecuador de  $\mathbb{S}^n$  relativo al polo norte  $N$  se considera la geodésica única  $\gamma(s)$  de  $\mathbb{S}^n$ ,  $s \in [0, \pi]$ , dada por  $\gamma(0) = N$  y  $\gamma(\frac{\pi}{2}) = e$ . Además, se considera el punto  $m$  dado por la Proposición 5.7 en la geodésica de  $M$  que pasa por  $p$  y que tiene como vector velocidad  $i\dot{\gamma}(0)$ . Así, se define  $\varphi$  para todo punto de la geodésica en la esfera:

$$\begin{cases} \varphi(\gamma(s)) = \exp_p\left(\frac{2s}{\pi}d(p, m)(i\dot{\gamma}(0))\right), & s \in (0, \frac{\pi}{2}], \\ \varphi(\gamma(s)) = \exp_q\left((2 - \frac{2s}{\pi})d(q, m)V\right), & s \in [\frac{\pi}{2}, \pi], \end{cases}$$

donde  $V$  es el vector tangente unitario en  $q$  de la única geodésica que lo une a  $m$ .

Es claro, por la estimación de Klingenberg, que la función es biyectiva del hemisferio cerrado norte de la esfera a  $D_1$ , del hemisferio cerrado sur de la esfera a  $D_2$  y del ecuador a  $D_1 \cap D_2$ .

Además,  $\varphi$  es continua porque  $m$  y  $n$  de la Proposición 5.7 son únicos.  $\varphi$  es suprayectiva en  $M$  porque  $M = D_1 \cup D_2$ . Es inyectiva porque  $D_1 \cap D_2 = \varphi(\text{ecuador de la esfera})$ . Finalmente, como  $\mathbb{S}^n$  es compacta,  $\varphi$  es un homeomorfismo. Q. E. D.



## Bibliografía

- [Berger] Berger, Marcel. Les variétés Riemanniennes  $\frac{1}{4}$ -pincées. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Scienze Fisiche e Matematiche*, Serie III, Vol. 14, pp. 161-170, 1960.
- [Carmo] Carmo, Manfredo do. *Riemannian Geometry*. Birkhäuser, Boston, 1992.
- [Cheeger-Ebin] Cheeger, Jeff, Ebin, David. *Comparison Theorems in Riemannian Geometry*. North-Holland, Amsterdam, 1975.
- [Clapp] Clapp, Mónica. *Geometría Riemanniana, notas del curso*.
- [Clapp 2] Clapp, Mónica. *Introducción al Análisis Real, notas del curso*. <http://www.matem.unam.mx/mclapp/cursos/>.
- [Gallot-Hu-La] Gallot, Sylvestre, Hulin, Dominique, Lafontaine, Jacques. *Riemannian Geometry*. Springer-Verlag, Berlin, 1987.
- [Guillemin-Pollack] Guillemin, Victor, Pollack, Alan. *Differential Topology*. AMS Chelsea Publishing, Providence, Rhode Island, 2010.
- [Hirsch] Hirsch, Morris. *Differential Topology*. Springer-Verlag, New York, 1976.
- [Klingenberg] Klingenberg, Wilhelm. Contributions to Riemannian Geometry in the Large. *Annals of Mathematics*, Serie II, Vol. 69, No. 3, pp. 654-666, 1959.
- [Klingenberg 2] Klingenberg, Wilhelm. Über Riemannsche Mannigfaltigkeiten mit positiver Krümmung. *Commentarii Mathematici Helvetici*, Vol. 35, Issue 1, pp. 47-54, 1961.
- [Kosniowski] Kosniowski, Czes. *Topología Algebraica*. Reverte, Barcelona, 1986.
- [Lee] Lee, John. *Riemannian Manifolds, An Introduction to Curvature*. Springer-Verlag, New York, 1997.
- [Milnor] Milnor, John. *Morse Theory*. Annals of Mathematics Studies, No. 51, Princeton University Press, Princeton, 1963.
- [Rauch] Rauch, Harry. A contribution to differential geometry in the large. *Annals of Mathematics*, Serie II, Vol. 54, No. 1, pp. 38-55, 1951.
- [Synge] Synge, John. On the connectivity of spaces of positive curvature. *Quarterly Journal of Mathematics*, Oxford Series 7, No. 1, pp. 316-320, 1936.
- [Tsukamoto] Tsukamoto, Yôtarô. On Riemannian manifolds with positive curvature. *Memoirs of the Faculty of Science, Kyushu University*, Serie A, Vol. 15, No. 2, 1961.