



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
POSGRADO CONJUNTO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS
UNAM-UMSNH**

**GRUPOS DE VEECH Y MAPAS REGULARES
EN SUPERFICIES DE GÉNERO INFINITO**

**TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTOR EN CIENCIAS**

**PRESENTA:
CAMILO RAMÍREZ MALUENDAS**

**TUTOR PRINCIPAL
DR. JOSÉ FERRÁN VALDEZ LORENZO
CENTRO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS UNAM, CAMPUS MORELIA**

**MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR
DR. JESÚS MUCIÑO RAYMUNDO
CENTRO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS UNAM, CAMPUS MORELIA**

**DR. OSVALDO OSUNA CASTRO
INSTITUTO DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS UMSNH**

MORELIA, MICHOACAN, OCTUBRE 2015



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A Gualenditas, Dani y Marbe.

«Lo cierto es que fueron años de arduo aprendizaje, con lapsos de desaliento en los que estuvo a punto de desistir. Pero al fin triunfó la perseverancia y Raimundo aprendió a ladrar.»

MARIO BENEDETTI,
El hombre que aprendió a ladrar

AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer sinceramente a Ferrán Valdez y Jesús Muciño por sus enseñanzas, dedicación, esfuerzo, paciencia y compañía en las experiencias que vivimos juntos para hacer este sueño realidad. Estos dos admirables hombres me inspiran a que el día de mañana debo de ser mejor persona y matemático que el que fui ayer.

También, muchísimas gracias a mis sinodales Dr. Carlos Alfonso Cabrera Ocañas, Dr. Jorge Luis López López, Dr. Daniel Pellicer Covarrubias, Dr. Ernesto Rosales González y Dr Santiago Alberto Verjovsky Solá. Ellos leyeron pacientemente esta tesis y contribuyeron con sus conocimientos y experiencias para que éste manuscrito madurara y se embelleciera en el contenido matemático.

Igualmente, agradezco a Noemí Santana, Ariet Ramos, Osvaldo Guzmán, Fernando Hernández, Gabriela Weitze-Schmithüsen, Anja Randecker, Daniel Juan y Luis Jorge Sánchez por nuestras provechosas conversaciones y la ayuda que me brindaron para comprender conceptos matemáticos. Aprecio y gratifico la confianza y el apoyo que me brindó Morelia Álvarez, el Conacyt, el Posgrado Conjunto en Ciencias Matemáticas UNAM-UMSNH y el Centro de Matemáticas UNAM.

Índice general

Lista de figuras	7
Lista de diagramas	8
Introducción	9
1. Espacio de fines y gráficas localmente finitas	19
1.1. Fines de una superficie	19
1.2. Fines de una gráfica localmente finita	22
1.3. Espacios Polacos	24
1.3.1. Teorema de Cantor-Bendixson	24
1.3.2. Derivada de Cantor-Bendixson	25
1.4. Gráfica del árbol binario de Cantor	28
2. Grupos de Veech en superficies de translación	35
2.1. Superficies de translación mansas	35
2.1.1. Conexión silla y vectores de holonomía	40
2.2. El grupo de Veech	42
2.2.1. Dicotomía de Veech	50
3. Grupos de Veech en superficies de translación no compactas	54
3.1. Caracterización del grupo de Veech de las superficies de translación mansas	54
3.2. Realización de grupos de Veech en superficies de translación mansas	55
3.3. Lemas y construcciones auxiliares	56
3.4. Demostración Teorema 3.2.1	62
3.5. Puzzles	65
3.6. Aplicaciones de los puzzles	77
3.6.1. Demostración del Teorema 3.2.2	77
3.6.2. Demostración del Teorema 3.2.3	78
3.6.3. Demostración del Teorema 3.2.4	82

3.7. Una variación en los puzzles	84
3.7.1. Demostración Teorema 3.7.1	87
3.8. Perspectivas	91
4. Mapas en superficies	92
4.1. Mapas regulares	93
4.1.1. Grupo de automorfismos de un mapa	94
4.1.2. El conjunto de banderas	95
4.1.3. Regularidad	96
4.2. Mapas regulares en el monstruo del lago Ness	99
4.2.1. Teselaciones Arquimedianas del plano Euclidiano y su grupo de simetrías	101
4.2.2. Mapa cubriente mínimo regular	103
4.2.3. Mapa cubriente mínimo regular de la teselación Arquimediana 3.6.3.6 del plano Euclidiano	104
4.2.4. Grupos de Coxeter y la propiedad FA	111
4.2.5. Prueba del Teorema 4.2.1	113
Símbolos especiales	117
Bibliografía	119
Índice	121

Lista de figuras

1.	<i>Monstruo del lago Ness</i>	10
2.	<i>Árbol florido de Cantor</i>	10
3.	<i>Billar asociado a un triángulo rectángulo</i>	11
4.	<i>Sólidos platónicos</i>	14
5.	<i>Banderas</i>	16
6.	<i>Vista local de los poliedros regulares infinitos de Petrie-Coxeter</i>	16
1.1.	<i>Fines</i>	19
1.2.	<i>Monstruo del lago Ness</i>	21
1.3.	<i>Árbol florido de Cantor</i>	21
1.4.	<i>Gráfica Cay($\mathbb{Z}, \{1\}$)</i>	22
1.5.	<i>Gráfica Cay($\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \{(1, 0), (0, 1)\}$)</i>	23
1.6.	<i>Gráfica Cay($F_2, \{a, b\}$)</i>	23
1.7.	<i>Árbol binario de Cantor $T2^\omega$</i>	28
1.8.	<i>Familia \mathfrak{T}</i>	31
2.1.	<i>Trayectorias de billar</i>	37
2.2.	<i>Desdoblamiento</i>	38
2.3.	<i>Función proyección π_P</i>	39
2.4.	<i>Identificación de los lados paralelos en el octágono regular sin sus vértices</i>	39
2.5.	<i>Cubriente infinito del plano ramificado en el origen</i>	40
2.6.	<i>Conexiones sillas</i>	42
2.7.	<i>Espacio móduli de los toros planos</i>	51
2.8.	<i>Ancho y altura del cilindro</i>	52
2.9.	<i>Superficie compacta de género dos</i>	52
2.10.	<i>Descomposición de la superficie S</i>	52
3.1.	<i>Pegado de marcas</i>	57
3.2.	<i>Pegado de monstruos a lo largo de marcas</i>	58

3.3.	<i>Función i_*</i>	61
3.4.	<i>Monstruo del lago Ness S_P</i>	62
3.5.	<i>Espina(S_{fund}) cuando $X = 2^\omega$</i>	64
3.6.	<i>Monstruo del lago Ness $S_{P'}$</i>	65
3.7.	<i>Monstruo del lago Ness amortiguador $S(Id, h_j)$</i>	68
3.8.	<i>Monstruo del lago Ness decorado S</i>	71
3.9.	<i>Fin no obvio de $S_{\mathfrak{P}}$</i>	76
3.10.	<i>Monstruo del lago Ness S_{fund}</i>	86
3.11.	<i>Imagen de γ_j</i>	88
4.1.	<i>Mapa terráqueo</i>	92
4.2.	<i>Sólidos platónicos</i>	93
4.3.	<i>Mapa $\mathcal{M} := (\Delta, \mathbb{R}^2, i)$ en el plano Euclidiano</i>	94
4.4.	<i>Banderas</i>	96
4.5.	<i>Teselaciones regulares del plano Euclidiano</i>	97
4.6.	<i>Arriba: teselaciones $\{6, 4\}$ y $\{4, 6\}$. Abajo: teselaciones $\{7, 3\}$ y $\{3, 7\}$</i>	98
4.7.	<i>Vista local de los poliedros regulares infinitos de Petrie-Coxeter</i>	100
4.8.	<i>Las teselaciones Arquimedianas</i>	102
4.9.	<i>Teselación regular del plano hiperbólico con tipo de Schläfli $\{6, 4\}$</i>	105
4.10.	<i>Identificación $[(\rho_1\rho_0)^2\rho_1\rho_2]^4(z) = w$</i>	106
4.11.	<i>Identificación $[(\rho_1\rho_0)^2\rho_2]^6(z) = w$</i>	106
4.12.	<i>Aristas de doce componentes conexas de $S \setminus G$ con sus respectivos colores</i>	107
4.13.	<i>Gráfica de Cayley de H</i>	109
4.14.	<i>Subconjunto $U \subset S$</i>	110
4.15.	<i>Banderas adyacentes de la tripleta asociada a Φ_f</i>	114
4.16.	<i>Trayectorias γ_f^j, para cada $j \in \{0, 1, 2\}$</i>	115

Lista de diagramas

1.	<i>Preautomorfismo</i>	15
2.1.	<i>Billar y superficie asociados al polígono P</i>	37
2.2.	<i>Haz tangente y haz tangente unitario de S</i>	41
2.3.	<i>El toro plano $T_{(0,1)}$ y su cubriente universal</i>	45
2.4.	<i>El cilindro plano C y su cubriente universal</i>	46
4.1.	<i>Mapas isomorfos</i>	94
4.2.	<i>Preautomorfismo</i>	94
4.3.	<i>El morfismo φ</i>	95
4.4.	<i>Mapa cubriente</i>	103

Introducción

Nuestra investigación está inmersa en dos diferentes ramas de las matemáticas, *Geometría Diferencial y Combinatoria*. En la primer área –Geometría Diferencial– estudiamos la realización de subgrupos de $GL_+(2, \mathbb{R})$ como grupos de Veech de superficies de translación mansas de género infinito. Ahora bien, en la segunda –Combinatoria– estudiamos los mapas regulares que se realizan en las superficies orientables de género infinito.

Realización de subgrupos de $GL_+(2, \mathbb{R})$ como grupos de Veech de superficies de translación mansas de género infinito.

Una superficie S es una 2-variedad conexa. Sin embargo, nosotros solo consideraremos las superficies orientables y no compactas, por tal razón, es necesario introducir el teorema de clasificación de superficies no compactas (véase [35]).

A cada superficie S le asociamos el par

$$S \rightarrow (Ends(S), Ends_\infty(S))$$

donde $Ends(S)$ denota el conjunto de fines de S y $Ends_\infty(S)$ es el conjunto de fines con género infinito de S (véase [57]). Éstos dos conjuntos satisfacen la contención $Ends_\infty(S) \subset Ends(S)$ y además, junto al género son los invariantes topológicos que nos permiten clasificar las superficies orientables no compactas. Geométricamente, los fines de S son los caminos posibles de ir al *infinito* en S (módulo homotopía) o alternativamente, son todas las maneras posibles de escapar de cualquier compacto de S . Asimismo, pueden haber fines de S que toman género infinito.

Ahora bien, a cada conjunto que conforma el par $(Ends(S), Ends_\infty(S))$ los dotamos de una topología, con la cual $Ends_\infty(S)$ y $Ends(S)$ resultan ser espacios Hausdorff, totalmente disconexos y compactos; en otras palabras, estos son homeomorfos a dos subconjuntos cerrados del conjunto de Cantor.

Teorema 1. (*Clasificación*). [35, Capítulo 5]. Dos superficies orientables del mismo género S_1 y S_2 son homeomorfas si y solo si sus respectivas parejas $(Ends(S_1), Ends_\infty(S_1))$ y $(Ends(S_2), Ends_\infty(S_2))$ lo son.

Basándonos en el teorema de clasificación, es natural pensar que la superficie más sencilla de género infinito (topológicamente hablando) es aquella que posee un solo fin. En [53] *Phillips, A.* y *Sullivan, D.* llaman a esta superficie el *monstruo del lago Ness* (véase Figura 1). Asimismo,

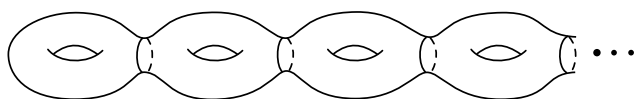


Figura 1: *Monstruo del lago Ness*
 Imagen de Miguel Raggi Pérez, tomada de [7]

la superficie más complicada (topológicamente hablando) es aquella cuyo espacio de fines es homeomorfo al conjunto de Cantor, y cada fin es de género infinito. En [20] Ghys, \acute{E} . llama a esta superficie el *árbol florido de Cantor* (véase Figura 2).

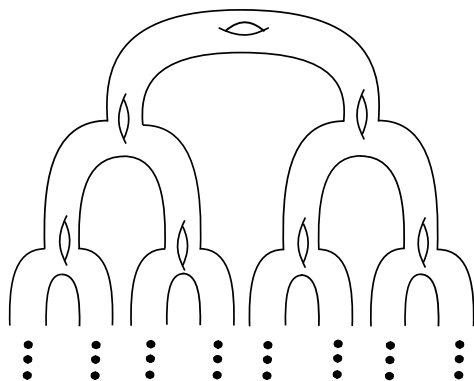


Figura 2: *Árbol florido de Cantor*

Las superficies de *translación* han aparecido naturalmente en los Sistemas Dinámicos ([18], [31], [33]), Teoría de Teichmüller ([36], [47]), Superficies de Riemann ([40], [69]), Geometría Algebraica [46] entre otras. Básicamente, una superficie¹ de *translación* S es una 2-variedad que admite una estructura donde los cambios de coordenadas son translaciones en \mathbb{R}^2 o \mathbb{C} . En estas *superficies de Riemann* definimos la *métrica Riemanniana* μ , a través del «pull-back» de la métrica Euclidiana estándar del plano. Al calcular la curvatura en cualquier punto de S con dicha métrica Riemanniana obtenemos el valor cero, por tal motivo a estas superficies también se les conoce como *superficies planas*. Además, μ define una distancia entre cualesquiera dos puntos $x, y \in S$ (véase [14]) y esta distancia nos permite hablar de la *completación métrica* de S , la cual denotamos mediante \widehat{S} (véase [70]).

Definición 1. [54]. Una superficie de translación S es *mansa* si para todo punto $x \in \widehat{S}$ existe una vecindad $U_x \subset \widehat{S}$ que satisface alguno de los incisos siguientes:

1. La vecindad U_x es isométrica a un abierto del plano. En este caso x es llamado un *punto plano*.
2. La vecindad U_x es isométrica al cubriente $n : 1$ del disco ramificado en el origen. En este caso x es llamado un *punto cónico de ángulo $2n\pi$* .
3. La vecindad U_x es isométrica al cubriente infinito del disco ramificado en el origen. En este caso x es llamado un *punto cónico de ángulo infinito*.

¹Solo consideramos superficies sin frontera.

El conjunto de todos los puntos cónicos de S lo denotamos mediante $Sing(S)$.

El ejemplo que nos motiva a estudiar las superficies de translación mansas data de 1936. En aquella época los matemáticos *Fox, R. H.* y *Kershner, R. B.* (véase [18]) le asociaron al billar ϕ_P que proviene de un polígono Euclidiano compacto $P \subset \mathbb{R}^2$ una superficie de translación *mansa* S_P (la cual llamaron *Ueberlagerungsfläche* y traduce al castellano *superficie de cubierta*) y una función proyección, $\pi_P : S_P \rightarrow \phi_P$, que proyecta cada geodésica de S_P en una *trayectoria del billar* de ϕ_P (véase Figura 3).

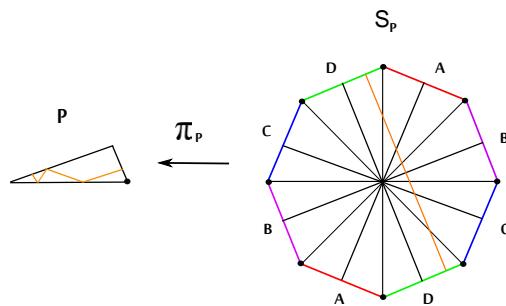


Figura 3: *Billar asociado a un triángulo rectángulo*

Por otro lado, el teorema de Weyl nos dice que en el toro plano $T_{(0,1)} := \mathbb{R}^2 / (1,0)\mathbb{Z} \oplus (0,1)\mathbb{Z}$ el flujo geodésico obedece a una dicotomía.

Teorema de Weyl. [40, Subsección 1.4]. Consideremos el toro plano $T_{(0,1)}$ y una dirección $[\theta] \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Entonces el flujo geodésico $g_{[\theta]}$ asociado a $T_{(0,1)}$ es:

1. Periódico si y sólo si θ es múltiplo racional de π ,
2. Únicamente ergódico² con respecto a la medida de Lebesgue que proviene de \mathbb{R}^2 si y sólo si θ es múltiplo irracional de π .

A finales de la década de los ochenta *Veech, W.* (véase [67]) asoció a cada superficie de translación un grupo de $SL(2, \mathbb{R})$, posteriormente llamado el *grupo de Veech*, y probó (Teorema de Dicotomía de Veech) que si el grupo de Veech de una superficie compacta es una *retícula* –en el sentido hiperbólico–, entonces el comportamiento del flujo geodésico también obedece a una dicotomía. Este resultado aumentó el estudio de las superficies de translación compactas en los últimos veinte años (véase *e.g.*, [69], [58]).

Teorema de Dicotomía de Veech. [67]. Sean S una superficie de translación compacta tal que su respectivo grupo de Veech es una retícula y $[\theta] \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Entonces el flujo geodésico $g_{[\theta]}$ asociado a S satisface alguna de las condiciones siguientes:

1. Es periódico.
2. Es únicamente ergódico con respecto a la medida de Lebesgue.

Para definir el grupo de Veech precisamos primero introducir el grupo de difeomorfismos afines que preservan la orientación. Consideremos S una superficie de translación mansa, entonces

²El flujo geodésico $g_{[\theta]}$ en $T_{(0,1)}$ en la dirección $[\theta]$ es llamado *únicamente ergódico* si la medida de Lebesgue es la única medida de Borel finita en $T_{(0,1)}$ que es invariante bajo el flujo $g_{[\theta]}$.

diremos que el homeomorfismo $f : S \rightarrow S$ es un *difeomorfismo afín que preserva la orientación*, si la función f permuta los puntos singulares de S y además, en coordenadas locales es la restricción de una función afín que preserva la orientación de \mathbb{R}^2 . Al grupo de difeomorfismos afines que preservan la orientación de S lo denotamos mediante $Aff_+(S)$.

Debido a la estructura de translación que posee S junto a la regla de la cadena definimos el morfismo de grupos siguiente

$$D : \begin{array}{ccc} Aff_+(S) & \rightarrow & GL_+(2, \mathbb{R}) \\ f & \rightarrow & Df, \end{array} \quad (1)$$

donde Df es la matriz diferencial de f .

Definición 2. [67]. La imagen de $Aff_+(S)$ bajo D es *el grupo de Veech* de S , denotado mediante

$$\Gamma(S) := D(Aff_+(S)). \quad (2)$$

Existe una propiedad para el grupo de Veech de una superficie de translación compacta.

Teorema 2. [68, p. 790]. El grupo de Veech de una superficie de translación compacta es un subgrupo discreto de $SL(2, \mathbb{R})$.

El resultado anterior motivó el siguiente planteamiento de realización del cual no se ha dado respuesta completamente.

Problema 1. [27, Subsección 2.6, Problema 2]. ¿Qué grupos Fuchsianos son realizables como grupos de Veech de una superficie de translación compacta?

Asimismo, para el caso de superficies de translación mansas no compactas, las cuales son nuestros objetos de interés, también existe un teorema que describe cómo es su respectivo grupo de Veech.

Teorema 3. [54, Teorema 1.1]. El grupo de Veech de una superficie de translación mansa S satisface alguna de las condiciones siguientes:

1. Es conjugado al grupo $P = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & s \end{pmatrix} \in GL_+(2, \mathbb{R}) : t \in \mathbb{R} \text{ y } s > 0 \right\}$.
2. Es conjugado al grupo $P' = \langle B, -Id : B \in P \rangle$.
3. Es numerable³ y disjunto del conjunto $U := \{A \in GL_+(2, \mathbb{R}) : \|Av\| < \|v\| \ \forall v \in \mathbb{R}^2 - \{\bar{0}\}\}$ ⁴, donde $\| \cdot \|$ es la norma usual de \mathbb{R}^2 .
4. Es $GL_+(2, \mathbb{R})$.

El reciente interés que han tenido las superficies de translación de género infinito (véase *e.g.*, [28], [25], [11], [66], [55]) sumado con el Problema 1 de realización de grupos Fuchsianos como grupos de Veech, animan nuestro problema de investigación en el área de Geometría Diferencial.

Problema 2. Sean G un subgrupo de $GL_+(2, \mathbb{R})$ que satisface alguna de las primeras tres condiciones del Teorema 3 y $X_\infty \subset X$ dos subconjuntos cerrados del conjunto de Cantor. ¿Existe

³Un conjunto es numerables si es finito o tiene cardinalidad igual a la cardinalidad de los número naturales, véase *e.g.*, [15, p. 47], [16, p. 3].

⁴Las matrices pertenecientes al conjunto U se les conoce como matrices que contraen.

una superficie de translación mansa S de género infinito tal que su grupo de Veech es G , su espacio de fines es homeomorfo a X y su respectivo espacio de fines de género infinito es X_∞ ?

Durante el estudio del Problema 2 hemos obtenido cuatro teoremas de realización para superficies de translación mansas de género infinito. El primer teorema nos dice que para P y P' no hay restricción en la topología de X , es decir, los grupos P y P' se pueden realizar como grupos de Veech de una superficie con espacio de fines homeomorfo a X y cada fin de género infinito, donde X es cualquier subconjunto cerrado del conjunto de Cantor.

Teorema A. Sea X un subconjunto cerrado del conjunto de Cantor y sean P, P' como en el Teorema 3. Entonces existen dos superficies de translación mansas S y S' tales que sus grupos de Veech son P y P' , sus respectivos espacios de fines son homeomorfos a X y los fines de S y S' son de género infinito.

Incluso, nuestra construcción aporta una cantidad no numerable de superficies que satisfacen los requerimientos del teorema y que no son equivalentes bajo la relación de isometría. Además, este resultado junto con el Problema 2 nos conducen el planteamiento siguiente, el cual fija la condición de que el subgrupo G de $GL_+(2, \mathbb{R})$ satisfaga la condición 3 del Teorema 3.

Problema 3. Sean G un subgrupo de $GL_+(2, \mathbb{R})$ sin elementos que contraen y X un subconjunto cerrado del conjunto de Cantor. ¿Existe una superficie de translación mansa S tal que su grupo de Veech es G , su respectivo espacio de fines es homeomorfo a X y cada fin de S es de género infinito?

El Teorema de realización dado en [54] por Przytycki, P., Weitze-Schmithüsen, G. y Valdez, F. (el cual enunciaremos a continuación) responde a esta pregunta para la superficie más sencilla de género infinito, es decir, *el monstruo del lago Ness* (véase Figura 1).

Teorema 4. [54, Teorema 1.2]. Sea G un subgrupo numerable de $GL_+(2, \mathbb{R})$ sin elementos que contraen, entonces existe una superficie de translación mansa S tal que su grupo de Veech es G y S es homeomorfa al monstruo del lago Ness.

En cambio, nuestro segundo teorema de realización lo hace para la superficie más complicada, es decir, *el árbol florido de Cantor* (véase Figura 2).

Teorema B. Sea G un subgrupo numerable de $GL_+(2, \mathbb{R})$ sin elementos que contraen, entonces existe una superficie de translación mansa S tal que su grupo de Veech es G y S es homeomorfa al árbol florido de Cantor.

Pero, ¿qué sucede con los casos intermedios? Es decir, si X tiene más de un punto y no es homeomorfo al conjunto de Cantor (basándonos en el Problema 3)? El siguiente resultado considera el caso cuando X es numerable y homeomorfo al número ordinal $\omega^k + 1$, para cada $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y realiza la superficie con grupo de Veech G tal que su respectivo espacio de fines es homeomorfo a X y cada fin es de género infinito. Este resultado generaliza el Teorema 4.

Teorema C. Sean G un subgrupo numerable de $GL_+(2, \mathbb{R})$ sin elementos que contraen y $\omega^k + 1$ un número ordinal, para algún $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Entonces existe una superficie de translación mansa S tal que su grupo de Veech es G , su respectivo espacio fines X es homeomorfo a $\omega^k + 1$ y cada fin de S es de género infinito.

La última afirmación es el caso particular del espacio de fines X con cardinalidad no numerable.

Teorema D. Sean G un subgrupo numerable de $GL_+(2, \mathbb{R})$ sin elementos que contraen, $B \sqcup U$ un subconjunto cerrado no numerable del conjunto de Cantor, tal que B es homeomorfo al conjunto de Cantor y U es un subconjunto numerable, discreto, con un solo punto en su frontera. Entonces existe una superficie de translación mansa S tal que su grupo de Veech es G , su respectivo espacio de fines es homeomorfo a $B \sqcup U$ y cada fin de S es de género infinito.

Realización de mapas regulares en superficies orientables de género infinito.

Los *sólidos platónicos* corresponden a unos de los mapas más estudiados desde la edad antigua (véase Figura 4). Podría decirse que ellos motivaron el teorema de la característica de Euler para el caso de la esfera (véase [6, Capítulos 7 y 8]). Básicamente, el concepto de *mapa* (véase [30]) en una superficie es la idea que poseemos de la representación gráfica de los países en el globo terráqueo, es decir, la superficie es descompuesta en países –caras–, estos están delimitados por sus respectivas fronteras –aristas– y el punto donde tres o más países se reúnen es un vértice.



Figura 4: *Sólidos platónicos*
Imagen de Maksim Pe, distribuida bajo CC BY-SA 4.0

Definición 3. [30, p. 275]. Un *mapa* $\mathcal{M} := (\Delta, S, i)$ es una tripleta, donde Δ es una gráfica⁵, S es una superficie⁶ e $i : \Delta \hookrightarrow S$ es un encaje que satisface las propiedades siguientes:

1. El subconjunto $i(V(\Delta))$ es discreto en S . Los elementos del conjunto $i(V(\Delta))$ son los *vértices* del mapa.
2. Cada componente conexa de $S \setminus i(\Delta)$ es homeomorfa a un disco. Cada uno de estos subconjuntos es una *cara* del mapa \mathcal{M} .
3. La frontera de cada cara del mapa \mathcal{M} es la imagen de una cantidad finita de aristas de Δ bajo el encaje i .

En tal caso diremos que *el mapa \mathcal{M} se realiza en la superficie S .*

De la definición anterior se sigue que si el mapa \mathcal{M} se realiza en una superficie no compacta, entonces la gráfica Δ es de orden infinito, es decir, tiene una cantidad infinita de vértices. En mapas, también tenemos la noción regularidad, solo que ésta está dada en términos de su grupo de automorfismos y su conjunto de banderas. Brevemente, introduciremos dichos objetos.

⁵Solo consideraremos gráficas simples y conexas

⁶Las superficies que consideraremos son no compactas, orientables y sin frontera.

Consideremos un mapa $\mathcal{M} := (\Delta, S, i)$, diremos que el homeomorfismo $f : S \rightarrow S$ es un *preautomorfismo* de \mathcal{M} si existe g_f un automorfismo de la gráfica Δ tal que el diagrama 1 conmuta. Denotamos mediante $Aut(\Delta)$ al grupo de automorfismos de la gráfica Δ , entonces El

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{f} & S \\ \uparrow i & & \uparrow i \\ \Delta & \xrightarrow{g_f} & \Delta \end{array}$$

Diagrama 1: *Preautomorfismo*

grupo de preautomorfismos del mapa \mathcal{M} es

$$\tilde{Aut}(\mathcal{M}) := \{f : S \rightarrow S \mid f \text{ es un preautomorfismo}\}.$$

Ahora, definimos el morfismo de grupos siguiente

$$\begin{array}{ccc} \varphi : \tilde{Aut}(\mathcal{M}) & \rightarrow & Aut(\Delta) \\ f & \rightarrow & g_f. \end{array} \quad (3)$$

Definición 4. El grupo de *Automorfismos* del mapa \mathcal{M} es el cociente

$$Aut(\mathcal{M}) := \tilde{Aut}(\mathcal{M}) / \ker \varphi. \quad (4)$$

Combinatoriamente, una *bandera* Φ del mapa $\mathcal{M} := (\Delta, S, i)$ es una tripleta

$$\Phi := (v, e, C) \quad (5)$$

que satisface las propiedades siguientes (véase Figura 5)

1. El elemento v es el vértice de Δ .
2. El elemento e es una arista de Δ incidente en el vértice v .
3. El elemento C es un ciclo de Δ que contiene a la arista e y además, $i(C)$ es la frontera de una cara del mapa \mathcal{M} .

El *conjunto de banderas* del mapa \mathcal{M} es

$$\mathcal{F} := \{(v, e, C) : (v, e, C) \text{ es una bandera de } \mathcal{M}\}.$$

De este modo, cada mapa \mathcal{M} tiene asociado dos objetos, su respectivo grupo de automorfismos $Aut(\mathcal{M})$ y su conjunto de banderas \mathcal{F} , basándonos en éstos dos definimos la acción

$$\begin{array}{ccc} \alpha : Aut(\mathcal{M}) \times \mathcal{F} & \rightarrow & \mathcal{F} \\ ([f], (v, e, C)) & \rightarrow & (g_f(v), g_f(e), g_f(C)). \end{array} \quad (6)$$

Definición 4. [30]. El mapa \mathcal{M} es *regular*, si la acción α es transitiva.

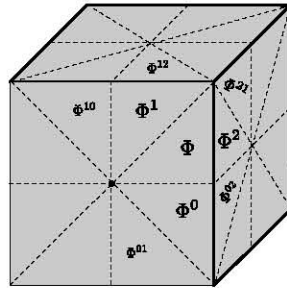
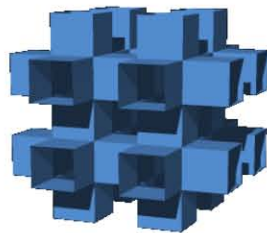
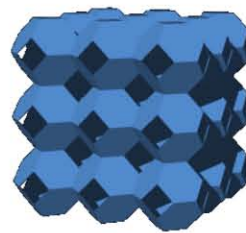


Figura 5: *Banderas*
 Imagen de Miguel Raggi Pérez, tomada de [7]

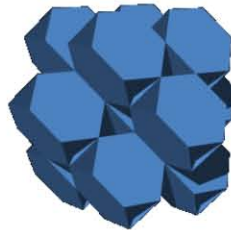
En el año de 1923, *Coxeter, H. S. M.* y *Petrie, J. F.* encontraron tres nuevos poliedros regulares *infinitos*, los cuales también son mapas regulares y que además, se realizan en el monstruo del lago Ness (véase [8]). En [6, p. 333] estos poliedros regulares infinitos son llamados el *cubo multiplicado*, el *octaedro multiplicado* y el *tetraedro multiplicado*, respectivamente. *Grosso modo*, el cubo multiplicado es el mapa regular $\mathcal{M} := (\Delta, S, i)$ tal que la gráfica Δ es isomorfa a la gráfica de Cayley del grupo $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ con respecto al conjunto generador $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ y el monstruo del lago Ness S localmente, en el espacio Euclidiano \mathbb{R}^3 , se ve como en la Figura 6a.



a. *Cubo multiplicado*



b. *Octaedro multiplicado*



c. *Tetraedro multiplicado*

Figura 6: *Vista local de los poliedros regulares infinitos de Petrie-Coxeter*
 Imagen de Tom Ruen, distribuida bajo CC BY-SA 4.0

Asimismo, junto a *Coulbois, T. et. al.*, en [7] probamos que la superficie topológica en la cual se realiza el mapa cubriente mínimo regular asociado a las teselaciones *Arquimedianas* es, efectivamente, el monstruo del lago Ness. Los poliedros regulares infinitos descritos por *Coxeter*,

H. S. M. y *Petrie, J. F.* sumados a las tres teselaciones regulares (triángulos equiláteros, cuadrados y hexágonos) del plano Euclidiano y las teselaciones del plano Hiperbólico (véase [9] y [22]) fueron los primeros mapas regulares que se realizan en superficies no compactas y orientables, históricamente hablando.

Por otro lado, *Pellicer, D.* plantea el siguiente interrogante en [51, Problema 22] para mapas quirales⁷,

Problema 4. Determine en cuáles superficies no compactas y sin frontera se pueden realizar mapas quirales.

Éste interrogante sumado con los mencionados mapas regulares que se realizan en el plano y el monstruo del lago Ness motivan nuestra pregunta en el área de la Combinatoria.

Problema 5. ¿En cuáles superficies orientables de género infinito se pueden realizar mapas regulares?

Durante nuestro estudio del planteamiento anterior, junto al Dr. John Alexander Arredondo García⁸ y Dr. Ferrán Valdez obtuvimos el resultado siguiente.

Teorema E. [1, Teorema 1.3]. En las únicas superficies no compactas y orientables donde se pueden realizar mapas regulares son

- el plano y
- el monstruo del lago Ness.

Tópicos de los capítulos

Capítulo 1. Introducimos el espacio de fines de una superficie junto con sus propiedades topológicas y los teoremas de clasificación y realización de superficies no compactas y orientables. Igualmente, allí definimos los números ordinales –los subconjuntos cerrados y numerables del conjunto de Cantor– con su respectiva clasificación. Finalizando, el lector encontrará algunas propiedades de la gráfica del árbol binario de Cantor, las cuales son una de las herramientas vitales para la demostración de los Teoremas A, B, C y D, enunciados anteriormente.

Capítulo 2. Presentaremos nuestros primeros objetos de estudio, las superficies de translación mansas y el grupo de Veech junto con algunas de sus propiedades y ejemplos. También, incluimos el Teorema de Dicotomía de Veech y el problema de realización de grupos Fuchsianos como grupos de Veech, el cual motiva nuestro primer planteamiento de investigación en el área de Geometría Diferencial.

Capítulo 3. Definimos dos objetos matemáticos, el primero que llamamos *la pieza fundamental* y basándonos en él introducimos el segundo, *el puzzle*. Luego, ayudándonos de éstos dos y las propiedades de la gráfica del árbol binario de Cantor descritas en el primer capítulo, presentamos detalladamente las pruebas de los Teoremas A, B, C y D, respectivamente.

Capítulo 4. Abordamos los mapas regulares, ejemplos y enunciamos algunas de sus pro-

⁷Brevemente, un mapa es quiral si la acción α (véase expresión (6)) define dos órbitas en banderas sin que banderas adyacentes estén en la misma órbita. O bien, son aquellos que admiten máximo de simetrías por rotación pero no admiten automorfismos que revierten la orientación.

⁸Profesor Investigador Universidad Konrad Lorenz, Bogotá, Colombia.

iedades. Además, allí mostramos un trabajo conjunto realizado con *Coulbois, T., Pellicer, D., Raggi, M.* y *Valdez, F.* sobre la superficie topológica en la cual se realiza el mapa cubriente mínimo regular de cualquier teselación Arquimediana del plano Euclidiano. Asimismo, incluimos la prueba del Teorema E –el cual generaliza el trabajo conjunto realizado con los mencionados cuatro matemáticos– y algunas herramientas de la teoría de árboles dada por *Serre, J.-P.* en [60], las cuales usamos para dicha demostración.

Capítulo 1

Espacio de fines y gráficas localmente finitas

1.1. Fines de una superficie

Las superficies orientables compactas están clasificadas topológicamente por su género. Para las superficies orientables no compactas también existe un teorema de clasificación (véase [35]) y otro de realización (véase [57]). Los mencionados resultados se demuestran usando el concepto de fin ([19], [57] y [43]) y el género de un fin; esta es lista completa de invariantes topológicos.

Una *superficie* S es una 2-variedad conexa. En este capítulo la letra S denotará superficies no compactas, orientables y conexas. *Grosso modo*, los *fines* de S son todos los caminos posibles para ir al *infinito* en S o alternativamente, todas las maneras posibles de escapar de cualquier compacto en S (véase Figura 1.1).

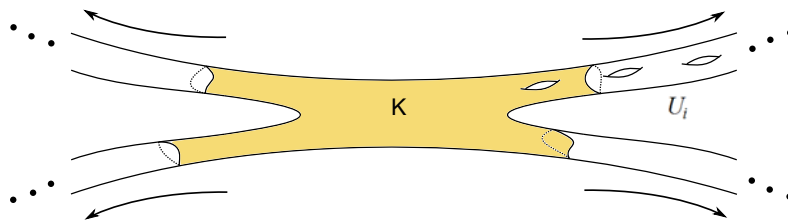


Figura 1.1: *Fines*

Un *prefin* de S es una sucesión anidada de abiertos conexos con cerradura no compacta en S , $U_1 \supset U_2 \supset \dots$, que satisfacen las siguientes condiciones:

1. La frontera de U_n es compacta para cada $n \in \mathbb{N}$.
 2. Para cualquier subconjunto compacto K de S , existe $n \in \mathbb{N}$ tal que la intersección $U_n \cap K = \emptyset$.
- Por comodidad, el prefin $U_1 \supset U_2 \supset \dots$, lo denotamos mediante $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Definición 1.1.1. Si el conjunto formado por todos los prefines de S lo denotamos mediante $\tilde{Ends}(S)$. Entonces el conjunto de fines de S es

$$Ends(S) := \tilde{Ends}(S) / \sim,$$

donde \sim es la relación de equivalencia siguiente, $(U_n)_{n \in \mathbb{N}} \sim (V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si y solo si se satisfacen dos propiedades:

1. Para cada $i \in \mathbb{N}$, existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $U_j \subset V_i$.
2. Para cada $l \in \mathbb{N}$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $V_k \subset U_l$.

Un *fin* $[U_n]_{n \in \mathbb{N}}$ de la superficie S es una clase de equivalencia del conjunto $Ends(S)$.

Adicionalmente, dotamos a $Ends(S)$ con una topología; para ello consideramos un abierto con frontera compacta $U \subset S$ y definimos el conjunto

$$U^* = \{[U_n]_{n \in \mathbb{N}} \in Ends(S) : U_n \subset U \text{ para algún } n \in \mathbb{N}\}.$$

Entonces la familia

$$\beta = \{U^* : U \subset S \text{ abierto con frontera compacta}\}, \tag{1.1}$$

es base para la topología de $Ends(S)$.

Proposición 1.1.1. [57, Proposición 3]. El espacio de fines de S es Hausdorff, totalmente conexo y compacto. En otras palabras, el espacio $Ends(S)$ es homeomorfo a un subconjunto cerrado del conjunto de Cantor.

En este escrito denotaremos mediante 2^ω al conjunto de Cantor.

Un abierto conexo de S con cerradura compacta U lo llamamos *subsuperficie* si su frontera consiste de un número finito de trayectorias sin autointersecciones. El *género* de la subsuperficie $U \subset S$ es el número

$$g(U) = 1 - \frac{1}{2}(\chi(U) + q(U)), \tag{1.2}$$

donde $q(U)$ es la cantidad de curvas que conforman su frontera y $\chi(U)$ es su característica de Euler.

Definición 1.1.2. El *género de la superficie* S es el supremo de los géneros de sus subsuperficies.

Definición 1.1.3. Un fin $[U_n]_{n \in \mathbb{N}}$ de S es de *género infinito* si para el representante $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$, el abierto U_n es de género infinito, para cada $n \in \mathbb{N}$.

El conjunto de todos los fines de S que tienen género infinito lo denotamos mediante $Ends_\infty(S)$ y cualquier elemento perteneciente al conjunto

$$Ends(S) \setminus Ends_\infty(S) \tag{1.3}$$

es llamado un *fin plano*. Cualquier superficie tiene asociado de manera natural el par

$$S \rightarrow (Ends(S), Ends_\infty(S)).$$

Dicho par es el invariante topológico que nos permitirá enunciar los resultados de clasificación y realización de superficies no compactas y orientables.

Teorema 1.1.1 (Clasificación). [35, Capítulo 5]. Dos superficies del mismo género S_1 y S_2 son homeomorfas si y solo si sus respectivas parejas $(Ends(S_1), Ends_\infty(S_1))$ y $(Ends(S_2), Ends_\infty(S_2))$ lo son.

Teorema 1.1.2 (*Realización*). [57, Teorema 2]. Sean X y X_∞ dos espacios Hausdorff, compactos y totalmente disconexos, tal que $X_\infty \subset X$. Entonces existe una superficie S tal que $Ends(S) = X$ y $Ends_\infty(S) = X_\infty$.

Ejemplo 1.1.1. Basándonos en el teorema de clasificación, es natural pensar que la superficie más sencilla de género infinito (topológicamente hablando) es aquella que posee un solo fin. En [53] *Phillips, A.* y *Sullivan, D.* llaman a esta superficie el *monstruo del lago Ness* (véase Figura 1.2).

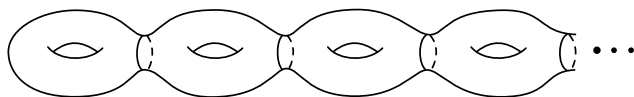


Figura 1.2: *Monstruo del lago Ness*
Imagen de Miguel Raggi Pérez, tomada de [7]

Ejemplo 1.1.2. La superficie más complicada (topológicamente hablando) es aquella cuyo espacio de fines es homeomorfo al conjunto de Cantor, y cada fin es de género infinito. En [20] *Ghys, É.* llama a esta superficie el *árbol florido de Cantor* (véase Figura 1.3).

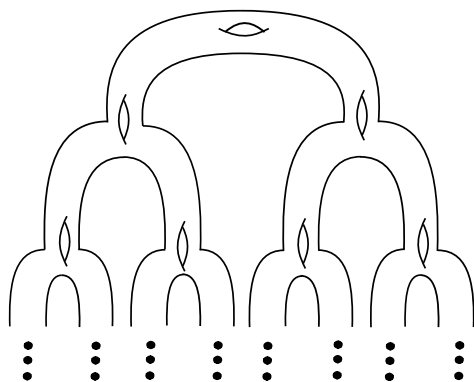


Figura 1.3: *Árbol florido de Cantor*

De manera similar, a como se hizo para las superficies, es decir, usando abiertos conexos de cerradura no compacta (véase Definición 1.1.1), a cada espacio localmente compacto, localmente conexo, conexo y Hausdorff X , también se le asocia su respectivo espacio de fines $Ends(X)$. Dicho espacio de fines resulta ser homeomorfo a un subconjunto cerrado del conjunto de Cantor (véase *e.g.*, [19], [56]). A continuación, presentaremos una definición equivalente para el espacio de fines de X .

Proposición 1.1.2. [21, Proposición. 13.4.7]. Sea X un espacio localmente compacto, localmente conexo, conexo y Hausdorff, entonces existe una sucesión creciente de compactos conexos $K_1 \subset K_2 \subset \dots$ en X tal que $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$. Si denotamos mediante

$$X \setminus K_n := U_1^n \sqcup \dots \sqcup U_{i(n)}^n, \tag{1.4}$$

donde cada $U_{k(n)}^n$ con $k(n) \in \{1, \dots, i(n)\}$ es una componente conexa. Podemos asumir que cada una de dichas componentes conexas tiene cerradura no compacta en X , entonces $Ends(X)$ es el conjunto de todas las sucesiones $(U_{k(n)}^n)_{n \in \mathbb{N}}$ que satisfacen las condiciones siguientes:

1. Para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $U_{k(n)}^n \subset X \setminus K_n$.
2. Para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $U_{k(n)}^n \supset U_{k(n+1)}^{n+1}$.

En [62] *Specker, E.* dio una equivalencia para cuando el espacio de fines de X es de cardinalidad finita, dicha equivalencia es como sigue: Sea X un espacio localmente compacto, localmente conexo, conexo y Hausdorff. Entonces X tiene exactamente $n \in \mathbb{N}$ fines si y solo si para cada compacto $K \subset X$ existe un compacto $K' \supset K$ tal que el subconjunto $X \setminus K'$ está formado por n componentes conexas.

1.2. Fines de una gráfica localmente finita

En este escrito las gráficas las reconoceremos como espacios topológicos formados por un conjunto de vértices y un conjunto de aristas (véase [12]). Sin embargo, por comodidad, a estos objetos –las gráficas– los describiremos de manera combinatoria.

Brevemente, introduciremos la definición de la *gráfica de Cayley* de un grupo y enunciaremos un teorema que nos describe la cardinalidad de su respectivo espacio de fines, siempre y cuando dicho grupo sea finitamente generado.

Definición 1.2.1. Sean G un grupo y H un subconjunto generador de G cerrado bajo inversos. La *gráfica de Cayley* $Cay(G, H)$ de G con respecto a H posee:

1. Conjunto de vértices $V(Cay(G, H)) := \{g : g \in G\}$.
2. Conjunto de aristas $E(Cay(G, H)) := \{(g, \bar{g}) : gh = \bar{g} \text{ para algún } h \in H\}$.

Ejemplo 1.2.1. La gráfica $Cay(\mathbb{Z}, \{1\})$ del grupo \mathbb{Z} con respecto al subconjunto generador $\{1\}$ posee:

1. Conjunto de vértices $V(Cay(\mathbb{Z}, \{1\})) = \{n : n \in \mathbb{Z}\}$.
2. Conjunto de aristas $E(Cay(\mathbb{Z}, \{1\})) = \{(n, n+1) : n \in \mathbb{Z}\}$, (véase Figura 1.4).

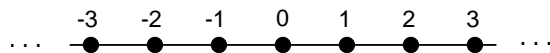


Figura 1.4: Gráfica $Cay(\mathbb{Z}, \{1\})$

Ejemplo 1.2.2. La gráfica $Cay(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \{(1, 0), (0, 1)\})$ del grupo $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ con respecto al subconjunto generador $\{(1, 0), (0, 1)\}$ posee:

1. Conjunto de vértices $V(Cay(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \{(1, 0), (0, 1)\})) = \{(n, m) : n, m \in \mathbb{Z}\}$.
2. Conjunto de aristas $E(Cay(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \{(1, 0), (0, 1)\})) = \{((n, m), (n+1, m)), ((n, m), (n, m+1)) : n, m \in \mathbb{Z}\}$, (véase Figura 1.5).

Ejemplo 1.2.3. La gráfica $Cay(F_2, \{a, b\})$ del grupo libre con dos generadores F_2 con respecto al subconjunto generador $\{a, b\}$ posee:

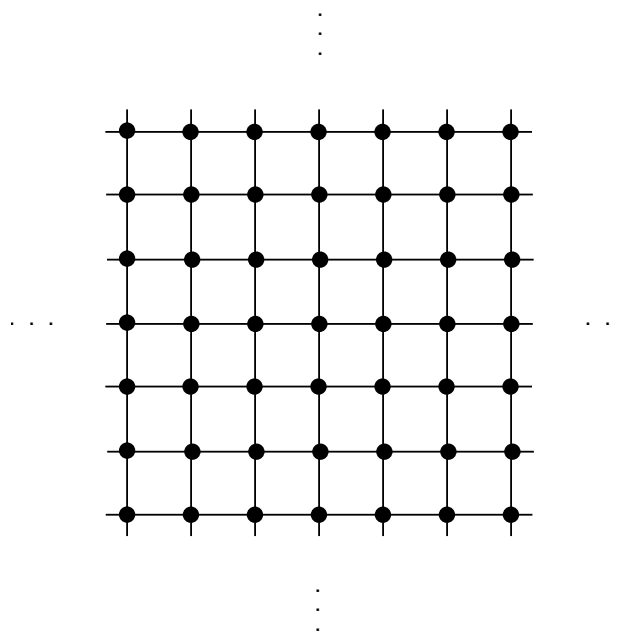


Figura 1.5: Gráfica $Cay(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \{(1, 0), (0, 1)\})$

1. Conjunto de vértices $V(Cay(F_2, \{a, b\})) := \{g : g \in F_2\}$.
2. Conjunto de aristas $E(Cay(F_2, \{a, b\})) := \{(g, \bar{g}) : gh = \bar{g} \text{ para algún } h \in \{a, b\}\}$, (véase Figura 1.6).

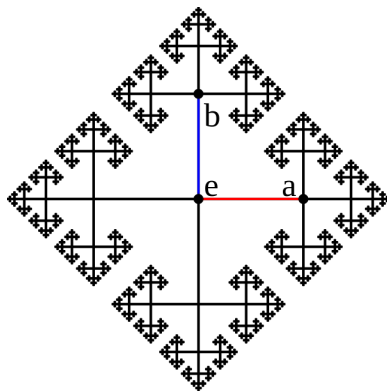


Figura 1.6: Gráfica $Cay(F_2, \{a, b\})$

Imagen de David Benbennick, distribuida bajo el Dominio Público

Nótese que la gráfica de Cayley $Cay(G, H)$ del grupo G con respecto al subconjunto generador *finito* H es un espacio Hausdorff, localmente compacto, localmente conexo y conexo. Entonces su respectivo espacio de fines $Ends(Cay(G, H))$ está bien definido y además, es homeomorfo a un subconjunto cerrado del conjunto de Cantor. Incluso, si consideramos H' otro subconjunto gene-

radador finito de G diferente de H , entonces los espacios $Ends(Cay(G, H))$ y $Ends(Cay(G, H'))$ son homeomorfos (véase [38, Capítulo 8]). Por tal motivo, el espacio de fines de la gráfica de Cayley del grupo finitamente generado G , lo denotaremos mediante $Ends(Cay(G))$. El siguiente resultado –que es de suma importancia en nuestra investigación– describe la cardinalidad de este espacio de fines.

Teorema 1.2.1. [59, p. 176]. Sea G un grupo finitamente generado, entonces la cardinalidad del espacio $Ends(Cay(G))$ es cero, uno, dos o infinito.

1.3. Espacios Polacos

Para entender el espacio de fines de una superficie o una gráfica es indispensable estudiar los subconjuntos cerrados del conjunto de Cantor. Afortunadamente, la *Teoría descriptiva de Conjuntos* nos presenta dos resultados relacionados con estos objetos. El primero es el *Teorema de Cantor-Bendixson* [34], el cual brinda una descripción de cualquier subconjunto cerrado y no numerable del Conjunto de Cantor. El segundo es el *Teorema de clasificación de espacios métricos, compactos y numerables* –probado en 1920 por *Mazurkiewicz, S.* y *Sierpiński, W.* [41]– que nos dice cuando dos espacios métricos, compactos y numerables son homeomorfos.

1.3.1. Teorema de Cantor-Bendixson

Un espacio topológico X es *completamente metrizable* si admite una métrica compatible d , tal que (X, d) es completo como espacio métrico. Un espacio separable y completamente metrizable X es llamado un espacio *polaco*.

Ejemplo 1.3.1. Para cada $n \in \mathbb{N}$, el espacio Euclidiano n -dimensional es un espacio polaco. El intervalo cerrado $[0, 1]$ también lo es. En general, cualquier espacio compacto y métrico es polaco.

Teorema 1.3.1 (*Cantor-Bendixson* [34, Teorema 6.4]). Todo espacio polaco X se escribe de manera única como

$$X = B \sqcup U, \tag{1.5}$$

donde B es un subconjunto *perfecto* de X y U es un abierto numerable¹ y discreto.

Corolario 1.3.1. Cualquier espacio polaco no numerable contiene un subespacio homeomorfo al conjunto de Cantor.

El siguiente resultado lo obtuvimos en colaboración con *Hernández, F.* Adicionalmente, lo usamos en la prueba de uno de nuestros resultados de investigación.

Lema 1.3.1. Sean X_1 y X_2 dos subconjuntos no numerables y cerrados del conjunto de Cantor tales que $X_1 = B_1 \sqcup U_1$ y $X_2 = B_2 \sqcup U_2$ donde B_1 y B_2 son subconjuntos homeomorfos al conjunto de Cantor, U_1 y U_2 son abiertos numerables y discretos con un solo punto en su frontera, respectivamente. Entonces X_1 y X_2 son homeomorfos.

¹Un conjunto es numerable si es finito o tiene cardinalidad igual a la cardinalidad de los números naturales, véase *e.g.*, [15, p. 47], [16, p. 3].

Demostración. Por hipótesis los subconjuntos B_1 y B_2 son homeomorfos al conjunto de Cantor y además, existe un homeomorfismo $h : U_1 \rightarrow U_2$. El espacio discreto $\{0, 1\}$ lo identificamos con el grupo \mathbb{Z}_2 y de ese modo dotamos al conjunto de Cantor $2^\omega = \prod_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}_2^i$ de estructura de grupo topológico mediante la siguiente función

$$\begin{aligned} \alpha & : \prod_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}_2^i \times \prod_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}_2^i & \rightarrow & \prod_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}_2^i, \\ & ([x_n]_{n \in \mathbb{N}}, [y_n]_{n \in \mathbb{N}}) & \rightarrow & [x_n + y_n]_{n \in \mathbb{N}} \end{aligned} \tag{1.6}$$

Además, la función α es una acción transitiva por izquierda; entonces existe un elemento $[x_n]_{n \in \mathbb{N}} \in \prod_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}_2^i$ tal que la restricción de la acción α

$$\alpha_{|[x_n]_{n \in \mathbb{N}}} : \prod_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}_2^i \cong B_1 \rightarrow \prod_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}_2^i \cong B_2,$$

es un homeomorfismo tal que $\alpha_{|[x_n]_{n \in \mathbb{N}}}(\partial U_1) = \partial U_2$. Por ello, la función

$$F : X_1 \rightarrow X_2$$

$$x \rightarrow \begin{cases} \alpha_{|[x_n]_{n \in \mathbb{N}}}(x), & \text{si } x \in B_1, \\ h(x), & \text{si } x \in U_1, \end{cases}$$

es un homeomorfismo. □

1.3.2. Derivada de Cantor-Bendixson

Grosso modo, el teorema de clasificación de espacios métricos, compactos y numerables (véase [41]) nos indica que todo espacio X , con las características anteriormente mencionadas, es homeomorfo a un número ordinal. Para entender este enunciado debemos involucrarnos con los conceptos de *número ordinal*, *la derivada de Cantor-Bendixson* y *el sistema característico*, los cuales introduciremos a continuación.

Sean α un conjunto y \prec una relación antisimétrica en α , diremos que α es un *ordinal* o un *número ordinal* con respecto a \prec ; si para cada subconjunto no vacío $\beta \subset \alpha$, existe $\beta_0 \in \beta$ tal que para todo $\gamma \in \beta$ se tiene que $\beta_0 \prec \gamma$.

El siguiente ejemplo es una manera sencilla e inductiva de construir números ordinales.

Ejemplo 1.3.2. Primero, al conjunto vacío lo representamos mediante el símbolo 0,

$$0 := \emptyset.$$

Luego, al conjunto con un solo elemento lo representamos mediante el símbolo 1,

$$1 := \{0\} = \{\emptyset\}.$$

Análogamente, al conjunto con dos elementos lo representamos mediante el símbolo 2,

$$2 := \{0, 1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}.$$

Continuando el proceso anterior, al conjunto con tres, cuatro, cinco, ..., elementos lo representamos mediante los símbolos 3, 4, 5, ..., respectivamente; *i.e.*,

$$\begin{aligned} 3 &:= \{0, 1, 2\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \\ 4 &:= \{0, 1, 2, 3\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \\ 5 &:= \{0, 1, 2, 3, 4\}, \end{aligned}$$

y así sucesivamente. Usando el anterior proceso inductivo, para cada $n \in \mathbb{N}$, al conjunto con n elementos lo representamos mediante

$$n := \{0, 1, \dots, n - 1\}.$$

Entonces el conjunto con n elementos es un *número ordinal* con respecto a la relación antisimétrica dada por la contención de conjuntos \subset .

Proposición 1.3.1. [24, Proposición 9.2]. El conjunto de ordinales

$$\omega := \{0, 1, \dots, n, n + 1, \dots\} \tag{1.7}$$

es un número ordinal con respecto a la contención de conjuntos.

Ejemplo 1.3.3. Si continuamos el proceso inductivo descrito en el Ejemplo 1.3.2, para cada $n \in \mathbb{N}$, el conjunto

$$\omega + n := (\omega + n - 1) + 1 = \{0, 1, \dots, \omega, \omega + 1, \dots, \omega + (n - 1)\}$$

es un número ordinal con respecto a la contención de conjuntos \subset .

Análogamente, para cada $n \in \mathbb{N}$, el conjunto

$$\omega \cdot n := \{0, 1, \dots, \omega, \omega + 1, \dots, \omega \cdot 2, \omega \cdot 2 + 1, \dots, \omega \cdot (n - 1), \omega \cdot (n - 1) + 1, \dots\}$$

es un número ordinal con respecto a la contención de conjuntos.

Finalmente, para cada $n \in \mathbb{N}$, el conjunto

$$\omega^n := \{0, 1, \dots, \omega, \omega + 1, \dots, \omega \cdot 2, \omega \cdot 2 + 1, \dots, \omega^{n-1}, \omega^{n-1} + 1, \dots, \omega^{n-1} \cdot 2, \omega^{n-1} \cdot 2 + 1, \dots\}$$

es un número ordinal con respecto a la contención de conjuntos.

Adicionalmente, dotamos al número ordinal α con respecto a la relación antisimétrica \prec con una topología; para ello consideramos un punto $\gamma \in \alpha$ y definimos dos conjuntos

$$U_\gamma := \{\beta \in \alpha : \beta \prec \gamma\} \text{ y } V_\gamma := \{\beta \in \alpha : \gamma \prec \beta\},$$

entonces la familia $\{U_\gamma, V_\gamma : \gamma \in \alpha\}$ es subbase para la topología de α .

Teorema 1.3.2. [24, Teorema 9. 10]. El conjunto de todos los números ordinales no existe.

Denotamos mediante **Ord** a la clase de todos los números ordinales, entonces **Ord** es una clase bien ordenada con respecto a la relación antisimétrica que define la contención \subset . Un

elemento $\alpha \in \mathbf{Ord}$ es un *ordinal límite*, si para cada $\beta \subset \alpha$ existe $\lambda \in \mathbf{Ord}$ tal que $\beta \subset \lambda \subset \alpha$. Claramente, el elemento $\omega \in \mathbf{Ord}$ es un ordinal límite (véase Proposición 1.3.1).

Sea X un espacio topológico, la *derivada de Cantor-Bendixson de X* es el conjunto

$$X' := \{x \in X : x \text{ es un punto límite}\}. \quad (1.8)$$

Claramente, X' es un subconjunto cerrado, y es perfecto si y solo si $X = X'$. Usando recursión transfinita, para cada $\alpha \in \mathbf{Ord}$, la α -ésima *derivada iterada de Cantor-Bendixson de X* es el conjunto

$$\begin{aligned} X^0 &:= X, \\ X^\alpha &:= (X^{\alpha-1})' \text{ o} \\ X^\alpha &:= \bigcap_{\lambda \subset \alpha} X^\lambda \text{ si } \alpha \text{ es un ordinal límite.} \end{aligned} \quad (1.9)$$

Así, $(X^\alpha)_{\alpha \in \mathbf{Ord}}$ es una sucesión decreciente de subconjuntos cerrados de X .

Teorema 1.3.3. [34, Teorema 6.11]. Sea X un espacio polaco, entonces existe un elemento $\alpha_0 \in \mathbf{Ord}$ tal que para todo $\alpha \supseteq \alpha_0$, $X^\alpha = X^{\alpha_0}$.

Siguiendo el resultado anterior, si X es un espacio polaco compacto y numerable, entonces existe un elemento $\alpha \in \mathbf{Ord}$ numerable tal que

$$X^\alpha \neq \emptyset \text{ y } X^{\alpha+1} = \emptyset. \quad (1.10)$$

El número ordinal α que satisface (1.10) es el *rango de Cantor-Bendixson de X* . Al espacio X le asociamos de manera natural la pareja

$$X \rightarrow (\alpha, n)$$

donde α es el rango de Cantor Bendixson de X y $n \in \mathbb{N}$ es la cardinalidad del conjunto X^α . Dicha pareja es el *sistema característico de X* (véase [34]).

Ejemplo 1.3.4. El sistema característico del espacio de fines del monstruo del lago Ness es la pareja $(0, 1)$.

El sistema característico de la cerradura en \mathbb{R} de la sucesión $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ es la pareja $(1, 1)$.

El sistema característico del número ordinal $\omega^k \cdot n + 1$ con $k, n \in \mathbb{N}$, es la pareja (k, n) .

Teorema 1.3.4 (*Clasificación de espacios métricos, compactos y numerables* [41]). Sea X un espacio métrico, compacto y numerable con sistema característico (α, n) , entonces X es homeomorfo al número ordinal $\omega^\alpha \cdot n + 1$.

Corolario 1.3.2. Dos espacios métricos, compactos y numerables son homeomorfos si y solo si tienen el mismo sistema característico.

1.4. Gráfica del árbol binario de Cantor

En 1963, *Richards* enunció y probó el teorema de realización para superficies no compactas (véase Teorema 1.1.2), es natural preguntarnos:

¿Existe un resultado análogo para gráficas? En otras palabras, sea X un subconjunto cerrado del conjunto de Cantor, ¿existe alguna gráfica con espacio de fines homeomorfo a X ?

Motivados por esta pregunta estudiamos el espacio de fines de la gráfica del *árbol² binario de Cantor* y encontramos una solución al interrogante, la cual explicaremos en los párrafos siguientes.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos el conjunto

$$2^n := \left\{ D_s : D_s := (x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) \in \prod_{i=1}^n \{0, 1\}_i \right\} \quad (1.11)$$

y la función

$$\begin{aligned} \pi_i : 2^n &\rightarrow \{0, 1\} \\ D_s &\rightarrow x_i \end{aligned}$$

es la proyección en la i -ésima coordenada, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$.

Definición 1.4.1. [26]. La gráfica del *árbol binario de Cantor* $T2^\omega$ tiene:

1. Vértices $V(T2^\omega) := \{D_s : D_s \in 2^n \text{ para cada } n \in \mathbb{N}\}$.
2. Aristas $E(T2^\omega) := \{(D_s, D_t) : D_s \in 2^n \text{ y } D_t \in 2^{n+1} \text{ para algún } n \in \mathbb{N}; \text{ y } \pi_i(D_s) = \pi_i(D_t) \text{ para cada } i \in \{1, \dots, n\}\}$. La pareja $((0), (1))$ también está en $E(T2^\omega)$ (véase Figura 1.7).

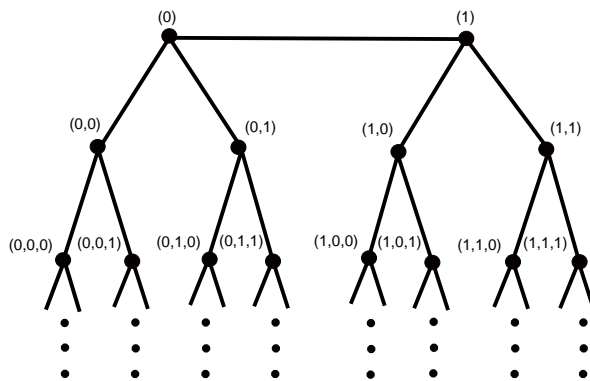


Figura 1.7: *Árbol binario de Cantor* $T2^\omega$

Lema 1.4.1. El espacio de fines del árbol binario de Cantor es homeomorfo al conjunto de Cantor.

²Un *árbol* es una gráfica conexa y sin ciclos.

Demostración. Plan de la prueba. Primero, daremos una correspondencia biunívoca entre el conjunto de trayectorias infinitas descendentes del árbol binario de Cantor y el conjunto de fines del árbol binario de Cantor.

El conjunto de trayectorias infinitas descendentes de $T2^\omega$ es

$$\mathfrak{TD} := \{\gamma = (D_{s_n})_{n \in \mathbb{N}}\} : \gamma \text{ es trayectoria infinita de } T2^\omega \text{ y } D_{s_n} \in 2^n, \text{ para cada } n \in \mathbb{N}\}. \quad (1.12)$$

Finalmente, definiremos explícitamente un homeomorfismo entre el conjunto de Cantor y el espacio de fines del árbol binario de Cantor.

Observación 1.4.1. Sea $\gamma = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una trayectoria infinita, el n -ésimo vértice de γ es el n -ésimo término de la sucesión $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Paso 1. Correspondencia biunívoca. Definimos la función

$$\begin{aligned} \psi : \quad \mathfrak{TD} &\rightarrow \text{Ends}(T2^\omega) \\ (D_{s_n})_{n \in \mathbb{N}} &\rightarrow [U(D_{s_n})]_{n \in \mathbb{N}}, \end{aligned}$$

donde $U(D_{s_n})$ es la componente conexa de $T2^\omega \setminus \{D_{s_n}\}$ que contiene al vértice $D_{s_{n+1}}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Veamos que la función ψ es biyectiva.

- *La función ψ es inyectiva.* Consideramos dos trayectorias diferentes $(D_{s_n})_{n \in \mathbb{N}}$ y $(D_{t_n})_{n \in \mathbb{N}}$ en \mathfrak{TD} y veamos que los fines $[U(D_{s_n})]_{n \in \mathbb{N}}$ y $[U(D_{t_n})]_{n \in \mathbb{N}}$ de $T2^\omega$ no son equivalentes.

Existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $D_{s_i} \neq D_{t_i}$, entonces los abiertos $U(D_{s_{i+1}})$ y $U(D_{t_{i+2}})$ son dos componentes conexas diferentes de $T2^\omega \setminus \{D_{s_i}, D_{t_i}\}$, por lo tanto los fines $[U(D_{s_n})]_{n \in \mathbb{N}}$ y $[U(D_{t_n})]_{n \in \mathbb{N}}$ no son equivalentes.

- *La función ψ es sobreyectiva.* Consideremos el fin $[U_n]_{n \in \mathbb{N}}$ de $T2^\omega$, debemos probar que existe un elemento $(D_{s_n})_{n \in \mathbb{N}}$ en \mathfrak{TD} tal que los fines $[U(D_{s_n})]_{n \in \mathbb{N}}$ y $[U_n]_{n \in \mathbb{N}}$ son equivalentes.

Podemos suponer sin pérdida de generalidad que para cada $n \in \mathbb{N}$, la frontera de U_n es un punto y además, $\partial U_n \subset 2^n$. La imagen de la trayectoria infinita $(D_{s_n})_{n \in \mathbb{N}}$ de \mathfrak{TD} tal que $\{D_{s_n}\} = \partial U_n$, bajo ψ es $[U(D_{s_n})]_{n \in \mathbb{N}}$, un fin equivalente al elemento $[U_n]_{n \in \mathbb{N}}$.

La función ψ nos permite dotar al conjunto \mathfrak{TD} de una topología de tal manera que éste es homeomorfo a $\text{Ends}(T2^\omega)$.

Paso 2. Definición del homeomorfismo entre $\prod_{i \in \mathbb{N}} \{0, 1\}_i$ y \mathfrak{TD} . Veamos que la función

$$\begin{aligned} f : \quad \prod_{i \in \mathbb{N}} \{0, 1\}_i &\rightarrow \mathfrak{TD} \\ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} &\rightarrow ((x_1), (x_1, x_2), (x_1, x_2, x_3), \dots) \end{aligned} \quad (1.13)$$

es un homeomorfismo. Basta probar que f es inyectiva, sobreyectiva, continua y cerrada.

- *La función f es inyectiva.* Consideramos dos puntos coordinados diferentes $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en el conjunto de Cantor y veamos que las trayectorias

$$((x_1), (x_1, x_2), (x_1, x_2, x_3), \dots) \text{ y } ((y_1), (y_1, y_2), (y_1, y_2, y_3), \dots)$$

son diferentes.

Existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $x_i \neq y_i$, entonces para cada $j \geq i$ los vértices (x_1, \dots, x_j) y (y_1, \dots, y_j) de $T2^\omega$ son diferentes; por lo tanto, las trayectorias

$$((x_1), (x_1, x_2), (x_1, x_2, x_3), \dots) \text{ y } ((y_1), (y_1, y_2), (y_1, y_2, y_3), \dots)$$

son diferentes.

• *La función f es sobreyectiva.* Consideremos el elemento $(D_{s_n})_{n \in \mathbb{N}}$ de \mathfrak{TD} , entonces la imagen del punto coordinado $(\pi_n(D_{s_n}))_{n \in \mathbb{N}} \in \prod_{i \in \mathbb{N}} \{0, 1\}_i$ bajo f es $(D_{s_n})_{n \in \mathbb{N}}$.

• *La función f es continua.* Consideremos un punto $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en el conjunto de Cantor y un abierto U^* en $Ends(T2^\omega)$ que contiene a $f((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) = ((x_1), (x_1, x_2), (x_1, x_2, x_3), \dots)$ y, veamos que existe una vecindad W de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $f(W) \subset U^*$.

Existe $i \in \mathbb{N}$ tal que para toda $j > i$ el vértice $(x_1, \dots, x_j) \in U$. La vecindad $W = (x_1, \dots, x_i) \times \prod_{j > i} \{0, 1\}_j$ del punto $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisface que $f(W) \subset U^*$.

• *La función f es cerrada.* Toda función continua definida de un espacio Hausdorff a un espacio compacto es cerrada (véase [15, p. 226].); por lo tanto f es cerrada.

Como la función f es biyectiva, continua y cerrada; entonces concluimos que f es un homeomorfismo. \square

Básicamente, para resolver la pregunta (planteada al inicio de esta sección) construiremos una subgráfica T_X de $T2^\omega$ con espacio de fines homeomorfo a X , pero la construcción de dicha subgráfica depende de la función f (véase expresión (1.13)). Además, al objeto T_X le asociaremos \mathfrak{T}_X una familia numerable de trayectorias infinitas de T_X , tales que

$$T_X := \bigcup_{\gamma \in \mathfrak{T}_X} \gamma$$

y la intersección de cualesquiera dos elementos distintos de \mathfrak{T}_X es un vértice o vacía.

Los lemas que enunciaremos enseguida son de vital importancia porque estos los utilizaremos fuertemente en las pruebas de nuestros resultados de investigación.

Lema 1.4.2. Sea X un subconjunto cerrado del conjunto de Cantor, entonces existe una subgráfica conexa $T_X \subset T2^\omega$ con espacio de fines homeomorfo a X .

Demostración. Basta que consideremos la subgráfica conexa $T_X \subset T2^\omega$ definida mediante la unión de las trayectorias infinitas $f((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ para cada $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X$ y la arista $(0, 1)$ i.e.,

$$T_X := \left(\bigcup_{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X} f((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) \right) \cup (0, 1).$$

Los argumentos son análogos a la demostración del Lema 1.4.1. \square

Corolario 1.4.1. El conjunto de trayectorias infinitas descendentes de T_X es

$$\mathfrak{TD}_X := \{\gamma = (D_{s_n})_{n \in \mathbb{N}} : \gamma \text{ es trayectoria infinita de } T_X \text{ y } D_{s_n} \in 2^n, \text{ para cada } n \in \mathbb{N}\}.$$

Entonces \mathfrak{TD}_X está en correspondencia biunívoca con el espacio de fines de T_X .

Lema 1.4.3. Existe \mathfrak{T} una familia numerable de trayectorias infinitas de $T2^\omega$ tales que

$$T2^\omega = \bigcup_{\gamma \in \mathfrak{T}} \gamma,$$

y la intersección de cualesquiera dos elementos distintos de \mathfrak{T} es un vértice o vacía, (véase Figura 1.8).

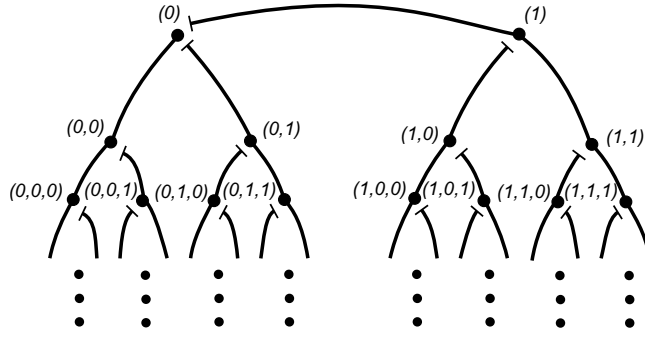


Figura 1.8: Familia \mathfrak{T}

Demostración. Definimos \mathfrak{T} la familia numerable de trayectorias infinitas de $T2^\omega$ como sigue

$$\begin{aligned} \mathfrak{T} := & \{ \gamma(D_s) = (D_s, (D_s, x), (D_s, x, x), (D_s, x, x, x), \dots) \in 2^\omega : \\ & D_s \in 2^n \text{ para algún } n \in \mathbb{N}, x \in \{0, 1\} \text{ y } \pi_n(D_s) \neq x \} \\ & \bigcup \{ ((0), (1), (1, 1), (1, 1, 1), \dots), ((0), (0, 0), (0, 0, 0), \dots) \}. \end{aligned}$$

Ahora, veamos que la subgráfica conexa

$$T := \bigcup_{\gamma(D_s) \in \mathfrak{T}} \gamma(D_s) \subset T2^\omega,$$

coincide con $T2^\omega$, es decir, se satisfacen las siguientes igualdades de conjuntos $V(T2^\omega) = V(T)$ y $E(T2^\omega) = E(T)$. Por definición de \mathfrak{T} se da la primera igualdad, es decir, $V(T) = V(T2^\omega)$. Como T es un árbol, entonces el conjunto de aristas de T y $T2^\omega$ es el mismo, $E(T) = E(T2^\omega)$, por lo tanto $T = T2^\omega$.

Ahora, procederemos por contradicción para mostrar que, la intersección de cualesquiera dos trayectorias diferentes pertenecientes a la familia \mathfrak{T} es un vértice o vacía.

Consideremos dos elementos distintos $\gamma(D_s)$ y $\gamma(D_t)$ de \mathfrak{T} y supongamos que existen al menos dos vértices v y w de $T2^\omega$ en la intersección $\gamma(D_s) \cap \gamma(D_t)$. No obstante, existe una única trayectoria $\gamma(v, w)$ en $T2^\omega$ que conecta a los vértices v y w (véase [4]). Por la forma en que definimos los elementos de \mathfrak{T} tenemos que $\gamma(v, w) \subset \gamma(D_s) \cap \gamma(D_t)$. Seguidamente, C_s y C_t son las componentes conexas con cerradura no compacta de $\gamma(D_s) \setminus \gamma(v, w)$ y $\gamma(D_t) \setminus \gamma(v, w)$, respectivamente. Análogamente, siguiendo la definición de los elementos pertenecientes a la familia \mathfrak{T} se concluye que $C_s = C_t$, lo cual nos implica que $\gamma(D_s) = \gamma(D_t)$. Claramente, esto es una contradicción porque las trayectorias $\gamma(D_s)$ y $\gamma(D_t)$ son diferentes. \square

Lema 1.4.4. Sea X un subconjunto cerrado del conjunto de Cantor y T_X la subgráfica de T^{2^ω} como en el Lema 1.4.2. Entonces existe \mathfrak{T}_X una familia numerable de trayectorias infinitas de T_X , tal que

$$T_X := \bigcup_{\gamma \in \mathfrak{T}_X} \gamma$$

y la intersección de cualesquiera dos elementos distintos de \mathfrak{T}_X es un vértice o vacía.

Demostración. Caso 1. El espacio de fines de T_X es de cardinalidad no numerable. Por el Teorema de Cantor Bendixson 1.3.1 el espacio de fines de T_X es

$$\text{Ends}(T_X) = B \sqcup U,$$

donde B es un subconjunto homeomorfo al conjunto de Cantor y U es un abierto discreto numerable.

Subcaso 1.1. El abierto $U = \emptyset$. Entonces

$$\text{Ends}(T_X) = B.$$

Por definición (véase Lema 1.4.2), la gráfica T_X es

$$T_X := \left(\bigcup_{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X} f((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) \right) \cup (0, 1),$$

una unión numerable de trayectorias infinitas.

Por otro lado, definimos el árbol 3-regular³ \widehat{T}_X con

1. Vértices $V(\widehat{T}_X) := \{v \in V(T_X) : v \text{ es de grado tres}\}$.
2. Aristas $E(\widehat{T}_X) := \{(v, w) \in V(T_X) \times V(T_X) : \text{si existe una trayectoria } \gamma(v, w) \text{ en } T_X \text{ que une los vértices } v \text{ y } w \text{ tal que cualquier vértice de } \gamma(v, w) \setminus \{v, w\} \text{ es de grado dos}\}$.

Salvo isomorfismos solo existe un árbol 3-regular, por lo tanto los árboles T^{2^ω} y \widehat{T}_X son isomorfos. Mediante este isomorfismo y el Lema 1.4.3 obtenemos $\widehat{\mathfrak{T}}_X$ una familia numerable de trayectorias infinitas en \widehat{T}_X tales que

$$\widehat{T}_X = \bigcup_{\widehat{\gamma} \in \widehat{\mathfrak{T}}_X} \widehat{\gamma},$$

y la intersección de cualesquiera dos elementos distintos de $\widehat{\mathfrak{T}}_X$ es un vértice o vacía.

Finalmente, consideramos el homeomorfismo

$$\varphi : \widehat{T}_X \rightarrow T_X,$$

donde φ envía la arista (v, w) de \widehat{T}_X en la trayectoria $\gamma(v, w)$ de T_X que une los vértices v y w , entonces $\mathfrak{T}_X := \{\varphi(\widehat{\gamma}) : \widehat{\gamma} \in \widehat{\mathfrak{T}}_X\}$ es una familia numerable de trayectorias infinitas en T_X tales que

$$T_X = \bigcup_{\gamma \in \mathfrak{T}_X} \gamma,$$

³Árbol 3-regular es un árbol en el cual cada uno de sus vértices tiene grado tres.

y la intersección de cualesquiera dos elementos distintos de \mathfrak{T}_X es un vértice o vacía.

Subcaso 1.2. El abierto $U \neq \emptyset$. Entonces escribimos a $U = \{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Por definición (véase Lema 1.4.2), la gráfica T_X es

$$T_X := \left(\bigcup_{x \in B \sqcup U} f(x) \right) \cup (0, 1) = \left(\bigcup_{x \in B} f(x) \right) \cup \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f(u_n) \right) \cup (0, 1).$$

Dado que B es homeomorfo al conjunto de Cantor por el Subcaso anterior, para la subgráfica $T_B := \left(\bigcup_{x \in B} f(x) \right) \cup (0, 1) \subset T_X$, existe \mathfrak{T}_B una familia numerable de trayectorias infinitas de T_B tales que

$$T_B = \bigcup_{\gamma \in \mathfrak{T}_B} \gamma,$$

y la intersección de cualesquiera dos elementos distintos de \mathfrak{T}_B es un vértice o vacía.

Para finalizar, construiremos recursivamente la familia de trayectorias que satisfacen los requerimientos del lema.

Para $n = 1$. Consideremos T_B la subgráfica de T_X y $f(u_1) := (v_1^1, v_2^1, \dots)$ la trayectoria infinita de T_X , entonces existe $j(1) \in \mathbb{N}$, tal que $v_{j(1)}^1 \in T_B$ y para cada $i > j(1)$ el vértice $v_i^1 \notin T_B$. Removemos los primeros $j(1) - 1$ vértices de $f(u_1)$ y obtenemos la trayectoria infinita $\gamma_1 := (v_{j(1)}^1, v_{j(1)+1}^1, \dots)$. Definimos la subgráfica

$$T_X^1 := T_B \cup \gamma_1 \subset T_X. \quad (1.14)$$

La colección $\mathfrak{T}_X^1 := \mathfrak{T}_B \cup \{\gamma_1\}$ es una familia numerable de trayectorias infinitas de T_X^1 , tales que

$$T_X^1 = \bigcup_{\gamma \in \mathfrak{T}_X^1} \gamma$$

y la intersección de cualesquiera dos elementos distintos de \mathfrak{T}_X^1 es un vértice o vacía.

Para $n > 1$. Consideremos T_X^{n-1} la subgráfica de T_X y $f(u_n) := (v_1^n, v_2^n, \dots)$ la trayectoria infinita de T_X , entonces existe $j(n) \in \mathbb{N}$, tales que el vértice $v_{j(n)}^n \in T_X^{n-1}$ y para cada $i > j(n)$ el vértice $v_i^n \notin T_X^{n-1}$. Removemos los primeros $j(n) - 1$ vértices de $f(u_n)$ y obtenemos la trayectoria infinita $\gamma_n := (v_{j(n)}^n, v_{j(n)+1}^n, \dots)$. Definimos la subgráfica

$$T_X^n := T_X^{n-1} \cup \gamma_n \subset T_X. \quad (1.15)$$

La colección $\mathfrak{T}_X^n := \mathfrak{T}_X^{n-1} \cup \{\gamma_n\}$ es una familia numerable de trayectorias infinitas de T_X^n , tales que

$$T_X^n = \bigcup_{\gamma \in \mathfrak{T}_X^n} \gamma$$

y la intersección de cualesquiera dos elementos distintos de \mathfrak{T}_X^n es un vértice o vacía.

La anterior construcción recursiva nos produce $\mathfrak{T}_X := \mathfrak{T}_B \cup \{\gamma_n : n \in \mathbb{N}\}$ una familia numerable de trayectorias infinitas en T_X , tales que

$$T_X = \bigcup_{\gamma \in \mathfrak{T}_X} \gamma$$

y la intersección de cualesquiera dos elementos distintos de \mathfrak{T}_X es un vértice o vacía.

Caso 2. El espacio de fines de T_X es numerable. Entonces escribimos a $X := \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Por definición (véase Lema 1.4.2) T_X es

$$T_X := \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f(x_n) \right) \cup (0, 1)$$

Análogamente a como se hizo en el Subcaso 1.2, haremos recursión para construir la familia de trayectorias que satisfacen los requerimientos del lema.

Para $n = 1$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que el primer vértice de la trayectoria $f(x_1) := (v_1^1, v_2^1, \dots)$ es $\{0\}$. Consideremos las trayectorias $\gamma_1 := (\{1\}, v_1^1, v_2^1, \dots)$ y $f(x_2) := (v_1^2, v_2^2, \dots)$ en T_X , entonces existe $j(2) \in \mathbb{N}$, tal que $v_{j(2)}^2 \in \gamma_1$ y para cada $i > j(2)$ el vértice $v_i^2 \notin \gamma_1$. Removemos los primeros $j(2) - 1$ vértices de $f(x_2)$ y obtenemos la trayectoria infinita $\gamma_2 := (v_{j(2)}^2, v_{j(2)+1}^2, \dots)$. Definimos la subgráfica

$$T_X^1 := \gamma_1 \cup \gamma_2 \subset T_X. \tag{1.16}$$

Para $n > 1$. Consideremos la subgráfica $T_X^{n-1} \subset T_X$ y la trayectoria infinita $f(x_{n+1}) := (v_1^{n+1}, v_2^{n+1}, \dots)$, entonces existe $j(n+1) \in \mathbb{N}$, tal $v_{j(n+1)}^{n+1} \in T_X^{n-1}$ y para cada $i > j(n+1)$ el vértice $v_i^{n+1} \notin T_X^{n-1}$. Removemos los primeros $j(n+1) - 1$ vértices de $f(x_{n+1})$ y obtenemos la trayectoria infinita $\gamma_{n+1} := (v_{j(n+1)}^{n+1}, v_{j(n+1)+1}^{n+1}, \dots)$. Definimos la subgráfica

$$T_X^n := T_X^{n-1} \cup \gamma_{n+1} \subset T_X. \tag{1.17}$$

La anterior construcción recursiva nos produce $\mathfrak{T}_X := \{\gamma_n : n \in \mathbb{N}\}$ una familia numerable de trayectorias infinitas en T_X tales que

$$T_X = \bigcup_{\gamma \in \mathfrak{T}_X} \gamma,$$

y la intersección de cualesquiera dos elementos distintos de \mathfrak{T}_X es un vértice o vacía. □

Corolario 1.4.2. Sea X un subconjunto no numerable y cerrado del conjunto de Cantor tal que $X = B \sqcup U$, donde B es homeomorfo al conjunto de Cantor y U es un abierto numerable discreto con un punto en su frontera. Entonces existe una trayectoria infinita $\tilde{\gamma}$ en la intersección de las familias⁴ $\mathfrak{T}_X \cap \mathfrak{T}_{\mathcal{D}_X}$ tal que a $\tilde{\gamma}$ le corresponde el fin de T_X que está en la frontera de U .

Corolario 1.4.3. Si X es de cardinalidad numerable, entonces el espacio de fines de T_X está en correspondencia biunívoca con la familia de trayectorias infinitas \mathfrak{T}_X .

⁴Las familias de trayectorias \mathfrak{T}_X y $\mathfrak{T}_{\mathcal{D}_X}$ las consideramos como en el Corolario 1.4.1 y el Lema 1.4.4, respectivamente.

Capítulo 2

Grupos de Veech en superficies de translación

2.1. Superficies de translación mansas

En adelante solo consideraremos superficies conexas y sin frontera. Sean S una superficie y $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ un atlas de S , diremos que \mathcal{A} es un *atlas de translación* de S , si para cualesquiera $\alpha, \beta \in I$ tal que la intersección $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, la función

$$\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} : \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad (2.1)$$

es localmente una restricción de una translación de \mathbb{R}^2 . Un atlas de translación de S es *maximal* si no está propiamente contenido en algún otro atlas de translación de S . Una superficie S es de *translación* si admite un atlas de translación maximal. Una *estructura de translación* es el par (S, \mathcal{A}) donde S es una superficie y \mathcal{A} es un atlas de translación maximal de S .

El ejemplo más sencillo de estructura de translación es el par $(\mathbb{R}^2, \mathcal{A})$ donde obviamente, \mathbb{R}^2 es el plano Euclidiano y \mathcal{A} es el atlas de translación maximal que contiene el atlas de translación siguiente

$$\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in I} \quad (2.2)$$

donde U_α es una bola de \mathbb{R}^2 y

$$\begin{aligned} \phi_\alpha : U_\alpha &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\rightarrow (x, y) + (x_\alpha, y_\alpha) \end{aligned}$$

con cualesquiera $x_\alpha, y_\alpha \in \mathbb{R}$.

Diremos que las estructuras de translación $(S_1, \mathcal{A} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in I})$ y $(S_2, \mathcal{B} = \{(V_\beta, \psi_\beta)\}_{\beta \in J})$ son *isomorfas*, si existe un homeomorfismo $f : S_1 \rightarrow S_2$ tal que

$$\mathcal{B} = \{(f(U_\alpha), \phi_\alpha \circ f^{-1} : f(U_\alpha) \rightarrow \mathbb{R}^2)\}_{\alpha \in I}. \quad (2.3)$$

La función f es llamada *isomorfismo de translación*.

Nuevamente, consideremos la estructura de translación $(\mathbb{R}^2, \mathcal{A})$ (véase expresión (2.2)) y una matriz $g \in GL_+(2, \mathbb{R})$. Entonces denotamos mediante \mathcal{A}_g al atlas de \mathbb{R}^2 que resulta de poscomponer cada carta del atlas de translación maximal \mathcal{A} por $f_g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, la transformación lineal

que define la matriz g . Nótese que la estructura $(\mathbb{R}^2, \mathcal{A}_g)$ también es de translación. Asimismo, las estructuras $(\mathbb{R}^2, \mathcal{A})$ y $(\mathbb{R}^2, \mathcal{A}_g)$ son isomorfas y el isomorfismo de translación está dado por $f_{g^{-1}} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, la transformación lineal que define la matriz inversa de $g \in GL_+(2, \mathbb{R})$.

Del hecho anterior se concluye que para cualesquiera $g_1, g_2 \in GL_+(2, \mathbb{R})$ las estructuras de translación $(\mathbb{R}^2, \mathcal{A}_{g_1})$ y $(\mathbb{R}^2, \mathcal{A}_{g_2})$ son isomorfas y el isomorfismo de translación está dado por la transformación lineal que define la matriz $g_2 g_1^{-1}$.

En una superficie de translación S definimos la *métrica Riemanniana* μ , a través del «pull-back» de la métrica Euclidiana estándar del plano. Esta métrica Riemanniana μ nos permite hablar de la *curvatura* $K(x)$ en un punto $x \in S$ (véase [14]); en este caso, es cero en cualquier punto de la superficie de translación S . Este hecho resuelve el siguiente interrogante:

¿Cuáles superficies compactas admiten una estructura de translación?

Basta que apliquemos el *Teorema de Gauss Bonnet* (véase [13])

$$\iint_S K(x) d\sigma = 2\pi\chi(S), \quad (2.4)$$

donde $d\sigma$ es la forma de área que define la métrica μ y $\chi(S)$ es la característica de Euler de la superficie compacta S que admite una estructura de translación. Dado que para cualquier punto $x \in S$ tenemos que $K(x) = 0$, entonces concluimos que la única superficie topológica compacta que satisface la anterior igualdad es el toro. Sin embargo, si consideremos una superficie topológica compacta S distinta del toro y, si a dicha superficie le quitamos un conjunto finito de puntos $Sing(S)$, *puntos singulares*, entonces podemos definir en $S \setminus Sing(S)$ una estructura de translación.

Asimismo, la métrica Riemanniana μ define una distancia entre cualesquiera dos puntos $x, y \in S$ (véase [14]) y esta distancia nos permite hablar de la *completación métrica* de S , la cual denotaremos mediante \widehat{S} (véase [70]). Ella es necesaria para introducir la definición de *superficie de translación mansa*.

Definición 2.1.1. [54, Definición 2.2]. Diremos que una superficie de translación S es *mansa* si para todo punto $x \in \widehat{S}$ existe una vecindad $U_x \subset \widehat{S}$ que satisface alguno de los incisos siguientes:

1. La vecindad U_x es isométrica a un abierto del plano. En este caso x es llamado un *punto plano*.
2. La vecindad U_x es isométrica al cubriente $n : 1$ del disco ramificado en el origen. En este caso x es llamado un *punto cónico de ángulo $2n\pi$* .
3. La vecindad U_x es isométrica al cubriente infinito del disco ramificado en el origen. En este caso x es llamado un *punto cónico de ángulo infinito*. El conjunto de todos los puntos cónicos infinitos de S lo denotamos mediante $Y_\infty(S)$.

El conjunto de *puntos singulares* de S es

$$Sing(S) := \{x \in \widehat{S} : x \text{ es punto cónico}\}.$$

Ejemplo 2.1.1. Nuestra motivación de estudiar las superficies de translación mansas proviene de una construcción estudiada por *Katok, A.* y *Zemlyakov, A.* [31], la cual llamaremos la *construcción K-Z*. Cronológicamente, los primeros que introdujeron dicha construcción fueron *Fox*,

R. y Kershner, R. [18]. Ésta asocia al *billar* ϕ_P en un polígono Euclidiano compacto P una superficie de translación mansa S_P^1 y adicionalmente, define una función proyección $\pi_P : S_P \rightarrow \phi_P$ (véase Diagrama 2.1). Por construcción, una geodésica de la superficie S_P se proyecta en una *trayectoria del billar* ϕ_P .

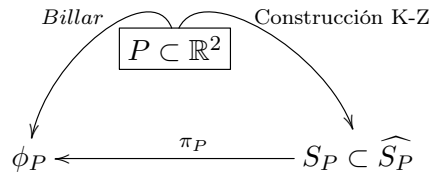


Diagrama 2.1: *Billar y superficie asociados al polígono P*

Para abordar la *construcción K-Z* seguiremos los pasos siguientes: primero, definiremos el *billar* ϕ_P en el polígono $P \subset \mathbb{R}^2$ y luego, describiremos la construcción de S_P .

Paso 1. Billar ϕ_P . Dado un polígono compacto P en el plano Euclidiano tal que su frontera es diferenciable excepto en una cantidad finita de puntos, el *billar* ϕ_P asociado a P son todas las trayectorias en P que dibuja una masa puntual, la *bola de billar*, que se mueve con velocidad constante. Las trayectorias que describen dicho movimiento se llaman *trayectorias de billar* y son segmentos de línea recta en el interior de P , tal que al encontrar la frontera de dicho polígono obedecen a alguna de las leyes siguientes (véase Figura 2.1):

1. Si la colisión se da en la parte lisa de ∂P , entonces el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión.
2. Para el resto de los casos, el movimiento se detiene.

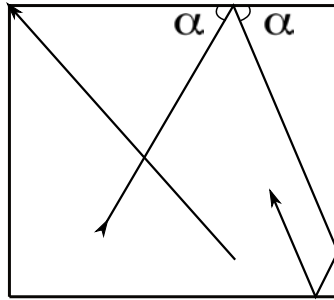


Figura 2.1: *Trayectorias de billar*

Paso 2. Desdoblamiento. Consideremos una trayectoria de billar que golpea un punto perteneciente a la parte lisa de ∂P . Dicho punto está en algún lado de la frontera de P , entonces reflejamos el polígono P y la trayectoria de billar con respecto al lado donde ocurrió la colisión y de ese modo, obtenemos una copia de P en la cual la trayectoria de billar continúa en línea recta (véase Figura 2.2). Este proceso, *desdoblamiento de una trayectoria de billar*, lo repetimos ahora en la copia de P y así sucesivamente. El desdoblamiento como lo presentamos no define a S_P . Sin

¹La superficie S_P fue llamada *Ueberlagerungsfläche* por *Fox, R. y Kershner, R.* en [18] y, traduce al castellano *superficie de cubierta*.

embargo, el desdoblamiento nos proporciona un grupo de isometrías que nos permitirá definir la superficie de translación mansa S_P y una función proyección $\pi_P : S_P \rightarrow P$, la cual envía cada geodésica de S_P en una trayectoria de billar. Esto lo explicaremos con detalle a continuación.

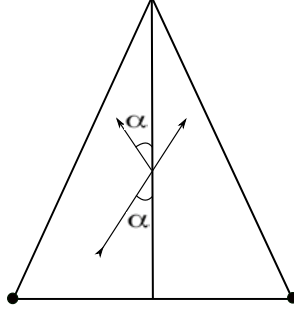


Figura 2.2: *Desdoblamiento*

Construcción K-Z. Consideremos \dot{P} el polígono P sin sus vértices tal que sus respectivos lados están etiquetados de manera cíclica l_1, \dots, l_n , $H := \langle \sigma_1, \dots, \sigma_n \rangle$ el subgrupo de las isometrías del plano Euclidiano donde que σ_i es la reflexión del plano Euclidiano con respecto a la recta que contiene al lado l_i de \dot{P} para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ y $S := \{(x, h) : x \in \dot{P} \text{ y } h \in H\}$. Entonces la superficie de translación mansa asociada al billar ϕ_P que proviene del polígono P es

$$S_P := \bigcup_{\substack{x \in \dot{P}, \\ h \in H}} (x, h) / \sim,$$

donde \sim es la relación de equivalencia siguiente. Los puntos $(x, h) \sim (y, g)$ si y solo si se satisface alguna de las condiciones siguientes:

1. La primera coordenada de cada pareja coincide *i.e.*, $x = y$, el punto x está en el lado l_i de \dot{P} para algún $i \in \{1, \dots, n\}$ y $h = \sigma_i \circ g$.
2. La primera coordenada de cada pareja coincide *i.e.*, $x = y$ y la composición $h \circ g^{-1}$ es una translación.

Por construcción, la imagen de una geodésica de S_P bajo la función proyección

$$\begin{aligned} \pi_P : S_P &\rightarrow \dot{P} \\ [x, h] &\rightarrow x, \end{aligned}$$

es una trayectoria de billar (véase Figura 2.3).

Un polígono P es *racional* si sus respectivos ángulos interiores son de la forma $\frac{m}{n}\pi$, donde m y n son enteros. Si el polígono P no es racional, entonces se le llama *irracional*.

Lema 2.1.1. [40, Lema 1.2]. Sea P un polígono racional tal que sus respectivos ángulos interiores son de la forma $\frac{m_i}{n_i}\pi$ para cada $i \in \{1, \dots, k\}$, donde m_i y n_i son primos relativos y N es mínimo común múltiplo de los n_i . Entonces la superficie \widehat{S}_P es de género

$$g(\widehat{S}_P) = 1 + \frac{N}{2} \left(k - 2 - \sum_{i=1}^k \frac{1}{n_i} \right). \quad (2.5)$$

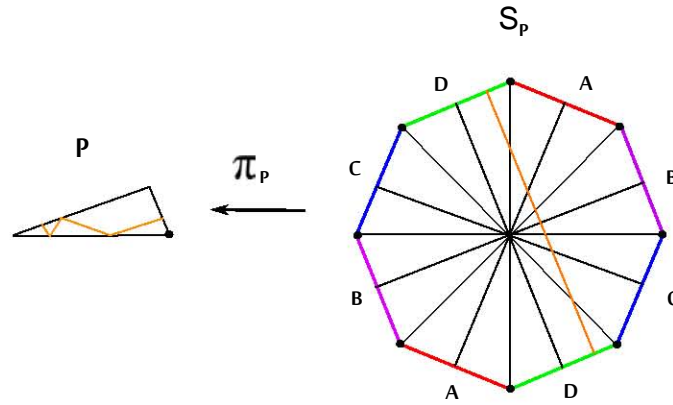


Figura 2.3: *Función proyección π_P*

Ejemplo 2.1.2. Consideramos el $2n$ -ágono regular sin sus vértices para $n > 1$ e identifiquemos cada par de lados paralelos mediante una translación (véase Figura 2.4), entonces la superficie de translación mansa S_{2n} que obtenemos satisface las propiedades siguientes

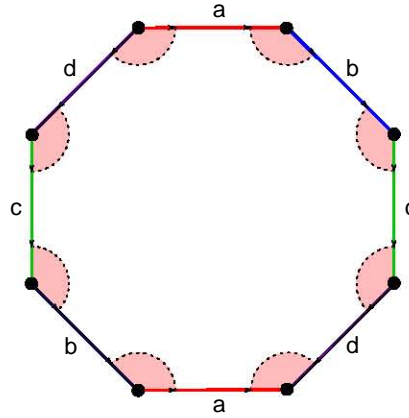


Figura 2.4: *Identificación de los lados paralelos en el octágono regular sin sus vértices*

1. Si n es par, entonces \widehat{S}_{2n} es una superficie compacta de género $\frac{n}{2}$ y todos sus puntos son planos excepto uno que es un punto cónico de ángulo $(2n - 2)\pi$.
2. Si n es impar, entonces \widehat{S}_{2n} es una superficie compacta de género $\frac{n-1}{2}$ y todos sus puntos son planos excepto dos que son puntos cónicos de ángulo $(n - 1)\pi$.

Abusando del lenguaje diremos que una superficie de translación mansa S es compacta si su respectiva completación métrica \widehat{S} es compacta.

Ejemplo 2.1.3. [3, p. 77]. El conjunto $S = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{(\bar{0}, \bar{0})\} : z = \exp^w\}$ es una superficie de Riemann. La función proyección en la primera coordenada

$$\begin{aligned} \pi_1 : S &\rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\} \\ (z, w) &\rightarrow z, \end{aligned}$$

es el cubriente infinito del plano complejo sin el cero. La superficie $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ tiene estructura de translación $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\pi_1^{-1}(U_\alpha)$ es la unión disjunta de una cantidad infinito numerable de abiertos en S , es decir,

$$\pi_1^{-1}(U_\alpha) = \bigsqcup_{n \in \mathbb{Z}} V_\alpha^n \subset S.$$

Además, para cada $n \in \mathbb{Z}$, el abierto V_α^n es homeomorfo a U_α bajo π . Entonces el atlas

$$\tilde{\mathcal{A}} = \{(V_\alpha^n, \phi_\alpha \circ \pi_{1|V_\alpha^n})\}_{\alpha \in I}^{n \in \mathbb{Z}}$$

define una estructura de translación en S . La completación métrica de S es el cubriente infinito el plano ramificado en el origen. Claramente, \widehat{S} no es una superficie porque no es localmente compacta en el punto cónico infinito (véase Figura 2.5).

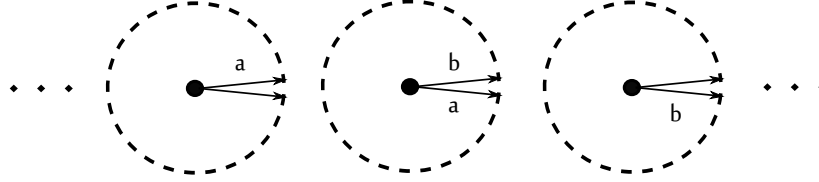


Figura 2.5: Cubriente infinito del plano ramificado en el origen

Análogamente, se tiene un resultado que describe el espacio de fines de la superficie de translación mansa asociada al billar en un polígono irracional, mediante la construcción K-Z.

Teorema 2.1.1. [66]. Sea P un polígono cuyos ángulos interiores son $\lambda_1\pi, \dots, \lambda_n\pi$. Supongamos que existe $j \in \{1, \dots, n\}$ tal que λ_j no es un número racional, entonces la superficie $\widehat{S}_P \setminus Y_\infty(S_P)$ es homeomorfa al monstruo del lago Ness.

2.1.1. Conexión silla y vectores de holonomía

Desde este momento, la letra S denota una superficie de translación mansa sin su respectivo conjunto de puntos singulares.

A cada superficie S le asociamos su respectivo *haz tangente* TS y función proyección

$$\begin{aligned} \pi : TS &\rightarrow S \\ [x, v] &\rightarrow x. \end{aligned}$$

Si consideramos dos vectores linealmente independientes $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$, debido a la estructura de translación de S , para cada $j \in \{1, 2\}$ la sección

$$\begin{aligned} s_j : S &\rightarrow TS \\ x &\rightarrow [x, v_j] \end{aligned}$$

es diferenciable y satisface que $\pi \circ s_j = Id_{TS}$. Además, para todo elemento $x \in S$ el conjunto $\{s_1(x), s_2(x)\}$ es una base linealmente independiente para el espacio $\pi^{-1}(x)$ que varía C^∞ , lo cual nos permite concluir que el haz tangente de S es trivial, es decir, $TS = S \times \mathbb{R}^2$.

Hemos dotado a S de una métrica Riemanniana μ que proviene a través del «pull-back» de la métrica estándar del plano Euclidiano, entonces el haz tangente unitario de S es

$$T_1S := \{[x, v] \in TS : \mu_x([x, v], [x, v]) = 1\}. \quad (2.6)$$

Claramente, el haz tangente unitario es isomorfo a $S \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. En consecuencia del hecho anterior definimos la función proyección en la segunda coordenada

$$\begin{aligned} \pi_2 : T_1S &\rightarrow \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \\ [x, \theta] &\rightarrow [\theta]. \end{aligned}$$

Dado el elemento $[\theta] \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, el campo de vectores constante en dirección $[\theta]$ de S , $V_{[\theta]}$, es la imagen inversa de la clase $[\theta]$ bajo π_2^{-1} (véase Diagrama 2.2).

$$\begin{array}{ccc} TS = S \times \mathbb{R}^2 & & \\ \uparrow i & \searrow \pi_1 & \\ T_1S = S \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} & \xrightarrow{\pi_1} & S \\ & \searrow \pi_2 & \\ & & \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \end{array}$$

Diagrama 2.2: Haz tangente y haz tangente unitario de S

Siguiendo el Teorema de Existencia y Unicidad de Ecuaciones Diferenciales, para cada $x \in S$ existe $\gamma_x : I_x \rightarrow S$ una trayectoria integral del campo $V_{[\theta]}$ con intervalo máximo de definición $I_x \subset \mathbb{R}$ tal que $\gamma_x(0) = x$. El flujo geodésico $g_{[\theta]}$ asociado a $V_{[\theta]}$ es

$$\begin{aligned} g_{[\theta]} : \bigcup_{x \in S} \{x\} \times I_x &\rightarrow S \\ (x, t) &\rightarrow \gamma_x(t), \end{aligned}$$

es decir, es la función que envía la pareja (x, t) donde $x \in S$ y $t \in I_x$ al punto en S que se obtiene después de moverse en S en la dirección $[\theta]$ en el tiempo t comenzando en x .

Las trayectorias de billar que tienen como extremos vértices del polígono P se llaman *diagonales principales* (véase Ejemplo 2.1.1) y son la motivación de los conceptos: *conexión silla* y *vector de holonomía*.

Definición 2.1.2. Consideremos S una superficie de translación y un elemento $[\theta] \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, una *conexión silla* asociada al campo $V_{[\theta]}$ es una trayectoria integral $\gamma : (a, b) \rightarrow S$ del campo que tiene intervalo máximo de definición (a, b) con $-\infty < a < b < \infty$, (véase Figura 2.6).

Definición 2.1.3. Consideremos el campo $V_{[\theta]}$, para alguna $[\theta] \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ y una conexión silla γ asociada a dicho campo V_{θ} que está parametrizada por longitud de arco. Los *vectores de holonomía* asociados a la curva γ son el par de elementos $\{v, -v\} \subset \mathbb{R}^2$, donde el vector v tiene dirección θ y su respectiva norma, $\|v\|$, es igual a la longitud de γ . El conjunto de vectores de holonomía de S es

$$Hol(S) := \{v \in \mathbb{R}^2 : v \text{ es vector de holonomía asociado a alguna conexión silla de } S\}.$$

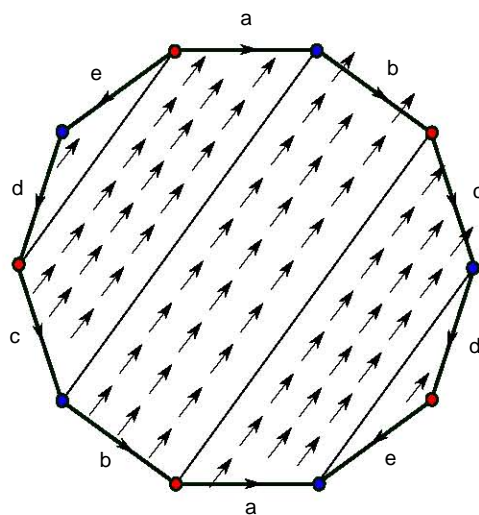


Figura 2.6: *Conexiones silladas*

2.2. El grupo de Veech

El teorema de Weyl nos dice que el flujo geodésico en el toro plano $T_{(0,1)} := \mathbb{R}^2 / ((1, 0)\mathbb{Z} \oplus (0, 1)\mathbb{Z})$ obedece a una dicotomía.

Teorema 2.2.1 (*Weyl*). [40, Subsección 1.4] En el toro $T_{(0,1)}$ el flujo geodésico $g_{[\theta]}$ asociado al campo $V_{[\theta]}$ para algún $[\theta] \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, satisface alguna de las condiciones siguientes:

1. El flujo geodésico $g_{[\theta]}$ es periódico si y solo si θ es múltiplo racional de π .
2. El flujo geodésico $g_{[\theta]}$ es únicamente ergódico² con respecto a la medida de Lebesgue que proviene de \mathbb{R}^2 si y solo si θ es múltiplo irracional de π .

Si consideramos una superficie de translación compacta S de género mayor o igual a dos y, el conjunto formado por todas las conexiones silladas de S denotado mediante S_γ . El mencionado subconjunto $S_\gamma \subset S$ es de medida cero. Entonces podríamos preguntarnos:

¿En cuáles superficies es posible generalizar el anterior resultado clásico? Quizás ¿el flujo geodésico tendrá otro comportamiento distinto a los descritos en el Teorema 2.2.1?

En la década de los ochenta *Veech* [67] generalizó el resultado de *Weyl* (para algunas superficies) asociando a cada superficie de translación un grupo que posteriormente fue llamado el *grupo de Veech*. Aquel aporte se conoce como la *Dicotomía de Veech* y lo enunciaremos más adelante (véase Teorema 2.2.4).

Dada una superficie S , diremos que el homeomorfismo $f : S \rightarrow S$ es un difeomorfismo *afín que preserva la orientación*, si se satisfacen las condiciones siguientes:

1. La función f permuta los puntos singulares de S .

²El flujo geodésico $g_{[\theta]}$ en $T_{(0,1)}$ en la dirección $[\theta]$ es llamado *únicamente ergódico* si la medida de Lebesgue es la única medida de Borel finita en $T_{(0,1)}$ que es invariante bajo el flujo $g_{[\theta]}$.

2. La función f en coordenadas locales es de la forma

$$\psi_\alpha \circ f \circ \phi_\alpha^{-1}(x, y) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \quad (2.7)$$

tal que la matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ pertenece a $GL_+(2, \mathbb{R})$ y el punto coordenado $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ está en \mathbb{R}^2 .

El grupo de difeomorfismos afines que preservan la orientación de S es

$$Aff_+(S) := \{f : S \rightarrow S \mid f \text{ es un difeomorfismo afín de } S \text{ que preserva la orientación}\}.$$

Nótese que cada elemento $f \in Aff_+(S)$ define \mathcal{A}_f una estructura afín en S . Además, siguiendo la expresión (2.3) para cualesquiera $f, f' \in Aff_+(S)$ las estructuras afines \mathcal{A}_f y $\mathcal{A}_{f'}$ de S son isomorfas.

Si consideramos $f \in Aff_+(S)$, dicha función en coordenadas locales es de la forma

$$\psi_\alpha \circ f \circ \phi_\alpha^{-1}(x, y) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix},$$

(véase expresión (2.7)). No obstante, debido a la estructura de translación que posee S , si cambiamos las funciones de transición ψ_α y ϕ_α por otras ψ_β y ϕ_β , también del atlas de translación de S , entonces la función f en las nuevas coordenadas locales conserva la matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ y cambia el vector de translación $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$, es decir, es de la forma

$$\psi_\beta \circ f \circ \phi_\beta^{-1}(x, y) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \end{pmatrix}.$$

Mediante la observación anterior y la regla de la cadena definimos el morfismo de grupos siguiente

$$\begin{array}{ccc} D & : & Aff_+(S) \rightarrow GL_+(2, \mathbb{R}) \\ & & f \rightarrow Df, \end{array} \quad (2.8)$$

donde Df es la matriz diferencial de f .

Definición 2.2.1. [67]. La imagen de $Aff_+(S)$ bajo D es *el grupo de Veech de S*

$$\Gamma(S) := D(Aff_+(S)). \quad (2.9)$$

Para definir el morfismo D (véase Ecuación (2.8)) sólo usamos la estructura de translación de S , no requerimos la propiedad de compacidad, por lo tanto el grupo de Veech está asociado a superficies de translación compactas y no compactas.

Denotamos mediante $Trans(S)$ al subgrupo normal de $Aff_+(S)$ que está formado por todos los difeomorfismos afines que preservan la orientación y en coordenadas locales son translaciones, entonces tenemos la sucesión exacta siguiente

$$\{Id\} \longrightarrow Trans(S) \xrightarrow{i} Aff_+(S) \xrightarrow{D} \Gamma(S) \longrightarrow \{Id\}.$$

Si S es compacta y siguiendo el Teorema de automorfismos (conformes) de Hurwitz [29], se tiene que la cardinalidad del grupo $Trans(S)$ es menor o igual a $84(g(S) - 1)$, donde $g(S)$ es el género de S , es decir, $Trans(S)$ es finito. Sin embargo, para el caso en que S es no compacta, su respectivo grupo $Trans(S)$ no necesariamente es finito (véase Ejemplo 2.2.3).

Ejemplo 2.2.1. El grupo de Veech del plano Euclidiano es $GL_+(2, \mathbb{R})$. Si consideramos cualquier elemento $f \in Aff_+(\mathbb{R}^2)$ a éste lo podemos expresar globalmente de la forma

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\rightarrow (f_1(x, y), f_2(x, y)) \end{aligned}$$

donde $f_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es una función diferenciable, para cada $i \in \{1, 2\}$. Dado que la matriz diferencial de f evaluada en cualquier punto del plano es constante, es decir,

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = A,$$

para algún $A \in GL_+(2, \mathbb{R})$, entonces integramos y concluimos que la función f globalmente es de la forma

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\rightarrow A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + B \end{aligned}$$

para algún $A \in GL_+(2, \mathbb{R})$ y para algún $B \in \mathbb{R}^2$. Asimismo, para cada matriz $A \in GL_+(2, \mathbb{R})$ y cada elemento $B \in \mathbb{R}^2$ la función

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\rightarrow A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + B \end{aligned}$$

es un difeomorfismo afín del plano Euclidiano que preserva la orientación. De los anteriores hechos se sigue que el grupo de difeomorfismos afines que preservan la orientación del plano son las funciones de la forma

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\rightarrow A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + B \end{aligned}$$

para cada $A \in GL_+(2, \mathbb{R})$ y para cada $B \in \mathbb{R}^2$. De ese modo, concluimos que el grupo de Veech del plano Euclidiano es $GL_+(2, \mathbb{R})$.

Ejemplo 2.2.2. El grupo de Veech del toro plano $T_{(0,1)}$ es

$$\Gamma(T_{(0,1)}) = SL(2, \mathbb{Z}).$$

Para probar esta igualdad usaremos el hecho que las únicas transformaciones afines del plano Euclidiano que dejan invariante la retícula $(1, 0)\mathbb{Z} \oplus (0, 1)\mathbb{Z}$ son de la forma

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donde $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z})$ y $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$ (véase [17, p. 9]). Consideramos f una transformación afín del plano que preserve la mencionada retícula, siguiendo el comentario anterior se tiene que $Df = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z})$. La función f induce un difeomorfismo afín

$$\begin{aligned} \tilde{f} : T_{(0,1)} &\rightarrow T_{(0,1)} \\ [x, y] &\rightarrow [ax + by + m_1, cx + dy + m_2] \end{aligned}$$

con matriz diferencial

$$D\tilde{f} = Df = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

lo cual indica que $SL(2, \mathbb{Z}) < \Gamma(T_{(0,1)})$.

Ahora, para probar que $\Gamma(T_{(0,1)}) < SL(2, \mathbb{R})$ consideramos un elemento $f \in Aff_+(T_{(0,1)})$ y denotamos mediante A a la matriz diferencial de f . Nótese que $A \in SL(2, \mathbb{R})$ pues debe conservar el área de $T_{(0,1)}$. Denotemos mediante π a la proyección

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{R}^2 &\rightarrow T_{(0,1)} \\ (x, y) &\rightarrow [x, y] \end{aligned}$$

y consideremos dos punto $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ tal que $f \circ \pi(x_1, y_1) = \pi(x_2, y_2)$. Dado que el plano Euclidiano es el cubriente universal del toro plano $T_{(0,1)}$ y siguiendo el Teorema 5.1 en [39], existe una función continua $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que el diagrama 2.3 conmuta.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{F} & \mathbb{R}^2 \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ T_{(0,1)} & \xrightarrow{f} & T_{(0,1)} \end{array}$$

Diagrama 2.3: El toro plano $T_{(0,1)}$ y su cubriente universal

Dado que f localmente es la restricción de una transformación afín del plano, entonces F es una transformación afín con matriz diferencial A que preserve la retícula $(1, 0)\mathbb{Z} \oplus (0, 1)\mathbb{Z}$. No obstante, las únicas matrices de $GL_+(2, \mathbb{R})$ que preservan dicha retícula son las que conforman el grupo $SL(2, \mathbb{Z})$, por lo tanto $\Gamma(T_{(0,1)}) < SL(2, \mathbb{Z})$.

Por otro lado, la transformación lineal que define la matriz $\begin{pmatrix} 1 & \varepsilon \\ 0 & \rho \end{pmatrix}$ envía la retícula $(1, 0)\mathbb{Z} \oplus (0, 1)\mathbb{Z}$ en la retícula $(1, 0)\mathbb{Z} \oplus (\varepsilon, \rho)\mathbb{Z}$, donde $\varepsilon \in \mathbb{R}$ y $\rho > 0$. Siguiendo los pasos descritos anteriormente, obtenemos que el grupo de Veech del toro

$$T_{(\varepsilon, \rho)} := \mathbb{R}^2 / ((1, 0)\mathbb{Z} \oplus (\varepsilon, \rho)\mathbb{Z}),$$

es conjugado a $SL(2, \mathbb{Z})$ en $SL(2, \mathbb{R})$. En efecto, la matriz de conjugación es $\begin{pmatrix} 1 & \varepsilon \\ 0 & \rho \end{pmatrix}$.

Ejemplo 2.2.3. El conjunto de órbitas que define la siguiente acción

$$\begin{aligned} \alpha : \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (n, (x, y)) &\rightarrow (x, y + n) \end{aligned}$$

es una superficie de translación $C := \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}$, que se conoce como el *cilindro plano*. Además, su respectivo grupo de Veech es el grupo generado por las matrices pertenecientes al grupo

$$P := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & s \end{pmatrix} \in GL_+(2, \mathbb{R}) : t \in \mathbb{R} \text{ y } s > 0 \right\}$$

y la matriz $-Id$, dicho de otra manera,

$$\Gamma(C) = \langle B, -Id : B \in P \rangle. \quad (2.10)$$

Análogamente, si consideramos una matriz $A \in \langle B, -Id : B \in P \rangle$, entonces la respectiva transformación lineal $f_A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que define dicha matriz, induce un difeomorfismo afín $\tilde{f}_A : C \rightarrow C$ con matriz diferencial $D\tilde{f}_A = A$. Ello nos asegura que $\langle B, -Id : B \in P \rangle < \Gamma(C)$. Ahora, para ver que en efecto $\Gamma(C) < \langle B, -Id : B \in P \rangle$ consideramos un elemento $f \in Aff_+(C)$ y, denotemos mediante A a su respectiva matriz diferencial y π a la función proyección

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{R}^2 &\rightarrow C \\ (x, y) &\rightarrow [x, y] \end{aligned}$$

Si tomamos dos puntos $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ tal que $f \circ \pi(x_1, y_1) = \pi(x_2, y_2)$, dado que el plano Euclidiano es el cubriente universal del cilindro plano C , entonces por el Teorema 5.1 en [39], existe una función continua $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que el diagrama 2.4 conmuta.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{F} & \mathbb{R}^2 \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ C & \xrightarrow{f} & C \end{array}$$

Diagrama 2.4: El cilindro plano C y su cubriente universal

Dado que f localmente es la restricción de una transformación afín del plano, entonces F es una transformación afín con matriz diferencial A que preserva la relación $(x, y) \sim (x', y')$ si y solo si $(x - x', y - y') = (0, n)$ para algún $n \in \mathbb{Z}$. No obstante, las únicas matrices de $GL_+(2, \mathbb{R})$ que preservan dicha relación pertenecen al grupo P , por lo tanto $\Gamma(C) < P$.

Anteriormente, mencionamos que el subgrupo normal $Trans(S)$ de $Aff_+(S)$ de una superficie de translación compacta S es de cardinalidad finita. Sin embargo, en el caso del cilindro C (una superficie de translación no compacta) el subgrupo normal $Trans(C)$ de $Aff_+(C)$ es de cardinalidad infinita, porque para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$, la translación

$$\begin{aligned} f_{\{a,b\}} : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\rightarrow (x + a, y + b) \end{aligned}$$

define en el cilindro C la función

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{\{a,b\}} &: C &\rightarrow C \\ [(x, y)] &\rightarrow [(x + a, y + b)], \end{aligned}$$

que es un difeomorfismo afín que preserva la orientación y en coordenadas locales es una translación. Esto implica que el conjunto de funciones $\{\tilde{f}_{\{a,b\}} : C \rightarrow C : a, b \in \mathbb{R}\}$ es un subgrupo de $Trans(C)$ de cardinalidad infinita, lo cual nos permite concluir que el grupo $Trans(C)$ es de cardinalidad infinita.

Los ejemplos 2.2.1, 2.2.2 y 2.2.3 son los más sencillos y básicos en la teoría. Mas adelante, presentaremos algunos ejemplos de grupos de Veech de superficies compactas que provienen de la Construcción K-Z (véase Ejemplo 2.1.1). Para ello, es necesario introducir el plano hiperbólico y el concepto de grupo *triangular*.

Para nosotros el modelo del plano hiperbólico (véase [50]) es

$$\mathbb{H} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$$

equipado con la métrica Riemanniana

$$ds = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{y}.$$

Denotaremos mediante $Isom(\mathbb{H})$ al grupo de isometrías del plano hiperbólico.

Un subgrupo G de $Isom(\mathbb{H})$ es de *tipo* (α, β, γ) , si G es generado por las reflexiones con respecto a los lados de un triángulo hiperbólico P cuyos ángulos interiores son α, β y γ , respectivamente. El *grupo conforme de tipo* (α, β, γ) asociado a G es

$$G_0 := \{g \in G : g \text{ es un elemento conforme}\}.$$

Siguiendo el Teorema de Gauss Bonnet para el caso del plano hiperbólico (véase [32, Teorema 1.4.2]) la suma de los ángulos interiores del triángulo hiperbólico P satisfacen

$$0 \leq \alpha + \beta + \gamma < \pi. \tag{2.11}$$

Definición 2.2.2. [2]. Dado $p, q, r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, el *grupo* (p, q, r) -*triangular*, denotado mediante $\Delta(p, q, r)$, es el grupo conforme de tipo $(\pi/p, \pi/q, \pi/r)$ (siguiendo la desigualdad (2.11) convenimos que $\frac{\pi}{\infty} := 0$).

Si alguno de los tres anteriores elementos corresponde a ∞ , es decir, $p = \infty$, entonces el grupo (p, q, r) -triangular lo denotamos mediante $\Delta(\infty, q, r)$.

Ejemplo 2.2.4. [37]. Los grupos de Veech que presentaremos a continuación son de superficies de translación mansas obtenidas con la construcción K-Z (véase Ejemplo 2.1.1).

1. El grupo de Veech de la superficie asociada al billar del n -ágono regular, para $n \geq 5$; es isomorfo a un subgrupo de $\Delta(2, n, \infty)$.
2. El grupo de Veech de la superficie asociada al billar de un rectángulo, un triángulo rectángulo isósceles, un triángulo equilátero o un triángulo con ángulos interiores $\pi/6, \pi/3$ y $\pi/2$ respectivamente; es isomorfo a $\Delta(2, 3, \infty)$. Por el Lema 2.1.1 se concluye fácilmente que dicha superficie es un toro plano.

3. El grupo de Veech de la superficie asociada al billar de un triángulo rectángulo tal que su ángulo más pequeño mide π/n , para $n \geq 5$; es isomorfo a alguno de los siguientes grupos triangulares $\Delta(2, n, \infty)$, si n es impar.

$\Delta(m, \infty, \infty)$, si $n = 2m$ con $m \in \mathbb{N}$.

4. El grupo de Veech de la superficie asociada al billar de un triángulo isósceles tal que el ángulo formado por sus dos lados iguales mide π/n , para $n \geq 4$; es isomorfo a $\Delta(n, \infty, \infty)$.

5. El grupo de Veech de la superficie asociada al billar de un triángulo isósceles tal que dos de sus ángulos miden π/n , para $n \geq 5$; es isomorfo a

$\Delta(2, n, \infty)$, si n es impar.

$\Delta(m, \infty, \infty)$, si $n = 2m$ con $m \in \mathbb{N}$.

6. El grupo de Veech de la superficie asociada al billar de un triángulo escaleno con ángulos interiores

$$\left(\frac{2\pi}{9}, \frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{9}\right), \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{12}\right) \text{ o } \left(\frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{3}, \frac{7\pi}{15}\right),$$

es isomorfo a $\Delta(9, \infty, \infty)$, $\Delta(6, \infty, \infty)$ o $\Delta(15, \infty, \infty)$ respectivamente.

7. El grupo de Veech de la superficie asociada al billar de un triángulo escaleno con ángulos interiores,

$$\left(\frac{\pi}{2n}, \frac{\pi}{n}, \frac{(2n-3)\pi}{2n}\right)$$

para $n \geq 4$; es isomorfo a $\Delta(3, n, \infty)$.

Desde el punto de vista analítico complejo, existe una manera de equipar a una superficie de Riemann S de una estructura de translación. Dicha estructura se genera a partir de una 1-forma holomorfa asociada a S . A continuación, presentaremos esta perspectiva para el caso de superficies de Riemann compactas.

Sea S_g una superficie de Riemann compacta de género $g \geq 1$, entonces su respectivo conjunto de 1-formas holomorfas conforman un espacio vectorial complejo de dimensión g (véase [5, Proposición 12.3]).

Consideremos la pareja (S_g, ω) donde S_g es una superficie de Riemann compacta de género $g \geq 1$ y ω es una 1-forma holomorfa no idénticamente cero de S_g . Para cada punto $x \in S_g$ donde ω se anula podemos escoger de manera adecuada una vecindad $U_x \subset S_g$ tal que la 1-forma ω se representa localmente mediante $z^d dz$, donde $d \in \mathbb{N}$. El número d se llama el *grado* del cero x . Denotemos mediante $Sing(S_g)$ al subconjunto de puntos de S_g donde la 1-forma ω es cero. Dado que S_g es compacta, entonces $Sing(S_g)$ es finito. El Teorema de Riemann Roch nos proporciona la igualdad siguiente

$$\sum_{i=1}^m d_j = 2g - 2, \tag{2.12}$$

donde m es la cardinalidad de $Sing(S_g)$ y d_j corresponde al grado de cada punto de $Sing(S)$, para cada $j \in \{1, \dots, m\}$.

Para dotar al espacio $S_g \setminus Sing(S_g)$ de una estructura de translación, consideramos un elemento $x_0 \in S_g \setminus Sing(S_g)$ entonces existe una vecindad U_{x_0} que no contiene puntos de $Sing(S_g)$ y, en

la cual la función

$$\begin{aligned} \varphi_{x_0} &: U \rightarrow \mathbb{C} \\ x &\rightarrow \int_{x_0}^x \omega, \end{aligned} \tag{2.13}$$

donde calculamos la integral usando trayectorias en U_{x_0} con extremos x_0 y x respectivamente, está bien definida. Siguiendo el Teorema de la función inversa y que el abierto U_{x_0} no tiene puntos donde ω se anula, se tiene que φ_{x_0} es un homeomorfismo local. Entonces la colección de cartas $\{(U_{x_0}, \varphi_{x_0})\}$ le proporciona a $S_g \setminus \text{Sing}(S_g)$ una estructura de translación. Claramente, si consideramos dos cartas (φ_{x_0}, U_{x_0}) y (φ_{x_1}, U_{x_1}) tenemos la igual siguiente

$$\int_{x_0}^{x_1} \omega = \int_{x_0}^x \omega + \int_x^{x_1} \omega.$$

Reemplazamos en la igualdad anterior la expresión (2.13) y obtenemos

$$\varphi_{x_0}(x) + Cte = \varphi_{x_1}(x),$$

es decir, los cambios de coordenadas son translaciones. Por otro lado, si x es un punto de la superficie de Riemann compacta S_g donde la 1-forma ω es cero y además, en coordenadas locales es $z^d dz$, entonces el elemento x define un punto cónico de ángulo $2(d+1)\pi$ en la completación métrica de $S_g \setminus \text{Sing}(S_g)$ (véase [69]), es decir, $S_g \setminus \text{Sing}(S_g)$ es una superficie de translación mansa.

Si consideramos una superficie de Riemann compacta S_g de género $g \geq 1$, el *espacio fibrado sobre el espacio móduli* de S_g es

$$\Omega M_g := \{(S_g, \omega) : \omega \text{ es una 1-forma no idénticamente cero de } S_g\}. \tag{2.14}$$

Dicho espacio fibrado sobre el espacio móduli se escribe como la unión disjunta de subespacios llamados *estratos*

$$\Omega M_g = \bigcup_{\sum_{i=1}^m d_i = 2g-2} \Omega M_g(d_1, \dots, d_m),$$

donde $\Omega M_g(d_1, \dots, d_m)$ es el subespacio conformado por las parejas (S_g, ω) tal que la 1-forma ω tiene m ceros de grados d_1, \dots, d_m , respectivamente. Por ejemplo, si $g = 2$ entonces el número $2g - 2 = 2$ lo podemos expresar de dos maneras diferentes como la suma de naturales, es decir, $1 + 1 = 2$ y $2 = 2$, por lo tanto el espacio móduli ΩM_2 se escribe como la unión de dos estratos

$$\Omega M_2 = \Omega M_2(2) \cup \Omega M_2(1, 1).$$

Asimismo, para $g = 3$ el número $2g - 2 = 4$ lo podemos expresar de cinco maneras diferentes como la suma de naturales, es decir, $1 + 1 + 1 + 1 = 4$, $1 + 1 + 2 = 4$, $2 + 2 = 4$, $1 + 3 = 4$ y $4 = 4$, por lo tanto el espacio móduli ΩM_3 se escribe como la unión de cinco estratos

$$\Omega M_3 = \Omega M_3(1, 1, 1, 1) \cup \Omega M_3(1, 1, 2) \cup \Omega M_3(2, 2) \cup \Omega M_3(1, 3) \cup \Omega M_3(4).$$

Para cada $g \geq 1$, el estrato $\Omega M_g(d_1, \dots, d_m) \subset \Omega M_g$ es un «*orbifold*» complejo analítico de dimensión (véase [69, Subsección 3.3])

$$\dim_{\mathbb{C}}(\Omega M_g(d_1, \dots, d_m)) = 2g + m - 1. \tag{2.15}$$

Algunos estratos no son conexos (véase [36, Teorema 1]). Diremos que una componente conexa de un estrato $\Omega M_g(d_1, \dots, d_m)$ es *hiperelíptica*, si consiste exclusivamente de *curvas hiperelípticas*. La pareja (S_g, ω) es una curva hiperelíptica si satisface las condiciones siguientes:

1. S_g es una superficie de Riemann hiperelíptica en el sentido de curva algebraica (véase [44, Definición 1.8]).
2. La 1-forma ω tiene a lo más dos ceros.
3. Si la 1-forma ω tiene exactamente dos ceros, entonces la involución hiperelíptica asociada a S_g los permuta.

El elemento (S_g, ω) es *genérico* en su estrato, si está en el complemento de la unión numerable de subvariedades de codimensión real uno en su respectivo estrato.

Teorema 2.2.2. [47, Teorema 1.1]. Sea (S_g, ω) una pareja genérica tal que S_g es una superficie de Riemann de género mayor o igual a dos. Entonces el grupo de Veech $\Gamma(S_g)$ es isomorfo a $\mathbb{Z}/2$ o al grupo trivial, dependiendo si (S_g, ω) pertenece a una componente hiperelíptica o no.

2.2.1. Dicotomía de Veech

El Teorema de Dicotomía de Veech (véase Teorema 2.2.4) describe el comportamiento del flujo geodésico de las superficies de translación compactas. Sin embargo, en su enunciado se introduce el concepto de *retícula*, el cual daremos a continuación, no sin antes mencionar algunas de las propiedades del mencionado grupo.

Teorema 2.2.3. [68, p. 790]. El grupo de Veech de una superficie de translación compacta es un subgrupo discreto de $SL(2, \mathbb{R})$, es decir, es un grupo *Fuchsiano*.

Si el lector está interesado en probar el anterior resultado, le proponemos la estregia siguiente:

Paso 1. Verifique que el siguiente par de propiedades son verdaderas.

Lema 2.2.1. Dada S una superficie de translación compacta tal que $Sing(S) \neq \emptyset$, entonces

$$\alpha : \Gamma(S) \times Hol(S) \rightarrow Hol(S)$$

$$\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right) \rightarrow \begin{pmatrix} av_1 + bv_2 \\ cv_1 + dv_2 \end{pmatrix}$$

es una acción lineal.

Proposición 2.2.1. [68, Proposición 3.1]. Sea S una superficie de translación compacta tal que $Sing(S) \neq \emptyset$, entonces su respectivo conjunto de vectores de holonomía es discreto en \mathbb{R}^2 .

Paso 2. Proceda por contradicción suponiendo que el conjunto de vectores de holonomía de S no es discreto. Luego, use las afirmaciones anteriores para llegar a algún hecho absurdo.

El grupo de Veech de una superficie de translación compacta S actúa sobre el plano hiperbólico por transformaciones de Möbius

$$\alpha : \Gamma(S) \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$$

$$\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, z \right) \rightarrow \frac{az+b}{cz+d}. \tag{2.16}$$

Esta acción α siempre es *propia* y *discontinua* porque cualquier grupo *Fuchsiano* actúa propia y discontinuamente sobre el plano hiperbólico (véase [32, Teorema 2.2.6. p. 32]). Además, existe un subconjunto numerable y discreto $T \subset \mathbb{H}$ tal que al remover T del plano hiperbólico, el cociente $(\mathbb{H} - T)/\Gamma(S)$ es una superficie hiperbólica (véase [58, Teorema 18.2 p. 225]). Si el área de la superficie hiperbólica $(\mathbb{H} - T)/\Gamma(S)$ es finita, el grupo de Veech $\Gamma(S)$ es una *retícula*.

Ejemplo 2.2.5. El grupo de Veech del toro plano $T_{(0,1)}$ (véase Ejemplo 2.2.2) es

$$\Gamma(T_{(0,1)}) = SL(2, \mathbb{Z}).$$

Al definir la acción expresada en (2.16), el espacio cociente $\mathbb{H}/\Gamma(T_{(0,1)})$ es una superficie hiperbólica de área finita $\frac{\pi}{3}$ llamada *el espacio móduli de los toros planos* (véase Figura 2.7).

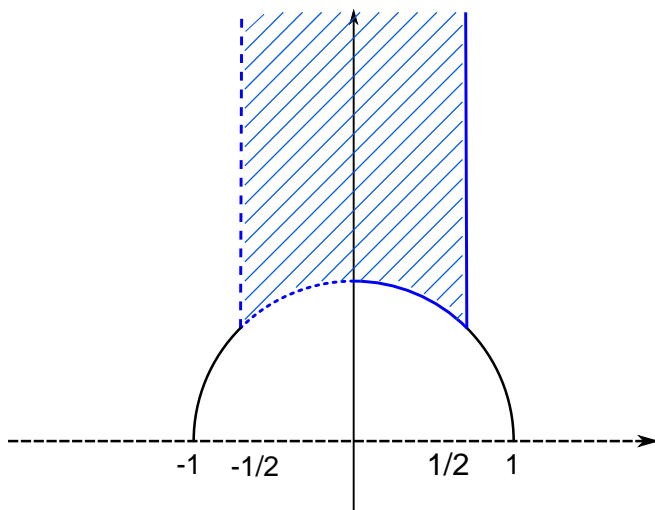


Figura 2.7: *Espacio móduli de los toros planos*

Proposición 2.2.2. [68, Proposición 3.3]. El grupo de Veech de una superficie compacta no es cocompacto. Dicho de otra manera, el espacio cociente $(\mathbb{H} - T)/\Gamma(S)$ nunca es compacto.

Definición 2.2.3. Consideremos S una superficie compacta y un elemento $[\theta] \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Diremos que el flujo geodésico $g_{[\theta]}$ asociado al campo $V_{[\theta]}$ es *periódico*, si cada componente conexa de S menos las conexiones sillas asociadas al campo V_{θ} es homeomorfa a un cilindro y, cada dos cilindros tienen *módulos* conmesurables *i.e.*, el cociente de los respectivos módulos de dos cilindros es un número racional, $\mu_i/\mu_j \in \mathbb{Q}$. El módulo μ es el valor que se obtiene al hacer el cociente entre su respectivo ancho w y su respectiva altura h (véase Figura 2.8).

Ejemplo 2.2.6. Consideremos el polígono en la Figura 2.9 y luego, identificamos los lados etiquetados con las mismas letras mediante una translación. Entonces, obtenemos una superficie de translación compacta S de género dos con un punto cónico de ángulo 6π .

Si definimos el campo de vectores en dirección vertical $V_{[\frac{\pi}{2}]}$, entonces las componentes conexas de S sin las tres conexiones sillas asociadas a dicho campo, las cuales tienen ambos extremos en el único punto cónico de S ; son dos cilindros con módulos no conmesurables (véase Figura 2.10).

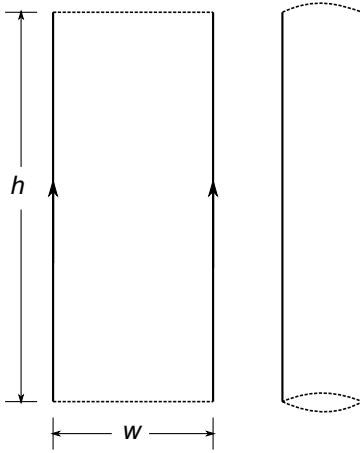


Figura 2.8: Ancho y altura del cilindro

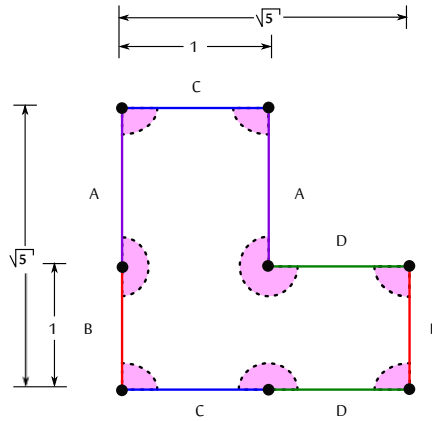


Figura 2.9: Superficie compacta de género dos

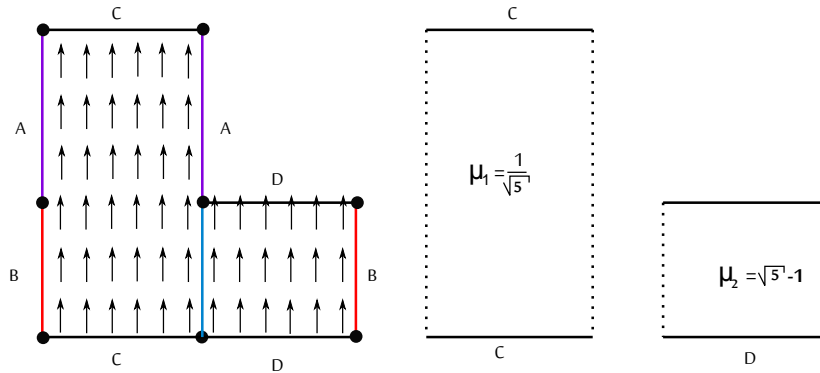


Figura 2.10: Descomposición de la superficie S

Ejemplo 2.2.7. Si en el polígono de la Figura 2.9 cambiamos, para ambos casos, el número $\sqrt{5}$ por el número 2 y luego, desarrollamos la receta que se describe en el Ejemplo 2.2.6, entonces obtenemos dos cilindros con módulos conmesurables. Dicho de otra manera, el flujo geodésico $g_{[\frac{\pi}{2}]}$ asociado al campo $V_{[\frac{\pi}{2}]}$ es periódico y descompone a la superficie S en dos cilindros con módulos conmesurables.

Teorema 2.2.4 (*Dicotomía de Veech* [67]). Sean S una superficie de translación compacta tal que su respectivo grupo de Veech es una retícula y $[\theta] \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Entonces el flujo geodésico $g_{[\theta]}$ asociado al campo $V_{[\theta]}$ satisface alguna de las condiciones siguientes

1. Es periódico.
2. Es únicamente ergódico con respecto a la medida de Lebesgue.

No obstante, se demostró que el converso de la Dicotomía de Veech no es cierto (véase [61]). Adicionalmente, el grupo de Veech de cada superficie en el Ejemplo 2.2.4 es una retícula, eso quiere decir, que en estas superficies el flujo geodésico es periódico o únicamente ergódico con respecto a la medida de Lebesgue, como describe el Teorema de Dicotomía de Veech.

Claramente, los grupos de Veech están motivados por los sistemas dinámicos; especialmente, el estudio del comportamiento de los flujos geodésicos. Nuestra pregunta de investigación no está relacionada con este estudio, por el contrario, está motivada con el siguiente problema de realización.

Problema 2.2.1. [27, Subsección 2.6, Problema 2]. ¿Qué grupos Fuchsianos son realizables como grupos de Veech de una superficie de translación compacta?

Capítulo 3

Grupos de Veech en superficies de translación no compactas

3.1. Caracterización del grupo de Veech de las superficies de translación mansas

Anteriormente, mencionamos que el grupo de Veech de una superficie de translación compacta es un grupo Fuchsiano (véase Teorema 2.2.3). Naturalmente, esta afirmación nos sugiere la pregunta siguiente.

¿Habrá un resultado similiar para el grupo de Veech de una superficie de translación mansa no compacta?

Recientemente, en el 2011, los matemáticos *Przytycki, P., Weitze-Schmithüsen, G. y Valdez, F.* dieron una propiedad que cumple el grupo de Veech de las superficies de translación mansas y además, enunciaron y probaron un teorema de realización para el monstruo del lago Ness, los cuales presentaremos a continuación.

Teorema 3.1.1. [54, Teorema 1.1]. El grupo de Veech $\Gamma(S)$ de una superficie de translación mansa S satisface alguna de las condiciones siguientes:

1. Es conjugado al grupo $P = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & s \end{pmatrix} \in GL_+(2, \mathbb{R}) : t \in \mathbb{R} \text{ y } s > 0 \right\}$.
2. Es conjugado al grupo $P' = \langle B, -Id : B \in P \rangle$.
3. Es numerable y disjunto del conjunto $U = \{B \in GL_+(2, \mathbb{R}) : \|Av\| < \|v\| \forall v \in \mathbb{R}^2 - \{\bar{0}\}\}^1$, donde $\| \cdot \|$ es la norma usual de \mathbb{R}^2 .
4. Es $GL_+(2, \mathbb{R})$.

El argumento del por qué se tienen las anteriores cuatro condiciones en el teorema anterior es como sigue. Si S es una superficie de translación mansa pudiera ser que no tenga conexiones silladas o sí las tenga. Si dicha superficie S *no tiene conexiones silladas*, entonces S es el cilindro (véase

¹Las matrices pertenecientes al conjunto U se les conoce como matrices que contraen.

Ejemplo 2.2.3), el plano Euclidiano o un cubriente del plano ramificado en el rigen, entonces, el grupo de Veech de S es conjugado a P' o $GL_+(2, \mathbb{R})$. Obsérvese que el grupo P es isomorfo a $Aff_+(\mathbb{H})$ las transformaciones afines del plano hiperbólico que preservan la orientación. Además, para $GL_+(2, \mathbb{R})$ las únicas superficies de translación mansas que admiten grupo de Veech $GL_+(2, \mathbb{R})$ son los cubrientes ramificados en un punto del plano Euclidiano (véase [54, p. 677]).

Para el caso contrario, la superficie S tiene conexiones sillas, entonces su respectivo grupo de Veech es no numerable o numerable. Si $\Gamma(S)$ es *no numerable*, entonces las conexiones sillas de S son paralelas y automáticamente, se deduce que el grupo de Veech de S es conjugado a P o P' . No obstante, si el grupo de Veech de S es *numerable* entonces procedemos por contradicción. Supongamos que $\Gamma(S)$ no es disjunto al subconjunto U , es decir, existe un elemento $f \in Aff_+(S)$ tal que $Df \in U$. Entonces extendemos la función f y obtenemos $\hat{f} : \hat{S} \rightarrow \hat{S}$ una *contracción* entre dos espacios métricos. Siguiendo el Teorema del punto fijo de Banach tenemos que \hat{f} tiene un punto fijo $x_0 \in \hat{S}$. Finalmente, consideramos x un punto singular de \hat{S} y generamos $\{\hat{f}^n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de puntos singulares en \hat{S} que se acumulan en x_0 , contradiciendo el hecho que S es superficie de translación mansa.

Teorema 3.1.2 (*Realización, Ibid*). Sea G un subgrupo de $GL_+(2, \mathbb{R})$ que satisface alguna de las primeras tres condiciones del Teorema 3.1.1. Entonces existe una superficie de translación mansa S tal que su grupo de Veech es G y S es homeomorfa al monstruo del lago Ness.

El Problema 2.2.1 y el Teorema de realización 3.1.2 son nuestra motivación para plantearnos el interrogante siguiente.

Problema 3.1.1. Sean G un subgrupo de $GL_+(2, \mathbb{R})$ que satisface alguna de las primeras tres condiciones del Teorema 3.1.1 y $X_\infty \subset X$ dos subconjuntos cerrados del conjunto de Cantor. ¿Existe una superficie de translación mansa S de género infinito tal que su grupo de Veech es G , su espacio de fines es homeomorfo a X y su respectivo espacio de fines de género infinito es X_∞ ?

3.2. Realización de grupos de Veech en superficies de translación mansas

Durante el estudio del Problema 3.1.1 hemos obtenido cuatro teoremas de realización para superficies de translación mansas de género infinito. El primer teorema (3.2.1) nos dice que para P y P' no hay restricción en la topología de X , es decir, los grupos P y P' se pueden realizar como grupos de Veech de una superficie con espacio de fines homeomorfo a X y cada fin de género infinito, donde X es cualquier subconjunto cerrado del conjunto de Cantor.

Teorema 3.2.1. Sea X un subconjunto cerrado del conjunto de Cantor, entonces existen dos superficies de translación mansas S y S' tal que sus grupos de Veech son P y P' , sus respectivos espacio de fines son homeomorfos a X y los fines de S y S' son todos de género infinito.

Incluso, nuestra construcción aporta una cantidad no numerable de superficies que satisfacen los requerimientos del teorema y que no son equivalentes bajo la relación de isometría.

Este resultado nos conduce a plantearnos una problemática con condiciones más precisas en G .

Problema 3.2.1. Sean G un subgrupo numerable de $GL_+(2, \mathbb{R})$ sin elementos que contraen y X un subconjunto cerrado del conjunto de Cantor. ¿Existe una superficie de translación mansa

S tal que su grupo de Veech es G , su respectivo espacio de fines es homeomorfo a X y cada fin de S es de género infinito?

Nótese que el Teorema 3.1.2 responde a esta pregunta para la superficie más sencilla de género infinito, *el monstruo del lago Ness* (véase Ejemplo 1.1.1). En cambio, nuestro segundo teorema de realización (3.2.2) lo hace para la superficie más complicada, *el árbol florido de Cantor* (véase Ejemplo 1.1.2).

Teorema 3.2.2. Sea G un subgrupo numerable de $GL_+(2, \mathbb{R})$ sin elementos que contraen, entonces existe una superficie de translación mansa S tal que su grupo de Veech es G y S es homeomorfa al árbol florido de Cantor.

Pero, ¿qué sucede con los casos intermedios? Es decir, si X tiene más de un punto y no es homeomorfo al conjunto de Cantor (basándonos en el Problema 3.2.1). El siguiente resultado (Teorema 3.2.3) considera el caso cuando X es numerable y homeomorfo al número ordinal $\omega^k + 1$, para cada $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y realiza la superficie con grupo de Veech G tal que su respectivo espacio de fines es homeomorfo a X y cada fin es de género infinito. Este resultado generaliza el Teorema 3.1.2.

Teorema 3.2.3. Sean G un subgrupo numerable de $GL_+(2, \mathbb{R})$ sin elementos que contraen y $\omega^k + 1$ un número ordinal, para algún $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Entonces existe una superficie de translación mansa S tal que su grupo de Veech es G , su respectivo espacio de fines es homeomorfo a $\omega^k + 1$ y cada fin de S es de género infinito.

La última afirmación (Teorema 3.2.4) es el caso particular del espacio de fines X con cardinalidad no numerable (véase Teorema 1.3.1).

Teorema 3.2.4. Sean G un subgrupo numerable de $GL_+(2, \mathbb{R})$ sin elementos que contraen, $B \sqcup U$ un subconjunto cerrado no numerable del conjunto de Cantor, tal que B es homeomorfo al conjunto de Cantor y U es un subconjunto numerable, discreto, con un solo punto en su frontera. Entonces existe una superficie de translación mansa S tal que su grupo de Veech es G , su respectivo espacio de fines es homeomorfo a $B \sqcup U$ y cada fin de S es de género infinito.

Para la demostración de los cuatro enunciados anteriores, recurriremos insistentemente a el contenido que se describirá en la sección siguiente *Lemas y construcciones auxiliares*. Además, para la prueba de los tres últimos teoremas usaremos un objeto matemático que hemos llamado *puzzle* y que definiremos en la sección 3.5.

3.3. Lemas y construcciones auxiliares

El *pegado de marcas* es un métodos sencillo que nos permite obtener nuevas superficie de translación mansa a partir de superficies de translación mansas ya conocidas. En esta sección la letra S denota una superficie de translación mansa.

Dada una superficie S , una *marca* m en S es un segmento cerrado de geodésica orientado de longitud finita, isométrico al intervalo cerrado $[0, a]$ con $a > 0$ tal que en su interior no hay puntos del conjunto $Sing(S)$. La marca puede tener alguno o ambos de sus extremos en $Sing(S)$. Análogamente, a la marca m le asociamos sus dos respectivos vectores de holonomía (véase

Definición 2.1.3). Dos marcas m y m' son *paralelas* si sus respectivos vectores de holonomía son paralelos y de igual longitud.

Operación pegado de marcas. Consideremos una superficie S y dos marcas paralelas m y m' en S que no se intersectan, entonces recortamos a lo largo de dichas marcas, *i.e.*, removemos el par de marcas de la superficie S y luego, tomamos el espacio formado por $S \setminus \{m, m'\}$ junto con su respectiva frontera e identificamos pares de segmentos en dicha frontera conservando la orientación y la distancia como en la Figura 3.1. Esta operación la llamamos *pegado de marcas* y la denotamos mediante $m \sim_{\text{pegar}} m'$. Las marcas pueden estar en superficies diferentes (véase [65, p. 56]).

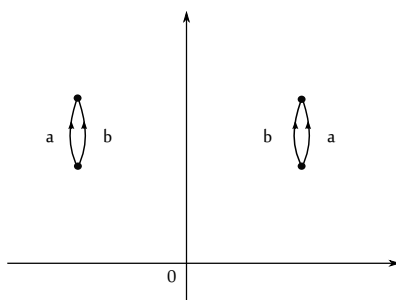


Figura 3.1: *Pegado de marcas*

Lema 3.3.1. Sean S_1 y S_2 dos superficies de translación mansas homeomorfas al monstruo del lago Ness, tales que:

1. Para cada $j \in \{1, 2\}$, existe una familia infinita de marcas $M^j := \{m_i^j : \forall i \in \mathbb{N}\}$ en S_j que no se acumula en su respectiva completación métrica \widehat{S}_j .
2. Las marcas m_i^1 y m_i^2 son paralelas, para cada $i \in \mathbb{N}$.

Entonces

$$S := \left(\bigcup_{j \in \{1, 2\}} S_j \right) / m_i^1 \sim_{\text{pegar}} m_i^2, \text{ para cada } i \in \mathbb{N}$$

es una superficie de translación mansa homeomorfa al monstruo del lago Ness (véase Figura 3.2).

Demostración. El hecho que la familia de marcas M^j no se acumulan en \widehat{S}_j para cada $j \in \{1, 2\}$ implica que S es una superficie de translación mansa. Solo debemos mostrar que S tiene un solo fin y es de género infinito.

Paso 1. La superficie S tiene un solo fin. Consideremos un compacto K en S y veamos que existe un compacto K' en S tal que $K \subset K'$ y el número de componentes conexas de $S \setminus K'$ es uno.

Construcción de K' . Por hipótesis, S_1 y S_2 son superficies homeomorfas al monstruo del lago Ness, entonces existe un homeomorfismo $f : S_1 \rightarrow S_2$ tal que $f(m_i^1) = m_i^2$, para cada $i \in \mathbb{N}$.

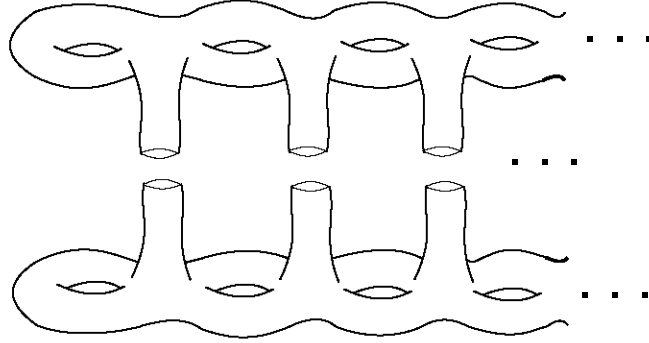


Figura 3.2: Pegado de monstruos a lo largo de marcas

Auxiliándonos de f , definimos el siguientes par de funciones de proyecciones

$$\begin{aligned} \pi_1 : \bigcup_{j \in \{1,2\}} (S_j \setminus M^j) &\rightarrow (S_1 \setminus M^1) \\ x &\rightarrow \begin{cases} x, & \text{si } x \in S_1, \\ f^{-1}(x), & \text{si } x \in S_2. \end{cases} \\ \pi_2 : \bigcup_{j \in \{1,2\}} (S_j \setminus M^j) &\rightarrow (S_2 \setminus M^2) \\ x &\rightarrow \begin{cases} x, & \text{si } x \in S_2, \\ f(x), & \text{si } x \in S_1. \end{cases} \end{aligned}$$

Para cada $j \in \{1,2\}$, la cerradura de $\pi_j \left(K \cap \left(\bigcup_{j \in \{1,2\}} S_j \setminus M^j \right) \right)$ en S_j es un subconjunto compacto, denotemos mediante K_j dicha cerradura. Entonces para cada $j \in \{1,2\}$, existe un compacto K'_j en S_j tal que $K_j \subset K'_j$ y el número de componentes conexas de $S_j \setminus K'_j$ es uno. El compacto K'_j interseca una cantidad finita de marcas pertenecientes a la familia M^j .

Finalmente, la cerradura del subconjunto

$$\bigcup_{j \in \{1,2\}} \pi_j^{-1} \left(K'_j \cap (S_j \setminus M^j) \right)$$

en S es un subconjunto compacto, denotemos mediante K' dicha cerradura. Claramente, $K \subset K'$ y el número de componentes conexas de $S \setminus K'$ es uno.

Paso 2. La superficie S tiene género infinito. Para cada $j \in \{1,2\}$, la superficie abierta $S_j \setminus M^j$ es de género infinito y se encaja de manera natural en S

$$\begin{aligned} i_j : S_j \setminus M^j &\rightarrow S \\ x &\rightarrow [x]. \end{aligned}$$

Dado que el género es un invariante topológico, concluimos que S es de género infinito. \square

Apoyándonos en la *operación pegado de marcas* que hemos aprendido recientemente junto con las propiedades de las subgráficas del *árbol binario de Cantor* (véase Sección 1.4), para cada X

subconjunto cerrado del conjunto de Cantor construiremos una superficie de translación mansa S con espacio de fines X y cada fin con género infinito. La superficie S la llamaremos la *pieza fundamental* y la usaremos en la prueba de los teoremas 3.2.1, 3.2.2, 3.2.3 y 3.2.4.

Plan de la construcción.

- Consideraremos la gráfica T_X con espacio de fines homeomorfo a X (véase Lema 1.4.2) y su respectiva familia numerable de trayectorias infinitas \mathfrak{T}_X asociada (véase Lema 1.4.4).
- A cada trayectoria γ perteneciente a la familia \mathfrak{T}_X le haremos corresponder un monstruo del lago Ness manso $S(\gamma)$. Además, el monstruo $S(\gamma)$ tendrá una cantidad numerable de marcas, tantas como vértices hayan en la trayectoria γ , que no se acumulan en su respectiva completación métrica.
- Finalmente, usaremos la gráfica T_X para pegar adecuadamente las marcas en la colección de monstruos $\{S(\gamma) : \gamma \in \mathfrak{T}_X\}$. Con ello obtendremos la superficie que satisface las condiciones requeridas.

Construcción 3.3.1 (*Pieza fundamental*). Supongamos que cada elemento γ de la familia \mathfrak{T}_X tiene asociado una superficie de translación mansa $S(\gamma)$ con las propiedades siguientes:

1. La superficie $S(\gamma)$ es homeomorfa al monstruo del lago Ness.
2. En $S(\gamma)$ está trazada una familia numerable de marcas paralelas $M = \{m_k : k \in \mathbb{N}\}$ que no se acumulan en su respectiva completación métrica $\widehat{S(\gamma)}$.
3. Para cada $k \in \mathbb{N}$, la k -ésima marca m_k de la familia M está etiquetada como el k -ésimo vértice perteneciente a la trayectoria γ .

La *pieza fundamental* o *superficie fundamental* es

$$S_{fund} := \bigcup_{\gamma \in \mathfrak{T}_X} S(\gamma) / \sim, \quad (3.1)$$

donde \sim es la relación de equivalencia que proviene de pegar marcas con igual nombre.

Lema 3.3.2. La pieza fundamental S_{fund} es superficie de translación mansa, su respectivo espacio de fines es homeomorfo a X y cada fin de S_{fund} es de género infinito

Demostración. Estrategia de la prueba.

Primero, verificaremos que en efecto, la pieza fundamental S_{fund} es una superficie de translación mansa. Luego, probaremos que el espacio de fines de S_{fund} es homeomorfo a X . Para ello, definiremos un encaje $i : T_X \hookrightarrow S_{fund}$, que inducirá un homeomorfismo $i_* : Ends(T_X) \rightarrow Ends(S_{fund})$. Finalmente, veremos que cada fin de S_{fund} es de género infinito.

La *pieza fundamental* S_{fund} es una *superficie de translación mansa*. Al considerar dos elementos distintos γ_i y γ_j en la familia \mathfrak{T}_X , sus respectivos monstruos asociados, $S(\gamma_i)$ y $S(\gamma_j)$, tienen a lo más una marca con igual etiqueta o no tienen marcas con igual etiqueta. Este hecho junto con la Propiedad 2 de la Construcción 3.3.1 aseguran que la completación métrica de S_{fund} es $\widehat{S_{fund}} = S_{fund}$ y además, los puntos singulares de S_{fund} no se acumulen en $\widehat{S_{fund}}$, es decir, S_{fund} es de translación mansa.

El espacio de fines de S_{fund} es homeomorfo a X . Para cada elemento γ de \mathfrak{T}_X y cada $k \in \mathbb{N}$, la k -ésima marca m_k (de la familia M perteneciente al monstruo $S(\gamma)$) la etiquetamos como el k -ésimo vértice perteneciente a la trayectoria γ . La función

$$i_\gamma : \gamma \hookrightarrow S(\gamma),$$

donde el k -ésimo vértice v_k de γ es enviado a algún extremo de la marca que lleva su nombre y, a la arista $(v_k, v_{k+1}) \in \gamma$ le corresponde una geodésica con extremos los puntos $i_\gamma(v_k)$ y $i_\gamma(v_{k+1})$, es un encaje topológico.

- La función

$$i : T_X \hookrightarrow S_{fund}, \quad (3.2)$$

tal que $i|_\gamma := i_\gamma$, para cada $\gamma \in \mathfrak{T}_X$ es un encaje. Dicho encaje nos asegura que S_{fund} es una superficie conexa.

Por otro lado, dada una trayectoria $\gamma = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de \mathfrak{T}_X , podemos suponer sin pérdida de generalidad que existe una sucesión anidada de abiertos conexos con frontera compacta y de género infinito $U(\gamma)_1 \supset U(\gamma)_2 \supset \dots$ en su respectivo monstruo asociado $S(\gamma)$, tales que

1. $Ends(S(\gamma)) = \{[U(\gamma)_n]_{n \in \mathbb{N}}\}$.
2. Para cada $n \in \mathbb{N}$, la intersección $U(\gamma)_n \cap i_\gamma(\gamma) = i_\gamma((v_n, v_{n+1}, v_{n+2}, \dots))$.

Seguindo el Corolario 1.4.1 tenemos que $Ends(T_X)$ está en correspondencia biunívoca con \mathfrak{DT}_X . Dicha correspondencia biunívoca dota a \mathfrak{DT}_X de una topología que hace a los espacio $Ends(T_X)$ y \mathfrak{DT}_X homeomorfos. Dado el elemento $(D_{s_n})_{n \in \mathbb{N}}$ de \mathfrak{DT}_X entonces para cada $n \in \mathbb{N}$, existen a lo más dos elementos diferentes $\gamma_{\alpha_n} \neq \gamma_{\beta_n}$ en \mathfrak{T}_X , tal que $D_{s_n} \in \gamma_{\alpha_n} \cap \gamma_{\beta_n}$ y ellos satisfacen las propiedades siguientes:

- a. $i(D_{s_n}) \in S(\gamma_{\alpha_n})$ e $i(D_{s_n}) \in S(\gamma_{\beta_n})$.
- b. Existe $l(n) \in \mathbb{N}$, tal que $i(D_{s_n}) \in U(\gamma_{\alpha_n})_{l(n)-1} \subset S(\gamma_{\alpha_n})$ y $i(D_{s_n}) \notin U(\gamma_{\alpha_n})_{l(n)} \subset S(\gamma_{\alpha_n})$.
- c. Existe $k(n) \in \mathbb{N}$, tal que $i(D_{s_n}) \in U(\gamma_{\beta_n})_{k(n)-1} \subset S(\gamma_{\beta_n})$ y $i(D_{s_n}) \notin U(\gamma_{\beta_n})_{k(n)} \subset S(\gamma_{\beta_n})$.

- Ahora, veamos que la función

$$\begin{aligned} i_* : \quad \mathfrak{DT}_X &\rightarrow Ends(S_{fund}) \\ (D_{s_n})_{n \in \mathbb{N}} &\rightarrow [U_n]_{n \in \mathbb{N}} \end{aligned} \quad (3.3)$$

donde U_n es la componente conexa de

$$S_{fund} \setminus (\partial U(\gamma_{\alpha_n})_{l(n)} \cup \partial U(\gamma_{\beta_n})_{k(n)}),$$

que contiene el elemento $i(D_{s_{n+1}})$, para cada $n \in \mathbb{N}$, es un homeomorfismo (véase Figura 3.3, U_n es la componente conexa que contiene a la marca $D_{s_{n+1}}$).

Mostraremos que la función i_* es inyectiva, sobreyectiva, continua y cerrada.

La función i_ es inyectiva.* Consideremos dos trayectorias descendentes distintas $(D_{s_n})_{n \in \mathbb{N}} \neq (D_{t_n})_{n \in \mathbb{N}}$ de T_X , debemos probar que los fines $i_*((D_{s_n})_{n \in \mathbb{N}}) := [V_n]_{n \in \mathbb{N}}$ y $i_*((D_{t_n})_{n \in \mathbb{N}}) := [W_n]_{n \in \mathbb{N}}$ no son equivalentes.

Dado que las trayectorias descendentes $(D_{s_n})_{n \in \mathbb{N}}$ y $(D_{t_n})_{n \in \mathbb{N}}$ son distintas, entonces existe $r \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m > r$ se cumple que $D_{s_m} \neq D_{t_m}$. Para el vértice $D_{s_r} = D_{t_r}$ existen a lo más dos trayectorias distintas $\gamma_{\alpha_r} \neq \gamma_{\beta_r}$ en \mathfrak{T}_X tal que $D_{s_r} = D_{t_r} \in \gamma_{\alpha_r} \cap \gamma_{\beta_r}$, entonces para todo $m > r$ se tienen las condiciones siguientes:

Existe $l(r) \in \mathbb{N}$, tal que $i(D_{s_r} = D_{t_r}) \in U(\gamma_{\alpha_r})_{l(r)-1} \subset S(\gamma_{\alpha_r})$ y $i(D_{s_r} = D_{t_r}) \notin U(\gamma_{\alpha_r})_{l(r)} \subset S(\gamma_{\alpha_r})$.

Existe $k(r) \in \mathbb{N}$, tal que $i(D_{s_r} = D_{t_r}) \in U(\gamma_{\beta_r})_{k(r)-1} \subset S(\gamma_{\beta_r})$ y $i(D_{s_r} = D_{t_r}) \notin U(\gamma_{\beta_r})_{k(r)} \subset S(\gamma_{\beta_r})$.

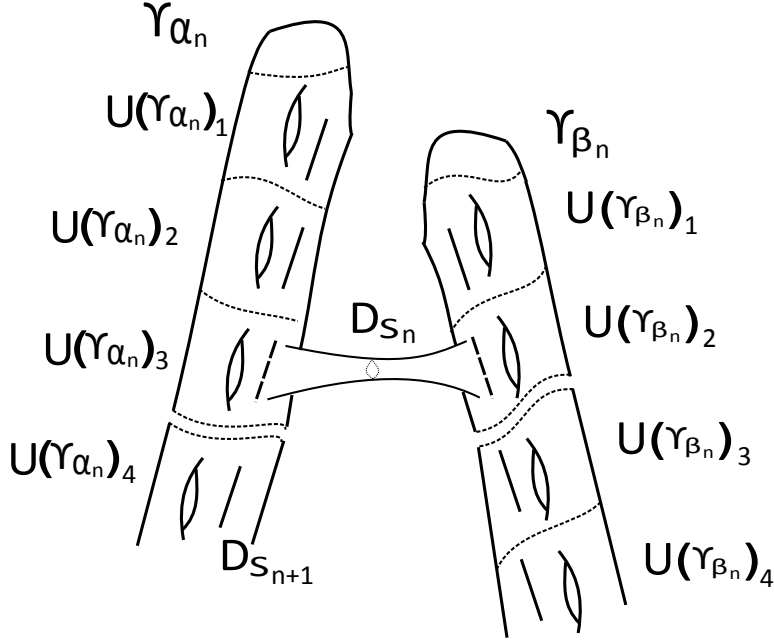


Figura 3.3: Función i_*

Dado que los abiertos V_{l+1} y W_{l+1} son dos componentes distintas de

$$S_{fund} \setminus (\partial U(\gamma_{\alpha_r})_{l(r)} \cup \partial U(\gamma_{\beta_r})_{s(r)}),$$

entonces los fines $[V_n]_{n \in \mathbb{N}}$ y $[W_n]_{n \in \mathbb{N}}$ son diferentes. Esto muestra que la función i_* es inyectiva.

La función i_ es sobreyectiva.* Consideremos un fin $[U_n]_{n \in \mathbb{N}} \in \text{Ends}(S_{fund})$, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos W_n como la componente conexa de $i^{-1}(U_n \cap i(T_X))$, tal que $i^{-1}(U_{n+1} \cap i(T_X)) \subset W_n$. Claramente, la sucesión anidada de abiertos conexos con frontera compacta $W_1 \supset W_2 \supset \dots$ define un fin en T_X . La trayectoria γ de \mathfrak{D}_X asociada al fin $[W_n]_{n \in \mathbb{N}}$ (véase Corolario 1.4.1) satisface que $i_*(\gamma) = [U_n]_{n \in \mathbb{N}}$. Por lo tanto, la función i_* es sobreyectiva.

La función i_ es continua.* Consideremos una trayectoria infinita $(D_{s_n})_{n \in \mathbb{N}}$ en $\text{Ends}(T_X)$ y una vecindad U^* que contenga al elemento $i_*((D_{s_n})_{n \in \mathbb{N}}) = [V_n]_{n \in \mathbb{N}}$, debemos probar que existe una vecindad W^* de $(D_{s_n})_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $i_*(W^*) \subset U^*$.

Existe una componente conexa abierta y de frontera compacta $W \subset i^{-1}(U) \subset T_X$ tal que $(D_{s_n})_{n \in \mathbb{N}} \in W^*$. Claramente, $i_*(W^*) \subset U^*$. Esto muestra que la función i_* es continua.

La función i_ es cerrada.* Toda función continua definida de un espacio compacto a un espacio Hausdorff es cerrada (véase [15, p. 226]), por lo tanto i_* es una función cerrada.

Esto muestra que la superficie fundamental S_{fund} tiene espacio de fines homeomorfo a X .

Cada fin de S_{fund} es de género infinito. Consideremos el fin $[U_n]_{n \in \mathbb{N}} \in \text{Ends}(S_{fund})$, siguiendo la función i_* (véase expresión (3.3)) se tiene que para cada $n \in \mathbb{N}$, en el abierto U_n se encaja

vía la función identidad en el abierto $U(\gamma_{\alpha_n})_{l(n)}$ o en el abierto $U(\gamma_{\beta_n})_{k(n)}$. Por lo tanto, el fin $[U_n]_{n \in \mathbb{N}}$ es de género infinito. □

3.4. Demostración Teorema 3.2.1

Caso 1. Construyendo una superficie de translación mansa con grupo de Veech P , espacio de fines homeomorfo a X y cada fin de género infinito.

Para elaborar la superficie que satisface los requerimientos del teorema usaremos la Construcción 3.3.1 junto con un monstruo del lago Ness manso con grupo de Veech P y con marcas sin pegar. Dicho monstruo lo describiremos a continuación.

Construcción 3.4.1 (*Monstruo con grupo de Veech P y con marcas sin pegar*). Denotemos mediante \mathbb{E} a una copia del plano Euclidiano con un origen $\bar{0}$ y una base ortonormal $\beta = \{e_1, e_2\}$. En dicha copia trazamos dos familias de marcas (las marcas estarán dadas por sus puntos extremos)

$$L := \{l_i = ((4i - 1)e_1, 4ie_1) : \forall i \in \mathbb{N}\} \quad \text{y} \quad M := \{m_i = ((4i - 3)e_1, (4i - 2)e_1) : \forall i \in \mathbb{N}\}.$$

Entonces la superficie

$$S_P := \mathbb{E} / l_{2i-1} \sim_{\text{pegar}} l_{2i}, \text{ para cada } i \in \mathbb{N} \tag{3.4}$$

es de translación mansa, tiene una cantidad infinita de puntos cónicos de ángulo 4π , su respectivo grupo de Veech es P y además, S_P es homeomorfa al monstruo del lago Ness (véase Figura 3.4). En S_P hay una familia infinita de marcas M que aún no han sido pegadas. Sin embargo, dichas marcas serán utilizadas en el desarrollo de la prueba.

Éste monstruo es diferente al dado por *Przytycki, Weitze-Schmithüsen y Valdez* [54] en la prueba del Teorema de realización 3.1.2. No obstante, para obtener a S_P seguimos las ideas de la demostración de dicho resultado.

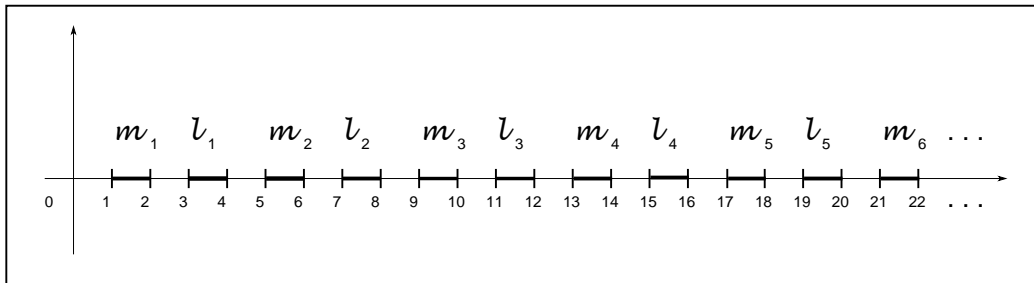


Figura 3.4: *Monstruo del lago Ness S_P*

Ahora, por cada trayectoria γ en la familia \mathfrak{T}_X , consideramos $S(\gamma)$ una copia del monstruo S_P que se ha descrito en la Construcción 3.4.1 (véase expresión (3.5)). Adicionalmente, para cada $k \in \mathbb{N}$, la k -ésima marca m_k (de la familia M del monstruo $S(\gamma)$) la etiquetamos como el

k -ésimo vértice perteneciente a la trayectoria γ . Siguiendo el Lema 3.3.2, obtenemos que la *pieza fundamental*

$$S_{fund} := \bigcup_{\gamma \in \mathfrak{I}_X} S(\gamma) / \sim, \quad (3.5)$$

donde \sim es la relación de equivalencia que proviene de pegar marcas con igual nombre; es una superficie de translación mansa, con espacio de fines homeomorfo a X y cada fin de S_{fund} es de género infinito.

La superficie S_{fund} tiene grupo de Veech P .

• Veamos que $P < \Gamma(S_{fund})$. Para cada matriz $B \in P$, denotemos mediante $f_B : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ a la transformación lineal en el plano Euclidiano que define dicha matriz B . Nótese que la función f_B fija el eje x , conjunto donde están trazadas las familias de marcas L y M (véase Construcción 3.4.1). Esta observación nos permite obtener un difeomorfismo afín

$$F : S_{fund} \rightarrow S_{fund}, \quad (3.6)$$

con matriz diferencial $DF = B$. Ello muestra que $P < \Gamma(S_{fund})$.

• Probemos que $\Gamma(S_{fund}) < P$. Del caso anterior, se deduce que el grupo de Veech de S_{fund} es de cardinalidad no numerable y además, por construcción, todas las conexiones sillas de S_{fund} son paralelas. Siguiendo el Teorema 3.1.1 obtenemos que el grupo de Veech de S_{fund} es P o P' . Procederemos por contradicción y supondremos que el grupo de Veech de S_{fund} es P' . La siguiente definición es necesaria para la prueba.

La *espina* de S_{fund} , que denotaremos mediante $Espina(S_{fund})$, es el conjunto de puntos singulares de S_{fund} junto con todas las trayectorias de S_{fund} paralelas a sus respectivas conexiones sillas, tal que alguno de sus extremos es un punto singular (las conexiones sillas están en la espina de S_{fund}). Las trayectorias de la espina de S_{fund} que no son conexiones sillas son llamadas *trayectorias singulares*. Por definición, $Espina(S_{fund})$ es un subconjunto cerrado y conexo de S_{fund} (véase Figura 3.5). Podemos suponer sin pérdida de generalidad que las trayectorias pertenecientes a la espina de S_{fund} son trayectorias integrales del campo $V_{[\pi]}$ y, si γ es una trayectoria singular, entonces su respectivo intervalo máximo de definición es $(-\infty, 0)$ y además,

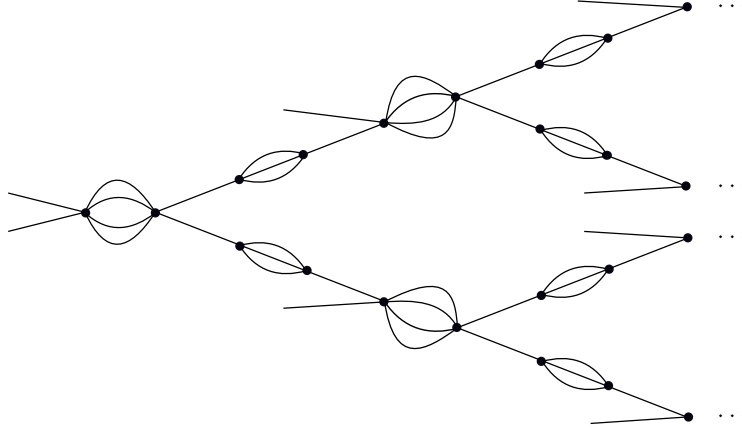
$$\lim_{t \rightarrow 0^-} \gamma(t) \in Sing(S_{fund}).$$

Siguiendo la hipótesis tenemos que $\Gamma(S_{fund}) = P'$, entonces existe un difeomorfismo afín $f : S_{fund} \rightarrow S_{fund}$ con diferencial $Df = -Id$. La función f deja invariante al subconjunto $Espina(S_{fund}) \subset S_{fund}$. Si γ es una trayectoria singular, entonces $f \circ \gamma$ también es una trayectoria integral (singular) del campo $V_{[0]}$, tal que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f \circ \gamma(t) \in Sing(S_{fund}).$$

Claramente esto es una contradicción porque en la espina de S_{fund} no existen trayectorias singulares con las características anteriormente mencionadas. Por lo tanto, el grupo de Veech de la superficie S_{fund} es P .

Caso 2. Construyendo una superficie de translación mansa con grupo de Veech P' , espacio de fines homeomorfo a X y cada fin de género infinito.


 Figura 3.5: $Espina(S_{fund})$ cuando $X = 2^\omega$

Analogamente, a como se hizo en el caso anterior, para elaborar la superficie que satisface los requerimientos del Teorema 3.2.1 usaremos la Construcción 3.3.1 junto con el monstruo del lago Ness manso $S_{P'}$ con grupo de Veech P' y con marcas sin pegar. Dicho monstruo lo describiremos a continuación.

Construcción 3.4.2 (*Monstruo con grupo de Veech P' y con marcas sin pegar*). Denotemos mediante \mathbb{E} a una copia del plano Euclidiano con un origen $\bar{0}$ y una base ortonormal $\beta = \{e_1, e_2\}$. En dicha copia trazamos cuatro familias de marcas (las marcas estarán dadas por sus puntos extremos)

$$\begin{aligned} M^+ &:= \{m_i^+ = ((4i-3)e_1, (4i-2)e_1) : \forall i \in \mathbb{N}\}, & L^+ &:= \{l_i^+ = ((4i-1)e_1, 4ie_1) : \forall i \in \mathbb{N}\}, \\ M^- &:= \{m_i^- = ((3-4i)e_1, (2-4i)e_1) : \forall i \in \mathbb{N}\} & \text{y} & L^- := \{l_i^- = ((1-4i)e_1, -4ie_1) : \forall i \in \mathbb{N}\}. \end{aligned}$$

Entonces la superficie

$$S_{P'} := \mathbb{E}/l_{2i-1}^+ \sim_{\text{pegar}} l_{2i}^+ \text{ y } l_{2i-1}^- \sim_{\text{pegar}} l_{2i}^-, \text{ para cada } i \in \mathbb{N} \quad (3.7)$$

es de translación mansa, tiene una cantidad infinita de puntos cónicos de ángulo 4π , su respectivo grupo de Veech es P' y además, $S_{P'}$ es homeomorfa al monstruo del lago Ness (véase Figura 3.6). En $S_{P'}$ hay dos familias infinitas de marcas M^+ y M^- que aún no han sido pegadas. Sin embargo, dichas marcas serán utilizadas en el desarrollo de la prueba.

Este monstruo también es diferente al dado por *Przytycki, Weitze-Schmithüsen y Valdez* [54] en la prueba del Teorema de realización 3.1.2. Para obtenerlo seguimos las ideas dadas en la demostración de dicho resultado.

Ahora, por cada trayectoria γ en la familia \mathfrak{T}_X , consideramos $S(\gamma)$ una copia del monstruo del lago Ness $S_{P'}$ que se ha descrito en la Construcción 3.4.2 (véase expresión (3.7)). Adicionalmente, para cada $k \in \mathbb{N}$, la k -ésima marca m_k^+ (respectivamente m_k^-) de la familia M^+ (respectivamente M^-) del monstruo $S(\gamma)$ la etiquetamos como el k -ésimo vértice perteneciente a la trayectoria γ , con un signo $+$ (respectivamente un signo $-$). Siguiendo el Lema 3.3.2 la *pieza fundamental*

$$S_{fund} := \bigcup_{\gamma \in \mathfrak{T}_X} S(\gamma) / \sim, \quad (3.8)$$

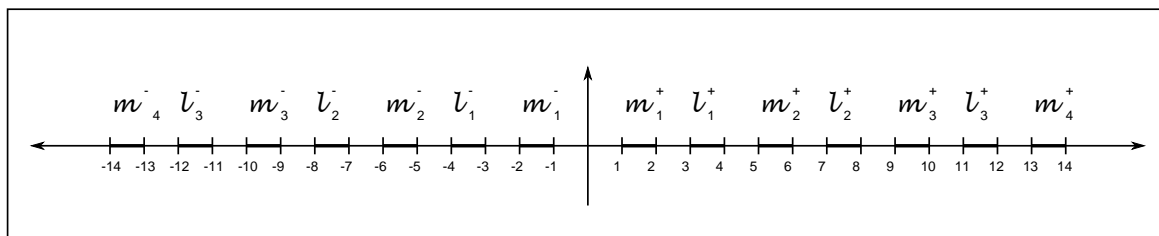


Figura 3.6: *Monstruo del lago Ness* $S_{P'}$.

donde \sim es la relación de equivalencia que proviene de pegar marcas con igual nombre; es una superficie de translación mansa, con espacio de fines homeomorfo a X y cada fin de S_{fund} es de género infinito.

La superficie S_{fund} tiene grupo de Veech P' . Claramente, P' es un subgrupo de $\Gamma(S_{fund})$. Entonces el grupo de Veech de S_{fund} es de cardinalidad no numerable. Por construcción, todas las conexiones sillas de S_{fund} son paralelas. Siguiendo el Teorema 3.1.1 obtenemos que el grupo de Veech de S_{fund} es P' . □

Corolario 3.4.1. Existe una superficie de translación mansa S sin género tal que su grupo de Veech es P , su respectivo espacio de fines es homeomorfo a X y los fines de S son planos.

Basta considerar la copia del plano Euclidiano que se da en la Construcción 3.4.1 con tan sólo la familia de marcas M y desarrollar la prueba del Teorema 3.2.1 para el caso 1.

3.5. Puzzles

Para demostrar los teoremas de realización 3.2.2, 3.2.3 y 3.2.4 definiremos un objeto matemático que llamamos *puzzle*. *Grosso modo*, un *puzzle* \mathfrak{P} es un conjunto de superficies de translación mansas, las cuales llamamos *piezas*; cada una con una cantidad *infinita* o *finita* de marcas trazadas, que no se acumulan en su respectiva completación métrica. El puzzle \mathfrak{P} genera una superficie $S_{\mathfrak{P}}$ que llamamos la *superficie ensamblada* y que se obtiene pegando adecuadamente las marcas trazadas en cada superficie que conforman a dicho puzzle.

El objeto *puzzle* es importante porque a la tripleta (X, G, H) donde X es un subconjunto cerrado del conjunto de Cantor, G es un subgrupo numerable de $GL_+(2, \mathbb{R})$ sin elementos que contraen y H es un subconjunto generador de G ; le haremos corresponder un puzzle

$$(X, G, H) \rightarrow \mathfrak{P}(X, G, H)$$

con las propiedades siguientes:

1. El conjunto $\mathfrak{P}(X, G, H)$ está en correspondencia biunívoca con G , es decir,

$$\mathfrak{P}(X, G, H) = \{S_g : S_g \text{ es una superficie de translación mansa, para cada } g \in G\}.$$

2. Para cada $g \in G$, la superficie S_g tiene espacio de fines homeomorfo a X y cada fin de S_g es de género infinito.

3. Para cada $g \in G$, en la superficie S_g por cada elemento en H hay trazada una familia infinita de marcas paralelas que no se acumulan en su respectiva completación métrica.

Además, cuando peguemos adecuadamente las marcas trazadas en cada superficie $S_g \in \mathfrak{P}(X, G, H)$, obtendremos la *superficie ensamblada* $S_{\mathfrak{P}}$, la cual será de translación mansa, con grupo de Veech G , espacio de fines adecuado y cada fin de $S_{\mathfrak{P}}$ de género infinito.

Seguidamente, presentaremos la estrategia que usaremos para definir el puzzle $\mathfrak{P}(X, G, H)$ y obtener la superficie ensamblada $S_{\mathfrak{P}}$.

Estrategia.

Paso 1. Definiremos las piezas que conforman el puzzle $\mathfrak{P}(X, G, H)$. Básicamente, las piezas que conforman dicho puzzle son copias afines de una *pieza fundamental*, que denotaremos mediante S_{fund} y obtendremos ayudándonos de la Construcción 3.3.1 y dos monstruos del lago Ness mansos, el monstruo *amortiguador* y el monstruo *decorado* (véase construcciones 3.5.1 y 3.5.2, respectivamente). La pieza fundamental tendrá espacio de fines homeomorfo a X , con cada fin de género infinito, y adicionalmente habrá una familia de marcas paralelas trazada en S_{fund} , que no se acumula en su respectiva completación métrica, por cada elemento en H . Para obtener S_{fund} seguiremos el camino siguiente:

- Construiremos el monstruo del lago Ness manso llamado *amortiguador* (véase Construcción 3.5.1). A partir de dicho monstruo amortiguador generaremos el monstruo del lago Ness manso llamado *decorado* (véase Construcción 3.5.2). Estas dos superficies son importantes porque apoyándonos en ellas mostraremos que la superficie *ensamblada* $S_{\mathfrak{P}}$ es de translación mansa y con grupo de Veech G .
- Consideraremos la gráfica T_X con espacio de fines homeomorfo a X (véase Lema 1.4.2) y su respectiva familia numerable de trayectorias infinitas \mathfrak{T}_X asociada (véase Lema 1.4.4). Luego, escogeremos una trayectoria $\tilde{\gamma}$ perteneciente a \mathfrak{T}_X y le haremos corresponder una copia $S(\tilde{\gamma})$ del monstruo del lago Ness *decorado*. Además, el monstruo $S(\tilde{\gamma})$ tendrá una cantidad numerable de familias de marcas paralelas sin pegar, tantas como elementos hayan en el conjunto H . Análogamente, a cada trayectoria γ perteneciente a $\mathfrak{T}_X \setminus \{\tilde{\gamma}\}$ le haremos corresponder $S(\gamma)$ una copia del monstruo del lago Ness descrito en la Construcción 3.4.1.
- Finalmente, usaremos la gráfica T_X para pegar adecuadamente las marcas en la colección de monstruos $\{S(\gamma) : \gamma \in \mathfrak{T}_X\}$. Con ello obtendremos la superficie *fundamental* S_{fund} y definiremos el puzzle $\mathfrak{P}(X, G, H)$.

Paso 2. Ensamblaremos el puzzle $\mathfrak{P}(X, G, H)$, es decir, pegaremos las marcas trazadas en cada pieza del puzzle usando la gráfica de Cayley $Cay(G, H)$. De esta manera, obtendremos la superficie ensamblada $S_{\mathfrak{P}}$.

Paso 3. Probaremos que la superficie ensamblada $S_{\mathfrak{P}}$ es de translación mansa, con grupo de Veech G y describiremos su respectivo espacio de fines. Además, veremos que todos los fines de $S_{\mathfrak{P}}$ son de género infinito.

Comencemos a desarrollar la estrategia descrita anteriormente y definamos las piezas que conforman el puzzle $\mathfrak{P}(X, G, H)$. Notemos que los conjuntos G y H no son necesariamente

finitos por lo tanto los escribimos como sigue $G := \{g_1, \dots, g_{|G|}\}$ y $H := \{h_1, \dots, h_{|H|}\}$, donde $|G|$ y $|H|$ denotan la cardinalidad de G y H , respectivamente.

Construcción 3.5.1 (*Monstruo del lago Ness amortiguador*). Para cada elemento h_j de H , denotemos mediante $\mathbb{E}(j, 1)$ y $\mathbb{E}(j, 2)$ a dos copias del plano Euclidiano con un origen $\bar{0}$ y una base ortonormal $\beta = \{e_1, e_2\}$. En la copia $\mathbb{E}(j, 1)$ trazamos dos familias de marcas (las marcas estarán dadas por su puntos extremos)

$$\check{M}^j := \{\check{m}_i^j = (4ie_1, (4i+1)e_1) : \forall i \in \mathbb{N}\} \text{ y } L_1 := \{l_i^1 = ((4i+2)e_1, (4i+3)e_1) : \forall i \in \mathbb{N}\}.$$

Análogamente, en la copia $\mathbb{E}(j, 2)$ trazamos dos familias de marcas:

$$h_j \check{M}^{-j} := \{h_j \check{m}_i^{-j} = (2ie_2, e_1+2ie_2) : \forall i \in \mathbb{N}\} \text{ y } L_2 := \{l_i^2 = ((2i+1)e_2, e_1+(2i+1)e_2) : \forall i \in \mathbb{N}\}.$$

La superficie *amortiguadora* es

$$S(Id, h_j) := \bigcup_{k=1}^2 \mathbb{E}(j, k) \Big/ l_i^1 \sim_{\text{pegar}} l_i^2, \text{ para cada } i \in \mathbb{N}. \quad (3.9)$$

La superficie $S(Id, h_j)$ es de translación mansa, tiene una cantidad infinita de puntos cónicos de ángulo 4π y además, $S(Id, h_j)$ es homeomorfa al monstruo del lago Ness (véase Figura 3.7). En el monstruo amortiguador existen dos familias infinitas de marcas \check{M}^j y $h_j \check{M}^{-j}$ que aún no han sido pegadas. Si embargo, dichas marcas serán utilizadas para obtener el monstruo decorado.

Este monstruo lo usan *Przytycki*, *Weitze-Schmithüsen* y *Valdez* en la prueba del Teorema de realización 3.1.2 (véase [54]).

Cuando consideramos una copia afín del monstruo amortiguador, la distancia entre el par de familias infinitas de marcas, que aún no se han pegado, es mayor o igual a $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Dicha distancia la hallamos mediante la *métrica Hausdorff* (véase [15, p. 205]). La anterior afirmación es una de las herramientas que usaremos para garantizar que la superficie ensamblada $S_{\mathfrak{F}}$ es de translación mansa y se enuncia más adelante (véase Lema 3.5.1).

Definición 3.5.1. Sean S una superficie de translación mansa y g un elemento del grupo G . La *copia afín* S_g de S con respecto a g es la superficie de translación mansa que resulta de poscomponer el atlas de translación de S por la transformación lineal que define la matriz g .

La superficie S_g viene con un difeomorfismo afín canónico $\bar{g} : S_{Id} \rightarrow S_g$, con matriz diferencial $D\bar{g} = g$. Entonces el grupo de matrices G actúa en la unión $\bigcup_{g \in G} S_g$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \alpha : G \times \bigcup_{g \in G} S_g &\rightarrow \bigcup_{g \in G} S_g \\ (g, S_{g'}) &\rightarrow S_{gg'}. \end{aligned}$$

Para cada $g \in G$, el objeto $S(g, gh_j)$ es la copia afín de $S(Id, h_j)$ con respecto a g . La imagen de las familias de marcas \check{M}^j y $h_j \check{M}^{-j}$ en $S(g, gh_j)$ se renombran mediante $g\check{M}^j$ y $gh_j \check{M}^{-j}$, respectivamente.

Lema 3.5.1. [54, Lema 4.5]. La distancia entre las dos familias de marcas $g\check{M}^j$ y $gh_j \check{M}^{-j}$ en $S(g, gh_j)$ es mayor o igual a $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

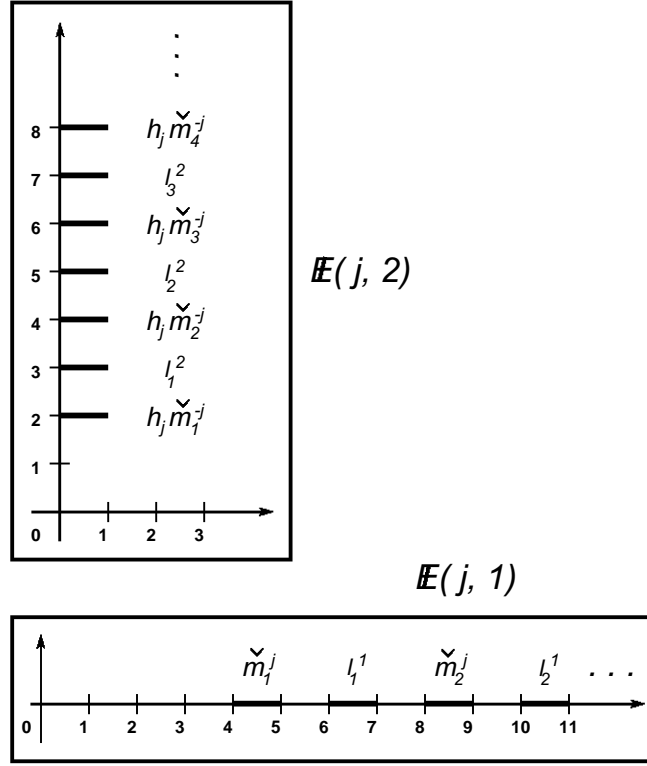


Figura 3.7: Monstruo del lago Ness amortiguador $S(Id, h_j)$

Demostración. Procederemos por contradicción. Supongamos que la distancia entre las dos familias de marcas $g\check{M}^j$ y $gh_j\check{M}^{-j}$ es $d < \frac{1}{\sqrt{2}}$, y que la distancia entre las dos familias de marcas $g\check{M}^j$ y gL_1 y; $gh_j\check{M}^{-j}$ y gL_2 es d_1 y d_2 , respectivamente.

Por la manera en que construimos el monstruo amortiguador $S(g, gh_j)$ se satisface que

$$d_1 + d_2 \leq d, \quad d_1 \leq d < \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{y} \quad d_2 \leq d < \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (3.10)$$

Nótese que $d_1 = \|g(e_1)\|$ y $d_2 = \min_{|\varepsilon| \leq 1} \|g(e_2 + \varepsilon e_1)\|$, entonces consideremos el valor $\varepsilon \in [-1, 1]$, tal que el mínimo se alcanza en la segunda igualdad. Reemplazamos los valores d_1 y d_2 en la desigualdad (3.10) y obtenemos

$$\|g(e_2 + \varepsilon e_1)\| + \|g(e_1)\| < \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (3.11)$$

Dado que $|\varepsilon| \leq 1$, entonces $|\varepsilon| \|g(e_1)\| \leq \|g(e_1)\|$. Sumamos a ambos extremos de la desigualdad anterior el término $\|g(e_2 + \varepsilon e_1)\|$

$$\|g(e_2 + \varepsilon e_1)\| + |\varepsilon| \|g(e_1)\| \leq \|g(e_2 + \varepsilon e_1)\| + \|g(e_1)\| < \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (3.12)$$

De la expresión (3.12) se sigue que

$$\|g(e_2)\| = \|g(e_2 + \varepsilon e_1) - g(\varepsilon e_1)\| \leq \|g(e_2 + \varepsilon e_1)\| + |\varepsilon| \|g(\varepsilon e_1)\| < \frac{1}{\sqrt{2}},$$

es decir,

$$\|g(e_2)\| < \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (3.13)$$

Finalmente, dado cualquier vector no nulo $v = xe_1 + ye_2$ en $\mathbb{R}^2 \setminus \{\bar{0}\}$ con $x, y \in \mathbb{R}$ se satisface la desigualdad triangular

$$\|g(v)\| = \|g(xe_1 + ye_2)\| \leq |x| \|g(e_1)\| + |y| \|g(e_2)\|. \quad (3.14)$$

Reemplazamos los términos de las expresiones (3.10) y (3.13) en la desigualdad (3.14) y obtenemos

$$\|g(v)\| < |x| \|g(e_1)\| + |y| \|g(e_2)\| < \frac{1}{\sqrt{2}}(|x| + |y|). \quad (3.15)$$

Dado que para cualquier vector $v = xe_1 + ye_2$ en \mathbb{R}^2 con $x, y \in \mathbb{R}$ se cumple la desigualdad

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|x| + |y|) \leq \sqrt{x^2 + y^2} = \|v\|, \quad (3.16)$$

entonces reemplazamos en (3.16) y se sigue que

$$\begin{aligned} \|g(v)\| &< \frac{1}{\sqrt{2}}(|x| + |y|) \leq \sqrt{x^2 + y^2} = \|v\| \\ \frac{\|g(v)\|}{\|v\|} &< 1, \end{aligned} \quad (3.17)$$

lo cual implica que g es una matriz que contrae. Claramente, esto es una contradicción porque el grupo de Veech de una superficie de translación mansa no tiene elementos que contraen (véase Teorema 3.1.1). \square

Ahora, introduciremos el monstruo del lago Ness *decorado*. Esta superficie es importante porque con ayuda de uno de sus puntos singulares (punto cónico de ángulo 6π), garantizaremos que la superficie *ensamblada* $S_{\mathfrak{P}}$ tiene grupo de Veech G .

Construcción 3.5.2 (*Monstruo del lago Ness decorado*). Denotemos mediante \mathbb{E} a una copia del plano Euclidiano con un origen $\bar{0}$ y una base ortonormal $\beta = \{e_1, e_2\}$. En la copia \mathbb{E} trazamos las familias de marcas siguientes (las marcas estarán dadas por sus puntos extremos)

$$\begin{aligned} M &:= \{m_i = ((4i - 1)e_1, 4ie_1) : \forall i \in \mathbb{N}\} \text{ y} \\ M^j &:= \{m_i^j = ((2i - 1)e_1 + (j + 1)e_2, 2ie_1 + (j + 1)e_2) : \forall i \in \mathbb{N}, \forall j \in \{0, \dots, |H|\}\}. \end{aligned}$$

Ahora, escogemos un punto (x_1, y_1) en la copia \mathbb{E} con $x_1 > 0$ y $y_1 < 0$ tal que la familia de marcas M^{-1} en \mathbb{E} ,

$$M^{-1} := \{m_i^{-1} = (ix_1e_1 + y_1e_2, ix_1e_1 + h_1^{-1}e_1 + y_1e_2) : \forall i \in \mathbb{N}\},$$

no intersece a las familias de marcas ya trazadas. Entonces de manera recursiva para cualquier $j \in \{1, \dots, |H|\}$, escogemos un punto (x_j, y_j) en la copia \mathbb{E} con $x_j > 0$ y $y_j < 0$ tal que la familia de marcas M^{-j} en \mathbb{E} ,

$$M^{-j} := \{m_i^{-j} = (ix_j e_1 + y_j e_2, ix_j e_1 + h_j^{-1} e_1 + y_j e_2) : \forall i \in \mathbb{N}\},$$

no intersece a las familias de marcas ya trazadas, es decir, la familia de marcas M^{-j} no interseca a las familias $M^{-(j-1)}, \dots, M^{-1}, M, M^0, M^1, \dots$

Por otro lado, denotemos mediante $\tilde{\mathbb{E}}$ el cubriente $3 : 1$ de \mathbb{E} ramificado en 0 y $p : \tilde{\mathbb{E}} \rightarrow \mathbb{E}$, su respectiva función proyección. Nótese que la imagen inversa de la familia M en $\tilde{\mathbb{E}}$ bajo p son tres copias disjuntas de sí misma, una de estas copias es

$$\tilde{M}^0 := \{\tilde{m}_i^0 : \forall i \in \mathbb{N}\}.$$

Análogamente, la imagen inversa de cada una de las marcas $t_1 = (e_2, 2e_2)$ y $t_2 = (-e_2, -2e_2)$ en $\tilde{\mathbb{E}}$ bajo p son tres marcas disjuntas; consideremos una marca en cada imagen inversa tal que se encuentren en la misma hoja que la familia \tilde{M}^0 . Denotemos dichas marcas mediante \tilde{t}_1 y \tilde{t}_2 respectivamente.

La superficie *decorada* es

$$S := \left(\mathbb{E} \cup \tilde{\mathbb{E}} \bigcup_{\forall h_j \in H} S(Id, h_j) \right) / \sim \quad (3.18)$$

donde \sim es la relación de equivalencia que proviene de pegar las marcas:

1. $\tilde{t}_1 \sim_{\text{pegar}} \tilde{t}_2$ en $\tilde{\mathbb{E}}$.
2. $m_i^0 \sim_{\text{pegar}} \tilde{m}_i^0$ en \mathbb{E} y $\tilde{\mathbb{E}}$, respectivamente.
3. $m_i^j \sim_{\text{pegar}} \tilde{m}_i^j$, para cada $i \in \mathbb{N}$ y para cada $j \in \{1, \dots, |H|\}$, en \mathbb{E} y $S(Id, h_j)$, respectivamente (véase Figura 3.8).

La superficie S es de translación mansa, tiene una cantidad infinita de puntos cónicos de ángulo 4π , sólo un punto cónico de ángulo 6π y además, S es homeomorfa al monstruo del lago Ness. En el monstruo decorado hay $2|H| + 1$ familias de marcas que aún no han sido pegadas, $M := \{m_i = ((4i - 1)e_1, 4ie_1) : \forall i \in \mathbb{N}\}$ y para cada $i \in \{1, \dots, k\}$ las familias $M^{-j} := \{m_i^{-j} = (ix_j e_1 + y_j e_2, ix_j e_1 + h_j^{-1} e_1 + y_j e_2) : \forall i \in \mathbb{N}\}$ y $h_j \tilde{M}^{-j} := \{h_j \tilde{m}_i^{-j} = (2ie_2, e_1 + 2ie_2) : \forall i \in \mathbb{N}\}$. Sin embargo, dichas marcas serán utilizadas para obtener la pieza fundamental asociada al puzzle $\mathfrak{P}(X, G, H)$. Además, éste monstruo decorado lo usan *Przytycki, Weitze-Schmithüsen* y *Valdez* en la prueba del Teorema de realización 3.1.2 (véase [54]).

Construcción 3.5.3 (*Pieza fundamental asociada al puzzle $\mathfrak{P}(X, G, H)$*). Consideremos X un subconjunto cerrado del conjunto de Cantor, la gráfica T_X con espacio de fines homeomorfo a X (véase Lema 1.4.2) y su respectiva familia numerable de trayectorias infinitas \mathfrak{T}_X asociada (véase Lema 1.4.4). Para definir la pieza fundamental asociada al puzzle $\mathfrak{P}(X, G, H)$ seguiremos las ideas descritas en la Construcción 3.3.1. No obstante, diremos explícitamente cual monstruo tiene asociado cada trayectoria de la familia \mathfrak{T}_X .

Escojamos una trayectoria arbitraria $\tilde{\gamma}$ perteneciente a \mathfrak{T}_X y le hacemos corresponder $S(\tilde{\gamma})$ una copia del monstruo del lago Ness decorado (véase Construcción 3.5.2). Adicionalmente, para cada $k \in \mathbb{N}$ la k -ésima marca m_k (de la familia M del monstruo $S(\tilde{\gamma})$) la etiquetamos con el k -ésimo vértice perteneciente a la trayectoria $\tilde{\gamma}$.

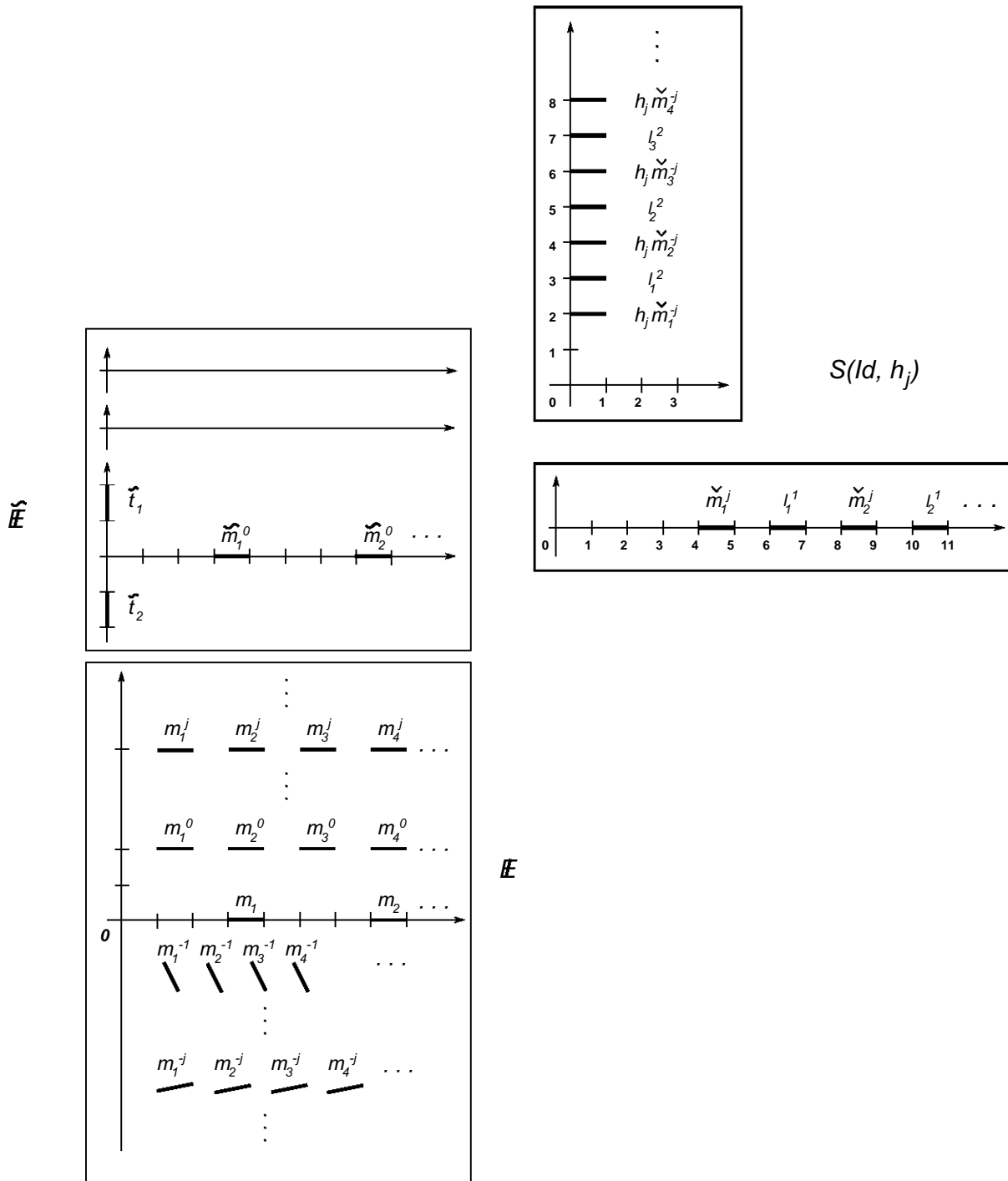


Figura 3.8: *Monstruo del lago Ness decorado S*

Análogamente, para cada trayectoria γ perteneciente a $\mathfrak{T}_X \setminus \{\tilde{\gamma}\}$ le hacemos corresponder $S(\gamma)$ una copia del monstruo del lago Ness S_P que se ha descrito en la Construcción 3.4.1 (véase

Ecuación (3.4)). Adicionalmente, para cada $k \in \mathbb{N}$, la k -ésima marca m_k (de la familia M del monstruo $S(\gamma)$) la etiquetamos como el k -ésimo vértice perteneciente a la trayectoria γ .

La *pieza fundamental* asociada al puzzle $\mathfrak{P}(X, G, H)$ es

$$S_{fund} := \bigcup_{\gamma \in \mathfrak{T}_X} S(\gamma) / \sim, \quad (3.19)$$

donde \sim es la relación de equivalencia que proviene de pegar marcas con igual nombre.

Siguiendo el Lema 3.3.2, S_{fund} es una superficie de translación mansa, con espacio de fines homeomorfo a X y cada fin de S_{fund} es de género infinito.

Observación 3.5.1. Ocurren los siguientes hechos en la pieza fundamental S_{fund} :

1. Las marcas pertenecientes a las familias $h_j \check{M}^{-j}$ y M^{-j} , para cada $j \in \{1, \dots, |H|\}$ aún no han sido pegadas. Sin embargo, dichas marcas serán utilizadas para obtener la superficie ensamblada $S_{\mathfrak{P}}$.

2. Por construcción, existe un fin *distinguido* $[U_n^{fund}]_{n \in \mathbb{N}}$ en S_{fund} , tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ y para cada $j \in \{1, \dots, |H|\}$, la intersección $U_n^{fund} \cap (h_j \check{M}^{-j} \cup M^{-j})$ es una cantidad infinita de marcas.

3. Para cada elemento $[U_n]_{n \in \mathbb{N}} \in \text{Ends}(S_{fund}) \setminus \{[U_n^{fund}]_{n \in \mathbb{N}}\}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que la intersección $U_n \cap (h_j \check{M}^{-j} \cup M^{-j}) = \emptyset$, para cada $j \in \{1, \dots, |H|\}$.

Definición 3.5.2 (*Puzzle*). Para cada $g \in G$, S_g es la copia afín de S_{fund} con respecto a g . Para cada $j \in \{1, \dots, |H|\}$, las familias de marcas $h_j \check{M}^{-j}$ y M^{-j} (pertenecientes a la superficie S_g), las renombramos mediante $gh_j \check{M}^{-j}$ y gM^{-j} , respectivamente. El puzzle asociado a la tripleta (X, G, H) es

$$\mathfrak{P}(X, G, H) := \{S_g : g \in G\}. \quad (3.20)$$

Ahora, ensamblaremos el puzzle $\mathfrak{P}(X, G, H)$ usando la definición de la gráfica de Cayley $\text{Cay}(G, H)$ y obtendremos la superficie ensamblada $S_{\mathfrak{P}}$.

Definición 3.5.3 (*Superficie ensamblada*). La superficie *ensamblada* generada por el puzzle $\mathfrak{P}(X, G, H)$ es

$$S_{\mathfrak{P}} := \bigcup_{g \in G} S_g / \sim \quad (3.21)$$

donde \sim es la relación de equivalencia que proviene de pegar las marcas siguientes.

Dada una arista (g, gh_j) de la gráfica de Cayley $\text{Cay}(G, H)$, entonces $gh_j \check{m}_i^{-j} \sim_{\text{pegar}} gh_j m_i^{-j}$, para cada $i \in \mathbb{N}$ (la marca $gh_j \check{m}_i^{-j} \in gh_j \check{M}^{-j} \subset S_g$ y la marca $gh_j m_i^{-j} \in gh_j M^{-j} \subset S_{gh_j}$).

Observación 3.5.2. Para cada $g \in G$, ocurren los siguientes hechos en la superficie S_g del puzzle $\mathfrak{P}(X, G, H)$ (véase Observación 3.5.1),

1. El espacio de fines de S_g es homeomorfo a X y cada fin S_g es de género infinito.

2. Existe un fin *distinguido* $[U_n^g]_{n \in \mathbb{N}}$ en S_g , tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ y para cada $j \in \{1, \dots, |H|\}$, la intersección $U_n^g \cap (gh_j \check{M}^{-j} \cup gM^{-j})$ es una cantidad infinita de marcas.

3. Para cada elemento $[U_n]_{n \in \mathbb{N}} \in \text{Ends}(S_g) \setminus \{[U_n^g]_{n \in \mathbb{N}}\}$, existe $n \in \mathbb{N}$, tal que la intersección $U_n \cap (gh_j \check{M}^{-j} \cup gM^{-j}) = \emptyset$, para cada $j \in \{1, \dots, |H|\}$.

Podemos suponer sin pérdida de generalidad que para el caso 3 en la observación anterior, $n = 1$. Entonces para cada $n \in \mathbb{N}$, el abierto U_n se encaja vía la función identidad en la superficie ensamblada $S_{\mathfrak{F}}$, es decir, el fin $[U_n]_{n \in \mathbb{N}}$ de S_g define $[U_n]_{n \in \mathbb{N}}$ un fin de género infinito en $S_{\mathfrak{F}}$. Tenemos de manera natural el encaje

$$\begin{aligned} i_g : \text{Ends}(S_g) \setminus \{[U_n^g]_{n \in \mathbb{N}}\} &\hookrightarrow \text{Ends}(S_{\mathfrak{F}}) \\ [U_n]_{n \in \mathbb{N}} &\rightarrow [U_n]_{n \in \mathbb{N}}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Proposición 3.5.1. La superficie ensamblada $S_{\mathfrak{F}}$ es de translación mansa, su grupo de Veech es G y su respectivo espacio de fines es

$$\text{Ends}(S_{\mathfrak{F}}) = \{[\tilde{U}_n]_{n \in \mathbb{N}}\} \cup \left(\bigsqcup_{g \in G} i_g(\text{Ends}(S_g) \setminus \{[U_n^g]_{n \in \mathbb{N}}\}) \right), \quad (3.23)$$

donde $[\tilde{U}_n]_{n \in \mathbb{N}}$ es un fin de $S_{\mathfrak{F}}$ que no pertenece a $\bigsqcup_{g \in G} i_g(\text{Ends}(S_g) \setminus \{[U_n^g]_{n \in \mathbb{N}}\})$. Además, cada fin de $S_{\mathfrak{F}}$ es de género infinito.

Demostración. Estrategía de la prueba.

Paso 1. Probaremos que la superficie ensamblada $S_{\mathfrak{F}}$ es de translación mansa. Para ello basta ver que

- La completación métrica de $S_{\mathfrak{F}}$ es $\widehat{S_{\mathfrak{F}}} = S_{\mathfrak{F}}$
- El conjunto de puntos singulares de $S_{\mathfrak{F}}$ es discreto.

Paso 2. Mostraremos que el grupo de Veech de $S_{\mathfrak{F}}$ es G .

Paso 3. Veremos que la igualdad (3.23) es verdadera probando la siguiente secuencia de afirmaciones.

- Para cualesquiera dos elementos distintos $g \neq g'$ en G , se satisface que

$$i_g(\text{Ends}(S_g) \setminus \{[U_n^g]_{n \in \mathbb{N}}\}) \cap i_{g'}(\text{Ends}(S_{g'}) \setminus \{[U_n^{g'}]_{n \in \mathbb{N}}\}) = \emptyset.$$

- Existe un fin de $[\tilde{U}_n]_{n \in \mathbb{N}}$ de $S_{\mathfrak{F}}$, el cual llamaremos *no obvio*, tal que

$$[\tilde{U}_n]_{n \in \mathbb{N}} \notin \left(\bigsqcup_{g \in G} i_g(\text{Ends}(S_g) \setminus \{[U_n^g]_{n \in \mathbb{N}}\}) \right) \subset \text{Ends}(S_{\mathfrak{F}}).$$

- El espacio de fines de $S_{\mathfrak{F}}$ es

$$\text{Ends}(S_{\mathfrak{F}}) = \{[\tilde{U}_n]_{n \in \mathbb{N}}\} \cup \left(\bigsqcup_{g \in G} i_g(\text{Ends}(S_g) \setminus \{[U_n^g]_{n \in \mathbb{N}}\}) \right).$$

Paso 4. Finalmente, argumentaremos que cada fin de $S_{\mathfrak{F}}$ es de género infinito.

Paso 1. Para probar que la superficie $S_{\mathfrak{F}}$ es de translación mansa necesitamos la observación siguiente.

Observación 3.5.3. Para todo $g \in G$, la cerradura del abierto

$$U(g) := S_g \setminus \bigcup_{j=1}^{|H|} (gh_j \check{M}^{-j} \cup gM^{-j})$$

en $\widehat{S_{\mathfrak{P}}}$ es un subconjunto cerrado completo de $\widehat{S_{\mathfrak{P}}}$, pues todo subconjunto cerrado de un espacio completo es completo (véase [15, p. 295]).

- La superficie $S_{\mathfrak{P}}$ es completa. Dada una sucesión de Cauchy $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset S_{\mathfrak{P}}$ y el valor $\varepsilon = \frac{1}{2\sqrt{2}}$, entonces existe $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, tal que $\forall m, n \geq N(\varepsilon)$ la distancia $d(x_m, x_n) < \varepsilon$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que la sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset B_\varepsilon(x_{N(\varepsilon)})$. Ahora, por el Lema 3.5.1 y la Observación 3.5.3, existe un elemento $g \in G$ tal que $x_{N(\varepsilon)} \in B_\varepsilon(x_{N(\varepsilon)}) \subset \overline{U(g)}$. Dado que todo subconjunto cerrado de un espacio completo es completo entonces la sucesión de Cauchy $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ debe de converger en $\overline{B_\varepsilon(x_{N(\varepsilon)})}$. Esto prueba que la superficie ensamblada $S_{\mathfrak{P}}$ es completa.
- El conjunto $Sing(S_{\mathfrak{P}})$ es discreto. En este caso, procederemos por contradicción. Supongamos que existe una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en $Sing(S_{\mathfrak{P}})$ que se acumula en el punto $x \in S_{\mathfrak{P}}$. Como la superficie ensamblada $S_{\mathfrak{P}}$ es completa, entonces existe un elemento $g \in G$ tal que $x \in S_g$. Análogamente, como consecuencia del Lema 3.5.1 y la Observación 3.5.3, se tiene que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset B_{\frac{1}{2\sqrt{2}}}(x) \subset \overline{U(g)}$, pero los puntos de la sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ forman un conjunto discreto en \overline{U} , lo cual es una contradicción. Por lo tanto, los puntos singulares de la superficie ensamblada $S_{\mathfrak{P}}$ son discretos.

De esta manera, concluimos que $S_{\mathfrak{P}}$ es una superficie de translación mansa.

Paso 2. El grupo de Veech de $S_{\mathfrak{P}}$ es G . Por la manera en que obtuvimos el puzzle $\mathfrak{P}(X, G, H)$ (véase Definición 3.5.2) y la forma en que actúa cada elemento g de G en $\mathfrak{P}(X, G, H)$ (véase Definición 3.5.1) es claro que $G < \Gamma(S_{\mathfrak{P}})$. Entonces sólo debemos mostrar que $\Gamma(S_{\mathfrak{P}}) < G$.

Para todo $g \in G$, la pieza S_g del puzzle $\mathfrak{P}(X, G, H)$ tiene un único punto cónico $x(g)$ de ángulo 6π (véase Construcción 3.5.2) y, este elemento es extremo de exactamente tres conexiones sillas de $S_{\mathfrak{P}}$. Entonces denotamos mediante $Hol(x(g))$ al conjunto de vectores de holonomía asociados a las tres conexiones sillas que tienen como extremo al punto cónico $x(g)$.

Por otro lado, dada una matriz $g \in \Gamma(S_{\mathfrak{P}})$ existe un difeomorfismo afín $f : S_{\mathfrak{P}} \rightarrow S_{\mathfrak{P}}$ con matriz diferencial $Df = g$, entonces f deja invariante $\{x(g) : g \in G\}$ el conjunto de puntos cónicos de ángulo 6π de $S_{\mathfrak{P}}$ y, envía conexiones sillas en conexiones sillas. Dado que el grupo de Veech $\Gamma(S_{\mathfrak{P}})$ actúa linealmente sobre el conjunto de vectores de holonomía $Hol(S_{\mathfrak{P}})$ (véase Lema 2.2.1), entonces la matriz g actúa sobre el conjunto

$$\bigcup_{g \in G} Hol(x(g))$$

dejándolo invariante, pero las únicas matrices que dejan invariante dicho conjunto son las que están en el grupo G , por lo tanto $g \in G$. De esta manera concluimos que la superficie ensamblada $S_{\mathfrak{P}}$ tiene grupo de Veech G .

Paso 3. La igualdad (3.23) es verdadera.

- Para cualesquiera dos elementos distintos $g \neq g' \in G$, se satisface que

$$i_g(Ends(S_g) \setminus \{[U_n^g]_{n \in \mathbb{N}}\}) \cap i_{g'}(Ends(S_{g'}) \setminus \{[U_n^{g'}]_{n \in \mathbb{N}}\}) = \emptyset.$$

Consideremos dos fines $[W_n]_{n \in \mathbb{N}}$ y $[Z_n]_{n \in \mathbb{N}}$ de $S_{\mathfrak{X}}$ tal que $[W_n]_{n \in \mathbb{N}} \in i_g(\text{Ends}(S_g) \setminus \{[U_n^g]_{n \in \mathbb{N}}\})$ y $[Z_n]_{n \in \mathbb{N}} \in i_{g'}(\text{Ends}(S_{g'}) \setminus \{[U_n^{g'}]_{n \in \mathbb{N}}\})$ para cualesquiera dos elementos distintos $g \neq g' \in G$, y veamos que los fines $[W_n]_{n \in \mathbb{N}}$ y $[Z_n]_{n \in \mathbb{N}}$ no son equivalentes. Podemos suponer si pérdida de generalidad que $[W_n]_{n \in \mathbb{N}}$ es un fin de S_g y $[Z_n]_{n \in \mathbb{N}}$ es un fin de $S_{g'}$ (siguiendo el encaje en (3.22)). Por la Observación 3.5.2 existe $m \in \mathbb{N}$ tal que las intersecciones

$$W_m \cap (gh_j \check{M}^{-j} \cup gM^{-j}) = \emptyset \text{ y } Z_m \cap (\check{g}h_j \check{M}^{-j} \cup \check{g}M^{-j}) = \emptyset, \text{ para cada } j \in \{1, \dots, |H|\}.$$

Dado que los abiertos W_m y Z_m son dos componentes conexas distintas de $S_{\mathfrak{X}} \setminus (\partial W_m \cup \partial Z_m)$, entonces los fines $[W_n]_{n \in \mathbb{N}}$ y $[Z_n]_{n \in \mathbb{N}}$ no son equivalentes.

- Existe un fin $[\tilde{U}_n]_{n \in \mathbb{N}}$ de $S_{\mathfrak{X}}$, el cual llamaremos el *fin no obvio*, tal que

$$[\tilde{U}_n]_{n \in \mathbb{N}} \notin \left(\bigsqcup_{g \in G} i_g(\text{Ends}(S_g) \setminus \{[U_n^g]_{n \in \mathbb{N}}\}) \right). \quad (3.24)$$

Construiremos $[\tilde{U}_n]_{n \in \mathbb{N}}$ el fin no obvio usando inducción y luego probaremos la expresión (3.24).

Seguendo la Proposición 1.1.2, para cada elemento $g \in G$ existe una sucesión creciente de compactos conexos $gK_1 \subset gK_2 \subset \dots$ en S_g tal que $S_g = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} gK_n$. Si denotamos

$$S_g \setminus gK_n := gU_1^n \sqcup \dots \sqcup gU_{i(n)}^n, \quad (3.25)$$

donde $gU_{k(n)}^n$ es una componente conexa con cerradura no compacta para cada $k(n) \in \{1, \dots, i(n)\}$. Podemos asumir que cada una de dichas componentes conexas tiene cerradura no compacta en X , entonces el espacio de fines de S_g es el conjunto de todas las sucesiones de la forma $(gU_{k(n)}^n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $gU_{k(n)}^n \subset S_g \setminus gK_n$ y $gU_{k(n)}^n \supset gU_{k(n+1)}^{n+1}$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que gU_1^n es el n -ésimo término del fin distinguido para cada $n \in \mathbb{N}$, es decir, $gU_1^n = U_n^g$

Para $n = 1$. Dado el elemento $g_1 \in G$, entonces \tilde{U}_1 es la componente conexa de

$$S_{\mathfrak{X}} \setminus g_1K_1 := \tilde{U}_1 \sqcup g_1U_2^1 \sqcup \dots \sqcup g_1U_{i(1)}^1,$$

que contiene al abierto $U_1^{g_1} = g_1U_1^1$. Por definición, el abierto \tilde{U}_1 tiene frontera compacta y es de género infinito por que contiene a $U_1^{g_1}$.

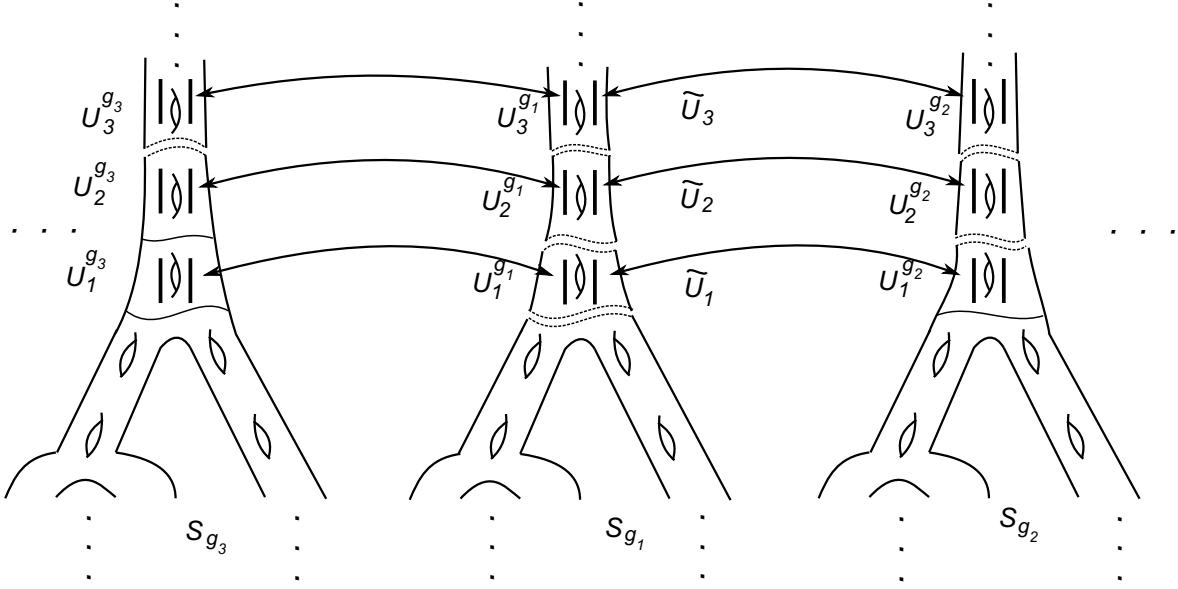
Para $n = 2$. Dados los elementos g_1 y g_2 de G , entonces \tilde{U}_2 es la componente conexa de

$$S_{\mathfrak{X}} \setminus (g_1K_2 \cup g_2K_2) := \tilde{U}_2 \sqcup \left(\bigsqcup_{k=1}^2 \left(g_kU_2^2 \sqcup \dots \sqcup g_kU_{i(2)}^2 \right) \right).$$

que contiene a la unión $U_2^{g_1} \cup U_2^{g_2} = g_1U_1^2 \cup g_2U_1^2$. Por definición, el abierto \tilde{U}_2 tiene frontera compacta y es de género infinito porque contiene a $U_2^{g_1} \cup U_2^{g_2}$. Nótese que $\tilde{U}_1 \supset \tilde{U}_2$.

Para n . Dados los elementos g_1, \dots, g_n de G , entonces \tilde{U}_n es la componente conexa de

$$S_{\mathfrak{X}} \setminus \bigcup_{k=1}^n g_kK_n = \tilde{U}_n \sqcup \left(\bigsqcup_{k=1}^n \left(g_kU_2^n \sqcup \dots \sqcup g_kU_{i(n)}^n \right) \right).$$


 Figura 3.9: Fin no obvio de $S_{\mathfrak{F}}$

que contiene a la unión $\bigcup_{k=1}^n U_n^{g_k} = \bigcup_{k=1}^n g_k U_1^{n+1-k}$ (véase Figura 3.9). Por definición, el abierto \tilde{U}_n tiene frontera compacta y es de género infinito porque contiene a $\bigcup_{k=1}^n U_n^{g_k}$. Nótese que $\tilde{U}_{n-1} \supset \tilde{U}_n$.

Esta construcción inductiva nos genera $[\tilde{U}_n]_{n \in \mathbb{N}}$ un fin de $S_{\mathfrak{F}}$ con género infinito, el cual llamamos el fin no obvio.

Ahora, procederemos por contradicción para probar que

$$[\tilde{U}_n]_{n \in \mathbb{N}} \notin \bigsqcup_{g \in G} i_g(\text{Ends}(S_g) \setminus \{[U_n^g]_{n \in \mathbb{N}}\}).$$

Supongamos que existe un fin $[V_n]_{n \in \mathbb{N}} \in i_{g_l}(\text{Ends}(S_{g_l}) \setminus \{[U_n^g]_{n \in \mathbb{N}}\})$ para algún $g_l \in G$, tal que los fines $[\tilde{U}_n]_{n \in \mathbb{N}}$ y $[V_n]_{n \in \mathbb{N}}$ son equivalentes. Podemos asumir que $[V_n]_{n \in \mathbb{N}} \in \text{Ends}(S_{g_l}) \setminus \{[U_n^{g_l}]_{n \in \mathbb{N}}\}$. Dado que los fines $[V_n]_{n \in \mathbb{N}}$ y $[U_n^{g_l}]_{n \in \mathbb{N}}$ de S_{g_l} no son equivalentes, entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que los abiertos $U_m^{g_l}$ y V_m son dos componentes conexas distintas de $S_{g_l} \setminus g_l K_m$, es decir, los abiertos \tilde{U}_m y V_m son dos componentes abiertas distintas de

$$S_{\mathfrak{F}} \setminus \bigcup_{k=1}^{\max\{l,m\}} g_k K_{\max\{l,m\}},$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto, se satisface la expresión (3.24).

- El espacio de fines de $S_{\mathfrak{F}}$ es

$$\text{Ends}(S_{\mathfrak{F}}) = \{[\tilde{U}_n]_{n \in \mathbb{N}}\} \cup \left(\bigsqcup_{g \in G} i_g(\text{Ends}(S_g) \setminus \{[U_n^g]_{n \in \mathbb{N}}\}) \right).$$

Solo debemos verificar que el conjunto de la izquierda se queda contenido en el conjunto de la derecha. Consideremos un fin $[W_n]_{n \in \mathbb{N}}$ de $S_{\mathfrak{P}}$, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $l(n) \in \mathbb{N}$ tal que

$$W_{l(n)} \cap \left(\bigcup_{k=1}^n g_k K_n \right) = \emptyset.$$

Dado que el abierto $W_{l(n)}$ se queda contenido en

$$S_{\mathfrak{P}} \setminus \bigcup_{k=1}^n g_k K_n = \tilde{U}_n \sqcup \left(\bigsqcup_{k=1}^n \left(g_k U_2^n \sqcup \dots \sqcup g_k U_{n(k)}^n \right) \right),$$

entonces tenemos los siguientes dos casos:

Caso 1. Existe $N \in \mathbb{N}$, tal que $W_{l(N)} \subset g_k U_j^N$ para alguna pareja $(k, j) \in \{1, \dots, N\} \times \{1, \dots, i(k)\}$. Claramente, si este caso ocurre, entonces se tiene que $[W_n]_{n \in \mathbb{N}} \in i_g(\text{Ends}(S_g) \setminus \{[U_n^g]_{n \in \mathbb{N}}\})$ para algún $g \in G$.

Caso 2. Para todo $n \in \mathbb{N}$, sucede que $W_{l(n)} \subset \tilde{U}_n$. Veamos que si ocurre este caso, entonces los fines $[W_n]_{n \in \mathbb{N}}$ y $[\tilde{U}_n]_{n \in \mathbb{N}}$ son equivalentes. Para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $k(n)$ tal que $\tilde{U}_{k(n)} \cap \partial W_n = \emptyset$. Entonces el abierto \tilde{U}_n se encuentra contenido en una componente conexa de $S \setminus \partial W_n$.

Por otro lado, existe $l(k(n)) \in \mathbb{N}$ tal que $W_{l(k(n))} \subset \tilde{U}_{k(n)}$, pero esta contención implica la siguiente dicotomía, $W_n \subset W_{l(k(n))}$ o $W_{l(k(n))} \subset W_n$. Dado que $\tilde{U}_{k(n)}$ es conexo, entonces para cualquiera de las anteriores contenciones se concluye fácilmente que $\tilde{U}_{k(n)} \subset W_n$.

Paso 4. Cada fin de $S_{\mathfrak{P}}$ es de género infinito. Por la Observación 3.5.2 y el encaje definido en la expresión (3.22), se tiene que cada fin del subconjunto

$$\bigsqcup_{g \in G} i_g(\text{Ends}(S_g) \setminus \{[U_n^g]_{n \in \mathbb{N}}\}) \subset \text{Ends}(S_{\mathfrak{P}})$$

es de género infinito. Por construcción, el fin no obvio $[\tilde{U}_n]_{n \in \mathbb{N}}$ de $S_{\mathfrak{P}}$ también es de género infinito (véase Paso 3). Esto demuestra que cada fin de $S_{\mathfrak{P}}$ es de género infinito y queda completa la prueba de la proposición. \square

3.6. Aplicaciones de los puzzles

Como una aplicación de los puzzles, tenemos la demostración de los restantes tres teoremas de realización para superficies de translación mansas no compactas.

3.6.1. Demostración del Teorema 3.2.2

Consideremos el puzzle $\mathfrak{P}(2^\omega, G, H)$. Siguiendo la Proposición 3.5.1, basta mostrar que la superficie ensamblada $S_{\mathfrak{P}}$ generada por dicho puzzle es homeomorfa al árbol florido de Cantor. Para ello, es necesario ver que el espacio de fines de $S_{\mathfrak{P}}$ es el conjunto de Cantor, es decir, $\text{Ends}(S_{\mathfrak{P}})$ no tiene puntos aislados.

Consideremos un fin $[U_n]_{n \in \mathbb{N}}$ de $S_{\mathfrak{P}}$ y una vecindad W^* del elemento $[U_n]_{n \in \mathbb{N}}$ y veamos que $W^* \setminus \{[U_n]_{n \in \mathbb{N}}\} \neq \emptyset$. Siguiendo la Ecuación (3.23) en la Proposición 3.5.1 tenemos dos casos:

Caso 1. Existe $g \in G$ tal que $[U_n]_{n \in \mathbb{N}} \in i_g(\text{Ends}(S_g) \setminus \{[U_n^g]_{n \in \mathbb{N}}\})$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $[U_n]_{n \in \mathbb{N}} \in \text{Ends}(S_g) \setminus \{[U_n^g]_{n \in \mathbb{N}}\}$ y que $(W \cap S_g)^*$ es un abierto en la topología de $\text{Ends}(S_g)$. Siguiendo la Observación 3.5.2 se tiene que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que la intersección $U_n \cap (gh_j M^{-j} \cup gM^{-j}) = \emptyset$, para todo $j \in \{1, \dots, |H|\}$ y $U_n \subset W \cap S_g$, entonces $U_n^* \subset W^*$.

Dado que la superficie S_g tiene espacio de fines homeomorfo al conjunto de Cantor (véase Observación 3.5.2), entonces $U_n^* \setminus \{[U_n]_{n \in \mathbb{N}}\} \neq \emptyset$, por lo tanto $U_n^* \setminus \{[U_n]_{n \in \mathbb{N}}\} \subset W^* \setminus \{[U_n]_{n \in \mathbb{N}}\} \neq \emptyset$.

Caso 2. Los fines $[U_n]_{n \in \mathbb{N}}$ y $[\tilde{U}_n]_{n \in \mathbb{N}}$ son equivalentes. Para cada $g \in G$, el conjunto $(W \cap S_g)^*$ es un abierto en la topología de $\text{Ends}(S_g)$ que contiene al fin distinguido $[U_n^g]_{n \in \mathbb{N}}$. Adicionalmente, $(W \cap S_g)^* \setminus \{[U_n^g]_{n \in \mathbb{N}}\} \subset W^* \setminus \{[\tilde{U}_n]_{n \in \mathbb{N}}\}$.

Dado que $\text{Ends}(S_g)$ es homeomorfo al conjunto de Cantor, entonces $(W \cap S_g)^* \setminus \{[U_n^g]_{n \in \mathbb{N}}\} \neq \emptyset$, por lo tanto $(W \cap S_g)^* \setminus \{[U_n^g]_{n \in \mathbb{N}}\} \subset W^* \setminus \{[\tilde{U}_n]_{n \in \mathbb{N}}\} \neq \emptyset$.

De este modo, completamos la prueba del teorema. □

3.6.2. Demostración del Teorema 3.2.3

Consideremos el puzzle $\mathfrak{P}(\omega^k + 1, G, H)$. Siguiendo la Proposición 3.5.1, basta mostrar que el espacio de fines de la superficie ensamblada $S_{\mathfrak{P}}$ generada por dicho puzzle es homeomorfo al número ordinal $\omega^k + 1$. Para ello seguiremos la estrategia siguiente:

Paso 1. Recordemos que la pieza fundamental S_{fund} asociada al puzzle $\mathfrak{P}(\omega^k + 1, G, H)$ tiene espacio de fines homeomorfo al número ordinal $\omega^k + 1$ (véase Construcción 3.5.3). Entonces argumentaremos que el fin distinguido $[U_n^{fund}]_{n \in \mathbb{N}}$ de dicha pieza fundamental S_{fund} se puede tomar como la k -ésima derivada de Cantor-Bendixson de $\text{Ends}(S_{fund})$, es decir,

$$\{[U_n^{fund}]_{n \in \mathbb{N}}\} = (\text{Ends}(S_{fund}))^k.$$

Paso 2. Mencionaremos dos propiedades de las vecindades del fin no obvio de la superficie ensamblada $S_{\mathfrak{P}}$ y definiremos X un espacio topológico Hausdorff, compacto y numerable.

Paso 3. Mostraremos que los espacios X y $\text{Ends}(S_{\mathfrak{P}})$ son homeomorfos.

Paso 4. Veremos que el sistema característico de X es $(k, 1)$.

Paso 1. Sean T_{ω^k+1} la gráfica con espacio de fines homeomorfo a $\omega^k + 1$ (véase Lema 1.4.2) y $\mathfrak{T}_{\omega^k+1}$ su respectiva familia numerable de trayectorias infinitas asociada (véase Lema 1.4.4). Siguiendo el Corolario 1.4.3 tenemos que los conjuntos $\text{Ends}(T_{\omega^k+1})$ y $\mathfrak{T}_{\omega^k+1}$ están en correspondencia biunívoca. Denotamos mediante $\tilde{\gamma}$ a la trayectoria infinita de $\mathfrak{T}_{\omega^k+1}$, tal que a $\tilde{\gamma}$ le corresponde el fin $[U_n]_{n \in \mathbb{N}}$ de T_{ω^k+1} , el cual está en la k -ésima derivada de Cantor-Bendixson de $\text{Ends}(T_{\omega^k+1})$, es decir,

$$\{[U_n]_{n \in \mathbb{N}}\} = (\text{Ends}(T_{\omega^k+1}))^k. \tag{3.26}$$

Ahora, siguiendo la Construcción 3.5.3, a la trayectoria $\tilde{\gamma}$ le hacemos corresponder $S(\tilde{\gamma})$ una copia del monstruo del lago Ness decorado (véase Construcción 3.5.2). Adicionalmente, para cada $k \in \mathbb{N}$, la k -ésima marca m_k (de la familia M del monstruo $S(\tilde{\gamma})$) la etiquetamos con el k -ésimo vértice perteneciente a la trayectoria $\tilde{\gamma}$.

Análogamente, a cada trayectoria γ perteneciente a $\mathfrak{T}_X \setminus \{\tilde{\gamma}\}$ le hacemos corresponder $S(\gamma)$ una copia del monstruo del lago Ness S_P descrito en la Construcción 3.4.1 (véase Ecuación (3.4)).

Adicionalmente, para cada $k \in \mathbb{N}$, la k -ésima marca m_k (de la familia M del monstruo $S(\gamma)$) la etiquetamos con el k -ésimo vértice perteneciente a la trayectoria γ .

Finalmente, obtenemos la pieza fundamental S_{fund} asociada al puzzle $\mathfrak{P}(\omega^k + 1, G, H)$.

Siguiendo el Lema 3.3.2 y la Ecuación (3.26) se concluye que el fin distinguido $[U_n^{fund}]_{n \in \mathbb{N}}$ de S_{fund} está en la k -ésima derivada de Cantor-Bendixson de $Ends(S_{fund})$

$$\{[U_n^{fund}]_{n \in \mathbb{N}}\} = (Ends(S_{fund}))^k. \quad (3.27)$$

Paso 2. Siguiendo la Ecuación (3.23) de la Proposición 3.5.1 y la expresión (3.27) se tiene que para cualquier U abierto de S con frontera compacta tal que U^* es una vecindad del fin no obvio $[\tilde{U}_n]_{n \in \mathbb{N}}$ de $S_{\mathfrak{P}}$, existe un subconjunto finito $G(U^*) \subset G$ que satisface las condiciones siguientes:

1. Para todo $g \in G(U^*)$, se tiene que $\partial U \cap S_g \neq \emptyset$ y $i_g(Ends(S_g) \setminus \{[U_n^g]_{n \in \mathbb{N}}\}) \cap U^* \neq \emptyset$.
2. Para todo $g \in G \setminus G(U^*)$, se tiene que $\partial U \cap S_g = \emptyset$ y $i_g(Ends(S_g) \setminus \{[U_n^g]_{n \in \mathbb{N}}\}) \subset U^*$.

Definición 3.6.1. Para cada $g \in G$, denotamos mediante ω_g^k a una copia del número ordinal ω^k . Dado que el subconjunto $Ends(S_g) \setminus \{[U_n^g]_{n \in \mathbb{N}}\}$ es homeomorfo al número ordinal ω_g^k (véase expresión (3.27)), entonces definimos

$$X := \{x\} \cup \left(\bigsqcup_{g \in G} \omega_g^k \right), \quad (3.28)$$

donde x es un punto cualquiera.

Para dotar a X de una topología consideramos U^* una vecindad del fin no obvio $[\tilde{U}_n]_{n \in \mathbb{N}}$ de $S_{\mathfrak{P}}$, dicha vecindad U^* tiene asociado un subconjunto finito $G(U^*) \subset G$ de $m(U^*)$ elementos, entonces para cada punto coordenado $\{\gamma_{g_{j_1}}, \dots, \gamma_{g_{j_{m(U^*)}}}\} \in \prod_{n=1}^{m(U^*)} \omega_{g_{j_n}}^k$ definimos el subconjunto

$$W(G(U^*), \{\gamma_{g_{j_1}}, \dots, \gamma_{g_{j_{m(U^*)}}}\}) := \{x\} \cup \left(\bigsqcup_{n=1}^{m(U^*)} \{\beta \in \omega_{g_{j_n}}^k : \beta \succ \gamma_{g_{j_n}}\} \right) \cup \left(\bigsqcup_{g \in G \setminus G(U^*)} \omega_g^k \right) \subset X.$$

Entonces la familia $\beta := \{W(G(U^*), \{\gamma_{g_{j_1}}, \dots, \gamma_{g_{j_{m(U^*)}}}\})\} \cup \{W : W \text{ es un abierto en } \omega_g^k \text{ para algún } g \in G\}$ define la base de la topología de X que consideraremos. Nótese que X es Hausdorff.

Paso 3. A continuación probaremos que los espacios $Ends(S_{\mathfrak{P}})$ y X son homeomorfos. Notemos que para cada $g \in G$, los espacios topológicos $i_g(Ends(S_g) \setminus \{[U_n^g]_{n \in \mathbb{N}}\})$ y ω_g^k son homeomorfos, así consideramos el homeomorfismo

$$f_g : i_g(Ends(S_g) \setminus \{[U_n^g]_{n \in \mathbb{N}}\}) \rightarrow \omega_g^k. \quad (3.29)$$

Veamos que la función $F : Ends(S_{\mathfrak{P}}) \rightarrow X$ definida como

$$[V_n]_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow \begin{cases} f_g([V_n]_{n \in \mathbb{N}}) & \text{si } [V_n]_{n \in \mathbb{N}} \in i_g(Ends(S_g) \setminus \{[U_n^g]_{n \in \mathbb{N}}\}) \text{ para algún } g \in G, \\ x & \text{si } [V_n]_{n \in \mathbb{N}} \sim [\tilde{U}_n]_{n \in \mathbb{N}}, \text{ el fin no obvio} \end{cases}$$

es un homeomorfismo.

Por definición, F es *biyectiva* y *continua* en todo punto $[V_n]_{n \in \mathbb{N}} \in \text{Ends}(S_{\mathfrak{F}}) \setminus \{[\tilde{U}_n]_{n \in \mathbb{N}}\}$. Basta probar que F es continua en el fin no obvio $[\tilde{U}_n]_{n \in \mathbb{N}}$ y además, que es cerrada.

La función F es continua en el fin no obvio $[\tilde{U}_n]_{n \in \mathbb{N}}$. Consideremos el abierto

$$W(G(U^*), \{\gamma_{g_{j_1}}, \dots, \gamma_{g_{j_m(U^*)}}\}) := \{x\} \cup \left(\bigsqcup_{n=1}^{m(U^*)} \{\beta \in \omega_{g_{j_n}}^k : \beta \succ \gamma_{g_{j_n}}\} \right) \cup \left(\bigsqcup_{g \in G \setminus G(U^*)} \omega_g^k \right)$$

del elemento x , para algún subconjunto finito $G(U^*) \subset G$ asociado a alguna U^* vecindad del fin no obvio y, algún punto coordenado $\{\gamma_{g_{j_1}}, \dots, \gamma_{g_{j_m(U^*)}}\} \in \prod_{n=1}^{m(U^*)} \omega_{g_{j_n}}^k$. Debemos mostrar que existe una vecindad V^* del fin no obvio $[\tilde{U}_n]_{n \in \mathbb{N}}$ que satisfaga $F(V^*) \subset W(G(U^*), \{\gamma_{g_{j_1}}, \dots, \gamma_{g_{j_m(U^*)}}\})$.

Para cada $n \in \{1, \dots, m(U^*)\}$, denotamos mediante $(\omega^k + 1)_{g_{j_n}}$ a una copia del número ordinal $\omega^k + 1$. Entonces el subconjunto $\{\beta \in \omega_{g_{j_n}}^k : \beta \succ \gamma_{g_{j_n}}\} \cup \{x\} \subset X$ está en correspondencia biunívoca con el abierto $\{\beta \in (\omega^k + 1)_{g_{j_n}} : \beta \succ \gamma_{g_{j_n}}\} \subset (\omega^k + 1)_{g_{j_n}}$ vía la función identidad. Por construcción, el espacio de fines de la superficies $S_{g_{j_n}}$ es homeomorfo al número ordinal $(\omega^k + 1)_{g_{j_n}}$, entonces existe un abierto con frontera compacta $U(g_{j_n})$ en $S_{g_{j_n}}$ tal que los abiertos $U(g_{j_n})^*$ y $\{\beta \in (\omega^k + 1)_{g_{j_n}} : \beta \succ \gamma_{g_{j_n}}\}$ son homeomorfos.

Finalmente, consideramos la siguiente unión finita de compactos $\bigcup_{n=1}^{m(U^*)} \partial U(g_{j_n})$ en $S_{\mathfrak{F}}$, entonces existe $l \in \mathbb{N}$ tal que $\tilde{U}_l \cap \left(\bigcup_{n=1}^{m(U^*)} \partial U(g_{j_n}) \right) = \emptyset$. Claramente, el abierto \tilde{U}_l^* contiene al fin obvio $[\tilde{U}_n]_{n \in \mathbb{N}}$ y satisface que $F(\tilde{U}_l^*) \subset W(G(U^*), \{\gamma_{g_{j_1}}, \dots, \gamma_{g_{j_m(U^*)}}\})$.

La función F es cerrada. Toda función continua definida de un espacio Hausdorff a un compacto es cerrada (véase [15, p. 226]); por lo tanto F es cerrada.

Esto prueba que los espacios X y $\text{Ends}(S_{\mathfrak{F}})$ son homeomorfos.

Paso 4. Para finalizar, probaremos que el sistema característico de X es $(k, 1)$.

Observación 3.6.1. De la topología de X se deduce que para cada $g \in G$, el subconjunto $\{x\} \cup \omega_g^k \subset X$ es cerrado numerable, homeomorfo al número ordinal $\omega^k + 1$ y su respectivo sistema característico es $(k, 1)$. Entonces X tiene derivada de Cantor Bendixson al menos k y x está en la k -ésima derivada de Cantor-Bendixson de X , es decir, $x \in X^k$.

Por otro lado, el número ordinal ω^k lo podemos expresar de la forma

$$\omega^k = \{0\} \sqcup \left(\bigsqcup_{m \geq 0} [\omega^{k-1} \cdot m, \omega^{k-1} \cdot (m+1)] \right). \quad (3.30)$$

Para cada $m \in \mathbb{N}$, el subconjunto $[\omega^{k-1} \cdot m, \omega^{k-1} \cdot (m+1)] \subset \omega^k$ es abierto y cerrado y, homeomorfo al número ordinal $\omega^{k-1} + 1$. Siguiendo la expresión (3.28) en la Definición 3.6.1 y la Ecuación (3.30) podemos expresar a X como sigue

$$X = \{x\} \sqcup \bigsqcup_{g \in G} \left(\{0\}_g \sqcup \left(\bigsqcup_{m \geq 0} [\omega^{k-1} \cdot m + 1, \omega^{k-1} \cdot (m+1)]_g \right) \right). \quad (3.31)$$

Nótese que para cada $m \in \mathbb{N}$ y para cada $g \in G$, el subconjunto $[\omega^{k-1} \cdot m, \omega^{k-1} \cdot (m+1)]_g \subset X$ es abierto y cerrado y, homeomorfo al número ordinal $\omega^{k-1} + 1$.

Afirmación. Para cada $l \leq k$, la l -ésima derivada de Cantor-Bendixson de X es

$$X^l = \{x\} \sqcup \bigsqcup_{g \in G} \left(\bigsqcup_{m \geq 0} [\omega^{k-1} \cdot m + 1, \omega^{k-1} \cdot (m+1)]_g^l \right). \quad (3.32)$$

Veamos que el conjunto del lado derecho está contenido en el conjunto del lado izquierdo. Para cada $m \in \mathbb{N}$ y para cada $g \in G$ el subconjunto $[\omega^n \cdot k + 1, \omega^n \cdot (k+1)]_g \subset X$ es cerrado, entonces

$$[\omega^k \cdot m + 1, \omega^k \cdot (m+1)]_g^l \subset X^l, \text{ para cada } l \leq k.$$

Por la Observación 3.6.1 se tiene que para cada $l \leq k$, el elemento x está en la l -ésima derivada de Cantor Bendixson de X .

Para probar que el conjunto del lado izquierdo está contenido en el conjunto del lado derecho procederemos por inducción sobre l .

Para $l = 1$. Consideremos un elemento $y \in X'$ la primera derivada de Cantor-Bendixson de X . Siguiendo la Observación 3.6.1 el punto y es diferente a x . Dado que X' es un subconjunto cerrado de X , entonces existen $m \in \mathbb{N}$ y $g \in G$ tal que $y \in [\omega^{k-1} \cdot m + 1, \omega^{k-1} \cdot (m+1)]_g \subset X$. El subconjunto $[\omega^{k-1} \cdot m + 1, \omega^{k-1} \cdot (m+1)]_g$ es abierto y cerrado, entonces la primera derivada de Cantor-Bendixson de

$$X = [\omega^{k-1} \cdot m + 1, \omega^{k-1} \cdot (m+1)]_g \sqcup \left(X \setminus [\omega^{k-1} \cdot m + 1, \omega^{k-1} \cdot (m+1)]_g \right) \quad (3.33)$$

es

$$X' = [\omega^{k-1} \cdot m + 1, \omega^{k-1} \cdot (m+1)]_g' \sqcup \left(X \setminus [\omega^{k-1} \cdot m + 1, \omega^{k-1} \cdot (m+1)]_g \right)'$$

Entonces $y \in [\omega^{k-1} \cdot m + 1, \omega^{k-1} \cdot (m+1)]_g'$ o $y \in (X \setminus [\omega^{k-1} \cdot m + 1, \omega^{k-1} \cdot (m+1)]_g)'$

Si $y \in (X \setminus [\omega^{k-1} \cdot m + 1, \omega^{k-1} \cdot (m+1)]_g)'$, entonces $y \in (X \setminus [\omega^{k-1} \cdot m + 1, \omega^{k-1} \cdot (m+1)]_g)$. Lo cual indica que la intersección

$$[\omega^{n-1} \cdot k + 1, \omega^{n-1} \cdot (k+1)] \cap (X \setminus [\omega^{k-1} \cdot m + 1, \omega^{k-1} \cdot (m+1)]_g) \neq \emptyset,$$

Claramente, esto es una contradicción porque estos dos subconjuntos son disjuntos (véase expresión (3.33)). Por lo tanto $y \in [\omega^{n-1} \cdot k + 1, \omega^{n-1} \cdot (k+1)]_g'$.

Paso $l + 1$. Supongamos que la Ecuación (3.32) es cierta para l y veamos que también es válida para $l + 1$. Consideremos un elemento $y \in X^{l+1}$ la $l + 1$ -ésima derivada de Cantor-Bendixson de X . Siguiendo la Observación 3.6.1 el punto y es diferente a x . Dado que X^{l+1} es un subconjunto cerrado de X^l y por hipótesis de inducción existen $m \in \mathbb{N}$ y $g \in G$ tal que $y \in [\omega^{k-1} \cdot m + 1, \omega^{k-1} \cdot (m+1)]_g^l \subset X^l$. El subconjunto $[\omega^{k-1} \cdot m + 1, \omega^{k-1} \cdot (m+1)]_g^l$ es abierto y cerrado, entonces aplicamos la primera derivada de Cantor-Bendixson a la contención siguiente

$$X^l \subset [\omega^{k-1} \cdot m + 1, \omega^{k-1} \cdot (m+1)]_g^l \sqcup \left(X^l \setminus [\omega^{k-1} \cdot m + 1, \omega^{k-1} \cdot (m+1)]_g^l \right)' \quad (3.34)$$

y obtenemos que

$$X^{l+1} \subset [\omega^{k-1} \cdot m + 1, \omega^{k-1} \cdot (m+1)]_g^{l+1} \sqcup \left(X^l \setminus [\omega^{k-1} \cdot m + 1, \omega^{k-1} \cdot (m+1)]_g^l \right)'.$$

Entonces $y \in [\omega^{k-1} \cdot m + 1, \omega^{k-1} \cdot (m + 1)]_g^{l+1}$ o $y \in (X^l \setminus [\omega^{k-1} \cdot m + 1, \omega^{k-1} \cdot (m + 1)]_g^l)'$. Si $y \in (X^l \setminus [\omega^{k-1} \cdot m + 1, \omega^{k-1} \cdot (m + 1)]_g^l)'$, entonces $y \in (X^l \setminus [\omega^{k-1} \cdot m + 1, \omega^{k-1} \cdot (m + 1)]_g^l)$. Lo cual indica que la intersección

$$[\omega^{k-1} \cdot m + 1, \omega^{k-1} \cdot (m + 1)]_g^{l+1} \cap (X^l \setminus [\omega^{k-1} \cdot m + 1, \omega^{k-1} \cdot (m + 1)]_g^l) \neq \emptyset.$$

Claramente, esto es una contradicción porque estos dos subconjuntos son disjuntos (véase expresión (3.34)). Por lo tanto $y \in [\omega^{k-1} \cdot m + 1, \omega^{k-1} \cdot (m + 1)]_g^{l+1}$.

Esto prueba que la igual en la expresión (3.32) es verdadera, entonces la k derivada de Cantor Bendixson de X es

$$X^k = \{x\}.$$

Por lo tanto, X tiene sistema característico $(k, 1)$. Siguiendo el Teorema 1.3.4 concluimos que el espacio de fines de $S_{\mathfrak{P}}$ tiene sistema característico $(k, 1)$, es decir, $Ends(S_{\mathfrak{P}})$ es homeomorfo al número ordinal $\omega^k + 1$.

De este modo, completamos la prueba del teorema. □

3.6.3. Demostración del Teorema 3.2.4

Consideremos el puzzle $\mathfrak{P}(B \sqcup U, G, H)$ donde $B \sqcup U$ es un subconjunto cerrado no numerable del conjunto de Cantor, tal que B es homeomorfo al conjunto de Cantor y U es un subconjunto numerable, discreto con un solo punto en su frontera. Siguiendo la Proposición 3.5.1, basta mostrar que el espacio de fines de la superficie ensamblada $S_{\mathfrak{P}}$ generada por dicho puzzle es homeomorfo a $B \sqcup U$. Para ello requerimos el siguiente comentario.

Recordemos que la pieza fundamental S_{fund} asociada al puzzle $\mathfrak{P}(B \sqcup U, G, H)$ tiene espacio de fines homeomorfo a $B \sqcup U$ (véase Construcción 3.5.3). Veamos que el fin distinguido $[U_n^{fund}]_{n \in \mathbb{N}}$ de dicha pieza fundamental S_{fund} está en la frontera de U , es decir,

$$\{[U_n^{fund}]_{n \in \mathbb{N}}\} = \partial U.$$

Consideramos la gráfica $T_{B \sqcup U}$ con espacio de fines homeomorfo a $B \sqcup U$ (véase Lema 1.4.2) y $\mathfrak{T}_{B \sqcup U}$ su respectiva familia numerable de trayectorias infinitas asociada (véase Lema 1.4.4). Siguiendo el Corolario 1.4.2 tenemos que existe una trayectoria $\tilde{\gamma} \in \mathfrak{T}_X \cap \mathfrak{T}\mathcal{D}_X$ tal que $\tilde{\gamma}$ corresponde al fin $[U_n]_{n \in \mathbb{N}}$ de $T_{B \sqcup U}$ que está en la frontera de U , es decir,

$$\{[U_n]_{n \in \mathbb{N}}\} = \partial U. \tag{3.35}$$

Ahora, siguiendo la Construcción 3.5.3, a la trayectoria $\tilde{\gamma}$ le hacemos corresponder $S(\tilde{\gamma})$ una copia del monstruo del lago Ness decorado (véase Construcción 3.5.2). Adicionalmente, para cada $k \in \mathbb{N}$, la k -ésima marca m_k (de la familia M del monstruo $S(\tilde{\gamma})$) la etiquetamos con el k -ésimo vértice perteneciente a la trayectoria $\tilde{\gamma}$.

Análogamente, a cada trayectoria γ perteneciente a $\mathfrak{T}_X \setminus \{\tilde{\gamma}\}$ le hacemos corresponder $S(\gamma)$ una copia del monstruo del lago Ness S_P descrito que se ha descrito en la Construcción 3.4.1 (véase Ecuación (3.4)). Adicionalmente, para cada $k \in \mathbb{N}$, la k -ésima marca m_k (de la familia M del monstruo $S(\gamma)$) la etiquetamos con el k -ésimo vértice perteneciente a la trayectoria γ .

Finalmente, obtenemos la pieza fundamental S_{fund} asociada al puzzle $\mathfrak{P}(B \sqcup U, G, H)$.

Siguiendo el Lema 3.3.2 y la expresión (3.35) se concluye que el fin distinguido $[U_n^{fund}]_{n \in \mathbb{N}}$ de S_{fund} está en la frontera de U , es decir,

$$\{[U_n^{fund}]_{n \in \mathbb{N}}\} = \partial U. \quad (3.36)$$

Afirmación. El espacio de fines de $S_{\mathfrak{P}}$ es homeomorfo a $B \sqcup U$.

Siguiremos el Lema 1.3.1 y probaremos que el espacio de fines de $S_{\mathfrak{P}}$ se descompone de la forma $B_{\mathfrak{P}} \sqcup U_{\mathfrak{P}}$ tal que $B_{\mathfrak{P}}$ es homeomorfo al conjunto de Cantor y $U_{\mathfrak{P}}$ es un subconjunto numerable, discreto con un solo punto en su frontera.

Por el Teorema de Cantor-Bendixson 1.3.1 y la Proposición 3.5.1 el espacio de fines de $S_{\mathfrak{P}}$ es

$$Ends(S_{\mathfrak{P}}) = B_{\mathfrak{P}} \sqcup U_{\mathfrak{P}} = \{[\tilde{U}_n]_{n \in \mathbb{N}}\} \cup \left(\bigsqcup_{g \in G} i_g(Ends(S_g) \setminus \{[U_n^g]_{n \in \mathbb{N}}\}) \right),$$

tales que $B_{\mathfrak{P}}$ es homeomorfo al conjunto de Cantor y $U_{\mathfrak{P}}$ es un subconjunto numerable y discreto. A continuación, mostraremos que la frontera de $U_{\mathfrak{P}}$ está conformada por el fin no obvio de $S_{\mathfrak{P}}$

$$\partial U_{\mathfrak{P}} = \{[\tilde{U}_n]_{n \in \mathbb{N}}\}.$$

Para ello requerimos la observación siguiente.

Observación 3.6.2. Siguiendo la expresión (3.36) y la prueba de la Proposición 3.5.1 se tiene que el fin no obvio $[\tilde{U}_n]_{n \in \mathbb{N}}$ de $S_{\mathfrak{P}}$ no es punto aislado en $Ends(S_{\mathfrak{P}})$, entonces $[\tilde{U}_n]_{n \in \mathbb{N}} \in B_{\mathfrak{P}}$.

Para cada $g \in G$, el espacio de fines de la superficie S_g es

$$Ends(S_g) = B_g \sqcup U_g$$

tales que B_g es homeomorfo al conjunto de Cantor y U_g es un subconjunto numerable con un solo punto en su frontera. El fin distinguido $[U_n^g]_{n \in \mathbb{N}}$ de S_g satisface que $\{[U_n^g]_{n \in \mathbb{N}}\} = \partial U_g$. Apoyándonos en el encaje i_g (véase expresión (3.22)) tenemos

$$i_g(Ends(S_g) \setminus \{[U_n^g]_{n \in \mathbb{N}}\}) = i_g(B_g \setminus \{[U_n^g]_{n \in \mathbb{N}}\}) \sqcup i_g(U_g).$$

Entonces

$$B_{\mathfrak{P}} = \{[\tilde{U}_n]_{n \in \mathbb{N}}\} \sqcup \left(\bigsqcup_{g \in G} i_g(B_g \setminus \{[U_n^g]_{n \in \mathbb{N}}\}) \right) \quad \text{y} \quad U_{\mathfrak{P}} = \bigsqcup_{g \in G} i_g(U_g). \quad (3.37)$$

Veamos que $[\tilde{U}_n]_{n \in \mathbb{N}} \in \partial U_{\mathfrak{P}}$. Consideremos W^* una vecindad del fin no obvio $[\tilde{U}_n]_{n \in \mathbb{N}}$, entonces para cada $g \in G$ el subconjunto $(W \cap S_g)^* \subset Ends(S_g)$ es una vecindad del fin distinguido $[U_n^g]_{n \in \mathbb{N}}$ de S_g , tal que

$$i_g((W \cap S_g)^* \setminus \{[U_n^g]_{n \in \mathbb{N}}\}) \subset W^*. \quad (3.38)$$

Dado que el fin distinguido $[U_n^g]_{n \in \mathbb{N}}$ está en la frontera de U_g , entonces

$$((W \cap S_g)^* \setminus \{[U_n^g]_{n \in \mathbb{N}}\}) \cap (B_g \setminus \{[U_n^g]_{n \in \mathbb{N}}\}) \neq \emptyset \quad \text{y} \quad ((W \cap S_g)^* \setminus \{[U_n^g]_{n \in \mathbb{N}}\}) \cap U_g \neq \emptyset.$$

Nuevamente, apoyándonos en el encaje i_g tenemos que

$$i_g((W \cap S_g)^* \setminus \{[U_n^g]_{n \in \mathbb{N}}\}) \cap i_g(B_g \setminus [U_n^g]_{n \in \mathbb{N}}) \neq \emptyset \quad \text{y} \quad i_g((W \cap S_g)^* \setminus \{[U_n^g]_{n \in \mathbb{N}}\}) \cap i_g(U_g) \neq \emptyset. \quad (3.39)$$

Finalmente, siguiendo adecuadamente las expresiones (3.37), (3.38) y (3.39) se tiene que $W^* \cap B_{\mathfrak{P}} \neq \emptyset$ y $W^* \cap U_{\mathfrak{P}} \neq \emptyset$. Esto muestra que el fin no obvio de $S_{\mathfrak{P}}$ está en la frontera de $U_{\mathfrak{P}}$.

Para finalizar, probaremos que $\partial U_{\mathfrak{P}} \subset \{[\tilde{U}]_{n \in \mathbb{N}}\}$ por contradicción. Supongamos que existe $[V_n]_{n \in \mathbb{N}}$ un fin de $S_{\mathfrak{P}}$ en la frontera de $U_{\mathfrak{P}}$, tal que los fines $[V_n]_{n \in \mathbb{N}}$ y $[\tilde{U}]_{n \in \mathbb{N}}$ no son equivalentes, entonces $[V_n]_{n \in \mathbb{N}} \in B_{\mathfrak{P}} \setminus \{[\tilde{U}]_{n \in \mathbb{N}}\}$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $[V_n]_{n \in \mathbb{N}} \in B_g \setminus \{[U_n^g]_{n \in \mathbb{N}}\}$, para algún $g \in G$. Dado que el fin $[V_n]_{n \in \mathbb{N}}$ no es equivalente a $[U_n^g]_{n \in \mathbb{N}}$ el fin distinguido de S_g , entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $U_n^g \cap V_n = \emptyset$. Adicionalmente, $V_n \cap (gh_j \check{M}^{-j} \cup gM^{-j}) = \emptyset$, para todo $j \in \{1, \dots, |H|\}$ (véase Observación 3.5.2). El abierto con frontera compacta V_n se encaja vía la función identidad en la superficie $S_{\mathfrak{P}}$, por lo tanto V_n^* es un abierto en $Ends(S_{\mathfrak{P}})$ que contiene al fin $[V_n]_{n \in \mathbb{N}}$ y satisface que

$$V_n^* \cap B_{\mathfrak{P}} = \emptyset \quad \text{o} \quad V_n^* \cap U_{\mathfrak{P}} = \emptyset.$$

Claramente, esto es una contradicción. Por lo tanto, la frontera de $U_{\mathfrak{P}}$ está conformada por un solo punto.

De este modo, completamos la prueba del teorema. □

3.7. Una variación en los puzzles

Grosso modo, en esta sección presentaremos un cambio muy simple en la noción de puzzle que introdujimos en las secciones anteriores, es decir, a cada tripleta $(1, G, H)$ donde 1 es el número ordinal con un solo elemento (véase Ejemplo 1.3.2), G es un subgrupo numerable de $GL_+(2, \mathbb{R})$ sin elementos que contraen y H es un subconjunto generador finito de G , le haremos corresponder un puzzle

$$(1, G, H) \rightarrow \mathfrak{P}(1, G, H)$$

con las propiedades siguientes:

1. El conjunto $\mathfrak{P}(1, G, H)$ está en correspondencia biunívoca con G , es decir,

$$\mathfrak{P}(1, G, H) = \{S_g : S_g \text{ es una superficie de translación mansa, para cada } g \in G\}.$$

2. Para cada $g \in G$, la superficie S_g es homeomorfa al monstruo del lago Ness.
3. Para cada $g \in G$, el monstruo S_g tiene dos marcas trazada por cada elemento en H .

Analógamente, ensamblaremos el mencionado puzzle usando la gráfica $Cay(G, H)$ y obtendremos la superficie ensamblada $S_{\mathfrak{P}}$, la cual también es de translación mansa y con grupo de Veech G .

Cabe resaltar que el puzzle $\mathfrak{P}(1, G, H)$ difiere en dos aspectos en relación a aquella definición de puzzle dada en la Sección 3.5. El primero aspecto consiste en que para definirlo sólo admitimos subgrupos numerables finitamente generados de $GL_+(2, \mathbb{R})$ sin elementos que contraen, y que 1 es

el número ordinal con un elemento, lo cual se refleja en que cada superficie que conforma el puzzle $\mathfrak{P}(1, G, H)$ es homeomorfa al monstruo del Lago Ness. El segundo aspecto a resaltar es que cada superficie S_g de dicho puzzle tiene trazada una cantidad finita de marcas sin pegar, exactamente $2|H|$ marcas. Este par de cambios en la definición de puzzle nos conducen al Teorema 3.7.1 y sus corolarios 3.7.1 y 3.7.2, los cuales describen específicamente la topología del espacio de fines de $S_{\mathfrak{P}}$ con respecto al espacio de fines de la gráfica $Cay(G, H)$. Recordemos que la Proposición 3.5.1 nos proporciona una descripción conjuntista del espacio de fines de la superficie ensamblada $S_{\mathfrak{P}}$ generada por el puzzle $\mathfrak{P}(X, G, H)$, mas no es una descripción topológica.

Teorema 3.7.1. La superficie ensamblada $S_{\mathfrak{P}}$ generada por el puzzle $\mathfrak{P}(1, G, H)$ es de translación mansa, su grupo de Veech es G y su respectivo espacio de fines es

$$Ends(S_{\mathfrak{P}}) = B \sqcup U, \quad (3.40)$$

tal que B es homeomorfo a $Ends(Cay(G, H))$ y U es un subconjunto numerable, discreto y denso. Además, cada fin de $S_{\mathfrak{P}}$ es de género infinito.

Siguiendo el Teorema 1.2.1 se obtienen los corolarios siguientes.

Corolario 3.7.1. El espacio de fines de $S_{\mathfrak{P}}$ satisface alguna de las propiedades siguientes:

1. Es discreto y tiene la misma cardinalidad que G , si G es finito.
2. Es homeomorfo al número ordinal $\omega + 1$, si la cardinalidad de $Ends(Cay(G, H))$ es uno.
3. Es homeomorfo al número ordinal $\omega \cdot 2 + 1$, si la cardinalidad de $Ends(Cay(G, H))$ es dos.
4. Es homeomorfo a $B \sqcup U$, tales que B es homeomorfo a $Ends(Cay(G, H))$ y U es un subconjunto numerable, discreto y denso, si la cardinalidad de $Ends(Cay(G, H))$ es mayor de dos.

Corolario 3.7.2. Si la superficie ensamblada $S_{\mathfrak{P}}$ es generada por el puzzle $\mathfrak{P}(0, G, H)$, donde su respectiva pieza fundamental es compacta. Entonces el espacio de fines de $S_{\mathfrak{P}}$ es homeomorfo al espacio de fines de $Cay(G, H)$.

A continuación, le asociaremos a la tripleta $(1, G, H)$ su respectivo puzzle $\mathfrak{P}(1, G, H)$. Luego, obtendremos la superficie ensamblada $S_{\mathfrak{P}}$ y probaremos el Teorema 3.7.1.

El subconjunto $H \subset G$ es finito, por lo tanto lo escribimos como sigue $H := \{h_1, \dots, h_k\}$, para algún $k \in \mathbb{N}$.

Denotemos mediante S_{fund} a una copia del monstruo del lago Ness decorado descrito en la Construcción 3.5.2. Recordemos que en dicho monstruo hay $2k + 1$ familias infinitas de marcas sin pegar, $M := \{m_i = ((4i - 1)e_1, 4ie_1) : \forall i \in \mathbb{N}\}$ y para cada $i \in \{1, \dots, k\}$ las familias $M^{-j} := \{m_i^{-j} = (ix_j e_1 + y_j e_2, ix_j e_1 + h_j^{-1} e_1 + y_j e_2) : \forall i \in \mathbb{N}\}$ y $h_j \check{M}^{-j} := \{h_j \check{m}_i^{-j} = (2ie_2, e_1 + 2ie_2) : \forall i \in \mathbb{N}\}$.

Ahora, en S_{fund} consideremos solamente las $2k$ marcas siguientes:

$$m_1^{-1}, \dots, m_1^{-k}, h_1 \check{m}_1^{-1}, \dots, h_k \check{m}_1^{-k}.$$

Asimismo, denotamos mediante $\bar{0}_{fund}$ al cero de la copia del plano Euclidean en S_{fund} que contiene las primeras k marcas de la lista anterior (véase Figura 3.10).

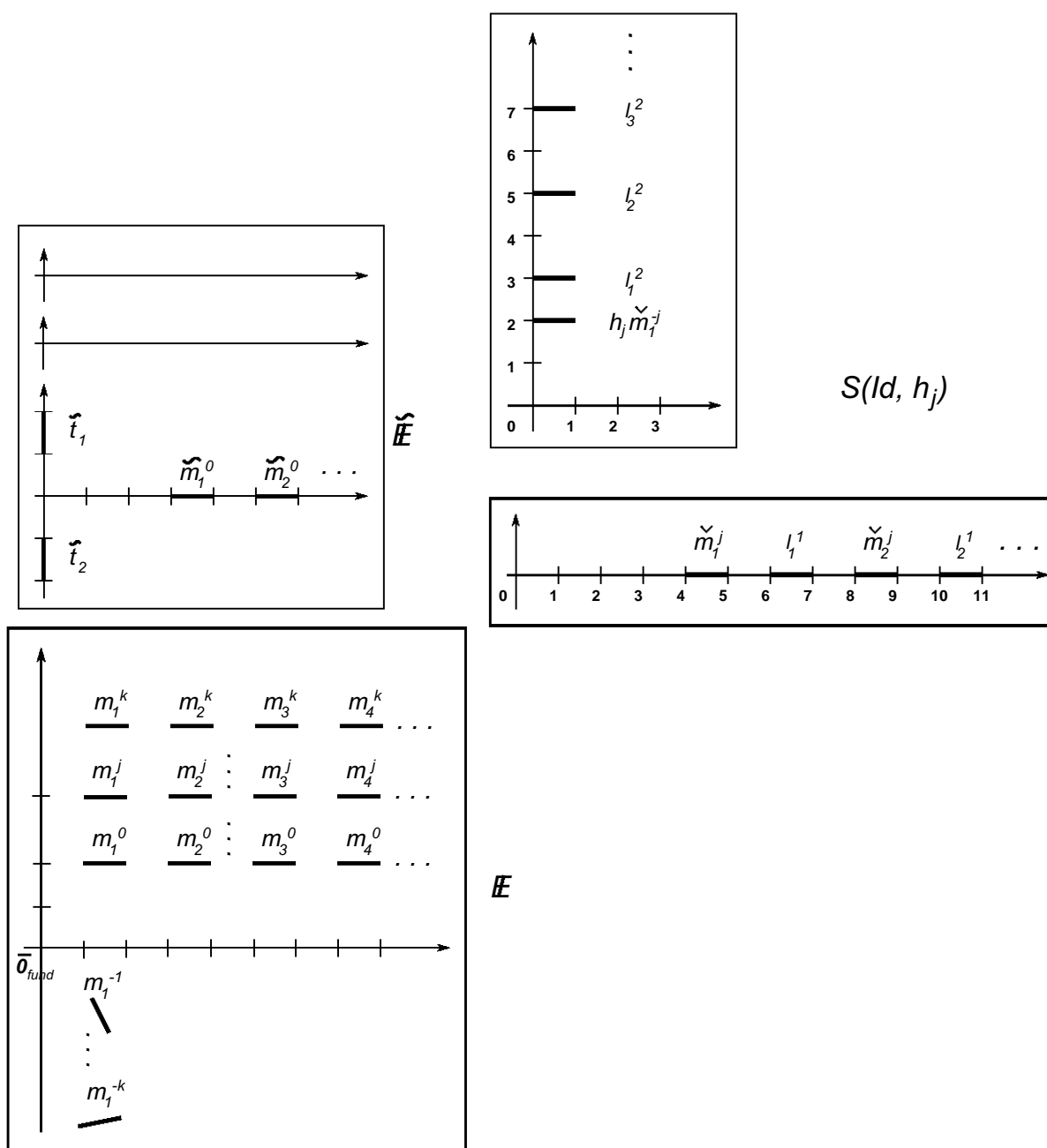


Figura 3.10: Monstruo del lago Ness S_{fund}

Definición 3.7.1 (Puzzle). Para cada $g \in G$, S_g es la copia afín de S_{fund} con respecto a g . Para cada $j \in \{1, \dots, k\}$, las marcas $h_j \check{m}_1^{-j}$ y m_1^{-j} , junto con el origen $\bar{0}_{fund}$ (pertenecientes a la superficie S_g) se renombran mediante $gh_j \check{m}_1^{-j}$, gm_1^{-j} y $\bar{0}_g$ respectivamente. El *puzzle* asociado a la tripleta $(1, G, H)$ es

$$\mathfrak{P}(1, G, H) := \{S_g : g \in G\}.$$

Definición 3.7.2 (*Superficie ensamblada*). La superficie ensamblada generada por el puzzle $\mathfrak{P}(1, G, H)$ es

$$S_{\mathfrak{P}} := \bigcup_{g \in G} S_g / \sim, \quad (3.41)$$

donde \sim es la relación de equivalencia que proviene de pegar las marcas $gh_j\tilde{m}_1^{-j} \sim_{\text{pegar}} gh_jm_1^{-j}$ (la marca $gh_j\tilde{m}_1^{-j} \in S_g$ y la marca $gh_jm_1^{-j} \in S_{gh_j}$), para cada arista (g, gh_j) en la gráfica $Cay(G, H)$.

Se sigue de la Proposición 3.5.1 que la superficie ensamblada $S_{\mathfrak{P}}$ es de translación mansa y su grupo de Veech es G .

3.7.1. Demostración Teorema 3.7.1

Mostraremos que $Ends(S_{\mathfrak{P}})$ se descompone de la forma $B \sqcup U$ mediante la estrategia siguiente: primero, definiremos el conjunto U . Luego, construiremos un encaje i de la gráfica $Cay(G, H)$ a la superficie ensamblada $S_{\mathfrak{P}}$ que inducirá un encaje $i_* : Ends(Cay(G, H)) \hookrightarrow Ends(S_{\mathfrak{P}})$. Finalmente, veremos que se satisface la igualdad $Ends(S_{\mathfrak{P}}) = B \sqcup U$ y que U es denso en $Ends(S_{\mathfrak{P}})$.

Definición del subconjunto $U \subset Ends(S_{\mathfrak{P}})$. Para cada $g \in G$, la superficie S_g del puzzle $\mathfrak{P}(1, G, H)$ es homeomorfa al monstruo del lago Ness y además, S_g tiene trazadas $2k$ marcas sin pegar (véase Figura 3.9 y Definición 3.7.1). Denotemos mediante $[U_n^g]_{n \in \mathbb{N}}$ al único fin de S_g . Podemos suponer sin pérdida de generalidad que el abierto U_1^g no contiene a ninguna de las $2k$ marcas sin pegar de S_g , entonces para cada $n \in \mathbb{N}$, el abierto (de género infinito) U_n^g se encaja en la superficie ensamblada $S_{\mathfrak{P}}$, vía la función identidad. Por lo tanto el fin con género infinito $[U_n^g]_{n \in \mathbb{N}}$ de S_g es un fin $[U_n^g]_{n \in \mathbb{N}}$ de género infinito de $S_{\mathfrak{P}}$.

Definimos el conjunto

$$U := \{[U_n^g]_{n \in \mathbb{N}} \in Ends(S_{\mathfrak{P}}) : g \in G\}. \quad (3.42)$$

Claramente, U es numerable. Adicionalmente, si consideramos el abierto $U_1^g \subset S_{\mathfrak{P}}$, para cada $g \in G$, entonces el abierto $(U_1^g)^* \subset Ends(S_{\mathfrak{P}})$ satisface $(U_1^g)^* \setminus \{[U_n^g]_{n \in \mathbb{N}}\} = \emptyset$. Por lo tanto, los fines que conforman el conjunto U son aislados, es decir, U es un subconjunto numerable y discreto. Nótese que si G es finito, entonces $Ends(S_{\mathfrak{P}}) = U$.

Definición de un encaje

$$i : Cay(G, H) \hookrightarrow S_{\mathfrak{P}}.$$

Primero describiremos la imagen de los vértices de $Cay(G, H)$ y luego, la imagen de sus respectivas aristas. Para cada $g \in G$, la superficie S_g tiene un punto denotado $\bar{0}_g$ (véase Definición 3.7.1), entonces la función

$$h : \begin{array}{ccc} V(Cay(G, H)) & \rightarrow & S_{\mathfrak{P}} \\ g & \rightarrow & \bar{0}_g, \end{array} \quad (3.43)$$

está bien definida.

Por otro lado, para cada $j \in \{1, \dots, k\}$, existe una trayectoria

$$\gamma_j : [0, 1] \rightarrow S_{\mathfrak{P}}$$

con puntos extremos $\bar{0}_{Id}$ y $\bar{0}_{h_j}$ tal que $\gamma_i \cap \gamma_j = \{\bar{0}_{Id}\}$, para cada $i \neq j \in \{1, \dots, k\}$ (véase Figura 3.11). Para cada $j \in \{1, \dots, k\}$, la arista (Id, h_j) de $Cay(G, H)$ es homeomorfa al intervalo abierto $(0, 1)$, entonces podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\gamma_j : [Id, h_j] \rightarrow S_{Id}$ satisface $\gamma_j(Id) = \bar{0}_{Id}$ y $\gamma_j(h_j) = \bar{0}_{h_j}$.

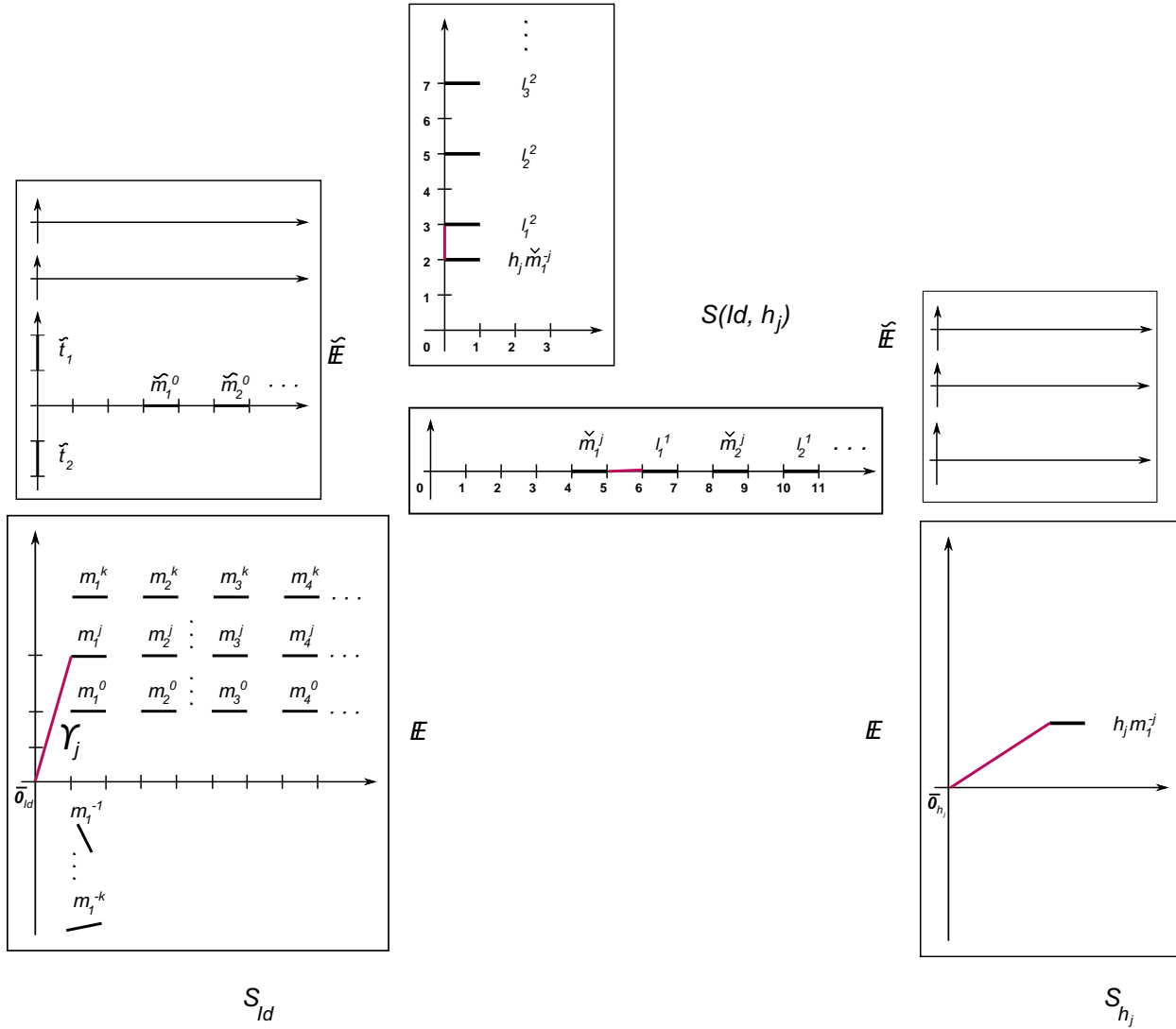


Figura 3.11: Imagen de γ_j

Siguiendo la Definición 3.5.1, para cada $g \in G$, existe un difeomorfismo afín canónico

$$\bar{g} : S_{\mathfrak{P}} \rightarrow S_{\mathfrak{P}}$$

tal que su respectiva diferencial es $D\bar{g} = g$. El difeomorfismo \bar{g} satisface que para cada $j \in \{1, \dots, k\}$, la trayectoria

$$\bar{g} \circ \gamma_j : [0, 1] \rightarrow S_{\mathfrak{P}}$$

tiene puntos extremos $\bar{0}_g$ y $\bar{0}_{gh_j}$. Además, $(\bar{g} \circ \gamma_i) \cap (\bar{g} \circ \gamma_j) = \{\bar{0}_g\}$, para cada $i \neq j \in \{1, \dots, k\}$. Análogamente, para cada $j \in \{1, \dots, k\}$, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\bar{g} \circ \gamma_j : [g, gh_j] \rightarrow S_{\mathfrak{P}}$ tal que $\gamma_j(g) = \bar{0}_g$ y $\gamma_j(gh_j) = \bar{0}_{gh_j}$.

Claramente, la función

$$i : \text{Cay}(G, H) \hookrightarrow S_{\mathfrak{P}},$$

donde $i|_{V(\text{Cay}(G, H))} := h$ y $i|_{(g, gh_j)} := \bar{g} \circ \gamma_j$, para cada $g \in G$ y para cada $j \in \{1, \dots, k\}$, es un encaje.

Definición del encaje $i_ : \text{Ends}(\text{Cay}(G, H)) \hookrightarrow \text{Ends}(S_{\mathfrak{P}})$.* Para dar dicho encaje son necesarias las observaciones siguientes.

Observación 3.7.1. Para cada $g \in G$, denotamos mediante K_g al compacto formado por las $2k$ marcas sin pegar que tiene la superficie S_g y \bar{S}_g es la cerradura de $S_g \setminus K_g$ en $S_{\mathfrak{P}}$.

Dado U un abierto conexo con frontera compacta en $\text{Cay}(G, H)$ (podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\partial U \subset V(\text{Cay}(G, H))$), entonces \tilde{U} es el interior en $S_{\mathfrak{P}}$ de la unión

$$\tilde{U} := \text{Int} \left(\bigcup_{g \in V(\text{Cay}(G, H)) \cap (U \cup \partial U)} \bar{S}_g \right).$$

Nótese que \tilde{U} es un abierto conexo con frontera compacta. Además, es de género infinito

Observación 3.7.2. Sean U_1 y U_2 dos subconjuntos abiertos conexos con frontera compacta de $\text{Cay}(G, H)$, tal que $\partial U_1, \partial U_2 \subset V(\text{Cay}(G, H))$. Entonces se tienen las propiedades siguientes.

1. Si $U_1 \supset U_2$ entonces $\tilde{U}_1 \supset \tilde{U}_2$.
2. Si $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ entonces $\tilde{U}_1 \cap \tilde{U}_2 = \emptyset$.

Siguiendo la Observación 3.7.1, a cada fin $[U_n]_{n \in \mathbb{N}}$ de $\text{Cay}(G, H)$ le hacemos corresponder el fin de género infinito $[\tilde{U}_n] \in \text{Ends}(S_{\mathfrak{P}})$. Definimos la función

$$\begin{aligned} i_* : \text{Ends}(\text{Cay}(G, H)) &\rightarrow \text{Ends}(S_{\mathfrak{P}}) \\ [U_n]_{n \in \mathbb{N}} &\rightarrow [\tilde{U}_n]_{n \in \mathbb{N}}, \end{aligned}$$

Probaremos que i_* es un encaje.

La función i_ es inyectiva.* Consideremos $[U_n]_{n \in \mathbb{N}}$ y $[V_n]_{n \in \mathbb{N}}$ dos fines distintos de la gráfica $\text{Cay}(G, H)$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $U_n \cap V_n = \emptyset$. Siguiendo la Observación 3.7.2 tenemos que la intersección $\tilde{U}_n \cap \tilde{V}_n = \emptyset$. Por lo tanto, los fines $i_*([U_n]_{n \in \mathbb{N}}) = [\tilde{U}_n]_{n \in \mathbb{N}}$ y $i_*([V_n]_{n \in \mathbb{N}}) = [\tilde{V}_n]_{n \in \mathbb{N}}$ son diferentes.

La función i_ es continua.* Consideremos el fin $[U_n]_{n \in \mathbb{N}}$ de $\text{Cay}(G, H)$ y un abierto V^* en $\text{Ends}(S)$ que contiene al elemento $i_*([U_n]_{n \in \mathbb{N}}) = [\tilde{U}_n]_{n \in \mathbb{N}}$, veamos que existe una vecindad W^* del fin $[U_n]_{n \in \mathbb{N}}$, tal que $i_*(W^*) \subset V^*$. El abierto V es conexo con frontera compacta en $S_{\mathfrak{P}}$ y, la aplicación i es un encaje, entonces existe una componente conexa con frontera compacta W de $i^{-1}(V)$, tal que $[U_n]_{n \in \mathbb{N}} \in W^*$. Claramente, $i_*(W^*) \subset V^*$.

La función i_ es cerrada.* Toda función continua definida de un espacio compacto a un espacio Hausdorff es cerrada (véase [15, p. 226]), por lo tanto i_* es *cerrada*.

Esto muestra que la función i_* es un encaje.

Ahora, siguiendo la expresión (3.42) se concluye que

$$i_*(Ends(Cay(G, H))) \cap U = \emptyset.$$

Veamos que el espacio de fines de $S_{\mathfrak{P}}$ es

$$Ends(S_{\mathfrak{P}}) = i_*(Ends(Cay(G, H))) \sqcup U. \quad (3.44)$$

Consideremos el elemento $[U_n]_{n \in \mathbb{N}}$ en $Ends(S_{\mathfrak{P}})$ y veamos que este fin está en la unión

$$i_*(Ends(Cay(G, H))) \sqcup U.$$

Siguiendo la Proposición 1.1.2, existe una sucesión creciente de compactos $K_1 \subset K_2 \subset \dots$ en la gráfica $Cay(G, H)$, tal que $Cay(G, H) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$. Si denotamos

$$Cay(G, H) \setminus K_n := U_1^n \sqcup \dots \sqcup U_{i(n)}^n$$

donde $U_{k(n)}^n$ es una componente conexa con cerradura no compacta para cada $k(n) \in \{1, \dots, i(n)\}$. Entonces el espacio de fines de $Cay(G, H)$ es el conjunto de todas las sucesiones $(U_{k(n)}^n)_{n \in \mathbb{N}}$ tales que $U_{k(n)}^n \subset Cay(G, H) \setminus K_n$ y $U_{k(n)}^n \supset U_{k(n+1)}^{n+1}$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, al compacto K_n de $Cay(G, H)$ le hacemos corresponder el compacto

$$\tilde{K}_n := \bigcup_{g \in K_n \cap V(Cay(G, H))} K_g$$

en $S_{\mathfrak{P}}$. Recordemos que K_g es el compacto formado por las $2k$ marcas sin pegar que tiene la superficie S_g (véase Observación 3.7.1).

Dado que $[U_n]_{n \in \mathbb{N}}$ es un elemento en $Ends(S_{\mathfrak{P}})$, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $l(n) \in \mathbb{N}$ tal que $\tilde{K}_n \cap V_{l(n)} = \emptyset$. El abierto $U_{l(n)}$ está completamente contenido en una componente conexa de $S_{\mathfrak{P}} \setminus \tilde{K}_n$, entonces tenemos los casos siguientes:

Caso 1. Existe $m \in \mathbb{N}$, tal que $V_{l(m)} \subset S_g \setminus K_g$ para algún $g \in G$. Claramente, si este caso ocurre, entonces se tiene que $[U_n]_{n \in \mathbb{N}} \in U$.

Caso 2. Existe un fin $[U_{k(n)}^n]_{n \in \mathbb{N}}$ en $Cay(G, H)$, tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, $U_{l(n)} \subset \tilde{U}_{k(n)}^n$. Veamos que si ocurre este caso, entonces los fines $[U_n]_{n \in \mathbb{N}}$ y $[\tilde{U}_{k(n)}^n]_{n \in \mathbb{N}}$ son equivalentes. Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $s(n) \in \mathbb{N}$ tal que

$$\partial U_n \cap \tilde{U}_{k(s(n))}^{s(n)} = \emptyset.$$

Entonces el abierto $\tilde{U}_{k(s(n))}^{s(n)}$ se queda contenido en una componente conexa de $S_{\mathfrak{P}} \setminus \partial V_n$. Por otro lado, existe $l(s(n)) \in \mathbb{N}$ tal que $V_{l(s(n))} \subset \tilde{U}_{k(s(n))}^{s(n)}$, pero esta contención implica la siguiente dicotomía, $\tilde{U}_{l(s(n))} \subset U_n$ o $U_n \subset \tilde{U}_{l(s(n))}$. Dado que $U_{k(s(n))}^{s(n)}$ es conexo, entonces para cualquiera de las dos anteriores contenciones se concluye que $U_{k(s(n))}^{s(n)} \subset V_n$. Esto muestra que los fines $[U_n]_{n \in \mathbb{N}}$ y $[\tilde{U}_{k(n)}^n]_{n \in \mathbb{N}}$ son equivalentes.

Probemos que U es denso en $Ends(S_{\mathfrak{N}})$.

Supongamos que G es de cardinalidad infinito numerable. Consideremos el elemento $[U_n]_{n \in \mathbb{N}} \in Ends(S_{\mathfrak{N}})$ y veamos que $[U_n]_{n \in \mathbb{N}} \in \bar{U}$. Siguiendo la expresión (3.44), existe un fin $[\tilde{U}_{k(n)}^n]_{n \in \mathbb{N}}$ que pertenece a $i_*(Ends(Cay(G, H)))$ tal que los elementos $[U_n]_{n \in \mathbb{N}}$ y $[\tilde{U}_{k(n)}^n]_{n \in \mathbb{N}}$ son equivalentes. Siguiendo la Observación 3.7.1, para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $(\tilde{U}_{k(n)}^n)^* \cap U \neq \emptyset$.

□

3.8. Perspectivas

Las técnicas que utilizamos para probar los anteriores teoremas de realización (puzzles, la gráfica del árbol binario de Cantor, entre otras) e incluso, los mismos resultados nos motiva a preguntarnos:

Problema 3.8.1. ¿Existen superficies de translación mansas con una cantidad finita de puntos singulares que satisfagan las condiciones de los teoremas 3.2.1, 3.2.2, 3.2.3 y 3.2.4?

Problema 3.8.2. Dados G un subgrupo de $GL_+(2, \mathbb{R})$ que satisface alguna de las primeras dos condiciones del Teorema 3.1.1 y $X \subset X'$ dos subconjuntos cerrados X y X' del conjunto de Cantor. ¿Existe una superficie de translación mansa S tal que su grupo de Veech es G , su respectivo espacio de fines es homeomorfo a X y el espacio de fines de género infinito de S es homeomorfo a X' ?

Problema 3.8.3. Dados X un subconjunto cerrado del conjunto de Cantor, G un subgrupo numerable de $GL_+(2, \mathbb{R})$ sin elementos que contraen y H un conjunto generador de G . Diremos que la tripleta (X, G, H) es *puzzle realizable*, si el espacio de fines de la superficie ensamblada $S_{\mathfrak{N}}$ es homeomorfo a X . ¿Cuáles son las tripletas puzzles realizables?

Problema 3.8.4. ¿Existe un puzzle tal que su pieza fundamental sea una superficie de translación compacta y al ensamblarlo genere una superficie de translación mansa?

Problema 3.8.5. ¿Existe S una superficie de translación con grupo de Veech $SL_+(2, \mathbb{Z})$ y con área finita, tal que S es homeomorfa al monstruo del lago Ness?

Capítulo 4

Mapas en superficies

Básicamente, el concepto de *mapa* en una superficie es la idea que poseemos de la representación gráfica de los países en el globo terráqueo (véase Figura 4.1), es decir, la superficie es descompuesta en países (caras), éstos están delimitados por sus respectivas fronteras (aristas) y el punto donde tres o más países se reúnen es un vértice.



Figura 4.1: *Mapa terráqueo*
Imagen de Itatay Navarro, tomada de <http://www.imagui.com>

Los *sólidos platónicos* (véase Figura 4.2), corresponden a unos de los mapas más estudiados desde la edad antigua. Podría decirse que ellos motivaron el teorema de la característica de Euler para el caso de la esfera (véase [6, Capítulos 7 y 8]), el cual dice que un mapa en la esfera satisface que el número V de vértices menos el número E de aristas más el número F de caras del mapa, es

$$V - E + F = 2.$$

De ahora en adelante las gráficas que consideraremos serán simples, conexas y localmente finitas. De igual manera, las superficies serán no compactas, orientables y sin frontera.

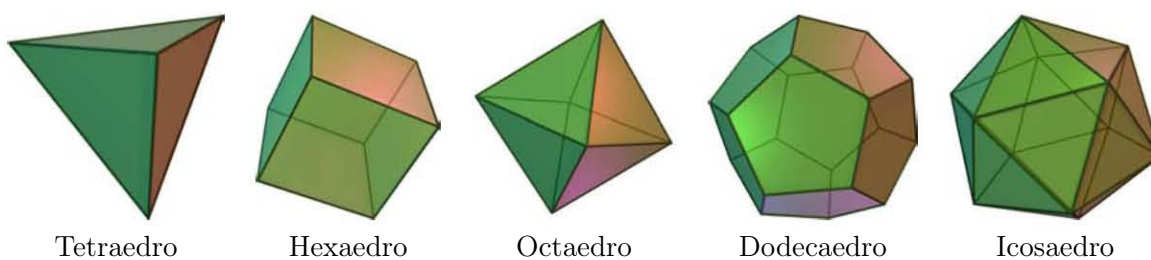


Figura 4.2: *Sólidos platónicos*
 Imagen de Maksim Pe, distribuida bajo CC BY-SA 4.0

Definición 4.0.1. [30]. Un *mapa* $\mathcal{M} := (\Delta, S, i)$ es una tripleta tal que Δ es una gráfica, S es una superficie e $i : \Delta \hookrightarrow S$ es un encaje que satisface las propiedades siguientes:

1. El subconjunto $i(V(\Delta))$ es discreto en S . Los elementos del conjunto $i(V(\Delta))$ son los *vértices* del mapa \mathcal{M} .
2. Cada componente conexa de $S \setminus i(\Delta)$ es homeomorfa a un disco. Cada componente conexa es una *cara* del mapa \mathcal{M} .
3. La frontera de cada cara del mapa \mathcal{M} es la imagen de una cantidad finita de aristas de Δ bajo el encaje i . La imagen de cada arista de Δ es una *arista* del mapa \mathcal{M} .

En tal caso, diremos que *el mapa \mathcal{M} se realiza en la superficie S* .

Ejemplo 4.0.1. La tripleta $\mathcal{M} := (\Delta, \mathbb{R}^2, i)$ es un mapa que se realiza en el plano Euclidiano \mathbb{R}^2 , donde Δ es la gráfica de Cayley del grupo $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ con respecto al subconjunto generador $\{(1, 0), (0, 1)\}$ (véase Ejemplo 1.2.2), y el encaje

$$i : \Delta \hookrightarrow \mathbb{R}^2,$$

envía al vértice (n, m) de la gráfica Δ en el punto coordenado $(n, m) \in \mathbb{R}^2$ y además, envía la arista $((n, m), (n+1, m))$ (respectivamente $((n, m), (n, m+1))$) de la gráfica Δ en la geodésica del plano Euclidiano cuyos extremos son los puntos coordenados (n, m) y $(n+1, m)$ (respectivamente (n, m) y $(n, m+1)$) (véase Figura 4.3).

De la Definición 4.0.1 se sigue que, si $\mathcal{M} := (\Delta, S, i)$ es un mapa y S es una superficie compacta entonces la gráfica Δ tiene una cantidad finita de vértices. Pero si S es una superficie no compacta, entonces la gráfica Δ tiene una cantidad infinita de vértices.

4.1. Mapas regulares

En el estudio de la geometría Euclidiana y la combinatoria se tiene la definición de *regularidad* para polígonos y gráficas, respectivamente. En este caso, también existe el concepto de *mapa regular*, el cual se dará en términos del *grupo de automorfismos* del mapa y su respectivo *conjunto de banderas*. A continuación introduciremos estos dos conceptos.

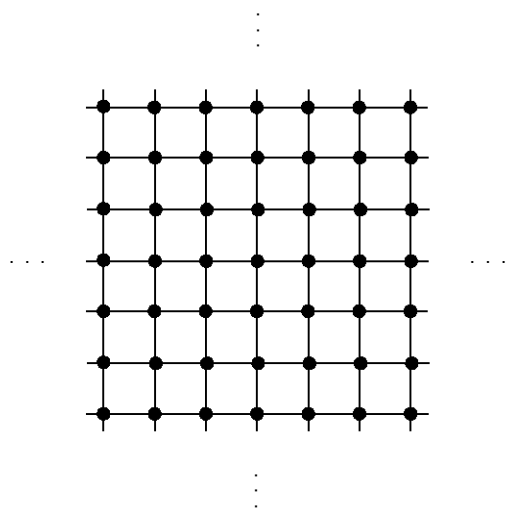


Figura 4.3: Mapa $\mathcal{M} := (\Delta, \mathbb{R}^2, i)$ en el plano Euclidiano

4.1.1. Grupo de automorfismos de un mapa

Dos mapas $\mathcal{M}_1 := (\Delta_1, S_1, i_1)$ y $\mathcal{M}_2 := (\Delta_2, S_2, i_2)$ son *isomorfos* si existen $f : S_1 \rightarrow S_2$ un homeomorfismo y $g_f : \Delta_1 \rightarrow \Delta_2$ un isomorfismo de gráficas tal que el diagrama 4.1 conmuta.

$$\begin{array}{ccc}
 S_1 & \xrightarrow{f} & S_2 \\
 i_1 \uparrow & & \uparrow i_2 \\
 \Delta_1 & \xrightarrow{g_f} & \Delta_2
 \end{array}$$

Diagrama 4.1: Mapas isomorfos

Consideremos el mapa $\mathcal{M} := (\Delta, S, i)$, diremos que el homeomorfismo $f : S \rightarrow S$ es un *preautomorfismo* del mapa \mathcal{M} si existe $g_f : \Delta \rightarrow \Delta$ un automorfismo de la gráfica Δ tal que el diagrama 4.2 conmuta.

$$\begin{array}{ccc}
 S & \xrightarrow{f} & S \\
 i \uparrow & & \uparrow i \\
 \Delta & \xrightarrow{g_f} & \Delta
 \end{array}$$

Diagrama 4.2: Preautomorfismo

El grupo de preautomorfismos del mapa \mathcal{M} es denotado mediante $\tilde{Aut}(\mathcal{M})$. Ahora, si consideramos un elemento $f \in \tilde{Aut}(\mathcal{M})$ existe un único $g_f : \Delta \rightarrow \Delta$ automorfismo de la gráfica Δ que hace conmutar el diagrama 4.2, pues si existe otro $h_f : \Delta \rightarrow \Delta$ automorfismo de Δ distinto a g_f , que hace conmutar el diagrama 4.2, entonces para cada vértice $v \in V(\Delta)$ se satisface la igualdad

siguiente

$$i \circ g_f(v) = f \circ i(v) = i \circ h_f(v).$$

Dado que $f : S \rightarrow S$ es un homeomorfismo y la función i es inyectiva, entonces en la igualdad anterior podemos cancelar la función i por la izquierda y se sigue que $g_f = h_f$.

La anterior observación nos permite definir la función

$$\begin{array}{ccc} \varphi : \tilde{Aut}(\mathcal{M}) & \rightarrow & Aut(\Delta) \\ f & \rightarrow & g_f, \end{array} \quad (4.1)$$

donde $Aut(\Delta)$ es el grupo de automorfismos de la gráfica Δ . Nótese que para cualesquiera $f, h \in \tilde{Aut}(\mathcal{M})$ el diagrama 4.3 conmuta.

$$\begin{array}{ccccc} S & \xrightarrow{h} & S & \xrightarrow{f} & S \\ \uparrow i & & \uparrow i & & \uparrow i \\ \Delta & \xrightarrow{g_h} & \Delta & \xrightarrow{g_f} & \Delta \end{array}$$

Diagrama 4.3: *El morfismo φ*

Entonces se satisface la igualdad siguiente

$$\varphi(f \circ h) = \varphi(f) \circ \varphi(h),$$

es decir, la función φ (véase expresión (4.1)) es un morfismo de grupos.

Definición 4.1.1. El grupo de *Automorfismos* asociado al mapa \mathcal{M} es el cociente

$$Aut(\mathcal{M}) := \tilde{Aut}(\mathcal{M}) / \ker \varphi. \quad (4.2)$$

4.1.2. El conjunto de banderas

Un mapa $\mathcal{M} := (\Delta, S, i)$ induce una triangulación en la superficie S , la cual motiva el conjunto de banderas. A continuación, introduciremos dicha triangulación.

Para cada arista e de Δ consideremos un punto en el interior de $i(e)$, llamemos a este elemento *punto medio de $i(e)$* . Similarmente, para cada cara $U \subset S \setminus i(\Delta)$ del mapa \mathcal{M} tomamos un punto en su interior, el cual denotaremos mediante x_U . Ahora, en cada cara U del mapa \mathcal{M} dibujamos las trayectorias simples sin autointersecciones siguientes:

1. Para cada $i(e)$ en la frontera de U , trazamos una trayectoria con extremos el punto x_U y el punto medio de $i(e)$.
2. Para cada vértice v de \mathcal{M} que está en la frontera de U , trazamos una trayectoria con extremos el punto x_U y el vértice v del mapa que está en la frontera de U .

Podemos suponer sin pérdida de generalidad que la intersección de cualesquiera dos trayectorias diferentes es a lo más un punto (véase Figura 4.4).

Denotemos mediante \mathfrak{T} al conjunto de las trayectorias en S trazadas anteriormente. Una *bandera Φ de la superficie S* es la cerradura en S de una componente conexa de $S \setminus (i(\Delta) \cup \bigcup_{\gamma \in \mathfrak{T}} \gamma)$. El conjunto

$$\mathfrak{T}_{\mathcal{M}} := \{\Phi : \Phi \text{ es una bandera de } S\}$$

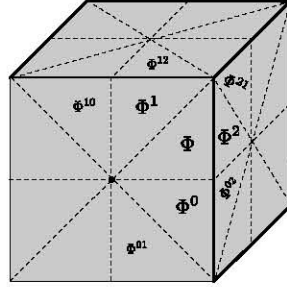


Figura 4.4: *Banderas*
Imagen de Miguel Raggi Pérez, tomada de [7]

es una triangulación de S inducida por el mapa \mathcal{M} .

Podemos suponer sin pérdida de generalidad que cada bandera Φ de S es un triángulo tal que sus respectivos tres vértices v_1 , v_2 y v_3 satisfacen las propiedades siguientes:

1. El elemento $i^{-1}(v_1)$ es un vértice de la gráfica Δ .
2. El elemento v_2 es el «punto medio» de la trayectoria $i(e)$, donde e es una arista de la gráfica Δ incidente en el vértice $i^{-1}(v_1)$.
3. El elemento v_3 está en el interior de una cara del mapa \mathcal{M} cuya frontera contiene a la trayectoria $i(e)$ (véase Figura 4.5).

Nótese que a cada bandera Φ con esquinas v_1 , v_2 y v_3 de la superficie S le asociamos de manera natural la tripleta (v, e, C)

$$\Phi \rightarrow (v, e, C) \tag{4.3}$$

que satisface las propiedades siguientes

1. El elemento v es el vértice de Δ tal que $v = i^{-1}(v_1)$.
2. El elemento e es una arista de Δ incidente en el vértice v tal que $v_2 \in i(e)$.
3. El elemento C es un ciclo de Δ que contiene a la arista e y adicionalmente, la imagen de C bajo i corresponde a la frontera de la cara del mapa \mathcal{M} que contiene al elemento v_3 .

La tripleta (v, e, C) es una *bandera del mapa* \mathcal{M} .

El *conjunto de banderas* del mapa \mathcal{M} es denotado mediante

$$\mathcal{F} := \{(v, e, C) : (v, e, C) \text{ es una bandera del mapa } \mathcal{M}\}.$$

4.1.3. Regularidad

Cada mapa \mathcal{M} tiene asociados dos objetos, su respectivo grupo de automorfismos $Aut(\mathcal{M})$ y su conjunto de banderas \mathcal{F} ,

$$\mathcal{M} \rightarrow (Aut(\mathcal{M}), \mathcal{F}).$$

Basándonos en estos dos definimos la acción

$$\begin{aligned} \alpha : Aut(\mathcal{M}) \times \mathcal{F} &\rightarrow \mathcal{F} \\ ([f], (v, e, C)) &\rightarrow (g_f(v), g_f(e), g_f(C)), \end{aligned} \tag{4.4}$$

la cual está bien definida porque α no depende del representante de la clase $[f]$.

Definición 4.1.2. [30]. El mapa \mathcal{M} es *regular*, si la acción α es transitiva.

Ejemplo 4.1.1. [22, Capítulo 4]. Las tres teselaciones regulares (triángulos equiláteros, cuadrados y hexágonos regulares) del plano Euclidiano son mapas regulares con respecto a la Definición 4.1.2 (véase Figura 4.5).

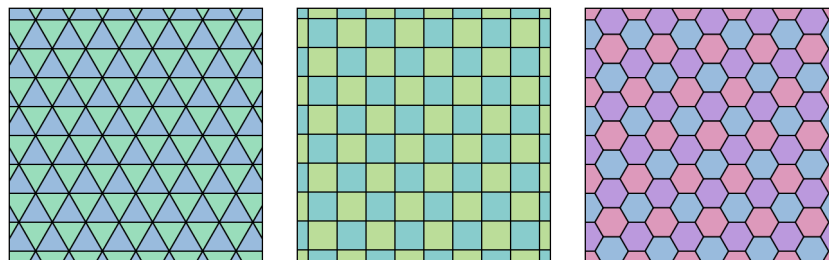


Figura 4.5: *Teselaciones regulares del plano Euclidiano*
 Imagen de R. A. Nonenmacher, distribuida bajo CC BY-SA 2.5

Claramente, en un mapa regular $\mathcal{M} := (\Delta, S, i)$, cada uno de los ciclos de Δ que bajo i es la frontera de alguna cara del mapa \mathcal{M} está delimitado por la misma cantidad de aristas p . Análogamente, los vértices de la gráfica Δ son del mismo grado q . Entonces al mapa regular \mathcal{M} le asociamos la *tipo de Schläfli* $\{p, q\}$ (en ese orden)

$$\mathcal{M} \rightarrow \{p, q\},$$

la cual indica que cada ciclo de Δ que bajo i es la frontera de alguna cara del mapa \mathcal{M} está delimitado por p aristas y cada vértice de Δ es de grado q (véase [8, p. 33]).

Ejemplo 4.1.2. [9, Capítulo 5]. Las teselaciones regulares del plano Hiperbólico son mapas regulares con respecto a la Definición 4.1.2. Estos tienen tipo de Schläfli $\{p, q\}$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} < \frac{1}{2}$ (véase Figura 4.6). El grupo de automorfismos de la teselación con tipo de Schläfli $\{p, q\}$ es un *grupo de Coxeter* y su respectiva representación es

$$[p, q] := \langle \rho_0, \rho_1, \rho_2 : \rho_0^2 = \rho_1^2 = \rho_2^2 = (\rho_0\rho_2)^2 = (\rho_0\rho_1)^p = (\rho_1\rho_2)^q = Id \rangle. \quad (4.5)$$

Seguidamente, enunciaremos tres resultados acerca de mapas regulares que son importantes en la prueba de nuestro resultado principal. El primero afirma que la acción α (véase Ecuación (4.4)) es libre. El segundo describe el grupo de automorfismos de un mapa regular. El último afirma que si un mapa regular se realiza en una superficie no compacta de género al menos uno, entonces la superficie es de género infinito.

Proposición 4.1.1. [42, Subsección 2B]. Si \mathcal{M} es un mapa regular, entonces α actúa de manera libre y transitiva en \mathcal{F} , es decir, dadas (v, e, C) y $(\tilde{v}, \tilde{e}, \tilde{C})$ dos banderas del mapa, entonces existe una única clase $[f] \in \text{Aut}(\mathcal{M})$ tal que $\alpha([f], (v, e, C)) = (\tilde{v}, \tilde{e}, \tilde{C})$.

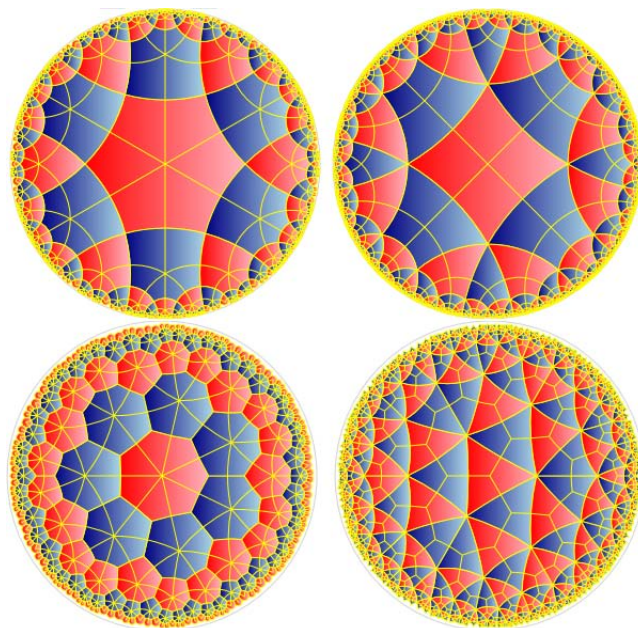


Figura 4.6: *Arriba: teselaciones $\{6, 4\}$ y $\{4, 6\}$. Abajo: teselaciones $\{7, 3\}$ y $\{3, 7\}$*
 Imagen tomada de <https://rastergraphics.wordpress.com/>

El anterior resultado implica que el grupo de automorfismos de un mapa regular \mathcal{M} está en correspondencia biunívoca con el conjunto de banderas de dicho mapa. Además, que la superficie donde se realiza el mapa \mathcal{M} es compacta si y solo si su respectivo conjunto de banderas es de cardinalidad finita.

Ahora, para describir el grupo de automorfismos del mapa regular $\mathcal{M} := (\Delta, S, i)$, primero escojamos una bandera arbitraria Φ de S y recordemos que ella tiene asociada la tripleta (v, e, C) (véase expresión (4.3)). Siguiendo la definición de bandera, existe una única bandera Φ^0 (respectivamente, Φ^1 y Φ^2) de S con tripleta asociada (v^0, e^0, C^0) (respectivamente, (v^1, e^1, C^1) y (v^2, e^2, C^2)), que difiere de Φ por un vértice (respectivamente, una arista y una cara) (véase Figura 4.4). La bandera Φ^j se llama la *bandera j -adyacente* de Φ .

Abusaremos de la notación y cada clase $[f]$ perteneciente al grupo $Aut(\mathcal{M})$ la denotaremos mediante f y la acción $\alpha(f, (v, e, C))$ la denotaremos mediante $f(v, e, C)$. Dado que el mapa \mathcal{M} es regular, entonces existe un único elemento $\rho_j \in Aut(\mathcal{M})$ tal que

$$\rho_j(v, e, C) = (v^j, e^j, C^j), \text{ para cada } j \in \{0, 1, 2\}. \quad (4.6)$$

Las expresiones ρ_0, ρ_1 y ρ_2 son involuciones y se les conoce como los *generadores distinguidos del mapa \mathcal{M} con respecto a la bandera Φ* .

Proposición 4.1.2. [42, Proposición 2B8]. Sean \mathcal{M} un mapa regular con tipo de Schläfli $\{p, q\}$, entonces su respectivo grupo de automorfismos está generado por los tres elementos ρ_0, ρ_1 y ρ_2 . Además, satisfacen las relaciones $\rho_j^2 = (\rho_0\rho_2)^2 = (\rho_0\rho_1)^p = (\rho_1\rho_2)^q = Id$, para cada $j \in \{0, 1, 2\}$ y posiblemente, otras más.

Lema 4.1.1. Sea \mathcal{M} un mapa regular que se realiza en S una superficie con género al menos uno y con espacio de fines un punto. Entonces la superficie S es de género infinito.

Demostración. Consideremos M un mapa regular que se realiza en S una superficie de un solo fin y con género. Entonces existe una subsuperficie U en S con cerradura compacta tal que su género es al menos uno. Denotemos mediante $U_{\mathcal{F}}$ a la unión finita de banderas del mapa M que intersecta a la cerradura en S de U . El conjunto interior $Int(U_{\mathcal{F}})$ es también una subsuperficie de S y además, contiene a U . Ahora, consideremos $[V_n]_{n \in \mathbb{N}}$ el único fin de S y construyamos recursivamente una familia numerable de subsuperficies en S con género al menos uno tal que son disjuntas una a una.

Para $n = 1$. Existe $k(1) \in \mathbb{N}$ tal que la subsuperficie $Int(U_{\mathcal{F}})$ está contenida en $S \setminus V_{k(1)}$. Dado que el grupo $Aut(\mathcal{M})$ es infinito y actúa transitivamente en el conjunto de banderas \mathcal{F} , entonces existe $[f_1] \in Aut(\mathcal{M})$ tal que la subsuperficie $f_1(Int(U_{\mathcal{F}}))$ de S con género al menos uno está contenida en $V_{k(1)}$. Las subsuperficies en la familia $\mathfrak{D}_1 := \{Int(U_{\mathcal{F}}), f_1(Int(U_{\mathcal{F}}))\}$ tienen género al menos uno, son disjuntas y la cerradura en S de la unión $Int(U_{\mathcal{F}}) \cup f_1(Int(U_{\mathcal{F}}))$ es compacta.

Para $n > 1$. Existe $k(n) \in \mathbb{N}$ tal que la unión de subsuperficies

$$Int(U_{\mathcal{F}}) \cup \bigcup_{i=1}^{n-1} f_i(Int(U_{\mathcal{F}}))$$

está contenida en $S \setminus V_{k(n)}$. Dado que el grupo $Aut(\mathcal{M})$ es infinito y actúa transitivamente en el conjunto de banderas \mathcal{F} , entonces existe $[f_n] \in Aut(\mathcal{M})$ tal que la subsuperficie $f_n(Int(U_{\mathcal{F}}))$ de S con género al menos uno está contenida en $V_{k(n)}$. Las subsuperficies en la familia $\mathfrak{D}_n := \{Int(U_{\mathcal{F}})\} \cup \{f_i(Int(U_{\mathcal{F}}))\}_{i=1}^n$ tienen género al menos uno, son disjuntas una a una y la cerradura en S de la unión $Int(U_{\mathcal{F}}) \cup \bigcup_{i=1}^n f_i(Int(U_{\mathcal{F}}))$ es compacta.

La anterior construcción recursiva nos produce $\mathfrak{U} := \{Int(U_{\mathcal{F}})\} \cup \{f_n(U_{\mathcal{F}})\}_{n \in \mathbb{N}}$ una familia numerable de subsuperficies de S con género al menos uno y disjuntas una a una. Por lo tanto, la superficie S es de género infinito. \square

4.2. Mapas regulares en el monstruo del lago Ness

Los Ejemplos 4.1.1 y 4.1.2 son mapas regulares que se realizan en el plano Euclidiano y el plano Hiperbólico, respectivamente. Dichos ejemplos nos motiva a preguntarnos:

¿Existen mapas regulares en superficies con género infinito?

Los ejemplos siguientes responden al anterior planteamiento.

Ejemplo 4.2.1. En el año de 1923, *Coxeter, H. S. M.* y *Petrie, J. F.* encontraron tres nuevos poliedros regulares *infinitos*, los cuales también son mapas regulares y que además, se realizan en el monstruo del lago Ness (véase [8]). En [6, p. 333] estos poliedros regulares infinitos son llamados el *cubo multiplicado*, el *octaedro multiplicado* y el *tetraedro multiplicado*, respectivamente. *Grosso modo*, el cubo multiplicado es el mapa regular $\mathcal{M} := (\Delta, S, i)$ tal que la gráfica Δ es isomorfa a la gráfica de Cayley del grupo $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ con respecto al conjunto generador

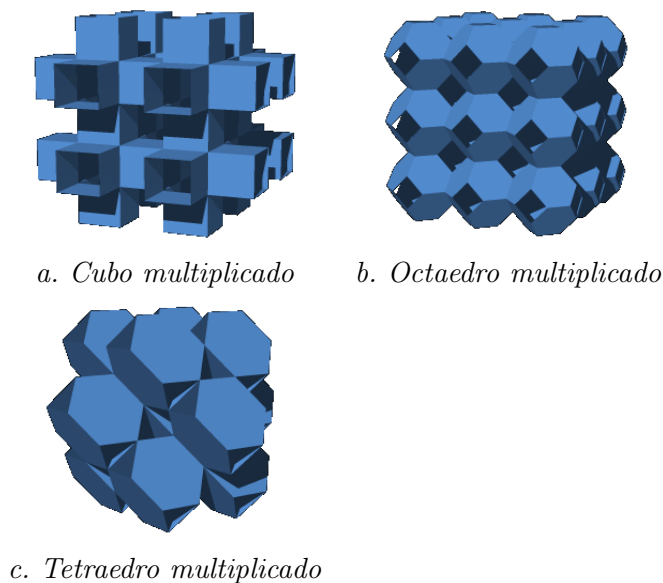


Figura 4.7: *Vista local de los poliedros regulares infinitos de Petrie-Coxeter*
 Imagen de Tom Ruen, distribuida bajo CC BY-SA 4.0

$\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ y; el monstruo del lago Ness S localmente, en el espacio Euclidiano \mathbb{R}^3 , se ve como en la Figura 4.7a.

Asimismo, junto a *Coulbois, T. et. al.*, en [7] probamos que la superficie topológica en la cual se realiza el mapa cubriente mínimo regular asociado a las teselaciones *Arquimedianas* es, efectivamente, el monstruo del lago Ness. Los poliedros regulares infinitos descritos por *Coxeter, H. S. M.* y *Petrie, J. F.* sumados a las tres teselaciones regulares (triángulos equiláteros, cuadrados y hexágonos) del plano Euclidiano y las teselaciones del plano Hiperbólico (véase [9] y [22]) fueron los primeros mapas regulares que se realizan en superficies no compactas y orientables, históricamente hablando.

Ejemplo 4.2.2. Asimismo, *Pellicer, D.* y *Williams, G.* en [52] y junto a *Mixer, M.* en [45] le asociaron a cada *teselación Arquimediana*, las cuales se realizan en el plano Euclidiano, un mapa regular llamado el *mapa cubriente mínimo regular*. Dichos mapas además de ser regulares con respecto a la Definición 4.1.2, se realizan en una superficie no compacta y orientable diferente al plano. Junto a *Coulbois, T., Pellicer, D., Raggi, M.* y *Valdez, F.* probamos que la superficie donde se realiza el mapa cubriente mínimo regular asociado a cada teselación Arquimediana es homeomorfa al monstruo del lago Ness (véase Corolario 4.2.1).

Para ser honestos, en el proyecto conjunto realizado con los mencionados cuatro matemáticos (véase Ejemplo 4.2.2), nosotros nos encargamos de probar un caso particular, es decir, mostramos que la superficie topológica en la cual se realiza el mapa cubriente mínimo regular asociado a la teselación Arquimediana 3.6.3.6 es, efectivamente, el monstruo del lago Ness. Por tal motivo, en las siguientes tres subsecciones definiremos el mapa cubriente mínimo regular, las teselaciones Arquimedianas y presentaremos nuestro aporte en dicho proyecto conjunto.

Por otro lado, *Pellicer, D.* plantea el siguiente problema de realización en [51, Problema 22] para mapas quirales:

Problema 4.2.1. Determine en cuáles superficies no compactas y sin frontera se pueden realizar mapas quirales¹.

Éste interrogante sumado con los Ejemplos 4.1.1, 4.1.2, 4.2.1 y 4.2.2 motivan nuestra pregunta en el área de la Combinatoria.

Problema 4.2.2. ¿En cuáles superficies orientables de género infinito se pueden realizar mapas regulares?

Durante el estudio del planteamiento anterior, junto al Dr. John Alexander Arredondo García² y al Dr. Ferrán Valdez obtuvimos el resultado siguiente.

Teorema 4.2.1. [1, Teorema 1.3]. En las únicas superficies no compactas y orientables donde se pueden realizar mapas regulares son

- el plano y
- el monstruo del lago Ness.

Esta última afirmación generaliza el Teorema 4.2.3 en [7] y para su prueba, la cual daremos en la subsección 4.2.5, requerimos la definición de grupo de Coxeter y la propiedad FA, las cuales introduciremos en la subsección 4.2.4.

4.2.1. Teselaciones Arquimedianas del plano Euclidiano y su grupo de simetrías

En ocasiones, cuando consideramos un mapa \mathcal{M} que se realiza en la superficie S , dicha superficie está provista de una métrica Riemanniana μ . Un elemento $[f] \in \text{Aut}(\mathcal{M})$ es una *simetría* si existe un representante f' en dicha clase, tal que $f' : S \rightarrow S$ es una isometría con respecto a la métrica μ . El grupo de simetrías del mapa \mathcal{M} es

$$\text{Sim}(\mathcal{M}) := \{[f] \in \text{Aut}(\mathcal{M}) : [f] \text{ es una simetría}\}. \quad (4.7)$$

Claramente, el grupo de simetrías del mapa es isomorfo a un subgrupo del grupo de automorfismos del mapa

$$\text{Sim}(\mathcal{M}) < \text{Aut}(\mathcal{M}).$$

Ejemplo 4.2.3. Para el caso del plano con la métrica Euclidiana, para el grupo de simetrías de cada una de las tres teselaciones regulares (véase Ejemplo 4.1.1) coincide con su grupo de automorfismo.

Definición 4.2.1. Un mapa \mathcal{M} es *simétrico* si sus respectivos grupos de automorfismos y simetrías coinciden, es decir,

$$\text{Aut}(\mathcal{M}) = \text{Sim}(\mathcal{M}).$$

¹*Grosso modo*, un mapa es quiral si la acción α (véase expresión (4.4)) define dos órbitas en banderas sin que banderas adyacentes estén en la misma órbita. O bien, son aquellos que admiten máximo de simetrías por rotación pero no admiten automorfismos que revierten la orientación.

²Profesor Investigador Universidad Konrand Lorenz, Bogotá, Colombia.

Entre la infinidad de mapas que se realizan en el plano Euclidiano, sobresalen once. Estos once mapas se caracterizan de los demás mapas, porque poseen las propiedades siguientes (véase [22, Capítulo 2]):

1. Son mapas simétricos.
2. Sus caras son polígonos regulares.
3. El grupo de simetrías de cada uno de ellos actúa transitivamente en el conjunto de vértices del mapa.

Tres de estos once mapas son las teselaciones regulares (triángulos equiláteros, cuadrados y hexágonos regulares) del plano Euclidiano, las cuales tienen tipos de Schläfli $\{3, 6\}$, $\{4, 4\}$ y $\{6, 3\}$, respectivamente (véase Ejemplo 4.1.1). Los restantes ocho mapas se conocen como las *teselaciones Arquimedianas* del plano Euclidiano (véase [22, Sección 2.1]). Cada uno de ellos está determinado por una sucesión finita de números naturales que se origina al considerar el orden en que aparecen las caras incidentes en un vértice dado y escribir el número de aristas que tiene cada ciclo (véase Figura 4.8).

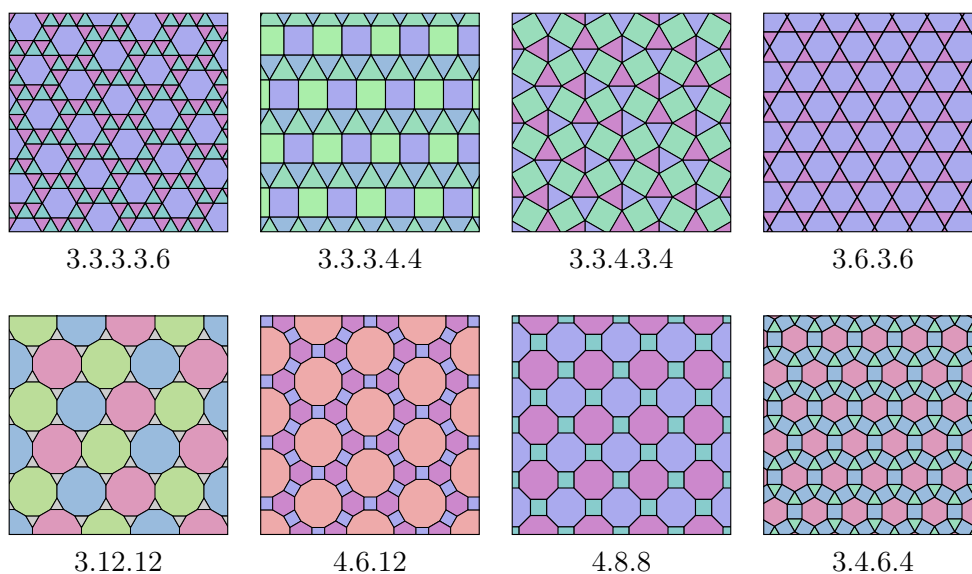


Figura 4.8: *Las teselaciones Arquimedianas*
 Imagen de R. A. Nonenmacher, distribuida bajo CC BY-SA 2.5

La definición que introduciremos a continuación es necesaria para entender el Teorema 4.2.3.

Definición 4.2.2. [22, Sección 1.3]. Un mapa simétrico \mathcal{M} que se realiza en el plano Euclidiano es *periódico*, si su respectivo grupo de simetrías contiene translaciones con respecto a dos vectores linealmente independientes.

En particular, las teselaciones *Arquimedianas* del plano Euclidiano son mapas periódicos.

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{\Delta} & \xrightarrow{\tilde{i}} & \tilde{S} \\
 p_{\Delta} \downarrow & & \downarrow p \\
 \Delta^c & \xrightarrow{i} & S
 \end{array}$$

Diagrama 4.4: *Mapa cubriente*

4.2.2. Mapa cubriente mínimo regular

La triangulación $\mathfrak{T}_{M(\Delta, S, i)}$ de S inducida por el mapa $\mathcal{M} := (\Delta, S, i)$ (véase sección 4.1.2) nos permite definir de manera natural tres funciones en el conjunto de banderas \mathcal{F} , las cuales presentaremos a continuación.

Escojamos una bandera arbitraria Φ de S junto con su respectiva tripleta asociada (v, e, C) (véase expresión (4.3)). Recordemos que existe una única bandera Φ^0 (Φ^1 y Φ^2 , respectivamente) de S tal que las tripletas (v, e, C) y (v^j, e^j, C^j) asociadas a dichas banderas, para cada $j \in \{0, 1, 2\}$, difiere de Φ por un vértice (una arista y una cara, respectivamente).

Entonces para cada $j \in \{0, 1, 2\}$ la función

$$r_j : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}.$$

considera la tripleta asociada a la bandera Φ y la envía a la tripleta asociada a Φ^j la bandera j -adyacente de Φ . Claramente, r_j es una involución.

Adicionalmente, dadas cualesquiera dos banderas Φ y Ψ de S y sus respectivas tripletas asociadas (v, e, C) y $(\tilde{v}, \tilde{e}, \tilde{C})$, existe una palabra $r_{i_1} \dots r_{i_n}$ con $i_1, \dots, i_n \in \{0, 1, 2\}$ tal que

$$r_{i_1} \dots r_{i_n}((v, e, C)) = (\tilde{v}, \tilde{e}, \tilde{C}). \quad (4.8)$$

A esto se le llama que el mapa sea *conexo por banderas*.

Definición 4.2.3. [49, Definición 3.1]. El *grupo de Monodromía* del mapa \mathcal{M} denotado mediante $Mon(\mathcal{M})$ es el subgrupo del grupo de las simetrías en \mathcal{F} con conjunto generador $\{r_0, r_1, r_2\}$.

Definición 4.2.4. [42, Sección 2D]. El mapa $\tilde{\mathcal{M}} := (\tilde{\Delta}, \tilde{S}, \tilde{i})$ es un *cubriente* del mapa $\mathcal{M} := (\Delta, S, i)$, si existen $p : \tilde{S} \rightarrow S$ y $p_{\Delta} : \tilde{\Delta} \rightarrow \Delta$ aplicaciones cubrientes tales que el diagrama 4.4 conmuta.

Ahora, consideremos un mapa \mathcal{M} tal que los generadores r_0, r_1 y r_2 de su respectivo grupo de Monodromía (véase Definición 4.2.3) también satisface las condiciones siguientes:

1. Para los elementos generadores r_0 y r_2 , se tiene que $(r_0 r_2)^2 = Id$.
2. Para cualesquiera $i, j \in \{0, 1, 2\}$, se tiene que $r_i r_j \neq Id$.

Entonces existe $\tilde{\mathcal{M}}$ un mapa cubriente regular del mapa \mathcal{M} , tal que su respectivo grupo de automorfismos es isomorfo al grupo de Monodromía de \mathcal{M} (véase [48]), es decir,

$$Aut(\tilde{\mathcal{M}}) \cong Mon(\mathcal{M}). \quad (4.9)$$

Adicionalmente, si existe $\tilde{\mathcal{M}}_0$ otro mapa cubriente regular del mapa \mathcal{M} que satisfacen la expresión (4.9), entonces dicho mapa cubriente regular es isomorfo a $\tilde{\mathcal{M}}$. Al mapa $\tilde{\mathcal{M}}$ se le llama el *mapa cubriente mínimo regular* de \mathcal{M} .

Teorema 4.2.2. [48, Teorema 3.9]. Sea \mathcal{M} un mapa regular (siguiendo la Proposición 4.1.2) y definamos el morfismo de grupos

$$\begin{aligned} \alpha &: Aut(\mathcal{M}) \rightarrow Mon(\mathcal{M}) \\ \rho_j &\rightarrow r_j, \end{aligned}$$

para cada $j \in \{0, 1, 2\}$. Entonces α es un isomorfismo.

Claramente, del teorema anterior y la definición de mapa cubriente mínimo regular, se sigue que el mapa cubriente mínimo regular de un mapa regular es isomorfo al mapa regular.

Teorema 4.2.3. [7, Teorema 4.4]. Sea $\mathcal{M} := (\Delta, \mathbb{R}^2, i)$ un mapa periódico tal que existen dos caras en Δ con diferente cantidad de aristas. La superficie donde se realiza el mapa cubriente mínimo regular del mapa periódico de \mathcal{M} es homeomorfa al monstruo del lago Ness.

Corolario 4.2.1. [7, Corolario 4.6]. Si \mathcal{M} es una teselación Arquimediana del plano Euclidiano, entonces la superficie donde se realiza su respectivo mapa cubriente mínimo regular es homeomorfa a el monstruo del lago Ness.

4.2.3. Mapa cubriente mínimo regular de la teselación Arquimediana 3.6.3.6 del plano Euclidiano

En [7] el Teorema 4.2.3 se prueba de manera abstracta. Sin embargo, junto con *Raggi, M.* probamos de manera explícita y constructiva (un caso particular) que la superficie donde se realiza el mapa cubriente mínimo regular de la teselación Arquimediana 3.6.3.6 del plano Euclidiano es homeomorfa al monstruo del lago Ness. A continuación presentaremos.

Lema 4.2.1. [7, Sección 5]. La superficie donde se realiza el mapa cubriente mínimo regular de la teselación Arquimediana 3.6.3.6 del plano Euclidiano es homeomorfa al monstruo del lago Ness.

Demostración. Plan de la prueba.

Paso 1. Construiremos una superficie S que es homeomorfa a la superficie donde ocurre el mapa cubriente mínimo regular de la teselación Arquimediana 3.6.3.6 del plano Euclidiano y un cubriente mínimo regular \mathcal{M} que se realiza en S .

Paso 2. Probaremos que la superficie S es homeomorfa al monstruo del lago Ness, es decir, S tiene un sólo fin y es de género infinito. Para ello seguiremos esta estrategia:

- Definiremos la gráfica dual Δ^* asociada al mapa \mathcal{M} .
- Etiquetaremos adecuadamente las aristas de la gráfica Δ^* y probaremos que dicha gráfica es isomorfa a la gráfica de Cayley del grupo G' con conjunto generador $\{a_1, \dots, a_6\}$ y las relaciones siguientes $a_i^2 = (a_i a_{i+1})^2 = (a_i a_{i+3})^2 = (a_1 a_3 a_5)^2 = (a_2 a_4 a_6)^2 = Id$. Seguidamente, veremos que el grupo G' es isomorfo a $H \times H$, donde

$$H := \langle a, b, c : a^2 = b^2 = c^2 = (abc)^2 = Id \rangle.$$

- Probaremos que la gráfica $Cay(H, \{a, b, c\})$ tiene un sólo fin.
- Inspeccionaremos que la gráfica de Cayley de $H \times H$ con respecto al conjunto generador $\{a_1, \dots, a_6\}$ es de un sólo fin y concluiremos que S también es de un sólo fin.

- Finalmente, veremos que la superficie S es de género infinito.

Paso 1. Construcción del mapa $\mathcal{M} := (\Delta, S, i)$. Consideremos el plano Hiperbólico con la teselación regular de tipo de Schläfli $\{6, 4\}$ (véase Figura 4.9). El grupo de automorfismos de dicho mapa (véase Ejemplo 4.1.2) es

$$[p, q] := \langle \rho_0, \rho_1, \rho_2 : \rho_0^2 = \rho_1^2 = \rho_2^2 = (\rho_0\rho_2)^2 = (\rho_0\rho_1)^6 = (\rho_1\rho_2)^4 = Id \rangle.$$

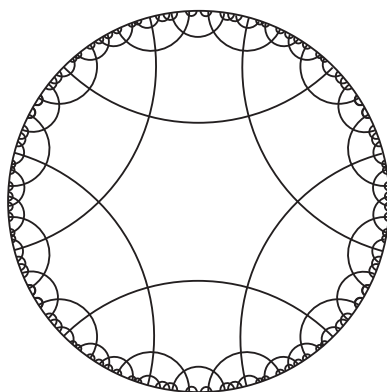


Figura 4.9: *Teselación regular del plano hiperbólico con tipo de Schläfli $\{6, 4\}$*
Imagen de Miguel Raggi Pérez, tomada de [7]

Apoyándonos en dicha teselación y su respectivo grupo de automorfismos definimos la superficie

$$S := \mathbb{H} / \sim \tag{4.10}$$

donde \sim es la relación de equivalencia siguiente: $z \sim w$ si y solo si se satisface alguna de las siguientes igualdades:

$$[(\rho_1\rho_0)^2\rho_1\rho_2]^4(z) = w \text{ (véase Figura 4.10), o} \tag{4.11}$$

$$[(\rho_1\rho_0)^2\rho_2]^6(z) = w \text{ (véase Figura 4.11).} \tag{4.12}$$

También identificamos con los conjugados de las expresiones del lado izquierdo.

Geoméricamente, las dos anteriores igualdades ((4.11) y (4.12)) consisten en pegar las trayectorias de los hexágonos de la teselación con tipo de Schläfli $\{6, 4\}$ como se muestra en las Figuras 4.10 y 4.11.

Adicionalmente, la función proyección

$$\begin{aligned} p &: \mathbb{H} \rightarrow S \\ z &\rightarrow [z] \end{aligned}$$

define un mapa $\mathcal{M} := (\Delta, S, i)$ donde la frontera de cada componente conexa de $S \setminus i(\Delta)$ está conformada por seis aristas y cada vértice de Δ es de grado cuatro. Dicho mapa \mathcal{M} es el mapa cubriente mínimo regular de la teselación Arquimedea 3.6.3.6 (véase [52]).

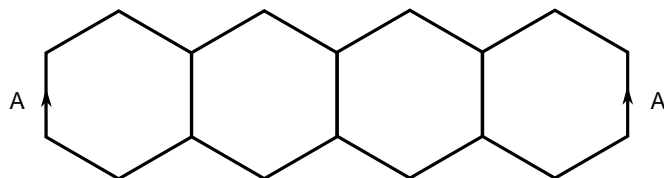


Figura 4.10: Identificación $[(\rho_1\rho_0)^2\rho_1\rho_2]^4(z) = w$
 Imagen de Miguel Raggi Pérez, tomada de [7]

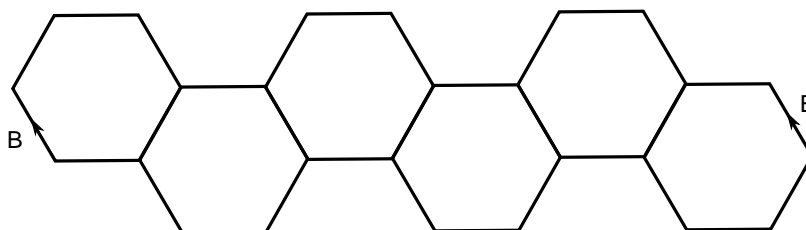


Figura 4.11: Identificación $[(\rho_1\rho_0)^2\rho_2]^6(z) = w$
 Imagen de Miguel Raggi Pérez, tomada de [7]

Paso 2. La superficie S es homeomorfa al monstruo del lago Ness.

- Definición de la gráfica dual Δ^* .

La *gráfica dual* Δ^* asociada al mapa \mathcal{M} posee

1. Conjunto de vértices $V(\Delta^*) := \{U : U \text{ es una cara de } \mathcal{M}\}$.
2. Conjunto de aristas $E(\Delta^*) := \{(U, W) : U \text{ y } W \text{ son dos caras de } \mathcal{M} \text{ cuya intersección es una arista}\}$.

Observación 4.2.1. Para cada U componente conexa de $S \setminus i(\Delta)$, consideramos $[z_U]$ un punto en su interior. Entonces la función

$$f : \Delta^* \hookrightarrow S$$

definida mediante $f(U) = [z_U]$, para cada $U \in V(\Delta^*)$ y $f((U, W))$ es la geodésica en S con puntos extremos $[z_U]$ y $[z_W]$, respectivamente, es un encaje.

- **Afirmación.** Las aristas de la gráfica Δ^* pueden ser etiquetadas de tal manera que Δ^* es isomorfa a la gráfica de Cayley del grupo $H \times H$, donde

$$H := \langle a, b, c : a^2 = b^2 = c^2 = (abc)^2 = Id \rangle.$$

Primero veremos que las aristas de la gráfica Δ^* se pueden colorear con seis colores diferentes $\{1, \dots, 6\}$, tal que si dos aristas inciden en el mismo vértice, entonces sus respectivos colores son diferentes. A partir de este hecho, definiremos el grupo $H \times H$ y concluiremos que su gráfica de Cayley respecto a cierto conjunto de generadores es isomorfa a la gráfica Δ^* .

Coloreando las aristas de la gráfica Δ^ con seis colores.* Cualquier vértice de la gráfica Δ^* es de grado seis. Adicionalmente, los conjuntos $E(\Delta^*)$ y $E(\Delta)$ están en correspondencia biunívoca natural, es decir a la arista e de $E(\Delta)$ le corresponde la arista (U, V) de $E(\Delta^*)$ donde la

intersección de las caras U y V es e . Consideramos U una cara del mapa \mathcal{M} y llamémosla la *cara base*. La frontera de U está conformada por seis aristas, ordenémoslas de manera cíclica (en sentido de las manecillas del reloj) y asignémosle a cada una el color $1, \dots, 6$ respectivamente. Luego, consideramos las caras del mapa \mathcal{M} tal que la interseccionarlas con la cara base es una arista. Análogamente, a cada una de las seis aristas de la frontera de cada una de las caras que comparten una arista con la cara base, les asignamos uno de los seis colores $\{1, \dots, 6\}$ respetando el orden cíclico módulo seis (como se muestra en la Figura 4.12), tal que el color asignado a la arista que comparten con la cara base U sea el mismo. El proceso descrito anteriormente, ahora lo repetimos con las caras del mapa \mathcal{M} tal que sus respectivas fronteras intersectadas con caras que intersectan en una arista a alguna de las caras con colores asignados, y así sucesivamente. Dado que los vértices de la gráfica Δ son de grado cuatro y el proceso descrito anteriormente nos

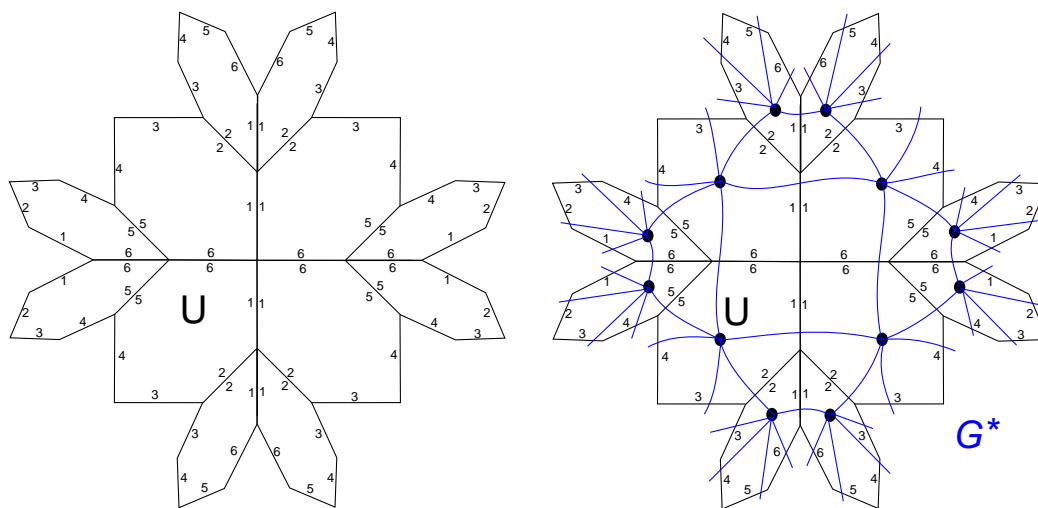


Figura 4.12: Aristas de doce componentes conexas de $S \setminus G$ con sus respectivos colores
 Imagen de Miguel Raggi Pérez, tomada de [7]

produce un coloreado con seis colores en las aristas de la gráfica Δ , tal que las aristas opuestas incidentes al vértice $v \in V(\Delta)$ tienen el mismo color asignado, entonces concluimos que con seis colores diferentes podemos colorear las aristas de Δ^* tal que si dos aristas inciden en el mismo vértice, entonces sus respectivos colores son diferentes.

Definición del grupo $H \times H$. Para cada $i \in \{1, \dots, 6\}$, al color i le hacemos corresponder el símbolo a_i . Fijemos un punto en cada cara del mapa \mathcal{M} . Para cualesquiera dos elementos $[z_U]$ y $[z_W]$ en las caras U y V del mapa \mathcal{M} respectivamente, existe una trayectoria γ en $S \setminus i(V(\Delta))$ que los une. Entonces a γ le asociamos la palabra $a_{i_1}a_{i_2}\dots a_{i_n}$ con letras en el conjunto $\{a_1, \dots, a_6\}$, la cual significa que γ atravesó (de manera ordenada) primero por una trayectoria con color asignado i_1 , luego, por una trayectoria con color asignado i_2 y así sucesivamente, hasta que finalmente, atravesó por una trayectoria con color asignado i_n . Puede existir γ' otra trayectoria (que una a los puntos $[z_U]$ y $[z_w]$) diferente a γ tal que su respectiva palabra asociada sea diferente a la de γ .

Apoyándonos en la anterior observación y las Ecuaciones (4.11) y (4.12) denotamos mediante G' al grupo libre generado por los elementos del conjunto $\{a_1, \dots, a_6\}$ y con las relaciones

siguientes:

1. La relación que proviene de la trayectoria γ que inicia en una cara y luego, regresa a la cara donde partió cruzando la misma arista con el color asignado

$$a_i^2 = Id.$$

2. La relación que proviene de la trayectoria γ la cual inicia en una cara C_0 y regresa a C_0 cruzando las cuarto aristas incidentes a un vértice de C_0

$$a_i a_{i+1} = a_{i+1} a_i \text{ para cada } i \in \{1, \dots, 6\}.$$

3. Para cada $i \in \{1, \dots, 6\}$, la relación $a_i a_{i+3} = a_{i+3} a_i$, que se sigue de la igualdad (4.11).

4. La relación $(a_1 a_3 a_5)^2 = (a_2 a_4 a_6)^2 = Id$, que se sigue de la igualdad (4.12).

Debido a la manera en que les asignamos los colores a las aristas de la gráfica Δ^* , las dos primeras relaciones del grupo G' provienen de la teselación regular con tipo de Schläfli $\{6, 4\}$ del plano Hiperbólico y las dos restantes provienen de las Ecuaciones (4.11) y (4.12). Así concluimos que Δ^* es homeomorfa a la gráfica de Cayley de G' con respecto a $\{a_1, \dots, a_6\}$.

Dado que los elementos a_i y a_j conmutan siempre y cuando i y j tienen paridades opuestas, entonces este grupo G' es isomorfo a $H \times H$ donde

$$H := \langle a, b, c : a^2 = b^2 = c^2 = (abc)^2 = Id \rangle.$$

- El espacio de fines de la gráfica $Cay(H, \{a, b, c\})$ es de un sólo fin.

La gráfica Υ asociada a la teselación regular con tipo de Schläfli $\{6, 3\}$ del plano Euclidiano tiene un sólo fin (véase Figura 4.13). Veremos que la gráfica $Cay(H, \{a, b, c\})$ es isomorfa a Δ . Para ello, basta mostrar que para cada vértice v de la gráfica de Cayley, existen exactamente tres hexágonos que contienen a v y la intersección de cualesquiera dos diferentes hexágonos es una arista.

Las siguientes tres sucesiones finitas de vértices

$$\begin{aligned} \gamma_1 &:= (Id, a, ab, abc, cb, c, Id), \\ \gamma_2 &:= (Id, b, bc, bca, ac, a, Id), \\ \gamma_3 &:= (Id, c, ca, cab, ba, b, Id), \end{aligned}$$

son los únicos tres hexágonos en la gráfica $Cay(H, \{a, b, c\})$, tales que $\gamma_1 \cap \gamma_2 \cap \gamma_3 = \{Id\}$ y la intersección $\gamma_i \cap \gamma_j$ es una arista, para cada $i \neq j \in \{1, 2, 3\}$ que contienen a Id .

Por otro lado, la gráfica de Cayley es transitiva en vértice, es decir, para cada vértice v de $Cay(H, \{a, b, c\})$ las sucesiones

$$\begin{aligned} \gamma_1 v &:= (v, av, abv, abcv, cbv, cv, v), \\ \gamma_2 v &:= (v, bv, bcv, bcav, acv, av, v), \\ \gamma_3 v &:= (v, cv, cav, cabv, bav, bv, v), \end{aligned}$$

son los únicos tres hexágonos en la gráfica $Cay(H, \{a, b, c\})$, tales que $\gamma_1 v \cap \gamma_2 v \cap \gamma_3 v = \{v\}$ y la intersección $\gamma_i v \cap \gamma_j v$ es una arista, para cada $i \neq j \in \{1, 2, 3\}$. Notemos que todos los hexágonos de $Cay(H, \{a, b, c\})$ son como los que acabamos de describir y además, cada arista

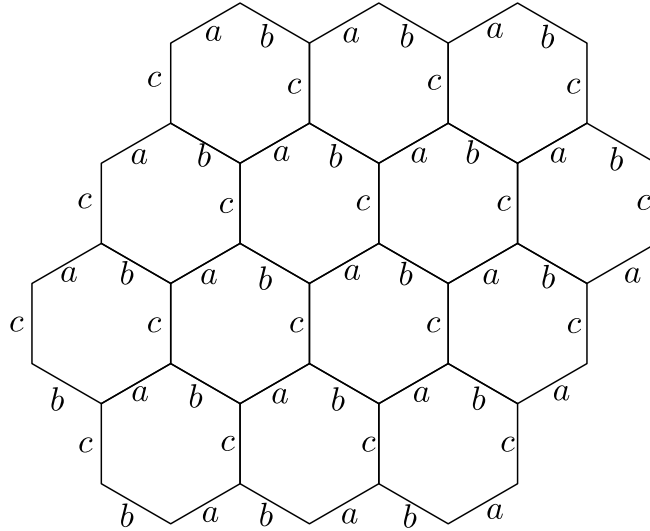


Figura 4.13: Gráfica de Cayley de H
 Imagen de Miguel Raggi Pérez, tomada de [7]

de $Cay(H, \{a, b, c\})$ está en exactamente dos hexágonos. Esto prueba que $Cay(H, \{a, b, c\})$ es isomorfa a Υ y por lo tanto, $Cay(H, \{a, b, c\})$ es de un sólo fin.

- El espacio de fines de la gráfica de Cayley de $H \times H$ es de un sólo fin. Requerimos la definición siguiente.

Definición 4.2.5. Dadas las gráficas Δ y Δ' , la *gráfica producto* $\Delta \times \Delta'$

1. Tiene conjunto de vértices $V(\Delta \times \Delta') = V(\Delta) \times V(\Delta')$.
2. La pareja $((v, v'), (w, w'))$ es una arista si y sólo si $v = w$ y $(v', w') \in E(\Delta')$ o bien, $v' = w'$ y $(v, w) \in E(\Delta)$.

Consideremos un compacto K en $Cay(H \times H, \{a_1, \dots, a_6\})$; veamos que existe un compacto K' en $Cay(H \times H, \{a_1, \dots, a_6\})$ tal que $K \subset K'$ y el número de componentes conexas de

$$Cay(H \times H, \{a_1, \dots, a_6\}) \setminus K'$$

es uno.

Para este caso, las gráficas $Cay(H \times H, \{a_1, \dots, a_6\})$ y $Cay(H, \{a_1, a_2, a_3\}) \times Cay(H, \{a_1, a_2, a_3\})$ son isomorfas, entonces podemos suponer sin pérdida de generalidad que

$$\partial K \subset V(Cay(H, \{a_1, a_2, a_3\})) \times V(Cay(H, \{a_1, a_2, a_3\})).$$

Por otro lado, denotemos mediante

$$\pi_i : Cay(H, \{a_1, a_2, a_3\}) \times Cay(H, \{a_1, a_2, a_3\}) \rightarrow Cay(H, \{a_1, a_2, a_3\})$$

a la proyección i -ésima, para cada $i \in \{1, 2\}$. Entonces existen dos compactos K'_1 y K'_2 en $Cay(H, \{a_1, a_2, a_3\})$ tales que $\pi_i(K) \subset K'_i$ y el subconjunto $Cay(H, \{a_1, a_2, a_3\}) \setminus K'_i$ tiene una componente conexas, para cada $i \in \{1, 2\}$. Claramente, la subgráfica producto $K'_1 \times K'_2 \subset H \times H$

es un compacto en $Cay(H \times H, \{a_1, \dots, a_6\})$, tal que $K \subset K'_1 \times K'_2$ y el número de componentes conexas de

$$Cay(H \times H, \{a_1, \dots, a_6\}) \setminus K'_1 \times K'_2$$

es uno.

- La superficie S tiene un solo fin. Consideremos K un compacto en S y veamos que existe K' un compacto en S tales que $K \subset K'$ y el número de componentes conexas de $S \setminus K'$ es uno.

Siguiendo la Observación 4.2.1, el subconjunto $K_M := \{x \in \Delta^* : f(x) \in K\}$ es un compacto en la gráfica Δ^* . Dicha gráfica tiene un solo fin, entonces existe K'_M un compacto en Δ^* tales que $K_M \subset K'_M$ y el número de componentes conexas de $\Delta^* \setminus K'_M$ es uno. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\partial K'_M \subset V(\Delta^*)$. Claramente, el compacto K' de S formado por la unión de las caras que representan a los vértices de la gráfica Δ^* que se encuentran en el compacto K'_M , satisface que $K \subset K'$ y el número de componentes conexas de $S \setminus K'$ es uno.

- La superficie S es de género infinito. Siguiendo el Lema 4.1.1 basta probar que la superficie S contiene una subsuperficie de género mayor o igual a uno.

Procederemos por contradicción. Supongamos que S es de género cero, es decir, la superficie S es homeomorfa al plano.

Consideremos cuatro hexágonos como en la Figura 4.10 e identifiquemos los lados con etiqueta A como nos indica la igualdad (4.11) y obtenemos el subconjunto $U \subset S$ (véase Figura 4.14). Dado que S no tiene género entonces U homeomorfo a un disco con un hoyo con frontera del plano Euclidiano, entonces la subgráfica $\Lambda \subset \Delta$ con

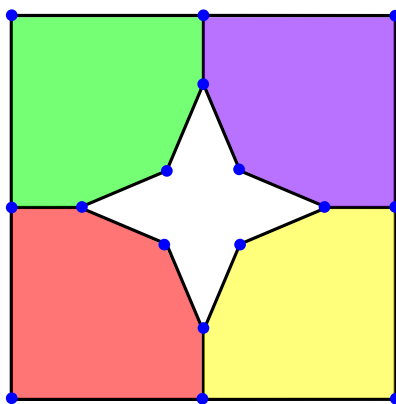


Figura 4.14: *Subconjunto $U \subset S$*
 Imagen de Miguel Raggi Pérez, tomada de [7]

1. Conjunto de vértices $V(\Lambda) := \{v \in V(\Delta) : f(v) \in U\}$.
2. Conjunto de aristas $E(\Lambda) := \{e \in E(\Delta) : f(e) \in U\}$,

es una gráfica conexa de orden finito que se encaja en el plano Euclidiano, $h : \Lambda \hookrightarrow \mathbb{R}^2$. Siguiendo la Fórmula de Euler para las gráficas planas [4, Teorema 9.2] se tiene que el número de vértices menos el número de aristas más el número de caras de Λ es dos, es decir,

$$|V(\Lambda)| - |E(\Lambda)| + |F(\Lambda)| = 2. \tag{4.13}$$

Sin embargo, los hechos siguientes ocurren en Λ :

1. La gráfica Λ sólo tiene cuatro vértices de grado tres, cuatro vértices de grado dos y sus restantes vértices son de grado cuatro.
2. El subconjunto $\mathbb{R}^2 \setminus h(\Lambda)$ está formado por una cantidad finita de caras. Una de estas caras es homeomorfa a un disco menos un punto y su respectiva frontera está conformada por ocho aristas. Las otras caras son homeomorfas a un disco y sus respectivas fronteras están conformadas por seis aristas (véase Figura 4.14).
3. Denotamos mediante m la cantidad de caras de $\mathbb{R}^2 \setminus h(\Lambda)$ homeomorfas a un disco.

Por otro lado, la cardinalidad del conjunto de aristas de Λ es la suma de la cantidad de aristas que conforma cada cara sobre dos

$$|E(\Lambda)| = \frac{6m + 8}{2}.$$

Sabemos que la cantidad de aristas de una gráfica es la suma de los grados de los vértices sobre dos. En la gráfica Λ hay exactamente cuatro vértices de grado dos y cuatro vértices de grado tres, entonces

$$|E(\Lambda)| = \frac{6m + 8}{2} = \frac{4k + 8 + 12}{2}, \quad (4.14)$$

donde k es la cardinalidad del conjunto de vértices de grado cuatro de la gráfica Λ . De la igualdad (4.14) se obtiene que

$$m = \frac{2k + 6}{3}. \quad (4.15)$$

Reemplazamos en la Ecuación (4.13) y obtenemos que

$$\begin{aligned} 2 &= |V(\Lambda)| - |E(\Lambda)| + |F(\Lambda)| = (k + 8) - \left(\frac{4k + 8 + 12}{2} \right) + (m + 1) \\ &= -\frac{k}{3} + 1. \end{aligned}$$

Claramente, esto es una contradicción porque k es un número positivo mayor igual a seis. Por lo tanto, la superficie S es de género infinito. □

4.2.4. Grupos de Coxeter y la propiedad FA

El grupo de automorfismos de un mapa regular es isomorfo al cociente de un *grupo de Coxeter* [9]. Brevemente, mostraremos que el espacio de fines de dichos grupos es un solo punto. Para ello nos ayudaremos del concepto de la *propiedad FA* definida por *Serre, J. -P.* [60].

Definición 4.2.6. [9, p.117]. Un grupo de Coxeter es un grupo con la representación siguiente

$$\mathfrak{C} := \langle h_0, \dots, h_{n-1} : (h_i h_j)^{m_{ij}} = Id \rangle,$$

donde $m_{ii} = 1$ y $\infty \geq m_{ij} \geq 2$, para cada $i \neq j \in \{1, \dots, n-1\}$.

Consideremos \mathcal{M} un mapa regular con tipo de Schläfli $\{p, q\}$ y el grupo de Coxeter

$$\mathfrak{C}_{[p,q]} = \langle h_0, h_1, h_2 : h_i^2 = (h_0 h_2)^2 = (h_0 h_1)^p = (h_1 h_2)^q = Id \rangle.$$

Siguiendo la Proposición 4.1.2, la función

$$\begin{aligned} \varphi &: \mathfrak{C}_{[p,q]} \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{M}) \\ h_i &\rightarrow \rho_i \end{aligned}$$

para cada $i \in \{0, 1, 2\}$, es un morfismo sobreyectivo de grupos. Aplicando el Primer teorema de isomorfismo de grupos obtenemos que los grupos $\mathfrak{C}_{[p,q]}/\ker \varphi$ y $\text{Aut}(\mathcal{M})$ son isomorfos. Dicho de otra manera, el grupo de automorfismos de un mapa regular es un grupo cociente de un grupo de Coxeter.

Por otro lado, consideremos α una acción *sin inversión*³ de un grupo numerable G en un árbol T ,

$$\alpha : G \times T \rightarrow T.$$

Esta acción envía vértices en vértices, aristas en aristas.

El conjunto de puntos fijos de G en T es

$$T^G := \langle x \in V(T) : gx = x \text{ para cada } g \in G \rangle.$$

En este caso, si T^G es no vacío, entonces la subgráfica inducida por T^G es un subárbol de T .

Definición 4.2.7. [60]. Un grupo numerable G tiene la *propiedad FA*, si T^G es no vacío para cualquier árbol T en el cual actúa G sin inversion.

A continuación enunciaremos un teorema que describe las propiedades que poseen los grupos que tienen la propiedad *FA*. Seguidamente, probaremos que el espacio de fines del grupo de automorfismos de un mapa regular es de un solo fin.

Teorema 4.2.4. [60, Teorema 15]. Consideremos G un grupo numerable. Entonces G tiene la propiedad *FA* si y solo si G satisface las propiedades siguientes:

1. No es amalgamado.
2. No tiene grupos cocientes isomorfos a \mathbb{Z} .
3. Es finitamente generado.

Adicionalmente, todo grupo cociente de un grupo con la propiedad *FA* tiene la propiedad *FA* (véase [60, p.60]). En particular, cualquier grupo de Coxeter tiene la propiedad *FA* [10, p.452]).

Lema 4.2.2. El espacio de fines de la gráfica de Cayley del grupo de automorfismos de un mapa regular es de cardinalidad cero o uno.

Demostración. Consideremos \mathcal{M} un mapa regular y $\text{Aut}(\mathcal{M})$ su respectivo grupo de automorfismos. Siguiendo el Teorema 1.2.1 tenemos que la cardinalidad del espacio de fines de la gráfica de Cayley de $\text{Aut}(\mathcal{M})$ es cero, uno, dos o infinito.

Procederemos por contradicción y supondremos que dicho espacio de fines es de cardinalidad mayor estricto que uno. El Teorema de Stallings (véase [63] y [64]) indica si el espacio de fines de la gráfica de Cayley de $\text{Aut}(\mathcal{M})$ es mayor estricto que uno, entonces el grupo de automorfismos $\text{Aut}(\mathcal{M})$ del mapa regular \mathcal{M} es isomorfo a alguno de los grupos siguientes:

³La acción α es una inversión si al orientar el árbol T dicha orientación no cambia bajo la acción de G en T .

1. El producto libre amalgamado $A *_C B$, donde C tiene índice finito mayor o igual a dos en A y en B (con uno de estos índice mayor o igual a tres).
2. Una extensión HNN $A *_\phi$, donde ϕ es un isomorfismo entre un subgrupo que tiene índice mayor o igual a dos en A .

Dado que cualquiera de los grupos $A *_C B$ y $A *_\phi$ es amalgamado (véase [59, p.144]), entonces $Aut(\mathcal{M})$ también lo es. Claramente, esto es una contradicción porque hemos encontrado un grupo amalgamado con la propiedad FA. Si G es un grupo con subconjunto generador finito H y que satisface el inciso 1, pudiera ser que la cardinalidad del espacio de fines de $Cay(G, H)$ es dos o infinita. Análogamente, si satisface el inciso 2, pudiera ser que la cardinalidad del espacio de fines de $Cay(G, H)$ es dos o infinita (véase [59, p. 180])

De esta manera concluimos que la gráfica de Cayley del grupo de automorfismos de un mapa regular es de cardinalidad cero o uno. □

Corolario 4.2.2. El espacio de fines de la gráfica de Cayley del grupo de automorfismos de un mapa regular es de cardinalidad cero si y solo si la superficie donde se realiza dicho mapa regular es compacta.

El espacio de fines de la gráfica de Cayley del grupo de automorfismos de un mapa regular es de cardinalidad uno si y solo si la superficie donde se realiza dicho mapa regular es no compacta.

4.2.5. Prueba del Teorema 4.2.1

Consideremos \mathcal{M} un mapa regular que se realiza en S , una superficie no compacta y orientable. Mostraremos que S es homeomorfa al plano o al monstruo del lago Ness. En adelante denotaremos mediante $Cay(Aut(\mathcal{M}))$ a la gráfica de Cayley del grupo de automorfismos del mapa regular \mathcal{M} con respecto al conjunto generador $\{\rho_0, \rho_1, \rho_2\}$.

Plan de la prueba.

Paso 1. Veremos que la superficie S es de un sólo fin siguiendo esta estrategia.

- Definiremos un encaje

$$i : Cay(Aut(\mathcal{M})) \hookrightarrow S.$$

- Apoyándonos en el encaje i , construiremos i_* una función biyección entre el espacio de fines de la gráfica de Cayley del grupo de automorfismos del mapa regular \mathcal{M} y la superficie S , es decir,

$$i_* : Ends(Cay(Aut(\mathcal{M}))) \rightarrow Ends(S),$$

- Luego, siguiendo el Lema 4.2.2 concluiremos que el espacio de fines de S es un solo punto.

Paso 2. Finalmente, ayudándonos del Teorema 1.1.1 y del Lema 4.1.1 deduciremos que S es, efectivamente, el plano o el monstruo del lago Ness.

Paso 1. La superficie S es de un solo fin.

- Definición del encaje

$$i : Cay(Aut(\mathcal{M})) \hookrightarrow S.$$

Consideremos la superficie S con la triangulación inducida por el mapa \mathcal{M} (véase Subsección 4.1.2) y fijamos una bandera Φ en S junto con su respectiva tripleta asociada (v, e, C) . Ahora, escogamos un punto x en el interior de Φ . Entonces renombramos a los elementos Φ y x mediante Φ_{Id} y x_{Id} , respectivamente.

Para cada bandera $\Phi' \neq \Phi$ de S consideramos su respectiva tripleta asociada $(v', e', C') \in \mathcal{F} \setminus \{(v, e, C)\}$ y escogemos un punto x' en el interior de Φ' . Siguiendo la Proposición 4.1.1, para cada bandera $\Phi' \neq \Phi$ de S , existe un único elemento $f \in \text{Aut}(\mathcal{M})$ tal que

$$f(v, e, c) = (v', e', C').$$

Entonces renombramos a los elementos Φ' y x' mediante Φ_f y x_f , respectivamente.

Dado que los conjuntos \mathcal{F} y $\text{Aut}(\mathcal{M})$ están en correspondencia biunívoca, entonces la función

$$\begin{aligned} h : V(\text{Cay}(\text{Aut}(\mathcal{M}))) &\rightarrow S \\ f &\rightarrow x_f \end{aligned} \quad (4.16)$$

está bien definida y es inyectiva.

La tripleta asociada al elemento Φ_{ρ_j} en S corresponde a la bandera j -adyacente de la tripleta asociada a Φ_{Id} de S , para cada $j \in \{0, 1, 2\}$ respectivamente. Claramente, las tripletas asociadas a los elementos $\Phi_{f\rho_0}$, $\Phi_{f\rho_1}$ y $\Phi_{f\rho_2}$ en S corresponden a las banderas adyacentes de la tripleta asociada a Φ_f de S , para cada $f \in \text{Aut}(\mathcal{M})$ (véase Figura 4.15).

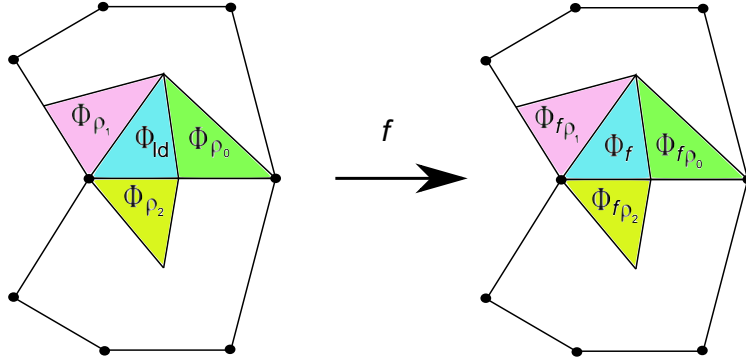


Figura 4.15: Banderas adyacentes de la tripleta asociada a Φ_f

Ahora, para cada arista (f, g) de $\text{Cay}(\text{Aut}(\mathcal{M}))$ (el elemento g se escribe como $g = f\rho_j$, para algún $j \in \{0, 1, 2\}$) consideramos una trayectoria simple sin autointersecciones

$$\gamma_f^j : [0, 1] \rightarrow S$$

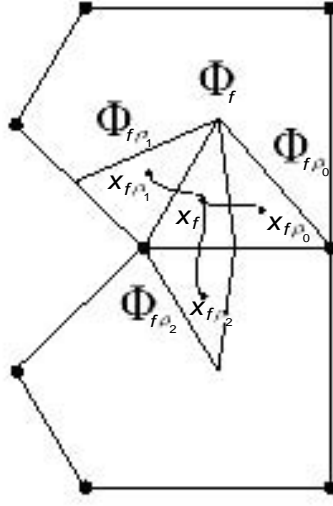
que satisface las propiedades siguientes (véase Figura 4.16),

1. Sus extremos corresponden a los puntos x_f y $x_{f\rho_j}$, es decir, $\gamma_f^j(0) = x_f$ y $\gamma_f^j(1) = x_{f\rho_j}$.
2. La trayectoria γ_f^j interseca a la frontera común de Φ_f y $\Phi_{f\rho_j}$ en un solo punto.
3. La intersección $\gamma_f^i \cap \gamma_f^j$ es el punto x_f , para cada $i \neq j \in \{0, 1, 2\}$.

Podemos suponer sin pérdida de generalidad que

$$\gamma_f^j : [f, f\rho_j] \rightarrow S$$

son tales que $\gamma_f^j(f) = x_f$ y $\gamma_f^j(f\rho_j) = x_{f\rho_j}$, para cada $j \in \{0, 1, 2\}$.


 Figura 4.16: Trayectorias γ_f^j , para cada $j \in \{0, 1, 2\}$

La función

$$i : \text{Cay}(\text{Aut}(\mathcal{M})) \hookrightarrow S, \quad (4.17)$$

definida mediante $i(f) := h(f)$ para cada vértice f de la gráfica $\text{Cay}(\text{Aut}(\mathcal{M}))$ y $i((f, f\rho_j)) := \gamma_f^j((f, f\rho_j))$ para cada arista $(f, f\rho_j)$ de la gráfica de $\text{Cay}(\text{Aut}(\mathcal{M}))$, es un encaje.

• Construcción la biyección i_* . Para obtener dicha función son necesarias las siguientes observaciones:

Observación 4.2.2. Dado U un abierto conexo con frontera compacta en la gráfica de Cayley del grupo de automorfismos del mapa \mathcal{M} , podemos suponer sin pérdida de generalidad que la frontera de U está contenida en el conjunto de vértices de la gráfica de Cayley del grupo de automorfismos del mapa \mathcal{M} , es decir, $\partial U \subset V(\text{Cay}(\text{Aut}(\mathcal{M})))$. Entonces definimos

$$\tilde{U} := \text{Int} \left(\bigcup_{f \in \overline{U} \cap V(\text{Cay}(\text{Aut}(\mathcal{M})))} \Phi_f \right).$$

Nótese que \tilde{U} es un abierto conexo de frontera compacta en S .

Observación 4.2.3. Dados U_1 y U_2 dos subconjuntos abiertos conexos con frontera compacta de la gráfica de Cayley del grupo de automorfismos del mapa \mathcal{M} tal que $\partial U_1, \partial U_2 \subset V(\text{Cay}(\text{Aut}(\mathcal{M})))$. Entonces se tienen las propiedades siguientes:

1. Si $U_1 \supset U_2$ entonces $\tilde{U}_1 \supset \tilde{U}_2$.
2. Si $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ entonces $\tilde{U}_1 \cap \tilde{U}_2 = \emptyset$.

Siguiendo las dos anteriores observaciones, a cada fin $[U_n]_{n \in \mathbb{N}}$ de la gráfica de Cayley del grupo de automorfismos del mapa \mathcal{M} le hacemos corresponder el fin $[\tilde{U}_n]_{n \in \mathbb{N}}$ en S . Entonces veremos que la función

$$\begin{aligned} i_* : \text{Ends}(\text{Cay}(\text{Aut}(\mathcal{M}))) &\rightarrow \text{Ends}(S) \\ [U_n]_{n \in \mathbb{N}} &\rightarrow [\tilde{U}_n]_{n \in \mathbb{N}} \end{aligned} \quad (4.18)$$

es una biyección.

La función i_ es inyectiva.* Dados dos fines distintos $[U_n]_{n \in \mathbb{N}}$ y $[V_n]_{n \in \mathbb{N}}$ en la gráfica de Cayley del grupo de automorfismos del mapa \mathcal{M} , existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $U_n \cap V_n = \emptyset$. Siguiendo la Observación 4.2.3 tenemos que la intersección $\tilde{U}_n \cap \tilde{V}_n = \emptyset$. Por lo tanto, los fines $i_*([U_n]_{n \in \mathbb{N}}) = [\tilde{U}_n]_{n \in \mathbb{N}}$ y $i_*([V_n]_{n \in \mathbb{N}}) = [\tilde{V}_n]_{n \in \mathbb{N}}$ son diferentes.

La función i_ es sobreyectiva.* Consideremos $[\tilde{U}_n]_{n \in \mathbb{N}}$ un fin de la superficie S . Para cada $n \in \mathbb{N}$ denotamos mediante \check{U}_n a la unión de las banderas del mapa \mathcal{M} que intersectan la cerradura de \tilde{U}_n . Nótese que el interior de \check{U}_n en S es un abierto conexo con frontera compacta tal que $Int(\check{U}_n) \supset Int(\check{U}_{n+1})$. Además los fines $[\tilde{U}_n]_{n \in \mathbb{N}}$ y $[Int(\check{U}_n)]_{n \in \mathbb{N}}$ son equivalentes.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, el subconjunto

$$i_*^{-1} \left(i_* \left(Cay(Aut(\mathcal{M})) \cap Int(\check{U}_n) \right) \right) \subset Cay(Aut(\mathcal{M})) \quad (4.19)$$

es abierto de $Cay(Aut(\mathcal{M}))$ con frontera compacta cuya cerradura en $Cay(Aut(\mathcal{M}))$ no es compacta. Si el abierto descrito en la expresión (4.19) no es conexo, entonces solo una de sus componentes conexas es no acotada *i.e.*, la cerradura de dicha componente conexa no es compacta. Esto ocurre porque el espacio de fines de $Cay(Aut(\mathcal{M}))$ es un solo punto. Denotemos mediante U_n a la componente conexa no acotada de $i_*^{-1}(i_*(Cay(Aut(\mathcal{M})) \cap Int(\check{U}_n)))$. Claramente, $U_n \supset U_{n+1}$ y $[U_n]_{n \in \mathbb{N}}$ es un fin de la gráfica de Cayley de $Aut(\mathcal{M})$ que satisface $i_*[U_n]_{n \in \mathbb{N}} = [\tilde{U}_n]_{n \in \mathbb{N}}$.

- La superficie S es de un solo fin. Dado que el espacio de fines de la gráfica de Cayley del grupo de automorfismos de un mapa regular, que se realiza en una superficie no compacta, es un solo punto (véase Lema 4.2.2) y la función i_* es una biyección, concluimos que S es de un solo fin.

Paso 2. Si la superficie S no tiene género, se sigue del Teorema 1.1.1 que S es el plano. Pero si S tiene género, entonces por el Lema 4.1.1, se tiene que S es el monstruo del lago Ness.

Símbolos especiales

2^ω	:=	Conjunto de Cantor.
S	:=	Superficie, translación, mansa.
$GL_+(2, \mathbb{R})$:=	Grupo general lineal con determinante positivo.
$SL(2, \mathbb{Z})$:=	Grupo especial lineal con determinante positivo.
$(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$:=	Prefin.
$[U_n]_{n \in \mathbb{N}}$:=	Fin.
$Ends(S)$:=	Espacio de fines de S .
$Ends_\infty(S)$:=	Conjunto de fines de género infinito de S .
U^*	:=	Básico en la topología de $Ends(S)$.
$g(U)$:=	Género de U .
$\chi(U)$:=	Característica de Euler de U .
G	:=	Subgrupo de $GL_+(2, \mathbb{R})$.
H	:=	Subconjunto generador de G .
$Cay(G, H)$:=	Gráfica de Cayle de G con respecto a H .
Δ	:=	Gráfica.
$V(\Delta)$:=	Conjunto de vértices de Δ .
$E(\Delta)$:=	Conjunto de aristas de Δ .
$Isom(\Delta)$:=	Grupo de isomorfismos de Δ .
Ord	:=	Clase de los números ordinales.
X^α	:=	α -ésima derivada iterada de Cantor Bendixson de X .
(α, n)	:=	Sistema característico.
$T2^\omega$:=	Gráfica del árbol binario de Cantor.
T_X	:=	Árbol con espacio de fines X .
\mathfrak{T}_X	:=	Familia numerable de trayectorias infinitas.
μ	:=	Métrica Riemanniana.
TS	:=	Haz tangente.
δ_{ij}	:=	Delta de Kronecker.
$K(x)$:=	Curvatura.
$Sing(S)$:=	Conjunto de puntos singulares de S .
\widehat{S}	:=	Completación métrica de S .
Y_∞	:=	Conjunto de puntos cónicos de ángulo infinito de S .

T_1S	:=	Haz tangente unitario.
V_θ	:=	Campo de vectores.
$Hol(S)$:=	Conjunto de vectores de holonomía de S .
$Aff_+(S)$:=	Grupo de difeomorfismos afines que preservan la orientación de S .
$\Gamma(S)$:=	Grupo de Veech de S .
$T_{(\varepsilon,\rho)}$:=	Toro plano.
$Isom(\mathbb{H})$:=	Isometrías del plano Hiperbólico.
$\Delta(p, q, r)$:=	Grupo triangular.
P	:=	$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & s \end{pmatrix} \in GL_+(2, \mathbb{R}) : t \in \mathbb{R} \text{ y } s > 0 \right\}$.
P'	:=	$\langle B, -Id : B \in P \rangle$.
ω	:=	1- forma holomorfa.
ΩM_g	:=	Espacio fibrado sobre el espacio móduli de S_g .
$\Omega M_g(d_1, \dots, d_m)$:=	Estrato.
m	:=	Marca.
$m \sim_{\text{pegar}} m'$:=	Pegado de marcas.
$Espina(S)$:=	Espina de S .
S_{fund}	:=	Superficie fundamental.
\mathfrak{P}	:=	Puzzle.
$S_{\mathfrak{P}}$:=	Superficie generada por un puzzle.
$[U_n^{Id}]_{n \in \mathbb{N}}$:=	Fin distinguido.
\mathcal{M}	:=	Mapa.
$Aut(\mathcal{M})$:=	Grupo de automorfismos del mapa \mathcal{M} .
$Mon(\mathcal{M})$:=	Grupo de monodromía del mapa \mathcal{M} .
Φ	:=	Bandera.
\mathcal{F}	:=	Conjunto de banderas.
$\{p, q\}$:=	Tipo de Schläfli.
$\widehat{\mathcal{M}}$:=	Mapa cubriente.
$Sim(\mathcal{M})$:=	Grupo de simetrías del mapa.
G^*	:=	Gráfica dual.
\mathfrak{C}	:=	Grupo de Coxeter.

Bibliografía

- [1] Arredondo, A., Ramírez, C. & Valdez, F. (2015). *On infinite regular and chiral maps*. <http://arxiv.org/abs/1506.01981>.
- [2] Beardon, A. F. (1983). *The Geometry of Discrete Groups*. Graduate Text in Mathematics. New York: Springer.
- [3] Blis, G. A. (2004) *Algebraic Functions*. New York: Dover.
- [4] Bondy, J. A. & Murty, U. S. R. (1976). *Graph Theory with Applications*. New York: American Elsevier Publishing Co., Inc.
- [5] Brambila, L. y Muciño, J. (1998). *Geometría de superficies de Riemann y haces lineales holomorfos*. Aportaciones Matemáticas, Comunicaciones, vol. 22. México: Soc. Mat. Mex. 178-207.
- [6] Conway, J. H., Burgiel, H. & Goodman-Strauss, C. (2008). *The Symmetries of Things*. Wellesley, Massachusetts: A K Peters, Ltd.
- [7] Coulbois, T., Pellicer, D., Raggi, M., Ramírez, C. & Valdez, F. (2015). *The topology of the minimal regular cover of the Archimedean tessellations*. *Adv. Geom.* 15(1), 77-91.
- [8] Coxeter, H. S. M. (1968). *Regular Skew Polyhedra in Three and Four Dimensions and Their Topological Analogues*. Twelve Geometric Essays. London-Amsterdam: Southern Illinois University Press, Carbondale, Ill.; Feffer & Simons, Inc. 75-105
- [9] Coxeter, H. S. M. & Moser, W. O. J. (1980). *Generators and Relations for Discrete Groups*. (Fourth edition). *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete [Results in Mathematics and Related Areas]*, vol. 14. Berlin-New York: Springer-Verlag.
- [10] Davis, M. W. (2007). *The Geometry and Topology of Coxeter Groups*. London Mathematical Society Monographs Series, vol. 32. Princenton, New Jersey: Princenton University Press.
- [11] Delecroix, V., Hubert, P. & Lelièvre, S. (2014). *Diffusion for the periodic wind-tree model*. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*. 47(6), p. 1085–1110.
- [12] Diestel, R. (2010). *Graph Theory*. (Fourth edition). Graduate Texts in Mathematics, vol. 173. New York: Springer.
- [13] Do Carmo, M. P. (1976). *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, Inc.
- [14] Do Carmo, M. P. (1992). *Riemannian Geometry*. Mathematics: Theory & Applications. Boston: Birkhäuser Boston, Inc.
- [15] Dugundji, J. (1966). *Topology*. Boston: Allyn and Bacon, Inc.
- [16] Engelking, R. (1989). *General Topology*. Sigma Series in Pure Mathematics, vol. 6. Berlin: Heldermann Verlag Berlin.
- [17] Forster, O. (1981). *Lecture on Riemann Surfaces*. Graduate Texts in Mathematics, vol. 81. New York: Springer-Verlag.
- [18] Fox, R. H. & Kershner, R. B. (1936). *Concerning the transitive properties of geodesics on a rational polyhedron*. *Duke Math. J.* 2(1), 147–150.

- [19] Freudental, H. (1931). *Über die Enden topologischer Räume und Gruppen*. Math. Z. 33(1), 692–731.
- [20] Ghys, É. (1995). *Topologie des feuilles génériques*. Ann. of Math. (2). 141(2), 387–422.
- [21] Geoghegan, R. (2008). *Topological Methods in Group Theory*. Graduate Texts in Mathematics, vol. 243. New York: Springer.
- [22] Grünbaum, B. & Shephard, G. C. (1987). *Tilings and Patterns*. New York: W. H. Freeman and Company.
- [23] Harary, F. (1969). *Graph theory*. Reading, Massachusetts-Menlo Park, California- London-Don Mills, Ontario: Addison-Wesley Publishing Co., Inc.
- [24] Hernández, F. (1998). *Teoría de Conjuntos, Una introducción*. Aportaciones Matemáticas, vol. 13. México: Soc. Mat. Mex.
- [25] Hooper, W. P. (2014). *An infinite surface with the lattice property I: Veech groups and coding geodesics*. Trans. Amer. Math. Soc. 366(5), p. 2625–2649.
- [26] Hrbacek, K. & Jech, T. (1999). *Introduction to Set Theory*. (Third edition). Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, vol. 220. New York: Marcel Dekker, Inc.
- [27] Hubert, P. & Schmidt, T. A. (2006). *An introduction to Veech surfaces*. Handbook of dynamical systems, vol. 1B. Amsterdam: Elsevier B. V. 501–526.
- [28] Hubert, P. & Schmithüsen, G. (2010). *Infinite translation surfaces with infinitely generated Veech groups*. J. Mod. Dyn. 4(4), p. 715–732.
- [29] Hurwitz, A. (1893). *Über algebraische Gebilde mit Eindeutigen Transformationen in sich*. Math. Annal. 41(3), 403–442.
- [30] Jones, G. A. & Singerman, D. (1978). *Theory of Map on Orientable Surfaces*. Proc, Lond. Math. Soc.3(37) p. 273–307.
- [31] Katok, A. B. & Zemlyakov, A. N. (1975). *Topological transitivity of billiards in polygons*. Math. Notes. 18, 760–764.
- [32] Katok, S. (1992). *Fuchsian Groups*. Mathematics: Theory & Applications. Chicago: The University of Chicago Press.
- [33] Kerckhoff, S., Masur, H. & Smillie, J. (1986). *Ergodicity of Billiard Flows and Quadratic Differentials*. Ann. Math. 124(2), 293–311.
- [34] KeCHRIS, A. (1994). *Classical Descriptive Set Theory*. Graduate Texts in Mathematics, vol. 156. New York: Springer-Verlag.
- [35] Kerékjártó, B. (1923). *Vorlesungen über Topologie I*. Mathematics: Theory & Applications. Berlin: Springer.
- [36] Kontsevich, M. & Zorich, A. (2003). *Connected components of the moduli space of abelian differentials with prescribed singularities*. Invent. Math.153(3), 631–678.
- [37] Lelièvre, S. (2002). *Veech surfaces associated with rational billiards*. arXiv:math/0205249.
- [38] Löh, C. (2011). *Geometric group theory, An Introduction*. NWF I-Mathematik, Universität Regensburg. Regensburg: Germany.
- [39] Massey, W. S. (1991). *A Basic Course in Algebraic Topology*. Graduate Texts in Mathematics, vol. 127. New York: Springer-Verlag.
- [40] Masur, H. & Tabachnikov, S. (2002). *Rational billiards and flat structures*. Handbook of dynamical systems, vol. 1A. Amsterdam: North-Holland. 1015–1089.
- [41] Mazurkiewicz, S. & Sierpiński, W. (1920). *Contribution à la topologie des ensembles dènombrables*. Fundamenta Mathematicae. 1, 17–27.
- [42] McMullen, P. & Schulte, E. (2002). *Abstract regular polytopes*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 92. Cambridge: Cambridge University Press.
- [43] Milnor, J. W. (1968) *Infinite cyclic coverings*. Conference on the Topology of Manifolds (Michigan State Univ., E. Lansing, Mich., 1967). Boston, Mass.: Prindle, Weber & Schmidt. 115–133.
- [44] Miranda, R. (1995). *Algebraic Curves and Riemann Surfaces*. Graduate Studies in Mathematics, vol. 5. United State of America: A. M. S.

- [45] Mixer, M., Pellicer, D. & Williams, G. (2013). *Minimal covers of the Archimedean tilings, Part II*. Electron. J. Combin. *20*(2), Paper 20, 19.
- [46] Möller, M. (2006). *Periodic points on Veech surfaces and the Mordell-Weil group over a Teichmüller curve*. Invent. Math. *165*, 633–649.
- [47] Möller, M. (2009). *Affine groups of flat surfaces*. Handbook of Teichmüller theory, vol. II. IRMA Lect. Math. Theor. Phys. *13*. Zürich: Eur. Math. Soc. 369–387.
- [48] Monson, B., Pellicer, D. & Williams, G. (2014). *Mixing and monodromy of abstract polytopes*. Trans. Amer. Math. Soc. *366* (5), p. 2651–2681.
- [49] Monson, B., Pellicer, D. & Williams, G. (2012). *The Tomotope*. Ars Math. Contemp. *5*(2), p. 355–370.
- [50] Muciño, J. (1998). *Geometría hiperbólica. Una introducción usando cálculo y variable compleja*. Aportaciones Matemáticas, Comunicaciones, vol. 21. México: Soc. Mat. Mex.
- [51] Pellicer, D. (2012). *Developments and open problems on chiral polytopes*. Ars Math. Contemp. *emph5*(2), p. 333–354.
- [52] Pellicer, D. & Williams, G. (2012). *Minimal covers of the Archimedean tilings, Part 1*. Electron. J. Combin. *19*(3), 6–37.
- [53] Phillips, A. & Sullivan, D. (1981). *Geometry of leaves*. Topology. *20*(2), 209–218.
- [54] Przytycki, P., Weitze-Schmithüsen, G. & Valdez, F. (2011). *Veech groups of Loch Ness monsters*. Ann. Inst. Fourier (Grenoble). *61*(2), 673–687.
- [55] Randecker, A. (2014). *When wild singularities of translation surfaces imply infinite genus*. <http://arxiv.org/abs/1410.1501>.
- [56] Raymond, F. (1960). *The end point compactification of manifolds*. Pacific J. Math. *10*, 947–963.
- [57] Richards, I. (1963). *On the classification of noncompact surfaces*. Trans. Amer. Math. Soc. *106*, 259–269.
- [58] Schwartz, R. E. (2011). *Mostly Surfaces*. Student Mathematical Library, vol. 60. Providence, RI: American Mathematical Society.
- [59] Scott, A. & Wall, T. (1979). *Topological methods in group theory*. Homological group theory. LMS Lecture Notes, vol. 36. Cambridge: Cambridge Univ. Press. 137–203.
- [60] Serre, J.-P. (1980). *Trees*. New York: Springer-Verlag.
- [61] Smillie, J. & Weiss, B. (2008). *Veech’s dichotomy and the lattice property*. Ergodic Theory and Dynamical Systems. *28*(6), 1959–1972.
- [62] Specker, E. (1949). *Die Erste Cohomologie gruppe von Überlagerungen und Homotopieeigenschaften drei dimensionaler Mannigfaltigkeiten*. Comm. Math. Helv. *23*, 303–333.
- [63] Stallings, J. R. (1968). *On torsion-free groups with infinitely many ends*. Ann. of Math. *88*, 312–334.
- [64] Stallings, J. R. (1971). *Group Theory and Three Dimensional Manifolds*. New Haven and London, Yale Univ. Press.
- [65] Strebel, K. (1984). *Quadratic Differentials*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)], vol. 5. Berlín: Springer-Verlag.
- [66] Valdez, F. (2009). *Infinite genus surfaces and irrational polygonal billiards*. Geom. Dedicata. *143*, 143–154.
- [67] Veech, W. A. (1989). *Teichmüller curves in moduli space, Eisenstein series and an application to triangular billiards*. Invent. Math. *97*(3), 553–583.
- [68] Vorobets, Y. B. (1996). *Plane structures and billiards in rational polygons: the Veech alternative*. Uspekhi Mat. Nauk. *51*(311), 3–42. English translation, (1996). Russian Math. Surveys. *51*(5), 779–817.
- [69] Zorich, A. (2006). *Flat Surfaces*. Frontiers in Number Theory, Physics and Geometry, vol. 1. Berlín: Springer-Verlag, 437–583.
- [70] Zorich, V. A. (2004). *Mathematical Analysis. II*. Universitext. Berlín: Springer-Verlag.

Índice alfabético

- árbol, 28
- árbol 3-regular, 32
- árbol binario de Cantor, 28
- árbol florido de Cantor, 10, 21
- Arredondo, A., 101
- atlas
 - translación, 35
- bandera
 - adyacente, 98
 - mapa, 96
- billar, 37
- campo constante, 41
- cara base, 107
- característica de Euler, 20
- cilindro plano, 46
- completación métrica, 36
- componente hiperelíptica, 50
- conexión silla, 41
- conjunto
 - bandera, 96
- conjunto numerable, 24
- Construcción K-Z, 38
- copia afín, 67
- Coulbois, T., 100
- curvas
 - hiperelípticas, 50
- curvatura, 36
- derivada de Cantor-Bendixson, 27
- desdoblamiento, 37
- difeomorfismo afín, 42
- espacio
 - completamente metrizable, 24
 - fibrado sobre el espacio móduli, 49
 - polaco, 24
- Espacio de fines, 20, 22
- espacio móduli de los toros planos, 51
- espina, 63
- estratos, 49
- estructuras
 - isomorfas, 35
- fin, 20
 - no obvio, 75
- fin distinguido, 72
- fin plano, 20
- flujo geodésico, 41
- flujo geodésico periódico, 51
- Fox, R., 37
- fundamental
 - pieza, 59
 - superficie, 59
- género, 20
- generadores distinguidos del mapa, 98
- Ghys, E., 10, 21
- gráfica
 - dual, 106
 - producto, 109
- gráfica de Cayley, 22
- grado
 - cero, 48
- grupo
 - (p, q, r) -triangular, 47
 - automorfismo del mapa, 95
 - conforme de tipo (α, β, γ) , 47
 - Coxeter, 97, 111

- de tipo (α, β, γ) , 47
- difeomorfismos afines, 43
- libre, 22
- monodromía del mapa, 103
- preautomorfismos del mapa, 94
- simetrías del mapa, 101
- Veech, 43

- haz tangente, 40
- haz tangente unitario, 41
- Hernández, F., 24
- Hurwitz, A, 44

- isomorfismo
 - translación, 35

- Katok, A., 36
- Kershner, R., 37

- métrica Riemanniana, 36
- módulo, 51
- mapa, 93
 - arista, 93
 - cara, 93
 - cubriente, 103
 - cubriente mínimo regular, 103
 - isomorfo, 94
 - periódico, 102
 - regular, 97
 - simétrico, 101
 - vértice, 93
- marca, 56
 - paralela, 57
 - pegado, 57
- Mazurkiewicz, S., 24
- Mixer, M., 100
- monstruo del Lago Ness
 - decorado, 70
- monstruo del lago Ness, 9, 21
 - amortiguador, 67

- número ordinal, 25

- orbifold, 49
- ordinal, 25

- Pellicer, D., 100

- Phillips, A., 9, 21
- pieza fundamental asociada al puzzle $\mathfrak{P}(X, G, H)$, 72
- plano hiperbólico, 47
- polígono
 - irracional, 38
 - racional, 38
- preautomorfismo, 94
- prefin, 19
- propiedad FA, 112
- Przytycki, P., 54
- punto
 - cónico de ángulo $2n\pi$, 36
 - cónico de ángulo infinito, 36
 - plano, 36
- puntos
 - singulares, 36
- puzzle, 65
- puzzle asociado a la tripleta (X, G, H) , 72

- Raggi, M., 100
- rango de Cantor-Bendixson, 27
- retícula, 51

- sólidos platónicos, 92
- Serre, J. -P., 111
- Sierpiński, W., 24
- simetría del mapa, 101
- sistema característico, 27
- Sullivan, D., 9, 21
- superficie, 19
 - ensamblada, 65, 72
 - genérica, 50
 - translación, 35
 - translación mansa, 36

- Teorema
 - clasificación de superficies no compactas y orientables, 20
 - de Cantor-Bendixson, 24
 - Dicotomía de Veech, 53
 - Gauss Bonnet, 36
 - realización de superficies no compactas y orientables, 21
 - Riemann Roch, 48
 - tesealación

regular del plano Euclidiano, 97
teselación
 Arquimediana, 102
 regular del plano Hiperbólico, 97
tipo de Schläfli, 97
trayectoria
 singular, 63
trayectoria de billar, 37

uno forma holomoefa, 48

Valdez, F., 54, 100
vector de holonomía, 41
Veech, W., 42

Weitze-Schmithüsen, G., 54
Williams, G., 100

Zemlyakov, A., 36