



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

DISPERSIÓN DE VELOCIDADES: UNA HERRAMIENTA PARA
LA DETERMINACIÓN DE LA PRESENCIA DE MATERIA
OBSCURA EN GALAXIAS ELÍPTICAS.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

FÍSICA

P R E S E N T A:

MARÍA MINERVA MUÑOZ SARDANETA

TUTOR:

DR. DARÍO NÚÑEZ ZÚÑIGA



FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

AGOSTO, 2015

Ciudad Universitaria, D. F.



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno

Muñoz

Sardaneta

María Minerva.

Universidad Nacional Autónoma de México,

Facultad de Ciencias.

Física.

304304347.

2. Datos del tutor

Dr.

Darío

Núñez

Zúñiga.

3. Datos del sinodal 1

Dra.

Bárbara

Pichardo

Silva.

4. Datos del sinodal 2

Dr.

Tonatiuh

Matos

Chassin.

5. Datos del sinodal 3

Dr.

Jorge

Cervantes

Cota.

6. Datos del sinodal 4

Dr.

Alejandro

Esquivel

Salazar.

7. Datos del trabajo escrito

Dispersión de velocidades: Una herramienta para la determinación de materia oscura en galaxias elípticas.

98p.

2015

**Dispersión de velocidades: Una herramienta para la
determinación de la presencia de materia oscura en galaxias
elípticas.**

por

María Minerva Muñoz Sardaneta

Tesis presentada para obtener el título de

Física

en la

FACULTAD DE CIENCIAS

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Agosto, 2015

A quienes me apoyaron cuando decidí cambiar mi camino.

Agradecimientos

Gracias a mis padres por todo el apoyo y cariño que me han brindado.

Gracias a quienes de forma indirecta me ayudaron a concluir mis estudios y este trabajo: al Fís. Miguel Ángel Monroy de la Rosa por el segundo año en el museo, y al Fís. Sóstenes Morales y el M. en C. Francisco Pérez Carvajal, por permitirme obtener experiencia en la docencia.

A los investigadores del Instituto de Astronomía de la UNAM y a los de la Escuela Superior de Física y Matemáticas del IPN, que resolvieron las dudas conceptuales que tuve durante la redacción de la tesis, aprendí mucho de ustedes. Gracias por las referencias bibliográficas.

Esta investigación fue realizada gracias al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación en Innovación Tecnológica (PAPIIT) de la UNAM:

PAPIIT IN115311, Predicciones teóricas de la materia oscura, de los hoyos negros y de su coexistencia en las estructuras cósmicas así como señales astrofísicas asociadas.

PAPIIT IN103514, Sobre los diferentes modelos de materia oscura y sus consecuencias observacionales.

Agradezco a la DGAPA-UNAM la beca recibida.

Gracias por levantarme en las mañanas California.
Trying hard now... Getting strong now... Gonna fly now...

Que el hombre contemple la totalidad de la naturaleza en su misterio completo y grandioso, y aparte la vista de los objetos insignificantes que le rodean. Que dirija la mirada a esa luz brillante, colocada como lámpara eterna para iluminar el universo; que la Tierra se le aparezca un mero punto en comparación con el vasto círculo que describe el Sol, y que se maraville del hecho de que este inmenso círculo no sea más que un punto diminuto comparado con el que describen las estrellas en su revolución alrededor del firmamento. Pero si nuestra visión se detiene ahí, dejemos que nuestra imaginación vaya más lejos; antes agotará su capacidad de concebir que la naturaleza su poder su poder de suministrar material para la concepción. Todo el mundo visible no es más que un átomo imperceptible en el grandioso seno de la naturaleza.

No hay idea que se le aproxime. podemos ampliar nuestra concepción más allá de todo el espacio imaginable; sólo producimos átomos en comparación con la realidad de las cosas. Es una esfera infinita cuyo centro está en todas partes y la circunferencia en ninguna.

BLAISE PASCAL.

TESIS: DISPERSIÓN DE VELOCIDADES: UNA HERRAMIENTA PARA LA
DETERMINACIÓN DE LA PRESENCIA DE MATERIA OSCURA EN GALAXIAS
ELÍPTICAS.

Índice general

1. Introducción	5
2. Modelo cosmológico de Friedmann y observaciones.	9
2.1. Métrica de Friedmann	9
2.1.1. Relatividad General.	10
2.1.2. Principio de equivalencia.	12
2.1.3. Solución de Friedmann.	14
2.1.4. Observaciones que confirman el Big Bang.	19
2.2. Existencia de la materia oscura y observaciones.	23
2.2.1. Lentes gravitacionales	23
2.2.2. Curvas de rotación	27
2.2.3. Formación de estructura	29
2.2.4. Anisotropías de la radiación cósmica de fondo.	31
2.2.5. Expansión acelerada.	32
2.3. Modelo Λ CDM.	35
2.3.1. Constante cosmológica.	36
2.3.2. Naturaleza de la materia oscura.	39
3. Ecuación de Vlasov y dispersión de velocidades.	41
3.1. Probabilidad.	41
3.1.1. Conjuntos estadísticos.	42
3.1.2. Relaciones elementales entre probabilidades.	43
3.1.3. Valores medios.	44
3.1.4. Distribuciones continuas de probabilidad.	47
3.2. Teoría cinética	48
3.2.1. Ecuación de Vlasov.	48
3.2.2. Relación entre la función de distribución y los observables.	50
3.2.3. La función de distribución.	52
3.2.4. Ecuaciones de Jeans	54
3.2.5. Masa a partir de la ecuación de Jeans.	56
4. Determinación del potencial a partir de observables.	59
4.1. Dispersión de velocidades.	61
4.1.1. Ajustes de la dispersión de velocidades.	62
4.2. Densidad de probabilidad y densidad material.	67
4.2.1. Fotometría.	67
4.2.2. Ajuste de la densidad luminosa y densidad material.	70

4.3. Comparación de materia dinámica con materia luminosa.	74
5. Conclusiones.	89

Capítulo 1

Introducción

La cosmología es el estudio de la estructura a gran escala y el comportamiento del Universo (su origen, evolución, características...). Cuando nos referimos a la estructura a gran escala del Universo, pueden tomarse las galaxias como los constituyentes básicos, las cuales son una agrupación de alrededor de 10^{11} estrellas unidas por su atracción gravitacional.[Islam, 2002]

Los modelos cosmológicos están basados en el Principio Cosmológico, el cual afirma que el Universo es homogéneo e isotrópico. La homogeneidad se refiere a que es idéntico en todos lados, mientras que la isotropía, a que se observa lo mismo en todas direcciones. La homogeneidad e isotropía del Universo puede confirmarse a escalas del orden de 3000 Mpc.¹ [Combes et al., 2004]

Durante algunos años, la cosmología había sido objeto de especulación, dependía tanto de la metafísica como de la física. El desarrollo de la Teoría General de la Relatividad, propuesta por Albert Einstein en 1915, dio inicio a un marco teórico consistente, haciendo posible formular la noción de espacio y tiempo matemáticamente. Para Einstein, no hay fuerzas, como en la teoría de Newton, la interacción entre dos cuerpos se da por la modificación de la geometría del espacio-tiempo debido a la existencia de los cuerpos. Einstein propuso el Principio de equivalencia de la gravitación y la inercia: *En cada punto del espacio tiempo en un campo gravitacional arbitrario, es posible elegir un sistema coordenado localmente inercial tal que, dentro de una región suficientemente pequeña alrededor de dicho punto, las leyes de la Naturaleza toman la misma forma que en un sistema de coordenadas cartesianas no acelerado en ausencia de gravedad.* Se puede interpretar que en una región suficientemente cercana a cualquier punto del espacio-tiempo, la métrica se puede ver como plana. [Patrick and Uzan, 2009], [Matos, 2004], [Nuñez and Degollado, 1993].

Una solución a las ecuaciones de Einstein fue determinada por Aleksander Friedmann entre 1922 y 1924, en la Unión Soviética, y casi al mismo tiempo por Georges Lemaître en Bélgica. Lo que dice el modelo de Friedmann-Lemaître, esencialmente, es que en el pasado hubo un momento en el que la densidad de la materia en el Universo era divergente y se expandió, como una explosión (de ahí el nombre de Big Bang). Desde entonces, el Universo se ha estado expandiendo y, como consecuencia de esta expansión, también se ha estado enfriando. Al disminuir la temperatura y con ello, la energía de las partículas y de la radiación, los choques entre los componentes de la 'sopa' original se hicieron menos violentos y las partículas lograron unirse en estructuras cada vez más complejas que se hubieran 'roto' a temperaturas más elevadas. Finalmente, unos 1000 millones de años más tarde, el gas de átomos neutros formado se condensó bajo la acción de su propia gravitación para dar lugar a las estrellas y galaxias.

El éxito del modelo de Friedmann descansa sobre su concordancia con tres pilares observacionales: la expansión del universo, dada por el corrimiento al rojo observado en las galaxias; la abundancia

¹1 Mpc = $3,086 \times 10^{24}$ cm

de elementos luminosos, de acuerdo con la Núcleo-síntesis del Big Bang (BBN); y la radiación del cuerpo negro generada por los fotones al desacoplarse de la materia, la radiación cósmica de fondo (CMB, por sus siglas en inglés). [Nuñez and Degollado, 1993]

Existen otras observaciones, acumuladas desde el siglo pasado hasta ahora, que nos llevan a inferir, de acuerdo al modelo de Friedmann, la idea de que el Universo está lleno de materia no lumínica ni bariónica, que ha influido en la evolución del universo gravitacionalmente. Esta masa que puede llenar el universo, pero no es observada, es llamada “materia oscura”.

La materia oscura no es observada directamente y su existencia se concluye a partir de su influencia en la evolución del universo a través de la gravitación. Observando sistemas astrofísicos (galaxias o conjuntos de ellas) se notan “peculiaridades” que pueden ser explicadas suponiendo que el Universo contiene una gran cantidad de materia invisible, o bien, que nuestro conocimiento de las leyes de gravitación no es correcto.

Conocer cómo está distribuida la masa en un sistema astronómico es fundamental para entender de qué sistema se trata, cómo trabaja, y de qué está formado. Desde 1970 ha surgido gradualmente la noción de que la materia bariónica ‘ordinaria’, de la cual estamos hechos, contribuye $\lesssim 20\%$ del total de la materia del universo, y el resto consiste en una forma misteriosa de materia oscura.

Como la geometría del espacio-tiempo está determinada por la distribución de materia-energía presente en ese espacio, y ésta a su vez genera un campo gravitatorio, la forma más convincente para detectar materia oscura es a través de campos gravitacionales. Hay solamente dos formas de detectar un campo gravitacional: a través de su acción sobre los fotones (lentes gravitacionales), y a través de su acción sobre cuerpos con masa, tales como estrellas y nubes de gas. En consecuencia, se ha gastado un considerable esfuerzo en métodos para deducir el campo gravitacional desde la cinemática de una población de objetos como estrellas, cúmulos globulares o galaxias. [Combes et al., 2004]

El objetivo principal de este trabajo es medir la cantidad de masa que hay en galaxias elípticas en función de la distancia al centro galáctico. Es posible calcular esto de dos formas, la primera es medir la densidad de materia lumínica en la galaxia dentro de un cierto radio efectivo después del cual la cantidad de materia luminosa disminuye de manera importante, esto se logra midiendo el brillo superficial de la galaxia dentro de este radio. La segunda forma es utilizando la ecuación de Jeans (1919), que relaciona cantidades observacionales accesibles para conocer el movimiento estelar en las galaxias elípticas, ésta puede ser función de la posición si se determina a través de dos parámetros observables:

- 1) La probabilidad por unidad de volumen de que una estrella se encuentre en una cierta posición independientemente de su velocidad, que es proporcional a la densidad de luminosidad. La probabilidad está definida como la integral de la ecuación de distribución de probabilidad en el volumen. En dinámica estelar, una colisión se define como una desviación significativa de la trayectoria estelar durante el encuentro, si la desviación se considera despreciable entonces no habrá colisiones, a la función de distribución de probabilidad que cumple con esta condición se le llama ecuación de Boltzmann sin colisiones o también, ecuación de Vlasov. [Binney and Tremaine, 2007]
- 2) La dispersión de velocidades. Técnicamente, la dispersión de velocidades es la desviación estándar de la distribución de velocidades. Estrellas con velocidades similares tienen una dispersión de velocidad menor, mientras que estrellas con velocidades muy diferentes, tienen una mayor dispersión de velocidad. Debido al movimiento aleatorio de las estrellas en galaxias elípticas, la dispersión de velocidades en ellas es menos constante que en las galaxias espirales. Midiendo las velocidades de las estrellas a distintas distancias del centro galáctico, se obtiene este parámetro como función de la posición. [NASA/IPAC, 2014]

El siguiente capítulo de este trabajo, el capítulo dos, comienza con la descripción del modelo cosmológico de Friedmann, así como las observaciones que lo han confirmado: la nucleosíntesis del Big Bang, el diagrama de Hubble y la radiación cósmica de fondo. En el mismo capítulo, se describen las observaciones que han inducido a la idea de la existencia de la materia oscura: lentes gravitacionales, curvas de rotación, anisotropías de la radiación de fondo, entre otras; concluyendo el capítulo con una reseña del modelo cosmológico que es consistente con la materia oscura fría y una constante cosmológica, el modelo Λ CDM.

Con la finalidad de comprender a qué nos referimos con que la probabilidad por unidad de volumen de que una estrella se encuentre en cierta posición es la integral de una función de distribución y familiarizarnos con el concepto de dispersión, el capítulo tres inicia con las definiciones matemáticas de la teoría de la probabilidad, tales como, función de probabilidad, desviación estándar, momentos, etcétera. Después, se determina la ecuación de Boltzmann sin colisiones o ecuación de Vlasov, en coordenadas cartesianas. La integral sobre velocidades de la ecuación de Vlasov nos dará la probabilidad de la posición de una estrella, esta probabilidad se puede derivar de la densidad de luminosidad, que es un parámetro observable, en función de la distancia al centro galáctico. La relación que hay entre la ecuación de Vlasov y los observables genera a la ecuación de Jeans. Así, el capítulo tres concluye con la ecuación de Jeans, que nos permitirá determinar la masa de galaxias elípticas a través de los observables en función de la distancia al centro de la galaxia.

En el cuarto capítulo se describen a las galaxias elípticas, se explica cómo se calcula la dispersión de velocidades en función del radio galáctico y cómo encontrar la densidad de probabilidad a través de la observación del brillo superficial de las galaxias, y apartir de ésta, cómo hallar la densidad material respecto a la distancia al centro de la galaxia. En el artículo [Davies et al., 1983] se encontraron los datos de la dispersión de velocidades, así mismo, en el artículo [Poveda et al., 1960] están los datos observacionales para ajustar la función de densidad material, en cada artículo los valores de las observaciones de ambos parámetros se encuentran como función de la distancia al centro galáctico. Este capítulo también contiene los ajustes que realicé a los datos observacionales de dichos parámetros para cuatro galaxias elípticas: NGC 3818, NGC 4742, NGC 5845 y NGC 2778. Por último, se comparan las gráficas de masa respecto a la distancia al centro galáctico luminosa y dinámica, donde esta última se encuentra sustituyendo los parámetros observables en la ecuación de Jeans.

Al observar que la función de la masa que se deduce de la ecuación de Jeans es creciente, y que la masa lumínica es constante más allá del radio efectivo, es posible concluir que el método de dispersión de velocidades es una observación análoga en galaxias elípticas a las curvas de rotación de las galaxias espirales, que induce la idea de la existencia de un halo de materia oscura alrededor de las galaxias elípticas.

Capítulo 2

Modelo cosmológico de Friedmann y observaciones.

En este capítulo se describe la relación entre la métrica de Friedmann y la materia y energía en el Universo, estas ecuaciones nos muestran la relación entre la densidad de energía de radiación y la densidad de materia-energía con la expansión del Universo. Conocer cómo varían estos parámetros respecto al tiempo, ha permitido comparar la cantidad de materia bariónica que existe en el Universo con la cantidad de materia luminica que señala la teoría, así como el corrimiento al rojo que tienen en la actualidad los fotones que obtuvieron camino libre en el momento de la recombinación. Con lo anterior ha sido posible medir el espectro de la radiación cósmica de fondo, confirmando la existencia de estos fotones. La tercer observación que concuerda con el modelo de Friedmann es el diagrama de Hubble, que en 1929 mostró que las galaxias se alejan entre sí, probando que el Universo se encuentra en expansión.

Otras observaciones descritas en este capítulo son aquellas que concuerdan con el modelo de Friedmann, junto con la existencia de materia y energía oscuras. La luz se desvía en un campo gravitatorio, generado por la cantidad de materia en un punto del espacio, a esto se le llama lente gravitacional, sin embargo se ha observado que la luz se desvía más de lo que la materia luminosa sola produciría, indicando la presencia de materia oscura. Por otra parte, según la mecánica newtoniana, la velocidad de una partícula en órbita alrededor de otra mucho mayor, es inversamente proporcional al radio, con lo cual la velocidad de las estrellas más lejanas al centro galáctico debería ser menor, pero las observaciones indican que la velocidad de estas estrellas no disminuye, a la gráfica de la velocidad respecto a la distancia de las observaciones hechas en galaxias espirales se les llama curvas de velocidad. [Patrick and Uzan, 2009]. También, hay modelos teóricos que incluyen a la materia oscura y a la constante gravitacional que han sido comparados con las observaciones de la formación de estructura y de la radiación de fondo. [Zavala Franco, 2007], [European Space Agency, 2014]. Por último, observaciones de supernovas de tipo Ia mostraron en 1999 que el universo se expande de forma acelerada. [Schutz, 2009]

El capítulo concluye con una breve descripción del modelo Λ CDM, que es el modelo que incluye una materia oscura fría y una constante cosmológica.

2.1. Métrica de Friedmann

Las ecuaciones de Einstein establecen que la geometría del espacio-tiempo queda determinada por la distribución de materia energía presente en ese espacio. Lo que se quiere decir por resolver a

una ecuación diferencial es dar un conjunto de funciones $(g_{\mu\nu}, T_{\mu\nu})$, que satisfagan dichas ecuaciones y que tengan sentido físico. El punto es dar un tensor de energía esfuerzos con interpretación física y a éste es al que se le busca la solución en las ecuaciones de Einstein.

Comencemos por conocer cuáles son las ecuaciones fundamentales de la relatividad general, después el elemento de línea encontrado por Friedmann. De esta forma se podrán describir las observaciones que confirman el modelo y aquellas con las que se infiere la existencia de materia oscura.

2.1.1. Relatividad General.

La Relatividad General está formulada en un espacio de cuatro dimensiones en el que los puntos son etiquetados por un sistema de coordenadas generalizado, (x^0, x^1, x^2, x^3) , que también puede escribirse como x^α ($\alpha = 0, 1, 2, 3$). El espacio de cuatro dimensiones está formado por tres coordenadas espaciales y una temporal. [Islam, 2002]

Bajo una transformación de coordenadas de x^α a x'^α (en la que x'^α es, en general, una función de x^0, x^1, x^2, x^3) un vector contravariante, A^α , y un vector covariante, B_α , se transforman mediante

$$A'^\alpha = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\nu} A^\nu, \quad B'_\alpha = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\alpha} B_\nu \quad (2.1)$$

y un tensor, $A^\alpha_{\nu\lambda}$, se transforma como

$$A'^\alpha_{\nu\lambda} = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\lambda} A^\rho_{\sigma\tau}. \quad (2.2)$$

Toda la información acerca del campo gravitacional está contenida en la segunda fila del tensor contravariante $g_{\alpha\nu}$, llamado tensor métrico o simplemente la métrica, la cual determina el cuadrado de los intervalos de espacio-tiempo ds^2 entre dos eventos separados infinitesimalmente¹, o puntos x^α y $x^\alpha + dx^\alpha$, como sigue:

$$ds^2 = g_{\alpha\nu} dx^\alpha dx^\nu, \quad (2.3)$$

El tensor covariante que corresponde a $g_{\alpha\nu}$ se denota por $g^{\alpha\nu}$, y se define como

$$g_{\alpha\nu} g^{\nu\lambda} = \delta_\alpha^\lambda, \quad (2.4)$$

con δ_α^λ , la delta de Kronecker, que vale uno si $\lambda = \alpha$ y cero en otros casos. Los índices de un vector pueden subir o bajar utilizando el tensor métrico como sigue:

$$A^\alpha = g^{\alpha\nu} A_\nu, \quad A_\alpha = g_{\alpha\nu} A^\nu. \quad (2.5)$$

Los índices arriba se les llama contravariantes y a los de abajo, covariantes. El principio de la Relatividad General, dice que las leyes de la física deben ser covariantes, es decir, independientes del sistema de referencia o de las coordenadas que se utilicen. La generalización de la diferenciación ordinaria (parcial) está dada por la diferenciación covariante denotada por un punto y coma, y definida para un vector contravariante y uno covariante como:

$$A^\alpha_{;\nu} = \frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\nu} + \Gamma^\alpha_{\nu\lambda} A^\lambda, \quad (2.6)$$

¹El elemento de línea en relatividad general se encuentra en coordenadas esféricas y tiene la forma: $ds^2 = -c^2 dt^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$; en notación de índices la métrica se escribe como en la ecuación (2.3). En coordenadas cartesianas, la métrica se escribe: $ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$, que se puede reescribir como $ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$, donde $\eta_{\mu\nu}$ se define como la métrica o el tensor de Minkowski.

$$A_{\alpha;\nu} = \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\nu} - \Gamma_{\alpha\nu}^\lambda A_\lambda. \quad (2.7)$$

Aquí, $\Gamma_{\nu\lambda}^\alpha$, se llaman símbolos de Christoffel; tienen la propiedad de que $\Gamma_{\nu\lambda}^\alpha = \Gamma_{\lambda\nu}^\alpha$, y son definidos por:

$$\Gamma_{\nu\lambda}^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \xi^\beta} \frac{\partial^2 \xi^\beta}{\partial x^\nu \partial x^\lambda} \quad (2.8)$$

En la diferenciación covariante de tensores de mayor rango, hay un término que corresponde a cada índice contravariante análogo al segundo término en (2.6) y un término que corresponde a cada índice covariante análogo al segundo término de (2.7). Por ejemplo, la derivada covariante del tensor (2.2) puede escribirse como

$$A^\alpha{}_{\nu\lambda;\sigma} = \frac{\partial A^\alpha{}_{\nu\lambda}}{\partial x^\sigma} + \Gamma_{\sigma\rho}^\alpha A^\rho{}_{\nu\lambda} - \Gamma_{\nu\sigma}^\rho A^\alpha{}_{\rho\lambda} - \Gamma_{\lambda\sigma}^\rho A^\alpha{}_{\nu\rho}. \quad (2.9)$$

Los índices pueden subir o bajar con el operador de diferenciación covariante de la siguiente forma

$$g_{\sigma\alpha} A^\alpha{}_{;\nu} = A_{\sigma;\nu}, \quad g^{\sigma\alpha} A_{\alpha;\nu} = A^\sigma{}_{;\nu}. \quad (2.10)$$

Bajo una transformación de coordenadas de x^α a x'^α , la transformación de $\Gamma_{\nu\lambda}^\alpha$ es

$$\Gamma'_{\nu\lambda}{}^\alpha = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\lambda} \Gamma_{\sigma\tau}^\rho + \frac{\partial^2 x^\sigma}{\partial x'^\nu \partial x'^\lambda} \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\sigma}. \quad (2.11)$$

En cualquier punto específico de un sistema de coordenadas es posible elegir $\Gamma_{\nu\lambda}^\alpha$ tal que sea cero en un punto de acuerdo al principio de equivalencia, el cual se explica en la siguiente sección.

Se define el tensor de Riemann por

$$R_{\beta\nu\lambda}^\sigma = \Gamma_{\beta\lambda,\nu}^\sigma - \Gamma_{\beta\nu,\lambda}^\sigma + \Gamma_{\alpha\nu}^\sigma \Gamma_{\beta\lambda}^\alpha - \Gamma_{\alpha\lambda}^\sigma \Gamma_{\beta\nu}^\alpha, \quad (2.12)$$

donde la coma denota la diferenciación parcial respecto a la variable correspondiente, por ejemplo, $g_{\sigma\nu,\lambda} \equiv \partial g_{\sigma\nu} / \partial x^\lambda$. El tensor de Riemann tiene las siguientes propiedades:

$$R_{\sigma\beta\nu\lambda} = -R_{\beta\sigma\nu\lambda} = -R_{\sigma\beta\lambda\nu}, \quad (2.13)$$

$$R_{\sigma\beta\nu\lambda} = R_{\nu\lambda\sigma\beta}, \quad (2.14)$$

$$R_{\sigma\beta\nu\lambda} + R_{\sigma\lambda\beta\nu} + R_{\sigma\nu\lambda\beta} = 0, \quad (2.15)$$

y satisface la identidad de Bianchi:

$$R_{\beta\nu\lambda;\rho}^\sigma + R_{\beta\rho\nu;\lambda}^\sigma + R_{\beta\lambda\rho;\nu}^\sigma = 0. \quad (2.16)$$

El tensor de Ricci es definido por

$$R_{\beta\nu} = g^{\sigma\lambda} R_{\lambda\beta\sigma\nu} = R^\sigma{}_{\beta\sigma\nu}. \quad (2.17)$$

De las ecuaciones (2.12) y (2.17), se sigue que en tensor de Ricci se puede escribir como

$$R_{\beta\nu} = \Gamma_{\beta\nu,\lambda}^\lambda - \Gamma_{\beta\lambda,\nu}^\lambda + \Gamma_{\beta\nu}^\lambda \Gamma_{\lambda\sigma}^\sigma - \Gamma_{\beta\lambda}^\sigma \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda. \quad (2.18)$$

Se define el escalar de Ricci como:

$$R = g^{\beta\nu} R_{\beta\nu}. \quad (2.19)$$

Contrayendo la identidad de Bianchi (ec. 2.16) sobre el par de índices $\beta\nu$ y $\sigma\rho$ (que es multiplicar por $g^{\beta\nu}$ y $g^{\sigma\rho}$) se deduce la identidad:

$$(R^{\beta\nu} - \frac{1}{2}g^{\beta\nu}R)_{;\nu} = 0. \tag{2.20}$$

El tensor $G^{\beta\nu} = R^{\beta\nu} - \frac{1}{2}g^{\beta\nu}R$ se llama tensor de Einstein

Las ecuaciones fundamentales de la relatividad general son las ecuaciones de Einstein:

$$R_{\beta\nu} - \frac{1}{2}g_{\beta\nu}R = (8\pi G/c^4)T_{\beta\nu}, \tag{2.21}$$

donde $T_{\beta\nu}$ es el tensor de energía-momento de la fuente que produce el campo gravitacional, y G es la constante gravitacional de Newton². Para un fluido perfecto, $T_{\beta\nu}$ toma la forma:

$$T^{\beta\nu} = (\mu + p)\frac{u^\beta u^\nu}{c^2} + pg^{\beta\nu} \tag{2.22}$$

con μ la densidad de masa-energía, p la presión y u^β la cuadrivelocidad de materia dada por

$$u^\beta = \frac{dx^\beta}{d\tau}, \tag{2.23}$$

donde $x^\beta(\tau)$ describe la línea de mundo de materia en términos del tiempo propio, como el tiempo también es una coordenada, se utiliza el tiempo propio como parámetro respecto al cual se mide el cambio de posición³. De (2.20), se puede ver que la ecuación de Einstein (2.21), es compatible con la ecuación

$$T^{\beta\nu}_{;\nu} = 0, \tag{2.24}$$

que es la ecuación de conservación de masa-energía y momento.

El tensor de curvatura de Einstein se define por

$$G_{\beta\nu} = R_{\beta\nu} - \frac{1}{2}g_{\beta\nu}R + \Lambda g_{\beta\nu} \tag{2.25}$$

El término $\Lambda g_{\beta\nu}$, fue introducido originalmente por Einstein por razones cosmológicas, por lo cual, Λ se llama *la constante cosmológica*. Este término satisface la ecuación de continuidad (ec. 2.24), es decir,

$$G^{\beta\nu}_{;\nu} = 0. \tag{2.26}$$

2.1.2. Principio de equivalencia.

El enunciado del principio de equivalencia dice que *en todo punto del espacio-tiempo, dentro de un campo gravitacional arbitrario, es posible elegir un 'sistema de coordenadas localmente inercial' tal que, en una región suficientemente pequeña del punto en cuestión, las leyes de la naturaleza tomen la misma forma que en un sistema de coordenadas cartesianas sin aceleración en ausencia de gravitación.* [Weinberg, 1972]

² $G = 6,67 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}$

³La longitud propia se define como la longitud de un objeto medido en el marco de referencia en el cual está en reposo. El tiempo propio, τ , es el tiempo que, para el observador en su propio sistema de referencia, coincide con su propio tiempo. Si el observador está en su origen, se tiene que $ds^2 = -c^2 dt^2$, entonces, $c^2 d\tau^2 = -ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$. [Nuñez and Degollado, 1993]

El principio de equivalencia se refiere a que, en cualquier punto en el espacio tiempo, es posible construir un sistema de coordenadas inerciales en el cual la materia satisface las leyes de la relatividad general, también menciona, que todos los efectos de un campo gravitacional pueden ser descritos en términos de derivadas $\partial\xi^\alpha/\partial x^\mu$ de la función $\xi^\alpha(x)$, que define la transformación de las coordenadas de laboratorio x de las coordenadas localmente inerciales, ξ .

Consideremos una partícula libre bajo la influencia puramente de fuerzas gravitacionales. De acuerdo con el principio de equivalencia, existe una coordenada de caída libre del sistema, ξ^α , sobre la cual, su ecuación de movimiento es la de una recta en el espacio-tiempo, que es,

$$\frac{d^2\xi^\alpha}{d\tau^2} = 0 \quad (2.27)$$

con $d\tau$ el tiempo propio.

Ahora, supongamos que se utiliza cualquier otro sistema de coordenadas cualquiera, x^μ , en reposo en el laboratorio. Las coordenadas de caída libre, ξ^α , son funciones de x^μ , por lo que la ecuación (2.27) se hace

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \right) \\ &= \frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \frac{\partial^2\xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Multiplicando esta última ecuación por $\partial x^\lambda/\partial\xi^\alpha$, se obtiene la ecuación de movimiento

$$0 = \frac{d^2x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \quad (2.29)$$

con $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$, como en la definición de (2.8), y el tiempo propio, expresado en un sistema arbitrario de coordenadas,

$$d\tau^2 = -g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (2.30)$$

La ecuación de movimiento (2.29) se conoce como ecuación geodésica y satisface las trayectorias que minimizan la distancia.⁴

La métrica también puede ser escrita como

$$g_{\mu\nu} = \frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial\xi^\beta}{\partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta} \quad (2.31)$$

donde $\eta_{\mu\nu}$ se define como el tensor de Minkowski. En coordenadas cartesianas, la métrica se escribe: $ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$, que se puede reescribir como $ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$, por lo que la ecuación (2.31) es un cambio de coordenadas de cartesianas a esféricas. Ahora, diferenciando (2.31), respecto a x^λ , se obtiene,

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} = \frac{\partial^2\xi^\alpha}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} \frac{\partial\xi^\beta}{\partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta} + \frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2\xi^\beta}{\partial x^\lambda \partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta}. \quad (2.32)$$

De la definición (2.8), se tiene que

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} = \Gamma_{\lambda\mu}^\rho \frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\rho} \frac{\partial\xi^\beta}{\partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta} + \Gamma_{\lambda\nu}^\rho \frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial\xi^\beta}{\partial x^\rho} \eta_{\alpha\beta} \quad (2.33)$$

⁴Una manera más formal de llegar a esta ecuación es utilizando el principio de mínima acción, para ver estos cálculos, ver [Nuñez and Degollado, 1993].

y sustituyendo en (2.31), se encuentra que,

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} = \Gamma_{\lambda\mu}^\rho g_{\rho\nu} + \Gamma_{\lambda\nu}^\rho g_{\rho\mu}. \quad (2.34)$$

Agregando la misma ecuación con μ y λ intercambiadas, y sustrayendo la misma ecuación pero con ν y λ intercambiadas, se obtiene,

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} &= g_{\kappa\nu} \Gamma_{\lambda\mu}^\kappa + g_{\kappa\mu} \Gamma_{\lambda\nu}^\kappa \\ &+ g_{\kappa\nu} \Gamma_{\mu\lambda}^\kappa + g_{\kappa\lambda} \Gamma_{\mu\nu}^\kappa \\ &- g_{\kappa\lambda} \Gamma_{\nu\mu}^\kappa - g_{\kappa\mu} \Gamma_{\nu\lambda}^\kappa \\ &= 2g_{\kappa\nu} \Gamma_{\lambda\mu}^\kappa. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Luego, utilizando que $g^{\nu\sigma} g_{\kappa\nu} = \delta_{\kappa}^\sigma$, multiplicando por $g^{\nu\sigma}$ la ecuación (2.35), finalmente se obtiene,

$$\Gamma_{\lambda\mu}^\sigma = \frac{1}{2} g^{\nu\sigma} \left[\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} \right] \quad (2.36)$$

Una consecuencia importante de la relación entre la conexión afín (símbolos de Christoffel) y la métrica, es que la ecuación de movimiento de una partícula en caída libre, mantiene la forma del intervalo del tiempo propio. Usando (2.29), podemos calcular que,

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \left[g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \right] &= \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} \frac{dx^\lambda}{d\tau} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \\ &+ g_{\mu\nu} \frac{\partial^2 x^\mu}{d\tau^2} \frac{dx^\nu}{d\tau} + g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{d^2 x^\nu}{d\tau^2} \\ &= \left[\frac{\partial g_{\kappa\sigma}}{\partial x^\lambda} - g_{\mu\sigma} \Gamma_{\kappa\lambda}^\mu - g_{\nu\kappa} \Gamma_{\sigma\lambda}^\nu \right] \frac{dx^\kappa}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau} \frac{dx^\lambda}{d\tau}. \end{aligned} \quad (2.37)$$

La ecuación (2.35) indica que esto desaparece, es decir,

$$g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = -C, \quad (2.38)$$

donde C es una constante de movimiento. Por lo tanto, una vez que se eligen las condiciones iniciales, tales que, $d\tau^2$ esté dado por (2.30), se tiene que $C = 1$, y (2.38) asegura que (2.30) se mantiene a lo largo de todo el camino de la partícula. Similarmente, para una partícula sin masa, las condiciones iniciales son $C = 0$ (con τ reemplazada por algún otro parámetro λ) y las ecuaciones de movimiento mantendrán a $g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ cero, a lo largo de todo el camino.

2.1.3. Solución de Friedmann.

Las ecuaciones de Einstein (ec. 2.22), muestran que la geometría del espacio-tiempo queda determinada por la distribución de materia-energía presente en ese espacio. Una solución a las ecuaciones de Einstein, con $\Lambda = 0$ ⁵, fue determinada por Aleksander Friedman entre 1922 y 1924.

⁵Cuando Einstein formuló las ecuaciones de la Relatividad General, en 1915, la expansión del Universo no había sido descubierta, por lo que las personas no pensaban en la posibilidad de que el Universo se encontrara en un estado dinámico. Entonces fue natural buscar una solución estática a sus ecuaciones cosmológicas. [?]

Friedman utiliza las simetrías buscando una solución para un fluido perfecto en el que consideró que dicho fluido era homogéneo e isotrópico, es decir, existe un sistema de referencia en el que sus parámetros, como densidad y presión, son independientes de la posición, por lo que sólo pueden depender del tiempo coordenado. Esta consideración, aplicada a nuestro Universo, es lo que actualmente se conoce como el Principio Cosmológico: nuestro Universo es, espacialmente, homogéneo e isotrópico. Es decir, todos los puntos, de una sección espacial, son equivalentes y no hay direcciones preferentes.

El elemento de línea del espacio-tiempo consistente con el Principio Cosmológico, encontrado por Friedmann es

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - k r^2} + r^2 d\Omega^2 \right), \quad (2.39)$$

donde a la función a , que sólo depende del tiempo coordenado, se le llama factor de escala y k representa la curvatura de las secciones espaciales del Universo.

Escribiendo a las ecuaciones de Einstein de la forma $G^\mu{}_\nu = \frac{8\pi G}{c^2} T^\mu{}_\nu$. El cálculo del tensor de Einstein, $G^\mu{}_\nu$ a partir de la métrica de Friedman ec. (2.39), es directo⁶ y obtenemos entonces que sólo hay dos ecuaciones diferenciales no triviales (la temporal y las tres espaciales que dan la misma ecuación)

$$3 \left(\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{k}{a^2} \right) = \frac{8\pi G}{c^2} \mu, \quad (2.40)$$

$$-2 \frac{\ddot{a}}{a} - \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 - \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{c^4} p, \quad (2.41)$$

donde denotamos a punto, como derivada respecto al tiempo en unidades de distancia, ct .

Como sabemos, el tensor de energía esfuerzos debe satisfacer que su divergencia sea cero (Ec. 2.24). Por lo que, en este caso, $T^\beta{}_{\nu;\beta} = 0$ implica la ecuación:

$$c^2 \dot{\mu} + 3 \frac{\dot{a}}{a} (c^2 \mu + p) = 0, \quad (2.42)$$

pero esta ecuación es dependiente de las ecuaciones de Einstein. De la ecuación (2.20), si se satisfacen las ecuaciones de Einstein, se satisface la ecuación de conservación, por lo que tenemos tres ecuaciones, dos de ellas independientes, el sistema a resolver es:

$$H^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3c^2} \mu, \quad (2.43)$$

$$c^2 \dot{\mu} + 3H (c^2 \mu + p) = 0, \quad (2.44)$$

donde se define a la razón de la derivada del factor de escala con el factor de escala, como

$$H = \frac{\dot{a}}{a}, \quad (2.45)$$

que se conoce como la Función de Hubble.

⁶Se utiliza la ecuación (2.3) para encontrar la métrica, con ella es posible calcular los símbolos de Christoffel (ec. 2.36) con los que se puede encontrar el tensor y escalar de Ricci (ecs. 2.18 y 2.19), que conforman al tensor de Einstein. Con el elemento de línea dado por Friedmann y la métrica, es posible calcular el tensor energía momento (ec. 2.22). Con los cálculos anteriores, se encuentra el sistema de ecuaciones dado por las ecuaciones de Einstein (2.21).

Si la ec. (2.43) se evalúa al día de hoy, $a_0 = a(t = \text{hoy}) = 1$, se tiene

$$k = H_0^2 \left(\frac{8 \pi G}{3 c^2 H_0^2} \mu_0 - 1 \right), \quad (2.46)$$

donde H_0 evaluada al día de hoy se conoce como la constante de Hubble y μ_0 es la densidad del Universo al día de hoy. De esta ecuación vemos que el valor de k está determinado por la magnitud de la densidad al día de hoy. En efecto, conociendo el valor de la constante de Hubble y la densidad, podemos determinar la curvatura de las secciones espaciales de nuestro Universo, de acuerdo al modelo de Friedman. Al valor de la densidad al día de hoy que hace que la sección espacial sea cero, se le conoce como densidad crítica:

$$\mu_{\text{critica}} = \frac{3 c^2 H_0^2}{8 \pi G}, \quad (2.47)$$

Definimos la razón de la densidad μ a la densidad crítica, como

$$\Omega = \frac{\mu}{\mu_{\text{critica}}}, \quad (2.48)$$

y la ecuación de Einstein, ec. (2.43), se reescribe como:

$$H^2 = H_0^2 \Omega - \frac{k}{a^2}, \quad (2.49)$$

conocida como la ecuación de Friedman. Una forma de escribir a la ecuación diferencial, una vez que se conoce la densidad, μ , como función del factor de escala, a , es

$$\dot{a} = \sqrt{H_0^2 \Omega a^2 - k}, \quad (2.50)$$

Evolución de la energía.

Si se considera un fluido perfecto e isotrópico, el tensor energía-momento, T^β_ν , es entonces:

$$T^\beta_\nu = \begin{pmatrix} -\mu c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix} \quad (2.51)$$

donde p es la presión del fluido.

Veamos como el tensor energía-momento evoluciona con el tiempo. De acuerdo con la ecuación de continuidad, $\partial\rho/\partial t = 0$, y la ecuación de Euler, $\partial p/\partial x^i = 0$. Lo anterior puede describirse en un sistema de 4 componentes como la ecuación de conservación del tensor de energía-momento: $\partial T^\beta_\nu/\partial x^\beta = 0$. De esta forma, la conservación implica que la derivada covariante sea:

$$T^\beta_{\nu;\beta} \equiv \frac{\partial T^\beta_\nu}{\partial x^\beta} + \Gamma^\beta_{\alpha\beta} T^\alpha_\nu - \Gamma^\alpha_{\nu\beta} T^\beta_\alpha, \quad (2.52)$$

Al anularse $T^\beta_{\nu;\beta}$ hay cuatro ecuaciones separadas, considerando la componente $\nu = 0$. Esto es:

$$\frac{\partial T^\beta_0}{\partial x^\beta} + \Gamma^\beta_{\alpha\beta} T^\alpha_0 - \Gamma^\alpha_{0\beta} T^\beta_\alpha = 0 \quad (2.53)$$

Suponiendo que hay isotropía, T_0^i desaparece, entonces β en el primer término y α en el segundo deben ser iguales a cero:

$$-\frac{\partial(\mu c^2)}{\partial t} - \Gamma^\beta_{0\beta}(\mu c^2) - \Gamma^\alpha_{0\beta} T^\beta_\alpha = 0 \quad (2.54)$$

Usando la identidad:

$$\Gamma^i_{0j} = \Gamma^i_{j0} = \delta_{ij} \frac{\dot{a}}{a} \quad (2.55)$$

se tiene que en (2.54) $\Gamma^\alpha_{0\beta}$ desaparece si α, β son distintas y es \dot{a}/a si son iguales. Así, la ley de conservación en un universo en expansión es

$$\frac{\partial c^2 \mu}{\partial t} + \frac{\dot{a}}{a} [3c^2 \mu + 3p] = 0. \quad (2.56)$$

Rearreglando los términos se obtiene:

$$a^{-3} \frac{\partial [c^2 \mu a^3]}{\partial t} = -3 \frac{\dot{a}}{a} p. \quad (2.57)$$

La ley de conservación puede ser aplicada para obtener información acerca del ajuste de la materia y la radiación con la expansión. La materia tiene efectivamente, presión cero, entonces

$$\frac{\partial [c^2 \mu a^3]}{\partial t} = 0. \quad (2.58)$$

Dada la definición de densidad, $\mu = \rho_0(1 + \epsilon)$, con ϵ la energía interna y ρ_0 la densidad de materia-energía en reposo al día de hoy, la ecuación (2.58) implica que la densidad de materia-energía es

$$\rho_m \propto a^{-3}. \quad (2.59)$$

La densidad de materia en reposo varía como el cubo del factor de escala. Si pensamos que el factor de escala es una medida del sector espacial inmerso en el cuadridespacio, tenemos que la densidad de materia en reposo varía con el inverso del volumen, lo que, para una situación en la que no se crea ni destruye materia, es natural.

Si se utiliza la normalización de que el factor de escala al día de hoy vale uno, entonces μ_0 denota la densidad al día de hoy. Vemos que en este caso, la energía interna es una constante: $\epsilon = \frac{\mu_0}{\rho_0} - 1$, con ρ_0 la densidad de materia en reposo al día de hoy. De hecho, dicha constante es cero, pues para el polvo, como no hay interacción entre las partículas, la energía interna es cero. Esto es consistente, coincidiendo la densidad μ con la densidad en reposo, ρ_0 . De este modo, $\Omega = \frac{\mu}{\mu_{\text{critica}}} = \frac{\mu_0}{\mu_{\text{critica}} a^3} = \frac{\Omega_{0\text{polvo}}}{a^3}$.

Relacionamos así ρ_0 con el factor de escala. Queda entonces determinar la relación entre la energía interna y el factor de escala.

La radiación tiene presión $p = \rho/3$, sustituyendo en la ecuación (2.56),

$$\frac{\partial \rho_r}{\partial t} + \frac{\dot{a}}{a} 4\rho_r = a^{-4} \frac{\partial [\rho_r a^4]}{\partial t} = 0 \quad (2.60)$$

Por lo tanto, la densidad de energía de radiación,

$$\rho_r \propto a^{-4}, \quad (2.61)$$

representa la disminución de la energía por partícula conforme el universo se expande.

Durante el universo temprano, las reacciones se efectuaron rápidamente, lo suficiente como para mantener a las partículas en equilibrio, las diferentes especies comparten una temperatura común.

Soluciones para cada 3-curvatura.

Con la densidad determinada en términos del factor de escala, resta resolver la ecuación de Friedman, ec. (2.50), que se resuelve para cada curvatura, ec. (2.46). El elemento de línea espacial sólo puede representar a tres tipos de espacios: plano, cerrado o abierto.

En el caso $k = 0$, la densidad es igual a la crítica, entonces, la ecuación de Friedman en forma integral, se reduce a

$$\int_0^{\frac{a}{a_0}} \sqrt{a} da = c H_0 t, \quad (2.62)$$

con lo que se obtiene la siguiente expresión para el factor de escala:

$$a(t) = a_0 (c H_0 t)^{\frac{2}{3}}. \quad (2.63)$$

El factor de escala es una función que va desde un tiempo inicial, $t = 0$, en el que este factor vale cero. Esto es, el modelo tiene un inicio, donde toda la sección espacial se empieza a encajar en el cuadriespacio; del elemento de línea, ec. (2.39); las distancias espaciales a tiempo constante, $t = T = cte$ son

$$dl^2 = a_0 (c H_0 T)^{\frac{2}{3}} (dr^2 + r^2 d\Omega^2), \quad (2.64)$$

Al anularse el factor a , en $t = 0$, se anulan las distancias. A este punto inicial se le llamó el átomo cósmico y después se le llamó Big Bang, que es un punto del espacio-tiempo, en el que toda la sección espacial se empieza a encajar en el cuadriespacio. Al avanzar el tiempo, la distancia entre los puntos aumenta, es decir, el Universo se expande. Las cantidades físicas como la densidad en reposo van como

$$\mu = \frac{\mu_0}{c^2 H_0^2 t^2}, \quad (2.65)$$

por lo que divergen en el tiempo inicial. Entonces, este modelo empieza con un punto en el espacio-tiempo donde la densidad era divergente y, conforme el Universo se expande, la densidad va decreciendo.

En el caso $k = 1$, la densidad es mayor a la crítica y se tiene como solución:

$$\frac{2c}{H_0^2 \Omega_0} t = \theta - \text{sen}\theta \quad (2.66)$$

donde se ha parametrizado al factor de escala como $a = \frac{a_0}{2}(1 - \cos\theta)$. En el caso de densidad menor a la crítica, $k = -1$, se obtiene para el factor de escala:

$$a = a_0 \frac{\Omega_0 - 1 \cosh \theta - 1}{\Omega_0 2}, \quad (2.67)$$

que, como el caso plano, crece sin límite. Para el tiempo, se encuentra en este caso

$$H_0 ct = \frac{\Omega_0}{2(1 - \Omega_0)^{\frac{3}{2}}} (\sinh \theta - \theta). \quad (2.68)$$

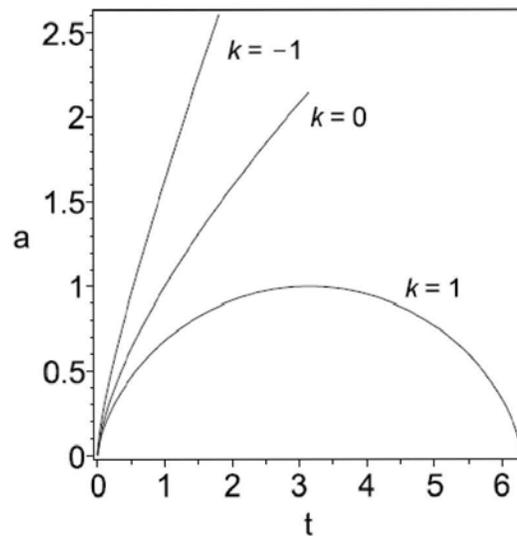


Figura 2.1: Comportamiento del factor de escala en el modelo de Friedmann, para secciones espaciales plana ($k=0$), hiperbólicas ($k=-1$) o esférica ($k=1$). Los dos primeros casos muestran que el universo crece sin límite, mientras que en el caso $k=1$, cuando la densidad de materia es mayor a la crítica, el factor de escala crece, pero posteriormente decrece y se recolapsa. Por simplicidad, estamos tomando los coeficientes en t y en el factor de escala igual a uno en los tres casos. [Nuñez and Degollado, 1993]

2.1.4. Observaciones que confirman el Big Bang.

Las soluciones del modelo de Friedmann describen un universo homogéneo e isotrópico en expansión. El principio cosmológico impone simetrías en el espacio-tiempo y es el origen de la simplicidad matemática del modelo. Esta hipótesis está soportada por las observaciones de fondo de microondas (CMB) que prueba el alto nivel de isotropía en el universo alrededor de nosotros.

La expansión del Universo y el corrimiento al rojo representan los principales pilares observacionales de este modelo. El estudio de procesos nucleares y electromagnéticos en el espacio-tiempo cosmológico, nos lleva a dos conclusiones: (1) la abundancia y existencia de núcleos ligeros pueden ser explicados con diez órdenes de magnitud; y (2) debe existir un fondo de microondas del origen cosmológico. Estas dos predicciones son confirmadas por observaciones y son otros dos pilares de este modelo.

Algunas predicciones de este modelo son:

- En el pasado, el universo era dominado por radiación. De esta forma, la era en la que domina la materia sucede a la era en la que dominaba la radiación.
- El universo tiene una historia térmica. Durante su expansión el universo se ha enfriado. Las interacciones a altas temperaturas se desacoplan tan pronto como el universo se expande y su reacción se vuelve pequeña.
- El universo emerge desde un estado donde la materia a alta temperatura es ionizada y se encuentra en equilibrio termodinámico.

A continuación se presentan las observaciones que han confirmado la validez de este modelo.

Expansión del Universo, diagrama de Hubble.

Una de las predicciones del modelo Friedmann es la expansión de las secciones espaciales, que vemos determinado por el factor de escala, $a(t)$, la cual produce que la distancia entre los cuerpos se modifique, éste aumenta si el factor crece. Lemaître, argumentaba que el corrimiento al rojo que se veía en las galaxias, no era por un movimiento propio de cada galaxia, sino que era el movimiento general debido a la expansión, y, de hecho, él mismo mostró en 1927, que la velocidad con la que se alejaban era proporcional a la distancia. Esta relación fue redescubierta observacionalmente un par de años más tarde por Edwin P. Hubble.

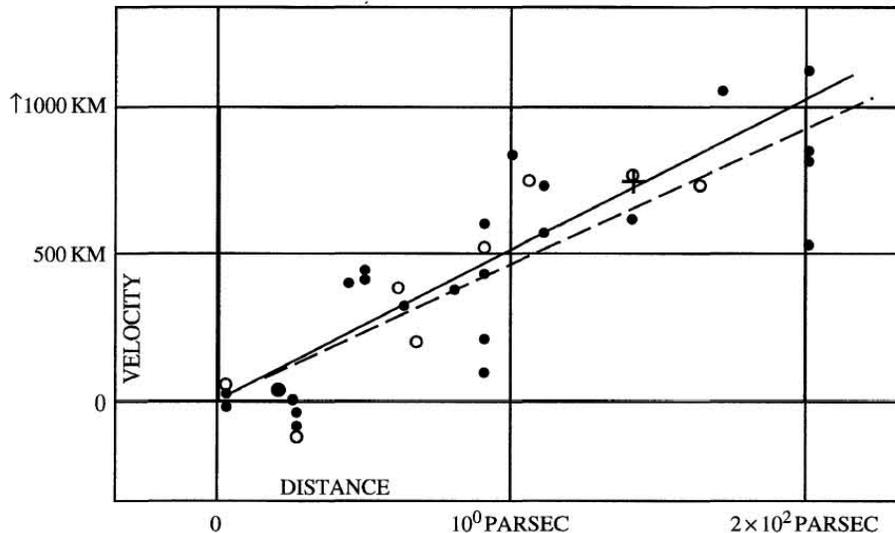


Figura 2.2: Diagrama original de Hubble (Hubble 1929). Velocidades de galaxias distantes (km/s) graficadas vs distancia (Mpc). La línea sólida (punteada) es el mejor ajuste a los puntos negros (blancos) los cuales tienen corrección (sin corregir) por el movimiento del Sol. [Dodelson, 2003]

La distancia a tiempo constante, ec. (2.64), permite definir, en general, a la distancia propia, (con ángulos también constantes):

$$l_{\text{propia}} = a(t) r, \quad (2.69)$$

con la que es posible definir una velocidad de recesión:

$$v_{\text{rec}} = \dot{a}(t) r, \quad (2.70)$$

que, evaluada al día de hoy, nos permite inferir la velocidad con la que se alejan los puntos, unos de otros, debido a la expansión cosmológica:

$$v_{\text{rec}} = H_0 r, \quad (2.71)$$

es decir, se alejan más rápido conforme se encuentran más lejos.

Si el Universo está en expansión, entonces las galaxias deben alejarse una de otra. La longitud de onda de la luz emitida por un objeto que se aleja se extiende de manera que la longitud de onda observada es mayor que la emitida. Definimos el factor de corrimiento al rojo z como:

$$1 + z = \frac{\lambda_{\text{obs}}}{\lambda_{\text{emit}}} = \frac{1}{a} \quad (2.72)$$

Entonces, una cantidad de medida por la cual las líneas de absorción y/o emisión están corridas al rojo es una medida directa de que tan rápido las estructuras en las cuales reside se están alejando de nosotros.

Alrededor de 1930, Hubble tuvo la idea de comparar las velocidades de las nebulosas con sus distancias (fig. 2.2) y descubrió una correlación notable: la velocidad de recesión era proporcional a la distancia. Más precisamente encontró que si V es la velocidad y D la distancia de una galaxia, se cumple:

$$V = H_0 \times D \quad (2.73)$$

donde H_0 es la constante de Hubble. Así, todas las galaxias se alejan de nosotros, y más rápidamente mientras más lejos se encuentran. Este fenómeno implica la expansión del Universo.

De la figura (2.2) se puede extraer el valor de la constante de Hubble. Esto es⁷, $H_0 = 1000/2 \text{ km s}^{-1}\text{Mpc}^{-1}$, casi un factor de 10 más alto que el de las estimaciones actuales, que es⁸ $H_0 \sim 75 \text{ km s}^{-1}\text{Mpc}^{-1}$.

Nucleosíntesis del Big Bang.

La teoría de nucleosíntesis explica la formación de los primeros núcleos estables y los átomos neutros. Durante la nucleosíntesis, ($T \sim 1 \text{ MeV}$) los únicos elementos producidos significativamente son el hidrógeno y helio con sus respectivos isótopos. Así mismo se considera que a temperaturas superiores no era posible la formación de átomos ligeros, es decir, solo existían protones y neutrones libres.

Cuando el universo era mucho más caliente y denso, cuando la temperatura era del orden de algunos MeV/k_B ,⁹ no había átomos neutros o incluso núcleos. Las grandes cantidades de radiación en el ambiente caliente se aseguraron que cualquier átomo o núcleo producido, fuera destruido inmediatamente por la alta energía de los fotones. Conforme el universo se enfrió por debajo de las energías de enlace de un núcleo típico¹⁰, se comenzaron a formar elementos ligeros. Conociendo las condiciones del universo temprano y las secciones eficaces nucleares relevantes, se puede calcular la abundancia primordial esperada de todos los elementos.

Las predicciones teóricas dependen de la densidad de protones y neutrones en el momento de la nucleosíntesis. La combinación de la densidad de protones y neutrones es llamada densidad bariónica, pues protones y neutrones tienen un número bariónico y son los únicos en su tipo alrededor de aquel instante. Así, la nucleosíntesis del Big Bang da una forma de medir la densidad bariónica en el universo. Ya que sabemos cómo se comporta el factor de escala con la densidad de materia (Ec. 2.59), es posible tomar medidas de la abundancia de los elementos ligeros en la medida de la densidad bariónica actual.

Al estudiar al Universo, se descubrió que la materia que vemos en él, está compuesta fundamentalmente por Hidrógeno y, en segundo lugar, por Helio. Más aún, se puede determinar que están en una proporción 4 a 1.

La comparación entre la abundancia observada y la predicha es difícil, principalmente porque la abundancia primordial puede ser modificada por varios procesos nucleares durante la evolución del Universo. Por otra parte, estas modificaciones son diferentes en cada núcleo. Por ejemplo, la abundancia de helio-4, la cual es muy estable, incrementa debido a la producción estelar, mientras

⁷[Dodelson, 2003]

⁸[Gómez Navarro, 2014b]

⁹ k_B es la constante de Boltzmann con valor, $k_B = 1,38065 \times 10^{-23} \text{ J/K}$. De esta forma, $1 \text{ MeV}/k_B \simeq 1,16045 \times 10^{10} \text{ }^\circ\text{C} \simeq 1,18 \text{ MeV}$. [Dodelson, 2003]

¹⁰La energía de enlace nuclear es típicamente 1 MeV. [Gómez Navarro, 2014a]

el deuterio, que es mucho menos estable y sólo puede ser destruido y no sintetizado en las estrellas, disminuye. El helio-3 y el litio-7 tienen una evolución más compleja ya que pueden ser sintetizados y a la vez destruidos. Los astrónomos, por lo tanto, tratan de medir la abundancia en ambientes lo más primordiales posibles.

Radiación cósmica de fondo (CMB).

El hidrógeno es el principal constituyente de la materia bariónica, su energía de ionización es de 13.6 eV. Si la temperatura es lo suficientemente alta para ionizar al hidrógeno, el universo se llenará con un plasma que es opaco a la radiación electromagnética. Una vez que el hidrógeno se enfría lo suficiente para ser neutro, los fotones en el universo serán capaces de moverse a través del universo con una baja probabilidad de dispersión. Este momento de la disociación (también llamado recombinación) define el momento en que se creó la radiación cósmica de fondo (CMB, por sus siglas en inglés). En realidad, esto se produce a una energía menor que 13.6 eV, ya que hay suficiente hidrógeno para detener a los fotones incluso cuando se ioniza sólo una pequeña parte. [Schutz, 2009]

La época de recombinación se produjo a una temperatura ~ 3000 K, desde aquel tiempo, el universo se ha expandido por un factor de 1100, por lo que la longitud de onda de la luz habrá aumentado 1100 veces en este tiempo. Conforme se expande el espacio-tiempo, también aumenta la longitud de onda de la luz entre la posición donde se emitió y la posición donde es detectada (se llama corrimiento al rojo cosmológico). En el factor $h\nu/kT$ que aparece en la fórmula para cuerpo negro¹¹, se tiene que $\nu = c/\lambda = c/(a\lambda_0)$, con a el factor de escala, ($a(t = hoy) = 1$, $a(t) < 1$ en el pasado). Entonces el factor $h\nu/kT$ en el pasado está relacionado con el factor $h\nu_0/kT_0$ por

$$\frac{hc}{\lambda T} = \frac{hc}{aT\lambda_0} \equiv \frac{hc}{T_0\lambda_0}, \quad (2.74)$$

Lo cual implica que $T_0 = a(t)T$, es decir, la temperatura estará reducida por el factor de expansión del universo. Por lo tanto, desde la época de recombinación la temperatura habrá disminuido por un factor de 1100, y se espera un espectro de cuerpo negro de temperatura ~ 3 K como fósil de la época en donde el universo era opaco y caliente. Esta temperatura corresponde a una longitud de onda de $\lambda_{max} \simeq 1$ mm, que se encuentra en el rango de las microondas.

Esta radiación fue predicha teóricamente por Gámow y encontrada de manera accidental por Penzias y Wilson en 1965. Penzias y Wilson estaban mapeando el cielo a longitudes de onda de microondas, relacionado a la comunicación con los nuevos satélites que se habían lanzado. Hubo un ruido persistente en la señal que provenía de manera continua y además de todas partes del cielo. No podían pensar en la fuente de esta señal hasta que leyeron de un cálculo de la radiación de fondo (a 10 K) de Peebles. Finalmente determinaron que el ruido que estaban detectando era de origen cósmico y correspondía a una temperatura de 2.73 K.

¹¹Un cuerpo negro de temperatura T emite un espectro continuo, es decir, la intensidad es una función de la longitud de onda o frecuencia. El espectro de un cuerpo negro tiene un máximo en su intensidad en alguna longitud de onda particular, λ_{max} . En 1900 Max Planck propuso una fórmula que explica el espectro:

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{\exp \frac{h\nu}{kT} - 1}.$$

Para la cual utilizó la hipótesis de que el intercambio de energía electromagnética entre la materia y el campo se produce mediante el intercambio de fotones cuya energía es proporcional a su frecuencia ($E = h\nu$). [Arthur, 2012b]

2.2. Existencia de la materia oscura y observaciones.

Existen otras observaciones, acumuladas desde el siglo pasado hasta ahora, que nos llevan a inferir que el Universo está lleno de materia no lumínica ni bariónica, que ha influido en la evolución del universo gravitacionalmente. Esta masa que puede llenar el universo, pero no es observada y es llamada 'materia oscura'.

La materia oscura no es observada directamente y su existencia es inferida a partir de su influencia en la evolución del universo a través de la gravitación. Observando sistemas astrofísicos (galaxias o conjuntos de ellas) se encuentran 'anomalías' que pueden ser explicadas suponiendo que el Universo contiene una gran cantidad de materia invisible, o que nuestro conocimiento de las leyes de gravitación no es correcto.

A continuación se presentan algunas de estas observaciones.

2.2.1. Lentes gravitacionales

La luz es desviada por cualquier campo gravitacional inhomogéneo. Esta propiedad fue el origen de la primera prueba de la relatividad general en el Sistema Solar. Hoy, esto se ha convertido en una poderosa regla para el mapeo de la distribución de materia en el Universo, y en particular para la materia oscura.

Los primeros arcos gigantes fueron descubiertos en 1986 en los conjuntos Abell 370, Abell 2218 y CI 2214. Las numerosas propiedades de la distorsión del conjunto permiten la reconstrucción de su potencial gravitacional y el estudio de su estructura.

Este método ha permitido determinar propiedades genéricas de la distribución de materia oscura en conjuntos de galaxias, independientemente de un modelo dado. Los conjuntos parecen estar dominados por materia oscura. La distribución de materia oscura parece estar seguida de la materia luminosa, en particular en las regiones centrales. La curvatura de radio de algunos arcos gigantes es comparable con su distancia al centro del conjunto, lo cual implica que el radio del núcleo del conjunto debe ser del mismo orden de magnitud. Las zonas internas de los conjuntos tienen algunas subestructuras.

Por otra parte, el primer cuásar múltiple, QSO0957+561 ($z = 1,41$), fue descubierto en 1979, y actualmente se conocen más de 10^4 de ellos. Inicialmente se observaron efectos de lentes gravitacionales en cuatro imágenes del cuásar QSO2237+0305 en 1989, el deflector es una galaxia espiral con corrimiento al rojo $z \sim 0,04$; variaciones correlacionadas de la luminosidad de las cuatro imágenes, permitieron establecer que las lentes son inducidas por las estrellas de las galaxias. Esta situación puede ser utilizada para colocar restricciones en la estructura y el tamaño intrínseco de la fuente. Además, se puede determinar la distribución de masa y mostrar que la distribución de estrellas es análoga a la Vía Láctea.

Con estas observaciones se ha mostrado que las galaxias deben tener un halo de materia oscura. Si este no fuera el caso, no se producirían imágenes múltiples con separación angular mayor a $2''$. [Patrick and Uzan, 2009]

Angulo de deflexión de los fotones.

Las trayectorias de los fotones son desviadas por campos gravitacionales. El camino de un fotón se describe con una geodésica nula, $ds^2 = 0$. La métrica es esféricamente simétrica y el elemento de

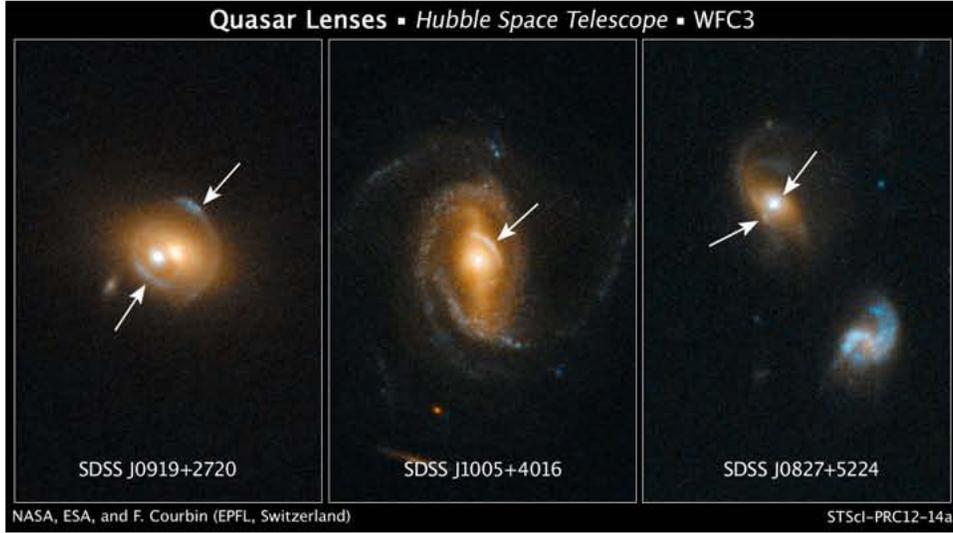


Figura 2.3: Arcos y anillos gravitacionales (indicados por flechas en estas tres fotos del Hubble) producidos por una lente gravitacional. [NASA and SLACS Team, 2014]

línea es descrito por la métrica de Schwarzschild:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2MG}{rc^2}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2MG}{rc^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2(\sin^2 \theta d\phi^2 + d\theta^2) \quad (2.75)$$

La trayectoria de la luz estará contenida en el plano definido por la dirección de la luz incidente y la posición de la masa, por lo tanto, es conveniente elegir las coordenadas tales que el movimiento esté contenido en el plano $\theta = \pi/2$, de esta forma la trayectoria estará descrita por las coordenadas ϕ y r , haciendo al intervalo de línea:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2MG}{rc^2}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2MG}{rc^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\phi^2. \quad (2.76)$$

En la ecuación anterior, los coeficientes de la métrica no dependen de ϕ ni de t , esto implica que las ecuaciones de la geodésica corresponden a coordenadas cíclicas que estarán asociadas con dos integrales de movimiento

$$\frac{d}{d\lambda} \frac{\partial}{\partial \dot{\phi}} \left(\frac{ds}{d\lambda}\right)^2 = 0 \quad \rightarrow \quad r^2 \dot{\phi} = J, \quad (2.77)$$

$$\frac{d}{d\lambda} \frac{\partial}{\partial \dot{t}} \left(\frac{ds}{d\lambda}\right)^2 = 0 \quad \rightarrow \quad \left(1 - \frac{2MG}{rc^2}\right) c^2 \dot{t} = A, \quad (2.78)$$

con J y A constantes y la derivada respecto a λ se denota con un punto.

La restricción adicional surge de $ds/d\lambda = 0$ a lo largo de la trayectoria, ec. (2.38, por lo que el elemento de línea toma la forma

$$\left(1 - \frac{2MG}{rc^2}\right) c^2 \dot{t}^2 - \left(1 - \frac{2MG}{rc^2}\right)^{-1} \dot{r}^2 - r^2 \dot{\phi}^2 = 0. \quad (2.79)$$

Sin pérdida de generalidad se puede elegir a λ tal que $A = c^2$ en la ecuación (2.78). Sustituyendo las ecuaciones (2.77) y (2.78) en la ec. (2.79) se obtiene

$$\dot{r}^2 = 1 - \frac{J^2}{r^2} \left(1 - \frac{2MG}{rc^2}\right). \quad (2.80)$$

Además, combinando este resultado con (2.77) se obtiene la ecuación de la trayectoria

$$d\phi = \frac{J}{r^2} \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{J^2}{r^2} \left(1 - \frac{2MG}{rc^2}\right)}}, \quad (2.81)$$

la cual, al integrarla da el ángulo de deflexión de un rayo de luz que pasa cerca de una masa M . La figura 2.4 muestra la geometría de este proceso. En el momento de mayor aproximación a M , $\phi = \phi_m$, $r = r_m$ y $dr/d\phi = 0$. De esta relación y la ec. (2.81) se obtiene para la constante de movimiento

$$J = \frac{r_m}{\sqrt{1 - \frac{2MG}{rc^2}}} \quad (2.82)$$

Haciendo un cambio de variable, $x = r_m/r$, se encuentra de la ecuación (2.81) que

$$\phi_m - \phi_\infty = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2 - \frac{2MG}{rc^2}(1 - x^3)}}, \quad (2.83)$$

donde ϕ_∞ es el valor de ϕ hacia la dirección incidente. Una solución aproximada, válida cuando el parámetro de impacto, r_m , es muy grande comparado con el radio de Schwarzschild, $R_s = 2MG/c^2$: $r_m \gg R_s$, y es obtenida por integración directa

$$\phi_m - \phi_\infty = \frac{\pi}{2} + \frac{2MG}{rc^2}. \quad (2.84)$$

La diferencia entre las direcciones asintóticas (aproximación y alejamiento del cuerpo deflector) es dos veces esta cantidad, y difiere por π (no deflexión) justo por el ángulo de deflexión:

$$\alpha = \frac{4GM}{r_m c^2} \quad (2.85)$$

Así, la deflexión que sufren los rayos de luz al pasar cerca de un cuerpo masivo, es proporcional a la masa del objeto e inversamente proporcional a la distancia mínima de aproximación a éste. Como este resultado es derivado bajo la hipótesis de que el parámetro de impacto, r_m , es muy grande comparado con el radio de Schwarzschild, r_s , el ángulo de deflexión será muy pequeño, $\alpha = 2R_s/r_m$.

Ecuación de las lentes.

La ecuación de las lentes relaciona la posición real de una fuente y su posición observada, fig. (2.5). Primero, se define el eje óptico como la línea punteada del observador al centro de la lente (OL). El plano de la fuente y el plano de la lente son planos perpendiculares al eje óptico, localizados a distancias D_{OS} y D_{OL} , respectivamente, del observador.

La posición de la fuente y de su imagen en el plano de la fuente, están relacionados por $AI = AS + SI$, donde AS puede ser expresada en términos de la posición angular de la fuente θ_S por $AS = \theta_S D_{OS}$ y similarmente, AI está dada por $AI = \theta D_{OS}$, con θ la posición angular de la imagen, y $SI = \alpha D_{LS}$, α el ángulo de desviación. Todo esto calculado en el límite de ángulo pequeño da la posición angular de la imagen, $\theta = \theta_L$, que es

$$\theta = \theta_S + \frac{D_{LS}}{D_{OS}} \alpha(\theta). \quad (2.86)$$

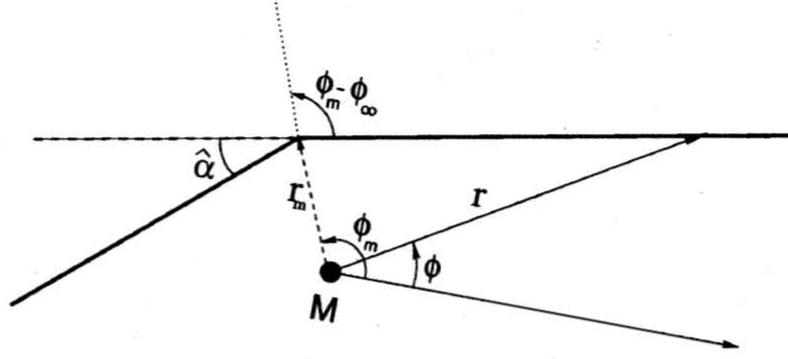


Figura 2.4: Deflexión de un rayo de luz pasando cerca de una masa M. La fuente se encuentra detrás de la masa M, mientras que el observador se encuentra a distancia r enfrente de M. En el momento de mayor aproximación a M, $r = r_m$ y $\phi = \phi_m$. La dirección de incidencia es $\phi = \phi_\infty$. [Mollerach and Roulet, 2002]

Las distancias involucradas en esta ecuación son distancias angulares, pues relacionan distancias físicas transversales de sus diámetros angulares. Como se mencionó, el valor de un ángulo de desviación hecho por una fuente puntual (Ec. 2.85), está dado por $\alpha = \frac{4GM}{r_m c^2} = 2R_s/r_m$, donde $r_m = D_{OL}\theta$ es el parámetro de impacto y R_s es el radio de Schwarzschild. La ecuación de las lentes es, por lo tanto,

$$\theta = \theta_S + 2\frac{R_s}{D}\theta \quad (2.87)$$

donde se ha introducido el factor geométrico $\hat{D} \equiv D_{OS}D_{OL}/D_{LS}$.

La invariancia rotacional alrededor del eje óptico implica que una fuente localizada exactamente en el eje ($\theta_S = 0$) será observada como un anillo de diámetro angular

$$\theta_E = \sqrt{\frac{4GM}{c^2} \frac{D_{LS}}{D_{OS}D_{OL}}} \quad (2.88)$$

Este radio angular, llamado radio de Einstein, depende tanto de la masa de la lente, como del factor $D_{LS}/D_{OS}D_{OL}$ que caracteriza la geometría del sistema. Su radio físico es $R_E = \theta_E D_{OL}$. (Ver Fig. 2.5).

El radio de Einstein es una escala angular natural para el problema. Si la lente da lugar a múltiples imágenes, $2\theta_E$ será el ángulo típico de separación entre estas imágenes. Fuentes cercanas a θ_E del eje óptico, son objetos con fuertes efectos de distorsión, dando lugar, por ejemplo, a arcos y grandes amplificaciones y distorsiones. Fuentes con $\theta_S \gg \theta_E$ casi no son afectados por las lentes.

La ecuación (2.87) puede ser reescrita en términos del radio de Einstein en la forma simplificada

$$\theta_S = \theta - \frac{\theta_E^2}{\theta} \quad (2.89)$$

Resolviendo esta ecuación para θ se obtienen dos soluciones

$$\theta_{\pm} = \frac{1}{2}(\theta_S \pm \sqrt{\theta_S^2 + 4\theta_E^2}) \quad (2.90)$$

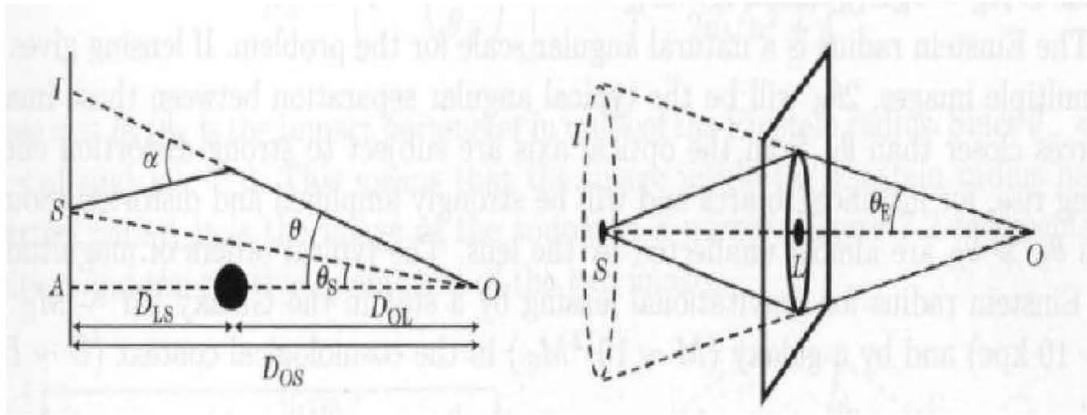


Figura 2.5: (Izq.) Configuración de un lente gravitacional. L es la lente gravitacional. θ , θ_S y α son, respectivamente, la posición angular de la imagen, la posición angular de la fuente y el ángulo de deflexión. D_{OL} y D_{OS} son las distancias angulares entre el observador y la lente y entre el observador y la fuente, respectivamente, y D_{LS} es la distancia angular entre la lente y la fuente. (Der.) Cuando una fuente, la lente y el observador están alineados, la imagen de la fuente toma la forma de un círculo, llamado círculo de Einstein.

ya que cada fuente tiene dos imágenes gravitacionales. Estas dos imágenes están localizadas en cada lado de la fuente, una dentro del radio de Einstein ($\theta_- < \theta_E$) y la otra fuera ($\theta_+ > \theta_E$), y están separadas por $\Delta\theta \geq 2\theta_E$.

Las lentes gravitacionales distorsionan el haz de luz y modifican el ángulo sólido bajo el cual la fuente es observada. Así, el flujo total es proporcional al radio entre el ángulo sólido bajo el cual la fuente y la imagen son observados. Por último, el aumento está dado por

$$A = \frac{\theta}{\theta_S} \frac{d\theta}{d\theta_S} \quad (2.91)$$

2.2.2. Curvas de rotación

En un sistema estelar como la Vía Láctea, la masa de casi todo el sistema está concentrada en las estrellas. Si se sabe cuánta materia hay, puede conocerse la fuerza gravitacional que ejercen todas las estrellas sobre sí mismas.

A fines de la década de 1970, Vera C. Rubin, W. Kent Ford, Jr. y Norbert Thonnard obtuvieron las velocidades de rotación de las estrellas alrededor de la galaxia, es decir, las curvas de rotación de 10 galaxias espirales de diferentes tipos según la clasificación de Hubble.

Para que la galaxia esté en equilibrio con su rotación, es decir, que las estrellas giren durante mucho tiempo alrededor de la galaxia sin colisionar o ser lanzadas al exterior, se debe cumplir que la fuerza gravitacional de todas estas estrellas sea igual a la fuerza centrífuga de su rotación. Por otro lado, para medir la velocidad a la que se mueven las estrellas, para saber su fuerza centrífuga, Vera Rubin utilizó el corrimiento al rojo debido a su velocidad con respecto a nosotros. Comparó el resultado de las velocidades obtenidas según la fuerza gravitacional y el resultado observado con el corrimiento al rojo, ambas observaciones tenían una marcada discrepancia entre sí. Estrellas a diferentes distancias del centro de la galaxia giran con la misma velocidad circular, siendo que la distribución de materia luminosa indica que ésta debe caer rápidamente entre más alejada esté una estrella del centro de la galaxia. Éste ha sido uno de los mejores trabajos que dan gran evidencia de la presencia de materia oscura en el Universo. [Matos, 2004]

La dinámica Newtoniana implica que la velocidad dependa de la masa contenida dentro de la órbita

$$\frac{v^2(r)}{r} = \frac{G_N M(< r)}{r^2} \quad (2.92)$$

donde $M(< r) = 4\pi \int \rho(r)r^2 dr$. El brillo de la superficie de las galaxias espirales es bien ajustado por una función que decrece exponencialmente como

$$I(r) = I_0 \exp\left(-\frac{r}{R_d}\right) \quad (2.93)$$

donde el diámetro del disco, R_d , es la longitud característica del orden de algunos kpc (4 kpc para nuestra Galaxia, 6 kpc para M31, por ejemplo). Entonces, si las estrellas son la mayor contribución a la masa de la galaxia, es decir, si no hubiese materia no luminica, entonces $M(< r)$ podría volverse constante más allá del disco óptico. Como resultado

$$M(< r) \rightarrow const., \quad v(r) \propto \frac{1}{\sqrt{r}}, \quad r \geq R_d \quad (2.94)$$

En realidad, las curvas de rotación, las cuales son particularmente bien medidas para galaxias espirales, no reproducen este comportamiento. Las curvas de rotación tienden hacia un valor no asintótico y que no desaparece en v_∞ . Si $v \rightarrow \infty$, $M(< r) \propto r$ a grandes distancias, lo cual indica la existencia de materia no luminosa con el modelo del comportamiento de la densidad, $\rho \propto 1/r^2$ a grandes distancias del centro.

Descripción de las curvas de rotación.

La masa dinámica es la masa deducida de la observación de las curvas de rotación.

$$G_N M_{din}(r) = rv^2(r). \quad (2.95)$$

La medida de la masa dinámica depende de las medidas de las velocidades de rotación de las estrellas en zonas exteriores del disco que a partir de su efecto Doppler se tiene acceso a la línea de visión de la velocidad

$$v_r = v_{gal} + v \sin i, \quad (2.96)$$

donde i es la inclinación del disco de la galaxia y v_{gal} es la velocidad de la galaxia. Se obtiene el radio desde el último punto observado, r_{max} , en el cual la velocidad es llamada v_{max} o v_∞ .

Sin embargo, no toda la masa dinámica está en forma de materia oscura. Las observaciones de las líneas moleculares de CO permiten la reconstrucción de la parte interna de la curva de rotación y la contribución de gas en esta zona en la que domina. Las radio observaciones del gas HI,¹² utilizando la línea de hidrógeno de 21 cm,¹³ permite reconstruir la mayor parte del exterior, más allá del disco estelar, donde domina la materia oscura.

Es posible descomponer la curva de rotación en una contribución del disco estelar y el gas, y otra de la materia oscura como

$$v^2 = v_{barion}^2 + v_{DM}^2, \quad (2.97)$$

donde la componente bariónica es descompuesta en sí misma en

$$v_{barion}^2 = v_{gas}^2 + v_{estrellas}^2. \quad (2.98)$$

¹²Hidrógeno atómico neutro.

¹³Línea espectral del hidrógeno neutro en la zona de las microondas del espectro electromagnético.

Cada una de esas velocidades está relacionada con la contribución de masa de su componente correspondiente, donde la relación es proporcionada por la ecuación (2.92),

$$v_X^2 \equiv \frac{G_N M_X}{r}. \quad (2.99)$$

Dando la razón masa-luminosidad m_*/L_* de la población estelar de la galaxia, es posible reconstruir el perfil de la masa en el halo (ver figura 2.6) mediante la distinción entre la contribución del gas, de las estrellas y de la materia oscura en el halo. De hecho, del modelo de luminosidad, se define, para galaxias espirales, una densidad de superficie por

$$\Sigma = \Sigma_0 \exp\left(-\frac{r}{R_d}\right). \quad (2.100)$$

El radio óptico, R_{opt} , está definido como el radio que contiene 80 % de la energía luminosa. Está relacionado con el radio del disco por $R_{opt} \approx 3,2R_d$. Se obtienen perfiles equivalentes para el gas.

En conclusión, se observan dos importantes nociones de la masa: la masa dinámica, relacionada con las curvas de rotación, y la masa bariónica, que se asume, es proporcional a la masa lumínica. La tercer noción de la masa a considerar, la cual es la masa M_{lente} , que puede ser determinada por las lentes. En el modelo estándar de materia oscura, aquellas masas satisfacen

$$M_{barion} < M_{DM} \approx M_{din} \approx M_{lente}. \quad (2.101)$$

En galaxias elípticas, es posible comparar la masa lumínica a través del brillo superficial con la masa que se determina a partir del movimiento estelar, el cual se mide estadísticamente con la dispersión de velocidades. En este trabajo se espera que el método de dispersión de velocidades en galaxias elípticas, muestre un comportamiento similar a los modelos de masa que las curvas de rotación generan en galaxias espirales es decir, que la cantidad de masa luminosa sea constante más allá del radio efectivo de la galaxia, mientras que la cinemática muestre la existencia de mayor cantidad de materia después de este radio.

2.2.3. Formación de estructura

Si bien el modelo de Friedmann describe bien el Universo a gran escala, tiene el problema de que a partir de él no se puede generar la estructura que vemos hoy. De manera local el Universo es claramente inhomogéneo (ver Fig. 2.7). La estructura de filamentos y huecos caracteriza al Universo observable. Un modelo cosmológico viable debe ser capaz de explicar esta estructura que vemos en el Universo hoy.

El Universo contiene varias componentes (bariones, materia oscura, radiación, etc.) y por ello, en un modelo realista, es necesario estudiar la evolución a las perturbaciones de las diferentes componentes que están acopladas, al menos a través de la interacción gravitacional. El tratamiento totalmente formal tiene que ser relativista tomando una perturbación a la métrica de Friedmann. De este modo se encuentra el sistema de ecuaciones para las perturbaciones a las diferentes componentes del Universo. La ecuación fundamental es la ecuación de Boltzmann, se escribe para las diferentes componentes en un desarrollo perturbativo a primer orden y se resuelve el sistema de ecuaciones resultantes. El resultado para un modelo cosmológico particular aparece en la figura (2.8).

Durante la época en que el fluido multicomponente está dominado por la radiación, las fluctuaciones crecen de acuerdo a la descripción dada por el gas relativista pues la densidad de radiación

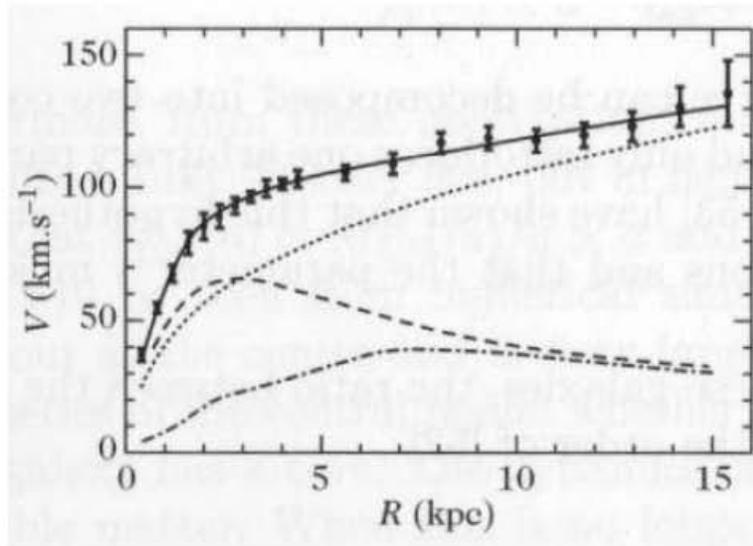


Figura 2.6: Curva de rotación de la galaxia M33. Las observaciones (círculos sólidos con barras de error) se comparan con un modelo del halo de materia oscura (línea sólida). Se representan las contribuciones del halo (línea guiones y puntos), el disco estelar (guiones cortos) y del gas (guiones largos). [Patrick and Uzan, 2009]

es muy alta y no puede ser compensada por la presión de radiación, se tiene un modo inestable; las fluctuaciones de densidad de materia oscura y bariónica siguen de cerca a la evolución de las fluctuaciones a la radiación. Una vez que la densidad de materia (oscura y lumínica) es del orden de la densidad de energía, entonces la materia oscura se separa de la evolución del fluido fotones-bariones y evoluciona por su cuenta de una manera semejante a la evolución de la perturbación bariónica descrita anteriormente para el modo inestable, pues la presión es cero en este caso. La materia bariónica y la radiación continúan acopladas, la radiación sin embargo domina este fluido de dos componentes pues estamos suponiendo en este caso que la mayor densidad de materia está en la materia oscura. La presión de radiación es suficientemente grande para detener el crecimiento de la perturbación volviéndola estable y se tiene el fenómeno de oscilación descrito previamente. Las fluctuaciones de radiación y materia oscilan más o menos con una amplitud constante hasta la época de desacople donde la materia se separa de la evolución de la radiación y cae rápidamente en los pozos de potencial de la materia oscura, cuyo contraste de densidad en esta época es alrededor de 10 veces mayor a la amplitud de las fluctuaciones bariónicas, de modo que posterior a la época de la CMB, las fluctuaciones de materia oscura y bariónica evolucionan juntas, siguiendo la dinámica de la componente dominante, la oscura, hasta que los fenómenos físicos no lineales se vuelven importantes. La radiación sigue su evolución por su parte después del desacople comportándose como un fluido no colisional siguiendo el fenómeno de flujo libre. [Zavala Franco, 2007]

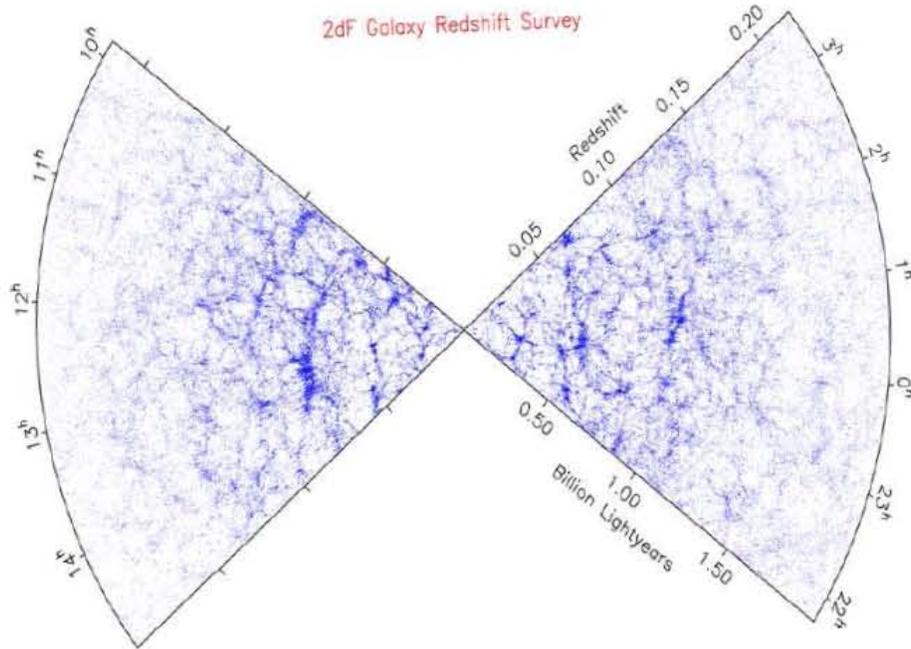


Figura 2.7: Proyección de la distribución de galaxias en el cielo como función de la ascensión recta y del corrimiento al rojo para las observaciones del proyecto 2dFGRS en el hemisferio norte galáctico (cono izquierdo) y en el hemisferio sur galáctico (cono derecho). Cerca de 250,000 galaxias conforman la muestra. [Zavala Franco, 2007]

2.2.4. Anisotropías de la radiación cósmica de fondo.

Las primeras mediciones espaciales del CMB fueron realizadas por un satélite de la NASA, el Explorador del Fondo Cósmico o bien, Cosmic Background Explorer (COBE), el cual en 1992 confirmó por primera vez que la temperatura del CMB no era la misma en todo el cielo. Las medidas indicaban que en las escalas angulares mayores que 10° , la temperatura del CMB variaba alrededor de una parte en 100 000 del valor promedio de 2.73K.

En 2003, COBE fue sucedido por el satélite Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP), el cual mejoró la claridad y nitidez de los mapas. Esto ayudó a determinar algunas características importantes del Universo tales como su edad, y la cantidad de diferentes tipos de materia y energía que contiene.

En 2009 la Agencia Europea Espacial lanzó el satélite Planck que actualmente se encuentra a 1.5 millones de kilómetros de la Tierra, ya que el calor de nuestro planeta, el Sol o la Luna podrían interferir con sus instrumentos. Los detectores del Planck tienen suficiente sensibilidad para distinguir variaciones de temperatura de unas pocas millonésimas de grados. Los principales objetivos de este instrumento son: determinar las propiedades de gran escala del Universo con alta precisión, realizar pruebas de teorías de inflación, investigar ondas gravitacionales primordiales, estudiar el origen de las estructuras que podemos ver actualmente en el Universo, estudiar las galaxias incluyendo la nuestra en el rango de las microondas ($f \approx 300 \text{ MHz} - 300 \text{ GHz}$).

La figura (2.9) muestra las simulaciones del modelo teórico, representado por la línea roja, y las observaciones de los satélites WMAP y PLANCK.

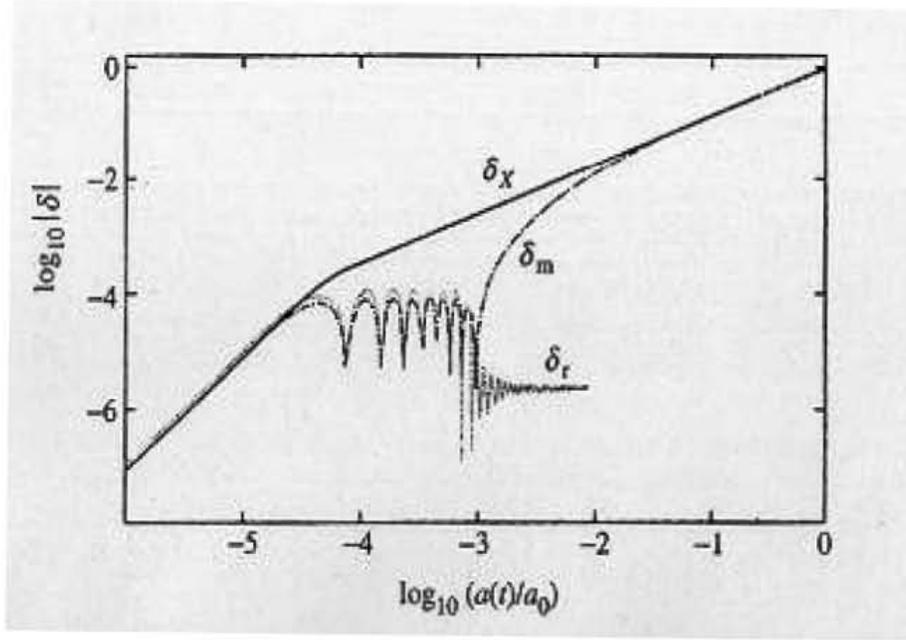


Figura 2.8: Evolución del contraste de densidad $\Delta = \delta$ para una fluctuación cuya escala en masa es $M \sim 10^{15} M_{\odot}$, para las componentes de materia oscura fría δ_X , materia bariónica δ_m y fotones δ_r . El modelo cosmológico es con dominio de CDM $\rho_X \ll \rho_m$, $\Omega_{0,m} = 1$ y $H_0 = 50 \text{ km s}^{-1} \text{ MPC}^{-1}$. [Patrick and Uzan, 2009]

La explicación a este hecho es la siguiente, en la fase de gas caliente en el universo primigenio, las variaciones de la densidad en pequeñas escalas ($< 1^\circ$) se propagarían al modo de ondas acústicas, las cuales se producirían por el hecho de que los fotones de luz tienden a dispersar la materia, mientras que ésta tira gravitatoriamente del entorno, produciéndose dos efectos contrapuestos: cuando la densidad disminuye debido a la acción dispersora de los fotones, su presión pierde eficiencia y empieza a ganar el tirón gravitatorio que vuelve a aumentar la densidad en un ciclo que se autoalimenta a sí mismo creando ondas acústicas.

Se ha observado al CMB como una esfera alrededor de nosotros. Un mapa del CMB puede ser expandido con armónicos esféricos para extraer los coeficientes a_{lm}^{obs} ,

$$\Theta_{obs}(e) = \sum_{lm} a_{lm}^{obs} Y_{lm}(e). \quad (2.102)$$

La isotropía del Universo implica que la función de correlación de dos puntos angulares de las fluctuaciones de temperatura observadas, puede ser obtenida como un promedio en el cielo. Las funciones dependen solamente de $\cos\theta$ y por lo tanto pueden ser expandidas en polinomios de Legendre como

$$C_{obs}(\theta) = \frac{1}{4\pi} \sum_l C_l^{obs} P_l(\cos\theta), \quad (2.103)$$

entonces

$$C_l^{obs} = \frac{1}{2l+1} \sum_m |a_{lm}^{obs}|^2. \quad (2.104)$$

2.2.5. Expansión acelerada.

El resultado cosmológico más notable desde el trabajo original de Hubble fue el descubrimiento de que la expansión del universo no se está desacelerando, sino acelerando. Esto se hizo esencialmen-

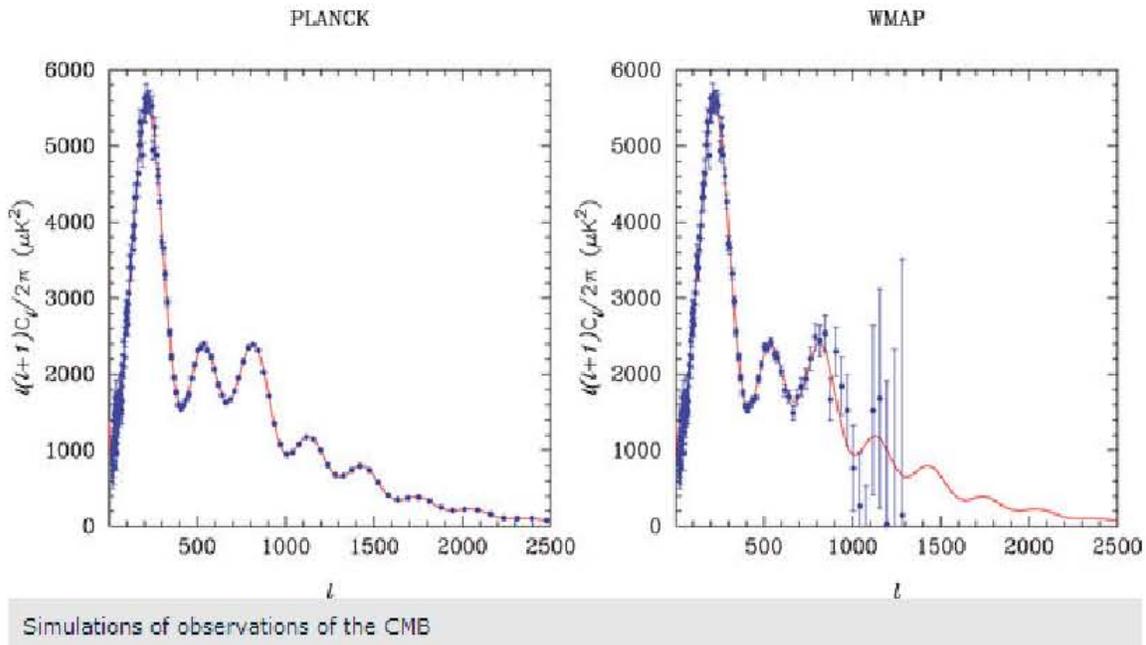


Figura 2.9: Observaciones del CMB realizadas con los observatorios Planck (izq.) y WMAP (der.) comparadas con simulaciones. [European Space Agency, 2014]

te haciendo un gráfico de la distancia-luminosidad contra desplazamiento hacia el rojo, donde las luminosidades se dan en magnitudes¹⁴. Esto se conoce como el diagrama de magnitud-corrimiento al rojo.

Dos equipos de astrónomos, llamados High-Z Supernova Search Team [Ries and Filippenko, 1998] y el Supernova Cosmology Project [Perlmutter et al., 1999], respectivamente, usaron explosiones de supernovas de Tipo Ia como candelas estándar hacia corrimientos al rojo de orden 1.¹⁵ Aunque hubo una considerable dispersión entre los puntos de los datos, ambos equipos encontraron que el mejor

¹⁴Hiparco (100 a.C) fue uno de los primeros astrónomos en catalogar las estrellas que vio. Asignó una magnitud aparente, $m = 1$, a las estrellas más brillantes, y $m = 6$ a las más débiles. Valores de m más chicos significan estrellas más brillantes. En la escala moderna, una diferencia de 5 magnitudes corresponde a un factor de 100 en brillo ($1mag = 100^{1/5}$). Las magnitudes aparentes de dos objetos están relacionadas por $m_2 - m_1 = 2,5 \log_{10}(L_1/L_2)$, donde L es la luminosidad intrínseca (energía emitida por segundo). La magnitud absoluta es la magnitud aparente que tendría una estrella si estuviera ubicada a una distancia de 10 pc de la tierra. De esta manera, a la cantidad $m - M$, se le llama módulo de distancia, y es un indicador de estas unidades. [Arthur, 2012b]

¹⁵El pico de luminosidad de este tipo de estrellas está relacionado con la rapidez de debilitamiento de su brillo. Al aplicar esta correlación, la luminosidad relativa puede determinarse dentro de un intervalo de error del 10 al 20 %

ajuste de los datos era un universo que se acelera y no disminuir la velocidad. Los datos del equipo de High-Z se muestran en la figura (2.10).

El diagrama superior muestra el flujo (magnitud) de medición para cada una de las supernovas en la muestra, junto con las barras de error. La tendencia parece curva hacia arriba, lo que significa que el alto corrimiento al rojo de las supernovas es más débil que lo esperado. Esto sucedería si el universo se acelera, ya que las supernovas simplemente están más lejos de lo esperado. Se muestran tres ajustes posibles, y el mejor es el que contiene una constante cosmológica positiva, que, como veremos a continuación, es la forma más sencilla de introducir a las ecuaciones de Einstein, y que es posible ajustar a la aceleración. El diagrama inferior muestra los mismos datos, pero se trazan sólo los residuos de un universo plano. Esta muestra más claramente los datos a favor de la curva para el universo en aceleración.

Estos estudios fueron la primera evidencia fuerte para la aceleración, pero por ahora hay varias líneas de investigación que conducen a la misma conclusión. Si la densidad de energía del universo que ejerce la gravedad es atractiva, la expansión debería estar disminuyendo. En cambio se acelera. [Schutz, 2009]

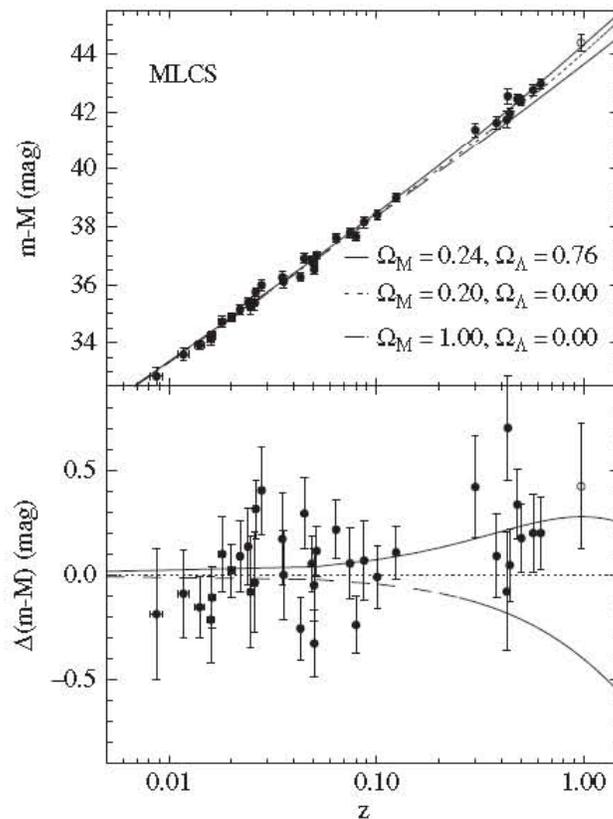


Figura 2.10: El cuadro superior muestra el diagrama de Hubble, distancia respecto al corrimiento al rojo de las supernovas tipo Ia. Se obtiene el mejor ajuste de datos para un Universo en expansión ($\Omega_M = 0,24, \Omega_\Lambda = 0,76$). El cuadro inferior muestra la diferencia entre los datos y los modelos $\Omega_M = 0,20, \Omega_\Lambda = 0,00$. [Ries and Filippenko, 1998]

2.3. Modelo Λ CDM.

La existencia de la materia oscura fue establecida por las observaciones en todos los niveles en el universo. A fin de descifrar el contenido de la materia, el trabajo se ha dividido en dos partes. Por un lado, se buscan las características que la materia oscura debe tener y, por el otro, se han desarrollado modelos más allá del modelo estándar para encontrar partículas que pudieran tener las características necesarias para un buen candidato de materia oscura.

Se llama materia oscura fría a la materia que al dejar de interactuar con el resto de la materia, su energía cinética ya no es muy alta, las velocidades de vibración de sus partículas ya no son cercanas a la velocidad de la luz y, por tanto, su contribución cinética a la masa ya no es significativa. A esta hipótesis se le conoce también como CDM (por su nombre en inglés: Cold Dark Matter).

Para poder comparar los modelos teóricos con las observaciones de los astrónomos se llevaron a cabo simulaciones numéricas; es decir, en una supercomputadora se introduce la información de las interacciones gravitacionales entre la materia y, usando un simulador de n-cuerpos, se corre el programa y se ve cómo se desarrolla el sistema. Después de algunos meses, la simulación se ve como en la figura (2.11). El resultado se compara con los censos de galaxias que se han realizado durante decenas de años. Cuando se hicieron las primeras simulaciones con esta materia, colocando su densidad igual que la densidad crítica, se encontró que este sistema formaba demasiada estructura, muchos más cúmulos de galaxias, galaxias, etc., de como se ve en el Universo. No fue sino hasta que se colocó alrededor de 30 % de la densidad crítica del Universo de esta materia, que coincidió más o menos con la formación de estructura que se observa. Sin embargo, algo falló. Cuando se utilizó 30 % de la materia crítica como materia oscura, el resultado fue que sí se formaba la estructura observada a grandes tamaños, pero entonces la pequeña estructura no coincidía con la observada. Podía ajustarse un parámetro para obtener la cantidad de estructura observada en tamaños pequeños, pero entonces la estructura a gran escala fallaba. Existen dos explicaciones.

La primera consiste en ajustar la estructura a escalas grandes y suponer que la materia oscura no era tan fría, sino tibia. Sin embargo, la materia oscura tibia no permite la formación de galaxias hasta muy tarde. La segunda explicación, es suponer que algo impedía la formación de demasiada estructura a pequeña escala, dado que el universo está en expansión, la expansión es un inhibidor de la formación de estructura. Sin embargo, la expansión no basta para inhibir lo suficiente a la estructura a pequeña escala para obtener la estructura observada. Pero si el Universo se estuviera expandiendo, cada vez más rápido, entonces sí podría ser suficiente. Así, si hubo una gran explosión que lanzó toda la materia en todas las direcciones, esta materia, debido a su fuerza gravitacional, se está frenando poco a poco.

Lo que hay que suponer es que existe algún tipo de materia extraña que acelera la expansión del Universo, es decir, algún tipo de materia antigravitacional. Si el Universo se expande aceleradamente, esto impide la formación de estructura y ajusta muy bien los cálculos hechos con el esquema que se propone y las observaciones en el Universo. Para darle un nombre, se suele llamar a esta materia desconocida, energía oscura. Esto implica que se tienen dos tipos de materia desconocida, la materia oscura, que es atractiva y causante de la estructura a gran escala del Universo. Y ahora la energía oscura, que es repulsiva con la materia y la causante de una aparente expansión acelerada del Universo. Notemos que ambas materias desconocidas son eso, materia. El nombre de 'energía oscura', es sólo un nombre. En la actualidad, el más popular de estos modelos del universo es el llamado Lambda Cold Dark Matter (Lambda-CDM, o Λ -CDM), que consiste en un modelo de materia oscura fría más una constante cosmológica.

Durante los años noventa se llevaron a cabo detalladas investigaciones analíticas y numéricas para poder justificar esta hipótesis. Se ha mostrado que la presencia de materia oscura fría en el Universo

temprano influiría en la forma y estructura de muchos tipos de galaxias. Más explícitamente, Julio Navarro y Carlos Frenk, así como Simon White, han mostrado numéricamente que las agrupaciones en las grandes escalas en un Universo dominado por materia oscura fría, en un 25 %, más la constante cosmológica en un 70 %, combina bien con muchas de las características observadas actualmente en esas escalas. Desde el punto de vista teórico, la combinación de materia oscura fría con una constante cosmológica como energía oscura ha tenido un gran éxito cuando se le compara con los censos de galaxias y cúmulos de galaxias que se tienen. Casi todas las observaciones y pruebas a las que se ha confrontado el modelo de Λ CDM, han sido pasadas con éxito. Asimismo, la hipótesis de la materia oscura fría ha forjado un fuerte vínculo entre la física de partículas y la cosmología, debido a que los cosmólogos buscan alguna forma de materia oscura fría, mientras los físicos de altas energías proponen independientemente la posible existencia de nuevas y exóticas partículas dentro del marco de varias teorías unificadoras.

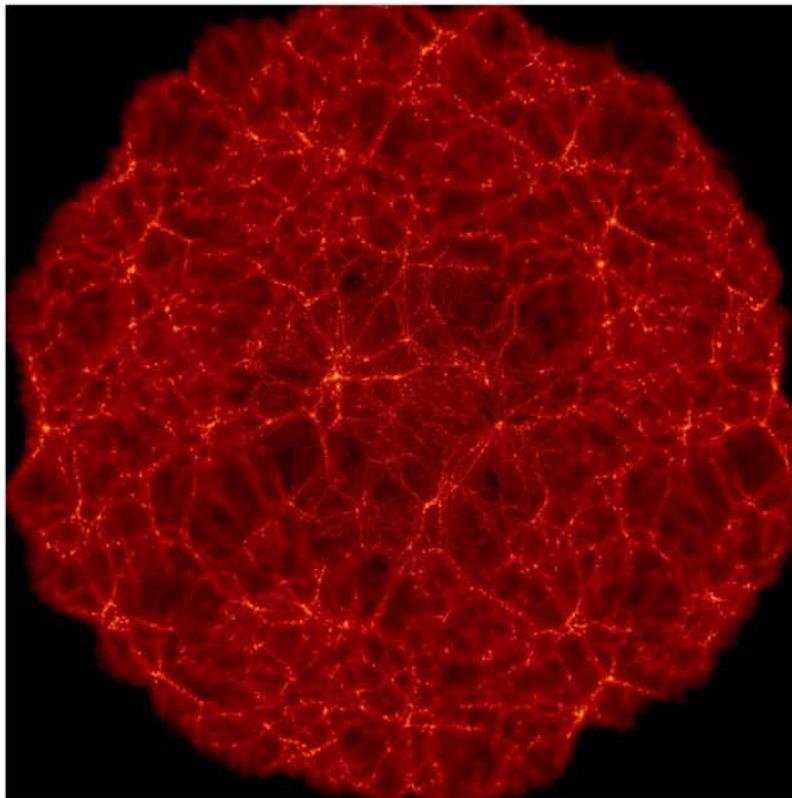


Figura 2.11: Resultado de una simulación numérica elaborada con el Gadget Supercomputing Consortium usando computadoras del Computing Centre de la Max-Planck Gellschaft, Garching, Alemania. (<http://www.mpa-garching.mpg.de/gadget/>)

2.3.1. Constante cosmológica.

Cuando Einstein formuló las ecuaciones de relatividad general en 1915, la expansión del universo no había sido descubierta, entonces no existía la idea de que el universo estuviera en un estado dinámico. Fue natural para Einstein buscar una ecuación estática para sus ecuaciones cosmológicas. Einstein modificó sus ecuaciones agregando el llamado 'término cosmológico' a su ecuación, ec. (2.21),

como sigue:

$$R_{\beta\nu} - \frac{1}{2}g_{\beta\nu}R - \Lambda g_{\beta\nu} = \frac{8\pi G T_{\beta\nu}}{c^4} \quad (2.105)$$

donde Λ es la *constante cosmológica*. La ecuación (2.105) representa la modificación más general posible a las ecuaciones de Einstein que también satisface la condición de que $T_{\beta\nu}$ sea el tensor construido a partir de la métrica $g_{\beta\nu}$ y su primer y segunda derivada, y, es lineal en la segunda derivada. esta modificación no cambia el carácter covariante de las ecuaciones, además de no alterar la condición de continuidad, (ec. 2.24). La restricción más fuerte que se puede poner sobre Λ a partir de las observaciones, es que ésta debe ser lo suficientemente pequeña, tal que no cambie las leyes del movimiento planetario, que se sabe está bien descrito por (ec. 2.21).

El valor de Λ para el cual el universo es estático es

$$\Lambda_E = \frac{4\pi G\mu}{c^2}. \quad (2.106)$$

El modelo que se describe con Λ_E es llamado *universo de Einstein*. Este universo es estático (pero desafortunadamente, inestable), tiene curvatura positiva y radio de curvatura

$$a_E = \Lambda_E^{-1/2} = \frac{c}{(4\pi G\mu)^{1/2}}. \quad (2.107)$$

Después de descubrir la expansión del universo, a finales de los 1920s, no había ninguna razón para buscar soluciones estáticas para las ecuaciones de campo. Einstein consideraba el término Λ como el mayor error que había cometido en su vida. Desde entonces, sin embargo, ha sido un tema de mucho interés y estudio serio tanto por razones conceptuales como de observación. Existen dos modelos especialmente importantes que implica la constante cosmológica.

El *universo de de Sitter* (de Sitter 1917) es un modelo cosmológico en el cual el universo está vacío ($p = 0$; $\mu = 0$) y es plano ($k = 0$). En el universo vacío de de Sitter, partículas de prueba se mueven alejándose una de otra debido al efecto repulsivo gravitacional de la constante cosmológica positiva. Este modelo fue solamente de interés histórico hasta hace 20 años o más. En años recientes, sin embargo, éste ha sido el mayor componente de modelos inflacionarios del universo.

En el *modelo de Lemaître* (1927), el universo tiene una curvatura espacial positiva ($k = 1$). El parámetro de expansión en este caso siempre incrementa, pero hay un periodo en el que permanece prácticamente constante. Este modelo fue creado alrededor de 1970 para explicar la aparente concentración de quásares en un corrimiento al rojo $z \simeq 2$. Datos posteriores, sin embargo, han mostrado que esta no es la explicación de la evolución de corrimiento al rojo de los quásares, por lo que este modelo es sólo de interés histórico. [Coles and Lucchin, 2002]

Modelo de Friedmann

Si suponemos que la materia en el Universo corresponde a un fluido perfecto, es decir, que tiene asociado un tensor de energía-momento: $T_{ab} = (p + \rho)u_a u_b + p g_{ab}$, donde la densidad ρ y la presión p dependen solamente del tiempo, consecuencia del principio cosmológico, u_a es la cuadrivelocidad del fluido, entonces, las ecuaciones de Einstein con constante cosmológica resultan en las llamadas ecuaciones de Friedmann:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = -\frac{k}{a^2} + \frac{8\pi G\rho}{3} + \frac{\Lambda}{3} \quad (2.108)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3} \quad (2.109)$$

Para resolverlas se necesita una ecuación extra que está dada por la ecuación de estado para el fluido perfecto, $p = \omega\rho$. Para la materia ordinaria y oscura, las velocidades aleatorias de sus componentes son muy pequeñas, puede entonces modelarse al fluido como polvo, $p_m \sim 0$. Para radiación (fotones), la ecuación de estado es $p_r = \rho_r/3$. Suponiendo que es un fluido con presiones negativas, la ecuación de estado para la constante cosmológica es $p_\Lambda = -\rho_\Lambda$, y entonces, $\Lambda = 8\pi G\rho_\Lambda$.

Al definir la densidad de materia en términos de la densidad crítica, $\rho_m = \Omega_m\rho_c = \Omega_m(\tau)3H^2(\tau)/8\pi G$, donde H es el parámetro de Hubble, definido como $H = \dot{a}/a$, las ecuaciones de Friedmann, la constante de curvatura espacial, k , puede escribirse como:

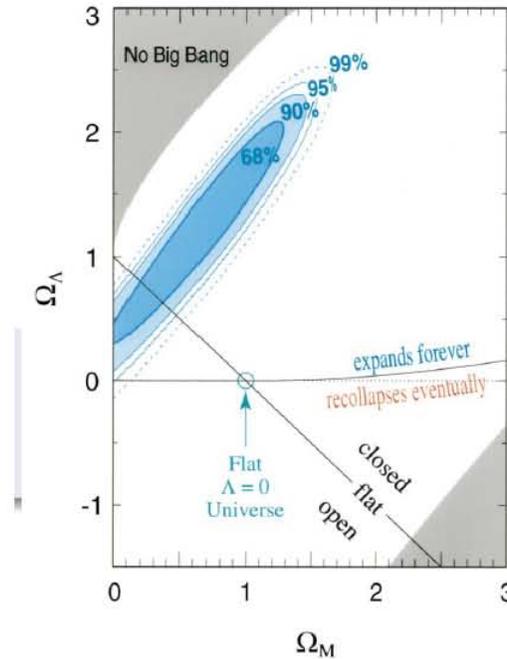
$$k = H_0^2 \left(\Omega_{m,0} - 1 + \frac{1}{3} \frac{\Lambda}{H_0^2} \right) \tag{2.110}$$

donde H_0 es el parámetro de Hubble al día de hoy y $\Omega_{m,0}$ es el valor de la densidad de materia en unidades de la densidad critica de hoy. De la ecuación (2.110) para k se tiene una condición para separar la geometría del Universo: cerrado, $\Lambda/H_0^2 > 3(1 - \Omega_{0,m})$, plano, $\Lambda/H_0^2 = 3(1 - \Omega_{0,m})$ o abierto, $\Lambda/H_0^2 < 3(1 - \Omega_{0,m})$. (Figura 2.12)

Usando la definición de Ω_m y sustituyendo la ecuación (2.110) en (2.108) obtenemos:

$$\frac{1}{H_0^2} \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \Omega_{0,m} \left(\frac{1-a}{a^3} \right) + \frac{1}{3} \frac{\Lambda}{H_0^2} \left(\frac{a^2-1}{a^2} \right) + \frac{1}{a^2}. \tag{2.111}$$

La ecuación (2.111) puede ser integrada para obtener la evolución del factor de escala en función del tiempo cosmológico. [Zavala Franco, 2007]



Créditos: Perlmutter et al. 1999

Figura 2.12: Restricciones del estudio de las suernovas tipo Ia a los parámetros de densidad (omegas). La línea que se extiende desde la parte superior izquierda a la inferior derecha corresponde a un universo plano. El punto con $\Omega_M = 1$ y $\Omega_\Lambda = 0$ se descarta con alta confianza. [Dodelson, 2003]

2.3.2. Naturaleza de la materia oscura.

No se tiene certeza de la naturaleza de la materia oscura, por lo que se ha descrito como partícula, fluido y campo escalar. En el desarrollo de este trabajo se considerará como partícula. A continuación veamos el argumento de estas formas de materia.

Materia oscura como fluido

Una gran cantidad de sistemas físicos macroscópicos, incluyendo al Universo, pueden considerarse como un fluido perfecto aproximadamente. Un fluido perfecto es definido como aquel que tiene en cada punto una velocidad \mathbf{v} , tal que, un observador que se mueve a esa misma velocidad ve el fluido alrededor de sí como isotrópico. Este es el caso si el camino libre medio entre colisiones es pequeño comparado con la escala de longitudes usadas por el observador. Podemos ver esta definición en términos del tensor de energía-momento.

$$T^{\alpha\beta} = p\eta^{\alpha\beta} + (p + \mu)u^\alpha u^\beta, \quad (2.112)$$

con u^α la velocidad del cuadvivector del fluido, $u^0 = (1 - \mathbf{v}^2)^{-1/2}$, $\mathbf{u} = \mathbf{v}u^0$, los coeficientes p y μ , la presión y la densidad de energía propia, respectivamente. Estas cantidades son medidas en el instante por un observador en el marco inercial que se mueve con el fluido y que por lo tanto son escalares. Así, la ecuación (2.112) representa el tensor de energía-momento de un fluido perfecto en ausencia de gravitación. Luego, el tensor contravariante que se reduce a (2.112) en ausencia de gravitación es

$$T^{\beta\nu} = pg^{\beta\nu} + (p + \mu)u^\beta u^\nu, \quad (2.113)$$

donde u^β es el valor local de $dx^\beta/d\tau$ para un elemento de fluido comóvil, La condición de conservación de energía-momento nos dan la ecuaciones hidrodinámicas

$$0 \simeq T_{;\nu}^{\beta\nu} = \frac{\partial p}{\partial x^\nu} g^{\beta\nu} + g^{-1/2} \frac{\partial}{\partial x^\nu} g^{1/2} (p + \mu) u^\beta u^\nu + \Gamma_{\nu\lambda}^\beta (p + \mu) u^\nu u^\lambda. \quad (2.114)$$

El último término representa la fuerza gravitacional en el sistema. Note que en ausencia de gravitación $\eta_{\alpha\beta} = u^\alpha u^\beta = -1$, entonces en presencia de gravitación debemos tener

$$g_{\mu\nu} = u^\mu u^\nu = -1. \quad (2.115)$$

Materia oscura como campo escalar

El tensor que describe a la materia como campo escalar es:

$$T_{\mu\nu} = \frac{c^4}{8\pi G} \left(\Phi_\mu \Phi_\nu + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (\Phi_\alpha \Phi^\alpha + V(\Phi)) \right), \quad (2.116)$$

donde $V(\Phi)$ es el potencial escalar. Al calcular la divergencia de este tensor se llega a la ecuación de Klein-Gordon:

$$\square\Phi - \frac{dV}{d\phi} = 0. \quad (2.117)$$

que es la ecuación de una onda. La relatividad general describe a las ondas gravitacionales como ondulaciones en la curvatura del espacio-tiempo, las cuales se propagan a la velocidad de la luz. Como el agua en el océano, el concepto de onda gravitacional requiere la idealización de un fondo suave no perturbado sobre el cual las ondas se propagan. Sin embargo, a diferencia del agua, las ondas no son movimientos de un medio material, son ondulaciones fabricadas por el mismo espacio-tiempo.

Una vez que las ondas dejan su fuente, que permanecen generalmente en regiones donde sus longitudes de onda, λ , son muy pequeñas a comparación del radio de curvatura, R , del fondo de espacio-tiempo a través del que se propagan.

Materia oscura como partícula

Podemos estimar la materia bariónica total del Universo a través del estudio de la nucleosíntesis cosmológica. Esto se hace conectando las observaciones de la razón entre helio e hidrógeno (He/H) del Universo actual con la cantidad de materia bariónica presente durante fase caliente, cuando la mayor parte del helio fue producida. La cantidad de bariones es poca para explicar toda la materia oscura. Además, los bariones son incapaces de manejar la formación de una galaxia ya que tardan demasiado en desacoplarse en fotones, y las inestabilidades gravitacionales no tienen suficiente tiempo de crecer.

Considerando a la materia oscura como partícula, un buen modelo debe cumplir las siguientes características:

1. No debe ser bariónica. Las razones de esto vienen de la nucleosíntesis del Big Bang (BBN), los límites de la radiación de fondo cósmica (CMB) y de su formación de estructura.
2. Estable. Protegida por un número cuántico conservado.
3. Sin carga ni color. Si la materia oscura no fuera eléctricamente neutra podría dispersar luz y no sería oscura. Si tiene color puede ceder a interacciones fuertes. En otros términos, debe tener interacción débil.
4. La abundancia de este fragmento debe ser compatible con observaciones, y fría.

En el desarrollo de este trabajo se considerará a la materia oscura como partícula, la ecuación que la describe es la ecuación de Boltzmann sin colisiones (o ecuación de Vlasov), la cual se discutirá en el siguiente capítulo.

Capítulo 3

Ecuación de Vlasov y dispersión de velocidades.

Para la mayoría de los propósitos podemos tratar la fuerza gravitacional sobre una estrella como el resultado de una densidad de distribución suave, en lugar de una colección de masas puntuales.

La diferencia fundamental entre las galaxias y los sistemas que son normalmente tratados con mecánica estadística, tal como moléculas en una caja, reside en la naturaleza de las fuerzas que actúan entre las partículas constituyentes. La interacción entre dos moléculas es de rango corto: la fuerza es corta a menos que las moléculas estén muy cercanas para capturar a la otra, cuando esto se convierte en fuertemente repulsiva. En contraste, la fuerza gravitacional que actúa entre las estrellas de una galaxia, es de largo alcance.

Este capítulo inicia definiendo los conceptos fundamentales de probabilidad tales como valores medios (o valor esperado), dispersión y momentos, así como las relaciones elementales entre probabilidades y la definición de distribución de probabilidad.

En el sentido gravitacional, una colisión se define como una desviación significativa de la trayectoria estelar, por lo que la evolución temporal de la función de distribución de la ecuación de Boltzmann es nula, por lo que a esta ecuación se le llama ecuación sin colisiones de Boltzmann o ecuación de Vlasov. Con los conceptos de probabilidad en la segunda sección del capítulo se desarrolla la ecuación de Vlasov, que determina el número de partículas en un espacio de seis dimensiones (posiciones y velocidades) sin colisiones entre partículas. Luego, a partir de ciertas hipótesis, se encuentra la ecuación de Jeans, que relaciona las cantidades observacionales accesibles con la dinámica estelar, concluyendo con la ecuación de masa en función de la distancia, determinada por la dispersión de velocidades y la densidad de probabilidad, que son parámetros que se determinan midiendo el movimiento estelar.

3.1. Probabilidad.

Los fundamentos de la teoría de la probabilidad fueron establecidos por los matemáticos Pierre de Fermat (1601-1665) y Blaise Pascal (1623-1662). El primer libro de texto de probabilidad fue escrito por el alemán Christian Huygens (1629-1695) en 1657, quien la aplicó a trabajos de la esperanza de vida. Se pensaba que la probabilidad era útil solamente para la determinación de los posibles resultados de fenómenos de los que se carecía completamente de conocimiento. Se suponía que si es posible conocer los movimientos de todas las partículas en el nivel microscópico, se podría determinar todos los resultados con precisión. En el siglo XX, con el descubrimiento de la teoría cuántica, se comprendió que, a nivel microscópico, los resultados son puramente probabilísticos.

[Blundell and Blundell, 2006]

La probabilidad ha tenido un gran impacto en la física, debido al interés en sistemas que se componen por una gran cantidad de partículas, por lo que las predicciones están basadas en resultados probabilísticos con el objetivo de ser lo suficientemente precisos para la mayoría de los propósitos.

La probabilidad de ocurrencia de algún evento particular, tomado de algún conjunto finito de eventos posibles, es cero si el evento es imposible, uno si el evento es seguro, y toma algún valor entre el cero y el uno si el evento es posible pero no tan certero. En esta sección, se describen los conceptos de valor medio, varianza y dispersión de probabilidad, así como la definición de función de distribución, con el objetivo de una mejor comprensión de los cálculos que se realizarán para encontrar la masa dinámica de galaxias elípticas. [Reif, 1993]

3.1.1. Conjuntos estadísticos.

Consideremos un sistema A en el que podemos realizar observaciones o experimentos. En muchos casos el resultado determinado que resulta de la realización de un simple experimento no puede predecirse con certidumbre, por ser intrínsecamente imposible o porque la información disponible acerca del sistema es insuficiente para permitir esta predicción única. Aunque no se puede afirmar nada sobre un experimento aislado, es posible sin embargo, hacer algunas indicaciones significativas sobre los resultados de un gran número de experimentos análogos. Así llegamos a una descripción estadística del sistema, es decir, a una descripción expresada en probabilidades.

En lugar de enfocar nuestra atención sobre el sistema aislado A de interés, contemplemos un conjunto compuesto por un número muy grande \mathcal{N} de sistemas 'semejantes', son semejantes en el sentido de que cada sistema satisface las mismas condiciones que satisface el sistema A . Los dispondremos de modo que podamos enumerar de algún modo conveniente todos los resultados posibles mutuamente excluyentes del experimento. Señalamos mediante una r un resultado determinado del experimento y suponemos que existen, entre los \mathcal{N} sistemas del conjunto, \mathcal{N}_r , sistemas que presentan este resultado. Entonces la fracción

$$P_r \equiv \frac{\mathcal{N}_r}{\mathcal{N}} \quad (\text{en donde } \mathcal{N} \rightarrow \infty) \quad (3.1)$$

se denomina probabilidad de ocurrencia del resultado r .

Aunque el resultado del experimento en un sistema solo no puede predecirse, la misión de una teoría estadística, es entonces la de predecir la probabilidad de que se presente cada uno de los resultados posibles del experimento.

Se utiliza la palabra suceso para designar el resultado de un experimento o de una observación.

Se dice que un conjunto estadístico de sistemas es independiente del tiempo si el número de sistemas que presentan un suceso cualquiera es el mismo en todo momento, o de modo equivalente, si la probabilidad de que se verifique un suceso particular en este conjunto es independiente del tiempo. La descripción estadística proporciona, pues, una definición de equilibrio muy clara: Se dice que un sistema macroscópico está en equilibrio si un conjunto estadístico de este sistema es independiente del tiempo.

Si el valor de un suceso varía al repetir el muestreo, a este tipo de sucesos se les conoce como variable aleatoria. Una variable aleatoria es una función cuyos valores son números reales, definida en un espacio muestral.

La función de distribución de probabilidad de una variable aleatoria es una función que asigna a cada suceso definido sobre la variable aleatoria la probabilidad de que dicho suceso ocurra y está definida sobre el conjunto de todos los sucesos. [Reif, 1993]

3.1.2. Relaciones elementales entre probabilidades.

Las probabilidades satisfacen algunas relaciones sencillas que son casi evidentes por sí mismas, pero muy importantes.

Supongamos que los experimentos realizados sobre un determinado sistema A pueden conducir a uno de α resultados posibles mutuamente excluyentes. Señalemos cada resultado o suceso mediante un subíndice r que puede indicar cualquiera de los α números $r = 1, 2, 3, \dots$ o α . En un conjunto de sistemas semejantes, \mathcal{N}_1 de ellos presentarán el suceso 1, \mathcal{N}_2 de ellos el suceso 2, ... y \mathcal{N}_α el suceso α . Como estos α sucesos son mutuamente excluyentes y se agotan todas las posibilidades se deduce que

$$\mathcal{N}_1 + \mathcal{N}_2 + \dots + \mathcal{N}_\alpha = \mathcal{N} \quad (3.2)$$

dividiendo por \mathcal{N} esta expresión se reduce a

$$P_1 + P_2 + \dots + P_\alpha = 1 \quad (3.3)$$

en donde $P_r \equiv \mathcal{N}_r/\mathcal{N}$ designa la probabilidad de que se presente el suceso r de acuerdo con la definición (3.1). La relación (3.3), que establece simplemente que la suma de todas las probabilidades es igual a la unidad, se denomina condición de normalización para las probabilidades. Empleando el símbolo sumatorio, Σ , esta relación puede escribirse también como

$$\Sigma_{r=1}^{\alpha} P_r = 1 \quad (3.4)$$

Sean \mathcal{N}_r sistemas en el conjunto que presentan el suceso r y \mathcal{N}_s que presentan el suceso s . Por tanto, existen $(\mathcal{N}_r + \mathcal{N}_s)$ que presentan o bien el suceso r o bien el suceso s . En correspondencia, la probabilidad $P(r \text{ o } s)$ de presencia de cualquiera de ambos, el suceso r o s viene dada simplemente por

$$P(r \text{ o } s) = \frac{\mathcal{N}_r + \mathcal{N}_s}{\mathcal{N}} \quad (3.5)$$

de modo que

$$P(r \text{ o } s) = P_r + P_s \quad (3.6)$$

Probabilidades compuestas.

Supongamos que el sistema en consideración puede presentar dos tipos diferentes de sucesos, por ejemplo α sucesos posibles del tipo señalado con una r (en donde el índice $r = 1, 2, 3, \dots, \alpha$) y β sucesos posibles del tipo señalado con una s (en donde el índice $s = 1, 2, 3, \dots, \beta$). Llamaremos P_{rs} la probabilidad de que se presenten conjuntamente *ambos* sucesos, el r y el s . Es decir, en un conjunto compuesto por un gran número \mathcal{N} de sistemas análogos, \mathcal{N}_{rs} de ellos están caracterizados por la presencia conjunta de un suceso r del primer tipo y a la vez un suceso s del segundo. Entonces $P_{rs} \equiv \mathcal{N}_{rs}/\mathcal{N}$. Llamaremos P_r a la probabilidad de que se presente un suceso r (independientemente de que se presenten o no sucesos del tipo s). De modo semejante llamaremos, P_s a la probabilidad de que se presente un suceso s (independientemente de la presencia de un suceso de tipo r).

Un caso especial es aquel en que la probabilidad de que se verifique un suceso de tipo s no se ve afectada por la presencia o ausencia de un suceso de tipo r . Se dice entonces que los sucesos de tipo r y s son estadísticamente independientes o no correlacionados. Consideremos ahora en el conjunto los \mathcal{N}_r sistemas que presentan un suceso particular cualquiera r . Independientemente del valor de r , una fracción s de ellos presentará también el suceso s . Así pues, el número \mathcal{N}_{rs} de sistemas que presentan conjuntamente r y s es simplemente

$$\mathcal{N}_{rs} = \mathcal{N}_r P_s \quad (3.7)$$

En correspondencia, la probabilidad compuesta de que se presenten ambos, r y s , viene dada por

$$P_{rs} \equiv \frac{\mathcal{N}_{rs}}{\mathcal{N}} = \frac{\mathcal{N}_r P_s}{\mathcal{N}} = P_r P_s \quad (3.8)$$

De aquí que si los sucesos r y s son estadísticamente independientes,

$$P_{rs} = P_r P_s \quad (3.9)$$

Obsérvese que el resultado de la ecuación (3.9) no es cierto si los sucesos r y s no son estadísticamente independientes. La relación (3.9) puede generalizarse inmediatamente, la probabilidad compuesta de más de dos sucesos estadísticamente independientes es el producto de sus probabilidades respectivas. [Reif, 1993]

3.1.3. Valores medios.

Supóngase que una variable u de algún sistema puede tomar cualquiera de los α valores posibles

$$u_1, u_2, \dots, u_\alpha \quad (3.10)$$

con probabilidades respectivas

$$P_1, P_2, \dots, P_\alpha \quad (3.11)$$

Esto significa que, en un conjunto de \mathcal{N} sistemas semejantes (en donde $\mathcal{N} \rightarrow \infty$), la variable u toma el valor particular u_r en un número $\mathcal{N}_r = \mathcal{N} P_r$ de dichos sistemas.

Las probabilidades P_r para todos los α valores posibles de u_r constituye la descripción estadística más completa del sistema. Es conveniente definir parámetros que caracterizan de un modo menos detallado la distribución de los posibles valores de u en el conjunto. Estos parámetros son ciertos valores medios. El valor medio de u en el conjunto se define multiplicando u_r por el número \mathcal{N}_r de sistemas para todos los α valores posibles de la variable u y dividiendo entonces esta suma por el número total \mathcal{N} de sistemas en el conjunto. El valor medio de u (o media del conjunto de u), que llamaremos $E(u)$ viene definido así por¹ [Mendenhall et al., 1989]

$$E(u) \equiv \frac{\mathcal{N}_1 u_1 + \mathcal{N}_2 u_2 + \dots + \mathcal{N}_\alpha u_\alpha}{\mathcal{N}} = \frac{\sum_{r=1}^{\alpha} \mathcal{N}_r u_r}{\mathcal{N}} \quad (3.12)$$

Pero como $\mathcal{N}_r/\mathcal{N} \equiv P_r$ es la probabilidad de que se presente el valor u_r , la definición (3.12) se reduce a

$$E(u) \equiv \sum_{r=1}^{\alpha} P_r u_r \quad (3.13)$$

De modo semejante, si $f(u)$ es una función cualquiera de u , el valor medio (media del conjunto o valor esperado) de f se define por la expresión

$$E[f(u)] \equiv \sum_{r=1}^{\alpha} P_r f(u_r) \quad (3.14)$$

A la media del conjunto se le puede denotar como $E(u) = \mu$, ya que se está considerando que P_r es una caracterización exacta de la distribución de frecuencias de la población. Esta definición implica que los valores medios tienen algunas propiedades muy sencillas. Por ejemplo, si $f(u)$ y $g(u)$ son dos funciones de u ,

$$E[f(u_r) + g(u_r)] \equiv \sum_{r=1}^{\alpha} P_r [f(u_r) + g(u_r)] = \sum_{r=1}^{\alpha} P_r f(u_r) + \sum_{r=1}^{\alpha} P_r g(u_r) \quad (3.15)$$

¹Existen notaciones distintas para el valor esperado: $E(x) \equiv \langle x \rangle$. En esta sección quedan más claras las demostraciones utilizando la notación $E(x)$, sin embargo en las siguientes secciones se utilizará la notación $\langle x \rangle$.

o

$$E[f(u_r) + g(u_r)] = E[f(u_r)] + E[g(u_r)] \quad (3.16)$$

Este resultado muestra que el valor medio de una suma de términos es igual a la suma de los valores medios de estos términos. De modo semejante si c es una constante

$$E[cf(u_r)] \equiv \sum_{r=1}^{\alpha} P_r[cf(u_r)] = c \sum_{r=1}^{\alpha} P_r f(u_r) \quad (3.17)$$

o

$$E[cf(u_r)] = cE[f(u_r)]. \quad (3.18)$$

Si $f(u_r) = 1$, la relación (3.18) equivale a la afirmación obvia de que el valor medio de una constante es simplemente igual a dicha constante.

Dispersión.

Supongamos que una variable u toma sus valores posibles u_r con las probabilidades respectivas P_r . Algunas características generales de la función de distribución de probabilidad pueden obtenerse entonces mediante el empleo de ciertos parámetros de interés. Uno de ellos es el mismo valor medio de u , $E(u)$, definida en (3.13). Este parámetro indica el valor central de u alrededor del cual se distribuyen los diversos valores u_r . Puede ser conveniente entonces medir los valores posibles de $E(u)$ respecto a su valor medio escribiendo

$$\Delta u \equiv u - E(u) = u - \mu \quad (3.19)$$

en donde Δu es la desviación de u respecto al valor medio $\mu = E(u)$. El valor medio de esta desviación se anula. Utilizando la propiedad (3.16),

$$E[\Delta u] = E[u - E(u)] = E(u) - E[E(u)] = 0 \quad (3.20)$$

Como el valor medio de Δu no proporciona por si mismo esta medida, puesto que Δu es, en valor medio, tantas veces positivo como negativo de modo que su valor medio se anula de acuerdo con (3.20). Entonces el parámetro que mide la amplitud con que se extienden todos los valores posibles de u al rededor de su valor medio $E(u)$ es la cantidad $(\Delta u)^2$ que no puede ser negativa. Su valor medio definido por

$$V(u) \equiv E[(\Delta u)^2] \equiv \sum_{r=1}^{\alpha} P_r (\Delta u_r)^2 \equiv \sum_{r=1}^{\alpha} P_r (u_r - E(u))^2, \quad (3.21)$$

o bien,

$$V(u) \equiv E[(u - \mu)^2], \quad (3.22)$$

se denomina dispersión (o varianza) de u y tampoco puede ser negativo, puesto que cada término de la suma (3.21) es no-negativo. Así pues,

$$E[(\Delta u)^2] \geq 0. \quad (3.23)$$

La dispersión solo puede anularse si todos los valores de u son iguales a μ ; y aumenta progresivamente cuando estos valores tienen una apreciable probabilidad de presentarse lejos de $E(u)$. La dispersión, por lo tanto, proporciona una medida conveniente del orden de la repartición de los valores adquiridos por u .

La dispersión, $V(u)$, es una magnitud que tiene las dimensiones del cuadrado de u . Una medida lineal de la repartición de los valores posibles de u viene dada por la raíz cuadrada de la dispersión, es decir por la magnitud

$$\sigma = \sqrt{E[(\Delta u)^2]}, \quad (3.24)$$

que tiene las mismas dimensiones que u y que se denomina desviación estándar de u . Los valores de u que aparezcan con una probabilidad apreciable alejados de $E(u)$ tendrán una contribución importante en σ . La mayoría de los valores de u deben presentarse por tanto dentro de un intervalo del orden de alrededor de su valor medio σ . [Mendenhall et al., 1989] [Reif, 1993]

Utilizando las propiedades (3.16) y (3.18) de los valores medios, se puede demostrar que

$$[\text{Mendenhall et al., 1989}] V(u) = \sigma^2 = E[(u - \mu)^2] = E(u^2) - \mu^2. \quad (3.25)$$

Veamos:

$$\sigma^2 = E[(u - \mu)^2] = E[u^2 - 2\mu u + \mu^2] = E(u^2) - 2E[u\mu] + E[\mu^2] \quad (3.26)$$

Tomando en cuenta que μ es constante, y aplicando las propiedades (3.16) y (3.18), se obtiene

$$\sigma^2 = E(u^2) - 2\mu E(u) + \mu^2 \quad (3.27)$$

Pero $\mu = E(u)$, por lo tanto

$$\sigma^2 = E(u^2) - \mu^2 \quad (3.28)$$

Momentos.

Los parámetros σ y μ son medidas numéricas descriptivas, que localizan el centro y describen la dispersión de $P(u)$, pero no proporcionan una descripción única de la distribución. Muchas distribuciones poseen las mismas medias y las mismas desviaciones estándar. Por consiguiente se debe considerar un conjunto de medidas numéricas descriptivas que, bajo condiciones generales, determinan una manera única de $P(u)$.

Se define el i -ésimo momento de una variable aleatoria u respecto al origen, por $E(u^i)$ y se denota por μ'_i . En particular, el primer momento respecto al origen es $E(u^1) = \mu'_1 = \mu$ y el segundo, $\mu'_2 = E(u^2)$ es utilizado en (3.25) para encontrar σ^2 .

Un segundo momento útil de una variable aleatoria se toma respecto a su media. Se define el i -ésimo momento de una variable aleatoria con respecto a su media, o el i -ésimo momento central de u , como $E[(u - \mu)^i]$ y se denota como μ_i . En particular, $\sigma^2 = \mu_2$.

Una tercera definición es la función generadora de momentos para una variable aleatoria que, en un sentido figurativo, contiene todos los momentos de una variable aleatoria en una expresión simple. La función generadora de momentos se define como $m(t) = E(e^{tu})$. Se dice que una función generadora de momentos para u existe cuando hay una constante positiva b tal que $m(t)$ es finita para $|t| \leq b$.

La función generadora de momentos posee dos aplicaciones importantes. En primer lugar es posible calcular cualquier momento de u , si se puede encontrar $E(e^{tu})$. La segunda y principal aplicación de esta función, es la demostración de que una variable aleatoria tiene una distribución de probabilidad particular $P(u)$. Es decir, es imposible que variables aleatorias con diferentes distribuciones de probabilidad tengan la misma función generadora de momentos. [Reif, 1993]

3.1.4. Distribuciones continuas de probabilidad.

Existen muchos problemas en los que una variable, u , es intrínsecamente continua. u puede adquirir cualquier valor en el dominio $a_1 \leq u \leq a_2$. (Este dominio puede ser de extensión infinita, es decir, $a_1 \rightarrow \infty$ o $a_2 \rightarrow \infty$ o ambos). Podemos enfocar nuestra atención sobre un intervalo infinitesimal u y $u + du$ y considerar la probabilidad de que la variable esté en dicho intervalo. Cuando du es suficientemente pequeño, esta probabilidad debe ser nuevamente proporcional a du , de modo que puede escribirse en la forma $P(u)du$, en donde la magnitud $P(u)$ es una densidad de probabilidad independiente de tamaño du .

Las condiciones sobre probabilidades en que interviene una variable u pueden reducirse fácilmente al caso más sencillo en que los valores posibles de las variables son discretos y pueden, por lo tanto, contarse. Es necesario únicamente subdividir al dominio de los posibles valores de u en intervalos iguales arbitrariamente pequeños de tamaño fijo δu . Cada uno de estos intervalos puede entonces designarse por u_r y por la probabilidad de que u esté comprendida en este intervalo por P_r o $P(u)$. Este procedimiento nos permite tratar con un conjunto enumerable de valores de la variable u , cada uno de los cuales corresponde a uno de los intervalos infinitesimales $r = 1, 2, 3, \dots$ También resulta evidente que las relaciones en que intervienen probabilidades de variables discretas permanecen igualmente válidas para las probabilidades de variables continuas. Por ejemplo las propiedades (3.16) y (3.18) de los valores medios son también aplicables si u es una variable continua.

Las sumas que intervienen al calcular las condiciones de normalización o los valores medios pueden expresarse como integrales si la variable es continua. Por ejemplo, la condición de normalización afirma que la suma de las probabilidades extendidas a todos los valores posibles de la variable deben ser iguales a la unidad; en símbolos,

$$\sum_r P(u_r) = 1 \quad (3.29)$$

Sin embargo, si la variable es continua, se puede sumar primero en todos los intervalos discretos r para los que u_r está comprendida en el intervalo u y $u + du$; esto nos da la probabilidad $P(u) du$ de que la variable caiga en este intervalo. Se puede completar entonces la suma (3.29) sumando (integrando) todos los posibles intervalos du . Así pues, (3.29) es equivalente a

$$\int_{a_1}^{a_2} P(u) du = 1 \quad (3.30)$$

que expresa la condición de normalización en función de la densidad de probabilidad $P(u)$. Análogamente, la definición general de (3.14) de valor medio de una función $f(u)$ de variables discretas viene dada por

$$E[f(u)] \equiv \sum_r P(u_r) f(u_r) \quad (3.31)$$

En una descripción continua se pueden nuevamente sumar todos los intervalos r en los que u_r está en el intervalo entre u y $u + du$; esto contribuye a una suma en una cantidad $P(u) du f(u)$. Se puede entonces completar la misma suma integrando todos los intervalos posibles du . De aquí que la ecuación (3.31) sea equivalente a la relación

$$E[f(u)] = \int_{a_1}^{a_2} P(u) f(u) du \quad (3.32)$$

La densidad de probabilidad, $P(u)$, puede llegar a ser infinita para ciertos valores de u . Esto no supone ninguna dificultad, en tanto que cualquier integral, $\int_{c_1}^{c_2} P(u) du$ (que da la probabilidad de que el valor u esté en un intervalo arbitrario entre c_1 y c_2), permanezca finita.

3.2. Teoría cinética

Una colisión, en el sentido gravitacional, es definida como una desviación significativa de la trayectoria estelar durante el encuentro. El tiempo de 'colisión' entre estrellas, también conocido como tiempo de relajación, se define como el tiempo después del cual los encuentros gravitacionales entre estrellas (de dos en dos) comienzan a perturbar las trayectorias; o, si se quiere cuantificar esta perturbación, es el tiempo en el que la acumulación de la variación de energía dE en encuentros de dos cuerpos es igual a la energía de una sola estrella. El tiempo de relajación se puede evaluar como

$$T_{relax} = V^3 / 8\pi n G^2 m^2 \log(R/b) \quad (3.33)$$

donde V es la velocidad relativa entre las estrellas, n el número de estrellas por unidad de volumen, m la masa media de una estrella, R el radio total de la galaxia, y b el parámetro de impacto mínimo durante el encuentro entre las dos estrellas. Respecto al tiempo de cruce, t_c , que es el que le toma a una estrella cruzar la galaxia ($t_c \approx R/V$), el tiempo de relajación varía aproximadamente como $0.2(N/\log N)t_c$, si N es el total del número de estrellas en el sistema. Así, t_c para una galaxia es típicamente del orden de una centésima de la edad del universo, que es, 10^8 años,² y el tiempo de relajación es de alrededor 10^{17} años, muy por encima de la edad del universo. Por lo tanto, las colisiones no son importantes para las estrellas en una galaxia.

Las estrellas forman un medio sin colisiones porque, paradójicamente, su número N es muy grande. Durante el movimiento de una estrella, ésta es sometida al potencial medio creado por las estrellas distantes sobre el cual están superpuestas las fluctuaciones debidas a las estrellas vecinas. La importancia de estas fluctuaciones es mínima, pues es el promedio del potencial del gran número de estrellas N . La ausencia de las interacciones entre dos cuerpos es fundamental para la dinámica de galaxias. Sin embargo hay que notar que hay algunos sistemas estelares para los que el tiempo de relajación es comparable con el tiempo de cruce: en cúmulos globulares, por ejemplo, donde $N \approx 10^5$, en efecto, encuentros entre estrellas juegan un rol importante en el centro de estos cúmulos. De la misma forma para un cúmulo rico de galaxias, donde el número total de galaxias es $N \approx 10^3$ y $t_c \approx 10^8$ años, los encuentros entre galaxias tienen un papel importante.

Entonces, en sistemas con más de algunos miles de estrellas, la desviación de la órbita es menor que un tiempo $\lesssim t_r$ que es mucho más grande que el tiempo de cruce t_c . La aproximación de que el potencial es suave provee una descripción completa de la dinámica. [Combes et al., 2004]

3.2.1. Ecuación de Vlasov.

Consideramos un modelo de sistema estelar en perfecto equilibrio si t_r es arbitrariamente grande. También que el sistema estelar que examinamos consiste en N puntos masivos idénticos, los cuales pueden ser estrellas o partículas de materia oscura. Esta suposición facilita el trabajo y no tiene impacto en la validación de resultados. [Binney and Tremaine, 2007]

Las predicciones dependen de encontrar una estrella en un espacio fase seis dimensional de volumen $d^3\mathbf{x}d^3\mathbf{v}$, alrededor de la posición \mathbf{x} y velocidad \mathbf{v} . Por lo tanto definimos la función de distribución, f , tal que $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)d^3\mathbf{x}d^3\mathbf{v}$, como la probabilidad de que en el tiempo t una estrella elegida al azar, sea la estrella 1, tenga coordenadas del espacio fase en el rango dado. Por la suposición de que todas las estrellas son idénticas, esta probabilidad es la misma para las estrellas 2, 3, ..., N . En virtud de

²A la constante de Hubble, $H_0 = 71 \pm 4 \text{ km s}^{-1}\text{Mpc}^{-1}$, usando que $1 \text{ Mpc} = 3,1 \times 10^{22}\text{m}$, la transformamos en $H_0 = 2,3 \pm 0,1 \times 10^{-18}\text{s}^{-1}$, que corresponde a un tiempo de Hubble: $H_0^{-1} = 4,3 \pm 0,2 \times 10^{17}\text{s} \sim 10^9$ años. [Schutz, 2009]

esta definición, f es normalizada como

$$\int d^3\mathbf{x}d^3\mathbf{v}f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = 1 \quad (3.34)$$

con la integral en todo el espacio fase.

La función de distribución tiene el mismo valor numérico en cada punto del espacio fase en cualquier sistema de coordenadas canónicas. Esta invariancia permite que en adelante usemos $\mathbf{w}=(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ como un sistema arbitrario de coordenadas canónicas.

Cualquier estrella dada se mueve a través del espacio fase, entonces la probabilidad de encontrar su ubicación evoluciona con el tiempo. Como f evoluciona, la probabilidad es necesariamente conservada, de la misma forma que la masa es conservada en un fluido. La ecuación de conservación de probabilidad en el espacio fase es análoga a la descrita con la ecuación de continuidad de un fluido:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot (\rho \dot{\mathbf{w}}) = 0 \quad (3.35)$$

Usando las ecuaciones de Hamilton para eliminar $\dot{\mathbf{w}}=(\dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{p}})$ en la ecuación (3.35), se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \cdot (f \dot{\mathbf{q}}) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \cdot (f \dot{\mathbf{p}}) &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \cdot \left(f \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \right) - \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \cdot \left(f \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \right) \\ &= \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} \cdot \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} \cdot \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \\ &= \dot{\mathbf{q}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} + \dot{\mathbf{p}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} \end{aligned} \quad (3.36)$$

donde se ha usado el hecho de que $\partial^2 H / \partial \mathbf{q} \mathbf{p} = \partial^2 H / \partial \mathbf{p} \mathbf{q}$. Al sustituir este resultado en (3.35) se obtiene la ecuación sin colisiones de Boltzmann³

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \dot{\mathbf{q}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} + \dot{\mathbf{p}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = 0 \quad (3.37)$$

que es una ecuación diferencial parcial de f en función de seis coordenadas en el espacio fase y el tiempo.

Una ecuación alternativa a esta ecuación puede ser derivada por la extensión del concepto de seis dimensiones de la derivada convectiva del Lagrangiano⁴. Definimos

$$\frac{df}{dt} \equiv \frac{\partial f}{\partial t} + \dot{\mathbf{w}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{w}} \quad (3.38)$$

df/dt representa la razón de cambio de la densidad de probabilidad local vista por un observador que se mueve en el espacio fase con la estrella.

La ecuación sin colisiones de Boltzmann, por (3.37), es simplemente

$$\frac{df}{dt} = 0 \quad (3.39)$$

³También llamada ecuación de Vlasov, aunque es una versión simplificada de la ecuación derivada por Boltzmann en 1872. [Binney and Tremaine, 2007]

⁴La derivada convectiva relaciona el ritmo de variación con el tiempo de una propiedad de una partícula material (es decir, la descripción lagrangiana) con el ritmo de variación temporal de la propiedad instantánea en un punto fijo del espacio (es decir, en la descripción euleriana). $D/Dt = \partial/\partial t + v \cdot \nabla$.

En palabras, el flujo a través del espacio fase de la probabilidad del fluido es incompresible; la densidad f del espacio fase del fluido alrededor de una estrella dada siempre permanece igual. En contraste a fluidos incompresibles como el agua, la densidad generalmente variará en gran medida de punto a punto en el espacio fase; la densidad es constante conforme se sigue el flujo alrededor de una estrella particular pero la densidad al rededor de diferentes estrellas puede ser diferente.

En términos de coordenadas cartesianas, en las cuales $H = \frac{1}{2}v^2 + \Phi(\mathbf{x}, t)$, con Φ el potencial gravitacional, de la ecuación (3.35), se obtiene que

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} \cdot \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} \cdot \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \\ &= \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} \cdot \mathbf{v} - \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} \\ &= \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} \end{aligned} \quad (3.40)$$

la ecuación de Vlasov en coordenadas cartesianas se lee

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = 0 \quad (3.41)$$

3.2.2. Relación entre la función de distribución y los observables.

Para cualquier posición \mathbf{x} , la integral

$$\nu(\mathbf{x}) \equiv \int d^3\mathbf{v} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \quad (3.42)$$

da la probabilidad por unidad de volumen de encontrar una estrella particular en \mathbf{x} independientemente de su velocidad. Multiplicando por el número total N de estrellas en la población, obtenemos la densidad del número de estrellas en el espacio que se está considerando

$$n(\mathbf{x}) \equiv N\nu(\mathbf{x}) \quad (3.43)$$

también es posible derivar $\nu(\mathbf{x})$ de la densidad de luminosidad

$$j(\mathbf{x}) = L\nu(\mathbf{x}), \quad (3.44)$$

donde L es la luminosidad de la población estelar.⁵

Dividiendo f por ν , obtenemos que la distribución de probabilidad de velocidades estelares en \mathbf{x} es:

$$P_{\mathbf{x}}(\mathbf{v}) = \frac{f(\mathbf{x}, \mathbf{v})}{\nu(\mathbf{x})} \quad (3.45)$$

la cual, en galaxias externas se puede indagar a través de la dispersión de velocidades en la línea de visión, la cual da, para una determinada línea de visión a través de la galaxia, la cantidad $\mathbf{F}(v_{\parallel})dv_{\parallel}$ de las estrellas que tienen línea de visión de velocidad dentro de dv_{\parallel} de v_{\parallel} . Casi todas las galaxias se encuentran lo suficientemente lejanas, de tal forma que todos los vectores desde el observador al punto \mathbf{x} en la galaxia están casi paralelos al vector fijo unitario \hat{s} , desde el observador al centro de la galaxia. Entonces $x_{\parallel} \equiv \hat{s} \cdot \mathbf{x}$ y $v_{\parallel} \equiv \hat{s} \cdot \mathbf{v}$ son las componentes de \mathbf{x} y \mathbf{v} paralelas a la línea de visión.

⁵[Binney and Tremaine, 2007]

Definimos también $\mathbf{x}_\perp \equiv \mathbf{x} - x_\parallel \hat{\mathbf{s}}$ y $\mathbf{v}_\perp \equiv \mathbf{v} - v_\parallel \hat{\mathbf{s}}$ como los componentes de \mathbf{x} y \mathbf{v} en el plano del cielo⁶. La relación entre $P_{\mathbf{x}}(\mathbf{v})$ y $\mathbf{F}(\mathbf{x}_\perp, v_\parallel)$ es

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}_\perp, v_\parallel) = \frac{\int dx_\parallel \nu(\mathbf{x}) \int d^2 \mathbf{v}_\perp P_x(v_\parallel \hat{\mathbf{s}} + \mathbf{v}_\perp)}{\int dx_\parallel \nu(\mathbf{x})} = \frac{\int dx_\parallel d^2 \mathbf{v}_\perp f(\mathbf{x}, \mathbf{v})}{\int dx_\parallel d^3 \mathbf{v} f(\mathbf{x}, \mathbf{v})}. \quad (3.46)$$

La distribución de velocidad en la línea de visión frecuentemente es cuantificada por dos miembros, la media de la velocidad en la línea de visión, $\langle v_\parallel \rangle$ y la dispersión σ_\parallel de esta media. Tenemos que

$$\langle v_\parallel(\mathbf{x}_\perp) \rangle \equiv \int dv_\parallel v_\parallel F(\mathbf{x}_\perp, v_\parallel) = \frac{\int dx_\parallel d^3 \mathbf{v} v_\parallel f(\mathbf{x}, \mathbf{v})}{\int dx_\parallel d^3 \mathbf{v} f(\mathbf{x}, \mathbf{v})} = \frac{\int dx_\parallel \nu(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{s}} \cdot \bar{\mathbf{v}}}{\int dx_\parallel \nu(\mathbf{x})} \quad (3.47)$$

donde se define la velocidad media en la posición \mathbf{x}

$$\langle \mathbf{v}(\mathbf{x}) \rangle \equiv \int d^3 \mathbf{v} \mathbf{v} P_x(\mathbf{v}) = \frac{1}{\nu(\mathbf{x})} \int d^3 \mathbf{v} \mathbf{v} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \quad (3.48)$$

La dispersión de velocidad en la línea de visión está definida por

$$\sigma_\parallel^2(\mathbf{x}_\perp) \equiv \int dv_\parallel (v_\parallel - \langle v_\parallel \rangle)^2 F(\mathbf{x}_\perp, v_\parallel) = \frac{\int dx_\parallel d^3 \mathbf{v} (\hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{v} - \langle v_\parallel \rangle)^2 f(\mathbf{x}, \mathbf{v})}{\int dx_\parallel d^3 \mathbf{v} f(\mathbf{x}, \mathbf{v})} \quad (3.49)$$

La dispersión en la línea de visión está determinada tanto por la variación en la velocidad media $\langle v_\parallel(\mathbf{x}) \rangle$ a lo largo de la línea de visión, como de la propagación de las velocidades estelares en cada punto de la galaxia alrededor de $\langle \mathbf{v}(\mathbf{x}) \rangle$. Así la propagación es caracterizada por el tensor de dispersión de velocidades

$$\sigma_{ij}^2 \equiv \frac{1}{\nu(\mathbf{x})} \int d^3 \mathbf{v} (v_i - \bar{v}_i)(v_j - \bar{v}_j) f(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \langle v_i v_j \rangle - \langle v_i \rangle \langle v_j \rangle, \quad (3.50)$$

donde los subíndices j e i representan a las coordenadas del sistema ortogonal que se elija.

Para determinar la relación entre el tensor de dispersión de velocidades y la dispersión de la línea de visión, hacemos $u(\mathbf{x}) \equiv \hat{\mathbf{s}} \cdot \langle \mathbf{v}(\mathbf{x}) \rangle - \langle v_\parallel \rangle$ la diferencia entre la velocidad media paralela de la línea de visión de \mathbf{x} y la velocidad media total de la línea de visión. Podemos reescribir (3.49) como

$$\sigma_\parallel^2(\mathbf{x}_\perp) = \frac{\int dx_\parallel d^3 \mathbf{v} [\hat{\mathbf{s}} \cdot (\mathbf{v} - \langle \mathbf{v} \rangle) + u]^2 f(\mathbf{x}, \mathbf{v})}{\int dx_\parallel d^3 \mathbf{v} f(\mathbf{x}, \mathbf{v})} = \frac{\int dx_\parallel \nu(\mathbf{x}) (\hat{\mathbf{s}} \cdot \sigma^2 \cdot \hat{\mathbf{s}} + u^2)}{\int dx_\parallel \nu(\mathbf{x})} \quad (3.51)$$

donde se ha introducido la notación $\hat{\mathbf{s}} \cdot \sigma^2 \cdot \hat{\mathbf{s}} \equiv \Sigma_{ij} \hat{s}_i \sigma_{ij}^2 \hat{s}_j$.

Estos resultados muestran que una vez conocidas ν , $\langle \mathbf{v} \rangle$ y σ^2 , en el punto de captura en un modelo, las cantidades observables v_\parallel y σ_\parallel^2 pueden ser determinadas para ese modelo. Este hecho hace ν , $\langle \mathbf{v} \rangle$ y σ_{ij}^2 , todas funciones de \mathbf{x} , enlaces vitales entre observaciones y modelos teóricos. Por otra parte, veremos que en sistemas de equilibrio estelar existen relaciones simples entre estas cantidades y el campo gravitacional.

⁶ \mathbf{v}_\perp también se conoce como el movimiento propio, que es el cambio en la posición esperada de la estrella en la esfera celeste. La velocidad paralela a la línea de visión, v_\parallel , se detecta mediante corrimientos Doppler de líneas espectrales y se conoce como velocidad radial.

3.2.3. La función de distribución.

En resumen, el teorema de Jeans nos dice que si I_1, \dots, I_n son n integrales independientes en un potencial dado, entonces cualquier función de distribución de la forma $f(I_1), f(I_1, I_2), \dots, f(I_1, \dots, I_n)$ es una solución de la ecuación sin colisiones de Boltzmann (Vlasov). El teorema fuerte de Jeans habla de que si el potencial de un estado estacionario galáctico es tal que casi todas las órbitas son regulares, entonces para todo propósito práctico, la galaxia puede ser representada por una función de probabilidad de la forma $f(I_1, I_2, I_3)$, donde I_1, I_2, I_3 son tres integrales independientes.

Densidad de probabilidad y momentos: Función de distribución que depende de H y L .

En cualquier potencial de estado estacionario $\Phi(\mathbf{x})$, el Hamiltoniano es una integral de movimiento. Si el potencial, $\Phi(\mathbf{x})$, es esféricamente simétrico, las tres componentes del vector de momento angular, \mathbf{L} , son integrales independientes que están incluidas en los argumentos de f además del Hamiltoniano. Como el potencial es esférico, nos limitaremos a densidades de probabilidad que producen los sistemas que tienen únicamente simetría esférica, esto es, en los que las tres componentes de \mathbf{L} contribuyen solamente para $L = |\mathbf{L}|$. Sean v_r y \mathbf{v}_t las componentes de \mathbf{v} paralela y perpendicular, tangencial a la dirección radial, entonces $v_t^2 = v_\theta^2 + v_\phi^2$ en coordenadas esféricas, (r, θ, ϕ) . Entonces, $L = rv_t$ y $H = \frac{1}{2}(v_r^2 + v_t^2) + \Phi(r)$, y la velocidad media es,

$$\langle v_r \rangle = \frac{1}{\nu} \int dv_r v_r \int d^2\mathbf{v}_t f\left[\frac{1}{2}(v_r^2 + v_t^2) + \Phi(r), rv_t\right] = 0, \quad (3.52)$$

$$\langle \mathbf{v}_t \rangle = \frac{1}{\nu} \int d\mathbf{v}_t \mathbf{v}_t \int dv_r f\left[\frac{1}{2}(v_r^2 + v_t^2) + \Phi(r), rv_t\right] = 0 \quad (3.53)$$

En ambos casos las integrales desaparecen porque el integrando es una función impar, ya sea de v_r o \mathbf{v}_t . Consideraciones similares muestran que el tensor de dispersión de velocidad es diagonal en el sistema (v_r, v_θ, v_ϕ) , con componentes diagonales

$$\begin{aligned} \sigma_r^2 \equiv \langle v_r^2 \rangle &= \frac{1}{\nu} \int dv_r v_r^2 \int d^2\mathbf{v}_t f\left[\frac{1}{2}(v_r^2 + v_\theta^2 + v_\phi^2) + \Phi(r), rv_t\right] \\ &= \frac{2\pi}{\nu} \int_{-\infty}^{\infty} dv_r v_r^2 \int_0^{\infty} dv_t v_t f\left[\frac{1}{2}(v_r^2 + v_t^2) + \Phi(r), rv_t\right] \end{aligned} \quad (3.54)$$

$$\begin{aligned} \sigma_\theta^2 \equiv \langle v_\theta^2 \rangle &= \frac{1}{\nu} \int dv_\theta v_\theta^2 \int dv_\phi \int dv_r f\left[\frac{1}{2}(v_r^2 + v_\theta^2 + v_\phi^2) + \Phi(r), rv_t\right] \\ &= \frac{\pi}{\nu} \int_0^{\infty} dv_t v_t^3 \int_{-\infty}^{\infty} dv_r f\left[\frac{1}{2}(v_r^2 + v_t^2) + \Phi(r), rv_t\right] \end{aligned} \quad (3.55)$$

$$\sigma_\phi^2 = \sigma_\theta^2 \quad (3.56)$$

En general, $\sigma_\theta^2(r) \neq \sigma_r^2(r)$, porque la dependencia de f sobre v_t difiere de su dependencia con v_r . La inequidad entre σ_r^2 y σ_θ^2 implica que, en general, las presiones actúan radial y tangencialmente en un sistema esférico estelar; en otras palabras, la presión es un tensor, no un escalar.⁷

⁷Al determinar la ecuación de Jeans se verá que en un sistema estelar $\nu\sigma^2$ juega un rol análogo al de la presión en un fluido.

Funciones de distribución para sistemas esféricos.

Los sistemas estelares más simples son esféricos. Un estudio de modelos esféricos no solamente provee una buena introducción a la estructura de sistemas más generales, es considerada también de interés práctico porque algunas galaxias elípticas, cúmulos de galaxias, y la mayoría de los cúmulos globulares, son casi esféricos. Por simplicidad vamos a considerar el caso en que el sistema tiene sólo una población estelar, por lo que todas las estrellas son idénticas y hay una única función de distribución f . También suponemos que la densidad de la masa que genera el potencial gravitatorio del sistema es proporcional a $\int d^3\mathbf{v}f$, tales sistemas son llamados autoconsistentes, porque la distribución de densidad determina el potencial a través de la ecuación de Poisson, y el potencial también determina la densidad consistente a través de la ecuación de Vlasov. Algunos de los modelos que se estudian son generalizados al caso más realista de poblaciones estelares múltiples, cada uno de los cuales tendrá su propia función de distribución y su propia contribución a la densidad de masa total.

Definimos un nuevo potencial gravitacional y una nueva energía. Si Φ_0 es constante, entonces el potencial relativo Ψ y la energía relativa \mathcal{E} de una estrella están definidos por

$$\Psi \equiv -\Phi + \Phi_0 \quad \text{y} \quad \mathcal{E} \equiv -H + \Phi_0 = \Psi - \frac{1}{2}v^2. \quad (3.57)$$

Generalmente se elige Φ_0 tal que $f > 0$ para $\mathcal{E} > 0$ y $f = 0$ para $\mathcal{E} \leq 0$. Si un sistema aislado se extiende hasta el infinito, $\Phi_0 = 0$ y la energía relativa es igual a la energía de enlace. El potencial relativo de un sistema aislado satisface la ecuación de Poisson en forma

$$\nabla^2\Psi = -4\pi G\rho \quad (3.58)$$

sujeto a la condición de frontera $\Psi \rightarrow \Phi_0$ cuando $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$.

Funciones de distribución para sistemas anisotrópicos esféricos.

Es posible encontrar un función de distribución no negativa si consideramos las funciones de distribución de la forma $f(H, L)$, por construcción del sistema usando solamente órbitas circulares. Mediante la combinación de órbitas circulares de energía relativa dada \mathcal{E}' con sus vectores de momento angular uniformemente distribuidas sobre una esfera, se genera una superficie esférica con el radio de las órbitas circulares de energía \mathcal{E}' . Cualquier modelo de densidad $\nu(r)$ puede ser formado mediante la adición de tales superficies con un análisis radial adecuado. Se puede expresar esta idea matemáticamente señalando que la función de distribución de la capa esférica es proporcional al producto de dos funciones delta, $f_s(\mathcal{E}, L) = \delta(\mathcal{E} - \mathcal{E}')\delta[L - L_c(\mathcal{E}')]$, donde $L_c(\mathcal{E}')$ es el momento angular de una órbita circular de energía relativa \mathcal{E}' . Para una función $F(\mathcal{E}')$ no negativa elegida adecuadamente, la integral

$$f_c(\mathcal{E}, L) \equiv \int_0^{\mathcal{E}_{max}} d\mathcal{E}' f_s(\mathcal{E}, L) F(\mathcal{E}') = F(\mathcal{E})\delta[L - L_c(\mathcal{E})] \quad (3.59)$$

es una función de distribución que genera la distribución de densidad requerida, $\nu(r)$.

La función de distribución de órbita circular, f_c , está asociada con la atenuación de la dispersión radial, σ_r . Si una función de distribución ergódica no negativa también existe, entonces esas dos funciones estarán acompañadas por una función de distribución continua de la forma

$$f_\alpha \equiv \alpha f_i + (1 - \alpha) f_c \quad (0 \leq \alpha \leq 1) \quad (3.60)$$

Conforme α aumenta las órbitas se vuelven progresivamente más excéntricas y σ_r aumenta igual con σ_θ . Esta secuencia puede seguir para las funciones de distribución con $\alpha > 1$ para lo cual $\sigma_r > \sigma_\theta$, pero esta continuación no está garantizada: cuanto más fuertemente se ponderan las órbitas muy excéntricas, se limita más $\nu(r)$ debido a la exigencia de que f_α sea no negativa. Por el contrario, la función de distribución de órbita circular seguirá siendo no negativa, incluso cuando $\nu(r)$ es tal que $f_i(\mathcal{E})$ está en alguna parte negativa, y es probable que se puedan construir algunas funciones no negativas que tienen $\sigma_r \neq 0$, incluso aunque no se permite una función de distribución ergódica.

Se define el parámetro de anisotropía como

$$\beta \equiv 1 - \frac{\sigma_\theta^2 + \sigma_\phi^2}{2\sigma_r^2} = 1 - \frac{\bar{v}_\theta^2 + \bar{v}_\phi^2}{2\bar{v}_r^2} \quad (3.61)$$

Este parámetro cuantifica los grados del sistema de anisotropía radial: si todas las órbitas son circulares, $\sigma_r = 0$ y $\beta = -\infty$; si la función de distribución es ergódica, $\beta = 0$; si todas las órbitas son perfectamente radiales, $\sigma_\theta = \sigma_\phi = 0$ y $\beta = 1$. Las funciones de distribución con $\beta > 0$ se dice que son radialmente parciales, mientras aquellas con $\beta < 0$ son tangencialmente parciales. El valor de β está determinado por la forma en la cual f depende del momento angular total L .

3.2.4. Ecuaciones de Jeans

Integrando la ecuación (3.41) sobre todas las velocidades, se obtiene

$$\int d^3\mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial t} + \int d^3\mathbf{v} v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \int d^3\mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial v_i} = 0. \quad (3.62)$$

El rango de velocidades alrededor del cual se está integrando no depende del tiempo, entonces la derivada parcial $\partial/\partial t$ en el primer término de la ecuación puede colocarse fuera de la integral. Similarmente, como v_i no depende de x_i , la derivada parcial $\partial/\partial x_i$ en el segundo término también puede sacarse del símbolo de integral. Además, el último término de lado izquierdo de la ecuación desaparece al aplicar el teorema de la divergencia⁸ dado que $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = 0$ para una $|\mathbf{v}|$ suficientemente grande, es decir, que no hay estrellas que se muevan infinitamente rápido. Recordando la definición de densidad ν (Ec. 3.42), tenemos que

$$\frac{\partial \nu}{\partial t} + \frac{\partial(\nu \langle v_i \rangle)}{\partial x_i} = 0 \quad (3.63)$$

La ecuación (3.63) difiere de la ecuación de continuidad únicamente en que describe la conservación de la probabilidad en lugar de la masa, y reemplaza la velocidad del fluido por la velocidad estelar media.

Ahora, multiplicando la ecuación (3.41) por v_j e integrando al rededor de todas las velocidades, se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial t} \int d^3\mathbf{v} f v_j + \int d^3\mathbf{v} v_i v_j \frac{\partial f}{\partial x_i} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \int d^3\mathbf{v} v_j \frac{\partial f}{\partial v_i} = 0 \quad (3.64)$$

⁸Teorema de la divergencia: La integral de volumen de la divergencia de una función en una cierta región, es igual al valor de la integral de superficie de esa misma región de la función:

$$\int_V (\nabla \cdot \mathbf{f}) d\tau = \oint_S \mathbf{f} \cdot d\mathbf{a}.$$

El último término del lado izquierdo puede transformarse utilizando el teorema de la divergencia, usando el hecho de que f desaparece a grandes valores de $|\mathbf{v}|$. Para el último término:

$$\int d^3\mathbf{v} v_j \frac{\partial f}{\partial v_i} = - \int d^3\mathbf{v} \frac{\partial v_j}{\partial v_i} f = - \int d^3\mathbf{v} \delta_{ij} f = -\delta_{ij} \nu. \quad (3.65)$$

Así, la ecuación (3.64) puede ser reescrita como

$$\frac{\partial(\nu \langle v_j \rangle)}{\partial t} + \frac{\partial(\nu \langle v_i v_j \rangle)}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} = 0. \quad (3.66)$$

Desarrollando la primer derivada, por regla de la cadena tenemos

$$\nu \frac{\partial \langle v_j \rangle}{\partial t} + \langle v_j \rangle \frac{\partial(\nu \langle v_i \rangle)}{\partial x_i} + \frac{\partial(\nu \langle v_i v_j \rangle)}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} = 0, \quad (3.67)$$

de la ecuación de continuidad se puede sustituir la derivada parcial de la densidad respecto al tiempo

$$\nu \frac{\partial \langle v_j \rangle}{\partial t} + \langle v_j \rangle \frac{\partial(\nu \langle v_i \rangle)}{\partial x_i} + \frac{\partial(\nu \langle v_i v_j \rangle)}{\partial x_i} = -\nu \frac{\partial \Phi}{\partial x_j}, \quad (3.68)$$

luego, usando la definición (3.50) el tensor de dispersión de velocidad para eliminar $\langle v_i v_j \rangle$. El resultado es análogo a la ecuación de Euler del flujo de un fluido,

$$\nu \frac{\partial \langle v_j \rangle}{\partial t} + \nu \langle v_i \rangle \frac{\partial \langle v_j \rangle}{\partial x_i} = -\nu \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} - \frac{\partial \nu \sigma_{ij}^2}{\partial x_i} \quad (3.69)$$

El primer término del lado derecho de la ecuación (3.69) difiere en sus términos de la ecuación ordinaria de Euler solamente por el reemplazo de la densidad de masa por la densidad de probabilidad, y la velocidad de fluido por la velocidad estelar media. El último término del lado derecho representa la fuerza de presión $-\nabla p$. Exactamente, $-\nu \sigma_{ij}^2$ es el tensor de esfuerzo que describe una presión anisotrópica. Las ecuaciones (3.63) y (3.69) fueron aplicadas a la dinámica estelar por primera vez por Jeans en 1919, por lo que son llamadas las ecuaciones de Jeans. Estas ecuaciones, relacionan las cantidades observacionales accesibles, como la dispersión de velocidades.

Ecuaciones de Jeans en un sistema esférico.

Para encontrar las ecuaciones de Jeans en coordenadas esféricas, utilizaremos el Hamiltoniano en coordenadas esféricas,

$$H = \frac{1}{2} (p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\phi^2}{r^2 \sin^2 \theta}) + \Phi \quad (3.70)$$

La ecuación de Vlasov (Ec. 3.37), puede ser reescrita en distintas formas, cada una de las cuales es muy útil en diferentes contextos. A partir de la ecuación (3.40), se puede escribir

$$0 = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} \cdot \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} \cdot \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \quad (3.71)$$

usando la expresión (3.70) en (3.71), se encuentra

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + p_r \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{p_\theta}{r^2} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{p_\phi}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{p_\theta^2}{r^3} - \frac{p_\phi^2}{r^3 \sin^2 \theta} \right) \frac{\partial f}{\partial p_r} \\ - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} - \frac{p_\phi^2 \cos \theta}{r^2 \sin^3 \theta} \right) \frac{\partial f}{\partial p_\theta} - \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \frac{\partial f}{\partial p_\phi} = 0 \end{aligned} \quad (3.72)$$

Con el momento

$$p_r = \dot{r} = v_r; \quad p_\theta = r^2 \dot{\theta} = rv_\theta; \quad p_\phi = r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi} = r \sin \theta v_\phi \quad (3.73)$$

tenemos

$$\int dp_r dp_\theta dp_\phi f = r^2 \sin \theta \int dv_r dv_\theta dv_\phi f = r^2 \sin \theta \nu \quad (3.74)$$

Suponiendo que el sistema es esférico, es independiente del tiempo, podemos quitar $\partial\Phi/\partial t$, $\partial\Phi/\partial\phi$, $\partial f/\partial t$ y $\partial f/\partial\phi$ de (3.72); conservando $\partial f/\partial\theta$ porque cualquier dependencia de f sobre v_ϕ es probable que introduzca dependencia de θ a través de las últimas ecuaciones de (3.73) cuando v_ϕ es expresada en términos de p_ϕ . Después de simplificar, la ecuación (3.72) se convierte en

$$p_r \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{p_\theta}{r^2} \frac{\partial f}{\partial \theta} - \left(\frac{\partial\Phi}{\partial r} - \frac{p_\theta^2}{r^3} - \frac{p_\phi^2}{r^3 \sin^2 \theta} \right) \frac{\partial f}{\partial p_r} - \frac{p_\phi^2 \cos \theta}{r^2 \sin^3 \theta} \frac{\partial f}{\partial p_\theta} = 0 \quad (3.75)$$

Ahora, multiplicando por $p_r dp_r dp_\theta dp_\phi$ e integrando todos los momentos. Con la ecuación (3.74) y resultados similares, y usando el teorema de la divergencia para eliminar derivadas respecto al momento, encontramos,

$$\frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sin \theta \nu \langle p_r^2 \rangle) + \frac{\partial}{\partial \theta} (r^2 \sin \theta \nu \langle p_r p_\theta \rangle) + r^2 \sin \theta \nu \left(\frac{d\Phi}{dr} - \frac{\langle p_\theta^2 \rangle}{r^3} - \frac{\langle p_\phi^2 \rangle}{r^3 \sin^2 \theta} \right) = 0 \quad (3.76)$$

En cualquier sistema esférico estático, $\langle p_r p_\theta \rangle = r \langle v_r v_\theta \rangle$, debe desaparecer pues la función de distribución, que es de la forma $f(H, L)$, y es por lo tanto una función de v_r . Finalmente, dividiendo por $r^2 \sin \theta$ y usando las ecuaciones (3.73) obtenemos

$$\frac{d(\nu \langle v_r^2 \rangle)}{dr} + 2 \frac{\beta}{r} \nu \langle v_r^2 \rangle = -\nu \frac{d\Phi}{dr}. \quad (3.77)$$

Si la dispersión de velocidad en la línea de visión es medida como función del radio, la ecuación (3.77) puede usarse como restricción a la dependencia radial de β . Distintas elecciones de $\beta(r)$ producen predicciones diferentes para la dispersión de velocidades de la línea de visión como función del radio, entonces β puede ser restringida por la optimización del ajuste entre las predicciones obtenidas por (3.77) y el modelo de dispersión de velocidades observado.

3.2.5. Masa a partir de la ecuación de Jeans.

La ecuación (3.77) relaciona a dos parámetros observables con un potencial, veamos qué sucede en el límite newtoniano de la Relatividad General, para relacionar este potencial con la masa y encontrar así la ecuación de materia en función de la distancia.

Límite Newtoniano.

Consideremos el caso de una partícula que se mueve lentamente en un campo gravitacional débil estacionario. Si la partícula es suficientemente lenta, es posible despreciar $dx/d\tau$ respecto a $dt/d\tau$, y escribir (2.29) como

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{00}^\mu \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 = 0. \quad (3.78)$$

Como el campo es estacionario, todas las derivadas de $g_{\mu\nu}$ respecto al tiempo se anulan, y por lo tanto,

$$\Gamma_{00}^{\mu} = -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^{\nu}} \quad (3.79)$$

Finalmente, como el campo es débil, es posible adoptar prácticamente un sistema de coordenadas cartesianas en el cual,

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta} \quad |h_{\alpha\beta}| \ll 1, \quad (3.80)$$

entonces, a primer orden en $h_{\alpha\beta}$,

$$\Gamma_{00}^{\alpha} = -\frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}\frac{\partial h_{00}}{\partial x^{\beta}}. \quad (3.81)$$

Usando esta conexión afín en las ecuaciones de movimiento (ec. 3.78), se obtiene,

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{d\tau^2} &= \frac{1}{2}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 \nabla h_{00} \\ \frac{d^2t}{d\tau^2} &= 0. \end{aligned} \quad (3.82)$$

La solución a la segunda ecuación se debe a que $dt/d\tau$ es constante, entonces, dividiendo la ecuación $d^2x/d\tau^2$ entre $(dt/d\tau)^2$, se encuentra que

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{2}\nabla h_{00}. \quad (3.83)$$

El resultado Newtoniano correspondiente es

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\nabla\phi, \quad (3.84)$$

donde ϕ es el potencial gravitacional, el cual, a una distancia r del centro de un cuerpo esférico de masa M , toma la forma

$$\phi = -\frac{GM}{r}, \quad (3.85)$$

donde $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$ es la constante de gravitación de Newton.

Comparando (3.83) con (3.84), se concluye que,

$$h_{00} = -2\phi + \text{constante} \quad (3.86)$$

Por lo tanto, el sistema de coordenadas debe ser Minkowskiano a grandes distancias, entonces h_{00} se anula en el infinito, y si se define ϕ como en (3.85), la constante es cero, entonces $h_{00} = -2\phi$, y regresando a la métrica (3.80),

$$g_{00} = -(1 + 2\phi). \quad (3.87)$$

El potencial gravitacional ϕ es del orden de 10^{-39} en la superficie de un protón, 10^{-9} en la superficie de la Tierra, 10^{-6} en la superficie del Sol, y 10^{-4} en la superficie de una estrella enana blanca, por lo que evidentemente, la distorsión producto de la gravitación sobre $g_{\mu\nu}$, es generalmente muy poca.

Ahora, como en un campo gravitacional débil y estático, producto de una densidad de masa no relativista ρ , la componente tiempo-tiempo del tensor métrico está dado por, aproximadamente, la ecuación (3.87), y con el potencial gravitacional newtoniano, determinado por la ecuación de Poisson,

$$\nabla^2\phi = 4\pi G\rho, \quad (3.88)$$

se obtiene que la densidad de energía, T_{00} , para materia no relativista, es igual a la densidad de masa,

$$T_{00} \simeq \rho. \quad (3.89)$$

Combinando estas ecuaciones, se obtiene

$$\nabla^2 g_{00} = -8\pi G T_{00}. \quad (3.90)$$

Para un campo débil estacionario producido por materia no relativista, la componente 00 de (2.25) debe reducirse a (3.90), entonces, en este límite,

$$G_{00} \simeq \nabla^2 g_{00}. \quad (3.91)$$

Además se observa que Λ , en la ecuación (2.25), debe tener un valor pequeño, lo suficiente para no interferir con la teoría de gravitación de Newton. [Weinberg, 1972]

Así podemos utilizar que la energía potencial por unidad de masa de un cuerpo de masa M con simetría esférica, situado en un campo gravitacional, a cierta distancia r es de la forma de la ecuación (3.85). Derivando respecto a la distancia,

$$\frac{d\Phi}{dr} = \frac{GM}{r^2}. \quad (3.92)$$

Sustituyendo en la ecuación de Jeans (ec. 3.77) la derivada del potencial respecto a la distancia (ec. 3.92), la masa en función del radio es:

$$M(r) = \left(-\frac{r^2}{\nu G} \right) \left(\frac{d(\nu \sigma_r^2)}{dr} + 2\frac{\beta}{r} \nu \sigma_r^2 \right) \quad (3.93)$$

Con esta ecuación, es posible medir la masa de un conjunto estelar a partir de la dispersión de velocidades y, de acuerdo a la ecuación (3.44), la densidad de luminosidad, ambos parámetros en función de la distancia. Estas dos variables son observables, en consecuencia es posible comparar la cantidad de materia que se mide solamente con la luminosidad, con la materia dinámica. Debido a las características de las galaxias elípticas, en el siguiente capítulo se hace la comparación entre estos dos valores de la materia para cuatro de ellas.

Capítulo 4

Determinación del potencial a partir de observables.

El descubrimiento de galaxias como tal se remonta a 1924 como resultado de las observaciones que realizó Edwin Hubble en el telescopio de 2.5 m en el Monte Wilson. Demostró que definitivamente la nebulosa de Andrómeda no formaba parte de nuestra Galaxia, y que los 'universos isla', son conglomeraciones de estrellas, gas y polvo independientes. La confusión histórica entre las nebulosas de gas ionizado en la Vía Láctea y las galaxias externas, se deriva del uso de catálogos generales, tal como el de Messier (1794), el cual contiene 39 galaxias entre los 109 objetos (cúmulos de estrellas y nebulosas) que lo conforman, y en especial el Nuevo Catálogo General (NGC) (Dreyer 1890), que contiene 7840 objetos, de los cuales 3200 son galaxias, y el Catálogo Índice (IC) (1895-1910), que contiene 5836 objetos, de los que 2400 son galaxias. El Catálogo de Harvard (Shapley y Ames, 1932) contiene las galaxias más brillantes, 1249 objetos en total, con magnitudes aparentes $m < 13$. La magnitud aparente es igual a $-2.5 \log(\text{luminosidad})$. El ojo puede percibir estrellas con magnitud arriba de $m = 6$. Hay 50 000 galaxias con magnitud aparente arriba de $m = 17.5$, y arriba de $m = 23$ hay 10^9 . El primer paso para conocer mejor las galaxias es describir la variedad de tipos y clasificaciones. [Combes et al., 2004]

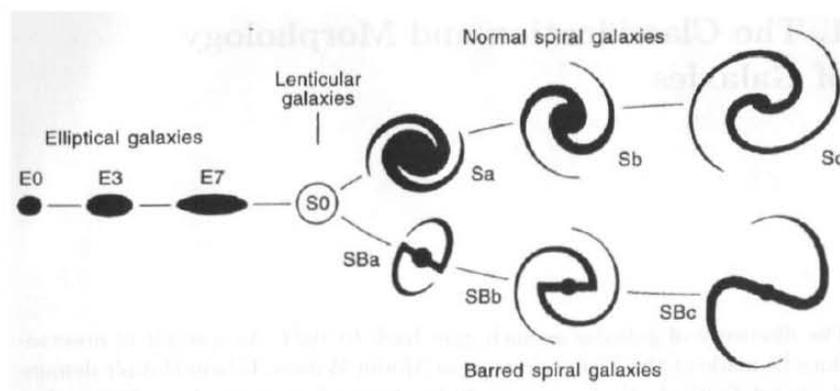


Figura 4.1: Principales tipos morfológicos que están representados en el clásico esquema de 'diapasón' de Hubble. Desde izquierda a derecha, el disco (inexistente en las elípticas) se vuelve más importante, al igual que la proporción de gas y estrellas jóvenes. Las lenticulares (S0), que tienen un disco pero muy poco gas, se encuentran en la transición de los sistemas esferoidales a espiral de las galaxias. Por un lado de las dos ramas del diapasón están las espirales normales, por otro, las espirales barradas. [Combes et al., 2004]

Los principales tipos morfológicos fueron representados por Hubble (figura 4.1), las galaxias están separadas en tres clases principales: elípticas (E), espirales (S), e irregulares (Irr). Las espirales son conformadas por dos familias llamadas espirales normales y espirales con barra (SB), que a su vez son divididas en tipos Sa, Sb y Sc, que corresponde a la evolución gradual en lugar de distintas clases. De izquierda a derecha en el diagrama de Hubble, las galaxias de disco, las cuales no existen en elípticas, tienen mayor proporción de gas y estrellas jóvenes.

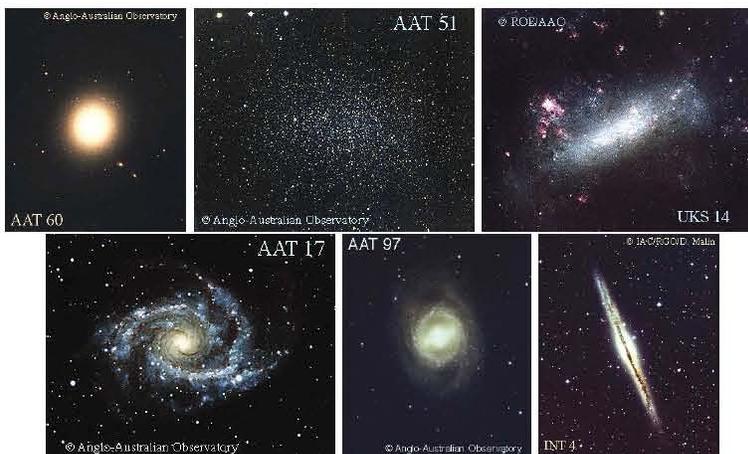


Figura 4.2: M87, Leo 1, LMC, NGC 2997, NGC 3351, NGC 891. [Arthur, 2012a]

Las galaxias elípticas parecen estar proyectadas en el cielo como elipses planas. La razón de sus ejes (a y b) varía de 1 a 3; la elipticidad es definida por $\epsilon = (a - b)/a$ (a el semieje mayor de la elipse), varía de 0 a 0.7. Las elípticas se clasifican por un índice igual a 10ϵ (desde E0 hasta E7). Las galaxias más masivas conocidas son las elípticas, la mayoría son más luminosas que las espirales. Sin embargo existe una clase de elípticas enanas que generalmente están acompañadas de galaxias más grandes. Las galaxias elípticas no tienen una subestructura particular. Su luminosidad decrece de manera regular desde el centro hasta el borde. Éstas no contienen o contienen muy poco gas, y su población es de estrellas viejas y cúmulos globulares que son muy densos y generalmente formados por estrellas viejas, llamadas población II, que son estrellas de baja masa y poca metalicidad.

A continuación se describe qué es y cómo determinar la dispersión de velocidades y la densidad de probabilidad de encontrar una estrella, ambos parámetros a partir de los datos observacionales. En las siguientes dos secciones se toman los datos observacionales extraídos de los artículos [Davies et al., 1983], para la dispersión de velocidades, y [Poveda et al., 1960], para la densidad material y con esta la densidad de probabilidad, estos dos parámetros se utilizan en la ecuación de Jeans (Ec.3.93) para calcular la masa de las galaxias elípticas NGC 5845, NGC 3818, NGC 4742 y NGC 2778, en función de la distancia al centro galáctico. La materia dinámica se compara con la visible en la sección tres de este capítulo. El objetivo de este trabajo es mostrar que la materia dinámica se extiende más allá de la materia visible que es marcada por un radio efectivo. Que la materia dinámica alcance un valor mayor que la materia visible permite concluir que alrededor de las galaxias elípticas también existe un halo de materia oscura, tal como el que se puede inferir de las curvas de rotación de las galaxias espirales.

4.1. Dispersión de velocidades.

Las galaxias elípticas son las galaxias más simples con estructura más regular en toda la secuencia de Hubble. Hasta finales de 1970 se creía haber dado una descripción matemática completa de la estructura de estas galaxias. Las elípticas se pensaban ensambles isotérmicos con simetría axial, incrementando su planicie conforme rotaban más rápidamente alrededor de su eje de simetría.

Las observaciones no contradijeron estos modelos hasta 1977, cuando datos espectroscópicos suficientes (líneas de absorción estelar) establecieron que las elípticas no rotaban globalmente, y que tampoco esto era la causa de su forma aplanada. Estos sistemas, que aparentemente son muy regulares, son de hecho no isotérmicos, quizá no tengan incluso simetría axial, y las velocidades de sus estrellas son anisotrópicas. Dado que las estrellas en las elípticas brillantes tienen poco movimiento organizado, es decir poca rotación: las órbitas de las estrellas alrededor del centro galáctico están orientadas en direcciones aleatorias. En las elípticas menos luminosas, las estrellas tienen más rotación organizada y menos movimiento aleatorio. [Combes et al., 2004]

Las observaciones se basan en la medición de líneas de absorción estelar (Líneas de H, K, CaII, las líneas dobles de D, líneas de Na I, Mg I, etc.), las cuales explican por qué es tan difícil la obtención de curvas de rotación. En galaxias elípticas, las líneas de absorción son relativamente débiles, entonces solamente se puede medir fácilmente la sección central de la galaxia, la posición de las líneas da una velocidad sistemática de la galaxia, y con el ancho de las líneas se obtiene la dispersión central. Lejos del centro la luminosidad decrece suavemente, y por lo tanto las mediciones se hacen hasta un radio aproximado de 10 kpc. La figura 4.3 muestra las curvas de rotación y curvas de dispersión de velocidades de las galaxias elípticas NGC 5845, NGC 4742, NGC 3818 y NGC 2778, que son las galaxias con las que se estudiaron en este trabajo. A pesar de que las mediciones son posibles sólo por un radio menor que algunas decenas de segundos de arco ($r < 10$ kpc), son suficientes para detectar el máximo de la curva, en alrededor de $r = 2$ kpc, más allá de este radio, r_{max} , la pendiente de las curvas decrece lentamente. [Davies et al., 1983]

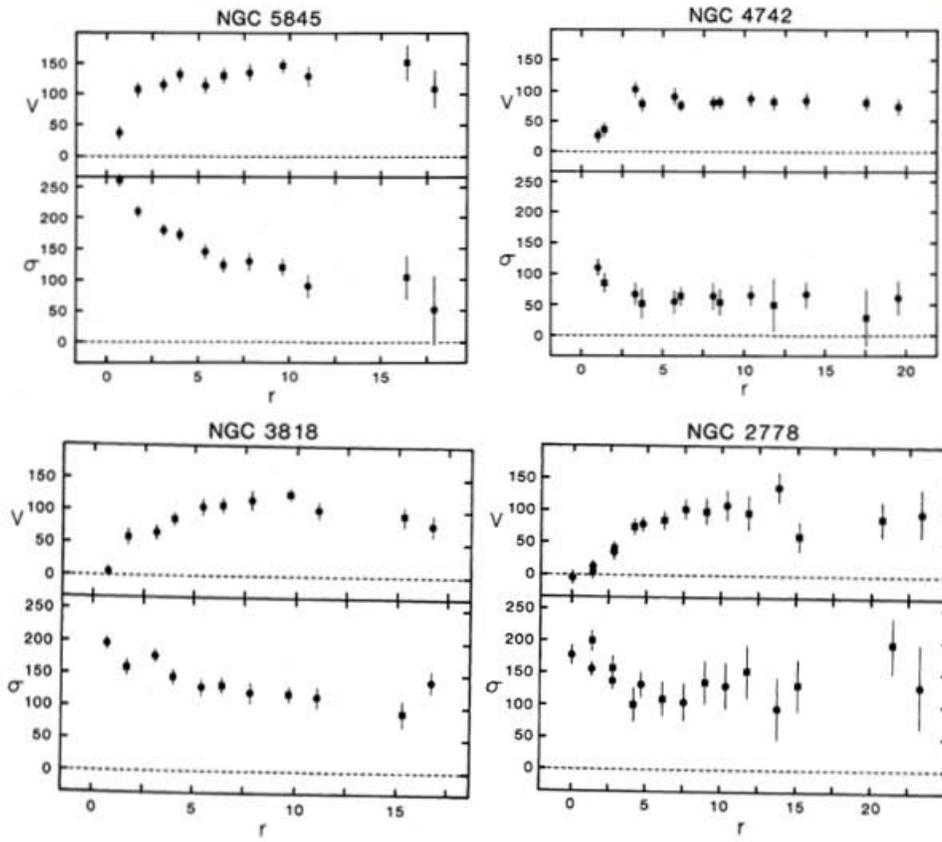


Figura 4.3: Ejemplos de curvas de rotación V y dispersión de velocidad σ para algunas galaxias elípticas, ambas están en $km\ s^{-1}$, la distancia, r , en arco segundos. [Davies et al., 1983]

4.1.1. Ajustes de la dispersión de velocidades.

Utilizando los datos observacionales de dispersión de velocidades obtenidos del artículo [Davies et al., 1983], se hallaron las ecuaciones que mejor se ajustan a cada una de las curvas¹ de la figura 4.3, obteniendo uno de los parámetros de la ecuación de Jeans (ec. 3.93) en función de la distancia al centro galáctico. En la figura 4.3 se puede observar que para las galaxias NGC 2778 y NGC 4742, la dispersión de velocidades más allá de 5 segundos de arco tiene mayor incertidumbre y tiende a ser constante más lejos del centro galáctico, a diferencia de las NGC 5845 y NGC 3818, las cuales tienen un comportamiento similar dentro de los primeros 10 segundos de arco. Por lo anterior, al realizar el ajuste de las curvas de dispersión de velocidades, fue posible utilizar todos los puntos de los datos de dispersión de velocidades del artículo [Davies et al., 1983], de las galaxias NGC 5845 y NGC 3818, mientras que para las galaxias NGC 5845 y NGC 2778 se obtuvieron dos ajustes, uno con todos los puntos y otro con los puntos más cercanos al centro galáctico. Para el ajuste de estas gráficas y por los cálculos que se realizarán más adelante se transformó la unidad de distancia al centro galáctico de segundos de arco a la unidad [0.1 kpc], las unidades de la dispersión de velocidades son $km\ s^{-1}$.

Las ecuaciones que mejor se ajustaron a cada una de las curvas de dispersión, sus correspondientes gráficas dispersión de velocidades en función de radio en décimas de pársec, junto con el coeficiente de determinación² para cada galaxia son:

¹El ajuste para estos datos se realizó con el programa Origin Pro 8.

²Sean x y y dos variables aleatorias sobre una población, el coeficiente de correlación o coeficiente de determinación

■ NGC 5845

$$\sigma(r) = 195,79 \pm 11,41 e^{-r/(4,76 \pm 0,87)} + 96,85 \pm 12,39. \quad R^2 = 0,97 \quad (4.1)$$

Distancia [0.1 kpc]	Disp. Vel. (σ) [km/s]	$\Delta\sigma$ [km/s]
21.21	103	36
12.41	120	14
8.28	123	12
5.17	173	11
2.20	210	9
0.91	263	8
4.01	180	9
6.98	145	12
10.09	129	15
14.22	90	19
23.14	51	56

Cuadro 4.1: Dispersión de velocidades respecto a la distancia al centro galáctico de NGC 5845. [Davies et al., 1983]

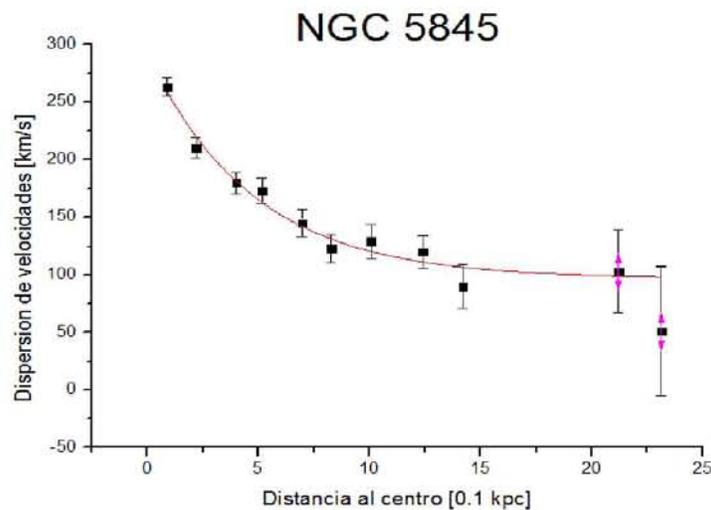


Figura 4.4: Curva de dispersión de velocidades (km/s) respecto a la distancia (0.1 kpc) de la galaxia NGC 5845.

está dado por:

$$R^2 = \frac{s_{xy}^2}{s_x^2 s_y^2}$$

donde s_{xy} es la covarianza de (x, y) , s_x y s_y es la varianza de las variables x y y , respectivamente. Si $R^2 = 1$, existe una correlación perfecta, si $0 < R^2 < 1$, existe una correlación, y si $R^2 = 0$ no existe relación. [Mendenhall et al., 1989]

■ NGC 3818

$$\sigma(r) = 98,25 \pm 14,64 e^{-r/(7,08 \pm 3,12)} + 112,03 \pm 14,59. \quad R^2 = 0,82 \quad (4.2)$$

Distancia [0.1 kpc]	Disp. Vel. (σ) [km/s]	$\Delta\sigma$ [km/s]
25.98	91	21
16.47	120	12
10.87	132	12
6.79	145	11
2.89	159	12
1.19	196	7
5.26	177	9
9.17	129	13
13.24	121	17
18.85	115	16
28.36	140	17

Cuadro 4.2: Dispersión de velocidades respecto a la distancia al centro galáctico de NGC 3818. [Davies et al., 1983]

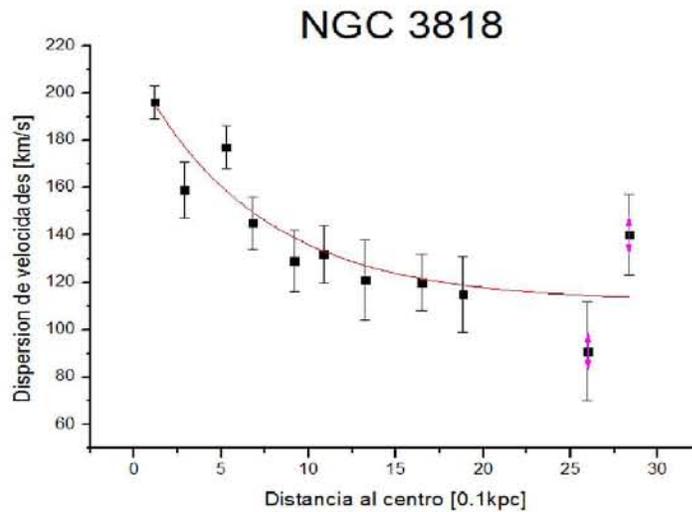


Figura 4.5: Curva de dispersión de velocidades (km/s) respecto a la distancia (0.1 kpc) de la galaxia NGC 3818.

■ NGC 4742

Ajuste de todos los puntos:

$$\sigma(r) = 281,04 \pm 187,58 e^{-r/(0,42 \pm 0,16)} + 60,83 \pm 2,28. \quad R^2 = 0,88 \quad (4.3)$$

Ajuste con cinco puntos:

$$\sigma(r) = 231,94 \pm 152,51 e^{-r/(0,48 \pm 0,21)} + 57,95 \pm 4,96. \quad R^2 = 0,93 \quad (4.4)$$

Distancia	Disp. Vel. (σ)	$\Delta\sigma$
[0.1 kpc]	[km/s]	[km/s]
0.73	110	14
1.02	85	16
2.41	67	18
2.70	52	24
4.16	55	19
4.45	64	15
5.91	64	22
6.20	54	21
7.58	66	17
8.61	49	44
10.06	67	21
12.76	29	47
14.22	61	28

Cuadro 4.3: Dispersión de velocidades respecto a la distancia al centro galáctico de NGC 4742. [Davies et al., 1983]

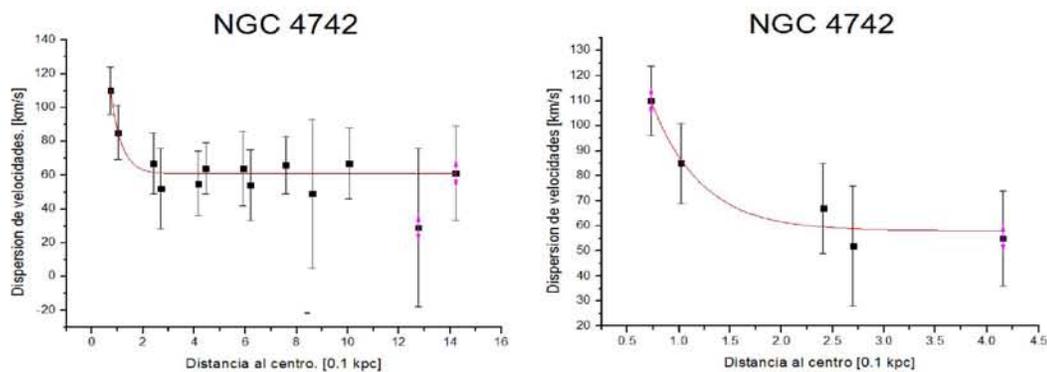


Figura 4.6: Curvas de dispersión de velocidades (km/s) respecto a la distancia (0.1 kpc) de la galaxia NGC 4742. A la izquierda se graficaron todos los puntos de la tabla de datos y a la derecha los cinco puntos más cercanos al centro galáctico.

■ **NGC 2778**

Ajuste de todos los puntos:

$$\sigma(r) = 63,02 \pm 18,45 e^{-r/(4,89 \pm 3,14)} + 123,53 \pm 15,38. \quad R^2 = 0,41 \quad (4.5)$$

Ajuste con siete puntos:

$$\sigma(r) = 231,08 \pm 78,77 e^{-r/(2,79 \pm 1,19)} + 107,68 \pm 15,16. \quad R^2 = 0,85 \quad (4.6)$$

Distancia	Disp. Vel. (σ)	$\Delta\sigma$
[0.1 kpc]	[km/s]	[km/s]
42.64	130	68
25.26	96	49
19.03	131	37
13.91	105	30
8.60	132	19
5.31	137	13
2.75	156	11
0.00	178	14
2.56	200	17
5.12	158	20
7.69	101	26
11.35	110	27
16.47	136	34
21.60	153	42
27.82	132	41
38.43	195	43

Cuadro 4.4: Dispersión de velocidades respecto a la distancia al centro galáctico de NGC 2778.[Davies et al., 1983]

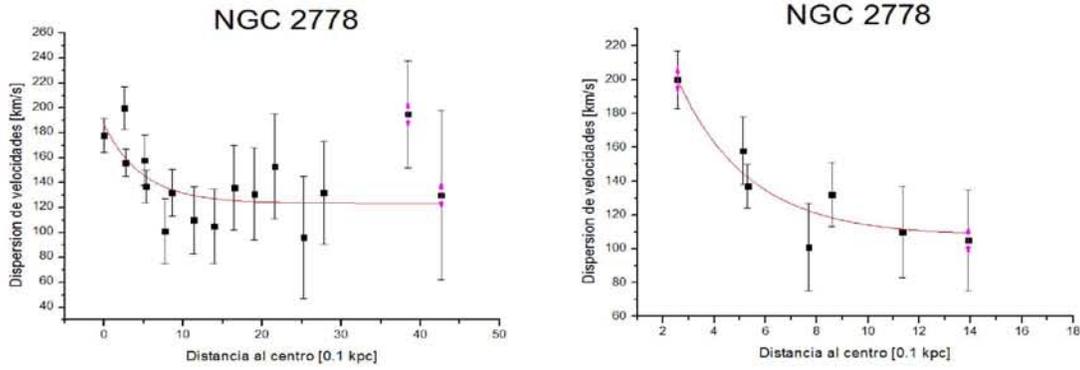


Figura 4.7: Curvas de dispersión de velocidades (km/s) respecto a la distancia (0.1 kpc) de la galaxia NGC 2778. A la izquierda se graficaron todos los puntos de la tabla de datos y a la derecha los siete puntos más cercanos al centro galáctico.

4.2. Densidad de probabilidad y densidad material.

Una segunda variable necesaria para encontrar el potencial galáctico o la masa a partir de la ecuación de Jeans (ec. 3.93), es la densidad de probabilidad de encontrar una estrella particular en cualquier punto $\bar{\mathbf{x}}$ independientemente de su velocidad, dada por la ecuación (3.42):

$$\nu(\mathbf{x}) \equiv \int d^3\mathbf{v} f(\mathbf{x}, \mathbf{v})$$

Para encontrar este parámetro se pueden seguir dos caminos, el primero es utilizando la función generadora de momentos mencionada en la primer sección del capítulo 3, y comparando los cálculos con los momentos encontrados en el apartado 3.2.3, de esta forma se puede deducir la función de distribución, según la ecuación (3.42), al integrar en todo el espacio, se obtendrá el parámetro deseado. La segunda forma de encontrar la densidad de probabilidad, $\nu(\bar{\mathbf{x}})$, es a través de la densidad de luminosidad, (ec. 3.44), o bien por la densidad numérica (3.43). Como uno de los objetivos de este proyecto es encontrar el potencial de un conjunto estelar, en este caso galaxias elípticas, dado por la ecuación de Jeans a través de observables y compararlo con el potencial de la materia luminica observada, se seguirá el segundo método.

4.2.1. Fotometría.

La fotometría superficial y la examinación de distribuciones de luminosidad son un primer paso para la identificación de varias componentes de una galaxia y determinar su masa. De hecho, debido a que la luminosidad varía desde el centro hasta el borde de las galaxias, se requieren observaciones cinemáticas para determinar la verdadera distribución de la masa de las galaxias.

El brillo superficial de una galaxia, $I(\mathbf{x})$, es la cantidad de luz por arco segundo cuadrado en el cielo en un punto \mathbf{x} en la imagen. Consideramos un área pequeña de lado D en una galaxia que se observa a una distancia d . Esta área subtende

$$\alpha = \frac{D}{d} \quad \text{en el cielo.} \quad (4.7)$$

Si la luminosidad total de todas las estrellas en esta región es L , su brillo aparente es $F = L/4\pi d^2$,

y el brillo superficial se define

$$I(\mathbf{x}) \equiv \frac{F}{\alpha^2} = \frac{L/4\pi d^2}{D^2/d^2} = \frac{L}{4\pi D^2} \quad \text{mag arcsec}^{-2}. \quad (4.8)$$

Las unidades de I son mag arcsec^{-2} , que es la magnitud aparente de una estrella que parece tan brillante como un cuadrado de lado arco segundo de la imagen de la galaxia, es decir, I es la luminosidad de la galaxia por unidad de área. El brillo superficial es independiente de la distancia entre el observador y el objeto.

Los contornos de brillo superficial constante sobre la imagen de una galaxia se llaman isofotas, la ecuación (4.8) muestra que la posición de una isofota dentro de la galaxia es independiente de la distancia al observador. Las galaxias no tienen bordes bien definidos y entonces frecuentemente se miden sus tamaños dentro de una isofota fija.

Para encontrar la luminosidad de la galaxia entera se mide la cantidad de luz que proviene dentro de un radio dado y aumenta conforme ese radio se va a la orilla de la galaxia, luego se extrapola para obtener la luminosidad total. [Arthur, 2012a]

La densidad de luminosidad, $j(\mathbf{r})$, de un sistema estelar es la luminosidad por unidad de volumen en la posición \mathbf{r} . Si $I(\mathbf{R})$, tiene simetría circular, es posible que $j(\mathbf{r})$, sea esféricamente simétrica. La Figura 4.8 muestra que en este caso, j se relaciona con I por

$$I(R) = \int_{-\infty}^{\infty} dz j(r) = 2 \int_R^{\infty} \frac{j(r)rdr}{\sqrt{r^2 - R^2}} \quad (4.9)$$

que es una ecuación integral de Abel para j como función de I , y su solución es

$$j(r) = -\frac{1}{\pi} \int_r^{\infty} \frac{dI}{dR} \frac{dR}{\sqrt{r^2 - R^2}}. \quad (4.10)$$

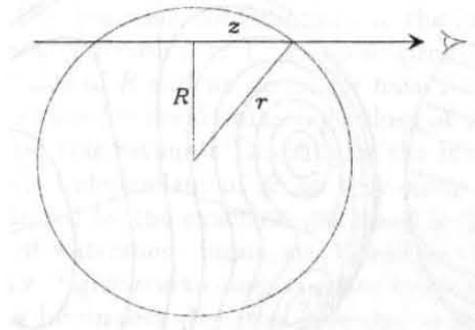


Figura 4.8: Proyección de la luminosidad esférica a lo largo de la línea de visión. [Binney and Merrifield, 1998]

Se han usado varias fórmulas empíricas para ajustar el modelo del brillo superficial de las galaxias elípticas. Uno de los más importantes es la ley de Sérsic o ley de Vaucouleurs generalizada:

$$I_m(R) = I(0) \exp(-kR^{1/m}) = I_e \exp\{-b_m[(R/R_e)^{1/m} - 1]\}; \quad (4.11)$$

donde $I(R)$ es el brillo superficial en el radio R , e I_e es el brillo superficial en el radio efectivo R_e . El parámetro m es el índice de Sérsic, el cual está relacionado con la luminosidad de la galaxia. Un rango

intermedio en la luminosidad de las galaxias elípticas es $m = 4$, al ajustar la fórmula $b_m = 2m - 0,324$ se tiene un error fraccional de $\lesssim 0,001$ en el rango $1 < m < 10$.

Por lo anterior, una buena representación del brillo superficial, I , como función del radio, r , está dada por la ley de Vaucouleurs o ley 1/4:

$$I(R) = I_e \exp\{-7,676[(R/R_e)^{1/4} - 1]\}. \quad (4.12)$$

donde el parámetro I_e es el brillo superficial en $R = R_e$, el radio efectivo de la galaxia. [Combes et al., 2004]

Se han calculado tablas en las que se dan las densidades luminosas, las densidades materiales, los potenciales y funciones similares. Para este trabajo se ha elegido la tabla que puede ser encontrada en el artículo [Poveda et al., 1960]. Para encontrar los valores de las tablas se calcularon las variables para una galaxia cuyo brillo superficial sigue la ley de Vaucouleurs, (ec. 4.12). En el artículo se indica cómo utilizar los resultados generales para cualquier galaxia esférica particular cuya masa, escala y relación masa-luminosidad sean conocidas.[Poveda et al., 1960]

Así, el factor de transformación de la densidad de material a la distancia r de una galaxia particular es

$$C_\rho = \frac{M}{a^3 K I_e}, \quad (4.13)$$

en donde a es la escala de una galaxia particular en centímetros, dada por $a = a_e d$, con a_e el semieje mayor galáctico en radianes y d la distancia del observador a la galaxia en centímetros. I_e es el brillo superficial y M la masa, ambos calculados al interior de la isofota del radio efectivo de la galaxia. K es la relación masa-luminosidad.

A partir de datos conocidos es posible determinar la luminosidad de la galaxia particular, ya que el cociente de los flujos radiantes es igual al cociente de sus luminosidades:

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{L_2/4\pi d_2}{L_1/4\pi d_1} = \frac{L_2}{L_1} = 100^{(M_1 - M_2)/5} \quad (4.14)$$

si utilizamos a F_1 como el flujo radiante del Sol, la luminosidad de la galaxia es

$$L_{Gal} = L_\odot 100^{(M_\odot - M_{Gal})/5}, \quad (4.15)$$

la magnitud absoluta del Sol es $M_\odot = 4,72$ y su luminosidad es $L_\odot = 4 \times 10^{33}$ erg s⁻¹.³

La magnitud absoluta de cada una de las galaxias que se están estudiando, se encontró en el artículo [Davies et al., 1983].

La masa total de galaxias elípticas puede ser obtenida con la velocidad de rotación de la galaxia⁴ utilizando el teorema del virial [Symon, 1971], el cual dice que en un sistema de equilibrio, la energía cinética T y la energía potencial U , están relacionadas de acuerdo a la ecuación

$$2T + U = 0 \quad (4.16)$$

Como las estrellas en las galaxias elípticas rotan despacio, la energía cinética puede ser escrita como

$$T = Mv^2/2, \quad (4.17)$$

donde M es la masa total de la galaxia y v la velocidad de rotación observada con las líneas espectrales. La energía potencial es

$$U = -GM^2/2R, \quad (4.18)$$

³[Karttunen et al., 2007]

⁴La velocidad de rotación máxima de cada una de las galaxias que se están analizando se encuentra en [Davies et al., 1983]

con R el radio promedio de la galaxia. Introduciendo (4.17) y (4.18) en (4.16), se obtiene:

$$M = 2v^2 R/G. \quad (4.19)$$

Así, conociendo v^2 y R , se puede calcular la masa luminosa de una galaxia elíptica⁵.

La población estelar predominante de las galaxias elípticas es de estrellas viejas, estas estrellas pertenecen a la población II que son estrellas de baja masa ($0,8 M_{\odot} \leq M \leq 2M_{\odot}$)⁶ por lo que la relación masa luminosidad correspondiente está dada por

$$\frac{L}{L_{\odot}} \propto \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^3. \quad (4.20)$$

La relación masa-luminosidad en estrellas de galaxias elípticas es $K \simeq 3$. [Prialnik, 2010]

Con estos datos es posible encontrar el factor de transformación para encontrar la densidad de masa cada una de las galaxias que se están estudiando. En la siguiente tabla (Tabla 4.2.1) se muestran las características particulares para cada galaxia y así el factor de transformación que se utilizará para determinar la densidad de masa.

	NGC 5845	NGC 3818	NGC 4742	NGC 2778
Vel. Rot. Max. [km/s]	127	114	83	99
Vel. Radial [km/s]	1528	1656	1270	2037
Distancia al obs. (d) [Mpc]	21.52	23.32	17.89	28.69
Semi-eje mayor (ae) [asec]	8	19	23	17
Radio (escala) [kpc]	8.34E-01	2.15E+00	1.99E+00	2.36E+00
Magnitud absoluta [mag]	-19.43	-19.83	-19.44	-20.33
Luminosidad gal. [erg/s]	1.83E+43	2.64E+43	1.85E+43	4.19E+43
Brillo superficial (Ie) [erg/s cm²]	2.20E-01	4.79E-02	3.88E-02	6.27E-02
Masa virial [Msol]	6.26E+09	1.30E+10	6.39E+09	1.08E+10
Factor de transformación (cgs)	1.11E-21	6.18E-22	4.69E-22	2.94E-22

Cuadro 4.5: Características particulares de cada galaxia para calcular factor de transformación de densidad. [NASA/IPAC, 2014] [Karttunen et al., 2007]

4.2.2. Ajuste de la densidad luminosa y densidad material.

Con el factor de transformación se encontró la densidad de material en función de la distancia para cada galaxia según el artículo [Poveda et al., 1960]. Con el ajuste de esta ecuación, más adelante se encontrará la distribución de masa luminosa en la galaxia y se comparará con la masa en función de la distancia descrita por la ecuación de Jeans (3.42).

Las ecuaciones que se ajustaban mejor a los datos, [Poveda et al., 1960], no cumplen con que la masa lumínica es creciente del centro galáctico hacia el exterior o bien, que la materia lumínica fuera constante más allá del radio efectivo, que además, esta constante debía coincidir aproximadamente con el valor de las masas calculadas con el teorema del virial (ver Tabla 4.2.1).

⁵La constante gravitacional vale: $G = 6,67 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2} = 4,297 \times 10^{-6} \left(\frac{km}{s} \right)^2 \frac{kpc}{M_{\odot}}$.

⁶[Prialnik, 2010]

El potencial de un sistema esférico se espera tenga densidad aproximadamente constante en el centro y decrezca a lo largo del radio. Se eligió el modelo de densidad de Plummer (Ec. 4.21) ya que tiene estas propiedades. M es la masa total del sistema, que se calculó con el teorema del virial, y b es la longitud de escala de Plummer. Los datos de la tabla [Poveda et al., 1960] se utilizaron para encontrar el parámetro b . [Binney and Tremaine, 2007]

La densidad de Plummer, sí cumple con que la masa lumínica sea constante más allá del radio efectivo y este valor coincide con el valor de las masas calculadas con el teorema del virial que se encuentran en la tabla (4.2.1).

$$\rho(r) = \frac{3}{4\pi} \frac{M_0}{b^3} \left(1 + \left(\frac{r}{b} \right)^2 \right)^{-5/2}. \quad (4.21)$$

A continuación se presentan las gráficas que comparan los datos observacionales extraídos del artículo [Poveda et al., 1960], con la densidad de Plummer de cada una de las galaxias estudiadas en este trabajo. La ecuación que acompaña a cada gráfica es el ajuste de los datos observacionales a la densidad de Plummer de la galaxia correspondiente, también se muestra, a la derecha de dicha ecuación, su coeficiente de determinación.

■ NGC 5845

$$\rho(r) = \frac{3}{4\pi} \cdot \frac{6,26 \times 10^9 M_\odot}{0,26^3} \left[1 + \left(\frac{r}{0,26} \right)^2 \right]^{-5/2} \quad R^2 = 0,53 \quad (4.22)$$

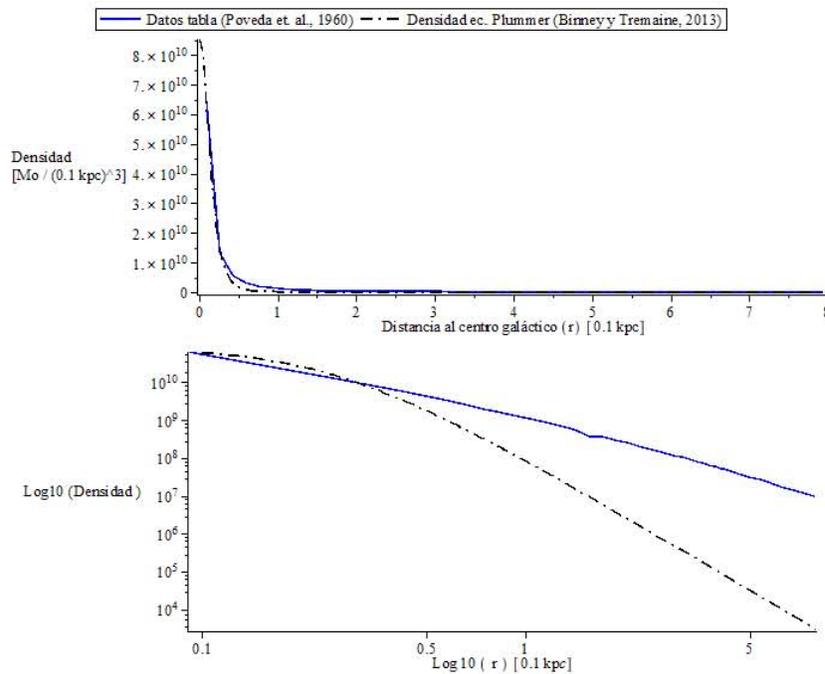


Figura 4.9: Densidad de materia de NGC 5845. Densidad de Plummer (ec. 4.22) (línea punteada) calculada con el parámetro b que se obtuvo al ajustarle los datos la tabla de datos de [Poveda et al., 1960] (línea sólida). Abajo: la misma gráfica en escala log-log.

■ NGC 3818

$$\rho(r) = \frac{3}{4\pi} \cdot \frac{1,30 \times 10^{10} M_{\odot}}{0,28^3} \left[1 + \left(\frac{r}{0,28} \right)^2 \right]^{-5/2} \quad R^2 = 0,52 \quad (4.23)$$

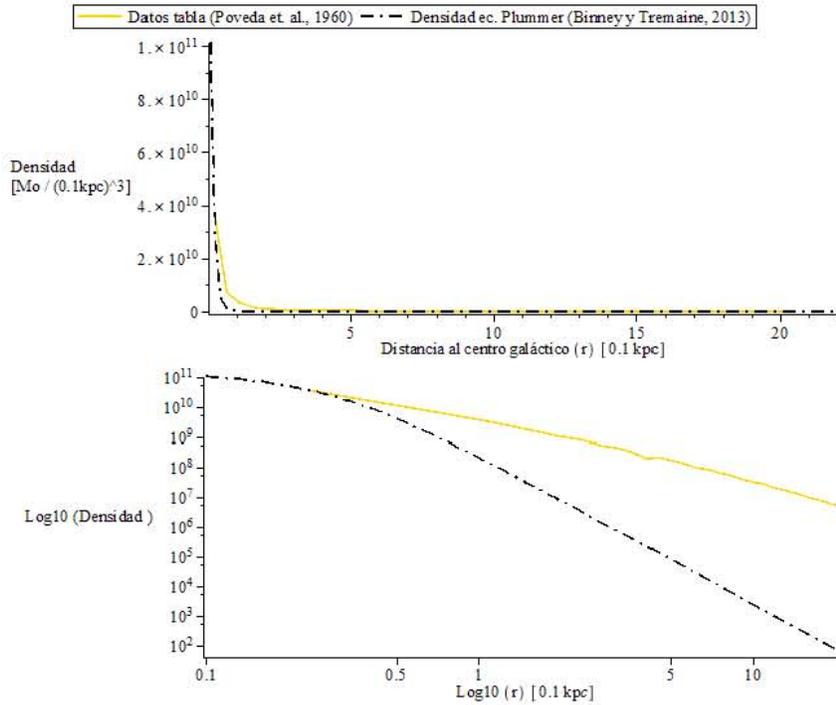


Figura 4.10: Densidad de materia de NGC 3818. Densidad de Plummer (ec. 4.23) (línea punteada) calculada con el parámetro b que se obtuvo al ajustarle los datos la tabla de datos de [Poveda et al., 1960] (línea sólida). Abajo: la misma gráfica en escala log-log.

■ NGC 4742

$$\rho(r) = \frac{3}{4\pi} \cdot \frac{6,39 \times 10^9 M_{\odot}}{0,201^3} \left[1 + \left(\frac{r}{0,201} \right)^2 \right]^{-5/2} \quad R^2 = 0,53 \quad (4.24)$$

■ NGC 2778

$$\rho(r) = \frac{3}{4\pi} \cdot \frac{1,08 \times 10^{10} M_{\odot}}{0,39^3} \left[1 + \left(\frac{r}{0,39} \right)^2 \right]^{-5/2} \quad R^2 = 0,52 \quad (4.25)$$

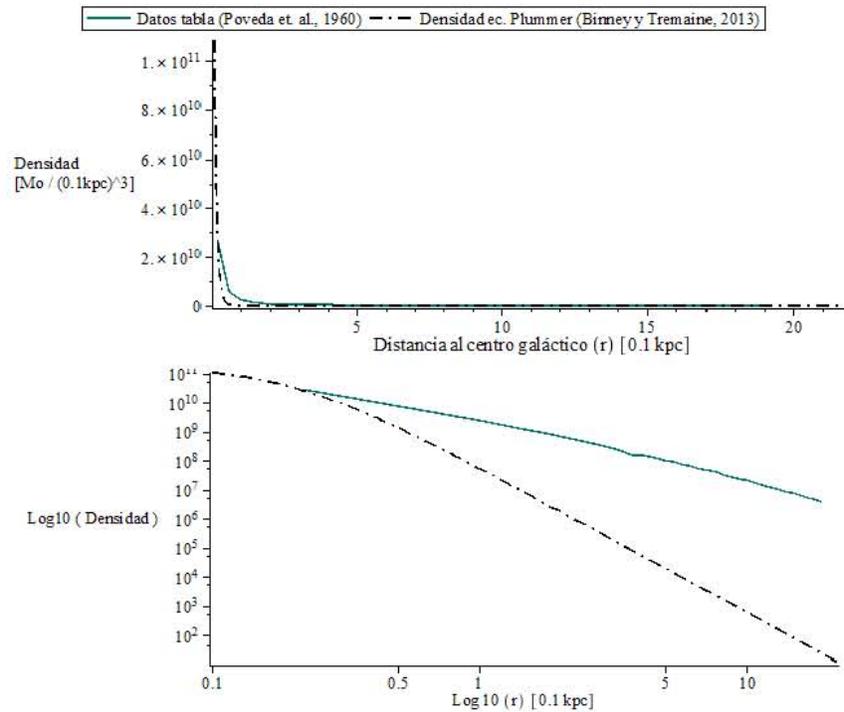


Figura 4.11: Densidad de materia de NGC 4742. Densidad de Plummer (ec. 4.24) (línea punteada) calculada con el parámetro b que se obtuvo al ajustarle los datos la tabla de datos de [Poveda et al., 1960] (línea sólida). Abajo: la misma gráfica en escala log-log.

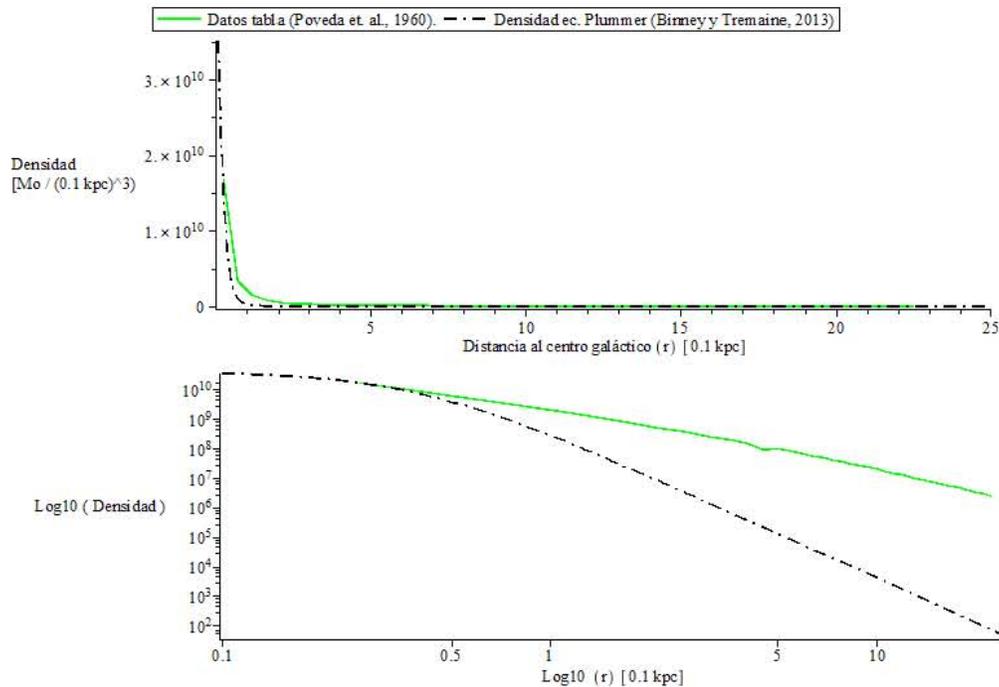


Figura 4.12: Densidad de materia de NGC 2778. Densidad de Plummer (ec. 4.25) (línea punteada) calculada con el parámetro b que se obtuvo al ajustarle los datos la tabla de datos de [Poveda et al., 1960] (línea sólida). Abajo: la misma gráfica en escala log-log.

4.3. Comparación de materia dinámica con materia luminosa.

La densidad del número de estrellas en una distancia en la galaxia está dada por la ecuación (3.43):

$$n(r) \equiv N\nu(r),$$

utilizando que la densidad numérica de estrellas está relacionada con la densidad de materia por

$$\rho(r) = mn(r), \quad (4.26)$$

donde m es la masa de una estrella, se obtiene que la densidad de probabilidad por unidad de volumen es:

$$\nu(r) = \frac{1}{mN}\rho(r). \quad (4.27)$$

Para encontrar la densidad de probabilidad, se ha supuesto que todas las estrellas de la población galáctica son del mismo tipo, si se considera que la población estelar de galaxias elípticas son estrellas de baja masa, podemos considerar una estrella de masa $m = M_{\odot}$ como único tipo de estrella contenida en todas las galaxias que se están estudiando. Por las relaciones de homología de las estrellas el radio de esta estrella será R_{\odot} . El número total de estrellas en una esfera de radio r , concéntrica a la galaxia será

$$N = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi R_{\odot}^3} = \left(\frac{r}{R_{\odot}}\right)^3. \quad (4.28)$$

por lo que, según la ecuación (4.27), la densidad de probabilidad es:

$$\nu(r) = \frac{1}{M_{\odot}} \left(\frac{R_{\odot}}{r}\right)^3 \rho(r) \quad (4.29)$$

Entonces, utilizando las ecuaciones de densidad de materia luminosa de las galaxias, (ecs. 4.22 a 4.25), y las ecuaciones del ajuste a la dispersión de velocidades (ecs. 4.4 a 4.7), es posible determinar la función de la masa respecto a la distancia sustituyendo estos parámetros en la ecuación (3.93). Así mismo, la masa luminosa se encuentra con la ecuación de densidad material para cada galaxia realizando la integral:

$$M(r) = 4\pi \int \rho(r) dr \quad (4.30)$$

En la siguiente sección se presentan las imágenes de cada una de las galaxias que se estudiaron con sus coordenadas. Enseguida se encuentran las gráficas que se obtuvieron con las ecuaciones de masa visible (ec. 4.30), la o las gráficas de materia obtenida con la ecuación de Jeans (ec. 3.93), y dos gráficas comparativas de la materia visible y la materia calculada con la ecuación de Jeans para cada una de las galaxias, en la primera el eje de las abscisas llega hasta una distancia un poco mayor al radio de la galaxia y en la segunda a la distancia alcanza a cubrir el punto de intersección entre las dos gráficas de masa.

NGC 5845

- Coordenadas: AR: 15h 06m 00.8s Dec.: +01d 38m 02s ⁷
- Radio: $8,34 \times 10^{-1}$ kpc.
- Materia visible⁸: $6,26 \times 10^9 M_{\odot}$.

NGC 5845

Figura 4.13: NGC 5845.

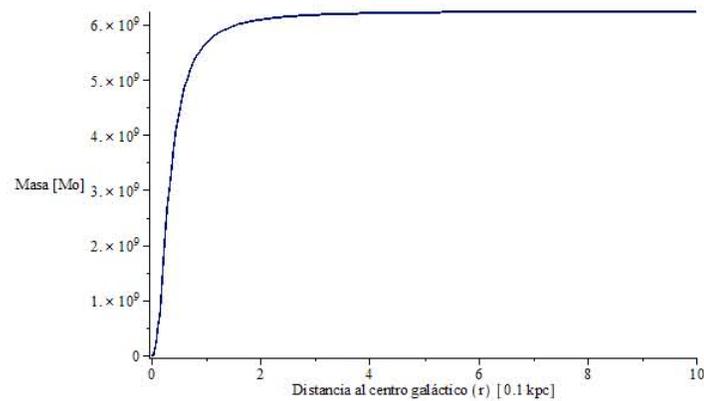


Figura 4.14: NGC 5845. Materia visible calculada con la ecuación (4.30) con densidad de Plummer (ec. 4.22).

⁷[NASA/IPAC, 2014]⁸Masa calculada con el teorema del virial.

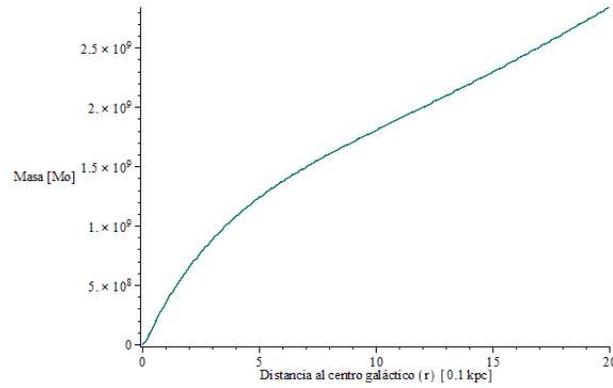


Figura 4.15: NGC 5845. Materia calculada con la ecuación de Jeans (ec. 3.93) utilizando los parámetros de dispersión de velocidades (4.1) y la densidad calculada con la ecuación de Plummer (ec. 4.22).

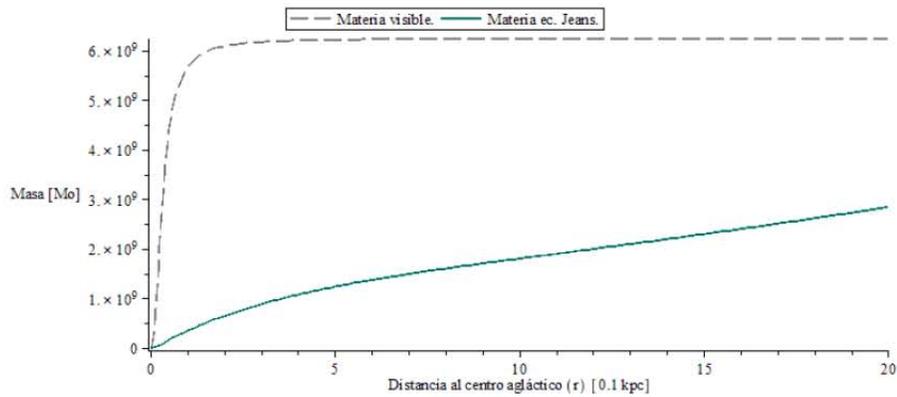


Figura 4.16: NGC 5845. Comparación de la materia calculada con la ecuación de Jeans (ec. 3.93) y la materia visible (ec. 4.30). La coordenada de las abscisas llega a un valor un poco mayor que el radio de esta galaxia: $R_{NGC\ 5845} = 0,834\text{ kpc}$.

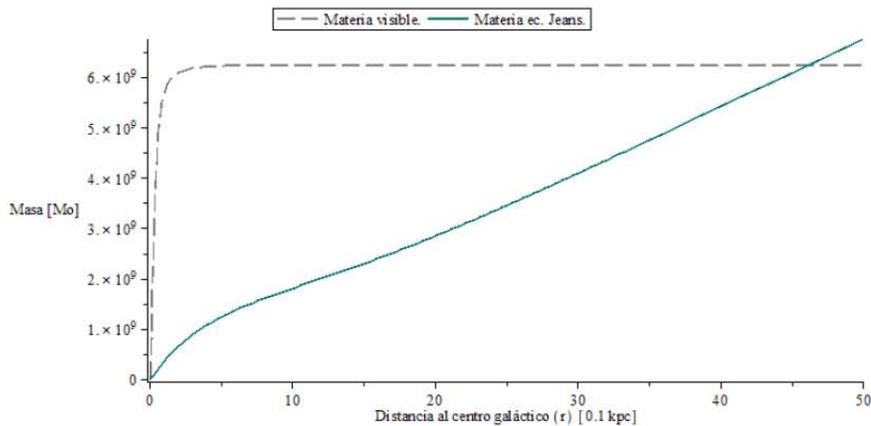


Figura 4.17: NGC 5845. Comparación de la materia calculada con la ecuación de Jeans (ec. 3.93) y la materia visible (ec. 4.30). Se extiende el eje de las abscisas para conocer el punto de intersección entre las dos gráficas: (46.168 [0.1 kpc], $6,241 \times 10^9 M_{\odot}$).

NGC 3818

- Coordenadas: AR: 11h 41m 57.3s Dec.: -06d 09m 20s ⁹
- Radio: 2,15 kpc.
- Materia visible¹⁰: $1,3 \times 10^{10} M_{\odot}$.

NGC 3818

Figura 4.18: NGC 3818.

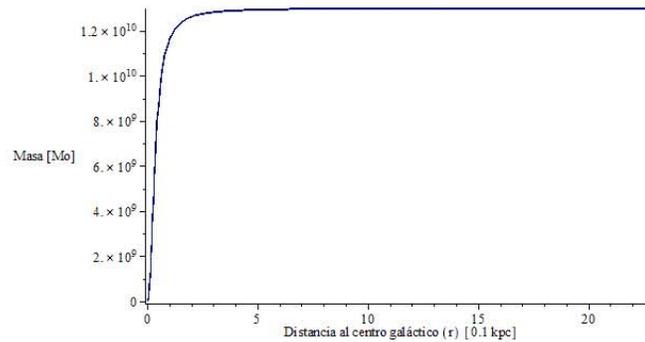


Figura 4.19: NGC 3818. Materia visible calculada con la ecuación (4.30) con densidad de Plummer (ec. 4.23).

⁹[NASA/IPAC, 2014]¹⁰Masa calculada con el teorema del virial.

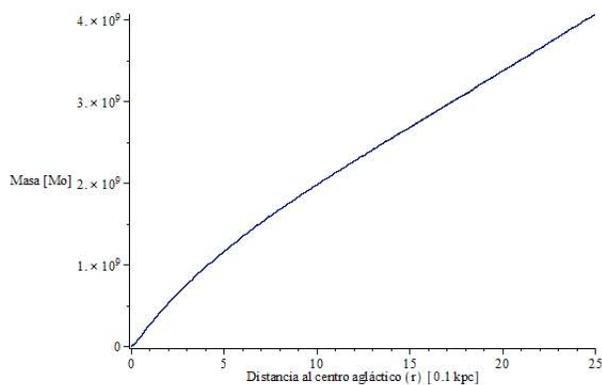


Figura 4.20: NGC 3818. Materia calculada con la ecuación de Jeans (ec. 3.93) utilizando los parámetros de dispersión de velocidades (4.2) y la densidad calculada con la ecuación de Plummer (ec. 4.23).

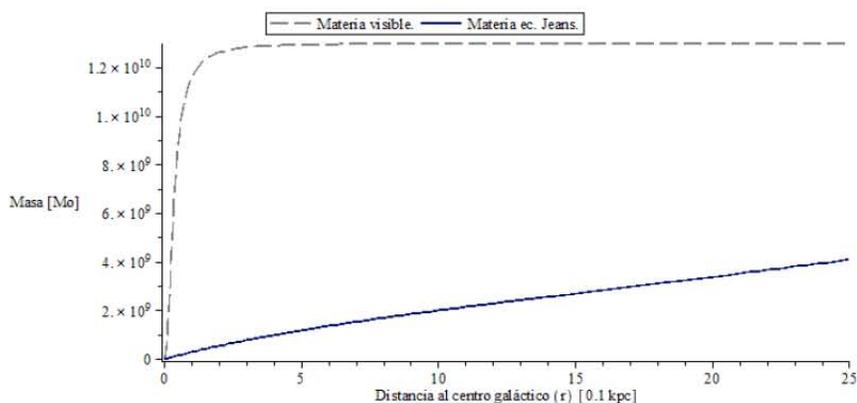


Figura 4.21: NGC 3818. Comparación de la materia calculada con la ecuación de Jeans (ec. 3.93) y la materia visible (ec. 4.30). La coordenada de las abscisas llega a un valor un poco mayor que el radio de esta galaxia: $R_{NGC\ 3818} = 2,15$ kpc.

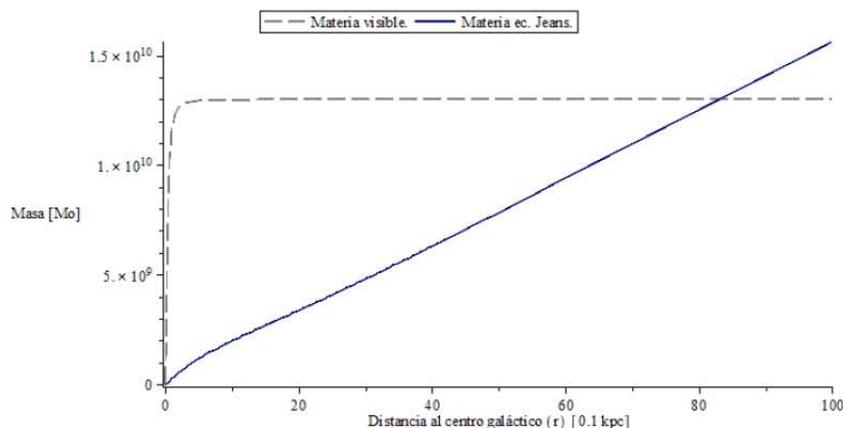


Figura 4.22: NGC 3818. Comparación de la materia calculada con la ecuación de Jeans (ec. 3.93) y la materia visible (ec. 4.30). Se extiende el eje de las abscisas para conocer el punto de intersección entre las dos gráficas: $(83.066 [0.1 \text{ kpc}], 1.29 \times 10^{10} M_{\odot})$

NGC 4742

- Coordenadas: AR: 12h 51m 48.0s Dec.: -10d 27m 17s ¹¹
- Radio: 1,99 kpc.
- Materia visible¹²: $6,39 \times 10^9 M_{\odot}$.

NGC 4742

Figura 4.23: NGC 4742.

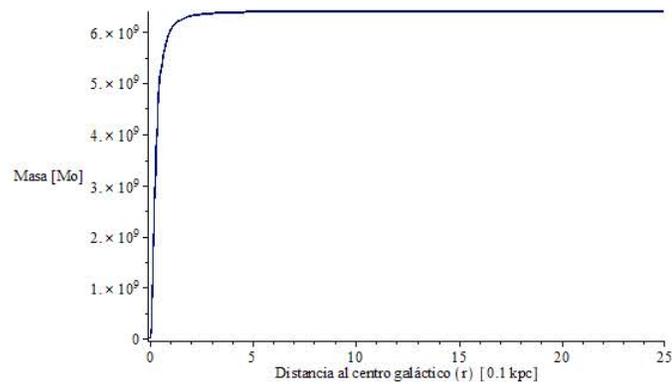


Figura 4.24: NGC 4742. Materia visible calculada con la ecuación (4.30) con densidad de Plummer (ec. 4.24).

¹¹[NASA/IPAC, 2014]¹²Masa calculada con el teorema del virial.

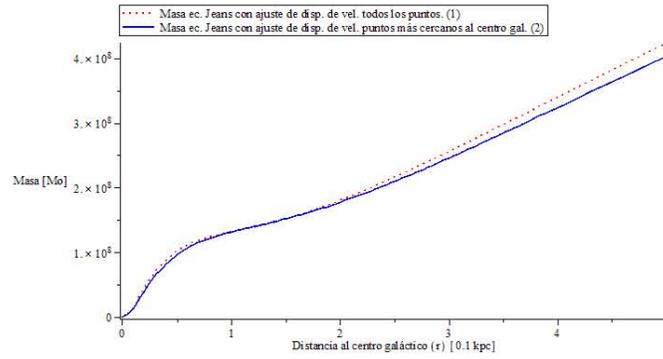


Figura 4.25: NGC 4742. Materia calculada con la ecuación de Jeans (ec. 3.93) utilizando los parámetros: densidad de probabilidad, calculada con la ecuación con densidad de Plummer (ec. 4.24) correspondiente a esta galaxia, y con los ajustes de dispersión de velocidades, de todos los puntos (ec. 4.3) (línea punteada) y con el de los puntos más cercanos al centro galáctico (ec. 4.4) (línea sólida).

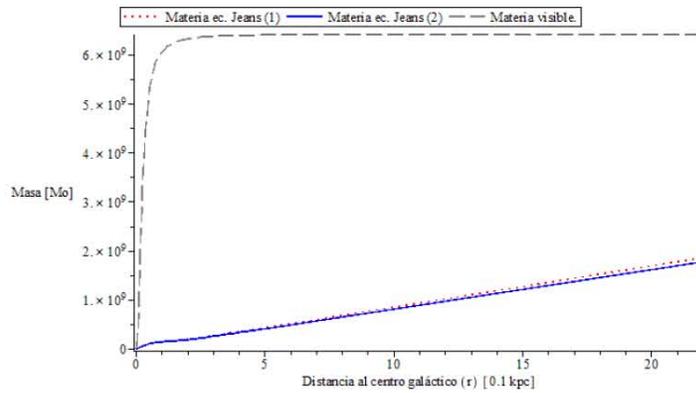


Figura 4.26: NGC 4742. Comparación de la materia calculada con la ecuación de Jeans (ec. 3.93) y la materia visible (ec. 4.30). La coordenada de las abscisas llega a un valor un poco mayor que el radio de esta galaxia: $R_{NGC\ 4742} = 1,99$ kpc. (Ver pie fig. 4.25).

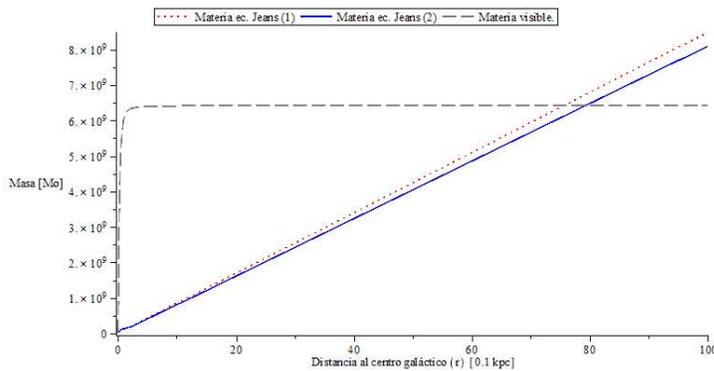


Figura 4.27: NGC 4742. Comparación de la materia calculada con la ecuación de Jeans (ec. 3.93) y la materia visible (ec. 4.30). (Ver pie fig. 4.25). Se extiende el eje de las abscisas para conocer el punto de intersección entre las gráficas: (1): (75.503 [0.1 kpc], $6.409 \times 10^9 M_{\odot}$), (2): (79.247 [0.1 kpc], $6.409 \times 10^9 M_{\odot}$).

NGC 2778

- Coordenadas: AR: 09h 12m 24.4s Dec.: +35d 01m 39s ¹³
- Radio: 2,36 kpc.
- Materia visible¹⁴: $1,08 \times 10^{10} M_{\odot}$.

NGC 2778

Figura 4.28: NGC 2778.

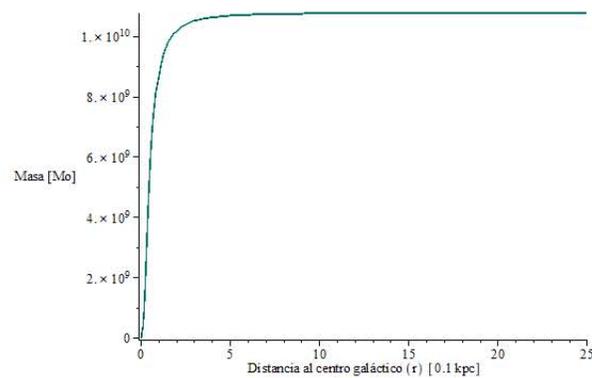


Figura 4.29: NGC 2778. Materia visible calculada con la ecuación (4.30) con densidad de Plummer (ec. 4.25).

¹³[NASA/IPAC, 2014]¹⁴Masa calculada con el teorema del virial.

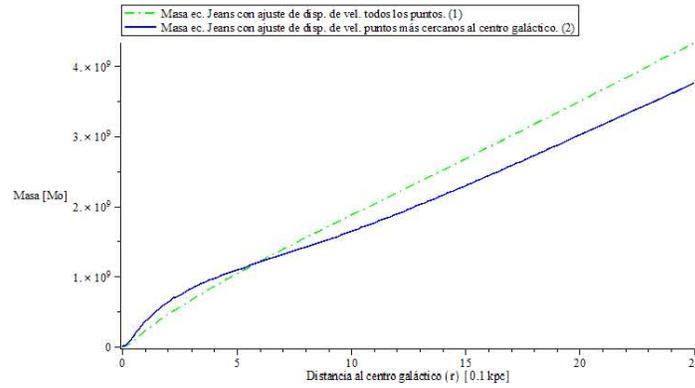


Figura 4.30: NGC 2778. Materia calculada con la ecuación de Jeans (ec. 3.93) utilizando los parámetros: densidad de probabilidad, calculada con la ecuación con densidad de Plummer (ec. 4.25) correspondiente a esta galaxia, y con los ajustes de dispersión de velocidades, de todos los puntos (ec. 4.5) (línea punteada) y con el de los puntos más cercanos al centro galáctico (ec. 4.6) (línea sólida).

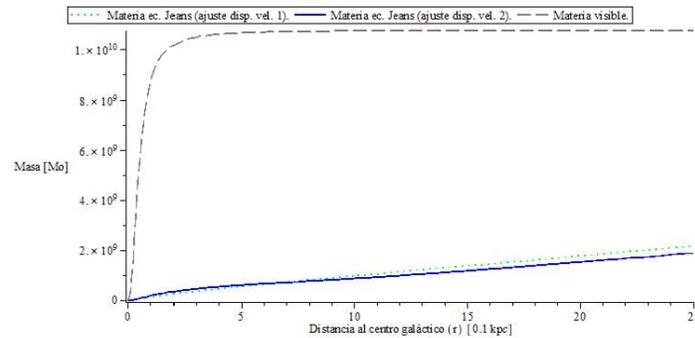


Figura 4.31: NGC 2778. Comparación de la materia calculada con la ecuación de Jeans (ec. 3.93) y la materia visible (ec. 4.30). La coordenada de las abscisas llega a un valor un poco mayor que el radio de esta galaxia: $R_{NGC\ 2778} = 2,36$ kpc. (Ver pie fig. 4.30).

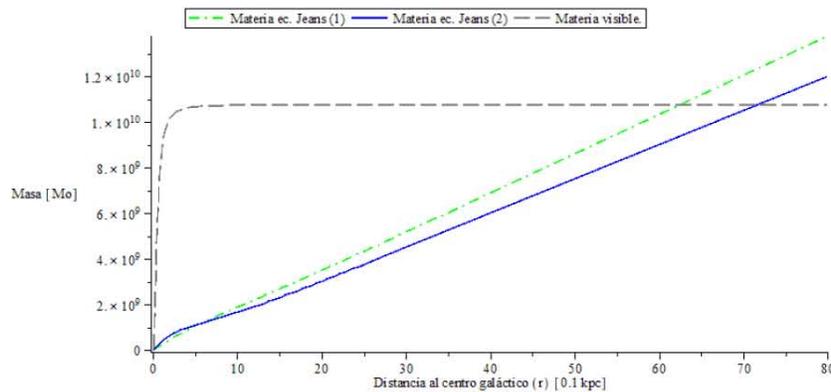


Figura 4.32: NGC 2778. Comparación de la materia calculada con la ecuación de Jeans (ec. 3.93) y la materia visible (ec. 4.30). (Ver pie fig. 4.30). Se extiende el eje de las abscisas para conocer el punto de intersección entre las gráficas: (1): (62.436 [0.1 kpc], $1,076 \times 10^{10} M_{\odot}$), (2): (71.632 [0.1 kpc], $1,076 \times 10^{10} M_{\odot}$)

Se observa que con la ecuación de densidad de Plummer se obtiene que la materia visible es constante más allá del radio galáctico (gráficas de las figuras 4.14, 4.19, 4.24 y 4.29). Como se había indicado, el ajuste de cualquier otra función a los datos del artículo de [Poveda et al., 1960] no mostraban este comportamiento, con otras ecuaciones la materia visible seguía creciendo más allá del radio de la galaxia. Por lo tanto, aunque el coeficiente de correlación para encontrar el parámetro b de la ecuación de Plummer con los datos de dicho artículo indica alrededor 50% de certeza para las cuatro galaxias estudiadas, esta ecuación es un buen modelo para determinar la densidad de probabilidad (ec.4.29) y con esta la materia con la ecuación de Jeans (ec. 3.93).

Las gráficas de la materia de Jeans calculadas para NGC 5845 (fig. 4.15) y NGC 3818 (fig. 4.20), difieren de las de NGC 4742 (fig 4.25) y NGC 2778 (fig. 4.30), en que las primeras tienen un solo ajuste a la dispersión de velocidades, mientras que para las otras se obtuvieron dos ecuaciones de dispersión de velocidades, una que incluía todos los puntos de los datos observados y otra en la que se consideraron solamente los puntos más cercanos al centro de la galaxia respectivamente. Se puede observar que la materia dinámica tiene un comportamiento distinto cerca del centro galáctico cuando la dispersión de velocidades tiene un mejor ajuste, así las líneas sólidas de las gráficas (fig. 4.25) y (fig. 4.30), tienen mayor semejanza con la materia visible, pero a una distancia mucho menor que el radio galáctico.

Todas las gráficas que representan la materia calculada con la ecuación de Jeans inician con un comportamiento similar al de la masa visible, pero más adelante no son constantes, si no crecientes, por lo cual para cada galaxia se hicieron dos gráficas comparativas con la materia visible, una que termina cerca del radio de la galaxia, y otra que muestra que la materia dinámica seguirá aumentando hasta superar la constante de la materia visible (figs. 4.16 y 4.17 para NGC 5845, figs. 4.21 y 4.22 para NGC 3818, figs. 4.26 y 4.27 para NGC 4742, y figs. 4.31 y 4.32 para NGC 2778). En promedio, el punto de intersección entre la materia dinámica y la visible se encuentra a cuatro radios galácticos respectivamente de distancia del centro de la galaxia, por ejemplo, el punto de intersección de las gráficas de materia de NGC 3818 se encuentra en 8.306 kpc del centro, que es 3.86 veces su radio, 2.15 kpc.

Hasta este punto, se ha cumplido con la hipótesis de que la materia dinámica superaría a la materia visible, confirmando la existencia de mayor cantidad de materia alrededor de las galaxias elípticas. No obstante, debido a las observaciones anteriores al comportamiento de las gráficas cerca del centro galáctico que representan a la materia calculada con la ecuación de Jeans, se hace posible suponer que existe un error de escala al calcular la materia con dicha ecuación. A continuación se indaga para encontrar una explicación a este error.

La densidad de probabilidad (ec.4.29) se calculó con un factor N , que es el número de estrellas en una esfera concéntrica a la galaxia, sin considerar el espacio entre ellas, que tiene que ser suficiente para cumplir la hipótesis de que no hay colisiones. En las siguientes gráficas se aproximó este error de escala.

Las gráficas de lado izquierdo de las figuras 4.33 y 4.34, muestran que la materia dinámica sigue un comportamiento inicial casi idéntico al de la materia visible, esto se obtuvo multiplicando la ecuación de materia de Jeans por 10. Sin embargo, el punto de intersección con la materia visible es menor que el radio galáctico, en ambos casos. Al reducir el factor por el cual se multiplicó a la ecuación de Jeans a 3, se observa que las galaxias NGC 2778, NGC 5845 y NGC 3818 tienen como punto de intersección entre la materia dinámica y la visible una cantidad más cercana a su radio que las gráficas comparativas anteriores. La ecuación de Jeans para NGC 4742 se multiplicó por 4 para que tuviera el mismo efecto.

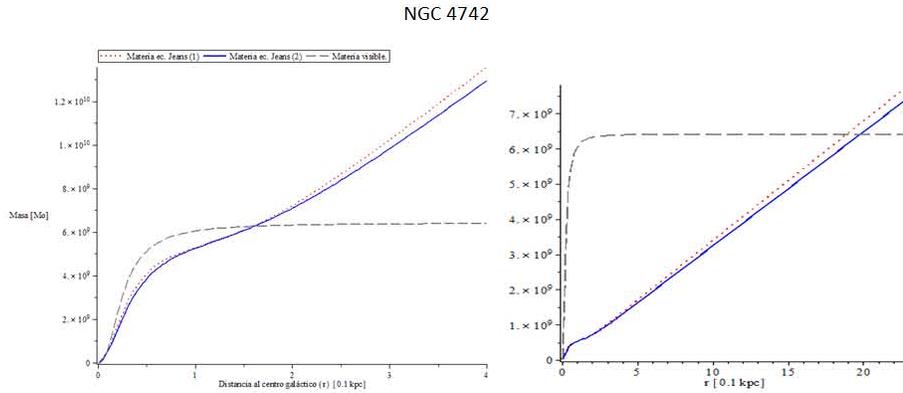


Figura 4.33: NGC 4742. Izquierda: se compara la materia visible con la ecuación de materia de Jeans multiplicada por un factor de 10. Derecha: se compara la materia visible con la ecuación de materia de Jeans multiplicada por un factor de 4, intersección: (19.807 [0.1 kpc], $6.408 \times 10^9 M_{\odot}$).

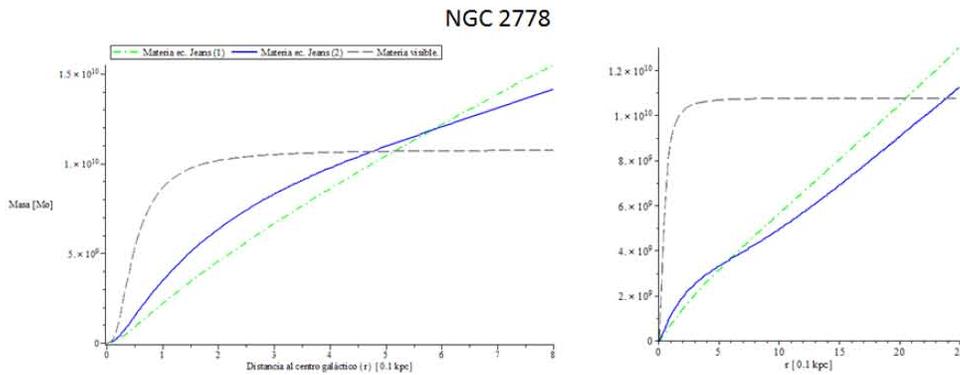


Figura 4.34: NGC 2778. Izquierda: se compara la materia visible con la ecuación de materia de Jeans multiplicada por un factor de 10. Derecha: se compara la materia visible con la ecuación de materia de Jeans multiplicada por un factor de 3, intersección: (23.838 [0.1 kpc], $1.76 \times 10^{10} M_{\odot}$).

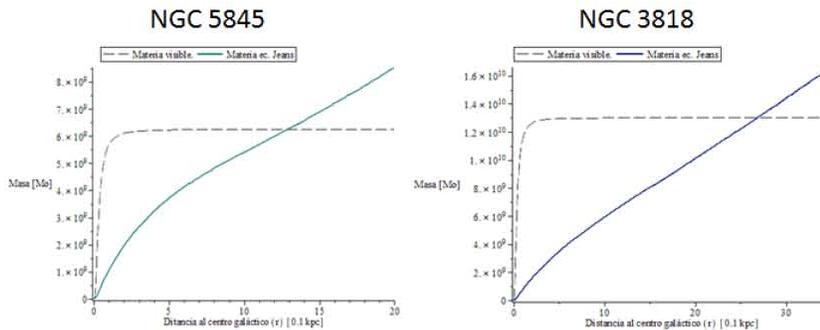


Figura 4.35: Izquierda: NGC 5845: se compara la materia visible con la ecuación de materia de Jeans multiplicada por un factor de 3, intersección: (12.861 [0.1 kpc], $6.238 \times 10^9 M_{\odot}$). Derecha: NGC 3818: se compara la materia visible con la ecuación de materia de Jeans multiplicada por un factor de 3, intersección: (26.819 [0.1 kpc], $1.29 \times 10^{10} M_{\odot}$).

Por último, las líneas sólidas de las gráficas de materia dinámica de NGC 4742 y NGC 2778 (figs. 4.25 y 4.30), indican que con un mejor ajuste a la dispersión de velocidades, la materia dinámica cerca del centro galáctico es más semejante a la visible, esto puede comprobarse también con las gráficas de la derecha de las figuras 4.33 y 4.34. Para conocer mejor cómo es el cambio en la ecuación de Jeans al variar la ecuación de dispersión de velocidades, se tomaron como referencia las ecuaciones de dispersión de velocidades de NGC 5845 (ec. 4.1) y NGC 3818 (ec. 4.2). Cada una de las ecuaciones se multiplicó por 1, 3 y 5, con cada una se calculó la materia dinámica y todas se compararon con la materia visible. Enseguida, se multiplicó la materia calculada con la ecuación de Jean por un factor tal que la gráfica se aproximara a la materia visible.

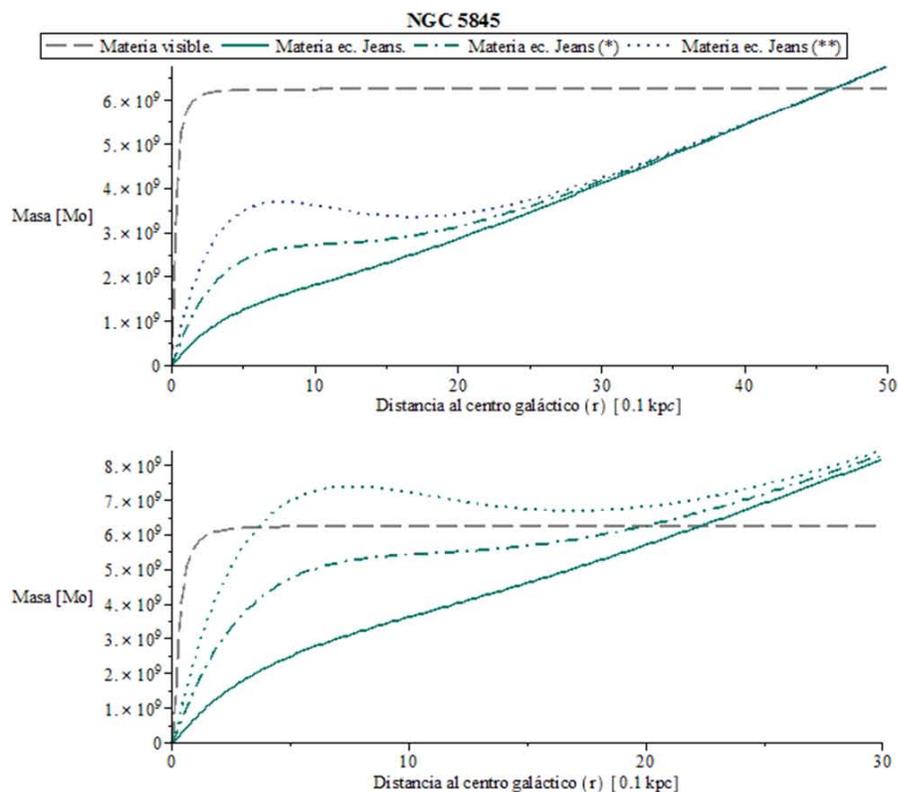


Figura 4.36: NGC 5845: Materia visible comparada con la materia de la ecuación de Jeans (ec. 3.93), calculada con la densidad de Plummer (ec. 4.22) y la dispersión de velocidades (ec. 4.1) multiplicada por 1 (línea sólida), 3 (línea-punto)(*) y 5 (línea punteada)(**). Arriba: solamente se hizo el cambio en la ecuación de dispersión de velocidades. Abajo: se multiplicó por 2 a la ecuación de Jeans para hacer una corrección de escala aproximada.

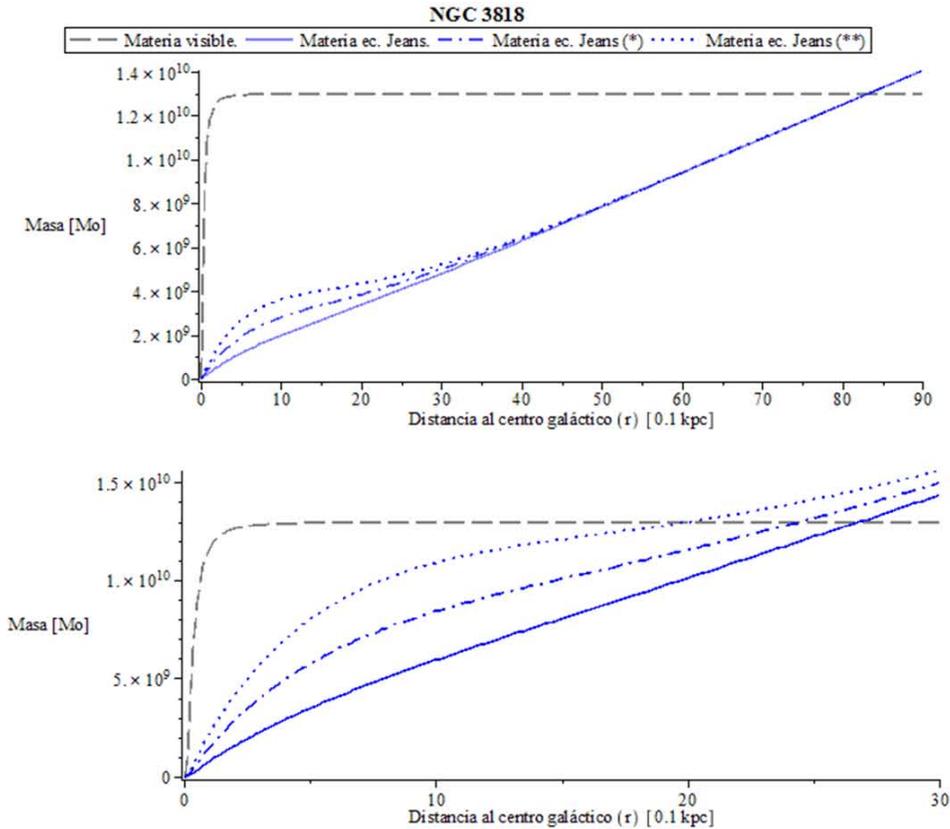


Figura 4.37: NGC 3818: Materia visible comparada con la materia de la ecuación de Jeans (ec. 3.93), calculada con la densidad de Plummer (ec. 4.23) y la dispersión de velocidades (ec. 4.2) multiplicada por 1 (línea sólida), 3 (línea-punto)(*) y 5 (línea punteada)(**). Arriba: solamente se hizo el cambio en la ecuación de dispersión de velocidades. Abajo: se multiplicó por 3 a la ecuación de Jeans para hacer una corrección de escala aproximada.

De las gráficas en las figuras 4.36 y 4.37, se puede notar que la dispersión de velocidades es el parámetro que influye más que la densidad sobre el comportamiento dinámico cerca del centro galáctico. Se puede observar que al aumentar su valor tres o cinco veces, es mayor el parecido a la materia luminosa. No obstante, es imprescindible recordar que estas gráficas se construyeron únicamente para distinguir la dependencia de la ecuación de Jeans con la dispersión de velocidades de la densidad de probabilidad, así como que no es certero el valor que se le ha dado al error de factor de escala, que ya se ha visto que existe.

Las gráficas de las figuras 4.33 hasta 4.37, han servido para comprobar la existencia de un error de escala, que se supone se debe al método de cálculo de la densidad de probabilidad, que es uno de los parámetros necesarios para determinar la materia dinámica deducida de la ecuación de Jeans (ec. 3.93). En estas gráficas se ha probado que el aumento en la dispersión de velocidades genera un comportamiento similar de la materia dinámica con la luminosa, pero se sabe de las observaciones que los máximos de la dispersión de velocidades se encuentran en promedio aproximadamente en 280 km s⁻¹ y que es un buen ajuste el de las ecuaciones (4.1) a (4.4). Por lo tanto, sería contradictorio con las observaciones indicar que la materia dinámica de NGC 5845 y NGC 3818 se comporta como en las gráficas de las figuras 4.36 y 4.37, hasta no obtener observaciones más actuales y comprobarlo con otras galaxias.

Claramente, todas las gráficas que comparan a la materia dinámica con la visible, han mostrado

que la primera es creciente más allá del radio de la galaxia. Las gráficas superiores de las figuras 4.36 y 4.37 demuestran que la dispersión de velocidades no va a influir en este comportamiento. Será el factor de escala el que rijan la distancia a la cual inicia el halo de materia oscura según las gráficas de las figuras 4.17, 4.22, 4.27, 4.32, y 4.33 a 4.35.

Capítulo 5

Conclusiones.

En el capítulo dos se describió al modelo cosmológico de Friedmann y las observaciones que lo confirman: el diagrama de Hubble, la nucleosíntesis del Big Bang y la radiación cósmica de fondo. Enseguida se dio una reseña de las observaciones a partir de las cuales se deduce la existencia de materia oscura: lentes gravitacionales, curvas de rotación, formación de estructura, anisotropías en la radiación cósmica de fondo y la expansión acelerada del Universo. Finalizando el capítulo con la explicación del modelo Lambda Cold Dark Matter (Λ CDM), que consiste en un modelo de materia oscura fría y una constante cosmológica, con el cual es posible explicar el comportamiento de estas observaciones.

Con las curvas de rotación es posible comparar la materia dinámica de una galaxia espiral con la materia luminosa, y se ha observado que la cantidad de materia dinámica es mayor a la luminosa. En las galaxias elípticas el movimiento estelar es desorganizado, es decir, las órbitas alrededor del centro galáctico están orientadas en direcciones aleatorias.

Si se elige a la velocidad estelar alrededor del centro galáctico como una variable aleatoria, se vio, en el capítulo tres, que el parámetro que mide la amplitud con que se extienden los valores posibles de la variable alrededor de su valor medio, es la dispersión de velocidades, y que la dispersión solo puede anularse si todas las velocidades son iguales a la media y aumenta cuando las velocidades se encuentran lejos de ésta. Es posible encontrar una ecuación de materia dinámica respecto al radio (Ec. 3.93), relacionada con la dispersión de velocidades como parámetro observable.

Dado que en galaxias elípticas la dispersión de velocidades es anisotrópica, en el capítulo cuatro se comparó el comportamiento de la materia dinámica con el de la materia luminosa que se encuentra dentro de un radio efectivo de cuatro galaxias: NGC 5845, NGC 3818, NGC 2778 y NGC 4742. Obteniendo como resultado que la materia luminosa es constante más allá del radio efectivo de la galaxia, mientras que la materia dinámica es creciente.

De esta forma, la dispersión de velocidades en galaxias elípticas, es una observación más, junto con las descritas en el capítulo dos, que da muestra de mayor cantidad de materia que la luminosa alrededor de las galaxias. Este comportamiento nos lleva a inferir, como en las observaciones anteriores, que alrededor de las galaxias elípticas existe un halo de materia oscura.

Bibliografía

- [Arthur, 2012a] Arthur, S. J. (2012a). Galaxias y cosmología. [urlhttp://www.crya.unam.mx/jane/ASTROFISICA/apuntes.html](http://www.crya.unam.mx/jane/ASTROFISICA/apuntes.html).
- [Arthur, 2012b] Arthur, S. J. (2012b). Parametros observables. [urlhttp://www.crya.unam.mx/jane/ASTROFISICA/apuntes.html](http://www.crya.unam.mx/jane/ASTROFISICA/apuntes.html).
- [Binney and Merrifield, 1998] Binney, J. and Merrifield, M. (1998). *Galactic Astronomy*. Princeton series in astrophysics. Princeton University Press, Princeton, New Jersey.
- [Binney and Tremaine, 2007] Binney, J. and Tremaine, S. (2007). *Galactic Dynamics*. Princeton series in astrophysics. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 2 edition.
- [Blundell and Blundell, 2006] Blundell, S. J. and Blundell, K. M. (2006). *Concepts in Thermal Physics*. Oxford University Press Inc., Nueva York, Estados Unidos.
- [Coles and Lucchin, 2002] Coles, P. and Lucchin, F. (2002). *Cosmology. The Origin and Evolution of Cosmic Structure*. John Wiley & Sons, Ltd, West Sussex PO19 1UD, England, 2 edition.
- [Combes et al., 2004] Combes, F., Boissé, P., Mazure, A., and Blanchard, A. (2004). *Galaxies and Cosmology*. Springer, Saladruk, Berlin, 2 edition.
- [Davies et al., 1983] Davies, R. L., Efstathiou, G., Fall, M., and Illingworth, G. (1983). The kinematic properties of faint elliptical galaxies. *The Astrophysical Journal*, (266):41.57.
- [Dodelson, 2003] Dodelson, S. (2003). *Modern Cosmology*. Academic Press, California, Estados Unidos.
- [European Space Agency, 2014] European Space Agency (2014). Science technology: Planck. <http://www.esa.int/>.
- [Gómez Navarro, 2014a] Gómez Navarro, J. J. (2014a). Introducción a la Energía Atómica. [urlhttp://www.climate.unibe.ch/gomez/docs/Lesson1-EA.pdf](http://www.climate.unibe.ch/gomez/docs/Lesson1-EA.pdf).
- [Gómez Navarro, 2014b] Gómez Navarro, J. J. (2014b). Tests of Big Bang: Expansion. [urlhttp://map.gsfc.nasa.gov/universe/bb_tests_exp.html](http://map.gsfc.nasa.gov/universe/bb_tests_exp.html).
- [Griffiths, 2013] Griffiths, D. (2013). *Introduction to Electrodynamics*. Pearson, Boton, Estados Unidos, 4 edition.
- [Islam, 2002] Islam, J. N. (2002). *An Introduction to Mathematical Cosmology*. Cambridge University Press, Cambridge, Reino Unido, 2 edition.

- [Karttunen et al., 2007] Karttunen, H., Kroger, P., Oja, H., Poutanen, M., and Donner, K. (2007). *Fundamental Astronomy*. Springer, Nueva York, Estados Unidos, 5 edition.
- [Matos, 2004] Matos, T. (2004). *De qué está hecho el Universo?. Materia oscura y energía oscura*. Number 204 in La Ciencia para Todos. Fondo de Cultura Económica, México, DF.
- [Mendenhall et al., 1989] Mendenhall, W., Scheaffer, R., and Wackerly, D. (1989). *Estadística Matemática con Aplicaciones*. Grupo Editorial Iberoamericana, México, DF, 3 edition. (Dirk Valckx, Arturo de la Fuente, trads.).
- [Mollerach and Roulet, 2002] Mollerach, S. and Roulet, E. (2002). *Gravitational Lensing and Microlensing*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapur.
- [NASA and SLACS Team, 2014] NASA and SLACS Team (2014). NASA, ESA, A.B.H.-S.C. and SLACS Team. <http://hubblesite.org/gallery/>.
- [NASA/IPAC, 2014] NASA/IPAC (2014). NASA/IPAC Extragalactic Database (NED). <https://ned.ipac.caltech.edu/>.
- [Nuñez and Degollado, 1993] Nuñez, D. and Degollado, J. C. (1993). Relatividad general. [urlhttp://www.nucleares.unam.mx/icn2/](http://www.nucleares.unam.mx/icn2/).
- [Patrick and Uzan, 2009] Patrick, P. and Uzan, J.-P. (2009). *Primordial Cosmology*. Oxford University Press Inc., Nueva York, Estados Unidos.
- [Perlmutter et al., 1999] Perlmutter, S., Aldering, G., Goldhaber, G., Knop, R. A., and Nugent, P.; Castro, P. G. (1999). Measurements of Omega and Lambda from 42 High-Redshift Supernovae. *The Astrophysical Journal*, (517):565.586.
- [Poveda et al., 1960] Poveda, A., R., I., and Orozco, I. (1960). Densidades, potenciales y funciones asociadas en una galaxia esférica reducida. *Boletín de los Observatorios de Tonanzintla y Tacubaya*, (20):3.18.
- [Prialnik, 2010] Prialnik, D. (2010). *An introduction to the theory of stellar structure and evolution*. Cambridge University Press, Nueva York, Estados Unidos, 2 edition.
- [Reif, 1993] Reif, F. (1993). *Física Estadística*, volume 5 of *Berkeley Physics Course*. Editorial Reverté, S.A., Barcelona, España. (J. Aguilar, Juan de la Rubia, trads.).
- [Ries and Filippenko, 1998] Ries, A. G. and Filippenko, A. V. (1998). Results from the high supernova search team. *Elsiever Science B. V.*, (307):31.44.
- [Schutz, 2009] Schutz, B. F. (2009). *A First Course in General Relativity*. Cambridge University Press, Nueva York, Estados Unidos, 2 edition.
- [Symon, 1971] Symon, K. R. (1971). *Mechanics*. Addison-Weiley series in physics. Addison-Weisley Publishing Company Inc., Massachusetts, Estados Unidos, 3 edition.
- [Weinberg, 1972] Weinberg, S. (1972). *Gravitation and Cosmology: Principles and Aplications of the General Theory of Relativity*. John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, Estados Unidos.
- [Zavala Franco, 2007] Zavala Franco, J. (2007). *Sobre la naturaleza de la materia oscura y la formacion de galaxias*. PhD thesis, Universidad Nacional Autónoma de México.