



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

DOMINACIÓN EN DIGRÁFICAS: CONJUNTOS  
FUERTES Y CONJUNTOS SEMICOMPLETOS.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:  
MATEMÁTICO

PRESENTA:  
GERARDO MIGUEL TECPA GALVÁN.

DIRECTOR DE TESIS:  
MAT. LAURA PASTRANA RAMÍREZ.  
COTUTORA:  
DRA. MARÍA DEL ROCÍO SÁNCHEZ LÓPEZ.



CIUDAD DE MÉXICO

AGOSTO, 2015.



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**Dominación en Digráficas: Conjuntos Fuertes y  
Conjuntos Semicompletos.**

por

Gerardo Miguel Tecpa Galván.

Tesis presentada para obtener el grado de

Matemático

en el

FACULTAD DE CIENCIAS

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Ciudad de México. Agosto, 2015.

## Hoja de datos del Jurado.

1. Datos del alumno.

Tecpa

Galván

Gerardo Miguel

57 93 06 05

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Matemáticas

104000988

2. Datos del tutor.

Mat.

Laura

Pastrana

Ramírez

3. Datos del sinodal 1.

Dra.

Galeana

Sánchez

Hortensia.

4. Datos del sinodal 2.

Dra.

Guevara

Aguirre

Mucuy-Kak del Carmen.

5. Datos del sinodal 3.

Dra.

Sánchez

López

María del Rocío.

6. Datos del sinodal 4.

Mat.

Hunedy

López

Gasde Augusto.

7. Datos del trabajo escrito.

Dominación en Digraáficas: Conjuntos Fuertes y Conjuntos Semicompletos.

149 p.

2015.

A todos aquellos que me hicieron dudar  
de mis propios axiomas.

# Índice

|   |            |
|---|------------|
| <b>Introducción.</b>  | <b>2</b>   |
| <b>Definiciones y Resultados Básicos.</b>   | <b>6</b>   |
| 1.1. Definiciones y Resultados en Gráficas. . . . .   | 6          |
| 1.2. Definiciones y Resultados en Digráficas. . . . .   | 18         |
| <b>Introducción a los Conjuntos Absorbentes.</b>  | <b>36</b>  |
| 2.1. Conjuntos Absorbentes en Gráficas. . . . .   | 36         |
| 2.2. Conjuntos Absorbentes en Digráficas. . . . .   | 40         |
| <b>Conjuntos Absorbentes Semicompletos.</b>   | <b>44</b>  |
| 3.1. Definiciones y Resultados Básicos en los Conjuntos Absorbentes Semicompletos. . . . .  | 44         |
| 3.2. Números de Absorbencia por Conjuntos Semicompletos. . . . .  | 50         |
| <b>Número Semidomático Interior Fuerte.</b>   | <b>62</b>  |
| 4.1. Definiciones y Resultados Básicos en Particiones Semidominantes Interiores Fuertes y el Número Semidomático Interior Fuerte. . . . . | 62         |
| 4.2. Digráficas Semidomáticas Interiores Fuertes Críticas. . . . .  | 75         |
| 4.3. Número Semidomático Interior Fuerte en Digráficas Planas. . . . .  | 83         |
| 4.4. Número Semidomático Interior Fuerte y Números de Absorbencia por Conjuntos Semicompletos. . . . .                                    | 88         |
| <b>Operaciones de Digráficas: Producto y Composición.</b>   | <b>91</b>  |
| 5.1. Producto de Digráficas . . . . .   | 91         |
| 5.2. Composición de Digráficas . . . . .  | 101        |
| <b>Digráficas Asociadas.</b>  | <b>115</b> |
| 6.1. Orientaciones de la Gráfica de Líneas. . . . .   | 115        |
| 6.2. Digráfica de Líneas. . . . .   | 118        |
| 6.3. Número Semidomático Interior Fuerte en las Digráficas Subdivisión, $R(D)$ , Media y Total. . . . .                                   | 132        |
| <b>Conclusiones.</b>  | <b>142</b> |

## Introducción.

El río Pregel atraviesa la actual ciudad de Kaliningrado, Rusia, formando en su afluente dos islas, durante el siglo XVIII esta misma ciudad llevaba el nombre de Königsberg y formaba parte de Prusia Oriental. En aquel siglo las islas estaban comunicadas entre si y las orillas del río mediante siete puentes. Los habitantes de la ciudad formularon un reto que ganó popularidad entre su gente: atravesar todos los puentes de tal manera que no se recorriera un mismo puente dos veces y regresar al lugar de inicio del recorrido.

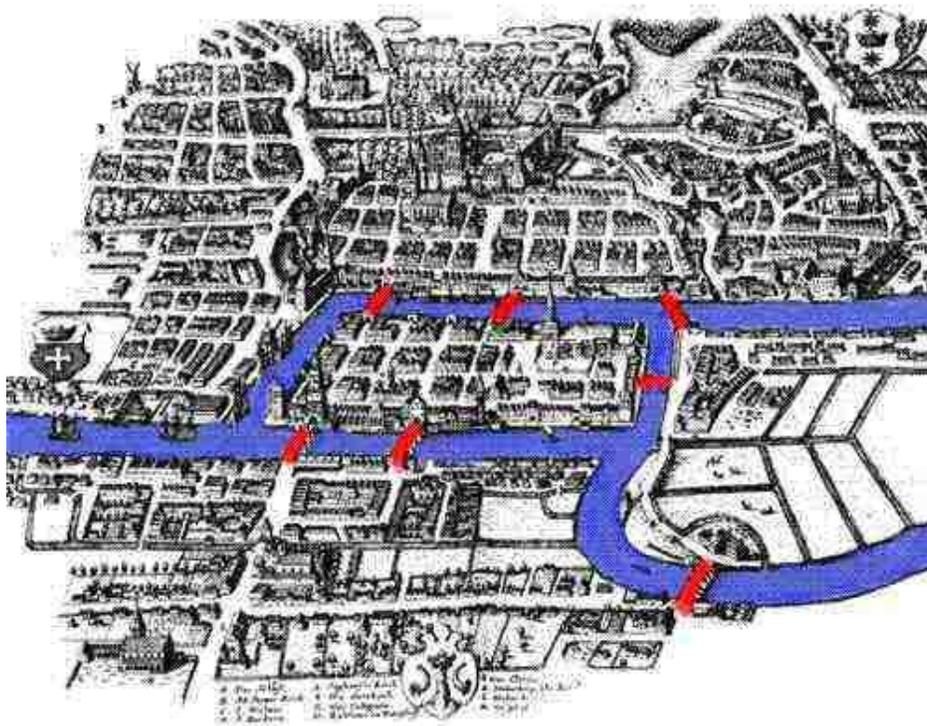


Fig. 0.0.1: El río Pregel durante el siglo XVIII y los siete puentes de Königsberg.

Muchos de los habitantes fueron incapaces de determinar si cumplir con el reto era factible o no, fue Leonhard Euler quien mostró que no era posible tener éxito en el

desafío: en un plano colocó cuatro nodos, dos para las islas del río Pregel y otros dos para las porciones de tierra correspondientes al resto de la ciudad de Königsberg, y trazó entre dos puntos un segmento continuo si existía un puente entre las porciones de tierra que representan.

Si lo que se requiere es un camino que pase por todos los puentes sin repetir ninguno y regresar al lugar en donde se comenzó, en el modelo del problema los nodos deben de tener siempre un segmento por el cual entrar y un segmento distinto por el cual salir y con ello, cada punto debe tener un número par de segmentos incidiendo en él. En tal caso, los nodos en el modelado del problema no satisfacen esa condición, por lo que es imposible cumplir el reto de los puentes.

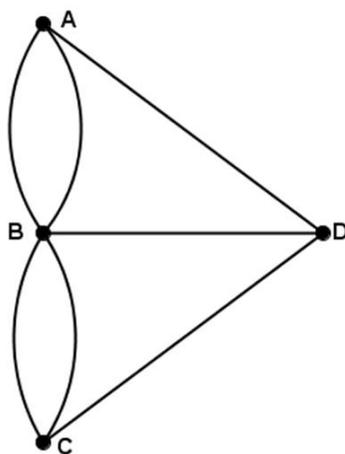


Fig. 0.0.2: Problema de los puentes de Königsberg modelado por Euler.

A partir de este problema nació la teoría de gráficas; Euler propuso dos conjuntos en el modelado del problema: un conjunto de nodos que representan a las porciones de tierra y una relación inducida por los puentes entre elementos del primer conjunto. En general, una **gráfica** es una pareja ordenada  $G = (V(G), A(G))$  donde  $V(G)$  es un conjunto finito y no vacío y  $A(G)$  es un conjunto de parejas no ordenadas de distintos elementos de  $V(G)$ . A los elementos en  $V(G)$  se le llaman **vértices** y a los elementos de  $A(G)$ , **aristas**.

Los resultados obtenidos en la teoría de gráficas han servido de auxilio tanto en problemas cotidianos y científicos. Por ejemplo, supongamos que se tiene una red informática que consta de varias computadoras, algunas de ellas comunicadas entre sí de manera directa gracias a conexiones físicas. Una misma computadora puede tener acceso a los archivos de otra si están enlazadas por una de estas conexiones ¿Será posible encontrar un conjunto de computadoras de tal manera que se tenga acceso a todos los archivos guardados en dicha red? Podemos dar una solución al problema anterior

mediante una gráfica: el conjunto de vértices serían las computadoras y trazamos una arista entre dos vértices si sus computadoras asociadas se encuentran comunicadas. Con esta construcción la solución se reduciría a encontrar un grupo de vértices de tal manera que para cualquier vértice fuera del grupo exista un elemento dentro y ambos estén unidos por una arista. Este tipo de conjuntos son ampliamente estudiado en la teoría de gráficas y son llamados **conjuntos dominantes**.

Con el avance de la teoría se presentaron problemas que exigían nuevas clases de conjuntos dominantes, si consideramos nuevamente el ejemplo anterior, además de encontrar un conjunto de computadoras desde las cuales se pueda tener acceso a todos los archivos de la red, ¿será posible que cualquier computadora en dicho grupo tenga acceso a los archivos de los otros miembros del grupo? Para esta pregunta no sólo requerimos que un conjunto sea dominante, sino que todos los elementos en él tengan una arista en común. A éstos se le llamó **clanes dominantes** y han sido estudiados por Cozzens y Kelleher en [12], a la menor cantidad posible de vértices en un clan dominante se le llamó el **número de dominación por clanes** de la gráfica.

Por otro lado, se definió una  **$m$ -coloración de los vértices** de una gráfica como una partición de sus vértices en  $m$  conjuntos y a los elementos de dicha partición se les llamó **clase cromática**. E. J. Cockayne y S. T. Hedetniemi [9][11] relacionan los conceptos de coloración y dominación: ellos comienzan el estudio de coloraciones en una gráfica cuyas clases cromáticas sean conjuntos dominantes. A la mayor cantidad posible de elementos en una partición de esta naturaleza le llamaron **número domático de la gráfica**. Posteriormente, Laskar y Hedetniemi [20] definen el concepto de **número domático conexo de una gráfica** como la mayor cantidad posible de elementos en una coloración de los vértices en conjuntos dominantes que cumpla que entre cada par de vértices de una misma clase cromática exista un camino a través de los elementos de la misma clase.

Conforme los problemas ganaban complejidad se evidenció que las gráficas no serían suficientes para dar solución a todos los problemas, por lo que la teoría comenzó a extender sus conceptos y resultados. A partir de la noción de gráfica podemos definir lo que es una gráfica orientada o digráfica. Una **digráfica** es una pareja ordenada  $D = (V(D), F(D))$  donde  $V(D)$  es un conjunto finito y no vacío de elementos llamados vértices y  $F(D)$  es un conjunto de parejas ordenadas de distintos elementos de  $V(D)$ , llamadas flechas. La teoría de dominación también se amplió a digráficas: un conjunto de vértices de una digráfica es **semidominante interior** si para cualquier elemento  $x$  fuera del conjunto existe un elemento  $z$  en el conjunto tal que la pareja ordenada  $(x, z)$  es una flecha de la digráfica. B. Zelinka [28] comenzó el desarrollo del concepto de número domático en digráficas: el **número semidomático interior** de una digráfica es la mayor cantidad posible de elementos en una coloración de los vértices de la digráfica cuyas clases cromáticas son conjuntos semidominantes interiores.

El objetivo de esta tesis es trabajar los conceptos de clan dominante y número domático conexo en digráficas, comenzando a desarrollar la teoría suficiente para poder acotar el número de dominación por clanes y el número domático conexo en gráficas dirigidas. Cabe señalar que los resultados aquí propuestos surgieron como una extensión en digráficas de los conceptos ya existentes en gráficas sin que algún problema en concreto los motivase.

Debido a que este trabajo de tesis es autocontenido, en el primer capítulo se abordarán formalmente las definiciones básicas de la teoría de gráficas y digráficas que utilizaremos a lo largo de esta tesis, así como resultados que auxiliarán en las demostraciones de los capítulos posteriores.

En el segundo capítulo daremos una introducción a los conceptos previos de dominación y que incentivaron el desarrollo de este trabajo, así como un marco histórico y los resultados trabajados por algunos autores, mostrando las diversas formas con las que se han abordado el número de dominación por clanes y el número domático conexo en la literatura.

En el tercer capítulo introduciremos el concepto de conjunto absorbente semicompleto, mismo que es una extensión del concepto de clan dominante en digráficas. Mostraremos diversos resultados de esta clase de conjuntos y definiremos el número superior e inferior de absorbencia por conjuntos semicompletos como el máximo y mínimo número de vértices posible en un conjunto absorbente semicompleto, respectivamente. En este mismo capítulo, ofreceremos diversos resultados respecto a los conjuntos absorbentes semicompletos y a partir de ellos exhibiremos cotas para los números inferior y superior de absorbencia por conjuntos semicompletos.

En el cuarto capítulo definiremos el número semidomático interior fuerte de una digráfica, el cual es una extensión del concepto en gráficas de número domático conexo. Mostraremos diversas cotas y resultados básicos para digráficas en general. También relacionaremos al número semidomático interior fuerte y los números de absorbencia por conjuntos semicompletos de cierta clase de digráficas.

En el quinto capítulo abordaremos resultados básicos para el producto y composición de digráficas arbitrarias, gracias a ellos podremos continuar con el desarrollo de la teoría de los números de absorbencia por conjuntos semicompletos y el número semidomático interior fuerte en dichas operaciones, se construirán algunas familias de digráficas para las que dichos números estén dados.

Por último, en el sexto capítulo se trabajarán orientaciones de la gráfica de líneas y algunas digráficas asociadas, como la digráfica de líneas. En esta última se mostrará que el número superior de absorbencia por conjuntos semicompletos es a lo más tres y también se calculará el número semidomático interior fuerte, dando pie al estudio de dicho número en otras digráficas asociadas, como lo son la digráfica subdivisión y la digráfica total.

# Capítulo 1.

## Definiciones y Resultados Básicos.

En este capítulo se establecen las definiciones básicas de la teoría de gráficas y digráficas que se utilizarán a lo largo del trabajo, también se muestran varios ejemplos de las definiciones con la intención de facilitar su uso al lector. Asimismo, como este trabajo es autocontenido, se enuncian y demuestran algunos resultados básicos que auxiliarán en las pruebas de las proposiciones mencionadas en los capítulos posteriores.

### 1.1. Definiciones y Resultados en Gráficas.

Una **gráfica**  $G$  es una pareja ordenada  $(V(G), A(G))$  donde  $V(G)$  es un conjunto finito y no vacío de elementos llamados vértices y  $A(G)$  es un conjunto de parejas no ordenadas de distintos elementos de  $V(G)$  llamadas aristas. Así, el conjunto  $V(H) = \{v_1, v_2\}$  indica que los vértices de la gráfica  $H$  son  $v_1$  y  $v_2$ , análogamente,  $A(K) = \{(x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_2, x_5)\}$  indica que  $(x_1, x_2)$ ,  $(x_2, x_3)$  y  $(x_2, x_5)$  son las aristas de la gráfica  $K$ . Podemos representar a  $G$  simplemente como  $G = (V, A)$ .

Una gráfica es dibujada en el plano mediante nodos que representan a los vértices de la gráfica y una línea continua entre dos nodos equivale a la arista que contiene a dichos vértices, así, la gráfica de la *figura 1.1.1* representa a la gráfica  $G$  cuyo conjunto de vértices es  $\{u, v, w, x, y, z\}$  y su conjunto de aristas es

$$\{(x, y), (x, u), (y, v), (y, z), (z, w), (w, v), (w, u), (u, v)\}.$$

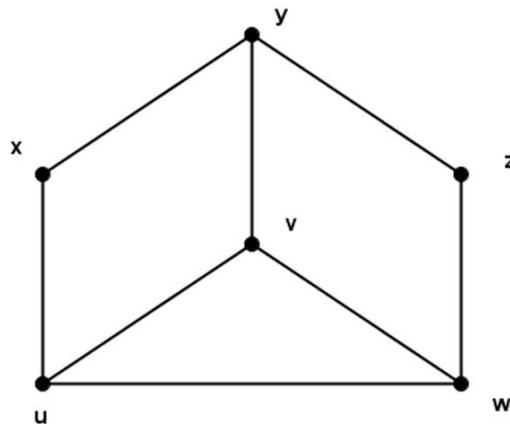


Fig. 1.1.1: Representación de una gráfica en el plano.

Decimos que dos gráficas  **$H$**  y  **$G$**  son **iguales**, denotado por  $G = H$ , si  $V(H) = V(G)$  y  $A(H) = A(G)$ . Existen gráficas que no son iguales entre sí, pero son esencialmente las mismas, por ejemplo  $H_0 = (\{1, 2, 3, 4\}, \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\})$  y  $G_0 = (\{a, b, c, d\}, \{(b, c), (c, a), (a, d)\})$  ilustradas en la *figura 1.2.2*, no son iguales pues  $V(G) \neq V(H)$ , sin embargo, ambas representan la misma gráfica, pero con un etiquetado distinto en los vértices, ésta es una noción importante: decimos que dos gráficas  $H$  y  $G$  son **isomorfas** si existe una función  $f : V(G) \rightarrow V(H)$  biyectiva tal que  $(x, y) \in A(G)$  si y sólo si  $(f(x), f(y)) \in A(H)$ , la relación de isomorfismo entre dos gráficas  $G$  y  $H$  se denota por  $G \cong H$ .

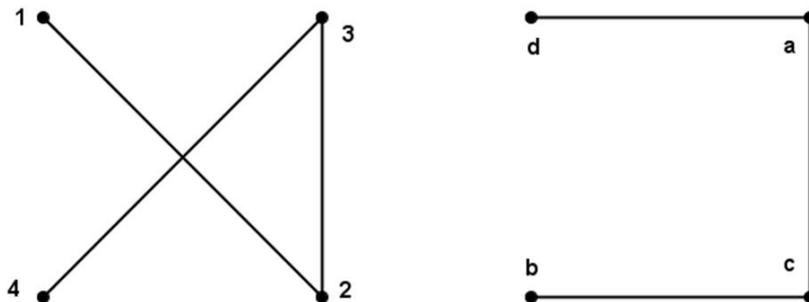


Fig. 1.1.2: Gráficas  $H_0$  y  $G_0$ , respectivamente, donde  $H_0 \cong G_0$ .

Aunque existen muchos conceptos derivados de una gráfica, aquí nos limitaremos a aquellos que son básicos para este trabajo. A las entradas de una arista  $(x, y)$  se les llama **extremos de la arista**, por ejemplo, en la *figura 1.1.1*,  $u$  es un extremo de la arista  $(u, w)$ . Si  $G$  es una gráfica, el **orden de  $G$**  es el número de vértices en  $G$ , es decir,  $|V(G)|$ . Asimismo, se define el **tamaño de  $G$**  como el número de aristas que hay en  $G$ ,  $|A(G)|$ . El orden de  $G$  se suele representar como  $p$ , mientras que el tamaño de  $G$  por  $q$ , aunque no es difícil encontrar en algunos libros y artículos la notación de  $n$  y  $m$  para el orden y el tamaño de una gráfica, respectivamente, sin embargo, en lo que resta de la teoría, usaremos exclusivamente la primera notación.

Otra definición que es importante en una gráfica es la noción de **adyacencia**. Dados dos vértices  $v$  y  $w$ , decimos que  **$v$  es adyacente a  $w$**  si  $(v, w) \in A(G)$ . Notemos que por ser  $A(G)$  un conjunto de parejas no ordenadas, es lo mismo  $(v, w) \in A(G)$  que  $(w, v) \in A(G)$ , por lo que  $v$  es adyacente a  $w$  y  $w$  es adyacente a  $v$  son la misma afirmación, o simplemente podemos decir que  $v$  y  $w$  son adyacentes. También podemos hablar de adyacencia entre aristas. Dadas dos aristas de  $G$ ,  $a$  y  $b$ , decimos que  **$a$  y  $b$  son adyacentes** si comparten un extremo. Si  $U$  y  $V$  son subconjuntos no vacíos de  $V(G)$  y  $(u, v) \in A(G)$  es tal que  $u \in U$  y  $v \in V$ , diremos que  $(u, v)$  es una  $UV$ -arista.

Derivadas de la noción de adyacencia entre vértices, tenemos dos definiciones más;

una hace referencia al conjunto de vértices adyacentes a un vértice dado y la segunda a la cantidad de vértices que le son adyacentes. En primer lugar, si  $v \in V(G)$ , definimos la **vecindad de  $v$**  como el conjunto de vértices que son adyacentes a  $v$ , éste se denota por  $N(v)$ , asimismo, decimos que  $w \in V(G)$  es **vecino de  $v$**  si  $w \in N(v)$ . Cabe señalar que por definición de  $A(G)$ , un vértice no está contenido dentro de su propia vecindad; en algunos casos es importante considerar a un vértice y a su vecindad dentro de un mismo conjunto, por lo que definimos la **vecindad cerrada de  $v$**  como  $N(v) \cup \{v\}$ . denotada por  $N[v]$ .

Se puede generalizar el concepto de vecindad usando subconjuntos de  $V(G)$ : dado  $W \subseteq V(G)$  no vacío, definimos la **vecindad de  $W$**  como

$$N(W) = \{x \in V(G) \mid (x, y) \in A(G) \text{ para algún } y \in W\}.$$

Notemos que en el caso particular en que  $W = \{v\}$ , tenemos la definición de vecindad de  $v$ .

Por otro lado, definimos el **grado de  $v$**  como el número de vértices adyacentes a  $v$ , denotado por  $\delta(v)$ . A un vértice de grado  $p - 1$  le llamaremos **vértice absorbente**. Así, en la *Figura 1.1.1* tenemos que  $N(w) = \{u, v, z\}$  y  $\delta(z) = 2$ . Además, definiremos el **grado máximo de una gráfica** como el máximo de los grados de los vértices de la gráfica:

$$\Delta(G) = \text{máx}\{\delta(v) \mid v \in V(G)\}.$$

Y análogamente definimos el **grado mínimo de una gráfica** como el mínimo de los grados de los vértices de la gráfica:

$$\delta(G) = \text{mín}\{\delta(v) \mid v \in V(G)\}.$$

Existe una forma de relacionar a los grados de una gráfica con el número de aristas en la gráfica, mostrado a continuación.

**Teorema 1.1.1 (Primer Teorema de Teoría de Gráficas)** *En toda gráfica, la suma de los grados de los vértices de la gráfica es igual al doble del tamaño de la gráfica.*

Demostración.

Sea  $G$  una gráfica, si consideramos  $\sum_{v \in V(D)} \delta(v)$ , cada arista de  $G$  es contada dos veces en la suma por los dos vértices distintos que la forman, por lo cual,

$$\sum_{v \in V(D)} \delta(v) = 2q.$$

□

Un **camino** en una gráfica es una sucesión de vértices de la forma  $(v_0, v_1, \dots, v_n)$  donde para todo  $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ ,  $(v_i, v_{i+1}) \in A(G)$ , es decir, todo vértice en la sucesión es adyacente al vértice consecuente, más aún, si  $C = (v_0, v_1, \dots, v_{n-1}, v_n)$ , diremos que  $C$  es un  $v_0v_n$ -camino y que  $v_0$  y  $v_n$  son, respectivamente, el vértice inicial y final de dicho camino. Por ejemplo, en la *figura 1.1.1*,  $C = (u, v, y, z)$  es un  $uz$ -camino. En lo consecuente, consideraremos que la sucesión  $(x)$  sí es un camino y será llamado *camino trivial*. Tenemos varias definiciones relacionadas con los caminos: notemos que en la *figura 1.1.1* el camino  $C = (u, v, w, u, x, y)$  es tal que existe un vértice que se repite en la sucesión, a saber, el vértice  $u$ , para excluir este tipo de situaciones, definimos lo que es una *trayectoria*.

Una **trayectoria** es un camino que no repite vértices, por ejemplo,  $T_1 = (u, x, y, v, w)$  es una trayectoria en la *figura 1.1.1*, al igual que en las nociones de caminos, se puede decir que  $T_1$  es una  $uw$ -trayectoria. Una gráfica con  $k$  vértices isomorfa a una trayectoria se le denotará por  $P_k$ .

Análogamente, un **paseo** es un camino que no repite aristas. Como ya se vio, no todo camino es una trayectoria, tampoco sucede que todo camino es un paseo, por ejemplo, el camino  $C = (u, w, v, w, z)$  en la *figura 1.1.1* repite la arista  $(v, w)$ , por lo que no es un paseo. Más aún, podemos notar que no todo paseo es una trayectoria, por ejemplo, en la gráfica ilustrada en la *figura 1.1.3*,  $Q = (n, s, t, k, s, m, n)$  no repite aristas, pero sí repite al menos un vértice, a saber, el vértice  $s$ . Sin embargo, sí se tiene que toda trayectoria es un paseo, pues al no repetir vértices, tampoco puede repetir aristas. Hay que mencionar que es importante conocer el número de vértices o aristas que se recorren en un camino, por lo que agregaremos una definición más: dado un camino  $C = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ , definimos la **longitud de  $C$**  como  $n$  y se denota por  $long(C)$ .

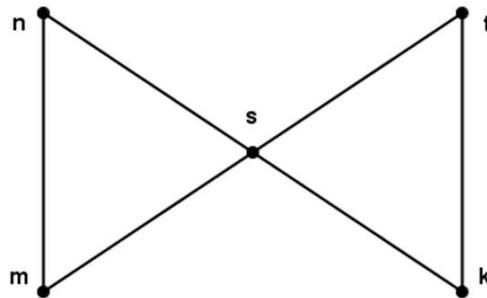


Fig. 1.1.3: Gráfica en la que se muestra que no todo paseo es trayectoria.

Existe una relación entre los caminos y las trayectorias, es sencillo ver que si existe una  $uv$ -trayectoria entre algún par de vértices, existe también un  $uv$ -camino, pues la misma trayectoria es un caso particular de camino, el recíproco de esta afirmación también es verdadero, para mostrarlo, se enuncia el siguiente teorema:

**Teorema 1.1.2** Sean  $G$  una gráfica y  $\{u, v\} \subseteq V(D)$  dos vértices distintos, si existe un  $uv$ -camino en  $G$ , entonces existe una  $uv$ -trayectoria en  $G$  contenida en dicho camino.

Demostración.

Sean  $G$  una gráfica y  $\{u, v\} \subseteq V(D)$  tales que existe un  $uv$ -camino, digamos  $C = (u = x_0, x_1, \dots, x_k = v)$ . Para demostrar la proposición utilizaremos inducción sobre la longitud de  $C$ ,  $long(C)$ .

Base Inductiva.

Si  $long(C) = 1$ ,  $C$  es la arista  $(u, v)$ , la cual es una  $uv$ -trayectoria contenida en  $C$ .

Hipótesis de Inducción.

Si la longitud de  $C$  es menor a  $n$ , entonces existe una  $uv$ -trayectoria contenida en  $C$ .

Paso Inductivo.

Supongamos que  $long(C) = n$  y consideremos dos posibles casos sobre  $C$ :

Caso 1. Si  $C$  no repite vértices.

En este caso,  $C$  es una  $uv$ -trayectoria y la prueba está hecha.

Caso 2. Si  $C$  repite al menos un vértice.

Supongamos que  $C$  repite un vértice  $x_i$  para algún  $i \in \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ , es decir,  $C$  es de la forma

$$C = (u = x_0, x_1, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_j = x_i, x_{j+1}, \dots, x_n = v).$$

Con esto, el camino  $C' = (u = x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, x_i = x_j, x_{j+1}, \dots, x_n = v)$  es un  $uv$ -camino contenido en  $C$  de longitud menor a  $C$ , aplicando la hipótesis de inducción sobre  $C'$  se deriva la existencia de una  $uv$ -trayectoria contenida en  $C'$  y por consiguiente, en  $C$ .

□

De este último teorema se sigue que la existencia de un  $uv$ -camino es condición necesaria y suficiente para la existencia de una  $uv$ -trayectoria, por lo que en algunas demostraciones consecuentes bastará exhibir la existencia de un camino para demostrar la existencia de una trayectoria y viceversa.

Una definición que está relacionada con los caminos es la de *conexidad*: decimos que una gráfica  $G$  es **conexa** si existe un camino entre todo par de vértices de  $G$ , en caso contrario, diremos que  $G$  es **inconexa**.

El siguiente teorema muestra la relación entre el número de aristas y el número de vértices de cualquier gráfica conexa.

**Teorema 1.1.3 ([8])** Si  $G$  es una gráfica conexa, entonces  $q \geq p - 1$ .

Por otro lado, observemos que  $C'' = (x, y, z, y, v, u, x)$  es un camino en la *figura 1.1.1* que repite también el vértice  $x$  y es simultáneamente el vértice inicial y final de  $C''$ , éste es un tipo especial de camino al que llamaremos **camino cerrado**, es decir, aquel que repite el vértice inicial y el vértice final. Si un camino cerrado no repite ningún vértice salvo el inicial y el final y la longitud de dicho camino es al menos tres, diremos que es un **ciclo**. Una gráfica con  $p$  vértices que es isomorfa a un ciclo se le representa por  $C_p$ . El camino  $C''$  claramente no es un ciclo, pues además de repetir a  $x$ , también repite el vértice  $y$ . Análogamente, si en un paseo el vértice inicial y final son iguales, decimos que es un **paseo cerrado**.

Notemos que si existe un  $xz$ -camino en una gráfica, éste no necesariamente es único, pero al ser la gráfica finita, sí se tiene una cantidad finita de  $xz$ -caminos, de todos ellos, nos interesa tomar el de longitud más corta para poder establecer una *distancia* en los vértices de la gráfica. Con dicha idea, definimos la **distancia entre dos vértices  $x$  y  $z$**  como:

$$d(x, z) = \text{mín}\{\text{long}(C) \mid C \text{ es un } xz\text{-camino}\}.$$

En caso de que no existan caminos entre  $x$  y  $z$ , decimos que la distancia es infinita:  $d(x, z) = \infty$ . Aunque aquí no se hará la prueba, dicha función es efectivamente una métrica en  $G$ , es decir,  $d$  satisface:

- 1.-  $d(x, z) \geq 0$  para todo  $\{x, z\} \subseteq V(G)$  y  $d(x, y) = 0$  si y sólo si  $x = y$ .
- 2.-  $d(x, z) = d(z, x)$  para todo  $\{x, z\} \subseteq V(G)$ .
- 3.-  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$  para todo  $\{x, y, z\} \subseteq V(G)$ .

Las definiciones consecuentes harán referencia a las subestructuras que podemos encontrar en gráficas, por ejemplo, los caminos. Notemos que si  $C$  es un camino en una gráfica  $G$ ,  $C = (V(C), A(C))$  es también una gráfica, pero con una propiedad relevante:  $V(C) \subseteq V(G)$  y  $A(C) \subseteq A(G)$ , así, podemos establecer una definición entre dos gráficas: dadas  $G$  y  $H$ , decimos que  **$H$  es una subgráfica de  $G$**  si  $V(H) \subseteq V(G)$  y  $A(H) \subseteq A(G)$ , esta propiedad se denota como  $H \leq G$ . Ya se vio que un camino en una gráfica es una subgráfica, también es fácil ver que una gráfica es subgráfica de sí misma, cuando una subgráfica no es igual a la gráfica original, decimos que  **$H$  es una subgráfica propia de  $G$** .

Si  $H$  es una subgráfica de  $G$  y además se cumple que  $V(H) = V(G)$ , decimos que  **$H$  es una subgráfica generadora de  $G$**  o un **factor de  $G$** . Sin embargo, ésto no implica que  $G$  y  $H$  sean la misma gráfica, pues puede ser que  $A(H) \subsetneq A(G)$ . Aunque las subgráficas generadoras suelen ser mencionadas frecuentemente en la teoría, en algunas ocasiones nos interesará únicamente la subgráfica inducida por un conjunto específico de vértices o de aristas; para ello, tenemos las siguientes definiciones.

Si  $G$  es una gráfica y  $M \subseteq V(G)$  es no vacío, definimos la **subgráfica inducida por  $M$** , denotada por  $G[M]$ , como la gráfica tal que  $V(G[M]) = M$  y para todo  $\{x, y\} \subseteq V(G[M])$ ,  $(x, y) \in A(G[M])$  si y sólo si  $(x, y) \in A(G)$ . Por ejemplo, si consideramos la gráfica de la *figura 1.1.1* y  $M = \{u, v, x, z\}$ , la gráfica inducida por  $M$  es la gráfica exhibida en la *figura 1.1.4*.

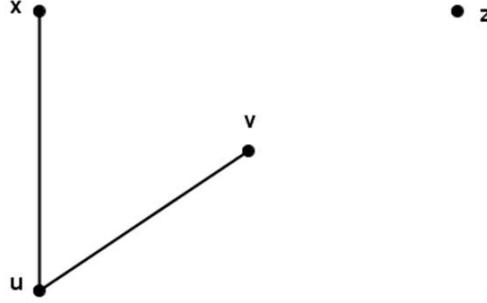


Fig. 1.1.4: Subgráfica de la gráfica mostrada en la *figura* 1.1.1, inducida por el conjunto  $M = \{u, v, x, z\}$ .

Análogamente, si  $G$  es una gráfica y  $N \subseteq A(G)$  definimos la **subgráfica inducida por el conjunto de aristas  $N$** , denotada por  $G[N]$ , como la gráfica tal que  $A(G[N]) = N$  y

$$V(G[N]) = \{x \in V(G) \mid x \text{ es extremo de algún } a \in N\}.$$

Gracias a las definiciones anteriores podemos simplificar la notación y la escritura de muchas demostraciones y enunciados posteriores, un primer acercamiento a esto lo tendremos en la siguiente definición: sean  $G$  una gráfica conexa y  $K \subseteq V(G)$ , decimos que  $K$  es un **conjunto de corte de  $G$**  si la gráfica  $G[V(G) \setminus K]$  no es conexa o es la gráfica trivial. Todas las gráficas conexas tienen un conjunto de corte: si  $v$  es un vértice arbitrario,  $N(v)$  es un conjunto de corte de la gráfica, deduciéndose además que  $G$  puede tener diversos conjuntos de esta naturaleza. A nosotros sólo nos interesarán aquellos que sean mínimos por cardinalidad y con éstos podemos definir el **número de conexidad por vértices** de la gráfica, denotado por  $\kappa(G)$ , como:

$$\kappa(G) = \text{mín}\{|K| \mid K \text{ es un conjunto de corte de } G\}.$$

Hasta ahora, las definiciones que se han dado son comunes a todas las gráficas: en toda gráfica se puede hablar de grado, caminos, vecinos, etcétera, es natural pensar que existen propiedades que tienen algunas gráficas y otras no, ésto nos permite clasificarlas. Hemos visto que no es necesario que entre todo par de vértices de una gráfica exista una arista, es decir, para todo  $\{x, y\} \subseteq V(G)$ ,  $(x, y) \in A(G)$ , a una gráfica que sí tiene esta propiedad se le llama **gráfica completa** y se denota por  $K_p$ , donde  $p$  representa el número de vértices de la gráfica. Así,  $K_1$  es la gráfica con un único vértice, llamada también *gráfica trivial* y  $K_4$  es la gráfica completa con cuatro vértices.

Notemos que en una gráfica completa todo vértice tiene grado  $p - 1$ , podemos encontrar una generalización de ésto en la definición de gráfica  $r$ -regular. Sea  $G$  gráfica y  $r \in \mathbb{N}$ , decimos que  $G$  es  **$r$ -regular** si  $\delta(x) = r$  para todo  $x \in V(G)$ . Toda gráfica completa con  $p$  vértices es  $(p - 1)$ -regular, pero no toda gráfica regular es completa, por ejemplo,  $C_p$  con  $p \geq 4$  es 2-regular y no es completa.

Por otro lado, definiremos lo que es una gráfica  $k$ -partita, aunque necesitamos una definición previa. Si  $G$  es una gráfica y  $J \subseteq V(G)$  es no vacío, decimos que  $J$  es

un **conjunto independiente** si para todo par de vértices  $x$  y  $z$  en  $J$ ,  $x$  y  $z$  no son adyacentes en  $G$ , es decir, no hay aristas entre elementos del conjunto. Análogamente, si  $L \subseteq A(G)$  es no vacío, decimos que  $L$  es *independiente por aristas* si para todo par de aristas  $a$  y  $b$  en  $L$ ,  $a$  no es adyacente a  $b$  en  $G$ , es decir, no tienen extremos comunes. Así, tenemos que si  $G$  es una gráfica y  $k \in \mathbb{N}$ , decimos que  $G$  es  **$k$ -partita** si existe una partición de  $V(G)$  en  $k$  conjuntos independientes, en particular, si  $k = 2$ , decimos que  $G$  es **bipartita**. Dentro de las gráficas bipartitas, haremos referencia a un tipo muy particular: las gráficas bipartitas completas.

Decimos que una gráfica  $G$  es **bipartita completa** si existe una partición de sus vértices en dos conjuntos independientes  $\{U_1, U_2\}$  y para todo vértice  $v \in U_1$  y todo vértice  $u \in U_2$  se satisface que  $(u, v) \in A(G)$ . Este tipo de gráficas se denota por  $K_{m,n}$  donde el número de elementos de  $U_1$  es  $m$  y el número de elementos en  $U_2$  es  $n$ .

Ya se había hablado anteriormente de ciclos en una gráfica y es natural pensar en gráficas que no tienen ciclos, a una gráfica sin ciclos se le llama **bosque** y en el caso de que sea conexa, se le llama **árbol**. Ejemplos de un bosque es la gráfica de la *figura 1.1.4* y ejemplos de árboles son las gráficas en la *figura 1.1.2*, mientras que la *figura 1.1.1* no es ni árbol ni bosque.

Una gráfica  $G$  es **transitiva** si para todo  $u, v, w$  vértices distintos de  $G$  tal que  $(u, v) \in A(G)$  y  $(v, w) \in A(G)$ , se cumple que  $(u, w) \in A(G)$ .

Otro concepto que se abordará será el de gráfica plana. Decimos que una gráfica  $G$  es **plana** si está dibujada en el plano de tal forma que cualquier par de aristas se intersectan a los más en sus extremos, por ejemplo, las gráficas mostradas en la *figura 1.1.5* son gráficas planas, mientras que la gráfica  $H_0$  de la *figura 1.1.2* no es plana, pues la arista  $(1, 2)$  intersecta a la arista  $(3, 4)$ . De este último ejemplo podemos derivar un concepto: aunque  $H_0$  no es una gráfica plana, sí es posible dibujarla de tal manera que sea una gráfica plana; por ejemplo, en la misma *figura 1.1.2* se muestra una gráfica  $G_0$  que sí es plana y además es isomorfa a  $H_0$ , éste es el concepto de gráfica aplanable: decimos que una gráfica  $G$  es **aplanable** si es isomorfa a una gráfica plana. Euler fue el primero en asociar la topología del plano con una gráfica, definió las **regiones** de una gráfica plana como las regiones conexas del plano determinadas por las aristas de la gráfica, incluida la región no acotada, llamada **región exterior**, y con esto mostró que siempre es posible establecer una relación entre el orden, el tamaño y el número de regiones de cualquier gráfica plana, dicha relación se conoce como la Igualdad de Euler y es un primer acercamiento a la teoría de planaridad:

**Teorema 1.1.4 (Igualdad de Euler[8])** *Si  $G$  es una gráfica conexa y plana con  $p$  vértices,  $q$  aristas y  $r$  regiones, entonces:*

$$p - q + r = 2.$$

A partir de esta relación se derivaron diversos resultados que facilitaron el determinar cuándo una gráfica es aplanable, aunque existen muchos resultados obtenidos a partir

de la Igualdad de Euler, sólo mencionaremos aquellos que serán útiles para el desarrollo de nuestra teoría:

**Corolario 1.1.1 ([8])** *Si  $G$  es una gráfica plana con  $p \geq 3$  vértices y  $q$  aristas, entonces*

$$q \leq 3p - 6.$$

**Corolario 1.1.2 ([8])**  *$K_5$  y  $K_{3,3}$  no son gráficas aplanables, más aún, si una gráfica  $G$  tiene como subgráfica a  $K_5$  o  $K_{3,3}$ , entonces  $G$  no es aplanable.*

Se encontraron condiciones necesarias y suficientes para determinar cuándo una gráfica es aplanable, algunas de ellas requieren definiciones que enunciaremos posteriormente, por lo que serán retomadas más adelante.

El siguiente tipo de gráficas que analizaremos son las gráficas hamiltonianas. Decimos que una gráfica es **hamiltoniana** si existe un ciclo en la gráfica que contiene a todos los vértices de la gráfica. Este tipo de gráficas es ampliamente estudiado y se tienen diversos resultados sobre gráficas hamiltonianas, sin embargo, en lo que respecta a nuestro trabajo sólo mencionaremos un resultado, pero para ello se requiere de dos nuevas definiciones.

Si  $G$  es una gráfica arbitraria, decimos que  $G$  es **factorizable** en los factores  $F_1, F_2, \dots, F_k$  si el conjunto  $\mathcal{A} = \{A(F_1), A(F_2), \dots, A(F_k)\}$  es una partición de  $A(G)$  y al conjunto  $\mathcal{F} = \{F_1, F_2, \dots, F_k\}$  se le llama una **factorización de  $G$** . Recordemos que un *factor de  $G$*  es una subgráfica generadora de  $G$ .

Existen diversos trabajos que buscan familias de gráficas factorizables en ciclos hamiltonianos, una de dichas familias son las gráficas completas con un número impar de vértices:

**Teorema 1.1.5 ([8])** *Si  $G$  es una gráfica completa con  $2k+1$  vértices y  $k \geq 1$ , entonces  $G$  se puede factorizar en  $k$  ciclos hamiltonianos.*

Dado que no toda gráfica cumple con algunas de las características antes mencionadas, como la conexidad y la regularidad, se suele trabajar con subestructuras que sí tengan las propiedades que deseamos, ejemplo de ello son las *componentes conexas* de una gráfica y los *clanes*. Una **componente conexa  $H$**  de una gráfica  $G$  es una subgráfica inducida de  $G$  que cumple con ser conexa y es máxima por contención por vértices con dicha propiedad, es decir, para todo  $x \in V(G) \setminus V(H)$ ,  $G[V(H) \cup \{x\}]$  no es conexa. Análogamente, definimos un **clan  $K$**  de una gráfica  $G$  como una subgráfica inducida de  $G$  tal que  $K$  es una gráfica completa y es máxima por contención con dicha propiedad, es decir, para todo  $x \in V(G) \setminus V(K)$ ,  $G[V(K) \cup \{x\}]$  no es completa.

Podemos definir también algunas operaciones entre gráficas para generar nuevas familias de gráficas. Aquí sólo mencionaremos algunas operaciones elementales. Sean

$G$  y  $H$  dos gráficas ajenas en vértices. Definimos la **unión de  $G$  y  $H$** , denotada por  $G \cup H$ , como la gráfica tal que  $V(G \cup H) = V(G) \cup V(H)$  y  $A(G \cup H) = A(G) \cup A(H)$ .

También tenemos la **suma de  $G$  y  $H$** , denotada por  $G + H$  como la gráfica tal que  $V(G + H) = V(G) \cup V(H)$  y  $A(G + H) = A(G) \cup A(H) \cup \{(x, y) \mid x \in V(G), y \in V(H)\}$ .

Definimos el **producto cruz de  $G$  y  $H$**  como la gráfica  $G \times H$  donde  $V(G \times H) = V(G) \times V(H)$  y  $((x, y), (z, w)) \in A(G \times H)$  si y sólo si se cumple alguna de las siguientes:

- 1.-  $(x, z) \in A(G)$  y  $y = w$ .
- 2.-  $(y, w) \in A(H)$  y  $x = z$ .

Existen también gráficas construidas a partir de alguna gráfica dada, a este tipo de gráficas se les llaman **gráficas asociadas** y aunque existen una gran cantidad de gráficas asociadas, aquí mencionaremos únicamente algunas de ellas. Dada una gráfica  $G = (V(G), A(G))$ , definimos el **complemento de  $G$**  como la gráfica  $\overline{G}$  donde  $V(\overline{G}) = V(G)$  y  $(x, y) \in A(\overline{G})$  si y sólo si  $(x, y) \notin A(G)$ . Definimos la **gráfica de líneas de  $G$**  como  $L(G)$  donde  $V(L(G)) = A(G)$  y  $(a, b) \in A(L(G))$  si y sólo si  $a$  y  $b$  son adyacentes en  $G$ , es decir,  $a$  y  $b$  tienen un extremo común.

Existe una relación entre la gráfica de líneas de algunas gráficas bipartitas y las gráficas completas, a saber, si  $G$  es una gráfica bipartita  $K_{1,m}$ , entonces su gráfica de líneas es una gráfica completa con  $m$  vértices, la demostración es bastante sencilla, como se aprecia en el siguiente lema:

**Lema 1.1.1** *Sea  $G$  una gráfica y  $m > 3$  natural.  $G$  es isomorfa a  $K_{1,m}$  si y sólo si  $L(G)$  es isomorfa a  $K_m$ .*

*Demostración.*

Sea  $G$  una gráfica bipartita y  $m > 3$ . Mostraremos primero la condición de suficiencia del enunciado: supongamos que  $G$  es una gráfica bipartita completa  $K_{1,m}$  con partición  $\{U_1, U_2\}$ . Gracias a que el número de aristas de  $K_{1,m}$  es  $m$ , bastará ver que todo par de aristas es adyacente en  $L(G)$ , es decir, si  $\{(u, v), (x, z)\} \subseteq A(G)$  entonces tienen un extremo en común. Notemos que esto es cierto pues por ser  $G$  bipartita, sucede que  $u \in U_1$  o  $v \in U_1$  y  $x \in U_1$  o  $z \in U_1$ , en cualquiera de los casos, por ser  $U_1$  unitario, las aristas  $(u, v)$  y  $(x, z)$  tienen un extremo en común, concluyendo que son adyacentes en  $L(G)$  y siguiéndose así el que  $L(D)$  sea completa con  $m$  vértices.

Ahora mostraremos la condición necesaria del enunciado: supongamos que  $L(G)$  es isomorfa a  $K_m$ . Bastará ver que todas las aristas de  $G$  tienen un vértice en común en  $G$ . Debido a que  $L(G)$  es completa, todas las aristas de  $G$  son adyacentes en  $G$ , por lo que si tomamos dos elementos  $\{(x, v), (y, u)\} \in A(G)$  éstas deben tener un extremo en común, digamos  $x$ . Afirmamos que cualquier otra arista tiene como extremo a  $x$ , para ello, supongamos lo contrario: existe  $a \in A(G)$  que no tiene como extremo al vértice  $x$ . Ya que  $L(G)$  es completa,  $a$  debe ser adyacente a  $(x, v)$  y  $(x, u)$ , por lo que  $a = (u, v)$ .

Por otro lado, como  $m > 3$ , existe una cuarta arista  $b \in A(G) \setminus \{(x, u), (x, v), (u, v)\}$ . Notemos que si  $b$  tiene como extremo a  $x$ , entonces no es adyacente a  $(u, v)$ , si tiene como extremo a  $u$  no es adyacente a  $(x, v)$  y si tiene como extremo a  $v$  no es adyacente

a  $(x, u)$ , por lo que  $b$  no puede ser adyacente a  $(u, v)$ ,  $(x, u)$  y  $(x, v)$  simultáneamente, lo cual no es posible pues todos los vértices de  $L(G)$  son adyacentes entre sí. Con esto mostramos que todas las aristas de  $G$  tienen un extremo común, por lo que  $G$  es isomorfa a  $K_{1,m}$  y con esto terminamos la prueba del enunciado.

□

Otra propiedad que podemos recuperar de la gráfica de líneas está relacionada con los grados de la gráfica original. El siguiente resultado será un auxiliar en algunas demostraciones del Capítulo 6.

**Lema 1.1.2** *Sea  $G$  una gráfica y  $L(G)$  su gráfica de líneas. Si  $L(G)$  tiene una subgráfica  $H$  isomorfa a  $K_m$  con  $m > 3$  y  $B$  es el conjunto de vértices de  $H$ , entonces la subgráfica de  $G$  inducida por el conjunto de aristas  $B$  es isomorfa a  $K_{1,m}$ .*

*Demostración.*

Sean  $G$  una gráfica,  $L(G)$  su gráfica de líneas y  $H$  una subgráfica de  $L(G)$  isomorfa a  $K_m$  con  $m > 3$ . Consideremos dos vértices distintos de  $H$ , digamos  $(u, v)$  y  $(x, z)$ . Por definición de adyacencia en  $L(G)$  se tiene que ambos vértices tienen un extremo en común en  $G$ , supongamos, sin pérdida de generalidad, que  $u = z$ . Afirmamos que cualquier otro elemento tiene como extremo a  $z$  en  $G$ .

Supongamos lo contrario, existe un vértice  $(s, t)$  en  $H$  que no tiene como extremo a  $z$ , en tal caso, por ser  $H$  una gráfica completa se sigue que  $(s, t)$  es adyacente a  $(z, v)$  y a  $(z, x)$  en  $L(D)$ , por lo que  $(s, t) = (v, x)$ . Dado que  $|m| > 3$ , tomamos un cuarto vértice que sea distinto de  $(x, z)$ ,  $(z, v)$  y de  $(x, v)$ , digamos  $(y, w)$ . Nuevamente, por ser  $H$  una gráfica completa, tenemos que  $(y, w)$  es adyacente a  $(x, z)$ , por lo que comparten un vértice en  $G$ , supongamos, sin pérdida de generalidad, que  $x = y$ .

En tal caso, por ser  $(w, y)$  adyacente con  $(z, v)$ , tenemos que  $w = z$ , con lo que  $(w, y) = (x, z)$ , o  $w = v$ , concluyendo que  $(w, y) = (x, v)$ . Pero lo anterior es un absurdo debido a la elección de  $(w, y)$ .

De lo anterior probamos que todos los vértices de  $H$  tienen como extremo a  $z$  en  $G$ , por lo que la subgráfica de  $G$  inducida por los vértices de  $H$  es isomorfa a  $K_{1,m}$ .

□

La siguiente gráfica asociada será de utilidad en las demostraciones de algunos enunciados del Capítulo 3. Si  $G$  es una gráfica y  $S \subseteq V(G)$  es un conjunto no vacío, definimos la **contracción de  $G$  respecto de  $S$**  como la gráfica  $G_s$  tal que  $V(G_s) = (V(G) \setminus S) \cup \{s\}$ ; donde  $s \notin V(G)$  y dos vértices  $\{u, v\} \subseteq V(G) \setminus S$  son adyacentes en  $G_s$  si y sólo si  $(u, v) \in A(G)$  y un vértice  $u \in V(G) \setminus S$  es adyacente a  $s$  en  $G_s$  si y sólo si existe un vértice  $v \in S$  tal que  $(u, v) \in A(G)$ .

Para ejemplificar la definición anterior, prestemos atención al ejemplo de la *figura 1.1.5* mostrado a continuación. Si consideramos al conjunto  $S = \{x_1, x_2, x_3\}$ , la contracción de  $G$  respecto de  $S$  es simplemente identificar al conjunto  $S$  con un nuevo vértice en  $G_S$ , las adyacencias de los vértices que no pertenecen a  $S$  se preservan en la contracción de la gráfica y la adyacencia entre los vértices en  $V(G) \setminus S$  y el conjunto contraído están determinadas por las adyacencias originales entre los vértices de  $V(G) \setminus S$  y los vértices propiamente contenidos en  $S$ .

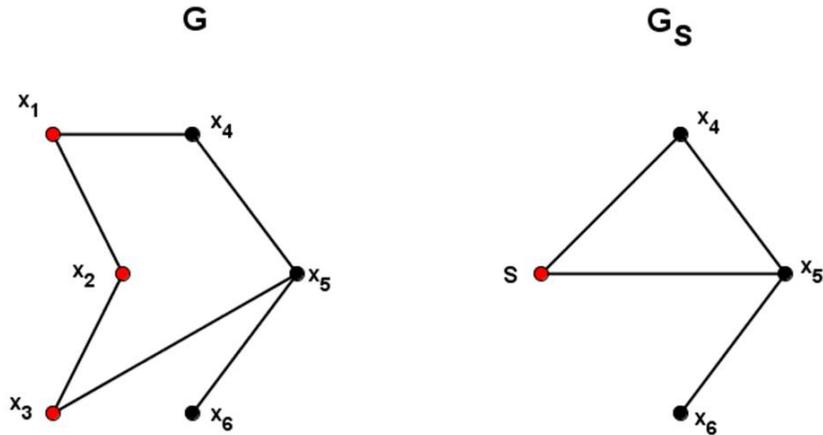


Fig. 1.1.5: Ejemplo de una gráfica junto con su contracción.

Esta gráfica mostrará su importancia durante algunas demostraciones del Capítulo 4, pues se tiene un resultado referente a gráficas planas y contracciones de las mismas:

**Teorema 1.1.6 ([7])** *Si  $G$  es una gráfica aplanable y  $U \subseteq V(G)$ , entonces la contracción de  $G$  respecto de  $U$  es aplanable.*

Estos son los conceptos básicos referentes a gráficas que usaremos a lo largo de esta tesis, sin embargo, estas definiciones y resultados son sólo un acercamiento mínimo a la extensa riqueza de la teoría de gráficas. Muchos de los resultados y definiciones aquí expuestas fueron tomadas de [6], [7], [8] y [15].

## 1.2. Definiciones y Resultados en Digráficas.

Una **digráfica**  $D$  es una pareja ordenada  $(V(D), F(D))$ , donde  $V(D)$  es un conjunto finito y no vacío de vértices y  $F(D)$  es un conjunto de parejas ordenadas de distintos elementos de  $V(D)$  llamadas flechas. Al igual que en una gráfica, una digráfica se dibuja en el plano mediante nodos que representen a los distintos vértices de  $D$  y por segmentos dirigidos entre dos nodos, representando la pareja ordenada que los contiene.

Por ejemplo, la digráfica  $D$  cuyos vértices son  $V(D) = \{u, v, w, x, y, z\}$  y flechas  $F(D) = \{(u, v), (u, z), (v, w), (w, y), (x, v), (x, y), (y, x)\}$  se puede dibujar como en la *figura 1.2.1*.

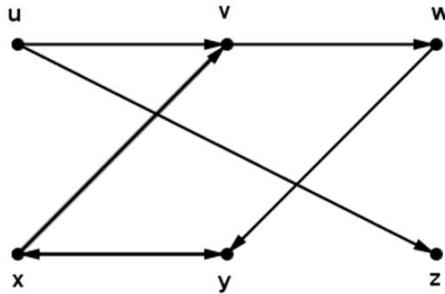


Fig. 1.2.1: Representación en el plano de una digráfica.

Una digráfica puede representarse simplemente por  $D = (V, F)$ . Aunque una digráfica y una gráfica no son lo mismo, sí podemos encontrar una relación entre ellas. Si  $D$  es una digráfica, la **gráfica subyacente de  $D$**  es la gráfica  $G$  tal que  $V(G) = V(D)$  y  $(x, y) \in A(G)$  si y sólo si  $(x, y)$  o  $(y, x)$  pertenecen a  $F(D)$ . Análogamente, si  $G$  es una gráfica, una **orientación de  $G$**  es una digráfica  $D$  tal que  $V(D) = V(G)$  y el conjunto de flechas de  $D$  es el conjunto  $A(G)$  visto como parejas ordenadas. Notemos que dada una gráfica  $G$ , no necesariamente existe una única orientación, pero dada una digráfica  $D$ , ésta tiene una única gráfica subyacente.

Dado que  $F(D)$  es un conjunto de parejas ordenadas, hablaremos de *dirección en las aristas*, teniendo en cuenta que si  $(u, v) \in F(D)$  la dirección de  $(u, v)$  es de  $u$  hacia  $v$ , por lo que podemos decir que  $u$  es el **vértice inicial** y  $v$  es el **vértice final** de la flecha  $(u, v)$ . Cabe enfatizar que, a diferencia de una gráfica, en una digráfica una flecha  $(x, y)$  no es igual a la flecha  $(y, x)$  por ser  $F(D)$  un conjunto de parejas ordenadas y por ello muchas de las definiciones no son iguales que en una gráfica. A un elemento  $(u, v) \in F(D)$  tal que  $(v, u) \in F(D)$  le llamaremos **flecha simétrica**.

La noción de **orden** y **tamaño** de una digráfica son iguales que en gráficas: si  $D$  es una digráfica, el orden de  $D$  se define como el número de vértices de la digráfica,

representado por  $p$  y el tamaño de  $D$  se define como el número de flechas de la digráfica, representado por  $q$ .

Los primeros conceptos que se modificarán serán los de adyacencia, pues al tener dirección en las aristas, se habla de distintos tipos de incidencia. Al igual que en gráficas, si  $(u, v) \in F(D)$  diremos que  **$u$  y  $v$  son adyacentes**, aunque ésto no especifica la dirección de la flecha entre  $u$  y  $v$ , para ello, decimos que  **$u$  incide en  $v$**  o análogamente  **$v$  es incidido por  $u$**  si  $(u, v) \in F(D)$ . En el caso de flechas, decimos que dos flechas de una digráfica son **adyacentes** si comparten un extremo común. El concepto de adyacencia se puede extender a conjuntos: si  $M$  y  $N$  son subconjuntos no vacíos de  $V(D)$ , y  $(u, v) \in F(D)$  es tal que  $u \in M$  y  $v \in N$ , diremos que  $(u, v)$  es una  $MN$  – flecha.

Teniendo en cuenta esta relación, los conceptos de vecinos y grados también se ven modificados, si bien en gráficas únicamente teníamos el concepto de vecinos de un vértice o de un conjunto, ahora podemos hablar de dos nuevos tipos de vecindad: los vértices que inciden en  $x$  y los vértices en los que  $x$  incide, es decir, los vértices  $v$  para los cuales  $(v, x) \in F(D)$  y los vértices  $u$  tales que  $(x, u) \in F(D)$ , respectivamente. Así, dado  $x \in V(D)$  definimos la **exvecindad de  $x$** , denotada por  $N^+(x)$ , como los vértices en los que  $x$  incide, es decir,  $N^+(x) = \{w \in V(D) \mid (x, w) \in F(D)\}$ , a los elementos de  $N^+(x)$  se les llama **exvecinos de  $x$** , análogamente definimos la **invecindad de  $x$** , denotada por  $N^-(x)$ , como los vértices que inciden en  $x$ , es decir,  $N^-(x) = \{w \in V(D) \mid (w, x) \in F(D)\}$ , a los elementos de  $N^-(x)$  se les llama **invecinos de  $x$** . Al conjunto  $N(x) = N^+(x) \cup N^-(x)$  le llamaremos simplemente los **vecinos de  $x$**  y a sus elementos se les conoce como los **vecinos de  $x$** .

Por ejemplo, considerando la *figura 1.2.2* tenemos que  $N^+(m) = \{c, e\}$ ,  $N^-(b) = \{a, d\}$ . Al igual que en gráficas, un vértice no está en ninguna de las vecindades de si mismo, cuando queramos considerar a alguna de las vecindades de un vértice junto con el vértice, se les llamará vecindades cerradas, en otras palabras, la **exvecindad cerrada de  $x$**  es el conjunto  $N^+[x] = N^+(x) \cup \{x\}$ , la **invecindad cerrada de  $x$**  es el conjunto  $N^-[x] = N^-(x) \cup \{x\}$  y la **vecindad cerrada de  $x$**  es el conjunto  $N[x] = N(x) \cup \{x\}$ .

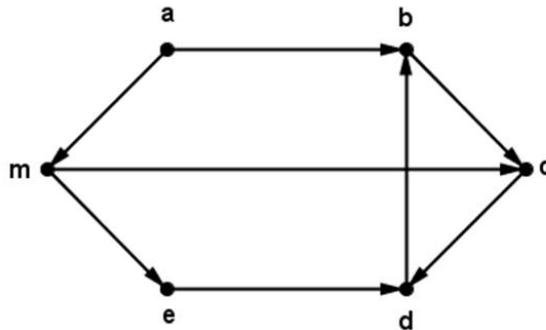


Fig. 1.2.2: Ejemplo de una digráfica.

Ésto induce dos definiciones nuevas en digráficas respecto al grado de un vértice, pues ahora hablamos de *exvecindad* e *invecindad*, así, dado  $x \in V(D)$  definimos el **exgrado de  $x$**  como el número de exvecinos de  $x$ ,  $\delta^+(x) = |N^+(x)|$  y el **ingrado de  $x$**  como el número de invecinos de  $x$ ,  $\delta^-(x) = |N^-(x)|$ , a un vértice de ingrado  $p - 1$  se le llamará **vértice absorbente** y si un vértice tiene exgrado cero se le llamará **pozo**. Para ilustrar los conceptos de ingrado y exgrado usemos nuevamente la *figura 1.2.2*, por ejemplo,  $\delta^+(a) = 2$  y  $\delta^-(e) = 1$ . Al igual que en gráficas, el **grado de  $x$**  se define como el número de vecinos del vértice  $x$ , es decir,  $\delta(x) = |N(x)|$ .

Tenemos entonces que si  $D$  es una digráfica, el **exgrado máximo de  $D$**  se define como el máximo de los exgrados de los vértices de la digráfica:

$$\Delta^+(D) = \text{máx}\{\delta^+(x) \mid x \in V(D)\}.$$

El **exgrado mínimo de  $D$**  se define como el mínimo de los exgrados de los vértices de la digráfica:

$$\delta^+(D) = \text{mín}\{\delta^+(x) \mid x \in V(D)\}.$$

Análogamente, el **ingrado máximo de  $D$**  y el **ingrado mínimo de  $D$**  es el máximo de los ingrados de los vértices de la digráfica y el mínimo de los ingrados de los vértices de la digráfica, respectivamente.

$$\Delta^-(D) = \text{máx}\{\delta^-(x) \mid x \in V(D)\}.$$

$$\delta^-(D) = \text{mín}\{\delta^-(x) \mid x \in V(D)\}.$$

Como ya se podrá notar, el hecho de que  $F(D)$  sea un conjunto de parejas ordenadas agrega nuevos conceptos que son básicos en la teoría y en términos de caminos no es la excepción. Un **camino no dirigido** en una digráfica  $D$  es una sucesión de vértices de la forma  $T = (x_0, x_1, \dots, x_n)$  donde  $x_i$  es adyacente a  $x_{i+1}$  para todo  $i \in \{0, 1, \dots, n - 1\}$ . Hay que notar que en esta definición no necesariamente se cumple que  $(x_i, x_{i+1}) \in F(D)$ , es decir, el camino no necesariamente respeta direcciones, por ejemplo, en la *figura 1.2.2*,  $C_1 = (m, e, d, c)$  es un camino no dirigido.

Para preservar la dirección en un camino, definimos un **camino dirigido** como una sucesión de vértices de la forma  $T = (x_0, x_1, \dots, x_n)$  donde  $(x_i, x_{i+1}) \in F(D)$  para todo  $i \in \{0, 1, \dots, n - 1\}$ . Por ejemplo,  $C_2 = (m, c, d, b)$  es un *mb*-camino dirigido en la *figura 1.2.2*. Dado que en esta teoría es más frecuente trabajar con caminos dirigidos que con los no dirigidos, cada que se mencione un *camino* se dará por hecho que éste es dirigido, salvo que se haga la aclaración de lo contrario, además, si  $C = (x_1, x_2, \dots, x_k)$  es un camino y queremos hacer referencia al camino contenido en  $C$  entre los vértices  $x_i$  y  $x_j$ , usaremos la notación  $(x_i, C, x_j)$ . Al igual que en gráficas, consideraremos que la sucesión  $(x)$  sí es un camino y será llamado el *camino trivial*.

Una **trayectoria** en una digráfica es un camino dirigido que no repite vértices, como el camino  $C_2$  mencionado anteriormente; un **paseo** es un camino dirigido que no repite flechas. Estos dos conceptos respetan fuertemente la dirección de las flechas en una digráfica, si se quiere omitir ésto, hablaremos simplemente de **trayectorias no dirigidas** y **paseos no dirigidos**. Una digráfica con  $k$  vértices que es isomorfa a una

trayectoria se denota por  $P_k$ . Además, si una trayectoria es tal que todas sus flechas son simétricas, diremos que es una **trayectoria simétrica**.

Al igual que en gráficas, dada una digráfica  $D$  y un camino  $C = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ , definimos la **longitud de  $C$**  como  $n$ , se denota  $long(C)$  y es análogo si queremos definir la longitud de una trayectoria o un paseo, sean dirigidos o no.

Recordemos que en el caso de gráficas, al definir entre todo par de vértices  $x$  y  $z$  la distancia de  $x$  a  $z$  como  $d(x, z) = \text{mín}\{long(C) \mid C \text{ es un } xz\text{-camino}\}$ ,  $d$  era una métrica en el conjunto de vértices de la gráfica. Esta definición como tal no induce una métrica en una digráfica, por ejemplo, si  $D$  es la digráfica exhibida en la *figura 1.2.3*, tenemos que  $d(v_1, v_4) = 3$  pero  $d(v_4, v_1) = 2$ . Aún así, es muy socorrida esta notación en diferentes resultados, por lo que definiremos para todo par de vértices  $x$  y  $z$ , la **distancia de  $x$  a  $z$**  como  $d(x, z) = \text{mín}\{long(C) \mid C \text{ es un } xz\text{-camino dirigido}\}$ , teniendo siempre en cuenta que  $d$  no es propiamente una métrica en  $D$ .

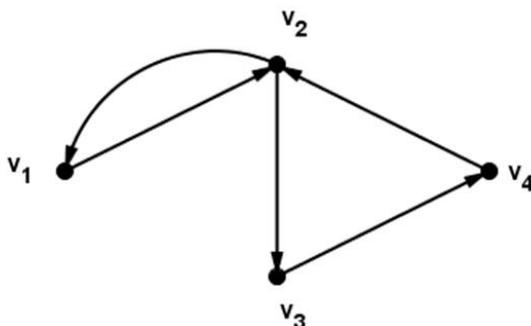


Fig. 1.2.3: Digráfica en la que se exhibe que  $d(x, z) = \text{mín}\{long(C) \mid C \text{ es un } xz\text{-camino}\}$  no es propiamente una métrica.

Tenemos ahora un resultado similar al *teorema 1.1.2* en digráficas respecto a los caminos dirigidos.

**Teorema 1.2.1** Sean  $D$  una digráfica y  $\{u, v\} \subseteq V(D)$  dos vértices distintos, si existe un  $uv$ -camino en  $D$ , entonces existe una  $uv$ -trayectoria en  $D$  contenida en dicho camino.

Demostración.

Sean  $D$  una digráfica y  $\{u, v\} \subseteq V(D)$  tal que existe un  $uv$ -camino, digamos  $C = (u = x_0, x_1, \dots, x_k = v)$ . Demostraremos la proposición por inducción sobre la longitud del camino entre  $u$  y  $v$ .

Base Inductiva.

Si  $k = 1$ , entonces  $C$  es la flecha  $(u, v)$ , la cual es una  $uv$ -trayectoria contenida en  $C$ .

Hipótesis de Inducción.

Si  $C'$  es un  $uv$ -camino de longitud  $k$  con  $k < n$ , entonces  $C'$  contiene una  $uv$ -trayectoria.

Paso Inductivo.

Sea  $C$  un  $uv$ -camino de longitud  $n$  y consideremos dos posibles casos sobre  $C$ :

Caso 1. Si  $C$  no repite vértices.

En este caso, gracias a la definición de trayectoria,  $C$  es una  $uv$ -trayectoria y la prueba está hecha.

Caso 2. Si  $C$  repite al menos un vértice.

Supongamos que  $C$  repite un vértice  $x_i$  para algún  $i \in \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ , es decir,  $C$  es de la forma:

$$C = (u = x_0, x_1, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_j = x_i, x_{j+1}, \dots, x_n = v).$$

Con esto podemos concluir que  $C' = (u = x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, x_i = x_j, x_{j+1}, \dots, x_n = v)$  es un  $uv$ -camino contenido en  $C$  de longitud menor a  $n$ , aplicando la hipótesis de inducción sobre  $C'$  se deriva la existencia de una  $uv$ -trayectoria contenida en  $C'$  y por consiguiente, en  $C$ .

□

La utilidad de este teorema se pondrá de manifiesto en la demostración de diversos enunciados posteriores, pues se deriva de éste el que sea condición necesaria y suficiente la existencia de un  $uv$ -camino en  $D$  para que exista una  $uv$ -trayectoria, por lo que bajo ciertas condiciones será equivalente el trabajar con caminos que con trayectorias y, dependiendo de las hipótesis de algunas proposiciones, será más sencillo el trabajar indistintamente con alguna de las dos definiciones.

Si tenemos los casos en que en un camino dirigido el vértice final e inicial son iguales, hablaremos de **camino dirigido cerrado** o simplemente *camino cerrado*, si dicho camino no repite flechas, diremos que es un **paseo dirigido cerrado** o simplemente, un *paseo cerrado* y si tiene al menos dos vértices y no repite ningún vértice salvo el primero y el último, es un **ciclo dirigido**. A una digráfica con  $p$  vértices que es isomorfa a un ciclo se le denotará por  $C_p$  y al igual que en trayectorias, si un ciclo tiene todas sus flechas simétricas, diremos que es un **ciclo simétrico**.

A continuación se enuncia un teorema que relaciona a los ciclos y los caminos cerrados en una digráfica. En éste se muestra que es suficiente la existencia de un camino cerrado en una digráfica para poder asegurar que existe al menos un ciclo en ella.

**Teorema 1.2.2** *En toda digráfica todo camino cerrado con al menos dos vértices contiene un ciclo dirigido.*

Demostración.

Sean  $D$  una digráfica y  $C = (x_0, x_1, \dots, x_k, x_0)$  un camino cerrado con al menos dos vértices, la demostración la haremos por inducción sobre la longitud del camino,  $\text{long}(C)$ .

Base Inductiva.

Si  $\text{long}(C) = 1$  tenemos que el camino cerrado  $C = (x_0, x_1, x_0)$  es un ciclo.

Hipótesis de Inducción.

Si  $C'$  es un camino cerrado de longitud menor que  $n$ , entonces  $C'$  contiene un ciclo.

Paso Inductivo.

Supongamos que  $C$  es un camino cerrado tal que  $\text{long}(C) = n$ , consideremos dos casos posibles sobre los vértices de  $C$ :

Caso 1.  $C$  no repite vértices salvo el primero y el último.

En este caso,  $C$  es un ciclo y con ello terminamos la demostración.

Caso 2.  $C$  repite al menos un vértice distinto del primero y el último.

En este caso se tiene que  $C$  es de la forma

$$C = (x_0, x_1, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_j = x_i, x_{j+1}, \dots, x_n, x_0).$$

Con ello,  $C' = (x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, x_i = x_j, x_{j+1}, \dots, x_n, x_0)$  es un camino cerrado de longitud menor a  $n$  y por hipótesis de inducción, contiene un ciclo dirigido, mismo que está contenido en  $C$ .

□

En los siguientes lemas se muestran condiciones suficiente para que una digráfica tenga un ciclo, en ellos se relaciona el exgrado e ingrado de los vértices para asegurar la existencia de un ciclo en la digráfica.

**Lema 1.2.1** *Si  $D$  es una digráfica tal que  $\delta^+(x) \neq 0$  para todo  $x \in V(D)$ , entonces  $D$  contiene un ciclo.*

Demostración.

Sea  $D$  una digráfica tal que  $\delta^+(x) \neq 0$  para todo  $x \in V(D)$ . Dado que  $V(D)$  y  $F(D)$  son conjuntos finitos, consideremos una trayectoria de longitud máxima  $T$  y supongamos sin pérdida de generalidad que sus vértices iniciales y finales son  $u$  y  $v$  respectivamente. Por hipótesis, todo vértice en  $D$  tiene exgrado al menos uno, en particular, existe  $w \in V(D)$  tal que  $(v, w) \in F(D)$ . Notemos que si  $w \notin V(T)$ , entonces

$$T' = T \cup (v, w)$$

es una  $uw$ -trayectoria tal que  $\text{long}(T') = \text{long}(T) + 1$ , lo cual no es posible por elección de  $T$ , por lo cual,  $w \in V(T)$ , concluyendo así que  $C = (w, T, v) \cup (v, w)$  es un ciclo en  $D$ .

□

**Lema 1.2.2** *Si  $D$  es una digráfica tal que  $\delta^-(x) \neq 0$  para todo  $x \in V(D)$ , entonces  $D$  contiene un ciclo.*

Demostración.

La demostración es análoga al lema 1.2.1.

□

Ahora retomaremos la noción de conexidad, ya que el conjunto de flechas de una digráfica es un conjunto de parejas ordenadas tendremos nuevas definiciones, nosotros mostraremos tres tipos posibles de conexidad en una digráfica: conexidad débil, unilateral y fuerte. Sea  $D$  una digráfica, decimos que  $D$  es **débilmente conexa** si para todo  $\{u, v\} \subseteq V(D)$ , existe un  $uv$ -camino no necesariamente dirigido. A este tipo de digráficas también se les llama **débiles**. Dado que la conexidad débil no respeta dirección y en muchas ocasiones es importante el considerar la dirección de las flechas, tenemos otras definiciones.

Una digráfica  $D$  es **unilateralmente conexa** si para todo  $\{u, v\} \subseteq V(D)$  existe un  $uv$ -camino dirigido o existe un  $vu$ -camino dirigido. Este tipo de conexidad respeta la dirección de las flechas, pero queda abierta la posibilidad de que no exista el camino en un sentido, ya sea de  $u$  a  $v$  o de  $v$  a  $u$ , cuando sí se tiene ésto tenemos el tercer tipo de conexidad.

Una digráfica es **fuertemente conexa** o simplemente **fuerte** si existe un  $uv$ -camino dirigido para todo  $\{u, v\} \subseteq V(D)$ . Hay que notar que toda digráfica fuerte es unilateralmente conexa y toda digráfica unilateralmente conexa es débil conexa, pero los recíprocos de estas dos últimas afirmaciones no necesariamente son ciertos. El siguiente lema muestra una propiedad importante en cualquier digráfica fuerte no trivial.

**Lema 1.2.3** *Si  $D$  es una digráfica fuerte no trivial, entonces todo vértice en  $D$  tiene exgrado e ingrado al menos uno.*

Demostración.

Sean  $D$  una digráfica fuerte y  $x \in V(D)$ , debido a que  $D$  es no trivial podemos considerar un vértice  $v \in V(D) \setminus \{x\}$ . Gracias a que  $D$  es fuerte existe una  $xv$ -trayectoria,

digamos  $T_1 = (x, y_1, y_2, \dots, y_n, v)$  y por ser  $x \neq y_1$ , tenemos que  $(x, y_1) \in F(D)$ , por lo que el exgrado de  $x$  es al menos uno. Análogamente, por existir una  $vx$ -trayectoria, digamos  $T_2 = (v, z_1, z_2, \dots, z_k, x)$  y ser  $x \neq z_k$  concluimos que  $(z_k, x) \in F(D)$ , es decir, el ingrado de  $x$  es al menos uno, terminando así nuestra demostración. □

Cabe hacer mención que, en general, durante las siguientes demostraciones referentes a conexidad fuerte bastará exhibir entre cualesquiera par de vértices arbitrarios,  $u$  y  $v$ , un  $uv$ -camino o una  $uv$ -trayectoria para asegurar la conexidad fuerte de  $D$ , es decir, no será necesario exhibir también un  $vu$ -camino o una  $vu$ -trayectoria, pues al ser  $u$  y  $v$  vértices arbitrarios, es indistinto durante la demostración como se considere la dirección de la trayectoria entre ellos.

Otras definiciones que se pueden recuperar íntegramente de gráficas son las de subdigráficas. Dadas  $H$  y  $D$  digráficas, decimos que  **$H$  es una subdigráfica de  $D$**  si  $V(H) \subseteq V(D)$  y  $F(H) \subseteq F(D)$ ; así mismo, decimos que  **$H$  es una subdigráfica propia de  $D$**  si  $V(H) \subsetneq V(D)$  o  $F(H) \subsetneq F(D)$  y en caso de que  $V(H) = V(D)$ , decimos que  **$H$  es subdigráfica generadora de  $D$**  o un **factor de  $D$** . Tenemos también que el concepto de subdigráfica inducida por un conjunto, ya sea de vértices o de flechas, es igual que en una gráfica. Sean  $D$  una digráfica y  $W \subseteq V(D)$  no vacío, la **subdigráfica inducida por  $W$**  es la digráfica denotada como  $D[W]$  donde  $V(D[W]) = W$  y  $F(D[W]) = \{(x, y) \mid \{x, y\} \subseteq W, (x, y) \in F(D)\}$ .

Análogamente, si  $E \subseteq F(D)$  la **subdigráfica inducida por el conjunto de flechas  $E$**  denotada como  $D[E]$ , es la digráfica tal que  $F(D[E]) = E$  y

$$V(D[E]) = \{x \in V(D) \mid x \text{ es extremo de alguna flecha en } E\}.$$

Al igual que en gráficas, las definiciones anteriores facilitarán la redacción de muchos enunciados posteriores al poder incorporar nueva terminología para algunas subdigráficas, por ejemplo, si  $U \subseteq V(D)$  denotamos por  $D - U$  a la subdigráfica  $D[V(D) \setminus U]$ . Si  $U = \{x\}$ , podemos escribirlo simplemente como  $D - x$  omitiendo la notación conjuntista. Análogamente, si  $A \subseteq F(D)$ , denotamos por  $D - A$  a la subdigráfica inducida por el conjunto de flechas  $D[F(D) \setminus A]$  y al igual que con los conjuntos de vértices, si  $A = \{a\}$ , se omitirá la notación conjuntista:  $D - a$ . Una muestra de la simplicidad de esta notación se exhibe en el siguiente lema:

**Lema 1.2.4** *Si  $D$  es una digráfica fuerte y existe un  $uv$ -camino que no contiene a  $(u, v)$ , entonces  $D - (u, v)$  es fuerte.*

*Demostración.*

Sean  $D$  una digráfica fuerte,  $a = (u, v) \in F(D)$  tal que existe un  $uv$ -camino que no contiene a  $(u, v)$ , digamos  $C$ . Consideremos un par de vértices  $\{x, z\} \subseteq V(D - a)$

arbitrarios. Gracias a que  $D$  es fuerte, existe un  $xz$ -camino en  $D$ , digamos  $C'$ , si  $C'$  no contiene a  $(u, v)$ , entonces  $C'$  es un  $xz$ -camino en  $D - a$ . En caso contrario, si  $a \in F(C')$ , el camino  $C_1 = (x, C', u) \cup C \cup (v, C', z)$  es un  $xz$ -camino que no contiene a  $(u, v)$ , es decir,  $C_1$  es un  $xz$ -camino en  $D - a$ , mostrando así que  $D - a$  es fuerte.

□

La incorporación de notación para subdigráficas también es auxiliar al establecer nuevas definiciones, por ejemplo, si  $D$  es una digráfica débil y  $K \subseteq V(D)$ , decimos que  **$K$  es un conjunto de corte de  $D$**  si  $D - K$  no es débil conexa o es la digráfica trivial. A partir de esta definición se deriva el **número de conexidad de  $D$** , denotado por  $\kappa(D)$  como:

$$\kappa(D) = \text{mín}\{|K| \mid K \text{ es un conjunto de corte de } D\}.$$

No es de extrañar que las propiedades de conexidad sean fuertemente usadas en digráficas, sin embargo, no todas las digráficas tienen algún tipo de conexidad, por eso es de interés el definir las subestructuras de una digráfica que sí cumplan con alguna de ellas, por ejemplo, definimos una **componente conexa de una digráfica  $D$**  como una subdigráfica  $H$  de  $D$  tal que  $H$  es débil conexa y es máxima por contención con dicha propiedad, es decir, si  $H'$  es una componente débil de  $D$  tal que  $H \leq H'$ , entonces  $H = H'$ . Análogamente, si  $D$  es una digráfica y  $H$  es una subdigráfica inducida de  $D$ , decimos que  **$H$  es una componente fuerte de  $D$**  si  $H$  es fuerte y es máxima por contención con dicha propiedad, es decir, si  $H'$  es una componente fuerte de  $D$  tal que  $H \leq H'$ , entonces  $H = H'$ .

En lo referente a estas últimas, existen dos tipos particulares de componentes fuertes de una digráfica que son auxiliares en diversos resultados, en primer lugar, si  $H$  es una componente fuerte de  $D$ , decimos que  **$H$  es una componente fuerte terminal de  $D$**  si para toda componente fuerte  $H'$  de  $D$ , no existen  $HH'$ -flechas. Análogamente, decimos que  **$H$  es una componente fuerte inicial de  $D$**  si para toda componente fuerte  $H'$  de  $D$ , no existen  $H'H$ -flechas.

Aunque todas las definiciones anteriores tienen su importancia en la teoría, en lo que a nosotros concierne, utilizaremos principalmente resultados de conexidad fuerte. En el siguiente enunciado tenemos algunas propiedades respecto a las componentes fuertes de una digráfica dada.

**Lema 1.2.5** *Sean  $D$  una digráfica y  $H$  una componente fuerte de  $D$ . Si  $C$  es un camino cerrado tal que  $V(C) \cap V(H) \neq \emptyset$ , entonces  $V(C) \subseteq V(H)$ .*

*Demostración.*

Sean  $D$  una digráfica,  $H$  una componente fuerte de  $D$  y  $C$  un camino cerrado en  $D$  tal que  $V(C) \cap V(H) \neq \emptyset$ . La demostración la haremos por contradicción, supongamos que existe  $z \in V(C)$  tal que  $z \notin V(H)$ . Consideremos  $H_1 = D[V(H) \cup V(C)]$ .

Demostremos que bajo la suposición que existe  $z \in V(C)$  tal que  $z \notin V(H)$ ,  $H_1$  es una componente fuerte de  $D$  que contiene propiamente a  $H$ , contradiciendo el hecho de que  $H$  es máxima por contención.

Sean  $\{u, v\} \subseteq V(H_1)$ , bastará probar que existe un  $uv$ -camino en  $H_1$ , por lo que consideraremos los cuatro posibles casos sobre  $u$  y  $v$ .

Caso 1.  $\{u, v\} \subseteq V(H)$ .

Como  $H$  es componente fuerte de  $D$  existe un  $uv$ -camino en  $H$ , mismo que está en  $H_1$  y análogamente, existe un  $vu$ -camino en  $H_1$ .

Caso 2.  $\{u, v\} \subseteq V(C)$ .

Como  $C$  es un camino cerrado,  $T_1 = (u, C, v)$  es un  $uv$ -camino contenido en  $C$ , mismos que están en  $H_1$  y análogamente, existe un  $vu$ -camino en  $H_1$ .

Caso 3.  $u \in V(C) \setminus V(H)$  y  $v \in V(H) \setminus V(C)$ .

Por hipótesis, existe un vértice  $x \in V(C) \cap V(H)$ . Como  $x \in V(H)$ , existe un  $xv$ -camino  $T'_1$  contenido en  $H$  y como  $x \in V(C)$ , existe un  $ux$ -camino  $T''_1$  contenido en  $C$ . Así,  $T_1 = T''_1 \cup T'_1$  es un  $uv$ -camino contenido en  $H_1$ . Por otro lado, como  $x \in V(H)$  existe un  $vx$ -camino contenido en  $H$ , digamos  $T'_2$  y como  $x \in V(C)$  existe un  $xu$ -camino en  $C$ , digamos  $T''_2$ , con esto,  $T_2 = T'_2 \cup T''_2$  es un  $vu$ -camino contenido en  $H_1$ .

De los *casos 1, 2 y 3*,  $H_1$  es una componente fuerte de  $D$  que contiene a  $H$ , pero  $H \neq H_1$ , pues por suposición  $z \in V(C)$  y  $z \notin V(H)$ , contradiciendo el hecho de que  $H$  es máxima por contención. Por lo tanto,  $V(C) \subseteq V(H)$ .

□

Al igual que en gráficas, las digráficas se pueden clasificar de acuerdo a propiedades comunes entre ellas. Una digráfica es **completa** si para todo  $\{x, y\} \subseteq V(D)$ ,  $(x, y)$  y  $(y, x)$  son elementos de  $F(D)$ , es decir, entre todo par de vértices hay flecha en ambas direcciones, recordemos que a este tipo de flechas se le llama **flechas simétricas**.

Hay que notar que si  $D$  es una digráfica completa con  $p$  vértices ésta es única bajo isomorfismos, por lo que introduciremos la notación  $K_p$ , sin embargo tenemos otros dos tipos de digráficas relacionadas con las digráficas completas. En primer lugar, decimos que una digráfica  $D$  es **semicompleta** si para todo  $\{x, y\} \subseteq V(D)$ ,  $(x, y) \in F(D)$  o  $(y, x) \in F(D)$ , es decir, entre cada par de vértices siempre hay al menos una adyacencia, aunque no necesariamente ambas.

Notemos que toda digráfica completa es semicompleta, pero no toda digráfica semicompleta es completa, por ejemplo,  $D_2 = (\{x, y, z\}, \{(x, y), (y, x), (y, z), (z, x)\})$  mostrada en la *figura 1.2.4* es semicompleta, pero no es completa pues  $(x, z) \notin F(D)$ .

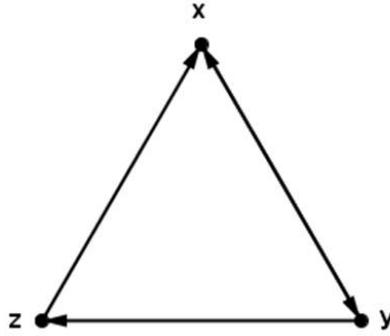


Fig. 1.2.4: Ejemplo de una digráfica semicompleta que no es completa.

Ya se definieron las digráficas en las que entre todo par de vértices hay flecha simétrica o al menos una flecha, es natural pensar en digráficas en las que entre todo par de vértices hay una y sólo una adyacencia, un **torneo** es una digráfica en la que para todo  $\{x, y\} \subseteq V(D)$ ,  $(x, y) \in F(D)$  o  $(y, x) \in F(D)$  y sólo una. Hay que notar que, salvo  $K_1$ , ningún torneo es una digráfica completa y ninguna digráfica completa es torneo, también se tiene que todo torneo es una digráfica semicompleta y una digráfica semicompleta no necesariamente es torneo. Además, a diferencia de las digráficas completas, un torneo con  $p$  vértices no necesariamente es único, por ejemplo  $T = (\{x, y, z\}, \{(x, y), (y, z), (z, x)\})$  y  $T' = (\{u, v, w\}, \{(u, v), (v, w), (u, w)\})$  son torneos no isomorfos con tres vértices, en particular, el torneo con tres vértices no es único. Como paréntesis, los dos ejemplos anteriores,  $T$  y  $T'$  son de interés en diversas teorías y suelen representarse por  $C_3$  y  $T_3$ , respectivamente.

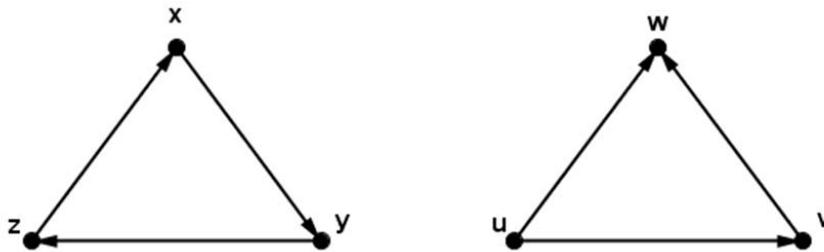


Fig. 1.2.5:  $C_3$  y  $T_3$ .

El siguiente lema relaciona el orden y tamaño de los torneos con ayuda de su gráfica subyacente:

**Corolario 1.2.1** Si  $D$  un torneo con  $p$  vértices y  $q$  flechas, entonces  $2q = p(p - 1)$ .

Demostración.

Sea  $D$  un torneo con  $p$  vértices,  $q$  aristas y  $G$  su gráfica subyacente. Notemos que debido a que  $D$  no tiene flechas simétricas, el número de flechas de  $D$  es igual al número de aristas en  $G$ , es decir,  $|A(G)| = q$ , además, por ser  $D$  semicompleta, se sigue que  $G$  es completa y en particular, es  $(p - 1)$ -regular, por el *teorema 1.1.1* concluimos que  $2q = \sum_{v \in V(G)} \delta(v) = p(p - 1)$ , mostrando así lo deseado.

□

Otro tipo de digráficas son las  $r$ -regulares y se definen de manera análoga a una gráfica  $r$ -regular. Si  $D$  es una digráfica y  $r \in \mathbb{N}$ , decimos que  $D$  es **r-regular** si para todo  $x \in V(D)$ ,  $\delta^+(x) = \delta^-(x) = r$ . Un ejemplo de estas digráficas son los ciclos, que son  $1$ -regulares o  $K_p$ , que son  $(p - 1)$ -regulares. También las digráficas  $n$ -partitas se definen de manera análoga que en gráficas. Dada una digráfica  $D$  y  $n \in \mathbb{N}$ , decimos que  $D$  es **n-partita** si  $V(D)$  puede particionarse en  $n$  conjuntos independientes. Recordemos que un conjunto de vértices  $W \subseteq V(D)$  es *independiente* si cumple que para todo par de vértices  $\{u, v\} \subseteq W$ ,  $u$  y  $v$  no son adyacentes.

También retomaremos el concepto de planaridad para digráficas: una digráfica es **plana** si su gráfica subyacente es plana. Por otro lado, decimos que una digráfica  $D$  es **transitiva** si para todo  $\{u, v, z\} \subseteq V(D)$  tales que  $\{(u, v), (v, z)\} \subseteq F(D)$ , sucede que  $(u, z) \in F(D)$ . En la siguiente figura se muestra el ejemplo de una digráfica transitiva.

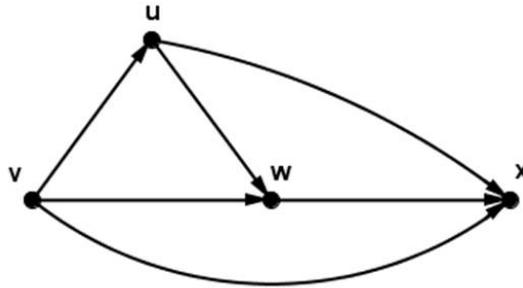


Fig. 1.2.6: Ejemplo de una digráfica transitiva.

A continuación se enunciará un lema que refleja la relación existente entre los vértices unidos por una trayectoria en una digráfica transitiva.

**Lema 1.2.6** *Sea  $D$  una digráfica transitiva. Si  $u$  y  $v$  son vértices en  $D$  tal que existe una  $uv$ -trayectoria de longitud al menos dos, entonces  $(u, v) \in F(D)$ .*

Demostración.

Sean  $D$  una digráfica transitiva y  $\{u, v\} \subseteq V(D)$  tal que existe una  $uv$ -trayectoria, digamos  $T$ , de longitud al menos dos. La demostración la haremos por inducción sobre la longitud de  $T$ ,  $\text{long}(T) = k$ .

Base Inductiva.

Para  $k = 2$ , aplicando directamente la hipótesis de transitividad sobre  $T$ ,  $(u, v) \in F(D)$ .

Hipótesis de Inducción.

Si  $T'$  es una  $u'v'$ -trayectoria de longitud menor a  $k$ , entonces  $(u', v') \in F(D)$ .

Paso Inductivo.

Sea  $T = (u = x_0, x_1, \dots, x_k = v)$  una  $uv$ -trayectoria de longitud  $k$ . Como  $T' = (x_0, x_1, \dots, x_{k-1})$  es una  $ux_{k-1}$ -trayectoria de longitud menor a  $k$ , por hipótesis de inducción,  $(u, x_{k-1}) \in F(D)$ . Así, tenemos que  $\{(u, x_{k-1}), (x_{k-1}, v)\} \subseteq F(D)$ , concluyendo que  $(u, v) \in F(D)$ , pues  $D$  es transitiva.

□

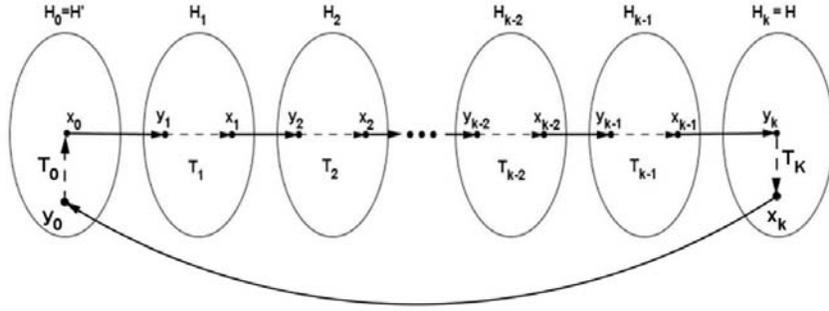
Una de las utilidades de definir digráficas nuevas a partir de otra digráfica es el tipo de información que se puede recuperar a partir de las digráficas obtenidas. En general, a las digráficas definidas a partir de otra digráfica dada se les llaman digráficas asociadas. Nosotros mostraremos algunas de estas digráficas asociadas en las siguientes definiciones. Si  $D = (V(D), F(D))$  es una digráfica, el **complemento de  $D$** , denotada por  $\overline{D}$ , es la digráfica tal que  $V(\overline{D}) = V(D)$  y  $(x, y) \in F(\overline{D})$  si y sólo si  $(x, y) \notin F(D)$ . La **digráfica de líneas de  $D$**  se denota como  $L(D)$  y es la digráfica tal que  $V(L(D)) = F(D)$  y  $(a, b) \in F(L(D))$  si y sólo si el extremo final de  $a$  es el extremo inicial de  $b$  en  $D$ .

Si  $D$  es una digráfica, definimos la **digráfica de condensación de  $D$**  como la digráfica  $D^*$  donde los vértices de  $D^*$  son las componentes fuertes de  $D$  y dados dos vértices  $H_1$  y  $H_2$  en  $D^*$ ,  $(H_1, H_2) \in F(D^*)$  si y sólo si existe una  $H_1H_2$ -flecha en  $D$ . En el siguiente teorema, mostramos una propiedad de la digráfica de condensación de una digráfica dada.

**Teorema 1.2.3** *La digráfica de condensación de cualquier digráfica es acíclica.*

Demostración.

Sean  $D$  una digráfica y  $D^*$  su digráfica de condensación. Por contradicción, supondremos que  $D^*$  tiene un ciclo  $C = (H_0, H_1, \dots, H_k, H_0)$ . Por construcción de  $D^*$ , para todo  $i \in \{0, \dots, k-1\}$ , existen  $x_i \in V(H_i)$  y  $y_{i+1} \in V(H_{i+1})$  tal que  $(x_i, y_{i+1}) \in F(D)$  y además existe  $x_k \in V(H_k)$  y existe  $y_0 \in V(H_0)$  tal que  $(x_k, y_0) \in F(D)$ .



Sin embargo, como  $\{x_i, y_i\} \subseteq V(H_i)$  y  $H_i$  es una componente fuerte de  $D$  para todo  $i \in \{0, 1, \dots, k\}$ , entonces existe una  $y_i x_i$ -trayectoria contenida en  $H_i$ , digamos  $T_i$ .

En tal caso, notemos que

$$T = (x_0, y_1) \cup T_1 \cup (x_1, y_2) \cup T_2 \cup \dots \cup T_k \cup (x_k, y_0) \cup T_0$$

es un camino cerrado en  $D$  que no está contenido propiamente en  $H_0$ , con ésto y el *lema 1.2.5*, se sigue que  $H_0$  no es fuerte, lo cual no es posible. Por lo tanto,  $D^*$  es acíclica.

□

Como ya se ha mencionado, una utilidad de definir digráficas asociadas es el tipo de información que se puede recuperar de la digráfica original, en el teorema anterior hemos podido dar una propiedad de la digráfica de condensación de cualquier digráfica y con ello tenemos el siguiente resultado.

**Corolario 1.2.2** *Toda digráfica tiene una componente fuerte terminal y una componente fuerte inicial.*

*Demostración:*

Sea  $D$  una digráfica arbitraria. Del *teorema 1.2.3* se sigue que  $D^*$  es acíclica, y por contrapositiva del *lema 1.2.1* y el *lema 1.2.2*, existen  $\{H_1, H_2\} \subseteq V(D^*)$  tal que  $\delta_{D^*}^+(H_1) = 0$  y  $\delta_{D^*}^-(H_2) = 0$ . Así, por definición de adyacencia en  $D^*$ ,  $H_1$  es una componente fuerte terminal de  $D$  y  $H_2$  es una componente fuerte inicial de  $D$ .

□

Con ayuda del *corolario 1.2.2* mencionado anteriormente, daremos una caracterización de las digráficas fuertes:

**Corolario 1.2.3** *Sea  $D$  una digráfica arbitraria.  $D$  es fuerte si y sólo si para cualquier partición de  $V(D)$  en dos conjuntos  $U_1$  y  $U_2$  existe una  $U_1U_2$ -flecha y existe una  $U_2U_1$ -flecha.*

Demostración.

Probaremos primero la condición de suficiencia de la proposición.

Sean  $D$  una digráfica fuerte y  $\{U_1, U_2\}$  una partición arbitraria de  $V(D)$  en dos conjuntos. Como  $U_1$  y  $U_2$  son no vacíos, tomamos  $x \in U_1$  y  $z \in U_2$ . Por ser  $D$  fuerte, existe una  $xz$ -trayectoria en  $D$ , digamos

$$T = (x = u_0, u_1, \dots, u_k = z).$$

Debido a que  $x \in U_1$  y  $z \in U_2$ , existe un elemento  $u_i \in V(T) \cap U_1$  tal que  $u_{i+1} \in V(T) \cap U_2$ , por lo que  $(u_i, u_{i+1})$  es una  $U_1U_2$ -flecha. Análogamente podemos asegurar la existencia de una  $U_2U_1$ -flecha.

Ahora procederemos a demostrar, por contradicción, la condición necesaria de la proposición.

Supongamos que  $D$  no es fuerte, por el corolario 1.2.2  $D$  tiene una componente fuerte inicial, digamos  $H$ . Si  $U_1 = V(H)$  y  $U_2 = V(D) \setminus V(H)$ , afirmamos que  $\{U_1, U_2\}$  es una partición de  $V(D)$ .

Es inmediato de la definición de estos conjuntos que  $U_1 \cup U_2 = V(D)$  y que  $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ , por lo que sólo falta verificar que  $U_i \neq \emptyset$  para cada  $i \in \{1, 2\}$ .

Por ser  $H$  componente fuerte inicial existe al menos un elemento en  $V(H)$  derivándose el que  $U_1$  sea no vacío y debido a que  $D$  no es fuerte, es imposible que todos los vértices de  $D$  estén en  $H$ , por lo que debe existir al menos un elemento de  $D$  que no pertenezca a  $H$  y con esto  $U_2$  también es no vacío.

Ahora que hemos demostrado que  $\{U_1, U_2\}$  es una partición de  $V(D)$  observemos que por ser  $H$  una componente fuerte inicial no existen flechas de la forma  $(x, z)$  con  $x \in V(D) \setminus V(H)$  y  $z \in V(H)$ , es decir, no existe una  $U_2U_1$ -flecha, lo cual no es posible por nuestras hipótesis, concluyendo que  $D$  es fuerte conexa.

□

En los resultados anteriores hemos puesto de manifiesto la utilidad de definir digráficas asociadas, pues con ayuda de la digráfica de condensación hemos podido caracterizar a las digráficas fuertes, en el siguiente lema mostraremos una vez más la eficiencia de esta digráfica asociada. En este caso, a partir de sus propiedades obtenidas en el teorema 1.2.3 nos brindará información de algunas trayectorias existentes en la digráfica original.

**Lema 1.2.7** *Si  $D$  es una digráfica con una única componente fuerte terminal  $H$ , entonces existe una  $H'H$ -trayectoria en  $D$  para toda componente fuerte  $H'$  de  $D$ .*

Demostración:

Sean  $D$  una digráfica con una única componente fuerte terminal, digamos  $H$ , y  $H'$  una componente fuerte de  $D$ . Si  $H = H'$ , trivialmente, existe una  $H'H$ -trayectoria. Supongamos que  $H \neq H'$ . Consideremos a  $D^*$  la digráfica de condensación de  $D$  y supongamos que no existe una  $H'H$ -trayectoria en  $D^*$ .

Sea  $T' = (H' = H_0, H_1, \dots, H_k)$  una trayectoria en  $D^*$  cuyo vértice inicial sea  $H'$  y además, su longitud sea máxima. Dado que  $H$  es la única componente fuerte terminal de  $D$  y  $H_k \neq H$  por suponer que no existen  $H'H$ -trayectorias, entonces existe  $H_l \in V(D^*)$  tal que  $(H_k, H_l) \in F(D^*)$ .

En tal caso, por el *teorema 1.2.3*,  $H_l \neq H_i$  para todo  $i \in \{0, 1, \dots, k\}$  pues  $D^*$  no contiene ciclos, por lo cual,  $T'' = (H' = H_0, H_1, \dots, H_k, H_l)$  es una trayectoria con vértice inicial  $H'$  y de longitud mayor a  $T'$ , contradiciendo el hecho de que  $T'$  es de longitud máxima. Por lo tanto, debe existir una  $H'H$ -trayectoria en  $D^*$ .

□

Otra definición que será importante durante el desarrollo de la teoría es el de la digráfica dual de una digráfica dada. Si  $D$  es una digráfica, definimos la **digráfica dual de  $D$**  como la digráfica  $\overleftarrow{D}$  tal que  $V(\overleftarrow{D}) = V(D)$  y  $(u, v) \in F(\overleftarrow{D})$  si y sólo si  $(v, u) \in F(D)$ .

Existen muchas propiedades que relacionan a una digráfica con su digráfica dual, por ejemplo, la exvecindad de un vértice es su invecindad en la digráfica dual y viceversa: la invecindad de un vértice es la exvecindad de ese mismo vértice en la digráfica dual. A partir de ello tenemos que el exgrado de un vértice en la digráfica original es el ingrado en la digráfica dual y análogamente, su ingrado original es el exgrado en la dual.

El siguiente lema relaciona a una digráfica con su digráfica dual, con éste será posible simplificar algunas de las demostraciones del Capítulo 3.

**Lema 1.2.8** *Si  $D$  es una digráfica y  $\overleftarrow{D} = H$  su digráfica dual, entonces  $\overleftarrow{H} = D$ .*

Demostración.

Sean  $D$  una digráfica y  $\overleftarrow{D} = H$  su digráfica dual, dado que  $V(D) = V(H)$  y  $V(H) = V(\overleftarrow{H})$ , se sigue que la igualdad entre los vértices de  $\overleftarrow{H}$  y  $D$  es cierta.

La igualdad entre las flechas de ambas digráficas también se sigue aplicando directamente la definición de digráfica dual, pues  $(u, v) \in F(D)$  si y sólo si  $(v, u) \in F(H)$  y esto último es cierto si y sólo si  $(u, v) \in F(\overleftarrow{H})$ , es decir,  $(u, v) \in F(D)$  si y sólo si  $(u, v) \in F(\overleftarrow{H})$ . Con ello, concluimos que  $D = \overleftarrow{H}$ .

□

Observemos que la conexidad de una digráfica  $D$  y la conexidad de su gráfica dual es la misma, por ejemplo, si  $D$  es débil conexa, entonces su digráfica dual es débil conexa y análogamente, si  $D$  es unilarteralmente conexa, entonces  $\overleftarrow{D}$  es unilateralmente conexa. Nosotros únicamente demostraremos este enunciado para digráficas fuertes:

**Lema 1.2.9** Sean  $D$  una digráfica,  $\overleftarrow{D}$  su digráfica dual y  $\{x, y\} \subseteq V(D)$ . Existe un  $xy$ -camino en  $D$  si y sólo si existe un  $yx$ -camino en  $\overleftarrow{D}$ .

Demostración.

Sean  $D$  una digráfica,  $\overleftarrow{D}$  su digráfica dual y  $\{x, y\} \subseteq V(D)$ .

Demostraremos primero la suficiencia de la demostración.

Dado que existe un  $xy$ -camino en  $D$ , digamos  $C = (x = u_0, u_1, \dots, u_k = y)$ . Por definición de camino y digráfica dual, tenemos que  $(x_i, x_{i-1}) \in F(\overleftarrow{D})$  para todo  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ , siguiéndose que  $C' = (y = u_k, u_{k-1}, \dots, u_1, u_0 = x)$  es un  $yx$ -camino en  $\overleftarrow{D}$ .

Análogamente, para demostrar la condición necesaria de la demostración, si  $\{x, y\} \subseteq V(D)$  son tales que existe un  $yx$ -camino en  $\overleftarrow{D} = H$ , entonces, por la demostración anterior, existe un  $xy$ -camino en  $\overleftarrow{H}$ , pero por el *lema 1.2.8* tenemos que  $\overleftarrow{H} = D$  y por ello existe un  $xy$ -camino en  $D$ , concluyendo así nuestra demostración.

□

Con el lema anterior, podremos dar una caracterización para las digráficas fuertes que, aunque parezca trivial, será de mucha utilidad en algunos de los enunciados del Capítulo 3.

**Corolario 1.2.4** Una digráfica  $D$  es fuerte si y sólo si  $\overleftarrow{D}$  es fuerte.

Demostración.

Para demostrar la suficiencia de la proposición tomamos dos vértices arbitrarios  $x$  y  $z$  en  $\overleftarrow{D}$ , por hipótesis, en  $D$  existe un  $zx$ -camino y por el *lema 1.2.9* tenemos que existe un  $xz$ -camino en  $\overleftarrow{D}$ , concluyendo que  $\overleftarrow{D}$  es fuertemente conexa.

Análogamente, para demostrar la condición necesaria de la proposición, si  $\overleftarrow{D} = H$  es fuerte, por la condición suficiente de esta misma proposición y el *lema 1.2.9*, tenemos que  $\overleftarrow{H} = D$  es fuerte, concluyendo nuestra demostración.

□

# Capítulo 2

## Introducción a los Conjuntos Absorbentes

Como se puede apreciar, las gráficas y digráficas poseen muchas propiedades y sus aplicaciones tienen un gran campo de trabajo. En esta tesis nos enfocaremos a la teoría de dominación en digráficas, por lo que en este capítulo ofreceremos un acercamiento a los resultados que han ofrecido diversos autores en la literatura, tanto en gráficas como en digráficas, así como algunas variantes de los conjuntos dominantes.

### 2.1. Conjuntos Absorbentes en Gráficas.

Para introducir el concepto de conjunto dominante, consideremos la siguiente situación.

*En un evento internacional asistirán cierto número de personas de distintos países. Es normal que en este tipo de eventos algunos de los participantes conozcan más de un idioma, sin embargo, no todas las personas serán capaces de comunicarse entre sí por no hablar un idioma en común. Los organizadores se plantean si será posible encontrar a un grupo de asistentes que actúen como intérpretes y sean capaces de facilitar la comunicación entre los otros visitantes y los organizadores. Con esto en mente, los anfitriones se preguntan cuál es la menor cantidad de personas necesarias a las que deben solicitar ayuda para que establezcan la comunicación entre ellos y los asistentes. Por último, están interesados en saber si es posible que los intérpretes puedan comunicarse uno a uno.*

*Posteriormente se realizará un paseo en el que será necesario dividir a los comensales. Los organizadores desean que cada persona pueda ser capaz de hablar con al menos un miembro de cada grupo y, en caso de ser posible, que pueda interactuar con los miembros de la sección a la que pertenezcan. Dado que es exigir mucho que cada persona tenga un idioma en común con sus demás compañeros de grupo, bastará que cada persona pueda comunicar un mensaje a otro aunque sea a través de sus compañeros. ¿Será posible dividir a los invitados de tal manera que se satisfagan los deseos de los organizadores? ¿Cuál es la mayor cantidad de grupos posibles en los que se puede dividir a los invitados?.*

Podemos exhibir una solución del problema anterior a partir del estudio de las gráficas: asociando los vértices de una gráfica  $G$  con el conjunto de invitados y relacionando a dos invitados si conocen un idioma común. Los intérpretes, que los organizadores están

buscando, se traduciría a localizar un conjunto de vértices tales que todo vértice fuera del conjunto tenga un vecino en él, a este tipo de conjuntos se les conoce como absorbentes o dominantes. La segunda pregunta se encamina a encontrar el mínimo conjunto de personas traductoras dentro de evento. En el avance de la teoría se podrá ver que dichos conjuntos siempre existen en una gráfica. La tercera pregunta no sólo requiere encontrar un conjunto absorbente, sino que además todas las personas en dicho conjunto puedan hablar entre sí, esta última condición, traducida a la gráfica asociada, es equivalente a buscar un conjunto absorbente cuya gráfica inducida sea completa. Este tipo de conjuntos recibe el nombre de clan dominante.

En lo que concierne a las últimas preguntas, será necesario el seccionar a los invitados en distintos grupos, es decir, encontrar una partición de los vértices de la gráfica asociada, pero se requiere más que simplemente agrupar de manera arbitraria a los miembros del evento: la primera condición se traduce a que cada elemento de la partición sea un conjunto absorbente, pues se requiere que cada invitado pueda interactuar verbalmente con al menos una persona de los otros grupos. Este tipo de particiones es ampliamente estudiado y al cardinal de una partición de esta naturaleza, que además tenga la mayor cantidad de elementos sobre cualquier otra partición con estas mismas características, se le conoce como el número domático de la gráfica y se representa por  $d(G)$ .

Para solucionar la segunda condición de este mismo problema se requiere que cada sección de invitados pueda interactuar con los otros miembros del grupo al que pertenece usando a los otros integrantes como intermediarios. Traduciendo ésto a la gráfica asociada, los conjuntos de la partición deben ser tales que su gráfica inducida sea conexa, pues con ello, todas las personas de un mismo grupo podrán interactuar entre sí a través de los otros miembros. Este tipo de particiones en conjuntos absorbentes conexos también es estudiado, a la máxima cantidad de elementos en una partición de esta naturaleza se le conoce como el número domático conexo de la gráfica. Los conceptos análogos en digráficas a clan dominante y número domático conexo son el objeto de estudio de esta tesis.

Con el ejemplo antes mencionado derivaremos la noción formal de un conjunto dominante en gráficas: si  $G$  es una gráfica y  $S \subseteq V(G)$ , decimos que  $S$  es un **conjunto dominante** si todo elemento fuera de  $S$  tiene un vecino en  $S$ . A este tipo de conjunto también se le conoce como conjunto absorbente, por lo que, en lo consecuente a resultados en gráficas, procederemos a usar ambos nombres de manera indistinta. El estudio de los conjuntos absorbentes dio pie al desarrollo de muchos resultados. Todas las gráficas tienen un conjunto dominante, pues su conjunto de vértices satisfacen esta definición, por lo que nos interesa encontrar al conjunto absorbente más pequeño por cardinalidad en una gráfica. Al número de elementos en dicho conjunto se le llamó el número de dominación de la gráfica y se denota por  $\gamma(G)$ . Existen muchos resultados referentes al número de dominación en gráficas, por ejemplo, el siguiente teorema establece una relación entre éste y el grado máximo de la gráfica.

**Teorema 2.1.1** [19] *Si  $G$  es una gráfica con  $p$  vértices, entonces*

$$\frac{p}{1 + \Delta(G)} \leq \gamma(G) \leq p - \Delta(G).$$

También podemos encontrar cotas entre el número de vértices y el número de dominación de la gráfica, como el siguiente teorema atribuido a Oystein Ore.

**Teorema 2.1.2** [19] *Si  $G$  es una gráfica con  $p$  vértices tal que  $\delta(G) \geq 1$ , entonces*

$$\gamma(G) \leq \frac{p}{2}.$$

Conforme la teoría avanzaba se presentaban nuevos retos y fue evidente que no todos los problemas de dominación se solucionaban únicamente con los conjuntos absorbentes, sino que en algunos casos hacía falta pedir algo más que sólo la dominación propia. De ello se derivaron diversos tipos de dominación en gráficas, por ejemplo, Cockayne, Dawes y Hedetniemi[10] introdujeron en 1980 el concepto de **dominación total**: no solamente los elementos en el complemento del conjunto son dominados por el conjunto, sino también los elementos propios. Otro tipo de dominación que se definió es la de **clan dominante**. Este tipo de conjunto, además de la absorbencia, satisface que la gráfica inducida por él es una gráfica completa. Al mínimo número de elementos en un clan dominante de  $G$  se le llamó el **número de dominación por clanes** de  $G$  y se denotó como  $\gamma_{cl}(G)$ .

En 1990, Margaret B. Cozzens y Laura L. Kelleher publicaron su artículo *Dominating Cliques in Graphs* [12], donde dan condiciones suficientes para la existencia de un clan dominante en gráficas.

**Teorema 2.1.3** [12] *Si  $G$  es una gráfica conexa y no tiene a  $P_5$  ni  $C_5$  como subgráfica inducida, entonces  $G$  tiene un clan dominante.*

Otro tipo de propiedad estudiada es la conexidad, a los conjuntos dominantes que inducen una gráfica conexa se les conoce como **conjuntos dominantes conexos**. El concepto fue introducido por Laskar y Hedetniemi en su artículo *Connected Domination in Graphs* [20], publicado en el año de 1984.

La teoría en torno a estos conjuntos es desarrollada gracias a sus aplicaciones en redes informáticas, por lo que los artículos referentes al concepto se han centrado más en el estudio de algoritmos encaminados a localizar conjuntos dominantes conexos en una gráfica.

En 1977, Cockayne y Hedetniemi [11] relacionaron a los conjuntos dominantes con particiones de los vértices de la gráfica, comenzando el desarrollo de la teoría para

encontrar una partición de los vértices en conjuntos dominantes, dicha partición siempre es posible localizarla pues el conjunto de vértices es dominante. A la mayor cantidad posible de elementos en una partición de esta naturaleza se le conoce como el **número domático** de la gráfica, denotado por  $d(G)$ . Cockayne, Dawes y Hedetniemi en su artículo *Total domination in graphs* [10] introducen el concepto de **número domático total** de una gráfica, dicho número es la mayor cantidad posible de elementos en una partición de los vértices de la gráfica en conjuntos dominantes totales. En [20] Laskar y Hedetniemi introducen el concepto de **número domático conexo** de una gráfica como la mayor cantidad de elementos posibles en una partición de los vértices de la gráfica en conjuntos dominantes conexos, a dicho número se le denota por  $d_c(G)$ . Nosotros definiremos un concepto análogo en digráficas a éste último. En 1986 Zelinka publica su artículo *Connected Domatic Number of a Graph* [27], retomando el concepto de número domático conexo; las primeras cotas que exhibe relacionan la conexidad puntual de la gráfica con el número domático conexo de la gráfica.

**Teorema 2.1.4** [27] *Si  $G$  es una gráfica conexa no completa,  $d_c(G)$  su número domático conexo y  $\kappa(G)$  su número de conexidad por vértices, entonces:*

$$d_c(G) \leq \kappa(G).$$

En este mismo artículo, Zelinka se plantea la relación existente entre el número domático conexo de una gráfica y el número domático conexo de esa misma gráfica al eliminar alguna arista, obteniendo un resultado general.

**Teorema 2.1.5** [27] *Si  $G$  es una gráfica conexa con al menos tres vértices y  $a \in A(G)$  no es un puente, entonces  $d_c(G) - 2 \leq d_c(G - a)$ .*

Posteriormente, en 2001 Hartnell y Rall [17] continúan el estudio de estas particiones en gráficas planas, ellos muestran algunas cotas generales que son de utilidad durante las demostraciones de su artículo, siendo de importancia la enunciada a continuación:

**Lema 2.1.1** [17] *Si  $G$  es una gráfica conexa con  $p$  vértices y número domático conexo  $d_c(G) = k$ , entonces  $G$  tiene al menos  $\frac{k+1}{2}p - k$  aristas.*

Con el lema anterior, logran acotar el número domático conexo de todas las gráficas planas, exhibiendo además la única gráfica plana que satisface la igualdad.

**Teorema 2.1.6** [17] *Si  $G$  es una gráfica plana, entonces el número domático conexo de  $G$  es a lo más cuatro y la única gráfica plana que satisface la igualdad es  $K_4$ .*

## 2.2. Conjuntos Absorbentes en Digráficas.

Las definiciones de absorbencia en gráficas se extendieron a la teoría de digráficas. Debido a que los elementos del conjunto de flechas de una digráfica son parejas ordenadas, podemos encontrar tres posibles tipos de dominación. Si  $D$  es una digráfica y  $S \subseteq V(D)$ , diremos que  $S$  es un **conjunto dominante** si cualquier elemento fuera de  $S$  tiene al menos un invecino y un exvecino en  $S$ , análogamente, diremos que  $S$  es un **conjunto semidominante interior** o **absorbente** si cualquier elemento en  $V(D) \setminus S$  tiene un exvecino en  $S$  y por último, decimos que  $S$  es un **conjunto semidominante exterior** si cualquier elemento ajeno a  $S$  tiene un invecino en  $S$ .

En el siguiente ejemplo se muestran los tres tipos de dominación en una digráfica. El conjunto  $R = \{x_1, x_2\}$  es un conjunto semidominante interior, el conjunto  $V = \{x_5, x_6\}$  es un conjunto semidominante exterior y el conjunto  $A = \{x_3, x_4\}$  es un conjunto dominante.

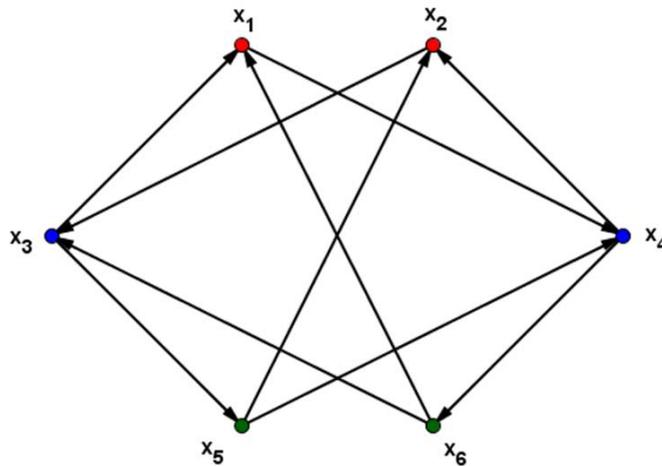


Fig. 2.2.1: Digráfica en la que se ejemplifican tres tipos de dominación en digráficas.

Al igual que en gráficas, en toda digráfica es posible encontrar estos tres tipos de conjuntos dominantes, pues su conjunto de vértices es un conjunto dominante, semidominante interior y semidominante exterior simultáneamente, esto da pie a tratar de identificar los conjuntos que sean mínimos respecto a la cantidad de vértices. El mínimo de los cardinales de los conjuntos dominantes de una digráfica  $D$  se llama **número dominante**, denotado por  $\gamma(D)$ , análogamente, el mínimo de los cardinales de los conjuntos semidominantes interiores y exteriores de  $D$  se llaman **número semidominante interior**, denotado por  $\gamma^-(D)$ , y **número semidominante exterior**, denotado por  $\gamma^+(D)$ , respectivamente.

Existen muchos resultados que hablan de dominación en digráficas y sus aplicaciones son muy variadas, sin embargo, no todos los problemas presentes se resuelven con la definición de conjunto dominante, semidominante interior o semidominante exterior, dando pie a la búsqueda de estos conjuntos que además satisfagan alguna otra propiedad. Por ejemplo, Von Neumann y Morgenstern[24] definen el concepto de **núcleo** como un conjunto de vértices que sea absorbente e independiente.

Otro ejemplo, derivado de los ya mencionados en gráficas, tiene que ver con los clanes dominantes. Decimos que un conjunto de vértices de una digráfica  $D$  es un **conjunto absorbente semicompleto** si es un conjunto absorbente y la digráfica inducida por dicho conjunto es semicompleta, a la menor cardinalidad de los conjuntos absorbentes semicompletos de  $D$  se le llamará **número inferior de absorbencia por conjuntos semicompletos** de la digráfica y se denotará por  $\gamma_{cas}(D)$ , análogamente, al mayor cardinal de los conjuntos semicompletos se le llamará **número superior de absorbencia por conjuntos semicompletos** y se denotará por  $\Gamma_{cas}(D)$ . Aunque existen artículos que dan avances en la teoría de los clanes dominantes, poca información se encontró sobre los conjuntos absorbentes semicompletos, sin embargo, en este trabajo mostraremos algunos resultados básicos en lo referente a esta clase de conjuntos.

Notemos que las digráficas semicompletas satisfacen ser débiles conexas, con ello, es natural pensar en una generalización de los conjuntos absorbentes semicompletos a partir del concepto de conexidad. En 2007, Arumugam, Jacob y Volkmann[1] definen el concepto de **conjunto absorbente débil** de una digráfica como un conjunto absorbente que induzca una digráfica débil, al mínimo cardinal de todos los conjuntos absorbentes débiles de una digráfica  $D$  le llamaron el **número de dominación débil de  $D$**  y se denotó por  $\gamma_{wc}(D)$ . En ese mismo artículo los autores ofrecen un primer acercamiento a la teoría de dominación conexa en digráficas.

Anteriormente ya se había hablado sobre el número domático de una gráfica y se mostraron algunas variantes expuestas por diversos autores. Bohdan Zelinka, en su artículo *Semidomatic numbers of directed graphs*[28], publicado en 1986, establece las definiciones análogas al número domático para digráficas, en otras palabras, define lo que es una partición de los vértices de una digráfica en conjuntos semidominantes interiores y semidominantes exteriores, al máximo número posible de elementos en una partición de esta naturaleza le llama el **número semidomático interior** y **número semidomático exterior** respectivamente, ambos denotados por  $d^-(D)$  y  $d^+(D)$ . En ese artículo, Zelinka ofrece diversos resultados que acotan ambos números, por ejemplo:

**Teorema 2.2.1** [28] *Sea  $D$  una digráfica, si  $\delta^-(D)$  y  $\delta^+(D)$  son su ingrado y exgrado mínimo respectivamente, entonces*

$$d^-(D) \leq \delta^+(D),$$

$$d^+(D) \leq \delta^-(D).$$

También fue posible relacionar número semidomático interior y exterior con el número de vértices de la digráfica, si ésta satisface cierta propiedad:

**Teorema 2.2.2** [28] *Si  $D$  es una digráfica con  $p$  vértices sin flechas simétricas, entonces:*

$$d^-(D) \leq \lceil \frac{p}{2} \rceil,$$

$$d^+(D) \leq \lceil \frac{p}{2} \rceil.$$

Más aún, Zelinka logra construir un torneo con  $p$  vértices en el que su número semidomático interior y exterior estén dados:

**Teorema 2.2.3** [28] *Si  $n_1$ ,  $n_2$  y  $p$  son tres enteros positivos tales que  $n_1$  y  $n_2$  son a lo más  $\frac{p}{2}$ , entonces existe un torneo  $T$  con  $p$  vértices tal que  $d^-(T) = n_1$  y  $d^+(T) = n_2$ .*

Recientemente, Germán Benítez [5] en su tesis de licenciatura presentada en 2014, continuó con el estudio de este tipo de particiones, mostrando resultados en algunas familias de digráficas que incluyen a las digráficas bipartitas y digráficas completas. Además, se demostró que si en una digráfica  $D$  se tiene que  $d^-(D)$  es al menos dos, siempre es posible encontrar una bipartición en conjuntos semidominantes interiores:

**Lema 2.2.1** [5] *Si  $D$  es una digráfica tal que  $d^-(D) = n$  con  $n \geq 2$ , entonces existe una bipartición semidomática interior de  $V(D)$ .*

Benítez también presenta resultados en la digráfica de líneas, logrando acotar inferiormente el número semidomático interior de la digráfica de líneas con el número semidomático interior de la digráfica original:

**Teorema 2.2.4** [5] *Si  $D$  es una digráfica tal que  $d^-(D) = n \geq 2$ , entonces*

$$d^-(L(D)) \geq n.$$

Recordemos que Zelinka [27] ya había trabajado particiones domáticas conexas en gráficas, nosotros pretendemos extender dicho estudio a digráficas. Definiremos, dada una digráfica  $D$ , una **partición semidomática interior fuerte de  $D$**  como una partición de  $V(D)$  en conjuntos semidominantes interiores y que cada elemento de la partición induzca una digráfica fuerte, el **número semidomático interior fuerte de  $D$** , denotado por  $d_{sf}^-(D)$ , se definirá como

$$d_{sf}^-(D) = \text{mín}\{|S| \mid S \in \mathfrak{F}\}.$$

Donde  $\mathfrak{F}$  es la colección de particiones semidomáticas interiores fuertes de  $V(D)$ . En lo consecuente mostraremos resultados que involucren a los conjuntos absorbentes semicompletos y cotas para el número superior e inferior de absorbencia por conjuntos semicompletos. También se mostrarán resultados derivados de la existencia de particiones semidomáticas interiores fuertes, así como cotas para aproximar el número semidomático interior fuerte en digráficas.

# Capítulo 3.

## Conjuntos Absorbentes Semicompletos.

En este capítulo se introduce el concepto de conjunto absorbente semicompleto, así como el número superior e inferior de absorberencia por conjuntos semicompletos. Se exhibirá una familia de digráficas para las cuales dichos números estén dados y cotas relacionadas con el número de flechas de la digráfica y el número superior de absorberencia por conjuntos semicompletos, además probaremos la cota es justa exclusivamente en los torneos, también mostraremos que existen digráficas en las que los número superior e inferior de absorberencia por conjuntos semicompletos son distintos. Posteriormente, daremos propiedades de los conjuntos absorbentes semicompletos que sean mínimos o máximos por cardinalidad sobre todos los conjuntos semicompletos de la digráfica.

### 3.1. Definiciones y Resultados Básicos en los Conjuntos Absorbentes Semicompletos.

Cozzens y Kelleher [12] introducen el concepto de *clan dominante* como sigue: dada una gráfica  $G$ , un subconjunto  $S$  de  $V(G)$  es un clan dominante si  $S$  es dominante y  $G[S]$  es completa. El *número de dominación por clanes de  $G$* , denotado por  $\gamma_d(G)$ , se definió como

$$\gamma_d(G) = \min\{|S| \mid S \text{ es un clan dominante en } G\}.$$

Para definir un concepto análogo a un clan dominante en digráficas, será necesario que retomemos el concepto de conjunto absorbente en digráficas e introducir la definición de un conjunto semicompleto.

**Definición 3.1.1** Sean  $D$  una digráfica y  $U \subseteq V(D)$ . Decimos que  $U$  es **absorbente** si para todo vértice  $x \in V(D) \setminus U$ , existe  $y \in U$  tal que  $(x, y) \in F(D)$ .

**Definición 3.1.2** Sean  $D$  una digráfica y  $U \subseteq V(D)$ . Decimos que  $U$  es un **conjunto semicompleto de  $D$**  si  $D[U]$  es una digráfica semicompleta.

Con las dos definiciones anteriores, podemos establecer la noción de un conjunto absorbente semicompleto.

**Definición 3.1.3** Sean  $D$  una digráfica y  $S \subseteq V(D)$ . Decimos que  $S$  es un **conjunto absorbente semicompleto** si  $S$  es absorbente y semicompleto.

Existen digráficas que no tienen un conjunto absorbente semicompleto. La digráfica exhibida en la *figura 3.1.1* no tiene dicha estructura, pues los vértices  $z$  y  $v$  no son absorbidos por ningún vértice, por lo que deben formar parte de los elementos de todo conjunto absorbente, sin embargo, no existe adyacencia entre  $z$  y  $v$ , haciendo imposible el encontrar un conjunto absorbente semicompleto.

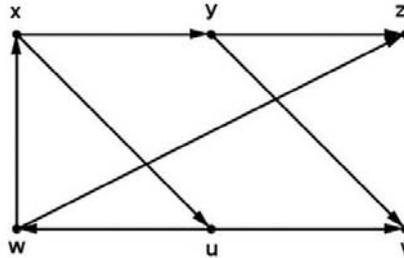


Fig. 3.1.1: Digráfica sin un conjunto absorbente semicompleto.

Existen también familias de digráficas que tienen un conjunto absorbente semicompleto, como las digráficas semicompletas, pues trivialmente sus vértices son un conjunto absorbente. Sin embargo, no únicamente las digráficas semicompletas tienen un conjunto de esta naturaleza, un ejemplo de ello es la digráfica mostrada en la *figura 3.1.2*, pues  $\{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5\}$  es un conjunto absorbente semicompleto.

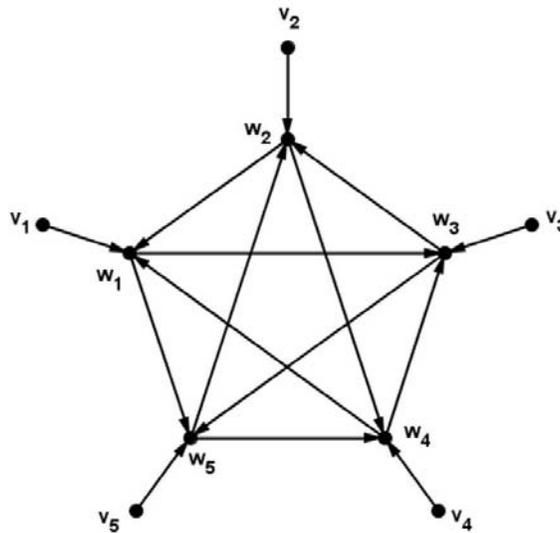


Fig. 3.1.2: Ejemplo de una digráfica con un conjunto absorbente semicompleto.

El siguiente lema muestra que podemos construir, dados dos naturales  $m$  y  $n$  no nulos tales que  $n \geq m$ , una digráfica con  $n$  vértices que contenga un conjunto absorbente semicompleto con  $m$  vértices:

**Lema 3.1.1** *Si  $m$  y  $n$  son dos naturales no nulos tales que  $n \leq m$ , entonces existe una digráfica con  $m$  vértices que contiene un conjunto absorbente semicompleto con  $n$  vértices.*

Demostración.

Sean  $m$  y  $n$  naturales tales que  $n \leq m$ . Consideremos a  $M$  un conjunto con  $m$  elementos y  $N \subseteq M$  un conjunto con  $n$  elementos. Sea  $D$  la digráfica cuyo conjunto de vértices es  $M$ , entre cada par de vértices en  $N$  existe al menos una flecha y los vértices de  $M \setminus N$  son absorbidos por el conjunto  $N$ , es decir, para todo elemento  $u$  en  $M \setminus N$  existe al menos un vértice  $v$  en  $N$  tal que  $(u, v) \in F(D)$ . Notemos que  $N$  es un conjunto absorbente semicompleto en  $D$ , por lo que  $D$  es una digráfica con  $m$  vértices y un conjunto absorbente semicompleto con  $n$  vértices, terminando la demostración del enunciado.

□

Cozzens y Kelleher [12] encontraron condiciones necesarias para la existencia de un clan dominante en gráficas a partir de las subdigráficas inducidas:

**Teorema 3.1.1** [12] *Si  $G$  es una gráfica conexa sin  $P_5$  y  $C_5$  como subgráficas inducidas, entonces  $G$  tiene un clan dominante.*

En digráficas, las condiciones del *teorema 3.1.1* no son suficientes para asegurar la existencia de un conjunto absorbente semicompleto, por ejemplo, la digráfica  $P_4$  no contiene a  $P_5$  como subdigráfica inducida y  $P_4$  no tiene un conjunto absorbente semicompleto, ya que el vértice  $x_4$  no es absorbido por ningún otro vértice, por lo que debe pertenecer a cualquier conjunto absorbente, en tal caso, los únicos conjuntos semicompletos que contienen a  $x_4$  son  $\{x_4\}$  y  $\{x_3, x_4\}$ , pero ninguno de ellos absorbe al vértice  $x_1$ , como se muestra en la *figura 3.1.3*.



Fig. 3.1.3: Las condiciones del *teorema 3.1.1* no son suficientes para la existencia de conjuntos absorbentes semicompletos en digráficas.

Podemos notar que si una gráfica tiene un clan dominante, no todas las orientaciones de dicha gráfica tendrán un conjunto absorbente semicompleto, por ejemplo, la digráfica exhibida anteriormente en la *figura 3.1.3* no tiene un conjunto absorbente semicompleto y es una orientación de la trayectoria no orientada con cuatro vértices, la cual sí tiene un clan dominante. Sin embargo, el *teorema 3.1.1* es de utilidad para orientar algunos tipos de gráficas de modo que la digráfica resultante tenga un conjunto absorbente semicompleto:

**Corolario 3.1.1** *Si  $G$  es una gráfica conexa sin  $P_5$  y  $C_5$  como subgráficas inducidas, entonces existe una orientación de  $G$  que contiene un conjunto absorbente semicompleto.*

*Demostración*

Sea  $G$  una gráfica sin  $P_5$  y  $C_5$  como subgráficas inducidas. Por el *teorema 3.1.1*,  $G$  tiene un clan dominante, digamos  $S$ . Como  $S$  es conjunto dominante, para todo  $x \in V(G) \setminus S$  existe  $s(x) \in S$  tal que  $a_x = (s(x), x) \in A(G)$ .

Orientando la gráfica  $G$  de tal forma que la dirección de  $a_x$  sea de  $x$  hacia  $s(x)$  y el resto de las aristas tengan una orientación arbitraria, obtenemos una orientación de  $G$  en la que  $S$  es un conjunto absorbente semicompleto, mostrando el enunciado.

□

Notemos que si  $D$  tiene un conjunto absorbente semicompleto  $S$ , entonces  $D$  es débil conexa. La demostración es bastante sencilla si se considera que en la gráfica subyacente  $G$  de  $D$ ,  $S$  induce un clan dominante y por ello,  $G$  es conexa, por lo que  $D$  es débil. Sin embargo, no podemos asegurar la conexidad unilateral o fuerte en una digráfica que tenga un conjunto absorbente semicompleto, en la *figura 3.1.4* se muestra una digráfica con un conjunto absorbente semicompleto  $\{u, v, z\}$ , pero que no es unilateralmente conexa, pues no hay trayectorias entre  $x$  y  $w$ . Por consiguiente, esta misma digráfica no es fuerte.

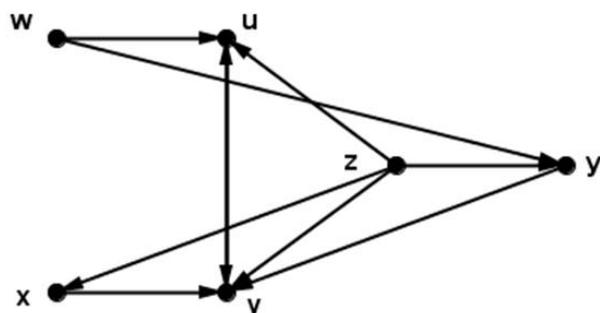


Fig. 3.1.4: La existencia de un conjunto absorbente semicompleto no asegura la conexidad fuerte ni unilateral de la digráfica.

Ahora mostraremos algunas propiedades estructurales sobre las digráficas que tienen un conjunto absorbente semicompleto en relación a las componentes fuertes terminales.

**Proposición 3.1.1** *Si  $D$  es una digráfica con un conjunto absorbente semicompleto, entonces  $D$  tiene una única componente fuerte terminal.*

Demostración:

Sean  $S$  un conjunto absorbente semicompleto y  $H$  una componente fuerte terminal de  $D$ . Si  $S$  no interseca a  $H$ , entonces debe existir una  $HS$ -flecha, pues  $S$  es absorbente, lo cual es una contradicción ya que  $H$  es una componente fuerte terminal de  $D$ . Así,  $S$  interseca a todas las componentes fuertes terminales de  $D$ . Si suponemos que  $D$  tiene una componente terminal  $H'$  distinta de  $H$ ,  $S$  interseca a ambas componentes, sin embargo, dado que  $D[S]$  es semicompleta debe existir una  $HH'$ -flecha o una  $H'H$ -flecha, contradiciendo el hecho de que tanto  $H$  como  $H'$  son componentes fuertes terminales, concluyendo que  $D$  sólo puede tener una única componente fuerte terminal.

□

El recíproco de la proposición anterior no necesariamente es cierto, cualquier trayectoria con más de cuatro vértices tiene una única componente fuerte terminal, pero no tiene un conjunto absorbente semicompleto, como se mostró en la *figura 3.1.3*.

Sin embargo, podemos encontrar una familia de digráficas en las que el recíproco es verdadero, a saber, las digráficas transitivas, esto lo probaremos en la siguiente proposición.

**Proposición 3.1.2** Sea  $D$  una digráfica transitiva.  $D$  tiene un conjunto absorbente semicompleto si y sólo si  $D$  tiene una única componente fuerte terminal.

Demostración:

Para probar la condición necesaria del enunciado basta ver que, por la *proposición 3.1.1*, como  $D$  tiene un conjunto absorbente semicompleto, entonces tiene una única componente fuerte terminal.

Para el recíproco del enunciado bastará ver que la única componente fuerte terminal de  $D$  es un conjunto absorbente semicompleto:

Sea  $H$  la única componente fuerte terminal de  $D$ .

Afirmación 1.  $H$  es semicompleta.

Sean  $\{x, z\} \subseteq V(H)$ . Dado que  $H$  es fuerte, existe un  $xz$ -camino en  $H$ , por ser  $D$  transitiva y por el *lema 1.2.6*,  $(x, z) \in F(D)$ , mostrando que  $H$  es semicompleta.

Afirmación 2.  $V(H)$  es absorbente.

Sea  $x \in V(D) \setminus V(H)$ , dado que  $x$  está en alguna componente fuerte de  $D$ , digamos  $H_1$ , y por ser  $H$  la única componente fuerte terminal de  $D$ , se deduce del *lema 1.2.7* que existe una  $H_1H$ -trayectoria en  $D$ , siguiéndose de ello que existe una  $xz$ -trayectoria en  $D$  para algún  $z \in V(H)$ . Por último, como  $D$  es transitiva, por el *lema 1.2.6* se tiene que  $(x, z) \in F(D)$ , demostrando que  $H$  es absorbente.

Por las afirmaciones anteriores, podemos concluir que  $H$  es un conjunto absorbente semicompleto.

□

Aparentemente, los conjuntos absorbentes semicompletos están relacionados con la componente fuerte terminal en ámbitos de contención. Sin embargo, no hay propiedades rescatables respecto a la contención entre un conjunto absorbente semicompleto y la componente fuerte terminal de la digráfica. Por ejemplo, en la *figura 3.1.5* se muestra una digráfica en la cual ningún conjunto absorbente semicompleto está contenido propiamente en los vértices de la componente fuerte terminal ya que el vértice  $y$  es la única componente fuerte terminal de  $D$ , pero no es un vértice absorbente pues  $(v, y) \notin F(D)$ , por lo cual, todo conjunto absorbente semicompleto debe tener al menos otro vértice distinto de  $y$ , por ejemplo,  $\{y, z\}$  es un conjunto absorbente semicompleto.

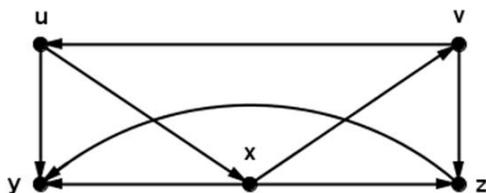


Fig. 3.1.5: No necesariamente hay contención de los vértices de un conjunto absorbente semicompleto en los vértices de la componente fuerte terminal.

Análogamente, la existencia de un conjunto absorbente semicompleto no implica que el conjunto de vértices de la única componente fuerte terminal de  $D$  esté contenido propiamente en el conjunto absorbente semicompleto, como se muestra en la *figura 3.1.6*. Los vértices  $\{u, z, v\}$  son los elementos de la componente fuerte terminal de  $D$ , sin embargo,  $\{u, z\}$  es un conjunto absorbente semicompleto.

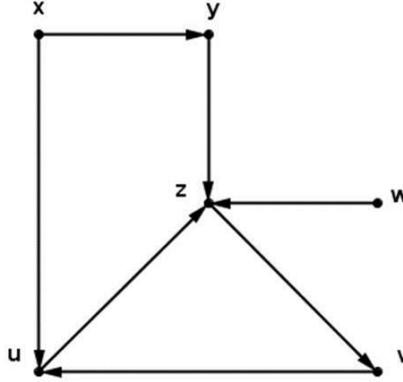


Fig. 3.1.6: Ejemplo de una digráfica donde no hay contención de los vértices de la componente fuerte terminal en los vértices de un conjunto absorbente semicompleto

### 3.2. Números de Absorbencia por Conjuntos Semicompletos.

De la *figura 3.1.6* podemos derivar otros conceptos. Aunque  $\{u, z\}$  es un conjunto absorbente semicompleto, el conjunto  $\{u, z, v\}$  también es un conjunto absorbente semicompleto de cardinalidad mayor, poniendo en evidencia la existencia de conjuntos absorbentes semicompletos con diferentes cardinalidades. En el siguiente apartado procederemos a realizar el análisis sobre los conjuntos absorbentes semicompletos que sean máximos o mínimos por cardinalidad y de ello se podrán dar cotas para el número de flechas de la digráfica, así como propiedades de la digráfica a partir del conocimiento de la cardinalidad de dichos conjuntos.

**Definición 3.2.1** Sea  $D$  una digráfica con un conjunto absorbente semicompleto. Definimos el **número superior de absorbencia por conjuntos semicompletos de  $D$** , denotado por  $\Gamma_{cas}(D)$ , como:

$$\Gamma_{cas}(D) = \text{máx}\{|S| \mid S \text{ es un conjunto absorbente semicompleto de } D\}$$

Análogamente, definimos el **número inferior de absorbencia por conjuntos semicompletos de  $D$** , denotado por  $\gamma_{cas}(D)$ , como:

$$\gamma_{cas}(D) = \min\{|S| \mid S \text{ es un conjunto absorbente semicompleto de } D\}.$$

Si  $S$  es un conjunto absorbente semicompleto y  $|S| = \Gamma_{cas}(D)$ , diremos que  $S$  es un  $\Gamma_{cas}$ -conjunto y si  $|S| = \gamma_{cas}(D)$ , entonces diremos que  $S$  es un  $\gamma_{cas}$ -conjunto.

Podemos exhibir, bajo ciertas condiciones, digráficas para las cuales el número superior e inferior de absorbencia por conjuntos semicompletos estén dados, como se muestra en la siguiente proposición:

**Proposición 3.2.1** Sean  $n$ ,  $m$  y  $k$  naturales tales que  $2 \leq n \leq m \leq k$  y  $k = m + n$ . Existe una digráfica  $D$  con  $k$  vértices tal que  $\Gamma_{cas}(D) = m$  y  $\gamma_{cas}(D) = n$ .

Demostración:

Sean  $V$  un conjunto con  $k$  elementos,  $U \subseteq V$  con  $m$  elementos y  $W \subseteq U$  con  $n$  elementos. Hay que notar que siempre es posible encontrar dichos conjuntos pues  $n \leq m \leq k$ . Para los elementos en  $W$ , tomamos el conjunto de parejas ordenadas  $F_1 = \{(x, y) \mid \{x, y\} \subseteq W, x \neq y\}$  y análogamente, para los elementos de  $U \setminus W$  tomemos  $F_2 = \{(x, y) \mid \{x, y\} \subseteq U \setminus W, x \neq y\}$ , definimos como  $F_3 = \{(x, y) \mid x \in U \setminus W, y \in W\}$ .

Si  $V \setminus U = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  y  $W = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ , entonces nombramos  $F_4 = \{(v_i, w_i) \mid i \in \{1, 2, \dots, n\}\}$ . Por último, sean  $F = F_1 \cup F_2 \cup F_3 \cup F_4$  y  $D$  la digráfica cuyos vértices son los elementos del conjunto  $V$  y sus flechas son el conjunto  $F$ .

Observemos que por construcción de  $D$ , el máximo conjunto de vértices por contención que induce una digráfica semicompleta es  $U$ , por lo cual, si  $D$  tiene un conjunto semicompleto absorbente con más de tres vértices, éste debe estar contenido en  $U$ .

Afirmación 1.  $\Gamma_{cas}(D) = m$ .

Probaremos primero que  $U$  es un conjunto absorbente. Sea  $v_i \in V \setminus U$ , por definición de  $F_4$ ,  $(v_i, w_i) \in F_4 \subseteq F$  y dado que  $W \subseteq U$ , entonces  $U$  es absorbente. Por la observación anterior,  $U$  es un  $\Gamma_{cas}$ -conjunto, concluyendo que  $\Gamma_{cas}(D) = m$ .

Afirmación 2.  $\gamma_{cas}(D) = n$ .

Demostraremos primero que  $W$  es un conjunto absorbente. Sea  $x \in V \setminus W$ , consideremos dos casos sobre  $x$ :

Caso 1.  $x \in V \setminus U$ .

Supongamos que  $x = v_i$ , en cuyo caso,  $(v_i, w_i) \in F_4 \subseteq F$ .

Caso 2.  $x \in U \setminus W$ .

Si  $y \in W$  es arbitrario, por definición de  $F_3$ ,  $(x, y) \in F_3 \subseteq F$ .

Del caso 1 y el caso 2, concluimos que  $W$  es absorbente.

Ahora sólo falta ver que  $W$  es un  $\gamma_{cas}$ -conjunto. Bastará probar que cualquier conjunto semicompleto con menos de  $n$  vértices no es un conjunto absorbente. Sea  $W'$  un conjunto semicompleto tal que  $|W'| < |W|$ . Notemos que existe  $v_i \in (V \setminus U) \setminus W'$  tal

que  $w_i \notin W'$ , pues en caso contrario, si para todo  $v_i \in (V \setminus U) \setminus W'$  sucede que  $w_i \in W'$ , entonces  $W'$  tiene al menos tantos elementos como elementos  $v_i$  hay en  $(V \setminus U) \setminus W'$  más los elementos contenidos en  $(V \setminus U) \cap W'$ , esto es:

$$|W'| \geq |(V \setminus U) \setminus W'| + |(V \setminus U) \cap W'| = (k - m - |(V \setminus U) \setminus W'|) + |(V \setminus U) \setminus W'| = k - m = n.$$

Lo anterior es una contradicción al hecho que  $|W'| < |W|$ . Por ello, existe  $v_i \in (V \setminus U) \setminus W'$  tal que  $w_i \notin W'$ . Así, por construcción de  $D$ ,  $W'$  no absorbe a  $v_i$ , lo cual es una contradicción pues  $W'$  es un conjunto absorbente, concluyendo que no es posible que  $|W'| < |W|$ , por lo cual  $\gamma_{cas}(D) = n$ .

Por lo tanto,  $D$  es una digráfica con  $k$  vértices tal que  $\Gamma_{cas}(D) = m$  y  $\gamma_{cas}(D) = n$ .

□

En la *figura 3.2.1* se muestra el ejemplo de una digráfica con 10 vértices,  $\Gamma_{cas}(D) = 7$  y  $\gamma_{cas}(D) = 3$ . Notemos que en dicha digráfica, el conjunto  $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$  es un  $\Gamma_{cas}$ -conjunto, mientras que  $\{x_5, x_6, x_7\}$  es un  $\gamma_{cas}$ -conjunto.

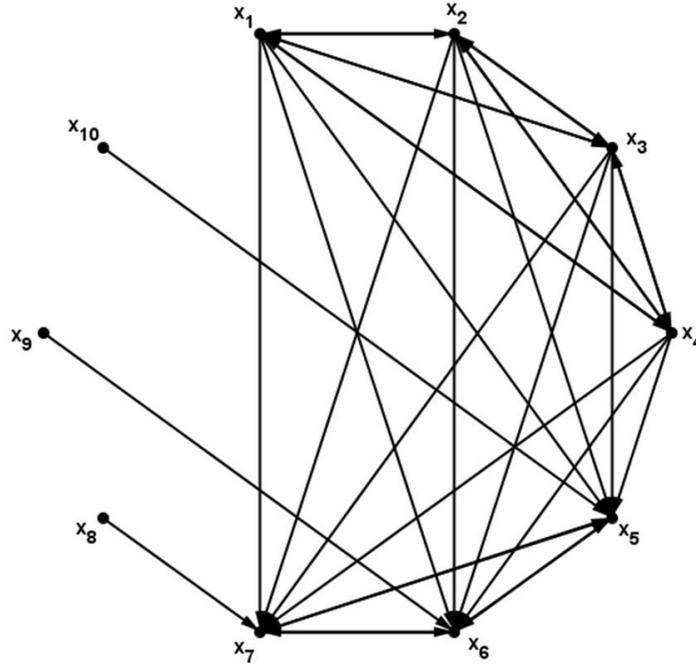


Fig. 3.2.1: Ejemplo de una digráfica construida a partir de la *Proposición 3.2.1*.

Aunque en teorías de dominación en gráficas es más frecuente trabajar con un conjunto dominante que sea mínimo respecto a la cardinalidad, puede ser de interés el encontrar conjuntos absorbentes semicompletos que además sean máximos respecto al número de elementos que contiene.

Como prueba de ello, podemos acotar inferiormente el número de flechas de una digráfica que tenga un conjunto absorbente semicompleto.

**Proposición 3.2.2** *Si  $D$  es una digráfica con un conjunto absorbente semicompleto y  $q$  flechas, entonces*

$$2q \geq \Gamma_{cas}(D)^2 - \Gamma_{cas}(D).$$

Demostración:

Sean  $D$  una digráfica con  $p$  vértices,  $q$  flechas y  $S \subseteq V(D)$  un  $\Gamma_{cas}$ -conjunto. Como  $D[S]$  es semicompleta, el número de flechas en  $D[S]$  es al menos el número de flechas de cualquier torneo con  $|S|$  vértices, así,  $|F(D[S])| \geq \frac{|S|(|S| - 1)}{2}$ . Por otro lado, como  $S$  es absorbente, para todo vértice  $x$  en  $V(D) \setminus S$ , existe  $y$  en  $S$  tal que  $(x, y) \in F(D)$ , entonces:

$$q \geq |V(D) \setminus S| + |F(D[S])| \geq (p - |S|) + \left(\frac{|S|(|S| - 1)}{2}\right).$$

En tal caso,

$$q \geq \frac{|S|^2 - 3|S| + 2p}{2}$$

Pero como  $|S| = \Gamma_{cas}(D)$ , entonces:

$$2q \geq \Gamma_{cas}(D)^2 - 3\Gamma_{cas}(D) + 2p.$$

Para concluir, notemos que en toda digráfica se tiene que  $p \geq \Gamma_{cas}(D)$ , obteniendo con ello la desigualdad buscada:

$$2q \geq \Gamma_{cas}(D)^2 - \Gamma_{cas}(D).$$

□

La siguiente proposición no sólo muestra una familia de digráficas para las que la cota es justa, sino que además prueba que dichas digráficas son las únicas que alcanzan la cota inferior.

**Proposición 3.2.3** *Sea  $D$  una digráfica con un conjunto absorbente semicompleto.  $D$  es un torneo si y sólo si  $2q = \Gamma_{cas}(D)^2 - \Gamma_{cas}(D)$ .*

Demostración.

Probaremos primero la suficiencia de la proposición.

Si  $D$  es un torneo, entonces  $p = \Gamma_{cas}(D)$  y como en todo torneo se tiene que  $2q = p(p - 1)$ , deducimos que  $2q = \Gamma_{cas}(D)^2 - \Gamma_{cas}(D)$ .

Ahora, veremos la condición necesaria de la proposición.

Sea  $D$  una digráfica con  $2q = \Gamma_{cas}(D)^2 - \Gamma_{cas}(D)$ . Procediendo por contradicción, supongamos que  $D$  no es un torneo. Consideremos los dos casos posibles sobre  $D$ :

Caso 1.  $D$  es semicompleta con al menos una flecha simétrica.

En tal caso,  $p = \Gamma_{cas}(D)$ , pero como  $D$  es semicompleta y tiene al menos una flecha simétrica, entonces  $2q > p(p - 1)$ , concluyendo así que:

$$2q > \Gamma_{cas}(D)^2 - \Gamma_{cas}(D).$$

Lo que contradice nuestra hipótesis.

Caso 2.  $D$  no es semicompleta.

Sea  $S$  un  $\Gamma_{cas}$ -conjunto. Notemos que el número de flechas en  $D[S]$  es al menos el número de flechas de cualquier torneo con  $|S|$  vértices, por lo cual:

$$2q_S \geq \Gamma_{cas}(D)^2 - \Gamma_{cas}(D).$$

Donde  $q_S$  indica el número de flechas en  $D[S]$ . Pero como  $D$  no es semicompleta y  $S$  es un conjunto absorbente semicompleto, entonces existe  $x \in V(D) \setminus S$  y existe  $y \in S$  tal que  $(x, y) \in F(D)$ . Por lo cual,  $q \geq 2q_S + 1$ , concluyendo así que  $q > \Gamma_{cas}(D)^2 - \Gamma_{cas}(D)$ , contradiciendo nuevamente nuestra hipótesis.

Dado que el *caso 1* y el *caso 2* nos llevan a una contradicción, entonces  $D$  es un torneo.

□

Observemos que podemos acotar superiormente el número de dominación por clanes de la gráfica subyacente de una digráfica dada a partir del número inferior de absorberencia por conjuntos semicompletos de esta última. Si  $S$  es un  $\gamma_{cas}$ -conjunto de  $D$ , entonces  $S$  es un clan dominante en su gráfica subyacente  $G$  y así,  $\gamma_{cl}(G) \leq \gamma_{cas}(D)$ . Sin embargo, no podemos asegurar la igualdad, la digráfica  $D$  mostrada en la *figura 3.2.2* es un ejemplo en la que se tiene la desigualdad estricta, pues  $\gamma_{cas}(D) = 4$ , ya que  $\{x_2, x_3, x_4, x_5\}$  es un  $\gamma_{cas}$ -conjunto, pero en la gráfica subyacente de  $D$ ,  $\{x_1, x_6, x_7\}$  es un clan dominante, por lo cual,  $\gamma_{cas}(D) > \gamma_{cl}(G)$ .

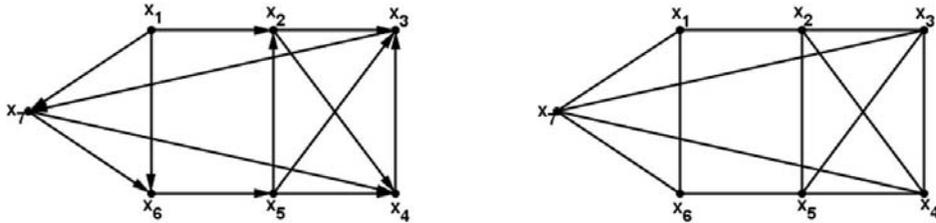


Fig. 3.2.2: El número inferior de absorberencia por conjuntos semicompletos de una digráfica y el número de dominación por clanes de su gráfica subyacente no siempre son iguales.

Ya hemos visto que los  $\Gamma_{cas}$ -conjuntos pueden ser de utilidad para brindarnos una cota sobre el número de flechas de  $D$  y los  $\gamma_{cas}$ -conjuntos acotan superiormente el número de dominación por clanes de la gráfica subyacente. Ahora veremos algunas propiedades sobre los  $\Gamma_{cas}$ -conjuntos y los  $\gamma_{cas}$ -conjuntos:

**Proposición 3.2.4** *Sea  $D$  una digráfica con al menos dos vértices y un conjunto absorbente semicompleto.*

- a)  $\Gamma_{cas}(D) > 1$ .
- b) Si  $M \subseteq V(D)$  es un  $\Gamma_{cas}$ -conjunto, entonces para todo  $u \in V(D) \setminus M$  existe  $v \in M$  tal que  $u$  y  $v$  no son adyacentes.
- c) Si  $M \subseteq V(D)$  es un  $\gamma_{cas}$ -conjunto y  $|M| > 1$ , entonces existen  $u \in M$  y  $w \in N(u) \cap (V(D) \setminus M)$  tal que para todo  $v \in M \setminus \{u\}$ ,  $(w, v) \notin F(D)$ .

Demostración.

- Inciso (a).

Sea  $S$  un  $\gamma_{cas}$ -conjunto de  $D$ . Para demostrar este inciso consideraremos dos posibles casos sobre  $S$ :

Caso 1.  $|S| > 1$ .

En este caso tenemos que  $1 < |S| = \gamma_{cas}(D) \leq \Gamma_{cas}(D)$ , por lo que  $1 < \Gamma_{cas}(D)$ .

Caso 2.  $|S| = 1$ .

Supongamos que  $S = \{x\}$ . Dado que  $p \geq 2$ , tomemos un vértice arbitrario en los invecinos de  $S$ , digamos  $z$ . Ya que  $\{x\}$  es un conjunto absorbente y  $(z, x) \in F(D)$ , entonces  $\{x, z\}$  es un conjunto absorbente semicompleto, concluyendo así que  $\Gamma_{cas}(D) \geq |\{x, z\}|$ , es decir,  $\Gamma_{cas}(D) > 1$ .

- Inciso (b)

Por contradicción, supongamos que  $M$  es un  $\gamma_{cas}$ -conjunto tal que existe  $v \in V(D) \setminus M$  tal que para todo  $x \in M$ ,  $v$  y  $x$  son adyacentes. En tal caso,  $M' = M \cup \{v\}$  es un conjunto absorbente semicompleto tal que  $|M'| > |M| = \Gamma_{cas}(D)$ , lo cual es una contradicción, concluyendo así que para todo  $v \in V(D) \setminus M$ , existe  $x \in M$  tal que  $v$  y  $x$  no son adyacentes.

- Inciso (c)

Por contradicción, supongamos que  $M$  es un  $\Gamma_{cas}$ -conjunto tal que para todo  $x \in M$  y para todo  $w \in N(x) \cap (V(D) \setminus M)$ , existe  $y \in M \setminus \{x\}$  tal que  $(w, y) \in F(D)$ . Dado que  $|M| > 1$ , existe  $x \in M$  tal que  $\delta_{D[M]}^+(x) > 1$ ; por nuestra suposición, todos los vecinos de  $x$  que no están en  $M$  son absorbidos por alguna  $y \in M$  distinta de  $x$ . Consideremos a  $M' = M \setminus \{x\}$ . Notemos que  $M'$  es un conjunto absorbente, pues para todo  $z \in V(D) \setminus M'$ , si  $z$  no era elemento de los vecinos de  $x$ , éste es absorbido por algún elemento en  $M$  distinto de  $x$ . Si  $z$  está en la vecindad de  $x$ , por nuestra suposición, existe un vértice  $y$  en  $M \setminus \{x\}$  tal que  $y$  absorbe a  $z$ . Y si  $z$  es el vértice  $x$ , por elección de dicho vértice en  $M$ , existe al menos un vértice que lo absorbe. Notemos que  $D[M']$  es semicompleta, pues  $M'$  es un subconjunto de un conjunto absorbente semicompleto.

Así,  $|M'| < |M| = \gamma_{cas}(D)$ , contradiciendo nuestra hipótesis. Por lo tanto, existe  $w \in N(x) \cap (V(D) \setminus M)$  tal que para todo  $y \in M \setminus \{x\}$  se tiene que  $(w, y) \notin F(D)$ .

□

Aunque la *proposición 3.2.4* brinda información sobre la estructura de los  $\Gamma_{cas}$ -conjuntos y los  $\gamma_{cas}$ -conjuntos, ninguno de los recíprocos de los incisos (b) y (c) son ciertos.

Para el inciso (b), la *figura 3.2.3* muestra la falsedad del recíproco, pues el conjunto  $S = \{x_3, x_4\}$  satisface que para todo  $x \in V(D) \setminus S$ , existe  $z \in S$  tal que  $x$  y  $z$  no son adyacentes, pero  $S$  no es un  $\Gamma_{cas}$ -conjunto, ya que  $S' = \{x_1, x_2, x_5, x_6\}$  es un conjunto absorbente semicompleto y  $|S| < |S'|$ .

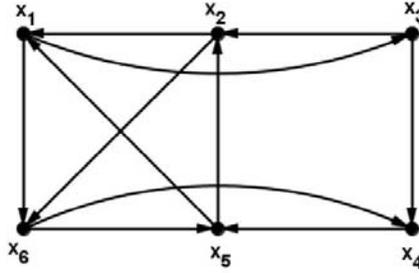


Fig. 3.2.3: Digráfica en la cual se muestra que el recíproco del inciso (b) de la *proposición 3.2.4* no es verdadero.

Para mostrar que el recíproco del inciso (c) también es falso, usemos la *figura 3.2.4*, el conjunto  $M = \{z_1, z_2, z_5\}$  satisface que  $z_5$  es tal que  $z_4 \in N(z_5) \cap (V(D) \setminus M)$  y para todo  $y \in M \setminus \{z_5\}$ ,  $(z_4, y) \notin F(D)$ , pero  $M$  no es un  $\gamma_{cas}$ -conjunto, pues  $M' = \{z_3, z_4\}$  es un conjunto absorbente semicompleto y  $|M'| < |M|$ .

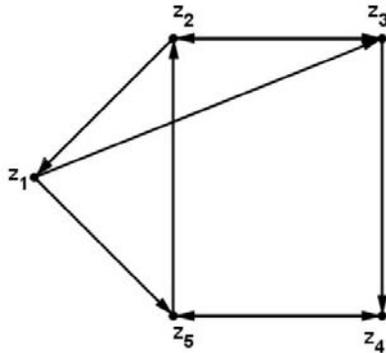


Fig. 3.2.4: Digráfica que muestra que el recíproco del inciso (c) de la *proposición 3.2.4* no es verdadero.

Aunque las condiciones del inciso (b) de la *proposición 3.2.4* no son necesarias y suficientes para que un conjunto absorbente semicompleto sea máximo por cardinalidad, sí son condiciones necesarias y suficientes para que un conjunto absorbente semicompleto sea máximo por contención de vértices.

**Proposición 3.2.5** *Sean  $D$  una digráfica y  $M \subseteq V(D)$  un conjunto absorbente semicompleto.  $M \cup \{x\}$  no es un conjunto absorbente semicompleto para todo  $x \in V(D) \setminus M$  si y sólo si para todo  $x \in V(D) \setminus M$ , existe  $z \in M$  tal que  $x$  y  $z$  no son adyacentes.*

Demostración:

Sean  $D$  una digráfica y  $M \subseteq V(D)$  un conjunto absorbente semicompleto.

Probaremos primero la condición necesaria de la proposición. Supongamos que para todo  $x \in V(D) \setminus M$ , existe  $z \in M$  tal que  $x$  y  $z$  no son adyacentes; bastará ver que para todo  $v \in V(D) \setminus M$ ,  $M \cup \{v\}$  no es un conjunto semicompleto. Sea  $v$  arbitrario en  $V(D) \setminus M$ , como existe  $z \in M$  tal que  $v$  y  $z$  no son adyacentes, entonces  $M \cup \{v\}$  no es un conjunto semicompleto.

Ahora probaremos la suficiencia de la proposición. Supongamos que  $M$  es tal que  $M \cup \{x\}$  no es un conjunto absorbente semicompleto para todo  $x \in V(D) \setminus M$ . Por esta suposición,  $M \cup \{v\}$  no es un conjunto absorbente semicompleto para todo  $v \in V(D) \setminus M$ , pero debido a que  $M$  es absorbente,  $M \cup \{v\}$  también es un conjunto absorbente, por lo cual,  $D[M \cup \{v\}]$  no puede ser semicompleta, de ello deducimos que existe  $u \in M$  tal que  $v$  y  $u$  no son adyacentes, concluyendo la demostración.

□

Ya se había mencionado anteriormente la utilidad de los números superior e inferior de absorbencia por conjuntos semicompletos de una digráfica. Por la definición de dichos números es claro que en toda digráfica  $\gamma_{cas}(D) \leq \Gamma_{cas}(D)$ . La siguiente proposición mostrará que es posible construir una digráfica en la que la desigualdad es estricta.

**Proposición 3.2.6** *Si  $p > 1$ , entonces existe una digráfica  $D$  con  $p$  vértices tal que:*

$$\gamma_{cas}(D) < \Gamma_{cas}(D).$$

Demostración.

Consideremos dos posibles casos sobre  $p$ :

Caso 1.  $p = 2$ .

En este caso,  $K_2$  satisface que  $\gamma_{cas}(K_2) < \Gamma_{cas}(K_2)$  pues  $\gamma_{cas}(K_2) = 1$  y  $\Gamma_{cas}(K_2) = 2$ .

Caso 2.  $p > 2$ .

Para este caso es posible encontrar dos naturales  $n$  y  $m$  no nulos tales que  $n < m$  y  $p - m = n$ . Por la *proposición 3.2.1*, existe una digráfica  $D$  tal que  $\Gamma_{cas}(D) = m$  y  $\gamma_{cas}(D) = n$ , concluyendo nuestra demostración. □

También mostraremos que es posible exhibir una familia de digráficas en las que se tiene la igualdad entre  $\Gamma_{cas}(D)$  y  $\gamma_{cas}(D)$ , previo a ello estableceremos una definición.

**Definición 3.2.2** Sean  $D = (V(D), F(D))$  una digráfica con  $p$  vértices donde  $V(D) = \{u_1, u_2, \dots, u_p\}$  y  $\psi = [D_1, D_2, \dots, D_p]$  una sucesión de  $p$  digráficas,  $D_i = (V(D_i), F(D_i))$ , ajenas en vértices dos a dos y ajenas en vértices respecto a la digráfica  $D$ . Definimos la **corona** de  $D$  respecto a  $\psi$ , denotada por  $\psi(D)$ , como la digráfica tal que:

$$\begin{aligned} V(\psi(D)) &= V(D) \cup (\cup_{i=1}^p V(D_i)). \\ F(\psi(D)) &= F(D) \cup (\cup_{i=1}^p F(D_i)) \cup (\cup_{i=1}^p F_i). \\ \text{Donde } F_i &= \{(x, z) \mid x \in V(D_i), z = u_i \in V(D)\}. \end{aligned}$$

**Proposición 3.2.7** Si  $p \geq 4$  es un número par, entonces existe una digráfica  $D$  con  $p$  vértices tal que  $\Gamma_{cas}(D) = \gamma_{cas}(D)$ .

*Demostración.*

Sean  $D$  un torneo arbitrario con  $\frac{p}{2}$  vértices,  $V(D) = \{w_1, w_2, \dots, w_{\frac{p}{2}}\}$ ,  $\psi$  una sucesión con  $\frac{p}{2}$  digráficas isomorfas a  $K_1$ , donde  $V(D_i) = \{u_i\}$  y  $\psi(D)$  la corona de  $D$  respecto a  $\psi$ . Afirmamos que  $\gamma_{cas}(\psi(D)) = \Gamma_{cas}(\psi(D))$ .

Por ser  $D$  un torneo,  $V(D)$  es un  $\Gamma_{cas}$ -conjunto de  $\psi(D)$ . Para mostrar la igualdad entre  $\gamma_{cas}(\psi(D))$  y  $\Gamma_{cas}(\psi(D))$ , bastará ver que no es posible encontrar un conjunto absorbente semicompleto que contenga menos de  $|V(D)|$  elementos.

Sea  $N$  un conjunto semicompleto tal que  $|N| < |V(D)|$ , afirmamos que  $N$  no es absorbente. Dado que  $|N| < |V(D)|$ , existe  $w_i \in V(D) \setminus N$  tal que  $u_i \notin N$ , pues en caso contrario, si para todo  $w_i \in V(D) \setminus N$  sucede que  $u_i \in N$ , entonces en  $N \setminus V(D)$  hay al menos tantos elementos como en  $V(D) \setminus N$ , pues en particular  $u_i \in N \setminus V(D)$ , por lo que:

$$|N| = |V(D) \cap N| + |N \setminus V(D)| \geq |V(D) \cap N| + |V(D) \setminus N| = |V(D)|.$$

Contradiciendo el hecho de que  $|N| < |V(D)|$ . Así, existe  $w_i \in V(D) \setminus N$  tal que  $u_i \notin N$ , pero por construcción de  $\psi(D)$ ,  $u_i$  no sería absorbido por  $N$ , pues el único vértice que absorbe a  $u_i$  es  $w_i$ , concluyendo que  $N$  no es un conjunto absorbente semicompleto, es

decir, cualquier conjunto semicompleto con menos de  $|V(D)| = \Gamma_{cas}(\psi(D))$  elementos no es absorbente. Por lo tanto,

$$\Gamma_{cas}(\psi(D)) = \gamma_{cas}(\psi(D)).$$

□

La siguiente proposición muestra que si  $D$  es una digráfica que satisface la igualdad  $\Gamma_{cas}(D) = \gamma_{cas}(D)$ , entonces podemos acotar inferiormente el número de vértices de  $D$  en función de  $\Gamma_{cas}(D)$ .

**Proposición 3.2.8** *Si  $D$  es una digráfica tal que  $\Gamma_{cas}(D) = \gamma_{cas}(D)$ , entonces:*

$$p \geq 2\Gamma_{cas}(D) - 1.$$

Demostración.

Sean  $D$  una digráfica tal que  $\Gamma_{cas}(D) = \gamma_{cas}(D)$  y  $U \subseteq V(D)$  un  $\gamma_{cas}$ -conjunto. Consideraremos dos casos posibles sobre  $U$ :

- Caso 1.  $D[U]$  no tiene pozos.

En este caso, afirmamos que para todo  $y \in U$  existe  $x \in V(D) \setminus U$  tal que  $N^+(x) \cap U = \{y\}$ . En caso contrario, si existe  $y \in U$  tal que para todo  $x \in N^-(y) \cap (V(D) \setminus U)$ ,  $x$  es absorbido por algún otro vértice en  $U \setminus \{y\}$ , entonces afirmamos que  $U \setminus \{y\}$  es un conjunto absorbente semicompleto. Consideremos un vértice  $u \in V(D) \setminus (U \setminus \{y\})$  y analicemos los posibles casos para  $u$ :

Caso 1.1.  $u$  no es invecino de  $y$ .

En este caso, como  $u$  es absorbido por  $U$  y no es invecino de  $y$ , entonces  $u$  es absorbido por  $U \setminus \{y\}$ .

Caso 1.2.  $u$  es invecino de  $y$ .

Por nuestra suposición, todo invecino de  $y$  es absorbido por  $U$  mediante un elemento distinto de  $y$ , concluyendo que  $u$  es absorbido por  $U \setminus \{y\}$ .

Caso 1.3.  $u = y$ .

Como  $D[U]$  no tiene pozos, entonces existe un elemento  $x \in U \setminus \{y\}$  tal que  $(y, x) \in F(D)$ , mostrando que  $y$  es absorbido por  $U \setminus \{y\}$ .

De los casos anteriores derivamos que  $U \setminus \{y\}$  es un conjunto absorbente semicompleto, lo cual es una contradicción al hecho de que  $U$  es un  $\gamma_{cas}$ -conjunto.

Con esto concluimos que para todo elemento  $y \in U$  existe  $x \in N^-(y) \cap (V(D) \setminus U)$  tal que  $N^+(x) \cap U = \{y\}$ .

Así, en  $V(D) \setminus U$  existen tantos elementos como elementos hay en  $U$ , por lo que:

$$p \geq 2|U| = 2\gamma_{cas}(D) = 2\Gamma_{cas}(D).$$

- Caso 2.  $D[U]$  tiene al menos un pozo.

Como  $D[U]$  es semicompleta,  $D[U]$  tiene un único pozo, digamos  $w$ . Al igual que en el *caso 1* de esta proposición, afirmamos que para todo  $y \in U \setminus \{w\}$ , existe  $x \in V(D) \setminus U$  tal que  $N^+(x) \cap U = \{y\}$ , pues en caso contrario, si existe  $y \in U \setminus \{w\}$ , tal que para todo  $x \in N^-(y) \cap (V(D) \setminus U)$  existe  $z \in U \setminus \{y\}$  tal que  $(x, z) \in F(D)$ , se tendría que  $U \setminus \{y\}$  sería un conjunto absorbente semicompleto contradiciendo el hecho que  $U$  es un  $\gamma_{cas}$ -conjunto, por lo tanto, para todo  $y \in U \setminus \{w\}$ , existe  $x \in V(D) \setminus U$  tal que  $N^+(x) \cap U = \{y\}$ .

Así, el conjunto  $V(D) \setminus U$  tiene al menos tantos vértices como elementos hay en  $U \setminus \{w\}$ , por ello:

$$\begin{aligned} p &\geq |V(D) \setminus U| + |U \setminus \{w\}| + |\{w\}| \geq 2|U \setminus \{w\}| + 1 \\ &= 2(\gamma_{cas}(D) - 1) + 1 = 2\Gamma_{cas}(D) - 1. \end{aligned}$$

Del *caso 1* y el *caso 2*, se sigue que si  $D$  es tal que  $\Gamma_{cas}(D) = \gamma_{cas}(D)$ , entonces  $p \geq 2\Gamma_{cas}(D) - 1$ .

□

Las figuras mostradas a continuación ejemplifican, respectivamente, una digráfica donde la cota de la *proposición 3.2.8* es justa y una digráfica donde la cota es estricta.

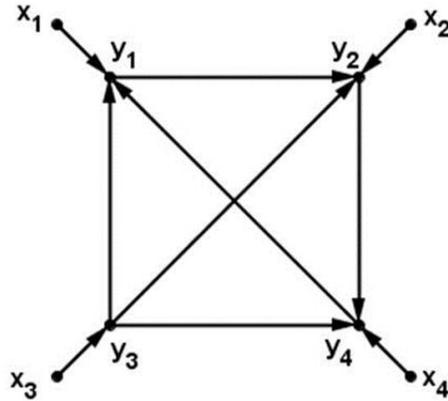


Fig. 3.2.5: Digráfica  $D_1$  en la que  $\Gamma_{cas}(D_1) = \gamma_{cas}(D_1) = 4$  y  $p > 2\Gamma_{cas}(D_2) - 1$ .

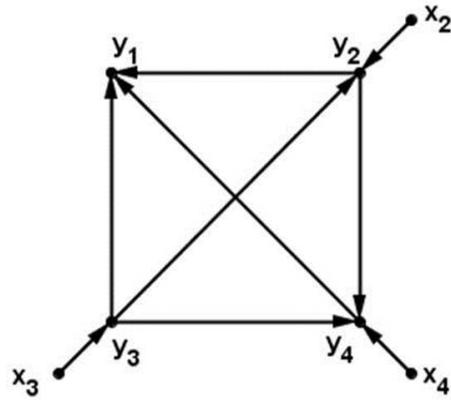


Fig. 3.2.6: Digráfica  $D_2$  en la que  $\Gamma_{cas}(D_2) = \gamma_{cas}(D_2) = 4$  y  $p = 2\Gamma_{cas}(D_1) - 1$ .

# Capítulo 4.

## Número Semidomático Interior Fuerte.

Laskar y Hedetniemi, en *Connected domination in graphs* [20], publicado en 1984, definen el concepto de número domático conexo en gráficas. En este capítulo se extenderá dicho concepto a digráficas y se presentarán resultados básicos, algunos de ellos exhiben la relación entre el número semidomático interior fuerte y el número semidomático exterior fuerte de una digráfica. También ofreceremos una relación entre el número semidomático interior fuerte respecto al exgrado mínimo de la digráfica, resultados análogos con el número semidomático de una digráfica son presentados por Zelinka en su artículo *Semidomatic number of directed graphs* [28], asimismo, podremos exhibir cotas con el número de conexidad puntual de la digráfica y el número semidomático interior fuerte, al igual que lo hizo Zelinka en [28] respecto al número semidomático de una digráfica.

Posteriormente mostraremos que siempre es posible en una digráfica fuerte dar una partición de sus vértices en  $n$  conjuntos absorbentes fuertes, donde  $n$  es cualquier entero entre 1 y el número semidomático interior fuerte de la digráfica. También se presentará el concepto de digráfica semidomática interior fuerte crítica. Aunque en [28] Zelinka trabaja igualmente con digráficas críticas respecto al número semidomático, las hipótesis planteadas en su artículo no son condiciones suficientes para obtener los mismos resultados en las digráficas críticas que se definirán en este trabajo, sin embargo, obtendremos una caracterización de ellas respecto a la partición de sus vértices en conjuntos semidominantes interiores fuertes. Además, a partir de los resultados del artículo *Semidomatic number of directed graphs* [28] podremos exhibir una familia de digráficas semidomáticas interiores fuertes críticas. Por último, se obtendrán resultados de algunas familias de digráficas respecto al número semidomático interior fuerte.

### 4.1. Definiciones y Resultados Básicos en Particiones Semidominantes Interiores Fuertes y el Número Semidomático Interior Fuerte.

El concepto de número domático de una gráfica  $G$ , denotado por  $d(G)$ , fue definido en 1980 por Cockayne, Hedetniemi y Dawes en [10] como:

$$d(G) = \text{máx}\{|S| \mid S \text{ es una partición de } V(D) \text{ en conjuntos absorbentes}\}.$$

Posteriormente, en 1984 Laskar y Hedetniemi en [20] introdujeron el término de número domático conexo de una gráfica  $G$ , denotado por  $d_c(G)$ , como:

$$d_c(G) = \text{máx}\{|S| \mid S \text{ es una partición de } V(G) \text{ en conjuntos absorbentes conexos}\}.$$

Durante el presente capítulo daremos una definición análoga en digráficas a este último concepto.

**Definición 4.1.1** Sean  $D$  una digráfica y  $S \subseteq V(D)$ , decimos que  $S$  es un **conjunto dominante** si para todo vértice  $x \in V(D) \setminus S$  sucede que:

- a) Existe  $u \in S$  tal que  $(x, u) \in F(D)$  y
- b) Existe  $v \in S$  tal que  $(v, x) \in F(D)$ .

Si  $S$  es tal que para todo vértice  $x \in V(D) \setminus S$  sólo se satisface el inciso (a), diremos que  $S$  es un conjunto **semidominante interior**. Análogamente, si  $S$  es tal que para todo vértice  $x \in V(D) \setminus S$  sólo satisface el inciso (b), diremos que es un conjunto **semidominante exterior**.

A los conjuntos semidominantes interiores también se les conoce como *conjuntos absorbentes*, por lo que durante el desarrollo de este trabajo, podremos usar dichos términos como conceptos análogos.

**Definición 4.1.2** Sean  $D$  una digráfica y  $S \subseteq V(D)$  no vacío. Si  $S$  es tal que la digráfica  $D[S]$  es fuerte, entonces diremos que  $S$  es un **conjunto fuerte de  $D$** .

**Definición 4.1.3** Sea  $D$  una digráfica, definimos el **número domático fuerte de  $D$** , denotado por  $d_f(D)$ , como el máximo número posible de elementos en una partición de  $V(D)$  en conjuntos dominantes fuertes, es decir,

$$d_f(D) = \text{máx}\{|S| \mid S \text{ es una partición de } V(D) \text{ en conjuntos dominantes fuertes}\}.$$

A una partición de  $V(D)$  en conjuntos dominantes fuertes con  $d_f(D)$  elementos se le denotará como una  $d_f$ -partición de  $D$ .

**Definición 4.1.4** Sea  $D$  una digráfica, definimos el **número semidomático interior fuerte** de  $D$ , denotado por  $d_{sf}^-(D)$ , como el máximo cardinal de todas las particiones de  $V(D)$  en conjuntos semidominantes interiores fuertes.

A una partición de  $V(D)$  en conjuntos semidominantes interiores fuertes con  $d_{sf}^-(D)$  elementos se le denotará como una  $d_{sf}^-$ -partición de  $V(D)$ .

El concepto de **número semidomático exterior fuerte** de  $D$ , denotado por  $d_{sf}^+(D)$ , se define de manera análoga al número semidomático interior fuerte de  $D$ .

La relación existente entre los números domático, semidomático interior y exterior fuerte de una digráfica  $D$  es sencilla: debido a que cualquier  $\mathbf{d}_f$ -partición de  $V(D)$  es una partición de  $V(D)$  en conjuntos semidominantes interiores y exteriores fuertes, tenemos que  $\mathbf{d}_f(D) \leq \mathbf{d}_{sf}^-(D)$  y análogamente,  $\mathbf{d}_f(D) \leq \mathbf{d}_{sf}^+(D)$ . También tenemos una relación importante con el número domático de una digráfica, pues debido a que una  $\mathbf{d}_f$ -partición de  $V(D)$  es una partición de  $V(D)$  en conjuntos dominantes, tenemos que  $\mathbf{d}_f(D) \leq \mathbf{d}(D)$ , de manera similar, debido a que cualquier  $\mathbf{d}_{sf}^-$ -partición ( $\mathbf{d}_{sf}^+$ -partición) de  $V(D)$  es una partición en conjuntos semidominantes interiores (exteriores) de  $D$ , se sigue que  $\mathbf{d}_{sf}^-(D) \leq \mathbf{d}^-(D)$  ( $\mathbf{d}_{sf}^+(D) \leq \mathbf{d}^+(D)$ ).

Notemos que si una digráfica  $D$  es fuerte, la partición trivial, que es el conjunto unitario que consta del conjunto de vértices de  $D$ , es simultáneamente una partición en un conjunto dominante fuerte, semidominante interior fuerte y semidominante exterior fuerte. Más adelante se mostrará que es condición necesaria y suficiente el que una digráfica sea fuerte para la existencia de dichas particiones, sin embargo, ello no implica que la única partición posible sea la trivial.

En la siguiente imagen se muestra el ejemplo de una digráfica  $H$  para la cual, el conjunto  $A = \{ \{x_1, x_2, x_3, x_4\}, \{x_5, x_6, x_7, x_8\} \}$  es una partición de  $V(D)$  en conjuntos dominantes fuertes, mientras que  $B = \{ \{x_1, x_8\}, \{x_2, x_3, x_4\}, \{x_5, x_7, x_6\} \}$  es una partición de  $V(D)$  en conjuntos semidominantes interiores fuertes y el conjunto  $C = \{ \{x_3, x_5\}, \{x_2, x_4, x_1\}, \{x_7, x_6, x_8\} \}$  es una partición de  $V(D)$  en conjuntos semidominantes exteriores fuertes.

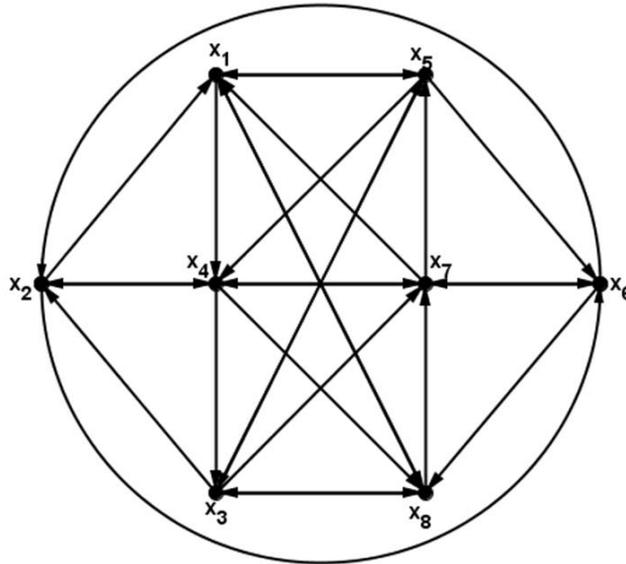


Fig. 4.1.1: Digráfica  $H$  en la que se muestran los tres tipos de particiones establecidas en las definiciones 4.1.3 y 4.1.4.

En la *figura 4.1.2* se muestra una digráfica  $D$  para la cual  $d_{sf}^-(D) = 2$ . Hay que notar que en  $D$ , ninguno de sus vértices es un conjunto absorbente, ya que  $\delta^-(D) < p - 1$ , por lo que no es posible que en una partición en conjuntos semidominantes interiores fuertes exista un elemento unitario, descartando que existan dichas particiones con cinco, cuatro o tres elementos, así tenemos que  $d_{sf}^-(D) \leq 2$ , pero la partición  $\mathcal{P} = \{ \{x, y, z\}, \{u, v\} \}$  satisface que sus elementos son conjuntos semidominantes interiores fuertes, por lo que  $d_{sf}^-(D) = 2$ .

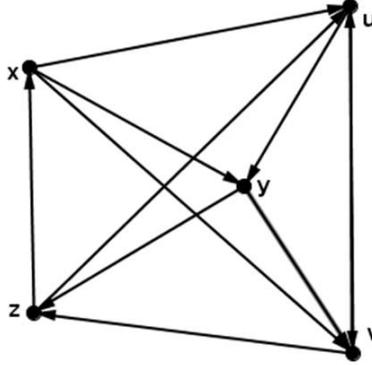


Fig. 4.1.2: Digráfica con número semidomático interior fuerte igual a dos.

Los primeros resultados que aportaremos serán usados para mostrar que las proposiciones obtenidas para los conjuntos semidominantes interiores fuertes son análogas para los conjuntos semidominantes exteriores fuertes, pues si  $D$  tiene un conjunto semidominante interior fuerte, entonces  $\overleftarrow{D}$  tiene un conjunto semidominante exterior fuerte, como se establece enseguida.

**Lema 4.1.1** Sean  $D$  una digráfica y  $S \subseteq V(D)$  no vacío.  $S$  es un conjunto semidominante interior fuerte de  $D$  si y sólo si  $S$  es un conjunto semidominante exterior fuerte de  $\overleftarrow{D}$ .

*Demostración.*

Demostraremos primero la suficiencia de la proposición.

Sea  $S$  un conjunto semidominante interior fuerte de  $D$ . Debido a que  $S$  es un conjunto semidominante interior en  $D$ , entonces para todo vértice  $x \in V(D) \setminus S$ , existe  $y \in S$  tal que  $(x, y) \in F(D)$ , en cuyo caso, por definición de  $F(\overleftarrow{D})$ , tenemos que  $(y, x) \in F(\overleftarrow{D})$ , concluyendo que el conjunto  $S$  es semidominante exterior de  $D$ . Además, por ser  $S$  un conjunto fuerte de  $D$ , tenemos que  $S$  es un conjunto fuerte de  $\overleftarrow{D}$ , concluyendo que  $S$  es un conjunto semidominante exterior fuerte de  $\overleftarrow{D}$ .

Para demostrar la condición necesaria de la proposición, basta recordar que si  $H = \overleftarrow{D}$ , entonces  $\overleftarrow{H} = D$ . Con ésto, si  $S$  es un conjunto semidominante exterior de  $H$ , un razonamiento análogo a la demostración de la suficiencia de esta misma proposición probaría que  $S$  es un conjunto semidominante interior de  $\overleftarrow{H}$ .

□

**Corolario 4.1.1** Sean  $D$  una digráfica y  $S \subseteq V(D)$  no vacío.  $S$  es un conjunto semidominante exterior fuerte de  $D$  si y sólo si  $S$  es un conjunto semidominante interior fuerte de  $\overleftarrow{D}$ .

Demostración.

Sean  $D$  una digráfica y  $S \subseteq V(D)$  no vacío. Dado que  $\overleftarrow{\overleftarrow{D}} = D$  y por el *lema 4.1.1*, se sigue el resultado.

□

En la *figura 4.1.3* se muestra un ejemplo donde se ilustra el resultado del *lema 4.1.1*. El conjunto  $S = \{x_2, x_3, x_6, x_7\}$  es un conjunto semidominante interior fuerte de  $D$ , y en  $\overleftarrow{D} = H$ , el mismo conjunto es semidominante exterior fuerte.

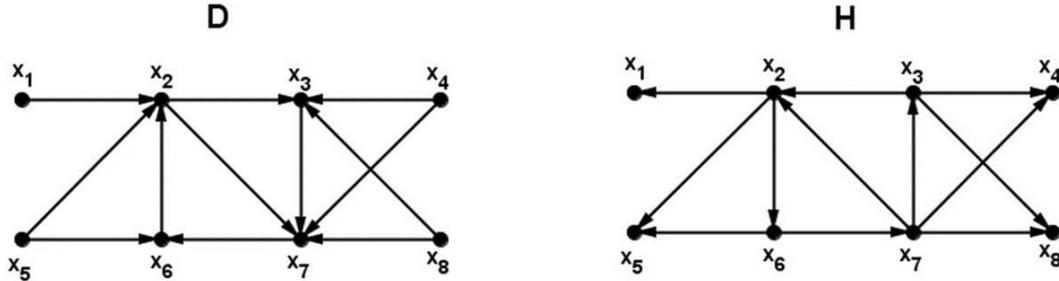


Fig. 4.1.3: Ejemplo de una digráfica  $D$  y un conjunto semidominante interior fuerte en  $D$ , mismo que es un conjunto semidominante exterior fuerte de su digráfica dual  $H$ .

La importancia del *lema 4.1.1* se pone de manifiesto al derivar un corolario que muestra la suficiencia de trabajar las  $\mathbf{d}_{sf}^-$ -particiones de una digráfica dada para obtener información sobre el número semidomático exterior fuerte de una digráfica arbitraria.

**Corolario 4.1.2** Si  $D$  es una digráfica arbitraria, entonces  $d_{sf}^-(D) = d_{sf}^+(\overleftarrow{D})$ .

Demostración.

Sean  $D$  una digráfica arbitraria y  $\mathfrak{S}^- = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$  una  $d_{sf}^-$ -partición de  $V(D)$ , por el *lema 4.1.1*, tenemos que cada elemento  $S_i$  de  $\mathfrak{S}^-$  es un conjunto semidominante exterior fuerte de  $\overleftarrow{D}$ , por lo que  $\mathfrak{S}^-$  es una partición de  $V(\overleftarrow{D})$  en conjuntos semidominantes exteriores fuertes, concluyendo que  $d_{sf}^-(D) \leq d_{sf}^+(\overleftarrow{D})$ .

Usando la misma idea, si  $H = \overleftarrow{D}$  y  $\mathfrak{S}^+ = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$  es una  $d_{sf}^+$ -partición de  $V(H)$ , por el *corolario 4.1.1* cada elemento  $S_i$  de  $\mathfrak{S}^+$  es un conjunto semidominante interior fuerte de  $\overleftarrow{H} = D$ , derivando de ello que  $d_{sf}^+(\overleftarrow{D}) \leq d_{sf}^-(D)$ , concluyendo así la igualdad deseada. □

Enunciaremos ahora un nuevo lema que es de importancia al trabajar con subdigráficas, logrando relacionar el número semidomático interior fuerte de una digráfica dada con cualquier subdigráfica generadora de la misma.

**Lema 4.1.2** Si  $D$  es una digráfica tal que existe una partición de  $V(D)$  en conjuntos semidominantes interiores fuertes y  $H$  es una subdigráfica generadora de  $D$  tal que existe una partición de  $V(H)$  en conjuntos semidominantes interiores fuertes, entonces  $d_{sf}^-(H) \leq d_{sf}^-(D)$ .

Demostración.

Sean  $D$  una digráfica,  $H$  una subdigráfica generadora de  $D$  tal que existe una partición de  $V(H)$  en conjuntos semidominantes interiores fuertes y  $\mathfrak{S} = \{H_1, H_2, \dots, H_r\}$  una  $d_{sf}^-$ -partición de  $V(H)$ . Dado que  $H$  es una subdigráfica generadora de  $D$ , tenemos que  $\mathfrak{S}$  es una partición en  $D$  y cada conjunto  $H_i$  es un conjunto absorbente fuerte en  $D$ , por lo que  $\mathfrak{S}$  es una partición de  $V(D)$  en conjuntos absorbentes fuertes, concluyendo que  $|\mathfrak{S}| \leq d_{sf}^-(D)$ , es decir,  $d_{sf}^-(H) \leq d_{sf}^-(D)$ . □

Es natural el pensar si una digráfica arbitraria tiene o no una partición de sus vértices en conjuntos semidominantes interiores fuertes. Si consideramos una trayectoria con al menos dos vértices, tenemos que ninguna subdigráfica inducida no trivial es fuerte, por lo que cualquier conjunto fuerte es unitario, además, debido a que ninguno de sus vértices es absorbente, concluimos que no tiene conjuntos semidominantes fuertes unitarios, siguiéndose así que la trayectoria no tenga una partición de sus vértices

en conjuntos semidominantes interiores fuertes, de ello surge la necesidad de saber en qué tipo de digráficas podemos encontrar particiones de esta naturaleza. La *proposición 4.1.1* reduce la existencia de dichas particiones a una familia de digráficas.

**Proposición 4.1.1** *Una digráfica  $D$  tiene una partición de sus vértices en conjuntos semidominantes interiores fuertes si y sólo si  $D$  es fuerte.*

Demostración.

Probaremos primero la condición necesaria del enunciado.

Sea  $D$  una digráfica fuerte, como  $V(D)$  es un conjunto fuerte y absorbente, entonces  $\{V(D)\}$  es una partición de los vértices de  $D$  en un conjunto semidominante interior fuerte.

Ahora procederemos a demostrar la suficiencia de la proposición.

Consideraremos  $\mathfrak{S} = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$  una partición de  $V(D)$  en conjuntos semidominantes interiores fuertes y  $\{u, v\} \subseteq V(D)$  vértices arbitrarios, probaremos que existe un  $uv$ -camino en  $D$ . Analizamos los dos casos posibles sobre  $u$  y  $v$ :

Caso 1  $\{u, v\} \subseteq S_i$  para algún  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ .

En este caso, como  $\{u, v\} \subseteq S_i$  y  $S_i$  es un conjunto fuerte de  $D$ , entonces existe un  $uv$ -camino en  $D$ .

Caso 2  $u \in S_j$  y  $v \in S_i$  con  $i \neq j$ .

En este caso, como  $S_i$  es un conjunto semidominante interior, existe  $x_u \in S_i$  tal que  $(u, x_u) \in F(D)$ . Dado que  $D[S_i]$  es fuerte, existe un  $x_u v$ -camino, digamos  $C_1$ , en cuyo caso,  $C = (u, x_u) \cup C_1$  es un  $uv$ -camino en  $D$ .

Del *caso 1* y el *caso 2*, tenemos que para cualquier par de vértices  $u$  y  $v$ , existe un  $uv$ -camino, concluyendo que  $D$  es fuerte.

□

Aunque la *proposición 4.1.1* indica que solamente es posible encontrar particiones de los vértices en conjuntos semidominantes interiores fuertes en digráficas fuertes, el poder calcular exitosamente el número semidomático interior fuerte de una digráfica no resulta sencillo, pues si se presta atención a la demostración de la condición necesaria de la *proposición 4.1.1*, la partición de los vértices de la digráfica en conjuntos semidominantes interiores fuertes es la partición trivial, la cual siempre se tiene en cualquier digráfica, pero no necesariamente es la única, como se mostró en la *figura 4.1.1* y la *figura 4.1.2*.

Con lo anterior, encontrar cotas para aproximar el número semidomático interior fuerte de una digráfica se hace necesario para el avance de la teoría. La primera proposición que mostraremos acota el número semidomático interior fuerte de una digráfica respecto al exgrado mínimo de la digráfica, un resultado similar fue propuesto por Zelinka en su artículo *Semidomatic number of directed graphs* [28].

**Proposición 4.1.2** *Si  $D$  es una digráfica,  $\delta^+(D)$  su exgrado mínimo y  $\mathbf{d}_{sf}^-(D)$  su número semidomático interior fuerte, entonces  $\mathbf{d}_{sf}^-(D) \leq \delta^+(D) + 1$ .*

*Demostración.*

Sean  $D$  una digráfica,  $\mathfrak{S} = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$  una  $\mathbf{d}_{sf}^-$ -partición de  $D$  y  $x \in V(D)$  tal que  $\delta^+(x) = \delta^+(D)$ . Como  $\mathfrak{S}$  es una partición de  $V(D)$ ,  $x \in S_i$  para algún  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ . Ya que  $S_j$  es un conjunto absorbente para toda  $j \in \{1, 2, \dots, k\}$  en particular existe  $v_j \in S_j$  tal que  $(x, v_j) \in F(D)$  para toda  $j \neq i$ , concluyendo que  $\delta^+(x) \geq \mathbf{d}_{sf}^- - 1$ , por lo cual,  $\delta^+(D) + 1 \geq \mathbf{d}_{sf}^-(D)$ .

□

A partir de la *proposición 4.1.2*, podemos derivar un par de corolarios. El primero acota superiormente al número semidomático exterior fuerte de una digráfica dada y el segundo establece condiciones necesarias y suficientes para que el número semidomático interior fuerte sea igual al orden de la digráfica.

**Corolario 4.1.3** *Si  $D$  es una digráfica,  $\delta^-(D)$  su ingrado mínimo y  $\mathbf{d}_{sf}^+(D)$  su número semidomático exterior fuerte, entonces  $\mathbf{d}_{sf}^+(D) \leq \delta^-(D) + 1$ .*

*Demostración.*

Sean  $D$  una digráfica,  $\mathfrak{S} = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$  una  $\mathbf{d}_{sf}^+$ -partición de  $V(D)$ ,  $x \in V(D)$  tal que  $\delta^-(x) = \delta^-(D)$  y  $H = \overleftarrow{D}$ . Por el *corolario 4.1.1*, tenemos que  $\mathfrak{S}$  es una partición en conjuntos semidominantes interiores fuertes de  $H$  y por la *proposición 4.1.2*,  $k \leq \delta^+(H) + 1$ , en cuyo caso  $k \leq \delta_H^+(x) + 1 = \delta_D^-(x) + 1$ , y por elección de  $x$ , concluimos que  $\mathbf{d}_{sf}^+(D) \leq \delta^-(D) + 1$ .

□

**Corolario 4.1.4** *Sea  $D$  una digráfica con  $p$  vértices.  $D$  es isomorfa a  $K_p$  si y sólo si  $d_{sf}^-(D) = p$ .*

Demostración.

Probaremos primero la suficiencia de la proposición. Sea  $D$  una digráfica isomorfa a  $K_p$ , si  $V(D) = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ , entonces  $\mathfrak{S} = \{\{v_1\}, \{v_2\}, \dots, \{v_p\}\}$  es una partición de  $V(D)$  en conjuntos semidominantes interiores fuertes, concluyendo que  $d_{sf}^-(D) = p$ .

Demostraremos ahora la condición necesaria del enunciado. Por la *proposición 4.1.2*, tenemos que  $d_{sf}^-(D) \leq \delta^+(D) + 1$  y por hipótesis  $d_{sf}^-(D) = p$ , por lo que  $p - 1 \leq \delta^+(D)$ , concluyendo con ello que  $D$  es completa. □

Aunque la *proposición 4.1.2* es una buena cota para el número semidomático interior fuerte de una digráfica, podemos mejorar dicha cota agregando una hipótesis sencilla y usando la conexidad fuerte de los conjuntos en la partición.

**Proposición 4.1.3** *Si  $D$  es una digráfica fuerte sin vértices absorbentes, entonces  $d_{sf}^-(D) \leq \delta^+(D)$ .*

Demostración.

Sean  $D$  una digráfica fuerte sin vértices absorbentes,  $\mathfrak{S} = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$  una  $d_{sf}^-$ -partición de  $V(D)$  y  $x \in V(D)$  tal que  $\delta^+(x) = \delta^+(D)$ . Como  $\mathfrak{S}$  es una partición de  $V(D)$ ,  $x \in S_i$  para algún  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ , ya que  $S_j$  es un conjunto absorbente para toda  $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ , en particular, para toda  $j \neq i$  existe  $v_j \in S_j$  tal que  $(x, v_j) \in F(D)$ . Además, como  $D$  no tiene vértices absorbentes, para toda  $m \in \{1, 2, \dots, k\}$  se tiene que  $|S_m| \geq 2$ , en tal caso, por ser  $S_i$  un conjunto fuerte no trivial, existe  $v \in S_i$  tal que  $(x, v) \in F(D)$ , concluyendo que  $\delta^+(x) \geq k$ . Por elección de  $x$ , demostramos que  $d_{sf}^-(D) \leq \delta^+(D)$ . □

Además de la *proposición 4.1.2* y la *proposición 4.1.3*, podemos obtener otras cotas respecto al número de vértices en un conjunto de corte de la digráfica. En [27] Zelinka mostró que el número domático conexo de cualquier gráfica siempre es a lo más la conexidad puntual de la gráfica. Un enunciado similar tendremos en la *proposición 4.1.4*, previo a ello enunciaremos un lema.

**Lema 4.1.3** *Sea  $D$  una digráfica fuerte. Si  $K \subseteq V(D)$  es un conjunto de corte y  $S$  es un conjunto semidominante interior fuerte de  $D$ , entonces  $K \cap S \neq \emptyset$ .*

Demostración.

Sean  $D$  una digráfica,  $K$  un conjunto de corte de  $D$  y  $S$  un conjunto semidominante interior fuerte de  $D$ . Supongamos por contradicción que  $K \cap S = \emptyset$ . Sean  $D_1, D_2, \dots, D_k$  las componentes conexas de  $D \setminus K$ . Como  $S$  es un conjunto fuerte de  $D$  y  $K \cap S = \emptyset$ , entonces  $S \subseteq V(D_i)$  para algún  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ . En tal caso, si  $x \in V(D \setminus K) \setminus V(D_i)$ ,  $x$  no es absorbido por ningún elemento de  $S$  en  $D \setminus K$  por definición de componente conexa, en particular,  $x$  no es absorbido por ningún elemento de  $S$  en  $D$ , lo cual contradice el hecho de que  $S$  es un conjunto absorbente en  $D$ . Así, tenemos que si  $S$  es un conjunto absorbente fuerte y  $K$  un conjunto de corte por vértices de  $D$ , entonces  $K \cap S \neq \emptyset$ .

□

**Proposición 4.1.4** *Sean  $D$  una digráfica y  $d_{sf}^-(D)$  su número semidomático interior fuerte, si  $\kappa(D)$  es el número de conexidad de  $D$ , entonces  $d_{sf}^-(D) \leq \kappa(D)$ .*

Demostración.

Sean  $D$  una digráfica,  $K \subseteq V(D)$  un conjunto de corte por vértices tal que  $|K| = \kappa(D)$  y  $\mathfrak{S} = \{S_1, S_2, \dots, S_r\}$  una  $d_{sf}^-$ -partición de  $V(D)$ . Por el lema 4.1.3  $S_i \cap K \neq \emptyset$  para toda  $i \in \{1, 2, \dots, r\}$ , es decir, existe al menos un elemento  $v_i \in S_i \cap K$ ; además, como  $\mathfrak{S}$  es partición de  $V(D)$ , entonces  $v_i \neq v_j$  para todo  $\{i, j\} \subseteq \{1, 2, \dots, r\}$  si  $i \neq j$ . Así,  $r \leq \kappa(D)$ , concluyendo que  $d_{sf}^-(D) \leq \kappa(D)$ .

□

En [5] Germán Benítez mostró que en cualquier digráfica cuyo número semidomático interior es al menos dos, siempre es posible exhibir una bipartición del conjunto de vértices en conjuntos semidominantes interiores. Nosotros mostraremos un resultado análogo para las particiones en conjuntos semidominantes interiores fuertes, más aún, probaremos que si  $D$  es una digráfica fuerte, entonces siempre es posible encontrar una partición en  $n$  conjuntos semidominantes interiores fuertes de  $V(D)$ , donde  $n \in \{1, 2, \dots, d_{sf}^-(D)\}$ . La idea de esta demostración es muy sencilla, pues basta ver que si  $\mathfrak{S} = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$  es una partición en conjuntos semidominantes interiores fuertes de una digráfica  $D$ , entonces la unión de cualquier par de elementos de  $\mathfrak{S}$  es un conjunto semidominante interior fuerte de la digráfica, en general, la unión de cualquier subconjunto de elementos de  $\mathfrak{S}$  es un conjunto semidominante interior fuerte. Para probarlo, enunciaremos antes un par de lemas.

**Lema 4.1.4** Sean  $D$  una digráfica y  $\mathfrak{S}$  una partición de  $V(D)$  en conjuntos semidominantes interiores fuertes. La unión de dos o más elementos de  $\mathfrak{S}$  es un conjunto fuerte de  $D$ .

Demostración.

Sean  $D$  una digráfica,  $\mathfrak{S} = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$  una partición de  $V(D)$  en conjuntos semidominantes interiores fuertes e  $I \subseteq \{1, 2, \dots, k\}$  no vacío. Definimos  $S = \cup_{t \in I} S_t$  y  $D_0 = D[S]$ . Como el conjunto  $\mathcal{P}_0 = \{S_i \mid i \in I\}$  es una partición de  $V(D_0)$  en conjuntos semidominantes interiores fuertes de  $D_0$ , por la *proposición 4.1.1*,  $D_0$  es fuerte, por lo cual  $S$  es un conjunto fuerte en  $D$ .

□

Con lo anterior podremos mostrar que, dada una digráfica  $D$  y  $\mathfrak{S}$  una partición de  $V(D)$  en conjuntos semidominantes interiores fuertes, la partición obtenida a partir de  $\mathfrak{S}$  uniendo dos o más de sus elementos también es una partición en conjuntos semidominantes interiores fuertes de  $D$ .

**Proposición 4.1.5** Sean  $D$  una digráfica fuerte y  $\mathfrak{S} = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$  una partición de  $V(D)$  en conjuntos semidominantes interiores fuertes. Si  $I \subseteq \{1, 2, \dots, k\}$  es no vacío, entonces el conjunto  $\mathfrak{S}_I = \{S_t \mid t \notin I\} \cup \{\cup_{t \in I} S_t\}$  es una partición de  $V(D)$  en conjuntos semidominantes interiores fuertes.

Demostración.

Sean  $D$  una digráfica,  $\mathfrak{S} = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$  una partición de  $V(D)$  en conjuntos semidominantes interiores fuertes,  $I \subseteq \{1, 2, \dots, k\}$  no vacío,  $S = \cup_{t \in I} S_t$  y  $\mathfrak{S}_I = \{S_t \mid t \notin I\} \cup \{S\}$ . Dividiremos la demostración en dos afirmaciones:

Afirmación 1.  $\mathfrak{S}_I$  es una partición de  $V(D)$ .

Como  $\mathfrak{S}$  es una partición de  $V(D)$ , tenemos que para todo par de elementos  $S_i$  y  $S_j$  de  $\mathfrak{S}$ ,  $S_i \cap S_j = \emptyset$ , por lo cual, para todo par de elementos  $S_r$  y  $S_m$  en  $\mathfrak{S}_I$  se cumple que  $S_r \cap S_m = \emptyset$ . Además, dado que todo elemento  $S_i$  de  $\mathfrak{S}$  es no vacío, todo elemento de  $\mathfrak{S}_I$  también es no vacío. Por último, como  $\cup \mathfrak{S} = V(D)$ , se tiene que

$$\bigcup (\{S_t \mid t \notin I\} \cup \{S\}) = V(D).$$

Concluyendo así que  $\mathfrak{S}_I$  es una partición de  $V(D)$ .

Afirmación 2.  $S_r$  es un conjunto semidominante interior fuerte de  $D$  para todo elemento  $S_r$  de  $\mathfrak{S}_I$ .

Sea  $S_r$  un elemento de  $\mathfrak{S}_I$ , demostraremos primero que  $S_r$  es un conjunto fuerte de  $D$ . Si  $S_r \neq S$ , entonces  $S_r \in \mathfrak{S}$ , concluyendo que  $S_r$  es un conjunto fuerte. Si  $S_r = S$ , por el *lema 4.1.4*,  $S_r$  es un conjunto fuerte.

Para demostrar que  $S_r$  es absorbente, basta ver que si  $S_r \neq S$ , entonces  $S_r \in \mathfrak{S}$  y así,  $S_r$  es absorbente. Si  $S_r = S$ , dado que  $I$  es no vacío, existe  $S_i \in \mathfrak{S}$  tal que  $S_i \subseteq S$ , en cuyo caso, por ser  $S_i$  un conjunto absorbente en  $D$ , se sigue que  $S$  también es un conjunto absorbente en  $D$ .

De la *afirmación 1* y la *afirmación 2* se tiene que  $\mathfrak{S}_I$  es una partición de  $V(D)$  en conjuntos semidominantes interiores fuertes de  $D$ .

□

Por la *proposición 4.1.5* podemos asegurar que existe una partición de los vértices de una digráfica  $D$  en conjuntos semidominantes interiores fuertes con  $n$  elementos para toda  $n \in \{1, 2, \dots, d_{sf}^-(D)\}$ . Ello queda enunciado en el siguiente corolario.

**Corolario 4.1.5** *Si  $D$  es una digráfica fuerte, entonces existe una partición de  $V(D)$  en  $n$  conjuntos semidominantes interiores fuertes, para todo  $n \in \{1, 2, \dots, d_{sf}^-(D)\}$ .*

*Demostración.*

Sean  $D$  una digráfica fuerte,  $n \in \{1, 2, \dots, d_{sf}^-(D)\}$  y  $\mathfrak{S} = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$  una  $d_{sf}^-$ -partición de  $V(D)$ .

Por la *proposición 4.1.5*, el conjunto  $\mathfrak{S}_I = \{S_t \mid t \notin I\} \cup \{\cup_{t \in I} S_t\}$  es una partición de  $V(D)$  en conjuntos semidominantes interiores fuertes, en particular, si  $I = \{n, n+1, \dots, k\}$ , obtenemos una partición de  $V(D)$  en  $n$  conjuntos semidominantes interiores fuertes de  $D$ .

□

El corolario anterior muestra que siempre es posible encontrar particiones con  $n$  elementos en conjuntos semidominantes interiores fuertes, donde  $1 \leq n \leq d_{sf}^-(D)$ , es decir, se tienen al menos  $d_{sf}^-(D)$  particiones distintas de los vértices en conjuntos semidominantes interiores fuertes. En el siguiente lema se dan condiciones para que la única partición de los vértices de una digráfica en conjuntos semidominantes interiores fuertes sea la partición trivial.

**Lema 4.1.5** *Sea  $D$  una digráfica fuerte. Si  $|V(D)| \neq 2$  y existe  $x \in V(D)$  tal que  $N^-(u) = \{x\}$  para todo  $u \in N^+(x)$ , entonces  $d_{sf}^-(D) = 1$ .*

*Demostración.*

Sean  $D$  una digráfica fuerte tal que  $|V(D)| \neq 2$  y  $x \in V(D)$  tal que  $N^-(u) = \{x\}$  para todo  $u \in N^+(x)$ . Si  $D$  es la digráfica trivial el resultado se satisface pues

$d_{sf}^-(K_1) = 1$ , por lo que consideraremos ahora que  $|V(D)| \geq 3$ . Supongamos, por contradicción, que  $d_{sf}^-(D) \geq 2$ . Por el *corolario 4.1.5* existe una bipartición de  $V(D)$  en conjuntos semidominantes interiores fuertes, digamos  $\mathfrak{S} = \{S_1, S_2\}$ . Ya que  $\mathfrak{S}$  es partición de  $V(D)$  podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que  $x \in S_1$ . Como  $S_2$  es un conjunto absorbente, existe  $u \in S_2$  tal que  $(x, u) \in F(D)$ , pero ya que el conjunto  $S_2$  es fuerte y por hipótesis  $N^-(u) = \{x\}$ , no es posible que exista otro vértice distinto de  $u$  en  $S_2$  pues la única forma de llegar a  $u$  es pasando por  $x$ , ello concluye que  $S_2 = \{u\}$ , es decir,  $u$  es un vértice absorbente de  $D$ .

Por otro lado, debido a nuestra suposición de que  $|V(D)| \geq 3$  y por ser  $\mathfrak{S}$  partición de los vértices de  $D$ , tenemos que  $|S_1| \geq 2$ , por lo que existe  $w \in S_1$  tal que  $x \neq w$ , sin embargo, por ser  $u$  un vértice absorbente, tenemos que  $w \in N^-(u)$ , contradiciendo nuestras hipótesis. Dado que la contradicción surgió de suponer que  $d_{sf}^-(D) \geq 2$ , concluimos que  $d_{sf}^-(D) = 1$ .

□

Anteriormente ya se había mostrado la importancia de la gráfica subyacente de una digráfica dada, pues es posible el recuperar información de una digráfica a partir de su gráfica subyacente. En la siguiente proposición se relaciona el número semidomático interior fuerte de una digráfica con el número domático conexo de su gráfica subyacente.

**Proposición 4.1.6** *Sea  $D$  una digráfica fuerte, si  $G$  es su gráfica subyacente, entonces*

$$d_{sf}^-(D) \leq d_c(G).$$

*Demostración.*

Sean  $D$  una digráfica fuerte,  $\mathfrak{S} = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$  una  $d_{sf}^-$ -partición de  $V(D)$  y  $G$  la gráfica subyacente de  $D$ . Debido a que  $V(D) = V(G)$ , tenemos que  $\mathfrak{S}$  es una partición de  $V(G)$ , por lo que sólo restará mostrar que cada elemento  $S_i$  de  $\mathfrak{S}$  es un conjunto dominante conexo en  $G$ .

Sea  $S_i \in \mathfrak{S}$  arbitrario y  $x \in V(G) \setminus S_i$ , ya que  $S_i$  es un conjunto absorbente en  $D$ , existe  $w \in S_i$  tal que  $(x, w) \in F(D)$ , en particular  $(x, w) \in A(G)$  por lo que  $S_i$  es un conjunto dominante de  $G$ .

Para exhibir que  $S_i$  es un conjunto conexo de  $G$  consideremos  $\{x, w\} \subseteq S_i$  arbitrario. Como  $S_i$  es un conjunto fuerte en  $D$ , existe un  $xw$ -camino dirigido contenido en  $S_i$ , digamos  $P$ , en tal caso  $P$  es un  $xw$ -camino en  $G$  contenido en  $S_i$ , por lo que  $S_i$  es un conjunto conexo en  $G$ .

De lo anterior se sigue que  $\mathfrak{S}$  es una partición de  $V(G)$  en conjuntos dominantes conexos de  $G$ , derivándose que  $|\mathfrak{S}| \leq d_c(G)$ , es decir,  $d_{sf}^-(D) \leq d_c(G)$ .

□

## 4.2. Digráficas Semidomáticas Interiores Fuertes Críticas.

En la teoría encaminada a analizar particiones de los vértices de una gráfica en conjuntos absorbentes, Zelinka [27] demostró que en general, si  $G$  es una gráfica y  $a$  es una arista arbitraria, se tiene que el número domático conexo de la gráfica sin la flecha se reduce a lo más en uno. En [5] Germán Benítez mostró un enunciado análogo para el número semidomático interior en digráficas. Nosotros también obtendremos un resultado similar en el caso del número semidomático interior fuerte.

**Proposición 4.2.1** *Sean  $D$  una digráfica tal que  $\mathbf{d}_{sf}^-(D) \geq 2$  y  $a \in F(D)$ . Si  $D - a$  es fuerte, entonces  $\mathbf{d}_{sf}^-(D) - 1 \leq \mathbf{d}_{sf}^-(D - a) \leq \mathbf{d}_{sf}^-(D)$ .*

Demostración.

Sean  $D$  una digráfica tal que  $\mathbf{d}_{sf}^-(D) = k \geq 2$ ,  $\mathfrak{P} = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$  una  $\mathbf{d}_{sf}^-$ -partición de  $V(D)$  y  $a = (u, v)$  una flecha en  $D$  tal que  $D_0 = D - a$  es fuerte. Por elección de  $a$ ,  $D_0$  es una digráfica fuerte y en particular, como lo enuncia la *proposición 4.1.1*, tiene una partición de sus vértices en conjuntos semidominantes interiores fuertes y por el *lema 4.1.2*, tenemos que  $\mathbf{d}_{sf}^-(D_0) \leq \mathbf{d}_{sf}^-(D)$ , por lo que sólo restará demostrar que  $k - 1 \leq \mathbf{d}_{sf}^-(D_0)$ . Notemos que para el caso en que  $\mathbf{d}_{sf}^-(D) = 2$ , por ser  $D_0$  fuerte conexa y con ello  $\mathbf{d}_{sf}^-(D_0) \geq 1$ , el enunciado se satisface, luego, podemos suponer para el resto de la demostración que  $\mathbf{d}_{sf}^-(D) \geq 3$ .

Analicemos dos casos posibles sobre la flecha  $(u, v)$ .

Caso 1.  $u \in S_i$  y  $v \in S_j$  para algún  $\{i, j\} \subseteq \{1, 2, \dots, k\}$ ,  $i \neq j$ .

En este caso podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que  $u \in S_{k-2}$  y  $v \in S_{k-1}$ , pues  $\mathfrak{P}$  es partición de  $V(D)$ . Definimos  $S_0 = S_{k-1} \cup S_k$  y  $\mathfrak{P}_0 = \{S_0, S_1, \dots, S_{k-2}\}$ . Como  $\mathfrak{P}$  es una partición de  $V(D)$  se sigue que  $\mathfrak{P}_0$  es una partición de  $V(D_0)$ , por lo que sólo resta ver que  $S_i$  es un conjunto absorbente fuerte en  $D_0$ , para toda  $i \in \{0, 1, \dots, k-2\}$ , es decir, sólo resta demostrar las siguientes dos afirmaciones.

- $S_i$  es un conjunto absorbente en  $D_0$  para toda  $i \in \{0, 1, 2, \dots, k-2\}$ .

Analicemos primero el caso en que  $i = 0$ . Sea  $x \in V(D_0) \setminus S_0$ , dado que  $S_k \subseteq S_0$  y  $S_k$  es un conjunto absorbente en  $D$ , existe  $y \in S_k$  tal que  $(x, y) \in F(D)$ , pero como  $y \neq v$  pues  $S_k \cap S_{k-1} = \emptyset$ , se tiene que  $(u, v) \neq (x, y)$ , por lo que  $(x, y) \in F(D_0)$ , concluyendo que  $S_0$  es absorbente en  $D_0$ . Para facilitar la interpretación de esto último, podemos consultar la *figura 4.2.1*.

Si consideramos ahora  $S_i$  con  $i \neq 0$ , tenemos un caso parecido. Sea  $x \in V(D_0) \setminus S_i$ , como  $S_i$  es un conjunto absorbente en  $D$ , existe  $y \in S_i$  tal que  $(x, y) \in F(D)$ , pero como  $i \neq 0$ , tenemos que  $y \neq v$  y así,  $(x, y) \neq (u, v)$ , en cuyo caso,  $(x, y) \in F(D_0)$ , concluyendo que  $S_i$  es absorbente en  $D_0$ .

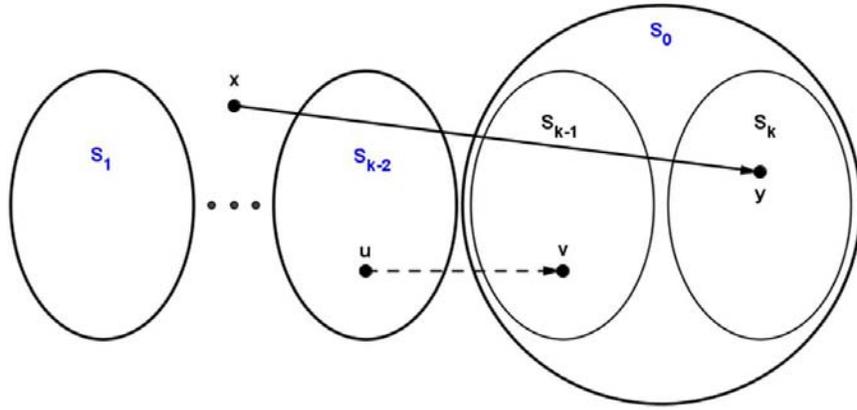


Fig. 4.2.1: En  $D_0$ , la absorción de  $S_0$  está dada por la absorción de  $S_k$  en  $D$ .

- $S_i$  es fuerte en  $D_0$  para toda  $i \in \{0, 1, \dots, k-2\}$ .

Notemos que esto es verdadero para toda  $i$  distinta de cero, pues  $S_i$  es un conjunto fuerte en  $D$  y el vértice  $v$  no es elemento de  $S_i$ , por lo que la flecha  $(u, v)$  no es elemento de  $D[S_i]$  y por consiguiente,  $D_0[S_i]$  es fuerte. Sólo resta demostrar que  $S_0$  es un conjunto fuerte en  $D_0$ , pero como  $\mathfrak{Q}_0 = \{S_{k-1}, S_k\}$  es una partición en conjuntos absorbentes fuertes de  $D_0[S_0]$  pues  $(u, v) \notin F(D[S_0])$ , aplicando la *proposición 4.1.1*, tenemos que efectivamente  $S_0$  es un conjunto fuerte de  $D_0$ . Podemos ver una interpretación de esto en la *figura 4.2.2*.

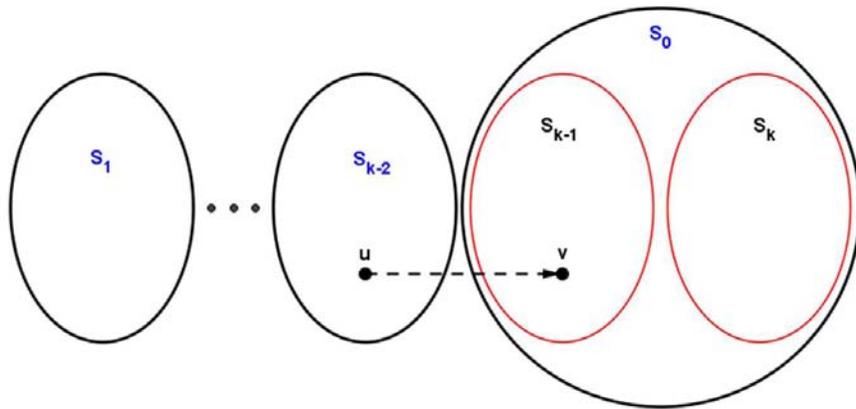


Fig. 4.2.2: En  $D_0$ , el conjunto  $S_0$  es fuerte pues  $\mathcal{P}_0 = \{S_{k-1}, S_k\}$  es una partición de  $V(D_0[S_{k-1} \cup S_k])$  en conjuntos semidominantes interiores fuertes.

Así concluimos que  $\mathfrak{P}_0$  es una partición de  $V(D_0)$  en conjuntos absorbentes fuertes, por lo cual  $|\mathfrak{P}_0| \leq d_{sf}^-(D_0)$ , es decir,  $k-1 \leq d_{sf}^-(D)$ .

Caso 2. Si  $\{u, v\} \subseteq S_i$  para algún  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ .

Supongamos que  $\{u, v\} \subseteq S_k$ , y dado que  $d_{sf}^-(D) \geq 2$ , tomemos un vértice arbitrario

$u'$  en  $V(D_0) \setminus S_k$ . Como  $D_0$  es fuerte, consideremos

$$T_1 = (u' = x_0, x_1, \dots, x_m, v = x_{m+1})$$

una  $u'v$ -trayectoria. Sea  $i = \text{máx}\{j \in \{0, 1, \dots, m\} \mid x_j \notin S_k\}$ . Dado que  $\mathfrak{P}$  es una partición de  $V(D)$ , podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que  $x_i \in S_{k-1}$ . Afirmamos que si  $S_0 = S_{k-1} \cup S_k$ , entonces  $\mathfrak{P}_0 = \{S_0, S_1, \dots, S_{k-2}\}$  es una partición de  $V(D_0)$  en conjuntos absorbentes fuertes.

Observemos que debido a que  $\{u, v\} \subseteq S_k$ , para todo  $r \neq 0$ , el conjunto  $S_r$  es un conjunto absorbente fuerte en  $D_0$ , por lo que sólo bastará ver que  $S_0$  es un conjunto absorbente fuerte de  $D_0$ .

- $S_0$  es un conjunto absorbente pues  $S_{k-1}$  es un conjunto absorbente en  $D_0$  por la observación previa y  $S_{k-1} \subseteq S_0$ .

- Para probar que  $S_0$  es un conjunto fuerte de  $D_0$  mostraremos que entre cada par de vértices arbitrarios en  $S_0$  existe un camino dirigido contenido en  $S_0$ . Previo a ello, notemos que por ser  $S_{k-1}$  un conjunto absorbente en  $D$ , existe  $y \in S_{k-1}$  tal que  $(u, y) \in F(D)$  y es distinta de  $(u, v)$  pues  $y \neq v$  ya que  $S_k \cap S_{k-1} = \emptyset$ . Por otro lado, como  $S_{k-1}$  es un conjunto fuerte en  $D_0$ , existe un  $yx_i$ -camino contenido en  $S_{k-1}$ , digamos  $C_1$ . En tal caso,  $C = (u, y) \cup C_1 \cup (x_i, T_1, v)$  es un  $uv$ -camino en  $S_0$ .

Retomando nuevamente la demostración de que  $S_0$  es un conjunto fuerte en  $D_0$ , tomamos  $\{w, z\} \subseteq S_0$  vértices arbitrarios. Recordemos que por la *proposición 4.1.1*,  $S_0$  es un conjunto fuerte en  $D$ , por lo que existe un  $wz$ -camino en  $D$  contenido en  $S_0$ , digamos  $C'$ . Si  $(u, v)$  no es una flecha de  $C'$ , entonces  $C'$  es un  $wz$ -camino en  $D_0$  contenido en  $S_0$ . En caso contrario, si  $(u, v)$  es una flecha de  $C'$ , se tiene que  $C = (w, C', u) \cup C' \cup (v, C', z)$  es un  $wz$ -camino contenido en  $S_0$  que no contiene a  $(u, v)$ , por lo que  $C$  es un camino en  $D_0$ , concluyendo que  $S_0$  es un conjunto fuerte de  $D_0$ . Esto se ejemplifica en la *figura 4.2.3*.

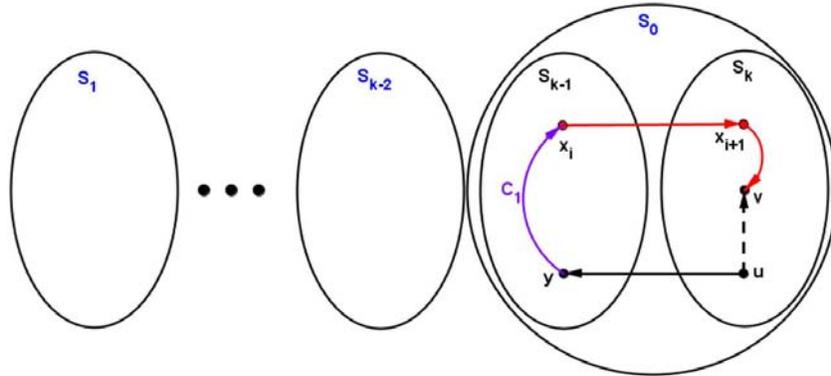


Fig. 4.2.3: En  $D_0$ , el conjunto  $S_0$  es un conjunto fuerte debido a la existencia de un  $uv$ -camino, distinto a  $(u, v)$ , contenido en  $S_{k-1} \cup S_k$ .

En ambos casos,  $\mathfrak{P}_0 = \{S_0, S_1, \dots, S_{k-2}\}$  es una partición de  $V(D_0)$  en conjuntos semidominantes interiores fuertes, por lo que  $|\mathfrak{P}_0| \leq d_{sf}^-(D_0)$ , es decir,

$$k - 1 \leq d_{sf}^-(D_0).$$

Del *caso 1* y el *caso 2* se tiene que  $k - 1 \leq d_{sf}^-(D_0) \leq k$  concluyendo nuestra demostración.

□

A partir de la *proposición 4.2.1*, derivaremos algunos resultados sobre las digráficas  $D$  que satisfacen la desigualdad  $d_{sf}^-(D-a) < d_{sf}^-(D)$  para toda  $a \in F(D)$ . Dichas digráficas recibirán un nombre y se dará una caracterización de ellas respecto a sus  $d_{sf}^-$ -particiones, también se exhibirá una familia de digráficas que satisfacen dicha condición.

**Definición 4.2.1** *Sea  $D$  una digráfica tal que  $d_{sf}^-(D) \geq 2$  y  $D - a$  es fuerte para toda  $a \in F(D)$ . Decimos que  $D$  es **semidomática interior fuerte crítica** si  $d_{sf}^-(D - a) = d_{sf}^-(D) - 1$  para toda  $a \in F(D)$ .*

En la *figura 4.2.4* mostramos un ejemplo sencillo de una digráfica  $D$  tal que  $d_{sf}^-(D) = 2$  y es semidomática interior fuerte crítica. Primero notemos que ningún vértice en  $D$  es absorbente, por lo que  $d_{sf}^-(D) \leq \delta^+(D) = 2$ , como lo establece la *proposición 4.1.3*, pero si  $S_1 = \{v_1, v_2\}$  y  $S_2 = \{v_3, v_4\}$ , tenemos que  $\mathfrak{S} = \{S_1, S_2\}$  es una partición en conjuntos semidominantes interiores fuertes teniendo entonces que  $d_{sf}^-(D) = 2$ .

Para verificar que esta digráfica es semidomática interior fuerte crítica, supondremos lo contrario, es decir, existe  $a \in F(D)$  tal que  $d_{sf}^-(D - a) = 2$ , en cuyo caso, por tener  $D$  cuatro vértices y ninguno de ellos es absorbente, la única partición posible en conjuntos semidominantes interiores fuertes en  $D - a$  es  $\mathfrak{S}$ . Por ser cada elemento de  $\mathfrak{S}$  fuerte en  $D - a$ , vemos que la flecha  $a$  no es ninguna de las flechas simétricas en  $D$ , siguiéndose así que sólo hay cuatro posibles casos para  $a$ . Si  $a = (v_1, v_3)$ , el vértice  $v_1$  no es absorbido por el conjunto  $S_2$  en  $D - a$ , si  $a = (v_2, v_4)$  el vértice  $v_2$  no es absorbido por  $S_2$  en  $D - a$ . Análogamente, si la flecha  $a = (v_3, v_2)$  el vértice  $v_3$  no es absorbido por  $S_1$  en  $D - a$  y si  $a = (v_4, v_1)$  el vértice  $v_4$  no es absorbido por  $S_1$  en  $D - a$ , por lo que  $\mathfrak{S}$  no es una partición en conjuntos semidominantes interiores fuertes conexos de  $D - a$ , lo cual no es posible. Como la contradicción surgió al suponer que  $D$  no es semidomática interior fuerte crítica, demostramos que  $d_{sf}^-(D - a) = 1$  para toda  $a \in F(D)$ .

Como se habrá notado en el ejemplo anterior, no es sencillo el saber cuándo una digráfica es semidomática interior fuerte crítica sin tener teoría previa. Aunque en [27] Zelinka estableció el concepto de digráfica semidomática crítica y encontró condiciones necesarias y suficientes para que una digráfica perteneciera a esta familia, esas mismas condiciones no concluyen un resultado análogo con el número semidomático interior fuerte. Sin embargo, nosotros presentaremos condiciones necesarias y suficientes para que una digráfica sea semidomática interior fuerte crítica.

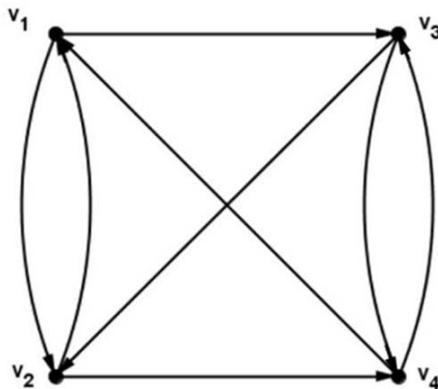


Fig. 4.2.4: Ejemplo de una digráfica semidomática interior fuerte crítica.

**Proposición 4.2.2** Si  $D$  es una digráfica semidomática interior fuerte crítica y  $\mathfrak{S} = \{S_1, \dots, S_k\}$  es una  $d_{sf}^-$ -partición de  $D$ , entonces para todo  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$  se satisface que:

- a)  $D[S_i] - a$  no es fuerte para toda  $a \in F(D[S_i])$ .
- b) Para todo  $u \in V(D) \setminus S_i$  existe un único  $x \in S_i$  tal que  $(u, x) \in F(D)$ .

Demostración.

Sean  $D$  una digráfica semidomática interior fuerte crítica,  $\mathfrak{S} = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$  una  $d_{sf}^-$ -partición de  $V(D)$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$  un índice arbitrario y  $D_i = D[S_i]$ .

Demostraremos primero el inciso (a) del enunciado.

Por contradicción, supongamos que existe  $a \in F(D_i)$  tal que  $D_i - a$  es fuerte. Afirmamos que  $\mathfrak{S}$  es una partición en conjuntos semidominantes interiores fuertes de  $V(D - a)$ . Notemos que como  $a \in F(D_i)$ , el conjunto  $S_j$  es un conjunto absorbente en  $D - a$  para todo  $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ , además, si  $i \neq j$ , el conjunto  $S_j$  es un conjunto fuerte en  $D - a$ , y en el caso en que  $j = i$ , por nuestra suposición, el conjunto  $S_i$  es fuerte en  $D - a$  ya que  $D_i - a$  es fuerte, concluyendo que  $\mathfrak{S}$  es una partición de los vértices de  $D - a$  en conjuntos semidominantes interiores fuertes, en cuyo caso,  $d_{sf}^-(D) \leq d_{sf}^-(D - a)$  y por el lema 4.1.2, tenemos que  $d_{sf}^-(D) = d_{sf}^-(D - a)$ , lo cual no es posible pues  $D$  es semidomática interior fuerte crítica. Dado que nuestra contradicción surgió de suponer que no se satisface el inciso (a) de esta proposición, concluimos que  $D_i - a$  no es fuerte para toda  $a \in F(D_i)$ .

Procederemos a demostrar por contradicción el inciso (b) del enunciado. Supongamos que existen  $u \in V(D) \setminus S_i$  y  $\{x, y\} \subseteq S_i$  tales que  $\{(u, x), (u, y)\} \subseteq F(D)$ . Afirmamos que  $\mathfrak{S}$  es una partición de  $V(D - (u, y))$  en conjuntos semidominantes interiores fuertes. Dado que  $(u, y) \notin F(D[S_j])$  para toda  $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ , los conjuntos  $S_j$  son fuertes en  $D - (u, y)$ .

Ahora sólo resta mostrar que  $S_j$  es un conjunto absorbente en  $D - (u, y)$  para toda  $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ ; notemos que esto es cierto para  $j \neq i$  pues la flecha  $(u, y)$  no incide en el conjunto  $S_j$  y en el caso en que  $i = j$ , si tomamos  $v \in V(D) \setminus S_i$  arbitrario y

$v \neq u$ , tenemos que  $S_i$  absorbe a  $v$  en  $D - (u, y)$ , y si  $v = u$ , por nuestra suposición, tenemos que  $(u, x) \in F(D - (u, y))$ , siguiéndose que  $S_i$  es absorbente en  $D - (u, y)$ , por lo cual,  $\mathfrak{S}$  es una partición de  $V(D - (u, y))$  en conjuntos semidominantes interiores fuertes, concluyendo que  $\mathbf{d}_{sf}^-(D) \leq \mathbf{d}_{sf}^-(D - (u, y))$  y por el *lema 4.1.2*, derivamos que  $\mathbf{d}_{sf}^-(D) = \mathbf{d}_{sf}^-(D - (u, y))$ , lo cual no es posible pues  $D$  es semidomática interior fuerte crítica, mostrando así que para todo vértice  $u \in V(D) \setminus S_i$ , existe un único vértice  $x \in S_i$  tal que  $(u, x) \in F(D)$ , terminando de esta forma nuestra demostración.  $\square$

Como consecuencia de lo anterior podremos dar una caracterización de las digráficas semidomáticas interiores fuertes críticas a partir de sus  $\mathbf{d}_{sf}^-$ -particiones. El siguiente enunciado muestra que si los incisos (a) y (b) de la *proposición 4.2.2* se satisfacen para cualquier  $\mathbf{d}_{sf}^-$ -partición de  $D$ , entonces podremos asegurar que dicha digráfica es semidomática interior fuerte crítica.

**Proposición 4.2.3** *Sea  $D$  una digráfica fuerte tal que  $\mathbf{d}_{sf}^-(D) \geq 2$  y  $D - a$  es fuertemente conexa para toda  $a \in F(D)$ .  $D$  es semidomática interior fuerte crítica si y sólo si para toda  $\mathbf{d}_{sf}^-$ -partición  $\mathfrak{S} = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$  de  $V(D)$  se satisface que:*

- a)  $D[S_i] - a$  no es fuerte para toda  $a \in F(D_i)$  y para toda  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ .
- b) Para todo  $u \in V(D) \setminus S_i$  existe un único  $x \in S_i$  tal que  $(u, x) \in F(D)$ , para toda  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ .

Demostración.

Por la *proposición 4.2.2*, la condición de suficiencia ya está dada, sólo hará falta demostrar la condición necesaria del enunciado.

Sean  $D$  una digráfica fuerte tal que  $\mathbf{d}_{sf}^-(D) \geq 2$  y  $a = (u, v) \in F(D)$ . Consideremos a  $\mathfrak{S}' = \{S_1, S_2, \dots, S_r\}$  una  $\mathbf{d}_{sf}^-$ -partición de  $V(D_0)$ . Para demostrar que  $D$  es semidomática interior fuerte crítica supondremos lo contrario, es decir,  $r = \mathbf{d}_{sf}^-(D)$ . Debido a que  $D - a$  es una subdigráfica generadora de  $D$ , tenemos que  $\mathfrak{S}'$  es una  $\mathbf{d}_{sf}^-$ -partición de  $V(D)$ , en cuyo caso, tenemos dos situaciones posibles para  $a$ :

Caso 1.  $(u, v)$  es tal que  $\{u, v\} \subseteq S_j$  para algún  $j \in \{1, 2, \dots, r\}$  en  $D$ .

Debido a que  $\mathfrak{S}'$  es una  $\mathbf{d}_{sf}^-$ -partición de  $V(D_0)$ , se tiene en particular que  $S_j$  es un conjunto fuerte en  $D_0$ , por lo que si  $D_j = D[S_j]$ , la flecha  $(u, v)$  es tal que  $D_j - a = D_0[S_j]$  es fuerte, contradiciendo el inciso (a) de nuestras hipótesis.

Caso 2.  $(u, v)$  es tal que  $u \in S_i$  y  $v \in S_j$  con  $i \neq j$  en  $D$ .

Debido a que  $\mathfrak{S}'$  es una  $\mathbf{d}_{sf}^-$ -partición de  $V(D_0)$ , se tiene en particular que  $S_j$  es un conjunto absorbente en  $D_0$  y para  $u \in S_i$  existe  $x \in S_j$  tal que  $(u, x) \in F(D_0) \subseteq F(D)$  con  $x \neq v$ , contradiciendo el inciso (b) de nuestras hipótesis.

A partir de las contradicciones del *caso 1* y *caso 2*, concluimos que  $r \neq \mathbf{d}_{sf}^-(D)$ , por lo cual,  $r < \mathbf{d}_{sf}^-(D)$ , concluyendo que  $D$  es semidomática interior fuerte crítica.

□

Zelinka, en su artículo *Semidomatic numbers of directed graphs* [28] construye un torneo para el cual su número semidomático interior y exterior están dados, a partir de dicho torneo podemos construir una digráfica semidomática interior fuerte crítica, como se mostrará en la siguiente proposición.

**Proposición 4.2.4** *Si  $n \in \mathbb{N}$  es al menos 3, entonces existe una digráfica semidomática interior fuerte crítica con  $2n$  vértices cuyo número semidomático interior fuerte es  $n$ .*

Demostración.

Sean  $n \in \mathbb{N}$  con  $n \geq 3$ ,  $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  y  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  conjuntos ajenos en vértices con  $n$  elementos cada uno. Definimos la digráfica  $D$  tal que  $V(D) = V \cup U$  y cuyas adyacencias están dadas por:

- $(u_i, u_j) \in F(D)$  si y sólo si  $i < j$ .
- $(v_i, v_j) \in F(D)$  si y sólo si  $i < j$ .
- $(v_i, u_j) \in F(D)$  si y sólo si  $i \geq j$ .
- $(u_i, v_j) \in F(D)$  si y sólo si  $i \geq j$ .

Probaremos que  $D$  es semidomática interior fuerte crítica tal que  $n = d_{sf}^-(D)$ .

Observemos que por ser  $(u_i, v_i)$  una flecha simétrica, los conjuntos de la forma  $\{u_i, v_i\}$  son conjuntos fuertes en  $D$ , afirmamos también que dichos conjuntos son absorbentes. Para demostrar esto último consideremos dos casos posibles sobre un vértice  $x \in V(D) \setminus \{u_i, v_i\}$ :

Caso 1.  $x = u_j$  para algún  $j \neq i$ .

Si sucede que  $j < i$ , tenemos que  $(u_j, u_i) \in F(D)$ , concluyendo que  $u_i$  absorbe a  $x$ . Si tenemos que  $i < j$ , entonces  $(u_j, v_i) \in F(D)$ , concluyendo que  $v_i$  absorbe a  $x$ .

Caso 2.  $x = v_j$  para algún  $j \neq i$ .

Si sucede que  $j < i$ , tenemos que  $(v_j, v_i) \in F(D)$ , concluyendo que  $v_i$  absorbe a  $x$ . Si tenemos que  $i < j$ , entonces  $(v_j, u_i) \in F(D)$ , concluyendo que  $u_i$  absorbe a  $x$ .

Del *caso 1* y el *caso 2* demostramos que los conjuntos  $\{u_i, v_i\}$  son absorbentes para toda  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , por lo que  $\mathfrak{S} = \{\{u_i, v_i\} \mid i \in \{1, 2, \dots, n\}\}$  es una partición de  $V(D)$  en conjuntos semidominantes interiores fuertes y con ello,  $n \leq d_{sf}^-(D)$ .

Para demostrar que  $d_{sf}^-(D) \leq n$ , notemos que la digráfica  $D$  no tiene vértices absorbentes pues si  $i \neq n$ , los vértices  $u_i$  no absorben a  $u_{i+1}$  y los vértices  $v_i$  no absorben a  $v_{i+1}$ ; si  $i = n$ , el vértice  $u_n$  no absorbe a  $v_{n-1}$  y el vértice  $v_n$  no absorbe a  $u_{n-1}$ ; por la *proposición 4.1.3*, concluimos que  $d_{sf}^-(D) \leq \delta^+(D)$ , sin embargo, como  $\delta^+(u_1) = n$ , demostramos la desigualdad deseada:  $d_{sf}^-(D) \leq \delta^+(D) \leq n$  y con ello, terminamos de probar que  $d_{sf}^-(D) = n$ .

Lo siguiente que demostraremos es que  $D - a$  es fuerte para toda  $a \in F(D)$ . Para ello exhibiremos dos caminos cerrados generadores ajenos en flechas en  $D$ . Consideremos las siguientes trayectorias:

$$T_1 = (u_1, u_2, \dots, u_n).$$

$$T_2 = (v_1, v_2, \dots, v_n).$$

$$T_3 = (v_n, u_n, v_{n-1}, u_{n-1}, \dots, u_2, v_1, u_1).$$

$$T_4 = (u_n, v_n, u_{n-1}, v_{n-1}, \dots, v_2, u_1, v_1).$$

Notemos que  $T_1$  es una  $u_1u_n$ -trayectoria que contiene a todos los vértices de  $U$ ,  $T_2$  es una  $v_1v_n$ -trayectoria que contiene a todos los vértices de  $V$ ,  $T_3$  es una  $v_nu_1$ -trayectoria y  $T_4$  es una  $u_nv_1$ -trayectoria que contienen, cada una, a todos los vértices de  $D$ , por lo que  $C_1 = T_1 \cup (u_n, v_1) \cup T_2 \cup (v_n, u_1)$  y  $C_2 = (v_1, v_n) \cup T_3 \cup (u_1, u_n) \cup T_4$  son caminos cerrados generadores de  $D$ . Ahora demostraremos que dichos caminos son ajenos en flechas.

Observemos que por definición de las trayectorias  $T_1, T_2, T_3$  y  $T_4$ , éstas son ajenas una a una en flechas, por lo que sólo restará mostrar que  $(u_n, v_1)$  y  $(v_n, u_1)$ , contenidas en  $C_1$ , no son elementos de  $F(C_2)$ ; esto es cierto pues por ser  $n \geq 3$ , no es posible que  $(u_n, v_1)$  y  $(v_n, u_1)$  formen parte de las trayectorias  $T_3$  ni  $T_4$ . Así, ningún elemento de  $F(C_1)$  es elemento de  $F(C_2)$ , por lo cual,  $F(C_1) \cap F(C_2) = \emptyset$ , ejemplificado en la *figura 4.2.5*. Con esto,  $D$  tiene dos caminos cerrados generadores ajenos en flechas, por lo que  $D - a$  es fuerte para cualquier  $a \in F(D)$ .

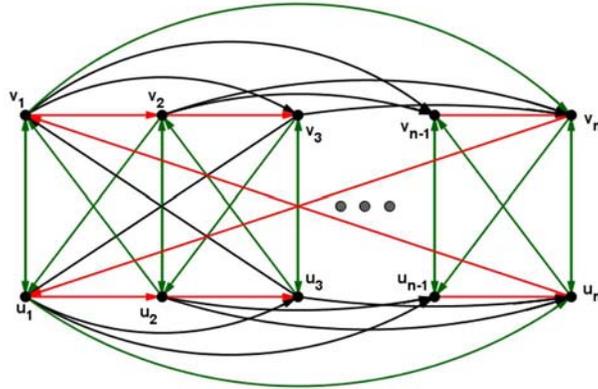


Fig. 4.2.5: Los caminos cerrados generadores  $C_1$  y  $C_2$  son ajenos en flechas.

Para concluir la demostración del enunciado sólo hará falta ver que  $D$  es semidomática interior fuerte crítica. Debido a que  $D$  tiene  $2n$  vértices, ninguno de ellos es absorbente y cualquier  $\mathbf{d}_{sf}^-$ -partición de  $D$  tiene  $n$  elementos, deducimos que cualquier elemento en una  $\mathbf{d}_{sf}^-$ -partición de  $V(D)$  tiene exactamente dos vértices, así, como los miembros de dicha partición son fuertes, las flechas de los elementos de la partición son simétricas, en cuyo caso, la única  $\mathbf{d}_{sf}^-$ -partición de  $V(D)$  es  $\mathfrak{S}$ . Por la construcción de  $D$ , los conjuntos  $\{u_i, v_i\}$  satisfacen la condición (a) y (b) de la *proposición 4.2.3* y con ello concluimos que  $D$  es semidomática interior fuerte crítica, terminando nuestra demostración.

□

Con lo anterior hemos logrado exhibir una familia de digráficas semidomáticas interiores fuertes críticas cuyo número semidomático interior fuerte esté dado. Sin embargo, todo elemento en una  $d_{sf}^-$ -partición tiene exactamente dos vértices, por lo que el orden de cada digráfica en dicha familia siempre es par, teniendo una familia restringida de digráficas. Más adelante, con ayuda de algunas operaciones sobre digráficas, podremos exhibir una nueva familia de digráficas semidomáticas interiores fuertes críticas. Por ahora, la *figura 4.2.6* muestra con un ejemplo la construcción exhibida anteriormente para  $n = 4$ .

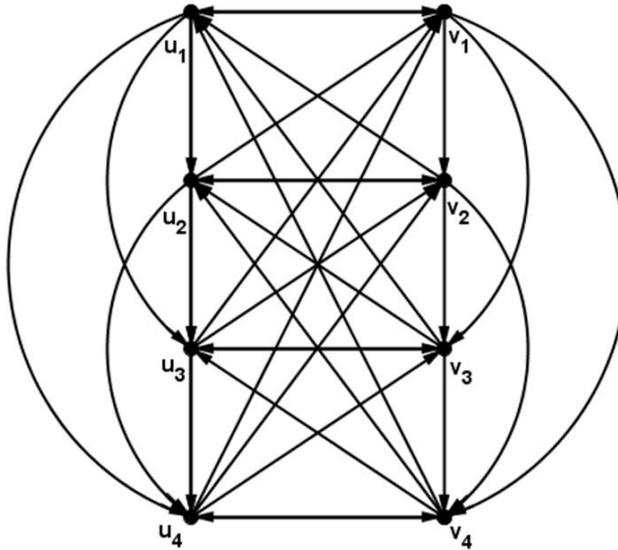


Fig. 4.2.6: Digráfica semidomática interior fuerte crítica con número semidomático interior fuerte igual a 4.

### 4.3. Número Semidomático Interior Fuerte en Digráficas Planas.

Hartnell y Rall, en su artículo *Connected Domatic Number in Planar Graphs* [17], ofrecen una cota superior justa para el número domático conexo de todas las gráficas planas como sigue: Si  $G$  es una gráfica plana, entonces el número domático conexo de  $G$  es a lo más 4, y  $K_4$  es la única gráfica plana que alcanza esta cota. Además obtuvieron información sobre la estructura de las gráficas planas que tienen número domático conexo igual a tres.

Nosotros mostraremos los resultados equivalentes para digráficas. El primer resultado acota inferiormente el número de aristas de cualquier gráfica plana respecto al número domático y el número de vértices de la gráfica.

**Lema 4.3.1** [17] *Si  $G$  es una gráfica conexa con  $p$  vértices,  $q$  aristas y  $d_c(G) = k$ , entonces:*

$$q \geq \frac{k+1}{2}p - k.$$

*Demostración.*

Sea  $G$  una gráfica conexa con  $p$  vértices,  $q$  aristas y  $d_c(G) = k$ . Si  $k = 1$ , tenemos que  $\frac{k+1}{2}p - k = \frac{1+1}{2}p - 1 = p - 1$ , en cuyo caso, por ser  $G$  conexa se satisface que  $q \geq p - 1$ , como lo establece el *teorema 1.1.3*, y la desigualdad del enunciado es verdadera. Para el resto de la demostración, consideremos  $k \geq 2$ .

Sean  $\mathfrak{S} = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$  una partición de  $V(G)$  en conjuntos dominantes conexos,  $A(S_i, V(G) \setminus S_i) = \{(x, z) \in A(G) \mid x \in S_i, z \in V(G) \setminus S_i\}$ ,  $G_i = G[S_i]$ ,  $p_i = |V(G_i)|$  y  $q_i = |A(G_i)|$  para toda  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ .

Ya que cada gráfica  $G_i$  es conexa, nuevamente por el *teorema 1.1.3* se cumple que  $q_i \geq p_i - 1$  para toda  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$  y además, por ser  $S_i$  un conjunto dominante en  $G$ , por cada  $x \in V(G) \setminus S_i$  existe una arista de la forma  $(x, z)$  con  $z \in S_i$ , por lo que  $|A(S_i, V(G) \setminus S_i)| \geq p - p_i$  para toda  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ .

Por otro lado, por ser  $\mathfrak{S}$  una partición de  $V(G)$ , tenemos que  $A(G_i) \cap A(G_j) = \emptyset$  si  $i \neq j$ , también es cierto que los conjuntos de la forma  $A(S_i, V(G) \setminus S_i)$  y  $A(G_j)$  son ajenos para todo  $\{i, j\} \subseteq \{1, 2, \dots, k\}$ .

Sin embargo, no es cierto que  $A(S_i, V(G) \setminus S_i) \cap A(S_j, V(G) \setminus S_j) = \emptyset$ , pues dada una arista  $(u, v) \in A(G) \setminus \cup\{A(G_i) \mid i \in \{1, 2, \dots, k\}\}$ , ésta pertenece a exactamente dos conjuntos de la forma  $A(S_i, V(G) \setminus S_i)$ : si  $u \in S_i$  y  $v \in S_j$ , entonces  $(u, v) \in A(S_i, V(G) \setminus S_i) \cap A(S_j, V(G) \setminus S_j)$ .

A partir de estas últimas observaciones podemos deducir que:

$$\begin{aligned} |A(G)| &\geq \sum_{i=1}^k |A(G_i)| + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k |A(S_i, V(G) \setminus S_i)| \\ &\geq \sum_{i=1}^k (p_i - 1) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k (p - p_i) \geq (p - k) + \frac{1}{2}(kp - p) \\ &= p + \frac{1}{2}p(k - 1) - k = (1 + \frac{1}{2}(k - 1))p - k = \frac{2 + k - 1}{2}p - k = \frac{k + 1}{2}p - k. \end{aligned}$$

Es decir,

$$q \geq \frac{k+1}{2}p - k.$$

□

Con el resultado anterior, Hartnell y Rall [17] logran acotar superiormente el número domático conexo de todas las gráficas planas, como se enuncia a continuación:

**Teorema 4.3.1** [17] *El número domático conexo de cualquier gráfica plana es a lo más 4 y la única gráfica plana que alcanza dicha cota es  $K_4$ .*

Demostración.

Sea  $G$  una gráfica plana con  $p$  vértices. Para demostrar que el número domático conexo de  $G$  es a lo más cuatro, supondremos lo contrario, es decir,  $d_c(G) \geq 5$ . Por el *lema 4.3.1* se satisface la desigualdad  $q \geq \frac{5+1}{2}p - 5 = 3p - 5$ , sin embargo, por el *corolario 1.1.1*, en toda gráfica plana se cumple que  $3p - 6 \geq q$ , siguiéndose de las dos desigualdades que  $q \geq 3p - 5 > 3p - 6 \geq q$ , lo cual no es posible, por lo que  $d_c(G) \leq 4$ .

Ahora demostraremos que si  $G$  es plana y  $d_c(G) = 4$ , entonces  $G \cong K_4$ . Procediendo nuevamente por contradicción, supongamos que existe una gráfica plana  $G$  para la cual  $d_c(G) = 4$  pero  $G$  no es isomorfa a  $K_4$ . Sea  $\mathfrak{S} = \{S_1, S_2, S_3, S_4\}$  una partición de  $V(G)$  en conjuntos dominantes conexos.

Notemos primero que por tener  $V(G)$  una partición con cuatro elementos sucede que  $|V(G)| \geq 4$ , pero si  $|V(G)| = 4$  cada elemento en  $\mathfrak{S}$  constaría de un vértice unitario, que además es absorbente, es decir, cada vértice de  $G$  tendría grado  $p - 1$  y de ello se seguiría el que  $G$  sea isomorfa a  $K_4$ , lo cual no sucede por nuestra suposición, con esto concluimos que  $G$  tiene al menos cinco vértices.

A partir de lo anterior y del hecho que  $\mathfrak{S}$  es una partición de los vértices de  $G$  con cuatro elementos podemos afirmar que algún elemento de  $\mathfrak{S}$  tiene al menos dos vértices, digamos  $S_1$ . Consideremos ahora la gráfica  $H$  obtenida a partir de  $G$  contrayendo los conjuntos  $S_2, S_3$  y  $S_4$  en los vértices  $x_2, x_3$  y  $x_4$  respectivamente.

Como  $S_1$  es un conjunto no unitario y conexo de  $G$ , existe  $\{u, v\} \subseteq S_1$  tal que  $(u, v) \in A(G)$  y en particular,  $(u, v) \in A(H)$ . Además, por ser  $S_i$  un conjunto dominante de  $G$ , debe existir una  $uS_i$ -arista, una  $vS_i$ -arista y una  $S_iS_j$ -arista en  $G$  para toda  $\{i, j\} \subseteq \{2, 3, 4\}$ , por lo que  $(u, x_i), (v, x_i), (x_i, x_j)$  son aristas de  $H$  para toda  $\{i, j\} \subseteq \{2, 3, 4\}$ , pero esto implica que  $H[\{u, v, x_2, x_3, x_4\}]$  es isomorfa a  $K_5$ , lo cual no es posible por ser  $G$  una gráfica plana, como lo establece el *corolario 1.1.2*. Con esto se prueba que  $G$  es isomorfa a  $K_4$ , terminando así la demostración del enunciado. □

Del teorema anterior se deduce una cota superior para el número semidomático interior fuerte de todas las digráficas planas, y de manera análoga al *teorema 4.3.1* mostraremos que si una digráfica alcanza dicha cota, entonces es isomorfa a  $K_4$ .

**Corolario 4.3.1** *Si  $D$  es una digráfica plana, entonces  $\mathbf{d}_{sf}^-(D) \leq 4$  y la única digráfica que alcanza dicha cota es  $K_4$ .*

Demostración.

Sea  $D$  una digráfica plana y  $G$  su gráfica subyacente. Debido a que  $D$  es plana tenemos que  $G$  es una gráfica plana, por lo que  $\mathbf{d}_c(G) \leq 4$  como lo establece el *Teorema 4.3.1*. Por otro lado, por la *proposición 4.1.6* tenemos que  $\mathbf{d}_{sf}^-(D) \leq \mathbf{d}_c(G)$  y con ello  $\mathbf{d}_{sf}^-(D) \leq 4$ .

Ahora mostraremos que la única digráfica plana cuyo número semidomático interior fuerte alcanza dicha cota es  $K_4$ . Sean  $D$  una digráfica plana tal que  $\mathbf{d}_{sf}^-(D) = 4$  y  $G$  su gráfica subyacente. Como  $G$  es una gráfica plana tenemos que  $\mathbf{d}_c(G) \leq 4$  y por la *proposición 4.1.6* concluimos que  $4 = \mathbf{d}_{sf}^-(D) \leq \mathbf{d}_c(G) \leq 4$ , es decir,  $\mathbf{d}_c(G) = 4$ . Por el *teorema 4.3.1* se sigue que  $G$  es isomorfa a  $K_4$ , y con esto derivamos el que  $D$  sea una digráfica semicompleta con cuatro vértices. En particular,  $D$  satisface que  $p = \mathbf{d}_{sf}^-(D)$ , por lo que  $D$  es isomorfa a  $K_4$ , como lo establece el *corolario 4.1.4*. □

En [17] Hartnell y Rall propusieron el siguiente teorema que obtiene información de las gráficas planas cuyo número domático conexo es tres.

**Teorema 4.3.2** [17] *Sea  $G$  una gráfica plana tal que  $\mathbf{d}_c(G) = 3$ , si  $\mathfrak{P} = \{C_1, C_2, C_3\}$  es cualquier partición de  $V(G)$  en conjuntos dominantes conexos de  $G$ , entonces cada una de las gráficas inducidas  $G[C_1]$ ,  $G[C_2]$  y  $G[C_3]$  es una trayectoria.*

Demostración.

Sean  $G$  una gráfica plana tal que  $\mathbf{d}_c(G) = 3$ ,  $\mathfrak{P} = \{S_1, S_2, S_3\}$  cualquier partición domática conexa de  $G$  y  $G_i = G[S_i]$  para toda  $i \in \{1, 2, 3\}$ .

Mostraremos primero que cualquier vértice en  $S_i$  tiene grado a lo más dos en  $G_i$ , para toda  $i \in \{1, 2, 3\}$ . Procediendo por contradicción: existe un vértice  $v \in S_i$  tal que  $\delta_{G_i}(v) \geq 3$  y supongamos sin pérdida de generalidad que  $i = 1$ . Sean  $x_1, x_2$  y  $x_3$  vecinos de  $v$  en  $G_1$  y  $H$  la contracción de  $G$  identificando los conjuntos  $S_2$  y  $S_3$  en los vértices  $v_2$  y  $v_3$  respectivamente. Como los conjuntos  $S_2$  y  $S_3$  son dominantes en  $G$ , debe existir una  $x_i S_j$ -arista en  $G$  para toda  $i \in \{1, 2, 3\}$  y para toda  $j \in \{2, 3\}$ , por lo que  $(x_i, v_j) \in A(H)$  para toda  $i \in \{1, 2, 3\}$  y para toda  $j \in \{2, 3\}$ . Consideremos el conjunto:

$$A = \{(v, x_1), (v, x_2), (v, x_3), (v_2, x_1), (v_2, x_2), (v_2, x_3), (v_3, x_1), (v_3, x_2), (v_3, x_3)\}.$$

Notemos que  $\{\{v, v_2, v_3\}, \{x_1, x_2, x_3\}\}$  es una partición de los vértices de la subgráfica inducida en  $H$  por el conjunto de aristas  $A$ ,  $H[A]$ , en conjuntos independientes y

además cada vértice en  $\{v, v_2, v_3\}$  es adyacente a todos los vértices de  $\{x_1, x_2, x_3\}$ , siguiéndose que  $H[A]$  es isomorfa a  $K_{3,3}$ , lo cual no es posible pues la contracción  $H$  es plana, como lo establece el *teorema 1.1.6*, y  $H[A]$  es subgráfica de  $H$ . Con ésto mostramos que todo vértice en  $S_1$  tiene grado a lo más dos en  $G_1$ . Análogamente, todo vértice en  $S_2$  y  $S_3$  tiene grado a lo más dos en  $G_2$  y  $G_3$  respectivamente.

Con ésto último y debido a que los conjuntos  $S_i$  son conexos, las subgráficas  $G_i$  son una trayectoria o un ciclo. Para demostrar que no es posible que se trate de un ciclo supondremos, sin pérdida de generalidad, que  $G_1$  lo es.

Sea  $H'$  la gráfica obtenida a partir de  $G$  contrayendo a los vértices de  $G_1$  en un ciclo de longitud tres, digamos  $C = (x_1, x_2, x_3, x_1)$ . Ahora consideremos a la gráfica  $H$  obtenida a partir de  $H'$  contrayendo los conjuntos  $S_2$  y  $S_3$  en dos vértices  $v_2$  y  $v_3$ . Como los conjuntos  $S_2$  y  $S_3$  son dominantes en  $H'$ , las aristas de la forma  $(x_i, v_j)$  son elementos de  $H$  para toda  $i \in \{1, 2, 3\}$  y para toda  $j \in \{2, 3\}$  y la arista  $(v_2, v_3)$  también es un elemento de  $A(H)$ .

Así, la gráfica  $H$  es isomorfa a  $K_5$ , lo cual no es posible pues  $H$  es una contracción de una gráfica plana. Por todo lo anterior,  $G_1$  es una trayectoria y análogamente,  $G_2$  y  $G_3$  también lo son, concluyendo nuestra demostración. □

**Corolario 4.3.2** *Sea  $D$  una digráfica plana tal que  $d_{sf}^-(D) = 3$ . Si  $\mathfrak{S} = \{S_1, S_2, S_3\}$  es una  $d_{sf}^-$ -partición arbitraria de  $V(D)$ , entonces cada una de las digráficas  $D[S_1]$ ,  $D[S_2]$  y  $D[S_3]$  son trayectorias simétricas de  $D$ .*

*Demostración.*

Sean  $D$  una digráfica plana tal que  $d_{sf}^-(D) = 3$ ,  $\mathfrak{S} = \{S_1, S_2, S_3\}$  una  $d_{sf}^-$ -partición de  $D$  y  $G$  la gráfica subyacente de  $D$ . Consideremos dos posibles casos para  $D$ .

Caso 1.  $|V(D)| \neq 4$ .

En este caso  $G$  no es isomorfa a  $K_4$ , por lo que  $d_c(G) < 4$  y por la *proposición 4.1.6*, tenemos que  $d_{sf}^-(D) \leq d_c(G)$ , pero por hipótesis  $d_{sf}^-(D) = 3$  y por ello  $d_c(G) = 3$ . Ya que  $\mathfrak{S}$  es una partición de  $V(D)$  en conjuntos semidominantes interiores fuertes, en particular es una partición con tres elementos de los vértices de  $G$  en conjuntos dominantes conexos, siguiéndose del *teorema 4.3.2* que  $G[S_i]$  sea una trayectoria para toda  $i \in \{1, 2, 3\}$ , en cuyo caso, por definición de gráfica subyacente,  $D[S_i]$  es una trayectoria no necesariamente dirigida en  $D$ , pero por ser  $D[S_i]$  fuerte concluimos que  $D[S_i]$  es una trayectoria simétrica.

Caso 2.  $|V(D)| = 4$ .

Para este caso, por tener  $D$  cuatro elementos y ser  $\mathfrak{S}$  una partición con tres elementos de  $V(D)$ , sólo uno de los conjuntos en  $\mathfrak{S}$  tiene dos elementos, digamos  $S_1$ . Como dicho conjunto es fuerte en  $D$ , debe tratarse de una trayectoria simétrica con dos vértices. Para los conjuntos  $S_2$  y  $S_3$  se cumple trivialmente pues  $D[S_2]$  y  $D[S_3]$  son isomorfas a  $K_1$ , concluyendo nuestra demostración. □

#### 4.4. Número Semidomático Interior Fuerte y Números de Absorbencia por Conjuntos Semicompletos.

En esta sección mostraremos resultados que relacionan al número semidomático interior fuerte y los números de absorbencia por conjuntos semicompletos de cierto tipo de digráficas. En general, la existencia de una partición de los vértices de una digráfica en conjuntos semidominantes interiores fuertes no es condición suficiente para la existencia de un conjunto absorbente semicompleto. En el siguiente ejemplo se exhibe una digráfica  $D$  en la que  $\{\{x_1, x_2, x_3\}, \{z_1, z_2, z_3\}\}$  es una partición de sus vértices en conjuntos semidominantes interiores fuertes, notemos que los conjuntos semicompletos en  $D$  son vértices unitarios o conjuntos con dos elementos, en cualquier caso, ninguno es absorbente, por lo que  $D$  no puede tener un conjunto absorbente semicompleto.

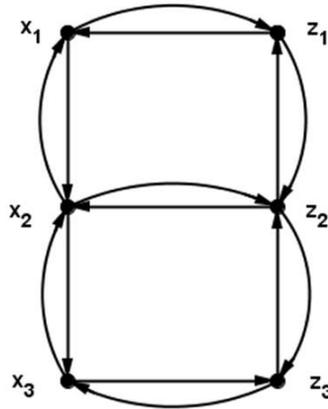


Fig. 4.4.1: La existencia de una partición de los vértices en conjuntos semidominantes interiores fuertes no es suficiente para la existencia de un conjunto absorbente semicompleto.

Igualmente, la existencia de un conjunto absorbente semicompleto no es condición suficiente para que la digráfica tenga una partición de sus vértices en conjuntos semidominantes interiores fuertes.

En la *figura 4.4.2*, exhibida enseguida, se muestra una digráfica con un conjunto absorbente semicompleto,  $\{w_3, w_4, w_5, w_6\}$ , notemos que esta misma digráfica no puede tener una partición de sus vértices en conjuntos semidominantes interiores fuertes por no ser una digráfica fuerte, como lo establece la *proposición 4.1.1*.

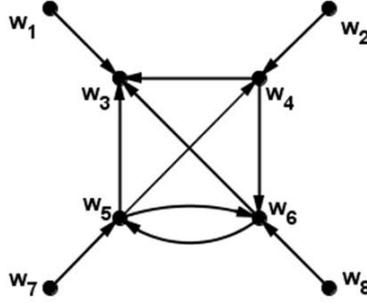


Fig. 4.4.2: La existencia de un conjunto absorbente semicompleto no es suficiente para la existencia de una partición de los vértices en conjuntos semidominantes interiores fuertes.

A pesar de lo anterior, sí hay manera de acotar al número superior de absorbercia por conjuntos semicompletos en las digráficas para las cuales  $d_{sf}^-(D) = \delta^+(D) + 1$ . Para mostrar dicha relación, será de utilidad probar el siguiente lema.

**Lema 4.4.1** Sean  $D$  una digráfica fuerte tal que  $d_{sf}^-(D) = \delta^+(D) + 1$  y  $\mathfrak{S}$  una  $d_{sf}^-$ -partición de  $D$ . Si  $x \in V(D)$  es tal que  $\delta^+(x) = \delta^+(D)$ , entonces  $\{x\} \in \mathfrak{S}$ .

Demostración.

Sean  $D$  una digráfica fuerte tal que  $d_{sf}^-(D) = \delta^+(D) + 1$ ,  $\mathfrak{S} = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$  una  $d_{sf}^-$ -partición arbitraria de  $D$  y  $x \in V(D)$  tal que  $\delta^+(x) = \delta^+(D)$ . Como  $\mathfrak{S}$  es una partición de  $V(D)$ ,  $x \in S_i$  para algún  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ .

Si suponemos que  $S_i$  no es unitario, por ser un conjunto fuerte  $x$  tendría un exvecino en  $S_i$  y ya que todo elemento en  $\mathfrak{S}$  es absorbente,  $x$  tiene un exvecino en cada uno de los conjuntos  $S_j$  con  $i \neq j$ , por lo que  $x$  tiene al menos tantos exvecinos como elementos hay en  $\mathfrak{S}$ , deduciéndose que  $\delta^+(x) \geq |\mathfrak{S}|$ , pero por elección de  $\mathfrak{S}$  y debido a que  $d_{sf}^-(D) = \delta^+(D) + 1$ , tendríamos que  $\delta^+(x) \geq \delta^+(D) + 1$  lo cual es imposible por la elección de  $x$ , ya que  $\delta^+(x) = \delta^+(D)$ .

Con lo anterior concluimos que  $\{x\} = S_i$  para algún  $i \in \{1, 2 \dots k\}$ , terminando así la demostración.

□

Observemos que el lema anterior tiene una consecuencia importante para las digráficas que satisfacen que  $d_{sf}^-(D) = \delta^+(D) + 1$ , pues cualquier vértice de exgrado mínimo de la digráfica es absorbente. Gracias a ésto podremos relacionar el número semidomático interior fuerte de la digráfica con el número inferior de absorbercia por conjuntos semicompletos.

**Corolario 4.4.1** *Si  $D$  es una digráfica fuerte tal que  $\mathbf{d}_{sf}^-(D) = \delta^+(D) + 1$ , entonces  $\gamma_{cas}(D) \leq \mathbf{d}_{sf}^-(D)$  y la única digráfica que alcanza dicha cota es  $K_1$ .*

Demostración.

Sean  $D$  una digráfica fuerte tal que  $\mathbf{d}_{sf}^-(D) = \delta^+(D) + 1$  y  $\mathfrak{S}$  una  $\mathbf{d}_{sf}^-$ -partición de  $D$ . Por el *lema 4.4.1*, si  $x$  es un vértice de exgrado mínimo en  $D$ , entonces  $\{x\} \in \mathfrak{S}$ , en particular,  $\{x\}$  es un conjunto absorbente semicompleto, por lo que  $\gamma_{cas}(D) = 1$ , y con ello  $\gamma_{cas}(D) \leq \mathbf{d}_{sf}^-(D)$ .

Para mostrar que la única digráfica que alcanza dicha cota es  $K_1$ , supondremos que  $D$  es una digráfica fuerte tal que  $\mathbf{d}_{sf}^-(D) = \delta^+(D) + 1$  y además,  $\gamma_{cas}(D) = \mathbf{d}_{sf}^-(D)$ . Como  $\gamma_{cas}(D) = 1$ , entonces  $1 = \mathbf{d}_{sf}^-(D) = \delta^+(D) + 1$ , por lo que  $\delta^+(D) = 0$ , es decir,  $D$  tiene un vértice de exgrado cero y por ser  $D$  fuerte, éste debe ser el único elemento en  $V(D)$ , demostrando así que  $D \cong K_1$ .

□

En la siguiente proposición acotaremos el número superior de absorbencia por conjuntos semicompletos de las digráficas  $D$  que satisfacen la igualdad  $\mathbf{d}_{sf}^-(D) = \delta^+(D) + 1$ . Nuevamente el *lema 4.4.1* será un auxiliar en la demostración.

**Proposición 4.4.1** *Si  $D$  es una digráfica fuerte tal que  $\mathbf{d}_{sf}^-(D) = \delta^+(D) + 1$  y  $N_0$  es el conjunto de vértices de exgrado mínimo en  $D$ , entonces  $|N_0| \leq \Gamma_{cas}(D)$ .*

Demostración.

Sean  $D$  una digráfica fuerte tal que  $\mathbf{d}_{sf}^-(D) = \delta^+(D) + 1$  y  $N_0$  el conjunto de vértices de exgrado mínimo en  $D$ . Bastará probar que  $N_0$  es un conjunto absorbente semicompleto.

Por el *lema 4.4.1*, cualquier elemento de  $N_0$  es absorbente en  $D$ , por lo que  $N_0$  es un conjunto absorbente de  $D$ . Por otro lado, si  $\{u, v\} \subseteq N_0$ , entonces  $(u, v) \in F(D)$  pues  $v$  es absorbente y análogamente  $(v, u) \in F(D)$  pues  $u$  es absorbente, concluyendo que entre cada par de elementos de  $N_0$  existe una flecha simétrica, derivándose de ello que  $N_0$  es un conjunto completo de  $D$ . Por lo anterior,  $N_0$  es un conjunto absorbente semicompleto y por definición de número superior de absorbencia por conjuntos semicompletos demostramos que  $|N_0| \leq \Gamma_{cas}(D)$ .

□

# Capítulo 5.

## Operaciones en Digráficas: Producto y Composición.

Existe un interés en las operaciones sobre digráficas que consiste en determinar si una propiedad es cerrada bajo cierta operación: si  $D$  y  $H$  son digráficas que satisfacen una propiedad  $\mathcal{P}$  y  $*$  es un operador entre digráficas ¿cuándo es que  $D * H$  satisface la propiedad  $\mathcal{P}$ ? También se pueden considerar las operaciones para construir una familia de digráficas que satisfagan  $\mathcal{P}$ , es decir, si  $D$  y  $H$  son digráficas ¿bajo qué condiciones de  $D$  y  $H$ ,  $D * H$  satisface  $\mathcal{P}$ ? e incluso, si  $D * H$  satisface  $\mathcal{P}$  ¿qué información podemos recuperar sobre  $D$  y  $H$ ? En nuestro caso, dicha propiedad se remite a encontrar conjuntos absorbentes semicompletos y particiones de los vértices en conjuntos semidominantes interiores fuertes para poder acotar los números de absorbencia por conjuntos semicompletos y el número semidomático interior fuerte en el producto y la composición de digráficas.

### 5.1. Producto de Digráficas

**Definición 5.1.1** Sean  $D = (V(D), F(D))$  y  $H = (V(H), F(H))$  digráficas ajenas en vértices. Definimos el **producto cruz de  $D$  y  $H$** , denotado por  $D \times H$ , como la digráfica tal que:

- a)  $V(D \times H) = V(D) \times V(H)$ .
- b) Si  $(x, z)$  y  $(u, v)$  son vértices de  $D \times H$ ,  $(x, z)$  incide hacia  $(u, v)$  si y sólo si  $x = u$  y  $(z, v) \in F(H)$  o  $z = v$  y  $(x, u) \in F(D)$ .

El producto cruz de dos digráficas es una de las operaciones binarias más comunes, en la *figura 5.1.1* se muestra el producto cruz de dos digráficas  $D$  y  $H$  donde  $V(D) = \{a, b, c\}$ ,  $F(D) = \{(c, a), (c, b)\}$ ,  $V(H) = \{x, y, z, w\}$  y  $F(H) = \{(x, y), (y, z), (z, w), (w, y), (w, x)\}$ .

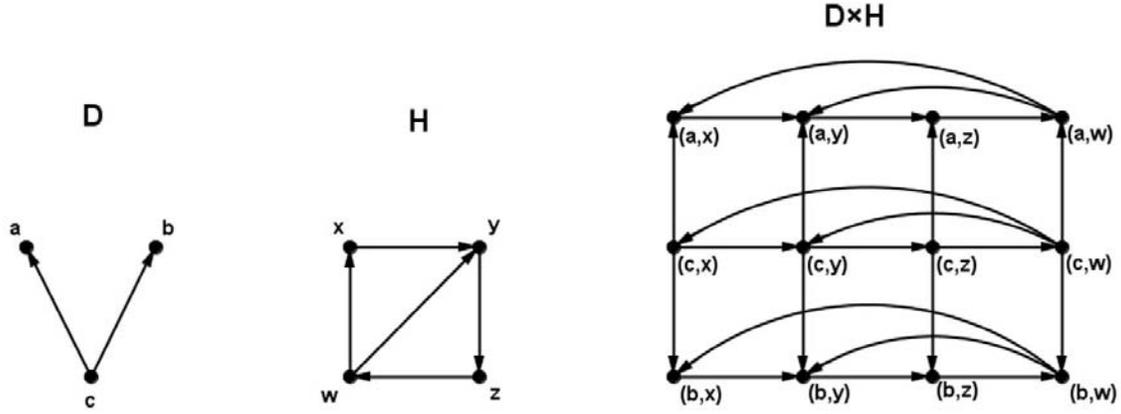


Fig. 5.1.1: Digráficas  $D$  y  $H$  y su producto cruz  $D \times H$ , respectivamente.

A partir de este punto, cada vez que se haga referencia al producto cruz de dos digráficas,  $D \times H$ , se dará por hecho que  $D$  y  $H$  son ajenas en vértices, ésto con la intención de no ser repetitivo en los resultados durante el resto del capítulo.

En las siguientes proposiciones se logrará determinar la estructura de las digráficas cuyo producto cruz tiene un conjunto absorbente semicompleto y viceversa. Para ello, consideraremos antes un par de lemas.

**Lema 5.1.1** Sean  $D$  y  $H$  digráficas arbitrarias. Si  $U \subseteq V(D)$  y  $W \subseteq V(H)$  son conjuntos no vacíos, entonces  $D[U] \times H[W] = (D \times H)[U \times W]$ .

*Demostración.*

Sean  $D$  y  $H$  digráficas arbitrarias,  $U \subseteq V(D)$  y  $W \subseteq V(H)$  conjuntos no vacíos,  $E = D[U] \times H[W]$  y  $E' = (D \times H)[U \times W]$ . Bastará ver que  $V(E) = V(E')$  y  $F(E) = F(E')$ . Debido a que  $V(E) = U \times W$  por definición de producto cruz de dos digráficas y  $V(E') = U \times W$  por definición de digráfica inducida por un conjunto, tenemos que  $V(E) = V(E')$ .

Ahora demostraremos la igualdad en el conjunto de flechas por doble contención. Mostraremos primero que si  $((x, u), (y, v)) \in F(E)$ , entonces  $((x, u), (y, v)) \in F(E')$ . Por definición de producto cruz, consideremos dos casos posibles sobre  $((x, u), (y, v))$ .

Caso 1.  $y = x$  y  $(u, v) \in F(H[W])$ .

En este caso tenemos que  $(u, v) \in F(H[W]) \subseteq F(H)$  y por definición de adyacencia en  $D \times H$ ,  $((x, u), (y, v)) \in F(D \times H)$ . Así,  $((x, u), (y, v)) \in F(E')$ .

Caso 2.  $u = v$  y  $(x, y) \in F(D[U])$ .

En este caso tenemos que  $(x, y) \in F(D[U]) \subseteq F(D)$  y por definición de adyacencia en  $D \times H$ ,  $((x, u), (y, v)) \in F(D \times H)$ , por lo que  $((x, u), (y, v)) \in F(E')$ .

Del *caso 1* y el *caso 2* mostramos que si  $((x, u), (y, v)) \in F(E)$ , entonces se cumple que  $((x, u), (y, v)) \in F(E')$ .

Ahora veremos que si  $((x, u), (y, v)) \in F(E')$ , entonces  $((x, u), (y, v)) \in F(E)$ .

Consideremos nuevamente dos posibles casos sobre  $((x, u), (y, v))$ .

Caso 3.  $y = x$  y  $(u, v) \in F(H)$ .

En este caso, dado que  $(u, v) \in F(H)$ , en particular  $(u, v) \in F(H[W])$  y por definición de adyacencia en  $D[U] \times H[W]$  concluimos que  $((x, u), (y, v)) \in F(E)$ .

Caso 4.  $u = v$  y  $(x, y) \in F(D)$ .

En este caso, dado que  $(x, y) \in F(D)$ , en particular  $(x, y) \in F(D[U])$  y por definición de adyacencia en  $D[U] \times H[W]$  concluimos que  $((x, u), (y, v)) \in F(E)$ .

Del *caso 3* y el *caso 4* se deriva que si  $((x, u), (y, v)) \in F(E')$ , entonces  $((x, u), (y, v)) \in F(E)$ , por lo que la igualdad entre los conjuntos  $F(E)$  y  $F(E')$  es cierta, demostrando así que  $D[U] \times H[W] = (D \times H)[U \times W]$ .

□

En la siguiente definición introduciremos una noción importante que será auxiliar en demostraciones posteriores.

**Definición 5.1.2** Sean  $D$  y  $H$  digráficas ajenas en vértices y  $D \times H$  su producto cruz. Si  $x_0$  es un vértice fijo en  $D$ , entonces al conjunto  $\{(x_0, y) \mid y \in V(H)\}$  se le llama el nivel de  $x_0$  en  $D \times H$  y análogamente, si  $y_0$  es un vértice fijo en  $H$ , el conjunto  $\{(x, y_0) \mid x \in V(D)\}$  se le llama el nivel de  $y_0$  en  $D \times H$ .

La importancia de los niveles en el producto cruz de dos digráficas se pone de manifiesto en el siguiente lema.

**Lema 5.1.2** Sean  $D$  y  $H$  digráficas arbitrarias y  $D \times H$  su producto cruz. Si  $x_0$  es un vértice fijo en  $D$  y  $M_{x_0} = \{(x_0, y) \in V(D \times H) \mid y \in V(H)\}$ , entonces:

$$(D \times H)[M_{x_0}] \cong H.$$

Análogamente, si  $y_0$  es un vértice fijo en  $H$  y  $N_{y_0} = \{(x, y_0) \in V(D \times H) \mid x \in V(D)\}$ , entonces:

$$(D \times H)[N_{y_0}] \cong D.$$

*Demostración.*

Sean  $D$  y  $H$  digráficas arbitrarias tales que  $V(D) = \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$  y  $V(H) = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ ,  $D \times H$  su producto cruz y consideremos un vértice fijo  $x_0$  en  $D$ ,  $M_{x_0} = \{(x_0, y) \in V(D \times H) \mid y \in V(H)\}$  y  $D_0 = (D \times H)[M_{x_0}]$ . Bastará probar que existe una función biyectiva  $f : V(H) \rightarrow V(D_0)$  que preserva adyacencias.

Definimos  $f : V(H) \rightarrow V(D_0)$  como  $f(v_i) = (x_0, v_i)$ .

Afirmación 1.  $f$  es una función biyectiva.

Dado que todos los elementos de  $M_{x_0}$  tienen su coordenada inicial fija,  $f$  efectivamente es una función. Para demostrar la inyectividad de  $f$ , consideramos dos elementos

distintos en  $V(H)$ , digamos  $v_i$  y  $v_j$  con  $i \neq j$ . Por definición de  $f$ ,  $f(v_i) = (x_0, v_i)$  y  $f(v_j) = (x_0, v_j)$ , y dado que  $v_i \neq v_j$ , entonces  $(x_0, v_i) \neq (x_0, v_j)$ , concluyendo que  $f(v_i) \neq f(v_j)$ , por lo cual,  $f$  es inyectiva.

Por otro lado, como  $|V(H)| = |V(D_0)| = |M_{x_0}| = m$ , entonces  $f$  es biyectiva.

Afirmación 2.  $f$  es una función que preserva adyacencias.

Sean  $v_i$  y  $v_j$  vértices de  $H$  tales que  $(v_i, v_j) \in F(H)$ . Como  $(x_0, v_i)$  y  $(x_0, v_j)$  son vértices de  $D_0$ , entonces, por construcción de  $D_0$ ,  $(x_0, v_i)$  incide hacia  $(x_0, v_j)$  en  $D_0$ , es decir,  $(f(v_i), f(v_j)) \in F(D_0)$ .

Recíprocamente, si  $(f(v_i), f(v_j)) \in F(D_0)$ , por definición de  $f$ ,  $D \times H$  y ser  $x_0$  fijo,  $(v_i, v_j) \in F(H)$ , concluyendo que  $f$  preserva adyacencias.

De la afirmación 1 y afirmación 2, tenemos que  $H \cong D_0$ .

Análogamente, si  $y_0$  es un vértice fijo en  $H$ ,  $N_{y_0} = \{(x, y_0) \in V(D \times H) \mid x \in V(D)\}$  y  $D_1 = (D \times H)[N]$ , la función  $g : V(D) \rightarrow V(D_1)$  definida por  $g(u_i) = (u_i, y_0)$  es una función biyectiva que preserva adyacencias, concluyendo que  $D \cong D_1$ .

□

En el siguiente lema se demostrará que si un conjunto de vértices en  $D \times H$  es semicompleto, entonces éste está contenido en un nivel de  $D \times H$  para algún vértice fijo de  $D$  o de  $H$ , lo que dará pie a la caracterización de los conjuntos absorbentes semicompletos en el producto de dos digráficas.

**Lema 5.1.3** Sean  $D$  y  $H$  digráficas arbitrarias,  $D \times H$  su producto cruz, y  $U \subseteq V(D \times H)$ . Si  $U$  es un conjunto semicompleto, entonces  $U$  está contenido en algún nivel de  $D \times H$ .

*Demostración.*

Sean  $D$  y  $H$  digráficas arbitrarias,  $D \times H$  su producto cruz, y  $U \subseteq V(D \times H)$  tal que  $U$  es semicompleto, bastará ver que todo vértice en  $U$  tiene una de sus coordenadas fija. Si  $|U| = 1$ , la demostración está hecha. Supongamos que  $|U| \geq 2$ , consideramos  $(x, y)$  y  $(z, w)$  vértices arbitrarios en  $U$ , dado que  $(D \times H)[U]$  es semicompleta, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que  $((x, y), (z, w)) \in F(D \times H)$ . Por definición de adyacencia en  $D \times H$ , consideraremos dos casos:

Caso 1.  $x = z$  y  $(y, w) \in F(H)$ .

En este caso, bastará ver que cualquier otro elemento en  $U$  tiene como primera coordenada al vértice  $x$ . Sea  $(u, v) \in U$  distinto de  $(x, y)$  y  $(z, w)$ . Procediendo por contradicción, supongamos que  $u \neq x$ . Dado que  $(D \times H)[U]$  es semicompleta,  $(u, v)$  y  $(x, y)$  son adyacentes, pero como  $u \neq x$ , entonces  $v = y$ , análogamente,  $(u, v)$  y  $(z, w)$  son adyacentes, pero como  $u \neq z$ , ya que  $z = x$ , se tiene que  $v = w$ , concluyendo que  $y = w$ , lo cual es una contradicción al hecho de que  $(y, w) \in F(H)$ , pues los elementos de  $F(H)$  son parejas ordenadas de distintos elementos de  $V(H)$ . Así, cualquier elemento de  $U$  tiene como primera coordenada al vértice  $x$ .

Caso 2.  $y = w$  y  $(x, z) \in F(D)$ .

La demostración es análoga al *caso 1*.

Del *caso 1* y el *caso 2* concluimos que  $U \subseteq \{(x_0, y) \in V(D \times H) \mid y \in V(H)\}$  para algún  $x_0 \in V(D)$  o  $U \subseteq \{(x, y_0) \in V(D \times H) \mid x \in V(D)\}$  para algún  $y_0 \in V(H)$ , demostrando así la proposición. □

Los anteriores lemas son de utilidad no sólo para conocer la estructura del producto cruz de dos digráficas, sino que ayudarán a caracterizar al producto cruz de dos digráficas que tenga un conjunto absorbente semicompleto.

**Proposición 5.1.1** *Sean  $D$  y  $H$  digráficas no triviales y  $D \times H$  su producto cruz.  $D \times H$  tiene un conjunto absorbente semicompleto si y sólo si  $D$  es semicompleta y  $\gamma_{cas}(H) = 1$  o  $H$  es semicompleta y  $\gamma_{cas}(D) = 1$ .*

*Demostración.*

Probaremos primero la condición necesaria del enunciado, es decir, si  $D$  es semicompleta y  $\gamma_{cas}(H) = 1$  o  $H$  es semicompleta y  $\gamma_{cas}(D) = 1$ , entonces  $D \times H$  tiene un conjunto absorbente semicompleto. Dividiremos nuestra demostración en dos casos de acuerdo a nuestras hipótesis.

Caso 1.  $H$  es semicompleta y  $\gamma_{cas}(D) = 1$ .

Dado que  $\gamma_{cas}(D) = 1$ , existe  $x_0 \in V(D)$  tal que para todo  $w \in V(D) \setminus \{x_0\}$ ,  $(w, x_0) \in F(D)$ . Sea  $U_{x_0}$  el nivel de  $x_0$  en  $D \times H$ , bastará ver que  $U_{x_0}$  es un conjunto absorbente semicompleto en  $D \times H$ . Por el *lema 5.1.2*, tenemos que  $(D \times H)[U_{x_0}] \cong H$  y dado que  $H$  es semicompleta, entonces  $(D \times H)[U_{x_0}]$  es semicompleta, ahora sólo falta demostrar la absorbencia de  $U_{x_0}$ . Sea  $(u, v) \in V(D \times H) \setminus U_{x_0}$ , notemos que el vértice  $(x_0, v)$  es un elemento de  $U_{x_0}$  y por definición de adyacencia en  $D \times H$  y elección de  $x_0$ ,  $((u, v), (x_0, v)) \in F(D \times H)$ , concluyendo que  $U_{x_0}$  es un conjunto absorbente semicompleto.

Caso 2.  $D$  es semicompleta y  $\gamma_{cas}(H) = 1$ .

Al igual que en el caso anterior, como  $\gamma_{cas}(H) = 1$ , existe  $y_0 \in V(H)$  tal que para todo  $w \in V(H) \setminus \{y_0\}$ ,  $(w, y_0) \in F(H)$ . Sea  $U_{y_0}$  el nivel de  $y_0$  en  $D \times H$ . Con un argumento análogo al del *caso 1*,  $U_{y_0}$  es un conjunto absorbente semicompleto.

Del *caso 1* y el *caso 2*, queda demostrada la condición necesaria de la proposición.

Ahora procederemos a demostrar la suficiencia del enunciado.

Sean  $D$  y  $H$  digráficas tales que  $V(D) = \{v_1, v_2, \dots, v_{p_1}\}$  y  $V(H) = \{u_1, u_2, \dots, u_{p_2}\}$ . Supongamos que  $D \times H$  tiene un conjunto absorbente semicompleto, digamos  $S$ . Como  $S$  es semicompleto, por el *lema 5.1.3* tenemos que todo elemento de  $S$  está contenido en algún nivel de  $D \times H$ . Consideremos dos casos sobre las coordenadas de  $S$ :

Caso 3.  $S \subseteq \{(x_0, u) \in V(D \times H) \mid u \in V(H)\}$  donde  $x_0$  es un vértice fijo en  $D$ .

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que  $S = \{(x_0, u_1), (x_0, u_2), \dots, (x_0, u_k)\}$  con  $k \leq p_2$ .

Para demostrar que  $\gamma_{cas}(D) = 1$ , consideremos  $y \in V(D) \setminus \{x_0\}$  arbitrario, dado que  $S$  es absorbente y  $(y, u_1) \notin S$  por el caso que estamos considerando, entonces  $(y, u_1)$  es absorbido por algún vértice  $(x_0, u_i)$  de  $S$  y como  $y \neq x_0$  se sigue que  $i = 1$ , es decir,  $(y, x_0) \in F(D)$ , concluyendo que  $\{x_0\}$  es un  $\gamma_{cas}$ -conjunto de  $D$ .

Ahora demostraremos que  $H$  es semicompleta.

Por el *lema 5.1.2*, el conjunto  $\{u_1, u_2, \dots, u_k\}$  es semicompleto en  $H$ , pues  $S$  es un conjunto semicompleto en  $D \times H$ , bastará ver que  $k = p_2$ . Si suponemos que  $k < p_2$ , consideramos un vértice  $y$  en  $D$  distinto a  $x_0$ , así, el vértice  $(y, u_{p_2})$  no es absorbido por ningún elemento de  $S$ , ya que  $y \neq x_0$  y para todo  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ ,  $u_i \neq u_{p_2}$ , contradiciendo el hecho de que  $S$  es absorbente, concluyendo que  $k = p_2$  y por *lema 5.1.2*,  $H$  es semicompleta.

Caso 4.  $S \subseteq \{(v, y_0) \in V(D \times H) \mid v \in V(D)\}$  con  $y_0$  un vértice fijo en  $H$ .

Podemos suponer, sin pérdida de generalidad que  $S = \{(v_1, y_0), (v_2, y_0), \dots, (v_k, y_0)\}$  con  $k \leq p_1$ .

Al igual que en el caso anterior, tenemos que  $\{y_0\}$  es un  $\gamma_{cas}$ -conjunto en  $H$ , concluyendo que  $\gamma_{cas}(H) = 1$  y para demostrar que  $D$  es semicompleta, un razonamiento análogo al caso anterior sobre el conjunto  $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$  concluye la prueba.

Del *caso 3* y el *caso 4*, queda demostrada la suficiencia de la proposición, terminando con la prueba del enunciado. □

La *proposición 5.1.1* muestra las condiciones necesarias y suficientes para que el producto cruz de dos digráficas contenga un conjunto absorbente semicompleto. A partir de la idea de la demostración anterior es posible determinar cómo es la estructura de un conjunto absorbente semicompleto en el producto cruz de dos digráficas:

**Proposición 5.1.2** *Si  $D$  y  $H$  son digráficas tales que  $D \times H$  tiene un conjunto absorbente semicompleto  $S$ , entonces el conjunto  $S$  es el nivel de un vértice absorbente en  $D$  o el nivel de un vértice absorbente en  $H$ .*

*Demostración:*

Sean  $D$  y  $H$  digráficas tales que  $V(D) = \{v_1, v_2, \dots, v_{p_1}\}$  y  $V(H) = \{u_1, u_2, \dots, u_{p_2}\}$ . Supongamos que  $D \times H$  tiene un conjunto absorbente semicompleto, digamos  $S$ . Por el *lema 5.1.3*, consideramos dos casos posibles sobre  $S$ :

Caso 1.  $S \subseteq \{(x_0, u) \in V(D \times H) \mid u \in V(H)\}$  donde  $x_0$  es un vértice fijo en  $D$ .

Supongamos sin pérdida de generalidad que  $S = \{(x_0, u_1), (x_0, u_2), \dots, (x_0, u_k)\}$  con  $k \leq p_2$ . Para demostrar que  $x_0$  es un vértice absorbente en  $D$ , basta tomar

$y \in V(D) \setminus \{x_0\}$  y como  $(y, u_1) \notin S$ , éste debe ser absorbido por algún vértice en  $S$ , a saber, el vértice  $(x_0, u_1)$ , con lo cual  $(y, x_0) \in F(D)$ , probando así que  $x_0$  es absorbente en  $D$ .

Ahora sólo hace falta ver que  $k = p_2$ , si suponemos que  $k < p_2$ , el vértice  $(y, u_{p_2})$  con  $y \neq x_0$  no es absorbido por ningún elemento de  $S$ , contradiciendo la suposición de que  $S$  es absorbente en  $D \times H$ , concluyendo que  $k = p_2$ .

Por todo lo anterior,  $S = \{(x_0, u_1), (x_0, u_2), \dots, (x_0, u_{p_2})\} = \{x_0\} \times V(H)$ .

Caso 2.  $S \subseteq \{(v, y_0) \in V(D \times H) \mid v \in V(D)\}$  donde  $y_0$  es un vértice fijo en  $H$ .

Supongamos sin pérdida de generalidad que  $S = \{(v_1, y_0), (v_2, y_0), \dots, (v_k, y_0)\}$  con  $k \leq p_1$ . Un razonamiento análogo al caso anterior es suficiente para demostrar que  $y_0$  es un vértice absorbente en  $H$  y que  $k = p_1$ .

Así,  $S = \{(v_1, y_0), (v_2, y_0), \dots, (v_{p_1}, y_0)\} = V(D) \times \{y_0\}$ .

Del *caso 1* y el *caso 2*, la proposición queda demostrada. □

A partir de la *proposición 5.1.2*, es sencillo calcular el número superior e inferior de absorbencia por conjuntos semicompletos del producto cruz de dos digráficas, como se muestra en el siguiente corolario.

**Corolario 5.1.1** *Si  $D$  y  $H$  son digráficas con  $p_1$  y  $p_2$  vértices respectivamente tal que  $D \times H$  tiene un conjunto absorbente semicompleto, entonces  $\Gamma_{cas}(D \times H) \in \{p_1, p_2\}$  y  $\gamma_{cas}(D \times H) \in \{p_1, p_2\}$ .*

*Demostración.*

Sean  $D$  y  $H$  digráficas con  $p_1$  y  $p_2$  vértices, respectivamente, tal que  $D \times H$  tiene un conjunto absorbente semicompleto. Sea  $S$  un  $\Gamma_{cas}$ -conjunto de  $D \times H$ . Por la *proposición 5.1.2*,  $S = V(D) \times \{y\}$ , en cuyo caso  $\Gamma_{cas}(D \times H) = p_1$  o  $S = \{x\} \times V(H)$  y de ello,  $\Gamma_{cas}(D \times H) = p_2$ . Análogamente, si  $S$  es un  $\gamma_{cas}$ -conjunto de  $D \times H$ , por la *proposición 5.1.2* se tiene que  $S = V(D) \times \{y\}$ , por lo cual  $\gamma_{cas}(D \times H) = p_1$  o  $S = \{x\} \times V(H)$  derivando que  $\gamma_{cas}(D \times H) = p_2$ , concluyendo la demostración. □

Anteriormente en el *lema 3.1.1* y en las *proposiciones 3.2.1, 3.2.6 y 3.2.7* del capítulo 3 se habían exhibido digráficas cuyo número de absorbencia por conjuntos semicompletos satisfacía alguna propiedad, el *corolario 5.1.1* también es de utilidad para poder construir digráficas para las cuales su número superior e inferior de absorbencia por conjuntos semicompletos esté dado, a saber, si se desea obtener una digráfica  $D$  tal que  $\gamma_{cas}(D) = m$  y  $\Gamma_{cas}(D) = n$ , basta considerar el producto cruz de las digráficas  $K_m$  y  $K_n$ . En la *figura 5.1.2* se muestra una digráfica  $D = K_2 \times K_3$  con  $\Gamma_{cas}(D) = 3$  y  $\gamma_{cas}(D) = 2$ .

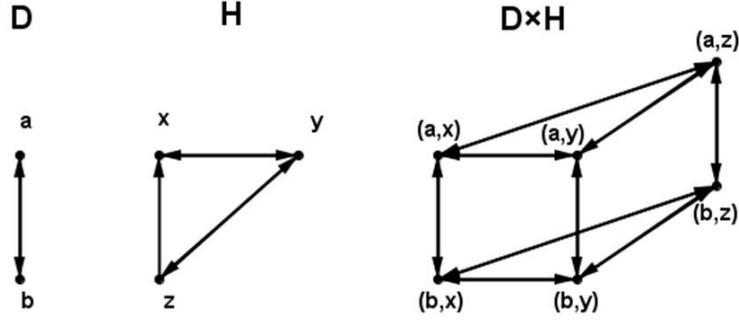


Fig. 5.1.2: Ejemplo de una digráfica para la cual  $\Gamma_{cas}(D) = 3$  y  $\gamma_{cas}(D) = 2$ .

Antes de obtener resultados del número semidomático interior fuerte del producto cruz de dos digráficas mostraremos un par de enunciados que serán de utilidad para el desarrollo de la teoría.

**Proposición 5.1.3** *Sean  $D$  y  $H$  dos digráficas arbitrarias,  $D \times H$  es fuerte si y sólo si  $D$  y  $H$  son fuertes.*

Demostración.

Probaremos primero la suficiencia de la demostración.

Sea  $D \times H$  una digráfica fuerte, para demostrar que  $D$  es fuerte, consideraremos una bipartición arbitraria  $\{W_1, W_2\}$  de los vértices de  $D$  y mostraremos que existe una  $W_1W_2$ -flecha y una  $W_2W_1$ -flecha en  $D$ , pues con ello y el *corolario 1.2.3* concluiríamos lo deseado. Sean  $U_1$  y  $U_2$  los conjuntos:

$$U_1 = \{(x, z) \in V(D \times H) \mid x \in W_1, z \in V(H)\}.$$

$$U_2 = \{(x, z) \in V(D \times H) \mid x \in W_2, z \in V(H)\}.$$

Afirmamos que  $\{U_1, U_2\}$  es una partición de  $V(D \times H)$ , por lo que demostraremos tres cosas:

- $U_1 \neq \emptyset$  y  $U_2 \neq \emptyset$ .

Dado que  $W_1$  y  $W_2$  son no vacíos, consideremos  $x_1 \in W_1$  y  $x_2 \in W_2$ ; si  $u \in V(H)$  entonces el vértice  $(x_1, u) \in V(D \times H)$  es un elemento de  $U_1$  y el vértice  $(x_2, u) \in V(D \times H)$  es un elemento de  $U_2$ , mostrando lo deseado.

- $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ .

Supongamos lo contrario: existe  $(x, v) \in V(D \times H)$  tal que  $(x, v) \in U_1 \cap U_2$ . Por la definición de  $U_1$  y  $U_2$ ,  $x \in W_1$  y  $x \in W_2$ , lo cual no es posible pues  $\{W_1, W_2\}$  es una partición de  $V(D)$  y  $W_1 \cap W_2 = \emptyset$ .

- $U_1 \cup U_2 = V(D \times H)$ .

Es inmediato que  $U_1 \cup U_2 \subseteq V(D \times H)$ , por lo que ahora sólo mostraremos que  $V(D \times H) \subseteq U_1 \cup U_2$ . Si tomamos un vértice  $(x, u)$  en  $D \times H$ , tenemos que  $x \in V(G)$ , por lo que  $x$  pertenece a  $W_1$  o a  $W_2$  ya que  $\{W_1, W_2\}$  es partición de  $V(D)$ . Si  $x \in W_1$ , entonces  $(x, u) \in U_1$  y si  $x \in W_2$ , entonces  $(x, u) \in U_2$ , en cualquiera de los dos casos,  $(x, u) \in U_1 \cup U_2$  y con esto se muestra que  $U_1 \cup U_2 = V(D \times H)$ .

Con los puntos anteriores tenemos que  $\{U_1, U_2\}$  es una partición de  $V(D \times H)$  y por ser  $D \times H$  fuerte, existe una  $U_1U_2$ -flecha, digamos  $((x_1, u_1), (z_1, v_1))$  y existe una  $U_2U_1$ -flecha, digamos  $((x_2, u_2), (z_2, v_2))$ .

Notemos que por definición de  $U_1$  y  $U_2$  tenemos que  $x_1 \in W_1$  y  $z_1 \in W_2$ , por lo que  $x_1 \neq z_1$ , siguiéndose de este hecho y de la definición de adyacencia en  $D \times H$  que  $u_1 = v_1$  y  $(x_1, z_1) \in F(D)$ , es decir,  $(x_1, z_1)$  es una  $W_1W_2$ -flecha en  $D$ .

Análogamente, para  $x_2 \in W_2$  y  $z_2 \in W_1$ . A partir de ello, para cualquier bipartición  $\{W_1, W_2\}$  de  $V(D)$  existe una  $W_1W_2$ -flecha y existe una  $W_2W_1$ -flecha, por lo que  $D$  es fuerte.

De manera análoga se sigue que  $H$  es fuerte.

Ahora procederemos a demostrar la condición necesaria de la proposición.

Sean  $D$  y  $H$  dos digráficas fuertes,  $D \times H$  su producto cruz y  $(x, u), (y, v)$  dos vértices arbitrarios de  $D \times H$ . Dividiremos la demostración en tres casos posibles.

Caso 1. Si  $x = y$ .

Como  $H$  es fuerte, existe un camino  $C = (u, w_1, \dots, w_k, v)$  de  $u$  hacia  $v$  en  $H$ , en cuyo caso,  $C_x = ((x, u), (x, w_1), \dots, (x, w_k), (x, v))$  es un  $(x, u)(y, v)$ -camino en  $D \times H$ .

Caso 2. Si  $u = v$ .

Su demostración es análoga al *caso 1*.

Caso 3. Si  $u \neq v$  y  $x \neq y$ .

Dado que los vértices  $(x, u)$  y  $(x, v)$  satisfacen las condiciones del *caso 1*, existe un  $(x, u)(x, v)$ -camino en  $D \times H$ , digamos  $C_1$ . Igualmente, como  $(x, v)$  y  $(y, v)$  satisfacen las condiciones del *caso 2*, existe un  $(x, v)(y, v)$ -camino en  $D \times H$ , digamos  $C_2$  con lo cual,  $C = C_1 \cup C_2$  es un  $(x, u)(y, v)$ -camino en  $D \times H$ .

De los casos anteriores, concluimos que  $D \times H$  es fuerte, terminando así la demostración.

□

A partir del corolario anterior obtenemos que la única forma posible de que el producto cruz de dos digráficas tenga una partición de sus vértices en conjuntos semidominantes interiores fuertes es que las digráficas originales tengan una partición de sus vértices en conjuntos semidominantes interiores fuertes. Con ello, podemos ofrecer una cota al número semidomático interior fuerte del producto a partir de los números semidomáticos interiores fuertes de las digráficas originales, como se muestra en la siguiente proposición.

**Proposición 5.1.4** Si  $D$  y  $H$  son digráficas fuertes y  $D \times H$  su producto cruz, entonces  $d_{sf}^-(D \times H) \geq \text{máx}\{d_{sf}^-(D), d_{sf}^-(H)\}$ .

Demostración

Sean  $D$  y  $H$  digráficas fuertes y  $D \times H$  su producto cruz. Supongamos sin pérdida de generalidad que  $d_{sf}^-(H) \leq d_{sf}^-(D)$ , y sea  $\mathfrak{S} = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$  una  $d_{sf}^-$ -partición de  $V(D)$ . Definimos  $V_i = \{(x, y) \in V(D \times H) \mid x \in S_i\}$  y  $\mathfrak{V} = \{V_1, V_2, \dots, V_k\}$ . Afirmamos que  $\mathfrak{V}$  es una partición de  $V(D \times H)$  en conjuntos semidominantes interiores fuertes.

Afirmación 1.  $\mathfrak{V}$  es partición de  $V(D \times H)$ .

- Los elementos de  $\mathfrak{V}$  son no vacíos.

Por ser  $\mathfrak{S}$  partición de  $V(D)$  existe  $x_i \in S_i$  para todo  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ , en cuyo caso, si  $u_0 \in V(H)$ ,  $(x_i, u_0) \in V_i$  para todo  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ .

- Los elementos de  $\mathfrak{V}$  son ajenos.

Sea  $\{V_i, V_j\} \subseteq \mathfrak{V}$  tal que  $i \neq j$ , si suponemos que existe  $(x, y) \in V_i \cap V_j$ , por definición de  $V_i$  y  $V_j$ ,  $x \in S_i \cap S_j$ , lo cual es una contradicción, pues  $S_i$  y  $S_j$  son elementos de una partición de  $V(D)$ , concluyendo que los elementos de  $\mathfrak{V}$  son ajenos.

- $\cup_{i=1}^k V_i = V(D \times H)$ .

Notemos que por la construcción de  $\mathfrak{V}$ , se tiene que  $\cup_{i=1}^k V_i \subseteq V(D \times H)$ . Bastará probar la segunda contención. Sea  $(x, y) \in V(D \times H)$ , como  $\mathfrak{S}$  es partición de  $V(D)$ ,  $x \in S_j$  para algún  $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ , en cuyo caso,  $(x, y) \in V_j$ , por lo que  $(x, y) \in \cup_{i=1}^k V_i$ , es decir,  $V(D \times H) \subseteq \cup_{i=1}^k V_i$ ; concluyendo así la igualdad entre ambos conjuntos.

Afirmación 2. Cada elemento  $V_i$  de  $\mathfrak{V}$  es un conjunto semidominante interior fuerte de  $D \times H$ .

Sea  $V_i \in \mathfrak{V}$  un elemento arbitrario.

- $V_i$  es un conjunto semidominante interior de  $D \times H$ .

Consideremos  $(x, v) \in V(D \times H) \setminus V_i$ . Como  $(x, v) \notin V_i$ , tenemos que  $x \notin S_i$  y por ser  $S_i$  un conjunto absorbente en  $D$ , existe  $y \in S_i$  tal que  $(x, y) \in F(D)$ . Así  $(y, v) \in V_i$  y por definición de adyacencia en  $D \times H$  se tiene que  $((x, v), (y, v)) \in F(D \times H)$ , concluyendo que  $V_i$  es semidominante interior en  $D \times H$ .

- $V_i$  es un conjunto fuerte de  $D \times H$ .

Como  $D_i = D[S_i]$  y  $H$  son digráficas fuertes, por el *corolario 5.1.3* tenemos que  $D_i \times H$  es fuerte y por el *lema 5.1.1* se sigue que:

$$D_i \times H = (D \times H)[S_i \times V(H)] = (D \times H)[V_i].$$

Por lo que  $V_i$  es un conjunto fuerte de  $D \times H$  para todo  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ .

De la *afirmación 1* y la *afirmación 2* tenemos que  $\mathfrak{V}$  es una partición de  $V(D \times H)$  en conjuntos semidominantes interiores fuertes, por lo que

$$d_{sf}^-(D \times H) \geq |\mathfrak{V}| = k.$$

Y por la construcción de  $\mathfrak{V}$ , se demuestra que  $\text{máx}\{d_{sf}^-(D), d_{sf}^-(H)\} \leq d_{sf}^-(D \times H)$ .

□

En el siguiente ejemplo se ilustra el resultado anterior. Primero notemos que  $D$  y  $H$  son digráficas tales que  $d_{sf}^-(D) = 1$  y  $d_{sf}^-(H) = 3$ . Por otro lado, ya que  $\mathfrak{S} = \{\{v_1\}, \{v_2\}, \{v_3, v_4\}\}$  es una  $d_{sf}^-$ -partición de  $V(H)$ , si consideramos los conjuntos:

$$V_1 = \{(x, y) \in V(D \times H) \mid x \in \{v_1\}\},$$

$$V_2 = \{(x, y) \in V(D \times H) \mid x \in \{v_2\}\},$$

$$V_3 = \{(x, y) \in V(D \times H) \mid x \in \{v_3, v_4\}\},$$

entonces  $\mathfrak{V} = \{V_1, V_2, V_3\}$  es una partición de  $V(D \times H)$  en conjuntos semidominantes interiores fuertes, por lo que  $d_{sf}^-(D \times H) \geq 3$ , es decir,  $d_{sf}^-(D \times H) \geq \max\{d_{sf}^-(D), d_{sf}^-(H)\}$ .

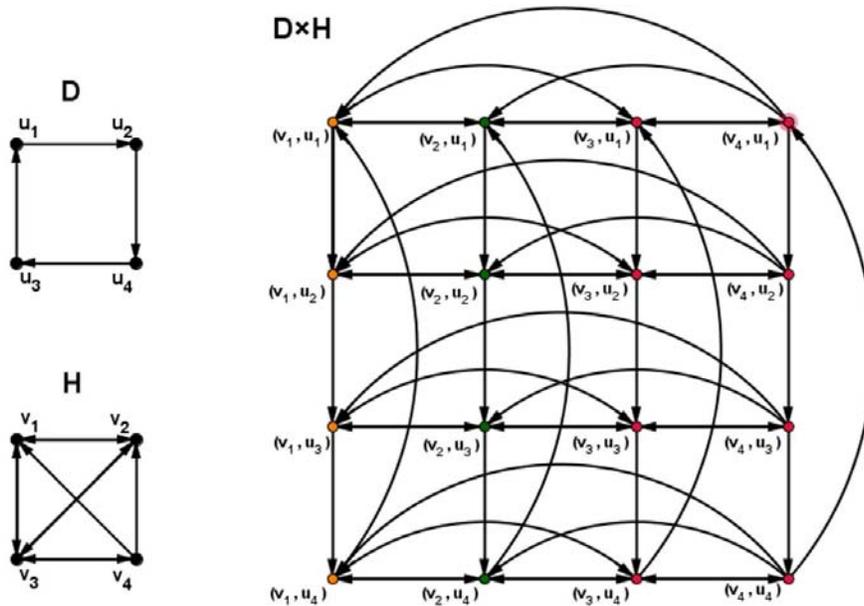


Fig. 5.1.3: Ejemplo del producto de dos digráficas donde  $d_{sf}^-(D \times H) \geq \max\{d_{sf}^-(D), d_{sf}^-(H)\}$ .

## 5.2. Composición de Digráficas

En el capítulo 3 se presentó el concepto de una corona. En ella se define una digráfica a partir de una digráfica dada y una sucesión de digráficas ajenas en vértices dos a

dos. La *composición de una digráfica* se construye de manera similar a la corona y su definición está dada a continuación.

**Definición 5.2.1** Sean  $D = (V(D), F(D))$  una digráfica con  $p$  vértices tal que  $V(D) = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$  y  $\alpha = [D_1, D_2, \dots, D_p]$  una sucesión de  $p$  digráficas,  $D_i = (V(D_i), F(D_i))$ , ajenas en vértices dos a dos y ajenas en vértices respecto a  $D$ . Definimos la **composición de  $D$  respecto a  $\alpha$**  como la digráfica  $D \oplus \alpha$  tal que:

- a)  $V(D \oplus \alpha) = \bigcup_{i=1}^p V(D_i)$
- b)  $F(D \oplus \alpha) = (\bigcup_{i=1}^p F(D_i)) \cup \{(x, z) \mid x \in V(D_k), z \in V(D_l) \text{ y } (v_k, v_l) \in F(D)\}$

Al igual que en el caso del producto cruz, cada que mencionemos la composición de una digráfica  $D$  con una familia de digráficas  $\alpha$ , daremos por hecho que el número de digráficas en  $\alpha$  es igual al orden de  $D$  y que los elementos en  $\alpha$  son ajenos en vértices dos a dos y ajenos en vértices respecto a  $D$ , ésto con la intención de evitar el ser repetitivos a lo largo de los enunciados.

Es posible determinar condiciones suficientes para que la composición de una digráfica respecto a una sucesión de digráficas tenga un conjunto absorbente semicompleto. Previo a ello introduciremos algo de notación: si  $D$  es una digráfica y  $U$  y  $V$  son subconjuntos de  $V(D)$  no vacíos y ajenos, denotamos por  $U \Rightarrow V$  el hecho de que para todo vértice  $u \in U$  y todo vértice  $v \in V$ ,  $(u, v) \in F(D)$ . En caso de que  $U = \{u\}$  se indicará simplemente por  $u \Rightarrow V$ , omitiendo la notación conjuntista de  $U$  y análogamente, si  $V = \{v\}$ , simplemente se usará  $U \Rightarrow v$  para el hecho de que  $v$  absorba a  $U$ . Por otro lado, si  $D$  es una digráfica,  $\alpha = [D_1, D_2, \dots, D_p]$  una sucesión de digráficas y  $D \oplus \alpha$  su composición, se denotará por  $D_i^c$  a la subdigráfica inducida por  $V(D_i)$  en  $D \oplus \alpha$  y análogamente, si  $U \subseteq V(D_i)$  y queremos indicar que estamos considerando a  $U$  como subconjunto de los vértices de  $D \oplus \alpha$ , usaremos  $U^c$ . Por último, denotamos por  $D_i^c \Rightarrow D_j^c$  el hecho de que  $V(D_i) \Rightarrow V(D_j)$  en  $D \oplus \alpha$ .

Antes de comenzar con las proposiciones que relacionan los conjuntos absorbentes semicompletos, mostraremos un par de lemas que proveen propiedades básicas de la composición de digráficas y que auxiliaran en las demostraciones posteriores.

**Lema 5.2.1** Sean  $D$  una digráfica,  $\alpha = [D_1, D_2, \dots, D_p]$  una sucesión de digráficas y  $D \oplus \alpha$  su composición. Si  $(u, v) \in F(D \oplus \alpha)$  con  $u \in V(D_i)$ ,  $v \in V(D_j)$  e  $i \neq j$ , entonces  $D_i^c \Rightarrow D_j^c$ .

*Demostración.*

Sean  $D$  una digráfica tal que  $V(D) = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ ,  $\alpha = [D_1, D_2, \dots, D_p]$  una sucesión de digráficas y  $D \oplus \alpha$  su composición. Por hipótesis, consideramos  $x_0 \in V(D_i)$  y  $y_0 \in V(D_j)$  con  $i \neq j$  tal que  $(x_0, y_0) \in F(D \oplus \alpha)$ . Como  $V(D_i) \cap V(D_j) = \emptyset$ , la flecha  $(x_0, y_0) \in \{(w, z) \mid w \in V(D_i), z \in V(D_j) \text{ y } (v_i, v_j) \in F(D)\}$ , por lo cual,

$(v_i, v_j) \in F(D)$ , concluyendo que para todo vértice  $x \in V(D_i)$  y para todo vértice  $y \in V(D_j)$ , se tiene que  $(x, y) \in F(D \oplus \alpha)$ , lo que implica que  $D_i^c \Rightarrow D_j^c$ .

□

Un elemento representante de un conjunto no vacío es un elemento arbitrario y fijo en dicho conjunto, en nuestra teoría podemos hablar de un vértice representante de una digráfica como un vértice arbitrario pero fijo en dicha digráfica.

En la siguiente figura se muestra el ejemplo de una digráfica  $D$  con una sucesión de digráficas  $\alpha = [D_1, D_2, D_3, D_4]$  y su composición  $D \oplus \alpha$ . Hay que notar que si  $u_1$  es un representante de  $D_1$ ,  $v_3$  es un representante de  $D_2$ ,  $w_1$  es un representante de  $D_3$  y  $z_4$  es un representante de  $D_4$ , entonces la digráfica  $(D \oplus \alpha)[\{u_1, v_3, w_1, z_4\}]$  es isomorfa a  $D$ . Esta propiedad se enuncia en el *lema 5.2.2* y a partir de él podremos recuperar información tanto de la composición de digráficas como de las digráficas involucradas en dicha composición.

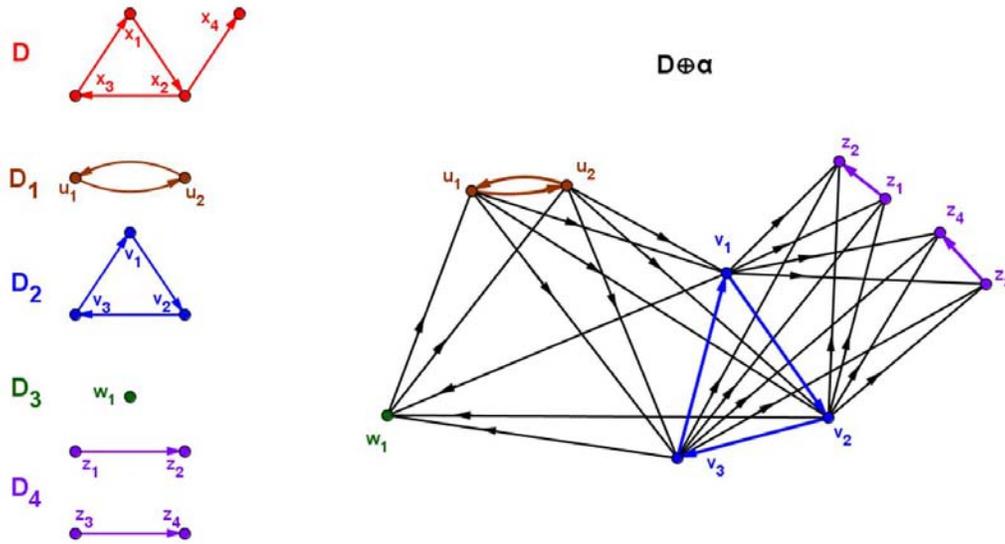


Fig. 5.2.1: Ejemplo de una digráfica  $D$  y una sucesión de digráficas  $\alpha = [D_1, D_2, D_3, D_4]$  junto con su composición  $D \oplus \alpha$ .

**Lema 5.2.2** Sean  $D$  una digráfica,  $\alpha = [D_1, D_2, \dots, D_p]$  una sucesión de digráficas y  $D \oplus \alpha$  su composición. Si  $x_i \in V(D_i)$  es un vértice fijo para cada  $i \in \{1, 2, \dots, p\}$ , entonces  $(D \oplus \alpha)[\{x_1, x_2, \dots, x_p\}] \cong D$ .

Demostración.

Sean  $D$  una digráfica tal que  $V(D) = \{u_1, u_2, \dots, u_p\}$ ,  $\alpha = [D_1, D_2, \dots, D_p]$  una sucesión de digráficas,  $D \oplus \alpha$  su composición,  $x_i \in V(D_i)$  un vértice arbitrario para

cada  $i \in \{1, 2, \dots, p\}$ ,  $M = \{x_1, x_2, \dots, x_p\}$  y  $H = (D \oplus \Delta)[M]$ . Bastará exhibir una función biyectiva entre  $V(H)$  y  $V(D)$  que preserve adyacencias.

Definimos  $f : V(D) \rightarrow V(H)$  dada por  $f(u_i) = x_j$  si y sólo si  $i = j$ .

Probaremos primero que  $f$  es una función. Dado que los elementos de  $\alpha$  son ajenos en vértices, si  $x_i$  y  $x_j$  son imágenes de  $u_k$  bajo  $f$ , entonces  $x_i = x_j$ , pues por definición de  $f$ ,  $i = j = k$ , concluyendo que  $f$  es una función. Ahora probaremos que es una función biyectiva que preserve adyacencias.

Afirmación 1.  $f$  es una función biyectiva.

Por otro lado, si  $\{u_i, u_j\} \subseteq V(D)$  es tal que  $f(u_i) = f(u_j)$ , tenemos que  $x_i = x_j$ , es decir,  $i = j$ , lo que implica que  $u_i = u_j$ , lo cual significa que  $f$  es una función inyectiva; más aún, debido a que  $|V(H)| = |M| = |V(D)|$ ,  $f$  es biyectiva.

Afirmación 2.  $f$  preserva adyacencias.

Mostraremos primero que si  $(u_i, u_j) \in F(D)$ , entonces  $(f(u_i), f(u_j)) \in F(H)$ . Sea  $\{u_i, u_j\} \subseteq V(D)$  tal que  $(u_i, u_j) \in F(D)$ , por definición de adyacencia en la composición tenemos que en particular  $(x_i, x_j) \in F(H)$ , por lo cual,  $(f(u_i), f(u_j)) \in F(H)$ .

Ahora demostraremos que si  $(f(u_i), f(u_j)) \in F(H)$  entonces  $(u_i, u_j) \in F(D)$ . Sea  $\{x_i = f(u_i), x_j = f(u_j)\} \subseteq V(H)$  tal que  $(x_i, x_j) \in F(H)$ , por el lema 5.2.1 tenemos que  $D_i^c \Rightarrow D_j^c$ , en cuyo caso, por definición de adyacencia en la composición, tenemos que  $(u_i, u_j) \in F(D)$ , concluyendo con ello que  $f$  preserva adyacencias.

De la afirmación 1 y la afirmación 2 se demuestra que  $D \cong H$ .

□

**Proposición 5.2.1** Sean  $D$  una digráfica y  $\alpha = [D_1, D_2, \dots, D_p]$  una sucesión de digráficas. Si  $D$  tiene un conjunto absorbente semicompleto sin pozos, entonces  $D \oplus \alpha$  tiene un conjunto absorbente semicompleto.

Demostración.

Sean  $D$  una digráfica tal que  $V(D) = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ ,  $S' \subseteq V(D)$  un conjunto absorbente semicompleto sin pozos y supongamos sin pérdida de generalidad que  $S' = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ , dicha suposición podemos hacerla al indexar nuevamente los elementos de  $V(D)$ , además, esta misma suposición facilitará el manejo de índices durante la demostración,  $\alpha = [D_1, D_2, \dots, D_p]$  una sucesión de digráficas y  $x_i \in V(D_i)$  arbitrario para toda  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ . Consideremos  $S = \{x_1, x_2, \dots, x_k\} \subseteq V(D \oplus \alpha)$ . Afirmamos que  $S$  es un conjunto absorbente semicompleto en  $D \oplus \alpha$ .

Afirmación 1.  $S$  es semicompleto en  $D \oplus \alpha$ .

Sean  $x_i$  y  $x_j$  distintos elementos de  $S$ . Como  $S'$  es un conjunto semicompleto en  $D$ ,  $v_i$  y  $v_j$  son adyacentes en  $D$  por lo que,  $D_i^c \Rightarrow D_j^c$  o  $D_j^c \Rightarrow D_i^c$ , en cualquiera de los casos, como  $x_i \in V(D_i^c)$  y  $x_j \in V(D_j^c)$ ,  $x_i$  y  $x_j$  son adyacentes en  $D \oplus \alpha$ , concluyendo que  $S$  es un conjunto semicompleto en  $D \oplus \alpha$ .

Afirmación 2.  $S$  es absorbente en  $D \oplus \alpha$ .

Sea  $x \in V(D \oplus \alpha) \setminus S$ . Si  $x \in V(D_l^c)$  con  $l > k$ , entonces por ser  $S'$  conjunto absorbente en  $D$ , existe  $v_i \in S'$  tal que  $(v_l, v_i) \in F(D)$ , así, por definición de  $D \oplus \alpha$ ,

$D_i^c \Rightarrow D_i^c$ , en particular  $(x, x_i) \in F(D \oplus \alpha)$ . Si  $x \in V(D_l)$  con  $l \in \{1, 2, \dots, k\}$ , por ser  $S'$  conjunto semicompleto sin pozos, existe  $v_i \in S'$  tal que  $(v_l, v_i) \in F(D)$ , en cuyo caso,  $D_l^c \Rightarrow D_i^c$ , por lo que  $(x, x_i) \in F(D \oplus \alpha)$ , concluyendo que  $S$  es absorbente en  $D \oplus \alpha$ .

De la *afirmación 1* y la *afirmación 2*, tenemos que  $S$  es un conjunto absorbente semicompleto

□

La siguiente proposición muestra que si la composición de una digráfica  $D$  con una sucesión de digráficas  $\alpha$  tiene un conjunto absorbente semicompleto, entonces es posible asegurar la existencia de un conjunto absorbente semicompleto en  $D$ .

**Proposición 5.2.2** Sean  $D$  una digráfica y  $\alpha = [D_1, D_2, \dots, D_p]$  una sucesión de digráficas. Si  $D \oplus \alpha$  tiene un conjunto absorbente semicompleto, entonces  $D$  tiene un conjunto absorbente semicompleto.

*Demostración.*

Sean  $D$  una digráfica tal que  $V(D) = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$  y  $\alpha = [D_1, D_2, \dots, D_p]$  una sucesión de digráficas tal que  $D \oplus \alpha$  tiene un conjunto absorbente semicompleto, digamos  $S'$ . Definimos  $S'_i = V(D_i) \cap S'$  para todo  $i \in \{1, 2, \dots, p\}$  y sea  $M$  la colección de índices en  $\{1, 2, \dots, p\}$  para los cuales  $S'_i \neq \emptyset$ . Afirmamos que  $S = \{v_j \in V(D) \mid j \in M\}$  es un conjunto absorbente semicompleto en  $D$ .

Afirmación 1.  $S$  es un conjunto absorbente en  $D$ .

Sea  $v_r \in V(D) \setminus S$  arbitrario, por definición de  $S$ ,  $V(D_r) \cap S' = \emptyset$  pues  $r \notin M$ , es decir,  $V(D_r) \subseteq (V(D \oplus \alpha)) \setminus S'$ . En tal caso, si  $x \in V(D_r)$  por ser  $S'$  absorbente en  $D \oplus \alpha$ , existe un vértice  $z \in S'$  tal que  $(x, z) \in F(D \oplus \alpha)$ . Como  $z \in V(D_i)$  para algún  $i \in \{1, 2, \dots, p\}$ , por el *lema 5.2.1* concluimos que  $D_r^c \Rightarrow D_i^c$ , con lo cual se satisface que  $(v_r, v_i) \in F(D)$ . Por último, como  $z \in V(D_i)$  y  $z \in S'$ , se deriva el que  $i \in M$  y con esto,  $v_i \in S$ . De todo lo anterior,  $v_r$  es absorbido por  $v_i \in S$  para algún  $i \in \{1, 2, \dots, p\}$ .

Afirmación 2.  $S$  es un conjunto semicompleto en  $D$ .

Sean  $v_i$  y  $v_j$  distintos elementos de  $S$ . Como  $\{i, j\} \subseteq M$ , entonces  $V(D_i) \cap S'$  y  $V(D_j) \cap S'$  son no vacíos, por lo que consideraremos un elemento  $x_i \in V(D_i) \cap S'$  y  $x_j \in V(D_j) \cap S'$ . Ya que  $\{x_i, x_j\} \subseteq S'$  y  $S'$  es un conjunto semicompleto en  $D \oplus \alpha$ , entonces  $x_i$  es adyacente a  $x_j$  en  $D \oplus \alpha$  y por el *lema 5.2.1* sucede que  $D_i^c \Rightarrow D_j^c$  o  $D_j^c \Rightarrow D_i^c$ , en cualquiera de los casos,  $v_i$  y  $v_j$  son adyacentes en  $D$ , concluyendo que  $U$  es un conjunto semicompleto en  $D$ .

De la *afirmación 1* y la *afirmación 2*,  $U$  es un conjunto absorbente semicompleto en  $D$ .

□

**Proposición 5.2.3** Sean  $D$  una gráfica y  $\alpha = [D_1, D_2, \dots, D_p]$  una sucesión de digráficas tal que  $D \oplus \alpha$  tiene un conjunto absorbente semicompleto sin pozos. Si  $\mathcal{S} = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$  es la familia de conjuntos absorbentes semicompletos sin pozos de  $D$  e  $I_{S_i}$  el conjunto de índices de los vértices en  $S_i$ , entonces:

$$\Gamma_{cas}(D \oplus \alpha) \geq \text{máx}_{j=1}^k \left\{ \sum_{r \in I_{S_j}} CS(D_r) \right\}$$

donde  $CS(D_r) = \text{máx}\{|W| \mid W \text{ es un conjunto semicompleto de } D_r\}$ .

*Demostración.*

Sean  $D$  una digráfica con  $V(D) = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ ,  $\alpha = [D_1, D_2, \dots, D_p]$  una sucesión de digráficas tal que  $D \oplus \alpha$  tiene un conjunto absorbente semicompleto sin pozos,  $\mathcal{S} = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$  la familia de conjuntos absorbentes semicompletos sin pozos de  $D$ ,  $I_{S_i}$  el conjunto de índices de los vértices en  $S_i$  para todo  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$  y  $M_i$  un conjunto semicompleto en  $D_i$  de cardinalidad máxima, es decir,  $|M_i| = CS(D_i)$ , para todo  $i \in \{1, 2, \dots, p\}$ .

Bastará ver que  $\Gamma_{cas}(D \oplus \alpha) \geq \sum_{j \in I_{S_i}} CS(D_j)$  para todo  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ . Sea  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$  arbitrario, definimos:

$$S = \bigcup_{j \in I_{S_i}} M_j.$$

Mostraremos que  $S$  es un conjunto absorbente semicompleto en  $D \oplus \alpha$ .

- Afirmación 1.  $S$  es semicompleto en  $D \oplus \alpha$ .

Sean  $\{x, z\} \subseteq S$  arbitrarios. Consideremos dos posibles casos para  $x$  y  $z$ .

Caso 1.1.  $\{x, z\} \subseteq M_j^c$  para algún  $j \in I_{S_i}$ .

Por ser  $M_j^c$  un conjunto semicompleto en  $D_j^c$ , entonces  $x$  y  $z$  son adyacentes en  $F(D \oplus \alpha)$ .

Caso 1.2.  $x \in M_k^c$  y  $z \in M_l^c$  con  $k \neq l$ .

Como  $\{k, l\} \subseteq I_{S_i}$ , entonces  $\{v_k, v_l\} \subseteq S_i$  y como  $S_i$  es un conjunto absorbente semicompleto de  $D$ , entonces  $(v_k, v_l) \in F(D)$  o  $(v_l, v_k) \in F(D)$ , en cualquier caso,  $x$  y  $z$  son adyacentes en  $D \oplus \alpha$ .

Del *caso 1.1* y el *caso 1.2* mostramos que  $S$  es un conjunto semicompleto en  $D \oplus \alpha$ .

- Afirmación 2.  $S$  es absorbente en  $D \oplus \alpha$ .

Sea  $u \in V(D \oplus \alpha) \setminus S$  arbitrario. Consideremos dos posibles casos para  $u$ .

Caso 2.1.  $u \in V(D_r^c)$  donde  $r \notin I_{S_i}$ .

En particular  $v_r \notin S_i$  y por ser  $S_i$  un conjunto absorbente en  $D$ , existe  $v_j \in S_i$  tal que  $(v_r, v_j) \in F(D)$ , por lo que  $V(D_r^c) \Rightarrow V(D_j^c)$ , siguiéndose que si  $x \in M_j^c$ , entonces  $(u, x) \in F(D \oplus \alpha)$ .

Caso 2.2.  $u \in V(D_r^c)$  con  $r \in I_{S_i}$ .

Como  $S_i$  es un conjunto semicompleto sin pozos en  $D$ , entonces existe  $j \in I_{S_i}$  tal que  $(v_r, v_j) \in F(D)$ , en cuyo caso  $V(D_r^c) \Rightarrow V(D_j^c)$  y si  $x \in M_j^c$ , entonces  $(u, x) \in F(D \oplus \alpha)$ , concluyendo que  $S$  es absorbente en  $D \oplus \alpha$ .

Del *caso 2.1* y el *caso 2.2* mostramos que  $S$  es un conjunto absorbente en  $D \oplus \alpha$ .

De la afirmación 1 y la afirmación 2,  $S$  es un conjunto absorbente semicompleto en  $D \oplus \alpha$ , por cual,  $\Gamma_{cas}(D \oplus \alpha) \geq |S|$ , pero  $|S| = \sum_{j \in I_{S_i}} |M_j| = \sum_{j \in I_{S_i}} CS(D_j)$ . Dado que  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$  fue arbitrario, entonces:

$$\Gamma_{cas}(D \oplus \alpha) \geq \max_{j=1}^k \left\{ \sum_{r \in I_{S_j}} CS(D_r) \right\}.$$

□

Con los resultados anteriores logramos establecer una cota inferior para el número superior de absorberencia por conjuntos semicompletos de la composición de digráficas. También acotaremos inferiormente el número semidomático interior fuerte de la composición de una digráfica con una sucesión de digráficas y con ésto exhibiremos una familia de digráficas cuyo número de vértices y número semidomático interior fuerte estén dados. Los primeros resultados que abordaremos ofrecen condiciones para que la composición sea una digráfica fuerte y con ello asegurar la existencia de una partición de los vértices en conjuntos semidominantes interiores fuertes.

**Lema 5.2.3** *Sean  $D$  una digráfica con  $V(D) = \{x_1, x_2, \dots, x_p\}$ ,  $\alpha = [D_1, D_2, \dots, D_p]$  una sucesión de digráficas y  $D \oplus \alpha$  su composición. Si existe un  $uv$ -camino en  $D \oplus \alpha$  con  $u \in V(D_i^c)$  y  $v \in V(D_j^c)$ , entonces existe un  $x_i x_j$ -camino en  $D$ .*

*Demostración.*

Sean  $D$  una digráfica tal que  $V(D) = \{x_1, x_2, \dots, x_p\}$ ,  $\alpha = [D_1, D_2, \dots, D_p]$  una sucesión de digráficas,  $H = D \oplus \alpha$  su composición,  $u \in V(H)$  fijo y supongamos sin pérdida de generalidad que  $u \in V(D_1^c)$ . Mostraremos que si  $v \in V(H) \setminus V(D_1^c)$  es tal que existe una  $uv$ -trayectoria en  $H$ , entonces existe una  $x_1 x_j$ -trayectoria en  $D$ , donde  $v \in V(D_j^c)$ . La demostración la haremos por inducción sobre la longitud de la  $uv$ -trayectoria.

Base Inductiva.

Sea  $v \in V(H) \setminus V(D_1^c)$  y supongamos, sin pérdida de generalidad, que  $v \in V(D_j^c)$ . Si existe una  $uv$ -trayectoria de longitud uno en  $H$ , se sigue que  $(u, v) \in F(H)$  y como  $v \in V(D_1^c)$  y  $v \in V(D_j^c)$  con  $1 \neq j$ , entonces  $(x_1, x_j) \in F(D)$ .

Hipótesis de Inducción.

Sea  $v \in V(H) \setminus V(D_1^c)$  y supongamos, sin pérdida de generalidad, que  $v \in V(D_j^c)$ . Si existe una  $uv$ -trayectoria de longitud menor a  $n$  en  $H$ , entonces existe una  $x_1 x_j$ -trayectoria en  $D$ .

Paso Inductivo.

Sea  $v \in V(H) \setminus V(D_1^c)$  y supongamos, sin pérdida de generalidad, que  $v \in V(D_j^c)$  y que existe una  $uv$ -trayectoria en  $H$ , digamos  $T = (u = z_0, z_1, \dots, z_n = v)$ , de longitud  $n$ . Notemos que  $T' = (u, T, z_{n-1})$  es una  $u z_{n-1}$ -trayectoria en  $H$  de longitud menor

a  $n$ , aplicando hipótesis de inducción, tenemos que existe una  $x_1x_l$ -trayectoria en  $D$ , digamos  $T_1$ , donde  $z_{n-1} \in V(D_l^c)$ .

Ahora consideraremos dos posibles casos sobre  $l$ . Si  $l = j$ , entonces  $T_1$  es una  $x_1x_j$ -trayectoria en  $D$  y termina nuestra demostración. Si  $l \neq j$  tenemos que  $(z_{n-1}, z_n = v) \in F(T) \subseteq F(H)$ , por lo que  $V(D_l^c) \Rightarrow V(D_j^c)$  y con ello,  $(x_l, x_j) \in F(D)$ . Con esto concluimos que  $T'_1 = T \cup (x_l, x_j)$  es una  $x_1x_j$ -trayectoria en  $D$ , terminando así nuestra demostración. □

**Proposición 5.2.4** Sean  $D$  una digráfica no trivial,  $\alpha = [D_1, D_2, \dots, D_p]$  una familia de digráficas y  $D \oplus \alpha$  su composición.  $D \oplus \alpha$  es fuerte si y sólo si  $D$  es fuerte.

*Demostración.*

Probaremos primero la suficiencia del enunciado.

Sean  $D$  una digráfica no trivial,  $\alpha = [D_1, D_2, \dots, D_p]$  una familia de digráficas tal que su composición  $H = D \oplus \alpha$  es fuerte y  $\{u_i, u_j\} \subseteq V(D)$  arbitrarios. Si consideramos  $x_i \in V(D_i)$  y  $x_j \in V(D_j)$ , por ser  $H$  fuerte, existe un  $x_ix_j$ -camino en  $H$  y dado que  $u_i \neq u_j$ , tenemos que  $D_i \neq D_j$  con lo cual, usando el *lema 5.2.3*, existe un  $u_iu_j$ -camino en  $D$ , siguiéndose que  $D$  sea fuerte.

Ahora demostraremos la condición necesaria de la proposición.

Sean  $D$  una digráfica fuerte no trivial,  $\alpha = [D_1, D_2, \dots, D_p]$  una familia de digráficas y  $H = D \oplus \alpha$  su composición. Sean  $\{x, w\} \subseteq V(H)$  arbitrarios, consideremos dos casos posibles sobre  $x$  y  $w$ .

Caso 1.  $x \in V(D_i)$  y  $y \in V(D_j)$  con  $i \neq j$ .

Para todo  $m \in \{1, 2, \dots, p\} \setminus \{i, j\}$ , sea  $z_m \in V(D_m)$  un vértice fijo. Definimos  $Z = \{x, w\} \cup \{z_m \mid m \in \{1, 2, \dots, p\} \setminus \{i, j\}\}$ . Por el *lema 5.2.2* tenemos que  $H[Z] \cong D$ , es decir, existe una función  $f : V(H[Z]) \rightarrow V(D)$  biyectiva que preserva adyacencias. Además, como  $D$  es fuerte, existe un  $f(x)f(w)$ -camino en  $D$ , por lo cual, existe un  $xw$ -camino en  $H[Z]$  y en particular dicho camino es un  $xw$ -camino en  $H$ .

Caso 2.  $\{x, w\} \subseteq V(D_i)$  para algún  $i \in \{1, 2, \dots, p\}$ .

Dado que  $D$  es fuerte no trivial, existe  $u_j \in V(D)$  tal que  $(u_j, u_i) \in F(D)$ , en cuyo caso, si  $z_j \in V(D_j)$ , por el *caso 1* de esta proposición, tenemos que existe un  $xz_j$ -camino en  $H$ , digamos  $C$ . Debido a la elección de  $u_j$ , tenemos además que  $(z_j, w) \in F(H)$ , concluyendo así que  $C' = C \cup (z_j, w)$  es un  $xw$ -camino contenido en  $H$ .

Del *caso 1* y el *caso 2*, concluimos que  $H$  es fuerte, terminando nuestra demostración. □

Con ayuda de la proposición anterior se puede establecer una cota inferior al número semidomático interior fuerte de la composición de una digráfica con una familia de digráficas.

**Proposición 5.2.5** Si  $D$  es una digráfica fuerte no trivial y  $\alpha = [D_1, D_2, \dots, D_p]$  una sucesión de digráficas, entonces

$$d_{sf}^-(D) \geq \text{mín}\{|V(D_i)| \mid i \in \{1, 2, \dots, p\}\}.$$

Demostración.

Sean  $D$  una digráfica fuerte no trivial,  $\alpha = [D_1, D_2, \dots, D_p]$  una sucesión de digráficas,  $H = D \oplus \alpha$  su composición,  $n = \text{mín}\{|V(D_i)| \mid i \in \{1, 2, \dots, p\}\}$ ,  $U_i \subseteq V(D_i)$  un conjunto de  $n$  vértices para toda  $i \in \{1, 2, \dots, p\}$  y  $f_i : U_1 \rightarrow U_i$  una función biyectiva para toda  $i \in \{2, 3, \dots, p\}$ . Supongamos que  $U_1 = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ , definimos

$$F_j = \{u_j\} \cup \{f_i(u_j) \mid i \in \{2, 3, \dots, p\}\}.$$

Y a partir de ello, sean  $S_j = F_j$  para toda  $j \in \{1, 2, \dots, n-1\}$  y

$$S_n = F_n \cup (V(H) \setminus \bigcup_{m=1}^{n-1} F_m).$$

Si  $\mathfrak{S} = \{S_1, S_2, \dots, S_n\}$ , entonces afirmamos que  $\mathfrak{S}$  es una partición de  $V(H)$  en conjuntos semidominantes interiores fuertes.

Hay que hacer la observación de que el vértice  $u_j$  es un representante de la digráfica  $D_1$  en el conjunto  $F_j$  y análogamente, el vértice  $f_l(u_j)$  es un representante de la  $l$ -ésima digráfica de  $\alpha$  en el conjunto  $F_j$ . Esta observación puede ser de utilidad al lector para comprender mejor el papel de los vértices  $f_i(u_j)$  a lo largo de la demostración y se ilustra en la figura 5.2.2.

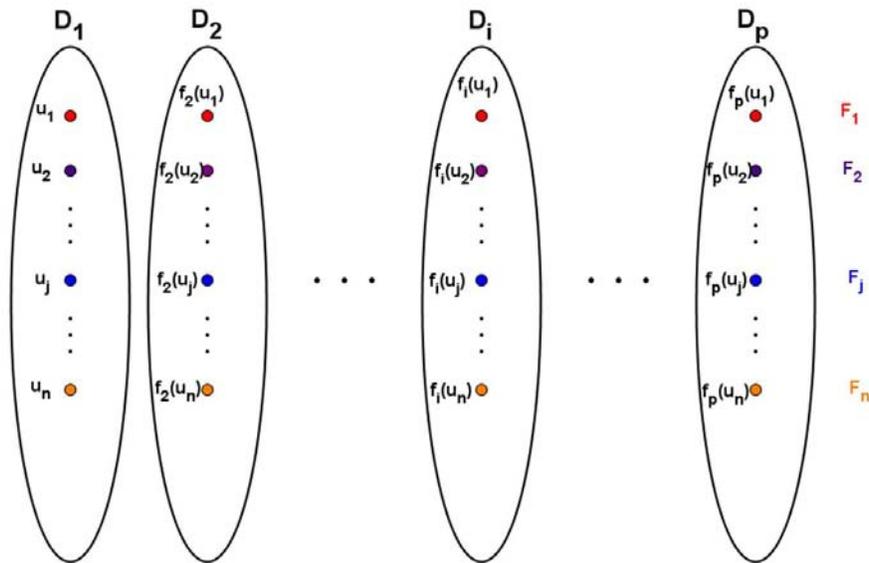


Fig. 5.2.2: Cada elemento  $f_i(u_j)$  es un representante del conjunto  $F_j$  en la  $i$ -ésima digráfica de  $\alpha$ .

Afirmación 1.  $\mathfrak{S}$  es una partición de  $V(H)$ .

Dado que  $f_i(u_1) \in S_i$  para toda  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , los elementos de  $\mathfrak{S}$  son no vacíos. Como las funciones  $f_i$  son biyectivas, los conjuntos  $F_j$  son ajenos dos a dos para toda  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  y por definición de  $S_i$ , los elementos de  $\mathfrak{S}$  son ajenos dos a dos. Por último, tenemos que:

$$\bigcup_{m=1}^n S_m = \left( \bigcup_{m=1}^{n-1} S_m \right) \cup S_n = \left( \bigcup_{m=1}^{n-1} F_m \right) \cup \left( F_n \cup \left( V(H) \setminus \bigcup_{m=1}^{n-1} F_m \right) \right) = V(H).$$

Concluyendo que  $\mathfrak{S}$  es una partición de  $V(H)$ .

Afirmación 2.  $S_i$  es un conjunto semidominante interior fuerte en  $H$  para todo  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

Sean  $S_i \in \mathfrak{S}$  un elemento arbitrario y  $x \in V(H) \setminus S_i$ . Supongamos sin pérdida de generalidad que  $x \in V(D_j)$ , dado que  $D$  es fuerte no trivial, existe  $v_l \in V(D)$  tal que  $(v_j, v_l) \in F(D)$  y por definición de  $H$ , tenemos que  $D_j^c \Rightarrow D_l^c$ , en particular, como  $f_l(u_i) \in S_i \cap V(D_l^c)$ , pues  $f_l(u_i)$  es un representante de  $V(D_l)$  en el conjunto  $S_i$ , tenemos que  $(x, f_l(u_i)) \in F(H)$ , concluyendo que  $S_i$  es absorbente para toda  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

Por otro lado, debido al *lema 5.2.2*, deducimos que  $H[F_i] \cong D$ , por lo que  $F_i$  es un conjunto fuerte de  $H$ , pues  $D$  es fuerte, de ello, si  $i \neq n$ ,  $S_i$  es un conjunto fuerte de  $H$ .

En el caso en que  $i = n$  tomamos dos vértices  $\{x, z\} \subseteq S_n$ . Supongamos sin pérdida de generalidad que  $x \in V(D_i)$  y  $z \in V(D_j)$ ; debido a que  $D$  es fuerte no trivial, existen  $\{v_r, v_s\} \subseteq V(D)$  tales que  $\{(v_i, v_r), (v_s, v_j)\} \subseteq F(D)$ , de lo cual deducimos que  $D_i^c \Rightarrow D_r^c$  y  $D_s^c \Rightarrow D_j^c$ . En particular, tenemos que  $\{(x, f_r(u_n)), (f_s(u_n), z)\} \subseteq F(H)$ . Además, por ser  $F_n$  fuerte, existe un  $f_r(u_n) f_s(u_n)$ -camino contenido en  $F_r$ , digamos  $C'_0$ . Así, concluimos que  $C_0 = (x, f_r(u_n)) \cup C'_0 \cup (f_s(u_n), z)$  es un  $xz$ -camino contenido en  $S_n$ , demostrando que  $S_n$  es un conjunto fuerte de  $H$ .

De la *afirmación 1* y la *afirmación 2*, se prueba que  $\mathfrak{S}$  es una partición en conjuntos semidominantes interiores fuertes, por lo que  $|\mathfrak{S}| \leq \mathfrak{d}_{sf}^-(H)$  y debido a que  $n = \min\{|V(D_i)| \mid i \in \{1, 2, \dots, p\}\}$ , concluimos nuestra demostración. □

En la siguiente figura se muestra el ejemplo de una digráfica fuerte no trivial  $D$  y una familia de digráficas  $\alpha = [D_1, D_2]$ , así como su composición  $D \oplus \alpha$  y una partición de sus vértices en conjuntos semidominantes interiores fuertes con tres elementos. A saber, los conjuntos  $S_1 = \{v_1, u_1\}$ ,  $S_2 = \{v_2, u_2\}$  y  $S_3 = \{v_3, u_3, v_4\}$  son los elementos de una partición de  $V(D \oplus \alpha)$  en conjuntos semidominantes interiores fuertes.

Con ayuda de la *proposición 5.2.5* podemos construir una familia de digráficas para las cuales su número de vértices y su número semidomático interior fuerte esté dado.

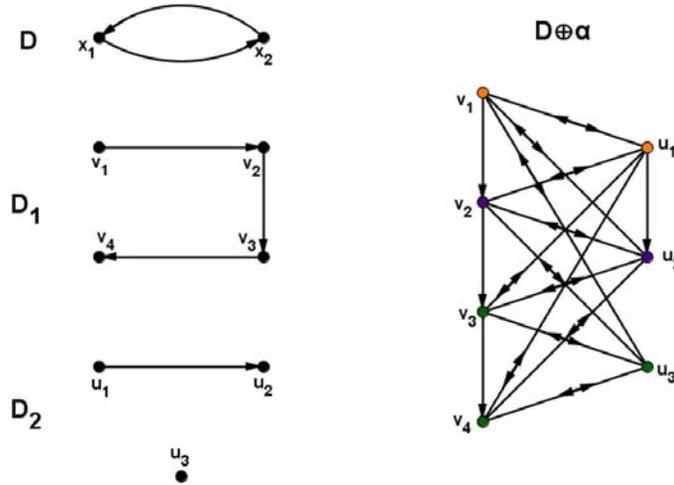


Fig. 5.2.3: Ejemplo de una digráfica  $D$  y una sucesión de digráficas  $\alpha$  para la cual  $d_{sf}^-(D \oplus \alpha) \geq 3$ .

**Corolario 5.2.1** Si  $\{m, p\} \subseteq \mathbb{N}$  son tales que  $0 < m \leq p/2$ , entonces existe una digráfica  $D$  con  $p$  vértices tal que  $d_{sf}^-(D) = m$ .

Demostración.

Sean  $\{m, n\} \in \mathbb{N}$  tales que  $0 < m \leq p/2$ , notemos que debido a que  $m \leq p/2$ , tenemos que  $2 \leq p$ . En el caso en que  $m = 1$ ,  $C_p$  satisface que  $d_{sf}^-(C_p) = m$ , supongamos ahora que  $m \geq 2$ .

Debido a que  $m \leq p$ , por el algoritmo de Euclides existen  $\{q, r\} \subseteq \mathbb{N}$  tales que  $p = mq + r$  con  $q \neq 0$  y  $m > r \geq 0$ . Consideremos  $H \cong C_q$ . Por la hipótesis  $m \leq p/2$ , tenemos que  $q \geq 2$ , por lo que  $D$  está bien definida.

Sean  $D_i$  digráficas con  $m$  vértices tal que  $F(D_i) = \emptyset$ , para toda  $i \in \{1, 2, \dots, q-1\}$ ,  $D_q$  una digráfica con  $m+r$  vértices tal que  $F(D_q) = \emptyset$ ,  $\alpha = [D_1, D_2, \dots, D_q]$  la colección de dichas digráficas y  $D = H \oplus \alpha$  su composición con  $H$ . Afirmamos que  $D$  es la digráfica deseada. Notemos que

$$|V(D)| = \sum_{i=1}^q |V(D_i)| = \sum_{i=1}^{q-1} |V(D_i)| + |V(D_q)| = (q-1)m + m + r = qm + r = p.$$

Es decir,  $D$  tiene  $p$  vértices.

Por otro lado, afirmamos que  $d_{sf}^-(D) = m$ . Debido a la *proposición 5.2.5* tenemos que  $m \leq d_{sf}^-(D)$ , por lo que bastará demostrar que  $d_{sf}^-(D) \leq m$ . Ya que  $D_i$  es una digráfica sin flechas, si  $i \neq q-1$ , para todo  $x \in V(D_i)$ ,  $\delta_D^+(x) = m$  y si  $i = q-1$ , para todo  $x \in V(D_{q-1})$ ,  $\delta_D^+(x) = m+r$ , en particular, tenemos que  $\delta^+(D) = m$ .

Además, hay que hacer ver que ningún vértice de  $D$  es absorbente, pues ya que  $F(D_i) = \emptyset$  y  $|V(D_i)| \geq 2$ , ningún vértice  $x \in V(D_i)$  absorbe a los otros vértices de  $D_i$  para todo  $i \in \{1, 2, \dots, q\}$ , por lo cual,  $d_{sf}^-(D) \leq \delta^+(D)$ , como lo establece la *proposición 4.1.3*, concluyendo que  $d_{sf}^-(D) \leq m$ .

Con ello, tenemos que  $D$  es una digráfica con  $p$  vértices tal que  $d_{sf}^-(D) = m$ , terminando nuestra demostración. □

En la *figura 5.2.4* se ejemplifica la construcción propuesta en *corolario 5.2.1*. En ella se muestra una digráfica con diez vértices cuyo número semidomático interior es tres. Consideramos a  $D \cong C_3$ ,  $D_1$  y  $D_2$  dos digráficas sin flechas con tres vértices cada una y  $D_3$  una digráfica sin flechas con cuatro vértices, si  $\alpha = [D_1, D_2, D_3]$ , entonces la digráfica  $D \oplus \alpha$  tiene diez vértices y  $d_{sf}^-(D \oplus \alpha) = 3$ . En esta misma digráfica, el conjunto  $\{\{x_1, y_1, z_1\}, \{x_2, y_2, z_2\}, \{z_3, y_3, z_3, z_4\}\}$  es una  $d_{sf}^-$ -partición de  $D \oplus \alpha$ .

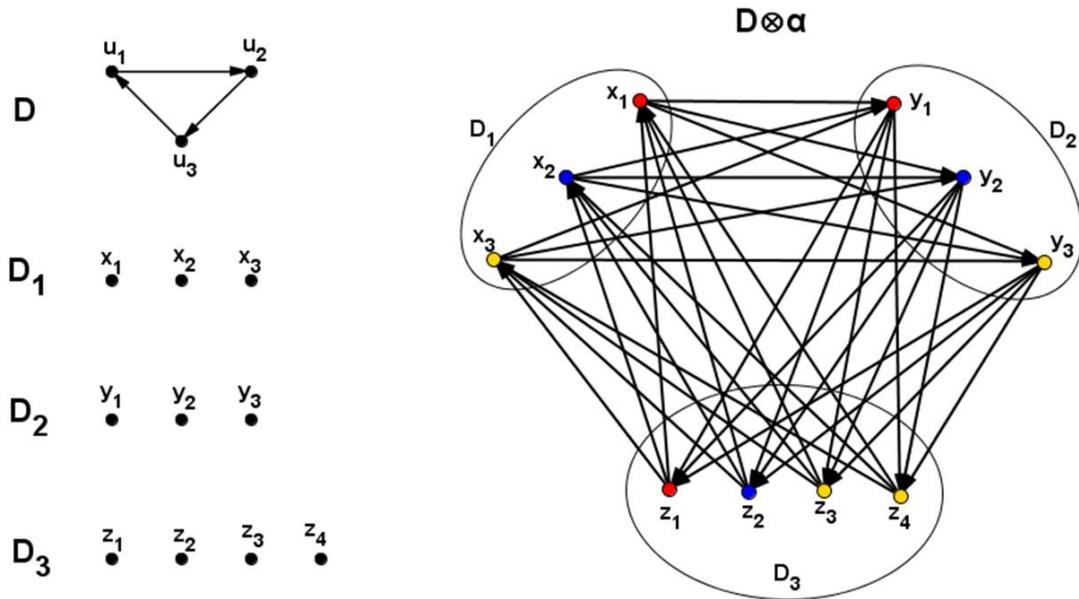


Fig. 5.2.4: Digráfica con diez vértices y número semidomático interior fuerte igual a tres, construida a partir del *corolario 5.2.1*.

Anteriormente, en la sección referente a digráficas semidomáticas interiores fuertes críticas del capítulo 4, se había establecido una familia de digráficas semidomáticas interiores fuertes críticas cuyo número semidomático interior fuerte esté dado, sin embargo, dicha familia se encontraba restringida por la relación  $2n = p$ , donde  $p$  es el número de vértices de  $D$  y  $n = d_{sf}^-(D)$ . Con la proposición anterior, podemos exhibir una nueva familia de digráficas semidomáticas interiores fuertes críticas.

**Proposición 5.2.6** *Si  $p \in \mathbb{N}$  es al menos dos, entonces para todo divisor de  $p$  mayor a uno existe una digráfica semidomática interior fuerte crítica con  $p$  vértices tal que  $\mathbf{d}_{sf}^-(D) = n$ .*

Demostración.

Sea  $p \in \mathbb{N}$  mayor o igual a dos y  $n > 1$  divisor de  $p$ . Si  $p = n$ , tenemos que  $D \cong K_p$  satisface que  $\mathbf{d}_{sf}^-(D) = p$  y  $D$  es semidomática interior fuerte crítica, pues para toda  $a \in F(D)$ ,  $\delta^+(D-a) = p-2$  y por el lema 4.1.2,  $\mathbf{d}_{sf}^-(D-a) \leq \delta^+(D-a) + 1$  siguiéndose de ello que  $\mathbf{d}_{sf}^-(D-a) \leq (p-2) + 1 = p-1$ , es decir,  $\mathbf{d}_{sf}^-(D-a) < p$ .

Supongamos ahora que  $n \neq p$ . Como  $n$  es divisor de  $p$ , existe  $s \in \mathbb{N}$  tal que  $p = ns$  y por ser  $n \neq p$ , concluimos que  $s \geq 2$ . Si consideramos a  $D \cong C_s$  y  $\alpha = [D_1, D_2, \dots, D_s]$  es una familia con  $s$  digráficas de  $n$  vértices cada una y  $F(D_i) = \emptyset$  para todo  $i \in \{1, 2, \dots, s\}$ , por la proposición anterior, se concluye que  $H = D \oplus \alpha$  satisface el tener  $p$  vértices y  $\mathbf{d}_{sf}^-(H) = n$ . Ahora sólo bastará ver que  $H$  es efectivamente una digráfica semidomática interior fuerte crítica.

Primero demostraremos que  $H - a$  es fuerte para toda  $a \in F(H)$ . Esto es válido gracias a que las únicas flechas existentes en  $H$  son de la forma  $(u, v)$  con  $u \in V(D_i)$  y  $v \in F(D_{i+1})$  con  $i \neq s$  o de la forma  $u \in V(D_q)$  y  $v \in V(D_1)$ , con ello, si  $(u, v) \in F(H)$ , podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que  $u \in V(D_i)$  y  $v \in V(D_{i+1})$ . Dado que  $n \geq 2$ , escogemos por cada  $D_j$  un vértice  $x_j$  distinto de  $u$  y  $v$ , en cuyo caso, por el lema 5.2.2, tenemos que  $H[\{x_1, x_2, \dots, x_s\}]$  es un ciclo  $C$  en  $H$  y por elección de los elementos  $x_j$  con  $j \in \{1, 2, \dots, s\}$ ,  $C$  es un ciclo en  $H - a$ , a partir de este hecho, podemos decir que  $(u, x_{i+1}) \cup C \cup (x_i, v)$  es un  $uv$ -camino en  $H - a$ , por lo que  $H - a$  es fuerte para toda  $a \in F(H)$ .

Ahora sólo restará demostrar el que  $\mathbf{d}_{sf}^-(H - a) < n$  para toda  $a \in F(H)$ , esto lo haremos con ayuda de la proposición 4.2.3. Sea  $\mathfrak{S} = \{S_1, S_2, \dots, S_n\}$  una  $\mathbf{d}_{sf}^-$ -partición arbitraria de  $H$ .

Usando el hecho de que los conjuntos  $V(D_i)$  son independientes en  $H$  para toda  $i \in \{1, 2, \dots, s\}$ , los caminos cerrados más pequeños en  $H$  son ciclos con al menos  $s$  vértices, a saber, aquellos formados por un representante de cada digráfica  $D_i^c$ , por lo que cualquier conjunto fuerte de  $H$  debe tener al menos  $s$  elementos, en particular, cada conjunto de  $\mathfrak{S}$  tiene al menos  $s$  vértices, sin embargo, como  $|\mathfrak{S}| = n$  y  $p = ns$ , los conjuntos en  $\mathfrak{S}$  tienen exactamente  $s$  elementos, concluyendo  $H[S_i]$  es un ciclo, para toda  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Derivándose de esto, la digráfica  $H[S_i] - a$  no es fuerte para cualquier  $a \in F(H[S_i])$ , satisfaciéndose el inciso (a) de la proposición 4.2.3.

Por otro lado, como  $|S_i| = s$  y  $|\mathfrak{S}| = n$ , tenemos que  $|S_i \cap V(D_j)| = 1$  para toda  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  y para toda  $j \in \{1, 2, \dots, s\}$ , por lo cual, si  $x \in V(H) \setminus S_i$  y suponiendo, sin pérdida de generalidad que  $x \in V(D_j)$ , existe un único vértice en  $S_i$ , a saber  $y \in S_i \cap D_{j+1}$  tal que  $(x, y) \in F(H)$ , satisfaciéndose también el inciso (b) de la proposición 4.2.3.

Por la proposición 4.2.3,  $H$  es semidomática interior fuerte crítica.

□

A continuación se muestra el ejemplo de una digráfica semidomática interior fuerte crítica con nueve vértices construida a partir de la composición de digráficas y cuyo número semidomático interior fuerte es tres. En nuestro caso, consideramos  $D \cong C_3$ ,  $\alpha$  es una familia de dos digráficas sin flechas con tres vértices cada una y  $D \oplus \alpha$  su composición. En el ejemplo mostrado, tenemos que los conjuntos  $S_1 = \{u_1, v_2, w_3\}$ ,  $S_2 = \{u_2, v_1, w_1\}$  y  $S_3 = \{u_3, v_3, w_2\}$ , son una  $d_{sf}^-$ -partición de  $V(D \oplus \alpha)$ .

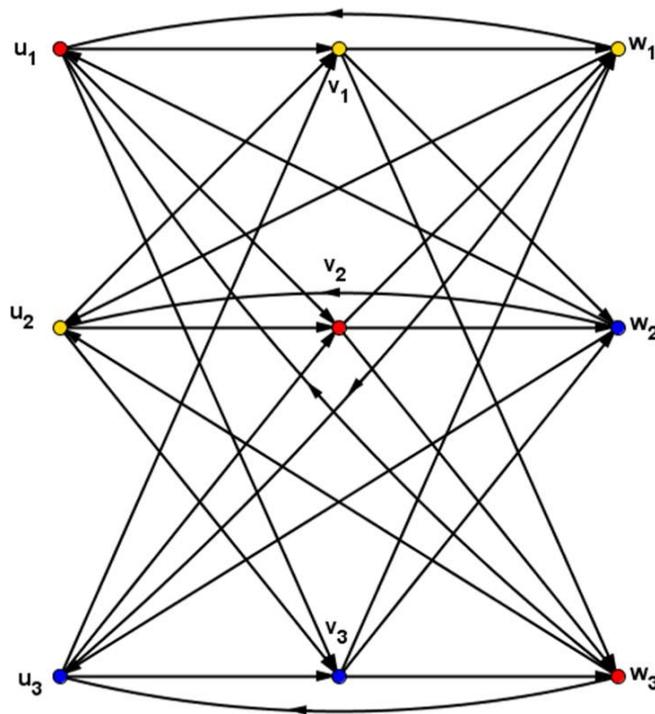


Fig. 5.2.5: Ejemplo de una digráfica semidomática interior fuerte crítica con nueve vértices y número semidomático interior fuerte igual a 3.

# Capítulo 6.

## Digráficas Asociadas.

En el capítulo anterior se habló sobre el número superior de absorberencia por conjuntos semicompletos y el número semidomático interior fuerte en operaciones de digráficas, se buscaron condiciones necesarias y suficientes para establecer cuándo el producto y la composición de digráficas tenían una partición de sus vértices en conjuntos semidominantes interiores fuertes o un conjunto absorbente semicompleto y con esto logramos acotar inferiormente el número semidomático interior fuerte y el número de absorberencia por conjuntos semicompletos de dichas operaciones. En este capítulo ofreceremos un análisis similar en digráficas asociadas. Se mostrarán resultados referentes a orientaciones de la gráfica de líneas de cierta familia de gráficas para generar un conjunto absorbente semicompleto en dichas orientaciones, también exhibiremos resultados para la digráfica de líneas y a partir de los resultados obtenidos del número semidomático interior fuerte en esta digráfica asociada, podremos recuperar información en las digráficas media y total.

En este punto, recordemos que la *proposición 4.1.3* establece que si una digráfica fuerte no tiene vértices absorbentes, entonces  $d_{sf}^-(D) \leq \delta^+(D)$ , esto con la intención de facilitar al lector el acceso a este resultado probado en el Capítulo 4, pues en demostraciones posteriores, será citado frecuentemente.

### 6.1. Orientaciones de la Gráfica de Líneas.

Una de las cotas para el número superior de absorberencia por conjuntos semicompletos que mostraremos está relacionado con las orientaciones que podemos dar a la gráfica de líneas de cierta familia de gráficas. Recordemos que si  $G$  es una gráfica arbitraria y  $G_1$  es una subgráfica de  $G$  isomorfa a  $K_{1,m}$  para algún  $m \geq 1$ , entonces las aristas de  $G_1$  inducen un clan en  $L(G)$  como se mostró en el *lema 1.1.1*, con esto, por cada vértice  $x$  de  $G$ , el conjunto de aristas que inciden en  $x$  inducen un clan en  $L(G)$ .

Es natural preguntarse si es posible orientar a la gráfica de líneas de tal forma que alguno de estos clanes sea un conjunto absorbente semicompleto. En los enunciados siguientes mostraremos que esto es posible bajo ciertas condiciones de la gráfica, para auxiliarnos en esa demostración, enunciaremos antes un par de lemas.

**Lema 6.1.1** Sean  $G$  una gráfica arbitraria y  $m > 3$ .  $G$  tiene una subgráfica isomorfa a  $K_{1,m}$  para algún  $m$  natural, tal que toda arista de  $G$  es adyacente a alguna arista de dicha subgráfica si y sólo si la gráfica de líneas de  $G$  tiene un clan dominante con  $m$  vértices.

Demostración.

Demostraremos primero la suficiencia del lema.

Sean  $G$  una gráfica y  $m > 3$ . Supongamos que  $G$  contiene una subgráfica isomorfa a  $K_{1,m}$ , digamos  $G_1$ , tal que toda arista de  $G$  es adyacente a alguna arista de  $G_1$ . Afirmamos que  $A(G_1)$  es un clan dominante en  $L(G)$ .

Para demostrar que  $A(G_1)$  es un conjunto absorbente en  $L(G)$ , consideremos  $a \in V(L(G)) \setminus A(G_1)$  arbitrario; dado que toda arista de  $G$  es adyacente a alguna arista de  $G_1$ , entonces existe  $c \in A(G_1)$  tal que  $a$  y  $c$  son adyacentes en  $G$ , por lo cual,  $(a, c) \in F(L(G))$ , concluyendo que  $A(G_1)$  es un conjunto absorbente en  $L(G)$ . Por otro lado, como  $K_{1,m} \cong G_1$ , entonces  $L(G_1) \cong K_m$  como lo establece el lema 1.1.2, por lo que  $A(G_1)$ , vistas como vértices de  $L(G_1)$  son un clan dominante en  $L(G)$ .

Ahora demostraremos la condición necesaria del enunciado.

Sean  $G$  una gráfica y  $m > 3$ , supongamos que  $L(G)$  tiene un clan dominante con  $m$  vértices, digamos  $C$ . Dado que  $m > 3$  por el lema 1.1.2,  $G[V(C)] \cong K_{1,m}$ , más aún, como  $V(C)$  es un conjunto absorbente en  $L(G)$ , toda  $a \in V(L(G)) \setminus V(C)$  es dominada por algún elemento  $c \in V(C)$ , por lo cual, toda arista de  $G$  es adyacente a alguna arista en  $G[C]$ , concluyendo la demostración.

□

El lema 6.1.1 caracteriza a las gráficas cuya gráfica de líneas tiene un clan dominante y a partir de esto podemos establecer una cota respecto al número de dominación por clanes de la gráfica de líneas, como se muestra en el siguiente lema.

**Lema 6.1.2** Sea  $G$  una gráfica tal que su gráfica de líneas tiene un clan dominante, si  $S$  es un clan dominante en  $L(G)$  con al menos cuatro vértices, entonces  $|S| \leq \Delta(G)$ .

Demostración.

Sean  $G$  una gráfica,  $L(G)$  su gráfica de líneas y  $S$  un clan dominante de  $L(G)$  con  $m > 3$  vértices. Por el lema 1.1.2 se deduce que  $G$  tiene una subgráfica isomorfa a  $K_{1,m}$ , digamos  $H$ , para algún  $m$  natural. De esto último se sigue que en  $H$  existe un vértice de grado  $m$ , por lo que  $m \leq \Delta(H)$  y en particular,  $m \leq \Delta(G)$ , es decir,  $|S| \leq \Delta(G)$ .

□

Notemos que en general, si  $G$  es una gráfica tal que  $L(G)$  tiene un clan dominante, no necesariamente una orientación de  $L(G)$  tendrá un conjunto absorbente semicompleto, como se muestra en la *figura 6.1.1*, pues en la orientación  $D$  se tiene que el vértice  $a$  es de exgrado cero, es decir, no es absorbido por ningún vértice, por lo que debe ser parte de cualquier conjunto absorbente semicompleto, sin embargo, los únicos conjuntos absorbentes semicompletos a los que pertenece  $a$  son los subconjuntos no vacíos de  $\{a, b, f\}$  y ninguno de ellos absorbe a  $d$ .

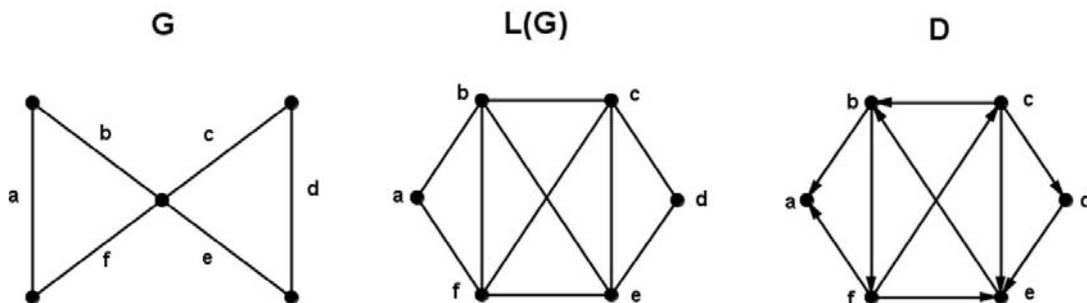


Fig. 6.1.1: No cualquier orientación de la gráfica de líneas tiene un conjunto absorbente semicompleto.

Sin embargo, con el *lema 6.1.2* es fácil establecer, dada una gráfica  $G$  cuya gráfica de líneas tenga un clan dominante, una cota para el número de absorberencia por conjuntos semicompletos de algunas orientaciones de  $L(G)$ .

**Proposición 6.1.1** *Si  $G$  es una gráfica tal que su gráfica de líneas tiene un clan dominante con al menos cuatro vértices, entonces existe una orientación  $D$  de  $L(G)$  tal que  $\Gamma_{cas}(D) \leq \Delta(G)$ .*

*Demostración.*

Sean  $G$  una gráfica,  $L(G)$  su gráfica de líneas y  $S$  un clan dominante en  $L(G)$  de cardinalidad máxima. Dado que  $S$  es un conjunto dominante en  $L(G)$ , para toda  $a \in V(L(G)) \setminus S$  existe  $s(a) \in S$  tal que  $(a, s(a)) \in A(L(G))$ . Consideremos a  $D$  como una orientación de  $L(G)$  de tal forma que las aristas  $(a, s(a))$  tengan dirección de  $a$  hacia  $s(a)$  y la dirección de las demás aristas sea arbitraria.

Con la orientación  $D$ , el conjunto  $S$  es absorbente en  $D$ , y además, por ser  $S$  un clan en  $L(G)$ ,  $S$  es un conjunto semicompleto en  $D$ , concluyendo que  $S$  es un conjunto absorbente semicompleto de  $D$ .

Por esto último,  $|S| \leq \Gamma_{cas}(D)$ . Afirmamos que  $\Gamma_{cas}(D) \leq |S|$ , pues en caso contrario existiría en  $D$  un conjunto absorbente semicompleto  $S'$  tal que  $|S| < |S'|$ , pero por ser

$D$  una orientación de  $L(G)$ ,  $S'$  es un clan dominante en  $L(G)$ , lo cual no es posible pues  $S$  es de cardinalidad máxima en  $L(G)$  y  $|S| < |S'|$ , mostrando así que la desigualdad  $\Gamma_{cas}(D) \leq |S|$  es cierta, concluyendo que  $\Gamma_{cas}(D) = |S|$ .

Debido a que  $L(G)$  tiene un clan dominante con al menos cuatro vértices y ser  $S$  un conjunto de cardinalidad máxima, del *lema 6.1.2* se sigue que  $|S| \leq \Delta(G)$ , es decir,  $\Gamma_{cas}(D) \leq \Delta(G)$ .

□

Aunque la *proposición 6.1.1* exhibe una cota superior para el número superior de absorbercia por conjuntos semicompletos de algunas orientaciones de una gráfica de líneas, esta cota no necesariamente es justa, como se muestra en la *figura 6.1.2*: El grado máximo de  $G$  es cinco, sin embargo, los únicos clanes dominantes en  $L(G)$  son  $\{b, e, c\}$  y  $\{b, e, c, d\}$ , por lo cual, para cualquier orientación  $D$  de  $L(G)$  se tendrá que  $\Gamma_{cas}(D) < \Delta(G)$ .

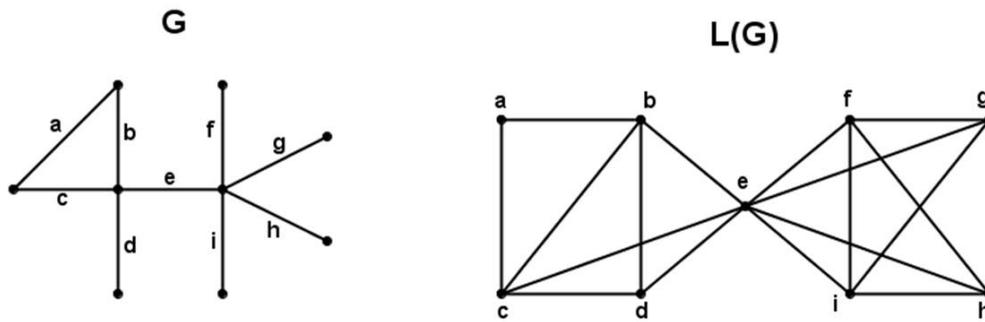


Fig. 6.1.2: Ejemplo de una gráfica y su gráfica de líneas para la cual la desigualdad de la *proposición 6.1.1* es estricta.

## 6.2. Digráfica de Líneas.

Una de las digráficas asociadas más estudiadas es la digráfica de líneas. Se han publicado muchos resultados en cuestiones de dominación sobre este tipo de digráficas. En un principio se buscaron condiciones para la existencia de un *núcleo* en la digráfica de líneas, recordemos que un **núcleo** de una digráfica  $D$  es un subconjunto de vértices que es absorbente e independiente. Matus Harminc [16] mostró que es condición necesaria y suficiente que una digráfica tenga núcleo para que su digráfica de líneas también lo

tenga y además, el número de núcleos en la digráfica es igual al número de núcleos en la digráfica de líneas.

También se ha trabajado el concepto de cuasinúcleos: un **cuasinúcleo** de una digráfica  $D$  es un subconjunto de vértices que es independiente y además, para todo vértice  $x$  fuera del cuasinúcleo, existe  $z$  en el cuasinúcleo tal que  $d(x, z) \leq 2$ . Hortensia Galeana, Laura Pastrana y Hugo Rincón [13] mostraron que el número de cuasinúcleos en una digráfica es menor que el número de cuasinúcleos en su digráfica de líneas. Aunque estos primeros trabajos se desarrollan sobre conjuntos independientes, posteriormente algunos autores como T. Hasunuma y M. Otany [18] trabajan con conjuntos dominantes en la digráfica de líneas dejando de lado la independencia del conjunto y prestando atención a la conexidad del mismo.

En el ámbito de los conjuntos semicompletos, mostraremos que la digráfica de líneas sólo puede tener subgráficas semicompletas con a lo más tres vértices, acotando así el número superior de absorbcencia por conjuntos semicompletos de cualquier digráfica de líneas. En el área de los conjuntos semidominantes interiores fuertes de la digráfica de líneas lograremos dar una caracterización de éstos respecto a ciertos conjuntos de flechas en la digráfica original.

**Definición 6.2.1** Sea  $D = (V(D), F(D))$  una digráfica con al menos una flecha, definimos la digráfica de líneas de  $D$  como la digráfica  $L(D)$  tal que  $V(L(D)) = F(D)$  y dados dos vértices  $(u, v)$  y  $(x, y)$  en  $L(D)$ ,  $(u, v)$  incide en  $(x, y)$  en  $L(D)$  si y sólo si  $v = x$  en  $D$ .

A continuación se muestra el ejemplo de una digráfica  $D$  y su digráfica de líneas  $L(D)$ .

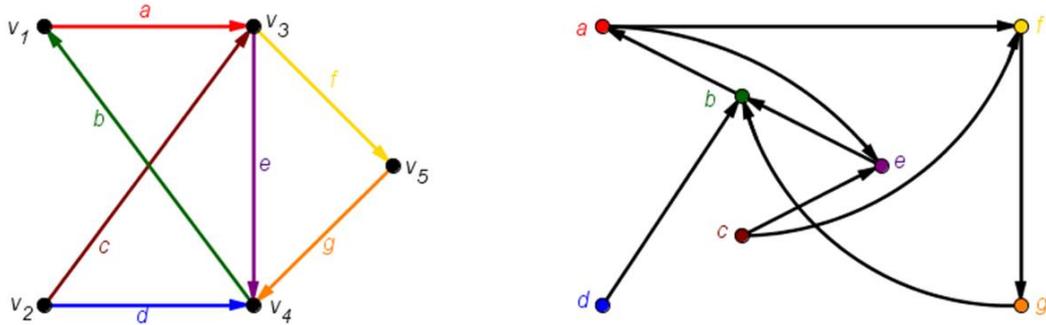


Fig. 6.2.1: Ejemplo de una digráfica  $D$  y su digráfica de líneas  $L(D)$ .

En el apartado anterior vimos que la forma en que es construida la gráfica de líneas de una gráfica  $G$  permite generar, por cada vértice  $x$  en  $G$ , un clan en  $L(G)$  a partir de las aristas incidentes en  $x$ . Esta propiedad no se preserva en la digráfica de líneas.

Por ejemplo, en la *figura 6.2.1* el conjunto de flechas  $\{e, g, d, b\}$ , que tienen en común al vértice  $v_4$ , no induce un conjunto semicompleto en  $L(D)$ .

En los resultados siguientes mostraremos que la digráfica de líneas de cualquier digráfica no tiene como subdigráfica al torneo transitivo con tres vértices, y a partir de esto podremos acotar superiormente el número de absorberencia por conjuntos semicompletos de cualquier digráfica de líneas.

**Lema 6.2.1** *Si  $D$  es una digráfica arbitraria y  $L(D)$  su digráfica de líneas, entonces  $L(D)$  no contiene al torneo transitivo con tres vértices como subdigráfica.*

*Demostración.*

Sean  $D$  una digráfica,  $L(D)$  su digráfica de líneas y supongamos por contradicción que  $L(D)$  tiene un torneo transitivo con tres vértices, digamos  $T_3$ , cuyos vértices son  $\{a, b, c\}$ , supongamos sin pérdida de generalidad que  $\{(a, b), (b, c), (a, c)\} \subseteq F(T_3)$  y que  $a = (u_1, u_2)$ ,  $b = (v_1, v_2)$  y  $c = (w_1, w_2)$  con  $\{u_1, u_2, v_1, v_2, w_1, w_2\} \subseteq V(D)$ .

Como  $(a, b) \in F(L(D))$ , el vértice final de  $a$  es el vértice inicial de  $b$ , es decir,  $u_2 = v_1$ , análogamente, como  $(b, c) \in F(L(D))$ ,  $v_2 = w_1$  y como  $(a, c) \in F(L(D))$ ,  $u_2 = w_1$ . De las igualdades  $v_2 = w_1$  y  $u_2 = w_1$  se sigue que  $v_2 = u_2$ , con ésto y la igualdad  $u_2 = v_1$  tenemos que  $v_2 = v_1$ , concluyendo que  $b$  es de la forma  $(v_1, v_1)$ , lo cual no es posible. Por lo tanto,  $L(D)$  no tiene al torneo transitivo con tres vértices como subdigráfica.

□

A partir de ello, afirmamos que el conjunto semicompleto más grande por cardinalidad en la digráfica de líneas de cualquier digráfica tiene a lo más tres vértices, como se mostrará en el *lema 6.2.2*.

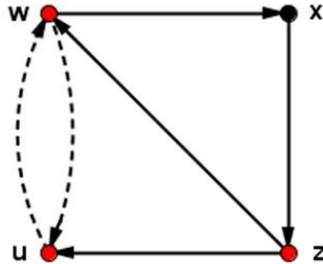
**Lema 6.2.2** *Si  $D$  es una digráfica cuya digráfica de líneas tiene un conjunto semicompleto  $S$ , entonces  $|S| \leq 3$ .*

*Demostración.*

Sea  $D$  una digráfica cuya digráfica de líneas tiene un conjunto semicompleto. Demostraremos por contradicción el enunciado: supongamos que existe un conjunto semicompleto  $S$  tal que  $|S| \geq 4$ . Sea  $S_1 = \{w, x, u, z\} \subseteq S$  un conjunto de cuatro vértices. Notemos que por ser  $S$  un conjunto semicompleto, entonces  $S_1$  es también un conjunto semicompleto. Por el *lema 6.2.1*, podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $\{(w, x), (x, z), (z, w)\} \subseteq F(L(D))$ . Consideremos dos casos sobre la orientación de la flecha entre  $z$  y  $u$ .

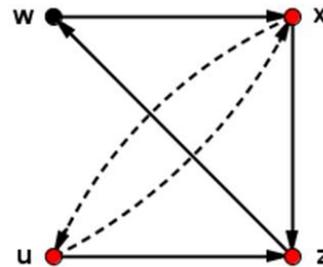
Caso 1.  $(z, u) \in F(L(D))$ .

En tal caso, sin importar la orientación de la flecha entre  $w$  y  $u$ , se tiene que  $(L(D))[\{w, u, z\}]$  contiene al torneo transitivo de tres vértices, lo cual es una contradicción al *lema 6.2.1*.



Caso 2.  $(u, z) \in F(L(D))$ .

En este caso, sin importar la orientación de la flecha entre  $x$  y  $u$ , se tiene que el conjunto  $(L(D))[\{u, x, z\}]$  contiene al torneo transitivo de tres vértices, lo cual es imposible por el *lema 6.2.1*.



Del *caso 1* y el *caso 2*, vemos que cualquier conjunto semicompleto en  $L(D)$  tiene a lo más tres vértices, por lo cual  $|S| \leq 3$ .

□

El *lema 6.2.2* muestra que buscar conjuntos absorbentes semicompletos en la digráfica de líneas se reduce a encontrar vértices absorbentes, aristas absorbentes o ciclos absorbentes con tres vértices, por lo que, en lo que respecta a la digráfica de líneas y conjuntos absorbentes semicompletos, sólo estableceremos una proposición:

**Proposición 6.2.1** Si  $D$  es una digráfica tal que su digráfica de líneas tiene un conjunto absorbente semicompleto, entonces  $\Gamma_{cas}(L(D)) \leq 3$ .

Demostración.

Sea  $D$  una digráfica tal que su digráfica de líneas tiene un conjunto absorbente semicompleto. Por el *lema 6.2.2* tenemos que si  $S$  es un  $\Gamma_{cas}$ -conjunto de  $L(D)$ , entonces  $|S| \leq 3$ , concluyendo que  $\Gamma_{cas}(L(D)) \leq 3$ .

□

Para introducirnos a la teoría del número semidomático interior fuerte en la digráfica de líneas analizaremos un par de propiedades en dicha digráfica encaminadas a asegurar la conexidad fuerte de la digráfica de líneas para poder tener una partición de sus vértices en conjuntos semidominantes interiores fuertes. En primer lugar observemos que en la *figura 6.2.2* tenemos que  $C = (u, v, x, y, z)$  es un camino en  $D$  que pasa por las flechas  $a, d, g$  y  $h$  en ese orden, si prestamos atención a dichas flechas en la digráfica de líneas, podemos notar que la secuencia  $(a, d, g, h)$  es un camino de  $a$  hacia  $b$  en  $L(D)$ , es decir, un camino en  $D$  nos induce un camino de la flecha inicial a la flecha final de dicho camino en  $L(D)$ . Esta propiedad será de utilidad y quedará establecida en el siguiente lema.

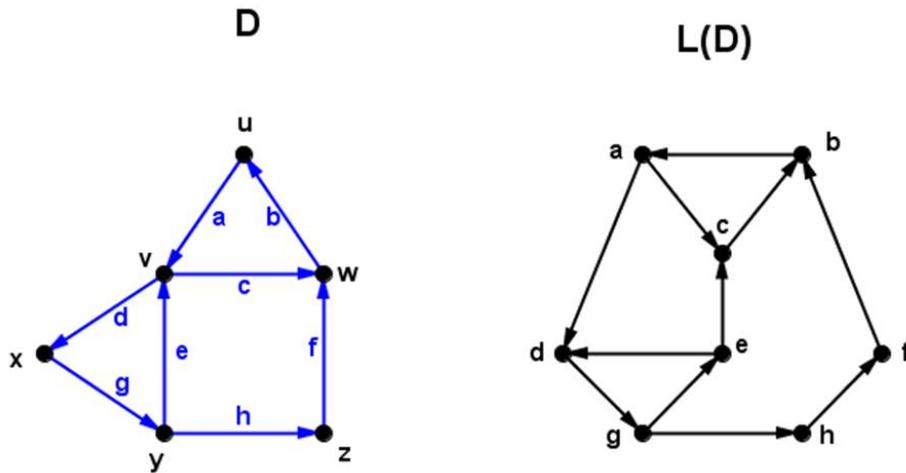


Fig. 6.2.2: Existe una relación entre los caminos de una digráfica y los caminos de su digráfica de líneas.

**Lema 6.2.3** Sean  $D$  una digráfica y  $L(D)$  su digráfica de líneas, si existe un  $uv$ -camino en  $D$  con  $\{u, v\} \subseteq V(D)$ , entonces para cualquier  $a \in F(D)$  cuyo vértice final sea  $u$  y cualquier  $b \in F(D)$  cuyo vértice inicial sea  $v$ , existe un  $ab$ -camino en  $L(D)$ .

Demostración.

Sean  $D$  una digráfica,  $C_1 = (u = x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = v)$  un  $uv$ -camino en  $D$ ,  $\{a = (x, u), b = (v, y)\} \subseteq F(D)$  dos flechas cuyos vértice final e inicial son  $u$  y  $v$  respectivamente y  $L(D)$  la digráfica de líneas de  $D$ . Si definimos  $c_i = (x_i, x_{i+1})$  para toda  $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ , de la definición de adyacencia en  $L(D)$  se sigue que  $C' = (c_0, c_1, \dots, c_{n-1})$  es un  $c_0 c_{n-1}$ -camino en  $L(D)$ , más aún, por ser  $u$  el vértice final de  $a$  y vértice inicial de  $c_0$  y por ser  $v$  el vértice final de  $c_{n-1}$  y vértice inicial de  $b$ , tenemos que  $C'' = (a, c_0) \cup C' \cup (c_{n-1}, b)$  es un  $ab$ -camino en  $L(D)$ , demostrando así el lema. □

Utilizando nuevamente la *figura 6.2.2*, notemos que el camino  $C' = (e, d, g, h, f, b, a)$  en la digráfica de líneas induce un camino entre el vértice inicial de  $e$  y el vértice final de  $a$ , es decir, el camino que pasa por las aristas  $e, d, g, h, f, b$  y  $a$  en  $D$  es un  $yv$ -camino. Esto sucede en general y se demuestra a continuación.

**Lema 6.2.4** Sean  $D$  una digráfica y  $L(D)$  su digráfica de líneas, si existe un  $ab$ -camino en  $L(D)$  con  $\{a, b\} \subseteq V(L(D))$ , entonces existe un camino del vértice inicial de  $a$  hacia el vértice final de  $b$  en  $D$ .

Demostración.

Sean  $D$  una digráfica,  $L(D)$  su digráfica de líneas y  $C_1 = (a = c_0, c_1, \dots, c_{n-1}, c_n = b)$  un  $ab$ -camino en  $L(D)$ . Supongamos que  $c_i = (x_i, y_i)$  con  $\{x_i, y_i\} \subseteq V(D)$ . Debido a que  $(c_i, c_{i+1})$  es una flecha de  $L(D)$  para toda  $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ , por definición de adyacencia en  $L(D)$ , el vértice final de  $c_i$  es el vértice inicial de  $c_{i+1}$ , es decir,  $y_i = x_{i+1}$   $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ , de este modo,  $C = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n, y_n)$  es un  $x_0 y_n$ -camino en  $D$ , donde  $x_0$  es el vértice inicial de  $a$  y  $y_n$  es el vértice final de  $b$ . □

La interpretación intuitiva de los dos lemas anteriores es el poder encontrar caminos entre flechas en la digráfica de líneas a partir de la existencia de caminos entre los vértices de la digráfica original, más aún, si la digráfica original fuese fuerte, entonces

su digráfica de líneas sería fuerte y con ello podemos asegurar la existencia de una partición de sus vértices en conjuntos semidominantes interiores fuertes.

**Proposición 6.2.2** *Si  $D$  es una digráfica fuerte no trivial, entonces su digráfica de líneas es fuerte.*

Demostración.

Sea  $D$  una digráfica fuerte,  $L(D)$  su digráfica de líneas y  $\{a, b\} \subseteq V(L(D))$  vértices arbitrarios. Si  $u$  es el vértice final de  $a$  y  $v$  es el vértice inicial de  $b$ , por ser  $D$  fuerte existe un  $uv$ -camino en  $D$ , en cuyo caso, por el lema 6.2.3, existe un  $ab$ -camino en  $L(D)$ , concluyendo que  $L(D)$  es fuerte.

□

Aunque es condición suficiente el que una digráfica sea fuerte para que su digráfica de líneas también lo sea, el recíproco no necesariamente es verdadero. Un ejemplo de esto se muestra en la figura 6.2.3. Notemos que en la digráfica  $D$  existe un vértice aislado  $x_0$ , por lo que no es fuerte pero su digráfica de líneas  $L(D)$  sí lo es.

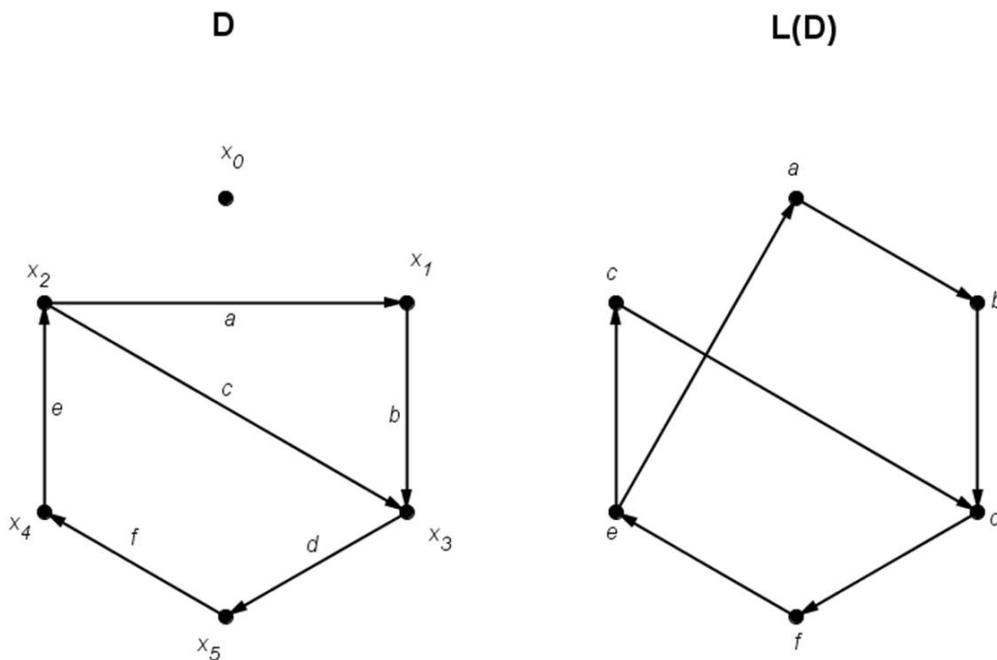


Fig. 6.2.3: Ejemplo de una digráfica  $D$  que no es fuerte, pero su digráfica de líneas  $L(D)$  sí lo es.

A pesar de lo anterior, agregando una sencilla hipótesis tenemos que es suficiente el que la digráfica de líneas sea fuerte para que la digráfica original también lo sea.

**Proposición 6.2.3** *Si  $D$  es una digráfica sin vértices aislados y su digráfica de líneas es fuerte no trivial, entonces  $D$  es fuerte.*

Demostración.

Sean  $D$  una digráfica sin vértices aislados tal que su digráfica de líneas  $L(D)$  es fuerte no trivial y  $\{u, v\} \subseteq V(D)$  arbitrarios. Primero mostraremos que  $u$  tiene exgrado al menos uno y  $v$  tiene ingrado al menos uno, con ello y con ayuda del *lema 6.2.4* concluiremos lo deseado.

Afirmación 1. El exgrado de  $u$  en  $D$  es al menos uno.

Debido a que  $D$  no tiene vértices aislados, existe al menos una flecha  $a$  de la forma  $a = (u, x)$  o  $a = (x, u)$  con  $x \in V(D)$ . Si  $a = (u, x)$ , la afirmación es cierta. En caso de que  $a = (x, u)$ , por ser  $L(D)$  fuerte no trivial, existe  $b \in V(L(D))$  tal que  $(a, b) \in F(L(D))$  y por definición de adyacencia en la digráfica de líneas, el vértice inicial de  $b$  es  $u$ , demostrando con ello que el exgrado de  $u$  es al menos uno.

Afirmación 2. El ingrado de  $v$  en  $D$  es al menos uno.

Debido a que  $D$  no tiene vértices aislados, existe al menos una flecha  $a'$  de la forma  $a' = (v, x)$  o  $a' = (x, v)$  con  $x \in V(D)$ . Si  $a' = (x, v)$ , la afirmación es cierta. En caso de que  $a' = (v, x)$ , por ser  $L(D)$  fuerte no trivial, tenemos que existe  $b' \in V(L(D))$  tal que  $(b', a') \in F(L(D))$  y por definición de adyacencia en la digráfica de líneas, el vértice final de  $b'$  es  $u$ , demostrando con ello que el ingrado de  $u$  es al menos uno.

Gracias a las afirmaciones anteriores, podemos asegurar la existencia de dos flechas  $c_0$  y  $c_1$  tales que el vértice inicial de  $c_0$  es  $u$  y el vértice final de  $c_1$  es  $v$ . Además, por ser  $L(D)$  fuerte, existe un  $c_0c_1$ -camino en  $L(D)$  y por el *lema 6.2.4* existe un  $uv$ -camino en  $D$ , concluyendo la demostración. □

Con las proposiciones anteriores tenemos condiciones necesarias y suficientes para que la digráfica de líneas tenga una partición de sus vértices en conjuntos semidominantes interiores fuertes y así podemos empezar a establecer cotas para el número semidomático interior fuerte de la digráfica de líneas.

Sin embargo, dicho número no se encuentra relacionado con el número semidomático interior fuerte de la digráfica original, es decir, si  $D$  es una digráfica arbitraria y  $L(D)$  es su digráfica de líneas, no necesariamente se satisface que  $d_{sf}^-(D) \leq d_{sf}^-(L(D))$  o que  $d_{sf}^-(L(D)) \leq d_{sc}^-(D)$ . El ejemplo de que la primera desigualdad no siempre es verdadera se exhibe en la *figura 6.2.4* en donde  $d_{sf}^-(D) = 2$ , pero por satisfacer el vértice  $b$  en  $L(D)$  las condiciones del *lema 4.1.5*, es decir,  $N^-(x) = \{b\}$  para todo  $x \in N^+(b)$ , se tiene que  $d_{sf}^-(L(D)) = 1$ . Con ello se muestra que en general no se satisface que  $d_{sf}^-(D) \leq d_{sf}^-(L(D))$ .

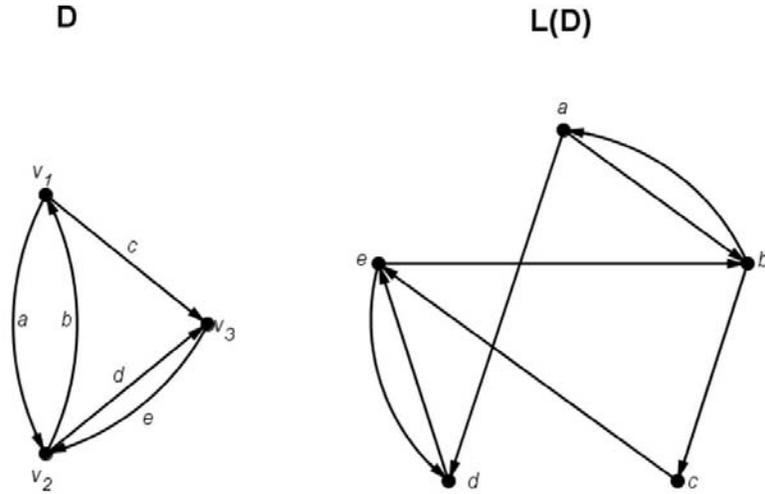


Fig. 6.2.4: Ejemplo de una digráfica  $D$  y su digráfica de líneas  $L(D)$  para la cual  $d_{sf}^-(L(D)) < d_{sf}^-(D)$ .

En la *figura 6.2.5* se ejemplifica el que la desigualdad  $d_{sf}^-(L(D)) \leq d_{sf}^-(D)$  tampoco es cierta en general, pues  $d_{sf}^-(D) = 1$ , ya que por no tener vértices absorbentes,  $d_{sf}^-(D) \leq \delta^+(D) = 2$ , pero no es posible exhibir una partición de  $V(D)$  con dos elementos en conjuntos semidominantes interiores fuertes, ya que de ser así, alguno de los elementos de la partición tiene tres vértices y por ser dicho elemento fuerte, debe de tratarse de una trayectoria simétrica de longitud tres, en cuyo caso, uno de sus vértices no es absorbido por el otro elemento de la partición, a saber el vértice intermedio de la trayectoria, por lo cual  $d_{sf}^-(D) = 1$ . Sin embargo, en su digráfica de líneas  $L(D)$  tenemos que  $\mathfrak{S} = \{ \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}, \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\} \}$  es una partición en conjuntos semidominantes interiores fuertes, concluyendo que  $2 \leq d_{sf}^-(L(D))$  y así  $d_{sf}^-(D) < d_{sf}^-(L(D))$ .

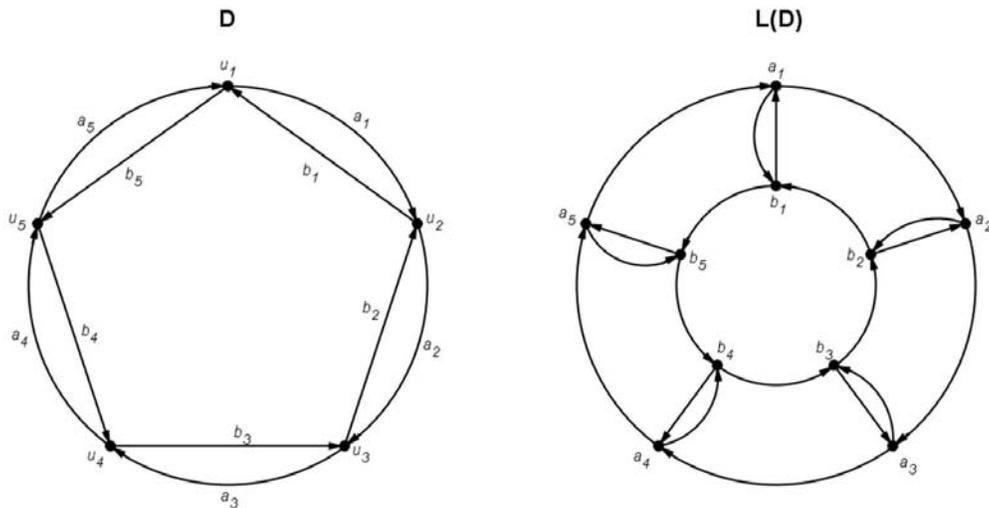


Fig. 6.2.5: Ejemplo de una digráfica  $D$  y su digráfica de líneas  $L(D)$  para la cual  $d_{sf}^-(D) < d_{sf}^-(L(D))$ .

Aunque en general no es posible relacionar el número semidomático interior fuerte de una digráfica y el número semidomático interior fuerte de su digráfica de líneas, sí es posible establecer una relación entre los conjuntos semidominantes interiores fuertes de la digráfica de líneas con algunos conjuntos de la digráfica original.

Notemos, por ejemplo, que en la digráfica de líneas mostrada en la *figura 6.2.6* el conjunto  $A = \{a_1, a_3, a_6, a_7, a_9\}$  es semidominante interior fuerte en  $L(D)$  y además este mismo conjunto visto como subconjunto de las flechas de  $D$ , induce un factor de  $D$  fuerte, es decir, la digráfica inducida por  $A$  en  $D$  es generadora y fuerte.

Análogamente, si tomamos un factor fuerte en  $D$ , el conjunto de flechas de dicho factor en  $L(D)$  es un conjunto semidominante interior fuerte, por ejemplo, el conjunto de flechas  $A' = \{a_2, a_3, a_4, a_5, a_7, a_8\}$  es tal que la digráfica inducida en  $D$  por dicho conjunto es generadora de  $D$  y además, es fuerte. Observemos que  $A'$ , visto como subconjunto de los vértices de  $L(D)$ , es un conjunto semidominante interior fuerte de  $L(D)$ .

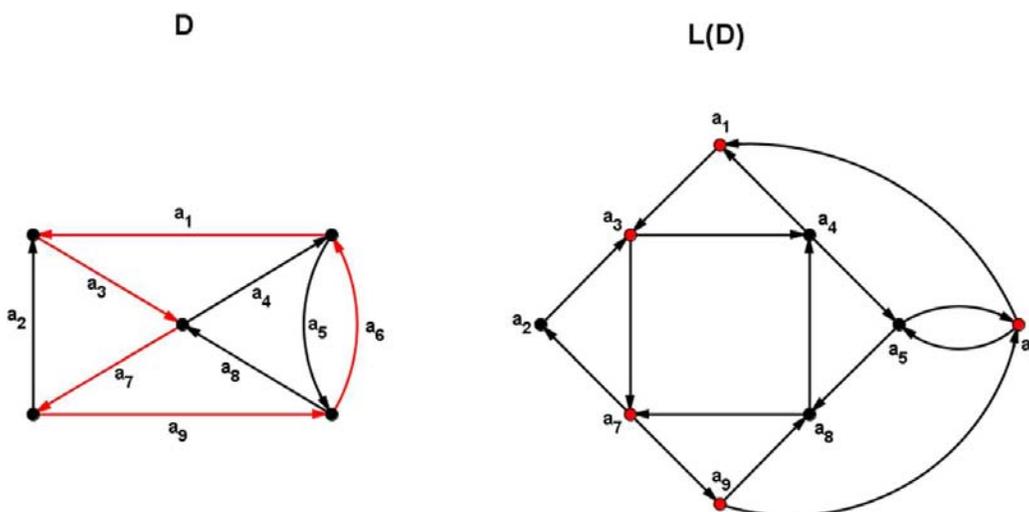


Fig. 6.2.6: Ejemplo de una digráfica  $D$  y su digráfica de líneas  $L(D)$  donde se muestra la relación entre un conjunto semidominante interior fuerte en  $L(D)$  y  $D$ .

Esta observación no únicamente es válida en el ejemplo antes mencionado, sino que puede ser demostrada en general. Para facilitar dicha demostración introduciremos una definición y algunos resultados previos que auxiliarán al desarrollo del enunciado.

**Definición 6.2.2** Sean  $D$  una digráfica fuerte no trivial y  $E \subseteq F(D)$ . Decimos que  $F$  es una **cubierta fuerte generadora** de  $D$  si la digráfica inducida por el conjunto de flechas  $E$  es un factor fuerte de  $D$ .

Definimos el **número de cubiertas fuertes generadoras** de  $D$ , denotado por  $\Lambda(D)$ , como el máximo de los cardinales de las particiones de  $F(D)$  en cubiertas fuertes generadoras, es decir:

$$\Lambda(D) = \text{máx}\{|\mathfrak{F}| \mid \mathfrak{F} \text{ es una partición de } F(D) \text{ en cubiertas fuertes generadoras}\}.$$

Si una partición  $P$  de  $F(D)$  en cubiertas fuertes generadoras tiene  $\Lambda(D)$  elementos, diremos que  $P$  es una  $\Lambda$ -partición de  $D$ .

Hay que notar que cualquier digráfica fuerte no trivial tiene una partición de sus flechas en cubiertas fuertes generadoras, a saber, la partición unitaria que consta del conjunto de flechas de la digráfica, por lo que cualquier digráfica fuerte no trivial tiene su número de cubiertas fuertes generadoras bien definido.

Cabe señalar que existen resultados referentes a estructuras similares a las cubiertas presentadas en la *definición 6.2.2*, algunos autores, como son Qun-Cuan Zang [26], Jorgen Bang-Jensen [2], [3], [4] Gregory Gutin [2], [3], [14], Jing Huang [3], Y. Manoussakis [21] y Anders Yeo [25] han trabajado en la búsqueda de factores hamiltonianos de una digráfica, ésto es un caso particular de las cubiertas fuertes generadoras pues las flechas de cualquier factor hamiltoniano de una digráfica es una cubierta fuerte generadora de la misma.

Más aún, los autores Nash y Williams [22], [23] han buscado factorizaciones de familias de digráficas regulares en ciclos hamiltonianos, lo que puede interpretarse como un caso particular de particiones de las flechas de la digráfica en cubiertas fuertes generadoras y con ello, particiones de los vértices de la digráfica de líneas en conjuntos semidominantes interiores fuertes.

Los siguientes lemas son referentes a propiedades de la digráfica de líneas, que serán de utilidad durante la demostración del *teorema 6.2.1* que establece la relación entre  $d_{sf}^-(L(D))$  y  $\Lambda(D)$ .

**Lema 6.2.5** Sean  $D$  una digráfica y  $L(D)$  su digráfica de líneas. Si  $A \subseteq F(D)$  es no vacío, entonces  $L(D)[A] = L(D[A])$ .

*Demostración.*

Sean  $D$  una digráfica,  $L(D)$  su digráfica de líneas,  $A \subseteq F(D)$  no vacío,  $K = L(D)[A]$  y  $H = L(D[A])$ . Notemos primero que la igualdad entre los vértices de  $K$  y  $H$  es verdadera pues  $V(K) = A$  y  $V(H) = F(D[A]) = A$ , por lo cual,  $V(K) = V(H)$ . Ahora sólo faltará ver la igualdad entre las flechas de  $K$  y  $H$ .

Si consideramos  $(a, b) \in F(H)$  tenemos, por definición de adyacencia en la digráfica de líneas, que el vértice final de  $a$  es el vértice inicial de  $b$ , en cuyo caso,  $(a, b) \in F(L(D))$ , ya que  $a$  y  $b$  son elementos de  $V(K)$  se sigue que  $(a, b) \in F(K)$ , concluyendo que  $F(H) \subseteq F(K)$ . Para demostrar la segunda contención de conjuntos, tenemos que si  $(a, b) \in F(K)$ , en particular  $(a, b) \in F(L(D))$  esto implica que el vértice final de  $a$  y el vértice inicial de  $b$  son los mismos, pero por ser  $a$  y  $b$  elementos

de  $A$  se sigue que  $a$  y  $b$  son flechas de  $D[A]$ , en tal caso, mostramos que  $(a, b) \in F(H)$  concluyendo que  $F(K) \subseteq F(H)$  exhibiendo la igualdad entre las flechas de ambas digráficas.

□

Con el lema anterior podemos relacionar a las cubiertas fuertes generadoras no triviales de una digráfica y los conjuntos semidominantes interiores fuertes de su digráfica de líneas:

**Proposición 6.2.4** *Sean  $D$  una digráfica fuerte,  $L(D)$  su digráfica de líneas y  $A \subseteq F(D)$  con al menos dos elementos.  $A$  es un conjunto semidominante interior fuerte de  $L(D)$  si y sólo si  $A$  es una cubierta fuerte generadora de  $D$ .*

*Demostración.*

Sean  $D$  una digráfica fuerte no trivial y  $L(D)$  su digráfica de líneas. Mostraremos primero la condición necesaria de la proposición.

Supongamos que  $A \subseteq F(D)$  es una cubierta fuerte generadora de  $D$  con al menos dos elementos. Dado que  $A \subseteq F(D)$ , en particular  $A \subseteq V(L(D))$ , por lo que sólo hace falta demostrar dos afirmaciones:

Afirmación 1.  $A$  es un conjunto semidominante interior de  $L(D)$ .

Sea  $a = (u, v) \in V(L(D)) \setminus A$  un vértice arbitrario. Debido a que  $D[A]$  es una digráfica generadora de  $D$ , se tiene que  $v \in V(D[A])$ , además, por ser  $D[A]$  fuerte no trivial, tenemos que existe  $b \in F(D[A]) = A$  tal que  $b$  es de la forma  $b = (v, x)$  con  $x \in V(D[A])$ , de ello se deduce, por definición de adyacencia en  $L(D)$ , que  $(a, b) \in F(L(D))$ , concluyendo que  $A$  es absorbente en  $L(D)$ .

Afirmación 2.  $A$  es un conjunto fuerte de  $L(D)$ .

Como  $D[A]$  es fuerte, por la *proposición 6.2.2* tenemos que  $L(D[A])$  es fuerte y por el *lema 6.2.5* tenemos que  $L(D)[A] = L(D[A])$  concluyendo que  $L(D)[A]$  es fuerte, es decir,  $A$  es un conjunto fuerte de  $L(D)$ .

De la *afirmación 1* y la *afirmación 2* demostramos que  $A$  es un conjunto semidominante interior fuerte de  $L(D)$ .

Ahora procederemos a demostrar la condición de suficiencia de la proposición.

Sea  $A \subseteq V(L(D))$  un conjunto semidominante interior fuerte de  $L(D)$ . Como  $A \subseteq V(L(D))$ , tenemos que  $A \subseteq F(D)$ , por lo que sólo restará demostrar dos afirmaciones:

Afirmación 3.  $D[A]$  es una digráfica generadora de  $D$ .

Bastará ver que para todo  $u \in V(D)$  existe una flecha en  $A$  tal que el vértice  $u$  es vértice inicial o final de dicha flecha. Como  $D$  es fuerte no trivial, existe  $a \in F(D)$  tal que  $u$  es vértice final de  $a$ , es decir,  $a = (x, u)$  para algún  $x \in V(D)$ . Si tenemos que  $a \in A$  hemos terminado lo que deseábamos demostrar. En caso contrario, si  $a \in F(D) \setminus A$ , por ser  $A$  un conjunto absorbente en  $L(D)$ , tenemos que existe  $b \in A$  tal

que  $(a, b) \in F(L(D))$ , pero por definición de adyacencia en  $L(D)$ , concluimos que el vértice inicial de  $b$  es el vértice final de  $a = (x, u)$  y así demostramos que  $D[A]$  es una digráfica generadora.

Afirmación 4.  $D[A]$  es fuerte.

Ya que  $A$  es un conjunto fuerte de  $L(D)$ , tenemos que  $L(D)[A]$  es fuerte y debido a la igualdad  $L(D)[A] = L(D[A])$ , demostrada en el *lema 6.2.5*, concluimos que  $L(D[A])$  es fuerte. Además, como  $A$  tiene al menos dos elementos,  $L(D[A])$  es no trivial y por la definición de  $D[A]$ , ningún vértice en  $D[A]$  es un vértice aislado, pues cualquier vértice en  $D[A]$  es vértice inicial o final de alguna flecha en  $A$ . De ello tenemos que  $D[A]$  y  $L(D[A])$  satisfacen las hipótesis de la *proposición 6.2.3*, siguiéndose así que  $D[A]$  es fuerte.

De la *afirmación 3* y la *afirmación 4* concluimos que  $A$  es una cubierta fuerte generadora de  $D$ .

□

**Lema 6.2.6** *Si  $D$  es una digráfica fuerte con al menos tres vértices, entonces  $L(D)$  no tiene vértices absorbentes.*

*Demostración.*

Sean  $D$  una digráfica fuerte con al menos tres vértices,  $L(D)$  su digráfica de líneas y  $a = (u, v) \in V(L(D))$  arbitrario, mostraremos que  $a$  no es absorbente en  $L(D)$ . Debido a que  $D$  tiene al menos tres vértices, existe  $w \in V(D) \setminus \{u, v\}$  y por ser  $D$  fuerte, existe una  $vw$ -trayectoria en  $D$ , digamos  $T = (v, x_1, x_2, \dots, x_n, w)$ . Analizaremos dos posibles casos sobre  $x_1$ .

Caso 1.  $x_1 \neq u$ .

En este caso, tenemos que el vértice final de  $b = (v, x_1)$  es distinto al vértice inicial de  $a$ , por lo que  $(b, a) \notin F(L(D))$  y con ello,  $a$  no absorbe a  $b$ .

Caso 2.  $x_1 = u$ .

Ya que  $T$  es una trayectoria,  $x_2 \neq v$ , con lo cual,  $(u, x_2) \neq (u, v)$ , además, como no existen lazos en  $D$ ,  $x_2 \neq u$ , por lo que el vértice final de  $(x_1, x_2)$  es distinto al vértice inicial de  $(u, v)$ , es decir,  $a = (u, v)$  no absorbe a  $(x_1, x_2)$  en  $L(D)$ .

Del *caso 1* y el *caso 2* mostramos que  $a$  no es un vértice absorbente en  $L(D)$  y gracias a que  $a$  fue arbitrario,  $L(D)$  no tiene vértices absorbentes.

□

A partir de los resultados anteriores podemos asegurar la igualdad entre el número de cubiertas fuertes generadoras de una digráfica y el número semidomático interior fuerte de su digráfica de líneas:

**Teorema 6.2.1** *Si  $D$  es una digráfica fuerte con al menos tres vértices, entonces  $d_{sf}^-(L(D)) = \Lambda(D)$ .*

Demostración.

Sean  $D$  una digráfica fuerte con al menos tres vértices,  $\Lambda(D)$  su número de cubiertas fuertes generadoras,  $d_{sf}^-(D)$  su número semidomático interior fuerte y  $L(D)$  su digráfica de líneas. Mostraremos primero que  $\Lambda(D) \leq d_{sf}^-(L(D))$ .

Sea  $\mathfrak{F} = \{F_1, F_2, \dots, F_\Lambda\}$  una  $\Lambda$ -partición de  $F(D)$ . Por ser  $\mathfrak{F}$  una partición de  $F(D)$ , en particular es una partición de los vértices de  $L(D)$ . Además, ya que los conjuntos  $F_i$  son cubiertas fuertes generadoras de  $D$ , cada elemento en  $\mathfrak{F}$  tiene al menos dos flechas; aplicando la *proposición 6.2.4*,  $F_i$  es un conjunto semidominante interior fuerte de  $L(D)$  para toda  $i \in \{1, 2, \dots, \Lambda\}$ , por lo que  $\mathfrak{F}$  es una partición de  $V(L(D))$  en conjuntos semidominantes interiores fuertes de  $L(D)$ , siguiéndose de ello el que  $|\mathfrak{F}| \leq d_{sf}^-(L(D))$ , es decir,  $\Lambda(D) \leq d_{sf}^-(L(D))$ .

Para demostrar la segunda desigualdad, consideremos a  $\mathfrak{S} = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$  una  $d_{sf}^-$ -partición de  $V(L(D))$ . Gracias a que  $\mathfrak{S}$  es una partición de los vértices de  $L(D)$ , en particular  $\mathfrak{S}$  es una partición de  $F(D)$ . Por otro lado, al no tener  $L(D)$  vértices absorbentes, como lo establece el *lema 6.2.6*, cada conjunto  $S_i$  es un conjunto semidominante interior fuerte con al menos dos elementos, por lo que  $S_i$  es una cubierta fuerte generadora de  $D$  para todo  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ , como lo enuncia la *proposición 6.2.4*. Por lo anterior,  $\mathfrak{S}$  es una partición en cubiertas fuertes generadoras de  $D$ , en cuyo caso  $|\mathfrak{S}| \leq \Lambda(D)$ , es decir,  $d_{sf}^-(L(D)) \leq \Lambda(D)$  y con ello demostramos la igualdad deseada:  $d_{sf}^-(L(D)) = \Lambda(D)$ .

□

A partir de la proposición anterior podemos calcular el número semidomático interior fuerte de la digráfica de líneas de algunas familias de digráficas.

**Corolario 6.2.1** *Si  $D$  es un ciclo simétrico con al menos tres vértices, entonces:*

$$d_{sf}^-(L(D)) = 2.$$

Demostración.

Sea  $D$  un ciclo simétrico de la forma  $C = (x_1, x_2, \dots, x_k, x_1)$ . Denotamos a las flechas  $a_i = (x_i, x_{i+1})$  para toda  $i \in \{1, 2, \dots, k-1\}$  y  $a_k = (x_k, x_1)$ . Análogamente, denotamos  $b_i = (x_{i+1}, x_i)$  para toda  $i \in \{1, 2, \dots, k-1\}$  y  $b_k = (x_1, x_k)$ . Los conjuntos  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$  y  $B = \{b_1, b_2, \dots, b_k\}$  son los elementos de una partición de  $F(D)$  tal que  $D[A]$  y  $D[B]$  son ciclos generadores de  $D$ , por lo que  $2 \leq \Lambda(D)$  y por el *teorema 6.2.1* concluimos que  $2 \leq d_{sf}^-(L(D))$ . Por último, como  $D$  tiene al menos

tres vértices, entonces  $L(D)$  no tiene vértices absorbentes y por la *proposición 4.1.3*,  $d_{sf}^-(L(D)) \leq \delta^+(L(D)) = 2$ , concluyendo que  $d_{sf}^-(L(D)) = 2$ .

□

**Corolario 6.2.2** *Sea  $n \in \mathbb{N}$ , si  $n$  es mayor o igual a uno, entonces:*

$$d_{sf}^-(L(K_{2n+1})) = 2n.$$

*Demostración.*

Sean  $n \in \mathbb{N}$  con  $n \geq 1$ ,  $D \cong K_{2n+1}$  y  $L(D)$  su digráfica de líneas. Si consideramos la gráfica subyacente de  $D$ , ésta es la gráfica completa con  $2n + 1$  vértices la cual es factorizable en  $n$  ciclos hamiltonianos, como lo establece el *teorema 1.1.5* digamos  $C_1, C_2, \dots, C_n$ . Cada uno de estos ciclos es el representante de un ciclo generador simétrico en  $D$ , de ello tenemos que por cada ciclo  $C_i = (x_1, x_2, \dots, x_{2k+1}, x_1)$  en  $G$  existen dos ciclos dirigidos  $\vec{C}_i = (x_1, x_2, \dots, x_{2k+1}, x_1)$  y  $\overleftarrow{C}_i = (x_{2n+1}, x_{2n}, x_{2n-1}, \dots, x_1, x_{2n+1})$  en  $D$ , en tal caso, si  $\vec{A}_i = F(\vec{C}_i)$  y  $\overleftarrow{A}_i = F(\overleftarrow{C}_i)$ , tenemos que la colección  $\mathfrak{F} = \{\vec{A}_i \mid i \in \{1, 2, \dots, n\}\} \cup \{\overleftarrow{A}_i \mid i \in \{1, 2, \dots, n\}\}$  es una partición de  $F(D)$  en conjuntos tales que  $D[\vec{A}_i]$  y  $D[\overleftarrow{A}_i]$  son digráficas generadoras fuertes de  $D$ , por lo cual,  $2n \leq \Lambda(D)$ .

Por otro lado, como  $D$  es fuerte con al menos tres vértices, tenemos que  $L(D)$  no tiene vértices absorbentes y por la *proposición 4.1.3* concluimos que  $d_{sf}^-(L(D)) \leq \delta^+(L(D)) = 2n$ . Para terminar, la igualdad del *teorema 6.2.1* establece que  $2n \leq \Lambda(D) = d_{sf}^-(H) \leq 2n$ , por lo cual  $d_{sf}^-(L(D)) = 2n$ .

□

### 6.3. Número Semidomático Interior Fuerte en las Digráficas Subdivisión, $R(D)$ , Media y Total.

En esta sección se buscará acotar el número semidomático interior fuerte de algunas digráfica asociadas a una digráfica dada. La primera digráfica asociada que utilizaremos será la digráfica subdivisión.

**Definición 6.3.1** *Sea  $D = (V(D), F(D))$  una digráfica, definimos la digráfica subdivisión de  $D$  como la digráfica  $S(D)$  donde  $V(S(D)) = V(D) \cup F(D)$  y el conjunto de flechas de  $S(D)$  está determinado por la vecindad de sus vértices:*

- 1) Si  $x \in V(D)$ , entonces  $N_{S(D)}^+(x) = \{(u, v) \in F(D) \mid u = x\}$ .
- 2) Si  $a = (x, u) \in F(D)$ , entonces  $N_{S(D)}^+(a) = \{u\}$ .

La idea intuitiva de la construcción de la digráfica subdivisión es sencilla, por cada flecha en  $D$ , digamos  $(u, v)$ , existirá en  $S(D)$  un nuevo vértice  $x$  representante de esa flecha y la adyacencia estará dada por  $(u, x)$  y  $(x, v)$ , es decir, la flecha  $(u, v)$  se convertirá en una trayectoria de longitud dos en  $S(D)$ :  $(u, x, v)$ . En el siguiente ejemplo se muestra una digráfica junto con su digráfica subdivisión.

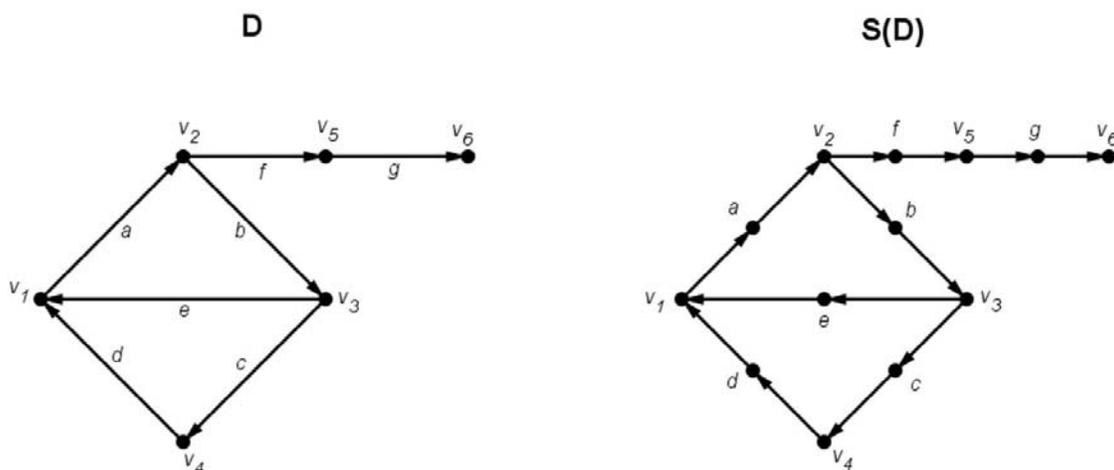


Fig. 6.3.1: Ejemplo de una digráfica  $D$  y su digráfica subdivisión  $S(D)$ .

La proposición enunciada a continuación busca condiciones para que la digráfica subdivisión sea fuerte, esto con la intención de asegurar la existencia de una partición de sus vértices en conjuntos semidominantes interiores fuertes y así comenzar el desarrollo de nuestra teoría. Debido a que las digráficas asociadas que definiremos posteriormente tienen como subdigráfica generadora a la digráfica subdivisión, la *proposición 6.3.1* auxiliará a mostrar la conexidad fuerte de las digráficas  $R(D)$ , media y total.

**Proposición 6.3.1** *Sea  $D$  una digráfica arbitraria.  $D$  es fuerte si y sólo si  $S(D)$  es fuerte.*

Demostración.

Probaremos primero la condición de suficiencia de la proposición.

Sean  $D$  una digráfica fuerte y  $\{u, v\} \subseteq V(S(D))$  vértices arbitrarios. Consideremos los únicos tres posibles casos sobre  $u$  y  $v$ .

Caso 1.  $\{u, v\} \subseteq V(D)$ .

En este caso, como  $D$  es fuerte, existe un  $uv$ -camino en  $D$ , digamos

$$C = (u = x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = v).$$

Si definimos  $a_i = (x_i, x_{i+1})$  para toda  $i \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ , por definición de adyacencia en  $S(D)$ , la sucesión de vértices

$$C' = (u = x_0, a_0, x_1, a_1, \dots, x_{n-1}, a_{n-1}, x_n = v)$$

es un  $uv$ -camino en  $S(D)$ .

Caso 2.  $u \in V(D)$  y  $v \in F(D)$ .

Ya que  $v$  es un elemento de  $F(D)$  supongamos sin pérdida de generalidad que  $x$  es el vértice inicial de  $v$ , por el caso anterior existe un  $ux$ -camino en  $S(D)$ , digamos  $C'$ , por lo cual,  $C' \cup (x, v)$  es un  $uv$ -camino en  $S(D)$ . Análogamente, si  $z$  es el vértice final de  $v$ , por el caso anterior, existe un  $zu$ -camino en  $S(D)$ , digamos  $C''$ , por lo que  $(v, z) \cup C''$  es un  $vu$ -camino en  $S(D)$ .

Caso 3.  $\{u, v\} \subseteq F(D)$ .

En este último caso consideramos al vértice final de  $u$  y el vértice inicial de  $v$ , digamos  $w$  y  $z$  respectivamente. Por el *caso 1* de esta misma demostración tenemos que existe un  $wz$ -camino en  $S(D)$ , digamos  $C'$ , por lo que  $C = (u, w) \cup C' \cup (z, v)$  es un  $uv$ -camino en  $S(D)$ .

De los *casos 1, 2 y 3* demostramos la condición de suficiencia de la proposición.

Ahora demostraremos la condición necesaria del enunciado.

Sean  $D$  una digráfica y  $\{u, v\} \subseteq V(D)$ , supongamos que la digráfica subdivisión de  $D$  es fuerte.

Como  $S(D)$  es una digráfica fuerte, existe un  $uv$ -camino en  $S(D)$ , digamos  $C' = (u = x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n = v)$ . Debido a que  $u \in V(D)$  y por definición de adyacencia en  $S(D)$ , se tiene que  $x_1$  es una flecha de  $D$  cuyo vértice inicial es  $u = x_0$  y vértice final es  $x_2$ , más aún, si  $i \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$  es impar, entonces  $x_i = (x_{i-1}, x_{i+1}) \in F(D)$ , así,  $C = (u = x_0, x_2, x_4, \dots, x_{n-2}, x_n = v)$  es un  $uv$ -camino en  $D$ , demostrando que  $D$  es fuerte. □

La proposición anterior establece que basta que la digráfica original sea fuerte para que su digráfica subdivisión también lo sea. Ahora procederemos a acotar el número semidomático interior fuerte de la digráfica subdivisión:

**Lema 6.3.1** *Si  $D$  es una digráfica fuerte, entonces  $d_{sf}^-(S(D)) = 1$ .*

*Demostración.*

Sea  $D$  una digráfica fuerte. En caso que  $D$  sea la digráfica trivial el enunciado se satisface, pues su digráfica subdivisión también es la digráfica trivial, por lo que consideraremos ahora digráficas no triviales. Mostraremos primero que  $S(D)$  no tiene vértices absorbentes y con ayuda de *proposición 4.1.3* la demostración estará concluida. Sea  $x \in V(S(D))$  un vértice arbitrario. Consideremos dos casos posibles sobre  $x$ .

Caso 1.  $x \in F(D)$ .

Como  $D$  es una digráfica fuerte no trivial, existe al menos otra flecha  $a \in F(D)$  distinta de  $x$ . Ya que no se tiene definida adyacencia entre flechas en  $S(D)$ ,  $x$  no absorbe a  $a$ .

Caso 2.  $x \in V(D)$ .

Como  $D$  es fuerte no trivial, existe  $w \in V(D)$  tal que  $a = (x, w) \in F(D)$ , por definición de adyacencia en  $S(D)$  el único exvecino de  $a$  en  $S(D)$  es  $w$ , por lo cual  $x$  no absorbe a  $a$ .

Del *caso 1* y el *caso 2* concluimos que  $S(D)$  no tiene vértices absorbentes y por la *proposición 4.1.3* se sigue que  $d_{sf}^-(S(D)) \leq \delta^+(S(D))$ , pero como  $\delta_{S(D)}^+(a) = 1$  para toda flecha de  $D$ , entonces  $\delta^+(S(D)) = 1$  y con ello demostramos que  $d_{sf}^-(S(D)) = 1$ .

□

**Definición 6.3.2** Sea  $D = (V(D), F(D))$  una digráfica, definimos la digráfica  $R(D)$  como la digráfica tal que  $V(R(D)) = V(D) \cup F(D)$  y el conjunto de flechas de  $R(D)$  está determinado por la exvecindad de sus vértices de la siguiente manera:

- 1) Si  $x \in V(D)$ , entonces  $N_{R(D)}^+(x) = \{(u, v) \in F(D) \mid u = x\} \cup N_D^+(x)$ .
- 2) Si  $a = (x, u) \in F(D)$ , entonces  $N_{R(D)}^+(a) = \{u\}$ .

Al igual que en la digráfica subdivisión, la idea intuitiva de la construcción de esta digráfica facilitará su interpretación general. Nótese que si  $D$  es una digráfica arbitraria, los vértices de  $S(D)$  y  $R(D)$  son los mismos y además,  $F(S(D)) \subseteq F(R(D))$ , difiriendo estos conjuntos al tener  $R(D)$  las flechas originales de  $D$  como elementos de sus flechas y no únicamente como vértices. En la *figura 6.3.2* se exhibe una digráfica  $D$  y  $R(D)$ , dicha digráfica es la misma utilizada en la *figura 6.3.1*.

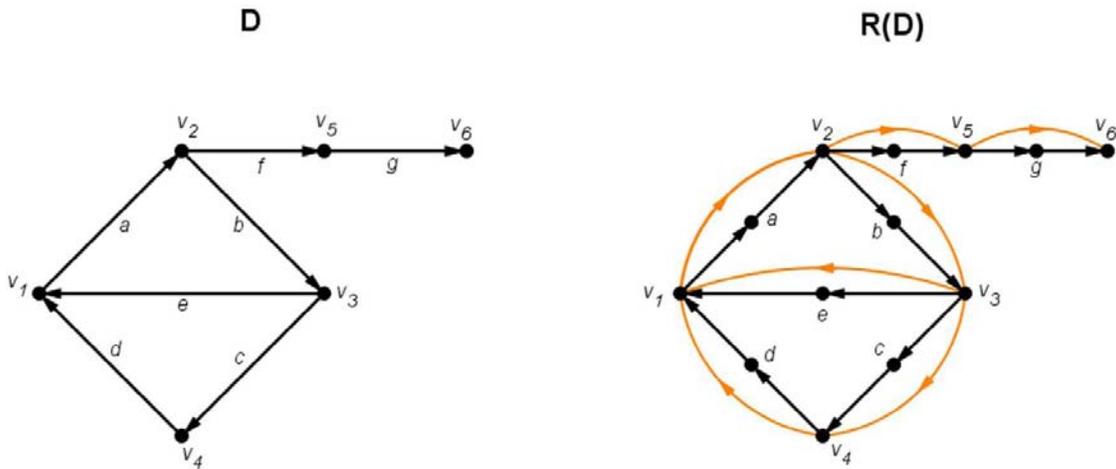


Fig. 6.3.2: Ejemplo de una digráfica  $D$  y  $R(D)$ .

Observemos que si  $D$  es fuerte entonces  $S(D)$  lo es, como lo establece la *proposición 6.3.1* y por ser  $S(D)$  subdigráfica generadora de  $R(D)$ , entonces  $R(D)$  es fuerte, por lo que basta que la digráfica  $D$  sea fuerte para que  $R(D)$  tenga una partición de sus vértices en conjuntos semidominantes interiores fuertes, sin embargo, al igual que en  $S(D)$ , únicamente la partición trivial es una  $\mathbf{d}_{sf}^-$ -partición de  $V(R(D))$ , como se mostrará a continuación.

**Lema 6.3.2** *Si  $D$  es una digráfica fuerte, entonces  $\mathbf{d}_{sf}^-(R(D)) = 1$ .*

*Demostración.*

Sea  $D$  una digráfica fuerte. Para el caso en que  $D$  es la digráfica trivial, el enunciado se satisface, pues  $R(D)$  es la digráfica trivial, por lo que consideraremos ahora digráficas no triviales. Demostraremos primero que  $R(D)$  no tiene vértices absorbentes y por la *proposición 4.1.3* la demostración estará concluida. Sea  $x \in V(R(D))$  un vértice arbitrario. Consideremos dos casos posibles sobre  $x$ .

Caso 1.  $x \in F(D)$ .

Como  $D$  es una digráfica fuerte no trivial, existe al menos otra flecha  $a \in F(D)$  distinta de  $x$ , ya que no se tiene definida adyacencia entre flechas en  $R(D)$ ,  $x$  no absorbe a  $a$  en  $R(D)$ .

Caso 2.  $x \in V(D)$ .

Como  $D$  es fuerte no trivial, existe  $w \in V(D)$  tal que  $a = (x, w) \in F(D)$ , por definición de adyacencia en  $R(D)$ ,  $N_{R(D)}^+(a) = \{w\}$ , por lo cual  $x$  no absorbe a  $a$ .

Del *caso 1* y *caso 2* concluimos que  $R(D)$  no tiene vértices absorbentes y por la *proposición 4.1.3* se sigue que  $\mathbf{d}_{sf}^-(R(D)) \leq \delta^+(R(D))$ , pero como  $\delta_{R(D)}^+(a) = 1$  para toda flecha de  $D$ , entonces  $\delta^+(R(D)) = 1$  y con ello demostramos que  $\mathbf{d}_{sf}^-(R(D)) = 1$ .

□

Aunque las últimas dos digráficas asociadas resultaron tener únicamente a la partición trivial como una  $\mathbf{d}_{sf}^-$ -partición, la digráfica media, definida a continuación y denotada por  $Q(D)$ , no necesariamente tienen a la partición trivial de sus vértices como la única partición en conjuntos semidominantes interiores fuertes.

**Definición 6.3.3** *Sea  $D = (V(D), F(D))$  una digráfica, definimos la digráfica media de  $D$  como la digráfica  $Q(D)$  donde  $V(Q(D)) = V(D) \cup F(D)$  y el conjunto de flechas de  $Q(D)$  está determinado por la xvecindad de sus vértices de la siguiente manera:*

- 1) Si  $x \in V(D)$ , entonces  $N_{Q(D)}^+(x) = \{(u, v) \in F(D) \mid u = x\}$ .
- 2) Si  $a = (x, u) \in F(D)$ , entonces  $N_{Q(D)}^+(a) = \{u\} \cup \{(u, y) \in F(D) \mid y \in V(D)\}$ .

Notemos que si  $D$  es una digráfica arbitraria, entonces  $V(S(D)) = V(Q(D))$  y además  $F(S(D)) \subseteq F(Q(D))$ , pero además,  $F(L(D)) \subseteq F(Q(D))$ , es decir, la digráfica media puede ser vista agregando las flechas de la digráfica de líneas a la digráfica subdivisión, por lo que tanto la digráfica subdivisión como la digráfica de líneas son subdigráficas de  $Q(D)$ , pero sólo la primera es una subdigráfica generadora. En la siguiente imagen se muestra nuevamente a la digráfica  $D$  exhibida en la *figura 6.3.1* junto con su digráfica media.

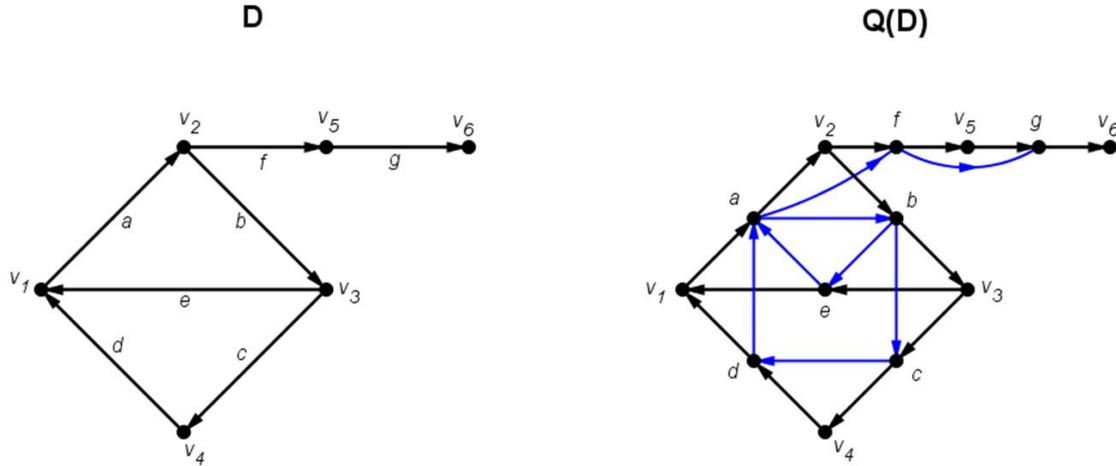


Fig. 6.3.3: Ejemplo de una digráfica  $D$  y su digráfica media  $Q(D)$ .

Con los resultados obtenidos en la digráfica de líneas será posible inducir una partición en conjuntos semidominantes interiores fuertes de los vértices de la digráfica media a partir de las particiones exhibidas en la *proposición 6.2.4*.

**Proposición 6.3.2** *Si  $D$  es una digráfica fuerte con al menos tres vértices y  $Q(D)$  su digráfica media, entonces:*

$$d_{sf}^-(L(D)) \leq d_{sf}^-(Q(D)).$$

*Demostración.*

Sean  $D$  una digráfica fuerte con al menos tres vértices,  $L(D)$  y  $Q(D)$  la digráfica de líneas y la digráfica media de  $D$  respectivamente y  $\mathfrak{U} = \{U_1, U_2, \dots, U_k\}$  una  $d_{sf}^-$ -partición de  $L(D)$ . Afirmamos que si  $S_1 = V(D) \cup U_1$  y  $S_i = U_i$  para toda  $i \in \{2, 3, \dots, k\}$ , entonces  $\mathfrak{S} = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$  es una partición de  $V(Q(D))$  en conjuntos semidominantes interiores fuertes. Para ello, mostraremos las siguientes afirmaciones:

- Afirmación 1.  $\mathfrak{S}$  es una partición de  $V(Q(D))$ .

Como  $\mathfrak{U}$  es una partición de  $V(L(D))$  y  $S_i \subseteq U_i$  para toda  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ , los conjuntos  $S_i$  son no vacíos.

Si tomamos dos elementos distintos  $S_i$  y  $S_j$  tenemos que  $S_i \cap S_j = \emptyset$ , pues si  $1 \notin \{i, j\}$  se sigue que  $S_i = U_i$  y  $S_j = U_j$ , mismos que son ajenos por pertenecer a  $\mathfrak{U}$  y si  $i = 1$ , entonces  $S_1 \cap S_j = (U_1 \cup V(D)) \cap U_j = \emptyset$ , concluyendo que los elementos de  $\mathfrak{S}$  son ajenos dos a dos.

Por último, notemos que

$$\begin{aligned} \bigcup_{i=1}^k S_i &= \left( \bigcup_{i=2}^k S_i \right) \cup S_1 = \left( \bigcup_{i=2}^k U_i \right) \cup (U_1 \cup V(D)) = \\ &= \left( \bigcup_{i=1}^k U_i \right) \cup V(D) = F(D) \cup V(D) = V(Q(D)). \end{aligned}$$

Por todo lo anterior,  $\mathfrak{S}$  es una partición de  $V(Q(D))$ .

- Afirmación 2. Todo elemento de  $\mathfrak{S}$  es un conjunto semidominante interior de  $Q(D)$ .

Sea  $S_i \in \mathfrak{S}$  un elemento arbitrario y  $x \in V(Q(D)) \setminus S_i$ , consideremos dos casos posibles para  $S_i$ :

Caso 2.1  $S_i = S_1$ .

En este caso, como  $x \notin S_1$ , en particular  $x \notin V(D)$ , por lo que  $x \in F(D)$ , es decir,  $x$  es un vértice de  $L(D)$ . Ya que  $U_1$  es un conjunto semidominante interior de  $L(D)$  y  $x \notin U_1$ , pues  $U_1 \subseteq S_1$ , entonces existe  $u \in U_1$  tal que  $(x, u) \in F(L(D))$ , sin embargo, por definición de adyacencia en  $Q(D)$  tenemos que  $(x, u) \in F(Q(D))$ , por lo que  $S_1$  es un conjunto absorbente de  $Q(D)$ .

Caso 2.2  $S_i \neq S_1$ .

Al igual que en el caso anterior, si  $x \in F(D)$  por ser  $S_i = U_i$  un conjunto semidominante interior de  $L(D)$  existe  $u \in U_i$  tal que  $(x, u) \in F(L(D))$ , por definición de adyacencia en  $Q(D)$ ,  $(x, u) \in F(Q(D))$ .

En caso de que  $x \in V(D)$ , por ser  $S_i = U_i$  un conjunto semidominante interior fuerte de  $L(D)$ , en particular es una cubierta fuerte generadora de  $D$ , como lo establece la *proposición 6.2.4*, por lo que existe  $a \in U_i$  tal que  $a = (x, z)$  para algún  $z \in V(D)$ ; por definición de adyacencia en  $Q(D)$ ,  $(x, a) \in F(Q(D))$ , concluyendo que  $S_i$  es un conjunto absorbente de  $Q(D)$ .

Del *caso 2.1* y el *caso 2.2* mostramos que  $S_i$  es absorbente en  $Q(D)$  para todo  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ .

- Afirmación 3. Todo elemento de  $\mathfrak{S}$  es un conjunto fuerte de  $Q(D)$ .

Sea  $S_i \in \mathfrak{S}$  un elemento arbitrario. Si  $S_i \neq S_1$ , por ser  $S_i = U_i$  un conjunto fuerte de  $L(D)$ , en particular es un conjunto fuerte de  $Q(D)$ , pues  $L(D)$  es una subdigráfica de  $Q(D)$ . Ahora sólo hace falta demostrar que  $S_1$  es un conjunto fuerte de  $Q(D)$ . Sean  $\{x, z\} \subseteq S_1$  dos elementos arbitrarios, consideremos los tres posibles casos sobre  $x$  y  $z$ :

Caso 3.1.  $\{x, z\} \in F(D)$ .

En este caso,  $\{x, z\} \subseteq U_1$  y por ser  $U_1$  un conjunto fuerte de  $L(D)$ , existe un  $xz$ -camino en  $U_1$ , mismo que se encuentra en  $S_1$ .

Caso 3.2.  $x \in F(D)$  y  $z \in V(D)$ .

Por la *proposición 6.2.4*,  $U_1$  es una cubierta fuerte generadora de  $D$  por lo que existen  $\{a, b\} \subseteq U_1$  tales que  $a = (v, z)$  y  $b = (z, u)$  para algún  $v \in V(D)$  y algún  $u \in V(D)$ , en cuyo caso, por definición de adyacencia en la digráfica media se tiene que  $\{(a, z), (z, b)\} \subseteq F(Q(D))$ . Por el *caso 3.1* existe un  $xa$ -camino en  $U_1$ , digamos  $C'_1$  y existe un  $bx$ -camino en  $U_1$ , digamos  $C'_2$ , siguiéndose así que  $C_1 = C'_1 \cup (a, z)$  y  $C_2 = (z, b) \cup C'_2$  sean un  $xz$ -camino y un  $zx$ -camino respectivamente, ambos contenidos en  $S_1$ .

Caso 3.3.  $\{x, z\} \subseteq V(D)$ .

Consideremos, para este caso, una flecha arbitraria  $a$  en  $U_1$ , por el *caso 3.2* existe un  $xa$ -camino contenido en  $S_1$ , digamos  $C_1$ , y existe un  $az$ -camino contenido en  $S_1$ , digamos  $C_2$ . De ello deducimos el que  $C = C_1 \cup C_2$  sea un  $xz$ -camino contenido en  $S_1$ .

De los *casos 3.1, 3.2 y 3.3* se demuestra que  $S_1$  es un conjunto fuerte, por lo que  $\mathfrak{S}$  es una colección de conjuntos fuertes de  $Q(D)$ .

De las *afirmaciones 1, 2 y 3*,  $\mathfrak{S}$  es una partición de  $V(Q(D))$  en conjuntos semidominantes interiores fuertes, por lo que  $|\mathfrak{S}| \leq d_{sf}^-(Q(D))$ , pero como  $|\mathfrak{S}| = d_{sf}^-(L(D))$ , entonces  $d_{sf}^-(L(D)) \leq d_{sf}^-(Q(D))$ .

□

La última digráfica asociada que estudiaremos será la digráfica total. En ésta se engloban las definiciones antes establecidas, es decir, las digráficas asociadas estudiadas en este capítulo son subdigráficas de la digráfica total.

**Definición 6.3.4** Sea  $D = (V(D), F(D))$  una digráfica, definimos la digráfica total de  $D$  como la digráfica  $T(D)$  donde  $V(T(D)) = V(D) \cup F(D)$  y el conjunto de flechas de  $T(D)$  está determinado por la exvecindad de sus vértices de la siguiente manera:

- 1) Si  $x \in V(D)$ , entonces  $N_{T(D)}^+(x) = \{(u, v) \in F(D) \mid x = u\} \cup N_D^+(x)$ .
- 2) Si  $a = (x, u) \in F(D)$ , entonces  $N_{T(D)}^+(a) = \{u\} \cup \{(u, y) \in F(D) \mid y \in V(D)\}$ .

Notemos que si  $D$  es una digráfica arbitraria,  $S(D)$  y  $Q(D)$  son subdigráficas generadoras de la digráfica total. A partir de esto, es suficiente que la digráfica  $D$  sea fuerte para que  $T(D)$  también lo sea. Además, las digráficas  $D$  y  $L(D)$  también son subdigráficas de  $T(D)$ . En el siguiente ejemplo se muestra nuevamente a la digráfica de la *figura 6.3.1* junto con su digráfica total.

Ya que la digráfica media de  $D$  es una subdigráfica generadora de  $T(D)$ , si  $D$  es fuerte, entonces se satisface que  $d_{sf}^-(Q(D)) \leq d_{sf}^-(T(D))$  y si  $D$  tiene al menos tres vértices, por la *proposición 6.3.2* concluimos que  $d_{sf}^-(L(D)) \leq d_{sf}^-(T(D))$ . En la siguiente proposición se muestra que esta última desigualdad es estricta.

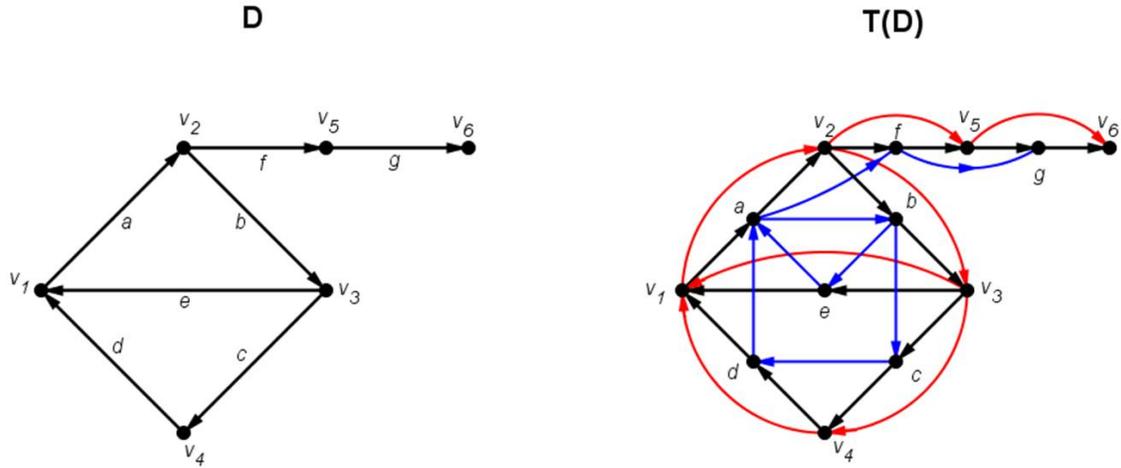


Fig. 6.3.4: Ejemplo de una digráfica  $D$  y su digráfica total  $T(D)$ .

**Proposición 6.3.3** *Sea  $D$  una digráfica fuerte con al menos tres vértices. Si  $T(D)$  es su digráfica total, entonces:*

$$d_{sf}^-(L(D)) + 1 \leq d_{sf}^-(T(D)).$$

*Demostración.*

Sean  $D$  una digráfica fuerte con al menos tres vértices,  $T(D)$  y  $L(D)$  su digráfica total y su digráfica de líneas respectivamente y  $\mathfrak{S}' = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$  una  $d_{sc}^-$ -partición de  $L(D)$ . Afirmamos que  $\mathfrak{S} = \{V(D), S_1, S_2, \dots, S_k\}$  es una partición de  $V(T(D))$  en conjuntos semidominantes interiores fuertes, para ello demostraremos las siguientes afirmaciones:

Afirmación 1.  $\mathfrak{S}$  es una partición de  $V(T(D))$ .

Dado que los conjuntos  $S_i$  son no vacíos para toda  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$  por ser elementos de una partición, entonces todo conjunto en  $\mathfrak{S}$  es no vacío.

Los elementos de  $\mathfrak{S}$  son ajenos dos a dos, pues  $V(D) \cap S_i = \emptyset$  para toda  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$  pues los elementos de  $S_i$  son flechas de  $D$  y  $S_i \cap S_j = \emptyset$  para toda  $\{i, j\} \subseteq \{1, 2, \dots, k\}$  por ser  $\mathfrak{S}'$  una partición.

Por último, tenemos que:

$$\bigcup \mathfrak{S} = \left( \bigcup_{i=1}^k S_i \right) \cup V(D) = V(L(D)) \cup V(D) = F(D) \cup V(D) = V(T(D)).$$

Con lo anterior, podemos concluir que  $\mathfrak{S}$  es una partición de  $V(T(D))$ .

Afirmación 2. Todo elemento de  $\mathfrak{S}$  es un conjunto fuerte de  $T(D)$ .

Como todo elemento de  $\mathfrak{S}'$  es un conjunto fuerte de  $L(D)$  y  $L(D)$  es subdigráfica de  $T(D)$ , entonces todo elemento de  $\mathfrak{S}'$  es un conjunto fuerte de  $T(D)$ . Análogamente,

$V(D)$  es un conjunto fuerte de  $T(D)$  pues  $D$  es fuerte y es subdigráfica de  $T(D)$ .

Afirmación 3. Todo elemento de  $\mathfrak{S}$  es un conjunto semidominante interior de  $T(D)$ .

Mostraremos primero que  $V(D)$  es un conjunto absorbente en  $T(D)$ .

Sea  $x \in V(T(D)) \setminus V(D)$ , por construcción de  $T(D)$ ,  $x$  es una flecha de  $D$ , digamos  $x = (u, v)$ , en tal caso, por definición de adyacencia en la digráfica total concluimos que  $(x, v) \in F(T(D))$  con  $v \in V(D)$ , demostrando así que  $V(D)$  es un conjunto absorbente de  $T(D)$ .

Consideramos ahora un elemento  $S_i$  de  $\mathfrak{S}'$  y  $x \in V(T(D)) \setminus S_i$ , tenemos dos posibilidades para  $x$ :

Caso 1.  $x \in F(D)$ .

En este caso, por ser  $S_i$  un conjunto absorbente en  $L(D)$ , existe  $a \in S_i$  tal que  $(x, a) \in F(L(D))$ , pero ya que la digráfica de líneas es una subdigráfica de la digráfica total, entonces  $(x, a) \in F(T(D))$ .

Caso 2.  $x \in V(D)$ .

Por la *proposición 6.2.4*,  $S_i$  es una cubierta fuerte generadora de  $D$ , por lo cual, existe  $a \in S_i$  tal que  $a = (x, z) \in F(D)$  para algún  $z \in V(D)$ , sin embargo, por la definición de adyacencia en  $T(D)$ , tenemos que  $(x, a) \in F(T(D))$ .

Con lo anterior,  $S_i$  es un conjunto absorbente para toda  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ , siguiéndose de ésto que todo elemento de  $\mathfrak{S}$  sea un conjunto semidominante interior de  $T(D)$ .

Gracias a las *afirmaciones 1, 2 y 3* se demuestra que  $\mathfrak{S}$  es una partición de  $V(T(D))$  en conjuntos semidominantes interiores fuertes, por lo que  $|\mathfrak{S}| \leq d_{sf}^-(T(D))$ , concluyendo que  $d_{sf}^-(L(D)) + 1 \leq d_{sf}^-(T(D))$ .

□

## Conclusiones.

Cozzens y Kelleher estudiaron el concepto de clan dominante en [12], en este trabajo mostramos una extensión de este concepto en digráficas: los conjuntos absorbentes semicompletos. Aunque existen diversos resultados referentes a clanes dominantes en la literatura, no es así con sus homólogos en digráficas. Nosotros exhibimos algunos resultados que conciernen a los conjuntos absorbentes semicompletos, por ejemplo, vimos que es condición necesaria que la digráfica tenga una sola componente fuerte terminal para la existencia de un conjunto absorbente semicompleto, reduciendo así a la familia de digráficas que tienen esta clase de conjuntos.

A partir de la idea de número de dominación por clanes en gráficas, definimos el número superior y el número inferior de absorbencia por conjuntos semicompletos de una digráfica. Gracias a estos dos números pudimos ofrecer algunas cotas respecto al número de vértices de la digráfica, también probamos que los torneos son las únicas digráficas que alcanzan la cota que relaciona al número superior de absorbencia por conjuntos semicompletos y el número de flechas de la digráfica.

Con estos mismos conceptos abordamos el producto y la composición de digráficas. Se demostró que, en general, el número superior de absorbencia por conjuntos semicompletos del producto de digráficas siempre es igual al número de vértices de una de las digráficas involucradas en el producto y este mismo resultado es válido para el número inferior de absorbencia por conjuntos semicompletos, lo cual es una primera aproximación al estudio de estos números en operaciones de digráficas. De manera similar, durante los resultados en la composición de digráficas logramos obtener una cota inferior del número superior de absorbencia por conjuntos semicompletos utilizando conjuntos específicos de las digráficas involucradas en el producto.

Posteriormente, nuestro estudio se encaminó a algunas orientaciones de la gráfica de líneas. Debido a que la gráfica de líneas puede verse como unión de clanes, se buscó recuperar información en algunas orientaciones de esta gráfica y aunque no todas las orientaciones tenían un conjunto absorbente semicompleto, fue posible exhibir una cota entre el número superior de absorbencia por conjuntos semicompletos de algunas orientaciones y el grado máximo de la gráfica inicial. Sin embargo, estos resultados no se recuperan en la digráfica de líneas, a pesar de ello, mostramos que cualquier conjunto semicompleto de la digráfica de líneas tiene a los más tres elementos, acotando así al número superiormente de absorbencia por conjuntos semicompletos de la misma.

Por otro lado, Cockayne y Hedetniemi presentan en [9] y [11] la definición de número domático en gráficas, misma que fue extendida a digráficas por Zelinka en [28] durante 1984. En ese mismo año, Hedetniemi y Laskar [20] definen una variación del número domático en gráficas: el número domático conexo. Nosotros ofrecimos en este trabajo una posible extensión de este último concepto a digráficas, a saber, el número semidomático interior fuerte. Mostramos que las digráficas fuertes son las únicas que tienen

una partición de sus vértices en conjuntos semidominantes interiores fuertes, por lo que restringimos la existencia de dichas particiones a una sola familia de digráficas. Zelinka demostró en [27] que el número domático conexo de una gráfica siempre está acotado superiormente por la conexidad puntual de la gráfica, mostramos que este mismo resultado es válido para el número semidomático interior fuerte. Además, Zelinka muestra en [28] que el número domático de cualquier digráfica es a lo más el exgrado mínimo de la digráfica más uno, en este trabajo probamos que dicha cota se satisface para el número semidomático interior fuerte y si la digráfica no tiene vértices absorbentes, entonces el número semidomático interior fuerte es a lo más el exgrado de la digráfica.

Zelinka propone la definición de gráfica domática conexa crítica en [27] y una caracterización de dichas gráficas. Nosotros extendimos dicho concepto a digráficas y aunque las hipótesis presentadas por Zelinka no son suficientes para caracterizar a las digráficas semidomáticas interiores fuertes críticas, nosotros proponemos una caracterización de ellas a partir de las propiedades de los elementos de una partición en conjuntos semidominantes interiores fuertes.

Por otro lado, Hartnell y Rall continúan el estudio del número domático conexo en gráficas planas, mostrando en [17] que dicho número siempre es a lo más cuatro, a partir los resultados publicados por ellos, pudimos mostrar proposiciones análogas en digráficas, es decir, mostramos que el número semidomático interior fuerte de cualquier digráfica plana es a lo más cuatro. Recientemente, Benítez presentó en su tesis de licenciatura [5] una continuación del estudio de Zelinka para el número domático de una digráfica, probando que es posible dar una bipartición de los vértices de una digráfica en conjuntos absorbentes, siempre y cuando ésta tenga una partición domática con más de un elemento, este mismo resultado es válido para el número semidomático interior fuerte, más aún, mostramos que siempre es posible encontrar una partición de los vértices de una digráfica en conjuntos semidominantes interiores fuertes y que tenga  $n$  elementos, donde  $n$  es cualquier entero entre uno y el número semidomático interior fuerte de la digráfica.

En este punto, es natural preguntarse la relación entre el número semidomático interior fuerte y los números de absorbencia por conjuntos semicompletos. Aunque no necesariamente hay una relación directa de orden entre estos números, vimos que si una digráfica es tal que su número semidomático interior fuerte es igual a su exgrado más uno, entonces cualquier vértice de exgrado mínimo es absorbente, por lo que en una digráfica con las características antes mencionadas el número inferior de absorbencia por conjuntos semicompletos es igual a uno y el número superior de absorbencia por conjuntos semicompletos es al menos el número de vértices de exgrado mínimo en la digráfica.

Más adelante continuamos el estudio de este número en dos operaciones: el producto y la composición. Benítez, en [5], mostró que el número domático del producto de dos digráficas siempre es al menos el máximo de los números domáticos de las digráficas involucradas en el producto, en nuestros resultados probamos que es análogo para el número semidomático interior fuerte. Por otro lado, en la composición de digráficas se concluyó que el número semidomático interior fuerte siempre es al menos el mínimo de los órdenes de las digráficas en la sucesión de la composición y a partir de esto pudimos exhibir una familia de digráficas semidomáticas interiores fuertes críticas.

Por último, Benítez [5] extiende su estudio del número domático a algunas digráficas asociadas: la digráfica de líneas, la digráfica subdivisión, la digráfica  $R(D)$  y la digráfica total. Principalmente mostró que el número domático de la digráfica de líneas es al menos el número domático de la digráfica original, sin embargo, este resultado no puede ser extendido al número semidomático interior fuerte, a pesar de ello, logramos establecer una relación entre dicho número y el número de cubiertas fuertes generadoras de la digráfica original y con éste pudimos extender nuestro estudio a la digráfica  $R(D)$  y a la digráfica total.

Una vez concluido este trabajo sólo nos queda agregar que existen muchas preguntas surgidas durante la realización de esta tesis a las que no hemos dado respuesta. Aún queda abierta la búsqueda de condiciones necesarias y suficientes para la existencia de un conjunto absorbente semicompleto en digráficas arbitrarias. También está la posibilidad de una mejor caracterización de las digráficas semidomáticas interiores fuertes críticas y la búsqueda de familias de digráficas para las que no exista restricción entre el número de vértices y el número semidomático interior fuerte de la digráfica. Se mostró en el trabajo que para cualquier digráfica fuerte  $D$ ,  $d_{sf}^-(D) \leq \delta^+(D) + 1$  y si la digráfica no tiene vértices absorbentes, entonces  $d_{sf}^-(D) \leq \delta^+(D)$ , ¿es posible caracterizar a las digráficas en las que se tenga alguna de las igualdades? Nosotros mostramos que el número semidomático interior fuerte de las digráficas planas es a lo más cuatro ¿Para qué otras familias de digráficas es posible determinar o acotar su número semidomático interior fuerte? ¿será posible recuperar información para las digráficas planas cuyo número semidomático interior fuerte sea 2 o 1?

## Referencias

- [1] Arumugam S., Jacob K., Lutz Volkmann, *Total and connected domination in digraphs*, Australasian Journal of Combinatorics, Vol. 39 (2007), 283-292.
- [2] Bang-Jensen Jorgen, Gutin Gregory, *Paths and cycles in extended and decomposable digraphs*, Discrete Mathematics, Vol. 164 (1997), 5-19.
- [3] Bang-Jensen Jorgen, Gutin Gregory, Huang Jing, *A sufficient condition for a semicomplete multipartite digraph to be Hamiltonian*, Discrete Mathematics, Vol. 161 (1996), 1-12.
- [4] Bang-Jensen Jorgen, Maddaloni Alessandro, *Arc-disjoint paths in decomposable digraphs*, Journal of Graph Theory, Vol 77, 89-110.
- [5] Benítez B. G., *Número Semidominante Coloreable en Digráficas*, Tesis, Facultad de Ciencias, UNAM (2014).
- [6] Bondy J. A., Murty U. S. R., *Graph Theory with Applications*, Elsevier Science Publishing Co. Inc., (1976).
- [7] Chartrand G., *Introduction to Graph Theory*, McGraw-Hill Higher Education, Boston (2005).
- [8] Chartrand G., Zhang P., *A first course in Graph Theory*, Dover Publications (2012).
- [9] Cockayne E.J., *Domination of undirected graphs- a survey*, Theory and Application of Graphs, Proc., Michigan (1976) (Y. Alavi, D.R. Lick, eds.), Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1978).
- [10] Cockayne E.J., Dawes R.M., Hedetniemi S.T., *Total domination in graphs*, Networks, Vol.10 (1980), 211-219.
- [11] Cockayne E.J., Hedetniemi S.T., *Towards a theory of domination in graphs*, Networks, Vol 7 (1977), 247-261.
- [12] Cozzens B. Margaret and Kelleher L. Laura, *Dominating Cliques in Graphs*, Discrete Mathematics, Vol. 86 (1990), 101-116.
- [13] Galeana-Sánchez Hortensia, Pastrana Ramírez Laura, Rincón Mejía Hugo Alberto, *Semikernels, Quasi Kernels, and Grundy Functions in the Line Digraph*, SIAM J. Discrete Math., Vol. 4 (1991), No. 1, 80-83.
- [14] Gutin Gregory, *Polynomial algorithms for finding Hamiltonian paths and cycles in quasi-transitive digraphs*, Australas. J. Combin., Vol 10 (1994), 231-236.
- [15] Harary F., *Graph Theory*, Perseus Books (1994).

- [16] Harminc Matus, *Solutions and Kernels of a Directed Graph*, Math Slovaca, Vol. 32 (1982), No. 3, 263-267.
- [17] Hartnell Bert L., Rall Douglas F., *Connected domatic number in planar graphs*, Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 51 (2001), 173-179.
- [18] Hasunuma Toru, Otany Mayu, *On the  $(h, k)$ -domination number of iterated line digraphs*, Discrete Applied Mathematics, Vol. 160 (2012), 1859-1863.
- [19] Haynes Teresa W., Hedetniemi Stephen, Slater Peter, *Fundamentals of Domination in Graphs*, Marcel Dekker, Inc., New York, (1998).
- [20] Hedetniemi S.T., Laskar R. *Connected domination in graphs*, Graph Theory and Combinatorics. Academic Press, London-New York (1984), 209-217.
- [21] Manoussakis Y., *A linear-time algorithm for finding Hamiltonian cycles in tournaments*, Discrete Applied Mathematics, Vol. 36 (1992), 199-201.
- [22] Nash-Williams C.St.J.A., *Hamiltonian arcs and circuits*, Recent Trends in Graph Theory (197-210).
- [23] Nash-Williams C.St.J.A., *Hamiltonian lines in graphs whose vertices have sufficiently large valencies*, Combinatorial Theory and its Applications, Vol. III (1969), 813-819.
- [24] Von Neumann J., Morgenstern O., *Theory of games and economic behavior*, Princeton University Press, Princeton (1944).
- [25] Yeo Anders, *One-diregular subgraphs in semicomplete multipartite digraphs*, Journal of Graph Theory, Vol. 24 (1997), 175-185.
- [26] Zang Cun-Quan, *Arc-disjoint circuits in digraphs*, Discrete Mathematics, Vol. 41 (1982), 79-96.
- [27] Zelinka Bohdan, *Connected domatic number of a graph*, Math. Slovaca, Vol. 36 (1986), 387-392.
- [28] Zelinka Bohdan, *Semidomatic numbers of directed graphs*, Math. Slovaca, Vol. 34 (1984), 371-374.

## Lista de Símbolos y Notación.

$A(G)$ .

Conjunto de aristas de la gráfica  $G$ .

$d(u, v)$ .

Distancia entre los vértices  $u$  y  $v$ .

$d(G)$ .

Número domático de la gráfica  $G$ .

$d^+(D)$ ,  $d^-(D)$ .

Número semidomático interior y exterior, respectivamente, de la digráfica  $D$ .

$d_c(G)$ .

Número domático conexo de la gráfica  $G$ .

$d_f(D)$ .

Número domático fuerte de la digráfica  $D$ .

$d_{sf}^-(D)$ .

Número semidomático interior fuerte de la digráfica  $D$ .

$d_{sf}^-$ -partición.

Partición con  $d_{sf}^-(D)$  elementos de los vértices de  $D$  en conjuntos semidominantes interiores fuertes.

$d_{sf}^+(D)$ .

Número semidomático exterior fuerte de la digráfica  $D$ .

$d_{sf}^+$ -partición.

Partición con  $d_{sf}^+(D)$  elementos de los vértices de  $D$  en conjuntos semidominantes exteriores fuertes.

$D^*$ .

Digráfica de condensación de la digráfica  $D$ .

$\overleftarrow{D}$ .

Digráfica dual de la digráfica  $D$ .

$D \oplus \alpha$ .

Composición de la digráfica  $D$  respecto a la sucesión de digráficas  $\alpha$ .

$\delta_H(v)$ .

Grado del vértice  $v$  en la gráfica (digráfica)  $H$ .

$\delta_D^-(v)$ ,  $\delta_D^+(v)$ .

Ingrado y exgrado, respectivamente, del vértice  $v$  en la digráfica  $D$ .

$\Delta(H)$ ,  $\delta(H)$ .

Grado máximo y grado mínimo de la gráfica (digráfica)  $H$ , respectivamente.

$\Delta^+(D)$  (  $\Delta^-(D)$  ),  $\delta^+(D)$  (  $\delta^-(D)$  ).

Exgrado (ingrado) máximo y exgrado (ingrado) mínimo de la digráfica  $D$ , respectivamente.

$F(D)$ .  
 Conjunto de flechas de la digráfica  $D$ .

$\gamma(H)$ .  
 Número de dominación de la gráfica (digráfica)  $H$ .

$\gamma_{cl}(G)$ .  
 Número de dominación por clanes de  $G$ .

$\gamma_{cas}(D)$ .  
 Número inferior de absorbencia por conjuntos semicompletos de la digráfica  $D$ .

$\gamma_{cas}$ —conjunto.  
 Conjunto absorbente semicompleto de la digráfica  $D$  con  $\gamma_{cas}(D)$  elementos.

$\gamma_{wc}(D)$ .  
 Número de dominación débil de la digráfica  $D$ .

$\gamma^-(D), \gamma^+(D)$ .  
 Número semidominante interior y exterior, respectivamente, de la digráfica  $D$ .

$\Gamma_{cas}(D)$ .  
 Número superior de absorbencia por conjuntos semicompletos de la digráfica  $D$ .

$\Gamma_{cas}$ —conjunto.  
 Conjunto absorbente semicompleto de la digráfica  $D$  con  $\Gamma_{cas}(D)$  elementos.

$H = H'$ .  
 Las gráficas (digráficas)  $H$  y  $H'$  son iguales.

$H \cong H'$ .  
 Las gráficas (digráficas)  $G$  y  $H$  son isomorfas.

$H \leq H'$ .  
 $H$  es subgráfica (subdigráfica) de  $H'$ .

$H[U]$ .  
 Subgráfica (subdigráfica) de  $H$  inducida por el conjunto (conjunto de aristas)  $U$ .

$H \times H'$ .  
 Producto de las gráficas (digráficas)  $H$  y  $H'$ .

$K_p$ .  
 Gráfica (digráfica) completa con  $p$  vértices.

$\kappa(H)$ .  
 Número de conexidad de la gráfica (digráfica)  $H$ .

$long(C)$ .  
 Longitud del camino  $C$ .

$L(H)$ .  
 Gráfica (digráfica) de líneas de la gráfica (digráfica)  $H$ .

$\Lambda(D)$ .  
 Número de cubiertas fuertes generadoras de la digráfica  $D$ .

$\Lambda$ —partición.  
 Partición con  $\Lambda(D)$  elementos del conjunto de flechas de la digráfica  $D$  en cubiertas fuertes generadoras.

$N_H(v)$ .  
 Conjunto de vecinos del vértice  $v$  en la gráfica (digráfica)  $H$ .

$N_D^-(v), N_D^+(v)$ .  
 Conjunto de invecinos y exvecinos, respectivamente, del vértice  $v$  en la digráfica  $D$ .

$\psi(D)$ .

Corona de la digráfica  $D$  respecto de la sucesión  $\psi$ .

$Q(D)$ .

Digráfica media de la digráfica  $D$ .

$S(D)$ .

Digráfica subdivisión de la digráfica  $D$ .

$T(D)$ .

Digráfica total de la digráfica  $D$ .

$U \Rightarrow V$ .

Todo elemento del conjunto  $U$  es absorbido por un elemento del conjunto  $V$ .

$V(H)$ .

Conjunto de vértices de la gráfica (digráfica)  $H$ .