UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Puntos extremos de colecciones de funciones univalentes en el disco unitario

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

M A T E M Á T I C O

P R E S E N T A:

Patricia Araceli Vélez Mellado

DIRECTOR DE TESIS:
Dr. Javier Páez Cárdenas
2015

Ciudad Universitaria, D. F.

Alumno	
Apellido paterno	Vélez
Apellido materno	Mellado
Nombre(s)	Patricia Araceli
Teléfono	56 76 89 04
Universidad Nacional Autónoma de México	Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias	Facultad de Ciencias
Carrera	Matemáticas
Número de Cuenta	302010620
Tutor	
Grado	Dr.
Nombre	Javier
Apellido paterno	Páez
Apellido materno	Cárdenas
Sinodal 1	
Grado	M. en C.
Nombre(s)	Angel Manuel
Apellido paterno	Carrillo
Apellido materno	Hoyo
Sinodal 2	
Grado	Dra.
Nombre	Ana
Apellido paterno	Meda
Apellido materno	Guardiola
Sinodal 3	
Grado	M. en C.
Nombre(s)	José Antonio
Apellido paterno	Gómez
Apellido materno	Ortega
Sinodal 4	
Grado	Dr.
Nombre(s)	Guillermo Javier Francisco
Apellido paterno	Sienra
Apellido materno	Loera
Título	Puntos extremos de colecciones de funciones univalentes en el disco unitario
Número de páginas	94
Año	2015

Índice general

Introducción

Sea $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ el disco unitario en el plano complejo, y considérese una función $f : D \to \mathbb{C}$ analítica. Sabemos que f puede representarse por medio de una serie de potencias alrededor del cero, esto es, para cualquier $z \in D$ se tiene que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + ...$$

de modo que su comportamiento queda completamente determinado por el conjunto de coeficientes $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. En virtud de lo anterior, resulta razonable preguntarse cómo es qué algunas propiedades de f se ven reflejadas en dichos coeficientes y en este sentido es en el que se planteó la llamada conjetura de Bieberbach.

Dicha conjetura fue propuesta en 1916 por Bieberbach [Bieberbach] y establece que si $f \in S$, donde S es la colección de funciones analíticas e inyectivas en D con las condiciones de normalización $f(0) = 0$ y $f'(0) = 1$ entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ se satisface la desigualdad

$$|a_n| \leq n.$$

Con el objetivo de probar dicha conjetura se consideraron varios enfoques, entre estos plantear el problema como un problema de optimización según se explica enseguida.

Notemos que para cada natural n la relación

$$f \to |a_n|$$

puede pensarse como un funcional sub-lineal definido en el espacio de las funciones analíticas en D, de manera que una posibilidad para resolver el problema propuesto en la conjetura de Bieberbach era maximizar cada uno de esto funcionales en el conjunto S. En esta dirección fue que se siguieron dos caminos: por un lado, el uso de métodos variacionales y por el otro el uso de métodos de optimización lineal.

El uso de métodos de optimización lineal requiere identificar los puntos extremos de ciertas subcolecciones compactas del espacio de funciones análiticas definidas en D; este requerimiento dirigío la investigación a encontrar formas de representar en forma integral a los elementos de esas subcolecciones o de subcolecciones convexas más grandes. Siguiendo esta línea, este trabajo se enfoca precisamente en probar ciertos resultados que permiten encontrar la representación integral (con respecto de medidas de probabilidad) de los elementos de algunas subcolecciones importantes de S.

Esta tesis está organizada como sigue. En el capítulo uno se presentan algunos prerequisistos referentes a las propiedades de los espacios vectoriales topológicos que resultan necesarias para el desarrollo posterior; también se define el espacio de funciones analíticas en D como espacio vectorial topológico y se introduce el concepto de subordinación.

En el capítulo dos se utilizan algunos de los resultados del capítulo uno con el fin de especificar las propiedades del conjunto de medidas de probabilidad definidas en la circunferencia unitaria, las que a su vez permitirán establecer la representación de elementos de ciertas subcolecciones de S como una integral con respecto de alguna de estas medidas. En partícular, se prueba con base en el Teorema de Representación de Riesz, que el conjunto de medidas de probailidad sobre un espacio topológico compacto es débil$-*$ compacto.

En el capítulo tres se demuestran los resultados que fundamentan la forma en la que se caracterizan ciertas subcolecciones de S, además de que se especifican propiedades importantes de subcolecciones del espacio de funciones analíticas en D cuyos elementos se definen, precisamente, como la integral de alguna función kernel con respecto de una medida de probabilidad en la frontera de D (considerando a $\mathbb{C}$ como espacio métrico con la métrica usual).

En el capítulo cuatro se utilizan los resultados del capítulo tres para caracterizar subcolecciones específicas del espacio de funciones analíticas en D como colecciones que admiten una representación integral. Entre estas colecciones se encuentran, la de funciones univalentes normalizadas definidas en D cuya imagen es un conjunto convexo, y la colección más amplia de funciones univalentes normalizadas definidas en D cuya imagen es un conjunto estrellado respecto al cero.

Finalmente, en el capítulo cinco se aplican los resultados del capítulo cuatro para resolver problemas de optimización. Se prueba la conjetura de Bieberbach para algunas subclases de S y se tratan apliaciones que involucran operadores lineales continuos.

Es importante tener en cuenta que si bien el uso de métodos de optimización lineal se planteó como un posible camino para demostrar la conjetura de Bieberbach, este no fue un camino existoso ya que la caracterización del conjunto de puntos extremos de S representó por si sólo un problema complejo al que ya no se le dió seguimiento. De hecho, la conjetura de Bieberbach fue demostrada por De Branges [deBranges] con una prueba que, aunque en algún punto hace uso de la forma integral de las funciones analíticas en D con parte real positiva (representación que, como se muestra en el capítulo cuatro, puede obtenerse a través de la forma de los puntos extremos de esta colección y de uno de los teoremas del capítulo tres), en el resto utiliza herramienta distinta. Así que, no obstante el contenido de esta tesis fue motivado por el trabajo de Bieberbach, no se pretende dar una prueba alternativa de su conjetura o profundizar en la prueba de De Branges, sino analizar ciertas características de las familias de funciones analíticas en el disco que pueden representase por medio de una integral.

Capítulo 1

Prerrequisitos

En este capítulo incluiremos los resultados que se usarán con relación a espacios vectoriales topológicos, y en particular con aquellos cuya topología proviene de una norma. Se verán resultados con relación al tema de convexidad, transformaciones lineales acotadas y la topología débil$-*$. También se probará que el espacio de las funciones continuas con soporte compacto en un espacio topológico X tiene estructura de espacio vectorial normado. Y por último, se revisarán algunas propiedades del espacio de funciones analíticas en el interior del disco unitario D.

1.1. Espacios vectoriales topológicos

En esta sección se establece la definición de espacio vectorial topológico que se usará a lo largo de esta tesis, así como algunos resultados concernientes a las vecindades en estos conjuntos.

Definición 1.1 *La pareja (X, τ) es un espacio vectorial topológico si X es un espacio vectorial real o complejo y τ es una topología para X tal que las funciones*

1. $s : X \times X \to X$
   $(x, y) \to x + y$

2. $m : F \times X \to X$, *donde* $F = \mathbb{R}$ *o* $\mathbb{C}$
   $(\alpha, x) \to \alpha x$

son continuas

En adelante vamos a considerar espacios vectoriales complejos.

Definición 1 *Sea (X, τ) espacio topológico y sea $x \in X$. Decimos que $V \subseteq X$ es vecindad de x si existe $U \subseteq X$ abierto tal que $x \in U \subseteq V$. A la subcolección de subconjuntos de X dada como*

$$N(x) = \{V \subseteq X : V \quad \text{es una vecindad de } x\}$$

se le llama el sistema de vecindades de x.

Proposición 1.1 *Sea X espacio topológico. $\varnothing \neq U \subset X$ es abierto si y sólo si U es vecindad de cada uno de sus puntos.*

Demostración. Sea $x \in U$; como U es abierto U es una vecindad de x. Conversamente, supongamos que para toda $x \in U$ existe V_x abierto tal que $x \in V_x \subseteq U$,entonces $U = \bigcup_{x \in U} V_x$, y por tanto U es abierto. ■

Definición 1.2 *Sea (X, τ) espacio vectorial topológico y sean $U, V \subseteq X$ y $\lambda \in \mathbb{C}$, definimos $U + V \subseteq X$ y $\lambda U \subseteq X$ como*

$$U + V = \{u + v : u \in U, v \in V\}$$

$$\lambda U = \{\lambda u : u \in U\}$$

En el caso de que $U = \{x\}$ se escribirá $x + V$ en lugar de $\{x\} + V$.

Proposición 1.2 *Sea (X, τ) espacio vectorial topológico y sean $U, V \subseteq X$ con U abierto y $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$ entonces $V + U$ y λU son abiertos en X.*

Demostración. Sea $x \in V$ entonces si $y \in x + U$ existe $u \in U$ tal que $y = x + u$. Ahora como U es abierto y la función suma s es continua $s^{-1}(U)$ es abierto en $X \times X$, además $(-x, y) \in s^{-1}(U)$ así que existen U_1 y U_2 abiertos en X tales que $(-x, y) \in U_1 \times U_2 \subseteq s^{-1}(U)$, entonces si $w \in U_2$, $-x + w \in U$, por tanto $y \in U_2 \subseteq x + U$. De lo anterior concluimos que $x + U$ es abierto para toda $x \in V$ y como

$$V + U = \bigcup_{x \in V} x + U$$

$V + U$ es abierto.
Por otro lado, si $x \in \lambda U$ entonces $x = \lambda u$ para alguna $u \in U$. Como U es abierto y la función producto por escalar m es continua $m^{-1}(U)$ es abierto en $\mathbb{C} \times X$ además

$$(\lambda^{-1}, x) \in m^{-1}(U)$$

entonces existen $\delta > 0$ y $U_1 \subseteq X$ abierto tales que

$$(\lambda^{-1}, x) \in B_\delta(\lambda^{-1}) \times U_1 \subseteq m^{-1}(U)$$

por lo que $\lambda^{-1} y \in U$ para toda $y \in U_1$ y por tanto $x \in U_1 \subseteq \lambda U$, con lo que se concluye que λU es abierto. ■

El siguiente lema caracteriza a la colección $N(x)$ para cualquier elemento x de un espacio vectorial topólógico.

Lema 1.1 *Sean (X, τ) espacio vectorial topológico y $x \in X$ entonces*

$$N(x) = \{x + V : V \in N(0)\}$$

Demostración. Sea $U \in N(x)$ entonces $V = -x + U \in N(0)$, pues $x \in U$ y U es una vecindad de x, así $U = x + V$.
Ahora si $V \in N(0)$ entonces existe $W \subseteq X$ abierto tal que $0 \in W \subseteq V$, así que

$$x \in x + W \subseteq x + V$$

y dado que $x + W$ es abierto $x + V \in N(X)$. ∎

Definición 1.3 *Sea X espacio vectorial. Decimos que $B \subseteq X$ es balanceado si $\lambda x \in B$ para todo $x \in B$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ con $|\lambda| \leq 1$.*
Sea $A \subseteq X$, el núcleo balanceado de A, denotado por $B(A)$, es la unión de todos los subconjuntos balanceados de A, es decir,

$$B(A) = \bigcup_{\substack{B \subseteq A \\ B \text{ balanceado}}} B$$

Nótese que el núcleo balanceado de un subconjunto A de X es balanceado pues si $B(A) = \varnothing$, entonces claramente es balanceado. Y si $B(A) \neq \varnothing$ dados $x \in B(A)$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ con $|\lambda| \leq 1$ entonces $\lambda x \in B$ para algún $B \subseteq A$ balanceado y por tanto $\lambda x \in B(A)$. Entonces el núcleo balanceado es el conjunto balanceado más grande contenido en un subconjunto de X.

Lo que sigue será establecer un resultado que proporciona una característica muy partícular de los elementos abiertos de $N(0)$ en un espacio vectorial topológico (X, τ). Para probar dicho resultado son necesarios los siguientes lemas previos.

Lema 1.2 *Sea (X, τ) espacio vectorial topológico. Si $V \in N(0)$ entonces existe $W \in N(0)$ abierta y balanceada tal que $W \subseteq V$.*

Demostración. Como $V \in N(0)$ existe U abierto en X tal que $0 \in U \subseteq V$ y como la función multiplicación por escalar m es continua y $m((0,0)) = 0$ existen $\delta > 0$ y $U_1 \subseteq X$ abierto tales que

$$(0,0) \in B_\delta(0) \times U_1 \subseteq m^{-1}(U)$$

por lo que

$$0 \in W = \bigcup_{\substack{\lambda \in B_\delta(0) \\ \lambda \neq 0}} \lambda U_1 \subseteq U \subseteq V$$

entonces por la proposición 1.2 W es abierto en X y por tanto es una vecindad abierta del cero. Además W es balanceada, pues dados $\alpha \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ con $|\alpha| \leq 1$ y $x \in W$ se tiene que $\alpha x = \alpha(\lambda v) = (\alpha\lambda)u$ para alguna $\lambda \in B_\delta(0)\backslash\{0\}$ y alguna $u \in U_1$, pero $0 < |\alpha\lambda| < \delta$ entonces $\alpha x \in W$. Y si $\alpha = 0$, entonces para cualquier $x \in W$, $\alpha x = 0 \in W$. ∎

Lema 1.3 *Sea (X, τ) espacio vectorial topológico. Si $V \in N(0)$ entonces $B(V) \in N(0)$.*

Demostración. Por el lema 1.2 existe $W \in N(0)$ balanceada y abierta tal que $W \subseteq V$ entonces $W \subseteq B(V)$ por tanto $B(V) \in N(0)$. ∎

Lema 1.4 *Sea (X, τ) espacio vectorial topológico. Si $B \subseteq X$ es balanceado y $0 \in int(B)$ entonces $int(B)$ es balanceado.*

Demostración. Sea $x \in int(B)$ y $\alpha \in \mathbb{C}$ con $0 < |\alpha| \leq 1$, entonces

$$\alpha x \in \alpha int(B) \subseteq \alpha B \subseteq B$$

donde la segunda contención se da por el hecho de que B es balanceado. Pero por la proposición 1.2 $\alpha int(B)$ es abierto y por tanto $\alpha x \in int(B)$.
Ahora, si $\alpha = 0$ entonces $\alpha x = 0 \in int(B)$ para todo $x \in int(B)$. ■

Lema 1.5 *Sea (X, τ) espacio vectorial topológico. Si $V \in N(0)$ entonces existe $W \in N(0)$ abierta y balanceada tal que $W \subseteq V$.*
Demostración. Por el lema 1.3 $B(V)$ es una vecindad del cero, entonces

$$0 \in W = int(B(V)) \subseteq B(V) \subseteq V$$

pero por el lema 1.4 W es balanceado. Así que W es una vecindad abierta y balanceada del cero tal que $W \subseteq V$. ■

Ahora si es posible probar la siguiente proposición que garantiza una propiedad de los abiertos de un espacio vectorial topológico que servirá para tratar algunos temas de convexidad relevantes para el desarrollo de este trabajo.

Proposición 1.3 *Sea (X, τ) espacio vectorial topológico. Para cada $U \subseteq X$ abierto con $0 \in U$, existe W vecindad abierta y balanceada del cero tal que $W + W \subseteq U$.*

Demostración. Como la función suma s es continua en $X \times X$ y U es abierto existen U_1 y U_2 abiertos en X tales que

$$(0, 0) \in U_1 \times U_2 \subseteq s^{-1}(U)$$

De este modo $V = U_1 \cap U_2$ es una vecindad abierta del cero tal que

$$(0, 0) \in V \times V \subseteq s^{-1}(U)$$

por lo que $V + V \subseteq U$. Además por el lema 1.5 existe $W \in N(0)$ abierta y balanceada tal que $W \subseteq V$ y por tanto W es una vecindad abierta y balanceada de cero tal que

$$W + W \subseteq V + V \subseteq U$$

Con lo que se concluye la prueba. ■

1.2. Convexidad

En esta sección se van a introducir algunos resultados relacionados con la noción de convexidad; estos resultados serán útiles en el análisis que más adelante haremos acerca de ciertas familias de funciones analíticas.

Definición 1.4 *Sea X espacio vectorial. Decimos que $C \subseteq X$ es convexo si $\alpha x + \beta y \in C$ siempre que $x, y \in C$ y $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ con $\alpha + \beta = 1$.*
Sea $A \subseteq X$; la envolvente convexa de A, denotada por $co\,(A)$, es la intersección de todos los subconjuntos convexos de X que contienen a A es decir,

$$co\,(A) = \bigcap_{\substack{A \subseteq C \\ C \text{ convexo}}} C$$

Nótese que la intersección de una cantidad arbitraria de subconjuntos convexos de un espacio vectorial X es convexa y por tanto la envolvente convexa de cualquier subconjunto A de X es convexa. Así que la envolvente convexa de un subconjunto de X es el conjunto convexo más pequeño que lo contiene.

A continuación procederemos a establecer algunas propiedades elementales de los conjunto convexos.

Teorema 1.1 *Sea X espacio vectorial. Si $C \subseteq X$ es convexo y $x_1, \ldots, x_n \in C$, entonces*

$$\textstyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \in C$$

para todo $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \subset [0, 1]$ con $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ y $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. La prueba se hará por inducción. Para $n = 2$ la conclusión se tiene por definición de conjunto convexo.Supongamos que la conclusión es válida para alguna $n > 2$. Sean $x_1, \ldots, x_n, x_{n+1} \in C$ y $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}\} \subset [0, 1]$, con $\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i = 1$.
Si $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = 0$ entonces cada $\alpha_i = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ y $\alpha_{n+1} = 1$ lo cual implica

$$\textstyle\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i x_i = x_{n+1} \in C$$

Ahora si $\beta = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n > 0$, por hipótesis de inducción tenemos que

$$\frac{\alpha_1}{\beta} x_1 + \cdots + \frac{\alpha_n}{\beta} x_n \in C$$

por lo que

$$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_{n+1} x_{n+1} = \beta\left(\frac{\alpha_1}{\beta} x_1 + \cdots + \frac{\alpha_n}{\beta} x_n\right) + \alpha_{n+1} x_{n+1} \in C$$

pues C es convexo y $\beta + \alpha_{n+1} = 1$. ■

Proposición 1.4 *Sea X espacio vectorial. Si $C \subseteq X$ es convexo entonces*

$$\alpha C + \beta C = (\alpha + \beta) C$$

para todo $\alpha, \beta \geq 0$.

Demostración. Como X es espacio vectorial $(\alpha+\beta)C \subseteq \alpha C+\beta C$ para cualesquiera $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Sean $\alpha, \beta \geq 0$. Si $\alpha = \beta = 0$, inmediatamente se cumple la igualdad. Así que supongamos sin pérdida de generalidad que $\alpha > 0$ entonces

$$\frac{\alpha}{\alpha+\beta} c_1 + \frac{\beta}{\alpha+\beta} c_2 \in C$$

para todo $c_1, c_2 \in C$ y por tanto $\alpha C + \beta C \subseteq (\alpha + \beta) C$. ∎

Proposición 1.5 *Sea X espacio vectorial. Si $C \subseteq X$ es convexo entonces*

$$x + C$$

es convexo para toda $x \in X$.

Demostración. Sean $u, v \in x + C$ entonces existen c_1 y c_2 en C tales que $u = x + c_1$ y $v = x + c_2$. Por lo tanto para $\alpha, \beta \geq 0$ con $\alpha + \beta = 1$ se tiene que

$$\alpha u + \beta v = \alpha(x + c_1) + \beta(x + c_2) = x + \alpha c_1 + \beta c_1 \in x + C$$

∎

Teorema 1.2 *Sean X espacio vectorial y $S \subseteq X$ entonces*

$$co\,(S) = \{\textstyle\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k \in X : n \in \mathbb{N}, \alpha_k \geq 0, x_k \in S,\ k = 1, \ldots, n, \sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 1\}$$

Demostración. Sea

$$C = \{\textstyle\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k \in X : n \in \mathbb{N}, \alpha_k \geq 0, x_k \in S, k = 1, \ldots, n, \sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 1\}$$

entonces C es claramente convexo y además $S \subseteq C$. Así que $co\,(S) \subseteq C$. Del teorema 1.1 se sigue que cualquier conjunto convexo que contenga a S debe de contener a C así que $C \subseteq co\,(S)$. Por tanto $co\,(S) = C$. ∎

Teorema 1.3 *Sea (X, τ) espacio vectorial topológico. Si $C \subseteq X$ es convexo entonces $\overline{C}$ es convexo.*

Demostración. Sean $x, y \in \overline{C}$ y sean $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$ con $\alpha + \beta = 1$. Sea U abierto en X tal que $\alpha x + \beta y \in U$ por el lema 1.1 existe $V \in N(0)$ tal que $U = (\alpha x + \beta y) + V$. Por la proposición 1.3 existe $W \in N(0)$ abierta y balanceada tal que $W + W \subseteq V$.
Ahora como $x, y \in \overline{C}$, $(x + W) \cap C \neq \varnothing$ y $(y + W) \cap C \neq \varnothing$, así que existen $w_{1,} w_2 \in W$ tales que $x + w_1 \in C$ y $y + w_2 \in C$, entonces

$$\alpha(x + w_1) + \beta(y + w_2) \in \alpha C + \beta C = (\alpha + \beta)C = C$$

es decir,

$$(\alpha x + \beta y) + (\alpha w_1 + \beta w_2) \in C$$

y como W es balaceada $\alpha w_1 + \beta w_2 \in W + W \subseteq V$. Por tanto $(\alpha x + \beta y) + (\alpha w_1 + \beta w_2) \in U \cap C$ con lo que se tiene que $\alpha x + \beta y \in \overline{C}$. ■

Definición 1.5 *Sea (X, τ) espacio vectorial topológico.y sea $S \subseteq X$. La envolvente convexa cerrada de S, denotada como $\overline{co}\,(S)$ es la intersección de todos los subconjuntos convexos y cerrados que contienen a S.*

Notemos que la envolvente convexa cerrada de un subconjunto de un espacio vectorial topológico es cerrada (por ser la intersección de cerrados).

Teorema 1.4 *Sea (X, τ) espacio vectorial topológico. Si $S \subseteq X$ entonces $\overline{co\,(S)} = \overline{co}\,(S)$.*

Demostración. Como $co\,(S)$ es convexo, por el teorema 1.3 $\overline{co\,(S)}$ es convexo, y además $S \subseteq \overline{co\,(S)}$ por lo que $\overline{co}\,(S) \subseteq \overline{co\,(S)}$. También se tiene que $co\,(S) \subseteq \overline{co}\,(S)$, pues $co\,(S)$ es la intersección de todos los subconjuntos convexos de X que contienen a S y $\overline{co}\,(S)$ es convexo y contiene a S. Así que

$$\overline{co\,(S)} \subseteq \overline{\overline{co}\,(S)} = \overline{co}\,(S)$$

con lo que se tiene que $\overline{co\,(S)} = \overline{co}\,(S)$. ■

Proposición 1.6 *Sean (X, τ) espacio vectorial topológico. Si $U \subseteq X$ y $w \in X$ entonces*

$$w + \overline{co}\,(U) = \overline{co}\,(w + U)$$

Demostración. Sean $x \in (w + \overline{co}\,(U))$ y V una vecindad abierta de x. Existe $y \in \overline{co}\,(U)$ tal que $x = w + y$ así que $y \in -w + V$, pero $-w + V$ es abierto (proposición 1.2) por lo que existe $y' \in co\,(U) \cap (-w + V)$ entonces existe $v \in V$ tal que

$$y' = -w + v$$

es decir, $v \in w + co(U)$. Pero del teorema 1.2 se tiene que

$$w + co(U) = co\,(w + U)$$

y por lo tanto $x \in \overline{co\,(w+U)} = \overline{co}\,(w+U)$.
Ahora sean $x \in \overline{co}\,(w+U)$ y V una vecindad abierta de $x-w$ entonces $x \in w+V$ y como $w+V$ es abierto existe

$$y \in (w+V) \cap co\,(w+U) = (w+V) \cap (w + co\,(U))$$

así que $y = w+u$ para alguna $u \in co\,(U)$. Pero también $y = w+v$ con $v \in V$, de modo que

$$w+u = w+v$$

con lo que se tiene que $v \in V \cap co\,(U)$. Por lo tanto $x-w \in \overline{co}\,(U)$ o bien, $x \in w+\overline{co}\,(U)$. ■

Definición 1.6 *Sea X espacio vectorial y sean $U \subseteq V \subseteq X$. Decimos que U es un subconjunto extremo de V si siempre que*

$$u = tx + (1-t)y$$

con $u \in U$, $x, y \in V$ y $0 < t < 1$ entonces $x, y \in U$.

Como caso partícular a la definición anterior se tiene el concepto de punto extremo.

Definición 1.7 *Sea X espacio vectorial y sea $V \subseteq X$. Se dice que $x \in V$ es un punto extremo de V si siempre que*

$$x = tu + (1-t)v$$

con $u, v \in V$ y $0 < t < 1$ entonces $x = u = v$. En adelante al conjunto de puntos extremos de V se le denotara por $\mathcal{E}\,(V)$.

Lema 1.6 *Sean X espacio vectorial. Si $V \subseteq X$ y $u \in X$ entonces $\mathcal{E}(u+V) = u + \mathcal{E}V$.*

Demostración. Sea $y \in \mathcal{E}(u+V)$ entonces $y \in u+V$ por lo que existe $x \in V$ tal que $y = u+x$. Ahora, si $t \in (0,1)$ y $x_1, x_2 \in V$ son tales que $x = tx_1 + (1-t)x_2$ se tiene que

$$\begin{aligned} y &= u + (tx_1 + (1-t)x_2) \\ &= tu + (1-t)u + (tx_1 + (1-t)x_2) \\ &= t(u+x_1) + (1-t)(u+x_2) \end{aligned}$$

pero como y es un punto extremo de $u+V$, $y = u+x = u+x_1 = u+x_2$ por lo que $x = x_1 = x_2$. Con lo que se tiene que $x \in \mathcal{E}V$.
Reciprocámente, si $y \in u + \mathcal{E}V$ existe $x \in \mathcal{E}V$ tal que $y = u+x$, así que si $t \in (0,1)$ y $x_1, x_2 \in V$ son tales que $y = t(u+x_1) + (1-t)(u+x_2)$ entonces

$$\begin{aligned} y &= (t + (1-t))u + tx_1 + (1-t)x_2 \\ &= u + (tx_1 + (1-t)x_2) \end{aligned}$$

por lo que $x = tx_1 + (1-t)x_2$, y dado que x es un punto extremo de V se tiene que $x = x_1 = x_2$. Por lo tanto $y \in \mathcal{E}(u+V)$. ■

Un resultado esencial para el desarrollo de esta tesis el el Teorema de Krein-Milman, el cual está estrechamente ligado a los conceptos de convexidad y de punto extremo. Antes de enunciarlo es necesario establecer la noción de convexidad local.

Definición 1.8 *(X, τ) espacio vectorial topológico.es llamado localmente convexo si para todo $x \in X$ y para toda $U \in N(x)$ existe $W \in N(x)$ convexa tal que $W \subseteq V$.*

Teorema 1.5 (Krein-Milman) *Sea (X, τ) espacio vectorial topológico localmente convexo. Si $U \subseteq X$ es compacto entonces*

1. Si $U \neq \varnothing$ entonces $\mathcal{E}U \neq \varnothing$
2. $\overline{co}(\mathcal{E}U) = \overline{co}(U)$
3. Si $\overline{co}(U)$ es compacto entonces $\mathcal{E}\overline{co}(U) \subseteq U$

La demostración de este resultado se puede consultar en [Rudin FA].

1.3. Espacios vectoriales normados

En esta sección se revisa el concepto de norma en un espacio vectorial así como el de transfomación lineal acotada. A partir de estos dos conceptos se definirán el espacio dual y las topologías débiles.

Definición 1.9 *Sea X espacio vectorial. Una norma en X es una funcion $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ tal que*

1. *$\|x\| \geq 0$ y la igualdad se da si y sólo si $x = 0$*
2. *Para $\alpha \in \mathbb{C}$ y $x \in X$, $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$*
3. *Si $x, y \in X$ entonces $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$*

A los espacios vectoriales sobre los cuales está definida una norma se les llama espacios vectoriales normados. En $(X, \|\cdot\|)$ espacio vectorial normado resulta natural definir una métrica d como $d(x, y) = \|x - y\|$. Ahora, si τ_d es la topología en X inducida por la métrica d es claro que (X, τ_d) es un espacio vectorial topológico. Así que un espacio vectorial normado es un caso particular de espacio vectorial topológico. Como (X, τ_d) es un espacio métrico, sabemos que las bolas centradas en cada punto forman una base local, así para $x \in X$ y $r > 0$ la bola con centro en x y radio r se denotará por $B_r(x)$ es decir,

$$B_r(x) = \{y \in X : \|y - x\| < r\}$$

y a la bola cerrada con centro en x y radio r se le denotará como $B_r[x]$ esto es,

$$B_r[x] = \{y \in X : \|y - x\| \leq r\}$$

1.3.1. Transformaciones lineales acotadas.

Una parte importante en el estudio de los espacios vectoriales normados es el análisis de funciones entre dos de estos espacios que, como es de esperarse, además de preservar la estructura algebraíca se comportan bien con respecto de la estructura topológica, es decir, que son continuas según la norma de los espacios involucrados.

Definición 1.10 *Sean* $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ *espacios vectoriales normados y* $T : (X, \|\cdot\|_X) \to (Y, \|\cdot\|_Y)$ *lineal. Se dice que* T *es una transformación lineal acotada si existe* $M > 0$ *tal que*

$$\|Tx\|_Y \leq M \|x\|_X$$

para toda $x \in X$*. En el caso de que* $(Y, \|\cdot\|_Y) = (\mathbb{C}, |\cdot|)$ *diremos que* T *es un funcional lineal acotado.*

El próximo teorema muestra que el hecho de que una transformación lineal sea acotada es equivalente a que ésta sea continua.

Teorema 1.6 *Sea* $T : (X, \|\cdot\|_X) \to (Y, \|\cdot\|_Y)$ *lineal. Son equivalentes*

1. *Existe* $M > 0$ *tal que* $\|Tx - Ty\|_Y \leq M \|x - y\|_X$ *para todo* $x, y \in X$.
2. T *es uniformemente continua en* X.
3. T *es continua en* X.
4. T *es continua en el cero.*
5. T *es acotada en una vecindad del cero.*
6. T *es acotada.*
7. $\sup\{\|Tx\|_Y \mid \|x\|_X \leq 1\} < \infty$

Demostración.
(1$\Longrightarrow$2) Sea $\epsilon > 0$ si $0 < \delta < \epsilon/M$ y $x, y \in X$ son tales que $\|x - y\|_X < \delta$ entonces $\|Tx - Ty\|_Y \leq M \|x - y\|_X < \epsilon$. Por tanto T es uniformemente continua en X.
(2$\Longrightarrow$3) Si T es uniformemente continua en X entonces T es claramente continua en X.
(3$\Longrightarrow$4) Claro.
(4$\Longrightarrow$5) Como T es continua en cero existe $\delta > 0$ tal que $\|Tx\|_Y < 1$ si $x \in B_\delta(0)$. Es decir, T es acotada en $B_\delta(0) \in N(0)$.
(5$\Longrightarrow$6) Supongamos que existen $V \subseteq X$ vecindad del cero y $M > 0$ tales que $\|Tx\|_Y \leq M$ para toda $x \in V$. Como V es vecindad del cero y X es normado existe $r > 0$ tal que $B_r[0] \subseteq V$. Así, sea $x \in X$ con $x \neq 0$ entonces $y = r\frac{x}{\|x\|_X} \in B_r[0]$ y por lo tanto

$$\|Ty\|_Y \leq M$$

es decir,

$$\|Tx\|_Y \leq \frac{M}{r}\|x\|_X$$

si $x = 0$ la igualdad anterior se cumple trivialmente. Por lo que T es acotada.
(6$\Longrightarrow$7) Como existe $M > 0$ tal que $\|Tx\|_Y \leq M\|x\|_X$ para todo $x \in X$ en partícular se tiene que $\|Tx\|_Y \leq M$ para todo x con $\|x\|_X \leq 1$, y por lo tanto

$$\sup\{\|Tx\|_Y \mid \|x\|_X \leq 1\} \leq M < \infty$$

(7$\Longrightarrow$1) Sea $\|T\| = \sup\{\|Tx\|_Y \mid \|x\|_X \leq 1\}$ así que dados $x, y \in X$

$$\|Tx - Ty\|_Y \leq \|T\| \|x - y\|_X$$

pues si $x \neq y$ entonces $\frac{x-y}{\|x-y\|_X} \in B_1[0]$, por lo que $\left\|T(\frac{x-y}{\|x-y\|_X})\right\|_Y \leq \|T\|$. Y si $x = y$ entonces claramente se tiene que $\|Tx - Ty\|_Y = \|T\| \|x - y\|_X$. ■

Supongamos que f y g son funcionales lineales sobre el espacio normado $(X, \|\cdot\|_X)$. Diremos que f y g son iguales $f = g$ si y sólo si $f(x) = g(x)$ para toda $x \in X$. Si definimos $f + g$ como el funcional lineal cuyo valor, en cada punto de x, es $f(x) + g(x)$, y para α un escalar, αf el funcional lineal que para cada x es $\alpha f(x)$, entonces es claro que la clase de todos los funcionales lineales con tales operaciones forma un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$. Más aún, si definimos para f un funcional lineal acotado la norma de f como

$$\|f\|_* = \sup\{|f(x)| : \|x\| \leq 1\}$$

entonces la colección de todos los funcionales lineales acotados sobre X es un espacio vectorial normado. A dicho espacio se le llama el primer dual de X y se le denotará como X^*. Estas afirmaciones se demuestran a continuación.

Teorema 1.7 *Sea $(X, \|\cdot\|_X)$. espacio vectorial normado, entonces X^* es un espacio vectorial normado completo con la norma*

$$\|f\|_* = \sup\{|f(x)| : \|x\|_X \leq 1\}$$

Demostración. Sean $f, g \in X^*$ entonces existen $M, N > 0$ tales que $|f(x)| \leq M\|x\|_X$ y $|g(x)| \leq N\|x\|_X$ para todo $x \in X$. Por lo que

$$|(f+g)(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq (M+N)\|x\|_X$$

y por tanto $f + g \in X^*$. Ahora sea $\alpha \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ entonces si $x \in X$

$$|\alpha f(x)| = |\alpha| |f(x)| \leq |\alpha| M \|x\|_X$$

por lo tanto $\alpha f \in X^*$. Claramente el funcional constate cero pertenece a X^*, así que X^* es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$.
Por otro lado, sea $f \in X^*$ tal que

$$\sup\{|f(x)| : \|x\|_X \leq 1\} = 0$$

entonces si $x \in X$ y $x \neq 0$ se tiene que $\left|f(\frac{x}{\|x\|_X})\right| \leq 0$ así que $f(x) = 0$ para todo $x \in X$. Recíprocamente si $f(x) = 0$ para toda $x \in X$ entonces $\sup\{|f(x)| : \|x\|_X \leq 1\} = 0$.
Por otro lado si $\alpha \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ y $f \in X^*$, para $x \in B_1[0]$ se tiene que

$$|(\alpha f)(x)| = |\alpha|\,|f(x)| \leq |\alpha|\,\|f\|_*$$

por lo tanto $\|\alpha f\|_* \leq |\alpha|\,\|f\|_*$. Pero también se tiene que si $x \in B_1[0]$ entonces

$$|\alpha|\,|f(x)| = |(\alpha f)(x)| \leq \|\alpha f\|_*$$

así que

$$|f(x)| \leq |\alpha|^{-1}\,\|\alpha f\|_*$$

y entonces $\|f\|_* \leq |\alpha|^{-1}\,\|\alpha f\|_*$ o bien $|\alpha|\,\|f\|_* \leq \|\alpha f\|_*$ y por lo tanto $|\alpha|\,\|f\|_* = \|\alpha f\|_*$. Si $\alpha = 0$ claramente $|\alpha|\,\|f\|_* = \|\alpha f\|_*$.
Y si $f, g \in X^*$ entonces para $x \in B_1[0]$

$$|(f+g)(x)| = |f(x) + g(x)| \leq \|f\|_* + \|g\|_*$$

así que $\|f+g\|_* \leq \|f\|_* + \|g\|_*$ es decir, se cumple la desigualdad del triángulo.
De los pasos anteriores concluimos que $\|f\|_* = \sup\{|f(x)| : \|x\|_X \leq 1\}$ es una norma en X^* y por lo tranto que $(X^*, \|\cdot\|_*)$ es un espacio verctorial normado. Resta probar que también es completo; para ello consideremos $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en X^*. Entonces para toda $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $n, m \geq N$ implica

$$\|f_n - f_m\|_* < \epsilon$$

así si $x \in X$ y $x \neq 0$

$$\left|(f_n - f_m)\left(\frac{x}{\|x\|_X}\right)\right| \leq \|f_n - f_m\|_* < \epsilon$$

o bien

$$|(f_n - f_m)(x)| < \epsilon\,\|x\|_X$$

Nótese que si $x = 0$ entonces $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es la sucesión constante cero. Entonces para cada $x \in X$ la sucesión $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy y como $\mathbb{C}$ es completo debe converger a digamos $f(x)$. La función definida de esta forma es claramente un funcional lineal. Veamos que también es acotado. Para cualquier $k \in \mathbb{N}$ y una $N \in \mathbb{N}$ apropiada se tiene que

$$\|f_{N+k} - f_N\|_* < 1$$

lo cual implica

$$\|f_{N+k}\|_* \leq \|f_N\|_* + 1$$

o bien

$$|f_{N+k}(x)| \leq (\|f_N\|_* + 1)\,\|x\|_X$$

para todo $x \in X$. Entonces
$$|f(x)| \leq (\|f_N\|_* + 1) \|x\|_X$$
y, por tanto, $f \in X^*$.
Por otro lado, sea $\epsilon > 0$ entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $n, m \geq N$ implica
$$\|f_n - f_m\|_* < \epsilon$$
así que si $x \in B_1[0]$
$$|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$$
de este modo
$$\lim_{n\to\infty} |f_n(x) - f_m(x)| = \left|\lim_{n\to\infty} f_n(x) - f_m(x)\right| \leq \epsilon$$
esto es
$$|f(x) - f_m(x)| \leq \epsilon$$
así que
$$\|f - f_m\|_* \leq \epsilon$$
y por lo tanto $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a f en $(X^*, \|\cdot\|_*)$. ■

Una vez establecida la estructura de X^* como espacio vectorial normado, es conveniente determinar formas equevalentes para la norma de X^*.

Proposición 1.7 *Sea $(X, \|\cdot\|_X)$ espacio vectorial normado. Si $f \in X^*$ entonces*
$$\begin{aligned} \|f\|_* &= \sup\{|f(x)| : \|x\|_X < 1\} \\ &= \inf\{M > 0 : |f(x)| \leq M \|x\|_X \,, \, x \in X\} \\ &= \sup\{|f(x)| : \|x\|_X = 1\} \\ &= \sup\left\{\frac{|f(x)|}{\|x\|_X} : x \neq 0\right\} \end{aligned}$$

Demostración. Sea $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M \|x\|_X$ para toda $x \in X$, entonces si $x \in B_1[0]$
$$|f(x)| \leq M$$
luego $\|f\|_* \leq M$, por lo tanto $\|f\|_* \leq \inf\{M > 0 : |f(x)| \leq M \|x\|_X \,, x \in X\}$. Pero para $x \in X$ con $x \neq 0$ se tiene que
$$\left|f\left(\frac{x}{\|x\|_X}\right)\right| \leq \|f\|_*$$
o bien
$$|f(x)| \leq \|f\|_* \|x\|_X$$
así que para toda $x \in X$
$$|f(x)| \leq \|f\|_* \|x\|_X$$

por lo tanto $\|f\|_* \geq \text{ínf}\{M > 0 : |f(x)| \leq M \|x\|_X, x \in X\}$ con lo que se tiene la primer igualdad.
Es claro que $\sup\{|f(x)| : \|x\|_X < 1\} \leq \|f\|_*$. Ahora, sea $x \in B_1[0]$: si $\|x\|_X < 1$ entonces

$$|f(x)| \leq \sup\{|f(x)| : \|x\|_X < 1\}$$

y si $\|x\|_X = 1$ entonces para $\lambda \in (0,1)$ se cumple que $\|\lambda x\|_X = \lambda$, por lo que

$$|f(\lambda x)| \leq \sup\{|f(x)| : \|x\|_X < 1\}$$

o sea

$$|f(x)| \leq \lambda^{-1} \sup\{|f(x)| : \|x\|_X < 1\}$$

por lo tanto $|f(x)| \leq \sup\{|f(x)| : \|x\|_X < 1\}$. De este modo $\|f\|_* \leq \sup\{|f(x)| : \|x\|_X < 1\}$ con lo que se tiene la segunda igualdad.
Veamos que

$$\sup\{|f(x)| : \|x\|_X < 1\} = \sup\{|f(x)| : \|x\|_X = 1\}$$

Sea x con $\|x\|_X = 1$ entonces para $\lambda \in (0,1)$ se tiene que $\|\lambda x\|_X = \lambda$, por lo que

$$|f(x)| \leq \lambda^{-1} \sup\{|f(x)| : \|x\|_X < 1\}$$

así $|f(x)| \leq \sup\{|f(x)| : \|x\|_X < 1\}$ y por lo tanto

$$\sup\{|f(x)| : \|x\|_X < 1\} \geq \sup\{|f(x)| : \|x\|_X = 1\}$$

Por otra parte, si $x \in B_1(0)$ y $x \neq 0$ entonces

$$\left| f\left(\frac{x}{\|x\|_X}\right) \right| \leq \sup\{|f(x)| : \|x\|_X = 1\}$$

o bien

$$|f(x)| \leq \sup\{|f(x)| : \|x\|_X = 1\} \|x\|_X < \sup\{|f(x)| : \|x\|_X = 1\}$$

por lo tanto $\sup\{|f(x)| : \|x\|_X < 1\} \leq \sup\{|f(x)| : \|x\|_X = 1\}$ con lo que se tiene la tercer igualdad. La última igualdad es inmediata. ■

Dado $(X, \|\cdot\|_X)$ se tiene que X^* es nuevamente un espacio normado así que es posible considerar el espacio dual de X^*, esto es $(X^*)^*$. Nos referiremos a este espacio, que es un espacio normado completo, como el doble dual de X y para simplificar la notación se le denotará por X^{**}. Existe una subcolección del doble dual de X que juega un papel importante dentro de la teoría de espacios vectoriales normados; dicha subcolección es la imagen de la transformación lineal

$$\begin{aligned} \widehat{\ } \ :& \quad X \to X^{**} \\ x \ \to& \quad \widehat{x} \end{aligned} \tag{1.1}$$

donde $\widehat{x}$ está definido como sigue:

$$\widehat{x}(f) = f(x)$$

para $f \in X^*$. Nótese que para cada $x \in X$ el funcional $\widehat{x}$ está bien definido, pues es lineal por la forma en la que están dadas las operaciones en X^*, y si $f \in X^*$ entonces

$$|\widehat{x}(f)| = |f(x)| \leq \|x\|_X \|f\|_*$$

por lo que $\widehat{x}$ es acotado y además $\|x\|_X \geq \|\widehat{x}\|_{**}$. De hecho, a partir del teorema de Hanh-Banach, se puede probar que $\widehat{\ }$ es una isometría lineal entre X y X^{**}, es decir, que para cada $x \in X$ se tiene que $\|x\|_X = \|\widehat{x}\|_{**}$

1.3.2. La topología débil$-*$.

El primer resultado de esta sección proporciona una forma de dotar de una topología a un conjunto dado no vacío a partir de una colección de subconjuntos de éste. Después se establece el concepto de topología débil y, haciendo uso del resultado ya mencionado, procederemos a definir la topología débil$-*$ en el dual de un espacio vectorial normado. Para finalizar esta sección, se enunciará el teorema de Banach-Alauglu.

Teorema 1.8 *Supongamos que $X \neq \varnothing$ es un conjunto arbitrario y que $\mathfrak{B}$ es una colección no vacía de subconjuntos de X que satisface las condiciones*

1. *Para cada $x \in X$ existe $B_x \in \mathfrak{B}$ tal que $x \in B_x$.*

2. *Dados $B_1, B_2 \in \mathfrak{B}$,si $x \in B_1 \cap B_2$, entonces existe $B_3 \in \mathfrak{B}$ tal que $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.*

Entonces $\mathfrak{B}$ es base de una topología τ para X.

Demostración. Sea τ la colección de subconjuntos de X que consiste en uniones arbitrarias de elementos de $\mathfrak{B}$, y el conjunto vacío. Entonces τ es claramente cerrada bajo uniones arbitrarias y por el punto 1, $X \in \tau$ pues $X = \bigcup_{x \in X} B_x$. Para probar que τ es cerrada bajo intersecciones finitas, y por lo tanto una topología, es suficiente probar que si $U_1, U_2 \in \tau$ entonces $U_1 \cap U_2 \in \tau$. Ahora, como $U_1, U_2 \in \tau$, $U_1 = \bigcup_\alpha B^1_\alpha$ y $U_2 = \bigcup_\gamma B^2_\gamma$, donde $B^1_\alpha, B^2_\gamma \in \mathfrak{B}$, así que

$$U_1 \cap U_2 = \bigcup_{\alpha,\gamma} (B^1_\alpha \cap B^2_\gamma)$$

De este modo sea $x \in B^1_\alpha \cap B^2_\gamma$, por el punto 2 existe $B^{1,2}_{\alpha,\gamma} \in \mathfrak{B}$ tal que $x \in B^{1,2}_{\alpha,\gamma} \subseteq B^1_\alpha \cap B^2_\gamma$ lo cual implica que $B^1_\alpha \cap B^2_\gamma$ se puede ver como una unión de elementos de $\mathfrak{B}$ y por tanto también $U_1 \cap U_2$. Entonces τ es una topología para X y de su definición se tiene que $\mathfrak{B}$ es una base de abiertos para dicha topología. ■

Consideremos ahora un conjunto arbitrario no vacío X, Y un espacio topológico y $\mathcal{F}$ una familia de funciones de X a Y. Ciertamente existe una topología para X respecto a la cual cada elemento de $\mathcal{F}$ es una función continua, pues si a X se le equipa con la topología discreta entonces toda función que tenga a X como dominio es continua. Así que es posible considerar la topología más débil con respecto a la cual cada $f \in \mathcal{F}$ es continua, es decir, la intersección de todas las topologías con respecto a las cuales cada elemento de la familia $\mathcal{F}$

es una función continua. Dicha topología es la llamada topología débil generada por $\mathcal{F}$. Una forma de ver a la topología débil generada por $\mathcal{F}$ es la siguiente: Si τ es la topología de Y y $\mathfrak{B}$ es una base para τ entonces la topología débil generada por $\mathcal{F}$ en X es la topología que tiene como subbase a la colección

$$\mathcal{S} = \{f^{-1}(B) : f \in \mathcal{F},\ B \in \mathfrak{B}\}$$

pues si τ_1 es una topología para X con respecto a la cual todas la funciones en $\mathcal{F}$ son continuas entonces $\mathcal{S} \subseteq \tau_1$, y por tanto $\mathcal{S}$ está contenida en la topología débil generada por $\mathcal{F}$ y entonces, la topología que tiene como subbase a $\mathcal{S}$ también está contenida en la topología débil generada por $\mathcal{F}$. Además, según la topología que tiene como subbase a $\mathcal{S}$ cada elemento de $\mathcal{F}$ es una función continua, así que ésta contiene a la topología débil generada por $\mathcal{F}$.
En el caso partícular de que $Y \subseteq \mathbb{C}$ con la topología usual, la subbase $\mathcal{S}$ para la topología débil generada por $\mathcal{F}$ consiste en conjuntos de la forma

$$\{x \in X : |f(x) - f(x_0)| < \epsilon\} \tag{1.2}$$

donde ϵ es un real positivo, f es un elemento de $\mathcal{F}$ y $x_0 \in X$. Una intersección finita de conjuntos de la forma 1.2 para $x_0 \in X$, $\epsilon > 0$ y $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{F}$ fijos será denotada como $V(x_0; f_1, \ldots, f_n, \epsilon)$. Es decir,

$$V(x_0; f_1, \ldots, f_n, \epsilon) = \{x \in X : |f_i(x) - f_i(x_0)| < \epsilon,\ i = 1, \ldots, n\} \tag{1.3}$$

Establezcamos algunas propiedades de los conjuntos de la forma 1.3.

1. Obviamente $x_0 \in V(x_0; f_1, \ldots, f_n, \epsilon)$.

2. Dados $V(x_0; f_1, \ldots, f_n, \epsilon_1)$ y $V(x_0; g_1, \ldots, g_m, \epsilon_2)$ entonces

   $$V(x_0; f_1, \ldots, f_n, g_1, \ldots, g_{m,} \text{mín}(\epsilon_1, \epsilon_2)) \subseteq V(x_0; f_1, \ldots, f_n, \epsilon_1) \cap V(x_0; g_1, \ldots, g_m, \epsilon_2)$$

   En efecto, si $x \in V(x_0; f_1, \ldots, f_n, g_1, \ldots, g_{m,} \text{mín}(\epsilon_1, \epsilon_2))$ entonces

   $$|f_i(x) - f_i(x_0)| < \text{mín}(\epsilon_1, \epsilon_2) \leq \epsilon_1 \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

   y

   $$|g_i(x) - g_i(x_0)| < \text{mín}(\epsilon_1, \epsilon_2) \leq \epsilon_2 \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

   así que $x \in V(x_0; f_1, \ldots, f_n, \epsilon_1) \cap V(x_0; g_1, \ldots, g_n, \epsilon_2)$.

3. Si $x_1 \in V(x_0; f_1, \ldots, f_n, \epsilon)$, entonces existe $\delta > 0$ tal que

   $$V(x_1; f_1, \ldots, f_n, \delta) \subseteq V(x_0; f_1, \ldots, f_n, \epsilon)$$

   En efecto si $\delta \in (0, \epsilon - d)$, donde $d = \text{máx}_i |f_i(x_1) - f_i(x_0)|$ entonces para $x \in V(x_1; f_1, \ldots, f_n, \delta)$ se tiene que

   $$|f_i(x) - f_i(x_1)| < \delta \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

por tanto

$$|f_i(x) - f_i(x_0)| \leq |f_i(x) - f_i(x_1)| + |f_i(x_1) - f(x_0)| < \delta + d < \epsilon$$

para $i = 1, \ldots, n$, y entonces $x \in V(x_0; f_1, \ldots, f_n, \epsilon)$.

Recordemos que la topología débil generada por la familia $\mathcal{F}$ consiste en subconjuntos de X que son uniones arbitrarias de intersecciones finitas de conjuntos de la forma 1.2. Las intersecciones finitas de conjuntos de la forma 1.2 son de la forma 1.3. Ahora, si $x_0, y_0 \in X$, $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$ y $f_1, \ldots, f_n, g_1, \ldots, g_m \in \mathcal{F}$ consideremos

$$V(x_0; f_1, \ldots, f_n, \epsilon_1) \cap V(y_0; g_1, \ldots, g_m, \epsilon_2)$$

y supongamos que x_1 pertenece a esta intersección. Entonces por la propiedad (3), existen $\delta_1, \delta_2 > 0$ tales que

$$V(x_1; f_1, \ldots, f_n, \delta_1) \subseteq V(x_0; f_1, \ldots, f_n, \epsilon_1)$$

y

$$V(x_1; g_1, \ldots, g_m, \delta_2) \subseteq V(x_0; g_1, \ldots, g_m, \epsilon_2)$$

entonces por las propiedades (1) y (2) se tiene que

$$V(x_1; f_1, \ldots, f_n, g_1, \ldots, g_{m,} \operatorname{mín}(\delta_1, \delta_2)) \subseteq V(x_1; f_1, \ldots, f_n, \delta_1) \cap V(x_1; g_1, \ldots, g_m, \delta_2)$$

y por lo tanto

$$x_1 \in V(x_0; f_1, \ldots, f_n, \epsilon_1) \cap V(y_0; g_1, \ldots, g_m, \epsilon_2)$$

Así que por el teorema 1.8 los conjuntos de la forma 1.3 forman una base para una topología de X, y por la manera en la que están dados dicha topología resulta ser la topología débil generada por $\mathcal{F}$.

Ahora, si en lugar de considerar un conjunto arbitrario consideramos a X^*, el primer dual de un espacio vectorial normado $(X, \|\cdot\|)$, y a la familia de funciones (de X^* en $\mathbb{C}$) $\widehat{X} = \{\widehat{x} \in X^{**} : x \in X\}$, donde $\widehat{}$ es la transformación natural entre X y su segundo dual que se definió en la sección pasada, la topología para X^* generada por $\widehat{X}$ es la llamada topología débil$-*$, a la que denotaremos por w^*. Como para cada $x \in X$ la transformación $\widehat{x}$ es continua en la norma $\|\cdot\|_*$ de X^*, la topología débil$-*$ es más “débil"(en el sentido de que tiene menos abiertos) que la topológía τ_{d^*} (inducida por la métrica d^*, la que a su vez está generada por la norma $\|\cdot\|_*$), es decir, $w^* \subset \tau_{d^*}$. Notemos que en este caso los conjuntos básicos de la forma 1.3 están dados como

$$\begin{aligned} V(f_0; \hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n, \epsilon) &= \{f \in X^* : |\hat{x}_i(f) - \hat{x}_i(f_0)| < \epsilon,\ i = 1, \ldots, n\} \\ &= \{f \in X^* : |f(x_i) - f_0(x_i)| < \epsilon,\ i = 1, \ldots, n\} \end{aligned}$$

para $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_n \in X$, $f_0 \in X^*$ y $\epsilon > 0$.

En la siguiente proposición se demuestran dos propiedades importantes de la topología débil$-*$.

Proposición 1.8 *Si* $(X, \|\cdot\|)$ *es un espacio vectorial normado entonces* (X^*, w^*) *es un espacio vectorial topológico con las operaciones definidas en* $(X^*, \|\cdot\|)$*, Hausdorff y localmente convexo.*

Demostración. Veamos que la función suma s y la función multiplicación por escalar m son continuas en $(X^*, w^*) \times (X^*, w^*)$ y en $\mathbb{C} \times (X^*, w^*)$ respectivamente.
Sea $(f_1, f_2) \in (X^*, w^*) \times (X^*, w^*)$ y sean $n \in \mathbb{N}, x_1, \ldots, x_n \in X$ y $\epsilon > 0$, entonces si $(g_1, g_2) \in V(f_1; \hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n, \epsilon/2) \times V(f_2; \hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n, \epsilon/2)$ se tiene que

$$|g_1(x_i) - f_1(x_i)| < \epsilon/2$$

y

$$|g_2(x_i) - f_2(x_i)| < \epsilon/2$$

para $i = 1, \ldots, n$. Entonces

$$|(g_1 + g_2)(x_i) - (f_1 + f_2)(x_i)| \leq |g_1(x_i) - f_1(x_i)| + |g_2(x_i) - f_2(x_i)| < \epsilon$$

es decir, $g_1 + g_2 \in V(f_1 + f_2; \hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n, \epsilon)$, o bien,

$$(f_1, f_2) \in V(f_1; \hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n, \epsilon/2) \times V(f_2; \hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n, \epsilon/2) \subseteq s^{-1}(V(f_1 + f_2; \hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n, \epsilon))$$

y como $V(f_1+f_2; \hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n, \epsilon)$ es un abierto básico se concluye que s es continua en $(X^*, w^*) \times (X^*, w^*)$
Ahora sea $(\alpha, f) \in \mathbb{C} \times (X^*, w^*)$ y sean $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_n \in X$ y $\epsilon > 0$. Si

$$\delta = \frac{\epsilon}{2((\max_{1 \leq i \leq n} |f(x_i)|) + 1)}$$

entonces existe $M > 0$ tal que para todo $\beta \in B_\delta(\alpha)$ $|\beta| \leq M$. Así, sea $(\beta, g) \in B_\delta(\alpha) \times V(f; \hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n, \epsilon/2M)$ entonces para $i = 1, \ldots, n$

$$\begin{aligned}
|\beta g(x_i) - \alpha f(x_i)| &\leq |\beta g(x_i) - \beta f(x_i)| + |\beta f(x_i) - \alpha f(x_i)| \\
&= |\beta|\,|g(x_i) - f(x_i)| + |\beta - \alpha|\,|f(x_i)| \\
&\leq M\frac{\epsilon}{2M} + \frac{\epsilon}{2((\max_{1 \leq i \leq n} |f(x_i)|) + 1)}\,|f(x_i)| \\
&< \epsilon
\end{aligned}$$

entonces $\beta g \in V(\alpha f; \hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n, \epsilon)$, por lo que $(\alpha, f) \in B_\delta(\alpha) \times V(f; \hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n, \epsilon/2M) \subseteq m^{-1}(V(\alpha f; \hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n, \epsilon)$. Y dado que $V(\alpha f; \hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n, \epsilon)$ es un abierto básico de (X^*, w^*) la función m es continua en $\mathbb{C} \times (X^*, w^*)$.
Por otro lado, sean $f, g \in (X^*, w^*)$ con $f \neq g$, entonces existe $x_0 \in X$ tal que $f(x_o) \neq g(x_0)$. Como $\mathbb{C}$ es un espacio métrico existe $\epsilon > 0$ tal que

$$B_\epsilon(f(x_0)) \cap B_\epsilon(g(x_0)) = \varnothing$$

entonces $V(f;\hat{x}_0,\epsilon)\cap V(g;\hat{x}_0,\epsilon)=\varnothing$. Pues si existiera $h\in V(f;\hat{x}_0,\epsilon)\cap V(g;\hat{x}_0,\epsilon)$ entonces

$$|h(x_0)-f(x_0)|<\epsilon$$

y

$$|h(x_0)-g(x_0)|<\epsilon$$

lo cual no es posible. Por lo tanto (X^*,w^*) es un espacio Hausdorff.
Resta probar que (X^*,w^*) es localmente convexo. Para ello tomemos $f\in X^*$ y $U\in N(f)$; como U es una vecindad de f existen $n\in\mathbb{N}$, $\epsilon>0$ y $x_1,\ldots,x_n\in X$ tales que $V(f;\hat{x}_1,\ldots,\hat{x}_n,\epsilon)\subseteq U$. Ahora, sean $\alpha,\beta\in[0,1]$ tales que $\alpha+\beta=1$, y $g_{1,}g_2\in V(f;\hat{x}_1,\ldots,\hat{x}_n,\epsilon)$ entonces, si $i=1,\ldots,n$,

$$\begin{aligned}|\alpha g_1(x_i)+\beta g_2(x_i)-f(x_i)| &= |\alpha g_1(x_i)+\beta g_2(x_i)-(\alpha+\beta)f(x_i)|\\ &\leq |\alpha g_1(x_i)-\alpha f(x_i)|+|\beta g_2(x_i)-\beta f(x_i)|\\ &\leq \alpha\,|g_1(x_i)-f(x_i)|+\beta|g_2(x_i)-f(x_i)|\\ &< (\alpha+\beta)\epsilon=\epsilon\end{aligned}$$

por lo tanto $\alpha g_1+\beta g_2\in V(f;\hat{x}_1,\ldots,\hat{x}_n,\epsilon)$, es decir, $V(f;\hat{x}_1,\ldots,\hat{x}_n,\epsilon)$ es una vecindad convexa de f contenida en U. ■

El resultado que sigue, concerniente al espacio (X^*,w^*), será de mucha trascendencia en esta tesis. La demostración se puede encontrar en [Bachman].

Teorema 1.9 (Banach-Alauglu) *Sea $(X,\|\cdot\|)$ espacio vectorial normado. La bola unitaria cerrada,*

$$B_1[0]=\{f\in X^*:\|f\|\leq 1\}$$

de X^* es compacta en la topología débil$-*$.

1.4. El espacio $C_c(X)$

Definición 1.11 *El soporte de una función compleja f definida en un espacio topológico X es la cerradura del conjunto*

$$\{x\in X:f(x)\neq 0\}$$

y se le denotará como $\operatorname{supp}(f)$. *A la colección de funciones continuas de valores complejos en X con soporte compacto se le denotará por $C_c(X)$.*

Proposición 1.9 *Sea X un espacio topológico. El conjunto $C_c(X)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ con las operaciones usuales entre funciones.*

Demostración. Es suficiente con demostrar que $C_c(X)$ es cerrado bajo la suma y bajo la multiplicación por escalares, pues es fácil ver que el espacio de todas las funciones continuas en X, $C(X)$, es un espacio vectorial.

Sean $f, g \in C_c(X)$ entonces $f+g$ es continua en X. Ahora, sea $x \in \operatorname{supp}(f+g)$ entonces dado $U \subseteq X$ abierto con $x \in U$ existe $y \in U$ tal que $(f+g)(y) = f(y)+g(y) \neq 0$, por lo que $f(y) \neq 0$ ó $g(y) \neq 0$, así que $y \in U \cap (\{w \in X : f(x) \neq 0\} \cup \{w \in X : g(x) \neq 0\})$ y por tanto $x \in \operatorname{supp}(f) \cup \operatorname{supp}(g)$, es decir, $\operatorname{supp}(f+g) \subseteq \operatorname{supp}(f) \cup \operatorname{supp}(g)$, y como $\operatorname{supp}(f)$ y $\operatorname{supp}(g)$ son compactos y $\operatorname{supp}(f+g)$ es cerrado en $\operatorname{supp}(f) \cup \operatorname{supp}(g)$, entonces $\operatorname{supp}(f+g)$ es compacto.
Por otra parte sean $\alpha \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ y $f \in C_c(X)$ entonces αf es continua en X, además $\operatorname{supp}(\alpha f) = \operatorname{supp}(f)$. En efecto, si $x \in \operatorname{supp}(f)$ y $U \subseteq X$ es un abierto con $x \in U$ entonces existe $y \in U$ tal que $f(y) \neq 0$ así que $(\alpha f)(y) = \alpha f(y) \neq 0$, con lo que se tiene que $x \in \operatorname{supp}(\alpha f)$. Conversamente si $x \in \operatorname{supp}(\alpha f)$ y $V \subseteq X$ es un abierto con $x \in V$ entonces existe $w \in V$ tal que $(\alpha f)(w) \neq 0$ y por tanto $f(w) \neq 0$ así que $x \in \operatorname{supp}(f)$. Si $\alpha = 0$ entonces $(\alpha f)(x) = 0$ para todo $x \in X$, así que $\operatorname{supp}(\alpha f) = \varnothing$, y por lo tanto $\operatorname{supp}(\alpha f)$ es compacto. ■

De hecho el espacio $C_c(X)$ resulta ser un espacio vectorial normado con la norma del supremo, es decir, para cada $f \in C_c(X)$

$$\|f\| = \text{máx}\{|f(x)| : x \in X\}$$

1.5. El espacio $H(D)$

En esta sección se establecerá la estructura del conjunto

$$H(D) = \{f \in C(D) : f \text{ es analítica en } D\}$$

como espacio vectorial topológico. También se trataran algunos de los teoremas más importantes relacionados con éste y finalmete se introducirá el concepto de subordinación.

1.5.1. $H(D)$ como espacio métrico

Aquí se describirá la estructura de $H(D)$ como espacio métrico. Se mostrará que la topología en $H(D)$ está dada por una métrica en la que la convergencia de una sucesión es equivalente la a convergencia uniforme en subconjuntos compactos de D. Previo a introducir esta métrica son necesarios algunos resultados auxiliares.

Proposición 1.10 *Sea $\varnothing \neq \Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto. Existe una sucesión de compactos $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ (contenidos en Ω) tal que:*

1. *$\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ cubre a Ω y para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $E_n \subseteq int(E_{n+1})$*
2. *Si $E \subseteq \Omega$ es compacto entonces $E \subseteq K_n$ para alguna $n \in \mathbb{N}$*

Demostración. Si $\Omega = \mathbb{C}$ es claro, así que supongamos que $\Omega \neq \mathbb{C}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea

$$E_n = \left\{ z \in \Omega : d(z, \mathbb{C}\backslash\Omega) \geq \frac{1}{n} \right\} \cap B_n[0]$$

donde $d(z,\mathbb{C}\backslash\Omega) = \text{ínf}\{|z-w| : w \in \mathbb{C}\backslash\Omega\}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ el conjunto E_n está acotado y es la intersección de dos cerrados y por lo tanto es compacto. Además para cualquier $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\left\{z \in \Omega : d(z,\mathbb{C}\backslash\Omega) \geq \frac{1}{n}\right\} \subseteq \left\{z \in \Omega : d(z,\mathbb{C}\backslash\Omega) > \frac{1}{n+1}\right\}$$

por lo que $E_n \subseteq \left\{z \in \Omega : d(z,\mathbb{C}\backslash\Omega) > \frac{1}{n+1}\right\} \cap B_{n+1}(0) \subseteq E_{n+1}$ y por lo tanto $E_n \subseteq int(E_{n+1})$. Sea ahora $z \in \Omega$, como $d(z,\mathbb{C}\backslash\Omega) > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $d(z,\mathbb{C}\backslash\Omega) \geq \frac{1}{n}$ y también existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $z \in B_m(0)$ así que $z \in E_{\text{máx}(m,n)}$ por lo que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n = \Omega$.
Sea $E \subseteq \Omega$ compacto. Dado que $\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} int(E_n)$ existen y $n_1, \ldots, n_l \in \mathbb{N}$ tales que $E \subseteq int(E_{n_1}) \cup \cdots \cup int(E_{n_l})$ así que $E \subseteq E_N$ con $N = \text{máx}\{n_1, \ldots, n_l\}$. ■

Como D es abierto la proposición 1.10 asegura que existe una sucesión creciente de compactos $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con las propiedades (1) y (2). Definamos

$$\rho_{En}(f,g) = \sup\{|f(z) - g(z)| : z \in E_n\}$$

para cualesquiera $f, g \in C(D)$ y $n \in \mathbb{N}$. Si también se define

$$\rho(f,g) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n} \frac{\rho_n(f,g)}{1 + \rho_n(f,g)}$$

entonces ρ es una métrica para el espacio de todas las funciones continuas definidas en D (a este espacio se le denotará como $C(D)$). Esta afirmación se sigue de que ρ_{En} es una métrica en el espacio $C(E_n)$ y de que $D = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$.

Lo que sigue es mostrar que la convergencia de sucesiones según ρ en $C(D)$ es equivalente a la convergencia uniforme en subconjuntos compactos de D.

La siguiente proposición permite entender el comportamiento de ρ y de hecho a partir de ésta se caracterizarán los abiertos en $(C(D), \rho)$.

Proposición 1.11 *Para cualquier $\epsilon > 0$ existen $E \subseteq D$ compacto y $\delta > 0$ tales que si*

$$\rho_E(f,g) = \sup\{|f(z) - g(z)| : z \in E\} < \delta$$

entonces $\rho(f,g) < \epsilon$. Reciprocamente dados $\delta > 0$ y $E \subseteq \Omega$ compacto existe $\epsilon > 0$ tal que si $\rho(f,g) < \epsilon$ entonces $\rho_E(f,g) < \delta$.

Demostración. Sea $\epsilon > 0$. Sabemos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n>N} \frac{1}{2^n} < \frac{\epsilon}{2}$, así sea $E = E_N$. Por otro lado como $\text{lím}_{t\to 0^+} \frac{t}{1+t} = 0$ existe $\delta > 0$ tal que $0 < t < \delta$ implica $\frac{t}{1+t} < \frac{\epsilon}{2}$. Ahora, si f y g son tales que $\rho_E(f,g) = \rho_{E_N}(f,g) < \delta$ entonces $\frac{\rho_{E_n}(f,g)}{1+\rho_{E_n}(f,g)} < \frac{\epsilon}{2}$ para $n = 1, \ldots, N$. Por lo tanto

$$\rho(f,g) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n} \rho_n(f,g) \leq \frac{\epsilon}{2} \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n} < \epsilon$$

Por otro lado sean $\delta > 0$ y $E \subseteq D$ compacto.por la proposición 1.10 existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $E \subseteq E_N$. Como $\lim_{t\to 0^+} \frac{2^N t}{1-2^N t} = 0$ existe $\epsilon > 0$ tal que $0 < t < \epsilon$ implica $0 < \frac{2^N t}{1-2^N t} < \delta$. Así si $f, g \in H(D)$ son tales que $\rho(f,g) < \epsilon$ entonces $\frac{1}{2^N} \frac{\rho_{EN}(f,g)}{1+\rho_{E_N}(f,g)} < \epsilon$ con lo que se tiene que

$$\rho_E(f,g) = \frac{2^N \left(\frac{1}{2^N} \frac{\rho_{EN}(f,g)}{1+\rho_{E_N}(f,g)} \right)}{1 - 2^N \left(\frac{1}{2^N} \frac{\rho_{EN}(f,g)}{1+\rho_{E_N}(f,g)} \right)} < \delta$$

■

Teorema 1.10 *Sea $U \subseteq C(D)$. Entonces:*

1. *U es abierto en $(C(D), \rho)$ si y sólo si para cada $f \in U$ existen $E \subseteq D$ compacto y $\delta > 0$ tales que $\{g \in C(D) : \rho_E(g,f) < \delta\} \subseteq U$*

2. *si $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $C(D)$, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $f \in C(D)$ según ρ si y sólo si $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a f sobre cualquier E subconjunto compacto de D.*

Demostración. (1) Sea $U \subseteq C(D)$ abierto en $(C(D), \rho)$ y $f \in U$ entonces existe $\epsilon > 0$ tal que si $g \in C(D)$ cumple con $\rho(f,g) < \epsilon$ entonces $g \in U$. Por la proposición 1.11 existen $\delta > 0$ y $E \subseteq D$ compacto tales que si $\rho_E(g,f) < \delta$ entonces $\rho(f,g) < \epsilon$ por lo tanto $\{g \in C(D) : \rho_E(g,f) < \delta\} \subseteq U$.
Supongamos ahora que para cada $f \in U$ existen $E \subseteq D$ compacto y $\delta > 0$ tales que $\{g \in C(D) : \rho_E(g,f) < \delta\} \subseteq U$. Por la proposición 1.11 existe $\epsilon > 0$ tal que si g satisface que $\rho(g,f) < \epsilon$ entonces $\rho_E(g,f) < \delta$, así

$$\{g \in C(D) : \rho(g,f) < \epsilon\} \subseteq \{g \in C(D) : \rho_E(g,f) < \delta\} \subseteq U$$

es decir, U es abierto en $C(D)$.
(2) Supongamos que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $f \in C(D)$ según ρ. Sea $E \subseteq D$ compacto y $\epsilon > 0$, por la proposición 1.11 existe δ tal que si $\rho(g,f) < \delta$ entonces $\rho_E(g,f) < \epsilon$. Como $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a f existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ entonces $\rho(f_n, f) < \delta$ de donde se sigue que $\rho_E(f_n, f) < \epsilon$, esto es $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a f en E.
Sea $\epsilon > 0$, de nuevo por la proposición 1.11 existen $\delta > 0$ y $E \subseteq D$ compacto tales que $\rho_E(g,f) < \delta$ implica $\rho(g,f) < \epsilon$. Por hipótesis $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a f en E así que de la parte (a) se sigue directamente que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a f según ρ. ■

Como consecuencia del teorema anterior se tiene que la métrica ρ no depende de la sucesión de compactos que la definen, pues la parte (a) caracteriza los abiertos de $(C(D), \rho)$ de manera independiente de la sucesión que genera a ρ. Por ello cada vez que se considere a $C(D)$ como espacio métrico se hará el supuesto de que la métrica ρ está definida por una sucesión $\{E_n\}$de compactos que cubren a D y que además satisfacen que $E_n \subseteq E_{n+1}$ para $n \in \mathbb{N}$.

Proposición 1.12 *El espacio $C(D)$ es un espacio métrico completo.*

Demostración. Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en el espacio $C(D)$. De la proposición 1.11 se sigue que para cada $E \subseteq D$ compacto las funciones f_n restringidas a E forman una sucesión de Cauchy en $C(E)$. Es decir, para $\delta > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $m > n \geq N$ entonces

$$\rho_E(f_m, f_n) < \delta$$

Entonces para cada $z \in E$ existe $f(z) \in \mathbb{C}$ tal que la sucesión $\{f_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $f(z)$. Esto induce una función de D en $\mathbb{C}$, se probara que $f \in C(D)$ y que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a f según ρ.
Sea $E \subseteq D$ compacto, $\delta > 0$ y N un natural tal que $\rho_E(f_m, f_n) < \delta$ para $m, n \geq N$ si $z \in K$ existe $n_z \geq N$ tal que $|f_{n_z}(z) - f(z)| < \delta$ de modo que si $n \geq N$ se tiene que

$$|f_n(z) - f(z)| \leq |f_n(z) - f_{n_z}(z)| + |f_{n_z}(z) - f(z)| < 2\delta$$

como N no depende de z se concluye que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a f en E. Y por el teorema 1.10 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a f según ρ. Ahora, como f es límite uniforme en subconjuntos comactos de D de sucesiones de funciones continuas f debe ser continua en D. ■

Por el hecho de que el espacio de funciones analíticas $H(D)$ es un subespacio de $C(D)$ se tiene de forma directa que ρ restringida a $H(D)$ es una métrica. Aún más $H(D)$ es cerrado en $C(D)$, con que se tiene que $(H(D), \rho)$ es un espacio métrico completo. La afirmación anterior se fundamenta en el siguiente teorema.

Teorema 1.11 *Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $H(D)$. Si $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a f en $C(D)$ entonces $f \in H(D)$. Además $\left\{f_n^{(k)}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $f^{(k)}$ para toda $k \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Sea $\Gamma \subseteq D$ una curva cerrada por el teorema de Cauchy se tiene que

$$\int_\Gamma f_n(z)dz = 0$$

para toda $n \in \mathbb{N}$. Así que de la compacidad de Γ y de la convergencia de $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ se sigue que

$$0 = \lim_{n\to\infty} \int_\Gamma f_n(z)dz = \int_\Gamma f(z)dz$$

Por tanto del teorema de Morera se tiene que f es análitica en D.
Por otra parte sea k un natural dado y sea $0 < r < 1$ entonces existe $r < R < 1$ tal que $B_r[0] \subseteq B_R[0] \subseteq D$, por la formula integral de Cauchy

$$\left|f_n^k(z) - f^k(z)\right| \leq \frac{k!}{2\pi} \int\limits_{|\xi|=R} \frac{|f_n(\xi) - f(\xi)|}{|\xi - z|^{k+1}} |d\xi| \leq \frac{k! M_n R}{(R-r)^{k+1}}$$

para toda $z \in B_r[0]$, donde $M_n = \sup\{|f_n(w) - f(w)| : |w| = R\}$. Dado que $M_n \to 0$ se tiene que $\left\{f_n^{(k)}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformente a f^k y por lo tanto $\left\{f_n^{(k)}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a f^k según ρ. ■

Corolario 1.1 *El espacio $H(D)$ es métrico completo.*

Demostración. Es inmediato de la proposición 1.12 y el teorema 1.11. ■

1.5.2. $H(D)$ como espacio vectorial topológico

Aquí se probará que $H(D)$ admite estructura de espacio vectorial topológico localmente convexo. En la sección anterior se demostró que el espacio $H(D)$ es un espacio métrico y es claro que es una espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ con las operaciones usuales de suma y producto por escalar (de hecho es un subespacio de $C(D)$). Así que resta verificar que dichas operaciones resultan continuas de acuerdo a la topología inducida por la métrica ρ en $H(D)$.

Veamos primero que la suma de funciones es continua en $H(D) \times H(D)$. Denotemos por s a la suma de dos elementos de $H(D)$, esto es si $f, g \in H(D)$ entonces $s(f,g) = f + g$, con $+$ la suma usual de funciones. Sea $U \subseteq H(D)$ abierto dado que $H(D)$ es un subespacio (topológico) de $C(D)$ existe $V \subseteq C(D)$ abierto tal que $U = V \cap H(D)$. Sea $(f,g) \in s^{-1}(U)$ por el teorema 1.10 existen $\delta > 0$ y $E \subseteq D$ compacto tales que el

$$\{h \in C(D) : \rho_E(h, f+g) < \delta\} \subseteq V$$

Así sean $W_1 = \{h \in C(D) : \rho_E(h,f) < \delta/4\} \cap H(D)$ y $W_2 = \{h \in C(D) : \rho_E(h,g) < \delta/4\} \cap H(D)$ de nuevo por el teorema 1.10 W_1 y W_2 son abiertos en $H(D)$ además para $(h_1, h_2) \in W_1 \times W_2$ y $z \in E$ se tiene que

$$|(h_1 + h_2)(z) - (f+g)(z)| \leq |h_1(z) - f(z)| + |h_2(z) - g(z)| \leq \rho_E(h_1, f) + \rho_E(h_2, g) < \delta/2$$

lo que implica que $\rho_E(h_1 + h_2, f + g) < \delta$ o bien que $(f,g) \in W_1 \times W_2 \subseteq s^{-1}(U)$.

Verifiquemos ahora que el producto por un escalar define una función continua en $\mathbb{C} \times H(D)$. Denotemos por m a dicha función, es decir, $m(\alpha, f) = \alpha f$ para $\alpha \in \mathbb{C}$ y $f \in H(D)$. Sea $U \subseteq H(D)$ abierto entonces $U = V \cap H(D)$.para algún $V \subseteq C(D)$ abierto. Sea $(\alpha, f) \in m^{-1}(U)$ por el teorema 1.10 existen $\delta > 0$ y $E \subseteq D$ compacto tales que el conjunto $\{h \in C(D) : \rho_E(h, \alpha f) < \delta\}$ está contenido en V.

Sean $W_1 = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - \alpha| < \delta/(4(M+1))\}$ con $M = \sup\{|f(z)| : z \in E\}$ y $W_2 = \{h \in C(D) : \rho_E(h,f) < \delta/(4(|\alpha|+1))\} \cap H(D)$ entonces W_1 y W_2 son abiertos en $\mathbb{C}$ y en $H(D)$ respectivamente además para $(\lambda, g) \in W_1 \times W_2$ y $z \in E$ se tiene que

$$|(\lambda g)(z) - (\alpha f)(z)| \leq |f(z)|\,|\lambda - \alpha| + |\alpha|\,|g(z) - f(z)| < M\frac{\delta}{4(M+1)} + |\alpha|\,\frac{\delta}{4(|\alpha|+1)} < \frac{\delta}{2}$$

por lo que $\rho_E(\lambda g, \alpha f) < \delta$. De modo que $(\alpha, f) \in W_1 \times W_2 \subseteq m^{-1}(U)$.

En este trabajo el Teorema de Krein Milman juega un papel importante y es por esto que resulta necesario que el espacio $H(D)$ satisfaga sus hipótesis. Ya se vió que admite estructura de espacio vectorial topológico por lo que resta verificar que es localmente convexo.

Sea $f \in H(D)$ y sea $E = B_{1/2}[0]$ entonces $V = \{h \in C(D) : \rho_E(h, f) < 1/2\} \cap H(D)$ es una vecindad abierta y convexa de f. En efecto sean $t \in [0, 1]$ y $g, h \in V$ entonces para $z \in E$ se tiene que

$$|(tg + (1-t)h)(z) - f(z)| \leq t\,|g(z) - f(z)| + (1-t)\,|h(z) - f(z)| \leq t\rho_E(g, f) + (1-t)\rho_E(h, f)$$

por lo tanto $\rho_E((tg + (1-t)h), f) \leq t\rho_E(g, f) + (1-t)\rho_E(h, f) < 1/2$.

1.5.3. El teorema de Montel en $H(D)$

En esta sección se probará, con base en el teorema general de Montel, la versión que se utiliza en este trabajo.

Definición 1.12 *Sea $\mathcal{F} \subseteq C(D)$. Decimos que $\mathcal{F}$es normal si cualquier sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión convergente a un elemento f en $C(D)$.*

La siguiente proposición es una consecuencia inmediata de la definición de normalidad y del hecho de que $C(D)$ es un espacio métrico.

Proposición 1.13 *Sea $\mathcal{F} \subseteq C(D)$. $\mathcal{F}$es normal si y sólo si la cerradura de $\mathcal{F}$ es compacta.*

Definición 1.13 *Un conjunto $\mathcal{F} \subseteq H(D)$ es localmente acotado si para todo $a \in D$ existen $r > 0$ y $M > 0$ tales que*

$$|f(z)| \leq M$$

para toda $z \in B_r(a)$ y $f \in \mathcal{F}$.

Esto es, una colección $\mathcal{F}$ es localmente acotada si alrededor de cada punto en D existe una bola en la que $\mathcal{F}$ es uniformemente acotada y de hecho esta condición resulta ser equivalente a que $\mathcal{F}$ sea uniformemente acotada en subconjuntos compactos de D. Este resultado se establece en la siguiente proposición.

Proposición 1.14 *Sea $\mathcal{F} \subseteq C(D)$. $\mathcal{F}$es localmente acotada si y sólo si para todo $E \subseteq D$ compacto existe $M > 0$ tal que*

$$\sup\{|f(z)| : z \in E \ y \ f \in \mathcal{F}\} \leq M$$

Demostración. Supongamos que $\mathcal{F}$ es localmente acotada. Sea $E \subseteq D$ compacto, entonces existen $z_1, \ldots, z_l \in E$, $r_i > 0$ y $M_i > 0$ tales que $E \subseteq \bigcup_{i=1}^{l} B_{r_i}(z_i)$ y $|f(z)| \leq M_i$ si $z \in B_{r_i}(z_i)$ y $f \in \mathcal{F}$ para $i = 1, \ldots, l$. Así si $M = \max\{M_i : i = 1, \ldots, m\}$ para $z \in E$ se tiene que

$$|f(z)| \leq M$$

si $f \in \mathcal{F}$.
Reciprocámente supongamos que para cualquier compacto $E \subseteq D$ existe $M > 0$ tal que

$\sup\{|f(z)| : z \in E \text{ y } f \in \mathcal{F}\} \leq M$. Sea $z_0 \in D$ y $r > 0$ tal que $B_r[z_0] \subseteq D$ entonces existe $M > 0$ tal que $\sup\{|f(z)| : z \in B_r[z_0] \text{ y } f \in \mathcal{F}\} \leq M$, por lo tanto si $z \in B_{r/2}(z_0)$ se tiene que

$$|f(z)| \leq M$$

si $f \in \mathcal{F}$. ■

Una vez que se introdujeron los conceptos de normalidad y de colección localmente acotada en $H(D)$ se enunciara la forma más general del teorema de Montel a partir de la cual se probará la versión que se utilizara en el contexto de este trabajo.

Teorema 1.12 (Teorema de Montel) *Una colección $\mathcal{F}$ en $H(D)$ es normal si y sólo si es localmente acotada.*

La demostración puede consultarse en [referencia Conway]. Pero aqui se demostrará el siguiente corolario.

Teorema 1.13 *Sea $\mathcal{F} \subseteq H(D)$. $\mathcal{F}$ es compacto si y sólo si $\mathcal{F}$ es cerrado y localmente acotado.*

Demostración. Supongamos que $\mathcal{F}$ es compacto, como $H(D)$ es métrico $\mathcal{F}$ es cerrado. Si suponemos que $\mathcal{F}$ no es localmente acotado existiría $E \subseteq D$ compacto tal que el supremo de el conjunto $\{|f(z)| : z \in E \text{ y } f \in \mathcal{F}\}$ no es finito. Es decir, para cada $n \in \mathbb{N}$ podriamos encontrar $f_n \in \mathcal{F}$ y $z_n \in E$ tales que $|f_n(z_n)| \geq n$. Ahora, como E es compacto existen $z_0 \in E$ y $\{z_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ subsucesión de $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$tales que $\{z_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a z_0. Por el mismo argumento existe $\left\{f_{n_{k_l}}\right\}_{l\in\mathbb{N}}$ subsucesión de $\{f_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$y $f \in \mathcal{F}$ tales que $\left\{f_{n_{k_l}}\right\}_{l\in\mathbb{N}}$ converge a f en $H(D)$. Nótese que para cada $l \in \mathbb{N}$ se cumple que $\left|f_{n_{k_l}}(z_{n_{k_l}})\right| \geq n_{k_l}$.
Pero por la convergencia uniforme de $\left\{f_{n_{k_l}}\right\}_{l\in\mathbb{N}}$ en E y por el hecho de que $f \in \mathcal{F}$ para $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $l \geq N$ entonces

$$\left|f_{n_{k_l}}(z_{n_{k_l}}) - f(z_0)\right| \leq \left|f_{n_{k_l}}(z_{n_{k_l}}) - f(z_{n_{k_l}})\right| + \left|f(z_{n_{k_l}}) - f(z_0)\right| < \epsilon$$

es decir la $\left\{f_{n_{k_l}}(z_{n_{k_l}})\right\}_{l\in\mathbb{N}}$sucesión converege $f(z_0)$. De esta contradicción concluimos que $\mathcal{F}$ es localmente acotada.
Supongamos ahora que $\mathcal{F}$ es cerrado y localmente acotado. Por el teorema de Montel se tiene que $\mathcal{F}$ es normal, y por ser cerrado es secuencialmente compacto. Y como $H(D)$ es un espacio métrico se tiene que $\mathcal{F}$ es compacto. ■

1.5.4. El concepto de subordinación

En esta sección se introduce el concepto de subordinación y se prueban algunos resultados relacionados con éste. El lema de Schwarz caracteriza a las funciones que van de D en D

y que dejan fijo al cero; pues bien, con el fin de generalizar esta idea es que se surge el concepto de funciones subordinadas. Es decir, dada una función g cuyo dominio es D se busca caracterizar a la funciones que mapean al cero a $g(0)$ y que además son tales que $f(D) \subseteq g(D)$.

Definición 1.14 *Sea $\varphi : D \to D$ analítica. Decimos que φ es una función de Schwarz si $\varphi(0) = 0$.*

Definición 1.15 *Sea $\mathcal{F} \subseteq H(D)$ decimos que $f \in H(D)$ está subordinada a $\mathcal{F}$ ($f \in s(\mathcal{F})$) si existen $g \in \mathcal{F}$ y φ función de Schwarz tales que $f(z) = (g \circ \varphi)(z)$ para toda $z \in D$. Es decir,*

$$s(\mathcal{F}) = \{g \circ \varphi \in H(D) : g \in \mathcal{F} y\ \varphi \text{ es una función de Schwarz}\}$$

En particular si $\mathcal{F} = \{g\}$ decimos que f está subordinada a g.

Nótese que $\mathcal{F} \subset s(\mathcal{F})$ así que cuando se trabaje con colecciones construidas por medio de subordinación se estará tratando con familias de funciones más grandes. Por ejemplo, la colección de funciones de Schwarz puede pensarse como todas la funciones subordinadas a la función identidad en D. En el lema que sigue se caracterizan a las funciones analíticas definidas en D cuya imagen se queda contenida en la imagen de una función inyectiva y analítica g.

Lema 1.7 *Sean $f, g \in H(D)$ con g inyectiva. Si $f(0) = g(0)$ y $f(D) \subseteq g(D)$ entonces f está subordinada a g. Recíprocamente, si f está subordinada a g entonces $f(0) = g(0)$ y $f(D) \subseteq g(D)$.*

Demostración. Sea $\varphi : D \to D$ dada como $\varphi(z) = (g^{-1} \circ f)(z)$ entonces φ está bien definida y es analítica en D, ya que g es univalente en D y $f(D) \subseteq g(D)$. Además $\varphi(0) = (g^{-1} \circ f)(0) = g^{-1}(g(0)) = 0$ y para cada $z \in D$ se tiene que $(g \circ \varphi)(z) = g((g^{-1} \circ f)(z)) = f(z)$. El recíproco se sigue directamente de la definición. ■

De hecho es posible generalizar el lema de Schwarz para el caso de la subordinación ya que si $f \in s(g)$ entonces

$$f'(0) = g'(0)\,\varphi'(0)$$

para alguna función de Schwarz φ. De modo que:

1. $|f'(0)| \leq |g'(0)|$
2. $f(D) \subseteq g(D)$

Notemos también que es posible pensar en la relación dada por medio de la subordinación como una relación reflexiva y transitiva en $H(D)$, o como un operador en la potencia de $H(D)$. En el teorema siguiente se establece que como operador, la subordinación conserva la compacidad, propiedad que resulta esencial en términos de optimización y del teorema de Krein -Milman.

Teorema 1.14 *Si $\mathcal{F} \subseteq H(D)$ compacta entonces $s(\mathcal{F})$ es compacta.*

Demostración. Sea $g \in s(\mathcal{F})$, entonces existen $f \in \mathcal{F}$ y φ función de Schwarz tales que $g = f \circ \varphi$. Ahora si $0 < r < 1$ como $\mathcal{F}$ es localmente acotada existe $M > 0$ tal que $|f(z)| \leq M$ para toda $z \in B_r[0]$ además por el Lema de Schwarz $\varphi\left(B_r[0]\right) \subseteq B_r[0]$ por tanto si $z \in B_r[0]$

$$|g(z)| = |(f \circ \varphi)(z)| \leq M$$

por lo que, $s(\mathcal{F})$ es localmente acotada.
Ahora sea $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$una sucesión de elementos de $s(\mathcal{F})$ que converge a $f \in H(D)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ existen $f_n \in \mathcal{F}$ y φ_n función de Schwarz tales que $g_n = f_n \circ \varphi_n$. Ahora como $\mathcal{F}$ es compacta y la colección de funciones de Schwarz es normal existe una subsucesión $\{g_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}} = \left\{f_{n_k} \circ \varphi_{n_k}\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $\{f_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a $\widetilde{f} \in \mathcal{F}$ y $\left\{\varphi_{n_k}\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a alguna función de Schwarz φ. De esta forma, si $z \in B_r[0]$, con $0 < r < 1$, se tiene que

$$\left|\left(f_{n_k} \circ \varphi_{n_k}\right)(z) - \left(\widetilde{f} \circ \varphi\right)(z)\right| \leq \left|f_{n_k}\left(\varphi_{n_k}(z)\right) - f_{n_k}\left(\varphi(z)\right)\right| + \left|f_{n_k}\left(\varphi(z)\right) - \widetilde{f}\left(\varphi(z)\right)\right|$$

pero $|\varphi(z)| \leq r$ por lo que $\left|f_{n_k}\left(\varphi(z)\right) - \widetilde{f}\left(\varphi(z)\right)\right|$ converge uniformemente a cero en $B_r[0]$; y por el hecho de que $\{f_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge, es una familia equicontinua en $B_r[0]$ de modo que $\left|f_{n_k}\left(\varphi_{n_k}(z)\right) - f_{n_k}\left(\varphi(z)\right)\right|$ converge uniformemente a cero en el mismo conjunto. Por lo tanto $f = \widetilde{f} \circ \varphi$. ∎

Lema 1.8 *Sean $F \in H(D)$ y $f \in \overline{co}(s(F))$. Si $g : D \to \mathbb{C}$ está definida como $g(z) = f \circ \varphi(z)$, para alguna φ función de Schwarz, entonces $g \in \overline{co}(s(F))$.*

Demostración. Como $f \in \overline{co}(s(F))$ existe una sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $co(s(F))$ que converge a f en $H(D)$ (1.4). Dado que para cada $n \in \mathbb{N}$, $f_n \in co(s(F))$, existen $k_n \in \mathbb{N}$, $t_1^{(n)}, \ldots, t_{k_n}^{(n)} \in [0,1]$ con $\sum_{i=1}^{k_n} t_i^{(n)} = 1$ y $\omega_1^{(n)}, \ldots, \omega_{k_n}^{(n)}$ funciones de Schwarz tales que $f_n(z) = \sum_{i=1}^{k_n} t_i^{(n)}(F \circ \omega_i^{(n)})(z)$ (1.2) para $z \in D$. De modo que, $\{f_n \circ \varphi\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $co(s(F))$, pues para cada $n \in \mathbb{N}$ y $z \in D$

$$(f_n \circ \varphi)(z) = \sum_{i=1}^{k_n} t_i^{(n)}(F \circ \omega_i^{(n)})(\varphi(z)) = \sum_{i=1}^{k_n} t_i^{(n)}(F \circ \widetilde{\omega}_i^{(n)})(z)$$

con $\widetilde{\omega}_i^{(n)} = \omega_i^{(n)} \circ \varphi$. Además $\{f_n \circ \varphi\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a g en $H(D)$, ya que si $C \subseteq D$ es compacto, $\varphi(C) \subseteq D$ también lo es y por lo tanto $|(f_n \circ \varphi)(z) - g(z)| = |f_n(\varphi(z)) - f(\varphi(z))|$ converge a cero uniformemente en C. ∎

Capítulo 2

Medidas de probabilidad en espacios compactos

En este capítulo se mostrará que existe una biyección entre el conjunto $\mathbb{P}(X)$ de medidas de probabilidad de un espacio topológico Hausdorff y compacto X, y un subconjunto (P^*) del espacio dual del espacio de funciones continuas de X $(C(X)^*)$. Para ello será necesario enunciar (sin probar) una versión del teorema de representación de Riesz. Posteriormente se probarán algunas propiedades importantes de P^* como el hecho de que es débil$-*$ compacto. Finalmente, se introducen las medidas de Dirac y se verá que los puntos extremos de $\mathbb{P}(X)$ coinciden con estas medidas.

2.1. Teorema de representación de Riesz

Definición 2.1 *Sea $\Lambda : C_c(X) \to \mathbb{C}$ un funcional lineal acotado, con X espacio topológico Hausdorff. Decimos que Λ es un funcional lineal positivo si $\Lambda(f) \geq 0$ para toda $f \in C_c(X)$ tal que $f(X) \subseteq [0, \infty)$.*

Un resultado primordial para el desarrollo de esta tesis es el Teorema de Representación de Riesz. La prueba de la versión que se enuncia a continuación puede consultarse en [Rudin CA].

Teorema 2.1 *Sea X un espacio topologico localmente compacto y Hausdorff y sea Λ un funcional lineal positivo en $C_c(X)$. Entonces, existe una $\sigma-$álgebra $\mathfrak{M}$ en X que contiene a la $\sigma-$álgebra de Borel, y existe una única medida positiva μ en $\mathfrak{M}$ tal que*

1. $\Lambda f = \int\limits_X f d\mu$ *para toda* $f \in C_c(X)$

2. $\mu(K) < \infty$ *para todo* $K \subseteq X$ *compacto*

3. *Para todo* $E \in \mathfrak{M}$ *se tiene que* $\mu(E) = \inf\{\mu(V) : V \supseteq E,\ V \text{ abierto }\}$

4. *La relación* $\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \subseteq E,\ K \text{ compacto } \}$ *se cumple para todo* E *abierto y para todo* $E \in \mathfrak{M}$ *con* $\mu(E) < \infty$

5. *Si* $E \in \mathfrak{M}$, $A \subseteq E$ *y* $\mu(E) = 0$ *entonces* $A \in \mathfrak{M}$.

Aunque la prueba no se va a incluir en este trabajo, es importante rescatar la construcción de la medida cuya existencia garantiza el teorema. Para Λ funcional lineal positivo y $U \subseteq X$ abierto se define,

$$\mu(U) = \sup\{\Lambda f : f \in C_c(X),\ f(X) \subseteq [0,1],\ \mathrm{supp}(f) \subseteq U\}$$

Notemos que si U y V son subconjuntos abiertos de X con $U \subseteq V$, entonces $\mu(U) \leq \mu(V)$. De este modo, si $U \subseteq X$ es abierto, se cumple que,

$$\mu(U) = \inf\{\mu(V) : U \subseteq V,\ V \ \textit{abierto}\}$$

por lo que resulta razonable definir

$$\mu(E) = \inf\{\mu(V) : E \subseteq V,\ V \ \textit{abierto}\}$$

para todo $E \subseteq X$.

A pesar de que μ está definida para todo subconjunto de X, la $\sigma-$aditividad sólo será válida en $\mathfrak{M}$, y como $\mathcal{B}(X) \subseteq \mathfrak{M}$, la restricción de μ a $\mathcal{B}(X)$ es una medida de Borel en X. Además, la integral en la propiedad (1) del teorema, es la integral de $f \in C(X)$ respecto a μ como medida de Borel.

Obviamente la propiedad (1) es de gran interés, sin embargo, otro punto importante a observar es que las propiedades (3) y (4) dan lugar a la siguiente definición:

Definición 2.2 *Sea* $(X, \mathcal{B}(X), \mu)$ *un espacio de medida, con* X *espacio topológico y* $\mathcal{B}(X)$ *la* $\sigma-$*álgebra de Borel en* X*. Decimos que* μ *es una medida Borel regular si*

$$\mu(E) = \inf\{\mu(V) : V \supseteq E, V \ \textit{abierto}\} = \sup\{\mu(K) : K \subseteq E, K \ \textit{compacto}\}$$

para todo $E \in \mathcal{B}(X)$.

Nuestro interés estará centrado en una subclase de las medidas regulares de Borel para un espacio topológico X. Dicha subclase es la de las medidas Borel regulares que además sean de probabilidad y que denotaremos como $\mathbb{P}(X)$. Es decir, por definición:

$$\mu \in \mathbb{P}(X) \text{ si y sólo si } \mu \text{ es Borel regular y } \mu(X) = 1$$

En adelante vamos a considerar espacios topológicos compactos y Hausdorff. En este caso se tiene que $C_c(X) = C(X)$ y además las funciones constantes son parte de este espacio, en partícular la función constante uno. Y de hecho según se vio en el capítulo 1, $C(X)$ es un espacio vectorial normado con la norma del máximo. Ahora, dado que $\mathbb{P}(X)$ será objeto de nustro análisis, lo que sigue es formular y probar una versión adecuada de un teorema de representación.

Teorema 2.2 *Sea X un espacio topológico compacto y Hausdorff y sea $\psi \in C(X)^*$ tal que*

1. *ψ es positivo*
2. *$\psi(\mathbf{1}) = \|\psi\| = 1$, donde $\mathbf{1}$ representa a la función constante 1.*

entonces existe una única $\mu \in \mathbb{P}(X)$ tal que $\psi(f) = \int\limits_X f d\mu$ para toda $f \in C(X)$.

Demostración. Como X es compacto y Hausdorff y ψ es un funcional lineal positivo, por el Teorema de representación de Riesz existe una única medida de Borel μ tal que $\psi(f) = \int\limits_X f d\mu$ para toda $f \in C(X)$. Además, dado que X es compacto, $\mu(X) < \infty$ y por tanto $\mu(E) < \infty$ para todo $E \subseteq X$ boreliano, por lo que μ es una medida de Borel regular. Resta probar que $\mu(X) = 1$.
Recordemos que dado $U \subseteq X$ abierto

$$\mu(U) = \sup\{\psi(f) : f \in C(X),\ f(X) \subseteq [0,1],\ \operatorname{supp}(f) \subseteq U\}$$

de modo que

$$\mu(X) = \sup\{\psi(f) : f \in C(X),\ f(X) \subseteq [0,1]\}$$

Así, sea $f \in C(X)$ tal que $0 \leq f(x) \leq 1$ para todo $x \in X$. Entonces $g \in C(X)$ definida como $g(x) = 1 - f(x)$ es no negativa y como ψ es positivo $\psi(g) \geq 0$, así que $\psi(1) \geq \psi(f)$ y como $\psi(1) = 1$, se tiene que $\mu(X) = 1$. ■

Notemos que el recíproco del teorema anterior también es válido pues dada $\mu \in \mathbb{P}(X)$, si se define $\Psi_\mu : C(X) \to \mathbb{C}$ como $\Psi_\mu(f) = \int_X f d\mu$. Se tiene que Ψ_μ es un funcional lineal positivo ya que si $f \in C(X)$ es tal que $f(X) \subseteq [0, \infty)$ entonces $\Psi_\mu(f) = \int_X f d\mu \geq 0$. Además, $\Psi_\mu \in C(X)^*$ pues si $f \in C(X)$

$$|\Psi_\mu(f)| = \left| \int_X f d\mu \right| \leq \|f\| \int_X d\mu = \|f\|$$

de donde tenemos que $\|\Psi_\mu\| \leq 1$ y como $\Psi_\mu(1) = \int_X d\mu = 1$ entonces, $\|\Psi_\mu\| = 1$.

De este modo, del teorema 2.2 y de la observación anterior concluimos que siempre que X sea compacto, existe una biyección entre $\mathbb{P}(X)$ y el subconjunto de $C(X)^*$ que denotaremos por P^*, y que está definido como

$$P^* = \{\psi \in C(X)^* : \psi \text{ es positivo},\ \psi(1) = \|\psi\| = 1\}$$

Concluimos esta sección con un resultado que establece condiciones suficientes para que dos medidas de probabilidad sean iguales, en el caso de que X sea la frontera del disco unitario.

Proposición 2.1 *Sean $\mu, \lambda \in \mathbb{P}(\partial D)$ tales que*

$$\int_{\partial D} z^n d\mu = \int_{\partial D} z^n d\lambda$$

para toda $n \in \mathbb{N}$. Entonces $\mu = \lambda$.

Demostración. Por el Teorema de representación de Riesz es suficiente demostrar que

$$\int_{\partial D} f(z) d\mu = \int_{\partial D} f(z) d\lambda$$

para toda $f \in C(\partial D)$.
Primero mostraremos que también se cumple que

$$\int_{\partial D} z^{-n} d\mu = \int_{\partial D} z^{-n} d\lambda$$

para toda $n \in \mathbb{N}$. En efecto, se tiene que

$$\begin{aligned}
\int_{\partial D} z^{-n} d\mu &= \int_{\partial D} \overline{z}^n d\mu \\
&= \int_{\partial D} \overline{(z^n)} d\mu \\
&= \int_{\partial D} \operatorname{Re}\left(\overline{(z^n)}\right) d\mu + i \int_{\partial D} \operatorname{Im}\left(\overline{(z^n)}\right) d\mu \\
&= \int_{\partial D} \operatorname{Re}(z^n)\, d\mu - i \int_{\partial D} \operatorname{Im}(z^n)\, d\mu \\
&= \int_{\partial D} \operatorname{Re}(z^n)\, d\lambda - i \int_{\partial D} \operatorname{Im}(z^n)\, d\lambda \qquad (2.1) \\
&= \int_{\partial D} \operatorname{Re}\left(\overline{(z^n)}\right) d\lambda + i \int_{\partial D} \operatorname{Im}\left(\overline{(z^n)}\right) d\lambda \\
&= \int_{\partial D} \overline{(z^n)} d\lambda \\
&= \int_{\partial D} \overline{z}^n d\lambda \\
&= \int_{\partial D} z^{-n} d\lambda
\end{aligned}$$

en donde la identidad 2.1 es consecuencia inmediata de la hipótesis.
Si ahora definimos la colección

$$\mathcal{A} = \left\{ G \in C(\partial D) : G(z) = \sum_{n=-N}^{N} c_n z^n,\ N \in \mathbb{N},\ c_n \in \mathbb{C},\ n = -N, \ldots, N \right\}$$

se tiene que $\mathcal{A}$ es un álgebra autoadjunta (si $G \in \mathcal{A}$ entonces $\overline{G} \in \mathcal{A}$). Además si $a \in \partial D$ la función $G \in \mathcal{A}$ definida como $G(z) = z + a$ es tal que $G(a) = 2a \neq 0$, y si a, b son elementos distintos de ∂D, la función $G_1 \in \mathcal{A}$ dada por $G_1(z) = \frac{z-a}{b-a}$ es tal que $G_1(a) \neq G_2(b)$. Es decir, $\mathcal{A}$ es un álgebra autoadjunta que separa puntos y que no se anula en ningún punto de ∂D, así que por el Teorema de Stone-Weierstrass $\mathcal{A}$ es denso en $C(\partial D)$. Por tanto, de la hipótesis y la primera parte se esta prueba, se cumple que

$$\int_{\partial D} G(z)d\mu = \int_{\partial D} G(z)d\lambda$$

para toda $G \in \mathcal{A}$.
Para $f \in C(\partial D)$ y $\epsilon > 0$ existe $G \in \mathcal{A}$ tal que

$$\|f - G\| < \epsilon$$

De este modo

$$\begin{aligned} \left| \int\limits_{\partial D} f(z)d\mu - \int\limits_{\partial D} f(z)d\lambda \right| &\leq \left| \int\limits_{\partial D} f(z)d\mu - \int\limits_{\partial D} G(z)d\mu \right| + \left| \int\limits_{\partial D} G(z)d\lambda - \int\limits_{\partial D} f(z)d\lambda \right| \\ &\leq \int\limits_{\partial D} \|f - G\| \, d\mu + \int\limits_{\partial D} \|f - G\| \, d\lambda \leq 2\epsilon \end{aligned}$$

Por lo tanto $\int_{\partial D} f(z)d\mu = \int_{\partial D} f(z)d\lambda$. ■

2.2. Algunas propiedades de P^*

Como $P^* \subseteq C(X)^*$, es posible estudiar a P^* como subespacio topológico de $(C(X)^*, w^*)$ y en esta dirección se establecerá que P^* es w^*-compacto. Además se mostrará la convexidad de P^* como subconjunto de $C(X)^*$, donde X es un espacio topológico compacto y Hausdorff, y se determinarán sus puntos extremos.

Teorema 2.3 *Si X es un espacio topológico compacto y Hausdorff entonces P^* es w^*-compacto.*

Demostración. Por el Teorema de Banach- Alaoglu, es suficiente demostrar que P^* es w^*-cerrado. Sea $\psi \in \overline{P^*}^{w^*}$. Para $\epsilon > 0$ y $f \in C(X)$ real y no negativa existe $\varphi \in P^*$ tal que

$$|\varphi(f) - \psi(f)| < \epsilon$$

por lo que

$$0 \leq \varphi(f) < \epsilon + \mathrm{Re}\,(\psi(f))$$

y

$$|\mathrm{Im}\,(\psi(f))| < \epsilon$$

Como lo anterior es válido para toda $\epsilon > 0$, se tiene que $\psi(f)$ es real y no negativo.
Ahora, dado $\epsilon > 0$ existe $\lambda \in P^*$ tal que

$$|1 - \psi(\mathbf{1})| = |\lambda(1) - \psi(\mathbf{1})| < \epsilon$$

de donde $\psi(\mathbf{1}) = 1$.
Por otro lado, dado que $B_1[0]$ es w^*-compacta y $(C(X)^*, w^*)$ es Hausdorff se tiene que $\overline{P^*}^{w^*} \subseteq \overline{B_1[0]}^{w^*} = B_1[0]$, de modo que $\|\psi\| \leq 1$, y como $\psi(\mathbf{1}) = 1$ entonces $\|\psi\| = 1$.
Por tanto $\overline{P^*}^{w^*} \subseteq P^*$, así que P^* es w^*-cerrado y por tanto w^*-compacto. ■

En general, si X no es un espacio compacto no podemos afirmar que $P^* \subseteq C_c(X)^*$ sea w^*-compacto, es decir, la hipótesis de la compacidad del espacio X es fundamental para la conclusión en el teorema anterior.

Para mostrarlo es necesario revisar una clase muy partícular de elementos de $\mathbb{P}(X)$:

Notemos que si X es un espacio T_1, $X \neq \varnothing$, entonces $\mathbb{P}(X) \neq \varnothing$. En efecto, para $x \in X$ sea $\mu_x : \mathcal{B}(X) \to [0, \infty)$ definida como

$$\mu_x(B) = \begin{cases} 1 & x \in B \\ 0 & x \notin B \end{cases}$$

Así definida, μ_x es una medida de Borel pues $\mu_x(\varnothing) = 0$ y si $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{B}$ con $A_i \cap A_j = \varnothing$ para $i \neq j$, entonces

$$\mu_x(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \begin{cases} 1 & x \in \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \\ 0 & x \notin \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \end{cases}$$

pero si $x \in \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ entonces existe una única $k \in \mathbb{N}$ tal que $x \in A_k$ por lo que

$$\mu_x(A_k) = 1 = \textstyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_x(A_n) = \mu_x(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n).$$

Y si $x \notin \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ entonces $\mu_x(A_n) = 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$, de modo que

$$\mu_x(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = 0 = \textstyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_x(A_n)$$

Claramente $\mu_x(X) = 1$. Además μ_x es una medida regular pues si $B \in \mathcal{B}(X)$ es tal que $x \in B$ entonces para todo $U \subseteq X$ abierto con $B \subseteq U$ se tiene que $\mu_x(U) = \mu_x(B) = 1$, así que

$$\mu_x(B) = \text{ínf}\{\mu_x(U) : B \subseteq U, U \ \textit{abierto en}\ X\}$$

Ahora, si $K \subseteq X$ compacto es tal que $K \subseteq B$ entonces $\mu_x(K) \leq \mu_x(B) = 1$ y como $\{x\} \subseteq B$ y $\{x\}$ es compacto entonces

$$\mu_x(B) = \sup\{\mu(K) : K \subseteq B, K \ \textit{compacto}\}$$

Por otro lado, si $x \notin B$ entonces $x \notin K$ para todo $K \subseteq B$ compacto por lo tanto

$$0 = \mu_x(B) = \sup\{\mu(K) : K \subseteq B,\ K\ \textit{compacto}\}$$

Y para $U \subseteq X$ abierto con $B \subseteq U$ se tiene que $0 = \mu_x(B) \leq \mu_x(U)$ y como $B \subseteq X - \{x\}$ y $X - \{x\}$ es abierto, entonces

$$\mu_x(B) = \text{ínf}\{\mu(U) : U \supseteq E, U\ \textit{abierto}\}$$

Por lo tanto $\mu_x \in \mathbb{P}(X)$. En lo que resta de este trabajo nos referiremos a μ_x como a la medida de Dirac en x.

En la proposición que sigue se presenta una propiedad importante de las medidas de Dirac.

Proposición 2.2 *Sea X espacio topológico no vacío T_1 y $\mathcal{B}(X)$ su $\sigma-$álgebra de Borel. Si $(X, \mathcal{B}(X), \mu_x)$ es el espacio de medida, en donde μ_x es la medida de Dirac en x para alguna $x \in X$, entonces*

$$\int\limits_X f d\mu_x = f(x)$$

para toda $f : X \to \mathbb{C}$ integrable.

Demostración. Es suficiente probarlo para funciones integrables no negativas, pues por definición

$$\begin{aligned}
\int\limits_X f d\mu_x &= \int\limits_X \text{Re}(f)d\mu_x + i\int \text{Im}(f)d\mu_x \\
&= \left(\int\limits_X \text{Re}(f)_+ d\mu_x - \int\limits_X \text{Re}(f)_- d\mu_x\right) + i\left(\int\limits_X \text{Im}(f)_+ d\mu_x - \int\limits_X \text{Im}(f)_- d\mu_x\right)
\end{aligned}$$

Sea f integrable y no negativa y $\varphi : X \to [0, \infty)$ función simple tal que $\varphi(p) \leq f(p)$ para todo $p \in X$. Como φ es simple existen $n \in \mathbb{N}$, $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{B}(X)$ con $A_i \cap A_j = \varnothing$ si $i \neq j$ y $c_1, \ldots, c_n \in [0, \infty)$ tales que $\varphi(p) = \sum_{k=1}^n c_k \mathcal{X}_{A_k}(p)$ para toda $p \in X$; entonces

$$\int\limits_X \varphi d\mu_x = \sum_{k=1}^n c_k \mu_x(A_k) \leq f(x)$$

pues si $x \in \bigcup_{k=1}^n A_k$, existe $k_0 \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $x \in A_{k_0}$ y $x \notin A_j$ para $j \neq k_0$, por lo que $\sum_{k=1}^n c_k \mu_x(A_k) = c_{k_0} = \varphi(x) \leq f(x)$. Y si $x \notin \bigcup_{k=1}^n A_k$,entonces $\sum_{k=1}^n c_k \mu_x(A_k) = 0 \leq f(x)$. Por tanto

$$\int\limits_X f d\mu_x \leq f(x)$$

Por otra parte, si definimos $\varphi_x : X \to [0, \infty)$ como $\varphi_x(p) = f(x)\mathcal{X}_{\{x\}}(p)$, entonces φ_x es una función simple no negativa con $\varphi_x(p) \leq f(p)$ para toda $p \in X$ y además $\int_X \varphi_x d\mu_x = f(x)$. Por tanto $\int_X f d\mu_x = f(x)$. ■

Ahora veamos que P^* no es w^*-compacto si X no es compacto. Para $X = \mathbb{R}$ se tiene que

$$P^* = \{\psi \in C_c(X)^* : \psi \text{ } es\ positivo, \ \|\psi\| = 1\}$$

Ahora, para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos $\psi_n : C_c(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ como

$$\psi_n(f) = \int_{\mathbb{R}} f d\mu_n$$

con μ_n la medida de Dirac en n. Entonces

i Para toda $n \in \mathbb{N}$ ψ_n es un funcional lineal positivo. De su definición se desprende que ψ_n es lineal y que si $f \in C_c(\mathbb{R})$ es no negativa, entonces $\psi_n(f) \geq 0$

ii Para cada $n \in \mathbb{N}$ $\|\psi_n\| = 1$ pues de la proposición anterior se tiene que si $f \in C_c(\mathbb{R})$ entonces $\psi_n(f) = f(n)$, por lo que $|\psi_n(f)| \leq \|f\|$. De este modo $\|\psi_n\| \leq 1$, pero si definimos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ como

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}x + 1 & si \quad x \in [-n, 0] \\ 1 & si \quad x \in [0, n] \\ -x + n + 1 & si \quad x \in [n, n+1] \\ 0 & \quad\ \ e.o.c. \end{cases}$$

entonces $f \in C_c(\mathbb{R}), \|f\| = 1$ y $\psi_n(f) = 1$. Por lo tanto $\|\psi_n\| = 1$.

Ahora, sea $\epsilon > 0$ y sean $f_1, \ldots, f_k \in C_c(\mathbb{R})$ con $k \in \mathbb{N}$. Entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\text{supp}(f_i) \subseteq [-N, N]$ para $1 \leq i \leq k$, y por tanto si $n \geq N$

$$|\psi_n(f_i)| = |f_i(n)| = 0 < \epsilon \text{ si } 1 \leq i \leq k$$

Así que, $\psi_n \in V\left(0; \widehat{f_1}, \ldots, \widehat{f_k}, \epsilon\right)$ si $n \geq N$. Entonces $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de elementos de P^* que converge al cero en la topología débil$-*$ y por lo tanto P^* no es w^*-compacto.

Proposición 2.3 *Si X es un espacio topológico compacto y Hausdorff entonces $P^* \subset C(X)^*$ es convexo.*

Demostración. Sean $\alpha, \beta \in [0, 1]$ con $\alpha + \beta = 1$ y $\psi_1, \psi_2 \in P^*$.
Sea $f \in C(X)$ tal que $f(X) \subseteq [0, \infty)$ entonces

$$(\alpha\psi_1 + \beta\psi_2)(f) = \alpha\psi_1(f) + \beta\psi_2(f) \geq 0$$

por lo tanto $(\alpha\psi_1 + \beta\psi_2)$ es positivo.
Por otro lado,

$$(\alpha\psi_1 + \beta\psi_2)(1) = \alpha + \beta = 1$$

Y si $f \in C(X)$ con $\|f\| \leq 1$ entonces

$$|(\alpha\psi_1 + \beta\psi_2)(f)| = |\alpha\psi_1(f) + \beta\psi_2(f)| \leq \alpha\,|\psi_1(f)| + \beta\,|\psi_2(f)| \leq \alpha + \beta = 1$$

por lo que $\|\alpha\psi_1 + \beta\psi_2\| = 1$. Con lo que se tiene que $\alpha\psi_1 + \beta\psi_2 \in P^*$. ■

En la sección anterior vimos que si $a \in X$ entonces la medida de Dirac en a (μ_a) es un elemento de $\mathbb{P}(X)$ y por lo tanto el funcional $\psi_a : C(X) \to \mathbb{C}$ definido como $\psi_a(f) = \int_X f d\mu_a = f(a)$ es un elemento de P^* y no sólo eso, también es un punto extremo de P^*. Para probar esta afirmación son necesarios algunos resultados previos.

Proposición 2.4 *Si la medida de Dirac μ_a es tal que $\mu_a = (1-t)\mu_1 + t\mu_2$ para alguna $t \in (0,1)$ y $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{P}(X)$ entonces $\mu_1 = \mu_2 = \mu_a$.*

Demostración. Sea $B \in \mathcal{B}(X)$. Si $a \notin B$ entonces

$$0 = \mu_a(B) = (1-t)\mu_1(B) + t\mu_2(B)$$

y como los sumandos son positivos, se tiene que $\mu_1(B) = 0 = \mu_2(B)$. Si $a \in B$ entonces

$$1 = \mu_a(B) = (1-t)\mu_1(B) + t\mu_2(B)$$

de tal forma que si $\mu_1(B) < 1$ o $\mu_2(B) < 1$ entonces $(1-t)\mu_1(B) + t\mu_2(B) < (1-t) + t = 1$ lo cual contradice las identidades anteriores. ■

Teorema 2.4 *Sea X espacio topológico compacto y Hausdorff. Si $\mu \in \mathbb{P}(X)$ entonces existe $K \subseteq X$ compacto tal que $\mu(K) = 1$ y $\mu(H) < 1$ para todo H subconjunto compacto propio de K.*

Demostración. Sea

$$\mathcal{K}(X) = \{E \subseteq X : E \textit{ es compacto} \text{ y } \mu(E) = 1\}$$

entonces $\mathcal{K}(X) \neq \varnothing$, pues $X \in \mathcal{K}(X)$. Así, sea $K = \bigcap_{E \in \mathcal{K}(X)} E$, entonces K es cerrado, pues cada $E \in \mathcal{K}(X)$ es cerrado y por lo tanto K es compacto.
Ahora $\mathcal{K}(X)$ tiene la propiedad de la intersección finita, pues si existieran $n \in \mathbb{N}$, con $n > 1$, y $E_1, \ldots, E_n \in \mathcal{K}(X)$ tales que $\bigcap_{i=1}^n E_i = \varnothing$, entonces

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^n E_i\right) = \sum_{i=1}^n \mu(E_i) - \mu\left(\bigcap_{i=1}^n E_i\right) = n$$

lo cual no es posible por el hecho de que $\mu \in \mathbb{P}(X)$ y $\bigcup_{i=1}^n E_i \subseteq X$. Por tanto $K \neq \varnothing$.
Por otra parte, sea $V \subseteq X$ abierto tal que $K \subseteq V$, y para $E \in \mathcal{K}(X)$ sea $\widetilde{E} = E \cap (X \backslash V)$ entonces cada $\widetilde{E}$ es cerrado. Si suponemos que $\widetilde{E} \neq \varnothing$ para todo $E \in \mathcal{K}(X)$ entonces la colección $\widetilde{\mathcal{K}} = \left\{\widetilde{E} : E \in \mathcal{K}(X)\right\}$ tendría la propiedad de la intersección finita, pues de lo contrario existirían $m \in \mathbb{N}$, con $m > 1$, y $E_1, \ldots, E_m \in \mathcal{K}(X)$ tales que $\bigcap_{i=1}^m \widetilde{E}_i = \varnothing$, es decir, tales que $(\bigcap_{i=1}^m E_i) \cap (X \backslash V) = \varnothing$, por lo que

$$\mu\left(\left(\bigcup_{i=1}^m E_i\right) \cup (X \backslash V)\right) = \sum_{i=1}^m \mu(E_i) + \mu(X - V) - \mu\left(\left(\bigcap_{i=1}^m E_i\right) \cap (X \backslash V)\right) \geq m$$

lo cual no es posible. Así se tendrìa que $\bigcap_{E\in\mathcal{K}(X)} \widetilde{E} \neq \varnothing$, por lo que existiría $x \in \bigcap_{E\in\mathcal{K}(X)} \widetilde{E}$ entonces

$$x \in E \cap (X \backslash V)$$

para todo $E \in \mathcal{K}(X)$, y por tanto $x \in K$ con lo que $x \in V \cap (X \backslash V)$ lo cual es imposible. Como esta contradicción deriva de suponer que $\widetilde{E} \neq \varnothing$ para todo $E \in \mathcal{K}(X)$ existe $E_0 \in \mathcal{K}(X)$ tal que $\widetilde{E_0} = \varnothing$, esto es, tal que $E_0 \subseteq V$.
De este modo, si $R = \bigcup_{E\in\mathcal{K}(X)} \{\mu(U) : E \subseteq U, U \text{ abierto}\}$ entonces

$$\{\mu(V) : K \subseteq V, V \ \textit{abierto}\} \subseteq R$$

Además, si $\mu(U) \in R$ entonces U es abierto y existe $E \in \mathcal{K}(X)$ tal que $E \subseteq U$ y como μ es regular y $\mu(E) = 1$, $\mu(U) = 1$, así que $\inf R \geq 1$.
Por tanto, $\mu(K) \geq \inf R \geq 1$, de donde se concluye que $\mu(K) = 1$. Y si $H \subseteq K$ es un compacto tal que $\mu(H) = 1$ entonces $K \subseteq H$ por lo que $H = K$. Por lo tanto, si $H \subsetneq K$ y H es compacto se debe tener que $\mu(H) < 1$. ∎

Definición 2.3 *Al conjunto K del teorema anterior se le llama el soporte de μ y se denota por $S(\mu)$.*

A continuación se probará un resultado que, aunque simple, se usará junto con el teorema anterior para determinar los puntos extremos de P^*.

Lema 2.1 *Sea X espacio topológico compacto y Hausdorff. Si $\mu \in \mathbb{P}(X)$ entonces*

$$S(\mu) = \{x \in X : \mu(U) > 0 \ \textit{para todo}\ U \ \textit{abierto con}\ x \in U\}$$

Demostración. Sea $p \in S(\mu)$; supongamos que existe $U \subseteq X$ abierto con $p \in U$ tal que $\mu(U) = 0$. Como $\mu(U) = 0$, $\mu(X - U) = 1$ y dado que $X - U$ es cerrado y X es compacto, $X - U$ es compacto por lo que $S(\mu) \subseteq X - U$, entonces $p \in U \cap (X - U)$ lo cual una contradicción. Por lo tanto

$$p \in \{x \in X : \mu(U) > 0 \ \textit{para todo}\ U \ \textit{abierto con}\ x \in U\}$$

Si suponemos que $p \in \{x \in X : \mu(U) > 0 \text{ para todo } U \text{ abierto con } x \in U\} \cap (X - S(\mu))$ entonces $\mu(X - S(\mu)) > 0$. Pero

$$\mu(X - S(\mu)) = \mu(X) - \mu(S(\mu)) = 0$$

por lo tanto

$$\{x \in X : \mu(U) > 0 \ \textit{para todo}\ U \ \textit{abierto con}\ x \in U\} \cap (X - S(\mu)) = \varnothing$$

es decir, $\{x \in X : \mu(U) > 0 \text{ para todo } U \text{ abierto con } x \in U\} \subseteq S(\mu)$. ∎

Proposición 2.5 *Sea $\mu \in \mathbb{P}(X)$. $S(\mu) = \{a\}$ si y sólo si $\mu = \mu_a$.*

Demostración. ($\Longleftarrow$) Inmediata del lema 2.1. ■

($\Longrightarrow$) Sea $B \subseteq X$ boreliano. Si $a \in B$ entonces $S(\mu) \subseteq B$ y por lo tanto $\mu(B) = 1$, por otro lado si $a \notin B$ se tiene que $S(\mu) \subseteq X - B$ con lo que se concluye que $\mu(X - B) = 1$ lo que equivale a $\mu(B) = 0$.

Lema 2.2 *Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida y sea $f : X \to [0, \infty)$ integrable. Si definimos $\lambda : \Sigma \to [0, \infty)$ como*

$$\lambda(E) = \int_E f d\mu$$

entonces λ es una medida en X.

Demostración. Como $g \geq 0$ se tiene que $\lambda(E) \geq 0$ para todo $E \in \Sigma$. Si $E = \varnothing$ entonces $\chi_E = 0$ por lo que $\int_E f d\mu = 0$. Sea ahora $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos de X, ajenos por parejas, tal que $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$. Para $n \in \mathbb{N}$ sea f_n definida como $f_n = \sum_{k=1}^n f\chi_{E_k}$ entonces $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión no decreciente que converge a $f\chi_E$. Por el Teorema de la Convergencia Monótona se tiene que

$$\lambda(E) = \int_E f d\mu = \int_X f\chi_E d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n \int_X f\chi_{E_k} d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda(E_n)$$

■

Lema 2.3 *Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida y sea $g : X \to [0, \infty)$ integrable. Entonces*

$$\int_X g d\mu = 0$$

si y sólo si $g = 0$ casi dondequiera.

Demostración. Supongamos que $\int_X g d\mu = 0$; para $n \in \mathbb{N}$ sea

$$E_n = \left\{ x \in X : g(x) > \frac{1}{n} \right\}$$

Entonces $g \geq (1/n)\chi_{E_n}$ por lo que

$$0 = \int_X g d\mu \geq \frac{1}{n}\mu(E_n) \geq 0$$

y por lo tanto el conjunto

$$E = \{x \in X : g(x) > 0\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$$

tiene medida cero.
Ahora supongamos que $E = \{x \in X : g(x) > 0\}$ tiene medida cero. Sea $g_n = n\chi_E$ con $n \in \mathbb{N}$ como $g \leq \liminf g_n$ por el lema de Fatou se tiene que

$$0 \leq \int_X g d\mu \leq \liminf \int_X g_n d\mu = 0$$

■

Teorema 2.5 *Sea X espacio topológico compacto y Hausdorff. Entonces*

$$\mathcal{E}P^* = \{\psi_a \in C(X)^* : \psi_a(f) = \textstyle\int_X f d\mu_a,\ f \in C(X),\ \mu_a \text{ medida de Dirac en } a,\ a \in X\}$$

Demostración. Sea $a \in X$; veamos que ψ_a, definida como

$$\psi_a(f) = \textstyle\int_X f d\mu_a$$

para $f \in C(X)$, y μ_a medida de Dirac en a, es un punto extremo de P^*. Sean $\varphi_1, \varphi_2 \in P^*$ y $t \in (0,1)$ tales que

$$\psi_a = (1-t)\varphi_1 + t\varphi_2$$

Como $\varphi_1, \varphi_2 \in P^*$, por el teorema 2.2 existen $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{P}(X)$ tales que

$$\varphi_1(g) = \textstyle\int_X g d\mu_1$$

y

$$\varphi_2(g) = \textstyle\int_X g d\mu_1$$

para toda $g \in C(X)$. Entonces, si $f \in C(X)$ se tiene que

$$\begin{aligned} \textstyle\int_X f d\mu_a &= \psi_a(f) = (1-t)\varphi_1(f) + t\varphi_2(f) \\ &= (1-t)\textstyle\int_X f d\mu_1 + t\int_X f d\mu_2 \\ &= \textstyle\int_X f d((1-t)\mu_1 + t\mu_2) \end{aligned}$$

pero dado que para cada elemento de P^* existe una única medida en $\mathbb{P}(X)$ que lo representa

$$\mu_a = (1-t)\mu_1 + t\mu_2$$

así que, por la proposición 2.4 $\mu_a = \mu_1 = \mu_2$. Por lo tanto $\psi_a = \varphi_1 = \varphi_2$. Con lo que se tiene que $\psi_a \in \mathcal{E}P^*$.
Por otro lado sea $\varphi \in \mathcal{E}P^*$; por el teorema de representación de Riezs (2.2) existe una única $\mu_\varphi \in \mathbb{P}(X)$ tal que

$$\varphi(f) = \textstyle\int_X f d\mu_\varphi$$

para toda $f \in C(X)$. Supongamos que $S\left(\mu_\varphi\right)$ consta de más de un punto. Así, sean $p, q \in S\left(\mu_\varphi\right)$ con $p \neq q$; como X es normal existe $f_0 \in C(X)$ tal que $f_0(X) \subseteq [\frac{2}{4}, \frac{3}{4}]$, $f_0(p) = \frac{2}{4}$ y

$f_0(q) = \frac{3}{4}$. Sean $a = \int_X f_0 d\mu_\varphi$ y $b = \int_X (1 - f_0) d\mu_\varphi$; entonces $a, b > 0$ (pues de lo contrario $f_0 = 0$ casi dondequiera o $1 - f_0 = 0$ casi dondequiera según el lema 2.3) y $a + b = 1$. Definamos también $\lambda, \nu : \mathcal{B}(X) \to \mathbb{R}$ como

$$\lambda(E) = \frac{1}{a} \int\limits_E f_0 d\mu_\varphi \qquad \text{y} \qquad \nu(E) = \frac{1}{b} \int\limits_E (1 - f_0) d\mu_\varphi$$

Entonces por el lema 2.2 $\lambda, \nu \in \mathbb{P}(X)$ y como $a, b > 0$, con $a + b = 1$, se tiene que $a\lambda + b\nu \in \mathbb{P}(X)$. Ahora, si φ_λ y φ_ν son los (únicos) elementos de P^* asociados a λ y ν, respectivamente, dado que

$$\begin{aligned}
\mu_\varphi(E) &= \int\limits_X \mathcal{X}_E d\mu_\varphi \\
&= \int\limits_X (f_0 + 1 - f_0) \mathcal{X}_E d\mu_\varphi \\
&= \int\limits_X f_0 \mathcal{X}_E d\mu_\varphi + \int\limits_X (1 - f_0) \mathcal{X}_E d\mu_\varphi \\
&= a \left(\frac{1}{a} \int\limits_E f_0 d\mu_\varphi \right) + b \left(\frac{1}{b} \int\limits_E (1 - f_0) d\mu_\varphi \right) \\
&= a\lambda(E) + b\nu(E)
\end{aligned}$$

para todo boreliano E, se tiene que $\mu_\varphi = a\lambda + b\nu$ y por lo tanto que

$$\begin{aligned}
\varphi(f) &= \textstyle\int_X f d\mu_\varphi \\
&= \textstyle\int_X f d(a\lambda + b\nu) \\
&= a \textstyle\int_X f d\lambda + b \int_X f d\nu \\
&= a\varphi_\lambda(f) + b\varphi_\nu(f)
\end{aligned}$$

para toda $f \in C(X)$, de donde

$$\varphi = a\varphi_\lambda + b\varphi_\nu$$

y como $\varphi \in \mathcal{E}P^*$ entonces $\varphi = \varphi_\lambda = \varphi_\nu$. Nuevamente, dado que el teorema de representación de Riesz asegura que la asociación entre P^* y $\mathbb{P}(X)$ es *única*, concluimos que $\mu_\varphi = \lambda = \nu$. Ahora supongamos que $f_0(p) \neq a$ y sin pérdida de generalidad supongamos que $f_0(p) - a > 0$. Así, sea $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $0 < \alpha < f_0(p) - a$ y sea $g \in C(X)$ definida como $g(x) = f_0(x) - a$ para $x \in X$. Entonces si $U = g^{-1}((\alpha, \infty))$, U es abierto y $p \in U$, así que por el lema 2.1 $\mu_\varphi(U) > 0$. Además, si definimos la función $s : X \to [0, \infty)$ como $s(x) = \alpha \mathcal{X}_U(x)$ se tiene que $s(x) \leq (g\mathcal{X}_U)(x)$ para todo $x \in X$ por lo que

$$0 < \alpha\mu_\varphi(U) \leq \int\limits_X (g\mathcal{X}_U) d\mu_\varphi = \int\limits_U g d\mu_\varphi = \int\limits_U (f_0 - a) d\mu_\varphi$$

de donde se tiene que $\mu_\varphi(U) < \lambda(U)$, lo cual es una contradicción. Por tanto $f_0(p) = a$ y por un argumento similar se sigue que $f_0(q) = a$ lo cual no es posible. De esta contradicción se concluye que $S\left(\mu_\varphi\right) = \{x\}$ para algún $x \in X$, así que por la proposición 2.5 se tiene la conclusión buscada. ■

Capítulo 3

Clases de funciones analíticas y representación integral

Las colecciones de funciones que se tratarán en el siguiente capítulo tienen la propiedad de que sus elementos admiten una representación integral. De esta forma, en este capítulo se establecen algunos resultados de carácter general con base en dicha representación, y posteriormente se presentan los teoremas que garantizan esta representación.

3.1. Propiedades de funciones con representación integral

En esta sección se prueban teoremas generales sobre colecciones de funciones, cuyo dominio es cualquier subconjunto abierto de $\mathbb{C}$, y que están definidas a partir de la integral (determinada por una medida finita) de un kernel. El primero de ellos garantiza que dichas funciones son analíticas.

Teorema 3.1 *Sean (X, Σ, μ) un espacio de medida, con $\mu(X) < \infty$, y $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto. Sea $K : \Omega \times X \longrightarrow \mathbb{C}$ una función tal que:*

1. *Para cada $x \in X$ la función $z \longrightarrow K(z, x)$ es analítica en Ω.*

2. *Para cada $z \in \Omega$ la función $x \longrightarrow K(z, x)$ es $\Sigma-$medible.*

3. *K es acotada en $E \times X$ para todo $E \subset \Omega$ compacto.*

Entonces, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ definida como $f(z) = \int_X K(z, x)d\mu$ es analítica en Ω y además

$$f'(z) = \int_X \frac{\partial}{\partial z} K(z, x)d\mu$$

Demostración. Primero nótese que f está bien definida pues dada $z \in \Omega$, $K(z,\cdot)$ es $\Sigma-$medible, está acotada y μ es finita.
Por otra parte, sean $z_o \in \Omega$ y $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\Omega - \{z_0\}$ tal que $z_n \to z_{0.}$ Así, para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $g_n : X \to \mathbb{C}$ definida como

$$g_n(x) = \frac{K(z_n,x) - K(z_0,x)}{z_n - z_0}$$

entonces por (2), (3) y por el hecho de que μ es finita $\{g_n\}$ es una sucesión de funciones integrables en X, y por (1)

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = \frac{\partial}{\partial z} K(z_0,x)$$

para todo $x \in X$.
Ahora, sea $R > 0$ tal que $\overline{B_R(z_0)} \subset \Omega$, entonces por (3) existe $M > 0$ tal que $|K(z,x)| \leq M$ si $(z,x) \in \overline{B_R(z_0)} \times X$. Además existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $z_n \in B_{R/2}(z_0)$ si $n \geq N$. De este modo para $x \in X$, por la fómula integral de Cauchy, si $n \geq N$,

$$\begin{aligned}
|K(z_n,x) - K(z_0,x)| &= \frac{1}{2\pi}\left| \int\limits_{|\xi-z_0|=R} \frac{K(\xi,x)}{\xi - z_n} d\xi - \int\limits_{|\xi-z_0|=R} \frac{K(\xi,x)}{\xi - z_0} d\xi \right| \\
&= \frac{1}{2\pi}\left| \int\limits_{|\xi-z_0|=R} \frac{(z_n - z_0)K(\xi,x)}{(\xi - z_n)(\xi - z_0)} d\xi \right| \\
&\leq |z_n - z_0| \frac{M}{\pi R^2} \int\limits_{|\xi-z_0|=R} |d\xi| \\
&= 2\frac{M}{R} |z_n - z_0|
\end{aligned}$$

pues $R/2 = dist(\overline{B_{R/2}(z_0)}, Fr(\overline{B_R(z_0)}))$. Entonces $|g_n(x)| \leq 4\pi\frac{M}{R}$ si $n \geq N$ y $x \in X$, de modo que por el Teorema de la Convergencia Dominada se tiene que $\frac{\partial}{\partial z}K(z_0,\cdot)$ es integrable y además,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(z_n) - f(z_0)}{z_n - z_o} = \lim_{n\to\infty} \int_X \frac{K(z_{n,}x) - K(z_0,x)}{z_n - z_0} d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X g_n(x) d\mu = \int_X \frac{\partial}{\partial z} K(z_0,x) d\mu$$

Por tanto, f es analítica en Ω y $f'(z) = \int_X \frac{\partial}{\partial z} K(z,x) d\mu$ para todo $z \in \Omega$. ■

En lo que sigue supondremos que el espacio X es un espacio topológico Hausdorff compacto y que éste está dotado de una medida finita definida sobre la $\sigma-$álgebra generada por los abiertos de su topología. Adicionalmente, el abierto D sobre el cual se definen las funciones siempre será el disco unitario centrado en el origen.

El siguiente teorema establece que bajo ciertas condiciones de regularidad del kernel a partir del cual se define a la colección de funciones, dicha colección resulta ser un subconjunto compacto de las funciones analíticas en el disco.

Teorema 3.2 *Sea X un espacio Hausdorff compacto y sea $k : D\times\ X \to \mathbb{C}$ una función tal que:*

1. *Para cada $x \in X$, la función $z \to k(z,x)$ es análitica en D.*
2. *Para cada $z \in D$, la función $x \to k(z,x)$ es continua en X.*
3. *La familia $\{k(\cdot,x) : x \in X\}$ es localmente acotada en D.*

Entonces, la familia $\mathcal{F} = \left\{f_\mu(z) = \int_X k(z,x)d\mu : \mu \in \mathbb{P}(X)\right\}$ es compacta en $H(D)$.

Demostración. Por el Teorema de Montel es suficiente probar que $\mathcal{F}$ es cerrada y localmente acotada en $H(D)$. Por (3), dado $E \subseteq D$ compacto existe $M > 0$ tal que $|K(z,x)| \leq M$ para toda $(z,x) \in E \times X$, entonces si $\mu \in \mathbb{P}(X)$ y $z \in E$ se tiene que

$$|f_\mu(z)| = \left|\int_X k(z,x)d\mu\right| \leq \int_X |k(z,x)|\, d\mu \leq M$$

es decir, $\mathcal{F}$ es localmente acotada. Así, sólo resta probar que $\mathcal{F}$ es cerrada en $H(D)$.
Sean $\left\{f_{\mu_n}\right\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ una sucesión y f analítica en D tales que $f_{\mu_n} \to f$ en $H(D)$. Ahora, dado que $\mu_n \in \mathbb{P}(X)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, si se define $\Psi_n : C(X) \to \mathbb{C}$ como $\Psi_n(h) = \int_x h(x)d\mu_n$, se tiene que $\Psi_n \in P^*$ y como P^* es w^*-compacto, $S = \{\Psi_n : n \in \mathbb{N}\}$ tiene un punto de acumulación $\Psi \in P^*$ y por tanto existen Λ un conjunto dirigido no vacío y $\{\Psi_\sigma\}_{\sigma\in\Lambda}$ subred de $\{\Psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\Psi_\sigma \xrightarrow{w^*} \Psi$. Nótese, que para cada $\sigma \in \Lambda$ existe $\mu_\sigma \in \mathbb{P}(X)$ con $\Psi_\sigma(g) = \int_X g(x)d\mu_\sigma$ para toda $g \in C(X)$. Además $\{\mu_\sigma\}_{\sigma\in\Lambda}$ es una subred de $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Nótese también que por el teorema de representacion de Riesz (2.2) sabemos que existe $\widetilde{\mu} \in \mathbb{P}(X)$ tal que

$$\Psi(g) = \int_X g(x)d\widetilde{\mu}$$

para toda $g \in C(X)$.
De este modo defínase la red $\{f_\sigma\}_{\sigma\in\Lambda}$ en $H(D)$ como $f_\sigma(z) = \int_X k(z,x)d\mu_\sigma$, entonces $\{f_\sigma\}_{\sigma\in\Lambda}$ es una subred de $\left\{f_{\mu_n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$, pues $\{\mu_\sigma\}_{\sigma\in\Lambda}$ es una subred de $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, por lo que debe converger a f en $H(D)$.
Por otro lado, sea $z \in D$; por (2) $k(z,\cdot) \in C(X)$ asi que para $\epsilon > 0$ existe $\sigma_0 \in \Lambda$ tal que si $\sigma \geq \sigma_0$ entonces

$$|\Psi_\sigma(k(z,\cdot)) - \Psi(k(z,\cdot))| < \epsilon$$

es decir,

$$\left|\int_X k(z,x)d\mu_\sigma - \int_X k(z,x)d\widetilde{\mu}\right| < \epsilon$$

si $\sigma \geq \sigma_0$; por tanto la red $\{f_\sigma\}_{\sigma\in\Lambda}$ converge puntualmente a $g \in H(D)$, definida como $g(z) = \int_X k(z,x)d\widetilde{\mu} \in \mathcal{F}$, y como $\{f_\sigma\}_{\sigma\in\Lambda}$ también converge puntualmente a f entonces $f = g$.
Por tanto $f \in \mathcal{F}$, y por tanto $\mathcal{F}$ es compacta en $H(D)$. ■

Además de ser compacta, la familia de funciones definida en el terorema anterior tiene la propiedad de ser convexa, lo que probamos en la siguiente proposición. Para ello, sólo hace falta hacer notar que si $\alpha, \beta \in [0,1]$ son tales que $\alpha+\beta = 1$ y $\mu_{1,}\mu_2 \in \mathbb{P}(X)$, podemos definir una nueva medida en $\mathbb{P}(X)$, que denotaremos por $\alpha\mu_1 + \beta\mu_2$, como

$$(\alpha\mu_1 + \beta\mu_2)(B) := \alpha\mu_1(B) + \beta\mu_1(B)$$

para todo B en los borelianos de X.

Proposición 3.1 *Sea X un espacio Hausdorff compacto y sea $k : D\times\ X \to \mathbb{C}$ como en el terorema anterior. Entonces la familia*

$$\mathcal{F} = \left\{ f_\mu(z) = \int_X k(z,x)d\mu : \mu \in \mathbb{P}(X) \right\}$$

es convexa.

Demostración. Sean $\alpha, \beta \in [0,1]$ con $\alpha + \beta = 1$ y $\mu_{1,}\mu_2 \in \mathbb{P}(X)$ entonces si $z \in D$

$$\alpha f_{\mu_1}(z) + \beta f_{\mu_2}(z) = \alpha \textstyle\int_X k(z,x)d\mu_1 + \beta \displaystyle\int_X k(z,x)d\mu_2 = \int_X k(z,x)d(\alpha\mu_1 + \beta\mu_2)$$

pero por la observación previa $(\alpha\mu_1 + \beta\mu_2) \in \mathbb{P}(X)$, así que $\alpha f_{\mu_1} + \beta f_{\mu_2} \in \mathcal{F}$. ■

Lema 3.1 *Sea X un espacio Hausdorff compacto y sea $k : D\times\ X \to \mathbb{C}$ como en el teorema 3.1. Entonces la colección $\{k(\cdot,x) : x \in X\}$ es compacta.*

Demostración. Notemos que la familia $\{k(\cdot,x) : x \in X\}$ es cerrada, pues si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ es una sucesión tal que $\{k(\cdot,x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a una función f en $H(D)$ entonces

$$f \in \{k(\cdot,x) : x \in X\}$$

En efecto, como X es compacto existen Λ conjunto dirigido no vacío, $\{x_\sigma\}_{\sigma\in\Lambda}$ subred de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $x_0 \in X$ tales que $\{x_\sigma\}_{\sigma\in\Lambda}$ converge a x_0 además $\{k(\cdot,x_\sigma)\}_{\sigma\in\Lambda}$ es subred de $\{k(\cdot,x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ por lo que también debe converger a f en $H(D)$. Y si $z \in D$ como $k(z,\cdot)$ es continua en X entonces $\{k(z,x_\sigma)\}_{\sigma\in\Lambda}$ debe converger a $k(z,x_0)$, es decir, la red $\{k(\cdot,x_\sigma)\}_{\sigma\in\Lambda}$ converge puntualmente a $k(\cdot,x_0)$, pero también converge a f entonces $f = k(\cdot,x_0)$ de modo que $\{k(\cdot,x) : x \in X\}$ es cerrada. Y como $\{k(\cdot,x) : x \in X\}$ es localmente acotada en D por el Teorema de Montel debe ser compacta. ■

Lema 3.2 *Sea $\mathcal{G} \subseteq H(D)$ localmente acotada. Entonces $\overline{co}\,(\mathcal{G})$ es compacta.*

Demostración. Sea $C \subseteq D$ compacto, como $\mathcal{G}$ es localmente acotada en D existe $M > 0$ tal que $|f(z)| \leq M$ para toda $f \in \mathcal{G}$ y $z \in C$. Ahora, dada $g \in co(\mathcal{G})$ existen $n \in \mathbb{N}$,

$f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{F}$ y $t_1, \ldots, t_n \in [0,1]$ con $\sum_{i=1}^n t_i = 1$ tales que $g(z) = \sum_{i=1}^n t_i f_i(z)$ para toda $z \in D$ así que si $z \in C$

$$|g(z)| \leq \textstyle\sum_{i=1}^n t_i \, |f_i(z)| \leq M$$

y como por el teorema 1.4 $\overline{co}(\mathcal{G}) = \overline{co(\mathcal{G})}$ si $g \in \overline{co}(\mathcal{G})$ existe $\{g_n\}$ sucesión en $co(\mathcal{G})$ tal que $g_n \to g$ en $H(D)$. Entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|g_N(z) - g(z)| < 1$$

para toda $z \in C$,y por tanto

$$|g(z)| \leq 1 + |g_N(z)| \leq 1 + M$$

esto es, $\overline{co}(\mathcal{G})$ es localmente acotado en D. Y por lo tanto $\overline{co}(\mathcal{F})$ es compacto.
■

Teorema 3.3 *Sea X un espacio Hausdorff compacto y sea $k : D\times\ X \to \mathbb{C}$ una función tal que:*

1. *Para cada $x \in X$, la función $z \to k(z,x)$ es análitica en D.*
2. *Para cada $z \in D$, la función $x \to k(z,x)$ es continua en X.*
3. *La familia $\{k(.,x) : x \in X\}$ es localmente acotada en D.*

Si $\mathcal{F} = \left\{ f_\mu \in H(D) : f_\mu(z) = \int_X k(z,x)d\mu, \mu \in \mathbb{P}(X) \right\}$ entonces $\mathcal{F} = \overline{co}(\{k(\cdot,x) : x \in X\})$

Demostración. Por la proposición 3.1 $\mathcal{F}$ es convexo y por el teorema 3.2 $\mathcal{F}$ es cerrado. Ahora, sea $x \in X$ y sea $\mu_x \in \mathbb{P}(X)$ la medida de Dirac en x, entonces por lema 2.2 para $z \in D$,

$$\int\limits_X k(z,y)d\mu_x = k(z,x)$$

por tanto $\{k(\cdot,x) : x \in X\} \subseteq \mathcal{F}$. Así que $\overline{co}(\{k(\cdot,x) : x \in X\}) \subseteq \mathcal{F}$.
Ahora, sea $f \in \mathcal{F}$ entonces existe $\mu \in \mathbb{P}(X)$ tal que $f(z) = \int_X k(z,x)d\mu$ para toda $z \in D$. Para esta μ definamos $\Psi_\mu : C(X) \to \mathbb{C}$ como

$$\Psi_\mu(g) = \int_X g(x)d\mu$$

entonces $\Psi_\mu \in P^*$.
Por otro lado, por el Teorema de Krein-Milman se tiene que

$$\overline{co}(\mathcal{E}P^*) = \overline{co}(P^*)$$

pero dado que P^* es cerrado y convexo (2.3 y 2.3) $\overline{co}(P^*) = P^*$, entonces

$$P^* \subseteq \overline{co}(\mathcal{E}P^*) = \overline{co(\mathcal{E}P^*)}^{w^*}$$

(la igualdad se sigue del teorema 1.4) y como $\Psi_\mu \in P^*$ existen Λ conjunto dirigido no vacío y $\{\Phi_\sigma\}_{\sigma\in\Lambda}$ red en $co(\mathcal{E}P^*)$ tal que $\Phi_\sigma \xrightarrow{w^*} \Psi_\mu$. Ahora, por el teorema 1.2 para cada $\sigma \in \Lambda$ existen $n_\sigma \in \mathbb{N}$; $t_1^\sigma, \ldots, t_{n_\sigma}^\sigma \in [0,1]$ con $\sum_{i=1}^{n_\sigma} t_i^\sigma = 1$; y $x_1^\sigma, \ldots, x_{n_\sigma}^\sigma \in X$ tales que $\Phi_\sigma(h) = \sum_{i=1}^{n_\sigma} t_i^\sigma \Phi_{x_i^\sigma}(h)$, donde $\Phi_{x_i^\sigma} \in C(X)^*$ es tal que $\Phi_{x_i^\sigma}(h) = h(x_i^\sigma)$, para toda $h \in C(X)$ y $1 \leq i \leq n_\sigma$.
Para $\sigma \in \Lambda$ sea $g_\sigma \in H(D)$ definida como

$$\begin{aligned} g_\sigma(z) &= \sum_{i=1}^{n_\sigma} t_i^\sigma \Phi_{x_i^\sigma}(k(z,\cdot)) \\ &= \sum_{i=1}^{n_\sigma} t_i^\sigma k(z, x_i^\sigma) \end{aligned}$$

entonces $\{g_\sigma\}_{\sigma\in\Lambda}$ es una red en $co(\{k(\cdot,x) : x \in X\})$, y dado que $\Phi_\sigma \xrightarrow{w^*} \Psi_\mu$, para $\epsilon > 0$ y $z \in D$ existe $\sigma_0 \in \Lambda$ tal que si $\sigma \geq \sigma_0$ entonces

$$|\Phi_\sigma(k(z,\cdot)) - \Psi_\mu(k(z,\cdot))| < \epsilon$$

o bien

$$|g_\sigma(z) - f(z)| < \epsilon$$

si $\sigma \geq \sigma_0$, es decir, $\{g_\sigma\}_{\sigma\in\Lambda}$ converge puntualmente a f. Así, si $f_\sigma(z) = g_\sigma(z) - f(z)$, entonces $f_\sigma(z) \to 0$ para $|z| < 1$. Sea $E \subseteq D$ compacto por (3) existe $M > 0$ tal que $|k(z,x)| \leq M$ si $(z,x) \in E \times X$, por lo que si $z \in E$ y $\sigma \in \Lambda$

$$|f_\sigma(z)| \leq |g_\sigma(z)| + |f(z)| \leq \sum_{i=1}^{n_\sigma} t_i^\sigma \, |k(z, x_i^\sigma)| + \int_X |k(z,x)| \, d\mu \leq 2M$$

entonces, $\mathcal{N} = \{f_\sigma : \sigma \in \Lambda\} \subseteq H(D)$ es una familia localmente acotada en D. Por el Teorema de Montel $\mathcal{N}$ es normal, por tanto existen $\tilde{f} \in \overline{\mathcal{N}}$ punto de acumulación de la red $\{f_\sigma\}_{\sigma\in\Lambda}$ y $\{f_{\sigma'}\}_{\sigma'\in\Lambda'}$ subred de $\{f_\sigma\}_{\sigma\in\Lambda}$ tales que $f_{\sigma'} \to \tilde{f}$ en $H(D)$. Pero como $f_\sigma \to 0$ puntualmente $\tilde{f}(z) = 0$ para toda $z \in D$. Por tanto la red $\{g_{\sigma'}\}_{\sigma'\in\Lambda'}$ converge a f en $H(D)$, y entonces $f \in \overline{co(\{k(\cdot,x) : x \in X\})} = \overline{co}(\{k(\cdot,x) : x \in X\})$ donde la igualdad se sigue del teorema 1.4 lo que concluye la prueba. ■

Corolario 3.1 *Sea X un espacio Hausdorff compacto y sean $k : D \times X \to \mathbb{C}$ y $\mathcal{F} \subseteq H(D)$ como en el teorema anterior. Entonces*

$$\mathcal{E}\mathcal{F} \subseteq \{k(\cdot,x) : x \in X\}$$

Además si la asociación $\mu \to f_\mu$ es una a uno, entonces

$$\mathcal{E}\mathcal{F} = \{k(\cdot,x) : x \in X\}$$

Demostración. Por el lema 3.1 la colección $\{k(\cdot,x) : x \in X\}$ es compacta y por tanto $\overline{co}(\{k(\cdot,x) : x \in X\}$ es compacto (3.2) y por el teorema anterior

$$\overline{co}(\{k(\cdot,x) : x \in X\}) = \mathcal{F} = \left\{ f_\mu \in H(D) : f_\mu(z) = \int_X k(z,x)d\mu, \mu \in \mathbb{P}(X) \right\}$$

Así que por el teorema de Krein-Milman

$$\mathcal{E}\mathcal{F} = \mathcal{E}\overline{co}(\{k(\cdot,x) : x \in X\}) \subseteq \{k(\cdot,x) : x \in X\}$$

Supongamos ahora que la asociación $\mu \to f_\mu$ es una a uno. Recordemos que para cada $x \in X$

$$k(z,x) = \textstyle\int_X k(z,y)d\lambda_x = \Psi_{\lambda_x}(k(z,\cdot))$$

donde λ_x es la medida de Dirac en x y $\Psi_{\lambda_x} \in P^*$ es el funcional asociado a λ_x. Sean $k(\cdot,x_0) \in \{k(\cdot,x) : x \in X\}$, $\mu_{1,}\mu_2 \in \mathbb{P}(X)$ y $t \in (0,1)$ tales que

$$\begin{aligned} k(\cdot,x_0) &= (1-t)f_{\mu_1}(\cdot) + tf_{\mu_2}(\cdot) \\ &= (1-t)\textstyle\int_X k(\cdot,x)d\mu_1 + t\int_X k(\cdot,x)d\mu_2 \\ &= \textstyle\int_X k(\cdot,x)d((1-t)\mu_1 + t\mu_2) \end{aligned}$$

pero $(1-t)\mu_1 + t\mu_2 \in \mathbb{P}(X)$, así que $(1-t)\mu_1 + t\mu_2 = \lambda_{x_0}$. Ahora, si $\Psi_{\mu_1}, \Psi_{\mu_2} \in P^*$ son los funcionales asociados a μ_1 y μ_2 respectivamente entonces para $g \in C(X)$

$$\Psi_{\lambda_x}(g) = \int_X gd\left((1-t)\mu_1 + t\mu_2\right) = (1-t)\int_X gd\mu_1 + t\int_X gd\mu_2 = (1-t)\,\Psi_{\mu_1}(g) + t\Psi_{\mu_2}(g)$$

de modo que por el teorema 2.5 $\Psi_{\lambda_{x_0}} = \Psi_{\mu_1} = \Psi_{\mu_2}$ y por lo tanto $\lambda_{x_0} = \mu_1 = \mu_2$. Por lo que se tiene que

$$k(\cdot,x_0) = f_{\mu_1}(\cdot) = f_{\mu_2}(\cdot)$$

y entonces $\{k(\cdot,x) : x \in X\} \subseteq \mathcal{E}\mathcal{F}$. ■

3.2. Representación integral de funciones

El siguiente resultado proporciona condiciones sobre los puntos extremos de una familia $\mathcal{F} \subseteq H(D)$ bajo las cuales queda determinada dicha familia.

Teorema 3.4 *Sea $\mathcal{F} \subseteq H(D)$ localmente acotada en D. Supóngase que existen X espacio Hausdorff compacto y $k : D\times\ X \to \mathbb{C}$ una función tal que:*

1. *Para cada $x \in X$, la función $z \to k(z,x)$ es análitica en D.*
2. *Para cada $z \in D$, la función $x \to k(z,x)$ es continua en X.*
3. *$\mathcal{E}\overline{co}(\mathcal{F}) = \{k(\cdot,x) : x \in X\}$*

Entonces $\overline{co}(\mathcal{F}) = \big\{f \in H(D) : f(z) = \int_X k(z,x)d\mu,\ \ \mu \in \mathbb{P}(X)\big\}$.

Demostración. Del lema 3.2 se tiene que $\overline{co}(\mathcal{F})$ es compacta entonces por el Teorema de Krein-Milman se tiene que

$$\overline{co}(\mathcal{E}\overline{co}(\mathcal{F})) = \overline{co}(\overline{co}(\mathcal{F})) = \overline{co}(\mathcal{F})$$

Ahora como $\mathcal{E}\overline{co}(\mathcal{F}) = \{k(\cdot,x) : x \in X\} \subseteq \overline{co}(\mathcal{F})$ la familia $\{k(\cdot,x) : x \in X\}$ es localmente acotada así que por el teorema 3.3

$$\left\{f \in H(D) : f(z) = \int_X k(z,x)d\mu : \mu \in \mathbb{P}(X)\right\} = \overline{co}(\{k(\cdot,x) : x \in X\}) = \overline{co}(\mathcal{F})$$

■

Capítulo 4

Puntos extremos para algunas clases de funciones.

En este capítulo se aplicarán los resultados del capítulo anterior para caracterizar la envolvente convexa, y sus puntos extremos, de algunas clases específicas de funciones analíticas en el disco unitario.

4.1. Resultados preliminares

En esta sección se probarán algunos resultados de carácter general sobre funciones lineales y continuas entre espacios vectoriales topológicos, y sobre la localización de los puntos en donde se alcanza el valor máximo de la parte real de un funcional lineal continuo, definido en el espacio de las funciones analíticas en el disco unitario, y restringido a una clase compacta de dicho espacio.

En este primer resultado se mostrará, dada una función lineal continua entre dos espacios vectoriales topológicos arbitrarios, la relación que existe entre la imagen de la envolvente convexa cerrada, y la envolvente convexa cerrada de la imagen, de cualquier subconjunto del dominio de la función.

Proposición 4.1 *Sean $(X,\tau_1),(Y,\tau_2)$ espacios vectoriales topológicos y $T:(X,\tau_1)\to(Y,\tau_2)$ lineal y continua. Si $V\subseteq X$ entonces $T(\overline{co}(V))\subseteq\overline{co}(T(V))$. Si además $\mathcal{E}T(\overline{co}(V))\neq\varnothing$ y T es inyectiva*

$$T(\overline{co}(V))\cap\mathcal{E}\overline{co}(T(V))\subseteq T(\mathcal{E}\overline{co}(V))$$

Demostración. Veamos que $T(co(V))\subseteq co(T(V))$. Sea $y\in T(co(V))$ entonces existe $x\in co(V)$ tal que $T(x)=y$. Como $x\in co(V)$ por el teorema 1.2 existen $n\in\mathbb{N}$ $t_1,\ldots,t_n\in(0,1)$ con $\sum_{i=1}^n t_i=1$ y $s_1,\ldots,s_n\in V$ tales que $x=\sum_{i=1}^n t_is_i$, de modo que

$$y=T(\textstyle\sum_{i=1}^n t_is_i)=\sum_{i=1}^n t_iT(s_i)$$

y dado que $T(s_i) \in T(V)$ para $i = 1, \ldots, n$, $y \in co(T(V))$.
Ahora, como T es continua se tiene que

$$T(\overline{co}(V)) = T(\overline{co(V)}) \subseteq \overline{T(co(V))} \subseteq \overline{co(T(V))} = \overline{co}(T(V))$$

Donde la última igualdad se da por el teorema 1.4. Supongamos que $\mathcal{E}T(\overline{co}(V)) \neq \varnothing$ y que T es inyectiva. Entonces

$$\mathcal{E}\overline{co}(T(V)) \cap T(\overline{co}(V)) \subseteq \mathcal{E}T(\overline{co}(V))$$

pues $T(\overline{co}(V)) \subseteq \overline{co}T(V)$. Si $y \in \mathcal{E}T(\overline{co}(V))$ se tiene que $y \in T(\overline{co}(V))$ por lo que existe $x \in \overline{co}(V)$ con $T(x) = y$. Afirmamos que $x \in \mathcal{E}\overline{co}(V)$, pues de lo contrario existirían $\alpha, \beta \in (0,1)$ con $\alpha + \beta = 1$ y $x_1, x_2 \in \overline{co}(V)$ $x_1 \neq x_2$ tales que

$$x = \alpha x_1 + \beta x_2$$

por lo que

$$y = T(x) = \alpha T(x_1) + \beta T(x_2)$$

y por la inyectividad de T se tendría que $y \notin \mathcal{E}T(\overline{co}(V))$. De este modo,

$$\mathcal{E}T(\overline{co}(V)) \subseteq T(\mathcal{E}\overline{co}(V))$$

Por lo tanto

$$\mathcal{E}\overline{co}(T(V)) \cap T(\overline{co}(V)) \subseteq \mathcal{E}T(\overline{co}(V) \subseteq T(\mathcal{E}\overline{co}(V))$$

■

En el siguiente teorema se prueba que, dado un subconjunto compacto de $H(D)$ y un funcional lineal continuo definido aquí, para calcular el máximo de la parte real de este funcional, basta con calcular dicho máximo sobre el conjunto de los puntos extremos de la envolvente convexa del subconjunto original. En otras palabras, el problema de encontrar este máximo sobre un subconjunto, se puede reducir a encontrarlo sobre un conjunto en general mas pequeño. De hecho, este teorema justifica el interés por caracterizar los puntos extremos de la envolvente convexa de subconjuntos compactos de $H(D)$.

Teorema 4.1 *Sea $\mathcal{F} \subseteq H(D)$ compacto, y sea $\Psi : H(D) \to \mathbb{C}$ funcional lineal continuo. Entonces*

$$\text{máx}\{\operatorname{Re}\Psi(f) : f \in \mathcal{F}\} = \text{máx}\{\operatorname{Re}\Psi(f) : f \in \overline{co}(\mathcal{F})\} = \text{máx}\{\operatorname{Re}\Psi(f) : f \in \mathcal{E}\overline{co}(\mathcal{F})\}$$

Demostración. Como $\mathcal{F}$ es compacto y Ψ continuo en $H(D)$ el primer y segundo máximo existen ($\overline{co}(\mathcal{F})$ es compacto). Sean $M = \text{máx}\{\operatorname{Re}\Psi(f) : f \in \overline{co}(\mathcal{F})\}$ y $\mathcal{G} = \{f \in \overline{co}(\mathcal{F}) : \operatorname{Re}\Psi(f) = M\}$. Entonces $\mathcal{G} \neq \varnothing$ y $\mathcal{G}$ es un subconjunto extremo de $\overline{co}(\mathcal{F})$, pues si $h \in \mathcal{G}$ y $h = tf + (1-t)g$ para $t \in (0,1)$ y $f, g \in \overline{co}(\mathcal{F})$ entonces

$$M = \operatorname{Re}\Psi(h) = t\operatorname{Re}\Psi(f) + (1-t)\operatorname{Re}\Psi(g) \leq tM + (1-t)M = M$$

por lo que se debe cumplir que $\operatorname{Re}\Psi(f) = \operatorname{Re}\Psi(g) = M$, es decir, $f, g \in \mathcal{G}$. Ahora, por la continuidad de $\operatorname{Re}\Psi$, $\mathcal{G}$ es cerrado, y como $\mathcal{G} \subseteq \overline{co}(\mathcal{F})$ y $\overline{co}(\mathcal{F})$ es compacto $\mathcal{G}$ también es compacto.
Dado que $\mathcal{G}$ es un subconjunto compacto, convexo y no vacío de $H(D)$, por el teorema de Krein-Milman $\mathcal{G}$ tiene un punto extremo f_0. Pero como $\mathcal{G}$ es un subconjunto extremo de $\overline{co}(\mathcal{F})$, f_0 es un punto extremo de $\overline{co}(\mathcal{F})$, pues si $f_0 = \alpha h + \beta g$ para $h, g \in \overline{co}(\mathcal{F})$ y $\alpha, \beta \in (0,1)$ con $\alpha + \beta = 1$ entonces $h, g \in \mathcal{G}$ y dado que f_0 es un punto extremo de $\mathcal{G}$, $h = g = f_0$. Así que por el teorema de Krein-Milman y por la compacidad de $\overline{co}\mathcal{F}$ se tiene que $f_0 \in \mathcal{F}$. De este modo,

$$\begin{aligned} M &= \operatorname{Re}\Psi(f_0) = \text{máx}\{\operatorname{Re}\Psi(f) : f \in \mathcal{E}\overline{co}(\mathcal{F})\} \\ &= \text{máx}\{\operatorname{Re}\Psi(f) : f \in \mathcal{F}\} = \text{máx}\{\operatorname{Re}\Psi(f) : f \in \overline{co}(\mathcal{F})\} \end{aligned}$$

■

Notemos que si el conjunto $\mathcal{G}$ descrito en la prueba del teorema 4.1 consiste en un solo punto f_0 entonces f_0 es un punto extremo de $\overline{co}(\mathcal{F})$. No sólo eso; si existe un único $g_0 \in \mathcal{F}$ tal que $\Psi(g_0) = \text{máx}\{\operatorname{Re}\Psi(f) : f \in \mathcal{F}\}$ entonces g_0 también es un punto extremo de $\overline{co}(\mathcal{F})$. En efecto, si f_0 es un punto extremo de $\mathcal{G}$ entonces f_0 es un punto extremo de $\overline{co}(\mathcal{F})$ pero por el teorema de Krein-Milman y por la compacidad de $\mathcal{F}$ $\mathcal{E}\overline{co}(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{F}$ así que $f_0 \in \mathcal{G} \cap \mathcal{F}$ y por lo tanto $f_0 = g_{0.}$

Definición 4.1 *Sea $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{H}(\mathcal{D})$ convexo y sea $J : H(D) \to \mathbb{R}$. Decimos que J es convexo en $\mathcal{G}$ si*

$$J(tf + (1-t)g) \leq tJ(f) + (1-t)J(g)$$

siempre que $f, g \in \mathcal{G}$ y $0 \leq t \leq 1$.

Utilizando un argumento similar al del teorema 4.1 se puede probar la siguiente versión para funcionales convexos en subconjuntos de $H(D)$.

Teorema 4.2 *Sean $\mathcal{F} \subseteq H(D)$ compacto y $\Psi : H(D) \to \mathbb{C}$ funcional continuo, y convexo en $\overline{co}(\mathcal{F})$. Entonces*

$$\text{máx}\{\operatorname{Re}\Psi(f) : f \in \mathcal{F}\} = \text{máx}\{\operatorname{Re}\Psi(f) : f \in \overline{co}(\mathcal{F})\} = \text{máx}\{\operatorname{Re}\Psi(f) : f \in \mathcal{E}\overline{co}(\mathcal{F})\}$$

4.2. Algunos ejemplos de clases de funciones en $H(D)$

En esta sección se trabajará con algunas clases de funciones específicas. El objetivo principal será caracterizar sus puntos extremos, aplicando principalmente los resultados del capítulo tres, y obteniendo de esta forma la representación integral de los elementos de la envolvente convexa de cada una de estas clases.

4.2.1. La clase de funciones Π

Iniciamos con la siguiente clase de funciones: sea $\Pi = \{p \in H(D) : p(0) = 1, \operatorname{Re}(p) > 0\}$. Primero se probará que Π es compacto y una propiedad importante de sus elementos.

Proposición 4.2 *Π es compacto, convexo y si $p \in \Pi$ se tiene que $|p'(0)| \leq 2$.*

Demostración. Para cada $p \in \Pi$ sea $\omega_p : D \to \mathbb{C}$ definida como $\omega_p(z) = \frac{p(z)-1}{p(z)+1}$; dado que $\operatorname{Re}(p) > 0$ se tiene que: ω_p es analítica en D, $\omega_p'(z) = \frac{2p'(z)}{(p(z)+1)^2}$ y

$$|\omega_p(z)|^2 = \frac{|p(z)|^2 - \overline{p(z)} - p(z) + 1}{|p(z)|^2 + \overline{p(z)} + p(z) + 1} = \frac{|p(z)|^2 - 2\operatorname{Re}(p(z)) + 1}{|p(z)|^2 + 2\operatorname{Re}(p(z)) + 1} \leq 1$$

para $z \in D$. De modo que por el lema de Schwartz, si $z \in D$ entonces

$$|\omega_p(z)| \leq |z|$$

Ahora, si $\omega_p'(0) = 0$ entonces $p'(0) = 0$ y $|p'(0)| \leq 2$. Si $\omega_p'(0) \neq 0$ entonces $z = 0$ es un cero de orden uno de ω_p por lo que existen $\delta > 0$ y $w : \overline{B_\delta(0)} \to \mathbb{C}$ análitica tal que $w(z) \neq 0$ y $\omega_p(z) = zw(z)$ para toda $z \in \overline{B_\delta(0)}$ por lo que,

$$|\omega_p(z)| = |zw(z)| \leq |z|$$

y por tanto $|w(z)| \leq 1$ si $z \in \overline{B_\delta(0)}$. En partícular $|w(0)| \leq 1$, pero $w(0) = \omega_p'(0) = p'(0)/2$ con lo que se tiene que $|p'(0)| \leq 2$.
Veamos que Π es compacto. Sea $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de Π que converge a alguna función p en $H(D)$; entonces

$$1 = \lim_{n\to\infty} p_n(0) = p(0)$$

y para cualquier $z \in D$ se tiene que

$$\operatorname{Re}(p(z)) = \lim_{n\to\infty} \operatorname{Re}(p_n(z))$$

Por tanto $\operatorname{Re}(p(z)) \geq 0$ y si existiera $z_o \in D$ tal que $\operatorname{Re}(p(z_0)) = 0$ entonces por el principio del máximo para funciones armónicas p sería constante y además sería una constante imaginaria pura lo que no es posible por el hecho de que $p(0) = 1$, por lo tanto $\operatorname{Re}(p(z)) > 0$. Es decir, Π es cerrado en $H(D)$ así que para concluir la prueba, por el Teorema de Montel basta con mostrar que es localmente acotado.
Sea $p \in \Pi$. Si $F_1(z) : D \to \mathbb{C}$ está dada como $F_1(z) = \frac{1+z}{1-z}$ se tiene que $F_1 \circ \omega_p = p$, esto es $p \in s\,(F_1)$. Así, sean $p \in \Pi$ y $z \in D$; como $|\omega_p(z)| \leq |z|$ entonces

$$|p(z)| = \left|\frac{1+\omega_p(z)}{1-\omega_p(z)}\right| \leq \frac{1+|z|}{1-|z|}$$

lo cual implica que Π es localmente acotado.
Por otro lado si $p_1, p_2 \in \Pi$ y $t \in [0,1]$ entonces

$$\operatorname{Re}(tp_1 + (1-t)\,p_2)\,(z) = t\operatorname{Re}(p_1)\,(z) + (1-t)\operatorname{Re}(p_2)\,(z) \geq 0$$

además $(tp_1 + (1-t)\,p_1)\,(0) = 0$ por lo tanto $tp_1 + (1-t)\,p_1 \in \Pi$ con lo que se tiene que Π es convexa. ■

Del teorema anterior se desprende un hecho interesante que conviene tener en cuenta: la colección Π está contenida en $s\,(F_1)$ donde $F_1(z) = \frac{1+z}{1-z}$. Claramente también se cumple que $s\,(F_1) \subseteq \Pi$, es decir, $s\,(F_1) = \Pi$.
En el siguiente resultado se caracterizan a los puntos extremos de Π.

Teorema 4.3 *Si $\mathcal{E}\,(\diamond)$ denota a los puntos extremos de Π entonces*

$$\mathcal{E}\,(\diamond) = \{f \in H(D) : f(z) = \frac{1+xz}{1-xz},\ \ |x| = 1\}$$

Demostración. Por la proposición anterior Π es compacto de modo que por el teorema de Krein-Milman $\mathcal{E}\,(\diamond) \neq \varnothing$. Veamos que si $f \in \mathcal{E}\,(\diamond)$ y $f'(0) \geq 0$ entonces $f(z) = \frac{1+z}{1-z}$. Sea $c_1 = f'(0)$ y definamos $u : D \to \mathbb{C}$ como

$$u(z) = \begin{cases} \frac{1}{2i}[(z - \frac{1}{z})f(z) + (z + \frac{1}{z}) + c_1] & z \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases}$$

Nótese que si $z \neq 0$ entonces

$$\begin{aligned} u(z) &= \frac{1}{2i}\left[zf(z) + z - \frac{f(z)-1}{z} + c_1\right] \\ &= \frac{1}{2i}\left[zf(z) + z - \frac{f(z)-f(0)}{z-0} + c_1\right] \end{aligned}$$

de tal forma que

$$\begin{aligned} \lim_{z\to 0} u(z) &= \lim_{z\to 0} \frac{1}{2i}\left[zf(z) + z - \frac{f(z)-f(0)}{z-0} + c_1\right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

de modo que u es analítica en D.
Consideremos ahora una sucesión $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq (0,1)$ tal que $r_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$ y para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $u_n : \overline{D} \to \mathbb{C}$ definida como

$$u_n(z) = \begin{cases} \frac{1}{2i}[(z - \frac{1}{z})f(r_n z) + (z + \frac{1}{z}) + r_n c_1] & z \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases}$$

De este modo $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones analíticas en $\overline{D}$ y además para $z \in \overline{D}$,

$$\lim_{n\to\infty} u_n(z) = \begin{cases} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2i}[(z - \frac{1}{z})f(r_n z) + (z + \frac{1}{z}) + r_n c_1] = u(z) & z \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases}$$

es decir, $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente a u en $\overline{D}$.
Por otra parte sean $n \in \mathbb{N}$ y $z = e^{i\theta}$ con $\theta \in [0, 2\pi)$ entonces

$$\begin{aligned}
f(r_n z) \pm u_n(z) &= f(r_n e^{i\theta}) \pm u_n(e^{i\theta}) \\
&= f(r_n e^{i\theta}) \pm \frac{1}{2i}[(e^{i\theta} - e^{-\theta}) f(r_n e^{i\theta}) + (e^{i\theta} + e^{-i\theta}) + r_n c_1] \\
&= f(r_n e^{i\theta}) \pm (\sin(\theta) f(r_n e^{i\theta}) - i(\cos(\theta) + \frac{1}{2} r_n c_1) \\
&= (1 \pm \sin(\theta)) f(r_n e^{i\theta}) \pm i(\cos(\theta)) + \frac{1}{2} r_n c_1)
\end{aligned}$$

por lo que

$$\operatorname{Re}(f(r_n e^{i\theta}) \pm u_n(e^{i\theta})) = (1 \pm \sin(\theta)) \operatorname{Re} f(r_n e^{i\theta}) \geq 0$$

así que

$$\operatorname{Re}(f(r_n z) \pm u_n(z)) \geq 0$$

para toda $z \in D$ y por el principio del mínimo para funciones armónicas la igualdad no se puede dar para ninguna $z \in D$ (de lo contrario $f(r_n z) \pm u_n(z) = ik$ para alguna $k \in \mathbb{R}$ y para toda $z \in D$, lo que no es posible por el hecho de que $f(0) \pm u_n(0) = 1$). Por lo que $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{h_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \Pi$ donde para cada $z \in D$

$$g_n(z) = f(r_n z) + u_n(z)$$

y

$$h_n(z) = f(r_n z) - u_n(z)$$

Como Π es compacto existen $\{g_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ y $\{h_{n_l}\}_{l\in\mathbb{N}}$subsucesiones de $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ respectivamente, y funciones g y h en Π tales que $\{g_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a g y $\{h_{n_l}\}_{l\in\mathbb{N}}$ converge a h en $H(D)$. Pero $\{g_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente a $f + u$ y $\{h_{n_l}\}_{l\in\mathbb{N}}$ a $f - u$. Por lo tanto

$$g = f + u \text{ y } h = f - u$$

esto es $f \pm u \in \Pi$.
Nótese que

$$f = \frac{1}{2}[(f + u) + (f - u))$$

pero dado que f es un punto extremo de Π se debe cumplir que $(f + u) = (f - u) = f$ de donde se tiene que u es la constante cero. Así que para $z \in D - \{0\}$ se tiene

$$(z - \frac{1}{z}) f(z) + (z + \frac{1}{z}) + c_1 = 0$$

o bien

$$f(z) = \frac{1 + z^2 + c_1 z}{1 - z^2}$$

para toda $z \in D$.
Ahora, si $z \in D$ entonces

$$f(z) = \frac{1+z^2+c_1 z}{1-z^2} = \left(\frac{1}{2}+\frac{c_1}{4}\right)\frac{1+z}{1-z} + \left(\frac{1}{2}-\frac{c_1}{4}\right)\frac{1-z}{1+z}$$

pero como f es un punto extremo de Π, las funciones $g_1(z) = \frac{1+z}{1-z}$ y $g_2(z) = \frac{1-z}{1+z}$ $(|z|<1)$ son elementos distintos de Π y $c_1 \leq 2$ entonces $c_1 = 2$ ó $c_1 = -2$ y como $c_1 \geq 0$ se debe tener que

$$f(z) = g_1(z) = \frac{1+z}{1-z}$$

para $z \in D$.
Ahora si $g \in \mathcal{E}(\diamond)$ y $a_1 = g'(0) \neq 0$ entonces la función $f(z) = g\left(\frac{\overline{a}_1}{|a_1|}z\right)$ es tal que $f'(0) = |a_1| > 0$ y $f \in \mathcal{E}\diamond$ así que $f(z) = \frac{1+z}{1-z}$ y por lo tanto

$$g(z) = f\left(\frac{|a_1|}{\overline{a_1}}z\right) = \frac{1+\frac{|a_1|}{\overline{a_1}}z}{1-\frac{|a_1|}{\overline{a_1}}z}$$

con lo que se tiene que

$$\mathcal{E}(\diamond) \subseteq \{f \in H(D) : f(z) = \frac{1+xz}{1-xz}, |x|=1\}$$

Por otra parte, es claro que $\{f \in H(D) : f(z) = \frac{1+xz}{1-xz},\ |x|=1\} \subseteq \Pi$ y si suponemos que existe $g \in \{f \in H(D) : f(z) = \frac{1+xz}{1-xz},\ |x|=1\} - \mathcal{E}(\diamond)$ entonces para $z \in D$

$$g(z) = \frac{1+xz}{1-xz} = (1-t)g_1(z) + tg_2(z)$$

con $|x| = 1, g_1, g_2 \in \Pi$, $g_1 \neq g_2$, $t \in (0,1)$ por lo que para cualquier $y \in \mathbb{C}$ con $|y| = 1$

$$\frac{1+yz}{1-yz} = \frac{1+x(\overline{x}yz)}{1-x(\overline{x}yz)} = (1-t)g_1((\overline{x}y)z) + tg_2((\overline{x}y)z) = (1-t)\widetilde{g}_1(z) + t\widetilde{g}_2(z)$$

donde $\widetilde{g}_i(z) = g_i((\overline{x}y)z)$ para $z \in D$ y $i = 1,2$. Entonces $\widetilde{g}_1 \neq \widetilde{g}_2$ y $\widetilde{g}_1, \widetilde{g}_2 \in \Pi$ con lo que se tendría que $\mathcal{E}(\diamond) = \varnothing$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto

$$\mathcal{E}(\diamond) = \{f \in H(D) : f(z) = \frac{1+xz}{1-xz}, |x|=1\}$$

De los teoremas 4.3 y 3.4 se obtiene como consecuencia inmediata el teorema de representación de Herglotz, el cual se enuncia en el siguiente corolario. ■

Corolario 4.1 (Teorema de representación de Herglotz.) *Para cada $f \in \Pi$ existe $\mu \in \mathbb{P}(\partial D)$ tal que*

$$f(z) = \int_{\partial D} \frac{1+xz}{1-xz} d\mu(x)$$

4.2.2. La clase $s(F_\alpha)$

En esta sección se retoma el concepto de subordinación introducido en el capítulo 1 y se identifican los puntos extremos de colecciones definidas a través de éste en un caso muy particular.

Lema 4.1 *Sean $c \in \mathbb{C}\backslash\{-1\}$ con $|c| \leq 1$ y $F_\alpha : D \to \mathbb{C}$ definida como $F_\alpha(z) = (\frac{1+cz}{1-z})^\alpha$. Si $f \in s(F_\alpha)$ y $g \in s(F_\beta)$ $(\alpha, \beta > 0)$ entonces $fg \in F_{\alpha+\beta}$.*

Demostración. Sean $\alpha > 0$ y $c \in \mathbb{C}\backslash\{-1\}$ con $|c| \leq 1$; lo primero que mostraremos es que la función F_α está bien definida. Si $c = 1$ se sabe $F_1(D) = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) > 0\}$ el cual es un conjunto contenido en el dominio de la rama principal del logaritmo. Si $c \neq 1$ y $c = a + ib$, entonces $b \neq 0$, y es fácil ver que la imagen bajo la función $F_1(z) = \frac{1+cz}{1-z}$ de la circunferencia unitaria es la recta con forma paramétrica

$$l(t) = (\frac{1-a}{2}, -\frac{b}{2}) + t(b, -1-a)$$

la cual intersecta al eje real en el punto $\left(\frac{1-|c|^2}{2(1+a)}, 0\right)$, y al eje imaginario en el punto $\left(0, \frac{1-|c|^2}{2b}\right)$. Como $0 < \frac{1-|c|^2}{2(1+a)} < 1$ (ya que $a \neq -1$ y $a \neq 1$) y $F_1(0) = 1$, se tiene que en este caso $F_1(D)$ también está contenido en el dominio de la rama principal del logaritmo. Esto prueba que F_α está bien definida.

Por otro lado si $f \in s(F_\alpha)$ entonces $f(z) \neq 0$ para todo $z \in D$ y como D es simplemente conexo la función $f^{1/\alpha}$ está definida y además $f^{1/\alpha} \in s(F_1)$ por lo que $\frac{1}{\alpha}\log f \in s(\log F_1)$. Análogamente se tiene que si $g \in s(F_\beta)$ entonces $\frac{1}{\beta}\log g \in s(\log F_1)$.

La función $G = \log F_1$ es convexa en D pues $G'(0) = c + 1 \neq 0$ y si $z \in D$

$$\mathrm{Re}\left(\frac{zG''(z)}{G'(z)} + 1\right) = \mathrm{Re}\left(-\frac{cz}{1+cz}\right) + \mathrm{Re}\left(\frac{z}{1-z}\right) + 1 > -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 = 0$$

Ahora, sean $t \in (0,1)$ y $z \in D$; como $\frac{1}{\alpha}\log f \in s(G)$, $\frac{1}{\beta}\log g \in s(G)$ y G es convexa e inyectiva en D, existe una única $w_z \in D$ tal que

$$t(\frac{1}{\alpha}\log f)(z) + (1-t)(\frac{1}{\beta}\log g)(z) = tG(\phi(z)) + (1-t)G(\psi(z)) = G(w_z)$$

donde $\phi, \psi \in B_0$ son tales que $(\frac{1}{\alpha}\log f)(z) = G(\phi(z))$ y $(\frac{1}{\beta}\log g)(z) = G(\psi(z))$ para toda $z \in D$. Así si se define $\varphi_t : D \to D$ como $\varphi_t(z) = w_z$ se tiene que $\varphi_t(0) = 0$ y φ_t es analítica en D pues

$$t(\frac{1}{\alpha}\log f)(0) + (1-t)(\frac{1}{\beta}\log g)(0) = tG(0) + (1-t)G(0) = G(0)$$

y dado que G_1 es analítica, convexa e inyectiva tiene inversa analítica en $G(D)$ de modo que para cada $z \in D$

$$G^{-1}(t(\frac{1}{\alpha}\log f)(z) + (1-t)(\frac{1}{\beta}\log g)(z)) = G^{-1}(tG(\phi(z)) + (1-t)G(\psi(z))) = w_z = \varphi_t(z)$$

Por lo tanto $t(\frac{1}{\alpha}\log f)+(1-t)(\frac{1}{\beta}\log g) \in s(G)$ para toda $t \in [0,1]$. Así, si $t = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$ se tiene que $\log fg \in s((\alpha+\beta)G)$ o bien $\log fg \in s(\log F_1^{\alpha+\beta})$ con lo que se concluye que $fg \in s(F^{\alpha+\beta})$. ■

Teorema 4.4 *Sea F_α definida como en el lema 4.1. Si $\alpha \geq 1$ entonces*

$$\mathcal{E}\overline{co}(s(F_\alpha)) = \left\{ f \in H(D) : f(z) = \left(\frac{1+cxz}{1-xz}\right)^\alpha, \ |x| = 1 \right\}$$

Demostración. Primero consideremos el caso $\alpha = 1$. Si $|c| \leq 1$ y $c \neq -1$ entonces $T : H(D) \to H(D)$ definida como $T(f) = \frac{1+c}{2}f$ es una transformación lineal.e inyectiva. Además si $f \in H(D)$ y $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $H(D)$ que converge a f en $H(D)$ entonces $\{T(f_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $T(f)$ en $H(D)$, pues dado $E \subseteq D$ compacto y $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$,

$$|T(f_n)(z) - T(f)(z)| = \left|\frac{1+c}{2}(f_n(z) - f(z))\right| \leq |f_n(z) - f(z)| < \epsilon$$

para toda $z \in E$. Por lo tanto T es continua.
Por otro lado, si $G_1 : D \to \mathbb{C}$ está definida como $G_1(z) = \frac{1+z}{1-z}$ se tiene que si $f \in s(T(G_1)) = s(\frac{1+c}{2}G_1)$ entonces $f \in T(\Pi)$ ya que $G_1 \in \Pi$ y por tanto $G_1 \circ \varphi \in \Pi$ para cualquier φ función de Schwartz. Ahora, como Π es compacto $T(\Pi)$ es cerrado y además es convexo, pues Π lo es (4.2) y T es lineal, por lo que

$$\overline{co}(s(T(G_1)) \subseteq T(\Pi)$$

De hecho se da la igualdad entre dichos conjuntos, en efecto, si $p \in \Pi$ por el corolario 4.1 y el teorema 3.3 existe $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión en $co(\{f \in H(D) : f(z) = \frac{1+xz}{1-xz}, |x| = 1\})$ tal que $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a p en $H(D)$. Ahora, como para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$p_n \in co(\{f \in H(D) : f(z) = \frac{1+xz}{1-xz}, |x| = 1\})$$

existen $k_n \in \mathbb{N}$, $t_1^{(n)}, \ldots, t_{k_n}^{(n)} \in [0,1]$ con $\sum_{i=1}^{k_n} t_i^{(n)} = 1$ y $x_1^{(n)}, \ldots, x_{k_n}^{(n)} \in \partial D$ tales que

$$p_n = \sum_{i=1}^{k_n} t_i^{(n)} p_i^{(n)}$$

donde $p_i^{(n)}(z) = \frac{1+x_i^n z}{1-x_i^n z}$ para $z \in D$ lo que implica que

$$T(p_n) = T(\sum_{i=1}^{k_n} t_i^{(n)} p_i^{(n)}) = \sum_{i=1}^{k_n} t_i^{(n)} T(p_i^{(n)})$$

pero $T\left(p_i^{(n)}\right) \in s(T(G_1))$ para $i = 1, \ldots, k_n$ y por lo tanto $T(p_n) \in co(s(T(G_1))$, además por la continuidad de T la sucesión $\{T(p_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $T(p)$ y por lo tanto

$$T(p) \in \overline{co}(s(T(G_1))$$

Observemos que para $z \in D$

$$F_1(z) = \frac{1+cz}{1-z} = \frac{1+c}{2}\frac{1+z}{1-z} + \frac{1-c}{2} = T(G_1) + \frac{1-c}{2}$$

entonces $h \in s(F_1)$ si y sólo si $h \in s(T(G_1)) + \frac{1-c}{2}$, es decir, $s(F_1) = s(T(G_1)) + \frac{1-c}{2}$ por lo tanto

$$\overline{co}(s(F_1)) = \overline{co}(s(T(G_1)) + \frac{1-c}{2}) = \overline{co}(s(T(G_1))) + \frac{1-c}{2}$$

De este modo si $f \in \mathcal{E}\overline{co}(s(F_1))$ $f \in \mathcal{E}\overline{co}(s(T(G_1))) + \frac{1-c}{2}$ y entonces existe $f_1 \in \mathcal{E}\overline{co}(s(T(G_1)))$ tal que $f = f_1 + \frac{1-c}{2}$. Pero $\overline{co}(s(T(G_1))) = T(\Pi)$ por lo que $f_1 \in \mathcal{E}T(\Pi)$ y por lo tanto $f_1 \in T(\mathcal{E}\Pi)$ pues de lo contario existirían $p_1, p_2 \in \Pi$ $p_1 \neq p_2$ y $t \in (0,1)$ tales que

$$f_1 = T((1-t)p_1 + tp_2) = (1-t)T(p_1) + tT(p_2)$$

y entonces $f_1 \notin \mathcal{E}T(\Pi)$, ya que de la inyectividad de T se tiene que $T(p_1) \neq T(p_2)$. Así que por el teorema 4.3 existe $x_0 \in \partial D$ tal que

$$f_1(z) = \frac{1+c}{2}\frac{1+x_0 z}{1-x_0 z}$$

para toda $z \in D$. Por lo tanto

$$f(z) = f_1(z) + \frac{1-c}{2} = \frac{1+c}{2}\frac{1+x_0 z}{1-x_0 z} + \frac{1-c}{2} = \frac{1+cx_0 z}{1-x_0 z}$$

para toda $z \in D$.
Por otro lado, si suponemos que existe $g \in \{f \in H(D) : f(z) = \frac{1+cxz}{1-xz},\ |x| = 1\} \backslash \mathcal{E}\overline{co}(s(F_1))$ entonces para $z \in D$

$$g(z) = \frac{1+cxz}{1-xz} = (1-t)g_1(z) + tg_2(z)$$

con $g_1, g_2 \in \overline{co}(s(F_1))$, $g_1 \neq g_2$, $t \in (0,1)$ y $|x| = 1$. Así que para $y \in \mathbb{C}$ con $|y| = 1$,

$$\frac{1+cyz}{1-yz} = \frac{1+cx(\overline{x}yz)}{1-x(\overline{x}yz)} = (1-t)g_1((\overline{x}y)z) + tg_2((\overline{x}y)z) = (1-t)\widehat{g}_1(z) + t\widehat{g}_2(z)$$

como $\widehat{g}_1 \neq \widehat{g}_2$ y $\widehat{g}_1, \widehat{g}_2 \in \overline{co}(s(F_1))$ (lema 1.8) se tendría que $\mathcal{E}\overline{co}(s(F_1)) = \varnothing$ lo cual contradice al teorema de Krein-Milman. Por lo tanto

$$\mathcal{E}\overline{co}(s(F_1)) = \{f \in H(D) : f(z) = \frac{1+cxz}{1-xz}, |x| = 1\}$$

Sea ahora $\alpha > 1$ y sea $f \in \mathcal{E}\overline{co}(s(F_\alpha))$. Por el teorema de Krein-Milman y por la compacidad de $s(F_\alpha)$ se tiene que $f \in s(F_\alpha)$ por lo que existe $g \in s(F_1)$ tal que $f = g^\alpha$. Si $g \notin \mathcal{E}\overline{co}(s(F_1))$ entonces

$$g = (1-t)g_1 + tg_2$$

con $t \in (0,1)$, $g_1, g_2 \in \overline{co}(s(F_1))$, $g_1 \neq g_2$. Como $g_i \in \overline{co}(s(F_1))$ existe $\{h_n^i\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión en $co(s(F_1))$ que converge a g_i en $H(D)$ para $i = 1, 2$. Ahora, dado que para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $h_n^i \in co(s(F_1))$, por el lema 1.8 $g^{\alpha-1}h_n^i \in co(s(F_\alpha))$ y por lo tanto $g^{\alpha-1}g_i \in \overline{co}(s(F_\alpha))$, ya que la sucesión $\{g^{\alpha-1}h_n^i\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $g^{\alpha-1}g_i$ en $H(D)$ para $i = 1, 2$. Por lo que

$$f = g^\alpha = g^{\alpha-1}g = g^{\alpha-1}((1-t)g_1 + tg_2) = (1-t)(g^{\alpha-1}g_1) + t(g^{\alpha-1}g_2)$$

lo cual no es posible ya que $g^{\alpha-1}g_1 \neq g^{\alpha-1}g_2$, por el hecho de que $g_1 \neq g_2$ y $g^{\alpha-1}$ no se anula en D. Por lo tanto $g \in \mathcal{E}\overline{co}(s(F_1))$ de modo que existe $x \in \mathbb{C}$ con $|x| = 1$ tal que

$$f(z) = \left(\frac{1+cxz}{1-xz}\right)^\alpha$$

Si suponemos que existe $f \in \{g \in H(D) : g(z) = \left(\frac{1+cxz}{1-xz}\right)^\alpha,\ |x| = 1\}\backslash\mathcal{E}\overline{co}(s(F_\alpha))$ entonces $f = (1-t)f_1 + tf_2$ para $t \in (0,1)$, $f_1, f_2 \in \overline{co}(s(F_\alpha))$ $f_1 \neq f_2$. Entonces si $z \in D$

$$f(z) = \left(\frac{1+cxz}{1-xz}\right)^\alpha = (1-t)f_1(z) + tf_2(z)$$

para alguna $x \in \mathbb{C}$ con $|x| = 1$. Asì que si $y \in \mathbb{C}$ con $|y| = 1$

$$\left(\frac{1+cyz}{1-yz}\right)^\alpha = \left(\frac{1+cx(\overline{x}yz)}{1-x(\overline{x}yz)}\right)^\alpha = (1-t)f_1((\overline{x}y)z) + tf_2((\overline{x}y)z) = (1-t)\widehat{f}_1(z) + t\widehat{f}_2(z)$$

con $\widehat{f}_i(z) = f_1((\overline{x}y)z)$, $z \in D$, $i = 1, 2$. Con lo que se tendría que $\mathcal{E}\overline{co}(s(F_\alpha)) = \varnothing$ contradiciendo al teorema de Krein-Milman. Por lo tanto

$$\mathcal{E}\overline{co}(s(F_\alpha)) = \{g \in H(D) : g(z) = \left(\frac{1+cxz}{1-xz}\right)^\alpha, |x| = 1\}$$

■

Del teorema anterior y del teorema 3.4 se tiene el siguiente corolario.

Corolario 4.2 *Sea F_α como en el teorema anterior. Entonces*

$$\overline{co}(s(F_\alpha)) = \left\{ f \in H(D) : f(z) = \int\limits_{\partial D} \left(\frac{1+cxz}{1-xz}\right)^\alpha d\mu(x),\ \mu \in \mathbb{P}(\partial D) \right\}$$

4.2.3. Las clases S^* y K.

Dos clases de funciones univalentes en el disco que resultarán de interés, son aquellas cuya imagen es convexa o convexa en un sentido más débil. En esta sección se definen dichas clases, además de que se establecen ciertos resultados que nos permitirán caracterizar los puntos extremos de sus envolventes convexas cerradas.

Antes de analizar a las clases ya mencionadas, introduciremos la clase S de funciones analíticas y univalentes en D que además cumplen con las condiciones de normalización en el cero $f(0) = 0$ y $f'(0) = 1$, esto es

$$S = \{f \in H(D) : f \text{ es univalente}, f(0) = 0, f'(0) = 1\}$$

Notemos que por el Teorema del mapeo de Riemman cualquier región simplemente conexa no vacía Δ de $\mathbb{C}$ distinta del plano es difeomorfa a D y por ello es que las propiedades de una función analítica y univalente definida en Δ se pueden entender estudiando una función univalente que cumpla las condiciones de normalización en el cero definida en D, es decir, estudiando a un elemento de S.

El primer resultado de esta sección establece la compacidad de S como subconjunto de $H(D)$.

Teorema 4.5 *La colección S es compacta en $H(D)$.*

Demostración. Por el teorema de Montel es suficiente con probar que S es cerrado y localmente acotado.
Veamos que S es cerrado. Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en S que converge a f en $H(D)$; por el teorema de Hurwitz f es univalente o f es constante en D pero f no puede ser constante porque $f'(0) = 1$.
Por el teorema de distorsión (ver [**?**]) para cualquier $f \in S$ se satisface que

$$\frac{|z|}{(1+|z|)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{|z|}{(1-|z|)^2}$$

y por lo tanto S es localmente acotada. ■

Como se mencionaba al inicio de esta sección, el objetivo es caracterizar los puntos extremos de las envolventes convexas cerradas de dos subclases de S. La primera de éstas, es la de funciones analíticas y univalentes en D que tiene la propiedad de que su imagen es un subconjunto estrellado de $\mathbb{C}$ con respecto al origen. De manera más precisa, si se denota a dicha clase como S^* entonces

$$S^* = \{f \in S : f(D) \text{ es estrellado respecto al } 0\}$$

El críterio de Nevalinna (ver 1920) establece una caracterización analítica de S^*. La demostración completa de este resultado no se presenta en este trabajo, sin embargo puede consultarse en [Nevanlinna].

Teorema 4.6 (Críterio de Nevanlinna) *Sea $f \in H(D)$ univalente tal que $f(0) = 0$ y $f'(0) = 1$. Entonces $f \in S^*$si y sólo si $p : D \to \mathbb{C}$, definida como $p(z) = \frac{zf'(z)}{f(z)}$ si $z \neq 0$ y $p(0) = 1$, pertenece a Π.*

Demostración. Supongamos que $f \in S^*$ y para $t \geq 0$ definamos $f_t : D \to D$ como $f_t(z) = f^{-1}(e^{-t}f(z))$. Entonces $f_t(0) = 0$ y para cualesquiera $s, t \geq 0$ y $z \in D$ se tiene que

$$f_{t+s}(z) = (f_t \circ f_s)(z) = f_t(f_s(z))$$

De modo que por el lema de Schwartz

$$|f_{t+s}(z)| = |f_t(f_s(z))| \leq |f_s(z)|$$

es decir, para $z \in D \backslash \{0\}$ fija la función $m : [0, \infty) \to [0, 1]$ dada como $m(t) = |f_t(z)|$ es no creciente y por lo tanto $\frac{dm^2}{dt}(t) \leq 0$. Esto es

$$\frac{dm^2}{dt}(t) = -2\,\mathrm{Re}\left(\overline{f_t(z)}\frac{f(f_t(z))}{f'(f_t(z))}\right) \leq 0$$

por lo que,

$$\mathrm{Re}\left(\overline{f_t(z)}\frac{f(f_t(z))}{f'(f_t(z))}\right) \geq 0$$

así que

$$\mathrm{Re}\left(\frac{f(f_t(z))}{f_t(z)f'(f_t(z))}\right) \geq 0$$

haciendo tender t a cero,

$$\mathrm{Re}\left(\frac{f(z)}{zf'(z)}\right) \geq 0$$

y tomando recíprocos,

$$\mathrm{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) \geq 0$$

Por lo tanto $\mathrm{Re}(p(z) \geq 0$ para toda $z \in D$ y por el principio del máximo para funciones armónicas y por el hecho de que $p(0) = 1$, la igualdad no se puede dar para ningún $z \in D$. Por otra parte, notemos que el hecho de que $p \in \Pi$ implica que para $z = re^{i\theta}$ con $0 < r < 1$ y $\theta \in [0, 2\pi]$ se cumple

$$\frac{\partial \arg(f(z))}{\partial \theta} = \frac{\partial\,\mathrm{Im}(\log(f(z)))}{\partial \theta} = \mathrm{Im}\left(\frac{f'(z)}{f(z)}iz\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) = \mathrm{Re}(p(z)) > 0$$

para alguna rama analítica del logarítmo. Así, si suponemos que $p \in \Pi$ la función $g(\theta) = \arg(f(re^{i\theta}))$ para $\theta \in [0, 2\pi)$ resulta una función creciente de θ lo que geométricamente permite argumentar que el conjunto $f(B_r(0))$ es estrellado respecto de cero y dado que

$$f(D) = \bigcup_{0<r<1} f(B_r(0))$$

y $0 \in \bigcap_{0<r<1} f(B_r(0))$ entonces $f(D)$ es estrellado respecto a cero. ■

Con base en el criterio de Nevanlinna es posible establecer la compacidad de S^* en $H(D)$, además de que implícitamente define una biyección entre las colecciones S^* y Π.

Teorema 4.7 *La colección S^* es compacta en $H(D)$. Además la función $\eta : S^* \to \Pi$ dada por $\eta(f) = p$ con*

$$p(z) = \frac{zf'(z)}{f(z)}$$

para $z \neq 0$ y $p(0) = 1$ es una biyección entre S^*y Π.

Demostración. Por el teorema 4.5, para probar la primera afirmación es suficiente con mostrar que S^* es cerrado. Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en S^* que converge a f en $H(D)$ y para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos $p_n : D \to \mathbb{C}$ como $p_n(z) = zf_n'(z)/f_n(z)$ si $z \neq 0$ y $p_n(z) = 1$ si $z = 0$. Entonces $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \Pi$ es localmente acotada (ya que Π es localmente acotado por el teorema de distorsión) y por tanto normal, así que el teorema de Arzela-Ascoli nos asegura que $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es equicontinua en cualquier subconjunto compacto de D y como $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente a la función $p : D \to \mathbb{C}$ dada por

$$p(z) = \frac{zf'(z)}{f(z)}$$

si $z \neq 0$ y $p(z) = 1$ si $z = 0$, entonces $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a p en $H(D)$. Pero por la proposición 4.2 Π es cerrado por lo que $p \in \Pi$, de modo que por el criterio de Nevanlinna concluimos que $f \in S^*$.

Por otra parte, el criterio de Nevanlinna garantiza que η está bien definida. Sea $p \in \Pi$ y definamos $f : D \to \mathbb{C}$ como

$$f(z) = z \exp\left(\int_{[0,z]} h(\xi)\, d\xi\right)$$

donde $h(w) = \frac{p(w)-1}{w}$ si $w \neq 0$, $h(0) = p'(0)$ y $[0, z]$ es el segmento que va del cero a z. Entonces si $z \neq 0$

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} = \frac{\left(\exp\left(\int_{[0,z]} h(\xi)\, d\xi\right) + (p(z)-1)\exp\left(\int_{[0,z]} h(\xi)\, d\xi\right)\right)}{\exp\left(\int_{[0,z]} h(\xi)\, d\xi\right)} = p(z)$$

además $f(0) = 0$ y $f'(0) = 1$. Veamos que $f \in S$ para cualquier; sea $f \in S^*$ y $0 < r < 1$ por el principio del argumento se tiene que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 1$$

ya que el origen es el único cero de f en D; ahora, si $\Gamma = f(\{z : |z| = r\})$ y $w_0 \in f(B_r(0))$ entonces

$$1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{1}{w} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{1}{w - w_0} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{f'(z)}{f(z) - w_0} dz$$

donde la tercera igualdad se da por el hecho de que $f(0)$ y w_0 pertenecen a la misma región determinada por Γ, esto es $f(B_r(0))$. Así que de nuevo por el principio del argumento se tiene que existe una única pre-imagen del punto w_0 en $B_r(0)$. Es decir, f es inyectiva en $B_r(0)$ para cualquier $0 < r < 1$ y por lo tanto también es inyectiva en D. De este modo por el teorema 4.6 se tiene que $f \in S^*$.
Por otro lado, supongamos que $p \in \Pi$ está dada por

$$p(z) = \frac{zf'(z)}{f(z)}$$

si $z \neq 0$ y $p(0) = 1$ para alguna $f \in S^*$. Como $f \in S^*$ la función $g : D \to \mathbb{C}$ definida como $g(z) = \frac{f(z)}{z}$ si $z \neq 0$ y $g(0) = 1$ es analitica y no se anula en D por lo que existe una rama del logarítmo tal que la función $G(z) = \log(g(z))$ es analítica en D. Como

$$G'(z) = \frac{p(w) - 1}{w} = h(z)$$

entonces

$$G(z) = \int_{[0,z]} h(\xi)\, d\xi$$

(ya que $G(0) = 0$) lo que implica que

$$f(z) = z \exp\left(\int_{[0,z]} h(\xi)\, d\xi \right)$$

■

Otra clase de funciones univalentes en D con la que se trabajará en esta sección, es aquella en la que la imagen bajo cualquiera de sus elementos del disco es un conjunto convexo; denotaremos dicha clase como K. De este modo

$$K = \{ f \in H(D) : f \in S \text{ y } f(D) \text{ es convexo} \}$$

Es posible establecer una caracterización analítica de la colección K de manera semejante a lo que el criterio de Nevalinna hace para S^*. De hecho, dicha caractetización también se hace en términos de la colección Π.

Teorema 4.8 *Sea f analítica y univalente en D. Entonces $f \in K$ si y sólo si $p \in \Pi$, donde p está dada como $p(z) = \frac{zf''(z)}{f'(z)} + 1$.*

Es claro que $K \subseteq S^*$, sin embargo, la contención es propia. En efecto, la función definida sobre D como

$$f(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

es tal que

$$f(D) = \mathbb{C} - \{w \in \mathbb{C} \colon \mathrm{Re}(w) < -1/4, \mathrm{Im}(w) = 0\}$$

de modo que $f \in S^*$ y $f \notin K$.

Los resultados anteriores dan la pauta para caracterizar a los elementos de S^* através de la integral respecto de una medida de probabilidad en ∂D de una función que pertenece a K. Junto con la compacidad de S^*, esta relación va a permitir describir los puntos extremos de su envolvente convexa cerrada.

Teorema 4.9 *Sea $f \in H(D)$. Entonces $f \in S^*$ si y sólo si existe $\mu \in \mathbb{P}(\partial D)$ tal que*

$$f(z) = z \exp\left(\int\limits_{|x|=1} -2\log(1 - xz) d\mu(x) \right)$$

Además esta correspondencia entre $\mathbb{P}(\partial D)$ y S^* es uno a uno.

Demostración. Sean $f \in S^*$, $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ una sucesión que converge a cero tal que $|r_n| < 1$ y $r_{n+1} < r_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$, y $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $H(D)$ con

$$f_n(z) = z \exp\left[\int\limits_{[r_n,z]} h(\xi) d\xi \right]$$

donde h está definida como en el teorema anterior para $p(z) = \frac{zf'(z)}{f(z)}$ si $z \neq 0$ y $p(0) = 1$. Nótese que para cada $z \in D$ la sucesión $\{f_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a

$$f(z) = z \exp\left[\int\limits_{[0,z]} h(\xi) d\xi \right]$$

Por el teorema anterior y el Teorema de Representación de Herglotz (4.1), se tiene que para $z \in D$ y $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
f_n(z) &= z \exp\left[\int\limits_{[r_n,z]} \frac{1}{\xi} \left(\int\limits_{\partial D} \left(\frac{1 + x\xi}{1 - x\xi} - 1 \right) d\mu(x) \right) d\xi \right] \\
&= z \exp\left[\int\limits_{\partial D} \left(\int\limits_{[r_n,z]} \left(\frac{2x}{1 - x\xi} \right) d\xi \right) d\mu(x) \right] \\
&= z \exp\left[\int\limits_{\partial D} -2\left(\log(1 - xz) - \log(1 - xr_n) \right) d\mu(x) \right]
\end{aligned}$$

donde $\log(w)$ representa la rama principal del logarítmo y $\mu \in \mathbb{P}(\partial D)$. Entonces si para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos $g_n : \partial D \to \mathbb{C}$ como $g_n(x) = \log(1 - r_n x)$ se tiene que $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente a cero y además es uniformemente acotada (pues existe $M > 0$ tal que $|\log(w)| \le M$ para toda $w \in \{w \in \mathbb{C} : (\mathrm{Re}(w), \mathrm{Im}(w)) \in [1 - r_1, 1 + r_1]^2\}$). Por tanto, del Teorema de la convergencia Dominada y del hecho de que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente a f, se sigue que

$$f(z) = z \exp\left[\int_{\partial D} -2\log(1 - xz) d\mu\,(x)\right]$$

■

Proposición 4.3 *Sea $f \in S^*$. Si $g, h : D \to \mathbb{C}$ se definen como $g(z) = f(z)/z$ si $z \neq 0$ y $g(0) = 1$ y $F_2(z) = \frac{1}{(1-z)^2}$ entonces $g \in s(F_2)$.*

Demostración. Por el teorema anterior existe $\mu \in \mathbb{P}(\partial D)$ tal que

$$\frac{f(z)}{z} = \exp\left[\int_{\partial D} -2\log(1 - xz) d\mu\,(x)\right]$$

Definamos la función $k : D \to \mathbb{C}$ como $k(z) = \log(1 - z)$ entonces k es univalente y convexa ya que si $z \in D$,

$$\mathrm{Re}\left[1 + \frac{zk''(z)}{k'(z)}\right] = \mathrm{Re}\left[\frac{1}{1-z}\right] > \frac{1}{2}$$

Ahora sea $0 < r < 1$ para $z \in B_r[0] \subseteq D$ sea $k_z \in C(\partial D)$ dada como $k_z(x) = k(xz) = \log(1 - xz)$. Por otro lado, si $\Phi_\mu \in P^*$ está definido como

$$\Phi_\mu(h) = \int_{\partial D} h d\mu$$

por el Teorema de Krein-Milman, por el teorema 2.3 y por el teorema 2.5 existe una red $\{\Psi_\alpha\}_{\alpha\in\Sigma}$ que converge a Φ_μ en $C(\partial D)^*$ con $\Psi_\alpha = \sum_{i=1}^{n_\alpha} \lambda_i^\alpha \Psi_{x_\alpha}$ donde $\Psi_{x_\alpha}(h) = h(x_\alpha)$ para $h \in C(\partial D)$, $\sum_{i=1}^{n_\alpha} \lambda_i^\alpha = 1$ y $n_\alpha \in \mathbb{N}$. Como $\{\Psi_\alpha\}_{\alpha\in\Sigma}$ converge a Φ_μ en $C(\partial D)^*$ se tiene que la red $\{\Psi_\alpha(k_z)\}_{\alpha\in\Sigma}$ converge a $\Phi_\mu(k_z)$ en $\mathbb{C}$, es decir, la red $\{\sum_{i=1}^{n_\alpha} \lambda_i^\alpha \log(1 - x_\alpha z)\}_{\alpha\in\Sigma}$ converge a $\int_{\partial D} \log(1 - xz) d\mu\,(x)$ y por lo tanto a $\int_{\partial D} \log(1 - xz) d\mu\,(x) \in k(B_r[0])$ pues $\sum_{i=1}^{n_\alpha} \lambda_i^\alpha \log(1 - x_\alpha z) \in k(B_r[0])$ para cada $\alpha \in \Sigma$. Así que por el lema **??** la función

$$\widetilde{f}(z) = \int_{\partial D} \log(1 - xz) d\mu\,(x)$$

está subordinada a k, de modo que existe φ función de Schwartz tal que $\widetilde{f}(z) = k(\varphi(z))$. Así que, si $z \neq 0$,

$$\begin{aligned} g(z) &= \frac{f(z)}{z} = \exp\left[\int\limits_{\partial D} -2\log(1-xz)d\mu(x)\right] \\ &= \exp\left[-2k(\varphi(z))\right] \\ &= \exp\left[-2\log(1-\varphi(z))\right] \\ &= \frac{1}{(1-\varphi(z))^2} \\ &= F_2(\varphi(z)) \end{aligned}$$

Por lo tanto $g(z) = h(\varphi(z))$ para toda $z \in D$. ■

En los resultados siguientes se prueba que los elementos de la envolvente convexa de las clases S^* y K admiten una representación integral, con lo que del teorema 3.4 se obtiene una expresión para sus puntos extremos.

Teorema 4.10

$$\overline{co}(S^*) = \left\{ f \in H(D) : f(z) = \int_{\partial D} \frac{z}{(1-xz)^2} d\lambda, \lambda \in \mathbb{P}(\partial D) \right\}$$

Además

$$\mathcal{E}\overline{co}(S^*) = \{ f \in H(D) : f(z) = \frac{z}{(1-xz)^2}, |x| = 1 \}$$

Demostración. Sea $f \in S^*$ por la proposición 4.3 si $g : D \to \mathbb{C}$ está dada como $g(z) = \frac{f(z)}{z}$, $z \neq 0$ y $g(0) = 1$ entonces $g \in s(F_2)$ con $c = 0$. Por lo que del corolario 4.2 se tiene que existe $\mu \in \mathbb{P}(\partial D)$ tal que para $z \in D$

$$g(z) = \int\limits_{\partial D} \frac{1}{(1-xz)^2} d\mu(x)$$

y entonces

$$f(z) = \int\limits_{\partial D} \frac{z}{(1-xz)^2} d\mu(x)$$

para toda $z \in D$.

Por otra parte, $k : D \times \partial D \to \mathbb{C}$ definida como

$$k(z,x) = \frac{z}{(1-xz)^2}$$

es tal que para cada $x \in \partial D$ la función $k(\cdot, x) \in S^*$ ya que si $z \in D$

$$\mathrm{Re}\left(\frac{zk'(z,x)}{k(z,x)}\right) = \frac{1-|z|^2}{|1-xz|^2} > 0$$

Y también satisface las hipótesis del teorema 3.2 ya que para cada $z \in D$ se tiene que $1 - xz \neq 0$ si $|x| = 1$. Además, si $(z, x) \in D \times \partial D$

$$|k(z,x)| = \frac{|z|}{|1-zx|^2} \leq \frac{|z|}{(1-|xz|)^2} = \frac{|z|}{1-|z|^2}$$

y por tanto la familia $\{k(\cdot, x) : x \in \partial D\}$ es localmente acotada. Así que

$$\mathcal{G} = \left\{ h \in H(D) : h(z) = \int\limits_{\partial D} \frac{z}{(1-xz)^2} d\lambda, \lambda \in \mathbb{P}(\partial D) \right\}$$

es una famila compacta y convexa que contiene a S^*. Entonces $\overline{co}(S^*) \subseteq \mathcal{G}$.
Por el corolario 3.1

$$\mathcal{E}\mathcal{G} \subseteq \{k(\cdot . x) : x \in \partial D\}$$

por lo que $\overline{co}(\mathcal{E}\mathcal{G}) = \overline{co}(\mathcal{G}) \subseteq \overline{co}(S^*)$. De este modo

$$\overline{co}(S^*) = \left\{ h \in H(D) : h(z) = \int_{\partial D} \frac{z}{(1-xz)^2} d\lambda, \lambda \in \mathbb{P}(\partial D) \right\} = \mathcal{G}$$

Notemos que la asociación $\lambda \to h$ en la familia $\mathcal{G}$ es uno a uno pues para $x \in \partial D$ se cumple que

$$k(z,x) = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} n(xz)^n$$

siempre que $|z| < 1$. Así que, si $\mu, \nu \in \mathbb{P}(\partial D)$ son tales que

$$\int_{\partial D} \frac{z}{(1-xz)^2} d\mu(x) = \int_{\partial D} \frac{z}{(1-xz)^2} d\nu(x)$$

se debe cumplir que

$$\int_{\partial D} \sum_{n=1}^{\infty} n x^n z^n d\mu(x) = \int_{\partial D} \sum_{n=1}^{\infty} n x^n z^n d\nu(x)$$

o bien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\partial D} n x^n z^n d\mu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\partial D} n x^n z^n d\nu(x)$$

para toda $z \in D$. Igualando los coeficientes se obtiene que para $n \in \mathbb{N}$

$$n \int_{\partial D} x^n d\mu(x) = n \int_{\partial D} x^n d\nu(x)$$

con lo que se concluye que $\mu = \nu$ (proposición 2.1). Entonces por el corolario 3.1

$$\mathcal{E}\overline{co}(S^*) = \left\{ f \in H(D) : f(z) = \frac{z}{(1-xz)^2}, |x| = 1 \right\}$$

■

Teorema 4.11

$$\overline{co}(K) = \left\{ f \in H(D) : f(z) = \int_{\partial D} \frac{z}{1 - xz} d\mu\,(x)\,, \mu \in \mathbb{P}(\partial D) \right\}$$

Además

$$\mathcal{E}\overline{co}(K) = \left\{ f \in H(D) : f(z) = \frac{z}{1 - xz}, |x| = 1 \right\}$$

Sea $T : H(D) \to H(D)$ definida como $T(f) = g_f$ donde $g_f : D \to \mathbb{C}$ está dada como $g_f(z) = zf'(z)$.Claramente T es lineal. Ahora, si $f \in H(D)$ y $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión que converge a f en $H(D)$ entonces $\{f'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a f' en $H(D)$ y por lo tanto la sucesión $\{T(f_n)\}$ converge a $T(f)$ en $H(D)$, es decir, T es continua.
Por el criterio de Nevalinna (4.6) y el por teorema 4.8 se tiene que $T(K) \subseteq S^*$ por tanto

$$T(\overline{co}(K)) \subseteq \overline{co}(T(K)) \subseteq \overline{co}(S^*)$$

donde la primera contención se tiene de la proposición 4.1. De este modo si $f \in \overline{co}(K)$ por el teorema 4.10 existe $\mu \in \mathbb{P}(\partial D)$ tal que para cada $z \in D$

$$zf'(z) = g_f(z) = \int_{\partial D} \frac{z}{(1 - xz)^2} d\mu\,(x)$$

y entonces

$$f'(z) = \int_{\partial D} \frac{1}{(1 - xz)^2} d\mu\,(x)$$

Nótese que si $z \in D$ y $|x| = 1$ entonces

$$\left| \frac{z}{1 - xz} \right| \leq \frac{|z|}{1 - |xz|} = \frac{|z|}{1 - |z|} \tag{4.1}$$

De este modo la función $h : D \to \mathbb{C}$ definida como

$$h(z) = \int_{\partial D} \frac{z}{1 - xz} d\mu\,(x)$$

es analítica (3.1), además

$$h'(z) = \int_{\partial D} \frac{1}{(1 - xz)^2} d\mu\,(x) = f'(z)$$

y $h(0) = 0 = f(0)$ por lo que

$$f(z) = h(z) = \int_{\partial D} \frac{z}{1 - xz} d\mu\,(x)$$

para toda $z \in D$. Por lo tanto

$$\overline{co}(K) \subseteq \mathcal{F} = \left\{ h \in H(D) : h(z) = \int_{\partial D} \frac{z}{1-xz} d\lambda\left(x\right),\ \lambda \in \mathbb{P}(\partial D) \right\}$$

Si definimos $k : D \times \partial D \to \mathbb{C}$ como $k(z,x) = \frac{z}{1-xz}$, la familia $\{k(\cdot,x) : |x| = 1\}$ resulta localmente acotada por 4.1 y como $1 - xz \neq 0$ para todo $(z,x) \in D \times \partial D$ por el teorema 3.3 $\mathcal{F} = \overline{co}(\{k(\cdot,x) : |x| = 1\})$. Pero dada $x \in \partial D$ para cualquier $z \in D$

$$\mathrm{Re}\left(\frac{zk''(z,x)}{k'(z,x)} + 1 \right) = \frac{1 - |z|^2}{|1 - xz|^2} > 0$$

es decir, $\{k(\cdot,x) : |x| = 1\} \subseteq K$. Así que

$$\mathcal{F} = \overline{co}(\{k(\cdot,x) : |x| = 1\}) \subseteq \overline{co}(K)$$

Por otra parte si $\mu, \lambda \in \mathbb{P}(\partial D)$ son tales que

$$\int_{\partial D} \frac{z}{1-xz} d\lambda\left(x\right) = \int_{\partial D} \frac{z}{1-xz} d\mu\left(x\right)$$

entonces

$$\int_{\partial D} \sum_{n=1}^{\infty} x^n z^n d\lambda\left(x\right) = \int_{\partial D} \sum_{n=1}^{\infty} x^n z^n d\mu\left(x\right)$$

o bien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\partial D} x^n z^n d\lambda\left(x\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\partial D} x^n z^n d\mu\left(x\right)$$

para toda $z \in D$. Por lo tanto si $n \in \mathbb{N}$

$$\int_{\partial D} x^n d\lambda\left(x\right) = \int_{\partial D} x^n d\mu\left(x\right)$$

con lo que se tiene que $\lambda = \mu$. Así que por el corolario 3.1

$$\mathcal{E}\overline{co}(K) = \left\{ f \in H(D) : f(z) = \frac{z}{1-xz}, |x| = 1 \right\}$$

Una vez caracterizadas las envolventes convexas cerradas de las colecciones S^* y K, lo que sigue es extender los resultados a colecciones más grandes, esto es se caracterizarán las envolventes convexas de las colecciones $s\left(K\right)$ y $s\left(S^*\right)$.

Proposición 4.4 *Sea $\mathcal{F} \subseteq H(D)$ compacto tal que $f(0) = 0$ para toda $f \in \mathcal{F}$. Si $f \in \mathcal{E}\overline{co}(s(\mathcal{F}))$ entonces $f = 0$ ó $f \in s(g)$ para alguna $g \in \mathcal{E}\overline{co}(\mathcal{F})$.*

Demostración. Sea $f \in \mathcal{E}\overline{co}(s(\mathcal{F}))$ entonces $f \in s(\mathcal{F})$ pues por el teorema de Krein-Milman

$$\mathcal{E}\overline{co}(s(\mathcal{F})) \subseteq s(\mathcal{F})$$

ya que $s(\mathcal{F})$ es compacto y en consecuencia $\overline{co}(s(\mathcal{F}))$ también es compacto. Notemos además que $f(0) = 0$.
Supongamos que f no es la constante cero. Como $f \in s(\mathcal{F})$, existen funciones $g \in \mathcal{F}$ y ϕ función de Schwartz tales que $f = g \circ \phi$. Si suponemos que $g \notin \mathcal{E}\overline{co}(\mathcal{F})$ entonces

$$g = tg_1 + (1-t)g_2$$

con $t \in (0,1)$, $g_1, g_2 \in \overline{co}(\mathcal{F})$ y $g_1 \neq g_2$. De este modo

$$f = t(g_1 \circ \phi) + (1-t)(g_2 \circ \phi) = tf_1 + (1-t)f_2$$

Ahora, dado que $g_1, g_2 \in \overline{co}(\mathcal{F})$ existen $\{h_n^1\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{h_n^2\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones en $co(\mathcal{F})$ que convergen en $H(D)$ a g_1 y g_2 respectivamente. Es claro que $h_n^i \circ \phi \in co(s(\mathcal{F}))$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y para $i = 1, 2$.
Veamos que $\{h_n^i \circ \phi\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a f_i para $i = 1, 2$. Sea $E \subseteq D$ compacto, como ϕ es analítica en D el conjunto $\phi(E) \subseteq D$ es compacto y por tanto $\{h_n^i\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a g_i en $\phi(E)$ así que $\{h_n^i \circ \phi\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a f_i en E. Con lo que se concluye que $f_i \in \overline{co}(s(\mathcal{F}))$.
Por otro lado, dado que f no es la constante cero ϕ tampoco puede serlo y como es analítica en D el conjunto $\phi(D) \subseteq D$ es abierto así que si f_1 fuese igual a f_2 se tendría que $g_1(w) = g_2(w)$ para toda $w \in \phi(D)$ y por lo tanto $g_1 = g_2$. Por lo que $f_1 \neq f_2$, de donde se tiene que $f \notin \mathcal{E}\overline{co}(s(\mathcal{F}))$, lo cual es una contradicción que se deriva de suponer que $g \notin \mathcal{E}\overline{co}(\mathcal{F})$, por lo tanto $g \in \mathcal{E}\overline{co}(\mathcal{F})$. ■

Teorema 4.12

$$\mathcal{E}\overline{co}(s(K)) = \left\{ f \in H(D) : f(z) = \frac{xz}{1-yz}, |x| = |y| = 1 \right\}$$

Demostración. Como las funciones $f(z) = z$ y $g(z) = -z$ son elementos de K, es claro que la función constante cero no puede ser un punto extremo de $\overline{co}(s(K))$. Sea $f \in \mathcal{E}\overline{co}(s(K))$; por la proposición 4.4 y el teorema 4.11 existe $x_0 \in \mathbb{C}$ con $|x_0| = 1$ tal que $f \in s(F)$, .donde $F : D \to \mathbb{C}$ está definida como $F(z) = z/(1 - x_0 z)$. Notemos que

$$F(z) = \frac{z}{1 - x_0 z} = -\frac{1}{x_0} + \frac{1}{x_0}\frac{1}{1 - x_0 z} \tag{4.2}$$

para toda $z \in D$.
Por otro lado sea $T : H(D) \to H(D)$ definida como $T(h) = h_{x_0}$ con $h_{x_0}(z) = \frac{1}{x_0}h(z)$ para $z \in D$, entonces T es lineal e inyectiva pues si $\alpha \in \mathbb{C}$ y $h, g \in H(D)$

$$T(\alpha h + g) = (\alpha h + g)_{x_0}$$

pero para $z \in D$

$$(\alpha h+g)_{x_0}(z)=\frac{1}{x_0}(\alpha h+g)(z)=\frac{\alpha}{x_0}h(z)+\frac{1}{x_0}g(z)=\alpha h_{x_0}(z)+g_{x_0}(z)$$

entonces

$$T(\alpha h+g)=(\alpha h+g)_{x_0}=\alpha h_{x_0}+g_{x_0}=\alpha T(h)+T(g)$$

Además, si $g \in H(D)$ es tal que $T(g)=0$, entonces $g_{x_0}(z)=0$ y por lo tanto $g(z)=0$ para toda $z \in D$. Ahora, T es continua en $H(D)$ ya que si $h \in H(D)$ y $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $H(D)$ que converge a h, entonces para $z \in D$ y $n \in \mathbb{N}$

$$|T(h_n)(z)-T(h)(z)|=\left|\frac{1}{x_0}(h_n(z)-h(z))\right|=|h_n(z)-h(z)|$$

de modo que $\{T(h_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a $T(h)$ en subconjuntos compactos de D y por tanto converge a $T(h)$ en $H(D)$.
Consideremos los conjuntos $U=s(G)\subseteq H(D)$ con $G: D\to\mathbb{C}$ definida como $G(z)=1/(1-z)$ y $K(x_0)=s(z/(1-x_0z))$. Entonces

$$-\frac{1}{x_0}+T(U)\subseteq K(x_0) \tag{4.3}$$

pues si $g \in -\frac{1}{x_0}+T(U)$ entonces $g=-\frac{1}{x_0}+h_{x_0}$ para cierta $h \in U$. Dado que $h \in U$ existe $\omega: D\to D$ función de Schwartz tal que

$$h(z)=(G\circ\omega)(z)=\frac{1}{1-\omega(z)}$$

para toda $z \in D$. De este modo por 4.2

$$\begin{aligned} g(z) &= -\frac{1}{x_0}+h_{x_0}(z)\\ &= -\frac{1}{x_0}+\frac{1}{x_0}\frac{1}{1-\omega(z)}\\ &= -\frac{1}{x_0}+\frac{1}{x_0}\frac{1}{1-x_0(\frac{1}{x_0}\omega(z))}\\ &= \frac{\frac{1}{x_0}\omega(z)}{1-x_0(\frac{1}{x_0}\omega(z))} \end{aligned}$$

y por lo tanto $g \in K(x_0)$.
Notemos también que $f \in -\frac{1}{x_0}+T(U)$ pues $f \in s(F)$ así que por 4.2 si $z \in D$,

$$f(z)=-\frac{1}{x_0}+\frac{1}{x_0}\frac{1}{1-x_0\omega(z)}$$

para alguna ω función de Schwartz. Y dado que ω es una función de Schwartz, si definimos $\omega_1 : D \to D$ como $\omega_1(z) = x_o z$ la composición $\omega_1 \circ \omega$ resulta de nuevo una función de Schwartz y por lo tanto la función $h : D \to \mathbb{C}$ definida como $h(z) = (G\circ\, \omega_1 \circ \omega)(z)$ pertenece a U. Además,

$$\frac{1}{x_0}\frac{1}{1 - x_0\omega(z)} = \frac{1}{x_0}(G \circ \omega_1 \circ \omega)(z) = \frac{1}{x_0}h(z) = h_{x_0}(z)$$

es decir,

$$f(z) = -\frac{1}{x_0} + h_{x_0}(z)$$

Es claro que $\frac{z}{1-x_0 z} \in K$, por lo que $K(x_0) \subseteq s(K)$ y entonces $\overline{co}(K(x_0)) \subseteq \overline{co}(s(K))$ de donde

$$f \in \mathcal{E}\overline{co}(s(K)) \cap K(x_0) \subseteq \mathcal{E}\overline{co}(K(x_0))$$

Por otra parte de 4.3 se tiene que

$$\overline{co}(-\frac{1}{x_0} + T(U)) \subseteq \overline{co}(K(x_0))$$

o bien, por la proposición 1.6

$$-\frac{1}{x_0} + \overline{co}(T(U)) \subseteq \overline{co}(K(x_0))$$

entonces

$$\mathcal{E}(\overline{co}(K(x_0))) \cap (-\frac{1}{x_0} + \overline{co}(T(U))) \subseteq \mathcal{E}(-\frac{1}{x_0} + \overline{co}(T(U)) = -\frac{1}{x_0} + \mathcal{E}\overline{co}(T(U))$$

Por lo tanto existe $h \in \mathcal{E}\overline{co}(T(U))$ tal que $f = -\frac{1}{x_0} + h$ y como $f \in -\frac{1}{x_0} + T(U)$ también existe $g \in U$ tal que $f = -\frac{1}{x_0} + g_{x_0}$. De donde se tiene que

$$h \in \mathcal{E}\overline{co}(T(U)) \cap T(U) \subseteq \mathcal{E}\overline{co}(T(U)) \cap T(\overline{co}(U))$$

Así, que por la proposición 4.1 $h \in T(\mathcal{E}\overline{co}(U))$ y entonces por el teorema 4.4, tomando $\alpha = 1$ y $c = 0$, existe $u \in \mathbb{C}$ con $|u| = 1$ tal que

$$h(z) = \frac{1}{x_0}\frac{1}{1 - uz}$$

así que

$$f(z) = -\frac{1}{x_0} + \frac{1}{x_0}\frac{1}{1 - uz} = \frac{uz}{x_0(1 - uz)} = \frac{(x_0^{-1}u)z}{1 - uz} = \frac{xz}{1 - yz}$$

para toda $z \in D$ y por tanto

$$f \in E = \left\{ g \in s(K) : g(z) = \frac{xz}{1 - yz}, |x| = |y| = 1 \right\}$$

Resta probar que $E \subseteq \mathcal{E}\overline{co}(s(K))$. Para $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ con $|\alpha| = |\beta| = 1$ definamos el funcional $J : H(D) \to \mathbb{C}$ como

$$J(g) = \alpha g'(0) + \frac{\beta}{2} g''(0)$$

Entonces J es claramente lineal y continuo (teorema 1.11).
Dado que $\overline{co}(s(K))$ es compacto existen $f_0 \in \overline{co}(s(K))$ y $M \in \mathbb{R}$ tales que $M = \operatorname{Re} J(f_0) = \text{máx}\{J(g) : g \in \overline{co}(s(K))\}$. Ahora si $g \in E$

$$g(z) = \frac{xz}{1 - yz} = xz + xyz^2 + \cdots$$

para $|x| = |y| = 1$, por lo que

$$\operatorname{Re} J(g) = \operatorname{Re}(\alpha x + \frac{\beta}{2} 2xy) \leq |\alpha x + \beta xy| = |\alpha + \beta y| \leq |\alpha| + |\beta y| = 2$$

y $\operatorname{Re} J(g) = 2$ si y sólo si $x = \frac{1}{\alpha}$ y $y = \frac{\alpha}{\beta}$, es decir, el único elemento de E que maximiza a $\operatorname{Re} J$ sobre E es $g_0(z) = \frac{\frac{1}{\alpha} z}{1 - \frac{\alpha}{\beta} z}$. Como $\mathcal{E}\overline{co}(s(K)) \subseteq E \subseteq \overline{co}(s(K))$ y

$$M = \text{máx}\{\operatorname{Re} J(g) : g \in \overline{co}(s(K))\} = \text{máx}\{\operatorname{Re} J(g) : g \in \mathcal{E}\overline{co}(s(K))\}$$

(teorema 4.1) entonces $M = 2$. Así, si suponemos que $g_0 \notin \mathcal{E}\overline{co}(s(K))$, el conjunto $\{g \in \mathcal{E}\overline{co}(s(K)) : \operatorname{Re} J(g) = 2\}$ sería vacío lo cual contradice al teorema 4.1. Por lo tanto $g_0 \in \mathcal{E}\overline{co}(s(K))$.
Variando α y β se obtiene que cada elemento de E maximiza el funcional real correspondiente con lo que se concluye que $E \subseteq \mathcal{E}\overline{co}(s(K))$. ■

El siguiente corolario se obtiene aplicando el teorema 3.4 con la colección $\mathcal{E}\overline{co}(s(K))$.

Corolario 4.3

$$\overline{co}\,(s\,(K)) = \left\{ f \in H(D) : f(z) = \int\limits_{\partial D \times \partial D} \frac{xz}{1 - yz} d\mu(x, y), \mu \in \mathbb{P}(\partial D \times \partial D) \right\}$$

El siguiente resultado caracteriza a los puntos extremos de la envolvente convexa de la colección $s\,(S^*)$.

Teorema 4.13

$$\mathcal{E}\overline{co}(s(S^*)) = \left\{ f \in H(D) : f(z) = \frac{xz}{(1 - yz)^2}, |x| = |y| = 1 \right\}$$

Demostración. Como las funciones $f(z) = z$ y $g(z) = -z$ son elementos de S^*, es claro que la función constante cero no puede ser un punto extremo de $\overline{co}(s(S^*))$. Sea $f \in \mathcal{E}\overline{co}(s(S^*))$

por la proposición 4.4 y el teorema 4.10 existe $x_0 \in \mathbb{C}$ con $|x_0| = 1$ tal que $f \in s(F)$, .donde $F : D \to \mathbb{C}$ está definida como $F(z) = z/(1 - x_0 z)^2$. Notemos que

$$F(z) = \frac{z}{(1 - x_0 z)^2} = \frac{1}{4x_0}\left[\left(\frac{1 + x_0 z}{1 - x_0 z}\right)^2 - 1\right] \tag{4.4}$$

para toda $z \in D$.
Sea $T : H(D) \to H(D)$ definida como $T(h) = h_{4x_0}$ con

$$h_{4x_0}(z) = \frac{1}{4x_0} h(z)$$

para $z \in D$. Entonces T es lineal e inyectiva pues si $\alpha \in \mathbb{C}$ y $h, g \in H(D)$

$$T(\alpha h + g) = (\alpha h + g)_{4x_0}$$

pero para $z \in D$

$$(\alpha h + g)_{4x_0}(z) = \frac{1}{4x_0}(\alpha h + g)(z) = \frac{\alpha}{4x_0} h(z) + \frac{1}{4x_0} g(z) = \alpha h_{4x_0}(z) + g_{4x_0}(z)$$

entonces

$$T(\alpha h + g) = (\alpha h + g)_{4x_0} = \alpha h_{4x_0} + g_{4x_0} = \alpha T(h) + T(g)$$

Además, si $g \in H(D)$ es tal que $T(g) = 0$, entonces $g_{4x_0}(z) = 0$ y por lo tanto $g(z) = 0$ para toda $z \in D$.
Ahora, T es continua en $H(D)$; en efecto, sean $g \in H(D)$ y $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $H(D)$ que converge a g entonces si $C \subseteq D$ es compacto y $z \in C$

$$|(g_n)_{4x_0}(z) - g_{x_0}(z)| = \left|\frac{1}{4x_0}\right| |g_n(z) - g(z)|$$

con lo que se concluye que $\{T(g_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$converge uniformemente a $T(g)$ en C.
Consideremos los conjuntos $U = s(G) \subseteq H(D)$, con $G : D \to \mathbb{C}$ dada por

$$G(z) = \left(\frac{1 + z}{1 - z}\right)^2$$

y

$$L(x_0) = \left\{ g \in H(D) : g \text{ está subordinada a } \frac{z}{(1 - x_0 z)^2} \right\}$$

Entonces

$$-\frac{1}{4x_0} + T(U) \subseteq L(x_0) \tag{4.5}$$

pues si $g \in -\frac{1}{4x_0} + T(U)$ entonces $g = -\frac{1}{4x_0} + h_{4x_0}$ para cierta $h \in U$. Dado que $h \in U$ existe $\omega : D \to D$ función de Schwartz tal que

$$h(z) = (G \circ \omega)(z) = \left(\frac{1 + \omega(z)}{1 - \omega(z)}\right)^2$$

para toda $z \in D$. De este modo por 4.4

$$g(z) = -\frac{1}{4x_0} + h_{4x_0}(z) = -\frac{1}{4x_0} + \frac{1}{4x_0}\left(\frac{1+\omega(z)}{1-\omega(z)}\right)^2 = -\frac{1}{4x_0} + \frac{1}{4x_0}\left(\frac{1+\omega(z)}{1-\omega(z)}\right)^2 = \frac{\frac{1}{x_0}\omega(z)}{(1-x_0(\frac{1}{x_0}\omega(z)))^2}$$

y por lo tanto $g \in L(x_0)$.
Notemos también que $f \in -\frac{1}{4x_0} + T(U)$ pues $f \in s(F)$ así que por 4.4 si $z \in D$,

$$f(z) = -\frac{1}{4x_0} + \frac{1}{4x_0}\left(\frac{1+x_0\omega(z)}{1-x_0\omega(z)}\right)^2$$

para alguna ω función de Schwartz. Y dado que ω es una función de Schwartz, si definimos $\omega_1 : D \to D$ como $\omega_1(z) = x_o z$ la composición $\omega_1 \circ \omega$ resulta de nuevo una función de Schwartz y por lo tanto la función $h : D \to \mathbb{C}$ definida como $h(z) = (G\circ\, \omega_1 \circ \omega)(z)$ pertenece a U además,

$$\frac{1}{4x_0}\left(\frac{1+x_0\omega(z)}{1-x_0\omega(z)}\right)^2 = \frac{1}{4x_0}(G\circ\omega_1\circ\omega)(z) = \frac{1}{4x_0}h(z) = h_{4x_0}(z)$$

es decir,

$$f(z) = -\frac{1}{4x_0} + h_{4x_0}(z)$$

Como $\frac{z}{(1-x_0z)^2} \in S^*$, $L(x_0) \subseteq s(S^*)$ y entonces $\overline{co}(L(x_0)) \subseteq \overline{co}(s(S^*))$ de donde

$$f \in \mathcal{E}\overline{co}(s(S^*)) \cap L(x_0) \subseteq \mathcal{E}\overline{co}(L(x_0))$$

Por otra parte de 4.3 se tiene que

$$\overline{co}(-\frac{1}{4x_0} + T(U)) \subseteq \overline{co}(L(x_0))$$

o bien, por la proposición 1.6

$$-\frac{1}{4x_0} + \overline{co}(T(U)) \subseteq \overline{co}(L(x_0))$$

entonces

$$\mathcal{E}(\overline{co}(L(x_0))) \cap (-\frac{1}{4x_0} + \overline{co}(T(U))) \subseteq \mathcal{E}(-\frac{1}{4x_0} + \overline{co}(T(U)) = -\frac{1}{4x_0} + \mathcal{E}\overline{co}(T(U))$$

Por lo tanto existe $h \in \mathcal{E}\overline{co}(T(U))$ tal que $f = -\frac{1}{4x_0} + h$, y como $f \in -\frac{1}{4x_0} + T(U)$ también existe $g \in U$ tal que $f = -\frac{1}{4x_0} + g_{x_0}$. De donde se tiene que $h \in \mathcal{E}\overline{co}(T(U)) \cap T(U) \subseteq \mathcal{E}\overline{co}(T(U)) \cap T(\overline{co}(U))$, así que por la proposición 4.1 $h \in T(\mathcal{E}\overline{co}(U))$ y entonces por el teorema 4.4, con $\alpha = 2$ y $c = 1$, existe $u \in \mathbb{C}$ con $|u| = 1$ tal que

$$h(z) = \frac{1}{4x_0}\left(\frac{1+uz}{1-uz}\right)^2$$

así que

$$f(z) = -\frac{1}{4x_0} + \frac{1}{4x_0}\left(\frac{1+uz}{1-uz}\right)^2 = \frac{uz}{x_0(1-uz)^2} = \frac{(x_0^{-1}u)z}{(1-uz)^2} = \frac{xz}{1-yz}$$

para toda $z \in D$ y entonces

$$f \in E = \{g \in s(K) : g(z) = \frac{xz}{1-yz}, |x| = |y| = 1\}$$

Resta probar que $E \subseteq \mathcal{E}\overline{co}(s(S^*))$. Para $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ con $|\alpha| = |\beta| = 1$. Definamos el funcional $J : H(D) \to \mathbb{C}$ como

$$J(g) = \alpha g'(0) + \frac{\beta}{2}g''(0)$$

Entonces J es claramente lineal y es continuo.
Dado que $\overline{co}(s(S^*))$ es compacto existen $f_0 \in \overline{co}(s(S^*))$ y $M \in \mathbb{R}$ tales que $M = \operatorname{Re} J(f_0) = \text{máx}\{\operatorname{Re} J(g) : g \in \overline{co}(s(K))\}$. Ahora si $g \in E$

$$g(z) = \frac{xz}{(1-yz)^2} = xz + 2xyz^2 + \cdots$$

para $|x| = |y| = 1$, por lo que

$$\operatorname{Re} J(g) = \operatorname{Re}(\alpha x + \frac{\beta}{2}4xy) \leq |\alpha x + 2\beta xy| = |\alpha + 2\beta y| \leq |\alpha| + 2\,|\beta| = 3$$

y $\operatorname{Re} J(g) = 3$ si y sólo si $x = \frac{1}{\alpha}$ y $y = \frac{\alpha}{\beta}$, es decir, el único elemento de E que maximiza a $\operatorname{Re} J$ sobre E es $g_0(z) = \frac{\frac{1}{\alpha}z}{(1-\frac{\alpha}{\beta}z)^2}$. Como $\mathcal{E}\overline{co}(s(S^*)) \subseteq E \subseteq s(S^*) \subseteq \overline{co}(s(S^*))$ y

$$M = \text{máx}\{\operatorname{Re} J(g) : g \in \overline{co}(s(S^*))\} = \text{máx}\{\operatorname{Re} J(g) : g \in \mathcal{E}\overline{co}(s(S^*))\}$$

(teorema 4.1) entonces $M = 3$. Así, si suponemos que $g_0 \notin \mathcal{E}\overline{co}(s(S^*))$ el conjunto $\{g \in \mathcal{E}\overline{co}(s(S^*)) : \operatorname{Re} J(g) = 3\}$ sería vacío lo cual contradice al teorema 4.1. Por lo tanto $g_0 \in \mathcal{E}\overline{co}(s(K))$.
Variando α y β se obtiene que cada elemento de E maximiza el funcional real correspondiente con lo que se concluye que $E \subseteq \mathcal{E}\overline{co}(s(S^*))$. ■

Capítulo 5

Algunas aplicaciones

En este capítulo se resuleven problemas extremos haciendo uso de las caracterizaciones obtenidas en el capítulo 4. Las aplicaciones que se van a tratar consisten en problemas referentes a los coeficientes, en partícular se prueba la conjetura de Bieberbach para las colecciones S^* y K, y a la norma p en el espacio de funciones analíticas y univalentes en D. También se muestran algunos resultados sobre operadores lineales continuos en $H(D)$.

5.1. El problema de los coeficientes y la conjetura de Bieberbach.

Como aplicación directa de los teoremas 4.10 y 4.2 se obtiene el siguiente resultado en el cual se prueba la conjetura de Bieberbach para la clase S^*.

Teorema 5.1 *Sea $f \in H(D)$ tal que $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$. Si $f \in S^*$ entonces*

$$|a_n| \leq n$$

para toda $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Para $n \in \mathbb{N}$ sea $L_n : H(D) \to \mathbb{R}$ definido como

$$L_n(f) = |a_n| \quad \text{si} \quad f(z) = f(0) + \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} a_k z^k$$

Entonces L_n es un funcional continuo y por tanto tiene un máximo en S^*. Además, como L_n es convexo en $\overline{co}\,(S^*)$, el máximo en cualquiera de estas colecciones (S^* y $\overline{co}\,(S^*)$) es igual al máximo del funcional en el conjunto de puntos extremos de $\overline{co}\,(S^*)$ (teorema 4.2).
De este modo, por el teorema 4.10 para probar la desigualdad para los elementos de S^* es suficiente con considerar la colección

$$\left\{ f \in H(D) : f(z) = \frac{z}{(1-xz)^2}, |x| = 1 \right\}$$

Así, si $f(z) = \frac{z}{(1-xz)^2}$ con $|x| = 1$ entonces $|a_n| = |nx^{n-1}| = n$ con lo que se tiene la conclusión de teorema. ■

Del hecho de que $K \subseteq S^*$ se tiene el siguiente corolario.

Corolario 5.1 *Sea $f \in K$ tal que $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ para toda $z \in D$. Entonces*

$$|a_n| \leq n$$

si $n \in \mathbb{N}$.

Utilizando los mismos argumentos que en el teorema 5.1 es posible probar el siguiente resultado.

Teorema 5.2 *Sea $f \in H(D)$ tal que $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.*

1. *Si $f \in s(K)$ entonces $|a_n| \leq 1$ para toda $n \in \mathbb{N}$.*
2. *Si $f \in s(S^*)$ entonces $|a_n| \leq n$ para toda $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Por los teoremas 4.2 y 4.12 para probar (1) es suficiente con verificar la igualdad en la colección

$$\mathcal{E}\overline{co}(s(K)) = \left\{ g \in H(D) : g(z) = \frac{xz}{1-yz}, |x| = |y| = 1 \right\}$$

Sea $g \in \mathcal{E}\overline{co}(s(K))$; entonces para $z \in D$,

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n = \sum_{n=1}^{\infty} xy^{n-1} z^n$$

de modo que $|b_n| = |xy^{n-1}| = 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto $|a_n| \leq 1$.
Para probar (2), por el teorema 4.13 y el teorema 4.2 es suficiente con verificar la desigualdad en la colección

$$\mathcal{E}\overline{co}(s(S^*)) = \left\{ f \in H(D) : f(z) = \frac{xz}{(1-yz)^2}, |x| = |y| = 1 \right\}$$

Sea $g \in \mathcal{E}\overline{co}(s(S^*))$; entonces para $z \in D$ se tiene que $g(z) = \frac{x}{y} k(yz)$ donde $k(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$ por lo que

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n = \sum_{n=1}^{\infty} xy^{n-1} n z^n$$

de modo que $|b_n| = |xy^{n-1}n| = n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y por lo tanto $|a_n| \leq n$. ■

El teorema 5.1 y el corolario 5.1 prueban la conjetura de Bieberbah para las colecciones K y S^*. En lo que resta de esta sección se discutirán las conjeturas de Robertson y Rogonsinski y su relación con la conjetura de Bieberbach. En 1936 Robertson propuso el siguiente resultado:

$$\text{si } g \text{ es una función impar en } S\text{, es decir, si } g(z)=\sum_{n=1}^{\infty} c_{2n-1}z^{2n-1} \text{ entonces } \sum_{k=1}^{n}|c_{2k-1}|^2\leq n$$

Es posible probar que si $f\in S$ entonces la función $g(z)=\left(f\left(z^2\right)\right)^{1/2}$ es nuevamente un elemento de S y además es una función impar. Así, si $f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nz^n$ de la relación $f(z^2)=(g(z))^2$ se tiene que

$$a_n=c_{2n-1}+c_{2n-3}c_3+\cdots+c_3c_{2n-3}+c_{2n-1}$$

para $n\geq 2$ (si $n=1$ se tiene que $a_1=1$ por las condiciones de normalización de S). De este modo, de la desigualdad de Cauchy-Schwarz se tiene que

$$|a_n|\leq 1+\left|c_3^2\right|+\cdots+\left|c_{2n-1}^2\right|$$

así que la conjetura de Robertson implica la conjetura de Bieberbach para cualquier $n\in\mathbb{N}$.

Por su parte, Rogonsinski conjeturó lo siguiente:

$$\text{si } f\in s\left(S\right) \text{ y } f(z)=\sum\nolimits_{n=1}^{\infty}a_nz^n \text{ entonces } |a_n|\leq n \text{ para cualquier } n\in\mathbb{N}$$

Esta conjetura resulta ser de hecho un resultado más fuerte que el resultado planteado por Bieberbach (las versiones de esta conjetura para las colecciones $s\left(S^*\right)$ y $s\left(K\right)$.se presentan en el teorema 5.2) y también puede derivarse de la conjetura de Robertson . En efecto, supongamos que $f\in s\left(F\right)$ con $F\in S$,

$$f(z)=\sum\nolimits_{n=1}^{\infty}a_nz^n$$

y

$$F(z)=\sum\nolimits_{n=1}^{\infty}A_nz^n$$

Por definición, existe ϕ función de Schwarz tal que $f(z)=F(\phi\left(z\right))$ para toda $z\in D$. Así, si se define $G:D\to\mathbb{C}$ como

$$G(z)=\left(F\left(z^2\right)\right)^{1/2}=z+\sum\nolimits_{m=2}^{\infty}B_{2m-1}z^{2m-1}$$

se tiene que G es impar y además G es un elemento de S. Luego, si

$$H(w)=\left[F\left(w\right)/w\right]^{1/2}=1+B_3w+B_5w^2+\cdots=1+\sum\nolimits_{m=2}^{\infty}B_{2m-1}w^{m-1}$$

($|w| < 1$) entonces

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=r} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=r} \frac{F(\phi(z))}{z^{n+1}} dz \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=r} \frac{\phi(z) H^2(\phi(z))}{z^{n+1}} dz \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=r} \frac{\phi(z) L^2(\phi(z))}{z^{n+1}} dz
\end{aligned}$$

donde

$$L(z) = 1 + \sum\nolimits_{m=2}^{n} B_{2m-1} z^{m-1}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
|a_n| &\leq \frac{1}{2\pi r^{n+1}} \int\limits_0^{2\pi} \left| L^2\left(\phi\left(re^{i\theta}\right)\right)\right| d\theta \\
&\leq \frac{1}{2\pi r^{n+1}} \int\limits_0^{2\pi} \left| L^2\left(re^{i\theta}\right)\right| d\theta = \frac{1}{r^n}\left(1 + |B_3|^2 r^2 + \cdots + |B_{2n-1}|^2 r^{2(n-1)}\right)
\end{aligned}$$

siempre que $0 < r < 1$. Haciendo tender r a 1 se concluye que

$$|a_n| \leq \left(1 + |B_3|^2 + \cdots + |B_{2n-1}|^2\right)$$

de manera que la validez de la conjetura de Robertson implica la validez de la conjetura de Rogonsinsky. Por el teorema 4.2, para probar la conjetura de Robertson sería suficiente con caracterizar a los puntos extremos de la envolvente convexa cerrada de la subcolección de S que consiste en funciones impares; lamentablemente este problema resultó ser muy complejo y es por ello que la prueba de estas conjeturas siguió otra dirección.

5.2. Operadores lineales continuos.

En esta sección se aplicarán los métodos de optimización lineal (puntos extremos) a operadores lineales continuos de $H(D)$ en $H(D)$.

Definición 5.1 *Sea $L : H(D) \to H(D)$ un operador lineal continuo. Decimos que L es un operador de orden cero si para todo x, con $|x| = 1$, para toda $f \in H(D)$ y para toda $z \in D$ se cumple que*

$$L(f)(\phi_x(z)) = L(f \circ \phi_x)(z)$$

donde $\phi_x : D \to D$ esta dada como $\phi_x(z) = xz$.

Por ejemplo, el operador identidad es un operador de orden cero; otros ejemplos más interesantes son $L(f)(z) = zf'(z)$, $L(f)(z) = (zf(z))'$ y $L(f)(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ con $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$.

Una vez definido el concepto de operador de orden cero se introducirá el concepto de casco-subordinación en el espacio $H(D)$.

Definición 5.2 *Sean $f, g \in H(D)$. Decimos que f está casco-subordinada a g en D si para cualquier $0 < r < 1$ se tiene que*

$$f(B_r[0]) \subseteq \overline{co}(g(B_r[0]))$$

El teorema que sigue relaciona los conceptos de operador de orden cero y de casco-subordinación, de modo que, junto con los resultados del capítulo cinco, va a permitir resolver algunos problemas de optimización sobre las colecciones Π, $s(S^*)$ y $s(K)$.

Teorema 5.3 *Sea $\mathcal{F} \subseteq H(D)$ compacta tal que*

$$\mathcal{E}\overline{co}(\mathcal{F}) = \{f : f(z) = f_0(xz), \ \ |x| = 1\}$$

con $f_0 \in H(D)$. Si L es un operador de orden cero entonces $L(f)$ está casco-subordinada a $L(f_0)$ para cada $f \in \overline{co}(\mathcal{F})$.

Demostración. Como $\mathcal{F}$ es compacta, del Teorema de Krein-Milman se tiene que $\overline{co}(\mathcal{F}) = \overline{co}(\mathcal{E}(\mathcal{F}))$, así que dada $f \in \mathcal{F}$ existe una sucesión $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a f en $H(D)$ tal que

$$g_n(z) = \sum_{l=1}^{k_n} \lambda_l^{(n)} f_0\left(x_l^{(n)} z\right)$$

con $k_n \in \mathbb{N}$, $\left|x_l^{(n)}\right| = 1$ para $l = 1, \ldots, k_n$, $\lambda_l^{(n)} > 0$, $l = 1, \ldots, k_n$ y $\sum_{l=1}^{k_n} \lambda_l^{(n)} = 1$ si $n \in \mathbb{N}$ y $z \in D$.

De este modo, si $0 < r < 1$ y $z_0 \in B_r[0]$ la sucesión $\{L(g_n)(z_0)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $L(f)(z_0)$, pero para $n \in \mathbb{N}$,

$$L(g_n)(z_0) = \sum_{l=1}^{k_n} \lambda_l^{(n)} L(f_0)\left(x_l^{(n)} z_0\right)$$

porque L es un operador de orden cero. Por lo tanto

$$L(f)(z_0) \in \overline{co}(\{w \in \mathbb{C} : w = L(f_0)(z), \ \ |z| \leq r\})$$

es decir $L(f)$ está casco-subordinada a $L(f_0)$. ∎

Como consecuencia del teorema anterior, siempre que sus hipótesis se satisfagan, el problema de analizar al conjunto $\{L(f)(z_0) : f \in \overline{co}(\mathcal{F})\}$ se reduce a examinar el conjunto $\{L(f_0)(z) : |z| \leq |z_0|\}$. Por ello es que es posible resolver algunos problemas extremos haciendo cálculos simples.

Proposición 5.1 *Sea $f \in \Pi$. Si*

$$f(z) = \sum\nolimits_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

entonces $\operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k z^k\right) > 0$ *para* $n \in \mathbb{N}$ *y* $z \in B_{1/2}(0)$.

Demostración. Según el teorema 4.3

$$\mathcal{E}\Pi = \left\{ f \in H(D) : f(z) = \frac{1+xz}{1-xz}, |x| = 1 \right\}$$

y como para $n \in \mathbb{N}$ el operador $L_n : H(D) \to H(D)$ dado por $L_n(f) = s_{f,n}$ con $s_{f,n}(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$, si $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ es de orden cero, por el teorema anterior se tiene que $L_n(f)$ está casco-subordinada a $L_n(f_0)$ para cada $f \in \Pi$, donde $f_0 = \frac{1+z}{1-z}$ si $z \in D$.
Ahora si $n \geq 3$,

$$L_n(f_0)(z) = s_{f_0,n}(z) = 1 + 2\sum\nolimits_{k=1}^{n} z^k$$

así que dada $z \in B_{1/2}(0)$, con $|z| = r$, se tiene que

$$|f_0(z) - s_{f_0,n}(z)| \leq 2\sum\nolimits_{k=n+1}^{\infty} r^k = \frac{2r^{n+1}}{1-r}$$

y como

$$\operatorname{Re}(f_0(z)) = \frac{1-r^2}{|1-z|^2} \geq \frac{1-r^2}{(1+r)^2} = \frac{1-r}{1+r}$$

entonces

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}(s_{f_0,n}(z)) &\geq \frac{1-r}{1+r} - \frac{2r^{n+1}}{1-r} \\
&= \frac{(1-r)^2 - 2r^{n+1}(1+r)}{1-r^2} \\
&\geq \frac{1}{1-r^2}\left(\frac{1}{4} - \frac{3}{2^{n+1}}\right) \\
&\geq \frac{1}{16(1-r^2)} \\
&> 0
\end{aligned}$$

El caso $n = 1$ es claro y si $n = 2$, para $z \in B_{1/2}(0)$ se tiene que

$$\operatorname{Re}\left(1 + 2\sum\nolimits_{k=1}^{2} z^k\right) = 1 + 2\operatorname{Re}(z + z^2)$$

de modo que si $z = x + iy$

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}\left(1 + 2\sum\nolimits_{k=1}^{n} z^k\right) &= 1 + \operatorname{Re}\left(2\left(x + iy + (x+iy)^2\right)\right) \\
&= 1 + 2\left(x + \left(x^2 - y^2\right)\right)
\end{aligned}$$

por lo que $\operatorname{Re}\left(1+2\sum_{k=1}^{2} z^k\right) > 0$ si y sólo si $x^2+x-y^2 > -1/2$.
Ahora, como

$$x^2+x-y^2 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - y^2$$

y $(x+1/2)^2 - 1/4 > -1/4$ y $y^2 \leq x^2+y^2 < 1/4$ se tiene que

$$x^2+x-y^2 > -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}$$

Por otro lado, si $f \in \Pi$, para cualquier natural n la función $F_n = L_n(f)$ esta casco-subordinada a $F_0^{(n)} = L_n(f_0)$ por lo que

$$F\left(B_{1/2}(0)\right) \subseteq \overline{co}\left(F_0\left(B_{1/2}(0)\right)\right)$$

así que para $z \in B_{1/2}(0)$ existe una sucesión $\{w_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ en $co\left(F_0\left(B_{1/2}(0)\right)\right)$ que converge a $F_n(z)$, y como

$$co\left(F_0\left(B_{1/2}(0)\right)\right) = \left\{w \in \mathbb{C} : w = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j F_0^{(n)}(z_j)\,,\ \sum_{j=1}^{m} \lambda_j = 1,\ \lambda_j \geq 0,\ |z_j| < 1/2,\ m \in \mathbb{N}\right\}$$

entonces $\operatorname{Re}(F_n(z)) \geq 0$. Pero dado que $f \in \Pi$ la iguadad no puede darse en nigún punto de $B_{1/2}(0)$, pues $\operatorname{Re}(F_n)$ es armónica y $F_n(0) = 1$ por lo que $\operatorname{Re}(F_n) > 0$. ■

Si $\mathcal{L}$ es cualquier operador lineal continuo en $H(D)$, $q \geq 1$ y $0 < r < 1$ entonces, por la desigualdad de Minkowsky, la expresión

$$L(f) = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|\mathcal{L}\left(f^{(n)}\right)\left(re^{i\theta}\right)\right|^q d\theta\right)^{1/q}$$

define un funcional convexo en subconjuntos convexos de $H(D)$ y continuo en $H(D)$. Y precisamente los resultados que siguen se refieren a los valores extremos de funcionales definidos de están forma en las colecciones $s(S^*)$ y $s(K)$.

Teorema 5.4 *Sea $k(z) = z/(1-z)^2$ con $z \in D$ y sea $\mathcal{L}$ un operador lineal continuo en $H(D)$. Si $f \in s(S^*)$ entonces*

$$\int_0^{2\pi} \left|\mathcal{L}\left(f^{(n)}\right)\left(re^{i\theta}\right)\right|^q d\theta \leq \int_0^{2\pi} \left|\mathcal{L}\left(k^{(n)}\right)\left(re^{i\theta}\right)\right|^q d\theta$$

siempre que $q \geq 1$, $0 < r < 1$ y $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Sean $q \geq 1$, $0 < r < 1$ y $n \in \mathbb{N}$. Por los teoremas 4.2 y 4.13 es suficiente con analizar el comportamiento del funcional definido en $H(D)$ como

$$L(f) = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|\mathcal{L}\left(f^{(n)}\right)\left(re^{i\theta}\right)\right|^q d\theta\right)^{1/q}$$

en la colección

$$\mathcal{E}\overline{co}\left(s\left(S^{*}\right)\right)=\left\{g\in H(D):g(z)=\frac{xz}{\left(1-yz\right)^{2}},\ |x|=|y|=1\right\}$$

Para $|x|=|y|=1$ se tiene que

$$g(z)=\frac{xz}{\left(1-yz\right)^{2}}=xy^{-1}k\left(yz\right)$$

por lo que $g^{(n)}(z)=xy^{n-1}k^{(n)}\left(yz\right)$ si $z\in D$. De modo que si $y=e^{i\varphi}$ con $\varphi\in[0,2\pi)$,

$$\left|g^{(n)}(re^{i\theta})\right|=\left|k^{n}\left(re^{i(\theta+\varphi)}\right)\right|$$

para cualquier $\theta\in[0,2\pi)$. Pero si C_r es la circunferencia de radio r con centro en el origen,

$$\int_{0}^{2\pi}\left|\mathcal{L}\left(g^{(n)}\right)\left(re^{i\theta}\right)\right|^{q}d\theta=\int_{C_r}\left|\mathcal{L}\left(k^{(n)}\right)(z)\right|^{q}|dz|=\int_{0}^{2\pi}\left|\mathcal{L}\left(k^{(n)}\right)\left(re^{i(\theta+\varphi)}\right)\right|^{q}d\theta$$

es decir, el funcional

$$L\left(f\right)=\left(\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\left|\mathcal{L}\left(f^{(n)}\right)\left(re^{i\theta}\right)\right|^{q}d\theta\right)^{1/q}$$

es constante en $\mathcal{E}\overline{co}\left(s\left(S^{*}\right)\right)$ con lo que se concluye el resultado. ■

Enseguida se presenta una versión del teorema 5.4 para la colección K.

Teorema 5.5 *Sea $F(z)=z/\left(1-z\right)$ con $z\in D$ y sea $\mathcal{L}$ un operador lineal continuo en $H(D)$. Si $f\in s(K)$ entonces*

$$\int_{0}^{2\pi}\left|\mathcal{L}\left(f^{(n)}\right)\left(re^{i\theta}\right)\right|^{q}d\theta\leq\int_{0}^{2\pi}\left|\mathcal{L}\left(F^{(n)}\right)\left(re^{i\theta}\right)\right|^{q}d\theta$$

siempre que $q\geq1$, $0<r<1$ y $n\in\mathbb{N}$.

Demostración. Sean $q\geq1$, $0<r<1$ y $n\in\mathbb{N}$. Como en el caso anterior, es suficiente con mostrar que el lado izquierdo de la desigualdad en el enunciado del teorema es constante en la colección

$$\mathcal{E}\overline{co}\left(s\left(K\right)\right)=\left\{g\in H(D):g(z)=\frac{xz}{\left(1-yz\right)},\ |x|=|y|=1\right\}$$

Notemos que para $|x|=|y|=1$ se tiene que

$$g(z)=\frac{xz}{\left(1-yz\right)}=xy^{-1}F\left(yz\right)$$

por lo que $g^{(n)}(z)=xy^{n-1}F^{n}\left(yz\right)$ si $z\in D$. De modo que si $y=e^{i\varphi}$ con $\varphi\in[0,2\pi)$,

$$\left|g^{(n)}(re^{i\theta})\right|=\left|F^{n}\left(re^{i(\theta+\varphi)}\right)\right|$$

para cualquier $\theta \in [0, 2\pi)$. Pero si C_r es la circunferencia de radio r con centro en el origen,

$$\int_0^{2\pi} \left|\mathcal{L}\left(g^{(n)}\right)\left(re^{i\theta}\right)\right|^q d\theta = \int_{C_r} \left|\mathcal{L}\left(F^{(n)}\right)(z)\right|^q |dz| = \int_0^{2\pi} \left|\mathcal{L}\left(F^{(n)}\right)\left(re^{i(\theta+\varphi)}\right)\right|^q d\theta$$

es decir, el funcional

$$L(f) = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|\mathcal{L}\left(f^{(n)}\right)\left(re^{i\theta}\right)\right|^q d\theta\right)^{1/q}$$

es constante en $\mathcal{E}\overline{co}\left(s\left(S^*\right)\right)$ con lo que se concluye el resultado. ■

Si en partícular $\mathcal{L}$ es el operador identidad se tiene que

$$\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f^{(n)}\left(re^{i\theta}\right)\right|^q d\theta\right)^{1/q} \leq \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|F^{(n)}\left(re^{i\theta}\right)\right|^q d\theta\right)^{1/q}$$

si $q \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$, $0 < r < 1$ y $f \in s(K)$. Evidentemente también se cumple la respectiva desigualdad para cualquier $f \in s(S)^*$ con k en el lugar de F.

Como otro ejemplo, si $n = 0$, $f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$ y $\mathcal{L}(f)(z) = \sum_{j=0}^{m} a_j z^j$ entonces

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|\sum\nolimits_{l=0}^{m} a_l r^l e^{li\theta}\right|^q d\theta \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|\sum\nolimits_{j=0}^{m} r^l e^{li\theta}\right|^q d\theta$$

siempre que $q \geq m \in \mathbb{N}$, $0 < r < 1$ y $f \in K$.

Bibliografía

[Ahlfors] Ahlfors L. V., *Complex Analysis*, McGraw-Hill, 1979

[Ahuja] Ahuja O.P., *The Bieberbach Conjecture and its Impact on the Developments in Geometric Funtion Theory*, Math.Chronicle 15 (1986), 1-28

[Bachman] Bachman N., Narici L., *Functional Analysis*, Dover, 2000

[Bartle] Bartle R., *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*, John Wiley and Sons, 1995

[Bieberbach] Bieberbach L., *Über die Koeffizienten derjenigen Potenzreihen, welche eine schlichte Abbildung des Einheitskreises vermitteln.* S._B. Preuss Akad Wiss, 38 (1916), 940-955.

[Brickman] Brickman L., *Extremal Problems for Certain Classes of Analytic Functions.* Proceedings of the American Mathematical Society 35 (1) 1972

[Conway Vol.1] Conway J.B., *Functions of One Complex Variable* (Vol. 1), Springer-Verlag, 1978

[Conway 2] Conway J.B., *Functions of One Complex Variable* (Vol. 2), Springer-Verlag, 1996

[Duren] Duren P., *Univalent Functions*, Springer-Verlag, 1983

[deBranges] de Branges, L., *A proof of the Bieberbach conjecture.* Acta Math 154, (1985), 137-152

[Engelking] Engelking R., *General Topology*,PWN,1977

[Hallenbeck] Hallenbeck D.J., *Linear Problems and Convexity Techniques in Geometric Function Theory*, Pitman, 1984

[Holland] Holland F., *The Extreme Points of a Class of Functions with Positive Real Part*, Math. Ann. 202, 85-87, 1973

[Koepf] Koepf W., *Bieberbach's Conjecture, the de Branges and Weinstein Functions and the Askey-Gasper Inequality,* Ramanujan J. 13 (2013), 103-129

[Korevaar] Korevaar J., *Ludwing Bieberbach's Conjecture and its proof by Louis de Branges*, Amer. Math. Monthly 93 (7) (1986), 505-514

[MacGregor] MacGregor T.H., *Linear Methods in Geometric Function Theory*, Amer. Math. Monthly 92 (6) (1985), 392-406

[Nevanlinna] Nevanlinna R., *Über die konforme Abbildung von Stengebieten*, Finska Vetenskaps Soc. Forhankl (A) 63 (7) (1921-1922)

[Ravichandran] Ravichandran V., *Geometric Properties of Partial Sums of Univalent Functions, arXir: 1207.4301 [math.CV]*

[Rudin CA] Rudin W., *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, 1987

[Rudin PA] Rudin W., *Principles Of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill, 1976

[Rudin FA] Rudin W., *Functional Analysis,* McGraw-Hill, 1991