



**Universidad Nacional Autónoma de México.
Doctorado en Ciencias Matemáticas**

Controlabilidad de ecuaciones parabólicas: el
caso de ecuaciones degeneradas y el de dominios finos

TESIS

Que para optar por el Grado de:
Doctor en Ciencias

P R E S E N T A:
J. Carmelo Flores Gutiérrez

ASESOR:
Dra. María de la Luz Jimena de Teresa de Oteyza
Instituto de Matemáticas-CU

MIEMBROS DEL COMITE TUTOR

Dr. Salvador Pérez Esteva (Instituto de Matemáticas-Cuernavaca)
Dr. Jesús Manuel Falconi Magaña (Facultad de Ciencias)

México, D.F. Junio de 2015.



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



Universidad Nacional Autónoma de México.

Doctorado en Ciencias Matemáticas

**Controlabilidad de ecuaciones parabólicas: el caso
de ecuaciones degeneradas y el de dominios finos**

TESIS

Que para obtener el Grado de

Doctor en Ciencias

P R E S E N T A :

J. Carmelo Flores Gutiérrez

ASESOR:

Dra. María de la Luz Jimena de Teresa de Oteyza
Instituto de Matemáticas-CU

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR

Dr. Salvador Pérez Esteva (Instituto de Matemáticas-Cuernavaca)
Dr. Jesús Manuel Falconi Magaña (Facultad de Ciencias)

A mi amada esposa Emma,
a los amores de mi vida Ximenita y Alfreddito,
y a mis padres Irene y Carmelo

AGRADECIMIENTOS

Me gustaría agradecer a las siguientes personas por su apoyo y sugerencias en la preparación de este trabajo:

- A la Dra. Lucero de Teresa. Asesor en la producción del contenido teórico de este trabajo.
- A el Dr. Manuel Falconi, el Dr. Gerardo Sánchez, al Dr. Marcos López y al Dr. Antonio Capella por sus contribuciones en la realización de este trabajo.

En especial, quiero agradecer a CONACYT por el apoyo económico durante una parte de mis estudios de doctorado.

Índice general

Capítulo 1	Introducción	1
Capítulo 2	Controlabilidad a cero de ecuaciones parabólicas degeneradas	5
2.1.	Descripción de los resultados	5
2.2.	Planteamiento del problema	7
2.3.	Relación con la literatura y motivación	10
2.4.	Estimaciones de Carleman para problemas parabólicos degenerados	11
2.4.1.	Demostración del Teorema 2.3	33
2.5.	Desigualdad de observabilidad y controlabilidad de ecuaciones lineales	45
2.6.	Controlabilidad a cero de ecuaciones semi-lineales	55
Capítulo 3	Controlabilidad aproximada de ecuaciones parabólicas en dominios finos	63
3.1.	Descripción de los resultados y planteamiento del problema	63
3.2.	Relación con la literatura y motivación	66
3.3.	Un resultado de regularidad	67
3.4.	Controlabilidad aproximada de ecuaciones semi-lineales	75

3.5. Convergencia de los ε -controles aproximados	85
Apéndices	105
Apéndice A Demostración del Teorema 2.4	105
Apéndice B Demostración de las desigualdades de Hardy-Poincaré	116
Bibliografía	121

CAPÍTULO 1

Introducción

La Teoría del Control cuenta hoy con una dilatada historia cuyos orígenes se remontan al menos a la revolución industrial. En efecto, fue entonces cuando surgió la necesidad de automatizar los procesos (alimentación de combustible en una máquina, el termostato, etc.) y, por tanto, de entender cómo se podía actuar sobre un sistema para garantizar que el objetivo buscado se cumpliera (cantidad de combustible correcta en la caldera, temperatura adecuada, etc.).

Como sabemos, la mayoría de los procesos naturales y tecnológicos pueden describirse mediante Ecuaciones Diferenciales, ya sean Ordinarias (EDO) o Parciales (EDP) (tal y como Galileo Galilei (1564-1642) afirmó, “El universo está escrito en lenguaje matemático”). En ellas, la incógnita es el **estado** del problema de control. Es la cantidad que nos interesa controlar, la que constituye nuestro objetivo. Los problemas de control se caracterizan porque, además de esta incógnita habitual, disponemos de una variable a nuestra disposición, el **control**, con el que se pretende actuar sobre la solución con el objeto de alcanzar o aproximarla a los objetos deseados.

En muchos procesos es natural pensar en controles de tipo “bang-bang” pues son fáciles de implementar. El interruptor es el mejor ejemplo: apagándolo y encendiéndolo podemos intentar mantenernos lo más cerca posible del estado que deseamos en cada instante de tiempo. El control “bang-bang” es una función que toma

dos únicos valores. La búsqueda del control consiste en determinar la manera en que ha de alternar entre un valor y otro en función del objetivo asignado. Pero en muchas otras ocasiones el control deseado es justo lo contrario de un control “bang-bang”. Se trata de una función lo más suave posible (nadie desea que el piloto automático de un avión se rijan por criterios semejantes a los del control “bang-bang” por ejemplo). Pero, como todo, también esto es relativo. Un control “bang-bang” de pequeña amplitud y que alterna rápidamente puede ser percibido como algo regular...

Hemos comentado una de las ideas que originaron la Teoría del Control: la necesidad de automatizar los procesos, **el control en tiempo real**. Pero esta idea del control de sistemas en tiempo real, de carácter sumamente dinámica, no es más que uno de los pilares fundamentales de la Teoría del Control. El otro pilar sobre el que reposa la Teoría del Control es el Control Óptimo, muy próximo al Cálculo de Variaciones o al Diseño Óptimo. En el Control Óptimo nos preocupamos “simplemente” de realizar una elección óptima del control y dejamos en un segundo plano la evaluación de cómo de cerca este control nos sitúa del objetivo deseado. Se trata de un abordaje realista y pragmático del problema de control: Sea cual sea la distancia a la que se puede llegar del objetivo deseado, intentamos hacerlo lo mejor posible y buscamos por tanto el control que realice la distancia mínima.

A primera vista la diferencia puede resultar insignificante pero, como veremos, esta puede ser importante cuando uno se adentra en las Matemáticas de cada uno de ellos.

Esta clasificación que acabamos de hacer es simplificadora en exceso y muchas veces imprecisa. En la práctica, el problema no está completamente cerrado y es precisamente la manera de formularlo una de nuestras primeras tareas. Cada formulación exigirá de desarrollos matemáticos más o menos costosos para su resolución. La elección de una u otra dependerá en la práctica del coste que suponga su resolución en relación al grado de proximidad alcanzado.

Desde un punto de vista matemático, a la hora de clasificar los problemas de control habremos de distinguir entre: Problemas no lineales/lineales, modelos estocásticos/deterministas, ecuaciones estacionarias/de evolución, sistemas en dimensión finita (EDO) / en dimensión infinita (EDP), etc.

Sin embargo, incluso estas distinciones están quedando obsoletas. Es cada vez más frecuente encontrarse ante sistemas complejos que acoplan diversas componentes en las que muchos de los elementos que acabamos de clasificar están entremezclados.

En el Capítulo 2, trabajaremos con un problema parabólico degenerado. Consi-

deramos la ecuación parabólica degenerada:

$$\begin{cases} y_t - (a(x)y_x)_x + b(x,t)y + \beta(x)c(x,t)y_x = h1_\omega & \text{en } Q = (0,1) \times (0,T), \\ y(0,t) = y(1,t) = 0 & t \in (0,T), \\ y(x,0) = y_0(x), & \text{en } (0,1). \end{cases} \quad (1.1)$$

En este sistema $y = y(x,t)$ es el estado y $h = h(x,t)$ es el control que actúa localizado en el subconjunto ω , puesto que 1_ω denota la función característica del conjunto ω .

Como veremos en este capítulo, para cada $h \in L^2(\omega \times (0,T))$ existe solución única y en un espacio de Banach adecuado (veáse pág. 10). Definimos el conjunto de estados alcanzables:

$$R(T, y_0) = \{y(x, T) : y \text{ solución de (1.1) con } h \in L^2(\omega \times (0, T))\}.$$

Consideramos el problema de controlabilidad a cero: nos preguntamos si $R(T, y_0)$ contiene a cero para todo y_0 . Si la respuesta es afirmativa, para cualquier $y_0 \in L^2(0,1)$, existe un control $h \in L^2(Q)$ tal que

$$y(x, T) = 0 \text{ c.t.p. } x \in (0, 1).$$

En el Capítulo 3, trabajaremos con un problema parabólico en dominios de la forma $\Omega \times (0, \varepsilon)$, a los cuales llamaremos dominios finos. Ahora, consideramos la ecuación semi-lineal:

$$\begin{cases} y_t - \Delta y + f(y) = h1_{\omega_\varepsilon} & \text{en } \Omega \times (0, \varepsilon) \times (0, T), \\ y = 0 & \text{en } [\partial\Omega \times (0, \varepsilon)] \times (0, T), \\ \frac{\partial y}{\partial \vec{n}} = 0 & \text{en } \Gamma_\varepsilon^\pm \times (0, T), \\ y(x, 0) = y_0(x) & \text{en } \Omega_\varepsilon, \end{cases} \quad (1.2)$$

donde $\omega_\varepsilon = \omega \times (0, \varepsilon)$ con ω un subconjunto abierto de Ω . En este caso, veremos que dado $y^0 \in L^2(\Omega_\varepsilon)$ y $h \in L^2(\omega_\varepsilon \times (0, T))$ el sistema (1.2) admite solución única

$$y \in C([0, T]; L^2(\Omega_\varepsilon)) \cap L^2(0, T; V_\varepsilon),$$

donde

$$V_\varepsilon = \{\phi \in H^1(\Omega_\varepsilon) : \phi = 0 \text{ en } \partial\Omega \times (0, \varepsilon)\}$$

(veáse pág. 64).

Definimos el conjunto de estados alcanzables:

$$R_\varepsilon(T, y_0) = \{y(x, T) : y \text{ solución de (1.2) con } h \in L^2(\omega_\varepsilon \times (0, T))\}.$$

Consideramos el problema de controlabilidad aproximada: nos preguntamos si $R_\varepsilon(T, y_0)$ es denso en $L^2(\Omega_\varepsilon)$ para todo y_0 . En este caso, si la respuesta es afirmativa, se tendrá que para cualesquiera $y_0, y_1 \in L^2(\Omega_\varepsilon)$ y $\delta > 0$ existe $h \in L^2(\omega_\varepsilon \times (0, T))$ tal que

$$\|y(\cdot, T) - y_1\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq \delta.$$

Finalmente, estudiaremos el comportamiento de la propiedad de controlabilidad del sistema (1.2) cuando ε tiende a cero.

CAPÍTULO 2

Controlabilidad a cero de ecuaciones parabólicas degeneradas

2.1. Descripción de los resultados

Sea $T > 0$ fijo, $\omega \subset (0, 1)$ un subconjunto abierto no vacío. Consideremos el sistema lineal

$$\begin{cases} y_t - (a(x)y_x)_x + b(x, t)y + \beta(x)c(x, t)y_x = h1_\omega & \text{en } Q, \\ y(0, t) = y(1, t) = 0 & t \in (0, T), \\ y(x, 0) = y_0(x), & \text{en } (0, 1). \end{cases} \quad (2.1)$$

donde $b, c \in L^\infty(Q)$, $y_0 \in L^2(0, 1)$, $\beta(x)/x \in L^\infty(0, 1)$ y a es una función continua y no negativa en $[0, 1]$ para la que estableceremos hipótesis más adelante. Aquí, $h \in L^2(Q)$ es el control (a determinarse) y 1_ω es la función característica del conjunto ω .

Definición 2.1. *Se dice que (2.1) posee la propiedad de controlabilidad a cero en el tiempo T si, para cada $y_0 \in L^2(0, 1)$, existe un control $h \in L^2(Q)$ tal que*

$$y(x, T) = 0 \quad \text{c.t.p. } x \in (0, 1). \quad (2.2)$$

Uno de los principales objetivos de este capítulo es proporcionar un análisis completo del problema de controlabilidad a cero del sistema (2.1) cuando a es degenerada en $x = 0$, es decir, cuando $a(0) = 0$. Consideraremos dos tipos de degeneraciones de a , débilmente degenerado y fuertemente degenerado. Cada tipo está asociada con su respectiva condición de frontera en $x = 0$. En el caso del problema débilmente degenerado (PDD) se considerará en (2.1) la condición de frontera de Dirichlet $y(0, t) = 0$, esto es, cuando

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & a \in C([0, 1]) \cap C^1((0, 1]), \quad a > 0 \text{ en } (0, 1], \quad a(0) = 0, \\ \text{(ii)} \quad & \exists K \in [0, 1) \text{ tal que } xa'(x) \leq Ka(x) \quad \forall x \in [0, 1]. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Bajo esta hipótesis es fácil ver que la función $x^K/a(x)$ es no decreciente y por tanto $\frac{1}{a} \in L^1(0, 1)$. Ahora, para el caso del problema fuertemente degenerado (PFD), esto es, cuando

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & a \in C^1((0, 1]), \quad a > 0 \text{ en } (0, 1], \quad a(0) = 0, \\ \text{(ii)} \quad & \exists K \in [1, 2) \text{ tal que } xa'(x) \leq Ka(x) \quad \forall x \in [0, 1], \\ \text{(iii)} \quad & \begin{cases} \exists \sigma \in (1, K] \text{ } x \rightarrow \frac{a(x)}{x^\sigma} \text{ es no decreciente cerca de } 0, & \text{si } K > 1, \\ \exists \sigma \in (0, 1) \text{ } x \rightarrow \frac{a(x)}{x^\sigma} \text{ es no decreciente cerca de } 0, & \text{si } K = 1, \end{cases} \end{aligned} \quad (2.4)$$

la condición de frontera en $x = 0$ será del tipo Neumann:

$$(au_x)(0, t) = 0, \quad t \in (0, T).$$

Observe que, por hipótesis sobre $\beta(x)$, se tiene que

$$\frac{\beta^2(x)}{a(x)} \leq C \frac{x^2}{a(x)} \leq \frac{C}{a(1)} \quad \text{casi en todas partes } x \in (0, 1), \quad (2.5)$$

para una constante $C > 0$. Además, en este caso, $\frac{1}{\sqrt{a}} \in L^1(0, 1)$, como consecuencia de (2.4)(ii).

Nuestro objetivo principal es mostrar que (2.1) posee la propiedad de controlabilidad a cero. Esto será consecuencia de la siguiente desigualdad de observabilidad

$$\int_0^1 v^2(x, 0) dx \leq C \int_0^T \int_\omega v^2(x, t) dx dt, \quad (2.6)$$

válida para toda solución v del sistema adjunto

$$\begin{cases} v_t + (a(x)v_x)_x - b(x, t)v + (\beta(x)c(x, t)v)_x = 0 & \text{en } Q, \\ v(1, t) = 0 \quad \text{y} \quad \begin{cases} v(0, t) = 0 & \text{para (PDD)}, \\ (av_x)(0, t) = 0 & \text{para (PFD)}, \end{cases} & t \in (0, T), \\ v(x, T) = v_T(x), & \text{en } (0, 1). \end{cases} \quad (2.7)$$

En la prueba de la desigualdad de observabilidad aplicaremos una estimación de Carleman fundamental para el sistema

$$\begin{cases} v_t + (a(x)v_x)_x = F_0 + (\beta(x)F_1)_x & \text{en } Q, \\ v(1, t) = 0 \quad \text{y} \quad \begin{cases} v(0, t) = 0 & \text{para (PDD)}, \\ (av_x)(0, t) = 0 & \text{para (PFD)}, \end{cases} & t \in (0, T), \\ v(x, T) = v_T(x), & \text{en } (0, 1), \end{cases} \quad (2.8)$$

donde $F_0, F_1 \in L^2(Q)$ y $v_T \in L^2(0, 1)$, la cual será introducida posteriormente.

Finalmente, con el resultado de controlabilidad a cero para el caso lineal obtenido, estudiamos el caso semi-lineal

$$\begin{cases} y_t - (a(x)y_x)_x + f(x, t, y, y_x) = h1_\omega & \text{en } Q, \\ y(1, t) = 0 \quad \text{y} \quad \begin{cases} y(0, t) = 0 & \text{para (PDD)}, \\ (ay_x)(0, t) = 0 & \text{para (PFD)}, \end{cases} & t \in (0, T), \\ y(x, 0) = y_0(x), & \text{en } (0, 1). \end{cases} \quad (2.9)$$

En esta parte, aplicando el método del punto fijo para problemas degenerados, logramos obtener resultados de controlabilidad a cero para (2.9) cuando f satisface condiciones de Lipschitz generalizadas.

2.2. Planteamiento del problema

En esta sección, verificaremos que nuestro problema de controlabilidad esté correctamente planteado, es decir, mostraremos que la ecuación (2.8) y la ecuación lineal parabólica degenerada,

$$\begin{cases} y_t - (a(x)y_x)_x + b(x, t)y + \beta(x)c(x, t)y_x = h1_\omega & \text{en } Q, \\ y(1, t) = 0 \quad \text{y} \quad \begin{cases} y(0, t) = 0 & \text{para (PDD)}, \\ (ay_x)(0, t) = 0 & \text{para (PFD)}, \end{cases} & t \in (0, T), \\ y(x, 0) = y_0(x), & \text{en } (0, 1), \end{cases} \quad (2.10)$$

tienen solución única en espacios adecuados. En la introducción de estos espacios es necesaria la siguiente definición

Definición 2.2. Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo. Una función $u: I \rightarrow \mathbb{R}$ se dice absolutamente continua en I si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\sum_{k=1}^l |u(b_k) - u(a_k)| \leq \varepsilon$$

para toda colección finita de intervalos disjuntos (a_k, b_k) , $k = 1, \dots, l$, con $[a_k, b_k] \subset I$ y

$$\sum_{k=1}^l (b_k - a_k) \leq \delta.$$

Una función $u: I \rightarrow \mathbb{R}$ es localmente absolutamente continua si es absolutamente continua en $[a, b]$ para todo intervalo $[a, b] \subset I$.

Definamos los siguientes espacios de Hilbert $H_a^1(0, 1)$:

CASO(PDD)

$$H_a^1(0, 1) := \{u \in L^2(0, 1) \mid u \text{ absolutamente continua en } [0, 1], \sqrt{a}u_x \in L^2(0, 1) \text{ y } u(0) = u(1) = 0\},$$

y

$$H_a^2(0, 1) := \{u \in H_a^1(0, 1) \mid au_x \in H^1(0, 1)\}.$$

CASO(PFD)

$$H_a^1(0, 1) := \{u \in L^2(0, 1) \mid u \text{ localmente absolutamente continua en } (0, 1], \sqrt{a}u_x \in L^2(0, 1) \text{ y } u(1) = 0\},$$

y

$$H_a^2(0, 1) := \{u \in L^2(0, 1) \mid u \text{ localmente absolutamente continua en } (0, 1], au \in H_0^1(0, 1), au_x \in H^1(0, 1) \text{ y } (au_x)(0) = 0\}.$$

con normas

$$\|u\|_{H_a^1}^2 := \|u\|_{L^2(0,1)}^2 + \|\sqrt{a}u_x\|_{L^2(0,1)}^2, \quad \text{y} \quad \|u\|_{H_a^2}^2 := \|u\|_{H_a^1}^2 + \|(au_x)_x\|_{L^2(0,1)}^2$$

Ahora definamos el operador $(A, D(A))$ por

$$D(A) = H_a^2(0, 1) \text{ y } \forall u \in D(A), \quad Au := (au_x)_x - b(\cdot, t)y - \beta c(\cdot, t)y_x.$$

En ambos casos (PDD) y (PFD), el siguiente resultado se cumple, (véase, por ejemplo, [7]).

Proposición 2.1. $A: D(A) \subset L^2(0, 1) \rightarrow L^2(0, 1)$ es un operador cerrado coercivo auto-adjunto y negativo con dominio denso.

En este punto es necesario hacer un parentésis para recordar la definición de algunos espacios de Banach que serán introducidos más adelante en un resultado de regularidad consecuencia de la Proposición anterior.

Sea B un espacio de Banach real con norma denotada por $\|\cdot\|_B$ y sea $[a, b]$ un intervalo cerrado. La función $u: [a, b] \rightarrow B$ se dice continua en $t_0 \in [a, b]$ si

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \|u(t) - u(t_0)\|_B = 0.$$

La función u se dice continua en $[a, b]$ si es continua en cada t en $[a, b]$. La función u se dice diferenciable en t_0 si existe $u'(t_0) \in B$ (la derivada de u en t_0) tal que

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \left\| \frac{1}{t - t_0} (u(t) - u(t_0)) - u'(t_0) \right\|_B = 0.$$

La función u se dice diferenciable en $[a, b]$ si $u'(t)$ existe para toda $t \in [a, b]$. Denotaremos por $C([a, b]; B)$ el espacio de todas las funciones continuas $u: [a, b] \rightarrow B$. Este es un espacio de Banach con la norma

$$\|u\|_{C([a, b]; B)} = \sup\{\|u(t)\|_B : t \in [a, b]\}.$$

$C^1([a, b]; B)$ denota el espacio de funciones diferenciables $u: [a, b] \rightarrow B$ con derivada continua u' en $[a, b]$.

Si $1 \leq p < \infty$, entonces $L^p(a, b; B)$ es el espacio de funciones medibles $u: (a, b) \rightarrow B$ tal que

$$\|u\|_{L^p(a, b; B)} = \left(\int_a^b \|u(t)\|_B^p dt \right)^{1/p} < \infty$$

con la modificación usual en el caso $p = \infty$. Finalmente, el espacio de Sobolev

$$H^1(a, b; B) = \{u \in L^2(a, b; B) : \exists u' \in L^2(a, b; B) \text{ (en el sentido de distribuciones)}\}$$

con norma

$$\|u\|_{H^1(a,b;B)} = (\|u\|_{L^2(a,b;B)}^2 + \|u'\|_{L^2(a,b;B)}^2)^{1/2}.$$

De la proposición 2.1, aplicando el teorema de Hille-Yosida en espacios de Hilbert, se tiene el siguiente resultado de regularidad para la ecuación (2.10), (véase, por ejemplo, [5]).

Teorema 2.1. *Sea h en $L^2(\omega \times (0, T))$ dado. Para toda $y_0 \in L^2(0, 1)$, (2.10) tiene solución única*

$$y \in \mathcal{U} := C([0, T]; L^2(0, 1)) \cap L^2(0, T; H_a^1(0, 1)).$$

Además, si $y_0 \in H_a^1(0, 1)$, entonces

$$y \in C([0, T]; H_a^1(0, 1)) \cap L^2(0, T; H_a^2(0, 1)) \cap H^1(0, T; L^2(0, 1)),$$

y existe una constante positiva C_T tal que

$$\begin{aligned} & \|y\|_{C([0,T];H_a^1(0,1))}^2 + \|y\|_{L^2(0,T;H_a^2(0,1))}^2 + \|y\|_{H^1(0,T;L^2(0,1))}^2 \\ & \leq C_T (\|y_0\|_{H_a^1(0,1)}^2 + \|h\|_{L^2(\omega \times (0,T))}^2). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Por otro lado, para el sistema parabólico (2.8) (véase, [21])

Teorema 2.2. *Dados F_1, F_2 en $L^2(Q)$. Para toda $v_T \in L^2(0, 1)$, (2.8) tiene solución única*

$$v \in \mathcal{U} \text{ y } v_t \in L^2(0, T; (H_a^1)'(0, 1)).$$

2.3. Relación con la literatura y motivación

El estudio de las propiedades de controlabilidad de ecuaciones parabólicas degeneradas fue inicialmente motivado por algunos modelos físicos. Por ejemplo, el campo de velocidades de un flujo laminar sobre una placa plana puede ser descrito mediante las ecuaciones de Prandtl (ver [24]). Mediante la llamada transformación de “Crocco”, estas ecuaciones son transformadas en una ecuación parabólica degenerada no lineal (ecuación de Crocco, ver [24]) definida sobre un dominio acotado

$\Omega = (0, L) \times (0, 1)$. La linealización de la ecuación de Crocco alrededor de una solución estacionaria es una ecuación de la forma:

$$\begin{cases} u_t + b(x, y)u_x + a(x, y)u_{yy} + cu = f & (x, y, t) \in \Omega \times (0, T), \\ u_y(x, 0, t) = u(x, 1, t) = 0 & (x, t) \in (0, L) \times (0, T), \\ u(0, y, t) = u_1(y, t), & (y, t) \in (0, 1) \times (0, T), \\ u(x, y, 0) = u_0(x, y), & (x, y) \in \Omega, \end{cases} \quad (2.12)$$

donde f y u_1 dependen de la velocidad incidente del flujo, y los coeficientes a, b y c son positivos, suaves, pero degenerados en la frontera del dominio:

$$b(x, y) \rightarrow 0 \text{ cuando } y \rightarrow 0, \quad \text{y} \quad a(x, y) \rightarrow 0 \text{ cuando } y \rightarrow 1.$$

Las propiedades de controlabilidad de ecuaciones parabólicas no-degeneradas han sido estudiadas en años recientes; con respecto a la ecuación del calor, ver por ejemplo [2, 6, 15, 16, 28]; con respecto a las ecuaciones de Stokes y Navier-Stokes, ver por ejemplo [4, 17, 19].

Por otro lado, se conocen pocos resultados en el caso de ecuaciones degeneradas. En particular, en [1], [12], [14] y [22] y los autores estudiaron las propiedades de controlabilidad de ecuaciones parabólicas degeneradas lineales en una dimensión con términos de orden cero. Ahora bien, en [10] los autores estudiaron la propiedad de controlabilidad a cero del sistema (2.1) con términos de primer orden cuando el coeficiente c depende solamente de la variable espacial x . En este trabajo consideraremos coeficientes de primer orden de la forma $\beta(x)c(x, t)$ con $\beta(x)/x \in L^\infty(0, 1)$ y $c(x, t) \in L^\infty((0, 1) \times (0, T))$. La dependencia de t mejora los resultados de controlabilidad a cero que existen en la literatura y permite demostrar un resultado de controlabilidad a cero para una ecuación semi-lineal para ciertas no-linealidades de la forma $f = f(x, t, y, y_x)$. También, generalizamos los resultados obtenidos en [9] y [11] donde se estudió la controlabilidad a cero por regiones de ecuaciones de la forma (2.1). Finalmente, cabe mencionar que en este capítulo se generaliza el trabajo que realizamos en [18], en el cual se abordó el caso particular de funciones $a(x) = x^\alpha$ con $\alpha \in [0, 2)$.

2.4. Estimaciones de Carleman para problemas parabólicos degenerados

Como se mencionó anteriormente, nuestro principal resultado es consecuencia de una estimación de Carleman fundamental. En esta sección, obtendremos dicha estimación.

Introduzcamos la función $\varphi(x, t) = \psi(x)\theta(t)$. Aquí

$$\theta(t) = \frac{1}{(t(T-t))^4}, \quad \forall t \in (0, T)$$

y

$$\psi(x) = c_1 \left(\int_0^x \frac{y}{a(y)} dy - c_2 \right), \quad \forall x \in [0, 1] \quad (2.13)$$

Se puede verificar que si $c_1 > 0$ y $c_2 > \frac{1}{a(1)(2-K)}$ (K es la constante que introducimos en las hipótesis sobre a), entonces

$$\psi(x) < 0,$$

para todo $x \in [0, 1]$. En efecto, por hipótesis sobre a , existe $K \in [0, 2)$ tal que

$$\frac{1}{a(y)} \leq \frac{1}{a(1)y^K},$$

para todo y en $(0, 1)$. Entonces

$$\int_0^x \frac{y}{a(y)} dy \leq \int_0^x \frac{y^{1-K}}{a(1)} dy = \frac{1}{a(1)(2-K)} < c_2,$$

para todo $x \in [0, 1]$. Posteriormente se dará una restricción más precisa sobre c_1 . Observe que

$$e^{2s\varphi(x,t)} \leq 1, \quad \forall (x, t) \in Q, \text{ y } \forall s > 0. \quad (2.14)$$

Con respecto a $\theta(t)$, tenemos que

$$\theta(t) \rightarrow \infty \text{ cuando } t \rightarrow 0^+, T^-.$$

También, introducimos la función $\Phi(x, t) = \theta(t)\Psi(x)$, donde Ψ está definida de la siguiente manera:

$$\Psi(x) = (e^{2r\zeta(0)} - e^{r\zeta(x)}), \quad r > 0,$$

con

$$\zeta(x) = \int_x^1 \frac{1}{\sqrt{a(y)}} dy, \quad \forall x \in [0, 1].$$

Observe que $\Phi > 0$ y $\Phi(x, t) \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow 0^+$, $t \rightarrow T^-$. Entonces

$$e^{-2s\Phi(x,t)} \leq 1, \quad \forall (x, t) \in Q, \text{ y } \forall s > 0. \quad (2.15)$$

Consideramos el sistema parabólico

$$\begin{cases} v_t + (a(x)v_x)_x = F_0 + (\beta(x)F_1)_x & \text{en } Q, \\ v(1, t) = 0 \quad \text{y} \quad \begin{cases} v(0, t) = 0 & \text{para (PDD)}, \\ (av_x)(0, t) = 0 & \text{para (PFD)}, \end{cases} & t \in (0, T), \\ v(x, T) = v_T(x), & \text{en } (0, 1), \end{cases} \quad (2.16)$$

donde $F_0, F_1 \in L^2(Q)$ y $v_T \in L^2(0, 1)$. Ahora, es posible plantear, de manera específica, nuestro principal objetivo en esta sección. Este es verificar que se cumple la siguiente estimación de Carleman:

Teorema 2.3. *Supongamos que las Hipótesis (2.3) para (PDD) (o las Hipótesis (2.4) para (PFD)) se satisfacen y sea $T > 0$ dado. Entonces, existen dos constantes positivas C y s_0 , tal que toda solución v de (2.16) satisface*

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_0^1 \left(s\theta a(x)v_x^2 + s^3\theta^3 \frac{x^2}{a(x)} v^2 \right) e^{2s\varphi(x,t)} dx dt \\ & \leq C \left(\int_0^T \int_\omega e^{2s\varphi(x,t)} v^2 dx dt + \int_0^T \int_0^1 \left(F_0^2 + s^2\theta^3 \frac{\beta^2(x)}{a(x)} F_1^2 \right) e^{2s\varphi(x,t)} dx dt \right), \end{aligned} \quad (2.17)$$

para toda $s \geq s_0$.

La demostración del Teorema 2.3 será dada al final de esta sección como una consecuencia del siguiente resultado para el sistema parabólico:

$$\begin{cases} v_t + (a(x)v_x)_x = F & \text{en } Q, \\ v(1, t) = 0 \quad \text{y} \quad \begin{cases} v(0, t) = 0 & \text{para (PDD)}, \\ (av_x)(0, t) = 0 & \text{para (PFD)}, \end{cases} & t \in (0, T), \\ v(x, T) = v_T(x), & \text{en } (0, 1), \end{cases} \quad (2.18)$$

donde a satisface las Hipótesis (2.3) para (PDD) y (2.4) para (PFD), con $F \in L^2(Q)$.

Lema 2.1. *Supongamos que se satisfacen las Hipótesis (2.3) para (PDD) (o las Hipótesis (2.4) para (PFD)) y sea $T > 0$ dado. Entonces, existen dos constantes positivas C y s_0 , tal que para toda solución v de (2.18), se cumple que*

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_0^1 \left(s\theta a(x)v_x^2 + s^3\theta^3 \frac{x^2}{a(x)}v^2 \right) e^{2s\varphi(x,t)} dxdt \\ & \leq C \left(\int_0^T \int_0^1 e^{2s\varphi(x,t)} F^2 dxdt + \int_0^T \int_{\omega} e^{2s\varphi(x,t)} v^2 dxdt \right) \end{aligned} \quad (2.19)$$

para toda $s \geq s_0$.

La demostración del Lema 2.1 se basa en la combinación de la desigualdad de Carleman para el sistema degenerado (2.18), que a continuación se muestra

Teorema 2.4. *Supongamos que se satisfacen las Hipótesis (2.3) para (PDD) (o las Hipótesis (2.4) para (PFD)) y sea $T > 0$ dado. Entonces, existen dos constantes positivas C y s_0 , tal que para toda solución v de (2.18) se satisface*

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_0^1 \left(s\theta a(x)v_x^2 + s^3\theta^3 \frac{x^2}{a(x)}v^2 \right) e^{2s\varphi(x,t)} dxdt \\ & \leq C \left(\int_0^T \int_0^1 e^{2s\varphi(x,t)} F^2 dxdt + sa(1) \int_0^T \theta e^{2s\varphi(x,t)} v_x^2(1,t) dt \right), \end{aligned} \quad (2.20)$$

para toda $s \geq s_0$,

junto con una estimación de Carleman para la ecuación no degenerada

$$\begin{cases} z_t + (a(x)z_x)_x = h & \text{en } Q, \\ z(0,t) = z(1,t) = 0 & t \in (0,T); \end{cases} \quad (2.21)$$

donde $a \in C^1([0,1])$ es una función estrictamente positiva,

Proposición 2.2 (Estimación Clásica de Carleman). *Sea z solución de (2.21). Entonces existen dos constantes positivas r_0 y s_{r_0} tal que para toda $r > r_0$ y $s > s_{r_0}$,*

la solución de (2.21) satisface

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_0^1 \left(s\theta e^{r\zeta(x)} z_x^2 + s^3\theta^3 e^{3r\zeta(x)} z^2 \right) e^{-2s\Phi(x,t)} dx dt \\ & \leq C \left(\int_0^T \int_0^1 e^{-2s\Phi(x,t)} h^2 dx dt - \int_0^T r s \theta a^{3/2}(x) e^{r\zeta(x)} e^{-2s\Phi(x,t)} z_x^2 \Big|_0^1 dt \right), \end{aligned} \quad (2.22)$$

para alguna constante $C > 0$.

La demostración del Teorema 2.4 se puede ver en el Apéndice. Por otro lado, en la literatura existente de la Teoría de Control, la estimación (2.22) es aplicada para obtener importantes resultados en esta área; sin embargo, hasta ahora, no se ha escrito una demostración formal de ella. A continuación, damos una demostración de esta desigualdad.

Demostración de la Proposición 2.2: Definamos $w(x, t) = e^{-s\Phi(x,t)} z$, donde z es la solución de (2.21). Entonces, $z = e^{s\Phi} w$ y se verifica que:

1. $w(0, t) = w(1, t) = 0$
2. $\theta^n w(x, 0) = \theta^n w(x, T) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$.
3. $|\theta_t| \leq C\theta^{5/4} \leq C\theta^2$ y $\theta_{tt} \leq C\theta^{3/2} \leq C\theta^3$.

Sustituyendo en (2.21), se tiene que

$$\begin{aligned} h &= [e^{s\Phi(x,t)} w]_t + [a(x) (e^{s\Phi(x,t)} w)_x]_x \\ &= e^{s\Phi(x,t)} w_t + s\Phi_t(x, t) e^{s\Phi(x,t)} w + [a(x) (e^{s\Phi(x,t)} w_x + s\Phi_x(x, t) e^{s\Phi(x,t)} w)]_x \\ &= e^{s\Phi(x,t)} w_t + s\theta_t \Psi(x) e^{s\Phi(x,t)} w + e^{s\Phi(x,t)} (a(x) w_x)_x + s\theta a(x) \Psi_x(x) e^{s\Phi(x,t)} w_x \\ &+ s\theta (\Psi_x(x) a(x))_x e^{s\Phi(x,t)} w + s\theta a(x) \Psi_x(x) (e^{s\Phi(x,t)} w)_x \\ &= e^{s\Phi(x,t)} w_t + s\theta_t \Psi(x) e^{s\Phi(x,t)} w + e^{s\Phi(x,t)} (a(x) w_x)_x + 2s\theta a(x) \Psi_x(x) e^{s\Phi(x,t)} w_x \\ &+ s\theta (\Psi_x(x) a(x))_x e^{s\Phi(x,t)} w + s^2 \theta^2 a(x) \Psi_x^2(x) e^{s\Phi(x,t)} w, \end{aligned}$$

entonces,

$$h e^{-s\Phi(x,t)} = w_t + (a(x) w_x)_x + s\Psi(x) \theta_t w + 2s\theta a(x) \Psi_x(x) w_x + s\theta (\Psi_x(x) a(x))_x w + s^2 \theta^2 a(x) \Psi_x^2(x) w.$$

Definimos

$$P_s^+ w = s\Psi(x)\theta_t w + s^2\theta^2 a(x)\Psi_x^2(x)w + s\theta(\Psi_x(x)a(x))_x w + (a(x)w_x)_x,$$

$$P_s^- w = w_t + 2s\theta a(x)\Psi_x(x)w_x.$$

Se verifica que

$$he^{-s\Phi(x,t)} = P_s^+ w + P_s^- w$$

y

$$\|he^{-s\Phi(x,t)}\|^2 = \|P_s^+ w\|^2 + \|P_s^- w\|^2 + 2\langle P_s^+ w, P_s^- w \rangle \geq 2\langle P_s^+ w, P_s^- w \rangle$$

Ahora, escribimos

$$\langle P_s^+ w, P_s^- w \rangle = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4,$$

donde

$$Q_1 = \langle s\Psi(x)\theta_t w + s^2\theta^2 a(x)\Psi_x^2(x)w + s\theta(\Psi_x(x)a(x))_x w + (a(x)w_x)_x, w_t \rangle,$$

$$Q_2 = s^2 \langle \Psi(x)\theta_t w + \theta(\Psi_x(x)a(x))_x w, 2\theta a(x)\Psi_x(x)w_x \rangle,$$

$$Q_3 = s^3 \langle \theta^2 a(x)\Psi_x^2(x)w, 2\theta a(x)\Psi_x(x)w_x \rangle,$$

$$Q_4 = s \langle (a(x)w_x)_x, 2\theta a(x)\Psi_x(x)w_x \rangle.$$

Estimando $\int_0^T \int_0^1 Q_1$

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^1 Q_1 &= \int_0^T \int_0^1 (s\Psi(x)\theta_t w + s^2\theta^2 a(x)\Psi_x^2(x)w + s\theta(\Psi_x(x)a(x))_x w + (a(x)w_x)_x) w_t \, dxdt \\ &= \int_0^T \int_0^1 (s\Psi(x)\theta_t + s^2\theta^2 a(x)\Psi_x^2(x) + s\theta(\Psi_x(x)a(x))_x) \left(\frac{w^2}{2}\right)_t \, dxdt \\ &\quad + \int_0^T \int_0^1 (a(x)w_x)_x w_t \, dxdt \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2} (s\Psi(x)\theta_t + s^2\theta^2 a(x)\Psi_x^2(x) + s\theta(\Psi_x(x)a(x))_x) w^2 \Big|_0^T \, dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_0^T \int_0^1 \frac{1}{2} (s\Psi(x)\theta_t + s^2\theta^2 a(x)\Psi_x^2(x) + s\theta(\Psi_x(x)a(x))_x)_t w^2 dxdt \\
& + \int_0^T a(x)w_x w_t \Big|_0^1 dt - \int_0^T \int_0^1 a(x)w_x w_{xt} dxdt \\
& = - \int_0^T \int_0^1 \left(\frac{1}{2}s\Psi(x)\theta_{tt} + s^2\theta\theta_t a(x)\Psi_x^2(x) + \frac{1}{2}s\theta_t(\Psi_x(x)a(x))_x \right) w^2 dxdt \\
& = - \int_0^T \int_0^1 \left(\frac{1}{2}s\Psi(x)\theta_{tt} + s^2\theta\theta_t a(x) \left(\frac{re^{r\zeta(x)}}{\sqrt{a(x)}} \right)^2 + \frac{1}{2}s\theta_t \left(\left[\frac{re^{r\zeta(x)}}{\sqrt{a(x)}} \right] a(x) \right)_x \right) w^2 dxdt \\
& = - \int_0^T \int_0^1 \left(\frac{1}{2}s\Psi(x)\theta_{tt} + r^2 s^2 \theta\theta_t e^{2r\zeta(x)} + \frac{1}{2}rs\theta_t \left(e^{r\zeta(x)} \sqrt{a(x)} \right)_x \right) w^2 dxdt \\
& = - \int_0^T \int_0^1 \left(\frac{1}{2}s\Psi(x)\theta_{tt} + r^2 s^2 \theta\theta_t e^{2r\zeta(x)} + \frac{1}{2}rs\theta_t \left(-re^{r\zeta(x)} + e^{r\zeta(x)} \frac{a'(x)}{2\sqrt{a(x)}} \right) \right) w^2 dxdt \\
& = - \int_0^T \int_0^1 \left(\frac{1}{2}s\Psi(x)\theta_{tt} + r^2 s^2 \theta\theta_t e^{2r\zeta(x)} + \frac{1}{4}rs\theta_t e^{r\zeta(x)} \left(\frac{a'(x)}{\sqrt{a(x)}} \right) \right) w^2 dxdt \\
& + \int_0^T \int_0^1 r^2 s\theta_t e^{r\zeta(x)} w^2 dxdt \\
& = - \int_0^T \int_0^1 \left(-\frac{1}{2}se^{r\zeta(x)}\theta_{tt} + r^2 s^2 \theta\theta_t e^{2r\zeta(x)} + \frac{1}{4}rs\theta_t e^{r\zeta(x)} \left(\frac{a'(x)}{\sqrt{a(x)}} \right) \right) w^2 dxdt \\
& + \int_0^T \int_0^1 r^2 s\theta_t e^{r\zeta(x)} w^2 dxdt - \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^1 se^{2r\zeta(0)}\theta_{tt} w^2 dxdt \\
& \geq -Cs^2r^2 \int_0^T \int_0^1 \theta^3 e^{3r\zeta(x)} w^2 dxdt + \int_0^T \int_0^1 r^2 s\theta^{-1}\theta\theta_t e^{r\zeta(x)} w^2 dxdt \\
& - \frac{C}{2}e^{2r\zeta(0)} \int_0^T \int_0^1 se^{3r\zeta(x)}\theta^3 w^2 dxdt
\end{aligned}$$

$$\geq -Cs^2r^2 \int_0^T \int_0^1 \theta^3 e^{3r\zeta(x)} w^2 dxdt - \frac{C}{2} e^{2r\zeta(0)} \int_0^T \int_0^1 s e^{3r\zeta(x)} \theta^3 w^2 dxdt \quad (s_{r_0}, r_0 > 1)$$

Estimando $\int_0^T \int_0^1 Q_2$

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^1 Q_2 &= s^2 \int_0^T \int_0^1 \left(\Psi(x) \theta_t w + \theta (\Psi_x(x) a(x))_x w \right) 2\theta a(x) \Psi_x(x) w_x dxdt \\ &= s^2 \int_0^T \int_0^1 \left[2\Psi(x) \Psi_x(x) \theta \theta_t a(x) w w_x + 2\theta^2 (\Psi_x(x) a(x))_x \Psi_x(x) a(x) w w_x \right] dxdt \\ &= s^2 \int_0^T \int_0^1 \left[\Psi(x) \Psi_x(x) \theta \theta_t a(x) (w^2)_x + 2\theta^2 (\Psi_x(x) a(x))_x \Psi_x(x) a(x) w w_x \right] dxdt \\ &= -s^2 \int_0^T \int_0^1 \theta \theta_t \left(\Psi(x) \Psi_x(x) a(x) \right)_x w^2 dxdt \\ &\quad + 2s^2 \int_0^T \int_0^1 \theta^2 (\Psi_x(x) a(x))_x \Psi_x(x) a(x) w w_x dxdt \\ &= -s^2 \int_0^T \int_0^1 \theta \theta_t \Psi_x^2(x) a(x) w^2 dxdt - s^2 \int_0^T \int_0^1 \theta \theta_t \Psi(x) \Psi_{xx}(x) a(x) w^2 dxdt \\ &\quad - s^2 \int_0^T \int_0^1 \theta \theta_t \Psi(x) \Psi_x(x) a'(x) w^2 dxdt \\ &\quad + 2s^2 \int_0^T \int_0^1 \theta^2 (\Psi_x(x) a(x))_x \Psi_x(x) a(x) w w_x dxdt \\ &= -r^2 s^2 \int_0^T \int_0^1 \theta \theta_t e^{2r\zeta(x)} w^2 dxdt \\ &\quad - s^2 \int_0^T \int_0^1 \theta \theta_t \Psi(x) \left[-r^2 e^{r\zeta(x)} - r e^{r\zeta(x)} \frac{a'(x)}{2\sqrt{a(x)}} \right] w^2 dxdt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -rs^2 \int_0^T \int_0^1 \theta \theta_t \Psi(x) e^{r\zeta(x)} \frac{a'(x)}{\sqrt{a(x)}} w^2 dx dt \\
& + 2r^2 s^2 \int_0^T \int_0^1 \theta^2 \left[-re^{r\zeta(x)} + e^{r\zeta(x)} \frac{a'(x)}{2\sqrt{a(x)}} \right] e^{r\zeta(x)} \sqrt{a(x)} w w_x dx dt \\
& = -r^2 s^2 \int_0^T \int_0^1 \theta \theta_t e^{2r\zeta(x)} w^2 dx dt + r^2 s^2 \int_0^T \int_0^1 \theta \theta_t \Psi(x) e^{r\zeta(x)} w^2 dx dt \\
& - \frac{rs^2}{2} \int_0^T \int_0^1 \theta \theta_t \Psi(x) e^{r\zeta(x)} \frac{a'(x)}{\sqrt{a(x)}} w^2 dx dt - 2r^3 s^2 \int_0^T \int_0^1 \theta^2 e^{2r\zeta(x)} \sqrt{a(x)} w w_x dx dt \\
& + r^2 s^2 \int_0^T \int_0^1 \theta^2 e^{2r\zeta(x)} a'(x) w w_x dx dt \\
& = -2r^2 s^2 \int_0^T \int_0^1 \theta \theta_t e^{2r\zeta(x)} w^2 dx dt + r^2 s^2 \int_0^T \int_0^1 \theta \theta_t e^{2r\zeta(0)} e^{r\zeta(x)} w^2 dx dt \\
& - \frac{rs^2}{2} \int_0^T \int_0^1 \theta \theta_t \Psi(x) e^{r\zeta(x)} \frac{a'(x)}{\sqrt{a(x)}} w^2 dx dt - 2r^3 s^2 \int_0^T \int_0^1 \theta^2 e^{2r\zeta(x)} \sqrt{a(x)} w w_x dx dt \\
& + r^2 s^2 \int_0^T \int_0^1 \theta^2 e^{2r\zeta(x)} a'(x) w w_x dx dt \\
& \geq -Cr^2 s^2 \int_0^T \int_0^1 \theta^3 e^{3r\zeta(x)} w^2 dx dt - Cr^2 s^2 e^{2r\zeta(0)} \int_0^T \int_0^1 \theta^3 e^{3r\zeta(x)} w^2 dx dt \\
& - \frac{rs^2}{2} \int_0^T \int_0^1 \theta \theta_t e^{2r\zeta(0)} e^{r\zeta(x)} \frac{a'(x)}{\sqrt{a(x)}} w^2 dx dt + \frac{rs^2}{2} \int_0^T \int_0^1 \theta \theta_t e^{2r\zeta(x)} \frac{a'(x)}{\sqrt{a(x)}} w^2 dx dt \\
& - r^4 s^3 \int_0^T \int_0^1 \theta^3 e^{3r\zeta(x)} \sqrt{a(x)} w^2 dx dt - r^2 s \int_0^T \int_0^1 \theta e^{r\zeta(x)} \sqrt{a(x)} w_x^2 dx dt \\
& - \frac{r^3 s^3}{2} \int_0^T \int_0^1 \theta^3 e^{3r\zeta(x)} |a'(x)| w^2 dx dt - \frac{rs}{2} \int_0^T \int_0^1 \theta e^{r\zeta(x)} |a'(x)| w_x^2 dx dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\geq -Cr^2s^2[1 + e^{2r\zeta(0)}] \int_0^T \int_0^1 \theta^3 e^{3r\zeta(x)} w^2 dxdt - \frac{C}{2}rs^2[1 + e^{2r\zeta(0)}] \int_0^T \int_0^1 \theta^3 e^{2r\zeta(x)} w^2 dxdt \\
&- \frac{C}{4}r^4s^3 \int_0^T \int_0^1 \theta^3 e^{3r\zeta(x)} w^2 dxdt - \frac{C}{2}r^2s \int_0^T \int_0^1 \theta e^{r\zeta(x)} w_x^2 dxdt \\
&\geq -Cr^2s^2[1 + e^{2r\zeta(0)}] \int_0^T \int_0^1 \theta^3 e^{3r\zeta(x)} w^2 dxdt - Cr^4s^3 \int_0^T \int_0^1 \theta^3 e^{3r\zeta(x)} w^2 dxdt \\
&- \frac{C}{2}r^2s \int_0^T \int_0^1 \theta e^{r\zeta(x)} w_x^2 dxdt \quad (r_0 > 1)
\end{aligned}$$

Estimando $\int_0^T \int_0^1 Q_3$

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int_0^1 Q_3 &= s^3 \int_0^T \int_0^1 \theta^2 a(x) \Psi_x^2(x) w \left(2\theta a(x) \Psi_x(x) w_x \right) dxdt \\
&= 2s^3 \int_0^T \int_0^1 \theta^3 \Psi_x^3(x) a^2(x) w w_x dxdt \\
&= -s^3 \int_0^T \int_0^1 \theta^3 \left(\Psi_x^3(x) a^2(x) \right)_x w^2 dxdt \\
&= -s^3 \int_0^T \int_0^1 \theta^3 \left(\frac{r^3 e^{3r\zeta(x)}}{a^{3/2}(x)} a^2(x) \right)_x w^2 dxdt \\
&= -r^3 s^3 \int_0^T \int_0^1 \theta^3 \left(e^{3r\zeta(x)} \sqrt{a(x)} \right)_x w^2 dxdt \\
&= -r^3 s^3 \int_0^T \int_0^1 \theta^3 \left(-3re^{3r\zeta(x)} + e^{3r\zeta(x)} \frac{a'(x)}{2\sqrt{a(x)}} \right) w^2 dxdt \\
&= 3r^4 s^3 \int_0^T \int_0^1 \theta^3 e^{3r\zeta(x)} w^2 dxdt - \frac{r^3 s^3}{2} \int_0^T \int_0^1 \theta^3 e^{3r\zeta(x)} \frac{a'(x)}{\sqrt{a(x)}} w^2 dxdt
\end{aligned}$$

$$\geq 3Cr^4s^3 \int_0^T \int_0^1 \theta^3 e^{3r\zeta(x)} w^2 dxdt \quad (r > r_0)$$

Estimando $\int_0^T \int_0^1 Q_4$

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^1 Q_4 &= s \int_0^T \int_0^1 (a(x)w_x)_x \left(2\theta a(x)\Psi_x(x)w_x \right) dxdt \\ &= s \int_0^T \int_0^1 \left(a'(x)w_x + a(x)w_{xx} \right) \left(2\theta a(x)\Psi_x(x)w_x \right) dxdt \\ &= 2s \int_0^T \int_0^1 \theta a'(x)a(x)\Psi_x(x)w_x^2 dxdt + 2s \int_0^T \int_0^1 \theta a^2(x)\Psi_x(x)w_{xx}w_x dxdt \\ &= 2s \int_0^T \int_0^1 \theta a'(x)a(x)\Psi_x(x)w_x^2 dxdt + s \int_0^T \theta a^2(x)\Psi_x(x)w_x^2 dt \Big]_0^1 \\ &\quad - s \int_0^T \int_0^1 \theta \left(a^2(x)\Psi_x(x) \right)_x w_x^2 dxdt \\ &= 2rs \int_0^T \int_0^1 \theta a'(x)\sqrt{a(x)}e^{r\zeta(x)}w_x^2 dxdt + rs \int_0^T \theta a^{3/2}(x)e^{r\zeta(x)}w_x^2 dt \Big]_0^1 \\ &\quad - rs \int_0^T \int_0^1 \theta \left(a^{3/2}(x)e^{r\zeta(x)} \right)_x w_x^2 dxdt \\ &= 2rs \int_0^T \int_0^1 \theta a'(x)\sqrt{a(x)}e^{r\zeta(x)}w_x^2 dxdt + rs \int_0^T \theta a^{3/2}(x)e^{r\zeta(x)}w_x^2 dt \Big]_0^1 \\ &\quad - rs \int_0^T \int_0^1 \theta \left(-ra(x)e^{r\zeta(x)} + \frac{3}{2}e^{r\zeta(x)}\sqrt{a(x)}a'(x) \right) w_x^2 dxdt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left. 2rs \int_0^T \int_0^1 \theta a'(x) \sqrt{a(x)} e^{r\zeta(x)} w_x^2 dx dt + rs \int_0^T \theta a^{3/2}(x) e^{r\zeta(x)} w_x^2 dt \right]_0^1 \\
&+ r^2 s \int_0^T \int_0^1 \theta a(x) e^{r\zeta(x)} w_x^2 dx dt - \frac{3}{2} rs \int_0^T \int_0^1 \theta e^{r\zeta(x)} \sqrt{a(x)} a'(x) w_x^2 dx dt \\
&= \left. \frac{rs}{2} \int_0^T \int_0^1 \theta a'(x) \sqrt{a(x)} e^{r\zeta(x)} w_x^2 dx dt + rs \int_0^T \theta a^{3/2}(x) e^{r\zeta(x)} w_x^2 dt \right]_0^1 \\
&+ r^2 s \int_0^T \int_0^1 \theta a(x) e^{r\zeta(x)} w_x^2 dx dt \\
&\geq \left. -C \frac{rs}{2} \int_0^T \int_0^1 \theta e^{r\zeta(x)} w_x^2 dx dt + rs \int_0^T \theta a^{3/2}(x) e^{r\zeta(x)} w_x^2 dt \right]_0^1 \\
&+ Cr^2 s \int_0^T \int_0^1 \theta e^{r\zeta(x)} w_x^2 dx dt \\
&\geq \left. Cr^2 s \int_0^T \int_0^1 \theta e^{r\zeta(x)} w_x^2 dx dt + rs \int_0^T \theta a^{3/2}(x) e^{r\zeta(x)} w_x^2 dt \right]_0^1
\end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}
\langle P_s^+ w, P_s^- w \rangle &= \int_0^T \int_0^1 Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 \\
&\geq -Cs^2 r^2 \int_0^T \int_0^1 \theta^3 e^{3r\zeta(x)} w^2 dx dt - \frac{C}{2} e^{2r\zeta(0)} \int_0^T \int_0^1 s e^{3r\zeta(x)} \theta^3 w^2 dx dt \\
&- Cr^2 s^2 [1 + e^{2r\zeta(0)}] \int_0^T \int_0^1 \theta^3 e^{3r\zeta(x)} w^2 dx dt - Cr^4 s^3 \int_0^T \int_0^1 \theta^3 e^{3r\zeta(x)} w^2 dx dt \\
&- \frac{C}{2} r^2 s \int_0^T \int_0^1 \theta e^{r\zeta(x)} w_x^2 dx dt + 3Cr^4 s^3 \int_0^T \int_0^1 \theta^3 e^{3r\zeta(x)} w^2 dx dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left. Cr^2s \int_0^T \int_0^1 \theta e^{r\zeta(x)} w_x^2 dxdt + rs \int_0^T \theta a^{3/2}(x) e^{r\zeta(x)} w_x^2 dt \right|_0^1 \\
& = 2Cr^4s^3 \int_0^T \int_0^1 \theta^3 e^{3r\zeta(x)} w^2 dxdt + \frac{C}{2} r^2s \int_0^T \int_0^1 \theta e^{r\zeta(x)} w_x^2 dxdt \\
& - Cs^2r^2[2 + e^{2r\zeta(0)}] \int_0^T \int_0^1 \theta^3 e^{3r\zeta(x)} w^2 dxdt - \frac{C}{2} s e^{2r\zeta(0)} \int_0^T \int_0^1 \theta^3 e^{3r\zeta(x)} w^2 dxdt \\
& + \left. rs \int_0^T \theta a^{3/2}(x) e^{r\zeta(x)} w_x^2 dt \right|_0^1 \\
& = Cs^3 \left(2r^4 - \left[\frac{r^2[2 + e^{2r\zeta(0)}]}{s} + \frac{e^{2r\zeta(0)}}{s^2} \right] \right) \int_0^T \int_0^1 \theta^3 e^{3r\zeta(x)} w^2 dxdt \\
& + \left. \frac{C}{2} r^2s \int_0^T \int_0^1 \theta e^{r\zeta(x)} w_x^2 dxdt + rs \int_0^T \theta a^{3/2}(x) e^{r\zeta(x)} w_x^2 dt \right|_0^1 \\
& \geq C \left(\int_0^T \int_0^1 r^3 s^3 \theta^3 e^{3r\zeta(x)} w^2 dxdt + \int_0^T \int_0^1 s \theta e^{r\zeta(x)} w_x^2 dxdt \right) \\
& \quad + \left. rs \int_0^T \theta a^{3/2}(x) e^{r\zeta(x)} w_x^2 dt \right|_0^1 \quad (s > s_{r_0})
\end{aligned}$$

De donde se deduce que

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \int_0^1 r^3 s^3 \theta^3 e^{3r\zeta(x)} e^{-2s\Phi(x,t)} z^2 dxdt + \int_0^T \int_0^1 s \theta e^{r\zeta(x)} [(e^{-s\Phi(x,t)} z)_x]^2 dxdt \\
& \leq \int_0^T \int_0^1 e^{-2s\Phi(x,t)} h^2 dxdt - rs \int_0^T \theta a^{3/2}(x) e^{r\zeta(x)} [(e^{-s\Phi(x,t)} z)_x]^2 dt \Big|_0^1
\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \int_0^1 s \theta e^{r\zeta(x)} e^{-2s\Phi(x,t)} z_x^2 dx dt + \int_0^T \int_0^1 r^3 s^3 \theta^3 e^{3r\zeta(x)} e^{-2s\Phi(x,t)} z^2 dx dt + \\
& - 2 \int_0^T \int_0^1 r s^2 \theta^2 e^{2r\zeta(x)} e^{-2s\Phi(x,t)} \left[\frac{1}{\sqrt{a(x)}} \right] z_x z dx dt \\
& \leq \int_0^T \int_0^1 e^{-2s\Phi(x,t)} h^2 dx dt - r s \int_0^T \theta a^{3/2}(x) e^{r\zeta(x)} e^{-2s\Phi(x,t)} z_x^2 dt \Big|_0^1
\end{aligned}$$

así, aplicando la desigualdad de Young

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \int_0^1 s \theta e^{r\zeta(x)} e^{-2s\Phi(x,t)} z_x^2 dx dt + \int_0^T \int_0^1 r^3 s^3 \theta^3 e^{3r\zeta(x)} e^{-2s\Phi(x,t)} z^2 dx dt \\
& - \varepsilon \int_0^T \int_0^1 s \theta e^{r\zeta(x)} e^{-2s\Phi(x,t)} z_x^2 dx dt - C(\varepsilon) \int_0^T \int_0^1 r^2 s^3 \theta^3 e^{3r\zeta(x)} e^{-2s\Phi(x,t)} \left[\frac{1}{a(x)} \right] z^2 dx dt \\
& \leq \int_0^T \int_0^1 e^{-2s\Phi(x,t)} h^2 dx dt - r s \int_0^T \theta a^{3/2}(x) e^{r\zeta(x)} e^{-2s\Phi(x,t)} z_x^2 dt \Big|_0^1
\end{aligned}$$

Por lo tanto, para ε suficientemente pequeña y r suficientemente grande, se obtiene (2.22). ■

Adicionalmente, en el desarrollo de la demostración del Lema 2.1 serán necesarios los siguientes resultados:

Una desigualdad que involucra el peso φ y los pesos ζ y Ψ de la estimación clásica de Carleman de la Proposición 2.2. Esto es, se cumple que

Lema 2.2. *Sea $0 < \alpha < 1$. Dada $c_2 > \frac{1}{a(1)(2-K)}$, existen constantes $c_1 > 0$, $r > 0$ y $c_3 > 0$ tales que*

$$(a) \quad a(x) e^{2s\varphi(x,t)} \leq c_3 e^{r\zeta(x)} e^{-2s\Phi(x,t)}, \quad \forall (x, t) \in [\alpha, 1] \times (0, T).$$

$$(b) \quad \frac{x^2}{a(x)} e^{2s\varphi(x,t)} \leq c_3 e^{r\zeta(x)} e^{2s\varphi(x,t)} \leq c_3 e^{3r\zeta(x)} e^{-2s\Phi(x,t)}, \quad \forall (x, t) \in [\alpha, 1] \times (0, T).$$

$$(c) \quad e^{-2s\Phi(x,t)} \leq e^{2s\varphi(x,t)}, \quad \forall (x,t) \in (0,1) \times (0,T).$$

Demostración. Elegimos $r > 0$ tal que

$$e^{r\zeta(0)} > \frac{c_2(2-K)a(1)}{a(1)c_2(2-K)-1},$$

c_1 tal que

$$\frac{(2-K)a(1)}{a(1)c_2(2-K)-1}(e^{2r\zeta(0)}-1) \leq c_1 < \frac{e^{r\zeta(0)}(e^{r\zeta(0)}-1)}{c_2}$$

y

$$c_3 = \max \left\{ \max_{[\alpha,1]} a(x), \frac{1}{\min_{[\alpha,1]} a(x)} \right\}.$$

Observe que si $r, s > 0$, entonces

$$1 \leq e^{r\zeta(x)} + \frac{r\zeta(x)}{2s\theta(t)} \quad \forall (x,t) \in [\alpha,1] \times (0,T),$$

ya que $\zeta(x) \geq 0 \quad \forall x \in [\alpha,1]$. Luego,

$$-1 \geq - \left(e^{r\zeta(x)} + \frac{r\zeta(x)}{2s\theta(t)} \right), \quad \forall (x,t) \in [\alpha,1] \times (0,T),$$

así

$$e^{2r\zeta(0)} - 1 \geq (e^{2r\zeta(0)} - e^{r\zeta(x)}) - \frac{r\zeta(x)}{2s\theta(t)}, \quad \forall (x,t) \in [\alpha,1] \times (0,T);$$

es decir,

$$e^{2r\zeta(0)} - 1 \geq \Psi(x) - \frac{r\zeta(x)}{2s\theta(t)}, \quad \forall (x,t) \in [\alpha,1] \times (0,T);$$

Ahora bien, por hipótesis

$$c_1 \geq \frac{(2-K)a(1)}{a(1)c_2(2-K)-1}(e^{2r\zeta(0)}-1).$$

Entonces

$$\begin{aligned} \Psi(x) - \frac{r\zeta(x)}{2s\theta(t)} &\leq e^{2r\zeta(0)} - 1 \leq c_1 \left(\frac{a(1)c_2(2-K)-1}{(2-K)a(1)} \right) \\ &= c_1 \left(c_2 - \frac{1}{a(1)(2-K)} \right) \leq c_1 \left(c_2 - \int_0^x \frac{y}{a(y)} dy \right) \\ &= -\psi(x), \end{aligned}$$

$\forall(x, t) \in [\alpha, 1] \times (0, T)$. Por lo tanto

$$\psi(x) \leq \frac{r\zeta(x)}{2s\theta(t)} - \Psi(x),$$

$\forall(x, t) \in [\alpha, 1] \times (0, T)$. En consecuencia

$$2s\theta(t)\psi(x) \leq r\zeta(x) - 2s\theta(t)\Psi(x),$$

$\forall(x, t) \in [\alpha, 1] \times (0, T)$. Es decir

$$2s\varphi(x, t) \leq r\zeta(x) - 2s\Phi(x, t),$$

$\forall(x, t) \in [\alpha, 1] \times (0, T)$. Entonces

$$e^{2s\varphi(x, t)} \leq e^{r\zeta(x)} e^{-2s\Phi(x, t)}, \quad (2.23)$$

$\forall(x, t) \in [\alpha, 1] \times (0, T)$.

Por otro lado, por hipótesis

$$a(x) \leq c_3 \quad \text{y} \quad \frac{x^2}{a(x)} \leq c_3, \quad \forall x \in [\alpha, 1]. \quad (2.24)$$

Combinando (2.23) y (2.24), obtenemos las desigualdades (a) y (b).

Ahora, sea r tal que

$$e^{r\zeta(0)} > \frac{c_2(2-K)a(1)}{a(1)c_2(2-K)-1}. \quad (2.25)$$

Multiplicando en ambos lados de (3.2) por

$$\frac{e^{r\zeta(0)} - 1}{c_2} > 0,$$

se tiene que

$$0 < \frac{(2-K)a(1)}{a(1)c_2(2-K)-1} (e^{2r\zeta(0)} - 1) < \frac{e^{r\zeta(0)}(e^{r\zeta(0)} - 1)}{c_2}.$$

Entonces, es posible elegir c_1 tal que

$$\frac{(2-K)a(1)}{a(1)c_2(2-K)-1} (e^{2r\zeta(0)} - 1) < c_1 < \frac{e^{r\zeta(0)}(e^{r\zeta(0)} - 1)}{c_2}. \quad (2.26)$$

Observe que si c_1 cumple (2.26), se obtiene que

$$e^{r\zeta(0)}(1 - e^{r\zeta(0)}) < -c_1c_2. \quad (2.27)$$

Por otro lado, es fácil verificar que ψ y Ψ son funciones crecientes en $[0, 1]$. Entonces

$$\min_{x \in [0,1]} \psi(x) = \psi(0) = -c_1c_2 \quad \text{y} \quad \min_{x \in [0,1]} \Psi(x) = \Psi(0) = e^{r\zeta(0)}(e^{r\zeta(0)} - 1).$$

Por tanto, aplicando (2.27), se tiene que para todo $(x, t) \in [0, 1] \times (0, T)$

$$\begin{aligned} -2s\theta(t)\Psi(x) &\leq -2s\theta(t)\Psi(0) = 2s\theta(t)e^{r\zeta(0)}(1 - e^{r\zeta(0)}) \\ &< -2s\theta(t)c_1c_2 = 2s\theta(t)\psi(0) \\ &\leq 2s\theta(t)\psi(x), \end{aligned}$$

y en consecuencia se deduce (c). ■

También, la estimación local de energía:

Lema 2.3 (Desigualdad de Caccioppoli). *Suponga que $\omega' \subset\subset \omega$, entonces existe una constante $C > 0$ tal que, para toda solución de (2.18), la siguiente desigualdad se cumple*

$$\int_0^T \int_{\omega'} e^{2s\varphi(x,t)} v_x^2 dx dt \leq C \left(\int_0^T \int_0^1 e^{2s\varphi(x,t)} F^2 dx dt + \int_0^T \int_{\omega} s^2 \theta^2 e^{2s\varphi(x,t)} v^2 dx dt \right) \quad (2.28)$$

Demostración. Introduzcamos la siguiente notación: $\omega = (m, n)$ y $\omega' = (m', n')$ con $m < m' < n' < n$. Consideremos la función con derivada continua $\eta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $0 \leq \eta \leq 1$ y $\eta(x) = 1$ para $x \in (m', n')$, y $\eta(x) = 0$ para $x \in [0, m) \cup (n, 1]$ con $\eta_x \in L^\infty(\mathbb{R})$. Entonces,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^T \frac{d}{dt} \int_0^1 \eta^2 e^{2s\varphi(x,t)} v^2 dx dt \\ &= \int_0^T \int_0^1 \left(2s\eta^2 \varphi_t(x,t) e^{2s\varphi(x,t)} v^2 + 2\eta^2 e^{2s\varphi(x,t)} v v_t \right) dx dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \int_0^T \int_0^1 s \eta^2 \varphi_t(x, t) e^{2s\varphi(x, t)} v^2 dx dt + 2 \int_0^T \int_0^1 \eta^2 e^{2s\varphi(x, t)} v (F - (a(x)v_x)_x) dx dt \\
&= 2 \int_0^T \int_0^1 s \eta^2 \varphi_t(x, t) e^{2s\varphi(x, t)} v^2 dx dt + 2 \int_0^T \int_0^1 \eta^2 e^{2s\varphi(x, t)} F v dx dt \\
&\quad + 2 \int_0^T \int_0^1 (\eta^2 e^{2s\varphi(x, t)} v)_x a(x) v_x dx dt = 2 \int_0^T \int_0^1 s \eta^2 \varphi_t(x, t) e^{2s\varphi(x, t)} v^2 dx dt \\
&\quad + 2 \int_0^T \int_0^1 \eta^2 e^{2s\varphi(x, t)} F v dx dt + 2 \int_0^T \int_0^1 (\eta^2 e^{2s\varphi(x, t)})_x a(x) v v_x dx dt \\
&\quad + 2 \int_0^T \int_0^1 \eta^2 e^{2s\varphi(x, t)} a(x) v_x^2 dx dt.
\end{aligned}$$

Tenemos que

$$\begin{aligned}
2 \int_0^T \int_0^1 \eta^2 e^{2s\varphi(x, t)} a(x) v_x^2 dx dt &= -2 \int_0^T \int_0^1 s \eta^2 \varphi_t(x, t) e^{2s\varphi(x, t)} v^2 dx dt \\
- 2 \int_0^T \int_0^1 \eta^2 e^{2s\varphi(x, t)} F v dx dt - 2 \int_0^T \int_0^1 (\eta^2 e^{2s\varphi(x, t)})_x a(x) v v_x dx dt &
\end{aligned} \tag{2.29}$$

Por la desigualdad de Young

$$-2 \int_0^T \int_0^1 \eta^2 e^{2s\varphi(x, t)} F v dx dt \leq \int_0^T \int_0^1 \eta^2 e^{2s\varphi(x, t)} F^2 dx dt + \int_0^T \int_0^1 \eta^2 e^{2s\varphi(x, t)} v^2 dx dt$$

y

$$\begin{aligned}
-2 \int_0^T \int_0^1 (\eta^2 e^{2s\varphi(x, t)})_x a(x) v v_x dx dt &\leq \varepsilon \int_0^T \int_0^1 (\sqrt{a(x)} \eta e^{s\varphi(x, t)} v_x)^2 dx dt \\
&\quad + C(\varepsilon) \int_0^T \int_0^1 \left(\frac{(\eta^2 e^{2s\varphi(x, t)})_x}{\eta e^{s\varphi(x, t)}} \sqrt{a(x)} v \right)^2 dx dt.
\end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}
& (2 - \varepsilon) \int_0^T \int_0^1 \eta^2 e^{2s\varphi(x,t)} a(x) v_x^2 dx dt \leq -2 \int_0^T \int_0^1 s \eta^2 \varphi_t(x,t) e^{2s\varphi(x,t)} v^2 dx dt \\
& + \int_0^T \int_0^1 \eta^2 e^{2s\varphi(x,t)} F^2 dx dt + C(\varepsilon) \int_0^T \int_0^1 \left(\frac{(\eta^2 e^{2s\varphi(x,t)})_x}{\eta e^{s\varphi(x,t)}} \sqrt{a(x)} v \right)^2 dx dt \\
& + \int_0^T \int_\omega^1 e^{2s\varphi(x,t)} v^2 dx dt \leq C(T) \int_0^T \int_0^1 s \psi \theta^{5/4} \eta^2 e^{2s\varphi(x,t)} v^2 dx dt \\
& + \int_0^T \int_0^1 e^{2s\varphi(x,t)} F^2 dx dt + C(\varepsilon) \int_0^T \int_0^1 \eta_x^2 e^{2s\varphi(x,t)} a(x) v^2 dx dt \\
& + C(\varepsilon) \int_0^T \int_0^1 \eta^2 s^2 \theta \frac{x^2}{a(x)} e^{2s\varphi(x,t)} v^2 dx dt + \int_0^T \int_\omega^1 e^{2s\varphi(x,t)} v^2 dx dt \\
& \leq C(\omega, T) \int_0^T \int_\omega^1 s \theta^2 \frac{x^2}{a(x)} e^{2s\varphi(x,t)} v^2 dx dt + \int_0^T \int_0^1 e^{2s\varphi(x,t)} F^2 dx dt \\
& + C(\varepsilon) \int_0^T \int_\omega^1 s^2 \theta \frac{x^2}{a(x)} e^{2s\varphi(x,t)} v^2 dx dt + \int_0^T \int_\omega^1 e^{2s\varphi(x,t)} v^2 dx dt \\
& \leq C(a, \omega, T) \left(\int_0^T \int_0^1 e^{2s\varphi(x,t)} F^2 dx dt + \int_0^T \int_\omega^1 s^2 \theta^2 e^{2s\varphi(x,t)} v^2 dx dt + \int_0^T \int_\omega^1 e^{2s\varphi(x,t)} v^2 dx dt \right).
\end{aligned}$$

Por tanto, seleccionando ε suficientemente pequeña, se deduce que

$$\begin{aligned}
& \min_{\omega'} a(x) \int_0^T \int_{\omega'}^1 e^{2s\varphi(x,t)} v_x^2 dx dt \leq \int_0^T \int_0^1 \eta^2 e^{2s\varphi(x,t)} a(x) v_x^2 dx dt \\
& \leq C \left(\int_0^T \int_0^1 e^{2s\varphi(x,t)} F^2 dx dt + \int_0^T \int_\omega^1 s^2 \theta^2 e^{2s\varphi(x,t)} v^2 dx dt \right).
\end{aligned}$$

Esto concluye la demostración del Lema. ■

Demostración del Lema 2.1: Para $\omega = (m, n)$ ponemos $\kappa = \frac{2m+n}{3}$, $\lambda = \frac{m+2n}{3}$, y sea $\xi \in C^2(\mathbb{R})$ tal que $0 \leq \xi \leq 1$ y

$$\xi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in (0, \kappa) \\ 0 & \text{si } x \in (\lambda, 1). \end{cases}$$

Definamos $w = \xi v$, donde v es solución (2.18). Entonces w satisface

$$\begin{cases} w_t + (a(x)w_x)_x = \xi F + (a(x)\xi_x v)_x + \xi_x a(x)v_x & \text{en } Q, \\ w(1, t) = 0 \quad \text{y} \quad \begin{cases} w(0, t) = 0 & \text{para (PDD)}, \\ (aw_x)(0, t) = 0 & \text{para (PFD)}, \end{cases} & t \in (0, T), \\ w(x, T) = w_T(x), & \text{en } (0, 1), \end{cases} \quad (2.30)$$

En esta parte, aplicaremos el Teorema 2.4. Entonces, aplicando (2.20) y usando la definición de w , tenemos que

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_0^1 \left(s\theta a(x)w_x^2 + s^3\theta^3 \frac{x^2}{a(x)}w^2 \right) e^{2s\varphi(x,t)} dx dt \\ & \leq C \left(\int_0^T \int_0^1 e^{2s\varphi(x,t)} [\xi F + (a(x)\xi_x v)_x + \xi_x a(x)v_x]^2 dx dt \right. \\ & \quad \left. + sa(1) \int_0^T e^{2s\varphi(1,t)} \theta(t) w_x^2(1, t) dt \right) \\ & \leq C \left(\int_0^T \int_0^\lambda e^{2s\varphi(x,t)} [\xi F]^2 dx dt + \int_0^T \int_\kappa^\lambda e^{2s\varphi(x,t)} [a'(x)\xi_x v]^2 dx dt \right. \\ & \quad \left. + \int_0^T \int_\kappa^\lambda e^{2s\varphi(x,t)} [a(x)(\xi_x v)_x]^2 dx dt + \int_0^T \int_\kappa^\lambda e^{2s\varphi(x,t)} [\xi_x a(x)v_x]^2 dx dt \right) \\ & \leq C \left(\int_0^T \int_0^1 e^{2s\varphi(x,t)} F^2 dx dt + \int_0^T \int_\kappa^\lambda e^{2s\varphi(x,t)} (v_x^2 + v^2) dx dt \right) \end{aligned}$$

En esta estimación, utilizamos el hecho de que

$$w_x(1, t) = \xi_x(1)v(1, t) + \xi(1)v_x(1, t) = 0, \quad \forall t \in [0, 1]$$

y

$$xa'(x) \leq Ka(x) \leq C, \quad x \in [\kappa, \lambda];$$

esto último, por hipótesis sobre a . Entonces, aplicando la desigualdad de Caccioppoli, concluimos que

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_0^1 \left(s\theta a(x) w_x^2 + s^3 \theta^3 \frac{x^2}{a(x)} w^2 \right) e^{2s\varphi(x,t)} dx dt \\ & \leq C \left(\int_0^T \int_0^1 e^{2s\varphi(x,t)} F^2 dx dt + \int_0^T \int_\omega e^{2s\varphi(x,t)} v^2 dx dt \right). \end{aligned} \quad (2.31)$$

Por otro lado, definamos $z = (1-\xi)v$, entonces z es solución a (2.21) con lado derecho $h = (1-\xi)F - (a(x)\xi_x v)_x - \xi_x a(x)v_x$. Entonces, aplicando la Proposición 2.2 en $(\alpha, 1) \times (0, T)$ con $\alpha \in (0, \kappa)$, el Lema 2.2 (inciso (c)), la desigualdad de Caccioppoli, y procediendo como lo hicimos para obtener (2.31), se obtiene que

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_0^1 \left(s\theta e^{r\zeta(x)} z_x^2 + s^3 \theta^3 e^{3r\zeta(x)} z^2 \right) e^{-2s\Phi(x,t)} dx dt \\ & = \int_0^T \int_\alpha^1 \left(s\theta e^{r\zeta(x)} z_x^2 + s^3 \theta^3 e^{3r\zeta(x)} z^2 \right) e^{-2s\Phi(x,t)} dx dt \\ & \leq C \left(\int_0^T \int_\alpha^1 e^{-2s\Phi(x,t)} F^2 dx dt + \int_0^T \int_\kappa^\lambda e^{-2s\Phi(x,t)} (v^2 + v_x^2) dx dt \right. \\ & \quad \left. - \int_0^T r s \theta a^{3/2}(1) e^{r\zeta(1)} e^{-2s\Phi(1,t)} v_x^2(1, t) dt \right) \\ & \leq C \left(\int_0^T \int_\alpha^1 e^{2s\varphi(x,t)} F^2 dx dt + \int_0^T \int_\kappa^\lambda e^{2s\varphi(x,t)} (v^2 + v_x^2) dx dt \right) \\ & \leq C \left(\int_0^T \int_0^1 e^{2s\varphi(x,t)} F^2 dx dt + \int_0^T \int_\omega s^2 \theta^2 e^{2s\varphi(x,t)} v^2 dx dt \right). \end{aligned} \quad (2.32)$$

Entonces, aplicando el Lema 2.2 (incisos (a) y (b)) y (2.32), se deduce que

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \int_0^1 \left(s\theta a(x) z_x^2 + s^3 \theta^3 \frac{x^2}{a(x)} z^2 \right) e^{2s\varphi(x,t)} dx dt \\
&= \int_0^T \int_\alpha^1 \left(s\theta a(x) z_x^2 + s^3 \theta^3 \frac{x^2}{a(x)} z^2 \right) e^{2s\varphi(x,t)} dx dt \\
&\leq c_3 \int_0^T \int_\alpha^1 \left(s\theta e^{r\zeta(x)} z_x^2 + s^3 \theta^3 e^{3r\zeta(x)} z^2 \right) e^{-2s\Phi(x,t)} dx dt \\
&\leq c_3 C \left(\int_0^T \int_0^1 e^{2s\varphi(x,t)} F^2 dx dt + \int_0^T \int_\omega e^{2s\varphi(x,t)} v^2 dx dt \right).
\end{aligned} \tag{2.33}$$

Por último, puesto que $v = w + z$ (recuerde que $w = \xi v$ y $z = (1 - \xi)v$, entonces $v^2 \leq 2(w^2 + z^2)$ y $v_x^2 \leq 2(w_x^2 + z_x^2)$. Así por (2.31) y (2.33), y seleccionando $s > s_0$ con s_0 suficientemente grande, tenemos que

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \int_0^1 \left(s\theta a(x) v_x^2 + s^3 \theta^3 \frac{x^2}{a(x)} v^2 \right) e^{2s\varphi(x,t)} dx dt \\
&\leq 2 \int_0^T \int_0^1 \left(s\theta a(x) w_x^2 + s^3 \theta^3 \frac{x^2}{a(x)} w^2 \right) e^{2s\varphi(x,t)} dx dt \\
&+ 2 \int_0^T \int_0^1 \left(s\theta a(x) z_x^2 + s^3 \theta^3 \frac{x^2}{a(x)} z^2 \right) e^{2s\varphi(x,t)} dx dt \\
&\leq C \left(\int_0^T \int_0^1 e^{2s\varphi(x,t)} F^2 dx dt + \int_0^T \int_\omega e^{2s\varphi(x,t)} v^2 dx dt \right).
\end{aligned}$$

Con esto concluimos la demostración. ■

2.4.1. Demostración del Teorema 2.3

En la demostración del Teorema 2.3 procederemos siguiendo la técnica introducida en [20]; usaremos la estimación de Carleman (2.19) para obtener dos resultados de control a cero auxiliares. Estos resultados serán aplicados en la demostración de la estimación de Carleman (2.17).

Consideremos los siguientes sistemas:

$$\begin{cases} z_t - (a(x)z_x)_x = s^3\theta^3 \frac{x^2}{a(x)} e^{2s\varphi(x,t)} f + u1_\omega & \text{en } Q, \\ z(1,t) = 0 \quad \text{y} \quad \begin{cases} z(0,t) = 0 & \text{para (PDD)}, \\ (az_x)(0,t) = 0 & \text{para (PFD)}, \end{cases} & t \in (0,T), \\ z(x,0) = 0, & \text{en } (0,1) \end{cases} \quad (2.34)$$

y

$$\begin{cases} z_t - (a(x)z_x)_x = s\theta(e^{2s\varphi(x,t)}\sqrt{a}f)_x + u1_\omega & \text{en } Q, \\ z(1,t) = 0 \quad \text{y} \quad \begin{cases} z(0,t) = 0 & \text{para (PDD)}, \\ (az_x)(0,t) = 0 & \text{para (PFD)}, \end{cases} & t \in (0,T), \\ z(x,0) = 0, & \text{en } (0,1), \end{cases} \quad (2.35)$$

donde $f \in L^2(Q)$.

Definamos $P_d = \{p \in C^2(\bar{Q}) \mid p(0) = 0, p(1) = 0\}$ para el caso (PDD) y $P_f = \{p \in C^2(\bar{Q}) \mid (ap_x)(0) = 0, p(1) = 0\}$ para el caso (PFD). Sean \mathcal{L} y \mathcal{L}^* dos operadores lineales definidos de la siguiente manera:

$$\mathcal{L}p = p_t - (a(x)p_x)_x$$

y

$$\mathcal{L}^*p = p_t + (a(x)p_x)_x,$$

para todo p en P_d en el caso (PDD) y p en P_f en el caso (PFD). Con esto, definamos

$$\lambda(p, p') = \int_0^T \int_0^1 e^{2s\varphi(x,t)} \mathcal{L}^*p \mathcal{L}^*p' dx dt + \int_0^T \int_\omega e^{2s\varphi(x,t)} pp' dx dt,$$

para todo p, p' en P_d en el caso (PDD) y para todo p, p' en P_f en el caso (PFD). Se verifica fácilmente que $\lambda(\cdot, \cdot)$ es una forma bilineal simétrica y positiva. Entonces, $\lambda(\cdot, \cdot)$ define un producto escalar en P_d y en P_f . Definimos \mathcal{P}_d como la cerradura de P_d con la norma $\|p\|_{\mathcal{P}_d} = (\lambda(p, p))^{1/2}$ en el caso (PDD) y \mathcal{P}_f como la cerradura de P_f con la norma $\|p\|_{\mathcal{P}_f} = (\lambda(p, p))^{1/2}$ en el caso (PFD).

Como consecuencia de la desigualdad de Carleman (2.19), se obtiene el siguiente resultado de controlabilidad a cero.

Teorema 2.5. *Sea $T > 0$ y $f \in L^2(Q)$ dados. Entonces, se cumple que:*

- (1) *Para el sistema (2.34), existen un control u y un estado z , tal que $z(x, T) = 0$ en $(0, 1)$ y se satisface que*

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_0^1 e^{-2s\varphi(x,t)} z^2 dx dt + \int_0^T \int_\omega e^{-2s\varphi(x,t)} u^2 dx dt \\ & \leq C \int_0^T \int_0^1 s^3 \theta^3 \frac{x^2}{a(x)} e^{2s\varphi(x,t)} f^2 dx dt. \end{aligned} \quad (2.36)$$

- (2) *Para el sistema (2.35), existen un control u y un estado z , tal que $z(x, T) = 0$ en $(0, 1)$ y se satisface que*

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_0^1 e^{-2s\varphi(x,t)} z^2 dx dt + \int_0^T \int_\omega e^{-2s\varphi(x,t)} u^2 dx dt \\ & \leq C \int_0^T \int_0^1 s \theta e^{2s\varphi(x,t)} f^2 dx dt. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Demostración. Dada $f \in L^2(Q)$ y $T > 0$ consideremos el siguiente problema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}(e^{2s\varphi(x,t)} \mathcal{L}^* p) - s^3 \theta^3 \frac{x^2}{a(x)} e^{2s\varphi(x,t)} f = e^{2s\varphi(x,t)} p \chi_\omega \quad \text{en } Q \\ p(1) = e^{2s\varphi(x,t)} \mathcal{L}^* p(1) = 0 \text{ y } \begin{cases} p(0) = e^{2s\varphi(x,t)} \mathcal{L}^* p(0) = 0 \\ \text{para (PDD),} \\ ap_x(0) = e^{2s\varphi(x,t)} \mathcal{L}^* ap_x(0) = 0 \\ \text{para (PFD),} \end{cases} \quad \text{en } (0, T) \\ e^{2s\varphi(x,t)} \mathcal{L}^* p(x, 0) = e^{2s\varphi(x,t)} \mathcal{L}^* p(x, T) = 0 \quad \text{en } (0, 1). \end{array} \right. \quad (2.38)$$

Mostraremos que (2.38) tiene solución en el caso (PDD) (el argumento en el caso (PFD) es análogo).

La desigualdad de Carleman (2.19) implica que

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_0^1 \left(s\theta a(x)p_x^2 + s^3\theta^3 \frac{x^2}{a(x)}p^2 \right) e^{2s\varphi(x,t)} dx dt \\ & \leq C \left(\int_0^T \int_0^1 e^{2s\varphi(x,t)} |\mathcal{L}^* p|^2 dx dt + \int_0^T \int_\omega e^{2s\varphi(x,t)} p^2 dx dt \right), \end{aligned}$$

para toda $p \in \mathcal{P}_d$. En consecuencia, tenemos que para toda $p \in \mathcal{P}_d$

$$\int_0^T \int_0^1 \left(s\theta a(x)p_x^2 + s^3\theta^3 \frac{x^2}{a(x)}p^2 \right) e^{2s\varphi(x,t)} dx dt < \infty.$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \ell(p) &= - \int_0^T \int_0^1 s^3\theta^3 \frac{x^2}{a(x)} e^{2s\varphi(x,t)} f p dx dt \\ &\leq C \left(\int_0^T \int_0^1 s^3\theta^3 \frac{x^2}{a(x)} e^{2s\varphi(x,t)} f^2 \right)^{1/2} \|p\|_{\mathcal{P}_d} \end{aligned}$$

y por tanto ℓ es lineal y continua sobre \mathcal{P}_d . Por el Teorema de Lax-Milgram existe una única $\bar{p} \in \mathcal{P}$ solución al problema

$$\lambda(\bar{p}, p') = \ell(p') \quad \forall p' \in \ell(p').$$

En consecuencia, \bar{p} es solución de (2.38) en el sentido de distribuciones. Se puede ver fácilmente que si p es una solución clásica, entonces cumple las condiciones $e^{2s\varphi(x,t)} \mathcal{L}^* p(0) = 0$, $e^{2s\varphi(x,t)} \mathcal{L}^* p(1) = 0$ ($p(0) = 0 = p(1)$ están en las condiciones del espacio \mathcal{P}_d) y $e^{2s\varphi(x,t)} \mathcal{L}^* p(x, 0) = 0$, $e^{2s\varphi(x,t)} \mathcal{L}^* p(x, T) = 0$. En efecto, multiplicando (2.38) por $p' \in \mathcal{P}_d$ e integrando por partes tenemos que

$$\int_0^1 e^{2s\varphi(x,t)} \mathcal{L}^* p p' \Big|_0^T dx + \int_0^T a(x) e^{2s\varphi(x,t)} \mathcal{L}^* p(x, t) p'_x \Big|_0^1 dt + \ell(p') = \lambda(p, p'), \quad \forall p' \in \mathcal{P}_d.$$

De donde, seleccionando $p' \in \mathcal{P}_d$ adecuadas, se concluye que $e^{2s\varphi(x,t)} \mathcal{L}^* p(x,t) = 0$ en ∂Q .

Ahora, para demostrar (1), definamos

$$\bar{z} = e^{2s\varphi(x,t)} \mathcal{L}^* \bar{p}; \quad \bar{u} = e^{2s\varphi(x,t)} \bar{p} \chi_\omega \quad (2.39)$$

Entonces \bar{z} es solución del siguiente problema

$$\begin{cases} \bar{z}_t - (a(x)\bar{z}_x)_x = s^3 \theta^3 \frac{x^2}{a(x)} e^{2s\varphi(x,t)} f + \bar{u} \chi_\omega & \text{en } Q \\ \bar{z}(1) = 0 \text{ y } \bar{z}(0) = 0 & \text{caso (PDD)} \\ \bar{z}(x, 0) = \bar{z}(x, T) = 0 \end{cases} \quad (2.40)$$

Como tenemos (2.39),

$$\bar{p}_t + (a(x)\bar{p}_x)_x = e^{-2s\varphi(x,t)} \bar{z}. \quad (2.41)$$

Para hacer las estimaciones sobre la norma de \bar{z} y del control \bar{u} multiplicamos (2.41) por \bar{z} . Entonces,

$$\int_0^T \int_0^1 (\bar{p}_t + (a(x)\bar{p}_x)_x) \bar{z} dx dt = \int_0^T \int_0^1 e^{-2s\varphi(x,t)} \bar{z}^2 dx dt$$

Integrando por partes en espacio y tiempo y usando (2.40) vemos que

$$- \int_0^T \int_0^1 s^3 \theta^3 \frac{x^2}{a(x)} e^{2s\varphi(x,t)} f \bar{p} dx dt - \int_0^T \int_\omega \bar{u} \bar{p} dx dt = \int_0^T \int_0^1 e^{-2s\varphi(x,t)} \bar{z}^2 dx dt$$

$$I_1 + I_2 = \int_0^T \int_0^1 e^{-2s\varphi(x,t)} \bar{z}^2 dx dt$$

Sabemos que $\bar{u} = e^{2s\varphi(x,t)} \bar{p} \chi_\omega$ por tanto

$$I_2 = - \int_0^T \int_\omega e^{-2s\varphi(x,t)} \bar{u}^2 dx dt.$$

Por otro lado,

$$I_2 \leq \frac{1}{2\delta} \int_0^T \int_0^1 s^3 \theta^3 \frac{x^2}{a(x)} e^{2s\varphi(x,t)} f^2 dxdt + \frac{\delta}{2} \int_0^T \int_0^1 s^3 \theta^3 \frac{x^2}{a(x)} e^{2s\varphi(x,t)} \bar{p}^2 dxdt.$$

Como \bar{p} es solución de (2.41) podemos aplicar la desigualdad de Carleman (2.19) con segundo miembro $e^{-2s\varphi(x,t)} \bar{z}$. Tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{2} \int_0^T \int_0^1 s^3 \theta^3 \frac{x^2}{a(x)} e^{2s\varphi(x,t)} \bar{p}^2 dxdt &\leq \frac{C\delta}{2} \left(\int_0^T \int_0^1 e^{2s\varphi(x,t)} e^{-4s\varphi(x,t)} \bar{z}^2 dxdt \right. \\ &\quad \left. + \int_0^T \int_\omega e^{2s\varphi(x,t)} \bar{p}^2 dxdt \right) \end{aligned}$$

Por (2.39) tenemos que

$$\int_0^T \int_\omega e^{2s\varphi(x,t)} \bar{p}^2 dxdt = \int_0^T \int_\omega e^{-2s\varphi(x,t)} \bar{u}^2 dxdt$$

En conclusión, hemos obtenido que

$$\int_0^T \int_\omega e^{-2s\varphi(x,t)} \bar{u}^2 dxdt + \int_0^T \int_0^1 e^{-2s\varphi(x,t)} \bar{z}^2 dxdt \leq C \int_0^T \int_0^1 s^3 \theta^3 \frac{x^2}{a(x)} e^{2s\varphi(x,t)} f^2 dxdt$$

Con esto concluye la demostración de (1). La demostración de (2) es análoga, la diferencia es que en ella se considera el funcional

$$\ell(p) = \int_0^T \int_0^1 s\theta e^{2s\varphi(x,t)} \sqrt{a(x)} f p_x dxdt.$$

■

Demostración del Teorema 2.3: La prueba se llevará acabo en dos pasos:

Paso 1. Dos problemas de controlabilidad a cero auxiliares

Aplicando el problema de controlabilidad a cero anterior a la solución $v \in L^2(Q)$ de (2.16) podemos deducir la existencia de un control \hat{v} y un estado \hat{z} tal que

$$\begin{cases} \hat{z}_t - (a(x)\hat{z}_x)_x = s^3\theta^3 \frac{x^2}{a(x)} e^{2s\varphi(x,t)} v + \hat{v} 1_\omega & \text{in } Q, \\ \hat{z}(1, t) = 0 \quad \text{y} \quad \begin{cases} \hat{z}(0, t) = 0 & \text{para (PDD)} \\ (a\hat{z}_x)(0, t) = 0 & \text{para (PFD)}, \end{cases} & t \in (0, T), \\ \hat{z}(x, 0) = \hat{z}(x, T) = 0, & \text{en } (0, 1), \end{cases} \quad (2.42)$$

y

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_0^1 e^{-2s\varphi(x,t)} \hat{z}^2 dx dt + \int_0^T \int_\omega e^{-2s\varphi(x,t)} \hat{v}^2 dx dt \\ & \leq C \int_0^T \int_0^1 s^3 \theta^3 \frac{x^2}{a(x)} e^{2s\varphi(x,t)} v^2 dx dt. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Ahora, si multiplicamos por $s^{-2}\theta^{-3}e^{-2s\varphi(x,t)}\hat{z}$ la ecuación que satisface \hat{z} e integramos por partes, concluimos que

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_0^1 s^{-2}\theta^{-3} a(x) e^{-2s\varphi(x,t)} \hat{z}_x^2 dx dt = - \int_0^T \int_0^1 s^{-2}\theta^{-3} e^{-2s\varphi(x,t)} \hat{z} \hat{z}_t dx dt \\ & - \int_0^T \int_0^1 s^{-2}\theta^{-3} a(x) (e^{-2s\varphi(x,t)})_x \hat{z}_x \hat{z} dx dt + \int_0^T \int_0^1 s \frac{x^2}{a(x)} v \hat{z}_x dx dt \\ & + \int_0^T \int_\omega s^{-2}\theta^{-3} e^{-2s\varphi(x,t)} \hat{v} \hat{z} dx dt = H_1 + H_2 + H_3 + H_4. \end{aligned}$$

Observe que para todo $(x, t) \in Q_1$, $|(\theta^{-3}e^{-2s\varphi(x,t)})_t| \leq Cse^{-2s\varphi(x,t)}$ y $|(e^{-2s\varphi(x,t)})_x| \leq Cs\theta e^{-2s\varphi(x,t)}$, y para todo $x \in (0, 1)$, $x^2/a(x) \leq C$. Entonces, aplicando (2.43), tenemos que

$$H_1 = -\frac{1}{2} \int_0^T \int_0^1 s^{-2}\theta^{-3} e^{-2s\varphi(x,t)} \frac{d}{dt} [\hat{z}^2] dx dt \leq \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^1 s^{-2} |\theta^{-3} e^{-2s\varphi(x,t)}|_t |\hat{z}^2| dx dt$$

$$\leq C \int_0^T \int_0^1 s^{-1} e^{-2s\varphi(x,t)} \hat{z}^2 dx dt \leq C \int_0^T \int_0^1 s^3 \theta^3 \frac{x^2}{a(x)} e^{2s\varphi(x,t)} v^2 dx dt \quad (2.44)$$

y

$$\begin{aligned} H_2 &\leq C \int_0^T \int_0^1 s^{-1} \theta^{-2} a(x) e^{-2s\varphi(x,t)} |\hat{z}_x| |\hat{z}| dx dt \\ &= C \int_0^T \int_0^1 s^{-1} \theta^{-3/2} a(x) e^{-2s\varphi(x,t)} \theta^{-1/2} |\hat{z}_x| |\hat{z}| dx dt \end{aligned} \quad (2.45)$$

$$\leq \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^1 s^{-2} \theta^{-3} a(x) e^{-2s\varphi(x,t)} \hat{z}_x^2 dx dt + C \int_0^T \int_0^1 e^{-2s\varphi(x,t)} \hat{z}^2 dx dt \quad (2.46)$$

$$\leq \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^1 s^{-2} \theta^{-3} a(x) e^{-2s\varphi(x,t)} \hat{z}_x^2 dx dt + C \int_0^T \int_0^1 s^3 \theta^3 \frac{x^2}{a(x)} e^{2s\varphi(x,t)} v^2 dx dt.$$

Asumiendo que $s_0 \geq 1$, tenemos que

$$\begin{aligned} H_3 &\leq \int_0^T \int_0^1 s^{3/2} \frac{x^2}{a(x)} v \hat{z} dx dt \\ &\leq C \left(\int_0^T \int_0^1 s^3 \theta^3 \frac{x^2}{a(x)} e^{2s\varphi(x,t)} v^2 dx dt \right)^{1/2} \left(\int_0^T \int_0^1 e^{-2s\varphi(x,t)} \hat{z}^2 dx dt \right)^{1/2} \\ &\leq C \int_0^T \int_0^1 s^3 \theta^3 \frac{x^2}{a(x)} e^{2s\varphi(x,t)} v^2 dx dt \end{aligned} \quad (2.47)$$

y

$$\begin{aligned}
H_4 &\leq \int_0^T \int_{\omega} e^{-2s\varphi(x,t)} |\hat{v}\hat{z}| dx dt \\
&\leq C \left(\int_0^T \int_0^1 e^{-2s\varphi(x,t)} \hat{v}^2 dx dt \right)^{1/2} \left(\int_0^T \int_0^1 e^{-2s\varphi(x,t)} \hat{z}^2 dx dt \right)^{1/2} \\
&\leq C \int_0^T \int_0^1 s^3 \theta^3 \frac{x^2}{a(x)} e^{2s\varphi(x,t)} v^2 dx dt
\end{aligned} \tag{2.48}$$

Luego, aplicando (2.44), (2.45), (2.47) y (2.48), concluimos que

$$\int_0^T \int_0^1 s^{-2} \theta^{-3} a(x) e^{-2s\varphi(x,t)} \hat{z}_x^2 dx dt \leq C \int_0^T \int_0^1 s^3 \theta^3 \frac{x^2}{a(x)} e^{2s\varphi(x,t)} v^2 dx dt,$$

que combinando con la desigualdad (2.43) se obtiene

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \int_0^1 e^{-2s\varphi(x,t)} \hat{z}^2 dx dt + \int_0^T \int_{\omega} e^{-2s\varphi(x,t)} \hat{v}^2 dx dt \\
&+ \int_0^T \int_0^1 s^{-2} \theta^{-3} a(x) e^{-2s\varphi(x,t)} \hat{z}_x^2 dx dt \leq C \int_0^T \int_0^1 s^3 \theta^3 \frac{x^2}{a(x)} e^{2s\varphi(x,t)} v^2 dx dt
\end{aligned} \tag{2.49}$$

para todo $s \geq s_0$.

Por otro lado, aplicando la parte 2. del Teorema 2.5 para $f = \sqrt{a}v_x \in L^2(Q)$, donde v es la solución a (2.16), podemos deducir la existencia de un control \tilde{v} y un estado \tilde{z} tal que

$$\begin{cases} \tilde{z}_t - (a(x)\tilde{z}_x)_x = s\theta(e^{2s\varphi(x,t)}a(x)v_x)_x + \tilde{v}1_{\omega} & \text{en } Q, \\ \tilde{z}(1,t) = 0 \quad \text{y} \quad \begin{cases} \tilde{z}(0,t) = 0 & \text{para (PDD)}, \\ (a\tilde{z}_x)(0,t) = 0 & \text{para (PFD)}, \end{cases} & t \in (0,T), \\ \tilde{z}(x,0) = \tilde{z}(x,T) = 0, & \text{en } (0,1), \end{cases} \tag{2.50}$$

y

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_0^1 e^{-2s\varphi(x,t)} \tilde{z}^2 dx dt + \int_0^T \int_\omega e^{-2s\varphi(x,t)} \tilde{v}^2 dx dt \\ & \leq C \int_0^T \int_0^1 s\theta a(x) e^{2s\varphi(x,t)} v_x^2 dx dt \end{aligned} \quad (2.51)$$

para toda $s \geq s_0$.

Ahora, si multiplicamos por $s^{-2}\theta^{-2}e^{-2s\varphi(x,t)}\tilde{z}$ la ecuación que satisface \tilde{z} e integramos por partes, concluimos que

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_0^1 s^{-2}\theta^{-2}a(x)e^{-2s\varphi(x,t)}\tilde{z}_x^2 dx dt = - \int_0^T \int_0^1 s^{-2}\theta^{-2}e^{-2s\varphi(x,t)}\tilde{z}\tilde{z}_t dx dt \\ & - \int_0^T \int_0^1 s^{-2}\theta^{-2}a(x)(e^{-2s\varphi(x,t)})_x \tilde{z}_x \tilde{z} dx dt - \int_0^T \int_0^1 s^2\theta^{-1}a(x)v_x \tilde{z}_x dx dt \\ & - \int_0^T \int_0^1 s^{-1}\theta^{-1}a(x)(e^{-2s\varphi(x,t)})_x e^{2s\varphi(x,t)}v_x \tilde{z} dx dt + \int_0^T \int_\omega s^{-2}\theta^{-2}e^{-2s\varphi(x,t)}\tilde{v}\tilde{z} dx dt \\ & = L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5. \end{aligned}$$

Sabemos que para todo $(x, t) \in Q_1$, $|(\theta^{-2}e^{-2s\varphi(x,t)})_t| \leq Cse^{-2s\varphi(x,t)}$ y $|(e^{-2s\varphi(x,t)})_x| \leq \frac{C}{2}s\theta e^{-2s\varphi(x,t)}$. Entonces, aplicando (2.51), tenemos que

$$\begin{aligned} L_1 &= -\frac{1}{2} \int_0^T \int_0^1 s^{-2}\theta^{-2}e^{-2s\varphi(x,t)} \frac{d}{dt}[\tilde{z}^2] dx dt \leq \int_0^T \int_0^1 s^{-2}(\theta^{-2}e^{-2s\varphi(x,t)})_t \tilde{z}^2 dx dt \\ &\leq C \int_0^T \int_0^1 s^{-1}e^{-2s\varphi(x,t)} \tilde{z}^2 dx dt \leq C \int_0^T \int_0^1 s\theta a(x) e^{2s\varphi(x,t)} v_x^2 dx dt, \end{aligned} \quad (2.52)$$

$$\begin{aligned}
L_2 &\leq \frac{C}{2} \int_0^T \int_0^1 s^{-1} \theta^{-1} a(x) e^{-2s\varphi(x,t)} |\tilde{z}_x| |\tilde{z}| dx dt \\
&\leq \frac{1}{4} \int_0^T \int_0^1 s^{-2} \theta^{-2} a(x) e^{-2s\varphi(x,t)} \tilde{z}_x^2 dx dt + C \int_0^T \int_0^1 a(x) e^{-2s\varphi(x,t)} \tilde{z}^2 dx dt \\
&\leq \frac{1}{4} \int_0^T \int_0^1 s^{-2} \theta^{-2} a(x) e^{-2s\varphi(x,t)} \tilde{z}_x^2 dx dt + C \int_0^T \int_0^1 e^{-2s\varphi(x,t)} \tilde{z}^2 dx dt \quad (2.53) \\
&\leq \frac{1}{4} \int_0^T \int_0^1 s^{-2} \theta^{-2} a(x) e^{-2s\varphi(x,t)} \tilde{z}_x^2 dx dt + C \int_0^T \int_0^1 s \theta e^{2s\varphi(x,t)} v_x^2 dx dt,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_3 &\leq \int_0^T \int_0^1 s^{-1} \theta^{-1} a(x) e^{s\varphi(x,t)} v_x e^{-s\varphi(x,t)} \tilde{z}_x dx dt \leq \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^1 s^{-2} \theta^{-2} a(x) e^{-2s\varphi(x,t)} \tilde{z}_x^2 dx dt \\
&\quad + C \int_0^T \int_0^1 s \theta a(x) e^{2s\varphi(x,t)} v_x^2 dx dt,
\end{aligned} \quad (2.54)$$

$$\begin{aligned}
L_4 &\leq C \int_0^T \int_0^1 e^{-s\varphi(x,t)} e^{s\varphi(x,t)} a(x) |v_x \tilde{z}| dx dt \\
&\leq C \left(\int_0^T \int_0^1 s^{-1} \theta^{-1} a(x) e^{-2s\varphi(x,t)} \tilde{z}^2 dx dt + C \int_0^T \int_0^1 s \theta a(x) e^{2s\varphi(x,t)} v_x^2 dx dt \right) \quad (2.55) \\
&\leq C \int_0^T \int_0^1 s \theta a(x) e^{2s\varphi(x,t)} v_x^2 dx dt,
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
L_5 &\leq \int_0^T \int_{\omega} e^{-2s\varphi(x,t)} |\tilde{v}\tilde{z}| dx dt \\
&\leq C \left(\int_0^T \int_0^1 e^{-2s\varphi(x,t)} \tilde{v}^2 dx dt \right)^{1/2} \left(\int_0^T \int_0^1 e^{-2s\varphi(x,t)} \tilde{z}^2 dx dt \right)^{1/2} \\
&\leq C \int_0^T \int_0^1 s\theta a(x) e^{2s\varphi(x,t)} v_x^2 dx dt
\end{aligned} \tag{2.56}$$

Luego, aplicando (2.52), (2.53), (2.54), (2.55) y (2.56), concluimos que

$$\int_0^T \int_0^1 s^{-2}\theta^{-2} a(x) e^{-2s\varphi(x,t)} \tilde{z}_x^2 dx dt \leq C \int_0^T \int_0^1 s\theta a(x) e^{2s\varphi(x,t)} v_x^2 dx dt,$$

que combinando con la desigualdad (2.51) se obtiene

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \int_0^1 e^{-2s\varphi(x,t)} \tilde{z}^2 dx dt + \int_0^T \int_{\omega} e^{-2s\varphi(x,t)} \tilde{v}^2 dx dt \\
&\quad + \int_0^T \int_0^1 s^{-2}\theta^{-2} a(x) e^{-2s\varphi(x,t)} \tilde{z}_x^2 dx dt \leq C \int_0^T \int_0^1 s\theta a(x) e^{2s\varphi(x,t)} v_x^2 dx dt
\end{aligned} \tag{2.57}$$

para toda $s \geq s_0$.

Paso 2. Demostración de la desigualdad (2.17)

Comenzamos multiplicando el sistema (2.42) por v la solución del sistema (2.16). Entonces, integrando por partes y aplicando la desigualdad de Hölder, obtenemos

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \int_0^1 s^3 \theta^3 \frac{x^2}{a(x)} e^{2s\varphi(x,t)} v^2 dx dt = - \int_0^T \int_0^1 \hat{z} v_t dx dt - \int_0^T \int_0^1 \hat{z} (a(x) v_x)_x dx dt \\
&\quad - \int_0^T \int_{\omega} \hat{v} v dx dt = - \int_0^T \int_0^1 F_0 \hat{z} dx dt + \int_0^T \int_0^1 \beta(x) F_1 \hat{z}_x dx dt - \int_0^T \int_{\omega} \hat{v} v dx dt \leq
\end{aligned}$$

$$\left(\int_0^T \int_0^1 e^{2s\varphi(x,t)} F_0^2 dx dt + \int_0^T \int_0^1 s^2 \theta^3 \frac{\beta^2(x)}{a(x)} e^{2s\varphi(x,t)} F_1^2 dx dt + \int_0^T \int_\omega e^{2s\varphi(x,t)} v^2 dx dt \right)^{1/2} \times \\ \left(\int_0^T \int_0^1 e^{-2s\varphi(x,t)} \hat{z}^2 dx dt + \int_0^T \int_0^1 s^{-2} \theta^{-3} a(x) e^{-2s\varphi(x,t)} \hat{z}_x^2 dx dt + \int_0^T \int_\omega e^{-2s\varphi(x,t)} \hat{v}^2 dx dt \right)^{1/2}.$$

Ahora bien, tomando en cuenta (2.49), deducimos

$$\int_0^T \int_0^1 s^3 \theta^3 \frac{x^2}{a(x)} e^{2s\varphi(x,t)} v^2 dx dt \leq C \left(\int_0^T \int_0^1 e^{2s\varphi(x,t)} F_0^2 dx dt \right. \\ \left. + \int_0^T \int_0^1 s^2 \theta^3 \frac{\beta^2(x)}{a(x)} e^{2s\varphi(x,t)} F_1^2 dx dt + \int_0^T \int_\omega e^{2s\varphi(x,t)} v^2 dx dt \right). \quad (2.58)$$

Análogamente, si multiplicamos por v la ecuación (2.50) e integramos por partes, podemos concluir

$$\int_0^T \int_0^1 s \theta a(x) e^{2s\varphi(x,t)} v_x^2 dx dt = - \int_0^T \int_0^1 \tilde{z} v_t dx dt - \int_0^T \int_0^1 \tilde{z} (a(x) v_x)_x dx dt \\ - \int_0^T \int_\omega \tilde{v} v dx dt = - \int_0^T \int_0^1 F_0 \tilde{z} dx dt + \int_0^T \int_0^1 \beta(x) F_1 \tilde{z}_x dx dt - \int_0^T \int_\omega \tilde{v} v dx dt \leq \\ \left(\int_0^T \int_0^1 e^{2s\varphi(x,t)} F_0^2 dx dt + \int_0^T \int_0^1 s^2 \theta^2 \frac{\beta^2(x)}{a(x)} e^{2s\varphi(x,t)} F_1^2 dx dt + \int_0^T \int_\omega e^{2s\varphi(x,t)} v^2 dx dt \right)^{1/2} \times \\ \left(\int_0^T \int_0^1 e^{-2s\varphi(x,t)} \tilde{z}^2 dx dt + \int_0^T \int_0^1 s^{-2} \theta^{-2} a(x) e^{-2s\varphi(x,t)} \tilde{z}_x^2 dx dt + \int_0^T \int_\omega e^{-2s\varphi(x,t)} \tilde{v}^2 dx dt \right)^{1/2}.$$

Así, considerando (2.57), obtenemos

$$\int_0^T \int_0^1 s \theta a(x) e^{2s\varphi(x,t)} v_x^2 dx dt \leq C \left(\int_0^T \int_0^1 e^{2s\varphi(x,t)} F_0^2 dx dt \right. \\ \left. + \int_0^T \int_0^1 s^2 \theta^3 \frac{\beta^2(x)}{a(x)} e^{2s\varphi(x,t)} F_1^2 dx dt + \int_0^T \int_\omega e^{2s\varphi(x,t)} v^2 dx dt \right). \quad (2.59)$$

que, junto con (2.58), implican (2.17). Esto completa la prueba del teorema. ■

2.5. Desigualdad de observabilidad y controlabilidad de ecuaciones lineales

En esta sección probaremos, como una consecuencia de la estimación de Carleman establecida en la Sección 1.4, una desigualdad de observabilidad para el problema adjunto

$$\begin{cases} v_t + (a(x)v_x)_x - b(x,t)v + (\beta(x)c(x,t)v)_x = 0 & \text{en } Q, \\ v(1,t) = 0 \quad \text{y} \quad \begin{cases} v(0,t) = 0 & \text{para (PDD)}, \\ (av_x)(0,t) = 0 & \text{para (PFD)}, \end{cases} & t \in (0, T), \\ v(x, T) = v_T(x), & \text{en } (0, 1), \end{cases} \quad (2.60)$$

con $v_T \in L^2(0, 1)$, de (2.1). Entonces la siguiente desigualdad de observabilidad se cumple.

Proposición 2.3. *Sea $T > 0$ dado. Entonces existe una constante positiva C tal que para toda solución v de (2.60) satisface*

$$\int_0^1 v^2(x, 0) dx \leq C \int_0^T \int_{\omega} v^2(x, t) dx dt. \quad (2.61)$$

La demostración de esta proposición se basa en el siguiente lema, el cual proporciona una estimación de Carleman para la solución de (2.60).

Lema 2.4. *Existen dos constantes positivas C y s_0 , tal que para toda solución v de (2.60) satisface, para toda $s \geq s_0$,*

$$\int_0^T \int_0^1 \left(s\theta a(x)v_x^2 + s^3\theta^3 \frac{x^2}{a(x)} v^2 \right) e^{2s\varphi(x,t)} dx dt \leq C \int_0^T \int_{\omega} v^2 dx dt. \quad (2.62)$$

La demostración del Lemma 2.4 se basa en la estimación (2.17) y además seguimos las ideas de [1], esto es, usaremos un cambio de variable adecuado y la siguiente desigualdad de Hardy-Poincaré:

Proposición 2.4 (Desigualdad de Hardy-Poincaré). *Supongamos que $a: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^+$ está en $C([0, 1])$, $a(0) = 0$, $a > 0$ en $(0, 1]$.*

CASO (i):

HIPOTESIS (A1). *Suponga que a es tal que existe $\sigma \in (0, 1)$ tal que la función*

$$x \rightarrow \frac{a(x)}{x^\sigma} \quad \text{es no creciente en una vecindad de } x = 0.$$

Entonces, existe una constante $C > 0$ tal que para toda función w absolutamente continua localmente en $(0, 1]$, continua en 0 y que satisfaga

$$w(0) = 0, \quad \text{y} \quad \int_0^1 a(x)|w'(x)|^2 dx < +\infty.$$

la siguiente desigualdad se cumple

$$\int_0^1 \frac{a(x)}{x^2} w^2(x) dx \leq C \int_0^1 a(x)|w'(x)|^2 dx. \quad (2.63)$$

Si la hipótesis (A1) se cambia por

HIPOTESIS (A1)'. *Suponga que a es tal que existe $\sigma \in (0, 1)$ tal que la función*

$$x \rightarrow \frac{a(x)}{x^\sigma} \quad \text{es no creciente en } (0, 1].$$

Entonces, para toda función w absolutamente continua localmente en $(0, 1]$, continua en 0 y que satisfaga

$$w(0) = 0, \quad \text{y} \quad \int_0^1 a(x)|w'(x)|^2 dx < +\infty.$$

la desigualdad (2.63) se cumple con constante $C = \frac{4}{(1 - \sigma)^2}$.

CASO (ii):

HIPOTESIS (A2). *Suponga que a es tal que existe $\sigma \in (1, 2)$ tal que la función*

$$x \rightarrow \frac{a(x)}{x^\sigma} \quad \text{es no decreciente en una vecindad de } x = 0.$$

Entonces, existe una constante $C > 0$ tal que para toda función w absolutamente continua localmente en $(0, 1]$ que satisfaga

$$w(1) = 0, \quad y \int_0^1 a(x)|w'(x)|^2 dx < +\infty.$$

la desigualdad (2.63) se cumple.

HIPOTESIS (A2)'. Supongamos que a es tal que existe $\sigma \in (1, 2)$ tal que la función

$$x \rightarrow \frac{a(x)}{x^\sigma} \quad \text{es no decreciente en } (0, 1].$$

Entonces, para toda función w absolutamente continua localmente $(0, 1]$, continua en 0 y que satisfaga

$$w(1) = 0, \quad y \int_0^1 a(x)|w'(x)|^2 dx < +\infty.$$

la desigualdad (2.63) se cumple con constante $C = \frac{4}{(1-\sigma)^2}$.

La prueba de las desigualdades Hardy-Poincaré se puede ver en el apéndice.

Demostración del Lema 2.4: Reescribiendo la ecuación (2.60) en la forma $v_t + (a(x)v_x)_x = \bar{F}_0 + (\beta(x)\bar{F}_1)_x$, donde $\bar{F}_0 = bv$ y $\bar{F}_1 = cv$. Entonces, aplicando el Teorema 2.3, existen dos constantes positivas C and $s_0 > 0$, tal que

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_0^1 \left(s\theta a(x)v_x^2 + s^3\theta^3 \frac{x^2}{a(x)}v^2 \right) e^{2s\varphi(x,t)} dxdt \\ & \leq C \left(\int_0^T \int_\omega v^2 dxdt + \int_0^T \int_0^1 \left(b^2v^2 + s^2\theta^3 \frac{\beta^2(x)}{a(x)}c^2v^2 \right) e^{2s\varphi(x,t)} dxdt \right). \end{aligned} \quad (2.64)$$

para toda $s \geq s_0$.

En este punto, necesitamos considerar dos casos con respecto a la constante K de las Hipótesis (2.3) y (2.4); ya que en esta parte de la demostración se aplican las

desigualdades de Hardy-Poincaré. Por esta razón, en el caso de $K = 1$ es necesario realizar un importante ajuste.

CASO $K \neq 1$. Las Hipótesis (2.3) y (2.4) implican que

$$\frac{a(x)}{x^2} \geq \frac{a(x)}{x^K} \geq a(1), \quad \forall x \in (0, 1).$$

Entonces,

$$|b(x, t)|^2 \leq C \|b\|_\infty^2 \frac{a(x)}{x^2}, \quad \forall (x, t) \in Q.$$

Por lo tanto, con $w = e^{s\varphi(x,t)}v$ y aplicando la desigualdad de Hardy-Poincaré, se tiene que

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_0^1 e^{2s\varphi(x,t)} b^2 v^2 dx dt \leq C \int_0^T \int_0^1 e^{2s\varphi(x,t)} \frac{a(x)}{x^2} v^2 dx dt \\ & = C \int_0^T \int_0^1 \frac{a(x)}{x^2} w^2 dx dt \leq C \int_0^T \int_0^1 a(x) \left[\frac{dw}{dx} \right]^2 dx dt \\ & \leq C \left(\int_0^T \int_0^1 e^{2s\varphi(x,t)} a(x) v_x^2 dx dt + \int_0^T \int_0^1 s^2 e^{2s\varphi(x,t)} [\varphi_x(x, t)]^2 a(x) v^2 dx dt \right) \\ & \leq C \left(\int_0^T \int_0^1 e^{2s\varphi(x,t)} a(x) v_x^2 dx dt + \int_0^T \int_0^1 s^2 \theta^2 e^{2s\varphi(x,t)} \frac{x^2}{a(x)} v^2 dx dt \right). \end{aligned}$$

También, aplicando (2.5), obtenemos

$$\int_0^T \int_0^1 s^2 \theta^3 e^{2s\varphi(x,t)} \frac{\beta^2(x)}{a(x)} c^2 v^2 dx dt \leq C \int_0^T \int_0^1 s^2 \theta^3 e^{2s\varphi(x,t)} \frac{x^2}{a(x)} v^2 dx dt.$$

Así,

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_0^1 \left(b^2 v^2 + s^2 \theta^3 \frac{\beta^2(x)}{a(x)} c^2 v^2 \right) e^{2s\varphi(x,t)} dx dt \\ & \leq C \left(\int_0^T \int_0^1 e^{2s\varphi(x,t)} a(x) v_x^2 dx dt + \int_0^T \int_0^1 s^2 \theta^3 e^{2s\varphi(x,t)} \frac{x^2}{a(x)} v^2 dx dt \right). \end{aligned} \tag{2.65}$$

CASO $K = 1$. La Hipótesis (2.4) implica que

$$\left(\frac{a(x)}{x^2}\right)^{1/3} \geq a(1)^{1/3}.$$

Entonces,

$$|b(x, t)|^2 \leq C \|b\|_\infty^2 \left(\frac{a(x)}{x^2}\right)^{1/3}, \quad \forall (x, t) \in Q.$$

Por lo tanto,

$$\int_0^T \int_0^1 e^{2s\varphi(x,t)} b^2 v^2 dx dt \leq C \int_0^T \int_0^1 e^{2s\varphi(x,t)} \left(\frac{a(x)}{x^2}\right)^{1/3} v^2 dx dt \quad (2.66)$$

Considerando la función $p(x) = (a(x)x^4)^{1/3}$. Observe que $p(x) \leq \frac{a(x)}{a(1)^{2/3}}$. Ahora, aplicando otra vez la Hipótesis (2.4), existe $\theta \in (0, 1)$ tal que

$$x \rightarrow \frac{a(x)}{x^\theta} \quad \text{es no decreciente alrededor de 0,}$$

y

$$x \rightarrow \frac{p(x)}{x^{\frac{4+\theta}{3}}} = \left(\frac{a(x)}{x^\theta}\right)^{1/3} \quad \text{es no decreciente alrededor de 0.}$$

Entonces, podemos aplicar la desigualdad de Hardy Poincaré a (2.66) con $\sigma = \frac{4+\theta}{3} \in (1, 2)$ y $w = e^{s\varphi(x,t)}v$. Así, se tiene

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_0^1 e^{2s\varphi(x,t)} b^2 v^2 dx dt \leq C \int_0^T \int_0^1 \frac{p(x)}{x^2} w^2 dx dt \\ & \leq C \int_0^T \int_0^1 p(x) \left[\frac{dw}{dx}\right]^2 dx dt \leq C \int_0^T \int_0^1 a(x) \left[\frac{dw}{dx}\right]^2 dx dt \\ & \leq C \left(\int_0^T \int_0^1 e^{2s\varphi(x,t)} a(x) v_x^2 dx dt + \int_0^T \int_0^1 s^2 e^{2s\varphi(x,t)} [\varphi_x(x,t)]^2 a(x) v^2 dx dt \right) \\ & \leq C \left(\int_0^T \int_0^1 e^{2s\varphi(x,t)} a(x) v_x^2 dx dt + \int_0^T \int_0^1 s^2 \theta^3 e^{2s\varphi(x,t)} \frac{x^2}{a(x)} v^2 dx dt \right) \end{aligned}$$

Entonces (2.65) se cumple en los casos $K \neq 1$ y $K = 1$. Usando esta desigualdad en (2.64), obtenemos

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_0^1 \left(s\theta a(x)v_x^2 + s^3\theta^3 \frac{x^2}{a(x)}v^2 \right) e^{2s\varphi(x,t)} dxdt \leq C \left(\int_0^T \int_\omega v^2 dxdt \right. \\ & \left. + \int_0^T \int_0^1 \theta e^{2s\varphi(x,t)} a(x)v_x^2 dxdt + \int_0^T \int_0^1 s^2\theta^3 e^{2s\varphi(x,t)} \frac{x^2}{a(x)}v^2 dxdt \right). \end{aligned}$$

De donde, se deduce que

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_0^1 s\theta a(x) \left[1 - \frac{C}{s} \right] e^{2s\varphi(x,t)} v_x^2 dxdt + \int_0^T \int_0^1 s^3\theta^3 \frac{x^2}{a(x)} \left[1 - \frac{C}{s} \right] e^{2s\varphi(x,t)} v^2 dxdt \\ & \leq C \int_0^T \int_\omega v^2 dxdt. \end{aligned}$$

Por lo tanto, seleccionando s_0 suficientemente grande, el Lema 2.4 queda demostrado. ■

Demostración de la Proposición 2.3: Multiplicando la ecuación $v_t + (a(x)v_x)_x - b(x, t)v + (\beta(x)c(x, t)v)_x = 0$ por v e integrando sobre $(0, 1)$, se tiene que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^1 [v_t + (a(x)v_x)_x - b(x, t)v + (\beta(x)c(x, t)v)_x] v dx \\ &= \frac{d}{dt} \int_0^1 v^2 dx - \int_0^1 a(x)v_x^2 dx - \int_0^1 b(x, t)v^2 dx - \int_0^1 \beta(x)c(x, t)vv_x dx. \end{aligned}$$

Ahora bien, observe que, para $x \in [0, 1]$, $a(x) \geq a(1)C_\beta\beta^2(x)$ (para alguna constante $C_\beta > 0$) como consecuencia de (2.5). Entonces,

$$\begin{aligned} \int_0^1 a(x)v_x^2 dx &= \frac{d}{dt} \int_0^1 v^2 dx - \int_0^1 b(x, t)v^2 dx - \int_0^1 (2a(1)C_\beta\beta^2(x))^{\frac{1}{2}} \frac{c(x, t)}{[2a(1)C_\beta]^{\frac{1}{2}}} vv_x dx \\ &\leq \frac{d}{dt} \int_0^1 v^2 dx + \|b\|_\infty \int_0^1 v^2 dx + \frac{\|c\|_\infty^2}{4a(1)C_\beta} \int_0^1 v^2 dx + \int_0^1 a(1)C_\beta\beta^2(x)v_x^2 dx. \end{aligned}$$

Así,

$$0 \leq 2 \int_0^1 (a(x) - a(1)C_\beta \beta^2(x)) v_x^2 dx \leq \frac{d}{dt} \int_0^1 v^2 dx + \left(2\|b\|_\infty + \frac{\|c\|_\infty^2}{2a(1)C_\beta} \right) \int_0^1 v^2 dx,$$

y

$$0 \leq e^{(2\|b\|_\infty + \frac{\|c\|_\infty^2}{2a(1)C_\beta})t} \left[\frac{d}{dt} \int_0^1 v^2 dx + \left(2\|b\|_\infty + \frac{\|c\|_\infty^2}{2a(1)C_\beta} \right) \int_0^1 v^2 dx \right].$$

Por lo tanto, para toda $t \in [0, T]$,

$$0 \leq \frac{d \left[e^{(2\|b\|_\infty + \frac{\|c\|_\infty^2}{2a(1)C_\beta})t} \int_0^1 v^2(x, t) dx \right]}{dt};$$

lo que significa que para alguna constante $C > 0$,

$$\int_0^1 v^2(x, 0) dx \leq C \int_0^1 v^2(x, t) dt, \quad \forall t \in [0, T].$$

Ahora bien, con las mismas consideraciones de la demostración del Lema 2.4 para los casos $K \neq 1$ y $K = 1$, obtenemos

$$\int_0^1 v^2(x, t) dx \leq C \int_0^1 a(x) v_x^2(x, t) dx \quad \forall t \in [0, T].$$

Entonces, para toda $t \in [0, T]$

$$\int_0^1 v^2(x, 0) dx \leq C \int_0^1 a(x) v_x^2(x, t) dx.$$

En consecuencia, integrando sobre $[T/4, 3T/4]$ y aplicando el Lemma 2.4, tenemos

que

$$\begin{aligned}
\int_0^1 v^2(x, 0) dx &\leq C \int_{T/4}^{3T/4} \int_0^1 a(x) v_x^2(x, t) dx dt \\
&\leq C \int_{T/4}^{3T/4} \int_0^1 s \theta e^{2s\varphi(x, t)} a(x) v_x^2(x, t) dx dt \\
&\leq C \int_0^T \int_\omega v^2 dx dt.
\end{aligned}$$

Esto concluye la demostración de la Proposición 2.3. ■

Asumiendo que las Hipótesis (2.3) para (PDD) (o las Hipótesis (2.4) para (PFD)) se satisfacen, usando la desigualdad de observabilidad demostrada en la Proposición 2.3 y la técnica aplicada en los anteriores problemas de controlabilidad a cero, podemos obtener el resultado de controlabilidad a cero para el problema lineal degenerado:

$$\begin{cases} y_t - (a(x)y_x)_x + b(x, t)y + \beta(x)c(x, t)y_x = h1_\omega & \text{en } Q = (0, 1) \times (0, T), \\ y(0, t) = y(1, t) = 0 & t \in (0, T), \\ y(x, 0) = y_0(x), & \text{en } (0, 1). \end{cases} \quad (2.67)$$

Teorema 2.6. *Dados $T > 0$ y $y_0 \in L^2(0, 1)$, existe $h \in L^2(\omega \times (0, T))$ tal que la solución y de (2.67) satisface*

$$y(x, T) = 0 \text{ para toda } x \in [0, 1].$$

Además, para alguna constante positiva C que depende de T ,

$$\int_0^T \int_\omega |h|^2 dx dt \leq C \int_0^1 y_0^2(x) dx.$$

Demostración: Sea $T > 0$ y $y_0 \in L^2(0, 1)$. Fijemos $\varepsilon > 0$ y consideremos el funcional $J_\varepsilon: L^2(0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$J_\varepsilon(v_T; b, c) = \frac{1}{2} \int_0^T \int_\omega v^2 dx dt + \int_0^1 y_0 v(\cdot, 0) dx + \varepsilon \|v_T\|_{L^2(0, 1)}, \quad (2.68)$$

donde v es la solución de (2.60) correspondiente a v_T .

Proposición 2.5. *El funcional J_ε es continuo, estrictamente convexo y satiface*

$$\liminf_{\|v_T\|_{L^2} \rightarrow \infty} \frac{J_\varepsilon(v_T; b, c)}{\|v_T\|_{L^2}} \geq \varepsilon. \quad (2.69)$$

Por lo tanto, J_ε alcanza su mínimo en un único punto $\tilde{v}_{\varepsilon, T} \in L^2(0, 1)$. Tenemos que $\tilde{v}_{\varepsilon, T} \neq 0$ si y sólo si la solución y_ε de (2.67) asociada a $h_\varepsilon \equiv \tilde{v}_\varepsilon$ (solución de (2.60) correspondiente a $\tilde{v}_{\varepsilon, T}$) verifica

$$\|y_\varepsilon(\cdot, T)\|_{L^2(0,1)} \leq \varepsilon.$$

Cuando $\tilde{v}_{\varepsilon, T} \neq 0$, se satisface la siguiente condición de optimalidad:

$$\int_0^T \int_\omega \tilde{v}_\varepsilon v dx dt + \int_0^1 y_0 v(\cdot, 0) dx + \frac{\varepsilon}{\|\tilde{v}_{\varepsilon, T}\|_{L^2(0,1)}} \int_0^1 \tilde{v}_{\varepsilon, T} v_T dx = 0, \quad (2.70)$$

donde v y \tilde{v}_ε son las soluciones correspondientes a (2.59) con datos iniciales v_T y $\tilde{v}_{\varepsilon, T}$. Mas aún se tiene

$$\int_0^T \int_\omega |\tilde{v}_\varepsilon|^2 dx dt \leq C \|y_0\|_{L^2(0,1)} \quad (2.71)$$

donde C es independiente de ε .

Demostración. La continuidad y la convexidad de J_ε se ven de manera inmediata. Ahora bien, la desigualdad de observabilidad y la desigualdad de Hölder implican que

$$J_\varepsilon \geq \frac{1}{2} \int_0^T \int_\omega |v|^2 dx dt + \varepsilon \|v_T\|_{L^2(0,1)} - C \|y_0\|_{L^2(0,1)} \left(\int_0^T \int_\omega |v|^2 dx dt \right)^{1/2}$$

Por la desigualdad de Young esto implica que

$$J_\varepsilon \geq \frac{1}{4} \int_0^T \int_\omega |v|^2 dx dt + \varepsilon \|v_T\|_{L^2(0,1)} - C \|y_0\|_{L^2(0,1)}^2$$

y se tiene de inmediato (2.69).

Por otro lado, sea \tilde{v}_ε la solución de (2.60) correspondiente a $\tilde{v}_{\varepsilon,T} \neq 0$ (el minimizador de J_ε). Entonces, para cualquier $v_T \in L^2(0,1)$ y v la solución correspondiente a (2.60), se cumple que la derivada de Gâteaux en la dirección v_T es igual a cero, esto es

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{J_\varepsilon(\tilde{v}_{\varepsilon,T} + tv_T) - J_\varepsilon(\tilde{v}_{\varepsilon,T})}{t} = 0. \quad (2.72)$$

Aplicando la definición de J_ε en (2.72) y simplificando, se puede verificar que J_ε satisface la condición de optimalidad (2.70). Ahora bien, consideremos el sistema (2.67) con control $h_\varepsilon = \tilde{v}_\varepsilon$; entonces, multiplicando por cualquier solución v de (2.60) e integrando por partes, se obtiene que

$$\int_0^1 y_\varepsilon(\cdot, T) v_T dx = \int_0^T \int_\omega \tilde{v}_\varepsilon v dx dt + \int_0^1 y_0 v(\cdot, 0) dx.$$

Así, aplicando la condición de optimalidad (2.70), se deduce que

$$\|y_\varepsilon(\cdot, T)\|_{L^2(0,1)} \leq \varepsilon.$$

Por último, combinando el hecho que $J_\varepsilon(\tilde{v}_{T,\varepsilon}) \leq J_\varepsilon(0) = 0$ y la desigualdad de observabilidad (2.61), se tiene que

$$\frac{1}{2} \int_0^T \int_\omega \tilde{v}_\varepsilon^2 dx dt + \int_0^1 y_0 \tilde{v}(\cdot, 0) dx dt + \varepsilon \|\tilde{v}_{T,\varepsilon}\|_{L^2(0,1)} \leq 0,$$

y por tanto

$$\frac{1}{2} \int_0^T \int_\omega \tilde{v}_\varepsilon^2 dx dt - C \left(\int_0^1 y_0^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_0^T \int_\omega \tilde{v}_\varepsilon^2 dx dt \right)^{1/2} \leq 0;$$

así

$$\int_0^T \int_\omega \tilde{v}_\varepsilon^2 dx dt \leq C \int_0^1 y_0^2 dx. \quad (2.73)$$

■

Ahora concluimos la demostración del Teorema 2.6. Para cada $n \geq 1$, sea $h_n = \tilde{v}_{\frac{1}{n}}$ donde $\tilde{v}_{\frac{1}{n}, T}$ esta dado en la proposición anterior. Entonces, se tiene que

$$\|h_n\|_{L^2(\omega \times T)} \leq C\|y_0\|_{L^2(0, 1)}.$$

Sea y_n la solución de (2.67) asociada a h_n . Claramente, por (2.11)

$$\|y_n\|_{C([0, T]; L^2)} + \|y_n\|_{L^2(0, T; H_a^1)} + \|y_n\|_{H^1(0, T; (H_a^1)')} \leq C\|y_0\|.$$

La condición de optimalidad implica que

$$\|y_n(\cdot, T)\|_{L^2(0, 1)} \leq 1/n.$$

Entonces, al menos para una subsucesión (que seguimos denotando por n) se tiene que

$$\begin{aligned} h_n &\rightharpoonup h \text{ débilmente en } L^2((0, T) \times \omega), \\ y_n &\rightarrow y \text{ fuertemente } C([0, T], L^2(0, 1)) \end{aligned}$$

por un resultado de compacidad (ver [27], pág. 85). Así,

$$y_n(\cdot, T) \rightarrow y(\cdot, T) = 0;$$

y por lo tanto, h es el control que buscábamos. Esto completa la demostración del Teorema 2.6. ■

2.6. Controlabilidad a cero de ecuaciones semi-lineales

En esta sección extenderemos el resultado del Teorema 2.6, a ecuaciones parabólicas degeneradas semi-lineales del tipo:

$$\begin{cases} y_t - (a(x)y_x)_x + f(x, t, y, y_x) = h1_\omega & \text{en } Q, \\ y(1, t) = 0 \quad \text{y} \quad \begin{cases} y(0, t) = 0 & \text{para (PDD)}, \\ (ay_x)(0, t) = 0 & \text{para (PFD)}, \end{cases} & t \in (0, T), \\ y(x, 0) = y_0(x), & \text{en } (0, 1), \end{cases} \quad (2.74)$$

donde a satisface las Hipótesis (2.3) para (PDD) (o las Hipótesis (2.4) para (PFD)). Además, asumiremos que f cumple las siguientes condiciones:

HIPÓTESIS 5.1. *Sea $f: [0, 1] \times [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que*

1. $f(x, t; 0, 0) = 0 \quad \forall (x, t) \in Q$.
2. $f(\cdot; s, p) \in L^\infty(Q) \quad \forall (s, p) \in \mathbb{R}^2$.
3. $f(x, t; \cdot)$ es globalmente Lipschitz para toda $(x, t) \in Q$ con constante de Lipschitz independiente de (x, t) .
4. $f(\cdot; s, p) = g(\cdot; s, p) + G(\cdot; s, p)p$ para toda $(s, p) \in \mathbb{R}^2$, donde $g(\cdot; s, p) \in L^\infty(Q)$, $\forall (s, p) \in \mathbb{R}^2$ y

$$\left| \frac{G(x, t; s, p)}{\beta(x)} \right| \leq C \quad \text{casi en todas partes } (x, t) \in Q, \forall (s, p) \in \mathbb{R}^2.$$

Como primer paso, estudiamos el problema controlabilidad a cero del sistema (2.74) en el caso que $y_0 \in H_a^1(0, 1)$ y $h \in L^2(Q)$. En efecto, usando el resultado de controlabilidad a cero del Teorema 2.6 para el problema lineal asociado a (2.74), y un adecuado método del punto fijo, mostraremos primero el siguiente resultado de controlabilidad a cero.

Teorema 2.7. *Dados $T > 0$ y $y_0 \in H_a^1(0, 1)$. Asumiendo las Hipótesis (2.3) para (PDD) (o las Hipótesis (2.4) para (PFD)) y (5.1), el sistema (2.74) es controlable a cero, esto es, existe $h \in L^2(\omega \times (0, T))$ tal que la solución y de (2.74) satisface*

$$y(x, T) = 0 \quad \text{para todo } x \in [0, 1]. \quad (2.75)$$

Además, para alguna constante C que depende sólo de T ,

$$\int_0^T \int_\omega |h|^2 dx dt \leq C \int_0^1 y_0^2(x) dx.$$

Demostración. Sea y_0 una función en $H_a^1(0, 1)$. Supongamos que

$$g(x, t; \cdot), G(x, t; \cdot) \in C^0(\mathbb{R}^2) \quad \forall (x, t) \in Q.$$

Definimos $Z = L^2(0, T; H_a^1(0, 1))$. Para cada $z \in Z$, consideremos el correspondiente sistema lineal

$$\begin{cases} y_t - (a(x)y_x)_x + g(x, t; z, z_x)y + \beta(x) \left[\frac{G(x, t; z, z_x)}{\beta(x)} \right] y_x = h1_\omega & \text{en } Q, \\ y(1, t) = 0 & \text{y } \begin{cases} y(0, t) = 0 & \text{para (PDD),} \\ (ay_x)(0, t) = 0 & \text{para (PFD),} \end{cases} & t \in (0, T), \\ y(x, 0) = y_0(x), & \text{en } (0, 1), \end{cases} \quad (2.76)$$

donde $y_0 \in H_a^1(0, 1)$. Asociamos a cada z una familia $U(z)$ de controles en L^2 los cuales conducen a la solución del correspondiente sistema a cero. Observe que (2.76) es de la forma (2.10) con

$$\begin{cases} b = b_z = g(x, t; z, z_x) \in L^\infty(Q) \\ c = c_z = \frac{G(x, t; z, z_x)}{\beta(x)} \in L^\infty(Q). \end{cases}$$

Del Teorema 2.6, se deduce directamente la existencia de un control $\widehat{h}_z \in L^2(\omega \times (0, T))$ tal que la solución de (2.76) con $h = \widehat{h}_z$ satisface

$$\widehat{y}_z(x, T) = 0 \quad \text{in } (0, 1)$$

y, además

$$\|\widehat{h}_z\|_{L^2(\omega \times (0, T))} \leq C \|y_0\|_{L^2(0, 1)}. \quad (2.77)$$

Por otro lado, del Teorema 2.1, obtenemos que

$$\widehat{y}_z \in L^2(0, T; H_a^1(0, 1))$$

y

$$\|\widehat{y}_z\|_{L^2(0, T; H_a^1(0, 1))} \leq C (\|y_0\|_{H_a^1(0, 1)} + \|\widehat{h}_z\|_{L^2(\omega \times (0, T))}). \quad (2.78)$$

Las estimaciones (2.77) y (2.78) pueden ser escritas en la forma

$$\|\widehat{h}_z\|_{L^2(\omega \times (0, T))} \leq C \|y_0\|_{L^2(0, 1)} \quad (2.79)$$

y

$$\|\widehat{y}_z\|_Z \leq C \|y_0\|_{H_a^1(0, 1)}. \quad (2.80)$$

Ahora, dado $h \in L^2(\omega \times (0, T))$, sea $y_h \in Z$ la solución de (2.76) en Q con lado derecho h (para simplificar la notación, omitiremos la dependencia sobre z). Con esta notación en mente, para cada $z \in Z$ definamos

$$U(z) = \{h \in L^2(\omega \times (0, T)) : y_h(T) = 0, \quad \|h\|_{L^2(\omega \times (0, T))} \leq C \|y_0\|_{L^2(0, 1)}\}$$

y

$$\Lambda(z) = \{y_h : h \in U(z), \quad \|y_h\|_Z \leq C \|y_0\|_{H_a^1(0, 1)}\}.$$

En este sentido, hemos introducido una regla de asignación cuyas imágenes son subconjuntos de Z

$$z \mapsto \Lambda(z).$$

Mostraremos que esta regla de asignación posee al menos un punto fijo y . Por supuesto, esto implicará la existencia de $h \in L^2(\omega \times (0, T))$ tal que (2.74) tiene solución que satisface (2.75).

Con el objetivo de obtener el punto fijo deseado verificaremos que una versión para espacios de Banach del Teorema del punto fijo de Kakutani debida a Fau y Glicksberg (ver [30]) puede ser aplicada a Λ . Primero, de (2.79) y (2.80) deducimos que $\Lambda(z)$ es, para toda $z \in Z$, un conjunto no vacío. Además, es fácil verificar que $\Lambda(z)$ es un subconjunto uniformemente acotado, cerrado y convexo en Z . Como consecuencia de la hipótesis de regularidad sobre y_0 y el Teorema 2.1, tenemos que

$$y \in \mathcal{C}^0([0, T]; H_a^1(0, 1)) \cap L^2(0, T; H_a^2(0, 1)) \cap H^1(0, T; L^2(0, 1)),$$

y existe una constante positiva C_T tal que

$$\|y\|_{L^2(0, T; H_a^2(0, 1))} + \|y_t\|_{L^1(Q)} \leq C_T \|y_0\|_{H_a^1(0, 1)}. \quad (2.81)$$

(donde C_T es independiente de z) para toda $y \in \Lambda(z)$. Además, $H_a^2(0, 1)$ esta inmerso compactamente en $H_a^1(0, 1)$ (por ejemplo, ver [1]). Entonces, podemos aplicar un conocido resultado de compacidad y concluir que existe un conjunto $K \subset Z$ compacto tal que

$$\Lambda(z) \subset K \quad \forall z \in Z \quad (\text{ver [27]}). \quad (2.82)$$

Ahora, probaremos que la regla de asignación $z \mapsto \Lambda(z)$ es hemi-continua superiormente, es decir, que la función a valores reales

$$z \in Z \mapsto \sup_{y \in \Lambda(z)} \langle \mu, y \rangle$$

es semi-continua superiormente para cada funcional lineal acotado $\mu \in Z'$. En otras palabras, verificaremos que

$$B_{\alpha, \mu} = \{z \in Z : \sup_{y \in \Lambda(z)} \langle \mu, y \rangle \geq \alpha\}$$

es un subconjunto cerrado de Z para todo $\alpha \in \mathbb{R}$. Así, sea $\{z_n\}$ una sucesión en $B_{\alpha, \mu}$ tal que

$$z_n \rightarrow z \quad \text{en } Z.$$

Nuestro objetivo es mostrar que $z \in B_{\alpha, \mu}$. Sabemos que existe una subsucesión $\{z_{n_k}\}$ tal que

$$z_{n_k}(x, t) \rightarrow z(x, t), \text{ casi en todas partes en } Q,$$

y

$$\sqrt{a(x)}z_{n_k, x}(x, t) \rightarrow \sqrt{a(x)}z_x(x, t), \text{ casi en todas partes en } Q.$$

Entonces, en vista de las hipótesis de continuidad de g y G , tenemos

$$g(x, t; z_{n_k}, z_{n_k, x}) \rightarrow g(x, t; z, z_x), \text{ en } L^\infty(Q),$$

y

$$\frac{G(x, t; z_{n_k}, z_{n_k, x})}{\beta(x)} \rightarrow \frac{G(x, t; z, z_x)}{\beta(x)}, \text{ en } L^\infty(Q).$$

Por otro lado, ya que todos los conjuntos $\Lambda(z_n)$ son compactos y satisfacen (2.82), deducimos que

$$\alpha \leq \sup_{y \in \Lambda(z_{n_k})} \langle \mu, y \rangle = \langle \mu, y_{n_k} \rangle \quad (2.83)$$

para algún $y_{n_k} \in \Lambda(z_{n_k})$. De la definición de $\Lambda(z_{n_k})$ y $U(z_{n_k})$, debe existir $h_{n_k} \in L^2(\omega \times (0, T))$ tal que

$$y_{t, n_k} - (a(x)y_{x, n_k})_x + g(x, t; z_{n_k}, z_{x, n_k})y_{n_k} + \beta(x) \left[\frac{G(x, t; z_{n_k}, z_{x, n_k})}{\beta(x)} \right] y_{x, n_k} = h_{n_k} 1_\omega \quad \text{in } Q.$$

Además,

$$\|h_{n_k}\|_{L^2(\omega \times (0, T))} \leq C \|y_0\|_{L^2(0, 1)}$$

y

$$\|y_{n_k}\|_Z \leq C \|y_0\|_{H_a^1(0, 1)}.$$

donde y_{n_k} (resp. h_{n_k}) es uniformemente acotada en Z (resp. $L^2(\omega \times (0, T))$). Por lo tanto,

$$y_{n_k} \rightarrow \widehat{y} \text{ fuertemente en } Z$$

(recordemos que (2.82) se satisface) y

$$h_{n_k} \rightarrow \widehat{h} \text{ débilmente en } L^2(\omega \times (0, T)).$$

Se puede verificar que

$$\begin{cases} \widehat{y}_t - (a(x)\widehat{y}_x)_x + g(x, t; z, z_x)\widehat{y} + \beta(x) \left[\frac{G(x, t; z, z_x)}{\beta(x)} \right] \widehat{y}_x = \widehat{h} 1_\omega & \text{en } Q, \\ \widehat{y}(1, t) = 0 & \text{y } \begin{cases} \widehat{y}(0, t) = 0 & \text{para (PDD),} \\ (a\widehat{y}_x)(0, t) = 0 & \text{para (PFD),} \end{cases} & t \in (0, T), \\ \widehat{y}(x, 0) = y_0(x), \quad \widehat{y}(x, T) = 0 & \text{en } (0, 1), \end{cases}$$

en el sentido de distribuciones; esto es que $\widehat{v} \in U(z)$ and $\widehat{y} \in \Lambda(z)$. En consecuencia, podemos tomar el límite en (2.83) y deducir que

$$\alpha \leq \langle \mu, \widehat{y} \rangle \leq \sup_{y \in \Lambda(z)} \langle \mu, y \rangle.$$

esto quiere decir, $z \in B_{\alpha, \mu}$. Esto prueba que $z \mapsto \Lambda(z)$ es hemi-continua superiormente. Entonces, la versión del Teorema de Kakutani que estamos considerando garantiza la existencia de un punto fijo de Λ .

Ahora, supongamos que $g(x, t; \cdot)$ y $G(x, t; \cdot)$ están en $L^\infty(\mathbb{R}^2)$ para toda $(x, t) \in Q$. Introduzcamos la función $\rho(x, t; \cdot) \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ tal que $\rho(x, t; \cdot) \geq 0$ en \mathbb{R}^2 , $\text{supp } \rho(x, t; \cdot) \subset \overline{B}(0, 1)$ y

$$\int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \rho(x, t; s, p) ds dp = 1.$$

para toda $(x, t) \in Q$. Consideramos las funciones ρ_n, g_n y G_n ($n \geq 1$), con

$$\rho_n(x, t; s, p) = \frac{1}{n^2} \rho(x, t; ns, np) \quad \forall (s, p) \in \mathbb{R}^2,$$

y

$$g_n = \rho_n * g, \quad G_n = \rho_n * G.$$

Entonces, no es difícil verificar que las siguientes propiedades de g_n y G_n se cumplen:

1. $g_n(x, t; \cdot), G_n(x, t; \cdot) \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$ para toda $(x, t) \in Q$ ($n \geq 1$).
2. $g_n(x, t; \cdot) \rightarrow g(x, t; \cdot)$ y $G_n(x, t; \cdot) \rightarrow G(x, t; \cdot)$ uniformemente en \mathbb{R}^2 para toda $(x, t) \in Q$.

Por lo ya discutido, para toda n , podemos encontrar un control $h_n \in L^2(\omega \times (0, T))$ tal que el sistema

$$\begin{cases} y_{t,n} - (a(x)y_{x,n})_x + f(x, t, y_n, y_{x,n}) = h_n 1_\omega & \text{en } Q, \\ y_n(1, t) = 0 \quad \text{and} \quad \begin{cases} y_n(0, t) = 0 & \text{para (PDD),} \\ (ay_{x,n})(0, t) = 0 & \text{para (PFD),} \end{cases} & t \in (0, T), \\ y_n(x, 0) = y_0(x), & \text{en } (0, 1), \end{cases} \quad (2.84)$$

posee al menos un solución $y_n \in Z$ que satisface

$$y_n(x, T) = 0 \quad \text{en } (0, 1),$$

$$\|h_n\|_{L^2(\omega \times (0, T))} \leq C \quad \text{y} \quad \|y_n\|_Z \leq C \quad \forall n \geq 1.$$

Ahora bien, tenemos que $y_n \in K$ para toda $n \geq 1$, donde K es conjunto compacto fijo en Z . Por tanto, podemos asumir que, para al menos una subsucesión,

$$y_n \rightarrow y \quad \text{fuertemente en } Z,$$

$$h_n \rightharpoonup h \quad \text{débilmente en } L^2(\omega \times (0, T)).$$

Así, pasando al límite en (2.84), encontramos un control $h \in L^2(\omega \times (0, T))$ tal que (2.74) posee una solución y que satisface (2.75). Esto finaliza la demostración del Teorema 2.7. \blacksquare

Con la finalidad de generalizar el resultado anterior es posible probar que si $y_0 \in L^2(0, 1)$ y $h = 0$ en (2.74), entonces el sistema tiene solución $y \in C^0([0, T]; L^2(0, 1)) \cap L^2(0, T; H_a^1(0, 1))$. Por lo tanto, tomando en cuenta esta consideración, se obtiene que

Corolario 2.1. *Dados $T > 0$ y $y_0 \in L^2(0, 1)$. Asumiendo las Hipótesis (2.3) para (PDD) (o las Hipótesis (2.4) para (PFD)) y 5.1, el problema (2.74) es controlable a cero, es decir, existe $h \in L^2(\omega \times (0, T))$ tal que la solución y de (2.74) satisface*

$$y(x, T) = 0 \quad \text{para todo } x \in [0, 1]. \quad (2.85)$$

Además, existe una constante positiva C que depende sólo de T ,

$$\int_0^T \int_{\omega} |h|^2 dx dt \leq C \int_0^1 y_0^2(x) dx.$$

Demostración. Consideremos el problema

$$\begin{cases} y_t^* - (a(x)y_x^*)_x + f(x, t, y^*, y_x^*) = 0 & \text{en } (0, \frac{T}{2}) \times (0, 1), \\ y^*(1, t) = 0 \quad \text{y} \quad \begin{cases} y^*(0, t) = 0 & \text{para (PDD),} \\ (ay_x^*)(0, t) = 0 & \text{para (PFD),} \end{cases} & t \in (0, \frac{T}{2}), \\ y^*(x, 0) = y_0(x), & \text{en } (0, 1), \end{cases}$$

Entonces, $y^*(\cdot, t) \in H_a^1(0, 1)$ casi en todas partes en $(0, \frac{T}{2})$, ya que $y^* \in L^2(0, T; H_a^1(0, 1))$. Así, $\exists t_0 \in (0, \frac{T}{2})$, tal que $y^*(x, t_0) =: y_1(x) \in H_a^1(0, 1)$. Ahora, consideremos el problema

$$\begin{cases} y_t^{**} - (a(x)y_x^{**})_x + f(x, t, y^{**}, y_x^{**}) = h_1 1_\omega & \text{en } (t_0, T) \times (0, 1), \\ y^{**}(1, t) = 0 \quad \text{y} \quad \begin{cases} y^{**}(0, t) = 0 & \text{para (PDD),} \\ (ay_x^{**})(0, t) = 0 & \text{para (PFD),} \end{cases} & t \in (t_0, T), \\ y^{**}(x, t_0) = y_1(x), & \text{en } (0, 1), \end{cases}$$

Por el Teorema 2.7, tenemos que existe un control $h_1 \in L^2(\omega \times (t_0, T))$ tal que

$$y^{**}(x, T) = 0, \quad \forall x \in (0, 1)$$

y

$$\int_{t_0}^T \int_0^1 h_1^2(x, t) dx dt \leq C \int_0^1 y_1^2(x) dx,$$

para una constante positiva C . Finalmente, definimos y y h de la siguiente manera

$$y := \begin{cases} y^*, & [0, t_0] \\ y^{**}, & [t_0, T], \end{cases} \quad h := \begin{cases} 0, & [0, t_0] \\ h_1, & [t_0, T]. \end{cases}$$

Entonces y es una solución de (2.74) y satisface (2.85). ■

CAPÍTULO 3

Controlabilidad aproximada de ecuaciones parabólicas en dominios finos

3.1. Descripción de los resultados y planteamiento del problema

Sea Ω un subconjunto abierto acotado con frontera suave de \mathbb{R}^{n-1} con $n \geq 2$. Dado $\varepsilon > 0$, consideramos el cilindro de dimensión n , $\Omega_\varepsilon = \Omega \times (0, \varepsilon)$. También, consideramos un subconjunto abierto no vacío ω de Ω y el correspondiente subconjunto cilíndrico $\omega_\varepsilon = \omega \times (0, \varepsilon)$ de Ω_ε . Dado un tiempo de control $T > 0$, $y^0 \in L^2(\Omega_\varepsilon)$ y una función globalmente Lipschitz $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con $f(0) = 0$, $Q_\varepsilon = \Omega_\varepsilon \times (0, T)$, consideremos la siguiente ecuación del calor en Ω_ε :

$$\begin{cases} y_t - \Delta y + f(y) = h1_{\omega_\varepsilon} & \text{en } Q_\varepsilon, \\ y = 0 & \text{en } [\partial\Omega \times (0, \varepsilon)] \times (0, T), \\ \frac{\partial y}{\partial \vec{n}} = 0 & \text{en } \Gamma_\varepsilon^\pm \times (0, T), \\ y(x, 0) = y^0(x) & \text{en } \Omega_\varepsilon. \end{cases} \quad (3.1)$$

En (3.1) $y = y(x, t)$ es el estado, $h(x, t)$ es la función control, y 1_{ω_ε} denota la función característica del subconjunto ω_ε . Así, el control del sistema tiene soporte

en $\omega_\varepsilon \times (0, T)$. La tapa y la base de la frontera de Ω_ε son denotados por

$$\Gamma_\varepsilon^+ = \{(x', \varepsilon) : x' \in \Omega\}, \quad \Gamma_\varepsilon^- = \{(x', 0) : x' \in \Omega\}.$$

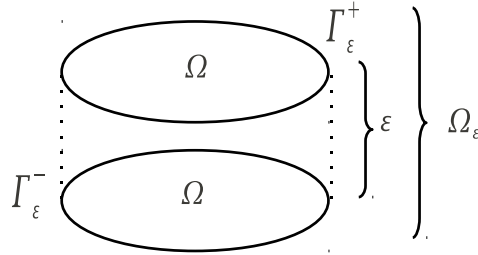


Figura 3.1: Dominios finos.

Sobre Γ_ε^\pm consideramos condiciones de frontera de Neumann, mientras que sobre la frontera lateral $\partial\Omega \times (0, \varepsilon)$ consideramos condiciones de frontera de Dirichlet. Usaremos la notación $x = (x', x_n)$ con $x' \in \Omega$ y $x_n \in (0, \varepsilon)$. Denotamos por ∇' gradiente y por Δ' el Laplaciano con respecto a la variable x' , mientras que los operadores en la variable x serán denotados por ∇ y Δ .

Dado $y^0 \in L^2(\Omega_\varepsilon)$ y $h \in L^2(\omega_\varepsilon \times (0, T))$ el sistema (3.1) admite solución única

$$y \in C([0, T]; L^2(\Omega_\varepsilon)) \cap L^2(0, T; V_\varepsilon),$$

donde

$$V_\varepsilon = \{\phi \in H^1(\Omega_\varepsilon) : \phi = 0 \text{ en } \partial\Omega \times (0, \varepsilon)\}.$$

En efecto, en el desarrollo de la demostración del Teorema 3.3 se puede observar que p la solución del sistema (3.4) pertenece a $C([0, T]; L^2(\Omega_\varepsilon))$. Así,

$$y \in C([0, T]; L^2(\Omega_\varepsilon)).$$

Ahora bien, multiplicando el sistema (3.1) por y , integrando por partes y usando el hecho de que f es globalmente Lipschitz, se tiene que

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega_\varepsilon} y^2 dx \Big|_0^T + \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla y|^2 dx dt \leq C \left(\int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} h^2 dx dt + \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} y^2 dx dt \right). \quad (3.2)$$

En esta parte es importante mencionar que el espacio V_ε está dotado con la norma de $H^1(\Omega_\varepsilon)$, esto es

$$\|u\|_{V_\varepsilon} = \left(\|u\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 \right)^{1/2}.$$

Del Lema 3.1, se concluye que la expresión

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u \cdot \nabla v \, dx$$

es un producto escalar que induce la norma $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}$ equivalente a la norma $\|u\|_{V_\varepsilon}$. Considerando lo anterior, de (3.2) se deduce que

$$y \in L^2(0, T; V_\varepsilon).$$

Definición 3.1. *Se dice que (3.1) posee la propiedad de controlabilidad aproximada en tiempo T si, para toda $y^0, y^1 \in L^2(\Omega_\varepsilon)$ y $\delta > 0$ existe un control h_δ tal que*

$$\|y(\cdot, T) - y^1\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq \delta \quad (3.3)$$

El principal objetivo de este capítulo es estudiar controlabilidad aproximada de (3.1) y determinar cuál es el comportamiento de la familia de controles aproximados dependientes de ε cuando ε se aproxima a cero.

Como primer paso, probaremos que (3.1) tiene la propiedad de controlabilidad a trayectorias, esto es, demostraremos que para todo $y^0 \in L^2(\Omega_\varepsilon)$ y cualquier trayectoria definida globalmente y^* de (3.1) (correspondiente al dato inicial $y_0^* \in L^2(\Omega_\varepsilon)$ y $h^* \in L^2(\omega_\varepsilon \times (0, T))$) existe un control $h \in L^2(\omega_\varepsilon \times (0, T))$ tal que la correspondiente solución de (3.1) está también definida globalmente en $[0, T]$ y satisface

$$y(x, T) = y^*(x, T) \quad \text{en } \Omega_\varepsilon.$$

Con este fin realizamos el siguiente cambio de variable $p = y - y^*$ en (3.1). Por tanto, es fácil verificar que y resuelve (3.1), si y sólo si, p resuelve

$$\begin{cases} p_t - \Delta p + f(y^* + p) - f(y^*) = v1_{\omega_\varepsilon} & \text{en } Q_\varepsilon, \\ p = 0 & \text{en } [\partial\Omega \times (0, \varepsilon)] \times (0, T), \\ \frac{\partial p}{\partial \vec{n}} = 0 & \text{en } \Gamma_\varepsilon^\pm \times (0, T), \\ p(x, 0) = p^0(x) & \text{en } \Omega_\varepsilon. \end{cases} \quad (3.4)$$

donde $v = h - h^*$ y $p^0 = y^0 - y_0^*$. Observe que con este cambio de variable el problema de controlabilidad a trayectorias se transforma en un problema de controlabilidad a cero, esto es, necesitamos probar que existe $v \in L^2(\omega_\varepsilon \times (0, T))$ tal que la correspondiente solución p de (3.4) satisface

$$p(x, T) = 0 \quad \text{en } \Omega_\varepsilon. \quad (3.5)$$

Utilizando un argumento del punto fijo demostraremos que (3.4) tiene control a cero en el caso que $f \in C^1(\mathbb{R})$, y después se resolverá el caso en el que f es globalmente Lipschitz. Entonces, como consecuencia de este resultado, demostraremos que (3.1) posee la propiedad de controlabilidad aproximada.

En el análisis del comportamiento cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, reescribiremos el sistema (3.1), con un cambio de variable adecuado, de tal manera que el dominio no dependa de ε . En este sentido, demostraremos que bajo ciertas condiciones la propiedad de controlabilidad aproximada del sistema límite de (3.1), esto es, la ecuación del calor en $Q = \Omega \times (0, T)$,

$$\begin{cases} y_t - \Delta' y + f(y) = h1_\omega & \text{en } Q, \\ y = 0 & \text{en } \partial\Omega \times (0, T), \\ y(x, 0) = y^0(x) & \text{en } \Omega, \end{cases}$$

se puede obtener como el límite cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ de la propiedad de controlabilidad aproximada de (3.1).

3.2. Relación con la literatura y motivación

El problema de controlabilidad aproximada de ecuaciones parabólicas en dominios finos desarrollado en este capítulo está inspirado en el trabajo realizado por Luz de Teresa y Enrique Zuazua en [29]. En este artículo, ellos estudiaron el problema de la controlabilidad a cero de la ecuación del calor en dominios finos; así como, el comportamiento de los controles a cero dependientes de ε cuando ε tiende a cero. En el, consideraron la ecuación del calor en el caso lineal con un potencial en L^∞ , para finalizar, considerando el caso semilineal con no linealidades globalmente Lipschitz.

En nuestros resultados, aplicamos técnicas aplicadas en [29]; además, en la demostración hacemos uso de los resultados obtenidos en dicho artículo.

3.3. Un resultado de regularidad

En esta sección estudiamos la regularidad de la solución del sistema:

$$\begin{cases} p_t - \Delta p + a(x', x_n, t)p = v & \text{en } Q_\varepsilon, \\ p = 0 & \text{en } [\partial\Omega \times (0, \varepsilon)] \times (0, T), \\ \frac{\partial p}{\partial \vec{n}} = 0 & \text{en } \Gamma_\varepsilon^\pm \times (0, T), \\ p(x, 0) = p^0(x) & \text{en } \Omega_\varepsilon. \end{cases} \quad (3.6)$$

Se sabe que dado $p^0 \in L^2(\Omega_\varepsilon)$ y $v \in L^2(Q_\varepsilon)$ el sistema (3.6) admite solución única $p \in C([0, T]; L^2(\Omega_\varepsilon)) \cap L^2(0, T; V_\varepsilon)$. El resultado de regularidad que obtengamos para el sistema (3.6) será utilizado en el argumento del punto fijo que demuestra que (3.4) tiene control a cero en el caso que $f \in C^1(\mathbb{R})$. Ahora bien, antes de abordar el problema de la regularidad del sistema (3.6) necesitamos los siguientes resultados:

En primer lugar, se cumple la desigualdad de Poincaré en V_ε , esto es,

Lema 3.1 (Desigualdad de Poincaré). *Sea Ω un subconjunto abierto acotado de \mathbb{R}^{n-1} . Entonces existe $C > 0$ independiente de u tal que*

$$\|u\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}, \quad \forall u \in V_\varepsilon.$$

Demostración. Sea $u \in V_\varepsilon$. Entonces,

$$u^2 \in L^1(\Omega \times (0, \varepsilon)) \quad \text{y} \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 \in L^1(\Omega \times (0, \varepsilon)), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Así, por el Teorema de Fubini

$$u^2(x', x_n) \in L^1_{x'}(\Omega) \quad \text{y} \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}(x', x_n) \right)^2 \in L^1_{x'}(\Omega), \quad i = 1, \dots, n-1,$$

para casi toda $x_n \in (0, \varepsilon)$. Por lo tanto, la familia de funciones dependientes de x_n

$$u(\cdot, x_n) \in H_0^1(\Omega),$$

para casi toda $x_n \in (0, \varepsilon)$. Ahora bien, aplicando la desigualdad de Poincaré en $H_0^1(\Omega)$ existe una constante $C > 0$ independiente de x_n , y de ε , tal que

$$\|u(\cdot, x_n)\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla' u(\cdot, x_n)\|_{L^2(\Omega)},$$

para casi toda $x_n \in (0, \varepsilon)$. Integrando de 0 a ε , obtenemos

$$\int_0^\varepsilon \int_\Omega u^2 dx \leq C \int_0^\varepsilon \left[\int_\Omega |\nabla' u|^2 dx' \right] dx_n \leq C \int_0^\varepsilon \int_\Omega |\nabla u|^2 dx.$$

Con esto concluimos la demostración. ■

Aplicando el Lema 3.1, tenemos que

Teorema 3.1. *Sea $v \in L^2(\Omega_\varepsilon)$. Entonces existe una función $u \in V_\varepsilon$ que verifica*

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u \cdot \nabla \phi \, dx = \int_{\Omega_\varepsilon} v \phi \, dx,$$

para toda $\phi \in V_\varepsilon$

Demostración. Sea $v \in L^2(\Omega_\varepsilon)$. Definimos la forma bilineal

$$a(f, g) = \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla f \cdot \nabla g \, dx$$

y el funcional

$$\psi(g) = \int_{\Omega_\varepsilon} v g \, dx,$$

para toda $f, g \in V_\varepsilon$. Por la desigualdad de Hölder, se obtiene que

$$|a(f, g)| \leq \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla f \cdot \nabla g| \, dx \leq \|f\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \|g\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}.$$

En consecuencia, a es una forma bilineal continua. Ahora bien, por el Lema 3.1

$$\begin{aligned} |a(f, f)| &= \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla f|^2 \, dx \geq \frac{1}{1+C} \left(\int_{\Omega_\varepsilon} |f|^2 \, dx + \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla f|^2 \, dx \right) \\ &= \frac{1}{1+C} \left(\|f\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 + \|\nabla f\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 \right) = \frac{1}{1+C} \|f\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}^2. \end{aligned}$$

En consecuencia, a es coerciva. Por último, es claro que $\psi \in V'_\varepsilon$. Entonces, aplicando el Teorema de Lax-Milgram concluimos lo que deseábamos. ■

Ahora,

Lema 3.2. *La inyección del espacio $H^1(\Omega_\varepsilon)$ en $L^2(\Omega_\varepsilon)$ es compacta.*

Demostración. Sea F un subconjunto acotado de $H^1(\Omega_\varepsilon)$. Aplicaremos el Teorema de Fréchet-Kolmogorov para mostrar que F es relativamente compacto en $L^2(\Omega_\varepsilon)$, esto es, que la cerradura de F es un subconjunto compacto en $L^2(\Omega_\varepsilon)$. Sea $u \in F$, $\alpha > 0$ y $w \subset\subset \Omega_\varepsilon$. Entonces, por la Proposición IX.3 (ver [5], pag. 153), si $0 < \delta < \text{dist}(w, \mathbb{C}\Omega_\varepsilon)$, tenemos que

$$\|u(x+h) - u(x)\|_{L^2(w)} \leq \|u\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \delta,$$

si $|h| < \delta$. Ahora bien, existe C tal que

$$\|u\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq C, \quad \forall u \in F.$$

Así,

$$\|u(x+h) - u(x)\|_{L^2(w)} \leq \alpha \quad \forall u \in F,$$

si $|h| < \delta$ con $0 < \delta < \min\{\text{dist}(w, \mathbb{C}\Omega_\varepsilon), \alpha/C\}$.

Por otro lado, puesto que Ω_ε es un dominio Lipschitz, tenemos que

$$H^1(\Omega_\varepsilon) \subset L^{p^*}(\Omega_\varepsilon), \quad p^* = \frac{2n}{n-2} \quad \text{si } n > 2,$$

y

$$H^1(\Omega_\varepsilon) \subset L^{p^*}(\Omega_\varepsilon), \quad p^* \in [2, +\infty) \quad \text{si } n = 2,$$

con inyección continua. Hagamos $p = \frac{p^*}{2}$ y $q = \frac{p^*}{p^* - 2}$. Entonces,

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Luego, aplicando la desigualdad de Hölder, se concluye que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\varepsilon \setminus w} |u|^2 dx &\leq \left(\int_{\Omega_\varepsilon \setminus w} |u|^{2p} dx \right)^{1/p} \left(\int_{\Omega_\varepsilon \setminus w} |1|^q dx \right)^{1/q} \\ &= \left(\int_{\Omega_\varepsilon \setminus w} |u|^{p^*} dx \right)^{2/p^*} |\Omega_\varepsilon \setminus w|^{\frac{p^*-2}{p^*}} \\ &\leq C |\Omega_\varepsilon \setminus w|^{\frac{p^*-2}{p^*}} < \alpha, \end{aligned}$$

para $w \subset\subset \Omega_\varepsilon$ adecuado. Con esta parte concluimos la demostración. ■

Teorema 3.2. *Existe un sistema ortonormal completo $\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$ en $L^2(\Omega_\varepsilon)$ y una sucesión correspondiente $\{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty}$ de números reales tal que $\varphi_j \in V_\varepsilon$ y*

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \nabla \varphi_j \cdot \nabla \varphi \, dx = \lambda_j \int_{\Omega_\varepsilon} \varphi_j \varphi \, dx, \quad \forall \varphi \in V_\varepsilon, \quad (3.7)$$

$j = 1, 2, \dots$ Además, $\lambda_j > 0$ para toda j y $\lim_{j \rightarrow \infty} \lambda_j = \infty$.

Demostración. Por el Teorema 3.1, se tiene que para cada $f \in L^2(\Omega_\varepsilon)$ existe $u = T(f) \in V_\varepsilon$ tal que

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx = \int_{\Omega_\varepsilon} f \varphi \, dx \quad \forall \varphi \in V_\varepsilon. \quad (3.8)$$

Mostraremos que el operador $T: L^2(\Omega_\varepsilon) \rightarrow L^2(\Omega_\varepsilon)$ es lineal, continuo, autoadjunto y compacto. En efecto, por (3.8) y el Lema 3.1

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla T(f)|^2 \, dx &= \left| \int_{\Omega_\varepsilon} (\nabla T(f)) \cdot \nabla T(f) \, dx \right| \\ &= \left| \int_{\Omega_\varepsilon} f T(f) \, dx \right| \leq \int_{\Omega_\varepsilon} |f| |T(f)| \, dx \\ &\leq \left(\int_{\Omega_\varepsilon} |f|^2 \, dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega_\varepsilon} |T(f)|^2 \, dx \right)^{1/2} \\ &\leq C \left(\int_{\Omega_\varepsilon} |f|^2 \, dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla T(f)|^2 \, dx \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Entonces,

$$\|\nabla T(f)\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)};$$

así, aplicando nuevamente el Lema 3.1, se concluye que

$$\|T(f)\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}, \quad \forall f \in L^2(\Omega_\varepsilon).$$

Por tanto, T es continuo. Ahora bien, por el Lema 3.2, la inyección de V_ε dentro de $L^2(\Omega_\varepsilon)$ es compacta, entonces T es compacto. En la ecuación (3.8) tomando

$u = T(f)$ y $\varphi = T(g)$, donde $f, g \in L^2(\Omega_\varepsilon)$, obtenemos que

$$\int_{\Omega_\varepsilon} fT(g) dx = \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla T(f) \cdot \nabla T(g) dx = \int_{\Omega_\varepsilon} gT(f) dx.$$

Entonces,

$$(f, T(g)) = (T(f), g), \quad \forall f, g \in L^2(\Omega_\varepsilon),$$

donde (\cdot, \cdot) es el producto escalar en $L^2(\Omega_\varepsilon)$. Así, T es auto-adjunto. Ahora por el Teorema 1.4.3 (ver [3]) y el Teorema VI.8 (ver [5]), el operador T tiene una sucesión infinita de eigenvalores $\{\mu_j\}_{j=1}^\infty$ y un sistema ortonormal completo en $L^2(\Omega_\varepsilon)$ de correspondientes eigenvectores $\{\varphi_j\}$, esto es

$$T\varphi_j = \mu_j\varphi_j \in V_\varepsilon.$$

Luego, $\varphi_j \in V_\varepsilon$, $\forall j$. Además, $\lim_{j \rightarrow \infty} \mu_j = 0$. Así, por definición

$$\mu_j \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla \varphi_j \cdot \nabla \varphi dx = \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla T(\varphi_j) \cdot \nabla \varphi dx = \int_{\Omega_\varepsilon} \varphi_j \varphi dx, \quad \forall \varphi \in V_\varepsilon. \quad (3.9)$$

En particular, $\lambda_j := \frac{1}{\mu_j} = \frac{\int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla \varphi_j|^2}{\int_{\Omega_\varepsilon} |\varphi_j|^2} \geq C > 0$ concluimos la demostración. ■

Con esto podemos concluir que

Corolario 3.1. *El sistema $\left\{ \frac{\varphi_j}{\sqrt{\lambda_j}} \right\}_{j=1}^\infty$ es ortonormal y completo en el espacio V_ε .*

Demostración. Por 3.9, tenemos que

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_j \lambda_k}} \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla \varphi_j \cdot \nabla \varphi_k dx = \frac{\lambda_j}{\sqrt{\lambda_j \lambda_k}} \int_{\Omega_\varepsilon} \varphi_j \varphi_k dx = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq k, \\ 1 & \text{si } j = k, \end{cases}$$

ya que $\{\varphi_j\}$ es un sistema ortonormal en $L^2(\Omega_\varepsilon)$. Entonces el sistema $\left\{ \frac{\varphi_j}{\sqrt{\lambda_j}} \right\}$ es ortonormal en V_ε , ya que también sabemos, por el Lema 3.1, que $\int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u \cdot \nabla v dx$ es

un producto que induce la norma $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}$ equivalente a la norma $\|u\|_{V_\varepsilon}$. Para mostrar que este sistema es completo en V_ε asumiremos que existe $\psi \in V_\varepsilon$, $\psi \neq 0$ tal que $\int_{\Omega_\varepsilon} \nabla \varphi_j \cdot \nabla \psi \, dx = 0$ para toda j , y llegaremos a una contradicción. Por (3.9), tenemos que

$$\lambda_j \int_{\Omega_\varepsilon} \varphi_j \psi \, dx = 0, \quad \forall j = 1, 2, \dots$$

y puesto que $\lambda_j > 0$ y el sistema $\{\varphi_j\}$ es completo en $L^2(\Omega_\varepsilon)$ concluimos que $\psi \equiv 0$. ■

Con este resultado estamos listos para demostrar el siguiente resultado de regularidad para el sistema (3.6)

Lema 3.3. *Suponga que en (3.6) $v \in L^2(Q_\varepsilon)$, $p^0 \in V_\varepsilon$ y $a \in L^\infty(Q_\varepsilon)$. Entonces, la solución p de (3.6) satisface*

$$\begin{cases} p \in L^\infty(0, T; V_\varepsilon) \\ p_t \in L^2(0, T; V'_\varepsilon), \end{cases}$$

y

$$\|p\|_{L^\infty(0, T; V_\varepsilon)} + \|p_t\|_{L^2(0, T; V'_\varepsilon)} \leq C (\|p^0\|_{V_\varepsilon} + \|v\|_{L^2(Q_\varepsilon)}),$$

donde

$$C = e^{2[T^{1/2} + (T + T^{1/2} + 1)\|a\|_{L^\infty(Q_\varepsilon)} + 3]}.$$

Demostración. Por el Teorema 3.2 sabemos que existe un sistema ortonormal completo $\{\varphi_j\}_{j=1}^\infty$ en $L^2(\Omega_\varepsilon)$ y $\{\lambda_j\} \subset \mathbb{R}^+$ tal que $\lim_{j \rightarrow \infty} \lambda_j = \infty$ y

$$\begin{aligned} -\Delta \varphi_j &= \lambda_j \varphi_j \text{ en } \Omega_\varepsilon, \\ \varphi_j &= 0 \text{ en } \partial\Omega \times (0, \varepsilon). \end{aligned}$$

Entonces, la solución de (3.6) se puede escribir de la siguiente forma (ver [3], pág. 191)

$$p(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} p_j(t) \varphi_j(x)$$

con

$$p_j(t) = e^{-\int_0^t (a(x, w) + \lambda_j) \, dw} p_0^j + \int_0^t e^{-\int_s^t (a(x, w) + \lambda_j) \, dw} v_j(s) \, ds,$$

donde

$$\begin{aligned} p_0^j &= \int_{\Omega_\varepsilon} p^0(x) \varphi_j(x) dx \\ v_j(t) &= \int_{\Omega_\varepsilon} v(x, t) \varphi_j(x) dx, \quad j \geq 1. \end{aligned} \quad (3.10)$$

También, se puede escribir $p(x, t)$ de la siguiente manera

$$p(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_j} p_j(t) \psi_j(x),$$

donde $\psi_j = (\sqrt{\lambda_j})^{-1} \varphi_j$. Por el Corolario 3.1, tenemos que $\{\psi_j\}_{j=1}^{\infty}$ es un sistema ortonormal completo en V_ε . Entonces, aplicando la fórmula de Parseval, para todo $t \in [0, T]$

$$\|p(t)\|_{V_\varepsilon}^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j p_j^2(t). \quad (3.11)$$

Así, aplicando la desigualdad de Hölder

$$\begin{aligned} \lambda_j p_j^2 &\leq 2e^{-2 \int_0^t (a(x, w) + \lambda_j) dw} \lambda_j (p_0^j)^2 + 2 \left(\int_0^t e^{-\int_s^t (a(x, w) + \lambda_j) dw} v_j(s) ds \right)^2 \\ &\leq 2e^{2T \|a\|_{L^\infty(Q_\varepsilon)}} \lambda_j (p_0^j)^2 + 2\lambda_j \left[\left(\int_0^t e^{-2 \int_s^t (a(x, w) + \lambda_j) dw} ds \right) \left(\int_0^t v_j^2(s) ds \right) \right] \\ &\leq 2e^{2T \|a\|_{L^\infty(Q_\varepsilon)}} \left[\lambda_j (p_0^j)^2 + \lambda_j \left(\int_0^t e^{-2\lambda_j(t-s)} ds \int_0^T v_j^2(s) ds \right) \right] \\ &\leq 2e^{2T \|a\|_{L^\infty(Q_\varepsilon)}} \left[\lambda_j (p_0^j)^2 + \lambda_j \left(\frac{1}{2\lambda_j} \left[1 - \frac{1}{e^{2\lambda_j T}} \right] \int_0^T v_j^2(s) ds \right) \right] \\ &\leq 2e^{2T \|a\|_{L^\infty(Q_\varepsilon)}} \left[\lambda_j (p_0^j)^2 + \int_0^T v_j^2(s) ds \right], \end{aligned}$$

para j suficientemente grande; aquí aplicamos el hecho que $\lim_{j \rightarrow \infty} \lambda_j = \infty$. Por otro lado, tenemos que $p^0 \in V_\varepsilon$ y $v \in L^2(Q_\varepsilon)$, entonces por (3.10) y la fórmula de

Parseval tenemos que

$$\|p^0\|_{V_\varepsilon}^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j (p_0^j)^2$$

y

$$\|v(t)\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 = \sum_{j=1}^{\infty} v_j^2(t), \quad \forall t \in [0, T].$$

Mientras que por el Teorema de Beppo-Levi, tenemos que

$$\sum_{j=1}^{\infty} \int_0^T v_j^2(s) ds = \int_0^T \left(\sum_{j=1}^{\infty} v_j^2(s) \right) ds = \|v\|_{L^2(Q_\varepsilon)}^2.$$

Por tanto, aplicando (3.11), se cumple que para todo $t \in [0, T]$

$$\|p(t)\|_{V_\varepsilon}^2 \leq 2e^{2T\|a\|_{L^\infty(Q_\varepsilon)}} \left(\|p^0\|_{V_\varepsilon}^2 + \|v\|_{L^2(Q_\varepsilon)}^2 \right).$$

En consecuencia,

$$\|p\|_{L^\infty(0, T; V_\varepsilon)} \leq e^{(2+T)\|a\|_{L^\infty(Q_\varepsilon)}} \left(\|p^0\|_{V_\varepsilon} + \|v\|_{L^2(Q_\varepsilon)} \right). \quad (3.12)$$

Ahora sea $\varphi \in V_\varepsilon$. Entonces, multiplicando (3.6) por φ e integrando por partes en Ω_ε , se concluye que

$$\begin{aligned} \langle p_t, \varphi \rangle_{V_\varepsilon', V_\varepsilon} &\leq \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla p \cdot \nabla \varphi| dx + \int_{\Omega_\varepsilon} |ap\varphi| dx + \int_{\Omega_\varepsilon} |v\varphi| dx \\ &\leq \|p(t)\|_{V_\varepsilon} \|\varphi\|_{V_\varepsilon} + \|a\|_{L^\infty(Q_\varepsilon)} \|p(t)\|_{V_\varepsilon} \|\varphi\|_{V_\varepsilon} \\ &\quad + \|v(t)\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \|\varphi\|_{V_\varepsilon} \\ &\leq (1 + \|a\|_{L^\infty(Q_\varepsilon)}) \left[\|p(t)\|_{V_\varepsilon} + \|v(t)\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \right] \|\varphi\|_{V_\varepsilon}. \end{aligned}$$

Por tanto, para todo $t \in [0, T]$

$$\|p_t(t)\|_{V_\varepsilon'} \leq (1 + \|a\|_{L^\infty(Q_\varepsilon)}) \left[\|p(t)\|_{V_\varepsilon} + \|v(t)\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \right];$$

elevando al cuadrado ambos lados e integrando de 0 a T

$$\int_0^T \|p_t(t)\|_{V'_\varepsilon}^2 \leq 2(1 + \|a\|_{L^\infty(Q_\varepsilon)})^2 \left[\int_0^T \|p(t)\|_{V_\varepsilon}^2 + \int_0^T \|v(t)\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 \right].$$

En consecuencia,

$$\|p_t\|_{L^2(0,T;V'_\varepsilon)}^2 \leq 2(1 + \|a\|_{L^\infty(Q_\varepsilon)})^2 \left[T\|p\|_{L^\infty(0,T;V_\varepsilon)}^2 + \|v\|_{L^2(Q_\varepsilon)}^2 \right].$$

Entonces, $p_t \in L^2(0, T; V'_\varepsilon)$ y

$$\begin{aligned} \|p_t\|_{L^2(0,T;V'_\varepsilon)} &\leq \sqrt{2}(1 + \|a\|_{L^\infty(Q_\varepsilon)})(T^{1/2} + 1) \left[T\|p\|_{L^\infty(0,T;V_\varepsilon)} + \|v\|_{L^2(Q_\varepsilon)} \right] \\ &\leq e^{2(1+\|a\|_{L^\infty(Q_\varepsilon)})(T^{1/2}+1)} \left[e^{(2+T\|a\|_{L^\infty(Q_\varepsilon)})} \left(\|p^0\|_{V_\varepsilon} + \|v\|_{L^2(Q_\varepsilon)} \right) + \|v\|_{L^2(Q_\varepsilon)} \right] \\ &\leq e^{[2(1+\|a\|_{L^\infty(Q_\varepsilon)})(T^{1/2}+1)+2+T\|a\|_{L^\infty(Q_\varepsilon)}+2]} \left[\|p^0\|_{V_\varepsilon} + \|v\|_{L^2(Q_\varepsilon)} \right] \\ &\leq e^{[2(T+T^{1/2}+1)\|a\|_{L^\infty(Q_\varepsilon)}+2T^{1/2}+6]} \left[\|p^0\|_{V_\varepsilon} + \|v\|_{L^2(Q_\varepsilon)} \right] \\ &= e^{2[(T+T^{1/2}+1)\|a\|_{L^\infty(Q_\varepsilon)}+(T^{1/2}+3)]} \left[\|p^0\|_{V_\varepsilon} + \|v\|_{L^2(Q_\varepsilon)} \right]. \end{aligned}$$

Con lo cual, concluimos la demostración. ■

3.4. Controlabilidad aproximada de ecuaciones semi-lineales

El principal objetivo de esta sección es mostrar que (3.1) posee la propiedad controlabilidad aproximada. Este resultado será consecuencia del resultado de controlabilidad a cero para el sistema (3.4) que a continuación obtendremos.

Comenzamos el estudio de la controlabilidad a cero del sistema (3.4) asumiendo que $f \in C^1(\mathbb{R})$. Entonces, en este caso, definamos

$$G(x, t; s) = \begin{cases} \frac{f(y^*(x, t) + s) - f(y^*(x, t))}{s} & \text{si } s \neq 0, \\ f'(y^*(x, t)) & \text{si } s = 0. \end{cases} \quad (3.13)$$

Observe que G es una función continua en la variable s en todo \mathbb{R} ; además,

$$G \in L^\infty(\Omega_\varepsilon \times (0, T)) \quad \text{y} \quad \|G(s)\|_{L^\infty(\Omega_\varepsilon \times (0, T))} \leq K, \quad \forall s \in \mathbb{R} \quad (3.14)$$

donde K es la constante de Lipschitz correspondiente a f . Así, (3.4) se puede escribir de la siguiente manera

$$\begin{cases} p_t - \Delta p + G(x, t; p(x, t))p = v1_{\omega_\varepsilon} & \text{en } Q_\varepsilon, \\ p = 0 & \text{en } [\partial\Omega \times (0, \varepsilon)] \times (0, T), \\ \frac{\partial p}{\partial \vec{n}} = 0 & \text{en } \Gamma_\varepsilon^\pm \times (0, T), \\ p(x, 0) = p^0(x) & \text{en } \Omega_\varepsilon. \end{cases} \quad (3.15)$$

Así, utilizando un argumento del punto fijo, se demostrará que

Teorema 3.3. *Para todo $T > 0$ y $p^0 \in V_\varepsilon$, existe un control v_ε tal que la correspondiente solución de (3.15) satisface*

$$p(x, T) = 0, \quad \forall x \in \Omega_\varepsilon.$$

En la demostración del Teorema 3.3 aplicaremos el siguiente resultado para el sistema:

$$\begin{cases} p_t - \Delta p + a(x', x_n, t)p = v1_{\omega_\varepsilon} & \text{en } Q_\varepsilon, \\ p = 0 & \text{en } [\partial\Omega \times (0, \varepsilon)] \times (0, T), \\ \frac{\partial p}{\partial \vec{n}} = 0 & \text{en } \Gamma_\varepsilon^\pm \times (0, T), \\ p(x, 0) = p^0(x) & \text{en } \Omega_\varepsilon. \end{cases} \quad (3.16)$$

donde $a \in L^\infty(Q_\varepsilon)$.

Teorema 3.4. *Para todo $T > 0$ y $p^0 \in V_\varepsilon$, existe un control $v \in L^2(\omega_\varepsilon \times (0, T))$ tal que la correspondiente solución de (3.16) satisface*

$$p(x, T) = 0, \quad \forall x \in \Omega_\varepsilon,$$

y

$$\|v\|_{L^2(\omega_\varepsilon \times (0, T))} \leq C\|p^0\|_{V_\varepsilon}$$

donde C es una constante que no depende de ε ni de a .

La demostración del Teorema 3.4 se puede ver en [29] en la página 297.

Demostración del Teorema 3.3. Supongamos que $p^0 \in V_\varepsilon$. Sea $Z = C([0, T]; L^2(\Omega_\varepsilon))$. Para cada $z \in Z$ consideremos el siguiente sistema lineal:

$$\begin{cases} p_t - \Delta p + G(x, t; z(x, t))p = v1_{\omega_\varepsilon} & \text{en } Q_\varepsilon, \\ p = 0 & \text{en } [\partial\Omega \times (0, \varepsilon)] \times (0, T), \\ \frac{\partial p}{\partial \vec{n}} = 0 & \text{en } \Gamma_\varepsilon^\pm \times (0, T), \\ p(x, 0) = p^0(x) & \text{en } \Omega_\varepsilon. \end{cases} \quad (3.17)$$

Hacemos $G(x, t; z(x, t)) = a_z(x, t)$ y aplicamos el Teorema 3.4; entonces, existe $v_z \in L^2(\omega_\varepsilon \times (0, T))$ tal que la correspondiente solución p_z de (3.17) satisface

$$p_z(x, T) = 0, \text{ en } \Omega_\varepsilon \quad \text{y} \quad \|v_z\|_{L^2(\omega_\varepsilon \times (0, T))} \leq C\|p^0\|_{V_\varepsilon}, \quad (3.18)$$

donde C es una constante que no depende de ε ni de z . Ahora bien, sabemos que $p_z \in C([0, T]; L^2(\Omega_\varepsilon))$ y por las estimaciones del Lema 3.3 tenemos que

$$\|p_z\|_Z \leq K_0 (\|p^0\|_{V_\varepsilon} + \|v_z\|_{L^2(\omega_\varepsilon \times (0, T))}),$$

donde $K_0 = e^{2[T^{1/2} + (T+T^{1/2}+1)K+3]}$. Entonces,

$$\|p_z\|_Z \leq C\|p^0\|_{V_\varepsilon} \quad \text{y} \quad \|v_z\|_{L^2(\omega_\varepsilon \times (0, T))} \leq C\|p^0\|_{V_\varepsilon}, \quad (3.19)$$

con C independiente de z y de ε . Dado $v \in L^2(\omega_\varepsilon \times (0, T))$, $p_z \in Z$ la solución de (3.17) correspondiente a v (para simplificar la notación, omitiremos la dependencia sobre z). Con esta notación en mente, ahora para cada $z \in Z$

$$U(z) = \{v \in L^2(\omega_\varepsilon \times (0, T)) : p_v(\cdot, T) = 0, \|v\|_{L^2(\omega_\varepsilon \times (0, T))} \leq C\|p^0\|_{V_\varepsilon}\}$$

y

$$\Lambda(z) = \{p_z : v \in U(z), \|p_z\|_Z \leq C\|p^0\|_{V_\varepsilon}\},$$

con C independiente de z y de ε .

Introducimos la aplicación multivaluada sobre Z

$$z \mapsto \Lambda(z).$$

Observe que la demostración queda concluída si logramos verificar que esta aplicación posee al menos un punto fijo p . Para esto probaremos que una versión para

espacios de Banach del Teorema del punto fijo de Kakutani debida a Fan y Glicksberg (ver [30]) puede ser aplicada a Λ . Primero, de (3.19) tenemos que $\Lambda(z) \neq \emptyset$ para toda $z \in Z$. Además, no es difícil ver que $\Lambda(z)$ es uniformemente acotado cerrado y convexo en Z . Ahora bien, por el Lema 3.3, tenemos que

$$\|p\|_{L^\infty(0,T;V_\varepsilon)} + \|p_t\|_{L^2(0,T;V'_\varepsilon)} \leq C \quad (3.20)$$

donde C es independiente de z . Por tanto, existe un subconjunto compacto \mathcal{K} de Z tal que

$$\Lambda(z) \subset \mathcal{K}, \quad \forall z \in Z \quad (3.21)$$

(ver [27], pág. 85).

Con esto, solamente falta probar que Λ es hemi-continua superiormente, esto es, que la función a valores reales

$$z \in Z \rightarrow \sup_{p \in \Lambda(z)} \langle \mu, p \rangle$$

es semi-continua superiormente para cada funcional lineal y acotado $\mu \in Z'$. En otras palabras, probaremos que

$$B_{\alpha,\mu} = \{z \in Z : \sup_{y \in \Lambda(z)} \langle \mu, y \rangle \geq \alpha\}$$

es un subconjunto cerrado de Z para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ y toda $\mu \in Z'$. Así, sea $\{z_n\}$ una sucesión en $B_{\alpha,\mu}$ tal que

$$z_n \rightarrow z \quad \text{in } Z.$$

Nuestro objetivo es mostrar que $z \in B_{\alpha,\mu}$. Primero notamos que

$$z_n \rightarrow z \quad \text{fuertemente en } L^2(Q_\varepsilon);$$

en consecuencia, existe una subsucesión $\{z_{n_k}\}$ tal que

$$z_{n_k}(x, t) \rightarrow z(x, t), \quad \text{casi en todas partes en } Q_\varepsilon.$$

Luego, puesto que en este caso $G(x, t; s)$ es continua en la variable s , tenemos que

$$G(x, t; z_{n_k}(x, t)) \rightarrow G(x, t; z(x, t)) \quad (3.22)$$

casi en todas partes en Q_ε . Ahora bien, todos los conjuntos $\Lambda(z_n)$ son compactos, ya que se cumple (3.21) y son cerrados para toda n ; entonces, se puede concluir que

$$\alpha \leq \sup_{p \in \Lambda(z_{n_k})} \langle \mu, p \rangle = \langle \mu, p_k \rangle, \quad (3.23)$$

para algún $p_k \in \Lambda(z_{n_k})$. De la definición de $\Lambda(z_{n_k})$ y $U(z_{n_k})$ existe $v_k \in L^2(\omega_\varepsilon \times (0, T))$ tal que

$$\partial_t p_k - \Delta p_k + G(x, t; z_{n_k}(x, t))p_k = v_k 1_{\omega_\varepsilon} \quad \text{en } Q_\varepsilon.$$

Además,

$$\|v_k\|_{L^2(\omega_\varepsilon \times (0, T))} \leq C \|p^0\|_{V_\varepsilon}$$

y

$$\|p_k\|_Z \leq C \|p^0\|_{V_\varepsilon}, \quad \forall k.$$

Por lo tanto, existen subsucesiones $\{p_k\}$, $\{v_k\}$ y funciones $\tilde{p} \in Z$ y $\tilde{v} \in L^2(\omega_\varepsilon \times (0, T))$ tal que

$$p_k \rightarrow \tilde{p} \quad \text{fuertemente en } Z, \quad (3.24)$$

ya que se cumple (3.21), con $p_k(T) = 0$ y

$$v_k \rightharpoonup \tilde{v} \quad \text{débilmente en } L^2(\omega_\varepsilon \times (0, T)). \quad (3.25)$$

Además, de (3.20), se tiene que

$$\nabla p_k \rightharpoonup \nabla \tilde{p} \quad \text{débilmente}^* \text{ en } L^\infty(0, T; L^2(\Omega_\varepsilon))$$

y

$$\partial_t p_k \rightharpoonup \tilde{p}_t \quad \text{débilmente en } L^2(0, T; V'_\varepsilon).$$

Es fácil probar que

$$\tilde{p}_t - \Delta \tilde{p} + G(x, t; z)p = \tilde{v} 1_{\omega_\varepsilon}$$

en el sentido de distribuciones y

$$\|\tilde{p}(\cdot, T)\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} = 0.$$

Por tanto, $\tilde{v} \in U_z$ y $\tilde{p} \in \Lambda(z)$. Entonces, tomando el límite en (3.23) concluimos que

$$\alpha \leq \langle \mu, \tilde{p} \rangle \leq \sup_{p \in \Lambda(z)} \langle \mu, p \rangle,$$

es decir $z \in B_{\alpha, \mu}$. Con lo cual se concluye la demostración del Teorema 3.3. ■

En el caso que f es solamente globalmente Lipschitz consideremos la sucesión de funciones (ρ_n) tal que

$$\rho_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}), \quad \text{supp } \rho_n \subset B_{1/n}(0), \quad \int_{\mathbb{R}} \rho_n = 1 \quad \text{y} \quad \rho_n \geq 0 \quad \text{en } \mathbb{R},$$

es decir, (ρ_n) es una sucesión regularizante. Se puede verificar que las $\rho_n * f$ son funciones globalmente Lipschitz y que están en $C^1(\mathbb{R})$, donde la constante de Lipschitz es la misma para toda n (constante de Lipschitz correspondiente a f). En efecto,

$$\begin{aligned} |(\rho_n * f)(x) - (\rho_n * f)(y)| &= \left| \int_{\mathbb{R}} \rho_n(x-u)f(u) du - \int_{\mathbb{R}} \rho_n(y-u)f(u) du \right| \\ &= \int_{\mathbb{R}} |f(x-u) - f(y-u)|\rho_n(u) du \leq K|x-y|. \end{aligned}$$

y para ver que $\rho_n * f$ está en $C^1(\mathbb{R})$ (ver, por ejemplo [5] pág. 69). Ahora bien, sea $\delta > 0$, entonces,

$$|f(x-y) - f(x)| < \delta, \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ y } |y| < \delta/K.$$

Luego,

$$\begin{aligned} |(\rho_n * f)(x) - f(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}} |f(x-y) - f(x)|\rho_n(y) dy \\ &= \int_{B(0,1/n)} |f(x-y) - f(x)|\rho_n(y) dy. \end{aligned}$$

Por lo tanto, para $n > K/\delta$ y para todo x en \mathbb{R} , tenemos que

$$|(\rho_n * f)(x) - f(x)| \leq \delta \int_{\mathbb{R}} \rho_n = \delta.$$

En consecuencia, existe una sucesión (f_n) de funciones globalmente Lipschitz en $C^1(\mathbb{R})$ tal que

$$f_n \rightarrow f \quad \text{uniformemente en } \mathbb{R}.$$

Corolario 3.2. *Para todo $T > 0$ y $p^0 \in L^2(\Omega_\varepsilon)$, existe un control v_ε tal que la correspondiente solución de (3.4) satisfice*

$$p(x, T) = 0, \quad \forall x \in \Omega_\varepsilon.$$

Demostración. Sea $p^0 \in V_\varepsilon$. Supongamos que f es globalmente Lipschitz. Por la discusión anterior, sabemos que existe una sucesión (f_n) de funciones globalmente Lipschitz en $C^1(\mathbb{R})$ tal que

$$f_n \rightarrow f \quad \text{uniformemente en } \mathbb{R}.$$

Entonces, por el Teorema 3.3, podemos encontrar $v^n \in L^2(\omega_\varepsilon \times (0, T))$ tal que la correspondiente solución p^n de

$$\begin{cases} p_t^n - \Delta p^n + f(y^* + p^n) - f(y^*) = v 1_{\omega_\varepsilon} & \text{en } Q_\varepsilon, \\ p^n = 0 & \text{en } [\partial\Omega \times (0, \varepsilon)] \times (0, T), \\ \frac{\partial p^n}{\partial \vec{n}} = 0 & \text{en } \Gamma_\varepsilon^\pm \times (0, T), \\ p^n(x, 0) = p^0(x) & \text{en } \Omega_\varepsilon, \end{cases}$$

satisface

$$\begin{aligned} p^n(x, T) &= 0 \quad \text{en } \Omega_\varepsilon, \\ \|v^n\|_{L^2(\omega_\varepsilon \times (0, T))} &\leq C, \end{aligned}$$

y

$$\|p^n\|_Z \leq C,$$

para toda n . Además, $\{p^n\} \subset \mathcal{K}$ subconjunto compacto de Z . Por tanto,

$$v^n \rightharpoonup v \quad \text{débilmente en } L^2(\omega_\varepsilon \times (0, T))$$

y

$$p^n \rightarrow p \quad \text{fuertemente en } C([0, T]; L^2(\Omega_\varepsilon)).$$

Se puede verificar que v es el control que buscábamos. Con esto, hemos resuelto el problema de controlabilidad a cero para el sistema (3.4) con dato inicial $p^0 \in V_\varepsilon$.

Ahora, sea $p^0 \in L^2(\Omega_\varepsilon)$. Consideramos el problema

$$\begin{cases} p_t^* - \Delta p^* + f(y^* + p^*) - f(y^*) = 0 & \text{en } \Omega_\varepsilon \times (0, \frac{T}{2}), \\ p^* = 0 & \text{en } [\partial\Omega \times (0, \varepsilon)] \times (0, \frac{T}{2}), \\ \frac{\partial p^*}{\partial \vec{n}} = 0 & \text{en } \Gamma_\varepsilon^\pm \times (0, \frac{T}{2}), \\ p^*(x, 0) = p^0(x) & \text{en } \Omega_\varepsilon. \end{cases}$$

Entonces, $p^*(\cdot, t) \in V_\varepsilon$ casi en todas partes en $(0, \frac{T}{2})$, ya que $p^* \in L^2(0, T; V_\varepsilon)$. Así, $\exists t_0 \in (0, \frac{T}{2})$, tal que $p^*(x, t_0) =: p^1(x) \in V_\varepsilon$. Ahora, consideremos el problema

$$\begin{cases} p_t^{**} - \Delta p^* + f(y^* + p^{**}) - f(y^*) = v_1 \mathbf{1}_\omega & \text{en } \Omega_\varepsilon \times (t_0, T), \\ p^{**} = 0 & \text{en } [\partial\Omega \times (0, \varepsilon)] \times (t_0, T), \\ \frac{\partial p^{**}}{\partial \vec{n}} = 0 & \text{en } \Gamma_\varepsilon^\pm \times (t_0, T), \\ p^{**}(x, 0) = p^1(x) & \text{en } \Omega_\varepsilon. \end{cases}$$

Por el Teorema 3.3, tenemos que existe un control $v_1 \in L^2(\omega \times (t_0, T))$ tal que

$$p^{**}(x, T) = 0, \quad \forall x \in \Omega_\varepsilon.$$

Finalmente, definimos p y v de la siguiente manera

$$p := \begin{cases} p^*, & [0, t_0] \\ p^{**}, & [t_0, T], \end{cases} \quad v := \begin{cases} 0, & [0, t_0] \\ v_1, & [t_0, T], \end{cases}$$

Entonces, v es el control a cero que buscábamos para el caso que $p^0 \in L^2(\Omega_\varepsilon)$. ■

Es sencillo verificar que se cumple el siguiente resultado de control a trayectorias para el sistema 3.1, esto, como consecuencia del Corolario 3.2.

Corolario 3.3. *Sea $T > 0$ dado. Entonces, para todo $y^0 \in L^2(\Omega_\varepsilon)$ y cualquier trayectoria definida globalmente y^* de (3.1) (correspondiente al dato inicial $y_0^* \in L^2(\Omega_\varepsilon)$ y $h^* \in L^2(\omega_\varepsilon \times (0, T))$) existe un control $h \in L^2(\omega_\varepsilon \times (0, T))$ tal que la correspondiente solución de (3.1) está también definida globalmente en $[0, T]$ y satisface*

$$y(x, T) = y^*(x, T) \quad \text{en } \Omega_\varepsilon. \quad (3.26)$$

Ahora, nuestro objetivo es mostrar que (3.1) posee la propiedad de controlabilidad aproximada. Sea $\alpha > 0$, consideremos el siguiente sistema auxiliar:

$$\begin{cases} w_t - \Delta w + f(w) = 0 & \text{en } \Omega_\varepsilon \times (T - \alpha, T), \\ w = 0 & \text{en } [\partial\Omega \times (0, \varepsilon)] \times (T - \alpha, T), \\ \frac{\partial w}{\partial \vec{n}} = 0 & \text{en } \Gamma_\varepsilon^\pm \times (T - \alpha, T), \\ w(x, T - \alpha) = y^1(x) & \text{en } \Omega_\varepsilon. \end{cases} \quad (3.27)$$

Recordemos que estamos asumiendo que f es globalmente Lipschitz y que $f(0) = 0$. Adicionalmente, asumiremos que $y^1 \in H^2(\Omega_\varepsilon) \cap V_\varepsilon$. Sabemos que (3.27) tiene solución única $w \in C([T - \alpha, T]; L^2(\Omega_\varepsilon)) \cap L^2(T - \alpha, T; V_\varepsilon)$. Hagamos

$$u = w - y^1.$$

Entonces, $u \in C([T - \alpha, T]; L^2(\Omega_\varepsilon)) \cap L^2(T - \alpha, T; V_\varepsilon)$ y satisface

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + f(u + y^1) = \Delta y^1 & \text{en } \Omega_\varepsilon \times (T - \alpha, T), \\ u = 0 & \text{en } [\partial\Omega \times (0, \varepsilon)] \times (T - \alpha, T), \\ \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = 0 & \text{en } \Gamma_\varepsilon^\pm \times (t - \alpha, T), \\ u(x, T - \alpha) = 0 & \text{en } \Omega_\varepsilon. \end{cases} \quad (3.28)$$

Realizaremos una pequeña estimación sobre u . Multipliquemos por u a (3.28) e integremos por partes en Ω_ε , entonces

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_\varepsilon} |u|^2 dx + \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u|^2 dx + \int_{\Omega_\varepsilon} f(u + y^1)u dx = \int_{\Omega_\varepsilon} u \Delta y^1 dx.$$

Luego, por la desigualdad de Young

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_\varepsilon} |u|^2 dx + \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u|^2 dx &\leq K \int_{\Omega_\varepsilon} |u + y^1||u| dx + \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla y^1||\nabla u| dx \\ &\leq \frac{3K}{2} \int_{\Omega_\varepsilon} |u|^2 dx + \frac{K}{2} \int_{\Omega_\varepsilon} |y^1|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla y^1|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u|^2 dx \end{aligned}$$

(K es la constante de Lipschitz de f). Por lo tanto,

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_\varepsilon} |u|^2 dx \leq 3K \int_{\Omega_\varepsilon} |u|^2 dx + C(K) \|y^1\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}^2.$$

Así, para toda t en $[T - \alpha, T]$

$$e^{-3Kt} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_\varepsilon} |u|^2 dx - 3K e^{-3Kt} \int_{\Omega_\varepsilon} |u|^2 dx \leq C(K) e^{-3Kt} \|y^1\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}^2.$$

Entonces,

$$\frac{d\left(e^{-3Kt} \int_{\Omega_\varepsilon} |u|^2 dx\right)}{dt} \leq C(K, T) \|y^1\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}^2,$$

integrando ambos lados de $T - \alpha$ a T , tenemos que

$$e^{-3KT} \int_{\Omega_\varepsilon} |u(\cdot, T)|^2 dx \leq C(K, T)\alpha \|y^1\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}^2,$$

así

$$\int_{\Omega_\varepsilon} |u(\cdot, T)|^2 dx \leq C(K, T)\alpha \|y^1\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}^2.$$

En consecuencia, para toda α en $(0, T)$, se cumple

$$\|u(\cdot, T) - y^1(x)\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq C(K, T)\alpha^{1/2} \|y^1\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}. \quad (3.29)$$

Con esta sencilla estimación y el resultado de controlabilidad exacta que tenemos sobre el sistema (3.1) es posible demostrar el siguiente resultado de controlabilidad aproximada:

Teorema 3.5. *Sea $T > 0$. Supongamos que f es globalmente Lipschitz y que $f(0) = 0$. Entonces, (3.1) es controlable aproximadamente en el tiempo T .*

Demostración. Fijemos $T > 0$, $y^0 \in L^2(\Omega_\varepsilon)$, $y^1 \in H^2(\Omega_\varepsilon) \cap V_\varepsilon$ y $\delta > 0$. Nuestro objetivo es encontrar $h \in L^2(\omega_\varepsilon \times (0, T))$ tal que la correspondiente solución de (3.1), satisfice

$$\|y(\cdot, T) - y^1\| \leq \delta/2. \quad (3.30)$$

Ahora bien, por (3.29), para $\alpha > 0$ suficientemente pequeña existe $w \in C([T - \alpha, T]; L^2(\Omega_\varepsilon)) \cap L^2(T - \alpha, T; V_\varepsilon)$ solución de (3.27) tal que

$$\|w(\cdot, T) - y^1\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq \delta/2. \quad (3.31)$$

Fijemos α y w tal que (3.31) se satisfice. Sea y_1 la solución de (3.1) en $\Omega_\varepsilon \times (0, T - \alpha)$ con dato inicial y^0 y $h_1 \in L^2(\omega_\varepsilon \times (0, T - \alpha))$. Consideremos el siguiente sistema auxiliar:

$$\begin{cases} y_t - \Delta y + f(y) = h_2 1_{\omega_\varepsilon} & \text{en } \Omega_\varepsilon \times (T - \alpha, T), \\ y = 0 & \text{en } [\partial\Omega \times (0, \varepsilon)] \times (T - \alpha, T), \\ \frac{\partial y}{\partial \vec{n}} = 0 & \text{en } \Gamma_\varepsilon^\pm \times (T - \alpha, T), \\ y(x, T - \alpha) = y_1(x, T - \alpha) & \text{en } \Omega_\varepsilon. \end{cases} \quad (3.32)$$

Entonces, aplicando el Corolario 3.3 en el caso que $h^* \equiv 0$ y $y_0^* = y^1$, tenemos que existe $h_2 \in L^2(\omega_\varepsilon \times (T - \alpha, T))$ tal que la correspondiente solución de (3.32) satisface

$$y(x, T) = w(x, T) \quad \text{en } \Omega_\varepsilon.$$

Por lo tanto,

$$h(\cdot, t) = \begin{cases} h_1(\cdot, t), & \text{para } t \in (0, T - \alpha), \\ h_2(\cdot, t), & \text{para } t \in (T - \alpha, T). \end{cases}$$

tiene la propiedad deseada en el caso que $y^1 \in H^2(\Omega_\varepsilon) \cap V_\varepsilon$. Ahora bien, se sabe que $H^2(\Omega_\varepsilon) \cap V_\varepsilon$ es denso en $L^2(\Omega_\varepsilon)$, entonces, se cumple la propiedad de controlabilidad aproximada en el caso que $y^1 \in L^2(\Omega_\varepsilon)$. Esto completa la demostración. ■

Con este resultado, concluimos el estudio de la propiedad de controlabilidad aproximada del sistema (3.1); ahora, nos interesa estudiar la dependencia de este sistema con respecto a ε .

3.5. Convergencia de los ε -controles aproximados

Ahora nuestro objetivo es estudiar el comportamiento de los controles aproximados del sistema (3.1) cuando $\varepsilon \rightarrow 0$. En este sentido, es conveniente reescalar la variable x_n para trabajar, ahora, en un dominio referencia $\Omega_1 = \Omega \times (0, 1)$, independiente de ε . Así, hagamos los siguientes cambios de variables

$$\begin{cases} x_n = \varepsilon z_n, & u_\varepsilon(x', z_n, t) = y(x', \varepsilon z_n, t), \\ g_\varepsilon(x', z_n, t) = h(x', \varepsilon z_n, t), & u_\varepsilon^0 = y^0(x', \varepsilon z_n). \end{cases}$$

Con estos cambios, definimos

$$Q_1 = \Omega_1 \times (0, T), \quad \text{con } \Omega_1 = \Omega \times (0, 1)$$

y

$$\omega_1 = \omega \times (0, 1).$$

Entonces, el sistema (3.1) en términos de la nueva variable z_n se puede escribir de la siguiente forma:

$$\begin{cases} \partial_t u_\varepsilon - \Delta' u_\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2}{\partial z_n^2} u_\varepsilon + f(u_\varepsilon) = g_\varepsilon 1_{\omega_1} & \text{en } Q_1, \\ u_\varepsilon = 0 & \text{en } [\partial\Omega \times (0, 1)] \times (0, T), \\ \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \vec{n}} = 0 & \text{en } \Gamma_1^\pm \times (0, T), \\ u_\varepsilon(x, 0) = u_\varepsilon^0(x) & \text{en } \Omega_1. \end{cases} \quad (3.33)$$

Aquí, $\Gamma_1^+ = \{(x, 1) : x \in \Omega\}$ y $\Gamma_1^- = \{(x, 0) : x \in \Omega\}$. También, consideramos la versión de dimensión $(n - 1)$ del sistema (3.1):

$$\begin{cases} y_t - \Delta' y + f(y) = h 1_\omega & \text{en } Q = \Omega \times (0, T), \\ y = 0 & \text{en } \partial\Omega \times (0, T), \\ y(x, 0) = y^0(x) & \text{en } \Omega, \end{cases} \quad (3.34)$$

El principal objetivo de esta sección es encontrar las condiciones para que la propiedad de controlabilidad aproximada del sistema (3.34) pueda ser recuperada cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ de las propiedades de control aproximado del sistema (3.33). En este sentido, revisamos los resultados de control que tenemos ahora para el ε -sistema (3.33) con el fin de determinar las dependencias de los controles respecto de ε . Introduzcamos el siguiente espacio:

$$V_1 = \{\phi \in H^1(\Omega_1) : \phi = 0 \text{ en } \partial\Omega \times (0, 1)\}.$$

Sea u_ε^* una trayectoria globalmente definida solución de (3.33) (correspondiente al dato inicial $u_{\varepsilon,0}^* \in L^2(\Omega_1)$ y $g_\varepsilon^* \in L^2(\omega_1 \times (0, T))$) y sea u_ε la solución de (3.33) correspondiente al dato inicial $u_\varepsilon^0 \in L^2(\Omega_1)$ y $g_\varepsilon \in L^2(\omega_1 \times (0, T))$. Nuevamente, realizamos el siguiente cambio de variable $p_\varepsilon = u_\varepsilon - u_\varepsilon^*$ en (3.33). Luego, u_ε satisface (3.33), si y sólo si, p_ε resuelve

$$\begin{cases} \partial_t p_\varepsilon - \Delta' p_\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2}{\partial z_n^2} p_\varepsilon + f(u_\varepsilon^* + p_\varepsilon) - f(u_\varepsilon^*) = v_\varepsilon 1_{\omega_1} & \text{en } Q_1, \\ p_\varepsilon = 0 & \text{en } [\partial\Omega \times (0, 1)] \times (0, T), \\ \frac{\partial p_\varepsilon}{\partial \vec{n}} = 0 & \text{en } \Gamma_1^\pm \times (0, T), \\ p_\varepsilon(x, 0) = p_\varepsilon^0(x) & \text{en } \Omega_1, \end{cases} \quad (3.35)$$

donde $v_\varepsilon = g_\varepsilon - g_\varepsilon^*$ y $p_\varepsilon^0 = u_\varepsilon^0 - u_{\varepsilon,0}^*$.

Es fácil verificar que la versión del Corolario 3.2 para el ε -sistema (3.35) se puede escribir de la siguiente manera:

Teorema 3.6. *En el sistema (3.35). Supongamos que f es globalmente Lipschitz y la sucesión $\{p_\varepsilon^0\}_{0 < \varepsilon < 1}$ es uniformemente acotada en $L^2(\Omega_1)$. Entonces, existe un subconjunto compacto $\mathcal{K} \subset Z_1 = C([0, T]; L^2(\Omega_1))$ tal que para toda $0 < \varepsilon < 1$ existe $v_\varepsilon \in L^2(\omega_1 \times (0, T))$ tal que*

$$\|v_\varepsilon\|_{L^2(\omega_1 \times (0, T))} \leq C, \quad (3.36)$$

y la correspondiente solución p_ε de (3.33) cumple que

$$p_\varepsilon(x, T) = 0, \quad \text{en } \Omega_1 \text{ y } p_\varepsilon \in \mathcal{K}, \quad \forall \varepsilon \in (0, 1), \quad (3.37)$$

donde C es una constante independiente de ε .

El conjunto compacto \mathcal{K} surge en el argumento del punto fijo que se aplicó en la demostración del Teorema 3.3, y la existencia de C es consecuencia de que la sucesión $\{p_\varepsilon^0\}_{0 < \varepsilon < 1}$ es uniformemente acotada en $L^2(\Omega_1)$ y de (3.18).

Para nuestros fines asumimos que $g_\varepsilon^* \equiv 0$ y, que $u_\varepsilon^* \equiv w_\varepsilon$, donde w_ε es la solución en $C([0, T]; L^2(\Omega_1)) \cap L^2(0, T; V_1)$ del ε -sistema:

$$\begin{cases} \partial_t w_\varepsilon - \Delta' w_\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2}{\partial z_n^2} w_\varepsilon + f(w_\varepsilon) = 0 & \text{en } Q_1, \\ w_\varepsilon = 0 & \text{en } [\partial\Omega \times (0, 1)] \times (0, T), \\ \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \vec{n}} = 0 & \text{en } \Gamma_1^\pm \times (0, T), \\ w_\varepsilon(x, 0) = w^0 & \text{en } \Omega_1. \end{cases} \quad (3.38)$$

con dato inicial $w^0 \in L^2(\Omega_1)$.

Además, sea w en $C([0, T]; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ la solución del sistema límite:

$$\begin{cases} w_t - \Delta' w + f(w) = 0 & \text{en } Q, \\ w = 0 & \text{en } \partial\Omega \times (0, T), \\ w(x, 0) = w^0(x) & \text{en } \Omega, \end{cases} \quad (3.39)$$

con dato inicial $w^0 \in L^2(\Omega)$.

En este punto, comentaremos con respecto a cómo fueron generados los controles v_ε . Los controles v_ε son, por construcción (ver [29]), los controles del sistema linealizado:

$$\begin{cases} \partial_t q_\varepsilon - \Delta' q_\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2}{\partial z_n^2} q_\varepsilon + G(x, t; p_\varepsilon) q_\varepsilon = v_\varepsilon 1_{\omega_1} & \text{en } Q_1, \\ q_\varepsilon = 0 & \text{en } [\partial\Omega \times (0, 1)] \times (0, T), \\ \frac{\partial q_\varepsilon}{\partial \vec{n}} = 0 & \text{en } \Gamma_1^\pm \times (0, T), \\ q_\varepsilon(x, 0) = p_\varepsilon^0(x) & \text{en } \Omega_1, \end{cases} \quad (3.40)$$

los cuales coinciden con $v_\varepsilon = \hat{\eta}_\varepsilon$, la solución del sistema adjunto:

$$\begin{cases} -\partial_t \eta_\varepsilon - \Delta' \eta_\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2}{\partial z_n^2} \eta_\varepsilon + G(x, t; p_\varepsilon) \eta_\varepsilon = 0 & \text{en } Q_1, \\ \eta_\varepsilon = 0 & \text{en } [\partial\Omega \times (0, 1)] \times (0, T), \\ \frac{\partial \eta_\varepsilon}{\partial \vec{n}} = 0 & \text{en } \Gamma_1^\pm \times (0, T), \\ \eta_\varepsilon(x, T) = \eta_\varepsilon^0(x) & \text{en } \Omega_1, \end{cases} \quad (3.41)$$

correspondiente al dato inicial $\hat{\eta}_\varepsilon^0$, el mínimo del funcional

$$\tilde{J}_\varepsilon(\eta^0) = \frac{1}{2} \|\eta^0\|_{\tilde{H}_\varepsilon}^2 + \int_{\Omega_1} p_\varepsilon^0 \eta_\varepsilon(x, 0) dx' dz_n,$$

con η_ε solución de (3.41) con dato inicial $\eta^0 \in \tilde{H}_\varepsilon$, donde \tilde{H}_ε es la completación de $L^2(\Omega_1)$ con respecto a la norma

$$\|\eta^0\|_{\tilde{H}_\varepsilon} = \left(\int_0^T \int_{\omega_1} \eta_\varepsilon^2 dx' dz_n dt \right)^{1/2}.$$

Ahora, sea $h \in L^2(\omega \times (0, T))$ el control a cero del sistema:

$$\begin{cases} p_t - \Delta' p + f(w + y) - f(w) = h 1_\omega & \text{en } Q, \\ p = 0 & \text{en } \partial\Omega \times (0, T), \\ p(x, 0) = p^0(x) & \text{en } \Omega, \end{cases} \quad (3.42)$$

donde $p = y - w$ y $p^0 = y^0 - w^0$ con y solución al sistema límite (3.34) correspondiente al dato inicial y^0 (y satisface (3.34), si sólo si, p resuelve (3.42)). Aquí, h es, por

construcción, el control a cero del sistema linealizado:

$$\begin{cases} q_t - \Delta' q + G(x', t; p)q = h1_\omega & \text{en } Q, \\ q = 0 & \text{en } \partial\Omega \times (0, T), \\ q(x, 0) = p^0(x) & \text{en } \Omega, \end{cases} \quad (3.43)$$

el cual coincide con $h = \hat{\eta}$ solución del sistema adjunto:

$$\begin{cases} -\eta_t - \Delta' \eta + G(x', t; p)\eta = 0 & \text{en } Q, \\ \eta = 0 & \text{en } \partial\Omega \times (0, T), \\ \eta(x, T) = \eta^0(x) & \text{en } \Omega, \end{cases} \quad (3.44)$$

correspondiente al dato inicial $\hat{\eta}^0$, el mínimo del funcional

$$J_0(\eta^0) = \frac{1}{2} \|\eta^0\|_{H_0}^2 + \int_{\Omega_1} p^0(x') \eta(x', 0) dx',$$

con η solución de (3.44) con dato inicial $\eta^0 \in H_0$, donde H_0 es la completación de $L^2(\Omega_1)$ con respecto a la norma

$$\|\eta^0\|_{H_0} = \left(\int_0^T \int_{\omega} \eta^2 dx' dt \right)^{1/2}.$$

Recordamos que en el caso que $\{p_\varepsilon^0\}_{0 < \varepsilon < 1}$ es uniformemente acotada en $L^2(\Omega_1)$, tenemos que

$$\|v_\varepsilon\|_{L^2(\omega_1 \times (0, T))} \leq C, \forall \varepsilon \in (0, 1).$$

Ahora, por lo comentado anteriormente, v_ε es la restricción a $\omega_1 \times (0, T)$ de la solución $\hat{\eta}_\varepsilon$ solución del sistema adjunto (3.41) con el minimizador de \tilde{J}_ε como dato inicial. En consecuencia, existe una subsucesión tal que

$$\int_0^1 \hat{\eta}_\varepsilon(x', z_n, t) dz_n \rightharpoonup h(x', t) \text{ débilmente en } L^2(\omega \times (0, T)), \quad (3.45)$$

cuando ε tiende a cero.

Nuestro objetivo es mostrar que $h(x', t)$ coincide en $\omega \times (0, T)$ con el minimizador de J_0 en H_0 . Para lograr esto, necesitamos el siguiente resultado:

Lema 3.4. *Supongamos que f es globalmente Lipschitz y que $f(0) = 0$. Sea $(p_\varepsilon^0) \subset L^2(\Omega_1)$ una sucesión de datos iniciales para el sistema (3.35) tal que*

$$\int_0^1 p_\varepsilon^0(x', z_n) dz_n \rightarrow p^0(x') \text{ fuertemente en } L^2(\Omega). \quad (3.46)$$

Sea $(w_\varepsilon) \subset C([0, T]; L^2(\Omega_1)) \cap L^2(0, T; V_1)$ una sucesión de soluciones del ε -sistema (3.38) tal que

$$\int_0^1 w_\varepsilon(x', z_n, t) dz_n \rightarrow w(x', t) \text{ fuertemente en } L^2(Q). \quad (3.47)$$

Entonces, el límite $h(x', t)$ en (3.45) coincide en $\omega \times (0, T)$ con una solución $\eta = \eta(x', t)$ del sistema límite adjunto (3.44). También, para toda $0 < T' < T$ los siguientes resultados de convergencia se cumplen:

$$\int_0^1 \hat{\eta}_\varepsilon(x', z_n, t) dz_n \rightarrow \eta(x', t) \text{ débilmente en } L^2(\Omega \times (0, T')), \quad (3.48)$$

$$\int_0^1 \hat{\eta}_\varepsilon(x', z_n, T') dz_n \rightarrow \eta(x', T') \text{ fuertemente en } L^2(\Omega), \quad (3.49)$$

cuando ε tiende a cero.

Demostración. En [29], mostraron que existe una constante $C > 0$, independiente de ε , tal que

$$\int_0^{T'} \int_{\Omega_1} \hat{\eta}_\varepsilon^2 dx' dz_n dt \leq C \int_0^T \int_{\omega \times (0,1)} v_\varepsilon dx' dz_n dt, \quad (3.50)$$

para toda $T' < T$, donde v_ε es el control del sistema (3.35). Entonces, la sucesión $\{\hat{\eta}_\varepsilon\}$ es acotada en $L^2(\Omega_1 \times (0, T'))$ para toda $T' < T$. Por lo tanto, la convergencia en (3.48) se cumple.

Ahora verificaremos que $\eta(x', t)$, la cual pertenece a $L^2(\Omega \times (0, T'))$ para toda $T' < T$, por (3.50), es solución del sistema límite adjunto (3.44). Para esto, integramos el sistema (3.41) con respecto a z_n en $(0, 1)$. Obtenemos que

$$\varphi_\varepsilon(x', t) = \int_0^1 \hat{\eta}_\varepsilon(x', z_n, t) dz_n$$

resuelve

$$\begin{cases} -\partial_t \varphi_\varepsilon - \Delta' \varphi_\varepsilon + \int_0^1 G(x, t; p_\varepsilon) \hat{\eta}_\varepsilon(x', z_n, t) dz_n = 0 & \text{en } Q, \\ \varphi_\varepsilon = 0 & \text{en } \partial\Omega \times (0, T), \\ \varphi_\varepsilon(x, T) = \varphi_\varepsilon^0(x) & \text{en } \Omega, \end{cases} \quad (3.51)$$

Así, es suficiente mostrar que $\int_0^1 G(x, t; p_\varepsilon) \hat{\eta}_\varepsilon(x', z_n, t) dz_n$ converge en el sentido de distribuciones en $\Omega \times (0, T)$ a $G(x', t; p) \eta(x', t)$. Consideramos la siguiente descomposición:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 G(x, t; p_\varepsilon) \hat{\eta}_\varepsilon(x', z_n, t) dz_n - G(x', t; p) \eta(x', t) \\ &= \int_0^1 [G(x, t; p_\varepsilon) - G(x', t; p)] \hat{\eta}_\varepsilon(x', z_n, t) dz_n \\ &+ G(x', t; p) \left[\int_0^1 \hat{\eta}_\varepsilon(x', z_n, t) dz_n - \eta(x', t) \right] = I_{1,\varepsilon} + I_{2,\varepsilon} \end{aligned}$$

En vista de la convergencia (3.48) y del hecho de que $G(x', t; p) \in L^\infty(\Omega \times (0, T))$, por (3.14), es inmediato ver que $I_{2,\varepsilon}$ converge débilmente a cero en $L^2(\Omega \times (0, T'))$ para toda $T' < T$. Por lo tanto, es suficiente analizar el término $I_{1,\varepsilon}$. Tenemos que

$$\begin{aligned} \|I_{1,\varepsilon}\|_{L^1(\Omega \times (0, T'))} &\leq \| \|G(x, t; p_\varepsilon) - G(x', t; p)\|_{L^2_{z_n}(0,1)} \| \hat{\eta}_\varepsilon(x', z_n, t) \|_{L^2_{z_n}(0,1)} \|_{L^1(\Omega \times (0, T'))} \\ &\leq \| \|G(x, t; p_\varepsilon) - G(x', t; p)\|_{L^2(\Omega_1 \times (0, T'))} \| \hat{\eta}_\varepsilon(x', z_n, t) \|_{L^2(\Omega_1 \times (0, T'))} \\ &\leq C \|G(x, t; p_\varepsilon) - G(x', t; p)\|_{L^2(\Omega_1 \times (0, T'))}. \end{aligned}$$

Aplicando el Teorema 3.6, es posible concluir que

$$p_\varepsilon \rightarrow p \quad \text{fuertemente en } L^2(\Omega_1 \times (0, T));$$

por lo tanto, con esto y la hipótesis (3.47), tenemos que

$$f(w_\varepsilon + p_\varepsilon) - f(w_\varepsilon) \rightarrow f(w + p) - f(w) \quad \text{fuertemente en } L^2(\Omega_1 \times (0, T)),$$

ya que f es globalmente Lipschitz. En consecuencia,

$$G(x, t; p_\varepsilon) \rightarrow G(x', t; p) \quad \text{fuertemente en } L^2(\Omega_1 \times (0, T)).$$

Con esto, se puede concluir que $\|I_{1,\varepsilon}\|_{L^1(\Omega \times (0, T'))}$ tiende a cero cuando ε tiende a cero, y así, deducir que η es solución del sistema límite adjunto (3.44).

La convergencia en (3.49) puede ser demostrada en un sentido clásico. En efecto, usando el hecho que $\varphi_\varepsilon(x', t) = \int_0^1 \hat{\eta}_\varepsilon(x', z_n, t) dz_n$ satisface (3.51), el efecto regularizante de la ecuación del calor en Ω con condiciones de frontera de Dirichlet, y el hecho que $\hat{\eta}_\varepsilon(x', z_n, t)$ es uniformemente acotada en $L^2(\Omega_1 \times (0, T'))$ para toda $T' < T$, deducimos que $\varphi_\varepsilon(x', t)$ es uniformemente acotada en $L^2(0, T'; H^2(\Omega)) \cap H^1(0, T'; L^2(\Omega))$ para toda $T' < T$. Ahora bien, un resultado clásico de compacidad (ver [27]) nos permite demostrar que la convergencia de φ_ε hacia η se cumple en realidad en $C([0, T']; H^1(\Omega))$ para toda $0 < T' < T$. En particular, (3.49) se cumple. Esto completa la demostración del lema. \blacksquare

Como consecuencia de este Lema, tenemos el siguiente resultado, para el ε -sistema:

$$\begin{cases} \partial_t p_\varepsilon - \Delta' p_\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2}{\partial z_n^2} p_\varepsilon + f(w_\varepsilon + p_\varepsilon) - f(w_\varepsilon) = v_\varepsilon 1_{\omega_1} & \text{en } Q_1, \\ p_\varepsilon = 0 & \text{en } [\partial\Omega \times (0, 1)] \times (0, T), \\ \frac{\partial p_\varepsilon}{\partial \vec{n}} = 0 & \text{en } \Gamma_1^\pm \times (0, T), \\ p_\varepsilon(x, 0) = p_\varepsilon^0(x) & \text{en } \Omega_1. \end{cases} \quad (3.52)$$

Teorema 3.7. *Supongamos que se cumplen las hipótesis del Lema 3.4. Entonces, existe una sucesión v_ε de controles a cero del ε -sistema semilineal (3.52) tal que, después de la extracción de una subsucesión,*

$$\int_0^1 v_\varepsilon(x', z_n, t) dz_n \rightarrow h(x', t) \text{ fuertemente en } L^2(\omega \times (0, T)) \text{ cuando } \varepsilon \rightarrow 0 \quad (3.53)$$

donde $h = h(x', t)$ es el control a cero del sistema semilineal de dimensión $(n - 1)$ (3.42) con dato inicial p^0 .

Además, correspondiente a esta subsucesión,

$$\int_0^1 p_\varepsilon dz_n \rightarrow p, \text{ en } C([0, T]; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H_0^1(\Omega)). \quad (3.54)$$

Demostración. Sea η la solución de (3.44) obtenida en el Lema 3.4 correspondiente al dato inicial $\eta^0 \in H_0$. Mostraremos que η^0 es justo el minimizador de J_0 en H_0 . Para lograr esto, primero observamos que

$$\int_{\Omega_1} p_\varepsilon^0 \hat{\eta}_\varepsilon(x, 0) dx' dz_n \rightarrow \int_{\Omega} p^0 \eta(0) dx' \quad (3.55)$$

cuando ε tiende a cero. En efecto, si usamos la descomposición

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1} p_\varepsilon^0 \hat{\eta}_\varepsilon(x, 0) dx' dz_n - \int_{\Omega} p^0 \eta(0) dx' &= \int_{\Omega_1} [p_\varepsilon^0(x', z_n) - p^0(x')] \hat{\eta}_\varepsilon(x', z_n, 0) dx' dz_n \\ &+ \int_{\Omega} p^0(x') \left[\int_0^1 \hat{\eta}_\varepsilon(x', z_n, 0) dz_n - \eta(x', 0) \right] dx' \\ &= I_{1,\varepsilon} + I_{2,\varepsilon}. \end{aligned}$$

El primer término $I_{1,\varepsilon}$ tiende a cero ya que $p_\varepsilon^0(x', z_n) - p^0(x')$ tiende a cero fuertemente en $L^2(\Omega_1)$ por hipótesis y $\hat{\eta}_\varepsilon$ es uniformemente acotada en $L^2(\Omega_1)$. Con el fin de pasar al límite en el segundo término, es suficiente observar que $\int_0^1 \hat{\eta}_\varepsilon(x', z_n, 0) dz_n - \eta(x', 0)$ converge fuertemente en $L^2(\Omega_1)$ como fue probado en el Lema anterior.

Por otro lado, por la convergencia débil en (3.48), tenemos que

$$\int_0^T \int_{\omega} \eta^2 dx' dt \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^T \int_{\omega} \left[\int_0^1 \hat{\eta}_\varepsilon dz_n \right]^2 dx' dt \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^T \int_{\omega} \int_0^1 \hat{\eta}_\varepsilon^2 dz_n dx' dt$$

En consecuencia, por definición de \tilde{J}_ε y J_0 y por (3.55)

$$J_0(\eta^0) \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \tilde{J}_\varepsilon(\hat{\eta}_\varepsilon^0). \quad (3.56)$$

Para ver que η^0 es el mínimo de J_0 en H_0 mostraremos que

$$J_0(\eta^0) \leq J_0(\rho^0), \quad \forall \rho^0 \in H_0. \quad (3.57)$$

Ahora bien, por densidad de $L^2(\Omega)$ en H_0 y la continuidad de J_0 en H_0 , es suficiente verificar que esto se cumple para todo $\rho^0 \in L^2(\Omega)$. Para demostrar (3.57), considerando que se cumple (3.56), y que $\hat{\eta}_\varepsilon^0$ es el mínimo de \tilde{J}_ε en \tilde{H}_ε , es suficiente mostrar que

$$J_0(\rho^0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \hat{J}_\varepsilon(\rho^0), \quad \forall \rho^0 \in L^2(\Omega), \quad (3.58)$$

ya que, de esto, se puede deducir que

$$J_0(\eta^0) \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \tilde{J}_\varepsilon(\hat{\eta}_\varepsilon^0) \leq \lim_{\varepsilon} \hat{J}_\varepsilon(\rho^0) = J_0(\rho^0).$$

para todo ρ^0 en $L^2(\Omega)$. Aquí, usamos el hecho que ρ^0 puede ser considerada como una función de $L^2(\Omega_1)$ y por lo tanto de \tilde{H}_ε .

Sea ρ_ε la solución de (3.41) con $\rho^0 = \rho^0(x') \in H_0$ y sea ρ la solución de (3.44) también con dato inicial ρ^0 . Mostraremos que

$$\int_0^T \int_{\omega \times (0,1)} \rho_\varepsilon^2 dx' dz_n dt \rightarrow \int_0^T \int_{\omega} \rho^2 dx' dt \quad (3.59)$$

y

$$\int_{\Omega \times (0,1)} p_\varepsilon(x', z_n) \rho_\varepsilon^2(x', z_n, 0) dx' dz_n \rightarrow \int_0^T \int_{\omega} p^0(x') \rho(x', 0) dx' \quad (3.60)$$

cuando ε tiende a cero, esto claramente implica (3.58).

Hagamos $\phi_\varepsilon = \rho_\varepsilon - \rho$. Entonces, ϕ_ε satisface

$$\begin{cases} -\partial_t \phi_\varepsilon - \Delta' \phi_\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2}{\partial z_n^2} \phi_\varepsilon + G(x, t; p_\varepsilon) \phi_\varepsilon = [G(x', t, p) - G(x, t; p_\varepsilon)] \rho & \text{en } Q_1, \\ \phi_\varepsilon = 0 & \text{en } [\partial\Omega \times (0, 1)] \times (0, T), \\ \frac{\partial \phi_\varepsilon}{\partial \vec{n}} = 0 & \text{en } \Gamma_1^\pm \times (0, T), \\ \phi_\varepsilon(x, T) = 0 & \text{en } \Omega_1, \end{cases}$$

Así, si multiplicamos esta ecuación por ϕ_ε e integramos por partes en Ω_1 , obtenemos

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_1} |\phi_\varepsilon|^2 dx' dz_n + \int_{\Omega_1} |\nabla' \phi_\varepsilon|^2 dx' dz_n + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\Omega_1} \left| \frac{\partial}{\partial z_n} \phi_\varepsilon \right|^2 dx' dz_n + \\ & \int_{\Omega_1} G(x, t; p_\varepsilon) |\phi_\varepsilon|^2 dx' dz_n = \int_{\Omega_1} [G(x', t, p) - G(x, t; p_\varepsilon)] \rho \phi_\varepsilon dx' dz_n. \end{aligned} \quad (3.61)$$

Ahora bien, observe que

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{\Omega_1} [G(x', t; p) - G(x, t; p_\varepsilon)] \rho \phi_\varepsilon \, dx' dz_n \right| \\
&= \left| \int_{\Omega} \rho \left(\int_0^1 [G(x', t; p) - G(x, t; p_\varepsilon)] \phi_\varepsilon \, dz_n \right) dx' \right| \\
&\leq \|\rho\|_{L^2(\Omega)} \left\| \int_0^1 [G(x', t; p) - G(x, t; p_\varepsilon)] \phi_\varepsilon \, dz_n \right\|_{L^2(\Omega)} \\
&= \|\rho\|_{L^2(\Omega)} \left(\int_{\Omega} \left(\int_0^1 |G(x', t; p) - G(x, t; p_\varepsilon)| |\phi_\varepsilon| \, dz_n \right)^2 dx' \right)^{1/2} \\
&\leq \|\rho\|_{L^2(\Omega)} \left(\int_{\Omega} \int_0^1 |G(x', t; p) - G(x, t; p_\varepsilon)|^2 dz_n dx' \right)^{1/2} \|\phi_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_1)} \\
&\leq \|\rho\|_{L^2(\Omega)} \|G(x', t; p) - G(x, t; p_\varepsilon)\|_{L^2(\Omega_1)} \|\phi_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_1)}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{\Omega_1} [G(x', t; p) - G(x, t; p_\varepsilon)] \rho \phi_\varepsilon \, dx' dz_n \right| \\
&\leq \left(\frac{\|G(x', t; p) - G(x, t; p_\varepsilon)\|_{L^2(\Omega_1)}}{2} \right) \|\rho\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))} \\
&+ \left(\frac{\|G(x', t; p) - G(x, t; p_\varepsilon)\|_{L^2(\Omega_1)}}{2} \right) \|\phi_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_1)}^2.
\end{aligned}$$

Recordemos que

$$\|G(x, t; p_\varepsilon)\|_{L^\infty(\Omega_1 \times (0, T) \times \mathbb{R})} \leq K, \quad \forall \varepsilon > 0,$$

donde K es la constante de Lipschitz de f . Luego, existe una constante $C(K) > 0$ independiente de ε , tal que

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{\Omega_1} [G(x', t; p) - G(x, t; p_\varepsilon)] \rho \phi_\varepsilon \, dx' dz_n \right| \\
&\leq \left(\frac{\|G(x', t; p) - G(x, t; p_\varepsilon)\|_{L^2(\Omega_1)}}{2} \right) \|\rho\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))} \\
&+ C(K) \|\phi_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_1)}^2.
\end{aligned} \tag{3.62}$$

Así, aplicando (3.62) en (3.61), tenemos que

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{\Omega_1} |\phi_\varepsilon|^2 dx' dz_n + 2C(K) \|\phi_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_1)}^2 \\ & \geq -(\|G(x', t; p) - G(x, t; p_\varepsilon)\|_{L^2(\Omega_1)}) \|\rho\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))}; \end{aligned}$$

al multiplicar ambos lados por $e^{2C(K)t}$, se deduce que

$$\frac{d}{dt} \left(e^{2C(K)t} \int_{\Omega_1} |\phi_\varepsilon|^2 dx' dz_n \right) \geq -e^{2C(K)t} \|G(x', t; p) - G(x, t; p_\varepsilon)\|_{L^2(\Omega_1)} \|\rho\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))};$$

entonces, integrando de t a T y aplicando el hecho que $\phi_\varepsilon(\cdot, T) = 0$ en Ω_1 , se tiene que para todo $t \in [0, T]$, se cumple

$$-e^{2Ct} \int_{\Omega_1} |\phi_\varepsilon(t)|^2 dx' dz_n \geq - \int_t^T e^{2Cs} \|G(p) - G(p_\varepsilon)\|_{L^2(\Omega_1)} \|\rho\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))}^2 ds;$$

por lo tanto,

$$\int_{\Omega_1} |\phi_\varepsilon|^2 dx' dz_n \leq e^{2CT} \|G(p) - G(p_\varepsilon)\|_{L^1(0, T; L^2(\Omega_1))} \|\rho\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))}^2.$$

En consecuencia, $\phi_\varepsilon \rightarrow 0$ en $C([0, T]; L^2(\Omega_1))$ ya que $G(x, t; p_\varepsilon) \rightarrow G(x', t; p)$ fuertemente en $L^2(\Omega_1 \times (0, T))$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$. Por construcción de φ_ε esto implica que $\rho_\varepsilon \rightarrow \rho$ en $C([0, T]; L^2(\Omega_1))$. Así, aplicando la hipótesis sobre las condiciones iniciales (3.46), se cumple (3.59) y (3.60) y por tanto, podemos concluir (3.58).

Ahora, mostraremos que la convergencia de los controles es en realidad convergencia fuerte. En vista de la convergencia débil, es suficiente mostrar

$$\int_0^T \int_\omega \left(\int_0^1 v_\varepsilon(x', z_n, t) dz_n \right)^2 dx' dt \rightarrow \int_0^T \int_\omega h^2(x', t) dx' dt. \quad (3.63)$$

Sabemos que $h = \hat{\eta}$ en $\omega \times (0, T)$, donde $\hat{\eta}$ es la solución de (3.44) asociada con el dato inicial $\hat{\eta}^0$ el minimizador de J_0 en H_0 . Denotamos por I_ε (resp. I_0) el valor mínimo de \tilde{J}_ε (resp. J_0) en \tilde{H}_ε (resp. H_0). Aseguramos que I_ε tiende I_0 . En efecto, para toda $\delta > 0$ existe η^0 en $L^2(\Omega)$ tal que

$$J_0(\eta^0) \leq J(\hat{\eta}^0) + \delta = I_0 + \delta.$$

Por otro lado, como lo demostramos anteriormente, (3.59) y (3.60) implican que $\hat{J}_\varepsilon(\eta^0)$ tiende a $J_0(\eta^0)$. Tomando en cuenta que $\hat{\eta}_\varepsilon^0$ es el mínimo de \hat{J}_ε , deducimos que

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} I_\varepsilon \leq J_0(\eta^0) \leq I_0 + \delta$$

para toda $\delta > 0$ y en consecuencia

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} I_\varepsilon \leq I_0.$$

Por otro lado, por (3.56), tenemos que

$$I_0 \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} I_\varepsilon.$$

Por lo tanto, concluimos

$$I_0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_\varepsilon.$$

Observe que esto implica (3.63), ya que $\int_{\Omega_1} p_\varepsilon^0 \hat{\eta}_\varepsilon(x, 0) dx' dz_n$ converge a $\int_{\Omega} p^0 \eta(0) dx'$ por (3.55).

El hecho que $\int_0^1 p_\varepsilon dz_n$ converge a p en $C([0, T], L^2(\Omega))$ es consecuencia del Teorema 3.6. Para concluir la demostración del Teorema 3.7 falta probar que $\int_0^1 p_\varepsilon dz_n$ converge a p en $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$.

Hagamos $\phi_\varepsilon = \int_0^1 p_\varepsilon dz_n - p$. Entonces, ϕ_ε satisface

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t \phi_\varepsilon - \Delta' \phi_\varepsilon + \int_0^1 f(w_\varepsilon + p_\varepsilon) dz_n - f(w + p) - \int_0^1 f(w_\varepsilon) dz_n + f(w) = & \\ \int_0^1 (v_\varepsilon - h) 1_\omega dz_n & \text{en } Q, \\ \phi_\varepsilon = 0 & \text{en } \Omega \times (0, T), \\ \phi_\varepsilon(0) = \int_0^1 (p_\varepsilon^0 - p^0) dz_n & \text{en } \Omega, \end{array} \right. \quad (3.64)$$

Si multiplicamos (3.64) por ϕ_ε e integramos por partes en Ω , obtenemos que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\phi_\varepsilon|^2 dx' + \int_{\Omega_1} |\nabla' \phi_\varepsilon|^2 dx' + \int_{\Omega} \left(\int_0^1 [f(w_\varepsilon + p_\varepsilon) - f(w + p)] dz_n \right) \phi_\varepsilon dx'$$

$$-\int_{\Omega} \left(\int_0^1 [f(w_\varepsilon) - f(w)] dz_n \right) \phi_\varepsilon dx' = \int_{\Omega} \left(\int_0^1 (v_\varepsilon - h) 1_\omega dz_n \right) \phi_\varepsilon dx'.$$

Entonces

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\phi_\varepsilon|^2 dx' + \int_{\Omega_1} |\nabla' \phi_\varepsilon|^2 dx' \\ & \leq 2K \int_{\Omega} \left(\int_0^1 (|p_\varepsilon - p| + |w_\varepsilon - w|) dz_n \right) |\phi_\varepsilon| dx' + \left\| \int_0^1 (v_\varepsilon - h) dz_n \right\|_{L^2(\omega)} \|\phi_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \\ & \leq 2K (\|p_\varepsilon - p\|_{L^2(\Omega_1)} + \|w_\varepsilon - w\|_{L^2(\Omega_1)}) \|\phi_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} + \left\| \int_0^1 (v_\varepsilon - h) dz_n \right\|_{L^2(\omega)} \|\phi_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

Integrando de 0 a T , se concluye que

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\Omega_1} |\nabla' \phi_\varepsilon|^2 dx' \leq \left\| \int_0^1 (p_\varepsilon^0 - p^0) dz_n \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2K \|\phi_\varepsilon\|_{C([0,T];L^2(\Omega))} \left(\int_0^T \|p_\varepsilon - p\|_{L^2(\Omega_1)} dt \right. \\ & \left. + \int_0^T \|w_\varepsilon - w\|_{L^2(\Omega_1)} dt \right) + \left(\int_0^T \left\| \int_0^1 (v_\varepsilon - h) dz_n \right\|_{L^2(\omega)} dt \right) \|\phi_\varepsilon\|_{C([0,T];L^2(\Omega))} \\ & \leq \left\| \int_0^1 (p_\varepsilon^0 - p^0) dz_n \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + C(K, T) \left(\|p_\varepsilon - p\|_{L^2(\Omega_1 \times (0,T))}^2 + \|w_\varepsilon - w\|_{L^2(\Omega_1 \times (0,T))}^2 \right. \\ & \left. + \left\| \int_0^1 (v_\varepsilon - h) dz_n \right\|_{L^2(\omega \times (0,T))}^2 \right) \|\phi_\varepsilon\|_{C([0,T];L^2(\Omega))}, \end{aligned}$$

donde $C(K, T)$ es una constante positiva independiente de ε . Combinando esta estimación con los resultados de convergencia ya obtenidos y las hipótesis (3.46) y (3.47), se deduce que

$$\int_0^1 p_\varepsilon dz_n \rightarrow p \text{ fuertemente en } L^2(0, T; H_0^1(\Omega)).$$

■

Como consecuencia del Teorema 3.7 se cumple que

Corolario 3.4. *Suponga que f es globalmente Lipschitz y que $f(0) = 0$. Sea $(u_\varepsilon^0) \subset L^2(\Omega_1)$ una sucesión de datos iniciales para el sistema (3.33) tal que*

$$u_\varepsilon^0(x', z_n) \rightarrow y^0(x') \text{ fuertemente en } L^2(\Omega_1). \quad (3.65)$$

Sea $w_\varepsilon \in C([0, T]; L^2(\Omega_1)) \cap L^2(0, T; V_1)$ una sucesión de soluciones del ε -sistema (3.38) tal que

$$w_\varepsilon(x', z_n, t) \rightarrow w(x', t) \text{ fuertemente en } L^2(Q_1). \quad (3.66)$$

Entonces, existe una sucesión g_ε de controles a trayectorias del ε -sistema semilineal (3.52) (correspondiente a sucesión de trayectorias w_ε) tal que la correspondiente sucesión u_ε de soluciones del sistema (3.33) cumple que

$$u_\varepsilon(x, T) = w_\varepsilon(x, T) \text{ en } \Omega_1,$$

para todo ε en $(0, 1)$. Además, después de la extracción de una subsucesión,

$$\int_0^1 g_\varepsilon(x', z_n, t) dz_n \rightarrow h(x', t) \text{ fuertemente en } L^2(\omega \times (0, T)) \quad (3.67)$$

y

$$\int_0^1 u_\varepsilon dz_n \rightarrow y, \text{ en } C([0, T]; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H_0^1(\Omega)). \quad (3.68)$$

donde $h = h(x', t)$ es el control a trayectorias del sistema semilineal de dimensión $(n-1)$ (3.34) (correspondiente a w) con dato inicial y^0 , es decir, su correspondiente solución y satisface

$$y(x, T) = w(x, T) \text{ en } \Omega.$$

En este punto, estamos listos para demostrar el resultado principal de este capítulo.

Teorema 3.8. *Suponga que se cumplen las hipótesis del Corolario 3.4. Entonces, para todo $\delta > 0$ y $y^1(x') \in L^2(\Omega)$, si y_ε^1 es una sucesión en $L^1(\Omega_1)$ tal que*

$$\int_0^1 y_\varepsilon^1(x', z_n) dz_n \rightarrow y^1(x') \text{ fuertemente en } L^2(\Omega_1), \quad (3.69)$$

existe una sucesión g_ε de controles aproximados para el sistema (3.33) (correspondientes a y_ε^1) tal que

$$\int_0^1 g_\varepsilon(x', z_n, t) dz_n \rightarrow h(x', t) \text{ fuertemente en } L^2(\omega \times (0, T)) \quad (3.70)$$

donde $h(x', t)$ es un control aproximado del sistema semilineal de dimensión $(n - 1)$ (3.34) con dato inicial y^0 (correspondiente a y^1), esto es, la correspondiente solución de (3.34) satisface

$$\|y(x', T) - y^1(x')\|_{L^2(\Omega)} \leq \delta. \quad (3.71)$$

Además, correspondiente a esta sucesión

$$\int_0^1 u_\varepsilon dz_n \rightarrow y, \text{ en } C([0, T]; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H_0^1(\Omega)). \quad (3.72)$$

Demostración. Sea $\delta > 0$ y sea $y^1(x') \in L^2(\Omega)$. Sabemos que $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ es denso en $L^2(\Omega)$. Entonces, existe $y_1^* \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\|y^1(x') - y_1^*(x')\|_{L^2(\Omega)} < \delta/3. \quad (3.73)$$

Sea w_ε la solución en $C([0, T]; L^2(\Omega_1)) \cap L^2(0, T; V_1)$ del ε -sistema:

$$\begin{cases} \partial_t w_\varepsilon - \Delta' w_\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2}{\partial z_n^2} w_\varepsilon + f(w_\varepsilon) = 0 & \text{en } Q_1, \\ w_\varepsilon = 0 & \text{en } [\partial\Omega \times (0, 1)] \times (0, T), \\ \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \vec{n}} = 0 & \text{en } \Gamma_1^\pm \times (0, T), \\ w_\varepsilon(0) = y_1^*(x') & \text{en } \Omega_1, \end{cases} \quad (3.74)$$

Procediendo como en la demostración de la estimación (3.29) se puede ver que

$$\|w_\varepsilon(\cdot, T) - y_1^*(x')\|_{L^2(\Omega)} \leq C(K, T) \alpha^{1/2} \|y_1^*\|_{H^1(\Omega)}.$$

donde $C(K, T)$ es independiente de ε . Seleccionamos $\alpha > 0$ suficientemente pequeña tal que

$$\|w_\varepsilon(\cdot, T) - y_1^*(x')\|_{L^2(\Omega)} < \delta/3.$$

Con esta selección de α consideramos el siguiente ε -sistema auxiliar:

$$\begin{cases} \partial_t u_\varepsilon - \Delta' u_\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2}{\partial z_n^2} u_\varepsilon + f(u_\varepsilon) = g_\varepsilon 1_{\omega_1} & \text{en } \Omega_1 \times (0, T - \alpha), \\ u_\varepsilon = 0 & \text{en } [\partial\Omega \times (0, 1)] \times (0, T - \alpha), \\ \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \vec{n}} = 0 & \text{en } \Gamma_1^\pm \times (0, T - \alpha), \\ u_\varepsilon(x, 0) = u_\varepsilon^0(x) & \text{en } \Omega_1. \end{cases} \quad (3.75)$$

Observe que $w \equiv 0$ en $\Omega \times [0, T - \alpha]$ es solución de (3.39), ya que $f(0) = 0$ por hipótesis. Entonces, por el Corolario 3.4, existe una sucesión $g_{1,\varepsilon}$ en $L^2(\omega_1 \times (0, T - \alpha))$ de controles a cero para el ε -sistema (3.75) tal que después de la extracción de una subsucesión

$$\int_0^1 g_{1,\varepsilon}(x', z_n, t) dz_n \rightarrow h_1(x', t) \text{ fuertemente en } L^2(\omega \times (0, T - \alpha)) \quad (3.76)$$

donde $h_1 = h_1(x', t)$ es un control a cero del sistema semilineal de dimensión $(n - 1)$ (3.34) en $\Omega \times (0, T - \alpha)$ con dato inicial $y^0(x')$. Además, correspondiente a esta subsucesión

$$\int_0^1 u_{1,\varepsilon} dz_n \rightarrow y_1, \text{ en } C([0, T - \alpha]; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T - \alpha; H_0^1(\Omega)), \quad (3.77)$$

donde y_1 es la solución de (3.34) correspondiente a h_1 . En particular, tenemos que

$$y_1(x', T - \alpha) = 0 \text{ en } \Omega$$

y

$$u_{1,\varepsilon}(x, T - \alpha) \text{ en } \Omega$$

para todo $\varepsilon > 0$.

Ahora, consideremos el siguiente ε -sistema auxiliar:

$$\begin{cases} \partial_t u_\varepsilon - \Delta' u_\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2}{\partial z_n^2} u_\varepsilon + f(u_\varepsilon) = g_\varepsilon 1_{\omega_1} & \text{en } \Omega_1 \times (T - \alpha, T), \\ u_\varepsilon = 0 & \text{en } [\partial\Omega \times (0, 1)] \times (T - \alpha, T), \\ \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \vec{n}} = 0 & \text{en } \Gamma_1^\pm \times (T - \alpha, T), \\ u_\varepsilon(T - \alpha) = 0 & \text{en } \Omega_1. \end{cases} \quad (3.78)$$

Entonces, aplicando nuevamente el Corolario 3.4, existe una sucesión $g_{2,\varepsilon}$, en $L^2(\omega_1 \times (0, T - \alpha))$ de controles a trayectorias (correspondientes a la trayectoria w) para el ε -sistema (3.78) tal que después de la extracción de una subsucesión

$$\int_0^1 g_{2,\varepsilon}(x', z_n, t) dz_n \rightarrow h_2(x', t) \text{ fuertemente en } L^2(\omega \times (T - \alpha, T)) \quad (3.79)$$

donde $h_2 = h_2(x', t)$ es un control a trayectorias (correspondiente a w) del sistema semilineal de dimensión $(n-1)$ (3.34) en $\Omega \times (T - \alpha, T)$ con dato inicial $y_1(T - \alpha) = 0$. Además, correspondiente a ésta subsucesión

$$\int_0^1 u_{2,\varepsilon} dz_n \rightarrow y_2, \text{ en } C([T - \alpha, T]; L^2(\Omega)) \cap L^2(T - \alpha, T; H_0^1(\Omega)), \quad (3.80)$$

donde y_2 es la solución de (3.34) correspondiente a h_1 . En particular, tenemos que

$$y_2(x', T) = w(x', T) \text{ en } \Omega$$

y

$$u_{2,\varepsilon}(x, T - \alpha) = w_\varepsilon(x', T) \text{ en } \Omega_1$$

para todo $\varepsilon > 0$.

Definimos

$$g_\varepsilon(\cdot, t) := \begin{cases} g_{1,\varepsilon}(\cdot, t) & \text{para } t \in (0, T - \alpha), \\ g_{2,\varepsilon}(\cdot, t) & \text{para } t \in (T - \alpha, T) \end{cases}$$

y

$$u_\varepsilon(\cdot, t) := \begin{cases} u_{1,\varepsilon}(\cdot, t) & \text{para } t \in [0, T - \alpha], \\ u_{2,\varepsilon}(\cdot, t) & \text{para } t \in [T - \alpha, T]. \end{cases}$$

Es sencillo verificar que

$$\int_0^1 g_\varepsilon(x', z_n, t) dz_n \rightarrow h(\cdot, t) := \begin{cases} h_1(\cdot, t) & \text{para } t \in (0, T - \alpha), \\ h_2(\cdot, t) & \text{para } t \in (T - \alpha, T) \end{cases}$$

fuertemente en $L^2(\omega \times (0, T))$, y

$$\int_0^1 u_\varepsilon(x', z_n, t) dz_n \rightarrow y(\cdot, t) := \begin{cases} y_1(\cdot, t) & \text{para } t \in [0, T - \alpha], \\ y_2(\cdot, t) & \text{para } t \in [T - \alpha, T]. \end{cases}$$

en $C([0, T]; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$. En particular, se cumple que

$$\int_0^1 u_\varepsilon(x, T) dz_n \rightarrow y(x, T) \text{ fuertemente en } L^2(\Omega). \quad (3.81)$$

Por otro lado, aplicando la hipótesis (3.69) existe $N(y^1, \delta) < 1$ tal que

$$\|y_\varepsilon^1 - y^1\|_{L^2(\Omega_1)} < \delta/3$$

para todo $0 < \varepsilon < N(y^1, \delta)$. Luego, g_ε , con $0 < \varepsilon < N(y^1, \delta)$, es una sucesión de controles aproximados correspondientes a la sucesión y_ε^1 , con $0 < \varepsilon < N(y^1, \delta)$, ya que su correspondientes sucesión de soluciones u_ε , con $0 < \varepsilon < N(y^1, \delta)$, de (3.33) satisface

$$\begin{aligned} \|u_\varepsilon(\cdot, T) - y_\varepsilon^1\|_{L^2(\Omega_1)} &\leq \|w_\varepsilon(\cdot, T) - y_1^*\|_{L^2(\Omega)} + \|y_1^* - y^1\|_{L^2(\Omega)} + \|y^1 - y_\varepsilon^1\|_{L^2(\Omega_1)} \\ &\leq \delta/3 + \delta/3 + \delta/3 = \delta. \end{aligned}$$

para todo $0 < \varepsilon < N(y^1, \delta)$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^1 u_\varepsilon(\cdot, T) dz_n - \int_0^1 y_\varepsilon^1 dz_n \right\|_{L^2(\Omega)} &\leq \left(\int_\Omega \left(\int_0^1 |u_\varepsilon(\cdot, T) - y_\varepsilon^1| dz_n \right)^2 dx' \right)^{1/2} \\ &\leq \left(\int_\Omega \int_0^1 |u_\varepsilon(\cdot, T) - y_\varepsilon^1|^2 dz_n dx' \right)^{1/2} \\ &\leq \|u_\varepsilon(\cdot, T) - y_\varepsilon^1\|_{L^2(\Omega_1)} \\ &\leq \delta, \end{aligned}$$

para todo $0 < \varepsilon < N(y^1, \delta)$. En consecuencia, haciendo ε tender a cero, se deduce que

$$\|y(x', T) - y^1(x')\|_{L^2(\Omega)} \leq \delta,$$

es decir, $h(x', t)$ es un control aproximado del sistema semilineal de dimensión $(n - 1)$ (3.34) con dato inicial y^0 (correspondiente a y^1). Con esto concluimos la demostración. ■

Apéndices

Apéndice A Demostración del Teorema 2.4

Para demostrar el Teorema 2.4 definimos para toda $s > 0$, la función

$$w(x, t) := e^{s\varphi(x,t)}v(x, t),$$

donde v es la solución de (2.18). Entonces w satisface

$$\left\{ \begin{array}{ll} (e^{-s\varphi}w)_t + (a(x)(e^{-s\varphi}w))_x = F, & \text{en } Q_1, \\ w(1, t) = 0, & t \in (0, T), \\ \left\{ \begin{array}{l} w(0, t) = 0, \\ \text{o} \\ (aw_x)(0, t) = s(\varphi_x aw)(0, t), \end{array} \right. & \text{para (PDD),} \\ & t \in (0, T), \\ w(x, T) = w(x, 0) = 0, & \text{en } (0, 1). \end{array} \right. \quad (82)$$

Gracias a las definiciones de φ y de ψ (ver (2.13)), tenemos que $(\varphi_x aw)(x, t) = \theta(t)a(x)\psi_x(x)w(x, t) = c_1\theta(t)xw(x, t)$. Por otro lado, sabemos que la función $w(\cdot, t)$ está en $H_a^1(0, 1)$ para todo $t \in [0, 1]$. Entonces $w(\cdot, t) \in L^2(0, 1)$ y $\sqrt{a(x)}w_x(\cdot, t) \in L^2(0, 1)$. Entonces, $xw^2(\cdot, t) \in L^1(0, 1)$. Ahora, de las Hipótesis (2.3) y (2.4) se tiene que existe $K \in [0, 2)$ tal que

$$xa'(x) \leq Ka(x) \quad \forall x \in [0, 1],$$

esto implica que

$$\frac{d \left[\frac{x^\theta}{a(x)} \right]}{dx} \geq 0 \quad (83)$$

para toda x en $(0, 1]$ y $\theta \geq K$. En particular, $\frac{x}{\sqrt{a(x)}}$ es no decreciente en $(0, 1]$, así $\frac{x}{\sqrt{a(x)}} \leq \frac{1}{\sqrt{a(1)}}$ para todo x en $(0, 1]$. Por lo tanto,

$$(xw^2)_x = w^2 + 2xww_x \in L^1(0, 1),$$

ya que

$$xww_x = \left(\frac{x}{\sqrt{a(x)}} w \right) (\sqrt{a(x)} w_x) \in L^1(0, 1).$$

En consecuencia, $xw^2 \in W^{1,1}$. Se sigue que $xw^2 \rightarrow L \geq 0$ cuando $x \rightarrow 0$. Pero, si $L > 0$, entonces $w^2 \geq \frac{L}{2x} \notin L^1(0, 1)$ para x suficientemente pequeña. Así $L = 0$. Luego, $xw^2(x, t) \rightarrow 0$, cuando $x \rightarrow 0$, de donde se deduce que

$$xw(x, t)|_{x=0} = 0 \text{ para toda } t \in [0, T].$$

Luego,

$$(\varphi_x aw)(x, t)|_{x=0} = 0 \text{ para toda } t \in [0, T],$$

y el sistema anterior puede ser reescrito de la siguiente manera. Sea

$$Lv := v_t + (a(x)v_x)_x \text{ y } L_s w = e^{s\varphi} L(e^{-s\varphi} w), \quad s > 0.$$

Entonces (82) se convierte en

$$\left\{ \begin{array}{ll} L_s w = e^{s\varphi} F, & \text{en } Q_1, \\ w(1, t) = 0, & t \in (0, T), \\ \left\{ \begin{array}{l} w(0, t) = 0, \quad \text{para (PDD),} \\ \text{o} \\ (aw_x)(0, t) = 0, \quad \text{para (PFD),} \end{array} \right. & t \in (0, T), \\ w(x, T) = w(x, 0) = 0, & \text{en } (0, 1). \end{array} \right. \quad (84)$$

Calculando $L_s w$, se tiene que

$$L_s w = L_s^+ w + L_s^- w,$$

donde

$$L_s^+ w := (a(x)w_x)_x - s\varphi_t w + s^2 a(x)\varphi_x^2 w,$$

y

$$L_s^- w := w_t - 2sa(x)\varphi_x w_x - s(a(x)\varphi_x)_x w.$$

Además $\|L_s^+ w\|^2 + \|L_s^- w\|^2 + 2\langle L_s^+ w, L_s^- w \rangle = \|Fe^{s\varphi}\|^2$. Entonces, después de integrar por partes en $(0, 1)$

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^1 w_t L_s^+ w \, dx dt &= \int_0^T \int_0^1 \{(a(x)w_x)_x - s\varphi_t w + s^2 a(x)\varphi_x^2 w\} w_t \, dx dt \\ &= \int_0^T [a(x)w_x w_t]_{x=0}^{x=1} dt - \int_0^T \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\int_0^1 a(x)w_x^2 \, dx \right) dt \\ &\quad - \frac{s}{2} \int_0^T dt \int_0^1 \varphi_t (w^2)_t \, dx + \frac{s^2}{2} \int_0^T dt \int_0^1 a(x)\varphi_x^2 (w^2)_t \, dx \\ &= \int_0^T [a(x)w_x w_t]_{x=0}^{x=1} dt + \frac{s}{2} \int_0^T \int_0^1 \varphi_{tt} w^2 \, dx dt - s^2 \int_0^T \int_0^1 a(x)\varphi_x \varphi_{xt} w^2 \, dx dt, \end{aligned} \tag{85}$$

ya que

$$\frac{s}{2} \int_0^1 \varphi_t w^2 \Big|_{t=0}^{t=T} dx = \frac{s^2}{2} \int_0^1 a(x)\varphi_x^2 w^2 \Big|_{t=0}^{t=T} dx = \int_0^T \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\int_0^1 a(x)w_x^2 \, dx \right) dt = 0,$$

por la manera como se definió φ (recuerde que $w(x, 0) = w(x, T) = 0$). Adicionalmente, tenemos que

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^1 L_s^+ w (-2sa(x)\varphi_x w_x) \, dx dt &= -2s \int_0^T \int_0^1 \varphi_x \left[\frac{(a(x)w_x)^2}{2} \right]_x dx dt \\ &\quad + 2s^2 \int_0^T \int_0^1 a(x)\varphi_t \varphi_x \left(\frac{w^2}{2} \right)_x dx dt - s^3 \int_0^T \int_0^1 a^2 \varphi_x^3 [w^2]_x dx dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^T \left[-s\varphi_x(a(x)w_x)^2 + s^2a(x)\varphi_t\varphi_xw^2 - s^3a^2\varphi_x^3w^2 \right]_{x=0}^{x=1} dt \\
 &+ s \int_0^T \int_0^1 \varphi_{xx}(a(x)w_x)^2 dxdt - s^2 \int_0^T \int_0^1 (a(x)\varphi_t\varphi_x)_x w^2 dxdt . \\
 &+ s^3 \int_0^T \int_0^1 [(a(x)\varphi_x^2)_x a(x)\varphi_x + a(x)\varphi_x^2(a(x)\varphi_x)_x] w^2 dxdt
 \end{aligned} \tag{86}$$

Además

$$\begin{aligned}
 &\int_0^T \int_0^1 L_s^+ w (-s(a(x)\varphi_x)_x w) dxdt = \int_0^T \left[-sa(x)w_x w(a(x)\varphi_x)_x \right]_{x=0}^{x=1} dt \\
 &+ s \int_0^T \int_0^1 a(x)w_x \{ (a(x)\varphi_x)_{xx} w + (a(x)\varphi_x)_x w_x \} dxdt \\
 &+ s^2 \int_0^T \int_0^1 (a(x)\varphi_x)_x \varphi_t w^2 dxdt - s^3 \int_0^T \int_0^1 a(x)\varphi_x^2 (a(x)\varphi_x)_x w^2 dxdt.
 \end{aligned} \tag{87}$$

Sumando (85), (86) y (87), se deduce que

$$\begin{aligned}
 &\int_0^T \int_0^1 L_s^+ w L_s^- w dxdt = \frac{s}{2} \int_0^T \int_0^1 \varphi_{tt} w^2 dxdt \\
 &+ s \int_0^T \int_0^1 a(x)(a(x)\varphi_x)_{xx} w w_x dxdt \\
 &- 2s^2 \int_0^T \int_0^1 a(x)\varphi_x \varphi_{tx} w^2 dxdt + s \int_0^T \int_0^1 (2a^2\varphi_{xx} + a(x)a'\varphi_x) w_x^2 dxdt \\
 &+ s^3 \int_0^T \int_0^1 (2a(x)\varphi_{xx} + a'\varphi_x) a(x)\varphi_x^2 w^2 dxdt + \int_0^T a(x)w_x w_t \Big|_{x=0}^{x=1} dt
 \end{aligned} \tag{88}$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_0^T [-s\varphi_x(a(x)w_x)^2 + s^2a(x)\varphi_t\varphi_xw^2 - s^3a^2\varphi_x^3w^2] \Big|_{x=0}^{x=1} dt \\
 & + \int_0^T [-sa(x)(a(x)\varphi_x)_xww_x] \Big|_{x=0}^{x=1} dt.
 \end{aligned}$$

Por otro lado, usando la definición de φ , los términos de $\int_0^T \int_0^1 L_s^+ w L_s^- w \, dx dt$ que no involucran términos de frontera toman la forma

$$\begin{aligned}
 I_1 & := \frac{s}{2} \int_0^T \int_0^1 \ddot{\theta}(t)\psi(x)w^2 \, dx dt + s \int_0^T \int_0^1 a(x)(a(x)\dot{\psi}(x))_{xx}\theta ww_x \, dx dt \\
 & - 2s^2 \int_0^T \int_0^1 \theta(t)\dot{\theta}(t)a(x)(\dot{\psi}(x))^2w^2 \, dx dt \\
 & + s \int_0^T \int_0^1 \theta(t)a(x)(2a(x)\ddot{\psi}(x) + a'\dot{\psi}(x))w_x^2 \, dx dt \\
 & + s^3 \int_0^T \int_0^1 \theta^3(t)a(x)(2a(x)\ddot{\psi}(x) + a'\dot{\psi}(x))(\dot{\psi}(x))^2w^2 \, dx dt.
 \end{aligned} \tag{89}$$

Debido a la elección de la función $\psi(x)$, se tiene que $2a\ddot{\psi}(x) + a'\dot{\psi}(x) = c_1 \frac{2a-xa'}{a}$ y $(a(x)\dot{\psi}(x))_{xx} = 0$. Así que

$$\begin{aligned}
 I_1 & = \frac{s}{2} \int_0^T \int_0^1 \ddot{\theta}(t)\psi(x)w^2 \, dx dt - 2s^2 \int_0^T \int_0^1 \theta\dot{\theta}(t)a(\dot{\psi})^2w^2 \, dx dt \\
 & + sc_1 \int_0^T \int_0^1 \theta(t)(2a(x) - xa')w_x^2 \, dx dt \\
 & + s^3c_1 \int_0^T \int_0^1 \theta^3(t)(\dot{\psi})^2(2a(x) - xa')w^2 \, dx dt.
 \end{aligned}$$

Por hipótesis podemos estimar

$$\begin{aligned}
 I_1 &\geq -2s^2 \int_0^T \int_0^1 \theta \dot{\theta}(t) a(\psi)^2 w^2 \, dx dt \\
 &+ \frac{s}{2} \int_0^T \int_0^1 \ddot{\theta}(t) \psi(x) w^2 \, dx dt + sC \int_0^T \int_0^1 \theta(t) a w_x^2 \, dx dt \\
 &+ s^3 C^3 \int_0^T \int_0^1 \theta^3(t) \frac{x^2}{a} w^2 \, dx dt.
 \end{aligned}$$

donde $C > 0$ es una constante fija. Observe que $|\theta \dot{\theta}| \leq c\theta^{9/4} \leq c\theta^3$ para concluir que

$$\begin{aligned}
 \left| -2s^2 \int_0^T \int_0^1 \theta \dot{\theta}(t) a(\psi)^2 w^2 \, dx dt \right| &\leq 2cs^2 \int_0^T \int_0^1 \theta^3(t) a(\psi)^2 w^2 \, dx dt \\
 &= 2cs^2 \int_0^T \int_0^1 \theta^3(t) \frac{x^2}{a} w^2 \, dx dt \leq \frac{C^3}{4} s^3 \int_0^T \int_0^1 \theta^3(t) \frac{x^2}{a} w^2 \, dx dt,
 \end{aligned}$$

para s suficientemente grande. Similarmente $|\ddot{\theta}| \leq c\theta^{3/2}$, donde c es una constante positiva, y

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{s}{2} \int_0^T \int_0^1 \ddot{\theta} \psi(x) w^2 \, dx dt \right| &\leq \frac{s}{2} c_1 c \left| \int_0^T \int_0^1 \theta^{3/2} b(x) w^2 \, dx dt \right| \\
 &+ s \frac{c_1 c_2}{2} c \left| \int_0^T \int_0^1 \theta^{3/2} w^2 \, dx dt \right|,
 \end{aligned} \tag{90}$$

donde $b(x) = \int_0^x \frac{t}{a(t)} \, dt$. Ahora, puesto que la función $x \mapsto \frac{x^K}{a(x)}$ es creciente, tenemos que $b(x) \leq \frac{x^2}{(2-K)a(x)}$. Entonces

$$\frac{s}{2} c_1 c \int_0^T \int_0^1 \theta^{3/2} b(x) w^2 \, dx dt \leq \frac{C^3}{8} s^3 \int_0^T \int_0^1 \theta^3 \frac{x^2}{a(x)} w^2 \, dx dt,$$

para s suficientemente grande. Ahora, acotaremos el término $|\int_0^T \int_0^1 \theta^{3/2} w^2 dx dt|$. En este paso, es necesario trabajar en dos casos. En efecto en esta parte se aplicará las desigualdades del tipo Hardy-Poincaré. Por esta razón, trabajar en el caso $K = 1$ es más complicado.

CASO $K \neq 1$. Cuando $K \neq 1$ tenemos que

$$\begin{aligned}
 s \frac{c_1 c_2}{2} c \left| \int_0^1 \theta^{3/2} w^2 dx \right| &= \frac{c_1 c_2}{2} c \left| \int_0^1 \left(\sqrt{s} \theta^{1/2} \frac{a^{1/2}}{x} w \right) \left(\sqrt{s} \theta \frac{x}{a^{1/2}} w \right) dx \right| \\
 &\leq \frac{c_1 c_2}{2} c \left(s \int_0^1 \theta \frac{a}{x^2} w^2 dx \right)^{1/2} \left(s \int_0^1 \theta^2 x^2 a^{-1} w^2 dx \right)^{1/2} \\
 &\leq \frac{c_1 c_2}{2} c \left(C' s \int_0^1 \theta a w_x^2 dx \right)^{1/2} \left(s \int_0^1 \theta^2 x^2 a^{-1} w^2 dx \right)^{1/2} \\
 &\leq \frac{\epsilon C' s}{2} \int_0^1 \theta a w_x^2 dx + \frac{C' s}{2\epsilon} \int_0^1 \theta^3 x^2 a^{-1} w^2 dx,
 \end{aligned} \tag{91}$$

para alguna $C' > 0$. Entonces, para ϵ suficientemente pequeña y s suficientemente grande, tenemos que

$$s \frac{c_1 c_2}{2} c \left| \int_0^1 \theta^{3/2} w^2 dx \right| \leq \frac{C}{2} s \int_0^1 \theta a(x) w_x^2 dx + \frac{C^3}{8} s^3 \int_0^1 \theta^3 \frac{x^2}{a(x)} w^2 dx dt,$$

para el caso $K \neq 1$.

CASO $K = 1$. Cuando $K = 1$ observe que

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 w^2 dx &= \int_0^1 (w^2 a^{1/3} x^{-2/3})^{3/4} (w^2 x^2 a^{-1})^{1/4} dx \\
 &\leq \left(\int_0^1 w^2 a^{1/3} x^{-2/3} dx \right)^{3/4} \left(\int_0^1 w^2 x^2 a^{-1} dx \right)^{1/4} \\
 &= \left(\int_0^1 w^2 \left(\frac{a}{x^2} \right)^{1/3} dx \right)^{3/4} \left(\int_0^1 w^2 x^2 a^{-1} dx \right)^{1/4}.
 \end{aligned}$$

Ahora, consideremos la función $p(x) = (a(x)x^4)^{1/3}$. De (83) se tiene que $\frac{x^2}{a(x)} \leq \frac{1}{a(1)}$ en $(0, 1]$, de aquí se deduce que $p(x) \leq \frac{1}{a(1)^{2/3}}a(x)$. Además, de las hipótesis sobre a , existe σ en $(0, 1)$ tal que $\frac{a(x)}{x^\sigma}$ es no decreciente cerca de cero, esto implica que $\frac{p(x)}{x^q}$ es no decreciente cerca de 0 para $q = \frac{4+\sigma}{3}$. Así podemos aplicar la desigualdad de Hardy-Poincaré obteniendo

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\frac{a(x)}{x^2}\right)^{1/3} w^2(x, t) dx &= \int_0^1 \frac{p(x)}{x^2} w^2(x, t) dx \\ &\leq C' \int_0^1 p(x) w_x^2(x, t) dx \leq C' \int_0^1 a(x) w_x^2(x, t) dx, \end{aligned}$$

para alguna constante positiva C' . Así

$$\begin{aligned} & \left| s \frac{c_1 c_2}{2} c \int_0^1 \theta^{3/2} w^2 dx \right| \\ & \leq s \frac{c_1 c_2}{2} c \left| \theta^{3/2} \left(C' \int_0^1 a(x) w_x^2(x, t) dx \right)^{3/4} \left(\int_0^1 w^2 x^2 a^{-1} dx \right)^{1/4} \right| \\ & \leq s \frac{c_1 c_2}{2} C' \left(\int_0^1 \theta a(x) w_x^2(x, t) dx \right)^{3/4} \left(\int_0^1 \theta^3 x^2 a^{-1} w^2 dx \right)^{1/4} \\ & \leq \frac{3\epsilon C' s}{4} \int_0^1 \theta a(x) w_x^2 dx + \frac{C' s}{4\epsilon^3} \int_0^1 \theta^3 x^2 a^{-1} w^2 dx \Big)^{1/4}, \end{aligned} \tag{92}$$

para algún $C' > 0$. Entonces, para ϵ suficientemente pequeña y s suficientemente grande, tenemos que

$$s \frac{c_1 c_2}{2} c \left| \int_0^1 \theta^{3/2} w^2 dx \right| \leq \frac{C}{2} s \int_0^1 \theta a(x) w_x^2 dx + \frac{C^3}{8} s^3 \int_0^1 \theta^3 \frac{x^2}{a(x)} w^2 dx,$$

para el caso $K = 1$. Usando (90), (91) y (92), finalmente obtenemos

$$\left| \frac{s}{2} \int_0^T \int_0^1 \ddot{\theta} \psi(x) w^2 dx dt \right| \leq \frac{C}{2} s \int_0^T \int_0^1 \theta a(x) w_x^2 dx dt + \frac{C^3}{4} s^3 \int_0^T \int_0^1 \theta^3 \frac{x^2}{a(x)} w^2 dx dt.$$

En resumen, obtenemos

$$I_1 \geq \frac{C}{2}s \int_0^T \int_0^1 \theta(t)a(x)w_x^2 dxdt + \frac{C^3}{2}s^3 \int_0^T \int_0^1 \theta^3(t)\frac{x^2}{a(x)}w^2 dxdt. \quad (93)$$

Por otro lado, teniendo en cuenta el hecho de que $w(1, t) = 0$, se concluye que

$$\begin{aligned} I_2 &:= a'\varphi_x a(x)\varphi_x^2 w^2 dxdt + \int_0^T [a(x)w_x w_t]_{x=0}^{x=1} dt \\ &+ \int_0^T [-s\varphi_x(a(x)w_x)^2 + s^2 a(x)\varphi_t \varphi_x w^2 - s^3 a^2 \varphi_x^3 w^2]_{x=0}^{x=1} dt \\ &+ \int_0^T [-sa(x)(a(x)\varphi_x)_x w w_x]_{x=0}^{x=1} dt \\ &= - \int_0^T [aw_x w_t - s\theta\psi_x(aw_x)^2 + s^2\theta_t\theta a\psi\psi_x w^2 - s^3 a^2 \theta^3 \psi_x^3 w^2 \\ &\quad - s\theta(a\psi_x)_x w a w_x]_{x=0} dt - sa(1)c_1 \int_0^T \theta(t)w_x^2(1, t) dt. \end{aligned}$$

En el caso (PDD), usamos la condición de frontera $w(0, t) = 0$ para obtener

$$I_2 = s \int_0^T [\theta a^2 \psi_x w_x^2]_{x=0} dt - sa(1)c_1 \int_0^T \theta(t)w_x^2(1, t) dt. \quad (94)$$

Ahora bien, en el caso (PFD), usamos la relación $(aw_x)(0, t) = s\theta(\psi_x aw)(0, t)$ para concluir que

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^T \left[-s\theta a\psi_x \left(\frac{w^2}{2} \right)_t - s^2\theta_t\theta a\psi\psi_x w^2 + 2s^3 a^2 \theta^3 \psi_x^3 w^2 + \theta^2 s^2 w^2 a\psi_x (a\psi_x)_x \right]_{x=0} dt \\ &- sa(1)c_1 \int_0^T \theta(t)w_x^2(1, t) dt = \int_0^T \left[\frac{s}{2}\theta_t a\psi_x w^2 - s^2\theta_t\theta a\psi\psi_x w^2 + 2s^3 a^2 \theta^3 \psi_x^3 w^2 \right. \end{aligned}$$

$$+\theta^2 s^2 w^2 a \psi_x (a \psi_x)_x \Big]_{x=0} dt - sa(1)c_1 \int_0^T \theta(t) w_x^2(1, t) dt.$$

Observe que

$$\begin{aligned} a\psi_x &= c_1 x, \quad x \in (0, 1] \\ -a\psi\psi_x &\sim -c_1 x\psi(0), \quad \text{cuando } x \rightarrow 0, \\ a^2\psi_x^3 &= c_1^3 \frac{x^3}{a(x)}, \quad x \in (0, 1], \\ a\psi_x(a\psi_x)_x &= c_1^2 x, \quad x \in (0, 1]. \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} I_2 &\approx \int_0^T \left[\left(c_1 \frac{s}{2} \theta_t - c_1 s^2 \theta_t \theta \psi(0) + 2c_1^3 s^3 \theta^3 \frac{x^2}{a} + c_1^2 \theta^2 s^2 \right) (xw^2) \right]_{x=0} dt \\ &\quad - sa(1)c_1 \int_0^T \theta(t) w_x^2(1, t) dt. \end{aligned}$$

Como $xw^2(x, t) \rightarrow 0$ y $\frac{x^2}{a} \leq \frac{1}{a(1)}$, podemos concluir en el caso (PFD)

$$I_2 = -sa(1)c_1 \int_0^T \theta(t) w_x^2(1, t) dt. \tag{95}$$

De (88), (93), (94) y (95), deducimos directamente que existen dos constantes positivas C y s_0 , tal que para toda solución w de (84) satisface, para toda $s \geq s_0$,

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^1 L_s^+ w L_s^- w \, dx dt &\geq Cs \int_0^T \int_0^1 \theta(t) a(x) w_x^2 \, dx dt \\ &\quad + Cs^3 \int_0^1 \int_0^1 \theta^3(t) \frac{x^2}{a} w^2 \, dx dt \\ &\quad - sa(1) \int_0^T \theta(t) w_x^2(1, t) \, dt, \end{aligned}$$

donde C es una constante positiva que depende de K y c_1 es la constante introducida en (2.13).

Finalmente, recordemos que $v = e^{-s\varphi}w$ y $v_x = -s\theta\psi_x e^{-s\varphi}w + e^{-s\varphi}w_x$. Así, el Teorema 2.4 se sigue inmediatamente. ■

Apéndice B Demostración de las desigualdades de Hardy-Poincaré

Consideramos el caso (i). Fijamos $\alpha \in (\sigma, 1)$. Puesto que $w(0) = 0$, tenemos que

$$\int_0^1 \frac{a(x)}{x^2} w^2(x) dx = \int_0^1 \frac{a(x)}{x^2} \left(\int_0^x (y^{\alpha/2} w'(y)) y^{-\alpha/2} dy \right)^2 dx.$$

Así que

$$\int_0^1 \frac{a(x)}{x^2} w^2(x) dx \leq \int_0^1 \frac{a(x)}{x^2} \left(\int_0^x (y^\alpha |w'(y)|^2 dy) \int_0^x y^{-\alpha} dy \right) dx.$$

Entonces, tenemos que

$$\int_0^1 \frac{a(x)}{x^2} w^2(x) dx \leq \frac{1}{1-\alpha} \int_0^1 \frac{a(x)}{x^{1+\alpha}} \left(\int_0^x (y^\alpha |w'(y)|^2 dy) \right) dx.$$

Aplicando el Teorema de Fubini, se deduce que

$$\int_0^1 \frac{a(x)}{x^2} w^2(x) dx \leq \frac{1}{1-\alpha} \int_0^1 y^\alpha |w'(y)|^2 \left(\int_y^1 \frac{a(x)}{x^{1+\alpha}} dx \right) dy. \quad (96)$$

Ahora, gracias a nuestras hipótesis, existe $\varepsilon > 0$ tal que la función

$$x \rightarrow \frac{a(x)}{x^\sigma} \text{ es no creciente en } (0, \varepsilon]. \quad (97)$$

Reescribiendo

$$\int_0^1 y^\alpha |w'(y)|^2 \left(\int_y^1 \frac{a(x)}{x^{1+\alpha}} dx \right) dy = L_\varepsilon + M_\varepsilon + N_\varepsilon.$$

donde

$$L_\varepsilon = \int_0^\varepsilon y^\alpha |w'(y)|^2 \left(\int_y^\varepsilon \frac{a(x)}{x^{1+\alpha}} dx \right) dy,$$

$$M_\varepsilon = \int_0^\varepsilon y^\alpha |w'(y)|^2 \left(\int_\varepsilon^1 \frac{a(x)}{x^{1+\alpha}} dx \right) dy,$$

$$N_\varepsilon = \int_\varepsilon^1 y^\alpha |w'(y)|^2 \left(\int_y^1 \frac{a(x)}{x^{1+\alpha}} dx \right) dy,$$

(97) implica que

$$\int_y^\varepsilon \frac{a(x)}{x^{1+\alpha}} dx \leq \frac{a(y)}{y^\sigma} \int_y^\varepsilon x^{\sigma-\alpha-1} dx \leq \frac{1}{\alpha-\sigma} a(y) y^{-\alpha},$$

se deduce que

$$L_\varepsilon \leq \frac{1}{(\alpha-\sigma)} \int_0^\varepsilon a(x) |w'(x)|^2 dx. \quad (98)$$

Para M_ε , tenemos que

$$M_\varepsilon \leq \frac{1}{\alpha} \int_0^\varepsilon a(y) |w'(y)|^2 \frac{y^\alpha}{a(y)} \sup_{[\varepsilon,1]}(a) \varepsilon^{-\alpha} dy \leq \frac{\sup_{[\varepsilon,1]}(a)}{\alpha \inf_{[\varepsilon,1]}(a)} \int_0^\varepsilon a(x) |w'(x)|^2 dx. \quad (99)$$

Para N_ε , procedemos de manera similar y obtenemos

$$N_\varepsilon \leq \frac{\sup_{[\varepsilon,1]}(a)}{\alpha \inf_{[\varepsilon,1]}(a)} \int_\varepsilon^1 a(x) |w'(x)|^2 dx. \quad (100)$$

Usando (98), (99) y (100) en (96), se deduce

$$\int_0^1 \frac{a(x)}{x^2} w^2(x) dx \leq C \int_0^1 a(x) |w'(x)|^2 dx. \quad (101)$$

donde C es una constante que depende de a , ε , σ y α . Ahora, si asumimos que la hipótesis (A1)' se cumple, es decir

$$x \rightarrow \frac{a(x)}{x^\sigma} \text{ es no creciente en } (0, 1],$$

entonces, podemos tomar $\varepsilon = 1$ en los cálculos anteriores, y así $M_\varepsilon = N_\varepsilon = 0$. Entonces, usando (98) en (96), con $\varepsilon = 1$, se obtiene

$$\int_0^1 \frac{a(x)}{x^2} w^2(x) dx \leq \frac{1}{(1-\alpha)(\alpha-\sigma)} \int_0^1 a(x) |w'(x)|^2 dx.$$

A continuación, observamos que esta última estimación es óptima para $\alpha = \frac{\sigma+1}{2}$ con lo cual obtenemos el resultado que deseabamos.

Ahora consideremos el caso (ii). Fijamos $\alpha \in (1, \sigma)$ arbitraria por el momento. Entonces

$$\int_0^1 \frac{a(x)}{x^2} w^2(x) dx = \int_0^1 \frac{a(x)}{x^2} \left(\int_x^1 (y^{\alpha/2} w'(y)) y^{-\alpha/2} dy \right)^2 dx.$$

Así

$$\int_0^1 \frac{a(x)}{x^2} w^2(x) dx \leq \int_0^1 \frac{a(x)}{x^2} \left(\int_x^1 y^\alpha |w'(y)|^2 dy \int_x^1 y^{-\alpha} dy \right) dx.$$

Entonces, tenemos que

$$\int_0^1 \frac{a(x)}{x^2} w^2(x) dx \leq \frac{1}{\alpha-1} \int_0^1 \frac{a(x)}{x^{1+\alpha}} \left(\int_x^1 y^\alpha |w'(y)|^2 dy \right) dx.$$

Aplicando el Teorema de Fubini, se deduce que

$$\int_0^1 \frac{a(x)}{x^2} w^2(x) dx \leq \frac{1}{\alpha-1} \int_0^1 y^\alpha |w'(y)|^2 \left(\int_0^y \frac{a(x)}{x^{1+\alpha}} dx \right) dy. \tag{102}$$

Gracias a nuestras hipótesis, existe $\varepsilon > 0$ tal que la función

$$x \rightarrow \frac{a(x)}{x^\sigma} \text{ es no decreciente en } (0, \varepsilon]. \tag{103}$$

Reescribiendo

$$\int_0^1 y^\alpha |w'(y)|^2 \left(\int_0^y \frac{a(x)}{x^{1+\alpha}} dx \right) dy = I_\varepsilon + J_\varepsilon + K_\varepsilon,$$

donde

$$I_\varepsilon = \int_0^\varepsilon y^\alpha |w'(y)|^2 \left(\int_0^y \frac{a(x)}{x^{1+\alpha}} dx \right) dy,$$

$$J_\varepsilon = \int_\varepsilon^1 y^\alpha |w'(y)|^2 \left(\int_0^\varepsilon \frac{a(x)}{x^{1+\alpha}} dx \right) dy,$$

y

$$K_\varepsilon = \int_\varepsilon^1 y^\alpha |w'(y)|^2 \left(\int_\varepsilon^y \frac{a(x)}{x^{1+\alpha}} dx \right) dy.$$

Por (103) tenemos

$$\int_0^y \frac{a(x)}{x^{1+\alpha}} dx \leq \frac{a(y)}{y^\sigma} \int_0^y x^{\sigma-\alpha-1} dx \leq \frac{1}{\sigma-\alpha} a(y) y^{-\alpha}.$$

Usando esta desigualdad para I_ε , se deduce que

$$I_\varepsilon \leq \frac{1}{(\sigma-\alpha)} \int_0^\varepsilon a(x) |w'(x)|^2 dx. \tag{104}$$

Para J_ε , procedemos de manera similar. Se obtiene

$$\begin{aligned} J_\varepsilon &\leq \frac{1}{\sigma-\alpha} \int_\varepsilon^1 a(y) |w'(y)|^2 \frac{y^\alpha}{a(y)} a(\varepsilon) \varepsilon^{-\alpha} dy \\ &\leq \frac{1}{\sigma-\alpha} \frac{a(\varepsilon)}{\varepsilon^\alpha \inf_{[\varepsilon,1]}(a)} \int_\varepsilon^1 a(x) |w'(x)|^2 dx. \end{aligned} \tag{105}$$

Para K_ε , tenemos que

$$K_\varepsilon \leq \int_\varepsilon^1 a(y) |w'(y)|^2 \frac{y^\alpha}{a(y)} \left(\int_\varepsilon^y \frac{a(x)}{x^{1+\alpha}} dx \right) dy.$$

Así,

$$K_\varepsilon \leq \varepsilon^{-1-\alpha} \frac{\sup_{[\varepsilon,1]}(a)}{\inf_{[\varepsilon,1]}(a)} \int_\varepsilon^1 a(y) |w'(y)|^2 dy. \quad (106)$$

Usando (104), (105) y (106) en (102), obtenemos

$$\int_0^1 \frac{a(x)}{x^2} w^2(x) dx \leq C \int_0^1 a(x) |w'(x)|^2 dx, \quad (107)$$

donde C es una constante que depende de a , ε , σ y α . Considerando la hipótesis (A2)', es decir

$$x \rightarrow \frac{a(x)}{x^\sigma} \text{ es no decreciente en } (0, 1],$$

se concluye que, tomando $\varepsilon = 1$ en los cálculos anteriores, $J_\varepsilon = K_\varepsilon = 0$. Aplicando (104), con $\varepsilon = 1$, obtenemos

$$\int_0^1 \frac{a(x)}{x^2} w^2(x) dx \leq \frac{1}{(1-\alpha)(\alpha-\sigma)} \int_0^1 a(x) |w'(x)|^2 dx.$$

A continuación, observe que esta última estimación es óptima para $\alpha = \frac{\sigma+1}{2}$ con lo cual obtenemos el resultado que deseabamos. ■

Bibliografía

- [1] ALABAU-BOUSSOIRA, F., CANNARSA, P. AND FRAGNELLI, G., *Carleman estimates for degenerate parabolic operators with applications to null controllability*, J. Evol. Equ. 6 (2006), no. 2, 161-204.
- [2] ANITA, S. AND BARBU, V., *Null controllability of nonlinear convective heat equations*, ESAIM: Control, Optim. Calc. Var., 5 (2000), 157-173.
- [3] BARBU, V., *Partial Differential Equations and Boundary Value Problems*, Vol. 441, Kluwer Academic Publishers, London, 1997.
- [4] BARBU, V., *On local controllability of Navier-Stokes equations*, Adv. Differential Equations 8(12) (2003), 1481-1498.
- [5] BREZIS, H., *Análisis Funcional. Teoría y aplicaciones*, Alianza Editorial, Madrid, 1984.
- [6] CABANILLA, V. R., DE MENEZES, S. B. AND ZUAZUA, E., *Null controllability in unbounded domains for semilinear heat equations with nonlinearities involving gradient terms*, Journal of Optimization Theory and Applications, 110(2) (2001), 245-264.
- [7] CAMPITI, M., METAFUNE, G. AND PALLARA, D., *Degenerate self-adjoint evolution equations on the unit interval*, Semigroup Forum, Vol. 57 (1998), 1-36.

- [8] CANNARSA, P. AND DE TERESA, L., *Insensitizing controls for one dimensional degenerate parabolic equations*, EJDE., Vol. 2009(2009), No. 73, pp. 1-21.
- [9] CANNARSA, P. AND FRAGNELLI, G., *Null controllability of semilinear degenerate parabolic equations in bounded domains*, EJDE (2006), N.136, pp.1-20.
- [10] CANNARSA, P., FRAGNELLI, G. AND ROCCHETTI, D., *Null controllability of degenerate parabolic operators with drift*, Netw. Heterog. Media 2 (2007), no. 4, 695–715 (electronic).
- [11] CANNARSA, P., FRAGNELLI, G. AND VANCOSTENOBLE, J., *Regional controllability of semilinear degenerate parabolic equations in bounded domains*, J. Math. Anal. Appl. 320 (2006), no. 2, 804-818.
- [12] CANNARSA, P., MARTINEZ, P. AND VANCOSTENOBLE, J., *Carleman estimates for degenerate parabolic operators*, SIAM J. Control Optim., 47 (2008), no. 1, 1-19.
- [13] CANNARSA, P., MARTINEZ, P. AND VANCOSTENOBLE, J., *Null controllability of degenerate heat equations*, Adv. Differential Equations, 10(2) (2005), 153-190.
- [14] CANNARSA, P., MARTINEZ, P. AND VANCOSTENOBLE, J., *Persistent regional null controllability for a class of degenerate parabolic equations*, Communications on Pure and Applied Analysis, 3 (2004), 607-635.
- [15] FABRE, C., PUEL, J. P. AND ZUAZUA, E., *Approximate controllability of the semilinear heat equation*, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, 125 (1995) 31-61.
- [16] FATTORINI, H. O. AND RUSSELL, D. L., *Exact controllability theorems for linear parabolic equations in one space dimension*, Arch. Rat. Mech. Anal. 4 (1971) 272-292.
- [17] FERNÁNDEZ-CARA, E., GUERRERO, S., IMANUVILOV, YU. O. AND PUEL, J. P., *Local exact controllability of the Navier-Stokes system*, J. Math Pures Appl. (9) 83(12) (2004) 1501-1542.
- [18] FLORES, C., DE TERESA, L., *Carleman estimates for degenerate parabolic equations with first order terms and applications*. C.R. Acad. Sci. Paris. I 348 (2010) 391-396.

- [19] FURSIKOV, A. V. AND IMANUVILOV, YU. O., *Controllability of evolution equations*, Lectures Notes Series 34, Seoul National University, Seoul, Korea, 1996.
- [20] IMANUVILOV, YU. O. AND YAMAMOTO, M., *Carleman inequalities for parabolic equations in Sobolev spaces of negative order and exact controllability for semilinear parabolic equations*, Publ. Res. Math. Sci. 39 (2003), no. 2, 227-274.
- [21] LIONS, J.-L. AND MAGENES, E., *Non-homogeneous boundary value problems and applications*, Vol. I, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 181, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1972.
- [22] MARTINEZ, P. AND VANCOSTENOBLE, J., *Carleman estimates for one-dimensional degenerate heat equations*, J. Evol. Equ. 6 (2006), no. 2, 325-362.
- [23] MARTINEZ, P., RAYMOND, J.-P AND VANCOSTENOBLE, J., *Regional null controllability of Crocco type linearized equation*, SIAM J. Control Optim., 42(2) (2004) 709-728.
- [24] OLEINKIK, O. A. AND SAMOKHIN, V. N., *Mathematical Models in Boundary Layer Theory*, Applied Mathematics and Mathematical Computation, 15, 1999, Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, London, New York.
- [25] OPIC, B. AND KUFNER, A., *Hardy-Type Inequalities*, Longman Scientific and Technical, Harlow, UK, 1990.
- [26] RUSSELL, D. L., *A unified boundary controllability theory for hyperbolic and parabolic partial differential equations*, Stud. Appl. Math. 52(1973), 189-221.
- [27] SIMON, J., *Compact sets in the spaces $L^p(0, T; B)$* , Annali di Matematica Pura ed Applicata, IV, Vol. CXLVI (1987), pp 65-96.
- [28] DE TERESA, L. AND ZUAZUA, E., *Approximate controllability of the semilinear heat equation in unbounded domains*, Nonlinear Analysis TMA, 37 (1999).
- [29] DE TERESA, L. AND ZUAZUA, E., *Nonlinear and semilinear heat equations in thin domains*, Asymptotic Analysis, 24 (2000), 295-317.
- [30] ZEIDLER, E., *Nonlinear Functional Analysis and its Applications*, Applications to Mathematical Physics, IV, Springer, 1985.