



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**

FACULTAD DE CIENCIAS

**CÍRCULOS DE FORD Y SUCESIONES ASOCIADAS
EN LA INTERSECCIÓN DE RECTAS**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

M A T E M Á T I C O

P R E S E N T A:

MAURICIO ENRIQUE ELIZALDE MEJÍA



**DIRECTOR DE TESIS:
MAT. CÉSAR GUEVARA BRAVO**

México D.F. **2015**



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno

Elizalde

Mejía

Mauricio Enrique

5338 9330

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Matemáticas

302051571

2. Datos del tutor

Mat.

Julio César

Guevara

Bravo

3. Datos del sinodal 1

Dr.

Rodolfo

San Agustín

Chi

4. Datos del sinodal 2

Mat.

María Concepción Ana Luisa

Solís González

Cosío

5. Datos del sinodal 3

Mat.

Ernesto

Mayorga

Saucedo

6. Datos del sinodal 4

M. en C.

Rolando

Gómez

Macedo

7. Datos del trabajo escrito

Círculos de Ford y sucesiones asociadas con la intersección de rectas

110 pp

2015

Tabla de contenido

Introducción.....	i
I. Círculos de Ford	1
Propiedades	2
Suma de áreas.....	9
Extraer subconjuntos.....	12
II. Familia de rectas en el origen.....	20
Cardinalidad de $F_{1/m}$	27
Primera aproximación	27
Segunda aproximación.....	29
Tercera aproximación.....	32
Cuarta aproximación	36
Área de los círculos de la familia correspondiente a $F_{1/m}$	38
III. Saltos en la cardinalidad	42
IV. Otras propiedades generales de las sucesiones de rectas inclinadas	50
Propiedad aritmética.....	51
Sucesiones $F_{1/m}$ en la retícula.....	60
Polígono $P_{1/m}$	62
V. Cardinalidad y simetría	66
Fracciones simétricas	67
Cardinalidad de las fracciones simétricas	73
VI. Círculos de Ford y el fractal de Mandelbrot	78
Conjunto de Mandelbrot.....	78
Identificación de los bulbos.....	79
Cardioides paralelas	85
Apéndices	90
Apéndice A: Teoremas de apoyo	90
Apéndice B: Radios de los círculos.....	93
Apéndice C: Aproximación de la cantidad de primos relativos.....	98
Apéndice D: Programas desarrollados	101
Conclusiones	108
Bibliografía	109

Introducción

En 1938, Lester R. Ford escribió un artículo titulado “Fractions”. En él expuso por primera vez propiedades importantes de un conjunto de círculos con centro en $\left(\frac{p}{q}, \frac{1}{2q^2}\right)$, radio $\frac{1}{2q^2}$ y con $\frac{p}{q}$ una fracción irreducible. Después de ser conocido este trabajo de Ford es frecuente encontrar en la bibliografía matemática que a partir de una sucesión de Farey¹ se pueden construir los círculos asociados a las fracciones de la sucesión y que de esto se desprenden resultados importantes.

Este trabajo de tesis surge de la inquietud de preguntarnos cómo podemos extraer las sucesiones de Farey a partir de conocer el conjunto de círculos de Ford. La respuesta a esta pregunta no era tan complicada y fue a través de interceptar a los círculos con líneas horizontales, y las fracciones asociadas a los círculos intersectados eran una sucesión de Farey. La siguiente pregunta fue ¿qué pasa si atravesamos al conjunto de círculos con rectas que ya no son horizontales? La respuesta ya no fue simple y los trabajos que pudieran abordar esta pregunta ya no eran comunes. Después de responder esta pregunta, ya teníamos otras que se referían a la cardinalidad de los conjuntos extraídos; la suma de las áreas de los círculos que tocan las rectas; la diferencia de las cardinalidades entre dos conjuntos de círculos cuyos denominadores de las pendientes de las rectas que los intersectan son consecutivos; las posibles relaciones entre los círculos de Ford y los bulbos del conjunto de Mandelbrot. Las preguntas así como las respuestas son muchas y éstas se encuentran en la tesis.

Por la manera en la que se desarrolla el trabajo, podemos decir que es muy autocontenido, es decir, no se requiere recurrir demasiado a la consulta de otros trabajos relacionados con el tema, ya que éste contiene en buena medida aportaciones propias. En los casos que recurrimos a resultados conocidos hacemos mención de ellos. Incluso, para obtener cierta información, creamos programas en el lenguaje C++.

¹ Una **sucesión de Farey** es un conjunto de fracciones irreducibles entre 0 y 1 que tienen un denominador menor o igual a n en orden creciente. Cada sucesión de Farey comienza en 0 y termina en 1, denotados por las fracciones $0/1$ y $1/1$ respectivamente.

Los capítulos de la tesis están estructurados de la manera que sigue:

En el capítulo I se presenta la descripción y las principales propiedades de los círculos de Ford, así como la suma de sus áreas en el intervalo $[0,1]$. Se plantea la extracción de fracciones a partir de una curva que va tocando los círculos, y la idea es que conforme los toca, se extraen las fracciones correspondientes.

En el capítulo II se menciona la extracción de otro conjunto de fracciones y éstas son el elemento central de la tesis. Este conjunto de fracciones son las que se adquieren de los círculos tocados por una recta inclinada que pasa por el origen, y a partir de esto comienza el análisis de la cardinalidad de las sucesiones correspondientes, a través del desarrollo de varios métodos de aproximación.

En el capítulo III, al realizar el estudio de las cardinalidades de las sucesiones, surge lo que llamamos *salto*, que lo definimos como la diferencia de las cardinalidades de las sucesiones generadas por dos rectas de pendiente consecutiva en el denominador. Se analiza el comportamiento de dichos saltos con ayuda de herramientas de cómputo y se demuestra que sólo pueden ser potencias de dos.

En el capítulo IV, se muestra que las fracciones mencionadas, atienden a ciertas propiedades generales, donde las sucesiones de Farey son un caso particular. En este capítulo también se muestran propiedades de estas fracciones cuando se representan en una retícula, y exhibimos nuevos tipos de polígonos reticulares.

En el capítulo V se plantea una relación de simetría en las fracciones que se obtienen al prolongar la recta hasta que ya no toque a ningún círculo, y para calcular su cardinalidad primero se analiza la cardinalidad de las sucesiones generadas a partir de una recta que no pasa por el origen. Resulta que al generalizar este método se puede encontrar una forma de estimar la cardinalidad de las fracciones simétricas.

En el capítulo VI, se presentan algunas ideas de cómo el conjunto de Mandelbrot se puede relacionar con la estructura que posee el conjunto de los círculos de Ford.

Por último, se presentan las conclusiones de este trabajo de tesis.

Como mencionamos, la tesis contiene en buena medida aportaciones propias y antes de terminar la introducción es oportuno que indiquemos cuáles son éstas. Enseguida lo haremos para cada capítulo.

Capítulo I

Desarrollamos las demostraciones para la suma de las áreas de los círculos en el intervalo $[0, 1]$. Lo hacemos de dos formas, una por inversión de Möbius y la otra usando propiedades de sucesiones de Farey.

Capítulo II

Definimos al conjunto de fracciones $F_{1/m}$ a partir de la extracción de círculos usando rectas inclinadas que pasan por el origen, además desarrollamos una serie de aproximaciones que nos ayudan a conocer la cardinalidad de las mismas. También calculamos el área de los círculos correspondientes a esas sucesiones en el intervalo $[0, 1]$, y a manera de corolario obtenemos el área de todos los círculos, resultado que se desarrolló en el capítulo I.

Capítulo III

Retomamos las sucesiones $F_{1/m}$ y ya sabemos que en la medida en que la pendiente $1/m$ de la recta $y=1/m x$ se hace más pequeña, la cardinalidad de $F_{1/m}$ aumenta. La principal aportación en este capítulo es que encontramos que la diferencia de las cardinalidades entre dos sucesiones construidas a partir de dos rectas de pendientes con denominadores consecutivos, siempre será una potencia de 2.

Capítulo IV

Encontramos que las sucesiones crecientes o decrecientes generadas por la curva definida en el semiplano superior guardan una propiedad aritmética de suma. Aquí mostramos que este tipo de suma es una expresión que generaliza la que conocemos para las sucesiones de Farey o los números armónicos.

Por otro lado desarrollamos una serie de propiedades de las sucesiones $F_{1/m}$ dentro de la retícula. Esto dio lugar a obtener otra demostración de la propiedad aritmética de suma mencionada para dichas sucesiones.

Capítulo V

A partir de las fracciones $F_{1/m}$ creamos las simétricas a éstas. Esto fue a través de prolongar la recta más allá del intervalo $[0,1]$, y al buscar la cardinalidad de las fracciones simétricas, obtuvimos un nuevo método de aproximación para la cardinalidad de $F_{1/m}$.

Capítulo VI

Planteamos una relación entre los círculos de Ford y los bulbos del fractal de Mandelbrot, ésta se propone a partir de la existencia de una fracción intrínseca en cada círculo de Ford y en cada bulbo del fractal a través de su antena.

Apéndice B

Desarrollamos una justificación de cómo debe de ser el radio de los círculos para lograr la creación de una familia de círculos que guardan la tangencia descrita en la tesis.

Apéndice C

Se aportó un resultado útil para las primeras aproximaciones de la cardinalidad de $F_{1/m}$, relacionado con la cantidad de primos relativos a un número en un cierto rango. Además dejamos un problema que queda abierto.

Apéndice D

Se desarrolló una serie de programas compilados en C++, que ayudaron a visualizar el comportamiento de las fracciones creadas.

Capítulo I

Círculos de Ford

Si se desea abordar el tema de los círculos de Ford, se pueden hacer de diferentes maneras. Puede ser desde el estudio del Grupo de Picard, dentro de un contexto geométrico a la manera de Bianchi, con base en las ideas generales de Poincaré en donde aparecen ciertas familias invariantes de las esferas. Es posible, que el interés por el trabajo de Ford llegue por el lado del estudio de las familias de círculos tangentes y para este perfil lo adecuado sería partir de lo propuesto por Apolonio de Pérgamo, seguido de los resultados de René Descartes donde se relacionan los recíprocos de los radios de círculos mutuamente tangentes. Finalmente, podemos adentrarnos en los círculos de Ford a través de curvas en el plano complejo, en particular, si se estudia el grupo modular Gamma de transformaciones del plano complejo que lleva círculos de Ford a otros círculos de Ford.

Para un estudio sobre algunas de las directrices mencionadas, existe el trabajo de Apostol [1997].²

La manera como abordaremos los círculos de Ford es a través del estudio de ciertas propiedades desde una perspectiva en la que ellos tienen una existencia propia como objetos matemáticos. Nuestro punto de partida es el trabajo del mismo Ford [1938], en el que sus círculos son objetos que ni siquiera están, en un principio, vinculados con las series de Farey.³

² Consultar Apostol [1997].

³ Esta mención se debe a que es frecuente encontrar en la literatura matemática que el tema de los círculos de Ford es una extensión del estudio de las sucesiones de Farey.

Propiedades

Consideremos a una familia de círculos tangentes al eje X del plano, de tal manera que para cada punto racional $x = \frac{p}{q}$ en el eje X , con p y q enteros positivos y primos relativos, se construye un círculo de radio $\frac{1}{2q^2}$ sobre el mismo eje.⁴ La configuración de estos círculos se muestra en la Figura 1.

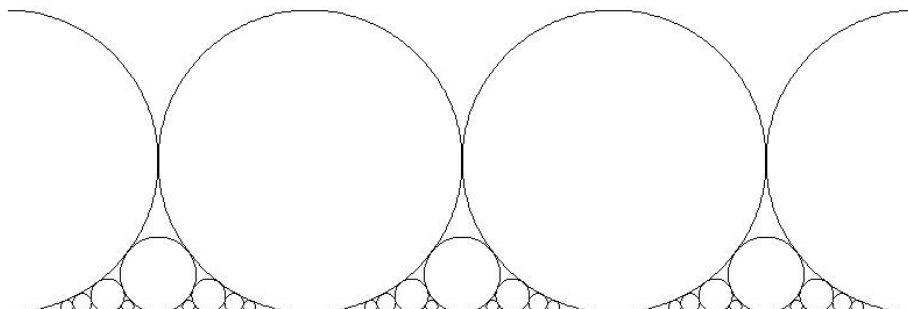


Figura 1. Conjunto de círculos tangentes entre sí y a una recta

Observemos que si $p \in \mathbb{Z}$ y $q = 1$, entonces los círculos correspondientes están posicionados en los números enteros, donde cada uno tiene radio $\frac{1}{2}$ y diámetro unitario. En la Figura 2 se aprecia la secuencia de círculos tangentes separados sólo por la unidad.

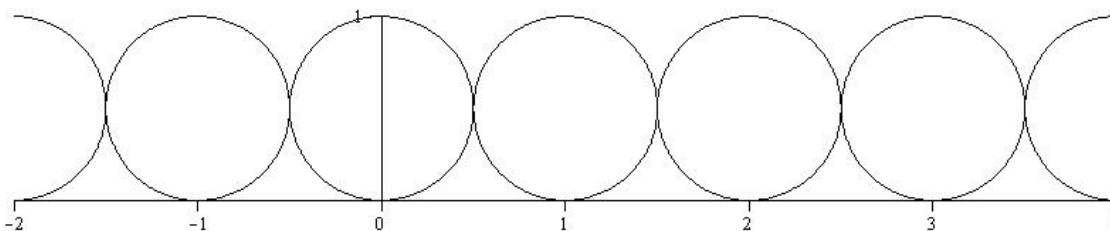


Figura 2. Círculos de diámetro uno.

⁴ La elección del radio no es arbitraria, consulte el Apéndice B para una justificación de su elección.

Se puede notar que es posible tener una infinidad de círculos bajo esta construcción, pues q puede ser tan grande como queramos y por cada valor de q se puede escoger un valor de p de tal manera que p y q sean primos relativos, por ejemplo $p = 1$.

Ahora, proporcionamos algunas propiedades que nos permitirán caracterizar a la familia de los círculos descritos, llamados *círculos de Ford*.

Teorema 1.1. Los círculos representados por dos fracciones distintas son tangentes o disjuntos.

Demostración. Sean $\frac{p_1}{q_1}$ y $\frac{p_2}{q_2}$ dos fracciones distintas, supongamos que $(p_1, q_1) = 1$ y $(p_2, q_2) = 1$. Éstas corresponden a los círculos C_1 y C_2 respectivamente. Sea A el centro de C_1 , B el centro de C_2 , y C el punto donde se intersecan las rectas $\frac{p_2}{q_2}B$ y la recta horizontal que pasa por A (ver figura 3).

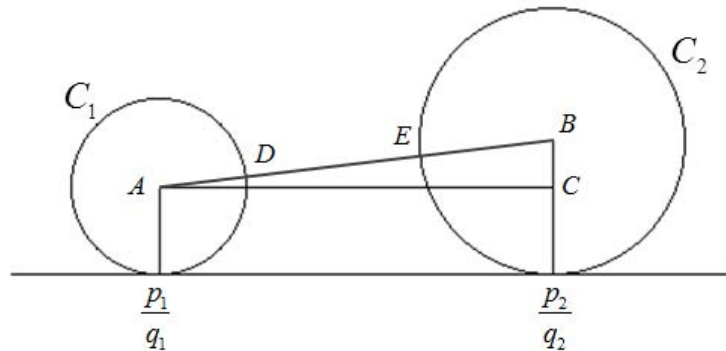


Figura 3. Líneas y puntos importantes de C_1 y C_2

Del triángulo ACB la distancia horizontal AC entre los círculos es igual a $\left| \frac{p_1}{q_1} - \frac{p_2}{q_2} \right|$.

CB es la distancia vertical entre los radios $\left| \frac{1}{2q_1^2} - \frac{1}{2q_2^2} \right|$.

Por el teorema de Pitágoras se tiene que

$$\begin{aligned}
AB^2 &= \left(\frac{p_2}{q_2} - \frac{p_1}{q_1} \right)^2 + \left(\frac{1}{2q_2^2} - \frac{1}{2q_1^2} \right)^2 \\
&= \left(\frac{q_1p_2 - q_2p_1}{q_2q_1} \right)^2 + \left(\frac{1}{2q_2^2} \right)^2 - \left(2 \frac{1}{2q_2^2} \frac{1}{2q_1^2} \right) + \left(\frac{1}{2q_1^2} \right)^2 \\
&= \frac{(q_1p_2 - q_2p_1)^2}{q_2^2q_1^2} - \left(4 \frac{1}{2q_2^2} \frac{1}{2q_1^2} \right) + \left(\frac{1}{2q_2^2} \right)^2 + \left(2 \frac{1}{2q_2^2} \frac{1}{2q_1^2} \right) + \left(\frac{1}{2q_1^2} \right)^2 \\
&= \frac{(q_1p_2 - q_2p_1)^2}{q_2^2q_1^2} - \frac{1}{q_2^2} \frac{1}{q_1^2} + \left(\frac{1}{2q_2^2} + \frac{1}{2q_1^2} \right)^2 \\
&= \frac{(p_2q_1 - p_1q_2)^2 - 1}{q_2^2q_1^2} + (AD + EB)^2,
\end{aligned}$$

donde D y E son las intersecciones de AB con C_1 y C_2 respectivamente.

Ahora, analizaremos tres casos:

Caso 1. $|p_2q_1 - p_1q_2| > 1$ si y sólo si $AB > AD + EB$, lo que quiere decir que los dos círculos son disjuntos.

Caso 2. $|p_2q_1 - p_1q_2| = 1$ si y sólo si $AB = AD + EB$, lo que quiere decir que los dos círculos son tangentes.

Caso 3. $|p_2q_1 - p_1q_2| < 1$ si y sólo si $p_2q_1 - p_1q_2 = 0$, ya que $p_2q_1 - p_1q_2 \in \mathbb{Z}$. Así $p_2q_1 = p_1q_2$ y $\frac{p_1}{q_1} = \frac{p_2}{q_2}$, pero esto contradice la hipótesis de que las fracciones son distintas.

Con esto concluimos que todos los círculos son tangentes o disjuntos entre sí. \square

Cuando dos círculos son tangentes, diremos que sus fracciones correspondientes son **adyacentes**. A partir del teorema anterior, podemos afirmar que dos fracciones son adyacentes si y sólo si $|p_2q_1 - p_1q_2| = 1$.

Teorema 1.2. Toda fracción $\frac{p}{q}$ tiene una fracción adyacente.

Demostración. El teorema es válido si $q=1$, ya que $p/1$ cuenta con la fracción adyacente $(p+1)/1$, y se cumple que $|(p+1)(1) - p(1)| = 1$.

Ahora supongamos que el teorema es válido para fracciones cuyos denominadores son menores a q y demostraremos que el teorema es válido para la fracción $\frac{p}{q}$.

Sea n el entero más próximo a $\frac{p}{q}$, y $m \in \mathbb{Z}$ tal que, $\frac{p}{q} = n + \frac{m}{q} = \frac{nq+m}{q}$, $0 < |m| < q$.

Como $|m| < q$, entonces (por el proceso expuesto) $\frac{q}{m}$ tiene una fracción adyacente $\frac{a}{b}$, por lo que $|am - qb| = 1$, así

$$1 = |am - qb| = |nqa + am - nqa - qb| = |(nq + m)a - (na + b)q|.$$

Por lo tanto, la fracción $\frac{na+b}{a}$ es adyacente a $\frac{p}{q} = \frac{nq+m}{q}$. \square

Al visualizar los círculos podemos percibir que para cada fracción existen otras que le son adyacentes, tanto a la izquierda como a la derecha, entonces una pregunta natural sería ¿cuántas fracciones adyacentes le corresponden a cada fracción? La respuesta es que cada fracción tiene una infinidad de fracciones adyacentes, lo cual se demostrará en el siguiente teorema, donde además exhibiremos cómo generarlas.

Teorema 1.3. Si $\frac{p'}{q'}$ es adyacente a $\frac{p}{q}$ entonces todas las fracciones adyacentes de $\frac{p}{q}$ son de la forma

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{p' + np}{q' + nq}, \text{ donde } n \in \mathbb{Z}.$$

Demostración. A partir de la igualdad de la hipótesis se observa que

$$|p_n q - p q_n| = |(p' + np)q - p(q' + nq)| = |p'q + npq - pq' + npq| = |p'q - pq'|,$$

y sabemos que $|p'q - pq'| = 1$ porque $\frac{p'}{q'}$ es adyacente a $\frac{p}{q}$. Con lo anterior se llega a que

$$|p_n q - p q_n| = 1 \text{ y por lo tanto } \frac{p_n}{q_n} \text{ es adyacente a } \frac{p}{q}, \text{ para toda } n \in \mathbb{N}.$$

Las sucesiones son distintas para cada n y que son adyacentes entre sí, por lo siguiente:

$$\begin{aligned} & |[p' + np][q' + (n+1)q] - [p' + (n+1)p][q' + nq]| \\ &= |[p' + np][q' + nq + q] - [p' + np + p][q' + nq]| \\ &= |[p'q' + np'q + p'q + npq' + npnq + npq] - [p'q' + npq' + pq' + nqp' + nqnq + nqp]| \\ &= |p'q - pq'| = 1 \end{aligned}$$

Podemos escribir a $\frac{p_n}{q_n}$ de la forma:

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{p' + np}{q' + nq} = \frac{p'q + npq}{q(q' + nq)} = \frac{pq' + npq + p'q - pq'}{q(q' + nq)} = \frac{p(q' + nq) + p'q - pq'}{q(q' + nq)} = \frac{p}{q} + \frac{p'q - pq'}{q(q' + nq)},$$

por lo que se obtiene $\frac{p_n}{q_n} = \frac{p}{q} + \frac{p'q - pq'}{q(q' + nq)} = \frac{p}{q} \pm \frac{1}{q(q' + nq)} \dots\dots\dots(\delta).$

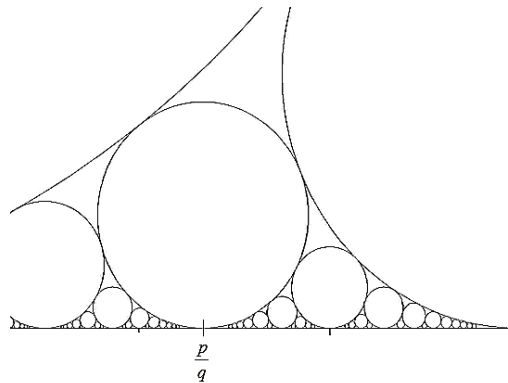


Figura 4. Círculos que rodean al círculo que descansa en $\frac{p}{q}$

De la igualdad δ vemos que dependiendo del signo, las fracciones serán adyacentes por la izquierda o por la derecha y éstas representan una infinidad. Así concluimos que hay una infinidad de fracciones adyacentes que corresponderán a círculos más pequeños.

Ya tenemos que los círculos asociados a $\frac{p_n}{q_n}$ circundan al círculo de $\frac{p}{q}$. Enseguida veremos que lo rodean formando un anillo de círculos tangentes. Para esto, basta con demostrar que hay dos círculos de $\frac{p_n}{q_n}$ que son más grandes que el de $\frac{p}{q}$, porque con estos dos se terminaría la cadena de círculos que rodean al círculo.

Para que un círculo sea más grande que el de $\frac{p}{q}$, debe tener un radio mayor a $1/(2q^2)$, es decir, $1/(2q_n^2) > 1/(2q^2)$, por lo tanto $1/(2(q'+nq)^2) > 1/(2q^2)$. Concentrándonos en los denominadores se tiene que $2(q'+nq)^2 < 2q^2$, de donde $|q'+nq| < |q|$, por lo que $|n+q'/q| < 1$, y esto se cumple sólo para dos valores de n : los dos enteros más próximos a $-q'/q$. Para uno de estos valores de n , el término $n+q'/q$ es positivo y para el otro, es negativo, por lo que, a partir de la igualdad δ , vemos que una de las dos fracciones correspondiente a uno de estos valores de n está a la izquierda de p/q y la otra a la derecha.

Note que $q'/q \notin \mathbb{Z}$ ya que $|p'q - pq'| = 1$, de donde se obtiene que $(q, q') = 1$. En el único caso en el que $q'/q \in \mathbb{Z}$ es cuando $q = q' = 1$, pues se conserva el hecho de que sean primos relativos. En este caso $p' = p \pm 1$, y estaríamos hablando de los círculos más grandes, los de diámetro uno, y en vez de hablar de un anillo que los rodea, hablaríamos de un semianillo.

Hemos formado un anillo de círculos tangentes que rodean al círculo en cuestión. Una consecuencia de esto es que no se puede trazar un círculo tangente al eje X y al círculo de

$\frac{p}{q}$ sin intersecar a algún círculo del anillo que rodea a este círculo, por ello, no hay más

fracciones adyacentes a $\frac{p}{q}$. \square

Corolario. Cada círculo de radio menor a $\frac{1}{2}$ es tangente a exactamente dos círculos más grandes y tangente a una infinidad de círculos más pequeños.

Teorema 1.4. Los círculos que se encuentran en el intervalo $[0,1]$ son simétricos respecto a la recta $x = 1/2$.

Demostración. Sea C un círculo tomado en $[0,1]$, entonces su fracción p/q cumple con $(p, q) = 1$, por lo que $(q-p, q) = 1$. Ahora consideremos la fracción $\frac{q-p}{q}$, ésta dista de la

recta $x = \frac{1}{2}$ lo mismo que dista $\frac{p}{q}$, ya que

$$\frac{q}{q} = 1 \Rightarrow \frac{q-p}{q} + \frac{p}{q} = 1 \Rightarrow \left| \frac{q-p}{q} - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{1}{2} - \frac{p}{q} \right|$$

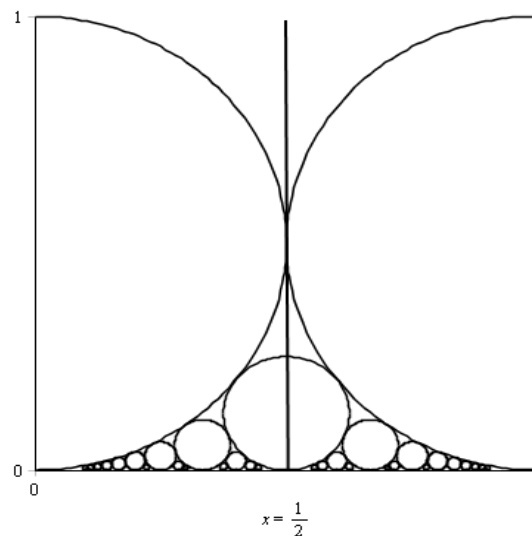


Figura 5. Los círculos en $[0,1]$ son simétricos respecto a $x = 1/2$

Por lo tanto $\frac{q-p}{q}$ es simétrica a $\frac{p}{q}$ respecto a la recta $x = \frac{1}{2}$, y sus círculos tienen el

mismo diámetro porque tienen el mismo denominador. \square

Suma de áreas

Con los teoremas anteriores podemos visualizar cómo están alojados los círculos, es decir, que dada una fracción y su respectivo círculo es posible ubicar cúmulos de ellos que se alojan antes o después de ella. Además, nos permiten analizar comportamientos locales y saber que la cercanía entre los círculos tiene como límite a la tangencia entre ellos.

Ahora pasamos a otro tipo de propiedades que ya no están en el ámbito del comportamiento local de los conjuntos de círculos, éstas están dirigidas al estudio del conjunto total de círculos. Daremos lugar a demostrar un teorema que se relaciona con la suma de las áreas del conjunto total de los círculos.

Teorema 1.5. El área del total de los círculos que se encuentran entre $x=0$ y $x=1$ es $\frac{\pi \zeta(3)}{4 \zeta(4)}$, donde ζ es la función zeta de Riemman.⁵

Demostración. Sabemos que el área de cada círculo puede ser calculada con base en su fracción correspondiente, y como ésta es de la forma $\frac{p}{q}$, entonces su área es $\pi \left(\frac{1}{2q^2} \right)^2$. La suma total se tiene que hacer sobre los valores de q y p que pueden formar fracciones irreducibles en el intervalo $[0,1]$. Si A es el área buscada, entonces

$$A = \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{\substack{(p,q)=1 \\ 1 \leq p \leq q}} \pi \left(\frac{1}{2q^2} \right)^2 = \frac{\pi}{4} \sum_{q=1}^{\infty} \left(\frac{1}{q^4} \right) \sum_{\substack{(p,q)=1 \\ 1 \leq p \leq q}} 1 = \frac{\pi}{4} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{\varphi(q)}{q^4}. \quad 6$$

Observe que los semicírculos correspondientes a las fracciones $\frac{0}{1}$ y $\frac{1}{1}$ se contabilizan como un círculo completo cuando se cuenta el área del círculo de la fracción $\frac{1}{1}$ (ver Figura 6).

⁵ Aunque se presenta una propiedad general para el conjunto de círculos en el intervalo $[0,1]$, ésta se puede extender idénticamente a los demás intervalos.

⁶ $\varphi(n)$ denota la cantidad de primos relativos en el rango $1, \dots, n$.

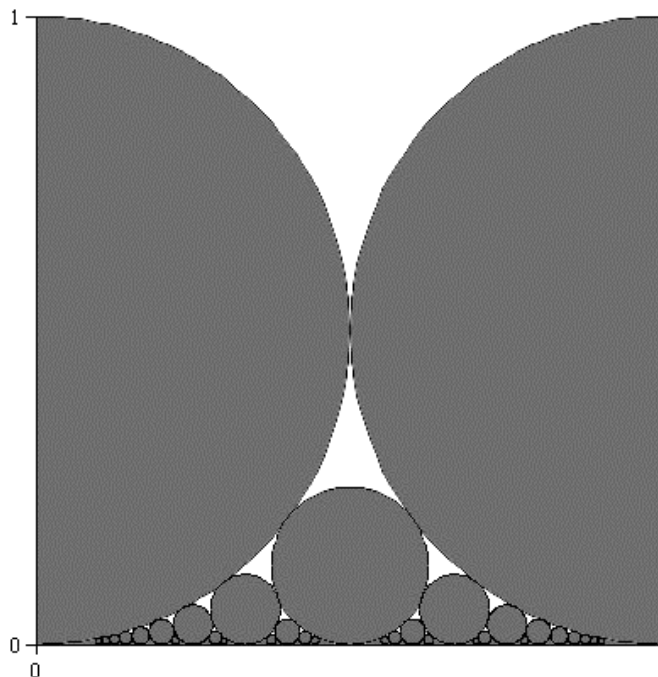


Figura 6. Área de los círculos entre $x=0$ y $x=1$

Utilizando la fórmula de inversión de Möbius⁷ se tiene que $\varphi(q) = q \sum_{d|q} \frac{\mu(d)}{d}$,

entonces,
$$A = \frac{\pi}{4} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{q \sum_{d|q} \frac{\mu(d)}{d}}{q^4} = \frac{\pi}{4} \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{d|q} \frac{\mu(d)}{dq^3} \dots\dots\dots(\alpha).$$

Desarrollando la expresión $\sum_{q=1}^{\infty} \sum_{d|q} \frac{\mu(d)}{dq^3}$ se obtiene:

$$\sum_{q=1}^{\infty} \sum_{d|q} \frac{\mu(d)}{dq^3} = \sum_{d|1} \frac{\mu(d)}{d1^3} + \sum_{d|2} \frac{\mu(d)}{d2^3} + \sum_{d|3} \frac{\mu(d)}{d3^3} + \sum_{d|4} \frac{\mu(d)}{d4^3} + \dots$$

⁷ La fórmula de inversión de Möbius enuncia que: Si f es una función aritmética y $F(n) = \sum_{d|n} f(d)$ entonces

$f(n) = \sum_{d|n} \mu(d)F(n/d)$, donde $\mu(n)$ es la función de Möbius, la cual toma el valor de $(-1)^k$ si $n = p_1 p_2 \dots p_k$ y toma el valor de cero si existe un primo p tal que $p^2 | n$.

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{1^3} \sum_{d|1} \frac{\mu(d)}{d} + \frac{1}{2^3} \sum_{d|2} \frac{\mu(d)}{d} + \frac{1}{3^3} \sum_{d|3} \frac{\mu(d)}{d} + \frac{1}{4^3} \sum_{d|4} \frac{\mu(d)}{d} + \dots \\
&= \frac{1}{1^3} \left(\frac{\mu(1)}{1} \right) + \frac{1}{2^3} \left(\frac{\mu(1)}{1} + \frac{\mu(2)}{2} \right) + \frac{1}{3^3} \left(\frac{\mu(1)}{1} + \frac{\mu(3)}{3} \right) + \frac{1}{4^3} \left(\frac{\mu(1)}{1} + \frac{\mu(2)}{2} + \frac{\mu(4)}{4} \right) + \dots \\
&= \frac{\mu(1)}{1} \left(\frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots \right) + \frac{\mu(2)}{2} \left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{4^3} + \dots \right) + \frac{\mu(3)}{3} \left(\frac{1}{3^3} + \frac{1}{6^3} \right) + \dots \\
&= \sum_{d=1}^{\infty} \left[\frac{\mu(d)}{d} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(dk)^3} \right] = \sum_{d=1}^{\infty} \left[\frac{\mu(d)}{d} \frac{1}{d^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \right] = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d)}{d^4}
\end{aligned}$$

Aquí utilizamos el hecho de que la serie $\sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d)}{d^4}$ se puede ver como el producto de Euler⁸ $\prod_{p \in P} \left(1 + \frac{\mu(p)}{p^4} + \frac{\mu(p^2)}{p^8} + \frac{\mu(p^3)}{p^{12}} + \dots + \frac{\mu(p^n)}{p^{4n}} + \dots \right) = \prod_{p \in P} \left(1 + \frac{\mu(p)}{p^4} \right)$, donde P es el conjunto de los primos positivos.

Por lo tanto, de la igualdad (α) y de la igualdad anterior se tiene

$$\begin{aligned}
A &= \frac{\pi}{4} \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{d|q} \frac{\mu(d)}{dq^3} = \frac{\pi}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d)}{d^4} \\
&= \frac{\pi}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \prod_{p \in P} \left(1 + \frac{\mu(p)}{p^4} \right) = \frac{\pi}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \prod_{p \in P} \left(1 - \frac{1}{p^4} \right).
\end{aligned}$$

Por otro lado⁹, como $\prod_{p \in P} \left(1 - \frac{1}{p^4} \right) = \frac{1}{\prod_{p \in P} \left(1 - \frac{1}{p^4} \right)} = \frac{1}{\prod_{p \in P} \left(\frac{1}{1 - p^{-4}} \right)} = \frac{1}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}}$, podemos usarlo para

llegar finalmente a que

⁸ Si f es multiplicativa y $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ es absolutamente convergente entonces $\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \prod_p (1 + f(p) + f(p^2) + \dots)$

Consultar Jones [1998, pp. 182]

$$A = \frac{\pi}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \frac{1}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}} = \frac{\pi}{4} \frac{\zeta(3)}{\zeta(4)}. \quad \square$$

Una vez familiarizados con los círculos a partir de algunas propiedades de orden y de cubrimiento del plano, ahora podemos preguntarnos ¿qué más se puede extraer de ellos? Por ejemplo, una analogía a esta pregunta puede ser en torno a los números enteros, donde una vez que se conocen, se puede extraer cierto subconjunto de ellos que cumplan algunas propiedades, como la de sólo tener como divisor propio a la unidad, y esto da como resultado el subconjunto de los números primos.

Pues es en este contexto en el que ahora deseamos abordar a los círculos, y siendo más explícitos, lo que queremos es extraer subconjuntos de ellos y por extensión, de fracciones, pero que el procedimiento sea bajo ciertos criterios que le den a la vez, a las respectivas sucesiones de fracciones, un marco conceptual de independencia como objetos matemáticos.

Un ejemplo elemental es extraer a todos los círculos de radio $\frac{1}{2}$, esto quiere decir que $r = \frac{1}{2q^2} = \frac{1}{2}$, por lo tanto $q = 1$ y $p \in \mathbb{Z}$. Así, la sucesión correspondiente a estos círculos es la de los números enteros, tal como se ilustró en la figura 2.

Extraer subconjuntos

Con el objetivo de extraer diversas clases de conjuntos de fracciones, definiremos el siguiente procedimiento: Sea L una curva continua que cruza los círculos y que está definida sobre el semiplano superior, donde se alojan los círculos. Por cada círculo que cruza L se obtiene la fracción que le corresponde, entonces podemos decir que las fracciones que L extrae, serán aquellas que conciernen a los círculos que toque. Se tiene que contemplar la posibilidad de tener que elegir una fracción si L toca de manera tangente a dos círculos en un mismo punto, y para esto podríamos convenir que nos quedemos con el de la fracción mayor, o con el círculo de la izquierda, o con el más grande, etc. Observe que si definimos

⁹ Aquí se usa la forma conocida de la función zeta, $\zeta(s) : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \in \mathbb{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s} \right)$.

a L como la curva $y=1$, entonces justo se extraen, los números enteros, como en el primer ejemplo.

Veamos qué subconjuntos de fracciones podemos extraer con este procedimiento. Definamos a L como la sección de la circunferencia $y = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - x^2}$, $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, y observe en la figura 7 que los círculos que toca L corresponden a las fracciones $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots$, con la debida convención de quedarnos con el círculo de la derecha cada vez que L toque a dos círculos en su punto de tangencia.

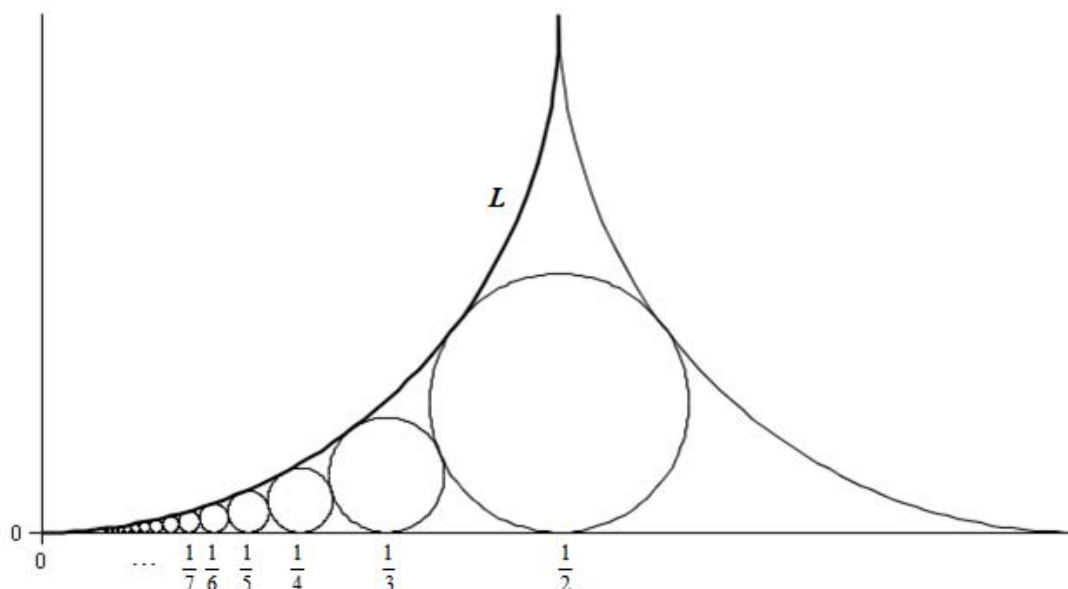


Figura 7. Círculos que toca la curva L

En el caso de que L sea una recta, para saber si ésta toca a un círculo tenemos que fijarnos en la mínima distancia que existe entre L y el centro C del círculo, si esta distancia es menor al radio, entonces la recta cruza al círculo, pero si la distancia es igual lo toca de manera tangente.

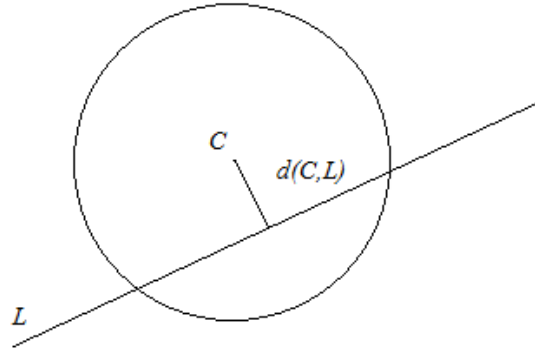


Figura 8. *Círculo tocado por la recta L*

A continuación presentamos el procedimiento para el caso particular en que L es una recta horizontal, digamos $y=k$, $k \in \mathbb{R}^+$, y veremos qué círculos toca en el intervalo $[0,1]$. El proceso exige fijarnos en la mínima distancia que hay entre la recta y el centro del círculo, y sabemos que si esta distancia es menor o igual al radio r , entonces la recta toca al círculo. Como la distancia mínima entre L y el centro del círculo es $|k-r|$, entonces la condición es que $|k-r| \leq r$, y como r es el radio de un círculo asociado a una fracción $\frac{p}{q}$ entonces $|k - \frac{1}{2q^2}| \leq \frac{1}{2q^2}$. De ahí que $-\frac{1}{2q^2} \leq k - \frac{1}{2q^2} \leq \frac{1}{2q^2}$ y sumando $\frac{1}{2q^2}$ obtenemos $0 \leq k \leq \frac{2}{2q^2} = \frac{1}{q^2}$, de donde obtenemos la condición $q \leq \sqrt{\frac{1}{k}}$. Con esto sabremos que el círculo asociado a la fracción $\frac{p}{q}$ estará en la trayectoria de la recta $y=k$ si $q \leq \sqrt{\frac{1}{k}}$.

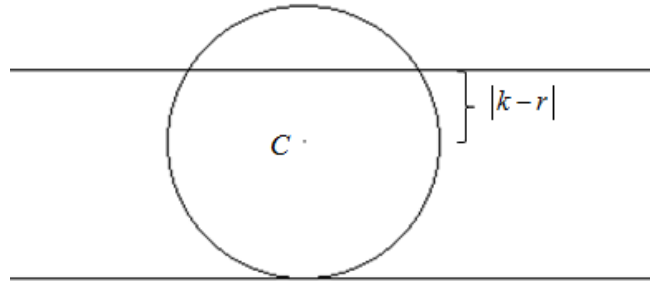


Figura 9. *Círculo que toca la recta horizontal L*

Ejemplo.

Para $k = \frac{1}{32}$ el conjunto de fracciones $\frac{p}{q}$ correspondientes a los círculos que toca la recta

$y = \frac{1}{32}$, con $q \leq \sqrt{\frac{1}{k}} = \sqrt{\frac{1}{1/32}} \approx 5.65$, y donde p no es mayor que q , es el siguiente:

$$\left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1} \right\}.$$

En general, las fracciones $\frac{p}{q}$ vinculadas a los círculos que toca L , satisfacen que

$(p, q) = 1$, $\frac{p}{q} \leq 1$, $q \leq \sqrt{\frac{1}{k}}$. Pero q es un entero, por lo que podemos reemplazar la condición

de que q es menor que una constante, es decir, $q \leq \sqrt{\frac{1}{k}}$ por $q \leq n$, donde $n = \left\lfloor \sqrt{\frac{1}{k}} \right\rfloor$, y así la

sucesión de fracciones que se forma es $\left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}^+, (p, q) = 1, q \geq p, q \leq n \right\}$.

Aquí tenemos una sorpresa, y es la de haber encontrado lo que conocemos como sucesión de Farey de orden n , denotada por F_n . Un ejemplo de esto es la sucesión del ejemplo anterior, que corresponde a F_5 .

Con frecuencia encontramos que a los círculos de Ford se les define en términos de las sucesiones de Farey¹⁰, pero ahora estamos viendo a los círculos de manera independiente, y que a partir de ellos podemos generar a las sucesiones de Farey.

Ahora que ya tenemos dichas sucesiones, podemos demostrar de otra manera que el área de los círculos que se encuentran entre $x=0$ y $x=1$ es $\frac{\pi}{4} \frac{\zeta(3)}{\zeta(4)}$. Recordemos el teo-

rema.

Teorema 1.5. El área del total de los círculos que se encuentran entre $x=0$ y $x=1$ es

$$\frac{\pi}{4} \frac{\zeta(3)}{\zeta(4)}, \text{ donde } \zeta \text{ es la función zeta de Riemman.}$$

¹⁰ Por ejemplo en Justin Hsu "The Partition Function and Modular Forms", <http://mathematics.stanford.edu/wp-content/uploads/2013/08/Hsu-Honors-Thesis-2011.pdf>, en Jeremy Booher "The Circle Method, the j Function, and Partitions", <http://stanford.edu/~jbooher/expos/jfourier.pdf> (publicaciones electrónicas de la Universidad de Stanford) y en Ramírez [2010].

Demostración. Como $x \in [0,1]$, entonces para los círculos correspondientes a las fracciones $\frac{0}{1}$ y $\frac{1}{1}$, sólo será contemplada la mitad que se encuentra en el intervalo, y el área que aportarán estos es

$$\frac{1}{2} \pi \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \pi \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \pi \left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

Del conjunto total de círculos de Ford –aunado al proceso antes expuesto– podemos extraer subconjuntos de círculos que correspondan a sucesiones de Farey respectivamente, así el total de círculos puede quedar repartido en dichas sucesiones. Utilizaremos este hecho y la propiedad $|F_n| = |F_{n-1}| + \varphi(n)$ para contar el área de todos los círculos.

Esta propiedad nos dice que dada una sucesión de orden $n-1$, para formar a la siguiente, hay que agregar las $\varphi(n)$ fracciones irreducibles menores a 1 con denominador n . Los círculos correspondientes a estas $\varphi(n)$ fracciones tendrán un radio $r_n = \frac{1}{2n^2}$.

$$\text{Sea } A \text{ el área buscada, entonces } A = \pi \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \sum_{n=2}^{\infty} \varphi(n) \pi r_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(n) \pi r_n^2$$

$$\Rightarrow A = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(n) \pi \left(\frac{1}{2n^2}\right)^2 = \frac{\pi}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n^4}.$$

Utilizaremos el hecho de que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n^4}$ se puede ver como el producto de Euler

$$\prod_{p \in P} \left(1 + \frac{\varphi(p)}{p^4} + \frac{\varphi(p^2)}{p^8} + \frac{\varphi(p^3)}{p^{12}} + \dots + \frac{\varphi(p^n)}{p^{4n}} + \dots \right), \text{ donde nuevamente, } P \text{ es el conjunto de}$$

los primos positivos.

$$\begin{aligned} \Rightarrow A &= \frac{\pi}{4} \prod_{p \in P} \left(1 + \frac{\varphi(p)}{p^4} + \frac{\varphi(p^2)}{p^8} + \frac{\varphi(p^3)}{p^{12}} + \dots + \frac{\varphi(p^k)}{p^{4k}} + \dots \right) \\ &= \frac{\pi}{4} \prod_{p \in P} \left(1 + \frac{p-1}{p^4} + \frac{p^2-p}{p^8} + \frac{p^3-p^2}{p^{12}} + \dots + \frac{p^n-p^{n-1}}{p^{4n}} + \dots \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\pi}{4} \prod_{p \in \mathbb{P}} \left(1 + \frac{1}{p^3} - \frac{1}{p^4} + \frac{1}{p^6} - \frac{1}{p^7} + \frac{1}{p^9} - \frac{1}{p^{10}} + \dots + \frac{1}{p^{4n-n}} - \frac{1}{p^{4n-n+1}} + \dots \right) \\
&= \frac{\pi}{4} \prod_{p \in \mathbb{P}} \left(1 + \frac{1}{p^{4-1}} - \frac{1}{p^4} + \frac{1}{p^{4(2)-2}} - \frac{1}{p^{4(2)-1}} + \dots + \frac{1}{p^{3n}} - \frac{1}{p^{3n+1}} + \dots \right) \\
&= \frac{\pi}{4} \prod_{p \in \mathbb{P}} s_p, \text{ donde } s_p = 1 + \frac{1}{p^{4-1}} - \frac{1}{p^4} + \frac{1}{p^{4(2)-2}} - \frac{1}{p^{4(2)-1}} + \dots + \frac{1}{p^{3n}} - \frac{1}{p^{3n+1}} + \dots
\end{aligned}$$

Observe que:

$$\frac{1}{p^3} s_p = \frac{1}{p^3} + \frac{1}{p^{4(2)-2}} - \frac{1}{p^{4(2)-1}} + \dots + \frac{1}{p^{3(n+1)}} - \frac{1}{p^{3(n+1)+1}} + \dots = s_p - \left(1 - \frac{1}{p^4} \right)$$

$$\Rightarrow s_p - (1/p^3) s_p = 1 - 1/p^4, \text{ por lo tanto } s_p = \frac{1 - 1/p^4}{1 - 1/p^3}$$

$$\Rightarrow A = \frac{\pi}{4} \prod_{p \in \mathbb{P}} s_p = \frac{\pi}{4} \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1 - 1/p^4}{1 - 1/p^3} = \frac{\pi}{4} \frac{\prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - 1/p^3}}{\prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - 1/p^4}} \therefore A = \frac{\pi}{4} \frac{\zeta(3)}{\zeta(4)} \quad \square$$

En la figura 10 se ilustra un ejemplo del área para F_4 .

Como corolario, nos podemos plantear, que para encontrar el área de los círculos correspondientes a las fracciones de Farey de orden n , $A(F_n)$, podemos comenzar de la misma manera, pero sumando hasta n para detenernos en las fracciones correspondientes a F_n :

$$A(F_n) = \sum_{k=1}^n \varphi(k) \pi r_k^2 = \sum_{k=1}^n \varphi(k) \pi \left(\frac{1}{2k^2} \right)^2 = \frac{\pi}{4} \sum_{k=1}^n \frac{\varphi(k)}{k^4}$$

$$\text{Aproximaremos el área utilizando que } \sum_{k=1}^n \frac{\varphi(k)}{k^4} = \frac{\zeta(3)}{\zeta(4)} - \frac{1}{2\zeta(2)n^2} + O\left(\frac{\ln n}{n^3}\right).^{11}$$

¹¹ La demostración de esta igualdad se encuentra en el Apéndice A.

$$\Rightarrow A(F_n) = \frac{\pi}{4} \sum_{k=1}^n \frac{\varphi(k)}{k^4} = \frac{\pi}{4} \frac{\zeta(3)}{\zeta(4)} - \frac{\pi}{8\zeta(2)n^2} + O\left(\frac{\ln n}{n^3}\right).^{12}$$

Observe que cuando n tiende a infinito, $A(F_n)$ tiende a A y la expresión

$$\frac{\pi}{4} \frac{\zeta(3)}{\zeta(4)} - \frac{\pi}{8\zeta(2)n^2} + O\left(\frac{\ln n}{n^3}\right) \text{ tiende a } \frac{\pi}{4} \frac{\zeta(3)}{\zeta(4)}.$$

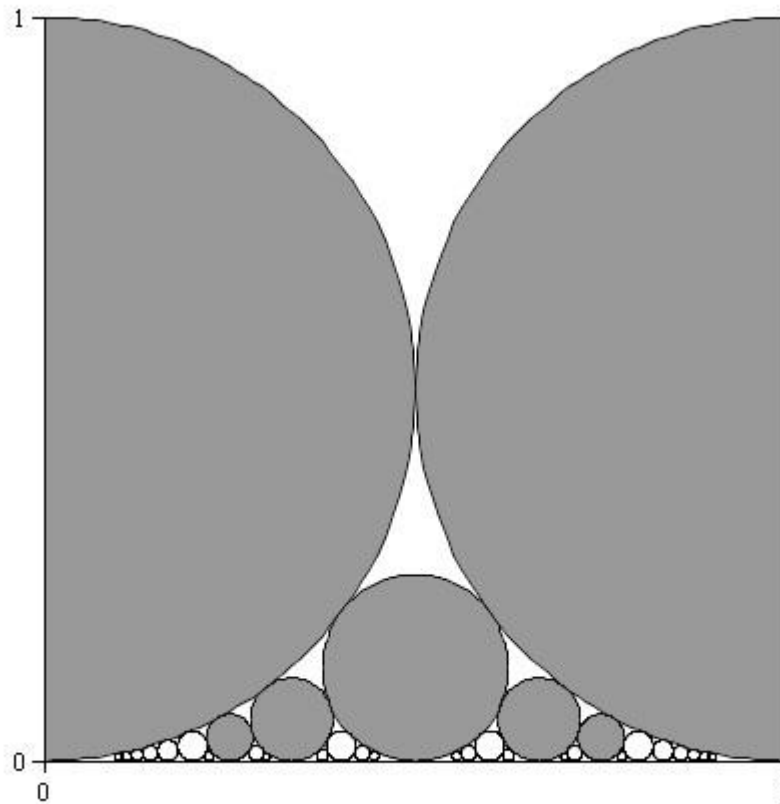


Figura 10. Área de los círculos de F_4

¹² Se define la gran O de la siguiente manera: $f(x) = g(x) + O(h(x))$ sii $|f(x) - g(x)| \ll h(x)$. A su vez $f(x) \ll h(x)$ sii $\exists c > 0$ tal que $x > x_0 \Rightarrow f(x) \leq c \cdot h(x)$ para alguna x_0 en el dominio de f .

Capítulo II

Familia de rectas en el origen

Ahora, es el momento de analizar a fondo el caso en que la recta L no es horizontal y que además pasa por el origen, esto es, cuando la recta explícitamente tiene la forma $y = \frac{1}{m}x$, $m \in \mathbb{N}$. Sucede que si m crece, la pendiente $1/m$ de la recta será cada vez más pequeña y L se acercará al eje X .

La condición que se requerirá para que la recta L toque a un círculo con centro en $C = \left(\frac{p}{q}, \frac{1}{2q^2}\right)$ reside en que se cumpla la desigualdad $pq \leq m$. Para justificar esto, partiremos de que la distancia entre el centro del círculo y la recta debe ser menor que r , es decir,

que $d(C, L) < r$. Y para este caso se tiene que $d(C, L) = \frac{\left|\frac{1}{m} \frac{p}{q} - \frac{1}{2q^2}\right|}{\sqrt{\left(\frac{1}{m}\right)^2 + 1}}$, con un círculo de radio

$r = \frac{1}{2q^2}$. Por lo tanto, de la condición que nos indica la desigualdad anterior se tiene que

$$\left|\frac{1}{m} \frac{p}{q} - \frac{1}{2q^2}\right| \leq \left(\frac{1}{2q^2}\right) \sqrt{\left(\frac{1}{m}\right)^2 + 1},$$

y después de simplificar

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{m} 2pq - 1\right| &\leq \sqrt{\left(\frac{1}{m}\right)^2 + 1} \\ \Rightarrow -\sqrt{\left(\frac{1}{m}\right)^2 + 1} &\leq \frac{1}{m} 2pq - 1 \leq \sqrt{\left(\frac{1}{m}\right)^2 + 1} \\ \Rightarrow 1 - \sqrt{\left(\frac{1}{m}\right)^2 + 1} &\leq \frac{2}{m} pq \leq 1 + \sqrt{\left(\frac{1}{m}\right)^2 + 1} \\ \Rightarrow \frac{1}{2} m \left(1 - \sqrt{\left(\frac{1}{m}\right)^2 + 1}\right) &\leq pq \leq \frac{1}{2} m \left(1 + \sqrt{\left(\frac{1}{m}\right)^2 + 1}\right). \end{aligned}$$

El lado izquierdo de la desigualdad siempre se cumple ya que $\sqrt{\left(\frac{1}{m}\right)^2 + 1} > \sqrt{1} = 1$, de esto se sigue que $\frac{1}{2}m\left(1 - \sqrt{\left(\frac{1}{m}\right)^2 + 1}\right) < \frac{1}{2}m(1-1) = 0 \leq pq$.

Hasta este punto, la condición se reduce a que

$$pq \leq \frac{1}{2}m\left(1 + \sqrt{\left(\frac{1}{m}\right)^2 + 1}\right)$$

Para simplificar esta condición, nombraremos a $\frac{1}{2}m\left(1 + \sqrt{\left(\frac{1}{m}\right)^2 + 1}\right)$ como $f(m)$, entonces $pq \leq f(m)$

Ahora veremos que $m < f(m) < m+1$

a) Primero verificaremos que $m < f(m)$

Partimos del hecho de que $1 < \frac{1}{m^2} + 1$,

$$\text{entonces } 1 < \left(\frac{1}{m^2} + 1\right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow m < m\left(\left(\frac{1}{m}\right)^2 + 1\right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow 2m < m\sqrt{\left(\frac{1}{m}\right)^2 + 1} + m$$

$$\Rightarrow m < \frac{1}{2}m\left(1 + \sqrt{\left(\frac{1}{m}\right)^2 + 1}\right) = f(m). \text{ Así llegamos a que } m < f(m)$$

b) Ahora verificaremos que $f(m) < m+1$

Partimos de que $0 < \frac{4}{m} + \frac{3}{m^2}$,

$$\text{entonces } 1 + \frac{1}{m^2} < 1 + \frac{4}{m} + \frac{4}{m^2} = \left(1 + \frac{2}{m}\right)^2 \Rightarrow \sqrt{1 + \frac{1}{m^2}} < 1 + \frac{2}{m} = 2 + \frac{2}{m} - 1$$

$$\Rightarrow \sqrt{1 + \frac{1}{m^2}} + 1 < 2\left(1 + \frac{1}{m}\right) \Rightarrow \frac{1}{2}m\left(\sqrt{1 + \frac{1}{m^2}} + 1\right) < m\left(1 + \frac{1}{m}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\left(m\sqrt{1 + \frac{1}{m^2}} + m\right) < m+1, \text{ finalmente } f(m) < m+1$$

Así $m < f(m) < m+1$, por lo tanto $\lfloor f(m) \rfloor = m$, y como $p, q \in \mathbb{N}$, entonces la condición queda sujeta a $pq \leq m$.

Ahora ya podemos definir al conjunto $F_{1/m}$ de la siguiente manera:

$$F_{1/m} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}^+, (p, q) = 1, q \geq p, pq \leq m \right\}.$$

Para entender de forma adecuada qué fracciones son las involucradas bajo esta definición, veamos un par de ejemplos:

Ejemplo 1.

Para $m = 32$ se tiene la pendiente $1/32$ y queremos ver qué círculos toca la recta $y = \frac{1}{32}x$ y a qué fracciones corresponden.

El conjunto de fracciones es $F_{1/32} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}^+, (p, q) = 1, q \geq p, pq \leq 32 \right\}$, y la siguiente lista esquematiza al conjunto siguiendo los valores de p :

p	Fracciones $\frac{p}{q}$ que están en $F_{1/32}$						
1	$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{32}$						
2	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{11}$	$\frac{2}{13}$	$\frac{2}{15}$
3	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{10}$		
4	$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{7}$					
5	$\frac{5}{6}$						

Tabla 1. $F_{1/32}$

En la figura 1 se observan los círculos correspondientes a las fracciones de la tabla.

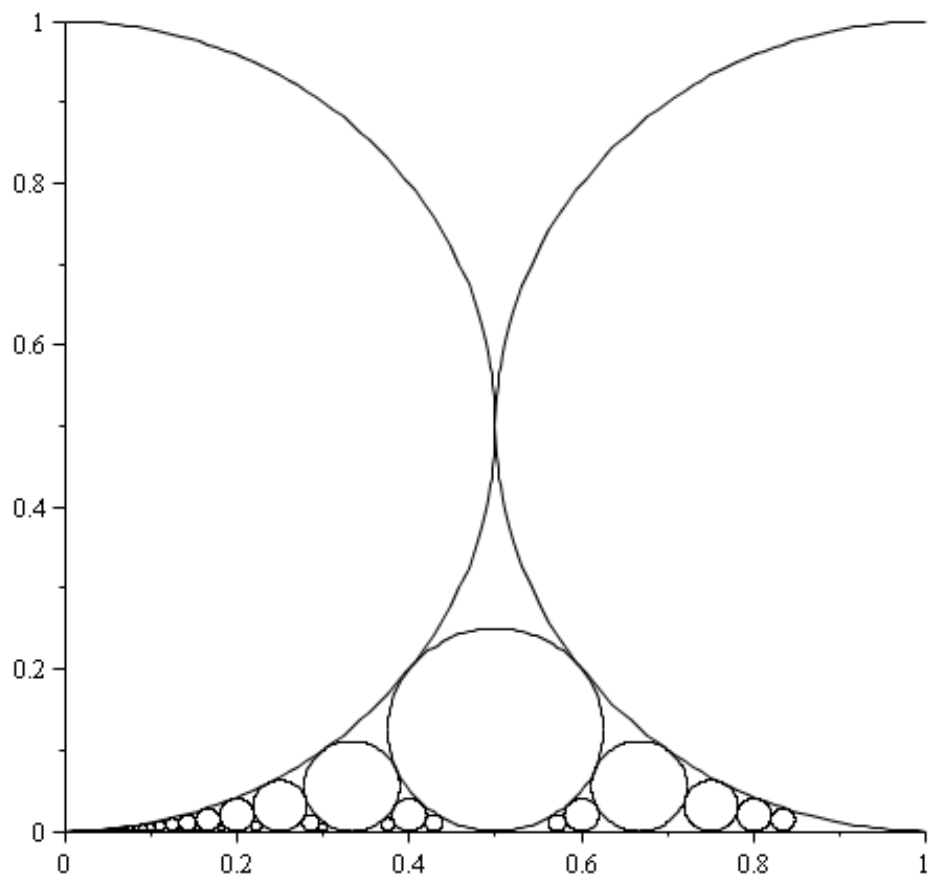


Figura 1. $F_{1/32}$

En la figura 2 se observa cómo son tocados los círculos por la recta $y = \frac{1}{32}x$.

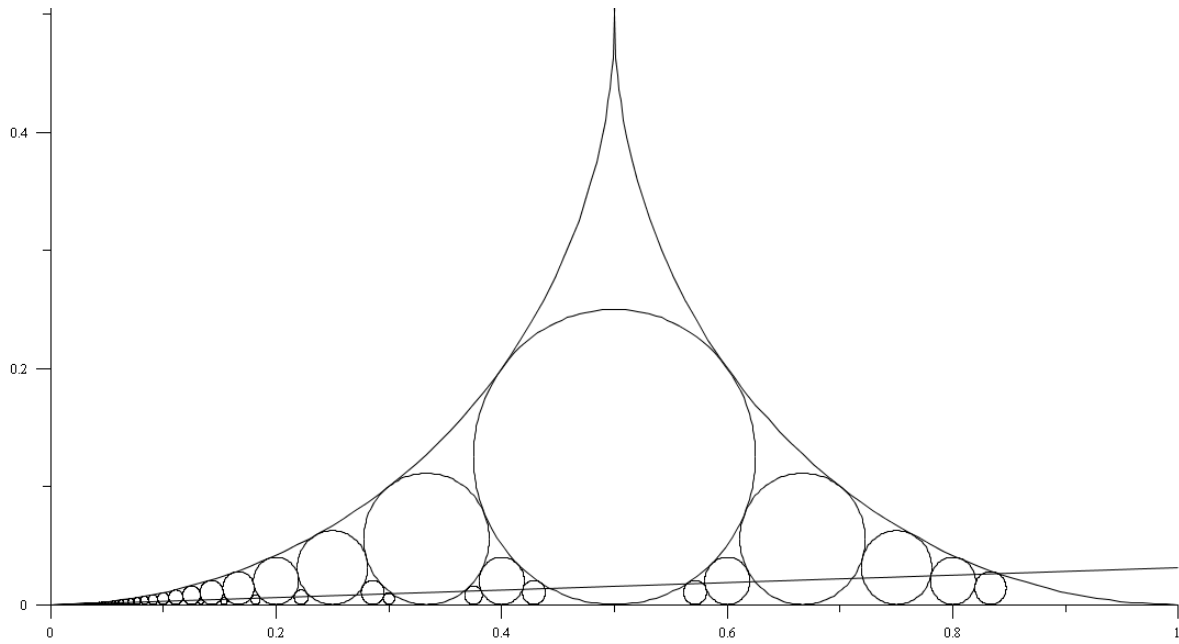


Figura 2. Recta $y = \frac{1}{32}x$ y los círculos que toca, $F_{1/32}$

Observe que la cantidad de fracciones que corresponden a los círculos que toca L agregando la fracción $\frac{0}{1}$, es $|F_{1/32}| = 48$.

Para observar el comportamiento de las fracciones, los ubicaremos en la retícula. Las fracciones $\frac{p}{q}$ se representarán como puntos con coordenadas (p, q) .

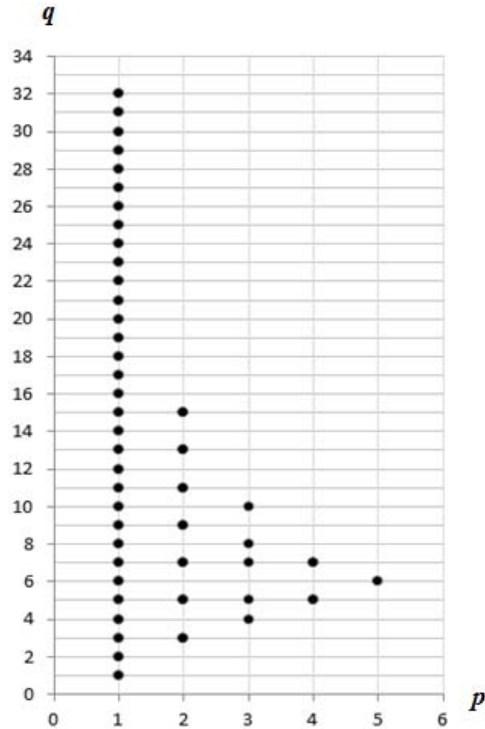


Figura 3. $F_{1/32}$

Note que al unir el origen $O = (0, 0)$ con cualquiera de los puntos $A(p, q)$, el segmento OA no contiene a ningún otro punto de la retícula aparte de los extremos. A estos puntos $A(p, q)$ se les llama *visibles*.

Ejemplo 2.

Para $m = 100$ la pendiente es $1/100$. Veamos cuáles círculos toca la recta $y = \frac{1}{100}x$, y a qué fracciones corresponden.

El conjunto de fracciones es $F_{1/100} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}^+, (p, q) = 1, q \geq p, pq \leq 100 \right\}$ y se muestran en la tabla 2 de acuerdo al valor de p :

p	Fracciones $\frac{p}{q}$ que están en $F_{1/100}$							#
1	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$...	$\frac{1}{99}$	$\frac{1}{100}$	100
2	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{9}$...	$\frac{2}{47}$	$\frac{2}{49}$	24
3	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{8}$...	$\frac{3}{31}$	$\frac{3}{32}$	20
4	$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{11}$...	$\frac{4}{23}$	$\frac{4}{25}$	11
5	$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{7}$...	$\frac{5}{16}$	$\frac{5}{17}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{5}{19}$	12
6	$\frac{6}{7}$	$\frac{6}{11}$	$\frac{6}{13}$					3
7	$\frac{7}{8}$	$\frac{7}{9}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{7}{11}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{7}{13}$		6
8	$\frac{8}{9}$	$\frac{8}{11}$						2
9	$\frac{9}{10}$	$\frac{9}{11}$						2

Tabla 2. $F_{1/100}$

Su representación en la retícula es:

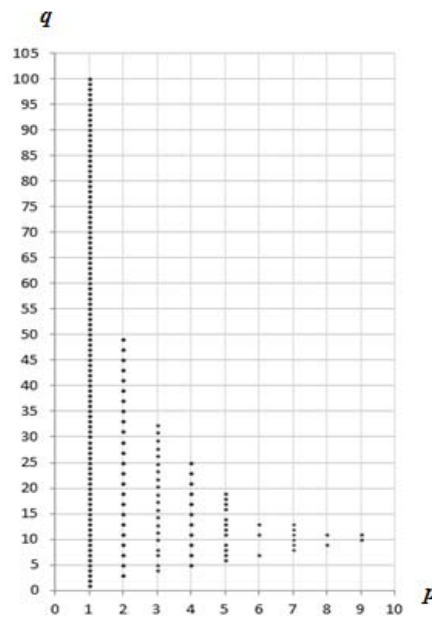


Figura 4. $F_{1/100}$

La cardinalidad de $F_{1/100}$ agregando a $\frac{0}{1}$, es 181.

Cardinalidad de $F_{1/m}$

En la sección anterior se mostraron dos casos particulares de la cardinalidad de $F_{1/m}$, cuando m tomaba los valores de 32 y 100. Ahora nos preguntamos ¿Cuál es la cardinalidad de $F_{1/m}$ para m en general? ¹³ A continuación presentaremos cuatro aproximaciones de la cardinalidad de $F_{1/m}$.

Primera aproximación

Dentro del conjunto de fracciones p/q asociadas a los círculos, podemos tomar a la que tenga los dos números consecutivos más grandes $(s/s+1)$, y con la característica de que su producto sea menor o igual que m y que además sean primos relativos. Entonces, estos números forman una de las parejas pq vinculadas a las fracciones y será la pareja más grande que cumpla con estas condiciones. De ahí que el rango de p sea $\{1, 2, \dots, s\}$, donde s cumple que $s(s+1) \leq m < (s+1)(s+2)$.

La primera forma de aproximar la cardinalidad, radica en que por cada valor de p , tendremos ciertos valores de q , que cumplen con que $(p, q) = 1$, $q \geq p$ y $pq \leq m$. Así llegamos a que la cantidad de términos q que cumplen es:

$$t_p = \frac{m}{p} \frac{\varphi(p)}{p} - \varphi(p).$$

La expresión anterior se obtiene de la condición $pq \leq m$. Así $q \in \left\{1, 2, \dots, \left\lfloor \frac{m}{p} \right\rfloor\right\}$, por lo tanto, hay $\frac{m}{p}$ candidatos para valores de q .

¹³ En éste capítulo y en el V, se estimará de diversas formas la cardinalidad de $F_{1/m}$.

Ahora, como la cantidad de primos relativos a p en el rango $\{1, \dots, x\}$ es aproximadamente $x \frac{\varphi(p)}{p}$,¹⁴ se tiene que hay aproximadamente $\frac{m}{p} \frac{\varphi(p)}{p}$ primos relativos a p en el rango $\{1, 2, \dots, \frac{m}{p}\}$, y a esta cantidad la expresaremos como $\frac{m}{p} \frac{\varphi(p)}{p} + O(1)$.

De estos primos relativos debemos restar a los menores a p para conservar la condición $q \geq p$, entonces la cantidad de primos relativos a p menores a p es justo $\varphi(p)$.

Así, la expresión quedaría:

$$\begin{aligned} t_p &= \frac{m}{p} \frac{\varphi(p)}{p} - \varphi(p) + O(1) \\ &= m \frac{\varphi(p)}{p^2} - \varphi(p) + O(1) \end{aligned}$$

Por lo que, al sumar cada término t_p y al agregar un dos que representa a las fracciones $\frac{0}{1}$ y $\frac{1}{1}$, se llega a:

$$|F_{1/m}| = 2 + \sum_{p=1}^s [t_p] = 2 + \sum_{p=1}^s \left[m \frac{\varphi(p)}{p^2} - \varphi(p) + O(1) \right] = 2 + \sum_{p=1}^s \left[m \frac{\varphi(p)}{p^2} - \varphi(p) \right] + O(1)$$

$$\therefore |F_{1/m}| \simeq 2 + \sum_{p=1}^s \left[m \frac{\varphi(p)}{p^2} - \varphi(p) \right] \dots \dots \dots (1)$$

Ejemplo: Para $m=32$, $|F_{1/32}| = 48$ y $2 + \sum_{p=1}^5 \left[32 \frac{\varphi(p)}{p^2} - \varphi(p) \right] = 48.23$. Así mismo, para $m=100$,

$$|F_{1/100}| = 181 \text{ y } 2 + \sum_{p=1}^9 \left[100 \frac{\varphi(p)}{p^2} - \varphi(p) \right] = 181.18$$

¹⁴ Para una justificación más amplia de esta aproximación, consulte el Apéndice C.

La siguiente tabla contrasta el valor real de $|F_{1/m}|$ con su valor estimado utilizando la aproximación (1), para los primeros 16 números naturales.

m	$ F_{1/m} $	Aprox. (1)
1	2	2
2	3	3
3	4	4
4	5	5
5	6	6.25
6	8	7.5
7	9	8.75
8	10	10
9	11	11.25
10	13	12.72
11	14	14.19
12	16	15.66
13	17	17.13
14	19	18.61
15	21	20.08
16	22	21.55

Tabla 3. Primera aproximación de $|F_{1/m}|$

Segunda aproximación

Para valores de m muy grandes, necesitamos hacer más manejable la expresión a la que llegamos y no depender de la recursividad. La desarrollaremos utilizando las siguientes igualdades:

- $\sum_{p=1}^s \frac{\varphi(p)}{p^2} = \frac{1}{\zeta(2)}(\ln s + C) - A + O\left(\frac{\ln s}{s}\right)$, donde C es la constante de Euler y

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n) \ln(n)}{n^2}$$
 ¹⁵
- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$
- $\sum_{p=1}^s \varphi(p) = \frac{1}{2} \frac{s^2}{\zeta(2)} + O(s \ln s)$. ¹⁶

A partir de esto se tiene que:

$$\begin{aligned}
|F_{1/m}| &= 2 + \sum_{p=1}^s m \frac{\varphi(p)}{p^2} - \sum_{p=1}^s \varphi(p) + O(1) \\
&= 2 + m \left[\frac{1}{\zeta(2)}(\ln s + C) - A + O\left(\frac{\ln s}{s}\right) \right] - \left[\frac{1}{2} \frac{s^2}{\zeta(2)} + O(s \ln s) \right] + O(1) \\
&= 2 + \frac{m}{\zeta(2)}(\ln s + C) - mA + O\left(m \frac{\ln s}{s}\right) - \frac{1}{\zeta(2)} \frac{s^2}{2} + O(s \ln s) + O(1) \\
&= 2 + \frac{m}{\zeta(2)} \left(\frac{s^2}{2m} + \ln s + C \right) - mA + O\left(m \frac{\ln s}{s}\right) + O(s \ln s) + O(1) \\
&= \frac{6m}{\pi^2} \left(\frac{s^2}{2m} + \ln s + C \right) - mA + 2 + O\left(m \frac{\ln \sqrt{m}}{\sqrt{m}}\right) + O(\sqrt{m} \ln \sqrt{m}) + O(1) \quad ^{17} \\
&= \frac{6m}{\pi^2} \left(\frac{s^2}{2m} + \ln s + C \right) - mA + 2 + O\left(\frac{1}{2} \sqrt{m} \ln m\right) + O\left(\sqrt{m} \frac{1}{2} \ln m\right)
\end{aligned}$$

¹⁵ Este resultado se encuentra en Apostol [1976, pp. 71]

¹⁶ La demostración de la igualdad se encuentra en el Apéndice A

¹⁷ s cumple con $s \ll \sqrt{m} \ll s$: $s = \left\lfloor \frac{1}{2}(\sqrt{1+4m}-1) \right\rfloor \ll \frac{1}{2}(\sqrt{1+4m}-1) \ll \sqrt{1+4m} \ll \sqrt{m}$,

y $\sqrt{m} \ll \sqrt{1+4m} \ll \frac{1}{4}(\sqrt{1+4m}-1) \ll \left\lfloor \frac{1}{2}(\sqrt{1+4m}-1) \right\rfloor = s$.

$$= \frac{6m}{\pi^2} \left(\frac{s^2}{2m} + \ln s + C \right) - mA + 2 + O \left(\frac{1}{2} \sqrt{m} \ln m + \sqrt{m} \frac{1}{2} \ln m \right)$$

$$= \frac{6m}{\pi^2} \left(\frac{s^2}{2m} + \ln s + C \right) - mA + 2 + O \left(\sqrt{m} \ln m \right)$$

Finalmente, $|F_{1/m}| = \frac{6m}{\pi^2} \left(\frac{s^2}{2m} + \ln s + C \right) - mA + 2 + O \left(\sqrt{m} \right)$

$$\therefore |F_{1/m}| = \frac{6m}{\pi^2} \left(\frac{s^2}{2m} + \ln s + C \right) - mA + 2 \dots\dots(2)$$

La siguiente tabla contrasta el valor real de $|F_{1/m}|$ con su valor estimado utilizando la aproximación (2).

m	s	$ F_{1/m} $	Aprox. (2)
32	5	48	63.21
100	9	181	229.89
1,000	31	2,495	3,078.68
10,000	99	31,936	37,885.74
100,000	315	389,292	449,573.42
1,000,000	999	4,592,844	5,199,122.87

Tabla 4. Segunda aproximación de $|F_{1/m}|$

Esta aproximación es más manejable ya que no depende de una suma. Pero construiremos una mejor aproximación, que tampoco depende de una suma.

Tercera aproximación

Esta nueva aproximación comienza con las gráficas de $F_{1/32}$ y $F_{1/100}$, y lo que observamos son los puntos *visibles* en la región acotada por dos rectas y una curva.

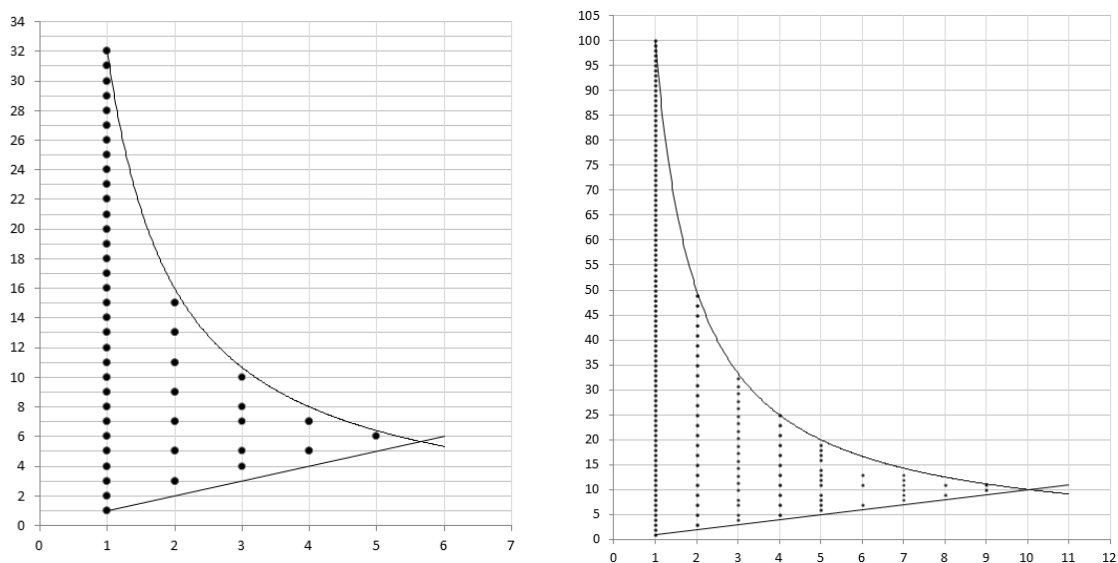


Figura 5. Regiones que acotan a los puntos

Así, dado el conjunto $F_{1/m}$, la recta que acota a los puntos inferiormente es la identidad $y = x$, la recta que los acota por la izquierda es $x = 1$ y la curva que los acota superiormente es $y = m/x$.

La aproximación consistirá en estimar el número de puntos visibles en la región acotada, pues sólo nos interesan los puntos que representan primos relativos.

Primero consideremos una región cuadrada en el plano definida por $|x| \leq r, |y| \leq r$. Sea $N(r)$ el número de puntos reticulares en la región y $N'(r)$ el número de puntos visibles en dicha región, evidentemente $N'(r) < N(r)$. El cociente $N'(r)/N(r)$ representa la proporción de números visibles que hay en la región. Para extender la región a todo el plano, de-

bemos hacer que r tienda a infinito, así la proporción $\frac{N^1(r)}{N(r)}$ tendería a $6/\pi^2$.¹⁸ Esto significa que un punto tomado al azar en la retícula tiene probabilidad de $6/\pi^2 = .6079$ de ser punto visible, o dicho de otra manera, si tomamos dos enteros al azar, la probabilidad de que sean primos relativos es $6/\pi^2$.

Entonces basta contar los puntos que cumplen con estar entre las curvas que acotan a $F_{1/m}$, con m grande, y multiplicar tal cantidad por $6/\pi^2$ para encontrar una buena aproximación de $|F_{1/m}|$.

Primero vamos a contar los puntos que cumplen con estar debajo de la curva $y = m/x$. Para esto, consideremos a los rectángulos que están encima de dicha curva (Figura 6). Si denotamos como \bar{S} a la suma superior de la partición $\{1, 2, \dots, s\}$, se tendría que $\bar{S} = m + \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{3} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{m}{s} \right\rfloor$. Para utilizar una expresión más manejable, aproximaremos la suma a \bar{S} con $m + \frac{m}{2} + \dots + \frac{m}{s}$, así $\bar{S} \approx \sum_{k=1}^s \frac{m}{k} = m \sum_{k=1}^s \frac{1}{k} = m \cdot H_s$, donde H_n denota al n -ésimo armónico de primer orden. Por lo tanto, el número de puntos aproximado que se encuentran por debajo de la curva $y = m/x$ es $m \cdot H_s$.

¹⁸ Para una prueba de esta afirmación, consultar Apostol [1976, pp. 63]

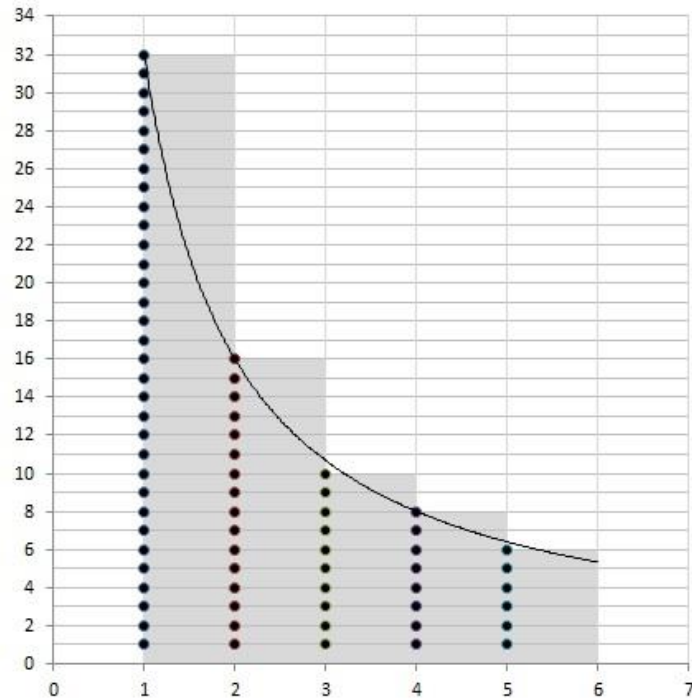


Figura 6. Conteo por regiones

Ahora, quitaremos a los puntos que sobran, éstos son los que están debajo de la recta identidad y los que la tocan, que corresponderán al número triangular T_s . El único número que no quitaremos es el primero, pues éste sí entra en el conteo para calcular $|F_{1/m}|$ (Figura 7).

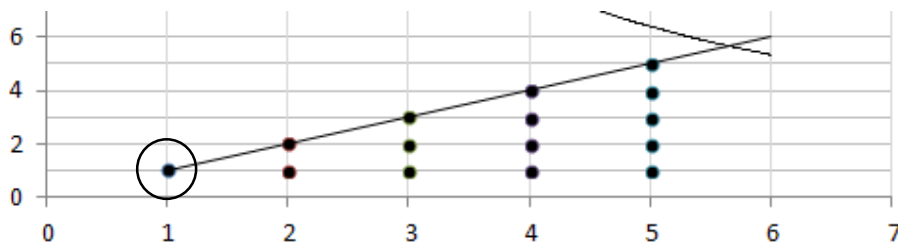


Figura 7. Puntos que sobran

Así, el número total de puntos en la región descrita es $m \cdot H_s - T_s + 1$, y al considerar que $H_s = \ln(s) + C + O\left(\frac{1}{s}\right) = \ln(s) + C + O\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right)$, el número total de puntos es

$$\begin{aligned} & m \cdot \left(\ln(s) + C + O\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right) \right) - T_s + 1 \\ &= m \cdot \ln(s) + mC + O\left(\frac{m}{\sqrt{m}}\right) - T_s + 1 \\ &= m \cdot \ln(s) + mC - T_s + 1 + O(\sqrt{m}). \end{aligned}$$

Finalmente, multiplicando por $6/\pi^2$ para obtener la cantidad de primos relativos de la región, y sumando un uno para considerar la fracción $\frac{0}{1}$ se tiene que:

$$\begin{aligned} |F_{1/m}| &= 1 + \frac{6}{\pi^2} (m \cdot \ln(s) + mC - T_s + 1) + O(\sqrt{m}). \\ \therefore |F_{1/m}| &\approx \frac{6}{\pi^2} (m \cdot \ln(s) + mC - T_s + 1) + 1 \dots\dots(3) \end{aligned}$$

La siguiente tabla contrasta el valor real de $|F_{1/m}|$ con el valor estimado utilizando la aproximación (3).

m	s	$ F_{1/m} $	Aprox. (3)
32	5	48	35.03
100	9	181	142.92
1,000	31	2,495	2,138.60
10,000	99	31,936	28,436.40
100,000	315	389,292	354,550.06
1,000,000	999	4,592,844	4,246,050.48

Tabla 5. Tercera aproximación de $|F_{1/m}|$

Cuarta aproximación

Otra manera de aproximar la cardinalidad de $F_{1/m}$ es considerando posibles valores de q , y por cada uno de ellos, a los valores de p tales que $(p, q) = 1$, $q \geq p$ y $pq \leq m$.

El rango de q es $\{1, 2, \dots, m\}$ ya que $\left\{\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{m}\right\} \subseteq F_{1/m}$, además q debe ser menor o igual a m , ya que si $q > m$, entonces $pq > m$ y esto contradice la última condición.

Para contar los valores de p por cada q , debemos de contar los primos relativos con q que sean menores a q y a m/q a la vez. Si sólo contáramos los primos relativos menores a q , la respuesta sería $\varphi(q)$, y si sólo contáramos los que son menores a m/q , la respuesta sería $\frac{m}{q} \frac{\varphi(q)}{q} + O(1)$. Así que el número de valores de p que cumplen ambas condiciones

es $\min\left\{\varphi(q), m \frac{\varphi(q)}{q^2}\right\}$. Vamos a analizar dos casos para obtener una expresión más ma-

nejable. Primero observe que si $q \leq \sqrt{m}$, entonces $q \leq m/q$, por lo que ser primo relativo menor a q , implica a su vez, ser primo relativo menor a m/q y así nos quedamos con la expresión $\varphi(q)$. Ahora, si $q > \sqrt{m}$, entonces $m/q < q$, y ser primo relativo menor a m/q implica ser primo relativo menor a q y así nos quedamos con la expresión $m \frac{\varphi(q)}{q^2}$.

$$\text{Entonces } |F_{1/m}| = \sum_{q \leq \sqrt{m}} \varphi(q) + \sum_{\sqrt{m} < q \leq m} \left(m \frac{\varphi(q)}{q^2} + O(1) \right) = \sum_{q \leq \sqrt{m}} \varphi(q) + \sum_{\sqrt{m} < q \leq m} m \frac{\varphi(q)}{q^2} + O(1)$$

Ahora haremos uso de las siguientes igualdades:

$$\sum_{q \leq x} \frac{\varphi(q)}{q^2} = \frac{1}{\zeta(2)} (\ln x + C) - A + O\left(\frac{\ln x}{x}\right) \text{ y}$$

$$\sum_{q \leq x} \varphi(q) = \frac{1}{2} \frac{x^2}{\zeta(2)} + O(x \ln x)$$

De la segunda igualdad se tiene que $\sum_{q \leq \sqrt{m}} \varphi(q) = \frac{1}{2} \frac{m}{\zeta(2)} + O(\sqrt{m} \ln \sqrt{m}) \dots \dots \dots (\theta)$

Y de la primera se tiene que

$$\begin{aligned}
 \sum_{\sqrt{m} < q \leq m} \frac{\varphi(q)}{q^2} &= \sum_{q \leq m} \frac{\varphi(q)}{q^2} - \sum_{q \leq \sqrt{m}} \frac{\varphi(q)}{q^2} \\
 &= \left(\frac{1}{\zeta(2)} (\ln m + C) - A + O\left(\frac{\ln m}{m}\right) \right) - \left(\frac{1}{\zeta(2)} (\ln \sqrt{m} + C) - A + O\left(\frac{\ln \sqrt{m}}{\sqrt{m}}\right) \right) \\
 &= \frac{1}{\zeta(2)} \ln m + \frac{C}{\zeta(2)} - A - \frac{1}{\zeta(2)} \ln \sqrt{m} - \frac{C}{\zeta(2)} + A + O\left(\frac{\ln m}{m}\right) - O\left(\frac{\ln \sqrt{m}}{\sqrt{m}}\right) \\
 &= \frac{1}{\zeta(2)} \ln m - \frac{1}{\zeta(2)} \ln \sqrt{m} + O\left(\frac{\ln m}{m} - \frac{\ln \sqrt{m}}{\sqrt{m}}\right) \\
 &= \frac{1}{\zeta(2)} (\ln m - \ln m^{1/2}) + O\left(\frac{\ln m}{m}\right) \\
 &= \frac{1}{\zeta(2)} \left(\ln m - \frac{1}{2} \ln m \right) + O\left(\frac{\ln m}{m}\right) \\
 &= \frac{1}{2\zeta(2)} \ln m + O\left(\frac{\ln m}{m}\right) \dots \dots \dots (\varphi)
 \end{aligned}$$

Entonces $|F_{1/m}| = \sum_{q \leq \sqrt{m}} \varphi(q) + \sum_{\sqrt{m} < q \leq m} m \frac{\varphi(q)}{q^2} + O(1)$ (y aplicando (θ) y (φ))

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \frac{m}{\zeta(2)} + O(\sqrt{m} \ln \sqrt{m}) + m \frac{1}{2\zeta(2)} \ln m + O\left(\frac{\ln m}{m}\right) + O(1) \\
 &= \frac{1}{2\zeta(2)} (m + m \ln m) + O(\sqrt{m} \ln \sqrt{m}) + O\left(\frac{\ln m}{m}\right) + O(1) \\
 &= \frac{m}{2\zeta(2)} (1 + \ln m) + O\left(\sqrt{m} \ln \sqrt{m} + \frac{\ln m}{m} + m\right) \\
 &= \frac{m}{2\zeta(2)} (1 + \ln m) + O\left(\sqrt{m} \frac{1}{2} \ln m + \frac{\ln m}{m}\right)
 \end{aligned}$$

$$= \frac{m}{2\zeta(2)}(1 + \ln m) + O(\sqrt{m})$$

$$\therefore |F_{1/m}| \approx \frac{m}{2\zeta(2)}(1 + \ln m) \dots\dots(4)$$

La siguiente tabla contrasta el valor real de $|F_{1/m}|$ con su valor estimado utilizando la aproximación (4).

m	$ F_{1/m} $	Aprox. (4)
32	48	43.44
100	181	170.38
1,000	2,495	2,403.67
10,000	31,936	31,035.71
100,000	389,292	380,347.33
1,000,000	4,592,844	4,503,375.20

Tabla 6. Cuarta aproximación de $|F_{1/m}|$

Área de los círculos de la familia correspondiente a $F_{1/m}$

Ahora que tenemos la cuarta aproximación, podemos demostrar el siguiente teorema que se relaciona con la suma de las áreas del conjunto de los círculos tocados por la recta $y = \frac{1}{m}x$.

Además podremos, como corolario, demostrar de otra manera que el área total de los círculos de Ford que se encuentran entre $x = 0$ y $x = 1$ es $\frac{\pi \zeta(3)}{4 \zeta(4)}$.

Teorema 2.1. El área de todos los círculos que se encuentran entre $x = 0$ y $x = 1$, y que son tocados por la recta $y = \frac{1}{m}x$, es $\frac{\pi}{4} \left[\frac{\zeta(3)}{\zeta(4)} - \frac{m^2 + 1}{4\zeta(2)m^3} \right] + O\left(\frac{\ln m}{m^{3/2}}\right)$.

Demostración. Sea A el área buscada. El área de cada círculo es de la forma $\pi \left(\frac{1}{2q^2} \right)^2$.

Sumando las áreas sobre los valores de q , se tiene que:

$$\begin{aligned}
 A &= \sum_{q=1}^m \sum_{\substack{(p,q)=1 \\ 1 \leq p \leq q \\ p \leq m/q}} \pi \left(\frac{1}{2q^2} \right)^2 = \frac{\pi}{4} \sum_{q \leq m} \left(\frac{1}{q^4} \right) \sum_{\substack{(p,q)=1 \\ 1 \leq p \leq q \\ p \leq m/q}} 1 \\
 &= \frac{\pi}{4} \left[\sum_{q \leq \sqrt{m}} \frac{1}{q^4} \varphi(q) + \sum_{\sqrt{m} < q \leq m} \frac{1}{q^4} \left(m \frac{\varphi(q)}{q^2} + O(1) \right) \right] \\
 &= \frac{\pi}{4} \left[\sum_{q \leq \sqrt{m}} \frac{\varphi(q)}{q^4} + m \sum_{\sqrt{m} < q \leq m} \frac{\varphi(q)}{q^6} + O(1) \right] \dots \dots \dots (\beta)
 \end{aligned}$$

Para desarrollar de la última expresión utilizaremos que:

$$\sum_{n \leq x} \frac{\varphi(n)}{n^\alpha} = \frac{\zeta(\alpha-1)}{\zeta(\alpha)} + \frac{1}{x^{\alpha-2} (2-\alpha) \zeta(2)} + O\left(\frac{\ln x}{x^{\alpha-1}} \right), \quad 1 < \alpha \neq 2, \quad x \geq 2. \text{ }^{19} \text{ Así, los sumandos}$$

de (β) son:

- $$\begin{aligned}
 \sum_{q \leq \sqrt{m}} \frac{\varphi(q)}{q^4} &= \frac{\zeta(3)}{\zeta(4)} + \frac{1}{(\sqrt{m})^2 (2-4) \zeta(2)} + O\left(\frac{\ln \sqrt{m}}{\sqrt{m}^3} \right) = \frac{\zeta(3)}{\zeta(4)} - \frac{1}{2m \zeta(2)} + O\left(\frac{1}{2 m^{3/2}} \right) \\
 &= \frac{\zeta(3)}{\zeta(4)} - \frac{1}{2m \zeta(2)} + O\left(\frac{\ln m}{m^{3/2}} \right)
 \end{aligned}$$

- $$\sum_{\sqrt{m} < q \leq m} \frac{\varphi(q)}{q^6} = \frac{\zeta(5)}{\zeta(6)} + \frac{1}{x^{6-2} (2-6) \zeta(2)} + O\left(\frac{\ln x}{x^{6-1}} \right) = \frac{\zeta(5)}{\zeta(6)} - \frac{1}{4x^4 \zeta(2)} + O\left(\frac{\ln x}{x^5} \right), \text{ por lo}$$

que
$$\begin{aligned}
 \sum_{\sqrt{m} < q \leq m} \frac{\varphi(q)}{q^6} &= \sum_{q \leq m} \frac{\varphi(q)}{q^6} - \sum_{q \leq \sqrt{m}} \frac{\varphi(q)}{q^6} \\
 &= \left(\frac{\zeta(5)}{\zeta(6)} - \frac{1}{4m^4 \zeta(2)} + O\left(\frac{\ln m}{m^5} \right) \right) - \left(\frac{\zeta(5)}{\zeta(6)} - \frac{1}{4\sqrt{m}^4 \zeta(2)} + O\left(\frac{\ln \sqrt{m}}{\sqrt{m}^5} \right) \right)
 \end{aligned}$$

¹⁹ La demostración de esta igualdad se encuentra en el Apéndice A

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4m^2\zeta(2)} - \frac{1}{4m^4\zeta(2)} + O\left(\frac{\ln m}{m^5}\right) + O\left(\frac{1}{2m^{5/2}}\right) = \frac{1}{4\zeta(2)}\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{m^4}\right) + O\left(\frac{\ln m}{m^{5/2}}\right) \\
&= \frac{m^2 - 1}{4\zeta(2)m^4} + O\left(\frac{\ln m}{m^{5/2}}\right)
\end{aligned}$$

Por lo tanto $A = \frac{\pi}{4} \left[\sum_{q \leq \sqrt{m}} \frac{\varphi(q)}{q^4} + m \sum_{\sqrt{m} < q \leq m} \frac{\varphi(q)}{q^6} + O(1) \right]$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\pi}{4} \left[\frac{\zeta(3)}{\zeta(4)} - \frac{1}{2m\zeta(2)} + O\left(\frac{\ln m}{m^{3/2}}\right) + m \left(\frac{m^2 - 1}{4\zeta(2)m^4} + O\left(\frac{\ln m}{m^{5/2}}\right) \right) + O(1) \right] \\
&= \frac{\pi}{4} \left[\frac{\zeta(3)}{\zeta(4)} - \frac{1}{2m\zeta(2)} + \frac{m^2 - 1}{4\zeta(2)m^3} \right] + O\left(\frac{\ln m}{m^{3/2}}\right) + O\left(\frac{\ln m}{m^{5/2}}\right) \\
&= \frac{\pi}{4} \left[\frac{\zeta(3)}{\zeta(4)} + \frac{m^2 - 1 - 2m^2}{4\zeta(2)m^3} \right] + O\left(\frac{\ln m}{m^{3/2}}\right) \\
&= \frac{\pi}{4} \left[\frac{\zeta(3)}{\zeta(4)} - \frac{m^2 + 1}{4\zeta(2)m^3} \right] + O\left(\frac{\ln m}{m^{3/2}}\right)
\end{aligned}$$

Finalmente, observe que si $m \rightarrow \infty$ entonces $A = \frac{\pi}{4} \left[\frac{\zeta(3)}{\zeta(4)} \right]$, esto coincide con el re-

sultado expuesto en el Teorema 1.5 págs. 9 y 16. \square

Capítulo III

Saltos en la cardinalidad

En este capítulo analizaremos la diferencia de las cardinalidades entre dos grupos de círculos de Ford. Esto representa a los círculos que se extraen a partir del uso de dos rectas cuyos denominadores (ambos diferentes de uno) en las pendientes son consecutivos. Dicho en lenguaje matemático, analizaremos el comportamiento de $|F_{1/m}| - |F_{1/m-1}|$ para $m \geq 2$, a lo que llamaremos *salto*.

A partir de la forma en la que se construyen los círculos de Ford y por lo antes visto respecto a la cardinalidad de $F_{1/m}$, es posible suponer que en la medida en que crece m la recta correspondiente a $F_{1/m}$ se inclina cada vez más hacia el eje de las abscisas. Además, la cantidad de círculos que toca cada recta descrita nos llevaría a pensar que las cardinalidades de $F_{1/m}$ tienden a crecer con una aceleración que no disminuye en ningún cambio de pendiente de $\frac{1}{m-1}$ a $\frac{1}{m}$ (ver Figura 1). Si esto lo pensamos como una trayectoria que nos describa estas cardinalidades, entonces nos apegaríamos a las características de la frontera de un conjunto convexo, es decir, que la segunda derivada en la frontera no decrece. Con esto nos referimos a que parecería que el comportamiento creciente de las cardinalidades siempre estará vinculado a un tipo de comportamiento donde no existen puntos de inflexión.

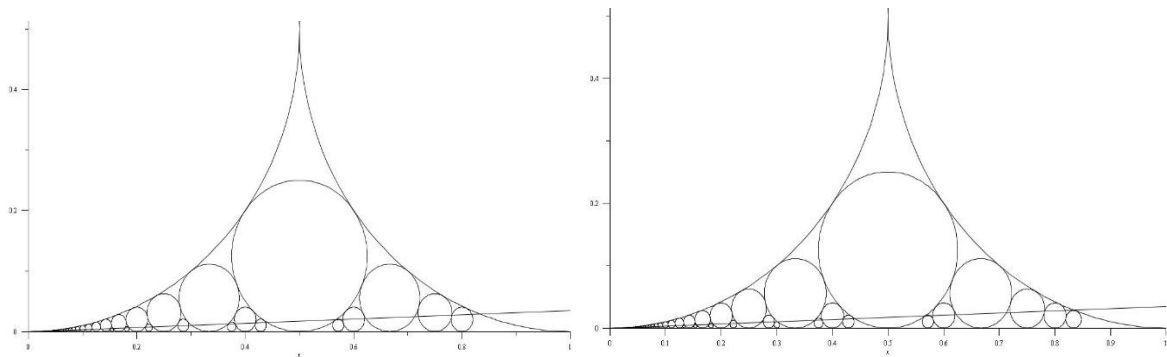


Figura 1. Rectas con pendiente 1/29 (izquierda) y 1/30 (derecha) y los círculos que tocan

Antes de seguir veamos algunos ejemplos de lo mencionado. En el intervalo de las rectas $F_{1/54}, F_{1/55}, \dots, F_{1/58}$ las respectivas cardinalidades son 88, 90, 92, 94, 96 y se puede percibir que la sucesión que forma es estrictamente creciente, y conserva un salto constante de dos. Pero si extendemos el intervalo de la siguiente forma:

$$F_{1/54}, F_{1/55}, \dots, F_{1/58}, F_{1/59}, F_{1/60}, \dots, F_{1/70},$$

entonces las cardinalidades son 88, 90, 92, 94, 96, 97, 101, 102, 104, 106, 107, 109, 113, 114, 116, 118, 122 y los respectivos saltos son:

$$2, 2, 2, 2, 2, 1, 4, 1, 2, 2, 1, 2, 4, 1, 2, 2, 4.$$

Podemos ver que la manera en la que crecen las cardinalidades no es como se esperaba, es decir, no atiende a un comportamiento que refleje una aceleración.

Pero es notable que en este pequeño intervalo, todos los saltos se dan en potencias de dos. Si a esto le sumamos que al extender la auscultación para intervalos con cientos de números para las pendientes, los saltos conservan este comportamiento en términos de potencias de dos, entonces, conjeturamos que todos los saltos se dan en potencias de dos y pasamos demostrar esta propuesta.

Caractericemos en primer lugar cuánto aumenta la cardinalidad –lo que llamamos salto– entre dos conjuntos consecutivos de círculos, que son los que se obtienen del trazo de las rectas de pendientes $\frac{1}{m-1}$ y $\frac{1}{m}$. Entonces, este salto es:

$$s_m = |F_{1/m}| - |F_{1/m-1}|, \quad m \geq 2,$$

que es la cantidad de aquellos círculos que toca la recta de pendiente $\frac{1}{m}$ pero que no toca la de pendiente $\frac{1}{m-1}$.

$$\begin{aligned} \text{Así, } s_m &= |F_{1/m}| - |F_{1/m-1}| = \left| \left\{ \frac{p}{q} \mid (p, q) = 1, q \geq p, pq \leq m \right\} \right| - \left| \left\{ \frac{p}{q} \mid (p, q) = 1, q \geq p, pq \leq m-1 \right\} \right| \\ &= \left| \left\{ \frac{p}{q} \mid (p, q) = 1, q \geq p, pq = m \right\} \right| = \left| \left\{ (p, q) \mid pq = m, (p, q) = 1 \right\} \right| \end{aligned}$$

La ventaja de la última igualdad es que ahora el problema se transforma en considerar parejas no ordenadas de primos relativos que sean divisores de m . Para contar estas parejas podemos comenzar fijándonos en los factores primos de m , por ejemplo:

$$\text{Si } m \text{ es un primo } p \text{ entonces } s_m = \left| \{(1, p)\} \right| = 1 = 2^0$$

$$\text{Si } m \text{ es producto de dos primos } p \text{ y } q \text{ entonces } s_m = \left| \{(1, pq), (p, q)\} \right| = 2 = 2^1$$

Si m es producto de tres primos p , q y r entonces

$$s_m = \left| \{(1, pqr), (p, qr), (pq, r), (pr, q)\} \right| = 4 = 2^2$$

Podemos ver que se forman potencias de dos tal como se conjeturó, y aún más, cuando $m = p_1 \cdots p_k$, entonces $s_m = 2^{v(m)-1}$, donde $v(m)$ es el número de factores primos de m . De hecho el resultado se conserva si $m = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$ porque al formar parejas debemos dejar a cada primo con su potencia correspondiente, ya que si lo separamos, no sería una pareja de primos relativos.

Para demostrar lo anterior contaremos a las parejas (r, s) y (s, r) como distintas y posteriormente dividiremos el resultado entre dos. Antes de dar paso a la prueba queremos señalar que proporcionaremos dos demostraciones porque consideramos que ambas aportan elementos que enriquecen la solución del problema que nos ocupa.

Demostración I²⁰

Fijémonos en $\mu^2(n)$, que es uno si $n = p_1 \cdots p_r$, y cero si existe un primo p tal que $p^2 \mid n$.

La función $\sum_{d|n} \mu^2(d)$ suma unos cuando d es un divisor de la forma $p_1 \cdots p_r$, que es lo que

se desea ya que contar estos divisores es equivalente a contar las parejas:

²⁰ Los elementos usados en esta demostración serán usados al final de este capítulo para dar otra aproximación de la cardinalidad de $\left| F_{1/m} \right|$.

$(1, p_1 p_2 p_3 \cdots p_k), (p_1, p_2 p_3 \cdots p_k), (p_2, p_1 p_3 \cdots p_k), (p_1 p_2, p_3 \cdots p_k), (p_1 p_3, p_2 p_4 \cdots p_k), \dots, (p_1 p_2 p_3 \cdots p_k, 1)$, que son las parejas que buscamos, aunque cada una se repite.

A partir de las series de Bell²¹ se tiene que $\sum_{d|n} \mu^2(d) = 2^{v(n)}$, y dividiendo el resultado entre dos se obtiene la igualdad $s_m = 2^{v(m)-1}$.

Demostración II

Requerimos partir al conjunto de factores de $m = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$ en dos grupos A y B, de tal forma que $(A, B) = 1$, y que $(A)(B) = m$, y sabemos que es suficiente con hacerlo para el producto $p_1 \cdots p_k$. Contaremos las formas en las que se pueden tomar i y $(k-i)$ factores de manera diferente, y esto lo proporciona el coeficiente binomial $\binom{k}{i}$, es decir, tomamos i elementos de k , y la parte complementaria es $(k-i)$. Por otra parte, para contar a todas las posibles formas de las parejas de particiones i y $(k-i)$, recurrimos a la suma

$$\binom{k}{0} + \binom{k}{1} + \binom{k}{2} + \binom{k}{3} + \dots + \binom{k}{k},$$

y para obtener el resultado de la suma hacemos uso del desarrollo de $(a+b)^k$, y así

$$(a+b)^k = \binom{k}{0} a^k + \binom{k}{1} a^{k-1} b + \binom{k}{2} a^{k-2} b^2 + \dots + \binom{k}{k-1} a b^{k-1} + \binom{k}{k} b^k$$

y para el caso cuando $a = 1$ y $b = 1$, entonces

$$2^k = \binom{k}{0} + \binom{k}{1} + \binom{k}{2} + \dots + \binom{k}{k-1} + \binom{k}{k}.$$

Pero esta suma nos representa el doble las particiones que queremos para $m = (A)(B)$, ya que se está contabilizando la partición de i y $(k-i)$ factores como diferente a la de $(k-i)$ y i

²¹ Dada una función aritmética f y un primo p , designamos por $f_p(x)$ a la serie de potencias $f_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f(p^n) x^n$, conocida como serie de Bell de f módulo p . Consultar Apostol [1976, pp. 42].

factores, entonces tenemos que tomar la mitad de la suma anterior. Con esto llegamos a que 2^{k-1} es el total de maneras en las que podemos partir en dos conjuntos a los factores de m .

Con esto demostramos que el salto de la cardinalidad de $|F_{1/m-1}|$ a $|F_{1/m}|$ siempre es una potencia de dos, donde la potencia es el número de factores primos menos uno.

Otras implicaciones.

Ahora ya sabemos que los saltos se comportan como potencias de dos, y un elemento importante para llegar a esto fue a través de los programas creados para proporcionar datos respecto a las fracciones.²² A partir de la obtención de estos datos se visualizaron ciertas implicaciones que se exponen a continuación con tres casos.

Caso I

A partir del comportamiento que ya conocemos del salto de las cardinalidades, podríamos pensar que la aparición de las potencias de dos tiene una forma caótica, pero resulta que esto no es así, ya que es posible exhibir intervalos donde podemos controlar los saltos que aparecen. Un ejemplo de esto es al exhibir grandes intervalos donde no aparecen saltos unitarios, como se hace a continuación.

Consideremos el siguiente intervalo de tamaño n :

$$\begin{aligned} &(k + 2n + 1)! + 2 \\ &(k + 2n + 1)! + 3 \\ &\vdots \\ &(k + 2n + 1)! + n + 1, \quad k \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Lo primero que demostraremos, es que en este intervalo no hay primos.

Tomemos al $(j-1)$ -ésimo número del intervalo, es decir, $(k + 2n + 1)! + j$. Este número

es compuesto, ya que $(k + 2n + 1)! + j = j \left[\frac{(k+2n+1)!}{j} + 1 \right]$.

²² Consultar el Apéndice D.

Ahora demostraremos que en el intervalo no hay potencias de primos.

Si hubiera una potencia de un primo, p^α , $\alpha > 1$, entonces existiría j tal que:

$$p^\alpha = (k+2n+1)! + j = j \left[\frac{(k+2n+1)!}{j} + 1 \right] \Rightarrow j | p^\alpha \Rightarrow j = p^i \text{ con } i < \alpha$$

$$\Rightarrow p^{\alpha-i} = \frac{(k+2n+1)!}{j} + 1$$

Como $j = p^i$ resulta que $p \leq j \leq n+1 \Rightarrow 2p \leq 2(n+1) \leq 2n+1+k$

Por lo tanto $2p$ aparece como factor en $\frac{(k+2n+1)!}{j}$ (al que llamaremos r) ya que $2p \neq j$

Así, $p^{\alpha-i} = 2p(r)+1$, $r \in \mathbb{N}$, entonces $p(p^{\alpha-i-1} - 2r) = 1$ y llegamos a que $p | 1$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, resulta que no hay potencias de primos en el intervalo dado y de esta manera tampoco hay saltos unitarios. Note que n nos da el tamaño del intervalo y k es un parámetro para posicionarlo.

Para terminar, a través del programa que calcula los saltos, podemos encontrar intervalos donde sólo existen los saltos de tamaño dos, por ejemplo, entre los números 141 y 148 sólo existen saltos de dos, o dicho de otra manera, cada uno de estos números sólo tiene dos divisores primos. La pregunta final es ¿podemos encontrar intervalos tan grandes como queramos donde sólo exista el salto dos? ¿O lo mismo para cualquier otro tipo de salto? Las respuestas a esto ya no se encuentran en este trabajo.

Caso II

Sabemos que existe una infinidad de primos, por ende, una infinidad de potencias de primos, y en consecuencia siempre podremos encontrar saltos unitarios conforme m crece. Asimismo podemos ubicar cualquier tipo de salto tan grande como queramos, recordando que debe ser potencia de dos.

Ahora podemos verificar que la aparición de los saltos no atiende a un comportamiento que refleje una aceleración creciente, y esto se debe a que es posible saber dónde aparece

por primera vez una nueva potencia de dos. Éstas no aparecen de manera acelerada, ya que una nueva potencia 2^{k-1} corresponde al primer número compuesto por k primos, *i.e.* $m = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdots p_k$. A este número se le conoce como el k -ésimo número primorial y antes de éste no hay otro número al que le corresponda un salto de 2^{k-1} .

Usando lo anterior es posible acotar la zona de aparición de un nuevo salto que corresponda a la potencia 2^k , gracias a la conjetura de Bertrand, -ésta nos dice que siempre hay un primo entre n y $2n$, $n \in \mathbb{N}$ -. Para cualquier $k \in \mathbb{N}$, ya vimos que aparece el primer salto de 2^{k-1} cuando $m = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdots p_k$. Ahora consideremos el rango p_k y $2p_k$. En éste debe de haber al menos un primo, por lo tanto el conjunto de primos en el intervalo mencionado es diferente del vacío, entonces podemos tomar el más pequeño, que es p_{k+1} y es el inmediato a p_k , con esto podemos formar al nuevo primorial, que es el inmediato a m . Entonces, $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdots p_k p_k < 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdots p_k p_{k+1} < 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdots p_k \cdot 2p_k$, es decir, que el nuevo primorial está entre mp_k y $2mp_k$. En consecuencia, conociendo m y p_k , podemos acotar la ubicación del nuevo salto del tipo 2^k .

Caso III

Para terminar, retomemos la cardinalidad de $F_{1/m}$. Con los saltos, ahora podemos llegar a una igualdad comenzando a contar los primeros círculos que toca la recta con pendiente uno y sumando saltos desde $m = 2$:

$$|F_{1/m}| = \sum_{j=1}^m 2^{v(j)-1} + 2$$

Como $\sum_{d|n} \mu^2(d) = 2^{v(n)}$, la igualdad anterior puede ser expresada como:

$$|F_{1/m}| = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \sum_{d|j} \mu^2(d) + 2.$$

Capítulo IV

Otras propiedades generales de las sucesiones de rectas inclinadas

En el capítulo I tratamos el tema de la extracción de ciertos conjuntos de círculos y sus respectivas fracciones asociadas. En ese capítulo se trabajó en particular el caso de las rectas horizontales para obtener lo que conocemos como sucesiones de Farey. En este capítulo construiremos propiedades generales para sucesiones que se obtienen a partir de la intersección de una curva L con el conjunto de círculos. Dicha curva L tendrá las mismas propiedades que en el capítulo I, es decir, L es una curva continua que cruza los círculos y que está definida sobre el semiplano superior.

Antes de dar paso a las propiedades anunciadas requerimos en primer lugar aclarar que dos círculos consecutivos extraídos del conjunto que toca la curva L , siempre son tangentes. Lo anterior se debe a que cuando L (curva negra, figura 1) deja de tocar a un círculo (círculo azul) puede, ya sea tocar inmediatamente al otro en su punto de tangencia o entrar en un triángulo arqueado (triángulo central amarillo) que está delimitado por 3 círculos que cumplen con ser tangentes dos a dos (azul-rojo, azul-verde y verde-rojo). Entonces, cuando sale de esta zona para entrar otro círculo (círculo rojo), resulta que es tangente al anterior.

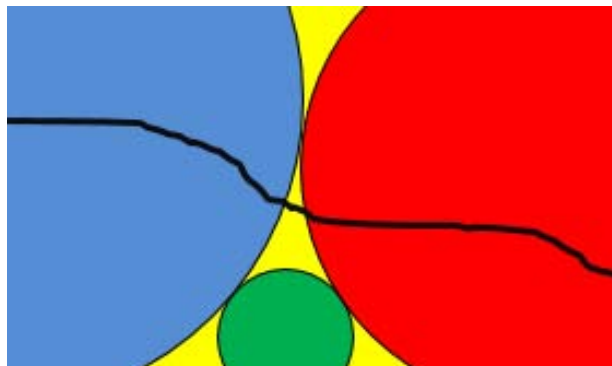


Figura 1. Círculos tangentes

Propiedad aritmética

Teorema 4.1. Cualquier sucesión de fracciones creciente o decreciente, que se genere a partir de la curva L , tiene la característica de que cualesquiera tres términos consecutivos,

$$\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2} \text{ y } \frac{a_3}{b_3}, \text{ se cumple la suma } \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3 + a_1}{b_1 + b_3}.$$

Demostración. Supongamos que L genera una sucesión de fracciones S ya sea creciente o decreciente. Tomaremos dos términos consecutivos de la sucesión, digamos $\frac{a_1}{b_1}$ y $\frac{a_2}{b_2}$, y sin

pérdida de generalidad supongamos que $\frac{a_1}{b_1} < \frac{a_2}{b_2}$. Como L los tocó consecutivamente, sus

respectivos círculos son tangentes, por lo que las fracciones son adyacentes y cumplen con

$$|a_2b_1 - a_1b_2| = 1 \text{ y como } \frac{a_1}{b_1} < \frac{a_2}{b_2} \text{ entonces } a_2b_1 - a_1b_2 > 0, \text{ por lo tanto } a_2b_1 - a_1b_2 = 1.$$

Ahora tomaremos tres términos consecutivos, $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}$ y $\frac{a_3}{b_3}$, y sin pérdida de generali-

dad supongamos que $\frac{a_1}{b_1} < \frac{a_2}{b_2} < \frac{a_3}{b_3}$. Por lo anterior $a_2b_1 - a_1b_2 = 1$ y $a_3b_2 - a_2b_3 = 1$

$$\Rightarrow a_2b_1 - a_1b_2 = a_3b_2 - a_2b_3 \Rightarrow a_2b_1 + a_2b_3 = a_3b_2 + a_1b_2 \Rightarrow a_2(b_1 + b_3) = (a_3 + a_1)b_2$$

$$\therefore \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3 + a_1}{b_1 + b_3} \quad \square$$

Para mostrar que el teorema no necesariamente se cumple en el caso de que L no genere una sucesión creciente ni decreciente, podemos dibujar a L de tal manera que toque a los

círculos cuyas fracciones son $\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}$ y $\frac{4}{9}$ tal como se muestra en la figura 2. Se pue-

de observar con varias ternas que no se cumple esta suma, ni aun acomodando las fracciones en orden creciente o decreciente en vez de acatar su orden de aparición.

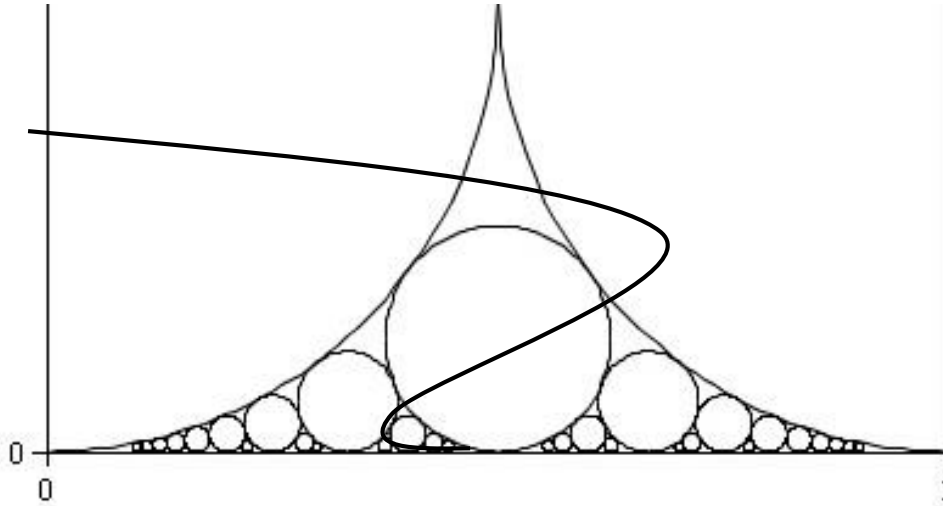


Figura 2. Sucesión no creciente ni decreciente

Ahora veremos algunos ejemplos en los que podemos aplicar el teorema 4.1.

Números enteros

Definamos a L como la recta $y = \frac{3}{4}$, la cual sólo tocará a los círculos de radio $1/2$, por lo

que $S = \left\{ \dots, -\frac{2}{1}, -\frac{1}{1}, \frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{4}{1}, \frac{5}{1}, \dots \right\}$ (Figura 3). S cumple la suma del Teorema 4.1

porque es una sucesión creciente, por ejemplo $\frac{-2+0}{1+1} = \frac{-2}{2} = \frac{-1}{1}$, $\frac{1+3}{1+1} = \frac{4}{2} = \frac{2}{1}$, etc.

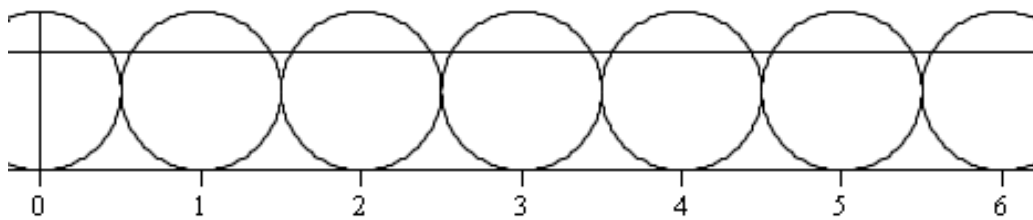


Figura 3. Números enteros

Números armónicos de primer orden

Definamos a L como la sección de circunferencia $y = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - x^2}$, $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, por lo tanto

la sucesión que genera L es $S = \left\{ \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots, \frac{1}{n}, \dots \right\}$ ²³ (ver Figura 4). Esta sucesión

cumple la suma por ser una sucesión decreciente.

Observe que $\frac{(1)+(1)}{(n-1)+(n+1)} = \frac{2}{2n} = \frac{1}{n}$.

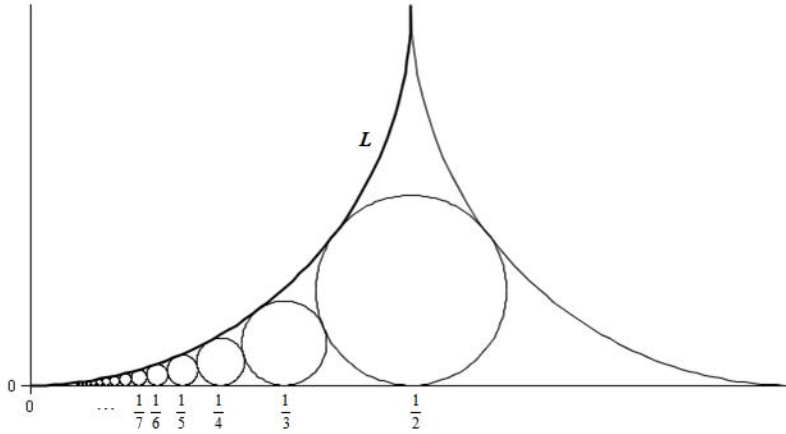


Figura 4. Números armónicos

Lo que sigue, son ejemplos de sucesiones que corresponden a círculos extraídos a partir de una recta con ordenada al origen $b \geq 0$. Antes de mencionarlos, primero demostraremos que este tipo de sucesiones son crecientes o decrecientes.

Supongamos que L es una recta horizontal o inclinada con pendiente positiva. Tomaremos dos fracciones consecutivas cualesquiera de la sucesión que se genera y a sus círculos correspondientes. Si el círculo de la derecha es más pequeño (figura 5), entonces

²³ El área del total de los círculos correspondientes a los números armónicos es $A = \sum_{n=1}^{\infty} \pi r_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \pi \left(\frac{1}{2n} \right)^2$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \pi \left(\frac{1}{4n^2} \right) = \frac{\pi}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} \right) = \frac{\pi}{4} \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^3}{24}$$

L forzosamente debe tocar primero el círculo de la izquierda. Si el círculo de la derecha es más grande y queremos que primero éste sea tocado, entonces L debe de tener una pendiente por lo menos tan inclinada como la recta correspondiente en el punto de tangencia entre ambos círculos (figura 6), pero esto significaría que L tiene una pendiente negativa, lo cual sería una contradicción.

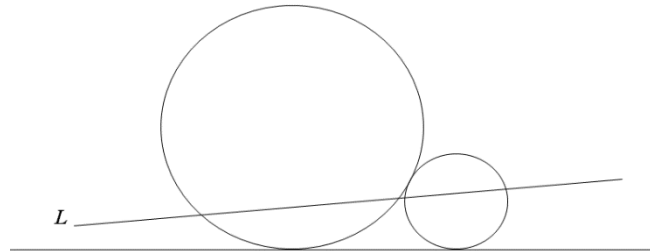


Figura 5. El círculo de la derecha es más pequeño

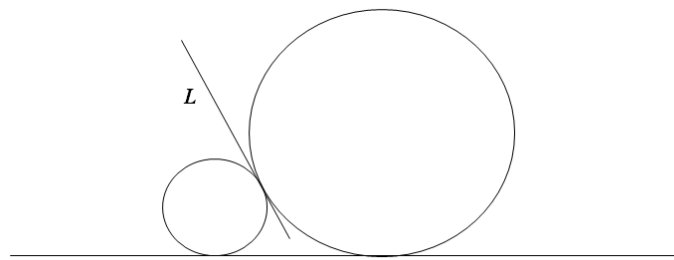


Figura 6. El círculo de la derecha es más grande

Por lo tanto se genera una sucesión creciente. Para el caso en que la recta tenga pendiente negativa, el razonamiento sería análogo gracias a la simetría de los círculos.

Sucesiones $F_{\frac{1}{m+b}}$

Consideremos el caso de una recta L que no pasa por el origen y que tiene pendiente positiva (Figura 7), esto es, cuando la recta explícitamente tiene la forma $y = \frac{1}{m}x + b$, $m \in \mathbb{N}, b \in (0,1)$.

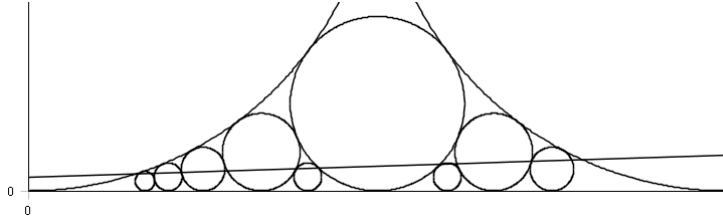


Figura 7. L no pasa por el origen y tiene pendiente positiva

La condición que se requiere para que la recta L toque a un círculo con centro en $C = \left(\frac{p}{q}, \frac{1}{2q^2}\right)$ reside en que se cumpla la desigualdad $pq + mq^2b \leq m$. Para justificar la desigualdad necesitamos, tal como antes²⁴, que la distancia entre el círculo y la recta sea menor que r , es decir, que $d(C, L) < r$. Para este caso se tiene que $d(C, L) = \frac{\left|\frac{1}{m} \frac{p}{q} - \frac{1}{2q^2} + b\right|}{\sqrt{\left(\frac{1}{m}\right)^2 + 1}}$,

con un radio $r = \frac{1}{2q^2}$. Por lo tanto, de la condición que nos indica la desigualdad anterior se tiene que

$$\begin{aligned} & \left|\frac{1}{m} \frac{p}{q} - \frac{1}{2q^2} + b\right| \leq \left(\frac{1}{2q^2}\right) \sqrt{\left(\frac{1}{m}\right)^2 + 1}, \\ \Rightarrow & \left|2q^2 \frac{1}{m} \frac{p}{q} - \frac{2q^2}{2q^2} + 2q^2 b\right| \leq \sqrt{\left(\frac{1}{m}\right)^2 + 1} \\ \Rightarrow & \left|\frac{1}{m} 2pq - 1 + 2q^2 b\right| \leq \sqrt{\left(\frac{1}{m}\right)^2 + 1} \\ \Rightarrow & -\sqrt{\left(\frac{1}{m}\right)^2 + 1} \leq \frac{1}{m} 2pq - 1 + 2q^2 b \leq \sqrt{\left(\frac{1}{m}\right)^2 + 1} \\ \Rightarrow & 1 - \sqrt{\left(\frac{1}{m}\right)^2 + 1} \leq \frac{1}{m} 2pq + 2q^2 b \leq 1 + \sqrt{\left(\frac{1}{m}\right)^2 + 1} \\ \Rightarrow & \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{\left(\frac{1}{m}\right)^2 + 1}\right) \leq \frac{1}{m} pq + q^2 b \leq \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{\left(\frac{1}{m}\right)^2 + 1}\right) \end{aligned}$$

$$\text{Por lo que } \frac{1}{2} m \left(1 - \sqrt{\left(\frac{1}{m}\right)^2 + 1}\right) \leq pq + mq^2 b \leq \frac{1}{2} m \left(1 + \sqrt{\left(\frac{1}{m}\right)^2 + 1}\right)$$

²⁴ El problema se atacará igual que en Capítulo II

Nuevamente, el lado izquierdo de la desigualdad siempre se cumple por ser menor a cero, y el lado derecho queda como $pq + mq^2b \leq f(m)$, por lo que la condición se reduce únicamente a $pq + mq^2b \leq m$. Modificando este término para que se parezca a lo que se ha desarrollado, finalmente se llega a

$$q^2b \leq 1 - \frac{1}{m}pq$$

Ahora, llamaremos $F_{1/m+b}$ al conjunto de las fracciones que corresponden a los círculos que toca esta recta. De esta manera,

$$F_{1/m+b} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}^+, (p, q) = 1, q \geq p, q^2b \leq 1 - \frac{1}{m}pq \right\}.$$

Veamos un ejemplo con la recta $y = \frac{1}{32}x + \frac{1}{50}$ (Figura 8). En este caso $m = 32$ y $b = \frac{1}{50} = .02$, y la sucesión es $\left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1} \right\}$.

Como L es una recta, S cumple la suma del Teorema 4.1, por ejemplo:

$$\frac{1+1}{6+4} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}, \quad \frac{2+1}{3+1} = \frac{3}{4}, \text{ etc.}$$

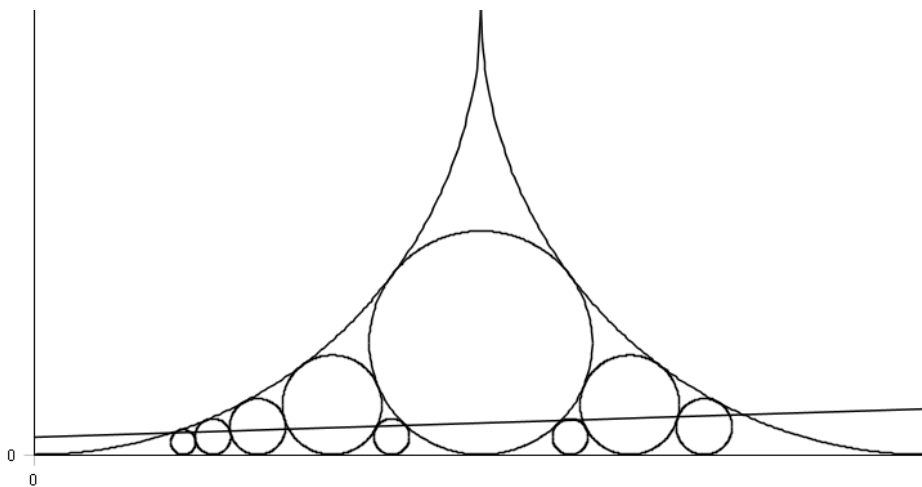


Figura 8. Círculos que toca la recta $y = \frac{1}{32}x + \frac{1}{50}$.

Cabe resaltar que si el denominador m de la pendiente, tiende a infinito en la ecuación $y = \frac{1}{m}x + b$, entonces se llega a la recta horizontal $y = b$, que como ya vimos, genera a las sucesiones de Farey. Retomemos un ejemplo anterior.

Sucesiones de Farey

Como las sucesiones de Farey son generadas por una recta horizontal, se cumple la suma del teorema 4.1. Por ejemplo, para la recta $y = 1/32$ se genera la sucesión

$$F_{\frac{1}{32}} = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1} \right\} \text{ y se cumple la suma:}$$

$$\frac{0+1}{1+4} = \frac{1}{5}, \quad \frac{2+4}{3+5} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}, \text{ etc.}$$

Resulta que las sucesiones de Farey se vuelven un caso particular de aquellas sucesiones que cumplen con la suma enunciada en el Teorema 4.1.

Sucesiones $F_{1/m}$

Bajo el contexto de este capítulo, regresamos a las rectas con pendiente positiva que pasan por el origen. Éstas generan las sucesiones $F_{1/m}$, y son sucesiones crecientes por lo que cumplen con la suma del Teorema 4.1.

Por ejemplo, para $m = 32$ se tiene que L es la recta $y = \frac{1}{32}x$ (ver Figura 9), y la sucesión es

$$F_{\frac{1}{32}} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}^+, (p, q) = 1, q \geq p, pq \leq 32 \right\}$$

$$= \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{32}, \frac{1}{31}, \frac{1}{30}, \dots, \frac{1}{9}, \frac{1}{8}, \frac{2}{15}, \frac{1}{7}, \frac{2}{13}, \frac{1}{6}, \frac{2}{11}, \frac{1}{5}, \frac{2}{9}, \frac{1}{4}, \frac{2}{7}, \frac{3}{10}, \frac{1}{3}, \frac{3}{8}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \frac{3}{5}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{1}{1} \right\}$$

Además $F_{1/32}$ cumple con la suma indicada, algunos ejemplos son:

$$\frac{0+1}{1+31} = \frac{1}{32}, \quad \frac{2+2}{15+13} = \frac{4}{28} = \frac{1}{7}, \quad \frac{3+3}{8+7} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}, \quad \frac{4+1}{5+1} = \frac{5}{6}.$$

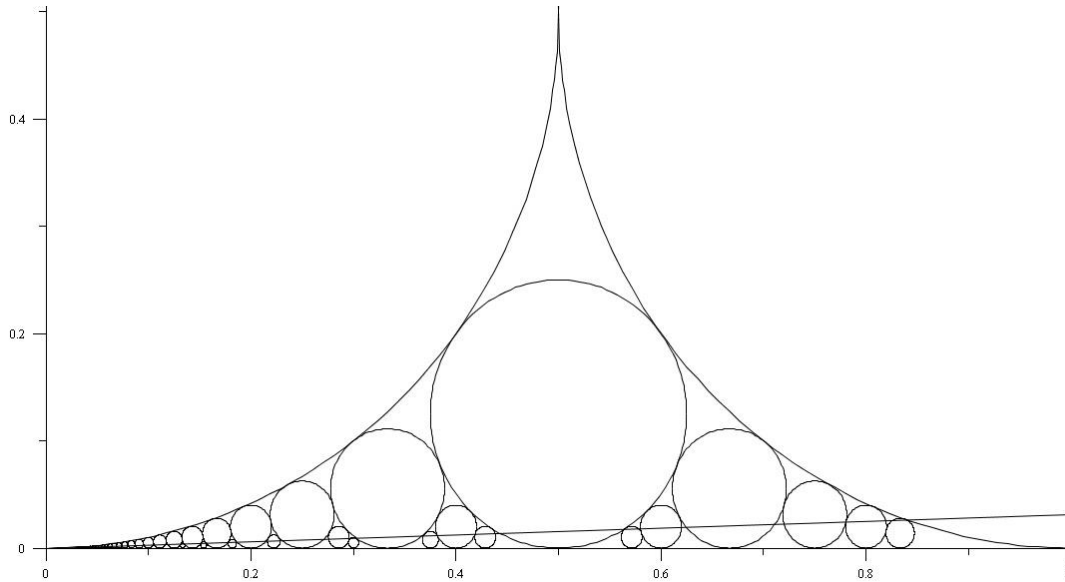


Figura 9. Círculos que toca la recta $y = \frac{1}{32}x$

Existe una manera alternativa de probar que las sucesiones $F_{1/m}$ cumplen con la suma del Teorema 4.1, y aunque ya se demostró de manera general para cualquier curva, consideramos que puede ser de interés hacerlo nuevamente para este caso, porque ahora usaremos lo que se conoce como triángulos primitivos, lo cual nos lleva de regreso a las retículas, que es uno de los lugares atractivos para estudiar las fracciones asociadas a los círculos de Ford.

Primero enunciaremos algunas propiedades interesantes de los puntos y polígonos reticulares.

Definiciones

1. Un punto de coordenadas (x, y) se llama entero o reticular si x, y son números enteros
2. Una red poligonal o retículo poligonal es un polígono simple cuyos vértices son enteros
3. Un triángulo es primitivo si no tiene puntos enteros en el interior y sus vértices son los únicos puntos enteros que tiene en sus lados (frontera)

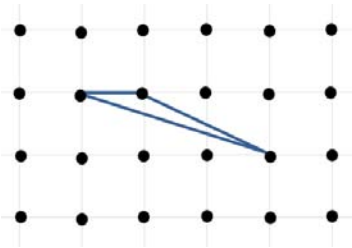


Figura 10. Triángulo primitivo

Propiedades²⁵

1. Toda red poligonal puede descomponerse en triángulos primitivos
2. El área de un triángulo ΔOAB es $\frac{1}{2}|a_1b_2 - a_2b_1|$, donde $A = (a_1, b_1)$ y $B = (a_2, b_2)$ y O es el origen
3. El área de todo triángulo primitivo es $1/2$
4. $A = (x, y)$ es un punto visible si sólo si $mcd(x, y) = 1$
5. Teorema de Pick: El área P de una red poligonal es $P = I + \frac{B}{2} - 1$, donde I es el número de puntos enteros interiores del polígono y B es el número de puntos enteros sobre la frontera del mismo.

Por ejemplo, la siguiente figura muestra una red poligonal de área 45.5, ya que tiene 31 puntos enteros en su frontera y 31 interiores, de ahí que $P = 31 + \frac{31}{2} - 1 = 45.5$

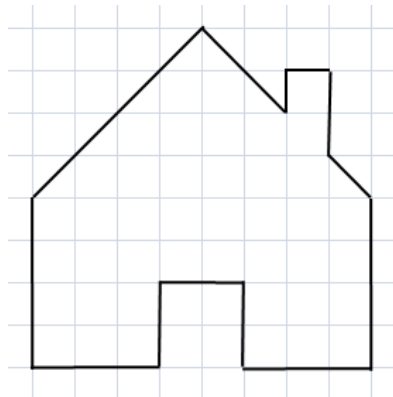


Figura 11. Red poligonal de área 45.5

²⁵ Para las demostraciones de estas propiedades, consulte Ramírez [2010]

Sucesiones $F_{1/m}$ en la retícula.

Para representar las sucesiones $F_{1/m}$ en la retícula, consideraremos a la fracción $\frac{p}{q} \in F_{1/m}$

como el punto (p, q) .

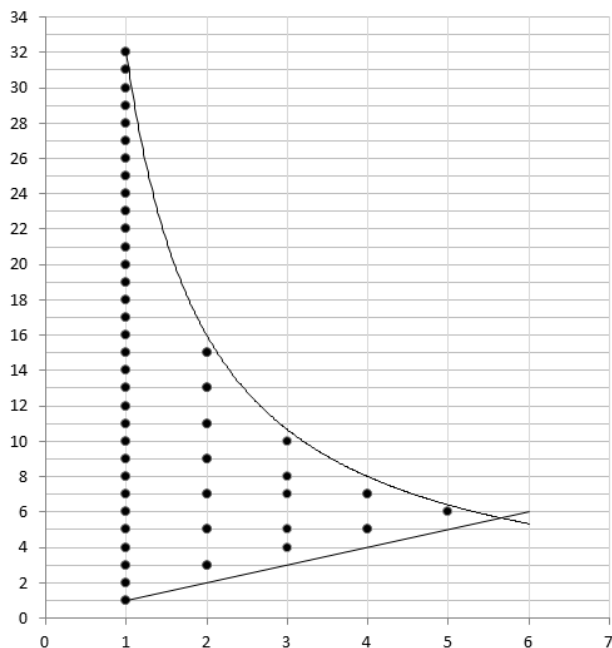


Figura 12. Gráfica de $F_{1/m}$ con $m=32$

Los puntos están en la región delimitada por las rectas $y = x$, $x = 0$, y por la curva $y = m/x$.

Todos los puntos de $F_{1/m}$ están en esta región, incluyendo la frontera. Además, todos los puntos visibles de esta región son los de $F_{1/m}$.

Teorema 4.2. Sean $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2} \in F_{1/m}$ consecutivos y $\frac{a_1}{b_1} < \frac{a_2}{b_2}$. Las rectas OA y OB son consecutivas, donde $A = (a_1, b_1)$ y $B = (a_2, b_2)$.

Demostración. Sean m_1 y m_2 las pendientes de OA y OB respectivamente, entonces

$$m_1 = \frac{a_1}{b_1} \text{ y } m_2 = \frac{a_2}{b_2}, \text{ por lo que } m_1 < m_2, \text{ es decir, } OA \text{ es menos inclinada que } OB.$$

Si existiera una recta OC tal que $C(a_3, b_3)$ estuviera entre A y B , con C visible, entonces se

$$\text{tendría que } \frac{a_1}{b_1} < \frac{a_3}{b_3} < \frac{a_2}{b_2} \text{ y } \frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2} \text{ no serían consecutivos.} \quad \square$$

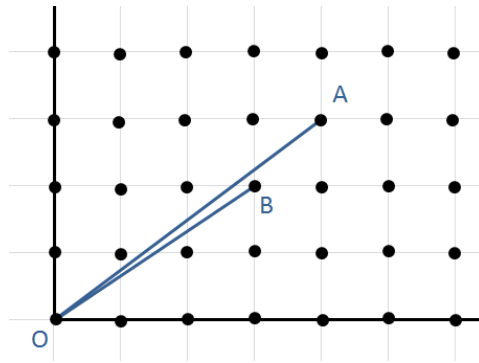


Figura 13. Rectas consecutivas

Teorema 4.3. Sean $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2} \in F_{1/m}$ consecutivos. El triángulo ΔOAB es primitivo, donde

$$A = (a_1, b_1) \text{ y } B = (a_2, b_2).$$

Demostración. Como $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}$ son consecutivos, aplicando el teorema anterior, no puede haber puntos visibles en el interior de ΔOAB . Además, como $(a_1, b_1) = 1 = (a_2, b_2)$, se tiene

que A y B son visibles, por lo tanto no hay más puntos en la frontera. Así, los únicos puntos en ΔOAB son sus vértices, por lo que el triángulo es primitivo. \square

Teorema 4.4.

a) Si $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}$ son dos fracciones consecutivas de $F_{1/m}$ entonces $b_1 a_2 - a_1 b_2 = 1$.

b) Si $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}$ son tres fracciones consecutivas de $F_{1/m}$ entonces $\frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1 + a_3}{b_1 + b_3}$.

Demostración.

- a) Sean $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}$ dos fracciones consecutivas de $F_{1/m}$. Por el teorema anterior, el triángulo ΔOAB es primitivo, donde $A = (a_1, b_1)$ y $B = (a_2, b_2)$. Por lo tanto sabemos que ΔOAB tiene área $1/2$. Así, $A(\Delta OAB) = \frac{1}{2}|a_1b_2 - a_2b_1| = \frac{1}{2}$, entonces $|a_1b_2 - a_2b_1| = 1$, y como las fracciones son consecutivas, $0 < \frac{a_1}{b_1} < \frac{a_2}{b_2} \Rightarrow 0 < a_2b_1 - a_1b_2$. Por lo tanto $b_1a_2 - a_1b_2 = 1$.
- b) Sean $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}$ tres fracciones consecutivas de $F_{1/m}$. Por el inciso anterior se tiene que $b_1a_2 - a_1b_2 = 1$ y $b_2a_3 - a_2b_3 = 1 \Rightarrow b_1a_2 - a_1b_2 = b_2a_3 - a_2b_3 \Rightarrow b_1a_2 + a_2b_3 = b_2a_3 + a_1b_2 \Rightarrow a_2(b_1 + b_3) = b_2(a_3 + a_1) \Rightarrow \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1 + a_3}{b_1 + b_3} \quad \square$

Polígono $P_{1/m}$

Podemos visualizar la figura que se forma en la retícula a partir de las sucesiones $F_{1/m}$ (Figura 14). Definimos al polígono $P_{1/m}$ como aquél que se forma uniendo, en orden de aparición, a los vértices de la sucesión $F_{1/m}$ considerando al origen como punto de partida. Por sus características, el polígono tendrá forma de estrella, es decir, estará formado por picos.

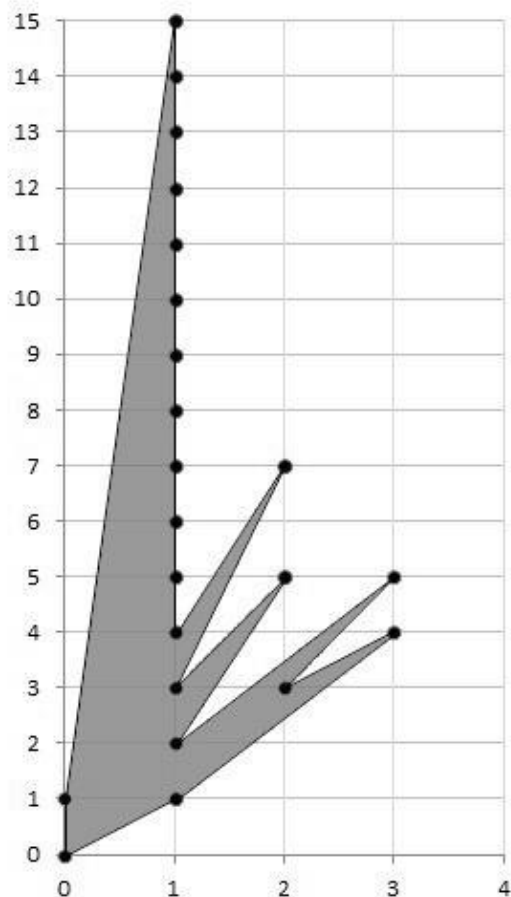


Figura 14. Ejemplo del polígono $P_{1/m}$ con $m=15$

Al seguir la inercia de los capítulos anteriores, nos preguntamos cómo es el área del polígono $P_{1/m}$. Para responder tenemos el siguiente teorema.

Teorema 4.5. El área de $P_{1/m}$ es $A(P_{1/m}) \approx \frac{1}{2} \left[1 + \sum_{p=1}^s \left(m \frac{\varphi(p)}{p^2} - \varphi(p) \right) \right]$.

Demostración. El número de términos de $F_{1/m}$ es $|F_{1/m}| \approx 2 + \sum_{p=1}^s \left[m \frac{\varphi(p)}{p^2} - \varphi(p) \right]$

Por el teorema de Pick $A(P_{1/m}) \approx I + \frac{1}{2} B - 1$. En este caso $I = 0$ porque $P_{1/m}$ no tiene vértices interiores y $B = 1 + |F_{1/m}| = 3 + \sum_{p=1}^s \left[m \frac{\varphi(p)}{p^2} - \varphi(p) \right]$.

$$\begin{aligned}
\text{Por lo tanto } A(P_{1/m}) &\simeq \frac{1}{2} \left[3 + \sum_{p=1}^s \left(m \frac{\varphi(p)}{p^2} - \varphi(p) \right) \right] - 1 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^s \left(m \frac{\varphi(p)}{p^2} - \varphi(p) \right) - 1 \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^s \left(m \frac{\varphi(p)}{p^2} - \varphi(p) \right) = \frac{1}{2} \left[1 + \sum_{p=1}^s \left(m \frac{\varphi(p)}{p^2} - \varphi(p) \right) \right] \quad \square
\end{aligned}$$

Ejemplo. Para el polígono $P_{1/15}$ se obtiene:

$$\begin{aligned}
A(P_{1/15}) &\simeq \frac{1}{2} \sum_{p=1}^3 \left(m \frac{\varphi(p)}{p^2} - \varphi(p) \right) \\
&= \frac{1}{2} \left[1 + \left(15 \frac{\varphi(1)}{1^2} - \varphi(1) \right) + \left(15 \frac{\varphi(2)}{2^2} - \varphi(2) \right) + \left(15 \frac{\varphi(3)}{3^2} - \varphi(3) \right) \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[1 + (15 - 1) + \left(15 \frac{1}{4} - 1 \right) + \left(15 \frac{2}{9} - 2 \right) \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[1 + (15 - 1) + \left(15 \frac{1}{4} - 1 \right) + \left(15 \frac{2}{9} - 2 \right) \right] \\
&= \frac{1}{2} [1 + 14 + 2.75 + 1.33] \\
&= 9.54
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $A(P_{1/15}) \simeq 9.54$

Nota: El valor exacto del área para $P_{1/15}$ es de 10 unidades.

Capítulo V

Cardinalidad y simetría

En los capítulos anteriores trabajamos con rectas inclinadas que intersectan al conjunto de círculos en el intervalo $[0,1]$. Ahora cabe preguntarnos qué pasa si dejamos que la recta se prolongue hasta que deje de tocar a los círculos, sabiendo que la altura máxima de las ordenadas del conjunto –que será el diámetro máximo que puede tener un círculo– es uno, y que el conjunto de círculos que toca la recta extendida es finito. Con base a lo anterior nos preguntamos ¿cómo es la cardinalidad del nuevo conjunto creado? ¿La cantidad de círculos en $[0,1]$ es mayor que en $[1,n]$?, donde n es la fracción del último círculo que toca la recta.

Como ya no tenemos restricción en el intervalo, entonces tendremos más círculos que son intersectados y en consecuencia nuevas fracciones asociadas. Entonces al prolongar la recta $y = \frac{1}{m}x$ hasta que ya no toque a ningún círculo se obtiene el siguiente conjunto

$$F'_{1/m} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}^+, (p, q) = 1, pq \leq m \right\}.$$

En la figura 1 se muestran los círculos correspondientes a $F'_{1/m}$ con $m=15$.

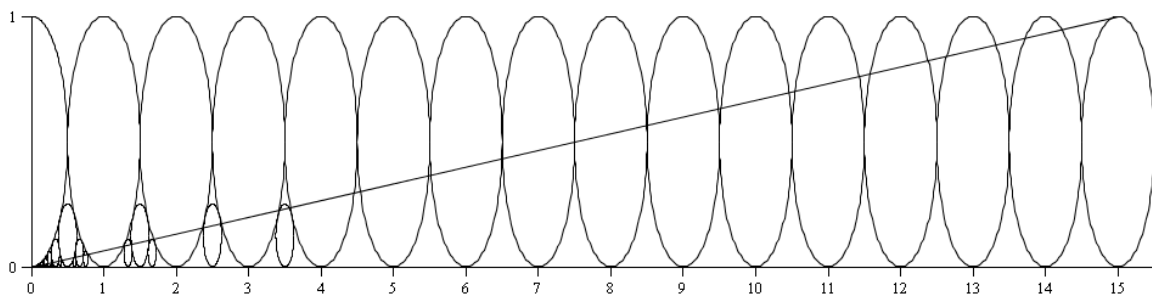


Figura 1. Círculos de $F'_{1/m}$ con $m=15$

Se observa que el último círculo que toca la recta corresponde a la fracción $m/1$, en el ejemplo es la fracción $15/1$, por lo que el intervalo se expande a $[0,m]$.

Fracciones simétricas

Bajo las condiciones enunciadas para el nuevo conjunto, ahora sí podemos admitir fracciones p/q mayores que uno, siempre que $pq \leq m$. Con esto podemos considerar un tipo de ‘simetría’ respecto de las fracciones que se encuentran en $[0, 1]$, por ejemplo, si la fracción $3/5$ está en $F_{1/m}$, ahora consideraremos a la fracción $5/3$, y este nuevo conjunto de fracciones simétricas, aunado a $F_{1/m}$ nos genera al conjunto que definimos como $F'_{1/m}$.

A partir de la construcción de $F'_{1/m}$, podemos apreciar que su gráfica reticular se forma con los puntos de $F_{1/m}$ junto con la reflexión de estos respecto de la recta identidad. Con base en esto podemos construir el polígono correspondiente $P'_{1/m}$ (Figura 2).

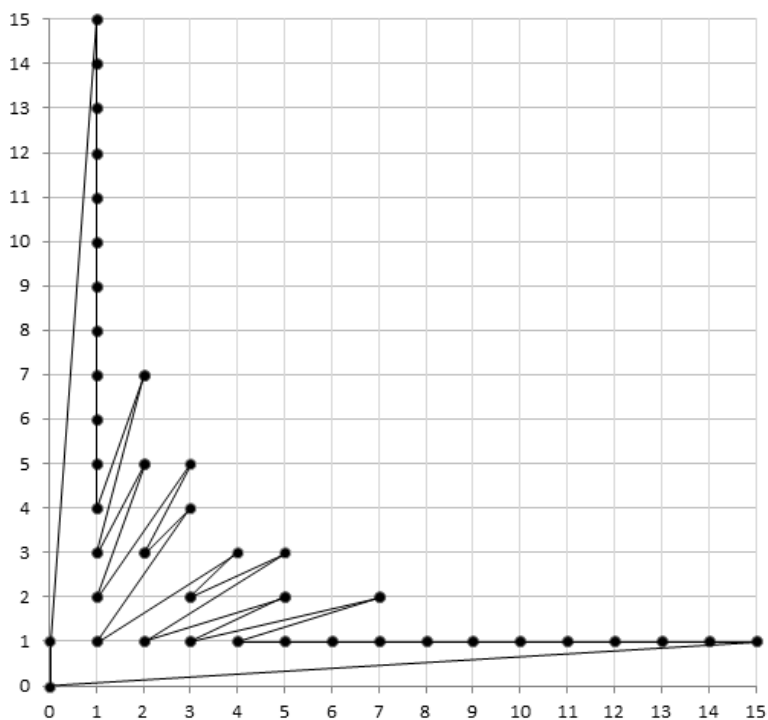


Figura 2. Polígono $P'_{1/m}$

Antes de analizar la cardinalidad de $F'_{1/m}$, definamos primero a $G_{1/m}$ de la siguiente manera:

$$G_{1/m} = \left\{ \frac{p}{q} \mid (p, q) = 1, q \leq p, pq \leq m \right\},$$

y recordemos que $F_{1/m} = \left\{ \frac{p}{q} \mid (p, q) = 1, q \geq p, pq \leq m \right\}$. Ahora observe que $F'_{1/m} = F_{1/m} \cup G_{1/m}$ y que $F_{1/m} \cap G_{1/m} = \left\{ \frac{p}{q} \mid (p, q) = 1, q = p, pq \leq m \right\} = 1/1$.

Por otro lado $|F_{1/m}| = |G_{1/m}| + 1$ ya que para efectos de conteo, podemos pensar que estamos contando parejas (p, q) en vez de fracciones p/q , y tanto en un conjunto como en el otro, contamos a las parejas de enteros positivos que son primos relativos y que multiplicados son menores a m y uno es mayor o igual a otro. Hasta este punto las cardinalidades de ambos conjuntos son iguales, pero considerando la fracción $0/1$ en $F_{1/m}$ se tiene que $|F_{1/m}| = |G_{1/m}| + 1$.

Se puede visualizar a los círculos en parejas de la siguiente manera:

Por un lado, se dibujará cada círculo asociado a p/q en el intervalo $[0, 1]$ y por el otro, al círculo de la fracción simétrica p/q en el intervalo $[1, m]$. Para esto utilizamos la siguiente figura base (Figura 3), la cual contiene una ampliación del intervalo $[0, 1]$.

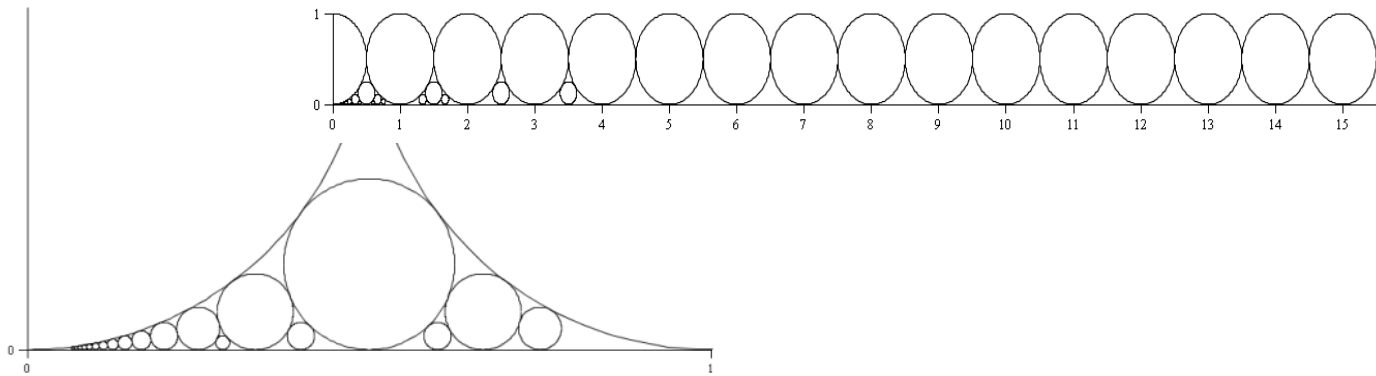


Figura 3. Figura base utilizando $m=15$

Al comenzar con la fracción $1/1$, vemos que la fracción simétrica que le corresponde es ella misma y no hay otra fracción con la cual pase lo mismo.

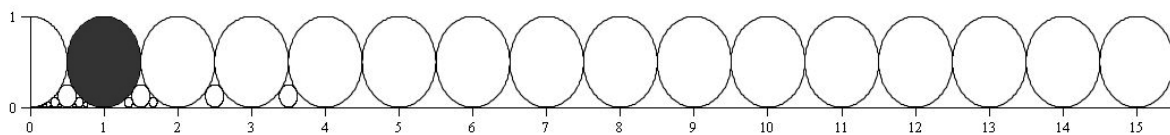


Figura 4. Fracción $1/1$

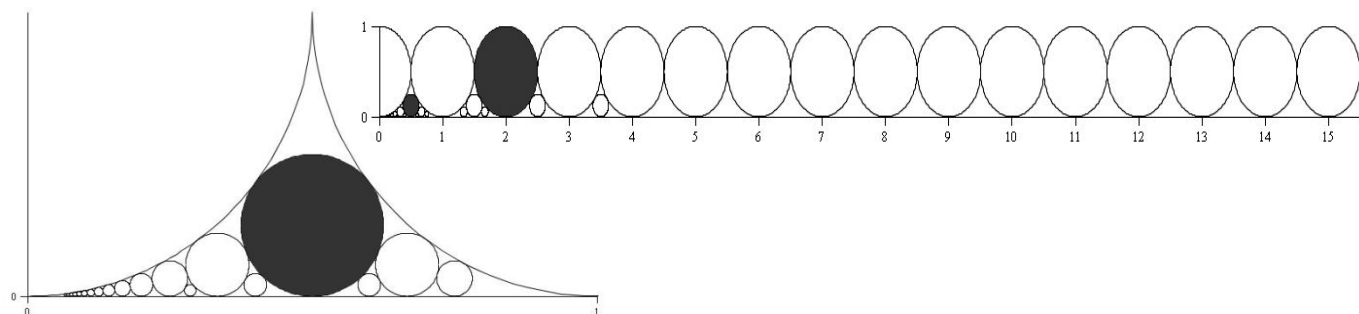


Figura 5. Pareja $1/2$ y $2/1$

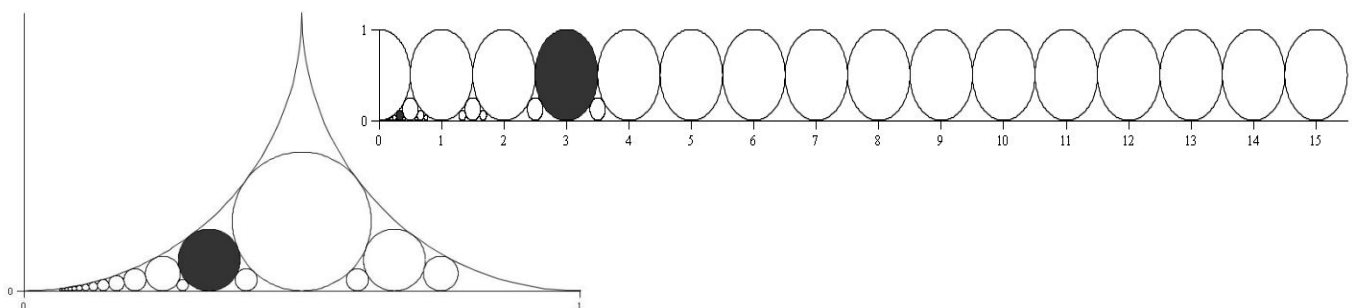


Figura 6. Pareja $1/3$ y $3/1$

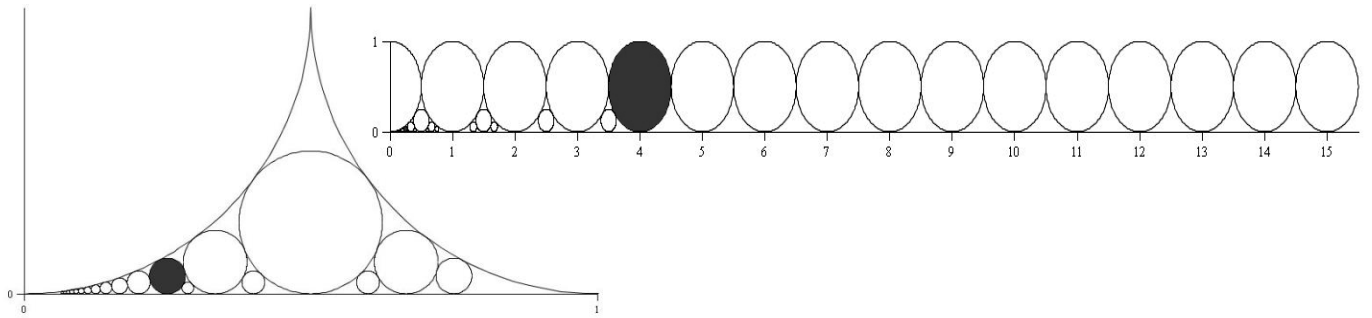


Figura 7. Pareja $1/4$ y $4/1$

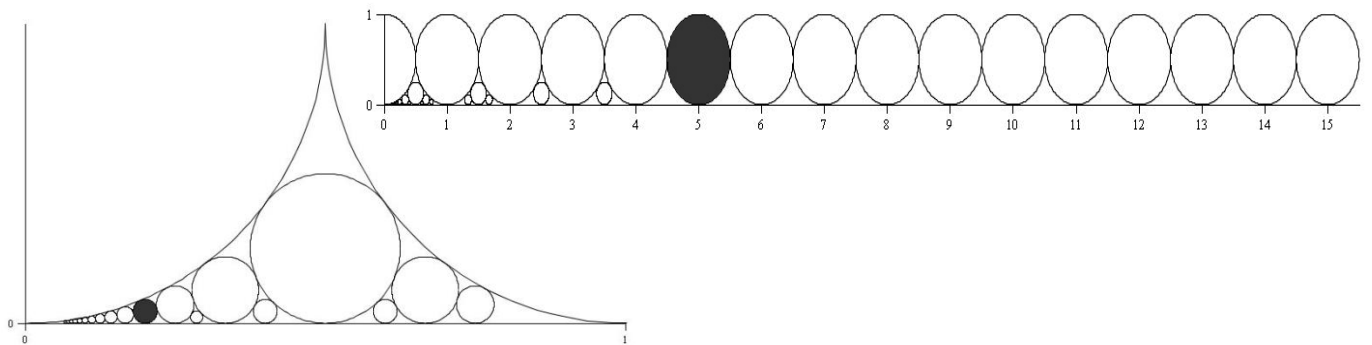


Figura 8. Pareja $1/5$ y $5/1$

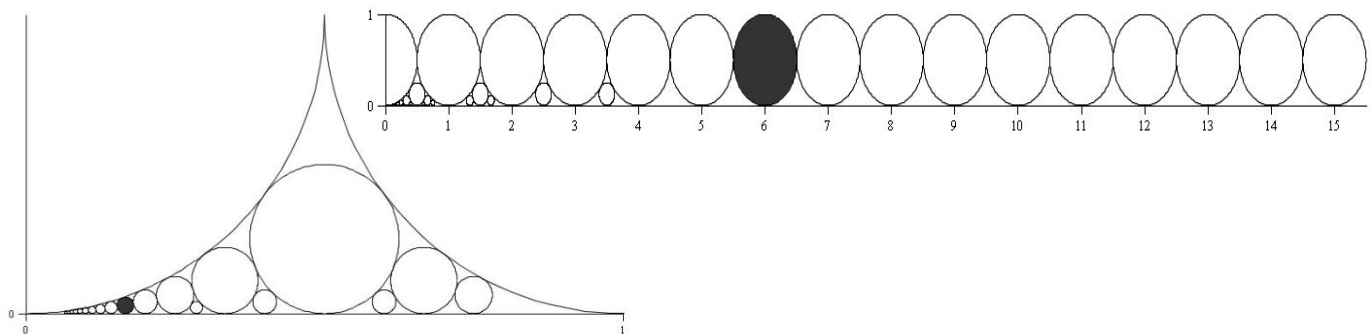


Figura 9. Pareja $1/6$ y $6/1$

La misma tendencia continúa para las fracciones $\frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}, \frac{1}{11}, \frac{1}{12}, \frac{1}{13}, \frac{1}{14}$ y sus parejas.

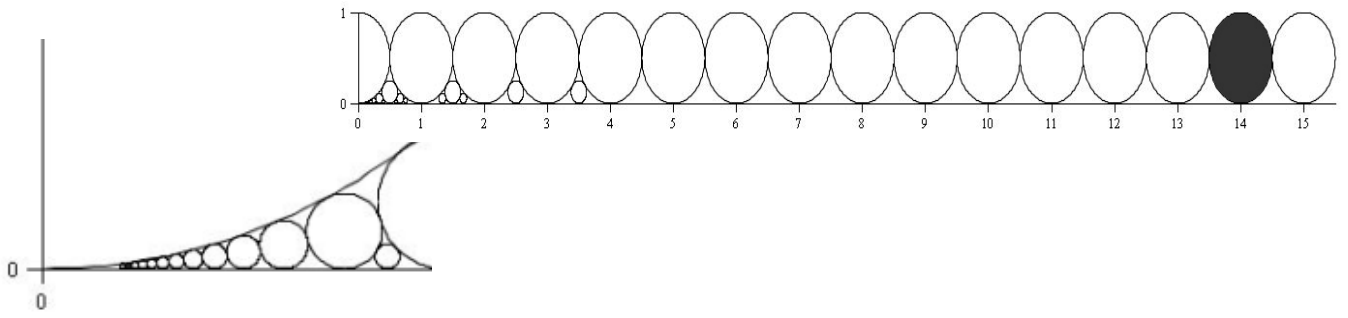


Figura 10. Pareja $1/14$ y $14/1$

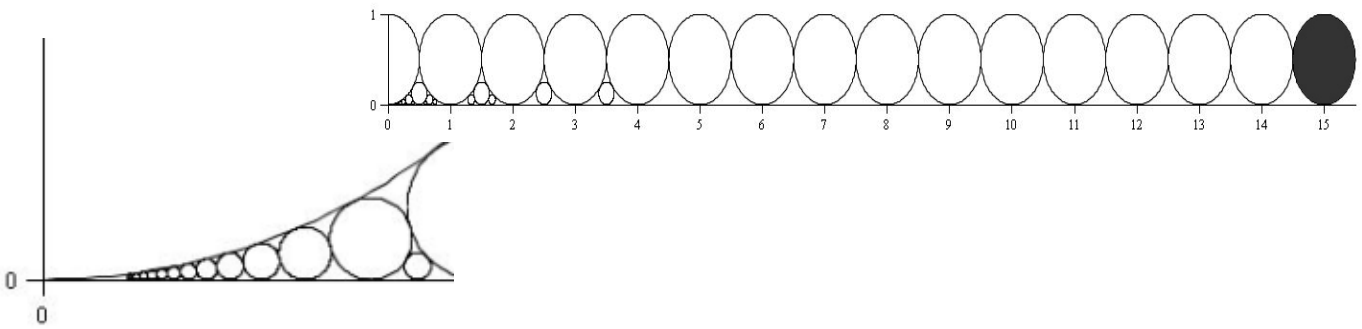


Figura 11. Pareja $1/15$ y $15/1$

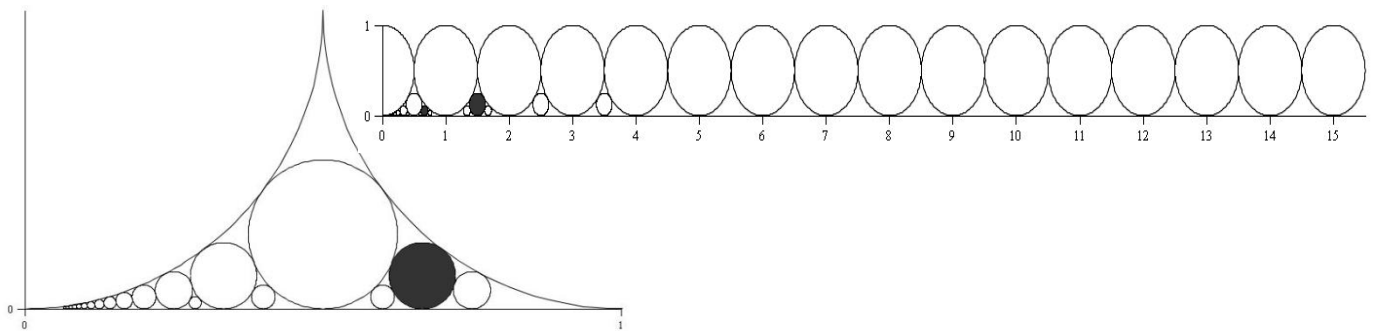


Figura 12. Pareja $2/3$ y $3/2$

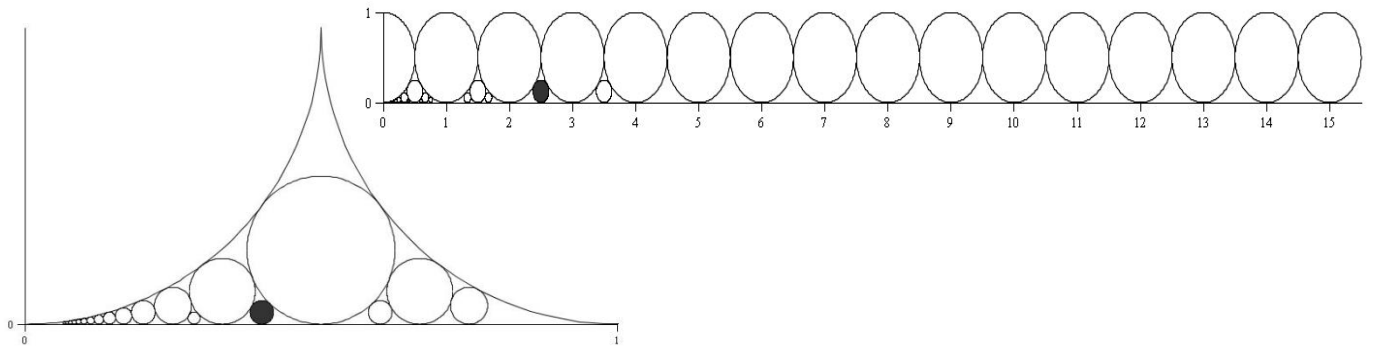


Figura 13. Pareja $2/5$ y $5/2$

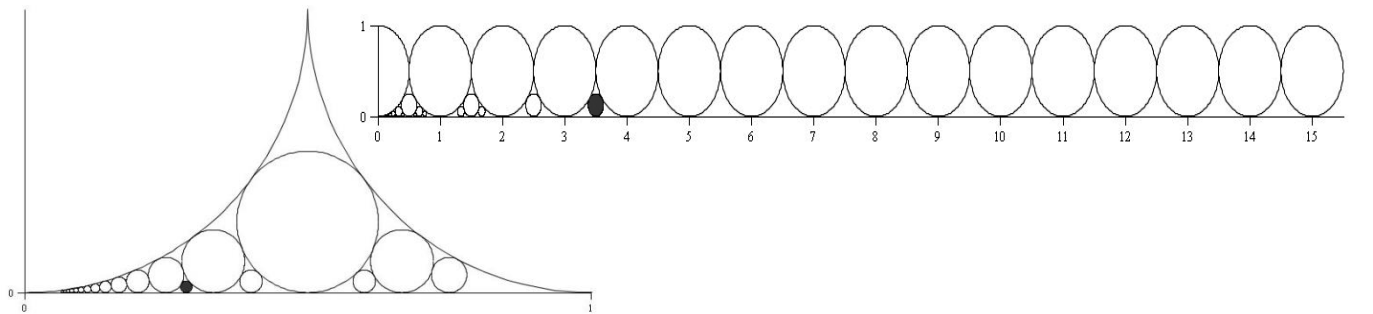


Figura 14. Pareja $2/7$ y $7/2$

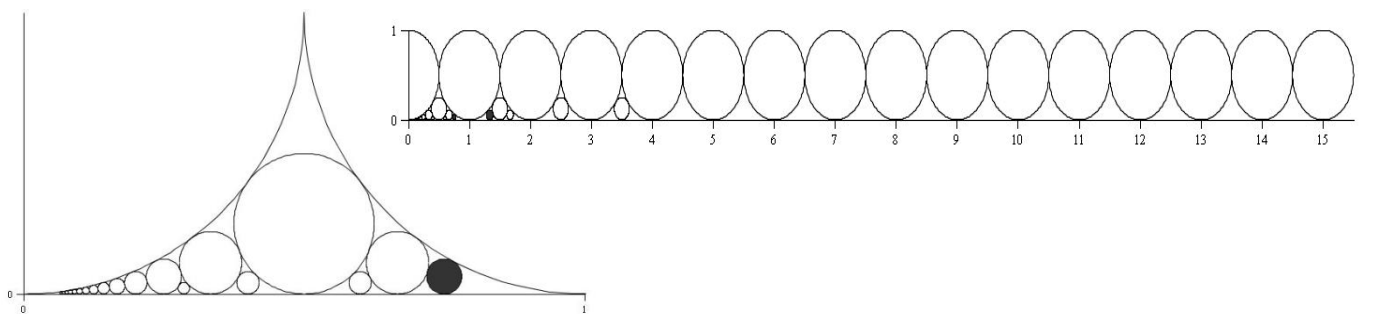


Figura 15. Pareja $3/4$ y $4/3$

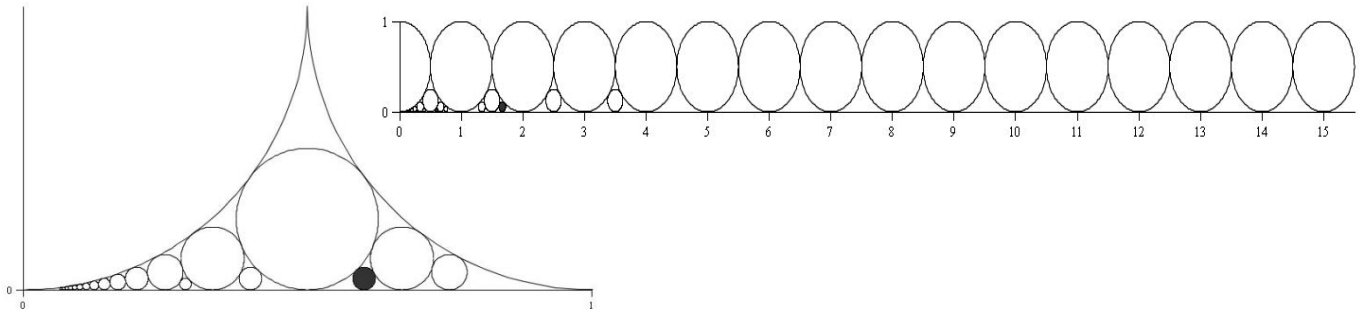


Figura 16. Pareja $3/5$ y $5/3$

Cardinalidad de las fracciones simétricas

Regresando al conjunto $F'_{1/m}$, y como $|F_{1/m}| = |G_{1/m}| + 1$, entonces

$$|F'_{1/m}| = |F_{1/m}| + |G_{1/m}| - 1 = 2|F_{1/m}| - 2 = 2|G_{1/m}|.$$

La igualdad $|F_{1/m}| = |G_{1/m}| + 1$ es muy importante porque implica que podemos contar las fracciones del conjunto $F_{1/m}$ -que se encuentran en el intervalo $[0,1]$ - a partir de los círculos que toca la recta en el intervalo $[1,m]$. Esto último lo haremos construyendo una aproximación utilizando el hecho de que mientras m crece, la recta tiende a ser horizontal. Así, el problema ahora lo trasladamos a contar fracciones de Farey en intervalos de tamaño uno. Antes de comenzar con este proceso analizaremos el caso más sencillo retomando los círculos que toca la recta que no pasa por el origen y que tiene a b como ordenada al origen, es decir, lo que corresponde a $F_{1/m+b}$, y posteriormente lo generalizaremos para continuar con las fracciones simétricas.

Recordemos que las fracciones $F_{1/m+b}$ son aquellas que toca la recta $L: y = \frac{1}{m}x + b$, entonces, $F_{1/m+b} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}^+, (p, q) = 1, q \geq p, q^2 b \leq 1 - \frac{1}{m}pq \right\}$. Observe que cuando m crece, la recta tiende a ser horizontal, y como tiene ordenada al origen positiva, entonces no toca a los círculos que se acumulan cerca del origen (Fig. 17), por lo que podemos aproxi-

mar la cardinalidad de $F_{1/m+b}$ con cardinalidad de una sucesión de Farey F_n , donde el orden n es seleccionado adecuadamente.

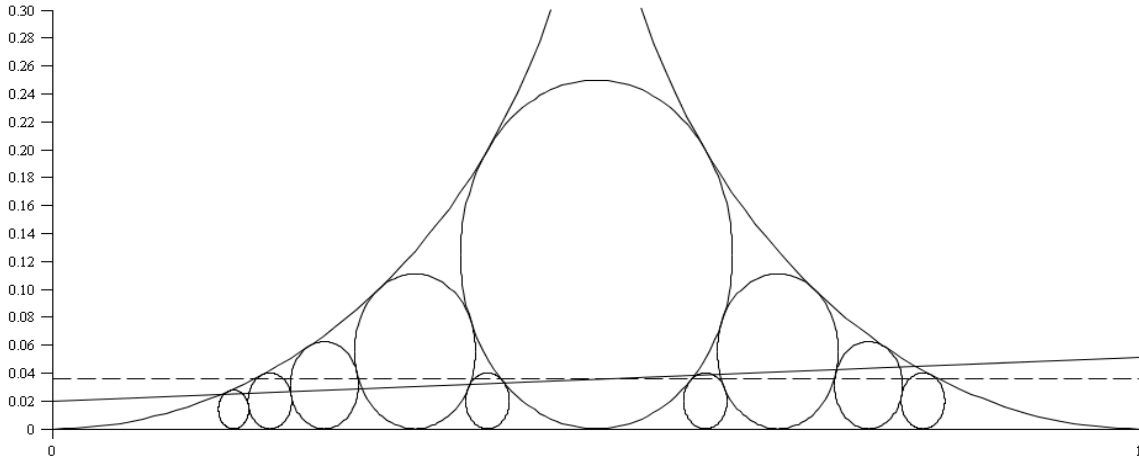


Figura 17. Aproximación de $|F_{1/32+.02}|$ con $|F_5|$.

Por la simetría del arreglo de los círculos, elegiremos ajustar la recta original a una recta horizontal a una altura igual a la ordenada en el punto medio del intervalo (en el caso ilustrado en la figura 17, $x = 1/2$, y la recta horizontal se muestra con una línea punteada), entonces se tiene que $y = \frac{1}{m}x + b = \frac{1}{m}\frac{1}{2} + b = \frac{1}{2m} + b$.

Ahora recordemos que las fracciones de Farey surgen de la condición $q \leq \sqrt{\frac{1}{k}}$ o, equivalentemente $q^2k \leq 1$, donde la recta que toca a sus círculos correspondientes es $y = k$, $k \in \mathbb{R}^+$. Entonces, para la aproximación, tomamos a k como $\frac{1}{m}\frac{1}{2} + b$ y la condición se convierte en:

$$q^2\left(\frac{1}{2m} + b\right) \leq 1 \Rightarrow q^2b + q^2\frac{1}{2m} \leq 1 \Rightarrow q^2b \leq 1 - q^2\frac{1}{2m} \Rightarrow q^2b \leq 1 - \frac{1}{m}pq\left(\frac{q}{2p}\right),$$

que se parece a la condición que define a estas fracciones $F_{1/m+b}$: $q^2b \leq 1 - \frac{1}{m}pq$

Con lo anterior, se deduce que $|F_{1/m+b}| \approx |F_n|$, donde $n = \left\lfloor \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{2m}+b}} \right\rfloor = \left\lfloor \sqrt{\frac{2m}{1+2mb}} \right\rfloor$.

Ejemplo:

Consideremos la recta $y = \frac{1}{32}x + \frac{1}{50}$, donde $m = 32$ y $b = \frac{1}{50} = .02$.

Para saber cuántos círculos toca esta recta, contaremos las fracciones de F_n , con

$$n = \left\lfloor \sqrt{\frac{2m}{1+2mb}} \right\rfloor = \left\lfloor \sqrt{\frac{2 \cdot 32}{1+2 \cdot 32/50}} \right\rfloor = \left\lfloor 5.23 \right\rfloor = 5, \text{ y resulta que son 11.}$$

En este ejemplo las carnalidades coinciden, es decir $|F_{1/32+.02}| = |F_5|$, ya que con la aproximación, a la recta horizontal le falta tocar al círculo con la fracción 1/6 (círculo pequeño a la izquierda de la figura 17) pero alcanza a tocar al de la fracción 4/5 (círculo pequeño a la derecha de la figura).

Regresando a las fracciones simétricas, utilizaremos el mismo proceso pero ahora para más intervalos. La aproximación se hará como sigue:

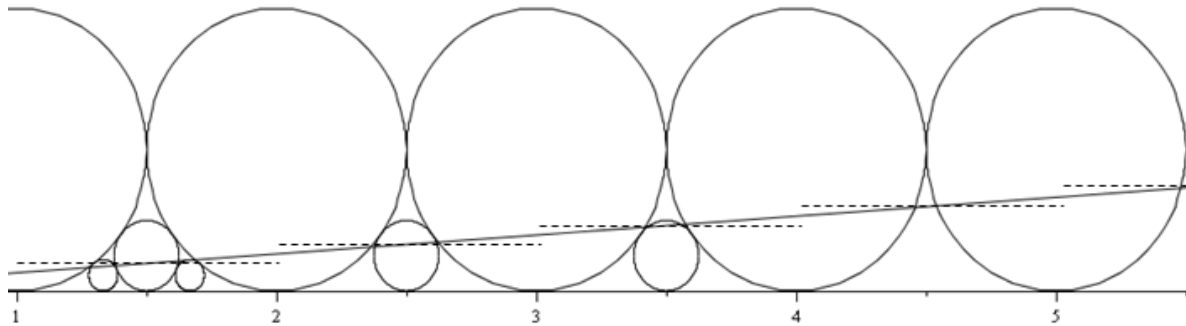


Figura 18. Aproximación con rectas horizontales para $G_{1/15}$

En cada intervalo de longitud uno de la forma $[z, z+1]$, $z \in \{1, 2, \dots, m-1\}$, ajustaremos la recta inclinada hasta que quede horizontal, de tal manera que el punto medio de cada recta inclinada sea como un pivote (Figura 18). Así, en cada intervalo quedará definida una recta

horizontal con una altura que coincide con la recta inclinada en el punto medio de cada intervalo.

Como la ecuación de la recta inclinada es $y = \frac{1}{m}x$, las alturas de las rectas horizontales son $\frac{1}{m}, \frac{3}{m}, \frac{5}{m}, \dots, \frac{2m-1}{m}$, siendo sus recíprocos $\frac{2m}{3}, \frac{2m}{5}, \dots, \frac{2m}{2m-1}$.

Para contar los círculos que tocan las rectas horizontales, *i. e.*, contar a sus respectivas fracciones F_n , recordemos que $n = \lfloor \sqrt{\frac{1}{k}} \rfloor$, donde k es la altura de la recta, por lo tanto, para nuestro conteo consideraremos las cantidades $\sqrt{\frac{2m}{3}}, \sqrt{\frac{2m}{5}}, \dots, \sqrt{\frac{2m}{2m-1}}$.

Utilizaremos el hecho de que $|F_n| = 1 + \varphi(1) + \varphi(2) + \dots + \varphi(n) = 1 + \sum_{k \leq n} \varphi(k)$ para el conteo en cada intervalo y tomaremos en cuenta que al sumar los círculos de dos intervalos consecutivos se está contando un círculo extra. También, veamos que con esta igualdad podemos verificar que $\left| F_{\lfloor \sqrt{\frac{m}{x}} \rfloor} \right| = \left| F_{\sqrt{\frac{m}{x}}} \right|$ ya que $1 + \sum_{k \leq \lfloor \sqrt{\frac{m}{x}} \rfloor} \varphi(k) = 1 + \sum_{k \leq \sqrt{\frac{m}{x}}} \varphi(k)$, $k \in \mathbb{N}$, y esto lo utilizaremos para simplificar notación.

Así, $|F_{1/m}| = |G_{1/m}| = \sum_{i=2}^m \left(\left| F_{\sqrt{\frac{2m}{2i-1}}} \right| - 1 \right) + 2 = \sum_{i=2}^m \sum_{k \leq \sqrt{\frac{2m}{2i-1}}} \varphi(k) + 2$. Al último se sumaron los círculos que corresponden a las fracciones 0/1 y 1/1. Por lo tanto $|F_{1/m}| = \sum_{i=2}^m \sum_{k \leq \sqrt{\frac{2m}{2i-1}}} \varphi(k) + 2$. En

el ejemplo con $m=15$, $|F_{1/15}| = \sum_{i=2}^{15} \sum_{k \leq \sqrt{\frac{2 \cdot 15}{2i-1}}} \varphi(k) + 2$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{k \leq \sqrt{\frac{30}{3}}} \varphi(k) + \sum_{k \leq \sqrt{\frac{30}{5}}} \varphi(k) + \sum_{k \leq \sqrt{\frac{30}{7}}} \varphi(k) + \sum_{k \leq \sqrt{\frac{30}{9}}} \varphi(k) + \dots + \sum_{k \leq \sqrt{\frac{30}{29}}} \varphi(k) + 2 \\
 &= \sum_{k \leq 3.16} \varphi(k) + \sum_{k \leq 2.44} \varphi(k) + \sum_{k \leq 2.07} \varphi(k) + \sum_{k \leq 1.82} \varphi(k) + \dots + \sum_{k \leq 1.01} \varphi(k) + 2 \\
 &= (\varphi(1) + \varphi(2) + \varphi(3)) + (\varphi(1) + \varphi(2)) + (\varphi(1) + \varphi(2)) + (\varphi(1)) + \dots + (\varphi(1)) + 2
 \end{aligned}$$

$$= 4 + 2 + 2 + \underbrace{1 + \dots + 1}_{11 \text{ veces}} + 2 = 21$$

Es fácil verificar que $|G_{1/15}| = 20$, por lo que $|F_{1/15}| = 21$, así que la aproximación coincidió con el valor exacto. Cabe mencionar que $F'_{1/15} = 40$.

En resumen, hemos llegado a una forma alternativa de aproximar la cardinalidad de $F_{1/m}$ mediante las fracciones simétricas a las encontradas en el intervalo $[0, 1]$, pero lo más importante es que se usa el método de extracción para las sucesiones de Farey de manera local.

Capítulo VI

Círculos de Ford y el fractal de Mandelbrot

En este capítulo se presentan algunas ideas de cómo el conjunto de Mandelbrot puede llegar a tener ciertos paralelismos con la estructura que posee el conjunto de los círculos de Ford.²⁶ No pretendemos que lo expuesto en este capítulo sea un estudio de fondo y con resultados terminales. Nuestro objetivo es mostrar un conjunto de ideas que serán un bosquejo de posibles relaciones entre los conjuntos de Mandelbrot y Ford, y estos resultados posiblemente podrían ser demostrados, pero ya no se hará en esta tesis.

Conjunto de Mandelbrot.

El conjunto de Mandelbrot, conocido así en honor al matemático Benoît Mandelbrot, es el conjunto fractal más estudiado. Este conjunto se define en el plano complejo a partir de la función $Q_c(z) = z^2 + c$, con c un número complejo cualquiera. Se construye una sucesión $\{Q_c(z_n)\}$ a partir de cero, es decir, $z_0 = 0$ y $z_{n+1} = z_n^2 + c$:

$$0, Q_c(0), Q_c(Q_c(0)), Q_c(Q_c(Q_c(0))), \dots$$

El conjunto de Mandelbrot está formado por los puntos complejos c tales que al iterar la función compleja $Q_c(z) = z^2 + c$, se obtiene una sucesión (u órbita) *acotada* a partir de cero.

La figura 1 muestra la representación –muy conocida– del conjunto de Mandelbrot, aquí sólo se muestran los puntos complejos c asociados estrictamente a sucesiones acotadas. Es común ver imágenes de colores²⁷ donde los tonos más claros corresponden a sucesiones que divergen, y que tienen un tiempo de escape más lento; por otro lado están las sucesiones que también divergen, pero con tiempo de escape más rápido y éstas son las que se presentan con tonos más oscuros.

²⁶ Una parte de lo aquí se mencionará está hecha con base en el artículo de Devaney [1999].

²⁷ Por ejemplo, en la figura 14.

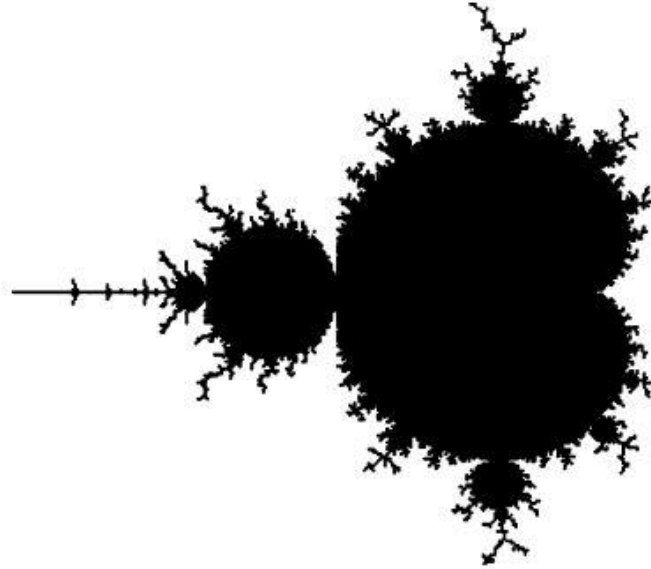


Figura 1. Fractal de Mandelbrot

Identificación de los bulbos

El cuerpo principal del fractal tiene una forma de cardiode y en él están adheridas unas protuberancias a las que llamaremos bulbos. Cada uno de ellos tiene en su parte superior unas extensiones a las que llamamos antenas. Estas extensiones están involucradas con los ciclos atractores de periodo q y un número de rotación p/q , es decir, el ciclo atractor de Q_c que tiende a rotar alrededor de un punto fijo y regresar después en promedio de p/q revoluciones para cada iteración. Por lo anterior a este bulbo se le identificará como p/q y para cada uno de los valores c , en este tipo de bulbo, se tiene esencialmente el mismo comportamiento dinámico.

Por ejemplo, en la figura 2 se puede ver el bulbo $2/5$ que representa a los valores c que caracterizan a ciclos atractores con una cantidad de $2/5$ rotaciones. Este bulbo tiene la característica de poseer una estructura superior de la que emanan cinco rayos y uno de ellos está unido con el bulbo. De la misma manera podemos asociar las fracciones

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}$$

a los bulbos señalados en la figura, donde los denominadores 2, 3, 4 y 5 corresponden a la cantidad de antenas en cada bulbo.

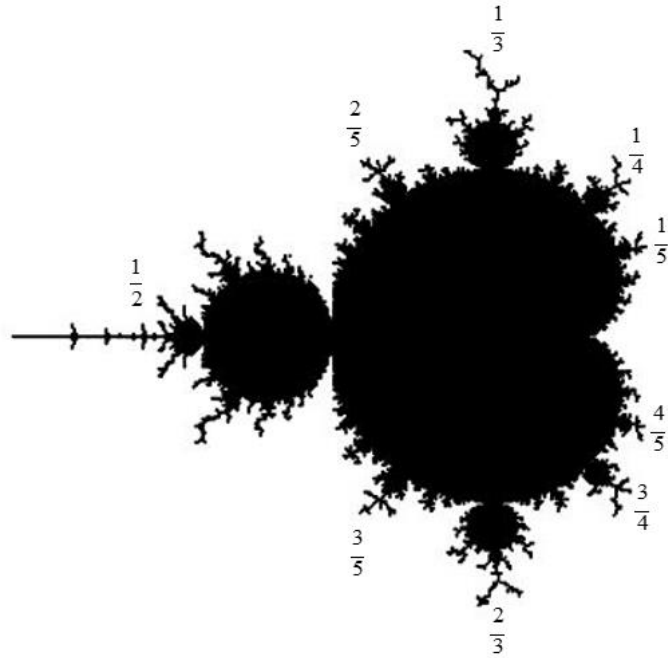


Figura 2. Fracciones de los bulbos más grandes

Es importante mencionar que la sucesión anterior corresponde a una de Farey (salvo las fracciones de los extremos $0/1$ y $1/1$) que conocemos como F_5 . Se puede apreciar que los bulbos tienen un arreglo que atiende a la suma entre fracciones planteada en el teorema 4.1.²⁸ Otro ejemplo de esto lo podemos ver en algunos elementos de F_7 , como los que se presentan en la figura 3.

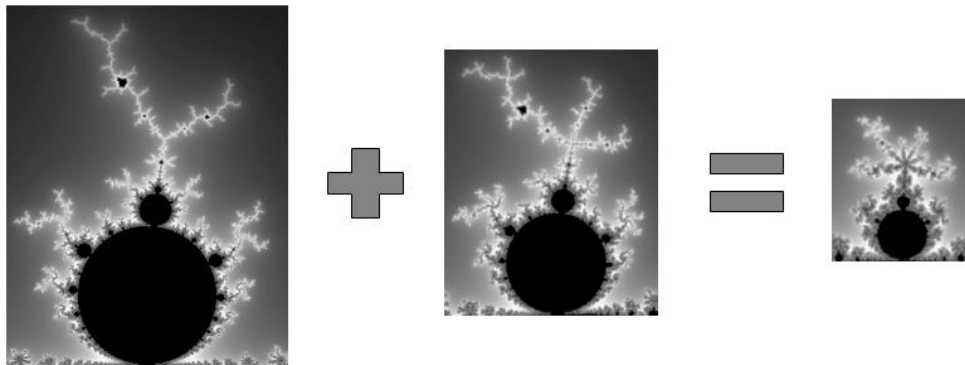


Figura 3. $\frac{1+1}{3+4} = \frac{2}{7}$

²⁸ Recordemos que esta suma es una generalización de la que se conoce como **suma de Farey**.

Los bulbos correspondientes a los sumandos dan lugar a otro bulbo que se encuentra entre ellos dentro de la estructura del fractal y lo podemos ver en la figura 4.



Figura 4. Suma de $\frac{1}{3} \oplus \frac{1}{4} = \frac{2}{7}$

De lo anterior proponemos la existencia de una relación intrínseca entre los bulbos y los círculos de Ford, esto es, que para cada fracción irreducible a/b existe un bulbo con b antenas y a/b revoluciones para cada iteración, y además existe el círculo de Ford asociado a a/b (Figura 5).



Figura 5. Ejemplo del vínculo con la fracción $\frac{2}{7}$

Ahora que ya planteamos una relación entre bulbos y círculos, trataremos de extraer conjuntos de bulbos que cumplen con las propiedades de una sucesión de Farey, en lo que corresponde a la composición de sus antenas. De los ejemplos anteriores vemos que a partir de dos bulbos encontramos un tercero, pero éste no necesariamente corresponde a la sucesión donde se encuentran los dos primeros, es decir, de la suma del último ejemplo teníamos que $1/3$ y $1/4$ corresponden a F_5 , pero el resultado de la suma ya no, ésta podría corresponder por lo menos a F_7 . Aquí lo que nos interesa es poder extraer conjuntos de bulbos que se relacionen directamente sólo con una sucesión de Farey, es decir, queremos tomar

un conjunto de bulbos en el que no le sobre ni le falte algo para que éste sea exactamente el F_i que queremos encontrar en las antenas de esos bulbos.

Para lo anterior proponemos usar el proceso de extracción de conjuntos de círculos de Ford a través de líneas paralelas a la base y esto nos proporcionará las fracciones necesarias para construir una sucesión de Farey, tal como se expuso en el capítulo 1.

Lo primero que haremos es proponer una relación directa entre el conjunto total de círculos y los bulbos, y para esto visualizaremos nuevamente la estructura general de los círculos de Ford en el intervalo $[0,1]$.

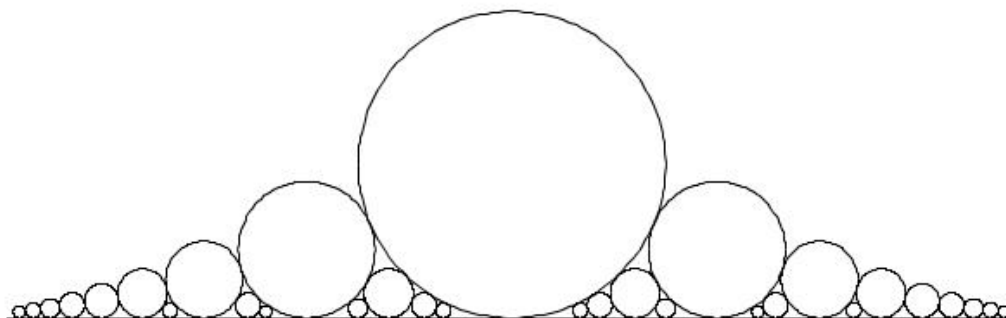


Figura 6. Círculos de Ford en $[0,1]$

Ahora transformamos la recta base en una cardioide uniendo los puntos 0 y 1, pero esta cardioide tendrá la característica de ser proporcional a $z = \frac{1}{2}e^{i\theta} \left(1 - \frac{1}{2}e^{i\theta}\right)$, $0 < \theta < 2\pi$. Se eligió esta cardioide porque es la que contiene puntos c que bajo la función $Q_c(z) = z^2 + c$, dan lugar a un conjunto de iteraciones $0, Q_c(0), Q_c(Q_c(0)), Q_c(Q_c(Q_c(0))), \dots$ que tiene la característica de estar acotado, y por lo que ya sabemos entonces los puntos c pertenecen al fractal de Mandelbrot, pero más que eso, estos puntos prácticamente viven en la frontera del cuerpo principal de él. En las cardioides de la figura 7 se puede ver la transformación del conjunto de Ford y por otro lado algunos puntos c en la misma cardioide y que pertenecen al fractal.²⁹

²⁹ Ajustar la base del conjunto de círculos con esta cardioide nos permitirá obtener una mejor comparación entre los bulbos y los círculos.

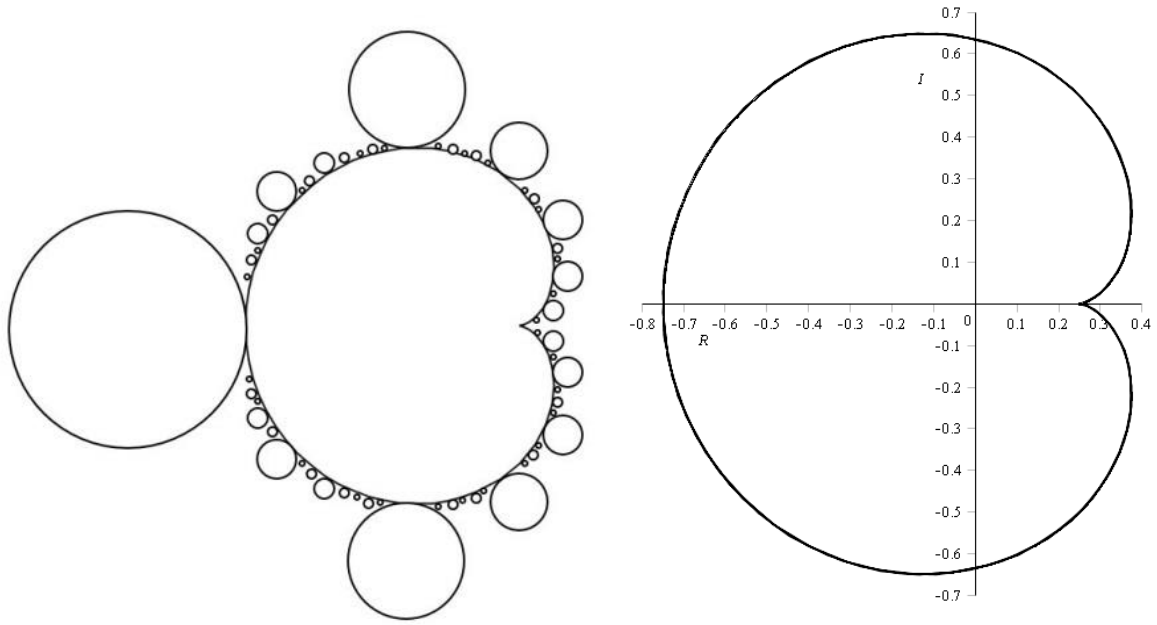


Figura 7. *Círculos de Ford en la cardioide y Cardioide de referencia*

En la figura anterior se puede apreciar que la cardioide no está cubierta de círculos en su totalidad porque en ésta se representa un caso particular de un conjunto de círculos de Ford, pero sabemos que el conjunto es infinito y por lo tanto el contorno de la cardioide puede estar rodeado de tantos círculos como racionales hay.

Observe que el conjunto de Mandelbrot que se muestra en la siguiente imagen, tiene similitudes visuales con la transformación de los círculos, pero más allá de eso, los bulbos y los círculos comparten propiedades como la posición y la fracción intrínseca que les corresponde.

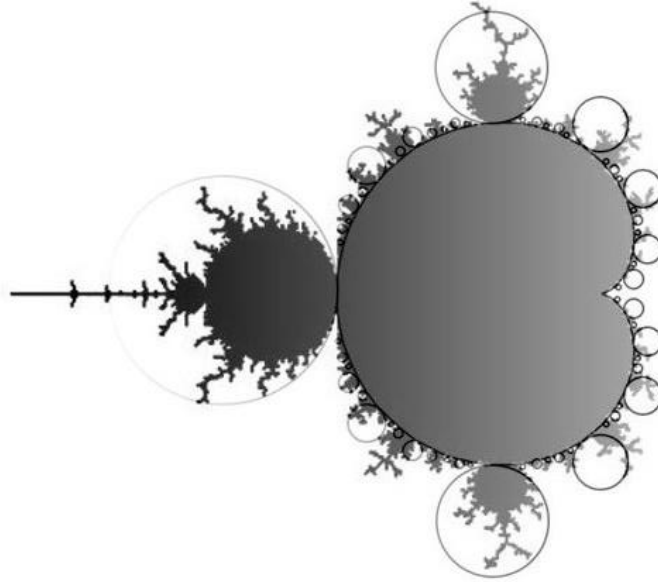


Figura 8. *Círculos y Bulbos*

Para que esta idea quede más clara, retomaremos las fracciones de F_5 y las relacionaremos con los círculos de Ford pero ahora vistos en el contorno de la cardioide construida con la base. Para que el patrón de los círculos coincida con el de los bulbos, reflejaremos la cardioide verticalmente (Figura 9).

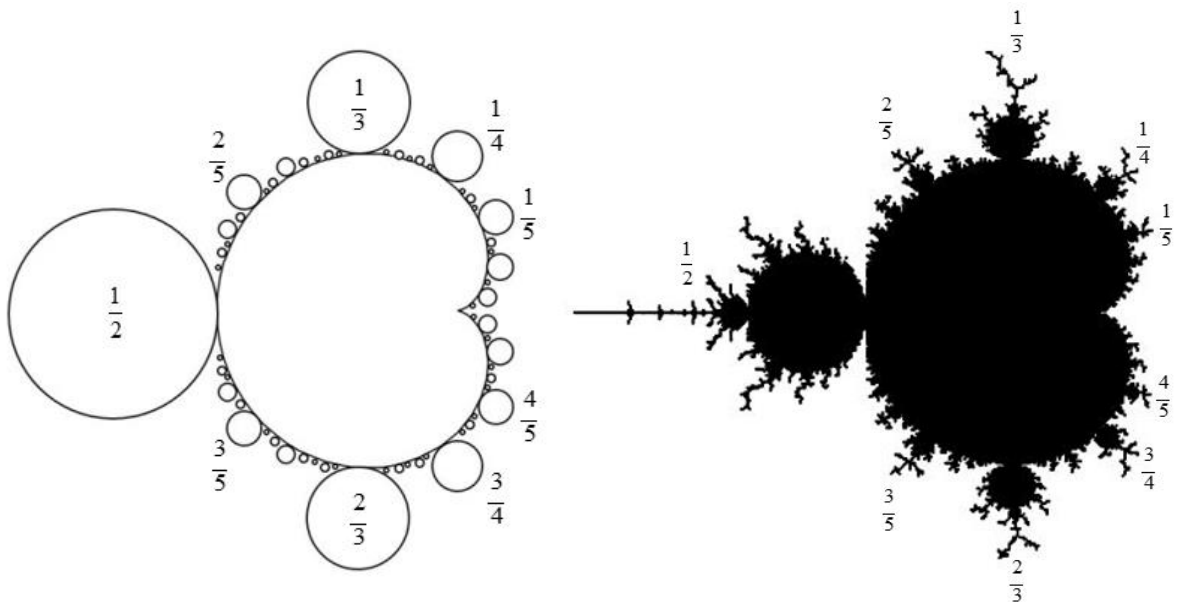


Figura 9. *Fracciones de F_5 en los círculos y en los bulbos*

Es interesante notar que las posiciones de los círculos (bajo una simetría) y el orden de los bulbos tienen similitudes que nos dan lugar a la reflexión.

A partir de esto ya podemos dar paso a construir nuestra propuesta de extraer conjuntos de círculos que se relacionen con los bulbos y sucesiones de Farey, pero estos conjuntos ya se extraerán directamente con la cardinalidad exacta que le corresponde a una sucesión de Farey, por lo tanto a los bulbos correspondientes –como se dijo antes- ya no les faltará ni les sobrarán elementos.

Cardioides paralelas

Ya sabemos que las sucesiones de Farey se pueden obtener a partir de la intersección de una recta horizontal con el conjunto de círculos de Ford. Retomando la idea anterior de la cardioide hecha con la base, ahora proponemos que si en la misma configuración de círculos dejamos una recta paralela de las antes mencionadas (Figura 10), entonces cuando se transforma la base en una cardioide, la nueva configuración contendrá un tipo de cardioide ‘paralela’ como se muestra en la figura 11.³⁰

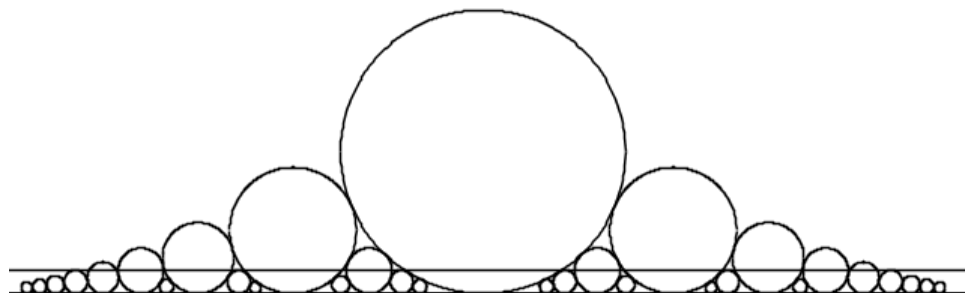


Figura 10. Rectas paralelas

³⁰ Se supone que la recta paralela también tiene longitud uno y por tanto no podría dar lugar a construir la cardioide ‘paralela’, pero como nuestro fin es exhibir los círculos que tocará esa recta entonces consideraremos que la recta puede extender su longitud.

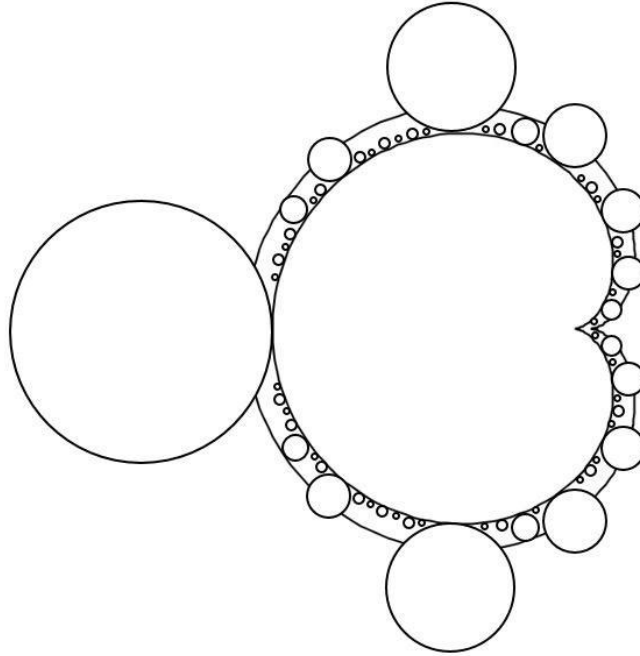


Figura 11. Cardioides “paralelas”

Nuestra propuesta es que los círculos que toca esa cardioide ‘paralela’ y que a su vez nos proporcionaran una sucesión de Farey también nos indicaran los bulbos a los que debemos mirar para saber que son los que cumplen con las mismas fracciones en la estructura de sus antenas.

Lo que sigue es un ejemplo de cómo extraer un conjunto de círculos para F_7 y su relación directa con el conjunto de bulbos. El conjunto de círculos en F_7 se ilustra en la figura siguiente.



Figura 12. Extracción de F_7 con recta paralela

Después transformamos la base en la cardioide (Figura 13).

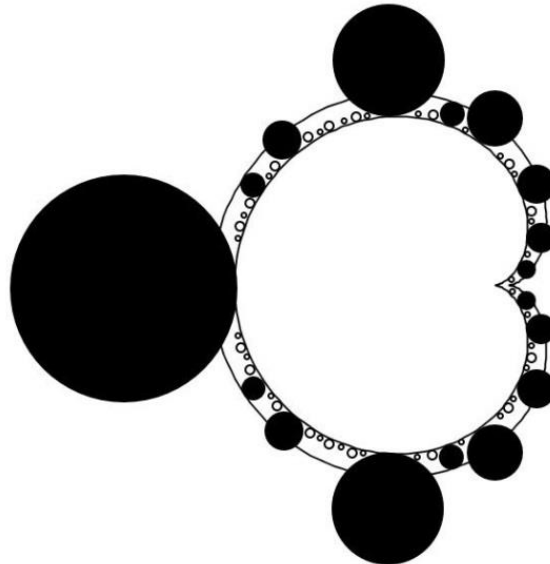


Figura 13. Extracción de F_7 con cardioide "paralela"

De lo anterior se toman los círculos correspondientes a F_7 para comparar con los bulbos en el fractal y se tiene la figura siguiente (Figura 14).

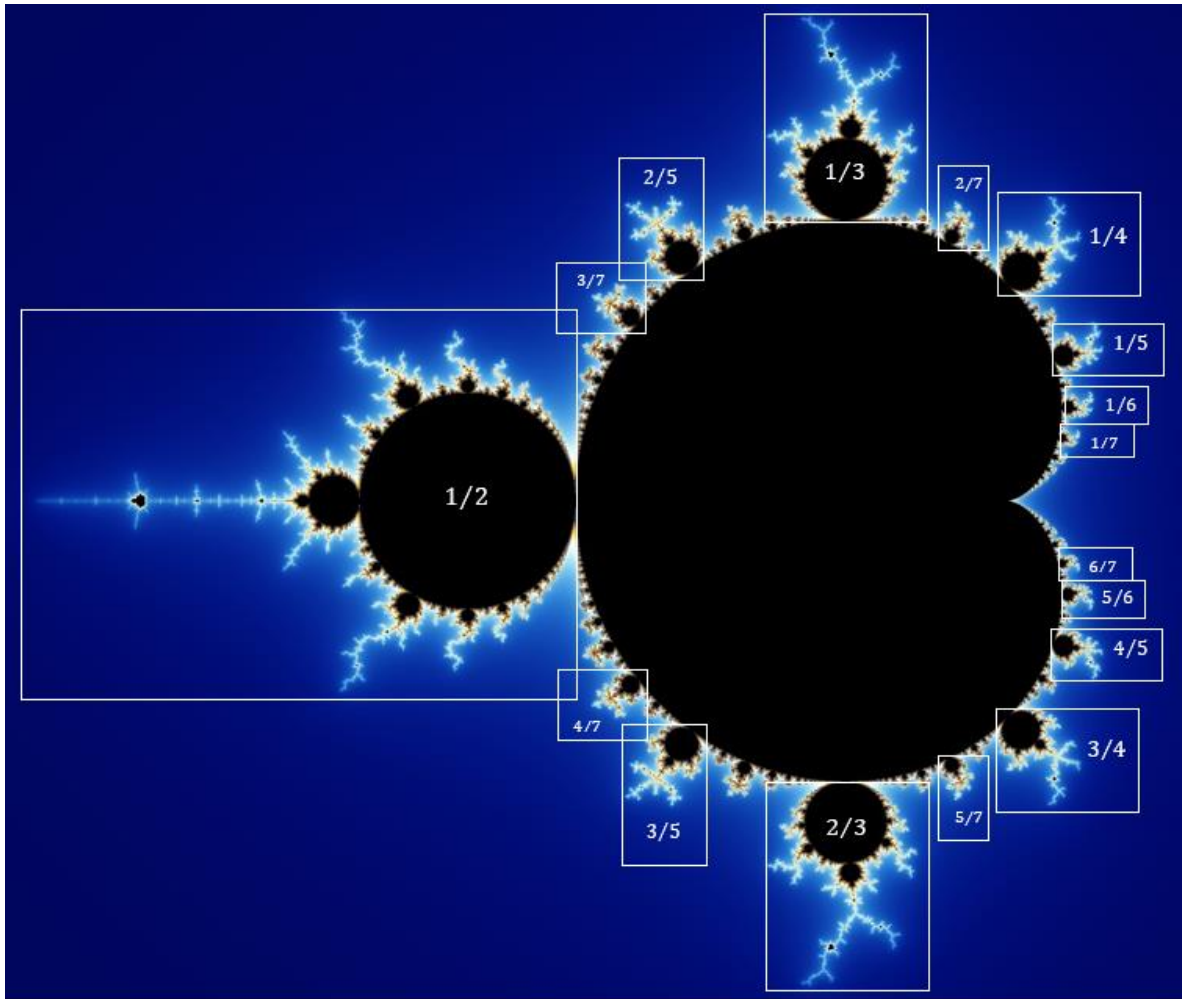


Figura 14. Bulbos cuyas antenas corresponden a F_7

Recordemos que al inicio de este capítulo mencionamos que daríamos un paseo a través del conjunto de Mandelbrot y llevaríamos en la maleta como guía de viajero al conjunto de los círculos de Ford.

Después de estudiar las características de los círculos y de adentrarnos un poco en los bulbos del fractal de Mandelbrot hemos concluido que la relación entre ambos conjuntos es más cercana de lo que podríamos pensar. Por un lado notamos que al poder asociar una fracción a las antenas de los bulbos, también era posible crear un vínculo con un círculo de Ford, pero más que eso, llegamos a que parece que es posible extraer conjuntos de bulbos que tienen exactamente la misma cardinalidad que la de una sucesión de Farey, es decir,

dicha sucesión se encuentra en las antenas del conjunto de bulbos y hasta en el mismo orden.

Esta es una pequeña muestra de la riqueza matemática que puede existir entre estos dos objetos matemáticos, pero esto se podrá estudiar posteriormente.

Apéndices

Apéndice A: Teoremas de apoyo

En este apéndice se demostrarán dos teoremas que se utilizaron en el presente escrito.

Antes de demostrarlos observemos las siguientes propiedades:

1. $H_n^{(k)} = \zeta(k) - \frac{1}{(k-1)n^{k-1}} + O\left(\frac{1}{n^k}\right)$,³¹
2. $\sum_{d \leq x} \frac{\mu(n)}{d^\alpha} = \frac{1}{\zeta(\alpha)} + O\left(\frac{1}{x^{\alpha-1}}\right)$. Aquí utilizamos el hecho de que la serie $\sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{d^\alpha}$ se puede ver como el producto de Euler $\prod_{p \in \mathbb{P}} (1 - p^{-\alpha})$ y en consecuencia es igual a $\frac{1}{\zeta(\alpha)}$. Entonces $\sum_{d \leq x} \frac{\mu(n)}{d^\alpha} = \sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{d^\alpha} - \sum_{d=x+1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{d^\alpha} = \frac{1}{\zeta(\alpha)} + O\left(\sum_{d=x+1}^{\infty} \frac{1}{d^\alpha}\right) = \frac{1}{\zeta(\alpha)} + O\left(x \frac{1}{x^\alpha}\right) = \frac{1}{\zeta(\alpha)} + O\left(\frac{1}{x^{\alpha-1}}\right)$.
3. $\sum_{k \leq x} k = \frac{1}{2}n^2 + O(n)$. Esto se debe a que $\sum_{k \leq x} k = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} = \frac{n^2}{2} + O(n)$

³¹ Para una prueba de esta igualdad, consultar Stopple [2003, pp. 77].

H_n se define como $\sum_{j=1}^n \frac{1}{j}$ y se le conoce como el n -ésimo número armónico. Asimismo $H_n^{(k)}$ se define como $\sum_{j=1}^n \frac{1}{j^k}$ y se le conoce como el n -ésimo número armónico de orden k .

Teorema A.1. $\sum_{n \leq x} \frac{\varphi(n)}{n^\alpha} = \frac{\zeta(\alpha-1)}{\zeta(\alpha)} + \frac{x^{2-\alpha}}{2-\alpha} \frac{1}{\zeta(2)} + O\left(\frac{\ln x}{x^{\alpha-1}}\right)$, $x \geq 2$, $1 < \alpha \neq 2$.

Demostración. Partiendo de que $\varphi(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \frac{n}{d}$, se tiene que

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} \frac{\varphi(n)}{n^\alpha} &= \sum_{n \leq x} \left(\sum_{d|n} \mu(d) \frac{n}{d} \frac{1}{n^\alpha} \right) = \sum_{\substack{q,d \\ qd \leq x}} \mu(d) q \frac{1}{q^\alpha d^\alpha} = \sum_{d \leq x} \left(\mu(d) \sum_{q \leq x/d} q \frac{1}{q^\alpha d^\alpha} \right) \\ &= \sum_{d \leq x} \left(\frac{\mu(d)}{d^\alpha} \sum_{q \leq x/d} \frac{1}{q^{\alpha-1}} \right) = \sum_{d \leq x} \left(\frac{\mu(d)}{d^\alpha} H_{x/d}^{(\alpha-1)} \right) \\ &= \sum_{d \leq x} \frac{\mu(d)}{d^\alpha} \left(\zeta(\alpha-1) - \frac{1}{(\alpha-2)(x/d)^{\alpha-2}} + O\left(\frac{d^{\alpha-1}}{x^{\alpha-1}}\right) \right) \end{aligned}$$

(aplicando la propiedad 1 con $k = \alpha - 1$ y $n = x/d$)

$$\begin{aligned} &= \zeta(\alpha-1) \sum_{d \leq x} \frac{\mu(d)}{d^\alpha} - \frac{1}{(\alpha-2)} \sum_{d \leq x} \frac{\mu(d)}{d^\alpha} \frac{d^{\alpha-2}}{x^{\alpha-2}} + O\left(\sum_{d \leq x} \frac{\mu(d)}{d^\alpha} \frac{d^{\alpha-1}}{x^{\alpha-1}}\right) \\ &= \zeta(\alpha-1) \left[\frac{1}{\zeta(\alpha)} + O\left(\frac{1}{x^{\alpha-1}}\right) \right] - \frac{1}{(\alpha-2)x^{\alpha-2}} \sum_{d \leq x} \frac{\mu(d)}{d^2} + O\left(\frac{1}{x^{\alpha-1}} \sum_{d \leq x} \frac{\mu(d)}{d}\right) \end{aligned}$$

(aplicando la propiedad 2)

$$\begin{aligned} &= \frac{\zeta(\alpha-1)}{\zeta(\alpha)} + O\left(\frac{1}{x^{\alpha-1}}\right) + \frac{x^{2-\alpha}}{2-\alpha} \left[\frac{1}{\zeta(2)} + O\left(\frac{1}{x}\right) \right] + O\left(\frac{1}{x^{\alpha-1}} \sum_{d \leq x} \frac{1}{d}\right) \\ &= \frac{\zeta(\alpha-1)}{\zeta(\alpha)} + O\left(\frac{1}{x^{\alpha-1}}\right) + \frac{x^{2-\alpha}}{2-\alpha} \frac{1}{\zeta(2)} + O\left(\frac{1}{x^{\alpha-2}x}\right) + O\left(\frac{1}{x^{\alpha-1}} H_x\right) \\ &= \frac{\zeta(\alpha-1)}{\zeta(\alpha)} + \frac{x^{2-\alpha}}{2-\alpha} \frac{1}{\zeta(2)} + O\left(\frac{1}{x^{\alpha-1}}\right) + O\left(\frac{1}{x^{\alpha-1}}\right) + O\left(\frac{1}{x^{\alpha-1}} \ln x\right) \end{aligned}$$

$$= \frac{x^{2-\alpha}}{2-\alpha} \frac{1}{\zeta(2)} + \frac{\zeta(\alpha-1)}{\zeta(\alpha)} + O\left(\frac{\ln x}{x^{\alpha-1}}\right).$$

Finalmente llegamos a $\sum_{n \leq x} \frac{\varphi(n)}{n^\alpha} = \frac{x^{2-\alpha}}{2-\alpha} \frac{1}{\zeta(2)} + \frac{\zeta(\alpha-1)}{\zeta(\alpha)} + O\left(\frac{\ln x}{x^{\alpha-1}}\right)$, $x \geq 2$, $1 < \alpha \neq 2$ \square

Teorema A.2. $\sum_{n \leq x} \varphi(n) = \frac{x^2}{2\zeta(2)} + O(x \ln x)$, $x > 1$.

Demostración. Partiendo de que $\varphi(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \frac{n}{d}$, se tiene que

$$\sum_{n \leq x} \varphi(n) = \sum_{n \leq x} \left(\sum_{d|n} \mu(d) \frac{n}{d} \right) = \sum_{\substack{q, d \\ qd \leq x}} \mu(d) q = \sum_{d \leq x} \left(\mu(d) \sum_{q \leq x/d} q \right)$$

$$= \sum_{d \leq x} \left[\mu(d) \left(\frac{1}{2} \left(\frac{x}{d} \right)^2 + O\left(\frac{x}{d} \right) \right) \right] \text{ (aplicando la propiedad 3)}$$

$$= \sum_{d \leq x} \mu(d) \frac{1}{2} \frac{x^2}{d^2} + O\left(\sum_{d \leq x} \mu(d) \frac{x}{d} \right) = \frac{1}{2} x^2 \sum_{d \leq x} \frac{\mu(d)}{d^2} + O\left(\sum_{d \leq x} \frac{x}{d} \right)$$

$$= \frac{1}{2} x^2 \left[\frac{1}{\zeta(2)} + O\left(\frac{1}{x} \right) \right] + O(x H_x) \text{ (aplicando la propiedad 2)}$$

$$= \frac{1}{2\zeta(2)} x^2 + O\left(\frac{x^2}{x} + x \ln x \right) = \frac{x^2}{2\zeta(2)} + O(x \ln x)$$

Por lo tanto, $\sum_{n \leq x} \varphi(n) = \frac{x^2}{2\zeta(2)} + O(x \ln x)$, $x > 1$ \square

Apéndice B: Radios de los círculos

Al plantear la construcción de los círculos de Ford podría parecer que la elección de los radios de los círculos es arbitraria, pero resulta que sólo existe una familia de radios con la que se puede lograr la tangencia que hemos señalado. Para probarlo veamos lo siguiente.

Tracemos dos círculos del mismo radio y una tangente que toque a ambos. Ahora trazaremos un círculo tangente a los dos anteriores y a la recta. Lo haremos así sucesivamente. ¿Cómo son los radios de los círculos que se van generando? Veamos esto manera más general.

Teorema 1.6. Sean C_1 y C_2 dos círculos de radio r_1 y r_2 respectivamente, tangentes entre sí y a una recta horizontal. Si se traza un círculo C tangente a C_1 y C_2 y también a la recta, entonces su radio R cumple con

$$R = \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}}\right)^2}.$$

Demostración. Supongamos que $r_2 \geq r_1$.

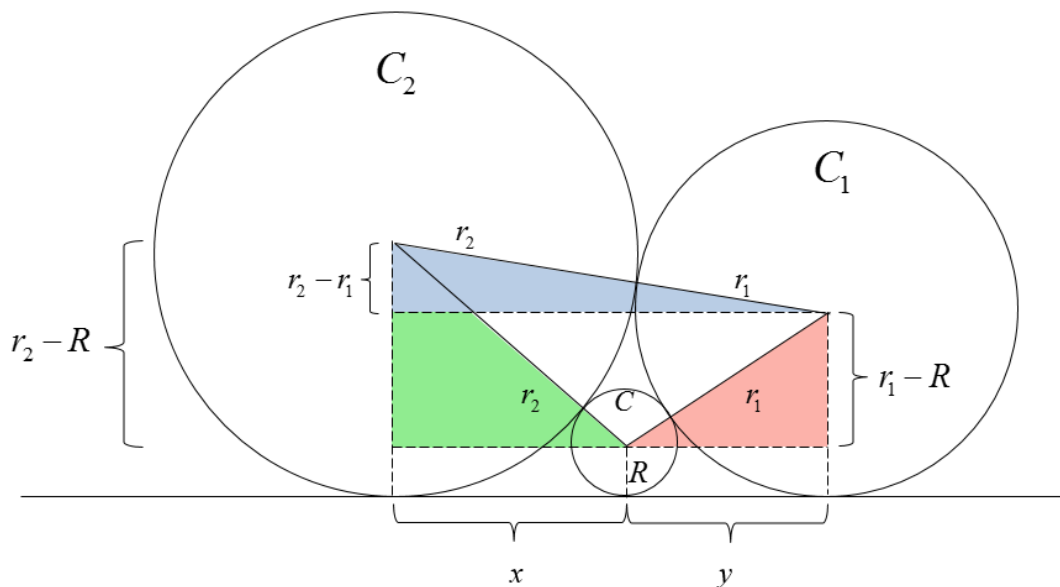


Figura 1. Círculos tangentes entre sí y a una recta

Sea x la distancia entre el punto de tangencia de C con la recta y el punto de tangencia de C_2 con la recta; sea y la distancia entre el punto de tangencia de C con la recta y el punto de tangencia de C_1 con la recta

Aplicando el teorema de Pitágoras sobre el triángulo azul (Figura 1):

$$(r_1 + r_2)^2 = (x + y)^2 + (r_2 - r_1)^2 \Rightarrow (x + y)^2 = (r_2 - r_1)^2 - (r_1 + r_2)^2$$

$$\Rightarrow (x + y)^2 = 2r_1r_2 - (-2r_1r_2) \Rightarrow x + y = \sqrt{4r_1r_2} = 2\sqrt{r_1r_2}$$

Sobre el triángulo rojo:

$$(R + r_1)^2 = (r_1 - R)^2 + y^2 \Rightarrow y^2 = (r_1 - R)^2 - (R + r_1)^2 \Rightarrow y = \sqrt{4Rr_1} = 2\sqrt{Rr_1}$$

Sobre el triángulo verde:

$$(R + r_2)^2 = x^2 + (r_2 - R)^2 \Rightarrow x^2 = (r_2 - R)^2 - (R + r_2)^2 \Rightarrow x = \sqrt{4Rr_2} = 2\sqrt{Rr_2}$$

Sustituyendo los valores:

$$2\sqrt{r_1r_2} = x + y = 2\sqrt{Rr_2} + 2\sqrt{Rr_1} \Rightarrow \sqrt{r_1}\sqrt{r_2} = \sqrt{R}\sqrt{r_2} + \sqrt{R}\sqrt{r_1} = \sqrt{R}(\sqrt{r_2} + \sqrt{r_1})$$

Por lo tanto,
$$\sqrt{R} = \frac{\sqrt{r_1}\sqrt{r_2}}{(\sqrt{r_2} + \sqrt{r_1})} = \frac{1}{\sqrt{r_1}\sqrt{r_2}/(\sqrt{r_2} + \sqrt{r_1})} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{r_2}} + \frac{1}{\sqrt{r_1}}}}$$

Finalmente,
$$R = \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{r_2}} + \frac{1}{\sqrt{r_1}}\right)^2} \quad \square$$

Ahora podemos responder la pregunta. El radio R del círculo trazado entre los dos del mismo tamaño (de radio r) es
$$R = \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{r}} + \frac{1}{\sqrt{r}}\right)^2} = \frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{r}}\right)^2} = \frac{1}{\left(\frac{2^2}{r}\right)} = \frac{r}{2^2}.$$

Ahora, si se quiere trazar otro círculo que sea tangente al de radio $R = \frac{r}{2^2}$ y a uno de los de radio r , éste tendrá un radio igual a

$$\frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{r}} + \frac{1}{\sqrt{r/2^2}}\right)^2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{r}} + \frac{2}{\sqrt{r}}\right)^2} = \frac{1}{\left(\frac{3}{\sqrt{r}}\right)^2} = \frac{r}{3^2}.$$

Bajo este razonamiento, si se desea trazar un círculo tangente a otros dos de radios $\frac{r}{n^2}$ y $\frac{r}{m^2}$ respectivamente, éste tendrá un radio

$$\frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{r/n^2}} + \frac{1}{\sqrt{r/m^2}}\right)^2} = \frac{1}{\left(\frac{n}{\sqrt{r}} + \frac{m}{\sqrt{r}}\right)^2} = \frac{1}{\left(\frac{n+m}{\sqrt{r}}\right)^2} = \frac{r}{(n+m)^2}.$$

Así, bajo esta construcción, todos los círculos tienen radios de la forma $\frac{r}{n^2}$, $n \in \mathbb{N}$.

Ya vimos que la familia de radios de la forma $\frac{r}{n^2}$, $n \in \mathbb{N}$ es la que guarda la tangencia deseada, ahora llevemos este resultado a los círculos de Ford. Para ello tenemos que la recta a la cual los círculos son tangentes, es el eje X , y que los círculos iniciales están separados por una unidad. De esta manera, si posicionamos el círculo inicial izquierdo sobre el origen, el derecho descansa sobre $x=1$, y en consecuencia $r=1/2$, entonces los radios de los círculos que se generan son de la forma $\frac{1}{2n^2}$, $n \in \mathbb{N}$.

Ahora es turno de pasar a lo visual. Observemos que con otro tipo de radios no se guarda la tangencia.

Con radios más pequeños

Si el radio fuera más pequeño, todos los círculos estarían separados entre sí, por ejemplo:

$$\text{Radio} = 1/(3q^2)$$

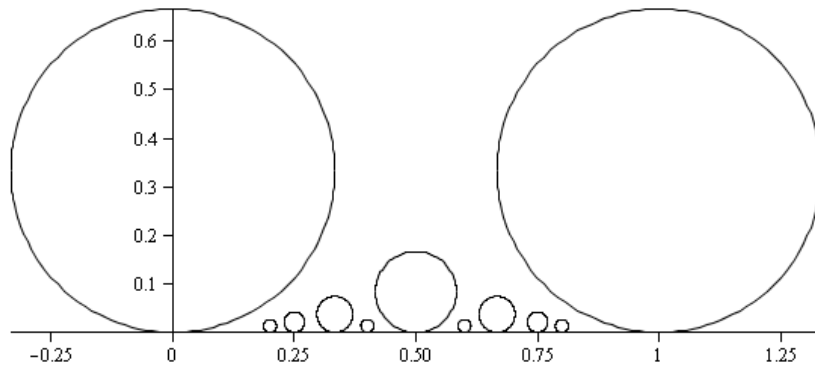


Figura 2. Radios más pequeños

Radios más grandes

Si el radio fuera más grande, los círculos se traslaparían y no es lo que estamos buscando, aunque no por eso dejan de tener efectos artísticos.

$$\text{Radio} = 1/(q^2)$$

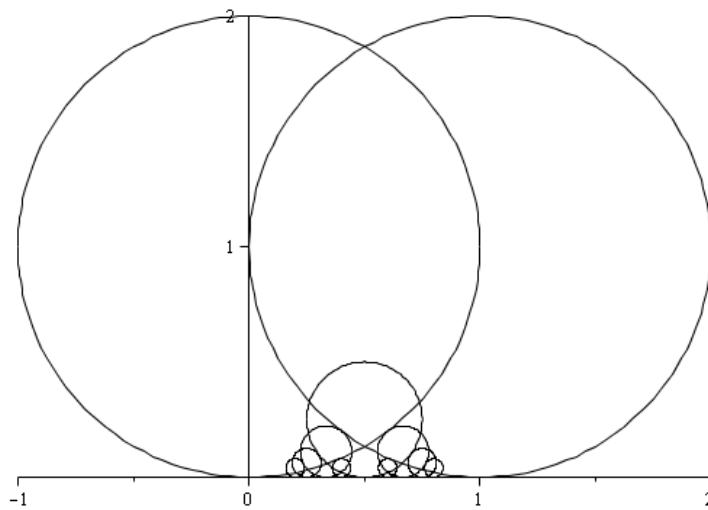


Figura 3. Radios más grandes

Veamos un acercamiento de la Figura 3.

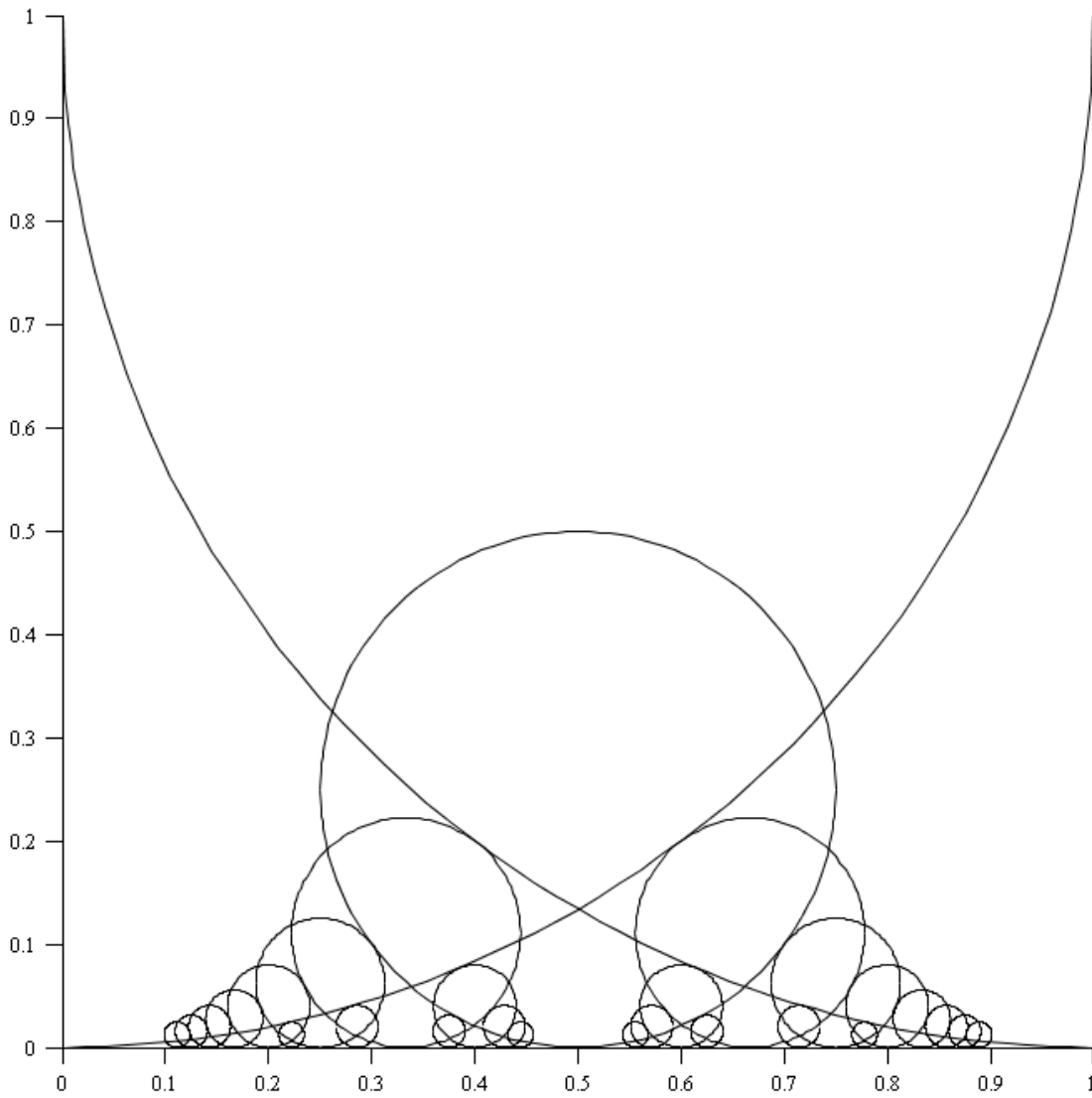


Figura 4. Radios más grandes

Apéndice C: Aproximación de la cantidad de primos relativos

En este apéndice se demostrará que hay aproximadamente $x \frac{\varphi(n)}{n}$ primos relativos con n en el rango $\{1, \dots, x\}$.

Primero introduciremos una nueva notación. Dado $n \in \mathbb{Z}$, la cantidad de primos relativos con n en el rango $\{1, \dots, x\}$ será denotada como φ_x , así el enunciado se traduce en: $\varphi_x \simeq x \frac{\varphi(n)}{n}$.

Para justificar que hay aproximadamente $x \frac{\varphi(n)}{n}$ primos relativos con n en el rango $\{1, \dots, x\}$, partiremos del caso en el que n divide a x .

Supongamos que x es igual a kn , por lo que en el rango $\{1, \dots, x\}$ hay k sistemas completos de residuos³² módulo n consecutivos, es decir, $\{1, 2, \dots, n\}$ es el primer sistema, $\{n+1, n+2, \dots, 2n\}$ es el segundo y así hasta $\{(k-1)n+1, (k-1)n+2, \dots, kn\}$, siendo éste el último sistema (Figura 5). En cada uno de los k sistemas, hay $\varphi(n)$ primos relativos con n , dando un total de $k\varphi(n)$ primos relativos, y como $x=kn$ entonces $k=x/n$, y la cantidad de primos relativos con n es exactamente $\frac{x}{n}\varphi(n)$.

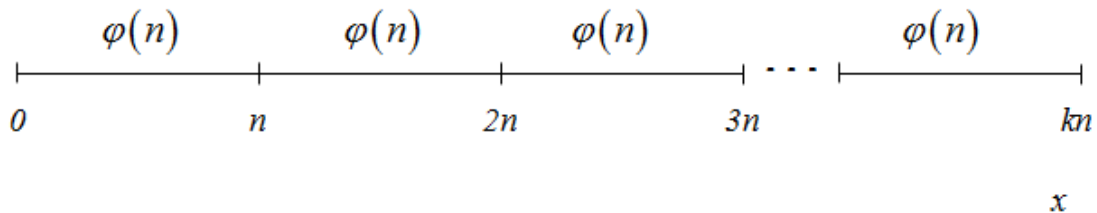


Figura 5. Esquema de los intervalos de los sistemas de residuos

Para el caso en que n no divide a x , la expresión no será exacta pero sí muy aproximada.

³² Para la definición de sistema completo de residuos, consultar Koshy [2007, pp. 217]

Sea $r \in \mathbb{Z}$ tal que $(r-1)n < x < rn$, entonces $(r-1)n \frac{\varphi(n)}{n} < x \frac{\varphi(n)}{n} < rn \frac{\varphi(n)}{n}$. Note que $(r-1)n \frac{\varphi(n)}{n}$ y $rn \frac{\varphi(n)}{n}$ es la cantidad de primos relativos con n en el rango $\{1, \dots, (r-1)n\}$ y $\{1, \dots, rn\}$ respectivamente. Así, φ_x es un número entre $(r-1)n \frac{\varphi(n)}{n}$ y $rn \frac{\varphi(n)}{n}$.

Por lo tanto $|\varphi_x - x \frac{\varphi(n)}{n}| < |(r-1)n \frac{\varphi(n)}{n} - rn \frac{\varphi(n)}{n}| = n \frac{\varphi(n)}{n} (r-r+1) = \varphi(n)$. Así, el error máximo que se puede cometer al usar la aproximación es $\varphi(n)$.

El término $\varphi(n)$ no depende de x . Esto representa una gran ventaja, porque no importa qué tanto crezca x , el error máximo se mantiene constante, por lo que podemos afirmar que

$$\varphi_x = x \frac{\varphi(n)}{n} + O(1)$$

Esto lo obtenemos a partir de $|\varphi_x - x \frac{\varphi(n)}{n}| \leq \varphi(n)$, de aquí se sigue que $\varphi_x = x \frac{\varphi(n)}{n} + O(\varphi(n))$, y como $\varphi(n) \ll 1$ se concluye que $\varphi_x = x \frac{\varphi(n)}{n} + O(1)$.

En la figura 6 se ejemplifica lo anterior con $n=18$. La recta azul representa la fórmula de la aproximación y la roja une los puntos que representan las cantidades exactas de primos relativos acumulados.

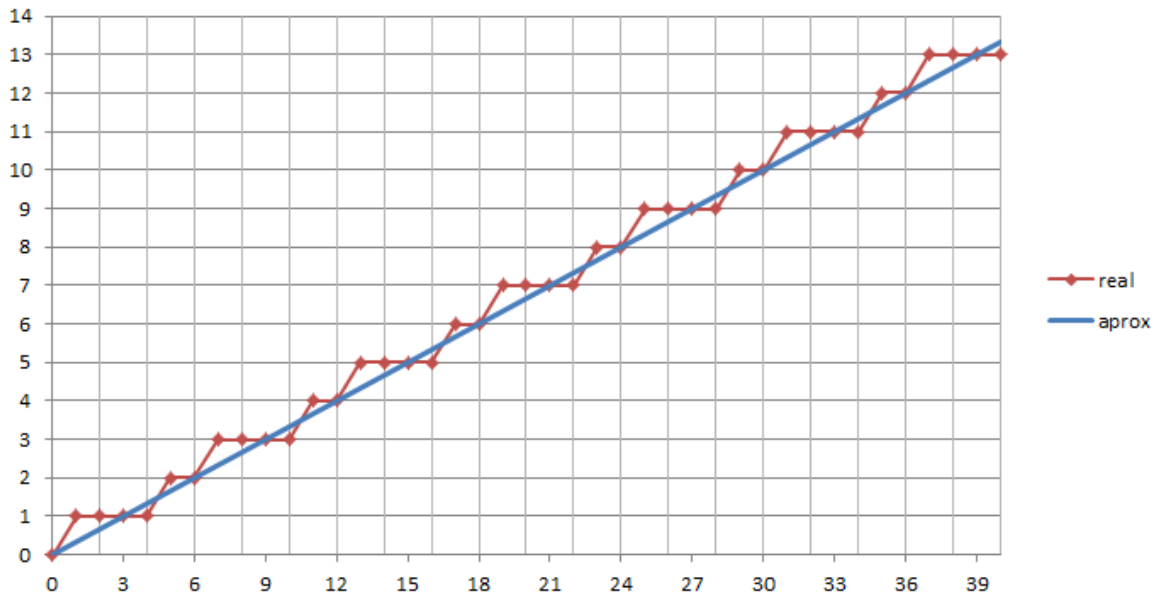


Figura 6. Ejemplo con $n=18$

Este resultado también lo podemos expresar en términos probabilísticos de la siguiente manera: la probabilidad de que un número x sea primo relativo a n es $\frac{\varphi(n)}{n}$, y la cantidad de primos relativos con n que se acumulan de 1 hasta un número x es $x \frac{\varphi(n)}{n}$.

Dejaremos al lector una conjetura que afina el grado de error que se comete al utilizar la aproximación:

$$\text{El error de la aproximación es menor que uno, i.e., } \left| \varphi_x - x \frac{\varphi(n)}{n} \right| < 1.$$

Con esta conjetura, estamos hablando de que el error no sólo queda acotado por una constante, sino que es estrictamente menor a la unidad, sin importar qué tan grande sea x .

Observaciones acerca de φ_x

Recordemos que dado n , se define φ_x , pero si deseamos trabajar con diferentes valores de n será necesario definir la cantidad de primos relativos con n menores o iguales a x como $\varphi_x(n)$.

Con esta notación extendida podemos enunciar las siguientes propiedades fácilmente:

$$\varphi_n(n) = \varphi(n)$$

$$\varphi_x(n) = x \frac{\varphi(n)}{n} + O(1)$$

$$\varphi_x(n) = x \frac{\varphi(n)}{n} \text{ si } x \in \mathbb{Z}$$

$$\varphi_x(nm) = x \frac{\varphi(n)\varphi(m)}{nm}, x \in \mathbb{Z} \text{ y } (n, m) = 1$$

$$\varphi_x(nm) = \varphi_x(n) \frac{\varphi(m)}{m}, x \in \mathbb{Z} \text{ y } (n, m) = 1$$

Apéndice D: Programas desarrollados

Para este trabajo se construyó una serie de programas compilados en C++, que ayudaron a visualizar algunas propiedades de las fracciones

$$F_{1/m} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}^+, (p, q) = 1, q \geq p, pq \leq m \right\}.$$

A continuación, presentamos tres programas que fueron de apoyo para el estudio de la cardinalidad, saltos y potencias de dos.

Programa: Cardinalidad

El siguiente código corresponde al primer programa construido, en el cual se pide el valor de m , y el programa muestra las fracciones de $F_{1/m}$ y calcula su cardinalidad. El procedimiento consiste en calcular el máximo común divisor (mcd) de p y q en el rango con el algoritmo de Euclides, si el mcd es 1, significa que son primos relativos y se da la instrucción de imprimir la fracción de la forma p/q así como de aumentar el contador en una unidad.

```
#include <conio.h>
#include <stdlib.h>
#include <stdio.h>
#include <math.h>

main()
{
    long int a,b,n,t,p,q,r,i,k,m;

    do
    {
        printf("\nEste programa muestra las fracciones de");
        printf("\nF 1/m y calcula su cardinalidad \n");
        printf("\nIntroduce m: ");
        scanf("%d",&m);

        printf("\n\n0/1\t1/1");
        k=2;

        for(q=2;q<=m;q=q+1)
        {
            for(p=1;p<q;p=p+1)
            {

                if(p>m/q)
```

```

    {
    }
else
{
    //Algoritmo de Euclides
    a=p;
    b=q;
    t=b-a;
    i=1;
    while(t>=0)
    {
        t=b-i*a;
        i=i+1;
    }
    t=i-2;
    r=b-a*t;

    while(r>0)
    {
        b=a;
        a=r;
        t=b-a;
        i=1;
        while(t>=0)
        {
            t=b-i*a;
            i=i+1;
        }
        t=i-2;
        r=b-a*t;
    }
    r=a;
    //termina algoritmo de Euclides

    if(r==1)
    {
        printf("\t\t%d/%d",p,q);
        k=k+1;
    }
}
}

printf("\n\nLa cardinalidad es %d",k);
printf("\n\nDeseas crear otra lista?");
printf("\nSi (Presiona 1)\nNo (Presiona otro numero)\n");
scanf("%d",&n);
system("cls");

}while(n==1);
}

```

Programa: Saltos

Este código corresponde a un programa que calcula varias cardinalidades $|F_{1/m}|$ para valores de m consecutivos y los saltos correspondientes. El usuario da el rango de los valores de m y el programa calcula las cardinalidades $|F_{1/m}|$ y los saltos $|F_{1/m}| - |F_{1/m-1}|$. El procedimiento consiste en calcular cardinalidades como en el programa anterior pero ahora para varios valores de m , y éstas se van imprimiendo junto con los saltos conforme se calculan las diferencias entre las cardinalidades.

Nota: Para el primer valor de m , el salto que se registrará es $F_{1/m}$, pues no hay un valor anterior para restar.

```
#include <conio.h>
#include <stdlib.h>
#include <stdio.h>
#include <math.h>

main()
{
    long int a,b,n,t,p,q,r,i,k,m,g,h,u,v;

    do
    {
        printf("\nEste programa calcula cardinalidades \n");
        printf("y los saltos entre las mismas\n");

        printf("\nDesde que numero? \t");
        scanf("%d",&g);
        printf("\nHasta que numero? \t ");
        scanf("%d",&h);

        printf("\n\n Las cardinalidades son:");
        u=0;

        for(m=g;m<=h;m=m+1)
        {
            k=2;

            for(q=2;q<=m;q=q+1)
            {
                for(p=1;p<q;p=p+1)
                {

                    if(p>(m/q))
```



```

    {
    }
else
{
    //Algoritmo Euclides
    a=p;
    b=q;
    t=b-a;
    i=1;
    while(t>=0)
    {
        t=b-i*a;
        i=i+1;
    }
    t=i-2;
    r=b-a*t;

    while(r>0)
    {
        b=a;
        a=r;
        t=b-a;
        i=1;
    while(t>=0)
    {
        t=b-i*a;
        i=i+1;
    }
    t=i-2;
    r=b-a*t;

    }
    r=a;
    //termina algoritmo de Euclides

    if(r==1)
    {
        k=k+1;
    }
}

}
}

// Salto
v=k-u;
printf("\n\n m=%d \tcard=%d \tsalto=%d",m,k,v);

u=k;

```

```

    }

    printf("\n\nDeseas crear otra lista?");
    printf("\nSi (Presiona 1)\nNo (Presiona otro numero)\n");
    scanf("%d",&n);
    system("cls");

}while(n==1);
}

```

Programa: Primer Potencia de 2

El código que se presenta a continuación corresponde a un programa construido para detectar el primer salto buscado en un rango, recordando que debe ser una potencia de dos. El usuario da el salto buscado s y el rango de los valores de m en el que se buscará dicho saltos. El programa devuelve el valor de m en el que encontró el salto deseado así como la cardinalidad de $F_{1/m}$, o en su defecto, un mensaje mencionando que no se encontraron saltos con la potencia de dos deseada. El procedimiento consiste en calcular los saltos como en el programa anterior y detener el programa en el momento en que se haya encontrado el salto s , es decir, cuando $|F_{1/m}| - |F_{1/m-1}| = s$. Si el programa no se detiene quiere decir que no se han encontrado saltos de magnitud s y se genera el mensaje correspondiente.

```

#include <conio.h>
#include <stdlib.h>
#include <stdio.h>
#include <math.h>

main()
{
long int a,b,n,t,p,q,r,i,k,m,g,h,u,v,w;

do
{
    printf("\nEste programa ubica el primer salto de\n");
    printf("la potencia dada en el rango deseado\n");
    printf("\nQue potencia de 2 deseas probar? \t");
    scanf("%d",&w);

    printf("\nDesde que numero? \t");
    scanf("%d",&g);
    printf("\nHasta que numero? \t ");
    scanf("%d",&h);

```

```

printf("\n\nCalculando... ");
u=0;

for(m=g;m<=h;m=m+1)
{
k=2;

    for(q=2;q<=m;q=q+1)
    {
    for(p=1;p<q;p=p+1)
    {

        if(p>(m/q))
            {

            }
        else
            {

                //Algoritmo Euclides
                a=p;
                b=q;
                t=b-a;
                i=1;
                while(t>=0)
                {
                    t=b-i*a;
                    i=i+1;
                }
                t=i-2;
                r=b-a*t;

                while(r>0)
                {
                    b=a;
                    a=r;
                    t=b-a;
                    i=1;
                while(t>=0)
                {
                    t=b-i*a;
                    i=i+1;
                }
                t=i-2;
                r=b-a*t;
            }
            r=a;
            //termina algoritmo de Euclides

            if(r==1)
            {
            k=k+1;

```

```

        }
    }

}

// Salto
v=k-u;
// printf("\n\n m=%d \tcard=%d \tsalto=%d",m,k,v);

if(v==w)
{
    printf("\n\nEl primer salto encontrado se da en:");
    printf("\n\n m=%d \tcard=%d \tsalto=%d",m,k,v);
    break;
}

u=k;
}

if(v!=w)
{
    printf("\n\n\nNo se encontraron saltos de %d ",w);
}

printf("\n\n\nDeseas ubicar mas saltos?");
printf("\nSi (Presiona 1)\nNo (Presiona otro numero)\n");
scanf("%d",&n);
system("cls");

}while(n==1);
}

```

Conclusiones

En este trabajo se logró extraer conjuntos de fracciones a través del uso de diferentes tipos de curvas y se descubrieron propiedades importantes y generales, a partir de las cuales, las sucesiones de Farey constituyen sólo un caso particular.

Desarrollamos varios métodos para estimar la cardinalidad de los conjuntos mencionados y nos valimos de herramientas de cómputo para calcular las mismas, así como para analizar los saltos que se generan de dos rectas de pendiente consecutiva entera en el denominador. Abordamos el análisis de su comportamiento –de los saltos- relacionándolos con los factores primos del denominador, donde el número primorial juega un papel interesante. Esto representa un aporte a la teoría analítica de los números, pues logramos relacionar un problema de factores primos con los círculos de Ford y con las rectas que pasan por el origen. Lo anterior da lugar a más preguntas que ayudan al desarrollo de la teoría analítica de los números, como por ejemplo ¿podemos encontrar intervalos tan grandes como queramos donde sólo exista el salto dos? ¿O lo mismo para cualquier otro tipo de salto?

Nos enfocamos a las fracciones que son extraídas con rectas inclinadas que pasan por el origen, las estudiamos en la retícula y exploramos más allá del intervalo $[0,1]$, donde descubrimos fracciones que guardan simetría respecto a las que se tenían. Con esto se abre la puerta a explorar más allá del primer cuadrante, donde surgirán fracciones con signo negativo y polígonos en forma de estrella que abarquen los cuatro cuadrantes.

Si reflexionamos sobre la relación entre el fractal de Mandelbrot y los círculos de Ford, lo que se desarrolló fue el comienzo de un camino con muchos senderos por recorrer y preguntas por responder. Por ejemplo el análisis del paralelismo de las cardioides y el estudio a fondo de los bulbos, donde, como sabemos, se repiten varios patrones del conjunto total de Mandelbrot, estos bulbos tienen más bulbos a su vez, que pueden estar asociados a círculos dispuestos sobre una línea base que ya no será una cardioide sino una circunferencia.

Bibliografía

- [1] Apostol, Tom M. 1976. *Introduction to Analytic Number Theory*. Springer-Verlag New York Inc.
- [2] _____ . *Modular Function and Dirichlet Series in Number Theory*. Springer-Verlag New York Inc.
- [3] Devaney, Robert L. 1999. “The Mandelbrot set, the Farey three, and Fibonacci sequence”. *The American Mathematical Monthly*. Vol. 106, No. 4, pp. 289-302.
- [4] Ford L. R. 1938. “Fractions”. *The American Mathematical Monthly*. Vol. 45, No. 9, pp. 586-601.
- [5] Jones, Gareth A. 1998. *Elementary Number Theory*. Springer Undergraduate Mathematics Series.
- [6] Koshy, Thomas. 2007. *Elementary Number Theory with Applications*. London: Academic Press.
- [7] Ramírez R., José Luis. 2010. “El Teorema de Pick y Redes de Puntos” Vol. 2010, No. 5, pp. 1-41. Publicació electrònica de divulgació del Departament de Matemàtiques de la Universitat Autònoma de Barcelona. www.mat.uab.cat/matmat
- [8] Stoppale, Jeffrey. 2003. *A Primer of Analytic Number Theory*. Cambridge University Press, New York.