



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS

Método generalizado de matriz de  
transferencia para óptica no lineal en  
multicapas dieléctricas

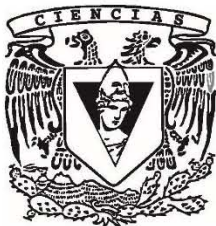
T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

F Í S I C O

P R E S E N T A:

ADRIÁN ALEJANDRO BARTOLO GONZÁLEZ



DIRECTOR DE TESIS:

DR. CHUMIN WANG CHEN

México, D. F.

2015



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



## Hoja de datos del jurado

1. Datos del Alumno  
Bartolo  
González  
Adrián Alejandro  
Universidad Nacional Autónoma de México  
Facultad de Ciencias  
Física  
306007989
2. Datos del Tutor  
Dr.  
Chumin  
Wang  
Chen
3. Datos del Sinodal 1  
Dra.  
Vicenta  
Sánchez  
Morales
4. Datos del Sinodal 2  
Dra.  
Montserrat  
Bizarro  
Sordo
5. Datos del Sinodal 3  
Dra.  
Lucía  
Medina  
Gómez
6. Datos del Sinodal 4  
Dr.  
Raúl Patricio  
Esquivel  
Sirvent
7. Datos del trabajo escrito  
Método generalizado de matriz de transferencia para óptica no lineal en multicapas dieléctricas  
55p  
2015

## Agradecimientos

Al Dr. Chumin Wang Chen por el apoyo y dirección en mi servicio social y la realización de esta tesis. Por sus grandes enseñanzas y consejos, que me han ayudado y lo seguirán haciendo a lo largo de mi vida profesional.

A la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), que ha sido y seguirá siendo mi gran casa de estudios.

A la Facultad de Ciencias (FC-UNAM) por todas las enseñanzas académicas.

Al Instituto de Investigaciones en Materiales (IIM-UNAM) por los servicios que me ofreció durante mi estancia.

A los miembros del jurado, Dra. Monserrat Bizarro Sordo, Dra. Lucía Medina Gómez y el Dr. Raúl Esquivel Sirvent por el tiempo, sugerencias y comentarios que dedicaron para este trabajo.

A la Dra. Vicenta Sánchez Morales por el valioso apoyo personal.

A la Dirección General de Asuntos del Personal Académico de la UNAM por la beca proporcionada para la realización de esta tesis a través del proyecto PAPIIT IN113714.

Del IIM-UNAM, al ingeniero Caín González por su apoyo en el aspecto técnico computacional, así como a la secretaria Graciela Cruz Mendoza por su apoyo en mi permanencia en el instituto.

## Dedicatorias

Todo gran logro es fruto de un gran esfuerzo. Sin embargo, existen personas que han influido en mi manera de ver la vida y que además, me han enseñado a siempre mirar arriba y a construir el camino para llegar a la cima. Este trabajo está dedicado con mucho cariño a todas esas personas.

A mis padres Ma. De Lourdes González Rivera y Felicano Bartolo Solís, que agradezco su confianza en mí, su paciencia y sobre todo, el apoyo que me han brindado en todos los sentidos. Gracias a ellos soy la persona que ahora soy.

A mi hermana Andrea Paola Lizet Bartolo González, quien ha sido y será mi confidente y mi persona favorita, con quien he pasado muchos de los momentos más alegres en mi vida.

A mis amigos y futuros compañeros de Maestría, Ángel Castellanos y Carlos Maciel, quienes me han enseñado a ser mejor estudiante y persona. Somos un gran equipo.

A los amigos que me recibieron con gratitud en el IIM-UNAM, así como a los que llegaron después:

Al Dr. César Galván y al Mtro. Alessio Palavicini, que sus consejos siempre me hicieron salir adelante.

Al Dr. Pedro Alfaro, al Mtro. Eduardo González, a la Fis. Marisol Rodríguez y a Jorge Ramírez, por su grata compañía.

A todos los amigos que me acompañaron en la licenciatura, en particular a Gabriel Mercado, Gloria Lozada y Niels Flores quienes me hicieron ver la parte divertida de estudiar una carrera.

## RESUMEN

En los últimos años, uno de los campos de mayor desarrollo en la Física es la fotónica basada en nanoestructuras. Entre los dispositivos de retroalimentación y confinamiento de fotones se encuentran los resonadores de Fabry-Perot, los cuales han sido fabricados exitosamente en base de multicapas de silicio poroso. Por otro lado, la óptica no lineal es un interesante y a la vez complejo tema de investigación, ya que muchos de los métodos para el estudio de cristales fotónicos pierden su aplicabilidad en esta rama. En esta tesis se estudia el comportamiento de la biestabilidad óptica en resonadores de Fabry-Perot basado en multicapas dieléctricas. Dicho estudio se realiza mediante una generalización del método de matriz de transferencia desarrollada originalmente para la óptica lineal. Además, se propone una división ficticia del defecto óptico no lineal dentro de la cavidad del resonador en diminutas subcapas, en las cuales el campo eléctrico es prácticamente constante. Por lo que el método de matriz de transferencia inversa se aplica tanto a los espejos formados por multicapas dieléctricas, como a las subcapas ficticias del defecto. Los resultados muestran una biestabilidad óptica en un estrecho rango de parámetros del resonador y de la luz incidente. En particular, analizamos las características de dicha biestabilidad variando parámetros tales como el contraste entre los índices de refracción de los espejos, el número de capas dieléctricas, el espesor del defecto óptico no lineal y sus índices de refracción lineal y no lineal. Este estudio también revela la simplicidad y eficiencia del método para el análisis de la óptica no lineal en multicapas nanoestructuradas.

# Contenido

<b>Introducción .....</b>	<b>1</b>
<b>Capítulo 1. Multicapas dieléctricas.....</b>	<b>3</b>
1.1 Cristales fotónicos.....	4
1.2 Método de matriz de transferencia .....	7
1.3 Periodicidad versus aperiodicidad.....	13
<b>Capítulo 2. Óptica no lineal.....</b>	<b>17</b>
2.1 Polarización del medio.....	18
2.2 Índice de refracción dependiente de la intensidad.....	23
2.3 Multiestabilidad óptica.....	25
<b>Capítulo 3. Biestabilidad óptica .....</b>	<b>29</b>
3.1 Método de matriz de transferencia inversa .....	29
3.2 Resonadores de Fabry-Perot.....	33
3.3 Resonadores con un medio Kerr .....	36
3.4 Análisis de la región biestable.....	38
<b>Conclusiones .....</b>	<b>42</b>
<b>Apéndice 1.....</b>	<b>43</b>
<b>Referencias .....</b>	<b>47</b>

# Introducción

La electrónica -nacida hace setenta años- ha cambiado profundamente la convivencia social de la humanidad. El primer transistor fue diseñado teóricamente por lo menos dos años antes de su construcción, lo cual fue galardonado a William B. Shockley, John Bardeen y Walter H. Brattain con premio Nobel de Física en 1956. Desde hace cincuenta años, se inició la fotónica que en similitud a la electrónica, se estudia la generación, control y detección de los fotones, donde las propiedades ópticas de materiales juegan un papel decisivo. En particular, los *cristales fotónicos* permiten controlar el paso de la luz, a través de variaciones estructuradas de la función dieléctrica o índice de refracción, produciendo una banda prohibida fotónica. Entre las aplicaciones consolidadas de la fotónica se encuentran el almacenamiento óptico de datos, telecomunicaciones por fibra óptica e impresión láser.

Una de las ramas importantes de la óptica es la óptica no lineal, donde el principio de superposición deja de ser válido. Para su observación se requiere de campos intensos comparables con los campos eléctricos interatómicos del orden de  $10^8$  V/m. En particular, la *biestabilidad óptica* es un fenómeno donde un sistema óptico puede estar en uno de dos estados posibles dependiendo de su historia, es decir, presenta una histéresis [Powers, 2013]. La mayoría de los dispositivos biestables consiste de un medio óptico no lineal colocado entre dos espejos y puede realizar muchas de las funciones de un transistor electrónico, tales como interruptores, compuertas lógicas, rectificación y amplificación de señales, entre otras [Joannopoulos, 2008].

El resonador de Fabry-Perot con un medio no lineal en su cavidad constituye el dispositivo más utilizado. Las condiciones necesarias para que la biestabilidad óptica se observe son: un mecanismo de retroalimentación óptica y un medio no lineal con un índice de refracción dependiente de la intensidad de la luz o un medio que presente absorción óptica [He, 1999]. Desde su inicio, el modelaje de la óptica no lineal siempre ha sido un reto para la Física Teórica. En esta tesis se presenta un modelo estructuralmente simple y computacionalmente eficiente para predecir el fenómeno de la biestabilidad óptica en un resonador de Fabry-Perot.

En el primer capítulo se realizará una descripción de las propiedades ópticas de los cristales fotónicos unidimensionales, comenzando con el estudio del origen de la brecha

fotónica para un sistema periódico. Posteriormente se describirá a detalle el método de matriz de transferencia estándar, es decir, para medios ópticos lineales. En la última parte, se harán comparaciones entre los sistemas periódicos, cuasiperiódicos y aperiódicos.

En el segundo capítulo, se introduce la óptica no lineal mediante una resumida presentación de su formalismo, así como la teoría de materiales con índice de refracción dependiente de la intensidad. Así mismo, se discute el fenómeno de la biestabilidad óptica en un resonador de Fabry-Perot con un medio no lineal de tercer orden en su cavidad y se presenta un modelo para su descripción cuando los espejos son ideales.

En el capítulo tres se presenta una generalización del método de matriz de transferencia denominada matriz de transferencia inversa, la cual permite calcular la intensidad de la luz incidente y reflejada en función de la transmitida. Además, se introducen los resonadores de Fabry-Perot basados en multicapas dieléctricas. Primeramente se estudian los resonadores que tengan un medio lineal en su cavidad, y en las secciones tres y cuatro se analiza la biestabilidad óptica en resonadores con un defecto óptico no lineal. En particular, se analiza la región biestable en función de los parámetros tanto del resonador como de la luz incidente.

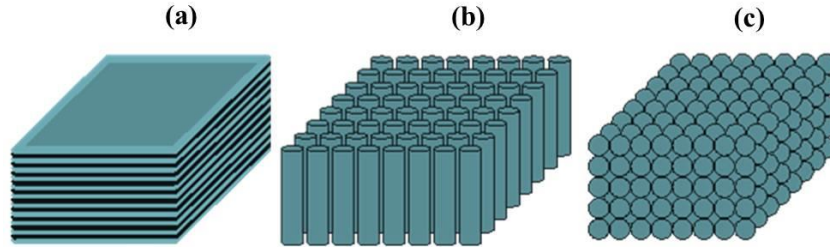
# Capítulo 1. Multicapas dieléctricas

Las excitaciones electrónicas en sólidos cristalinos se describen en términos de las funciones de onda de Bloch, las cuales conducen a la teoría de bandas. Existe una analogía entre las ondas electrónicas y las fotónicas, por lo que las excitaciones fotónicas en sólidos pueden ser analizadas usando los conceptos y métodos del estado sólido que originalmente fueron desarrollados para electrones. Dicha analogía puede apreciarse comparando las ecuaciones de Maxwell para ondas electromagnéticas y la ecuación de Schrödinger para la función de onda electrónica ( $\Psi$ ), como se muestra respectivamente en las ecuaciones (1.1) y (1.2),

$$\nabla \times [\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r})] = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}), \quad (1.1)$$

$$\nabla^2 \Psi(\mathbf{r}) = -\frac{2m}{\hbar^2} [E - V(\mathbf{r})] \Psi(\mathbf{r}) \quad (1.2)$$

donde la función dieléctrica  $\varepsilon(\mathbf{r})$  y el potencial  $V(\mathbf{r})$  definen el ordenamiento espacial del sistema [Lourtioz, 2008]. Similar al caso electrónico, un material con variación periódica de  $\varepsilon(\mathbf{r})$  posee una estructura de bandas en el espacio de frecuencias fotónicas, como se discutirá en detalle en la primera sección de este capítulo. Este tipo de materiales se conocen como *cristales fotónicos*. Existen diferencias importantes entre cristales fotónicos y electrónicos; por ejemplo, en el caso electrónico la periodicidad interatómica es del orden de angstroms (Å) mientras que para el caso fotónico la periodicidad estructural puede variar desde nm hasta mm dependiendo de la longitud de onda fotónica que trabaja el dispositivo. En general, los cristales fotónicos pueden clasificarse en una (1D), dos (2D) o tres (3D) dimensiones, en los que la función dieléctrica varía respectivamente en una, dos o tres direcciones, como se muestra en la Figura 1.1.



**Figura 1.1** Representación esquemática de cristales fotónicos (a) unidimensional (1D), (b) bidimensional (2D) y (c) tridimensional (3D).

En esta tesis se analizará únicamente los cristales fotónicos unidimensionales, tales como multicapas dieléctricas periódicamente ordenadas sin y con defectos.



## 1.1 Cristales fotónicos

El cristal fotónico más simple consiste en alternar capas de materiales con distintas funciones dieléctricas, las cuales fueron analizadas por Lord Rayleigh en 1887 considerando ondas planas y sus múltiples reflexiones y refracciones en cada interfaz de la estructura [Joannopoulos, 2008]. Consideremos un haz de luz que se propaga a lo largo del eje  $x$ , donde se tiene la variación de la función dieléctrica  $[\varepsilon(\mathbf{r})]$  o el índice de refracción  $[\eta(\mathbf{r}) = \sqrt{\varepsilon(\mathbf{r})\mu(\mathbf{r})} \approx \sqrt{\varepsilon(\mathbf{r})}$  para materiales no magnéticos] manteniendo su valor en el plano  $yz$ .

Partiremos de la ecuación de onda para el campo eléctrico ( $E$ )

$$\frac{c^2}{\varepsilon(x)} \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}. \quad (1.3)$$

Si la función dieléctrica cumple la condición  $\varepsilon(x) = \varepsilon(x + a)$ , donde  $a$  es el periodo de las capas, entonces  $1/\varepsilon(x)$  es también periódica con el mismo periodo  $a$ . Haciendo expansión en series de Fourier para la función dieléctrica y el campo eléctrico, se obtienen

$$\frac{1}{\varepsilon(x)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \kappa_m \exp\left(i \frac{2\pi m}{a} x\right) \quad (1.4)$$

$$E_k(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} E_m \exp\left[i\left(k + \frac{2\pi m}{a}\right)x - i\omega_k t\right] \quad (1.5)$$

donde  $\kappa_m$  y  $E_m$  son los coeficientes de Fourier respectivos. Por simplicidad, supongamos que la inversa de  $\varepsilon(x)$  tiene la siguiente variación a lo largo del eje  $x$ ,

$$\frac{1}{\varepsilon(x)} = \kappa_0 + \kappa_1 e^{i\frac{2\pi}{a}x} + \kappa_{-1} e^{-i\frac{2\pi}{a}x}. \quad (1.6)$$

Sustituyendo (1.5) y (1.6) en la ecuación (1.3) se obtiene

$$\kappa_1 \left[ k + \frac{2(m-1)\pi}{a} \right]^2 E_{m-1} + \kappa_{-1} \left[ k + \frac{2(m+1)\pi}{a} \right]^2 E_{m+1} = \left[ \frac{\omega_k^2}{c^2} - \kappa_0 \left( k + \frac{2m\pi}{a} \right)^2 \right] E_m. \quad (1.7)$$

Para  $m = 0$ ,

$$E_0 = \frac{c^2}{\omega_k^2 - \kappa_0 c^2 k^2} \left[ \kappa_1 \left( k - \frac{2\pi}{a} \right)^2 E_{-1} + \kappa_{-1} \left( k + \frac{2\pi}{a} \right)^2 E_1 \right]. \quad (1.8)$$

Para  $m = -1$ ,

$$E_{-1} = \frac{c^2}{\omega_k^2 - \kappa_0 c^2 (k - 2\pi/a)^2} \left[ \kappa_1 \left( k - \frac{4\pi}{a} \right)^2 E_{-2} + \kappa_{-1} k^2 E_0 \right] \quad (1.9)$$

Para  $k \approx \pi/a$  y  $\omega_k^2 \approx \kappa_0 c^2 k^2$ ,  $E_0$  y  $E_{-1}$  predominan en la expansión (1.6). En consecuencia, las ecuaciones (1.8) y (1.9) pueden describirse como

$$(\omega_k^2 - \kappa_0 c^2 k^2) E_0 - \kappa_1 c^2 \left( k - \frac{2\pi}{a} \right)^2 E_{-1} \approx 0, \quad (1.10)$$

$$-\kappa_{-1} c^2 k^2 E_0 + \left[ \omega_k^2 - \kappa_0 c^2 \left( k - \frac{2\pi}{a} \right)^2 \right] E_{-1} \approx 0. \quad (1.11)$$

Estas ecuaciones tienen solución no trivial si su determinante es cero, es decir,

$$\begin{vmatrix} \omega_k^2 - \kappa_0 c^2 k^2 & -\kappa_1 c^2 (k - 2\pi/a)^2 \\ -\kappa_{-1} c^2 k^2 & \omega_k^2 - \kappa_0 c^2 (k - 2\pi/a)^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (1.12)$$

Haciendo el cambio de variable  $\xi \equiv k - \pi/a$ , entonces

$$\begin{vmatrix} \omega_k^2 - \kappa_0 c^2 (\xi + \pi/a)^2 & -\kappa_1 c^2 (\xi - \pi/a)^2 \\ -\kappa_{-1} c^2 (\xi + \pi/a)^2 & \omega_k^2 - \kappa_0 c^2 (\xi - \pi/a)^2 \end{vmatrix} = 0, \quad (1.13)$$

$$\Rightarrow \left[ \omega_k^2 - \kappa_0 c^2 (\xi + \pi/a)^2 \right] \left[ \omega_k^2 - \kappa_0 c^2 (\xi - \pi/a)^2 \right] - \left[ \kappa_1 c^2 (\xi - \pi/a)^2 \right] \left[ \kappa_{-1} c^2 (\xi + \pi/a)^2 \right] = 0, \quad (1.14)$$

$$\Rightarrow \omega_k^4 - \kappa_0 c^2 \left[ (\xi + \frac{\pi}{a})^2 + (\xi - \frac{\pi}{a})^2 \right] \omega_k^2 + c^4 (\kappa_0^2 - |\kappa_1|^2) (\xi^2 - \frac{\pi^2}{a^2})^2 = 0, \quad (1.15)$$

$$\Rightarrow \omega_k^4 - 2\kappa_0 c^2 \left( \xi^2 + \frac{\pi^2}{a^2} \right)^2 \omega_k^2 - c^4 (\kappa_0^2 - |\kappa_1|^2) \left( \xi^2 - \frac{\pi^2}{a^2} \right)^2 = 0, \quad (1.16)$$

donde  $\kappa_{-1} = \kappa_1^*$  ya que  $\varepsilon(x)$  es real. Resolviendo la ecuación de segundo grado para  $\omega_k^2$  se obtiene

$$\omega_k^2 = \kappa_0 c^2 (\xi^2 + \pi^2/a^2) \pm \sqrt{4\kappa_0^2 c^4 (\xi^2 + \pi^2/a^2)^2 - c^4 (\kappa_0^2 - |\kappa_1|^2) (\xi^2 - \pi^2/a^2)^2}. \quad (1.17)$$

Como  $k \approx \pi/a$ , es decir  $|\xi| \ll \pi/a$ , entonces

$$\omega_k^2 = \kappa_0 c^2 \frac{\pi^2}{a^2} \pm \sqrt{4\kappa_0^2 c^4 \xi^2 \frac{\pi^2}{a^2} + c^4 |\kappa_1|^2 \frac{\pi^4}{a^4}}, \quad (1.18)$$

$$\Rightarrow \omega_k^2 = \kappa_0 c^2 \frac{\pi^2}{a^2} \pm c^2 \frac{\pi^2}{a^2} |\kappa_1| \sqrt{1 + \frac{4\kappa_0^2 \xi^2}{|\kappa_1|^2 \pi^2/a^2}}. \quad (1.19)$$

Expandiendo la raíz cuadrada en la ecuación (1.19) en serie de Taylor y tomando sólo los primeros términos, se tiene

$$\omega_k^2 \approx c^2 \frac{\pi^2}{a^2} \left[ \kappa_0 \pm |\kappa_1| \left( 1 + \frac{2\kappa_0^2 \xi^2}{|\kappa_1|^2 \pi^2/a^2} \right) \right] = c^2 \frac{\pi^2}{a^2} \left[ \kappa_0 \pm |\kappa_1| \pm \frac{2\kappa_0^2 \xi^2}{|\kappa_1| \pi^2/a^2} \right], \quad (1.20)$$

$$\Rightarrow \omega_k^2 \approx c^2 \frac{\pi^2}{a^2} \left[ \kappa_0 \pm |\kappa_1| \left( 1 \pm \frac{2\kappa_0^2 \xi^2}{(\kappa_0 \pm |\kappa_1|) |\kappa_1| \pi^2/a^2} \right) \right], \quad (1.21)$$

$$\therefore \omega_k \approx c \frac{\pi}{a} \sqrt{\kappa_0 \pm |\kappa_1|} \sqrt{1 \pm \frac{2\kappa_0^2 \xi^2}{(\kappa_0 \pm |\kappa_1|) |\kappa_1| \pi^2/a^2}}. \quad (1.22)$$

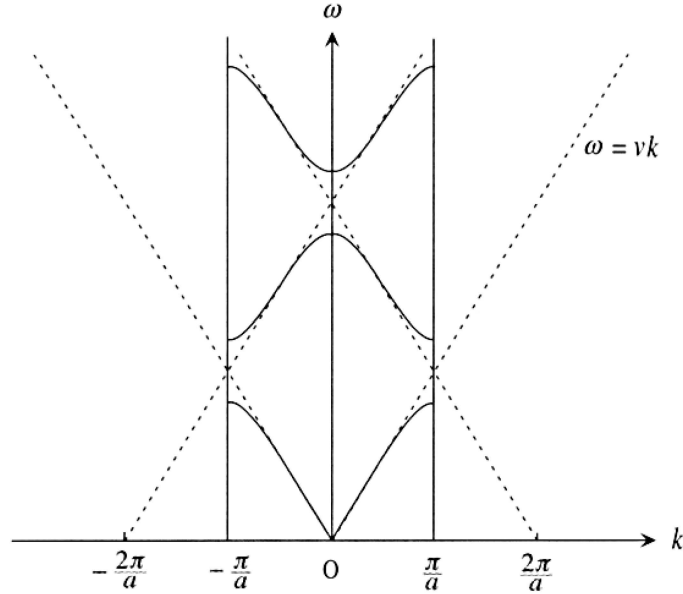
Expandiendo nuevamente la segunda raíz cuadrada de la ecuación (1.22) en serie de Taylor y teniendo en cuenta  $\xi \equiv k - \pi/a$ , se tiene

$$\omega_k \approx c \frac{\pi}{a} \sqrt{\kappa_0 \pm |\kappa_1|} \pm \frac{\kappa_0^2 \sqrt{\kappa_0 \pm |\kappa_1|}}{(\kappa_0 \pm |\kappa_1|) \pi} \frac{ac (k - \pi/a)^2}{|\kappa_1|}. \quad (1.23)$$

Esta última ecuación (1.23) establece una brecha prohibida para los valores de  $\omega$  dada por

$$\frac{\pi c}{a} \sqrt{\kappa_0 - |\kappa_1|} < \omega < \frac{\pi c}{a} \sqrt{\kappa_0 + |\kappa_1|}. \quad (1.24)$$

En la Figura 1.2 se muestra la relación de dispersión para un cristal fotónico unidimensional, donde se aprecian las bandas de frecuencia permitidas y prohibidas, así como la solución analítica (1.23) alrededor de  $k \approx \pi/a$ . Las líneas punteadas corresponden a la relación de dispersión  $\omega = vk$  para un medio efectivo y al llegar a la frontera de la primera zona de Brillouin dichas líneas punteadas se curvean convirtiéndose las líneas sólidas para tener la velocidad de grupo igual a cero en los planos de Bragg. En otras palabras, semejante al caso electrónico, los modos con  $k \approx \pm\pi/a$  se mezclaran entre sí en presencia de una modulación periódica de la constante dieléctrica, provocando un desdoblamiento en la frecuencia y por tanto bandas de frecuencias prohibidas [Sakoda, 2001].



**Figura 1.2** Bandas de frecuencia ( $\omega$ ) permitida representada por líneas sólidas para un cristal fotónico unidimensional y las líneas punteadas corresponden a la relación de dispersión fotónica en una estructura efectiva uniforme [Sakoda, 2001].

Hasta aquí hemos visto la formación de bandas de frecuencia fotónica permitidas. Para cuantificar la transmitancia fotónica que varía en dichas bandas, emplearemos el método de matriz de transferencia descrito en la siguiente sección.

## 1.2 Método de matriz de transferencia

Consideremos un dispositivo de  $N$  capas dieléctricas con índice de refracción  $\eta_j$  y espesor  $d_j$ , donde  $j = 1, 2, \dots, N$ . Los medios 0 y  $N+1$  corresponden al aire. Por otro lado, consideremos un campo eléctrico descrito por ondas planas, ya que cualquier oscilación de dicho campo en el espacio y tiempo puede escribirse como una combinación lineal de éstas. Para cada capa del dispositivo se tienen una componente incidente con subíndice (1) y otra reflejada con subíndice (2). En particular, cuando la onda entra desde el aire al dispositivo, el campo puede escribirse como

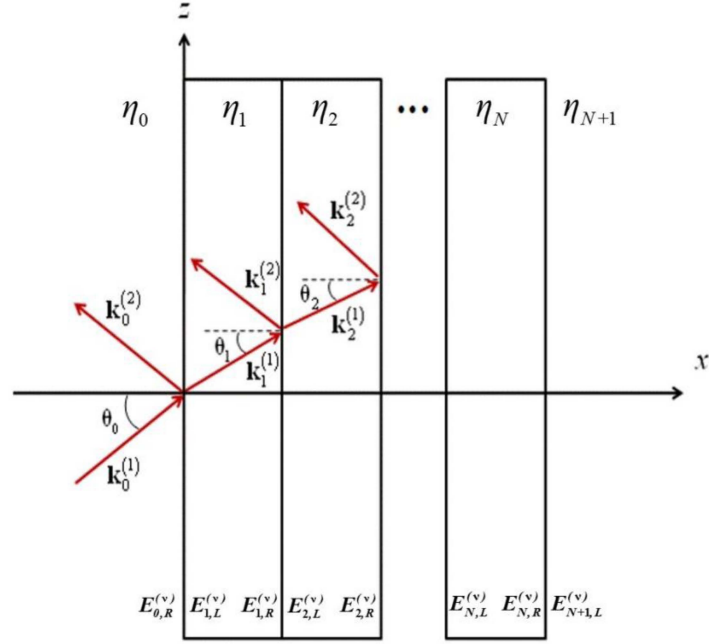
$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{E}_0^{(1)} \exp[i(\mathbf{k}_0^{(1)} \cdot \mathbf{r} - \omega t)] + \mathbf{E}_0^{(2)} \exp[i(\mathbf{k}_0^{(2)} \cdot \mathbf{r} - \omega t)], \quad (1.25)$$

donde  $\mathbf{k}_0^{(1)}$  y  $\mathbf{k}_0^{(2)}$  son respectivamente los vectores de onda incidente y reflejado, como se muestra en la Figura 1.3. En la capa 1, la onda se transmite con índice de refracción  $\eta_1$ , cuyo campo incidente y reflejado en dicha capa tiene la forma

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_1^{(1)} \exp[i(\mathbf{k}_1^{(1)} \cdot \mathbf{r} - \omega t)] + \mathbf{E}_1^{(2)} \exp[i(\mathbf{k}_1^{(2)} \cdot \mathbf{r} - \omega t)]. \quad (1.26)$$

En general, la onda en la capa  $j$  tiene la forma

$$\mathbf{E}_j = \mathbf{E}_j^{(1)} \exp[i(\mathbf{k}_j^{(1)} \cdot \mathbf{r} - \omega t)] + \mathbf{E}_j^{(2)} \exp[i(\mathbf{k}_j^{(2)} \cdot \mathbf{r} - \omega t)]. \quad (1.27)$$



**Figura 1.3** Representación esquemática de la propagación de una onda en una estructura de multicapas. Las flechas rojas indican los vectores  $\mathbf{k}$  incidente, reflejada y transmitida alrededor de cada interfaz.

La existencia de condiciones de frontera en la interfaz  $j | j + 1$  implica que las variaciones temporales y espaciales deben ser las mismas [Yeh, 1998], es decir

$$\mathbf{k}_j^{(1)} \cdot \mathbf{r} |_{j|j+1} = \mathbf{k}_j^{(2)} \cdot \mathbf{r} |_{j|j+1} = \mathbf{k}_{j+1}^{(1)} \cdot \mathbf{r} |_{j|j+1}, \quad (1.28)$$

lo cual se cumple independientemente del origen de las condiciones de frontera. Se puede notar que los tres vectores de onda  $\mathbf{k}_j^{(1)}$ ,  $\mathbf{k}_j^{(2)}$  y  $\mathbf{k}_{j+1}^{(1)}$  se encuentran en un plano llamado *plano de incidencia*, cuyas magnitudes son  $|\mathbf{k}_j^{(1)}| = |\mathbf{k}_j^{(2)}| = \omega \sqrt{\mu_j \varepsilon_j}$ . Además, los ángulos de incidencia  $\theta_j$  para las capas  $j = 1, 2, \dots, N$  se relacionan entre sí por la ley de Snell dada por

$$\eta_j \sin \theta_j = \eta_{j+1} \sin \theta_{j+1}. \quad (1.29)$$

Las ecuaciones (1.28) y (1.29) contienen las condiciones de la reflexión y refracción de la onda alrededor de las interfaces. Por otro lado, los campos eléctrico y magnético están relacionados mediante

$$\mathbf{B}_j^{(\nu)} = \sqrt{\mu_j \varepsilon_j} \hat{\mathbf{k}}_j^{(\nu)} \times \mathbf{E}_j^{(\nu)} = \frac{1}{\omega} \mathbf{k}_j^{(\nu)} \times \mathbf{E}_j^{(\nu)}, \quad (1.30)$$

donde  $\nu = 1, 2$  y  $\hat{\mathbf{k}}_j$  es el vector de onda unitario en la capa  $j$ . Aplicando las ecuaciones de Maxwell a la interfaz, se obtienen las siguientes relaciones [Jackson, 1998]

$$\begin{aligned}
\varepsilon_j(\mathbf{E}_j^{(1)} + \mathbf{E}_j^{(2)}) \cdot \hat{\mathbf{n}} &= \varepsilon_{j+1}(\mathbf{E}_{j+1}^{(1)} + \mathbf{E}_{j+1}^{(2)}) \cdot \hat{\mathbf{n}} \\
(\mathbf{k}_j^{(1)} \times \mathbf{E}_j^{(1)} + \mathbf{k}_j^{(2)} \times \mathbf{E}_j^{(2)}) \cdot \hat{\mathbf{n}} &= (\mathbf{k}_{j+1}^{(1)} \times \mathbf{E}_{j+1}^{(1)} + \mathbf{k}_{j+1}^{(2)} \times \mathbf{E}_{j+1}^{(2)}) \cdot \hat{\mathbf{n}} \\
(\mathbf{E}_j^{(1)} + \mathbf{E}_j^{(2)}) \times \hat{\mathbf{n}} &= (\mathbf{E}_{j+1}^{(1)} + \mathbf{E}_{j+1}^{(2)}) \times \hat{\mathbf{n}} \quad , \quad (1.31) \\
\frac{1}{\mu_j}(\mathbf{k}_j^{(1)} \times \mathbf{E}_j^{(1)} + \mathbf{k}_j^{(2)} \times \mathbf{E}_j^{(2)}) \times \hat{\mathbf{n}} &= \frac{1}{\mu_{j+1}}(\mathbf{k}_{j+1}^{(1)} \times \mathbf{E}_{j+1}^{(1)} + \mathbf{k}_{j+1}^{(2)} \times \mathbf{E}_{j+1}^{(2)}) \times \hat{\mathbf{n}}
\end{aligned}$$

donde  $\hat{\mathbf{n}}$  es el vector unitario normal a la interfaz. Dado que cualquier polarización de una onda electromagnética es transversal en un material dieléctrico, éste siempre puede expresarse como combinación lineal de dos ondas linealmente polarizadas, tales como transversal eléctrica (TE) y transversal magnética (TM) al plano de incidencia.

Para el primer caso TE, a partir de las últimas dos ecuaciones de (1.31) se obtiene

$$\begin{aligned}
E_j^{(1)} + E_j^{(2)} &= E_{j+1}^{(1)} + E_{j+1}^{(2)} \\
\sqrt{\frac{\varepsilon_j}{\mu_j}}(E_j^{(1)} - E_j^{(2)}) \cos \theta_j &= \sqrt{\frac{\varepsilon_{j+1}}{\mu_{j+1}}}(E_{j+1}^{(1)} - E_{j+1}^{(2)}) \cos \theta_{j+1} \quad , \quad (1.32)
\end{aligned}$$

donde  $\cos \theta_j$  proviene de que el campo magnético  $\mathbf{k}_j^{(\nu)} \times \mathbf{E}_j^{(\nu)} / \omega$  y el vector  $\hat{\mathbf{n}}$  forma un ángulo de  $\frac{\pi}{2} - \theta$ . Las ecuaciones (1.32) pueden reescribirse en forma matricial como

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{\frac{\varepsilon_j}{\mu_j}} \cos \theta_j & -\sqrt{\frac{\varepsilon_j}{\mu_j}} \cos \theta_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_j^{(1)} \\ E_j^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{\frac{\varepsilon_{j+1}}{\mu_{j+1}}} \cos \theta_{j+1} & -\sqrt{\frac{\varepsilon_{j+1}}{\mu_{j+1}}} \cos \theta_{j+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{j+1}^{(1)} \\ E_{j+1}^{(2)} \end{pmatrix} \quad (1.33)$$

Para el caso de ondas polarizadas con campo magnético perpendicular al plano de incidencia (TM), se obtienen de forma análoga

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{\varepsilon_j}{\mu_j}}(E_j^{(1)} - E_j^{(2)}) &= \sqrt{\frac{\varepsilon_{j+1}}{\mu_{j+1}}}(E_{j+1}^{(1)} - E_{j+1}^{(2)}) \quad , \quad (1.34) \\
(E_j^{(1)} + E_j^{(2)}) \cos \theta_j &= (E_{j+1}^{(1)} + E_{j+1}^{(2)}) \cos \theta_{j+1}
\end{aligned}$$

cuya forma matricial es

$$\begin{pmatrix} \cos \theta_j & \cos \theta_j \\ \sqrt{\frac{\varepsilon_j}{\mu_j}} & -\sqrt{\frac{\varepsilon_j}{\mu_j}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_j^{(1)} \\ E_j^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_{j+1} & \cos \theta_{j+1} \\ \sqrt{\frac{\varepsilon_{j+1}}{\mu_{j+1}}} & -\sqrt{\frac{\varepsilon_{j+1}}{\mu_{j+1}}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{j+1}^{(1)} \\ E_{j+1}^{(2)} \end{pmatrix} \quad (1.35)$$

En general, definiendo las componentes  $E_{j,R}^{(\nu)}$  y  $E_{j+1,L}^{(\nu)}$  del campo eléctrico alrededor de la interfaz entre los medios  $j$  y  $j + 1$ , como se muestra en la Figura 1.3, las ecuaciones (1.33) y (1.35) pueden reescribirse como

$$\begin{pmatrix} E_{j+1,L}^{(1)} \\ E_{j+1,L}^{(2)} \end{pmatrix} = \mathbf{D}_{j+1|j}^{TE} \begin{pmatrix} E_{j,R}^{(1)} \\ E_{j,R}^{(2)} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} E_{j+1,L}^{(1)} \\ E_{j+1,L}^{(2)} \end{pmatrix} = \mathbf{D}_{j+1|j}^{TM} \begin{pmatrix} E_{j,R}^{(1)} \\ E_{j,R}^{(2)} \end{pmatrix}, \quad (1.36)$$

donde

$$\mathbf{D}_{j+1|j}^{TE} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + Z_{j+1|j}^{TE} & 1 - Z_{j+1|j}^{TE} \\ 1 - Z_{j+1|j}^{TE} & 1 + Z_{j+1|j}^{TE} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{D}_{j+1|j}^{TM} = \frac{1}{2} \frac{\cos \theta_j}{\cos \theta_{j+1}} \begin{pmatrix} 1 + Z_{j+1|j}^{TM} & 1 - Z_{j+1|j}^{TM} \\ 1 - Z_{j+1|j}^{TM} & 1 + Z_{j+1|j}^{TM} \end{pmatrix} \quad (1.37)$$

con

$$Z_{j+1|j}^{TE} = \frac{\mu_{j+1} \eta_j \cos \theta_j}{\mu_j \eta_{j+1} \cos \theta_{j+1}} \quad \text{y} \quad Z_{j+1|j}^{TM} = \frac{\mu_{j+1} \eta_j \cos \theta_{j+1}}{\mu_j \eta_{j+1} \cos \theta_j}. \quad (1.38)$$

Por otro lado, cuando una onda atraviesa un medio con espesor  $d_j$ , sufre un cambio de fase  $\phi_j$  tal que

$$\begin{pmatrix} E_{j,R}^{(1)} \\ E_{j,R}^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\phi_j} & 0 \\ 0 & e^{-i\phi_j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{j,L}^{(1)} \\ E_{j,L}^{(2)} \end{pmatrix} = \mathbf{P}_j \begin{pmatrix} E_{j,L}^{(1)} \\ E_{j,L}^{(2)} \end{pmatrix}. \quad (1.39)$$

A la matriz  $\mathbf{P}_j$  se le conoce como matriz de propagación a través de la capa  $j$  tanto para TE como TM, cuya fase está dada por

$$\phi_j = \frac{2\pi \eta_j d_j}{\lambda \cos \theta_j}, \quad (1.40)$$

donde  $d_j / \cos \theta_j$  es el camino óptico que recorre la onda dentro de la  $j$ -ésima capa.

En resumen, las componentes del campo  $E_j^{(\nu)}$  al pasar por la interfaz entre los medios  $j$  y  $j + 1$  se modifica mediante la matriz  $\mathbf{D}_{j+1|j}^\beta$ , siendo  $\beta = TE$  ó  $TM$ . Después, se propaga de izquierda a derecha dentro del medio  $j + 1$  y sufre un cambio de fase caracterizado por la matriz  $\mathbf{P}_{j+1}$  hasta llegar a la interfaz entre los medios  $j + 1$  y  $j + 2$ . Este proceso se repite hasta la última capa. Por lo que para un dispositivo con  $N$  capas dieléctricas las componentes del campo finales se relacionan con los incidentes por

$$\begin{pmatrix} E_{N+1,L}^{(1)} \\ E_{N+1,L}^{(2)} \end{pmatrix} = \mathbf{Q}^\beta \begin{pmatrix} E_{0,R}^{(1)} \\ E_{0,R}^{(2)} \end{pmatrix}, \quad (1.41)$$

donde  $\mathbf{Q}^\beta$  es la matriz de transferencia total de toda la muestra siendo  $\beta = TE$  ó  $TM$  dada por [Yeh, 1998]

$$\mathbf{Q}^\beta = \begin{pmatrix} m_{11}^\beta & m_{12}^\beta \\ m_{21}^\beta & m_{22}^\beta \end{pmatrix} \equiv \mathbf{D}_{N+1|N}^\beta \prod_{j=0}^{N-1} \mathbf{P}_{j+1} \mathbf{D}_{j+1|j}^\beta. \quad (1.42)$$

Cabe mencionar que frecuentemente los medios  $j = 0$  y  $j = N+1$  son iguales y corresponden al aire.

Existe una forma alterna para expresar las matrices de transferencia [Kohmoto, 1987], donde se definen las nuevas componentes de campo eléctrico como

$$\begin{aligned} E_{j,\alpha}^+ &\equiv E_{j,\alpha}^{(1)} + E_{j,\alpha}^{(2)} \\ iE_{j,\alpha}^- &\equiv E_{j,\alpha}^{(1)} - E_{j,\alpha}^{(2)}, \end{aligned} \quad (1.43)$$

con  $\alpha = L$  ó  $R$ . Sustituyendo (1.43) en (1.32) para el caso TE, se tiene

$$\begin{pmatrix} E_{j+1,L}^+ \\ E_{j+1,L}^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Z_{j+1|j}^{TE} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{j,R}^+ \\ E_{j,R}^- \end{pmatrix} = \mathbf{T}_{j+1|j}^{TE} \begin{pmatrix} E_{j,R}^+ \\ E_{j,R}^- \end{pmatrix}. \quad (1.44)$$

Mientras que para el caso TM se sustituye (1.43) en (1.34) y se obtiene

$$\begin{pmatrix} E_{j+1,L}^+ \\ E_{j+1,L}^- \end{pmatrix} = \frac{\cos \theta_j}{\cos \theta_{j+1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Z_{j+1|j}^{TM} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{j,R}^+ \\ E_{j,R}^- \end{pmatrix} = \frac{\cos \theta_j}{\cos \theta_{j+1}} \mathbf{T}_{j+1|j}^{TM} \begin{pmatrix} E_{j,R}^+ \\ E_{j,R}^- \end{pmatrix}, \quad (1.45)$$

donde  $\mathbf{T}_{j+1|j}^{TE}$  y  $\mathbf{T}_{j+1|j}^{TM}$  describen la transformación de las componentes de campo alrededor de la interfaz  $j$  y  $j+1$ .

Sustituyendo las definiciones en (1.43) en (1.39), se obtienen

$$\begin{aligned} E_{j,R}^+ &= E_{j,R}^{(1)} + E_{j,R}^{(2)} = E_{j,L}^{(1)} e^{i\phi_j} + E_{j,L}^{(2)} e^{-i\phi_j} \\ iE_{j,R}^- &= E_{j,R}^{(1)} - E_{j,R}^{(2)} = E_{j,L}^{(1)} e^{i\phi_j} - E_{j,L}^{(2)} e^{-i\phi_j}. \end{aligned} \quad (1.46)$$

Despejando  $E_{j,L}^{(1)}$  y  $E_{j,L}^{(2)}$  de (1.43) se tienen

$$E_{j,L}^{(1)} = \frac{E_{j,L}^+ + iE_{j,L}^-}{2} \quad \text{y} \quad E_{j,L}^{(2)} = \frac{E_{j,L}^+ - iE_{j,L}^-}{2}, \quad (1.47)$$

y sustituyendo (1.47) en la primera ecuación de (1.46) se llega a

$$E_{j,R}^+ = \frac{E_{j,L}^+ + iE_{j,L}^-}{2} e^{i\phi_j} + \frac{E_{j,L}^+ - iE_{j,L}^-}{2} e^{-i\phi_j} = \cos \phi_j E_{j,L}^+ - \sin \phi_j E_{j,L}^-. \quad (1.48)$$

De forma análoga, sustituyendo (1.47) en la segunda ecuación de (1.46) se obtiene

$$E_{j,R}^- = \cos \phi_j E_{j,L}^+ + \sin \phi_j E_{j,L}^-. \quad (1.49)$$



Entonces, las expresiones (1.48) y (1.49) pueden escribirse en forma matricial como

$$\begin{pmatrix} E_{j,R}^+ \\ E_{j,R}^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi_j & -\sin \phi_j \\ \sin \phi_j & \cos \phi_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{j,L}^+ \\ E_{j,L}^- \end{pmatrix} = \mathbf{F}_j \begin{pmatrix} E_{j,L}^+ \\ E_{j,L}^- \end{pmatrix}, \quad (1.50)$$

donde  $\mathbf{F}_j$  es la matriz de propagación en la capa  $j$ . Con esto, se tiene que la matriz de transferencia total para  $N$  capas es

$$\mathbf{S}^\beta = \begin{pmatrix} s_{11}^\beta & s_{12}^\beta \\ s_{21}^\beta & s_{22}^\beta \end{pmatrix} = \mathbf{T}_{N+1|N}^\beta \prod_{j=0}^{N-1} \mathbf{F}_{j+1} \mathbf{T}_{j+1|j}^\beta, \quad (1.51)$$

tal que

$$\begin{pmatrix} E_{N+1,L}^+ \\ E_{N+1,L}^- \end{pmatrix} = \mathbf{S}^\beta \begin{pmatrix} E_{0,R}^+ \\ E_{0,R}^- \end{pmatrix}. \quad (1.52)$$

Dado que el determinante de un producto de matrices es el producto de los determinantes de cada matriz, se puede verificar que los determinantes de las matrices en las ecuaciones (1.42) y (1.51) es 1, si se tienen  $\eta_0 = \eta_{N+1}$  y  $\mu_0 = \mu_{N+1}$ . Es decir, para TE el determinante es

$$\det(\mathbf{S}^{TE}) = \det(\mathbf{T}_{N+1|N}^{TE}) \prod_{j=0}^{N-1} \det(\mathbf{F}_{j+1}) \det(\mathbf{T}_{j+1|j}^{TE}) = \prod_{j=0}^N Z_{j+1|j}^{TE} = \prod_{j=0}^N \frac{\mu_{j+1} \eta_j \cos \theta_j}{\mu_j \eta_{j+1} \cos \theta_{j+1}} = 1, \quad (1.53)$$

y para TM

$$\det(\mathbf{S}^{TM}) = \det(\mathbf{T}_{N+1|N}^{TM}) \prod_{j=0}^{N-1} \det(\mathbf{F}_{j+1}) \det(\mathbf{T}_{j+1|j}^{TM}) = \prod_{j=0}^N Z_{j+1|j}^{TM} = \prod_{j=0}^N \frac{\mu_{j+1} \eta_j \cos \theta_{j+1}}{\mu_j \eta_{j+1} \cos \theta_j} = 1. \quad (1.54)$$

Para analizar la transmitancia y reflectancia de un dispositivo fotónico con  $N$  capas dieléctricas, en el formalismo de  $E_{j,\alpha}^{(\nu)}$  con  $\nu = 1, 2$ , la ecuación (1.52) puede reescribirse como

$$\begin{aligned} E_{N+1,L}^{(1)} + E_{N+1,L}^{(2)} &= s_{11}^\beta (E_{0,R}^{(1)} + E_{0,R}^{(2)}) - i s_{12}^\beta (E_{0,R}^{(1)} - E_{0,R}^{(2)}) \\ E_{N+1,L}^{(1)} - E_{N+1,L}^{(2)} &= i s_{21}^\beta (E_{0,R}^{(1)} + E_{0,R}^{(2)}) + s_{22}^\beta (E_{0,R}^{(1)} - E_{0,R}^{(2)}) \end{aligned} \quad (1.55)$$

Debido a que el medio inicial y final tienen extensión infinita, se tiene que  $E_{N+1,L}^{(2)}$  es cero, ya que no existe componente de la onda que regrese hacia la capa  $N$ . Por tanto, dicho término se elimina de (1.55) e igualando las dos ecuaciones de (1.55) se obtiene

$$s_{11}^\beta E_{0,R}^{(1)} + E_{0,R}^{(2)} - i s_{12}^\beta (E_{0,R}^{(1)} - E_{0,R}^{(2)}) = i s_{21}^\beta (E_{0,R}^{(1)} + E_{0,R}^{(2)}) + s_{22}^\beta (E_{0,R}^{(1)} - E_{0,R}^{(2)}), \quad (1.56)$$

por lo que

$$E_{0,R}^{(2)} = \frac{s_{11}^{\beta} - i s_{12}^{\beta} - i s_{21}^{\beta} - s_{22}^{\beta}}{-s_{11}^{\beta} - i s_{12}^{\beta} + i s_{21}^{\beta} - s_{22}^{\beta}} E_{0,R}^{(1)}. \quad (1.57)$$

Sustituyendo (1.57) en (1.55) se llega a

$$E_{N+1,L}^{(1)} = s_{11}^{\beta} \left( E_{0,R}^{(1)} + \frac{s_{11}^{\beta} - i s_{12}^{\beta} - i s_{21}^{\beta} - s_{22}^{\beta}}{-s_{11}^{\beta} - i s_{12}^{\beta} + i s_{21}^{\beta} - s_{22}^{\beta}} E_{0,R}^{(1)} \right) - i s_{12}^{\beta} \left( E_{0,R}^{(1)} - \frac{s_{11}^{\beta} - i s_{12}^{\beta} - i s_{21}^{\beta} - s_{22}^{\beta}}{-s_{11}^{\beta} - i s_{12}^{\beta} + i s_{21}^{\beta} - s_{22}^{\beta}} E_{0,R}^{(1)} \right). \quad (1.58)$$

Por lo tanto, se obtiene el coeficiente de transmisión

$$\tau^{\beta} \equiv \frac{E_{N+1,L}^{(1)}}{E_{0,R}^{(1)}} = \frac{2(s_{11}^{\beta} s_{22}^{\beta} - s_{12}^{\beta} s_{21}^{\beta})}{s_{11}^{\beta} + s_{22}^{\beta} - i(s_{12}^{\beta} - s_{21}^{\beta})}. \quad (1.59)$$

En el numerador de la ecuación anterior aparece el determinante de la matriz  $\mathbf{S}^{\beta}$  y como se mencionó previamente, coincide con la unidad, por tanto la transmitancia total para el modo  $\beta = TE$  ó  $TM$  será

$$T^{\beta} = \tau^{\beta} (\tau^{\beta})^* = \frac{4}{(s_{11}^{\beta} + s_{22}^{\beta})^2 + (s_{12}^{\beta} - s_{21}^{\beta})^2}. \quad (1.60)$$

Por último, de la ecuación (1.57) se define el coeficiente de reflexión  $r$  como

$$r^{\beta} \equiv \frac{E_{0,L}^{(2)}}{E_{0,L}^{(1)}} = \frac{-s_{11}^{\beta} + i s_{12}^{\beta} + i s_{21}^{\beta} + s_{22}^{\beta}}{s_{11}^{\beta} + i s_{12}^{\beta} - i s_{21}^{\beta} + s_{22}^{\beta}}, \quad (1.61)$$

entonces, la reflectancia de la muestra será

$$R^{\beta} \equiv r^{\beta} (r^{\beta})^* = \frac{(s_{11}^{\beta} - s_{22}^{\beta})^2 + (s_{12}^{\beta} + s_{21}^{\beta})^2}{(s_{11}^{\beta} + s_{22}^{\beta})^2 + (s_{12}^{\beta} - s_{21}^{\beta})^2}. \quad (1.62)$$

Análogamente, la transmitancia y la reflectancia pueden obtenerse de la ecuación (1.41) en términos de la matriz  $\mathbf{Q}^{\beta}$  como [Yeh, 1998]

$$T^{\beta} = \tau^{\beta} (\tau^{\beta})^* = \left| \frac{1}{q_{11}^{\beta}} \right|^2 \quad \text{y} \quad R^{\beta} \equiv r^{\beta} (r^{\beta})^* = \left| \frac{q_{21}^{\beta}}{q_{11}^{\beta}} \right|^2. \quad (1.63)$$

### 1.3 Periodicidad versus aperiodicidad

En esta sección nos enfocaremos sobre la importancia del orden de las multicapas, el cual se refleja en el espesor  $d_j$  y el índice de refracción  $\eta_j$  de cada capa. En general, existen  $N!$  maneras de ordenar  $N$  capas con diferentes  $d_j$  y  $\eta_j$ . Las secuencias resultantes pueden

clasificarse como periódicas, cuasiperiódicas o aperiódicas. Las secuencias cuasiperiódicas tienen un orden definido pero no periódico y son proyecciones de un hipercubo en un espacio de mayor dimensión. En consecuencia, estas estructuras revelan su carácter periódico bajo ciertas condiciones. Por ejemplo, se encuentran estados transparentes con transmitancia uno que usualmente se asocian a sistemas periódicos. La secuencia cuasiperiódica más estudiada es la de Fibonacci que puede obtenerse por los métodos de sustitución, de adición y de corte y proyección [Steurer, 2009].

En particular, la secuencia de Fibonacci puede obtenerse mediante la siguiente regla de sustitución dada por  $S_F : L \rightarrow LS$  y  $S \rightarrow L$ , la cual puede representarse en forma matricial como

$$S_F : \begin{pmatrix} L \\ S \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L \\ S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} LS \\ S \end{pmatrix}, \quad (1.64)$$

donde a cada elemento L es reemplazado por LS y el elemento S por L como se muestra en la Tabla 1.1. Se le denomina *número de generación* al número de veces que la sustitución ha sido realizada. Otro ejemplo de secuencia aperiódica es la de Thue-Morse, donde la regla de sustitución es de la forma  $S_{TM} : L \rightarrow LS$  y  $S \rightarrow SL$  y su forma matricial es

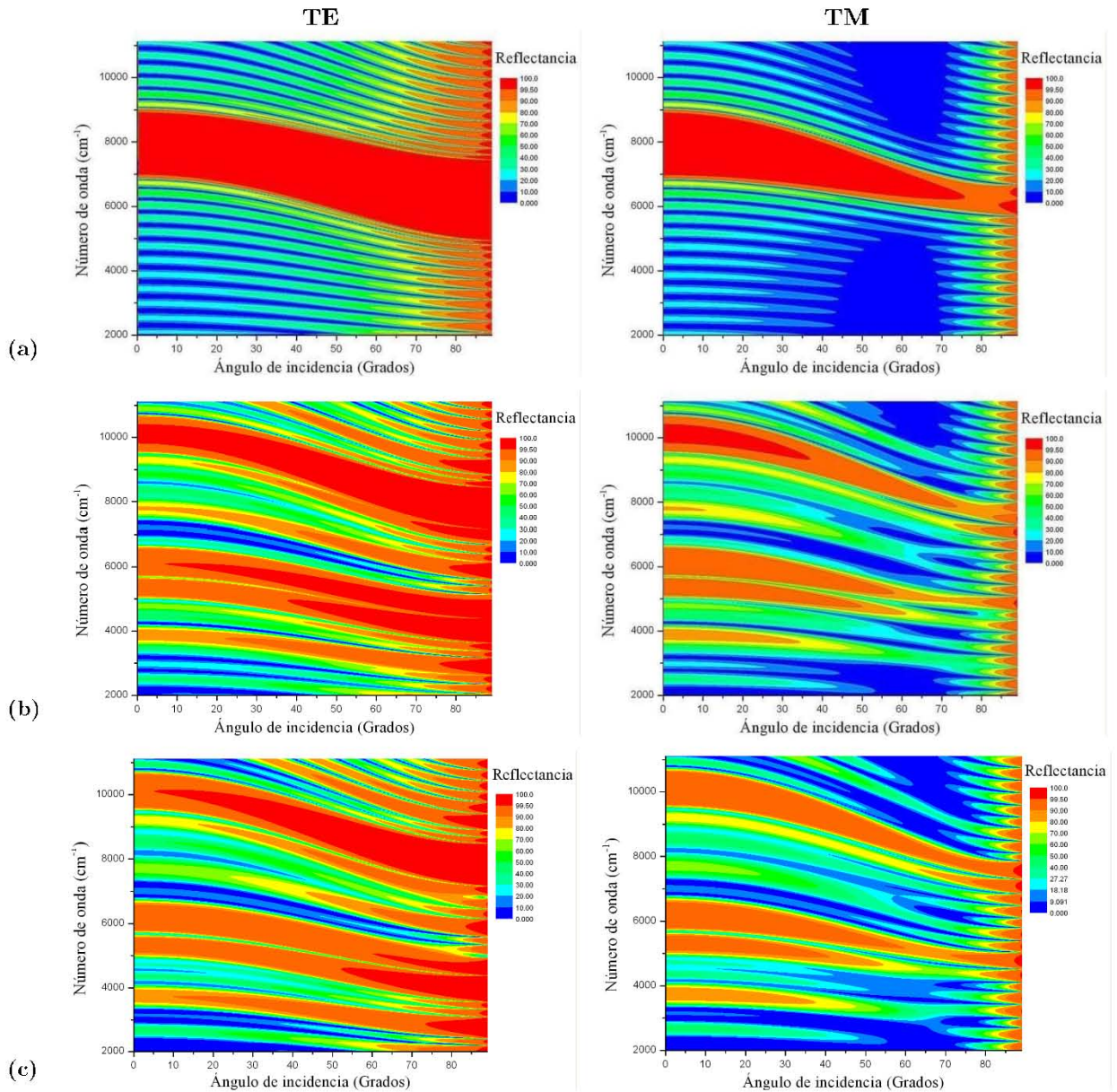
$$S_{TM} : \begin{pmatrix} L \\ S \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L \\ S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} LS \\ SL \end{pmatrix}. \quad (1.65)$$

Cabe mencionar que la secuencia Thue-Morse no es cuasiperiódica, ya que no puede ser obtenida por el método de corte y proyección.

**Tabla 1.1** Secuencias de Fibonacci versus Thue-Morse

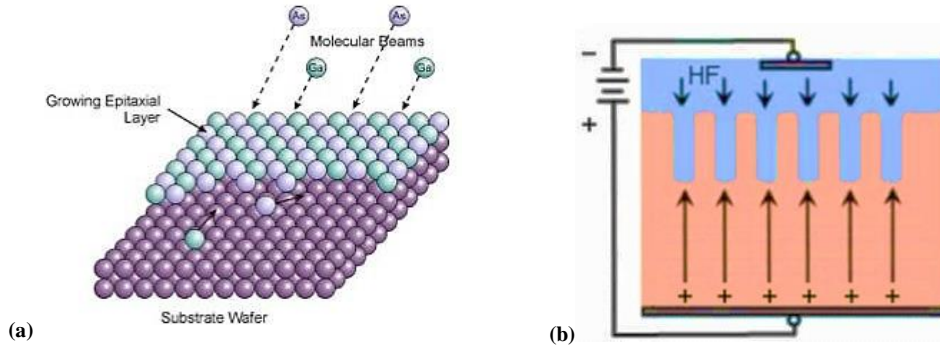
Número de generación ( $n$ )	Secuencia de Fibonacci $S_F(n)$	Secuencia de Thue-Morse $S_{TM}(n)$
0	L	-
1	LS	L
2	LSL	LS
3	LSLLS	LSSL
4	LSLLSLSL	LSSLSLLS
5	LSLLSLSLLSLLS	LSSLSLLSLLSLLS
...	...	...

En la Figura 1.4 se muestran los espectros de reflectancia para ondas polarizadas TE y TM en multicapas con secuencias (a) periódica, (b) de Fibonacci y (c) de Thue-Morse. Los cálculos fueron realizados usando el método de matriz de transferencia descrito en la sección 1.2 para estructuras con dos tipos de capa A y B, en base a silicio poroso de distintas porosidades. El índice de refracción y el espesor de las capas fueron 1.4 y 225 nm para el tipo A, mientras que 2.1 y 150 nm para el tipo B [Palavicini, 2013].



**Figura 1.4** Reflectancia de ondas TE y TM como función del número de onda y el ángulo de incidencia para multicapas con secuencias (a) Periódica, (b) Fibonacci y (c) Thue-Morse.

Existen varios métodos experimentales para la fabricación de multicapas. Uno de los primeros y con alto impacto por su perfección estructural de las multicapas fue el *crecimiento epitaxial por haces moleculares*, MBE por sus siglas en inglés [Cho, 1971]. Éste es realizado en alto vacío depositando capas de distintos materiales sobre un sustrato, como se muestra en la Figura 1.5(a).



**Figura 1.5** Ejemplos de métodos para la fabricación de multicapas. (a) Proceso MBE para GaAs-AlAs (b) Muticapas de silicio poroso mediante ataque electroquímico con ácido fluorhídrico.

Para multicapas fotónicas existe otra forma de fabricación que consiste en modificar el índice de refracción de cada capa mediante la generación de poros cuyo tamaño sea menor que la longitud de onda fotónica. Por ejemplo, para el silicio dopado tipo  $p$  se utiliza el ácido fluorhídrico (HF), donde existe una dirección preferencial de ataque, como se muestra en Figura 1.5(b). El nuevo índice de refracción de la capa puede obtenerse dentro de la teoría de medio efectivo en términos de los índices del aire y del material. En el capítulo siguiente se discuten la óptica no lineal y su manifestación en multicapas semiconductoras.

## Capítulo 2. Óptica no lineal

En la óptica convencional, también conocida como óptica *lineal*, la respuesta de un material es directamente proporcional al campo aplicado, es decir, la relación entre la polarización  $\mathbf{P}$  y el campo eléctrico  $\mathbf{E}$  es de la forma

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi \mathbf{E}, \quad (2.1)$$

donde  $\chi$  es la susceptibilidad eléctrica del material. Esta relación es válida sólo cuando la intensidad de campo aplicado es despreciable comparada con el campo que experimentan los electrones dentro de dicho material. Generalmente en moléculas, sólidos y líquidos el valor de este campo interno es del orden de  $10^9$  V/cm [Mills, 1991]. Sin embargo, desde hace más de un siglo se han observado fenómenos donde la ecuación (2.1) es insuficiente para la explicación de la respuesta óptica. En 1870, J. Kerr demostró que al aplicarles un campo DC de alta intensidad, el índice de refracción de algunos sólidos tales como vidrio templado, cuarzo y resina, podía tener variaciones importantes tales como la birrefringencia, donde el índice de refracción depende de la polarización de la luz incidente. Este fenómeno es conocido ahora como *efecto Kerr DC* [Kerr, 1875]. Una década después F. Pockels estudió el mismo efecto encontrando que el índice de refracción es directamente proporcional al campo aplicado y sólo es observable en cristales que no poseen centro de simetría, en contraste al efecto Kerr donde el cambio del índice de refracción es proporcional al cuadrado del campo aplicado y es observado en líquidos y sólidos amorfos. Hoy en día, cuando la variación de dicho índice es directamente proporcional al campo aplicado ( $\Delta\eta \propto |E|$ ) se conoce como efecto Pockels, mientras que si la dependencia es cuadrática ( $\Delta\eta \propto |E|^2$ ) se le llama efecto Kerr [New, 2007].

Uno de los eventos más importantes en el campo de la óptica no lineal ocurrió en 1961, cuando P. Franken y colaboradores observaron radiación ultravioleta de  $3471 \text{ \AA}$  al atravesar un cristal de cuarzo usando un haz de  $6942 \text{ \AA}$  generado por un cristal de rubí. Este fenómeno se conoce como *generación del segundo armónico* [Shen, 1984]. De hecho, en un sentido estricto se puede decir que todos los materiales son no lineales, ya que los términos no lineales siempre están presentes y en la mayoría de los casos sus contribuciones son pequeñas. En general, se requiere de un campo mínimo alrededor de 1 kV/cm para poder inducir una respuesta no lineal en el medio, por tanto el uso de láseres es casi indispensable para la observación de estos fenómenos. Cuando los efectos no lineales

de un material son comparables con los lineales, dicho material se considera como no lineal.

La importancia de esta rama de la óptica se debe a la posibilidad de manipular la frecuencia de una onda electromagnética al atravesar un medio no lineal, lo cual da pie a las aplicaciones en los dispositivos optoelectrónicos y fotónicos. A continuación se expondrá de forma breve su formulación matemática.

## 2.1 Polarización del medio

Una forma concisa de entender el concepto de óptica no lineal es mediante la generalización de la ecuación (2.1) para la polarización como serie de potencias de  $E$ , ya que generalmente ésta es una función del campo eléctrico [Boyd, 2007],

$$\begin{aligned} P(\mathbf{r}, t) &= \varepsilon_0 \left[ \chi^{(1)} E(\mathbf{r}, t) + \chi^{(2)} E^2(\mathbf{r}, t) + \chi^{(3)} E^3(\mathbf{r}, t) + \dots \right] \\ &= P^{(1)}(\mathbf{r}, t) + P^{(2)}(\mathbf{r}, t) + P^{(3)}(\mathbf{r}, t) + \dots \end{aligned} \quad (2.2)$$

Los términos  $\chi^{(j)}$  y  $P^{(j)}$  en la ecuación (2.2) se conocen respectivamente como susceptibilidad y polarización de orden  $j$ . La expansión (2.2) se fundamenta en el modelo atómico de Lorentz, donde una contribución anarmónica da origen a una serie de potencias del campo [Ubasch, 2007]. En general,  $\chi^{(j)}$  es un tensor de orden  $j + 1$  y por tanto cada componente de la polarización se puede reescribir como [Mills, 1991]

$$P_\alpha(\mathbf{r}, t) = \sum_\beta \chi_{\alpha\beta}^{(1)} E_\beta(\mathbf{r}, t) + \sum_{\beta\gamma} \chi_{\alpha\beta\gamma}^{(2)} E_\beta(\mathbf{r}, t) E_\gamma(\mathbf{r}, t) + \sum_{\beta\gamma\delta} \chi_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(3)} E_\beta(\mathbf{r}, t) E_\gamma(\mathbf{r}, t) E_\delta(\mathbf{r}, t) + \dots \quad (2.3)$$

Sin embargo, en esta tesis se analizarán los casos cuando  $\chi^{(j)}$  son escalares, es decir, para materiales isotrópicos y campos externos unidireccionales. A partir de las ecuaciones de Maxwell se puede escribir la ecuación de onda como

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{P}. \quad (2.4)$$

Reescribiendo la polarización como la suma de las partes lineales y no lineales, es decir  $\mathbf{P} = \mathbf{P}^{(1)} + \mathbf{P}^{NL}$ , se obtiene [Boyd, 2007]

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{D} = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{P}^{NL}, \quad (2.5)$$

donde  $\mathbf{D} \cong \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}^{(1)}$ .

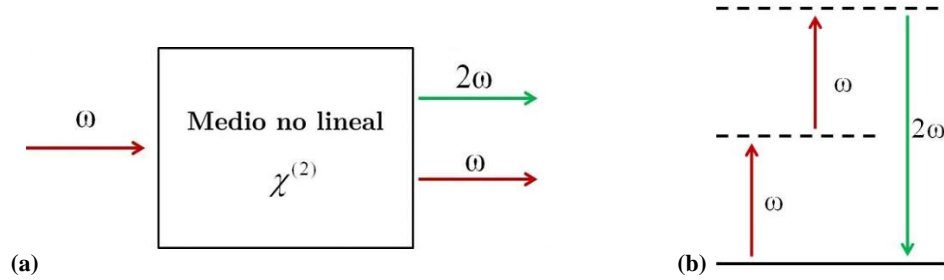
Partimos del caso más sencillo, es decir, consideremos un material con la polarización  $P^{(2)}(\mathbf{r}, t) \neq 0$  y  $P^{(n)}(\mathbf{r}, t) = 0$  para  $n \geq 3$  y un campo eléctrico de la forma

$$E(\mathbf{r}, t) = E(\mathbf{r})e^{-i\omega t} + E^*(\mathbf{r})e^{i\omega t}, \quad (2.6)$$

tal que la polarización de segundo orden está dada por

$$\begin{aligned} P^{(2)}(\mathbf{r}, t) &= \varepsilon_0 \chi^{(2)} E^2(\mathbf{r}, t) \\ &= 2\varepsilon_0 \chi^{(2)} E(\mathbf{r})E^*(\mathbf{r}) + \varepsilon_0 \chi^{(2)} \left[ E^2(\mathbf{r})e^{-i2\omega t} + E^{*2}(\mathbf{r})e^{i2\omega t} \right]. \end{aligned} \quad (2.7)$$

El primer término de la ecuación anterior no depende de la frecuencia  $\omega$  de la onda, mientras que el segundo depende del doble de ésta, es decir  $2\omega$ . Al sustituir (2.7) en la ecuación de onda (2.5) se observa que el primer término de (2.7) no tiene contribución ya que es independiente del tiempo. Sin embargo, dicho término es responsable del proceso de *rectificación óptica*, donde un campo eléctrico estático es generado dentro del material no lineal.



**Figura 2.1** (a) Generación del segundo armónico en un material no lineal (b) Esquema de la absorción simultánea de dos fotones con frecuencia  $\omega$  y la emisión de un fotón con frecuencia  $2\omega$ , donde las líneas sólidas indican los bordes de las bandas de valencia y conducción mientras que la punteada representa estados electrónicos no permitidos en el sólido.

Por otra parte, el segundo término de (2.7) es responsable de la aparición de una onda con frecuencia  $2\omega$ , es decir el *segundo armónico* como se muestra en la Figura 2.1. Cuando Franken y colaboradores probaron la existencia de este fenómeno observaron que la intensidad de dicha onda era muy débil comparada con la intensidad de la onda incidente. El origen de la diferencia entre estas intensidades puede notarse reduciendo la ecuación (2.6) al caso de una onda propagándose en la dirección  $x$ ,

$$E_1(x, t) = E_1 e^{-i(\omega t - k_1 x)} + E_1^* e^{i(\omega t - k_1 x)}, \quad (2.8)$$

donde  $k_1 = \eta(\omega)\omega/c$  es el vector de onda del haz incidente y  $\eta(\omega)$  es el índice de refracción del material que generalmente depende de la frecuencia. La polarización de segundo orden (2.7) se reduce a

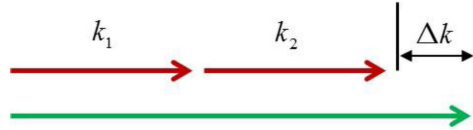


$$P^{(2)}(x, t) = 2\varepsilon_0\chi^{(2)}E_1E_1^* + \varepsilon_0\chi^{(2)}\left[E_1^2e^{-i(2\omega t-2k_1x)} + E_1^{*2}e^{i(2\omega t-2k_1x)}\right]. \quad (2.9)$$

Consideremos dos pequeñas regiones del espacio separadas una distancia  $d$ , entonces la diferencia de fases entre los dipolos de cada región, responsables de generar el segundo armónico, es  $2k_1d$ . La radiación emitida por las dos regiones de dipolos tiene frecuencia  $2\omega$  y se propaga a través del medio con vector de onda  $k_2 = \eta(2\omega)2\omega/c$ . Nótese que cuando se cumple  $k_2 = 2k_1$  la radiación emitida por los dipolos en cada región se encuentran en fase y por tanto, los campos se interfieren de forma constructiva. En resumen, para que la radiación del segundo armónico sea observable, se tiene que cumplir la condición de *empatamiento de fases*, conocida en la literatura por su nombre en inglés *phase matching*, dada por

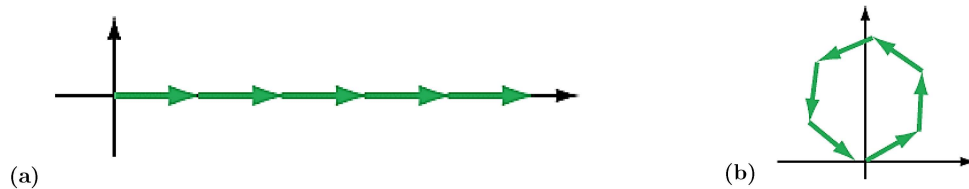
$$\Delta k = k_2 - 2k_1 = 0, \quad (2.10)$$

como se muestra en la Figura 2.2. La ecuación (2.10) se cumple sólo cuando los índices de refracción satisfacen  $\eta(\omega) = \eta(2\omega)$ , es decir, no hay dispersión cromática, cosa que en general no sucede.



**Figura 2.2** Ejemplificación de la condición de *phase matching*, donde se requiere que  $\Delta k = 0$  para el aumento de la intensidad del segundo armónico [Paschotta, 2012].

Por otro lado, las amplitudes ( $\mathbf{E}$ ) de la radiación emitida por cada región del sólido se suman vectorialmente como se muestra en la Figura 2.3, donde dichas amplitudes se adicionan de forma (a) constructiva aumentando su amplitud y (b) destructiva con una amplitud resultante casi cero [Paschotta, 2012]. Cabe mencionar que la condición de *phase matching* expresada en forma vectorial  $\Delta \mathbf{k} = \mathbf{0}$  garantiza la suma constructiva de amplitudes, ya que estos dos vectores son perpendiculares en medios dieléctricos.

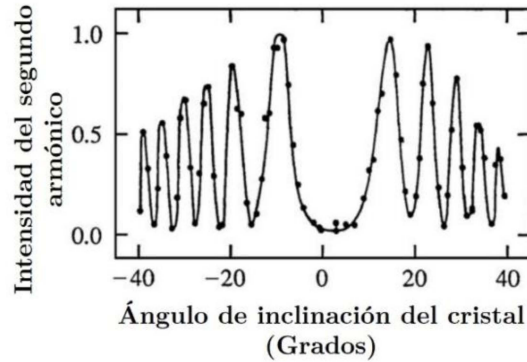


**Figura 2.3** Adición de las contribuciones de diferentes partes del cristal de forma (b) con *phase matching* y (c) sin *phase matching* [Paschotta, 2012].

Si  $\Delta k \neq 0$ , es posible cuantificar el efecto de la discrepancia entre las fases (*mismatch parameter*) mediante la definición de una *longitud de coherencia* dada por [New, 2007]

$$L_C = \frac{\pi}{|\Delta k|} = \frac{\lambda}{4|\eta_2 - \eta_1|}, \quad (2.11)$$

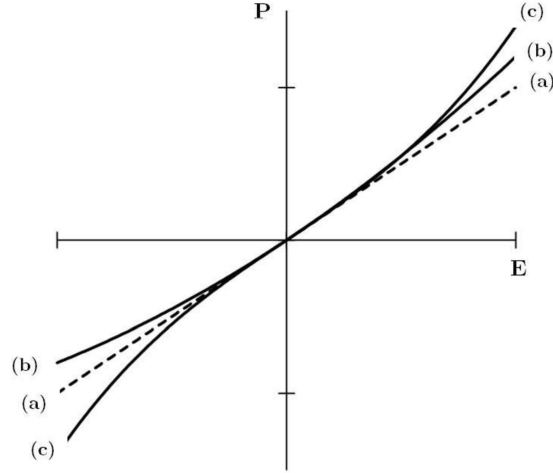
y puede interpretarse como sigue. Supongamos una pequeña región con longitud  $L_C$  de dipolos que generan el segundo armónico interfiriendo de forma constructiva dentro de la región. Para  $x \ll L_C$  los campos crecen directamente proporcional a  $x$  [Mills, 1991]. Conforme  $x$  aumenta más allá de  $L_C$  se tendrá interferencia destructiva por lo que el campo dejará de crecer de forma monótona. De hecho, la combinación de los efectos de las interferencias constructiva y destructiva conduce a un comportamiento oscilante de la intensidad del segundo armónico como función del ángulo de incidencia. Dicho comportamiento se muestra en la Figura 2.4.



**Figura 2.4** Datos experimentales (puntos) de la intensidad del segundo armónico en función del ángulo entre el haz incidente y un cristal KDP en comparación con la teoría (línea sólida). [Maker, 1962]

A continuación, se discutirá la importancia de la simetría estructural de un sólido para la generación de respuestas anarmónicas. Como se vio en la ecuación (2.2), la magnitud de polarización puede expresarse como una suma de potencias del campo eléctrico. A primer orden, la relación entre dichas cantidades es directamente proporcional, es decir, al invertir la dirección del campo aplicado la polarización también lo hará, como se muestra en la Figura 2.5(a).

A segundo orden, la magnitud de la respuesta óptica es distinta dependiendo de la dirección del campo, como se muestra en la curva (b) de la Figura 2.5 para  $\chi^{(2)} > 0$  e incluyendo la contribución lineal. Ahora, consideremos un material con centro de simetría de inversión, conocido como *centrosimétrico*. La magnitud de la respuesta de dicho material es invariante de la dirección del campo aplicado, por lo que la ausencia del centro de simetría es una condición necesaria para tener una respuesta anarmónica de segundo orden [New, 2007].



**Figura 2.5** Comportamiento de la polarización a (a) primer, (b) segundo y (c) tercer orden [New, 2007]

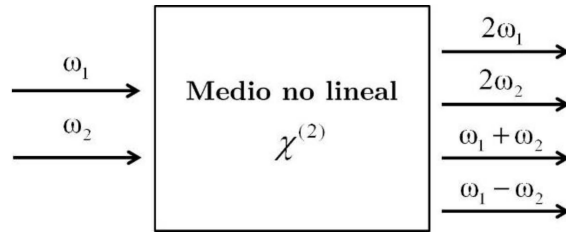
En general, la generación del segundo armónico es un caso particular de las respuestas de segundo orden. Por ejemplo, para el caso de una onda con dos componentes de frecuencia en la misma dirección,

$$E(\mathbf{r}, t) = E_1(\mathbf{r})e^{-i\omega_1 t} + E_2(\mathbf{r})e^{-i\omega_2 t} + \text{complejo conjugado}, \quad (2.12)$$

entonces la polarización a segundo orden es

$$P^{(2)}(\mathbf{r}, t) = 2\varepsilon_0\chi^{(2)}[E_1(\mathbf{r})E_1^*(\mathbf{r}) + E_2(\mathbf{r})E_2^*(\mathbf{r})] + \varepsilon_0\chi^{(2)}[E_1^2(\mathbf{r})e^{-i2\omega_1 t} + E_2^2(\mathbf{r})e^{-i2\omega_2 t} + 2E_1(\mathbf{r})E_2(\mathbf{r})e^{-i(\omega_1+\omega_2)t} + 2E_1(\mathbf{r})E_2^*(\mathbf{r})e^{-i(\omega_1-\omega_2)t} + \text{complejo conjugado}] \quad (2.13)$$

lo cual da origen a distintos fenómenos, tales como la rectificación óptica, la generación del segundo armónico para cada frecuencia,  $\omega_1$  y  $\omega_2$ , la suma y diferencia de frecuencias entre ellas, como se aprecia en la Figura 2.6.



**Figura 2.6** Respuesta de un material con susceptibilidad de segundo orden distinta de cero. En orden descendente, la generación del segundo armónico, la suma y diferencia de frecuencias.

Cabe mencionar que la cantidad de fenómenos no lineales es dependiente del orden de la susceptibilidad  $\chi^{(j)}$  y por tanto de la polarización  $P^{(j)}$ , algunas de las consecuencias de  $j > 2$  se verán en la siguiente sección.

## 2.2 Índice de refracción dependiente de la intensidad

Semejante al caso de segundo orden, cuando consideramos un material con una susceptibilidad de tercer orden  $\vec{\chi}^{(3)}$  tal que la polarización ( $\mathbf{P}$ ) en su forma vectorial está dada por

$$\mathbf{P}^{(3)}(\omega) = \varepsilon_0 \vec{\chi}^{(3)} \mathbf{E}(\omega) \mathbf{E}^*(\omega) \mathbf{E}(\omega). \quad (2.14)$$

Si nos interesan únicamente respuestas que preservan  $\omega$ , las componentes del tensor de susceptibilidad que contribuyen al cambio del índice  $\Delta\eta(\omega)$  son  $\chi_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(3)}(\omega = \omega - \omega + \omega)$ .

Entonces,

$$P_{\alpha}^{(3)}(\omega) = 3\varepsilon_0 \sum_{\beta\gamma\delta} \chi_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(3)}(\omega = \omega - \omega + \omega) E_{\beta}(\omega) E_{\gamma}(\omega) E_{\delta}(\omega), \quad (2.15)$$

donde el factor 3 se debe a la multiplicidad derivada de la ubicación del campo conjugado en (2.14) [Powers, 2011].

Para una onda polarizada y un medio isotrópico, se tiene  $\chi_{1111}^{(3)} = \chi_{2222}^{(3)} = \chi_{3333}^{(3)}$  y en consecuencia, la ecuación (2.14) se convierte en una ecuación escalar. Usando (2.15) el vector de desplazamiento eléctrico  $D = \varepsilon_0 E + P^{(1)} + P^{NL}$  será

$$D(\omega) = \varepsilon_0 E(\omega) \left[ 1 + \chi^{(1)} + 3\chi^{(3)} E(\omega) E^*(\omega) \right] = \varepsilon_0 E(\omega) \left[ 1 + \chi^{(1)} \right] + 3\chi^{(3)} |E(\omega)|^2, \quad (2.16)$$

donde se han suprimido los subíndices de la susceptibilidad y de los campos. Ahora se introduce una función dieléctrica efectiva

$$\varepsilon_{eff}(\omega) = \left[ 1 + \chi^{(1)} \right] + 3\chi^{(3)} |E(\omega)|^2 = \varepsilon^{(1)}(\omega) + 3\chi^{(3)} |E(\omega)|^2, \quad (2.17)$$

tal que el índice de refracción  $\eta = \sqrt{\text{Re}[\varepsilon_{eff}(\omega)]}$  para materiales no magnéticos. Si las contribuciones no lineales son pequeñas en comparación con las lineales ( $\chi^{(3)} \ll \chi^{(1)}$ ), el índice de refracción puede reescribirse como

$$\eta(\omega) = \sqrt{\varepsilon^{(1)}(\omega) \left[ 1 + \frac{3\chi^{(3)} |E(\omega)|^2}{\varepsilon^{(1)}(\omega)} \right]} \approx \eta^L(\omega) \left[ 1 + \frac{3\chi^{(3)} |E(\omega)|^2}{2\eta^L(\omega)} \right] = \eta^L(\omega) + \frac{3\chi^{(3)} |E(\omega)|^2}{2\eta^L(\omega)}, \quad (2.18)$$

donde  $\eta^L = \sqrt{\varepsilon^{(1)}(\omega)}$  es el índice de refracción para el caso lineal. Recordando que la intensidad de una onda electromagnética está definida como el promedio temporal del vector de Poynting  $\langle \mathbf{S} \rangle = I = 2\eta\varepsilon_0 c |E(\omega)|^2$ , entonces el cambio del índice de refracción puede escribirse como

$$\Delta\eta \equiv \eta - \eta^L = \eta^{NL}I, \quad (2.19)$$

donde

$$\eta^{NL} = \frac{3\chi^{(3)}}{4\varepsilon_0 c [\eta^L(\omega)]^2} \quad (2.20)$$

es el índice de refracción no lineal. En unidades MKS la ecuación (2.20) se puede reescribir como [Boyd, 2009]

$$\eta^{NL} \left( \frac{\text{m}^2}{\text{W}} \right) = \frac{3}{4\varepsilon_0 c [\eta^L(\omega)]^2} \chi^{(3)} \cong \frac{282.4}{[\eta^L(\omega)]^2} \chi^{(3)} \left( \frac{\text{m}^2}{\text{V}^2} \right). \quad (2.21)$$

En la Tabla 2.1 se presentan algunos valores típicos de  $\eta^{NL}$ .

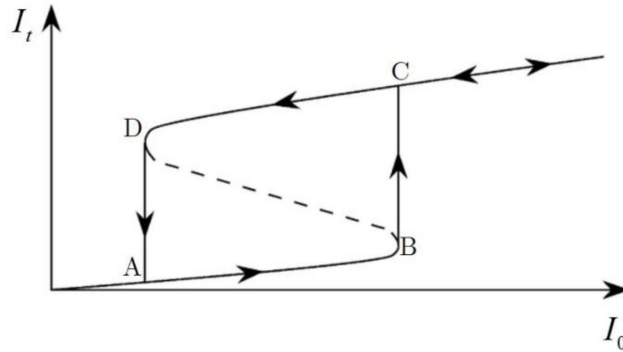
**Tabla 2.1** Valores del índice de refracción no lineal ( $\eta^{NL}$ ) para algunos materiales [Boyd, 2007]

Material	$\eta^L$	$\chi^{(3)}$ (m <sup>2</sup> /V <sup>2</sup> )	$\eta^{NL}$ (cm <sup>2</sup> /W)
Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	1.8	$3.1 \times 10^{-22}$	$2.9 \times 10^{-16}$
CdS	2.34	$9.8 \times 10^{-20}$	$5.1 \times 10^{-14}$
Diamante	2.42	$2.5 \times 10^{-21}$	$1.3 \times 10^{-15}$
GaAs	3.47	$1.4 \times 10^{-18}$	$3.3 \times 10^{-13}$
Ge	4.0	$5.6 \times 10^{-19}$	$9.9 \times 10^{-14}$
LiF	1.4	$6.2 \times 10^{-23}$	$9.0 \times 10^{-17}$
Si	3.4	$2.8 \times 10^{-18}$	$2.7 \times 10^{-14}$
TiO <sub>2</sub>	2.48	$2.1 \times 10^{-20}$	$9.4 \times 10^{-15}$
ZnSe	2.7	$6.2 \times 10^{-20}$	$3.0 \times 10^{-14}$
<b>Líquidos</b>			
Acetona	1.36	$1.5 \times 10^{-21}$	$2.4 \times 10^{-15}$
Benceno	1.5	$9.5 \times 10^{-22}$	$1.2 \times 10^{-15}$
CS <sub>2</sub>	1.63	$3.1 \times 10^{-20}$	$3.2 \times 10^{-14}$
CCl <sub>4</sub>	1.45	$1.1 \times 10^{-21}$	$1.5 \times 10^{-15}$
Diyodometano	1.69	$1.5 \times 10^{-20}$	$1.5 \times 10^{-14}$
Etanol	1.36	$7.7 \times 10^{-22}$	$7.7 \times 10^{-16}$
Metanol	1.33	$6.9 \times 10^{-22}$	$6.9 \times 10^{-16}$
Nitrobenceno	1.56	$6.7 \times 10^{-20}$	$6.7 \times 10^{-14}$
Agua	1.33	$4.1 \times 10^{-22}$	$4.1 \times 10^{-16}$

En general, el índice de refracción depende de la intensidad del campo aplicado y dicha dependencia puede conducir a fenómenos novedosos [Banerjee, 2004]; entre éstos se encuentra tales la biestabilidad óptica que se describirá en detalle en la siguiente sección.

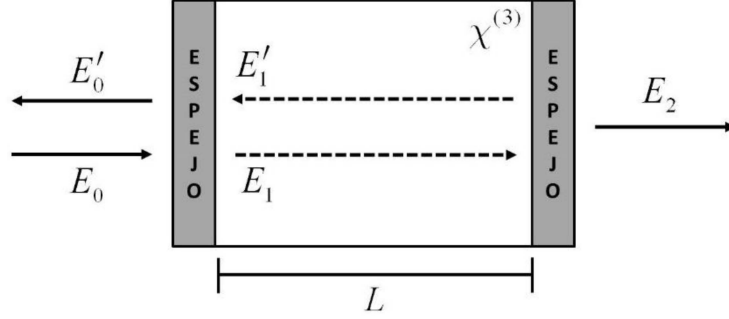
## 2.3 Multiestabilidad óptica

En la literatura, un dispositivo óptico se dice que es *multiestable* si tiene más de un valor de intensidad de la onda transmitida ( $I_t$ ) para un mismo valor de intensidad de la onda incidente ( $I_0$ ). Un caso particular es la *biestabilidad óptica* ejemplificada en la Figura 2.7, donde se muestra una región con dos valores de  $I_t$  para uno de  $I_0$ . A. Szöke planteó teóricamente este fenómeno y lo observó experimentalmente usando un medio de absorción saturable dentro de un resonador de Fabry-Perot [Szöke, 1969]. Posteriormente, H. Gibbs utilizó vapor de sodio (Na) para llenar la cavidad del resonador. Sin embargo, esta vez el fenómeno fue explicado por el cambio del índice de refracción dependiente de la intensidad sin tomar en cuenta los efectos de absorción [Gibbs, 1976]. Actualmente, los dispositivos ópticos biestables no sólo se reproducen en interferómetros de Fabry-Perot, sino también en anillos y otro tipo de cavidades, además pueden clasificarse en dos categorías de acuerdo al material dentro de dicha cavidad. La primera se conoce como de *absorción*, donde el coeficiente de absorción influye en el cambio de la intensidad  $I_t$ . La segunda se denomina de *dispersión*, si el material presenta un índice de refracción dependiente de la intensidad de entrada  $I_0$  también se presentará el fenómeno [He, 1999].



**Figura 2.7** Comportamiento de la intensidad de salida ( $I_t$ ) en función de la de entrada ( $I_0$ ) para un dispositivo óptico *biestable* [Boyd, 2007].

Consideremos un resonador de Fabry-Perot que consiste en dos espejos iguales con coeficientes de transmisión ( $\tau$ ) y reflexión ( $r$ ), y entre ellos un material no lineal de tercer orden, como se muestra en la Figura 2.8.



**Figura 2.8** Amplitudes de la onda incidente ( $E_0$ ), reflejada ( $E'_0$ ), transmitida ( $E_2$ ) y dentro de la cavidad ( $E_1$  y  $E'_1$ ) en un resonador de Fabry-Perot.

Se tiene una onda incidente con amplitud  $E_0$ , entonces los campos en la cavidad  $E_1$  y  $E'_1$  están dados por

$$\begin{aligned} E_1 &= \tau E_0 + r E'_1 \\ E'_1 &= r E_1 e^{i2\phi}, \end{aligned} \quad (2.22)$$

donde  $\phi = 2\pi\eta L/\lambda \cos(\theta)$  y  $\theta$  el ángulo de la onda incidente. Cabe señalar que se ha despreciado la absorción del medio no lineal ya que estamos analizando el caso dispersivo. Despejando  $E_1$  se obtiene

$$E_1 = \frac{\tau E_0}{1 - r^2 e^{i2\phi}}, \quad (2.23)$$

la cual es conocida como ecuación de Airy. En general, se tienen  $r^2 = R e^{i\phi_0}$  y  $\eta = \eta^L + \eta^{NL} I$ , entonces

$$E_1 = \frac{\tau E_0}{1 - R e^{i\delta}}, \quad (2.24)$$

donde  $\delta \equiv \delta_1 + \delta_2 I_1$ , siendo  $\delta_1 = \phi_0 + 2\omega d\eta^L/c$  y  $\delta_2 = 2\omega d\eta^{NL}/c$  las partes lineales y no lineales de la fase, respectivamente. Además, como  $I_j = 2\eta_j \varepsilon_0 c E_j^* E_j$  con  $j = 0, 1$  y  $2$ , multiplicando la ecuación (2.24) por su complejo conjugado, se tiene

$$I_1 = \frac{TI_0}{(1 - R e^{-i\delta})(1 - R e^{i\delta})} = \frac{I_0/T}{1 + 4(R/T^2) \sin^2(\delta/2)}. \quad (2.25)$$

La relación entre la intensidad transmitida total y la interna está dada por  $I_2 = T I_1$ , ya que la transmitancia ( $T$ ) y la reflectancia ( $R$ ) es la misma para ambos espejos. Por lo tanto

$$\frac{I_2}{I_0} = \frac{1}{1 + F \sin^2(\delta/2)} \quad (2.26)$$

con  $F = 4R/T^2$  [He, 1999]. Las intensidades de onda de ida ( $I_1^{\rightarrow}$ ) y vuelta ( $I_1^{\leftarrow}$ ) dentro de la cavidad están dadas por

$$\begin{cases} I_1^{\rightarrow} = \frac{1}{1-R} \frac{1}{1 + F \sin^2(\delta/2)} I_0 \\ I_1^{\leftarrow} = \frac{R}{1-R} \frac{1}{1 + F \sin^2(\delta/2)} I_0 \end{cases}. \quad (2.27)$$

Entonces, la intensidad total en la cavidad ( $I_1$ ) es

$$I_1 = I_1^{\rightarrow} + I_1^{\leftarrow} = \frac{1+R}{1-R} \frac{1}{1 + F \sin^2(\delta/2)} I_0 = \frac{1+R}{1-R} I_2. \quad (2.28)$$

En consecuencia, la transmitancia total ( $T_{tot}$ ) dada por

$$T_{tot} \equiv \frac{I_2}{I_0} = \frac{1-R}{(1+R)I_0} I_1 \quad (2.29)$$

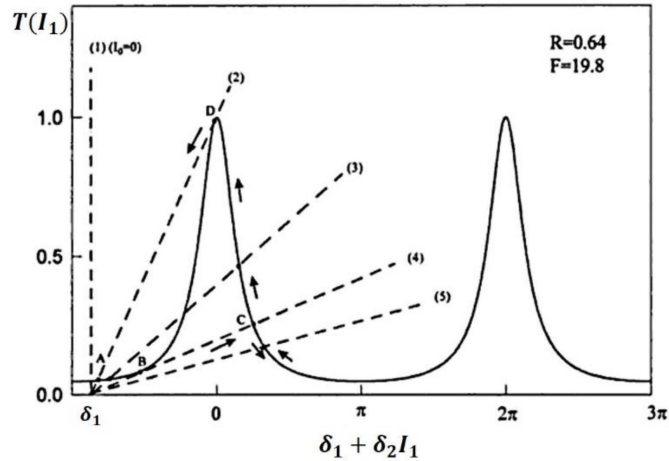
Por otro lado, como  $\delta$  depende de la intensidad, de (2.26) se tiene

$$T_{tot} = \frac{1}{1 + F \sin^2 \left[ \frac{1}{2} (\delta_1 + \delta_2 I_1) \right]} \quad (2.30)$$

Nótese que (2.29) y (2.30) constituyen un sistema de ecuaciones para  $T_{tot}$  e  $I_1$ . Una de las formas para resolver este sistema es el método gráfico, como se muestra en la Figura 2.8 trazando  $T_{tot}$  como función de  $I_1$  en base a las ecuaciones (2.29) y (2.30).

En la Figura 2.9, para un valor fijo de  $\delta_1$ , cuando  $I_0$  crece desde valores cercanos a cero al nivel representado por la recta (2),  $T_{tot}$  se determina por la intersección A. Al continuar el incremento de  $I_0$ ,  $T_{tot}$  crece continuamente siguiendo la solución de menor valor hasta que la intensidad incidente alcanza un valor crítico correspondiente a la línea (4), a partir del cual cambios continuos adicionales de  $T_{tot}$  ya no son posibles debido a que desaparece la solución de menor valor y la de mayor valor se convierte en la solución única. Por lo que la solución de  $T_{tot}$  sufre un salto del menor valor al mayor en dicho punto crítico. Cuando  $I_0$  se sigue incrementando  $T_{tot}$  vuelve a tomar valores continuos.





**Figura 2.9** Solución gráfica para  $T_{tot}$  en función de  $I_1$  de la ecuación (2.30). Las líneas punteadas corresponden a la solución lineal de  $T_{tot}$ , mientras que la curva sólida es la función de la derecha de (2.30), ambas para distintos valores de  $I_0$  [He,1999]

De forma inversa, cuando el valor de  $I_0$  comienza a disminuir desde su nivel máximo, por ejemplo el representado por la recta (5),  $T_{tot}$  realiza un movimiento continuo a lo largo de la misma curva hasta alcanzar otro punto crítico correspondiente al punto D, donde el valor de  $T_{tot}$  presenta un salto hasta el punto A debido a la desaparición de la solución de mayor valor. Después de este salto,  $T_{tot}$  vuelve a tomar cambios continuos como función de  $I_0$ . En resumen, la intensidad de onda transmitida ( $I_2$ ) como función de la de onda incidente ( $I_0$ ) muestra un comportamiento biestable o de *histéresis*, como se muestra en la Figura 2.7.

En general, el requerimiento clave para la biestabilidad óptica es el término no lineal de índice de refracción, cuya magnitud depende de dos factores: el índice de refracción no lineal del material ( $\eta^{NL}$ ) y la intensidad del campo local ( $I$ ). El primero puede alcanzar valores como  $1.9 \times 10^{-8} \text{ cm}^2/\text{W}$  para ZnSe [Ding, 1990] y  $1.5 \times 10^{-8} \text{ cm}^2/\text{W}$  para Rubí ( $\text{Al}_2\text{O}_3:\text{Cr}$ ) [Oliveira, 1994], mientras que el segundo depende de condiciones externas al material, por lo que el uso de láser y el resonador de Fabry-Perot puede intensificar los efectos no lineales.

## Capítulo 3. Biestabilidad óptica

Existen varios métodos para estudiar la óptica no lineal en multicapas. Por ejemplo, el método de *diferencias finitas en el dominio del tiempo* (FDTD, por su nombre en inglés) utilizado para buscar soluciones de las ecuaciones de Maxwell [Chen, 2001]. Por otro lado, en el dominio de frecuencias, la biestabilidad óptica en estructuras unidimensionales con no linealidad Kerr puede formularse a través de la ecuación de Helmholtz no lineal con condiciones a la frontera de dos puntos [Kwan, 2004].

En esta tesis, se presenta un método generalizado de matriz de transferencia para estudiar la biestabilidad óptica. En el Capítulo 1 se describió el método de matriz de transferencia para el caso lineal, así como su funcionamiento para distintas secuencias formadas por dos tipos de capas A y B, periódicas, cuasiperiódicas o aperiódicas, obteniendo la transmitancia y reflectancia de la estructura. La matriz de transferencia de todo el dispositivo puede ser vista como la multiplicación de las matrices de una capa individual, como se vio en las ecuaciones (1.42) y (1.51). Cuando el material es no lineal, en particular de tercer orden ( $\chi^{(3)}$ ), el índice de refracción depende de la intensidad local del campo y en consecuencia la matriz de transferencia también depende del campo que es nuestra variable por conocer y además varía a lo largo del material.

En 1992, J. He y M. Cada propusieron la idea de dividir el material no lineal en  $N$  subcapas ficticias, cuyo espesor es diminuto comparado con la longitud de onda de la luz incidente [He, 1992]. Por lo que la intensidad del campo puede considerarse constante en cada subcapa y el método de matriz de transferencia con elementos dependientes de un campo constante vuelve a ser considerado para el estudio de la biestabilidad óptica. Sin embargo, persiste el problema de la indeterminación del campo debido a la luz reflejada en cada subcapa. En 2003, L. Chen y sus colaboradores encontraron [Chen, 2003] que esta indeterminación puede superarse reformulando el método de matriz de transferencia de forma inversa, es decir, a partir de la intensidad transmitida se pueden obtener las intensidades incidente y reflejada. Discutiremos dicha reformulación con detalle en la sección 3.1 únicamente para ondas polarizadas TE.

### 3.1 Método de matriz de transferencia inversa

Consideremos un material no lineal de tercer orden tal que su índice de refracción depende de la intensidad del campo, el cual dividiremos en  $N$  subcapas, como se muestra en la

Figura 2.3. De las ecuaciones (1.36) y (1.39), los campos de las subcapas  $m$  y  $m - 1$  están relacionados por

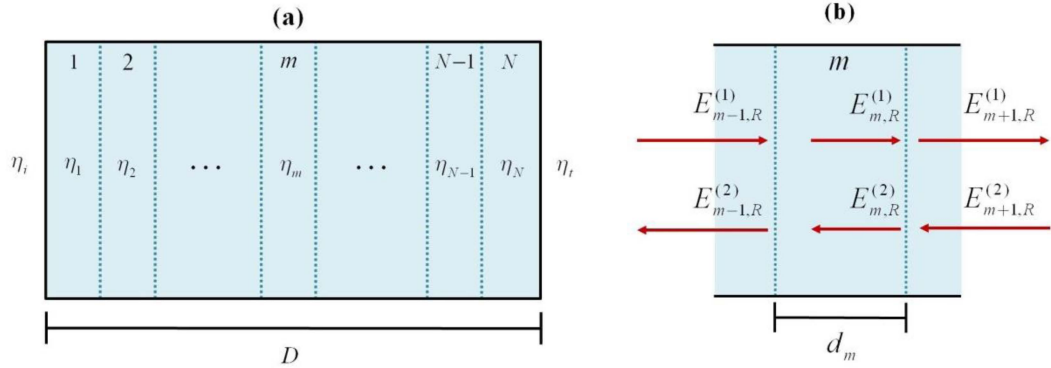
$$\begin{pmatrix} E_{m,R}^{(1)} \\ E_{m,R}^{(2)} \end{pmatrix} = \mathbf{M}_m^{TE} \begin{pmatrix} E_{m-1,R}^{(1)} \\ E_{m-1,R}^{(2)} \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

donde  $\mathbf{M}_m^{TE} = \mathbf{P}_m \mathbf{D}_{m|m-1}^{TE}$  con

$$\mathbf{P}_m = \begin{pmatrix} e^{i\phi_m} & 0 \\ 0 & e^{-i\phi_m} \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

$$\mathbf{D}_{m|m-1}^{TE} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + Z_{m|m-1}^{TE} & 1 - Z_{m|m-1}^{TE} \\ 1 - Z_{m|m-1}^{TE} & 1 + Z_{m|m-1}^{TE} \end{pmatrix}, \quad (3.3)$$

donde  $Z_{m|m-1}^{TE} = \frac{\mu_m \eta_{m-1} \cos \theta_{m-1}}{\mu_{m-1} \eta_m \cos \theta_m}$ .



**Figura 3.1** (a) División ficticia de un material no lineal en  $N$  subcapas donde la intensidad permanece constante. (b) Componentes del campo eléctrico del lado derecho en la  $m$ -ésima subcapa ( $E_{m,R}^{(1)}$  y  $E_{m,R}^{(2)}$ ).

El índice de refracción dependiente de la intensidad en la  $m$ -ésima subcapa puede escribirse en términos del campo total en dicha subcapa

$$\eta_m = \eta_m^L + \eta_m^{NL} I_m = \eta_m^L + \frac{3\chi^{(3)}}{2\eta_m^L} |E_m|^2, \quad (3.4)$$

donde  $E_m = E_{m,R}^{(1)} + E_{m,R}^{(2)}$  es el campo eléctrico del lado derecho en la subcapa  $m$ ,  $\eta_m^L$  y  $\eta_m^{NL}$  corresponden respectivamente a los índices de refracción lineal y no lineal del material. En principio, si se conocieran las componentes iniciales  $E_{0,R}^{(1)}$  y  $E_{0,R}^{(2)}$ , se podrían determinar las finales  $E_{t,L}^{(1)}$  y  $E_{t,L}^{(2)}$ , con esto la intensidad de salida  $I_t$ . Sin embargo, las dos

componentes iniciales están relacionadas entre sí por la ecuación (1.61) con el coeficiente de reflexión  $r$  de todo el material que a su vez depende fuertemente del comportamiento no lineal del medio. Una de las maneras de resolver esta dificultad es recurrir a un algoritmo inverso, es decir, se parte del campo transmitido y a través de las matrices de transferencia se determinan los campos inicial y reflejado.

A continuación se describirá con detalle el algoritmo del método de matriz de transferencia inversa. Supongamos que se conocen el ángulo de salida  $\theta_t$  y las componentes finales del campo  $E_{t,L}^{(1)}$  y  $E_{t,L}^{(2)}$  tal que la segunda es cero. La matriz de la última interfaz entre la subcapa  $N$  y el medio transmitido es

$$\mathbf{D}_{t|N}^{TE} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + Z_{t|N}^{TE} & 1 - Z_{t|N}^{TE} \\ 1 - Z_{t|N}^{TE} & 1 + Z_{t|N}^{TE} \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

Entonces se pueden encontrar las componentes de la  $N$ -ésima usando la inversa de las matrices de (3.5), es decir,

$$\begin{pmatrix} E_{N,R}^{(1)} \\ E_{N,R}^{(2)} \end{pmatrix} = \bar{\mathbf{D}}_{t|N}^{TE} \begin{pmatrix} E_t^{(1)} \\ E_t^{(2)} \end{pmatrix} = \bar{\mathbf{D}}_{t|N}^{TE} \begin{pmatrix} E_t^{(1)} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.6)$$

donde  $\bar{\mathbf{D}}_{t|N}^{TE} = \mathbf{D}_{t|N}^{TE}{}^{-1}$ . Entonces, se tienen

$$\begin{cases} E_{N,R}^{(1)} = \frac{1}{2 \det(\mathbf{D}_{t|N}^{TE})} (Z_{t|N}^{TE} + 1) E_t^{(1)} \\ E_{N,R}^{(2)} = \frac{1}{2 \det(\mathbf{D}_{t|N}^{TE})} (Z_{t|N}^{TE} - 1) E_t^{(1)} \end{cases}. \quad (3.7)$$

De la ecuación (3.5), el determinante de  $\mathbf{D}_{t|N}^{TE}$  es

$$\det(\mathbf{D}_{t|N}^{TE}) = \frac{1}{4} \left[ (1 + Z_{t|N}^{TE})^2 - (1 - Z_{t|N}^{TE})^2 \right] = Z_{t|N}^{TE}, \quad (3.8)$$

entonces el campo total en esa subcapa es

$$E_N = E_{N,R}^{(1)} + E_{N,R}^{(2)} = \frac{1}{2Z_{t|N}^{TE}} \left[ (Z_{t|N}^{TE} + 1) + (Z_{t|N}^{TE} - 1) \right] E_t^{(1)} = E_t^{(1)}. \quad (3.9)$$

Una vez obtenido  $E_N$ , el índice de refracción de la subcapa  $N$  se determina usando (3.4) dada por  $\eta_N = \eta_N^L + 3\chi^{(3)} |E_N|^2 / 2\eta_N^L$  y en consecuencia la fase se calcula mediante

$$\phi_N = 2\pi\eta_N d_N / (\lambda \cos \theta_N). \quad (3.10)$$

Así mismo, en la interfase  $t|N$  el ángulo de incidencia ( $\theta_N$ ) se determina por la ley de Snell dada por

$$\eta_N \sin \theta_N = \eta_t \sin \theta_t, \quad (3.11)$$

donde el ángulo de la luz transmitida ( $\theta_t$ ) se relaciona con el ángulo de la luz incidente ( $\theta_0$ ) a través de  $\eta_0 \sin \theta_0 = \eta_t \sin \theta_t$ .

Para poder construir la matriz  $\mathbf{M}_N^{TE}$ , aún se necesita el índice de refracción  $\eta_{N-1}$ . Sin embargo, se puede obtener el campo total en la subcapa  $N-1$  de la siguiente forma. La matriz  $\mathbf{M}_N^{TE}$  en términos de los elementos  $(d_{ij})_{N|N-1}^{TE}$  de la matriz  $\mathbf{D}_{N|N-1}^{TE}$  es

$$\mathbf{M}_N^{TE} = \begin{pmatrix} e^{i\phi_N} (d_{11})_{N|N-1}^{TE} & e^{i\phi_N} (d_{12})_{N|N-1}^{TE} \\ e^{-i\phi_N} (d_{21})_{N|N-1}^{TE} & e^{-i\phi_N} (d_{22})_{N|N-1}^{TE} \end{pmatrix}, \quad (3.12)$$

donde  $(d_{11})_{N|N-1}^{TE} = (d_{22})_{N|N-1}^{TE} = \frac{1}{2}(1 + Z_{t|N}^{TE})$  y  $(d_{21})_{N|N-1}^{TE} = (d_{12})_{N|N-1}^{TE} = \frac{1}{2}(1 - Z_{t|N}^{TE})$ . El determinante de  $\mathbf{M}_N^{TE}$  está dado por

$$\det(\mathbf{M}_{N,N-1}^{TE}) = \frac{1}{4} \left[ (1 + Z_{N|N-1}^{TE})^2 - (1 - Z_{N|N-1}^{TE})^2 \right] = Z_{t|N}^{TE} = (d_{11})_{N|N-1}^{TE} - (d_{21})_{N|N-1}^{TE}. \quad (3.13)$$

Entonces,

$$\begin{pmatrix} E_{N-1,R}^{(1)} \\ E_{N-1,R}^{(2)} \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(\mathbf{M}_{N,N-1}^{TE})} \begin{pmatrix} e^{-i\phi_N} (d_{22})_{N|N-1}^{TE} & -e^{i\phi_N} (d_{12})_{N|N-1}^{TE} \\ -e^{-i\phi_N} (d_{21})_{N|N-1}^{TE} & e^{i\phi_N} (d_{11})_{N|N-1}^{TE} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{N,R}^{(1)} \\ E_{N,R}^{(2)} \end{pmatrix}, \quad (3.14)$$

y el campo total en la capa  $N-1$  es

$$\begin{aligned} E_{N-1} &= E_{N-1,R}^{(1)} + E_{N-1,R}^{(2)} \\ &= \frac{e^{-i\phi_N} \left[ (d_{22})_{N|N-1}^{TE} - (d_{21})_{N|N-1}^{TE} \right] E_{N,R}^{(1)} + e^{i\phi_N} \left[ (d_{11})_{N|N-1}^{TE} - (d_{12})_{N|N-1}^{TE} \right] E_{N,R}^{(2)}}{\det(\mathbf{M}_{N,N-1}^{TE})} \\ &= e^{-i\phi_N} E_{N,R}^{(1)} + e^{i\phi_N} E_{N,R}^{(2)} \end{aligned} \quad (3.15)$$

De tal forma que a partir de (3.7), (3.10) y (3.15) se determina el campo eléctrico total  $E_{N-1}$  de la subcapa  $N-1$ . Ahora, se repite el procedimiento de (3.9) hasta (3.15) excepto para la subcapa  $N-1$ .

En resumen, el algoritmo recursivo para determinar las matrices de transferencia es el siguiente:

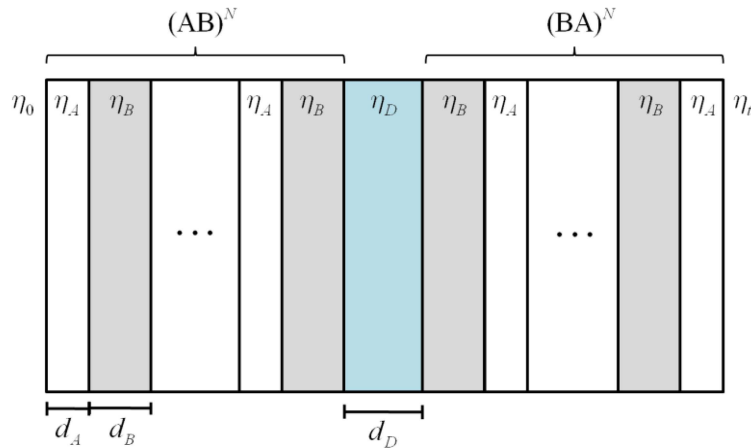
- (1) Proponer un valor de  $E_{t,R}^{(1)}$  y pedir que  $E_{t,R}^{(2)} = 0$ .

- (2) Usar (3.9) para determinar  $E_N$ .
- (3) Usar (3.4), (3.10) y (3.11) para determinar  $\eta_N$ ,  $\theta_N$  y  $\phi_N$ .
- (4) Construir las matrices de interfase  $\mathbf{D}_{\dagger N}^{TE}$  y  $\bar{\mathbf{D}}_{\dagger N}^{TE}$  para determinar  $E_{N,R}^{(1)}$  y  $E_{N,R}^{(2)}$ .
- (5) Usar (3.15) para determinar  $E_{N-1}$ .
- (6) Usar (3.4), (3.10) y (3.11) para determinar  $\eta_{N-1}$ ,  $\theta_{N-1}$  y  $\phi_{N-1}$ .
- (7) Construir las matrices de transferencia  $\mathbf{M}_N^\beta$  y  $\bar{\mathbf{M}}_N^\beta$  para determinar  $E_{N-1,R}^{(1)}$  y  $E_{N-1,R}^{(2)}$ .
- (8) Hacer  $N=N-1$  y regresar al paso (5) hasta llegar a la primera capa.
- (9) Obtener las intensidades de entrada  $I_0$  y reflejada  $I_R$ .

Este algoritmo fue implementado en lenguaje FORTRAN 90 (Apéndice 1) y utilizado para obtener los resultados presentados en las secciones 3.2-3.4.

### 3.2 Resonadores de Fabry-Perot

Como discutimos en la sección 2.3, un resonador de Fabry-Perot consiste en dos espejos confinando un medio óptico que llamaremos *Defecto*, como se esquematiza en la Figura 3.2. En particular, dichos espejos pueden construirse usando multicapas dieléctricas periódicas, ya que dichas multicapas tienen una alta reflectancia en un amplio rango de longitudes de onda, como se vio en la última sección del Capítulo 1.

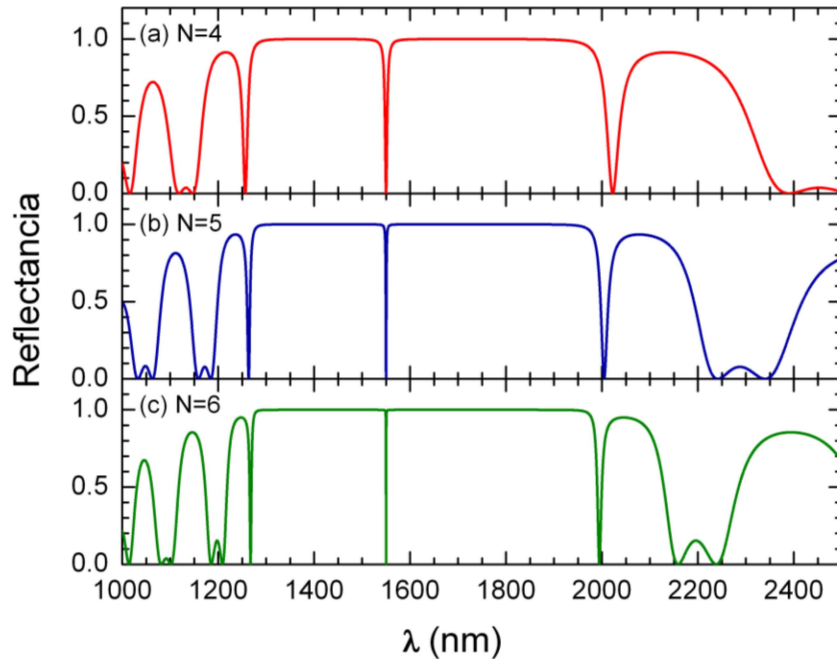


**Figura 3.2** Resonador de Fabry-Perot basado en multicapas dieléctricas periódicas con  $N$  bicapas (AB) en su lado izquierdo y  $N$  bicapas (BA) en su lado derecho.

La estructura mostrada en la Figura 3.2 puede representarse por la notación  $(AB)^N D (BA)^N$ . Usualmente se elige una longitud de onda de resonancia  $\lambda_0$ , tal que los grosores de cada capa cumplan la condición de un cuarto de longitud de onda, es decir,  $d_A = \lambda_0 / 4\eta_A$  y  $d_B = \lambda_0 / 4\eta_B$ . Esto produce que el espectro de reflectancia del dispositivo

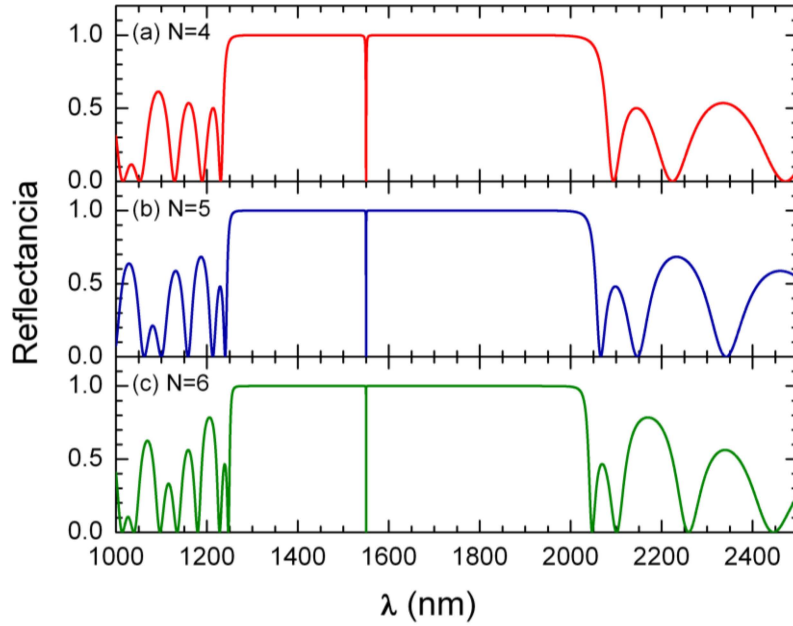
presente un pico prominente para el valor  $\lambda_0$ , el cual depende de dos parámetros esenciales que son el número de bicapas ( $N$ ) y el contraste entre los índices de refracción  $\eta_A$  y  $\eta_B$ .

En la Figura 3.3 se muestran los espectros de reflectancia versus la longitud de onda ( $\lambda$ ) de la luz con incidencia normal a un resonador con número de bicapas (a)  $N = 4$ , (b)  $N = 5$  y (c)  $N = 6$ , para  $\lambda_0 = 1550$  nm,  $\eta_A = 1.3$ ,  $\eta_B = 2.6$ ,  $\eta_D = 2.6$  y  $d_D = \lambda_0 / \eta_D$ . Estos espectros se obtuvieron mediante el método de matriz de transferencia estándar aplicado a un resonador de Fabry-Perot con un defecto óptico lineal. Obsérvese que el ancho del pico en  $\lambda_0$  disminuye conforme se incrementa el número de bicapas. Además, la región cercana a dicho pico se comporta como un espejo casi perfecto cuando el número de bicapas aumenta.



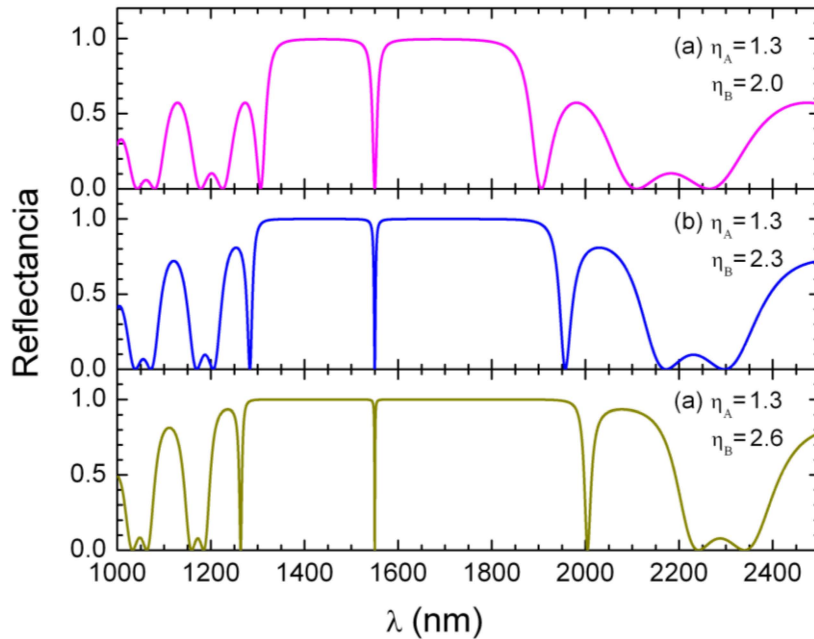
**Figura 3.3** Reflectancia vs la longitud de onda ( $\lambda$ ) para (a)  $N=4$ , (b)  $N=5$  y (c)  $N=6$  bicapas, con índices de refracción  $\eta_A=1.3$ ,  $\eta_B=2.6$ ,  $\eta_D=2.6$  y  $\lambda_0=1550.0$  nm.

Así mismo, en la Figura 3.4 se presenta la reflectancia como función de la longitud de onda ( $\lambda$ ) de la luz con incidencia normal en un dispositivo con los mismos parámetros excepto que ahora  $\eta_A=2.6$  y  $\eta_B=1.3$ . Obsérvese que la banda de reflectancia casi perfecta es más ancha y el pico en 1550 nm es más estrecho en comparación con los correspondientes de la Figura 3.3. En particular, el espejo formado por 4 bicapas tiene una calidad similar a la de 5 bicapas de la Figura 3.3, hecho que podría relacionarse con la existencia de dos interfaces adicionales en este último resonador de Fabry-Perot.



**Figura 3.4** Reflectancia vs la longitud de onda ( $\lambda$ ) para (a)  $N=4$ , (b)  $N=5$  y (c)  $N=6$  bicapas, con índices de refracción  $\eta_A=2.6$ ,  $\eta_B=1.3$ ,  $\eta_D=2.6$  y  $\lambda_0=1550.0$  nm .

Ahora, realizaremos variaciones en el contraste entre los índices  $\eta_A$  y  $\eta_B$  a partir del resonador de la Figura 3.3, manteniendo fijo  $\eta_A = 1.3$ ,  $\lambda_0 = 1550$  nm y  $N = 5$ . La reflectancia versus la longitud de onda ( $\lambda$ ) de la luz con incidencia normal se presentan en la Figura 3.5 para (a)  $\eta_B = 2.0$ , (b)  $\eta_B = 2.3$  y (c)  $\eta_B = 2.6$ .

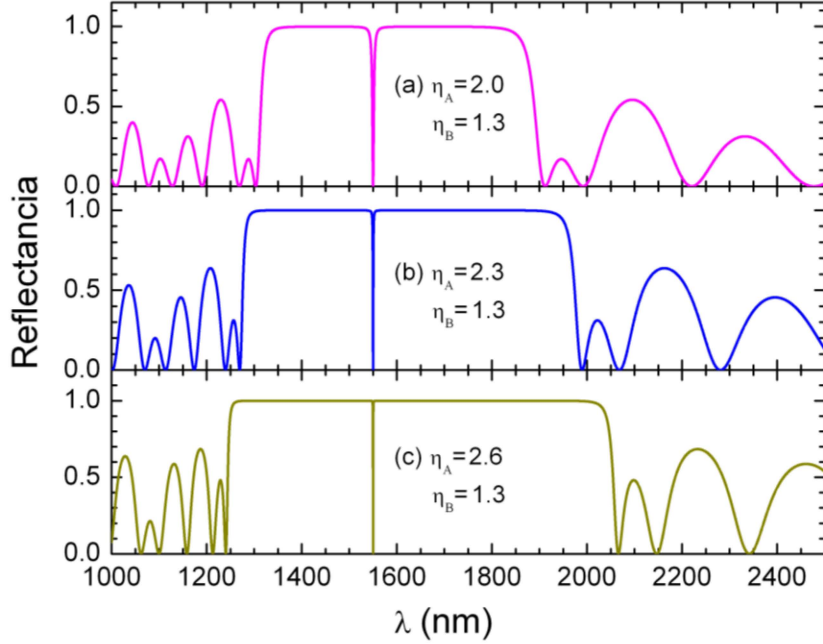


**Figura 3.5** Reflectancia versus longitud de onda ( $\lambda$ ) para el mismo resonador de la Figura 3.3, excepto (a)  $\eta_B=2.0$  (b)  $\eta_B=2.3$  y (c)  $\eta_B=2.6$  para  $N=5$  bicapas.



Nótese en la Figura 3.5 que el ancho del pico en  $\lambda_0$  disminuye cuando aumenta el contraste, similar lo ocurrido cuando aumenta el número de bicapas en la Figura 3.3. Así mismo, al incrementar el contraste, el ancho de la banda de reflectancia casi perfecta aumenta notablemente.

La Figura 3.6 muestra el espectro de reflectancia del mismo resonador que la Figura 3.4 con  $N=5$ , excepto con el índice de refracción (a)  $\eta_A=2.0$ , (b)  $\eta_A=2.3$  y (c)  $\eta_A=2.6$ .



**Figura 3.6** Reflectancia vs longitud de onda ( $\lambda$ ) para el mismo resonador de la Figura 3.4 con  $N=5$ , excepto (a)  $\eta_A=2.0$  (b)  $\eta_A=2.3$  y (c)  $\eta_A=2.6$ .

### 3.3 Resonadores con un medio Kerr

Cuando se introduce un defecto no lineal de tercer orden en el resonador de Fabry-Perot, se observa una biestabilidad óptica que puede ser analizada mediante el método de matriz de transferencia inversa. Sean  $\mathbf{M}_{(AB)^N}^{TE}$  y  $\mathbf{M}_{(BA)^N}^{TE}$  las matrices de transferencia del lado derecho  $(AB)^N$  e izquierdo  $(BA)^N$  del resonador mostrado en la Figura 3.2, tal que

$$\begin{cases} \mathbf{M}_{(AB)^N}^{TE} = \mathbf{M}_{AB,2N}^{TE} \mathbf{M}_{AB,2N-1}^{TE} \cdots \mathbf{M}_{AB,1}^{TE} \\ \mathbf{M}_{(BA)^N}^{TE} = \mathbf{M}_{BA,2N}^{TE} \mathbf{M}_{BA,2N-1}^{TE} \cdots \mathbf{M}_{BA,1}^{TE} \end{cases}, \quad (3.16)$$

donde  $\mathbf{M}_{BA,j}^\beta$  y  $\mathbf{M}_{AB,j}^\beta$  son las matrices de transferencia de la  $j$ -ésima capa. Para el defecto no lineal, se utiliza el modelo de subcapas infinitesimales con campo eléctrico constante en cada una de éstas. La matriz de transferencia del defecto modelado por  $\tilde{N}$  subcapas es

$$\mathbf{M}_D^{TE} = \mathbf{M}_{D,\tilde{N}}^{TE} \mathbf{M}_{D,\tilde{N}-1}^{TE} \cdots \mathbf{M}_{D,1}^{TE}, \quad (3.17)$$

donde  $\mathbf{M}_{D,m}^{TE}$  es la matriz transferencia de la  $m$ -ésima subcapa dada por la ecuación (3.12).

Los campos incidente, reflejado y transmitido están relacionados por el producto

$$\begin{pmatrix} E_t^{(1)} \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{D}_{A|t}^{TE} \mathbf{M}_{(BA)^N}^{TE} \mathbf{M}_D^{TE} \mathbf{M}_{(AB)^N}^{TE} \begin{pmatrix} E_0^{(1)} \\ E_0^{(2)} \end{pmatrix}, \quad (3.18)$$

donde la matriz  $\mathbf{D}_{A|t}^{TE}$  representa la última interfaz del dispositivo entre capa A y el medio de salida  $t$ .

Dentro del formalismo de matriz de transferencia inversa, partiendo de los campos transmitidos  $E_t^{(1)}$  y  $E_t^{(2)} = 0$ , se obtienen los campos de entrada a través de las matrices de transferencia inversa de la forma

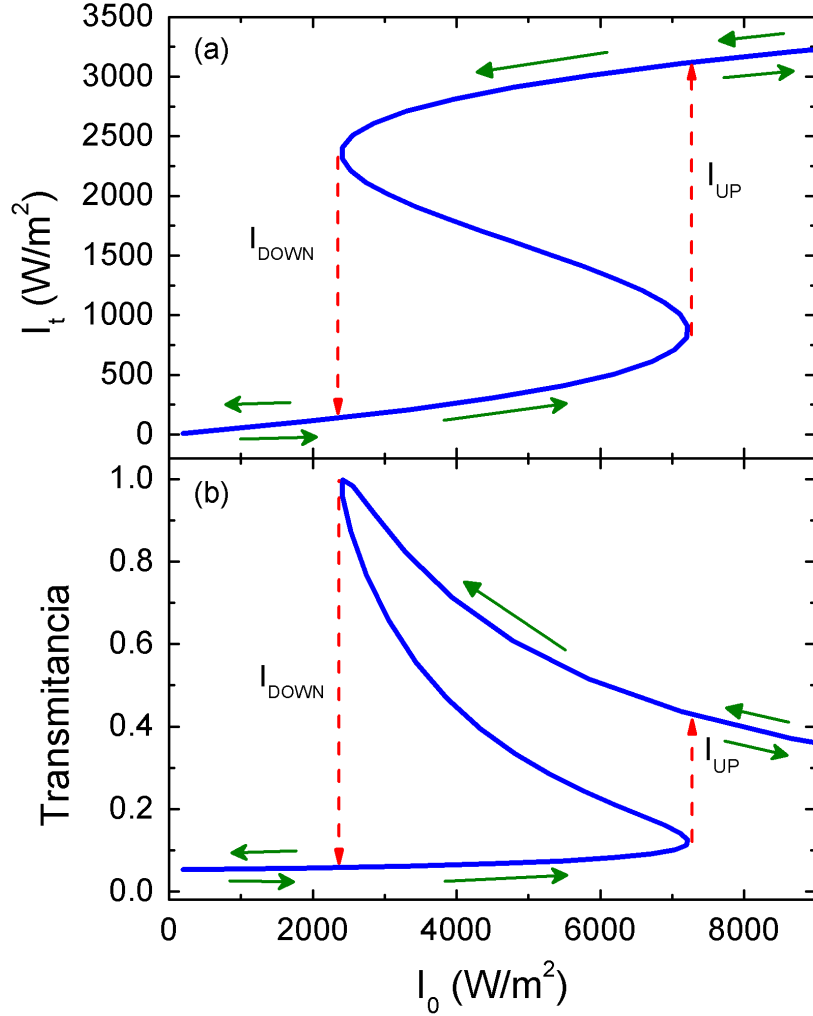
$$\begin{pmatrix} E_0^{(1)} \\ E_0^{(2)} \end{pmatrix} = \bar{\mathbf{M}}_{(AB)^N}^{TE} \bar{\mathbf{M}}_D^{TE} \bar{\mathbf{M}}_{(BA)^N}^{TE} \bar{\mathbf{D}}_{BA,N+1}^{TE} \begin{pmatrix} E_t^{(1)} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.19)$$

Además, las intensidades de luz incidente ( $I_0$ ), reflejada ( $I_R$ ) y transmitida ( $I_t$ ) pueden expresarse en términos de los campos correspondientes como

$$I_0 = \frac{1}{2} c \varepsilon_0 \eta_0 |E_0^{(1)}|^2, \quad I_R = \frac{1}{2} c \varepsilon_0 \eta_0 |E_0^{(2)}|^2 \quad \text{y} \quad I_t = \frac{1}{2} c \varepsilon_0 \eta_t |E_t^{(1)}|^2. \quad (3.20)$$

En la Figura 3.7 se muestra la intensidad de luz transmitida ( $I_t$ ) como función de la incidente ( $I_0$ ) con longitud de onda  $\lambda = \lambda_0 / 0.995$  para el mismo resonador Fabry-Perot de la Figura 3.3 con  $N = 4$  bicapas, excepto que ahora el defecto es un medio no lineal con  $3\chi^{(3)} / 2\eta_D^L = 7.0 \times 10^{-10} (\text{m} / \text{V})^2$  dividido en 1000 subcapas. El índice de refracción del defecto  $\eta_D^L = 2.59$  se eligió ligeramente menor que el de la capa B y su espesor  $d_D = \lambda_0 / \eta_B$ , mientras que la longitud de onda utilizada fue  $\lambda_0 / 0.995$ .

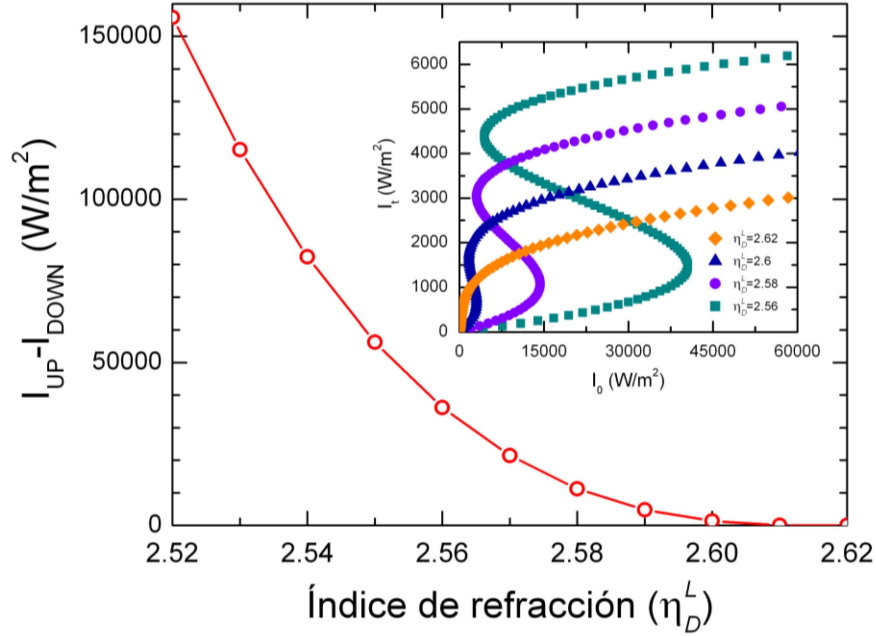
Podemos ver en la Figura 3.7(a) que la región delimitada por las intensidades  $I_{UP}$  e  $I_{DOWN}$  -representada por las flechas rojas- es biestable. En otras palabras, al aumentar  $I_0$  hasta  $I_{UP}$  se registra un salto del valor de  $I_t$ . Por otro lado, al disminuir  $I_0$  hasta  $I_{DOWN}$  se observa una caída del valor de  $I_t$  que puede ser visto también como una caída en la transmitancia, como se muestra en la Figura 3.7 (b).



**Figura 3.7** Comportamiento biestable de una cavidad formada por multicapas con los siguientes parámetros:  $N = 4$ , índices de refracción  $\eta_A = 1.3$ ,  $\eta_B = 2.6$ ,  $\eta_D^L = 2.59$ ,  $3\chi^{(3)}/2\eta_D^L = 7 \times 10^{-10}(\text{m/V})^2$ ,  $\lambda_0 = 1550.0$  nm y  $\lambda = \lambda_0 / 0.995$ .

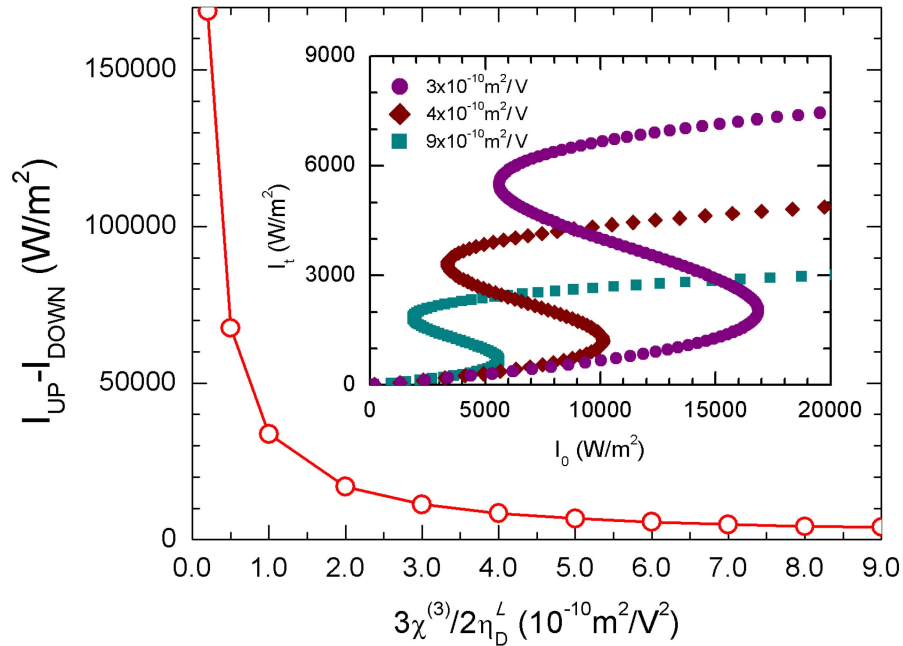
### 3.4 Análisis de la región biestable

A continuación analizaremos el comportamiento de la región delimitada por las intensidades  $I_{UP}$  e  $I_{DOWN}$  cuando varían los parámetros del resonador. En la Figura 3.8 se muestra el tamaño de la región biestable como función del índice de refracción lineal  $\eta_D^L$  para un resonador como el de la Figura 3.7. En su recuadro se ilustran las curvas de histéresis para los valores de  $\eta_D^L = 2.56, 2.58, 2.6$  y  $2.62$ , donde se puede apreciar que conforme  $\eta_D^L$  aumenta, la región biestable disminuye hasta desaparecer, debido a que el camino óptico del defecto excede un cuarto de longitud de onda de la luz. Dicha disminución de la región biestable se resume en la Figura 3.8 principal.



**Figura 3.8** Tamaño de la región biestable vs el índice de refracción del defecto ( $\eta_D^L$ ) para el mismo resonador de Figura 3.7. En el recuadro se muestran las curvas de histéresis para  $\eta_D^L = 2.62$  (rombos), 2.6 (triángulos), 2.58 (círculos) y 2.56 (cuadrados).

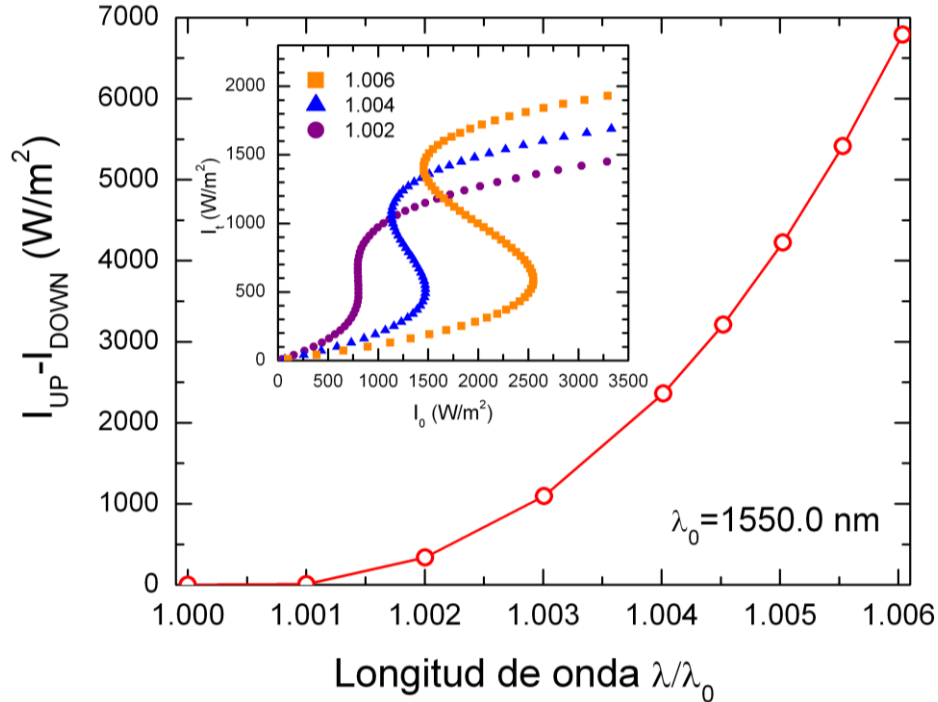
En la Figura 3.9 se muestran el tamaño de la zona biestable versus el coeficiente no lineal del índice de refracción  $3\chi^{(3)}/2\eta_D^L$  para el mismo resonador de la Figura 3.7.



**Figura 3.9** Tamaño de la región biestable vs el coeficiente no lineal  $3\chi^{(3)}/2\eta_D^L$  para el mismo resonador de la Figura 3.7. En el recuadro se muestran las curvas de histéresis para  $3\chi^{(3)}/2\eta_D^L = 3 \times 10^{-10}$  (círculos),  $4 \times 10^{-10}$  (rombos) y  $9 \times 10^{-10}$  (cuadrados)  $\text{m}^2/\text{V}^2$ .

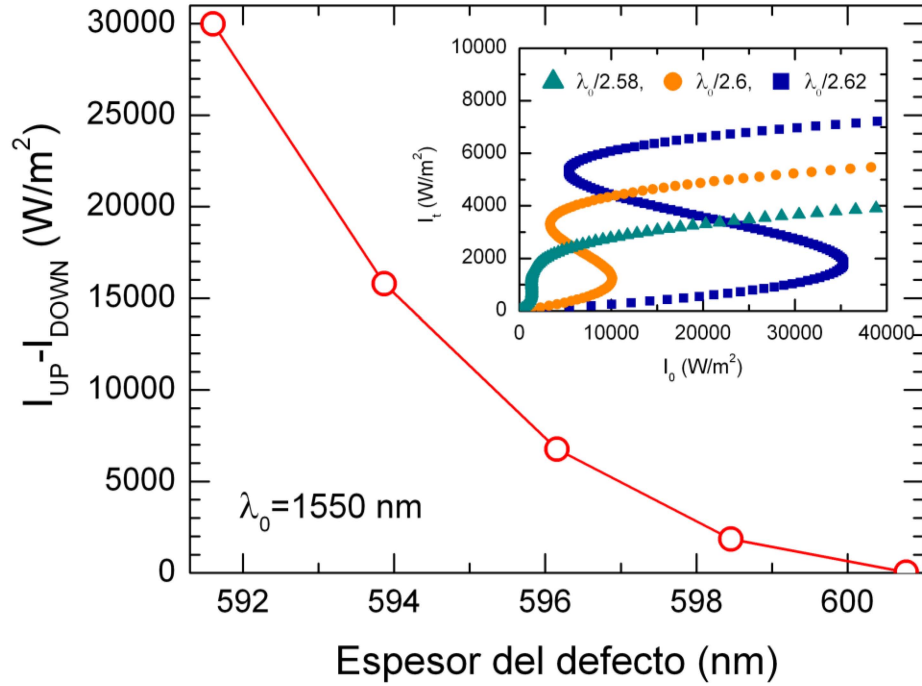
En la Figura 3.9 nótese que cuando el coeficiente no lineal del índice de refracción del defecto disminuye, el tamaño de la región biestable diverge ya que se requiere mayor intensidad de la luz incidente para conseguir el salto en la transmitancia.

En el resonador de la Figura 3.7 hemos elegido una longitud de onda incidente  $\lambda = \lambda_0 / 0.995$  ligeramente mayor que la de resonancia ( $\lambda_0$ ). En la Figura 3.10 se presenta el tamaño de la zona biestable en función de la longitud de onda incidente ( $\lambda$ ) normalizada por la de resonancia ( $\lambda_0$ ) para el mismo resonador de la Figura 3.7. Observe que cuando  $\lambda = \lambda_0$ , la transmitancia es máxima, por lo que la biestabilidad no se presenta. Al incrementar  $\lambda/\lambda_0$ , la región biestable aumenta debido a que para estos valores de  $\lambda$  se requiere una mayor intensidad de la luz incidente para que la posición del pico de resonancia de la Figura 3.3(a) coincida con  $\lambda$ .



**Figura 3.10** Tamaño de la región biestable vs la longitud de onda incidente ( $\lambda$ ) para el mismo resonador de la Figura 3.7. En el recuadro se muestran las curvas de histéresis para  $\lambda / \lambda_0 = 1.002$  (círculos), 1.004 (triángulos) y 1.006 (cuadrados).

Por último, el espesor del defecto no lineal del resonador Fabry-Perot fue elegido para que el camino óptico de dicho medio sea una longitud de onda si su índice de refracción fuese igual al de la capa B. La Figura 3.10 muestra la variación del ancho de la zona biestable como función del espesor del defecto, para el mismo resonador de la Figura 3.7.



**Figura 3.11** Tamaño de la región biestable vs el espesor del defecto ( $d_D$ ) para el mismo resonador de la Figura 3.7. En el recuadro se muestran las curvas de histéresis para  $d_D = \lambda_0 / 2.58$  (triángulos),  $\lambda_0 / 2.6$  (círculos) y  $\lambda_0 / 2.62$  (cuadrados).

Podemos ver en la Figura 3.10 que el tamaño de la región biestable es sensible a las variaciones en el espesor del defecto. Cabe mencionar que la parte lineal del índice de refracción del defecto es 2.59 y para el caso de  $d_D = \lambda_0 / 2.58$ , el camino óptico es mayor que una longitud de onda, mientras que para  $d_D = \lambda_0 / 2.6$  se requiere una contribución de la parte no lineal del índice de refracción para que su camino óptico sea una longitud de onda. Más aún, dicha contribución debe ser mayor para el caso de  $d_D = \lambda_0 / 2.62$ .

## Conclusiones

En esta tesis se presenta una generalización del método de matriz de transferencia que originalmente se utiliza para estudiar fenómenos ópticos lineales. Dicha generalización consiste en invertir las matrices de transferencia obteniendo la intensidad de la luz incidente y reflejada como función de la transmitida. Utilizando este método, hemos analizado la biestabilidad óptica en resonadores de Fabry-Perot basados en multicapas dieléctricas con un defecto óptico no lineal de tercer orden en su cavidad. Las principales conclusiones de esta tesis son las siguientes.

1. El método de matriz de transferencia inversa aunado a la propuesta de dividir el defecto óptico no lineal en un número grande de subcapas parece ser un camino efectivo para predecir la biestabilidad óptica en resonadores.
2. Los resultados muestran que la biestabilidad óptica ocurre únicamente con parámetros que se encuentran en intervalos de tamaño reducido.
3. El análisis de la biestabilidad óptica con respecto a los parámetros del resonador confirma que dicha biestabilidad se relaciona con la forma y ubicación del pico de resonancia en el espectro de reflectancia.
4. Este estudio podría ser útil en la búsqueda de resonadores de Fabry-Perot con un número mínimo de capas dieléctricas, así como una mínima intensidad de luz incidente para observar la biestabilidad óptica.

Por último, quisiera enfatizar que los resultados de esta tesis servirán para el diseño y construcción de un resonador de Fabry-Perot basado en multicapas de silicio poroso con índice de refracción determinado por la porosidad, introduciendo en los poros líquidos con una respuesta óptica no lineal significativa.

# Apéndice 1

Este Apéndice muestra el programa en lenguaje FORTRAN 90 utilizado para realizar los cálculos del Capítulo 3. Dicho programa fue desarrollado con el fin de calcular la intensidad de entrada ( $I_0$ ) para cada valor dado de la transmitida ( $I_t$ ) usando el método de matriz de transferencia inversa para un resonador Fabry-Perot con un medio Kerr. La segunda parte del programa calcula la reflectancia de un resonador con defecto óptico lineal mediante la matriz de transferencia estándar, independiente de la intensidad de la luz incidente.

```
PROGRAM ABen2 D BAen2 PARA TE
  implicit none
  INTEGER ND,N1,N2,NC,i,j,k,L,m
  REAL C,PI,EPS0,LMBD,QA,QB,Q0,QF,QAB(1000),QBA(1000),QD(10000)
  REAL DA,DB,DBA(1000),DAB(1000),DD,ZBA(1000),ZAB(1000),ZD(10000)
  REAL FBA(1000),FAB(1000),FD(10000),DTOT
  REAL WI(2,2),QD0,QD2,IT0,ITF,ITR,IT0T,XI3,TT,DET
  COMPLEX IM,EBA(1000,2),EAB(1000,2),ED(10000,2),EDT(10000)
  COMPLEX MBAI(1000,2,2),MABI(1000,2,2),MDI(10000,2,2),CT
  COMPLEX MDT(10000,2,2),MABT(1000,2,2),MBAT(1000,2,2)

  OPEN(1,file="9p.dat")
9  FORMAT(I5,6E12.4)
  C=299792458.0          ! m/s
  PI=4.0*atan(1.0)
  EPS0=8.8541878171E-12  ! F/m
  IM=CMPLX(0.0,1.0)

  N2=4                  !NUMERO DE BICAPAS
  ND=1000               !NUMERO DE SUBCAPAS
  DTOT=1550.0E-9/(2.6)
  DD=DTOT/ND

  Q0=1.0
  QA=1.3
  DA=(1550.0E-9)/(4*QA)
  QB=2.6
  DB=(1550.0E-9)/(4*QB)
  QD0=2.59
  QD2=7.0E-10
  QF=1.0

  LMBD=1550.0E-9/0.995

  C-----PARTE DE DEFECTO KERR-----
  DO 10 i=1,N2          !INDICES DE REFRACCION
  QBA(2*i-1)=QB
  DBA(2*i-1)=DB
```



```

QBA(2*i)=QA
DBA(2*i)=DA

QAB(2*i-1)=QA
DAB(2*i-1)=DA
QAB(2*i)=QB
DAB(2*i)=DB
QAB(0)=Q0

DO 100 j=1,1000
ITF=10.0+(j-1)*100.0
EBA(2*N2+1,1)=CMPLX(sqrt(2*ITF/(C*EPS0*QF)),0.0)
EBA(2*N2+1,2)=CMPLX(0.0,0.0)

WI(1,1)=0.5*(1.0+QF/QBA(2*N2))      !MATRIZ DE ULTIMA INTERFAZ
WI(1,2)=0.5*(1.0-QF/QBA(2*N2))
WI(2,1)=0.5*(1.0-QF/QBA(2*N2))
WI(2,2)=0.5*(1.0+QF/QBA(2*N2))
EBA(2*N2,1)=WI(1,1)*EBA(2*N2+1,1)+WI(1,2)*EBA(2*N2+1,2)
EBA(2*N2,2)=WI(2,1)*EBA(2*N2+1,1)+WI(2,2)*EBA(2*N2+1,2)

DO 20 i=2*N2,2,-1                    !ESPEJO (BA)^N2
FBA(i)=2.0*PI*QBA(i)*DBA(i)/LMBD
ZBA(i)=QBA(i)/QBA(i-1)              !Z INTERFAZ i,i-1
MBAI(i,1,1)=0.5*(1.0+ZBA(i))*CMPLX(cos(FBA(i)),-sin(FBA(i)))
MBAI(i,1,2)=0.5*(1.0-ZBA(i))*CMPLX(cos(FBA(i)),sin(FBA(i)))
MBAI(i,2,1)=0.5*(1.0-ZBA(i))*CMPLX(cos(FBA(i)),-sin(FBA(i)))
MBAI(i,2,2)=0.5*(1.0+ZBA(i))*CMPLX(cos(FBA(i)),sin(FBA(i)))

EBA(i-1,1)=MBAI(i,1,1)*EBA(i,1)+MBAI(i,1,2)*EBA(i,2)
EBA(i-1,2)=MBAI(i,2,1)*EBA(i,1)+MBAI(i,2,2)*EBA(i,2)
CONTINUE

FBA(1)=2*PI*DBA(1)*QBA(1)/LMBD
EDT(ND)=EBA(1,1)*CMPLX(cos(FBA(1)),-sin(FBA(1)))  !ART CHINO
&+EBA(1,2)*CMPLX(cos(FBA(1)),sin(FBA(1)))

QD(ND)=QD0+QD2*(EDT(ND)*CONJG(EDT(ND)))
ZBA(1)=QBA(1)/QD(ND)
MBAI(1,1,1)=0.5*(1.0+ZBA(1))*CMPLX(cos(FBA(1)),-sin(FBA(1)))
MBAI(1,1,2)=0.5*(1.0-ZBA(1))*CMPLX(cos(FBA(1)),sin(FBA(1)))
MBAI(1,2,1)=0.5*(1.0-ZBA(1))*CMPLX(cos(FBA(1)),-sin(FBA(1)))
MBAI(1,2,2)=0.5*(1.0+ZBA(1))*CMPLX(cos(FBA(1)),sin(FBA(1)))

ED(ND,1)=MBAI(1,1,1)*EBA(1,1)+MBAI(1,1,2)*EBA(1,2)
ED(ND,2)=MBAI(1,2,1)*EBA(1,1)+MBAI(1,2,2)*EBA(1,2)

DO 30 i=ND,2,-1                      !DEFECTO KERR
FD(i)=2.0*PI*QD(i)*DD/LMBD
EDT(i-1)=ED(i,1)*CMPLX(cos(FD(i)),-sin(FD(i)))  !ART CHINO
&+ED(i,2)*CMPLX(cos(FD(i)),sin(FD(i)))
QD(i-1)=QD0+QD2*(EDT(i-1)*CONJG(EDT(i-1)))
ZD(i)=QD(i)/QD(i-1)

```

```

MDI(i,1,1)=0.5*(1.0+ZD(i))*CMPLX(cos(FD(i)),-sin(FD(i)))
MDI(i,1,2)=0.5*(1.0-ZD(i))*CMPLX(cos(FD(i)),sin(FD(i)))
MDI(i,2,1)=0.5*(1.0-ZD(i))*CMPLX(cos(FD(i)),-sin(FD(i)))
MDI(i,2,2)=0.5*(1.0+ZD(i))*CMPLX(cos(FD(i)),sin(FD(i)))

ED(i-1,1)=MDI(i,1,1)*ED(i,1)+MDI(i,1,2)*ED(i,2)
ED(i-1,2)=MDI(i,2,1)*ED(i,1)+MDI(i,2,2)*ED(i,2)

30

FD(1)=2.0*PI*QD(1)*DD/LMBD
ZD(1)=QD(1)/QAB(2*N2)
MDI(1,1,1)=0.5*(1.0+ZD(1))*CMPLX(cos(FD(1)),-sin(FD(1)))
MDI(1,1,2)=0.5*(1.0-ZD(1))*CMPLX(cos(FD(1)),sin(FD(1)))
MDI(1,2,1)=0.5*(1.0-ZD(1))*CMPLX(cos(FD(1)),-sin(FD(1)))
MDI(1,2,2)=0.5*(1.0+ZD(1))*CMPLX(cos(FD(1)),sin(FD(1)))

EAB(2*N2,1)=MDI(1,1,1)*ED(1,1)+MDI(1,1,2)*ED(1,2)
EAB(2*N2,2)=MDI(1,2,1)*ED(1,1)+MDI(1,2,2)*ED(1,2)

DO 40 i=2*N2,1,-1          !ESPEJO (AB)^N
FAB(i)=2.0*PI*QAB(i)*DAB(i)/LMBD
ZAB(i)=QAB(i)/QAB(i-1)      !Z INTERFAZ i,i-1
MABI(i,1,1)=0.5*(1.0+ZAB(i))*CMPLX(cos(FAB(i)),-sin(FAB(i)))
MABI(i,1,2)=0.5*(1.0-ZAB(i))*CMPLX(cos(FAB(i)),sin(FAB(i)))
MABI(i,2,1)=0.5*(1.0-ZAB(i))*CMPLX(cos(FAB(i)),-sin(FAB(i)))
MABI(i,2,2)=0.5*(1.0+ZAB(i))*CMPLX(cos(FAB(i)),sin(FAB(i)))

EAB(i-1,1)=MABI(i,1,1)*EAB(i,1)+MABI(i,1,2)*EAB(i,2)
EAB(i-1,2)=MABI(i,2,1)*EAB(i,1)+MABI(i,2,2)*EAB(i,2)

40

IT0=0.5*C*EPS0*Q0*(EAB(0,1))*CONJG(EAB(0,1))
ITR=0.5*C*EPS0*Q0*(EAB(0,2))*CONJG(EAB(0,2))
WRITE(*,5) IT0,ITF
WRITE(1,5) IT0,ITF
5
FORMAT(2F25.1,F12.1)

C-----PRODUCTO DE MATRICES PARA REFLECTANCIA-----
L=2*N2
MBAT(2*N2,1,1)=MBAI(2*N2,1,1)*WI(1,1)+MBAI(2*N2,1,2)*WI(2,1)
MBAT(2*N2,1,2)=MBAI(2*N2,1,1)*WI(1,2)+MBAI(2*N2,1,2)*WI(2,2)
MBAT(2*N2,2,1)=MBAI(2*N2,2,1)*WI(1,1)+MBAI(2*N2,2,2)*WI(2,1)
MBAT(2*N2,2,2)=MBAI(2*N2,2,1)*WI(1,2)+MBAI(2*N2,2,2)*WI(2,2)

DO 50 i=2*N2-1,1,-1
MBAT(i,1,1)=MBAI(i,1,1)*MBAT(i+1,1,1)+MBAI(i,1,2)*MBAT(i+1,2,1)
MBAT(i,1,2)=MBAI(i,1,1)*MBAT(i+1,1,2)+MBAI(i,1,2)*MBAT(i+1,2,2)
MBAT(i,2,1)=MBAI(i,2,1)*MBAT(i+1,1,1)+MBAI(i,2,2)*MBAT(i+1,2,1)
MBAT(i,2,2)=MBAI(i,2,1)*MBAT(i+1,1,2)+MBAI(i,2,2)*MBAT(i+1,2,2)

50

MDT(ND,1,1)=MDI(ND,1,1)*MBAT(1,1,1)+MDI(ND,1,2)*MBAT(1,2,1)
MDT(ND,1,2)=MDI(ND,1,1)*MBAT(1,1,2)+MDI(ND,1,2)*MBAT(1,2,2)
MDT(ND,2,1)=MDI(ND,2,1)*MBAT(1,1,1)+MDI(ND,2,2)*MBAT(1,2,1)
MDT(ND,2,2)=MDI(ND,2,1)*MBAT(1,1,2)+MDI(ND,2,2)*MBAT(1,2,2)

```

```

DO 60 i=ND-1,1,-1
MDT(i,1,1)=MDI(i,1,1)*MDT(i+1,1,1)+MDI(i,1,2)*MDT(i+1,2,1)
MDT(i,1,2)=MDI(i,1,1)*MDT(i+1,1,2)+MDI(i,1,2)*MDT(i+1,2,2)
MDT(i,2,1)=MDI(i,2,1)*MDT(i+1,1,1)+MDI(i,2,2)*MDT(i+1,2,1)
60  MDT(i,2,2)=MDI(i,2,1)*MDT(i+1,1,2)+MDI(i,2,2)*MDT(i+1,2,2)

MABT(L,1,1)=MABI(L,1,1)*MDT(1,1,1)+MABI(L,1,2)*MDT(1,2,1)
MABT(L,1,2)=MABI(L,1,1)*MDT(1,1,2)+MABI(L,1,2)*MDT(1,2,2)
MABT(L,2,1)=MABI(L,2,1)*MDT(1,1,1)+MABI(L,2,2)*MDT(1,2,1)
MABT(L,2,2)=MABI(L,2,1)*MDT(1,1,2)+MABI(L,2,2)*MDT(1,2,2)

DO 70 i=2*N2-1,1,-1
MABT(i,1,1)=MABI(i,1,1)*MABT(i+1,1,1)+MABI(i,1,2)*MABT(i+1,2,1)
MABT(i,1,2)=MABI(i,1,1)*MABT(i+1,1,2)+MABI(i,1,2)*MABT(i+1,2,2)
MABT(i,2,1)=MABI(i,2,1)*MABT(i+1,1,1)+MABI(i,2,2)*MABT(i+1,2,1)
70  MABT(i,2,2)=MABI(i,2,1)*MABT(i+1,1,2)+MABI(i,2,2)*MABT(i+1,2,2)

CT=1/MABT(1,1,1)
TT=CT*CONJG(CT)
IT0=ITF/TT
C   WRITE(*,*) j/2,1-TT
C   WRITE(1,*) j/2,1-TT
DET=MABT(1,1,1)*MABT(1,2,2)-MABT(1,2,1)*MABT(1,1,2)
C   WRITE(*,5) IT0,ITF,DET
100 CONTINUE
END PROGRAM

```

## Referencias

- [**Banerjee, 2004**] P. P. Banerjee, *Nonlinear Optics: Theory, Numerical Modeling and Applications*, (Marcel Dekker, Inc., Nueva York USA, 2004). p. 101
- [**Boyd, 2007**] R. W. Boyd, *Nonlinear Optics*, 3<sup>ra</sup> Ed. (Academic Press, 2007). Cap. 1, 4 y 7.
- [**Chen, 2001**] L. Chen, X. Deng y W. Q. Ding, *Low Threshold Bistable Switching by the Nonlinear One-Dimensional Photonic Crystal*, Chinese Physical Letters **19**, 798-800 (2001).
- [**Chen, 2003**] L. Chen, W. Ding, W. Li, Y. Zhang, Y. Song y S. Liu, *Transfer Matrix Algorithm of One-dimensional Inhomogeneous Kerr Medium*, Acta Photonica Sinica Vol. **33** No. **4**, 497-500 (2004).
- [**Ding, 1990**] Y. J. Ding, C. L. Guo, G.A. Swartzlander Jr., J. B. Khurgin y A. E. Kaplan, *Spectral Measurement of the Nonlinear Refractive Index in ZnSe using Self-bending of a Pulsed Laser Beam*, Optics Letters **15**, 1431 (1990).
- [**Gibbs, 1976**] H. M. Gibbs, S. L. McCall y T. N. C. Venkatesant, *Differential Gain and Bistability Using a Sodium-Filled Fabry-Perot Interferometer*, Physical Review Letters **36**, 1135-1138 (1976).
- [**Gibbs, 1985**] H. M. Gibbs, *Optical Bistability: Controlling light with light* (Academic Press Inc., 1985). Cap. 1
- [**He, 1991**] J. He y M. Cada, *Optical Bistability in Semiconductor Structures*, Journal of Quantum Electronics Vol. **27** No. **5**, 1182-1188 (1991).
- [**He, 1992**] J. He y M. Cada, *Combined Distributed Feedback and Fabry-Perot structures with a Phase-Matching Layer for Optical Bistable Devices*, Applied Physics Letters **61**, 2150-2152 (1992).
- [**He, 1999**] G. S. He y S. H. Liu, *Physics of Nonlinear Optics*, (World Scientific, 1999). Cap. 11.
- [**Jackson, 1999**] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 3<sup>ra</sup> Ed. (John Wiley, 1999). p. 302-305

- [**Joannopoulos, 2008**] J. D. Joannopoulos, S. G. Johnson, J. N. Winn y R. D. Meade, *Photonic Crystals*, 2<sup>da</sup> Ed. (Princeton University Press, 2008). Cap. 1, p. 214-218, 231 y 232
- [**Kerr, 1875**] J. Kerr, *A new relation between electricity and light: Dielectric media birefringent*, Philosophical Magazine **50**, 376-379 (1875).
- [**Kohmoto, 1987**] M. Kohmoto, B. Sutherland y K. Iguchi, *Localization in Optics: Quasiperiodic Media*, Physical Review Letters **58**, 2436-2438 (1987).
- [**Kwan, 2004**] P. K. Kwan y Y. Y. Lu, *Computing Opticap Bistability in One-Dimensional Nonlinear Structures*, Optics Communications **238**, 169-175 (2004).
- [**Lourtioz, 2008**] J.-M. Lourtioz, *Photonic Crystals*, 2<sup>da</sup> Ed. (Springer, 2008). p. V y VI
- [**Maker, 1962**] P. D. Maker, R. W. Terhune, M. Nisenoff y M. Savage, *Effeccts of Dispersion and Focusing on the Production of Optical Harmonics*, Physical Review Letters **8**, 21-22 (1962).
- [**Mills, 1991**] D. L. Mills, *Nonlinear Optics* (Springer, 1991). Cap. 1 y 4
- [**New, 2007**] G. New, *Introduction to Nonlinear Optics*, (Cambridge University Press, 2011). Cap. 1
- [**Oliveira, 1994**] L. C. Oliveira y S. C. Zilio, *Single-beam Time-resolved Z-scan Measurements of Slow Absorbers*, Appl. Phys. Lett. **65**, 2121 (1994).
- [**Palavicini, 2013**] A. Palavicini y C. Wang, *Infrared Transmission in Porous Silicon Multilayers*, Optics and Photonics Journal **3**, 20-25 (2013).
- [**Paschotta, 2012**] R. Paschotta, *RP Photonics Encyclopedia*, <http://www.rp-photonics.com/encyclopedia.html>.
- [**Powers, 2011**] P. E. Powers, *Fundamentals of Nonlinear Optics* (CRS Press, 2011). p. 192-195.
- [**Powers, 2013**] P. E. Powers, *Field Guide to Nonlinear Optics* (SPIE Fields Guides Vol. FG **29**, Washington USA, 2013). p. 63
- [**Sakoda, 2001**] K. Sakoda, *Optical Properties of Photonic Crystals* (Springer-Verlag, Berlin, 2001). Cap. 1
- [**Shen, 1984**] Y. R. Shen, *The Principles of Nonlinear Optics* (Wiley-Interscience, 1984). Cap 1.

- [**Steurer, 2009**] W. Steurer y S. Dcloudi, *Crystallography of Quasicrystals* (Springer, 2009). p. 9-12
- [**Szöke, 1969**] A. Szöke, V Daneu, J. Goldhar y N. A. Kurnit, *Bistable Optical Element and its Applications*, Applied Physics Letters **15**, 376-379 (1969).
- [**Ubaschs, 2007**] W. Ubaschs, *Nonlinear Optics: Lecture Notes*, Departamento de Física y Astronomía, Universidad de Amsterdam (2007).
- [**Yeh, 1998**] P. Yeh, *Optical Waves in Layered Media* (Wiley-Interscience, 1998). Cap. 1-6
- [**Zhang, 2014**] R. Zhang, J. Zhang y R. Xia, *Multiple-valued Characteristic Research of Nonlinear One-dimensional Photonic Crystal Reflection Spectrum*, Acta Photonica Sinica Vol. **43** No. **9**, 0923001 (2014).