UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN FILOSOFÍA DE LA CIENCIA

Una teoría artefactual de los objetos matemáticos

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTOR EN FILOSOFÍA DE LA CIENCIA
(FILOSOFÍA DE LAS MATEMÁTICAS Y LÓGICA DE LA CIENCIA)

PRESENTA:

JACOBO ASSE DAYÁN

DIRECTOR: DR. AXEL BARCELÓ ASPEITIA (IIF, UNAM)
SINODALES: DR. SERGIO F. MARTÍNEZ MUÑOZ (IIF, UNAM)
DR. MAX FERNÁNDEZ DE CASTRO (UAM-I)
DR. EDUARDO GARCÍA RAMÍREZ (IIF, UNAM)
DRA. ÁNGELES ERAÑA LAGOS (IIF, UNAM)

MÉXICO, D.F., JUNIO DE 2015

Esta tesis fue realizada gracias al apoyo de una beca nacional CONACyT.

AGRADECIMIENTOS:

A mi director de tesis, el Dr. Axel Barceló Aspeitia, por su invaluable guía a lo largo del desarrollo de este trabajo. A los miembros de mi comité tutorial, el Dr. Sergio Martínez y el Dr. Max Fernández de Castro, por sus valiosas observaciones, y por su interés y entusiasmo por mi trabajo. A mis sinodales, el Dr. Eduardo García Ramírez y la Dra. Ángeles Eraña, por su docta revisión de esta tesis.

A mis compañeros y amigos, por su apoyo y ayuda: Nattie Golubov, Lorena Mejía, Ana Laura Fonseca, Fabiola López, Mauricio Torres, Ignacio Vilaró, Clara Márquez, Javier García-Salcedo, Cristian Gutiérrez, Octavio Campuzano, Nelly García, Renato Huarte, Karen González, Ernesto Durand, Juan Carlos Tarriba, Aura García-Junco, Jorge Pérez, Jaime Ades y Ioav Bakas.

A mi familia, por su cariño constante.

ÍNDICE:

"All these difficulties are but consequences of our refusal to see that mathematics cannot be defined without acknowledging its most obvious feature: namely, that it is interesting."

Michael Polanyi

INTRODUCCIÓN:

Las matemáticas presentan un problema filosófico muy particular. Por un lado, ellas parecen girar en torno a *objetos* –números, figuras geométricas, conjuntos, funciones, etc.– a los cuales las proposiciones matemáticas hacen referencia, y cuya naturaleza aspiran a describir con verdad. Por el otro, parecen girar en torno a *reglas*, cuya validez nos permite transitar libremente entre asunciones y teoremas. En otras palabras, las matemáticas parecen ser un híbrido, entre una ciencia encargada de descubrir e investigar a los objetos matemáticos, y una disciplina formal capaz de crearlos.

Un síntoma particularmente claro de esta tensión es la dificultad de explicar la naturaleza de la verdad matemática. Proposiciones como "2 + 2 = 4" son generalmente aceptadas como las verdades más objetivas y seguras que poseemos. Sin embargo, al preguntarnos acerca de qué es que son verdaderas, las dificultades filosóficas parecen ser inevitables. La respuesta usual –la que trata a este tipo de proposiciones de la misma manera que lo hace con proposiciones científicas o de la vida cotidiana– es que son verdaderas acerca de objetos matemáticos, en este caso particular, acerca de los números "2" y "4", y de la función "suma". Sin embargo, esta respuesta, aunada a la manera usual de concebir a los objetos matemáticos, como objetos abstractos, conduce a la dificultad de explicar la manera en la que podríamos conocer dichos objetos, dado que se encuentran fuera del alcance de nuestra experiencia espacio-temporal. La alternativa a esta respuesta consiste en explicar la verdad de estas proposiciones, no mediante la referencia a objetos, sino por medio de la validez de las pruebas que nos conducen a ellas; estas pruebas, después de todo, conforman el grueso de la actividad matemática, y son generalmente utilizadas para justificar nuestros resultados. Esta perspectiva resuelve el problema epistemológico, pues nadie duda de la capacidad de los matemáticos de elaborar pruebas, sin embargo, suscita un problema semántico, pues no logra explicar cuál es el vínculo preciso entre la validez de estas pruebas y las condiciones de verdad de proposiciones que, a todas luces, parecen estar haciendo referencia a objetos.

Esta tensión encuentra su expresión más explícita en el famoso *Dilema de Benacerraf* (1973), según el cual, ante la tarea de explicar la verdad matemática, el filósofo puede, o bien atender a consideraciones semánticas, o bien a consideraciones epistemológicas, pero nunca a ambas. Esta disyuntiva ha conducido a los filósofos de las matemáticas por dos caminos marcadamente distintos. El primer cuerno del dilema conduce a un realismo de tipo platonista, y a la tarea de formular una epistemología compatible con él. El segundo conduce a una filosofía de corte formalista, y a la tarea de especificar el vínculo entre las pruebas matemáticas y nuestra idea de la verdad. Ninguno de estos caminos, sin embargo, ha conducido a una filosofía de las matemáticas que haya logrado una aceptación generalizada.

Este dilema es el punto de partida de esta investigación. El objetivo es encontrar una tercera vía, distinta al platonismo y al formalismo, que conduzca a una filosofía de las matemáticas más satisfactoria. Mi tesis es que este objetivo puede ser alcanzado concibiendo a los objetos matemáticos como artefactos, esto es, no como objetos platónicos, eternos e inmutables, sino como objetos que emergen como resultado de nuestras prácticas matemáticas.

Para elaborar esta tesis, comienzo, en el capítulo 1, con una breve exposición del dilema de Benacerraf, y propongo una interpretación distinta a la usual, esto es, no como una *disyuntiva* entre platonismo y formalismo, sino como una invitación a *conjuntar* las virtudes de ambos. La idea es no oponer objetos a reglas, y verdad a validez, sino observar la manera en la que estos aparentes opuestos interactúan y se complementan en la práctica matemática. Para ello, recurro a la reconstrucción racional que hace Imre Lakatos de la prueba del teorema de Euler. En ella podremos observar cómo la verdad y las pruebas matemáticas no son entidades claramente delimitadas, una la causa independiente y la otra la consecuencia, sino que se encuentran entrelazadas por medio de un complejo proceso dialéctico en el que existe una retro-alimentación constante entre ellas.

La moraleja que deberemos extraer de este proceso es una aparente paradoja. Esto es, que la verdad matemática es, no sólo el objeto que guía nuestras investigaciones matemáticas, sino, además, el producto de ellas. Esto es, que los objetos matemáticos existen, pero no como objetos eternos e inmutables, esperando a ser descubiertos, sino como el resultado de nuestra actividad matemática misma. Esta no es una idea del todo nueva. En los últimos diez años han surgido al menos tres propuestas que pueden ser denominadas como *realismos dependientes de la práctica*. Madeline Muntersbjorn (1999, 2003, 2007) habla de objetos *cultivados* por nuestra actividad matemática, de manera análoga a como nuevas especies vegetales son producidas por nuestras actividades agrarias; Julian Cole (2005, 2008, 2009, 2012) habla de objetos *declarados* por la comunidad matemática, de manera análoga a como las instituciones sociales declaran la existencia de objetos sociales como las fronteras geopolíticas; Ian Hacking (2009) habla de objetos matemáticos *cristalizados*, como resultado de nuestras capacidades cognitivas y un contexto histórico particular. Mi teoría artefactual de los objetos matemáticos es una continuación de estas tres teorías, retomando muchos de los que, considero, son sus aciertos, e intentando remediar sus carencias.

En el capítulo 3 de este trabajo hago una exposición de estas propuestas, así como una breve evaluación crítica de ellas. Antes de ello, sin embargo, dedico el capítulo 2 a hablar sobre la teoría de artefactos. Los artefactos son el paradigma del objeto dependiente de nuestras prácticas. Ellos son diseñados y producidos intencionalmente dentro de ellas, sin embargo, una vez materializados, parecen adquirir una objetividad que las rebasa. En este sentido, los artefactos exhiben una paradoja similar a la que mencioné acerca de los objetos matemáticos.

A primera vista, esto puede resultar sorprendente, pues nuestra vida cotidiana está repleta de interacciones con artefactos que no parecen producir ningún misterio. Sin embargo, como veremos más adelante, la caracterización teórica del concepto de "artefacto" es extremadamente problemática, y ha suscitado una gran cantidad de controversias. Cuál es el sentido preciso en el que los artefactos dependen de nuestras prácticas, cómo es que son constituidos, y qué significa que ellos posean una función, son algunas de las cuestiones que han contribuido a la generación de toda una red conceptual diseñada para el análisis teórico de los artefactos. Este análisis ha conducido a una gran diversidad de teorías acerca de la naturaleza de los artefactos, y a la comprensión de que el reino de los artefactos es más amplio y heterogéneo de lo que nuestra experiencia parecería sugerir. Entre los candidatos a ser artefactos, encontraremos a los objetos cultivados de Muntersbjorn, los objetos declarados de Cole, y los objetos cristalizados de Hacking.

Apelar a los artefactos para caracterizar a los objetos matemáticos tiene, entonces, dos ventajas claras. La primera ventaja es la gran cantidad de intuiciones que nuestra amplia familiaridad con los artefactos nos proporciona, y que nos permitirá trazar analogías, entre algunos artefactos que nos resultan familiares, y los objetos matemáticos, ayudando así a aclarar la naturaleza de éstos últimos. La otra ventaja es poder echar mano de la red conceptual que ha sido desarrollada para el estudio de los artefactos, y poder aplicarla al análisis teórico de los objetos matemáticos. Es así que mi teoría artefactual no es sólo un intento de mejorar las teorías de Muntersbjorn, Cole y Hacking, sino que cumple también el propósito de proveer una red conceptual que nos permita sistematizarlas y evaluarlas.

Una vez establecidas las herramientas conceptuales, en el capítulo 2, y los antecedentes, en el capítulo 3, en el capítulo 4 elaboro, finalmente, mi teoría artefactual de los objetos matemáticos. Ésta toma la forma de una analogía, en la que nuestros sistemas notacionales matemáticos juegan el papel del material del que están hechos los artefactos, y la comunidad de matemáticos provee el uso práctico –y con él, las intenciones implícitas en él– que resulta en la constitución de algunos de los objetos construidos en estos sistemas. La idea central, a grandes rasgos, es que los sistemas de notación matemática no son un mero instrumento para expresar un conocimiento matemático previo, sino que juegan un papel fundamental en la formulación del contenido mismo que ellos buscan expresar.

Finalmente, el capítulo 5 es una breve evaluación filosófica de mi teoría, en la que examino sus consecuencias ontológicas, semánticas y epistemológicas. Anticipo también, y respondo a algunas de las objeciones a las que ésta puede ser sujeta, con especial atención a aquellas que cuestionan la compatibilidad de la propuesta artefactual con la objetividad, necesidad y carácter *a priori* usualmente asociados con la verdad y el conocimiento matemático. El tipo de objetividad implícito en concepciones platonistas y formalistas de los objetos matemáticos se verá reemplazado con una objetividad artefactual sostenida en las prácticas matemáticas y en la función que los objetos generados dentro de ellas deben cumplir. Este tipo de objetividad será incapaz de sustentar la supuesta necesidad de la verdad matemática y el carácter *a priori* del conocimiento, pero será capaz de explicar las intuiciones que nos conducen a ellos. Culmino la investigación con una breve exposición de las ventajas que mi teoría posee sobre algunos de sus principales rivales.

Antes de comenzar, debo aclarar que ésta es una investigación programática, en el sentido de no pretender ser un argumento concluyente en favor de la tesis defendida. Mi propuesta es original y se apoya en ideas muy recientes que no han sido desarrolladas en su totalidad. El objetivo de la investigación es mostrar la plausibilidad de la propuesta artefactual, y establecerla como una tercera opción viable en filosofía de las matemáticas, digna de ser investigada más a fondo. Mis argumentos en contra de las posiciones rivales son someros y no pretenden ser una refutación de ellos, por lo que no deben ser juzgados con esa pretensión en mente. En lugar de ello, mis críticas deberán ser tomadas como un instrumento para motivar mi propuesta, y para señalar el camino a seguir.

CAPÍTULO 1: LA VERDAD MATEMÁTICA

Las matemáticas parecen encerrar una paradoja. Por un lado, enunciados como "2 + 2 = 4" son comúnmente referidos como portadores del conocimiento más objetivo, seguro e inmutable que poseemos, al grado de ser considerados como necesariamente verdaderos. Además, las matemáticas juegan un papel esencial en la formulación de las teorías científicas que nos han permitido obtener un conocimiento y control del mundo sin precedentes. Sin embargo, al preguntarnos cómo es que debemos interpretar los enunciados matemáticos, inevitablemente nos encontramos con dificultades filosóficas, pues su verdad invita a la pregunta: ¿acerca de qué es que son verdaderos? La respuesta usual, que son verdaderos acerca de objetos abstractos –platónicos–, suscita el problema de cómo es que podríamos conocer este tipo de objetos que no se encuentran en nuestro mundo espacio-temporal. Por el otro lado, si rechazamos el carácter abstracto de los objetos matemáticos, no queda claro qué otro tipo de objetos podrían ser, o bien, si decidimos prescindir por completo de ellos, en qué sentido es que los enunciados matemáticos podrían ser verdaderos.

Esta tensión, entre la verdad matemática y la forma en la que logramos conocerla –entre la semántica y la epistemología– ha sido una de las preocupaciones principales de los filósofos de las matemáticas en las últimas décadas. Aquellos motivados primordialmente por consideraciones semánticas buscan una epistemología que explique nuestro conocimiento de objetos platónicos, y aquellos motivados por consideraciones epistemológicas señalan a las pruebas formales como la fuente de nuestro conocimiento, y buscan una semántica que logre conectar estas pruebas con la verdad matemática. Sin embargo, ninguna de las soluciones propuestas ha logrado establecer un consenso general, y la tensión persiste.

El objetivo de este primer capítulo es el de entender un poco más a detalle esta tensión, así como sus causas, y proponer una posible tercera vía para resolverla. Esta tercera vía busca conjuntar los aciertos semánticos del platonismo con los aciertos epistemológicos del formalismo. Esta conjunción, sin embargo, requiere de algunos ajustes en la manera en la que abstraemos ciertos aspectos de la práctica matemática para su estudio, así como de la elaboración de un nuevo tipo de metafísica para los objetos matemáticos.

1.1 El dilema de Benacerraf y las abstracciones de la práctica matemática.

En su famoso artículo *"Mathematical Truth"* (1973), Paul Benacerraf expresa su profunda insatisfacción con cualquiera de las filosofías de las matemáticas presentes en la literatura, pues, afirma, cada una de ellas atiende, ya sea a consideraciones semánticas a expensas de consideraciones epistemológicas, o bien a consideraciones epistemológicas a expensas de consideraciones semánticas, pero ninguna de ellas logra atender a ambas:

> It is my contention that two quite distinct kinds of concerns have separately motivated accounts of the nature of mathematical truth: (1) the concern for having a homogeneous semantical theory in which semantics for the propositions of mathematics parallel the semantics for the rest of the language, and (2) the concern that the account of mathematical truth mesh with a reasonable epistemology. It will be my general thesis that almost all accounts of the concept of mathematical truth can be identified with serving one or another of these masters at *the expense of the other.* (p. 661, énfasis del autor)

Las consideraciones semánticas mencionadas consisten en exigir una semántica para el discurso matemático que sea homogénea con aquella utilizada para el resto del lenguaje. Puesto que los enunciados matemáticos parecen tener la misma estructura lógico-gramatical que los enunciados de otras áreas de discurso[1], y que el discurso matemático se mezcla sin problemas con el discurso científico y cotidiano, Benacerraf considera que debemos adoptar, para él, la misma semántica que hemos adoptamos para el resto del discurso, esto es, una semántica referencial tarskiana[2]. Esto significa que las proposiciones matemáticas podrían ser interpretadas solamente como haciendo referencia a objetos matemáticos, y su verdad implicaría la existencia de los mismos. Este realismo acerca de los objetos matemáticos, aunado a la idea ampliamente aceptada de que la verdad matemática es necesaria y eterna, casi siempre se traduce en un platonismo matemático, y en los problemas epistemológicos que lo acompañan[3].

Este es el primer cuerno del ya famoso "dilema de Benacerraf". El otro cuerno surge de fijar nuestra atención en la manera en la que los matemáticos suelen justificar su conocimiento en la práctica, esto es, en la realización de pruebas matemáticas. Esta práctica no parece encerrar ningún misterio, ni requerir de un contacto con objetos platónicos, de manera que las dificultades epistemológicas son fácilmente satisfechas. Sin embargo, esto nos conduce a dificultades semánticas, pues no es claro cómo es que podríamos conectar estas pruebas con las condiciones de verdad de enunciados matemáticos que parecen estar haciendo referencia a objetos matemáticos. En palabras de Benacerraf:

> This is not to *deny* that being a theorem of some system can be a truth condition for a given proposition or class of propositions. It is rather to require that any theory that proffers

[1] Benacerraf ilustra esto considerando los enunciados "existen al menos tres ciudades grandes más antiguas que Nueva York" y "Existen al menos tres números perfectos más grandes que 17".

[2] O bien, si elegimos otro tipo de semántica, ésta elección debe estar fuertemente motivada, además de que necesitaremos verificar que nuestra actual noción de "verdad" sea adecuada para incluir a la verdad matemática interpretada de esta nueva manera.

[3] Benacerraf se adhería a la teoría casual del conocimiento, según la cual según la cual debe existir algún tipo de relación causal entre el objeto conocido y el agente conocedor. Esta teoría ha perdido adeptos, sin embargo, sus preocupaciones epistemológicas pueden ser reformuladas en términos que prescinden de ella, como lo hace Field (1989, pp. 25-26).

> theoremhood as a condition of truth also *explain the connection between truth and theoremhood.* (1973, p. 666; énfasis del autor)

Mucho trabajo ha sido realizado en busca de la solución de cada uno de estos cuernos. Del lado platonista, el logicismo que comenzara con Frege y Russell a principios del siglo XX encuentra seguidores actualmente en Wright (1983), Hale (1987) y Tennant (1997); la intuición matemática postulada por Gödel en la década de los 1930 es defendida por Brown (1999) y encuentra una elaboración naturalista en Maddy (1980); los platonistas racionalistas, como Katz (1997), argumentan que esta intuición no es más que la razón; el estructuralismo *ante rem* piensa que puede resolver algunos problemas del platonismo argumentando que los objetos matemáticos son estructuras; y Quine y sus seguidores naturalistas rechazan la necesidad de explicar el mecanismo preciso por medio del cual logramos conocer las proposiciones matemáticas, por considerar que basta con notar que su verdad es indispensabilidad para la verdad de nuestras mejores teorías científicas.

Del lado anti-platonista, la inspiración proviene de la concepción formalista de las matemáticas, que comenzara con David Hilbert a principios del siglo XX. Según esta concepción, la verdad matemática es consecuencia directa de la validez de nuestras pruebas matemáticas, concebidas como derivaciones formales a partir de conjuntos de axiomas cuyo único requisito es la consistencia formal[4]:

> [I]f the arbitrarily given axioms do not contradict each other with all their consequences, then they are true and the things defined by them exist. This is for me the criterion of truth and existence (Hilbert, en Frege 1980, pp. 39-40).

[4] En estricto sentido, lo que Hilbert propone es que los teoremas de las matemáticas ideales se reducen a hechos formales, esto es, a la consistencia con los resultados de la matemática finitista, la cual se encuentra al alcance de nuestra intuición sensible.

La idea de apelar a la consistencia de los axiomas –y no a su verdad– es la de reducir el problema matemático a un problema lógico, y por tanto menos problemático, epistemológicamente hablando. Las construcciones modales de Chihara, los diferentes tipos de ficcionalismo[5], y el estructuralismo *in re*[6], entre otros, son propuestas que conservan la idea formalista de privilegiar el papel que las demostraciones formales juegan en la consecución de la verdad matemática, y que buscan formular una explicación de la verdad matemática que satisfaga nuestras preocupaciones semánticas.

Ahora bien, todas estas propuestas, tanto las platonistas como las anti-platonistas, son muy respetables e interesantes, sin embargo, no me detendré a analizarlas, pues pienso que, en última instancia, comparten una limitante importante. Ella proviene de entender los argumentos de Benacerraf como una disyuntiva entre adoptar una u otra concepción de las matemáticas –la platonista o la formalista– para buscar resolver sus dificultades y mostrar que la otra concepción es errónea. Mi interpretación del dilema es distinta a esta interpretación común, pues pienso que éste sebe ser entendido como un reto *conjuntar* estas dos concepciones. Esto significa poner menos atención a las carencias de cada concepción y poner más atención a sus aciertos. A saber, reconocer que el platonismo acierta en exigir una semántica tarskiana, dado que la práctica matemática parece estar guiada por una verdad entendida referencialmente, y que el formalismo acierta en exigir una epistemología

[5] El ficcionalismo acepta la semántica tarskiana, pero rechaza la verdad matemática, evitando así la conclusión platonista. Aun así es un derivado de la concepción formalista en el sentido de que sustituye a la verdad matemática con la aceptabilidad de ciertos conjuntos de axiomas consistentes que le resultan interesantes a la comunidad matemática.

[6] El estructuralismo ante rem también está inspirado por el formalismo, sin embargo, por ser un tipo de platonismo, no lo incluyo en esta lista, sino en la lista anterior de elaboraciones platonistas.

no platonista, dado que los matemáticos claramente se apoyan en las pruebas para encontrar y justificar sus resultados.

Para entender mejor la limitante de la que hablo, es necesario comenzar por notar que, tanto el platonismo, como el formalismo, son abstracciones de la práctica matemática, cada uno de ellos privilegiando ciertos aspectos de ella y haciendo caso omiso de otros. Esto no es por sí mismo un problema, pues, dado que la práctica matemática es infinitamente compleja, siempre será necesario, para hacer sentido de ella, abstraer ciertos aspectos que no son considerados como filosóficamente significativos. Lo que debemos notar es que el conflicto entre platonismo y formalismo se debe a que cada una de ellas abstrae aspectos que la otra considera esenciales.

Una manera de apreciar esto es poniendo atención a la relación que cada una de ellas plantea entre la verdad y las pruebas matemáticas. Todos estamos de acuerdo en que las pruebas matemáticas son un vehículo importante por medio del cual los matemáticos encuentran nuevos resultados y justifican resultados previamente conocidos (o conjeturados). Todos estamos de acuerdo, también, en que estos resultados –algunos más que otros– estructuran la práctica matemática, delimitan los caminos de investigación a seguir, e imponen restricciones sobre lo que es aceptable decir sobre los objetos que ocupan a los matemáticos. En lo que no hay acuerdo es en cuál de estos dos aspectos debe ser considerados como filosóficamente relevante, y cuál como un aspecto anecdótico que debe ser excluido del análisis filosófico.

El platonismo coloca el énfasis en los resultados que históricamente han estructurado la práctica matemática y que nos han conducido a hablar de los números, funciones, figuras geométricas, conjuntos, y otros objetos matemáticos. Énfasis que lo conduce a concebir a la verdad matemática como una descripción fiel de estos objetos. Es esta verdad, según el platonismo, la que hace que una derivación formal sea, en efecto, una prueba matemática, y la mera consistencia de los axiomas o la validez de la derivación no bastan para establecerla como tal. Las pruebas quedan, así, como un mero vehículo, cuya existencia es reconocida, pero cuyo significado filosófico es limitado, siendo relegadas al terreno de la historia anecdótica de las matemáticas. En palabras de G.H. Hardy, famoso matemático platonista:

> [P]roofs are what Lttlewood and I call gas, rhetorical flourishes designed to affect psychology, pictures on the board in the lecture, devices to stimulate the imagination of pupils. This is plainly not the whole truth, but there is a good deal in it. The image gives us a genuine approximation to the processes of mathematical pedagogy on the one hand and of mathematical discovery on the other; it is only the very un-sophisticated outsider who imagines that mathematicians make discoveries by turning the handle of some miraculous machine (1929, p. 18).

El formalismo, en cambio, coloca el énfasis en la validez de las pruebas, esto es, si la prueba es válida (y los axiomas consistentes), el resultado derivado es una verdad matemática (en el sistema formal en el que fue derivado); no se requiere de nada más. El que algunos, y sólo algunos, de estos resultados válidos hayan recibido una gran cantidad de atención y moldeado la investigación matemática no se debe a que estos posean un carácter verdadero previo a su derivación, sino al hecho *sociológico* de que algunos de estos resultados le han parecido interesantes a los matemáticos, y otros no. Hecho sociológico que no tiene relevancia filosófica y que debe ser relegado a la historia anecdótica de las matemáticas. En otras palabras, la abstracción formalista explica la verdad matemática como el conjunto de los resultados que pueden ser derivados a partir de conjuntos de axiomas consistentes y que, por haber resultado interesantes para los matemáticos, son referidos como *la* verdad matemática, en lugar de como lo que son, *una* verdad matemática, en uno de los muchos sistemas formales posibles.

En suma, mientras que el platonismo enfatiza el carácter *restrictivo* de la verdad matemática[7] y relega a las pruebas formales a ser meros vehículos que deben adaptarse a ella, el formalismo enfatiza la *libertad* de los matemáticos de postular axiomas y manipularlos formalmente para encontrar nuevos resultados, con la garantía de que, gracias a la consistencia de los axiomas, serán verdaderos acerca de cualquier objeto que los satisfaga. Esta garantía se opone directamente a las supuestas restricciones impuestas por la verdad, y en su lugar otorga al matemático la *autoridad* para hablar del objeto resultante como un objeto matemático, sin preocuparse por si este coincide o no con una realidad matemática previa[8].

Ahora bien, si los argumentos de Benacerraf son correctos, esto es, si los platonistas tienen razón en insistir en la importancia de la verdad matemática y los formalistas tienen razón en insistir en la importancia de las pruebas matemáticas, entonces la moraleja de la historia es que no debemos abstraer ninguno de estos dos aspectos de la práctica matemática, so pena de caer en el dilema expuesto por él. La limitante de las propuestas platonistas y formalistas mencionadas anteriormente es, entonces, que ninguna de ellas atiende a la raíz del problema, esto es, ninguna respeta la intuición fundamental del bando opuesto. Más aun, creo que ninguna podría hacerlo. El platonismo parece, por principio,

[7] Lo que en realidad restringe es la *realidad* matemática, que, concebida al estilo platonista, como una realidad previa e independiente de nuestra actividad matemática, conduce a un concepto de verdad enfocado en la descripción de ciertos objetos cuya naturaleza restringe la actividad del matemático. Es a esto a lo que, en estricto sentido, me refiero cuando hablo del carácter restrictivo de la verdad matemática entendida de manera platonista.

[8] La *libertad* de postular objetos y la *autoridad* de referirse a ellos como tales son enfatizadas por Julian Cole (2009), de quien hablaré en el capítulo 3 de este trabajo.

excluir la posibilidad de que la práctica de realizar pruebas matemáticas forme parte de una explicación de la verdad acerca de objetos que son eternos e inmutables[9]. Y el formalismo parece excluir, también por principio, la posibilidad de reconocer restricciones para la verdad matemática que sean ajenas a lo formal.

Así, podemos apreciar que las respuestas platonistas al reto de Benacerraf nunca satisfarán al formalista, y viceversa. Creo que la historia filosófica reciente es testigo de esto, y que más que una discusión fértil, existe un árido *impasse*[10], en el que parte de los argumentos de cada bando consiste en señalar las carencias del bando opuesto. Esta investigación busca contribuir a remediar esta situación. La idea es no elegir entre uno de los dos bandos, sino elaborar una tercera vía que logre conjuntar los aciertos de cada uno, esto es, que respete la importancia, tanto del papel restrictivo de la verdad, como del papel constructivo de la demostración, y más importante aún, de la estrecha relación entre ellos.

1.2 Verdad y demostración: una relación dialéctica.

Si mi diagnóstico del dilema es correcto, entonces éste se debe a un exceso de abstracción. Por un lado, la abstracción platonista suprime el papel que juega la demostración en la producción de la verdad, y por el otro, el formalista hace lo propio con el papel que juega la verdad en la elección de los axiomas de los que parten las demostraciones formales. Estas omisiones, argumentaré en seguida, contribuyen a ocultar la estrecha y compleja relación

[9] Balaguer (1998) plantea un tipo de platonismo que llama “pleno” dentro del cual la consistencia implica existencia. Sin embargo, precisamente por ello, no es considerado un tipo de platonismo, sino un tipo de ficcionalismo.

10 Este *impasse* es expuesto a detalle en Burgess y Rosen (1997).

que en realidad existe entre verdad y demostración, relación que podremos observar si miramos a la práctica matemática un poco más de cerca.

El problema surge desde la conceptualización del objeto mismo de estudio. Una característica prevalente en las abstracciones de la práctica matemática utilizadas para su estudio filosófico es la omisión del complejo proceso informal involucrado en la concepción de las pruebas matemáticas. Este proceso, que suele involucrar un diverso abanico de razonamientos informales, incluyendo razonamientos heurísticos, experimentos mentales y razonamientos inductivos, entre muchos otros, es omitido en favor de derivaciones formales. Estas derivaciones son listas de fórmulas, limpias y terminadas, cada una de ellas un axioma o una consecuencia formal de ellos, que suelen ser elaboradas *ex post facto*, y que ocultan el proceso que nos condujo a ellas, resultando en una descontextualizan a la verdad matemática.

Ante esta descontextualización, el filósofo se encuentra con pocas opciones para explicar la fuente de la verdad matemática. Los platonistas optan por enfatizar la verdad evidente de los axiomas, y los formalistas su consistencia, pero el proceso informal que precedió a estas derivaciones nos permite ver que la realidad es otra, más compleja. Esto es perfectamente ilustrado en *Proofs and Refutations* (1976), de Imre Lakatos, texto en el cual, por medio de un supuesto diálogo en un salón de clases imaginario, elabora una reconstrucción racional de la historia de la prueba del teorema de Euler, según el cual para todos los poliedros regulares se cumple que "$V - E + F = 2$"[11], exhibiendo el complejo proceso dialéctico por medio del cual las pruebas nos conducen a la verdad matemática.

[11] V es el número de vértices del poliedro, E el número de orillas y F el número de caras.

El proceso exhibido por Lakatos comienza con una conjetura para la cual se presenta una prueba informal[12]. Esta prueba resulta convincente, pero carece del rigor necesario para excluir cualquier duda de su validez. Esta validez es cuestionada por lo que Lakatos llama "contraejemplos locales" [13], que cuestionan la validez de la prueba, y "contraejemplos globales"[14], que cuestionan la verdad de la conjetura misma. La reconstrucción de Lakatos revela, sin embargo, que estos contraejemplos no implican necesariamente la refutación de la conjetura o de la prueba, sino que sirven para mejorarlas de manera que resistan a los contraejemplos (p. 10). Durante este proceso, tanto los mecanismos informales utilizados en la prueba, como los conceptos de los objetos referidos por la conjetura, son sujetos de una discusión que conduce a su refinamiento. El resultado final es una conjetura y una prueba informal ligeramente distintas a las originales, pero que aun así son reconocidas como la misma conjetura y prueba con la que el proceso inició.

Lo que Lakatos exhibe con esta reconstrucción es la lógica que guía a los matemáticos en el refinamiento de las pruebas y las conjeturas probadas informalmente. Claramente, este no es un proceso ciego o arbitrario, pero tampoco obedece exclusivamente a la lógica deductiva de las pruebas formales, la cual no puede ir más allá de transmitir por *modus ponens* la verdad contenida en los axiomas iniciales, o bien refutarlos por *modus*

[12] Esta prueba consiste en un experimento mental, que involucra imaginar que el poliedro es hueco y su superficie hecha de hule delgado, de manera que es posible estirarlo sobre un plano, triangular cada una de sus caras, e ir removiendo cada uno de estos triángulos sin alterar la ecuación entre el número de vértices, caras y orillas (p. 7).

[13] Por ejemplo, uno de los alumnos imaginarios hace notar que, si se remueve un triángulo central, la ecuación entre el número de vértices, caras y orillas no se preserva. Ante este contraejemplo, el maestro modifica la prueba, permitiendo solamente que se remuevan triángulos que están en la frontera externa del poliedro estirado (p. 10).

[14] Por ejemplo, uno de los alumnos imaginarios hace notar que el teorema de Euler no se cumple para un poliedro que consiste en un cubo que se encuentra en el interior de otro cubo. Este contraejemplo conduce al maestro y a los alumnos a refinar y precisar su concepto de poliedro de manera que el teorema se siga cumpliendo y el cubo dentro de otro cubo sea denominado un "monstruo" (p. 13).

tollens al encontrarse ante un contraejemplo. El refinamiento de estas pruebas requiere, entonces, otro tipo de lógica, o de racionalidad, capaz de conducir el proceso dialéctico que guía a los matemáticos, de la conjetura inicial, a sus contraejemplos, a una nueva conjetura, y así hasta la conjetura y prueba finales.

Entonces, si aceptamos que los axiomas que eventualmente son el punto de partida de las pruebas formales tienen su origen en las pruebas informales, y que éstas son guiadas por este tipo de lógica informal, podremos extraer de ello dos moralejas importantes: 1) en contra del formalismo, que los axiomas no son elegidos de manera arbitraria, sino que son el resultado de un complejo proceso que comienza con las intuiciones que tienen los matemáticos, y que consideran verdaderas acerca de los objetos de los cuales trata el enunciado a ser probado; y 2) en contra del platonismo, que los axiomas no son el punto de *partida* que restringe a la prueba, y desde el cual la verdad matemática fluye deductivamente hacia los teoremas, sino el *destino* al cual se llega tras aplicar la lógica de las pruebas y refutaciones.

Así, una vez reconocido este proceso dialéctico entre verdad y demostración, podemos ver que el *impasse* entre platonistas y formalistas se debe a que ambos aciertan con respecto a una característica clave del estatus de los axiomas, pero ambos se exceden en sus afirmaciones acerca del grado de estas características, al punto de ignorar por completo el acierto de la perspectiva opuesta. Esto es, los platonistas aciertan al afirmar que la verdad juega un papel al restringir a las pruebas, contribuyendo a determinar qué conjuntos de axiomas consistentes son candidatos para ser puntos de partida de las pruebas formales, pero se exceden al rechazar tajantemente el papel que juegan las pruebas en la generación de esta verdad. Y los formalistas aciertan en enfatizar la libertad que tienen los matemáticos de hacer postulaciones que conduzcan a pruebas y a nuevos objetos, pero se exceden al afirmar que la única restricción sobre estas postulaciones sea la consistencia formal.

Ahora bien, el diagnóstico de un problema no implica su solución. Hasta aquí, entonces, llega mi diagnóstico del problema exhibido por Benacerraf, y el resto de este trabajo es un intento por contribuir a su solución.

1.3 Hacia una nueva metafísica de las matemáticas.

En la sección 1.1 expuse mis razones para afirmar que lo que necesitamos para elaborar una filosofía de las matemáticas satisfactoria es la posibilidad de conjuntar el carácter restrictivo de la verdad platonista, con la libertad y autoridad que el matemático tiene sobre las derivaciones que hace a partir de axiomas consistentes. En términos más coloquiales, podríamos decir que el carácter restrictivo mencionado implica que la verdad matemática es *descubierta*, mientras que la libertad y autoridad implican que la verdad es, hasta cierto punto, *inventada*. Lo que necesitamos es, entonces, una nueva metafísica que nos permita caracterizar a los objetos matemáticos de esta manera, esto es, como productos parcialmente descubiertos y parcialmente inventados.

Las ideas de Lakatos sugieren un posible camino a seguir. La dialéctica entre pruebas y refutaciones exhibida muestra a un grupo de matemáticos con la libertad suficiente para modificar la proposición que buscan probar, pero al mismo tiempo concernidos con encontrar una verdad que escapa a su control. Es justamente esta imagen la que es articulada en uno de los pasajes más citados de Lakatos:

> Mathematics, this product of human activity, alienates itself from the human activity which has been producing it. It becomes a living, growing organism, that acquires a certain autonomy from the activity which has produced it; it develops its own autonomous laws of growth, its own dialectic. (1976, p. 146)

Así, Lakatos propone una aparente paradoja, esto es, que las matemáticas son el producto de nuestra actividad matemática, pero, a la vez, autónomas. O bien, que nuestra actividad matemática debe obedecer a la verdad matemática al mismo tiempo que la produce.

El reto que enfrenta nuestra tercera vía propuesta es, entonces, el de hacer sentido de esta paradoja. La propuesta central de esta investigación es que esto es posible concibiendo a los objetos matemáticos como artefactos. Como veremos en el siguiente capítulo, los artefactos poseen una metafísica muy particular, que los rinde como objetos que, en cierto sentido, dependen de nuestras prácticas, pero que al mismo tiempo poseen una naturaleza autónoma. Antes de ello, sin embargo, es necesario aclarar ciertos aspectos acerca del tipo de relación, entre verdad y práctica, que requerimos para lograr la metafísica indicada.

En la sección 1.1 de este trabajo mencioné brevemente a Quine y Maddy, quienes defienden un tipo de platonismo naturalista que otorga un papel importante a nuestras prácticas científicas y matemáticas. Más específicamente, lo que ellos afirman es que el éxito de nuestras prácticas científicas (en las cuales las matemáticas juegan un papel prominente) es toda la justificación que la verdad matemática requiere. Las ciencias –y no la filosofía– son la mejor fuente de conocimiento que poseemos, por lo que una justificación externa es, no sólo innecesaria, sino también imposible.

Esta relación, entre el éxito observado en nuestras prácticas y la verdad establecida por él, no es, sin embargo, el tipo de relación que buscamos. Lo que nuestra tercera vía requiere es una práctica que juega un papel en la *constitución* de la verdad, y no sólo en su *justificación*. El vínculo propuesto por Quine y Maddy es puramente epistémico, y no metafísico. Su naturalismo se apoya en una inferencia a la mejor explicación. Más específicamente, la mejor explicación del éxito de nuestras prácticas científicas –la única que no lo hace parecer milagroso– es que las teorías que producen son verdaderas. Esto, sin embargo, presupone una verdad previa e independiente de nuestras prácticas, y no un producto de ellas.

Más adelante, en el capítulo 3 de este trabajo, expondré con cierto detalle tres propuestas filosóficas que sí plantean el tipo correcto de relación entre práctica y realidad. Madeline Muntersbjorn (1999, 2003, 2007) habla de objetos matemáticos *cultivados* por nuestra actividad matemática de manera análoga a como nuevas especies vegetales son producidas por nuestras actividades agrarias; Julian Cole (2005, 2008, 2009, 2012) habla de objetos matemáticos *declarados* por la comunidad matemática de manera análoga a como las instituciones sociales declaran la existencia de objetos sociales como las fronteras geopolíticas; Ian Hacking (2009) habla de objetos matemáticos *cristalizados*, como resultado de nuestras capacidades cognitivas y una situación histórica particular.

Estas tres propuestas tienen en común que consideran a los objetos matemáticos como reales, pero producidos por nuestras prácticas matemáticas, y pueden ser englobadas bajo la etiqueta, creada por el mismo Cole, de *realismos dependientes de las prácticas*. Desde un punto de vista ontológico, sin embargo, esto podría parecer una contradicción, pues choca con la idea central que subyace a los estudios ontológicos tradicionales, según la cual, aquello que realmente existe lo hace de manera absolutamente independiente de nosotros:

> No true fact can depend upon people's believing it, on their knowledge of it, on their conceptualization of it, or on any other aspect of cognition. Existence cannot depend in any way on human cognition (Lakoff, citado en Thomasson 2009, p. 207).

Este enfoque claramente excluye, por principio, la posibilidad de que existan objetos reales que dependen de nuestras prácticas.

Sin embargo, no todos los filósofos están de acuerdo con este enfoque. La reducción de objetos materiales a moléculas, átomos y partículas sub-atómicas quizás haya resultado provechosa en la física, pero cuando se trata de organismos biológicos, fenómenos sociales y objetos tecnológicos, la ontología de la física carece de mucho poder explicativo, y algunos filósofos piensan que es necesario buscar una alternativa. Uno de ellos, Lynne Rudder Baker, escribe:

> Different philosophers, I have found, approach their research with different goals in mind. One of my goals in philosophy is to understand the common world that we all encounter. That world is populated by an enormous variety of kinds of things –from cows to cabbages, from cathedrals to catheters. There is genuine novelty in the world. (2002, p. 31)

Lo que Baker busca hacer es suavizar las pretensiones de la ontología. Esto es, a pesar de que en cierto sentido global probablemente estaríamos de acuerdo en que todo, o casi todo, es materia y energía, y que la meta última del conocimiento sería poder explicarlo todo en términos de las leyes que gobiernan a la materia y energía, en otro sentido, más local y pragmático, parecería que una meta también loable, y más asequible, sería explicar el mundo que nos rodea en cualesquiera términos que nos resulten provechosos, inclusive si estos términos incluyen productos de la actividad humana.

Es dentro de este enfoque ontológico que los realismos dependientes de la práctica cobran sentido, y en el cual buscaré insertar mi propia teoría artefactual de los objetos matemáticos. Los artefactos –como las mesas, las computadoras y las escuelas– son objetos que solemos considerar, o al menos referirnos a ellos, como reales, pero que claramente no existirían si no fuese por nuestras prácticas. Más aun, parece claro que sería prácticamente imposible hacer sentido de nuestro mundo sin hacer referencia a ellos.

En el resto de esta investigación intentaré extender esta tesis al mundo matemático. Esto es, argumentaré que nuestra comprensión de las matemáticas se verá favorecida si adoptamos este enfoque ontológico y concebimos a los objetos matemáticos como artefactos. Para ello será necesario comenzar hablando de la teoría de artefactos, la cual ha sido tema de mucho interés en la literatura filosófica reciente, y a la cual dedicaré el siguiente capítulo. Una vez hecho esto, procederé a analizar las propuestas de Muntersbjorn, Cole y Hacking a la luz de esta teoría, y posteriormente elaboraré mi propia propuesta.

Antes de proceder, sin embargo, es preciso recordar el antes mencionado carácter programático de esta investigación, y aclarar que no pretendo que los someros argumentos expuestos en este primer capítulo, o en el resto de este trabajo, constituyan una refutación del platonismo o del formalismo. Como lo mencioné anteriormente, mis críticas buscan ser un instrumento para motivar mi propuesta, y para señalar el camino a seguir.

CAPÍTULO 2: ARTEFACTOS Y CONOCIMIENTO

Para poder entender qué significa afirmar que los objetos matemáticos son artefactos, es necesario entender primero qué exactamente son los artefactos. A primera vista, esto no parecería una tarea difícil, pues vivimos rodeados de ellos –automóviles, teléfonos, artículos de vestir, sillas, lápices, etc.– cuya naturaleza no parecería encerrar ningún acertijo filosófico. Sin embargo, al intentar formular una caracterización teórica de estos objetos, las dificultades surgen inmediatamente, y éstas han motivado, en años recientes especialmente, una literatura filosófica muy abundante acerca del tema.

El objetivo de este capítulo es exponer las controversias principales en torno a este tema y que debemos conocer para comprender la tesis principal de este trabajo. Comenzaré con una breve exposición de las principales dificultades que enfrenta la teoría de artefactos. Posteriormente analizaré dos nociones que son fundamentales para comprender la naturaleza de los artefactos: primero, aquella de la relación de constitución y los objetos que dependen del ser humano, y segundo, la noción de la función artefactual. Ésta última es una noción fundamental para comprender la naturaleza de los artefactos, por lo que, para seguir adelante, será necesario indicar cuál es la teoría de la función artefactual que asumiré en esta investigación. Después haré una muy breve exposición de tres cuestiones filosóficas acerca de artefactos, a saber, su estatus ontológico, la semántica que gobierna su discurso, y su epistemologia. Culminaré el capítulo hablando de los artefactos epistémicos y la manera en la que estos funcionan dentro de las prácticas generadoras de conocimiento.

2.1 ¿De qué hablamos cuando hablamos de artefactos?

Intuitivamente, pensaríamos que al hablar de artefactos estaríamos hablando de un conjunto definido de objetos, entre los cuales se encuentran los artefactos prototípicos: automóviles, computadoras, lápices, sillas, canicas, etc., y que la tarea consistiría en desarrollar una caracterización teórica –idealmente un conjunto de condiciones necesarias y suficientes– que nos permitiera determinar, para cualquier objeto dado, si es o no un artefacto. Sin embargo, al intentar formular estas condiciones, inmediatamente surgen dificultades que revelan que la cuestión es considerablemente más compleja de lo que a primera vista parecía, y que el reino de los artefactos es más heterogéneo de lo que nuestra experiencia cotidiana podría sugerir. En esta sección introductoria al tema de artefactos me ocuparé de exponer algunas de estas dificultades, dejando para las secciones siguientes la exposición más sistemática de las teorías que buscan resolverlas.

Tomaré, como punto de partida, una definición de "artefacto" que podríamos calificar de inocente, puesto que, a pesar de concordar con nuestras nociones del sentido común acerca de ellos, encuentra dificultades ante el más básico de los escrutinios teóricos. La definición es la siguiente: *Un artefacto es un objeto que ha sido hecho intencionalmente para cumplir un cierto propósito* (Hilpinen 2009), y las dificultades no son difíciles de encontrar. En primer lugar, y como veremos en seguida, existen muchos objetos que consideraríamos como artefactos, pero que no cumplen con esta definición; en segunda instancia, existen objetos que no clasificaríamos como artefactos a pesar de que cumplen con esta definición; por último, como mostraré más adelante, casi todos sus términos principales son vagos, y requieren de considerable elaboración.

Comencemos por considerar una piedra que tomamos del bosque y que utilizamos como pisapapeles. La mayoría estaríamos de acuerdo en que esta piedra es, ahora, un pisapapeles, y por ello un artefacto. Sin embargo, este artefacto no fue "hecho" por nadie (al menos en el sentido usual de "hacer"), tan sólo fue recogido y colocado en un contexto distinto. La piedra utilizada como pisapapeles es un caso extremo en el que el objeto no sufrió ninguna modificación, pero la cuestión se complica si consideramos dos nuevas variantes: primero, si la piedra es lijada levemente para remover las asperezas, y segundo, si para ahorrarnos el trabajo de lijarla seleccionamos y recogemos una piedra naturalmente lisa. La producción de un objeto es comúnmente asociada con la transformación de materiales, sin embargo, las variantes anteriores revelan que su selección puede jugar un papel igualmente importante.

Para hacer sentido de esto suele apelarse a la *intencionalidad* vertida en el objeto. Lo importante, suele decirse, no es si el objeto fue modificado o solamente seleccionado, sino que lo haya sido intencionalmente. La piedra es un pisapapeles porque fue intencionalmente seleccionada para serlo, inclusive si no sufrió modificación alguna. Sin embargo, la intencionalidad también es problemática, como podemos apreciar si consideramos el caso de un sendero en el campo, creado por el repetido paso de la gente, pero sin planeación alguna. Este tipo de senderos son considerados por muchos (Sperber 2007, Hilpinen 2009) como artefactos, sin embargo, claramente no son hechos "intencionalmente", al menos en el sentido usual de la palabra. El sendero no es el resultado de las intenciones de ninguna persona en particular, y cualquier intencionalidad que le atribuyamos deberá ser encontrada, no en las intenciones conscientes de una persona particular, sino implícita en la práctica que un grupo de personas tiene de caminar repetidamente por el mismo lugar.

Otra complicación relacionada con la intencionalidad ocurre en casos en los que un artefacto es diseñado con una intención en mente, pero la comunidad de usuarios decide utilizarlo de otra manera. Este es el caso de iglesias que han sido transformadas en librerías, o bien artefactos que fueron hechos con cierta función en mente, pero que en el uso han desarrollado otras funciones "accidentales". Por ejemplo, Scheele (2006) relata cómo es que el artefacto "figura-8" para escalar fue diseñado como un instrumento para hacer *rappel*, pero es comúnmente utilizado también para asegurar la cuerda de los compañeros alpinistas. Este tipo de casos muestra que la expresión "un cierto propósito" puede ser interpretada con distintos grados de especificidad, esto es, no queda claro si este propósito es fijo y encontrado en las intenciones de su diseñador, o si bien puede variar de acuerdo a las intenciones de sus usuarios.

En todo caso, es claro que las intenciones por sí mismas no bastan, dado que, por más que lo deseemos, nadie ha podido fabricar una alfombra voladora. Las intenciones deben ir acompañadas, al menos en principio, de una *capacidad* efectiva de realizar la tarea buscada. Digo "al menos en principio" puesto que este requisito también encuentra problemas al considerar artefactos que no funcionan como deberían. Una computadora descompuesta, o incluso una que nunca funcionó, siguen siendo computadoras, a pesar de que no sean capaces de cumplir con el propósito buscado. Algunos artefactos son, inclusive, creados sin ninguna intención de que cumplan su propósito usual, como algunos botes que fueron hechos sin ninguna intención de ser puestos nunca en el agua (Thomasson 2007), y no por ello dejan de ser botes. Este tipo de casos revelan la ambigüedad contenida en la expresión "para cumplir un cierto propósito", esto es, no es claro si este cumplimiento debe ser efectivo, o hasta qué punto el "para" contenido en la expresión introduce un elemento intencional que podría no cumplirse bajo ciertas circunstancias.

Los anteriores son casos de objetos que suelen ser considerados artefactos, pero que no cumplen del todo con la definición inocente de artefacto. La contraparte de estos casos son objetos que intuitivamente no consideraríamos como artefactos, pero que sí cumplen con dicha definición. Por ejemplo, algunos animales domésticos, como los gatos, son objetos "creados" intencionalmente con el propósito de hacernos compañía, entre otras cosas, pero, al menos en el contexto biológico, no son considerados como artefactos. O bien, es difícil pensar que un río cuyo fondo ha sido excavado para facilitar la navegación ha pasado de ser un objeto natural a ser un artefacto sólo por dicha excavación (Grandy 2007). Pero, quizás los ejemplos que más claramente ilustran esta dificultad son los que involucran elementos químicos, generalmente considerados como prototipos de clases naturales. Por ejemplo, Grandy (2007) señala que el Fierro rara vez se da naturalmente, es necesario purificarlo mediante un proceso artificial, por lo que no queda claro por qué no deberíamos considerarlo como un artefacto. O, consideremos un caso en el que agua es creada en el laboratorio, mediante un proceso artificial, por motivos didácticos. A pesar de ser un objeto hecho intencionalmente para cumplir cierto propósito, esta agua difícilmente sería considerada un artefacto.

No es difícil apreciar que detrás de estas dificultades se encuentran los problemas derivados de una dicotomía sumamente problemática: aquella entre *natural* y *artificial*. El término "artefacto" está íntimamente ligado a lo "artificial", y es contrapuesto con lo "natural". Esto sugiere que el camino para resolver los problemas en la teoría de artefactos debe pasar por una aclaración de esta dicotomía. Sin embargo, como veremos en seguida, este camino prueba ser igualmente difícil. A pesar de ser utilizada constantemente en nuestra vida cotidiana, al intentar caracterizarla teóricamente, esta dicotomía parece desvanecerse. Hasta el objeto más artificial está compuesto, en última instancia, de materiales naturales, y apelar al involucramiento humano para caracterizar a lo artificial también resulta difícil, dado que somos un ser natural, y no queda claro qué exactamente es lo que hace que nuestro involucramiento pudiera transformar un objeto natural en artificial (Elder 2007, p. 40).

Un recurso al que se ha apelado comúnmente para intentar distinguir a la natural de lo artificial es la "esencia" que, supuestamente, tienen los objeto naturales, mas no así los artificiales. La esencia del agua es ser H_2O, y la del león tener cierto DNA, esto es, una cierta naturaleza intrínseca —en estos casos, una configuración química o genética— que los hace agua o león, y que los objetos artificiales carecen, por ser objetos supuestamente "compuestos" por el ser humano. Sin embargo, como bien señala Grandy (2007), el acero inoxidable y el café descafeinado, ambos comúnmente considerados como objetos artificiales, también tienen una configuración química específica e intrínseca, por lo que no parece haber razones para negarles una esencia. La única diferencia entre el agua y el café descafeinado es que la primera se da por procesos naturales, mientras que el segundo es el resultado de procesos realizados por seres humanos. Sin embargo, como bien señala Dennett (1990), no hay una discontinuidad fundamental entre la selección natural y la artificial, y por tanto no hay una manera clara de distinguir entre un descubrimiento y un invento. No hay, en los objetos artificiales, un rastro de su artificialidad que nos permita distinguirlos de sus contrapartes naturales. Nuestra distinción entre lo natural y lo artificial se apoya siempre en un conocimiento directo de hechos históricos (p. 192) —como el hecho de que el café descafeinado fue hecho por primera vez por tal o cual compañía comercial— que difícilmente podría ser una base sólida para el tipo de distinción teórica que estamos buscando.

Esto ha conducido a numerosos autores a afirmar que, en lugar de una dicotomía estricta, existe un espectro continuo entre lo natural y lo artificial, con casos paradigmáticos como el sol y las computadoras en los extremos, y una gran cantidad de casos intermedios (Dennett 1990, Elder 2007, Sperber 2007, Grandy 2007, Kroes 2012). Esta suavización de la dicotomía parece particularmente necesaria en vista de desarrollos tecnológicos recientes como baterías hechas de bacterias, virus diseñados para combatir el cáncer, etc. (Baker 2004). Esta idea nos podría conducir a pensar también en la artefactualidad como una cuestión de grado, esto es, en lugar de calificar a cada objeto como artefacto o no artefacto, asignarle un grado de artefactualidad.

Sin embargo, esta idea enfrenta también dificultades importantes, que se hacen evidentes al preguntarnos por los criterios que determinarían este grado de artefactualidad. Anteriormente mencioné al sol como un objeto paradigmáticamente natural, de manera que pensaríamos que su grado de artefactualidad debería ser cero. Sin embargo, analizado un poco más de cerca observamos que es posible contextualizar al sol de manera que resulte difícil encontrar algún factor significativo que lo distinga en su grado de artefactualidad de objetos que solemos considerar como artefactos. Esto es, si consideramos que el sol es un objeto que cumple la función, buscada intencionalmente por los agricultores, de proporcionar la energía necesaria para el crecimiento de las cosechas, entonces parecería que el sol debería tener el mismo grado de artefactualidad que, por ejemplo, la piedra que utilizamos como pisapapeles[15].

Esta dificultad ha conducido a la propuesta de que lo que distingue a los conceptos artefactuales de los naturales son hechos meramente *psicológicos* (Grandy 2007, p. 20), esto es, que nuestro reconocimiento de ciertos objetos como naturales, y de otros como artificiales, responda meramente a sesgos psicológicos, productos del contexto pragmático en el que el objeto se encuentra inmerso. Si esto es correcto, entonces no habría nada en los objetos mismos o en el mundo que los determinara, ya sea como artefactos, o bien como objetos naturales[16]. La razón por la cual el sol es considerado un objeto natural y la piedra que utilizamos como pisapapeles es considerada un artefacto sería, entonces, que mientras que la identidad del primero fue forjada y es sostenida dentro de las ciencias naturales, la de la segunda lo es dentro de las prácticas del diseño industrial.

Por último, cabe añadir a todo esto las controversias que acompañan a objetos que claramente no cumplen con nuestra idea del artefacto técnico prototípico, pero que aun así son objetos hechos por el ser humano para cumplir con un cierto propósito, y por tanto han sido citados por algunos autores como miembros del reino de los artefactos. Entre éstos se encuentran: la Suprema Corte de Justicia (Uzquiano 2004), una palabra (Sperber 2007), una

[15] La única diferencia que yo veo es que en el caso de la piedra la movemos físicamente para colocarla en un nuevo contexto, mientras que nos es imposible mover el sol, por lo que nos vemos limitados a esperar a que la Tierra gire hasta el punto en el que podamos utilizar el sol. Esta diferencia no me parece lo suficientemente sustantiva para sustentar una distinción entre objeto natural y artefacto.

[16] Bloom (2007) argumenta que inclusive existen objetos híbridos, que dentro de ciertos contextos son tratados como objetos naturales, pero dentro de otros son tratados como artefactos. Él da como ejemplo al agua, comúnmente tomado con un paradigma de una clase natural caracterizada por ser H_2O, pero que en otros contextos es tratado de manera artefactual, como es evidenciado por el hecho de que utilizamos el término para referirnos a objetos que sabemos que no son H_2O, como como el agua del radiador de un automóvil, o un charco en la calle. La posible explicación de que esto lo hacemos con los objetos que tienen un alto contenido de H_2O falla, al notar que nos rehusamos a llamar "agua" a objetos como un té, o lágrimas, que tienen más H_2O que el agua de un radiador. Así, concluye Bloom, el alto contenido de H_2O no parece ser el criterio definitivo del uso del término "agua".

sinfonía (Thomasson 2007) o una fila de personas (Sperber 2007), entre muchos otros. Estos objetos sugieren que, una vez que dejamos atrás nuestra experiencia cotidiana con artefactos y nos introducimos en su estudio teórico, encontraremos que el reino de los artefactos es mucho más heterogéneo y se encuentra más poblado de lo que a primera vista podríamos pensar.

Ante todas estas dificultades, cabe preguntarse qué tan buena idea es buscar aclarar los acertijos filosóficos que rodean a los objetos matemáticos por medio del concepto de "artefacto". Esto es, si los artefactos son tan problemáticos, parecería que introducirlos a la conversación sólo podría generar nuevos acertijos. En el transcurso de este trabajo espero mostrar que esto no es así, y que, a pesar de las dificultades, la teoría de artefactos puede resultar iluminadora para el problema de los objetos matemáticos en diversos sentidos importantes.

A continuación intentaré esclarecer de manera más metódica el fondo de las cuestiones que se encuentran detrás de estas dificultades. Sin embargo, es preciso aclarar que éstas se encuentran vivas y están siendo discutidas en la literatura actual, y que mi intención no es dirimirlas ni argumentar en favor de ninguna de las posiciones que buscan resolverlas. El tema central de esta tesis no es la teoría de artefactos, sino los objetos matemáticos, por lo que bastará con una exposición que nos proporcione las herramientas conceptuales necesarias para poder articular mi tesis de manera precisa.

Culminaré el capítulo indicando la teoría de artefactos que asumiré durante el resto de la investigación. Esta asunción obedecerá a motivos principalmente pragmáticos en dos sentidos: primero, al asumir una teoría, podré dejar atrás las controversias que rodean a los artefactos y concentrarme en articular una sola teoría de los objetos matemáticos concebidos como artefactos; segundo, mi elección de la teoría de artefactos que asumiré obedece a que me parece la más conveniente para elaborar mi teoría, aunque cabe apuntar que creo que existen diversas maneras de concebir a los artefactos, cada una de las cuales resultaría en una caracterización interesante de los objetos matemáticos como artefactos.

2.2 Dependencia y constitución.

Si no fuera por nuestras prácticas de escribir, sentarnos, comer, etc., no existirían los lápices, sillas, cucharas, etc. En este sentido, los artefactos son claramente objetos cuya existencia es dependiente de nuestras prácticas. Esto, sin embargo, puede tener dos sentidos significativamente distintos. Esta dependencia puede ser *causal*, en el sentido de que el objeto es el producto un suceso que ocurrió dentro de nuestras prácticas, pero que una vez producido es un objeto independiente de ellas, o bien puede ser *constitutiva*, en el sentido de que nuestras prácticas son una condición necesaria y persistente para su existencia (Haslanger 1995, p. 98).

Un ejemplo claro de un objeto causalmente dependiente de nuestras prácticas son los desechos industriales. Éstos claramente no existirían si nuestras prácticas industriales no los hubieran generado, pero, ahora que existen, lo hacen de manera independiente de nuestro reconocimiento de su existencia. Por el otro lado, un ejemplo de objeto constitutivamente dependiente es el dinero, el cual perdería todo su valor y su carácter de dinero si dejase de ser reconocido como tal, de manera que su existencia requiere del reconocimiento constante del ser humano, el cual depende de la persistencia de nuestras prácticas monetarias. Con otros objetos el tipo de dependencia no es tan clara. Por ejemplo, no es claro si una cobija lo seguiría siendo si no existiera nadie para utilizarla, o si bien pasaría a ser sólo un pedazo de tela (o los átomos de los cuales está compuesta).

La dependencia causal de un objeto es, entonces, un fenómeno bastante sencillo, pues refiere simplemente al hecho de que el suceso que dio origen al objeto fue un suceso provocado por las prácticas humanas. La dependencia constitutiva, sin embargo, es más compleja, y su explicación requiere de un aparato teórico más sofisticado. El término teórico utilizado para este propósito es el de la "relación de constitución", y refiere al hecho de que un objeto constituye a otro objeto, en el sentido de estar formado por él. La balsea está constituida por las maderas y clavos de la que está hecha, y el perro está constituido por sus células; o, siendo más precisos, la balsa está constituida, en el tiempo *t*, por la maderas y clavos de los que está hecha en ese momento, y el perro está constituido, en el tiempo *t*, por las células que lo componen en ese momento.

Esta precisión, respecto a la temporalidad de la relación de constitución es muy importante, pues implica la no identidad de los objetos involucrados en la relación de constitución. Dado que, la misma balsa podría, en otro tiempo *t'*, estar constituida por otro conjunto de maderas y clavos, y que la muerte o nacimiento de algunas de las células del perro no implicaría un cambio en su identidad, tenemos que la relación de constitución expresa un tipo de relación muy peculiar, en la que dos objetos presentan cierta unidad, en el sentido de que, mientras que ésta se mantenga, ellos serán un mismo objeto, pero a la vez admite la posibilidad de que, en un momento posterior, esta relación se disuelva y podamos distinguir entre ellos. Baker (2002) caracteriza a este tipo de relación como una de *unidad sin identidad* (p. 33), y propone la siguiente caracterización formal de ella:

> (C) x constitutes y at t = df. There are distinct primary-kind properties F and G and G-favorable circumstances such that:
> (1) x has F as its primary-kind property & y has G as its primary-kind property; &
> (2) x and y are spatially coincident at t; &
> (3) x is in G-favorable circumstances at t; &
> (4) $\Box\forall z\forall t$[(z has F as its primary-kind property & z is in G-favorable circumstances at t) $\rightarrow \exists$u(u has G as its primary-kind property & u is spatially coincident with z at t)]; &
> (5) $\Diamond\exists$t{(x esists at t &~$\exists$w[w has G as its primary-kind property & w is spatially coincident with x at t])}; &
> (6) If y is immaterial, then x is also immaterial. (p. 35)

No resulta difícil ver que esta formulación refleja las propiedades expuestas anteriormente de manera más informal. La cláusula (4) refleja la unidad de los objetos en relación de constitución, y la (5), al afirmar que es posible que exista un tiempo *t* en el que esta relación haya sido disuelta, asegura su no identidad.

Ahora bien, la relación de constitución no es exclusiva de los artefactos. Cualquier objeto material, con la posible excepción de las partículas elementales del universo (si es que las hay), está formado por otros objetos que lo constituyen. Lo que hace a la relación de constitución particularmente interesante para la teoría de artefactos es que ella nos permite expresar de manera más precisa el carácter dependiente de los artefactos. Este va a consistir en que las condiciones *G*-favorables indicadas en la condición 4 de la caracterización anterior hagan incluyan la presencia de ciertas actitudes proposicionales humanas[17] (Baker 2002, p. 32). Así, el carácter independiente (o natural) de, por ejemplo, los árboles, se explica puesto que, a pesar de estar constituidos por sus células, las condiciones *G*-favorables de esta relación de constitución no incluyen ningún tipo de actitudes proposicionales humanas, mientras que las condiciones *G*-favorables necesarias para que se dé la relación de constitución de, por ejemplo, el dinero, sí lo hacen.

[17] No es mi intención negar la existencia de artefactos animales, cuya existencia es defendida y analizada en Gould (2007). Me restrinjo a hablar de artefactos humanos pues la filosofía de las matemáticas se ocupa exclusivamente de las matemáticas realizadas por humanos.

Esta relación, entre los artefactos –entendidos como objetos constitutivamente dependientes– y las actitudes proposicionales humanas ha motivado su caracterización como objetos hasta cierto punto *institucionales*, en un sentido muy amplio del término. Esto se debe a que las actitudes proposicionales mencionadas no son las de una sola persona, o de un conjunto cualquiera de personas, sino de una comunidad unida por una práctica común, esto es, de una institución. Ahora bien, solemos identificar a las instituciones con entidades regidas por un marco legal y explícito de reglas, como lo son las instituciones gubernamentales y las empresas, sin embargo, en el sentido más amplio del término, al cual apelo aquí, estas no son sus características esenciales. Lo que distingue a lo institucional, en el sentido al que me refiero, es el ser el resultado de acuerdos, explícitos o implícitos, sustentados en prácticas colectivas.

Estas dos formas de entender la dependencia y constitución enfatizan distintos aspectos de la naturaleza de los artefactos y nos pueden conducir a diferentes concepciones de ellos, cada una con sus ventajas y desventajas. Sin embargo, ahora todavía no es momento de examinar estas ventajas y desventajas, pues aún no hemos analizado el concepto de "función artefactual" que, además de ser fundamental para la teoría de artefactos, juega un papel clave en su constitución. Esto es, los artefactos no son un tipo cualquiera de objetos dependientes, sino que deben su constitución a una combinación de intenciones y capacidades que se concretan en la emergencia de una función artefactual. Este concepto, sin embargo, es muy problemático, y a su esclarecimiento dedico la siguiente sección.

2.3 La función artefactual.

El concepto de función es un concepto central en la teoría de artefactos. La literatura acerca de él es muy abundante, y parte de ella proviene del análisis de las funciones biológicas. Las funciones artefactuales, sin embargo, son distintas a las biológicas, y se requiere de un considerable trabajo de adaptación. A pesar de esta abundancia, no se han logrado alcanzar consensos amplios acerca de su naturaleza. El principal problema puede entenderse, a grandes rasgos, como proveniente de una ambigüedad presente en el término. Por un lado, función significa *propósito*: un lápiz tiene la función de escribir puesto que lo utilizamos con el propósito de escribir. Por el otro lado, función significa *capacidad*: un lápiz tiene la función de escribir puesto que tiene ciertas propiedades que posibilitan la escritura. Si bien es cierto que nuestros propósitos sueñen estar estrechamente ligados a las capacidades de los objetos que utilizamos para intentar cumplirlos, esta relación no es tan simple como a primera vista podría parecer.

Para ilustrar estas dificultades basta con considerar algunos casos en los que propósitos y capacidades no coinciden. Por ejemplo, una persona puede tener el propósito de volar encima de una alfombra, pero ésta no tiene la capacidad de posibilitar el vuelo. O bien, consideremos un ejemplo menos extravagante: una computadora descompuesta, que sigue siendo una computadora y teniendo la función de computar, inclusive si no posee dicha capacidad. La contraparte de estos ejemplos son los objetos que poseen ciertas capacidades que no son comúnmente consideradas como una de sus funciones (al menos no una de sus funciones propias). Por ejemplo, un refrigerador tiene la capacidad de detener puertas, pero detener puertas no es considerada como una de sus funciones.

Como mencioné anteriormente, la literatura sobre la función artefactual es muy abundante, y contiene un gran número de propuestas que buscan resolver las dificultades mencionadas. Sin embargo, dado que el tema central de esta investigación no es la teoría de artefactos, no haré una revisión exhaustiva de éstas. Tampoco es mi intención dirimir disputas abiertas, ni argumentar en favor de una teoría particular. Lo que haré será exponer las principales características de cada una de las principales teorías de la función artefactual, así como sus principales dificultades, con el propósito de exhibir claramente las cuestiones que están en juego en la discusión, de manera que podamos referirnos a ellas a la hora de elaborar la teoría artefactual de los objetos matemáticos. Para ello me apoyaré fundamentalmente en el libro *Technical Function: On the Use and Design of Artefacts* (2011), de Wybo Houkes y Pieter Vermaas.

Houkes y Vermaas llevan a cabo su análisis del concepto de función artefactual por medio de lo que ellos mismos consideran una abstracción de los tres elementos principales presentes en las diferentes teorías de la función. Una vez realizada esta abstracción proceden a ubicar, con respecto a estos tres elementos, a cada una de las propuestas existentes en la literatura, identificando a cada una de ellas como correspondiendo a alguno de estos elementos, o bien a combinaciones lógicas –conjunciones o disyunciones– de ellos. Estos tres elementos son: el *intencional*, el *causal* y el *evolutivo*, que dan pie a teorías intencionales, teorías del papel causal y evolutivas, respectivamente, así como a las teorías mixtas que surgen de sus combinaciones.

Tras exponer las virtudes y defectos de cada uno de estos tipos de teorías, Houkes y Vermaas proponen su propia teoría de la función, la teoría ICE, que es primordialmente una teoría intencional, pero que incorpora también elementos causales y evolutivos. Sin embargo, afirman que esta combinación no es una simple conjunción o disyunción de éstas, sino una integración más sofisticada que le permite superar a otras propuestas.

Teorías intencionales de la función artefactual.

Las teorías intencionales de la función se basan en la idea de que las intenciones, creencias y acciones de los agentes determinan las funciones de los artefactos. Un agente diseña, construye, o simplemente utiliza un artefacto con un propósito φ, o con una capacidad de "φ-ar" en mente, y por ello el artefacto puede ser descrito como un objeto para lograr φ, o para "φ-ar". La función es atribuida por el agente cuando éste lo inserta en un sistema de medios y fines, ya sea al diseñarlo, utilizarlo, o con simplemente reflexionar sobre él (Houkes y Vermaas 2011, p. 50).

Un caso referido por Houkes y Vermaas en el que el factor intencional predomina es la teoría de la función de Karen Neander, quien escribe:

> I suggest that the function of an artifact is the purpose or end for which it was designed, made, or (minimally) put in place or retained by an agent (…) It is enough, in the case of intentional selection, if the designer believes or hopes that the artifact will have the desired effect and selects it for that purpose (Neander 1991, citado en Houkes y Vermaas 2011, p. 52).

La identificación, por parte de Neander, de la función con las intenciones de los agentes es clara, y nos permite observar las virtudes y deficiencias asociadas con las teorías intencionales. Entre las virtudes se encuentra su capacidad de manejar con facilidad el caso de los artefactos descompuestos. Dado que la función depende de las intenciones de los agentes, y que éstas son capaces de persistir incluso si no se logran cumplir, las funciones de los artefactos sobreviven el mal funcionamiento de éstos. Otra virtud es que admite una variedad de atribuciones de funciones en diferentes contextos de medios y fines, y tampoco tiene problema en la atribución de funciones innovadoras.

Las deficiencias surgen de la necesidad de que las atribuciones de funciones encuentren alguna medida de soporte estructural en el artefacto. Bajo estas teorías, si mi intención es volar en una alfombra, entonces es perfectamente aceptable afirmar que una de las funciones de esa alfombra es la de volar. Dado que esto va a ser imposible, tendríamos que decir que, dado que no se puede volar en ella, esa alfombra está descompuesta. Esto no cuadra con nuestras intuiciones acerca de lo que son las funciones artefactuales. Otra deficiencia es la proliferación de funciones. Cuando un ingeniero químico diseña un nuevo detergente, muchas intenciones entran en juego además de la de quitar manchas. La compañía que fabrica el detergente tiene la intención de aumentar sus ventas, el ingeniero la de impulsar su carrera como ingeniero, etc. Bajo esta teoría, el detergente tendría como funciones, además de quitar manchas, la de generar ventas para la compañía, impulsar la carrera del ingeniero, etc., lo cual, de nuevo, no cuadra con nuestras intuiciones acerca de las funciones artefactuales.

Por supuesto que hay mucho espacio para refinar la noción de "intención" de manera que los problemas no sean tan inmediatos. Por ejemplo, Thomasson, consciente de la necesidad de que estas intenciones tengan alguna medida de soporte en la estructura del artefacto, agrega que esta intención debe ser *exitosa* e *informada*:

> [A]n artifactual kind term will pick out entities that are the products of largely successful intentions to create something of that kind (where that intention must involve a substantive, and substantively correct, conception of what features are relevant to being a member of the kind). (Thomasson 2007, p. 59).

Una preocupación similar es expresada en Martínez (2013), quien recurre al concepto de "práctica" para asegurarse de que las intenciones de los agentes no carezcan de un soporte adecuado:

> [I]t is important to realize that the attribution of intentions requires sharing standards and individuating situations, and this is a role for practices. Unless standards are in place, and memory and expectations are shared, the attribution of intentions would not be able to get off the ground (p. 16).

La idea es que, para que una práctica sea duradera y estable, debe obedecer a estándares colectivos que son el producto de éxitos, mismos que serían imposibles si no existiera alguna medida de soporte en las intenciones de los agentes.

Al hacer referencia a capacidades e historias de éxito, sin embargo, estos refinamientos claramente introducen elementos causales y evolutivos, y el resultado es ya una teoría híbrida de la función artefactual. Paso ahora a explicar los otros dos tipos de teorías de la función artefactual.

Teorías causales de la función artefactual.

La teoría del papel causal proviene de Cummins (1975) y captura otra de nuestras intuiciones acerca de las funciones artefactuales, esto es, que las funciones de los objetos están relacionados con los papeles causales que éstos tienen en sistemas compuestos por ellos. Bajo estas teorías, el término "función" se refiere, sin ninguna ambigüedad, a la *capacidad* de un artefacto, o de un componente de un artefacto. Cummins define la función de la siguiente manera:

> x functions as a φ in s (or: the function of x in s is to φ) relative to an analytical account A of s's capacity to Φ just in case x is capable of φ-ing in s and A appropriately and adequately accounts for

> *s*'s capacity to *Φ* by, in part, appealing to the capacity of *x* to *φ* in *s*. (Cummins, citado en Houkes y Vermaas 2011, p. 57)

Así, según Cummins, las intenciones de los agentes son completamente irrelevantes para la atribución de funciones, y éstas corresponden, inequívocamente, a una capacidad actual del objeto, que contribuye causalmente a las capacidades del sistema que lo contiene.

Esto tiene, por supuesto, la ventaja de resolver los problemas de la teoría intencional en cuanto a la satisfacción del soporte estructural para cumplir efectivamente con la función. Bajo este tipo de teorías, es imposible atribuir la función de volar a una alfombra, sin importar las creencias o intenciones de los agentes. Otra ventaja es que es posible darnos cuenta, en retrospectiva, de que cierto objeto ha estado cumpliendo con alguna función de la cual ni los mismos diseñadores estaban conscientes. Sin embargo, estas ventajas tienen un precio, y éste es que se pierde la capacidad de lidiar con artefactos descompuestos. De acuerdo con la teoría de Cummins, si un televisor está descompuesto, es imposible atribuirle su función buscada y describirlo como un televisor descompuesto – esto simplemente no tiene sentido bajo las teorías causales. Otra desventaja es que admite la proliferación de funciones, aunque en un sentido diferente a las teorías intencionales. Los artefactos juegan diversos papeles causales en diversos sistemas que los contienen. Por ejemplo, todo lo que se encuentra bajo el sol contribuye causalmente a generar su propia sombra, pero es generalmente aceptado que sólo algunos objetos –las sombrillas– tienen esta función (Houkes y Vermaas 2011, p. 59).

Existen, además de la de Cummins, otras teorías de la función que incorporan ciertos elementos de la teoría del papel causal. Houkes y Vermaas mencionan la de Kitcher (1993), Preston (1998) y Davies (2000, 2001). No abordaré los detalles específicos de éstas.

Teorías evolucionistas de la función artefactual.

Las teorías evolucionistas deben su nombre a la teoría de la evolución en biología. Darwin explica la evolución de las especies apelando a la selección natural, esto es, a los patrones de reproducción de los seres vivos. En el terreno de los artefactos, la reproducción no suele darse de manera natural (al menos no en los artefactos prototípicos), pero sí existe una re-producción, seleccionada por los productores de los artefactos. Análogamente, estas teorías proponen que lo que distingue a los diferentes tipos de artefactos –su función– es determinada por aquellas capacidades que propiciaron su re-producción:

> [T]he evolutionist function theory applies to any artefact *x* that has a long-term reproduction history, that is, to any artefact *x* that can be taken as a successor in a series *p*, *p'*, *p''*, ... of predecessor artefacts. A capacity to *φ* counts as an evolutionist function of an artefact *x* if and only if that capacity contributed positively to the reproduction of its predecessors and the current artefact *x*. (Houkes y Vermaas 2011, p.61)

Así, mientras que las teorías intencionales apelan a las intenciones, y las causales a las capacidades, las teorías evolucionistas apelan, para la atribución de funciones, a la *historia re-productiva* de los objetos funcionales.

Nótese que esta teoría hace referencia a objetos funcionales siempre en el contexto de una cadena de objetos del mismo tipo, y por tanto puede aplicarse sólo a artefactos con una historia de largo plazo. Un poco más adelante hablaré de los problemas que esto ocasiona. Antes, es preciso aclarar que la serie de artefactos no tienen que ser copias exactas uno del otro, y más aún, que es posible que no todos posean la capacidad en cuestión. Así como es posible que un individuo de una especie animal no posea las capacidades que propiciaron la reproducción de sus ancestros –y su propia existencia– es posible que un artefacto deba su existencia a la función de los artefactos previos de su mismo tipo, pero que éste sea defectuoso y no posea dicha capacidad. Existe, así, un margen de error en la re-producción, abriendo la puerta a que artefactos defectuosos posean una función propia, coincidiendo así con nuestras intuiciones al respecto. Este margen, sin embargo, no es infinito. Ciertas restricciones aplican para poder afirmar que *p'* es una re-producción de *p*. Estas restricciones varían dependiendo del tipo de objeto en cuestión, pero es común que se exija cierto grado de similitud entre los objetos. Esto evita que una alfombra pueda ser considerada como descendiente de un avión, inclusive si la intención, de un agente, de volar en esa alfombra, se debe a la capacidad que los aviones tienen de volar.

Habiendo observado las deficiencias de las teorías intencionales y causales, esto parecería ser la combinación perfecta. Por un lado, el margen de error admite que un avión defectuoso siga teniendo la función de volar, conservando así las ventajas de las teorías intencionales; y por el otro, las restricciones impuestas sobre este margen de error evitan que suceda lo mismo con una alfombra. La similitud entre los individuos de la cadena re-productiva proporciona cierta medida de soporte en la atribución de funciones, conservando así las ventajas de las teorías causales, pero esta medida no es tan estricta que excluya la posibilidad de individuos defectuosos.

Esta teoría tiene, sin embargo, algunas desventajas. Una de ellas es que presupone una historia reproductiva para cualquier objeto que posee una función. Este supuesto no es cumplido por artefactos innovadores, como el primer avión, o la primera planta nuclear (p. 63). Para acomodar a este tipo de artefactos, parecería necesario recurrir a elementos intencionales o causales en la atribución de funciones, abriendo con ello la puerta a los problemas propios de estas teorías. Otro problema ocurre en los casos en los que una función innovadora es atribuida a un artefacto previamente existente. Un ejemplo es la Aspirina, una medicina que debe su re-producción a su capacidad analgésica, pero que recientemente ha sido prescrita a pacientes cardiacos para adelgazar su sangre y evitar la formación de coágulos. Bajo la teoría evolucionista, esta última función no podría ser atribuida. Otra objeción concierne a los dobles accidentales, esto es, si un accidente cósmico resultara en la súbita convergencia de moléculas tal que se formara un doble exacto, molécula a molécula, de un artefacto, de acuerdo con la teoría evolucionista, éste objeto no poseería la misma función que el original, pues no posee la historia apropiada para ello. Esto parece chocar con nuestras intuiciones, que parecerían determinar que objetos idénticos deberían tener funciones idénticas.

Teorías mixtas de la función artefactual.

Cada uno de los tres tipos de teorías adolece de defectos distintos. Mientras que las teorías intencionales son demasiado liberales en la atribución de funciones, permitiendo la atribución de funciones inexistentes, las causales y evolutivas son demasiado estrictas, excluyendo funciones existentes. Por ello, parecería razonable pensar que ellas podrían complementarse unas a otras, y que una buena combinación de dos o más de ellas podría funcionar para cumplir con todas las desideratas expuestas. La mayoría de las teorías presentes en la literatura actual son, de hecho, combinaciones de dos de estas teorías. Hay combinaciones conjuntivas, esto es, que indican que la atribución de funciones debe cumplir con la conjunción de las condiciones indicadas por dos teorías, y hay combinaciones disyuntivas, esto es, que indican que la atribución de funciones debe cumplir con la disyunción de las condiciones indicadas por dos teorías. Houkes y Vermaas mencionan algunas de estas teorías, caracterizándolas como combinaciones de estos tipos: Kitcher (1993), disyuntiva intencional-causal; Krohs (2009), conjuntiva intencional-causal; Millikan (1984, 1993) y Sperber (2007), disyuntivas intencionales-evolutivas; Griffiths (1993), conjuntiva intencional-evolutiva; Preston (1998), disyuntiva causal-evolutiva; y Davies (2000, 2001), conjuntiva causal-evolutiva.

Sin embargo, Houkes y Vermaas argumentan que ninguna de estas funciona, y ninguna otra que fuese una conjunción o disyunción de ellas podría llegar a funcionar, pues éstas heredan los problemas de los tipos originales. Por simple lógica, el exceso de liberalidad en las teorías intencionales será heredado por cualquier combinación disyuntiva que incluya al elemento intencional, y el exceso de restricciones presente en las teorías causales y evolutivas serán heredadas por cualquier combinación conjuntiva que incluya un elemento casual o evolutivo. Así, la única combinación que parecería tener la posibilidad de funcionar sería una disyuntiva causal-evolutiva, como la de Preston. Sin embargo, es claro que, a pesar de la disyunción, esta combinación seguirá siendo demasiado estricta, pues ellas no se complementan de la manera adecuada. Las teorías evolutivas tienen problemas atribuyendo funciones a artefactos innovadores, y las causales a artefactos defectuosos, por lo que la combinación será incapaz de atribuir funciones a artefactos innovadores defectuosos (p. 75)[18].

Houkes y Vermaas piensan que lo que se requiere es una teoría que incorpore a los tres elementos –intencional, causal y evolutivo– pero no una simple conjunción o

[18] A la luz de esto, Houkes y Vermaas se plantean la posibilidad de que la lista de requisitos impuestos al concepto de "función" sea incumplible, revelando con ello el término 'función' es utilizado para hacer referencia a más de un solo fenómeno, y que estos fenómenos son incompatibles, necesitaríamos más de una teoría de la función. Sin embargo, rechazan esta posibilidad, y elaboran su teoría ICE con la idea de cumplir con todos los requisitos.

disyunción, sino algo más sofisticado. Es así que formulan su teoría ICE, que es una teoría primordialmente intencional (de allí la *I*), con elementos causales y evolutivos (de allí la *C* y la *E*). Su teoría gira en torno a una concepción de los artefactos estrechamente ligada con lo que ellos llaman *planes de uso*. Un plan de uso para un objeto *x* es una serie de acciones orientadas hacia un fin, tales que incluyen la manipulación de *x*, misma que contribuye a la consecución del fin buscado (Houkes y Vermaas 2006, p. 7). Diseñar un artefacto es construir, tal vez inconscientemente, un plan de uso para un objeto, y comunicarlo a los eventuales usuarios; utilizar un artefacto es ejecutar el plan de uso, ya sea que este se encuentre o no explícito en la consciencia del usuario. Dado esto, la función técnica de un artefacto es el papel que éste juega en el plan de uso, y es sólo en el contexto de un plan de uso que tiene sentido hablar de funciones artefactuales. Así, estas funciones no son intrínsecas al artefacto, sino que dependen de las intenciones de los agentes. En términos más precisos, las condiciones de la teoría ICE para la atribución de funciones son las siguientes:

> An agent *a* ascribes the capacity to *φ* as a function to an artefact *x*, relative to a use plan *p* for *x* and relative to an account *A*, iff:
> I. the agent *a* has the capacity belief that *x* has the capacity to *φ*, when manipulated in the execution of *p*, and the agent a has the contribution belief that if this execution of *p* leads successfully to its goals, this success is due, in part, to *x*'s capacity to *φ*;
> C. the agent *a* can justify these two beliefs on the basis of *A*; and
> E. the agents *d* who developed *p* have intentionally selected *x* for the capacity to *φ* and have intentionally communicated *p* to other agents *u*. (Houkes y Vermaas 2006, p. 9)

La idea es, entonces, partir de una teoría intencional expresada en términos de planes de uso (expresada en la condición *I*), indicando que el agente que atribuye la función debe tener la *creencia* de que el plan de uso será efectivo. Las cláusulas *C* y *E* buscan dar una medida de soporte a estas atribuciones, de manera que estas no se hagan de manera demasiado liberal.

La cláusula *C* exige que la creencia en la efectividad del plan esté *justificada* por medio de cierta historia *A*. Esta, me parece, es la mayor diferencia con respecto a las teorías expuestas anteriormente. A diferencia de las teorías causales, que exigen que la función sea, de hecho, cumplida, pedir que la creencia en la efectividad sea justificada no implica que ésta deba ser verdadera. Esto abre la posibilidad a la existencia de artefactos defectuosos, que a pesar de no cumplir, de hecho, con su función, aun así la conservan. El apelar a la justificación, sin embargo, introduce un elemento extra de complejidad al concepto de función técnica, convirtiendo a los artefactos en objetos esencialmente sociales.[19] Houkes y Vermaas están conscientes de esto, y lo reconocen al afirmar que "there must be a collectively accepted measure of support for the belief that an artefact can be used successfully to realize a goal"[20] (2011, p. 80).

La cláusula evolutiva *E* también busca restringir la atribución de funciones, evitando la proliferación de funciones idiosincráticas. Al exigir que los planes de uso sean comunicados a los usuarios, se evita que se hagan atribuciones de funciones bajo planes de

---

[19] Scheele (2006) también enfatiza este carácter social, al afirmar que lo que cuenta o no como una función no depende sólo de las intenciones de su diseñador, ni de sus capacidades estructurales, sino también del contexto social en el que éste es utilizado.

[20] Esto no implica que la justificación deba por fuerza de provenir del plan del diseñador, dado los usuarios pueden diseñar nuevas maneras de usar al artefacto. Tampoco es necesario que todos los integrantes de la comunidad conozcan la justificación, pues los usuarios pueden justificar su creencia apoyándose simplemente en el testimonio del experto, sin conocer los detalles de la justificación. O bien, si el usuario ha utilizado el artefacto con éxito en el pasado, esta experiencia le da toda la justificación necesaria. En este caso, este usuario se convierte en un *justificador* del plan de uso, y otros usuarios pueden justificar su creencia apoyados en el testimonio de este tipo de usuarios. De esta manera, los justificadores encubren el rol epistémico de los diseñadores, y las cadenas de justificación pueden contener justificadores en varios puntos, eliminando la necesidad de regresar siempre a la justificación original elaborada por el diseñador. Esto permite, por ejemplo, que un usuario atribuya a los aviones la función de volar, incluso si no conoce la teoría física que justifica esta creencia, apoyándose en testimonios o en experiencia propia.

uso que tienen fines claramente privados, como, por ejemplo, el plan que un diseñador tiene de que el detergente que está diseñando contribuya a su plan de ganar dinero para pagar su renta. Este requisito comunicativo busca también incorporar estándares comunitarios, sugiriendo que, a menudo, la comunicación y aceptación comunitaria es parte integral de la justificación.

La teoría ICE no está libre de dificultades. Sus mismos autores reconocen en ella un defecto en lo que refiere a su manejo de aquellos artefactos cuya descompostura es conocida por sus usuarios. El problema consiste en que dicho conocimiento socavaría su creencia en la capacidad del artefacto de cumplir con su función, imposibilitando así el cumplimiento de la condición *I*.[21] Seguramente ICE adolece de otros defectos que probablemente hayan sido señaladas por otros autores. No he realizado una revisión exhaustiva de la bibliografía crítica a ella, pues, como mencioné anteriormente, el tema central de esta tesis no es la teoría de artefactos y no tengo interés en dirimir disputas internas a ella. Durante el resto de esta investigación asumiré a ICE como la teoría de la función artefactual. La razón de esto es doble. En primer lugar, al incorporar a los tres componentes principales del concepto de función –el intencional, el causal y evolutivo– esta teoría nos provee con un amplio abanico de herramientas que, como espero mostrar más adelante, nos permitirán incorporar, en la caracterización artefactual que elaboraré de los objetos matemáticos, a los diversos elementos presentes en la práctica matemática que

[21] Para resolver este problema, Houkes y Vermaas hacen una distinción entre tener una capacidad, y poder ejercitar dicha capacidad. La idea es que el automóvil con el carburador agujerado no puede ejercitar la capacidad de transportar personas, pero aun así la tiene. Esto se debe a que este tipo de descompostura, se sabe, ya sea por estar contemplada en el instructivo de mantenimiento del automóvil, o bien por ser de conocimiento común, es tal que es “tecnológicamente posible y económicamente razonable” resolverla (p. 107).

contribuyen a la formación de dichos objetos. En segundo lugar, la inclusión de la justificación de nuestras creencias como un requisito para la atribución de la función artefactual nos permitirá conectar a los artefactos con las prácticas generadoras de conocimiento y sus estándares de justificación.

2.4 Ontología de artefactos.

Existe una larga tradición, que se remonta a Aristóteles, de negar a los artefactos un lugar en nuestra ontología. Para Aristóteles, uno de los sentidos de Naturaleza (*Physis*) es sustancia (*Ousía*), y los artefactos no son, según él, sustancias. Según el interpretador de Aristóteles al que se lea, esto se debe a que, o carecen de un principio de cambio interno, o bien que carecen de actividad psíquica, o unidad intrínseca, o separación. Si bien este rechazo, por parte de Aristóteles, se apoya en principios cuestionables, y en una biología que ahora reconocemos como deficiente, el espíritu de este rechazo ha encontrado seguidores en la actualidad. Uno de los más prominentes es Peter van Inwagen, quien expresa esta postura al considerar el impacto ontológico que causa la construcción de, por ejemplo, un fuerte:

> Have they brought anything (a fort, say?) into existence? I should say that they have not. They have rearranged the furniture of earth without adding to it. The blades of their bulldozers have pushed grains of sand –or simples arranged grainwise– about and piled them in a military useful way, but they have not brought even one object into existence. (But if one of the legionnaires said, “we have built a fort,” he would thereby assert a true proposition.) The fort, therefore, is a virtual object (1990, p. 124).

Esta es la posición proyectivista hacia los artefactos, según la cual los artefactos son “objetos virtuales”, meras proyecciones de nuestras mentes que no merecen un lugar en nuestra ontología. El material del cual están compuestas (o quizás el material del cual éste está compuesto) es lo real, y los artefactos se encuentran sólo en nuestras mentes. Esta posición conduce a una asociación de lo real con lo natural, esto es, con aquello que existe de manera completamente independiente del involucramiento humano y de sus intenciones.

Existen, sin embargo, varios argumentos en la literatura actual que muestran que esta conclusión es problemática. En primer lugar, como ya vimos en la sección 2.1 de este trabajo, la tarea de distinguir entre los objetos naturales y los artefactos presenta graves dificultades, al grado de que la posibilidad de hacer esta distinción ha quedado en tela de juicio. Así, para precisar su posición, los proyectivistas enfrentan la difícil tarea de especificar con precisión a qué es a lo que quieren negar existencia.[22] Esta dificultad sugiere que la diferencia entre los objetos naturales y los artefactos pudiera no ser tan marcada como a primera vista se pensaría, y su estatus ontológico distinto pudiera no estar justificado. Esto parece más claro cada día, dado que, conforme la tecnología avanza, la frontera entre lo natural y lo artificial se hace cada vez más borrosa. Baker (2008) señala varios objetos de desarrollo reciente cuya clasificación resulta complicada, y sugiere que la distinción entre lo natural y lo artificial, lo independiente y lo dependiente de nosotros, se está volviendo irrelevante:

> Are these objects —the digital organisms, robo-rats, bacterial batteries, genetically engineered viral search-and-destroy missiles— artifacts or natural objects? Does it matter? I suspect that the distinction between artifacts and natural objects will become increasingly fuzzy; and as it does, the worries about the mind-independent/mind-dependent distinction will fade away (p. 7)

[22] Baker identifica cinco criterios usuales para distinguir a los objetos naturales de los artefactos: 1) tener un principio interno de actividad. 2) Ser sujeto de leyes que permitan ser objetos de una ciencia. 3) Que la identidad del objeto no sea determinada por la satisfacción de una descripción, sino por una naturaleza profunda. 4) Tener una esencia intrínseca subyacente. 5) Ser independiente de toda actividad intencional. Baker argumenta que los cuatro primeros criterios fallan, y cita contraejemplos similares a los que mencioné en la sección 2.1 de este trabajo, y piensa que el último criterio sí funciona para distinguir a los objetos naturales de los artificiales, pero que no debe tener consecuencias ontológicas, dado que el ser humano es parte de la naturaleza, por lo que la distinción no revela ningún hecho interesante acerca de la metafísica de los objetos.

En esta misma dirección se encuentran las ideas de Thomasson, quien piensa que la dependencia del hombre no es una buena base para un criterio ontológico. El hombre es, después de todo, parte de la naturaleza, de modo que no es fácil entender cómo es que podría ser una fuente de artificialidad. Por esta razón, Thomasson articula su propio criterio ontológico que nada tiene que ver con la dependencia humana. Éste es el *criterio formal de existencia*, según el cual cada objeto posee sus propias condiciones de existencia, de acuerdo al uso propio del término:

> [W]e can gain a more neutral, and non-question-begging approach to existence questions by holding a purely formal criterion for existence: for any term 'K', things of kind K exist just in case the application conditions criterially associated with proper use of the term are met (…) The relevant conditions may vary for different types of entity, so, e.g., the conditions under which there is a rabbit will be very different from those under which there is a paperweight, a dollar bill, or a story. (2009, p. 197)

Este criterio admite la existencia de todo tipo de entidades que serían rechazadas por el criterio tradicional. Inclusive los personajes ficticios que encontramos en la literatura existirían, siempre y cuando hayan sido creados por sus autores, pues esta es la condición de uso asociada con el término "personaje literario". De acuerdo con este enfoque ontológico, los artefactos claramente existen. Lejos de ser un problema, (y dependiendo de la manera en la que los concibamos) su carácter intencional se convierte en un requisito para su existencia.

Este enfoque va en contra de la máxima que tradicionalmente ha regido a la ontología, según la cual ésta está interesada solamente en aquellos objetos que existen de manera independiente al ser humano, así, no es sólo un argumento en contra del proyectivismo, sino un cuestionamiento de las premisas ontológicas que conducen a él. Más adelante veremos que, tanto los realismos dependientes de la práctica que han sido formulados en filosofía de las matemáticas, como mi propia teoría artefactual se verán beneficiados de este tipo de enfoques. Sin embargo, no todos los teóricos de artefactos piensan que este es un enfoque adecuado. Entre sus críticos se encuentra Elder, quien piensa que los artefactos existen y por ello rechaza el proyectivismo, sin embargo, piensa que el criterio formal de Thomasson difiere del proyectivismo sólo en nombre:

> I cannot shake the misgiving that Thomasson's defense of artifacts differs only verbally from the projectivist's rejection of artifacts. If the very existence of artifacts consists in the fact that people harbor certain thoughts concerning the material contents of the world, then, I cannot but think, an ontology that posits only those thoughts themselves can explain everything that an ontology also positing artifacts can explain. (Elder 2007, p. 35).

Este será un tema de análisis más adelante, esto es, cómo es que la combinación de intenciones y el material en el que son depositadas dan origen a un artefacto que no puede ser reducido a ellas.

Elder ofrece un argumento distinto en favor de la existencia de los artefactos. Su idea central consiste en mostrar que los artefactos –al menos un gran número de ellos– poseen las mismas características que solemos asociar con las clases naturales, y que por tanto son merecedores de su mismo estatus ontológico. Tradicionalmente, apunta Elder, se ha concebido a una clase natural como una familia de instancias sobre las cuales ciertas inferencias inductivas resultarán no-accidentalmente verdaderas, esto es, una familia unida por una naturaleza común (2007, p. 37). Hasta aquí Elder no tiene objeción, sin embargo, señala que esta concepción suele ir acompañada de la idea, errónea en su opinión, de que esto se debe a la presencia de *una* propiedad responsable de todas las propiedades que distinguen a esa clase de todas las demás. Esta propiedad única suele ser identificada como la esencia del objeto, y su posesión distingue a las clases naturales delas artificiales.

Elder propone que esta propiedad única que supuestamente distingue a la clase no tiene porqué existir, y que puede ser sustituida por una *combinación* de propiedades, ninguna de las cuales lo hace por sí sola, pero cuya combinación resulta en una clase de objetos con propiedades bien definidas que, si bien no son el reflejo de una esencia, tampoco son accidentales:

> [T]he traditional conception leaves room for this possibility: that properties $p_1, \ldots, p_n$ are essential properties of *X*s just in case enough other properties cluster together with $p_1, \ldots, p_n$, by virtue of the laws of nature, that *X*s are bound to possess properties or combinations of properties found in members of no other kind. Our realist analysis of essentialness, I maintain, should take exactly this more liberal form. We should not insist that among the properties essential to the members of a given natural kind there need be any properties found in that kind alone. We should require only that the essential properties must cluster together non-accidentally, and in a cluster found in no other kind. (p. 38)

La liberalización consiste, entonces, en prescindir de la esencia natural (o equivalentes) que buscaba Aristóteles, y que era la supuesta causa de las propiedades esenciales que caracterizaban al objeto, y admitir cualquier conjunto de propiedades exhibidas por una clase de objetos, de manera no accidental, como requisito suficiente para sostener su existencia.

Esta liberalización abre la puerta a sostener la existencia de los artefactos, apelando a la no accidentalidad de las propiedades que los objetos deben cumplir para pertenecer a cada una de las clases artefactuales. Según Elder, entonces, la cuestión central que determina el estatus ontológico de un objeto no es su dependencia o independencia del ser humano, sino su relación con el mundo. El grado de robustez de esta relación determina la estabilidad de sus propiedades y posibilita su caracterización como una clase de objetos existentes. Así, por ejemplo, los barcos existirían puesto que son utilizados por los seres humanos para navegar por cuerpos de agua. Esta navegación vincula a los barcos con el mundo y sus leyes naturales, puesto que deben cumplir con ciertos requisitos estructurales para un hundirse, avanzar, etc., y además los vincula con los seres humanos, parte del mundo natural, puesto que la navegación es un aspecto importante en nuestra forma de vida y forma parte de una práctica estable en nuestra cultura.

La no accidentalidad de las propiedades de los artefactos se encontraría fundamentada, entonces, tanto en sus capacidades, como en nuestras intenciones de uso, y es suficiente, según Elder, para combatir las acusaciones de que ellos poseen una naturaleza convencional. Lo convencional es, según Elder, sinónimo de lo que podría, sin pérdida de valor, ser de otra manera (p. 50). La utilidad que los artefactos nos proveen para lidiar con un mundo que, debido a su resistencia los moldea, imposibilita su caracterización como objetos convencionales y, si Elder tiene razón, justifica su existencia.

Así, en esta breve exposición de la ontología de artefactos he presentado tres posibles posiciones: el anti-realismo respecto a los artefactos que sostiene el proyectivismo, el realismo que podríamos llamar "débil", de Thomasson, y el realismo "duro" de Elder. Antes de dejar el tema, apuntaré solamente que los realismos de Thomasson y Elder no son tan distintos como a primera vista lo parecen. Esto es, si bien Thomasson enfatiza el carácter intencional de los artefactos y Elder enfatiza sus capacidades, ambos presuponen la presencia de los dos elementos. Como vimos durante nuestro análisis del concepto de función, en el mediano y largo plazo, las intenciones de una comunidad para con un objeto sobreviven solamente cuando éste efectivamente posee la capacidad de satisfacerlas, y, por el otro lado, las capacidades de un objeto son descubiertas o desarrolladas solamente bajo la motivación de estas intenciones. Este será un tema recurrente en el resto de este trabajo.

2.5 Semántica de artefactos.

Las dificultades ontológicas asociadas a los artefactos no se traducen en dificultades semánticas. Las reservas acerca de la realidad de los artefactos no contaminan el discurso acerca de ellos. Al menos en el contexto del discurso cotidiano, nuestras aseveraciones acerca de artefactos son interpretadas de manera literal y con condiciones de verdad objetivas (y no contextuales, como el discurso dentro de una ficción). Como vimos en la cita de van Inwagen de la sección anterior, incluso quienes niegan la realidad de los artefactos aceptarían que es verdad que un lápiz sirve para escribir, o que tal o cual lápiz es azul. Habría que entrar en un contexto filosófico muy particular y alejado del sentido común para decir que estos enunciados no son verdaderos puesto que los artefactos no son reales.

Algo que sí caracteriza al discurso acerca de artefactos es una flexibilidad conceptual muy marcada. Esto es, a pesar de que las clases artefactuales suelen tener una historia de cambios significativos que hacen que los ejemplares actuales puedan diferir en gran medida de ejemplares antiguos, nadie se opone a que utilicemos el mismo término para referirnos a ellos. Por ejemplo, las computadoras de hoy son muy diferentes a las primeras computadoras (tanto en forma como en función), pero nadie se opone a que utilicemos la misma palabra para referirnos a ellas, y nadie alegaría que las primeras computadoras no eran, en realidad, computadoras. No sucede lo mismo con algunos objetos naturales, particularmente con los objetos de la física. Resulta difícil imaginar, por ejemplo, que el concepto de electrón fuese lo suficientemente flexible para admitir que los electrones de hace un tiempo fueran distintos a los actuales. Esto se debe a que los conceptos artefactuales están ligados a la función que sus ejemplares deben cumplir, y ésta sufre cambios conforme cambian nuestras necesidades y nuestros medios para satisfacerlas.[23]

Es así que la semántica artefactual toma la forma de una semántica referencial, pero que al mismo tiempo ofrece una flexibilidad en sus referentes que nos resultará útil más adelante, al elaborar la teoría artefactual de los objetos matemáticos.

2.6 Epistemología de artefactos.

En esta sección me ocuparé de dos cuestiones relacionadas con la epistemología de artefactos. En primer lugar, existe una discusión acerca del tipo de acceso epistémico que tenemos a los artefactos. Esta discusión está estrechamente ligada con la concepción que se tiene de ellos. Quienes piensan que son objetos intencionales, constitutivamente dependientes del ser humano, afirman que esto nos proporciona un cierto privilegio epistémico, esto es, una vía de acceso más segura que las vías empíricas tradicionales. Quienes, en cambio, piensan que su dependencia es sólo causal, rechazan la idea de que tengamos este privilegio, y que nuestro conocimiento de ellos se da de la misma forma que con el resto de los objetos. En segundo lugar, hablaré un poco acerca de lo que significa conocer un artefacto. Su naturaleza como objetos funcionales suscita la cuestión de si el conocimiento de estos objetos es análogo al conocimiento de objetos naturales, o bien si es

[23] Una posible explicación de esto es que, a diferencia de otros objetos en los que la referencia parece darse de forma directa, al estilo las teorías de referencia directa de Kripke y Putnam, en el caso de los artefactos la referencia parecería darse por descripción, o bien de manera mixta (Schwartz 1978, 1983; Thomasson 2003). Esto se debería a que los artefactos no parecen tener una "esencia profunda" acerca de la cual podamos estar equivocados, sino que son objetos que pertenecen a un tipo particular debido a que cumplen ciertos criterios establecidos socialmente. Sin embargo, Kornblith (2007), difiere.

necesario apelar, en el caso de los artefactos, a un tipo de conocimiento práctico que difiere del conocimiento tradicional proposicional.

Comenzaré con la cuestión del privilegio epistémico. La idea proviene de la concepción intencional de los artefactos, pues, en la medida en la que nuestras[24] intenciones forman parte de las condiciones necesarias para su constitución, y determinan, al menos en parte, su naturaleza, ellas nos proporcionan una vía segura para su conocimiento. En términos más intuitivos, sabemos que una calculadora debe, al menos en principio, calcular, una cafetera hacer café, etc. Esta naturaleza –o al menos partes de ella– puede, entonces, ser conocida por simple análisis de un conjunto de intenciones acerca de cuya naturaleza difícilmente podríamos estar equivocados. Esta posición es sostenida por Thomasson, quien afirma:

> [G]rounders' concepts of what general *sorts of* features are relevant to being a member of an artifactual (as opposed to a chemical, biological, or physical) kind *determine* what sorts of properties are relevant to membership in an artifactual kind and are not themselves open to revision (...) If this is correct, then speakers can't all be wrong about what distinguishes artifactual kind terms and concepts, (...) making mankind's conceptual analysis an appropriate method for determining what *sorts* of common features must distinguish membership in an artificial kind. (2007, p. 59, énfasis del autor).

Esto significa que, a diferencia de los objetos naturales, acerca de los cuales podríamos estar masivamente equivocados, o cuya existencia podríamos ignorar, sería imposible que una comunidad completa ignorase la existencia de algún tipo de artefacto, o estuviese equivocada acerca de aquellos aspectos de su naturaleza que son esenciales para su constitución. Es por esto que la historia de la ciencia está llena de casos de errores masivos respecto a objetos naturales, como que la Tierra era plana, pero no hay ni un solo caso de

[24] En seguida aclararé a quién exactamente se refiere este "nosotros".

error masivo respecto al conocimiento de nuestros artefactos. Es a esta imposibilidad a la que me refiero con el privilegio epistémico que tenemos hacia nuestros artefactos.

Este privilegio, sin embargo, no debe ser exagerado al grado de afirmar que la dependencia de los artefactos implica que sepamos todo acerca de ellos. Existen, al menos, dos fuentes de ignorancia. En primer lugar, el conocimiento de una comunidad no implica el conocimiento de cada uno de sus individuos. La constitución de los artefactos obedece a intenciones comunitarias, sostenidas por alguna porción suficiente[25] de la comunidad pertinente, pero cuyo contenido completo no es conocido por todos sus usuarios. Así, por ejemplo, parecería perfectamente aceptable que, para ser un automóvil, un objeto deba tener un sistema de ignición, pero que no todos sus usuarios lo sepan.

La segunda fuente de ignorancia es aún más importante, y se debe al hecho de que las intenciones que dan origen a un artefacto no agotan su naturaleza. Estas intenciones son plasmadas en un objeto que tiene características propias e independientes de nuestras intenciones, que muy posiblemente no conozcamos. Esto significa que, a pesar de su carácter dependiente, los artefactos tienen características que podemos descubrir y que pueden inclusive resultarnos sorprendentes. Un ejemplo famoso de este tipo de ignorancia es el caso de la Aspirina, la cual fue diseñada como analgésico, pero cuya capacidad de adelgazar la sangre fue eventualmente descubierta. Inclusive en casos en los que no se descubre una nueva función, es muy posible que no tengamos un conocimiento total de las características del artefacto que la hacen posible. Por ejemplo, podríamos ignorar por completo, como los primeros usuarios de cuchillos seguramente lo hicieron, qué

[25] Qué exactamente significa "una porción suficiente" es una cuestión muy compleja que tiene que ver con el funcionamiento de las comunidades epistémicas, y cuyo análisis se encuentra fuera de los objetivos de esta investigación.

características moleculares son las que hacen que los cuchillos corten. Esto sin mencionar las características más accidentales de cada ejemplar artefactual, como, por ejemplo, que un automóvil particular sea azul o rojo.

Pasando ahora a la segunda cuestión, acerca de lo que significa conocer un artefacto, cabe preguntarse si su naturaleza funcional implica que el conocimiento de un artefacto es distinto al conocimiento proposicional. Esto es, dado que los conceptos artefactuales están íntimamente ligados a su función, parecería que, quienes no conozcan su función, no podrían pretender conocer al artefacto. La pregunta, entonces, es, qué significa conocer una función.

En su (2006), Houkes argumenta que este tipo de conocimiento es epistémicamente peculiar, y requiere atención especial. Para mostrar esto, considera el ejemplo de un detergente, y se pregunta cómo podemos saber que éste puede ser usado para lavar trastes. Una posible fuente es el testimonio, ya sea de otra persona, o de la etiqueta en el envase. Pero la cadena que concluye con este testimonio debe comenzar con otro tipo de justificación, que no es un *saber-qué*, sino un *saber-cómo*. Este saber- cómo está asociado no sólo a creencias, sino también a razones prácticas para hacer algo:

> [K]nowledge of possible functions has an intrinsic relation to practical reasoning: it provides reasons for *doing* something rather than just *believing* something. Conversely, in the absence of such practical reasons one cannot claim to have knowledge of a possible function. (p. 106; énfasis agregado)

Sin embargo, aclara Houkes, así como este saber-cómo no se reduce a una descripción, tampoco puede reducirse a un uso actual del artefacto. Esto se debe, en primera instancia, a que es posible saber usar un artefacto sin poder, de hecho, usarlo. Por ejemplo, yo puedo saber usar el detergente para lavar trastes, pero no poder hacerlo por falta de agua, o porque soy alérgico a él. En segunda instancia, es posible hacer uso exitoso de un artefacto sin por ello concluir que sabemos usarlo. Esto se debe a que este éxito pudo haber sido producto de la buena suerte, y el saber-cómo requiere de tener éxito en un rango de circunstancias, de manera que no puede ser analizado en términos de episodios individuales.

Así, afirma Houkes, el saber-cómo debe ser analizado en términos de dos componentes: el procedural y el operacional. El procedural –en concordancia con su teoría ICE de la función artefactual– consiste en tener conocimiento de que la realización de una serie de acciones conduce al cumplimiento de un objetivo, esto es, conocimiento de un plan de uso. El operacional consiste en poseer las habilidades necesarias para ejecutar este plan de uso.[26] Esto, afirma Houkes, coloca a este tipo de conocimiento en un terreno distinto al usual:

> The preceding analysis reveals a source of normativity in knowledge of functions different from the normativity sometimes claimed for all knowledge. This normativity has to do with practical reasons and with the content of knowledge, not with theoretical reasons and epistemic norms applied to propositional attitudes, such as truth, coherence or justification. (p. 106)

Esta particularidad del conocimiento de artefactos nos resultará útil más adelante, al elaborar mi teoría artefactual de los objetos matemáticos, puesto que es muy común escuchar, en matemáticas, que si no sabes contar no conoces los números, o que si no sabes sumar no conoces la suma.

En suma, encontramos que los artefactos son un tipo de objetos con ciertas características acerca de las cuales no podemos estar masivamente equivocados, pero que este privilegio no abarca la naturaleza completa de los artefactos, por lo que nuestro

---

[26] Nótese que esto no contradice el hecho de que no sea necesario poder hacer uso actual del artefacto para saber usarlo. No es lo mismo carecer de las habilidades necesarias para usar un artefacto que carecer de los medios. Inclusive si no tengo agua para lavar los trastes, puedo decir que poseo las habilidades para hacerlo.

conocimiento de ellos no es infalible. Y, además, que el conocimiento de artefactos es peculiar, en el sentido de que, al menos ciertos aspectos de él, toman la forma de un saber-cómo que de un saber-qué.

2.7 Artefactos epistémicos y conocimiento científico.

La tesis principal de esta investigación es que los objetos matemáticos son artefactos *epistémicos*, esto es, artefactos cuya función propia es la de facilitar, o incluso generar conocimiento. Los artefactos epistémicos son muy variados, y van desde simples objetos materiales en los que depositamos información, como señales, letreros, libros, etc., hasta sistemas complejos que, más que depósitos de información previamente conocida, funcionan como instrumentos que posibilitan la generación de un conocimiento previamente inexistente. Éste es el caso de, por ejemplo, las escalas musicales, las palabras (Sperber 2007), los sistemas simbólicos (Sterelny 2004), los diagramas (Martínez 2013), los modelos científicos (Knuuttila 2005, 2011 y Rusanen y Lappi 2010), y, si tengo razón, los objetos matemáticos.

Los artefactos epistémicos han jugado un papel primordial en la expansión de nuestro conocimiento y son indispensables para explicar la riqueza de la cultura humana (Sterelny 2004, Martínez 2011, Clark 2001). Sterelny (2004) describe a los seres humanos, y a otros animales, como "ingenieros epistémicos" (p. 4), ya que actuamos para modificar el carácter informacional de nuestro ambiente. La idea, proveniente de las teorías de la cognición extendida[27], es que, para potenciar nuestras capacidades cognitivas,

[27] Sin por ello estar comprometida con tesis más fuertes, como que estos artefactos forman parte de nuestras mentes.

almacenamos información en el ambiente (misma que sería difícil recordar utilizando sólo nuestra memoria), creando con ello ambientes de trabajo que facilitan las tareas y transformando con ello problemas cognitivos difíciles en problemas más sencillos. Un ejemplo que ilustra esto son las mencionadas escalas musicales, las cuales nos permiten transformar una información auditiva muy difícil de procesar en una notación visual que nos permite analizar detenidamente las notas, los tonos y los tiempos de cada sonido. Debemos notar que estas escalas no sólo nos permiten hacer una representación de un conocimiento previo acerca del sonido, sino que nos permiten analizarlo de nuevas maneras, generando nuevas formas de hablar de él y estableciendo condiciones de verdad previamente inexistentes.

Este es el tipo de artefacto epistémico que resulta interesante para los propósitos de esta investigación. Dado que muchos de los objetos matemáticos no encuentran, en el mundo físico, un objeto que les corresponda, concebirlos como simples depósitos de información no resuelve nuestros problemas. Así, para que mi tesis sea interesante, es necesario que los objetos matemáticos sean el tipo de artefactos epistémicos que generan contenido, y no sólo que lo representan. Más adelante, en el capítulo 4 de este trabajo, espero mostrar que esto es así. Por ahora, intentaré mostrar que esto no es algo inusitado, ya que la ciencia está llena de este tipo de artefactos. Para ello me apoyaré en el análisis que Tarja Knuuttila hace del funcionamiento de los modelos científicos.

Es ampliamente aceptado que los modelos juegan un papel importante en la generación del conocimiento científico. Lo que no es claro es cómo es que esto sucede. Tradicionalmente se ha pensado que esto es posible puesto que los modelos *representan* partes del mundo, de modo que nuestro conocimiento del modelo nos proporciona conocimiento de dichas partes del mundo[28]. Esta idea, sin embargo, comenzó a ser cuestionada en la década de los 80's, cuando Richard Rorty acuñara su famoso eslogan "coping, not copying" e Ian Hacking enfatizara la intervención por encima de la representación. A partir de entonces, numerosos autores han sugerido que la relación entre el modelo y el mundo no es directa, sino que el agente juega un papel esencial en el funcionamiento de los modelos, y que, más que copias del mundo, son *mediadores* que nos permiten experimentar con él.

El punto clave consiste en notar que, si bien los modelos pueden representar, ello no agota sus virtudes epistémicas. Knuuttila señala que los científicos llaman modelos a una muy diversa colección de objetos que a menudo no corresponden completamente con su objeto de estudio: "Models contain idealizations, simplifications, approximations, fictional entities and so on, which seem to make them hopelessly inaccurate and distorted representations of the world" (2011, pp. 262-263). Ejemplos de esto no son difíciles de encontrar: las ondas acuáticas son estudiadas asumiendo que el agua es infinitamente profunda, la materia es tratada como continua en el estudio de la dinámica de fluidos (Maddy 1992, p. 282), entre muchos otros. Esto ha conducido a algunos autores a concebir a los modelos como artefactos[29], esto es, como objetos independientes, con una identidad propia que trasciende aquello que buscan estudiar. Esto, sin embargo, requiere de una nueva explicación de su funcionamiento, misma que debe esclarecer, al menos, dos cuestiones: primero, si no existe una correspondencia entre el modelo y el mundo, cuál es el

[28] Parte del problema de las teorías representacionalistas es dar una teoría precisa y sustantiva de la relación de representación. Las teorías de la similitud y el isomorfismo encuentran problemas, como es señalado en Suárez (2003) y Knuuttila (2005, 2011).

[29] Además de Knuuttila, Rusanen y Lappi (2010) argumentan que los modelos son artefactos epistémicos que acarrean información acerca de la porción, o el aspecto del mundo que motivó su surgimiento.

mecanismo que permite a los modelos darnos conocimiento acerca de éste; y segundo, dada esta falta de correspondencia, cómo podemos esperar que cualquier información que el modelo nos pueda dar acerca del mundo sea objetiva, esto es, si existen elementos del modelo que no corresponden con el mundo, cómo podríamos esperar que éstos no introduzcan un elemento externo y arbitrario en nuestros resultados.

La primera cuestión es explicada por Knuuttila por medio de lo que él llama la manipulabilidad concreta y opacidad representacional de los modelos. La idea es que éstos son objetos que poseen una dimensión tangible que nos permite manipularlos por medios concretos y experimentar así con ellos:

> [T]heir cognitive value is largely based on manipulation. A theoretical model could be seen as a system of interdependencies, whose various features can be studied by manipulating it in the light of its results. That this way of proceeding should give us knowledge is dependent on the theoretical information built into the model and the way it facilitates the study of various hypothetical possibilities. (2011, p. 268)

Una ventaja adicional de esta dimensión tangible es que ésta funciona como mediador, entre el agente cognoscente y el objeto de estudio, simplificando su análisis. Esto es, puesto que el modelo contiene información teórica acerca del objeto de estudio, y esta información informa y limita las posibilidades que el modelo nos brinda, el agente puede trabajar directamente con el limitado universo de posibilidades que el modelo le brinda, sin necesidad de tener en mente toda la información que condujo a su construcción. Es a esto a lo que Knuuttila se refiere con opacidad representacional, y su utilidad radica en la economía cognitiva de la que hablé anteriormente.

Sin embargo, como mencioné anteriormente, estos medios concretos que constituyen la dimensión tangible de los modelos no son neutrales, pues poseen características propias, que no son determinadas del todo por el objeto de estudio, y que podrían introducir un elemento externo a éste. Lo primero que Knuuttila señala en este respecto es que es imposible distinguir, y por tanto separar, a los medios utilizados por un modelo del objeto que éste nos permite conocer[30]. Los modelos introducen, necesariamente, un elemento externo en nuestro estudio, sin embargo, ello no implica que este elemento sea arbitrario, pues, para que los modelos sean exitosos, su construcción debe obedecer a ciertas restricciones.

Knuuttila expresa estas restricciones en dos partes. Primero, nos dice que los modelos tienen un *diseño constreñido*, esto es, que si bien los modelos son objetos autónomos, no están libres de ataduras, pues nacen ya ligados al mundo debido a las preguntas científicas que motivaron su construcción. En otras palabras, si bien los modelos no son una copia de su objeto de estudio, sí contienen información acerca de él. Además, a menudo sucede que la construcción del modelo se encuentra, desde un principio, *orientada hacia resultados*, esto es, ella toma como punto de partida a los resultados que se busca obtener. En otras palabras, hay un elemento de oportunismo en el modelado (lo cual no excluye que también se espere que los modelos produzcan otros resultados inesperados) que sugiere que no es la representación la que justifica los resultados, sino los resultados los que justifican la representación.

En segunda instancia, Knuuttila afirma que los medios utilizados en la construcción de los modelos suelen ser herramientas conocidas: formalismos matemáticos, asunciones teóricas y representaciones de datos frecuentemente utilizadas, cuya fiabilidad ha sido previamente asentada. A esta característica Knuuttila la denomina como la *justificación*

[30] Esta es una tesis muy fuerte. Para los objetivos de mi tesis, basta con admitir que hay ocasiones en las que no conviene, para efectos explicativos, considerar a los modelos como objetos aparte de los medios utilizados en su construcción, inclusive si esto fuera posible.

distribuida del modelo, la cual, aunada al diseño constreñido y la orientación hacia resultados, proporcionan toda la justificación que nuestros estándares científicos podrían requerir:

> [W]hat other evidence could there be for the correctness of a model than what has been built into it, the results it gives, and the inferential links to other bodies of knowledge it establishes? To require, then, that we have knowledge first when some definite representational relationship between the model and some real target system has been forged leaves much scientific work unrecognized and its epistemic value unexplained. (2011, p. 270)

En el capítulo 4 de este trabajo retomaré estos factores, e intentaré mostrar que el funcionamiento de los objetos matemático obedece precisamente a ellos.

2.8 Breves conclusiones acerca de artefactos.

En el transcurso de este capítulo he intentado presentar una imagen de algunos de los problemas filosóficos que suscitan los artefactos y que son discutidos en la literatura actual. Expuse la discusión acerca de si el término ‘artefacto’ debe entenderse como refiriéndose a un conjunto determinado de objetos, o bien si se trata de una manera posible de considerar a cualquier objeto. Hablé de dos maneras distintas de concebir la constitución artefactual: como relación y como suceso, así como de los tres elementos principales que conforman a las distintas teorías sobre la función artefactual: el intencional, el estructural y el evolutivo, mismos que la teoría ICE busca integrar. Discutí la ontología de los artefactos, mencionando tres posibles posiciones con respecto a ella: el proyectivismo, que es un anti-realismo con respecto a artefactos, el realismo blando de Baker y Thomasson, y el realismo duro de Elder. Hablé brevemente sobre las bondades de la semántica de artefactos, así como de la discusión acerca del tipo de referencia que opera en el discurso acerca de ellos.

Expuse dos cuestiones epistemológicas: la referente al supuesto privilegio epistémico que gozamos ante los artefactos, así como el supuesto carácter inusual del conocimiento de la función artefactual. Por último, hablé brevemente de las particularidades de los artefactos epistémicos, así como del papel que éstos juegan en el desarrollo del conocimiento científico.

He procurado mantenerme al margen de estas discusiones, sin tomar partido ni buscar dirimir las controversias. El objetivo principal de este capítulo es poder contar con todas estas nociones para, en el capítulo siguiente, utilizarlas para elaborar la tesis central de esta investigación, según la cual los objetos matemáticos son artefactos, así como para poder analizar, en estos términos, otras tesis similares presentes en la literatura actual. Aun así, y si bien me daré por bien servido con lograr justificar la idea de que los conceptos teóricos presentes en la discusión filosófica sobre artefactos son una herramienta útil en la filosofía de las matemáticas, al elaborar mi propuesta buscaré hacerlo en términos de una teoría de artefactos que yo encuentre atractiva. Por ello, antes de continuar, es preciso indicar, sin revisitar los argumentos en favor de cada una de ellas, las posiciones que asumiré.

Favorezco la idea de que es posible hablar del conjunto de objetos que son los artefactos, aunque no creo que haya nada en el mundo, independiente del ser humano, que lo determine. Creo que la pertenencia a este conjunto está determinada por factores pragmáticos y contingentes relacionados a las prácticas dentro de las cuales se forman los conceptos artefactuales. Simpatizo con la teoría ICE de la función, así como con su espíritu primordialmente intencional. Particularmente atractivo me parece el que la noción de justificación aparezca dentro de los criterios para la atribución de función artefactual. Creo que esto resultará idóneo al incursionar en el terreno de las prácticas matemáticas. En concordancia con la concepción intencional de la función, favorezco la idea de una relación de constitución, y por tanto de un objeto que constituye, pero no es idéntico a, el artefacto.

En el terreno ontológico, simpatizo con un realismo blando y con el espíritu no reduccionista del enfoque propuesto por Baker y Thomasson. En el terreno epistemológico, creo en la existencia del privilegio epistémico, y también en sus limitaciones. Finalmente, simpatizo con la idea de que el conocimiento científico no puede ser reducido a un conjunto de representaciones, y que, por el contrario, parte de él se encuentra distribuido en los artefactos epistémicos utilizados para generarlo.

En adelante, asumiré estas posiciones sin volver a cuestionarlas, y dejando las alternativas a un lado.

CAPÍTULO 3: REALISMOS MATEMÁTICOS NO PLATONISTAS

En el capítulo 1 argumenté que convendría formular una filosofía de las matemáticas que combinase los aciertos del platonismo con aquellos del formalismo, esto es, una filosofía *realista*, que admita las restricciones que la verdad matemática impone sobre los axiomas, pero *no platonista*, de manera que estas restricciones no excluyan la posibilidad de que las pruebas realizadas en la práctica contribuyan a la formación de los objetos que imponen dichas restricciones. Siguiendo a Lakatos, sugerí que la manera de lograr esto es otorgando un papel significativo a la práctica matemática, proponiendo que los objetos matemáticos son reales, pero dependientes de ella. Mencioné, además, que existen en la literatura reciente tres propuestas filosóficas que han sido formuladas en torno a esta idea: aquellas de Muntersbjorn, Hacking y Cole, las cuales pueden ser englobadas bajo la etiqueta de *realismos dependientes de la práctica*.

El objetivo principal de este capítulo es el de hacer una breve exposición y análisis de estas tres propuestas. Antes de ello, sin embargo, examinaré también una propuesta que no cae dentro del realismo dependiente de la práctica, pero que sí es un tipo de realismo no platonista: el *Realismo Aristotélico* de James Franklin. Como argumentaré en seguida, creo que la propuesta de Franklin no es sostenible, sin embargo, me parece interesante para los propósitos de esta investigación, pues creo que las razones por las cuales falla ilustran claramente las dificultades que enfrentan quienes busquen formular un realismo no platonista que no dé a la práctica un papel significativo en la formación de los objetos matemáticos. Es importante señalar que no pretendo, con la crítica de la propuesta de Franklin, refutar cualquier propuesta de este tipo, pues bien podrían formularse propuestas que logren salvar sus defectos, sino sólo ilustrar el reto que ellas enfrentan, aumentando así la plausibilidad de la sugerencia Lakatosiana respecto a la constitución de los objetos matemáticos en la práctica matemática.

Debo apuntar también que la razón por la cual he pospuesto el análisis de estas propuestas hasta este capítulo es que me parece provechoso hacerlo a la luz del marco teórico establecido por la teoría de artefactos expuesta en el capítulo anterior. Como mencioné anteriormente, los artefactos son objetos que se constituyen gracias a las prácticas que los utilizan, y la teoría de artefactos ha planteado cuestiones clave para entender, tanto la naturaleza, como las consecuencias de esta constitución. De particular importancia será comprender con precisión la naturaleza de la relación de dependencia entre los objetos matemáticos y las prácticas que los generan, la cual determinará si dichos objetos tienen una naturaleza intrínseca o extrínseca, y en caso de que sea lo segundo, hasta qué punto.

Otro beneficio que podremos extraer de la teoría de artefactos es el de lograr una mejor comparación de las propuestas examinadas. Puesto que Muntersbjorn, Hacking y Cole formularon sus propuestas de manera independiente y utilizando terminologías muy distintas, resulta difícil determinar sus coincidencias y diferencias. Si bien tanto los objetos cultivados de Muntersbjorn, como los objetos cristalizados de Hacking, como los objetos declarados de Cole, caben dentro de la concepción amplia de artefactos expuesta en el capítulo anterior, ninguno de ellos los reconoce explícitamente como tales. Creo que el reconocerlos como diferentes tipos de artefactos será útil para analizar sus propuestas, reconocer sus fallas y proponer soluciones.

Comenzaré mi exposición hablando de la propuesta de Franklin, quien considera a los objetos matemáticos como objetos con una naturaleza intrínseca e independiente de la práctica matemática. Después pasaré a las propuestas de Muntersbjorn y Hacking, en ese orden por simple antecedencia cronológica, y culminaré con Cole, pues es quien hace la referencia más explícita al carácter extrínseco de los objetos matemáticos, y quien muestra mayores preocupaciones por la metafísica asociada al tipo de objetos que propone.

3.1 El realismo Aristotélico de Franklin.

En *Aristotelian Realism* (2008), James Franklin expone una filosofía de las matemáticas realista y no platonista. Siguiendo las ideas de Aristóteles, según las cuales los universales son reales y se encuentran *in re*, en las cosas mismas, Franklin afirma que las matemáticas son la ciencia encargada de estudiar dos tipos de universales: aquellos que se refieren a *cantidad* y aquellos que se refieren a *estructura*[31]. Estos dos aspectos del mundo, que tienen que ver con las relaciones entre las cosas, más que con las cosas mismas, son, según Franklin, tan reales como las causas y los colores (p. 101). Así, a diferencia de los nominalistas, quienes niegan la existencia de los universales, y de los platonistas, quienes, al concebirlos de manera *ante rem* –previos a los particulares– hacen de ellos algo misterioso, los aristotélicos los conciben como objetos que se encuentran al alcance de nuestra experiencia sensorial. El número “2”, por ejemplo, es un universal que puede ser observable en cualquier colección de dos objetos, y lo mismo sucede con cualquier estructura que se encuentre instanciada en objetos particulares del mundo.

Ahora bien, Franklin señala que no debemos ser demasiado fundamentalistas con respecto a que, para existir, todos los universales se deben encontrar instanciados en el

[31] La cantidad es, según Franklin, el tema central de las matemáticas antiguas, mientras que la estructura lo es de las matemáticas modernas (posteriores al siglo XVIII). (p. 109)

mundo, pues claramente hay universales reales que no están instanciados (p. 104). Por ejemplo, los números mayores que la cantidad total de objetos en el mundo no se encuentran instanciados, pero aun así son reales y podemos conocerlos. Esto lo podemos hacer, según Franklin, gracias a inferencias inductivas a partir de los universales que sí están instanciados, y no nos debe parecer más misterioso que el hecho de que nuestra ciencia de los colores pueda conocer, por ejemplo, tonos no instanciados de azul. Tal y como las ciencias naturales infieren cosas acerca de objetos que no han observado, las matemáticas hacen lo mismo acerca de números y estructuras no instanciadas.

Anticipando la objeción de que aceptar la existencia de universales no instanciados rompe con las ideas aristotélicas y significa una incursión en el platonismo, Franklin se apresura a señalar que existen tres, y no sólo dos, posturas cubiertas por los nombres platonismo y aristotelianismo: el platonismo extremo, según el cual los universales no pueden existir en este mundo; el aristotelianismo estricto, según el cual todos los universales son *in re*; y en medio de ellos, el aristotelianismo platónico, según el cual los universales pueden existir y ser percibidos en este mundo, pero es un hecho contingente cuáles de ellos lo hacen en cada momento dado. Este último es el tipo de aristotelianismo que él defiende, haciendo así factible la realidad de universales matemáticos no instanciados.[32]

Franklin rechaza el platonismo extremo, y en particular su negativa a hacer referencia al mundo físico para justificar la verdad del conocimiento matemático. Los platonistas confunden, según él, el concepto de justificación con el de construcción. Ellos piensan, por ejemplo, que el concepto del continuo es explicado por su construcción como

[32] Sin embargo, Franklin piensa que no todos los objetos matemáticos son reales, pues ciertos universales no son reales. Por ejemplo, los números negativos son, según él, tan irreales como los agujeros.

un conjunto de clases de equivalencia de secuencias de Cauchy de números racionales, mismas que son construidas a partir de conjuntos, pero, se pregunta ¿qué es lo que garantiza que ésta ha capturado la noción original del continuo? Mientras que el platonista no tiene una respuesta a esta pregunta, el aristotélico sí la tiene, a saber, que la noción de cercanía definible entre dos clases de equivalencia de secuencias de Cauchy refleja la noción de cercanía entre dos puntos en el continuo original; en donde "refleja" significa una identidad entre universales (p. 129).

Es así que Franklin logra que su aristotelianismo platónico abarque todos los objetos estudiados por las matemáticas, sin por ello perder contacto con el mundo físico. Un acto de equilibrismo que le permitirá, además, argumentar que la verdad matemática es, al mismo tiempo, necesaria y acerca de hechos del mundo espacio-temporal. Un ejemplo de esto son, según Franklin, los resultados de Euler a propósito de la imposibilidad, por parte de los ciudadanos de Königsberg, de cruzar todos los puentes de su ciudad una sola vez, sin cruzar alguno de ellos más de una vez. Esta es, según Franklin, una verdad necesaria y acerca del mundo físico:

> Mathematics provides, however, many prima facie cases of necessities that are directly about reality. One is the classic case of Euler's bridges. Euler proved that it was impossible for the citizens of Königsberg to walk exactly once over (not an abstract model of the bridges but) the actual bridges of the city (p. 113).

Es importante notar que Franklin recalca que el resultado matemático habla, de manera literal y directa, sobre el mundo físico, y no sobre un modelo abstracto de él. Otro ejemplo citado por Franklin es que, dada la verdad geométrica según la cual es imposible encajar pentágonos regulares del mismo tamaño de manera que no quede espacio entre ellos, es también imposible embaldosar el piso de su baño utilizando mosaicos pentagonales.

Franklin anticipa posibles objeciones a estos ejemplos, notando que es posible argumentar que estas proposiciones matemáticas son necesarias acerca del plano euclidiano y el pentágono regular, mismos que son idealizaciones del mundo, y no realidades. Esto es, el piso de su baño no es completamente plano, y ningún mosaico es un pentágono perfecto. Sin embargo, afirma que estas proposiciones matemáticas tienen "estabilidad", en el sentido de seguir siendo verdaderas si los términos son sólo aproximados. Esto es, es imposible embaldosar una superficie aproximadamente plana utilizando mosaicos aproximadamente pentagonales. Y, además, es posible expresar esto con todo rigor matemático, agregando simplemente, a la definición de pentágono regular, un margen de error referente a la igualdad de todos sus ángulos, que lo califique como un pentágono aproximadamente regular, y lo mismo puede hacerse con el plano euclidiano.

En donde Franklin admite no tener respuestas tan claras es en el plano epistemológico. Si bien su aristotelianismo evita los misterios de la epistemología platonista, afirmando que las proposiciones matemáticas refieren a propiedades observables de los objetos físicos, queda aún una pregunta fundamental, sin la cual la historia no es completa. A saber, ¿cuál exactamente es la relación entre la mente y los universales? Esto es, la relación expresada en la cruda metáfora de que la mente "capta" los universales y sus conexiones (p. 138). Para resolver este problema, Franklin nos refiere a la respuesta dada por los escolásticos, según la cual la relación entre la mente conocedora y el objeto conocido es la de identidad. El alma, mantenían ellos, conoce el calor al estar caliente (formalmente, no materialmente). Franklin admite que esto es implausible y prácticamente incomprensible, sin embargo, le resulta mucho más plausible cuando se trata de conocer los universales de las matemáticas que cuando se trata de universales físicos como el calor y la masa:

> The reason is that structure is "topic-neutral" and so, whatever the mind is, it could in principle be shared between mental entities (however they are conceived) and physical ones. While there seem insuperable obstacles to the thought-of-heat being hot, there is no such problem with the thought-of-4 being four-parted (though one will still ask what makes it the single thought-of-4 instead of four thoughts). (p. 139)

Y agrega que la posibilidad de que las entidades mentales tengan, literalmente, las mismas propiedades estructurales que los sistemas físicos que representan, ayuda a explicar la certeza del conocimiento matemático, pues los errores de la percepción sensorial no pueden invadir la relación entre la mente y sus propios contenidos.

Franklin concluye su artículo caracterizando a las matemáticas como una ciencia que, además de sus métodos particulares, como las pruebas, utiliza los métodos de las ciencias naturales – experimentos, conjeturas, y la confirmación de las teorías por medio de la observación. Estos métodos empíricos, que son parte fundamental de la investigación matemática, son usualmente omitidos al publicar los resultados obtenidos. Pero éste no es siempre el caso, y una excepción notable es la hipótesis de Riemann, quien en 1859 afirmara que es "muy probable" que todas las raíces de la función zeta tengan parte real igual a ½. Esta hipótesis no ha podido ser demostrada hasta hoy, sin embargo, constantemente se "experimenta" con ella, y las más de 10^{13} raíces de la función zeta conocidas todas cumplen con ella. Entonces, quien quisiera negar que la evidencia inductiva existe en matemáticas, tendría que limitarse a decir, acerca de esta hipótesis, que no ha sido ni probada ni refutada, y que no hay nada más que decir acerca de ella (p. 146), lo cual, desde el punto de vista de la práctica matemática, resulta francamente implausible.

Sin embargo, Franklin enfatiza que, si bien este tipo de evidencia es inductiva, y por tanto de grado, no debe ser considerada como subjetiva o pragmática:

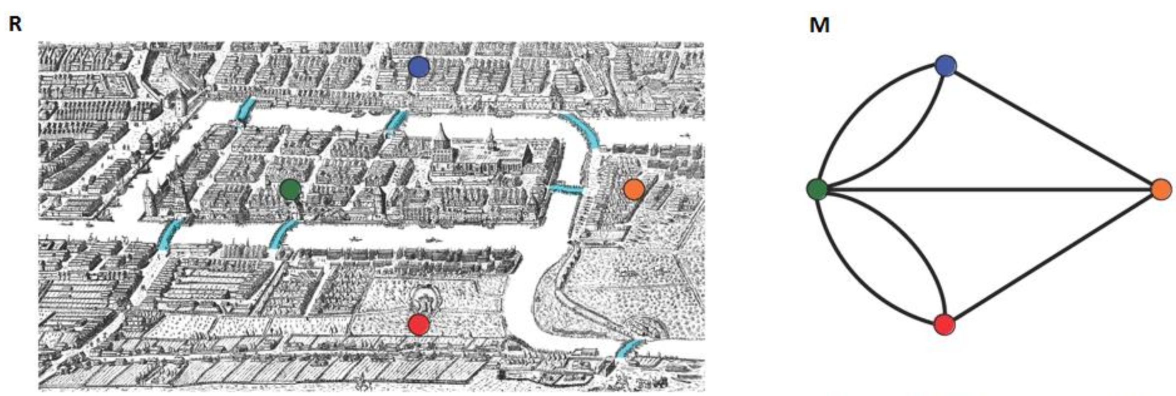
> It is not adequate to describe the relation of evidence to hypothesis as 'subjective', 'heuristic' or 'pragmatic'; there must be an element of what it is rational to believe on the evidence, that is, of non-deductive logic. Mathematics is therefore (among other things) an experimental science (p. 140).

3.1.1 Evaluación crítica de la propuesta de Franklin.

Mi objeción principal a la propuesta de Franklin concierne su epistemología, pero es más fácil apreciarla analizando los ejemplos que da para apoyar su afirmación de la manera en la que las verdades matemáticas son necesarias y, al mismo tiempo, acerca del mundo físico.

Franklin utiliza el antes mencionado ejemplo de los puentes de Königsberg para ilustrar esto, afirmando que el resultado matemático de Euler es acerca del mundo real. Así, Franklin afirma que es una verdad necesaria que los habitantes de Königsberg no pueden cruzar exactamente una vez todos y cada uno de los puentes. Esto me resulta muy sorprendente, pues no sólo no me parece que esta proposición sea necesaria, sino que me parece que ni siquiera es verdadera. Esto se debe a que es perfectamente posible que un habitante cruce el primer puente, luego tome un helicóptero al siguiente, lo cruce, y así hasta haber cruzado cada puente una sola vez. Estoy consciente de que esta objeción suena muy tonta, y que se me indicará que estoy haciendo trampa, sin embargo, creo que hay un punto muy importante detrás de ella. El punto es que la proposición misma no indica que no se puedan utilizar helicópteros, por lo que tal y como está es falsa; y, de agregar la cláusula "sin usar helicópteros", podremos usar barcos, o esperar a que un terremoto cambie la configuración de los puentes, etc. Siempre encontraremos una manera de "hacer trampa", a menos que interpretemos a los puentes de Königsberg de una manera idealizada, como la estructura matemática que instancian. Pero, al hacer esto, la proposición ya no es sobre el mundo real, sino sobre una estructura matemática idealizada.

El problema detrás de esta objeción es epistemológico, y se deriva directamente del problema reconocido por Franklin acerca de la relación entre la estructura conocida y la mente conocedora. Éste consiste en que no sabemos qué exactamente es lo que justifica la afirmación de que cierto sistema real sea una instancia de una estructura particular. En el caso de los puentes, ¿qué es lo que justifica que podamos pasar (en la imagen más abajo) del sistema real *R* a la estructura matemática *M*?



http://www.nature.com/nbt/journal/v29/n11/fig_tab/nbt.2023_F1.html

Para que Franklin tuviese razón, sería necesario que esto se debiera exclusivamente a hechos acerca de *R* y *M*. En otras palabras, que *R* y *M* se encontrasen en una relación *diádica* de representación. Sin embargo, mis objeciones tramposas demuestran que éste no es el caso, pues atendiendo únicamente a las propiedades de *R* y *M* fui capaz de encontrar una manera de mostrar que no todo lo que es verdad acerca de *M* es verdad acerca de *R*. Lo que sí es el caso, es que un agente puede *utilizar* a M como representante de R para ciertos propósitos prácticos, y son éstos los que dictarán las reglas que no debemos violar, entre ellas, la prohibición del uso de helicópteros.

En la terminología utilizada en el capítulo anterior, lo que Franklin propone es que los objetos matemáticos se encuentran en el mundo espacio-temporal y son objetos que ocurren naturalmente, de manera completamente independiente a las actividades y propósitos del ser humano. De ser así, podríamos afirmar que la estructura M se encuentra en los puentes de Königsberg gracias a las propiedades intrínsecas de estos. Sin embargo, mis objeciones demuestran que este no es el caso, y que la presencia de esta estructura en los puentes depende de ciertas reglas asociadas a prácticas humanas; en este caso, la práctica de dar paseos citadinos. Así, si bien simpatizo con el espíritu realista y anti-platonista de Franklin, me parece que su posición es insostenible, y que sus deficiencias sugieren que los objetos matemáticos no son objetos naturales con una naturaleza intrínseca, sino artefactos, que se encuentran en el mundo, pero sólo gracias a ciertas prácticas humanas.

3.2 Los objetos cultivados de Madeline Muntersbjorn.

En tres artículos recientes (1999, 2003, 2007), Madeline Muntersbjorn ha esbozado una filosofía de las matemáticas realista y no platonista. Esta filosofía surge de un razonamiento que va en las mismas líneas que el que expuse en la sección 1.1 de este trabajo, esto es, que encuentra, en el dilema de Benacerraf, no la expresión de dos carencias, sino de dos aciertos que es necesario conjuntar: “Platonists are right to insist on the referentiality of mathematical terms and the reality of mathematical content. Nominalists are right to insist on the contextual nature of mathematical truth" (2003, p. 161).

Para hacer justicia a estos aciertos, ella, al igual que los platonistas, admite la existencia de los objetos matemáticos, sin embargo –ahora con los nominalistas– afirma que éstos no son objetos platónicos, ni ningún otro tipo de objetos previos a, e independientes de, nuestras prácticas matemáticas, sino que ellos *emergen* como resultado de ellas, en un sentido análogo al que nuevas especies vegetales son el resultado de nuestras prácticas agrarias, o a cómo los animales domésticos son el resultado de nuestra interacción con ellos:

> Are mathematical objects created or discovered? This question is based on the false metaphysical premise that there are two kinds of reality, the created reality, dependent on the mind, and the discovered reality, independent of the mind. Many things would not exist were it not for the deliberate habits of generations of mindful beings. Domestic felines and brewer's yeast are two of my favorites. (…) Cats and beer are the result of gradual processes of causal interactions between nature and nurture. As such, they transcend the creation-discovery distinction. Similarly, mathematical objects are neither created nor discovered. Instead, I propose that they emerge from the cultivation of mathematics. (2003, pp. 173-74)

La referencia a los animales domésticos y a las especies vegetales cultivadas está diseñada para mostrarnos que, incluso si no nos habíamos percatado de ello, siempre hemos aceptado la realidad de objetos cuya existencia y naturaleza dependen de nuestras actividades. Ahora lo que falta es mostrar cómo es que los objetos matemáticos pueden ser este tipo de objetos. Para ello, Muntersbjorn se apoya en lo que ella llama el *poder causal de la notación*, el cual, argumentará, es el mecanismo que propicia la emergencia de los objetos matemáticos[33]. Muntersbjorn afirma que los medios –los sistemas de notación

[33] Esta idea es sostenida también por Helen de Cruz y Danielle Macbeth, de quienes hablaré más adelante.

formal– que utilizamos para expresar nuestras ideas matemáticas terminan, cuando son exitosos, por afectar el contenido de éstas, dando origen a nuevos objetos matemáticos:

> [M]athematical reasoning depends on mathematical content that can only be engaged after suitable representational innovations have taken place. Mathematicians instinctively recognize the connection between symbolic manipulation and object reification and so rely heavily on chalkboards, scratch pads and computers when actively engaged in innovative mathematical reasoning. My point may be stated in old-fashioned Kantian terminology: Our sensible intuition can only construct new mathematical results via the intentional manipulation of visual imagery. Neither intention without imagery, nor imagery without intention, is enough to get the job done (1999, p. 196).

Ahora bien, esto no significa que debamos abandonar la distinción entre el signo matemático y el objeto significado, pero, si Muntersbjorn tiene razón, deberemos admitir que el segundo no es previo al primero, sino que se encuentran en un proceso dialéctico de influencia mutua. Esto es, un problema matemático nos conduce a desarrollar nuevos medios representacionales, y cuando éstos son exitosos, se convierten en nuevos objetos de estudio, que a su vez generan nuevos problemas matemáticos, etc. Un ejemplo de esto, citado por Muntersbjorn, son los símbolos que denotan a la diferencial y a la integral, que comenzaran como abreviaturas de procedimientos a ser realizados sobre otros objetos matemáticos, y que terminaran convirtiéndose en objetos con interés matemático propio:

> When the symbols ∂ and $\int$ were introduced they were not merely convenient names for extant mathematical objects. Rather, they were shorthand descriptions of procedures to be performed on other objects. That is, when Leibniz first employed ∂ and $\int$, these symbols were not arbitrary labels for eternal and immutable abstract objects, the differential and the integral. Rather, ∂ stood for the procedure of taking differences and $\int$ stood for the procedure generating sums (2003, p. 171).

Otro ejemplo es la notación exponencial adoptada por Descartes en un momento en el que las únicas operaciones de 'exponenciación' que se aplicaban eran aquellas del cuadrado y cubo, abreviadas Aq y Ac, respectivamente, y cuyo interés radicaba en su interpretación geométrica. La notación de Descartes permitió una generalización de la exponenciación que propició que fueran utilizados para tratar un rango mucho más amplio de problemas:

> There is perhaps no symbolism in ordinary algebra which has been as well chosen and is as elastic as the Cartesian exponents. Descartes wrote a^3, x^4; the extension of this to general exponents a^n was easy. Moreover, the introduction of fractional and negative numbers, as exponents, was readily accomplished. The irrational exponents, as in $a^{\sqrt{2}}$, found unchallenged admission. (…) Our exponential notation has been an aid for the advancement of the science of algebra to a degree that could not have been possible under the old German or other early notations. (Cajori 1928, citado en Muntersbjorn 1999, p. 189)

El punto importante es que la nueva notación no fue sólo una forma más práctica de representar un contenido previo, sino que además resolvió algunas ambigüedades presentes en la notación anterior (se discutía, por ejemplo, si 64 era igual a 2cc o 2qc) y, lo más importante, que liberó a los exponentes de su interpretación exclusivamente geométrica, otorgándoles un carácter algebraico que les dio una generalidad que propició su reificación como objetos matemáticos (1999, p. 192).

Así, en general, concluye Muntersbjorn, los sistemas notacionales no deben ser considerados como simples instrumentos para representar un contenido matemático previamente existente, sino como elementos que contribuyen a la constitución de este contenido, y que inciden sobre su naturaleza. Y, puesto que estos sistemas notacionales son partes de nuestras prácticas matemáticas, debemos considerar que los objetos matemáticos son, al menos en parte, un producto –y no un descubrimiento– de ellas.

Además de la conjunción entre platonismo y formalismo que esta concepción de los objetos matemáticos logra, Muntersbjorn observa otra gran ventaja en ella. Ésta refiere a la historiografía de las matemáticas, la cual, bajo la influencia de una concepción platonista de sus objetos, ha sufrido de un carácter *presentista* que le parece inaceptable. El presentismo es la corriente historiográfica que exhorta a los historiadores a interpretar la historia de una disciplina desde el punto de vista aceptado en el presente. En el caso de las matemáticas, la visión presentista exhorta a los historiadores a utilizar notación moderna al analizar la historia de las matemáticas. Esta exhortación se basa no sólo en la conveniencia de poder leer textos antiguos en una notación que nos es familiar, sino en la creencia de que la notación no afecta el contenido de los textos matemáticos. Esta idea se apoya en una concepción platonista de los objetos matemáticos, pues, si los objetos matemáticos son eternos e inmutables, las notaciones utilizadas para representarlos no pueden afectar su contenido.

Sin embargo, señala Muntersbjorn, la interpretación presentista de la historia de las matemáticas hace que las prácticas matemáticas antiguas sean un misterio, pues implica que los matemáticos antiguos –quienes indiscutiblemente gozaron de un gran éxito, encontrando verdades que fueron consideradas como las más seguras que de su tiempo– estaban estudiando objetos con una naturaleza distinta a la que ellos imaginaron:

> Privileging only the most recently developed subset of mathematical objects with existence is poor metaphysical strategy: Such a move assumes the future must resemble the present and makes an enigma of past mathematical practice. Do we really want to insist Euclid studied the structure of structures under the illusion that he was studying the properties of magnitude and multitude? Respecting this insight requires that history and philosophy of mathematics be joint endeavors. (1999, p. 180)

La tarea del historiador deber ser, según Muntersbjorn, explicar el crecimiento del conocimiento matemático, y el presentismo deriva en explicaciones teleológicas inadecuadas y en una historia Whig inaceptable:

> [P]resentism, in league with platonism, enjoins scholars to write Whig history, wherein the present is displayed as the inevitable triumph of the forward-thinking set over those who would hold back progress. But, as critiques of Whig history point out, portraying a particular outcome as inevitable is a meager explanation of how and why it came about. Mathematics is a goal-oriented activity. In general, mathematicians strive to solve problems as quickly, accurately, and generally as possible.

> But the immediate goals of early individuals cannot be identified solely with the particular accomplishments of later individuals. (2003, p. 163)

La verdadera explicación del crecimiento matemático no puede apoyarse en la coincidencia de las intuiciones antiguas con las intuiciones actuales, sino en el valor inmediato que los objetos matemáticos supusieron para la generación de matemáticos que los desarrollaron. El carácter contextual de los objetos matemáticos de Muntersbjorn nos permite hacer precisamente esto. Más adelante, cuando elabore mi propia propuesta, ahondaré en este tema.

3.2.1 Evaluación crítica de la propuesta de Muntersbjorn.

Simpatizo fuertemente con la propuesta de Muntersbjorn, que además de ser congruente en muchos sentidos con mi tesis acerca de la artefactualidad de los objetos matemáticos, ha servido de inspiración en su elaboración. Mi crítica obedecerá más bien al hecho, admitido por ella misma, de que sus artículos constituyen apenas un esbozo de una filosofía de las matemáticas, dejando huecos importantes que es necesario llenar para hacer su propuesta completamente plausible.

Estos huecos obedecen, en buena medida, a la falta de sistematicidad en su propuesta metafísica. Ella propone que los objetos matemáticos pertenecen a un tercer reino de objetos, reales pero dependientes, distintos tanto de los objetos espacio-temporales como de los platónicos. Sin embargo, no dice mucho más acerca de este reino que, como vimos en el capítulo anterior, incluye a una gran diversidad de objetos. Muntersbjorn se apoya excesivamente en analogías con especies animales y vegetales, sin especificar con precisión qué características de estos objetos son las que debemos tomar en cuenta para entender la naturaleza de los objetos matemáticos, y desatendiendo el hecho de que estas analogías fallan en algunos puntos.

Una de estas fallas radica en el hecho de que, mientras que los animales y vegetales son objetos concretos, los objetos matemáticos son inmateriales. No es inmediatamente claro que esto no sea problemático para la propuesta de Muntersbjorn, pues plantea preguntas acerca de la emergencia y la autonomía de los objetos matemáticos. Por ejemplo, mientras que el carácter concreto de perros y gatos deriva en un criterio claro para la existencia de sus especies, no es claro en qué momento es que un objeto matemático adquiere su realidad, esto es, si basta con que *un* matemático lo utilice, si es necesario que la comunidad entera lo reconozca, o si se requiere del cumplimiento de algún otro criterio. Esta realidad está estrechamente vinculada con la supuesta autonomía de los objetos matemáticos, una vez constituidos. Sin embargo, mientras que la autonomía de perros y gatos está sustentada por sus organismos biológicos materiales, que claramente tienen una existencia independiente de los comportamientos humanos que propiciaron su origen, los objetos matemáticos carecen de un sustento concreto autónomo, planteando dudas acerca de cómo es posible sostener esta autonomía sin caer en algún tipo de platonismo.

Como vimos en la cita anterior de Lakatos, Muntersbjorn dice que una vez cultivados, los objetos matemáticos tienen “una dialéctica y leyes de crecimiento propias”. Cabe preguntarse en qué sentido son propias; si es en el sentido de ser completamente independientes de la actividad humana, entonces no veo cómo estas leyes podrían ser objetos no platónicos. Y si no es en este sentido, entonces estamos hablando de un carácter ‘propio’ muy limitado. A lo mucho, estaría diciendo que sus leyes de crecimiento y su dialéctica no son convencionales, en el sentido de no estar sujetas al capricho humano.

Otros puntos en los que la exposición de Muntersbjorn resulta escueta son sus explicaciones de la necesidad y objetividad de la verdad matemática. Acerca de la necesidad, menciona brevemente que ésta se debe, al menos en parte, a que los objetos matemáticos surgen del contenido tácito que se encuentra ya presente en las prácticas matemáticas. Esto es un buen comienzo, pero es necesario dar más detalles. Con respecto a la objetividad, ésta es mencionada brevemente como un tema digno de una investigación futura — el articular de manera más precisa lo que distingue a las ideografías que generan objetos matemáticos genuinos "de aquellas que no representan más que las idiosincrasias del delirio" (2003, p. 176).

Es mi parecer que muchas de estas omisiones en la metafísica ofrecida por Muntersbjorn pueden ser aliviadas al asimilar los objetos matemáticos cultivados de Muntersbjorn a los artefactos, que, como vimos en el capítulo anterior, al ser entendidos de manera amplia, constituyen un reino muy poblado de objetos que incluyen a algunas especies vegetales y a los animales domésticos. Esta asimilación, combinada con la adopción de una teoría de artefactos, nos permitirá ser más explícitos y puntuales acerca de las dudas que las propuestas como la de Muntersbjorn suscitan.

3.3 Los objetos cristalizados de Ian Hacking.

Hacking aborda la cuestión de los objetos matemáticos como parte del problema del razonamiento científico en general. Uno de sus objetivos al abordar este problema más amplio es el de dar cuenta de nuestro conocimiento como un fenómeno histórico, sin por ello tener que sostener una concepción historicista de la verdad. Para ello, Hacking retoma el concepto, introducido originalmente por Bernard Williams, de *veracidad*. A diferencia de la verdad, que Hacking considera un concepto formal, la veracidad tiene historia. Ser veraz implica no sólo ser preciso y sincero, sino también serle fiel a cierta concepción, establecida en un momento en el tiempo, acerca de lo que significa decir la verdad acerca de algo. Un ejemplo de esto, citado por Hacking, concierne a los juicios probabilísticos, afirmando que, si bien es probable que el ser humano haya tenido pensamientos probabilísticos desde siempre, no fue hasta 1650, con el trabajo de Pascal, que obtuvo los medios para expresar verdades probabilísticas. Esto es, si bien es posible que siempre haya habido verdades probabilísticas, la veracidad probabilística, y por tanto el conocimiento probabilístico, comenzó a existir alrededor de 1650.

La idea detrás de esto es una concepción histórica del conocimiento que gira en torno a sucesos que Hacking llama *cristalizaciones*. Estas cristalizaciones son hechos idealizados, emblemáticos de una discontinuidad en la historia, a partir de la cual se fija el camino a seguir dentro de un cierto *estilo de razonamiento* (2009, p. 17). Una cristalización implica un cambio en la concepción de lo que significa decir la verdad acerca de algo, y puede ser expresada con el siguiente esquema: X = tipo de objetos cristalizados; Y = fecha aproximada de la cristalización; Z = figura emblemática de la cristalización. Al cristalizarse, un estilo introduce nuevos objetos, que si bien no son literalmente creados por el estilo, no tienen sentido fuera de él. La virtud de un estilo no es, entonces, la de permitir el conocimiento de un dominio previamente existente, sino la de crear al dominio mismo, y determinar sus criterios de veracidad:

> I contend that when it crystallizes, a style of scientific thinking introduces new objects, and new criteria for the truth or falsehood of statements about those objects. A style, with its specific methods of reasoning, does not answer to any criteria except its own. It is not good *because* it helps find out the truth in some domain. It itself defines the criteria for truth-telling in its domain. Thus in a certain sense each style is autonomous and "self-authenticating". That certainly sounds radical, and that is what I mean (p. 21; énfasis del autor).

Así, los estilos de razonamiento responden únicamente a sus criterios internos, por lo que son imposibles de refutar. A lo sumo, un estilo puede ser abandonado y quedar en desuso, pero no existen criterios externos para evaluarlo – las cristalizaciones son irreversibles.

Esto, aclara Hacking, no implica un tipo de relativismo, sino que, por el contrario, es parte de la explicación de lo que llamamos objetividad:

> [E]very style of reasoning arises from human capacities (…) every style of reasoning introduces new types of objects, and new ways of telling the truth. This is not a relativistic thesis but a theory about the origins of objectivity. (2009, p. 79)

Esta objetividad implica, además, que las verdades acerca de los objetos son independientes de nuestros pensamientos, y de la manera en la que las descubrimos (p. 24).

Cada estilo de razonamiento tiene al menos un punto de cristalización que determinó su futuro. Estas cristalizaciones tienen dos dimensiones: la cognitiva y la histórica. La cognitiva consiste en una capacidad cognitiva innata del ser humano que le permite razonar de cierta manera; la histórica consiste en un suceso histórico y contingente que conduce, no sólo al descubrimiento de esta capacidad, sino al reconocimiento de la importancia de esta capacidad, misma que conduce a su institucionalización. Así, queda claro que la figura emblemática de una cristalización es sólo eso, un emblema, y que es necesario que detrás de ella se encuentre una comunidad y una práctica para que pueda suceder una cristalización (p. 57). En este sentido, las cristalizaciones son un *descubrimiento* –de una capacidad cognitiva– pero un descubrimiento que se hace posible sólo dada la ocurrencia de ciertas circunstancias históricas.

En el estilo de razonamiento matemático, Hacking habla de dos cristalizaciones. La primera concierne a las relaciones geométricas, ocurrida en el siglo VI a.c. y cuya figura emblemática es Thales. La segunda concierne a los números y cantidades, ocurrida en el siglo IX y cuya figura emblemática es Al-Khwarizmi. Son estas cristalizaciones, y sus secuelas, las que introdujeron a los objetos matemáticos, y las que determinaron lo que significa decir la verdad acerca de ellos. Así, la imagen que Hacking esboza de las matemáticas es la siguiente: primero, el ser humano tiene una capacidad cognitiva innata y universal de razonar matemáticamente[34]. Segundo, ciertas contingencias históricas[35] lo conducen al descubrimiento de esta capacidad, así como al reconocimiento de su importancia y su consiguiente institucionalización. Tercero y último, estos sucesos dan origen a los objetos matemáticos y a los criterios acerca de lo que significa decir la verdad acerca de ellos.

Siendo un poco más particular, Hacking explica que el estilo matemático conlleva una experiencia muy propia, que consiste en el *ver* o *asir* una verdad matemática como resultado de una prueba perspicua. A diferencia de las pruebas a base de derivaciones formales, las pruebas perspicuas son aquellas en las que sentimos que sabemos de qué estamos hablando, y que no sólo nos dicen que la proposición probada es verdadera, sino porqué lo es. Es este tipo de prueba lo que ha conducido a la introducción de nuevos objetos matemáticos. Estos objetos sin embargo, no parecen estar dentro de nuestro control, como es evidenciado por el hecho de que a menudo nos encontramos con objetos cuya

[34] Hacking menciona que muy probablemente esta capacidad sea el resultado de presiones evolutivas, pero que no es seguro que posean un valor adaptativo, pues bien podrían ser *spandrels*.

[35] En el caso de la cristalización geométrica, Hacking, siguiendo a Lloyd, afirma que lo que condujo al descubrimiento de esta capacidad fue una sociedad ateniense excesivamente argumentativa, y lo que condujo al reconocimiento de su importancia fue el sistema democrático ateniense, en el que la argumentación era de suma importancia.

existencia nos sorprende de sobremanera[36], y que parecen haber estado allí desde siempre, esperando a ser descubiertos (p. 79).

Este tipo de experiencias nos ha conducido, desde un inicio, a pensar que las matemáticas hablan de objetos que se encuentran “allá afuera”; fenómeno cuya explicación más socorrida es el platonismo. Hacking, sin embargo, no comulga con el platonismo, por considerarlo poco plausible, y lamenta su frecuente identificación con el realismo:

> Platonism is sometimes called realism, because of quirks in the history of Western philosophy. I say quirks, for platonism is, if anything, super-realism, which bears a relation to ordinary reality not unlike that of the super-natural to the natural. (2009, p. 75)

En realidad, y a pesar de que yo le he incluido en mi sección acerca de realismos no platonistas, lo que Hacking preferiría es disolver el debate entre realistas y anti-realistas o, al menos, removerlo del centro de la discusión. Para él, lo importante es comprender de dónde es que proviene aquello que llamamos objetividad matemática, y nunca muestra mucho interés en especificar qué tipo de objetos son los objetos matemáticos. Incluso menciona que la obsesión en la filosofía occidental por la ontología bien podría deberse a que los lenguajes europeos demandan una presuposición existencial para los términos en la posición del sujeto (p. 87), y agrega que la evolución futura de las matemáticas, que bien podría quitar el énfasis en las pruebas y enfocarse en los métodos numéricos, podría hacernos olvidar los objetos matemáticos.

[36] Hacking cita el sorprendente hallazgo de 20 nuevos tipos de grupos finitos, cuando previamente se pensaba que existían sólo 6 (p. 79).

3.3.1 Evaluación crítica de la propuesta de Hacking.

Pienso que la propuesta de Hacking es muy interesante y afín a mis intuiciones. Además de presentar una concepción informalista y anti-platonista del conocimiento matemático, su concepción historicista garantiza una historiografía no presentista capaz de dar cuenta del conocimiento matemático en diferentes épocas. Sin embargo, como mencioné anteriormente, Hacking no pone atención a la metafísica de los objetos matemáticos, limitándose a decir que son el resultado del descubrimiento de una capacidad cognitiva. Sin embargo, nunca aclara cuál exactamente es la relación entre dicha capacidad y los objetos resultantes, lo cual tiene como resultado que algunas de sus afirmaciones resulten, en el mejor de los casos son poco claras, y en el peor inconsistentes.

Una de estas afirmaciones, central a su propuesta, concierne la relación entre la *verdad* científica y las *condiciones de verdad* introducidas por nuestros estilos de razonamiento científico:

> When I speak of objectivity I mean chiefly to affirm that the truths discovered in the sciences are true, independent of what we think, or of how we discover them. That is wholly consistent with saying that their truth conditions are products of the styles of thinking in whose domain they fall. (p. 24)

Si esto es correcto, entonces “2 + 2 = 4” sería una verdad independientemente de nuestros pensamientos y nuestras prácticas, pero sus condiciones de verdad serían el producto de nuestros estilos de razonamiento. Si no me equivoco, esto significa que hay muchas proposiciones que, a pesar de ser verdaderas, no tienen condiciones de verdad. Quizás esto no sea del todo contradictorio, pero ciertamente no me parece claro.

Se supondría que lo que nos informaría acerca de esta peculiar disociación, entre la verdad y sus condiciones, serían las cristalizaciones de los estilos científicos, mismas que establecen las condiciones de verdad, y causan la introducción de los nuevos objetos. Sin embargo, encuentro que lo que Hacking dice en este respecto es demasiado vago. A qué, exactamente, se refiere Hacking con que los objetos son "introducidos", no me queda del todo claro. No se trata de una *creación* de objetos, y claramente no podría serlo, pues entre los objetos introducidos de esta manera están los inobservables de la física, cuya existencia ciertamente no podría ser causada por nuestros razonamientos. Pero, tampoco resulta plausible afirmar que los nuevos objetos son *descubiertos*, pues si así fuese, entonces la propuesta de Hacking no tendría nada de radical, y no se comprendería cómo es que los estilos de razonamiento se auto-validan.

Lo que sí es un descubrimiento, es la capacidad cognitiva de razonar de cierta manera, y este descubrimiento, que se da sólo bajo ciertas circunstancias históricas, es lo que causa la introducción de los nuevos objetos. Pero, qué relación hay entre estos objetos y dicho descubrimiento es, me parece, la pregunta clave que podría aclarar el significado del término "introducidos", así como la relación entre la verdad independiente del ser humano y las condiciones de verdad dependientes. Sin embargo, Hacking no da una respuesta a esta pregunta, y esto tiene como resultado que su concepto clave de veracidad no tenga la precisión necesaria para disipar las dudas acerca de su contra-intuitiva disociación de la verdad y sus condiciones.

Ante esta omisión, me parecería muy natural –y cualquier filósofo platonista lo haría gustosamente– interpretar a la veracidad de Hacking como una manera de referirse al contexto de justificación. Así, sería posible afirmar que la proposición "2 + 2 = 4" siempre ha sido verdadera, independientemente de nuestros pensamientos, pero que fue sólo hasta que nuestros estilos de razonamiento establecieron a los objetos de la aritmética, y establecieron lo que significa decir la verdad acerca de ellos, que pudimos *justificar* esta verdad. Esto suena bastante razonable, pero implica limitar las ideas de Hacking al ámbito epistémico, y es completamente incompatible con su afirmación de que los estilos de razonamiento son buenos, no porque ayudan a encontrar verdades previas, sino porque definen nuevos dominios con nuevas verdades.

Esta interpretación platonista de Hacking se hace aún más plausible dado que Hacking nunca introduce ningún tipo de agente externo que participe en la introducción de los objetos matemáticos. Muntersbjorn le otorga un papel causal a los sistemas de notación; Cole, como veremos en la siguiente sección, habla de declaraciones constitutivas, pero Hacking habla sólo de una capacidad cognitiva universal al ser humano, que bien podría ser interpretada como la razón que se encuentra en el centro de la epistemología de algunos platonistas racionalistas. Y, si bien Hacking enfatiza la dimensión histórica y cultural que conduce al descubrimiento de esta capacidad, en ningún momento nos dice cuál es el efecto permanente de estas circunstancias históricas sobre la naturaleza de los objetos matemáticos.

En suma, mi objeción a Hacking podría resumirse diciendo que las dos dimensiones de las que habla –cognición y circunstancias históricas– no bastan para responder a las preguntas acerca de la metafísica –en particular a la dependencia o independencia– de los objetos matemáticos. Hace falta, en mi opinión, una dimensión extra: el mecanismo tangible mediante el cual los objetos matemáticos son introducidos, mismo que, al ser constitutivo de ellos, permite explicar su dimensión tangible, y con ello, algunas de sus virtudes epistémicas.

3.4 Los objetos institucionales de Julian Cole.

De los autores cuyas ideas expongo en este capítulo, Julian Cole es quien formula una filosofía de las matemáticas más sistemática y detallada, poniendo especial atención a la metafísica de los objetos matemáticos, así como a problemas tradicionalmente abordados en filosofía de las matemáticas, como son la necesidad, atemporalidad y objetividad de las matemáticas. En su tesis doctoral (2005) y tres artículos recientes (2008, 2009 y 2012), Cole elabora una filosofía de las matemáticas *institucional*, según la cual los objetos matemáticos son el resultado de *declaraciones* (típicamente implícitas), por parte de la comunidad matemática, que generan compromisos ontológicos con objetos institucionales, pero aun así reales.

La motivación para su propuesta proviene de la fenomenología de la práctica matemática. Cole apunta que, en su experiencia como matemático, encontró tres fenómenos que le parecieron de singular importancia:

> First, the frequency and intellectual ease with which I endorsed existential pure mathematical statements and referred to mathematical entities. Second, the freedom I felt I had to introduce a new mathematical theory whose variables ranged over any mathematical entities I wished, provided it served a legitimate mathematical purpose. And third, the authority I felt I had to engage in both types of activities. Most mathematicians will recognize these features of their everyday mathematical lives (2009, p. 1).

El primer fenómeno, la facilidad con la que los matemáticos se comprometen con la existencia de objetos matemáticos, lo conduce al realismo. El segundo y el tercero –la libertad y la autoridad– lo conducen a rechazar el platonismo, pues uno no tiene libertad y autoridad sobre objetos que son independientes de nosotros, y mucho menos sobre aquellos que se encuentran en un reino platónico.

Así, Cole rechaza la dicotomía tradicional según la cual la discusión realismo/anti-realismo debate si el desarrollo matemático es un proceso de descubrimiento o de invento, y en su lugar plantea un proceso mixto:

> For me, and presumably most mathematicians, the process of solving a problem with the assistance of new mathematical entities involves two components: discovery and creation. It is by a process of discovery that you determine what features the new entities must have in order to serve their intended purpose. During this process, you freely postulate—or attempt to postulate—candidate entities and explore their suitability for the task at hand. (…) The features you provide—or seek to provide—each newly postulated collection of entities are informed by what has been discovered during previous attempts. Despite this, each successful attempt is a relatively free, creative act of postulation (2009, p. 2).

Las únicas restricciones que Cole reconoce sobre este proceso, son que los objetos postulados cumplan su función matemática, y que sean 'coherentes', una noción que toma de Stewart Shapiro, y que discutiré más adelante. Estos dos requisitos no están apoyados en principios filosóficos, sino que son, según Cole, criterios internos a la práctica matemática. Cole defiende un tipo de naturalismo que él llama "igualitario"[37], según el cual los objetos matemáticos tienen derechos ontológicos puesto que las matemáticas son una práctica con una metodología cuya legitimidad es equiparable a aquella de la ciencia, por lo que la existencia de sus objetos no requiere la aprobación de ningún tribunal extra-matemático.

Ahora bien, estos objetos no son parte del mundo natural, sino de lo que Cole, retomando a Searle (1995), llama la *realidad institucional*. Ésta consiste en aquellas facetas de la realidad que existen en virtud de nuestros acuerdos colectivos. Por ejemplo, el dinero, las fronteras políticas, los profesores, el ajedrez, las universidades, etc. Estas entidades existen gracias a que nuestros acuerdos asignan o imponen ciertas *funciones* a la realidad,

[37] Cole distingue a su naturalismo igualitario de aquellos de Quine y de Maddy. Mientras que Quine acepta la existencia de los objetos matemáticos porque las teorías científicas cuantifican sobre ellos, y Maddy la acepta porque considera que las matemáticas son una práctica legitimada por su utilización en la ciencia, Cole busca equiparar la legitimidad de las matemáticas con aquella de la ciencia.

por medio de la asignación de *poderes deónticos*, esto es, derechos, responsabilidades, obligaciones, permisos, autorizaciones, etc. Por ejemplo, un profesor tiene el derecho de evaluar a sus estudiantes y la obligación de hacerlo justamente. A las funciones que las facetas de la realidad cumplen en virtud de la posesión de estos poderes, Cole les llama *funciones de estatus*. Los objetos matemáticos, sin embargo, no son análogos precisamente a los profesores y otros objetos que poseen este tipo de poderes, sino más bien a objetos como las fronteras políticas. Éstas no poseen ningún poder por sí mismas, sino que se limitan a reflejar la localización de este tipo de poderes:

> Borders, rather than carrying this type of deontology, mark the locations of transitions in it (e.g., the border between my backyard and my neighbor's marks the location where the deontic powers that accompany her ownership end and those of my landlord begin). Such transitions are important for a variety of reasons. Consequently, we undertake an agreement that an entity — a border — exists whenever and wherever such a transition takes place. The function of such borders is to aid us in representing, analyzing, reasoning about, discovering truths concerning, etc. deontic transitions and related matters. Borders perform these functions by allowing us to represent these transitions by way of an entity with various features. (2012, pp. 3-4)

Este tipo de función, que nos permite representar, analizar, razonar, y descubrir verdades acerca de algo, es denominada por Cole como *función representacional*, y es este tipo de función la que cumplen –y la que es responsable por la existencia de– los objetos matemáticos. De manera más precisa, la tesis central de Cole es que los *dominios* matemáticos son *entidades institucionales* que, al menos típicamente, son introducidas para servir una *función representacional* (2012, p. 19).

Cole no habla de objetos matemáticos individuales, sino de dominios matemáticos completos, pues considera que la práctica matemática sólo puede caracterizar una estructura completa, y no cada objeto individualmente (2009, p. 13). Es preciso aclarar que, si bien la tesis de Cole es que la función de los objetos matemáticos es representacional, lo que éstos representan no es una parte del mundo natural, sino la localización de poderes deónticos que son asignados colectivamente por la comunidad matemática. Es esto lo que hace de los objetos matemáticos entidades institucionales. La existencia de los dominios matemáticos se debe, entonces, al acuerdo colectivo, por parte de la comunidad matemática[38], de su existencia. Estos acuerdos tienen la misma forma lógica que aquella de las *declaraciones* exitosas. Las declaraciones son actos de habla que representan a la realidad como incluyendo cierta faceta, y que, al hacerlo, la traen a la existencia. Por ejemplo, cuando un juez, en el contexto apropiado, pronuncia las palabras "los declaro marido y mujer", está trayendo a la realidad un matrimonio. Ahora bien, estas declaraciones no tienen por qué ser explícitas. Por ejemplo, en un partido de futbol informal, un cambio de portero puede ser hecho simplemente cuando alguien se coloca debajo de la portería y comienza a actuar como portero. En el caso de las matemáticas este es, casi siempre, el caso. Los matemáticos simplemente comienzan a actuar como si cierto dominio matemático existiese, y es esto lo que le da existencia. En este sentido, las matemáticas son distintas a otras instituciones en las que los poderes son explícitos y formales.

Cole afirma, entonces, que la realidad matemática ha sido construida a lo largo de la historia de las prácticas matemáticas. Así, esta puede ser entendida como una construcción hecha en capas:

> Now, it is useful to think of mathematical reality as having been constructed in layers. In the first layer are domains, such as the natural numbers and Euclidean planes, that were introduced to perform representational functions with respect to non-mathematical facets of reality. Yet, having introduced such domains, we became interested in them, and began to investigate them, independently of their representational functions. (2012, p. 19)

---

[38] Cole admite la posibilidad de que un solo matemático traiga a la existencia a dominios matemáticos, siempre y cuando fuera el caso que, el ser hechos conscientes de ellos, otros matemáticos los aceptaran.

Cada capa es, entonces, el objeto de estudio de la capa siguiente, y es así como, conforme avanzan, las matemáticas se vuelven cada vez más abstractas. Aunque, en ocasiones, más que una nueva capa, las adiciones que hacen los matemáticos son extensiones de la capa anterior. Cole ilustra esto mediante el ejemplo de los números naturales. Parece claro que los números naturales fueron introducidos por el hombre en algún punto de la historia para cumplir funciones representacionales acerca de colecciones finitas de objetos. Con el tiempo, el tamaño de las colecciones que les interesaron comenzó a crecer, y eventualmente se dieron cuenta de que no existía una cota superior para el tamaño de las colecciones que les podrían interesar. En este punto se introdujo una secuencia infinita de números naturales, y se reconoció que éstos debían servir no sólo para representar colecciones actuales, sino también colecciones posibles de objetos, en donde, indudablemente, su comprensión de lo que significa una colección posible de objetos co-evolucionó con aquella de las funciones representacionales de los números naturales (2012, p. 21).

Ahora bien, inclusive las capas más básicas de la realidad matemática, aquellas que tratan directamente con el mundo físico, son entidades institucionales. Esto es, si bien el mundo físico siempre ha determinado que, al juntar una colección de cinco objetos (del tipo que no se fusionan) con una de siete, hemos obtenido una colección con doce objetos, esto no equivale al hecho matemático de que “5 + 7 = 12”. Inclusive si el hecho matemático pareciera estar completamente determinado por un hecho de otro tipo, es sólo hasta que la práctica matemática lo reconoce que éste se constituye como un hecho matemático. De allí que Cole bautice a su tipo de realismo matemático como “realismo dependiente de la práctica”.

Para entender la importancia de esta distinción dentro de la propuesta de Cole, debemos notar que, siempre que se trata con objetos institucionales constituidos a partir de objetos brutos, surge un acertijo de colocación, a saber, la pregunta por cuántos objetos tengo en mi mano cuando sostengo en ella, por ejemplo, un billete de un dólar. Es claro que tengo un objeto institucional, el billete, pero también tengo un objeto bruto, un pedazo de papel; sin embargo, parece contradictorio decir que tengo dos objetos en mi mano. Para resolver el acertijo, Cole adopta la teoría mixta de la referencia de Thomasson, de la cual hablé brevemente en el capítulo 2. Según ésta, para que una persona pueda referirse exitosamente a una entidad, ella debe tener en mente una categoría de entidad a la que busca referirse, de otra manera la referencia quedaría indeterminada. Esto aplica tanto a objetos institucionales como a objetos naturales, esto es, por ejemplo, al señalar hacia un árbol para intentar bautizarlo, debo haber decidido previamente que me estoy refiriendo al árbol como un organismo, y no al conjunto de átomos que lo componen. Al hacer esto, estamos asociando la referencia a un *concepto categorial*[39], con lo cual establecemos las condiciones para la referencia del término. Estos conceptos tienen condiciones de aplicación estipuladas o legisladas que reflejan nuestros intereses pragmáticos en la categoría en cuestión (2012, p. 15). Además, existen, entre estos conceptos categoriales, ciertas relaciones analíticas, pues las condiciones de aplicación de algunos conceptos implican lógicamente a aquellas de otros. Por ejemplo, sabemos que siempre que las condiciones se cumplan para referirnos exitosamente a un billete de un dólar, también se estarán cumpliendo aquellas que nos permitirían referirnos a un pedazo de papel. De allí que "todos los billetes de un dólar son pedazos de papel" sea una verdad analítica.

[39] No necesariamente de manera consciente.

Esta teoría de la referencia resuelve el problema de colocación, pues implica que sólo es posible contar entidades una vez que hemos especificado las categorías de entidades a ser contadas. La extrañeza que sentimos al afirmar que tenemos dos objetos en la mano, ocurre debido a que no solemos contar al mismo tiempo categorías de entidades que se encuentran analíticamente relacionadas. Una vez notado esto, no deberíamos tener problema en admitir que tenemos dos, y seguramente muchos más, objetos en la mano. Este mismo fenómeno sucede al hacer referencia a hechos, y la referencia mixta nos permite diferenciar entre el hecho empírico que se da al agregar colecciones de objetos y el hecho matemático que refiere a la suma de números naturales. Es esta distinción la que separa a la teoría institucional de Cole del aristotelianismo de Franklin, expuesto anteriormente. Además de esto, la teoría mixta de la referencia adoptada por Cole tiene consecuencias sobre su explicación de la modalidad y temporalidad de la verdad matemática. Un poco más adelante hablaré sobre estas consecuencias, pero antes hablaré de la explicación que da Cole de la objetividad del conocimiento matemático.

Pensar en la realidad matemática como el resultado de declaraciones (aunque sean implícitas) hechas por un grupo de personas, parece ir en contra de la noción misma de objetividad. Tradicionalmente, se entiende que la verdad de una aserción es objetiva si ésta es absolutamente independiente de nuestros juicios. Esto excluiría la posibilidad de que existieran verdades objetivas acerca de todo tipo de constructos sociales, incluyendo a los artefactos en general y a los constructos matemáticos de Cole. Esto, sin embargo, parece ser demasiado tajante, pues parecerían ser hechos objetivos, por ejemplo, que en el año 2013 d.C. el edificio Burj Khalifa en Dubai es el más alto del mundo, y que la frontera entre Estados Unidos y Canadá pasa por el lago Erie.

Para remediar esto, Cole propone una modificación de la concepción tradicional de objetividad. La idea es que la objetividad de una aserción debe ser evaluada tomando en cuenta dos factores: 1) la objetividad epistémica, que consiste en ser independiente de nuestros juicios *exceptuando aquellos que juegan un papel en la constitución del objeto en cuestión*; y 2) la objetividad del objeto mismo, que puede ser una cuestión de grado. Por ejemplo, es un hecho epistémicamente objetivo que en México el 10 de mayo es el día de las madres, sin embargo, el objeto mismo –el día de las madres– tiene una objetividad que no es muy robusta, pues es, al fin y al cabo, una convención que bien podría ser de otra manera. En cambio, que el calendario gregoriano tenga 365 días (y 366 cada 4 años), es una aserción que, además de tener objetividad epistémica, tiene una objetividad propia más robusta, pues obedece a que la Tierra rota sobre su eje aproximadamente 365 veces mientras completa una órbita alrededor del sol.

Con las aserciones matemáticas sucede, según Cole, algo similar. Todas ellas tienen objetividad epistémica en virtud de poder ser contrastadas, de manera independiente de nuestros juicios, con los acuerdos reconocidos por la comunidad matemática, pero algunas tienen más objetividad que otras en virtud de que dichos acuerdos pueden ser en unos casos más convencionales que en otros. Por ejemplo, los números naturales y los hechos aritméticos tienen, según Cole, una objetividad robusta, pues éstos se encuentran fijados por el principio de Hume y las colecciones finitas de objetos, de manera que verdades como "5 + 7 = 12" *no podrían* ser de otra manera. Por otro lado, Cole piensa que la verdad acerca de los conjuntos no goza de una objetividad igualmente robusta, pues, dado que la teoría de conjuntos inocente, que se apoyaba en el principio de abstracción natural, resultó ser inconsistente, ésta fue sustituida por teorías axiomáticas que reflejan decisiones que incluyeron motivaciones pragmáticas, y que bien pudieron haber sido diferentes (2012, p. 26).

En todo caso, Cole piensa que ninguna verdad matemática es completamente convencional, y existen varios factores que así lo determinan. Ya anteriormente mencioné las dos condiciones que Cole señala para que una postulación matemática obtenga existencia: ésta debe ser coherente y cumplir una función. La coherencia implica, entre otras cosas, a la consistencia lógica, lo cual previene que sobrevivan, en la realidad matemática, nociones que violan las consecuencias lógicas de los axiomas aceptados previamente. El cumplimiento de la función, por su lado, asegura que los axiomas aceptados representen (en el sentido mencionado anteriormente) adecuadamente a aquello que deben representar. En el caso de las capas matemáticas básicas, aquellas que tratan directamente con el mundo físico, esto implica que las matemáticas deben adecuarse a la naturaleza de éste, por lo que no se pueden adoptar axiomas de manera arbitraria. En el caso de las capas subsecuentes, la arbitrariedad se previene debido a que éstas deben representar correctamente a las capas anteriores.

Además de estas dos condiciones, Cole señala otro factor que contribuye a la objetividad (o, al menos, a la intersubjetividad) de los constructos matemáticos. Este refiere a las herramientas utilizadas en estas construcciones, mismas que son conocidas y aceptadas por los integrantes de la práctica. Esto, señala Cole, no es un fenómeno privativo de la práctica matemática, sino que se hace presente en todo tipo de disciplinas generadoras de constructos sociales. Por ejemplo, la música:

> In general, one individual is responsible for composing any given sonata, yet this does not undermine the social-sharable-nature of sonatas. An individual's musical creation can be shared by many, because that individual uses socially recognized tools in its construction. For example,

> sonatas are composed using the twelve-tone scale, a social convention standardized around "middle C" having the frequency of 440Hz, and sonatas are composed for standard-socially recognized musical instruments. (…) [M]athematical domains are sharable because mathematicians use shared logical tools (e.g., first and higher-order quantification) to characterize and constitute those domains. (2008, pp. 116-117)

Esto me parece interesante, pues, además de concordar con la noción de justificación distribuida de Knuuttila, citada anteriormente, sugiere que parte de la objetividad de los constructos matemáticos se debe a su dimensión tangible, proveída, en este caso, por la notación utilizada para representarlos, los instrumentos, etc. Este es un punto que no es enfatizado por Cole, omisión acerca de la cual hablaré más adelante, cuando realice la evaluación crítica de su propuesta.

La atemporalidad y necesidad de la verdad matemática tampoco parecerían ser amigables a la teoría institucional de Cole. Si los objetos matemáticos han comenzado a existir con las prácticas matemáticas, entonces parecería inevitable que la verdad matemática ha comenzado a existir con las prácticas matemáticas, de manera que la verdad matemática no sería eterna, y si las prácticas matemáticas son fenómenos históricos contingentes, ésta no sería necesaria. Cole, sin embargo, afirma que sí es posible compaginar la realidad matemática institucional con la atemporalidad y (percibida) necesidad de la verdad matemática, pues los constructos institucionales pueden tener características espacio-temporales y causales que son distintas de las actividades que los constituyen (2009, p. 14).

Más específicamente, acerca de la atemporalidad de los objetos matemáticos, Cole señala que es una práctica institucional común el declarar y reconocer colectivamente que los hechos previos a la constitución de la institución sean representados de manera que se acoplen a la nueva realidad constituida por la institución:

> Now, it might seem that it is impossible for an institution to be responsible for the existence of a facet of reality that existed prior to it. Yet it is not. Since Declarations are responsible for the existence of institutional facets of reality and people can represent the past as being many ways, they can, should it serve their purposes, Declare and collectively recognize the past to be one of those ways. This type of retroactive application for representational purposes is familiar to us all; it is a feature of many linguistic institutions (e.g., we can all use English to talk about prehistoric times or the beginning of the universe). (2012, p. 11; énfasis del autor)

Así, y dado que la constitución de los objetos matemáticos incluye la asociación a conceptos categoriales que reflejan nuestros intereses pragmáticos, no debe extrañarnos que hayamos adoptado estipulaciones conceptuales que determinen que, en el mundo actual, en el tiempo *t*, un dominio matemático *X* existe como una entidad atemporal si, y sólo si, existen personas que reconocen los poderes deónticos de *X* (2012, p. 23).

La percibida necesidad es explicada por Cole de la misma manera. Cole afirma que nuestros motivos pragmáticos nos conducen a estipular que los objetos matemáticos son objetos *amodales*, esto es, ni necesarios ni contingentes. Agregando que, el que solamos considerarlos, erróneamente, como necesarios, se debe a dos factores: primero, que la distinción entre necesidad y amodalidad no suele ser aclarada en la literatura filosófica; y, segundo, que las verdades matemáticas son estipuladas, o son consecuencia de estipulaciones que conciernen las reglas de uso de los conceptos categoriales que fijan la referencia de los objetos matemáticos. Esta relación de consecuencia suele ser comunicada de manera análoga a la manera en la que comunicamos poderes deónticos, como aquellos estipulados en las reglas de un juego. Por ello, así como decimos que para jugar ajedrez es necesario que el jugador de blancas haga el primer movimiento, decimos que es necesario que el número 2 sea primo. Sin embargo, concluir, a partir de esta práctica, que las matemáticas son necesarias, significaría confundir una utilización interna de ‘necesariamente’ con una utilización externa (2012, p. 23). En lugar de ello, afirma Cole, debemos concluir que los objetos matemáticos son amodales.

Otra característica que, según Cole, es conferida a los objetos matemáticos por medio de estas estipulaciones conceptuales es la de ser objetos abstractos. Esto resulta sorprendente, dado su rechazo del platonismo, pero Cole piensa que para rechazar el platonismo basta con rechazar la independencia de los objetos matemáticos de nuestras prácticas, y que este rechazo no es inconsistente con que los objetos matemáticos sean abstractos. Según Cole, “abstracto” es un concepto cúmulo que implica cumplir con un número suficiente de las siguientes características: 1) no ser espacio-temporal; 2) ser acausal; 3) ser eterno; y 4) ser inmutable. Cole afirma que los objetos matemáticos cumplen con las cuatro características, y que esto se debe a la antes mencionada posibilidad de que una práctica espacio-temporal, causal, finita y cambiante pueda crear, por medio de estipulaciones, objetos libres de estas características.

Por último, quisiera mencionar algunas características del tipo de realismo que Cole propone. Ya ha quedado claro que es un realismo institucional, que se apoya en un realismo ontológico con respecto a las entidades sociales. Sin embargo, Cole también afirma, sobre todo en sus primeros textos, que la realidad matemática tiene una naturaleza estructural. Además de adoptar la noción de coherencia como una condición necesaria para la constitución de un dominio matemático, noción que proviene del estructuralismo de Shapiro, en repetidas ocasiones equipara a los dominios matemáticos con estructuras, e incluso llega a afirmar que la realidad matemática es puramente estructural:

> In recent years, structuralist interpretations of mathematics—interpretations that, roughly speaking, take the subject matter of mathematics to have only structural features rather than both structural and non-structural features— have become extremely popular. PDR provides a natural account of

> the correctness of this insight. Since the features of mathematical practices responsible for constituting mathematical domains are features that only have the ability to characterize the structural features of mathematical entities, PDR predicts that the subject matter of mathematics is purely structural in nature (2009, p. 13).

Encuentro este énfasis en lo estructural muy desconcertante, pues me parece que no es compatible con el resto de la propuesta de Cole. Hablaré acerca de esta incompatibilidad en la siguiente sección.

3.4.1 Evaluación crítica de la propuesta de Cole.

Simpatizo fuertemente con la propuesta de Cole. Si bien él nunca afirma que los objetos matemáticos sean artefactos, sí afirma que pertenecen a la realidad institucional, la cual es parte de la realidad social, en la que se encuentran los artefactos. Como se verá más adelante, muchos aspectos de mi propuesta coinciden con la suya; en particular, mis ideas acerca de la ontología, semántica y objetividad matemáticas, son muy afines a las suyas. Encuentro, sin embargo, fallas importantes en su propuesta, que expongo a continuación.

Mis objeciones a Cole son varias y se encuentran inter-conectadas. Ellas se deben a lo que me parece una falta de consistencia respecto al papel que juega la práctica matemática en la constitución de los objetos matemáticos. Esto es, por un lado postula –como su tesis central– que éstos deben su existencia y naturaleza a la práctica matemática, pero, por el otro, trivializa la manera en la que esto sucede. Esto es particularmente claro cuando argumenta que los objetos matemáticos son abstractos, atemporales y amodales, pues, para justificar estas afirmaciones nos refiere a estipulaciones pragmáticas que los miembros de la comunidad matemática hacen y que van, a mi parecer, en contra de la naturaleza situada, espacio-temporal y contingente de las mismas.

Un primer síntoma de esta falla es su propensión a caracterizar a los objetos matemáticos como el resultado de declaraciones. Una cosa es utilizar una analogía, entre la forma lógica de los acuerdos que constituyen a los objetos matemáticos y aquella de las declaraciones exitosas, para ilustrar un punto –con el que concuerdo– acerca de la metafísica de los objetos matemáticos, y otra muy distinta referirse a estas declaraciones como responsables autónomos de los objetos matemáticos y su naturaleza.

Cole constantemente distingue entre el contenido de las declaraciones y lo que él llama el "lenguaje de los objetos" (2012, pp. 17, 18 y 22), sugiriendo que hablar de objetos matemáticos pudiera no ser más que una manera de parafrasear el contenido de las declaraciones. En una ocasión llega incluso a afirmar que las reglas de aplicación responsables por la existencia de una entidad institucional se encuentran expresadas "engañosamente en el lenguaje de los objetos" (2012, p. 18). Me parece que esta distinción es errónea, pues conduce a negar la naturaleza híbrida de los objetos matemáticos, que incluye tanto las intenciones de la comunidad matemática como los medios materiales que ésta utiliza en la práctica. Esto va en contra de las ideas de Muntersbjorn, expuestas anteriormente, según las cuales la notación y otras maneras de representar externamente a los objetos matemáticos tienen un poder causal sobre su constitución. Y, si bien estas ideas son discutibles, y Cole podría rechazarlas, en otros momentos no parece hacerlo, particularmente cuando habla de la objetividad proveída a los objetos matemáticos por las herramientas socialmente reconocidas utilizadas en su construcción, como la cuantificación de primer orden (2008, p. 117).

Esto sucede, por ejemplo, cuando Cole argumenta en favor de la atemporalidad y amodalidad de los objetos matemáticos, las cuales son, según él, conferidas por una estipulación pragmática. Si bien estoy de acuerdo en que los conceptos involucrados en la constitución de la realidad matemática obedecen en buena medida a nuestros intereses pragmáticos, esta pragmática no se da en el vacío, e incorpora elementos de las circunstancias espacio-temporales de la práctica. La práctica matemática es más que un grupo de personas haciendo matemáticas en sus cabezas, e incluye circunstancias espacio-temporales: notaciones, convenciones, estándares de justificación, etc. que contribuyen a la constitución de los objetos matemáticos y forman parte de ellos. La utilización misma del término "estipulación" me parece objetable, por sugerir un excesivo control, por parte de la comunidad matemática, sobre estos conceptos, y me parecería más adecuado hablar de un acoplamiento entre estos conceptos y las circunstancias que determinan las condiciones para el cumplimiento de las funciones matemáticas. Una manera de expresar esto es diciendo que Cole tiene una concepción exclusivamente proposicional de las matemáticas, rehusándose a incluir, como parte constitutiva de los objetos matemáticos, a las circunstancias espacio-temporales mencionadas.

No me opongo, en principio, a la posibilidad de que una institución estipule para sus objetos características espacio-temporales que difieran de las propias, pero, no creo que este pueda ser el caso con la práctica matemática, y mucho menos si ésta es concebida de manera realista. Como bien dice Knuuttila, la realidad de los artefactos epistémicos se debe en parte a que poseen una dimensión tangible que les permite conservar su identidad en diferentes contextos, y esta dimensión se encuentra influida por las circunstancias contingentes de su momento histórico. Negar esta materialidad sugeriría que la práctica matemática fuera poseedora de una libertad equivalente a aquella propia de las prácticas que se ocupan de la creación de ficciones libres, y resultaría más afín a una concepción ficcionalista de las matemáticas. Dentro del ficcionalismo, parecería natural hablar de objetos atemporales, pues el tiempo no figura en la ficción matemática; sin embargo, creo que el realismo institucional no puede tomarse estas libertades. Si, por ejemplo, los números complejos comenzaron a existir cuando la práctica matemática los engendró, gracias, en buena medida, a una notación matemática que forma parte de ellos, esto implica que no es posible afirmar que $i^2 = -1$ antes del siglo XVI, pues el material que forma parte de su dimensión tangible no existía antes de ese tiempo.

Creo que los ejemplos que da Cole en favor del carácter atemporal de los objetos matemáticos fallan, y que esta falla sirve para ilustrar la inconsistencia de su posición. Uno de ellos nos refiere a la posibilidad de utilizar el idioma inglés, un constructo social relativamente nuevo, para hablar de tiempos prehistóricos. Creo que la analogía de este ejemplo falla, pues lo que se busca probar es que es posible que una práctica sea *responsable* por una faceta de la realidad que la antecede, y lo que el ejemplo ilustra es una constructo social siendo utilizado para *describir* un mundo pre-histórico que lo antecede, pero que de ninguna manera es el producto de éste. El otro ejemplo también falla, y lo hace de una manera más ilustrativa. Cole explica:

> [W]hile it is *now* an institutional fact that slaves in Ancient Greece had human rights that their owners failed to recognize, there was no such fact *at that time*. This fact obtains *at this time* since there is *now* a widely accepted institution that has a constitutive rule that specifies that meeting certain biological conditions, which the slaves in Ancient Greece clearly met, (was, is, and will be) sufficient for an individual's having human rights. This fact did not obtain *at that time* since *then* there was no such institution. It is worth noting, however, that two hundred years ago there was such an institution. Moreover, the collection of human rights that this institution's participants *then* took the slaves in Ancient Greece to have possessed is different from the collection that its *current* participants take them to have possessed. So, at different times, an institution can constitute a facet of reality differently. (2012, p. 12; énfasis del autor)

Me parece que Cole está siendo inconsistente en su análisis, pues creo que confunde el hecho de que un objeto sea *reconocido* por una institución con que un objeto sea institucional. Si bien, como vimos en la sección 2.1, ésta no es una frontera nítida y libre de problemas, la mayoría de nosotros reconocemos que hay casos de objetos claramente institucionales, como un alfil de ajedrez, y otros claramente no institucionales, como el Bosón de Higgs. Qué exactamente hace que marquemos esa distinción, es una cuestión muy compleja, pero un factor importante es qué tan intrínseca o extrínseca consideramos que es la naturaleza del objeto en cuestión. Mientras que una pieza de madera es un alfil sólo si lo reconocemos como tal, se considera que la identidad del Bosón de Higgs está determinada (ayer, hoy y siempre) por ciertas características intrínsecas que no dependen de la práctica científica que las estudia. Ahora bien, Cole argumenta que los esclavos de la Grecia Antigua tuvieron derechos humanos porque la institución *actual* de Derechos Humanos determina que la posesión de ciertas características biológicas es, ha sido, y será siempre, suficiente para poseer derechos humanos. La pregunta es, entonces, si esta institución temporal, que no existía en la Antigua Grecia y posiblemente no exista en un futuro lejano, pudiera ser *responsable* por estos derechos pasados y futuros, o si es más apropiado concluir que la única manera de afirmar que estos derechos son eternos es reconociendo que éstos son una característica intrínseca de cualquier persona que posea las características biológicas indicadas. Me parece claro que la respuesta correcta es la segunda, y que para afirmar que los esclavos griegos tenían derechos humanos, tendríamos que concebir a estos derechos como un objeto natural, y no uno institucional. En todo caso, inclusive si Cole tuviese razón con respecto a los derechos humanos, ello no implicaría que tenga razón acerca de la práctica matemática, por las razones asociadas a la dimensión tangible de los objetos matemáticos de la que hablé anteriormente.

Su explicación de la amodalidad de los objetos matemáticos sufre las mismas fallas. Ésta ignora, de nuevo, que la constitución de los objetos matemáticos incluye factores de la práctica matemática que son contingentes, y que de no haberse dado, los objetos matemáticos bien podrían haber sido diferentes (hecho que Cole reconoce cuando habla de la teoría de conjuntos). Así, expresado en los términos utilizados por Cole, no es sólo que la utilización interna de "necesario" haya sido erróneamente confundida con la externa, sino que, si tengo razón acerca de la dimensión tangible de los objetos matemáticos, se da, de hecho, una contingencia externa que debemos reconocer y que despoja a la verdad matemática de su percibida necesidad.

Por supuesto que, por razones que ya deben ser obvias, tampoco estoy de acuerdo con el supuesto carácter abstracto de sus constructos institucionales. Es por ello que, a lo largo de esta investigación, he tenido cuidado de distinguir entre lo abstracto y lo *inmaterial*. Lo inmaterial es aquello que no puede ser estrictamente identificado con un conjunto de materia, pero que aun así puede tener una dimensión tangible, pues se encuentra en la cadena causal del mundo material (y específicamente tiene relaciones causales (en ambos sentidos) con la práctica que los engendra). Creo que la mayoría de los objetos institucionales son este tipo de objetos, y que considerarlos así es indispensable para que la tesis institucional de Cole sea una propuesta consistente y genuinamente novedosa. De otra manera es sólo un ficcionailsmo con la cláusula agregada de que las ficciones son reales por ser parte de la realidad institucional.

Por último, creo que las tendencias estructuralistas de Cole no concuerdan con el resto de su tesis. Cole habla de la constitución de dominios matemáticos, y reconoce que al hacerlo se está refiriendo a estructuras (2012, nota al pie 1). Más aun, afirma que una de las condiciones necesarias para la constitución de un dominio es que éste sea *coherente*. Esta es una noción que Cole toma del estructuralismo de Shapiro, quien la define como un concepto primitivo, imposible de ser definido de manera rigurosa[40], pero que incluye ser lógicamente consistente y poseer un modelo. Si apelar a la coherencia se debe a algún argumento filosófico acerca de la naturaleza de lo matemático, Cole no lo proporciona. Lo único que dice al respecto es que la práctica matemática sólo tiene la capacidad de caracterizar a estructuras completas (2009, p. 13). Y si en cambio obedece a la reciente popularidad de la concepción estructuralista de las matemáticas, según la cual éstas consisten en hechos puramente relacionales, entonces me parece que está cayendo en un presentismo que es claramente inconsistente con el resto de su propuesta.

Afirmar que los objetos matemáticos son institucionales implica que éstos deben su existencia, y al menos parte de su naturaleza, a las instituciones matemáticas responsables por ellos. Consecuentemente, debemos respetar la manera en la que éstos fueron constituidos, independientemente de nuestra opinión actual acerca de la institución en cuestión. Ahora bien, me parece claro, por ejemplo, que cuando el hombre primitivo comenzó a utilizar números naturales pequeños para representar cantidades, no los concebían como partes de una estructura. Una de las consecuencias del estructuralismo matemático es la imposibilidad de conocer una parte de una estructura sin conocer la otra,

[40] Más precisamente, es imposible definirla rigurosamente sin caer en una circularidad. Para que una estructura sea coherente debe ser satisfacible, pero esta es una noción definida en términos de la teoría de conjuntos, la cual es en sí misma una estructura.

esto es, por ejemplo, no podríamos conocer el "3" sin conocer el "2" y el "4". Sin embargo, me parece perfectamente factible, particularmente en el contexto pragmático del hombre primitivo, que una persona o una comunidad conocieran el número "3" sin conocer el "2", simplemente porque el "3" les resultaba útil en sus actividades diarias mientras que el "2" no. Si hoy en día esto parece cuestionable se debe a circunstancias de la práctica matemática actual que reconoce a los números naturales como una estructura definida en términos de un número inicial y la relación de sucesor, así como de la predilección por sistemas formales que enfatizan la relación entre los integrantes de una estructura.

Así, ante el hecho de que el hombre primitivo concebía a sus objetos como no estructurales, el estructuralista tiene dos posibles salidas: 1) negar que el hombre primitivo conocía realmente los números naturales, precisamente por no conocer sus relaciones, y explicar las actividades numéricas del hombre primitivo de alguna otra manera que no implique conocimiento matemático; o 2) admitir que conocían a los números naturales, pero afirmar que no se daban cuenta de que lo que realmente conocían era una parte de una estructura. Creo que ambas salidas son poco convincentes (y esta es parte de la razón por la cual no soy estructuralista), pero la situación es todavía peor si combinamos estas respuestas son el resto de la tesis institucional de Cole. Me resulta incomprensible la idea de primero apelar a instituciones –entidades claramente históricas– para explicar la constitución de los objetos matemáticos, para luego imponerles un requisito claramente extra-institucional[41], como la coherencia estructural. Es posible que actualmente estemos convencidos de que nuestra práctica matemática es superior a aquella del hombre primitivo, y que ello nos capacita para re-interpretarla en nuestros términos, pero entonces deberemos

[41] La coherencia podría ser considerado como un criterio institucional en la actualidad, debido a la práctica actual, pero claramente es un criterio extra-institucional para las prácticas matemáticas de la antigüedad.

reconocer la existencia de algún criterio capaz de evaluar a las diferentes prácticas matemáticas, y dudo mucho que este criterio pueda ser expresado en los términos institucionales que la propuesta de Cole exigiría.

CAPÍTULO 4: LOS OBJETOS MATEMÁTICOS COMO ARTEFACTOS

En el capítulo 1 motivé la idea de que vale la pena explorar una tercera vía, distinta al platonismo y al formalismo, para explicar la verdad matemática. Sugerí que esta vía debería tomar la forma de un realismo dependiente de la práctica, y que esta dependencia podría abrir una avenida epistémica para el conocimiento de dichos objetos, sin por ello caer en un convencionalismo que minara el carácter real de los objetos matemáticos. Propuse que una manera de hacer sentido de esta, a primera vista incómoda conjunción de dependencia y realidad, sería mediante la concepción de los objetos matemáticos como artefactos.

Ahora, habiendo expuesto, en el capítulo 2, la teoría de artefactos que asumo, procederé a formular mi teoría artefactual de los objetos matemáticos. Ésta se apoya en dos ideas principales: en primer lugar, que los recursos materiales que utilizamos para representar a los objetos matemáticos juegan un papel en su constitución y afectan, por ello, su naturaleza. Esta idea fue sostenida ya por Muntersbjorn y expuesta en el capítulo anterior, y en lo que sigue buscaré complementarla con ideas de Helen de Cruz y Danielle Macbeth que apuntan en el mismo sentido. La segunda idea que conforma la base de mi teoría es la abstracción institucional de la práctica matemática propuesta por Cole, según la cual la existencia de los objetos matemáticos no se encuentra pre-determinada en el reino platónico, ni responde al cumplimiento de alguna propiedad formal, sino que se da en virtud del reconocimiento, implícito o explícito, por parte de la comunidad matemática.

Si se me permite una analogía provisional y un tanto simplista entre la conjunción de estos dos elementos y los artefactos como fueron caracterizados en el capítulo 2, la idea es que el carácter institucional de los objetos matemáticos refleja la intencionalidad de los artefactos, mientras que la notación matemática juega el papel del material del cual están constituidos. La analogía resulta simplista porque los sistemas de notación matemática no son objetos concretos sobre los cuales podamos plasmar nuestras intenciones, de manera que, para que resulte completa, habrá que decir más acerca de cómo exactamente es que estos recursos materiales afectan a los objetos matemáticos. Esta es una tarea específica a cada episodio de la historia de las matemáticas y más apropiada para un historiador de las matemáticas que para un filósofo. Así, si bien intentaré motivar esta idea por medio de las ideas de Muntersbjorn y Macbeth, la posibilidad de completar esta analogía permanecerá una hipótesis de trabajo de esta investigación, y me limitaré a motivar la idea de que esta compleción es factible y que resultaría fructífera para nuestra comprensión de la naturaleza de los objetos matemáticos.

Culminaré este capítulo con una breve evaluación filosófica de la teoría artefactual de los objetos matemáticos expuesta. Examinaré brevemente la ontología, semántica y epistemología de la propuesta, así como algunas de sus dificultades. Pondré especial atención a las dudas que puedan surgir acerca de la capacidad de la teoría artefactual de explicar la percibida objetividad del conocimiento matemático y la necesidad de la verdad matemática. Por último, haré una breve comparación entre la teoría artefactual y otras teorías de los objetos matemáticos, con el propósito de exhibir sus ventajas y comprender de manera más clara los contrastes.

Es preciso aclarar que esta breve evaluación es sólo una exploración inicial de las avenidas filosóficas que la teoría artefactual pone a disposición del filósofo de las matemáticas. Esto se debe a que, debido a la amplitud de la teoría, un análisis detallado de todas estas cuestiones tomaría más tiempo y espacio del que dispongo para este trabajo.

4.1 El papel constitutivo de la notación matemática.

Una distinción que suele ser enfatizada en filosofía de las matemáticas es aquella entre los objetos matemáticos y los signos concretos que utilizamos para referirnos a ellos, por ejemplo, entre el número 1, y el símbolo "1". Existen buenas razones para sostener esta distinción. Es claro que el signo *representa* al objeto, pero no *es* el objeto, y que si en lugar del símbolo "1" decidiésemos utilizar el símbolo "ℓ", el número 1 no cambiaría en absoluto; el 1 es un número, no un signo en el papel o en una computadora.

Hasta aquí no tengo ninguna objeción, sin embargo, esta distinción suele conducir a la idea, errada en mi opinión, de que los objetos matemáticos son absolutamente independientes de los recursos concretos que utilizamos para representarlos. Una cosa es sostener una distinción entre dos entidades, y otra muy distinta afirmar su completa independencia. En lo que sigue argumentaré que, si bien podemos y debemos distinguir entre los objetos matemáticos y los recursos materiales que utilizamos para representarlos, debemos también reconocer y poner atención a la influencia que éstos tienen, no sólo sobre nuestro conocimiento de los objetos matemáticos, sino sobre su naturaleza misma.

En resumidas cuentas, el argumento que buscaré articular es el siguiente: los seres humanos tenemos ciertas capacidades cognitivas específicas que nos permiten realizar las tareas matemáticas que nuestro ambiente e intereses nos exigen. Por sí solas, sin embargo, estas capacidades no alcanzan para hacer todas las matemáticas que hacemos, de manera que recurrimos a la utilización de herramientas concretas, las cuales nos permiten representar nuestros contenidos mentales. Sin embargo, estas herramientas van más allá de la representación, y por ello no son del todo neutrales, aportando a la naturaleza del objeto matemático algunas de sus particularidades. Así, estos recursos notacionales son un elemento instrumental en la constitución de los objetos matemáticos y tienen una influencia sustantiva sobre su naturaleza.

Como mencioné anteriormente, la defensa de este argumento la apoyaré en ideas de De Cruz, Muntersbjorn y Macbeth. De Cruz toma como punto de partida de su investigación las ciencias cognitivas, y el punto central que busca defender es que el desarrollo de los conceptos matemáticos no se da exclusivamente en nuestras mentes, sino que se apoya de manera esencial en los recursos externos que utilizamos para su representación. Muntersbjorn y Macbeth adoptan un enfoque más histórico, analizando episodios de la historia de las matemáticas y mostrando la manera en la que las innovaciones notacionales influyeron en la naturaleza de los conceptos matemáticos. Una vez expuestas estas ideas, será preciso hablar de las diferentes interpretaciones metafísicas que se pueden hacer de esta influencia, pues mi argumento (en particular, la naturaleza institucional de los objetos matemático que éste promulga) requiere de esta sea interpretada de manera fuerte, en un sentido que aclararé más adelante.

En el ámbito del estudio de la cognición matemática es ampliamente aceptado que los seres humanos (y algunos animales) poseemos ciertas capacidades cognitivas innatas que nos permiten hacer matemáticas (aunque muy rudimentarias). Cuál exactamente es la naturaleza de estas capacidades es aún motivo de discusión en el campo de las ciencias cognitivas. Sin embargo, estas particularidades no son importantes para mi argumento, de manera que, en lo que sigue adoptaré la manera en la que Helen de Cruz –una de las autoras en cuyas ideas me apoyo– habla de ellas, sin poner en tela de juicio sus particularidades controversiales.

El estudio de De Cruz se centra en torno al desarrollo y conocimiento de los números naturales, y parte de una concepción modular de la mente, según la cual los seres humanos tenemos un módulo cerebral, llamado HIPS, encargado de lidiar con cierta información cuantitativa. Dentro de este módulo hay neuronas que responden individualmente ante el estímulo de colecciones de cantidades específicas, y cuya actividad decrece paulatinamente conforme las colecciones se alejan de estas cantidades. Esto sugiere que las cantidades son convertidas a un formato mental de magnitudes aproximadas (2008, p. 477), con precisión que va decreciendo conforme las cantidades se vuelven mayores, esto es, siguiendo un modelo logarítmico, nuestras neuronas distinguen más eficazmente al número 2 del 5, que al 32 del 35. A esta capacidad cerebral se le ha llamado el "sentido numérico".

Sin embargo, este sentido no basta para hacer matemáticas tal y como las conocemos. Así como requerimos de ciertos conceptos para organizar los datos que nos aporta nuestro sentido de la vista, de igual manera requerimos conceptos que nos permitan organizar y precisar los datos que nos provee nuestro sentido numérico. Estos son los conceptos matemáticos, y en el caso específico de la representación de colecciones finitas de objetos, los números naturales. A diferencia de la naturaleza aproximada de nuestros estímulos cuantitativos, los números naturales denotan cantidades exactas que permiten el desarrollo de nuestro sistema aritmético.

Como mencioné anteriormente, De Cruz otorga un papel fundamental, en el desarrollo de los conceptos matemáticos, a los recursos externos que utilizamos para representarlos. En el caso de los números naturales, estos recursos son: palabras numéricas, todo tipo de fichas (*tokens*), partes del cuerpo, notaciones numéricas y gestos (2008, p.

476). Estos recursos no son meras *representaciones* de los conceptos numéricos, sino que afectan la manera en la que se constituyen. Esto significa que su función no es sólo la de representar un concepto previo y terminado, sino que contribuyen a su constitución, aportando inclusive parte de su contenido:

> Natural number representation is only possible when we supplement the internal cognitive architecture involved in numerical processing with external resources. (…) External symbolic representations of natural numbers are not merely converted into an inner code; they remain an important and irreducible part of our numerical cognition (2008, pp. 486-487).

En otras palabras, estas representaciones simbólicas se encuentran sub-determinadas por los conceptos que buscan representar (2010, p. 14), esto es, si bien se exige de ellas que cumplan con representar los estímulos cuantitativos registrados en HIPS, ello no previene que cada una de ellas aporte algo más a los conceptos que contribuyen a constituir. Este contenido extra responde a las particularidades del medio en el que estas representaciones ocurren, resultando en extensiones particulares de los conceptos numéricos.

Visto de manera epistémica, este fenómeno no es controversial. Todos reconocemos que ciertas notaciones matemáticas nos permiten economizar el esfuerzo cognitivo necesario para realizar ciertas operaciones, al grado de que ellas parecen ser imprescindibles para su realización; un ejemplo de esto es la manera en la que la notación posicional permite multiplicar y dividir números grandes con gran facilidad. Sin embargo, la tesis de De Cruz es más fuerte, pues no está limitada al ámbito epistémico, afirmando en cambio que dichas notaciones tienen un efecto sobre la naturaleza del objeto matemático mismo. Anteriormente, en la sección 3.2, expuse el ejemplo citado por Muntersbjorn acerca de cómo la introducción de la notación exponencial parece haber tenido resultados que van más allá de la economía cognitiva, alterando fundamentalmente la concepción que se tenía de los exponentes, apartándolos de una interpretación geométrica, y otorgándoles una interpretación algebraica mucho más general.

Para De Cruz, entonces, los mecanismos que utilizamos al hacer matemáticas no son meras representaciones de nuestros contenidos mentales, sino que forman parte integral de nuestra mente extendida (2010). Es esta extensión la que ha permitido el enorme desarrollo de las matemáticas modernas, gracias a la descarga de gran parte de la tarea cognitiva sobre estos recursos externos. Estos recursos son utilizados de manera opaca, esto es, omitiendo la reconstrucción de los conceptos que los símbolos representan, y atendiendo de manera más o menos mecánica a las propiedades que le son otorgadas por el medio en el cual están constituidas, inclusive si éstas no formaban previamente parte del concepto matemático. Así, las notaciones y otras representaciones de objetos matemáticos no son una mera representación de objetos matemáticos, sino que participan activamente en su constitución.

Las tesis de De Cruz parecen encontrar validación en el estudio histórico del crecimiento del conocimiento matemático. Ya anteriormente expuse los ejemplos que Muntersbjorn da en favor del poder causal de la notación, la cual, no sólo propicia la emergencia de nuevos objetos matemáticos, sino que da forma permanente a su naturaleza. En lo que sigue intentaré complementar estas ideas de Muntersbjorn con un estudio un poco más sistemático de la historia de las matemáticas realizado por Danielle Macbeth.

Al igual que De Cruz y Muntersbjorn, Macbeth (2012, 2014) defiende la idea de que las notaciones matemáticas no son solamente abreviaturas mediante las cuales reportamos nuestros razonamientos matemáticos, sino que son un elemento imprescindible que posibilita que estos ocurran. La manera en la que Macbeth expresa esto es afirmando que la notación matemática no *reporta* el contenido matemático, sino que lo *encarna*:

> [A] good mathematical notation serves not merely to record something but to *embody* the reasoning, to put the reasoning itself before our eyes. What we have seen here is that this works because the notation functions not merely to depict, record, or picture some things or relations among things; it *formulates the contents* of significant mathematical concepts and functions, and does so in a way enabling reasoning on the basis of those contents. (2012, p. 84; énfasis agregado)

A diferencia de un reporte, que deja intacto al objeto acerca del cual se reporta, una encarnación le agrega algo, y esta adición tiene como resultado que el objeto adquiera propiedades que previamente no tenía. Esta dinámica, piensa Macbeth, es uno de los motores del avance matemático, y puede ser observada a lo largo de la historia.

Macbeth (2012) extiende esta tesis más allá del estudio de los números naturales, abordando tres episodios de la historia de las matemáticas: las demostraciones diagramáticas de la geometría Euclidiana, la introducción de la notación algebraica de Descartes, y la aparición de la conceptografía de Frege.[42] Estos tres sistemas de signos revolucionaron la práctica matemática, explica Macbeth, precisamente por haber logrado *desplegar* –y no sólo reportar acerca de– el contenido de los conceptos matemáticos. La clave de este logro radica en que estos tres sistemas no se limitan a pintar una imagen estática de nuestros conceptos matemáticos, sino que logran articular su contenido, un contenido al que previamente no teníamos acceso. Por ejemplo, en el caso de los diagramas Euclidianos, Macbeth explica:

> A drawn circle in Euclid is not just a picture or instance of a circle but instead an iconic display of the relation of parts that is constitutive of something being a circle. Because the contents of

[42] Macbeth hace una interpretación poco ortodoxa de Frege, afirmando que su conceptografía es una herramienta para razonar gráficamente sobre los conceptos de los que se ocupa la práctica matemática, y no una herramienta puramente formal.

> concepts are displayed in this way in a Euclidean diagram, the diagram can serve as a vehicle of reasoning that enables even the less gifted of us to reproduce significant results about the logical relations that obtain among the various concepts of that geometry. (2012, p. 72)

Es importante notar que este despliegue de los conceptos matemáticos se da gracias al medio en el que estos sistemas simbólicos ocurren. En el caso de los diagramas euclidianos, por ejemplo, es su naturaleza concretamente gráfica — las superficies concretas y los dibujos que ocurren en ellas, lo que permite realizar las inferencias necesarias para demostrar las proposiciones de la geometría euclidiana. Macbeth da como ejemplo la proposición I.1 de *Los Elementos*, en la cual Euclides da las instrucciones para construir un triángulo equilátero. Esta construcción comienza con un segmento cualquiera de recta, el cual es utilizado como radio de dos diferentes círculos, uno de ellos con centro en uno de los extremos del segmento, y el otro centrado en el otro extremo. Euclides nos dice que el punto en el que estos dos círculos se intersectan es el tercer vértice del triángulo equilátero que buscábamos construir, de lo cual nos convencemos ya que podemos observar que los mismos segmentos de recta que forman los tres lados del triángulo son todos ellos también radios de los dos círculos que tienen un mismo radio. El dibujo concreto sirve como un sustento material para sostener nuestras inferencias, dado que es el mismo segmento de recta el que puede ser visto, ahora como el lado de un triángulo, y después como el radio de un círculo.[43]

La representación diagramática de estos objetos permite, entonces, que el contenido de los conceptos sea desplegado de una manera en la que es posible razonar con ellos de

[43] Panza (2012) utiliza la misma proposición de Euclides para argumentar un punto similar, a saber, que los objetos de la geometría euclidiana heredan ciertas propiedades de los diagramas presentes en sus demostraciones, concebidos estos como objetos concretos.

una forma matemáticamente fructífera. Este contenido es nuevo, afirma Macbeth, y representa una genuina extensión de nuestro conocimiento:

> The demonstration is fruitful, a real extension of our knowledge, for just this reason: because we are able perceptually to take parts of one whole and combine them with parts of another whole to form a new whole, we are able to discover something that was simply not there, even implicitly, in the materials with which we began. (2012, p. 69)

Macbeth describe una historia similar acerca de la introducción de la notación algebraica de Descartes, la cual nos permitió concebir a las matemáticas como una ciencia, ya no de objetos, como lo había sido para los griegos antiguos, sino de relaciones aritméticas (2012, p. 74). El círculo, por ejemplo, deja de ser una figura geométrica y pasa a ser una ecuación: $x^2 + y^2 = r^2$. De nuevo, esta notación no es un mero reporte de nuestros razonamientos matemáticos, sino que es el conducto hacia una serie nueva de razonamientos que permitieron la expansión del contenido matemático. Así como los diagramas nos permitieron "sustituir" un lado de un triángulo por el radio de un círculo, estas ecuaciones nos permiten sustituir iguales por iguales, y así encontrar relaciones de igualdad entre expresiones aparentemente diferentes:

> We saw that Euclidean diagrammatic reasoning is fruitful because one can perceptually reconfigure parts of different wholes within a diagram into a new whole. (…) In algebraic reasoning one instead combines content by putting equals for equals. And much as the genius required for Euclidean mathematical practice lies in finding the diagram that will provide the vehicle of reasoning from one's starting point to the desired conclusion, so the genius that is required to discover, say, Euler's Theorem lies in discovering just what will serve as what we can think of as the *middle* that will show that two interestingly different and apparently unrelated expressions for a function are in fact expressions for one and the same function. (2012, p. 78, énfasis del autor)

Es importante recalcar que lo que hace posible esta nueva manera de hacer matemáticas es precisamente la notación algebraica introducida por Descartes. Es ésta la que permite el despliegue del contenido de los conceptos matemáticos de una manera tal que facilita el razonamiento algebraico. Esto, como bien explica De Cruz, se debe al tratamiento opaco que damos a los símbolos, el cual permite una manipulación "ciega" de ellos que minimiza la tarea cognitiva. Macbeth ejemplifica esto mostrando una derivación algebraica por medio de la cual demostramos que, si $x + 1/x = 1$, entonces $x^3 + 1/x^3 = -2$ [44]. Lo que vale la pena señalar de este ejemplo es que, si bien la manipulación algebraica nos ha convencido de que el resultado se obtiene, no nos ha dicho nada acerca de por qué es que éste se obtiene, esto es, no podríamos decir mucho acerca de la relación entre las expresiones "$x + 1/x$" y "$x^3 + 1/x^3$". Nuestra confianza en el resultado se debe exclusivamente a que obedecimos las reglas algebraicas que, sabemos, nos garantizan un razonamiento correcto. La tarea realizada por la notación es, entonces, extremadamente valiosa, y consiste en encarnar un contenido matemático que de otra manera se encontraría fuera de nuestro alcance.

Hasta aquí los argumentos en favor del papel constitutivo de la notación. Ahora abordaré las diferentes interpretaciones metafísicas que pueden hacerse de este fenómeno, pues, como mencioné anteriormente, mi argumento requiere de una interpretación particular de éste. La cuestión relevante concierne el grado de influencia metafísica que otorgamos a este fenómeno. Como mencioné anteriormente, el platonista le niega por completo esta influencia, confinándolo exclusivamente al ámbito epistémico. De Cruz, Muntersbjorn y Macbeth rechazan este confinamiento, pero esta no es toda la historia, pues dicha influencia puede ser aceptada en diferentes grados. Ninguna de las tres filósofas

44 La demostración completa es: $(x + 1/x)^3 = 1^3$. So $x^3 + 3x^2(1/x) + 3x(1/x2) + 1/x^3 = 1$. Esto es, $x^3 + 3x + 3/x + 1/x^3 = 1$, o $x^3 + 3(x + 1/x) + 1/x^3 = 1$. Pero sabemos que $x + 1/x = 1$, así es que sustituyendo iguales por iguales $x^3 + 3(1) + 1/x^3 = 1$, y obtenemos nuestra respuesta: $x^3 + 1/x^3 = -2$.

mencionadas ofrece una propuesta sistemática de la metafísica que acompaña a este fenómeno, de hecho, De Cruz ni siquiera aborda el tema. Pero Muntersbjorn y Macbeth expresan algunas opiniones al respecto, mismas que sugieren dos caminos posibles.

El primer camino, al que llamaré el camino “moderado” es tomado por Macbeth, quien, a pesar de admitir el papel constitutivo de la notación, piensa que el contenido que éste aporta no es del todo novedoso, y en cambio lo considera como la actualización de un potencial:

> As a seed has the potential to grow into a plant so the starting points of an ampliative proof have the potential to yield a conclusion that extends our knowledge. The conclusion of such a proof actualizes that potential as a plant that grows from a seed actualizes the potential of that seed. (Macbeth 2014, p. 384)

Así, a pesar de considerar que el contenido aportado por las notaciones representa una genuina ampliación del conocimiento matemático, la referencia a un potencial previo implícito, dicho conocimiento parece estar hasta cierto punto predeterminado en el mismo sentido en que una planta es más que su semilla, pero se encuentra pre-determinada por ella.

El segundo camino, al que llamaré “radical”, es tomado por Muntersbjorn, y consiste en afirmar que el contenido aportado por nuestras notaciones matemáticas es una innovación en todo el sentido de la palabra. Esto es, que no se encontraba implícito en los conceptos matemáticos, ni predeterminado en ningún sentido, sino que es el resultado de nuestras prácticas contingentes, mismas que nos conducen en caminos matemáticos genuinamente novedosos. Así como parece ser perfectamente factible concebir un mundo sin gatos y perros y sin el hongo de la cerveza, el contenido matemático se encuentra, también, sujeto a nuestras prácticas contingentes.

El contraste entre Macbeth y Muntersbjorn se hace explícito cuando ambas –siguiendo a Frege– recurren a una analogía recurren a una analogía entre dos relaciones: aquella entre las premisas y la conclusión de una prueba matemática, y la propia entre una semilla y la planta que crece de ella. Frege afirma que las conclusiones de las inferencias matemáticas están contenidas en sus premisas como las plantas están contenidas en sus semillas (Frege 1884, p. 101). Sin embargo, mientras que, como vimos en la cita anterior, Macbeth habla de semillas y plantas *simpliciter*, Muntersbjorn enfatiza el carácter doméstico de la cosecha matemática:

> Many things would not exist were it not for the deliberate habits of generations of mindful beings. Domestic felines and brewer's yeast are two of my favorites. (…) Cats and beer are the result of gradual processes of causal interactions between nature and nurture. As such, they transcend the creation-discovery distinction. Similarly, mathematical objects are neither created nor discovered. Instead, I propose that they emerge from the cultivation of mathematics. (2003, pp. 173-74)

Así, mientras que Muntersbjorn parece otorgar a la notación la capacidad de conducirnos a destinos realmente novedosos, que no se encontraban predeterminados en ningún sentido, Macbeth es un poco menos osada, al admitir la contingencia del camino, pero no del destino final.

Entonces, tenemos tres posibles interpretaciones, la platonista, el camino moderado y el camino radical. La interpretación platonista es la más común en filosofía de las matemáticas, y es la que mejor se acomoda con el supuesto carácter abstracto de los objetos matemáticos y la supuesta necesidad de la verdad matemática. Sin embargo, parece haber algo extraño en afirmar que las notaciones matemáticas, que ocurren en medios particulares y concretos, y que forman parte de prácticas matemáticas aparentemente contingentes, puedan jugar un papel tan importante en el camino a una verdad eterna y necesaria. Esta no es más que otra manera de expresar el reto epistemológico que Benacerraf pone ante el platonista, esto es, el de conectar la experiencia espacio-temporal en la que realizamos las pruebas matemáticas con la verdad que éstas nos dan acerca de objetos matemáticos abstractos. Al admitir el papel constitutivo de la notación, el camino moderado de Macbeth explica de mejor manera la relación entre dichas prácticas contingentes y la verdad matemática, pero se ve obligado a recurrir a un tipo de pre-determinación que, en mi opinión, resulta francamente oscuro. El camino radical, con el que yo me comprometo, resuelve estas dos cuestiones, pues no sólo admite el papel constitutivo de la notación, sino que además le otorga rienda suelta para conducirnos por caminos genuinamente novedosos. Sin embargo, como veremos un poco más adelante, suscita nuevos problemas, entre los cuales los más importantes son los de explicar la objetividad del conocimiento matemático y la necesidad de la verdad matemática.

Antes de tornar nuestra atención a estas dificultades, sin embargo, es preciso completar la analogía entre los objetos matemáticos y los artefactos. Como mencioné anteriormente, la notación deberá jugar el papel del material a partir del cual está constituido el objeto matemático, sin embargo, como vimos anteriormente, un artefacto es más que un objeto con ciertas capacidades, y las condiciones necesarias para su constitución incluyen la intencionalidad colectiva de una comunidad de usuarios. A explicar esta intencionalidad de los objetos matemáticos dedico la siguiente sección, en la que propongo que ellos deben ser concebidos como objetos institucionales.

4.2 El carácter institucional de los objetos matemáticos.

Si los argumentos presentados en la sección anterior son correctos, entonces los matemáticos encuentran, en cada uno de los diferentes sistemas de representación, un modo posible de hacer matemáticas, y en cada uno de ellos la posibilidad de postular o construir una gran cantidad de objetos. Sin embargo, no cualquier forma de representación se convierte en un sistema de notación matemática, y no cualquier postulación constituye a un objeto matemático. Esto revela que los objetos matemáticos requieren de un elemento adicional, aparte de un sustento notacional, para existir. Así, para completar la teoría artefactual de los objetos matemáticos, es necesario responder a la pregunta por la naturaleza exacta de este elemento extra, y, como veremos en seguida, esta respuesta nos ayudará a comprender mejor la distinción entre mi teoría artefactual, y las posturas platonistas y formalistas.

Las respuestas del platonista y del formalista son bien conocidas. Para el platonista, los objetos matemáticos existen de manera completamente independiente a nuestras prácticas, y lo que hace que una postulación matemática sea un objeto matemático es que ésta *refiere* a un objeto matemático que existe previamente en el reino platónico. La respuesta del formalista es distinta: una postulación caracteriza a un objeto matemático si ésta cumple con ciertos *requisitos formales* que lo validan como tal; consistencia o coherencia, por ejemplo. Ahora bien, a pesar de sus diferencias, estas respuestas concuerdan en un punto básico, y es que los objetos matemáticos son objetos con una naturaleza intrínseca e independiente de nuestras prácticas y creencias. Los objetos platónicos, con su naturaleza atemporal y eterna, anteceden a todas nuestras prácticas; y las propiedades formales de un objeto se obtienen independientemente de que el ser humano las reconozca, o siquiera las conciba como tales.

Es esta idea acerca de la independencia de los objetos matemáticos, compartida por platonistas y formalistas, lo que ha conducido al dilema de Benacerraf, y lo que busco cuestionar en esta sección. La alternativa es afirmar, siguiendo a los constructivistas sociales y a Cole, que los objetos matemáticos son objetos institucionales, con una naturaleza extrínseca, que depende, en cierta medida, de las actitudes proposicionales de los integrantes de la comunidad matemática que los estudia y utiliza. En la sección 3.4 hablé de la abstracción institucional que Cole hace de la práctica matemática, en la que los objetos matemáticos se forman de una manera análoga a la manera en la que los objetos institucionales son formados, esto es, como el resultado de una declaración colectiva exitosa implícita en el uso exitoso de los objetos matemáticos. Siguiendo esta idea, la respuesta artefactualista a esta pregunta es la siguiente: las postulaciones que se constituyen como objetos matemáticas son aquellas que son utilizadas exitosamente por la comunidad matemática con fines matemáticos. Y este éxito no refiere a una correspondencia con una verdad previa, ni al cumplimiento de propiedades formales, sino a los acuerdos implícitos en el éxito de la práctica matemática.

Ahora bien, esta tesis resulta, al menos a primera vista, altamente contra-intuitiva. Al pensar en los objetos institucionales tradicionales inmediatamente surgen imágenes de un marco legal que los gobierna y que nada tiene que ver con los objetos matemáticos. Los gobiernos, empresas y demás instituciones que solemos identificar como las instituciones tradicionales son todas constituidas de manera formal y explícita, con la gran mayoría de sus reglas asentadas por escrito y reguladas por un órgano bien definido. Estas características son lo que hemos llegado intuitivamente a asociar con lo institucional, y no son compartidas por la práctica matemática concebida como una institución. Sin embargo, como lo vimos en el capítulo 2 de este trabajo, es posible hablar de lo institucional de una manera más general, hablando no de las particularidades mencionadas, sino en términos epistémicos y metafísicos.

En términos metafísicos, y como vimos en el capítulo 2 de este trabajo, lo institucional se reconoce por ser el resultado de acuerdos, implícitos o explícitos, sustentados en prácticas colectivas. Así, los objetos institucionales son parte de la realidad social que depende, en cierta medida, del reconocimiento del ser humano. Esta condición no implica necesariamente la existencia de un marco institucional legal y explícito, lo cual nos permite a preciar que dicho marco es sólo un organismo que resulta útil en la regulación de ciertas instituciones, cuando su implementación es factible, pero no es una característica esencial de lo institucional. Así, mi tesis sobre el carácter institucional de los objetos matemáticos consiste en afirmar que su constitución, y por ende su identidad, dependen de manera fundamental de las actitudes proposicionales que la comunidad matemática tiene para con ellos.

Este criterio metafísico tiene implicaciones epistémicas inmediatas, esto es, dado que la naturaleza de los objetos matemáticos incluye un elemento institucional, ante la aparición de una duda acerca de un objeto particular, los matemáticos no miran, en última instancia, ni hacia el *topos uranus*, como afirmarían los platonistas, ni hacia el mundo físico, como lo harían los aristotélicos, ni hacia reglas formales, como harían los formalistas, sino hacia la serie de acuerdos realizados –implícita o explícitamente— por la comunidad matemática, y que son responsables por la existencia y naturaleza de los objetos matemáticos. Es importante recalcar el "en última instancia" del párrafo anterior, pues esta tesis institucional no busca negar que el mundo físico ha tenido mucho que ver con estos acuerdos, ni que lo formal juega un papel importante en la explicitación y sistematización de los mismos, ni que la búsqueda de generalidad ha conducido a los matemáticos a formular sus ideas en términos de conceptos que buscan presentar a sus objetos de la manera más independiente de sus orígenes posible. Lo que sí busca afirmar esta tesis es que, en última instancia, qué conceptos constituyen un objeto matemático, qué requisitos formales deben cumplir, y qué aspectos del mundo físico deben ser representados por ellos y cómo, es determinado de manera institucional, por medio de acuerdos realizados, en su mayoría de forma implícita, durante su uso en la práctica.

Una controversia actual que puede ser utilizada para ilustrar esta tesis es el caso de la hipótesis del continuo (HC). Una vez demostrado que ésta es formalmente independientemente de los axiomas de ZFC, y que podrían agregar tanto HC como su negación a dichos axiomas, los matemáticos se encontraron ante tres opciones. Desde la perspectiva platonista, la tarea consistiría en descubrir la verdadera naturaleza del continuo para encontrar el valor de verdad de HC; desde el punto de vista formalista, la cuestión estaría cerrada, esto es, la prueba de la independencia de HC muestra que existen dos objetos consistentes (y por ello existentes) distintos: ZFC+HC, y ZFC+~HC; el punto de vista institucional otorga a los matemáticos la libertad de decidir si la cuestión está cerrada o si la incompletud del continuo debe ser remediada, pero, en el caso de que lo segundo fuese el caso (como de hecho parece serlo dada la abundancia del trabajo matemático que actualmente se dedica a ello), este remedio no deberá ser descubierto en el reino platónico de las formas eternas, sino en los acuerdos que dieron origen al concepto del continuo (mismos que, parece lógico pensar, son responsables por la sensación que tenemos de que la independencia de HC revela una incompletud en él), o bien realizando nuevos acuerdos que diriman la cuestión, ya sea por considerarles fieles al espíritu original del concepto, o bien por ser considerados como una extensión fructífera del concepto. Esto es, retomando la terminología de Muntersbjorn, de acuerdo a su proveniencia y potencial, con la especificación, omitida por Muntersbjorn, de que dicho origen es, en última instancia, institucional.

Ahora bien, una vez aclarado el significado preciso de la tesis institucional de las matemáticas, y habiendo notado que éste puede ser reconciliado con nuestras intuiciones acerca de las instituciones tradicionales, es preciso reconocer que la institución matemática es una institución *sui generis* en muchos sentidos, con una estructura y un funcionamiento marcadamente distinto al de la mayoría de las instituciones sociales. Ya anteriormente mencioné su falta de un marco legal y explícito que gobierne su funcionamiento, el cual se ve reemplazado por una estructura informal, compuesta por investigadores, instituciones educativas, revistas académicas, congresos, organismos que asignan recursos económicos, etc., cuya autoridad es determinada informalmente por una serie de factores pragmáticos muy complejos.

Este carácter informal de la autoridad matemática tiene consecuencias importantes, y es, en última instancia, lo que distingue a la institución matemática de las instituciones tradicionales como las dependencias gubernamentales y las empresas. Una consecuencia directa –e importante– de esta informalidad es el carácter implícito de las declaraciones que resultan en la constitución de los objetos matemáticos. Esto es, a diferencia de, por ejemplo, las leyes, que resultan de decretos oficiales explícitos, los matemáticos no declaran la existencia de nuevos objetos para después comenzar a utilizarlos, sino, en sentido exactamente inverso, su utilización reiterada califica como una aceptación implícita de su existencia, esto es, como el resultado de una declaración exitosa. Además, dado que no se cuenta (a pesar de los mejores esfuerzos de Hilbert y otros) con un criterio preciso y explícito que avale la existencia de los nuevos objetos, el éxito de una declaración se da de manera informal, sin posibilidad de indicar el momento preciso en el que se obtuvo.

No debemos, sin embargo, confundir el carácter *sui géneris* de la institución matemática con la implicación de que ésta es una tesis *ad hoc*. Esto es, si bien ésta es marcadamente distinta a la mayoría de las instituciones tradicionales, existen otras instituciones que comparten esta naturaleza. Un claro ejemplo es la institución de las tradiciones musicales, en la cual existe una gran variedad de objetos –escalas, notas, instrumentos musicales, géneros musicales, etc.– cuya existencia y naturaleza son gobernados por una autoridad informal, de manera similar al del caso matemático. Otro ejemplo importante –por razones evidentes– para la tesis que defiendo en este trabajo, es la institución del diseño artefactual. Qué es una mesa y qué no lo es, cuándo es que una masa informe de barro se convierte en una vasija, son cuestiones que son determinadas de manera informal, como resultado del éxito obtenido en su uso, de acuerdo con ciertos propósitos reconocidos de manera implícita en la práctica del uso de los artefactos en cuestión.

Este tipo de instituciones tienen un carácter que podríamos llamar "natural", en el sentido de que no fueron creadas, al menos en un inicio, de manera consciente y controlada, con un objetivo claramente delimitado, como lo son algunas de las instituciones tradicionales. El hombre comenzó a hacer matemáticas y a utilizar artefactos antes de darse cuenta que lo hacía, y lo hizo gracias a una arquitectura cerebral sobre la cual no tuvo ningún control, y en respuesta a presiones evolutivas que se encontraron en el ambiente natural en el que se encontró. Las matemáticas no tienen una fecha de inicio, un acto inaugural o un documento constitutivo. A lo más a lo que podemos aspirar en este sentido son los sucesos cristalizadores referidos por Hacking, pero él mismo enfatiza que éstos deben ser interpretados solamente como mitos (2009, p. 59), y no como sucesos literalmente responsables de la fundación de las matemáticas.

Es este carácter en cierto sentido “natural”, compartido por el diseño artefactual y las matemáticas el que me ha motivado a concebir a los objetos matemáticos como artefactos, esto es, como objetos institucionales pero altamente ligados, tanto al mundo como a nuestras capacidades cognitivas, vínculo que nos permite hablar de ellos como objetos más reales (y menos convencionales) que las ficciones, pero no completamente independientes de nuestras prácticas. En la sección siguiente intentaré hacer esta analogía aún más explícita.

4.3 Artefactos matemáticos.

En el capítulo 2 caractericé a los artefactos como una conjunción de material e intenciones unidos por una función. Hablé también del carácter dual del concepto de función artefactual, que conjunta el sentido de función como *capacidad* y como *intención*. En lo que va de este capítulo he hablado del papel constitutivo de la notación matemática y del carácter institucional de los objetos matemáticos. La analogía que busco hacer es bastante directa: las notaciones matemáticas ayudan a desarrollar la *capacidad* de los objetos matemáticos para resolver problemas de interés matemático, y su carácter institucional refleja la *intención* de la comunidad matemática de utilizar dichas capacidades. Así, desde la perspectiva artefactual, la historia de las matemáticas es la historia de la constitución de los objetos matemáticos ligada a la emergencia de estas funciones.

El objetivo de esta sección es aterrizar esta analogía un poco más, y distinguir algunas de sus particularidades. Para ello, comenzaré por retomar la teoría de la función artefactual ICE asumida en el capítulo 2 y traducirla al caso matemático. Esta traducción nos permitirá observar que el desarrollo matemático involucra una dialéctica que puede ser analizada desde tres planos distintos: en términos artefactuales, ésta involucra una alternancia continua entre *intención* y *capacidad*; en el ámbito matemático, la alternancia ocurre entre *concepto* y *notación*; finalmente, en el plano metafísico, ésta es mejor entendida como la dualidad, mencionada en el capítulo 2, entre actos de *invención* y de *descubrimiento*. El análisis de esta dialéctica nos permitirá observar en qué sentido es que la teoría artefactual de los objetos matemáticos representa efectivamente la tercera vía buscada entre el platonismo y el formalismo.

Como vimos anteriormente, la teoría ICE es una teoría híbrida que combina elementos intencionales, causales y evolutivos en torno a un plan de uso, resultando en las siguientes condiciones para la atribución de una función a un artefacto:

> An agent *a* ascribes the capacity to φ as a function to an artefact *x*, relative to a use plan *p* for *x* and relative to an account *A*, iff:
> I. the agent *a* has the capacity belief that *x* has the capacity to φ, when manipulated in the execution of *p*, and the agent a has the contribution belief that if this execution of *p* leads successfully to its goals, this success is due, in part, to *x*'s capacity to φ;
> C. the agent *a* can justify these two beliefs on the basis of *A*; and
> E. the agents *d* who developed *p* have intentionally selected *x* for the capacity to φ and have intentionally communicated *p* to other agents *u*. (Houkes y Vermaas, 2006, p. 9)

Traducida al terreno matemático, el agente *a* es el investigador que postula al objeto matemático *x* porque piensa que puede cumplir con la función φ dentro de un plan de uso *p*, en el contexto de un modo de hacer matemáticas, o un sistema de notación simbólica *A*.

Esta traducción nos permite observar que la caracterización de los objetos matemáticos como artefactos se obtiene de manera literal y directa de la teoría ICE, sin necesidad de interpretaciones demasiado liberales o metafóricas, con cada condición de la teoría encontrando un correlato en la práctica matemática. El único ajuste importante que debemos hacer concierne el plan de uso mencionado en ICE, el cual debe ser interpretado de manera acorde al carácter informal de la institución matemática. Así, no debemos esperar encontrar, en la práctica matemática, un plan que anteceda a la postulación del objeto ni que detalle explícitamente los pasos a seguir, sino que es más bien inferido del éxito que el matemático obtiene en el uso de dicho objeto para la consecución de algún fin matemático. Esto es consistente con la definición que Houkes y Vermaas hacen de plan de uso, quienes lo conciben simplemente como una serie de acciones orientadas hacia un fin. Esta concepción laxa de plan de uso es satisfecha por el tipo de acciones que encontramos dentro de las prácticas orientadas hacia un fin, entre ellas la práctica matemática.

Este fin es mencionado de manera explícita en la condición *I*, la cual es responsable por el carácter intencional de la teoría ICE. La intencionalidad se encuentra manifiesta en la creencia, por parte del matemático, de que el objeto *x* contribuirá al éxito del plan *p*, y con ello a la consecución del fin buscado. Las intenciones y creencias de los matemáticos, sin embargo, no bastan para constituir a un nuevo objeto matemático, y es por ello que las condiciones *C* y *E* se encargan de limitar la atribución de función exclusivamente a las postulaciones que resultan exitosas. De hecho, las condiciones *C* y *E definen* lo que significa que una postulación sea exitosa, con la condición *C* reflejando los estándares de justificación establecidos por la comunidad matemática en el modo de hacer matemáticas *A*, y la condición *E* reflejando el carácter comunitario de esta justificación[45]. La condición *E* es importante para mi teoría, pues refleja el hecho de que la justificación no puede estar apoyada exclusivamente en elementos intrínsecos al sistema *A*, confiriendo así a esta justificación un carácter institucional.

Esta traducción nos permite aislar, al menos conceptualmente, a los elementos involucrados en el proceso del desarrollo matemático, y a interpretarlos desde tres perspectivas distintas. Desde la perspectiva artefactual, estos elementos se desprenden del concepto de función, y de la ambigüedad presente en él, entre función como *intención* y como *capacidad*. En el terreno matemático, estos elementos se manifiestan como *concepto* y *notación*. Los conceptos postulados por los matemáticos buscan expresar sus creencias acerca de posibles objetos, y las notaciones son el vehículo que, en palabras de Macbeth, despliega el contenido de estas creencias en una forma que, al hacer posibles las demostraciones, las hace justificables y comunicables. Por último, desde una perspectiva metafísica, podemos encontrar, en la intencionalidad presente en la teoría, a los actos de *invención* presentes en el desarrollo matemático, y en las capacidades encontradas a los elementos de *descubrimiento* presentes en él.

La idea de que la postulación de conceptos representa un acto de invención, mientras que la investigación de su naturaleza es un proceso de descubrimiento no es del

[45] Coincido con Cole en que esto no implica que una persona sola –un Robinson Crusoe– no pueda constituir objetos matemáticos. En ese caso tendríamos que hablar de una comunidad de una sola persona, y la comunicación muy probablemente se daría dentro de la mente de esa persona, o quizás en textos escritos.

todo nueva, Mark Balaguer sostiene una idea similar, al afirmar que el matemático descubre hechos objetivos acerca del reino matemático a través de la invención de historias matemáticas consistentes (1998, p. 155), y más recientemente Rav (2006) afirma lo siguiente:

> Let us note that concepts can be defined explicitly, as in the case of prime numbers, or implicitly, by a system of axioms, like the concept of a group. In either case it is an *inventive* act. Theorems, on the other hand, have more the character of a *discovery*, in the sense that one discovers a road linking different localities. Once certain concepts have been introduced and, so to speak, are already there, it is a matter of discovering their connection, and this is the function of proofs. (Rav 2006, p. 86; énfasis agregado)

Naturalmente, simpatizo con este tipo de análisis que considera al desarrollo matemático como el resultado de una combinación de invento y descubrimiento, sin embargo, creo que es importante observar que intentar aislar los momentos de invento de aquellos de descubrimiento es mucho más difícil de lo que el análisis previo lo hace parecer. Como cualquier otro análisis de la atribución de la función artefactual, mi análisis de la atribución de la función matemática en términos de la teoría ICE es altamente idealizado. Ésta teoría parecería indicar que las tres condiciones necesarias para la atribución de las funciones matemáticas se dan en orden y son perfectamente separables; que primero surge la creencia, posteriormente es justificada y por último comunicada. La realidad, por supuesto, es mucho más compleja. Cada una de las condiciones depende en cierta medida de las otras dos, de manera que el orden se pierde casi por completo y resulta difícil separar a cada una de las otras. La creencia en la capacidad del objeto x de cumplir su función depende en buena medida de que éste cumpla con al menos algunos de los estándares de justificación vigentes, y se ve reforzada tras la comunicación y aceptación comunitaria; los criterios de justificación no son independientes de las creencias de los matemáticos y se negocian comunitariamente; la comunicación comunitaria no es posterior a las creencias y su justificación, sino que se encuentra presente en cada paso, reforzando o cuestionando las creencias y negociando los estándares de justificación. Cabe señalar que éste no es un fenómeno privativo de los artefactos matemáticos y ocurre también en el caso de todos, o casi todos, los artefactos técnicos.

Señalo esto, no con la idea de refutar mi propia analogía, sino para enfatizar que el desarrollo matemático es un proceso verdaderamente híbrido, resultado de una dialéctica continua entre actos de invento y descubrimiento. Una imagen que nos puede ayudar a comprender esta idea es la de un engranaje de dos poleas dentadas, una de actos de invención y otra de actos de descubrimiento. De acuerdo con el análisis de Rav, el engranaje que hace posible el desarrollo matemático consistiría en una alternancia de estos dientes de invento y descubrimiento. El punto que busco argumentar es que los dientes de estas poleas son mucho más finos de lo que Rav los hace parecer –tan pequeños que más valdría pensar en dos poleas prácticamente lisas– y que más que pensar en dos poleas y una alternancia, debemos pensar en un solo sistema conjunto de dos poleas de invento-descubrimiento.

El problema con el análisis de Rav es que sigue siendo demasiado dicotómico, y por ello se encuentra sujeto a una crítica inspirada en la reconstrucción racional que Lakatos hace de la prueba del teorema de Euler, expuesta en el capítulo 1 de este trabajo. Lakatos nos muestra cómo es que la realización de una prueba, esto es, la justificación y comunicación de un resultado, puede resultar en la modificación de los objetos acerca de los cuales trata la prueba. Si esto es correcto, entonces debemos admitir que los descubrimientos que hacemos acerca de nuestros objetos matemáticos no son un suceso posterior y aparte de su invención, sino que son parte de ella. Pienso que es justamente a este proceso de invento-descubrimiento, guiado, sí en parte por nuestra intención de inventar, pero al mismo tiempo restringido por lo que descubrimos acerca de estos inventos a lo que Lakatos se refiere cuando habla de la lógica informal que guía el desarrollo matemático.

Los análisis que, como el de Rav, pecan de sostener una dicotomía demasiado nítida entre invento y descubrimiento son propensos a transmitir una imagen formalista de la verdad matemática. Un formalista puede encontrar en el invento de los conceptos mencionado por Rav la postulación de un sistema formal de axiomas, y en el descubrimiento de los teoremas la investigación de sus consecuencias formales. El proceso híbrido que yo propongo no puede ser interpretado de esta manera, pues, al plantear un desarrollo conjunto de teoremas y axiomas, permite que la verdad matemática fluya en ambas direcciones y bloquea la idea formalista de que los axiomas matemáticos no son más que postulaciones arbitrarias cuyo único requisito es el cumplimiento de alguna propiedad formal. Es este carácter bidireccional lo que permite diferenciar a la teoría artefactual del platonismo y del formalismo, y lo que la distingue como la posible tercera vía buscada entre ellos. En lo que resta de este capítulo intentaré mostrar que esta tercera vía es sostenible y que efectivamente nos permite conjuntar aquello que queremos salvar del platonismo con aquello que queremos salvar del formalismo.

CAPÍTULO 5: EVALUACIÓN FILOSÓFICA DE LA PROPUESTA ARTEFACTUAL

En las secciones anteriores expliqué la analogía que me condujo a concebir a los objetos matemáticos como artefactos epistémicos. Esta analogía me parece plausible por sí misma, pues creo que plantea una abstracción fiel a la historia de las prácticas matemáticas, pero también responde a motivaciones filosóficas de corte más tradicional. En el capítulo 1 de este trabajo expuse el famoso dilema de Benacerraf y el reto que éste plantea, respecto a encontrar una ontología para las matemáticas que nos permita conjuntar una semántica que haga justicia a la verdad matemática con una epistemología no misteriosa que nos permite explicar la adquisición del conocimiento matemático. Así, tras haber expuesto mi propuesta artefactual, ahora es momento de evaluar si ésta ha logrado resolver las dificultades expuestas por Benacerraf, esto es, si su ontología artefactual nos permite formular una semántica y una epistemología adecuadas para una filosofía de las matemáticas satisfactoria.

Un factor que complica esta tarea son las controversias asociadas con la teoría de artefactos misma. Estas son motivo de debate actual, y no pretendo haberlas resuelto. Así, esta evaluación será realizada desde la teoría artefactual que asumí en el capítulo 2, esto es, desde la teoría de la función ICE, la cual es una teoría primordialmente intencional, y entendiendo a la relación de constitución como una relación entre dos objetos. Esto, sin embargo, no significa que la teoría artefactual de los objetos matemáticos dependa de manera esencial de ellas, pues creo que podría también ser elaborada en concordancia con las diferentes concepciones filosóficas de los artefactos. En algunos casos, cuando lo crea pertinente, señalaré cómo podría realizarse esta adaptación.

Debo aclarar que esta evaluación será muy breve y que no pretende ser un análisis exhaustivo de las consecuencias filosóficas de la propuesta; dicho análisis rebasa los objetivos de esta investigación, y deberá ser dejado para investigaciones futuras. Lo que sí pretende hacer esta breve evaluación es esbozar las avenidas filosóficas que la propuesta artefactual pone a nuestra disposición, así como señalar las dificultades y ventajas que surgen de ellas.

5.1 Ontología de los artefactos matemáticos.

La tesis central de esta investigación es que los objetos matemáticos son artefactos, de lo cual se sigue que ellos tienen el mismo estatus ontológico que el resto de los artefactos. Como vimos en el capítulo 2, sin embargo, este estatus es motivo de controversia.

En primer lugar, encontramos la dificultad de formular una caracterización del concepto de artefacto que los distinga como un conjunto bien definido de objetos y aparte de los objetos que no son artefactos. Quienes piensan que esta caracterización es imposible y que, o bien todo es un artefacto o nada es un artefacto, encontrarán mi tesis trivial o falsa, respectivamente. Como mencioné en el capítulo 2, yo creo que esta caracterización es posible, aunque dependa de hechos que podrían ser denominados como psicológicos o pragmáticos. Esto es, que si bien no hay nada en el mundo que distinga a los artefactos de los no-artefactos, existen factores en las prácticas que les dan sustento que nos permiten distinguirlos como tales.

En segunda instancia, una vez asumido que los artefactos son un conjunto definido de objetos, surge la cuestión de si son o no objetos que debemos admitir dentro de nuestra ontología. Como vimos anteriormente, existe una posición filosófica que les niega dicho estatus, por considerarlos meras proyecciones mentales que hacemos sobre objetos reales. El Proyectivismo, entonces, nos conduce a interpretar mi tesis artefactual de los objetos matemáticos como un tipo de ficcionalismo –una elaboración sobre el ficcionalismo tradicional– con el agregado, tal vez interesante, pero metafísicamente inconsecuente, de especificar el tipo específico de ficciones que son los objetos matemáticos, a saber, artefactos. Quienes, por el contrario, pensamos que los artefactos son reales y deben ser admitidos dentro de nuestra ontología –posición que yo he asumido en esta investigación– interpretamos la tesis artefactual como un tipo de realismo dependiente de la práctica, al estilo de aquellos de Muntersbjorn, Hacking y Cole.

Así, en términos ontológicos, yo defiendo a mi teoría artefactual como un tipo de realismo matemático – un realismo dependiente de la práctica. Sin embargo, como vimos en el capítulo 3 de este trabajo, esto puede querer decir muchas cosas. Uno puede –como lo hace Cole– hacer referencia explícita al papel fundamental que juega el reconocimiento constante de la comunidad matemática para la existencia de los objetos matemáticos, y plantear con ello una dependencia *constitutiva* de los objetos hacia la comunidad que los sostiene. O bien, podemos seguir el camino de Muntersbjorn y Hacking y mantenernos hasta cierto punto agnósticos respecto al tipo de dependencia en cuestión, reconociendo el papel esencial que juegan las prácticas matemáticas en la formación de los objetos matemáticos, pero absteniéndonos de reconocer una dependencia presente y constante.

Mi elección de caracterizar a los objetos matemáticos como artefactos no determina, por sí misma, el tipo de dependencia que debo favorecer, dado que es posible sostener ambas opciones en la caracterización teórica de los artefactos. Mi asunción de la teoría ICE de la función artefactual, sin embargo, me conduce ineludiblemente, debido a su carácter primordialmente intencional –y a pesar de todos los matices que procuré señalar acerca de la dualidad de los actos de invención y los procesos de descubrimiento– al bando de Cole, y a defender un tipo de dependencia constitutiva entre los objetos matemáticos y la comunidad que los sostiene. Esto significa que los objetos matemáticos dependen del reconocimiento constante (aunque generalmente implícito en su uso) de la comunidad matemática, y que éste es un componente integral en ellos.

Es muy importante reconocer este elemento institucional presente en los objetos matemáticos al realizar su análisis ontológico. Como lo mencioné en el capítulo 1 de este trabajo, tradicionalmente, la ontología ha obedecido a la consigna de reconocer como reales sólo aquellas entidades cuya existencia es independiente del ser humano y sus prácticas. Así, para entender mi propuesta artefactual como el realismo que, considero, debe ser, es necesario ajustar el enfoque ontológico y aceptar como real a cualquier objeto cuya existencia sea necesaria para comprender la realidad que nos rodea. En el caso de las matemáticas, propongo, esta realidad resulta comprensible de mejor manera, tanto en su dimensión semántica como en su dimensión epistemológica, concibiendo a sus objetos como los artefactos matemáticos que he caracterizado en las secciones anteriores.

5.2 Semántica de los artefactos matemáticos

En el capítulo 1 de este trabajo expuse el dilema de Benacerraf, el cual presenta las motivaciones para exigir una semántica referencial tarskiana para el discurso matemático. Esta exigencia proviene del reconocimiento de que el discurso matemático es un discurso con pretensiones de verdad, misma que suele ser entendida por medio de la referencia a objetos matemáticos. Como vimos anteriormente, las posiciones formalistas son incapaces de cumplir este requerimiento, puesto que consideran a las proposiciones matemáticas, ya sea como postulaciones arbitrarias, en el caso de los axiomas, o bien como consecuencias formales de dichas postulaciones, en el caso de los teoremas. El ficcionalismo, por su parte, busca remediar esta incapacidad negando la existencia de la verdad matemática, y apelando a una especie de prefijo, tácito pero presente en todas las proposiciones matemáticas, que indica que ellas refieren, no a los objetos matemáticos, los cuales no existen, sino a la historia matemática, compuesta por aquellos conjuntos de axiomas que la comunidad matemática ha encontrado interesantes. La objeción al ficcionalismo consiste en señalar que el discurso matemático no parece incluir este supuesto prefijo, y que éste, por el contrario, parece hacer referencia real y literal a los objetos matemáticos.

El platonismo, por su parte, es también sujeto a una crítica de corte semántico, aunque ésta ha sido mucho menos difundida. Expuse esta crítica en el capítulo 3 de este trabajo, en palabras de Muntersbjorn, quien señala las deficiencias de la historiografía presentista con la que el platonismo parece estar casado. El problema surge puesto que la historia de las matemáticas revela que la ontología matemática ha ido cambiando con el desarrollo de nuevos sistemas notacionales, lo cual, inevitablemente, tiene consecuencias sobre la verdad matemática. Conforme el tipo de objetos matemáticos ha ido cambiando –de diagramático, a algebraico, a formal– algunas verdades matemáticas también lo han hecho, o al menos han tenido que ser re-interpretadas desde la perspectiva ontológica vigente. Así, el platonista, con su concepción eterna e inmutable de los objetos matemáticos, se encuentra ante la incómoda tarea de tener que explicar cómo es que, o bien los matemáticos antiguos estaban equivocados acerca de verdades que consideraban las más seguras que creían conocer, o bien fueron extremadamente afortunados, dado que las verdades que conocían eran acerca de objetos que en realidad eran de un tipo distinto al que ellos pensaban.

El objetivo de esta sección es argumentar que la teoría artefactual nos ofrece avenidas filosóficas para resolver ambos problemas, esto es, cuenta con las herramientas necesarias para formular una semántica referencial que, además, es capaz de acomodar el desarrollo matemático. Mi argumento se apoyará en dos características de la semántica de artefactos que expuse en el capítulo 2 de este trabajo. La primera es que –a pesar de las reservas acerca de su estatus ontológico– el discurso acerca de artefactos es comúnmente aceptado como un discurso referencial, con condiciones de verdad objetivas y libres de cualquier prefijo contextual similar a aquel que opera en la ficción; esto nos permitirá evitar los problemas asociados con el formalismo y el ficcionalismo. En segundo término, el carácter flexible de los conceptos artefactuales nos permitirá hablar de diferentes versiones del mismo artefacto, y con ello acomodar la naturaleza cambiante de la verdad matemática y evitar la historiografía presentista que aqueja al platonismo.

Para que mi argumento tenga fuerza, sin embargo, no bastará con mencionar las virtudes de la semántica artefactual en general, sino que deberé además mostrar que las razones que motivan estas características en el discurso artefactual se encuentran también presentes en el caso matemático, y con ello que la tesis artefactual no es una tesis *ad hoc* para cosechar las virtudes semánticas del discurso artefactual.

En la sección 2.5 de este trabajo mencioné que el discurso acerca de artefactos es gobernado por una semántica referencial tarskiana. Esto se debe a que, a pesar de ser objetos dependientes de nuestras prácticas, y por ello, hasta cierto punto bajo nuestro control colectivo, este control no es absoluto, inmediato o individual. Los artefactos tienen una relación muy rica con el mundo, y acarrean una gran cantidad de información acerca de él; tanto de las características físicas del mundo, como de nuestra arquitectura cognitiva y corporal, como de nuestros intereses y prácticas. Todo esto impone restricciones sobre su naturaleza, mismas que le otorgan cierto grado de independencia, y por ello cierto poder restrictivo sobre lo que podemos decir sobre ellos con verdad.

La distinción dependiente-independiente no es, ni cerca, una dicotomía estricta. La gran mayoría de los objetos dependientes del ser humano poseen cierto grado de independencia. Las únicas excepciones a esto parecen ser los objetos de ficción. Este término está diseñado expresamente para referir a aquellos objetos que se encuentran bajo el control absoluto de su autor, sin mayores restricciones externas a él. Si Arthur Conan Doyle hubiese decidido que Sherlock Holmes tuviese un lunar en la mejilla, esto se hubiese hecho realidad inmediatamente. Esto no ocurre con los objetos institucionales en general, puesto que ellos dependen de acuerdos colectivos que requieren una aceptación generalizada, y menos aun con los artefactos, los cuales poseen una materialidad propia y deben cumplir una función reconocida por una comunidad de usuarios con una larga historia de respetar principios de eficacia y economía. Esto es, si bien, en principio, los seres humanos podríamos decidir colectivamente que a partir de ahora todos los martillos deben estar hechos de Unicel –esto es, que para que algo sea un martillo debe estar hecho de Unicel– esto, en primer lugar, no podría ser decidido por una sola persona, y en segunda instancia, nuestro conocimiento de la práctica que sostiene a los martillos como artefactos nos dice que ello resultaría en que éstos perdieran su capacidad de funcionar y que por tanto terminarían por desaparecer.

Otro factor que implica que la semántica de artefactos sea referencial es que la verdad acerca de ellos no puede ser reducida a factores que nos permitan hablar de ellos sin hacer referencia a ellos. Este es el caso con los objetos formales, cuya naturaleza se encuentra definida completamente por sus relaciones. Esto implica que la verdad acerca de ellos puede ser reducida a otro tipo de conceptos como consistencia o simetría, los cuales pueden ser expresados sin referirnos directamente al objeto. Los artefactos poseen cierto grado de estructura semántica, dado que se encuentran hasta cierto punto determinados por su función, sin embargo ésta no agota su naturaleza, por lo que la reducción no puede ser efectuada. Una clara muestra de ello es que no todo lo que tiene la capacidad de martillar es considerado un martillo.

Todo lo anterior aplica también a los objetos matemáticos. Ellos claramente no son ficciones, al menos en el sentido usual del término, ya que, inclusive los matemáticos más grandes de la historia nunca fueron considerados como autores de los objetos que desarrollaron, en el sentido de que los objetos matemáticos no se encuentran bajo su control absoluto. Esto se debe a que, como en el caso de los artefactos, estos poseen una materialidad específica a ellos –plasmada en el sistema notacional en el que se encuentran construidos– y deben cumplir con una función reconocida por toda la comunidad matemática. Esto implica que la verdad matemática se encuentre más allá de las intenciones de los matemáticos que la desarrollan, y nos obliga a reconocer cierto grado de autonomía en los objetos matemáticos.

Además, si mi teoría artefactual es correcta, los objetos matemáticos no pueden ser reducidos a propiedades formales o de ningún otro tipo, al menos si no queremos perder la capacidad de explicar el papel que la verdad juega en la práctica matemática. Los sistemas simbólicos de notación son el instrumento que nos permite construir modos de hacer matemáticas, pero no son suficientes para constituir a los objetos matemáticos. Para ello se requiere el reconocimiento implícito de la comunidad matemática que acompaña a su uso exitoso, y que responde a factores que se encuentran directamente relacionados con la naturaleza física del mundo, nuestra arquitectura cognitiva, y nuestros intereses y prácticas. Una clara muestra de esta no-reducibilidad es que no todos los sistemas consistentes de axiomas constituyen un objeto matemático, o, para tomar un ejemplo histórico más específico, que la prueba de que la hipótesis del continuo es independiente de ZFC no resultó inmediatamente en la constitución de dos nuevos objetos matemáticos: ZFC+HC y ZFC+¬HC.

En suma, el punto central que quisiera dejar claro es que, desde la perspectiva de la teoría artefactual, y a pesar de que los artefactos matemáticos surgen gracias a la conjunción de notaciones e intenciones, la verdad matemática emerge solamente una vez que los objetos matemáticos son constituidos, y no puede ser reducida ni a las propiedades formales o de otro tipo de los sistemas notacionales, ni a las intenciones individuales o colectivas de los matemáticos. Esto significa que, si queremos hacer sentido de la práctica matemática como una práctica concernida de una manera significativa con la verdad, debemos resistir la tentación de reducir a los objetos matemáticos a sus factores constitutivos, y debemos reconocer que el discurso matemático refiere a artefactos que resultan de una compleja dialéctica que, a pesar de ser dependiente de nuestras prácticas, se encuentra restringida por diversos factores que se encuentran fuera de nuestro control.

Pasando ahora al tema del tratamiento de la verdad ante el desarrollo matemático, mencioné anteriormente que la semántica artefactual nos ofrece, como recurso para acomodar este cambio, la flexibilidad de los conceptos artefactuales. Me refiero a la capacidad de éstos de admitir cambios de naturaleza sin cambio de referencia y sin tener que imputar errores a los usuarios previos. Por ejemplo, como he mencionado anteriormente, el concepto de fotografía ha cambiado con el tiempo. Originalmente, éste implicaba la impresión que la luz hacía sobre películas de bromuro de plata, pero con el desarrollo de la fotografía digital sufrió una generalización, y ahora refiere a la captación de imágenes por diversos medios. Nadie diría, sin embargo, que los teóricos de la fotografía de hace 30 años estaban equivocados acerca del verdadero concepto de fotografía. El concepto cambió puesto que los recursos materiales para tomar fotografías cambiaron, y la institución fotográfica, a su vez, reconoció estos cambios. El concepto de fotografía es un concepto artefactual que admite diferentes versiones a través de su historia sin por ello caer en contradicciones. Esto no se cumple en el caso de los objetos considerados naturales. Hablando del sol, por ejemplo, Anaxágoras teorizó que era una bola flamante de metal; ahora que sabemos que estaba equivocado –que su teoría era falsa– nadie argumentaría que era verdadera acerca de una versión previa del sol.

La flexibilidad de los conceptos artefactuales se debe a que éstos se encuentran ligados a funciones que cambian con nuestras necesidades y con los medios disponibles para satisfacerlas, y no a un ímpetu por descubrir la naturaleza eterna de las cosas. Así, dado que la fotografía cumplió su función de manera correcta mientras el bromuro de plata formó parte integral de ella, no existe razón alguna para pensar que la fotografía digital llegó para *refutar* a la fotografía analógica; no hay refutación, sólo avance, o cambio.

Este mismo fenómeno es observado en la historia de las matemáticas. Anteriormente mencioné el caso de las demostraciones de Euclides, las cuales son inválidas bajo los estándares lógicos actuales, mismos que se encuentran ligados al modo formal de hacer matemáticas que impera el día de hoy. Ante este fenómeno, parece mucho más plausible decir que las demostraciones de Euclides son válidas, pero que parten de premisas implícitas en la naturaleza de versiones anteriores de los objetos matemáticos –versiones ligadas al modo diagramático de hacer matemáticas– a decir que eran inválidas por hacer referencia a una concepción falsa de dichos objetos.

Este es precisamente el punto que defiende Jody Azzouni en su artículo "That We See That Some Diagrammatic Proofs Are Perfectly Rigorous" (2013), en el cual argumenta que las pruebas diagramáticas de Euclides son perfectamente rigurosas, pero acerca de objetos distintos a los actuales. La confusión, plantea Azzouni, proviene de la costumbre que tenemos de asumir que la persistencia del término referencial implica la inmutabilidad del objeto:

> This evolution of concepts (really, the replacement of concepts with other quite different concepts) is disguised by our general language-practice of assuming that we continue to talk about the same kind of thing if we continue to use the same vocabulary and we keep all the old examples but, at most, supplement them with additional new ones. (p. 4)

En la práctica, sin embargo, la evolución conceptual es reconocida y aceptada, y las pruebas antiguas son tratadas como pruebas correctas, pero acerca de conceptos distintos a los actuales (casi siempre menos generales):

> Mathematicians routinely speak in the second way, although at the same time (to the extent they are aware of the relevant history of their subject), they acknowledge that mathematical kinds are shifting in a way that doesn't so much fault earlier proofs as it requires modification of those proofs to handle the new cases. (p. 5)

Un estudio más completo del tipo de conceptos que operan en la práctica matemática es realizado en Schlimm (2012), quien introduce una distinción que me parece muy iluminadora, entre la noción Fregeana y la noción Lakatosiana de 'concepto'. Como es bien sabido, Frege enfatizó el carácter fijo y completamente definido de los conceptos:

> A definition of a concept (of a possible predicate) must be complete; it must unambiguously determine, as regards any object, whether or not it falls under the concept (whether or not the predicate is truly ascribable to it). Thus there must not be any object as regards which the definition leaves in doubt whether it falls under the concept; though for us human beings, with our defective knowledge, the question may not always be decidable. We may express this metaphorically as follows: the concept must have a sharp boundary. (Frege 1903, § 56, citado de Schlimm 2012, p. 5)

Y utilizó esta noción fija de concepto como fundamento para la formulación de su filosofía logicista de las matemáticas, en la que la verdad matemática fluye deductivamente a partir de estos conceptos perfectamente definidos. En diametral oposición a esto, Lakatos habla de conceptos formados *durante* las pruebas, cuya naturaleza es transformada por cada contraejemplo; esto es, claramente, lo que le sucede al concepto de poliedro durante la reconstrucción que hace Lakatos de la prueba del teorema de Euler. Lakatos concibe a los conceptos matemáticos como objetos dinámicos, cuyo refinamiento es indispensable para el avance matemático.

Estas dos formas de concebir a los conceptos resultan en dos maneras de interpretar el discurso matemático, esto es, en donde Lakatos ve un refinamiento de un único concepto, el de poliedro, por ejemplo, Frege vería, ya sea varios conceptos diferentes, o bien una historia acerca de nuestra ignorancia y aprendizaje acerca de ellos. De manera correspondiente, donde Lakatos ve proposiciones verdaderas acerca de diferentes versiones del concepto de poliedro, Frege ve, ya sea proposiciones falsas acerca del único concepto verdadero de poliedro, o bien una serie de proposiciones verdaderas acerca de conceptos que no son el de poliedro, seguida de una proposición verdadera acerca del concepto correcto.

La teoría artefactual de los objetos matemáticos se queda, por supuesto, con la concepción Lakatosiana de los conceptos, la cual nos permite reconocer como verdaderas a proposiciones que, de ser interpretadas bajo la concepción Fregeana tendrían que ser identificadas como inconsistentes. Sin embargo, es preciso notar que esto no nos compromete con la ausencia total de conceptos matemáticos que poseen la rigidez buscada por Frege; la tolerancia al cambio no implica una obligación a él.

El análisis de Schlimm confirma la presencia de ambos tipos de conceptos en la práctica matemática, cada uno de ellos reflejando ciertos aspectos de ella. Por ejemplo, hablando del concepto de número, Schlimm relata cómo es que surge a partir de intuiciones acerca de unidades y multitudes, y cómo estas intuiciones fueron siendo debilitadas por los desarrollos matemáticos subsecuentes:

> After the incorporation of zero and one into the number system, the concept of number was gradually, and not without objections, extended further to cover also the negative numbers, fractions, real numbers, and complex numbers. Each of these steps required a reconceptualization that involved giving up some of the properties that had previously been considered essential for numbers. The status of Cayley's octonions and Hamilton's quaternions is still ambiguous. (p. 10)

Esto es claramente consistente con la noción dinámica de los conceptos defendida por Lakatos, sin embargo, también existen casos que revelan la importancia de la concepción fregeana de los conceptos, la cual juega un papel importante en las inferencias lógicas realizadas a partir de estos conceptos:

> On the one hand, keeping with classical conceptions of logical inference requires concepts to be definite and fixed. Moreover, mathematicians themselves do sometimes define their concepts (often understood as higher-order relational concepts, e. g., that of a Euclidean space) by systems of axioms and thereby provide clear-cut conditions for whether something falls under a concept or not. On the other hand, the history of mathematics is full of episodes that appear to be characterized best by an account according to which definitions and extensions of concepts change over time. (p. 14)

Ahora bien, es importante señalar que la conclusión de este análisis *no* es que algunos objetos matemáticos –aquellos que son constituidos por conceptos Lakatosianos– son artefactos y que otros –aquellos que son constituidos por conceptos fregeanos– no lo son. Las concepciones platonistas y formalistas de las matemáticas están comprometidas con una concepción totalmente fregeana de los conceptos matemáticos, pero mi concepción artefactual puede sobrevivir perfectamente con la concepción mixta exhibida por Schlimm. La concepción artefactual no está peleada con los conceptos fregeanos, ni con los conceptos formales, y por el contrario reconoce el valor que la práctica matemática actual reconoce en estas dos características. Lo único que la concepción artefactual requiere es que este valor se obtenga del éxito obtenido en el uso de dichos conceptos, y esto basta para afirmar que *todos* los objetos matemáticos son artefactos.

Es así que la semántica artefactual logra conjuntar los aciertos del platonismo –la semántica referencial– con los del formalismo –la capacidad de acomodar el cambio matemático. Esta conjunción no es casual, sino que se debe a la naturaleza híbrida del proceso de desarrollo matemático, el cual conjunta actos de descubrimiento e invención. Los primeros motivan la referencialidad del discurso sobre artefactos, y los segundos nos permiten acomodar el cambio sin incurrir en contradicciones o imputar errores poco plausibles. Además, el análisis previo muestra que la tesis artefactual de los objetos matemáticos no es una tesis *ad hoc*, pues las razones que motivan a la semántica artefactual se encuentran presentes en la práctica matemática.

5.3 Epistemología de los artefactos matemáticos.

En esta sección intentaré mostrar que la teoría artefactual de los objetos matemáticos no sufre de las dificultades epistemológicas que aquejan al platonismo, y que, por el contrario, ofrece herramientas para formular una epistemología que coloca a los objetos matemáticos claramente al alcance de nuestras capacidades cognitivas.

En el capítulo 1 mencioné estas dificultades, expresadas en uno de los cuernos del dilema de Benacerraf, como la imposibilidad de establecer un mecanismo causal que nos vincule con objetos platónicos que se encuentran completamente aislados de nuestra experiencia espacio-temporal. Vimos también cómo es que, a pesar de rechazar la exigencia de especificar un mecanismo directo que justifique el conocimiento matemático, los platonismos naturalistas, como el de Quine y Maddy, sufren también ante críticas que explotan la imposibilidad de conectar el carácter platónico de la verdad matemática con nuestras prácticas espacio-temporales.

La tarea principal de esta sección será, entonces, mostrar que los objetos matemáticos, en la manera en la que los he caracterizado, se encuentran dentro de nuestra esfera epistémica, y que nuestro conocimiento de ellos no resulta misterioso. Adicionalmente, analizaré dos aspectos importantes de este acceso epistémico. En primer lugar, argumentaré que es privilegiado en un sentido que es análogo al privilegio que tenemos hacia ciertos objetos institucionales; en segunda instancia, argumentaré que este privilegio no implica la infalibilidad del conocimiento matemático.

A pesar de deber su existencia y ciertos aspectos de su naturaleza a factores tangibles, como las notaciones matemáticas y la comunidad de matemáticos, los artefactos matemáticos comparten con los objetos platónicos la característica de ser, en última instancia, objetos inmateriales, en el sentido de no poseer una localización espacial. Esto podría hacernos creer que la propuesta artefactual padece de los mismos problemas que las propuestas platonistas. Éste, sin embargo, no es el caso, pues, como veremos en seguida, su carácter dependiente de nuestras prácticas nos provee con el vínculo necesario para poder conocerlos.

Para apreciar esto, vale la pena retomar la teoría ICE de la atribución de la función artefactual expuesta anteriormente, y notar la similaridad de sus condicionas con aquellas requeridas por la teoría tradicional del conocimiento. Según ésta última, la atribución de conocimiento requiere de una creencia justificada y verdadera[46]. De manera parcialmente análoga, la teoría ICE, traducida al caso matemático, exige, en su primera condición, una *creencia*, en la capacidad del objeto *x* de cumplir la función buscada; que esta creencia se encuentre *justificada* dentro del modo *A* de hacer matemáticas; y, por último, que esta creencia justificada sea *comunicada* a otros miembros de la comunidad matemática.

Podemos observar la coincidencia exacta en las dos primeras condiciones, y la discrepancia en la tercera, en la que la *verdad* es sustituida por la *comunicación*. Esta sustitución no nos debe extrañar, pues obedece a que, dado que los artefactos son parte de

[46] Los contra-ejemplos de Gettier muestran que se necesita algo más para la atribución de conocimiento, pero no abordaré esta problemática por considerar que no es relevante para los objetivos de esta investigación.

la realidad social, su naturaleza obedece en buena medida al contenido de los acuerdos realizados (de manera implícita a través del uso exitoso) y comunicados por los integrantes de las comunidades que los sostienen, y no a una verdad previa e independiente de nuestras prácticas. Esto significa que la verdad matemática no se encuentra en un inaccesible reino platónico, sino en este mundo espacio-temporal, y más específicamente en las prácticas matemáticas y bajo el control –hasta cierto punto– de la comunidad misma que busca conocerla.

Para entender de forma más clara lo que esto significa, y atendiendo a la imagen de la práctica matemática que he buscado transmitir a lo largo de este capítulo, en la que los matemáticos buscan plasmar sus creencias en conceptos que pueden expresar por medio de sistemas notacionales para después buscar demostrar y comunicar su verdad, podemos destacar dos aspectos principales de la tarea epistémica: en primer lugar, determinar qué sistemas notacionales son capaces de expresar de manera fiel y completa el contenido de estos conceptos, y segundo, cuáles de los conceptos expresados en dichos sistemas son efectivamente conceptos matemáticos, esto es, cuáles describen con verdad a un objeto matemático.

Desde la perspectiva platonista, ambas tereas han probado ser problemáticas. Ya vimos anteriormente, a través de la crítica de Muntersbjorn, cómo la concepción de los objetos matemáticos como eternos e inmutables hace que los cambios ontológicos que han ocurrido a través de la historia de las matemáticas representen un problema para el platonista. Esto es, dado que nuestro acceso epistémico a los objetos platónicos es incierto, parece imposible justificar nuestras creencias acerca del *tipo* de objetos que son los objetos matemáticos. Por ejemplo, parecería necesario justificar la idea de que, a diferencia de las concepciones euclidianas de los objetos en términos de magnitudes y multitudes, las cuales resultaron ser, de acuerdo con la visión platonista, falsas, nuestras concepciones actuales en términos de sistemas formales son verdaderas y no serán refutadas por descubrimientos futuros. Además, inclusive obviando este problema, una vez definido el tipo de objetos de los que estamos hablando, queda la tarea de determinar cuáles de los posibles objetos expresables en cada modo de hacer matemáticas describen con verdad a un objeto matemático existente. Por ejemplo, tanto ZFC+HC, como ZFC+¬HC son consistentes y por tanto candidatos a describir al continuo con verdad dentro del modo formal de hacer matemáticas, pero sólo uno de ellos puede corresponder con el objeto platónico verdadero. El problema, de nuevo, es la falta de acceso epistémico que hace que esta correspondencia parezca imposible de justificar.[47]

La perspectiva artefactualista ofrece herramientas para resolver ambos problemas. En primer lugar, dado que los artefactos no son eternos o inmutables, podemos argumentar que los objetos matemáticos han encontrado manifestaciones en muchos modos de hacer matemáticas. Ninguno de estos modos es *el* modo que nos permite articular *la* verdad matemática, pero todos ellos han sido modos que en algún momento de la historia nos han permitido expresar verdades matemáticas. Los modos de representar, o construir, a los objetos matemáticos han ido cambiando, pero siempre y cuando estos modos hayan tenido éxito, en el sentido de facilitar la emergencia de la función matemática, y este éxito haya sido reconocido en su momento por la comunidad matemática, podemos afirmar, retomando la terminología de Hacking, que se constituyó una nueva manera de decir la

[47] El "Platonismo Pleno" de Balaguer tiene una respuesta a esta cuestión, al afirmar que *todos* los objetos consistentes describen con verdad a un objeto existente. Sin embargo, este tipo de platonismo sufre de problemas semánticos que han propiciado que sea tratado más bien como un tipo de anti-realismo.

verdad acerca de los objetos matemáticos, y que esta manera es conocida por la comunidad matemática. El punto clave es que los objetos matemáticos son objetos de la comunidad matemática que los utiliza, y el éxito obtenido en su uso no podrá ser refutado por ninguna comunidad futura. Así como el teléfono no refutó al telégrafo, el modo formal de hacer matemáticas no refutó al modo diagramático. Se podría argumentar que tanto el teléfono como el modo formal representan un avance sobre el telégrafo y el modo diagramático, pero difícilmente alguien imputaría algún error a los usuarios del telégrafo y los diagramas.

En segundo lugar, la cuestión de qué postulaciones expresadas en un modo específico de hacer matemáticas son efectivamente verdaderas y cuáles no, encuentra una respuesta similar: aquellas que son reconocidas por la comunidad matemática como tales gracias a su uso exitoso. Como he enfatizado anteriormente, este reconocimeinto no es arbitrario o convencional; existen consideraciones de proveniencia y potencial: qué postulación es más fiel al concepto que motiva la postulación, y cuál propiciará un desarrollo más fructífero de la teoría matemática, sin embargo, debe quedar claro que esta proveniencia no refiere a un concepto platónico previo e independiente de la comunidad matemática, sino a factores concretos que pueden ser evaluados por ella. De nuevo, es el éxito lo que justifica a los objetos matemáticos, y este éxito es observable para una comunidad matemática que está consciente de sus expectativas y es capaz de evaluar su cumplimiento.

Así, retomando el ejemplo del continuo, la disyuntiva entre ZFC+HC versus ZFC+¬HC es un problema que los matemáticos están discutiendo y cuyo desenlace no conocemos, pero cuya resolución no contendrá ningún elemento misterioso. Ya sea que determinen que la proveniencia y potencial de uno de ellos es preferible a la del otro, o bien que opten por una bifurcación del concepto, acordando que ambos describen verdaderamente a dos objetos distintos y matemáticamente interesantes, lo importante es notar que, cualquiera que sea el resultado de la controversia, su desenlace depende de factores que se encuentran al alcance de la comunidad matemática, y no en un misterioso mundo platónico.

Pasando ahora al tema del posible privilegio epistémico con respecto a los objetos matemáticos, en el capítulo 2 argumenté que, en lo que respecta a los artefactos en general, éste existe, en un sentido limitado. Dado que la existencia de los artefactos requiere de las actitudes proposicionales de la comunidad que los sostiene, la existencia de cualquier artefacto es conocida, necesariamente, por dicha comunidad. Respecto al conocimiento de la naturaleza de cada artefacto, las cosas son más complejas. Las actitudes proposicionales no sólo reconocen la existencia de "algo", sino de algo que cumple con ciertas características. Aquellas características que son esenciales para el reconocimiento de un objeto como un miembro de cierta clase artefactual –generalmente aquellas directamente relacionadas con la función buscada de un artefacto– se encuentran implícitas en la existencia de dicha clase, y pueden ser conocidas por simple análisis del contenido de las actitudes proposicionales que condujeron a su existencia.

Por ejemplo, la existencia de los lápices implica nuestro reconocimiento de objetos capaces, al menos en principio, de escribir. Digo "al menos en principio", pues, como vimos anteriormente, debemos reconocer la existencia de artefactos descompuestos. Esta excepción, sin embargo, complica considerablemente las cosas. Si no podemos afirmar con seguridad que cada miembro de una clase artefactual debe efectivamente ser capaz de cumplir su función, y tampoco podemos enunciar las condiciones exactas para que esto suceda –y, como vimos en el capítulo 2, raramente podemos– entonces algunos conceptos artefactuales están condenados a poseer cierto grado de vaguedad, y la tarea de especificar qué exactamente es lo que podemos deducir analíticamente de ellos se torna complicada. Aun así, la existencia de cada clase artefactual implica el reconocimiento de un núcleo de características que, aunque vagas, existen y tienen consecuencias analíticas que son, necesariamente, conocidas por la comunidad que la sostiene.

Traducido al terreno de los objetos matemáticos, el privilegio mencionado implicaría que, dado que la constitución de los objetos matemáticos requiere del uso exitoso por parte de la comunidad matemática, la existencia de objetos matemáticos desconocidos para ella fuera imposible. Esto, sin embargo, no es del todo cierto. La historia de las matemáticas exhibe diversos casos históricos de descubrimientos matemáticos, algunos de ellos que incluso resultaron sorprendentes para la comunidad matemática. Mencioné uno de estos casos en el capítulo anterior, durante mi exposición de las ideas de Hacking, quien relata el sorprendente descubrimiento de 20 tipos de grupos finitos previamente desconocidos (Hacking 2009, p. 79), el cual parecería implicar su existencia era previa a nuestro conocimiento de ellos.

Para explicar este tipo de excepciones, debemos notar que algunos objetos matemáticos existen, no gracias a nuestro uso exitoso de ellos, sino como consecuencia deductiva de la existencia de otros objetos matemáticos. Los 20 tipos de grupos finitos descubiertos forman parte de la estructura general de los grupos finitos, cuya existencia sí depende de la comunidad matemática y por ello es conocimiento privilegiado para ella. Así, enunciado de manera más precisa, el privilegio epistémico en cuestión consiste en que todos los objetos matemáticos existentes son, o bien conocidos, o bien consecuencia deductiva de objetos conocidos.

Debo aclarar que esta respuesta no me compromete con una visión estructuralista de los objetos matemáticos, según la cual *todos* los objetos matemáticos son objetos *esencialmente* estructurales. Lo que yo admito es que *algunos* objetos matemáticos tienen una naturaleza estructural cuya existencia, *así acordada* por la comunidad matemática, tiene diversas consecuencias deductivas, a veces inesperadas.

Pasando ahora al privilegio epistémico acerca de la naturaleza de los objetos matemáticos, la situación con los artefactos en general se replica en los objetos matemáticos. La existencia de un objeto matemático implica la existencia de actitudes proposicionales hacia él que son responsables por su constitución, y que poseen cierto contenido. Acerca de este contenido, la comunidad matemática nunca podría estar equivocada, pues es constitutivo de los objetos matemáticos. Por ejemplo, si Cole tiene razón, la esencia de los números naturales consiste en hacer justicia al principio de Hume (Cole 2012, p. 25), y de ello podemos deducir algunas de sus características acerca de las cuales no podríamos estar equivocados.

Sin embargo, al igual que con los artefactos en general, este contenido no siempre es explícito, y puede ser difícil de precisar. Qué exactamente es lo que caracteriza de forma esencial a cada objeto, es un análisis que debe ser realizado caso por caso, por medio de la observación de las particularidades de su uso en la práctica matemática. Esta complicación es la responsable de que no contemos con un criterio para resolver cuestiones como, por ejemplo, la aceptación o rechazo de HC. Al menos parte de lo que se encuentra detrás de este tipo de cuestiones es un desacuerdo, dentro de la comunidad matemática, acerca del contenido de las actitudes proposicionales que contribuyeron a la constitución del continuo como un objeto matemático.

Esta dificultad es una de las razones por las que el privilegio epistémico mencionado no resulta en una epistemología infalible. El carácter informal de la práctica matemática y su carácter colectivo dan lugar a ésta y otras fuentes de ignorancia acerca de los objetos matemáticos. A continuación menciono dos de ellas:

1) El desconocimiento, por parte de cada individuo, de aquello que conoce la comunidad.

La constitución de los objetos matemáticos obedece a acuerdos comunitarios, realizados por alguna porción suficiente de la comunidad matemática. Qué significa que una porción sea suficiente es una cuestión muy compleja que tiene que ver con las autoridades de cada campo matemático, las revistas académicas, los libros de texto, etc., y merece un estudio detallado. Este estudio no cae dentro de los objetivos de esta investigación, y para nuestros propósitos basta con notar que no es necesario que todos los integrantes de la comunidad matemática reconozcan un objeto para que éste exista. De hecho, con la creciente especialización en la investigación matemática, la mayor parte de los objetos nuevos son conocidos por un porcentaje bastante pequeño de matemáticos. Así, es perfectamente posible que un integrante de la comunidad matemática pueda desconocer la existencia de un objeto matemático, o bien tenga una concepción errada de él.

2) *Las propiedades implícitas en los objetos, pero no reconocidas*[48].

La constitución de un objeto matemático implica un acuerdo acerca de sus propiedades esenciales, aquellas que propician su constitución. Sin embargo, estas propiedades no

[48] Atención: los conceptos están expresados y son inseparables de sus modos, por lo que el contenido implícito en ellos lo está sólo dentro del mismo modo matemático, y no atraviesa modos. Esto es importante, pues de otra manera terminaríamos en un presentismo del tipo que afirma que la geometría de Hilbert se encontraba implícita en la de Euclides.

agotan su naturaleza, y suele haber una gran cantidad de contenido en los conceptos que no es inmediatamente reconocido por sus usuarios. Este es justamente el caso de los 20 tipos de grupos finitos mencionados anteriormente, y también el de contenidos mucho menos sorprendentes. En general, toda postulación matemática es realizada dentro de un modo de hacer matemáticas, y cada modo tiene particularidades que arrojan consecuencias específicas a él y que podrían no estar explícitas en las intenciones que condujeron a la postulación. Una ilustración simple de esto se aprecia al imaginar una postulación de un polígono de tres lados. Las intenciones explícitas del matemático podrían referir únicamente a la cantidad de lados de la figura, pero el modo de constituirla tendrá como consecuencia que dicha figura tenga tres vértices, tres ángulos que suman 180º, un área que es igual a la mitad de su base por su altura, etc.

En suma, tenemos una epistemología a nuestro alcance, inclusive con algunos privilegios, pero limitados. La clave para comprender este terreno intermedio entre el descubrimiento y la convención es atender, por un lado, al carácter institucional de los objetos matemáticos, el cual los hace nuestros objetos, pero también el complejo proceso involucrado en su constitución, que involucra diversos factores que no se encuentran del todo dentro de nuestro control.

5.4 Objeciones a la propuesta.

El concebir a los objetos matemáticos como artefactos suscita inmediatamente una serie de preocupaciones, concernidas principalmente con la percibida objetividad, necesidad, atemporalidad y carácter *a priori* de las matemáticas. En seguida me ocuparé de responder a estas preocupaciones, indicando cómo es que la teoría artefactual puede dar cuenta de ellas.

Antes de proceder, sin embargo, debo aclarar, de nuevo, que lo anterior no pretende ser un argumento concluyente en favor de la concepción artefactual de los objetos matemáticos. Como lo mencioné anteriormente, esta es una tesis programática, y su objetivo es simplemente el de señalar el camino a seguir y argumentar en favor de su plausibilidad. Es con esto en mente que abordo las posible objeciones a este camino, esto es, no con la idea de combatirlas al detalle y refutarlas concluyentemente, sino con la de mostrar que mi propuesta ofrece herramientas para lidiar con ellas y ofrecer alternativas plausibles.

5.4.1 La objetividad del conocimiento matemático.

El conocimiento matemático es ampliamente considerado como un paradigma de objetividad. En un grado inclusive mayor al de las ciencias naturales, éste es percibido como inmune a los accidentes de la historia y a los caprichos de la subjetividad humana. De la concepción platonista de los objetos se obtiene la necesidad, eternidad e inmutabilidad de la verdad matemática; de las demostraciones formales, el carácter *a priori* de nuestro conocimiento de ellos.

Esta percepción parece chocar con mi caracterización de los objetos matemáticos como artefactos, esto es, como objetos que dependen de manera significativa de nuestras prácticas, las cuales son un fenómeno histórico y cambiante. Esto suscita la preocupación de que mi teoría artefactual pudiera ser incapaz de explicar este alto grado de objetividad, y que, a pesar de las virtudes que pueda tener, sería insatisfactoria como una filosofía de las matemáticas. El objetivo de esta sección es responder a esta preocupación, mostrando que la teoría artefactual cuenta con herramientas para dar una explicación adecuada de la objetividad matemática.

La estrategia para lograr esto se conforma de dos partes principales: en primer lugar, argumentaré que la percepción de una objetividad absoluta para la verdad matemática es exagerada y errónea, el producto de dos factores: en primer lugar, un mito que surge de concentrarse exclusivamente en las proposiciones más elementales de la aritmética, y en segundo, la concepción platonista de los objetos matemáticos. En segunda instancia argumentaré que, a pesar de no ser absoluta, la objetividad de los objetos matemáticos es de un grado muy elevado, y que ésta puede ser explicada desde la perspectiva artefactual. Para lograr esta segunda parte del argumento, comenzaré por dar una noción de objetividad que admite grados. Posteriormente argumentaré que existen, en el proceso de constitución de los artefactos –y más aún en el de los artefactos epistémicos– factores que contribuyen a que éstos posean un alto grado de objetividad. Por último, expondré muy brevemente las ideas principales de dos estudios que Martin Krieger y Jody Azzouni realizan de la práctica matemática, en los cuales podremos observar a dichos factores en operación.

Lo primero que hay que notar para comenzar a desmitificar la objetividad matemática es que los ejemplos citados en su favor son casi siempre proposiciones aritméticas muy sencillas; es muy común escuchar a alguien decir que está tan seguro de algo como de que “2 + 2 = 4”. No disputo que la verdad de “2 + 2 = 4” sea objetiva a un grado tal que resulte casi imposible imaginar que ese no fuera el caso, pero cabe preguntarse si dicha objetividad obedece a que esta es una proposición matemática, o bien a que es una proposición muy elemental que, como diría Quine, se encuentra en el centro de nuestra red de creencias. Argumentaré que lo segundo es el caso, y lo haré haciendo notar simplemente que existe una infinidad de proposiciones matemáticas que no suscitan esta misma sensación de objetividad. La verdad de HC, por ejemplo, no parece producir esta sensación, ni siquiera entre los máximos especialistas en el tema. O bien podemos citar numerosos casos de proposiciones matemáticas verdaderas que nos resultan altamente contra-intuitivas, como que la cardinalidad de los números naturales sea la misma que la de los racionales.

Esto sugiere que diferentes proposiciones matemáticas suscitan un diferente grado en nuestra percepción de su objetividad, y por tanto que ésta obedece más s nuestra familiaridad con ellas que a su carácter matemático. Sin embargo, no basta con quedarnos en el nivel de la percepción de la objetividad, sino que es necesario analizar la objetividad misma de estas proposiciones. Un defensor de la objetividad absoluta de las matemáticas podrá argumentar que, inclusive si algunas proposiciones matemáticas no suscitan inmediatamente la sensación de objetividad absoluta, aun así la poseen, puesto que han sido rigurosamente demostradas, y ello coloca a su verdad más allá de toda duda. Ante esta objeción, sin embargo, bastará con señalar que estas demostraciones parten de axiomas o principios que no están demostrados, muchos de los cuales no generan la sensación de inevitabilidad que caracteriza a la objetividad absoluta. El mismo Gödel menciona la posibilidad de aceptar axiomas, no por su necesidad intrínseca, sino por la fertilidad de sus consecuencias[49].

Por supuesto que esta admisión de Gödel no concede el punto, pues él toma a esta fertilidad como evidencia de la existencia platónica de los objetos matemáticos, y de ésta se sigue la objetividad absoluta de la verdad matemática. Pero esto muestra que la objetividad absoluta no es un dato inmediato al que debamos hacer justicia independientemente de nuestra concepción de los objetos matemáticos, sino que se sigue de un argumento que conduce a la concepción platonista, argumento que es rechazado por mi teoría artefactualista, y cuya utilización en su contra constituye, por tanto, una petición de principio.

Así, podemos concluir que la percepción de la objetividad absoluta de la verdad matemática proviene, ya sea una generalización errónea a partir de algunas proposiciones aritméticas que resultan extremadamente intuitivas por nuestra familiaridad con ellas, o bien de una concepción platonista de los objetos matemáticos que mi teoría artefactual rechaza desde un inicio.

Una vez establecido esto, procedo a dar una explicación en términos artefactuales del –no absoluto– pero sí muy elevado grado de objetividad que posee la verdad matemática. Para ello echaré mano de la noción de objetividad propuesta por Cole, y expuesta en la sección 3.4 de este trabajo, según la cual la objetividad, en general, admite grados, y éstos se deben a la combinación de dos factores: 1) la objetividad epistémica, y 2)

[49] "Secondly, however, even disregarding the intrinsic necessity of some new axiom, and even in case it has no intrinsic necessity at all, a probable decision about its truth is possible also in another way, namely, inductively by studying its "success." Success here means fruitfulness in consequences." (Gödel 1947, p. 477)

la objetividad del objeto mismo. Como vimos anteriormente, la primera refiere a la objetividad de nuestros juicios exceptuando aquellos que jugaron un papel en la constitución del objeto en cuestión. Trasladado al terreno matemático, esto se traduce en aceptar como verdaderos a los axiomas, principios o definiciones que caracterizan al objeto, sin cuestionar la posible subjetividad involucrada en su constitución, y proceder a examinar la objetividad de nuestros juicios acerca de su naturaleza. En este sentido, el conocimiento matemático es un paradigma de objetividad, pues las matemáticas son, y siempre han sido, una práctica con una reglamentación extremadamente explícita y clara acerca de lo que se puede o no se puede deducir de un conjunto dado de premisas.

La segunda –la objetividad involucrada en la constitución del objeto– refiere al grado de objetividad en el proceso que condujo a su constitución. Es aquí donde la teoría artefactual parecería quedarse corta, al admitir que la naturaleza de los objetos matemáticos, y por tanto la verdad matemática, depende de prácticas históricas y cambiantes que incluyen factores contingentes y pragmáticos. Para contrarrestar esta percepción argumentaré que, a pesar de ser el resultado de una práctica histórica y contingente, los objetos matemáticos poseen un muy alto grado de objetividad.

A lo largo de este trabajo he mencionado ya algunas de las razones que contribuyen a esta objetividad. Hablando de artefactos en general, estas provienen de la necesidad de que éstos cumplan con la función para la cual fueron diseñados, así como de las restricciones que el material con el que fueron construidos imponen sobre su naturaleza. El cumplimiento de una función que es valorada por la comunidad de usuarios implica que su naturaleza no puede ser clasificada como convencional, ya que, como dice Elder, y concuerdo con él, lo convencional es aquello que puede ser modificado sin pérdida de valor.

En un sentido más específico, al hablar de artefactos epistémicos, expuse las ideas de Knuuttila acerca de cómo es que los modelos –considerados como artefactos– contribuyen a la generación de conocimiento dentro de las prácticas científicas. Esta contribución se hace posible gracias a ciertos factores que dotan a los modelos de una naturaleza objetiva. Estos factores, expuestos en la sección 2.7 de este trabajo, son: 1) Diseño constreñido; 2) Manipulabilidad concreta y opacidad representacional; y 3) Orientación hacia resultados.

Ahora, tras haber elaborado la propuesta artefactual de los objetos matemáticos, resulta fácil constatar que estos factores están presentes en los objetos matemáticos como los he caracterizado. No repetiré con detalle los argumentos expuestos anteriormente, pero, muy a grandes rasgos, podemos notar que: 1) El diseño constreñido es particularmente palpable en la primera capa de objetos matemáticos, aquella que, según Cole, se ocupó de representar a la realidad física del mundo. Las capas subsecuentes de objetos matemáticos fueron, a su vez, constreñidas por las capas anteriores. Esta relación, primero con el mundo físico y después con el mundo matemático mismo, es a lo que Muntersbjorn se refiere con la proveniencia de los objetos matemáticos, y constituye una restricción sobre su naturaleza que los dota con cierto grado de objetividad. 2) La manipulabilidad concreta y opacidad representacional se hacen patentes en el papel constitutivo de las notaciones matemáticas. Estas notaciones, que nos permiten expresar y desplegar el contenido de nuestros conceptos matemáticos, establecen ciertas reglas que restringen lo que se puede y no se puede deducir de ellos. 3) La orientación hacia resultados es fácilmente percibida en una práctica matemática cuyo objetivo principal es el de desarrollar objetos matemáticos que nos permitan resolver problemas matemáticos. Este es el potencial del que habla Muntersbjorn, el cual, orienta a la práctica matemática hacia un objetivo fijo que, de nuevo, restringe la naturaleza de sus objetos y los dota de un grado adicional de objetividad.

En resumidas cuentas, cada uno de estos factores agrega restricciones sobre la constitución de los objetos matemáticos, previniendo así que intervengan en ella posibles arbitrariedades o caprichos de la comunidad matemática. Sin embargo, estas restricciones no son absolutas, en el sentido de que no provienen de la naturaleza de un objeto que es independiente de la comunidad responsable de su constitución, sino que refieren a particularidades de la práctica matemática. Para fortalecer mi argumento, entonces, valdrá la pena examinar algunos estudios específicos acerca de cómo es que la práctica matemática efectivamente ha logrado el grado de objetividad mencionado. Expondré muy brevemente las ideas principales que Martin Krieger y Jody Azzouni ofrecen al respecto.

En su artículo *"Theorems As Meaningful Cultural Artifacts: Making the World Additive"* (1991), Krieger propone que las matemáticas son un producto cultural, y que por ello se encuentran influenciadas por los valores de las comunidades que las producen:

> [T]heorems are interpretable cultural objects, much as works of art and craft and commerce have been treated by critics, historians, and anthropologists; namely, mathematics is not only embedded in the larger culture, but it might be treated as revealing that culture's values and workings. Mathematical theorems are artifacts of a subculture, one which shares the values of the larger culture (1991, p. 136).

Sin embargo, aclara que estos valores no son el tipo de valores superficiales que cambian significativamente con el tiempo y la historia, sino que se encuentran incrustados en las profundidades de nuestra cultura. Estos valores se traducen en ímpetus matemáticos muy básicos que nos conducen a las actividades matemáticas elementales, como lo son el contar, sumar, agrupar, etc., las cuales se encuentran en la raíz de una gran parte del enorme cuerpo de conocimiento matemático que se ha desarrollado a partir de ellas. Krieger ilustra esto de manera muy interesante, argumentando que, tanto el Teorema Fundamental del Cálculo, como el Teorema del Límite Central en estadística, como los Límites del Continuo Estadísticos en teoría de campos, pueden ser vistos como una manera de justificar nuestra fe en que el mundo puede ser sumado:

> My claim here is that each of these theorems is, in effect, a litany that affirms the same faith: that the world may be composed of abstracted parts; that if you choose the right kind of parts or pieces that composition may be seen to be a matter of addition; and that it "does not matter how" you do the addition or just which are the pieces, for "in the limit" the result will be the same. And I think it may be argued that these features characterize a particular culture - a modern one - an ahistorical Cartesian liberal world, one in which in the end most particular details are shown not to matter (p. 148).

Si esto es correcto, entonces las restricciones que dan objetividad a los objetos matemáticos serían relativas a valores muy básicos que difícilmente podrían sufrir cambios significativos, y cuya estabilidad otorga a la verdad matemática un muy alto grado de objetividad.

Por otra parte, en *"How and Why Mathematics Is Unique as a Social Practice"* (2006), Azzouni reconoce a las matemáticas como el resultado de una práctica social, sin embargo, se sorprende de lo especial que es esta práctica, dado que no parece compartir el elemento coercitivo que suele acompañar a otras prácticas sociales[50]:

> What seems odd about mathematics as a social practice is the presence of substantial conformity on the one hand, and yet, on the other, the absence of (sometimes brutal) social tools to induce conformity that routinely appear among us whenever behavior really is socially constrained. Let's call this "the benign fixation of mathematical practice" (2006, p. 208).

---

[50] Aunque creo que bien podría argumentarse que este elemento sí está presente en la práctica matemática, en la forma de criterios selectivos para la publicación de artículos y asignación de recursos financieros, entre otros. No me detendré en es esta cuestión.

Esta “fijación benigna de la práctica matemática” requiere, entonces, de una explicación. Azzouni descarta la explicación platonista pues piensa que el problema del acceso epistémico es insuperable, y en su lugar propone que ésta se debe a dos particularidades históricas de las prácticas matemáticas. La primera concierne lo que él llama la “etapa madura” de las matemáticas, que comprende desde Euclides hasta 1900. Durante este periodo, señala Azzouni, las matemáticas se encontraban dirigidas hacia dominios empíricos de aplicación:

> Arithmetic and geometry, in particular, come with obviously intended domains of application. These fixed domains of application prevent, to some extent, drift in the rules governing terms of mathematics—in these subjects so applied, anyway. This is because successful application makes us loathe to change successfully applied theorems—if that costs us applicability. (2006, p. 212).

Expresado en términos familiares a esta investigación, lo que Azzouni está proponiendo es que, hasta 1900, el *potencial* bajo el cual las postulaciones matemáticas eran evaluadas se encontraba íntimamente ligado a una *proveniencia* empírica, misma que prevenía cambios arbitrarios.

Esto, sin embargo, cambió a partir de 1900 en lo que Azzouni denomina el periodo de la “matemática contemporánea”, en la que impera un espíritu más formalista. El primer cambio en este sentido concierne la sustitución de la lógica clásica por procedimientos de prueba de cualquier tipo de lógica, siempre y cuando admitan el reconocimiento mecánico de pruebas completamente explícitas (p. 216). Esto, afirma Azzouni, condujo a las matemáticas a liberarse de sus orígenes empíricos, y propició un mayor liberalismo en nuestras actitudes hacia las postulaciones matemáticas. Estas postulaciones ya no tenían que representar porciones del mundo, sino que podían ser útiles o matemáticamente interesantes de muchas diferentes maneras, y este pluralismo condujo a un ambiente de nocompetencia que contribuye, hasta hoy en día, a la fijación benigna de las matemáticas de la que habla Azzouni:

> [T]he introduction of mathematical concepts was no longer solely a matter of abstracting and idealizing empirical notions, as the notion of the square root of –1 makes clear all on its own. I claim that this, coupled with a more sophisticated view of how mathematical posits could prove empirically valuable (not just by a "resemblance" to what they're applied to), and both of these coupled with the emergence of a confident mathematical profession not directly concerned with the application of said mathematics, allowed the birth of mathematical liberalism: the side-by-side noncompetitive existence of (logically incompatible) mathematical systems. (p. 218)

No abundaré en, ni cuestionaré las explicaciones de Krieger y Azzouni, pues no es mi intención apoyar la objetividad de las matemáticas específicamente en ellas. La idea de exponer sus ideas es tan solo mostrar el tipo de explicaciones a las que podemos aspirar bajo la perspectiva artefactual. Como es de esperarse, estas explicaciones nunca rendirán el mismo grado de objetividad que se pretende para objetos independientes de nuestras prácticas, y mucho menos para objetos platónicos, sin embargo, creo que es el tipo de objetividad adecuado para los objetos matemáticos.

5.4.2 Necesidad, atemporalidad y carácter *a priori*.

Otra preocupación que la teoría artefactual de los objetos matemáticos puede suscitar es que, como productos de nuestras prácticas temporales y contingentes, los objetos matemáticos parecerían ser incapaces de explicar la generalmente aceptada necesidad de la verdad matemática, atemporalidad de los objetos matemáticos y carácter *a priori* de nuestro conocimiento de ellos.

Antes de atender a esta preocupación, sin embargo, es preciso señalar que esta aceptación generalizada tiene su génesis, en buena medida, en nuestra extrema familiaridad con algunas de las proposiciones más simples de la aritmética. Como lo expliqué en la sección anterior, estas proposiciones básicas han generado la intuición de que las verdades matemáticas son necesarias y eternas, y esta intuición ha conducido a las concepciones platonistas y formalistas de las matemáticas, de las cuales se desprende un tipo de objetividad que extiende dicha necesidad, atemporalidad y carácter *a priori* a todas las proposiciones matemáticas. Sin embargo, esta investigación es justamente un argumento en favor de la posibilidad de escapar a estas dos concepciones, de manera que buena parte del trabajo para responder a esta preocupación ya está hecho.

El objetivo de esta sección, entonces, será el de atender a argumentos en favor de la necesidad, atemporalidad y carácter *a priori* de las matemáticas que *no* presupongan al platonismo o al formalismo. Además, exploraré brevemente la posibilidad de adaptar la teoría artefactual para salvar cada una de estas intuiciones, con la idea de ver si es posible hacerla más atractiva para quienes las valoren mucho.

Necesidad de la verdad matemática.

Hasta donde conozco la literatura, no existe un argumento explícito en favor de la necesidad de la verdad matemática. Ésta no es un requisito semántico, epistemológico, historiográfico, o de ningún otro tipo que haya sido sostenido en la literatura reciente. Lo que hay es la intuición que expuse en la sección anterior, de que algunas proposiciones muy básicas de la aritmética parecerían ser verdaderas en todos los mundos posibles, misma que es extendida al resto de las proposiciones matemáticas por medio de las concepciones platonistas y formalistas de las matemáticas. Mi tarea, entonces, consiste en, o bien mostrar que esta intuición puede encontrar respaldo en mi teoría artefactual, o bien mostrar cómo es que ella ha podido persistir, a pesar de ser errónea. En lo que sigue haré lo segundo. Argumentaré que, si mi teoría artefactual es correcta, la verdad matemática es, a pesar de nuestras intuiciones hacia lo contrario, contingente. Adicionalmente, exploraré la posibilidad de interpretar a la teoría artefactual de manera que fuera posible salvar dicha necesidad, e indicaré las consecuencias de hacerlo así.

La preocupación consiste, entonces, en que nuestra intuición acerca de la necesidad de la verdad matemática no pudiera encontrar explicación en una teoría artefactual que considera a la verdad matemática como el producto de prácticas matemáticas contingentes.[51] Estas prácticas son contingentes en al menos dos sentidos. En primer lugar, existen mundos posibles en los que simplemente no hay prácticas matemáticas – nuestro propio mundo hace 1,000,000 de años parecería ser uno de estos mundos posibles. En segundo lugar, existen también mundos posibles con prácticas matemáticas distintas a las nuestras, que producen objetos matemáticos distintos a los nuestros con verdades que podrían contradecir a las nuestras.

Ante esto, la respuesta fácil es admitir la contingencia de la verdad matemática, y aceptar que la necesidad es un sacrificio de adoptar la teoría artefactual. Esta es la respuesta con la que, a fin de cuentas, me quedaré. Pero antes, mostraré el camino que deberá seguir, y el precio que deberá pagar, quien quisiera salvar a la necesidad matemática bajo mi teoría artefactual.

Quien busque este camino podrá comenzar por notar que existen dos nociones distintas de necesidad. La primera, a la que llamaré la noción *fuerte*, requiere la verdad de

[51] Podría argumentarse que, a pesar de que nuestras prácticas matemáticas son contingentes, su resultado no lo es, por obedecer a una naturaleza cognitiva humana innata. No seguiré esta línea de argumentación por no parecerme afín a mi propuesta.

la proposición en todos los mundos posibles; la segunda, la *débil*, la requiere sólo en aquellos mundos posibles en los que los referentes de la proposición existen. La noción débil hace justicia a intuiciones de la necesidad de proposiciones como "Juan es Juan", la cual es verdadera en todos, y sólo en los mundos posibles en los que existe Juan. Esta parecería ser la noción adecuada para explicar la necesidad de la verada matemática, pues parecería que lo que nos parece realmente difícil de imaginar no es que los objetos matemáticos pudieran no existir, sino que fueran diferentes a como los conocemos. Esto es, parece más fácil imaginar que el número 4 no exista (como podemos constatar a través de los estudios de algunas tribus amazónicas que sólo tienen números del 1 al 3), a que "4 + 4 = 8" no sea una proposición verdadera, en el caso de que el "4" exista.

Adoptando esta noción débil de la necesidad matemática podemos sortear, entonces, el obstáculo de los mundos posibles en los que no hay objetos matemáticos. Sin embargo, el otro tipo de contingencia persiste como un problema, pues mundos con distintas prácticas matemáticas pueden generar verdades que se contradigan entre sí. Por ejemplo, podría ser que en un mundo posible HC sea verdadera acerca del continuo, mientras que en otro sea falsa. Para librar este obstáculo, sería necesario argumentar que estos dos continuos son objetos distintos, y que sus verdades no se contradicen. Para ello, deberemos rechazar la flexibilidad de los conceptos artefactuales, mencionada en el capítulo 2 de este trabajo, y adoptar, para los objetos matemáticos, una concepción rígida de los conceptos, como la sostenida por Frege. Esta rigidez implicaría que, a pesar de que ambos objetos hayan tenido su origen en la investigación de la misma intuición –aquella del continuo– los diferentes resultados de esta investigación habrían engendrado diferentes objetos, y no diferentes versiones del mismo objeto. Una vez identificados, cada uno de estos objetos, como correspondientes a sus respectivos conceptos, rígidos y completos, la verdad acerca de ellos se seguiría analíticamente a partir de cada uno de ellos, sin contradicción alguna.

El precio que deberá pagar quien busque salvar la necesidad de la verdad matemática es, entonces, el de perder una característica importante del concepto de "artefacto", a saber, su flexibilidad semántica. Este sacrificio tiene consecuencias poco deseables. En el mundo de los artefactos, éste implicaría una multiplicación inusitada de los tipos artefactuales, pues cualquier cambio en nuestra concepción de ellos resultaría en un cambio de referencia. Por ejemplo, las cámaras fotográficas analógicas de hace 50 años tendrían que ser consideradas como un tipo de objeto distinto al de las cámaras digitales de hoy. Y esto tiene consecuencias sobre la semántica artefactual, y más específicamente sobre la semántica de nuestros artefactos matemáticos. Anteriormente mencioné cómo es que esta flexibilidad conceptual posibilitó una semántica compatible con una historiografía no presentista, en la que podemos interpretar a Euclides y compañía investigando la naturaleza de una versión anterior de nuestros objetos geométricos, y no un tipo de objetos completamente distintos a los que ellos creían estar investigando.

Es así que yo elijo sacrificar la necesidad de la verdad matemática (cuyo supuesto valor está pendiente de ser justificado sin presuponer al platonismo o al formalismo), conservando la flexibilidad de los conceptos artefactuales y la historiografía no presentista que ella nos brinda. En lo anterior podemos percibir, sin embargo, que parte de lo que sostiene a la intuición de la necesidad matemática es la costumbre, derivada de las concepciones platonistas y formalistas de los objetos matemáticos, de concebir a los conceptos de manera rígida, y una confusión respecto a la fuerza de la necesidad de dicha verdad.

Atemporalidad de los objetos matemáticos.

Ligada a la objetividad concebida de forma platonista o formalista, y a las intuiciones de la necesidad de la verdad matemática, está la intuición de que la verdad matemática es eterna e inmutable, y que todas las verdades matemáticas que se obtienen hoy, se han obtenido siempre y se obtendrán eternamente. Esta intuición es aún más difícil de salvar que la correspondiente a la necesidad. Esto se debe a que mi teoría es muy explícita acerca de la temporalidad de los objetos matemáticos. Éstos se constituyen gracias a nuestras prácticas, y ninguna maroma conceptual puede resultar en una existencia previa a esta constitución. Desde la perspectiva artefactual, entonces, será necesario resistir la idea de que lo que fue una verdad matemática siempre lo será.

Algo que puede ayudar a resistir esta idea es enfatizar, de nuevo, la distinción entre los hechos matemáticos, los cuales son hechos institucionales, y los hechos externos que a menudo han propiciado su constitución. Nuestras intuiciones acerca de la atemporalidad a menudo se encuentran ligadas a estos hechos externos que se dan independientemente de nuestras prácticas matemáticas. Por ejemplo, un argumento en favor de que "2 + 2 = 4" es una verdad eterna es que, independientemente de nuestras prácticas matemáticas, o inclusive de nuestra existencia, al juntar dos piedras con otras dos piedras, tendremos, inevitablemente, cuatro piedras. Por supuesto que este es un hecho que no disputo, así como tampoco disputo que este hecho haya jugado un papel en la constitución de la aritmética. Sin embargo, esto no implica que no debamos distinguir entre el hecho *físico* que se obtiene acerca de las piedras con el hecho *matemático* que se obtiene acerca de los números.

Si algo quise dejar claro en mi discusión del realismo aristotélico de Franklin (y que también podríamos observar en las críticas que se le han hecho a la filosofía de las matemáticas de John Stuart Mill), es que las abstracciones que nos conducen del mundo físico al mundo matemático no son automáticas, sino que requieren de un agente que las construya, por medio de los medios notacionales disponibles para él, y de acuerdo con sus intereses pragmáticos. En el caso de la suma, por ejemplo, ésta refleja ciertos aspectos de la conjunción de objetos, pero omite otros. En particular, omite el resultado de juntar cierto tipo de objetos, como las gotas de agua, o los montones de arena, que, en lugar de multiplicarse, se fusionan. Esta selección de los aspectos relevantes de un fenómeno para la constitución de los objetos matemáticos es efectuada por los matemáticos, de acuerdo con una serie de factores determinados por nuestras prácticas matemáticas, y que de ninguna manera podrían ser considerados como atemporales.

En conclusión, los defensores de la propuesta artefactual de los objetos matemáticos debemos aceptar su temporalidad, y señalar que esto no nos parece un problema, puesto que la intuición que sostiene su atemporalidad no es, en realidad, acerca de hechos matemáticos, sino de otro tipo de hechos que solemos confundir con ellos.

Carácter a priori del conocimiento matemático.

El carácter *a priori* del conocimiento matemático parecería ser más afín a mi propuesta que la necesidad y atemporalidad de la verdad matemática. Cuando hablé sobre la epistemología de los artefactos matemáticos propuse la existencia de un privilegio epistémico que nos permite conocer a los objetos matemáticos por medio de un análisis de las intenciones y del éxito que condujeron a su constitución. Entonces, podríamos pensar que, así como no necesitamos de ninguna experiencia para saber que las calculadoras deben calcular, tampoco necesitaríamos ninguna experiencia para saber algunas cosas acerca de nuestros artefactos matemáticos. Además, a diferencia de la necesidad y atemporalidad, que parecen estar apoyadas exclusivamente en las concepciones platonistas o formalistas de las matemáticas, en el caso del carácter *a priori* del conocimiento matemático hay un argumento independiente a ellas en su favor. Este consiste en señalar que nuestro conocimiento matemático lo obtenemos *pensando*, y no haciendo experimentos en nuestra experiencia sensible.

Sin embargo, y a pesar de estas posibles razones en su favor, la tesis de que el conocimiento matemático es *a priori* no se sostiene bajo la propuesta artefactual. Esto se debe a que, de acuerdo con mi propuesta, los objetos matemáticos no son simples objetos del pensamiento puro, sino el resultado de un proceso de constitución que incluye a las notaciones en las que encuentran expresión, y a las comunidades que los reconocen por medio de su uso.

Esto socava la posibilidad de obtener conocimiento matemático a priori de dos diferentes maneras: en primer lugar, implica que nuestras intenciones no sobreviven intactas el proceso de constitución, sino que, al encontrar expresión en un sistema de notación, se ven afectadas por las particularidades de éste. Así, la posibilidad del conocimiento a priori requeriría que el conocimiento de estas particularidades también fuera a priori, lo cual no es posible en general. Algunos medios, como el diagramático involucran a la experiencia sensible, por lo que el conocimiento de sus objetos es a posteriori.

Pero, inclusive si el medio fuera susceptible de ser conocido *a priori*, como quizás lo sea en el caso del medio algebraico o el formal, hay un segundo obstáculo para el conocimiento *a priori*, y es que no todas las postulaciones matemáticas se constituyen como objetos matemáticos, sino sólo aquellas que son exitosas, en el sentido de ser utilizadas por la comunidad matemática. Este éxito no puede ser conocido *a priori*, pues depende de factores pragmáticos contextuales propios de cada comunidad matemática. En otras palabras, tal vez sea posible obtener conocimiento, de manera *a priori*, acerca de los objetos matemáticos una vez que sabemos que son objetos matemáticos, pero el conocimiento de que un objeto es, efectivamente, un objeto matemático, es *a posteriori*. Una idea similar es propuesta por Maddy, quien propone que el conocimiento matemático es "impuramente *a priori*", en el sentido de que tenemos una intuición que nos permite obtener conocimiento a priori acerca de los conceptos matemáticos, pero solamente una vez que tenemos evidencia, a posteriori, de que ellos son conceptos matemáticos:

> So, though experience is needed to form the concepts, once the concepts are in place, no further experience is needed to produce intuitive beliefs. This means that in so far as intuitive beliefs are supported by their being intuitive, that support is what's called 'impurely a priori'. Notice, however, that it doesn't follow that even these primitive mathematical beliefs are a priori. Without the corroboration of suitable theoretical supports, no intuitive belief can count as more than mere conjecture. (Maddy 1990, p. 74)

Así, a pesar de la posibilidad de conocer ciertos aspectos de los objetos matemáticos de manera *a priori*, en un sentido global, el conocimiento matemático no puede ser justificado sin apelar a la experiencia, y debe, por tanto, ser considerado *a posteriori*.

Un comentario final que quisiera hacer acerca de esta serie de objeciones, es que, independientemente de la posibilidad, o de la legitimidad de las motivaciones que tengamos para intentar salvar la necesidad y atemporalidad de la verdad y el carácter *a priori* del conocimiento matemático, una consecuencia del enfoque adoptado en esta investigación es que estas dicotomías sufren cierto grado de desvanecimiento. Creo que, de la misma manera en la que pensar en artefactos conduce a una cierta degradación de las dicotomías natural-artificial e invento-descubrimiento, pensar en los objetos matemáticos como el producto de la lógica informal que conduce al proceso dialéctico entre las intenciones de los matemáticos y las capacidades de las notaciones (entre función como propósito y función como capacidad), resulta en una degradación de las dicotomías necesario-contingente y *a priori*-*a posteriori*. Esto es, creo que la continua retroalimentación entre verdad y demostración, entre postulación y experimentación resulta en procesos cuya evaluación, en estos términos dicotómicos, se vuelve muy complicada.

5.4.3 Una infinidad de artefactos.

Dado que, según mi teoría, la constitución de los artefactos matemáticos requiere de la intencionalidad de la comunidad matemática, parecería imposible, al menos a primera vista, que ésta hubiese tenido el tiempo necesario para propiciar la constitución de una infinidad de números, funciones, conjuntos, etc. Así, podría objetarse, a pesar de sus posibles virtudes, la teoría artefactual no podría ser cierta.

El caso es que, si bien existen una infinidad de números, funciones, conjuntos, etc., no fue necesario crearlos uno por uno, pues la mayor parte de ellos venían "incluidos" en estructuras con una infinidad de lugares. Mi respuesta a esta objeción consiste, entonces, en señalar que sólo existe una cantidad finita de objetos matemáticos del tipo que requieren nuestra actividad, y que el resto no son objetos matemáticos individuales, sino miembros de una estructura matemática.

Tomemos como ejemplo a los números naturales: podríamos pensar que los números relativamente pequeños fueron creados, uno por uno, por los matemáticos antiguos, pues cada uno tenía un uso y un contenido específico en su cultura matemática que era independiente de sus propiedades estructurales. Sin embargo, creo que el número 741208453 probablemente nunca tuvo un contenido propio fuera de la estructura de los números naturales, sino que surgió automáticamente cuando la noción de sucesor condujo a los matemáticos a constituir la estructura infinita de los números naturales. Así, la infinidad de números naturales claramente no requirió de una infinidad de actos de constitución. Además, esto no sólo aplica a objetos como los números naturales, sino también a las estructuras infinitas mismas. Me parece razonable pensar que la constitución de R, R^2 y R^3 requirió, cada una de ellas, de la actividad de matemáticos, pero que a partir de R^4, o tal vez de R^5, ésta fue el resultado automático de la constitución de R^n.

Ahora bien, el que existan objetos matemáticos que no requieren, cada uno de ellos, de un acto de constitución (actividad matemática inicial) y sustento (reconocimiento constante por parte de la comunidad matemática), no significa que éstos no sean artefactos. Como parte de una estructura que sí los requirió, y que sí es un artefacto, ellos también mantienen una relación de dependencia con la comunidad matemática, y esto los determina como artefactos.

5.5 Ventajas de la propuesta.

He ido mencionando las ventajas de la propuesta artefactual a lo largo de la investigación. Las dos principales –la semántica referencial y la epistemología no misteriosa– han sido un tema presente a lo largo de ella. Otras, más periféricas, han sido mencionadas al tratar algunos temas más específicos. En esta sección haré un breve repaso de ellas, pero no las referiré directamente, sino a partir de un breve ejercicio comparativo, entre mi teoría artefactual y algunas de las posiciones prominentes en la literatura actual. Esto servirá, no sólo para repasar dichas ventajas, sino para comprender de manera un poco más precisa mi teoría, a través de los contrastes mencionados.

Teoría artefactual vs. Platonismo.

Al igual que el platonismo, la teoría artefactual sostiene que los objetos matemáticos existen, y que las proposiciones matemáticas hacen referencia a ellos. Como lo indiqué en el capítulo 1, creo que este es un acierto importante del platonismo matemático. A diferencia de él, la teoría artefactual no los concibe como objetos platónicos, apartados de nuestra experiencia espacio-temporal y fuera del alcance de nuestras capacidades cognitivas conocidas, sino como objetos causalmente ligados a nuestras prácticas matemáticas, y por ello al alcance de nuestras facultades cognitivas. Quisiera enfatizar de nuevo que el contraste significativo aquí no es abstracto vs. concreto –pues los artefactos matemáticos, como los he caracterizado, son objetos inmateriales– sino independiente vs. dependiente. Es esta dependencia la que nos otorga un acceso epistémico, y la que proporciona a la teoría artefactual con una epistemología que no adolece de los problemas del platonismo.

Otro inconveniente del platonismo concierne su historiografía, pues la eternidad e inmutabilidad de sus objetos lo condena a adoptar una historiografía presentista, en la que las prácticas pasadas deben ser juzgadas a través de nuestro conocimiento presente, haciendo, del éxito de los matemáticos antiguos, un misterio. La teoría artefactual puede evitar este tipo de historiografía, pues la marcada flexibilidad de los conceptos artefactuales nos permite hacer sentido de los cambios que cada objeto matemático ha ido sufriendo a lo largo de la historia, entendiendo que cada práctica temporal ha construido a sus propios objetos de acuerdo con sus medios y necesidades contextuales.

Teoría artefactual vs. formalismo.

Al igual que el formalismo, cuando se trata de explicar la verdad matemática, la propuesta artefactual otorga un papel prominente a las pruebas obtenidas por medio de la manipulación de sistemas simbólicos de notación matemática. Como lo indiqué también en el capítulo 1, creo que este es un acierto importante del formalismo. Según ambas propuestas, estas pruebas no son sólo un instrumento epistémico para justificar una verdad matemática previamente establecida, sino que juegan además un papel en su constitución.

A diferencia del formalismo, la teoría artefactual no lleva esta idea al extremo de afirmar que la verdad matemática se encuentra completamente supeditada a las pruebas matemáticas, y mucho menos a pruebas estrictamente formales. La teoría artefactual admite todo tipo de pruebas, siempre y cuando cumplan con los estándares vigentes en cada comunidad matemática, y conserva un papel importante para un componente extra-formal en la verdad matemática. Este papel se ve reflejado en la lógica informal que conduce el proceso dialéctico que constituye a las pruebas matemáticas, y que fue exhibido en la reconstrucción racional que hace Lakatos del teorema de Euler, expuesta en el capítulo 1 de este trabajo. Así, no cualquier conjunto consistente de axiomas es considerado como un punto de partida válido para una prueba matemática, y no todo resultado derivado a partir de un conjunto de axiomas consistente tenga que ser admitido como verdadero. En palabras del mismo Lakatos:

> I slightly disagree with their approach: they select from a previously given set of formal systems those which are interesting or acceptable. I should like to reverse the order: we should speak of formal systems only if they are formalizations of established informal mathematical theories. No further criteria are needed. There is indeed no respectable formal theory which does not have, in some way or another, a respectable informal ancestor. (1978, p. 62)

En otras palabras, la mayoría de los sistemas formales que utilizamos para representar a los objetos matemáticos sostienen una relación constitutiva con las teorías informales que motivaron su origen. Esta relación implica que los sistemas formales no suplantan completamente a las teorías informales, y que la verdad matemática no es reducida completamente a hechos formales. Es este carácter informal el que nos compele a entender la verdad acerca de los artefactos matemáticos en términos de objetos y satisfacción, motivando con ello la interpretación de las proposiciones matemáticas a través de una semántica referencial que es homogénea con otros campos de discurso, evitando así las dificultades semánticas del formalismo señaladas por Benacerraf.

Teoría artefactual vs. Platonismo naturalista.

El platonismo naturalista, particularmente el de Maddy, parecería ser una propuesta con gran afinidad a la teoría artefactual. Ambos proponen que los objetos matemáticos existen como objetos inmateriales que conocemos gracias al éxito de nuestras prácticas, y ambos proponen una epistemología fundamentada en el éxito de las prácticas matemáticas. Maddy llega inclusive al grado de afirmar que este éxito es todo lo que podríamos esperar en términos de justificación de las proposiciones matemáticas:

> [T]he evidence for the existence of sets is all and only linked to their mathematical virtues, to the mathematical jobs they are able to perform. (2011, p. 73)
>
> We can be uncertain whether or not a given set-theoretic posit will pay off, and therefore uncertain about whether or not it exists, but if it does pay off, there's no longer any room for doubt. (2011, p. 83)

Sin embargo, las similaridades se limitan al ámbito epistemológico, pues, en lo que concierne al plano metafísico, Maddy se adhiere estrictamente a la concepción platonista, esto es, a una realidad matemática previa e independiente de nuestras prácticas:

> The key here is that mathematical fruitfulness isn't defined as 'that which allows us to meet our goals', irrespective of what these might be; rather, our mathematical goals are only proper insofar as satisfying them furthers our grasp of the underlying strains of mathematical fruitfulness. In other words, the goals are answerable to the facts of mathematical depth, not the other way 'round (p. 82).

La referencia a estas "cepas subyacentes de la fertilidad matemática" revela que Maddy piensa que el éxito de nuestras prácticas no es realmente un factor constitutivo en la realidad matemática, sino solamente un marcador epistémico en la búsqueda de una verdad previamente existente.

Esta combinación de epistemología "trivial", como la llama Maddy, y metafísica platonista, genera una gran tensión en su propuesta. Esto es, por un lado afirma que el éxito de una postulación elimina toda duda de su existencia, pero por otro postula una realidad previa con la que dicha postulación debe coincidir. La pregunta, entonces, es ¿qué es lo que hace que el éxito garantice la existencia y verdad? La teoría artefactual tiene una respuesta, y es que este éxito implica a la verdad, propiciando la constitución de los objetos a los que las proposiciones matemáticas exitosas refieren, pero Maddy rechaza esto explícitamente y no nos proporciona otra explicación. Así, a pesar de todos sus acercamientos a una propuesta artefactual, parece que su propuesta sigue dependiendo, al igual que la de Quine, de una inferencia a la mejor explicación, a saber, que la mejor explicación del éxito de nuestras prácticas científicas (o matemáticas, en el caso de Maddy) es que son verdaderas. Este tipo de epistemología, sin embargo, es problemática, pues si bien podrá tener razón en rechazar la exigencia de Benacerraf de proporcionar un mecanismo causal específico que justifique nuestro conocimiento matemático, sigue siendo vulnerable a críticas que explotan la imposibilidad de establecer cualquier tipo de vínculo entre nuestro mundo espacio-temporal y el reino platónico. Por ejemplo, Field escribe:

> The idea is that *if it appears impossible to explain this,* then that tends to *undermine* the belief in mathematical entities, *despite* whatever reason we might have for believing in them. (...) [T]he role of the Benacerrafian challenge (as I see it) is to raise the cost of thinking that the postulation of mathematical entities is a proper solution..." (1989, p. 26; énfasis del autor).

Así, la propuesta artefactual es superior a los naturalismo platonistas en que propone una metafísica que se encuentra en armonía con su epistemología, y que logra efectivamente eliminar el abismo epistémico que aqueja a todos los tipos de platonismo.

Una ventaja más de la propuesta artefactual sobre este tipo de platonismos, particularmente bajo la formulación de Quine, es que, mientras que Quine sólo puede admitir la existencia de los objetos de la matemática aplicada, la propuesta artefactual admite a todos los objetos de la matemática, ya sea aplicada o pura. Esto se debe al criterio de compromiso ontológico de Quine, el cual obtiene la existencia de los objetos matemáticos de su cuantificación existencial en las teorías científicas. De acuerdo con este criterio, entonces, los objetos matemáticos que no juegan un papel en ellas –los objetos de la matemática pura– no existen, y son considerados como simples sistemas formales no interpretados. La propuesta artefactual no tiene este problema, pues no subordina la existencia matemática a su utilidad científica, sino que deja que ésta dependa de cualquier tipo de éxito, ya sea en el quehacer científico, o en el quehacer puramente matemático.

Teoría artefactual vs. ficcionalismo.

El ficcionalismo surge en respuesta directa al platonismo de Quine. Ante la conclusión naturalista de que los objetos matemáticos deben existir para justificar su utilidad en las teorías científicas, Hartry Field responde con el eslogan: "mathematics doesn't have to be true to be good" (1989, p. 240). La idea es que la virtud de las matemáticas no radica en describir con verdad ciertos objetos, sino en ser un aparato formal que nos permite establecer conexiones entro objetos no matemáticos. Lo único que una teoría matemática debe cumplir, entonces, es ser consistente y conservativa[52]. Esta idea tiene un claro aire Hilbertiano, al concebir a las matemáticas como un aparato formal cuyas virtudes son la consistencia, tanto interna, como con las matemáticas finitistas, en el caso de Hilbert, y con las ciencias naturales, en el caso de Field.

El ficcionalismo, sin embargo, pretende haber remediado los problemas del formalismo al admitir una semántica referencial tarskiana. Esto es, los ficcionalistas admiten que el discurso matemático hace referencia a objetos matemáticos, sin embargo, afirma que, dado que estos objetos no existen, los enunciados matemáticos son, estrictamente hablando, falsos.[53] Aquello a lo que comúnmente nos referimos como la

[52] Una teoría T es conservativa, si al ser agregada a una teoría nominalista N, de N+T no podremos extraer conclusiones nominalistas que no pudieran ser extraídas de N sola. En otras palabras, T no agrega a (o conserva) las consecuencias nominalistas de N. (Field, 1980, p. 13)

[53] En realidad, todas las proposiciones matemáticas existenciales son falsas, y todas las universales son vacuamente verdaderas.

verdad matemática es en realidad verdad dentro de una ficción – la ficción matemática. "2 + 2 = 4" es verdadera en el mismo sentido en el que Sherlock Holmes es un detective lo es. Así, la naturaleza referencial del discurso matemático no conduce a la existencia de objetos matemáticos ni a las dificultades epistemológicas del platonismo.

El ficcionalismo, sin embargo, enfrenta algunos problemas. El más profundo de ellos, en mi opinión, es que su solución a las dificultades semánticas del formalismo es superficial. Esto es, si bien, al admitir una semántica referencial, logra hacer justicia al papel de la verdad en el *discurso* matemático, no logra hacer lo mismo con al papel que juega la verdad en la *práctica* matemática. Como expliqué en el capítulo 1 de este trabajo, la verdad estructura la práctica matemática en torno a ciertos resultados que parecen describir con verdad a ciertos objetos matemáticos. Estos objetos parecen tener una fuerza restrictiva sobre lo que los matemáticos pueden afirmar o hacer.

La explicación ficcionalista de esta aparente restricción no es satisfactoria. Los autores de ficción tienen completa libertad para moldear a sus personajes como prefieran, y los matemáticos no parecen gozar de esta misma libertad al postular objetos matemáticos. En otras palabras, los ficcionalistas nos deben una explicación más sustancial la diferencia entre proposiciones como "2 + 2 = 4" y "2 + 2 = 5"[54]. De acuerdo con ellos, ambas son, en estricto sentido falsas, y la única diferencia es que, mientras que la primera ha sido incluida dentro de la ficción matemática, la segunda no lo ha sido. Sin embargo, esta explicación no parece suficiente, pues parecería muy poco plausible que los matemáticos pudieran haber

[54] Me refiero, no sólo a tomar la proposición "2 + 2 = 5" aislada, lo cual evidentemente provocaría una inconsistencia que sería rechazada por el ficcionalista, sino a una teoría aritmética consistente en la que se obtuviera "2 + 2 = 5". Argumentar que cualquier aritmética en la que se obtuviese "2 + 2 = 5" sería inconsistente tampoco es una opción, pues ello implicaría que "2 + 2 = 5" es una contradicción lógica, y que la verdad aritmética podría ser reducida a la verdad lógica. En otras palabras, estaría presuponiendo un logicismo difícil de sostener.

optado por lo opuesto. Parece haber algo, ya sea en el mundo, o en nuestras facultades cognitivas, que determina que “2 + 2 = 5” no podría ser parte de una ficción matemática muy útil.

La teoría artefactual resuelve este problema al exigir que los objetos matemáticos cumplan efectivamente con alguna función reconocida por los matemáticos. La diferencia entre una aritmética en la que se obtiene “2 + 2 = 4” y una en la que se obtiene “2 + 2 = 5” es que la primera es capaz de cumplir con una función, mientras que la segunda no. Esto se debe, al menos en parte, a hechos del mundo, como el que al juntar dos objetos con otros dos objetos, siempre y cuando estos no se fusiones, obtenemos cuatro objetos. Es este tipo de hechos que restringen nuestras postulaciones y que nos conducen a tratar a los objetos resultantes como reales, y a las proposiciones que refieren a ellos como verdaderas o falsas.

Si adoptásemos una concepción anti-realista de los artefactos, la teoría artefactual podría, incluso, ser caracterizada como un tipo de ficcionalismo más completo y robusto que los actuales. Sería más completo pues especificaría que los objetos matemáticos no son cualquier tipo de ficción, sino una muy específica: son artefactos. Y sería más robusto por ser capaz de explicar la diferencia entre las postulaciones que son incluidas dentro de la ficción matemática y las que no lo son.

Teoría artefactual vs. estructuralismo.

La tesis central del estructuralismo es que todos los objetos matemáticos son estructuras[55], esto es, por ejemplo, que el número 2, o el 12, no existen por sí mismos, sino sólo como

[55] Existen varios tipos de estructuralismo. El estructuralismo *ante rem*, sostenido por Shapiro y Reznik, es un tipo de platonismo que afirma que las estructuras son objetos platónicos que anteceden y existen independientemente de sus instancias concretas. El estructuralismo *In Re*, sostenido por Benacerraf y

parte de la estructura de los números naturales, racionales, etc. La supuesta ventaja de concebirlos así es epistemológica, pues, dado que lo que define a cada objeto matemático son sus relaciones con otros objetos matemáticos, podemos apelar a nuestra facultad de reconocimiento de patrones para explicar (al menos parte de) nuestro conocimiento de ellos. La idea, a grandes rasgos, es que podemos abstraer estas estructuras a partir de sus instancias concretas, y representarlas y estudiarlas por medio de métodos formales.

La principal dificultad de esta posición es especificar cuáles de todas las estructuras posibles que podríamos abstraer o definir son efectivamente estructuras que representan objetos matemáticos. El problema es que, si el estructuralista afirma que cualquier estructura consistente es un objeto matemático –que la consistencia implica existencia–, entonces estará cayendo en un tipo formalismo, y en sus problemas semánticos. Pero si afirma que sólo algunas de ellas lo son, entonces tendrá el problema epistemológico de explicar cómo podemos reconocer a aquellas que lo son de aquellas que no lo son.

Shapiro busca resolver este problema por medio de un concepto que él define como "coherencia", y cuya posesión garantizaría la existencia de una estructura. Este concepto surge de manera intuitiva, apelando al significado usual de la palabra:

> I present an account of the existence of structures, according to which an ability to discuss a structure is evidence that the structure coherently exists. The argument for ontological realism is an instance of a form sometimes called 'inference to the best explanation'. The idea is that the nature of structures guarantees that certain experiences count as evidence for their existence. (2000, p. 282)

Hellman, obedece a un espíritu más aristotélico, que hace depender a la existencia de la estructura de la existencia de instancias concretas de ella. (Shapiro 2000, cap. 10)

Sin embargo, al intentar precisarlo más, Shapiro se encuentra inevitablemente con una circularidad, y finalmente opta por dejarlo como una noción primitiva que encuentra su fundamento en las matemáticas mismas:

> There is no getting around this situation. We cannot ground mathematics in any domain or theory that is more secure than mathematics itself. But again, the circle that we are stuck with may not be vicious, and perhaps we can live with it. 'Coherence' is a primitive, intuitive notion, not reduced to something formal. (p. 288)

Terminando así en una posición muy similar a la sostenida por Maddy, con el agregado del carácter estructural de los objetos matemáticos.

La solución propuesta por Shapiro no es considerada como completamente satisfactoria. El carácter intuitivo y circular de la noción de "coherencia" no parece conformarse al ideal que algunos filósofos tienen para un concepto que pretende dar fundamento a una disciplina tan precisa y formal como las matemáticas. Mi objeción, sin embargo, es otra. Como mi defensa de mi teoría artefactual de los objetos matemáticos debe haber dejado claro, no tengo ningún problema en fundamentar las matemáticas sobre conceptos informales e internos a la práctica matemática.

Mi objeción al concepto de "coherencia" se debe, más bien, a que creo que el término simplemente no arroja mucha luz sobre lo que, en la práctica, conduce a los matemáticos a considerar a ciertos objetos como matemáticos, y a otros no. Creo que la teoría artefactual defendida en este trabajo puede remediar esta falla. La idea es sustituir el concepto de "coherencia" propuesto por Shapiro con otro concepto intuitivo e interno a la práctica matemática, esto es, el de "función matemática". Este concepto tiene la ventaja de encontrarse conectado, tanto a nuestras intenciones involucradas en la postulación de los objetos matemáticos, como a los resultados obtenidos en su uso, posibilitando así explicaciones mucho más tangibles y precisas de aquello que guía a la práctica matemática.

Otro problema que enfrenta el estructuralismo concierne la justificación de su premisa central, de que todos los objetos matemáticos son estructuras. Esta afirmación enfrenta problemas al intentar explicar nuestro tratamiento de ciertas estructuras simétricas, en las que existen objetos con exactamente las mismas relaciones estructurales que aun así son distinguidos en la práctica como objetos distintos. Este es el caso de i y $-i$, en las estructura de los números complejos[56]. Además, no resulta del todo natural pensar en los matemáticos antiguos como haber estado estudiando estructuras bajo la ilusión de que estaban estudiando objetos individuales.

La teoría artefactual no padece de este problema. Ésta admite que ciertos objetos matemáticos sean estructuras, sin necesidad de afirmar que todos lo son. Dado que el fundamento de las matemáticas se encuentra, bajo esta teoría, en la función que éstas cumplen, podemos admitir perfectamente que, en ocasiones, ésta es mejor servida por una estructura, mientras que en otras, por una colección de objetos independientes.

En conclusión, la teoría artefactual ofrece soluciones a muchos de los problemas que aquejan a otras posiciones sostenidas en la literatura actual. Más allá de cumplir con el reto, expuesto por Benacerraf, de conjuntar una semántica referencial con una epistemología no misteriosa, la teoría artefactual nos ofrece otra serie de ventajas valiosas: una historiografía no presentista, una explicación de la relación entre las teorías matemáticas informales y los sistemas formales, una explicación de la aplicabilidad de las

[56] Shapiro (2008) intenta ser una respuesta a esta dificultad.

matemáticas que no devalúa a los objetos de la matemática pura, una elaboración sobre el ficcionalismo que lo hace más sustantivo y plausible, y una relajación del estructuralismo que nos permite hacer justicia al carácter estructural de muchos de los objetos matemáticos sin violentar a aquellos que exhiben señas de otro tipo de naturaleza. Todo esto, me parece, nos debe motivar a continuar con la exploración y desarrollo de este tipo de teorías.

CONCLUSIONES.

Comencé esta investigación con la convicción de que el dilema de Benacerraf apuntaba, no hacia una disyuntiva entre platonismo y formalismo, sino hacia la necesidad de encontrar una tercera vía que conjuntara sus respectivas virtudes. Del platonismo habría que conservar el papel restrictivo que juegan los objetos matemáticos sobre la verdad matemática; del formalismo, el papel que las pruebas matemáticas juegan en la formación de estos objetos. Esta no es una idea del todo nueva; la podemos encontrar, expresada de diferentes maneras, en los "realismos dependientes de la práctica" sostenidos por Muntersbjorn, Hacking y Cole, así como en ciertas ideas propuestas por De Cruz y Macbeth. Mi propuesta original consistió en utilizar el concepto de "artefacto" para proveer un marco conceptual capaz de sistematizar estas propuestas, y para dotarlas de un soporte metafísico.

A pesar de las controversias que la rodean, la noción de artefacto resultó ser fértil de varias maneras. En primer lugar, el corpus literario existente en torno al funcionamiento de los artefactos epistémicos en la generación de conocimiento nos permitió considerar al caso matemático como uno más en el contexto de un fenómeno más amplio. En segundo lugar, nos permitió trazar una analogía, entre los artefactos y los objetos matemáticos, en la que las notaciones matemáticas juegan el papel del medio que proporciona al objeto matemático las capacidades de cumplir sus funciones, y nuestras prácticas matemáticas proporcionan la intencionalidad implícita en su uso. Una vez trazada esta analogía, el concepto de función artefactual, y en particular la teoría ICE asumida, nos permitió identificar a los distintos elementos de la práctica matemática que juegan un papel en la emergencia de estas funciones, y con ello en la constitución de los objetos matemáticos.

La ontología artefactual ofrece varias virtudes. La principal es la de proporcionarnos herramientas para responder al reto planteado por Benacerraf. Los artefactos son sujetos de un discurso que se acopla a una semántica referencial, y su naturaleza dependiente de nuestras prácticas nos otorga un acceso epistémico que nos permite explicar nuestro conocimiento de ellos, inclusive si son objetos inmateriales. El precio que hubo que pagar a cambio de este acceso fue el de renunciar al tipo de objetividad absoluta que se encuentra implícita en las concepciones platonistas y formalistas de las matemáticas. En su lugar, tenemos un tipo de objetividad artefactual, sostenida en las prácticas matemáticas, y en la función que los objetos generados dentro de ellas deben cumplir. Como vimos, este tipo de objetividad no congenia del todo con la supuesta necesidad de la verdad matemática y el carácter *a priori* del conocimiento matemático, pero nos permite explicar las intuiciones que son responsables de ellas.

Como lo indiqué desde un inicio, esta investigación tiene un carácter programático, y su objetivo era establecer la plausibilidad de la propuesta artefactual. Creo que este objetivo se logró, pero queda mucho por hacer en términos de su desarrollo y evaluación. La noción de artefacto es muy rica y compleja, y creo que valdría la pena desarrollar teorías artefactuales de los objetos matemáticos basadas en las distintas concepciones de los artefactos. En particular, creo que una concepción que enfatice en mayor medida su carácter evolutivo podría resultar muy interesante. Un tema que merece un tratamiento más detallado que el que recibió aquí es el de la epistemología de los artefactos matemáticos. En particular, hace falta una explicación más completa de cómo se da el paso de los medios concretos que utilizamos para hacer matemáticas a los modos inmateriales en los que los objetos matemáticos encuentran expresión.[57]

Es importante recordar que el concepto de función matemática que propicia estas constituciones es un concepto interno a cada una de las prácticas que conforman la historia de las matemáticas, de modo que no debemos esperar una explicación uniforme que cubra los diversos modos matemáticos, sino, probablemente, una explicación que refleje los distintos factores contextuales que intervinieron en su desarrollo. Esto apunta hacia, la que creo, es la mayor carencia de esta investigación, a saber, la falta de un tratamiento detallado de episodios particulares de la historia de las matemáticas, con el fin de evaluar la adecuación de la interpretación artefactual a dichos episodios, así como comparar su plausibilidad con aquella de las interpretaciones platonistas y formalistas de las matemáticas. Este tipo de estudio histórico queda pendiente para futuros trabajos.

[57] Un ejemplo de este tipo de estudio se encuentra en Netz (1999), en el que el surgimiento del modo diagramático de probar proposiciones matemáticas es explicado a partir de las prácticas concretas de los griegos antiguos.

BIBLIOGRAFÍA CITADA.

Azzouni, J. (2006) “How and Why Mathematics is Unique As a Social Practice”, en *18 Unconventional Essays on the Nature of Mathematics* (pp. 201-219). Springer New York.

----- (2013) “That We See That Some Diagrammatic Proofs Are Perfectly Rigorous”, *Philosophia Mathematica.* 21(3), pp. 323-338.

Balaguer, M. (1998) Platonism *and Anti-platonism in Mathematics*, Oxford University Press.

Baker, L.R. (2002), “On Making Things Up: Constitution and Its Critics”, *Philosophical Topics*, 30(1), pp. 31-51.

----- (2004) “The Ontology of Artifacts”, *Philosophical explorations*, *7*(2), pp. 99-111.

----- (2008) “The Shrinking Difference between Artifacts and Natural Objects”, *American Philosophical Association Newsletter on Philosophy and Computers*, vol. 7, no. 2, 2-5.

Benacerraf, P. (1973) “Mathematical Truth”, *The Journal of Philosophy*, Vol. 70, No. 19, Seventieth Annual Meeting of the American Philosophical Association Eastern Division. (Nov. 8, 1973), pp. 661-679.

Bloom, P. (2007) “Water as an Artifact Kind”, en Margolis y Laurence (Ed.), pp.150-56.

Brown, J.R. (1999) *Philosophy of Mathematcs. A Contemporary Introduction to the World of Proofs and Pictures.* Routledge.

Burgess, J.P. y Rosen, G. (1997) *A Subject with No Object: Strategies for Nominalistic Interpretation of Mathematics.* Oxford University Press.

Clark, A. (2001) *Mindware: An Introduction to the Philosophy of Cognitive Science,* Oxford University Press, Inc.

Cole, J. (2005) *Practice Dependent Realism and Mathematics*, tesis doctoral. The Ohio State University.

----- (2008) “Mathematical domains: Social constructs?” en *Proof and Other Dilemmas: Mathematics and Philosophy*, Ed. Gold, B. y Simons, R., The Mathematical Association of America, pp. 109-28.

----- (2009) "Creativity, Freedom, and Authority: A New Perspective in the Metaphysics of Mathematics", *Australasian Journal of Philosophy*, *87*(4), 589-608.

----- (2012) "Towards an Institutional Account of the Objectivity, Necessity and Atemporality of Mathematics", Philosophia Mathematica (III) 00, pp. 1-28.

Cummins, R. (1975) "Functional analysis", *Journal of Philosophy* 72, 741–765. Reprinted in Allen et al. (1998, pp. 169–196).

Davies, P.S. (2000) "The nature of natural norms: Why selected functions are systemic capacity functions". *Noûs* 34, 85–107.

----- (2001), *Norms of Nature: Naturalism and the Nature of Functions.* Cambridge, MA: MIT Press.

De Cruz, H. (2008) "An Extended Mind Perspective on Natural Number Representation", *Philosophical Psychology*, 21(4), 475-490.

----- (2010) "Mathematical Symbols as Epistemic Actions", en *Synthese. 190(1), 3-19.*

Dennett, D. (1990) "The Interpretation of Texts, People and Other artifacts", *Philosophy and phenomenological research*, pp. 177-194.

Elder, C. (2007) "On the Place of Artifacts in Ontology", en Margolis y Laurence (Ed.), pp. 33-51.

Field, H. (1980) *Science Without Numbers: A Defense of Nominalism*, Blackwell.

----- (1989) *Realism, Mathematics and Modality*, Blackwell.

Franklin, J. (2008) "Aristotelian Realism", *Philosophy of Mathematics,* Amsterdam: Elsevier/North Holland, pp. 101-153.

Frege, G. (1980) *Philosophical and Mathematical Correspondence*, Ed, G. Gabriel, H. Hermes, F. Kambartel, C. Thiel, and A. Veraart. Abr. B. McGuinness and trans, H. Kaal, Chicago, University of Chicago Press.

Gödel, K. (1947) "What is Cantor's Continuum Problem?", en *Philosophy of Mathematics, Selected Readings*, Second Edition, Ed. Benacerraf, P. y Putnam, H., Cambridge University Press, 1964.

Gould, J. L. (2007) "Animal Artifacts", en Margolis y Laurence (Ed.), pp. 249-266.

Grandy, R. (2007) "Artifacts: Parts and Principles", en Margolis y Laurence (Ed.), pp. 18-32.

Griffiths, P. (1993) “Functional analysis and proper functions”. *British Journal for the Philosophy of Science* 44, 409–422. Reprinted in Allen et al. (1998, pp. 435–452).

Hacking, I. (2009) *Scientific Reason*, the Institute for Advanced Studies in Humanities and Social Sciences, National Taiwan University, Taipei, Taiwan.

Hale, B. (1987) *Abstract Objects*, Oxford, Basil Blackwell.

Hardy, G.H. (1929) “Mathematical Proof”, *Mind*, pp. 1-25.

Haslanger, S. (1995) “Ontology and social construction.” *Philosophical Topics*, *23*(2), pp. 95-125.

Hilpinen, R. (2009) “Artifact”, en *Stanford Encyclopedia of Philosophy*.

Houkes, W. (2006) “Knowledge of artefact functions” en *Studies in History and Philosophy of Science*, Núm. 37, pp. 102-113.

Houkes, W. y Vermaas, P. (2006) “Technical functions: a drawbridge between the intentional and structural natures of technical artefacts”, *Studies in History and Philosophy of Science Part A* 37.1, pp. 5-18.

----- (2011) *Technical Functions: On the Use and Design of Artefacts*, Springer.

Katz, J. (1997) *Realistic Rationalism*, MIT Press.

Kitcher, P. (1993) “Function and design”, en P. A. French, T. E. Uehling, and H. K.Wettstein (Eds.), *Midwest Studies in Philosophy*, Volume XVIII, pp. 379–397. Minneapolis: University of Minnesota Press. Reprinted in Allen et al. (1998, pp. 479–503).

Knuuttila, T. (2005) *Models as Epistemic Artefacts: Towards a Non-Representationalist Account of Scientific Representation*, Philosphical Studies from the University of Helsinki 8.

----- (2011) “Modeling and Representing, an Artefactual approach to model-based representation”. *Studies In History and Philosophy of Science Part A*, *42*(2), pp. 262-271.

Kornblith, H. (2007) “How to Refer to Artifacts”, en Margolis y Laurence (Ed.), pp. 138-149.

Krieger, M.H. (1991) “Theorems As Meaningful Cultural Artifacts: Making the World Additive”, *Synthese* 88, pp. 135-154.

Kroes, P. (2012) *Technical Artefacts: Creations of Mind and Matter*, Springer Netherlands.

Krohs, U. (2009) "Functions as based on a concept of general design.", *Synthese*, 166(1), pp. 69–89.

Lakatos, I. (1976) *Proofs and Refutations: The Logic of Mathematical Discovery*, Cambridge University Press.

(1978) *Mathematics, Science and Epistemology*, Cambridge University Press, UK.

Macbeth, D. (2012) Seeing How It Goes: Paper-and-Pencil Reasoning in Mathematical Practice. *Philosophia Mathematica*, 20(1), 58-85.

----- (2014) *Realizing Reason: A Narrative of Truth and Knowing.* Oxford.

Maddy, P. (1980) "Perception and Mathematical Intuition", en *The Philosophical Review*, Vol. 89, No. 2, pp. 163-196.

----- (1990) *Realism in Mathematics*, Clarendon Press, Oxford.

----- (1992) "Indispensabilty and Practice", *The Journal of Philosophy*, Vol. 89, No. 6, pp. 275-289.

----- (2011) *Defending the Axioms*, oxford University Press, Great Britain.

Margolis, E. y Laurence, S. (Ed.) (2007) *Creations of the Mind: Theories of Artifacts and their Representation.* Oxford University Press, Great Britain.

Martínez, S. (2013) "Technological Scaffoldings for the Evolution of Culture and Cognition", *Developing Scaffolds in Evolution, Culture, and Cognition*, 249.

Millikan, R. (1984) *Language, Thought, and Other Biological Categories: New Foundations for Realism.* Cambridge, MA: MIT Press.

----- (1993) *White Queen Psychology and Other Essays for Alice.* Cambridge, MA: MIT Press.

Muntersbjorn, M. (1999) "Naturalism, Notation, and the Metaphysics of Mathematics", *Philosophia Mathematica*, 7(2), 178-199.

----- (2003) "Representational Innovation and Mathematical Ontology", Synthese, 134(1), 159-180.

----- (2007) "Mathematical Progress as Increased Scope", en *Perspectives On Mathematical Practices* (pp. 107-117). Springer Netherlands.

Neander, K. (1991) "Functions as selected effects: The conceptual analyst's defense." *Philosophy of Science* 58, 168–184.

Netz, R. (1999) *The Shaping of Deduction in Greek Mathematics: A Study in Cognitive History*, Cambridge University Press.

Núñez, R., (2006) “Do Real Numbers Really Move? Languahe, Thought, and Gesture: The Embodied Cognitive Foundations of Mathematics”, en *18 unconventional essays on the nature of mathematics,* pp. 160-181.

Panza, M. (2012) “The twofold role of diagrams in Euclid’s plane geometry”, *Synthese*, 186(1), pp. 55-102.

Preston, B. (1998) “Why is a wing like a spoon? a pluralist theory of functions.” *Journal of Philosophy* 95, 215–254.

Rusanen, A. y Lappi, O. (2010) “Scientific Models as Information-Carrying Artifacts.”, *Phil-sci Archive.*

Scheele, M. (2006) “Function and Use of Technical Artefacts: Social Conditions of Function Ascriptions”, *Studies In History and Philosophy of Science Part A*, *37*(1), pp. 23-36.

Schlimm, D. (2012) “Mathematical Concepts and Investigative Practice”, *Scientific concepts and investigative practice*, 3, pp. 1-20.

Schwartz, S. (1978) “Putnam on Artifacts”, *Philosophical Review*, 87.4 pp. 566-574.

----- (1983) “Reply to Kornblith and Nelson”, *Southern Journal of Philosophy*, 21, pp. 475-479.

Searle, J. (1995) *The Construction of Social Reality*. New Haven: Free Press.

Shapiro, S. (2000) *Thinking about mathematics*, Oxford University Press.

----- (2008) “Identity, Indiscernibility, and ante rem Structuralism: The Tale of *i* and –*i*”, *Philosophia Mathematica* (III) 16, pp. 285–309.

Sperber, D. (2007) “Seedless Grapes: Nature and Culture”, en Margolis y Laurence (Ed.), pp. 124-137.

Sterelny, K. (2004) “Externalism, Epistemic Artefacts and the Extended Mind”, *The externalist challenge*, pp. 239-254.

Suárez, M. (2003) “Scientific Representation: Against Similarity and Isomorphism”, *International Studies in the Philosophy of Science*, 17(3), pp. 225-244.

Tennant, N. (1997) “On the Necessary Existence of Numbers”, *Nous*, 3, pp. 307-36.

Thomasson, A. (2003) “Realism and Human Kinds”, *Philosophy and Phenomenological Research* 67.3, pp. 580-609.

----- (2007) “Artifacts and Human Concepts”, en Margolis y Laurence (Ed.), pp. 52-73.

----- (2009) “Artifacts in Metaphysics”, en Philosophy of Technology and Engineering Sciences, ed. Antoine Meijers, Elsevier, Netherlands, pp. 191-212.

Uzquiano, G. (2004) “The Supreme Court and the Supreme Court Justices: A Metaphysical Puzzle”, *Noûs*, pp. 135-153.

Van Inwagen, P. (1990) *Material Beings*, Cornel University Press, USA.

Wright, C. (1983), *Frege’s Conception of Numbers as Objects*. Aberdeen University Press.