UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

UNA CUESTIÓN SOBRE INTEGRABILIDAD

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A:

SERGIO NIEVES DÍAZ

DIRECTOR DE TESIS:
DR. VALENTE SANTIAGO VARGAS

2015

Hoja de Datos del Jurado

1. Datos del alumno
Nieves
Díaz
Sergio
67 97 25 83
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
307242725

2. Datos del tutor
Dr.
Valente
Santiago
Vargas

3. Datos del sinodal 1
Dra.
Diana
Avella
Alaminos

4. Datos del sinodal 2
M. en C.
Julio César
Cedillo
Sánchez

5. Datos del sinodal 3
Dr.
Octavio
Mendoza
Hernández

6. Datos del sinodal 4
M. en C.
Clotilde
García
Villa

7. Datos del trabajo escrito.
Una cuestión sobre integrabilidad
92 p
2015

A mi familia y amigos…
ustedes saben quiénes son.

Wir müssen wissen,
wir werden wissen.

David Hilbert

No hay peor vicio para un matemático
que el obviarlo todo.

Índice general

Agradecimientos

Muchas horas, días y meses han pasado desde la primera vez que pisé esta facultad. He pasado (y ha pasado) tanto tiempo aquí que, llegado el momento de escribir estas líneas finales, me es complicado plasmar lo que quiero de la mejor manera. Tal vez se deba a la nostalgia o la alegría del momento; tal vez se deba a que no preparé ni ejercité mi escritura de la mejor manera; o tal vez, simplemente, estoy comenzando a fosilizarme tanto intelectual como académicamente (esto último es opcional XD); no obstante, sea cual sea el motivo, trataré de agradecer a todas las personas que han estado aquí conmigo y por las cuales me he esforzado en concluir esta bella etapa de mi vida.

Primeramente, quiero agradecer a mis padres, a mi hermana y a mi familia por lo mucho que me han dado. Mamá, papá, sé que les he ocasionado problemas y que los he llegado a defraudar en ocasiones, pero, a pesar de lo sucedido, ustedes nunca, y lo repito, NUNCA me dieron la espalda; esto, más que agradecerlo, lo valoro y aprecio en demasía. Quiero que sepan que lo poco que soy, se lo debo enteramente a ustedes y que, de tener algún día una familia, me gustaría aspirar a ser, al menos, la millonésima parte de lo que ustedes son. Hermana, bueno, hermanita, quiero hacerte saber que tú también fuiste parte fundamental en estos meses finales y desde un tiempo atrás, ya que de no ser por tu cariño y preocupación incondicional disfrazados de insistencia, no podría estar escribiendo estas líneas en estos momentos: ¡Muchas gracias! Te quiero mucho, nunca lo olvides.

A mi gran familia con la que vivo la mayor parte del tiempo (en serio es grande): tía Mari, tío Manuel, Tere, Olga, Julio, Jaqueline, Ferchis, tío Gil, tía Isabel, Ángel, Yazmín, Jonathan, tía Sandra, tío Pancho, Giovanni, Airam, Ivonne, Panchito, Héctor, tío Cándido, tía Adela (q.e.p.d), Luis, Carlos, tío Chucho. Gracias por abrirme las puertas de su hogar y, sobre todo, gracias por soportarme durante estos años. No sé si he sido un sobrino, primo, o tío ejemplar (jaja, qué viejo), pero ustedes saben que pueden contar conmigo y que los quiero y aprecio mucho.

A mi otra gran familia (sí, también es grande) que, pese a la distancia, siempre ha preguntado por mí y se ha interesado por mis andares: tío Pedro, tía Reyna, Josué, Jessi, Jona, tía Mili, Chei, Wester, Grecia, tío Fili, abuelita Bici (q.e.p.d.), tía Luz, Toni, Fer, Diego, tío Alfonso, tío Manuel, Juan de Dios, Karen, tía Rochi, Montse, Silvia, Cinthya, Ricardo, tía Blanca, Monse, Vero, Andrés, tío Jorge, tía Brenda, tía Himelda, David, tía Lupe, tía Pilar, tío Lencho. ¡Gracias por su interés y consideración!

Mención especial para mi tío Eliot que, pese a no verlo en mucho tiempo, le guardo un gran cariño y respeto. Espero verlo pronto.

Seguidamente, quiero agradecer a todos los maestros que conforman mi jurado y a todos aquellos de los que tuve la fortuna de aprender:

Valente, te agradezco mucho el tiempo y el riesgo tomado (debido a que no nos conocíamos) para ayudarme a concluir este trabajo que, pese a lo sencillo que pueda resultar, nos dejó pequeñas enseñanzas para el futuro. Estoy seguro de que seguiremos en contacto y conociéndonos.

Diana, te agradezco los comentarios y las enseñanzas que me brindaste en este tiempo, de igual forma, agradezco tu compromiso para con la tesis y la revisión de la misma. Eres una gran maestra y amiga. Espero ayudarte en lo que pueda algún día.

César, pese a que no salió el plan como esperábamos, quiero agradecerte todo el tiempo que tuviste conmigo y con los cuates (tu cuate jaja) en aquellas horas de clase y discusión. Te considero mi amigo y una de las pocas personas a las que puedo recurrir por un consejo sin titubear.

Dr. Octavio, pese a que sólo hemos platicado una vez, le doy las gracias por el tiempo que empleó en la revisión de mi trabajo y por aconsejar a Valente en esta pequeña aventura.

Clotilde, muchas gracias por tu disposición y por tus clases. Pocas son las maestras que he conocido con tu carisma a la hora de enseñar.

A todos mis maestros: Guillermo Gómez Alcaraz, Reyna Pérez Tiscareño, Eugenio Garnica Vigil, Francisco Struck, Javier Fernández, Javier Bracho, Patricia Cortés, César Rincón, Miguel Ángel García Álvarez, Ramón Plaza, Antonio Lascurain, Edith Corina, José Cruz Sagal, Guillermo Grabinsky Steider, Sandra Palau, Alejandro Illanes, Juan José Montellano, Antonio García Flores, Carlos Lingan y Alejandro Garciadiego. ¡Muchas gracias a todos!

Agradezco de forma muy especial a Reyna Tiscareño, Francisco Struck, Javier Fernández, Miguel Ángel García Álvarez y al Dr. Guillermo Grabinsky

por tan fantásticas clases y enseñanzas. Maestros y personas como ustedes me ayudaron a seguir en el camino. Carlos Ivorra, gracias por su tiempo al responder mis dudas.

Toca el turno de agradecer a mis amigos por todo el tiempo que pasamos juntos, por las risas, los momentos, por sus consejos, por sus jaladas (sin albur) y, sobre todo, por su bella y preciada amistad:

Mis amigos de secundaria que tanto extraño, pero que, siempre que se presenta la ocasión, disfruto de su compañía: Julio Trigo, Marcos, Xexia, Adonis, Abraham, Cristian, Denisse, Maité, Yiyo, Rommel, Manolo, Carlos Bola, Naarman, Betsy, Andrea, Aleyda, Alfonso. (Juan Carlos, q.e.p.d., esto también va por ti).

Mis amigos de preparatoria con los que disfruto de vez en cuando de nuestras amenas reuniones y encuentros: Aridahí, alias la ardilla; Nancy, alias Nancy; Ara e Ilse, alias las pequeñas; Diana, alias Diana; Adolfo, alias la roca y Martín, alias la nena, el gay, etc. (recientemente me han confirmado que se hace pasar por godínez). No me olvido de la médula del chalesco: Dalila*, Chalé y Tayde; asimismo, menciono con especial cariño a mi amiga Paty con la que recientemente he contactado y a la que animo a seguir adelante desde estas líneas.

Mis amigos (cuasi-hermanos) de la facultad: Rodrigo, Francisco, Pablín, Alejandro y Erik. Chicos, no sé qué haré sin ustedes; son, simplemente, geniales e inigualables. No olvidaré todos los momentos que he pasado con ustedes y todo lo que aprendí a su lado. Espero seguir viéndolos por mucho tiempo. Mención aparte (y no porque sean menos especiales), menciono a Sofía, Sofis, César, Armandini y Diana Estrella. Con ustedes he aprendido un sinfín de cosas nuevas también y me han ayudado mucho a no olvidarme de mi otra gran pasión: el arte. Espero que por lo menos haya podido retribuir una pequeña parte de lo que me han brindado. Los extraño mucho.

No me olvido por supuesto de todos ustedes: Luz, Esther, Karla, Inti, Gil, Edgar, Dr. Edmundo, Zuleima, Karen, Chuy, Roberto, David, Joel, Mariana, Gustavo, Danaé, Artemio, Carmen, Samantha, Álex, Alan. Gracias por ser tan buenos y pacientes conmigo.

Finalmente, quiero agradecer a mi preciada y querida universidad, UNAM, por todo lo que me has brindado en ésta, tu hija, la Facultad de Ciencias. Gracias por formarme académica y espiritualmente. Ya que no me salen bien los goyas, al menos, quiero escribirlos con la efusividad con la que me gustaría gritarlos:

¡GOYA! ¡GOYA! ¡CACHÚN, CACHÚN, RA, RA! ¡CACHÚN, CACHÚN, RA, RA! ¡GOYA! ¡UNIVERSIDAD!

Introducción

El segundo teorema fundamental del cálculo nos dice que si f es una función integrable en el intervalo $[a,b]$ y $f = g'$ para alguna función g, entonces

$$\int_a^b f = g(b) - g(a)$$

Una forma muy simple y vaga de dar a entender la idea del teorema- antes de probarlo- es decir que la derivación e integración son operaciones inversas; es decir, si nosotros derivamos y luego integramos (o viceversa) cierta función, obtendremos, en principio, la función original.

Con esta idea en mente, muchos de los cálculos que se realizan para obtener ciertas integrales se simplifican bastante, ya que, en esencia, el teorema nos dice que si queremos calcular cierta integral definida sólo tenemos que encontrar una función tal que al derivarla obtengamos la función que estamos integrando. Sin embargo, como ocurre en muchas ocasiones, esta tarea resulta un tanto complicada, por no decir, imposible. Es entonces, cuando en nuestros cursos de cálculo se nos hace saber que ciertas integrales son imposibles de calcular en el sentido que acabamos de explicar, por lo cual, debemos recurrir a métodos numéricos o de aproximación para poder resolver el problema. No obstante, muchos de los estudiantes desconocen la razón por la cual dichas integrales son imposibles de expresar en términos elementales, esto es, en términos de una función g como la del teorema que sea una combinación algebraica finita de las funciones que conocemos (exponenciales, polinomios, raíces, senos, cosenos, logaritmos, etc.).

La cuestión de saber cuándo la integral de una función es elemental, a pesar de ser una pregunta de formulación sencilla y natural, no fue tratada con rigurosidad hasta el siglo XIX (aunque es sabido que desde los tiempos de Newton y Leibniz se empezaron a encontrar integrales que presentaban este tipo de problema, así como varios de los algoritmos y métodos para calcular integrales que comúnmente conocemos hoy en día).

Fue Joseph Liouville (1809-1882) quien comenzó a atacar el problema de la integración finita de forma seria mediante una serie de artículos publicados entre los años de 1833 y 1841; en estos artículos, aparte de dar las bases para atacar el problema (lo que entenderemos por una función elemental, sus propiedades, etc.), Liouville encuentra algunos resultados que ayudan a determinar la naturaleza no elemental de cierto tipo de funciones y, más aún, resuelve casi por completo el problema. Debido a esto, las contribuciones a la teoría —que hoy se conoce como integración en términos finitos— y a los trabajos de Liouville fue muy escasa en lo que restó del siglo. Fue hasta los inicios del siglo XX que la disciplina fue retomada nuevamente.

Entre los años de 1900 y 1930, los trabajos de D.D Mordukhai-Boltovskoi y Joseph Fels Ritt reavivaron el interés en el problema al observar, principalmente, las aplicaciones en el campo de las ecuaciones diferenciales. Así mismo, se empezó un trabajo de recopilación y exposición por parte de personas como Gino Loria y el propio Ritt con el fin de divulgar los trabajos de Liouville entre la comunidad matemática de su tiempo. Ya en el terreno teórico, la más importante contribución a la teoría de la integración en términos finitos fue dada algunos años más tarde (en 1946) por el matemático ruso Alexandre Ostrowski, quien, extendiendo el resultado clásico obtenido por Liouville, logró tratar el problema desde un punto de vista algebraico y ya no analítico, tal y como en su momento llegó a plantearlo el propio Liouville.

La idea de Ostrowski fue la que simplificó, significativamente, muchas de las pruebas de los resultados obtenidos por Liouville. De esta forma, entre 1968 y 1970, los artículos escritos por Maxwell Rosenlicht y R.H. Risch dieron la puntilla final al lograr, abstracta y algebraicamente, establecer varios de estos resultados de una forma mucho más general y simple.

El objetivo de esta tesis es desarrollar la teoría necesaria para responder —al menos, para cierto tipo de casos— la pregunta de cuándo la integral de una función elemental es elemental y, así mismo, demostrar que algunas integrales de funciones conocidas y que suelen aparecer a menudo, son no elementales. La tesis se divide en tres capítulos y una sección de apéndices con las nociones y resultados necesarios para abordar la lectura de la misma.

En el capítulo 1 se introducen los conceptos de campo diferencial, extensión de campo diferencial y extensión de campo elemental, así como algunas propiedades y resultados.

El capítulo 2 está enfocado en el enunciado y la respectiva demostración del teorema de Liouville en su versión general.

En el capítulo 3 se aterrizan gran parte de las definiciones y resultados al campo de funciones meromorfas que es en el que estaremos interesados y se muestran varios ejemplos de funciones sin primitiva elemental.

La tesis termina con una serie de conclusiones y recomendaciones para el lector interesado en los temas relacionados con la teoría desarrollada y no desarrollada en el presente trabajo.

Es importante recalcar que aunque la tesis trata de considerar las cuestiones principales de la teoría de integración en términos finitos, ésta no abarca todo lo relacionado y desarrollado en la misma ya que, como ocurre en muchas ocasiones, el material resulta abundante y extenso. Sin embargo, esperamos que las anotaciones y recomendaciones resulten suficientes para el lector curioso e insatisfecho.

Capítulo 1

Conceptos básicos del álgebra diferencial

En este primer capítulo definiremos y trabajaremos con la herramienta necesaria para abordar el Teorema de Lioville que se verá en el capítulo 2. Dicha herramienta consta de algunas definiciones y resultados básicos del álgebra diferencial.

1.1. Campos diferenciales

Enunciamos, primeramente, la definición de campo diferencial, así como algunas observaciones de la misma.

Definición 1.1.1 (Campo diferencial). *Sea F un campo y $+ : F \times F \longrightarrow F$, $\cdot : F \times F \longrightarrow F$ las operaciones suma y producto respectivas sobre el mismo. F es un campo diferencial* [1] *si y sólo si existe un operador del campo en el campo, $d : F \longrightarrow F$, tal que satisface las siguientes condiciones*

i) $d(a + b) = d(a) + d(b)$

ii) $d(ab) = d(a)b + d(b)a$

[1]En realidad, el concepto de campo diferencial se engloba dentro de un concepto más general que es el de anillo diferencial (véase [4]), del cual pueden obtenerse varios de los resultados que aquí probaremos. Sin embargo, para nuestros fines, no será necesario ir tan lejos.

para todo par de elementos $a, b \in F$. *A dicho operador le llamaremos una derivación sobre* F *y, convenientemente, denotaremos (cuando no se preste a confusión) la imagen de un elemento bajo el operador* d *por* a'*, i.e.* $d(a) = a'$.

Las condiciones *i)* y *ii)* de la definición de campo diferencial nos hacen pensar rápidamente en las propiedades conocidas de la derivación de las funciones del cálculo. No debería extrañarnos entonces, que otras propiedades obtenidas a partir de éstas se satisfagan también para los campos diferenciales. Antes de enunciar la proposición que encierra dichas propiedades, daremos una definición técnica para distinguir ciertos elementos especiales de un campo diferencial.

Definición 1.1.2. *Sea* F *un campo diferencial. Dado un par de elementos* $a, b \in F$ *diremos que*

i) a *es una constante (respecto a la derivación con la que estemos trabajando en* F*) si y sólo si* $a' = 0_F$*, donde* 0_F *es el cero del campo* F*. (Muchas veces obviaremos el subíndice* F*, salvo que se preste a confusión).*

ii) a *es una exponencial de* b *(o* b *es un logaritmo de* a*) si y sólo si* $b' = \frac{a'}{a}$*. Aquí asumimos la restricción* $a \neq 0_F$.

Proposición 1.1.1. *Sea* F *un campo diferencial. Entonces para todo par de elementos* $a, b \in F$ *se cumple que:*

1) $(\frac{a}{b})' = \frac{a'b - ab'}{b^2}$*, si* $b \neq 0_F$*. (Regla del cociente).*

2) $(0_F)' = 0_F$ *y* $(1_F)' = 0_F$*. Donde* 1_F *es el neutro multiplicativo del campo* F.

3) $(a^n)' = na^{n-1}a'$ *para toda* $n \in \mathbb{Z}$*. Donde* na *y* a^n *corresponden a la notación aditiva y multiplicativa en los campos, respectivamente. Cuando* $n \leq 0$ *supondremos que* $a \neq 0_F$.

4) $(-a)' = -(a')$*. Donde el* $-$ *indica el inverso aditivo del elemento en* F.

5) $(ab)' = a(b')$ *si* a *es una constante.*

Demostración. Utilizaremos las propiedades de la derivación enunciadas en la definición.

1) Dado que $b \neq 0_F$, consideremos su inverso multiplicativo b^{-1}, tal que $bb^{-1} = 1_F$. Entonces, $a' = (1_F a)' = ((bb^{-1})a)' = (b(b^{-1}a))'$, por lo cual

$$a' = b'(b^{-1}a) + b(b^{-1}a)'$$

despejando el término que queremos, concluimos que

$$(ab^{-1})' = a'b^{-1} - b'(b^{-1})^2 a = \frac{a'b}{b^2} - \frac{b'a}{b^2}.$$

2) Tenemos que $(0_F)' = (0_F + 0_F)' = (0_F)' + (0_F)'$, entonces, por la ley de cancelación para la suma, concluimos que $(0_F)' = 0_F$. Ahora, $(1_F)' = (1_F \cdot 1_F)' = 1_F(1_F)' + 1_F(1_F)' = (1_F)' + (1_F)'$, entonces, nuevamente, cancelando, obtenemos que $(1_F)' = 0_F$.

3) Haremos la prueba por inducción para el caso $n \in \mathbb{N}$. El caso $n = 0$ se sigue considerando que $0a = 0_F$ para cualquier elemento de F.

   Si $n = 1$, entonces, dado que $a^1 = a$, tenemos que $(a^1)' = a'$, pero $1a^{1-1}a' = 1a^0 a' = 1(1_F a') = a'$.

   H.I. Para $n = k$, tenemos que $(a^k)' = ka^{k-1}a'$.

   P. d. que $(a^{k+1})' = (k+1)a^k a'$.

   Sabemos que $(a^{k+1})' = (a \cdot a^k)' = (a^k)'a + a'a^k$, entonces, aplicando la H.I., concluimos que

$$(a^{k+1})' = (ka^{k-1}a')a + a'(a^k) = ka^k a' + a'(a^k) = (k+1)a^k a'.$$

   Ahora, para el caso $m = -n$ con $n \in \mathbb{N}$, bastará con recordar que $a^{-n} = (a^{-1})^n$ para toda $n \in \mathbb{N}$, y aplicar el caso ya probado para a^{-1}.

4) Tenemos que $0_F = a + (-a)$ para todo $a \in F$, entonces, por 1), $0_F = (0_F)' = (a + (-a))' = a' + (-a)'$, por lo tanto, $(-a)' = -(a')$.

5) Si a es una constante, entonces $a' = 0_F$, por lo cual, $(ab)' = a(b') + a'b = a(b')$.

$\square$

A continuación, demostraremos otra propiedad importante de la derivación en F.

Proposición 1.1.2. *Sea F un campo diferencial, $a_1, \ldots, a_n \in F$ elementos no nulos y $\nu_1, \ldots, \nu_n \in \mathbb{Z}$. Entonces*

$$\frac{(a_1^{\nu_1} \ldots a_n^{\nu_n})'}{a_1^{\nu_1} \ldots a_n^{\nu_n}} = \nu_1 \frac{a_1^{'}}{a_1} + \ldots + \nu_n \frac{a_n^{'}}{a_n}.$$

Demostración. Por inducción sobre n.

Si $n = 1$, por 2) del teorema anterior, tenemos que $\frac{(a_1^{\nu_1})'}{a_1^{\nu_1}} = \frac{\nu_1 a_1^{\nu_1 - 1} a_1^{'}}{a_1^{\nu_1}}$ $= \nu_1 \frac{a_1^{'}}{a_1}$.

H.I. Para $n = k$, se tiene que $\frac{(a_1^{\nu_1} \ldots a_k^{\nu_k})'}{a_1^{\nu_1} \ldots a_k^{\nu_k}} = \nu_1 \frac{a_1^{'}}{a_1} + \ldots + \nu_k \frac{a_k^{'}}{a_k}$.

P.d. que $\frac{(a_1^{\nu_1} \ldots a_{k+1}^{\nu_{k+1}})'}{a_1^{\nu_1} \ldots a_{k+1}^{\nu_{k+1}}} = \nu_1 \frac{a_1^{'}}{a_1} + \ldots + \nu_{k+1} \frac{a_{k+1}^{'}}{a_{k+1}}$.

Pero

$$\begin{aligned}
\frac{(a_1^{\nu_1} \ldots a_{k+1}^{\nu_{k+1}})'}{a_1^{\nu_1} \ldots a_{k+1}^{\nu_{k+1}}} &= \frac{(a_1^{\nu_1} \ldots a_k^{\nu_k})(a_{k+1}^{\nu_{k+1}})' + (a_{k+1}^{\nu_{k+1}})(a_1^{\nu_1} \ldots a_k^{\nu_k})'}{a_1^{\nu_1} \ldots a_{k+1}^{\nu_{k+1}}} \\
&= \frac{(a_1^{\nu_1} \ldots a_k^{\nu_k})(a_{k+1}^{\nu_{k+1}})'}{a_1^{\nu_1} \ldots , a_{k+1}^{\nu_{k+1}}} + \frac{(a_1^{\nu_1} \ldots a_k^{\nu_k})'}{a_1^{\nu_1} \ldots a_k^{\nu_k}}
\end{aligned}$$

usando la H.I., el inciso 2) de la proposición anterior y cancelando algunos factores, obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{(a_1^{\nu_1} \ldots a_{k+1}^{\nu_{k+1}})'}{a_1^{\nu_1} \ldots a_{k+1}^{\nu_{k+1}}} &= \frac{(a_{k+1}^{\nu_{k+1}})'}{a_{k+1}^{\nu_{k+1}}} + (\nu_1 \frac{a_1^{'}}{a_1} + \ldots + \nu_k \frac{a_k^{'}}{a_k}) \\
&= \nu_1 \frac{a_1^{'}}{a_1} + \ldots + \nu_{k+1} \frac{a_{k+1}^{'}}{a_{k+1}}.
\end{aligned}$$

□

Ahora que hemos visto algunas propiedades de los campos diferenciales veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 1.1.1. *Dado un campo F, podemos definir una derivación $d_t : F \longrightarrow F$ como sigue*

$$d_t(a) = 0_F.$$

Es muy fácil ver que d_t funciona como una derivación para F. Dicha derivación es conocida como la derivación trivial.

Ejemplo 1.1.2. *Sea $F = \mathbb{C}(z)$ el campo de las funciones racionales. Considerando la derivación compleja usual, se tiene que $\mathbb{C}(z)$ es un campo diferencial.*

Más adelante trabajaremos con otro campo que tendrá a $\mathbb{C}(z)$ como subcampo y que será, de igual forma, un campo diferencial.

El siguiente ejemplo nos muestra, de forma anticipada, que la característica del campo con el cual trabajemos jugará un papel importante en lo que desarrollemos.

Ejemplo 1.1.3. *Si F es un campo finito de característica p y $d : F \longrightarrow F$ es una derivación para F, entonces $d = d_t$ (la derivación trivial).*

Para corroborar lo que afirmamos, consideremos la transformación $\phi_p : F \longrightarrow F$ dada por $\phi_p(a) = a^p$. Esta transformación es conocida como el automorfismo de Frobenius. Usaremos el hecho de que, como su nombre indica, ϕ_p es un isomorfismo de F en F.

Dado $b \in F$, como ϕ_p es suprayectiva e inyectiva, tenemos entonces que existe un único elemento $a \in F$ tal que $\phi_p(a) = a^p = b$. Aplicando la derivación d a esta última identidad y el inciso 3) de la proposición 1.1.1 obtenemos que

$$d(b) = d(a^p) = pd(a)a^{p-1}.$$

Como F es de característica p, concluimos que $d(b) = 0$ para todo $b \in F$, con lo cual, concluimos que $d = d_t$.

Antes de avanzar a una nueva sección, proponemos al lector el siguiente resultado relacionado con la estructura del conjunto de las constantes en un campo diferencial dado. La prueba de dicho resultado no es complicada, por lo cual, se omite.

Proposición 1.1.3. *Sea F un campo diferencial. Denotemos por $\mathcal{C} = \{a \in F : a' = 0_F\}$. Entonces, $\mathcal{C}$ es un subcampo de F.*

1.2. Extensiones de campos diferenciales y extensiones de campos elementales

Al estudiar ciertas estructuras matemáticas como espacios vectoriales, espacios topológicos, espacios de medida, etc. y sus respectivas transformaciones o funciones entre ellos, surge, naturalmente, la pregunta de si es posible extender dichas transformaciones a conjuntos más grandes (que contengan al conjunto base), de tal forma que las propiedades de la transformación original se preserven. Entre algunos de los resultados que ejemplifican la idea anterior tenemos el teorema de Hahn-Banach, el teorema de extensión de Caratheodory o el teorema de extensión de Tietze; así pues, podemos preguntarnos, del mismo modo, si es posible extender la derivación de un campo diferencial F, a un conjunto más grande que, para nuestro caso, sería una extensión de campos de F. Como veremos en esta sección, esto es posible y, bajo ciertas condiciones, podremos construir y garantizar la unicidad de la extensión de la derivación inicial. Primero enunciaremos la definición de extensión diferencial para un campo dado.

Definición 1.2.1 (Extensión diferencial)**.** *Dado un campo diferencial F y K una extensión de F, diremos que K es una extensión diferencial de F si y sólo si K posee una derivación sobre sí misma que extiende a la de F. Esto es, existe $D : K \longrightarrow K$ derivación sobre K, tal que $D|_F = d$, donde d es la derivación en F.*

En general, se puede probar (véase [4]) que dado un campo diferencial F de característica cero y K una extensión de F, es posible extender la derivación de F a todo K, de tal forma que K sea una extensión diferencial de F, sin embargo, para nuestros fines, nos bastará con probar el caso en el que K sea una extensión algebraica de F o una extensión trascendente simple de F.

Probaremos primeramente una proposición que muestra la relación entre la característica del campo y la posible anulación de la derivada de los polinomios con coeficientes en el campo.

Proposición 1.2.1. *Sea F un campo y $F[x]$ el correspondiente anillo de polinomios. Consideremos el operador $D_1 : F[x] \longrightarrow F[x]$ dado por:*

$$D_1(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i) = \sum_{i=0}^{n} i a_i x^{i-1}$$

entonces

1) $D_1(p(x)+q(x)) = D_1(p(x))+D_1(q(x))$ y $D_1(p(x)q(x)) = p(x)D_1(q(x))+q(x)D_1(p(x))$ para todo par $p(x), q(x) \in F[x]$.

Si $p(x) \in F[x]$ es un polinomio de grado $n \geq 1$, entonces

2) $p'(x) = D_1(p(x))$ tiene grado $n-1$ (en particular, $p'(x) \neq 0$) cuando la característica de F es cero.

3) Cuando la característica de F es $k > 0$, $p'(x) = 0$ si y sólo si $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, donde $0 = a_i \in F$ si k no divide a i.

Demostración. Consideremos dos polinomios $p(x), q(x) \in F[x]$ y expresémoslos como $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ y $q(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j$ con a_n y b_m distintos de cero.

1) Notemos que este inciso nos dice que el operador D_1 se comporta, esencialmente, como una derivación sobre el anillo de polinomios $F[x]$.

   La prueba de que $D_1(p(x) + q(x)) = D_1(p(x)) + D_1(q(x))$ la omitimos debido a que es un cálculo directo sin muchas complicaciones. Teniendo como base el caso para dos polinomios, una rápida inducción o una reducción de sumandos garantizan el resultado para l polinomios ($l \in \mathbb{N}$). Veamos la prueba del producto.

   Primero, expresemos el producto de los polinomios de esta forma

$$\begin{aligned} p(x)q(x) &= \sum_{i=0}^{n} a_i q(x) x^i \\ &= a_0 \sum_{j=0}^{m} b_j x^j + a_1 x \sum_{j=0}^{m} b_j x^j + \ldots + a_n x^n \sum_{j=0}^{m} b_j x^j \\ &= \sum_{j=0}^{m} a_0 b_j x^j + \sum_{j=0}^{m} a_1 b_j x^{j+1} + \ldots + \sum_{j=0}^{m} a_n b_j x^{j+n}. \end{aligned}$$

   Como cada uno de los sumandos de la última igualdad es un polinomio en $F[x]$ y por lo que mencionamos inicialmente, al aplicar el operador D_1 a $p(x)q(x)$ obtenemos:

$$D_1(p(x)q(x)) = D_1(\sum_{j=0}^{m} a_0 b_j x^j + \sum_{j=0}^{m} a_1 b_j x^{j+1} + \ldots + \sum_{j=0}^{m} a_n b_j x^{j+n})$$

$$= D_1(\sum_{j=0}^{m} a_0 b_j x^j) + D_1(\sum_{j=0}^{m} a_1 b_j x^{j+1}) + \ldots + D_1(\sum_{j=0}^{m} a_n b_j x^{j+n})$$

$$= \sum_{j=0}^{m} ja_0b_jx^{j-1} + \sum_{j=0}^{m}(j+1)a_1b_jx^j + \ldots + \sum_{j=0}^{m}(j+n)a_nb_jx^{j+(n-1)}$$

esta última expresión, al partir las sumas, es equivalente a

$$\sum_{j=0}^{m} ja_0b_jx^{j-1}+[\sum_{j=0}^{m} ja_1b_jx^j+\sum_{j=0}^{m} a_1b_jx^j]+\ldots+[\sum_{j=0}^{m} ja_nb_jx^{j+(n-1)}+\sum_{j=0}^{m} na_nb_jx^{j+(n-1)}]$$

que al reacomodar los sumandos resulta en

$$\sum_{j=0}^{m} ja_0b_jx^{j-1} + \sum_{j=0}^{m} ja_1b_jx^j \ldots + \sum_{j=0}^{m} ja_nb_jx^{j+(n-1)} + S \qquad (1.1)$$

donde el sumando S corresponde a los sumandos restantes y será tratado en unos momentos. Mientras notemos que en la otra suma se pueden factorizar algunos términos, de tal forma que (1.1) es equivalente a

$$a_0\sum_{j=0}^{m} jb_jx^{j-1} + a_1x\sum_{j=0}^{m} jb_jx^{j-1} \ldots + a_nx^n\sum_{j=0}^{m} jb_jx^{j+-1} + S$$

esto último en realidad es

$$[a_0D_1(q(x)) + a_1xD_1(q(x)) \ldots + a_nx^nD_1(q(x))] + S$$

que al factorizar $D_1(q(x))$ resulta

$$D_1(q(x))p(x) + S.$$

Ahora bien, la suma S es

$$\sum_{j=0}^{m} a_1b_jx^j + \ldots + \sum_{j=0}^{m} na_nb_jx^{j+(n-1)}$$

que, nuevamente, admite una factorización como

$$a_1\sum_{j=0}^{m} b_jx^j + 2a_2x\sum_{j=0}^{m} b_jx^j + \ldots + na_nx^{n-1}\sum_{j=0}^{m} b_jx^j$$

que como vemos es

$$a_1q(x) + 2a_2xq(x) + \ldots + na_nx^{n-1}q(x) = q(x)D_1(p(x)).$$

Esto concluye la prueba de 1).

2) Supongamos que la característica de F es cero.

   Considerando la expresión de $p(x)$, al aplicar el operador D_1 vemos que

$$p'(x) = \sum_{i=0}^{n} ia_i x^{i-1}$$

   ahora bien, el término $na_n x^{n-1}$ no es cero, ya que como $0_F \neq a_n \in F$ y F es de característica cero, obliga a que $na_n \neq 0_F$. Por lo tanto, $p'(x) \neq 0$ y el grado de $p'(x)$ es $n-1$.

3) Supongamos que la característica de F es $k > 0$.

   Obsérvese que $p'(x) = 0 \Leftrightarrow ia_i = 0$ para toda $i \in \{1, \ldots, n\} \Leftrightarrow a_i = 0$ si k no divide a i.

$\square$

Ya probada nuestra proposición, pasemos a la prueba de uno de los resultados principales del capítulo.

Teorema 1.2.1. *Sea F un campo diferencial de característica cero y $K = F(t)$ una extensión trascendente simple de F. Entonces es posible extender la derivación de F a todo K. Más aún, si $k \in K$ es un elemento arbitrario, es posible encontrar una derivación δ_k en K que extienda a la de F y que cumpla que $\delta_k(t) = k$ (esta última propiedad muestra, en particular, que la extensión de la derivación de F a K no es única).*

Demostración. Si consideramos el anillo de polinomios $F[x]$, a partir de éste podemos considerar el anillo de evaluaciones (que es, en realidad, un dominio entero) sobre el elemento t, esto es, el conjunto $F[t] = \{p(t) : p(x) \in F[x]\}$ y su respectivo campo de cocientes $F(t)$.

De la proposición anterior, consideraremos al operador D_1, pero esta vez sobre el anillo $F[t]$ y definiremos otro operador $D_0 : F[t] \longrightarrow F[t]$ como sigue

$$D_0(\sum_{i=0}^{n} a_i t^i) = \sum_{i=0}^{n} a_i' t^i$$

donde la $'$ indica la derivación de F.

De manera muy similar a la prueba del inciso 1) de la proposición anterior, se comprueba que el operador D_0 se comporta como una derivación sobre el anillo de evaluaciones $F[t]$. Además obsérvese que $D_0(t) = 0$ y $D_1(t) = 1$; por otro lado, $D_0(a) = a'$ y $D_1(a) = 0$ para toda $a \in F$.

Sea $k \in K$ arbitrario. Definamos un nuevo operador $D_k : F[t] \longrightarrow K = F(t)$ como sigue

$$D_k(p(t)) = D_0(p(t)) + kD_1(p(t)).$$

De las observaciones previamente mencionadas, vemos que $D_k(t) = k$ y $D_k(a) = a'$ para toda $a \in F$. Más aún, del hecho de que D_0 y D_1 se comportan como derivaciones en $F[t]$, se puede ver muy fácilmente que D_k también lo hace.

Ahora, como D_k tiene como dominio a $F[t]$, hacemos una última extensión a todo $K = F(t)$. Para ello, como todo elemento en K es un cociente de un par de elementos en $F[t]$, definimos el operador $\delta_k : K \longrightarrow K$ como

$$\delta_k(\frac{p(t)}{q(t)}) = \frac{q(t)D_k(p(t)) - p(t)D_k(q(t))}{(q(t))^2}$$

donde $q(t) \neq 0$.

Afirmamos que esta es la derivación para K que buscamos.

Primero veamos que δ_k está bien definida para todo elemento $\alpha \in K$. Tomemos dos posibles representaciones de α, es decir, sean $\frac{p_1}{q_1} = \alpha = \frac{p_2}{q_2}$ y demostremos que $\delta_k(\frac{p_1}{q_1}) = \delta_k(\frac{p_2}{q_2})$. (Hemos omitido la evaluación sobre t para no cargar la notación).

Como $\frac{p_1}{q_1} = \frac{p_2}{q_2}$, entonces $p_1q_2 = p_2q_1$, por lo cual:

$$\begin{aligned}
\delta_k(\frac{p_1}{q_1}) &= \frac{p_2q_2}{p_2q_2}\cdot\frac{q_1D_k(p_1)-p_1D_k(q_1)}{(q_1)^2}\\
&= \frac{p_2q_1q_2D_k(p_1)+p_2q_1p_1D_k(q_2)-p_2q_1p_1D_k(q_2)-p_2q_2p_1D_k(q_1)}{p_2q_1q_1q_2}\\
&= \frac{p_2q_1[q_2D_k(p_1)+p_1D_k(q_2)]-p_2q_1p_1D_k(q_2)-p_2q_2p_1D_k(q_1)}{p_1q_2q_1q_2}\\
&= \frac{p_2q_1D_k(p_1q_2)-p_2q_1p_1D_k(q_2)-p_2q_2p_1D_k(q_1)}{p_1q_1(q_2)^2}\\
&= \frac{p_2q_1D_k(p_2q_1)-p_2q_1p_1D_k(q_2)-p_2q_2p_1D_k(q_1)}{p_1q_1(q_2)^2}\\
&= \frac{p_2q_1[q_1D_k(p_2)+p_2D_k(q_1)]-p_2q_1p_1D_k(q_2)-p_2q_2p_1D_k(q_1)}{p_1q_1(q_2)^2}\\
&= \frac{p_2q_1q_1D_k(p_2)+p_1q_2p_2D_k(q_1)-p_2q_1p_1D_k(q_2)-p_2q_2p_1D_k(q_1)}{p_1q_1(q_2)^2}\\
&= \frac{p_2q_1q_1D_k(p_2)-p_2q_1p_1D_k(q_2)}{p_1q_1(q_2)^2}\\
&= \frac{p_1q_1[q_2D_k(p_2)-p_2D_k(q_2)]}{p_1q_1(q_2)^2}\\
&= \frac{q_2D_k(p_2)-p_2D_k(q_2)}{(q_2)^2}=\delta_k(\frac{p_2}{q_2}).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, δ_k está bien definida.

Ahora, obsérvese que si $p(t)\in F[t]$, entonces

$$\delta_k(p(t))=\delta_k(\frac{p(t)}{1})=D_k(p(t))$$

por lo que podemos concluir que $\delta_k(t)=k$ y $\delta_k(a)=a'$ para toda $a\in F$. Sólo resta ver que δ_k cumple las propiedades de la derivación.

Pero esto se sigue de la observación de que D_k se comporta como una derivación. Primero realizamos la suma entre los cocientes, entonces

$$\delta_k(\frac{p_1(t)}{q_1(t)}+\frac{p_2(t)}{q_2(t)})=\delta_k(\frac{p_1(t)q_2(t)+q_1(t)p_2(t)}{q_1(t)q_2(t)})$$

con lo cual (omitimos, nuevamente, la t para evitar cargar las expresiones)

$$\begin{aligned}
\delta_k(\frac{p_1}{q_1}+\frac{p_2}{q_2}) &= \frac{q_1q_2D_k(p_1q_2+q_1p_2)-(p_1q_2+q_1p_2)D_k(q_1q_2)}{(q_1q_2)^2}\\
&= \frac{q_1q_2D_k(p_1q_2)+q_1q_2D_k(q_1p_2)-(p_1q_2+q_1p_2)D_k(q_1q_2)}{(q_1)^2(q_2)^2}\\
&= \frac{q_1q_2^2D_k(p_1)-p_1q_2^2D_k(q_1)+q_1^2q_2D_k(p_2)-q_1^2p_2D_k(q_2)}{(q_1)^2(q_2)^2}\\
&= \frac{q_1D_k(p_1)-p_1D_k(q_1)}{(q_1)^2}+\frac{q_2D_k(p_2)-p_2D_k(q_2)}{(q_2)^2}\\
&= \delta_k(\frac{p_1}{q_1})+\delta_k(\frac{p_2}{q_2})
\end{aligned}$$

de igual forma, para el producto se tiene que

$$\begin{aligned}
\delta_k(\frac{p_1}{q_1}\cdot\frac{p_2}{q_2}) &= \frac{q_1q_2D_k(p_1p_2)-p_1p_2D_k(q_1q_2)}{(q_1q_2)^2}\\
&= \frac{q_1q_2p_2D_k(p_1)+q_1q_2p_1D_k(p_2)-p_1p_2q_2D_k(q_1)-p_1p_2q_1D_k(q_2)}{(q_1q_2)^2}\\
&= \frac{q_1p_1[q_2D_k(p_2)-p_2D_k(q_2)]}{(q_1)^2(q_2)^2}+\frac{q_2p_2[q_1D_k(p_1)-p_1D_k(q_1)]}{(q_1)^2(q_2)^2}\\
&= \frac{p_1}{q_1}\delta_k(\frac{p_2}{q_2})+\frac{p_2}{q_2}\delta_k(\frac{p_1}{q_1})
\end{aligned}$$

lo cual concluye la prueba de que δ_k es una derivación para K que cumple las condiciones del teorema. □

A continuación, probaremos un lema que será de ayuda para la demostración del otro teorema principal de este capítulo. Este lema, es en realidad la versión del teorema anterior para el caso algebraico.

Lema 1.2.1. *Sea F un campo diferencial de característica cero y K una extensión algebraica simple de F. Entonces es posible extender la derivación de F a todo K de manera única.*

Demostración. Sea $' : F \longrightarrow F$ la derivación sobre F. Consideremos el anillo de polinomios $F[x]$ y los operadores $D_0 : F[x] \longrightarrow F[x]$ y $D_1 : F[x] \longrightarrow F[x]$ anteriormente definidos

$$D_0(\sum_{i=0}^{n} a_ix^i) = \sum_{i=0}^{n} a_i'x^i \quad , \quad D_1(\sum_{i=0}^{n} a_ix^i) = \sum_{i=1}^{n} ia_ix^{i-1}$$

donde $a_i \in F$ para toda $i = 1, \ldots, n$.

Hemos visto que estos operadores se comportan como derivaciones en el anillo $F[x]$.

Ahora bien, por hipótesis, K es una extensión algebraica simple de F, entonces $K = F(k)$ para alguna $k \in K$; más aún, dado que k es algebraico sobre F, $K = F(k) = F[k]$. Con base en los operadores D_0 y D_1, definiremos un nuevo operador $D : F[x] \longrightarrow F[x]$ como sigue

$$D(A) = D_0(A) + g(x)D_1(A)$$

donde $A, g(x) \in F[x]$ con $g(x)$ fijo. Veremos en unos momentos cómo escoger adecuadamente este polinomio $g(x)$.

Dado que D_0 y D_1 se comportan como derivaciones en $F[x]$, resulta claro que $D(A + B) = D(A) + D(B)$ y $D(AB) = BD(A) + AD(B)$ $\forall A, B \in F[x]$. Además, notemos que para toda $a \in F$, $D(a) = a'$.

Consideremos el homomorfismo evaluación asociado a k, $\phi_k : F[x] \longrightarrow F[k] = K$, dado por $\phi_k(A(x)) = A(k)$ y que cumple con las siguientes condiciones: i) $\phi_k(F) = F$, ii) $\phi_k(x) = k$, iii) ϕ_k es suprayectivo sobre $F[k] = K$ y iv) el núcleo de ϕ_k es $\langle p(x) \rangle$, donde $p(x)$ es el polinomio mínimo asociado a k sobre F y $\langle p(x) \rangle$ es el ideal generado por dicho polinomio en $F[x]$. Nosotros aseguramos que para cierto $g(x) \in F[x]$, el operador D satisface que $D(\langle p(x) \rangle) \subseteq \langle p(x) \rangle$.

Esencialmente, para que $D(\langle p(x) \rangle) \subseteq \langle p(x) \rangle$, nos basta con garantizar que $D(p(x)) \in \langle p(x) \rangle$, puesto que todos los polinomios en el ideal generado por $p(x)$ son múltiplos de éste. Pero $D(p(x)) \in \langle p(x) \rangle \Leftrightarrow (D(p(x)))(k) = 0$ $\Leftrightarrow D_0(p(x))(k) + g(k)D_1(p(x))(k) = 0 \Leftrightarrow g(k)D_1(p(x))(k) = -D_0(p(x))(k)$. Ahora bien, el operador D_1 reduce en 1 el grado de todo polinomio no constante (a los polinomios constantes los manda a 0), entonces debe ocurrir que $D_1(p(x))(k) \neq 0$, ya que el polinomio mínimo de k no es constante y es el polinomio de menor grado que se anula en k (aquí también hemos ocupado la hipótesis de que F es de característica cero, ya que con ello garantizamos que $D_1(p(x))$ no es el polinomio cero). Por lo cual, $D(p(x)) \in \langle p(x) \rangle$ $\Leftrightarrow g(k) = -\frac{D_0(p(x))(k)}{D_1(p(x))(k)}$; pero $-\frac{D_0(p(x))(k)}{D_1(p(x))(k)} \in K = F[k]$, entonces, dado que ϕ_k es suprayectivo sobre $F[k] = K$, existe al menos un polinomio $g(x) \in F[x]$ tal que $g(k) = -\frac{D_0(p(x))(k)}{D_1(p(x))(k)}$. Considerando a uno de estos $g(x)$ en particular, podremos garantizar que $D(\langle p(x) \rangle) \subseteq \langle p(x) \rangle$.

Dejando fijo nuestro $g(x)$ anterior (y por consiguiente, dejando ya bien definido a nuestro operador D), veamos cómo dicho operador induce una derivación sobre K que extiende a la de F. Nuevamente, como $K = F[k]$, entonces para toda $\alpha \in K$ existe un $f_\alpha \in F[x]$, tal que $f_\alpha(k) = \alpha$. Definamos entonces $\overline{d} : K \longrightarrow K$ como

$$\overline{d}(\alpha) = (D(f_\alpha))(k).$$

Afirmamos que $\overline{d}$ es una derivación para K que extiende a la de F.

Primero veamos que $\overline{d}$ está bien definida.

Sean $f_\alpha, h_\alpha \in F[x]$ tales que $f_\alpha(k) = \alpha = h_\alpha(k)$. Veamos que $(D(f_\alpha))(k) = (D(h_\alpha))(k)$. Pero $(D(f_\alpha))(k) = (D(h_\alpha))(k) \Leftrightarrow (D(f_\alpha - h_\alpha))(k) = 0 \Leftrightarrow D(f_\alpha - h_\alpha) \in \langle p(x)\rangle$. Como $f_\alpha(k) = \alpha = h_\alpha(k)$, entonces $(f_\alpha - h_\alpha) \in \langle p(x)\rangle$, y como $D(\langle p(x)\rangle) \subseteq \langle p(x)\rangle$, entonces $D(f_\alpha - h_\alpha) \in \langle p(x)\rangle$, que es lo que queríamos. Por lo tanto, $\overline{d}$ está bien definida. Como comentario, obsérvese que para determinar el valor $\overline{d}(\alpha)$, nos basta con encontrar un polinomio adecuado $f_\alpha \in F[x]$, tal que $f_\alpha(k) = \alpha$.

El hecho de que $\overline{d}$ sea una derivación sobre K que extiende a d se deduce del hecho de que D se comporta como una derivación en $F[x]$, de que para toda $a \in F$, $D(a) = a'$ y de la última observación hecha. Así pues, $\overline{d}$ es la derivación buscada.

Ahora veamos la unicidad de dicha derivación.

Supongamos que existe $\overline{d_1} : K \longrightarrow K$ derivación sobre K, tal que $\overline{d_1}|_F = d$. Considerando nuevamente los operadores D_0 y D_1, afirmamos que para todo $A(x) \in F[x]$ y para toda $\alpha \in K$

$$\overline{d_1}(A(\alpha)) = (D_0(A(x))(\alpha) + (D_1(A(x))(\alpha) \cdot \overline{d_1}(\alpha).$$

En efecto, si $A(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$, entonces

$$\begin{aligned}
\overline{d_1}(A(\alpha)) &= \overline{d_1}(\sum_{i=0}^n a_i\alpha^i) = \sum_{i=0}^n \overline{d_1}(a_i\alpha^i) = \sum_{i=0}^n [a_i'\alpha^i + a_i\overline{d_1}(\alpha^i)] \\
&= \sum_{i=0}^n a_i'\alpha^i + \sum_{i=0}^n a_i\overline{d_1}(\alpha^i) = \sum_{i=0}^n a_i'\alpha^i + \sum_{i=0}^n i a_i\alpha^{i-1}\overline{d_1}(\alpha) \\
&= (D_0(A(x))(\alpha) + (D_1(A(x))(\alpha) \cdot \overline{d_1}(\alpha).
\end{aligned}$$

Ahora, si $A(x)$ es reemplazado por el polinomio mínimo $f(x) \in F[x]$ asociado a α tenemos que

$$0 = \overline{d_1}(f(\alpha)) = (D_0(f(x))(\alpha) + (D_1(f(x))(\alpha) \cdot \overline{d_1}(\alpha)$$

o lo que es igual

$$-(D_0(f(x))(\alpha) = (D_1(f(x))(\alpha) \cdot \overline{d_1}(\alpha).$$

Nuevamente, como el operador D_1 reduce en 1 el grado del polinomio que evalúa y $D_1(f(x))$ no es el polinomio cero, podemos afirmar que $(D_1(f(x))(\alpha) \neq 0$, por lo cual

$$\overline{d_1}(\alpha) = \frac{-(D_0(f(x))(\alpha)}{(D_1(f(x))(\alpha)}.$$

Esto prueba la unicidad de la derivación sobre K y concluye la prueba del lema. □

El lema anterior nos permite concluir nuestro teorema principal.

Teorema 1.2.2. *Sea F un campo diferencial de característica cero y K una extensión algebraica de F. Entonces es posible extender la derivación sobre F a todo K de manera única.*

Demostración. Para demostrar este teorema recurriremos al Lema de Zorn.

Sea $\mathcal{D} = \{\overline{d} : K_{\overline{d}} \longrightarrow K_{\overline{d}} \mid i) K \geq K_{\overline{d}} \geq F$ *y* $K_{\overline{d}}$ *es ext. algebraica de* F, *ii*)$\overline{d}$ *es derivacion sobre* $K_{\overline{d}}$, *iii*)$\overline{d}|_F = d\}$. Notemos que $\mathcal{D} \neq \emptyset$, ya que $d \in \mathcal{D}$, donde d es la derivación en F (incluso hay otros elementos diferentes de d gracias al lema anterior). Definamos una relación $\preceq$ en la familia $\mathcal{D}$. Dados $\overline{d_1}, \overline{d_2} \in \mathcal{D}$, diremos que $\overline{d_1} \preceq \overline{d_2} \Leftrightarrow$ a)$K_{d_1} \leq K_{d_2}$ y b)$\overline{d_2}|_{K_{d_1}} = \overline{d_1}$. No es difícil comprobar que $\preceq$ es un orden parcial para $\mathcal{D}$.

Consideremos una cadena $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}$. Veamos que $\mathcal{C}$ tiene una cota superior en $\mathcal{D}$. Si $\mathcal{C} = \{\overline{d_\alpha}\}_{\alpha \in I}$, con I un conjunto de índices, definimos $K_D = \bigcup_{\alpha \in I} K_{\overline{d_\alpha}}$ y $D : K_D \longrightarrow K_D$ como $D(a) = \overline{d_\alpha}(a)$ si $a \in K_{\overline{d_\alpha}}$.

0) D está bien definida.

   Si $a \in K_{\overline{d_\alpha}}$ y $a \in K_{\overline{d_\beta}}$, entonces $K_{\overline{d_\alpha}} \leq K_{\overline{d_\beta}}$ ó $K_{\overline{d_\beta}} \leq K_{\overline{d_\alpha}}$. Si $K_{\overline{d_\alpha}} \leq K_{\overline{d_\beta}}$, entonces $\overline{d_\beta}(a) = \overline{d_\beta}|_{K_{d_\alpha}}(a) = \overline{d_\alpha}(a)$, ya que $a \in K_{\overline{d_\alpha}} \leq K_{\overline{d_\beta}}$. Por lo tanto, D está bien definida.

1) Del hecho de que $\mathcal{C}$ es cadena en D, se sigue que $K_D \leq K$.

2) Es claro que $F \leq K_D$ y que K_D es una extensión algebraica de F, puesto que cada uno de los uniendos de K_D lo es.

3) D es derivación sobre K_D.

   Dados $a, b \in K_D$, como $\mathcal{C}$ es cadena, entonces existe $K_{\overline{d_\alpha}}$ tal que $a, b \in K_{\overline{d_\alpha}}$. Por lo cual, $D(a+b) = \overline{d_\alpha}(a+b) = \overline{d_\alpha}(a) + \overline{d_\alpha}(b) = D(a) + D(b)$ por ser $\overline{d_\alpha}$ derivación sobre $K_{\overline{d_\alpha}}$. Concluimos también que $D(ab) = bD(a) + aD(b)$. Por lo tanto, D es una derivación sobre K_D.

4) $D|_F = d$.

   Si $a \in F$, entonces $a \in K_{\overline{d_\alpha}}$ para toda $\alpha \in I$. Entonces, $D(a) = \overline{d_\alpha}(a) = d(a)$.

De 1), 2), 3) y 4) concluimos que $D \in \mathcal{D}$ es una cota superior para la cadena $\mathcal{C}$. De lo anterior, concluimos que toda cadena en $\mathcal{D}$ tiene una cota superior, entonces, por el Lema de Zorn, existe un elemento máximo $\overline{D} : K_{\overline{D}} \longrightarrow K_{\overline{D}}$ en $\mathcal{D}$.

Afirmamos que $K_{\overline{D}} = K$. Si probamos esta igualdad habremos extendido la derivación sobre F a todo K.

Es claro que $K_{\overline{D}} \subseteq K$, supongamos que $K_{\overline{D}} \subsetneq K$. Entonces existe al menos un $k_0 \in K$ tal que $k_0 \notin K_{\overline{D}}$. En particular, este elemento k_0 es algebraico sobre F, puesto que K es una extensión algebraica de F. Considerando el campo $K_{\overline{D}}(k_0)$, tenemos que $K_{\overline{D}}(k_0)$ es una extensión algebraica simple de $K_{\overline{D}}$ que contiene propiamente a $K_{\overline{D}}$. Aplicando el lema anterior, es posible extender la derivación $\overline{D}$ a todo $K_{\overline{D}}(k_0)$ de forma única. Si $\overline{D_1}$ es dicha derivación, es claro que $\overline{D} \precnsim \overline{D_1}$. Esto es una contradicción puesto que $\overline{D}$ es un elemento maximal de $\mathcal{D}$. Por lo tanto, $K_{\overline{D}} = K$, y $\mathcal{D}$ es la extensión buscada.

Ahora, para ver la unicidad de la extensión, obsérvese que en la prueba de la unicidad en el lema anterior no usamos para nada el hecho de que K fuese una extensión simple, sólo ocupamos el hecho de que K fuese una extensión algebraica de F. Por lo cual, la misma prueba (definiendo los operadores D_0 y D_1) sirve para concluir la demostración del teorema. $\square$

Antes de dar la definición de extensión elemental para un campo diferencial, probaremos una proposición relacionada con las torres de extensiones diferenciales para el caso en el que las extensiones son simples.

Proposición 1.2.2. *Sea F un campo diferencial. Si $F \leq F(t) \leq K$, donde K es una extensión diferencial de F, $F(t)$ es una extensión simple de F con $t \in K$ y $\;' : K \longrightarrow K$ es una derivación sobre K que extiende a la de F entonces la restricción $\;'|_{F(t)}$ es una derivación para $F(t)$ si y sólo si $t' \in F(t)$.*

Demostración. Veamos las dos implicaciones.

$\Rightarrow$] Esta es inmediata, ya que si $\,'|_{F(t)}$ es una derivación sobre $F(t)$, entonces $\,'|_{F(t)}(a) \in F(t)$ para toda $a \in F(t)$ (las derivaciones son cerradas por definición), en particular para $a = t$. Por lo tanto, $t' \in F(t)$.

$\Leftarrow$] Supongamos que $t' \in F(t)$.

$'|_{F(t)}$ se comporta, esencialmente, como una derivación sobre $F(t)$ (abre sumas y cumple la regla del producto), puesto que $\,'$ es una derivación sobre K y $F(t) \leq K$. Lo único que hay que garantizar es que para toda $a \in F(t)$ se tiene que $a' \in F(t)$.

Ahora bien, recordemos que $F(t)$ es el campo de cocientes del dominio entero $F[t]$, que es el conjunto de las evaluaciones de todos los polinomios en $F[x]$ sobre t. Así pues, dado un elemento $a \in F(t)$, entonces $a = \frac{p(t)}{q(t)}$ donde $p(x), q(x) \in F[x]$ y $q(x)$ no es idénticamente nulo. Entonces $a' = \frac{(p(t))'q(t)+p(t)(q(t))'}{(q(t))^2}$. Nótese que $p(t), q(t) \in F[t] \subseteq F(t)$, así, si garantizamos que $(p(t))', (q(t))' \in F(t)$, entonces podremos garantizar que $a' \in F(t)$, puesto que $F(t)$ es un campo. Ahora, para ver que $(p(t))' \in F(t)$ para todo $p(x) \in F[x]$, nos basta con garantizar que $(\alpha t^n)' \in F(t)$ para toda $\alpha \in F$ y para toda $n \in \mathbb{N}$ y ocupar nuevamente el hecho de que $F(t)$ es campo. Pero

$$(\alpha t^n)' = \alpha' t^n + n\alpha t' t^{n-1}$$

con $\alpha' \in F$ (por lo cual, $\alpha' t^n \in F[t] \subseteq F(t)$) y con $n\alpha t', t^{n-1} \in F(t)$ (por lo cual, $n\alpha t' t^{n-1} \in F(t)$, así pues, la suma de estos dos elementos vuelve a estar en $F(t)$ y, por lo tanto, $(\alpha t^n)' \in F(t)$. De esta forma, $a' \in F(t)$ para toda $a \in F(t)$, lo cual concluye la prueba.

$\square$

Esta última proposición puede generalizarse de la siguiente forma.

Proposición 1.2.3. *Sea F un campo diferencial. Si $F \leq F(t_1, \ldots, t_n) \leq K$, donde K es una extensión diferencial de F, $F(t_1, \ldots, t_n)$ es una extensión de F con $t_1, \ldots, t_n \in K$ y $\,' : K \longrightarrow K$ es una derivación sobre K que extiende a la de F entonces la restricción $\,'|_{F(t_1,\ldots,t_n)}$ es una derivación para $F(t_1, \ldots, t_n)$ si y sólo si $t_i' \in F(t_1, \ldots, t_n)$ para toda $i = 1, \ldots, n$.*

La prueba de dicha proposición es semejante a la realizada en 1.2.2, por lo cual, se omite.

Ahora sí, enunciaremos a continuación la definición de elemento elemental y extensión elemental para un campo diferencial dado.

Definición 1.2.2 (Extensión elemental). *Sea F un campo diferencial, K una extensión diferencial de F y $k \in K$. Diremos que el elemento k es elemental sobre F si y sólo si existe una torre de campos*

$$F \subset F(t_1) \subset F(t_1, t_2) \subset \ldots \subset F(t_1, \ldots, t_N) \subset K \tag{1.2}$$

tal que $k \in F(t_1, \ldots, t_N)$ y para cada $i = 1, \ldots, N$ se tiene alguno de los siguientes tres casos

i) t_i es algebraico sobre $F(t_1, \ldots, t_{i-1})$.

ii) t_i es el logaritmo de algún elemento en $F(t_1, \ldots, t_{i-1})$.

iii) ó t_i es la exponencial de algún elemento en $F(t_1, \ldots, t_{i-1})$.

Diremos que la extensión diferencial K de F es una extensión elemental de F si y sólo si $K = F(t_1, \ldots, t_N)$. (Para nosotros, $F(t_0) = F$).

Observación: De la definición de extensión elemental puede concluirse (usando la proposición 1.2.3) que cada elemento $F(t_1, \ldots, t_i)$ es una extensión diferencial de F y de todos los anteriores contenidos en él; ya con esto, también resulta claro que cada $F(t_1, \ldots, t_i)$ es una extensión elemental de F.

Algunos ejemplos de extensiones elementales serán vistos en el capítulo 3, ya que serán sobre los que basaremos nuestros resultados.

1.3. Cuatro lemas importantes

Para terminar con el capítulo demostraremos cuatro lemas que nos serán de ayuda en los capítulos siguientes.

El primer lema nos ayudará a ver el comportamiento de ciertos polinomios en las extensiones trascendentes de un campo diferencial dado.

Lema 1.3.1. *Sea F un campo diferencial, $K = F(t)$ una extensión diferencial de F con t trascendente sobre F y $\,' : K \longrightarrow K$ una derivación sobre K que extiende a la de F. Supongamos que F y K tienen el mismo subcampo de constantes respecto a $'$. Entonces*

1) *Si $t' \in F$, entonces para cualquier polinomio $f(t) \in F[t]$ de grado positivo se cumple que $(f(t))'$ es un polinomio en $F[t]$ del mismo grado que $f(t)$ o de un grado menor exactamente, dependiendo de si el coeficiente principal de $f(t)$ es o no constante.*

2) *Si $\frac{t'}{t} \in F$, entonces para cualquier elemento $a \in F$ distinto de cero y para cualquier entero n no cero, se tiene que $(at^n)' = ht^n$ para alguna $h \in F$ no cero. Además, para cualquier polinomio $f(t) \in F[t]$ de grado positivo, $(f(t))'$ es un polinomio en $F[t]$ del mismo grado que $f(t)$, y es múltiplo de $f(t)$ si y sólo si $f(t)$ es un monomio.*

Demostración. Antes de comenzar la prueba conviene hacer saber lo que entenderemos por polinomios en $F[t]$. Realmente, la idea es la misma que en los polinomios $F[x]$; así pues, una expresión de la forma $\sum_{i=0}^{n} a_i t^i$ donde $a_i \in F$ para toda $i = 0, \ldots, n$ y $a_n \neq 0$ será considerada como un polinomio de grado n en $F[t]$, con n entero no negativo.

1) $t' \in F$.

Sea $f(t) \in F[t]$ un polinomio de grado positivo. Supongamos que $f(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i t^i$ con $a_i \in F$ para toda $i = 0, \ldots, n$, $a_n \neq 0$ y $n \in \mathbb{N}$. Derivando, obtenemos

$$(f(t))' = \sum_{i=0}^{n} (a_i t^i)' = \sum_{i=0}^{n} [a_i' t^i + (t^i)' a_i] = \sum_{i=0}^{n} a_i' t^i + \sum_{i=0}^{n} i a_i t' t^{i-1}.$$

Notemos que si $g(t)$ y $h(t)$ son polinomios en $F[t]$, entonces $g(t) + h(t)$ también lo es. Entonces, sólo debemos garantizar que $\sum_{i=0}^{n} a_i' t^i$ y $\sum_{i=0}^{n} i a_i t' t^{i-1}$ son polinomios en $F[t]$ para que $(f(t))'$ lo sea. Pero $a_i' \in F$ para toda $i = 0, \ldots, n$, ya que la derivación de $F(t)$ extiende a la de F, entonces, claramente $\sum_{i=0}^{n} a_i' t^i \in F[t]$; por otro lado, también ocurre que $i a_i t' \in F$ ya que por hipótesis, $t' \in F$ y $a_i \in F$ para toda $i = 0, \ldots, n$, por lo cual, $\sum_{i=0}^{n} i a_i t' t^{i-1} \in F[t]$.

Ahora estudiemos el grado de $(f(t))'$. Dado que el grado mayor de $(f(t))'$ recae en la suma $\sum_{i=0}^{n} a_i' t^i$ (puesto que la otra a lo más es de grado $n - 1$), entonces habrá que analizar el término $a_n' t^n$. Si $a_n \in F$ no es una constante (respecto a la derivación), entonces $a_n' \neq 0$, por lo cual, podemos garantizar que, en efecto, el grado de $(f(t))'$ es n; si a_n es una constante, entonces $a_n' = 0$, por lo cual, el grado de

$(f(t))'$ es a lo más, $n-1$. Veamos, sin embargo, que es exactamente $n-1$. Como la suma $\sum_{i=0}^{n} ia_i t' t^{i-1}$ también colabora con el sumando $na_n t' t^{n-1}$, tenemos que el coeficiente que acompaña a t^{n-1} en $(f(t))'$ es $[a'_{n-1}+na_n t']$. Si suponemos que $[a'_{n-1}+na_n t']=0$, entonces dado que

$$(na_n t + a_{n-1})' = (na_n t)' + a'_{n-1} = a'_{n-1} + na_n t' = 0$$

concluimos, entonces, que el elemento $na_n t + a_{n-1}$ es una constante. Sin embargo, por hipótesis, tanto F como $F(t)$ tienen el mismo subcampo de constantes (en particular, dicho subcampo está contenido en F), por lo cual debe ocurrir que $na_n t + a_{n-1} \in F \Leftrightarrow na_n t \in F \Leftrightarrow t \in F$, lo cual contradice la trascendencia de t. Por lo tanto, si $a'_n = 0$, el grado de $(f(t))'$ es exactamente $n-1$.

2) $\frac{t'}{t} \in F$.

Sea $a \in F$ distinto de cero y n un entero distinto de cero, entonces

$$(at^n)' = a't^n + nat't^{n-1} = (a' + nat't^{-1})t^n = (a' + na\frac{t'}{t})t^n.$$

Observemos que si $h = a' + na\frac{t'}{t}$, entonces $h \in F$, ya que $a', a \in F$ y $\frac{t'}{t} \in F$ por hipótesis. Veamos que $h \neq 0$.

Si suponemos que $h = 0$, entonces $(at^n)' = 0$, esto nos dice que el elemento at^n es constante y, en consecuencia, $at^n \in F$ o lo que es igual (dado que a no es cero) $t^n \in F$. Pero esto último es una contradicción a la trascendencia de t, ya que si $t^n \in F$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces $f(x) = x^n - t^n \in F[x]$, pero $f(t) = 0$, por lo cual, t es algebraico sobre F. El caso en el que n es un entero negativo llega al absurdo de que t^{-1} es algebraico. Por lo tanto, $h \neq 0$.

Sea, ahora, $f(t) \in F[t]$ un polinomio de grado positivo. Supongamos como antes que $f(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i t^i$ con $a_i \in F$ para toda $i = 0, \ldots, n$, $a_n \neq 0$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces $(f(t))' = \sum_{i=0}^{n}(a_i t^i)'$, pero para cada $(a_i t^i)'$ con a_i no cero, por el resultado anterior, $(a_i t^i)' = h_i t^i$, con $h_i \in F$; en particular, como $a_n \neq 0$, concluimos que $h_n \neq 0$, por lo cual, el grado de $(f(t))'$ es n. Por la misma observación, podemos garantizar que $(f(t))' \in F[t]$, ya que los coeficientes nulos de $f(t)$ no agregan sumandos a $(f(t))'$.

Ya sólo resta probar que $(f(t))'$ es un múltiplo de $f(t)$ si y sólo si $f(t)$ es un monomio, i.e., $f(t)$ es de la forma at^n con $n \in \mathbb{N}$.

Una de las implicaciones es sencilla. Si $f(t)$ es de la forma at^n con $n \in \mathbb{N}$, ya vimos que $(f(t))' = (at^n)' = ht^n$ con $h \in F$, lo cual, muestra claramente que $(f(t))'$ es un múltiplo de $f(t)$.

Ahora bien, si $(f(t))'$ es un múltiplo de $f(t)$, significa que $(f(t))' = g(t)f(t)$ para algún $g(t) \in F[t]$. Como $f(t) \neq 0$, entonces $g(t) = \frac{(f(t))'}{f(t)}$, pero por lo visto anteriormente, sabemos que $f(t)$ y $(f(t))'$ tienen el mismo grado, por lo cual, el grado de $g(t)$ es cero. Ahora bien, los únicos polinomios en $F[t]$ de grado cero son los elementos de $F \subseteq F[t]$ (no los llamamos constantes para no confundirlos con las constantes respecto a la derivación). Entonces $g(t) = \alpha \in F$. Reescribiendo la igualdad $(f(t))' = g(t)f(t)$ y sustituyendo la expresión de $f(t)$ y de $(f(t))'$ con los coeficientes h_i , tenemos que

$$(f(t))' = \alpha f(t) \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n} h_i t^i = \sum_{i=0}^{n} \alpha a_i t^i \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n} (h_i - \alpha a_i) t^i = 0.$$

Donde $h_i = (a_i' + i a_i \frac{t'}{t})$ para toda $i = 0, \ldots, n$.

Nótese que $(h_i - \alpha a_i) \in F$ para toda $i = 0, \ldots, n$. Esto último conlleva a que $(h_i - \alpha a_i) = 0$ para toda $i = 0, \ldots, n$, ya que de no ser así, t sería algebraico sobre F. Entonces $h_i = (a_i' + i a_i \frac{t'}{t}) = \alpha a_i$ para toda $i = 0, \ldots, n$.

Supongamos que $f(t)$ no es un monomio. Entonces, $f(t)$ tiene al menos dos términos $a_n t^n$ y $a_m t^m$, con a_n y a_m no cero, $n, m \in \mathbb{N}$ y $m \neq n$ (sin pérdida de generalidad, $m \leq n$). Usando los hechos anteriores, tenemos que $(a_n t^n)' = (a_n' + n a_n \frac{t'}{t}) t^n = \alpha a_n t^n$ y $(a_m t^m)' = (a_m' + m a_m \frac{t'}{t}) t^m = \alpha a_m t^m$. Cancelando las respectivas potencias de t y despejando α, concluimos que

$$\frac{(a_n' + n a_n \frac{t'}{t})}{a_n} = \alpha = \frac{(a_m' + m a_m \frac{t'}{t})}{a_m}$$

o lo que es igual

$$[\frac{a_n'}{a_n} + n\frac{t'}{t}] - [\frac{a_m'}{a_m} + m\frac{t'}{t}] = 0.$$

Pero

$$(\frac{a_n t^n}{a_m t^m})' = ([\frac{a_n'}{a_n} + n\frac{t'}{t}] - [\frac{a_m'}{a_m} + m\frac{t'}{t}])\frac{a_n t^n}{a_m t^m} = 0$$

de lo cual concluimos que el elemento $\frac{a_n t^n}{a_m t^m}$ es constante $\Leftrightarrow$ $\frac{a_n t^n}{a_m t^m} \in F$ $\Leftrightarrow$ $\frac{t^n}{t^m} \in F$, es decir, $t^{n-m} \in F$ con $(n-m)$ natural y mayor o igual que 1, lo cual, como ya hemos visto, supone una contradicción a la trascendencia de t. Por lo tanto, $f(t)$ debe ser un monomio.

□

Para la demostración del lema siguiente necesitaremos una proposición auxiliar que enunciamos y demostramos a continuación.

Proposición 1.3.1. *Sea K un campo y $A(x), P(x), Q(x) \in K[x]$, con $P(x)$ y $Q(x)$ primos relativos. Si la fracción $\frac{A(x)}{P(x)Q(x)} \in K(x)$ es propia, entonces*

$$\frac{A(x)}{P(x)Q(x)} = \frac{P_1(x)}{P(x)} + \frac{Q_1(x)}{Q(x)}$$

donde las fracciones $\frac{P_1(x)}{P(x)}$ y $\frac{Q_1(x)}{Q(x)}$ son propias.

Demostración. Para no cargar la notación en la prueba, omitiremos la indeterminada x.

Dado que P y Q son primos relativos, tenemos entonces que $(P, Q) = 1$ y, además, es posible expresar a 1 como

$$1 = PT + QS$$

donde $T, S \in K[x]$.

Al multiplicar esta última expresión por la fracción $\frac{A}{PQ}$, obtenemos

$$\frac{A}{PQ} = \frac{AT}{Q} + \frac{AS}{P}.$$

En caso de que los polinomios AT y AS tengan grados mayores a los de Q y P respectivamente, hacemos la división sintética para obtener

$$\frac{A}{PQ} = f_1 + f_2 + \frac{P_1}{P} + \frac{Q_1}{Q}$$

donde $f_1, f_2 \in K[x]$ y los grados de P_1 y Q_1 son menores que los de P y Q respectivamente.

Para terminar la prueba, de la hipótesis de que la fracción $\frac{A}{PQ}$ es propia, podemos concluir que la suma $f_1 + f_2$ es el polinomio cero, ya que de no ser así, al hacer la suma con las fracciones $\frac{P_1}{P}$ y $\frac{Q_1}{Q}$, obtendríamos un numerador con grado mayor o igual al de PQ. Por lo tanto

$$\frac{A}{PQ} = \frac{P_1}{P} + \frac{Q_1}{Q}$$

con las especificaciones que requeríamos. □

Nuestro siguiente lema tiene que ver con un resultado conocido del cálculo, el cual nos permite poder descomponer una función racional (cociente de polinomios) como la suma de fracciones simples. Dicho resultado tiene como fin el poder integrar funciones racionales de forma más sencilla.

Lema 1.3.2. *Sea K un campo y $z(x) \in K(x)$. Entonces $z(x)$ puede descomponerse de forma única como*

$$z(x) = f(x) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{r_i} \frac{f_{ij}(x)}{p_i^j(x)} \tag{1.3}$$

donde $f, f_{ij}, p_i \in K[x]$, los polinomios p_i son mónicos, irreducibles y distintos dos a dos y f_{ij} es nulo o tiene grado menor que p_i, pero $f_{ir_i} \neq 0$. La expresión (1.3) se dice que es la descomposición en fracciones simples de $z(x)$ sobre K.

Demostración. Recordemos que $K(x)$ es el campo de cocientes del anillo de polinomios $K[x]$, por lo cual, para $z(x) \in K(x)$, se tiene que $z(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ con $u(x), v(x) \in K[x]$ y $v(x)$ no nulo. Para facilitar la notación en la prueba, omitiremos la indeterminada x.

Supongamos que u y v son primos relativos entre sí y que v es mónico. Si $v = 1$, entonces no hay nada que hacer, tomamos $f = u$ y la descomposición está lista. Supongamos ahora que el grado de v es mayor o igual a uno y, nuevamente, que v es de la forma $v = p_1^{r_1}$, con p_1 mónico e irreducible y $r_1 \in \mathbb{N}$ (en particular, el grado de p_1 es mayor o igual a uno).

Observemos, primeramente, que si el grado de u es mayor o igual al grado v, podemos hacer la división sintética y obtener que

$$z = \frac{u}{v} = a + \frac{u_1}{v}$$

donde el grado de u_1 es menor que el de v y $a \in K[x]$. Por lo cual, podemos suponer sin pérdida de generalidad, que el grado de u es menor que el de v (el polinomio a formará parte del polinomio final f).

De la representación $z = \frac{u}{v} = \frac{u}{p_1^{r_1}}$, podemos concluir que si el grado de u es menor que el grado de p_1, entonces, nuevamente, tenemos la descomposición de z en fracciones simples; para esto, nos bastará con tomar $f_{1r_1} = u$ y $f_{1j} = 0$ para toda $j \in \{1, \ldots, r_1 - 1\}$. De esta forma, obtendremos

$$z = \frac{u}{v} = \sum_{j=1}^{r_1} \frac{f_{1j}}{p_1^j}$$

que es un caso particular de la expresión (1.3).

Supongamos ahora que el grado de u es mayor o igual que el de p_1. Por el algoritmo de la división tenemos que

$$u = p_1 g_1 + b_1 \tag{1.4}$$

donde $g_1, b_1 \in K[x]$ y el grado de b_1 es menor que el grado de p_1 o b_1 es cero. Sin embargo, dado que estamos suponiendo que u y $v = p_1^{r_1}$ son primos relativos, en particular, u y p_1 también lo son; por lo tanto, b_1 no es el polinomio cero, pero sí de grado menor al de p_1.

Al dividir (1.4) entre $p_1^{r_1}$, obtenemos

$$\frac{u}{v} = \frac{u}{p_1^{r_1}} = \frac{g_1}{p_1^{r_1-1}} + \frac{b_1}{p_1^{r_1}}.$$

La fracción $\frac{b_1}{p_1^{r_1}}$ ya puede formar parte de las fracciones simples que buscamos; de hecho, tomaremos $f_{1r_1} = b_1$. Ahora bien, podemos suponer que g_1 y p_1 son primos relativos y aplicar el razonamiento usado en la fracción $\frac{u}{p_1^{r_1}}$ a $\frac{g_1}{p_1^{r_1-1}}$ (si el grado de g_1 es mayor o igual que el de $p_1^{r_1-1}$, hacemos la división sintética y al polinomio resultante lo separamos para que forme parte del f final de la representación), entonces podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que el grado de g_1 es menor que el de $p_1^{r_1-1}$. Nuevamente, si el grado de g_1 es menor que el de p_1, la fracción $\frac{g_1}{p_1^{r_1-1}}$ ya puede formar parte de la representación en fracciones simples de z (tómese $g_1 = f_{1r_1-1}$) y habremos terminado. De no ser así, al aplicar el algoritmo de la división obtenemos

$$g_1 = p_1 g_2 + b_2$$

con $g_2, b_2 \in K[x]$ y b_2 igual a cero o de grado menor al de p_1. Dividiendo esta última igualdad entre $p_1^{r_1-1}$, obtenemos

$$\frac{g_1}{p_1^{r_1-1}} = \frac{g_2}{p_1^{r_1-2}} + \frac{b_2}{p_1^{r_1-1}}.$$

Aquí, la fracción $\frac{b_2}{p_1^{r_1-1}}$ ya puede formar parte de la representación en fracciones simples (tomando $b_2 = f_{1r_1-1}$). Ahora, obsérvese que al ir aplicando este razonamiento, los grados de los g_i resultantes van disminuyendo, es decir, el $grad(u) > grad(g_1)$, el $grad(g_1) > grad(g_2)$, etc., por lo cual, el procedimiento acaba en un número finito de pasos (de hecho, nos basta con obtener un grado de g_i menor al de p_1 para acabar). En resumen, obtenemos que

$$\frac{u}{v} = \frac{u}{p_1^{r_1}} = \sum_{j=1}^{r_1} \frac{f_{1j}}{p_1^j}$$

con las especificaciones del lema. Los posibles polinomios que surgieran de las divisiones $\frac{g_i}{p_1^{r_1-(i-1)}}$ los omitimos en esta representación final, ya que como hemos dicho, formarán parte del polinomio final f.

Ataquemos el caso general: $z = \frac{u}{v}$, donde el grado de v es mayor o igual a uno y u y v son primos relativos.

Primero hacemos la división sintética (en caso de que el grado de u sea mayor o igual al de v), por lo que

$$z = \frac{u}{v} = f + \frac{u_1}{v} \tag{1.5}$$

con $f \in K[x]$. En esta expresión el grado de u_1 es menor al de v y, por ser u y v primos relativos, u_1 y v también lo son.

Consideremos la descomposición en irreducibles de v (esto es posible ya que $K[x]$ es un DFU[2]), entonces $v = p_1^{r_1} \dots p_n^{r_n}$, con $r_i \in \mathbb{N}$, $p_i \in K[x]$, mónico e irreducible para toda $i \in \{1 \dots, n\}$ y p_i distinto de p_j si $i \neq j$.

De esta forma

$$\frac{u_1}{v} = \frac{u}{p_1^{r_1} \dots p_n^{r_n}}.$$

Como $p_1^{r_1}$, $p_2^{r_2}$,..., y $p_n^{r_n}$ son primos relativos (por serlo los p_i) y el grado de u_1 es menor que el de $v = p_1^{r_1} \dots p_n^{r_n}$, al aplicar la proposición 1.3.1 repetidamente, obtenemos que

[2]Dominio de factorización única, véase el teorema A.2.4 del apéndice de álgebra.

$$\frac{u_1}{v} = \frac{c_1}{p_1^{r_1}} + \ldots + \frac{c_n}{p_n^{r_n}}$$

donde $c_i \in K[x]$ y las fracciones $\frac{c_i}{p_i^{r_i}}$ son propias para toda $i \in \{1 \ldots, n\}$. Por lo que hemos trabajado anteriormente, sabemos que cada fracción $\frac{c_i}{p_i^{r_i}}$ admite la descomposición

$$\frac{c_i}{p_i^{r_i}} = \sum_{j=1}^{r_i} \frac{f_{ij}}{p_i^j}$$

con las propiedades del lema. Entonces

$$\frac{u_1}{v} = \sum_{j=1}^{r_1} \frac{f_{1j}}{p_1^j} + \ldots + \sum_{j=1}^{r_n} \frac{f_{nj}}{p_n^j} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{r_i} \frac{f_{ij}}{p_i^j}$$

Sustituyendo esta identidad en (1.5), concluimos que

$$z = f + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{r_i} \frac{f_{ij}}{p_1^j} \tag{1.6}$$

con las propiedades requeridas en el lema.

Veamos ahora la unicidad de la expresión (1.6). Supongamos que existen dos descomposiciones para z en fracciones simples, de tal modo que

$$A = f + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{r_i} \frac{f_{ij}}{p_i^j} = z = \frac{u}{v} = g + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{s_i} \frac{g_{ij}}{q_i^j} = B$$

con las especificaciones del teorema. La primera de estas expresiones podemos suponerla tal y como la hemos construido anteriormente, es decir, los p_i son todos los factores que aparecen en la descomposición en irreducibles de v. Veamos que la segunda representación no dista mucho de la primera. Recuérdese que podemos considerar $z = \frac{u}{v}$ con u y v primos relativos y v mónico.

Si $z = \frac{u}{v} = g + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{s_i} \frac{g_{ij}}{q_i^j}$, simplificaremos la doble suma para hacer los análisis correspondientes.

Para cada $i = 1, \ldots, m$, al hacer los quebrados, tenemos que

$$\sum_{j=1}^{s_i} \frac{g_{ij}}{q_i^j} = \frac{k_i}{q_i^{s_i}}$$

donde $k_i = q_i^{s_i - 1} g_{i1} + \ldots + g_{is_i}$.

Nótese que q_i no divide a k_i para toda $i = 1, \ldots, m$, ya que q_i divide a todos los sumandos de k_i excepto a g_{is_i}, que, por las especificaciones del lema, es de grado menor a q_i y no nulo. Entonces

$$z = \frac{u}{v} = g + \sum_{i=1}^{m} \frac{k_i}{q_i^{s_i}}.$$

Nuevamente, al hacer la suma de quebrados obtenemos

$$z = \frac{u}{v} = \frac{(q_2^{s_2} \ldots q_m^{s_m})k_1 + \ldots + (q_1^{s_1} \ldots q_{m-1}^{s_{m-1}})k_m + (q_1^{s_1} \ldots q_m^{s_m})g}{(q_1^{s_1} \ldots q_m^{s_m})}$$

Llamemos $\frac{u'}{v'} = \frac{(q_2^{s_2} \ldots q_m^{s_m})k_1 + \ldots + (q_1^{s_1} \ldots q_{m-1}^{s_{m-1}})k_m + (q_1^{s_1} \ldots q_m^{s_m})g}{(q_1^{s_1} \ldots q_m^{s_m})}$.

Observemos que, para q_i, todos los sumandos del numerador de $\frac{u'}{v'}$ son múltiplos de q_i, excepto el correspondiente $(q_1^{s_1} \ldots q_{i-1}^{s_{i-1}} q_{i+1}^{s_{i+1}} \ldots q_m^{s_m})k_i$; de hecho, q_i no divide a este sumando, ya que, en caso de hacerlo, como los q_i son primos relativos entre sí y distintos dos a dos, si q_i dividiese a este sumando, obligaría a que q_i dividiese a k_i, lo cual no puede ocurrir por lo que hemos mencionado anteriormente. Por lo tanto, podemos concluir que q_i no divide al numerador u' para toda $i = 1, \ldots, n$.

De la igualdad $\frac{u}{v} = \frac{u'}{v'}$ (que se da si y sólo si $uv' = u'v$), podemos concluir que $v = v'$, ya que la igualdad $uv' = u'v$ nos dice, por un lado, que v divide a uv' y, por el otro, que v' divide a $u'v$; pero u y v son primos relativos, por lo tanto, $v|v'$; de igual forma, del hecho de que q_i no divide al numerador u' y que q_i es irreducible para toda $i = 1, \ldots, n$, podemos concluir que u' y v' son primos relativos, por lo cual, $v'|v$. Finalmente, como v y v' son mónicos y $v|v'$ y $v'|v$, concluimos que $p_1^{r_1} \ldots p_n^{r_n} = v = v' = q_1^{s_1} \ldots q_m^{s_m}$.

Ahora bien, recordemos que la expresión en irreducibles es única salvo por el orden y posibles constantes, pero como v es mónico, podemos concluir que

$$A = f + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{r_i} \frac{f_{ij}}{p_i^j} = z = g + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{r_i} \frac{g_{ij}}{p_i^j} = B. \tag{1.7}$$

Para terminar, nos restaría probar que $f = g$ y que $f_{ij} = g_{ij}$ para toda i y j.

Sea l la cantidad de sumandos en la doble suma de A y B (esto es, sin contar a f y g). Haremos la prueba por inducción sobre l.

i) Si $l = 0$, entonces se cumple, trivialmente, que $f = g$.

ii) H.I. Si tenemos dos representaciones en fracciones simples para z, con las especificaciones del teorema y tal que la cantidad de sumandos en la doble suma de A' y B' es $l - 1$, entonces las representaciones son iguales.

iii) P.d. que para l también se cumple lo anterior.

Supongamos que la cantidad de sumandos en la doble suma de A y B es l.

Al hacer los quebrados y las sumas correspondientes, tenemos que $\frac{(p_2^{r_2}...p_n^{r_n})h_1+...+(p_1^{r_1}...p_{n-1}^{r_{n-1}})h_n+(p_1^{r_1}...p_n^{r_n})f}{p_1^{r_1}...p_n^{r_n}} = \frac{(p_2^{r_2}...p_n^{r_n})k_1+...+(p_1^{r_1}...p_{n-1}^{r_{n-1}})k_n+(p_1^{r_1}...p_n^{r_n})g}{p_1^{r_1}...p_n^{r_n}}$ o, equivalentemente, $(p_2^{r_2} \dots p_n^{r_n})h_1 + \dots + (p_1^{r_1} \dots p_{n-1}^{r_{n-1}})h_n + (p_1^{r_1} \dots p_n^{r_n})f = (p_2^{r_2} \dots p_n^{r_n})k_1 + \dots + (p_1^{r_1} \dots p_{n-1}^{r_{n-1}})k_n + (p_1^{r_1} \dots p_n^{r_n})g$, donde $h_i = p_i^{r_i - 1} f_{i1} + \dots + f_{ir_i}$ y $k_i = p_i^{r_i-1} g_{i1} + \dots + g_{ir_i}$ para toda $i = 1, \dots, n$.

Desarrollando los productos $(p_1^{r_1} \dots p_{i-1}^{r_{i-1}} p_{i+1}^{r_{i+1}} \dots p_n^{r_n})h_i$ (y los respectivos a k_i) podemos observar que

$$f_{1r_1}(p_2^{r_2} \dots p_n^{r_n}) + \underbrace{\dots}_{\textit{múltiplos de } p_1} = g_{1r_1}(p_2^{r_2} \dots p_n^{r_n}) + \underbrace{\dots}_{\textit{múltiplos de } p_1}$$

Por lo cual, al despejar $f_{1r_1}(p_2^{r_2} \dots p_n^{r_n})$ y $g_{1r_1}(p_2^{r_2} \dots p_n^{r_n})$, concluimos que $(f_{1r_1} - g_{1r_1})(p_2^{r_2} \dots p_n^{r_n})$ es divisible por p_1. Pero p_1 es primo relativo con los restantes p_i, por lo tanto, $p_1 \mid (f_{1r_1} - g_{1r_1})$; ahora recuérdese que los grados de f_{1r_1} y g_{1r_1} son menores que el de p_1, entonces, si $p_1 \mid (f_{1r_1} - g_{1r_1})$, debe ocurrir que $(f_{1r_1} - g_{1r_1}) = 0$, lo cual sucede si y sólo si $f_{1r_1} = g_{1r_1}$. Ya con esto, como $\dfrac{f_{1r_1}}{p_1^{r_1}} = \dfrac{g_{1r_1}}{p_1^{r_1}}$, podemos cancelar en (1.7) dicho sumando en las respectivas sumas dobles; en consecuencia, tendremos una igualdad de representaciones en fracciones simples cuyas dobles sumas tienen $l - 1$ elementos y con las propiedades del teorema, entonces, por H.I. deben ser iguales y esto concluye la prueba del lema.

□

El siguiente lema técnico nos dice qué es lo que ocurre con la representación en fracciones simples de v' cuando las condiciones del campo son adecuadas.

Lema 1.3.3. *Sea F un campo diferencial, $K = F(t)$ una extensión diferencial de F con t trascendente sobre F y $\;' : K \longrightarrow K$ una derivación sobre K que extiende a la de F. Supongamos que para cada $p(t) \in F[t]$ ocurre que $(p(t))' \in F[t]$ y que, si $p(t)$ es mónico e irreducible, el grado de $(p(t))'$ es menor que el de $p(t)$. Entonces, para cada $v \in K$, la descomposición en fracciones simples de v' tiene como denominadores los mismos polinomios irreducibles de v, pero el exponente máximo con que cada uno de ellos aparece en v' es una unidad mayor al que aparece en v. En particular, dicho exponente siempre es mayor o igual a 2.*

Demostración. Dado $v \in K$, consideremos su representación en fracciones simples. Entonces

$$v = f + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{r_i} \frac{f_{ij}}{p_i^j} \tag{1.8}$$

donde $f, f_{ij}, p_i \in F[t]$, los polinomios pi son mónicos, irreducibles y distintos dos a dos y f_{ij} es nulo o tiene grado menor que p_i, pero $f_{ir_i} \neq 0$.

Derivando la identidad (1.8), tenemos que

$$\begin{aligned} v' &= f' + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{r_i} (\frac{f_{ij}}{p_i^j})' && (1.9) \\ &= f' + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{r_i} (\frac{(f_{ij})'}{p_i^j} - \frac{j(p_i)' f_{ij}}{p_i^{j+1}}). && (1.10) \end{aligned}$$

Analicemos los cocientes $\frac{j(p_i)' f_{ij}}{p_i^{j+1}}$.

Afirmamos que dicho cociente no es exacto, esto es, p_i^{j+1} no divide a $j(p_i)' f_{ij}$, cuando f_{ij} es no nulo (sabemos que, al menos, f_{ir_i} no es nulo). Primeramente, observemos que cuando f_{ij} no es nulo, ocurre que $p_i \nmid f_{ij}$, ya que, por las propiedades de la representación en fracciones simples, el grado de f_{ij} es menor al de p_i; luego, dado que p_i es mónico e irreducible, entonces el grado de $(p_i)'$ es menor al de p_i, por lo cual, también podemos garantizar que $p_i \nmid (p_i)'$. Por lo tanto, dado que p_i es irreducible, no puede ocurrir que $p_i \mid j(p_i)' f_{ij}$, ya que tendría que dividir a alguno de los dos factores. Entonces, al efectuar el algoritmo de la división, tenemos que

$$-j(p_i)' f_{ij} = g_{ij} p_i + h_{ij} \tag{1.11}$$

con h_{ij} no nulo y de grado menor al de p_i.

Sustituyendo (1.11) en (1.10), obtenemos

$$\begin{aligned} v' &= f' + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{r_i}(\frac{(f_{ij})' + g_{ij}}{p_i^j} + \frac{h_{ij}}{p_i^{j+1}}) \\ &= f' + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{r_i}\frac{(f_{ij})' + g_{ij}}{p_i^j} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{r_i}\frac{h_{ij}}{p_i^{j+1}} \end{aligned}$$

donde los polinomios p_i son mónicos, irreducibles y distintos dos a dos y h_{ij} es nulo (para el caso en el que f_{ij} era nulo) o tiene grado menor que p_i, pero $h_{ir_i} \neq 0$.

Nótese que en esta expresión, el grado máximo con el que aparecen los polinomios p_i (este grado máximo era r_i en v, respectivamente) se ha elevado en uno, además, todos los sumandos de la segunda doble suma de la igualdad anterior entran dentro de la descomposición en fracciones simples de v'. Ahora bien, los sumandos de la primera doble suma son de la forma $\frac{q}{p^m}$ con $q, p \in F[t]$ y p mónico e irreducible y $m \in \mathbb{N}$; la expresión de dichos sumandos en fracciones simples, como hemos visto en lema anterior, es de la forma $c + \sum_{j=1}^{m} \frac{f_i}{p^j}$ con $c, f_i, \in F[t]$ y las condiciones del lema. Entonces, al expresar cada sumando en su descomposición en fracciones simples y agrupar los polinomios y potencias correspondientes, obtendremos la descomposición en fracciones simples para v', pero sin agregar potencias mayores o iguales a $r_i + 1$ del polinomio p_i correspondiente y sin agregar nuevos polinomios irreducibles distintos de los que aparecían en v. Esto concluye la prueba del lema. $\square$

Nuestro último lema nos brinda una condición para garantizar la trascendencia de ciertos elementos.

Lema 1.3.4. *Sea F un campo diferencial de característica cero, K una extensión diferencial de F y $\ ' : K \longrightarrow K$ una derivación sobre K que extiende a la de F. Supongamos que F y K tienen el mismo subcampo de constantes respecto a $'$. Si $l \in K \setminus F$ cumple que $l' \in F$, entonces l es trascendente sobre F.*

Demostración. Sea $\mathcal{C} = \{a \in F : a' = 0_F\} \subseteq F$ el subcampo de constantes respecto a la derivación de F. Si $t \in K \setminus F$ y $t' \in F$, podemos concluir que $t' \neq 0$, ya que de lo contrario garantizaríamos que $l \in \mathcal{C} \subseteq F$, lo cual es una contradicción.

Supongamos que t es algebraico sobre F. Consideremos el polinomio mínimo asociado a t, $x^n + a_m x^m + \ldots + a_0 = p_t(x) \in F[x]$, tal que

$$t^n + a_m t^m \ldots + a_0 = 0 \tag{1.12}$$

donde $n > 1$ (Si $n = 1$ llegaríamos a que $t \in F$) y $0 \leq m < n$. Notemos que $a_m \neq 0$, ya que de lo contrario concluiríamos que $t = 0$ lo cual es otra contradicción.

Derivando la ecuación (1.12), obtenemos que

$$nt't^{n-1} + (a'_m t^m + m a_m t' t^{m-1}) + \ldots + a'_0 = 0. \tag{1.13}$$

Ahora bien, de esta última ecuación, al recordar la desigualdad $0 \leq m < n$ vemos que sólo existen tres posibles casos:

1) $n - 1 > m$.

2) $n - 1 = m$ y $nt' + a'_m \neq 0$.

3) $n - 1 = m$ y $nt' + a'_m = 0$.

Veamos que con cualquiera de los tres llegamos a una contradicción.

1) Si $n - 1 > m$, vemos de (1.13) que t satisface al polinomio $nt'x^{n-1} + (a'_m x^m + m a_m t' x^{m-1}) + \ldots + a'_0 \in F[x]$ (por hipótesis $t' \in F$) de grado $n - 1$ (esto último se sigue del hecho de que $nt' \neq 0$, ya que $t' \neq 0$ y el campo F es de característica cero). Esto es una contradicción para el grado del polinomio mínimo de t que es n.

2) Si $n - 1 = m$ y $nt' + a'_m \neq 0$, reescribimos (1.13) como

$$(nt' + a'_m)t^{n-1} + \ldots + a'_0 = 0$$

lo cual nos lleva a la misma contradicción del caso 1).

3) Por último, si $n-1 = m$ y $nt' + a'_m = 0$ obsérvese primero que $nt + a_m \in K \setminus F$, ya que, de estar, concluiríamos, al despejar, que $t \in F$. Por otro lado, $(nt + a_m)' = nt' + a'_m = 0$, lo cual nos lleva a concluir que $nt + a_m$ es una constante. Esto contradice lo inicialmente dicho.

Todas estas contradicciones concluyen la prueba del lema. $\square$

Capítulo 2

El teorema de Liouville

Ya establecidos los resultados necesarios en el capítulo anterior, abordaremos la prueba del teorema de Liouville en su versión general.

2.1. El primer teorema de Liouville

Generalmente, cuando se comienza con la investigación de cierto tipo de propiedades, se suele observar primero el comportamiento de éstas en las estructuras más simples y básicas, para después tratar de generalizar los resultados obtenidos a una familia más grande elementos. El cálculo de primitivas es un buen ejemplo de esto; así pues, cuando comenzamos a integrar (en el sentido de encontrar primitivas) suele empezarse con las funciones más simples posibles (constantes y polinomios), para después pasar a funciones más complicadas y realizar una clasificación de funciones (o de integrales) que nos ayude a saber si las funciones que estamos integrando tienen solución conocida y, más aún, si poseen primitivas elementales. En este sentido, el método de las fracciones simples (o parciales) que conocemos de nuestros cursos de cálculo garantiza la inclusión de las funciones racionales dentro de aquellas que tienen primitivas elementales[1].

En un sentido más general, el teorema de Laplace, que enunciamos a continuación, garantiza (ya dentro del terreno de las funciones de variable compleja) que la integral de cualquier función racional es elemental y, más

[1] Aunque no hemos dado la definición de función elemental, intuitivamente, las funciones elementales son aquellas que podemos expresar, mediante un número finito de operaciones, en términos de las funciones e^x, $ln(x)$, $p(x) \in \mathbb{C}(x)$, potencias, etc., o sus composiciones.

aún, muestra la forma general que ésta tendrá.

Teorema 2.1.1 (Laplace, 1812)**.** *La integral de una función racional* $y(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$*, donde* $P(z), Q(z) \in \mathbb{C}[z]$ *y* $Q(z)$ *no es idénticamente nulo, es siempre una función elemental. Además dicha integral se puede expresar como la suma de una función racional más una suma finita de múltiplos de logaritmos de funciones racionales. Esto es*

$$\int y(z)dz = \int \frac{P(z)}{Q(z)}dz = R(z) + \sum_{i=1}^{m} c_i log(r_i(z)) \tag{2.1}$$

donde $R(z) \in \mathbb{C}(z)$*,* $c_i \in \mathbb{C}$ *y* $r_i(z)$ *es una función racional compleja no idénticamente nula para cada* $i = 1, \ldots, m$*.*

Demostración. Al considerar el campo de las funciones racionales complejas $\mathbb{C}(z)$, por el lema 1.3.2, tenemos que cualquier función $y(z) \in \mathbb{C}(z)$ se expresa de la forma

$$y(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = f(z) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{r_i} \frac{f_{ij}(z)}{p_i^j(z)}$$

donde $f, f_{ij}, p_i \in \mathbb{C}[z]$, los polinomios p_i son mónicos, irreducibles y distintos dos a dos y f_{ij} es nulo o tiene grado menor que el de p_i, pero $f_{ir_i} \neq 0$. Ahora bien, sabemos que los p_i son todos los factores irreducibles de Q (que podemos suponer mónico), pero en $\mathbb{C}(z)$ los polinomios irreducibles son precisamente los de grado uno. Es decir, en realidad la descomposición en fracciones simples de y es

$$y(z) = f(z) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{r_i} \frac{\beta_{ij}}{(z-\alpha_i)^j}$$

con $\alpha_i, \beta_{ij} \in \mathbb{C}$ para toda i y j. Al integrar esta última identidad concluimos que

$$\int y(z)dz = \int f(z)dz + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{r_i}(\int \frac{\beta_{ij}}{(z-\alpha_i)^j}dz).$$

Al ser f un polinomio, la integral $\int f(z)dz$ vuelve a ser un polinomio (que denotaremos por $g(z)$); por otro lado, al ser las β_{ij} constantes, las integrales

$\int \frac{\beta_{ij}}{(z-\alpha_i)^j}dz$ son fáciles de resolver: cuando $j = 1$, la solución es $\beta_{i1}ln(z - \alpha_i)$ y cuando $j > 1$, la solución es $-\frac{\beta_{ij}}{(j-1)(z-\alpha)^{j-1}}$ (las constantes las agrupamos con el polinomio g). Por lo tanto

$$\int y(z)dz = g(z) - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=2}^{r_i} \frac{\beta_{ij}}{(j-1)(z-\alpha)^{j-1}} + \sum_{i=1}^{n} \beta_{i1}ln(z - \alpha_i).$$

Tomando $R(z) = g(z) - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=2}^{r_i} \frac{\beta_{ij}}{(j-1)(z-\alpha)^{j-1}} \in \mathbb{C}(z)$, $c_i = \beta_{i1}$ y $r_i(z) = (z - \alpha_i)$ se sigue el resultado. □

El teorema de Laplace fue llevado a una forma más general por Liouville en un artículo publicado en 1834. Este resultado, que es conocido como el primer teorema de Liouville sobre integración finita establece lo siguiente:

Teorema 2.1.2 (Liouville, 1834). *Sea $y(z)$ una función algebraica cuya integral es elemental. Entonces*

$$\int y(z)\, dz = v_0 + c_1 log(v_1(z)) + \ldots + c_r log(v_r(z)) \tag{2.2}$$

donde r es un entero positivo, $c_i \in \mathbb{C}$ para toda $i = 1, \ldots, r$ y $v_j(z)$ es una función algebraica para toda $j = 0, \ldots, r$.

La primera generalización del teorema de Liouville fue obtenida por el mismo un año más tarde en 1835.

Teorema 2.1.3 (Liouville, 1835). *Si F es una función algebraica de $z, y_1, \ldots, y_m$, donde cada y_i es una función de z, dy_i/dz es una función algebraica de $z, y_1, \ldots, y_m$ para cada $i = 1, \ldots, m$, y la integral $\int F(z, y_1, \ldots, y_m)\, dz$ es elemental, entonces*

$$\int F(z, y_1, \ldots, y_m)\, dz = v_0 + \sum_{j=1}^{n} c_j log(v_j)$$

donde las $c_j \in \mathbb{C}$ y las v_j son funciones algebraicas de $z, y_1, \ldots, y_m$.

Las pruebas de estos teoremas (rigurosas, pero lejos de ser simples) descansan en resultados del análisis complejo (especialmente, en prolongación analítica a lo largo de curvas) y las propiedades analíticas de las funciones algebraicas. Nosotros obtendremos estos resultados como corolarios en la siguiente sección, aunque, nuevamente, si el lector gusta consultar las pruebas analíticas de los teoremas 2.1.2 y 2.1.3, puede encontrarlas en [21]. Nótese que el teorema 2.1.2 se obtiene como consecuencia del teorema 2.1.3 al tomar $F = y$.

Basado en la idea de lo que hoy conocemos como campo diferencial, la siguiente generalización del teorema de Liouville fue obtenida por Alexandre Ostrowski y publicada en su artículo *Sur l'intégrabilité élémentaire de quelques classes d'expressions*, en el cual garantiza el resultado del teorema 2.1.3 para una familia más amplia de funciones: las funciones meromorfas.

Teorema 2.1.4 (Ostrowski, 1946)**.** *Sea R un campo Liouvilliano sobre una región del plano comlejo. Sea $\phi(z)$ una función en R cuya integral indefinida*

$$\psi(z) = \int \phi(z)dz \tag{2.3}$$

está contenida en una extensión Liouvilliana de rango r elemental de R. Entonces la función $\psi(z)$ se puede expresar de la forma

$$\int \phi(z)dz = \sum_{i=1}^{n} c_i ln(u_i(z)) + v(z) \tag{2.4}$$

donde las c_i son constantes y $u_i, v \in R$ para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$

Antes de enunciar el teorema principal de este capítulo y dar su correspondiente demostración, conviene aclarar la terminología empleada por Ostrowski y ver cómo el teorema 2.1.4 generaliza al teorema 2.1.3.

Primeramente, el concepto que Ostrowski denominó como campo Liouvilliano no es más que una versión particular del concepto de campo diferencial que hemos dado en el capítulo 1. Así, un campo Liouvilliano sobre una región D es un conjunto de funciones complejas holomorfas sobre la región D (salvo por un conjunto numerable de singularidades aisladas) que es cerrado bajo la derivación usual, que contiene a las constantes complejas y que es un campo con las operaciones usuales de funciones. Seguido, tenemos que una extensión Liouvilliana para un campo R Liouvilliano es una extensión de campos de R que es Liouvilliana. Por último, una extensión elemental Liouvilliana de rango r, es una extensión Liouvilliana de R que es obtenida mediante la adjunción de r elementos a R; dichos elementos deben ser algebraicos, exponenciales o logaritmos de algunos elementos de R. De este modo, si comparamos estos conceptos con las definiciones 1.2.1 y 1.2.2 dadas en el capítulo anterior, veremos que las hipótesis de la versión general del teorema de Liouville que demostraremos en la siguiente sección se satisfacen para la versión de Ostrowski.

Como último comentario, la versión de Ostrowski implica al teorema 2.1.3 al considerar la extensión $R = \mathbb{C}(z, y_1, \ldots, y_m, y'_1, \ldots, y'_m, F)$ de $\mathbb{C}(z)$ y la derivación usual compleja. Primero, observemos que R es un campo Liouvilliano (al tomar una región adecuada para las y_i), puesto que, con la derivación compleja usual, la derivada de z y de cada una de las y_i vuelve a quedar en R; luego, para ver que la derivada de cada y'_i vuelve a ser un elemento de R nos basta con recordar la observación hecha en la definición 1.2.2 para el caso algebraico (por hipótesis, cada y'_i es algebraica en $z, y_1, \ldots, y_m$); por otro lado, ocupando la hipótesis de que F es algebraica en $z, y_1, \ldots, y_m$, podemos extender la derivación sobre $\mathbb{C}(z, y_1, \ldots, y_m, y'_1, \ldots, y'_m)$ a R de forma única (vuelve a ser la derivación usual compleja) y garantizar que $F' \in R$. Ahora, es claro que $\mathbb{C} \subset R$ y que R es un campo. Todo esto garantiza que R es un campo Liouvilliano.

Tomando $F = \phi$ en el teorema de Ostrowski (que es elemental por hipótesis), concluimos que

$$\int F(z, y_1, \ldots, y_m)\, dz = v + \sum_{i=1}^{n} c_i log(u_i)$$

donde las c_i son constantes y $u_i, v \in R$.

Para terminar de ver la implicación hay que garantizar que cada u_i y v son funciones algebraicas de $z, y_1, \ldots, y_m$, pero esto se sigue de la hipótesis de que y'_i y F son funciones algebraicas de $z, y_1, \ldots, y_m$ y de que cada elemento de R se expresa como el cociente de sumas de productos finitos de $z, y_1, \ldots, y_m, y'_1, \ldots, y'_m$ y F.

2.2. La generalización de Rosenlicht

En noviembre de 1972, en la edición correspondiente al mes de la *American Mathematical Monthly* apareció un artículo escrito por Maxwell Rosenlicht en el que se exhibía una generalización abstracta del resultado obtenido por Ostrowski, cuya prueba era, netamente, algebraica, aunque este resultado había aparecido, esencialmente, cuatro años atrás en la edición de mayo de la *Pacific Journal of Mathematics* en un artículo escrito por el mismo Rosenlicht. A continuación, enunciamos el teorema y procedemos con su demostración.

Teorema 2.2.1 (Rosenlicht, 1972). *Sea F un campo diferencial de característica cero y $\alpha \in F$. Si la ecuación $y' = \alpha$ tiene al menos una solución en alguna extensión elemental K de F, tal que K y F tienen el mismo campo de constantes, entonces existen constantes (respecto a la derivación en K) $c_1, \ldots, c_n$ y elementos $u_1, \ldots, u_n, v \in F$ tales que*

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{u_i'}{u_i} + v' \tag{2.5}$$

Demostración. Como hemos hecho a lo largo del capítulo, denotemos por $' : K \longrightarrow K$ a la derivación sobre K que extiende a la de F ($d : F \longrightarrow F$ denotará la derivación sobre F).

Por hipótesis, existe una torre de campos diferenciales

$$F \subset F(t_1) \subset F(t_1, t_2) \subset \ldots \subset F(t_1, \ldots, t_N) = K \tag{2.6}$$

tal que $y \in K$, donde $y' = \alpha$. Probaremos el teorema por inducción sobre N. Antes de comenzar, observemos que todos los campos de la torre de campos en (2.6) tienen el mismo subcampo de constantes que F y K.

El caso $N = 0$ nos dice que la solución y de $y' = \alpha$ está en F, es decir, $y \in F$. Tomando $c_1 = 0$, $u_1 \in F$ no nulo y $v = y$, es claro que se tiene la identidad (2.5) con las especificaciones del teorema.

Nuestra hipótesis de inducción nos dirá que si $k = N - 1$ y tenemos la torre de campos de N elementos con las hipótesis del teorema, entonces, el resultado se cumple. Veamos qué pasa cuando $k = N$.

De nuestra torre de campos

$$F \subset F(t_1) \subset F(t_1, t_2) \subset \ldots \subset F(t_1, \ldots, t_N) = K$$

que tiene $N + 1$ elementos, sabemos que existe $y \in K$ tal que $y' = \alpha$. Como $F \subseteq F(t_1)$ y $\alpha \in F$ por hipótesis, entonces, al considerar la subtorre de campos de N elementos

$$F(t_1) \subset F(t_1, t_2) \subset \ldots \subset F(t_1, \ldots, t_N) = K$$

podemos aplicar la H.I. verificando que se cumplen las hipótesis del teorema para dicha subtorre. Por lo cual, existen $c_1, \ldots, c_n$ constantes en $F \subseteq F(t_1)$

(dado que todos los campos de nuestra torre tienen el mismo subcampo de constantes) y $u_1, \ldots, u_n, v \in F(t_1)$, tales que

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{u_i'}{u_i} + v'. \tag{2.7}$$

Nos gustaría garantizar que $u_1, \ldots, u_n, v \in F$ o encontrar a partir de ellos una expresión para α que satisfaga las condiciones del teorema. Veremos que esto, en efecto, es posible.

Por hipótesis, dado que K es una extensión elemental de F, entonces se cumple alguno de los siguientes tres casos

i) t_1 es algebraico sobre F.

ii) t_1 es el logaritmo de algún elemento de F.

iii) ó t_1 es la exponencial de algún elemento de F.

Analicemos los tres casos.

i) t_1 es algebraico sobre F.

   Sabemos que si t_1 es algebraico sobre F, entonces $F(t_1) = F[t_1]$, por lo cual, para los $u_1, \ldots, u_n, v \in F(t_1)$ existen polinomios $U_1, \ldots, U_n, V \in F[x]$ tales que $U_i(t_1) = u_i$ para toda $i = 1, \ldots, n$ y $V(t_1) = v$.

   Consideremos el polinomio mínimo $p(x) \in F[x]$ asociado a t_1 y todos los conjugados distintos de t_1 (esto es, las demás raíces diferentes de $p(x)$). Sean $t_1, t_2, \ldots, t_s$ dichos elementos. Sabemos que es posible construir una extensión algebraica de $F(t_1)$ (y de F en particular) tal que contenga a todos estos elementos (a saber, la extensión algebraica $F(t_1, \ldots, t_s)$).

   Ahora, dado que los elementos $t_1, t_2, \ldots, t_s$ son algebraicos sobre F y F es de característica cero, entonces es posible encontrar[2] un elemento $u \in F(t_1, \ldots, t_s)$, de tal forma que $F(u) = F(t_1, \ldots, t_s)$. Tenemos entonces la torre de campos

$$F \subset F(t_1) \subset F(u).$$

   Obsérvese además que para toda $j = 1, \ldots, s$ $F \subset F(t_j) \subset F(u)$.

[2]Véase el teorema A.1.3 del apéndice de álgebra.

El teorema A.1.5 del apéndice de álgebra nos garantiza que $F(t_1) \cong F(t_j)$ para toda $j = 1, \ldots, s$. Denotemos por ϕ_j al isomorfismo entre $F(t_1)$ y $F(t_j)$. Dicho isomorfismo cumple que $\phi_j(f) = f$ para toda $f \in F$ y $\phi_j(t_1) = t_j$. Como $F(t_1), F(t_j) \subset F(u)$, entonces, dicho isomorfismo puede extenderse a un automorfismo de $F(u)$ (donde, por extender, entenderemos que dicho automorfismo preserva las propiedades de ϕ_j al restringirnos adecuadamente).[3]

Consideremos entonces dicho automorfismo $\overline{\phi_j} : F(u) \longrightarrow F(u)$ que cumple i)$\overline{\phi_j}(t_1) = t_j$, ii)$\overline{\phi_j}(f) = f$ para toda $f \in F$ y iii)$\overline{\phi_j}|_{F(t_1)} = \phi_j$. Como $F(u)$ es una extensión algebraica de $F(t_1)$ y, ésta a su vez lo es de F, por el teorema 1.2.2, es posible extender la derivación $d : F \longrightarrow F$ de F a todo $F(t_1)$ y ésta, de igual forma, extenderla a una sobre $F(u)$ de forma única. Sea $* : L \longrightarrow L$ dicha derivación, donde $L = F(u)$.

Definamos $\diamondsuit : L \longrightarrow L$ como sigue

$$(\gamma)^{\diamondsuit} = \overline{\phi_j}^{-1}[(\overline{\phi_j}(\gamma))^*]$$

para toda $\gamma \in L$.

Observemos que $\diamondsuit$ está bien definida, por ser $\overline{\phi_j}$ isomorfismo. Además $\diamondsuit$ es una derivación para L. Esto último se sigue del hecho de que $*$ lo es y de que tanto $\overline{\phi_j}$ como su inversa son isomorfismos (abren sumas y productos). Veamos que $\diamondsuit$, de hecho, es una derivación que extiende a d.

Dada $\gamma \in F$, tenemos que $(\gamma)^{\diamondsuit} = \overline{\phi_j}^{-1}[(\overline{\phi_j}(\gamma))^*] = \overline{\phi_j}^{-1}[(\gamma)^*] = \overline{\phi_j}^{-1}[d(\gamma)] = d(\gamma)$, puesto que tanto $\overline{\phi_j}$ como su inversa fijan a F y $*$ extiende a d.

Entonces, por la unicidad de $*$, tenemos que para toda $\gamma \in L$

$$\overline{\phi_j}^{-1}[(\overline{\phi_j}(\gamma))^*] = (\gamma)^{\diamondsuit} = \gamma^* \tag{2.8}$$

aplicando $\overline{\phi_j}$ a (2.8) concluimos que

$$(\overline{\phi_j}(\gamma))^* = \overline{\phi_j}(\gamma^*)$$

para toda $\gamma \in L$ y para toda $j = 1, \ldots, s$.

[3] Véase el teorema A.1.6 del apéndice de álgebra para ver este hecho.

Ahora, afirmamos que para toda $j = 1, \ldots, s$

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{(U_i(t_j))^*}{U_i(t_j)} + (V(t_j))^*. \tag{2.9}$$

Antes de ver esta afirmación, observemos que por la proposición 1.2.3, $'|_{F(t_1)}$ es una derivación para $F(t_1)$; ahora, por como construimos a $*$, $*|_{F(t_1)}$ también es una derivación para $F(t_1)$, entonces por la unicidad de la derivaciones en el caso algebraico, tenemos que $'|_{F(t_1)} = *|_{F(t_1)}$.

Para ver que la afirmación (2.9) es cierta, primero veamos que $U_i(t_j) = \overline{\phi_j}(U_i(t_1))$. Para ello supongamos que $U_i(x) = \sum_{l=1}^{m_i} a_l^i x^l$, con $a_l^i \in F$ para toda i, l. Entonces

$$U_i(t_j) = \sum_{l=1}^{m_i} a_l^i (t_j)^l = \sum_{l=1}^{m_i} a_l^i (\overline{\phi_j}(t_1))^l = \overline{\phi_j}(\sum_{l=1}^{m_i} a_l^i (t_1)^l) = \overline{\phi_j}(U_i(t_1)).$$

Hemos usado fuertemente que $\overline{\phi_j}$ es isomorfismo y que cumple con i)$\overline{\phi_j}(t_1) = t_j$ y ii)$\overline{\phi_j}(f) = f$ para toda $f \in F$. De manera análoga y usando la identidad seguida de (2.8) se puede probar que $(U_i(t_j))^* = \overline{\phi_j}((U_i(t_1))^*)$, que $V(t_j) = \overline{\phi_j}(V(t_1))$ y que $(V(t_j))^* = \overline{\phi_j}((V(t_1))^*)$ para toda $j = 1, \ldots, s$.

Como $U_i(t_1), V(t_1) \in F(t_1)$ y $'|_{F(t_1)} = *|_{F(t_1)}$, entonces, $(U_i(t_j))^* = \overline{\phi_j}((U_i(t_1))')$ y $(V(t_j))^* = \overline{\phi_j}((V(t_1))')$. Por lo cual,

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \frac{(U_i(t_j))^*}{U_i(t_j)} + (V(t_j))^* = \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{(\overline{\phi_j}((U_i(t_1))')}{\overline{\phi_j}(U_i(t_1))} + (\overline{\phi_j}(V(t_1))').$$

Usando nuevamente las propiedades de $\overline{\phi_j}$ y la hipótesis de que $\alpha \in F$, concluimos que para toda $j = 1, \ldots, s$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} c_i \frac{(U_i(t_j))^*}{U_i(t_j)} + (V(t_j))^* &= \overline{\phi_j}(\sum_{i=1}^{n} c_i \frac{((U_i(t_1))'}{U_i(t_1)} + ((V(t_1))') \\
&= \overline{\phi_j}(\sum_{i=1}^{n} c_i \frac{u_i'}{u_i} + v') = \overline{\phi_j}(\alpha) \\
&= \alpha
\end{aligned}$$

que es nuestra afirmación.

Ahora, sumando sobre s obtenemos que

$$s\alpha = \sum_{i=1}^{n} c_i[\frac{(U_i(t_1))^*}{U_i(t_1)} + \ldots + \frac{(U_i(t_s))^*}{U_i(t_s)}] + [(V(t_1))^* + \ldots + (V(t_s))^*]$$

de lo cual

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{s}[\frac{(U_i(t_1))^*}{U_i(t_1)} + \ldots + \frac{(U_i(t_s))^*}{U_i(t_s)}] + \frac{[(V(t_1))^* + \ldots + (V(t_s))^*]}{s}$$

y, dado que $*$ es derivación (en particular, se cumple la proposición 1.1.2, obtenemos

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{s}[\frac{(U_i(t_1)\ldots U_i(t_s))^*}{U_i(t_1)\ldots U_i(t_s)}] + \frac{[(V(t_1)) + \ldots + V(t_s)]^*}{s}. \tag{2.10}$$

Para concluir la prueba del caso i), afirmamos que, si $U_i(t_1)\ldots U_i(t_s) = \Delta_i$ y $V(t_1))+\ldots+V(t_s) = \Omega$, entonces $\Delta_i, \Omega \in F$ para toda $i = 1, \ldots, n$.

Nuevamente la herramienta algebraica entrará en juego. Consultándose las definiciones y resultados del apéndice de álgebra, podemos afirmar lo siguiente:

1. Claramente, L es un campo de escisión (o un campo de descomposición) sobre F para el polinomio mínimo $p(x)$ asociado a t_1, por lo cual, podemos afirmar que L es una extensión normal de F.

2. De la definición de extensión normal, concluimos que el campo fijo $\mathcal{C}_{\mathcal{G}(\frac{\mathcal{L}}{\mathcal{F}})} = \{a \in F | \sigma(a) = a, \forall \sigma \in G(\frac{L}{F})\} = F$, donde $G(\frac{L}{F})$ es el grupo de automorfismos de L.

   Entonces, si queremos asegurar que $\Delta_i, \Omega \in F$ para toda $i = 1, \ldots, n$, nos basta con demostrar que para toda $\sigma \in G(\frac{L}{F})$ y para toda $i = 1, \ldots, n$, ocurre que $\sigma(\Delta_i) = \Delta_i$ y $\sigma(\Omega) = \Omega$.

   Sea $\sigma \in G(\frac{L}{F})$ y $U_i(t_1)\ldots U_i(t_s) = \Delta_i$, entonces

   $$\sigma(\Delta_i) = \sigma(U_i(t_1)\ldots U_i(t_s)) = U_i(\sigma(t_1))\ldots U_i(\sigma(t_s))$$

   por ser σ un automorfismo que deja fijo a F y porque $U_i \in F[x]$.

   Si demostramos que $\sigma(\{t_1, \ldots, t_s\}) = \{t_1, \ldots, t_s\}$, entonces podremos afirmar que $\sigma(\Delta_i) = \Delta_i$.

Entonces todo se reduce a verificar que $\sigma(t_j)$ es raíz de $p(x)$ para toda $j = 1, \ldots, s$. Como t_j es raíz de $p(x)$, ocurre que $p(t_j) = 0$, entonces $0 = \sigma(0) = \sigma(p(t_j)) = p(\sigma(t_j))$, ya que σ es un automorfismo que deja fijo a F y $p \in F[x]$. Por lo tanto, podemos concluir que $\Delta_i, \Omega \in F$. (Un razonamiento similar se aplica para ver que $\Omega \in F$). En particular, si $\Delta_i, \Omega \in F$, la identidad (2.10) se transforma en

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{s}[\frac{(U_i(t_1)\ldots U_i(t_s))'}{U_i(t_1)\ldots U_i(t_s)}] + \frac{[(V(t_1)) + \ldots + V(t_s)]'}{s}$$

que es la expresión buscada para α.

Para los dos casos que nos faltan, supondremos que t es trascendente sobre F.

ii) t_1 es el logaritmo de algún elemento de F. Es decir, para algún $a \in F$ no cero, $t_1' = \frac{a'}{a}$. En particular, $t_1' \in F$.

Al recordar la expresión (2.7), tenemos que

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{u_i'}{u_i} + v' \tag{2.11}$$

con $c_1, \ldots, c_n$ constantes en $F \subseteq F(t_1)$ y $u_1, \ldots, u_n, v \in F(t_1)$. Entonces, para cada $i = 1, \ldots, n$

$$u_i = \frac{f_i(t_1)}{g_i(t_1)}$$

con $f_i, g_i \in F[x]$ y g_i no nulo. Descomponiendo tanto a f_i y g_i en sus factores irreducibles, tenemos que

$$u_i = \frac{p_{i1}^{r_{i1}} \ldots p_{il_i}^{r_{il_i}}}{q_{i1}^{s_{i1}} \ldots q_{im_i}^{s_{im_i}}}.$$

Simplificando lo que se pueda, podemos concluir que

$$u_i = F_{i1}^{n_{i1}} \ldots F_{iw_i}^{n_{iw_i}}$$

donde $n_{i1}, \ldots, n_{iw_i} \in \mathbb{Z}$ y los F_{ij} son polinomios mónicos irreducibles (salvo por uno que podría ser un elemento de F) y distintos dos a dos.

Sustituyendo esta descomposición en (2.11), obtenemos

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} c_i[\frac{(F_{i1}^{n_{i1}} \dots F_{iw_i}^{n_{iw_i}})'}{F_{i1}^{n_{i1}} \dots F_{iw_i}^{n_{iw_i}}}] + v' = \sum_{i=1}^{n} c_i[n_{i1}\frac{(F_{i1})'}{F_{i1}} + \dots + n_{iw_i}\frac{(F_{iw_i})'}{F_{iw_i}}] + v'$$

donde los $F_{ij} \in F[t_1] \subset F(t_1)$ y cumplen las propiedades antes mencionadas. De esto, podemos suponer, entonces, sin pérdida de generalidad, que en (2.11) cada u_i es un polinomio mónico irreducible en $F[t_1]$ o un elemento de F. Si alguno de los F_{ij} se repitiera, podemos agruparlos sin problema, por lo cual, también supondremos, sin pérdida de generalidad, que en (2.11) los u_i son distintos dos a dos. Despejando, v' de (2.15), tenemos

$$v' = \alpha - \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{u_i'}{u_i}. \tag{2.12}$$

Afirmamos que ésta es la descomposición en fracciones simples de v' sobre F.

De esta última identidad, saquemos los sumandos que cumplan que $u_i \in F$ y agrupémoslos con α para formar el polinomio f de la descomposición en fracciones simples. Veremos que los restantes u_i también están en F.

Dado que u_i es mónico y $t' \in F$, estamos dentro de las condiciones del lema 1.3.1, por lo cual podemos afirmar que el grado de u_i' es exactamente menor en una unidad al de u_i (al multiplicarlo por $-c_i$ no cambia el grado), por lo cual $-c_i u_i$ es de grado menor a u_i. Con esto podemos garantizar que (2.12) es, en efecto, la descomposición en fracciones simples de v'.

Ahora, del lema 1.3.3, sólo habría que verificar una hipótesis para poder ocuparlo en v'. Ésta consiste en ver que si $p(t) \in F[t_1]$, entonces $(p(t))' \in F[t_1]$. Pero se cumple precisamente por el lema 1.3.1 inciso 1). Ya comprobadas las hipótesis de lema 1.3.3, éste nos garantiza que los grados máximos de los denominadores de la descomposición de v' deben aparecer con exponente mayor o igual a dos, lo cual no ocurre. Esto nos llevaría a una contradicción salvo que la descomposición de v' no contenga fracciones simples, es decir, que $u_i \in F$ para toda $i = 1, \dots, n$.

Para terminar este caso, sólo resta ver que $v \in F$. Pero como $u_i \in F$ y $\alpha \in F$, entonces de (2.12) concluimos que v' está en F. Además, la observación de los grados de los denominadores de v' nos ayuda a garantizar que $v \in F[t_1]$ (sabíamos que $v \in F(t_1)$). Nótese que por el lema 1.3.1 el grado de v es cero o uno (no hay otra posibilidad); si v es de grado cero, entonces $v \in F$ y obtendríamos la representación de α buscada. Si el grado de v es uno, entonces $v = v(t) = ct + d$ con $c, d \in F$ y $c \neq 0$; derivando, obtenemos que $v' = c't + t'c + d'$, pero el grado de v' es cero, entonces debe ocurrir que $c' = 0$, es decir, c es una constante (respecto a la derivación), por lo cual

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{u_i'}{u_i} + v' = \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{u_i'}{u_i} + (ct' + d') = \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{u_i'}{u_i} + c\frac{a'}{a} + d'$$

con $u_i, a, d \in F$ y c_i y c constantes, ya que, por hipótesis, $t' = \frac{a'}{a}$ con $a \in F$. Esta última igualdad es la representación buscada para α.

iii) t_1 es la exponencial de algún elemento de F. Es decir, $\frac{t'}{t} = b'$, para algún $b \in F$. En particular, $\frac{t'}{t} \in F$. Nótese, además, que b no es una constante respecto a la derivación.

Nuevamente consideremos la identidad

$$v' = \alpha - \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{u_i'}{u_i}. \tag{2.13}$$

Como en el caso ii) podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que los u_i son irreducibles, mónicos (salvo por algunos que estarían en F) y distintos dos a dos. Los u_i que están en F no nos interesan ya que podemos sacarlos de la suma y agruparlos con α. De igual forma, si algún $u_i = t$, entonces $c_i\frac{u_i'}{u_i} \in F$ ya que $\frac{t'}{t} \in F$, por hipótesis, por lo cual, $c_i\frac{u_i'}{u_i}$ puede agruparse con α también. Veamos qué ocurre con los u_i que, aparentemente, no están en F y que cumplen que $u_i \neq t$.

Dado que $u_i \in F[t_1]$ y $\frac{t'}{t} \in F$, el lema 1.3.1 nos dice que u_i' tiene el mismo grado que u_i, por lo cual, (2.13) no es la representación en fracciones simples de v'. Obsérvese que como cada u_i es mónico e irreducible, u_i' es múltiplo de $u_i \Leftrightarrow u_i = t$. Esta observación equivale a decir que $u_i \neq t$ $\Leftrightarrow u_i \nmid u_i'$. Entonces, para estos $u_i \neq t$, se tiene que $u_i' = g_i u_i + r_i$ con r_i no nulo y de grado menor al u_i. Sustituyendo en (2.13) y reagrupando adecuadamente, obtenemos que

$$v' = \overline{\alpha} - \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{r_i}{u_i} \tag{2.14}$$

que es la representación, ahora sí, en fracciones simples de v'.

Aquí ya no podemos aplicar el lema 1.3.3 como en el caso ii), sin embargo, si se observa la prueba de dicho lema, podemos percatarnos que la hipótesis si $p(t)$ es mónico e irreducible, el grado de $(p(t))'$ es menor que el de $p(t)$, se ocupa en la prueba para garantizar que $p(t) \nmid (p(t))'$, lo cual ocurre para nuestros $u_i \neq t$. Es decir, si reemplazamos la mencionada hipótesis por $p(t) \nmid (p(t))'$, la conclusión del lema sigue siendo válida. Por lo tanto, tomando como válidas las consecuencias del lema 1.3.3 a los factores irreducibles de v (que tienen que ser forzosamente los $u_i \neq t$ por la unicidad de la expresión (2.14), nuevamente tendríamos que los grados máximos de los u_i en (2.14), deberían ser mayores o iguales a dos, lo cual no ocurre. Entonces, como en el caso ii), los u_i distintos de t están en F.

Ya con esta conclusión, de (2.14) deducimos que v' está en F. Como consecuencia del lema 1.3.1 inciso 2) y de lo anterior, ocurre que v tiene grado cero (la observación de los grados en la descomposición de v' obliga a que $v \in F[t_1]$). Por lo tanto $v \in F$.

Entonces, la situación se encuentra como sigue

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{u_i'}{u_i} + v'$$

con $u_i, v \in F$ si $u_i \neq t$ y c_i constante respecto a la derivación. Supongamos que $u_i = t$ para alguna $i = 1, \ldots, n$; sin pérdida de generalidad, supongamos que $u_1 = t$. Tenemos entonces que

$$\begin{aligned} \alpha &= c_1 \frac{u_1'}{u_1} + \sum_{i=2}^{n} c_i \frac{u_i'}{u_i} + v' = c_1 \frac{t'}{t} + \sum_{i=2}^{n} c_i \frac{u_i'}{u_i} + v' \\ &= \sum_{i=2}^{n} c_i \frac{u_i'}{u_i} + c_1 b' + v' = \sum_{i=2}^{n} c_i \frac{u_i'}{u_i} + (c_1 b + v)' \end{aligned}$$

con $c_1 b + v \in F$, ya que $b' = \frac{t'}{t}$ y $b \in F$. Esta última identidad es la expresión buscada para α. Esto concluye la prueba del teorema.

□

Como consecuencias inmediatas del teorema de Liouville, tenemos la versión de Ostrowski, ya que como hemos comentado anteriormente, los conceptos involucrados en las hipótesis del resultado de Ostrowski se corresponden con las hipótesis del teorema 2.2.1, por lo cual, sólo resta tomar $\phi = \alpha$, $y = \psi = \int \alpha$ y derivar la identidad (2.5) con las especificaciones anteriores.

Para terminar con el capítulo, veremos que la versión general del teorema de Liouville en realidad es una doble implicación, es decir:

Teorema 2.2.2. *Si F es un campo diferencial de característica cero, $d : F \longrightarrow F$ es una derivación sobre F y $\alpha \in F$ es un elemento que se expresa de la forma*

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{d(u_i)}{u_i} + d(v)$$

donde las c_i son constantes respecto a la derivación d en F y $u_1, \ldots, u_n, v \in F$, entonces existe una extensión diferencial K de F y un elemento $y \in K$ tal que $y' = \alpha$, donde $'$ es una derivación sobre K que extiende a d.

Demostración. Para probar el regreso del teorema de Liouville ocuparemos el teorema 1.2.1.

Para ello, recordemos que el campo $\mathbb{C}(x)$ se puede considerar como una extensión trascendente de $\mathbb{C}$. Basándonos en esta idea, consideremos una extensión trascendente simple $F(x_1)$ de F. Como $\frac{d(u_1)}{u_1} \in F$ (porque $u_1 \in F$), por el teorema 1.2.1, es posible encontrar una derivación δ_1 en $F(x_1)$ que extienda a la de F y tal que $\delta_1(x_1) = \frac{d(u_1)}{u_1}$, es decir, x_1 es un logaritmo de u_1.

Ahora, consideremos al campo diferencial $F(x_1)$. Tomando nuevamente una extensión trascendente simple $F(x_1)(x_2) = F(x_1, x_2)$ de $F(x_1)$, extendemos la derivación δ_1 a una nueva δ_2 sobre todo $F(x_1, x_2)$, tal que $\delta_2(x_2) = \frac{\delta_1(u_2)}{u_2} = \frac{d(u_2)}{u_2}$. Es decir, x_2 es un logaritmo de u_2.

Siguiendo este razonamiento, construimos la torre de campos diferenciales

$$F \subset F(x_1) \subset \ldots \subset F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = K$$

que es, además, una torre de campos elementales ya que cada x_i es un logaritmo de un elemento en el campo anterior (a saber, de $u_i \in F$), por lo cual, si consideremos al elemento

$$y = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i + v \in K$$

vemos que al derivarlo (respecto a la derivación $' = \delta_n$ sobre $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = K$ que extiende a d) obtenemos

$$y' = (\sum_{i=1}^{n} c_i x_i + v)' = \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{u_i'}{u_i} + v' = \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{d(u_i)}{u_i} + d(v) = \alpha$$

lo cual, concluye la demostración. $\square$

Capítulo 3

Funciones elementales

Ya probada la generalización del teorema de Liouville en el capítulo anterior, estamos en condiciones de ver, al fin, algunas funciones sin primitiva elemental.

Antes de proseguir, conviene hacer la aclaración de que en este capítulo trabajaremos con funciones de variable compleja para detectar la naturaleza no elemental de ciertas integrales. La razón de ello se debe a que como suele verse en los cursos de variable compleja, las funciones trigonométricas y muchas más suelen expresarse en términos de exponenciales, logaritmos y potencias de la función identidad, lo cual nos ayudará, significativamente, a simplificar los cálculos. Más adelante, veremos cómo establecer las ideas que desarrollaremos al caso real.

Primeramente, aterricemos nuestros resultados y definiciones al campo que nos concierne, es decir, al campo de las funciones racionales complejas y su correspondiente extensión diferencial, el campo de las funciones meromorfas.

Estos campos nos servirán como ejemplos de las definiciones que hemos dado a lo largo del capítulo. Así pues, $\mathbb{C}(z) = \{\frac{p(z)}{q(z)} : p(z), q(z) \in \mathbb{C}[z], q(z) \neq 0\}$ (el campo de las funciones racionales complejas) es un campo diferencial con la derivación que conocemos de los cursos de variable compleja. Se puede ver que el subcampo de constantes respecto a la derivación compleja es precisamente $\mathbb{C}$. Luego, como las funciones racionales son funciones meromorfas, es natural considerar la torre de campos

$$\mathbb{C}(z) \subset \mathcal{M}(\mathbb{C}) \subset \mathcal{M}(D) \tag{3.1}$$

donde $\mathcal{M}(\mathbb{C})$ es el campo de las funciones meromorfas del plano complejo y

$\mathcal{M}(D)$ es el campo de las funciones meromorfas sobre cierta región $D \subseteq \mathbb{C}$. Nótese que la derivación compleja funciona perfectamente, tanto para $\mathbb{C}(z)$ como para $\mathcal{M}(D)$, por lo que podemos afirmar que $\mathcal{M}(D)$ es una extensión diferencial de $\mathbb{C}(z)$.

3.1. Funciones elementales complejas

Basados en la definición de extensión elemental para un campo diferencial que dimos en el capítulo 1, daremos a continuación la definición de función elemental compleja.

Definición 3.1.1 (Función elemental compleja)**.** *Considerando la extensión de campos diferenciales $\mathbb{C}(z) \subset \mathcal{M}(D)$, donde D es una región del plano complejo, diremos que una función $f \in \mathcal{M}(D)$ es una función elemental compleja si y sólo si existe una torre de campos*

$$\mathbb{C}(z) \subset \mathbb{C}(z, t_1) \subset \mathbb{C}(z, t_1, t_2) \subset \ldots \subset \mathbb{C}(z, t_1, \ldots, t_N) \subset \mathcal{M}(D) \qquad (3.2)$$

tal que $f \in \mathbb{C}(z, t_1, \ldots, t_N)$ y para cada $i = 1, \ldots, N$ se tiene alguno de los siguientes tres casos

i) t_i es algebraico sobre $\mathbb{C}(z, t_1, \ldots, t_{i-1})$.

ii) t_i es el logaritmo de algún elemento en $\mathbb{C}(z, t_1, \ldots, t_{i-1})$

iii) ó t_i es la exponencial de algún elemento en $\mathbb{C}(z, t_1, \ldots, t_{i-1})$.

Para el caso $i = 1$ entenderemos $\mathbb{C}(z) = \mathbb{C}(z, t_0)$.

Además, diremos que una función $f \in \mathcal{M}(D)$ tiene una primitiva elemental (o, equivalentemente, que la integral $\int f dz$ es elemental) si y sólo si existe una función elemental compleja g tal que, $g' = f$.

Nótese que la definición 3.1.1 depende de la región D que consideremos para garantizar si alguna función es elemental o no.

Ahora, como ejemplos de funciones elementales complejas, tenemos trivialmente, que toda función racional compleja es elemental. Más aún, si f es una función algebraica sobre $\mathbb{C}(z)$, entonces f es elemental al considerar la extensión $\mathbb{C}(z, f)$. También tenemos que las funciones e^z y $ln(z)$ son elementales (ésta última sobre una región adecuada), ya que cumplen las definiciones de logaritmo y exponencial dadas en 1.1.2. Por ejemplo, en la extensión $\mathbb{C}(z, e^z)$ la función e^z es una exponencial de $z \in \mathbb{C}(z)$ ya que

$$\frac{(e^z)'}{e^z} = \frac{e^z}{e^z} = 1 = (z)'.$$

Lo mismo para el logaritmo en la correspondiente extensión $\mathbb{C}(z, ln(z))$.

$$(ln(z))' = \frac{1}{z} = \frac{(z)'}{z}.$$

Existen más funciones elementales complejas, aunque para ver otros ejemplos será necesario demostrar algunas proposiciones.

De la definición de función elemental compleja notemos que si tenemos dos funciones elementales, las respectivas torres de campos en la definición 3.1.1 para cada una de ellas no tienen que ser, en principio, las mismas. Sin embargo, la primera proposición que demostraremos, nos dice que, en efecto, podemos considerar una misma torre para ambas.

Proposición 3.1.1. *Sean $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{M}(D)$ funciones elementales complejas. Entonces existe una torre de campos*

$$\mathbb{C}(z) \subset \mathbb{C}(z, t_1) \subset \mathbb{C}(z, t_1, t_2) \subset \ldots \subset \mathbb{C}(z, t_1, \ldots, t_N) \subset \mathcal{M}(D) \qquad (3.3)$$

que cumple las propiedades de la definición 3.1.1 tal que $f_1, \ldots, f_n \in \mathbb{C}(z, t_1, \ldots, t_N)$.

Demostración. Haremos la prueba por inducción sobre n.

El caso $n = 1$ se sigue directamente de la definición de función elemental compleja.

H.I. Para $n = k$, si $f_1, \ldots, f_k \in \mathcal{M}(D)$ son funciones elementales complejas, entonces existe una torre de campos

$$\mathbb{C}(z) \subset \mathbb{C}(x, u_1) \subset \mathbb{C}(z, u_1, u_2) \subset \ldots \subset \mathbb{C}(z, u_1, \ldots, u_r) \subset \mathcal{M}(D) \qquad (3.4)$$

que cumple las propiedades de la definición 3.1.1 y tal que $f_1, \ldots, f_k \in \mathbb{C}(z, u_1, \ldots, u_r)$.

Veamos que ocurre lo mismo para $n = k + 1$.

Sean $f_1, \ldots, f_k, f_{k+1} \in \mathcal{M}(D)$ funciones elementales complejas. Para las primeras k, por H.I., tenemos que existe una torre de campos

$$\mathbb{C}(z) \subset \mathbb{C}(z, u_1) \subset \mathbb{C}(z, u_1, u_2) \subset \ldots \subset \mathbb{C}(z, u_1, \ldots, u_r) \subset \mathcal{M}(D) \tag{3.5}$$

que cumple las condiciones de 3.1.1 y tal que $f_1, \ldots, f_k \in \mathbb{C}(z, u_1, \ldots, u_r)$.

Ahora, como f_{k+1} es elemental compleja, entonces existe, por definición, una torre de campos

$$\mathbb{C}(z) \subset \mathbb{C}(z, v_1) \subset \mathbb{C}(z, v_1, v_2) \subset \ldots \subset \mathbb{C}(z, v_1, \ldots, v_s) \subset \mathcal{M}(D) \tag{3.6}$$

que cumple las propiedades de 3.1.1 y tal que $f_{k+1} \in \mathbb{C}(z, v_1, \ldots, v_s)$.

Consideremos la torre de campos dada por

$$\mathbb{C}(z) \subset \ldots \subset \mathbb{C}(z, u_1, \ldots, u_r) \subset \mathbb{C}(z, u_1, \ldots, u_r, v_1) \subset \ldots$$
$$\subset \mathbb{C}(z, u_1, \ldots, u_r, v_1, \ldots, v_s) \subset \mathcal{M}(D).$$

Esta torre es una torre de campos diferenciales. Por otro lado cumple las propiedades de 3.1.1, ya que hasta $\mathbb{C}(z, u_1, \ldots, u_r)$ las cumple por H.I.; de ahí en adelante, se satisfacen al hacer la observación de que $\mathbb{C}(z, v_1, \ldots, v_j) \subset \mathbb{C}(z, u_1, \ldots, u_r, v_1, \ldots, v_j)$ para toda $j \in \{1, \ldots, s\}$. Finalmente, observamos que $f_1, \ldots, f_k, f_{k+1} \in \mathbb{C}(z, u_1, \ldots, u_r, v_1, \ldots, v_s)$. Esto concluye la prueba de la proposición. □

El hecho de poder encontrar una extensión elemental que contenga a dos funciones elementales complejas dadas nos ayuda a ver muchos más ejemplos que los que mencionamos. Esto se establece en la siguiente proposición.

Proposición 3.1.2. *El subconjunto* $\mathbf{E} \subset \mathcal{M}(D)$ *de las funciones elementales complejas es un subcampo con las operaciones usuales de suma y producto para funciones. Más aún, dicho subcampo es, con la derivación usual, un campo diferencial.*

Demostración. Si f, g son funciones elementales complejas, entonces, por la proposición anterior, existe una torre de campos

$$\mathbb{C}(z) \subset \mathbb{C}(z, t_1) \subset \mathbb{C}(z, t_1, t_2) \subset \ldots \subset \mathbb{C}(z, t_1, \ldots, t_N) \subset \mathcal{M}(D)$$

que satisface las propiedades de la definición 3.1.1 y tal que $f, g \in \mathbb{C}(z, t_1, \ldots, t_N)$. En particular, nótese que $\mathbb{C}(z, t_1, \ldots, t_N)$ es un campo y que sus elementos son claramente funciones elementales complejas. Así pues, este campo contenido en $\mathbf{E}$ contiene, en particular, a $f + g, -f, -g, fg, \frac{f}{g}, \frac{g}{f}, \frac{1}{f}$ y $\frac{1}{g}$ (cuando éstas son no nulas). Esto prueba que $\mathbf{E}$ es un subcampo de $\mathcal{M}(D)$.

Que $\mathbf{E}$ sea un subcampo diferencial de $\mathcal{M}(D)$ se sigue del hecho de que si $f \in \mathbf{E}$, entonces f está en una extensión elemental de $\mathbb{C}(z)$ como en la definición 3.1.1, que como ya hemos comentado anteriormente, es una extensión diferencial de $\mathbb{C}(z)$ (en particular, es cerrada bajo la diferenciación), por lo cual, f' se encuentra también en dicha extensión elemental, es decir, $f' \in \mathbf{E}$. $\square$

Ya con esto, podemos concluir que muchas otras funciones son elementales sin necesidad de recurrir a la definición. En particular, tenemos que el seno y el coseno complejo son funciones elementales, recordando que

$$sen(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

3.2. Funciones elementales reales

Recordemos que lo que motivó este trabajo fue, inicialmente, el ver que algunas funciones reales conocidas no poseen una primitiva elemental, por lo cual, al definir, el concepto de función elemental compleja quizá no se esté sobre el terreno que quisiéramos: las funciones reales. Sin embargo, como veremos a continuación, existe una manera muy sencilla y natural de resolver este inconveniente.

Definición 3.2.1. *Dada una función continua $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, diremos que f es elemental si y sólo si existe una función meromorfa $\overline{f} : D \longrightarrow \mathbb{C}$, tal que*

i) D es una región de $\mathbb{C}$ que contiene a $[a, b]$

ii) $\overline{f}$ extiende a f, i.e. $\overline{f}|_{[a,b]} = f$

iii) $\overline{f} \in \mathcal{M}(D)$ es elemental compleja.

Esta definición no debería tomarnos por sorpresa, ya que, si uno recuerda, al inicio de los cursos de variable compleja, cuando se comienzan a definir algunas de las funciones complejas con las que se ha de trabajar (como e^z, $sen(z)$, $cos(z)$, etc.), se busca que éstas extiendan a sus similares de variable real. De este modo, si queremos garantizar que ciertas integrales del cálculo no son elementales, bastará con aplicar nuestros resultados a las extensiones complejas pertinentes.

De la definición de función elemental real que acabamos de dar y vistos los ejemplos de funciones complejas elementales que dimos y comentamos, podemos concluir que las funciones reales $f(x) = x, x^n, e^x, ln(x), sen(x), cos(x)$, etc. son funciones elementales reales.

A continuación, antes de probar el resultado que establecerá la relación entre la definición de función elemental real y función elemental compleja, probaremos un lema que nos será de ayuda en dicha prueba.

Lema 3.2.1. *Si $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ son dos funciones elementales reales, entonces existe una región D del plano complejo tal que $[a, b] \subseteq D$ y tal que f y g se extienden a funciones holomorfas elementales sobre D.*

Demostración. Por definición, como f y g son elementales reales entonces existen funciones meromorfas $\overline{f}$ y $\overline{g}$, respectivamente, que extienden a éstas sobre ciertas regiones D_1 y D_2 del plano complejo. Dichas regiones contienen al intervalo $[a, b]$.

Ahora, las extensiones $\overline{f}$ y $\overline{g}$ no tienen polos sobre el intervalo $[a, b]$, puesto que, por definición, f y g son continuas. Por otro lado, el conjunto de polos de las extensiones es un conjunto discreto, por lo cual, dicho conjunto no posee puntos de acumulación. Con esto, podemos garantizar, entonces, que para cada $x \in [a, b]$ existe un disco D_x (que en particular es una región) tal que no contiene ningún polo tanto de $\overline{f}$ como de $\overline{g}$. Denotemos por D a la unión $\bigcup_{x\in[a,b]} D_x$.

No es difícil convencerse de que D es una región del plano complejo que contiene al intervalo $[a, b]$ y que está contenida tanto en D_1 como en D_2. Además, las restricciones de $\overline{f}$ y $\overline{g}$ sobre D son holomorfas (ya que aquí no hay polos de ninguna de las dos funciones). Sólo nos resta ver que dichas restricciones son elementales complejas.

Para ello basta con observar que el conjunto de funciones meromorfas $\mathcal{M}(D_1)$ está contenido en el respectivo $\mathcal{M}(D)$ (y que éste además es un subcampo diferencial de $\mathcal{M}(D)$), por lo que, si $\overline{f}$ que es elemental compleja, cumple la definición 3.1.1, entonces el monomorfismo de campos $\phi : \mathcal{M}(D_1) \longrightarrow \mathcal{M}(D)$ dado por $\phi(h) = h|_D$, genera un torre de campos para la restricción de $\overline{f}$ a partir de la torre inicial de $\overline{f}$ con las mismas condiciones de la definición 3.1.1. Esto prueba que $\overline{f}|_D$ es elemental sobre $\mathbb{C}(z)$. El mismo razonamiento sirve para $\overline{g}|_D$. Esto concluye la prueba del lema. □

La proposición que cierra esta sección es la clave para el estudio del carácter elemental o no elemental de las integrales reales que veremos más adelante, vía la información que obtengamos de la integral de su correspondiente extensión meromorfa.

Proposición 3.2.1. *Sea $f \in \mathcal{C}([a,b])$ una función elemental real y $\overline{f} : D \longrightarrow \mathbb{C}^\infty$ la extensión meromorfa de f de la definición 3.1.1. Si $\overline{f}$ no admite una primitiva elemental en alguna región $D_1 \subseteq D$ (esto es, la integral $\int \overline{f} dz$ no es elemental en ninguna región $D_1 \subseteq D$ sobre $\mathbb{C}(z)$) entonces $\int f(x)dx$ no es elemental.*

Demostración. La prueba es por reducción al absurdo.

Supongamos que $\int f(x)dx$ es elemental, esto quiere decir, entonces, que existe una función $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ elemental tal que $g'(x) = f(x)$ para toda $x \in [a,b]$. De la definición de función elemental real, tenemos entonces que existe una función meromorfa $\overline{g} : D_0 \longrightarrow \mathbb{C}^\infty$ tal que i) D_0 es una región de $\mathbb{C}$ con $[a,b] \subseteq D_0$, ii) $\overline{g}|_{[a,b]} = g$ y iii) $\overline{g} \in \mathcal{M}(D)$ es elemental sobre $\mathbb{C}(z)$.

Tenemos que f y g son elementales, entonces, por el lema anterior, existe una región $D_2 \subseteq (D \cap D_0)$ del plano complejo que contiene al intervalo $[a,b]$ y sobre la cual las funciones $\overline{f}$ y $\overline{g}$ son holomorfas.

Ahora bien, en $[a,b] \subseteq D_2$ se cumple que $\overline{g} = g$, $\overline{f} = f$ y $g'(x) = f(x)$, lo cual nos lleva a concluir que $(\overline{g})'(x) = \overline{f}(x)$ en $[a,b]$ para toda $x \in [a,b]$; entonces, por el teorema de identidad[1] $(\overline{g})' = \overline{f}$ en todo $D_2 \subseteq D$, es decir, $\overline{f}$ admite una primitiva elemental sobre $D_2 \subseteq D$, lo cual es una contradicción. Esto concluye la prueba de la proposición. □

3.3. Algunas integrales reales no elementales

Ya establecida nuestra definición de función elemental real, por fin, estamos en condiciones de ver algunos de los ejemplos más conocidos de integrales no elementales.

Primero, demostremos dos proposiciones auxiliares que garantizan la existencia de una infinidad de funciones trascendentes sobre el campo $\mathbb{C}(z)$. En

[1] Véase el teorema B.1.5 del apéndice de variable compleja.

particular, estas proposiciones muestran que las funciones e^z y $ln(z)$ son trascendentes sobre $\mathbb{C}(z)$.

Proposición 3.3.1. *Sea $g(z)$ una función racional compleja no constante. Entonces la función $e^{g(z)}$ es trascendente sobre $\mathbb{C}(z)$.*

Demostración. Por comodidad, escribiremos simplemente e^g en lugar de $e^{g(z)}$. Haremos la prueba por reducción al absurdo.

Supongamos que e^g es algebraica sobre $\mathbb{C}(z)$. Considerando el polinomio mínimo asociado a e^g, tenemos que e^g satisface una ecuación de la forma

$$e^{ng} + a_1 e^{(n-1)g} + \ldots + a_n = 0 \tag{3.7}$$

donde $n \in \mathbb{N}$ y $a_i \in \mathbb{C}(z)$ para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$. Obsérvese que $a_n \neq 0$, ya que de ser así, encontraríamos un polinomio de menor grado que anularía a e^g, lo cual sería una contradicción para el polinomio mínimo de e^g.

Derivando la ecuación (3.2), obtenemos que

$$\begin{aligned} 0 &= ng'e^{ng} + a_1'e^{(n-1)g} + a_1(n-1)g'e^{(n-1)g} + \ldots + a_n' \\ &= ng'e^{ng} + [a_1' + (n-1)a_1g']e^{(n-1)g} + \ldots + a_n' \\ &= b_0e^{ng} + b_1e^{(n-1)g} + \ldots + b_n \end{aligned}$$

donde cada $b_j \in \mathbb{C}(z)$ (puesto que cada $a_i \in \mathbb{C}(z)$ y $g \in \mathbb{C}(z)$). Esta serie de identidades nos dice que e^g también satisface al polinomio $q(y) = b_0y^n + b_1y^{n-1} + \ldots + b_n \in \mathbb{C}(z)[y]$. Entonces, el polinomio mínimo de e^g divide al polinomio $b_0y^n + b_1y^{n-1} + \ldots + b_n$; es decir, $p_0(y) = y^n + a_1y^{n-1} + \ldots + a_n$ divide a $q(y)$. Nótese que $b_0 = ng' \neq 0$, ya que g no es constante.

Ahora, como ambos polinomios tienen el mismo grado, el múltiplo por el que hay que multiplicar a $p_0(y)$ para obtener $q(y)$ tiene que ser, necesariamente, el término $b_0 = ng'$, de lo cual, podemos concluir que $a_n' = ng'a_n$, o, lo que es igual, que $ng' = \frac{a_n'}{a_n}$.

Como consecuencia del teorema fundamental del álgebra, podemos descomponer a $a_n \in \mathbb{C}(z)$ como sigue

$$a_n = \alpha_0(z - \alpha_1)^{n_1}(z - \alpha_2)^{n_2} \ldots (z - \alpha_r)^{n_r} \tag{3.8}$$

donde $n_i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ y $\alpha_i \neq \alpha_j$ y $\alpha_i, \alpha_0 \in \mathbb{C}$ si $i, j \in \{1, \ldots, r\}$ e $i \neq j$. Entonces, usando la proposición 1.1.2 se tiene que

$$
\begin{aligned}
(ng)' = ng' = \frac{a_n'}{a_n} &= \frac{(\alpha_0(z-\alpha_1)^{n_1}(z-\alpha_2)^{n_2}\dots(z-\alpha_r)^{n_r})'}{(\alpha_0(z-\alpha_1)^{n_1}(z-\alpha_2)^{n_2}\dots(z-\alpha_r)^{n_r})} \\
&= \frac{\alpha_0'}{\alpha_0} + n_1\frac{(n_1(z-\alpha_1)^{n_1-1})}{(z-\alpha_1)^{n_1}} + \dots + n_r\frac{(n_r(z-\alpha_r)^{n_r-1})}{(z-\alpha_r)^{n_r}} \\
&= \frac{n_1^2}{(z-\alpha_1)} + \dots + \frac{n_r^2}{(z-\alpha_r)} = \sum_{i=1}^{r}\frac{n_i^2}{(z-\alpha_i)}.
\end{aligned}
$$

Obsérvese que $\sum_{i=1}^{r}\frac{n_i^2}{(z-\alpha_i)}$ es la descomposición en fracciones simples de $(ng)'$ sobre $\mathbb{C}$.

Por otro lado, como podemos considerar a $\mathbb{C}(x)$ como una extensión simple trascendente de $\mathbb{C}$ y además ocurre que para cada $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ se cumple que $(p(z))' \in \mathbb{C}[z]$ y si $p(z)$ es mónico e irreducible entonces el grado de $(p(z))'$ es menor al grado de $p(z)$, entonces podemos aplicar el lema 1.3.3 a $ng \in \mathbb{C}(z)$, el cual nos diría que los grados máximos de los denominadores de la descomposición en fracciones simples de $(ng)'$ deben ser mayores o iguales a 2, lo cual como vemos, no ocurre. Esta contradicción concluye la prueba de la proposición.

□

Proposición 3.3.2. *Sea $g(z)$ una función racional compleja no constante. Entonces la función $ln(g(z))$ es trascendente sobre $\mathbb{C}(z)$.*

Demostración. Para la prueba de nuestra proposición, ocuparemos el lema 1.3.4, observando que $(ln(g(z)))' = \frac{g'(z)}{g(z)} \in \mathbb{C}(z)$. Por lo cual, nos basta con demostrar que $ln(g(z)) \notin \mathbb{C}(z)$ para demostrar que $ln(g(z)$ es trascendente sobre $\mathbb{C}(z)$.

Supongamos que $ln(g(z)) = R(z) \in \mathbb{C}(z)$. Notemos que la función $R(z)$ no es constante, por lo cual, al tomar la exponencial

$$e^{ln(g(z))} = g(z) = e^{R(z)} \quad \Leftrightarrow \quad e^{R(z)} - g(z) = 0. \tag{3.9}$$

Esta última igualdad nos indica que la función $e^{R(z)}$ es algebraica sobre $\mathbb{C}(z)$, donde $R(z) \in \mathbb{C}(z)$ no es constante. Lo cual representa una contradicción a la proposición anterior que hemos probado. Por lo tanto, $ln(g(z)) \notin \mathbb{C}(z)$. Esto concluye la prueba de la proposición. □

Los siguientes dos teoremas nos brindarán condiciones necesarias y suficientes para garantizar la naturaleza elemental (o no elemental) de cierto tipo de integrales. En la prueba de ambos usaremos la versión general del teorema de Liouville.

Teorema 3.3.1 (Liouville, 1835)**.** *Sea D una región del plano complejo y $f, g \in \mathbb{C}(z)$ con g no constante y sin polos en D. Entonces, la integral $\int fe^g dz$ es elemental compleja si y sólo si existe una función $R \in \mathbb{C}(z)$ tal que $f = R' + Rg'$.*

Demostración. Veamos las dos implicaciones.

$\Leftarrow$] Supongamos que existe una función racional compleja $R(z)$ tal que $f = R' + Rg'$. P.d. que existe una función elemental compleja $y \in \mathcal{M}(D)$ tal que $y' = fe^g$.

Al multiplicar la identidad que tenemos por hipótesis por e^g, vemos que

$$fe^g = R'e^g + Rg'e^g.$$

Integrando esta última igualdad obtenemos que

$$\int fe^g dz = \int R'e^g dz + \int Rg'e^g dz. \tag{3.10}$$

Ahora bien, podemos resolver la integral $\int R'e^g dz$ si utilizamos integración por partes, por lo cual

$$\int R'e^g dz = Re^g - \int Rg'e^g dz. \tag{3.11}$$

Al sustituir (3.11) en (3.10), concluimos que

$$\int fe^g dz = Re^g - \int Rg'e^g dz + \int Rg'e^g dz = Re^g. \tag{3.12}$$

Por lo que, al considerar la función $y = Re^g$ garantizaríamos el resultado, siempre y cuando, y fuese una función elemental compleja en $\mathcal{M}(D)$. Pero esto último es cierto, ya que la función e^g es holomorfa en D, puesto que por hipótesis g no tiene polos en D (los cuales son sus únicas singularidades), y, en consecuencia, las únicas posibles singularidades de la función Re^g sobre D son las que R posea en dicha región, las cuales son únicamente polos. Por lo tanto, $y \in \mathcal{M}(D)$.

Por último, y es claramente una función elemental compleja, puesto que pertenece a la extensión elemental $\mathbb{C}(z, e^g)$ de $\mathbb{C}(z)$. Esto último concluye la prueba de esta implicación.

$\Rightarrow$] Supongamos ahora que la integral $\int fe^g dz$ es elemental. Veamos que existe una función $R \in \mathbb{C}(z)$ tal que $f = R' + Rg'$.

Denotemos por $t = e^g$ y consideremos la extensión elemental $\mathbb{C}(z, t)$ de $\mathbb{C}(z)$. Por lo discutido en la prueba del regreso, tenemos que $t \in \mathcal{M}(D)$. Entonces tenemos la torre de campos elementales

$$\mathbb{C}(z) \subset \mathbb{C}(z, t) \subset \mathcal{M}(D). \tag{3.13}$$

Notemos que $\mathbb{C}(z, t)$ es un campo diferencial de característica cero y que $\mathbb{C}(z, t)$ y $\mathcal{M}(D)$ tienen el mismo subcampo de constantes (a saber, $\mathbb{C}$). Además, como por hipótesis la $\int fe^g dz$ es elemental, entonces, existe una función $y \in \mathcal{M}(D)$ elemental tal que $y' = ft$. Con todo esto, entramos dentro de las condiciones de la versión general del teorema de Liouville, por lo cual, podemos expresar a ft como

$$ft = \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{u_i'}{u_i} + v' \tag{3.14}$$

donde $c_i \in \mathbb{C}$ y $v, u_i \in \mathbb{C}(z, t)$ para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Al igual que en las pruebas de los casos ii) y iii) del teorema 2.2.1, podemos suponer que en la ecuación (3.14), los u_i son polinomios mónicos irreducibles y distintos dos a dos o elementos de $\mathbb{C}(z)$. De igual forma, dado que t es trascendente sobre $\mathbb{C}(z)$ (debido a la proposición 3.3.1), al considerar los campos $\mathbb{C}(z)$ y $\mathbb{C}(z, t)$, podemos (siguiendo el mismo razonamiento de la prueba del inciso iii) del teorema 2.2.1) concluir que todos los $u_i \neq t$ están en $\mathbb{C}(z)$. Además, para los $u_i = t$ ocurre que $\frac{u_i'}{u_i} = g' \in \mathbb{C}(z)$, por lo que podemos concluir, con todo lo anterior, que $\sum_{i=1}^{n} c_i \frac{u_i'}{u_i} \in \mathbb{C}(z)$.

Por otro lado, obsérvese que si v tuviese un polinomio mónico irreducible $p(t) \neq t$ en su descomposición en fracciones simples, dicho polinomio tendría que aparecer en la descomposición en fracciones simples de v' con exponente mayor o igual a dos, cosa que como hemos visto, no ocurre. Por lo tanto, v necesariamente debe ser de la forma

$$v = \sum_{j=-r}^{n} b_j t^j$$

con $r \in \mathbb{N}$ y $b_j \in \mathbb{C}(z)$ para toda $j \in \{-r, \ldots, n\}$. Con lo cual, al ocupar el lema 1.3.1 inciso 2), obtenemos

$$v' = \sum_{j=-r}^{n} (b'_j + jg'b_j)t^j \tag{3.15}$$

ahora, si sustituimos v' en (3.14) por lo obtenido en (3.16) concluimos que

$$ft = Q + \sum_{j=-r}^{n} (b'_j + jg'b_j)t^j$$

donde $\sum_{i=1}^{n} c_i \frac{u'_i}{u_i} = Q \in \mathbb{C}(z)$. Esta última expresión, vista como una igualdad de polinomios en $\mathbb{C}(z)[t]$, nos dice que (al igualar el coeficiente de t)

$$f = b'_1 + g'b_1.$$

Tomando $R = b_1 \in \mathbb{C}(z)$ se sigue el resultado buscado. Esto concluye la prueba del teorema.

□

El siguiente resultado es una generalización de un resultado debido a G. H. Hardy y que aparece en [8].

Teorema 3.3.2 (Hardy, 1905)**.** *Sean $f, g \in \mathbb{C}(z)$ con g no constante. Entonces la integral $\int f ln(g(z))dz$ es elemental compleja si y sólo si existe una función $R_1 \in \mathbb{C}(z)$ y una constante $C \in \mathbb{C}$ tales que $f = \frac{Cg'}{g} + R'_1$.*

Demostración. Nuevamente veamos las dos implicaciones.

$\Leftarrow$] Supongamos que $f = \frac{Cg'}{g} + R_1'$ con $R_1 \in \mathbb{C}(z)$ y $C \in \mathbb{C}$. P.d. que existe una función elemental compleja $y \in \mathcal{M}(D)$ tal que $y' = fln(g(z))$.

Al igual que en la ida del teorema anterior, integraremos directamente y usaremos el método de integración por partes para proponer a la función y buscada.

De la hipótesis, al multiplicar por $ln(g(z))$ e integrar, vemos que

$$\int fln(g(z))dz = C\int \frac{g'ln(g(z))}{g}dz + \int R_1'ln(g(z))dz$$

pero

$$C\int \frac{g'ln(g(z))}{g}dz = \frac{C}{2}(ln(g(z)))^2$$

por lo cual

$$\int fln(g(z))dz = \frac{C}{2}(ln(g(z)))^2 + \int R_1'ln(g(z))dz.$$

Aplicando el método de integración por partes en la última integral de la igualdad anterior, obtenemos que

$$\int R_1'ln(g(z))dz = R_1ln(g(z)) - \int \frac{R_1g'}{g}dz. \tag{3.16}$$

Pero la función $\frac{R_1g'}{g} \in \mathbb{C}(z)$, entonces, por el teorema de Laplace, la integral $\int \frac{R_1g'}{g}dz$ es elemental. Entonces, proponemos $y = \frac{C}{2}(ln(g(z)))^2 + R_1ln(g(z)) - \int \frac{R_1g'}{g}dz$ como la función buscada.

Ahora bien, sobre una región D adecuada, $\frac{C}{2}(ln(g(z)))^2$, $R_1ln(z)$, $\int \frac{R_1g'}{g}dz \in \mathcal{M}(D)$, por lo cual, podemos garantizar que $y \in \mathcal{M}(D)$. Finalmente, es claro que y es una función elemental compleja puesto que $\frac{C}{2}(ln(g(z)))^2$ y $R_1ln(z)$ se encuentran en la extensión elemental de $\mathbb{C}(z)$, $\mathbb{C}(z, ln(g(z)))$ que, al sumarse con la función elemental $\int \frac{R_1g'}{g}dz$, prueban que y es elemental. Esto concluye la prueba del regreso.

$\Rightarrow$] Supongamos que la integral $\int fln(g(z))dz$ es elemental. Demostremos que $f = \frac{Cg'}{g} + R_1'$ para alguna $C \in \mathbb{C}$ y $R_1 \in \mathbb{C}(z)$.

Sea $t = ln(g(z))$. Consideremos la extensión de campos diferenciales

$$\mathbb{C}(z) \subset \mathbb{C}(z,t) \subset \mathcal{M}(D)$$

donde D es una región adecuada para el $ln(g(z))$. Al igual que en el teorema anterior al ocupar la hipótesis de que la integral $\int fln(g(z))dz$ es elemental, podemos ocupar el teorema de Liouville para el elemento ft, con lo cual

$$ft = \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{u_i'}{u_i} + v'$$

con $c_i \in \mathbb{C}$ y $v, u_i \in \mathbb{C}(z,t)$ para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Del mismo modo que en la prueba del caso ii) del teorema 2.2.1, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que los u_i son polinomios mónicos irreducibles en $\mathbb{C}(z)[t]$ o elementos de $\mathbb{C}(z)$ y, en consecuencia, siguiendo el mismo razonamiento que en la prueba del teorema, concluir que los u_i pertenecen a $\mathbb{C}(z)$. De este modo, tenemos que

$$v' = ft + R \tag{3.17}$$

donde $R \in \mathbb{C}(z)$.

Siguiendo la misma prueba del inciso ii) del teorema 2.2.1, al hacer el análisis de los grados de los denominadores de v' podemos garantizar que $v \in \mathbb{C}(z)[t]$. Es decir, $v = \sum_{i=0}^{n} a_i t^i$ con $a_i \in \mathbb{C}(z)$ para toda $i \in \{0, \ldots, n\}$ y $a_n \neq 0$. Ahora bien, por lema 1.3.1, dado que t es trascendente (por la proposición 3.3.2), vemos que sólo hay dos posibles expresiones para v. Es decir, $v = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$ o $v = a_0 + a_1 t$.

Veamos el caso $v = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$. Derivando esta última igualdad e igualándola a la ecuación (3.17), obtenemos que

$$ft + R = a_0' + a_1' t + a_1 t' + a_2' t^2 + 2a_2 t' t$$

de lo cual, al igualar los coeficientes de cada potencia de t, podemos concluir que $a_2' = 0$, es decir, $a_2 \in \mathbb{C}$ y que

$$f = a_1' + 2a_2t' = a_1' + \frac{2a_2g'}{g}. \tag{3.18}$$

Tomando $R_1 = a_1 \in \mathbb{C}(z)$ y $C = 2a_2 \in \mathbb{C}$, se sigue el resultado. La construcción del caso restante se obtiene de la ecuación (3.18). Esto concluye la prueba del teorema.

□

La siguientes proposiciones exhiben una gran cantidad de integrales reales no elementales.

Proposición 3.3.3. *La integral $\int x^{2n}e^{ax^2}dx$ no es elemental para todo $n \in \mathbb{Z}$ y para toda $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.*

Demostración. Ayudados por la proposición 3.2.1, consideremos la extensión meromorfa compleja $z^{2n}e^{az^2}$ y comprobemos que la integral $\int z^{2n}e^{az^2}dz$ no es elemental compleja.

Si dicha integral fuese elemental, por el teorema 3.3.1 tendríamos que

$$z^{2n} = R' + R2az \tag{3.19}$$

para cierta $R \in \mathbb{C}(z)$. Supongamos que $R = \frac{p}{q}$ para ciertos $p, q \in \mathbb{C}[z]$ con $q \neq 0$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que p y q son primos relativos entre sí.

Como

$$R' = \frac{p'q - q'p}{q^2} \tag{3.20}$$

al sustituir (3.20) en (3.19) obtenemos

$$z^{2n} = \frac{p'q - q'p}{q^2} + 2az\frac{p}{q} \quad \Leftrightarrow \quad q^2z^{2n} = p'q - q'p + 2azpq \tag{3.21}$$

lo cual puede reescribirse como

$$q(qz^{2n} - p' - 2azp) = -q'p. \tag{3.22}$$

Veamos que q no puede ser un polinomio de grado mayor o igual a uno.

Supongamos, entonces, que z_0 es una raíz de multiplicidad $k \geq 1$ de q, es decir, $q = (z - z_0)^k q_1$ donde $q_1 \in \mathbb{C}[z]$,el grado de q_1 es menor al de q y

z_0 no es raíz de q_1. Notemos, con lo anterior, que la multiplicidad de la raíz z_0 en el miembro izquierdo de la ecuación (3.22) es mayor o igual a k (esto dependerá de si z_0 es raíz o no de $qz^{2n} - p' - 2azp$), pero la multiplicidad de la raíz en el miembro derecho de la misma ecuación es $k-1$, puesto que $q' = k(z-z_0)^{k-1}q_1 + q_1'(z-z_0)^k$ (aquí la multiplicidad de z_0 es, por definición, igual a $k-1$) y p y q son primos relativos (z_0 no puede ser raíz de p). Esto nos lleva a una contradicción, por lo tanto, q no tiene raíces, es decir, q es una constante. Supongamos entonces que $q \in \mathbb{C}$ y, sin pérdida de generalidad, que $q = 1$.

Bajo esta suposición, la ecuación del lado derecho en (3.21) se transforma en

$$z^{2n} = p' + 2azp. \tag{3.23}$$

Veamos que no existe un polinomio $p \in \mathbb{C}[z]$ que pueda satisfacer dicha ecuación. El caso $n = 0$ es claro.

Primeramente, observemos que si $n \in \mathbb{Z}^-$, entonces la ecuación (3.23) no tiene una solución $p \in \mathbb{C}[z]$, ya que el miembro derecho de la misma es un polinomio y $z^{2n} \in \mathbb{C}(z) \setminus \mathbb{C}[z]$.

Ahora analicemos el caso en el que $n \in \mathbb{Z}^+$. El grado del miembro izquierdo de (3.23) es $2n$. Esto obliga a que el grado de p sea $2n-1$ (z está multiplicando a p y lo que aporte p' no nos interesa, ya que el grado de p' se reduce al derivar), por lo cual, tenemos que $p = \sum_{i=0}^{2n-1} b_i z^i$. Derivando y sustituyendo el resultado en (3.23), obtenemos

$$\begin{aligned}
z^{2n} &= \sum_{i=1}^{2n-1} ib_i z^{i-1} + \sum_{i=0}^{2n-1} 2ab_i z^{i+1} \\
&= b_1 + \sum_{i=2}^{2n-1} ib_i z^{i-1} + \sum_{i=1}^{2n} 2ab_{i-1} z^i \\
&= b_1 + \sum_{i=1}^{2n-2} (i+1)b_{i+1} z^i + \sum_{i=1}^{2n-2} 2ab_{i-1} z^i + 2ab_{2n-2} z^{2n-1} + 2ab_{2n-1} z^{2n} \\
&= b_1 + \sum_{i=1}^{2n-2} [2ab_{i-1} + (i+1)b_{i+1}] z^i + 2ab_{2n-2} z^{2n-1} + 2ab_{2n-1} z^{2n}.
\end{aligned}$$

Con esta última expresión, al igualar los coeficientes, concluimos que $b_1 = 0$, $b_{2n-2} = 0$, $2ab_{2n-1} = 1$ y $2ab_{i-1} + (i+1)b_{i+1} = 0$ para toda $i \in \{1, \ldots, 2n -$

$2\}$. Ahora, partiendo de que $b_1 = 0$ y que $2ab_{i-1} + (i+1)b_{i+1} = 0$ para toda $i \in \{1, \ldots, 2n-2\}$, podemos concluir para $i = 2$ que $b_3 = 0$; luego, con este hecho, para $i = 4$, concluir que $b_5 = 0$, y, recursivamente, que $b_{2j-1} = 0$ para toda $j \in \{1, \ldots, n\}$. En particular, para $j = n$, concluimos que $b_{2n-1} = 0$, sin embargo, $2ab_{2n-1} = 1 \Leftrightarrow b_{2n-1} = \frac{1}{2a} \neq 0$. Esta contradicción prueba la imposibilidad de (3.23), con lo cual concluimos la prueba de la proposición. □

Proposición 3.3.4. *La integral $\int x^{-n}e^{ax}dx$ no es elemental para todo entero positivo n y para toda $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.*

Demostración. Nuevamente, ayudados por la proposición 3.2.1, consideremos la extensión meroforma $z^{-n}e^{az}$ y veamos que la integral $\int z^{-n}e^{az}dz$ no es elemental compleja.

Si suponemos que la integral $\int z^{-n}e^{az}dz$ es elemental, entonces, por el teorema 3.3.1, tenemos que

$$z^{-n} = R' + aR \tag{3.24}$$

para cierta $R \in \mathbb{C}(z)$. Suponiendo que $R = \frac{p}{q}$ con $p, q \in \mathbb{C}[z]$, $q \neq 0$ y p y q primos relativos, al derivar y sustituir en (3.24), obtenemos

$$z^{-n} = \frac{p'q - q'p}{q^2} + a\frac{p}{q} \quad \Leftrightarrow \quad -z^{-n} + a\frac{p}{q} + \frac{p'}{q} = \frac{q'p}{q^2} \tag{3.25}$$

que, al multiplicar por z^n y q^2, nos queda

$$-q^2 + z^n p'q + az^n pq = z^n q'p \quad \Leftrightarrow \quad q(-q + z^n p' + az^n p) = z^n q'p. \tag{3.26}$$

De la ecuación (3.24), al asumir que $R = \frac{p}{q}$, notamos que q no puede ser constante, ya que, de lo contrario, tendríamos una igualdad entre un polinomio y z^{-n} que, claramente, es imposible. De este modo, podemos concluir que q es un polinomio de grado positivo. Con esto, consideremos entonces, al igual que la proposición anterior, una raíz z_0 de q de multiplicidad k. Supongamos que $z_0 \neq 0$. De la ecuación del lado derecho en (3.26), podemos concluir que z_0 es una raíz de multiplicidad mayor o igual a k (dependiendo de si z_0 es raíz de $-q + z^n p' + az^n p$ o no), sin embargo, como p y q son primos relativos y z_0 no es raíz de z^n, podemos garantizar al igual que en la proposición anterior, que z_0 es una raíz de multiplicidad $k - 1$ del miembro derecho de la identidad en (3.26). Esta contradicción nos lleva a concluir que q tiene como única raíz a $z_0 = 0$, por lo cual, $q = cz^k$ con $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Sustituyendo esta igualdad en la identidad derecha de (3.26), obtenemos

$$z^k(-cz^k + z^n p' + az^n p) = kz^{n+k-1}p. \tag{3.27}$$

Analicemos esta última igualdad:

Caso i) $n < k$. El producto $z^k z^n p'$ en el lado izquierdo de (3.27), nos garantiza que $z_0 = 0$ es una raíz de multiplicidad mayor o igual a $n + k$ (ya que para este caso, $n + k < 2k$). Pero el lado derecho de la misma igualdad, al ser p y q primos relativos, nos dice que z_0 es una raíz de multiplicidad $n + k - 1$. Esto nos lleva a una contradicción.

Caso ii) $n \geq k$ y $n \neq k + 1$. Bajo esta hipótesis, como $n + k \geq 2k$, podemos concluir que z_0 es una raíz de multiplicidad $2k$ del lado izquierdo de (3.27), mientras que el lado derecho nos dice que z_0 es una raíz de multiplicidad $n + k - 1$, con lo cual tenemos que $2k = n + k - 1 \Leftrightarrow k + 1 = n$. Esto representa otra contradicción.

Caso iii) $n = k + 1$. Sustituyendo en (3.27) y factorizando el término z^k obtenemos

$$z^{2k}(-c + zp' + azp) = kz^{2k}p \quad \Leftrightarrow \quad -c + zp' + azp = kp$$

es decir

$$zp' = kp - azp + c \tag{3.28}$$

pero esta última igualdad es claramente imposible para el polinomio p, puesto que el grado del miembro izquierdo de (3.28) es una unidad menor al del polinomio del lado derecho.

Todas estas contradicciones finalizan la prueba de la proposición. □

A continuación, mostraremos varios ejemplos de integrales reales no elementales. La simpleza de muchas de ellas resulta increíblemente llamativa.

Ejemplo 3.3.1 (Función de distribución normal). *La integral* $\int e^{-x^2}dx$ *no es elemental real.*

Por la proposición 3.3.3 (tomando $n = 0$ *y* $a = -1$*), al considerar la extensión meromorfa* e^{-z^2} *vemos que la integral* $\int e^{-z^2}dz$ *no es elemental compleja, entonces, por la proposición 3.2.1,* $\int e^{-x^2}dx$ *no es elemental real.*

Ejemplo 3.3.2. *La integral* $\int \frac{e^x}{x}dx$ *no es elemental real.*

Al considerar la extensión meromorfa $\frac{e^z}{z}$*, vemos que, de la proposición 3.3.4, al tomar* $n = 1 = a$*, la integral* $\int \frac{e^z}{z}dz$ *no es elemental compleja.*

Ejemplo 3.3.3. *La integral* $\int \sqrt{ln\ x}\ dx$ *no es elemental real.*

Consideremos el cambio de variable $t^2 = lnx$*. Entonces* $e^{t^2} = x$ *y* $2te^{t^2} = dx$*. De esta forma, tenemos que*

$$\int \sqrt{ln\ x}\ dx = 2\int t^2e^{t^2}dt.$$

Al considerar la extensión meromorfa $z^2e^{z^2}$*, vemos que, por la proposición 3.3.3, al tomar* $n = 1 = a$*, la integral* $\int z^2e^{z^2}dz$ *no es elemental compleja. Por lo tanto,* $2\int t^2e^{t^2}dt$ *no es elemental real y, por lo tanto,* $\int \sqrt{ln\ x}\ dx$ *tampoco lo es.*

Ejemplo 3.3.4. *La integral* $\int \frac{1}{\sqrt{ln\ x}}dx$ *no es elemental real.*

Considerando el mismo cambio de variable que en el ejemplo anterior, obtenemos que

$$\int \frac{1}{\sqrt{ln\ x}}dx = 2\int e^{t^2}dt.$$

Esta última integral no es elemental por la proposición 3.2.1 al considerar la extensión meromorfa e^{z^2} *y tomar* $n = 0$ *y* $a = 1$ *en la proposición 3.3.3.*

Ejemplo 3.3.5. *La integral* $\int \frac{e^x}{\sqrt{x}}dx$ *no es elemental real.*

Proponiendo el cambio de variable $t^2 = x$ *vemos que* $2tdt = dx$*, por lo que*

$$\int \frac{e^x}{\sqrt{x}}dx = 2\int e^{t^2}dt$$

que por el ejemplo anterior, sabemos que no es elemental.

Ejemplo 3.3.6. *La integral $\int e^{e^x}dx$ no es elemental real.*

Considerando el cambio de variable $t = e^x$, vemos que $ln(t) = x$ y que $\frac{dt}{t} = dx$, por lo cual

$$\int e^{e^x}dx = \int \frac{e^t}{t}dt.$$

En el ejemplo 3.3.2 se vio que esta última integral no es elemental.

Ejemplo 3.3.7. *La integral $\int \frac{1}{ln\ x}dx$ no es elemental real.*

Considerando el cambio de variable $t = ln\ x$ vemos que $e^t = x$ y que $e^t dt = dx$, por lo cual

$$\int \frac{1}{ln\ x}dx = \int \frac{e^t}{t}dt$$

que como ya hemos visto, no es elemental.

Ejemplo 3.3.8. *La integral $\int ln(ln\ x)dx$ no es elemental real.*

Utilizando el método de integración por partes, tomando $u = ln(ln\ x)$ y $dv = 1$ tenemos que $du = \frac{1}{xln\ x}$ y $v = x$, con lo cual

$$\int ln(ln\ x)dx = xln(ln\ x) - \int \frac{1}{ln\ x}dx$$

esta última integral es no elemental por lo visto en el ejemplo anterior.

Ejemplo 3.3.9. *La integral $\int e^x ln\ x\ dx$ no es elemental real.*

Usando el método de integración por partes, tomando $u = ln\ x$ y $dv = e^x$, vemos que $du = \frac{1}{x}$ y $v = e^x$, con lo cual

$$\int e^x ln\ x\ dx = e^x ln\ x - \int \frac{e^x}{x} \tag{3.29}$$

cuya última integral, como hemos visto, no es elemental.

Ejemplo 3.3.10. *La integral $\int \frac{ln\ x}{x-a}$ no es elemental real para toda $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ (para $a = 0$, se tiene que $\int \frac{ln\ x}{x} = \frac{1}{2}(ln\ x)^2$).*

Por el teorema 3.3.2, al considerar la extensión meroforma $\frac{ln\ z}{z-a}$, si la integral $\int \frac{ln\ z}{z-a}dz$ fuese elemental compleja, se tendría que

$$\frac{1}{z-a} = \frac{C}{z} + R'$$

para alguna $R \in \mathbb{C}(z)$ y para alguna $C \in \mathbb{C}$. AL despejar R' de la ecuación anterior e integrar obtenemos

$$R = Cln(z) - ln(z-a) + c.$$

Esta igualdad es imposible para cualquier función racional $R \in \mathbb{C}(z)$, puesto que el ln es una función trascendente sobre $\mathbb{C}(z)$. Por lo tanto, la integral $\int \frac{ln\, x}{x-a}$ no es elemental real.

Ejemplo 3.3.11. *Las integrales $\int \frac{ln\, x}{x^2+1}dx$ y $\int \frac{ln\, x}{1-x^2}dx$ no son elementales reales.*

Consideremos la extensión meromorfa $\frac{ln\, z}{z^2+1}$ y veamos que la integral $\int \frac{ln\, z}{z^2+1}dz$ no es elemental. Si lo fuese, el teorema 3.2.2 nos diría que

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{2i(z-i)} - \frac{1}{2i(z+i)} = R' + \frac{C}{z}$$

para alguna $R \in \mathbb{C}(z)$ y alguna $C \in \mathbb{C}$. Al despejar R' e integrar, obtenemos

$$R = \frac{1}{2i}ln(z-i) - \frac{1}{2i}ln(z+i) + ln\, z + c.$$

Esta última identidad es imposible para cualquier función racional $R \in \mathbb{C}(z)$ (usando el mismo argumento que en el ejemplo anterior). Por lo tanto, la integral $\int \frac{ln\, z}{z^2+1}dz$ no es elemental. El mismo razonamiento funciona para la integral $\int \frac{ln\, x}{1-x^2}dx$.

Ejemplo 3.3.12. *La integral $\int ln(tanx)\, dx$ no es elemental real.*

Considerando el cambio de variable $t = tanx$, vemos que $arctan\, t = x$ y que $\frac{dt}{1+t^2} = dx$. Por lo cual,

$$\int ln(tanx)\, dx = \int \frac{ln\, t}{1+t^2}dt.$$

Esta última integral ya hemos visto que no es elemental.

Para los siguientes ejemplos necesitaremos hacer un par de observaciones que serán claras al recordar la proposición 3.1.2. Primero, si $f \in \mathcal{M}(D)$ no fuese una función elemental compleja, entonces su integral $\int f dz$ tampoco lo sería, ya que la definición nos diría que existe una $y \in \mathcal{M}(D)$ elemental compleja tal que $y' = f$, pero como el subcampo de las funciones elementales

E es un campo diferencial, concluiríamos, necesariamente, que $f \in \mathbf{E}$, lo que es una contradicción. La segunda observación es que si $f \in \mathcal{M}(D)$ no es una función elemental compleja y $g \in \mathbf{E}$, entonces gf no es elemental compleja. Esta observación se sigue del hecho de que **E** es un campo con las operaciones usuales.

Ejemplo 3.3.13. *La integral $\int e^{sen\, x}dx$ no es elemental real.*

Consideremos el cambio de variable $t = sen\ x$, entonces, $arcsen\ t = x$ y $\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = dx$. Por lo tanto,

$$\int e^{sen\, x}dx = \int \frac{e^t}{\sqrt{1-t^2}}dt.$$

Ahora bien, esta última integral, al utilizar el método de integración por partes con $u = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ y $dv = e^t$, nos da que $v = e^t$ y $du = \frac{t}{1-t^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$. Por lo cual,

$$\int \frac{e^t}{\sqrt{1-t^2}}dt = \frac{e^t}{\sqrt{1-t^2}} - \int \frac{te^t}{1-t^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt.$$

Aplicando, nuevamente, el método de integración por partes a esta última integral, con $u = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ y $dv = \frac{te^t}{1-t^2}$, vemos que $du = \frac{t}{1-t^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$. Denotemos por $f = \int \frac{te^t}{1-t^2}dt$, entonces, $f' = dv$. Por lo cual

$$\int \frac{e^t}{\sqrt{1-t^2}}dt = \frac{e^t}{\sqrt{1-t^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}f + \int \frac{t}{1-t^2\sqrt{1-t^2}}fdt.$$

Veremos que $\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}f$ y $\int \frac{t}{1-t^2\sqrt{1-t^2}}fdt$ son no elementales. Esto probaría que la integral de la que partimos no es elemental.

Al considerar sus respectivas extensiones meromorfas $\int \frac{z}{1-z^2\sqrt{1-z^2}}fdz$ y $\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}f$, vemos, gracias a las observaciones que hemos realizado antes de enunciar el ejemplo, que nos basta con probar que f no es elemental (nótese que $\frac{z}{1-x^2\sqrt{1-x^2}}$ y $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ son funciones elementales reales). Veamos entonces que la respectiva extensión meroforma de f ($\int \frac{ze^z}{1-z^2}dz$) no es elemental compleja.

Si $\int \frac{z}{1-z^2}e^z dz$ fuese elemental compleja, entonces el teorema 3.3.1 nos diría que

$$\frac{z}{1-z^2} = R' + R \tag{3.30}$$

para alguna $R \in \mathbb{C}(z)$. *Tomando* $R = \frac{p}{q}$ *con* $p, q \in \mathbb{C}[z]$, $q \neq 0$ *y, sin pérdida de generalidad,* p *y* q *primos relativos, al sustituir en (3.30) obtenemos*

$$\frac{z}{1-z^2} = \frac{p'q - q'p}{q^2} + \frac{p}{q} \Leftrightarrow zq^2 = (1-z^2)(p'q - q'p + pq)$$

despejando $(1-z^2)q'p$, *concluimos que*

$$(1-z^2)q'p = q((1-z^2)p' + (1-z^2)p - zq). \tag{3.31}$$

Sea $z_0 \neq \pm 1$ *una raíz de* q *de multiplicidad* $k \geq 1$. *Entonces,* z_0 *es una raíz de multiplicidad mayor o igual a* k *del miembro del lado derecho de (3.31), sin embargo, con estas especificaciones,* z_0 *es una raíz de multiplicidad* $k-1$ *del lado izquierdo de (3.31). Esto es una contradicción.*

Supongamos que $z_0 = 1$. *Entonces la multiplicidad de* z_0 *en el lado izquierdo de (3.31) es igual a* k. *Sin embargo, nótese que* z_0 *es raíz de* $(1-z^2)p' + (1-z^2)p - zq$, *por lo cual, la multiplicidad de* z_0 *en el lado derecho de (3.31) es mayor o igual a* $k+1$. *Esto resulta ser otra contradicción. Dicha contradicción también se tiene para el caso* $z_0 = -1$, *por lo cual, podemos concluir que* q *no tiene raíces, es decir,* $q \in \mathbb{C}$. *Sin pérdida de generalidad supongamos que* $q = 1$.

Entonces, tenemos que

$$z = (1-z^2)(p' + p)$$

lo cual resulta imposible para todo $p \in \mathbb{C}[z]$ *(el grado del polinomio en el lado derecho es mayor o igual a 2). Esta última contradicción prueba que* $\int \frac{ze^z}{1-z^2} dz$ *no es elemental compleja.*

Considerando el hecho de que $(arccos\ x)' = -(arcsen\ x)'$, *se puede concluir con el mismo razonamiento, que* $\int e^{cos\ x} dx$ *no es elemental real. Incluso, con el mismo proceder, se puede probar que* $\int e^{tan\ x} dx$ *no es elemental real, aunque para este último caso, hay que tomar el cambio de variable* $t = tan\ x$; *de esta forma*

$$\int e^{tan\ x} dx = \int \frac{e^t}{1+t^2} dt.$$

Ejemplo 3.3.14. *Las integrales* $\int ln(sen\ x)dx$ *y* $\int ln(cos\ x)dx$ *no son elementales reales.*

Nos bastará con demostrar que $\int ln(sen\ x)dx$ *no es elemental real, ya que la identidad* $(arccos\ x)' = -(arcsen\ x)'$ *nos garantizará el caso restante.*

Considerando el cambio de variable $t = sen\ x$*, vemos que* $dx = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$*, por lo cual*

$$\int ln(sen\ x)dx = \int \frac{ln\ t}{\sqrt{1-t^2}}dt.$$

Aplicando el método de integración por partes, con $u = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ *y* $dv = ln\ t$*, obtenemos que*

$$\begin{aligned}\int \frac{ln\ t}{\sqrt{1-t^2}}dt &= \frac{tln\ t - t}{\sqrt{1-t^2}} - \int \frac{t}{1-t^2} \cdot \frac{tln\ t - t}{\sqrt{1-t^2}}dt \\ &= \frac{tln\ t - t}{\sqrt{1-t^2}} - \int \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}} \cdot \frac{ln\ t}{1-t^2}dt + \int \frac{t^2}{1-t^2\sqrt{1-t^2}}dt.\end{aligned}$$

Analicemos la segunda integral de esta última igualdad. Aplicando nuevamente el método de integración por partes, con $u = \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}$ *y* $dv = \frac{ln\ t}{1-t^2}$*, vemos que*

$$\int \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}} \cdot \frac{ln\ t}{1-t^2}dt = uf - \int u'fdt$$

donde $f = \int \frac{ln\ t}{1-t^2}dt$*. Dado que la función* $\frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}$ *es elemental real, y* f *no (véase el ejemplo 3.3.11), podemos concluir que* $u'f$ *no es elemental, y por lo tanto,* $\int u'fdt$ *tampoco. Esto prueba que la integral original no es elemental.*

Para cerrar esta sección, veremos un último ejemplo relacionado con un problema abierto.

Es conocido de los cursos de cálculo que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

El famoso Problema de Basilea (que consistía en determinar el valor exacto de la anterior serie de los inversos de los cuadrados de los naturales) fue resuelto por Leonhard Euler en el año de 1735. Naturalmente, ya conocido el valor de la serie anterior, uno puede preguntarse ahora el valor de la serie de los inversos de los cubos de los naturales

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^3}.$$

Sin embargo, hasta la fecha, el valor exacto de dicha serie se desconoce (es muy sencillo ver que la serie es convergente).

El valor al que converge la serie se conoce como la constante de Apery (nombrada en honor al matemático R. Apery que en 1977 demostró la irracionalidad de dicho número). De forma más general, al recordar que la función zeta de Riemann está dada por

$$\zeta(z) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^z}. \tag{3.32}$$

podemos ver que la constante de Apery se corresponde con el valor de $\zeta(3)$.

Con la intención de resolver el problema, muchos matemáticos han dado variadas expresiones para $\zeta(3)$. Se sabe, por ejemplo que

$$\begin{aligned}
\zeta(3) &= \frac{8}{7}\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^3} \\
\zeta(3) &= \frac{4}{3}\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{(i)^3} \\
\zeta(3) &= -2\pi^2 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\zeta(2n)}{(2n+2)(2n+3)2^{2n}}
\end{aligned}$$

o que

$$\zeta(3) = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{x^2}{e^x - 1} dx.$$

Esta última expresión, al ser una representación integral para $\zeta(3)$, podría brindarnos la posibilidad de poder calcular el valor de $\zeta(3)$ por medio del límite de una función primitiva de $\frac{x^2}{e^x-1}$ y así resolver el problema con las técnicas de límites de funciones que conocemos. Sin embargo, no tenemos mucha suerte, ya que, como veremos a continuación, la integral $\int \frac{x^2}{e^x-1}dx$ no es elemental real.

Proposición 3.3.5. *La integral* $\int \frac{x^2}{e^x-1}dx$ *no es elemental real.*

Demostración. Primeramente, notemos que

$$\int \frac{1}{e^x - 1} dx = ln(e^x - 1) - x$$

entonces, al integrar por partes la integral original, con $u = x^2$ y $dv = \frac{1}{e^x-1}$, obtenemos que

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{e^x-1}dx &= x^2 ln(\frac{e^x-1}{e^x}) - 2\int x(ln(e^x-1)-x)dx \\ &= x^2 ln(\frac{e^x-1}{e^x}) - 2\int xln(e^x-1)dx + 2\int x^2 dx.\end{aligned}$$

Si probamos que la integral $\int xln(e^x - 1)dx$ no es elemental, habremos terminado.

Apliquemos, nuevamente, el método de integración por partes con $u = x$ y $dv = ln(e^x - 1)$; entonces, $du = 1$. Llamemos $f = \int ln(e^x - 1)dx$. Entonces

$$\int xln(e^x-1)dx = uf - \int f dx.$$

Recordando las observaciones que hicimos antes de enunciar estos últimos ejemplos, nos basta con probar que la integral $\int ln(e^x - 1)dx$ no es elemental para concluir la prueba.

Pero, al hacer el cambio de variable $t = e^x - 1$, vemos que $ln(t + 1) = x$ y que $dx = \frac{dt}{t+1}$, por lo cual

$$\int ln(e^x-1)dx = \int \frac{ln\ t}{t+1}dt. \tag{3.33}$$

Esta última integral, por el ejemplo 3.3.10 al tomar $a = -1$, no es elemental real. Esto concluye la prueba de la proposición. □

3.4. Últimos apuntes y comentarios

Hemos visto en la sección anterior varios ejemplos de integrales no elementales y algunos pequeños trucos para detectar la naturaleza no elemental de las mismas con base en otras ya conocidas, sin embargo, si observamos el tipo de funciones que tomamos como ejemplos, vemos que éstas tenían involucradas a alguna de las funciones e^z o $ln\ z$ o potencias enteras de las mismas. Es decir, los ejemplos que mostramos son, esencialmente, de carácter trascendente.

Ahora bien, si recordamos la versión original del teorema de Liouville, vemos que el resultado está garantizado para funciones algebraicas siempre y cuando, la integral de dicha función sea elemental. Esto motiva naturalmente la siguiente pregunta: ¿existen funciones algebraicas cuyas integrales son no elementales? La respuesta es sí, aunque, por extraño que parezca, el tratamiento de algunos de los criterios sobre integrabilidad en términos finitos para dichas funciones requiere de herramienta más avanzada para proceder con sus demostraciones.

Entre los ejemplos más famosos de funciones algebraicas sin primitivas elementales se encuentran las llamadas integrales elípticas. Por ejemplo, se sabe que la integral

$$\int \frac{1-k^2x^2}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}dx$$

no es elemental[2] si $0 < k < 1$. Para ver una prueba de este hecho puede consultarse [21].

Por otro lado, existe un teorema debido a Chebyshev que da condiciones necesarias y suficientes para que las integrales de un tipo especial de funciones algebraicas, sean elementales.

Teorema 3.4.1 (Chebyshev, 1853)**.** *Si $p, q, r \in \mathbb{Q}$ y $a, b \in \mathbb{R}$ con a, b y r no nulos, entonces la integral*

$$\int x^p(a - bx^r)^q dx$$

es elemental si y sólo si alguno de los números $\frac{p+1}{r-1}$, q o $\frac{p+1}{r+q}$ es entero.

La prueba de la suficiencia del teorema de Chebyshev puede encontrarse en algunos libros de cálculo como [18] y no requiere de herramienta profunda. En cambio, para la prueba de la necesidad, se requieren conceptos del análisis complejo tales como ramas analíticas, continuación analítica y un estudio de la estructura de las superficies de Riemann para funciones algebraicas complejas, véase por ejemplo [21] y [11].

Gracias al teorema de Chebyshev es posible dar algunos otros ejemplos de integrales no elementales tales como

$$\int \sqrt[3]{1+x^2}\ , \int \sqrt{x^3-1}\ , \int \sqrt{x}\sqrt[3]{1-x}\ , \int \sqrt{sin\ x}\ , \int \sqrt{cos\ x}.$$

[2]La función $f(x) = \frac{1-k^2x^2}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$ es algebraica sobre $\mathbb{C}(x)$ ya que satisface al polinomio $p(y) = y^2 - a$ con $a = \frac{(1-k^2x^2)^2}{(1-x^2)(1-k^2x^2)}$.Claramente, $p(y) \in \mathbb{C}(x)[y]$.

Algunos otros criterios para garantizar la integrabilidad de funciones algebraicas en términos elementales, pueden encontrarse en [8] o [14].

Como último comentario, aunque la teoría de integración en términos finitos no es muy conocida, ésta, al igual que muchas otras disciplinas de las matemáticas, mantiene relaciones estrechas, entre otras, con el álgebra computacional y las ecuaciones diferenciales. Para ver un prueba de esto, pueden consultarse algunos libros y artículos tales como [21], [20], [2] o [6].

Apéndice A

Álgebra

En esta sección enunciamos los resultados y definiciones del álgebra para abordar la lectura de la tesis. Omitimos las demostraciones de dichos resultados. Si el lector desea consultar la prueba de los mismos, dejamos la referencia de las demostraciones.

A.1. Extensiones de campos

Definición A.1.1 (Extensión de campos)**.** *Sean K y F campos. Diremos que K es una extensión de F si y sólo si F es un subcampo de K. Esto último puede denotarse por $F \leq K$.*

Puede ocurrir que se tengan varias extensiones seguidas de un mismo campo, por ejemplo, algo de la forma

$$F_1 \leq F_2 \leq \ldots \leq F_{n-1} \leq F_n$$

donde para cada $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ se tiene que F_{i+1} es una extensión de F_i (y en particular, de todas la anteriores), por lo cual, a semejantes estructuras suele llamárseles *torres de campos* y se les denota por

$$F_1 \subset F_2 \subset \ldots \subset F_{n-1} \subset F_n.$$

Definición A.1.2 (Elementos algebraicos y trascendentes)**.** *Sea F un campo y K una extensión de F y $\alpha \in K$. Diremos que α es algebraico sobre F si y sólo si existe un polinomio no nulo $f \in F[x]$ tal que $f(\alpha) = 0$. Si α no es algebraico sobre F, se dice que es trascendente sobre F.*

Obsérvese de la definición anterior que todos lo elementos de F son algebraicos sobre F. Además, el polinomio f que figura en la definición, no tiene por qué ser único, sin embargo, el teorema siguiente garantiza la existencia de un único polinomio especial para un elemento algebraico. Antes, enunciamos la definición de polinomio irreducible sobre un campo.

Definición A.1.3 (Polinomio irreducible)**.** *Sea F un campo y $f(x) \in F[x]$ no constante. Decimos que $f(x)$ es irreducible sobre F si y sólo si $f(x)$ no puede expresarse como un producto $g(x)h(x)$ donde $g(x), h(x) \in F[x]$ y los grados de $g(x)$ y $h(x)$ son menores que el grado de $f(x)$.*

Teorema A.1.1. *Sea F un campo y K una extensión de F. Si $\alpha \in K$ es algebraico sobre F, entonces, existe un único polinomio $p_\alpha(x) \in F[x]$ tal que*

1) $p_\alpha(x)$ es mónico (con coeficiente principal igual a 1), irreducible y de grado mínimo en $F[x]$ con $p_\alpha(\alpha) = 0$.

2) Si $f(x) \in F[x]$ es tal que $f(\alpha) = 0$, entonces $p_\alpha(x)$ divide a $f(x)$.

La prueba de este resultado se puede consultar en [7].

Definición A.1.4 (Polinomio mínimo asociado)**.** *Sea un campo F y K una extensión de F y $\alpha \in K$ algebraico sobre F. El único polinomio que satisface las condiciones del teorema anterior se conoce como el polinomio mínimo de α asociado al campo F.*

Consideremos F un campo y K una extensión de F; si $\alpha \in K$ no necesariamente se cumple que $\alpha \in F$. Para muchos fines, es conveniente tener a α en un campo que podamos describir o cuya estructura conozcamos (en general, podemos no saber nada de K), por lo cual, se construye un campo especial sobre el que podemos tener cierto control. Dicho campo suele conocerse como el campo obtenido por la adjunción de α a F y se denota por $F(\alpha)$.

Una forma de construirlo, y que es la que nos interesa, consiste en lo siguiente: consideremos el anillo de polinomios $F[x]$; a partir de éste, podemos obtener el conjunto de las evaluaciones de $F[x]$ sobre α, esto es el conjunto $F[\alpha] = \{p(\alpha) : p(x) \in F[x]\}$. Este conjunto cumple con que $F \subset F[\alpha] \subset K$, aunque, no tiene por qué ser, necesariamente, un subcampo de K, sin embargo, este conjunto sí resulta ser un dominio entero, por lo que es posible considerar su campo de cocientes $F(\alpha)$ (de aquí la notación). Este campo, ahora sí contenido en K, se describe fácilmente como

$F(\alpha) = \{\frac{p(\alpha)}{q(\alpha)} : p(x), q(x) \in F[x]$ y $q(\alpha) \neq 0\}$. Si agregamos cierta hipótesis sobre α, entonces la descripción de $F(\alpha)$ se simplifica aún más:

Teorema A.1.2. *Sea F un campo y K una extensión de F. Sea $\alpha \in K$. Si α es algebraico sobre F, entonces $F[\alpha] = F(\alpha)$.*

Ver prueba en [7].

Definición A.1.5 (Extensión algebraica)**.** *Sea F un campo y K una extensión de F. Si cada elemento de K es algebraico sobre F, entonces diremos que K es una extensión algebraica de F.*

Definición A.1.6 (Extensión simple)**.** *Sea F un campo y K una extensión de F. Si $K = F(\alpha)$ para algún $\alpha \in K$, diremos entonces que la extensión K es simple. Si α es algebraico (trascendente) sobre F, se dice que K es una extensión algebraica (trascendente) simple de F.*

Así como logramos generar la adjunción de un elemento α a un campo F dado, se puede repetir el mismo razonamiento y hacer la adjunción de la adjunción, etcétera.

Cuando el campo posee la característica adecuada y los elementos que adjuntamos son algebraicos, es posible reducir las adjunciones de un campo a una extensión simple.

Teorema A.1.3. *Sea F un campo de característica cero, K una extensión de F y $\alpha, \beta \in K$ elementos algebraicos sobre F. Entonces existe un elemento $\gamma \in F(\alpha, \beta)$ tal que $F(\gamma) = F(\alpha, \beta)$.*

Ver prueba en [9].

El resultado anterior se puede generalizar sin problemas al caso en el que se tengan n elementos algebraicos sobre F.

En general, si tenemos un campo F y un polinomio $f \in F[x]$, puede ocurrir que las raíces de este polinomio no estén en F. Sin embargo, las adjunciones ayudan a resolver este problema.

Teorema A.1.4 (Kronecker)**.** *Sea F un campo y $f \in F[x]$ un polinomio no constante. Entonces existe una extensión K de F y un elemento $\alpha \in K$ tal que $f(\alpha) = 0$.*

Ver prueba en [7].

Definición A.1.7 (Elementos conjugados). *Sea F un campo y K una extensión de F. Si $\alpha, \beta \in K$ son elementos algebraicos sobre F, decimos que dichos elementos son conjugados sobre F si y sólo si tienen el mismo polinomio mínimo asociado.*

Dado un polinomio $f \in F[x]$ es posible considerar todas sus raíces distintas y generar (en caso de que sea necesario) las adjunciones correspondientes para cada elemento. El teorema siguiente muestra la relación que existe entre estos campos.

Teorema A.1.5. *Sea F un campo, K una extensión de F y $\alpha, \beta \in K$ algebraicos sobre F. Entonces α y β son conjugados sobre F si y sólo si la transformación $\phi_{\alpha,\beta} : F(\alpha) \longrightarrow F(\beta)$ dada por*

$$\phi_{\alpha,\beta}(c_0 + c_1\alpha + \ldots + c_n\alpha^n) = c_0 + c_1\beta + \ldots + c_n\beta^n$$

es un isomorfismo.

La prueba de este resultado viene en [7].

Nótese que en el teorema anterior, el isomorfismo $\phi_{\alpha,\beta}$ cumple con las siguientes propiedades:

1) $\phi_{\alpha,\beta}(a) = a$, para toda $a \in F$.

2) $\phi_{\alpha,\beta}(\alpha) = \beta$.

Definición A.1.8 (Extensión de isomorfismos). *Sean F y E campos y K y L extensiones de F y E respectivamente. Dado un isomorfismo $\phi : F \longrightarrow E$ y otro isomorfismo $\overline{\phi} : K \longrightarrow L$ diremos que ϕ se extiende a $\overline{\phi}$ (o que $\overline{\phi}$ extiende a ϕ) si y sólo si $\overline{\phi}|_F = \phi$.*

El siguiente resultado permite hacer extensiones de isomorfismos de campos cuando las extensiones de dichos campos son algebraicas simples.

Teorema A.1.6. *Sean F y E campos y K y L extensiones de F y E respectivamente. Sea $\alpha \in K$ algebraico sobre F y $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in F[x]$ su polinomio mínimo asociado. Supongamos que existe un isomorfismo $\phi : F \longrightarrow E$. Si $\beta \in L$ es una raíz de $\sum_{i=0}^{n} \phi(a_i)x^i \in E[x]$ (nótese que sí existe al menos una: $\phi(\alpha)$), entonces ϕ se extiende a un isomorfismo $\overline{\phi} : F(\alpha) \longrightarrow E(\beta)$.*

Véase la prueba en [10].

Sabemos que todo campo puede verse como un espacio vectorial sobre sí mismo. De igual forma, todo campo se puede ver como un espacio vectorial sobre un subcampo propio del mismo por lo cual, tiene sentido considerar su dimensión. En general, este concepto en las extensiones de campos se encierra dentro de la siguiente definición.

Definición A.1.9 (Extensión finita)**.** *Sea F un campo y K una extensión de F. Decimos que K es una extensión finita de F si y sólo si la dimensión de K (visto como espacio vectorial sobre F) es finita. A la dimensión de K se le llama el grado de K sobre F.*

No toda extensión simple es finita, tal y como establece el siguiente teorema.

Teorema A.1.7. *Sea F un campo, K una extensión de F y $\alpha \in K$. Entonces α es algebraico sobre F si y sólo si $F(\alpha)$ es una extensión finita de F.*

Véase la prueba en [9].

Las siguientes definiciones son una pieza clave para la prueba del teorema principal del capítulo 2.

Definición A.1.10 (Escisión de un polinomio)**.** *Sea F un campo y $f \in F[x]$ un polinomio de grado positivo. Decimos que f se escinde sobre F si y sólo si f se puede expresar como el producto finito de polinomios de grado menor o igual a 1. Esto es,*

$$f(x) = a_0(x - a_1) \dots (x - a_n)$$

donde $a_i \in F$ para toda $i \in \{0, 1, \dots, n\}$.

Definición A.1.11 (Campo de escisión para un polinomio)**.** *Sea F un campo, K una extensión de F y $f \in F[x]$ un polinomio de grado positivo. Decimos que K es un campo de escisión para f sobre F si y sólo si f se escinde sobre K y $K = F(a_1, \dots, a_n)$, donde $a_1, \dots, a_n$ son todas las raíces de f. Si cada una de las raíces de f es simple, diremos que f es separable. A este campo también se le suele llamar el campo de descomposición del polinomio f.*

Nótese de la definición anterior que todo campo de escisión para un polinomio dado es una extensión finita de F.

Consideremos un campo F. Como anillo, podemos considerar los homomorfismos de F en F. Cuando estos homomorfismos resultan isomorfismos, es común y habitual llamar a éstos autormorfismos. Es conocido que el conjunto de automorfismos de un campo F es un grupo con la composición. Denotemos por G_F a dicho grupo.

Ahora bien, en las extensiones de campos estaremos interesados en algunos automorfismos especiales.

Definición A.1.12. *Sea F un campo y K una extensión de F. Llamamos grupo de automorfismos de K relativos a F al conjunto $G(\frac{K}{F}) := \{\sigma \in G_K : \sigma(a) = a \ \ \forall a \in F\}$.*

El nombre grupo de automorfismos no debe sorprendernos, pues dicho conjunto tiene estructura de grupo.

Proposición A.1.1. *Sea F un campo y K una extensión de F. Entonces $G(\frac{K}{F})$ es un subgrupo de G_K.*

Véase la prueba en [9].

Definición A.1.13 (Campo fijo)**.** *Sea F un campo y G_0 un subgrupo de G_F. Definimos el campo fijo de G_0 como el conjunto $\mathcal{C}_{G_0} = \{a \in F : \sigma(a) = a \ \ \forall \sigma \in G_0\}$.*

Nuevamente, el nombre de campo, no debería de extrañarnos.

Proposición A.1.2. *Sea F un campo y G_0 un subgrupo de G_F. Entonces $\mathcal{C}_{G_0}$ es un subcampo de F.*

Véase la prueba en [9].

La siguiente definición junto al teorema que le acompaña, serán los últimos que requeriremos.

Definición A.1.14 (Extensión normal)**.** *Sea F un campo y K una extensión de F. Decimos que K es una extensión normal de F si y sólo si K es una extensión finita de F y $F = \mathcal{C}_{G(\frac{K}{F})}$.*

Teorema A.1.8. *Sea F un campo y K una extensión de F. K es una extensión normal de F si y sólo si K es el campo de escisión de algún polinomio en $F[x]$.*

Véase la prueba en [9].

A.2. Polinomios

En esta sección anotamos algunos resultados útiles sobre los anillos de polinomios con coeficientes en un campo. Consideraremos en lo que resta un campo F y su correspondiente anillo de polinomios $F[x]$.

Teorema A.2.1 (Algoritmo de la división)**.** *Sean $f(x), g(x) \in F[x]$ con el grado de g mayor o igual que uno. Entonces, existen polinomios únicos $q(x), r(x) \in F[x]$, tales que $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$ con $r(x) = 0$ o el grado de $r(x)$ menor al grado de $g(x)$. Si $r(x) = 0$, decimos que $g(x)$ divide a $f(x)$.*

Consúltese la prueba en [7].

Teorema A.2.2. *Sea $p(x) \in F[x]$ irreducible. Si $p(x)$ divide al producto $r(x)s(x)$ con $r(x), s(x) \in F[x]$, entonces $p(x)$ divide a $r(x)$ o $p(x)$ divide a $s(x)$.*

Véase la prueba en [7].

Definición A.2.1. *Sean $f(x), g(x) \in F[x]$ y $d(x) \in F[x]$. Decimos que $d(x)$ es un máximo común divisor de $f(x)$ y $g(x)$ si y sólo si*

i) *$d(x)$ divide a $f(x)$ y $g(x)$.*

ii) *Si $c(x) \in F[x]$ divide a $f(x)$ y $g(x)$, entonces $c(x)$ divide a $d(x)$.*

iii) *$d(x)$ es mónico.*

El siguiente teorema nos garantiza que este máximo común divisor es único y que puede expresarse de una forma muy útil.

Teorema A.2.3. *Sean $f(x), g(x) \in F[x]$. Entonces $f(x)$ y $g(x)$ tienen un único máximo común divisor $d(x)$ y éste puede expresarse de la forma $d(x) = r(x)f(x) + s(x)g(x)$ para algún par de $r(x), s(x) \in F[x]$. Cuando $d(x) = 1$ diremos que $f(x)$ y $g(x)$ son primos relativos.*

Véase la prueba en [9].

Lema A.2.1. *Sean $f(x), g(x), h(x) \in F[x]$. Supongamos que $f(x)$ divide al producto $g(x)h(x)$ y que $f(x)$ y $g(x)$ son primos relativos. Entonces $f(x)$ divide a $h(x)$.*

Véase la prueba en [9].

El siguiente teorema garantiza la factorización de los polinomios de grado mayor o igual a uno como un producto único de irreducibles.

Teorema A.2.4. *Sea $f(x) \in F[x]$ un polinomio de grado mayor o igual a uno. Entonces $f(x)$ se puede expresar de forma única (salvo por posibles constantes y algún orden diferente) como $f(x) = (p_1(x))^{r_1} \ldots (p_n(x))^{r_n}$ donde cada $p_i(x)$ es un polinomio irreducible en $F[x]$ y $r_i \in \mathbb{N}$ para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$.*

Consúltese la prueba en [9].

Apéndice B

Variable compleja

Aquí enunciamos algunas definiciones y resultados de la variable compleja que nos serán de utilidad a lo largo de la tesis. Las pruebas de los resultados se omiten, aunque se deja la referencia de los libros en los que se pueden consultar dichas pruebas.

B.1. Analiticidad

Definición B.1.1. *Dado un subconjunto no vacío Ω del plano complejo $\mathbb{C}$, decimos que:*

i) Ω es una región si y sólo si Ω es abierto y conexo.

ii) Ω es una región simplemente conexa si y sólo si $\mathbb{C} \setminus \Omega$ es conexo.

Definición B.1.2. *Si $A \subseteq \mathbb{C}$ es abierto, $a \in A$ y $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$ es una función, decimos que f es diferenciable en a si y sólo si existe el $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$. Dicho límite será denotado por $f'(a)$. Decimos que f es analítica en A si f es diferenciable en cada elemento de A.*

Nota: Recordemos que los términos analítica y holomorfa pueden usarse indistinguidamente. También recordemos que si una función f es diferenciable en el sentido complejo en algún punto z_0 (de hecho lo es en una vecindad de z_0), entonces es infinitamente diferenciable en z_0 (y por lo tanto en la vecindad mencionada). Esta "nobleza" de los complejos abren el paso para la formulación de los teoremas de Taylor y Laurent.

Definición B.1.3. *Una serie de potencias es una serie (en el sentido usual, sucesión de sumas parciales) de la forma:*

$$a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + ... + a_n(z - z_0)^n + ... = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(z - z_0)^i \quad \text{(B.1)}$$

donde $a_i \in \mathbb{C}$ *para cada* $i \geq 0$ *y* $z_0 \in \mathbb{C}$ *fijo.*

Teorema B.1.1. *Para toda serie de potencias (1) existe un número real* R*,* $0 \leq R \leq \infty$*, llamado radio de convergencia de la serie tal que:*

1) *La serie converge absolutamente para todo* $z \in D_R(z_0)=\{y \in \mathbb{C} :\mid y - z_0 \mid< R\}$*. Si* $\rho \in \mathbb{R}$ *tal que* $0 \leq \rho < R$ *entonces la convergencia es uniforme en* $D_\rho(z_0)$*.*

2) *Si* $z \notin D_R(z_0)$*, entonces la serie diverge. Si* $z \in \partial D_R(z_0)$ *no se puede decir algo necesariamente sobre la convergencia o divergencia de la serie.*

3) *En* $D_R(z_0)$ *la función definida por* $f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(z - z_0)^i$ *con* $z \in D_R(z_0)$ *es analítica.*

4) *Dado que en* D_R *la función* $f(z)$ *es analítica, entonces*

$$f'(z) = \sum_{i=1}^{\infty} i a_i(z - z_0)^{i-1}. \quad \text{(B.2)}$$

Esta nueva serie tiene el mismo radio de convergencia que la original.

Consúltese la prueba en [16].

El teorema de Taylor es un especie de recíproco del inciso 3) del teorema anterior, ya que nos dice que si una función es analítica sobre cierta región, entonces ésta se puede expresar como una serie de potencias.

Teorema B.1.2 (Taylor)**.** *Sea* Ω *una región de* $\mathbb{C}$ *y* $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ *una función analítica definida sobre* Ω*, entonces para toda* $z_0 \in \Omega$ *existe un* $r_{(z_0)} > 0$ *tal que* $D_r(z_0) \subseteq \Omega$ *y*

$$f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} (\frac{f^{(i)}(z_0)}{i!})(z - z_0)^i \ldots \forall z \in D_r(z_0). \quad \text{(B.3)}$$

El teorema de Taylor nos garantiza la representación en serie de potencias de la función f en un disco centrado en z_0 cuando la función es analítica en z_0, sin embargo esta representación se puede garantizar aún cuando la función no sea analítica en z_0. Esto es lo que nos garantiza el teorema de Laurent.

Teorema B.1.3 (Laurent)**.** *Sean $r_1, r_2 \geq 0$ y $z_0 \in \mathbb{C}$. Consideremos el conjunto del plano $A = \{z \in \mathbb{C} : r_1 <\mid z - z_0 \mid< r_2\}$ (este conjunto es llamado el anillo de radios r_1 y r_2 respectivamente centrado en z_0). Si f es una función analítica en A entonces:*

$$f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(z - z_0)^i + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{(z - z_0)^i} \ldots \forall z \in A. \tag{B.4}$$

Además, las dos series anteriores son absolutamente convergentes en A y uniformemente convergentes en cualquier otro anillo centrado en z_0 y completamente contenido en A.

Véase la prueba en [16].

Tanto la serie de Taylor como la de Laurent son únicas ya fijado el punto z_0. El teorema de Laurent no es sólo importante por ser una generalización del teorema de Taylor, sino porque permite una completa clasificación de las singularidades aisladas de una función compleja.

Definición B.1.4. *Dada una función f de variable compleja y un punto $a \in \mathbb{C}$, decimos que f tiene una singularidad aislada en a si existe un $R > 0$ tal que f está definida y es analítica en el disco agujerado $D_R(a) \setminus \{a\} = D'_R(a)$, pero no en a.*

Definición B.1.5. *Si f es una función de variable compleja con una singularidad aislada $a \in \mathbb{C}$, decimos que:*

i) a es una singularidad removible de f si existe una función analítica $g : D_R(a) \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $g(z) = f(z)$ para toda $z \in D'_R(a)$.

ii) a es un polo de f si $\lim_{z \to a} \mid f(z) \mid= \infty$

iii) a es una singularidad esencial de f si a no es removible ni un polo de f.

A partir del teorema de Laurent se puede dar una clasificación de las singularidades aisladas de una función a partir de los coeficientes de las series de Laurent de la función, sin embargo, no enunciaremos por el momento ese resultado. Mencionaremos otro resultado que permite clasificar a las singularidades sin recurrir a los coeficientes antes mencionados.

Teorema B.1.4. *Sea f una función de variable compleja y $a \in \mathbb{C}$ una singularidad aislada de f, entonces:*

1) *a es una singularidad removible, un polo o una singularidad esencial de f.*

2) *a es removible si y sólo si $\lim_{z \to a}((z-a)(f(z)) = 0$.*

3) *Si Ω es una región de $\mathbb{C}$, $a \in \mathbb{C}$, f es analítica en $\Omega \setminus \{a\}$ y a es un polo de f entonces existe un entero positivo m y una función analítica $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $f(z) = \dfrac{g(z)}{(z-a)^m}$ para toda $z \in \Omega \setminus \{a\}$. En este caso, al menor entero positivo m que cumple el enunciado anterior se le llama el orden de a y se dice que f tiene un polo en a de orden m.*

4) *(Casorati- Weierstrass). Si f tiene una singularidad esencial en z_0 entonces para toda $\delta > 0$ $\overline{\{f(D'_\delta(z_0)\}} = \mathbb{C}$.*

Véase la prueba en [5].

Definición B.1.6. *Una función f se dice que es meromorfa sobre una región Ω si f es analítica en Ω salvo las singularidades aisladas de f en Ω, las cuales son exclusivamente polos.*

Entre los ejemplos más conocidos que podemos dar sobre funciones meromorfas, tenemos a las funciones racionales complejas y otras más complejas como la función Gamma o la función zeta de Riemann.

Las funciones meromorfas juegan un papel importante en el análisis complejo ya que poseen propiedades muy interesantes como veremos a continuación.

Proposición B.1.1. *Sea Ω una región del plano complejo. Entonces el conjunto $\mathcal{M}_\Omega = \{f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} : f \text{ es meromorfa en } \Omega\}$ es un campo con las operaciones usuales de suma y producto para funciones.*

Proposición B.1.2. *Sea Ω una región del plano complejo. Consideremos el campo de las funciones meromorfas $\mathcal{M}_\Omega$ sobre Ω. Si $f \in \mathcal{M}_\Omega$, entonces $f' \in \mathcal{M}_\Omega$.*

Las proposiciones anteriores nos muestran en particular que $\mathcal{M}_\Omega$ es un campo diferencial con la derivación compleja que conocemos. Para consultarse los detalles de dichas proposiciones, véase [19].

Los dos teoremas que enunciamos a continuación serán de vital importancia para nuestro trabajo.

El primero de ellos es conocido como el teorema de identidad y nos permite garantizar la igualdad de funciones holomorfas en una región, siempre que éstas coincidan en un conjunto adecuado de la misma.

Teorema B.1.5 (Teorema de identidad)**.** *Sean f y g analíticas en una región A del plano complejo. Supongamos que existe una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos distintos en A que converge a un punto $z_0 \in A$, tal que $f(z_n) = g(z_n)$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Entonces $f = g$ en todo A. La conclusión sigue siendo válida si $f = g$ en alguna vecindad de algún punto de A.*

Para ver los detalles de la prueba consúltese [16].

El siguiente resultado no es más que la versión compleja del teorema fundamental del cálculo que conocemos.

Teorema B.1.6. *Sea A una región del plano complejo, $g, f : A \longrightarrow \mathbb{C}$ funciones continuas con g holomorfa tal que $g' = f$ y $\gamma : [a, b] \longrightarrow A$ una curva $\mathcal{C}^1$ por tramos en A. Entonces*

$$\int_\gamma f = g(\gamma(b)) - g(\gamma(a)).$$

Véase la prueba en [13].

Bibliografía

[1] G. Boros, V. Moll. *Irresistible Integrals. Symbolics, Analysis and Experiments in the Evaluation of Integrals.* Cambridge University Press, 2004.

[2] M. Bronstein. *Symbolic Integration I. Transcendental Functions.* Springer, 2004.

[3] G. Chrystal. *Algebra. An elementary text-book.* Adam and Charles Black, 1904.

[4] R.C. Churchill. "Liouville's Theorem on Integration in Terms of Elementary Functions". Kolchin Seminar on Differetial Algebra, 2006. (http://www.sci.ccny.cuny.edu/ ksda/PostedPapers/liouv06.pdf)

[5] J.B. Conway. *Functions of One Complex Variable I.* Springer-Verlag, 1995.

[6] J.H. Davenport. *On the Integration of Algebraic Functions.* Springer-Verlag, 1981.

[7] J.B. Fraleigh. *Álgebra Abstracta.* Addison-Wesley Iberoamericana, 1988.

[8] G.H. Hardy. *The Integration of Functions of a Single Variable.* Cambridge University Press, 1966.

[9] I.N. Herstein. *Álgebra Moderna.* Editorial Trillas México, 1980.

[10] T.W. Hungerford. *Algebra.* Springer, 2000.

[11] C. Ivorra. "Funciones sin primitiva elemental". (http://www.uv.es/ ivorra/Libros/Primitivas.pdf)

[12] T. Kasper. " Integration in Finite Terms: The Liouville Theory". *Mathematics Magazine* 53, 1980 (195-201).

[13] A. Lascurain. *Curso básico de variable compleja*. Prensa Ciencias, 2011.

[14] J. Lützen. *Joseph Liouville 1809-1882: Master of Pure and Applied Mathematics*. Springer-Verlag, 1990.

[15] E.A. Marchisotto, G. Zakeri. "An Invitation to Integration in Finite Terms". *The College Mathematics Journal*, Vol. 25, 1994 (295-308).

[16] J.E. Marsden, M.J. Hoffman. *Análisis Básico de Variable Compleja*. Editorial Trillas México, 1996.

[17] A. Ostrowski. "Sur l'intégrabilité élémentaire de quelques classes d'expressions". *Commentarii Mathematici Helvetici*. Vol. 18, 1946 (283-308).

[18] N. Piskunov. *Cálculo Diferencial e Integral. Tomo I y II*. Editorial Limusa, 2004.

[19] R. Remmert. *Theory of Complex Functions*. Springer-Verlag, 1991.

[20] R.H. Risch. "The problem of integration in finite terms". *Transactions of American Mathematical* 139, 1969 (167-189).

[21] J.F. Ritt. *Integration in Finite Terms. Liouville's Theory of Elementary Methods*. Columbia University Press, New York, 1948.

[22] M. Rosenlicht. "Liouville's Theorem on Functions with Elementary Integrals". *Pacific Journal of Mathematics* Vol. 24 No. 1 , 1968 (153-161).

[23] M. Rosenlicht. "Integration in Finite Terms". *American Mathematical Monthly*, Vol. 79 No. 9, 1972 (963-972).

[24] M. Spivak. *Calculus*. Editorial Reverté, 2012.

[25] S.K. Stein. "Integration: Dangers and Suggestions". *Two-Year College Mathematics Journal 5*, 1974 (1-7).