



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO**

---

---

**FACULTAD DE CIENCIAS**

**De las variedades con curvatura seccional positiva**

**T E S I S**

**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:**

**Matemático**

**P R E S E N T A:**

**Santiago Martínez Balvanera**



**DIRECTOR DE TESIS:  
Dr. Oscar Alfredo Palmas Velasco  
2015**

Ciudad Universitaria, D. F.



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno

Martínez  
Balvanera  
Santiago  
5531208578  
Universidad Nacional Autónoma de  
México  
Facultad de Ciencias  
Matemáticas  
409006843

2. Datos del tutor

Dr.  
Oscar Alfredo  
Palmas  
Velasco

3. Datos del sinodal 1

Dr.  
Gabriel  
Ruiz  
Hernández

4. Datos del sinodal 2

Dr.  
Eugenio  
Garnica  
Vigil

5. Datos del sinodal 3

Dr.  
Pierre  
Michel  
Bayard

6. Datos del sinodal 4

Dr.  
Vinicio Antonio  
Gómez  
Gutiérrez

7. Datos del trabajo escrito

De las variedades con curvatura  
seccional positiva  
157 p  
2015

# Agradecimientos

Esta tesis, resultado de años de trabajo, no hubiera sido posible en ausencia de aquellas personas que me apoyaron y ayudaron. Por esto me gustaría dedicar esta tesis y agradecer a los siguientes:

A mis padres, cuyo inmenso ejemplo como personas y científicos me inspira y motiva continuamente.

A mis amigos de la facultad, Alan, Daniel, Omar, Pablito, Pablote, Román y Rigel. Sin los incontables proyectos (inacabados) y las largas discusiones matemáticas, mis conocimientos y visión de la matemática sería mucho más pobre.

A mis amigos de la vida, Luis, Lucía, Fermín, Nuriban, Tania, Tito, Viridiana, etc.

A Carolina por todo el apoyo que me dió en estos últimos años. Es probable que sin su soporte esta tesis nunca se habría terminado.

A Oscar Palmas por enseñarme la belleza de la geometría y por la enorme paciencia que me tuvo a lo largo de mi elaboración de la tesis.

A Rafael Barbachano y Francisco Marmolejo por darme la oportunidad de ser su ayudante durante estos años.

# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>III</b>
<b>1. Curvatura</b>	<b>1</b>
1.1. Curvatura . . . . .	1
1.2. Geometría . . . . .	5
1.3. Espacios modelo . . . . .	9
1.3.1. Espacios de curvatura seccional constante . . . . .	10
<b>2. Geometría</b>	<b>13</b>
2.1. Teorema de comparación de Rauch . . . . .	13
2.2. Teorema de Bonnet-Myers . . . . .	19
2.3. Volumen . . . . .	20
2.4. Teorema de Toponogov . . . . .	24
2.5. Teorema de escisión . . . . .	29
<b>3. Topología</b>	<b>35</b>
3.1. Teorema de Bonnet-Myers II . . . . .	35
3.2. Teorema de Synge-Weinstein . . . . .	36
3.3. Teoría de Morse . . . . .	38
3.4. Homotopía y homología . . . . .	42
3.5. Teorema del alma . . . . .	45
3.6. Teorema de la esfera . . . . .	52
3.7. Teoremas de finitud . . . . .	54
<b>4. Simetrías</b>	<b>57</b>
4.1. Isometrías . . . . .	57
4.2. Rebanada de una acción . . . . .	60
4.3. Espacios cociente . . . . .	64
4.4. Campos de Killing . . . . .	70
4.5. El método de Bochner . . . . .	74
4.6. Acciones toroidales . . . . .	76
4.7. Conjetura de Hopf . . . . .	81

<b>5. Clasificación</b>	<b>85</b>
5.1. Ejemplos	85
5.1.1. Espacios Homogéneos	85
5.1.2. Espacios Simétricos	90
5.2. Variedades con simetría máxima	98
5.3. Variedades con rango máximo	99
<b>A. Geometría riemanniana</b>	<b>107</b>
A.1. Preliminares	107
A.2. Variaciones de energía	110
A.3. Campos de Jacobi	113
A.4. Subvariedades	114
<b>B. Grupos de Lie</b>	<b>117</b>
B.1. Definición	117
B.2. Álgebras de Lie	119
B.3. Subgrupos	122
B.4. Integración en grupos de Lie	124
<b>C. Espacios de Alexandrov</b>	<b>127</b>
C.1. Espacios de Alexandrov	127
C.2. Estructura	130
C.3. Distancia Gromov-Hausdorff	133
C.4. Espacio de direcciones	135
C.5. Funciones de distancia y conjuntos convexos	136
C.6. Cocientes isométricos	140
<b>D. Lemas topológicos</b>	<b>143</b>

# Introducción

[...] We must admit with humility that, while number is purely a product of our mind, space has a reality outside our mind, so that we cannot completely prescribe its laws apriori.

—FRIEDRICH BESSEL

Esta tesis consiste de un estudio panorámico de la geometría de las variedades riemannianas con curvatura positiva. El problema de la clasificación de las variedades con curvatura seccional positiva comienza en la primera mitad del siglo pasado con los estudios de Hopf en relación con las consecuencias globales de restricciones locales. El escenario es como sigue: supóngase que se tiene información parcial de un invariante local en un espacio desconocido y se quiere conocer la forma del espacio, ¿hasta qué grado se puede realizar esta tarea? ¿Qué herramientas se tienen para hacer esta búsqueda? ¿Se pueden enlistar todos los espacios posibles? Éstas son las preguntas que se intentan responder en este trabajo cuando el invariante local es el de la curvatura seccional.

Aún después de 200 años de investigación en variedades, se sabe relativamente poco de las consecuencias topológicas y geométricas de una curvatura positiva, reflejando nuestro pobre entendimiento del tensor de curvatura. Sin embargo, muchas han sido las herramientas desarrolladas para la comprensión de estos espacios. En los primeros capítulos de esta tesis se exploran algunas de estas herramientas.

La tesis está dividida en cinco partes. La primera es una breve introducción a la curvatura. Además de la definición y sus propiedades básicas, se da una interpretación puramente geométrica y se concluye con un vistazo a los espacios de curvatura seccional constante. Se requieren algunos conocimientos de geometría diferencial para leer este trabajo, por lo que se ha preparado un apéndice de geometría riemanniana [A](#).

Uno de los primeros avances en el estudio local-global fue el importante trabajo de Rauch en 1951 concerniente a la conjetura de la esfera pinchada de Hopf. Su análisis dio lugar a una rama importante de la geometría riemanniana llamada geometría por comparación, la cual consiste en estimar información geométrica de una variedad riemanniana a través del contraste con otros espacios en donde esta información ya es conocida. Este es el tema del capítulo [2](#). Se demuestra el teorema principal de comparación de Rauch [2.1.2](#) de donde se siguen los teoremas de Gromov-Bishop [2.3.1](#), Bonnet-Myers [2.2.1](#) y Toponogov [2.4.1](#). Estos proveen estimaciones del volumen, el diámetro y los ángulos de triángulos geodésicos, respectivamente, en términos de la misma información para los espacios simplemente conexos de curvatura seccional constante. La restricción geométrica que impone el teorema de Toponogov para espacios de curvatura no negativa es tan fuerte que, bajo la presencia de una línea, el espacio se descompone en un producto riemanniano de una línea con un segundo espacio con curvatura seccional no negativa (teorema de escisión de Gromoll-Meyer [2.5.3](#)).

Las restricciones métricas impuestas por los teoremas del capítulo 2 tienen consecuencias topológicas que se exploran en el capítulo 3. Por ejemplo, el teorema de Bonnet-Myers de la finitud del primer grupo fundamental es una consecuencia inmediata del teorema 2.2.1. Un análisis más cuidadoso de las geodésicas y el hessiano de la energía muestran que las variedades con curvatura positiva de dimensión impar son orientables, mientras que las orientables de dimensión par son simplemente conexas (teorema de Synge 3.2.3). También se expone una variante de la teoría de Morse adaptada al ambiente riemanniano en donde se busca extraer información topológica de las funciones de distancia. Con esto en mano se demuestran un par de resultados concernientes al grupo fundamental y los grupos de homología, además de una importante modificación del teorema de la esfera pinchada demostrada por Grove-Shiohama 3.6.3.

Aunque en la tesis usualmente no se trabaja con variedades no compactas, la sección 3.5 analiza este caso y concluye que en el caso de que la variedad tenga curvatura seccional positiva hay sólo una posibilidad, a saber, que la variedad sea difeomorfa a  $\mathbb{R}^n$  (por ejemplo el paraboloido de revolución). Además, el maravilloso teorema de Cheeger-Gromoll 3.5.1 muestra que en una variedad con curvatura seccional no negativa  $M$ , la topología del espacio está contenida en una subvariedad compacta totalmente geodésica  $S$ , que suele ser llamada el alma, y que  $M$  es difeomorfa al haz normal de  $S$ .

Hasta este momento se habrá expuesto gran parte de las propiedades generales de las variedades con curvatura positiva, lo cual está muy lejos de ser una descripción completa y de brindar herramientas para la clasificación. Es por esto que se introduce la noción de simetría. En el capítulo 4 se estudian las simetrías riemannianas, o bien isometrías, junto con la estructura que emerge de ellas.

Finalmente, en el capítulo 5 se usa la noción de simetría para estudiar las variedades con curvatura seccional positiva. Buscar y clasificar variedades con curvatura seccional positiva y alto grado de simetría es el tema principal. La mayoría de los ejemplos de estas variedades son espacios homogéneos y hasta ahora los únicos ejemplos simplemente conexos de dimensión  $\geq 24$  son espacios simétricos de rango uno. Es por esto que dedicamos varias páginas a su exposición. Por último, se demuestra el teorema de clasificación de Grove-Searle 5.3.5 que enlista los posibles espacios con máximo rango de simetría y curvatura positiva.

En el transcurso de la tesis se ha hecho uso de la teoría de espacios de Alexandrov y de grupos de Lie. Se puede consultar dichos materiales en los apéndices B y C.

# Capítulo 1

## Curvatura

La geometría, en una primera instancia, se dedica a estudiar configuraciones métricas de los cuerpos. Ya sean ángulos, distancias, rectas, áreas, volúmenes, etcétera, las propiedades de los objetos que habitan los espacios y la relación entre ellas ha sido el objetivo central de la geometría. La existencia de las geometrías no euclidianas y la enorme generalización que proporcionó Riemann (en su famoso discurso *Über die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen* [Rie84]) da cuenta de la vasta posibilidad de formas y geometrías que alberga la categoría abstracta de las variedades. Estos espacios ocurren frecuentemente como fundación de nuestro entendimiento del espacio y el movimiento, son los anfiteatros de los fenómenos físicos.

Cuando la métrica del espacio es diferenciable un invariante local destaca en el control que ejerce sobre muchos de los aspectos geométricos. Este capítulo consiste de una breve introducción a este invariante, la *curvatura*.

### 1.1. Curvatura

Sea  $S$  una superficie inmersa en  $\mathbb{R}^3$  y  $p \in S$  un punto sobre ella. Deseamos conocer las propiedades geométricas de la superficie, al menos cerca a  $p$ . De concebir un pequeño triángulo sobre la superficie o una bola de radio  $r$  se revela que sus atributos pueden diferir de sus equivalentes sobre una hoja de papel.

Esta distorsión está expresamente relacionada con la manera en que se curva la superficie cerca al punto. Una observación breve de los importantes casos de la esfera y la silla de montar dan prueba de este fenómeno (véase la figura 1.1).

La cuantificación del modo en que se curva la superficie alrededor de un punto inicia con las curvas. Sea  $\alpha$  una curva en  $\mathbb{R}^3$  y  $\alpha(t) = p$ . Al tomar un par de puntos sobre la curva cercanos a  $p$  y hacer que tiendan a  $\alpha(t)$  se ve que existe un único círculo, llamado el círculo osculador, que mejor se aproxima a la curva en el punto. El recíproco del radio de tal círculo se define como la curvatura de la curva en  $\alpha(t)$ . La curvatura de un círculo de radio  $r$  es  $\frac{1}{r}$ .

Para determinar la curvatura de una superficie  $S$  en un punto  $p \in S$ , tómesese un vector normal  $N$  a  $S$  en  $p$  y cualquier vector tangente  $v \in T_p S$ . Al cortar la superficie con el plano generado por  $N$  y  $v$  se obtiene una curva  $\alpha_v$  de curvatura  $k(v)$ . Asígnese un signo a la curvatura dependiendo si el círculo osculador se encuentra en el semiplano definido por  $N$  o no (cualquier elección es buena). Resulta que  $k(v)$  tiene un máximo y un mínimo llamadas las curvaturas principales  $k_1, k_2$ , en

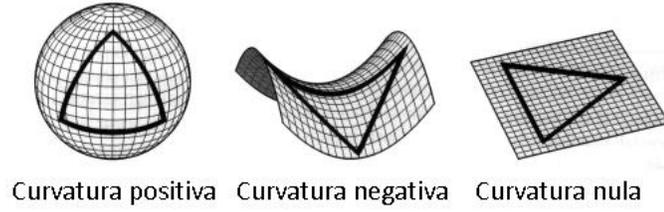


Figura 1.1: Triángulos geodésicos.

direcciones ortogonales llamadas direcciones principales. Si el lector desea conocer los detalles de esta construcción y más propiedades de curvas se le recomienda consultar [DC76] o [Spi05].

En 1827 Gauss demostró que el producto de las curvaturas principales, ahora llamada la curvatura gaussiana, es un invariante bajo isometrías de la superficie, o en otras palabras es un invariante de la métrica intrínseca de la superficie  $S$  (la métrica inducida por la longitud de curvas contenidas en  $S$ ). Dicho de otro modo: si se deforma  $S$  manteniendo constante las longitudes de curvas entonces la curvatura se conserva.

El concepto de curvatura gaussiana fue posteriormente adaptado para dar cuenta de la geometría en espacios de dimensión mayor. Este es el concepto que se utilizará en la totalidad de este trabajo con la intención de indicar algunas de las consecuencias que pueden producir restricciones sobre el invariante. Véase el apéndice A para revisar los conceptos básicos de la geometría riemanniana y la notación que se usará.

La definición original de Riemann involucra las segundas derivadas de la métrica en coordenadas normales, sin embargo con el tiempo se ha ido depurando hasta llegar a la definición moderna. Como introducción citamos a Gromov: “The curvature tensor of a Riemannian manifold is a little monster of (multi)linear algebra whose full geometric meaning remains obscure”.

**Definición 1.1.1.** Sean  $X, Y, Z, W \in \mathcal{X}(M)$ , el endomorfismo de curvatura  $R(X, Y)Z$  se define como:

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z. \quad (1.1)$$

El 4-tensor de curvatura está definido por:

$$Rm(X, Y, Z, W) = g(\nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z, W) = g(R(X, Y)Z, W). \quad (1.2)$$

El endomorfismo de curvatura y el tensor de curvatura son, respectivamente, un  $(1, 3)$  y un  $(0, 4)$  tensor. El tensor de curvatura es el tensor que resulta de bajar un índice en el endomorfismo de curvatura.

Exhibimos ahora las simetrías del tensor:

**Proposición 1.1.1.** Sean  $X, Y, Z, W \in \mathcal{X}(M)$  entonces:

1.  $Rm(X, Y, Z, W) = -Rm(Y, X, Z, W)$ ;
2.  $Rm(X, Y, Z, W) = -Rm(X, Y, W, Z)$ ;
3.  $Rm(X, Y, Z, W) = Rm(Z, W, X, Y)$ ;

4.  $Rm(X, Y, Z, W) + Rm(Y, Z, X, W) + Rm(Z, X, Y, W) = 0$  (identidad de Bianchi);
5.  $\nabla_X R(Y, Z) + \nabla_Y R(Z, X) + \nabla_Z R(X, Y) = 0$  (identidad diferenciable de Bianchi).

Las contracciones del tensor de curvatura juegan un papel fundamental en la geometría riemanniana.

**Definición 1.1.2** (Tensor de Ricci). *El tensor de Ricci es la contracción del endomorfismo de curvatura en la primera y la tercera entrada. Dicho de otro modo, el tensor de Ricci evaluado en un par de campos vectoriales,  $X, Y$ , es la traza del endomorfismo  $R(X, \_)Y : T_p M \rightarrow T_p M$ . En términos de un marco ortonormal local  $\{E_i\}_{i=1}^n$ :*

$$\text{Ric}(X, Y) = \text{Tr}(R(X, \_)Y) = \sum_{i=1}^n g(R(X, E_i)Y, E_i) \quad (1.3)$$

**Definición 1.1.3** (Curvatura escalar). *La curvatura escalar es la contracción del  $(1, 1)$  tensor que se obtiene de elevar un índice del tensor de Ricci. Usando de nuevo un marco ortonormal local  $\{E_i\}_{i=1}^n$ :*

$$S = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n g(R(E_i, E_j)E_i, E_j) \right) = \sum_{i=1}^n \text{Ric}(E_i, E_i) = \sum_{i,j=1}^n Rm(E_i, E_j, E_i, E_j). \quad (1.4)$$

Introducimos el objeto central de este trabajo, la curvatura seccional. Sean  $X, Y \in \mathcal{X}(M)$  un par de campos vectoriales linealmente independientes en  $p$ . La curvatura seccional del plano  $\sigma \subset T_p M$  generado por  $X_p$  y  $Y_p$  se define como:

$$\frac{Rm(X, Y, X, Y)}{g(X, X)g(Y, Y) - g(X, Y)^2}$$

Tal definición solo podría ser aceptable en caso de que no dependa de los generadores del plano  $\sigma$ . Sin embargo esto no es muy difícil de ver. Le advertimos al lector que las fórmulas que definen la curvatura y curvatura seccional varían en la literatura. La variación consiste en una diferencia de signos, sin embargo dichas divergencias se hacen de modo que el valor de la curvatura seccional coincida. Seguimos la convención de [DC92].

Por formalidad se enuncia estructuradamente su definición.

**Definición 1.1.4.** *La curvatura seccional es la función,  $K : Gr(M, 2) \rightarrow \mathbb{R}$ , con dominio el Grassmanniano de tipo 2 sobre  $M$ <sup>1</sup>, definida por:*

$$K(\sigma) = \frac{Rm(X, Y, X, Y)}{g(X, X)g(Y, Y) - g(X, Y)^2}, \quad (1.5)$$

donde  $X, Y$  son un par de vectores que generan a  $\sigma$ .

La curvatura seccional contiene toda la información que contiene el tensor de curvatura:

**Proposición 1.1.2.** *Sean  $T$  y  $R$  dos 4-tensores sobre  $M$  con las simetrías 1-4 de 1.1.1, tales que*

<sup>1</sup>El Grassmanniano de tipo  $k$  sobre  $M$  es el haz fibrado sobre  $M$  cuya fibra en el punto  $p$  es la colección de los subespacios de dimensión  $k$  de  $T_p M$ .

$$T(X, Y, X, Y) = R(X, Y, X, Y)$$

para todos  $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ . Entonces  $T = R$ .

Si la variedad  $M$  tiene curvatura seccional constante igual a  $K$ , entonces  $Rm(X, Y, X, Y) = K(g(X, X)g(Y, Y) - g(X, Y)^2)$ . Sea  $S$  el 4-tensor definido por  $S(X, Y, Z, W) = K(g(X, Z)g(Y, W) - g(X, Y)g(Z, W))$ . Tal tensor tiene las simetrías del tensor de curvatura y coincide con él en argumentos de la forma  $(X, Y, X, Y)$ , por lo que:

**Proposición 1.1.3.** *Sea  $M$  una variedad riemanniana con curvatura seccional constante igual a  $K$ . Entonces el tensor de curvatura está dado por:*

$$Rm(X, Y, Z, W) = K(g(X, Z)g(Y, W) - g(X, Y)g(Z, W))$$

El siguiente teorema es el análogo al *theorem egregium* de Gauss.

**Teorema 1.1.4.** *Cualquier isometría  $f : M \rightarrow N$  preserva la curvatura. Esto es,*

$$df(R(X, Y)Z) = R(df(x), df(Y))df(Z).$$

**Demostación** Primero se demuestra un resultado análogo para la conexión de Levi-Civita. Sean  $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ , defínase una nueva conexión  $\tilde{\nabla}$  por

$$\tilde{\nabla}_X Y = df^{-1}(\nabla_{df(X)} df(Y)).$$

Dado que  $df[X, Y] = [df(X), df(Y)]$  y  $df$  es  $\mathcal{F}(M)$ -lineal, se tiene que  $\tilde{\nabla}$  es  $\mathcal{F}(M)$ -lineal en la primera entrada, satisface Leibniz en la segunda y es simétrica. Por otro lado,

$$\begin{aligned} Xg(Y, Z) &= df(X)g(df(Y), df(Z)) = g(\nabla_{df(X)} df(Y), df(Z)) + g(df(Y), \nabla_{df(X)} df(Z)) \\ &= g(df^{-1}\nabla_{df(X)} df(Y), Z) + g(Y, df^{-1}\nabla_{df(X)} df(Z)) \\ &= g(\tilde{\nabla}_X Y, Z) + g(Y, \tilde{\nabla}_X Z). \end{aligned}$$

La unicidad de la conexión de Levi-Civita implica que  $\nabla = \tilde{\nabla}$ . Es decir,

$$df(\nabla_X Y) = \nabla_{df(X)} df(Y).$$

La invarianza de la curvatura es una simple aplicación de la ecuación anterior.  $\square$

**Ejemplo**  $\mathbb{R}^n$  junto con la métrica usual tiene curvatura 0. El sistema coordenado canónico induce un marco ortonormal  $\{\partial_i\}_{i=1}^n$ . Dado que en  $\mathbb{R}^n$  se satisface

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \langle X, Y \rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i} X, Y \right\rangle + \left\langle X, \frac{\partial}{\partial x_i} Y \right\rangle$$

la conexión de Levi-Civita en  $\mathbb{R}^n$  debe estar dada por

$$\nabla_{\partial_i} X = \frac{\partial}{\partial x_i} X \tag{1.6}$$

De aquí es claro que

$$R(\partial_i, \partial_j)\partial_k = 0$$

para todo  $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$ .

## 1.2. Geometría

Ya se ha indicado que la curvatura controla gran parte de la geometría local de una variedad riemanniana. Como prueba de esta afirmación se tiene el siguiente

**Teorema 1.2.1** (Cartan). *Sean  $M$  y  $N$   $n$ -variedades riemannianas,  $p \in M$ ,  $q \in N$  e  $I : T_p M \rightarrow T_q N$  una isometría. Sea  $s > 0$  lo suficientemente pequeño como para que  $B_s(p)$  y  $B_s(q)$  sean bolas normales y defínase  $\varphi : B_s(p) \rightarrow B_s(q)$  como  $\varphi = \exp_q \circ I \circ \exp_p^{-1}$ . Si  $\gamma$  es una geodésica, se denotarán por  $P_\gamma$  al transporte paralelo a lo largo de  $\gamma$ . En particular si  $\gamma$  es una geodésica que parte de  $p$ , se denotarán por  $I_\gamma$  a la transformación  $P_{\varphi(\gamma)} \circ I \circ P_{-\gamma} : T_p M \rightarrow T_{\varphi(p)} N$ . Si se satisface*

$$I_\gamma(R(X, Y)Z) = R(I_\gamma(X), I_\gamma(Y))I_\gamma(Z) \quad (1.7)$$

para toda  $\gamma = \exp_p th$ ,  $h \in T_p M$ , entonces  $\varphi$  es una isometría con  $d\varphi_p = I$ .

**Demostración** Sean  $p' \in B_s(p)$ ,  $x \in T_{p'} M$ ,  $h = \exp_p^{-1}(p')$  y  $\gamma(t) = \exp_p(th)$ . Obsérvese que  $\varphi(\gamma(t)) = \exp_q(tI(h))$  y por tanto  $I_{\gamma_t}(\gamma'(t)) = (\varphi \circ \gamma)'(t)$ . Sea  $J$  el campo de Jacobi a lo largo de  $\gamma$  que satisface  $J(0) = 0$  y  $J(1) = x$ . Al trasladar el campo de Jacobi a  $N$  como  $L(t) = I_{\gamma_t} J(t)$  se obtiene un campo de Jacobi

$$\begin{aligned} L''(t) + R((\varphi \circ \gamma)'(t), L(t))(\varphi \circ \gamma)'(t) &= (I_{\gamma_t} J(t))'' + R(I_{\gamma_t}(\gamma'(t)), I_{\gamma_t} J(t))I_{\gamma_t}(\gamma'(t)) \\ &= I_{\gamma_t}(J''(t) + R(\gamma'(t), J(t))\gamma'(t)) = 0. \end{aligned}$$

Como  $I_\gamma$  es una isometría entonces  $|x| = |J(1)| = |L(1)|$ . Por otro lado, existe una variación por geodésicas de  $\gamma$  que genera a  $J$ . Como  $J(0) = 0$ , entonces esta variación puede elegirse de modo que  $p$  quede fijo. Sea  $\theta : I^2 \rightarrow M$  la variación por geodésicas que genera a  $J$ . Entonces  $\varphi \circ \theta$  es una variación por geodésicas que genera un campo de Jacobi  $K$  a lo largo de  $\varphi \circ \gamma$ . Tal campo satisface  $K(0) = 0$  y  $K'(0) = I(J'(0)) = L'(0)$ , por lo que  $K = L$ . La curva  $\alpha(s) = \theta(1, s)$  satisface que  $\alpha'(0) = J(1) = x$  y  $d\varphi_{p'}(x) = \varphi \circ \alpha'(0) = L(1)$ . Luego

$$|x| = |d\varphi_{p'}(x)|;$$

es decir,  $\varphi$  es una isometría. La igualdad  $d\varphi_p = I$  es obvia de la definición.  $\square$

El resultado local es extendible en caso en que  $M$  es simplemente conexo. Decimos que una curva  $\gamma : [0, l] \rightarrow M$  es una geodésica a pedazos si existe una partición  $t_0, \dots, t_n$  de  $[0, l]$  tal que  $\gamma|_{[t_i, t_{i+1}]}$  es una geodésica. Tómesese un par de puntos  $p \in M$  y  $q \in N$ . Para cada geodésica a pedazos que inicia en  $p$  se construye una geodésica a pedazos correspondiente en  $N$ . Sea  $I : T_p M \rightarrow T_q N$  una isometría y  $\gamma : [0, l] \rightarrow M$  una geodésica a pedazos con  $\gamma(0) = p$  y  $\gamma|_{[t_i, t_{i+1}]}$  geodésica. Defínase una geodésica a pedazos  $\beta : [0, l] \rightarrow N$  tal que  $\beta(0) = q$  de manera recursiva. En  $[0, t_1]$ ,  $\beta(t) = \exp_q(I(\exp_p^{-1}(\gamma(t))))$ . Supóngase que ya se ha definido  $\beta$  en  $[0, t_i]$  y sean  $P_{\gamma_i}$  y  $P_{\beta_i}$  el transporte paralelo a lo largo de las curvas  $\gamma|_{[0, t_i]}$  y  $\beta|_{[0, t_i]}$ , respectivamente, entonces defínase  $\beta$  en  $[t_i, t_{i+1}]$  como  $\beta(t) = \exp_{\beta(t_i)}(P_{\beta_i} \circ I \circ P_{\gamma_i}^{-1}(\exp_{\gamma(t_i)}^{-1}(\gamma(t))))$ . De nuevo defínase  $I_\gamma = P_\beta \circ I \circ P_{-\gamma}$ .

**Teorema 1.2.2** (Cartan-Ambrose-Hicks). *Sean  $M$  y  $N$  variedades riemannianas completas  $n$ -dimensionales con  $M$  simplemente conexa y  $I : T_p M \rightarrow T_q N$  una isometría. Si para toda geodésica a pedazos  $\gamma : [0, l] \rightarrow M$  con  $\gamma(0) = p$  se tiene que*

$$I_\gamma(R(X, Y)Z) = R(I_\gamma(X), I_\gamma(Y))I_\gamma(Z),$$

entonces existe una única isometría local  $\varphi : M \rightarrow N$  con  $d\varphi = I$ .

Para la demostración consúltese [CE75, Teorema 1.36].

Los campos de Jacobi contienen la información de la rapidez con la que divergen o convergen las geodésicas que parten de un mismo punto. Localmente se tiene el siguiente resultado.

**Teorema 1.2.3.** *Sea  $p \in M$  y  $J$  un campo de Jacobi a lo largo de una geodésica  $\gamma(t) = \exp_p(th)$  con  $J(0) = 0$  y  $|J'(0)| = 1$ , entonces la función  $|J(t)|$  tiene la siguiente expansión de Taylor en  $p$ .*

$$|J(t)|^2 = t^2 - \frac{1}{3}g(R(\gamma'(0), J'(0))\gamma'(0), J'(0))t^4 + \mathcal{O}(t^4). \quad (1.8)$$

**Demostración** Una serie de cálculos prueba el resultado. Para esto un

**Lema 1.2.4.** *Si  $J$  es un campo de Jacobi a lo largo de la geodésica  $\gamma$  con  $J(0) = 0$  y  $|J'(0)| = 1$  entonces*

$$\nabla_{\gamma'} R(\gamma', J)\gamma'(0) = R(\gamma', J')\gamma'(0).$$

**Demostración** Por la manera de extender  $\nabla$  a los tensores se tiene que

$$\begin{aligned} \nabla_{\gamma'} R(\gamma', J)\gamma' &= (\nabla_{\gamma'} R)(\gamma', J, \gamma') + R(\nabla_{\gamma'} \gamma', J)\gamma' + R(\gamma', \nabla_{\gamma'} J)\gamma' + R(\gamma', J)\nabla_{\gamma'} \gamma' \\ &= (\nabla R)(\gamma', \gamma', J, \gamma') + R(\gamma', J')\gamma'. \end{aligned}$$

Como  $J(0) = 0$  y  $(\nabla R)$  es un tensor entonces  $\nabla_{\gamma'} R(\gamma', J)\gamma'(0) = R(\gamma', J')\gamma'(0)$ .  $\square$

Para obtener la expansión de Taylor de  $g(J, J)$  se calculan las derivadas sucesivas de  $g(J, J)$ :

1.  $g(J, J)' = 2g(J', J)$ . Luego  $g(J, J)'(0) = 0$ .
2.  $g(J, J)'' = (2g(J', J))' = 2(g(J'', J) + g(J', J'))$ . Luego  $g(J, J)'' = 2(-g(R(\gamma', J)\gamma', J) + g(J', J'))$  y  $g(J, J)''(0) = 2|J'(0)|^2 = 2$ .
3.  $g(J, J)''' = 2g(J''', J) + 6g(J'', J')$ . Como  $J$  es un campo de Jacobi satisface  $J'' = -R(\gamma', J)\gamma'$  y entonces  $g(J, J)'''(0) = 0$ .
4.  $g(J, J)^{(4)} = 2g(J^{(4)}, J) + 8g(J''', J') + g(J'', J'')$ . Como se tiene que  $J'' = -R(\gamma', J)\gamma'$  y  $J'''(0) = R(\gamma', J)\gamma'(0)$  por el lema, entonces

$$g(J, J)^{(4)}(0) = 8g(J'''(0), J'(0)) = 8g(R(\gamma', J')\gamma', J')(0).$$

Luego la expansión de Taylor de orden 4 es

$$|J(t)|^2 = t^2 - \frac{1}{3}g(R(\gamma', J')\gamma', J')(0)t^4 + \mathcal{O}(t^4).$$

$\square$

Esta aproximación infinitesimal puede utilizarse para estimar volúmenes, áreas y longitudes de cierto tipo de figuras. Sea  $\sigma$  un 2-plano en  $M_p$ ,  $v_1, v_2$  una base ortonormal y considérese la curva  $S(\theta) = \cos \theta v_1 + \sin \theta v_2$ . Para  $r$  suficientemente pequeño  $\phi(r, \theta) = \exp_p(rS(\theta))$  es una superficie encajada en  $M$  que llamaremos  $B_r^\sigma(p)$ . Se puede interpretar a  $\phi$  como una variación por geodésicas de  $\gamma_\theta(t) = \exp_p(rS(\theta))$ ; el campo de Jacobi que induce  $J_\theta = \frac{\partial \phi}{\partial \theta}$  es ortogonal a  $\frac{\partial \phi}{\partial r} = (d\exp)_{tv_\theta}(v_\theta)$  por el Teorema de Gauss. Para hacer el cálculo del área se hace el pullback de la métrica a  $B_r^\sigma(p)$ , se

calcula la forma de volumen inducida y se integra. La forma de volumen inducida en  $[0, r] \times [0, 2\pi]$  es

$$\sqrt{\det(A)}\omega_{can}, \quad A = \begin{pmatrix} g\left(\frac{\partial\phi}{\partial r}, \frac{\partial\phi}{\partial r}\right) & g\left(\frac{\partial\phi}{\partial r}, \frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right) \\ g\left(\frac{\partial\phi}{\partial\theta}, \frac{\partial\phi}{\partial r}\right) & g\left(\frac{\partial\phi}{\partial\theta}, \frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right) \end{pmatrix}.$$

donde  $\omega_{can}$  es la forma de volumen canónica en  $\mathbb{R}^2$ . Por las consideraciones anteriores se reduce a  $|J_\theta(t)|\omega_{can}$ .

**Teorema 1.2.5.** *Dado un plano  $\sigma \subset M_p$ , la función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(t) = \text{Area}(B_t^\sigma(p))$  tiene la siguiente expansión de Taylor:*

$$f(r) = \pi r^2 - \frac{\pi K(\sigma)}{12} r^4 + \mathcal{O}(r^4).$$

**Demostración** Fijando  $\theta$  la geodésica  $\gamma_\theta$  tiene como vector inicial  $\gamma'_\theta(0) = S(\theta)$ . Por otro lado  $J'_\theta(0) = S'(\theta)$ . Nótese que  $S(\theta)$  y  $S'(\theta)$  forman una base ortonormal de  $\sigma$ . De la ecuación 1.8 se tiene que  $|J_\theta(t)| = t - \frac{1}{6}g(R(\gamma'_\theta(0), J'_\theta(0))\gamma'_\theta(0), J'_\theta(0))t^3 + \mathcal{O}(t^3)$ . Por lo anterior esto es:

$$|J_\theta(t)| = t - \frac{1}{6}K(\sigma)t^3 + \mathcal{O}(t^3).$$

Integrando, se tiene

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_0^t \int_0^{2\pi} |J_\theta(s)| d\theta ds = \int_0^t \int_0^{2\pi} s - \frac{1}{6}K(\sigma)s^3 + \mathcal{O}(s^3) d\theta ds \\ &= \pi t^2 - \frac{\pi}{12}K(\sigma)t^4 + \int_0^t \int_0^{2\pi} \mathcal{O}(s^3, \theta) \\ &= \pi t^2 - \frac{2\pi K(\sigma)}{4!}t^4 + \mathcal{O}(t^4). \quad \square \end{aligned}$$

También se consigue una aproximación del perímetro de estos discos.

**Proposición 1.2.6.** *La función  $\text{Perimetro}(B_t^\sigma)$  tiene la siguiente expansión de Taylor:*

$$\text{Perimetro}(B_t^\sigma) = 2\pi t - \frac{\pi}{3}K(\sigma)t^3 + \mathcal{O}(t^3).$$

Luego la curvatura tiene la siguiente interpretación métrica.

**Teorema 1.2.7.** *Si  $\sigma$  es un 2-plano en  $M_p$  entonces:*

$$K(\sigma) = \frac{3}{\pi} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2\pi t - \text{Perimetro}(B_t^\sigma)}{t^3},$$

o bien

$$K(\sigma) = \frac{12}{\pi} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\pi t^2 - \text{Area}(B_t^\sigma)}{t^4}.$$

En el caso en que la variedad riemanniana sea de dimensión 2 hay un único 2-plano en cada espacio tangente y se puede representar a la curvatura seccional como una función  $K : M \rightarrow \mathbb{R}$ . El teorema de Gauss-Bonnet cuantifica la influencia de la curvatura en los ángulos de triángulos geodésicos.

**Definición 1.2.1** (Triángulo geodésico). *Un triángulo geodésico en una variedad riemanniana  $M$  es una terna de segmentos de geodésicas  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  y  $\gamma_3$ , de longitudes  $l_1$ ,  $l_2$  y  $l_3$  respectivamente, tales que  $\gamma_1(l_1) = \gamma_2(0)$ ,  $\gamma_2(l_2) = \gamma_3(0)$  y  $\gamma_3(l_3) = \gamma_1(0)$  y  $l_i \leq l_j + l_k$  para cualesquiera  $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$  distintos. El triángulo será denotado por  $\Delta\gamma_1\gamma_2\gamma_3$ . Se usará la notación  $\angle\gamma_1\gamma_2$ ,  $\angle\gamma_2\gamma_3$  y  $\angle\gamma_3\gamma_1$  para denotar los ángulos formados por las parejas  $-\gamma'_1(l_1)\gamma'_2(0)$ ,  $-\gamma'_2(l_2)\gamma'_3(0)$  y  $-\gamma'_3(l_3)\gamma'_1(0)$  respectivamente. En el caso que las parametrizaciones de las geodésicas no jueguen un papel importante se escribirá  $pq$  para denotar una geodésica de  $p$  a  $q$ , su longitud  $|pq|$  y un triángulo geodésico  $\Delta pqr$ . Además en este caso  $\angle pqr$  denotará el ángulo formado por las geodésicas  $qp$  y  $qr$  en  $q$ .*

**Teorema 1.2.8** (Fórmula de Gauss-Bonnet). *Sea  $M$  una superficie riemanniana y  $\Delta pqr$  un triángulo geodésico que encierra un disco  $\Delta$ . Entonces*

$$\angle pqr + \angle qrp + \angle rpq = \pi + \int_{\Delta} K(p). \quad (1.9)$$

La demostración puede consultarse en [DC92].

Una de las consecuencias que el teorema de Gauss-Bonnet parece sugerir es que los ángulos de triángulos geodésicos contenidos en una variedad de curvatura positiva (o de curvatura negativa) son más grandes (más chicos) que sus similares en el plano; esto se refiere a los ángulos de triángulos (euclidianos) con lados de la misma longitud. Esto resulta cierto en general, véase 2.4.

Algunas de las consecuencias geométricas de la curvatura aquí presentadas se extienden a todo el espacio dando restricciones de tipo topológico a la variedad ambiente. Por ejemplo, siempre se puede triangular una superficie riemanniana con triángulos geodésicos y por lo tanto

**Teorema 1.2.9** (Gauss-Bonnet). *En una superficie riemanniana compacta  $M$ ,*

$$\int_M K(p) = 2\pi\chi(M). \quad (1.10)$$

Recordemos que la característica de Euler  $\chi(M)$  es un invariante topológico y luego la fórmula anterior impone restricciones sobre la manera en que se puede curvar un espacio dado. El toro  $\mathbb{T}^2$  tiene característica de Euler 0 por lo que cualquier métrica sobre él o bien es plana o bien posee un par de puntos mixtos (uno de curvatura positiva y otro negativa). Sin embargo el presente trabajo aborda otro punto de vista y desde este panorama el teorema de Gauss-Bonnet adquiere otro significado. Si imponemos restricciones sobre la curvatura entonces la ecuación 1.10 restringe el tipo de superficie que admite estas limitaciones. En particular si  $K > 0$  entonces necesariamente  $\chi(M) > 0$ . Dado que las únicas superficies cerradas con característica de Euler positiva son  $P\mathbb{R}^2$  y  $\mathbb{S}^2$  entonces

**Teorema 1.2.10.** *Sea  $M$  una superficie riemanniana cerrada con curvatura seccional positiva. Entonces  $M = P\mathbb{R}^2$  o  $M = \mathbb{S}^2$ .*

Otra manera en que la curvatura puede afectar la topología del espacio es la siguiente. La burda estimación de la norma de los campos de Jacobi 1.8 sugiere que en caso de que  $K > 0$  un campo de Jacobi con  $J(0) = 0$  puede volver a anularse en un tiempo positivo  $t_0$ . Cabe imaginar que  $t_0$  puede ser estimado usando información de  $K$ . Es decir, las restricciones sobre la curvatura brindan información de la distancia mínima entre puntos conjugados. Estos puntos serán desarrollados con mayor detalle en secciones posteriores.

### 1.3. Espacios modelo

En esta sección se expone el espacio hiperbólico bidimensional, el plano y la esfera como ejemplos fundamentales de variedades riemannianas con curvatura seccional constante. Su utilidad en nuestro contexto es doble, en primer lugar su sencillez permite el cálculo explícito de diversa información geométrica y en segundo lugar sirven de patrón de comparación para otros espacios.

Por el resultado 1.3.3 de la sección 1.3.1 para cada  $K \in \mathbb{R}$  existe una única variedad riemanniana completa, conexa, simplemente conexa de curvatura seccional constante  $K$ .

**Definición 1.3.1.** *El espacio modelo de curvatura  $K$  de dimensión  $n \geq 2$  es la variedad riemanniana completa, conexa, simplemente conexa con curvatura seccional constante  $K$ . Será denotada por  $M^{n,K}$ . Si  $n = 2$  se escribirá simplemente  $M^K$ .*

La topología del espacio  $M^{n,K}$  depende de  $K$ . Para  $K > 0$ ,  $M^{n,K}$  es una esfera  $\mathbb{S}^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$  de radio  $1/\sqrt{K}$ . Para  $K = 0$ ,  $M^{2,0}$  es  $\mathbb{R}^2$  con la métrica euclidiana. Finalmente para  $K < 0$ ,  $M^{n,K} \cong \mathbb{R}^n$  es el plano hiperbólico  $n$ -dimensional de curvatura  $K$ .

Una construcción sencilla pero útil consiste en multiplicar la métrica por una constante positiva. Tal procedimiento se llama rescalamiento y conserva todas las propiedades geométricas del espacio.

**Proposición 1.3.1.** *Sea  $M_1$  una variedad riemanniana con métrica  $g_1$  y  $\lambda \in \mathbb{R}^+$ . Si  $M_2$  es la misma variedad pero con métrica  $g_2 = \lambda^2 g_1$  entonces*

- $d_2(x, y) = \lambda d_1(x, y)$ , donde  $d_i$  indica la métrica inducida por la métrica riemanniana  $g_i$ . En particular si  $M_1$  es finita entonces  $M_2$  también y  $\text{diam}(M_2) = \lambda \text{diam}(M_1)$ .
- $\nabla_1 = \nabla_2$ , donde  $\nabla_i$  es la conexión de Levi-Civita de la métrica  $g_i$ .
- $Rm_2 = \lambda^2 Rm_1$ .
- $K_2 = \frac{1}{\lambda^2} K_1$ .
- Si  $M_1$  es orientable,  $d \text{vol}_2 = \lambda^n d \text{vol}_1$ , donde  $d \text{vol}_i$  es la forma de volumen con respecto a la métrica riemanniana  $g_i$ .

**Demostración** El inciso (a) es obvio y los incisos (c) y (d) son una consecuencia inmediata del inciso (b), así que basta con demostrar (b) y (e).

Dado que  $\nabla_1$  es una conexión simétrica basta con ver que es compatible con  $g_2$  para demostrar que  $\nabla_1 = \nabla_2$ .

$$\nabla_1 g_2 = \nabla_1(\lambda^2 g_1) = \lambda^2 \nabla_1 g_1 = 0.$$

Sea  $\{E_i\}$  una base en  $p \in M$ . Entonces

$$\begin{aligned} d \text{vol}_2(E_1, \dots, E_n) &= \sqrt{\det(g_2(E_i, E_j))} \\ &= \sqrt{\det(\lambda^2 g_1(E_i, E_j))} \\ &= \sqrt{\lambda^{2n} \det(g_1(E_i, E_j))} \\ &= \lambda^n \sqrt{\det(g_1(E_i, E_j))} \\ &= \lambda^n d \text{vol}_1(E_1, \dots, E_n). \end{aligned}$$

Luego  $d \text{vol}_2 = \lambda^n d \text{vol}_1$ . □

Nótese que, para variedades compactas, las cantidades  $\text{diam}(M)^2 K(\sigma)$  y  $\text{vol}(M)/\text{diam}(M)^n$  son invariantes tras rescalamientos.

Cualquier espacio  $M^{n,K}$  es equivalente, módulo rescalamiento, a solo una de las siguientes opciones: La  $n$ -esfera unitaria  $\mathbb{S}^n$  con la métrica inducida en el caso  $K > 0$ ,  $\mathbb{R}^n$  con la métrica euclidiana cuando  $K = 0$  y  $\mathbb{H}^n$  el plano hiperbólico  $n$ -dimensional para  $K < 0$ .

Estos espacios exhiben de manera clara las consecuencias de la presencia de la curvatura en la geometría. En la siguiente sección se escribirá con un poco más de detalle estos espacios. La geometría de estos espacios comienza a revelarse con el estudio de las formas geométricas más sencillas (después de las líneas): los triángulos geodésicos o equivalentemente las bisagras.

**Definición 1.3.2.** *Una bisagra en una variedad riemanniana  $M$  consta de dos segmentos de geodésicas  $\gamma_1, \gamma_2$  de longitudes  $l_1$  y  $l_2$ , respectivamente tales que,  $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ . Si el ángulo formado entre  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  es  $\alpha$  se denotarán a la bisagra por  $(\gamma_1, \gamma_2, \alpha)$ . Si las parametrizaciones son irrelevantes se puede denotar una bisagra por  $\triangleleft pqr$  donde  $qp$  y  $qr$  son geodésicas.*

### 1.3.1. Espacios de curvatura seccional constante

Sea  $M$  una variedad riemanniana completa  $n$ -dimensional tal que  $K(\sigma) = K$  para todo plano  $\sigma \subset TM$ . Sea  $J$  un campo de Jacobi a lo largo de la geodésica  $\gamma$ , ortogonal a ésta, y sean  $\{E_i(t)\}$  campos ortonormales y paralelos a lo largo de  $\gamma$  tales que  $E_1 = \gamma'$ . Si escribimos  $J(t) = f^i(t)E_i(t)$  entonces la fórmula 1.1.3 indica que

$$\begin{aligned} f_i''(t) &= g(J, E_i)''(t) = g(J'', E_i)(t) = -g(R(\gamma', J)\gamma', E_i)(t) \\ &= -g(R(\gamma', f^j E_j)\gamma', E_i) = -f^j K(\sigma_i) = -K f^i. \end{aligned}$$

Luego las funciones coordenadas satisfacen la ecuación diferencial

$$f_i'' + K f^i = 0. \quad (1.11)$$

Si denotamos por  $sn_K$  y  $cs_K$  a las soluciones de la ecuación diferencial

$$f'' + K f = 0$$

con condiciones iniciales  $sn_K(0) = 0$ ,  $sn_K'(0) = 1$ ,  $cs_K(0) = 1$  y  $cs_K'(0) = 0$ , entonces

$$sn_K(t) = \begin{cases} \frac{\text{sen}(\sqrt{K}t)}{\sqrt{K}}, & \text{si } K > 0; \\ t, & \text{si } K = 0; \\ \frac{\text{senh}(\sqrt{-K}t)}{\sqrt{-K}}, & \text{si } K < 0. \end{cases}$$

y

$$cs_K(t) = \begin{cases} \frac{\text{cos}(\sqrt{K}t)}{\sqrt{K}}, & \text{si } K > 0; \\ 1, & \text{si } K = 0; \\ \frac{\text{cosh}(\sqrt{-K}t)}{\sqrt{-K}}, & \text{si } K < 0. \end{cases}$$

Por lo tanto los campos de Jacobi a lo largo de geodésicas unitarias son de la forma

$$J(t) = sn_k(t)V(t) + cs_k(t)W(t)$$

donde  $V$  y  $W$  son campos paralelos a lo largo de  $\gamma$ . Nótese que  $J(0) = W(0)$  y  $J'(0) = V(0)$ . Si  $J(0) = 0$  entonces  $|J(t)| = |sn_k(t)||V|$ . Consecuentemente la expresión de la métrica en coordenadas polares es

$$g = dr + sn_k^2(r)ds_{n-1}, \quad (1.12)$$

donde  $ds_{n-1}$  es la métrica usual en  $\mathbb{S}^{n-1}$ .

Usando esta información, o tomando un camino más geométrico, es posible determinar por completo la distancia entre los extremos de una bisagra.

**Proposición 1.3.2.** *Sea  $\angle pqr$  una bisagra en  $M^{n,K}$ . Si  $K > 0$  se pide adicionalmente que  $|qp|, |qr| \leq 2\pi$ . La distancia  $|pr|$  está dada por*

$$|pr| = \begin{cases} \sqrt{|qr|^2 + |qp|^2 - 2|qr||qp| \cos \angle pqr}, & K = 0; \\ cs_k^{-1}(cs_k(|qr|)cs_k(|qp|) + \frac{|K|}{K}sn_k(|qr|)sn_k(|qp|) \cos \angle pqr), & K \neq 0 \end{cases}$$

El teorema de Cartan 1.2.1 permite reducir el problema de clasificar variedades con curvatura seccional constante al de clasificar ciertos subgrupos.

**Teorema 1.3.3** (Killing-Hopf). *Sea  $M$  una variedad completa con curvatura seccional constante  $K$ . Si  $K < 0$  entonces  $M = \mathbb{H}_K^n/\Gamma$ , si  $K = 0$  entonces  $M = \mathbb{R}^n/\Gamma$  o si  $K > 0$  entonces  $M = \mathbb{S}_K^n/\Gamma$ , en donde  $\Gamma$  es un subgrupo de isometrías de  $\mathbb{H}_K^n$ ,  $\mathbb{R}^n$  o  $\mathbb{S}_K^n$  respectivamente que actúa de manera totalmente discontinua en su espacio correspondiente<sup>2</sup>.*

**Demostración** Supóngase que  $K \leq 0$ . En este caso  $sn_K$  nunca es 0 (salvo en 0) por lo que cualquier punto  $p \in M$  carece de puntos conjugados en todas las direcciones. Dado que los puntos conjugados son los puntos críticos de la función  $\exp_p$ , se ha llegado a la conclusión de que  $\exp_p$  es un difeomorfismo local. Si se hace el pullback de la métrica en  $M$  a  $M_p$  se obtiene una métrica en  $\mathbb{R}^n$  de curvatura seccional constante  $K$ . Este espacio necesariamente es  $\mathbb{R}^n$  en el caso  $K = 0$  o  $\mathbb{H}_K^n$  en el caso  $K < 0$ , y será denotado por  $M_K$ . Luego  $\exp_p : M_K \rightarrow M$  es una isometría local y por lo tanto una aplicación cubriente. Las transformaciones de cubierta son isometrías y por lo tanto se puede concluir que  $M = M_K/\Gamma$  donde  $\Gamma$  es un subgrupo discreto de isometrías de  $M_K$ .

El caso  $K > 0$  es ligeramente más complicado. Sea  $p \in M$  y nótese que el primer punto conjugado en cualquier dirección aparece a distancia  $\pi/\sqrt{K}$ . Considérese dos vectores ortonormales  $v, w \in T_pM$  y la curva  $s(\theta) = \pi/\sqrt{K}(\cos(\theta)v + \sin(\theta)w)$  en  $T_pM$ . La variación por geodésicas de  $\gamma_\theta$  dada por  $\exp_p(ts(\theta))$  induce campos de Jacobi  $J_\theta$  a lo largo de (y ortogonales a)  $\gamma_\theta$ . Por los comentarios anteriores estos campos de Jacobi satisfacen  $J_\theta(\pi/\sqrt{K}) = 0$ . Por otro lado la curva en  $M$  dada por  $\alpha(\theta) = \exp_p(s(\theta))$  tiene como derivada  $(d\exp_p)_{s(\theta)}(s'(\theta)) = J_\theta(\pi/\sqrt{K}) = 0$ . Luego  $\alpha$  es una curva constante. Esto muestra que  $\exp_p(\partial B_{\pi/\sqrt{K}}(0)) = q$ , para algún punto  $q \in M$ , o dicho de otro modo, todas las geodésicas que parten de  $p$  convergen en  $q$  después de recorrer una distancia  $\pi/\sqrt{K}$ . Ahora tomemos la esfera n-dimensional de radio  $1/\sqrt{K}$  y un punto sobre ella  $N \in \mathbb{S}_K^n$  junto con una isometría  $I : T_pM \rightarrow T_N\mathbb{S}_K^n$ . El mapeo  $f : \mathbb{S}_K^n \rightarrow M$  dado por  $f(\exp_N(v)) = \exp_p(I(p))$  está bien definido por las observaciones previas y por el teorema de Cartan 1.2.1 es una isometría

<sup>2</sup>Véase la sección 4.1 para consultar la definición de acción totalmente discontinua.

local. De nuevo esto hace que  $f$  sea una aplicación cubriente y por lo tanto se concluye que  $\mathbb{S}^n$  es el espacio cubriente universal de  $M$  y que  $M = \mathbb{S}_K^n / \Gamma$  en donde  $\Gamma$  es un subgrupo discreto de isometrías de  $\mathbb{S}_K^n$ . Nótese que  $\pi_1(M) \cong \Gamma$ .  $\square$

La clasificación de subgrupos de isometrías que actúan de manera totalmente discontinua en  $\mathbb{S}^{2m}$  es muy sencilla.

**Teorema 1.3.4.** *Los únicos subgrupos de  $O(2m+1)$  que actúan de manera totalmente discontinua en  $\mathbb{S}^{2m}$  son  $\{Id\}$  y  $\{Id, -Id\} \cong \mathbb{Z}_2$ .*

**Demostración** Sea  $\Gamma \subset O(2m+1)$  un subgrupo que actúa de manera totalmente discontinua en  $\mathbb{S}^{2m}$  y  $A \in \Gamma$ . Dado que  $2m+1$  es impar, el número de eigenvalores reales de  $A$  es impar. La condición de ortogonalidad implica que estos eigenvalores reales son 1 o  $-1$ .

Supóngase que  $\det(A) = 1$ . Como  $\det(A)$  es igual al producto de sus eigenvalores reales (los eigenvalores complejos ocurren por parejas  $z, \bar{z}$  con  $|z| = 1$ ) entonces hay al menos un eigenvalor igual a 1. De esto se sigue que  $A$  tiene un punto fijo y por lo tanto  $A = Id$ .

Si  $\det(A) = -1$  entonces  $\det(A^2) = 1$  y por lo anterior  $A^2 = Id$ . Como  $A$  es ortonormal entonces  $A = A^t$  y  $A$  es diagonalizable. De contener un solo eigenvalor igual a 1 podríamos concluir que  $A = Id$ , por lo que todos los eigenvalores de  $A$  son  $-1$ . Así  $A = -Id$ .  $\square$

**Definición 1.3.3.** *La variedad riemanniana  $\mathbb{S}_K^n / \{Id, -Id\}$  es el espacio proyectivo  $n$ -dimensional de curvatura seccional  $K$ . Se le denota por  $P\mathbb{R}_K^n$ .*

Se ha demostrado el siguiente

**Teorema 1.3.5.** *Toda variedad riemanniana completa  $2n$ -dimensional de curvatura seccional constante  $K > 0$  es isomorfa a  $\mathbb{S}_K^{2n}$  o a  $P\mathbb{R}_K^{2n}$ .*

En el caso de  $n$  impar, hay más elementos de  $O(n+1)$  que actúan de manera totalmente discontinua en  $\mathbb{S}^n$ . Si pensamos a  $\mathbb{S}^{2n-1}$  como subconjunto de  $\mathbb{C}^n$  entonces se tiene la útil caracterización

$$\mathbb{S}^{2n-1} = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n : |z_1|^2 + \dots + |z_n|^2 = 1\}.$$

Si  $(p; q_1, q_2, \dots, q_n)$  son enteros tales que  $(q_i; p) = 1$  (son primos relativos) entonces  $\mathbb{Z}_p$  actúa en  $\mathbb{S}^n$  de la siguiente manera: si  $m \in \mathbb{Z}_p$

$$m \cdot (z_1, \dots, z_n) = \left( e^{\frac{2\pi i q_1 m}{p}} z_1, e^{\frac{2\pi i q_2 m}{p}} z_2, \dots, e^{\frac{2\pi i q_n m}{p}} z_n \right).$$

Esta acción es libre ya que si  $m(z_1, \dots, z_n) = (z_1, \dots, z_n)$  para algún  $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{S}^{2n-1}$  entonces existe  $i$  tal que  $z_i \neq 0$ . Luego  $e^{2\pi i q_i m/p} z_i = z_i$  lo cual implica que  $e^{2\pi i q_i m/p} = 1$ , es decir  $q_i m/p \in \mathbb{Z}$ . Como se tomaron los enteros de forma que  $(q_i; p) = 1$  entonces  $m = 0 \pmod{p}$ . Se denotarán a los subgrupos de  $O(2n)$  generados de este modo por  $\Gamma(p; q_1, \dots, q_n)$ .

**Definición 1.3.4.** *El espacio lente de tipo  $(p; q_1, \dots, q_n)$  denotado por  $L(p; q_1, \dots, q_n)$  es la variedad cociente  $\mathbb{S}^{2n-1} / \Gamma(p; q_1, \dots, q_n)$ .*

Los espacios lente son variedades  $2n-1$  dimensionales y admiten métricas de curvatura seccional constante y positiva. Para terminar este capítulo se menciona que la clasificación de variedades con curvatura seccional positiva y constante fue realizada entre 1940-1960 y al lector interesado se le recomienda el libro de Wolf [Wol10] que contiene dicho programa de clasificación.

# Capítulo 2

## Geometría

En este capítulo exploramos las consecuencias geométricas de la curvatura. La filosofía principal de este capítulo es la geometría a través de la comparación. El programa de estudiar la geometría de un espacio a través de compararlo con otros, y en particular con los espacios modelo 1.3 ha sido inmensamente fructífera y ha dado lugar a una serie de teoremas que hoy en día se consideran fundamentales. Esta rama de la teoría fue desarrollada, en cierta medida, a partir del trabajo seminal de Rauch que concernía una famosa conjetura de Hopf. Hoy en día la conjetura y los teoremas que manaron del trabajo de Rauch son conocidos como los teoremas de la esfera pinchada. Aunque en esta sección no se demuestran (o enuncian) los teoremas de la esfera pinchada, sí se desarrollan gran parte de las herramientas necesarias para la demostración. Para el enunciado del teorema véase 3.6.2.

### 2.1. Teorema de comparación de Rauch

Como se vió en la sección 1.3.1, si  $M$  tiene curvatura seccional constante  $K$  entonces los campos de Jacobi están dados por la ecuación

$$sn_K(t)V.$$

El análisis se extiende, parcialmente, a variedades con curvatura seccional acotada por debajo. Aunque no es posible obtener una fórmula exacta para los campos de Jacobi, se pueden contrastar con campos de Jacobi en los espacios modelo.

Recuérdese (cfr. A.2) que el “Hessiano” de la energía de un segmento de geodésica  $\gamma$  de longitud  $l$  está dado por la forma bilíneal y simétrica

$$I_l(V, W) = \int_0^l g(V', W') - g(R(\gamma', V)\gamma', W)dt. \quad (2.1)$$

A esta forma bilíneal se le llama el índice.

**Lema 2.1.1** (Lema del índice). *Sea  $\gamma$  un segmento de geodésica unitaria en  $M$  sin puntos conjugados,  $J$  un campo de Jacobi a lo largo de  $\gamma$  con  $g(J(t), \gamma'(t)) = 0$  y  $V$  un campo vectorial diferenciable a pedazos a lo largo de  $\gamma$  con  $g(V(t), \gamma'(t)) = 0$ . Si  $V(0) = J(0) = 0$  y  $V(a) = J(a)$  entonces*

$$I_a(J, J) \leq I_a(V, V).$$

Además, si  $I_a(J, J) = I_a(V, V)$  entonces  $V = J$ .

**Demostración** Como  $\gamma$  no tiene puntos conjugados entonces existen  $n - 1$  campos de Jacobi  $\{J_i\}_{i=1}^{n-1}$ , ortogonales a  $\gamma$ , tales que  $J_i(0) = 0$  y  $\{\gamma'(s), J_i(s)\}$  es una base de  $T_{\gamma(s)}M$  para toda  $s \in (0, a]$ . Se puede expresar a  $J$  como  $J(t) = b^i J_i(t)$ . También se puede escribir  $V(t) = a^i(t) J_i(t)$  para algunas funciones diferenciables a pedazos  $a^i$  y como  $V(a) = J(a)$  entonces  $a^i(a) = b^i$ . Sea  $[b, c]$  un intervalo en el cual las  $a_i$  son diferenciables. Se tiene que

$$R(\gamma', V)\gamma' = R(\gamma', a^i J_i)\gamma' = a^i R(\gamma', J_i)\gamma' = -a^i J_i''.$$

Luego,

$$\begin{aligned} g(V', V') - g(R(\gamma', V)\gamma', V) &= g((a^i)' J_i + a^i J_i', (a^j)' J_j + a^j J_j') + g(a^i J_i'', a^j J_j'') \\ &= g((a^i)' J_i, (a^j)' J_j) + 2g(a^i J_i', (a^j)' J_j) + g(a^i J_i', a^j J_j') + g(a^i J_i'', a^j J_j''). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Por otro lado,

$$g(a^i J_i', (a^j)' J_j) = g(a^i J_i, (a^j)' J_j'),$$

ya que si  $f(t) = g(J_i', J_j) - g(J_i, J_j')$  entonces

$$\begin{aligned} f'(t) &= g(J_i'', J_j) + g(J_i', J_j') - g(J_i', J_j') - g(J_i, J_j'') \\ &= -g(R(\gamma', J_i)\gamma', J_j) + g(R(\gamma', J_j)\gamma', J_i) = 0, \end{aligned}$$

y además  $f(0) = 0$ . Así,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} g(a^i J_i, a^j J_j') &= g((a^i)' J_i + a^i J_i', a^j J_j') + g(a^i J_i, (a^j)' J_j' + a^j J_j'') \\ &= g((a^i)' J_i, a^j J_j') + g(a^i J_i', a^j J_j') + g((a^i)' J_i, a^j J_j') + g(a^i J_i, a^j J_j''). \end{aligned}$$

Comparando con la ecuación 2.2 se obtiene

$$g(V', V') - g(R(\gamma', V)\gamma', V) = g((a^i)' J_i, (a^j)' J_j) + \frac{d}{dt} g(a^i J_i, a^j J_j');$$

luego,

$$\int_b^c g(V', V') - g(R(\gamma', V)\gamma', V) = g(a^i J_i, a^j J_j')|_b^c + \int_b^c g((a^i)' J_i, (a^j)' J_j).$$

Sumando las contribuciones de los subintervalos en los cuales los  $a^i$  son diferenciables se obtiene finalmente que

$$I_a(V, V) = g(a^i(a) J_i(a), a^j(a) J_j'(a)) + \int_0^a g((a^i)' J_i, (a^j)' J_j)$$

y también

$$I_a(J, J) = g(a^i(a) J_i(a), a^j(a) J_j'(a)).$$

Por lo tanto,  $I_a(J, J) \leq I_a(V, V)$ . Si se satisface la igualdad  $(a^i)' J_i = 0$  entonces las  $a^i$  son constantes. Esto implica que  $V$  es un campo de Jacobi con  $V(0) = 0$  y  $V(a) = J(a)$ . Por unicidad  $V = J$ .  $\square$

Si los campos de Jacobi miden la rapidez de divergencia de un haz de geodésicas (geodésicas manando de un mismo punto), el Teorema de Rauch afirma que una mayor curvatura resulta en una divergencia más lenta.

**Teorema 2.1.2** (Rauch). *Sean  $M$  y  $N$  variedades riemannianas,  $\gamma_M$  y  $\gamma_N$  geodésicas unitarias de longitud  $l$  en  $M$  y  $N$  con vértices  $\gamma_N(0) = p$ ,  $\gamma_M(0) = q$ ;  $v_N \in T_p N$  y  $v_M \in T_q M$  vectores tangentes con  $|v_n| = |v_m|$ . Sean  $J_M$  y  $J_N$  son campos de Jacobi a lo largo de  $\gamma_M$  y  $\gamma_N$  con  $J_M(0) = 0 = J_N(0)$ ,  $J'_M(0) = v_M$ ,  $J'_N(0) = v_N$  y  $g(v_M, \gamma'_M(0)) = g(v_N, \gamma'_N(0))$ . Si  $\gamma_M$  no tiene puntos conjugados en  $[0, a]$  y  $K_M(\sigma_M) \geq K_N(\sigma_N)$  para cualesquiera par de planos en  $TM$  y  $TN$  que contienen a  $\gamma'_N$  y  $\gamma'_M$ , entonces  $|J_N(t)| \geq |J_M(t)|$  para toda  $t$ . Si  $|J_M(s)| = |J_N(s)|$  para algún  $s \in [0, a]$  entonces  $K_M(J_M(t), \gamma'_M(t)) = K_N(J_N(t), \gamma'_N(t))$  para toda  $t \in [0, s]$ .*

**Demostración** Sean  $M, N, \gamma_M, \gamma_N, J_M$  y  $J_N$  como en el enunciado del teorema.

En general si  $J$  es un campo de Jacobi a lo largo de  $\gamma$  entonces  $J_\gamma = g(J, \gamma')\gamma'$  es un campo de Jacobi. Esto ya que

$$J''_\gamma = g(J'', \gamma')\gamma' = -g(R(\gamma', J)\gamma', \gamma')\gamma' = 0$$

y  $R(\gamma', J_\gamma)\gamma' = R(\gamma', C\gamma')\gamma' = 0$ . Luego  $J - J_\gamma = J^\perp$  es un campo de Jacobi que satisfice  $g(J^\perp, \gamma') = 0$ . Además dado que la norma de los campos de Jacobi paralelos a  $\gamma$  no depende de la curvatura y  $|J|^2 = |J_\gamma|^2 + |J^\perp|^2$  se puede suponer sin pérdida de generalidad que  $g(J'_M(0), \gamma'_M(0)) = g(J'_N(0), \gamma'_N(0)) = 0$ .

Dado que  $J_M(t) \neq 0$  para  $t \in [0, a]$  entonces demostrar que  $|J_N(t)| \geq |J_M(t)|$  es equivalente a demostrar que  $|J_N(t)|^2/|J_M(t)|^2 \geq 1$ . Obsérvese que esto se cumple cuando  $t \rightarrow 0$  ya que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{|J_N(t)|^2}{|J_M(t)|^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2|J'_N(t)|^2}{2|J'_M(t)|^2} = 1.$$

Sean  $f(t) = |J_N(t)|^2$ ,  $g(t) = |J_M(t)|^2$  y  $h(t) = f(t)/g(t)$ . Se tiene que  $\lim_{t \rightarrow 0} f(t)/g(t) = 1$ , luego basta con demostrar  $h'(t) \geq 0$  en  $[0, a]$ . Sin embargo  $h' = (f'g - g'f)/g^2$  por lo que  $h' \geq 0$  es equivalente a  $f'g \geq g'f$ .

Sea  $s \in [0, a]$  y supóngase que  $f(s) = 0$ . Entonces  $J_N(s) = 0$  y  $f'(s) = 2g(J'_N(s), J_N(s)) = 0$  por lo que la desigualdad  $f'g \geq g'f$  es trivialmente cierta. La dificultad se presenta cuando  $f(s) \neq 0$ . Si  $W_N(s) = J_N(s)/|J_N(s)|$  y  $W_M(s) = J_M(s)/|J_M(s)|$  entonces  $W_N(s)$  y  $W_M(s)$  son unitarios,

$$\begin{aligned} f'/f &= 2g(W'_N, W_N) = g(W_N, W_N)' = \int_0^s g(W_N(t), W_N(t))'' dt, \\ &= 2 \int_0^s g(W'_N(t), W'_N(t)) - g(R_N(\gamma', W_N)\gamma', W_N) dt = 2I_s(W_N, W_N), \end{aligned}$$

y

$$g'/g = 2g(W'_M, W_M) = \dots = 2I_s(W_M, W_M).$$

Trasládese  $W_N$  a un campo vectorial  $L$  sobre  $\gamma_M$  de de tal forma que  $L(s) = W_M(s)$  y siga satisfaciendo una ecuación “parecida” a  $W''_N + R_N(\gamma'_N, W_N)\gamma'_N = 0$ . Para hacer esto sean  $\{E_i\}$  y  $\{F_i\}$  campos ortonormales paralelos a lo largo de  $\gamma_M$  y  $\gamma_N$ , respectivamente, tales que  $E_1 = \gamma'_M$ ,  $F_1 = \gamma'_N$ ,  $E_2(s) = W_M(s)$  y  $F_2(s) = W_N(s)$ . Si  $X(t) = a^i(t)F_i$  es un campo vectorial a lo largo de  $\gamma_N$ , el traslado de  $X$  a  $\gamma_M$  es el campo vectorial  $\bar{X}(t) = a^i(t)E_i \in T_{\gamma_M(t)}M$ . Nótese que  $g(X, Y) = g(\bar{X}, \bar{Y})$

y que  $\overline{X}' = \overline{X}'$ . Luego

$$\begin{aligned}
I_s(\overline{W}_N, \overline{W}_N) &= \int_0^s g(\overline{W}_N', \overline{W}_N') - g(R_M(\gamma'_M, \overline{W}_N)\gamma'_M, \overline{W}_N) \\
&\geq \int_0^s g(\overline{W}_N', \overline{W}_N') - g(R_N(\gamma'_N, W_N)\gamma'_N, W_N) \\
&= \int_0^s g(W_N', W_N') - g(R_N(\gamma'_N, W_N)\gamma'_N, W_N') \\
&= I_s(W_N, W_N)
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Por otro lado  $\overline{W}_N$  es un campo vectorial a lo largo de  $\gamma_M$  con  $W_N(0) = 0$  y  $W_N(s) = W_M(s)$ . Como  $W_M(s)$  es un campo de Jacobi, por el lema del índice 2.1.1,  $I_s(W_M, W_M) \leq I_s(\overline{W}_N, \overline{W}_N) \leq I_s(W_N, W_N)$ . Por lo tanto  $h'(t) \geq 0$  y luego  $|J_N(s)| \leq |J_M(s)|$  para todo  $s \in [0, a]$ .

Si  $|J_N(s)| = |J_M(s)|$  para algún  $s \in [0, a]$  entonces debe suceder que  $h'(t) = 0$  en  $[0, s]$  y por lo tanto la desigualdad 2.3 es una igualdad. Esto implica que  $g(R_M(\gamma'_M, \overline{W}_N)\gamma'_M, \overline{W}_N) = g(R_N(\gamma'_M, W_M)\gamma'_M, W_M)$  en  $[0, s]$  y como  $W_M$  y  $\overline{W}_M$  tienen la misma norma entonces  $K(J_N, \gamma'_N) = K(J_M, \gamma'_M)$  en  $[0, s]$ .  $\square$

**Corolario 2.1.3.** Sean  $M$  y  $N$  variedades riemannianas,  $p \in N$ ,  $q \in M$  y  $r > 0$  tal que  $B_r(p)$  y  $B_r(q)$  son normales. Sea  $I : T_p M \rightarrow T_q N$  una isometría y  $f : B_r(q) \rightarrow B_r(p)$  el mapeo definido por

$$f = \exp_p \circ I \circ \exp_q^{-1}.$$

Si las curvaturas seccionales satisfacen  $K_M \leq K_N$  entonces  $d(f(x), f(y)) \leq d(x, y)$  para todo  $x, y \in B_r(q)$ .

**Demostración** Sea  $\alpha_M : [0, a] \rightarrow M$  una curva en  $B_r(p)$ . Dado que  $B_r(p)$  es normal es posible escribir  $\alpha_M(t) = \exp_p(\beta(t))$ . Sea  $\alpha_N(t) = f(\alpha_M(t)) = \exp_q(I(\beta(t)))$ . Considérense las variaciones  $\varphi_M(s, t) = \exp_p(s\beta(t))$  y  $\varphi_N(s, t) = \exp_q(sI(\beta(t))) = \exp_q(I(s\beta(t))) = f(\varphi_M(s, t))$  y nótese que  $\alpha_M(t) = \varphi_M(1, t)$  y  $\alpha_N(t) = \varphi_N(1, t)$ . Para cada  $t \in [0, a]$ ,  $\varphi_M$  y  $\varphi_N$  son variaciones por geodésicas de las geodésicas  $\tau_M^t(s) = \varphi_M(s, t)$  y  $\tau_N^t(s) = \varphi_N(s, t)$ , lo cual induce campos de Jacobi  $J_M^t$  y  $J_N^t$  a lo largo de dichas geodésicas. No es difícil ver que

$$\begin{aligned}
(J_M^t)'(0) &= \beta'(t) \\
(J_N^t)'(0) &= I(\beta'(t))
\end{aligned}$$

y por lo tanto  $|(J_M^t)'(0)| = |(J_N^t)'(0)|$ .

Como las bolas  $B_r(p)$  y  $B_r(q)$  son normales, las geodésicas  $\tau_M^t$  y  $\tau_N^t$  no poseen puntos conjugados y luego por el teorema de Rauch 2.1.2  $|J_N^t(s)| \geq |J_M^t(s)|$  para todo  $s \in [0, 1]$ ; en particular  $|\alpha'_N(t)| = |J_N^t(1)| \leq |J_M^t(1)| = |\alpha'_M(t)|$ . Así

$$L(\alpha_N) = \int_0^a |\alpha'_N| \leq \int_0^a |\alpha'_M| = L(\alpha_M).$$

Esto muestra que  $f$  disminuye distancias.  $\square$

Si  $N$  es una subvariedad de  $M$ ,  $\gamma$  es una geodésica con  $\gamma(0) = p \in N$  y  $\gamma'(0) \in T_p N \subseteq T_p M$  decimos que  $\gamma(t)$  es un punto focal de  $N$  si existe un campo de Jacobi  $J$  a lo largo de  $\gamma$  tal que

$J(0) \in T_p N$ ,  $J'(0) + S_{\gamma'(0)}(J(0)) = 0$  y  $J(t) = 0$ , donde  $S$  es el operador de forma de  $N$ , véase A.4. Esto es equivalente a que  $\exp|_{\nu(N)}$  tenga un punto singular en  $t\gamma'(0)$ , donde  $\nu(N)$  es el haz normal de  $N$ . Nos interesa un caso particular, cuando  $N = \exp(v^\perp \cap B_\varepsilon(0))$  para  $\varepsilon > 0$  pequeño; en este caso decimos que  $N$  es la hipersuperficie definida por  $v \in T_p M$ . Nótese que la hipersuperficie generada por  $v \in T_p M$  es totalmente geodésica en  $p$  por lo que  $S_p = 0$ . El siguiente teorema de Berger es una generalización del teorema de Rauch y fue desarrollado para dar una demostración del teorema de Toponogov, cfr. [Ber62].

**Teorema 2.1.4** (Rauch-Berger). *Sean  $N$  y  $M$  variedades riemannianas,  $\gamma_N$  y  $\gamma_M$  geodésicas unitarias de longitud  $l$  en  $N$  y  $M$  respectivamente,  $p = \gamma_N(0)$  y  $q = \gamma_M(0)$ . Supóngase que  $\gamma_M$  no contiene puntos focales de la hipersuperficie  $\exp_q(\gamma'_M(0)^\perp)$  y que  $K_M(\sigma_M) \leq K_N(\sigma_N)$  para todo par de planos en  $TM$  y  $TN$  que contienen a  $\gamma'_N$  y  $\gamma'_M$ . Si  $J_M$  y  $J_N$  son campos de Jacobi a lo largo de  $\gamma_M$  y  $\gamma_N$ , respectivamente, con  $|J_N(0)| = |J_M(0)|$ ,  $|J'_N(0)| = |J'_M(0)|$  y  $g(\gamma'(0), J_N(0)) = g(\gamma'(0), J_M(0)) = 0$ , entonces*

$$|J_M(t)| \leq |J_N(t)|, \quad t \in [0, l].$$

La igualdad sucede en  $s \in [0, l]$  si y solo si  $K(\gamma'_M(t), J_M(t)) = K(\gamma'_N(t), J_N(t))$  para toda  $t \in [0, s]$ .

La demostración es muy similar a la del teorema de Rauch y hace uso de un análogo al lema del índice, que se demuestra de manera casi idéntica:

**Lema 2.1.5.** *Sea  $M$  una variedad riemanniana y  $\gamma : [0, l] \rightarrow M$  una geodésica. Sea  $v = \gamma'(0)$  y  $N$  la hipersuperficie definida por  $v$ . Supóngase que  $N$  no tiene puntos focales a lo largo de  $\gamma$ . Sea  $V$  cualquier campo vectorial diferenciable a pedazos a lo largo de  $\gamma$  y  $J$  el único campo de Jacobi tal que  $J'(0) = 0$  y  $J(l) = V(l)$  entonces  $I(J, J) \leq I(V, V)$  y la igualdad se verifica sólo si  $J = V$ .*

Como consecuencia se tiene el siguiente teorema:

**Teorema 2.1.6** (Berger). *Sean  $N$  y  $M$  variedades riemannianas,  $\gamma_N$  y  $\gamma_M$  geodésicas en  $N$  y  $M$ , respectivamente, de longitud  $l$ . Sean  $V_N$  y  $V_M$  campos vectoriales unitarios y paralelos a lo largo de  $\gamma_N$  y  $\gamma_M$  tales que  $g(V_N(t), \gamma'_N(t)) = 0 = g(V_M(t), \gamma'_M(t))$  para todo  $t \in [0, l]$ . Sea  $f : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable y supóngase también que  $K_M \leq K_N$  a lo largo de las geodésicas  $\beta_N^t(s) = \exp_{\gamma_N(t)}(sf(t)V_N(t))$  y  $\beta_M^t(s) = \exp_{\gamma_M(t)}(sf(t)V_M(t))$ , con  $t \in [0, 1]$ , para todo par de planos que contienen  $\beta'_N$  y  $\beta'_M$  respectivamente. Supóngase que para toda  $t \in [0, l]$  la hipersuperficie determinada por  $(\beta_M^t)'(0)$  no tiene puntos focales a lo largo de  $\beta_M^t$ , entonces las curvas  $\alpha_M(t) = \beta_M^t(1)$  y  $\alpha_N(t) = \beta_N^t(1)$  satisfacen*

$$L(\alpha_M) \leq L(\alpha_N).$$

**Demostración** Primero un lema.

**Lema 2.1.7.** *Sea  $M$  una variedad riemanniana y  $\gamma : [0, l] \rightarrow M$  una geodésica. Sea  $E(t)$  un campo paralelo y unitario a lo largo de  $\gamma$ , tal que  $g(E(t), \gamma'(t)) = 0$  para toda  $t \in [0, l]$ . Si  $\exp_{\gamma(t)}(aE(t))$  está definido para todo  $t \in [0, l]$ , con  $a \in \mathbb{R}$ , y  $\alpha : [0, l] \rightarrow M$  es la curva*

$$\alpha(t) = \exp_{\gamma(t)}(aE(t));$$

entonces  $\alpha'(t) \perp \beta'_t(1)$  donde  $\beta_t$  es la geodésica dada por  $\beta_t(s) = \exp_{\gamma(t)}(saE(t))$ .

**Demostración** Considérese la variación  $\varphi : [0, l] \times [0, 1] \rightarrow M$  dada por

$$\varphi(t, s) = \exp_{\gamma(t)}(saE(t))$$

Para cada  $t$  fijo  $\varphi(t, s)$  es una geodésica y luego  $J_t(s_0) = \frac{\partial}{\partial s}\varphi(t, s)$  es un campo de Jacobi a lo largo de la geodésica  $\beta_t(s) = \varphi(t, s)$ . Obsérvese que  $J_t(0) = \gamma'(t)$  y por lo tanto  $J_t(0) \perp \beta'_t(0)$ . Esto implica que  $J_t(s) \perp \beta'_t(s)$  para toda  $s \in [0, 1]$ , en particular para  $s = 1$ , sin embargo  $J'(1) = \alpha'(t)$ .  $\square$

Se sabe que la diferencial del mapeo  $\exp : TM \rightarrow M$  en  $(p, v) \in TM$  es

$$(d\exp)_{(p,v)}(w, u) = (d\exp_p)_v(u) + \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\exp_{\alpha(t)}(v')),$$

donde  $\alpha$  es cualquier curva con  $\alpha(0) = p$  y  $\alpha'(0) = w$ , y  $v'$  cualquier campo vectorial a lo largo de  $\alpha$  con  $v'(0) = v$ . Aplicando esto al caso presente,

$$\alpha'_M(t_0) = (d\exp_{\gamma_M(t_0)})_{f(t_0)V_M(t_0)}(f'(t_0)V_M(t_0)) + (\exp_{\gamma_M(t)}(f(t_0)V_M(t)))' = R_M + V_M$$

y

$$\alpha'_N(t_0) = (d\exp_{\gamma_N(t_0)})_{f(t_0)V_N(t_0)}(f'(t_0)V_N(t_0)) + (\exp_{\gamma_N(t)}(f(t_0)V_N(t)))' = R_N + V_N.$$

El primer sumando del lado derecho de ambas ecuaciones es fácilmente calculable. Considérense las geodésicas  $\sigma_N^{t_0}(s) = \exp_{\gamma_N(t_0)}(sf(t_0)V_N(t_0))$  y  $\sigma_M^{t_0}(s) = \exp_{\gamma_M(t_0)}(sf(t_0)V_M(t_0))$ , entonces

$$\begin{aligned} |f'(t_0)f(t_0)V_N(t_0)| &= |f'(t_0)(\sigma_N^{t_0})'(s)| = |(d\exp_{\gamma_N(t_0)})_{sf(t_0)V_N(t_0)}(f'(t_0)V_N(t_0))| \\ |f'(t_0)f(t_0)V_M(t_0)| &= |f'(t_0)(\sigma_M^{t_0})'(s)| = |(d\exp_{\gamma_M(t_0)})_{sf(t_0)V_M(t_0)}(f'(t_0)V_M(t_0))| \end{aligned}$$

Como  $V_N$  y  $V_M$  son unitarios sus normas son idénticas. Por el lema 2.1.7 las descomposiciones  $\alpha'_M(t_0) = R_M + V_M$  y  $\alpha'_N(t_0) = R_N + V_N$  son ortogonales, con  $R_N$  y  $R_M$  apuntando en la dirección radial (desde  $\gamma_N(t_0)$  y  $\gamma_M(t_0)$  respectivamente). Por el lema de Gauss,

$$\begin{aligned} |\alpha'_N(t)| &= \sqrt{|R_N|^2 + |V_N|^2}, \\ |\alpha'_M(t)| &= \sqrt{|R_M|^2 + |V_M|^2} \end{aligned}$$

Ahora se hace la comparación de los vectores  $V_N$  y  $V_M$ . La demostración del lema 2.1.7 evidencia que existen campos de Jacobi  $J_N, J_M$  a lo largo de  $\beta_N^{t_0}$  y  $\beta_M^{t_0}$  con  $J_N(0) = \gamma'_N(t)$ ,  $J_N(1) = V_N$ ,  $J'_N(0) = 0$ ,  $J_M(0) = \gamma'_M(t)$ ,  $J_M(1) = V_M$  y  $J'_M(0) = 0$ . Como  $\beta_M^{t_0}$  no tiene puntos focales de la hipersuperficie determinada por  $(\beta_M^{t_0})'(0)$  entonces por el teorema de Berger-Rauch 2.1.4:

$$|J_M(s)| \leq |J_N(s)|, \quad s \in [0, 1]$$

En particular  $|V_M| = |J_M(1)| \leq |J_N(1)| = |V_N|$ , por lo tanto  $|\alpha'_M(t)| \leq |\alpha'_N(t)|$ . Consecuentemente

$$L(\alpha_M) = \int_0^l |\alpha'_M(t)| dt \leq \int_0^l |\alpha'_N(t)| dt = L(\alpha_N)$$

$\square$

Nótese que si la longitud de las curvas son iguales entonces las franjas  $\exp_{\gamma_N(t)}(sf(t)V_N(t))$  y  $\exp_{\gamma_M(t)}(sf(t)V_M(t))$  con  $(t, s) \in [0, l] \times [0, 1]$  tienen la misma curvatura y son isométricas.

## 2.2. Teorema de Bonnet-Myers

Sea  $M$  una variedad riemanniana con curvatura seccional positiva. Si  $\Gamma$  es un subgrupo de  $\text{Iso}(M)$  que actúa de forma totalmente discontinua entonces  $M/\Gamma$  es una variedad riemanniana cuya métrica está dada por, cfr. C.6:

$$d(\bar{p}, \bar{q}) = \inf \{d(p, q) \mid \pi(q) = \bar{q} \text{ y } \pi(p) = \bar{p}\},$$

donde  $\pi : M \rightarrow M/\Gamma$  es la proyección canónica. En caso que  $M$  sea compacta se satisface la relación  $\text{vol}(M) = |\Gamma| \text{vol}(M/\Gamma)$ . Por otro lado,  $\pi$  es una isometría local, por lo que es posible reducir el volumen y/o diámetro sin que haya cambios en la geometría local. Sin embargo no es posible aumentar indefinidamente el diámetro manteniendo cotas inferiores positivas sobre la curvatura.

**Teorema 2.2.1** (Bonnet-Myers). *Sea  $M$  una variedad riemanniana completa cuya curvatura en todo punto satisface  $K_M \geq K > 0$  para alguna constante positiva  $K$ , entonces  $M$  es compacta y  $\text{diam}(M) \leq \pi/\sqrt{K}$ .*

**Demostración** Sean  $p$  y  $q$  puntos de  $M$  y  $\gamma$  una geodésica normal minimizante,  $l$  su longitud. Supóngase que  $l > \pi/\sqrt{K}$  y produzcamos una contradicción. Dado que cualquier geodésica deja de ser minimizante a partir de su primer punto conjugado, basta con encontrar un punto conjugado a  $p$  en  $\gamma$ . Sea  $J$  un campo de Jacobi no trivial con  $J(p) = 0$ . Considérese la situación análoga en  $M^K$ ; cualquier punto  $q \in M^K$  junto con un campo de Jacobi  $J_K$ , con  $|J'_K(0)| = |J'(0)|$  y  $J_K(0) = 0$ , a lo largo de cualquier geodésica radial  $\gamma_M$  de longitud  $l$ . Supóngase que  $J$  no tiene puntos conjugados en  $\gamma$ . Esto nos permite aplicar el teorema de comparación de Rauch 2.1.2, el cual indica que  $|J_K| \geq |J|$  en para todo  $t \in [0, l]$ . Dado que los campos de Jacobi en  $M^K$  que son nulos en su origen son de la forma

$$J_K(t) = \text{sn}_K(t) \widehat{J}_K,$$

donde  $\widehat{J}_K$  es el transporte paralelo de  $J'_K(0)$  a lo largo de  $\gamma_M$ . Sin embargo  $\text{sn}_K(\pi/\sqrt{K}) = 0$  y luego se tiene que  $J_K(\pi/\sqrt{K}) = 0$ . Esto a su vez implica el hecho contradictorio que  $J(\pi/\sqrt{K}) = 0$ . Luego  $\gamma$  tiene puntos conjugados y no puede ser minimizante, contradicción que muestra que  $l \leq \pi/\sqrt{K}$ . Por lo tanto,

$$\text{diam}(M) \leq \pi/\sqrt{K}.$$

Una variedad completa y acotada es compacta por el teorema de Hopf-Rinow.  $\square$

La demostración anterior contiene una afirmación que vale la pena mencionar de manera independiente.

**Proposición 2.2.2.** *Sea  $M$  una variedad riemanniana. Si la curvatura seccional de  $M$  satisface*

$$H_1 \leq K_M \leq H_2$$

para un par de constantes  $H_1, H_2 > 0$  entonces toda geodésica unitaria tiene puntos conjugados en el intervalo  $\left[\frac{\pi}{\sqrt{H_2}}, \frac{\pi}{\sqrt{H_1}}\right]$  y ninguno antes.

**Demostración** Sea  $\gamma : [0, l] \rightarrow M$  una geodésica unitaria y  $J$  un campo de Jacobi a lo largo de  $\gamma$  con  $J(0) = 0$  y  $J \perp \gamma'$ . Para  $k > 0$  sea  $\gamma_k : [0, l] \rightarrow M^k$  cualquier geodésica y  $J_k$  un campo de Jacobi a lo largo de  $\gamma_k$  con  $J_k(0) = 0$ ,  $J_k \perp \gamma'_k$  y  $|J'_k(0)| = |J'(0)|$ . Por 1.3.1  $|J_k(t)| = |J'(0)| |\text{sn}_K(t)|$ .

Si  $K_M \geq k$  entonces por el teorema de Rauch  $|J(t)| \leq |J_k(t)| = |J'(0)| |\operatorname{sn}_K(t)|$  siempre y cuando  $\gamma_N$  no tenga puntos conjugados en  $[0, t]$ . Dado que  $\operatorname{sn}_K(t) = 0$  cuando  $t = \pi/\sqrt{k}$ , entonces  $\gamma_M$  debe tener un punto conjugado en  $\left[0, \frac{\pi}{\sqrt{k}}\right]$ .

Si  $K_M \leq k$  entonces  $|J(t)| \geq |J_k(t)|$  siempre que  $\gamma_k$  no tenga puntos conjugados en  $[0, t]$ .  $\gamma_k$  no tiene puntos conjugados en  $\left[0, \frac{\pi}{\sqrt{k}}\right)$  y luego  $\gamma_M$  no tiene puntos conjugados en  $\left[0, \frac{\pi}{\sqrt{k}}\right)$ .  $\square$

Los puntos conjugados son los puntos críticos de  $\exp_p$  por lo que si  $K_M \leq k$  con  $k > 0$  entonces  $\exp_p : B_{\pi/\sqrt{k}}(0) \rightarrow B_{\pi/\sqrt{k}}(p)$  es un difeomorfismo local.

La misma demostración sirve para mostrar que si  $K_M \leq 0$  entonces ninguna geodésica tiene puntos conjugados. Esto resulta tener una consecuencia topológica muy interesante.

**Teorema 2.2.3** (Cartan-Hadamard). *Sea  $M$  una variedad riemanniana completa con curvatura seccional  $K_M \leq 0$ , entonces para toda  $p \in M$  se tiene que  $\exp_p : \mathbb{R}^n \cong T_p M \rightarrow M$  es una aplicación cubriente. Por lo tanto  $\mathbb{R}^n$  es el cubriente universal de  $M$ .*

**Demostración** Sea  $p \in M$ . Los puntos críticos de  $\exp_p$  corresponden con los puntos conjugados de las geodésicas  $\exp_p(tV)$ . Sea  $\gamma_V$  una geodésica unitaria de la forma  $\gamma_V(t) = \exp_p(tV)$  y  $J$  un campo de Jacobi a lo largo de  $\gamma_V$  con  $J(0) = 0$ . Consideremos ahora una geodésica unitaria  $\sigma$  en  $\mathbb{R}^2$  junto con un campo de Jacobi  $J_0$  a lo largo de  $\sigma$  con  $J_0(0) = 0$  y  $|J'_0(0)| = |J'(0)|$ . Recuerdese que los campos de Jacobi en  $\mathbb{R}^2$  están dados por

$$J_0(t) = tJ'_0(0)$$

y luego  $\sigma$  no tiene puntos conjugados. Dado que  $K_M \leq 0$ , por el teorema de Rauch, se tiene que

$$|J(t)| \geq |J_0(t)| = t|J'(0)|$$

En conclusión  $\exp_p$  no tiene puntos críticos. Si se hace el pullback de la métrica en  $M$  a  $T_p M \cong \mathbb{R}^n$  se obtiene una métrica riemanniana en  $\mathbb{R}^n$  y  $\exp_p : T_p M \rightarrow M$  es una isometría local. Toda isometría local es una aplicación cubriente y por lo tanto el cubriente universal de  $M$  es  $T_p M \cong \mathbb{R}^n$ .  $\square$

## 2.3. Volumen

La función  $f : B_r(p) \subset M \rightarrow B_r(q) \subset N$  del corolario 2.1.3 contrae distancias y por tanto disminuye volúmenes. Si uno de los espacios en comparación es un espacio modelo, cuyo volumen se puede calcular explícitamente, entonces se obtiene una estimación razonable de los volúmenes de las bolas normales.

**Teorema 2.3.1** (Bishop-Gromov). *Sea  $M$  una variedad riemanniana completa con  $K_M \geq k$  para alguna constante  $k$ , y  $p$  cualquier punto de  $M$ . Sea  $B_r^k(q)$  la bola de radio  $r$  con centro en  $q$  en  $M^{n,k}$ . La función*

$$f(r) = \frac{\operatorname{vol}(B_r(p))}{\operatorname{vol}(B_r^k(q))} \leq 1$$

*es no creciente. Además,  $\operatorname{vol}(B_r(p)) = \operatorname{vol}(B_r^k(q))$  si y solo si  $K_M = k$  en  $B_r(p)$ .*

**Demostración** Sea  $B_r(p)$  una bola normal en  $M$ . Por el teorema de Myers cualquier bola  $B_r^k(q)$  en  $M^{n,k}$  es normal. Sean  $d\text{vol}'_M$  y  $d\text{vol}'_k$  los pullbacks de las formas de volumen,  $d\text{vol}_M$  y  $d\text{vol}_k$ , en  $B_r(p)$  y  $B_r^k(q)$  a  $B_r(0) \subseteq \mathbb{R}^n \cong T_p M \cong T_p M^{n,k}$  a través de  $\exp_p$  y  $\exp_{p'}$ . Se han identificado los espacios tangentes  $T_p M$  y  $T_{p'} M^{n,k}$ .

En coordenadas polares se puede expresar a  $d\text{vol}'_M$  y  $d\text{vol}'_k$  como

$$\begin{aligned} d\text{vol}'_M(r, \theta) &= \lambda_M(r, \theta) dr \wedge d\text{vol}_{n-1}, \\ d\text{vol}'_k(r, \theta) &= \lambda_k(r, \theta) dr \wedge d\text{vol}_{n-1}, \end{aligned}$$

donde  $d\text{vol}_{n-1}$  es la forma de volumen en  $\mathbb{S}^{n-1}$ . Sea  $s > 0$  y  $\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$ , es posible calcular las formas  $d\text{vol}'_M$  y  $d\text{vol}'_k$  en  $(s, \theta)$  haciendo uso de campos de Jacobi. Sean  $\{\partial_r, v_1, \dots, v_n\}$  una base ortonormal orientada de  $\mathbb{R}^n_{(s, \theta)}$ . Los campos  $J_i^M(t) = (d\exp_p)_{(t\theta)}(tv_i)$  y  $J_i^k = (d\exp_{p'})_{(t\theta)}(tv_i)$  son de Jacobi en  $M$  y  $M^{n,k}$  respectivamente y satisfacen  $J_i^M(0) = J_i^k(0)$  y  $|J_i^{M'}(0)| = |v_i| = |J_i^k(0)|$ . Por las hipótesis sobre la curvatura y el teorema de comparación de Rauch 2.1.2  $|J_i^M(t)| \leq |J_i^k(t)| = sn_k(t)$ . Por otro lado,

$$\begin{aligned} \lambda_M(s, \theta) &= d\text{vol}'_M(s, \theta)(\partial_r, v_1, \dots, v_{n-1}) \\ &= d\text{vol}_M(d\exp_p(\partial_r), d\exp_p(v_1), \dots, d\exp_p(v_{n-1})) \\ &= d\text{vol}_M(\partial_r, J_1^M(t), \dots, J_{n-1}^M(t)) \\ &= |J_1^M(t)| \cdots |J_{n-1}^M(t)| \end{aligned}$$

Lo mismo es válido para  $\lambda_k$ . Por la desigualdad previamente mencionada llegamos a que

$$\lambda_M(r, \theta) \leq \lambda_k(r, \theta)$$

Integrando en  $B_r(0)$  se obtiene

$$\text{vol}(B_r(p)) = \int_{B_r(0)} d\text{vol}'_M \leq \int_{B_r(0)} d\text{vol}'_k = \text{vol}(B_r^k(q))$$

Si se realiza la igualdad entonces  $\lambda_M = \lambda_k$  son iguales en  $B_r(0)$ , lo cual implica que  $|J_i^M(t)| = |J_i^k(t)|$  para todo  $t < r$ . Por el teorema de comparación de Rauch esto solo ocurre si  $M$  y  $M^{n,k}$  tienen la misma curvatura seccional en  $B_r(p)$  y  $B_r^k(q)$ . Esto muestra la última parte del teorema y el hecho que  $f(r) \leq 1$ . Para demostrar que  $f$  es no creciente obsérvese que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \frac{\text{vol}(B_r(p))}{\text{vol}(B_r^k(q))} \Big|_{r=s} &= \frac{d}{dr} \frac{\int_0^r \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \lambda_M d\theta dt}{\int_0^r \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \lambda_k d\theta dt} \Big|_{r=s} \\ &= \frac{\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \lambda_M(s, \theta) d\theta \int_0^s \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \lambda_k d\theta dt - \int_0^s \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \lambda_M d\theta dt \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \lambda_k(s, \theta) d\theta}{\left(\int_0^s \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \lambda_k d\theta dt\right)^2} \\ &= \frac{\int_0^s [(\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \lambda_M(s, \theta) d\theta)(\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \lambda_k(t, \theta) d\theta) - (\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \lambda_M(t, \theta) d\theta)(\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \lambda_k(s, \theta) d\theta)] dt}{\int_0^s \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \lambda_k d\theta dt} \end{aligned}$$

Luego basta con demostrar que si  $t < s < \pi/\sqrt{k}$  entonces

$$\frac{\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \lambda_M(s, \theta) d\theta}{\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \lambda_k(s, \theta) d\theta} \leq \frac{\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \lambda_M(t, \theta) d\theta}{\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \lambda_k(t, \theta) d\theta}$$

Sin embargo como sabemos  $\lambda_k$  no depende de  $\theta$ . Si  $\omega_{n-1}$  es el volumen de la  $(n-1)$ -esfera unitaria entonces se puede escribir la desigualdad anterior como

$$\frac{1}{\omega_{n-1}} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{\lambda_M(s, \theta)}{\lambda_k(s)} d\theta \leq \frac{1}{\omega_{n-1}} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{\lambda_M(t, \theta)}{\lambda_k(t)} d\theta \quad (2.4)$$

Considérese la función  $h(t) = \frac{\lambda_M(t, \theta)}{\lambda_k(t)}$  con  $\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$  fijo. Para terminar la demostración mostraremos que  $h$  es decreciente. Si  $\lambda_M(s, \theta) = 0$  entonces la desigualdad 2.4 se satisface trivialmente, por lo que se puede suponer que  $\lambda_M(s, \theta) \neq 0$  en un intervalo adecuado. La derivada de  $h$  está dada por

$$h'(t) = \frac{\lambda'_M(t, \theta)\lambda_k(t) - \lambda_M(t, \theta)\lambda'_k(t)}{\lambda_k^2(t)},$$

por lo que basta con verificar que  $\lambda'_M(t, \theta)\lambda_k(t) - \lambda_M(t, \theta)\lambda'_k(t) \leq 0$ , o  $\frac{\lambda'_M(t, \theta)}{\lambda_M(t, \theta)} \leq \frac{\lambda'_k(t)}{\lambda_k(t)}$  en caso que  $\lambda_M(t, \theta) \neq 0$ .

Dado que el pullback de  $d\text{vol}_M$  solo es cero en los puntos críticos de  $\exp_p$ , si  $\lambda_M(t, \theta) \neq 0$  entonces es posible encontrar una base ortonormal  $\{J_i(t)\}$  de  $T_{\exp_p(t\theta)}M$  donde  $J_i$  es un campo de Jacobi a lo largo de  $\exp_p(s\theta)$  con  $J_i(0) = 0$ .

Sean  $\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$ ,  $s > 0$  y supóngase que  $\lambda_M(t, \theta) \neq 0$ . Sean  $J_i$  campos de Jacobi a lo largo de la geodésica  $\gamma_\theta(t) = \exp_p(t\theta)$  tales que  $J_i(0) = 0$ ,  $\{J_i(s)\}$  es una base ortonormal de  $T_{\exp_p(s\theta)}M$  y  $J_1(t) = \gamma'_\theta(t)$ . Se pueden expresar los campos de Jacobi como  $J_i(t) = (d\exp_p)_{t\theta}(tL_i)$ , con  $\{L_i\}$  base de  $T_{(r, \theta)}T_pM$  y  $L_1 = \theta$ . Por la definición de  $\lambda_M$  se tiene que

$$|J_1(t)| \cdots |J_n(t)| = d\text{vol}_M(J_1(t), \dots, J_n(t)) = \lambda_M(t, \theta)t^n d\text{vol}_{n-1}(L_2, \dots, L_n).$$

Si  $D = d\text{vol}_{n-1}(L_2, \dots, L_n) \neq 0$  se puede reescribir lo anterior como

$$\lambda_M(t, \theta) = \frac{|J_1(t)| \cdots |J_n(t)|}{t^n D}.$$

Derivando  $\lambda_M^2$  se obtiene que

$$\begin{aligned} 2\lambda_M(t)\lambda'_M(t) &= \frac{2 \sum_{i=1}^n |J_1(t)|^2 \cdots g(J'_i(t), J_i(t)) \cdots |J_n(t)|^2}{(t^n D)^2} - \frac{2nt^{2n-1}D^2|J_1(t)| \cdots |J_n(t)|}{(t^n D)^4} \\ &= 2 \frac{\sum_{i=1}^n |J_1(t)|^2 \cdots g(J'_i(t), J_i(t)) \cdots |J_n(t)|^2}{(t^n D)^2} - 2 \frac{n|J_1(t)| \cdots |J_n(t)|}{t(t^n D)^2}. \end{aligned}$$

Como  $J_i(s)$  es una base ortonormal entonces

$$\lambda_M(s, \theta) = \frac{1}{s^n D},$$

por lo que

$$\lambda'_M(s, \theta)/\lambda_M(s, \theta) = \sum_{i=1}^n g(J'_i(s), J_i(s)) - \frac{n}{s} = \sum_{i=2}^n g(J'_i(s), J_i(s)) - \frac{n}{s}.$$

En la última igualdad se hizo uso de que  $J_1 = \gamma'_\theta$ . Si  $i \geq 2$ , obsérvese que  $g(J'_i(s), J_i(s)) = I_s(J_i, J_i)$  y por el lema del índice 2.1.1 se tiene que  $I_s(J_i, J_i) \leq I_s(W, W)$  para cualquier  $W$  con

$W(0) = 0$  y  $W(s) = J_i(s)$ . En particular si  $Y_i$  es el campo paralelo con  $Y_i(s) = J_i(s)$  y  $W_i(t) = \frac{sn_k(t)}{sn_k(s)} Y_i$  entonces  $W_i(0) = 0$  y  $W_i(s) = J_i(s)$  por lo que

$$I_s(J_i, J_i) \leq I_s(W_i, W_i) = \int_0^s g(W_i', W_i') - Rm(\gamma', W_i, \gamma', W_i).$$

Es decir,

$$\begin{aligned} \frac{\lambda'_M(s, \theta)}{\lambda_M(s, \theta)} &= \sum_{i=2}^n I_s(J_i, J_i) - \frac{n}{s} \leq \int_0^s \sum_{i=2}^n g(W_i', W_i') - Rm(\gamma', W_i, \gamma', W_i) dt - \frac{n}{s} \\ &= \int_0^s (n-1) \frac{cs_k^2(t)}{sn_k^2(s)} - \frac{sn_k^2(t)}{sn_k^2(s)} \sum_{i=2}^n Rm(\gamma', Y_i, \gamma', Y_i) dt - \frac{n}{s} \\ &= \frac{n-1}{sn_k^2(s)} \int_0^s cs_k^2(t) - sn_k^2(t) \text{Ric}(\gamma') dt - \frac{n}{s} \\ &\leq \frac{n-1}{sn_k^2(s)} \int_0^s cs_k^2(t) - sn_k^2(t) k dt - \frac{n}{s}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Un análisis análogo al realizado en  $M$  puede ser usado para demostrar que  $\lambda'_k(s, \theta)/\lambda_k(s, \theta) = \sum_{i=3}^n g_k(J_i^k(s), J_i^{k'}(s)) - n/s$  donde  $J_i^k$  son campos de Jacobi en  $M^{n,k}$  tales que  $J_i^k$  forman una base ortonormal en  $M_{(s,\theta)}^{n,k}$ . Por la forma de los campos de Jacobi en  $M^{n,k}$ , cfr. 1.3.1, también se verifica que

$$\frac{\lambda'_k(s)}{\lambda_k(s)} = \sum_{i=2}^n g_k(J_i^k(s), J_i^{k'}(s)) - \frac{n}{s} = \frac{n-1}{sn_k^2(s)} \int_0^s cs_k^2(t) - sn_k^2(t) k dt - \frac{n}{s}. \tag{2.6}$$

Juntando 2.6 con 2.5 se llega a que

$$\frac{\lambda'_M(s, \theta)}{\lambda_M(s, \theta)} \leq \frac{\lambda'_k(s, \theta)}{\lambda_k(s, \theta)},$$

por lo que  $g$  es decreciente y el teorema queda demostrado.  $\square$

Mencionamos que el teorema anterior es válido aún cuando la hipótesis se reduzca a  $\text{Ric} \geq k$ . La demostración anterior muestra que la afirmación de decrecimiento de la función  $f$  solo depende de la curvatura de Ricci. Un fácil manejo de 1.8 muestra que  $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = 1$ , de donde se sigue el teorema con la hipótesis  $\text{Ric} \geq k$ . Para otra demostración de este teorema usando las ecuaciones fundamentales de la curvatura de Ricci consúltese [Pet06].

Una consecuencia inmediata es la existencia de una cota superior para el volumen de los espacios completos con curvatura seccional  $\geq k > 0$ .

**Corolario 2.3.2.** *Sea  $M$  una variedad riemanniana completa con curvatura seccional  $\geq k > 0$  entonces*

$$\text{vol}(M) \leq \text{vol}(\mathbb{S}_k^n);$$

la igualdad se alcanza solo cuando  $M$  es isométrica a  $\mathbb{S}_k^n$ .

**Demostración** Sean  $p \in M$  y  $q \in M^{n,k}$ . Por el teorema de Bonnet-Myers 2.2.1 se tiene que  $\text{diam}(M) \leq \frac{\pi}{\sqrt{k}}$  y luego  $B_{\pi/\sqrt{k}}(p) = M$ . Luego el teorema anterior garantiza que

$$\text{vol}(M) = \text{vol}(B_{\pi/\sqrt{k}}(p)) \leq \text{vol}(B_{\pi/\sqrt{k}}^k(q)) = \text{vol}(\mathbb{S}_k^n).$$

Si  $\text{vol}(M) = \text{vol}(\mathbb{S}_k^n)$  entonces  $M$  tiene curvatura seccional constante  $= k$ . Por 1.3.3,  $M \cong \mathbb{S}_k^n/\Gamma$  y  $\pi : \mathbb{S}_k^n \rightarrow M$  es un mapeo cubriente y una isometría local, luego  $\text{vol}(M) = |\Gamma| \text{vol}(\mathbb{S}_k^n)$ . Por lo tanto  $\Gamma = \{e\}$  y  $M \cong \mathbb{S}_k^n$ .  $\square$

Más adelante se usará una estimación de la cantidad de bolas de un radio fijo necesarias para cubrir una variedad.

**Definición 2.3.1.** Sea  $X$  un espacio métrico y  $r > 0$ . Un subconjunto  $A \subset X$  está  $r$ -separado si para todo  $x, y \in A$  se tiene que  $d(x, y) > r$ .

**Proposición 2.3.3.** Sean  $n \in \mathbb{N}$ ,  $k \in \mathbb{R}$ ,  $R > 0$  y  $0 < r < R$ , pedimos adicionalmente que  $R \leq \pi/\sqrt{k}$  si  $k > 0$ . Existe una constante  $N(n, k, R, r) \in \mathbb{N}$  (que depende de  $n, k, R$  y  $r$ ) tal que para toda  $n$ -variedad riemanniana completa  $M$  con curvatura seccional  $\geq k$  y todo  $p \in M$  existen a lo más  $N(n, k, R, r)$  puntos en  $B_R(p)$  que están  $r$ -separados.

**Demostración** Sean  $M$  y  $p \in M$  como en el enunciado. Dado que el volumen de los conjuntos  $B_R^k(q) \subset M^{n,k}$  no depende de  $q$ , se escribirá  $\omega_{n,k}(R) = \text{vol}(B_R(q))$  sin peligro de confusión.

Si  $\{x_i\}_{i=1}^m \subset B_R(p)$  es un conjunto de puntos  $r$ -separados entonces los conjuntos  $B_{r/2}(x_i)$  son ajenos. Sea  $x_j$  tal que  $\text{vol}(B_r(x_j))$  es mínimo y nótese que  $B_R(p) \subset B_{2R}(x_j)$  por lo que  $\cup B_r(x_i) \subset B_{2R+r}(x_j)$ . Luego  $m \cdot \text{vol}(B_r(x_j)) \leq \sum_i \text{vol}(B_r(x_i)) = \text{vol}(\cup B_r(x_i)) \leq \text{vol}(B_{2R+r}(x_j))$ , y por tanto

$$m \leq \frac{\text{vol}(B_{2R+r}(x_j))}{\text{vol}(B_r(x_j))}$$

Por el teorema de Bishop-Gromov

$$\frac{\text{vol}(B_{2R+r}(x_i))}{\text{Vol}(B_{2R+r}^k)} \leq \frac{\text{vol}(B_r(x_i))}{\text{Vol}(B_r^k)},$$

o bien

$$\frac{\text{vol}(B_{2R+r}(x_j))}{\text{vol}(B_r(x_j))} \leq \frac{\text{Vol}(B_{2R+r}^k)}{\text{Vol}(B_r^k)} = N(n, k, R, r)$$

Por lo tanto  $m \leq N(n, k, R, r)$ .  $\square$

## 2.4. Teorema de Toponogov

El teorema de Toponogov es un fuerte resultado de control geométrico en presencia de restricciones en la curvatura. En palabras llanas afirma que un triángulo geodésico en una variedad con curvatura seccional  $\geq k$  es más gordo que un triángulo geodésico con lados de la misma longitud en el espacio modelo  $M^k$ . Las restricciones sobre el triángulo geodésico para que se sigan las conclusiones del teorema son mínimas lo cual permite extraer información geométrica global del espacio. Si  $\Delta pqr$  es un triángulo geodésico en una variedad completa con curvatura  $\geq k$ , con el uso adecuado del teorema se puede

1. Acotar superiormente la distancia  $|qr|$  conociendo las distancias  $|pq|$ ,  $|pr|$  y el ángulo  $\angle pqr$ .
2. Acotar inferiormente el ángulo  $\angle pqr$  conociendo las distancias  $|pq|$ ,  $|pr|$  y  $|qr|$ .
3. Acotar superiormente las distancias  $|pq|$  y  $|pr|$  conociendo  $\angle pqr$  y  $|qr|$ .

Dicho teorema fue demostrado por primera vez para superficies convexas por Alexandrov en 1951. Posteriormente fue extendido por Toponogov al caso general y desde entonces diversas demostraciones han sido publicadas, especialmente con el florecimiento de los espacios de Alexandrov, [C](#). Dichas demostraciones evitan los argumentos diferenciales, mostrando que la globalización de la propiedad de tener curvatura  $\geq k$ , en el sentido de [C](#), es una propiedad puramente métrica, véase [\[BGP92\]](#) o [\[Pla96\]](#).

**Definición 2.4.1.** Sea  $\Delta pqr$  un triángulo geodésico en  $M$ . Un triángulo de comparación en  $M^k$  es un triángulo geodésico  $\Delta \bar{p}\bar{q}\bar{r}$  en  $M^k$  tal que  $|pq| = |\bar{p}\bar{q}|$ ,  $|qr| = |\bar{q}\bar{r}|$  y  $|rp| = |\bar{r}\bar{p}|$ .

**Definición 2.4.2.** Sea  $\sphericalangle pqr$  una bisagra en  $M$ . Una bisagra de comparación en  $M^k$  es una bisagra  $\sphericalangle \bar{p}\bar{q}\bar{r}$  en  $M^k$  tal que  $|qp| = |\bar{q}\bar{p}|$ ,  $|qr| = |\bar{q}\bar{r}|$  y  $\angle pqr = \angle \bar{p}\bar{q}\bar{r}$ .

**Teorema 2.4.1** (Toponogov). Sea  $M$  una variedad riemanniana completa con curvatura seccional  $K_M \geq k$ , donde  $k$  es constante.

- (A) Sea  $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$  un triángulo geodésico con  $\gamma_0, \gamma_1$  geodésicas minimizantes y  $L(\gamma_2) \leq \pi/\sqrt{k}$  en caso de que  $k > 0$ . Si  $\bar{\gamma}_0, \bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2$  es un triángulo de comparación en  $M^k$  entonces  $\alpha_i$  y  $\bar{\alpha}_i$ , los ángulos correspondientes, satisfacen  $\bar{\alpha}_i \leq \alpha_i$ . Excepto en el caso  $k > 0$  y  $L(\gamma_i) = \pi/\sqrt{k}$  para algún  $i$ , el triángulo de comparación en  $M^k$  es único salvo isometrías.
- (B) Sea  $\gamma_0, \gamma_1, \alpha$  una bisagra, con  $\gamma_0$  minimal y  $L(\gamma_1) \leq \pi/\sqrt{k}$  en caso de que  $k > 0$ . Si  $\bar{\gamma}_0, \bar{\gamma}_1$  y  $\bar{\alpha}$  es una bisagra de comparación en  $M^k$  entonces  $d(\gamma_0(l_0), \gamma_1(l_1)) \leq d(\bar{\gamma}_0(l_0), \bar{\gamma}_1(l_1))$ .

Las condiciones (A) y (B) son equivalentes (véase [\[BGP92\]](#)) y se hará uso de esto en la prueba. Obsérvese que por [2.1.3](#) la versión (B) del teorema de Toponogov se satisface localmente. El teorema de Toponogov es una globalización de esta propiedad.

Si  $\gamma$  es una geodésica minimizante y  $k > 0$ , entonces por el teorema de Bonnet-Myers  $L(\gamma) \leq \pi/\sqrt{k}$ , por tanto todas las geodésicas en un triángulo geodésico o una bisagra tienen longitud  $\leq \pi/\sqrt{k}$  en caso de que  $k > 0$ .

**Demostración** Para evitar complicaciones sobre la posible falta de unicidad de triángulos de comparación se trabajará en  $M^{k-\varepsilon}$  para  $\varepsilon > 0$  pequeño. El resultado final se obtiene haciendo  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

La demostración consiste en partir cualquier bisagra en bisagras suficientemente pequeñas y verificar (B) en éstas. Para esto se hacen las siguientes definiciones:

Una bisagra  $(\gamma_1, \gamma_2, \alpha)$  es pequeña si  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  están contenidas en alguna bola normal con centro en  $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ . Decimos que un triángulo geodésico  $\Delta \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3$  es pequeño si las bisagras  $(\gamma_i, \gamma_j, \angle \gamma_i \gamma_j)$  con  $i \neq j$  son pequeñas.

La condición (B) se verifica en bisagras pequeñas gracias a [2.1.3](#).

Recuérdese (véase [1.3](#)) que si  $\sigma_1 : [0, l_1] \rightarrow M^k$  es una geodésica fija con  $\sigma_1(0) = p$  y  $\sigma_2 : [0, l_2] \rightarrow M^k$  es otra geodésica con  $\sigma_2(0) = p$  y  $\angle \sigma_1 \sigma_2 = \alpha$  variable entonces la función  $d(\alpha) = d(\sigma_1(l_1), \sigma_2(l_2))$  es continua y estrictamente creciente para  $\alpha \in [0, \pi]$  (en el caso  $k > 0$  esto ocurre si  $l_1, l_2 < \pi/\sqrt{k}$ ) y además  $d(0) = |l_1 - l_2|$ . Sea  $\Delta \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3$  un triángulo geodésico pequeño y  $\alpha_3 =$



Figura 2.1: Bisagras obtusas y agudas.

$\angle\gamma_1\gamma_2$ . Como la bisagra  $(\gamma_1, \gamma_2, \alpha_3)$  es pequeña si  $(\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, \alpha)$  es una bisagra de comparación entonces  $d(\bar{\gamma}_1(l_1), \bar{\gamma}_2(l_2)) \geq d(\gamma_1(l_1), \gamma_2(l_2))$ . Por otro lado como  $\Delta\gamma_1\gamma_2\gamma_3$  es un triángulo geodésico entonces  $|l_1 - l_2| \leq l_3$  por lo que existe un único ángulo  $\alpha' < \alpha$  tal que si  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  son geodésicas en  $M^{k-\varepsilon}$  de longitud  $l_1$  y  $l_2$  respectivamente con  $\sigma_1(0) = \sigma_2(0)$  y  $\angle\sigma_1\sigma_2 = \alpha'$  entonces  $d(\sigma_1(l_1), \sigma_2(l_2)) = l_3$ . Este es un triángulo de comparación para  $\Delta\gamma_1\gamma_2\gamma_3$  y satisface  $\angle\sigma_1\sigma_2 \leq \angle\gamma_1\gamma_2$ .

Este argumento demuestra la unicidad del triángulo de comparación (en caso de que  $k > 0$  solo si  $L(\gamma_i) < \pi/\sqrt{k}$ ). Si se repite el razonamiento con cada uno de los ángulos, se llega al mismo (único) triángulo de comparación y por lo tanto hemos verificado (B) para triángulos pequeños.

Sean  $(\gamma_1, \gamma_2, \pi/2)$  una bisagra, con  $\gamma_1$  minimizante de longitud  $l_1$  (y  $L(\gamma_2) = l_2 \leq \pi/\sqrt{k}$  si  $k > 0$ ), y  $(\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, \pi/2)$  una bisagra de comparación en  $M^{k-\varepsilon}$ . Si  $\bar{\gamma}_3$  es una geodésica minimizante que une  $\bar{\gamma}_1(l_1)$  con  $\bar{\gamma}_2(l_2)$  y  $\bar{E}(t)$  es el campo unitario y paralelo a lo largo de  $\bar{\gamma}_2$  con  $E(0) = \bar{\gamma}'_1(0)$  entonces se puede escribir a  $\bar{\gamma}_3$  como

$$\bar{\gamma}_3(t) = \exp_{\bar{\gamma}_2(t)}(f(t)\bar{E}(t))$$

para alguna función  $f : [0, l_2] \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciable. La demostración de este hecho no es relevante (consiste, básicamente, de hacer cuentas en  $M^k$ ) y será omitida. En caso que  $k > 0$  nótese que esta construcción es posible ya que  $L(\bar{\gamma}_2) \leq \pi/\sqrt{k} < \pi/\sqrt{k-\varepsilon}$  y por lo tanto  $\bar{\gamma}_2$  no contiene puntos conjugados. Ahora considérese el campo unitario y paralelo  $E(t)$  a lo largo de  $\gamma_2$  con  $E(0) = \gamma'_1(0)$ . Se dice que la bisagra  $(\gamma_1, \gamma_2, \pi/2)$  es una bisagra recta y delgada si para toda  $t \in [0, l]$  no hay puntos focales de la hipersuperficie definida por  $E(t)$  a lo largo de la geodésica  $\beta_t(s) = \exp_{\gamma_2(t)}(sf(t)E(t))$ , con  $s \in [0, 1]$ .

Obsérvese que la curva  $\alpha(t) = \beta_t(1) = \exp_{\gamma_2(t)}(f(t)E(t))$  une a los puntos  $\gamma_2(l_2)$  con  $\gamma_1(l_1)$ , ya que  $f(0) = l_1$  y  $f(l_2) = 0$ , por lo que  $d(\gamma_1(l_1), \gamma_2(l_2)) \leq L(\alpha)$ . Por el teorema 2.1.6 se tiene que

$$L(\alpha) \leq L(\bar{\gamma}_3),$$

por lo que la condición (B) se verifica para bisagras rectas y delgadas.

Ahora sea  $(\gamma_1, \gamma_2, \alpha)$  una bisagra con  $\alpha \neq \pi/2$ . Entonces se tiene dos casos. Si  $\alpha > \pi/2$  entonces existe un único vector unitario  $E \in T_{\gamma_1(0)}M$  en el cono convexo generado por  $\gamma'_1(0)$  y  $\gamma'_2(0)$  tal que  $E \perp \gamma'_2(0)$ . Sean  $(\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, \alpha)$  cualquier bisagra de comparación en  $M^{k-\varepsilon}$ ,  $\bar{E}$  el único vector unitario en el cono convexo generado por  $\bar{\gamma}'_1(0)$  y  $\bar{\gamma}'_2(0)$  tal que  $\bar{E} \perp \bar{\gamma}'_2(0)$ , y  $\bar{\gamma}_3$  una geodésica minimal de  $\bar{\gamma}_1(l_1)$  a  $\bar{\gamma}_2(l_2)$ , entonces existe  $l > 0$  mínimo tal que  $\bar{\beta}(l) \in \bar{\gamma}_3$ , donde  $\bar{\beta}(t) = \exp_{\bar{\gamma}_1(0)}(t\bar{E})$ . Sea  $\beta(t) = \exp_{\gamma_1(0)}(tE)$ , con  $t \in [0, l]$ . Decimos que la bisagra  $(\gamma_1, \gamma_2, \alpha)$  es una bisagra obtusa y delgada si  $(\beta, \gamma_2, \pi/2)$  es una bisagra recta y delgada y  $(\gamma_1, \beta, \alpha - \pi)$  es una bisagra pequeña. En la figura 2.1 se esbozan las formas de las bisagras obtusas y agudas.

Sea  $(\gamma_1, \gamma_2, \alpha)$  una bisagra obtusa y delgada. Luego

$$d(\gamma_1(l_1), \gamma_2(l_2)) \leq d(\gamma_1(l_1), \beta(t)) + d(\beta(t), \gamma_2(l_2)).$$

Por otro lado  $d(\bar{\gamma}_1(l_1), \bar{\gamma}_2(l_2)) = d(\bar{\gamma}_1(l_1), \bar{\beta}(l)) + d(\bar{\beta}(l), \bar{\gamma}_2(l_2))$  ya que  $l$  fue elegida para que

$\bar{\beta}(l) \in \bar{\gamma}_3$ . Dado que  $(\gamma_1, \beta, \alpha - \pi/2)$  es una bisagra pequeña entonces

$$d(\gamma_1(l_1), \beta(l)) \leq d(\bar{\gamma}_1(l_1), \bar{\beta}(l)).$$

Como  $(\beta, \gamma_2, \pi/2)$  es una bisagra recta y delgada

$$d(\beta(l), \gamma_2(l_2)) \leq d(\bar{\beta}(l), \bar{\gamma}_2(l_2)).$$

Juntando las desigualdades se concluye que  $d(\gamma_1(l_1), \gamma_2(l_2)) \leq d(\bar{\gamma}_1(l_1), \bar{\gamma}_2(l_2))$ . Es decir (B) se verifica para bisagras obtusas y delgadas.

Si  $\alpha < \pi/2$  entonces existe un punto  $\gamma_2(s)$  a distancia mínima de  $q = \gamma_1(l_1)$  sobre  $\gamma_2$ . Sea  $\gamma_3$  una geodésica minimizante de  $\gamma_2(s)$  a  $q$ ,  $\beta_1 = \gamma_2|_{[0,s]}$  y  $\beta_2 = \gamma_2|_{[s,l_2]}$ , decimos que  $(\gamma_1, \gamma_2, \alpha)$  es una bisagra aguda y delgada si  $(\gamma_3, \beta, \pi/2)$  es una bisagra recta y delgada y  $\Delta\gamma_1\gamma_3\beta_1$  es un triángulo geodésico pequeño.

Sea  $(\gamma_1, \gamma_2, \alpha)$  una bisagra aguda y delgada. Como  $\Delta\gamma_1\gamma_3\beta_1$  es un triángulo pequeño entonces si  $\Delta\sigma_1\sigma_3\sigma_2$  es un triángulo de comparación en  $M^{k-\varepsilon}$  se tiene que  $\theta_3 \leq \alpha_3$  y  $\theta_1 \leq \alpha_1$ , donde

$$\begin{aligned} \theta_3 &= \angle\sigma_1\sigma_2, & \theta_1 &= \angle\sigma_2\sigma_3, \\ \alpha_3 &= \angle\gamma_1\beta_1, & \alpha_1 &= \angle\beta_1\gamma_3. \end{aligned}$$

Extiéndase  $\sigma_2$  hasta tener longitud  $l_2$  y supóngase que  $\sigma_2 = \bar{\gamma}_2$ . Dado que  $(\gamma_3, \beta_2, \pi/2)$  es una bisagra recta y delgada entonces  $d(\gamma_3(l_3), \gamma_2(l_2)) \leq d(\bar{\gamma}_3(l_3), \bar{\gamma}_2(l_2))$ , donde  $\bar{\gamma}_3 : [0, l_3] \rightarrow M^{k-\varepsilon}$  es una geodésica con  $\bar{\gamma}_3(0) = \bar{\gamma}_2(s) = \sigma_2(s)$  y  $\angle\bar{\gamma}_2|_{[s,l_2]}\bar{\gamma}_3 = \pi/2$  como lo indica la figura 2.2. Por las condiciones sobre los ángulos previamente obtenidas si  $\bar{\beta}_2 = \bar{\gamma}_2|_{[s,l_2]}$  entonces  $\angle\sigma_3\bar{\beta}_2 \geq \pi/2 = \angle\bar{\gamma}_3\bar{\beta}_2$ . Sin embargo  $(\sigma_3, \bar{\beta}_2, \angle\sigma_3\bar{\beta}_2)$  y  $(\bar{\gamma}_3, \bar{\beta}_2, \pi/2)$  son bisagras en  $M^{k-\varepsilon}$  con lados de la misma longitud pero con ángulos (posiblemente) diferentes, luego

$$d(\sigma_3(l_3), \bar{\gamma}_2(l_2)) \geq d(\bar{\gamma}_3(l_3), \bar{\gamma}_2(l_2)).$$

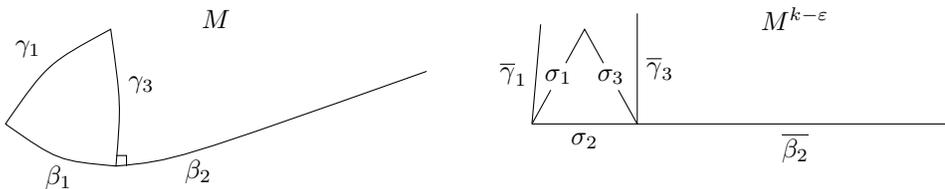


Figura 2.2: El caso de una bisagra aguda.

Lo mismo aplica para las bisagras  $(\sigma_1, \bar{\gamma}_2)$  y  $(\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2)$ , donde  $\bar{\gamma}_1$  es una geodésica de forma que  $\angle\bar{\gamma}_1\bar{\gamma}_2 = \alpha$  y  $\bar{\gamma}'_2(0)$  está en el mismo semiespacio determinado por  $\sigma'_1(0)$ , por lo que

$$d(\bar{\gamma}_1(l_1), \bar{\gamma}_2(l_2)) \geq d(\sigma_1(l_1), \bar{\gamma}_2(l_2)) = d(\sigma_3(l_3), \bar{\gamma}_2(l_2)).$$

Como  $\gamma_3(l_3) = \gamma_1(l_1)$ , juntando las desigualdades se concluye que

$$d(\bar{\gamma}_1(l_1), \bar{\gamma}_2(l_2)) \geq d(\gamma_1(l_1), \gamma_2(l_2));$$

es decir, la condición (B) también se verifica para bisagras agudas y delgadas.

Se ha preparado todo para el caso general. Sea  $(\gamma_1, \gamma_2, \alpha)$  una bisagra con  $\gamma_1$  minimizante,  $L(\gamma_1) = l_1$  y si  $k > 0$  con  $L(\gamma_2) \leq \pi/\sqrt{k}$ . Para todo  $p \in M$  existe  $g(p) > 0$  tal que para todo  $v \in T_p M$  unitario la geodésica radial con dirección  $v$  de longitud  $g(p)$  no tiene puntos focales de la hipersuperficie definida por  $v$ . La función  $g : M \rightarrow \mathbb{R}$  es continua lo cual permite elegir un número  $S$  que satisfaga las mismas propiedades que  $g(p)$  en todo punto de un conjunto compacto dado. Sea  $F > 0$  tal número para  $\overline{B_{l_1+l_2}(p)}$ . Por otro lado si  $(\sigma_1, \sigma_2, \pi/2)$  es una bisagra en  $M^{k-\varepsilon}$  con  $L(\sigma_1) = l_1$ , entonces si  $f : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$  es la función construida en la discusión de las bisagras rectas y delgadas entonces  $\max\{f(t)\}$  está acotado superiormente por una función que decrece continuamente con  $l_1$ . Luego es posible elegir  $l_1$  lo suficientemente chico para que  $f(t) \leq S$  para toda  $t$ , digamos  $l_1 = \delta$ . Por compacidad de  $\gamma_2$  también existe  $R > 0$  tal que para todo  $t \in [0, l_2]$ , la bola  $B_R(\gamma_2(t))$  es normal. Sea  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $l_2/N \leq \min\{R, \delta\}$ .

Para cada  $0 \leq k \leq N - 1$  sea  $\sigma_k : [0, s_k] \rightarrow M$  una geodésica minimizante de  $t_k = kl_2/N$ ,  $J_k = [t_k, t_{k+1}]$  y  $\beta_k = \gamma_2|_{J_k}$  y  $\tau_k = \gamma_2|_{[0, t_k]}$ . Por la elección de  $N$  las bisagras  $(\sigma_k, \beta_k, \theta_k)$  y  $(\sigma_k, \beta_{k+1}, \alpha_k)$  son delgadas (rectas, obtusas o agudas). Sean  $(\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, \alpha)$  y  $(\bar{\gamma}_2|_{[0, kl_2/N]}, \bar{\sigma}_k, \alpha_k)$  bisagras de comparación en  $M^{k-\varepsilon}$ . Se demostrará por inducción que

$$\begin{aligned} d(\gamma_1(l_1), \gamma_2(t_k)) &\leq d(\bar{\gamma}_1(l_1), \bar{\gamma}_2(t_k)), \\ l_2 = d(\gamma_2(0), \sigma_k(s_k)) &\leq d(\bar{\gamma}_2(0), \bar{\sigma}_k(s_k)). \end{aligned}$$

Dado que ya se ha cubierto el caso base, supóngase que la hipótesis inductiva se satisface para  $k$ . Si  $\bar{\tau}_k = \bar{\gamma}_2|_{[0, t_k]}$  entonces  $(\bar{\gamma}_1, \bar{\tau}_{k+1}, \alpha)$  es una bisagra de comparación para  $(\tau_{k+1}, \gamma_1, \alpha)$ . Constrúyase un triángulo de comparación  $\Delta\eta_1\delta_k\bar{\tau}_k$  en  $M^{k-\varepsilon}$  para el triángulo  $\Delta\gamma_1\sigma_k\tau_k$  y una bisagra de comparación  $(\bar{\tau}_k, \bar{\sigma}_k, \alpha_{k-1})$  de tal forma que  $\delta_k$  apunte en la misma dirección que  $\bar{\sigma}_k$  como lo indica la figura 2.3.

Si  $\bar{\beta}_k = \bar{\gamma}_2|_{J_k}$ , entonces se tiene que  $(\bar{\sigma}_k, \bar{\beta}_k, \theta_k)$  es una bisagra de comparación. Por hipótesis  $d(\bar{\sigma}_k(s_k), \bar{\tau}_k(0)) \geq d(\delta_k(s_k), \bar{\tau}_k(0))$  por lo que  $\angle\delta_k\bar{\tau}_k \leq \angle\bar{\sigma}_k\bar{\tau}_k$ . En consecuencia  $\angle\bar{\sigma}_k\bar{\beta}_k \leq \angle\delta_k\bar{\beta}_k$  y por tanto

$$d(\bar{\gamma}_2(t_{k+1}), \bar{\sigma}_k(s_k)) \leq d(\bar{\gamma}_2(t_{k+1}), \delta_k(s_k)).$$

Análogamente como  $L(\delta_k) = d(\gamma_2(t_k), \gamma_1(l_1)) \leq d(\bar{\gamma}_2(t_k), \bar{\gamma}_1(l_1))$  entonces  $\angle\nu_1\bar{\tau}_k \leq \angle\bar{\gamma}_1\bar{\tau}_k = \angle\bar{\gamma}_1\bar{\tau}_{k+1}$  y luego

$$d(\bar{\gamma}_2(t_{k+1}), \delta_k(s_k)) = d(\bar{\gamma}_2(t_{k+1}), \eta_1(l_1)) \leq d(\bar{\gamma}_2(t_{k+1}), \bar{\gamma}_1(l_1)).$$

Dado que  $(\sigma_k, \beta_k, \theta_k)$  es una bisagra delgada entonces

$$d(\bar{\gamma}_2(t_{k+1}), \bar{\sigma}_k(s_k)) \geq d(\gamma_2(t_{k+1}), \sigma_k(s_k)) = d(\gamma_2(t_{k+1}), \gamma_1(l_1)).$$

Finalmente juntando las desigualdades se tiene

$$d(\gamma_2(t_{k+1}), \gamma_1(l_1)) \leq d(\bar{\gamma}_2(t_{k+1}), \bar{\gamma}_1(l_1)).$$

La demostración de la otra desigualdad es análoga.  $\square$

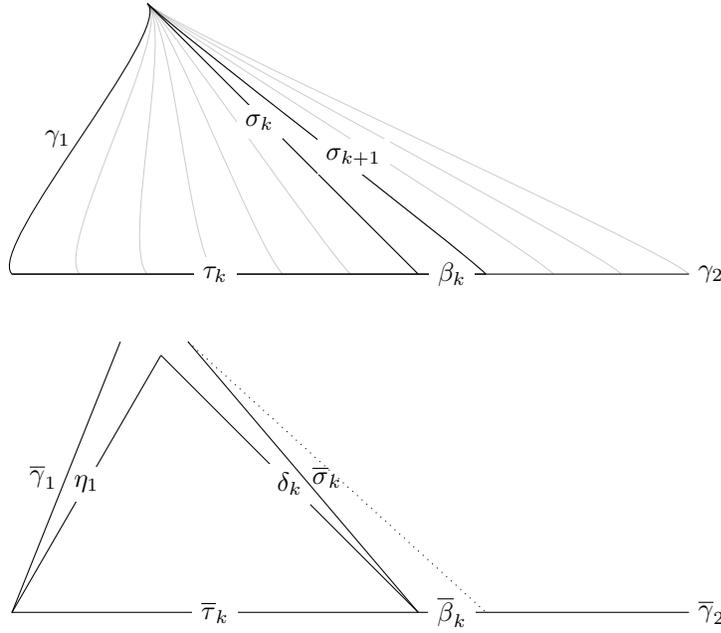


Figura 2.3: Paso inductivo.

## 2.5. Teorema de escisión

En esta sección  $M$  denota una variedad riemanniana completa con curvatura seccional no negativa. Hacemos uso del teorema de Toponogov para demostrar el teorema de escisión de Toponogov.

Las demostraciones usuales del teorema de escisión tienen como hipótesis una curvatura de Ricci no negativa. Dichas demostraciones son más complicadas (compárese con [Pet06, Teorema 68, página 283]) y hacen uso de teoría analítica no disponible en este texto; nos restringimos al resultado con las hipótesis fortalecidas. Sin embargo la demostración presentada tiene la ventaja de ser fácilmente modificable para abarcar el caso en el que  $M$  es un espacio de Alexandrov con curvatura no negativa (véase C).

**Definición 2.5.1.** Una línea en una variedad riemanniana  $M$  es una geodésica  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$  tal que  $d(\gamma(a), \gamma(b)) = |a - b|$ , es decir, es minimizante restringida a cualquier subintervalo finito.

Supóngase que  $\gamma$  es una línea en  $M$  y  $q \in M \setminus \gamma$ . Tómese otro par de puntos  $r, s \in \gamma$ . Si  $qr, qs$  son geodésicas minimizantes y  $\Delta \bar{q}\bar{r}\bar{s}$  es un triángulo de comparación en  $\mathbb{R}^2$  para  $\Delta qrs$  entonces por el teorema de Toponogov 2.4.1

$$\begin{aligned} \angle \bar{q}\bar{r}\bar{s} &\leq \angle qrs, \\ \angle \bar{r}\bar{s}\bar{q} &\leq \angle rsq, \\ \angle \bar{s}\bar{q}\bar{r} &\leq \angle sqr. \end{aligned}$$

Sin embargo dado que  $\gamma$  es una línea, la igualdad es el caso.

**Lema 2.5.1.**  $\angle \bar{r}\bar{s}\bar{q} = \angle rsq$  y  $\angle \bar{s}\bar{r}\bar{q} = \angle srq$ .

**Demostración** Se demostrará la primera igualdad, la segunda es análoga. Sea  $\alpha = \angle rsq$ . Supóngase que  $\angle \bar{s}\bar{r}\bar{q} \leq \alpha - \varepsilon$  con  $\varepsilon > 0$ . Sean  $m, n \in \gamma$  tales que  $r$  está entre  $n$  y  $s$ , y  $s$  está entre  $r$  y  $m$ , como en la figura 2.4.

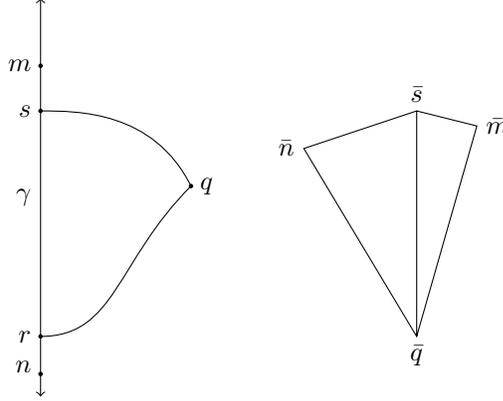


Figura 2.4: Lema 2.5.1.

Sean  $\Delta \bar{m}\bar{s}\bar{q}$  y  $\Delta \bar{q}\bar{s}\bar{n}$  triángulos de comparación en  $\mathbb{R}^2$ . Por la monotonía de los ángulos C.1.10,  $\angle \bar{p}\bar{s}\bar{n} \leq \angle \bar{p}\bar{s}\bar{r} \leq \alpha - \varepsilon$ . Se pueden acomodar los puntos  $\bar{m}, \bar{n}, \bar{q}$  y  $\bar{s}$  en el plano de tal forma que los puntos  $\bar{m}$  y  $\bar{n}$  queden separados por la línea  $\bar{q}\bar{s}$ .

Por Toponogov  $\angle msq \geq \angle \bar{m}\bar{s}\bar{q}$  y por lo tanto

$$\angle \bar{m}\bar{s}\bar{n} = \angle \bar{m}\bar{s}\bar{q} + \angle \bar{q}\bar{s}\bar{n} \leq (\alpha - \varepsilon) + \angle msq = \pi - \varepsilon.$$

Obsérvese que  $|nm| = |ns| + |sm| \leq |nq| + |qm|$ . Por otro lado como  $\angle \bar{m}\bar{s}\bar{n} \leq \pi - \varepsilon$  para  $|\bar{m}\bar{s}|$  y  $|\bar{s}\bar{n}|$  suficientemente grandes se tiene que  $|\bar{n}\bar{s}| + |\bar{s}\bar{m}| > |\bar{n}\bar{q}| + |\bar{q}\bar{m}|$ . Luego si se eligen  $n$  y  $m$  de modo adecuado se llega a una contradicción. Por lo tanto  $\angle \bar{m}\bar{s}\bar{q} = \alpha$ .  $\square$

Como consecuencia se tiene

**Corolario 2.5.2.** 1. Existe un único punto  $p \in \gamma$  a distancia mínima de  $q$ .

2. Si  $q'$  es un punto sobre la geodésica  $qs$  y  $r'$  es un punto sobre  $\gamma$  entre  $s$  y  $r$  entonces  $|q'r'| = |\bar{q}'\bar{r}'|$  donde  $\bar{q}'$  es un punto en el lado  $\bar{q}\bar{s}$  tal que  $|sq'| = |\bar{s}\bar{q}'|$  y  $\bar{r}'$  es un punto en el lado  $\bar{r}\bar{s}$  tal que  $|sr'| = |\bar{s}\bar{r}'|$ .

**Demostración** Se sigue fácilmente de la monotonía de los ángulos ya que  $\alpha \geq \angle \bar{q}'\bar{s}\bar{r}' \geq \angle \bar{q}\bar{s}\bar{r} = \alpha$ .  $\square$

**Teorema 2.5.3** (Cheeger-Gromoll-Toponogov). Sea  $M$  una variedad completa con curvatura seccional no negativa.  $M$  puede escindirse en un producto isométrico  $N \times \mathbb{R}^m$ , donde  $N$  no contiene líneas y  $\mathbb{R}^m$  tiene la métrica euclidiana.

**Demostración** Sea  $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow M$  una línea. Se demostrará que  $M$  es isométrica a  $\bar{M} \times \mathbb{R}$  para alguna variedad con curvatura seccional no negativa; el resultado general se sigue por inducción.

Sea  $p = \sigma(0)$  y  $q \in M \setminus \sigma$ . Si  $t_n$  es una sucesión de números con  $t_n \rightarrow \infty$  y  $c_n : [0, d_n] \rightarrow M$  son geodésicas unitarias minimizantes de  $p$  a  $o_n = \sigma(t_n)$  ( $d_n = d(p, \sigma(t_n))$ ), entonces los vectores  $c'_n(0)$  contienen una subsucesión que converge a  $v_q \in T_q M$ . Para evitar dobles índices supóngase que la subsucesión es la original. Sea  $\gamma_q : \mathbb{R} \rightarrow M$  la geodésica radial con  $\gamma'_q(0) = v_q$ . Dado que  $c'_n(0) \rightarrow v$  resulta que  $c_n \rightarrow \gamma_q$  puntualmente, y en consecuencia  $d(q, c_n(t)) \rightarrow d(q, \gamma_q(t))$ . Luego  $d(q, \gamma_q(t)) = t$  y  $\gamma_q$  es un rayo (minimiza distancias entre cualesquiera dos puntos sobre ella).

Si ahora tomamos la sucesión  $\{-t_n\}$ , y  $b_n : [0, l_n] \rightarrow M$  geodésicas unitarias minimizantes de  $q$  a  $s_n = \sigma(-t_n)$ , entonces es posible encontrar un vector unitario  $w_q \in T_q M$  límite de  $b'_n(0)$  y de tal forma que la geodésica radial  $\beta_q : \mathbb{R}^+ \rightarrow M$  con  $\beta'_q(0) = w_q$  es un rayo.

Obsérvese que  $w_q = -v_q$ . Para esto basta con demostrar que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \angle o_n q s_n = \pi$ . Si  $\Delta \bar{o}_n \bar{q} \bar{s}_n$  son triángulos de comparación en  $\mathbb{R}^2$  para los triángulos  $\Delta o_n q s_n$  por el teorema de Toponogov 2.4.1  $\angle \bar{o}_n \bar{q} \bar{s}_n \leq \angle c_n b_n$ . Por la ley de los cosenos

$$\cos \angle \bar{o}_n \bar{q} \bar{s}_n = \frac{d_n^2 + l_n^2 - t_n^2}{2d_n l_n}.$$

Dado que  $d_n \leq N + t_n$  y  $l_n \leq N + t_n$  con  $N = d(p, q)$ , cuando  $n \rightarrow \infty$  (y por tanto  $t_n \rightarrow \infty$ ) se tiene que  $\angle \bar{o}_n \bar{q} \bar{s}_n \rightarrow \pi$ , luego  $\angle c_n b_n \rightarrow \pi$ . Por otro lado si  $a = \gamma_q(t_1)$ ,  $m = \beta_q(t_2)$ ,  $a_n = c_n(t_1)$  y  $m_n = b_n(t_2)$  entonces  $s_n \rightarrow s$  y  $m_n \rightarrow m$ . Por otro lado si se consideran los triángulos de comparación  $\Delta \bar{o}_n \bar{q} \bar{s}_n$  junto con los puntos  $\bar{a}_n, \bar{m}_n$  correspondientes a  $a_n$  y  $m_n$  entonces por el lema 2.5.1 se tiene que

$$|\bar{a}_n \bar{m}_n| = |a_n m_n| \rightarrow |am|.$$

Sin embargo es claro que  $|\bar{a}_n \bar{m}_n| \rightarrow t_1 + t_2$  por lo que  $\gamma_q \cup \beta_q = \sigma_q$  es una línea.

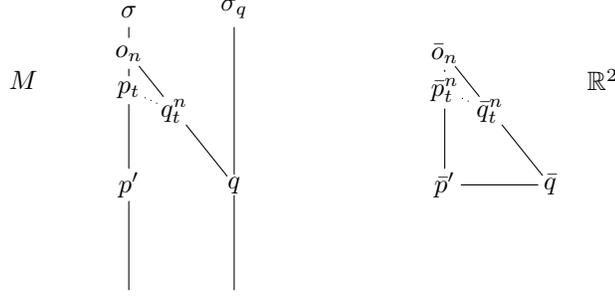
**Definición 2.5.2.** Se dice que dos líneas  $\sigma_1, \sigma_2 : \mathbb{R} \rightarrow M$  son paralelas si existen un par de rectas paralelas  $\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2$  en  $\mathbb{R}^2$  y una isometría  $f : \sigma_1 \cup \sigma_2 \rightarrow \bar{\sigma}_1 \cup \bar{\sigma}_2$ . Un par de puntos  $x \in \sigma_1$  y  $y \in \sigma_2$  se corresponden si  $d(x, y) = d(\sigma_1, \sigma_2)$ .

Obsérvese que si  $x$  y  $y$  se corresponden, entonces cualquier geodésica minimizante que une  $x$  con  $y$  hace un ángulo recto con  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$ . E inversamente, gracias al lema 2.5.1 si esto último es cierto, entonces  $x$  y  $y$  se corresponden.

Resulta que  $\sigma_q$  y  $\sigma$  son rectas paralelas. En primer lugar se demostrará que  $d(q', \sigma)$  con  $q' \in \sigma_q$  es constante, suponiendo que  $q' = \sigma_q(t)$  para algún  $t > 0$  puesto que el otro caso es análogo. Para esto sea  $p'$  el único punto sobre  $\sigma$  tal que  $d(p', q) = d(q, \sigma)$  de modo que  $p' = \sigma(t_0)$  para algún  $t_0$ . Sean  $p_t = \sigma(t_0 + t)$ ,  $q_t = \sigma(t)$ ,  $q_t^n = c_n(t)$ , y  $\bar{p}_t^n$  y  $\bar{q}_t^n$  los puntos correspondientes en los triángulos de comparación  $\Delta \bar{o}_n \bar{p}' \bar{q}$ , es decir  $\bar{p}_t^n$  es el punto sobre el lado  $\bar{o}_n \bar{p}'$  tal que  $d(\bar{o}_t^n, \bar{p}') = t$  y  $\bar{q}_t^n$  es el punto sobre el lado  $\bar{q} \bar{o}_n$  tal que  $d(\bar{q}_t^n, \bar{q}) = t$ . Por el corolario 2.5.2  $d(\bar{p}_t^n, \bar{q}_t^n) = d(p_t, q_t^n)$ . Como las geodésicas  $c_n$  convergen puntualmente a  $\gamma_q$  entonces  $q_t^n \rightarrow q_t$  y consecuentemente  $d(\bar{p}_t^n, \bar{q}_t^n) = d(p_t, q_t^n) \rightarrow d(p_t, q_t)$ , sin embargo es claro que  $d(\bar{p}_t^n, \bar{q}_t^n) \rightarrow d(p', q) = d(\sigma, q)$ . Luego  $d(q_t, p_t) = d(q, p')$  es constante.

Nótese que los puntos  $q_n$  y  $p_n$  se corresponden. Por todo esto, si  $D = d(p', q)$  entonces  $f(q_t) = (D, t)$  y  $f(p_t) = (0, t)$  es una isometría  $f : \sigma \cup \sigma_q \rightarrow L_1 \cup L_2$ , i.e.  $\sigma$  y  $\sigma_q$  son paralelas.

Se ha demostrado que por todo punto  $q \in M$  pasa una línea paralela a  $\sigma$ , ahora se demostrará que dicha línea es única. Supóngase que  $\sigma_1, \sigma_2$  son dos rectas paralelas a  $\sigma$  que pasan por  $q$  y que  $\angle \sigma_1 \sigma_2 = \alpha > 0$ . Sea  $p'$  el punto en  $\sigma$  más cercano a  $q$ , digamos  $p' = \sigma(t_0)$ . Para cada  $t \in \mathbb{R}$  sean

Figura 2.5:  $\sigma$  y  $\sigma_q$  son paralelas.

$p_t = \sigma(t_0 + t)$  y  $o_t$  y  $r_t$  los puntos sobre  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  más cercanos a  $p_t$ . Luego por la definición de paralelismo es claro que  $d(o_t, q) = d(r_t, q) = |t|$ . Por el lema 2.5.1 el triángulo  $\Delta o_t q r_t$  tiene los mismos ángulos que un triángulo de comparación  $\Delta \bar{o}_t \bar{q} \bar{r}_t$  en  $\mathbb{R}^2$ , en particular  $\alpha = \angle \bar{o}_t \bar{q} \bar{r}_t$  y por lo tanto  $d(o_t, r_t) = d(\bar{o}_t, \bar{r}_t) = 2t^2(1 - \cos \alpha)$  (aquí se ha usado la ley de los cosenos). Por otro lado  $d(o_t, p_t) = C_1$  y  $d(r_t, p_t) = C_2$ , con  $C_1$  y  $C_2$  constantes, por lo que  $d(o_t, r_t) \leq C_1 + C_2$ . Para  $t$  suficientemente grande esto es contradictorio y por lo tanto  $\alpha = 0$ , es decir  $\sigma_1 = \sigma_2$ .

La relación de ser paralelas es transitiva. Sean  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  son líneas tales que  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  son paralelas y  $\sigma_2$  y  $\sigma_3$  también. Sea  $q \in \sigma_2$ ,  $r \in \sigma_1$  el único tal que  $d(q, r) = d(q, \sigma_1)$  y  $s \in \sigma_3$  tal que  $d(s, q) = d(q, \sigma_3)$ . Supóngase sin pérdida de generalidad que  $q = \sigma_2(0)$ ,  $r = \sigma_1(0)$  y  $s = \sigma_3(0)$ . Digamos también que  $\bar{\sigma}_1(t) = (-D_1, t)$ ,  $\bar{\sigma}_2(t) = (0, t)$  y  $\bar{\sigma}_3(t) = (D_2, t)$ , donde  $D_1 = d(\sigma_1, \sigma_2)$  y  $D_2 = d(\sigma_2, \sigma_3)$ , y que los isomorfismos del paralelismo entre  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$ , y  $\sigma_2$  y  $\sigma_3$ , mandan  $\sigma_1(t) \mapsto (-D_1, t)$ ,  $\sigma_2(t) \mapsto (0, t)$  y  $\sigma_3(t) \mapsto (D_2, t)$ . Sean  $q_t = \sigma_2(t)$ ,  $r_t = \sigma_1(t)$  y  $s_t = \sigma_3(t)$ . Basta con demostrar que el ángulo que hace  $\sigma_1$  con alguna geodésica minimizante  $\beta : r_t \rightarrow s_t$  es  $\pi/2$ . Sea  $t' > t$  y supóngase que  $\angle r_{t'} r_t s_t = \alpha > \pi/2$ . Por el lema 2.5.1

$$d(s_t, r_{t'}) = \sqrt{(t' - t)^2 + d(s_t, r_t)^2 - 2s(t' - t) \cos \alpha} = \sqrt{(t' - t)^2 + d(s_t, r_t)^2 + \varepsilon(t' - t)}$$

para algún  $\varepsilon > 0$ . También como  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  son paralelas y  $q_t$  y  $r_t$  son tales que  $d(q_t, r_t) = d(\sigma_1, \sigma_2)$  entonces  $\angle q_t r_t r_{t'} = \pi/2$ . Luego

$$d(q_t, r_{t'}) = \sqrt{(t' - t)^2 + D_1^2}.$$

Así

$$d(s_t, r_{t'}) \leq d(s_t, q_t) + d(q_t, r_{t'}) = D_2 + \sqrt{(t' - t)^2 + D_1^2}.$$

Sin embargo es claro que para  $t'$  suficientemente grande

$$\sqrt{(t' - t)^2 + d(s_t, r_t)^2 + \varepsilon(t' - t)} \leq D_2 + \sqrt{(t' - t)^2 + D_1^2}$$

es una contradicción. Por lo tanto  $\alpha \leq \pi/2$ . Si  $\alpha < \pi/2$  entonces tomamos  $t' < t$  y se repite el argumento. En conclusión  $\alpha = \pi/2$ . Esto demuestra que  $\sigma_1$  y  $\sigma_3$  son paralelas.

La relación de paralelismo es por tanto una relación de equivalencia. Por cada punto de  $M$  pasa una línea paralela a  $\sigma$ , y todas estas líneas son paralelas entre sí. Sea  $\mathcal{L} = \{\tau | \tau \text{ es paralela a } \sigma\}$  y

$p \in M$ . Considérese el conjunto

$$M_p = \{q \in M \mid \exists \tau \in \mathcal{L} \text{ tal que } q \in \tau \text{ y } q \text{ corresponde a } p\}.$$

Resulta que  $M_p$  es una subvariedad cerrada y totalmente geodésica de  $M$ . Esto ya que si  $q \in M_p$ ,  $B_r(q)$  y  $\sigma_q \in \mathcal{L}$  contiene a  $q$  (y supóngase que  $\sigma_q(0) = q$ ) entonces  $\exp_q(W \cap B_r(0)) = M_p \cap B_r(q)$ , donde  $W = \sigma'_q(0)^\perp$ . La igualdad  $\exp_q(W \cap B_r(0)) = M_p \cap B_r(q)$  es una clara consecuencia de que  $q' \in \sigma_{q'}$  corresponde a  $q \in \sigma_q$  si y solo si toda geodésica de  $q$  a  $q'$  hace un ángulo recto con  $\sigma_{q'}$  y  $\sigma_q$ .

$\bar{M} = M_p$  es una variedad con curvatura seccional no negativa. Supóngase que las líneas  $\sigma_q$  con  $q \in M_p$  están alineadas en el siguiente sentido, si  $\sigma_q(t)$  se corresponde con  $\sigma(t_0)$  entonces  $\sigma_{q'}(t)$  también. Definimos una isometría  $f : \bar{M} \times \mathbb{R} \rightarrow M$  de la siguiente manera,  $f(q, t) = \sigma_q(t)$ . Verificar que  $f$  es una isometría se reduce a utilizar una vez más el lema 2.5.1.  $\square$

No siempre es sencillo verificar que una curva particular es una línea, o que existe una línea en una variedad riemanniana. Sin embargo existe un caso sencillo en el cual se puede garantizar la existencia.

**Definición 2.5.3.** *Una variedad  $M$  es disconexa al infinito si existe un compacto  $K \subset M$  tal que para todo  $A \supset K$  compacto  $M - A$  es disconexo.*

Nótese que  $\emptyset$  se considera conexo por lo que una variedad compacta no es disconexa al infinito.

**Proposición 2.5.4.** *Si  $M$  es una variedad riemanniana completa y disconexa al infinito entonces contiene una línea.*

**Demostración** Sea  $K \subset M$  compacto tal que para todo  $A \supset K$ ,  $M - A$  es disconexo. Por el comentario anterior  $M$  no puede ser acotada y luego para todo  $R > 0$  el conjunto  $M - B_R(K)$  es no vacío y disconexo. Sea  $\{r_n\}$  una sucesión de números positivos tales que  $r_n \rightarrow \infty$  y  $p_n, q_n \in M - B_{r_n}(K)$  en componentes conexas distintas. Sean  $q_n p_n$  geodésicas minimizantes.

Dado que  $M - K$  es disconexo y  $q_n$  y  $p_n$  se encuentran en componentes conexas distintas de dicho conjunto, las geodésicas  $q_n p_n$  pasan por  $K$ . Sea  $k_n \in K$  tal que  $k_n \in q_n p_n$ . Como  $q_n, p_n \notin B_{r_n}(K)$  entonces  $|q_n p_n| > 2r_n$  y luego  $|q_n p_n| \rightarrow \infty$ .

La sucesión  $k_n$  contiene una subsucesión que converge a  $k \in K$ . Supóngase sin pérdida de generalidad que  $k_n \rightarrow k$ . Los vectores tangentes de  $k_n q_n$  contienen a su vez una subsucesión que converge a  $v \in T_k M$ . Suponemos también que  $k_n q'_n \rightarrow v$ . Finalmente sea  $\gamma = \exp_k(tv)$ . Por construcción se puede verificar que  $q_n p_n \rightarrow \gamma$  puntualmente y por lo tanto  $\gamma$  es una línea.  $\square$

# Capítulo 3

## Topología

En este capítulo se estudian las consecuencias topológicas de imponer curvatura no negativa en una variedad. En lo que sigue asumimos que el lector está familiarizado con aplicaciones cubrientes, grupo fundamental y teoría homológica. Como referencia, citamos a [BT82, Bre93, Hat01].

### 3.1. Teorema de Bonnet-Myers II

Si  $M$  es una variedad completa con curvatura seccional acotada por debajo por una constante positiva entonces su diámetro es finito 2.2.1 y por A.1.1  $M$  es compacta.

En el caso  $K_M > 0$  la conclusión falla, por ejemplo el paraboloides de revolución en  $\mathbb{R}^3$  es una variedad completa con curvatura positiva que no es compacta. Sin embargo la rigidez de la curvatura positiva obliga a  $M$  a ser difeomorfa a  $\mathbb{R}^n$ . Véase 3.5.

La compacidad de un espacio no es una característica topológica muy restrictiva, sin embargo tras este resultado se oculta uno de mayor alcance.

**Lema 3.1.1.** *Sea  $M$  una variedad riemanniana y  $\pi : \widetilde{M} \rightarrow M$  una aplicación cubriente diferenciable. Entonces existe una única métrica en  $\widetilde{M}$  tal que  $\pi$  es una isometría local. Con tal métrica,  $M$  es completa si y solo si  $\widetilde{M}$  es completa.*

**Demostración** Defínase la métrica en  $\widetilde{M}$  como el pullback  $g' = \pi^*(g)$ . Restringiendo a abiertos en los que  $\pi$  es un difeomorfismo es fácil ver que  $g'$  es una métrica riemanniana que convierte a  $\pi$  en una isometría local.

Supóngase que  $\widetilde{M}$  es completa con esta métrica. Sea  $p \in M$ ,  $v \in T_p M$ ,  $\tilde{p} \in \widetilde{M}$  cualquier punto tal que  $\pi(\tilde{p}) = p$  y  $\tilde{v} \in T_{\tilde{p}} \widetilde{M}$  tal que  $d\pi(\tilde{v}) = v$ . Como  $\widetilde{M}$  es completa, la geodésica que parte de  $\tilde{p}$  con dirección  $\tilde{v}$ ,  $\tilde{\gamma}$ , está definida en todo momento.  $\pi$  es una isometría local por lo que debe de proyectar geodésicas en geodésicas, luego que  $\pi(\tilde{\gamma}) = \gamma$ , la geodésica con origen en  $p$  y dirección  $v$ , está definida en todo momento. Por el teorema de Hopf-Rinow A.1.1  $M$  es completa.

Ahora supóngase que  $M$  es completa. Sean  $\tilde{p} \in \widetilde{M}$  y  $\tilde{v} \in T_{\tilde{p}} \widetilde{M}$  junto con  $p = \pi(\tilde{p})$  y  $v = d\pi(\tilde{v})$ . Dado que  $M$  es completa, la geodésica  $\gamma$  tal que  $\gamma(0) = p$  y  $\gamma'(0) = v$  está definida para toda  $t$ . Sea  $\tilde{\gamma}$  el único levantamiento de  $\gamma$  a  $\widetilde{M}$  con  $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{p}$ . Puesto que  $\pi$  es una isometría local,  $\tilde{\gamma}$  es una geodésica. Además  $d\pi(\tilde{\gamma}'(0)) = \gamma'(0) = v$ , por lo que  $\tilde{\gamma}$  es la única geodésica radial con  $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{p}$  y  $\tilde{\gamma}'(0) = \tilde{v}$ .  $\tilde{\gamma}$  está definida para toda  $t$  por lo que  $\widetilde{M}$  es completa.  $\square$

Dado que las isometrías locales preservan la curvatura, el espacio cubriente  $\widetilde{M}$  tiene las mismas restricciones sobre la curvatura que  $M$ .

**Teorema 3.1.2.** *Sea  $M$  una variedad riemanniana completa tal que  $K_M \geq H$  para alguna constante  $H > 0$ , entonces el grupo fundamental de  $M$  es finito.*

**Demostración** Sea  $\widetilde{M}$  la cubierta universal de  $M$ . Al darle la métrica del lema 3.1.1,  $\widetilde{M}$  se convierte en una variedad riemanniana completa cuya curvatura satisface  $K_{\widetilde{M}} \geq H > 0$ . Por el teorema de Bonnet-Myers  $\widetilde{M}$  es compacta. Recuérdese que el grupo fundamental  $\pi(M)$  es isomorfo al grupo de transformaciones de cubierta del cubriente universal y que este último actúa de forma totalmente discontinua. Dado que  $\widetilde{M}$  es compacta esto solo puede suceder si el grupo de transformaciones de cubierta es finito. Por lo tanto  $|\pi(M)| < \omega$ .  $\square$

Cuando  $M$  es una variedad con curvatura seccional no positiva el teorema de Cartan-Hadamard 2.2.3 afirma que  $\mathbb{R}^n$  es un espacio cubriente de  $M$  y por lo tanto su cubriente universal. Esto implica que los grupos de homotopía de orden superior de  $M$  se anulan.  $M$  resulta un espacio de Eilenberg-MacLane  $K(\pi(M), 1)$ . Por esto el tipo de homotopía de  $M$  está totalmente controlado por  $\pi(M)$ . Existen además muchos teoremas que describen la estructura interna del grupo fundamental en caso de que la variedad tenga curvatura negativa, como el teorema de Preissmann que indica que cualquier subgrupo propio abeliano de  $\pi(M)$  debe de ser isomorfo a  $\mathbb{Z}$ . Consúltese [Yau71] para más resultados en esta dirección. Desafortunadamente se sabe muy poco de la estructura interna de los grupos fundamentales de variedades con curvatura seccional positiva.

## 3.2. Teorema de Synge-Weinstein

La fórmula de la segunda variación de la energía A.2 permite hacer análisis geométrico de geodésicas a partir de información local. En el caso especial de curvatura positiva este tipo de análisis es especialmente fructífero.

**Teorema 3.2.1** (Synge). *Sea  $M$  una variedad riemanniana conexa, compacta y orientable de curvatura seccional positiva. Si  $f : M \rightarrow M$  es una isometría que preserva la orientación si  $\dim(M)$  es par o invierte orientación si  $\dim(M)$  es impar, entonces  $f$  tiene un punto fijo.*

**Demostración** Supóngase que  $f$  no tiene puntos fijos y que la distancia mínima entre un punto y su imagen,  $l$ , se realiza en  $x \in M$  (tal punto existe por la compacidad de  $M$ ). Sea  $\gamma$  geodésica minimizante entre  $x$  y  $f(x)$ . Tómese un punto cualquiera  $\gamma(s) = p$ , sobre  $\gamma$  con  $s \in (0, l)$ , y considérese  $\gamma' = f(\gamma)$  y  $f(p) = p'$ . Por la definición de  $x$  se tiene  $d(p, p') \geq l$ , y por otro lado

$$d(p, p') \leq d(p, f(x)) + d(f(x), p') = d(p, f(x)) + d(f(x), f(p)) = d(p, f(x)) + d(x, p) = l$$

ya que  $f$  es una isometría de  $M$  en  $M$ . Entonces  $\gamma|_{[s, l]} \cup \gamma'|_{[0, s]}$  es una curva minimizante entre  $p$  y  $p'$  y por lo tanto diferenciable. De esto se concluye que  $df(\gamma'(0)) = \gamma'(l)$ .

Sea  $P : T_x M \rightarrow T_{f(x)} M$  el transporte paralelo a lo largo de  $\gamma$  de  $x$  a  $f(x)$  y  $L = P^{-1} \circ df : T_x M \rightarrow T_x M$ .  $L$  es una transformación que preserva la métrica, ya que tanto  $P$  como  $df$  lo hacen, y por lo ya demostrado se tiene que  $L(\gamma'(0)) = \gamma'(0)$ . Luego  $\gamma'(0)^\perp \subseteq T_x M$  es  $L$ -invariante. Como  $P$  preserva la orientación, si  $m = \dim(M)$  es par, entonces por hipótesis  $\det(L) = 1$ , y si  $m$  es impar, entonces  $\det(L) = -1$ . Para lo que sigue se requiere el siguiente lema de álgebra lineal:

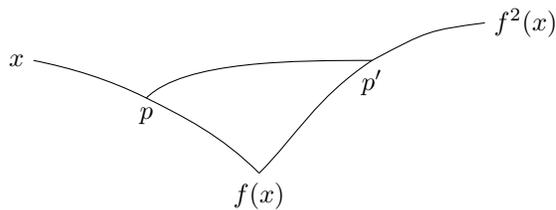


Figura 3.1:  $\gamma \cup f(\gamma)$  debe de ser una geodésica.

**Lema 3.2.2.** *Sea  $T : V \rightarrow V$  una transformación lineal que preserva el producto interior de  $V$ . Supóngase que  $\det(T) = (-1)^{n+1}$ , donde  $n = \dim(V)$ , entonces  $T$  tiene un punto fijo.*

**Demostración** Sea  $\chi_T$  el polinomio característico de  $T$ ; este polinomio se descompone en  $\mathbb{C}[x]$  en productos de monomios lineales  $(x - \lambda_i)$ . Dado que  $\chi_T$  es un polinomio con coeficientes reales, si  $(x - \lambda_i)$  es un factor de  $\chi_i$ , con  $\lambda_i$  propiamente complejo, entonces  $(x - \bar{\lambda}_i)$  es otro factor. Así, el número de eigenvalores propiamente complejos es par.

Se reordenan los índices para que  $\lambda_{2i+1} = \bar{\lambda}_{2i}$  para  $i \geq k$  y  $\lambda_i \in \mathbb{R}$  para  $i < k$ . Obsérvese que  $\det(T) = \prod_i \lambda_i = \prod_{i=1}^{k-1} \lambda_i \prod_{j \geq k} \lambda_{2j} \lambda_{2j+1}$  y  $\prod_{j \geq k} \lambda_{2j} \lambda_{2j+1} = \prod_{j \geq k} |\lambda_{2j}|^2 \geq 0$ .

Si  $n$  es par entonces existe al menos un par de factores con  $\lambda_i$  reales, pues de no ser así  $-1 = \det(T) = \prod_j \lambda_j \bar{\lambda}_j > 0$ . Dado que  $T$  preserva el producto interior de  $V$ , para  $i < k$  se tiene  $\lambda_i = -1, 1$ . Por lo tanto debe de existir un  $i$  tal que  $\lambda_i = 1$  ya que  $\det(T) < 0$ .

Si  $n$  es impar entonces existe al menos un  $\lambda_i$  real. Si  $\lambda_i = -1$  para todo  $i < k$ , por lo mencionado arriba se tendría que  $\det(T) < 0$ . Luego existe  $i$  tal que  $\lambda_i = 1$ .  $\square$

Continuando la demostración del teorema, se tiene que  $L|_{\gamma'(0)^\perp} = T$  satisface las hipótesis del lema y por tanto existe un vector unitario  $v \in \gamma'(0)^\perp$  tal que  $L(v) = v$ . Considérese la geodésica  $\alpha$  que pasa por  $x$  con dirección  $v$ , su imagen  $\alpha' = f(\alpha)$  y el campo paralelo  $V(t)$  a lo largo de  $\gamma$  definido por  $V(0) = v$ . La variación  $h(s, t) = \exp_{\gamma(s)}(tV(s))$  tiene sus extremos en  $\alpha$  y  $\alpha'$ . Por la fórmula de segunda variación A.11,

$$E_s''(0) = \int_0^t -g(V, R(\gamma', V)\gamma') dt = - \int_0^t K(\gamma', V) dt < 0.$$

Entonces existe  $t$  lo suficientemente pequeño tal que  $h_t(s) = h(s, t)$  es una curva que une a  $y$  con  $f(y)$  con menor longitud que  $\gamma$ . Esto contradice la elección de  $\gamma$  y por lo tanto  $f$  tiene un punto fijo.  $\square$

Como corolario se tiene el siguiente teorema.

**Teorema 3.2.3** (Synge 1936). *Sea  $M$  una variedad riemanniana compacta con curvatura positiva.*

1. *Si  $M$  es orientable y  $\dim(M)$  es par, entonces  $M$  es simplemente conexa.*
2. *Si  $\dim(M)$  es impar entonces  $M$  es orientable.*

**Demostración** Sea  $M$  orientable tal que  $\dim(M)$  es par. Sea  $\widetilde{M}$  la cubierta universal de  $M$  y  $\phi$  cualquier transformación de cubierta. Con la métrica del teorema 3.1.1, por el teorema de Myers 2.2.1, la variedad  $\widetilde{M}$  es una variedad riemanniana completa y compacta, y  $\phi$  una isometría que preserva la orientación inducida por  $M$ . Por el teorema de Synge 3.2.1  $\phi$  tiene un punto fijo, lo cual implica que  $\phi$  es la identidad. Luego  $M = \widetilde{M}$  es simplemente conexa.

Supóngase ahora que  $\dim(M)$  es impar y  $M$  es no orientable. Sea  $\widetilde{M}$  la cubierta doble orientable y  $\phi$  la única transformación de cubierta. Recuérdese que  $\phi$  invierte la orientación de  $\widetilde{M}$ . Si se dota a  $\widetilde{M}$  la métrica de cubierta,  $\phi$  es una isometría y  $\widetilde{M}$  es completa y conexa, por lo que  $\phi$  tiene un punto fijo. Esta contradicción muestra que  $M$  es orientable.  $\square$

Argumentos parecidos al utilizado en la demostración del teorema de Synge producen resultados sobre la geometría de las subvariedades totalmente geodésicas.

**Teorema 3.2.4** (Frankel 1960). *Sea  $M$  una variedad riemanniana completa de curvatura seccional positiva  $n$ -dimensional y  $N, Q$  dos subvariedades compactas totalmente geodésicas de dimensiones  $r$  y  $s$  respectivamente. Si  $r + s \geq n$  entonces  $N \cap Q \neq \emptyset$ .*

**Demostración** Como  $M$  es completa y las subvariedades son compactas, existe una geodésica minimizante  $\gamma$  tal que  $L(\gamma) = d(N, Q)$ ,  $\gamma(0) = p \in N$  y  $\gamma(l) = q \in Q$ . Tal geodésica debe de ser ortogonal a  $N$  y  $Q$  en los extremos, cfr. corolario A.2. Sea  $V = T_p N \subseteq T_p M$  y  $V_l$  el transporte paralelo a lo largo de  $\gamma$  de  $V$  hasta  $q$ ,  $V_l = P_\gamma(V)$ . Por ser paralelo el transporte,  $V_l$  es ortogonal a  $\gamma$  en  $q$  por lo que  $V_l$  y  $W = T_q Q \subseteq T_q M$  están contenidos en el subespacio ortogonal a  $\gamma'(l) \in T_q M$ . Por la hipótesis de dimensionalidad  $\dim(V_l \cap W) \geq r + s - (n - 1) \geq 1$  es decir existe un vector  $V$  unitario en  $T_p N$  cuyo transporte paralelo a  $q$  a lo largo de  $\gamma$  es tangente a  $Q$ . Sea  $V_t$  el transporte paralelo de  $V$  a lo largo de  $\gamma$ . Este campo vectorial define una variación de  $\gamma$  de la siguiente manera:  $\alpha(t, s) = \exp_{\gamma(t)}(sV_t)$ . Como  $N$  y  $Q$  son totalmente geodésicas los extremos de tal variación se mantienen dentro de  $N$  y  $Q$  por lo que  $\alpha(t, s_0)$  con  $s_0$  fijo es una curva de  $N$  a  $Q$ . Usando la fórmula de la segunda variación A.11 se obtiene que:

$$1/2E''(0) = \int_0^l (g(V', V') - g(R(\gamma', V)\gamma', V))dt - g\left(\frac{D\alpha}{ds}, \gamma'\right)(0, 0) + g\left(\frac{D\alpha}{ds}, \gamma'\right)(0, l)$$

Obsérvese que  $V' = 0$  por construcción y  $\frac{D}{ds}\alpha = 0$  ya que  $\alpha(t_0, s)$  es una geodésica para todo  $t_0$  fijo. Luego, por las restricciones sobre la curvatura seccional,

$$1/2E''(0) = \int_0^l -g(R(\gamma', V)\gamma', V)dt = - \int_0^l K(\gamma', V) < 0.$$

Consecuentemente existen curvas lo suficientemente cercanas a  $\gamma$  que conectan a  $N$  y  $Q$  de menor longitud que  $\gamma$ , una contradicción. Por lo tanto  $N \cap Q \neq \emptyset$ .  $\square$

### 3.3. Teoría de Morse

En esta sección se desarrollan algunos de los elementos básicos de la teoría de Morse. Para referencias de los teoremas no demostrados y mayor profundidad consúltese [Mil63].

La idea básica de la teoría de Morse es estudiar la topología de una variedad a través de las singularidades de las funciones diferenciables definidas sobre ella. El caso genérico y más visualizable es cuando la variedad está encajada en  $\mathbb{R}^n$  y la función es una de las funciones coordenadas. Cada

“curva nivel”  $f^{-1}(c)$  es una variedad si  $c$  es un valor regular; es intuible que si  $c < b$  y no hay valores críticos entre  $c$  y  $b$  entonces  $f^{-1}(c)$  y  $f^{-1}(b)$  son difeomorfas. En los valores críticos de la función el tipo topológico de la fibra  $f^{-1}(c)$  cambia. El éxito de la teoría de Morse proviene de haber reconocido y clasificado los cambios posibles en el tipo de homotopía de una fibra a otra al pasar un valor crítico. La clasificación permite reconstruir la estructura homotópica de la variedad a partir de la información de la función. El análisis es adaptable al espacio de lazos  $\Omega(M)$  utilizando la función de energía  $E$  junto con la información de la curvatura para extraer conclusiones topológicas. No se persigue esta línea de investigación. Véase la nota al final de la sección A.2 y [Mil63]. Nos quedamos con algunas de las herramientas básicas.

El uso de las técnicas de la teoría de Morse al caso métrico es el interés principal de esta sección. Las ideas relacionadas fueron desarrolladas inicialmente por Grove-Shiohama [GS77] y expandidas por Gromov [Gro81]. Para una exposición más profunda de la teoría de puntos críticos de funciones distancia véase [Gro93].

Sea  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua no necesariamente diferenciable.

**Definición 3.3.1.** *Un campo vectorial  $X$  definido en un abierto  $U \subset M$  es un campo vectorial tipo gradiente de  $f$  si existe  $\lambda > 0$  tal que*

$$f(\phi_t(p)) \leq f(p) - \lambda t$$

para todo  $p \in U$ , donde  $\phi_t$  es el flujo local generado por  $X$ . Esto es, si  $f$  decrece al menos tan rápido como una función lineal a lo largo de las líneas integrales de  $X$ .

**Lema 3.3.1.** *Sea  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua tal que  $f^{-1}[a, b]$  es compacto. Si existe un campo vectorial tipo gradiente de  $f$  en una vecindad de  $f^{-1}[a, b]$  entonces  $f^{-1}[-\infty, a]$  es un retracto por deformación de  $f^{-1}[-\infty, b]$ . Este retracto lleva  $f^{-1}(b)$  a  $f^{-1}(a)$  a través de un homeomorfismo. Aún más  $f^{-1}(a)$  y  $f^{-1}(b)$  tienen una estructura de variedad topológica y  $f^{-1}[a, b]$  es homeomorfo a  $f^{-1}(a) \times [0, 1]$ . Si  $f^{-1}(a)$  y  $f^{-1}(b)$  son subvariedades diferenciables entonces los homeomorfismos enunciados son difeomorfismos.*

**Demostración** Sea  $C = f^{-1}[a, b]$  y  $U$  una vecindad en la cual existe un campo tipo gradiente  $X$  de  $f$ . Sean  $C \subset V \subset W \subset U$  abiertos tales que  $\bar{V} \subset W$ ,  $\bar{W} \subset U$  y  $\bar{W}$  es compacto, y  $\mu : M \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable tal que  $\mu(x) = 1$  en  $\bar{V}$  y  $\mu(x) = 0$  en  $M - W$ . El campo vectorial  $Y = \mu X$  es diferenciable, coincide con  $X$  en  $C$  y está definido en la totalidad de  $M$ . Dado que el soporte de  $Y$  es compacto ( $\text{sop}(Y) \subset \bar{W}$ ) el flujo inducido por  $Y$  es completo. Sea  $\varphi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$  el flujo de  $Y$ .

Sea  $p \in C$ . Dado que  $Y$  es un campo tipo gradiente de  $f$  en  $V$  si  $t > 0$  es tal que  $\varphi(p, t) \in V$  entonces

$$f(\varphi(p, t)) \leq f(p) - \lambda t.$$

Esto implica que existen únicos  $g(p)$  y  $h(p)$  tales que  $\varphi(p, g(p)) \in f^{-1}(a)$  y  $\varphi(p, h(p)) \in f^{-1}(b)$ . Por la continuidad del flujo,  $g$  y  $h$  son continuas y luego

$$H(t, p) = \begin{cases} p & p \notin C \\ \varphi(p, tg(p)) & p \in C \end{cases} \quad t \in [0, 1]$$

define un retracto de  $f^{-1}[-\infty, b]$  en  $f^{-1}[-\infty, a]$ . Nótese que  $H$  deja fijo a los puntos de  $f^{-1}[-\infty, a]$ , por lo que  $f^{-1}[-\infty, a]$  es un retracto fuerte por deformación de  $f^{-1}[-\infty, b]$ . Además  $\varphi(\cdot, g(\cdot)) : f^{-1}(b) \rightarrow f^{-1}(a)$  y  $\varphi(\cdot, h(\cdot)) : f^{-1}(b) \rightarrow f^{-1}(a)$  son inversas, por lo que  $f^{-1}(a) \cong f^{-1}(b)$ .

Sea  $p \in f^{-1}(a)$  y  $t \in \mathbb{R}$  pequeño de tal forma que  $p' = \varphi(p, t) \in f^{-1}(a, b)$ . Para  $\varepsilon > 0$  pequeño  $\exp'_p(B_\varepsilon^\perp(0))$  es una subvariedad encajada en  $f^{-1}(a, b)$ , donde  $B_\varepsilon^\perp(0)$  son los vectores en  $T_p M$  perpendiculares a la curva integral  $\varphi(p', t)$  y de norma  $\leq \varepsilon$ . El mapeo  $\psi : B_\varepsilon^\perp(0) \rightarrow f^{-1}(a)$  dado por  $\psi(v) = \varphi(\exp_{p'}(v), g(\exp_{p'}(v)))$  es un homeomorfismo y por lo tanto define una parametrización  $(B_\varepsilon^\perp(0), \psi)$  en  $p$ . Estas parametrizaciones le brindan a  $f^{-1}(a)$  estructura de variedad topológica. Análogamente  $f^{-1}(b)$  es una variedad topológica. La función  $\Phi : f^{-1}(a) \times [0, 1] \rightarrow C$  dada por  $\Phi(p, t) = \varphi(p, th(p))$  es un homeomorfismo.

Finalmente si  $f^{-1}(a)$  y  $f^{-1}(b)$  son subvariedades diferenciables, dado que  $\varphi$  es diferenciable, las funciones  $h$  y  $g$  restringidas a dichas subvariedades son diferenciables, por lo que  $\varphi(\cdot, g(\cdot))$ ,  $\varphi(\cdot, h(\cdot))$  y  $\Phi$  son difeomorfismos.  $\square$

En la teoría clásica de Morse se utiliza que si  $f$  es una función diferenciable sin valores críticos en  $[a, b]$  entonces existe un campo vectorial tipo gradiente en  $f^{-1}[a, b]$ , v.g.  $-\nabla f$ . Luego  $f^{-1}(a)$  es difeomorfo a  $f^{-1}(b)$ . En este trabajo se usarán las siguientes funciones para extraer información geométrica

**Definición 3.3.2.** Sea  $A \subset M$  un subconjunto cerrado. La función  $d_A : M \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $d_A(x) = \inf\{d(x, y) | y \in A\}$  es la función distancia a  $A$ .

Las funciones distancia rara vez son diferenciables, sin embargo siempre tienen derivadas direccionales, compárese con C.5.1. Se usará la siguiente notación: si  $A \subset M$  y  $p \in M - A$  entonces  $A'_p \subset T_p M$  denota el conjunto de vectores unitarios  $v \in T_p M$  tales que existe una geodésica  $\gamma : [0, l] \rightarrow M$  tal que  $\gamma(0) = p$ ,  $\gamma'(0) = v$ ,  $\gamma(l) \in A$  y  $L(\gamma) = d(p, A)$ .

Si  $V, W \subset T_p M$  son subconjuntos de vectores unitarios entonces

$$\angle VW = \inf\{\angle(v, w) \mid v \in V, w \in W\}.$$

**Proposición 3.3.2.** Sea  $A \subseteq M$  un conjunto compacto. Si  $\alpha : [0, \varepsilon) \rightarrow M$  es una curva diferenciable y unitaria con  $\alpha'(0) = v$  y  $\alpha(0) = p \in M - A$  entonces la función  $d_A \circ \alpha$  tiene derivada derecha en 0 y

$$(d_A \circ \alpha)'(0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{d_A(\alpha(t)) - d_A(p)}{t} = -\cos \angle A'_p v.$$

En vista de lo anterior es natural definir un punto crítico de una función distancia como sigue:

**Definición 3.3.3.** Sea  $A \subset M$ .  $p$  es un punto crítico de  $d_A$  o de  $A$  si para todo  $v \in T_p M$  existe una geodésica minimizante  $\gamma$  de  $p$  en  $A$  tal que  $\angle v A'_p \leq \pi/2$ . Si  $A = \{q\}$  se dice que  $p$  es un punto crítico de  $q$ .

**Lema 3.3.3** (Berger). Sean  $p$  y  $q$  tales que  $\text{diam}(M) = d(p, q)$  entonces  $p$  y  $q$  son mutuamente críticos.

**Demostración** Por simetría basta con probar que  $p$  es un punto crítico de  $q$ . Supóngase que existe  $v \in T_p M$  tal que  $\angle v A'_p > \pi/2$ . Sea  $\gamma$  la geodésica radial unitaria con  $\gamma(0) = p$  y  $\gamma'(0) = v$ . Por la proposición anterior  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{d_q(\gamma(t)) - d_q(p)}{t} = -\cos \angle A'_p v > 0$ . Esto implica que existen puntos  $p' \in \gamma$  que satisfacen  $d(p', q) > d(p, q)$ , lo cual es contradictorio.  $\square$

**Lema 3.3.4.** Sea  $A \subset M$  compacto. Si  $A$  no tiene puntos críticos en  $\overline{B}_{r_1}(A) \setminus B_{r_2}(A)$  con  $r_1 > r_2$  y tal conjunto es compacto entonces  $d_A$  tiene un campo tipo gradiente en una vecindad de  $\overline{B}_{r_1}(A) \setminus B_{r_2}(A)$ .

**Demostración** Si  $x$  no es un punto crítico de  $A$  entonces existe  $v_x \in T_x M$  tal que  $\angle v_x \gamma'(0) < \pi/2$  para toda geodésica minimizante  $\gamma$  de  $x$  a  $A$ . Sea  $W^x$  cualquier campo vectorial en una vecindad de  $x$  con  $(W^x)_x = v_x$ . Si  $p_n \rightarrow x$  es una sucesión de puntos junto con geodésicas minimizantes  $\gamma_n$  de  $p_n$  a  $A$  tales que  $\angle W_{p_n}^x \gamma_n' \geq \pi/2$ , entonces  $\gamma_n$  tiene una subsucesión convergente a  $\gamma$  geodésica minimizante de  $x$  a  $A$  tal que  $\angle v_x \gamma' \geq \pi/2$ , lo cual contradice la hipótesis de no criticalidad. Luego existe una vecindad  $U_x$  de  $x$  suficientemente pequeña tal que  $\angle W^x(p) \gamma_p' < \pi/2 - \varepsilon_x$  para toda geodésica minimizante  $\gamma_p$  de  $p \in U_x$  a  $A$ , donde  $\varepsilon_x > 0$  es un número suficientemente pequeño. Nótese que también existe  $\nu_x > 0$  tal que  $\angle (-W_x) A'_x > \pi/2 + \nu_x$ . Sea  $C = \overline{B_{r_1}(p)} \setminus B_{r_2}(p)$ . Las vecindades  $\{U_x\}_{x \in A}$  previamente construidas forman una cubierta de  $C$ . La compacidad de  $C$  permite extraer una subcubierta finita  $U_{x_1}, \dots, U_{x_m}$ . Sea  $\phi_i$  una partición de la unidad subordinada a  $U_{x_1}, \dots, U_{x_m}$  y defínase el campo vectorial

$$Z = \sum_{i=1}^m \phi_i W_{x_i}.$$

Sea  $W$  el campo  $Z$  normalizado.  $W$  es un campo vectorial diferenciable en una vecindad de  $A$ . Además si  $\varepsilon = \min \{\varepsilon_{x_i}\}$  y  $\nu = \min \{\nu_{x_i}\}$  entonces

$$\angle W_x A'_x < \pi/2 - \varepsilon \quad y \quad \angle (-W_x) A'_x > \pi/2 + \nu$$

para todo  $x \in C$ .

Sea  $\varphi_t$  el flujo de  $W$ . Por 3.3.2

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{d_A(\varphi_t(x)) - d_A(x)}{t} &= -\cos \angle A'_x W_x > \delta_1 \\ \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{d_A(\varphi_{-t}(x)) - d_A(x)}{t} &= -\cos \angle A'_x (-W_x) < -\delta_2 \end{aligned}$$

para algunos  $\delta_1, \delta_2 > 0$ . Se sigue que existe  $M > 0$  tal que  $d_A(\varphi_t(x)) < d_A(x) - Mt$ . Es decir  $W$  es un campo tipo gradiente para  $d_A$  en  $C$ .  $\square$

Del lema 3.3.1 se concluye

**Corolario 3.3.5.** *Sea  $A$  compacto. Si no existen puntos críticos de  $A$  en  $\overline{B_{r_1}(A)} \setminus B_{r_2}(A)$  y este conjunto es compacto entonces  $B_{r_1}(A)$  y  $B_{r_2}(A)$  son homotópicos y sus fronteras homeomorfas. Aún más  $B_{r_1}(A)$  es homeomorfo a  $B_{r_2}(A) \cup \partial B_{r_2}(A) \times [0, 1]$ .*

**Corolario 3.3.6** (Lema del alma). *Sea  $A$  una subvariedad compacta de  $M$ . Si  $A$  no tiene puntos críticos en  $B_r(A) - A$  entonces  $\overline{B_r(A)}$  es difeomorfa al haz normal de  $A$ .*

**Demostración** Sea  $\varepsilon > 0$  tal que  $B_\varepsilon(A)$  es una vecindad tubular difeomorfa al haz normal a través de  $\exp|_A^\perp$ . Sea  $X$  un campo tipo gradiente de  $d_A$  en una vecindad de  $\overline{B_r(A)} \setminus B_{\varepsilon/2}(A)$ . Dado que en  $B_\varepsilon(A)$  las únicas geodésicas minimizantes de  $p \in B_\varepsilon(A) - A$  a  $A$  son radiales, i.e. de la forma  $\exp|_A^\perp(tv)$  para algún  $v \in \nu A$ , es posible hacer que  $X$  coincida con el campo radial en  $B_\varepsilon(A)$ , véase la demostración de 3.3.4. Como en 3.3.1 se utiliza el flujo de  $X$  para establecer el difeomorfismo  $B_r(A) \cong \nu A$ .  $\square$

Basta una pequeña modificación de los lemas 3.3.1 y 3.3.4 para dar una demostración del siguiente corolario.

**Corolario 3.3.7.** *Si  $A$  no tiene puntos críticos a distancia  $d$  con  $d \geq r$  entonces  $M$  es homotópico a  $B_r(A)$ . Es decir,  $M$  es del tipo de homotopía de una variedad compacta con frontera (posiblemente vacía).*

### 3.4. Homotopía y homología

Sea  $M$  una variedad completa con curvatura no negativa.

**Lema 3.4.1.** *Sea  $\lambda > 1$ ,  $p \in M$ ,  $q_1$  punto crítico de  $p$  y  $q_2 \in M$  tales que  $d(p, q_2) > \lambda d(p, q_1)$ , entonces si  $pq_1$  y  $pq_2$  son geodésicas minimizantes entonces*

$$\angle q_1 p q_2 > \arccos(1/\lambda).$$

**Demostración** Sean  $pq_2$  y  $q_1 q_2$  geodésicas minimizantes. Como  $q_1$  es un punto crítico de  $p$  existe una geodésica minimizante  $pq_1$  tal que

$$\angle p q_1 q_2 \leq \pi/2.$$

Sea  $\Delta \bar{p} \bar{q}_1 \bar{q}_2$  un triángulo de comparación de  $\Delta p q_1 q_2$  en  $\mathbb{R}^2$ . Si  $\theta = \angle p q_1 q_2$  y  $\bar{\theta} = \angle \bar{p} \bar{q}_1 \bar{q}_2$  entonces por el teorema de Toponogov  $\pi/2 \geq \theta \geq \bar{\theta}$ . Sea  $x = |\bar{p} \bar{q}_1| = |p q_1|$ ,  $y = |\bar{p} \bar{q}_2| = |p q_2|$  y  $z = |\bar{q}_1 \bar{q}_2| = |q_1 q_2|$ . Por la ley de los cosenos

$$y^2 = x^2 + z^2 - 2xz \cos \bar{\theta} \leq x^2 + z^2 \quad (3.1)$$

y también si  $\alpha = \angle q_1 p q_2$  y  $\bar{\alpha} = \angle \bar{p} \bar{q}_1 \bar{q}_2$

$$z^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos \bar{\alpha}; \quad (3.2)$$

por Toponogov,  $\alpha \geq \bar{\alpha}$ . De 3.1 y 3.2 obtenemos

$$\cos \bar{\alpha} \leq x/y.$$

Por hipótesis  $x/y < 1/\lambda$  y luego  $\bar{\alpha} > \arccos(1/\lambda)$ . Ahora si  $pq_1$  y  $pq_2$  son geodésicas minimizantes cualesquiera, por el teorema de Toponogov aplicado al triángulo geodésico  $\Delta p q_1 q_2$  se tiene que  $\angle q_1 p q_2 \geq \bar{\alpha} > \arccos(1/\lambda)$ .  $\square$

La prueba anterior permanece válida para variedades con curvatura seccional acotada inferiormente por una constante  $k < 0$  y con diámetro menor que  $D$  con la ligera modificación  $\alpha > \arccos(\lambda \sqrt{-k} \coth(\sqrt{-k} D))$ .

**Proposición 3.4.2.** *Sea  $M$  una variedad completa de curvatura seccional no negativa. Si  $\lambda > 1$  y  $p \in M$ , solo existe una cantidad finita de puntos críticos  $q_1, \dots, q_m$  de  $p$  tales que  $d(q_{i+1}, p) \geq \lambda d(q_i, p)$ .*

**Demostración** Sean  $q_1, \dots, q_m$  puntos críticos de  $p$  tales que  $d(q_{i+1}, p) \geq \lambda d(q_i, p)$ . Si  $i < j$  entonces inductivamente  $d(q_j, p) > \lambda^{j-i} d(q_i, p) > \lambda(q_i, p)$ . Por el lema anterior 3.4.1 si  $pq_i$  son geodésicas minimizantes, entonces

$$\angle q_i p q_j > \arccos(1/\lambda);$$

esto es, los puntos  $pq'_i \in \mathbb{S}^{n-1} \subset T_p M$  forman un conjunto  $\arccos(1/\lambda)$ -separado (es decir, la distancia entre dos es al menos  $\arccos(1/\lambda)$ ). Por la compacidad de  $\mathbb{S}^{n-1}$  existe una cantidad máxima de puntos en tal conjunto, lo cual demuestra la proposición. Una aproximación de  $m$

puede obtenerse como sigue. Las bolas de radio  $\arccos(1/\lambda)/2$  con centro en  $\gamma'_i(0)$  no se intersecan, entonces  $mVol(B_{\arccos(1/\lambda)/2}(p)) \leq \text{vol}(\mathbb{S}^{n-1})$ , donde  $p \in \mathbb{S}^{n-1}$  es cualquier punto, y luego

$$m \leq \frac{\text{vol}(\mathbb{S}^{n-1})}{\text{vol}(B_{\arccos(1/\lambda)/2}(p))}.$$

□

**Teorema 3.4.3** (Gromov). *Sea  $M$  una variedad completa con curvatura seccional no negativa.  $M$  tiene el tipo de homotopía de una variedad compacta con frontera (posiblemente vacía).*

**Demostración** Sea  $\lambda > 1$  y  $p \in M$ . Existe  $R > 0$  tal que  $p$  no tiene puntos críticos a distancia  $\geq R$ . De lo contrario se podría formar una cadena infinita de puntos críticos  $q_1, q_2, \dots$  de  $p$  tales que  $d(q_{i+1}, p) < \lambda d(q_i, p)$  contradiciendo la proposición anterior. Por el corolario 3.3.7  $M$  es homotópica a  $B_R(p)$ , la cual es una variedad compacta con frontera (posiblemente vacía). □

En la siguiente sección se dará una versión más fuerte del teorema anterior.

**Teorema 3.4.4** (Gromov). *Existe una constante  $c(n)$  tal que para toda variedad  $M$   $n$ -dimensional con curvatura no negativa  $\pi_1(M)$  puede ser generado por menos de  $c(n)$  elementos. Existe una constante  $c(n, k, D)$  tal que si  $M$  es una variedad  $n$ -dimensional con curvatura  $K_M \geq k$ ,  $k \leq 0$ , y con  $\text{diam}(M) \leq D$  entonces  $\pi_1(M)$  puede ser generado por menos de  $c(n, k, D)$  elementos.*

**Demostración** Sea  $\pi_1(M, p)$  el grupo fundamental de  $M$  con base en  $p$ , donde  $M$  es una variedad completa con curvatura seccional  $\geq k$ , con  $k \leq 0$ .

Primero se considera la cubierta universal  $\pi: \widetilde{M} \rightarrow M$  con la métrica cubriente y sea  $q \in \widetilde{M}$  cualquier punto sobre  $p$  (es decir tal que  $\pi(q) = p$ ).  $\pi_1(M, p)$  actúa isométricamente en  $\widetilde{M}$  a través de transformaciones de cubierta. Si  $[\gamma] = g \in \pi_1(M, p)$  sea  $\varphi_g$  la transformación de cubierta correspondiente. Defínase  $|g| = d(q, \varphi_g(q))$  y obsérvese que si  $\sigma: q \rightarrow \varphi_g(q)$  es cualquier trayectoria entonces  $\pi(\sigma) \in g$  y  $L(\pi(\sigma)) = L(\sigma)$  (isometría local). Por el contrario si  $\sigma \in g$  es un lazo entonces su levantamiento a  $\widetilde{M}$  con inicio en  $q$  tiene la misma longitud y es una trayectoria  $q \rightarrow \varphi_g(q)$ ; por lo tanto  $|g|$  es la longitud de la curva con longitud mínima en  $g$ . Si  $r > 0$  entonces no puede existir una cantidad infinita de elementos  $g \in \pi_1(M, p)$  con  $|g| < r$  pues como la bola  $B_r(q)$  es compacta existiría un punto de acumulación de estos elementos, lo cual contradice la propiedad de cubriente. Así para todo  $S \subseteq G$  existe  $g$  tal que  $|g| = \min\{|h| \mid h \in S\}$ . Se construye un conjunto generador de la siguiente manera. Sea  $g_1 \in \pi_1(M, p)$  tal que  $|g_1| = \min\{|g| \mid g \in \pi_1(M, p)\}$ . Recursivamente, si  $g_1, \dots, g_m$  no generan a  $G$ , sea  $g_{m+1} \in G - \langle g_1, \dots, g_m \rangle$  tal que  $|g_{m+1}| = \min\{|g| \mid g \in G - \langle g_1, \dots, g_m \rangle\}$ . Sea  $l_i = |g_i| = d(q, \varphi_{g_i}(p))$  y  $l_{ij} = d(\varphi_{g_i}(p), \varphi_{g_j}(p))$ . Por la construcción es evidente que si  $i < j$  entonces  $l_i \leq l_j$ , sin embargo también se satisface que  $l_{ij} \geq l_j$ . Para demostrar esto supóngase que  $l_{ij} < l_j$  y sea  $g = g_j^{-1}g_i$ . Entonces

$$l_j > l_{ij} = d(\varphi_{g_i}(q), \varphi_{g_j}(q)) = d(\varphi_{g_j^{-1}}\varphi_{g_i}(q), \varphi_{g_j^{-1}}\varphi_{g_j}(q)) = d(\varphi_g(q), q).$$

Sin embargo, obsérvese que  $g \in G - \langle g_1, \dots, g_{j-1} \rangle$  lo cual contradice la elección de  $g_j$ .

Sean  $q_i = \varphi_{g_i}(q)$  y  $qq_i, q_iq_j$  geodésicas minimizantes unitarias. Para  $j > i$  sean  $\alpha_{ij} = \angle q_iqq_j$  y  $\bar{\alpha}_{ij}^k$  en ángulo  $\angle \bar{q}_i\bar{q}\bar{q}_j$  donde  $\Delta\bar{q}_i\bar{q}\bar{q}_j$  es un triángulo de comparación en  $M^k$ . Por el teorema de Toponogov  $\alpha_{ij} \geq \bar{\alpha}_{ij}$ .

Se divide el análisis en dos partes.

Si  $k = 0$  entonces por la ley de cosenos

$$\cos \bar{\alpha}_{ij} = \frac{l_i^2 + l_j^2 - l_{ij}^2}{2l_i l_j} \leq \frac{l_i^2 + l_j^2 - l_j^2}{2l_i^2} = \frac{1}{2}$$

y luego

$$\alpha_{ij} \geq \bar{\alpha}_{ij} \geq \pi/3. \quad (3.3)$$

Si  $k < 0$  entonces y  $\text{diam}(M) \leq D$  entonces resulta que  $l_i \leq 2D$ . Para demostrar esto sea  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  cualquier trayectoria cerrada basada en  $p$ . Sea  $\{a = t_0, \dots, t_s = b\}$  una partición de  $[a, b]$  tal que  $x_i = \gamma(t_i)$  satisfacen  $d(x_i, x_{i+1}) \leq \varepsilon$ . Si  $px_i$  son geodésicas minimizantes y  $\gamma^i$  es la restricción de  $\gamma$  a  $[t_i, t_{i+1}]$  entonces es claro que los lazos  $\beta_i = px_i \cup \gamma^i \cup x_{i+1}p$  satisfacen que  $L(\beta_i) \leq 2D + \varepsilon$  y  $[\beta_1] \cdots [\beta_{s-1}] = [\gamma]$ . Por otro lado  $|g|$  es la longitud del lazo de longitud mínima en la clase  $g$ , y luego se ha demostrado que todo elemento de  $G$  puede ser generado con elementos  $g \in G$  con  $|g| \leq 2D + \varepsilon$ . Por lo tanto  $|l_i| \leq 2D + \varepsilon$  para toda  $\varepsilon > 0$  de donde se sigue la afirmación.

Por la ley hiperbólica de cosenos 1.3.2.

$$\begin{aligned} \cos \bar{\alpha}_{ij} &= \frac{\cosh(\sqrt{-k}l_{ij}) - \cosh(\sqrt{-k}l_i) \cosh(\sqrt{-k}l_j)}{\sinh(\sqrt{-k}l_i) \sinh(\sqrt{-k}l_j)} \\ &\leq \frac{\cosh(\sqrt{-k}l_j)^2 - \cosh(\sqrt{-k}l_j)}{\sinh(\sqrt{-k}l_j)^2} \\ &= \frac{\cosh(\sqrt{-k}l_j)}{\cosh(\sqrt{-k}l_j) + 1} \\ &\leq \frac{\cosh(2\sqrt{-k}D)}{\cosh(2\sqrt{-k}D) + 1} \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\alpha_{ij} \geq \arccos \left( \frac{\cosh(2\nu D)}{\cosh(2\nu D) + 1} \right). \quad (3.4)$$

Sean

$$r_\nu = \begin{cases} \arccos \left( \frac{\cosh(2\nu D)}{\cosh(2\nu D) + 1} \right) & \nu > 0 \\ \pi/3 & \nu = 0 \end{cases}$$

y  $V = \{qq'_i\}$  el conjunto de vectores tangentes en  $\mathbb{S}^{n-1} \subseteq T_q \widetilde{M}$ . Luego  $\{B_{r_\nu/2}(\gamma'_i(0))\}$  son ajenas en  $\mathbb{S}^{n-1}$  y por lo tanto la lista  $g_1, g_2, \dots$  no puede ser infinita. Es decir existe  $m$  tal que  $g_1, \dots, g_m$  generan a  $\pi_1(M, p)$  y además

$$m \text{ vol}(B_{r_\nu/2}(x)) \leq \text{vol}(\mathbb{S}^{n-1})$$

donde  $x \in \mathbb{S}^{n-1}$  es cualquier punto. Luego  $\pi_1(M, p)$  está generado por a lo más

$$\frac{\text{vol}(\mathbb{S}^{n-1})}{\text{vol}(B_{r_\nu/2}(x))} = C(n, \nu, D).$$

En caso de que  $\nu = 0$  la constante  $C(n, \nu, D)$  no depende de  $D$ . □

Los números de Betti de una variedad son las dimensiones de la parte libre de los grupos de homología,  $b_i = \dim H_i(M)$ . En 1946 y con la asistencia de la teoría de Hodge de formas armónicas, Bochner desarrolló un método para extraer restricciones homológicas de condiciones métricas. El teorema principal restringe el número de Betti  $b_1$  cuando  $M$  es una variedad completa de curvatura no negativa. Ya se ha visto que si la curvatura de  $M$  es  $\geq k > 0$  entonces  $\pi_1(M)$  es finito. Por el teorema de Hurewicz  $H_1(M) = \pi_1(M)/[\pi_1(M), \pi_1(M)]$  es pura torsión y luego  $b_1 = \dim H_1(M) = 0$ . Sin embargo para el caso curvatura  $\geq 0$  se tiene el siguiente teorema.

**Teorema 3.4.5** (Bochner). *Sea  $M$  una variedad riemanniana completa  $n$ -dimensional con curvatura de Ricci no negativa, entonces  $b_1 \leq n$ . Si  $b_1 = n$  entonces  $M$  es un toro plano.*

Usando la teoría de puntos críticos de funciones distancia y el teorema de Toponogov, Gromov en 1981 generalizó ampliamente el resultado de Bochner. Encontró una manera burda de determinar cómo cambia la homología de una bola a otra cuando se pasa por un punto crítico. Esta aproximación le permitió llegar a una sorprendente cota para los números de Betti de cualquier variedad de curvatura no negativa. La demostración hace uso de resultados no elementales de topología algebraica y carecemos del espacio para exponerlos. Sin embargo la importancia del teorema es de tal magnitud que una omisión sería penosa. Consúltese la demostración en [Gro81] y las herramientas algebraicas necesarias en [BT82].

**Teorema 3.4.6** (Gromov). *Existe una constante  $c(n)$  tal que si  $M$  es una variedad  $n$ -dimensional con curvatura no negativa entonces  $\sum b_i \leq c(n)$ . Existe una constante  $c(n)$  tal que si  $M$  es una variedad  $n$ -dimensional con curvatura  $M > -k^2$  y diámetro  $\text{diam}(M) \leq D$  entonces  $\sum b_i \leq c(n)^{1+kD}$ .*

La cota que se desprende de la demostración anterior es aproximadamente  $c(n) \leq 2^{an^3}$  con  $a$  constante. Sin embargo Gromov conjetura que

**Conjetura 1.** *Si  $M$  es una  $n$ -variedad riemanniana completa con curvatura no negativa entonces  $\sum_i b_i \leq 2^n$ .*

Nótese que  $\sum_i b_i = 2^n$  para el toro  $n$ -dimensional  $\mathbb{T}^n$ . Por otro lado, aunque  $\mathbb{S}^p \times \mathbb{S}^{n-p}$  y  $\mathbb{C}P^n$  admiten métricas de curvatura no negativa, suficientes sumas conexas de dichas variedades no pueden admitir métricas de curvatura no negativa puesto que los números de Betti crecen arbitrariamente bajo este proceso.

## 3.5. Teorema del alma

Sea  $M$  una variedad completa con curvatura seccional no negativa. Si la curvatura satisface  $K_M \geq H > 0$  entonces es compacta. Como ya se ha mencionado, este resultado tiene al paraboloide de revolución como contraejemplo en el caso  $K_M \geq 0$ . Sin embargo, en este caso se tiene el siguiente resultado.

**Teorema 3.5.1** (Cheeger-Gromoll). *Sea  $M$  una variedad completa con curvatura seccional no negativa. Entonces existe una subvariedad compacta y totalmente geodésica  $S$ , llamada el alma de  $M$ , tal que  $M$  es difeomorfa al haz normal de  $S$  en  $M$ .*

La construcción del alma requiere muchos preliminares. Se mencionan las definiciones más relevantes y se demostrarán la mayoría de los lemas importantes, sin embargo la demostración no es exhaustiva. Consúltese [CE75] para los detalles de la demostración o [Sha74, Pet06] para otras demostraciones.

**Definición 3.5.1.** *Un subconjunto  $S$  de una variedad riemanniana  $M$  es convexo si contiene todas las geodésicas minimizantes entre sus puntos.  $S$  es totalmente convexo si contiene todas las geodésicas entre sus puntos.*

También se tiene una versión local. Recuérdese que para todo punto  $p \in M$  existe  $c(p) > 0$  tal que  $B_{c(p)}$  es un conjunto convexo.

**Definición 3.5.2.** *Un subconjunto  $T$  de  $M$  es localmente convexo si para todo  $p \in T$  existe  $\varepsilon(p) < c(p)$  tal que  $B_{\varepsilon(p)}(p) \cap T$  es totalmente convexo.*

Nótese que un conjunto totalmente convexo es conexo y localmente convexo, y que una subvariedad totalmente geodésica es localmente convexa.

En lo que sigue se estudia la estructura local de los conjuntos localmente convexos.

Sea  $T$  un conjunto localmente convexo y conexo. Para cada  $k \in \mathbb{N}$  sea

$$sv_k(T) = \{N \mid N \text{ es una } k\text{-subvariedad abierta encajada en } M \text{ con } N \subset T\}.$$

Defínase  $\dim(T) = k$  como el número  $k$  máximo tal que  $sv_k(T) \neq \emptyset$  y

$$N = \bigcup_{N' \in sv_k(T)} N'.$$

**Proposición 3.5.2.**  *$N$  es una subvariedad encajada de dimensión  $k$ .*

**Demostración** Sean  $p \in N$  y  $N' \in sv_k(T)$  tal que  $p \in N'$ . Se demuestra que  $B_{\varepsilon(p)}(p) \cap N = B_{\varepsilon(p)}(p) \cap N'$ , lo cual implica la proposición. Supóngase que existe  $q \in N \cap B_{\varepsilon(p)}(p)$  pero que  $q \notin N'$ . Sea  $p' \in N' \cap B_{\varepsilon(p)}(p)$  a distancia mínima de  $q$ . Luego la geodésica radial de  $q$  a  $p'$  es ortogonal a  $T_{p'}N'$ .

Para una vecindad  $V$  de  $p'$  en  $N'$  la función cono  $C : V \times (0, 1) \rightarrow M$  dada por  $C(s, t) = \exp_q(t \exp_q^{-1}(s))$  es un encaje.  $N$  es totalmente geodésico en  $B_{\varepsilon(p)}(p)$ , por lo que las geodésicas  $\gamma_s(t) = \exp_q(t \exp_q^{-1}(s))$  están completamente contenidas en  $N$ . Se ha encajado  $V \times (0, 1)$ , una variedad de dimensión  $k+1$ , en  $T$ , lo cual contradice la definición de  $k$ . Por lo tanto  $B_{\varepsilon(p)}(p) \cap N = B_{\varepsilon(p)}(p) \cap N'$ .  $\square$

El siguiente lema brinda la mayoría de la información sobre la estructura de  $T$ .

**Lema 3.5.3.** *Sean  $p \in T$  y  $p' \in B_{\varepsilon(p)/4}(p) \cap T$  y  $q \in B_{\varepsilon(p)/4}(p) \cap N$ . Si  $\gamma : [0, l] \rightarrow M$  es la geodésica radial de  $q$  a  $p$  entonces  $\gamma([0, l]) \subseteq N$ . Si  $p' \neq p$  entonces  $\gamma(t) \notin T$  para  $l < t < l + \varepsilon(p)/4$ .*

**Demostración** Sea  $W$  una subvariedad de  $N$  de dimensión  $k-1$  que pasa por  $p'$  tal que  $W$  es transversal a  $\gamma'(0)$ . Luego el cono  $C : W \times (0, 1) \rightarrow T$  definido por  $C(s, t) = \exp_q(t \exp_q^{-1}(s))$  es un encaje para  $W$  suficientemente pequeño. La convexidad local asegura que  $C(s, t) \in T$  y luego  $C(W \times (0, 1)) \subseteq N$ . Como  $\gamma(t) = C(p', l-t)$  entonces  $\gamma([0, l]) \subset N$ .

Si  $p \notin N$  y  $\gamma(t) \in T$  para algún  $l < t < l + \varepsilon(p)/4$  entonces  $\gamma(t) \in B_{\varepsilon(p)/2}(p)$  y luego se puede construir otro cono con vértice en  $\gamma(t)$  y base alguna hipersuperficie en  $N'$  transversal a  $\gamma$  en  $p'$ . Esto mostraría que  $p \in N$ .  $\square$

**Proposición 3.5.4.** *Si  $T$  es conexo entonces  $T \subseteq \overline{N}$ .*

**Demostración** Sea  $N_0$  una componente conexa de  $N$ . Si  $T \not\subset \overline{N_0}$  entonces dado que  $N_0$  es abierto en  $N$  y que  $T$  es conexo deben existir  $p \in \overline{T} \cap \overline{N_0}$ ,  $p' \in B_{\varepsilon(p)/4}(p) \cap (T - \overline{N_0})$  y  $q \in B_{\varepsilon(p)/4}(p) \cap N_0$ . Sin embargo el lema estructural anterior nos garantiza que  $p' \in \overline{N_0}$ . Esto también demuestra que  $N$  es conexo, ya que si  $N_1$  es otra componente conexa entonces  $T \subset \overline{N_0} \cap \overline{N_1}$  y por lo tanto  $N_0 = N_1$ .  $\square$

De ahora en adelante  $T$  es un conjunto cerrado, conexo y localmente convexo,  $\text{int} T = N$  y  $\partial T = \overline{N} - N$ .

**Definición 3.5.3.** Sea  $p \in T$ . Se define el cono tangente en  $p$  como

$$C_p = \left\{ v \in T_p M \mid \exp_p(tv) \in \text{int} T \text{ para algún } t < \frac{\varepsilon(p)}{4|v|} \right\} \cup \{0\}.$$

Es claro que si  $p \in N$  entonces  $C_p = T_p N$ , sin embargo en la frontera  $C_p$  nunca es un subespacio vectorial. Solo se usará la información del cono tangente en ciertos puntos.

**Proposición 3.5.5.** Sea  $p \in \partial T$ ,  $q \in \text{int} T$  y  $\gamma : [0, l] \rightarrow M$  una geodésica minimizante de  $q$  a  $p$ . Si  $l = d(p, q) = d(\partial T, q)$  entonces

$$C_p - \{0\} \subset \{v \in T_p M \mid \angle v(-\gamma'(l)) < \pi/2\}.$$

La construcción del alma se basa en la convexidad de la función distancia  $d_{\partial T}$ .

**Proposición 3.5.6.** Sea  $f : T \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida por  $f(p) = d(p, \partial T)$ . Si  $\gamma : [0, l] \rightarrow C$  es una geodésica entonces

$$(f \circ \gamma)(st_1 + (1-s)t_2) \geq s(f \circ \gamma)(t_1) + (1-s)(f \circ \gamma)(t_2)$$

para todo  $0 \leq t_1 < t_2 \leq l$  y  $s \in [0, 1]$ . Si  $f \circ \gamma \equiv c$  en  $[s_1, s_2]$ ,  $\beta$  es una geodésica minimizante de  $\gamma(s_1)$  a  $\partial T$  y  $V$  es el campo vectorial paralelo a lo largo de  $\gamma|_{[s_1, s_2]}$  con  $V(s_1) = \beta'(0)$  entonces para toda  $t \in [s_1, s_2]$

$$\exp_{\gamma(t)}(cV(t)) \in \partial T$$

y la franja  $\phi(s, t) = \exp_{\gamma(t)}(sV(t))$  con  $t \in [s_1, s_2]$  y  $s \in [0, c]$  es plana y totalmente geodésica.

**Demostración** Sean  $p, q \in T$  y  $\gamma : [0, l] \rightarrow T$  una geodésica unitaria con  $\gamma(0) = p$  y  $\gamma(l) = q$ . Sea  $t_0 \in [0, l]$ . Entonces  $d(\gamma(t_0), \partial T) = d(\gamma(t_0), o)$  para alguna  $o \in T$ . Sea  $\sigma : [0, d] \rightarrow T$  una geodésica unitaria minimizante tal que  $\sigma(0) = \gamma(t_0)$ ,  $\sigma(d) = o$  y  $d = d(\gamma(t_0), o)$ .

Se demostrará que para  $\delta > 0$  suficientemente pequeña es posible acotar superiormente la función  $f \circ \gamma$  con la función lineal  $l - (t - t_0) \cos \alpha$  donde  $\alpha = \angle \gamma'(t_0) \sigma'(0)$ . Para esto dividimos el análisis en casos.

Supóngase que  $\alpha = \pi/2$ . Sea  $V$  el campo vectorial paralelo a lo largo de  $\sigma$  tal que  $V(0) = \gamma'(t_0)$ . Por 2.1.4, para  $\varepsilon$  pequeño la curva

$$\sigma_1(t) = \exp_{\sigma(t)}(\varepsilon V(t))$$

no es más larga que su equivalente en  $\mathbb{R}^2$ . Es decir  $L(\sigma_1) \leq d$ . Nótese que  $\sigma_1(t) = \gamma(t_0 + \varepsilon)$ . Sin embargo por la caracterización de  $C_o$  (cfr. 3.5.5) es claro que  $\sigma_1(s) \notin \text{int}(C)$  y por lo tanto  $L(\sigma_1) \geq d(\gamma(t_0 + \varepsilon), \partial T)$  y luego

$$f(\gamma(t_0 + \varepsilon)) \leq d = d - \varepsilon \cos \alpha$$

Nótese que si la igualdad se realiza para algún  $\varepsilon$ , esto indica (compárese con 2.1.4) que la franja  $\varphi(t', t) = \exp_{\sigma(t')}(\varepsilon V(t'))$  con  $(t', t) \in [0, s] \times [0, \varepsilon]$  es plana.

Si  $\alpha > \pi/2$  entonces sea  $V$  el único campo paralelo a lo largo de  $\sigma$  tal que  $V(0) = \lambda_1 \sigma'(0) + \lambda_2 \gamma'(t_0)$  para un par  $\lambda_1, \lambda_2 > 0$  y  $g(V(0), \sigma'(0)) = 0$ . Como en el caso anterior, para  $\varepsilon > 0$  suficientemente chico la curva  $\sigma_1(t) = \exp_{\sigma(t)}(\varepsilon V(t))$  es de longitud  $\leq d$ . Por otro lado la distancia entre  $\gamma(t_0 + \varepsilon)$  y  $\exp_{\sigma(0)}(\varepsilon V(0))$  es menor que  $y$ , donde  $y$  es el lado opuesto al ángulo  $\beta = \alpha - \pi/2$  de un triángulo isósceles en  $\mathbb{R}^2$  con lados iguales de longitud  $\varepsilon$ . Esto es

$$y^2 = 2\varepsilon^2 - 2\varepsilon^2 \cos(\alpha - \pi/2)$$

Luego si  $\tau$  es cualquier geodésica de  $\gamma(t_0 + \varepsilon)$  a  $\exp_{\sigma(0)}(\varepsilon V(0))$ , entonces  $\tau \cup \sigma_1$  es una curva de longitud  $\leq d + \varepsilon \sqrt{2 - 2\cos(\alpha - \pi/2)} \leq d + \varepsilon \cos \alpha$  que une a  $\gamma(t_0 + \varepsilon)$  con un punto fuera del interior de  $C$ , por lo tanto

$$f(\gamma(t_0 + \varepsilon)) \leq d + \varepsilon \cos \alpha$$

En particular,  $f$  no es constante en el intervalo  $[t_0, t_0 + \varepsilon]$ .

Finalmente supóngase que  $\alpha < \pi/2$ . Para  $\varepsilon > 0$  suficientemente chico sea  $m_\varepsilon = \sigma(t_\varepsilon)$  sobre  $\sigma$  tal que  $d(\gamma(t_0 + \varepsilon), m_\varepsilon) = d(\gamma(t_0 + \varepsilon), \sigma)$ . Sea  $\tau$  una geodésica unitaria y minimizante de  $m_\varepsilon$  a  $\gamma(t_0 + \varepsilon)$  y  $V$  el único campo vectorial paralelo a lo largo de  $\sigma$  tal que  $V(t_\varepsilon) = \tau'(0)$ . La curva  $\sigma_1(t) = \exp_{\sigma(t)}(\varepsilon V(t))$  con  $t \in [t_\varepsilon, s]$ , cuya longitud no es mayor a  $d - t_\varepsilon$ , conecta a  $\gamma(t_0 + \varepsilon)$  con algún punto fuera del interior de  $C$  y luego

$$f(\gamma(t_0 + \varepsilon)) \leq d - t_\varepsilon$$

Usando el teorema de Toponogov es fácil ver que  $d - t_\varepsilon \leq d - \varepsilon \cos \alpha$ .

La conclusión  $f(\gamma(t + \varepsilon)) \leq f(\gamma(t)) - \varepsilon \cos \alpha$  siempre es válida para  $\varepsilon$  suficientemente pequeña y luego  $f \circ \gamma$  es cóncava.  $\square$

Por lo tanto,

**Proposición 3.5.7.** *Sea  $T$  un conjunto cerrado y totalmente convexo tal que  $\partial T \neq \emptyset$ . Para cada  $r \in \mathbb{R}^+$  defínase*

$$T^r = \{p \in T \mid d(p, \partial T) \geq r\}$$

y

$$T^{\text{máx}} = \bigcap_{T^r \neq \emptyset} T^r.$$

Para todo  $r > 0$ ,  $T^r$  es totalmente convexo y  $\dim T^{\text{máx}} < \dim T$ .

**Demostración** Sea  $\gamma : [0, l]$  una geodésica con  $\gamma(0), \gamma(l) \in T^r$ . Por 3.5.6

$$d(\gamma(t), \partial T) = d(\gamma((1-t/l)0 + (t/l)l)) \geq (1-t/l)d(\gamma(0), \partial T) + (t/l)d(\gamma(l), \partial T) \geq r;$$

por lo tanto  $\gamma(t) \in T^r$ .

Sea  $\gamma$  una geodésica minimizante de  $p \in T^{\text{máx}}$  a  $\partial T$ . Es obvio que  $\gamma$  no puede intersectar a  $T^{\text{máx}}$  en un intervalo abierto, por lo que  $\dim T^{\text{máx}} < \dim T$ .  $\square$

Nótese que si  $T$  es compacto entonces  $T^{\text{máx}}$  es compacto también.

Dado que la dimensión de  $T^{\text{máx}}$  es estrictamente menor, sucesivas reiteraciones de la proposición anterior deben de terminar en un conjunto totalmente convexo sin frontera. El producto final es el alma de  $M$ . Sin embargo falta encontrar un conjunto totalmente convexo con el cual iniciar la construcción.

En el caso que  $M$  tenga curvatura seccional positiva en todos lados se tiene la siguiente

**Proposición 3.5.8.** *Si  $M$  tiene curvatura seccional positiva y  $T$  es un conjunto cerrado y totalmente convexo entonces  $T^{\text{máx}}$  es un punto.*

**Demostración** Supóngase que existen  $q_1, q_2 \in T^{\text{máx}}$ . Sea  $\gamma : [0, l] \rightarrow M$  una geodésica minimizante de  $q_1$  a  $q_2$ . Dado que  $f \circ \gamma$  no es constante y convexa, donde  $f = d_{\partial A}$ , entonces existe  $s \in (0, l)$  tal que  $f \circ \gamma(s) > f \circ \gamma(0) = d(q_1, \partial T)$ . Luego  $\gamma(s) = q'$  es un punto para el cual  $d(q', \partial T) > d(q_1, \partial T)$ , lo cual contradice la definición de  $T^{\text{máx}}$ .  $\square$

**Definición 3.5.4.** *Un rayo  $\gamma : [0, \infty) \rightarrow M$  es una geodésica unitaria tal que  $d(\gamma(0), \gamma(t)) = t$  para todo  $t > 0$ .*

**Lema 3.5.9.** *Sea  $M$  una variedad completa y no compacta. Para todo  $p \in M$  existe un rayo  $\gamma : [0, \infty) \rightarrow M$  con  $\gamma(0) = p$ .*

**Demostración** Dado que  $M$  es no compacta se pueden tomar  $q_n \in M$  y geodésicas minimizantes y unitarias  $\gamma_n : [0, l_n] \rightarrow M$  de  $p$  a  $q_n$  con  $l_n \rightarrow \infty$ . Sean  $v_n = \gamma'_n(0)$  los vectores unitarios de dirección. Dado que  $\mathbb{S}^{n-1} \subseteq T_p M$  es compacto existe una subsucesión convergente de  $v_n$ . Supóngase, sin pérdida de generalidad, que  $v_n$  es la subsucesión convergente y  $v_n \rightarrow v$ . Considérese la geodésica radial  $\gamma : [0, \infty) \rightarrow M$  tal que  $\gamma(0) = p$  y  $\gamma'(0) = v$ . Si  $l > 0$  entonces para  $N \in \mathbb{N}$  suficientemente grande  $l_n > l$  y los puntos  $\gamma_n(l)$  convergen a  $\gamma(l)$ . Como  $\gamma_n$  es un rayo,

$$d(\gamma_n(l), p) = l;$$

luego,

$$d(\gamma_n(l), p) \rightarrow d(\gamma(l), p) = l;$$

es decir,  $\gamma$  es un rayo.  $\square$

**Proposición 3.5.10.** *Sea  $\gamma : [0, \infty) \rightarrow M$  un rayo en una variedad completa de curvatura seccional no negativa. Si  $M_\gamma$  y  $N_\gamma$  son los conjuntos*

$$N_\gamma = \bigcup_{t>0} B_t(\gamma(t)), \quad M_\gamma = M - N_\gamma,$$

*entonces  $M_\gamma$  es un conjunto totalmente convexo.*

**Demostración** Supóngase lo contrario. Sea  $qq'$  una geodésica unitaria con  $q, q' \in M_\gamma$  y tal que  $qq' \cap M_\gamma \neq \emptyset$ . Sea  $p \in qq'$  tal que  $p \in B_\gamma$ . En particular  $p \in B_{r'}(\gamma(r'))$  para algún  $r'$  y por lo tanto para todo  $r > r'$ . Con  $r > r'$  fijo sea  $c_r = \gamma(r)$  y sea  $p_r \in qq'$  tal que  $d(p_r, \gamma(r)) = d(p, \gamma(r))$ . Sean  $qc_r$  y  $p_r c_r$  geodésicas minimizantes.

Tómese un triángulo de comparación  $\Delta \bar{q}\bar{p}_r\bar{c}_r$  en  $\mathbb{R}^2$ . Si  $\delta = r' - d(p, c_{r'}) > 0$  entonces  $d(p, c_{r'}) = r' - \delta$  y por lo tanto  $l_1 := d(p_r, c_r) \leq d(p, c_r) \leq d(p, c_{r'}) + d(c_{r'}, c_r) = r' - \delta + (r - r') = r - \delta$ . Sean

$s := |qp_r| < |qq'| =: l$  y  $l_2 = |qc_r|$ . Nótese que  $q \notin B_r(\gamma(r)) \subset M_\gamma$  por lo que  $l_2 = d(\gamma(r), \beta(0)) > r$ . Finalmente por el teorema de Toponogov

$$\angle \bar{q}\bar{p}_r\bar{c}_r \leq \angle qp_r c_r = \pi/2;$$

sin embargo, por la ley de los cosenos

$$\cos \angle \bar{q}\bar{p}_r\bar{c}_r = \frac{l_1^2 + s^2 - l_2^2}{2sl_1} < \frac{(r - \delta)^2 + l^2 - r^2}{2sl_1} = \frac{(l^2 + d^2) - 2\delta r}{2sl_1}.$$

Para  $r$  suficientemente grande el lado derecho de la ecuación anterior es negativo por lo que  $\angle \bar{q}\bar{p}_r\bar{c}_r > \pi/2$ , lo cual es una contradicción.  $\square$

Sea  $p \in M$  cualquier punto. Si  $\gamma : [0, \infty) \rightarrow M$  es un rayo y  $r > 0$  escribiremos  $\gamma^r = \gamma|_{[r, \infty)}$ . Considérese la colección de todos los rayos con inicio en  $p$ :

$$\text{Ray}(p) = \{\gamma : [0, \infty) \rightarrow M \mid \gamma \text{ es un rayo y } \gamma(0) = p\}.$$

En el caso de que  $M$  sea no compacto  $\text{Ray}(p) \neq \emptyset$  por 3.5.9. Para cada  $r \geq 0$  sean

$$M^r = \bigcap_{\gamma \in \text{Ray}(p)} M_{\gamma^r}.$$

Dado que la intersección de conjuntos totalmente convexos es totalmente convexa,  $M^r$  es totalmente convexo para toda  $r \geq 0$ .

**Proposición 3.5.11.** *Para cada  $r \geq 0$ ,  $M^r$  es un conjunto compacto y totalmente convexo con  $p \in M^r$ . Además:*

1. Si  $r_1 \leq r_2$  entonces  $M^{r_1} \subseteq M^{r_2}$ ,

$$M^{r_1} = \{p \in M^{r_2} \mid d(p, \partial M^{r_2}) \geq r_2 - r_1\}$$

y

$$\partial M^{r_1} = \{p \in M^{r_2} \mid d(p, \partial M^{r_2}) = r_2 - r_1\}.$$

2.  $M = \bigcup_{r \geq 0} M^r$ .

**Demostración** Primero se verifica que  $M^r$  es compacto. Supóngase lo contrario, que equivale a suponer que  $M^r$  es no acotado. Usando la misma demostración que en 3.5.10 y la convexidad de  $M^r$ , es posible construir un rayo que parte de  $p$  y que está completamente contenido en  $M^r$ . La existencia de tal rayo contradice la definición de  $M^r$ , ya que si  $\gamma$  es un rayo entonces  $M_\gamma$  solo interseca a  $\gamma$  en  $\gamma(0)$ . Luego  $M^r$  es compacto.

Si  $q \in M$ ,  $d(p, q) = l$ ,  $\gamma \in \text{Ray}(p)$  y  $r > l$  entonces por la desigualdad del triángulo

$$r + s = d(p, \gamma(r + s)) \leq d(p, q) + d(q, \gamma(r + s)) = l + d(q, \gamma(r + s));$$

por lo tanto  $d(q, \gamma(r + s)) \geq (r - l) + s > s$ . Consecuentemente  $q \in M_{\gamma^r}$  y luego  $q \in M^r$ . Esto muestra que  $M = \bigcup M^r$ .

Sea  $\gamma \in \text{Ray}(p)$  y  $t_1 < t_2$ . En primer lugar

$$B_s(\gamma^{t_2}(s)) = B_s(\gamma(t_2 + s)) \subset B_{t_2 - t_1 + s}(\gamma(t_2 + s)) = B_{t_2 - t_1 + s}(\gamma^{t_1}(t_2 - t_1 + s)),$$

por lo que  $N_{\gamma^{t_1}} \supset N_{\gamma^{t_2}}$ . También de esto se obtiene que

$$N_{\gamma^{t_1}} = \{x \in M \mid d(x, N_{\gamma^{t_2}}) < t_2 - t_1\}.$$

De aquí concluimos que  $M_{\gamma^{t_1}} \subset M_{\gamma^{t_2}}$  y por lo tanto  $M^{t_1} \subseteq M^{t_2}$ . También es claro que

$$\bigcup_{\gamma \in \text{Ray}(p)} N_{\gamma^{t_1}} = \{x \in M \mid d(x, \cup N_{\gamma^{t_2}}) < t_2 - t_1\};$$

por lo tanto,

$$M^{t_1} = \{x \in M \mid d(x, \cup N_{\gamma^{t_2}}) \geq t_2 - t_1\}.$$

Sin embargo, como  $M^{t_1} \subset M - \cup N_{\gamma^{t_2}}$  entonces si  $x \in M^{t_1}$  se tiene que  $d(x, \cup N_{\gamma^{t_2}}) = d(x, \partial(\cup N_{\gamma^{t_2}})) = d(x, \partial M^{t_2})$ .  $\square$

Sea  $p \in M$  cualquier punto.  $M_0 := M^0$  es un conjunto compacto y totalmente convexo. Si  $M_0$  tiene frontera entonces usando 3.5.7 se obtiene otro conjunto compacto y totalmente convexo  $M_1 := M_0^{\text{máx}}$  con  $\dim M_1 < \dim M_0$ . Iterando el proceso una cantidad finita de veces se llega a un conjunto compacto  $M_k = S$  totalmente convexo y sin frontera y por tanto una subvariedad totalmente geodésica. Este conjunto es un alma de  $M$ .

**Lema 3.5.12.** *No existen puntos críticos de  $S$  en  $M - S$ .*

**Demostración** Sea  $q \in M - S$  y  $\gamma$  una geodésica minimizante de  $q$  a  $S$ . Obsérvese que por construcción de  $S$ , véase 3.5.7 y 3.5.11, existe un conjunto totalmente convexo  $T$  tal que  $S \subset \text{int}T$ ,  $q \in \partial T$  y  $d(q, S) = d(\partial T, S)$ . Por la proposición 3.5.5  $\gamma'$  está contenida en el cono tangente  $C_q T$  que es un semiespacio fijo.  $\square$

El teorema principal es una consecuencia del lema anterior y los corolarios 3.3.6 3.3.7.

**Teorema 3.5.13** (Cheeger-Gromoll). *Sea  $M$  una variedad completa con curvatura seccional no negativa. Existe una subvariedad compacta y totalmente geodésica  $S$  tal que  $M$  es difeomorfa a el haz normal de  $S$ .*

Por 3.5.8 si  $M$  tiene curvatura seccional positiva el alma de  $M$  debe de ser un punto y luego se tiene:

**Teorema 3.5.14** (Gromoll-Cheeger). *Si  $M$  es una variedad riemanniana completa, no compacta y con curvatura seccional  $> 0$  entonces  $M$  es difeomorfa a  $\mathbb{R}^n$ .*

En [Per94] Perelman demostró una generalización del teorema anterior.

**Teorema 3.5.15** (Perelman). *Sea  $M$  una variedad riemanniana completa, no compacta y de curvatura seccional no negativa. Si la curvatura seccional es positiva en un punto  $p \in M$ , en el sentido de que  $K(\sigma) > 0$  para todo 2-plano  $\sigma \subset M_p$ , entonces  $M$  es difeomorfa a  $\mathbb{R}^n$ .*

### 3.6. Teorema de la esfera

En esta sección se enuncia el teorema de la esfera pinchada, cuya demostración propició el desarrollo de una gran parte de las herramientas de comparación del capítulo pasado. Aunque el teorema no es demostrado aquí, se demuestra un resultado semejante utilizando la teoría desarrollada en este capítulo.

**Teorema 3.6.1** (Toponogov). *Sea  $M$  una variedad completa con curvatura  $K_M \geq H > 0$ . Si  $\text{diam}(M) = \pi/\sqrt{H}$  entonces  $M$  es isométrica a una esfera.*

**Demostración** Reescálese la métrica para que  $K_M \geq 1$  y  $\text{diam}(M) = \pi$ . Sean  $p, q \in M$  tales que  $d(p, q) = \pi$ .

Sean  $x \in M - \{p, q\}$ ,  $pq$  y  $px$  geodésicas minimizantes. Si  $\angle \bar{x}\bar{p}\bar{q}$  es una bisagra de comparación en  $\mathbb{S}^2$  por el teorema de Toponogov

$$|\bar{x}\bar{q}| \geq |xq|.$$

Sin embargo, nótese que  $\bar{p}$  y  $\bar{q}$  son antípodas por lo que  $|\bar{x}\bar{q}| = \pi - |\bar{x}\bar{p}| = \pi - |xq|$ . Luego  $\pi = |pq| \leq |px| + |xq| \leq |px| + |\bar{p}\bar{x}| = \pi$ . Esto implica que si  $xq$  es una geodésica minimizante entonces  $px \cup xp$  es una geodésica minimizante.

Sea  $N$  cualquier punto en  $\mathbb{S}^n$ ,  $I : T_N\mathbb{S}^n \rightarrow T_pM$  una isometría y  $f : \mathbb{S}^n \rightarrow M$  la función dada por

$$f(\exp_N(v)) = \exp_p(I(v)),$$

donde  $v \in D_\pi(0) \subset T_N\mathbb{S}^n$ . Sean  $v, w \in T_N\mathbb{S}^n$  con  $\angle vw < \delta$  y  $\sigma = \langle v, w \rangle$ . Exponenciar  $\sigma$ ,  $\exp_N(\sigma)$ , produce una superficie isométrica a  $\mathbb{S}^2$ . En dicha superficie existe un campo vectorial  $W$  paralelo y unitario a lo largo de  $\gamma_v(t) = \exp_N(tv)$ , ortogonal a  $\gamma_v$ , y una función diferenciable  $g(\delta) = g : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$\exp_{\gamma_v(t)}(g(t)W(t)) = \exp_N(tw) =: \gamma_w(t).$$

Nótese que  $g(0) = g(\pi) = 0$ . Sea  $Z$  el campo paralelo y unitario a lo largo  $\beta_v(t) = \exp_p(tI(v))$  tal que  $Z(0) = I(W(0))$ . Defínase  $\alpha(t) = \exp_{\beta_v(t)}(tZ(t))$ . Si  $\delta$  es suficientemente pequeño el teorema 2.1.4 aplica, por lo que  $L(\alpha) \leq L(\gamma_w) = \pi$ . Sin embargo  $\alpha$  es una curva que conecta a  $p$  con  $q$  por lo que  $L(\alpha) \geq d(p, q) = \pi$  y luego  $L(\alpha) = L(\gamma_w)$ . Esto demuestra que las tiras  $\varphi(s, t) = \exp_{\gamma_v(t)}(sg(t)W(t))$  y  $\psi(s, t) = \exp_{\beta_v(t)}(sg(t)Z(t))$  son isométricas. Luego  $f$  es una isometría.  $\square$

Por el teorema de Killing-Hopf 1.3.3 toda variedad simplemente conexa con curvatura constante 1 es isométrica y en particular difeomorfa a la esfera. Si se perturban ligeramente las hipótesis surge la pregunta ¿las variedades simplemente conexas con curvatura cercana a 1 son difeo-homeomorfas a la esfera? Dado que toda métrica se puede reescalar, la pregunta se puede presentar de este modo: Si  $M$  es una variedad simplemente conexa tal que  $0 < \mu < K_M \leq 1$  entonces ¿ $M$  es homeomorfa a  $\mathbb{S}^n$ ? ¿Para qué  $\mu$  la respuesta a la pregunta anterior es afirmativa? Cuando  $M$  es una variedad con  $0 < \mu < K_M \leq 1$ , se dice que  $M$  está  $\mu$ -pinchada (estrictamente). Rauch dio un primer estimado de  $\mu$  lo cual desató una carrera para encontrar  $\mu$  óptimo. Los trabajos de Klingenberg y Berger establecieron que la cota óptima es  $1/4$ .

**Teorema 3.6.2** (Rauch-Klingenberg-Berger). *Sea  $M$  una variedad completa y simplemente conexa tal que  $1/4 < K_M \leq 1$ , entonces  $M$  es homeomorfa a una esfera.*

En el caso de dimensión par el resultado es preciso puesto que existen variedades riemannianas con  $\frac{1}{4} \leq K_M \leq 1$  no homeomorfas a  $\mathbb{S}^n$ , consúltese 4.3.

La filosofía de perturbar las hipótesis del teorema 3.6.1 obliga a preguntarse para cuáles  $\lambda > 0$  es válida la siguiente afirmación: si  $M$  es una variedad con curvatura  $\geq 1$  y  $\pi \geq \text{diam}(M) > \lambda$  entonces  $M$  es homeo-difeomorfa a  $\mathbb{S}^n$ . Grove-Shiohama [GS77] encontraron  $\lambda$  óptimo y de paso desarrollaron los inicios de la teoría de puntos críticos de funciones distancia.

**Teorema 3.6.3** (Grove-Shiohama). *Sea  $M$  una variedad completa con curvatura  $K_M \geq H > 0$ . Si  $\text{diam}(M) > \frac{\pi}{2\sqrt{H}}$  entonces  $M$  es homeomorfa a una esfera.*

**Demostración** Reescálese la métrica en  $M$  de modo que  $K_M \geq 1$  y  $\text{diam}(M) > \pi/2$ . Sean  $p, q \in M$  tales que  $d(p, q) = \text{diam}(M) > \pi/2$ . Se afirma que  $p$  no tiene puntos críticos en  $M - \{p, q\}$ .

Supóngase que  $r$  es punto crítico de  $p$ . Luego es posible encontrar geodésicas minimizantes  $pq$ ,  $rp$  y  $rq$  tales que  $\angle prq \leq \pi/2$ . Sea  $\Delta \bar{p}\bar{q}\bar{r}$  un triángulo de comparación en  $\mathbb{S}^2$ . Por el teorema de Toponogov  $\angle \bar{p}\bar{r}\bar{q} \leq \angle prq \leq \pi/2$  y luego, usando 1.3.2,

$$0 > \cos(|pq|) = \cos(|rp|) \cos(|rq|) + \text{sen}(|rp|) \text{sen}(|rq|) \cos(\angle \bar{p}\bar{q}\bar{r}) > \cos(|rp|) \cos(|rq|).$$

Esto implica que  $\cos(|rp|)$  y  $\cos(|rq|)$  tienen signo distinto. Supóngase sin pérdida de generalidad que  $\cos(|rp|) > 0$  y  $\cos(|rq|) < 0$ . Luego  $\cos(|rq|) \cos(|rp|) > \cos(|rq|)$  y por lo tanto  $\cos(|pq|) > \cos(|rq|) \cos(|rp|) > \cos(|rq|)$ , es decir  $|qp| < |rq|$ . Esta contradicción muestra que  $p$  no tiene puntos críticos salvo  $q$ . Análogamente,  $q$  no tiene puntos críticos en  $M - \{p, q\}$ .

Nótese que en cada punto  $x \in M - \{p, q\}$  es posible elegir un vector  $y_x \in T_x M$  tal que  $\angle y_x p' < \pi/2$  y  $\angle y_x q' > \pi/2$ . Modificando ligeramente la demostración de 3.3.4 se construye un campo  $X$  tipo gradiente para  $d_p$  y  $d_q$  en una vecindad abierta de  $M - (B_\varepsilon(p) \cup B_\varepsilon(q))$ , donde  $\varepsilon > 0$  es tal que  $B_\varepsilon(p)$  y  $B_\varepsilon(q)$  son vecindades normales. Finalmente modifíquese la demostración de 3.3.1 para demostrar que  $M$  es difeomorfa a  $B_\varepsilon(q) \cup B_\varepsilon(p)$  pegadas a través de un difeomorfismo de la frontera. Dicho difeomorfismo es el inducido por el flujo de  $X$ . Por lo tanto  $M$  es homeomorfa a  $\mathbb{S}^n$ .  $\square$

Una esfera torcida es la variedad que se obtiene al pegar dos discos a lo largo de su frontera a través de un difeomorfismo. Por el trabajo de Milnor se sabe que toda esfera torcida es homeomorfa a la esfera normal pero no siempre es difeomorfa. Las estructuras diferenciables sobre  $\mathbb{S}^n$  que no son difeomorfas a la estructura canónica de  $\mathbb{S}^n$ , son llamadas estructuras exóticas y la esfera junto con una estructura exótica es una esfera exótica. No todas las esferas torcidas resultan ser exóticas, de hecho por el trabajo de Milnor [KM63] si  $n = \dim(M) \leq 6$  y  $n \neq 4$  las hipótesis del teorema anterior aseguran que  $M$  es difeomorfa a  $\mathbb{S}^n$ . Sin embargo para dimensiones superiores aún no se sabe.

Los teoremas que se presentaron sugieren una pregunta, a saber: Con las hipótesis de los teoremas anteriores, ¿podemos concluir que  $M$  es difeomorfa a la esfera con su estructura canónica?

En un trabajo, relativamente reciente, utilizando el flujo de Ricci se logró demostrar un resultado afirmativo:

**Teorema 3.6.4** (Brendle-Schoen, 2007, [BS11]). *Sea  $M$  una variedad riemanniana con curvatura  $1 \geq K_M > 1/4$ ; entonces  $M$  es difeomorfa a la esfera.*

En otra dirección, ¿Qué métricas admite una esfera exótica? Por el teorema anterior no puede estar 1/4-pinchada ( $1 \geq K_M > 1/4$ ). Mencionamos aquí dos resultados:

**Teorema 3.6.5** (Gromoll-Meyer [GM74]). *Existen esferas exóticas con métricas de curvatura seccional no negativa.*

**Teorema 3.6.6** (Hitchin [Hit74]). *Existen esferas exóticas que no admiten métricas con curvatura escalar positiva.*

### 3.7. Teoremas de finitud

En esta sección exploramos los llamados teoremas de finitud. En sus diferentes manifestaciones estos teoremas afirman que solo existen una cantidad finita de variedades riemannianas que satisfacen ciertas restricciones, por ejemplo cotas en la curvatura o diámetro, salvo alguna relación de equivalencia, v.g. homotopía o difeomorfismo.

Sólo se demostrará el resultado de finitud topológica para la clase de variedades con curvatura seccional  $\geq k > 0$ , dimensión  $n$  y  $\text{vol}(M) \geq V$ . Juega un papel fundamental el estudio de los espacios de Alexandrov  $\mathcal{C}$  y en particular el profundo análisis topológico de estos espacios de Perelman que se resume en su teorema de estabilidad C.3.8.

La estrategia de demostración es un esquema sencillo y aplicable a otras situaciones. Escríbase  $Alex(n, k, D)$  para denotar la clase de espacios de Alexandrov de dimensión  $n$  con curvatura  $\geq k$  y diámetro  $\leq D$ . Supóngase que  $\mathcal{F} \subset Alex(n, k, D)$  es una familia precompacta de espacios.

**Proposición 3.7.1.** *Si  $\mathcal{F} \subset Alex(n, k, D)$  es una familia precompacta, entonces solo existen una cantidad finita de tipos de homomorfismo en  $\mathcal{F}$ .*

**Demostración** Por el teorema de estabilidad de Perelman, para cada  $M \in \mathcal{F}$  existe  $R_M$  tal que si  $Y \in Alex(n, k, D) \cap B_{R_M}(M)$  entonces  $Y \cong M$  (homeomorfismo). Sea  $\mathcal{A} = \overline{\mathcal{F}}$  y considérese la cubierta  $\{B_{R_M}(M) \mid M \in \mathcal{A}\}$ . Por la compacidad de  $\mathcal{A}$  existe una subcubierta finita, dígase  $B_{R_1}(M_1), \dots, B_{R_m}(M_m)$ . Si  $N \in \mathcal{F}$  entonces existe  $j \in \{1, \dots, m\}$  tal que  $N \in B_{R_j}(M_j)$  y por lo tanto  $N$  es homeomorfo a  $M_j$ .  $\square$

La segunda parte consiste en identificar los conjuntos precompactos de  $Alex(n, k, D)$ . Para esto se utiliza el criterio de precompacidad de Gromov C.3.6. Con esto es muy fácil demostrar que

**Teorema 3.7.2** (Grove-Petersen-Wu). *Dados  $n, V, k > 0$  la clase de  $n$ -variedades cerradas que admiten métricas cuyo diámetro, volumen y curvatura satisfacen,*

1.  $\text{Vol}(M) \geq V$
2.  $K_M \geq k$

*contiene solo un número finito de tipos de homeomorfismo.*

**Demostración** Sea  $\mathcal{M}(n, k, V)$  el conjunto de las variedades riemannianas de dimensión  $n$ , curvatura  $\geq k > 0$  y volumen  $\geq V$ . Para demostrar que  $\mathcal{M}(n, k, V)$  es precompacto basta con demostrar que si  $M \in \mathcal{M}(n, k, V)$  y  $Y \subset M$  es un conjunto  $\varepsilon$ -separado, cfr. 2.3.1, entonces  $|Y| \subset N(\varepsilon)$ , para algún  $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ .

Sea  $Y \subset M$  un conjunto  $\varepsilon$ -separado. Dado que  $M$  es compacto,  $Y$  es finito, dígase  $Y = \{x_1, \dots, x_m\}$ . Puesto que  $Y$  es  $\varepsilon$ -separado las bolas  $B_{\varepsilon/2}(x_i)$  son ajenas y luego

$$\text{vol}(\cup B_{\varepsilon/2}(x_i)) = \sum \text{vol}(B_{\varepsilon/2}(x_i)) \leq \text{vol}(M)$$

Sea  $i \in \{1, \dots, m\}$  tal que  $\text{vol}(B_{\varepsilon/2}(x_i))$  es mínimo, entonces

$$m \text{vol}(B_{\varepsilon/2}(x_i)) \leq \text{vol}(M) = \text{vol}(B_d(x_i))$$

o bien

$$m \leq \frac{\text{vol}(B_d(x_i))}{\text{vol}(B_{\varepsilon/2}(x_i))}$$

Por el teorema de Gromov-Bishop

$$\frac{\text{vol}(B_d(x_i))}{\text{vol}(B_{\varepsilon/2}(x_i))} \leq \frac{\text{vol}(B_d^k(p))}{\text{vol}(B_{\varepsilon/2}^k(p))}$$

donde  $p \in M^k$  es cualquier punto. Luego

$$m \leq \frac{\text{vol}(M^k)}{\text{vol}(B_{\varepsilon/2}^k(p))} = N(\varepsilon)$$

El resultado se sigue de la proposición anterior. □

# Capítulo 4

## Simetrías

Hasta ahora se ha revisado cuales son algunas de las consecuencias de la curvatura positiva en las variedades riemannianas en general. En este capítulo se persigue un punto de vista propuesto por Karsten Grove [Gro02] en donde se le añade al escenario la condición de simetría. Se desarrolla la teoría básica de las simetrías, o bien isometrías, y la estructura de los grupos de simetría de una variedad riemanniana. Se exploran un par de aplicaciones, sin embargo el uso fuerte de los resultados de este capítulo se pospone para el próximo.

### 4.1. Isometrías

Aunque ya se ha usado la noción de isometría, en esta sección se da un estudio más detallado de ellas.

Sea  $M$  una variedad riemanniana completa. Dado que las isometrías preservan geodésicas y éstas están completamente determinadas por su lugar de inicio y velocidad inicial se tiene:

**Proposición 4.1.1.** *Si  $\varphi : M \rightarrow N$  es una isometría entonces  $\exp_N \circ d\varphi = \varphi \circ \exp_M$ .*

Como consecuencia,

**Corolario 4.1.2.** *Sean  $\varphi_1, \varphi_2 : M \rightarrow N$  isometrías con  $M$  y  $N$  completas. Si  $\varphi_1(p) = \varphi_2(p)$  y  $(d\varphi_1)_p = (d\varphi_2)_p$  entonces  $\varphi_1 = \varphi_2$ .*

Sea  $\mu : G \times M \rightarrow M$  una acción de un grupo  $G$  sobre una variedad diferenciable  $M$ . Esto es, una función que satisface  $\mu(e, p) = p$  y  $\mu(gh, p) = \mu(g, \mu(h, p))$ , donde  $e$  es el neutro de  $G$ . Se usará  $g \cdot p$  para denotar  $\mu(g, p)$ . Todo  $g \in G$  define un automorfismo (biyección) de  $M$  en sí mismo a través de

$$\mu_g(p) = g \cdot p.$$

Esto a su vez define una función  $\hat{\mu} : G \rightarrow \text{Aut}(M)$ . La condición de que  $\mu$  sea una acción es equivalente a que  $\hat{\mu}$  sea un homomorfismo. Cuando  $G$  actúa en  $M$  se escribe  $G \curvearrowright M$ . Una variedad junto con una acción de  $G$  es una  $G$ -variedad.

**Definición 4.1.1.** *Se dice que  $G$  actúa de manera totalmente discontinua en una variedad  $M$  si para todo  $p \in M$  existe una vecindad  $U$  de  $p$  tal que  $gU \cap U = \emptyset$  para todo  $g \in G - \{e\}$ .*

Si además  $G$  es un grupo de Lie podemos restringir aún más el tipo de acciones:

**Definición 4.1.2.** *Se dice que un grupo  $G$  actúa suavemente en una variedad  $M$  si la acción de  $G$  en  $M$ ,  $\mu : G \times M \rightarrow M$ , es una función suave.*

En este caso las funciones  $\mu_g$  son difeomorfismos. De ahora en adelante solo se usarán acciones suaves.

**Definición 4.1.3.** *Una acción es libre si  $g \cdot p = p$  implica  $g = e$ .*

**Definición 4.1.4.** *Una acción es efectiva si  $\text{Nuc}(\hat{\mu}) = \{e\}$  o bien si  $g \cdot p = p$  para toda  $p$  implica  $g = e$ .*

**Definición 4.1.5.** *Sea  $p \in M$  y  $G \curvearrowright M$  una acción. La órbita de  $p$  es el conjunto*

$$G \cdot p = \{g \cdot p \mid g \in G\}.$$

**Definición 4.1.6.** *La isotropía de una acción  $G \curvearrowright M$  en  $p$  es*

$$G_p = \{h \in G \mid h \cdot p = p\}.$$

Es claro que  $G_p$  es un subgrupo de  $G$  y que si  $q \in G \cdot p$  entonces  $G_q = h^{-1}G_p h$  para algún  $h \in G$ . Si  $G$  es un grupo de Lie entonces  $G_p$  es un subgrupo cerrado, por lo que tiene una única estructura de grupo de Lie tal que  $G_p \subset G$  es un subgrupo de Lie B.3.7.

El conjunto de órbitas  $M/G = \{G \cdot p \mid p \in M\}$  es un espacio topológico si se requiere que la proyección canónica  $\pi : M \rightarrow M/G$  sea una identificación. Las más de las veces  $M/G$  es un espacio topológico con serias patologías, v.g.  $M/G$  no es Hausdorff si las órbitas no son cerradas, sin embargo en ciertos casos  $M/G$  es una variedad.

**Definición 4.1.7.** *Una acción es propia si la función*

$$\nu : G \times M \rightarrow G \times M$$

*definida por  $\nu(g, p) = (g, g \cdot p)$  es propia<sup>1</sup>.*

**Teorema 4.1.3.** *Si  $G$  actúa libre y propiamente en  $M$  entonces  $M/G$  tiene una única estructura de variedad tal que la proyección canónica  $\pi : M \rightarrow M/G$  es una sumersión.*

**Demostración** Véase la demostración del teorema de la rebanada de Montgomery de la siguiente sección, 4.2.1.  $\square$

En particular si  $G$  es un grupo de Lie y  $H$  es un subgrupo compacto entonces  $G/H$  es una variedad y  $\pi : G \rightarrow G/H$  es un H-haz principal. Sin embargo, el resultado anterior falla si  $G$  no actúa libremente. Por ejemplo la acción de  $\mathbb{Z}_2$  en  $\mathbb{R}^n$ , donde  $1 \cdot v = -v$ , no es libre y el espacio cociente es casi una variedad salvo en  $\bar{0}$  (puesto que cualquier vecindad del  $\bar{0}$  contiene un plano proyectivo real). Esta falla conduce a trabajar con espacios más generales en donde el cociente bajo acciones isométricas siga siendo un objeto en la categoría de estudio (véase C).

**Teorema 4.1.4.** *Sea  $G \curvearrowright M$  una acción diferenciable. La órbita de cualquier punto de  $M$  tiene estructura de subvariedad y es difeomorfa a  $G/G_p$  (cociente derecho). El mapeo  $\psi : G/G_p \rightarrow M$  dado por*

$$\psi([g]) = g \cdot p$$

*es un difeomorfismo equivariante.*

<sup>1</sup>Una función es propia si la preimagen de compactos es compacta.

**Demostración** Sea  $\Psi : G \rightarrow M$  la función  $\Psi(g) = g \cdot p$ .  $\Psi$  es diferenciable ya que es la composición

$$G \xrightarrow{id \times \{p\}} G \times M \xrightarrow{\mu} M.$$

Si  $h \in G_p$  entonces  $\Psi(gh) = gh p = gp$ , por lo que existe una única función diferenciable  $\psi : G/G_p \rightarrow M$  tal que  $\psi([g]) = gp$ . Es inmediato que  $\psi$  es una función inyectiva y suprayectiva a  $G \cdot p$ . Falta verificar que  $\psi$  es una inmersión.

Sea  $\mathfrak{g}_p = (T_p G_p)_e$  el álgebra de Lie de  $G_p$ . Si  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$  es cualquier subespacio complementario de  $\mathfrak{g}_p$ , es decir  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_p \oplus \mathfrak{h}$ , entonces se puede identificar  $T_{G_p}(G/G_p)$  con  $\mathfrak{h}$  a través de

$$X \mapsto \frac{d}{dt} \exp(tX) G_p$$

Supóngase que  $X \in \mathfrak{h}$  es tal que  $d\Psi_{G_p}(X) = 0$ , esto es

$$\frac{d}{dt} \exp(tX) \cdot p = 0$$

Esto implica que  $\exp(tX) \cdot p = p$  para todo  $t$  y por lo tanto  $X \in \mathfrak{g}_p$ . Dado que  $\mathfrak{h}$  es complementario a  $\mathfrak{g}_p$  se tiene que  $X = 0$ , es decir  $d\Psi_{G_p}$  es inyectiva. Puesto que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} G/G_p & \xrightarrow{\mu_g} & G/G_p \\ \downarrow \Psi & & \downarrow \Psi \\ G \cdot p & \xrightarrow{\mu_g} & G \cdot p \end{array}$$

conmuta, donde  $\mu_g$  es la multiplicación por la izquierda, se ve que  $d\Psi_{gG_p}$  es inyectiva si y solo si  $d\Psi_{G_p}$  es inyectiva. Por lo tanto  $\Psi$  es un encaje.  $\square$

**Definición 4.1.8.** Una acción  $G \curvearrowright M$  es isométrica si  $\mu_g$  es una isometría para todo  $g \in G$ .

El conjunto de isometrías  $f : M \rightarrow M$  de una variedad riemanniana forma un grupo llamado  $Iso(M)$ .  $Iso(M)$  actúa por isometrías en  $M$ .

**Definición 4.1.9.** El haz de marcos de una variedad riemanniana  $M$  es el  $O(n)$ -haz principal  $\xi : Mar(M) \rightarrow M$  tal que

$$\xi^{-1}(p) = \{ \{E_i\} \mid E_i \text{ forma una base ortonormal de } T_p M \}.$$

Como  $Mar(M)$  es un  $O(n)$ -haz principal,  $Mar(M)$  es una variedad de dimensión  $n + n(n-1)/2 = n(n+1)/2$ .

Tómese  $p \in M$  y  $\{E_i\}$  un marco ortonormal de  $T_p M$ , el lema 4.1.2 indica que el morfismo

$$\Theta_p : Iso(M) \rightarrow Mar(M) \quad \varphi \mapsto (\varphi(p), \{d\varphi_p(E_i)\})$$

es inyectivo. De hecho,

**Teorema 4.1.5** (Steenrod-Myers). Sea  $M$  una variedad riemanniana completa.  $Iso(M)$  y  $Iso(M)_p$  son grupos de Lie,  $Iso(M)_p$  es compacto y  $\Theta_p$  es un encaje de  $(Iso(M), Iso(M)_p)$  en  $(Mar(M), O(n))$ . Si  $M$  es compacta entonces  $Iso(M)$  es compacto.

Para la demostración consúltese [Kob95, MS39]. Dado que  $\dim(\text{Mar}(M)) = n(n+1)/2$  se tiene que  $\dim(\text{Iso}(M)) \leq n(n+1)/2$ .

Sea  $\varphi : M \rightarrow M$  una isometría. El conjunto de puntos fijos de  $\phi$  será llamado  $\text{Fij}(\varphi)$ . Nótese que siempre que  $p \in \text{Fij}(\varphi)$  la diferencial de  $\varphi$  en  $p$  es una transformación ortogonal  $d\varphi_p : T_pM \rightarrow T_pM$ . Cuando  $A = \{f_\alpha\}$  es una familia de isometrías,  $\text{Fij}(A)$  denota el conjunto de puntos fijos de  $A$ , i.e.

$$\text{Fij}(A) = \{x \in M \mid f(x) = x \forall f \in A\}.$$

**Definición 4.1.10.** Sea  $G \curvearrowright M$  una acción isométrica y  $p \in M$ . La representación de isotropía en  $p$  es la representación  $\varphi : G_p \rightarrow O(T_pM)$  dada por

$$\varphi(g) = dg_p.$$

**Proposición 4.1.6.** En una variedad completa,  $\text{Fij}(\varphi)$  es unión ajena de subvariedades cerradas totalmente geodésicas.

**Demostración** Convengamos en llamarle  $F$  a  $\text{Fij}(\varphi)$ . La continuidad de  $\varphi$  implica que  $F$  es cerrado. Tómese cualquier punto  $p \in F$  y sea  $B_r(p)$  una bola normal. Si  $W \subset T_pM$  es el subespacio  $W = \{v \in T_pM \mid d\varphi_p(v) = v\}$  entonces por el lema 4.1.1 tenemos que  $\varphi$  fija a  $\exp_p(W)$ . Por otro lado si existe  $q \in B_r(p) \cap F$  entonces la única geodésica radial  $\gamma$  que une a  $p$  con  $q$  debe de ir en sí misma bajo  $\varphi$ , por lo que  $\gamma'(0) \in W$ . Por lo tanto,  $F \cap B_r(p) = B_r(p) \cap \exp_p(W)$ , y luego  $F$  es una subvariedad totalmente geodésica.  $\square$

Sea  $A \subseteq \text{Iso}(M)$ . Como la intersección de subvariedades totalmente geodésicas es totalmente geodésica,  $\text{Fij}(A)$  consta de subvariedades cerradas totalmente geodésicas.

## 4.2. Rebanada de una acción

En esta sección se investiga la estructura del espacio de órbitas de una acción.

Sea  $G$  un grupo de Lie compacto,  $M$  una variedad diferenciable y  $G \curvearrowright M$  una acción diferenciable. Sea  $p \in M$  y  $P = G \cdot p$ .

**Definición 4.2.1.** Un tubo alrededor de  $P$  es un encaje  $G$ -equivariante

$$\varphi : G \times_{G_p} A \rightarrow M$$

a una vecindad abierta de  $P$ , donde  $A$  es un  $G_p$ -espacio.

El espacio  $G \times_{G_p} A$  es el cociente de  $G \times A$  bajo la acción derecha de  $G_p$  dada por

$$(g, a) \cdot h = (gh, h^{-1}a).$$

Nótese que  $G_p$  actúa libremente sobre  $G \times A$  y por lo tanto  $G \times_{G_p} A$  es una variedad.  $G \times_{G_p} A$  admite una acción izquierda de  $G$  dada por  $g[h, a] = [gh, a]$ . Además  $G \times_{G_p} A$  es un haz fibrado sobre  $G/G_p \cong G \cdot p$  con fibra  $A$ , es el haz fibrado asociado al haz principal  $G \rightarrow G/G_p$ .

**Definición 4.2.2.** Se dice que  $S \subset M$  es una rebanada en  $p$  si  $p \in S$ ,  $G_p(S) = S$  y el mapeo

$$G \times_{G_p} S \rightarrow M, \quad [g, q] \mapsto g \cdot q,$$

es un tubo para  $G \cdot p$ .

**Teorema 4.2.1** (Montgomery). *Si  $G$  es un grupo de Lie compacto,  $M$  una variedad diferenciable y  $G \curvearrowright M$  una acción diferenciable, entonces todo punto  $p \in M$  tiene una rebanada.*

El primer paso de la demostración del teorema de la rebanada de Montgomery reduce el caso general a uno en el cual  $G$  actúa por isometrías en  $M$ . Para esto se construye una métrica  $G$ -invariante en  $M$  eligiendo cualquier métrica riemanniana y posteriormente promediándola sobre todo  $G$ ; explícitamente, si  $g_M$  es una métrica riemanniana en  $M$ , entonces

$$g'_M(v, w) = \int_G g_M(d\mu_h(v), d\mu_h(w)) dh$$

es una métrica  $G$ -invariante; es decir,  $\mu_h$  es una isometría para todo  $h \in G$ .

Luego supóngase que  $G \curvearrowright M$  es una acción isométrica.

**Proposición 4.2.2.** *Sea  $G$  un grupo de Lie compacto actuando por isometrías en una variedad riemanniana  $M$  y  $p \in M$ . Si  $W = T_p(G \cdot p)^\perp$  entonces existe  $r > 0$  tal que  $\exp_p(B_r(0) \cap W) = B_r^\perp(p)$  es una rebanada.*

**Demostración** Sea  $P = G \cdot p$  y  $\nu P$  el haz normal. Considérese el mapeo  $\exp^\perp : \nu P \rightarrow M$  dado por

$$\exp^\perp(p, v) = \exp_p(v).$$

Es claro que la diferencial de  $\exp^\perp$  en  $P \subseteq \nu P$  (aquí se identifica la sección 0 con  $P$ ) es la identidad, por lo que para todo  $p \in N$  existe  $r > 0$  tal que  $\exp^\perp$  en  $B_r(p, v)$  es un difeomorfismo en su imagen.  $G$  es compacto y por lo tanto  $P$  también, lo cual permite encontrar  $r > 0$  tal que  $\exp^\perp$  restringida a  $\nu P_r = \{(p, v) \in \nu P \mid |v| < r\}$  es una inmersión.

Supóngase que para toda  $r > 0$   $\exp^\perp$  restringida a  $\nu P_r$  es no inyectiva. Entonces existe un par de sucesiones  $(p_i, v_i) \neq (q_i, w_i) \in \nu P_{r_i}$  con  $r_i \rightarrow 0$  tal que  $\exp_{p_i}(v_i) = \exp_{q_i}(w_i)$ . Por la compacidad de  $P$  existe una subsucesión de cada sucesión, que sin pérdida de generalidad puede suponerse que son las sucesiones originales, que convergen a  $(p, v)$  y  $(q, w)$ . Sin embargo dado que  $|v_i|, |w_i| < r_i$  entonces resulta necesario que  $v, w = 0$ . Por la continuidad de  $\exp^\perp$ ,  $\exp^\perp(p_i, v_i) \rightarrow \exp^\perp(p, 0) = p$  y  $\exp^\perp(q_i, w_i) \rightarrow \exp^\perp(q, 0) = q$ ; como  $\exp^\perp(p_i, v_i) = \exp^\perp(q_i, w_i)$  entonces  $p = q$ . Luego para  $i$  suficientemente grande  $(q_i, w_i)$  y  $(p_i, v_i)$  están en una vecindad de  $p$  en la cual  $\exp^\perp$  es inyectiva, una contradicción.

Sea  $r > 0$  tal que  $\exp^\perp$  es un encaje restringido a  $\nu P_r$  y  $U = \exp^\perp(\nu P_r)$ . Si  $(p, v) \in \nu P_r$  entonces  $|v| < r$  y además  $d(p, \exp_p(v)) = |v|$ , por lo que  $U \subset B_r(P)$ . Es sencillo verificar que  $B_r(P) \subset U$ , por lo que  $B_r(P) = U$ .

En general si  $f : M \rightarrow M$  es una isometría con  $f(P) \subset P$  entonces  $f(B_r(P)) \subset B_r(p)$ . Luego  $U = B_r(P)$  es  $G$ -invariante.

Con la misma  $r$  sea  $B_r^\perp(p, 0) = \{(p, v) \in \nu P \mid |v| < r\}$  y  $B_r^\perp(p) = \exp^\perp(B_r^\perp(p, 0))$ . Para  $x \in P$  se define  $S_x = B_r^\perp(x)$ . Obsérvese que para  $g \in G$  se tiene que  $gS_x \subseteq S_{gx}$ : como  $\mu_g$  es una isometría, conmuta con  $\exp$  y por lo tanto si  $y = \exp^\perp(x, v) \in S_x$  entonces  $gy = \exp^\perp(gx, d\mu_g(v)) \in S_{gx}$ .

Sea  $\psi : G \times S \rightarrow M$  el mapeo definido por  $\psi(g, s) = gs$ . Si  $h \in G_p$  obsérvese que

$$\psi(gh, h^{-1}s) = gs = \psi(g, s),$$

por lo que  $\psi$  desciende a un mapeo diferenciable  $\bar{\psi} : G \times_{G_p} S \rightarrow M$ . Es obvio que  $\bar{\psi}$  es  $G$ -equivariante. Afirmamos que  $\bar{\psi}$  es inyectiva. Si  $\bar{\psi}[g, s] = \bar{\psi}[h, r]$  entonces  $gs = hr$ , o equivalentemente  $h^{-1}gs = r \in S$ . Como  $h^{-1}gS_p \subset S_{h^{-1}gp}$  entonces  $h^{-1}gp = p$ , es decir  $h^{-1}g \in G_p$  y por lo tanto

$[g, s] = [gg^{-1}h, h^{-1}gs] = [h, r]$ . Como  $G/G_p \rightarrow P \subset G$  es un encaje entonces  $\bar{\psi}$  tiene diferencial inyectiva en  $P$ . Reduciendo más  $r$  se puede garantizar que  $\bar{\psi}$  es un difeomorfismo a su imagen, sin embargo es claro que la imagen es  $B_r(p)$ .  $\square$

La importancia del tubo y la rebanada es que al pasar al espacio de órbitas la rebanada es una imagen completa y simplificada de la acción en el tubo.

**Proposición 4.2.3.** *Si  $S$  es una rebanada en  $p \in M$  y  $T$  es el tubo correspondiente entonces  $T/G$  es homeomorfo a  $S/G_p$  a través de la inclusión natural*

$$S/G_p \rightarrow M/G.$$

En caso de que  $G$  actúe por isometrías en  $M$  entonces  $T/G$  es isomorfo a  $S/G_p$ .

**Demostración** Se sabe que  $T$  es difeomorfo a  $G \times_{G_p} S$  a través de un difeomorfismo  $G$ -equivariante  $\psi : G \times_{G_p} S \rightarrow T$ . Basta, entonces, con demostrar que  $G \times_{G_p} S/G \cong S/G_p$ . Sea  $g$  la composición

$$G \times S \xrightarrow{\pi_S} S \longrightarrow S/G_p$$

Si  $h \in G_p$  entonces  $g(g, a) = g(gh, h^{-1}a)$  por lo que existe un mapeo  $f : G \times_{G_p} S \rightarrow S/G_p$  tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} G \times S & \xrightarrow{\pi} & G \times_{G_p} S \\ \downarrow \pi_S & \searrow g & \downarrow f \\ S & \xrightarrow{\pi} & S/G_p \end{array}$$

Es fácil ver que  $f$  es  $G$ -equivariante donde  $G$  actúa trivialmente en  $S/G_p$  por lo que existe un único  $h : G \times_{G_p} S/G \rightarrow S/G_p$  tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} G \times S & \xrightarrow{\pi} & G \times_{G_p} S & \xrightarrow{\pi} & G \times_{G_p} S/G \\ \downarrow \pi_S & \searrow g & \downarrow f & \swarrow h & \\ S & \xrightarrow{\pi} & S/G_p & & \end{array}$$

conmuta. Por otro lado la inclusión  $i : S \rightarrow G \times S$  dada por  $s \mapsto (e, s)$ , seguida de las proyecciones  $G \times S \rightarrow G \times_{G_p} S \rightarrow G \times_{G_p} S/G$  es un mapeo que identifica las órbitas de  $G_p$ , ya que si  $h \in G_p$  y  $s \in S$  entonces

$$\begin{aligned} s &\mapsto (e, s) \mapsto [e, s] \mapsto [[e, s]] \\ hs &\mapsto (e, hs) \mapsto [e, hs] = [h, s] \mapsto [[h, s]] = [[e, s]] \end{aligned}$$

por lo que existe un único  $k : S/G_p \rightarrow G \times_{G_p} S/G$  tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccccc} G \times S & \xrightarrow{\pi} & G \times_{G_p} S & \xrightarrow{\pi} & G \times_{G_p} S/G \\ \downarrow \pi_S & \searrow g & \downarrow f & \swarrow h & \\ S & \xrightarrow{\pi} & S/G_p & & \\ \downarrow i & & & \searrow k & \\ G \times S & \xrightarrow{\pi} & G \times_{G_p} S & \xrightarrow{\pi} & G \times_{G_p} S/G \end{array}$$

Por la propiedad universal del cociente y la conmutatividad del diagrama anterior,  $h$  y  $k$  son inversos y consecuentemente  $T \cong G \times_{G_p} S \cong S/G_p$ .

La segunda afirmación se sigue de: Si  $x, y \in T$  entonces existen  $g, h \in G$  tales que  $ghx = x', gy = y' \in S$ . Además si  $x'', y'' \in S$  son tales que  $\pi(x') = \pi(x'')$  y  $\pi(y') = \pi(y'')$  entonces existen  $g, h \in G_p$  tales que  $x'' = gx'$  y  $y'' = hy'$ .  $\square$

Supóngase que  $G$  actúa isométricamente en  $M$  y sea  $S = B_r^\perp(p)$  una rebanada en  $p$ . Si  $h \in G_p$  entonces  $hS = S$  y la acción de  $h$  en  $S$  se puede representar a través de la acción de  $G_p$  en el espacio normal a  $P = G \cdot p$ . A saber,  $d\mu_h : P_p^\perp \rightarrow P_p^\perp$  es una isometría tal que

$$h \exp_p(v) = \exp_p(d\mu_h(v)).$$

Luego la representación de isotropía en  $p$  induce (se restringe a) una representación ortogonal  $\Phi_p : G_p \rightarrow O(T_p S) = O(T_p G \cdot p^\perp)$  llamada la representación de rebanada en  $p$ . Dicha representación es equivariante a través de  $\exp_p^\perp$  con la acción de  $G_p$  en  $S$ . Nótese que si la acción de  $G$  es efectiva entonces la acción de  $G_p$  en  $S$  también lo es.

**Corolario 4.2.4.** *Sea  $G \curvearrowright M$  una acción isométrica,  $p \in M$  y  $\pi : M \rightarrow M/G$  la proyección canónica. Existe una vecindad de  $\pi(p) = \bar{p}$  en  $M/G$  equivariantemente homeomorfa a  $T_p G \cdot p^\perp / G_p$  donde  $G_p \curvearrowright T_p G \cdot p^\perp$  es la representación de rebanada.*

De este modo se puede reducir el estudio las vecindades de espacios de órbitas al estudio de representaciones ortogonales y sus espacios de órbitas.

**Definición 4.2.3.** *El tipo de isotropía de una órbita  $G \cdot p$  es la clase  $[G_p]$  de todos los subgrupos conjugados a  $G_p$ . Es decir  $H \in [G_p]$  si y solo si existe  $g \in G$  tal que  $gHg^{-1} = G_p$ . Se dice que el tipo de isotropía de  $G \cdot p$  es menor que el tipo de isotropía de  $G \cdot q$ ,  $[G_p] \leq [G_q]$ , si existe  $H \in [G_p]$  tal que  $G_q \subset H$ .*

Nótese que si  $G \cdot p$  tiene tipo de isotropía  $[G_p]$  la órbita  $G \cdot p$  es difeomorfa a  $G/G_p$ . Por esto el tipo de isotropía también es llamado tipo de órbita.

Sea  $x \in S$  distinto de  $p$ . Dado que  $gx \in S_{gp}$  es claro que el grupo de isotropía  $G_x$  es un subgrupo de  $G_p$ . Además si  $y \in P$  entonces  $G_y$  es conjugado a  $G_p$ . Esto es, para todo  $y$  en el tubo  $T$  se tiene que  $[G_y] \geq [G_p]$ . Ahora supóngase que la acción de  $G$  tiene un único tipo de isotropía. En estas condiciones los grupos de isotropía en una rebanada son constantes y por lo tanto  $G_p$  actúa trivialmente sobre  $S$ . Así  $S/G_p = S$  y las órbitas en el tubo pueden ser representadas por un único punto en  $S$ ,  $T/G \cong S/G_p = S$ . A través de esto se puede dotar de una estructura de variedad a  $M/G$ . En conclusión si la acción tiene un único tipo de isotropía entonces  $M/G$  es una variedad.

Resulta que toda acción tiene solo una cantidad finita de tipos de isotropía y existe un único tipo máximo. Las órbitas con tipo de isotropía máxima son llamadas órbitas principales. Por lo mencionado anteriormente las órbitas en un tubo de una órbita principal son principales. Por lo tanto el conjunto de puntos cuya órbita tiene tipo de isotropía máxima es abierto y una órbita principal tiene una vecindad diferenciable en el espacio de órbitas.

**Proposición 4.2.5** (Kleiner). *Sea  $G \curvearrowright M$  una acción isométrica y  $pq$  una geodésica minimizante en  $M$  tal que  $|pq| = d(G \cdot p, G \cdot q)$ . Si  $x \in pq$  entonces  $[G_x] \geq [G_p], [G_q]$ .*

**Demostración** Sea  $g \in G_x$  y  $gp = p'$ . La geodésica  $\mu_g(xp)$  es una geodésica minimizante  $xp'$ . Nótese que la curva  $qx \cup xp'$  tiene longitud  $|qx| + |xp'| = |qx| + |xp| = d(G \cdot p, G \cdot q) \leq d(q, p')$  por lo que  $qx \cup xp'$  debe de ser una geodésica. Esto solo es posible si  $p = p'$ . Análogamente  $gq = q$ . Por lo tanto  $G_x \subset G_p, G_q$ .  $\square$

Sea  $M_r = \{p \in M \mid G \cdot p \text{ es una órbita principal}\}$ . Además de ser abierto,  $M_r$  es denso, pues si  $G \cdot p$  es una órbita principal y  $q \in G$  entonces por la proposición anterior cualquier punto dentro de una geodésica minimizante  $pq$  debe tener una órbita principal. La conclusión es que existe un conjunto abierto y denso de  $M/G$  que es una variedad diferenciable y para la cual  $\pi : M_r \rightarrow M_r/G$  es una sumersión.

Sea  $p \in M$  cualquier punto y  $S$  una rebanada en  $p$ . Se vió que los grupos de isotropía de los elementos de  $s$  son subgrupos de  $G_p$ . Sea  $V = T_p S$  y considérese la representación de rebanada en  $V$ . Dicha representación puede tener un subespacio de puntos fijos  $V^{G_p}$ . Si  $v \in V^{G_p}$  y  $g \in G_p$  entonces  $g \exp_q(v) = \exp_q(d\mu_g(v)) = \exp_q(v)$ , por lo que los puntos del subconjunto  $\exp(V^{G_p}) \cap S$  tienen la misma isotropía que  $q$ . Esto muestra también que el subconjunto de  $M/G$  de puntos de un mismo tipo de isotropía es localmente convexo y tiene una estructura de variedad riemanniana.

**Proposición 4.2.6.** *Si  $M$  es una variedad riemanniana completa,  $G$  un grupo de Lie compacto y  $G \curvearrowright M$  una acción isométrica entonces  $M/G$  admite una descomposición*

$$M/G = N_1 \cup \cdots \cup N_k,$$

donde cada  $N_i$  es una variedad riemanniana y  $N_i$  es localmente convexa en  $M/G$ .

### 4.3. Espacios cociente

Sea  $G$  un grupo de Lie compacto,  $M$  una variedad riemanniana completa con curvatura seccional  $\geq H$  y  $G \curvearrowright M$  una acción isométrica. Por C.6.3 el espacio cociente  $M/G$  es un espacio de Alexandrov con curvatura  $\geq H$ . En esta sección se investiga la estructura de dichos espacios. En lo que sigue  $\pi : M \rightarrow M/G$  es la proyección canónica y si  $p \in M$  entonces  $\bar{p} = \pi(p)$ .

Sean  $p, q' \in M$  tales que  $p \notin G \cdot q'$ . Dado que  $G \cdot q'$  es cerrado existe  $g \in G$  tal que  $d(p, G \cdot q') = d(p, q)$ . Sea  $\gamma$  una geodésica minimizante de  $p$  a  $q$ . Dado que  $L(\gamma) = d(p, G \cdot q)$ ,  $\gamma$  es perpendicular a  $G \cdot q$ , y por los mismos motivos  $\gamma$  es perpendicular a  $G \cdot p$ . La curva  $\bar{\gamma} = \pi \circ \gamma$  es una geodésica minimizante en  $M/G$  ya que  $d_{M/G}(\bar{\gamma}(t_1), \bar{\gamma}(t_2)) = d_M(\gamma(t_1), \gamma(t_2))$  (cfr. C.4). Estas geodésicas son ortogonales a todas las órbitas por las que pasan. Inversamente si una geodésica es ortogonal a las órbitas entonces su proyección debe de ser una geodésica también.

Si  $\beta$  es una geodésica en  $M/G$  se dice que una geodésica  $\gamma$  en  $M$  es un levantamiento de  $\beta$  si  $\beta = \pi(\gamma)$ .

**Proposición 4.3.1.** *Sea  $\beta : [a, b] \rightarrow M/G$  una geodésica en  $M/G$  con  $\beta(a) = \bar{p}$ . Para cada  $p \in M$  tal que  $\pi(p) = \bar{p}$ , existe un levantamiento  $\gamma$  de  $\beta$  con  $\gamma(a) = p$ . Más aún cualesquiera dos levantamientos están relacionados a través de un elemento  $g \in G_p$ , i.e. si  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  son levantamientos de  $\beta$  con  $\gamma_1(a) = \gamma_2(a) = p$  entonces existe  $g \in G_p$  tal que  $\gamma_1 = g\gamma_2$ .*

**Demostración** Sea  $S$  una rebanada en  $p$ . Por 4.2.3  $S/G_p$  es isomorfo a una vecindad de  $\bar{p}$  en  $M/G$ . Se puede pensar a  $\beta$  como una geodésica en  $S/G_p$ . Esto muestra que basta con estudiar las geodésicas en  $S/G_p$  con vértices en  $\pi(p)$ .

Primero obsérvese que si  $q \in S$  entonces  $d_M(p, q) = d_M(\pi(p), \pi(q))$  ya que por definición los elementos de  $G_p$  fijan a  $p$  y luego  $d(p, gq) = d(gp, gq) = d(p, q)$ .

Supóngase que  $\bar{q} = \beta(b) \in S/G_p$ . Sea  $q \in S$  tal que  $\pi(q) = \bar{q}$  y  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  la geodésica radial tal que  $\gamma(a) = p$  y  $\gamma(b) = q$ . Supóngase que existe un punto  $\bar{s} \in \beta$  que no está en  $\pi(\gamma)$ . Sea  $s \in S$  tal que  $d(s, q) = d_{M/G}(\bar{s}, \bar{q})$ . Dado que  $d_{M/G}(\bar{p}, \bar{q}) = d_M(p, q)$  y  $d_{M/G}(\bar{p}, \bar{q}) = d_{M/G}(\bar{p}, \bar{s}) + d_{M/G}(\bar{s}, \bar{q}) = d(p, s) + d(s, q)$ , y  $s \notin \gamma$  entonces se obtiene la contradicción  $d(p, q) < d(p, s) + d(s, q) = d(p, q)$ .

Es claro que cualquier levantamiento es de esta forma. Sean  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  dos levantamientos y sean  $q_1 = \gamma_1(b)$ ,  $q_2 = \gamma_2(b)$ . Dado que  $\pi(q_1) = \pi(q_2) = \bar{q}$  existe  $g \in G_p$  tal que  $q_1 = gq_2$  y luego  $g\gamma_2$  es una geodésica minimizante entre  $p$  y  $q_1$ . La construcción de  $S$  asegura que se está trabajando dentro de una bola normal con centro en  $p$  por lo que  $\gamma_1 = g\gamma_2$ .  $\square$

**Corolario 4.3.2.** *La proyección canónica  $\pi : M \rightarrow M/G$  es una submetría, es decir para todo  $r > 0$  y  $p \in M$  se tiene  $\pi(B_r(p)) = B_r(\pi(p))$ .*

**Demostración** Si  $pq$  es una geodésica minimizante radial normal a la órbita  $G \cdot p$  entonces  $pq$  se proyecta a una geodésica en  $M/G$  con la misma longitud. Esto implica que  $d(\bar{p}, \bar{q}) = d(p, q)$ . Si  $q \in B_r(p)$  entonces existe  $g \in G$  tal que  $d(gq, p) = d(G \cdot q, p)$  y podemos conectar a  $p$  con  $q' = gq$  a través de una geodésica ortogonal a la órbita en  $p$ . Por lo anterior  $d(\bar{p}, \bar{q}) = d(p, q') \leq d(p, q) < r$ . Esto muestra que  $\pi(B_r(p)) \subset B_r(\bar{p})$ . Si  $\bar{q} \in B_r(\bar{p})$  y  $\bar{p}\bar{q}$  es una geodésica entonces es posible encontrar un levantamiento  $pq$  en  $M$  con  $\pi(q) = \bar{q}$ . Dado que  $pq$  es normal a la órbita en  $p$  entonces  $pq$  tiene la misma longitud que  $\bar{p}\bar{q}$  y por lo tanto  $q \in B_r(p)$ . Esto muestra que  $B_r(\pi(p)) \subset \pi(B_r(p))$ .  $\square$

Los espacios de órbitas por lo general son espacios de Alexandrov con singularidades no suavizables. Es posible obtener una medida de cuan singular es un punto a través del espacio de direcciones. Consúltense el apéndice C para la definición del espacio de direcciones en un espacio de Alexandrov y conceptos relacionados.

**Corolario 4.3.3.** *Sean  $M$  una variedad riemanniana completa con curvatura seccional  $\geq H$  y  $G$  un grupo de Lie compacto y  $G \curvearrowright M$  una acción isométrica. El espacio de direcciones de  $\bar{p} \in M/G$  es isomorfo a  $\mathbb{S}^{m-1}/G_p$ , donde  $\mathbb{S}^{m-1}$  es la esfera unitaria en  $T_p G \cdot p^\perp$  y  $G_p$  actúa en  $\mathbb{S}^{m-1}$  a través de la representación de rebanada.*

**Demostración** Recuérdense que  $\Sigma'_p$  es la colección de direcciones que vienen de geodésicas en  $M/G$ . En este caso toda geodésica se puede levantar a  $M$ , por lo que cualquier sucesión de direcciones en  $\Sigma'_p$  genera una sucesión de direcciones en  $T_p M$  que contiene una subsucesión convergente. Tal dirección se proyecta a una dirección en  $\Sigma'_p$  que es el límite de la subsucesión convergente correspondiente. Esto muestra que  $\Sigma'_p = \Sigma_p$ .

Cada dirección en  $\Sigma'_p$  tiene un levantamiento en  $S_p$ , y dos levantamientos están relacionados a través de  $g \in G_p$ . De estas observaciones se sigue el resultado.  $\square$

Dado que  $\mathbb{S}^{n-1}$  es una variedad riemanniana completa con curvatura seccional  $\geq 1$  (de hecho = 1) y  $G_p$  actúa por isometrías en  $\mathbb{S}^n$ , el espacio de direcciones de un cociente isométrico es otro cociente isométrico. Esto permite hacer demostraciones por inducción.

La proposición anterior permite trasladar el problema de estudiar la topología local de los espacios  $M/G$  al problema de estudiar los cocientes  $\mathbb{S}^m/H$  para las representaciones de rebanada  $H \rightarrow O(\mathbb{R}^{m+1})$  donde  $H$  es un subgrupo de isotropía.

Preguntas como: ¿ $\bar{p}$  es un punto frontera de  $M/G$ ? se traducen a preguntas: ¿Para qué representaciones ortogonales de  $G_p$ ,  $V/G_p$  tiene frontera?. Esto a su vez conlleva a preguntarse, dada una acción de  $G$  en  $M$ , ¿qué grupos de isotropía  $G_p$  pueden emerger de tal acción?

Un elemento importante de esta clasificación es la cuestión de la orientación de los elementos de la isotropía, puesto que los elementos de  $O^+(n)$  y  $O^-(n)$  exhiben un comportamiento diferente. Por ejemplo, cuando  $n = 2$  los elementos de  $O^+(n)$  actúan libremente en  $\mathbb{R}^2$ , lo cual es falso para los elementos de  $O^-(n)$ .

Para esto la siguiente proposición es elemental.

**Proposición 4.3.4.** *Sea  $M$  una variedad riemanniana orientable y completa y  $G$  un grupo de Lie conexo que actúa por isometrías en  $M$ , entonces las isometrías  $\mu_g : M \rightarrow M$ ,  $g \in G$ , preservan orientación.*

**Demostración** Esto es una consecuencia de la siguiente afirmación: toda isometría  $\mu_g$  es difeotópica a la identidad, que se sigue de la conexidad de  $G$ .  $\square$

En particular,

**Corolario 4.3.5.** *Si un grupo de Lie conexo  $G$  actúa isométricamente en una variedad riemanniana completa y orientable  $M$  y  $p \in M$  entonces la representación de isotropía en  $p$  es especial ortogonal.*

Por otro lado, aún en el caso que  $M$  no sea orientable, se puede usar el mismo argumento para demostrar que

**Proposición 4.3.6.** *Si un grupo de Lie conexo  $G$  actúa por isometrías en una variedad riemanniana completa  $M$  y  $p \in \text{Fij}(G)$  entonces la representación de isotropía en  $p$  es especial ortogonal.*

Es sabido que toda transformación ortogonal  $P \in O(V)$  de un espacio  $n$ -dimensional con producto interior es equivalente a una transformación de la forma

$$P'(z_1, \dots, z_l, v, w) = (e^{ik_1} z_1, \dots, e^{ik_l} z_l, -v, w),$$

con  $(z_1, \dots, z_l, v, w) \in \mathbb{C}^l \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^s$ ,  $q \leq 1$ ,  $2l + q + s = n$  y  $k_i \in \mathbb{R}$ . Además  $P \in SO(V)$  si y solo si  $q = 0$ . Como consecuencia de esto tenemos las siguientes caracterizaciones de las representaciones ortogonales de  $G \subset \mathbb{S}^1$ .

En cuanto a las representaciones de  $\mathbb{S}^1$ :

**Lema 4.3.7.** *Sea  $V$  un espacio vectorial  $n$ -dimensional con producto interior y  $\mathbb{S}^1 \rightarrow O(V)$  una representación. La acción de  $\mathbb{S}^1$  en  $V$  es linealmente equivariante a la acción*

$$e^{i\theta}(z_1, \dots, z_l, w) = (e^{ik_1\theta} z_1, \dots, e^{ik_l\theta} z_l, w) \quad (4.1)$$

con  $(z_1, \dots, z_l, w) \in \mathbb{C}^l \times \mathbb{R}^s$ ,  $2l + s = n$  y  $k_i \in \mathbb{Z}$ . La acción es efectiva si y solo si  $(k_1; \dots; k_l) = 1$ .

Para el caso de  $\mathbb{Z}_m \subset \mathbb{S}^1$ :

**Lema 4.3.8.** *Sea  $V$  un espacio vectorial  $n$ -dimensional con producto interior y  $\mathbb{Z}_m \rightarrow O(V)$  una representación. La acción de  $\mathbb{Z}_m$  en  $V$  es linealmente equivariante a la acción*

$$e^{i\frac{j2\pi}{m}}(z_1, \dots, z_l, v, w) = (e^{ik_1\frac{j2\pi}{m}} z_1, \dots, e^{ik_l\frac{j2\pi}{m}} z_l, (-1)^j v, w) \quad (4.2)$$

con  $(z_1, \dots, z_l, v, w) \in \mathbb{C}^l \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^s$ ,  $q \leq 1$ ,  $2l + q + s = n$  y  $k_i \in \mathbb{Z}$  con  $k_i < m$ . La acción es efectiva si y solo si  $(k_1; \dots; k_l) = 1$ . Aún más si  $q = 1$  entonces  $m$  es par. Decimos que la acción es singular cuando  $q = 1$  y  $s = n - 1$ .

Nótese que los puntos fijos de dichas acciones están contenidos en las componentes  $\mathbb{R}^s$ .

Un problema importante en el estudio de los espacios de órbita es el de determinar su frontera (véase C.4.4 para la definición). Por el teorema de alma de Perelman C.5.2 la presencia de frontera y su forma brinda información importante del espacio de órbitas y consecuentemente de la variedad original. Los siguientes teoremas caracterizan por completo la frontera del espacio de órbitas para un  $\mathbb{S}^1$ -espacio.

**Lema 4.3.9.** *Cualquier acción isométrica y efectiva de  $\mathbb{Z}_m$  en  $\mathbb{S}^n$  satisface  $\partial\mathbb{S}^n/\mathbb{Z}_m = \emptyset$  si y solo si es no singular.*

**Demostración** Si  $n = 1$  el resultado es inmediato. Supongamos que  $n > 1$ . Dado que las órbitas son 0-dimensionales, las rebanadas son abiertos  $n$ -dimensionales con fronteras  $(n-1)$ -dimensionales  $\cong \mathbb{S}^{n-1}$ . El espacio de direcciones  $\Sigma_{\pi(p)}$  en  $\mathbb{S}^n/\mathbb{Z}_m$  es isomorfo a  $\mathbb{S}^{n-1}/G_p$ . Basta con demostrar que si la acción es no singular entonces todas las acciones de isotropía  $G_p$  son no singulares y que si la acción es singular entonces existe  $p \in \mathbb{S}^n$  tal que la acción de  $G_p$  es singular, el resultado se seguiría por inducción. Ambas afirmaciones son una consecuencia sencilla de 4.2.  $\square$

**Lema 4.3.10.** *Cualquier acción isométrica y efectiva de  $\mathbb{S}^1$  en  $\mathbb{S}^n$  con  $n \geq 2$  satisface  $\partial\mathbb{S}^n/\mathbb{S}^2 = \emptyset$  si y solo si  $\text{codim } Fij(\mathbb{S}^1) > 2$ .*

**Demostración** Si  $n = 2$  entonces el resultado es inmediato.

Sea  $S$  una rebanada en  $p$ .  $\partial S$  es una esfera de dimensión  $(n-1)$  o  $(n-2)$ , dependiendo de si  $p \in Fij(\mathbb{S}^1)$  o no. Si  $p \notin Fij(\mathbb{S}^1)$  entonces por 4.3.5,  $G_p \cong \mathbb{Z}_m$  actúa de manera no singular en  $S_p$  y luego  $\Sigma_p \cong \mathbb{S}^{n-1}/G_p$  no tiene frontera. Si  $p \in Fij(\mathbb{S}^1)$  entonces de 4.1 se sigue que la acción de  $\mathbb{S}^1$  en  $\mathbb{S}^{n-2} \subset S_p$  satisface  $\text{codim } Fij(\mathbb{S}^1_p) = \text{codim } Fij(\mathbb{S}^1) - 2$ . La demostración se puede terminar por inducción.  $\square$

Esto da una caracterización completa de los puntos frontera del espacio de órbitas para acciones isométricas de  $\mathbb{S}^1$ .

**Teorema 4.3.11.** *Sea  $M$  una variedad riemanniana completa con una acción isométrica de  $\mathbb{S}^1$ .  $\pi(p) \in M/\mathbb{S}^1$  es un punto frontera si y solo si  $p$  pertenece a una componente  $N \subset Fij(\mathbb{S}^1)$  de codimensión 2 ó la representación de isotropía en  $p$  es singular.*

Ahora pasamos a tratar el caso en que  $M/G$  es una variedad diferenciable. En este caso es posible inducir una estructura riemanniana sobre  $M/G$  de forma que el mapeo cociente sea lo más parecido a una isometría:

**Definición 4.3.1.** *Sea  $\pi : M \rightarrow N$  una sumersión entre variedades riemannianas. Para cada  $p \in M$  podemos descomponer el espacio tangente en  $T_p M = Nuc d\pi|_p \oplus Nuc d\pi|_p^\perp$ . Los vectores en  $Nuc d\pi|_p$  son llamados vectores verticales y se escribe  $T_p M^v = Nuc d\pi|_p$ . Los vectores en  $Nuc d\pi|_p^\perp$  son llamados vectores horizontales y  $T_p M^h = Nuc d\pi|_p^\perp$ . Se dice que  $\pi$  es una sumersión riemanniana si  $d\pi$  preserva la métrica en vectores horizontales. Es decir, si  $v, w \in T_p M^h$  entonces*

$$g_N(d\pi(v), d\pi(w)) = g_M(v, w)$$

Cuando  $\pi : M \rightarrow N$  es una sumersión riemanniana y  $X \in \mathcal{X}(N)$  es un campo vectorial, existe un único campo diferenciable, llamado el levantamiento de  $X$  a  $M$  y denotado por  $\bar{X}$ , tal que  $d\pi(\bar{X}) = X$  y  $\bar{X}|_p \in T_p M^v$  para todo  $p \in M$ . La existencia y unicidad de dicho campo es clara puesto que  $d\pi$  restringida a  $T_p M^h$  es un isomorfismo. La diferenciabilidad del campo puede verse tomando cartas coordenadas adaptadas al caso.

Se usará la siguiente notación: si  $W \in \mathcal{X}(M)$  entonces se puede descomponer a  $W$  de manera única como

$$W = W^h + W^v$$

donde  $W^h$  es un vector horizontal y  $W^v$  es un vector vertical.

Sea  $V$  un campo vectorial vertical y  $X \in \mathcal{X}(N)$ . Nótese que  $V$  está  $\pi$ -relacionado con 0 y luego

$$d\pi([V, \bar{X}]) = [d\pi(V), d\pi(\bar{X})] = 0 \quad (4.3)$$

por lo que  $[V, \bar{X}]$  es un campo vectorial vertical. También, si  $X, Y \in \mathcal{X}(N)$  entonces

$$d\pi([\bar{X}, \bar{Y}]) = [d\pi(\bar{X}), d\pi(\bar{Y})] = [X, Y]$$

y luego la componente horizontal de  $[\bar{X}, \bar{Y}]$  es  $[X, Y]$ .

**Proposición 4.3.12.** *Sea  $\pi : M \rightarrow N$  una sumersión riemanniana. Si  $X, Y \in \mathcal{X}(N)$ , y  $\nabla^M$  y  $\nabla^N$  denotan las conexiones de Levi-Civita de  $M$  y  $N$ , respectivamente, entonces*

$$\nabla_X^M \bar{Y} = \overline{\nabla_X^N Y} + \frac{1}{2}[\bar{X}, \bar{Y}]^v$$

**Demostración** Por la fórmula de Koszul A.1

$$2g(\nabla_X^M \bar{Y}, Z) = \bar{X}g(\bar{Y}, Z) + \bar{Y}g(\bar{X}, Z) - Zg(\bar{X}, \bar{Y}) + g([\bar{X}, \bar{Y}], Z) - g([\bar{X}, Z], \bar{Y}) - g([\bar{Y}, Z], \bar{X})$$

En el caso que  $Z = V$  sea vertical entonces  $g(\bar{X}, V) = g(\bar{Y}, V) = 0$ ,  $Vg(\bar{X}, \bar{Y}) = 0$  ya que  $g(\bar{X}, \bar{Y})$  es constante a lo largo de las fibras y  $g([\bar{X}, V], \bar{Y}) = g([\bar{Y}, Z], \bar{X}) = 0$  por el comentario anterior. Luego la fórmula se reduce a

$$2g(\nabla_X^M \bar{Y}, V) = g([\bar{X}, \bar{Y}], V) = g([\bar{X}, \bar{Y}]^v, V)$$

Es decir, la componente vertical de  $\nabla_X^M \bar{Y}$  es  $\frac{1}{2}[\bar{X}, \bar{Y}]^v$ .

Si  $Z = \bar{W}$  es horizontal entonces  $\bar{W}g(\bar{Y}, \bar{X}) = Wg(Y, X)$  y  $g([\bar{X}, \bar{Y}], \bar{W}) = g([X, Y], W)$  y luego

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X^M \bar{Y}, \bar{W}) &= Xg(Y, W) + Yg(X, W) - Wg(X, Y) + g([X, Y], W) - g([X, W], Y) - g([Y, W], X) \\ &= 2g(\nabla_X^N Y, W) = 2g(\overline{\nabla_X^N Y}, \bar{W}) \end{aligned}$$

Por lo que la componente horizontal de  $\nabla_X^M \bar{Y}$  es  $\overline{\nabla_X^N Y}$ . □

**Teorema 4.3.13** (O'Neil). *Sea  $\pi : M \rightarrow N$  una sumersión riemanniana y  $X, Y \in \mathcal{X}(N)$ . Entonces*

$$K_N(X, Y) = K_M(\bar{X}, \bar{Y}) + \frac{3}{4}|\bar{X}, \bar{Y}]^v|^2 \quad (4.4)$$

donde  $K_N$  y  $K_M$  denotan las curvaturas seccionales en  $N$  y  $M$  respectivamente.

**Demostración** Sean  $X, Y \in \mathcal{X}(N)$  un par de vectores ortonormales. Por la proposición anterior:

$$\begin{aligned}
K_M(\bar{X}, \bar{Y}) &= Rm^M(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{X}, \bar{Y}) = g(\nabla_{\bar{Y}}\nabla_{\bar{X}}\bar{X} - \nabla_{\bar{X}}\nabla_{\bar{Y}}\bar{X} + \nabla_{[\bar{X}, \bar{Y}]} \bar{X}, \bar{Y}) \\
&= g(\nabla_{\bar{Y}}(\nabla_{\bar{X}}\bar{X}) - \nabla_{\bar{X}}(\nabla_{\bar{Y}}\bar{X}) + \frac{1}{2}[\bar{Y}, \bar{X}]^v) + \nabla_{[\bar{X}, \bar{Y}]} \bar{Y} + \nabla_{[\bar{X}, \bar{Y}]^v} \bar{X}, \bar{Y}) \\
&= g(\nabla_{\bar{Y}}\nabla_{\bar{X}}\bar{X} - \nabla_{\bar{X}}\nabla_{\bar{Y}}\bar{X} + \nabla_{[\bar{X}, \bar{Y}]} \bar{X} - \frac{1}{2}\nabla_{\bar{X}}[\bar{Y}, \bar{X}]^v + \nabla_{[\bar{X}, \bar{Y}]^v} \bar{X} \\
&\quad + \frac{1}{2}[\bar{Y}, \nabla_{\bar{X}}\bar{X}]^v - \frac{1}{2}[\bar{X}, \nabla_{\bar{Y}}\bar{X}]^v, \bar{Y}) \\
&= g(\nabla_{\bar{Y}}\nabla_{\bar{X}}\bar{X} - \nabla_{\bar{X}}\nabla_{\bar{Y}}\bar{X} + \nabla_{[\bar{X}, \bar{Y}]} \bar{X}, \bar{Y}) - \frac{1}{2}g(\nabla_{\bar{X}}[\bar{Y}, \bar{X}]^v, \bar{Y}) + g(\nabla_{[\bar{X}, \bar{Y}]^v} \bar{X}, \bar{Y}) \\
&= Rm^N(X, Y, X, Y) - \frac{1}{2}g(\nabla_{\bar{X}}[\bar{Y}, \bar{X}]^v, \bar{Y}) + g([\bar{X}, \bar{Y}]^v, \bar{X}, \bar{Y}) - \nabla_{\bar{X}}[\bar{X}, \bar{Y}]^v, \bar{Y}) \\
&= Rm^N(X, Y, X, Y) - \frac{3}{2}g(\nabla_{\bar{X}}[\bar{X}, \bar{Y}]^v, \bar{Y}) \\
&= Rm^N(X, Y, X, Y) - \frac{3}{2}(Xg([\bar{X}, \bar{Y}]^v, \bar{Y}) - g([\bar{X}, \bar{Y}]^v, \nabla_{\bar{X}}\bar{Y})) \\
&= Rm^N(X, Y, X, Y) + \frac{3}{4}|\bar{X}, \bar{Y}]^v|^2
\end{aligned}$$

□

**Proposición 4.3.14.** *Si  $G$  actúa por isometrías en una variedad riemanniana  $M$  de tal forma que  $M/G$  es una variedad diferenciable (v.g.  $G$  actúa libremente, o más en general existe un solo tipo de isotropía), entonces existe una única métrica en  $M/G$  tal que  $\pi : M \rightarrow M/G$  es una sumersión riemanniana.*

**Demostración** El espacio tangente de  $M/G$  en  $\bar{p} = \pi(p)$  es isomorfo al complemento ortogonal de  $T_p G \cdot p$ . Defínase una métrica en  $T_{\bar{p}}M/G$  a través de la identificación previamente mencionada. Dicha métrica está bien definida puesto que la elección de métrica depende del punto  $p \in \bar{p}$ , sin embargo entre cualquier par de dichos puntos existe una isometría  $g \in G$  que lleva el uno al otro; esto muestra que la elección de métrica no depende del representante  $p \in \bar{p}$ .

Por la manera que fue definida la métrica en  $M/G$  es inmediato que  $\pi : M \rightarrow M/G$  es una sumersión riemanniana. □

Como consecuencia

**Corolario 4.3.15.** *Si  $M$  es una variedad riemanniana con curvatura seccional positiva y  $G$  es un grupo de Lie que actúa por isometrías y libremente en  $M$  entonces  $M/G$  es una variedad con curvatura seccional positiva.*

**Ejemplo** Sea  $\mathbb{S}^{2n+1} \subset \mathbb{R}^{2n+2} = \mathbb{C}^{n+1}$  la esfera unitaria con la métrica canónica (inducida por la métrica euclidiana de  $\mathbb{R}^{2n+2}$ ). La función  $m : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}^{n+1}$  definida por

$$m(z, (w_0, \dots, w_n)) = (zw_0, \dots, zw_n)$$

define una acción de  $\mathbb{S}^1$  en  $\mathbb{C}^{n+1}$ . Dicha acción es isométrica y lineal, y por lo tanto se restringe a una acción isométrica  $\mathbb{S}^1 \curvearrowright \mathbb{S}^{2n+1}$ . La acción es libre y por lo tanto el cociente  $\mathbb{S}^{2n+1}/\mathbb{S}^1$  tiene

una estructura de variedad riemanniana para la cual  $\pi : \mathbb{S}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{S}^{2n+1}/\mathbb{S}^1$  es una sumersión riemanniana. La variedad  $\mathbb{S}^{2n+1}/\mathbb{S}^1$  es llama el espacio proyectivo complejo  $n$ -dimensional, denotado por  $\mathbb{C}P^n$ , y la métrica inducida es llamada la métrica de Fubini-Study.

Por el corolario anterior la curvatura seccional de  $\mathbb{C}P^n$  con la métrica Fubini-Study es  $\geq 1$ . Para analizar con mayor detalle la curvatura del espacio en cuestión sea  $V$  el campo vectorial unitario de  $\mathbb{S}^{2n+1}$  tangente a las órbitas de  $\mathbb{S}^1$ . Este campo forma una base del espacio vertical en cada punto. Sean  $X, Y$  campos vectoriales de  $\mathbb{C}P^n$  y sean  $\bar{X}$  y  $\bar{Y}$  sus levantamientos básicos a  $\mathbb{S}^{2n+1}$ . Dado que la componente vertical de  $\nabla_{\bar{X}}\bar{Y}$  es  $\frac{1}{2}[\bar{X}, \bar{Y}]^v$  entonces tenemos que

$$\begin{aligned} g\left(\frac{1}{2}[\bar{X}, \bar{Y}], V\right) &= g(\nabla_{\bar{X}}\bar{Y}, V) \\ &= -g(\bar{Y}, \nabla_{\bar{X}}V) \end{aligned}$$

Dado que la métrica en  $\mathbb{S}^{2n+1}$  es la métrica inducida, la conexión en  $\mathbb{S}^{2n+1}$  es la proyección a  $T\mathbb{S}^{2n+1}$  de la conexión canónica en  $\mathbb{R}^{2n}$  (véase A.4) y luego

$$g(\bar{Y}, \nabla_{\bar{X}}V) = g(\bar{Y}, \nabla_{\bar{X}}^{\mathbb{R}^{2n}} C)$$

$\mathbb{R}^{2n+2} = \mathbb{C}^{n+1}$  tiene estructura compleja y es posible multiplicar los vectores tangentes por  $i = \sqrt{-1} \in \mathbb{C}$ . Nótese que

$$iV_p = \frac{d}{dt}(ie^{it}p) = -p$$

y luego  $iV$  es el campo normal a  $\mathbb{S}^{2n+1}$  que apunta hacia el interior. Por lo tanto

$$\begin{aligned} g\left(\frac{1}{2}[\bar{X}, \bar{Y}], V\right) &= g(\bar{Y}, \nabla_{\bar{X}}^{\mathbb{R}^{2n}} V) \\ &= g(\bar{Y}, -i\nabla_{\bar{X}}^{\mathbb{R}^{2n}} iV) \\ &= g(\bar{Y}, i\nabla_{\bar{X}}^{\mathbb{R}^{2n}} N) \end{aligned}$$

Donde  $N$  es el campo normal a  $\mathbb{S}^{2n+1}$  que apunta hacia el exterior. Dado que  $\nabla_{\bar{X}}^{\mathbb{R}^{2n}} N = X$ , resulta que

$$g\left(\frac{1}{2}[\bar{X}, \bar{Y}], V\right) = g(\bar{Y}, i\bar{X})$$

Lo cual implica que

$$|[\bar{X}, \bar{Y}]^v|^2 = 4g(\bar{Y}, i\bar{X})^2$$

Esto muestra que para  $n > 1$ ,  $\mathbb{C}P^n$  es una variedad riemanniana ( $2n$ -dimensional) con curvatura seccional en el rango  $[1, 4]$ . Este ejemplo es especialmente relevante si se compara con 3.6.2 puesto que muestra que el resultado de la esfera  $\frac{1}{4}$ -pinchada es preciso en el caso de dimensión par.

## 4.4. Campos de Killing

Sea  $M$  una variedad riemanniana.

**Definición 4.4.1.** Una familia de difeomorfismos a un parámetro es una acción de  $\mathbb{R}$  en  $M$ ,  $\{\varphi_t\}$ .

Una familia de difeomorfismos a un parámetro también es llamada flujo. Obsérvese que las familias de difeomorfismos a un parámetro son los subgrupos a un parámetro de  $Dif(M)$ .

Toda familia de difeomorfismos a un parámetro define un campo vectorial  $X$  a través de la fórmula

$$X_p = \frac{d}{dt}\varphi_t(p).$$

Dado que todo campo vectorial puede ser interpretado como una ecuación diferencial ordinaria de primer orden todo campo vectorial define un flujo local. Esto es, existe una vecindad  $U$  de  $M \times \{0\}$  en  $M \times \mathbb{R}$  junto con un mapeo suave  $\mu : U \rightarrow M$  tal que

1.  $\mu(0, p) = p$ ;
2.  $\mu(t + s, p) = \mu(t, \mu(s, p))$ , siempre y cuando  $(t, p), (s, p), (t + s, p) \in U$ ;
3.  $X_p = \frac{d}{dt}\varphi_t(p)$ .

Cuando  $U = \mathbb{R}$  se dice que el campo es completo. Cuando  $M$  es una variedad compacta todo campo vectorial sobre  $M$  es completo. También si  $M$  es una variedad riemanniana completa y  $X \in \mathcal{X}(M)$  es tal que  $|X| < C$  para alguna constante  $C$  entonces  $X$  es completo.

En el caso que una familia de difeomorfismos a un parámetro o flujo  $\{\varphi_t\}$  sea una acción isométrica, i.e.,  $\varphi_t \in Iso(M)$  para toda  $t \in \mathbb{R}$ , se dice que  $\{\varphi_t\}$  es una familia de isometrías a un parámetro o que es un flujo isométrico.

**Definición 4.4.2.** *Un campo de Killing en una variedad riemanniana  $M$  es un campo  $X$  que proviene de un flujo local isométrico. Al conjunto de campos de Killing se le denotará por  $\mathfrak{K}(M)$ .*

De la definición es inmediata la siguiente proposición:

**Proposición 4.4.1.** *Sea  $\varphi : M \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  un flujo isométrico y  $X$  el campo de Killing inducido, entonces*

$$d\varphi_t(X) = X.$$

**Demostración**  $(d\varphi_t)_p(X_p) = \frac{d}{ds}(\varphi_t(\varphi_s(p))) = \frac{d}{ds}(\varphi_s(\varphi_t(p))) = X_{\varphi_t(p)}$ . □

Obsérvese que si  $\{\varphi_t\}$  es un flujo isométrico y  $X$  es el campo de Killing inducido entonces

$$\mathcal{L}_X g(Y, Z) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g((\varphi_t^*)^{-1}(Y), (\varphi_t^*)^{-1}(Z)) - g(Y, Z)}{t} = 0.$$

Además

$$\mathcal{L}_X g(Y, Z) = X(g(Y, Z)) - g([X, Y], Z) - g(Y, [X, Z]) = g(\nabla_Y X, Z) + g(Y, \nabla_Z X),$$

por lo que:

**Proposición 4.4.2.** *Un campo vectorial  $X$  es de Killing si y solo si*

$$g(\nabla_Y X, Z) + g(Y, \nabla_Z X) = 0 \tag{4.5}$$

para todo  $Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ . O bien, si y solo si el automorfismo lineal  $\nabla_- X \in \mathfrak{o}(TM)$  es antisimétrico con respecto a  $g$ .

El subconjunto de automorfismos antisimétricos con respecto a un producto interior forma un espacio vectorial por lo que  $\mathfrak{K}(M)$  es un subespacio vectorial de  $\mathcal{X}(M)$ . Además como la derivada de Lie es un homomorfismo de álgebras de Lie  $\mathcal{L} : \mathcal{X}(M) \rightarrow \text{Der}(T(M))$  entonces  $\mathcal{L}_{[X,Y]} = [\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y]$ , y luego si  $X, Y$  son campos de Killing entonces  $\mathcal{L}_{[X,Y]}(g) = [\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y](g) = 0$ .

**Corolario 4.4.3.**  $\mathfrak{K}(M)$  es una subálgebra de Lie de  $\mathcal{X}(M)$ .

Dado que las isometrías preservan geodésicas, si  $\gamma$  es una geodésica y  $\{\varphi_t\}$  es un flujo isométrico entonces  $\varphi_t(\gamma) = \gamma_t$  es una geodésica para todo  $t$ . Esta variación por geodésicas induce un campo de Jacobi en  $\gamma_0 = \gamma$  y por lo tanto

**Proposición 4.4.4.** Si  $X$  es un campo de Killing y  $\gamma$  es una geodésica, entonces  $X|_\gamma$  es un campo de Jacobi.

**Proposición 4.4.5.** Un campo de Killing está unívocamente determinado por  $X_p$  y  $(\nabla X)_p$  para cualquier  $p \in M$ .

**Corolario 4.4.6.**  $\dim(\mathfrak{K}(M)) \leq n(n+1)/2$ .

La acción isométrica de un grupo de Lie provee de numerosos ejemplos de campos de Killing.

**Definición 4.4.3.** Sea  $G$  un grupo de Lie actuando por isometrías en  $M$  y  $x \in \mathfrak{g}$ . El subgrupo a un parámetro generado por  $X$  define un flujo isométrico en  $M$ ,  $\mu_{\exp(tx)} : M \rightarrow M$ . El campo de Killing generado por este flujo es llamado el campo de Killing asociado a  $x$  y es denotado por  $\overline{X}$ . Llamamos a la función inducida  $\phi_G : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{K}(M)$ .

**Proposición 4.4.7.** Sea  $G$  un grupo de Lie actuando por isometrías en una variedad riemanniana  $M$ .  $\phi_G$  es un antihomomorfismo lineal, es decir,

$$\phi_G([x, y]) = -[\phi_G(x), \phi_G(y)],$$

donde el corchete en la parte izquierda denota el corchete en el álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  y del lado derecho denota el corchete de Lie de campos vectoriales.

**Demostración** Sea  $\mu : G \times M \rightarrow M$  la acción isométrica.

Para  $x \in \mathfrak{g}$  sean  $\psi^x : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$  y  $\Psi^x : \mathbb{R} \times G \times M \rightarrow G \times M$  los flujos dados por  $\psi^x(t, p) = \exp(tx)p$  y  $\Psi^x(t, g, p) = (\exp(tx)g, p)$ . Es claro que  $\mu \circ \Psi^x = \psi^x \circ (Id \times \mu)$  por lo que  $\phi_G(x) = d\mu(\tilde{X})$ , donde  $\tilde{X}$  es el campo generado por  $\Psi^x$ .

Nótese que  $\tilde{X}_{(g,p)} = ((X_d)_g, 0) \in T_g G \times T_p M \cong T_{(g,p)}(G \times M)$  donde  $X_d$  es el campo derecho-invariante generado por  $x$ . Por tanto,  $\lambda \tilde{X} + Y = \lambda \tilde{X} + \tilde{Y}$ , y luego  $\phi_G(\lambda x + y) = \lambda \phi_G(x) + \phi_G(y)$ .

Por otro lado si  $\psi^x(t) = g \cdot \exp(tx)$  es el flujo del campo izquierdo-invariante  $X_i$  generado por  $x$  entonces el flujo  $\Psi(t, g) = (\psi^x(t, g^{-1}))^{-1} = \exp(-tx) \cdot g$  es el flujo del campo derecho-invariante  $-X_d$ . Esto es, el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times G & \xrightarrow{id \times i} & \mathbb{R} \times G \\ \psi \downarrow & & \Psi \downarrow \\ G & \xrightarrow{i} & G \end{array}$$

es conmutativo, donde  $i$  es el mapeo inversión  $i(g) = g^{-1}$ . Luego  $X_d = di(X_i)$ , y en particular  $[X_d, Y_d]_e = [di(X_i), di(Y_i)]_e = di_e([X_i, Y_i]_e) = -[X_i, Y_i]_e = -[x, y]$ , es decir  $[X_d, Y_d]$  es el campo derecho-invariante generado por  $-[x, y] \in \mathfrak{g}$ .

Dado que  $d\mu([V, W]) = [d\mu(V), d\mu(W)]$ , el resultado se sigue de lo mencionado arriba.  $\square$

Si  $M$  es completa y  $G = Iso(M)$  la función  $\phi_{Iso(M)} : \mathfrak{Iso}(M) \rightarrow \mathfrak{K}(M)$  es un isomorfismo lineal: es inyectiva ya que si un subgrupo a un parámetro de isometrías de  $M$  induce el campo 0 entonces el subgrupo es el trivial. Además, es suprayectiva, ya que todo campo de Killing induce un flujo completo. La razón de esto es que toda curva integral de un campo de Killing tiene velocidad constante, y en una variedad completa esto implica que se puede extender indefinidamente. Luego se puede identificar el álgebra de Lie  $\mathfrak{Iso}(M)$  con el álgebra de campos de Killing  $\mathfrak{K}(M)$  con la operación

$$[X, Y]_{\mathfrak{Iso}(M)} = -[X, Y].$$

Sea  $X$  un campo de Killing y  $Z(X) = \{p \in M | X_p = 0\}$ . Si  $\{\varphi_t\}$  es el flujo local inducido por  $X$ , entonces  $\varphi_t$  deja fijo a  $Z(X)$ . Por otro lado si  $\varphi_t$  deja fijo a  $p$  para toda  $t$ , entonces  $X_p = \frac{d}{dt}\varphi_t(p) = 0$ .

**Proposición 4.4.8.** *Para un campo de Killing  $X$ ,  $Z(X) = Fij(\{\varphi_t\})$ .*

Por la proposición 4.1.6  $Z(X)$  es unión ajena de subvariedades cerradas y totalmente geodésicas. Tómese un punto  $p \in Z(X)$  y sea  $r > 0$  tal que  $B_r(p)$  es normal. Si  $W = T_p Z(X)^\perp$  entonces  $\exp_p$  manda  $W \cap B_r(0)$  en una sección normal a  $Z(X)$  en  $p$ . Sea  $\exp_p(W \cap B_r(0)) = B_r^\perp(p)$ . Dado que  $\varphi_t$  conmuta con  $\exp_p$ , entonces  $\varphi_t(B_r^\perp(p)) = B_r^\perp(p)$ . Además, no puede existir un punto fijo  $x \in Fij(\{\varphi_t\}) \cap B_r^\perp(p) - \{p\}$  puesto que esto implicaría que la geodésica radial  $\gamma$  de  $p$  a  $x$  quedaría fija bajo las  $\varphi_t$  y por lo tanto  $X|_\gamma = 0$ . También, como  $\varphi_t$  son isometrías entonces  $\varphi_t(\partial B_r^\perp(p)) = \partial B_r^\perp(p) \cong \mathbb{S}^{n-m-1}$ , donde  $m = \dim(T_p Z(X))$ . En resumen, un campo de Killing induce un flujo sin puntos fijos en  $\partial B_r^\perp(p)$  y por lo tanto un campo vectorial sin ceros  $X^*$  en  $\mathbb{S}^{n-m-1}$ . Sin embargo,

**Lema 4.4.9.** *Todo campo vectorial en una esfera de dimensión par tiene un cero.*

**Demostración** La característica de Euler de una esfera de dimensión par es 2. Por el teorema del índice de Poincaré-Hopf todo campo vectorial debe de tener un cero.  $\square$

Por lo tanto,

**Corolario 4.4.10.** *Las componentes de  $Z(X)$  para un campo de Killing son de codimensión par.*

**Lema 4.4.11.** *Sea  $N$  una componente de  $Z(X)$ ,  $p \in N$  y  $A_X : T_p M \rightarrow T_p M$  el endomorfismo  $A_X(v) = \nabla_v X|_p$ . Entonces  $T_p N = Nuc A_X$ .*

**Demostración** Sea  $v \in T_p M$  y  $\gamma_v$  la geodésica radial con  $\gamma'(0) = v$ . Dado que  $X|_\gamma$  es un campo de Jacobi y  $X|_p = 0$ , el campo  $X|_\gamma$  queda completamente determinado por  $\nabla_V X$ .

Si  $\nabla_V X = 0$  entonces  $X|_\gamma = 0$ , por lo que  $\gamma \subseteq N$  y consecuentemente  $v \in T_p N$ . Inversamente si  $v \in T_p N$  entonces  $\gamma \subseteq N$  y  $\nabla_V X = 0$ .  $\square$

Sea  $p$  un cero del campo de Killing  $X$  y  $\varphi_t$  el flujo generado por  $X$ . Como ya se ha mencionado si  $B$  es una bola normal entonces  $\partial B \cong \mathbb{S}^{n-1}$  es invariante bajo  $\varphi_t$  y además la acción en  $B$  es equivariante a través de  $\exp_p$  a la representación de isotropía  $\mathbb{R} \rightarrow O(T_p M)$ .

Sea  $v \in T_p M$  y considérese la curva  $d\varphi_t(v)$ . Para calcular su derivada sea  $\psi(s, t) = \varphi_t(\exp(sv))$  una variación por geodésicas. Nótese que  $\frac{\partial}{\partial s}\psi(0, t) = d\varphi_t(v)$ . Por simetría,

$$D_t \frac{\partial}{\partial s} \psi = D_s \frac{\partial}{\partial t} \psi = D_s X = \nabla_v X;$$

luego:

**Proposición 4.4.12.** Sean  $G \rightarrow \text{Iso}(M)$  una acción isométrica y un punto fijo  $p \in \text{Fij}(G)$ ; esto da lugar a una representación ortogonal  $G \rightarrow O(T_p M)$ . La representación inducida de álgebras de Lie  $\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{o}(T_p M)$  está dada por

$$X \mapsto \nabla_- \bar{X},$$

donde  $\bar{X}$  es el campo de Killing generado por  $X$ . En particular si  $\varphi_t$  es un subgrupo a un parámetro de  $G$  y  $\bar{X}$  es el campo de Killing inducido entonces

$$\varphi_t(\exp_p(v)) = \exp_p(d\varphi_t(v)) = \exp_p(e^{t\nabla_- X}(v)), \quad v \in T_p M.$$

## 4.5. El método de Bochner

En esta sección se utiliza la rígida estructura métrica de los campos de Killing para extraer información topológica. El método empleado es usualmente llamado el método de Bochner puesto que fue él quien en 1940 encontró y explotó una relación entre las formas armónicas y la curvatura de Ricci. No se desarrollará este método, pero presentamos algunas relaciones entre el laplaciano de ciertas funciones y la curvatura de Ricci que pueden indicar el camino hacia el método general.

En lo que sigue  $M$  es una variedad riemanniana cerrada. Recuérdese que si  $f \in \mathcal{F}(M)$  entonces el hessiano de  $f$  es la forma bilíneal dada por  $\text{Hess}(f) = \nabla \nabla f = \nabla df$ . Nótese que

$$\begin{aligned} \text{Hess}(f)(X, Y) &= \nabla_X(\nabla f)(Y) = X(\nabla_Y f) - \nabla f(\nabla_X Y) \\ &= Xg(Y, \nabla f) - g(\nabla f, \nabla_X Y) = g(\nabla_X \nabla f, Y). \end{aligned}$$

Si  $T$  es un  $(1, 1)$ -tensor entonces se puede visualizar a  $T_p$  como un endomorfismo lineal  $T_p : T_p M \rightarrow T_p M$ . La norma de  $T$  se define como  $|T| = \text{tr}(T^* \circ T)$  donde  $T^*$  denota la adjunta de  $T$  con respecto a la métrica. Si  $\{E_i\}$  es un marco ortonormal local entonces  $|T| = \text{tr}(T^* \circ T) = g(T^* \circ T(E_i), E_i) = g(T(E_i), T(E_i)) > 0$ . Esta norma proviene de un producto interior definido como  $\langle T, S \rangle = \text{tr}(T^* \circ S)$ , que en términos de un marco ortonormal local  $\{E_i\}$  es simplemente  $\langle T, S \rangle = g(T(E_i), S(E_i))$ . Es fácil verificar que  $\langle, \rangle$  es un producto interior, por lo que  $|\cdot|$  es una norma.

**Proposición 4.5.1.** Sea  $X$  un campo de Killing. Defínase  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  como  $f(p) = 1/2|X_p|^2 = 1/2g(X, X)$ . Entonces

1.  $\text{grad}(f) = -\nabla_X X$ ;
2.  $\text{Hess}(f)(V, V) = g(\nabla_V X, \nabla_V X) - R(V, X, V, X)$ ;
3.  $\Delta f = |\nabla X|^2 - \text{Ric}(X, X)$ .

**Demostración** 1. Sea  $Z \in \mathcal{X}(M)$ . Dado que  $X$  es un campo de Killing, por 4.4.2

$$g(\nabla f, Z) = Zf = g(\nabla_Z X, X) = g(Z, -\nabla_X X).$$

Por lo tanto,  $\nabla f = -\nabla_X X$ .

2. Sea  $V \in \mathcal{X}(M)$ . Entonces,

$$\begin{aligned} \text{Hess}(f)(V, V) &= g(\nabla_V \nabla f, V) \\ &= -g(\nabla_V \nabla_X X, V) \\ &= -g(R(X, V)X, V) - g(\nabla_X \nabla_V X, V) - g(\nabla_{[X, V]} X, V) \\ &= -R(V, X, V, X) - Xg(\nabla_V X, V) + g(\nabla_V X, \nabla_X V) + g([X, V], \nabla_X V). \end{aligned}$$

Nótese que se ha usado que  $\nabla_X X$  es antisimétrico. Además  $g(\nabla_V X, V) = 0$  y por tanto  $Xg(\nabla_V X, V) = 0$ . Continuando con las cuentas,

$$\begin{aligned} \text{Hess}(f)(V, V) &= -R(V, X, V, X) + g(\nabla_V X, \nabla_X V) + g([X, V], \nabla_X V) \\ &= -R(V, X, V, X) + g(\nabla_V X, \nabla_X V) + g(\nabla_X V - \nabla_V X, \nabla_X V) \\ &= -R(V, X, V, X) + g(\nabla_V X, \nabla_X V). \end{aligned}$$

3. Sea  $\{E_i\}$  una base ortonormal de  $M_p$ . Entonces

$$\Delta f(p) = \sum \text{Hess}(f)(E_i, E_i) = \sum g(\nabla_{E_i} X, \nabla_{E_i} X) - R(E_i, X, E_i, X) = |\nabla X|^2 - \text{Ric}(X, X).$$

□

Estas fórmulas tienen la siguiente consecuencia sencilla. Recuerdese que  $\Delta f d \text{vol} = d(i_{\nabla f}(d \text{vol}))$ , i.e.  $\Delta f d \text{vol}$  es una forma exacta.

**Teorema 4.5.2** (Bochner, 1946). *Sea  $M$  una variedad compacta, orientada, con  $\text{Ric} \leq 0$ . Todo campo de Killing es paralelo. Más aún, si  $\text{Ric} < 0$  entonces  $M$  no tiene campos de Killing.*

**Demostración** Sea  $X$  un campo de Killing. Sea  $f = 1/2g(X, X)$  como en la proposición anterior. Por el teorema de Stokes,

$$0 = \int_M \Delta f;$$

usando la proposición anterior y el hecho de que  $\text{Ric}(X, X) \leq 0$ ,

$$0 = \int_M \Delta f = \int_M |\nabla X|^2 - \text{Ric}(X, X) \geq \int_M |\nabla X|^2 \geq 0.$$

Esto muestra que  $\nabla X = 0$ , es decir  $X$  es paralelo. Además,

$$\int_M \text{Ric}(X, X) = 0.$$

Si la curvatura de Ricci es negativa (de hecho basta con que lo sea en un punto) entonces es necesario que  $X|_p = 0$ . Sin embargo,  $\nabla X = 0$  por lo que  $X = 0$ . □

Dado que los campos de Killing conforman el álgebra de Lie del grupo de isometrías, esto implica que si  $M$  es una variedad riemanniana compacta, orientada y con  $\text{Ric} < 0$  entonces  $\text{Iso}(M)$  es un grupo de Lie 0-dimensional, i.e. finito.

En el caso con curvatura seccional positiva se puede extraer información de los ceros de campos de Killing.

**Teorema 4.5.3** (Berger). *Sea  $M$  una variedad riemanniana compacta de dimensión par y con  $K_M > 0$ . Todo campo de Killing en  $M$  tiene un cero.*

**Demostración** Sea  $X \in \mathfrak{Iso}(M)$  y  $f = 1/2g(X, X)$ . Supóngase que  $X$  no tiene ceros y por lo tanto  $f > 0$ . Como  $M$  es compacto  $f$  alcanza su mínimo en  $p \in M$ . Luego  $\text{Hess}(f)$  en  $p$  es positivo definido. Por 4.5.1,

$$\text{Hess}(f)(V, V) = g(\nabla_V X, \nabla_V X) - R(V, X, V, X).$$

Dado que  $M$  tiene curvatura positiva si  $X$  y  $V$  son línealmente independientes se tiene que  $R(V, X, V, X) > 0$ . Así si  $V$  y  $X$  son línealmente independientes y  $\nabla_V X = 0$  se obtendría la contradicción  $0 < \text{Hess}(f)(V, V) = -R(V, X, V, X) < 0$ . Obsérvese que  $X|_p \neq 0$  y que como  $p$  es mínimo de  $f$ :

$$g(\nabla_X X, V)_p = -g(X, \nabla_V X)_p = -1/2Vg(X, X)(p) = Vf(p) = 0, \quad V \in \mathcal{X}(M).$$

Luego  $\nabla_X X|_p = 0$ . Sin embargo  $\nabla_- X|_p$  es una transformación antisimétrica en el espacio vectorial  $2n$ -dimensional  $M_p$ . Esto implica que existe  $V \in M_p$  independiente de  $X$  tal que  $\nabla_V X|_p = 0$ .  $\square$

## 4.6. Acciones toroidales

En esta sección se estudian las acciones isométricas por grupos de Lie abelianos.

**Definición 4.6.1.** *El toro  $n$ -dimensional es el grupo de Lie  $\mathbb{T}^n = (\mathbb{S}^1)^n$ .*

**Teorema 4.6.1.** *Los únicos grupos de Lie abelianos, compactos y conexos son de la forma  $\mathbb{T}^n$ .*

**Demostración** Sea  $G$  un grupo de Lie compacto, abeliano y conexo. Sea  $\{E_i\}$  una base de campos izquierdo-invariantes en  $G$ . Defínase una métrica riemanniana en  $G$  declarando a  $\{E_i\}$  una base ortonormal. Como  $G$  es abeliano y  $[E_i, E_j] = 0$ , alrededor de cada punto existen coordenadas  $x_i$  tales que  $\frac{\partial}{\partial x_i} = E_i$ . Esto implica que  $G$  es localmente plano. Por el teorema de Hopf-Killing 1.3.3  $G = \mathbb{R}^n/\Gamma$ , donde  $\Gamma$  es un subgrupo de isometrías de  $\mathbb{R}^n$  que actúa de manera totalmente discontinua en  $\mathbb{R}^n$ . Se puede demostrar que tal subgrupo debe de ser isomorfo a  $\mathbb{Z}^n$  y por lo tanto  $G = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n \cong \mathbb{T}^n$ .  $\square$

La demostración anterior también implica que en  $\mathbb{T}^n$  los subgrupos a un parámetro son las proyecciones de líneas en  $\mathbb{R}^n$  (cfr. 5.1.1). Dicha línea está unívocamente determinada por el vector inicial. Es bien sabido que cuando  $x = (q_1, \dots, q_n)$  es un vector tal que sus coordenadas son racionalmente independientes entonces la proyección de la recta  $tx$  a  $\mathbb{T}^n$  es una geodésica que cubre densamente al toro.

**Definición 4.6.2.** *Sea  $\mathfrak{h}$  el álgebra de Lie de un toro  $\mathbb{T}^m$ . Se dice que  $x \in \mathfrak{h}$  es un generador infinitesimal de  $\mathbb{T}^m$  si  $\overline{\{\exp(tx) | t \in \mathbb{R}\}} = \mathbb{T}^m$ .*

El párrafo anterior demuestra que todo toro tiene un generador infinitesimal.

**Definición 4.6.3.** *Un subgrupo  $T$  de  $G$  que es isomorfo a un toro es llamado un subtoro. Un toro maximal en  $G$  es un subtoro  $T \subset G$  tal que si  $T'$  es un subtoro con  $T \subseteq T'$  entonces  $T' = T$ .*

**Teorema 4.6.2** (Cartan). *Todo grupo de Lie posee un toro maximal. Cualesquiera dos toros maximales  $T, T' \subset G$  son iguales salvo conjugación. Esto es, existe  $g \in G$  tal que  $T' = gTg^{-1}$ .*

Como consecuencia inmediata se tiene que si  $T$  y  $T'$  son toros maximales de  $G$  entonces tienen dimensiones iguales.

**Definición 4.6.4.** *El rango de un grupo de Lie,  $rk(G)$ , es  $\dim(T)$  donde  $T$  es un toro maximal.*

Aplicado al caso geométrico,

**Definición 4.6.5.** *El rango de simetría de una variedad completa es el rango de  $Iso(M)$  y se denota por  $simrk(M)$ .*

Sea  $\mathfrak{h}$  el álgebra de Lie de un toro maximal  $T$  de  $Iso(M)$ . Estos son los campos de Killing asociados a los subgrupos a un parámetro de  $T$ . Como  $\mathfrak{h}$  es un álgebra de Lie abeliana, si  $X, Y \in \mathfrak{h}$  son campos de Killing entonces  $[X, Y] = 0$ .

**Definición 4.6.6.** *Se  $ZZ(\mathfrak{h})$  el conjunto de subvariedades de  $M$  que son ceros de algún elemento de  $\mathfrak{h}$ , es decir*

$$ZZ(\mathfrak{h}) = \{N \subsetneq M \mid \exists X \in \mathfrak{h} \text{ tal que } N \text{ es una componente conexa de } Z(X)\}.$$

**Proposición 4.6.3.** *Sea  $M$  una variedad riemanniana completa y  $\mathfrak{h}$  el álgebra de Lie de un toro maximal de  $Iso(M)$ . Entonces:*

1. *Los campos de Killing en  $\mathfrak{h}$  son tangentes a cualquier  $N \in ZZ(\mathfrak{h})$ .*
2.  *$N \in ZZ(\mathfrak{h})$  es maximal con respecto a la inclusión (en  $ZZ(\mathfrak{h})$ ) si y solo si la restricción de  $\mathfrak{h}$  a  $N$  tiene dimensión  $\dim(\mathfrak{h}) - 1$ .*

**Demostración .** Sea  $X \in \mathfrak{h}$  y  $N \subset Z(X)$  una componente conexa. Si  $Y \in \mathfrak{h}$  entonces

$$Yg(X, X) = 2g(\nabla_Y X, X) = 2g([Y, X] - \nabla_X Y, X) = -2g(\nabla_X Y, X) = 0.$$

En la última igualdad se usó que  $\nabla_Y X$  es antisimétrica. Esto implica que el flujo de  $Y$  preserva los conjuntos de nivel de  $g(X, X)$ , en particular preserva a  $N$  y por lo tanto  $Y$  es tangente a  $N$ .

Sea  $X$  un campo de Killing en  $M$  y  $N$  una subvariedad totalmente geodésica de  $M$ . La segunda forma fundamental de  $N$  se anula y las conexiones de  $N$  y  $M$  coinciden. Luego si  $X$  es tangente a  $N$  entonces  $\nabla_X X$  es antisimétrica con respecto a la métrica inducida en  $N$ , es decir  $X$  también es un campo de Killing en  $N$ .

Para la segunda parte sea  $X \in \mathfrak{h}$  y  $N = Z(X)$ . Sea

$$\mathfrak{h}|_N = \{X|_N \mid X \in \mathfrak{h}\}.$$

$\mathfrak{h}|_N$  es una subálgebra abeliana de  $\mathfrak{so}(N)$ . Dado que  $X$  es 0 en  $N$  resulta que

$$\dim \mathfrak{h}|_N \leq \dim \mathfrak{h} - 1.$$

Supóngase que  $\dim \mathfrak{h}|_N \leq \dim \mathfrak{h} - 2$  y sea  $Y \in \mathfrak{h}$  línealmente independiente de  $X$  tal que  $Y|_N = 0$ . Sea  $A_X : T_M \rightarrow T_p M$  un endomorfismo  $A_X(v) = \nabla_v X$ . Si  $w \in N_p$  y  $v \in N_p^\perp$  entonces por 4.4.11,

$$g(A_X(w), V) = -g(w, A_X(v)) = 0,$$

lo cual indica que  $A_X$  preserva  $N_p^\perp$ . Por otro lado,

$$\begin{aligned} A_X \circ A_Y(V) &= \nabla_{\nabla_v X} Y = [\nabla_v X, Y] - \nabla_Y \nabla_v X, \\ A_Y \circ A_X(V) &= \nabla_{\nabla_v Y} X = [\nabla_v Y, X] - \nabla_X \nabla_v Y; \end{aligned}$$

también,

$$\begin{aligned} [\nabla_v X, Y] &= [[V, X], Y] - [\nabla_X V, Y], \\ [\nabla_v Y, X] &= [[V, Y], X] - [\nabla_Y V, X]; \end{aligned}$$

y finalmente, usando la identidad de Jacobi,

$$[[V, X], Y] = [[V, Y], X] + [V, [X, Y]] = [[V, Y], X].$$

Como  $X(p) = Y(p) = 0$  resulta que  $A_X \circ A_Y = A_Y \circ A_X$ . Luego  $A_X$  y  $A_Y$  se restringen a un par de endomorfismos antisimétricos de  $N_p^\perp$  que conmutan entre si. Para lo que sigue se usará el siguiente lema de álgebra líneal.

**Lema 4.6.4.** *Sean  $A, B : V \rightarrow V$  un par de automorfismos conmutativos y antisimétricos con respecto a un producto interior en un espacio vectorial  $V$  de dimensión par. Existe una descomposición de  $V$*

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$$

en subespacios 2-dimensionales invariantes bajo  $A$  y  $B$ .

**Demostración** Las transformaciones  $A^2$  y  $AB$  son simétricas y conmutan entre sí. Luego son simultáneamente diagonalizables. Sea  $v$  un eigenvector de  $A$  y  $AB$ . Obsérvese que

$$B(v) = B\left(\frac{1}{\lambda} A^2(v)\right) = \frac{1}{\lambda} A(AB)(v) = \frac{\mu}{\lambda} A(v)$$

y que

$$BA(v) = AB(v) = \mu v,$$

por lo que el espacio  $A_v = \langle \{v, A(v)\} \rangle$  es  $B$ -invariante. Como  $v$  es un eigenvector de  $A^2$ ,  $A_v$  también es  $A$ -invariante. Dado que  $A$  es antisimétrica y no singular  $v$  y  $A(v)$  son línealmente independientes y consecuentemente  $A_v$  es un espacio bidimensional. La antisimetría de  $A$  y  $B$  implica que el complemento  $A_v^\perp$  también es  $A$  y  $B$ -invariante. Luego se ha descompuesto a  $V$  en

$$V = A_v \oplus A_v^\perp,$$

con cada sumando invariante bajo  $A$  y  $B$ . El resultado se sigue por inducción.  $\square$

El lema anterior permite tomar un subespacio bidimensional  $V \subset N_p^\perp$  invariante bajo  $A_X$  y  $A_Y$ . Dado que el espacio de transformaciones antisimétricas de un espacio bidimensional es unidimensional se puede encontrar una combinación líneal no trivial tal que  $\lambda_1 A_X + \lambda_2 A_Y = 0$  en  $V$ . Nótese

que  $\lambda_1 A_X + \lambda_2 A_Y = A_{\lambda_1 X + \lambda_2 Y}$ . Sea  $W = \lambda_1 X + \lambda_2 Y$ .  $W \in \mathfrak{h}$  es un campo de Killing no trivial con  $W|_N = 0$  por lo que  $N \subset Z(W)$ . Además existe  $v \in N_p^\perp$  tal que

$$\nabla_v W = 0,$$

lo cual implica, por el lema 4.4.11, que  $v \in T_p Z(W)$ . Esto a su vez implica que  $N \subsetneq Z(W)$ . Luego si  $N$  es maximal entonces  $\dim \mathfrak{h}|_N = \dim \mathfrak{h} - 1$ .

Si  $N$  no es maximal entonces existe  $S \supsetneq N$  en  $ZZ(\mathfrak{h})$ . Sea  $Y \in \mathfrak{h}$  tal que  $S = Z(Y)$ . Como  $N \neq S$  entonces  $X$  y  $Y$  deben de ser línealmente independientes. Además como  $Y|_N$  es 0 entonces

$$\dim \mathfrak{h}|_N \leq \dim \mathfrak{h} - 2.$$

□

Sea  $\mathbb{T}^m \curvearrowright M$  una acción isométrica en una variedad riemanniana cerrada con curvatura seccional positiva. Tómesese  $x \in \mathfrak{h}$  un generador infinitesimal. Por el teorema de Berger 4.6.3 si  $M$  tiene dimensión par, el campo de Killing  $\bar{X}$  generado por  $x$  tiene un 0 en  $p \in M$ . Esto implica que los elementos  $\exp(tx)$  fijan a  $p$ . Sin embargo los elementos  $\exp(tx)$  forman un conjunto denso de  $\mathbb{T}^m$  por lo que todo elemento de  $\mathbb{T}^m$  debe de fijar a  $p$ . En el caso general se tiene:

**Proposición 4.6.5.** *Sea  $\mathbb{T}^m \curvearrowright M$  una acción isométrica no trivial en una variedad riemanniana cerrada de curvatura seccional positiva. Si  $Fij(\mathbb{T}^m) = \emptyset$  entonces existe  $p \in M$  tal que  $\mathbb{T}^m \cdot p = \mathbb{S}^1 \cdot p$  para algún  $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{T}^m$ , y esto ocurre solo cuando  $\dim(M)$  es impar.*

Obsérvese que en particular si  $m > 1$  entonces cualquier acción  $\mathbb{T}^m \curvearrowright M$  no es libre.

**Demostración** Nótese que si  $\Gamma = Nuc(\mathbb{T}^m \rightarrow Iso(M))$  entonces  $\mathbb{T}^m/\Gamma \cong \mathbb{T}^k$  tiene las mismas órbitas que  $\mathbb{T}^m$  por lo que podemos suponer que la acción  $\mathbb{T}^m \curvearrowright M$  es efectiva cuando sea necesario.

Sea  $n = \dim(M)$ . Si  $n = 1$  entonces  $M \cong \mathbb{S}^1$  y la afirmación es obvia. Si  $n = 2$  entonces por el comentario anterior  $Fij(\mathbb{T}^m) \neq \emptyset$ .

Supóngase que  $n > 2$  es un número impar y que  $m > 1$  (si  $m = 1$  la afirmación es trivial). Sea  $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{T}^m$  un subcírculo tal que la acción inducida  $\mathbb{S}^1 \curvearrowright M$  es no trivial.

Supóngase que  $\mathbb{S}^1$  actúa libremente y por lo tanto  $M/\mathbb{S}^1$  es una variedad riemanniana de curvatura positiva (véase 4.3.15 y 4.1.3).

Sea  $\pi : M \rightarrow M/\mathbb{S}^1$  la proyección canónica y sea  $[p] = \pi(p)$ . Si  $g \in \mathbb{T}^m$  entonces  $g[p] = [gp]$  define una acción suave de  $\mathbb{T}^m \curvearrowright M$  ya que si  $h \in \mathbb{S}^1$  se tiene  $ghp = hgp$ . La acción es isométrica puesto que  $d([gp], [gq]) = \inf \{d(hgp, kgq) = d(ghp, gkq) = d(hp, kq) | h, k \in \mathbb{S}^1\} = d(\mathbb{S}^1 \cdot p, \mathbb{S}^1 \cdot q) = d([p], [q])$ . Nótese que  $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{T}^m$  actúa trivialmente en  $M/\mathbb{S}^1$ , por lo que la acción desciende a una acción isométrica  $\mathbb{T}^m/\mathbb{S}^1 \cong \mathbb{T}^{m-1} \curvearrowright M$ .

$M/\mathbb{S}^1$  es una variedad riemanniana con curvatura positiva de dimensión par junto con una acción isométrica de  $\mathbb{T}^{m-1}$ . Por inducción  $Fij(\mathbb{T}^{m-1}) \neq \emptyset$ , lo cual implica que existe una órbita  $\mathbb{S}^1 \cdot p$  que es invariante bajo los elementos en  $\mathbb{T}^{m-1}$ . Consecuentemente  $\mathbb{T}^m \cdot p = \mathbb{S}^1 \cdot p$ .

Si  $\mathbb{S}^1$  no actúa libremente entonces existe  $p \in M$  tal que  $\mathbb{S}_p^1 \neq \emptyset$ . Nótese que si  $g \in \mathbb{T}^m$ ,  $h \in \mathbb{S}_p^1$  y  $y \in Fij(\mathbb{S}_p^1)$  entonces

$$h \cdot (g \cdot p) = g \cdot h \cdot p = g \cdot p,$$

por lo que  $Fij(\mathbb{S}_p^1)$  es  $\mathbb{T}^m$ -invariante. Sea  $N$  una componente de  $Fij(\mathbb{S}_p^1)$ .  $N$  es una subvariedad totalmente geodésica por lo que es una variedad riemanniana cerrada con curvatura seccional positiva y una acción isométrica  $\mathbb{T}^m \curvearrowright M$ . Si la acción de  $\mathbb{T}^m$  en  $N$  es trivial entonces  $N \subset Fij(\mathbb{T}^m)$ . Si no, es posible elegir el círculo  $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{T}^m$  y  $p \in M$  tal que  $Fij(\mathbb{S}_p^1) \neq M$  y luego  $\dim N < n$ . Por inducción existe un punto fijo o una órbita circular en  $N$  ( $\subset M$ ). □

**Corolario 4.6.6.** *Sea  $M$  es una variedad riemanniana cerrada  $n$ -dimensional con curvatura positiva. Si una acción  $\mathbb{T}^m \curvearrowright M$  es isométrica y efectiva entonces  $m \leq \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$ .*

**Demostración** Como  $\mathbb{T}^m$  actúa efectivamente en  $M$  se puede suponer que  $\mathbb{T}^m$  es un toro contenido en  $Iso(M)$  y luego  $m \leq \text{simrk}(M)$ . Sea  $T$  un toro maximal de  $Iso(M)$ , se demostrará que

$$\dim T \leq \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$$

inductivamente. Si  $n = 0$  el resultado es claro. En  $n = 1$  todo campo de Killing es constante por lo que  $\text{simrk}(M) \leq 1$ .

Supóngase que  $n \geq 2$ .

Si  $n$  es par entonces  $ZZ(\mathfrak{h})$  es no vacío por el teorema de Berger 4.5.3. Sea  $\mathfrak{h}$  el álgebra de Lie de  $\mathbb{T}^m$  y  $N \in ZZ(\mathfrak{h})$  maximal.  $N$  es una subvariedad de codimensión par por lo que  $\dim N \leq n - 2$  y por 4.6.3  $\dim \mathfrak{h}|_N = \dim \mathfrak{h} - 1$ .  $\mathfrak{h}|_N$  es el álgebra de Lie de un toro  $T'$  en  $Iso(N)$ . Por inducción,

$$\dim \mathfrak{h}|_N \leq \left\lfloor \frac{\dim(N) + 1}{2} \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{n - 2 + 1}{2} \right\rfloor;$$

por lo tanto,

$$\dim \mathfrak{h} = \dim \mathfrak{h}|_N + 1 \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor.$$

Supóngase ahora que  $n$  es impar. Si  $ZZ(\mathfrak{h}) \neq \emptyset$  entonces el argumento de arriba y la hipótesis inductiva bastan para concluir lo que se afirma, así que supóngase que  $ZZ(\mathfrak{h}) = \emptyset$ . Si  $m = 1$  la afirmación es cierta.

Si  $m > 1$  la acción  $\mathbb{T}^m \curvearrowright M$  no puede ser libre, luego existe  $p \in M$  tal que el grupo de isotropía  $\mathbb{T}_p^m$  es no trivial. Tómese una componente  $N \subset \text{Fij}(\mathbb{T}_p^m)$ . Por la demostración anterior, se sabe que  $N$  es  $\mathbb{T}^m$ -invariante. Por la suposición  $ZZ(\mathfrak{h}) = \emptyset$ , el morfismo  $\phi_{\mathbb{T}^m} : \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{Iso}(N)$  es inyectivo y luego el núcleo de la acción  $\mathbb{T}^m \rightarrow Iso(N)$  es discreto. Esto es  $\mathbb{T}_p^m$  es discreto. Luego esto induce una acción isométrica y efectiva  $\mathbb{T}^m / \mathbb{T}_p^m \cong \mathbb{T}^m \curvearrowright N$ .  $N$  es una subvariedad totalmente geodésica y por lo tanto una variedad cerrada de curvatura seccional positiva. Por hipótesis de inducción  $m \leq \left\lfloor \frac{\dim(N)+1}{2} \right\rfloor < \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$ .  $\square$

**Corolario 4.6.7.** *Sean  $\mathbb{T}^m \curvearrowright M$  una acción isométrica y efectiva en una variedad cerrada y completa  $M$   $n$ -dimensional ( $n \geq 2$ ) con curvatura seccional no negativa y  $\mathfrak{h}$  el álgebra de Lie de  $\mathbb{T}^m$ . Si  $m = \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$  entonces existe  $N \in ZZ(\mathfrak{h})$  de codimensión 2.*

**Demostración** La prueba es inductiva. Si  $n = 2$  y  $m = 1$  entonces existe  $X \in \mathfrak{h}$  no cero. Por el teorema de Berger 4.5.3  $X$  tiene ceros. Por lo tanto existe  $F \in ZZ(\mathfrak{h})$  de codimensión 2.

Sea  $n \geq 3$  y supóngase que  $ZZ(\mathfrak{h}) \neq \emptyset$ . Si  $N \in ZZ(\mathfrak{h})$  es maximal entonces  $\dim \mathfrak{h}|_N = \dim \mathfrak{h} - 1 = \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ . Dado que  $\dim \mathfrak{h}|_N \leq \left\lfloor \frac{\dim(N)+1}{2} \right\rfloor$  y  $\dim(N) \leq n - 2$  necesariamente  $\dim(N) = n - 2$ . Es decir, existe  $N \in ZZ(\mathfrak{h})$  de codimensión 2.

Dado que para  $n$  par  $ZZ(\mathfrak{h})$  nunca es vacío solo falta verificar que si  $n$  es impar entonces  $ZZ(\mathfrak{h}) \neq \emptyset$ . Supóngase que  $n = 2r + 1$  y  $ZZ(\mathfrak{h}) = \emptyset$ . Obsérvese que, por la demostración anterior,  $\mathbb{T}^m$  no actúa libremente y existe una subvariedad propia y totalmente geodésica  $N$  junto con una acción isométrica y efectiva  $\mathbb{T}^m \curvearrowright M$ . Luego  $m \leq \left\lfloor \frac{\dim(N)+1}{2} \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{(n-1)+1}{2} \right\rfloor = r$ . Esto es contradictorio por lo que este caso nunca se presenta.  $\square$

**Corolario 4.6.8.** *Sea  $M$  una variedad riemanniana completa  $n$ -dimensional con curvatura seccional positiva. Si  $\text{simrk}(M) = \lfloor (n+1)/2 \rfloor$  entonces existe una acción isométrica y efectiva de  $\mathbb{S}^1$  en  $M$  con  $\text{codim Fij}(\mathbb{S}^1) = 2$ .*

**Demostración** Sea  $T$  un toro maximal de  $\text{Iso}(M)$ , de dimensión  $\lfloor (n+1)/2 \rfloor$ , y  $\mathfrak{h}$  su álgebra de Lie. Por el corolario anterior 4.6.7 existe  $F \in ZZ(\mathfrak{h})$  de codimensión dos. Esto es existe un campo de Killing  $X \in \mathfrak{h}$  tal que  $Z(X)$  contiene una componente de codimensión 2. Si el subgrupo a un parámetro generado por  $X$  es un círculo entonces ya se ha terminado. Supóngase que no genera un círculo, y sea  $\varphi_t$  el flujo de  $X$ . Luego  $N$  es una componente de  $\text{Fij}(\{\varphi_t\})$ . La cerradura  $\overline{\{\varphi_t\}}$  es un toro  $T'$  de dimensión  $> 1$ . Sea  $\mathfrak{h}'$  el álgebra de Lie de  $T'$ ,  $\dim \mathfrak{h}' > 1$ . Como la acción de  $T$  en  $M$  es continua  $\text{Fij}(\{\varphi_t\}) = \text{Fij}(\{\gamma_t\})$ , consecuentemente si  $Y \in \mathfrak{h}'$  entonces  $Y|_N = 0$ , lo cual implica que

$$\dim \mathfrak{h}|_N \leq \mathfrak{h} - \dim \mathfrak{h}' \leq \dim \mathfrak{h} - 2.$$

Esto contradice la proposición 4.6.3. Luego  $X$  genera un círculo.  $\square$

## 4.7. Conjetura de Hopf

En esta sección  $b_i = b_i(M)$  denota el  $i$ -ésimo número de Betti de  $M$ , esto es  $b_i(M) = \dim H_i(M)$ , y la característica de Euler de  $M$  es la suma alternante  $\chi(M) = \sum_i (-1)^i b_i(M)$ .

Por el teorema de Gauss-Bonnet 1.2.9 cualquier superficie compacta que admita una métrica con curvatura seccional positiva tiene característica de Euler positiva. Si  $M$  es una 4-variedad compacta con curvatura seccional positiva entonces su grupo fundamental es finito y por tanto  $N\chi(M) = \chi(\widetilde{M})$  donde  $\widetilde{M}$  es su cubierta universal y  $N = |\pi_1(M)|$ . Por otro lado como  $\widetilde{M}$  es compacta (Teorema de Myers-Bonnet) y orientable entonces por la dualidad de Poincaré  $b_1 = b_3 = 0$ ; de donde  $\chi(\widetilde{M}) = 1 + b_2 + 1 > 0$ . Por lo tanto  $\chi(M) > 0$ . Hopf conjeturó:

**Conjetura 2 (Hopf).** *Toda variedad compacta de dimensión par con curvatura seccional positiva tiene característica de Euler positiva.*

Una de las direcciones de investigación más fructíferas en este tema es la de suponer cierto grado de simetría. La estructura de subvariedades fijas de isometrías permite reconstruir la información topológica de abajo hacia arriba. Consúltese [Kob95, Bre72] para más resultados en esta dirección.

**Teorema 4.7.1 (Conner).** *Sea  $X$  un campo de Killing en una variedad compacta. Si las componentes de  $Z(X)$  son  $N_i$  entonces*

$$\chi(M) = \sum_i \chi(N_i).$$

**Demostración** Sean  $N_1, \dots, N_m$  las componentes de  $Z(X)$ . Sea  $\varepsilon > 0$  lo suficientemente pequeño de tal forma que  $\exp((\nu N_i)_\varepsilon)$  sea una vecindad tubular para todo  $i = 1, \dots, m$ , donde  $\nu N_i$  es el haz normal y  $(\nu N_i)_\varepsilon = \{(p, v) \in \nu N_i \mid |v| < \varepsilon\}$ . Sean  $U_i = \exp((\nu N_i)_\varepsilon)$ ,  $V_i = \overline{\exp((\nu N_i)_{\varepsilon/2})}$ ,  $A = U_1 \cup \dots \cup U_m$  y  $B = M \setminus (V_1 \cup \dots \cup V_m)$ . Luego  $A$  y  $B$  forman una cubierta de  $M$ . Por la sucesión de Mayer-Vietoris,

$$\chi(M) = \chi(A) + \chi(B) - \chi(A \cap B).$$

Sin embargo si  $\{\varphi_t\}$  es el flujo de  $X$  entonces para  $t$  suficientemente pequeño  $\varphi_t$  no tiene puntos fijos fuera de  $Z(X)$  y por lo tanto en  $B$  y  $A \cap B$ . Por otro lado es fácil ver que  $A$ ,  $B$  y  $A \cap B$  son

invariantes bajo  $\varphi_t$ . Además el flujo mismo es una homotopía de  $\varphi_t$  a la identidad en los respectivos subespacios. Por el teorema del punto fijo de Lefschetz [Bre93, Teorema 23.4, pág. 254],

$$\chi(B) = 0 \quad \chi(A \cap B) = 0.$$

$A$  es la unión ajena de  $U_i$  y  $U_i$  es retraíble a  $N_i$  por lo que  $\chi(A) = \sum_i \chi(N_i)$ . Luego,

$$\chi(M) = \chi(A) = \sum_i \chi(N_i).$$

□

**Corolario 4.7.2.** *Si  $M$  es una 6-variedad compacta que admite un campo de Killing entonces  $\chi(M) > 0$ .*

**Demostración** Sea  $X$  un campo de Killing de  $M$ . Por el teorema de Berger 4.5.3  $Z(X)$  no es vacío. Sean  $N_1, \dots, N_m$  las componentes de  $Z(X)$ . Luego  $N_i$  es una subvariedad totalmente geodésica de codimensión 2, es decir  $N_i$  es una variedad riemanniana completa de dimensión  $\leq 4$  con curvatura seccional positiva. Por los comentarios de inicio de la sección  $\chi(N_i) > 0$ . Luego por 4.7.1

$$\chi(M) = \sum_i \chi(N_i) > 0.$$

□

Después de haber demostrado el teorema de Grove-Searle 5.3.5 se podrá establecer un resultado más general, véase 5.3.6.

La información homológica que se extrae de las simetrías del espacio puede combinarse con la clasificación algebraica de las variedades topológicas de dimensiones bajas para producir teoremas de clasificación. El siguiente teorema de Hsiang-Kleiner motivó posteriores esfuerzos en la clasificación de un espacio según el rango de simetría como se verá en 5.3.5. Su demostración se apoya en la clasificación de Freedman [Fre82] de 4-variedades topológicas según la cual una variedad cerrada, orientable y diferenciable  $M$  con  $1 \leq \chi(M) \leq 3$  debe de ser  $\mathbb{S}^4$  o  $\mathbb{C}P^2$ .

**Teorema 4.7.3** (Hsiang-Kleiner, 1989). *Si  $M$  es una 4-variedad compacta, orientable, con curvatura positiva que admite una acción isométrica  $\mathbb{S}^1 \curvearrowright M$  entonces  $\chi(M) \leq 3$  y por lo tanto  $M$  es homeomorfa a  $\mathbb{S}^4$  o  $\mathbb{C}P^2$ .*

**Demostración** Sean  $\{N_i\}$  las componentes de  $Fij(\mathbb{S}^1)$ . Si  $X$  es el campo de Killing inducido por  $\mathbb{S}^1$  entonces  $Fij(\mathbb{S}^1) = Z(X)$  y luego

$$\chi(M) = \sum_i \chi(N_i).$$

Cada  $N_i$  es una subvariedad totalmente geodésica y orientable de codimensión par. Si tenemos  $\text{codim}(N_i) = 2$  entonces  $N_i$  es una variedad riemanniana orientable con curvatura seccional positiva y por tanto  $N_i$  es homeomorfa a  $\mathbb{S}^2$  (cfr. 1.2.10). Por el teorema de Frankel a lo más puede existir una esfera en  $Fij(\mathbb{S}^1)$ . Luego  $Fij(\mathbb{S}^1)$  consta de una esfera más puntos aislados, o puros puntos aislados.

Si  $Fij(\mathbb{S}^1)$  contiene una esfera, entonces la acción  $\mathbb{S}^1 \curvearrowright M$  satisface las hipótesis del teorema 5.3.5 y por lo tanto  $M$  es difeomorfa a  $\mathbb{S}^4$  o  $\mathbb{C}P^2$ .

Supóngase que  $Fij(\mathbb{S}^1) = \{p_1, \dots, p_m\}$ . Los puntos fijos de la acción son puntos singulares en el espacio de órbitas  $M/\mathbb{S}^1$ . Para estimar la cantidad de puntos aislados fijos se usará una propiedad general de espacios de Alexandrov

**Lema 4.7.4.** *La  $q$ -extensión de un espacio métrico compacto  $X$  es por definición*

$$xt_q X = \binom{q}{2}^{-1} \max_{x_1, \dots, x_q \in X} \sum_{i < j} d(x_i, x_j).$$

En un espacio de Alexandrov completo  $X$  con curvatura  $\geq k \geq 0$ , si  $x_0, \dots, x_q$  son  $q+1$  puntos cualesquiera de  $X$ , entonces

$$\frac{\sum_{i=0}^q xt_q \Sigma_{x_i}}{q+1} \geq \pi/3.$$

Si  $k > 0$  la desigualdad es estricta.

**Demostración** Sean  $x_i x_j$  geodésicas minimizantes. Considérense tres puntos  $x_i, x_j$  y  $x_k$  y sea  $\Delta \bar{x}_i \bar{x}_j \bar{x}_k$  un triángulo de comparación en  $\mathbb{R}^2$ . Por el teorema de globalización C.2.1,

$$\angle x_i x_j x_k + \angle x_j x_k x_i + \angle x_k x_i x_j \geq \angle \bar{x}_i \bar{x}_j \bar{x}_k + \angle \bar{x}_j \bar{x}_k \bar{x}_i + \angle \bar{x}_k \bar{x}_i \bar{x}_j = 2\pi.$$

Nótese que la desigualdad anterior es estricta si  $k > 0$ .

$$\sum_{\Delta x_i x_j x_k} \angle x_i x_j x_k + \angle x_j x_k x_i + \angle x_k x_i x_j \geq \sum_{\Delta x_i x_j x_k} 2\pi = \binom{q+1}{3} 2\pi = \frac{(q+1)q(q-1)\pi}{3}.$$

Sin embargo,

$$\sum_{\Delta x_i x_j x_k} \angle x_i x_j x_k + \angle x_j x_k x_i + \angle x_k x_i x_j = 2 \sum_i \sum_{j < k} \angle x_j x_i x_k \leq q(q-1) \sum_i xt_q \Sigma_{x_i}.$$

Por lo tanto,

$$\frac{\sum_{i=0}^q xt_q \Sigma_{x_i}}{q+1} \geq \pi/3.$$

□

Supóngase que  $Fij(\mathbb{S}^1) = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ . Se demostrará que  $xt_3 \Sigma_{x_i} \leq \pi/3$  y luego por el lema  $n < 4$ .

Si  $S = B_\varepsilon(x_i)$  es una rebanada en  $x_i$  entonces, por 4.1, la acción de  $\mathbb{S}^1$  en  $S$  es línealmente equivariante a

$$e^{i\theta}(z_1, z_2) = (e^{ik_1\theta} z_1, e^{ik_2\theta} z_2),$$

con  $(k_1; k_2) = 1$ . Recuérdese que el espacio de direcciones  $\Sigma_{x_i}$  es isométrico a  $\mathbb{S}^3/\mathbb{S}^1$  donde  $\mathbb{S}^3$  es la esfera unitaria en  $T_{x_i} M$  y  $\mathbb{S}^1$  actúa a través de la representación de isotropía. Salvo por las órbitas  $O_1 = \{(0, e^{ik_2\theta} z_2)\}$  y  $O_2 = \{(e^{ik_1\theta} z_1, 0)\}$ , la acción en  $\mathbb{S}^3$  es libre. Sea  $X_{k_1, k_2} = (\mathbb{S}^3 - (O_1 \cup O_2))/\mathbb{S}^1$ . Dado que  $X_{k_1, k_2}$  es denso en  $\Sigma_{x_i}$ , si se verifica que  $\sum_{i < j} d(x_i, x_j) \leq \pi$  para cualquier terna de puntos en  $X_{k_1, k_2}$ , entonces se seguiría que  $xt_3 \Sigma_{x_i} \leq \pi/3$ .

En el caso  $(k_1, k_2) = (1, 1)$  el cociente  $\Sigma_{x_i} \cong S_1(0)/\mathbb{S}^1 \subset T_{x_i}S/\mathbb{S}^1$  es  $\mathbb{C}P^1$  que es isométrico a  $S_{1/2}(0) \subset \mathbb{R}^3$ . Nótese que cualesquiera tres puntos en  $\mathbb{S}^2$  satisfacen  $d(p_1, p_2) + d(p_2, p_3) + d(p_1, p_3) \leq 2\pi$ . Esto ya que la distancia en  $\mathbb{S}^2$  entre dos puntos es el ángulo formado entre ellos, y cualesquiera tres triángulos forman un prisma triangular en  $\mathbb{R}^3$  cuyos ángulos en el vértice necesariamente suman  $\leq 2\pi$ . Nótese que  $S_{1/2}(0)$  es  $\mathbb{S}^2$  reescalada por un factor de  $1/2$  por lo que  $d_{S_{1/2}(0)}(x_1, x_2) + d_{S_{1/2}(0)}(x_2, x_3) + d_{S_{1/2}(0)}(x_1, x_3) \leq \pi$ . Por lo tanto  $xt_3\Sigma_{x_i} \leq \pi/3$ .

Para el caso general se construye una función que no aumenta distancias de  $X_{1,1}$  a  $X_{k_1, k_2}$ . Es claro que bajo estas circunstancias  $xt_3X_{1,1} \geq xt_rX_{k_1, k_2}$ . Consúltese el artículo original [HK89] para los detalles.

En conclusión  $Fij(\mathbb{S}^1)$  consta de a lo más tres puntos. Luego  $1 \leq \chi(M) \leq 3$ .  $\square$

Uno de los problemas más intuitivamente sencillos y que sin embargo no ha podido ser resuelto es la siguiente conjetura de Hopf:

**Conjetura 3** (Hopf).  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$  admite una métrica con curvatura seccional positiva.

El teorema anterior nos dice que de existir una métrica en  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$  con curvatura seccional positiva, ésta solo podría admitir una cantidad finita de isometrías. Sin embargo no se sabe mucho más.

# Capítulo 5

## Clasificación

Las variedades simétricas es el tema principal de este capítulo. En la primera sección se hace una introducción de una familia, junto con una subclase importante, de espacios con alto grado de simetría. Alto grado de simetría se refiere a la situación en la cual hay suficientes isometrías para llevar un punto a cualquier otro. En estos espacios todos los puntos son geoméricamente indistinguibles. Este tipo de espacios son llamados homogéneos. Como se verá los espacios homogéneos pueden ser estudiados y clasificados desde una perspectiva algebraica y en particular se han clasificado todos los espacios homogéneos que admiten curvatura seccional positiva. Se exponen los rudimentos del programa de clasificación pero nos quedamos lejos de dar la clasificación.

En la segunda sección se exploran los espacios con máxima simetría. Se vio en el capítulo anterior que el grupo de isometrías  $G$  de una variedad completa  $M^n$  es un grupo de Lie y que  $\dim(G) \leq n(n+1)/2$ , luego es natural preguntarse por el caso en el que  $\dim(G) = n(n+1)/2$ . Se logra una clasificación de estos espacios, que resultan ser espacios de curvatura seccional constante.

Finalmente se expone la demostración del teorema que motivó el presente trabajo. Es un resultado que clasifica las variedades con curvatura seccional positiva y máximo rango de simetría, en el sentido de [4.6.5](#).

### 5.1. Ejemplos

En esta sección se presenta la familia más importante de espacios simplemente conexos con curvatura seccional positiva. A saber los espacios homogéneos y los espacios simétricos de rango 1.

#### 5.1.1. Espacios Homogéneos

En esta sección se usa el contenido del apéndice [B](#). Para mayor detalle consultar [[Hel79](#), [Bes07](#)].

Una variedad homogénea es un espacio en el cual no se puede determinar la posición de un habitante por mediciones locales, cualesquiera dos puntos en el espacio son métricamente idénticos (localmente). La familia de variedades homogéneas agotan casi por completo los ejemplos conocidos de variedades simplemente conexas con curvatura seccional positiva: las únicas variedades simplemente conexas de dimensión mayor a 24 que admiten métricas completas con curvatura seccional positiva que se conocen son difeomorfas a variedades homogéneas (y más aún simétricas). Además

ocurre que gran parte de la información geométrica de estos espacios puede ser traducida al lenguaje de las álgebras de Lie por lo que su comprensión y clasificación se puede llevar a cabo [Wal72, Ber76].

**Definición 5.1.1.** *Una variedad riemanniana  $M$  es homogénea si  $Iso(M)$  actúa transitivamente en  $M$ , esto es si para todo par de puntos  $x, y \in M$  existe  $\varphi \in Iso(M)$  tal que  $\varphi(x) = y$ .*

Dado que todos los puntos tienen vecindades isomorfas, es inmediato que las geodésicas se pueden extender al infinito por lo que

**Proposición 5.1.1.** *Toda variedad riemanniana homogénea es completa.*

Muchas veces un grupo de Lie  $G$  actúa transitiva, efectiva e isométricamente en  $M$  sin ser todo el grupo de isometrías en  $M$ , por ejemplo  $SO(n+1)$  en  $\mathbb{S}^n$ , o  $\mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}^n$  (por traslaciones), sin embargo los grupos de isometrías de  $\mathbb{S}^n$  y  $\mathbb{R}^n$  son, respectivamente,  $O(n+1)$  y  $\mathbb{R}^n \times O(n)$ .

Por otro lado si  $G$  actúa transitiva e isométricamente en  $M$ ,  $p \in M$  y  $K = G_p$  entonces existe un único subgrupo normal  $N$  maximal contenido en  $K$ . Es fácil ver que  $G' = G/N$  actúa transitiva y efectivamente en  $M$  con grupo de isotropía  $K/N$ . Luego cualquier acción transitiva e isométrica puede reducirse a una efectiva. Dado que a veces es conveniente trabajar con un subgrupo de  $Iso(M)$ , definimos

**Definición 5.1.2.** *Una variedad riemanniana  $M$  es  $G$ -homogénea si  $G$  es un subgrupo cerrado de  $Iso(M)$  que actúa transitivamente en  $M$ .*

Fijemos una variedad riemanniana  $G$ -homogénea  $M$  y  $p \in M$ . El subgrupo de isotropía en  $p$ ,  $K = G_p$ , es un subgrupo compacto de  $G$ , y además por el teorema 4.1.4

**Proposición 5.1.2.** *Si  $M$  es una variedad riemanniana  $G$ -homogénea,  $p \in M$ , y  $K = G_p$  es el subgrupo de isotropía, entonces  $M$  es difeomorfa a  $G/K$ .*

La ventaja de trabajar con variedades homogéneas es que la curvatura de la variedad está completamente determinada por sus valores en un solo punto (puesto que cualquier par de puntos tienen vecindades isométricas), y aún más, como se verá posteriormente, estos valores a su vez están determinados por las estructuras de las álgebras de Lie de  $G$  y  $K$ . El problema geométrico se convierte en uno puramente algebraico.

**Proposición 5.1.3.** *Una variedad riemanniana  $G$ -homogénea es compacta si y solo si  $G$  es compacto.*

**Demostración** Si  $G$  es compacto, entonces es claro que  $G/K \cong M$  es compacto, donde  $K$  es el subgrupo de isotropía  $G_p$  para cualquier punto  $p \in M$ . Si  $M$  es compacto, entonces por el teorema de Steenrod-Myers 4.1.5  $Iso(M)$  es un grupo de Lie compacto, y  $G$  es un subgrupo cerrado por lo tanto compacto.  $\square$

Sea  $p \in M$  fijo y  $K = G_p$ . Se sabe que  $\pi : G \rightarrow G/K \cong M$  es una sumersión y que  $\text{Nuc } d\pi_e = \mathfrak{k}$ . Además si  $X \in \mathfrak{g}$  y  $\exp(tX)$  es el subgrupo a un parámetro de  $G$  generado por  $X$  entonces

$$d\pi_e(X) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \pi(\exp(tX)) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp(tX) \cdot p = \bar{X}_p$$

donde  $\bar{X}$  es el flujo isométrico inducido por  $\exp(tX)$  (compárese con 4.4.3). Esto muestra que es posible encontrar  $X_1, \dots, X_n$  campos de Killing en  $M$  tales que  $(X_1)_p, \dots, (X_n)_p$  son base de  $T_pM$ .

Sea  $k \in K$  y  $\bar{X}_p \in T_p M$  el valor en  $p$  del campo de Killing generado por  $X \in \mathfrak{g}$ . Entonces

$$d\mu_k(\bar{X}_p) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \mu_k(\exp(tX) \cdot p) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} k \cdot \exp(tX) \cdot k^{-1} p = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp(t \operatorname{Ad}(k)(X)) \cdot p = \overline{\operatorname{Ad}(k)(X)}_p$$

Dado que se puede identificar a  $T_p M$  con  $\mathfrak{g}/\mathfrak{k}$  entonces

**Proposición 5.1.4.** *La representación de isotropía de  $K \rightarrow O(T_p M)$  es isomorfa a la representación  $\operatorname{Ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{k}} : K \rightarrow \operatorname{Gl}(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})$  dada por*

$$\operatorname{Ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{k}}(k) \circ \pi = \pi \circ \operatorname{Ad}(k)$$

donde  $\pi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{k}$  es la proyección canónica.

Si  $\mathfrak{p}$  es cualquier complemento de  $\mathfrak{k}$ , i.e.  $\mathfrak{g} = \mathfrak{p} \oplus \mathfrak{k}$ , entonces  $\mathfrak{g}/\mathfrak{k}$  es isomorfo a  $\mathfrak{p}$ , por lo que se puede identificar a  $T_p M$  con  $\mathfrak{p}$ , sin embargo la representación de isotropía no necesariamente respeta dicha descomposición. Así, en términos prácticos, una elección arbitraria no es deseable. Nótese que  $\operatorname{Ad}(K)$  es un grupo compacto y luego (cfr. B.4.3) existe un producto interior  $\operatorname{Ad}(K)$ -invariante en  $\mathfrak{g}$ . Se usará la notación  $\langle, \rangle$  para denotar el producto interior en  $\mathfrak{g}$ . Sea  $\mathfrak{p} = \mathfrak{k}^\perp$  y obsérvese que si  $X \in \mathfrak{p}$ ,  $Y \in \mathfrak{k}$  y  $k \in K$  entonces

$$\langle \operatorname{Ad}(k)(X), Y \rangle = \langle X, \operatorname{Ad}(k^{-1})(Y) \rangle = 0$$

y por lo tanto  $\mathfrak{p}$  es  $\operatorname{Ad}(K)$ -invariante.

Sea  $\mathfrak{p}$  un complemento  $\operatorname{Ad}(K)$ -invariante de  $\mathfrak{k}$  fijo. Juntando las proposiciones anteriores se ve que es posible identificar a  $T_p M$  con  $\mathfrak{p}$  a través de  $X \mapsto \bar{X}_p$  y que con esta identificación la isotropía actúa en  $\mathfrak{p}$  a través de la representación adjunta en  $\mathfrak{p}$ .

**Proposición 5.1.5.** *Sea  $M$  una variedad riemanniana  $G$ -homogénea,  $K$  el subgrupo de isotropía en  $p \in M$  y  $\mathfrak{p}$  un complemento  $\operatorname{Ad}(K)$ -invariante de  $\mathfrak{k}$  en  $\mathfrak{g}$ . Las métricas invariantes bajo la acción  $G \curvearrowright M$  están en correspondencia biyectiva con los productos interiores  $\operatorname{Ad}(K)$ -invariantes en  $\mathfrak{p}$ .*

**Demostración** Para evitar confusiones se usará  $\langle, \rangle$  para denotar la métrica en  $M$ . Sea  $\langle, \rangle$  una métrica  $G$ -invariante en  $M$ . Definimos un producto interior en  $\mathfrak{p}$  como la métrica  $\langle, \rangle$  en  $T_p M \cong \mathfrak{p}$ . Dado que los elementos de  $K$  actúan por isometrías en  $M$ , dejan este producto interior invariante. La acción de  $K$  en  $\mathfrak{p}$  es a través de  $\operatorname{Ad}_K$  y por lo tanto el producto interior definido en  $\mathfrak{p}$  es  $\operatorname{Ad}(K)$ -invariante. Si  $\langle, \rangle$  es un producto interior  $\operatorname{Ad}(K)$ -invariante en  $\mathfrak{p}$  defínase un producto interior en  $T_p M$  a través de

$$\langle \bar{X}_p, \bar{Y}_p \rangle_p = \langle X, Y \rangle$$

para cualesquiera  $X, Y \in \mathfrak{p}$ . Nótese que este producto interior es invariante bajo la representación de isotropía. Extiendase  $\langle, \rangle$  a una métrica definiendo

$$\langle X, Y \rangle_q = \langle d\mu_g^{-1}(X), d\mu_g^{-1}(Y) \rangle_p$$

donde  $g \in G$  es cualquier elemento tal que  $gp = q$ . Si  $g' \in G$  es tal que  $g'p = q$  entonces  $g'g^{-1} \in K$  y por lo previamente mencionado la elección no resulta importante, i.e.  $\langle X, Y \rangle$  está bien definida. Es claro que la métrica es izquierdo invariante.  $\square$

Recuérdese (4.4.7) que la función  $\varphi_G : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{iso}(M)$  dada por  $\varphi(X) = \overline{X}$  es un morfismo de álgebras de Lie donde la estructura de álgebra de Lie en  $\mathfrak{iso}(M)$  está dada por

$$[X, Y]_{\mathfrak{iso}(M)} = -[X, Y]$$

Es decir

$$\overline{[X, Y]} = -[\overline{X}, \overline{Y}]$$

Esto adquiere una gran importancia a la luz de la siguiente proposición:

**Proposición 5.1.6.** *Sean  $X, Y, Z$  campos de Killing en  $M$ , entonces*

$$2g(\nabla_X Y, Z) = g([X, Y], Z) + g([X, Z], Y) + g([Y, Z], X)$$

**Demostración** Nótese que si  $X, Y$  son campos de Killing entonces

$$g([X, Z], X) = g(\nabla_X Z, X) - g(\nabla_Z X, X)$$

Por la caracterización de los campos de Killing 4.5,  $g(\nabla_X Z, X) = 0$  y  $-g(\nabla_Z X, X) = g(\nabla_X X, Z)$  y luego

$$g([X, Z], X) = g(\nabla_X X, Z)$$

Luego si  $X, Y, Z$  son campos de Killing,  $X + Y$  también lo es y por lo tanto

$$g([X + Y, Z], X + Y) = g(\nabla_{X+Y} X + Y, Z)$$

Se calcula cada lado de la ecuación por separado

$$g([X + Y, Z], X + Y) = g([X, Z], X) + g([X, Z], Y) + g([Y, Z], X) + g([Y, Z], Y) \quad (5.1)$$

y

$$g(\nabla_{X+Y} X + Y, Z) = g(\nabla_X X, Z) + g(\nabla_X Y, Z) + g(\nabla_Y X, Z) + g(\nabla_Y Y, Z)$$

Al igualar y eliminar términos comunes la ecuación 5.1 se reduce a

$$g([X, Z], Y) + g([Y, Z], X) = g(\nabla_X Y, Z) + g(\nabla_Y X, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(\nabla_X Y, Z) - g([X, Y], Z)$$

□

Sean  $X, Y, Z \in \mathfrak{p}$ . Por el resultado anterior

$$2\langle \nabla_{\overline{X}} \overline{Y}, \overline{Z} \rangle = \langle [\overline{X}, \overline{Y}], \overline{Z} \rangle + \langle [\overline{X}, \overline{Z}], \overline{Y} \rangle + \langle [\overline{Y}, \overline{Z}], \overline{X} \rangle$$

Dado que  $[\overline{X}, \overline{Y}] = -\overline{[X, Y]}$  y que todo elemento de  $\mathfrak{g}$  puede ser descompuesto  $W = V_1 + V_2$  con  $v_1 \in \mathfrak{p}$  y  $V_2 \in \mathfrak{k}$ , y considerando que  $\mathfrak{k} = \text{Nuc } d\pi_e$  se puede reescribir la ecuación anterior como

$$2\langle \nabla_{\overline{X}} \overline{Y}, \overline{Z} \rangle = -\langle \overline{[X, Y]}_{\mathfrak{p}}, \overline{Z} \rangle - \langle \overline{[X, Z]}_{\mathfrak{p}}, \overline{Y} \rangle - \langle \overline{[Y, Z]}_{\mathfrak{p}}, \overline{X} \rangle$$

donde  $X_{\mathfrak{p}}$  es la componente de  $X$  en  $\mathfrak{p}$ .

**Proposición 5.1.7.** *Sea  $G/K = M$  una variedad riemanniana homogénea,  $\mathfrak{p}$  un complemento  $Ad(K)$ -invariante de  $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}$  y  $K = G_p$  con  $p \in M$ . Si se identifica  $T_p M$  con  $\mathfrak{p}$ , entonces en  $p$  se satisface*

$$\nabla_X Y_p = -\frac{1}{2}[X, Y]_{\mathfrak{p}} - U(X, Y) \quad (5.2)$$

donde  $U : \mathfrak{p} \times \mathfrak{p} \rightarrow \mathfrak{p}$  está definida por

$$2\langle U(X, Y), Z \rangle = \langle [X, Z]_{\mathfrak{p}}, Y \rangle + \langle [Y, Z]_{\mathfrak{p}}, X \rangle$$

Dado que la curvatura es un tensor es posible obtener una fórmula de la curvatura sólo en términos de  $\mathfrak{p}$ . El siguiente teorema da una fórmula general para la curvatura en cualquier variedad homogénea  $M = G/G_p$ , la demostración no es más que un largo cálculo con la fórmula 5.2.

**Proposición 5.1.8.** *Si se identifica  $T_p M$  con  $\mathfrak{p}$ , entonces la curvatura en  $p$  satisface*

$$\begin{aligned} Rm(X, Y, X, Y)_p &= -\frac{3}{4}|[X, Y]_{\mathfrak{p}}|^2 - \frac{1}{2}\langle [X, [X, Y]_{\mathfrak{g}}]_{\mathfrak{p}}, Y \rangle \\ &\quad - \frac{1}{2}\langle [Y, [Y, X]_{\mathfrak{g}}]_{\mathfrak{p}}, X \rangle + |U(X, Y)|^2 - \langle U(X, X), U(Y, Y) \rangle \end{aligned} \quad (5.3)$$

**Ejemplo** Si  $G$  es un grupo de Lie con una métrica izquierdo invariante, entonces  $G$  es un espacio homogéneo con grupo de isotropía trivial. Luego  $\bar{\mathfrak{p}} = \mathfrak{g}$  y la fórmula 5.3, con  $\mathfrak{g}$  en vez de  $\mathfrak{p}$ , determina por completo la curvatura de dicho espacio.

Si además la métrica es  $Ad(G)$ -invariante, (i.e. derecho invariante bajo la acción de  $G$ ), entonces los mapeos  $ad(X) : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  son antisimétricos con respecto a la métrica pues si se deriva la ecuación

$$\langle Ad(\exp(tX))(Y), Ad(\exp(tX))(Z) \rangle = \langle Y, Z \rangle$$

obtenemos

$$\langle [X, Y], Z \rangle + \langle Y, [X, Z] \rangle = 0$$

Esto tiene como consecuencia que

$$2\langle U(X, Y), Z \rangle = \langle [X, Z], Y \rangle + \langle [Y, Z], X \rangle = -\langle Z, [X, Y] \rangle - \langle Z, [Y, X] \rangle = 0$$

y luego  $U = 0$ . También

$$-\langle [X, [X, Y]], Y \rangle - \langle [Y, [Y, X]], X \rangle = \langle [X, Y], [X, Y] \rangle + \langle [X, Y], [Y, X] \rangle = 2|[X, Y]|^2$$

por lo que para métricas bi-invariantes la curvatura está dada por

$$Rm(X, Y, X, Y) = |[X, Y]|^2 \quad (5.4)$$

**Proposición 5.1.9.** *Todo grupo de Lie compacto admite una métrica con curvatura seccional no negativa.*

**Demostración** Dado que todo grupo de Lie compacto admite métricas bi-invariantes (cfr. B.4.4), el resultado se sigue de la fórmula 5.4.  $\square$

**Espacios normales** Cuando el producto interior de  $\mathfrak{p}$  se puede extender a un producto interior  $Ad(G)$ -invariante de  $\mathfrak{g}$  y se tiene que  $\mathfrak{p} = \mathfrak{k}^{\perp}$ , decimos que  $M = G/K$  es un espacio normal. En este caso el razonamiento anterior se sigue y por lo tanto la curvatura en  $p \in M$  está dada por

$$Rm(X, Y, X, Y) = \frac{1}{4}|[X, Y]_{\mathfrak{p}}|^2 + |[X, Y]_{\mathfrak{k}}|^2 \quad (5.5)$$

El producto interior en  $\mathfrak{g}$  induce una métrica bi-invariante en  $G$  de tal forma que  $\pi : G \rightarrow G/M$  es una sumersión riemanniana. Obsérvese que 5.5 coincide con 4.4.

### 5.1.2. Espacios Simétricos

Los espacios simétricos son una especie de espacios homogéneos que además poseen una simetría adicional en cada punto. Sea  $M$  una variedad riemanniana y  $p \in M$ . Considérese una vecindad normal  $B_r(p)$  y la función  $f_p : B_r(p) \rightarrow B_r(p)$  definida por

$$f_p(\exp(X)) = \exp(-X)$$

Dicha función es llamada una reflexión geodésica.

**Definición 5.1.3.** *Una variedad riemanniana  $M$  es localmente simétrica si las reflexiones geodésicas  $f_p$  son isometrías para todo  $p \in M$ .*

En ciertos casos las reflexiones geodésicas pueden extenderse a isometrías  $f_p : M \rightarrow M$ . Nótese que dicha isometría está completamente determinada por  $f_p(p) = p$  y  $(df_p)_p = -Id$ .

**Definición 5.1.4.** *Una variedad riemanniana  $M$  es simétrica si para todo  $p \in M$  existe una isometría  $f_p \in Iso(M)$  tal que  $f(p) = p$  y  $(df_p)_p = -Id$ .*

Resulta que todo espacio localmente simétrico es localmente isométrico a un espacio simétrico, más aún (véase [Hel79, Teorema 5.6]):

**Teorema 5.1.10.** *Una variedad riemanniana completa, simplemente conexa y localmente simétrica es simétrica.*

Además

**Proposición 5.1.11.** *Una variedad riemanniana  $M$  es localmente simétrica si y solo si el tensor de curvatura es paralelo, i.e.  $\nabla R = 0$ .*

**Demostración** Sea  $M$  localmente simétrica y  $p \in M$ . Recuérdese que  $\nabla R$  es el  $(1,4)$ -tensor definido por

$$\nabla R(X, Y, Z, W) = \nabla_X R(Y, Z)W - R(\nabla_X Y, Z)W - R(Y, \nabla_X Z), W - R(Y, Z)\nabla_X W$$

La reflexión geodésica  $f_p : B_r(p) \rightarrow B_r(p)$  es una isometría y por lo tanto preserva la conexión y la curvatura. Luego  $\nabla R$  satisface

$$\begin{aligned} -\nabla R(X, Y, Z, W) &= df_p(\nabla R(X, Y, Z, W)) = \nabla R(df_p(X), df_p(Y), df_p(Z), df_p(W)) \\ &= \nabla R(-X, -Y, -Z, -W) = \nabla R(X, Y, Z, W) \end{aligned}$$

En consecuencia,  $\nabla R = 0$ .

Supóngase que  $R$  es paralelo. Se demostrará que  $f_p$  es una isometría usando el teorema de Cartan 1.2.1. Claramente  $I = -Id$  es una isometría de  $T_p M$  y luego, por el teorema de Cartan, basta con verificar que, si  $P_\gamma$  es el transporte paralelo a lo largo de una geodésica radial  $\gamma$  e  $I_\gamma = P_\gamma \circ I \circ P_{-\gamma}$  entonces

$$I_\gamma(R(X, Y)Z) = R(I_\gamma(X), I_\gamma(Y))I_\gamma(Z)$$

para todo  $X, Y, Z \in T_p M$ .

Sea  $\gamma : [0, l] \rightarrow M$  una geodésica radial. Sean  $X, Y, Z \in T_p M$  y considérense sus extensiones paralelas  $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$  a  $\gamma$ . Dado que  $R$  es paralelo

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla R(\gamma', \bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}) = \nabla_{\gamma'} R(\bar{X}, \bar{Y})\bar{Z} - R(\nabla_{\gamma'} \bar{X}, \bar{Y})\bar{Z} - R(\bar{X}, \nabla_{\gamma'} \bar{Y})\bar{Z} - R(\bar{X}, \bar{Y})\nabla_{\gamma'} \bar{Z} \\ &= \nabla_{\gamma'} R(\bar{X}, \bar{Y})\bar{Z} \end{aligned}$$

Es decir,  $R(\bar{X}, \bar{Y})\bar{Z}$  es un campo paralelo a lo largo de  $\gamma$ . Dado que  $I = -Id$ , el resultado se sigue de que

$$R(-X, -Y)Z = -R(X, Y)Z$$

□

Luego, si  $M$  es una variedad completa y localmente simétrica, su cubriente universal  $\widetilde{M}$  es simétrico (ya que el paralelismo del tensor de curvatura es una cuestión local) y  $M = \widetilde{M}/\Gamma$ , donde  $\Gamma \cong \pi_1(M)$  es un subgrupo discreto de  $Iso(\widetilde{M})$ .

En lo que resta de esta sección solo se trabajará con variedades simétricas.

**Proposición 5.1.12.** *Toda variedad riemanniana simétrica es completa.*

**Demostración** Sea  $\gamma : [0, l] \rightarrow M$  una geodésica. Tómesese  $l/2 < s < l$  y sea  $p = \gamma(s)$ . Dado que  $f_p$  es una isometría y  $(df_p)_p = -Id$ , la geodésica  $\gamma|_{[0, s]}$  se mapea a una geodésica  $\sigma : [0, l] \rightarrow M$  con  $\sigma(0) = p$  y  $\sigma'(0) = \gamma'(s)$ . Luego  $\gamma$  se puede extender. □

**Proposición 5.1.13.** *Toda variedad riemanniana simétrica es homogénea.*

**Demostración** Sean  $p, q \in M$  y  $\overline{pq}$  una geodésica entre  $p$  y  $q$  (existe ya que  $M$  es completa por el resultado anterior). Si  $m \in \overline{pq}$  es el punto medio de  $\overline{pq}$  entonces la reflexión geodésica  $f_m$  invierte los extremos de la geodésica  $\overline{pq}$ . Es decir  $f_m(p) = q$ . □

Sea  $p \in M$  y  $\gamma$  una geodésica tal que  $\gamma(0) = p$ . Si  $X$  es un campo paralelo a lo largo de  $\gamma$ , entonces  $df_p(X)$  es un campo paralelo a lo largo de  $f_p(\gamma)$ . Dado que los campos paralelos están completamente determinados por su valor en un punto es claro que  $df_p(X(t)) = -X(-t)$ . Tómesese  $t \in \mathbb{R}$  y defínase  $m = \gamma(t/2)$  y  $q = \gamma(t)$ . Considérese el isomorfismo

$$\tau_t = f_q \circ f_m$$

que manda  $\gamma(s)$  en  $\gamma(s+t)$ . Por las consideraciones anteriores, si  $X$  es un campo paralelo a lo largo de  $\gamma$  entonces  $d\tau_t(X(s)) = X(s+t)$ , esto es  $d\tau_t$  es el transporte paralelo de  $\gamma(s)$  a  $\gamma(s+t)$  a lo largo de  $\gamma$ . Puesto que las isometrías están unívocamente determinadas por su valor y diferencial en un punto resulta que  $\tau_{t+s} = \tau_t \circ \tau_s$ . En resumen

**Proposición 5.1.14.** *En una variedad simétrica  $M$ , toda geodésica  $\gamma$  es la órbita de un subgrupo a un parámetro de isometrías de  $M$  cuyas diferenciales son el transporte paralelo a lo largo de  $\gamma$ .*

Fíjese  $p \in M$  y sean  $G = Iso(M)$ ,  $K = Iso(M)_p$  y  $\mathfrak{g}, \mathfrak{k}$  sus álgebras de Lie respectivas.

Las transformaciones  $\tau_t$  reciben el nombre de transvecciones. Dada una familia a un parámetro de transvecciones en  $p$ ,  $\tau_t = exp(tX)$  para algún  $X \in \mathfrak{g}$ , si  $\bar{X}$  es el campo de Killing inducido, entonces

$$(\nabla_Z \bar{X})_p = \frac{D}{dt} \frac{\partial}{\partial s} \tau_s(\beta(t)) = \frac{D}{ds} \frac{\partial}{\partial t} \tau_s(\beta(t)) = \frac{D}{dt} d\tau_s(Z) = 0$$

donde  $Z \in T_p M$  y  $\beta : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  es una curva diferenciable con  $\beta(0) = p$  y  $\beta'(0) = Z$ , puesto que  $d\tau_s$  es el transporte paralelo a lo largo de  $\tau_t(p)$ . Luego se puede dividir a  $\mathfrak{g}$  en

$$\mathfrak{g} = \{X \in \mathfrak{g} \mid \bar{X}_p = 0\} \oplus \{X \in \mathfrak{g} \mid (\nabla \bar{X})_p = 0\} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$$

donde  $\mathfrak{p}$  se define como el espacio  $\mathfrak{p} = \{X \in \mathfrak{g} \mid (\nabla \bar{X})_p = 0\}$ .

Desde un punto de vista intrínseco a  $G$ , se puede definir un automorfismo en  $G$ ,  $\sigma : G \rightarrow G$ , a través de  $\sigma(g) = f_p^{-1} \circ g \circ f_p = f_p \circ g \circ f_p$ . Nótese que  $\sigma^2 = id$  por lo que  $d\sigma : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  es una involución de  $\mathfrak{g}$ .

Si  $h \in K$  entonces  $\sigma(h) = h$  puesto que  $f_p \circ h \circ f_p$  es una isometría que fija a  $p$  y que tiene diferencial en  $p$  igual a  $d(f_p \circ h \circ f_p) = -Id \circ dh_p \circ (-Id) = h$ , además si  $\tau_t$  es una familia a un parámetro de transvecciones en  $p$  con campo de Killing inducido  $X$  entonces no es difícil verificar que  $\sigma(\tau_t)$  es una familia a un parámetro de transvecciones en  $p$  con campo de Killing inducido  $-X$ .

Toda involución de un espacio vectorial  $T : V \rightarrow V$  induce una descomposición  $T = E_1 \oplus E_{-1}$  donde  $E_\lambda$  es el eigenspacio del eigenvalor  $\lambda$ . La descomposición se puede ver fácilmente de  $x = \frac{1}{2}(x + T(x)) + \frac{1}{2}(x - T(x))$ . Por lo anterior

$$\begin{aligned} \mathfrak{k} &= \{X \in \mathfrak{g} \mid d\sigma(X) = X\} \\ \mathfrak{p} &= \{X \in \mathfrak{g} \mid d\sigma(X) = -X\} \end{aligned}$$

Con esta caracterización resulta sencillo mostrar que

**Proposición 5.1.15.** *Los subespacios  $\mathfrak{k}$  y  $\mathfrak{p}$  de  $\mathfrak{g}$  satisfacen:*

$$\begin{aligned} [\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] &\subset \mathfrak{k} \\ [\mathfrak{k}, \mathfrak{p}] &\subset \mathfrak{p} \\ [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] &\subset \mathfrak{k} \end{aligned} \tag{5.6}$$

**Demostración**  $\sigma$  es un morfismo de grupos de Lie  $d\sigma$  es un morfismo de álgebras de Lie y por lo tanto  $d\sigma[X, Y] = [d\sigma(X), d\sigma(Y)]$ , de donde se sigue la afirmación.  $\square$

Esto parecería implicar que  $\mathfrak{p}$  es  $Ad(K)$ -invariante, al menos en el caso en que  $K$  sea conexo, sin embargo esto también es consecuencia de lo siguiente. Si  $h \in K$  y  $\tau_t$  es una familia a un parámetro de transvecciones en  $p$ , entonces  $h^{-1} \circ \tau_t \circ h$  también es una familia a un parámetro de transvecciones en  $p$ : si  $\tau_t(p) = exp_p(tX)$  y  $Y = dh_p^{-1}(X)$  entonces

$$(h \circ \tau_t \circ h)(p) = h^{-1} \circ \tau_t(p) = h^{-1}(exp_p(tX)) = exp_p(dh_p^{-1}(tX)) = exp_p(tY)$$

Luego se tiene que  $M = G/K$  y  $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$  donde  $\mathfrak{p}$  es  $Ad(K)$ -invariante. Puesto que  $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p}$  se tiene que  $U = 0$  (cfr. 5.1.7) y que  $[X, Y]_{\bar{p}} = 0$  para todo  $X, Y \in \mathfrak{p}$ , por lo tanto

**Proposición 5.1.16.** *La curvatura en  $p \in M$  se puede calcular a través de la fórmula*

$$R(X, Y)Z = [Z, [Y, X]] \tag{5.7}$$

en donde se ha identificado a  $T_p M$  con  $\mathfrak{p}$ .

**Demostración** Por los comentarios anteriores y la fórmula 5.1.8, se obtiene que

$$Rm(X, Y, X, Y)_p = -\frac{1}{2} (\langle [X, [X, Y]], Y \rangle + \langle [Y, [Y, X]], X \rangle)$$

Sin embargo la métrica en  $p$  es invariante bajo  $Ad(K)$  y por lo tanto

$$\langle [Z, X], Y \rangle + \langle X, [Z, Y] \rangle = 0$$

para todo  $Z \in \mathfrak{k}$ , en particular para  $[X, Y] \in \mathfrak{k}$ . Luego

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} (\langle [X, [X, Y]], Y \rangle + \langle [Y, [Y, X]], X \rangle) &= \frac{1}{2} (\langle [X, [Y, X]], Y \rangle + \langle [[Y, X], Y], X \rangle) \\ &= \frac{1}{2} (\langle [X, [Y, X]], Y \rangle - \langle Y, [[Y, X], X] \rangle) \\ &= \frac{1}{2} (\langle [X, [Y, X]], Y \rangle + \langle [X, [Y, X]], Y \rangle) \\ &= \langle [X, [Y, X]], Y \rangle \end{aligned}$$

Si se define un 4-tensor en  $\mathfrak{p}$  dado por  $S(X, Y, Z, W) = \langle [Z, [Y, X]], W \rangle$  entonces resulta que  $S$  tiene las mismas simetrías que el tensor de curvatura. Además  $S(X, Y, X, Y) = Rm(X, Y, X, Y)$ . Por la proposición 1.1.2

$$Rm = S$$

y por lo tanto  $R(X, Y)Z = [Z, [Y, X]]$ . □

**Definición 5.1.5.** Una descomposición de Cartan de una álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ , es una descomposición  $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$  tal que:

1.  $[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \subset \mathfrak{k}$ .
2.  $[\mathfrak{k}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p}$ .
3.  $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{k}$ .
4. El subespacio  $ad(\mathfrak{k})|_{\mathfrak{p}}$  (véase B.2.3) es el álgebra de Lie de un subgrupo compacto de  $GL(\mathfrak{p})$ .

Se ha visto que todo espacio simétrico  $M$  induce una descomposición de Cartan en el álgebra de Lie de  $G = Iso(M)$ .

**Teorema 5.1.17.** Toda descomposición de Cartan  $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$  induce un único espacio simétrico  $M = G/K$  simplemente conexo, donde  $G$  es un grupo de Lie simplemente conexo con álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  y  $K$  es el subgrupo que corresponde a  $\mathfrak{k}$ .

**Demostración** Sea  $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$  una descomposición de Cartan. Se sabe que a toda álgebra de Lie le corresponde un único grupo de Lie conexo y simplemente conexo  $G$  tal que  $T_e G \cong \mathfrak{g}$ . Esto se demuestra como sigue.

Por el teorema de Ado [FH91, Sección E.2, pág. 500] es posible encajar a  $\mathfrak{g}$  como una subálgebra de  $\mathfrak{gl}(V)$  para algún espacio vectorial finito dimensional  $V$ . A esta subálgebra le corresponde un único subgrupo de Lie conexo  $G' \subset GL(V)$  cuya álgebra de Lie es  $\mathfrak{g}$  (B.3.6). La cubierta universal  $\pi : G \rightarrow G'$  tiene una única estructura de grupo de Lie tal que  $\pi$  es un morfismo de grupos de

Lie. Con dicha estructura  $G$  tiene a  $\mathfrak{g}$  como álgebra de Lie, para mostrar esto basta con ver que  $\pi$  es isomorfismo local en  $e$ . Si  $H$  es otro grupo de Lie simplemente conexo con álgebra de Lie  $\cong \mathfrak{g}$  entonces el isomorfismo  $G_e \cong H_e$  se extiende a un isomorfismo  $G \cong H$  por B.3.5. Por lo tanto existe un único grupo de Lie conexo y simplemente conexo  $G$  tal que  $G_e \cong \mathfrak{g}$ .

Sea  $K$  el subgrupo de Lie conexo que corresponde a la subálgebra  $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}$  (nótese que  $\mathfrak{k}$  es una subálgebra de Lie por la condición  $[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \subset \mathfrak{k}$ ).

Sea  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  cualquier producto interior  $ad(\mathfrak{k})|_{\mathfrak{p}}$ -invariante en  $\mathfrak{p}$ . Dicho producto interior existe por B.4.3. Con esta métrica en  $\mathfrak{p}$  el espacio  $G/K$  es una variedad riemanniana homogénea.

Considérese la involución de  $\mathfrak{g}$  dada por

$$\sigma^*(x) = \begin{cases} x & x \in \mathfrak{k} \\ -x & x \in \mathfrak{p} \end{cases}$$

No es difícil verificar que  $\sigma^*$  es un morfismo de álgebras de Lie. Dado que  $G$  es simplemente conexo existe un morfismo de grupos de Lie  $\sigma : G \rightarrow G$  tal que  $d\sigma = \sigma^*$ . Además como  $(\sigma^*)^2 = Id$  se tiene que  $\sigma^2 = Id$ . Nótese que por la definición de  $\sigma^*$  el subgrupo  $K$  queda fijo bajo la acción de  $\sigma$ . Por lo tanto  $\sigma$  induce un mapeo suave  $f : G/K \rightarrow G/K$  tal que  $f(\pi(x)) = \pi(\sigma(x))$  donde  $\pi : G \rightarrow G/K$  es la proyección canónica. Sea  $p = eK \in G/K = M$  y obsérvese que si  $X \in T_p M \cong \mathfrak{p}$  entonces

$$df_p(X) = \frac{d}{dt} f(\exp(tX)H) = \frac{d}{dt} f(\pi(\exp(tX))) = \frac{d}{dt} \pi(\sigma(\exp(tX))) = \frac{d}{dt} \pi(\exp(-tX)) = -X$$

y por lo tanto  $df_p = -Id$  es una isometría.

Sea  $g \in G$  y  $X \in T_{gp} M \cong \mathfrak{p}$ , entonces

$$\begin{aligned} df_{gp}(X) &= \frac{d}{dt} f(g \cdot \exp(tX)K) = \frac{d}{dt} f(\pi(g \cdot \exp(tX))) \\ &= \frac{d}{dt} \pi(\sigma(g \cdot \exp(tX))) = \frac{d}{dt} \pi(\sigma(g) \cdot \sigma(\exp(tX))) \\ &= \frac{d}{dt} \pi(L_{\sigma(g)}(\exp(-tX))) = \frac{d}{dt} \mu_{\pi(\sigma(g))}(\pi(\exp(-tX))) \\ &= d\mu_{\pi(\sigma(g))}(-X) \end{aligned}$$

donde  $L_g$  es multiplicar por  $g$  por la izquierda y  $\mu_g : M \rightarrow M$  es el difeomorfismo asociado. Dado que  $\mu_g$  es una isometría para todo  $g \in M$ , entonces  $df_{gp}$  es una isometría y por lo tanto  $f$  es una isometría de  $M$ . Esto muestra que  $M$  es un espacio simétrico.

Para demostrar que  $M$  es simplemente conexo se ocupa la sucesión exacta de grupos de homotopía para fibraciones de Serre (aplicada a la fibración  $K \hookrightarrow G \rightarrow M$ ) cuya demostración se puede consultar en [Bre93, Teorema 6.7, pág 453].  $\square$

En consecuencia la clasificación de espacios simétricos simplemente conexos se puede reducir a un problema algebraico.

Considérese el problema de clasificar los espacios simétricos con curvatura seccional positiva. Sea  $M = G/M$  un espacio simétrico compacto, conexo y simplemente conexo con curvatura seccional positiva. El primer paso importante es notar que la representación de isotropía  $ad(K)$  en  $\mathfrak{p}$  es irreducible.

**Definición 5.1.6.** *Un espacio simétrico  $M$  es irreducible si la representación de isotropía es irreducible.*

**Proposición 5.1.18.** *Sea  $M$  un espacio simétrico con curvatura seccional positiva. Entonces la representación de isotropía es irreducible.*

**Demostración** Se dará solo un bozquejo puesto que algunas herramientas importantes no han sido demostradas. Se hará primero una construcción importante. Sea  $\gamma : [0, a] \rightarrow M$  una curva diferenciable (a pedazos) en  $M$  tal que  $\gamma(0) = p$  y  $\gamma(a) = p$ . El transporte paralelo a lo largo de  $\gamma$ ,  $\Gamma_\gamma$ , es una isometría de  $T_p M$ . La colección de transportes paralelos  $\Gamma_\gamma$  para todas las curvas cerradas en  $p$  forma un grupo llamado el grupo de holonomía, denotado por  $Hol(p, M)$ . Dicho grupo actúa naturalmente en  $T_p M$  y la acción  $Hol(p, M) \curvearrowright T_p M$  es llamada la representación de holonomía en  $p$ . Es sencillo mostrar que  $Hol(p, M)$  y la representación de holonomía no dependen de  $p \in M$ , si se toma otro punto  $p \in M$  entonces los grupos son isomorfos y las representaciones isomorfas (como representaciones). Es un teorema importante de Borel y Lichnerowicz que  $Hol(p, M)$  es un subgrupo cerrado de  $O(T_p M)$  y por lo tanto admite una estructura de grupo de Lie.

En el caso de una variedad simétrica se puede tomar cualquier curva diferenciable por pedazos  $\gamma$  y aproximarla por pedazos de geodésicas. Dado que el transporte paralelo a lo largo de dichas geodésicas está dado por un elemento de  $G$  la composición de los transportes paralelos a lo largo de la curva es un elemento de la representación de isotropía. La aproximación puede hacerse tan buena como se quiera y por lo tanto  $\Gamma_\gamma$  es un elemento de la representación de isotropía. En resumen  $Hol(p, M) \subset K$ .

Ahora, si la representación de isotropía fuera reducible, entonces la representación de holonomía es reducible. Sin embargo por el teorema de descomposición de De Rham (consúltese [Bes07, Teorema 10.38, pág 286]) esto implicaría que  $M$  es localmente el producto métrico de dos variedades riemannianas. Esto es imposible puesto que en un producto riemanniano siempre existen planos con curvatura seccional zero. Luego la representación de isotropía es irreducible.  $\square$

Nótese que esta demostración también indica que el problema de clasificar las variedades simétricas conexas y simplemente conexas se puede reducir al caso con isotropía irreducible, pues el teorema de De Rham permite descomponer el espacio en un producto métrico de variedades riemannianas con representación de isotropía irreducible, y además los factores resultan ser espacios simétricos. Para ver los detalles de lo anterior consúltese [Hel79] o [Bes07].

Recuérdese (del apéndice B.2.7) que la representación adjunta  $\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$  induce una forma bilineal simétrica  $Ad(G)$ -invariante, llamada la forma de Killing, dada por

$$B(x, y) = \text{tr}(ad(x) \circ ad(y))$$

en particular la forma de Killing restringida a  $\mathfrak{p}$  es  $K$ -invariante al igual que la métrica.

**Proposición 5.1.19.** *Sea  $\rho : G \rightarrow GL(V)$  una representación irreducible de  $G$  en un espacio finito dimensional  $V$  que posee un producto interior  $G$ -invariante  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Si  $B$  es una forma bilineal, simétrica y  $G$ -invariante en  $V$  entonces existe  $\lambda$  tal que  $B = \lambda \langle \cdot, \cdot \rangle$ .*

**Demostración** Defínase el operador de forma de  $B$  a través de

$$\langle S(x), y \rangle = B(x, y)$$

La simetría de  $B$  implica que  $S : V \rightarrow V$  es un operador autoadjunto. Sea  $E_\lambda$  el eigenspacio que corresponde al eigenvalor  $\lambda$  de  $S$ . Si  $g \in G$  y  $y \in V$  entonces

$$\langle S(gx), Y \rangle = B(gx, y) = B(x, g^{-1}y) = \langle S(x), g^{-1}y \rangle = \langle \lambda x, g^{-1}y \rangle = \langle \lambda gx, y \rangle$$

Se sigue que  $gx \in E_\lambda$ , o bien  $E_\lambda$  es  $G$ -invariante. Por la irreducibilidad de  $V$  se tiene que  $E_\lambda = V$  y por lo tanto

$$B(x, y) = \langle S(x), y \rangle = \langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$$

□

Se sigue de la proposición anterior que si la acción de isotropía es irreducible entonces existe  $\lambda$  tal que

$$\langle x, y \rangle = \lambda B|_{\mathfrak{p}}(x, y)$$

para todo  $x, y \in \mathfrak{p}$ .

En cuanto a la forma de Killing en  $\mathfrak{k}$ :

**Proposición 5.1.20.** *La forma de Killing restringida a  $\mathfrak{k}$  es negativo definida.*

**Demostración** Dado que  $K$  es un grupo compacto se puede extender la métrica en  $\mathfrak{p}$  a una métrica  $Ad(K)$ -invariante en  $\mathfrak{g}$ . Esto es

$$\langle Ad(k)(x), Ad(k)(y) \rangle = \langle x, y \rangle$$

para todo  $k \in K$  y  $x, y \in \mathfrak{g}$ . Si se deriva la relación anterior se obtiene

$$\langle [k, x], y \rangle = -\langle x, [k, y] \rangle$$

Si  $x \in \mathfrak{k}$  y  $\{x_i\}$  es una base ortonormal de  $\mathfrak{g}$  entonces

$$B(x, x) = tr(ad(x) \circ ad(x)) = \sum_{x_i} \langle [x, [x, x_i]], x_i \rangle = - \sum_i \langle [x, x_i], [x, x_i] \rangle = - \sum_i |[x, x_i]|^2$$

Luego  $B(x, x) = 0$  si y solo si  $[x, x_i] = 0$  para toda  $i$  lo cual implica que  $[x, y] = 0$  para todo  $y \in \mathfrak{g}$ . Esto implica que  $Ad(exp(tX))$  deja fijo a todo elemento de  $\mathfrak{p}$  o bien  $Ad(exp(tx)) \in K$  es una isometría trivial, esto es  $exp(tx) = id$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ , así  $x = 0$ . □

Aún más  $B(\mathfrak{k}, \mathfrak{p}) = 0$  puesto que las transformaciones  $ad(k) \circ ad(x)$ , con  $k \in \mathfrak{k}$  y  $x \in \mathfrak{p}$ , intercambian a los subespacios  $\mathfrak{p}$  y  $\mathfrak{k}$ . En resumen

**Proposición 5.1.21.** *Sea  $M = G/K$  un espacio simétrico irreducible con descomposición de Cartan  $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ . Existe una métrica  $Ad(K)$ -invariante en  $\mathfrak{g}$  tal que*

1. Coincide con  $-\lambda B$  en  $\mathfrak{k}$ , para algún  $\lambda > 0$ .
2. Coincide con la métrica en  $\mathfrak{p} \cong T_p M$ .

**Demostración** Nótese que dicha métrica está unívocamente determinada. La existencia de la métrica se demostró en los párrafos anteriores. La  $Ad(K)$ -invarianza se sigue de la  $Ad(G)$ -invarianza de la forma de Killing  $B$  y de que  $\mathfrak{p}$  y  $\mathfrak{k}$  son  $Ad(K)$ -invariantes. □

En el caso que  $M$  tenga curvatura positiva la curvatura de Ricci también es positiva. Si  $\{x_i\}$  es una base ortonormal de  $\mathfrak{p}$  entonces

$$r(x, x) = \sum_i R(x, x_i, x, x_i) = \sum_i \langle [x, [x_i, x]], x_i \rangle = - \sum_i \langle [x, [x, x_i]], x_i \rangle = -tr((ad(x) \circ ad(x))|_{\mathfrak{p}})$$

No es difícil mostrar que  $tr((ad(x) \circ ad(x))|_{\mathfrak{p}}) = tr((ad(x) \circ ad(x))|_{\mathfrak{k}}) = \frac{1}{2}tr(ad(x) \circ ad(x)) = B(x, x)$ . Por lo tanto  $B(x, x) = \lambda \langle x, x \rangle < 0$ , o bien  $\lambda < 0$ .

**Proposición 5.1.22.** *Sea  $M = G/K$  un espacio simétrico con curvatura seccional positiva. Existe una métrica bi-invariante en  $G$  que se proyecta a la métrica de  $M$ . Más aún la restricción de esta métrica a  $\mathfrak{g}$  es  $-\lambda B$  para algún  $\lambda > 0$ , donde  $B$  es la forma de Killing en  $\mathfrak{g}$ .*

**Demostración** La métrica bi-invariante se puede construir trasladando a  $-\lambda B$  a través de multiplicaciones por la izquierda. La métrica es bi-invariante ya que  $B$  es  $Ad(G)$ -invariante. El resto se sigue de los comentarios anteriores.  $\square$

Dado que  $M$  tiene curvatura positiva no pueden existir subvariedades  $S$  totalmente geodésicas y planas de dimensión  $\geq 2$ . Sin embargo esto se traduce fácilmente a la siguiente propiedad de  $\mathfrak{p}$ .

**Proposición 5.1.23.** *Sea  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{p}$  una subálgebra abeliana, entonces  $exp_p(\mathfrak{h})$  es una subvariedad plana y totalmente geodésica. En consecuencia si  $M$  tiene curvatura positiva y  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{p}$  es una subálgebra abeliana entonces  $dim(\mathfrak{h}) \leq 1$ .*

**Demostración** Sea  $S = exp_p(\mathfrak{h})$ . Sea  $T$  el subgrupo conexo de  $G$  que le corresponde a  $\mathfrak{h}$ . Obsérvese que como  $G$  es compacto y  $\mathfrak{h}$  abeliana,  $T$  es un toro. Recuérdese que si  $X \in \mathfrak{p}$  entonces  $exp(tX) \cdot p$  es una geodésica con velocidad inicial  $X \in \mathfrak{g} \cong T_pM$  y por lo tanto se puede escribir

$$exp_p(tX) = exp(tX) \cdot p$$

Luego  $S = exp(\mathfrak{h}) \cdot p = T \cdot p$ . Esto muestra que  $S$  es una variedad totalmente geodésica y homogénea. Si se usa la fórmula 5.7 para la curvatura se obtiene

$$k_S(x, y) = k_M(x, y) = R(x, y, x, y) = \langle [x, [y, x]], y \rangle = 0$$

donde  $x, y \in \mathfrak{k}$  son un par de vectores ortogonales, puesto que  $[x, y] = 0$ . Por homogeneidad  $S$  es plano.  $\square$

Fíjese un vector unitario  $x \in \mathfrak{p} \cong T_pM$ . La órbita  $Ad(K) \cdot x$  de  $x$  bajo la representación de isotropía es una subvariedad cerrada de  $\mathbb{S}^{n-1} \subset T_pM$ , puesto que  $Ad(K)$  actúa por isometrías. El espacio tangente a  $Ad(K) \cdot x$  es el siguiente subespacio

$$U = \{[k, x] \mid k \in \mathfrak{k}\}$$

pues  $\frac{d}{dt} Ad(exp(tk)) \cdot x = [k, x]$  (véase la sección B.2). Luego

$$U^\perp = \{y \in \mathfrak{p} \mid \langle y, [k, x] \rangle = 0 \text{ para todo } k \in \mathfrak{k}\}$$

Usando que la métrica en  $\mathfrak{p}$  se extiende de forma  $Ad(G)$ -invariante a  $\mathfrak{g}$ , se obtiene que  $y \in U^\perp$  si y solo si

$$\langle y, [k, x] \rangle = \langle [x, y], k \rangle = 0$$

para todo  $k \in \mathfrak{k}$ , esto es  $[x, y] = 0$ . Dado que  $x, y$  no pueden generar una subálgebra abeliana de dimensión dos es necesario que  $y = \nu x$ , es decir  $U^\perp = \langle x \rangle$ . En términos geométricos esto indica que  $Ad(K) \cdot x$  es una subvariedad de codimensión 1 de  $T_pM$ . Aunado al hecho de que  $Ad(K) \cdot x \subset \mathbb{S}^{n-1}$  y que  $Ad(K) \cdot x$  es compacto, se concluye que  $Ad(K) \cdot x = \mathbb{S}^{n-1}$ , o bien que la acción de isotropía en la esfera unitaria de  $T_pM$  es homogénea.

**Proposición 5.1.24.** *En un espacio simétrico con curvatura seccional positiva la representación de isotropía es homogénea en la esfera unitaria.*

**Definición 5.1.7.** Una variedad riemanniana  $M$  es homogénea de dos puntos si para todo par  $(x, y), (z, w) \in M \times M$  con  $d(x, y) = d(z, w)$  existe una isometría  $f : M \rightarrow M$  tal que  $f(x) = z$  y  $f(y) = w$ .

**Proposición 5.1.25.** Toda variedad simétrica con curvatura seccional positiva es homogénea de dos puntos.

**Demostración** Sea  $p \in M$  y  $M = G/K$  donde  $K = G_p$ . Sea  $q \in M$ . Nótese que basta probar que para todo  $x, y \in M$  tales que  $d(x, y) = d(p, q)$  existe  $g \in G$  tal que  $gx = p$  y  $gy = q$ . Sean  $x, y \in M$  tales que  $d(x, y) = d(p, q)$  y  $\gamma, \beta : [0, l] \rightarrow M$  geodésicas minimizantes y unitarias con  $\gamma(0) = p, \gamma(l) = q, \beta(0) = x$  y  $\beta(l) = y$ . Dado que  $M$  es homogéneo existe  $g' \in G$  tal que  $g'x = p$ . Sea  $v = \beta'(0)$  y  $w = dg(v) \in T_pM$ . Dado que la representación de isotropía en  $M$  es homogénea en la esfera unitaria existe  $k \in K$  tal que  $dk(w) = \gamma'(0)$ . Si  $g = kg'$  entonces  $g \in G$  es tal que  $gx = p$  y  $dg(v) = \gamma'(0)$ . Esto implica que  $g(\beta) = \gamma$  y en particular que  $gy = g(\beta(l)) = \gamma(l) = q$ .  $\square$

En el contexto más amplio de los espacios simétricos (sin restricciones de curvatura) se utiliza el siguiente invariante

**Definición 5.1.8.** El rango de un espacio simétrico  $M$ , denotado por  $rk(M)$ , es la dimensión de una subvariedad plana totalmente geodésica maximal.

Con esta definición si  $M$  tiene curvatura positiva entonces  $rk(M) = 1$ . A la familia de espacios simétricos compactos simplemente conexos y con rango uno se le llama CROSS, que viene del inglés “compact rank one symmetric space”. De los trabajos de clasificación de álgebras de Lie de Cartan y Killing se sigue que todo espacio CROSS tiene curvatura seccional positiva.

Ofrecemos al lector la lista de espacios CROSS:

- A:** Esferas  $\mathbb{S}^n = SO(n+1)/SO(n)$ .
- B:** Los espacios proyectivos complejos:  $\mathbb{C}P^n = SU(n+1)/S(U(1) \times U(n))$ .
- C:** Los espacios proyectivos cuaterniónicos:  $\mathbb{H}P^n = Sp(n+1)/Sp(1) \times Sp(n)$ .
- D:** El plano proyectivo de Cayley:  $\mathbb{O}P^2 = F_4/Spin(9)$ . Donde  $F_4$  es uno de los grupos de Lie excepcionales.

Para finalizar esta sección mencionamos que los espacios homogéneos con curvatura seccional positiva fueron clasificados por Berger, Wallach, Allof, Bergery y solo se encontraron espacios no simétricos en dimensiones 6,7, 12, 13 y 14. Variedades no homogéneas que admiten una métrica completa con curvatura seccional positiva solo se han encontrado en dimensiones 6,7 y 13.

## 5.2. Variedades con simetría máxima

En la sección 4.1 se vio que el grupo de isometrías de una variedad completa se encaja en su haz de marcos y que por lo tanto  $\dim(Iso(M)) \leq \dim(Mar(M)) = n(n+1)/2$ .

En el caso en que  $M$  compacta tenga curvatura seccional negativa entonces por 4.5.2 tenemos que  $\dim(Iso(M)) = \dim(\mathcal{I}so(M)) = 0$ . Estas variedades están en el espectro negativo en relación a cantidad de simetrías pues solo poseen una cantidad finita de ellas. La pregunta que resalta inmediatamente es ¿qué variedades poseen la mayor cantidad de simetría?

Estas deberían de ser variedades tales que  $\dim(Iso(M)) = n(n+1)/2$ . El siguiente teorema responde la pregunta.

**Teorema 5.2.1.** *Si el grupo de isometrías de una variedad riemanniana completa  $n$ -dimensional satisface  $\dim(Iso(M)) = n(n+1)/2$  entonces  $M$  es isométrica a una de las siguientes*

1.  $M^{n,K}$  si  $M$  es orientable y  $K = K_M(\sigma)$  para algún plano  $\sigma \subset TM$ .
2.  $\mathbb{R}P^n$  si  $M$  no es orientable.

**Demostración** Supóngase que  $M$  es orientable. Entonces el haz de marcos  $Mar(M)$  es una variedad de dimensión  $n(n+1)/2$  con dos componentes conexas que corresponden a las dos orientaciones posibles, sea  $Mar^0(M)$  la componente de las bases positivamente orientadas (dada una orientación de  $M$ ). Sea  $Iso^0(M)$  la componente conexa que contiene la identidad.  $Iso^0(M)$  es un grupo de Lie conexo y  $n(n+1)/2$ -dimensional que se encaja en  $Mar(M)$ . Luego la imagen está contenida en alguna de las dos componentes conexas que, por la manera en que se define el encaje, debe de ser  $Mar^0(M)$ . Además la condición sobre la dimensión implica que la imagen de  $Iso^0(M)$  es abierta y por lo tanto es todo  $Mar^0(M)$ .

Nótese que esto quiere decir que si  $p, q \in M$  y  $\{v_1, \dots, v_n\}$  y  $\{w_1, \dots, w_n\}$  son bases orientadas de  $M_p$  y  $M_q$  entonces existe  $f \in Iso^0(M)$  tal que  $f(p) = f(q)$  y  $df(v_i) = df(w_i)$ . En particular  $Iso(M)$  actúa transitivamente sobre 2-planos  $\sigma \subset TM$ . Dado que las isometrías preservan la curvatura se ha demostrado que la curvatura seccional es constante.

En el caso  $M$  no orientable  $Mar(M)$  es una sola pieza por lo que la imagen de  $Iso(M)$  en  $Mar(M)$  es todo  $Mar(M)$  y la conclusión anterior es aplicable a este caso.

Por el teorema de Killing-Hopf 1.3.3 si  $M$  tiene curvatura seccional constante  $k$  entonces debe de ser isomorfa a  $M^{n,k}/\Gamma$ , donde  $\Gamma$  es un subgrupo de isometrías que actúa de manera totalmente discontinua en  $M$ .

Sea  $X$  un campo de Killing en  $M$ . El campo se puede levantar a  $M^{n,K}$  a través de la aplicación cubriente  $\pi : M^{n,k} \rightarrow M^{n,k}/\Gamma = M$  a un campo de Killing  $\tilde{X}$ . Esto es inmediato de la caracterización de los campos de Killing 4.4.2. El flujo de  $\tilde{X}$ ,  $\tilde{\varphi}_t$ , desciende al flujo de  $X$ ,  $\varphi_t$ , en el sentido que  $\pi(\tilde{\varphi}_t(x)) = \varphi_t(\pi(x))$ . Esto implica que las isometrías  $\tilde{\varphi}_t$  conmutan con  $\Gamma$ . La asignación  $X \mapsto \tilde{X}$  es inyectiva por lo que si  $G$  es el subgrupo de  $Iso(M^{n,k})$  que desciende a una isometría en  $M$  entonces  $\dim G \geq n(n+1)/2$ . Sin embargo  $\dim Iso(M^{n,k}) = n(n+1)/2$  por lo que  $G$  contiene la componente conexa de  $Iso(M^{n,k})$ . Consecuentemente  $\Gamma$  está contenido en el centro de  $Iso^0(M^{n,k})$ .

Ahora se analizan los casos particulares.

1. Si  $k > 0$  entonces  $Iso(M^{n,k}) = O(n+1)$ . La componente conexa de la identidad de  $O(n+1)$  es  $SO(n+1)$  y su centro es  $\{\pm I\}$ . En este caso  $\Gamma = \{I\}$  o  $\{I, -I\}$  por lo que  $M = \mathbb{S}^n$  o  $M = \mathbb{R}P^n$ .
2. Si  $k = 0$  entonces  $Iso(M^{n,k}) = \mathbb{R}^n \times O(n)$ .  $Iso^0(M^{n,k}) = \mathbb{R}^n \times SO(n)$  y su centro es  $\{I\}$ . En este caso  $\Gamma = \{I\}$  y  $M = \mathbb{R}^n$ .
3. Si  $k < 0$  entonces  $Iso(M^{n,k}) = O(1, n)$ . El centro de  $O^0(1, n)$  es  $\{I\}$ . En este caso  $\Gamma = \{I\}$  y  $M = M^{n,K}$ .  $\square$

### 5.3. Variedades con rango máximo

En esta sección se demostrará el teorema de Grove-Searle de [GS94]. Dado que la clasificación de variedades con curvatura seccional positiva de dimensión  $\leq 3$  está resuelta, en todo lo que sigue se supondrá que  $\dim M \geq 4$ . Se usará la siguiente notación, si  $G \curvearrowright M$  entonces  $\pi : M \rightarrow M/G$

es la proyección canónica, si  $p \in M$  se escribirá  $\bar{p} = \pi(p)$  y en general para subconjuntos  $N \subset M$ ,  $\bar{N} = \pi(N) = N/G$ .

El apéndice D contiene la demostración de las descomposiciones de los espacios utilizados a continuación.

**Lema 5.3.1.** *Sea  $G$  un grupo de Lie,  $M$  una variedad riemanniana cerrada con curvatura positiva y  $G \curvearrowright M$  una acción isométrica y efectiva. Si  $N$  es una componente de  $\text{Fij}(G)$  tal que*

1. *Existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $G_p = \{e\}$  para todo  $p \in B_\varepsilon(N) - N$ .*
2.  *$\bar{N}$  es la frontera de  $\bar{M}$ .*

*entonces existe una única órbita  $G \cdot p$  a máxima distancia de  $N$  y  $G$  actúa libremente en  $M - (N \cup G \cdot p)$ .*

**Demostración**  $M/G$  es un espacio de Alexandrov compacto con curvatura positiva (cfr. C.6.3) y frontera totalmente geodésica  $N$ . Por el teorema del alma de Perelman C.5.2 y su corolario C.5.4 existe una única órbita  $G \cdot p$  a distancia máxima de  $N$ .

Sea  $q \in M - (N \cup G \cdot p)$ . Por C.5.5 cualquier par de geodésicas  $\bar{q}\bar{n}$  y  $\bar{q}\bar{p}$  con  $m \in \bar{N}$  y  $\bar{p} = G \cdot p$  satisfacen

$$\angle \bar{n}\bar{q}\bar{p} > \pi/2.$$

Levantando las geodésicas es fácil ver que esta propiedad permanece válida en  $M$ , a saber si  $qn$  y  $qs$  son geodésicas con  $n \in N$  y  $s \in G \cdot p$  entonces

$$\angle nqs > \pi/2. \quad (5.8)$$

Supóngase que la isotropía en  $q$  es no trivial. Sea  $S$  una rebanada en  $q$  y  $V = T_q S$ . Si  $V^{G_q}$  son los puntos fijos de la representación inducida de  $G_p$  se sabe, véase 4.2.6, que los puntos en  $S \cap \exp_p(V^{G_p})$  tienen isotropía  $G_p$ .

Se usará la notación de C.5, es decir, si  $B \subset M$  definimos

$B'_q = \{\gamma'(0) \in V \mid \gamma : [0, l] \rightarrow M \text{ es una geodésica unitaria y minimizante con } \gamma(0) = q \text{ y } \gamma(l) \in B\}$ .

Dado que  $N$  y  $G \cdot p$  son  $G$ -invariantes tenemos que  $N'_q$  y  $G \cdot p'_q$  son  $G_p$ -invariantes. Sea  $S = \partial B_1(0) \subset V$  la esfera unitaria y  $r > 0$  la distancia mínima tal que existe  $v \in S$  con  $N' \subset B_r^S(v)$ . Si  $\xi \in G \cdot p'_q$  entonces por 5.8  $N' \subset B_{\pi/2-\varepsilon}(-\xi)$  para algún  $\varepsilon > 0$  adecuado, por lo que  $r < \pi/2$ . Sean  $v$  tal que  $A \subseteq B_r^S(v)$  y  $w' = \int_{g \in G_p} gv$ , nótese que  $w'$  es  $G_p$ -invariante y que si  $\xi \in N'$  entonces

$$w' \cdot \xi = \int_{g \in G_p} gv \cdot \xi = \int_{g \in G_p} v \cdot g^{-1}\xi > 0,$$

por lo que  $w' \neq 0$  y  $\angle w'\xi < \pi/2$  para todo  $\xi \in N'$ . Luego existe  $w \in V^{G_p}$  tal que  $\angle w\xi < \pi/2$  para todo  $\xi \in N'$ . La fórmula de primera variación (A.9 o bien C.5.1) junto con las observaciones anteriores implican que existen puntos  $q' \in M$  con la misma isotropía pero tal que  $d(q', N) < d(q, N)$ .

Se puede reformular la conclusión de la siguiente manera: el conjunto

$$\{d(q', N) \mid d(q', N) \leq d(q, N) \text{ y } G_q = G'_q\}$$

es abierto. Sin embargo también es cerrado pues la acción es continua y por lo tanto existen puntos  $q' \in M$  arbitrariamente cerca a  $N$  con isotropía no trivial. Esta contradicción muestra que  $G_q$  es trivial, es decir  $G$  actúa libremente en  $M - (N \cup G \cdot p)$ .  $\square$

Necesitaremos un lema de carácter topológico.

**Lema 5.3.2.** *Bajo las hipótesis del teorema anterior, si la representación de isotropía en  $p \in N$  actúa transitivamente en la esfera del espacio normal  $S_1(0) \subset T_p N^\perp$  y  $G \cdot p = \bar{p}$  es una órbita a máxima distancia de  $N$  entonces existe  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeño tal que*

1.  $N \cong \bar{N} \cong \partial D_\varepsilon(N/G) \cong \partial D_\varepsilon(\bar{p}) \cong \Sigma_{\bar{p}}$ .
2.  $\partial D_\varepsilon(N) \cong^\varphi \partial D_\varepsilon(G \cdot p)$ .
3.  $M \cong D_\varepsilon(N) \cup_\varphi D_\varepsilon(G \cdot p)$ .
4.  $D_\varepsilon(N) \cong \partial D_\varepsilon(N) \times_G D^{\text{codim}(N)}$ , donde  $G$  actúa en  $D$  a través de la representación de isotropía en cualquier  $p \in N$ .

**Demostración** Se divide la demostración en dos partes.

(1,2,3) La demostración de los primeros incisos consiste en usar teoría de puntos críticos de funciones de distancia para construir un par de flujos y los difeomorfismos deseados.

Por el lema anterior  $\bar{M} - (\bar{N} - \bar{p})$  es una variedad riemanniana y  $\pi : M - (N \cup G \cdot p) \rightarrow \bar{M} - (\bar{N} - \bar{p})$  es una sumersión riemanniana. Por C.5.5 las funciones  $d_N$  y  $d_{G \cdot p}$  no tienen puntos críticos en  $M - (N \cup G \cdot p)$ , y las funciones  $d_{\bar{N}}$  y  $d_{\bar{p}}$  tampoco poseen puntos críticos en  $\bar{M} - (\bar{N} \cup \bar{p})$ . Luego si  $\varepsilon > 0$  es tal que  $B_{2\varepsilon}(N)$  y  $B_{2\varepsilon}(G \cdot p)$  son vecindades tubulares, entonces es posible construir un par de campos vectoriales de tipo gradiente en  $M - (N \cup G \cdot p)$  y  $\bar{M} - (\bar{N} \cup \bar{p})$ . Este par de campos se puede tomar de modo que el campo en  $M$  sea un levantamiento del campo correspondiente en  $\bar{M}$ . Estos campos inducen flujos  $\varphi_1 : M \times \mathbb{R} \rightarrow M$  y  $\varphi_2 : \bar{M} \times \mathbb{R} \rightarrow \bar{M}$  que a su vez permiten la construcción de difeomorfismos (véase 3.6.3)

$$\begin{aligned} M - (D_\varepsilon(N) \cup D_\varepsilon(G \cdot p)) &\cong \partial D_\varepsilon(N) \times [0, 1] \\ \bar{M} - (D_\varepsilon(\bar{N}) \cup D_\varepsilon(\bar{p})) &\cong \partial D_\varepsilon(\bar{N}) \times [0, 1] \end{aligned} \quad (5.9)$$

En particular  $\partial D_\varepsilon(N) \cong \partial D_\varepsilon(G \cdot p)$ . Sin embargo, como el campo en  $M$  se tomó como un levantamiento del campo en  $\bar{M}$ , los flujos son equivariantes y por lo tanto el difeomorfismo  $\partial D_\varepsilon(N) \cong D_\varepsilon(G \cdot p)$  es un difeomorfismo equivariante.

Sea  $p \in N$ , defínase  $V = T_p M$  y  $W = T_p N$ . La representación de isotropía respeta la descomposición

$$V = W \oplus W^\perp$$

y actúa trivialmente en  $W$ . Por la hipótesis de homogeneidad  $W^\perp/G \cong \mathbb{R}^+$  y por lo tanto

$$V/G \cong W \times \mathbb{R}^+.$$

Por el teorema de la rebanada esto es homeomorfo a una vecindad de  $\bar{p}$  en  $M/G$  y luego  $\bar{M} - \bar{p}$  tiene una estructura de variedad riemanniana con frontera (totalmente geodésica)  $\bar{N}$ . En particular  $\partial D_\varepsilon(\bar{N}) \cong \bar{N} \cong N$ .

Por otro lado si  $S = D_\varepsilon(p)^\perp$  es una rebanada en  $p$  entonces  $D_\varepsilon(\bar{p}) \cong D_\varepsilon(p)^\perp/G$ . A su vez esto es homeomorfo a  $D_\varepsilon(0)/G_p$  donde  $D_\varepsilon(0) \subset T_p S$ . Luego  $\partial D_\varepsilon(\bar{p}) \cong \partial D_\varepsilon(0)/G_p \cong \Sigma_{\bar{p}}$  (véase 4.3.3). Consecuentemente  $N \cong \Sigma_{\bar{p}}$ .

La afirmación en el inciso 3 es una consecuencia de la descomposición 5.9.

(4) Sean  $D = \{(p, v) \in \nu N \mid |v| \leq \varepsilon\}$  y  $S = \partial D$  ( $\nu N$  es el haz normal). Nótese que

$$S = \{(p, v) \in \nu N \mid |v| = \varepsilon\}.$$

La función exponencial lleva  $D$  en  $D_\varepsilon(N)$  y  $S$  en  $\partial D_\varepsilon(N)$ . Luego es suficiente demostrar que  $D \cong S \times_G D^{\text{codim}(N)}$ .

Sea  $p \in N$ ,  $D' = T_p N^\perp \cap B_\varepsilon(0)$  y  $S' = \partial D'$ .  $D'$  es un disco de dimensión  $\text{codim}(N)$ . Tómese  $x \in S'$  fijo. Por la homogeneidad de la representación de isotropía en  $S'$ , para cada  $y \in S'$  existe  $g \in G$  tal que  $gy = x$  para algún  $\lambda > 0$ , llamamos  $\rho(y) = g$  a dicho elemento. Nótese que  $\rho(y)$  es único ya que si  $hy = \lambda x$  y  $gy = \lambda x$  entonces  $h^{-1}gy = y$ , es decir  $h^{-1}g \in G_y$ , sin embargo como  $y \notin N$  entonces  $G_y$  es trivial por hipótesis.

La función  $\rho : S' \rightarrow G$  es diferenciable. Para ver esto nótese que la acción de  $G$  en  $S'$

$$\mu : G \times S' \rightarrow S'$$

es una sumersión y luego  $T = \mu^{-1}(x)$  es una subvariedad de  $G \times S'$ . Si  $\pi_{S'} : G \times S' \rightarrow S'$  es la proyección, por lo anterior  $\pi_{S'}$  restringida a  $T$  tiene un inverso diferenciable  $i_{S'}$ . Por lo tanto  $\rho = \pi_G \circ i_{S'}$  es diferenciable. Nótese que si  $\rho(g \cdot y) \cdot (g \cdot y) = x$  entonces  $(\rho(g \cdot y) \cdot g) \cdot y = x$  y por lo tanto  $\rho(y) = \rho(g \cdot y)g$  o bien  $\rho(g \cdot y) = \rho(y)g^{-1}$ .

Se define  $\Psi : S \times D' \rightarrow D$  como

$$\Psi(q, ty) = t\rho(y) \cdot q, \quad y \in S' \text{ y } y \in [0, 1].$$

Tómese  $g \in G$  y  $(q, ty) \in S \times D'$  con  $y \in S'$  y  $t \in [0, 1]$ , y calcule

$$\Psi(g \cdot q, g \cdot (ty)) = \Psi(g \cdot q, tg \cdot y) = t\rho(g \cdot y) \cdot (g \cdot q) = t\rho(y) \cdot g^{-1} \cdot g \cdot q = t\rho(y) \cdot q = \Psi(q, ty).$$

Por lo tanto existe una única  $\psi : S \times_G D' \rightarrow D$  diferenciable tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} S \times D' & \xrightarrow{\Psi} & D \\ \downarrow \pi & \searrow \psi & \\ S \times_G D' & & \end{array}$$

Si  $q' = tq \in B$  con  $q \in S$  y  $t \in [0, 1]$  entonces por definición de  $\rho$ ,  $\Psi(q, tx) = q$ . Esto es  $\Psi$  y por lo tanto  $\psi$  son suprayectivas. Además si  $\Psi(q_1, t_1 y_1) = \Psi(q_2, t_2 y_2)$  entonces  $t_1 = t_2$  y  $\rho(y_1)q_1 = \rho(y_2)q_2$  o bien  $\rho(y_2)^{-1}\rho(y_1)q_1 = q_2$ . Dado que  $\rho(y_1) \cdot y_1 = x$  y  $\rho(y_2) \cdot y_2 = x$  entonces  $\rho(y_2)^{-1}\rho(y_1) \cdot y_1 = y_2$ . Por lo tanto si  $g = \rho(y_2)^{-1}\rho(y_1)$ , entonces  $g \cdot q_1 = q_2$  y  $g \cdot y_1 = y_2$ , es decir  $[(q_1, t_1 y_1)] = [(q_2, t_2 y_2)]$ . Consecuentemente  $\psi$  es inyectiva.

No es difícil verificar que  $\psi$  no tiene puntos críticos y por lo tanto  $\psi$  es un difeomorfismo.  $\square$

Si  $G \curvearrowright M$  es una acción isométrica que satisface las condiciones anteriores, la topología de  $M$  queda completamente determinada por la isotropía de la órbita más lejana a la frontera en el espacio de órbitas.

El caso más sencillo de analizar es cuando  $G$  es abeliano. En esta situación por los teoremas de la sección 4.6 se puede reducir aún más, al caso  $G = \mathbb{S}^1$ .

**Lema 5.3.3.** *Sea  $M$  una variedad riemanniana cerrada con curvatura seccional positiva. Si  $\mathbb{S}^1 \curvearrowright M$  es una acción isométrica y efectiva tal que  $Fij(\mathbb{S}^1)$  contiene una componente de codimensión 2 entonces la acción satisface las condiciones de los lemas anteriores o  $M \cong \mathbb{R}P^n$ .*

**Demostración** Sea  $N$  la componente de  $Fij(N)$  que tiene codimensión 2. Por el teorema de Frankel 3.2.4  $N$  es la única componente de codimensión 2. Recuérdese, 4.3.11, que  $\bar{p} \in \bar{M}$  es un punto frontera si y solo si  $p$  está en una componente de  $Fij(\mathbb{S}^1)$  de codimensión 2 o la representación de isotropía en  $p$  es singular.

Supóngase que la representación de isotropía es no singular en todo punto. Luego  $\partial\bar{M} = \bar{N}$ . Además dado que el normal a  $N$  tiene dimensión 2,  $\mathbb{S}^1$  debe actuar libre y transitivamente sobre el haz normal. Consecuentemente  $\mathbb{S}^1 \curvearrowright M$  satisface las hipótesis de los lemas anteriores.

Supóngase que la representación de isotropía en  $p$  es singular, es decir linealmente equivariante

$$[j](x_1, x_2, \dots, x_n) = ((-1)^j x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (5.10)$$

Obsérvese que esto solo sucede cuando  $n = 2m$  y  $M$  es no orientable (véase 4.3.5). Como la representación de isotropía es efectiva necesariamente sucede que  $G_p = \mathbb{Z}_2$ . Nótese que por  $p$  pasa una componente  $N \subset Fij(\mathbb{Z}_2)$  de codimensión 1. Por el teorema de Frankel si  $Q$  es otra componente de  $Fij(\mathbb{Z}_2)$  entonces  $Q$  debe de ser 0-dimensional, es decir un punto aislado. Por esto mismo la representación de isotropía no puede ser singular fuera de  $N$ . Consecuentemente si  $\bar{M} = M/\mathbb{Z}_2$  entonces  $N/\mathbb{Z}_2 = \bar{N} = \partial\bar{M}$ . De 5.10 es evidente que  $\mathbb{Z}_2$  actúa transitivamente en la esfera de la fibra normal a  $N$ . Es claro también que la isotropía cerca de  $N$  debe de ser trivial.

En resumen  $\mathbb{Z}_2 \curvearrowright M$  satisface las hipótesis de 5.3.2. Sea  $\bar{p} = \mathbb{Z}_2 \cdot p$  la órbita a máxima distancia de  $N$ .

Si  $p \notin Fij(\mathbb{Z}_2)$  entonces la isotropía en  $p$  es trivial y luego  $N \cong \Sigma_{\bar{p}} \cong \partial B_\varepsilon(p) \cong \mathbb{S}^{n-1}$ . Además  $D_\varepsilon(\mathbb{Z}_2 \cdot p) \cong D^n \cup D^n$  y por lo tanto  $\partial D_\varepsilon(N) \cong \partial D_\varepsilon(\mathbb{Z}_2 \cdot p) \cong \mathbb{S}^{n-1} \cup \mathbb{S}^{n-1}$ .  $\mathbb{Z}_2$  actúa en  $\mathbb{S}^{n-1} \cup \mathbb{S}^{n-1}$  intercambiando componentes y en  $I = D^1$  intercambiando extremos. Por lo tanto

$$D_\varepsilon(N) \cong (\mathbb{S}^{n-1} \cup \mathbb{S}^{n-1}) \times_{\mathbb{Z}_2} I \cong \mathbb{S}^{n-1} \times I.$$

Luego  $M = \mathbb{S}^n \times I \cup_{\varphi} (D^n \cup D^n) \cong \mathbb{S}^n$ . Esta situación no emerge puesto que  $\mathbb{S}^n$  es orientable.

Supóngase ahora que  $p \in Fij(\mathbb{Z}_2)$ . Dado que  $p$  es un punto aislado en  $Fij(\mathbb{Z}_2)$  la representación de isotropía no puede tener puntos fijos por lo que debe de ser el mapeo antípoda. Por lo tanto  $N \cong \Sigma_{\bar{p}} = \partial B_\varepsilon(p)/\mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{R}P^n$ . Además  $D_\varepsilon(\mathbb{Z}_2 \cdot p) = D_\varepsilon(p) \cong D^n$  y  $\partial D_\varepsilon(\mathbb{Z}_2 \cdot p) = \partial D_\varepsilon(p) \cong \mathbb{S}^{n-1}$ . Luego  $D_\varepsilon(N) \cong \mathbb{S}^{n-1} \times_{\mathbb{Z}_2} I$ . En conclusión  $M \cong \mathbb{S}^{n-1} \times_{\mathbb{Z}_2} I \cup D^n \cong \mathbb{R}P^n$ .  $\square$

**Lema 5.3.4.** *Sea  $M$  una variedad riemanniana compacta  $n$ -dimensional con curvatura seccional positiva. Si  $M$  admite una acción efectiva e isométrica de  $\mathbb{S}^1$  de codimensión 2 entonces  $M$  es difeomorfa a alguna de las siguientes:*

- A.  $\mathbb{S}^n$
- B.  $\mathbb{R}P^n$
- C. Espacio lente  $L$ .
- D.  $\mathbb{C}P^{n/2}$ .

**Demostración** Por el lema anterior se puede suponer que la acción  $\mathbb{S}^1 \curvearrowright M$  satisface las hipótesis del lema 5.3.2.

Sea  $N \subset Fij(\mathbb{S}^1)$  la componente de codimensión 2 y  $\mathbb{S}^1 \cdot p$  la órbita a distancia máxima. Se procederá a analizar los casos que emergen para distintos grupos de isotropía  $\mathbb{S}_p^1$ .

( $\mathbb{S}_p^1 = \mathbb{S}^1$ ) Dado que  $\mathbb{S}^1$  actúa libremente en  $M - (N \cup \{p\})$ , en particular  $\mathbb{S}^1$  actúa libremente en  $\partial D_\varepsilon(p) \cong \mathbb{S}^{n-1}$  por lo que  $n = 2m$ . Además la representación de isotropía en  $p$  debe de ser linealmente equivariante a

$$e^{i\theta}(z_1, \dots, z_m) = (e^{i\theta}z_1, \dots, e^{i\theta}z_m). \quad (5.11)$$

Luego  $N \cong \overline{N} \cong \Sigma_p \cong \partial B_\varepsilon(p)/\mathbb{S}^1 \cong \mathbb{C}^{m-1}$ . También  $\partial D_\varepsilon(N)$  es equivariantemente difeomorfo a  $\partial D_\varepsilon(p) \cong \mathbb{S}^{n-1}$ . La acción de  $\mathbb{S}^1$  en  $D^2$  es a través de rotaciones y por lo tanto  $M \cong \mathbb{S}^{n-1} \times_{\mathbb{S}^1} D^2 \cup D^n \cong \mathbb{C}P^m$ .

( $\mathbb{S}_p^1 = \{e\}$ ) En este caso  $\mathbb{S}^1$  actúa libremente en  $M - N$ . En particular si  $S = D_\varepsilon(p)^\perp \cong D^{n-1}$  es una rebanada en  $p$  y  $B_\varepsilon(\mathbb{S}^1 \cdot p)$  es el tubo correspondiente, entonces  $\mathbb{S}^1$  actúa libremente en  $B_\varepsilon(\mathbb{S}^1 \cdot p)$ , por lo que  $B_\varepsilon(\mathbb{S}^1 \cdot p)$  es un haz fibrado sobre  $S$ . Dado que  $S$  es contraíble y todo haz fibrado sobre un conjunto contraíble es trivial entonces  $B_\varepsilon(\mathbb{S}^1 \cdot p) \cong D^{n-1} \times \mathbb{S}^1$ . Además  $N \cong \Sigma_p \cong \partial S \cong \mathbb{S}^{n-2}$  y  $\partial B_\varepsilon(N) \cong \partial D^{n-1} \times \mathbb{S}^1 = \mathbb{S}^{n-2} \times \mathbb{S}^1$  en donde  $\mathbb{S}^1$  actúa en  $\partial B_\varepsilon(N)$  trivialmente en la primera entrada y por rotaciones en la segunda. Luego  $D_\varepsilon(N) \cong (\mathbb{S}^{n-2} \times \mathbb{S}^1) \times_{\mathbb{S}^1} D^2 \cong \mathbb{S}^{n-2} \times D^2$ . Por lo tanto  $M \cong \mathbb{S}^{n-2} \times D^2 \cup \mathbb{S}^1 \times D^{n-1} \cong \mathbb{S}^n$ .

( $\mathbb{S}_p^n = \mathbb{Z}_m$ ) Sea  $S$  una rebanada en  $p$ . Dado que  $\mathbb{S}^1$  actúa libremente en  $M - (N \cup \mathbb{S}^n \cdot p)$  la representación de rebanada en  $p$  no puede tener puntos fijos fuera de  $p$ . Por 4.2 debe de ser linealmente equivariante a

$$[k](z_1, \dots, z_s) = (e^{i2\pi \frac{k}{m}} z_1, \dots, e^{i2\pi \frac{k}{m}} z_s) \quad (z_1, \dots, z_n) \in T_p S \cong \mathbb{C}^s$$

cuando  $n = 2s + 1$ , o

$$[k](x_1, \dots, x_{n-1}) = (-x_1, \dots, -x_{n-1})$$

cuando  $n = 2s$  y en tal caso  $G_p = \mathbb{Z}_2$ .

Sea  $f_n : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  la  $n$ -cubierta de  $\mathbb{S}^1$ , i.e.  $f_n(z) = z^n$ . Nótese que  $B_\varepsilon(\mathbb{S}^1 \cdot p)$  es un haz fibrado sobre  $\mathbb{S}^1$  con fibra  $S = D^{n-1}$ . Sea  $E \rightarrow \mathbb{S}^1$  el siguiente pullback

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & B_\varepsilon(\mathbb{S}^1 \cdot p) \\ \downarrow & & \downarrow \pi \\ \mathbb{S}^1 & \xrightarrow{f_n} & \mathbb{S}^1 \end{array}$$

La acción de  $\mathbb{S}^1$  en  $B_\varepsilon(\mathbb{S}^1 \cdot p)$  se levanta a  $E$ . En  $E$  la acción de  $\mathbb{S}^1$  es libre por lo que  $E$  es un haz fibrado sobre  $D^{n-1}$  con fibra  $\mathbb{S}^1$ . Luego  $E \cong D^{n-1} \times \mathbb{S}^1$  donde  $\mathbb{S}^1$  actúa solo en la segunda entrada. Por otro lado  $B_\varepsilon(\mathbb{S}^1 \cdot p) = E/\mathbb{Z}_m$  por lo que  $B_\varepsilon(\mathbb{Z}_m) \cong (D^{n-1} \times \mathbb{S}^1)/\mathbb{Z}_m$ . La frontera de dicho conjunto es  $(\mathbb{S}^{n-2} \times \mathbb{S}^1)/\mathbb{Z}_m$ .

Luego  $M \cong D^2 \times_{\mathbb{S}^1} (\mathbb{S}^{n-2} \times_{\mathbb{Z}_m} \mathbb{S}^1) \cup (D^{n-1} \times \mathbb{S}^1)/\mathbb{Z}_m \cong D^2 \times \mathbb{S}^{n-2}/\mathbb{Z}_m \cup (D^{n-1} \times \mathbb{S}^1)/\mathbb{Z}_m \cong (D^2 \times \mathbb{S}^{n-2} \cup \mathbb{S}^1 \times D^{n-1})/\mathbb{Z}_m \cong \mathbb{S}^n/\mathbb{Z}_m \cong L$ .  $\square$

Una condición bajo la cual existe una acción como la mencionada en los resultados previos se demostró en 4.6.8: basta con que  $\text{simrk}(M) = \lfloor (n+1)/2 \rfloor$ . Luego,

**Teorema 5.3.5** (Grove-Searle, 1989). *Si  $M$  es una variedad riemanniana  $n$ -dimensional compacta de curvatura seccional positiva tal que  $\text{simrk}(M) = \lfloor (n+1)/2 \rfloor$  entonces  $M$  es difeomorfa a una de las siguientes:*

- A.  $\mathbb{S}^n$ ;
- B. Algún espacio lente  $L$ ;
- C.  $\mathbb{C}fP^{n/2}$ .

Nótese que cualquiera de los espacios de dimensión par en la lista tiene característica de Euler positiva; de hecho, todas las variedades de dimensión par con alto rango de simetría cumplen esta propiedad; véase [PS02].

**Teorema 5.3.6** (Püttmann-Searle). *Sea  $M$  una variedad riemanniana  $2n$ -dimensional completa con curvatura seccional positiva. Si  $\text{simrk}(M) \geq \frac{2n-4}{4}$  entonces  $\chi(M) > 0$ .*

**Demostración** Sea  $T$  un toro maximal en  $\text{Iso}(M)$  y  $\mathfrak{h}$  su álgebra de Lie. Sea  $N \in ZZ(\mathfrak{h})$  una componente de codimensión mínima. Si  $\text{codim}N = 2$  entonces por el teorema anterior  $M \cong \mathbb{S}^{2n}, \mathbb{R}P^{2n}, \mathbb{C}P^n$  y  $\chi(M) > 0$ .

Supongamos que  $\text{codim}N \geq 4$ . Por 4.6.3  $\dim(\mathfrak{h}|_N) = \dim(\mathfrak{h}) - 1 \geq \frac{2n-4}{4} - 1 = \frac{2(n-2)-4}{4}$ . Por otro lado  $N$  es una subvariedad de codimensión par por lo que  $\dim(N) \leq n - 2$ . Por inducción  $\chi(N) > 0$ . Descomponemos  $\text{Fij}(T)$  en componentes maximales  $N_1, \dots, N_s$  y por 4.7.1

$$\chi(M) = \sum_i \chi(N_i) > 0. \quad \square$$

# Apéndice A

## Geometría riemanniana

### A.1. Preliminares

En esta sección se introducirá los elementos básicos de la geometría riemanniana y se establecerá la notación usada en el resto del texto. También se enunciarán algunos resultados elementales sin demostración. Para consultar las demostraciones véase [DC92], [Boo86], [CE75], [Lee97].

Se presupone que el lector está familiarizado con los conceptos básicos de la topología diferencial, en particular con los contenidos de [GP10] o [Lee12].

El espacio tangente a un punto  $p$  de una variedad  $M$  se denota por  $T_pM$ , el haz tangente  $TM$ . El álgebra de campos vectoriales  $\mathcal{X}(M)$ , las  $p$ -formas  $\Lambda^p(M)$ ,  $T^{r,s}M$  el haz de  $(r, s)$ -tensores sobre  $M$  y el álgebra de funciones diferenciales  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  es  $\mathcal{F}M$ . Si  $T$  es un tensor, entonces  $T_p$  denota su valor en  $T_pM$ . Para funciones diferenciables  $f : M \rightarrow N$  se usará  $df : TM \rightarrow TN$  para denotar el morfismo de haces inducido. Además si  $f : M \rightarrow N$  es un difeomorfismo entonces  $f^* : T^{r,s}M \rightarrow T^{r,s}N$  es el morfismo de haces definido por

$$f^*(T)_p(\omega_1, \dots, \omega_r, X_1, \dots, X_s) = T(\omega_1 \circ df^{-1}, \dots, \omega_r \circ df^{-1}, df(X_1), \dots, df(X_s))_{f(p)}$$

Para un campo tensorial  $T \in T^{r,s}M$  y un campo vectorial  $X \in \mathcal{X}(M)$  la derivada de Lie de  $T$  en la dirección de  $X$  es

$$\mathcal{L}_X T = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\varphi_t^{-1})^* T$$

donde  $\varphi_t$  es el flujo local inducido por  $X$ . Si  $Y$  es un campo vectorial entonces  $\mathcal{L}_X Y$  coincide con el corchete de Lie  $[X, Y]$ .

Una variedad riemanniana es una variedad diferenciable  $M$  junto con una noción de longitud infinitesimal dada por un producto interior en cada espacio tangente. Dicho formalmente, aparte de la estructura diferencial en  $M$ , la variedad viene acompañada de una sección  $g$  del haz de 2-tensores simétricos tal que:

- (A)  $g$  es positivo definida en cada punto.
- (B)  $g$  es no degenerada.

A la sección  $g$  se le llama la métrica riemanniana. La norma de un vector en  $v \in T_pM$  será denotada de la manera usual  $|v| = \sqrt{g(v, v)_p}$ .

Toda variedad diferenciable admite una métrica riemanniana, puesto que es posible pegar métricas definidas localmente usando particiones de la unidad.

Más interesante que la longitud de vectores tangentes es la estructura de paralelismo que impone una métrica riemanniana. Para cada métrica riemanniana  $g$  existe una única conexión  $\nabla$  en el haz tangente  $TM$ , llamada la conexión de Levi-Civita de la variedad riemanniana, que satisface:

- (A)  $\nabla$  es simétrica:  $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$  para todo par de campos vectoriales  $X, Y$ .
- (B)  $\nabla$  es compatible con la métrica:  $Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$ . Equivalentemente  $\nabla g = 0$ .

La conexión está completamente determinada por la siguiente fórmula, llamada la fórmula de Koszul:

$$g(\nabla_X Y, Z) = Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y) - g(X, [Y, Z]) - g(Y, [Z, X]) + g(Z, [X, Y]) \quad (\text{A.1})$$

En términos locales si  $\{X_i\}$  es un marco local, entonces la conexión está determinada por  $n^3$  funciones, los llamados símbolos de Christoffel, dados por

$$\nabla_{X_i} X_j = \sum_{k=1}^n \Gamma_{i,j}^k X_k. \quad (\text{A.2})$$

Usando la fórmula de Koszul se llega a que los símbolos de Christoffel están atados a la métrica a través de la siguiente ecuación:

$$\Gamma_{i,j}^k = \frac{1}{2} \sum_m g^{k,m} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} g_{j,m} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{m,i} - \frac{\partial}{\partial x_m} g_{i,j} \right). \quad (\text{A.3})$$

Dada una curva en la variedad  $\alpha : [a, b] \rightarrow M$  es posible definir una derivación,  $\frac{D}{dt}$ , sobre los campos vectoriales definidos a lo largo de  $\alpha$ , llamada la derivada covariante a lo largo de  $\alpha$ , usando la conexión de Levi-Civita de la siguiente manera. Si  $X$  es un campo vectorial a lo largo de  $\alpha$ , su derivada covariante a lo largo de  $\alpha$  en un punto  $p = \alpha(t)$  es  $\nabla_{\overline{\alpha'}} \overline{X}(p)$  donde  $\overline{\alpha'}$  y  $\overline{X}$  son campos vectoriales en  $M$  (cualesquiera) que extiendan a  $\alpha'$  y  $X$  respectivamente. Tal definición no depende de la extensión elegida y satisface las siguientes propiedades:

- (A)  $\frac{D}{dt} fX = f'X + f \frac{D}{dt} X$
- (B)  $\frac{D}{dt}(X + Y) = \frac{D}{dt} X + \frac{D}{dt} Y$ .

Se dice que un campo vectorial  $X$  a lo largo de una curva  $\alpha$  es paralelo si su derivada covariante a lo largo de  $\alpha$  es idénticamente 0. Para cada curva  $\alpha : [a, b] \rightarrow M$  y vector tangente  $x \in T_p M$ , con  $p = \alpha(a)$ , existe un único campo vectorial  $X$  suave y paralelo a lo largo de  $\alpha$  tal que  $X(a) = x$ . Esto da una correspondencia entre los espacios tangentes  $T_p M$  y  $T_q M$ , llamado el transporte paralelo  $P_\alpha : T_p M \rightarrow T_q M$ , donde  $q = \alpha(b)$ , definido por  $P_\alpha(x) = X(b)$ . El transporte paralelo es una transformación lineal que preserva la métrica riemanniana. La falta de conmutatividad del transporte paralelo, a lo largo de trayectorias diferentes, es una manifestación de la curvatura.

La métrica riemanniana brinda:

- Una noción de ángulo entre dos curvas  $\gamma_1, \gamma_2$  con  $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = p$ , a través de la ecuación (compárese con C.1.8)

$$\cos(\angle(\gamma_1, \gamma_2)) = \frac{g(\gamma_1'(0), \gamma_2'(0))}{g(\gamma_1'(0), \gamma_1'(0))g(\gamma_2'(0), \gamma_2'(0))}. \quad (\text{A.4})$$

- Una medida de longitud para las curvas diferenciables: Si  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  es una curva diferenciable, entonces su longitud es:

$$L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt. \quad (\text{A.5})$$

- Una noción de recta: Las rectas o geodésicas del espacio son curvas  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  cuya “aceleración” es 0. Esto es, aquellas cuyo campo de velocidad es paralelo:

$$\frac{D\gamma'}{Dt} = 0.$$

Una geodésica es la trayectoria de un cuerpo que se mueve libre de fuerzas en una dirección constante.<sup>1</sup> Una geodésica  $\gamma$  que además es la curva de longitud mínima entre las curvas que unen a los extremos de  $\gamma$  es llamada una geodésica minimizante.

Dado un punto de la variedad  $p \in M$  y un vector tangente  $v \in T_p M$ , existe una única geodésica definida en una vecindad de 0,  $\gamma_v : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  tal que  $\alpha(0) = p$  y  $\alpha'(0) = v$ . El mapeo exponencial  $\exp : U \subset TM \rightarrow M$ , donde  $U$  es una vecindad de la sección 0 en  $TM$ , está definido por  $\exp(p, v) = \gamma_v(1)$ . Tal función es suave en todo su dominio. La restricción de la función exponencial al espacio tangente de  $p$  se denota por  $\exp_p$ .

De la definición de  $\exp_p$  es inmediato que su diferencial en  $0 \in T_p M$  es la identidad y por lo tanto existe una vecindad  $U$  de  $p$ , y otra  $V$  de 0 en  $T_p M$ , tal que  $\exp_p$  restringida a  $V$  es un difeomorfismo de  $V$  a  $U$ . Una vecindad de  $p$  que sea difeomorfa a una vecindad de  $T_p M$  a través de  $\exp_p$  es llamada una vecindad normal. Si  $\varepsilon$  es lo suficientemente pequeño para que  $B_\varepsilon(0)$  esté contenida en el dominio de  $\exp_p$  y tal que  $\exp_p$  restringida a tal bola es un difeomorfismo, decimos que la imagen  $B_\varepsilon(p) = \exp_p(B_\varepsilon(0))$  es una bola normal de radio  $\varepsilon$  con centro en  $p$ . El radio máximo  $ri(p) > 0$  tal que para todo  $r < ri(p)$  la bola  $B_r(p)$  es normal es llamado el radio de inyectividad de  $p$ . La función  $ri : M \rightarrow \mathbb{R}$  es continua.

Una vecindad totalmente normal  $U$  de  $p$  es una vecindad para la cual existe un  $\delta > 0$  de tal forma que todas las bolas  $B_\delta(q)$ ,  $q \in U$ , son bolas normales y  $U \subseteq B_\delta(q)$ . Una vecindad convexa de  $p$  es una vecindad normal  $V$  de  $p$  tal que para todo par de puntos  $p, q \in V$ , la geodesica radial de  $p$  a  $q$  está completamente contenida en  $V$ . Todo punto de la variedad tiene vecindades totalmente normales y convexas. Aún más existe una función continua  $rc : M \rightarrow \mathbb{R}$  llamada el radio de convexidad tal que para todo  $r < rc(p)$  la bola  $B_r(p)$  es convexa.

Sea  $p \in M$  un punto cualquiera y  $\{X_i\}_{i \in n}$  una base ortonormal de  $T_p M$ . Tal elección de base da un difeomorfismo de  $\mathbb{R}^n$  con  $T_p M$ , que compuesta con  $\exp_p$  resulta en una carta coordenada de  $p$ . Tales coordenadas locales satisfacen que

$$g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p, \frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_p\right) = \delta_{ij}, \quad (\text{A.6})$$

$$(\Gamma_{ij}^k)_p = 0. \quad (\text{A.7})$$

<sup>1</sup>Son curvas críticas del lagrangiano  $L = T$ , donde  $T$  es la energía cinética  $T = \frac{1}{2}m|v|^2$ .

Coordenadas para  $p$  que satisfacen la igualdad anterior son llamadas coordenadas geodésicas o normales. El comentario previo asegura la existencia de tales coordenadas para todo punto  $p$ . Es importante notar que la condición A.6 solo se satisface para  $p$ .

Toda variedad riemanniana  $M$  está dotada de una noción de longitud infinitesimal a través de la métrica riemanniana, con lo cual se puede medir longitud de curvas. Esto a su vez induce una métrica en  $M$ , a saber,

$$d(p, q) = \inf \{l(\alpha) \mid \alpha \in \Omega_{p,q}(M)\}. \quad (\text{A.8})$$

El lema de Gauss afirma que en una bola normal con centro en  $p$  el vector radial  $\frac{\partial}{\partial r}$  es el gradiente de la función distancia  $d(\_, p)$ . A partir de esto se concluye que la topología inducida por la métrica es la misma que la topología como variedad topológica.

Para cualquier par de puntos en una variedad métricamente completa existe una geodésica minimizante que los une. Así, las variedades riemannianas métricamente completas contienen todas las geodésicas necesarias y por tanto es natural trabajar con ellas cuando se estudian cuestiones globales.

El siguiente teorema da una caracterización útil de la completitud métrica.

**Teorema A.1.1** (Hopf-Rinow). *Sea  $M$  una variedad riemanniana. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

- (a)  $M$  es completa como espacio métrico.
- (b) Los conjuntos cerrados y acotados son compactos.
- (c) La función exponencial está definida en todo  $TM$ .
- (d) Existe un punto  $p \in M$  tal que  $\exp_p$  está definida en todo  $T_pM$ .

A su vez, cualquiera de estas condiciones implica que entre cualesquiera par de puntos  $p$  y  $q$  existe una geodésica minimizante  $\gamma$ .

En particular cualquier variedad riemanniana compacta es completa. Además, si  $M$  es una variedad completa y  $N$  una subvariedad cerrada entonces  $N$  es completa con la métrica riemanniana inducida.

## A.2. Variaciones de energía

Las geodésicas de una variedad riemanniana son curvas que minimizan distancia localmente. Dicho de otro modo, son aquellas curvas que al ser perturbadas manteniendo los extremos fijos no se obtienen curvas de menor longitud. Expresar esta intuición con la precisión matemática necesaria requiere de la introducción de un elemento importante en la familia riemanniana.

Sea  $\Omega(M)$  el espacio de curvas diferenciables a pedazos en  $M$  y  $\Omega_{p,q}(M)$  el subconjunto que consta de las curvas con inicio en  $p$  y fin en  $q$ . Se define los funcionales de longitud  $L : \Omega(M) \rightarrow \mathbb{R}$  y de energía,  $E : \Omega(M) \rightarrow \mathbb{R}$  como sigue:

$$L(\alpha) = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} |\alpha'(t)| dt, \quad E(\alpha) = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} g(\alpha'(t), \alpha'(t)) dt,$$

donde  $\alpha : [0, a] \rightarrow M \in \Omega(M)$ ,  $0 = a_0 < \dots < a_n = a$  y  $\alpha|_{[a_i, a_{i+1}]}$  es diferenciable. Usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz se demuestra que  $L(\alpha)^2 \leq (b-a)E(\alpha)$ , con igualdad solo cuando  $\alpha$  tiene velocidad constante. En particular si  $E(\alpha_1) \leq E(\alpha_2)$  y  $\alpha_2$  tiene velocidad constante entonces  $L(\alpha_1) \leq L(\alpha_2)$ .

Es posible construir una noción de derivada direccional para los funcionales. Para esto se define, como es costumbre, las variaciones (análogo de vector tangente en  $\Omega(M)$ ).

**Definición A.2.1.** Sea  $\alpha : [0, a] \rightarrow M \in \Omega(M)$ . Una variación de  $\alpha$  es una función  $\varphi : [0, a] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  tal que:

1.  $\varphi(t, 0) = \alpha(t)$ .
2. Existe una partición  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = a$  de  $[0, a]$  más fina que  $\{a_i\}$  tal que  $\varphi|_{[t_i, t_{i+1}] \times (-\varepsilon, \varepsilon)}$  es diferenciable.

Se dice que la variación es propia si para toda  $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ ,  $\varphi(0, s) = \alpha(0)$  y  $\varphi(a, s) = \alpha(a)$ .

Se puede pensar una variación como una familia suave de curvas  $\varphi_s$ ,  $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ , dadas por  $\varphi_s(t) = \varphi(t, s)$ , i.e. donde cada  $\varphi_s$  es una curva suave en  $\Omega(M)$ .

Toda variación define un campo vectorial diferenciable a pedazos,  $V_\varphi$ , a lo largo de  $\alpha$  a través de  $V_\varphi(t) = \frac{\partial}{\partial s} \varphi(t, 0)$ . En caso de que la variación sea propia, el campo vectorial satisface  $V(a) = V(0) = 0$ . Esta observación puede extenderse a una correspondencia:

**Proposición A.2.1.** Para todo campo vectorial diferenciable a pedazos  $V$  a lo largo de  $\alpha$  (tal que  $V(a) = V(0) = 0$ ) existe una variación (propia) de  $\alpha$ ,  $\varphi$ , tal que  $V(t) = \frac{\partial}{\partial s} \varphi(t, 0)$ .

A cada  $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  de una variación,  $\varphi$ , se le asocia la curva  $\alpha_s(t) = \varphi(t, s)$ . Se puede hablar de la variación en la energía  $E_\varphi(s) = E(\alpha_s)$  a lo largo de la variación  $\varphi$ .

**Teorema A.2.2** (Fórmula de primera variación). Sean  $\alpha \in \Omega(M)$ ,  $\varphi$  una variación de  $\alpha$  y  $V$  el campo inducido por  $\varphi$ . Entonces

$$\frac{1}{2} E'_s(0) = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} g(\alpha'', V) + \sum_{i=1}^{n-1} g(\Delta\alpha', V_i) + g(\alpha'(a), V(a)) - g(\alpha'(0), V(0)), \quad (\text{A.9})$$

donde  $\alpha'' = \frac{D}{dt} \alpha'$  y  $\Delta\alpha_i = \alpha'(a_i^+) - \alpha'(a_i^-)$ .

Si  $\alpha$  es un mínimo del funcional de energía y tiene velocidad constante entonces  $\alpha$  es un mínimo del funcional de longitud.

**Corolario A.2.3.** Si  $\alpha$  es una curva entre  $p$  y  $q$ , entonces es un punto crítico del funcional de energía restringido a  $\Omega_{p,q}(M)$  si y solo si es una geodésica.

Como ejemplo de uso de la fórmula de primera variación considere el siguiente problema. Sean  $N$  y  $Q$  subvariedades de  $M$  y supóngase que existe una geodésica minimizante  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  tal que  $\gamma(a) \in N$ ,  $\gamma(b) \in Q$  y  $L(\gamma) = d(N, Q)$ . Si  $\varphi$  es una variación de  $\gamma$  tal que  $\varphi(a, s) \in N$  y  $\varphi(b, s) \in Q$  para toda  $s$ , entonces las curvas  $\alpha_s$  unen puntos de  $N$  con puntos de  $Q$  y su longitud no puede ser menor que la longitud de  $\gamma$ . Luego  $E'_s(0) = 0$  y si  $V$  es el campo generado por la variación entonces se tiene que

$$\frac{1}{2} E'_s(0) = 0 = g(\alpha'(b), V(b)) - g(\alpha'(a), V(a)).$$

Nótese que  $V(a)$  y  $V(b)$  son vectores tangentes de  $N$  y  $Q$  respectivamente, y que si  $v \in T_{\gamma(a)}N$  y  $w \in T_{\gamma(b)}Q$  son vectores tangentes cualesquiera, entonces puede construirse una variación tal que  $V(a) = v$  y  $V(b) = w$ . Por lo tanto la geodésica  $\gamma$  debe de ser ortogonal a  $N$  y  $Q$ .

Otra aplicación consiste en calcular la derivada de una función de distancia  $d(p, \cdot)$  en el dominio en que es derivable. Sea  $p \in M$ . La función  $d(p, \cdot) = d_p$  puede no ser derivable, sin embargo sí lo es cuando se restringe el dominio a una bola normal. Sea  $B_r(p)$  una bola normal y  $q \in B_r(p)$ . Para calcular la derivada direccional de  $d_p$  en la dirección unitaria  $v \in T_qM$  se toma cualquier curva  $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  tal que  $\alpha(0) = q$  y  $\alpha'(0) = v$ . Se puede suponer que la curva está contenida en  $B_r(p)$  por lo que se puede jalar a  $T_pM$  a través de la exponencial. Sea  $\beta(t) = \exp_p^{-1}(\alpha(t))$ . Considere la variación  $\varphi(t, s) = \exp_p(t\beta(s))$  y note que  $\alpha_s(t) = \exp_p(t\beta(s))$  es una geodésica para  $s$  fija y que  $\varphi(1, s) = \alpha(s)$ . Dado que para cada  $s$ ,  $\alpha_s$  es una geodésica,  $d(p, \alpha(s))^2 = L(\alpha_s)^2 = E(\alpha_s)$  por lo que  $E'(0) = 2d(p, q)d(d_p)_q(v)$ . Si  $V$  es el campo inducido por  $\varphi$  nótese que  $V(0) = 0$  y  $V(1) = v$ , por lo tanto

$$d(p, q)d(d_p)_q(v) = g(\alpha'_0(1), v),$$

o bien

$$d(d_p)_q(v) = g(\alpha'_0(1)/d(p, q), v) = \frac{1}{2} \cos \angle \xi v,$$

donde  $\xi$  es el vector tangente de la geodésica unitaria y minimizante de  $q$  a  $p$ .

Como es evidente en el caso de una esfera o un cilindro, las geodésicas pueden no minimizar distancia entre sus extremos. Distinguir puntos críticos no basta para este propósito, luego la relevancia del siguiente teorema.

**Teorema A.2.4** (Fórmula de la segunda variación). *Sea  $\gamma : [0, a] \rightarrow M$  una geodésica. Si  $\varphi$  es una variación a lo largo de  $\gamma$  y  $V$  su campo inducido, entonces:*

$$\frac{1}{2}E''_s(0) = \int_0^a (g(V', V') - g(V, R(\gamma', V)\gamma'))dt - g\left(\frac{D}{ds}\frac{\partial}{\partial s}\varphi, \gamma'\right)(0, 0) + g\left(\frac{D}{ds}\frac{\partial}{\partial s}\varphi, \gamma'\right)(a, 0) \quad (\text{A.10})$$

Sean  $V$  y  $W$  dos campos vectoriales diferenciables a pedazos a lo largo de  $\gamma$  y defínase  $I(V, W) = \int_0^a g(V', W') - g(V, R(\gamma', W)\gamma')dt$ . Se puede escribir la fórmula de segunda variación de manera más económica:

$$\frac{1}{2}E''_s(0) = I(V, V) - g\left(\frac{D}{ds}\frac{\partial}{\partial s}\varphi, \gamma'\right)(0, 0) + g\left(\frac{D}{ds}\frac{\partial}{\partial s}\varphi, \gamma'\right)(a, 0). \quad (\text{A.11})$$

Si  $\gamma$  es una geodésica y  $\varphi$  es una variación para la cual  $E''(0) < 0$  entonces existe  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  cercano a 0 tal que  $E(\gamma_t) < E(\gamma)$ . Consecuentemente  $L(\gamma_t)^2 \leq (b-a)E(\gamma_t) < (b-a)E(\gamma) = L(\gamma)^2$  y por lo tanto  $L(\gamma_t) < L(\gamma)$ .

El operador  $I$  resulta ser la noción adecuada de “hessiano” para el funcional de energía  $E$  sobre el espacio  $\Omega_{p,q}(M)$ , donde los puntos son curvas y los “vectores tangentes” son variaciones propias. Con esto se puede desarrollar una teoría de Morse en el espacio  $\Omega_{p,q}(M)$ . Las complicaciones que emergen de tratar con una “variedad de dimensión infinita” pueden ser circunnavegadas usando campos de Jacobi. Véase [Mil63].

**Teorema A.2.5** (Teorema del índice de Morse). *Sea  $\gamma : [0, a] \rightarrow M$  una geodésica con extremos  $p = \gamma(0)$  y  $q = \gamma(a)$ . Sea  $T_\gamma\Omega(M)$  el espacio vectorial (sobre  $\mathcal{F}(\gamma)$ ) de variaciones propias de  $\gamma$  e  $I$  el siguiente operador bilineal y simétrico:*

$$I(V, W) = \int_0^a g(V', W') - g(V, R(\gamma', W)\gamma')dt. \quad (\text{A.12})$$

Entonces el índice de  $I$ , es decir, la dimensión de un subespacio maximal en el cual  $I$  es negativo-definida, es finito y equivale al número de puntos conjugados a  $p$  a lo largo de  $\gamma$  considerando multiplicidades.

La demostración puede consultarse en [DC92].

### A.3. Campos de Jacobi

Una variación  $\varphi : [a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  es una variación suave por geodésicas si para todo  $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ , la curva  $\alpha_s : [a, b] \rightarrow M$  definida por  $\alpha_s(t) = \varphi(t, s)$  es una geodésica.

Sea  $\gamma$  una geodésica y  $\varphi$  una variación por geodésicas de  $\gamma$ . Sea  $J(t) = \frac{\partial f}{\partial s}(t, 0)$  el campo vectorial a lo largo de  $\gamma$  inducido por  $\varphi$ . Tal campo vectorial es llamado un campo de Jacobi.

Esta definición, aunque geoméricamente transparente, no aclara la estructura del espacio de campos de Jacobi. Para tales fines se demuestra que los campos de Jacobi son las soluciones de una ecuación diferencial. La derivación de la ecuación diferencial depende de los siguientes lemas.

**Definición A.3.1.** Sea  $f : [a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  una función suave. Un campo vectorial de la forma  $X|_{\text{img}(f)}$  para algún  $X \in \mathcal{X}(M)$  es llamado un campo vectorial suave a lo largo de  $f$ . A los campos vectoriales suaves a lo largo de  $f$  dados por  $df(\frac{\partial}{\partial s})$  y  $df(\frac{\partial}{\partial t})$  se les denota por  $\frac{\partial f}{\partial s}$  y  $\frac{\partial f}{\partial t}$  respectivamente.

**Lema A.3.1** (Simetría). Sea  $M$  una variedad riemanniana y  $f : [a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  una función suave. Si  $\frac{D}{Dt}$  denota la derivada covariante a lo largo de las curvas  $\gamma_s(t) = f(t, s)$ , y  $\frac{D}{Ds}$  denota la derivada covariante a lo largo de las curvas  $\sigma_t(s) = f(t, s)$ , entonces:

$$\frac{D}{Dt} \frac{\partial f}{\partial s} = \frac{D}{Ds} \frac{\partial f}{\partial t}. \quad (\text{A.13})$$

**Lema A.3.2.** Sea  $f : [a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  una función suave, y  $X$  un campo vectorial suave a lo largo de  $f$ . Usando la notación del lema anterior, se satisface lo siguiente:

$$\frac{D}{Dt} \frac{DX}{Ds} - \frac{D}{Ds} \frac{DX}{Dt} = R\left(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t}\right) X. \quad (\text{A.14})$$

Sea  $J$  un campo de Jacobi; es decir,  $J(t) = \frac{\partial f}{\partial s}(t, 0)$  para alguna variación por geodésicas de  $\gamma$ . Entonces:

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \frac{DJ}{Dt} &= \frac{D}{Dt} \frac{D}{Dt} \frac{\partial f}{\partial s} \\ &= \frac{D}{Dt} \frac{D}{Ds} \frac{\partial f}{\partial t} \\ &= R\left(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t}\right) \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{D}{Ds} \frac{D}{Dt} \frac{\partial f}{\partial t} \\ &= R(J, \gamma') \gamma'. \end{aligned}$$

Luego todo campo de Jacobi satisface la ecuación diferencial

$$J'' + R(\gamma', J) \gamma' = 0, \quad (\text{A.15})$$

donde se usará la notación  $\frac{DX}{Dt} = X'$ .

**Proposición A.3.3.** *Todo campo vectorial  $J$  definido a lo largo de una geodésica  $\gamma$  y que sea solución de la ecuación de Jacobi (A.15) es un campo de Jacobi; esto es, existe una variación por geodésicas de  $\gamma$ ,  $f$ , tal que  $J(t) = \frac{\partial f}{\partial s}(t, 0)$ . La ecuación de Jacobi es un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden y por lo tanto el espacio de soluciones tiene dimensión  $2n$ , donde  $n = \dim(M)$ . Por esto mismo, un campo de Jacobi está unívocamente determinado por  $J(a)$  y  $J'(a)$  para cualquier  $a$  en su dominio.*

Los campos de Jacobi tienen una estrecha relación con el mapeo exponencial:

**Proposición A.3.4.** *Sea  $v \in T_p M$  y  $w \in T_v(T_p M) \sim T_p M$  un vector tangente en  $v$ . Existe un campo de Jacobi  $J$  a lo largo de la geodésica radial  $\gamma_v : [0, 1] \rightarrow M$ ,  $J$ , tal que  $d(\exp_p)_v(w) = J(1)$  y  $J(0) = 0$ . Luego  $v$  es un punto crítico de  $\exp_p$  si y solo si existe un campo de Jacobi  $J$  sobre  $\gamma_v$  tal que  $J(0) = J(1) = 0$ .*

## A.4. Subvariedades

Sea  $M$  una variedad riemanniana con métrica  $g$ . La geometría de las subvariedades es fuente importante de información de la variedad  $M$ .

Sea  $N$  una subvariedad encajada de  $M$ . Si se restringe la métrica al espacio tangente de  $N$  se obtiene una métrica riemanniana en  $N$ , la cual viene acompañada de la conexión de Levi-Civita  $\nabla^N$  en  $N$ . En cada punto  $p$  de  $N$ , el espacio tangente  $T_p M$  se descompone en  $T_p M = T_p N \oplus T_p N^\perp$  donde  $T_p N^\perp$  indica el subespacio ortogonal a  $T_p N$ . Si  $X$  es un campo vectorial a lo largo de  $N$  se puede descomponer a  $X$  como  $X = X^\top + X^\perp$  donde  $X_p^\top \in T_p N$  y  $X_p^\perp \in T_p N^\perp$ . Esta descomposición es tal que  $X^\top$  y  $X^\perp$  son campos suaves.

Si  $X, Y$  son campos en  $N$  y  $\nabla^\perp$  denota el operador  $\nabla_X^\perp Y = (\nabla_{X^*} Y^*)^\perp$ , donde  $X^*$  y  $Y^*$  denotan cualesquiera extensiones de  $X$  y  $Y$  a  $N$ , entonces resulta que  $\nabla^\perp$  es un  $(2,1)$ -tensor simétrico y  $\nabla^N = \nabla - \nabla^\perp = \nabla^\top$ .

El tensor  $\nabla^\perp$  contiene información sobre la diferencia de las geometrías de  $M$  y  $N$ .

**Definición A.4.1.** *Al  $(2,1)$  tensor simétrico  $\mathbb{I}(X, Y) = \nabla_X^\perp Y$  se le llama la segunda forma fundamental.*

Si  $\nu$  es un campo normal unitario a lo largo de  $N$  (basta que esté definido en una vecindad de un punto  $p \in N$ ), entonces se puede definir la segunda forma fundamental en la dirección  $\nu$  como  $\mathbb{I}_\nu(X, Y) = g(\mathbb{I}(X, Y), \nu)$ . Dado que  $g$  establece un isomorfismo entre  $TN$  y  $T^*N$  existe un endomorfismo  $S_\nu : TN \rightarrow TN$  tal que

$$\mathbb{I}_\nu(X, Y) = g(S_\nu(X), Y).$$

El endomorfismo  $S_\nu$  es llamado operador de forma en la dirección de  $\nu$ . Puesto que

$$\begin{aligned} g(S_\nu(X), Y) &= g(\mathbb{I}(X, Y), \nu) = g(\nabla_X^\perp Y, \nu) = g(\nabla_X Y, \nu) \\ &= Xg(Y, \nu) - g(Y, \nabla_X \nu) = -g(Y, \nabla_X^\top \nu), \end{aligned}$$

se tiene:

**Teorema A.4.1** (Weingarten). *El operador de forma está dado por*

$$S_\nu(X) = -\nabla_X^\top \nu. \tag{A.16}$$

$\Pi_\nu$  es un 2-tensor simétrico y por lo tanto  $S_\nu$  es autoadjunto con respecto a  $g$ . Luego  $S_\nu$  es diagonalizable. A los eigenvalores  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  se les llama curvaturas principales en la dirección de  $\nu$  y a los eigenvectores correspondientes direcciones principales.

Se puede calcular el tensor de curvatura en  $N$  en términos de la curvatura en  $M$  y  $\Pi$ .

**Teorema A.4.2** (Gauss). *Si  $N$  es una subvariedad de una variedad riemanniana  $M$  y  $R^N, R^M$  denotan las curvaturas en  $N$  y  $M$ , entonces*

$$R^M(X, Y, Z, W) = R^N(X, Y, Z, W) - g(\Pi(X, Z), \Pi(Y, W)) + g(\Pi(X, Y), \Pi(Z, W)). \quad (\text{A.17})$$

En particular si  $X, Y$  forman una base ortonormal de un plano  $\sigma \subset TN$  entonces

$$K^M(X, Y) = K^N(X, Y) - g(\Pi(X, X), \Pi(Y, Y)) + |\Pi(X, Y)|^2. \quad (\text{A.18})$$

En el caso en que  $N$  sea una hipersuperficie (subvariedad de codimensión 1) entonces  $\Pi(X, Y) = \Pi_\nu(X, Y)\nu = g(S_\nu(X), Y)$  donde  $\nu$  es un campo normal unitario y por lo tanto

$$\begin{aligned} R^M(X, Y, Z, W) &= R^N(X, Y, Z, W) - g(S_\nu(X), Z)g(S_\nu(Y), W) + g(S_\nu(X), W)g(S_\nu(Y), Z) \\ K^M(X, Y) &= K^N(X, Y) - g(S_\nu(X), X)g(S_\nu(Y), Y) + g(S_\nu(X), Y)g(S_\nu(Y), X) \end{aligned}$$

El operador de forma se puede interpretar de la siguiente manera para una subvariedad inmersa en  $\mathbb{R}^n$ . Para cada punto de la subvariedad  $p \in N$  existe en una vecindad un campo normal unitario  $\nu$  a  $N$ . Esto define una correspondencia  $\hat{\nu} : U \subset N \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ , dada por  $q \mapsto \nu_q$ , llamada el mapeo de Gauss. La fórmula  $S_\nu(X) = -\nabla_X^\perp \nu$  indica que el operador de forma es  $-d\hat{\nu}$ .

En el caso de superficies en  $\mathbb{R}^3$ , el caso de Gauss, si  $\{v_1, v_2\}$  es una base de  $T_p N$  entonces

$$K_N(p) = K_N(v_1, v_2) = g(S(v_1), v_1)g(S(v_2), v_2) - g(S(v_1), v_2)^2 = \det(S) = \lambda_1 \lambda_2 = -\det(\hat{\nu}),$$

donde  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  son las curvaturas principales de en  $p$ . El mapeo de Gauss controla la geometría de las superficies en  $\mathbb{R}^3$ .

Una subvariedad es totalmente geodésica si para todo  $p \in N$  y toda geodésica  $\gamma : [0, a] \rightarrow M$  con  $\gamma(0) = p$  y  $\gamma'(0) \in T_p N$  se tiene que  $\gamma \subset N$ . Sea  $N$  una subvariedad totalmente geodésica y  $X \in T_p N$  un vector tangente. Consideremos la geodésica radial  $\gamma$  de  $M$  con velocidad inicial  $X$ . Como  $\gamma$  está contenida en  $N$  resulta que es una geodésica de la métrica en  $N$  y luego  $\nabla_X^N X = 0$ . Consecuentemente  $\Pi(X, X) = 0$ . Dado que toda forma bilineal que es cero en la diagonal es idénticamente cero resulta que  $\Pi = 0$ . Análogamente si  $\Pi = 0$  entonces en particular  $\Pi(X, X) = 0$  y por lo tanto las geodésicas de  $N$  también son geodésicas de  $M$ .

**Proposición A.4.3.** *Una subvariedad es totalmente geodésica si y solo si la segunda forma fundamental se anula.*

**Corolario A.4.4.** *Para una subvariedad totalmente geodésica  $N$ ,*

$$K_N(\sigma) = K_M(\sigma).$$



## Apéndice B

# Grupos de Lie

En este apéndice se tratan brevemente los elementos de la teoría de grupos de Lie.

### B.1. Definición

**Definición B.1.1.** *Un grupo de Lie es un grupo  $G$  con estructura de variedad diferenciable de tal forma que la multiplicación  $\mu : G \times G \rightarrow G$  y la inversión  $i : G \rightarrow G$  son diferenciables.*

La multiplicación en  $G$  induce un par de familias de difeomorfismos  $\{L_g\}$  y  $\{R_g\}$  dados por  $L_g(h) = gh$  y  $R_g(h) = hg$ , que suelen ser llamadas la multiplicación izquierda y derecha. Dado que  $L_{gh} = L_g \circ L_h$ ,  $R_{gh} = R_h \circ R_g$  y  $R_h \circ L_g = L_g \circ R_h$  se tienen identidades análogas para las derivadas de estas:  $dL_{gh} = dL_g \circ dL_h$ ,  $dR_{gh} = dR_h \circ dR_g$  y  $dL_g \circ dR_h = dR_h \circ dL_g$ . Obsérvese también que  $L_g^{-1} = L_{g^{-1}}$  y  $R_g^{-1} = R_{g^{-1}}$  por lo que  $dL_{g^{-1}} = (dL_g)^{-1}$  y  $dR_{g^{-1}} = (dR_g)^{-1}$ .

**Proposición B.1.1.** *En un grupo de Lie,*

1.  $(d\mu)_{(g,h)}(v, w) = dR_h(v) + dL_g(w)$ ,
2.  $(di)_g(v) = -dL_{g^{-1}} \circ dR_{g^{-1}}$ .

La manera de comparar grupos de Lie es a través de los homomorfismos de grupos de Lie.

**Definición B.1.2.** *Un homomorfismo de grupos de Lie es una función diferenciable  $f : G \rightarrow H$  entre grupos de Lie que a su vez es homomorfismo de grupos.*

Todo homomorfismo de grupos  $f : G \rightarrow H$  entre grupos de Lie resulta ser diferenciable, por lo que se puede omitir la hipótesis de diferenciable. La colección de grupos de Lie junto con los morfismos entre ellos forman una categoría **Lie**.

**Definición B.1.3.** *Dos grupos de Lie  $G$  y  $H$  son isomorfos si existe un homomorfismo de grupos de Lie  $f : G \rightarrow H$  biyectivo. En este caso  $f$  es llamado un isomorfismo.*

La condición de que  $f : G \rightarrow H$  sea un isomorfismo es equivalente a que exista  $k : H \rightarrow G$  homomorfismo de grupos de Lie tal que  $f \circ k = id_H$  y  $k \circ f = id_G$ .

La estructura del grupo de Lie se manifiesta fuertemente al analizar la acción de  $G$  en sí mismo. Si  $g \in G$ , el morfismo  $\tau_g : h \mapsto ghg^{-1}$  es llamado la conjugación por  $g$  y  $d\tau_e : T_e G \rightarrow T_e G$  se denota  $Ad(g)$ . Como  $\tau_{gh} = \tau_g \circ \tau_h$ , se cumple que  $Ad(gh) = Ad(h) \circ Ad(g)$ .

Uno de los motivos principales para estudiar los grupos de Lie es su ocurrencia como grupos de simetrías de objetos lineales. El estudio de la manera en que un grupo de Lie puede actuar en un espacio vectorial se llama la teoría de representaciones y es una pieza fundamental de la matemática moderna.

**Definición B.1.4.** Una representación de un grupo de Lie  $G$  es un homomorfismo de grupos de Lie  $\varphi : G \rightarrow GL(V)$  donde  $GL(V)$  denota el grupo de Lie de automorfismos (isomorfismos lineales) de un espacio vectorial  $V$  de dimensión finita.

En particular,  $G$  actúa en sí mismo por conjugación, lo cual da lugar a una representación.

**Definición B.1.5.** La función  $Ad : G \rightarrow GL(G_e)$  que manda  $g$  en  $Ad(g)$  es una representación de  $G$  llamada la representación adjunta.

Otro ingrediente principal en el estudio de los grupos de Lie son los subgrupos que puede poseer. Las representaciones y acciones de  $G$  pueden restringirse a los subgrupos, y el estudio de estos puede dar información de  $G$ .

**Definición B.1.6.** Un subgrupo de Lie es una subvariedad  $H$  con estructura de grupo de Lie tal que la inclusión  $H \hookrightarrow G$  es un homomorfismo de grupos de Lie.

**Ejemplo** 1.  $\mathbb{R}^n$  con la suma es un grupo de Lie abeliano.

2.  $\mathbb{S}^1$  con la multiplicación compleja.

3.  $(\mathbb{S}^1)^n = \mathbb{T}^n$ .

4.  $GL(n, \mathbb{R})$ , el grupo de matrices  $n \times n$  invertibles con entradas reales. Es un grupo de Lie ya que  $GL(n, \mathbb{R})$  es un conjunto abierto en  $M(n, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$  y la multiplicación e inversión son funciones racionales. Este grupo de Lie tiene dimensión  $n^2$ .

5.  $O(n)$ , el grupo ortogonal de matrices  $n \times n$  con entradas reales que satisfacen  $AA^t = I$ .  $O(n, \mathbb{R})$  es un subgrupo de  $GL(n, \mathbb{R})$ , su dimensión es  $n(n-1)/2$ .

Sea  $x \in G_e$ . Si se define  $\overline{X}_g = dL_g(x)$  se obtiene un campo vectorial (suave) en  $G$  con la propiedad de que  $dL_g(\overline{X}_h) = \overline{X}_{gh}$ . Un campo que satisface esto se llama un campo izquierdo-invariante y  $\overline{X}$  es el campo izquierdo-invariante generado por  $x$ . Si  $\{x_i\}$  es una base de  $G_e$  entonces  $\{\overline{X}_i\}_g$  es base de  $T_g G$  para cada  $g$  por lo que se tiene:

**Proposición B.1.2.** Todo grupo de Lie es paralelizable. Es decir,

$$TG \cong G \times T_e G \cong G \times \mathbb{R}^n.$$

Si  $X$  es un campo izquierdo-invariante y  $X_e = a^i x_i$ , la invarianza izquierda implica que  $X_g = a^i \overline{X}_i|_g$  y luego:

**Proposición B.1.3.** El conjunto de campos izquierdo-invariantes  $Vect_L(G)$  es un espacio vectorial isomorfo a  $T_e G$  a través de  $X \mapsto X_e$ .

El corchete de Lie brinda una manera de operar campos izquierdo-invariantes ya que si  $X, Y \in \text{Vect}_L(G)$  entonces  $dL_g[X, Y] = [dL_g X, dL_g Y] = [X, Y]$ .

**Definición B.1.7.** *El álgebra de Lie del grupo de Lie  $G$ , denotado por  $\mathfrak{g}$ , es el espacio vectorial  $T_e G \cong \text{Vect}_L(G)$  con la operación  $[X, Y] = [\overline{X}, \overline{Y}]_e$ .*

El álgebra de Lie no solo es la mejor aproximación lineal del espacio  $G$  sino de la estructura algebraica de  $G$ ; la mayoría de la información concerniente al grupo  $G$  puede ser extraída de su álgebra de Lie. La estructura de álgebra de Lie es considerablemente más simple que la estructura diferenciable de  $G$  por lo que el estudio de  $G$  frecuentemente inicia con el estudio de su álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ .

La construcción del álgebra de Lie de un grupo de Lie puede modificarse y en vez de considerar campos izquierdo-invariantes se toman campos derecho-invariantes. Sin embargo este camino no lleva a nuevas estructuras puesto que las álgebras de Lie que surgen son isomorfas a través del isomorfismo  $X \mapsto -X$  (véase la demostración de 4.4.7).

## B.2. Álgebras de Lie

La estructura de álgebra de Lie puede ser abstraída y estudiada en un ambiente más general. Aunque con tal abstracción no se consiguen nuevos ejemplos, se obtiene claridad teórica.

**Definición B.2.1.** *Un espacio vectorial de dimensión finita junto con una multiplicación  $[\cdot, \cdot] : V \times V \rightarrow V$  que satisface*

1. *Antisimetría:*  $[x, y] = -[y, x]$ .
2. *Bilinealidad:*  $[ax + y, z] = a[x, z] + [y, z]$ .
3. *Identidad de Jacobi:*  $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$ .

*es un álgebra de Lie.*

De ahora en adelante se usará  $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{k}, \dots$  para denotar álgebras de Lie.

El ejemplo canónico de las álgebras de Lie es el espacio  $\mathfrak{gl}(V)$  que consta de todos los endomorfismos de un espacio vectorial finito dimensional  $V$  con multiplicación  $[A, B] = AB - BA$ . Un espacio vectorial  $\mathfrak{g}$  con la multiplicación definida por  $[x, y] = 0$  es un álgebra de Lie, llamada el álgebra de Lie trivial en  $V$ , en este caso decimos que  $\mathfrak{g}$  es abeliana. El álgebra de Lie de cualquier grupo de Lie es un álgebra de Lie. De hecho para toda álgebra de Lie existe un grupo de Lie que tiene a esta como su álgebra de Lie.

Enlistamos las álgebras de los grupos de la sección anterior.

1.  $\mathfrak{R}^n = \mathbb{R}^n$ , que es abeliana.
2.  $\mathfrak{T}^n = \mathbb{R}^n$ , que de nuevo es abeliana.
3.  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$  consta de los endomorfismos de  $\mathbb{R}^n$ , o bien de las matrices  $n \times n$  con entradas reales.
4.  $\mathfrak{o}(n)$  consta de las matrices  $n \times n$  antisimétricas.

En los dos últimos ejemplos la multiplicación está dada por  $[A, B] = AB - BA$ .

La teoría de álgebras de Lie es una subteoría de la teoría de  $k$ -álgebras ( $k$  campo) y luego se tienen todas las definiciones y los teoremas usuales.

**Definición B.2.2.** Una transformación lineal  $\varphi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$  entre álgebras de Lie es un homomorfismo de álgebras de Lie si  $\varphi([x, y]) = [\varphi(x), \varphi(y)]$ .

Se usará morfismo para hablar de homomorfismos.

**Definición B.2.3.** Un isomorfismo lineal entre álgebras de Lie  $T : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$  es un isomorfismo de álgebras de Lie si  $T$  es un morfismo de álgebras de Lie. En este caso decimos que  $\mathfrak{g}$  y  $\mathfrak{h}$  son isomorfas.

Si  $A, B \subseteq \mathfrak{g}$  denotemos por  $[A, B]$  al subespacio generado por elementos de la forma  $[a, b]$  con  $a \in A$  y  $b \in B$ .

**Definición B.2.4.** Un subespacio  $\mathfrak{h}$  de un álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  es una subálgebra de Lie si  $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h}$ .

**Definición B.2.5.** Un subespacio  $\mathfrak{J}$  de un álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  es un ideal si  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{J}] \subseteq \mathfrak{J}$ .

Por ejemplo, el núcleo de un morfismo es un ideal. Resulta que estos son todos los ideales:

**Teorema B.2.1.** Si  $\mathfrak{g}$  es un álgebra de Lie y  $\mathfrak{J}$  es un ideal entonces  $\mathfrak{g}/\mathfrak{J}$  tiene estructura de álgebra de Lie de tal forma que  $\pi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{J}$  es un morfismo.

En relación al estudio de grupos de Lie, un tipo de morfismos destaca.

**Proposición B.2.2.** Sean  $G$  y  $H$  grupos de Lie y  $f : G \rightarrow H$  un homomorfismo de grupos de Lie. Dado que  $f(e) = e$ ,  $f$  induce una transformación lineal entre las álgebras  $df_e : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ .  $df_e$  es un homomorfismo de álgebras.

**Demostración** Como  $f$  es un homomorfismo de grupos de Lie, para todo  $g \in G$  se tiene que  $L_{f(g)} \circ f = f \circ L_g$ , y por lo tanto  $dL_{f(g)} \circ df = df \circ dL_g$ . Si  $X \in T_e G$ ,  $\bar{X}$  es el campo izquierdo-invariante en  $G$  con  $\bar{X}_e = X$  y  $\hat{X}$  es el campo izquierdo-invariante en  $H$  con  $\hat{X}_e = df_e(X)$  entonces  $\bar{X}$  y  $\hat{X}$  están  $f$ -relacionados, esto es  $df(\bar{X})_g = \hat{X}_{f(g)}$ , ya que

$$\hat{X}_{f(g)} = dL_{f(g)}(\hat{X}_e) = dL_{f(g)}(df_e(X)) = df_g(dL_g(X)) = df(\bar{X}).$$

Si  $X, Y \in \mathfrak{g}$  entonces  $\bar{X}$  y  $\bar{Y}$  están  $f$ -relacionados con  $\hat{X}$  y  $\hat{Y}$ . Luego  $[\bar{X}, \bar{Y}]$  está  $f$ -relacionado con  $[\hat{X}, \hat{Y}]$  y

$$df([\bar{X}, \bar{Y}]_e) = df([\hat{X}, \hat{Y}]_e) = [df(\bar{X}), df(\bar{Y})]_e = [df(X), df(Y)]. \quad \square$$

Por la proposición anterior si  $\varphi : G \rightarrow Gl(V)$  es una representación de  $G$  entonces  $d\varphi_e : \mathfrak{g} \rightarrow gl(V)$  es un morfismo de álgebras. La siguiente definición es natural.

**Definición B.2.6.** Una representación de un álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  es un homomorfismo de álgebras de Lie  $\varphi : \mathfrak{g} \rightarrow gl(V)$  donde  $V$  es un espacio vectorial finito dimensional.

Luego toda representación de un grupo de Lie  $G$  induce una representación de su álgebra de Lie. En particular la representación adjunta induce una representación llamada  $ad : \mathfrak{g} \rightarrow gl(\mathfrak{g})$ . Resulta que

**Proposición B.2.3.** Si  $G$  es un grupo de Lie entonces la representación adjunta del álgebra de Lie  $ad : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$  está dada por

$$ad(x)(y) = [x, y].$$

Toda representación de un grupo de Lie induce una forma bilineal de la siguiente manera.

**Definición B.2.7.** Sea  $\rho : G \rightarrow GL(V)$  una representación de un grupo de Lie. La forma de Killing asociada a  $\rho$ , es la forma bilineal  $B_\rho : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$B_\rho(x, y) = \text{tr}(d\rho(x) \circ d\rho(y))$$

donde  $d\rho(x) : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$  es la representación de álgebras de Lie asociada.

Notese que para todo  $g \in G$  y  $x \in \mathfrak{g}$ , se tiene que

$$d\rho(Ad(g)(x)) = \frac{d}{dt}\rho(g^{-1}\exp(tx)g) = \frac{d}{dt}\rho(g^{-1})\rho(\exp(tx))\rho(g) = Ad(\rho(g))(d\rho(x))$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} B_\rho(Ad(g)(x), Ad(g)(y)) &= \text{tr}(d\rho(Ad(g)(x)) \circ d\rho(Ad(g)(y))) \\ &= \text{tr}(Ad(\rho(g))(ad(x) \circ ad(y))) \\ &= \text{tr}(\rho(g^{-1}) \circ (ad(x) \circ ad(y)) \circ \rho(g)) \\ &= \text{tr}(ad(x) \circ ad(y)) = B_\rho(x, y) \end{aligned}$$

es decir, la forma de Killing asociada a  $\rho$  es  $Ad(G)$ -invariante.

La forma de Killing asociada a la representación adjunta es llamada la forma de Killing de  $\mathfrak{g}$  y está dada por

$$B(x, y) = \text{tr}(ad(x) \circ ad(y)) = \sum_i \langle [x, [y, x_i]], x_i \rangle$$

donde  $\langle, \rangle$  es cualquier producto interior en  $\mathfrak{g}$  y  $\{x_i\}$  es una base ortonormal. La forma de Killing es un ingrediente importante en la comprensión y clasificación de las álgebras de Lie, y más importante (para nuestros propósitos) para la clasificación de los espacios homogéneos (véase 5.1.1).

En la mayoría de los casos  $ad$  no es un encaje de  $\mathfrak{g}$  en  $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ . A las representaciones inyectivas se les llama representaciones fieles. Luego, en general  $ad$  no es una representación fiel. Sin embargo el teorema de Ado [FH91, Sección E.2, pág. 500] asegura que toda álgebra de Lie tiene una representación fiel y por lo tanto es subálgebra de algún  $\mathfrak{gl}(V)$ .

**Definición B.2.8.** Se dice que un álgebra de Lie es simple si no tiene ideales no triviales.

**Definición B.2.9.** Un álgebra de Lie es semisimple si es suma directa de álgebras simples.

Cartan logró la clasificación completa de las álgebras de Lie complejas y simples, consúltese [Hel79, FH91]. Esta clasificación desemboca en la clasificación de espacios simétricos 5.1.2.

### B.3. Subgrupos

Sea  $G$  un grupo de Lie. Se empieza estudiando los subgrupos más sencillos, aquellos de una dimensión.

**Definición B.3.1.**  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow G$  es un subgrupo a un parámetro si  $\varphi(t+s) = \varphi(t) \cdot \varphi(s)$ .

Si  $\varphi$  es un subgrupo a un parámetro,  $\varphi$  define una familia de difeomorfismos a través de  $\varphi_t(g) = g \cdot \varphi(t)$ . Obsérvese que  $\varphi_{t+s}(g) = \varphi_t \circ \varphi_s(g)$  y luego  $\varphi$  es una familia de difeomorfismos a un parámetro (cfr. 4.4.1) e induce un campo vectorial  $X$ . Tal campo vectorial es izquierdo-invariante ya que  $dL_h(X)_g = \frac{d}{dt} L_h(g \cdot \varphi(t)) = \frac{d}{dt} hg \cdot \varphi(t) = X_{hg}$ . Por otro lado si  $X$  es un campo izquierdo-invariante entonces el flujo inducido  $\varphi_t$  es completo (cfr. [Hel79]) y además

$$\frac{d}{ds} \varphi_t(e) \cdot \varphi_s(g) = \frac{d}{ds} L_{\varphi_t(e)}(\varphi_s(e)) = dL_{\varphi_t(e)}(X_{\varphi_s(g)}) = X_{\varphi_t(e) \cdot \varphi_s(g)},$$

por lo que  $\varphi_t(e) \cdot \varphi_s(g)$  y  $\varphi_{s+t}(g)$  son curvas integrales del mismo campo vectorial y por lo tanto iguales. En consecuencia  $\varphi_t(e)$  es un subgrupo a un parámetro.

**Proposición B.3.1.** Todo campo vectorial  $X$  izquierdo-invariante define un único subgrupo a un parámetro  $\varphi$  con  $\varphi'(0) = X$  y viceversa a través de  $\varphi \mapsto (\frac{d}{dt}g \cdot \varphi_t(e))_g$ .

**Definición B.3.2.** Para cada  $x \in T_pG$ ,  $\exp(x)$  denota  $\varphi_1(e)$  donde  $\varphi$  es el subgrupo a un parámetro inducido por  $\bar{X}$ . A  $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$  se le llama el mapeo exponencial.

Si  $x \in \mathfrak{g}$ ,  $\exp(tx)$  es el subgrupo a un parámetro inducido por  $\bar{X}$ . Por la definición de  $\exp$  se tiene que  $d\exp_e = id$  y por lo tanto existe  $U$  vecindad de  $e$  y  $V$  vecindad de  $0$  en  $\mathfrak{g}$  tales que  $\exp : V \rightarrow U$  es un difeomorfismo.

En contraste con las variedades riemannianas,  $\exp$  está definido en todo  $G_e$  pero puede no ser suprayectivo.

El mapeo exponencial es la conexión entre la estructura de álgebra de Lie y la de grupo de Lie.

**Proposición B.3.2.** Sea  $f : G \rightarrow H$  un homomorfismo de grupos de Lie. Si  $\exp_G$  y  $\exp_H$  denotan los mapeos exponenciales en  $G$  y  $H$  respectivamente, entonces

$$f \circ \exp_G = \exp_H \circ df_e. \quad (\text{B.1})$$

**Demostración** Sea  $X \in \mathfrak{g}$  y  $\exp_G(tX)$  el subgrupo a un parámetro generado por  $X$ . Se tiene que  $f \circ \exp_G(tX) = \psi(tX)$  es un subgrupo a un parámetro de  $H$  con  $\psi'(0) = df(X)$ . Luego  $f \circ \exp_G(tX) = \exp_H(t df(X))$ , en particular

$$f \circ \exp_G(X) = \exp_H(df(X)). \quad \square$$

Si  $G$  es un grupo de Lie conexo, entonces  $G$  es generado por cualquier vecindad  $U$  de la identidad, ya que es claro que  $U(h) = \{g \in G | g \in hU^n \text{ para algún } n \in \mathbb{N}\}$  es abierto y que si  $h_1 \notin U(h_2)$  entonces  $U(h_1) \cap U(h_2) = \emptyset$ .

**Proposición B.3.3.** Si  $f, h : G \rightarrow H$  son morfismos de grupos de Lie,  $G$  conexo, tales que  $df_e = dg_e$  entonces  $f = g$ .

**Demostración** Primero se ve que  $f$  y  $h$  coinciden en una vecindad de  $e$ . Sea  $U$  una vecindad de  $e$  y  $V$  una vecindad de  $0$  en  $G_e$  para las cuales  $\exp : V \rightarrow U$  es un difeomorfismo. Si  $g \in U$ , entonces

$$f(g) = f(\exp_G(v)) = \exp_H(df_e(v)) = \exp_h(dh_e(v)) = h(\exp_G(v)) = h(g).$$

Como  $G$  está generado por  $U$  entonces cualquier elemento de  $G$  es de la forma  $g_1 \cdots g_n$  con  $g_i \in U$ . Luego

$$f(g_1 \cdots g_n) = f(g_1) \cdots f(g_n) = h(g_1) \cdots h(g_n) = h(g_1 \cdots g_n). \quad \square$$

Los morfismos de grupos de Lie están completamente determinados por su acción sobre sus álgebras de Lie. Hay un teorema recíproco:

**Proposición B.3.4.** Sean  $G$  y  $H$  grupos de Lie con  $G$  conexo y simplemente conexo. Si  $T : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$  es un morfismo de álgebras de Lie entonces existe un único morfismo de Lie  $f : G \rightarrow H$  tal que  $df_e = T$ .

Para ver hasta qué punto se puede reducir la clasificación de los grupos de Lie a la clasificación de sus álgebras de Lie vemos que si  $G$  es un grupo de Lie y  $\tilde{G}$  es su cubierta universal,  $\tilde{G}$  admite una única estructura de grupo de Lie de tal forma que  $\pi : \tilde{G} \rightarrow G$  es un homomorfismo de grupos de Lie. Resulta que las transformaciones de cubierta conforman un subgrupo discreto del centro de  $\tilde{G}$ . Como  $\pi$  es un difeomorfismo local,  $\tilde{G}$  y  $G$  tienen álgebras de Lie isomorfas. Además,

**Proposición B.3.5.** Sean  $G$  y  $H$  dos grupos de Lie conexos y simplemente conexos. Si  $\mathfrak{g}$  y  $\mathfrak{h}$  son álgebras de Lie isomorfas entonces  $G$  y  $H$  son isomorfas.

**Demostración** Esto es inmediato de B.3.4. □

Así, si  $G$  y  $H$  son grupos de Lie conexos con álgebras de Lie isomorfas entonces por la proposición anterior tienen la misma cubierta universal. El problema de clasificar grupos de Lie se ha reducido a dos problemas algebraicos: clasificar las álgebras de Lie (para determinar los grupos de Lie conexos y simplemente conexos) y determinar los subgrupos discretos del centro de los grupos de Lie conexos y simplemente conexos.

Regresando a los subgrupos, por la proposición B.2.2 si  $H$  es un subgrupo de Lie de  $G$  entonces  $H_e \subset G_e$  es subálgebra de Lie. De hecho,

**Proposición B.3.6.** Toda  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$  subálgebra de Lie del álgebra de Lie de  $G$  determina un único subgrupo conexo  $H$  de  $G$  cuya álgebra de Lie es  $\mathfrak{h}$ . Parafraseando, hay una correspondencia biyectiva entre subálgebras de Lie de  $\mathfrak{g}$  y subgrupos de Lie conexos.

Por el teorema de Ado toda álgebra de Lie es subálgebra de  $\mathfrak{gl}(V)$ , que a su vez le pertenece a un subgrupo de Lie de  $GL(V)$ . Luego para todo grupo de Lie  $G$  existe un subgrupo de Lie  $G' \subset GL(V)$  tal que  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}'$ , lo cual indica que  $G$  y  $G'$  son localmente isomorfas. Sin embargo no es cierto que todo grupo de Lie puede realizarse como un grupo de matrices.

Ser un subgrupo de  $G$  (sin necesariamente tener estructura diferenciable) no es suficiente para ser subgrupo de Lie; sin embargo,

**Proposición B.3.7.** Si  $H$  es un subgrupo cerrado de  $G$ , esto es un subgrupo que como conjunto en  $G$  es cerrado, entonces  $H$  tiene una única estructura diferenciable de tal forma que  $H \hookrightarrow G$  es un subgrupo de Lie.

## B.4. Integración en grupos de Lie

Sea  $G$  un grupo de Lie  $n$ -dimensional.

**Definición B.4.1.** Una  $s$ -forma  $\omega$  es izquierdo-invariante si  $L_g^*\omega = \omega$  para todo  $g \in G$ . Esto es si  $\omega(dL_g(v_1), \dots, dL_g(v_s)) = \omega(v_1, \dots, v_s)$ .

De forma análoga se define una forma derecho-invariante. Cuando una forma es izquierdo- y derecho-invariante decimos que es bi-invariante. Sea  $\Lambda_L^s(G)$  el conjunto de  $s$ -formas izquierdo-invariantes. Si  $\omega' \in \Lambda^s(\mathfrak{g})$  es una  $s$ -forma en  $\mathfrak{g}$  y se define

$$\omega(v_1, \dots, v_s)_g = \omega'(dL_{g^{-1}}(v_1), \dots, dL_{g^{-1}}(v_s)),$$

entonces  $\omega$  es izquierdo-invariante, ya que

$$\begin{aligned} (L_h^*\omega)_g(v_1, \dots, v_s) &= \omega_{hg}(dL_h(v_1), \dots, dL_h(v_s)) \\ &= \omega'(dL_{g^{-1}h^{-1}}dL_h(v_1), \dots, dL_{g^{-1}h^{-1}}dL_h(v_s)) \\ &= \omega'(dL_{g^{-1}}(v_1), \dots, dL_{g^{-1}}(v_s)) = \omega_g(v_1, \dots, v_s). \end{aligned}$$

Si  $\{\omega_i\}$  es una base de  $\Lambda^s(\mathfrak{g})$ ,  $\omega \in \Lambda_L^s(G)$  y  $\omega_e = a^i\omega_i$  entonces por la invarianza izquierda  $\omega_g = a^i\omega_i$ , por lo que

**Proposición B.4.1.**  $\Lambda_L^s(G)$  es un espacio vectorial isomorfo a  $\Lambda^s(\mathfrak{g})$ .

Si  $\omega$  es una  $n$ -forma izquierdo-invariante y  $g \in G$  entonces

$$\begin{aligned} (R_g^*\omega)_h(v_1, \dots, v_n) &= \omega_{hg}(dR_g(v_1), \dots, dR_g(v_n)) \\ &= \omega_e(dL_{(hg)^{-1}}dR_g(v_1), \dots, dL_{(hg)^{-1}}dR_g(v_n)) \\ &= \omega_e(dL_{g^{-1}}dR_gdL_{h^{-1}}(v_1), \dots, dL_{g^{-1}}dR_gdL_{h^{-1}}(v_n)) \\ &= \det(Ad(g))\omega_e(dL_{h^{-1}}(v_1), \dots, dL_{h^{-1}}(v_n)) \\ &= \det(Ad(g))\omega_h(v_1, \dots, v_n). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$R_g^*\omega = \det(Ad(g))\omega. \quad (\text{B.2})$$

**Definición B.4.2.** Un grupo de Lie es unimodular si  $|\det(Ad(g))| = 1$  para todo  $g \in G$ .

Puesto que  $Ad(gh) = Ad(g)Ad(h)$  y  $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ , la función  $\det(Ad(\_)) : G \rightarrow \mathbb{R}^*$  es un morfismo de grupos de Lie. Si  $G$  es compacto entonces la imagen bajo  $\det(Ad(\_))$  es un subgrupo compacto. Sin embargo, los únicos subgrupos compactos de  $\mathbb{R}^*$  son  $\{1\}$  y  $\{1, -1\}$  por lo que todo grupo de Lie compacto es unimodular. Si además  $G$  es conexo entonces  $\det(Ad(g)) = 1$  por lo que  $G$  admite una  $n$ -forma bi-invariante.

De ahora en adelante  $G$  es un grupo de Lie unimodular.

Si  $\omega$  una  $n$ -forma izquierdo-invariante,  $\omega$  determina una orientación de  $G$  llamada la orientación izquierda asociada a  $\omega_e$ . La multiplicación izquierda preserva la orientación mientras que la multiplicación derecha  $R_g$  preserva la orientación si  $\det(Ad(g)) > 0$ . Si  $f : G \rightarrow W$  es una función suave de soporte compacto entonces podemos calcular la integral  $\int_G f\omega$ . Por lo anterior,

$$\int_G f(h)\omega_h = \int_G L_g^*(f\omega)_h = \int_G f(gh)L_g^*(\omega)_h = \int_G f(gh)\omega_{gh}.$$

Por otro lado, dependiendo de si  $R_g$  preserva orientación o no, se tiene

$$\begin{aligned} \int_G f(h)\omega_h &= \pm \int_G R_g^*(f\omega)_h = \pm \int_G f(hg)R_g^*(\omega)_h = \pm \int_G f(hg)\det(Ad(g))\omega_{hg} \\ &= |\det(Ad(g))| \int_G f(hg)\omega_{hg}. \end{aligned}$$

Esto sugiere que en grupos unimodulares la integral de funciones con soporte compacto es izquierdo- y derecho-invariante.

Sea  $G$  compacto y tómesse la única  $n$ -forma izquierdo-invariante  $\omega_G$  tal que  $\int_G \omega_G = 1$ . Defínase la integral de una función  $f : G \rightarrow W$ , con  $W$  un espacio vectorial, como  $\int_G f\omega_G$  y la denótese por  $\int_G f(g)dg$ .

**Proposición B.4.2.** *La integral de funciones en  $G$  satisface:*

A.  $\int_G f(gh)dh = \int_G f(h)dh = \int_G f(hg)dh;$

B.  $\int_G f(h^{-1})dh = \int_G f(h)dh.$

**Demostración** El punto (A) quedó establecido en las observaciones que anteceden a esta proposición. En cuanto a la parte (B) se tiene que (cfr. B.1.1)

$$\begin{aligned} (i^*\omega)_g(v_1, \dots, v_n) &= \omega_{g^{-1}}(-dL_{g^{-1}}dR_{g^{-1}}(v_1), \dots, -dL_{g^{-1}}dR_{g^{-1}}(v_n)) \\ &= \omega_{g^{-1}}(-dL_{g^{-1}}dL_{g^{-1}}dL_gdR_{g^{-1}}(v_1), \dots, -dL_{g^{-1}}dL_{g^{-1}}dL_gdR_{g^{-1}}(v_n)) \\ &= \omega_g(-Ad(g^{-1})(v_1), \dots, -Ad(g^{-1})(v_n)) \\ &= (-1)^n \det(Ad(g^{-1}))\omega_g(v_1, \dots, v_n). \end{aligned}$$

Usando el mismo argumento que arriba,

$$\int i^*(f\omega) = \int_G |\det(Ad(g^{-1}))| f(g^{-1})\omega_{g^{-1}} = \int_G f(g^{-1})\omega_{g^{-1}}. \quad \square$$

Sea  $\varphi : G \rightarrow GL(V)$  una representación de un grupo  $G$ . Se dice que un producto interior  $k : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  es invariante con respecto a  $\varphi$  si  $k(v, w) = k(\varphi(h)(v), \varphi(h)(w))$  para toda  $h \in G$ .

**Teorema B.4.3.** *Toda representación  $\varphi : G \rightarrow GL(V)$  de un grupo de Lie compacto admite un producto interior invariante con respecto a  $\varphi$ .*

**Demostración** Sea  $k : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  cualquier producto interior. Si se define  $\bar{k} : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  como  $\bar{k}(v, w) = \int_G k(\varphi(g)(v), \varphi(g)(w))dg$  entonces es claro que  $\bar{k}$  es un producto interior y que

$$\begin{aligned} \bar{k}(\varphi(h)(v), \varphi(h)(w)) &= \int_G k(\varphi(g)\varphi(h)(v), \varphi(g)\varphi(h)(w)) \\ &= \int_G k(\varphi(gh)(v), \varphi(gh)(w)) \\ &= \int_G k(\varphi(g)(v), \varphi(g)(w))dg \\ &= \bar{k}(v, w). \quad \square \end{aligned}$$

**Corolario B.4.4.** *Todo grupo compacto tiene un producto interior  $k : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}$  Ad-invariante.*



# Apéndice C

## Espacios de Alexandrov

### C.1. Espacios de Alexandrov

Los trabajos de Alexandrov en la década de 1950 introdujeron la idea de la posibilidad de hacer geometría métrica con una noción no diferenciable de curvatura. Su aportación al área de la geometría de superficies consistió en realizar una descripción geométrica de las superficies convexas, no solo diferenciables, desde una perspectiva intrínseca (aquellas propiedades medibles solo dentro de la superficie). Posteriormente surgió el proyecto propuesto por Gromov en [Gro78] de estudiar sucesiones convergentes de variedades riemannianas con respecto de la métrica de Gromov-Hausdorff (C.3). A partir del artículo clásico [BGP92] (1992) en el cual Gromov, Burago y Perelman desarrollaron los elementos de la teoría de dichos espacios, la teoría de espacios de Alexandrov tuvo una explosión y su trabajo abrió una rama muy amplia de investigación que hoy en día sigue rebozando.

Los espacios de Alexandrov no solo resultan ser la frontera ideal del conjunto de variedades riemannianas (con curvatura acotada inferiormente) en el conjunto de espacios métricos compactos con la topología Gromov-Hausdorff, sino que son mucho más estables que las variedades riemannianas. El cociente isométrico, la suspensión, los conos, las sucesiones convergentes de espacios de Alexandrov son construcciones que permanecen dentro de la categoría de los espacios de Alexandrov.

La estructura de dichos espacios resulta ser (relativamente) mansa; un espacio de Alexandrov siempre tiene dimensión de Hausdorff entera o infinita y en el caso que tenga dimensión entera entonces salvo por un conjunto de medida 0 el espacio es una variedad topológica. La geometría local está contenida en una versión generalizada del espacio tangente.

En esta sección se da una introducción a la geometría de los espacios de Alexandrov. Se considera que el lector está familiarizado con nociones de geometría métrica como aparecen en el libro [BBI].

**Definición C.1.1.** *Un espacio métrico  $X$  es intrínseco si es localmente completo y para todo par de puntos  $x, y \in X$  y  $\varepsilon > 0$  existe una sucesión finita de puntos  $x = q_1, q_2, \dots, q_m = y$  tales que  $d(x, y) < \varepsilon$  y*

$$\sum_i d(q_i, q_{i+1}) < d(x, y) + \varepsilon.$$

Véase también [Gro01] para una definición más amplia.

La filosofía detrás de esta definición es la siguiente. Una curva continua  $\alpha : [a, b] \rightarrow X$  es

rectificable si existe el límite

$$L(\alpha) = \sup \left\{ \sum_i d(\alpha(t_i), \alpha(t_{i+1})) \mid n \in \mathbb{N} \text{ y } a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b \right\};$$

en tal caso se dice que  $L(\alpha)$  es la longitud de la curva (compárese con A.1.1). Si  $\alpha(a) = p$  y  $\alpha(b) = q$ , se escribirá  $\alpha : p \rightarrow q$  para indicarlo. Luego un espacio métrico es intrínseco si  $d(x, y) = \inf \{L(\alpha) \mid \alpha : x \rightarrow y\}$ , es decir la distancia está determinada por la longitud de los caminos. Por esto a los espacios métricos intrínsecos también se les llama espacios de caminos.

**Definición C.1.2.** *Un espacio métrico  $X$  es estrictamente intrínseco si para todo par de puntos  $x, y$  existe una curva rectificable  $\alpha : x \rightarrow y$  tal que*

$$L(\alpha) = d(x, y).$$

Las curvas que realizan la distancia entre dos puntos son llamadas geodésicas minimizantes o segmentos. Si  $X$  es un espacio intrínseco, completo y localmente compacto entonces es estrictamente intrínseco. De ahora en adelante solo se trabajará con espacios estrictamente intrínsecos. La teoría se puede desarrollar sin esta suposición inicial, sin embargo las demostraciones se vuelven menos técnicas y enmendar las demostraciones para que funcionen en el caso general usualmente consiste de aplicar el mismo argumento de aproximación.

**Definición C.1.3.** *Sea  $X$  un espacio métrico y  $x, y \in X$ . Un  $\varepsilon$ -punto medio entre  $x$  y  $y$  es un punto  $z \in X$  tal que  $d(x, z), d(z, y) < \frac{1}{2}d(x, y) + \varepsilon$ .  $z$  es un punto medio entre  $x$  y  $y$  si es un 0-punto medio.*

Una caracterización sencilla de los espacios métricos (estrictamente) intrínsecos es la siguiente:

**Proposición C.1.1.** *Sea  $X$  un espacio métrico completo.  $X$  es (estrictamente) intrínseco si y solo si para todo par de puntos  $x, y \in X$  y todo  $\varepsilon > 0$  existe un  $\varepsilon$ -punto medio entre  $x$  y  $y$  (respectivamente existe un punto medio).*

Un espacio de Alexandrov es un espacio métrico (estrictamente) intrínseco que admite algunas propiedades de los espacios curvos a través de la comparación con los espacios modelo. En este capítulo  $M^k$  denota la superficie riemanniana completa, simplemente conexa con curvatura seccional  $= k$ , i.e.  $M^k = M^{2,k}$ ; véase 1.3.

**Definición C.1.4.** *Sean  $x, y, z \in X$  espacio métrico. Un triángulo de comparación  $\Delta_K xyz$  es un triángulo  $\Delta \bar{x}\bar{y}\bar{z}$  en  $M^k$  con  $d(x, y) = d(\bar{x}, \bar{y})$ ,  $d(x, z) = d(\bar{x}, \bar{z})$  y  $d(y, z) = d(\bar{y}, \bar{z})$ . Si  $k \leq 0$  el triángulo de comparación existe y es único salvo isometría; si  $k > 0$  existe si  $Per(\Delta xyz) = d(x, y) + d(y, z) + d(z, x) \leq 2\pi/\sqrt{k}$  y es único si  $Per(\Delta xyz) < 2\pi/\sqrt{k}$  (cfr. 1.3). El ángulo de comparación  $\angle_k xyz$  es  $\angle \bar{x}\bar{y}\bar{z}$ .*

De la misma manera en que un poliedro es convexo si la suma de los ángulos que forman las caras en cualquier vértice es  $\leq 2\pi$ , un espacio de Alexandrov tiene curvatura  $\geq k$  si satisface una propiedad análoga.

**Definición C.1.5.** *Un espacio de Alexandrov con curvatura  $\geq k$  es un espacio métrico  $X$  (estrictamente) intrínseco tal que para todo  $p \in X$  existe una vecindad  $U$  de  $p$  en la cual toda cuádrupla de puntos  $(q; a, b, c)$  en  $U$  satisface*

$$\angle_k aqb + \angle_k bqc + \angle_k cqa \leq 2\pi.$$

Existen otras definiciones de un espacio de Alexandrov, todas equivalentes. La demostración de su equivalencia puede consultarse en cualquiera de las fuentes previamente mencionadas.

**Definición C.1.6.** *Un triángulo geodésico  $\Delta xyz$  en un espacio métrico intrínseco consiste de tres puntos  $x, y, z \in X$  junto con tres geodésicas minimizantes  $\overline{xy} : x \rightarrow y$ ,  $\overline{yz} : y \rightarrow z$  y  $\overline{zx} : z \rightarrow x$ .*

**Definición C.1.7** (Versión 2). *Un espacio de Alexandrov con curvatura  $\geq k$  es un espacio métrico  $X$  (estrictamente) intrínseco tal que para todo  $p \in X$  existe una vecindad  $U$  de  $p$  tal que para todo triángulo geodésico  $\Delta xyz$  en  $U$  y todo triángulo de comparación  $\Delta_k xyz$ , si  $w \in \overline{xy}$  y  $\bar{w} \in \overline{\bar{x}\bar{y}}$  es tal que  $d(x, w) = d(\bar{x}, \bar{w})$  y  $d(w, y) = d(\bar{w}, \bar{y})$  entonces*

$$d(\bar{z}, \bar{w}) \leq d(z, w).$$

Un punto importante de los espacios de Alexandrov con curvatura  $\geq k$  es que se puede definir una noción de ángulo para geodésicas minimizantes. En realidad el ángulo se puede definir para cualquier par de curvas (con inicio común) en cualquier espacio métrico, pero la mayoría de las veces el ángulo no existe. Sin embargo, en un espacio de Alexandrov el ángulo entre dos geodésicas siempre existe.

**Definición C.1.8.** *Sean  $\gamma_1, \gamma_2 : [a, b] \rightarrow X$  curvas continuas tales que  $\gamma_1(a) = \gamma_2(a) = p$ . El ángulo entre  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  en  $p$  es*

$$\angle \gamma_1 \gamma_2 = \lim_{s, t \rightarrow 0^+} \frac{d(p, \gamma_1(t))^2 + d(p, \gamma_2(s))^2 - d(\gamma_1(t), \gamma_2(s))^2}{2d(p, \gamma_1(t))d(p, \gamma_2(s))}.$$

En el caso que  $X$  sea una variedad riemanniana y  $\gamma_1, \gamma_2$  sean curvas diferenciables entonces es claro que  $\angle \gamma_1 \gamma_2 = \angle \gamma_1'(0) \gamma_2'(0)$ . Si  $\Delta xyz$  es un triángulo geodésico se escribirá  $\angle xyz$  para denotar el ángulo formado entre las geodésicas  $\overline{yx}$  y  $\overline{yz}$ .

**Definición C.1.9.** (Versión 3) *Un espacio de Alexandrov de curvatura  $\geq k$  es un espacio métrico (estrictamente) intrínseco  $X$  tal que todo punto  $p \in X$  tiene una vecindad  $U$  tal que para todo triángulo geodésico  $\Delta xyz$  en  $U$  y triángulo de comparación  $\Delta_k xyz$  se cumple*

$$\angle_k xyz \leq \angle xyz.$$

Esta definición es claramente equivalente a:

**Definición C.1.10.** (Versión 4) *Sean  $\gamma_1, \gamma_2 : [0, l] \rightarrow X$  dos geodésicas minimizantes con vértice común  $p = \gamma_1(0), \gamma_2(0)$ . Para cada  $r, s$  definase la función  $\theta_k(r, s) = \angle \bar{x}_r \bar{p} \bar{y}_s$  donde  $\Delta \bar{x}_r \bar{p} \bar{y}_s$  es un triángulo de comparación para  $\Delta \gamma_1(r) p \gamma_2(s)$  en  $M^k$ . Se dice que  $X$  es un espacio de Alexandrov con curvatura  $\geq k$  si para todo punto  $p \in X$  existe una vecindad  $U$  tal que para todo par de geodésicas minimizantes en  $U$  con vértice común la función  $\angle_k(r, s)$  es no decreciente (con  $r$  o  $s$  fijo).*

Una consecuencia inmediata de la definición es que las geodésicas no se ramifican. Esto es, si  $\gamma_1, \gamma_2 : [a, b] \rightarrow X$  son geodésicas y  $\gamma_1|_{[c, d]} = \gamma_2|_{[c, d]}$  (con  $[c, d] \subset [a, b]$  y  $c \neq d$ ) entonces  $\gamma_1 = \gamma_2$ . También el ángulo entre geodésicas siempre está definido.

En variedades riemannianas, si  $\beta_i, \gamma_i$  son geodésicas, con  $\beta_i(0) = \gamma_i(0)$ , que convergen a  $\beta$  y  $\gamma$  respectivamente entonces los ángulos  $\angle \beta_i \gamma_i$  convergen a  $\angle \beta \gamma$ , pero en espacios de Alexandrov esto puede fallar. Sin embargo,

**Proposición C.1.2.** *Sean  $X$  un espacio de Alexandrov con curvatura  $\geq k$  y  $\gamma_i, \beta_i : [0, l] \rightarrow X$  geodésicas con  $\gamma_i(0) = \beta_i(0) = p_i$ , si  $\gamma_i$  y  $\beta_i$  convergen a las geodésicas  $\gamma$  y  $\beta$ , respectivamente, entonces*

$$\angle \gamma \beta \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} \angle \gamma_i \beta_i.$$

## C.2. Estructura

En esta sección se enuncian los teoremas que describen la estructura básica de los espacios de Alexandrov. Consúltese [BGP92],[BBI] o [Shi93] para las demostraciones.

Un espacio de Alexandrov se definió como un espacio métrico intrínseco en el cual se satisface localmente un análogo al teorema de Toponogov 2.4.1. Sin embargo para triángulos arbitrarios el teorema sigue siendo válido:

**Teorema C.2.1** (de globalización). *Sea  $X$  un espacio de Alexandrov con curvatura  $\geq k$  completo. Sean  $p; x, y, z \in X$ . Adicionalmente, si  $k > 0$  se pide que*

$$\text{Per}(\Delta xpy), \text{Per}(\Delta ypz), \text{Per}(\Delta zpx) \leq 2\pi/\sqrt{k}.$$

Entonces

$$\angle_k xpy + \angle_k ypz + \angle_k zpx \leq 2\pi.$$

La demostración de la equivalencia de las definiciones de la sección pasada no ocupa la localidad de la definición por lo que todas las siguientes reformulaciones del teorema anterior también son ciertas.

**Teorema C.2.2.** *Sea  $X$  un espacio de Alexandrov completo*

1. *Sea  $\Delta xyz$  un triángulo geodésico en  $X$ ; si  $k > 0$  se pide que  $\text{Per}(\Delta xyz) \leq 2\pi/\sqrt{k}$ . Si  $\Delta_k xyz$  es un triángulo de comparación, entonces*

$$\angle_k xyz \leq \angle xyz.$$

2. *Sea  $\Delta xyz$  un triángulo geodésico en  $X$ ; si  $k > 0$  se pide que  $\text{Per}(\Delta xyz) \leq 2\pi/\sqrt{k}$ . Sea  $\Delta_k xyz$  un triángulo de comparación. Si  $w \in \overline{xy}$  y  $\bar{w}$  es el correspondiente en  $\overline{\bar{x}\bar{y}}$ , i.e.  $d(x, w) = d(\bar{x}, \bar{w})$  y  $d(w, y) = d(\bar{w}, \bar{y})$ , entonces*

$$d(\bar{z}, \bar{w}) \leq d(z, w).$$

Como consecuencia del teorema de globalización se tiene una generalización del teorema de Bonnet-Myers:

**Proposición C.2.3.** *Sea  $X$  un espacio de Alexandrov completo con curvatura  $\geq k > 0$ , entonces  $\text{diam}(M) \leq \pi/\sqrt{k}$ .*

y que la restricción enunciada en el teorema de globalización es superflua:

**Proposición C.2.4.** *Sea  $X$  un espacio de Alexandrov completo con curvatura  $\geq k$ . Todo triángulo  $\Delta xyz$  tiene perímetro  $\leq 2\pi/\sqrt{k}$ .*

En cuanto a la estructura local:

**Definición C.2.1.**  *$p \in X$  es un punto  $(n, \delta)$ -tensado si existen  $n$  pares de puntos  $a_n, b_n \in X$  tales que*

$$\begin{aligned} \angle_k a_i p b_i &> \pi - \delta, & \angle_k a_i p a_j &> \pi/2 - \delta, \\ \angle_k a_i p b_j &> \pi/2 - \delta, & \angle_k b_i p b_j &> \pi/2 - \delta. \end{aligned}$$

a la colección de puntos  $(a_i, b_i)$  se le llama un  $(n, \delta)$ -tensor en  $p$ .

**Proposición C.2.5.** *Sea  $X$  un espacio de Alexandrov con curvatura  $\geq k$  y  $p$  un punto  $(n, \delta)$ -tensado. Si  $\delta$  es suficientemente pequeño, es decir  $\delta \leq C(n, k)$  para alguna constante que solo depende de  $n$  y  $k$ , entonces en cualquier vecindad de  $p$  existen puntos  $(n, \delta')$ -tensados para cualquier  $\delta' > 0$ .*

La existencia de un  $(n, \delta)$ -tensor con  $n$  maximal en un punto  $p$  prove de coordenadas en una vecindad suficientemente pequeña de  $p$ .

**Teorema C.2.6.** *Sea  $p$  un punto  $(n, \delta)$ -tensado con  $\delta < 1/2n$  y  $(a_i, b_i)$  un tensor. Si  $U$  carece de puntos  $(n+1, \delta')$ -tensados (con  $\delta' = \delta'(\delta)$  suficientemente pequeño) entonces existe una vecindad abierta  $V$  de  $p$  tal que la función  $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$  definida por*

$$\varphi(q) = (d(a_1, q), \dots, d(a_n, q))$$

*es un homeomorfismo bilipschitz.*

**Definición C.2.2.**  *$p \in X$  es un punto variedad si existe una vecindad  $V$  y una función bilipschitz  $\varphi : V \rightarrow W \subset \mathbb{R}^n$  a un dominio abierto en  $\mathbb{R}^n$ .*

Dado que la existencia de puntos  $(n, \delta)$ -tensados controla fuertemente la topología local defínase

**Definición C.2.3.** *El índice de tensión de un punto  $p \in X$  es el supremo del conjunto de números  $n \in \mathbb{N}$  tales que en toda vecindad  $U$  de  $p$  y para todo  $\delta$  existen puntos  $(n, \delta)$ -tensados en  $U$ . Se admite la posibilidad de que sea  $\infty$ .*

En lo que sigue  $V_n^H$  y  $\dim_H$  denotan el volumen Hausdorff  $n$ -dimensional y la dimensión Hausdorff. Revise [BBI] para su definición y propiedades elementales. Por motivos técnicos se trabaja con una simplificación del volumen y la dimensión Hausdorff.

**Definición C.2.4.** *Sea  $U$  un subconjunto acotado de un espacio métrico. El volumen áspero  $r$ -dimensional se define como*

$$V_r^R(U) = \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^r \beta_U(\varepsilon),$$

donde  $\beta_U(\varepsilon)$  es el número máximo de puntos  $\varepsilon$ -separados. Es decir,

$$\beta_U(\varepsilon) = \{ |S| \mid S \subset U \text{ finito y } \forall p, q \in S \ d(p, q) > \varepsilon \}.$$

**Definición C.2.5.** *La dimensión áspera de un subconjunto acotado de un espacio métrico  $U$  es el número*

$$\inf \{ r > 0 \mid V_r^R(U) = 0 \} = \dim_R(U) = \sup \{ r > 0 \mid V_r^R(U) = \infty \}.$$

Sean  $X$  un espacio de Alexandrov y  $p \in X$ . Sean  $U$  una vecindad suficientemente cercana a  $p$ ,  $\{x_1, \dots, x_n\}$  una colección de puntos  $\varepsilon$ -separados en  $U$  y  $px_i$  geodésicas minimizantes. Si  $q_i$  son puntos sobre las geodésicas  $px_i$  tales que  $d(p, q_i) = 1/R d(p, x_i)$  con  $R$  pequeño entonces es fácil ver que (usando triángulos de comparación, véase Figura C.1)  $d(q_i, q_j) \geq C d(x_i, x_j)$  donde  $C$  es una constante que solo depende de  $k$  y  $\max \{d(p, x_i)\}$ , luego la colección de puntos  $\{q_i, \dots, q_j\}$  es un conjunto  $C\varepsilon$ -separado. Este argumento demuestra que

**Proposición C.2.7.** *Si  $U$  y  $V$  son abiertos suficientemente pequeños en un espacio de Alexandrov  $X$  con curvatura  $\geq k$  entonces  $\dim_R(U) = \dim_R(V)$ . Si  $X$  es completo entonces esta propiedad es válida para todo abierto acotado  $U \subset X$ .*

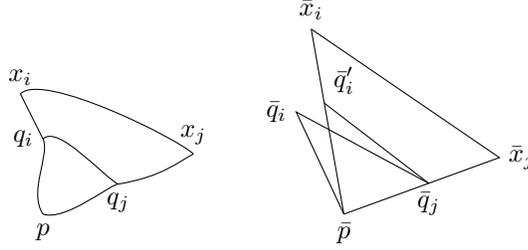


Figura C.1:  $\Delta \bar{p}\bar{x}_i\bar{x}_j$  y  $\Delta \bar{p}\bar{q}_i\bar{q}_j$  son triángulos de comparación para los triángulos  $\Delta px_ix_j$  y  $\Delta pq_iq_j$ .  $\bar{q}'_i$  es un punto sobre  $\bar{p}\bar{x}_i$  tal que  $d(\bar{p}, \bar{q}'_i) = d(p, q_i)$ , nótese que  $d(q_i, q_j) = d(\bar{q}_i, \bar{q}_j) \geq d(\bar{q}'_i, \bar{q}_j)$ .

Si el índice de tensión de un punto es finito entonces existe una función bilipschitz  $\phi : U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$  donde  $U$  es una vecindad del punto. Al igual que para la dimensión Hausdorff, y la demostración es la misma, si  $f : X \rightarrow Y$  es bilipschitz entonces  $\dim_R(X) = \dim_R(Y)$ . Se sabe que  $\dim_R(V) = \dim_H(V) = n$  para todo dominio abierto  $V \subset \mathbb{R}^n$ . Luego

**Proposición C.2.8.** *Sea  $X$  un espacio de Alexandrov con curvatura  $\geq k$ ,  $p \in X$  e  $i(p)$  el índice de tensión de  $p$ . Para cualquier vecindad suficientemente pequeña  $U$  de  $p$ , se tiene que  $i(p) = \dim_R(U) = \dim_H(U)$ . Si  $X$  es completo, esto es válido para cualquier vecindad acotada.*

**Corolario C.2.9.** *La dimensión Hausdorff de un espacio de Alexandrov es un entero o  $\infty$ .*

**Corolario C.2.10.** *El índice de tensión es constante.*

De ahora en adelante, la dimensión de un espacio de Alexandrov se refiere a cualquiera de los siguientes números:  $\dim(X) = \dim_R(U), \dim_H(U), i(p)$ , donde  $U$  es cualquier abierto acotado, e  $i(p)$  es el índice de tensión de cualquier punto.

**Corolario C.2.11.** *Si  $X$  es un espacio de Alexandrov  $n$ -dimensional entonces el conjunto de puntos  $(n, \delta)$ -tensados, con  $\delta$  suficientemente pequeño, es denso.*

El conjunto mencionado en el corolario anterior admite una estructura de variedad topológica. Aún más, de acuerdo con Otsu [OS94] el conjunto de puntos  $(n, \delta)$ -tensados para  $\delta$  arbitrario admite una estructura riemanniana generalizada ( $C^0$ ) cuya métrica inducida coincide con la métrica del espacio.

En un espacio de Alexandrov  $n$ -dimensional un punto  $(n, \delta)$ -tensado tiene una vecindad homeomorfa a  $\mathbb{R}^n$ , y luego tiene vecindades compactas. En el caso que además sea completo se tiene:

**Proposición C.2.12.** *En un espacio de Alexandrov completo  $n$ -dimensional cualquier conjunto acotado es precompacto. Entre cualquier par de puntos existe una geodésica minimizante.*

De ahora en adelante solo se trabajará con espacios de Alexandrov completos y finito dimensionales.

**Definición C.2.6.** *El conjunto de espacios de Alexandrov con curvatura  $\geq k$  y dimensión  $\leq n$  es denotado por  $\mathcal{M}(k, n)$ .  $\mathcal{M}(n, k, D)$  es el subconjunto de  $\mathcal{M}(n, k)$  de los elementos con diámetro  $\leq D$ .*

### C.3. Distancia Gromov-Hausdorff

**Definición C.3.1.** Sean  $A, B \subseteq X$ . La distancia de Hausdorff entre  $A$  y  $B$  es

$$d_H(A, B) = \inf \{d(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

Si se restringe a los subconjuntos cerrados de  $X$ ,  $d_H$ , es una métrica. Es posible generalizar esta métrica para comparar espacios métricos.

**Definición C.3.2.** La distancia Gromov-Hausdorff se define para un par de espacios métricos  $X, Y$  como

$$d_{GH}(X, Y) = \inf \{d_H(X', Y') \mid X', Y' \subseteq Z, X \cong X' \text{ y } Y \cong Y'\}.$$

Esta manera tan burda de comparar espacios métricos fue introducida por Gromov [Gro78] para estudiar la “convergencia” de espacios riemannianos. Fue necesario aceptar una visión borrosa de los objetos para permitir el “colapso” que Gromov tenía en mente.

Si  $\mathcal{M}$  es el conjunto de espacios métricos compactos entonces

**Proposición C.3.1.** La métrica de Gromov-Hausdorff define una métrica en  $\mathcal{M}$ . En particular, si  $X$  y  $Y$  son espacios métricos compactos tales que  $d_{GH}(X, Y) = 0$  entonces  $X \cong Y$ .

**Definición C.3.3.** Una sucesión de espacios métricos compactos  $\{X_i\}$  converge a  $X$ ,  $X_i \rightarrow_{GH} X$ , en la topología de Gromov-Hausdorff, si  $d_{GH}(X_i, X) \rightarrow 0$ .

En el caso que  $X_i \rightarrow_{GH} X$ , es posible construir un espacio  $Z$  junto con subconjuntos  $X'_i$  y  $X'$  isométricos a  $X_i$  y  $X$ , respectivamente, tales que  $X'_i \rightarrow_H X'$  según la métrica Hausdorff. Esta representación permite construir una correspondencia entre los puntos de  $X_i$  y  $X$ .

**Definición C.3.4.** Una función  $f : X \rightarrow Y$  (no necesariamente continua) es una  $\varepsilon$ -isometría si  $\text{dist}(f) \leq \varepsilon$  y  $f(X)$  es una  $\varepsilon$ -red.

Se le recuerda al lector que la distorsión de una función entre espacios métricos  $f : X \rightarrow Y$  se define como  $\text{dist}(f) = \sup \{|d(x, y) - d(f(x), f(y))| \mid x, y \in X\}$ , y que una  $\varepsilon$ -red en un espacio métrico  $X$  es un subconjunto  $R$  tal que  $R_\varepsilon = \{y \in X \mid d(y, R) < \varepsilon\} = X$ .

**Proposición C.3.2.**  $X_i \rightarrow_{GH} X$  si y solo si para todo  $\varepsilon$  existe  $N \in \mathbb{N}$  y  $\varepsilon$ -isometrías  $f_n : X_n \rightarrow X$ ,  $g_n : X \rightarrow X_n$  para todo  $n > N$ . Equivalentemente  $X_n \rightarrow_{GH} X$  si y solo si existe una sucesión  $\varepsilon_n > 0$  y  $\varepsilon_n$ -isometrías  $f_n : X_n \rightarrow X$ ,  $g_n : X \rightarrow X_n$  tales que  $\varepsilon_n \rightarrow 0$ .

Las  $\varepsilon$ -isometrías permiten trasladar configuraciones métricas finitas en  $X$ , i.e. colecciones finitas de puntos de  $X$  con ciertas propiedades métricas, a los espacios convergentes  $X_i$  con distorsión convergente a 0. Por tanto, cualquier propiedad métrica en términos de configuraciones métricas finitas se hereda a los espacios límite. Por ejemplo,

**Proposición C.3.3.** Sea  $\{X_i\}$  una sucesión de espacios métricos intrínsecos y compactos. Si  $X_i \rightarrow X$  entonces  $X$  es un espacio métrico intrínseco.

**Demostración** Sean  $x, y \in X$ . Como se están tratando con espacios métricos compactos, por C.1.1 basta con verificar que para todo  $\varepsilon > 0$ ,  $x$  y  $y$  tienen un  $\varepsilon$ -punto medio.

Para esto sea  $g_n : X_n \rightarrow X$  una sucesión de  $\varepsilon_n$ -isometrías con  $\varepsilon_n \rightarrow 0$ . Sean  $x_n = g_n(x)$  y  $y_n = g_n(y)$ . Nótese que  $|d(x_n, y_n) - d(x, y)| \leq \varepsilon_n$ . Sea  $z_n$  un  $\varepsilon/2$ -punto medio de  $x_n$  y  $y_n$ , y  $w_n \in X$  tal que  $d(g_n(w_n), z_n) < \varepsilon_n$  (recuérdese que esto siempre es posible ya que  $g_n(X)$  es una  $\varepsilon_n$ -red). Es rutina verificar que  $w_n$  es un  $\varepsilon$ -punto medio para  $n$  suficientemente grande.  $\square$

**Proposición C.3.4.** *Si  $X$  es el límite de una sucesión de espacios de Alexandrov con curvatura  $> k$  entonces  $X$  es un espacio de Alexandrov con curvatura  $> k$ .*

**Demostración** Por la proposición anterior  $X$  es un espacio métrico intrínseco. Falta verificar las condiciones de curvatura.

Sean  $p, a, b, c \in X$  una cuádrupla y  $g_n : X \rightarrow X_n$   $\varepsilon_n$ -isometrías con  $\varepsilon_n \rightarrow 0$ , y  $X_n$  espacios de Alexandrov compactos con curvatura  $\geq k$ . Sean  $p_n = g_n(p)$ ,  $a_n = g_n(a)$ ,  $b_n = g_n(b)$  y  $c_n = g_n(c)$ . Por la definición C.1.5,

$$\angle_k a_n p_n b_n + \angle_k b_n p_n c_n + \angle_k c_n p_n a_n \leq 2\pi.$$

Dado que  $g_n$  son  $\varepsilon_n$ -isometrías y  $\varepsilon_n \rightarrow 0$  se tiene que las distancias entre los puntos  $p_n, a_n, b_n, c_n$  convergen a las distancias entre los puntos  $p, a, b, c$ , por lo que los triángulos de comparación correspondientes en  $M^k$  convergen. Dado que el ángulo  $\angle_k pqr$  depende continuamente de  $d(p, q)$ ,  $d(p, r)$  y  $d(q, r)$  entonces los ángulos  $\angle_k a_n p_n b_n \rightarrow \angle_k a p b$ ,  $\angle_k b_n p_n c_n \rightarrow \angle_k b p c$  y  $\angle_k c_n p_n a_n \rightarrow \angle_k c p a$  por lo que

$$\angle_k a p b + \angle_k b p c + \angle_k c p a \leq 2\pi.$$

Es decir,  $X$  es un espacio de Alexandrov con curvatura  $\geq k$ .  $\square$

Finalmente,

**Proposición C.3.5.** *Si  $X$  es el límite de una sucesión  $X_n$  de espacios de Alexandrov compactos con curvatura  $\geq k$  y dimensión  $n$ , entonces  $X \in \mathcal{M}(k, n)$ .*

**Demostración** Por las proposiciones anteriores  $X$  es un espacio de Alexandrov compacto con curvatura  $\geq k$ . Solo falta demostrar la afirmación de la dimensión.

Sea  $p \in X$  un punto  $(m, \delta)$ -tensado para  $\delta$  suficientemente pequeño y  $a_j, b_j$  un  $(m, \delta)$ -tensor en  $p$ . Sean  $g_i : X \rightarrow X_i$   $\varepsilon_i$ -isometrías con  $\varepsilon_i \rightarrow 0$ ,  $p_i = g_i(p)$ ,  $a_j^i = g_i(a_j)$  y  $b_j^i = g_i(b_j)$ . Dado que las distancias entre los puntos  $p_i, a_j^i$  y  $b_j^i$  convergen a las distancias entre los puntos  $p, a_j$  y  $b_j$ , los ángulos de comparación entre los puntos  $p_i, a_j^i, b_j^i$  se aproximan tanto como se quiera a los ángulos entre  $p, a_j, b_j$ . Luego para  $i$  suficientemente grande  $p_i$  es un punto  $(m, \delta_i)$ -tensado con  $a_j^i, b_j^i$  como un  $(m, \delta')$  tensor. Esto se puede hacer de tal forma que  $\delta_i$  sea suficientemente pequeño por lo que  $m \leq n$ . En conclusión,  $\dim X \leq \dim X_i = n$ .  $\square$

Esto indica que los conjuntos  $\mathcal{M}(k, n) \subset \mathcal{M}(k) \subset \mathcal{M}$  son conjuntos cerrados. Es fácil ver que la función diámetro,  $diam : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ , es una función continua. Luego si  $X_i$  es una sucesión convergente en  $\mathcal{M}$  entonces el diámetro está acotado. Por otro lado si  $X_i \rightarrow_{GH} X$  y  $R$  es una  $\varepsilon/2$ -red finita en  $X$ , entonces usando  $\varepsilon'$ -isometrías se puede trasladar  $R$  a una familia de  $\varepsilon$ -redes  $R_n$  en  $X_n$  para  $n$  suficientemente grande. Las redes  $R_n$  tienen la misma cardinalidad que  $R$  por lo que es posible afirmar que existe un natural  $N(\varepsilon)$  tal que para toda  $i$ ,  $X_i$  tiene una  $\varepsilon$ -red con a lo más  $N(\varepsilon)$  elementos.

Si  $\mathcal{C} \subset \mathcal{M}$  es un subconjunto compacto entonces los argumentos anteriores muestran que:

1. El diámetro de los elementos de  $\mathcal{C}$  está uniformemente acotado.
2. Para todo  $\varepsilon$  existe  $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  tal que todo espacio  $X \in \mathcal{C}$  tiene una  $\varepsilon$ -red con a lo más  $N(\varepsilon)$  elementos.

Resulta que estas dos condiciones son suficientes para que una familia de espacios sea precompacta en  $\mathcal{M}$ . Este es el famoso criterio de precompactidad de Gromov [Gro01, Proposición 5.2].

**Proposición C.3.6** (Criterio de precompacidad). *Sea  $\mathcal{C} \subset \mathcal{M}$  una familia de espacios métricos intrínsecos y compactos. Si el diámetro de los espacios  $X \in \mathcal{C}$  está uniformemente acotado; es decir,  $\text{diam}(X) \leq D$  para algún  $D$  fijo; y para todo  $\varepsilon$  existe  $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  tal que todo elemento de  $\mathcal{C}$  contiene una  $\varepsilon$ -red con  $N(\varepsilon)$  elementos, entonces  $\mathcal{C}$  es precompacto con respecto de la topología Gromov-Hausdorff.*

Usando un estimado del volumen áspero (véase C.2.4 y [BGP92, Lema 8.2, Corolario 8.4] para la demostración) es posible demostrar que la clase  $\mathcal{M}(k, n, D)$  satisface las hipótesis del criterio de precompacidad. Se ha demostrado que este espacio es cerrado por lo que

**Teorema C.3.7.** *Para todo  $n \geq 0$ ,  $k \in \mathbb{R}$  y  $D > 0$  el espacio  $\mathcal{M}(n, k, D)$  es compacto.*

Nótese que si  $k > 0$  entonces  $\mathcal{M}(n, k) = \mathcal{M}(n, k, \pi/\sqrt{k})$  es compacto.

El criterio de precompacidad de Gromov junto con el teorema de estabilidad de Perelman que enuncia a continuación brindan una manera muy poderosa de demostrar que los tipos de homeomorfismo de ciertas clase de espacios (salvo isometría) forman un conjunto finito. Véase 3.7 para algunos ejemplos de esto.

**Teorema C.3.8** (Perelman). *Sea  $X$  un espacio de Alexandrov de dimensión  $n$  con curvatura  $\geq k$ . Existe  $\varepsilon(X) > 0$  tal que si  $Y$  es un espacio de Alexandrov de dimensión  $n$  con curvatura  $\geq k$  y  $d_{GH}(X, Y) \leq \varepsilon(X)$  entonces  $X \cong Y$  (homeomorfo).*

Para cerrar esta sección se menciona que existe una noción de convergencia Gromov-Hausdorff para espacios no compactos. Se le pide al lector que tenga en mente la convergencia de funciones en dominios no compactos.

**Definición C.3.5.** *Una sucesión de espacios punteados  $(X_i, p_i)$  (i.e.  $p_i \in X_i$ ) converge en el sentido Gromov-Hausdorff a  $(X, p)$  si para toda  $R > 0$  existe una sucesión  $\lambda_i \rightarrow 0$  tal que*

$$(B_{R+\lambda_i}(p_i), p_i) \rightarrow_{GH} (B_R(p), p);$$

es decir, si existen  $\varepsilon_i$ -isometrías  $f_i : B_{R+\lambda_i}(p_i) \rightarrow B_R(p)$  y  $g_i : B_R(p) \rightarrow B_{R+\lambda_i}(p_i)$  tales que  $f_i(p_i) = p$  y  $g_i(p) = p_i$ .

## C.4. Espacio de direcciones

La generalización del espacio tangente accesible a la teoría de espacios de Alexandrov es la siguiente. Sea  $p \in X$  y  $\mathcal{C}(p)$  el conjunto de todas las geodésicas que parten de  $p$ . Defínase una relación de equivalencia entre geodésicas declarando equivalentes a dos geodésicas  $\alpha$  y  $\beta$  si  $\angle\alpha\beta = 0$ . Sea  $\Sigma'_p = \mathcal{C}/\sim$ . Dado que las geodésicas no se ramifican, dos geodésicas son equivalentes si y solo si una es un subsegmento de la otra.

Se puede medir la separación entre geodésicas usando el ángulo que forman como métrica. Un resultado básico es el siguiente.

**Proposición C.4.1.** *Sean  $pq$ ,  $ps$  y  $pr$  geodésicas en un espacio de Alexandrov  $X$  con curvatura  $\geq k$ . Los ángulos satisfacen*

$$\angle qpr \leq \angle qps + \angle spr.$$

Luego  $(\Sigma'_p, \angle)$  es un espacio métrico.

**Definición C.4.1.** *El espacio de direcciones en  $p$ ,  $\Sigma_p$ , es la completación métrica de  $(\Sigma'_p, \triangleleft)$ .*

Ahora se expone una construcción general de espacios de Alexandrov que aplicada al espacio de direcciones nos proveerá del espacio tangente.

**Definición C.4.2.** *Sea  $X$  un espacio métrico con  $\text{diam}(X) < \pi$ . El cono  $C(X)$  es el conjunto*

$$C(X) = X \times [0, \infty) / \sim,$$

en donde se han identificado los puntos de la base  $X \times \{0\}$ , junto con la métrica

$$d((x, t), (y, s)) = \sqrt{r^2 + s^2 - 2rsd(x, y)}.$$

Con tal definición es fácil ver que  $C(\mathbb{S}^n) = \mathbb{R}^{n+1}$ . En el caso que  $X$  sea un espacio de Alexandrov se tiene la siguiente proposición.

**Proposición C.4.2.** *Si  $X$  es un espacio intrínseco entonces  $C(X)$  es intrínseco. Además son equivalentes*

1.  $C(X)$  es un espacio de Alexandrov con curvatura  $\geq 0$ .
2.  $X$  es un espacio de Alexandrov con curvatura  $\geq 1$ .

**Definición C.4.3.** *El cono tangente en  $p$  se define como  $C(\Sigma_p)$ .*

En la siguiente proposición se resumen las propiedades básicas del espacio de direcciones.

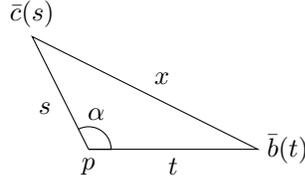
**Teorema C.4.3.** *El cono tangente  $C(\Sigma_p)$  es el límite punteado Gromov-Hausdorff de la sucesión  $(\lambda X, p)$  con  $\lambda \rightarrow \infty$ , donde  $\lambda X$  es el espacio métrico  $X$  que se obtiene de multiplicar la métrica por  $\lambda$ . Por tanto  $C(\Sigma_p)$  es un espacio de Alexandrov con curvatura  $\geq 0$ , se sigue que  $\Sigma_p$  es un espacio de Alexandrov con curvatura  $\geq 1$ . Si  $X$  es un espacio de Alexandrov finito dimensional y  $\dim(X) = n$  entonces  $\dim(\Sigma_p) = n - 1$ .*

En caso que  $p$  sea un punto variedad resulta que  $\Sigma_p \cong \mathbb{S}^{n-1}$ , en particular no tiene “frontera”. Si  $X$  es un espacio de Alexandrov con curvatura  $\geq k$  1-dimensional entonces  $X$  es un segmento de recta,  $\mathbb{R}$  o  $\mathbb{S}^1$ , de estos casos solo los segmentos de recta tienen “frontera”. Se puede definir la frontera de manera recursiva.

**Definición C.4.4.** *Un punto sobre un espacio de Alexandrov de dimensión 1 es un punto frontera si  $\Sigma_p = \{*\}$ . En general,  $p \in X$  es un punto frontera si  $\Sigma_p$  tiene puntos frontera. La frontera de  $X$ ,  $\partial X$ , es la colección de puntos frontera.*

## C.5. Funciones de distancia y conjuntos convexos

Sea  $f : D \subset X \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua de un subconjunto de un espacio de Alexandrov. Es posible dar una definición ad hoc de función diferenciable con la cual demostrar resultados análogos al caso riemanniano. El objetivo principal de esta sección es demostrar un teorema del alma (cfr. 3.5.1) para espacios de Alexandrov. Los detalles de las demostraciones se pueden consultar en [Per91].

Figura C.2: Los triángulos de comparación  $\Delta \bar{p}\bar{b}(t)\bar{c}(s)$ .

**Definición C.5.1.** Sea  $X$  un espacio de Alexandrov con curvatura  $\geq k$  y finito dimensional. Una función  $f : D \subset X \rightarrow \mathbb{R}$  con  $D$  un abierto de  $X$  tiene derivadas direccionales si es Lipschitz y para todo  $p \in D$  existe una función continua  $f'_{(p)} : \Sigma_p \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$f'_{(p)}(\xi) = (f \circ \gamma)'(0),$$

donde  $\gamma : [0, l] \rightarrow X$  es una geodésica unitaria con  $\gamma(0) = p$  y  $\xi$  es la dirección que representa a  $\gamma$ .

**Definición C.5.2.** Sea  $A$  un subconjunto de un espacio de Alexandrov finito dimensional. La función distancia  $d_A : X \setminus A \rightarrow \mathbb{R}$  es la función definida por

$$d_A(y) = d(y, A).$$

**Proposición C.5.1.** Si  $A$  es un conjunto compacto en un espacio de Alexandrov finito dimensional con curvatura  $\geq 0$  entonces la función de distancia  $d_A$  tiene derivadas direccionales. Aún más,

$$(d_A)'_{(p)}(\xi) = -\cos(d_{\Sigma_p}(\xi, A'_p)),$$

donde  $A'_p$  es el conjunto de las direcciones de las geodésicas minimizantes de  $p$  a  $A$ , es decir el conjunto de direcciones de geodésicas  $\gamma : [a, b] \rightarrow X$  tales que  $\gamma(a) = p$ ,  $\gamma(b) = a \in A$  y  $d(p, a) = d(p, A)$ .

**Demostración** Sea  $po$  una geodésica unitaria en  $X \setminus A$ .

Sea  $pa$  una geodésica con  $d(p, a) = d(p, A)$ . Para cada  $t$  sea  $b(t)$  el punto sobre  $po$  con  $d(p, b(t)) = t$ . Se demostrará primero que

$$\limsup_{t \rightarrow 0^+} \frac{d_A(b(t)) - d_A(p)}{t} \leq -\cos \alpha,$$

donde  $\alpha = \angle opa = d_{\Sigma_p}(\xi, \nu)$  donde  $\xi$  y  $\nu$  son las direcciones de  $po$  y  $pa$  respectivamente.

Sea  $c(s)$  el punto sobre  $pa$  tal que  $d(p, c(s)) = s$  y obsérvese que

$$\begin{aligned} d(p, c(s)) - d(b(t), c(s)) &= d(p, a) - d(a, c(s)) - d(c(s), b(t)) \\ &\leq d_A(p) - d(a, b(t)) \leq d_A(p) - d_A(b(t)). \end{aligned} \tag{C.1}$$

Sean  $\Delta \bar{p}\bar{c}(s)\bar{b}(t)$  un triángulo de comparación para  $\Delta pc(s)b(t)$  en  $\mathbb{R}^2$  y  $x = x(s, t) = d(c(s), b(t))$ . Por la ley de los cosenos,

$$x^2 = s^2 + t^2 - 2st \cos \tilde{\alpha},$$

donde  $\tilde{\alpha} = \angle \bar{b}(t)\bar{p}c(s)$ , por lo que

$$\cos \tilde{\alpha} = \frac{(s-x)(s+x)}{2st} + \frac{t}{2s} = \frac{s-x}{t} + \frac{s-x}{t} \left[ \frac{s+x}{2s} - 1 \right] + \frac{t}{2s}.$$

Por la desigualdad del triángulo  $\frac{s-x}{t} \leq 1$  y  $\frac{s+x}{2s} - 1 \leq \frac{t}{2s}$ . Además, de C.1,

$$s-x = d(p, c(s)) - d(c(s), b(t)) \leq d_A(p) - d_A(b(t)).$$

Consecuentemente,

$$\cos \tilde{\alpha} \leq \frac{s-x}{t} + \frac{t}{s} \leq \frac{d_A(p) - d_A(b(t))}{t} + \frac{t}{s};$$

o equivalentemente,

$$\frac{d_A(b(t)) - d_A(p)}{t} \leq -\cos \tilde{\alpha} + \frac{t}{s}.$$

Tomando el límite superior cuando  $t, s \rightarrow 0$  se obtiene la desigualdad deseada:

$$\limsup_{t \rightarrow 0^+} \frac{d_A(b(t)) - d_A(p)}{t} \leq -\cos \alpha.$$

Se hizo la demostración para cualquier geodésica minimizante de  $p$  a  $A$  por lo que

$$\limsup_{t \rightarrow 0^+} \frac{d_A(b(t)) - d_A(p)}{t} \leq \inf(-\cos \alpha) = -\cos(d_{\Sigma_p}(\xi, A')).$$

Luego, para finalizar la demostración basta con mostrar que

$$-\cos(d_{\Sigma_p}(\xi, A')) \leq \liminf_{t \rightarrow 0^+} \frac{d_A(b) - d_A(p)}{t}.$$

Sea  $pa$  una geodésica minimizante con  $a \in A$  tal que  $d(p, a) = d(p, A)$ . Sea  $t_i$  una sucesión de números con  $t_i \rightarrow 0$ , y para cada  $i$  sea  $b_i a$  una geodésica minimizante, donde  $b_i = b(t_i)$ ; supóngase que  $b_i a$  converge a  $pa$ . Por C.1.2,

$$\alpha = \angle apo \leq \liminf_{t \rightarrow \infty} \angle ab_i o. \quad (\text{C.2})$$

Sea  $\Delta \bar{a}b_i \bar{p}$  un triángulo de comparación en  $\mathbb{R}^2$ ,  $l_i = d(b_i, a) \geq d_A(b_i) = s_i$  y  $l = d(p, a) = d_A(p)$ . Reutilizando la ecuación C.5,

$$\cos \angle \bar{a}b_i \bar{p} - \frac{t_i}{l_i} \leq \frac{l_i - l}{t_i} = \frac{s_i - l}{t_i} + \frac{l_i - s_i}{t_i},$$

de donde

$$\liminf_{i \rightarrow \infty} \cos \angle \bar{a}b_i \bar{p} \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} \frac{s_i - l}{t_i} = \liminf_{i \rightarrow \infty} \frac{d_A(b_i) - d_A(p)}{t_i}.$$

Por el teorema de globalización C.2.1,  $\angle \bar{a}b_i \bar{p} \leq \angle ab_i p = \pi - \angle ab_i o$  por lo que

$$\liminf_{i \rightarrow \infty} \cos(\pi - \angle ab_i o) \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} \cos \angle \bar{a}b_i \bar{p}.$$

Por C.2,

$$\liminf_{i \rightarrow \infty} \cos(\pi - \angle ab_i o) = - \limsup_i \cos(\angle ab_i o) \geq -\cos(\alpha)$$

y por lo tanto

$$-\cos(\alpha) \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} \frac{d_A(b_i) - d_A(p)}{t_i}.$$

Tomando el supremo del lado derecho sobre todas las geodésicas  $pa$  con  $a \in A$  y  $d(p, a) = d(p, A)$  se llega a que

$$-\cos(d_{\Sigma_p}(\xi, A')) \leq \liminf_{t \rightarrow 0^+} \frac{d_A(b(t)) - d_A(p)}{t}$$

y por lo tanto  $d_A$  es derivable con

$$(d_A)'_{(p)}(\xi) = -\cos(d_{\Sigma_p}(\xi, A')). \quad \square$$

El siguiente teorema de Perelman [Per91, Teorema 6.1] es análogo a 3.5.6:

**Teorema C.5.2** (Perelman). *Sea  $X$  un espacio de Alexandrov con curvatura  $\geq k$ ,  $k \geq 0$ . Si  $\partial X \neq \emptyset$  entonces la función  $d_{\partial X}$  es convexa (estrictamente convexa en caso que  $k > 0$ ). Es decir, si  $\gamma : [a, b] \rightarrow X \setminus \partial X$  es una geodésica entonces  $d_{\partial X} \circ \gamma$  es una función convexa (estrictamente convexa).*

Se tienen las siguientes consecuencias triviales.

**Definición C.5.3.** *Se dice que un subconjunto  $S \subset X$  de un espacio de Alexandrov es estrictamente convexo si para todo par de puntos  $p, q \in S$  cualquier geodésica  $gq$  está contenida en  $S$ .*

Nótese que si  $S$  es un subconjunto estrictamente convexo de un espacio de Alexandrov con curvatura  $\geq k$  entonces  $S$  es un espacio de Alexandrov con curvatura  $\geq k$ .

**Corolario C.5.3.** *Sea  $X$  un espacio de Alexandrov compacto con curvatura  $\geq k$ ,  $k \geq 0$ . Si  $\partial X \neq \emptyset$  entonces los conjuntos  $X^{\geq c} = \{x \in X \mid d(x, \partial X) \geq c\}$  son estrictamente convexos.*

**Corolario C.5.4.** *Sea  $X$  un espacio de Alexandrov compacto con curvatura  $\geq k > 0$ . Si  $\partial X \neq \emptyset$  entonces existe un único punto  $p \in X$ , llamado el alma de  $X$ , tal que  $d(\partial X, p)$  es máximo.*

Sea  $X$  un espacio de Alexandrov compacto con curvatura  $\geq 0$  y supóngase que  $\partial X = N \neq \emptyset$ . Digase que  $d_N(M) = [0, a]$  y sean  $c \in (0, a)$ ,  $p \in M$ ,  $px$  y  $qp$  geodésicas tales que  $x \in N$ ,  $d_N(p) = d(p, x) = c$  y  $q \in X^{\geq c}$ . Si  $\xi, \eta \in \Sigma_p$  son las direcciones de  $pq$  y  $px$  respectivamente entonces  $d_{\Sigma_p}(\xi, \eta) \geq d_{\Sigma_p}(\xi, N')$ . Dado que  $d_N$  es convexa y  $d_N(p) \leq d_N(q)$  entonces por C.5.1,

$$0 \leq (d_N)'_{(p)}(\xi) = -\cos(d_{\Sigma_p}(\xi, N')) \leq -\cos(d_{\Sigma_p}(\xi, \eta)),$$

por lo que  $\angle qpx \geq \pi/2$ . Nótese que la desigualdad se vuelve estricta cuando  $X$  es un espacio de Alexandrov con curvatura  $\geq k > 0$ .

**Corolario C.5.5.** *Sea  $X$  un espacio de Alexandrov con curvatura  $\geq k \geq 0$ . Supóngase que  $\partial X = N \neq \emptyset$ , y sean  $c > 0$  y  $p \in X$  tales que  $d(p, N) = c$ . Sea  $\Sigma_p^c$  el espacio de direcciones de  $p$  en  $X^{\geq c}$ . Si se identifica  $\Sigma_p^c$  con un subconjunto de  $\Sigma_p$  de la manera natural, entonces se satisface*

$$d_{\Sigma_p}(N', \Sigma_p^c) \geq \pi/2.$$

*Si  $k > 0$  entonces la desigualdad anterior es estricta.*

En caso que  $X$  sea un espacio de Alexandrov compacto finito dimensional con curvatura  $\geq 0$  y  $d_{\partial X}(X) = [0, a]$  entonces  $S_1 = d_{\partial X}^{-1}(a)$  es un espacio de Alexandrov con curvatura  $\geq$  tal que  $\dim S_1 < \dim X$ . Este procedimiento se puede repetir siempre y cuando el espacio obtenido tenga frontera no vacía. De este modo se llega a un subespacio de Alexandrov compacto  $S$  con curvatura  $\geq 0$  sin frontera llamada el alma de  $X$ . Perelman [Per91, Teorema 6.2] procede a demostrar que  $S$  es retracto por deformación de  $X$ . Afirma también que para el caso no compacto, se puede utilizar un argumento similar al caso riemanniano para producir una retracción de  $X$  a un espacio de Alexandrov compacto con frontera.

## C.6. Cocientes isométricos

Sea  $X$  un espacio métrico y  $G$  un grupo que actúa en  $X$ . El espacio de órbitas  $X/G = \{G \cdot x | x \in X\}$  es un espacio topológico si se exige que la proyección natural  $\pi : X \rightarrow X/G$  sea una identificación. Se usará la notación  $\pi(x) = \bar{x}$ .

En la mayoría de los casos, el espacio topológico  $X/G$  tiene muchas propiedades desagradables; y si  $X$  tenía una estructura agradable es muy probable que  $X/G$  la pierda. Por ejemplo, si  $X$  es una variedad,  $X/G$  lo es en pocos casos:  $\mathbb{R}^{n+1}/\{id, -id\}$  es el cono sobre  $\mathbb{R}P^n$ , o  $\mathbb{R}^n/\{\lambda id\}_{\lambda \in \mathbb{R}^+}$  no es Hausdorff.

Sin embargo cuando las órbitas no son muy salvajes se puede definir una métrica en  $X/G$  de la siguiente manera:

$$\bar{d}(\bar{x}, \bar{y}) = \inf \{d(x', y') | \pi(x') = \bar{x}, \pi(y') = \bar{y}\}. \quad (\text{C.3})$$

**Proposición C.6.1.** *Si las órbitas son cerradas entonces  $\bar{d}$  es una métrica.*

Si además  $G$  actúa por isometrías en  $X$  entonces

$$\bar{d}(\bar{x}, \bar{y}) = \inf \{d(x, y') | \pi(y') = \bar{y}\} = \{d(x, gy) | g \in G\}. \quad (\text{C.4})$$

Algunas de las propiedades métricas se preservan en esta construcción.

**Proposición C.6.2.** *Si  $X$  es un espacio métrico intrínseco,  $G$  actúa en  $X$  y las órbitas son cerradas, entonces  $X/G$  es un espacio métrico intrínseco.*

**Demostración** Primero nótese que si  $x, y \in X$  entonces  $\bar{d}(\bar{x}, \bar{y}) \leq d(x, y)$ .

Sean  $\bar{x}, \bar{y} \in X/G$ . Por la proposición (C.1.1) basta con demostrar que para todo  $\varepsilon$  se puede encontrar  $\bar{z} \in X/G$  con

$$\sup(\bar{d}(\bar{x}, \bar{z}), \bar{d}(\bar{z}, \bar{y})) \leq 1/2\bar{d}(\bar{x}, \bar{y}) + \varepsilon.$$

Sean  $x', y' \in X$  tal que  $d(x', y') \leq \bar{d}(\bar{x}, \bar{y}) + 2\varepsilon$ . Como  $X$  es intrínseco existe  $z \in X$  tal que

$$\sup(d(x', z), d(z, y')) \leq 1/2d(x', y') + \varepsilon/2$$

y luego

$$\sup(\bar{d}(\bar{x}, \bar{z}), \bar{d}(\bar{z}, \bar{y})) \leq \sup(d(x', z), d(z, y')) \leq 1/2\bar{d}(\bar{x}, \bar{y}) + \varepsilon.$$

□

**Proposición C.6.3.** *Sea  $X$  un espacio de Alexandrov con curvatura  $> k$  y  $G$  un grupo que actúa por isometrías en  $X$  con órbitas cerradas, entonces  $X/G$  es un espacio de Alexandrov con curvatura  $> k$ .*

**Demostración** Sea  $\bar{x} \in X/G$ . Sea  $r > 0$  es tal que  $B_r(x)$  es normal, se probará que  $B_{1/2a}(\bar{x})$  es normal. Si  $\bar{y}, \bar{z}, \bar{w} \in B_{1/2a}(\bar{x})$  entonces existen  $y', z', w' \in B_r(x)$  tales que  $d(x, y') \leq \bar{d}(\bar{x}, \bar{y}) + \varepsilon$ ,  $d(x, z') \leq \bar{d}(\bar{x}, \bar{z}) + \varepsilon$  y  $d(x, w') \leq \bar{d}(\bar{x}, \bar{w}) + \varepsilon$ . Si  $\Delta xy'w'$ ,  $\Delta xw'z'$ ,  $\Delta xz'y'$  son triángulos de comparación en  $M^{2,k}$ , entonces como  $X$  es un espacio de Alexandrov de curvatura  $> k$  y  $B_r(x)$  es normal se tiene que

$$\angle_k y'xw' + \angle_k w'xz' + \angle_k z'xy' \leq 2\pi.$$

Por continuidad de los ángulos al hacer  $\varepsilon \rightarrow 0$  se tiene que

$$\angle_k \bar{y}\bar{x}\bar{w} + \angle_k \bar{w}\bar{x}\bar{z} + \angle_k \bar{z}\bar{x}\bar{y} \leq 2\pi.$$

□

Si  $M$  es una variedad riemanniana con curvatura seccional  $K_M \geq H$  entonces  $M$  es un espacio de Alexandrov de curvatura  $> H$ . Dada cualquier acción isométrica por un grupo de Lie compacto  $G$ , el espacio de órbitas  $M/G$  no es, por lo general una variedad, pero sí un espacio de Alexandrov de curvatura  $> H$ .



## Apéndice D

# Lemas topológicos

Si  $M$  y  $N$  son  $n$ -variedades diferenciables con frontera y existe un difeomorfismo entre sus fronteras  $f : \partial M \rightarrow \partial N$  entonces existe esencialmente una estructura diferenciable en  $M \cup_f N$ , el espacio que se obtiene de la unión disjunta de  $M$  y  $N$  y de identificar los puntos en la frontera  $x \sim f(x)$ . La estructura en  $M \cup_f N$  depende de la clase de isotopía del difeomorfismo  $f : \partial M \rightarrow \partial N$ . Consúltese [Hir76, cap. 8, §2].

**Lema D.0.4.** *Sea  $M$  una variedad topológica. Si  $M$  admite la siguiente descomposición:*

$$M = D^{n-1} \times \mathbb{S}^1 \cup_{\varphi} D^2 \times \mathbb{S}^{n-2},$$

*a través de la identidad en la frontera  $\partial D^{n-1} \times \mathbb{S}^1 = \mathbb{S}^{n-2} \times \mathbb{S}^1 = \partial D^2 \times \mathbb{S}^{n-2}$ , entonces  $M$  es difeomorfa a  $\mathbb{S}^n$ .*

**Demostración** Sean  $A = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1} \mid |(x_1, x_2)| \leq 1/2\}$  y  $B = \overline{\mathbb{S}^n - A}$ . Obsérvese que  $A \cong D^2 \times \mathbb{S}^{n-2}$  y  $B \cong D^{n-1} \times \mathbb{S}^1$ .

Sea  $\varphi : \mathbb{S}^{n-2} \times D^2 \rightarrow \mathbb{S}^n$  la función dada por

$$\varphi((y_1, \dots, y_{n-1}), (x_1, x_2)) = \frac{1}{2}(x_1, x_2, 0, \dots, 0) + \left(1 - \frac{|(x_1, x_2)|}{2}\right)(0, 0, y_1, \dots, y_{n-1}).$$

Note que  $\varphi$  es diferenciable sin puntos críticos, inyectiva y suprayectiva en  $A$ . Luego  $A \cong D^2 \times \mathbb{S}^{n-2}$ .

Defínase  $\psi : D^{n-1} \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^n$  como

$$\psi((x_1, \dots, x_{n-1}), (y_1, y_2)) = \left(1 - \frac{|(x_1, \dots, x_{n-1})|}{2}\right)(y_1, y_2, 0, \dots, 0) + \frac{1}{2}(0, 0, x_1, \dots, x_{n-1}).$$

De nuevo, es claro que  $\psi$  es un difeomorfismo  $B \cong D^{n-1} \times \mathbb{S}^1$ .

Obsérvese que si  $(x, y) \in \mathbb{S}^{n-2} \times \mathbb{S}^1 = \partial D^{n-1} \times \mathbb{S}^1 = \partial \mathbb{S}^{n-2} \times D^2$  entonces  $\psi(x, y) = \varphi(x, y)$ .  $\square$

**Lema D.0.5.** *El espacio proyectivo  $\mathbb{R}P^n$  admite una descomposición*

$$\mathbb{S}^{n-1} \times_{\mathbb{Z}_2} I \cup D^n,$$

*donde  $\mathbb{Z}_2$  actúa en  $\mathbb{S}^{n-1}$  y en  $I$  a través de*

$$[n]z = (-1)^n z.$$

**Demostración** Recuérdese que  $\mathbb{R}P^n$  es el cociente  $\mathbb{S}^n / \{Id, -Id\}$ . Sea  $\pi : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$  la proyección canónica. Sea  $A' = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{S}^n \mid |x_1| > 1/2\}$ . Nótese que  $\pi(A') = A$  es un abierto en  $\mathbb{R}P^n$  difeomorfo a  $D^n$ . Además  $\mathbb{R}P^n - A = (\mathbb{S}^n - A') / \{Id, -Id\}$ . Sin embargo es claro que  $B = \mathbb{S}^n - A' \cong \mathbb{S}^{n-1} \times I$  y que  $\mathbb{Z}_2$  actúa en  $B$  como en el enunciado. Por lo tanto,

$$\mathbb{R}P^n \cong \mathbb{S}^{n-1} \times_{\mathbb{Z}_2} I \cup D^n. \quad \square$$

**Lema D.0.6.** *El espacio proyectivo complejo  $\mathbb{C}P^n$  admite la descomposición*

$$\mathbb{S}^{2n-1} \times_{\mathbb{S}^1} D^2 \cup D^{2n},$$

donde la acción de  $\mathbb{S}^1$  en  $\mathbb{S}^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$  y  $D^2 \subset \mathbb{C}$  está dada por multiplicación compleja.

**Demostración** La demostración es análoga a la anterior.  $\mathbb{C}P^n$  es el cociente  $\mathbb{S}^{2n+1}/\mathbb{S}^1$  donde  $\mathbb{S}^1$  actúa en  $\mathbb{S}^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$  por multiplicación compleja y sea  $\pi : \mathbb{S}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{C}P^n$  la proyección canónica. Sea  $A' = \{(z_1, \dots, z_{n+1}) \in \mathbb{S}^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1} \mid |z_1| \geq 1/2\}$ . Nótese que  $\pi(A') = A$  es difeomorfo a  $D^{2n}$  a través de la función  $\varphi([z_1, \dots, z_{n+1}]) = (z_2/z_1, \dots, z_{n+1}/z_1)$ . Además es claro que  $\mathbb{S}^{2n+1} - A' \cong \mathbb{S}^{2n-1} \times D^2$  y que la acción de  $\mathbb{S}^1$  en  $\mathbb{S}^{2n+1}$  se restringe a la multiplicación compleja coordenada a coordenada. Por lo tanto,

$$\mathbb{C}P^n \cong \mathbb{S}^{2n-1} \times_{\mathbb{S}^1} D^2 \cup D^{2n}. \quad \square$$

# Bibliografía

- [BBI] Dmitri Burago, Yuri Burago, and Sergei Ivanov. *A course in metric geometry*. American Mathematical Society.
- [Ber62] Marcel Berger. An extension of Rauch's metric comparison theorem and some applications. *Illinois Journal of Mathematics*, 6(4):700–712, 1962.
- [Ber76] Lionel B Bergery. Les variétés Riemanniennes homogènes simplement connexes de dimension impair à courbure strictement positive. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 55:47–68, 1976.
- [Bes07] Arthur L Besse. *Einstein manifolds*. Springer Science & Business Media, 2007.
- [BGP92] Yuri Burago, Mikhail Gromov, and Grigori Perelman. Alexandrov spaces with curvature bounded below. *Russian Mathematical Surveys*, 47(2):1–58, 1992.
- [Boo86] William M Boothby. *An introduction to differentiable manifolds and Riemannian geometry*. Elsevier, 1986.
- [Bre72] Glen E Bredon. *Introduction to compact transformation groups*. Academic Press, 1972.
- [Bre93] Glen E Bredon. *Topology and geometry*. Springer, 1993.
- [BS11] Simon Brendle and Richard Schoen. Curvature, sphere theorems, and the Ricci flow. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 48(1):1–32, 2011.
- [BT82] Raoul Bott and Loring W Tu. *Differential forms in algebraic topology*. Springer, 1982.
- [CE75] Jeff Cheeger and David G Ebin. *Comparison theorems in Riemannian geometry*. American Mathematical Society, 1975.
- [DC76] Manfredo P Do Carmo. *Differential geometry of curves and surfaces*. Prentice-Hall, 1976.
- [DC92] Manfredo P Do Carmo. *Riemannian geometry*. Birkhäuser, 1992.
- [FH91] William Fulton and Joe Harris. *Representation theory: a first course*. Springer, 1991.
- [Fre82] Michael H Freedman. The topology of four-dimensional manifolds. *Journal of Differential Geometry*, 17(3):357–453, 1982.
- [GM74] Detlef Gromoll and Wolfgang Meyer. An exotic sphere with nonnegative sectional curvature. *Annals of Mathematics*, pages 401–406, 1974.

- [GP10] Victor Guillemin and Alan Pollack. *Differential topology*. American Mathematical Society, 2010.
- [Gro78] Mikhail Gromov. Synthetic geometry in Riemannian manifolds. In *Proceedings of the ICM 1978*, volume 1, pages 415–419, 1978.
- [Gro81] Mikhail Gromov. Curvature, diameter and Betti numbers. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 56(1):179–195, 1981.
- [Gro93] Karsten Grove. Critical point theory for distance functions. In *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, volume 54, 1993.
- [Gro01] Mikhail Gromov. *Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces*. Springer, 2001.
- [Gro02] Karsten Grove. Geometry of, and via, symmetries. *University lecture series-American Mathematical Society*, 27:31–51, 2002.
- [GS77] Karsten Grove and Katsuhiko Shiohama. A generalized sphere theorem. *Annals of Mathematics*, 106(1):201–211, 1977.
- [GS94] Karsten Grove and Catherine Searle. Positively curved manifolds with maximal symmetry rank. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 91(1):137–142, 1994.
- [Hat01] Allen Hatcher. *Algebraic topology*. Cambridge University Press, 2001.
- [Hel79] Sigurdur Helgason. *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces*. Academic Press, 1979.
- [Hir76] Morris W Hirsch. *Differential topology*. Springer, 1976.
- [Hit74] Nigel Hitchin. Harmonic spinors. *Advances in Mathematics*, 14(1):1–55, 1974.
- [HK89] Wu-Yi Hsiang and Bruce Kleiner. On the topology of positively curved 4-manifolds with symmetry. *Journal of Differential Geometry*, 29(3):615–621, 1989.
- [KM63] Michel A Kervaire and John W Milnor. Groups of homotopy spheres I. *Annals of Mathematics*, 77(3):504–537, 1963.
- [Kob95] Shoshichi Kobayashi. *Transformation groups in differential geometry*. Springer, 1995.
- [Lee97] John M Lee. *Riemannian manifolds: An introduction to curvature*, volume 176. Springer, 1997.
- [Lee12] John M Lee. *Introduction to smooth manifolds*. Springer, 2012.
- [Mil63] John W Milnor. *Morse theory*. Princeton University Press, 1963.
- [MS39] Sumner B Myers and Norman E Steenrod. The group of isometries of a Riemannian manifold. *Annals of Mathematics*, 40(2):400–416, 1939.
- [OS94] Yukio Otsu and Takashi Shioya. The Riemannian structure of Alexandrov spaces. *Journal of Differential Geometry*, 39(3):629–658, 1994.

- [Per91] Grigori Perelman. Alexandrov spaces with curvatures bounded from below II. *preprint*, 1991.
- [Per94] Grigori Perelman. Proof of the soul conjecture of Cheeger and Gromoll. *Journal of Differential Geometry*, 40(1):209–212, 1994.
- [Pet06] Peter Petersen. *Riemannian Geometry*. Springer, 2006.
- [Pla96] Conrad Plaut. Spaces of Wald-Berestovskii curvature bounded below. *The Journal of Geometric Analysis*, 6(1):113–134, 1996.
- [PS02] Thomas Püttmann and Catherine Searle. The Hopf conjecture for manifolds with low cohomogeneity or high symmetry rank. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 130(1):163–166, 2002.
- [Rie84] Bernhard Riemann. Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen. In *Gaußsche Flächentheorie, Riemannsche Räume und Minkowski-Welt*, pages 67–83. Springer, 1984.
- [Sha74] Vladimir Sharafutdinov. Complete open manifolds of nonnegative curvature. *Siberian Mathematics Journal*, 1:177–191, 1974.
- [Shi93] Katsuhiko Shiohama. *An introduction to the geometry of Alexandrov spaces*, volume 8. Seoul National University, Research Institute of Mathematics, Global Analysis Research Center, 1993.
- [Spi05] Michael Spivak. A comprehensive introduction to differential geometry, vol. 2. *Nouvelle édition*, 2005.
- [Wal72] Nolan R Wallach. Compact homogeneous Riemannian manifolds with strictly positive curvature. *Annals of Mathematics*, 96(2):277–295, 1972.
- [Wol10] Joseph Wolf. *Spaces of constant curvature*. AMS Chelsea Publishing, 2010.
- [Yau71] Shing Tung Yau. On the fundamental group of compact manifolds of non-positive curvature. *Annals of Mathematics*, 93(3):579–585, 1971.