



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**

FACULTAD DE CIENCIAS

**Enlazamiento de Tres Átomos de dos Niveles
Acoplados en una Cavidad**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

FÍSICO

P R E S E N T A:

JOSÉ GILBERTO AMARO ACEVES



**DIRECTOR DE TESIS:
DR. CARLOS FRANCISCO PINEDA ZORRILLA
2015**

Ciudad Universitaria, D. F.



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Datos del Jurado

1. Datos del alumno
Amaro
Aceves
José Gilberto
55 3245 5878
Facultad de Ciencias
Física
098142581
2. Datos del Asesor
Dr
Pineda
Zorrilla
Carlos Francisco
3. Datos del Sinodal 1
Dra
Jáuregui
Renaud
Rocío
4. Datos del Sinodal 2
Dr

Récamier
Angelini
José Francisco

5. Datos del Sinodal 3

Dr
U'ren
Cortés
Alfred Barry

6. Datos del Sinodal 4

Dr
Rodríguez
Lara
Blas Manuel

Agradecimientos

Agradezco a mi tutor, Dr. Carlos Pineda, por todo lo que implicó dirigirme. Al profesor Thomas Seligman por estimular y proponer esta línea de investigación; al Dr. Mauricio Torres por sus discusiones fructíferas. A los profesores Florian Mintert y André Carvalho, por sentar algunas de las bases de los algoritmos computacionales en los que se desarrolló este trabajo.

A mis Amigos. Y sin duda, a mi familia: a mi madre, mi padre, mi hermana y mi sobrino.

Esta Investigación fue realizada gracias al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) de la UNAM IA101713 Markovianidad y no markovianidad en sistemas cuánticos. Agradezco a la DGAPA-UNAM la beca recibida.

Índice general

1. Introducción	6
2. Conceptos Básicos	9
2.1. Algunos aspectos de mecánica cuántica	9
2.1.1. Preliminares sobre los espacios de Hilbert	10
2.1.2. Reglas de Correspondencia: Postulados	12
2.1.3. Estados Cuánticos: Puros vs Mixtos	14
2.1.4. Enlazamiento, Enredamiento, Enmañaramiento, etc.	17
2.2. Modelos simples de interacción luz-átomo y átomo-átomo	19
2.2.1. Modelo de Jaynes-Cummings-Paul	20
2.2.2. Interacción dipolo-dipolo	21
2.2.3. Interacción de Ising	21
3. Dos átomos en una cavidad	23
3.1. Enlazamiento bipartita	23
3.1.1. Medidas de Enlazamiento	24
3.1.2. Techo Convexo (Convex roof) para la concurrencia	26
3.2. Dos átomos acoplados en una cavidad	27
3.2.1. Hamiltoniano Modelo	27
3.2.2. Dinámica del Sistema	29
3.3. Análisis	32
3.3.1. Estado inicial	32

3.3.2.	Evoluciones de pureza y concurrencia como función del tiempo	32
4.	Tres átomos en una cavidad	45
4.1.	Enredamiento tripartita	45
4.2.	Funciones Monótonas de Enlazamiento (Entanglement monotonos)	47
4.2.1.	Concurrencia para estados mixtos	49
4.2.2.	Concurrencia generalizada	50
4.3.	Aproximación cuasi-pura	54
4.4.	Modelo Generalizado: Tres átomos acoplados en una cavidad .	57
4.4.1.	El hamiltoniano	57
4.4.2.	Operador de Número	58
4.4.3.	Evolución Temporal	60
4.4.4.	Un par de configuraciones particulares	60
5.	Resultados y Conclusiones	62
5.1.	Átomos iguales, resonantes y con interacción	64
5.1.1.	Evoluciones de pureza y concurrencia como función del tiempo	64
5.1.2.	Diagramas CP	70
5.1.3.	Diagrama de Densidad	81
5.2.	Conclusiones	84
A.	Esquema de Interacción	88
B.	Espacios de Hilbert y Productos	90
C.	Artículo aceptado con los resultados de la tesis	92

CAPÍTULO 1

Introducción

Dos de los sistemas físicos que sirven de paradigma en la información y el cómputo cuántico están descritos bajo los nombres de oscilador armónico cuántico y los sistemas de dos niveles o qubits. El primero, descrito completamente por un conjunto numerable de funciones ortogonales, a saber los polinomios de Hermite; el segundo, conformado por un conjunto finito de dos elementos.

Desde la física, la *síntesis*, de ambos sistemas se ha desarrollado ampliamente, aunque no de manera única, en la teoría de la Electrodinámica Cuántica de Cavidades y donde su principal objetivo, según Haroche y Raymond, es aislar e identificar a un sistema cuántico a partir de uno clásico:

“The goal is to isolate an atom in a cavity with highly reflecting walls, the equivalent of a ‘box’ separating it efficiently from the external world. The field is quantized in this box as a set of harmonic oscillators, one of them being resonant or nearly resonant with a transition between two levels of the atom which thus behaves as a spin. The field oscillator cannot be considered independently of the cavity walls which define the mode structure, so that the atom is directly interacting with a macroscopic object, the box which surrounds it. This basic feature of an ideal thought experiment – the coherent

and controlled coupling of a small quantum system with a large classical one – had for a long time been considered as impossible to achieve in practice”[1].

Tres elementos importantes podemos extraer de la cita de Haroche: primero, debemos identificar al sistema físico que queremos analizar; generalmente, esto ocurre en dos episodios: por un lado, se plantean los elementos que van a estar en juego, llamados *subsistemas*, y por otro se eligen las relaciones/vínculos entre ellos, denominados *acoplamientos e interacciones*. Segundo, es importante reconocer que dicho sistema físico está inmerso en un marco más amplio, llamado ambiente, o en palabras de Haroche: *mundo externo* (external world). Tercero, es relevante preguntarse sobre la viabilidad de diseñar experimentalmente a nuestros modelos. A la teoría que estudia los efectos de las interacciones de un sistema físico con el ambiente se le denomina *decoherencia* [2]; mientras que, en el estudio de los acoplamientos/interacciones de más de un sistema físico puede incluirse la teoría del *enlazamiento cuántico* [3]. Se ha mostrado que el enlazamiento es una gran recurso en el cómputo cuántico y cuyo principal enemigo es la decoherencia [4, 5].

Es en este marco el desarrollo de este trabajo, en donde el sistema físico que se ha considerado consiste de tres átomos de dos niveles acoplados a un modo del campo electromagnético cuantizado, junto con dos interacciones adicionales entre aquellos: la primera, de tipo dipolo-dipolo, la segunda de tipo Ising. Una exposición similar la han desarrollado J. M. Torres, E. Sardoní y T. H. Seligman, en su artículo “*Two interacting atoms in a cavity: exact solutions, entanglement and decoherence*”[6]. En él, se consideraron dos átomos idénticos confinados en una cavidad y con las interacciones arriba mencionadas. No hemos descuidado al tercer elemento extraído de la cita de Haroche: es importante señalar que el desarrollo de las cavidades en el régimen óptico y junto con el despliegue del método de las trampas de iones ha ganado interés el sistema de más de un átomo en una cavidad. Las interacciones entre átomos que se presentan, resultan ser experimentalmente accesibles en cavidades ópticas como lo muestran [7, 8]. La interacción de Ising, de manera natural aparece en la Resonancia Magnética Nuclear de estado sólido (Solid-state NMR, por sus siglas en inglés) [9] y podría ser simulado como lo proponen Porras & Cirac [10], Hartmann, et al. [11] y Sorensen & Molmer [12], por otro lado.

El objetivo central de este trabajo es doble: primero, presentar una generalización del modelo descrito en Torres, et al [6]; segundo, modelar numéri-

camente y estudiar el enlazamiento multipartita bajo efectos de decoherencia.

La estructura de la tesis será la siguiente. En el capítulo segundo, se introducen algunos conceptos básicos de la mecánica cuántica en su presentación de *operador de densidad*. Asimismo se define el concepto principal de este capítulo: *enredamiento cuántico multipartita*. Se presentan tanto el modelo simple de interacción luz-átomo como las interacciones de Ising y dipolo-dipolo entre átomos.

El capítulo tercero, será una síntesis los resultados obtenidos en Torres, et al. Para ello, se introducirá el modelo que describe a dos átomos acoplados a una cavidad, con interacciones tipo Ising y dipolo entre aquellos. La versatilidad de los esquemas teóricos es que uno pone los límites del mundo externo; por ejemplo, en el caso de dos sistemas de dos niveles (TLS, por sus siglas en inglés) acoplados a un modo de una cavidad, podemos elegir como sistema central a los dos sistemas TLS conjuntos y como ambiente, a la cavidad. Esto nos permitirá abordar el problema con mayor comodidad así como poder comparar los resultados de ambos enfoques. Se presentarán y utilizarán a la *Pureza* y la *Concurrencia*. [13] como medidas de la decoherencia y enlazamiento respectivamente. Finalmente, se analizará la dinámica conjunta de enlazamiento y decoherencia utilizando el plano *concurrencia vs pureza*.

En el capítulo cuarto, se presentará a nuestro sistema cuántico generalizado de interés: tres átomos acoplados en una cavidad con interacciones tipo Ising y dipolo-dipolo entre aquellos. De manera análoga al caso de dos TLS, nuestro sistema central será los tres átomos de dos niveles, mientras que el ambiente tomará la forma del modo del campo. Se introducirá una generalización de la *concurrencia* para estados mixtos multipartitas estudias por Mintert, et al. [14, 15], como medida de enlazamiento entre los TLS. Se analizará de manera similar al capítulo anterior, la dinámica conjunta de enlazamiento y decoherencia utilizando el plano *concurrencia vs pureza*. Además de incluir un nuevo método de análisis: se presentarán los diagramas de densidad de cada una de las medidas de enlazamiento. En el capítulo 5 se presentarán los principales resultados de nuestro modelo y finalmente se enlistarán las conclusiones.

CAPÍTULO 2

Conceptos Básicos

En este capítulo introducimos algunos conceptos básicos de la mecánica cuántica que sirven de guía y que se usan a lo largo de este trabajo. Se delineará una *presentación* de la mecánica cuántica cuya noción central es la de *operador de densidad*, o como en la literatura se suele llamar: *matriz de densidad*; además de enunciar algunas propiedades en torno a este concepto. Se presenta la definición central de este capítulo: *enlazamiento cuántico* para, finalmente, introducir algunas interacciones básicas entre sistemas de dos niveles y campos.

2.1. Algunos aspectos de mecánica cuántica

Las teorías matemáticas que mayormente conocemos (como el álgebra de grupos, los espacios vectoriales, la lógica de primer orden, la geometría Euclidiana o la teoría de Zermelo-Fraenkel, por citar algunos), son presentadas con una estructura que atiende a alfabetos, fórmulas, definiciones, inferencias o teoremas y que comúnmente son etiquetadas como esquemas axiomáticos. En física generalmente no ocurre lo mismo, quizá porque sus *objetos* de estudio son distintos o porque sus criterios para decidir si una conjetura es *verdadera* o *falsa* no corresponden totalmente a los utilizados en las matemáticas. Sin embargo, sí existen formulaciones en la física que tratan de preservar la orga-

nización de una estructura axiomática: la mecánica cuántica es un ejemplo de ellas. Si bien no en axiomas, en sus *Postulados* se delimitan quiénes son sus objetos de estudio (estados cuánticos), la estructura matemática en donde "viven" dichos estados (espacios de Hilbert), las cantidades físicas legítimas (operadores hermitianos) así como su *dinámica* (operadores unitarios). En la siguiente sección se introducirán los tecnicismos necesarios para formular a la mecánica cuántica en su versión de operador de densidad.

2.1.1. Preliminares sobre los espacios de Hilbert

Canónicamente, la estructura matemática principal que sustenta a la mecánica cuántica es el espacio de Hilbert; de la mano de y en torno a éste se construyen otros objetos como los de operador hermitiano o unitario, base ortonormal, espacio dual, funcional lineal, etc. que sirven para completar el formalismo de la mecánica cuántica. Como se ha mencionado, estas secciones pretenden ser una guía; por ejemplo, se presupondrán la mayoría de los resultados sobre espacios vectoriales con producto interior. A continuación recordaremos algunas nociones del análisis funcional que son mayormente utilizadas en la mecánica cuántica.

Definición 1. Sean \mathcal{H} un espacio vectorial sobre un campo F y $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$ un *producto interior*. Decimos que \mathcal{H} es un *espacio de Hilbert* si y sólo si \mathcal{H} es un espacio métrico completo respecto a la norma inducida por el producto interior; es decir, si toda *sucesión de Cauchy* converge a un elemento de \mathcal{H} .

Una característica importante de los espacios de Hilbert es que es posible caracterizarlos en términos de sus bases. Recordemos que una base para \mathcal{H} es un subconjunto $\Omega \subset \mathcal{H}$, tal que forma un conjunto linealmente independiente y genera a todo \mathcal{H} . La cardinalidad de Ω , se establece, es la dimensión del espacio en cuestión y se denota por $\dim(\mathcal{H})$.

Definición 2. Cualquier mapeo lineal $\hat{T} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ se le denomina *operador*. Al conjunto de todos los operadores sobre \mathcal{H} se denota como $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.

Es posible dotar al propio $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ de una estructura de espacio vectorial y aún más, definir una norma dentro de él. Definimos a la norma de $\hat{T} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ como

$$\|\hat{T}\| := \sup_{\|x\|=1} \|\hat{T}(x)\|, x \in \mathcal{H}.$$

Una vez que se ha definido la norma de un operador, es importante considerar una subclase de operadores denominados acotados. A pesar de que los operadores acotados pueden definirse en términos de mapeos más generales entre dos espacios de Hilbert distintos, es suficiente para nuestro propósito considerar operadores en $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.

Definición 3. Sea $\hat{T} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Decimos que \hat{T} es acotado si y sólo si $\exists M > 0$ tal que $\forall x \in \mathcal{H}$ se cumple

$$\|\hat{T}x\| \leq M\|x\|.$$

Al conjunto de los operadores acotados se le denota como $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Una clase de operadores importantes es la de los operadores *hermitianos* o también llamados *auto-adjuntos*. Para definirlos, atendamos primero la noción del adjunto de un operador.

Definición 4. Para cualquier operador $\hat{T} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, el operador *adjunto* de \hat{T} , denotado por \hat{T}^\dagger , se define de manera implícita bajo la siguiente propiedad,

$$\langle x, \hat{T}y \rangle = \langle \hat{T}^\dagger x, y \rangle, \forall x, y \in \mathcal{H}.$$

Diremos que \hat{T} es auto-adjunto si y sólo si $\hat{T} = \hat{T}^\dagger$.

No olvidemos a la siguiente clase de operadores,

Definición 5. Sea $\hat{U} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, decimos que \hat{U} es *unitario* si y sólo si se cumple que

$$\hat{U}^\dagger \hat{U} = \hat{U} \hat{U}^\dagger = \hat{\mathbf{1}}.$$

Al conjunto de los operadores unitarios lo denotamos por $\mathcal{U}(\mathcal{H})$.

Una consecuencia importante sobre los operadores unitarios es que, si pedimos que $\hat{U} \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$ sea acotado y suprayectivo, entonces tenemos una *isometría*:

$$\langle \hat{U}x, \hat{U}y \rangle = \langle x, y \rangle, \forall x, y \in \mathcal{H}.$$

Finalmente, recordemos una técnica para construir un espacio vectorial nuevo, a partir de uno dado, pero de igual importancia: *el espacio dual*.

Definición 6. Sea \mathcal{H} un espacio vectorial sobre un campo F . Definimos al *espacio dual* de \mathcal{H} , denotado por \mathcal{H}^* , al conjunto de todas las funciones

lineales $\phi : \mathcal{H} \rightarrow F$,

$$\mathcal{H}^* = \{\phi : \mathcal{H} \rightarrow F \mid \phi - \text{lineal}\}.$$

En su propio derecho, el espacio dual tiene una estructura de espacio vectorial, con las operaciones pertinentes. Una operación auxiliar importante es la *traza* de un operador T .

Definición 7. Sea \mathcal{H} un espacio de Hilbert de dimensión finita (infinita) y $\{x_i\}_{i=1}^n$ una base. Sea $\hat{O} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Definimos la operación *Traza de \hat{O}* como:

$$\text{tr}(\hat{O}) := \sum_{i=1}^n \langle x_i, \hat{O}x_i \rangle.$$

Si $\dim(\mathcal{H}) = \infty$, al conjunto de operadores acotados con $\text{tr}(\hat{O}) < \infty$, se les denota por $\mathcal{T}(\mathcal{H})$, la clase de los operadores traza. Aún más, $\mathcal{T}(\mathcal{H}) = \mathcal{B}(\mathcal{H})$, con la condición inicial.

Hasta ahora, hemos recordado algunas definiciones mayormente usadas en los libros de texto de iniciación en mecánica cuántica. En la siguiente sección, presentamos una especie de *álgebra de operadores* pero actuando sobre productos tensoriales de espacios de Hilbert. La importancia de estos espacios es que sirven de modelo básico para la física cuántica de más de un cuerpo o bien, en la información cuántica para modelar múltiples qubits y operaciones sobre ellos, también llamada *sistemas compuestos*.

2.1.2. Reglas de Correspondencia: Postulados

Una vez que se ha presentado el *formalismo matemático*, estamos en condiciones de enunciar las reglas de asociación que identificarán a nuestros conceptos físicos con objetos de nuestro aparato matemático. Estas reglas, son presentadas bajo el nombre de *postulados* [16]. La principal diferencia de esta presentación de los postulados y la de los enlistados en algunos libros de iniciación en mecánica cuántica, es en el énfasis en el uso del operador de densidad. De acuerdo con Heinosaari y Ziman existen distintas formas de representar matemáticamente al espacio de los estados de un sistema cuántico [17]; una representación es la de que los estados están descritos por operadores positivos de traza 1, llamados operadores de densidad [17, 18, 16],

Definición 8. Denotamos por $\mathcal{S}(\mathcal{H})$, al conjunto de los operadores de densidad que cumplen,

$$\mathcal{S}(\mathcal{H}) := \{\hat{\rho} \in \mathcal{T}(\mathcal{H}) | \hat{\rho} \geq 0, \text{tr}[\hat{\rho}] = 1\},$$

donde la condición $\hat{\rho} \geq 0$ indica que $\hat{\rho}$ es un operador positivo: $\langle x, \hat{\rho}x \rangle \geq 0$, para toda $x \in \mathcal{H}$.

Una proposición importante es que la representación de Dirac de los estados cuánticos y la de los operadores de densidad resultan equivalentes; la demostración de dicha equivalencia queda fuera del alcance de esta exposición. La ventaja de los operadores de densidad es que proveen de un lenguaje más conveniente para escenarios más comunes de la mecánica cuántica: como lo son los sistemas compuestos y los estados mixtos [4, 18]. Así, las reglas de correspondencia son las siguientes¹

- *Postulado 1.* Asociado a cualquier sistema aislado existe un espacio vectorial con producto interior, llamado espacio de Liouville. El sistema está completamente descrito por la clase de operadores de densidad. Si un sistema cuántico se encuentra en el estado $\hat{\rho}_i$ con probabilidad p_i , entonces el operador de densidad está dado por $\sum_i p_i \hat{\rho}_i$.
- *Postulado 2.* La evolución de cualquier sistema cuántico *cerrado* está dado por una transformación unitaria. Esto es, el estado $\hat{\rho}_i$ en el tiempo t_i está relacionado al estado $\hat{\rho}_f$ al tiempo t_f por la transformación unitaria \hat{U} que sólo depende de los tiempos t_i y t_f

$$\hat{\rho}_f = \hat{U} \hat{\rho}_i \hat{U}^\dagger. \quad (2.1)$$

- *Postulado 3.* Las mediciones cuánticas están descritas por un conjunto de operadores de medición $\{\hat{M}_m\}$. Estos operadores actúan sobre el espacio del sistema por medir. El índice m se refiere a los resultados que pueden ocurrir en un experimento. Si el estado del sistema cuántico es $\hat{\rho}$, inmediatamente antes de una medición, la probabilidad de que se obtenga el resultado m está dada por

$$p(m) = \text{tr}(\hat{M}_m^\dagger \hat{M}_m \hat{\rho}), \quad (2.2)$$

¹Para un exposición amplia del operador de densidad véanse las siguientes referencias [19, 18].

y el estado resultante después de la medición es

$$\frac{\hat{M}_m \hat{\rho} \hat{M}_m^\dagger}{\text{tr}(\hat{M}_m^\dagger \hat{M}_m \hat{\rho})}. \quad (2.3)$$

Los operadores de medición satisfacen la condición de completéz

$$\sum_i \hat{M}_m^\dagger \hat{M}_m = \hat{\mathbb{1}}. \quad (2.4)$$

- *Postulado 4.* El espacio de estados un sistema físico compuesto es el producto tensorial de los espacios de estado de los sistemas componentes. Aún más, si tenemos n sistemas y el sistema i -ésimo está preparado en el estado $\hat{\rho}_i$, el estado compuesto del sistema total está dado por $\hat{\rho}_1 \otimes \hat{\rho}_2 \otimes \cdots \hat{\rho}_n$.

2.1.3. Estados Cuánticos: Puros vs Mixtos

Hasta ahora se ha presentado a los operadores de densidad como los representantes de nuestros estados cuánticos. Podemos preguntarnos ahora cuál es la relación que existe entre esta formulación y la presentada canónicamente como elementos del espacio de Hilbert. Probablemente la respuesta a esta pregunta se ilustre con la distinción entre estados puros y mixtos. A continuación se hará uso de, además de presuponer, la notación introducida por Dicac de los estados cuánticos, para finalmente proponer los vínculos entre ambas formulaciones de la mecánica cuántica. Vínculo que está dado por el teorema 2.1.1 enunciado en unas líneas más.

La distinción ente estados puros y mixtos está fundamentada en la noción de *ensamble* formulada en la física estadística. Un ensamble es la colección de sistemas físicos aunado con una distribución de probabilidad [20]. La justificación de la inclusión de los ensambles radica, por un lado, en la interpretación estadística de la mecánica cuántica; y, por otro, en la falta de información para especificar el vector de estado pero con el conocimiento de las probabilidades, p_n , de que el sistema está en un estado normalizado $|\psi_n\rangle$ [21, 22]. Bajo estas consideraciones se tomarán las siguientes definiciones:

Definición 9. Diremos que un estado cuántico es *puro* cuando tiene un

vector de estado definido en un sistema; esto es:

$$|\psi\rangle \in \mathcal{H}_A.$$

Definición 10. Consideremos un ensamble de estados puros:

$$\left\{ (|\psi_1\rangle, p_1), \dots, (|\psi_n\rangle, p_n) \right\},$$

donde $|\psi_i\rangle \in \mathcal{H}_A$ es un estado puro con probabilidad p_i para toda $i = 1, \dots, n$. Además,

$$0 \leq p_i \leq 1, \forall i$$

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1.$$

Diremos que un estado es *mixto* cuando es representado por cualquier ensamble que cumpla las condiciones anteriores.

Observemos que cuando el ensamble consta de un solo elemento $\left\{ (|\psi\rangle, p) \right\}$ y $p = 1$, estamos frente a un estado puro. Pasar de la representación de ensambles a un elemento $\hat{\rho} \in \mathcal{T}(\mathcal{H})$ se sigue mediante la siguiente operación. De manera canónica (y con el lenguaje de bras y kets introducido por P. Dirac) se define al *operador de densidad* para estados puros como,

$$\hat{\rho} = |\psi\rangle \langle \psi|. \quad (2.5)$$

Si el vector de estado está descrito como una combinación lineal $|\psi\rangle = \sum_i \alpha_i |\psi_i\rangle$, donde $\{|\psi_i\rangle\}$ es una base para el espacio \mathcal{H} . El operador de densidad está especificado de la siguiente manera,

$$\hat{\rho}_{puro} = \sum_{i,j} \alpha_i \alpha_j^* |\psi_i\rangle \langle \psi_j|. \quad (2.6)$$

Para estados mixtos el operador de densidad, está definido como la combinación convexa siguiente,

$$\hat{\rho}_{mixto} = \sum_{i=1}^n p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|. \quad (2.7)$$

También es posible a partir de un operador de densidad $\hat{\rho}$, llegar a la re-

presentación de ensamble y está basado en siguiente teorema llamado de *descomposición espectral* [17],

Theorem 2.1.1. *Sea $\hat{\rho}$ un operador hermitiano en $\mathcal{S}(\mathcal{H})$, entonces existe un conjunto $\{\lambda_i\} \in \mathbb{R}$ y una base ortonormal $\{\phi_i\}$ tal que*

$$\hat{\rho} = \sum_j \lambda_j |\phi_j\rangle \langle \phi_j|.$$

Una forma de encontrar a dicha descomposición, es mediante el sistema de eigenvectores y eigenvalores de $\hat{\rho}$. Por otro lado, la construcción del operador de densidad para sistemas compuestos es directa; por ejemplo, para el caso bipartita $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$, tenemos que si $|x\rangle = \sum x_{i,j} |\alpha_i\rangle |\beta_j\rangle$, donde $|\alpha_i\rangle$ y $|\beta_j\rangle$ son bases de \mathcal{H}_A y \mathcal{H}_B , respectivamente, el operador resulta ser

$$\hat{\rho}_x = \sum_{i,j=1}^M \sum_{k,l=1}^N \bar{x}_{ij} x_{kl} |\alpha_k\rangle |\beta_l\rangle \langle \alpha_i| \langle \beta_j|.$$

Representar a los estados cuánticos mediante la clase de operadores de densidad tiene, además, una ventaja operacional. Por ejemplo, Nielsen et. al. han dado un criterio para decidir si un operador de densidad es puro o mixto, en términos de la operación traza: $\text{tr}(\hat{\rho}^2) = 1$ si y sólo si $\hat{\rho}$ es un estado puro, en otro caso será mixto [4].

Traza parcial

En la primera sección de este capítulo se introdujo la traza de un operador. Una herramienta importante es la de *traza parcial*. Consideremos un espacio de Hilbert de un sistema compuesto bipartita, $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$, y sea $\hat{\rho}$ un operador en $\mathcal{S}(\mathcal{H})$. La traza parcial de $\hat{\rho}$ sobre el subsistema \mathcal{H}_2 genera un operador que actúa sobre \mathcal{H}_1 , definido como:

$$\hat{\rho}_1 := \text{tr}_2(\hat{A}) \equiv \sum_{k=1}^{d_2} (\hat{I}_1 \otimes \langle b_k|) \hat{\rho} (\hat{I}_1 \otimes |b_k\rangle),$$

donde $d_2 = \dim(\mathcal{H}_2)$, $\{|b_k\rangle\}$ es base ortonormal de \mathcal{H}_2 . El operador $\hat{\rho}_1$ resulta ser un operador de densidad reducido que modela al estado mixto correspondiente al subsistema \mathcal{H}_1 [23].

El operador de densidad reducido es una herramienta que sirve para describir a los subsistemas de un sistema compuesto de manera única; no existe

otro operador que contenga toda la información extraíble del subsistema. Según Nielsen et al, no es completamente obvio que el operador de densidad reducido ρ_A , describe completamente a este sub-estado; sin embargo, la razón física de que se de esta identificación radica en que aquel provee la estadística correcta sobre las mediciones hechas sobre el subsistema A. [pp. 106]

“Why is the partial trace used to describe part of a larger quantum system? The reason for doing this is because the partial trace operation is the unique operation which gives rise to the correct description of observable quantities for subsystems of a composite system [...] Suppose we perform a measurement on system A described by the observable \hat{M} . Physical consistency requires that any prescription for associating a ‘state’, $\hat{\rho}_A$, to system A, must have the property that measurement averages be the same whether computed via $\hat{\rho}_A$ or $\hat{\rho}_{AB}$,

$$\text{tr}(\hat{M}\hat{\rho}_A) = \text{tr}(M\hat{\rho}_{AB}) = \text{tr}((\hat{M} \otimes I_b)\hat{\rho}_{AB}).$$

”[4].

La anterior ecuación se satisface si y sólo si $\hat{\rho}_A = \text{tr}(\hat{\rho}_{AB})$. Así mismo D’Alessandro en la proposición 8.1.3 [24] enuncia todas las características del operador traza parcial, que los hacen ser un operador especial que describe al estado correspondiente al subsistema A.

2.1.4. Enlazamiento, Enredamiento, Enmañaramiento, etc.

Desde la Teoría de la Información Cuántica el *enlazamiento* es considerado como un *recurso* (*resource*) para el procesamiento, transformación y realización de tareas sobre la *información* extraíble de un sistema físico cuántico [21, 4]. Por otro lado, desde un punto de vista algebraico, el enlazamiento es consecuencia del formalismo para sistemas compuestos propio de la mecánica cuántica. Como se vió en la sección 2.1.2, descrita de manera axiomática, la mecánica cuántica alberga en su núcleo al enlazamiento en la versión de estados puros del siguiente postulado:

- *Postulado 5: Estado de un Sistema Compuesto.* El estado de cualquier sistema físico compuesto es especificado, para cada tiempo t , por un

vector de estado $|\Psi(t)\rangle_{A_1\dots A_n} = |A_1\rangle \otimes \dots \otimes |A_n\rangle$ en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}_{A_1,\dots,A_n} = \mathcal{H}_{A_1} \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_{A_n}$; $|\Psi(t)\rangle_{A_1\dots A_n}$ contiene toda la información del sistema. Además, cualquier superposición $|\Phi\rangle = \sum_{i,\dots,j} \bar{c}_{i,j} |A_1\rangle_i \otimes \dots \otimes |B_n\rangle_j$ es también un vector de estado.

Ahora estamos en posición de presentar la definición central de este capítulo: enlazamiento cuántico. Para sistemas multipartitas, $\mathcal{H} = \bigotimes_j \mathcal{H}_j$, el *enlazamiento* está definido en términos de la noción de *separabilidad*:

Definición 11. 1. Se dice que cualquier estado puro multipartita $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}$ es separable si y sólo si puede ser escrito como un producto tensorial de vectores que corresponden a los espacios de Hilbert de cada subsistema:

$$|\Psi\rangle = \bigotimes_j |\Psi_j\rangle. \quad (2.8)$$

2. Para estados mixtos, un estado separable se define como aquel que puede ser escrito como una suma convexa de productos de estados, i. e., productos de estados cada uno actuando sobre un solo sistema:

$$\exists \hat{\rho}_j^{(i)}, p_j \geq 0, \text{ tal que } : \hat{\rho} = \sum_i p_i \hat{\rho}_1^{(i)} \otimes \dots \otimes \hat{\rho}_k^{(i)} = \sum_i p_i \bigotimes_j \hat{\rho}_j^{(i)} \quad (2.9)$$

donde $\hat{\rho}_j^{(i)}$ están definidos localmente en los espacios $\mathcal{S}(\mathcal{H})_j$. Un estado es *enlazado* si y sólo si no es separable, i. e. [3, 15],

$$\nexists \hat{\rho}_j^{(i)}, p_j \geq 0, \text{ tal que } : \hat{\rho} = \sum_i p_i \hat{\rho}_1^{(i)} \otimes \dots \otimes \hat{\rho}_k^{(i)} = \sum_i p_i \bigotimes_j \hat{\rho}_j^{(i)} \quad (2.10)$$

La Geometría de los estados Cuánticos

Los operadores de densidad pueden considerarse como elementos de un espacio vectorial en donde se puede definir el producto interior siguiente,

$$\langle A, B \rangle := \text{tr} A^\dagger B. \quad (2.11)$$

Este espacio es conocido como el espacio *Hilbert – Schmidt*. Los estados separables, dada la definición, forman un conjunto convexo; es decir, dados estados separables $\rho_s^{(1)}$ y $\rho_s^{(2)}$ cualquier parametrización de la recta que los une se encuentra en el conjunto convexo: $\lambda \rho_s^{(1)} + (1 - \lambda) \rho_s^{(2)}$ es convexo.

El hecho de que los estados cuánticos formen conjuntos convexos, tiene una consecuencia notable: es posible generalizar cualquier medida de enlazamiento sobre estados puros a estados mixtos [25].

Una vez presentada la definición de enlazamiento multipartita para estados mixtos, introducimos en la siguiente sección algunos mecanismos físicos que generan enlazamiento.

2.2. Modelos simples de interacción luz-átomo y átomo-átomo

Tras la publicación en 1963 por Edwin Jaynes y Fred Cummings de su (célebre) artículo sobre las interacciones de los modos de un campo con la materia [26] y tiempo más tarde el propio Cummings en 1965 [27], se pondría el inicio de los modelos no-clásicos de interacción de la luz con la materia y se desarrollarían importantes despliegues para la física en general. Por ejemplo, se mostraban fenómenos que no podrían ser predichos o descritos desde el punto de vista de una teoría clásica como el fenómeno de la *emisión espontánea* [28]; servía como idealización del funcionamiento de los láseres [1]; o bien dada su complejidad, pondría en relieve *correlaciones* no clásicas que *debían* ser estudiadas por el enlazamiento del átomo con el modo del campo [29]. En la literatura suele entenderse al modelo de Jaynes-Cummings como al sistema formado por los modos del campo electromagnético cuantizado confinado a una región espacial acotada junto con un conjunto de sistemas de dos niveles.

Una de las discusiones contemporáneas que ha reavivado el interés por el modelo de Jaynes y Cummings está en el contexto del cómputo e información cuántica, y es sobre el desarrollo experimental de los ordenadores cuánticos, o bien sobre las condiciones para realizar operaciones cuánticas [4]. El hamiltoniano que servirá de modelo para la interacción entre átomos de dos niveles y una cavidad cuantizada está constituido por el modelo de Jaynes-Cummings y, adicionalmente, se considerarán dos interacciones entre aquellos: interacción *dipolo-dipolo* e interacción de *Ising*. En las siguientes secciones se describirá, a manera de introducción, cada uno de los hamiltonianos correspondientes a cada interacción.

2.2.1. Modelo de Jaynes-Cummings-Paul

Cuando sólo se considera a un modo del campo y a un sólo sistema de dos niveles, el modelo es denominado de tipo de Jaynes-Cummings, éste también fue desarrollado manera independiente por Harry Paul en 1963 [30]. La forma usual de representar la interacción de un átomo de dos niveles con un modo de radiación del campo eléctrico cuantizado es mediante el siguiente Hamiltoniano independiente del tiempo [28, 31],

$$\hat{H} = \hat{H}_A \otimes \hat{\mathbf{1}}_F + \hat{\mathbf{1}}_A \otimes \hat{H}_F + \hat{H}_{int} \equiv \hat{H}_A + \hat{H}_F + \hat{H}_{int},$$

donde $\hat{H}_A = \frac{\hbar}{2}\omega_a\hat{\sigma}_z$ es el hamiltoniano correspondiente al átomo, $\hat{H}_F = \hbar\omega_c\hat{a}\hat{a}^\dagger$ el hamiltoniano correspondiente al campo y $\hat{H}_{int} = -\vec{d} \cdot \vec{E}(\vec{r}_{cm})$ el hamiltoniano que representa la interacción, donde \vec{r}_{cm} es la posición del centro de masa del átomo, $\vec{E}(\vec{r})$ es un modo del campo electromagnético definido por,

$$\vec{E}(\vec{r}) = i\sqrt{\frac{\hbar\omega_c}{2\epsilon_0V}}(a \exp^{i\vec{k}_c \cdot \vec{r}} \hat{\epsilon} + a^\dagger \exp^{i\vec{k}_c \cdot \vec{r}} \hat{\epsilon}^*), \quad (2.12)$$

ω_a y ω_c corresponden a la frecuencia de transición del átomo y a la frecuencia del modo del campo, respectivamente; $\vec{d} = q\vec{R}$ donde \vec{R} es el operador de posición del electrón y q su carga. Recordemos que $\hat{\sigma}_\pm = \hat{\sigma}_x \pm i\hat{\sigma}_y$ con las matrices de Pauli $\hat{\sigma}_{x,y,z}$. Operadores que pueden representarse como $\sigma_+ = |0\rangle\langle 1|$, $\sigma_- = |1\rangle\langle 0|$ y $\sigma_z = |1\rangle\langle 1| - |0\rangle\langle 0|$ ($|0\rangle$ y $|1\rangle$ son los estados base y excitado del átomo). Además, si definimos como $\wp = q\langle a|\hat{r}|b\rangle$ y $\wp^* = q\langle b|\hat{r}|a\rangle$. Así, $q\hat{R} = \wp\sigma^\dagger + \wp^*\sigma$, asumiendo que $\sigma = |0\rangle\langle 1|$ y $\sigma^\dagger = |1\rangle\langle 0|$. Finalmente,

$$\hat{H}_{int} = \hbar g(\vec{r}_cm)\sigma_+\hat{a} + \hbar g'(\vec{r}_cm)\sigma_-\hat{a} + \hbar g(\vec{r}_cm)\sigma_-\hat{a}^\dagger + \hbar g'(\vec{r}_cm)\sigma_+\hat{a}^\dagger, \quad (2.13)$$

con las siguientes definiciones

$$\begin{aligned} \hbar g(\vec{r}_cm) &= -ig_0 \exp^{i\vec{k}_c \cdot \vec{r}_{cm}} & \hbar g'(\vec{r}_cm) &= -ig_0^1 \exp^{i\vec{k}_c \cdot \vec{r}_{cm}} \\ g_0 &= \sqrt{\frac{\hbar\omega_c}{2\epsilon_0V}} \langle 1|\vec{d}|0\rangle \cdot \hat{\epsilon} & g_0^1 &= \sqrt{\frac{\hbar\omega_c}{2\epsilon_0V}} \langle 0|\vec{d}|1\rangle \cdot \hat{\epsilon}, \end{aligned} \quad (2.14)$$

g_0 es la constante de acoplamiento entre el átomo y el campo. Utilizando la representación de Interacción y asumiendo la aproximación de onda rotante, la cual desprecia a los términos en donde los frecuencias de oscilación son

altas de 2.13, con $\hbar = 1$, el Hamiltoniano ([31, 29]) queda descrito como:

$$\hat{H} = \omega_c \hat{a} \hat{a}^\dagger + \frac{\omega_a}{2} \hat{\sigma}_z + \frac{\Omega}{2} (\hat{a} \hat{\sigma}_+ + \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_-), \quad (2.15)$$

donde se ha omitido la dependencia del centro de masa por simplicidad. Es posible simplificar un poco más el Hamiltoniano anterior, nuevamente utilizando la representación de interacción con el Hamiltoniano de referencia,

$$H_0 = \omega_c \left(\frac{1}{2} \hat{\sigma}_z + \hat{a}^\dagger \hat{a} \right),$$

para finalmente escribir a un Hamiltoniano con dinámica equivalente al inicial

$$H_{JCP} = \delta \hat{\sigma}_z + g (\hat{\sigma}_+ \hat{a} + \sigma_- \hat{a}^\dagger). \quad (2.16)$$

A continuación presentamos a las interacciones que forman una parte importante de nuestro trabajo.

2.2.2. Interacción dipolo-dipolo

En la electrodinámica clásica, tanto el átomo de hidrógeno como átomos de dos electrones pueden ser representados como dos dipolos eléctricos. En donde debemos distinguir el espacio de Hilbert asociado a cada uno de los átomos de hidrógeno, \mathcal{H}_i . En la mecánica Cuántica la interacción entre átomos de dos niveles está descrita con el siguiente hamiltoniano [32]:

$$\hat{H} = 2\kappa_{1,2} (\hat{\sigma}_-^{(1)} \hat{\sigma}_+^{(2)} + \hat{\sigma}_+^{(1)} \hat{\sigma}_-^{(2)}) + \dots + 2\kappa_{N-1,N} (\hat{\sigma}_-^{N-1} \hat{\sigma}_+^N + \hat{\sigma}_+^{N-1} \hat{\sigma}_-^N), \quad (2.17)$$

donde $\hat{\sigma}_+^{(i)}$, $\hat{\sigma}_-^{(i)}$ son los operadores de ascenso y descenso para cada átomo i , κ la intensidad de la interacción. Una interpretación de esta interacción ente átomos sería, por ejemplo, el *intercambio* local de estados base a estados excitados y viceversa, de ahí el nombre de dipolo.

2.2.3. Interacción de Ising

El modelo de Ising fue propuesto desde la física estadística para explicar las transiciones de fase que ocurren cuando una variación pequeña de una variable (como la temperatura o presión), causa un cambio a gran escala del estado de un sistema físico (Cipra, 1987). Para los sistemas ferromagnéticos,

por ejemplo, el modelo de Ising es descrito por una red de átomos en donde sólo se permiten interacciones entre átomos vecinos. El hamiltoniano que representa a dicha aproximación está dado por,

$$\hat{H} = -J \sum_{i < j} \hat{\sigma}_z^{(i)} \hat{\sigma}_z^{(j)}, \quad (2.18)$$

donde $\hat{\sigma}_z^{(i)}$ es el operador de Pauli correspondiente al átomo i -ésimo.

De manera conjunta es posible presentar un Hamiltoniano lo suficientemente general, que englobe a una familia de sistemas físicos que han sido solubles analíticamente; por ejemplo, para recuperar al modelo de Jaynes-Cummings basta proponer que las intensidades de las interacciones entre los átomos tienden a cero, el modelos de Paul se obtiene nuevamente al hacer las interacciones de Ising y dipolo-dipolo cero además de sólo considerar un modo del campo y un sólo átomo. El Hamiltoniano con las interacciones arriba mencionadas tendría la forma siguiente,

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \sum_{i=1}^N \delta_i \hat{\sigma}_z^{(i)} + g_i \{ \hat{a} \hat{\sigma}_+^{(i)} + \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_-^{(i)} \} + 2 \sum_{i \neq j=1}^N \kappa_{i,j} \{ (\hat{\sigma}_-^{(i)} \hat{\sigma}_+^{(j)} + \text{h.c.}) \} \\ & + \sum_{i < j}^N J_{i,j} \{ \hat{\sigma}_z^{(i)} \hat{\sigma}_z^{(j)} \}, \end{aligned} \quad (2.19)$$

donde δ_i es la desintonía correspondiente a cada átomo, g_i el acoplamiento de cada átomo al modo del campo, $\kappa_{i,j}$ y $J_{i,j}$ las intensidades de las interacciones entre átomos de tipo dipolo-dipolo e Ising, respectivamente. Además de ser un problema teórico interesante por sí mismo ya que representa un reto encontrar sus soluciones analíticas y, un gasto computacional si se busca una solución numérica, la inclusión de las interacciones arriba mencionadas tiene una contraparte experimental, en donde el desarrollo de las cavidades en el régimen óptico y junto con el despliegue del método de las trampas de iones ha ganado interés el sistema de más de un átomo en una cavidad.

CAPÍTULO 3

Dos átomos en una cavidad

El objetivo de este capítulo será el dar una síntesis los resultados obtenidos en [6] e introducir algunas herramientas y conceptos que utilizaremos en subsecuentes capítulos. Para ello, se introducirá el modelo que describe a dos átomos acoplados a una cavidad, con interacciones tipo Ising y dipolo entre aquellos. Se presentarán y utilizarán a la *pureza* y la *conurrencia* [13] como medidas de la decoherencia y enlazamiento respectivamente. Finalmente, se analizará la dinámica conjunta de enlazamiento y decoherencia utilizando el plano concurrencia *vs* pureza (plano *CP*).

3.1. Enlazamiento bipartita

En el capítulo anterior se dieron las definiciones de enlazamiento para estados puros y mixtos multipartitas. Ahora se atenderá al caso más estudiado en la literatura de enlazamiento: el bipartita.

Diremos que un sistema, $|\Psi\rangle$, es bipartita cuando se compone de dos subsistemas físicos distintos [33]. Esta idea se formula matemáticamente del modo siguiente: consideremos un espacio de Hilbert $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$; los espacios \mathcal{H}_A y \mathcal{H}_B representan a los subsistemas físicos.

Tomando la idea discutida en la sección 2.1.4, vemos que $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}$, un estado puro, es *separable* si y sólo si puede escribirse como el producto tensorial

de dos estados $|\psi\rangle$ y $|\phi\rangle$, tales que $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_A$, $|\phi\rangle \in \mathcal{H}_B$,

$$|\Psi\rangle = |\psi\rangle \otimes |\phi\rangle. \quad (3.1)$$

Un estado puro es *enlazado* si y sólo si no es separable.

Para los estados mixtos, la noción de separabilidad como la descomposición en productos tensoriales no es suficiente para caracterizar el enlazamiento. Será necesario apelar al concepto de convexidad. En el caso de estados mixtos, $\rho \in S(\otimes_{i=1}^2 \mathcal{H}_i)$ es separable si es la suma convexa de estados factorizables

$$\rho = \sum_i p_i (\rho_i^{(1)} \otimes \rho_i^{(2)}). \quad (3.2)$$

Un estado mixto es *enlazado* si no es separable.

3.1.1. Medidas de Enlazamiento

En esta sección se presentarán dos medidas de enlazamiento útiles para nuestro propósito: la *pureza* y la *conurrencia*. Ambas medidas, están definidas sobre sistemas bipartitas; sin embargo, deben considerarse dos formas distintas de tomar las particiones; esto nos permitirá analizar dos aspectos distintos del mismo modelo. Para el primer caso, la partición está dada entre el sistema central y el ambiente; para el segundo, la partición estará dada en términos de los subsistemas asociados a cada átomo de dos niveles.

Pureza

La *pureza* fue introducida por Zurek en [34] como una medida del grado de mezcla de un sistema físico, representado por una matriz de densidad ρ . Aquella se define como,

$$\mathcal{P}(\rho) = \text{tr}[\rho^2]. \quad (3.3)$$

La *pureza* es una función definida en el conjunto de matrices de densidad a los reales semi-positivos, $\mathbb{R}^{0,+}$; además, alcanza su máximo, a saber 1, cuando el estado es puro; mientras que, cuando actúa sobre un estado mixto, la pureza es distinta de 1 y está acotada por debajo por $1/d$, donde d es la dimensión del espacio de Hilbert asociado al sistema cuántico [35]. Para nuestro análisis, la *pureza* servirá como una medida de enlazamiento entre nuestro sistema central (los dos átomos de dos niveles) y el ambiente (cavidad). Ésta también será interpretada como una medida de decoherencia.

Concurrencia

De acuerdo con Mintert [14] la concurrencia era una cantidad auxiliar para el cálculo de la medida de enlazamiento denominada enlazamiento de formación. Aquella adquirió independencia como medida y se definía a partir de los *estados de Bell*, $|\phi^\pm\rangle = (|00\rangle \pm |11\rangle)/\sqrt{2}$ y $|\psi^\pm\rangle = (|01\rangle \pm |10\rangle)/\sqrt{2}$:

$$\begin{aligned} |e_1\rangle &= (|00\rangle + |11\rangle)/\sqrt{2}, & |e_2\rangle &= i(|00\rangle - |11\rangle)/\sqrt{2}, \\ |e_3\rangle &= i(|01\rangle + |10\rangle)/\sqrt{2}, & |e_4\rangle &= (|01\rangle - |10\rangle)/\sqrt{2}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

La *concurrencia* para estados puros bipartitas, $|\psi\rangle$ está definida como

$$\mathcal{C}(|\psi\rangle) = \left| \sum_i \langle e_i | \psi \rangle^2 \right|. \quad (3.5)$$

Si desarrollamos explícitamente la suma anterior obtenemos una forma equivalente,

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(|\psi\rangle) &= \left| \sum_i \langle e_i | \psi \rangle^2 \right| \\ &= \left| \sum_i \langle \psi^* | e_i^* \rangle \langle e_i | \psi \rangle \right| \\ &= \left| \langle \psi^* | 1/2(|00\rangle + |11\rangle)(\langle 00| + \langle 11|) + 1/2(|00\rangle - |11\rangle)(\langle 00| - \langle 11|) \right. \\ &\quad \left. + 1/2(|01\rangle + |10\rangle)(\langle 01| + \langle 10|) + 1/2(|01\rangle - |10\rangle)(\langle 01| - \langle 10|) | \psi \rangle \right| \\ &= \left| \langle \psi^* | \sigma_z^{(1)} \otimes \sigma_z^{(2)} | \psi \rangle \right|, \end{aligned} \quad (3.6)$$

donde $\langle \psi^* |$ indica el conjugado transpuesto de $|\psi\rangle$ en la base $|00\rangle, |10\rangle, |01\rangle, |11\rangle$ (y no el estado adjunto de $|\psi\rangle$). En la última igualdad se utiliza el hecho de que el operador de Pauli $\hat{\sigma}_z = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|$, además de que,

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_z \otimes \hat{\sigma}_z &= (|0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|) \otimes (|0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|) \\ &= (|0\rangle\langle 0|) \otimes (|0\rangle\langle 0|) - (|0\rangle\langle 0|) \otimes (|1\rangle\langle 1|) \\ &\quad - (|1\rangle\langle 1|) \otimes (|0\rangle\langle 0|) + (|1\rangle\langle 1|) \otimes (|1\rangle\langle 1|). \end{aligned} \quad (3.7)$$

La forma de la concurrencia descrita en 3.6 es importante para el desarrollo de una generalización de la concurrencia que se describe en el capítulo siguiente. Necesitamos ahora de una definición de la concurrencia para es-

tados mixtos. Ésta se define a través de la noción de convex roof (techo convexo), i.e. calculando el promedio máximo del enlazamiento sobre todos los ensambles consistentes con la matriz de densidad con la que partimos. En la siguiente sección se describirá dicha construcción.

3.1.2. Techo Convexo (Convex roof) para la concurrencia

En [14, 15] se describe detalladamente una forma, alternativa a la propuesta por Koffnam, Kundo y Wooters [36], para el cálculo del convex roof de la concurrencia para sistemas de 2×2 . Su principal resultado es una derivación simple de la fórmula cerrada. Veamos rápidamente en qué consiste dicho cálculo. Consideremos un estado mixto $\hat{\rho} \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$ y su descomposición espectral, $\hat{\rho} = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|$, $p_i > 0$. El convex roof para la concurrencia estará dado por,

$$C(\hat{\rho}) = \inf_{p_i, |\Psi_i\rangle} \sum_i p_i C(|\Psi_i\rangle), \quad (3.8)$$

en ínfimo se toma sobre todas las descomposiciones posibles de $\hat{\rho}$. Recordemos que para una función $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ el $\inf_M = f(x) : x \in M$. En nuestro caso f es la concurrencia y $M = \mathcal{S}(\mathcal{H})$. Dos propiedades son relevantes acá. La concurrencia es una función continua y convexa, y el conjunto de los estados cuánticos es convexo. Estas dos propiedades implican que el ínfimo en realidad es un mínimo; es decir, si la concurrencia tiene como dominio al conjunto de estados cuánticos, existe una descomposición de $\hat{\rho}$ en donde se alcanza el mínimo.

Una herramienta adicional es considerada para dicho cálculo: proponer una forma sistemática de recuperar todas las descomposiciones relevantes de $\hat{\rho}$. El algoritmo inicia con la descomposición en términos de los eigenvalores y eigenvectores del operador de densidad, denotados por $\{|\Psi_i\rangle, \mu_i\}$, respectivamente. Así, definimos a los estados subnormalizados como aquellos estados de la forma $\{|\psi_i\rangle = \sqrt{\mu_i} |\Psi_i\rangle\}$ (aunque no es necesario partir del eigensistema, sólo basta con conocer alguna descomposición de $\hat{\rho}$). Si consideramos ahora las transformaciones laterales por la izquierda $\sum_i V_{ki}^\dagger V_{ij} = \delta_{jk}$, es posible generar nuevos ensambles [14],

$$|\phi_i\rangle = \sum_j V_{ij} |\psi_i\rangle. \quad (3.9)$$

En el capítulo siguiente se pondrá énfasis en la importancia de los estados subnormalizados para el cálculo de la concurrencia generalizada. Lo que debemos destacar en este punto es que es posible mostrar que la concurrencia para estados mixtos tiene la fórmula cerrada siguiente

$$\mathcal{C}(\hat{\rho}) = \max\{0, \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4\}, \quad (3.10)$$

donde los λ_i son los eigenvalores de la matriz $\sqrt{\rho(\sigma_y^{(1)} \otimes \sigma_y^{(2)})\rho^*(\sigma_y^{(1)} \otimes \sigma_y^{(2)})}$, ordenados de forma no creciente, i.e. $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \lambda_4$, con la matriz de Pauli $\sigma_y^{(i)}$ correspondiente a cada subsistema.

La concurrencia será nuestra medida de enlazamiento *interna*: cuantificará el enlazamiento interno entre los dos átomos de dos niveles. La concurrencia es también una función acotada; alcanza el máximo de 1 para estados de Bell, y el mínimo de 0 para estados separables.

3.2. Dos átomos acoplados en una cavidad

En la siguiente sección se presentarán dos análisis en torno al sistema físico compuesto por dos sistemas de dos niveles acoplados en una cavidad. En el primer análisis se expondrán cualitativamente los grados de enlazamiento entre la cavidad, que servirá de *ambiente* y los dos sistemas, llamados también *qubits*; la medida de enlazamiento que caracterizará este primer análisis será la *pureza*. El segundo análisis, consistirá en el cálculo (*numérico*) del enlazamiento interno de los qubits al evolucionar con el ambiente; la *concurrencia* será nuestra medida que servirá de criterio. Es posible comparar la evolución de ambas cantidades en un plano de concurrencia versus pureza, plano *CP*, procedimiento que se ahondará en la última sección.

3.2.1. Hamiltoniano Modelo

En el capítulo anterior, se presentó el modelo físico a tratar. Recordémoslo nuevamente,

$$\begin{aligned} \hat{H} = \sum_{j=1}^2 \{ \delta_j \sigma_z^{(j)} + g_j (\hat{a} \sigma_+^{(j)} + \hat{a}^\dagger \sigma_-^{(j)}) \} + 2\kappa (\sigma_-^{(1)} \sigma_+^{(2)} + \sigma_+^{(1)} \sigma_-^{(2)}) \\ + J \sigma_z^{(1)} \sigma_z^{(2)}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Hablemos un poco de la estructura matemática del operador \hat{H} . Éste actúa sobre el espacio compuesto $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\text{osc}} \otimes (\mathcal{H})^{\otimes 2}$ con $(\mathcal{H})^{\otimes 2} = \mathcal{H}_{q,1} \otimes \mathcal{H}_{q,2}$. \mathcal{H}_{osc} es el espacio de Hilbert correspondiente al oscilador armónico (de dimensión infinita) y $\mathcal{H}_{q,i}$ es el espacio de Hilbert asociado a cada uno de los subsistemas que contiene a los qubits (dimensión 2).

Consideremos ahora al operador definido por

$$\hat{I} = \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2}(\sigma_z^{(1)} + \sigma_z^{(2)}). \quad (3.12)$$

Nótese que $[\hat{H}, \hat{I}] = 0$ [6]. La interpretación física del operador \hat{I} es que ‘mide’ el número de excitaciones dentro del sistema. Así, estamos en condiciones de elegir un sistema de vectores propios compartidos para los operadores \hat{H} e \hat{I} .

Denotemos por $\{|n\rangle\}$ una base ortonormal para el espacio del oscilador y por $\{|ij\rangle\}$ con $j, i \in \{0, 1\}$ una base para el espacio de los qubits. Elijamos la base natural para el espacio compuesto: $\{|n\rangle \otimes |ij\rangle\}$. Los estados físicos que representan esta base son aquellos en donde hay n fotones en la cavidad y además los qubits se encuentran en los estados base o excitado, $|0\rangle$ y $|1\rangle$ respectivamente.

A pesar de que dicha base es infinita numerable, podemos elegirla de manera que la matriz asociada al operador \hat{I} , sea diagonal por bloques. Con esto en mente, tomemos el siguiente conjunto

$$|\phi_1^{(n)}\rangle = |n+1\rangle|00\rangle \quad |\phi_2^{(n)}\rangle = |n\rangle|01\rangle \quad (3.13)$$

$$|\phi_3^{(n)}\rangle = |n\rangle|10\rangle \quad |\phi_4^{(n)}\rangle = |n-1\rangle|11\rangle. \quad (3.14)$$

con la propiedad adicional que

$$\hat{I}|\phi_i^{(n)}\rangle = n|\phi_i^{(n)}\rangle.$$

Con esta misma elección, dada n , el hamiltoniano \hat{H} , también puede escribirse en bloques, cada uno de ellos teniendo la forma siguiente:

$$H^{(n)} = \begin{pmatrix} J - \delta_1 - \delta_2 & g_2\sqrt{n+1} & g_1\sqrt{n+1} & 0 \\ g_2\sqrt{n+1} & \delta_2 - \delta_1 - J & g_1\kappa & g_1\sqrt{n} \\ g_1\sqrt{n+1} & 2\kappa & \delta_1 - \delta_2 - J & g_2\sqrt{n} \\ 0 & g_1\sqrt{n} & g_2\sqrt{n} & J + \delta_1 + \delta_2 \end{pmatrix}, \quad (3.15)$$

donde los elementos matriciales están dados por $H_{jk}^{(n)} \equiv \langle \phi_j^{(n)} | H | \phi_k^{(n)} \rangle$. La

matriz “completa” por bloques estaría dada, en esta base, por

$$H = \begin{pmatrix} H^{(0)} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & H^{(1)} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & H^{(2)} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \quad (3.16)$$

3.2.2. Dinámica del Sistema

Una vez que se ha planteado a la matriz diagonal por bloques H , el siguiente paso es encontrar los eigenvalores de aquella; esto resulta equivalente a diagonalizar cada cada bloque $H^{(n)}$, es decir, el problema se reduce a diagonalizar una matriz de dimensión 4×4 . En [6] se han presentado fórmulas cerradas para el problema de eigenvalores anterior y han se caracterizado a todos los vectores propios mediante la siguiente fórmula,

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_{l=1}^4 B_l^{(n)}(t) |\phi_l^{(n)}\rangle, \quad (3.17)$$

donde $B_l^{(n)}(t)$ está dado por,

$$B_l^{(n)}(t) = \sum_{l,j}^4 V_{l,j}^{(n)} e^{-iE_j^{(n)}t} \left(V_{2,j}^{(n)} \cos(\alpha) + V_{2,j}^{(n)} \sin(\alpha) \right). \quad (3.18)$$

Las matrices $V_{l,j}^{(n)}$ son las transformaciones ortogonales que diagonalizan a la matriz $H^{(n)}$ y están formuladas en términos de los eigenvectores de \hat{H} , denotados por $E_j^{(n)}$.

Cada eigenvector se podrá reescribir como

$$E_j^{(n)} = \begin{cases} -\frac{\sqrt{U+R}}{2} + \frac{(-1)^j}{2} \sqrt{2R - U + \frac{Q}{\sqrt{R+U}}}, & j = 1, 2 \\ +\frac{\sqrt{U+R}}{2} + \frac{(-1)^j}{2} \sqrt{2R - U - \frac{Q}{\sqrt{R+U}}}, & j = 3, 4, \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
P &= (\delta_1^2 - \delta_2^2 + (n+1)(g_1^2 - g_2^2)) (\delta_1^2 - \delta_2^2 + (n)(g_1^2 - g_2^2)) \\
&\quad + J^2 \left((2n+1)(g_1^2 + g_2^2) - 2(\delta_1^2 + \delta_2^2) - 2(\delta_1^2 - \delta_2^2) + J^4 - 4\kappa^2 \right) \\
&\quad + 2J \left(g_1^2 \delta_1^2 + g_2^2 \delta_2^2 + 2(2n+1)\kappa g_1 g_2 \right) + 4\kappa(\delta_1 + \delta_2)(g_1 g_2 + \kappa(\delta_1 + \delta_2)), \\
Q &= 4 \left(g_1^2 \delta_2 + g_2^2 \delta_1 + 4J(\kappa - \delta_2 \delta_1) - 2(2n+1)\kappa g_1 g_2 \right), \\
R &= 2/3 \left((2m+1)(g_1^2 + g_2^2) + 2(\delta_1^2 + \delta_2^2 + J^2) + 4\kappa^2 \right), \\
S &= 2PR + \frac{Q^2 - R^3}{8}, \\
T &= \frac{4P}{3} + \frac{R^2}{4}, \\
U &= \left(S + \sqrt{S^2 - T^3} \right)^{1/3} + \left(S - \sqrt{S^2 - T^3} \right)^{1/3}.
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Finalmente, se definen a los vectores sin normalizar

$$\begin{aligned}
v_{1,j}^{(n)} &= (E_j^{(n)} - \delta_1 - \delta_2 - J) \times \\
&\quad \left((E_j^{(n)} + J)^2 - n(g_1^2 + g_2^2) - (\delta_1 - \delta_2)^2 - 4\kappa^2 \right) - \\
&\quad 2n \left((\delta_1 + J)g_2^2 + \delta_2 + J)g_1^2 + 2\kappa g_1 g_2 \right), \\
v_{2,j}^{(n)} &= \sqrt{n-1} \left(2\kappa g_1 (E_j^{(n)} - \delta_1 - \delta_2 - J) + \right. \\
&\quad \left. g_2 \left((E_j^{(n)} - \delta_1)^2 + n(g_1^2 - g_2^2) - (\delta_2 + J)^2 \right) \right), \\
v_{3,j}^{(n)} &= \sqrt{n-1} \left(2\kappa g_2 (E_j^{(n)} - \delta_1 - \delta_2 - J) + \right. \\
&\quad \left. g_1 \left((E_j^{(n)} - \delta_2)^2 + n(g_2^2 - g_1^2) - (\delta_1 + J)^2 \right) \right), \\
v_{4,j}^{(n)} &= \sqrt{n(n+1)} \left(2g_1 g_2 (E_j^{(n)} + J) + 2\kappa (g_1^2 + g_2^2) \right).
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Las matrices que diagonalizan a $H^{(n)}$, las denotamos del modo siguiente

$$V_{l,j}^{(n)} = \frac{v_{l,j}^{(n)}}{\left(\sum_j (v_{l,j}^{(n)})^2 \right)^{1/2}}. \tag{3.21}$$

Las ecuaciones anteriores resultan de la elección de aquellos estados que

preservan el número de excitaciones del sistema[6],

$$|\psi_0\rangle = (\cos \alpha|10\rangle + \sin \alpha|01\rangle). \quad (3.22)$$

A partir de la ecuación 3.17, es posible construir la matriz de densidad de todo el sistema mediante el producto exterior: $\rho(t) = |\psi(t)\rangle \langle\psi(t)|$. Si aplicamos el operador traza parcial sobre los grados de libertad de la cavidad, se calcula la matriz de densidad reducida de los dos átomos de dos niveles. El cálculo explícito de esta matriz se encuentra en [6] y depende de los coeficientes $B_l^{(n)}(t)$,

$$\rho = \begin{pmatrix} |B_1^{(n)}|^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & |B_2^{(n)}|^2 & (B_3^{(n)})^* B_2^{(n)} & 0 \\ 0 & (B_2^{(n)})^* B_3^{(n)} & |B_2^{(n)}|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & |B_4^{(n)}|^2 \end{pmatrix}. \quad (3.23)$$

Finalmente el sistema central evolucionará con el operador unitario generado por el hamiltoniano escrito en (3.11), $\hat{U} = e^{-it\hat{H}}$; mientras que, el estado de los dos qubits para toda t será

$$\rho(t) = \text{tr}_{\text{osc}} e^{-it\hat{H}} |\psi_0\rangle \langle\psi_0| e^{it\hat{H}}. \quad (3.24)$$

En las siguientes líneas se expondrán algunos resultados cualitativos obtenidos por Torres, Sadurní y Seligman en [6]; sin embargo, el cálculo de las evoluciones de las siguientes funciones no fueron explorados con las fórmulas cerradas de aquellos, sino que se efectuaron en el esquema de programación dinámica *Mathematica*. Allí se definieron las funciones básicas como la evolución temporal en el esquema de Schrödinger, el producto exterior, la pureza, la concurrencia, etc. La importancia de estas evoluciones es doble, al menos: primero, podemos verificar la consistencia entre los resultados de Torres y los desarrollados con nuestras funciones y, segundo, podemos extender el análisis numérico al sistema generalizado que nos interesa y que se expondrá en el capítulo siguiente.

3.3. Análisis

3.3.1. Estado inicial

La idea central de esta sección es describir cualitativamente el enlazamiento y la pureza de los dos átomos acoplados a un modo de la cavidad, que servirá como ambiente del sistema. Nuestro sistema central e inicial será el estado producto de dos átomos y el modo de la cavidad. La familia de estados iniciales se elegirá con la propiedad de que pertenezca al subespacio generado por un eigenvalor definido para el operador \hat{I} . Así, el esquema de estados iniciales corresponderá al estado normalizado producto n fotones en la cavidad y la superposición de estados iniciales $|01\rangle$ y $|10\rangle$,

$$|\Psi^{(n)}(\alpha)\rangle = |n\rangle(\cos(\alpha)|01\rangle + \sin(\alpha)|10\rangle). \quad (3.25)$$

Dicha parametrización nos permitirá obtener una familia de estados, que podrán distinguirse entre aquellos que se encuentran máximamente enlazados ($\alpha = \pi/4$), aquellos separables ($\alpha = 0$) o intermedios.

3.3.2. Evoluciones de pureza y concurrencia como función del tiempo

Primer Familia de Estados Iniciales

Como punto inicial de análisis se propone el caso *simétrico*: iguales parámetros de acoplamiento con la cavidad ($g_1 = g_2 = 1$), sin *sintonía* ($\delta_1 = \delta_2 = \delta = 0$), pero permitiendo interacciones de tipo dipolo-dipolo e Ising. Para indicar los valores de las interacciones utilizados en el Hamiltoniano 3.11, utilizaremos la siguiente notación con subíndices para el caso del Hamiltoniano homogéneo simétrico,

$$\begin{aligned} \hat{H}_{\kappa,J} := & \sum_{j=1}^2 \{(\hat{a}\sigma_+^{(j)} + \hat{a}^\dagger\sigma_-^{(j)})\} + 2\kappa(\sigma_-^{(1)}\sigma_+^{(2)} + \sigma_+^{(1)}\sigma_-^{(2)}) \\ & + J\sigma_z^{(1)}\sigma_z^{(2)}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Como medida de enlazamiento entre los dos qubits con la cavidad, se utilizará a la pureza. La elección de esta medida es por simplicidad operacional, sabemos que la pureza tiene una cota inferior que depende de la dimensión

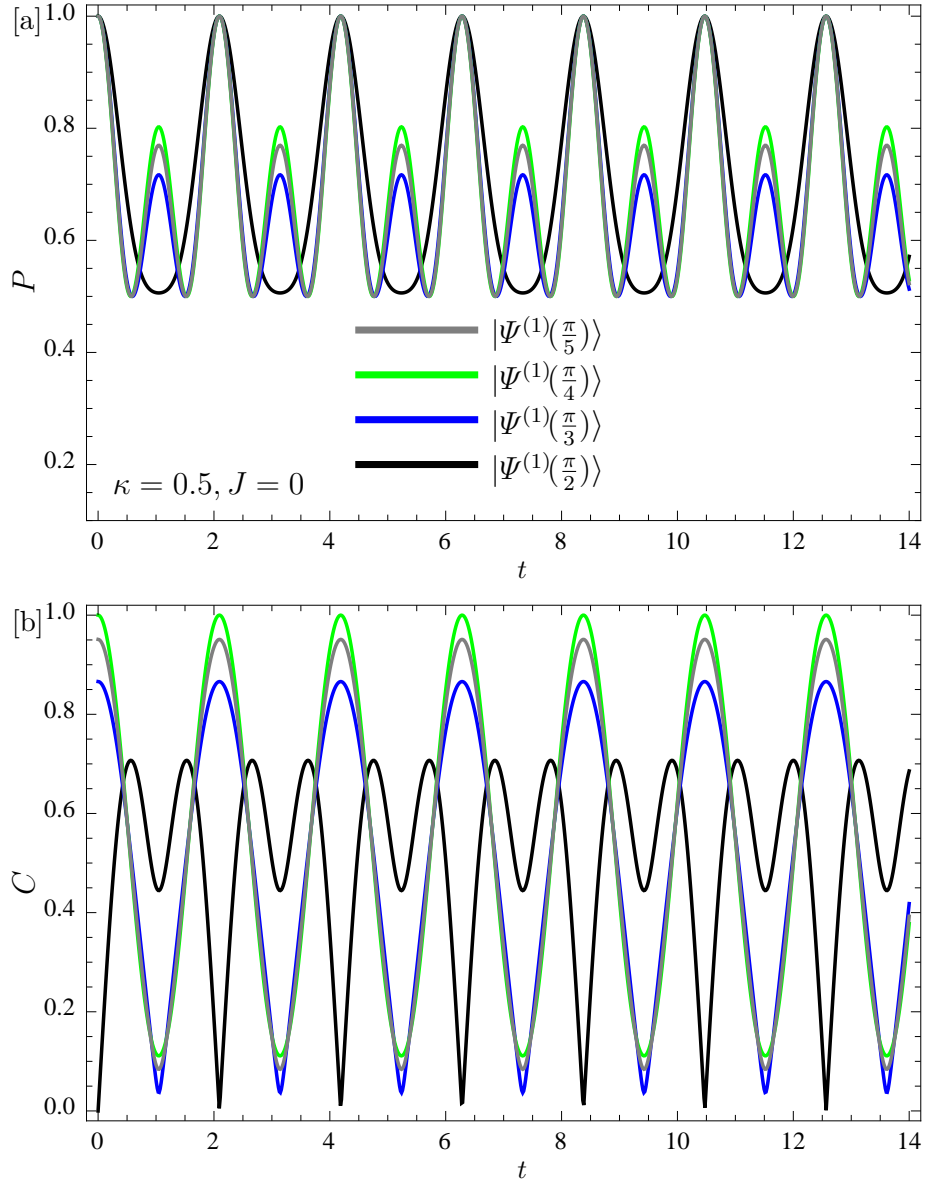


Figura 3.1: Gráficas de las evoluciones de la pureza, $P(t)$, y concurrencia, $C(t)$, como función del tiempo para los estados iniciales de la forma $|\Psi^{(n)}(\alpha)\rangle$, con $\alpha \in \{\frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\}$. En [a] se muestran las gráficas de la evoluciones de la pureza, $P(t)$, y en [b] se presenta la dinámica de la concurrencia $C(t)$. El valor de las interacciones son $\kappa = 0.5$ y $J = 0$. Ambas evoluciones muestran oscilaciones periódicas en t . Se han considerado cantidades adimensionales.

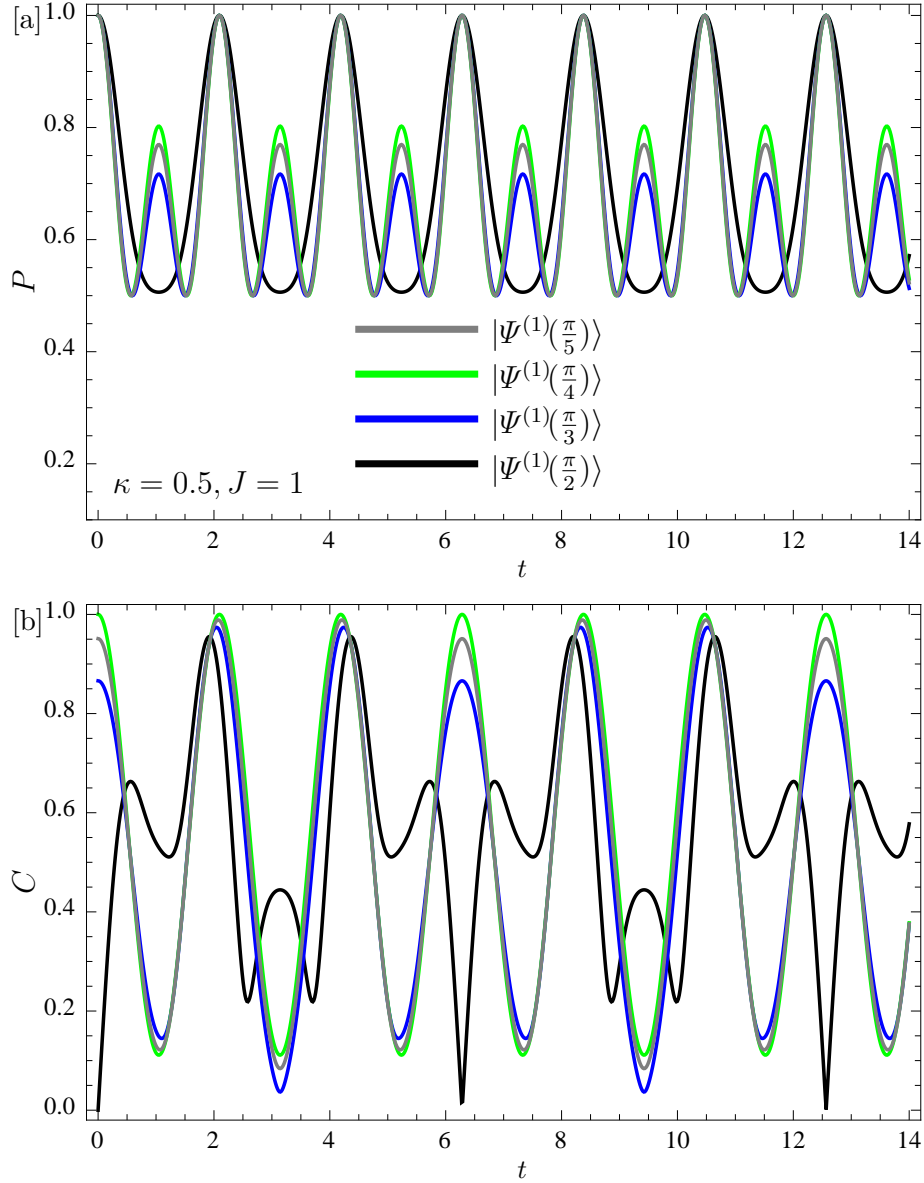


Figura 3.2: Dinámicas de la pureza [a] y concurrencia [b] en función del tiempo para los mismos estados iniciales que en la figura 3.1, pero ahora se considera a la interacción de Ising $J = 1$. La evolución de la pureza [a] se asemeja mucho al caso sin interacción de Ising 3.1[a]; la dinámica de la concurrencia muestra periodos de oscilación más largos que el caso 3.1[b].

del espacio de Hilbert asociado a la matriz de densidad reducida. En nuestro análisis, la dimensión de dicho espacio es de 4. Por tanto, la pureza estará acotada por $1/4 \leq P \leq 1$. En este contexto la pureza adquiere la forma genérica siguiente,

$$P(\rho) = \text{tr}(\text{tr}_{\text{osc}} \rho)^2. \quad (3.27)$$

La concurrencia, quien será nuestra medida interna de enlazamiento, tendrá la forma dependiente del tiempo,

$$C(t) = C(\rho(t)) = C(\text{tr}_{\text{osc}} \rho(t)). \quad (3.28)$$

En la figura 3.1 se ilustran las dinámicas de la pureza y concurrencia de cuatro estados iniciales: todas las curvas representan a dos átomos bajo las mismas condiciones iniciales sin que esté presente la interacción de Ising entre ellos, es decir $J = 0$, además de que la interacción dipolo-dipolo es $\kappa = 0.5$. La curva en negro representa al caso de $|\Phi^{(n)}(\frac{\pi}{2})\rangle$, con concurrencia inicial cero; la curva en azul representa al estado inicial $|\Phi^{(n)}(\frac{\pi}{3})\rangle$; la curva en verde al estado $|\Phi^{(n)}(\frac{\pi}{4})\rangle$, mientras que la curva gris representa al estado inicial $|\Phi^{(n)}(\frac{\pi}{5})\rangle$. En la figura 3.1[a] las dinámicas de la pureza muestran patrones oscilatorios, con periodos bien definidos, alcanzando su máximo local en los mismos puntos del dominio. Se observa que todos los estados son inicialmente puros. En la figura 3.1[b] las evoluciones de la concurrencia son presentadas. En ellas también se muestran patrones de oscilación más complejos que en las evoluciones respectivas de la pureza en el intervalo temporal $[0, 14]$. En la figura 3.2 se muestran las evoluciones de la pureza y concurrencia para los mismos estados iniciales que en la figura 3.1 pero ahora poniendo en juego a la interacción de Ising $J = 1$, 3.2[a] y 3.2[b], respectivamente. Las curvas de las evoluciones de la pureza nuevamente presentan oscilaciones como en su contraparte homogénea, pero con mayor complejidad. La evolución de la concurrencia presenta un periodo definido en el mismo intervalo temporal pero de casi el triple que su contraparte con $J = 0$ 3.1.

Segunda Familia de Estados Iniciales

En la figura 3.3 se presentan las dinámicas de la pureza y concurrencia, 3.3[a] y 3.3[b] respectivamente, para cuatro estados iniciales representantes de la familia $|\Psi^{(1)}(\alpha)\rangle$, pero sólo tomando en cuenta a la interacción de dipolo-dipolo ($\kappa = 1.5$, $J = 0$). La curva en negro representa a la evolución del estado inicial $|\Psi^{(1)}(\frac{\pi}{2})\rangle$, la azul por $|\Psi^{(1)}(\frac{\pi}{3})\rangle$, la verde por $|\Psi^{(1)}(\frac{\pi}{4})\rangle$ y

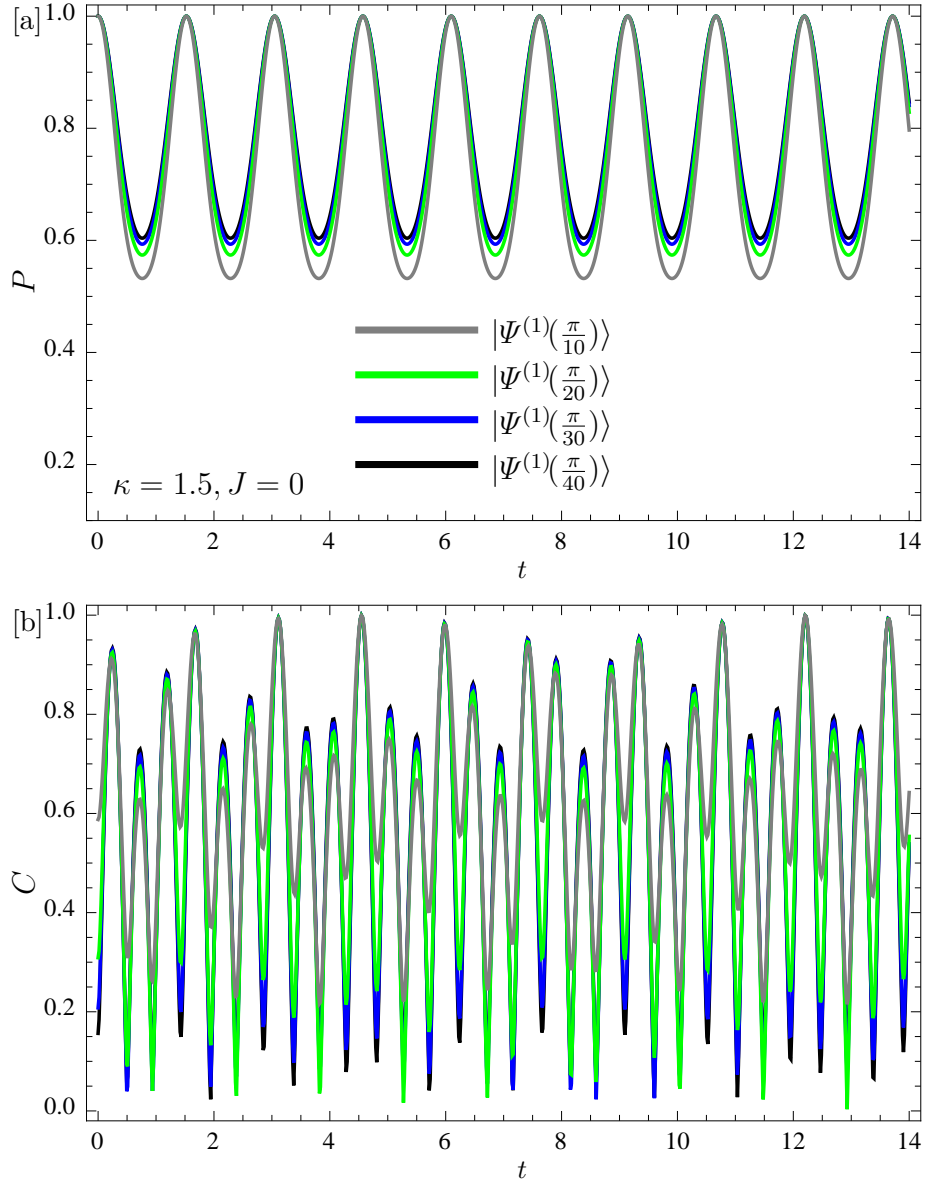


Figura 3.3: Dinámicas de la pureza [a] y concurrencia [b] en función del tiempo para los estados iniciales de la forma $|\Psi^{(1)}(\alpha)\rangle$ con $\alpha \in \{\pi/40, \pi/30, \pi/20, \pi/10\}$, y con los valores de las interacciones entre átomos $J = 0$, $\kappa = 1.5$. Las dinámicas de las concurrencias para esta familia de estados iniciales [b] tienen frecuencias más altas respecto a las evoluciones expuestas en 3.1[b] y 3.2[b].

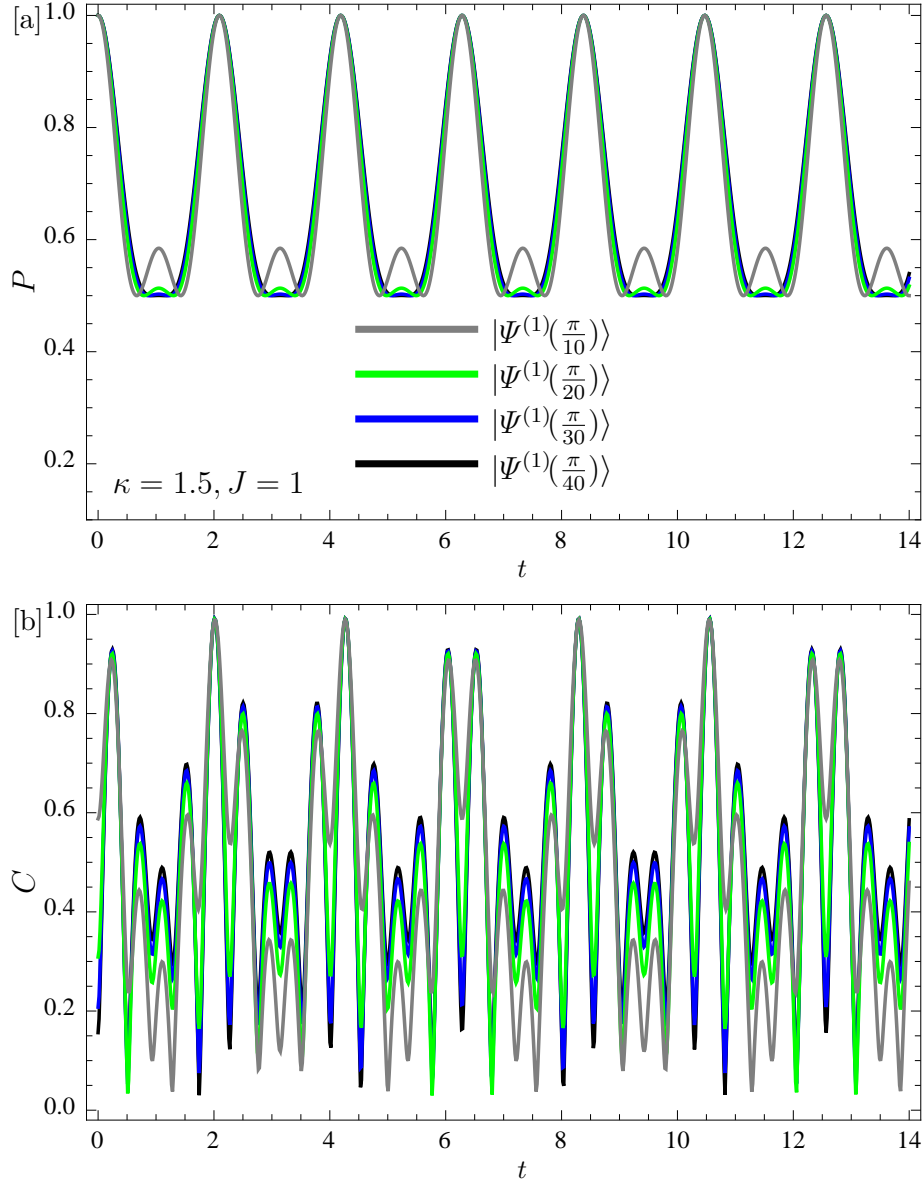


Figura 3.4: Evolución de la pureza [a] y concurrencia [b] en función del tiempo en unidades adimensionales con $J = 1$, $\kappa = 1.5$ y los mismos valores de α que la figura anterior. En las evoluciones de la pureza, [b], el lugar geométrico en donde se alcanza el mínimo ya no coincide entre ellas, como sí se aprecia en la evolución sin interacción de Ising 3.3[b].

finalmente la curva en gris por $|\Psi^{(1)}(\frac{\pi}{5})\rangle$. Nuevamente, las evoluciones de la pureza para estos estados muestran patrones oscilatorios con periodos bien definidos 3.3[a]. La evolución de sus respectivas concurrencias se calcularon hasta el tiempo $t = 15$, figura 3.3[b], para apreciar el carácter oscilante y con periodos no definidos claramente. En la figura 3.4 se muestran las evoluciones de los mismos estados iniciales que en la figura 3.3, pero ahora considerando la interacción de Ising, y también dependientes del Hamiltoniano homogéneo $\hat{H}_{1,1.5}$. La evolución de la concurrencia, 3.4[b], muestra una frecuencia de oscilación definida a diferencia del caso sin interacción. Los mínimos locales presentes en el caso $J = 0$ no se preservan cuando se pone en juego a la interacción de Ising.

Diagramas CP

Los análisis de la concurrencia y la pureza respecto al tiempo pueden ser estudiados en la dinámica del plano CP . En ella se podrá observar que para los estados máximamente enlazados, y un valor fijo de la pureza, la concurrencia se maximiza. En las figuras 3.5 y 3.6 se muestra la dinámica conjunta descrita en la sección anterior: cavidades inicialmente en el estado de número $n = 1$, sin presencia de interacciones entre los átomo (curvas azul y rojo) y dos átomos con interacciones $\kappa = 1.5$, $J = 0$; con los respectivos estados iniciales $\alpha = \pi/4$ para estados máximamente enlazados y $\alpha = \pi/20$, $\alpha = \pi/10$, figuras 3.5[a] y 3.5[b].

Algo interesante que se observa es que la dinámica de la curva negra, aquella en donde hay interacciones entre los átomos, está acotada por las dinámicas cuyas interacciones son nulas (como en las figuras 3.5 [a] y 3.5[b]): la cota inferior está dada por la curva paramétrica con el mismo estado inicial; mientras que la cota superior es la parametrización de la curva con un estado inicial máximamente enlazado $\alpha = \pi/4$. Este mismo comportamiento se observa en las figuras 3.6[a] y 3.6[b], cuando las interacciones son $J = 1$ y $\kappa = 0.5$. Todas las evoluciones con o sin interacción alcanzan un mínimo en la pureza de $1/2$ que es el grado máximo de mezcla.

Ahora podemos concentrar nuestro análisis entre la variación de los parámetros que representan las interacciones entre los átomos. Para ello, consideremos la diferencia entre las interacciones dipolo-dipolo e Ising: $|\kappa - J|$. En la figura (3.7) se consideran casos similares a los estudiados anteriormente, pero con la diferencia de que los valores de las interacciones cambian: $\kappa = 3$, $J = 1$ y $\kappa = 4$, $J = 1$ figuras 3.7[a] y [b], respectivamente, con el estado

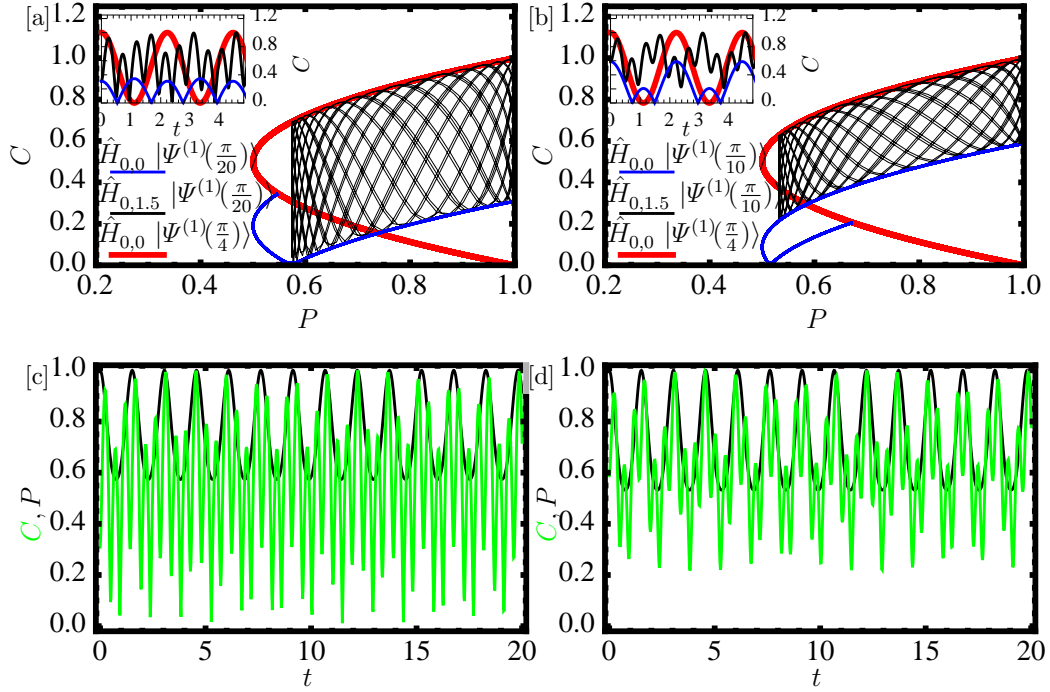


Figura 3.5: En [a] y [b] se muestran las parametrizaciones de la pureza y concurrencia respecto al tiempo, para los estados iniciales de la forma $|\Psi^{(n)}(\alpha)\rangle$ con $n = 1$. Las curvas en rojo representan el caso de dos átomos no interactuantes e inicialmente en el estado $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Las dinámicas en negro muestran el caso con interacción ($\kappa = 0$, $J = 1.5$) para dos estados iniciales distintos: $\alpha = \frac{\pi}{20}$ y $\alpha = \frac{\pi}{10}$, figuras [a] y [b] respectivamente. En azul, se presentan las evoluciones sin interacción con los mismos estados iniciales que las curvas en negro. En [c] y [d], cambiando el código de colores, se muestra a la concurrencia (en verde) y la pureza (negro) correspondiente a la curva con interacción del plano CP , hasta $t = 20$.

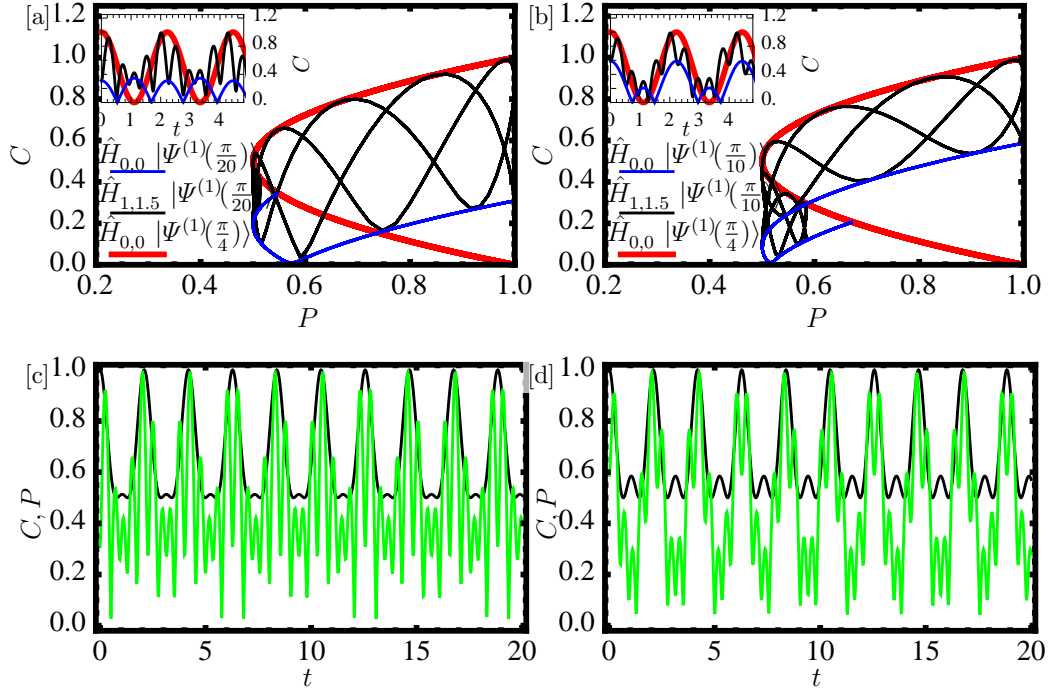


Figura 3.6: Mismo código de colores que en la figura 3.5 y con los mismos estados iniciales, pero ahora considerando los valores de la interacciones entre átomos $\kappa = 1$ y $J = 1.5$, para la evolución con interacción (curva en negro). Las curvas sin interacción (roja y azul) acotan la dinámica de la evolución de los átomos interactuantes, figuras [a] y [b]. En [c] y [d] las evoluciones de la pureza (en negro) y concurrencia (en verde) son presentadas, y corresponden al mismo caso con interacción que en el plano CP : aquí, la dinámica de la pureza sirve de guía aparente de la evolución de la concurrencia.

inicial correspondiente a $\alpha = \pi/20$. La principal diferencia es que la región que ocupa la curva (negra) en la figura 3.7[a], es más chica que la región de la figura 3.7[b]. El mismo fenómeno ocurre para el estado $\alpha = \pi/10$, figuras 3.7 [c] y [d]. Intuitivamente este fenómeno se puede explicar cuando las correlaciones intrínsecas, entre los átomos, se incrementan con la diferencia de las intensidades, y el acoplamiento con el campo disminuye, permaneciendo en gran medida puro el estado bipartita. Sin embargo, si las intensidades de las interacciones entre los qubits son homogéneas la curva vuelve a llenar la región acotada para el caso sin interacción como se muestra en la figura 3.8. En 3.8 [a] y 3.8 [b] se consideran a los mismos estados iniciales que en la figura 3.7[a], pero con la condición $\kappa = J = 3$ y $\kappa = J = 4$. Las curvas son nuevamente de tipo Lissajous sin embargo la diferencia $|\kappa - J| = 0$.

Podemos resumir tres características importantes de los diagramas CP : primero, la curvas con interacción (en negro) siempre están acotadas por su caso sin interacción y la evolución del estado con máximo enlazamiento; segundo, las evoluciones en el tiempo de la concurrencia y pureza son periódicas; tercero, al incrementar la diferencia entre las interacciones entre los qubits, la región de evolución para el caso con interacción disminuye. Estas propiedades las tendremos a la mano para observar, en el siguiente capítulo, si resultan invariantes al extender nuestro sistema a un caso más general.

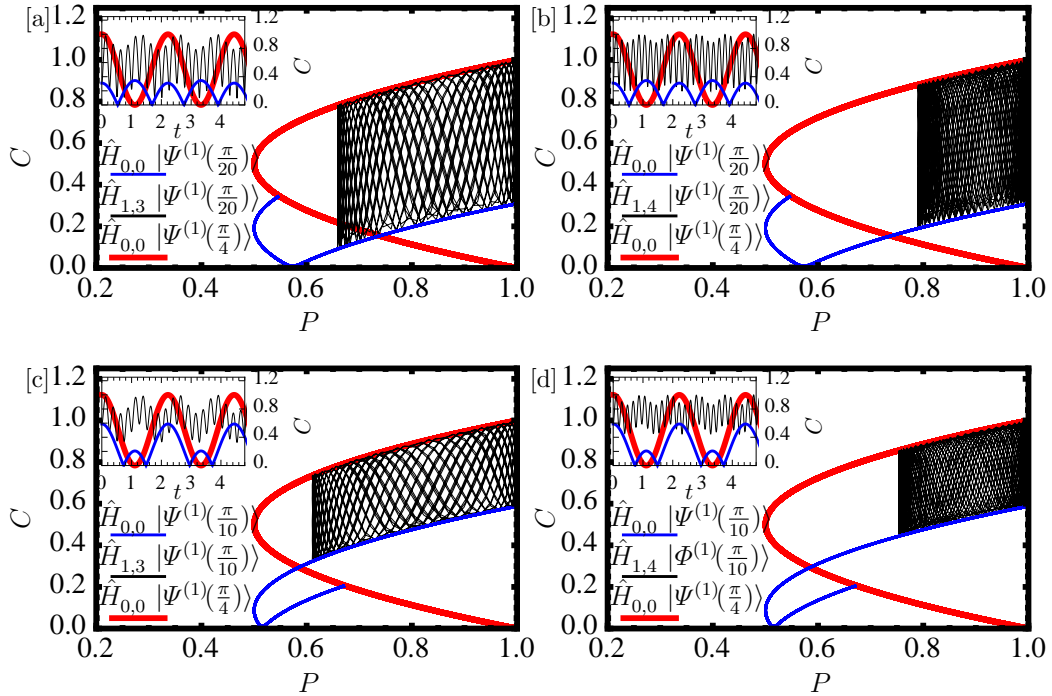


Figura 3.7: Planos concurrencia *vs* pureza para dos estados iniciales de la forma $|\Psi^{(n)}(\frac{\pi}{20})\rangle$ en [a] y [b] pero con los valores de las interacciones $\kappa = 1$, $J = 3$ y $\kappa = 1$, $J = 4$, respectivamente. En [c] y [d] se inicia con el estado $|\Psi^{(n)}(\frac{\pi}{10})\rangle$ con los Hamiltonianos $\hat{H}_{\kappa=1, J=3}$ y $\hat{H}_{\kappa=1, J=4}$, respectivamente. Se observa que al incrementar la diferencia $|\kappa - J|$, el valor de la pureza se incrementa para las evoluciones de las curvas con interacción (en negro).

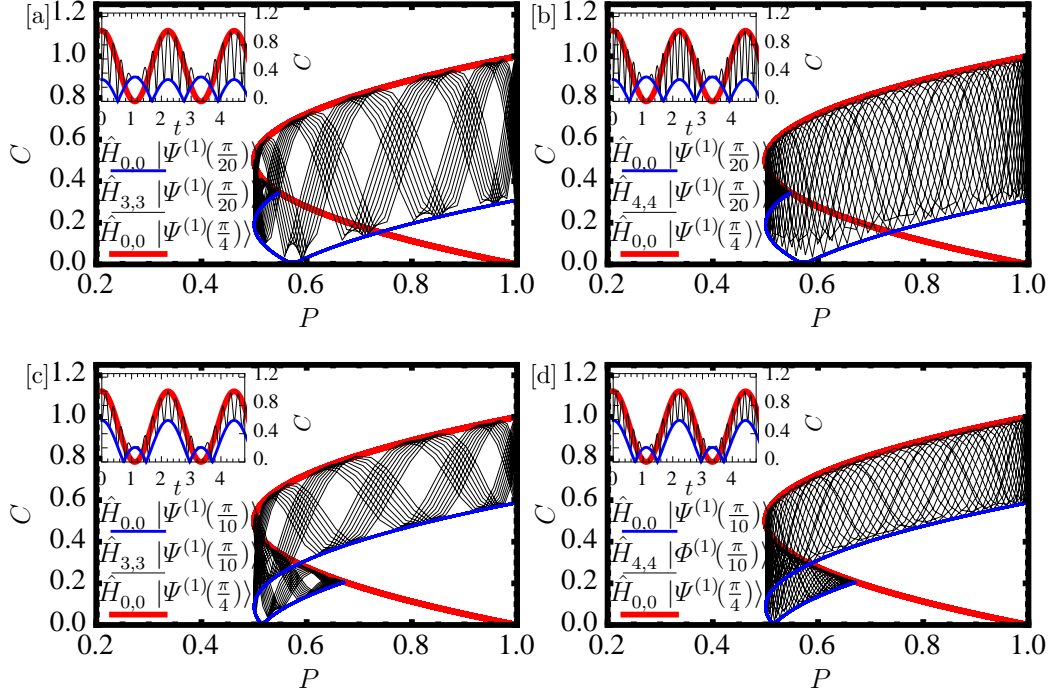


Figura 3.8: Parametrizaciones de la pureza y concurrencia con t , para los estados iniciales de la forma $|\Psi^{(n)}(\frac{\pi}{20})\rangle$ $|\Psi^{(n)}(\frac{\pi}{10})\rangle$, con el mismo código de colores que en la figura 3.7 con $n = 1$. Las curvas en rojo representan el caso de tres átomos no interactuantes e inicialmente en el estado $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Las dinámicas en negro muestran cuatro casos con interacción: En [a] y [b] el estado inicial se eligió con $\alpha = \frac{\pi}{20}$ pero con los valores $\kappa = 3$, $J = 3$ y $\kappa = 4$, $J = 4$, respectivamente. De manera análoga, en [c] y [d] se eligió al estado inicial $\alpha = \frac{\pi}{10}$, con las mismas intensidades que en el caso anterior. Las curvas en azul, muestran el caso sin interacción correspondientes a sus contrapartes interactuantes. En este set de figuras se aprecia que al incrementar los valores de las interacciones de manera homogénea, el valor de la pureza no se incrementa, como en el caso de la figura 3.7.

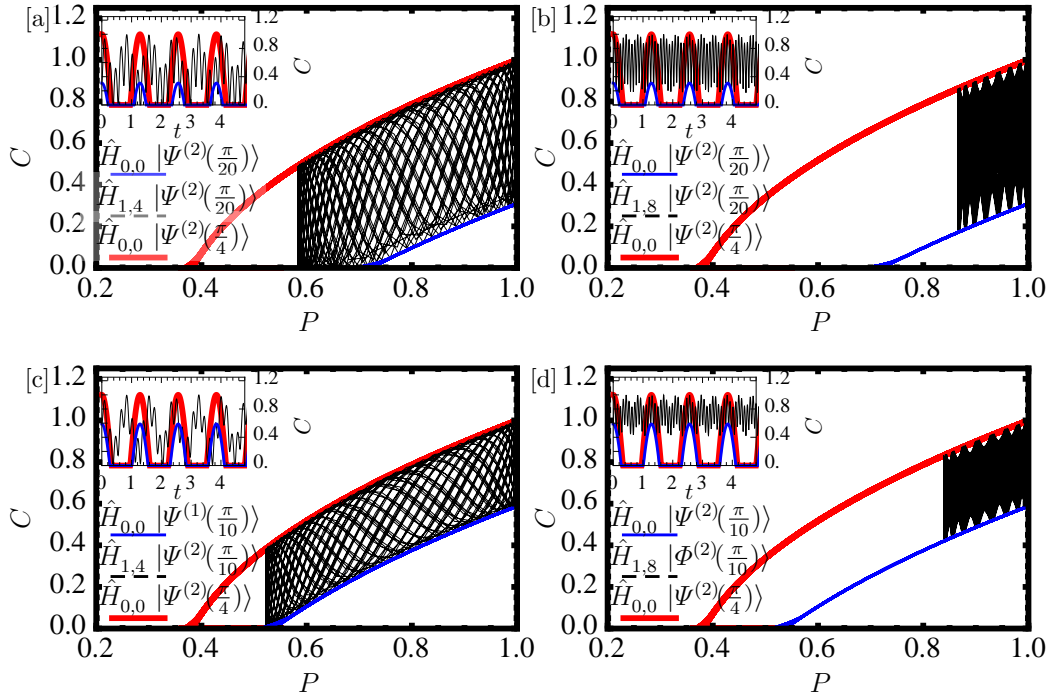


Figura 3.9: En este conjunto de gráficas se estudia el comportamiento de la pureza vs concurrencia, al variar la diferencia $|J - \kappa|$ pero con $n = 2$, para dos representantes de estados iniciales: $|\Psi^{(n)}(\frac{\pi}{20})\rangle$ y $|\Psi^{(n)}(\frac{\pi}{10})\rangle$. En [a] y [c] las intensidades de las interacciones son $J = 1$ y $\kappa = 4$; mientras que en [b] y [d] $J = 1$ y $\kappa = 8$. Al incrementar la diferencia $J - \kappa$, la región en la que evoluciona el sistema con interacción (curva negra) disminuye.

CAPÍTULO 4

Tres átomos en una cavidad

Este capítulo contiene un análisis del enlazamiento tripartita, que se requerirá para el estudio de una generalización del modelo del capítulo anterior. Dicha generalización también se presenta al final de este capítulo y consiste en la inclusión de un tercer sistema de dos niveles; esto permitirá enriquecer tanto el número de interacciones como la topología de las configuraciones. En particular, se delinearán algunas características del enlazamiento tripartita (multipartita); se introducirá a la concurrencia generalizada como medida de enlazamiento tripartita entre los qubits. Pondremos énfasis en la denominada aproximación cuasi-pura; también, se propondrá a la pureza para estudiar la dinámica entre el sistema central, los qubits, y la cavidad, que representará a un ambiente. Finalmente, introduciremos el modelo, estudiaremos algunas de sus simetrías y mencionaremos las posibles configuraciones.

4.1. Enredamiento tripartita

En la capítulo anterior se describió al enlazamiento bipartita para estados puros y mixtos. En las siguientes líneas atenderemos un caso más complicado: el enlazamiento tripartita (multipartita). Se describirá una clasificación de los estados tripartitas en términos de la separabilidad; seguido, se recordará una medida general de enlazamiento multipartita, para estados mixtos y puros,

basada en la concurrencia de Wootters [13].

Recordemos que un sistema, \mathcal{H} , será *tripartita* (multipartita) si es de la forma $\mathcal{H} = \bigotimes_{i=1}^3 \mathcal{H}_i$ ($\mathcal{H} = \bigotimes_{i=1}^n \mathcal{H}_i$). Las dimensiones de cada espacio \mathcal{H}_i , pueden ser, *a priori*, arbitrarias; sin embargo, en nuestro análisis será suficiente suponer que $\dim(\mathcal{H}_i) = 2$, para toda i .

$|\Psi\rangle \in \mathcal{H}$ es separable/factorizable si puede descomponerse como producto tensorial de estados $|\psi_i\rangle$, pertenecientes cada uno a los subsistemas \mathcal{H}_i , i. e.,

$$|\Psi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \otimes |\psi_3\rangle \quad (|\Psi\rangle = \bigotimes_{i=1}^n |\psi_i\rangle). \quad (4.1)$$

Por tanto, si

$$\nexists |\psi_i\rangle \in \mathcal{H}_i \text{ tal que } |\Psi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \otimes |\psi_3\rangle, \quad (4.2)$$

diremos que el estado es *enlazado*. En el caso de estados mixtos, $\rho \in S(\bigotimes_{i=1}^3 \mathcal{H}_i)$ [$\rho \in S(\bigotimes_{i=1}^n \mathcal{H}_i)$] es separable si es la suma convexa de estados factorizables

$$\rho = \sum_i p_i (\rho_i^{(1)} \otimes \rho_i^{(2)} \otimes \rho_i^{(3)}) \quad \left(\rho = \sum_i p_i (\rho_i^{(1)} \otimes \dots \otimes \rho_i^{(n)}) \right). \quad (4.3)$$

Diremos que es *enlazado* si no es separable¹, es decir,

$$\nexists \rho_i^{(1)}, \rho_i^{(2)}, \rho_i^{(3)}, p_i \geq 0 \text{ tales que } \rho = \sum_i p_i (\rho_i^{(1)} \otimes \rho_i^{(2)} \otimes \rho_i^{(3)}). \quad (4.4)$$

La anterior caracterización de enlazamiento tripartita, puede extenderse de manera directa para el caso multipartita como se ha mostrado; en este trabajo no se desarrollará un análisis tan general, pero es posible, en principio, hacer una generalización de nuestro modelo para más partículas.

La definición de enlazamiento tripartita (multipartita) tiene un carácter negativo: se debe mostrar la *no* existencia de una descomposición convexa como en las ecuaciones 4.1 y 4.3, además de que puede resultar intratable en términos computacionales. Así, algunos autores han propuesto que la caracterización del enlazamiento debe entenderse desde dos perspectivas: una operacional o cuantitativa y otra no-operacional o cualitativa [14, 37]. Por

¹Desde la perspectiva de los operadores: Un estado es puro si es extremo (extremal), i.e., si no puede escribirse como una combinación convexa de otros estados (Si $\rho = \lambda \rho_1 + (1 - \lambda) \rho_2$ p. a. $\lambda \in (0, 1)$, entonces $\rho_1 = \rho_2 = \rho$). Un estado es mixto si no es extremo (extremal). Es *enredado* sii no es separable.

un lado, la posición cualitativa se reduce a la definición matemática anterior y su principal propósito es dotar de condiciones necesarias y/o suficientes para decidir la separabilidad de un estado cuántico, a estas condiciones se les suele llamar criterios de separabilidad (como lo son el criterio PPT, el de mayorización, los *entanglement witnesses*, o el criterio de Schmidt por citar algunos [38, 39]); por otro, la posición operacional respecto al enlazamiento implica una clasificación adicional y es relativa a los intereses que desean ponerse en relieve respecto a los sistemas cuánticos a analizarse (para una descripción detallada véase los textos de [3, 37]). Dentro de los criterios operacionales de enredamiento se encuentran las funciones monótonas de enlazamiento (*entanglement monotones*) y están basadas en una clasificación ulterior, a saber, los operadores locales y globales. El concepto de entanglement monotones nos servirá para caracterizar a la concurrencia generalizada de Florian Mintert, André Carvahlo y Andreas Buchleiner (ésta se presentará más adelante).

4.2. Funciones Monótonas de Enlazamiento (Entanglement monotones)

La motivación para introducir a los *entanglement monotones*, está delimitada por una discusión más general sobre caracterizar herramientas cuantitativas para el cálculo del enlazamiento. Pensemos por ejemplo, si queremos comparar la *cantidad* de enlazamiento entre dos estados distintos.

Mintert, Viviescas y Buchleitner, afirman que en el núcleo de la discusión sobre los elementos cuantitativos que distinguen al enlazamiento, está la interpretación de que el enlazamiento es equivalente a aquellas correlaciones que no pueden ser descritas en términos de probabilidades clásicas: ‘*entanglement is tantamount to correlations that cannot be described in terms of classical probabilities*’ [14]. Bajo esta interpretación, la tarea a seguir es dar una clasificación de los tipos de operadores que pueden aplicarse a un sistema físico compuesto, pero que además sólo permitan la *creación* de correlaciones no cuánticas.

En este trabajo no se profundizará sobre dicha clasificación, pues va más allá de nuestro propósito. Sólo enunciaremos brevemente qué son y se asumirá el hecho de que la concurrencia de Wootters y la concurrencia generalizada de Mintert et al. son *entanglement monotones*.

Los *entanglement monotones* son funciones que son invariantes bajo *operadores locales* aunados con protocolos clásicos de comunicación (LOCC). Un operador se dice que es local si al aplicarse a un subsistema, éste evoluciona independientemente del resto de los subsistemas. Esto se puede escribir en el formalismo de Krauss, para un sistema bipartita, como

$$\varepsilon_{\text{locc}}(\rho) = \sum_{i,j} E_i \otimes F_j \rho E_i^\dagger \otimes F_j^\dagger \quad \text{con} \quad \sum_{i,j} E_i^\dagger E_i \otimes F_j^\dagger F_j = \mathbf{1}_{\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2}. \quad (4.5)$$

La importancia de los operadores LOCC radica en que pueden crear correlaciones clásicas, más no cuánticas, entre subsistemas. Así, en general, un estado factorizable bajo la acción de un LOCC no permanece como tal, pero a lo más forma una combinación convexa de estados producto,

$$\varepsilon_{\text{locc}}(\rho_1 \otimes \rho_2) = \sum_i (E_i \rho_1 E_i^\dagger) \otimes (F_i^\dagger \rho_2 F_i^\dagger) = \sum_i p_i \rho_1^i \otimes \rho_2^i, \quad (4.6)$$

donde

$$\rho_1^i = \frac{E_i \rho_1 E_i^\dagger}{\text{tr}(E_i \rho_1 E_i^\dagger)}, \quad (4.7)$$

$$\rho_2^i = \frac{F_i \rho_2 F_i^\dagger}{\text{tr}(F_i \rho_2 F_i^\dagger)} \quad (4.8)$$

y $p_i = \text{tr}(E_i \rho_1 E_i^\dagger) \text{tr}(F_i \rho_2 F_i^\dagger)$.

Un problema abierto es encontrar todos los *entanglement monotones*. Sin embargo, una vez que se ha propuesto algún *entanglement monotone* para estados puros, denotado por $\mathcal{M}(|\psi\rangle)$, la generalización para estado mixtos debe cumplir con: (1) $\mathcal{M}(\rho)$ debe reducirse a la definición original para estados puros y (2) $\mathcal{M}(\rho)$, debe seguir siendo una función no creciente bajo LOCC.

Para salvar la segunda dificultad, se utilizan dos hechos importantes: primero, que cualquier estado mixto puede descomponerse como una suma convexa de estados puros:

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|; \quad (4.9)$$

segundo, utilizar la existencia de funciones convexas cuyos dominios son con-

juntos convexos, llamadas convex roof constructions [25]. Así, definimos

$$\mathcal{M}(\rho) = \inf_{\{p_i, \psi_i\}} \sum_i p_i \mathcal{M}(|\psi_i\rangle) \text{ con } p_i > 0 \text{ y } \rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|. \quad (4.10)$$

A $\mathcal{M}(\rho)$ se le denomina el techo convexo (convex roof) de $\mathcal{M}(|\psi_i\rangle)$.

Hasta este momento se han introducido las nociones de *entanglement monotonas*, techos convexos y LOCC. Estos conceptos nos permiten preparar el terreno, en el que la generalización de la concurrencia de Mintert cumple con las propiedades estándares de lo que comúnmente se denomina medidas de enlazamiento.

Para finalizar esta sección se propondrá un artificio, sobre los estados cuánticos, que resultará práctico en la sección siguiente.

Una herramienta que simplifica el cálculo de $\mathcal{M}(\rho)$, es caracterizar a todas los ensambles de estados puros, en término de los *estados subnormalizados*, definidos como:

$$|\Psi_i\rangle = \sqrt{p_i} |\psi_i\rangle. \quad (4.11)$$

Nótese que $|\Psi_i\rangle \langle \Psi_i| = p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|$; además, supongamos que nos es dado el ensamble formado por los eigenvectores de ρ , $\{|\Psi_i\rangle\}$ tales que $\rho = \sum_i |\Psi_i\rangle \langle \Psi_i|$. Con este ensamble es posible definir nuevos ensambles mediante la transformación siguiente,

$$|\Psi_i\rangle = \sum_j V_{i,j} |\phi_j\rangle, \quad \text{con} \quad \sum_i V_{k,i}^\dagger V_{ij} = \delta_{jk}. \quad (4.12)$$

Así, es posible construir cualquier ensamble que represente a ρ ; ya que, $\rho = \sum_i |\Psi_i\rangle \langle \Psi_i| = \sum_i |\phi_i\rangle \langle \phi_i|$.²

4.2.1. Concurrencia para estados mixtos

En la sección anterior se describió un procedimiento para definir un *entanglement monotone* para estados mixtos, a partir de una ya conocida para estados puros. En las siguientes líneas se discutirá dicho procedimiento para la *concurrencia*.

Como se describió en el capítulo anterior, la concurrencia se define a partir de los estados de Bell. Si $|\phi^\pm\rangle = (|00\rangle \pm |11\rangle)/\sqrt{2}$ y $|\psi^\pm\rangle = (|01\rangle \pm |10\rangle)/\sqrt{2}$,

²A la matriz V que satisface (4.12), se le denomina unitaria por la izquierda, y sirve para optimizar el procedimiento para el cálculo de \mathcal{M} .

entonces podemos definir a $|e_1\rangle = |\phi^+\rangle$, $|e_2\rangle = i|\phi^-\rangle$, $|e_3\rangle = i|\psi^+\rangle$, $|e_4\rangle = |\psi^-\rangle$.

La *conurrencia* para estados puros de dos qubits $|\psi\rangle$, puede ser definida como

$$c(\psi) = \left| \sum_i \langle e_i | \psi \rangle^2 \right|. \quad (4.13)$$

Una forma alternativa a (4.13) y además, más utilizada en la literatura está dada por

$$c(\psi) = |\langle \psi^* | \sigma_y \otimes \sigma_y | \psi \rangle|, \quad (4.14)$$

donde σ_y es la matriz de Pauli y $\langle \psi^* |$ es el conjugado complejo de $\langle \psi |$ en la base computacional. Para estados mixtos, la conurrencia está dada entonces por

$$c(\rho) = \inf_{\{p_i, \psi_i\}} \sum_i p_i c(\psi_i), \text{ con } p_1 > 0 \text{ y } \rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|. \quad (4.15)$$

Una observación importante es que el techo convexo descrito en 4.15, tiene la fórmula cerrada postulada en el capítulo anterior,

$$\mathcal{C}(\rho) = \text{máx}\{0, \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4\}. \quad (4.16)$$

Es decir, es posible calcular el ínfimo para estados mixtos de un sistema bipartito.

4.2.2. Conurrencia generalizada

La definición de la conurrencia para el enlazamiento bipartita descrita en la sección anterior, puede generalizarse en dos sentidos distintos, pero complementarios. Primero, podemos preguntarnos sobre el enlazamiento que comparten dos sistemas de distintas dimensiones, es decir, sobre la separabilidad de aquellos estados $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$, tal que $\dim(\mathcal{H}_i) > 2$ y no necesariamente iguales. Segundo, nos podemos preguntar por el enlazamiento que comparten múltiples subsistemas, i. e. si $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_n$.

La siguiente descripción de la conurrencia, pretende atacar ambos problemas (dimensionalidad vertical y horizontal) a partir de una reinterpretación de la conurrencia de Wootters con la forma dada por la ecuación 4.14.

Representación doble

En [14] se destaca que la expresión para la concurrencia se asemeja a la fórmula del cálculo del valor esperado del operador $\hat{\sigma}_y \otimes \hat{\sigma}_y$. Si se trabaja con una doble copia de dicho estado es posible construir un operador que se anule para estados separables y que no lo haga para el resto de los estados (con una sola copia no es posible). En resumen, lo que se necesita es construir un operador A , con la forma siguiente,

$$C(\Psi) = \sqrt{\langle \Psi | \otimes \langle \Psi | A | \Psi \rangle \otimes | \Psi \rangle}. \quad (4.17)$$

El operador más simple que proponen se construye a partir de las proyecciones sobre los subespacios antisimétricos y simétricos del espacio $\mathcal{H}_i \otimes \mathcal{H}_i$, donde i corresponde al índice del i -ésimo subsistema. Esto es, para cada subsistema i se tendrán a los operadores $P_-^{(i)} : \mathcal{H}_i \otimes \mathcal{H}_i \rightarrow \mathcal{H}_i \wedge \mathcal{H}_i$, como las proyecciones sobre los subespacios antisimétricos; mientras que, $P_+^{(i)} : \mathcal{H}_i \otimes \mathcal{H}_i \rightarrow \mathcal{H}_i \odot \mathcal{H}_i$, corresponderían a los simétricos. Si se considera una base arbitraria ortonormal $\{|\alpha_j\rangle\}$ de \mathcal{H}_i , con esta base las proyecciones tendrían la forma $P_{\mp}^{(i)} = \sum_{jk} (|\alpha_j \alpha_k\rangle \mp |\alpha_k \alpha_j\rangle)(\langle \alpha_j \alpha_k | \mp \langle \alpha_k \alpha_j |) / 4$.

Para ejemplificar, consideremos el caso bipartita con la condición de que $\dim(\mathcal{H}_i) = 2$ y tomemos una copia doble: $(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2) \otimes (\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2) \cong (\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_1) \otimes (\mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_2)$. Los operadores respectivos serían

- $P_-^{(1)} : \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_1 \wedge \mathcal{H}_1$ y $P_+^{(1)} : \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_1 \odot \mathcal{H}_1$, para el primer subsistema.
- $P_-^{(2)} : \mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{H}_2 \wedge \mathcal{H}_2$ y $P_+^{(2)} : \mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{H}_2 \odot \mathcal{H}_2$, para el segundo subsistema.

Entonces, el operador buscado para el caso bipartita, será el producto tensorial de los operadores locales, cada uno actuando sobre su respectiva doble copia

$$A = 4P_-^{(1)} \otimes P_-^{(2)}, \quad (4.18)$$

el factor 4 será una constante de normalización. Veamos cómo operaríamos con A definido de la manera anterior: supongamos que $|\Psi\rangle$ es separable, $|\Psi\rangle = |\varphi\rangle \otimes |\phi\rangle$, entonces el valor esperado se puede factorizar de la manera

siguiente

$$\begin{aligned}
& \langle \Psi | \otimes \langle \Psi | A | \Psi \rangle \otimes | \Psi \rangle \\
&= \langle \Psi | \otimes \langle \Psi | 4P_-^{(1)} \otimes P_-^{(2)} | \Psi \rangle \otimes | \Psi \rangle \\
&= \langle \varphi | \otimes \langle \phi | \otimes \langle \varphi | \otimes \langle \phi | 4P_-^{(1)} \otimes P_-^{(2)} | \varphi \rangle \otimes | \phi \rangle \otimes | \varphi \rangle \otimes | \phi \rangle \\
&= 4 \langle \varphi | \otimes \langle \varphi | P_-^{(1)} | \varphi \rangle \otimes | \varphi \rangle \langle \phi | \otimes \langle \phi | P_-^{(2)} | \phi \rangle \otimes | \phi \rangle.
\end{aligned}$$

Dado que $|\varphi\rangle \otimes |\varphi\rangle$ y $|\phi\rangle \otimes |\phi\rangle$ son simétricos, cuando opera $P_-^{(i)}$ sobre aquellos se anula. Caso contrario si $|\Psi\rangle$ no es separable, pues la doble copia $|\Psi\rangle \otimes |\Psi\rangle$ no sería simétrica y, la parte que no lo es, contribuiría a que el valor esperado sea estrictamente positivo.

Para el caso tripartita, existen distintas combinaciones en que puede proponerse al operador A . Por ejemplo, podemos preguntarnos sobre la biseparabilidad respecto alguna partición en específico: si elegimos $A = 4P_+^{(1)} \otimes P_-^{(2)} \otimes P_-^{(3)}$, nos cuestionamos sobre la separabilidad de un estado $|\psi\rangle$ respecto a la partición entre \mathcal{H}_1 y los subsistemas $(\mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_3)$. Sigamos con el ejemplo, y supongamos ahora que tenemos un estado que *a priori* sabemos que es separable respecto a la partición $(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2)$ con \mathcal{H}_3 : $|\psi\rangle = |\psi^{(12)}\rangle |\psi^{(3)}\rangle$ y evaluemos $\langle \psi | \langle \psi | A | \psi \rangle | \psi \rangle$:

$$\begin{aligned}
& \langle \psi | \langle \psi | A | \psi \rangle | \psi \rangle \\
&= 4 \langle \psi^{(12)} | \langle \psi^{(3)} | \langle \psi^{(12)} | \langle \psi^{(3)} | P_+^{(1)} P_-^{(2)} P_-^{(3)} | \psi^{(12)} \rangle | \psi^{(3)} \rangle | \psi^{(12)} \rangle | \psi^{(3)} \rangle \\
&= 4 \langle \psi^{(12)} | \langle \psi^{(12)} | P_+^{(1)} P_-^{(2)} | \psi^{(12)} \rangle | \psi^{(12)} \rangle \langle \psi^{(3)} | \langle \psi^{(3)} | P_-^{(3)} | \psi^{(3)} \rangle | \psi^{(3)} \rangle \\
&= 0,
\end{aligned}$$

pues $\langle \psi^{(3)} | \langle \psi^{(3)} | P_-^{(3)} | \psi^{(3)} \rangle | \psi^{(3)} \rangle = 0$, como en el caso anterior. O bien A puede definirse como $4P_-^{(1)} \otimes P_+^{(2)} \otimes P_-^{(3)}$, aquí nos preguntamos sobre la biseparabilidad respecto a la partición de \mathcal{H}_2 con $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_3$ (observemos que si consideramos el estado anterior, nuevamente se concluirá que el valor esperado se anula). En resumen, distintas representaciones del operador A , pueden proponerse. Como es señalado en [14, 15], para el caso multipartita, puede construirse genéricamente al operador A como,

$$A = \sum_{\nu\{s_i=\pm\}} p_{s_i} \bigotimes_{j=1}^N P_{s_j}^{(j)}, \quad p_{s_i} > 0, \quad (4.19)$$

donde $\nu\{s_i = \pm\}$ son todas las posibles combinaciones de una cadena de N -símbolos formados con $+$ y $-$. En [15] se menciona que si se elige un número impar de proyecciones antisimétricas, el operador resultante A , que actúa sobre la doble copia, sería siempre un operador antisimétrico y el valor esperado $\langle \Psi | \langle \Psi | A | \Psi \rangle | \Psi \rangle$, se anularía. Dado que la elección de los coeficientes p_{s_i} es arbitraria sobre un conjunto no numerable, se tendrían una familia no numerable de representaciones de A . De todas ellas se escoge para el caso tripartita, la siguiente forma de A [15],

$$\mathcal{A} = 4(P_+^{(1)} \otimes P_-^{(2)} \otimes P_-^{(3)} + P_-^{(1)} \otimes P_+^{(2)} \otimes P_-^{(3)} + P_-^{(1)} \otimes P_-^{(2)} \otimes P_+^{(3)}). \quad (4.20)$$

Finalmente, con esta elección se definirá a la concurrencia generalizada para estados puros en sistemas tripartitas como:

$$C_3(\Psi) = \sqrt{\langle \Psi | \otimes \langle \Psi | \mathcal{A} | \Psi \rangle \otimes | \Psi \rangle}, \quad (4.21)$$

mientras que para estados mixtos ρ en sistemas tripartitas se define a través del *convex roof*,

$$C_3(\rho) = \inf_{p_i, \psi_i} C_3(\psi_i), \quad (4.22)$$

donde el ínfimo se toma sobre el conjunto de todas las descomposiciones en estados normalizados de $\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|$. La expresión genérica de la concurrencia generalizada para el caso multipartita se basa en las condiciones sobre C_3 , en donde los coeficientes $p_{s_i} = 4$, con excepción de aquellos que contengan la cadena $p_{+...+} = 0$, pero su descripción detallada se basa en la fórmula para el caso bipartita, C_2 .

Una expresión equivalente para la concurrencia es [3]

$$C_N(\psi) = 2^{1-(N/2)} \sqrt{(2^N - 2) \langle \psi | \psi \rangle^2 - \sum_{\alpha} \text{tr} \rho_{\alpha}^2}, \quad (4.23)$$

donde α corre sobre todas las posibles matrices de densidad reducidas no triviales. Para estados multipartitas mixtos tendremos que

$$C_N(\rho) = \inf_{p_i, \psi_i} \sum p_i C_N(\psi_i). \quad (4.24)$$

Ahora nos enfrentamos a un problema de optimización para el cálculo del ínfimo en 4.24. Distintas cotas superiores e inferiores se han propuesto y los

propios Mintert, Carvahlo y Andreas han encontrado cotas inferiores mediante métodos puramente algebraicos. Para nuestros propósitos, nos concentraremos en el método desarrollado en [14], denominado *aproximación cuasi-pura*.

4.3. Aproximación cuasi-pura

La aproximación cuasi-pura es una aproximación para el cálculo de la ecuación 4.24 y fue presentada por Florian Mintert y Andreas Buchleitner en [40]. Ésta está diseñada para estados cuánticos que poseen un valor propio que es mucho más grande que el resto de eigenvalores. Los estados que cumplen la propiedad anterior se les denominan estados cuasi-puros. Una característica notable de esta aproximación es que, para estados arbitrarios, funge como una cota inferior de la concurrencia.

A grandes rasgos, la estrategia es clasificar, respecto a una relación de orden, a los elementos matriciales del operador \mathcal{A} . Para lograr esto formula el siguiente algoritmo:

1. Tomemos un estado mixto cualquiera, ρ , y calculemos su descomposición espectral en términos del eigensistema $\{|\psi_i\rangle, \mu_i\}$; construyamos a partir de éste, el conjunto de los estados subnormalizados $\{|\phi_i\rangle = \sqrt{\mu_i}|\psi_i\rangle\}$. Con ellos definamos al tensor

$$\hat{\mathcal{A}}_{jk}^{lm} = \langle \phi_j | \langle \phi_k | \mathcal{A} | \phi_l \rangle | \phi_m \rangle.$$

Nótese que cuando $i = j = l = m$, recuperamos a

$$C_N(\rho) = \inf_{p_i, \phi_i} \sum_i \sqrt{\langle \phi_i | \langle \phi_i | \mathcal{A} | \phi_i \rangle | \phi_i \rangle}.$$

2. Debido a que el operador \mathcal{A} actúa sobre los eigenestados subnormalizados, se cumple que el tensor $\hat{\mathcal{A}}_{jk}^{lm}$ es proporcional al siguiente producto de eigenvalores $\sqrt{\mu_j \mu_k \mu_l \mu_n}$, donde μ_i son los valores propios de ρ .
3. Dada la anterior proporcionalidad, y usando el hecho de que partimos de un estado cuasi-puro, escribamos de manera decreciente a dichos eigenvalores $\mu_1 \gg \mu_2 \geq \dots \geq \mu_n$; *ergo*, podemos decir que $\hat{\mathcal{A}}_{11}^{11} = \mu_1^2$.
4. El elemento de orden cero estará dado por $\mu = \mu_1$.

5. Los elementos de orden uno corresponderán a aquellos que cumplen $j > 1$: $\hat{\mathcal{A}}_{11}^{j1}$, $\hat{\mathcal{A}}_{j1}^{11}$, $\hat{\mathcal{A}}_{1j}^{11}$ y $\hat{\mathcal{A}}_{11}^{1j}$.
6. Finalmente los elementos de orden dos serán $\hat{\mathcal{A}}_{11}^{jk}$, $\hat{\mathcal{A}}_{k1}^{j1}$ con $j, k > 1$.

Ya que se ha dado un orden a los términos de $\hat{\mathcal{A}}$, en [33] se afirma que la siguiente descomposición es válida $\hat{\mathcal{A}}_{jk}^{lm} \simeq \tau_{lm}^* \tau_{jk}$, con una matriz simétrica compleja $\tau \in \mathbb{C}^{n \times n}$; esta descomposición es equivalente a considerar al tensor $\hat{\mathcal{A}}$ como una matriz (en los índices jk y lm) de rango uno. Finalmente, en [40] se propone la elección siguiente de la matriz τ :

$$\tau_{jk} = \frac{\hat{\mathcal{A}}_{jk}^{11}}{\sqrt{\hat{\mathcal{A}}_{11}^{11}}} = \frac{\langle \phi_1 | \langle \phi_1 | \mathcal{A} | \phi_j \rangle | \phi_k \rangle}{\sqrt{\langle \phi_1 | \langle \phi_1 | \mathcal{A} | \phi_1 \rangle | \phi_1 \rangle}}. \quad (4.25)$$

No olvidemos al tensor τ_{jk} y consideremos nuevamente los estados subnormalizados $|\Psi_i\rangle = \sqrt{p_i} |\psi_i\rangle$; definamos las siguientes transformaciones:

$$\begin{aligned} |\Psi_i\rangle &= \sum_j V_{i,j} |\phi_j\rangle & |\Psi_i\rangle &= \sum_k V_{i,k} |\phi_k\rangle \\ \langle \Psi_i| &= \sum_l \langle \phi_l | V_{i,l}^\dagger & \langle \Psi_i| &= \sum_m \langle \phi_m | V_{i,m}^\dagger, \end{aligned} \quad (4.26)$$

donde la matriz $V \in \mathbb{C}^{n^2 \times n}$. A las matrices V las denominaremos matrices laterales, ya que deben cumplir además que $\sum_i V_{ki}^\dagger V_{ij} = \delta_{kj}$. Usando la definición del operador \mathcal{A} es posible reescribir la concurrencia para estados mixtos como

$$c(\rho) = \inf_{\{|\Psi_i\rangle\}} \sum_i \sqrt{\langle \Psi_i | \langle \Psi_i | \mathcal{A} | \Psi_i \rangle | \Psi_i \rangle}. \quad (4.27)$$

Si ahora sustituimos las transformaciones en 4.26, obtenemos que

$$\begin{aligned} C_N(\rho) &= \inf_V \sum_i \sqrt{\sum_l \langle \phi_l | V_{i,l}^\dagger \sum_m \langle \phi_m | V_{i,m}^\dagger \mathcal{A} \sum_j V_{i,j} |\phi_j\rangle \sum_k V_{i,k} |\phi_k\rangle} \\ &= \inf_V \sum_i \sqrt{[VV\mathcal{A}V^\dagger V^\dagger]_{ii}^{ii}}. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Es decir formamos una multimatriz, en donde el ínfimo ahora corre sobre las matrices laterales $V_{i,m}$ y ya no sobre todas las descomposiciones de ρ . Finalmente, usemos la aproximación $\hat{\mathcal{A}}_{jk}^{lm} \simeq \tau_{lm}^* \tau_{jk}$, para simplificar un poco

más a la ecuación 4.28, y así definir la aproximación cuasipura,

$$\begin{aligned}
C_N(\rho) &= \inf_V \sum_i \sqrt{[VVAV^\dagger V^\dagger]_{ii}^{ii}} \\
&\approx \inf_V \sum_i \sqrt{[V \otimes V\tau^*\tau V^\dagger \otimes V^\dagger]_{ii}^{ii}} \\
&= \inf_V \sum_i \sqrt{[[V^*\tau^*V^\dagger]_{ii}[V\tau V^T]_{ii}]} \\
&= \inf_V \sum_i \sqrt{|[V\tau V^T]_{ii}|^2} \\
&= \inf_V \sum_i |[V\tau V^T]_{ii}|.
\end{aligned} \tag{4.29}$$

El último elemento de la ecuación 4.29 será por definición la aproximación cuasi-pura:

$$C_{\text{qp}}(\rho) = \inf_V \sum_i |[V\tau V^T]_{ii}|. \tag{4.30}$$

La ecuación 4.30, se asemeja a la diagonalización de la matriz τ en términos de la matriz V , VHV^T . Es posible calcular exactamente el ínfimo para la C_{qp} y encontrar una fórmula cerrada. En [38] se calcula el dicho ínfimo para el caso bipartita y por analogía lo extienden al caso multipartita [14]. En este texto, no se expondrá la demostración de que dicha aproximación resulta ser una cota inferior ni el cálculo del ínfimo. Con ésto en mente, la aproximación cuasi-pura se reescribe como la siguiente fórmula

$$C_{\text{qp}} = \inf_V \sum_i |[V\tau V^T]_{ii}| = \max\{s_1 - \sum_{i>1} s_i, 0\}, \tag{4.31}$$

donde los s_i son los valores singulares de τ en forma decreciente; esto es, las raíces cuadradas de la matriz simétrica $\tau\tau^*$ con $\tau_{jk} = \frac{A_{jk}^{11}}{\sqrt{A_{11}^{11}}}$. Con esta herramienta de análisis, podemos estudiar la dinámica de enlazamiento que nos interesa. En la siguiente sección presentaremos el hamiltoniano que gobernará la evolución del sistema cuántico.

4.4. Modelo Generalizado: Tres átomos acoplados en una cavidad

A continuación se presentará el modelo con el que se trabajará en el resto de este trabajo. La inclusión de un sistema de dos niveles enriquece al hamiltoniano que determina la evolución de los estados iniciales; a dicho modelo se le denominará generalizado, pues a diferencia del modelo de dos átomos y una cavidad, consta de cuatro partes: los tres átomos/qubits y la cavidad/Oscilador, cuyo espacio de Hilbert asociado tiene la forma $\mathcal{H}_{\text{osc}} \otimes (\mathcal{H})^{\otimes 3} = \mathcal{H}_{\text{osc}} \otimes \mathcal{H}_{q,1} \otimes \mathcal{H}_{q,2} \otimes \mathcal{H}_{q,3}$, en donde el subíndice $(q, i = 1, 2, 3)$ indica el espacio asociado a cada uno de los qubits. Los átomos de dos niveles se acoplarán vía las interacciones de Ising y dipolo-dipolo. Se interpretará a la cavidad como el *ambiente*, con el cual los átomos estarán acoplados con un solo modo de aquella.

4.4.1. El hamiltoniano

El hamiltoniano es

$$\begin{aligned}
\hat{H} = & \sum_{i=1}^3 \delta_i \hat{\sigma}_z^{(i)} \\
& + g_i \{ \hat{a} \hat{\sigma}_+^{(i)} + \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_-^{(i)} \} \\
& + 2\kappa_{12} (\hat{\sigma}_-^{(1)} \hat{\sigma}_+^{(2)} + \hat{\sigma}_+^{(1)} \hat{\sigma}_-^{(2)}) + 2\kappa_{13} (\hat{\sigma}_-^{(1)} \hat{\sigma}_+^{(3)} + \hat{\sigma}_+^{(1)} \hat{\sigma}_-^{(3)}) \\
& \quad + 2\kappa_{23} (\hat{\sigma}_-^{(2)} \hat{\sigma}_+^{(3)} + \hat{\sigma}_+^{(2)} \hat{\sigma}_-^{(3)}) \\
& + J_{12} \hat{\sigma}_z^{(1)} \hat{\sigma}_z^{(2)} + J_{13} \hat{\sigma}_z^{(1)} \hat{\sigma}_z^{(3)} + J_{23} \hat{\sigma}_z^{(2)} \hat{\sigma}_z^{(3)}, \tag{4.32}
\end{aligned}$$

donde δ_i indica la desintonía (detuning) en cada qubit, g_i es la intensidad de la interacción de los qubits con el oscilador (acoplamiento), J_{ij} es la interacción de Ising y κ_{ij} indica la intensidad de la interacción dipolo-dipolo; de manera estándar escribimos a las matrices de Pauli $\hat{\sigma}_{x,y,z}^{(j)}$ que actúan sobre la j -ésima partícula de espín 1/2, los operadores de creación y aniquilación del oscilador armónico (\hat{a}, \hat{a}^\dagger) y los operadores de ascenso y descenso que actúan sobre la partícula j -ésima, $\hat{\sigma}_\pm^{(j)} = \hat{\sigma}_x^{(j)} \pm \hat{\sigma}_y^{(j)}$. Podemos escribir de forma más compacta

a nuestro hamiltoniano, con la siguiente notación,

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^3 \delta_i \hat{\sigma}_z^{(i)} + \sum_{i=1}^3 g_i (\hat{a} \hat{\sigma}_+^{(i)} + \text{c.h.}) + \sum_{j \neq k=1}^3 2\kappa_{jk} (\hat{\sigma}_-^{(j)} \hat{\sigma}_+^{(k)} + \text{c.h.}) + \sum_{j \neq k=1}^3 J_{jk} \hat{\sigma}_z^{(j)} \hat{\sigma}_z^{(k)},$$

en donde c.h. indica el conjugado hermitiano del primer término de cada fórmula en la que aparece; por ejemplo, en el segundo sumando c.h. = $\hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_-^{(i)}$.

El objetivo central de esta tesis es estudiar la dinámica conjunta y por separado de dos tipos de enlazamiento bajo las reglas de \hat{H} . En la siguiente sección se propondrá una constante de movimiento que nos ayudará a entender y estudiar la evolución en el tiempo de distintos estados iniciales.

4.4.2. Operador de Número

Una característica importante que veremos en nuestro modelo es que el hamiltoniano preserva el número de excitaciones. Construido de manera análoga al operador 3.12 del capítulo anterior, definamos

$$\hat{N} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \hat{\sigma}_z^{(j)} + \hat{a} \hat{a}^\dagger + \frac{3}{2} \mathbf{1}. \quad (4.33)$$

El operador \hat{N} , puede interpretarse como “el número total de excitaciones” dentro del sistema; es decir, el número de estado del campo más el número de estados excitados relativos a los átomos de dos niveles (que, en nuestro caso corresponde: 0 para el estado base $|0\rangle$ y 1 para $|1\rangle$). El hecho de que $[\hat{H}, \hat{N}] = 0$, nos permite elegir una base conjunta de eigenvectores en la que podemos diagonalizar por bloques a nuestro hamiltoniano \hat{H} . La base que se elegirá es una donde \hat{N} , es diagonal y donde todos los elementos tengan un número cuántico determinado, a saber,

$$\begin{aligned} |\phi_0^{(n)}\rangle &= |n\rangle |000\rangle, & |\phi_4^{(n)}\rangle &= |n-2\rangle |110\rangle, \\ |\phi_1^{(n)}\rangle &= |n-1\rangle |001\rangle, & |\phi_5^{(n)}\rangle &= |n-2\rangle |101\rangle, \\ |\phi_2^{(n)}\rangle &= |n-1\rangle |010\rangle, & |\phi_6^{(n)}\rangle &= |n-2\rangle |011\rangle, \\ |\phi_3^{(n)}\rangle &= |n-1\rangle |100\rangle, & |\phi_7^{(n)}\rangle &= |n-3\rangle |111\rangle, \end{aligned} \quad (4.34)$$

donde $|n\rangle$ es el estado de número dentro de la cavidad (número de fotones), $|ijk\rangle = |i\rangle_1 \otimes |j\rangle_2 \otimes |k\rangle_3$ con $i, j, k \in \{1, 0\}$; los estados $|1\rangle_l, |0\rangle_l$ corresponden a los estados base y excitados, respectivamente, del l -ésimo átomo. La base dada en (4.34), satisface la relación $\hat{N}|\phi_j^{(n)}\rangle = n|\phi_j^{(n)}\rangle$, dada n fija. Una característica adicional podemos extraer del orden de la base en 4.34: nos permitirá escribir a la traza parcial de la matriz asociada de un estado mixto cualquiera $\hat{\rho}$ como sigue,

$$\text{tr}_{\text{osc}}\hat{\rho} = \begin{pmatrix} \hat{\rho}_{00} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \hat{\rho}_{11} & \hat{\rho}_{12} & \hat{\rho}_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \hat{\rho}_{21} & \hat{\rho}_{22} & \hat{\rho}_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \hat{\rho}_{31} & \hat{\rho}_{32} & \hat{\rho}_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{\rho}_{44} & \hat{\rho}_{45} & \hat{\rho}_{46} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{\rho}_{54} & \hat{\rho}_{55} & \hat{\rho}_{56} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{\rho}_{64} & \hat{\rho}_{65} & \hat{\rho}_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{\rho}_{77} \end{pmatrix} \quad (4.35)$$

La elección de dicha base, permite escribir a la matriz asociada al operador \hat{H} de manera diagonal por bloques (de forma análoga al capítulo anterior),

$$H^{(n)} = \begin{pmatrix} H_{AA}^{(n)} & H_{AB}^{(n)} \\ (H_{AB}^{(n)})^\dagger & H_{BB}^{(n)} \end{pmatrix} - \sum_{j \neq k=1}^3 J_{jk} \hat{1} \quad (4.36)$$

siendo

$$H_{AA} = \begin{pmatrix} 2J & g_1^+ & g_2^+ & g_3^+ \\ g_1^+ & \delta_1^+ & \kappa_{12} & \kappa_{13} \\ g_2^+ & \kappa_{12} & \delta_2^+ & \kappa_{23} \\ g_3^+ & \kappa_{13} & \kappa_{23} & \delta_3^+ \end{pmatrix} - \sum_{j=1}^3 \Delta_j \hat{1}, \quad (4.37)$$

si $g_i^\pm = g_i \sqrt{n \pm 1}$, $\delta_i^\pm = 2J_{\neq i} \pm 2\Delta_i$, y $T_{\Delta, J} = \sum_i J_{\neq i} - \Delta_i$. Note que usamos el subíndice $\neq i$ para referirnos al par de subíndices que son diferentes de i y entre si. Los bloques fuera de la diagonal están dados por

$$H_{AB} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_3^0 & g_2^0 & 0 \\ g_3^0 & 0 & g_1^0 & 0 \\ g_2^0 & g_1^0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.38)$$

con $g_i^0 = g_i\sqrt{n}$. Finalmente,

$$H_{BB} = \begin{pmatrix} \delta_3^- & \kappa_{12} & \kappa_{13} & g_1^- \\ \kappa_{12} & \delta_2^- & \kappa_{23} & g_2^- \\ \kappa_{13} & \kappa_{23} & \delta_1^- & g_3^- \\ g_1^- & g_2^- & g_3^- & 2J \end{pmatrix} + \sum_{j=1}^3 \Delta_j \hat{1} \quad (4.39)$$

para valores chicos de n , la matriz será el primer bloque de 1, 4 y 7 estados correspondientes para $n = 0, 1, 2$ respectivamente.

4.4.3. Evolución Temporal

Si partimos de un estado inicial cualquiera, $|\psi_0\rangle$ el sistema central evolucionará con el operador unitario generado por el hamiltoniano escrito en (4.32), $\hat{U} = e^{-it\hat{H}}$, en su representación de Schrödinger. Así, el estado de los tres qubits para toda t será

$$\rho(t) = \text{tr}_{\text{osc}} e^{-it\hat{H}} |\psi_0\rangle \langle\psi_0| e^{it\hat{H}}. \quad (4.40)$$

Esta fórmula será fundamental para describir y estudiar las dinámicas de la concurrencia generalizada y la pureza respecto al tiempo.

4.4.4. Un par de configuraciones particulares

Al tener una variedad de parámetros, como se ha mencionado, podemos tener configuraciones que nos llevan a diferentes situaciones físicas. Para tener un mejor control de nuestro modelo se propondrán dos casos a analizar. Primero, se utilizará un hamiltoniano en donde se preserve el máximo de simetría; esto lo logramos al estipular las condiciones siguientes sobre los parámetros: $\kappa_{ij} = \kappa$, $J_{ij} = J$, el acoplamiento al campo será $g_i = g = 1$, y finalmente $\delta_i = \delta = 0$. Al hamiltoniano con estas restricciones se le denominará *homogéneo* y está representado por

$$\hat{H}^h = \sum_{i=1}^3 g \left(\hat{a} \hat{\sigma}_+^{(i)} + \text{c.h.} \right) + \sum_{j \neq k=1}^3 2\kappa \left(\hat{\sigma}_-^{(j)} \hat{\sigma}_+^{(k)} + \text{c.h.} \right) + \sum_{j \neq k=1}^3 J \hat{\sigma}_z^{(j)} \hat{\sigma}_z^{(k)}. \quad (4.41)$$

Segundo, para apreciar los efectos de la homogeneidad de \hat{H}^h , se incluye una pequeña *modificación* en la interacción dipolo-dipolo; el resultado es el hamiltoniano *quasi-homogéneo*

$$\hat{H}^{qh} = \hat{H}^h + \kappa_{jk} \left(\hat{\sigma}_-^{(1)} \hat{\sigma}_+^{(2)} + \text{c.h.} \right). \quad (4.42)$$

Para el cálculo del enlazamiento de los tres átomos con la cavidad se puede utilizar la matriz de densidad reducida de cualquiera de los subsistemas. Por conveniencia, utilizamos el operador traza parcial sobre los grados de libertad de la cavidad, $\text{tr}_{\text{osc}} \rho$, dado en la ecuación 4.35.

Como medida de enlazamiento entre los tres qubits con la cavidad, por simplicidad operacional, se usará, de nuevo, a la pureza. *A priori*, sabemos que la pureza tiene una cota inferior que depende de la dimensión del espacio de Hilbert asociado a la matriz de densidad reducida. En nuestro análisis, la dimensión de dicho espacio es de 8. Por tanto, la pureza estará acotada por $1/8 \leq P \leq 1$. En nuestro caso, la pureza adquiere la forma genérica siguiente,

$$P(\rho) = \text{tr}(\text{tr}_{\text{osc}} \rho)^2. \quad (4.43)$$

Una vez que se ha presentado a nuestro modelo y las distintas herramientas de análisis para el enlazamiento. En el siguiente capítulo se propondrán dos familias de estados iniciales; mediante métodos numéricos, se graficarán las evoluciones del enlazamiento y su relación con los distintos parámetros.

CAPÍTULO 5

Resultados y Conclusiones

En este capítulo se presentarán algunos resultados de la dinámica conjunta y la dinámica por separado de la concurrencia y pureza como función del tiempo¹. Se elegirán dos familias de estados iniciales con la condición de que pertenezcan al subespacio generado por un eigenvalor definido del operador \hat{N} . Los sistemas se harán evolucionar conforme a los operadores unitarios generados por los Hamiltonianos \hat{H}^h y \hat{H}^{qh} , ecuaciones 4.41 y 4.42, respectivamente.

La primer familia corresponde al estado normalizado producto con $n - 1$ fotones en la cavidad, y la superposición de los estados $|001\rangle$ y $|010\rangle$,

$$|\Phi^{(n)}(\alpha)\rangle = |n - 1\rangle \otimes (\sin \alpha |001\rangle + \cos \alpha |010\rangle). \quad (5.1)$$

La segunda familia de estados considera $n - 1$ fotones en la cavidad pero ahora la superposición de los estados está en términos de $|001\rangle$, $|010\rangle$ y $|100\rangle$,

$$|\Psi^{(n)}(\alpha)\rangle = |n - 1\rangle \otimes \left(\frac{\sin \alpha}{\sqrt{2}} |001\rangle + \cos \alpha |010\rangle + \frac{\sin \alpha}{\sqrt{2}} |100\rangle \right). \quad (5.2)$$

La principal diferencia entre las dos familias se enfoca en la elección de los

¹Dinámica que fue programada bajo el esquema del álgebra computacional de *Mathematica* y el lenguaje de programación C++.

estados pertenecientes al sistema central: mientras que en la primer familia no existe enlazamiento tripartita genuino, (ya que una de las partes tiene un estado no correlacionado) en la segunda familia se incluyen estados con genuino enlazamiento tripartita, incluido el estado $|W\rangle$, cuando $\alpha = \alpha_0 = \arctan(\sqrt{2})$.

Hemos calculado la concurrencia para estos estados iniciales. Así,

$$C_N(|\Phi^{(n)}(\alpha)\rangle) = \sin 2\alpha, \quad (5.3)$$

para la primer familia y con valor máximo de 1 cuando $\alpha = \pi/4$; mientras que,

$$C_N(|\Psi^{(n)}(\alpha)\rangle) = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{2}} \sqrt{5 + 3 \cos(2\alpha)}, \quad (5.4)$$

para la segunda clase y, con un máximo de $2/\sqrt{3} \approx 1.15$ cuando $\alpha = \alpha_0$. Otra propiedad importante es que sus respectivas purezas alcanzan el máximo,

$$P(\text{tr}_{\text{osc}}|\Phi^{(n)}(\alpha)\rangle \langle \Phi^{(n)}(\alpha)|) = P(\text{tr}_{\text{osc}}|\Psi^{(n)}(\alpha)\rangle \langle \Psi^{(n)}(\alpha)|) = 1, \quad (5.5)$$

al trazar sobre los grados de libertad de la cavidad. Dado que nuestro método de análisis es el numérico, el cálculo analítico de las concurrencias para ambos estados es crucial, pues servirá como criterio para corroborar inicialmente que nuestros algoritmos numéricos son consistentes. Por otro lado, la expresión genérica para las evoluciones en el tiempo de ambas familias estará dada por

$$\rho(t) = \text{tr}_{\text{osc}} e^{-it\hat{H}} |\psi(0)\rangle \langle \psi(0)| e^{it\hat{H}}, \quad (5.6)$$

en donde el estado inicial $|\psi(0)\rangle$ puede ser elegido como cualquier representante de las familias $|\Psi^{(n)}(\alpha)\rangle$, $|\Phi^{(n)}(\alpha)\rangle$. Finalmente, introducimos la siguiente notación para describir a las evoluciones de la aproximación cuasi-pura de la concurrencia y la pureza dependientes del tiempo,

$$C(t) = c_{cp}(\rho(t)), \quad P(t) = P(\rho(t)). \quad (5.7)$$

En la sección 5.1.1 se han estudiado algunos estados representativos de cada familia y se compararán las dinámicas de la pureza y concurrencia con distintos valores de la interacción de dipolo-dipolo bajo los esquemas de los Hamiltonianos \hat{H}^h y \hat{H}^{qs} . Seguido, en la sección 5.1.2 se presentarán los diagramas CP para distintos representantes de cada familia comparando sus

respectivas evoluciones con y sin interacción para ambos Hamiltonianos, \hat{H}^h y \hat{H}^{qs} . Finalmente, en la sección 5.1.3 se mostrará un esquema global de las dinámicas de la concurrencia y pureza respecto al tiempo y la interacción de Ising, mediante el uso de los diagramas de densidad para los estados iniciales $|\Psi^{(n)}(\pi/4)\rangle$ y $|\Phi^{(n)}(\alpha_0)\rangle$. Se variarán tanto el número total de excitaciones como la constante de acoplamiento dipolo-dipolo. Finalizaremos en la sección 5.2 con las conclusiones del capítulo y de la tesis.

5.1. Átomos iguales, resonantes y con interacción

La pregunta inicial a responder es cómo cambia la dinámica al comparar los distintos estados iniciales pero con los mismos valores de las interacciones para cada uno de ellos.

5.1.1. Evoluciones de pureza y concurrencia como función del tiempo

Primer Familia de Estados Iniciales

En la figura 5.1 se ilustran las dinámicas de la pureza y concurrencia de cuatro estados iniciales: todas las curvas representan a tres átomos bajo las mismas condiciones iniciales de que la interacción de Ising entre ellos es $J = 0.5$ y que la interacción dipolo-dipolo es $\kappa = 1$. Además, todas evolucionan bajo el esquema del Hamiltoniano homogéneo, \hat{H}^h . La curva en negro representa al caso de $|\Phi^{(n)}(0)\rangle$, con concurrencia inicial cero; la curva en azul representa al estado inicial $|\Phi^{(n)}(\frac{\pi}{30})\rangle$; la curva en verde al estado $|\Phi^{(n)}(\frac{\pi}{20})\rangle$, mientras que la curva gris representa al estado inicial $|\Phi^{(n)}(\frac{\pi}{10})\rangle$. En la figura 5.1[a] las dinámicas de la pureza muestran patrones oscilatorios, con periodos bien definidos, además de que alcanzan su máximo en los mismos puntos del dominio. Se observa que todos los estados son inicialmente puros. En la figura 5.1[b] las evoluciones de la concurrencia son presentadas. En ellas también se muestran patrones de oscilación más complejos que en las evoluciones respectivas de la pureza en el intervalo temporal $[0, 20]$. En la figura 5.2 se muestran las evoluciones de la pureza y concurrencia para los mismos estados iniciales que en la figura 5.1 pero bajo la acción del Hamiltoniano cuasi-homogéneo

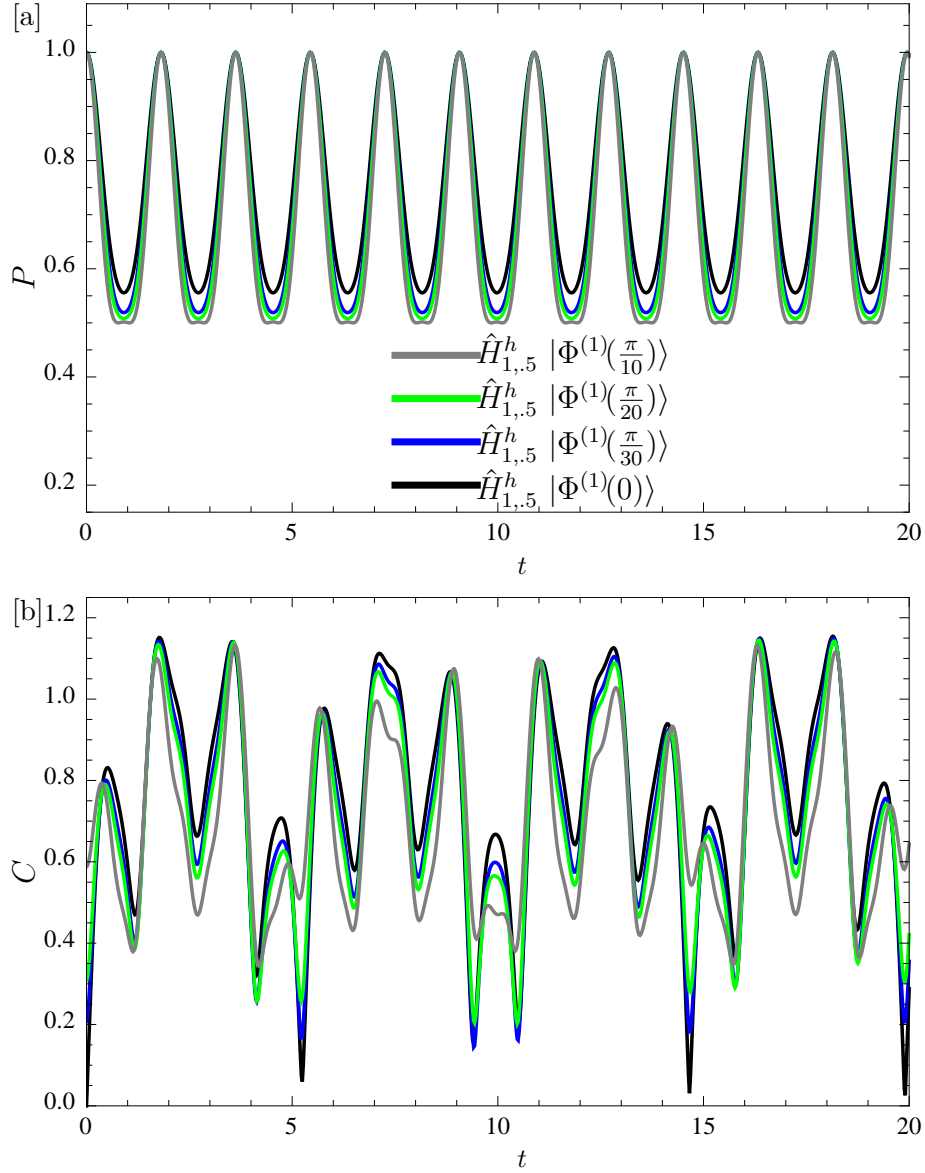


Figura 5.1: Gráficas de las evoluciones de la pureza, $P(t)$, y concurrencia, $C(t)$, como función del tiempo para los estados de la forma $|\Phi^{(n)}(\alpha)\rangle$, para distintos valores de $\alpha_i \in \{\pi/10, \pi/20, \pi/30, 0\}$. La dinámica de la pureza se muestra en [a] bajo el esquema del Hamiltoniano homogéneo $H_{\kappa,J}^h$; mientras que en [b] se despliegan las dinámicas de la concurrencia con los mismos estados iniciales que en [a]. En todos los casos se consideran los valores de las interacciones $\kappa = 0$ y $J = 0.5$ con un estado de número $n = 1$.

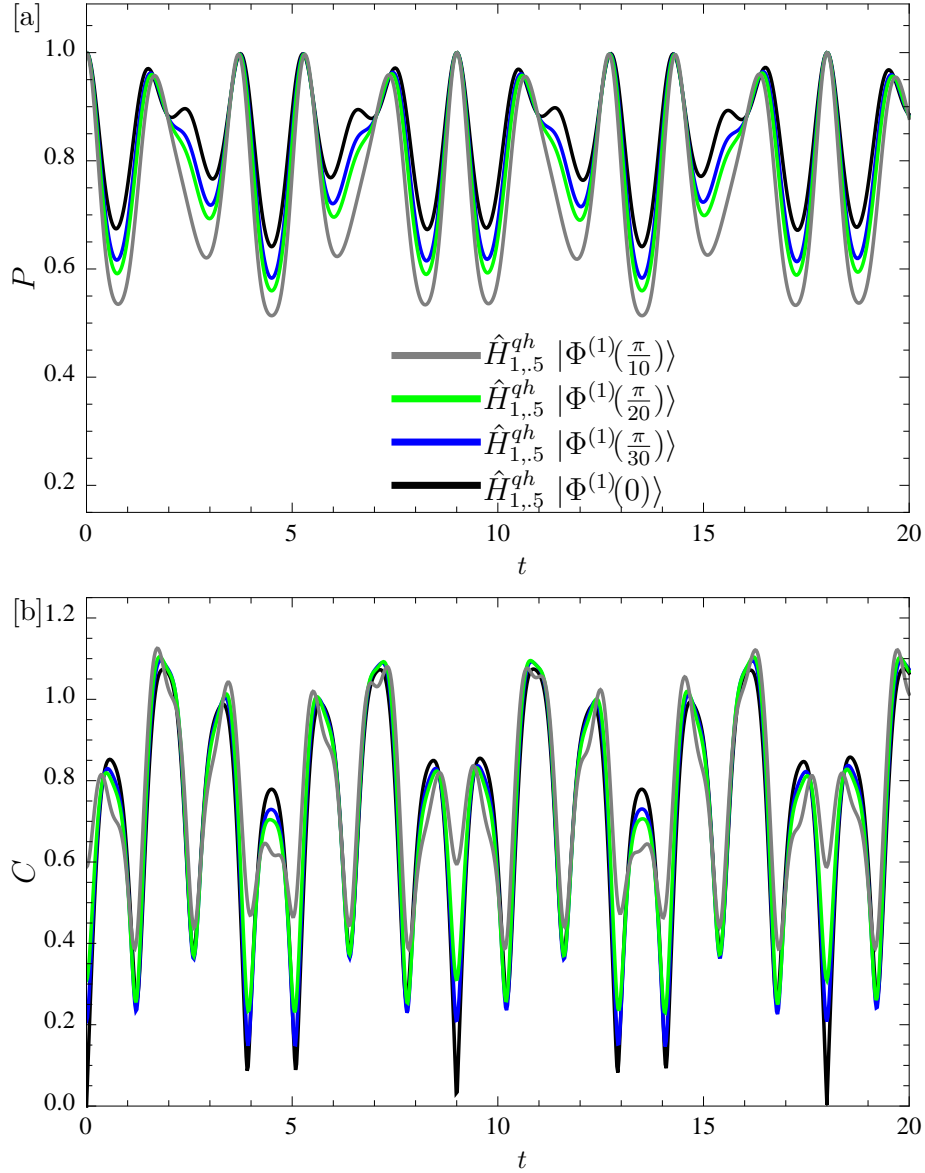


Figura 5.2: En [a] se muestran las gráficas de las evoluciones de la pureza, $P(t)$, y en [b] se presenta la dinámica de la concurrencia $C(t)$, con los mismos estados iniciales y valores de las interacciones dipolo e Ising, que en la figura 5.1, pero ahora las evoluciones se rigen bajo el Hamiltoniano cuasi-homogéneo $H_{\kappa,J}^{qh}$.

H^{qh} , 5.2[a] y 5.2[b], respectivamente. Las curvas de las evoluciones de la pureza nuevamente presentan oscilaciones como en su contraparte homogénea, pero con mayor complejidad y con un periodo mayor. La evolución de la concurrencia para el caso cuasihomogéneo no presenta un periodo definido en el mismo intervalo temporal que su contraparte homogénea.

Segunda Familia de Estados Iniciales

En la figura 5.3 se presentan las dinámicas de la pureza y concurrencia, 5.3[a] y 5.3[b] respectivamente, para cuatro estados iniciales representantes de la familia $|\Psi^{(1)}(\alpha)\rangle$, pero sólo tomando en cuenta a la interacción de Ising ($\kappa = 0$, $J = 0.5$) evolucionando con el Hamiltoniano homogéneo $\hat{H}_{0,0.5}^h$. La curva en negro representa a la evolución del estado inicial $|\Psi^{(1)}(0)\rangle$, la roja por $|\Psi^{(1)}(0.3)\rangle$, la verde por $|\Psi^{(1)}(0.5)\rangle$ y finalmente la curva en gris por $|\Psi^{(1)}(0.7)\rangle$. Nuevamente, las evoluciones de la pureza para estos estados muestran patrones oscilatorios con periodos bien definidos 5.3[a], en donde la evolución de la pureza de la curva en negro es cota superior de las curvas restantes. La evolución de sus respectivas concurrencias se calcularon hasta el tiempo $t = 20$, figura 5.3[b], para apreciar el carácter oscilante y con periodos también bien definidos. En la figura 5.4 se muestran las evoluciones de los mismos estados iniciales que en la figura 5.3, pero ahora considerando la interacción dipolo-dipolo, y también dependientes del Hamiltoniano homogéneo $\hat{H}_{1,0.5}^h$. Se aprecia que la evolución de la pureza de curva en negro no es más una cota superior del resto de las evoluciones, sin embargo, se siguen presentado patrones de oscilación con periodos bien definidos. La evolución de la concurrencia, 5.4[b], no muestra una frecuencia de oscilación definida a diferencia de su contraparte de la figura 5.3[b]. Finalmente, en la figura 5.5, las evoluciones de la pureza y concurrencia son presentadas con los mismos estados iniciales que en la figura 5.3, sin embargo ahora se considera al Hamiltoniano cuasi-homogéneo $\hat{H}_{\kappa=1,J=0}^{qh}$. La evolución de la pureza, 5.5[a] es más compleja que en los dos casos anteriores, pero aún es posible determinar que existen frecuencias de transición definidas pero un intervalo de evolución mayor (hasta $t=20$). La dinámica de la concurrencia, 5.5[b], también posee un carácter complejo pero aún es posible distinguir el periodo de oscilación.

Hasta ahora se han presentado las evoluciones de la pureza y concurrencia para distintos representantes de las dos familias de estados iniciales, ecuaciones 5.1 y 5.2, y sólo se han observado aspectos cualitativos de las oscilaciones

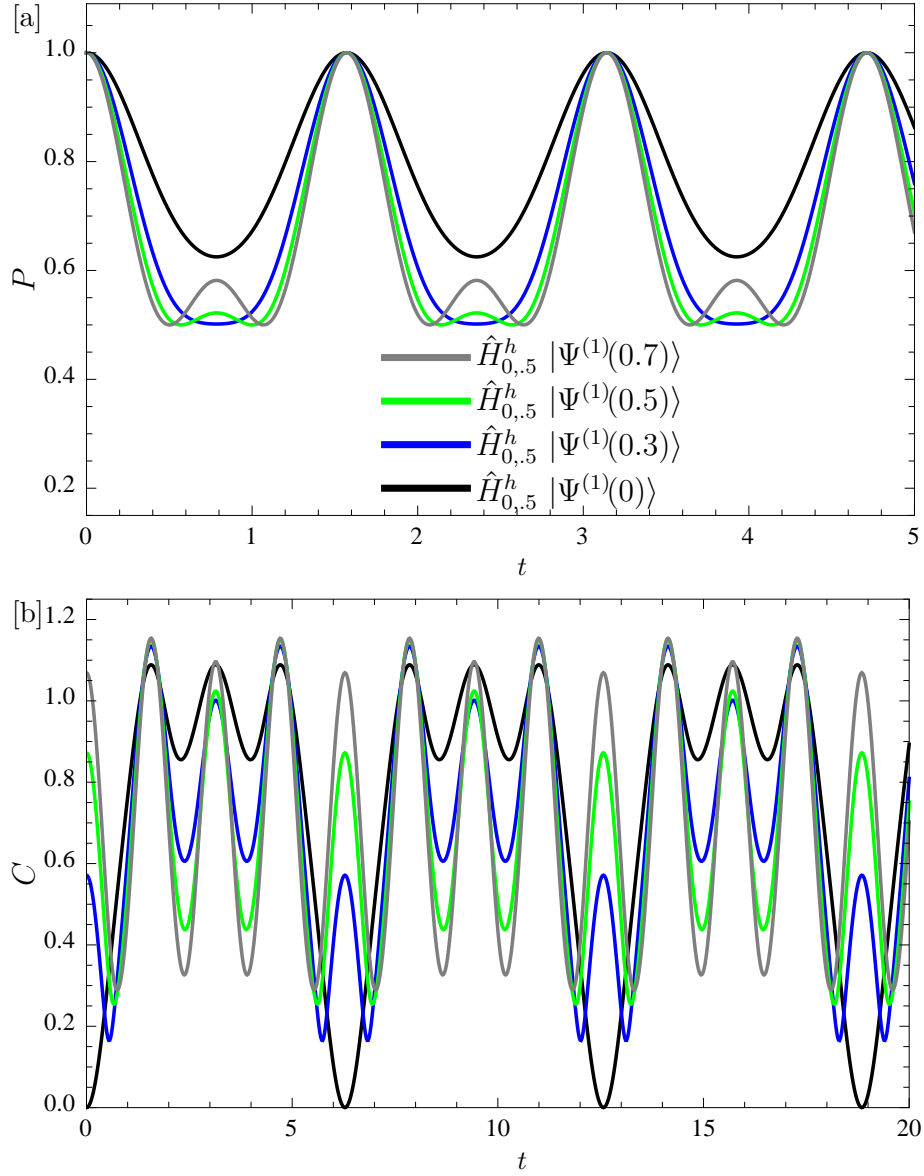


Figura 5.3: En [a] se presentan las gráficas de las evoluciones de la pureza, $P(t)$, como función del tiempo para los estados de la forma $|\Psi^{(n)}(\alpha)\rangle$, con $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0.3$, $\alpha_3 = 0.5$ y $\alpha_4 = 0.7$, con las interacciones $J = 0.5$, $\kappa = 0$, bajo el esquema de $H_{\kappa,J}^h$ hasta el tiempo $t = 5$. Mientras que en [b] las evoluciones de la concurrencia como función del tiempo, $C(t)$, son graficadas con los mismos estados iniciales y condiciones que en la figura [a].

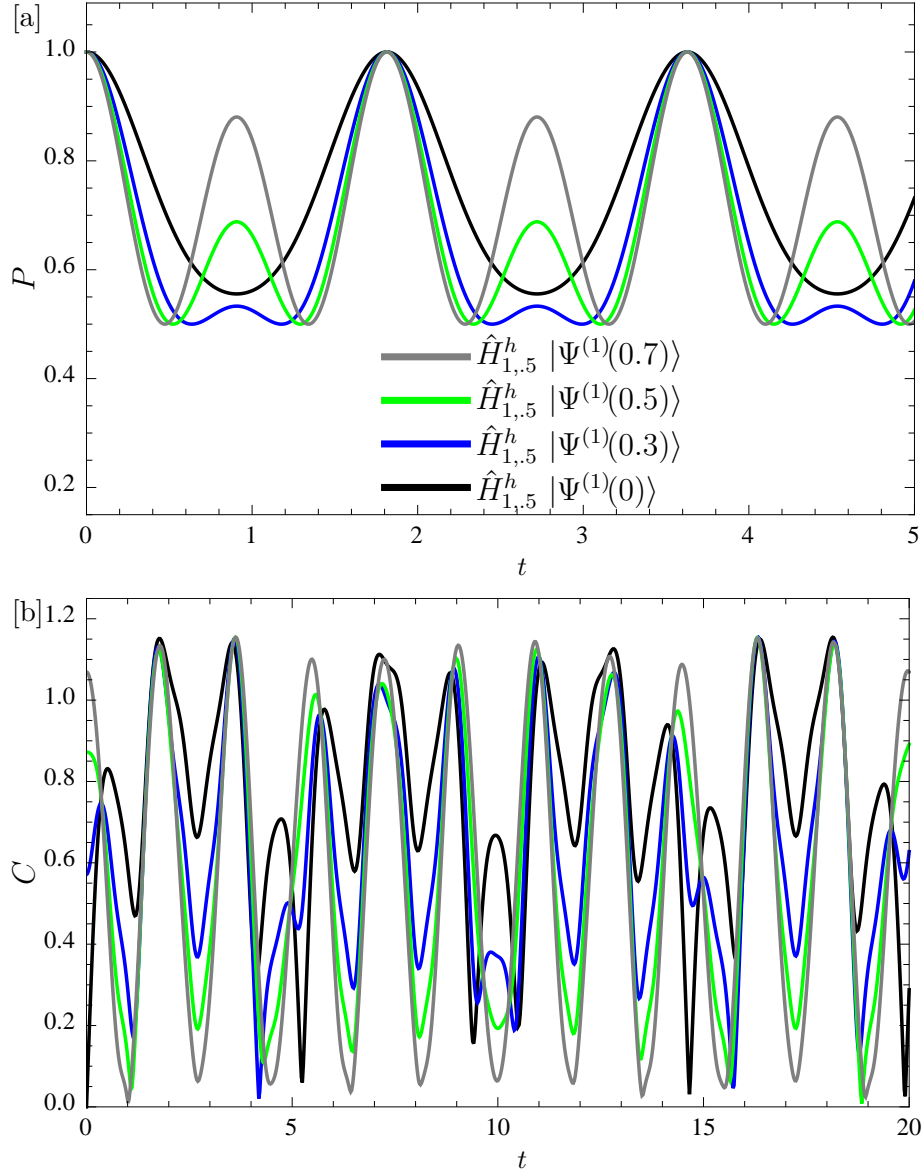


Figura 5.4: Mismos estados iniciales que en la figura 5.3 pero ahora considerando a la interacción dipolo-dipolo, $\kappa = 1$. En [a] se muestra las gráficas de las evoluciones de la pureza respecto al tiempo bajo con el Hamiltoniano homogéneo \hat{H}^h mientras que en [b] se muestran las dinámicas de la concurrencia respecto al tiempo con el mismo Hamiltoniano.

al considerar las interacciones de Ising y dipolo. En la siguiente sección, se presentarán los diagramas CP para encontrar alguna relación entre las evoluciones de la pureza y concurrencia en conjunto.

5.1.2. Diagramas CP

A lo largo de las figuras 5.6 – 5.13 se ilustrarán distintos elementos cualitativos de los diagramas concurrencia vs pureza para diferentes estados iniciales. La pregunta guía en esta sección será si podemos generalizar algunas de las propiedades presentes en el caso de dos qubits mencionadas en el capítulo 3.

Primer Familia de Estados Iniciales

En las figuras 5.6 y 5.7 se ilustran cuatro casos: las curvas en rojo y azul representan a tres átomos *sin* interacción con estados iniciales definidos por $|\Psi^{(1)}(\alpha_0)\rangle$ y $|\Phi^{(1)}(\alpha)\rangle$, respectivamente; y en negro, el caso con interacción con el Hamiltoniano homogéneo para la figura 5.6, y el cuasi-homogéneo para la figura 5.7. Las curvas en azul de la figura 5.6, corresponden a los estados iniciales $|\Phi^{(1)}(0)\rangle$ en [a], $|\Phi^{(1)}(\frac{\pi}{30})\rangle$ en [b], $|\Phi^{(1)}(\frac{\pi}{20})\rangle$ en [c], mientras que $|\Phi^{(1)}(\frac{\pi}{10})\rangle$ en [d]. En todos estos casos se observa que la curva en rojo, aquella que corresponde a la evolución del estado con máximo enlazamiento, acota superiormente al resto de las evoluciones con o sin interacción (curvas en negro y azul, respectivamente). Además, las curvas sin interacción (azul) son cota inferior para su correspondiente caso con interacción (curvas en negro), en el caso homogéneo. Esta propiedad ya se había observado en el caso de dos qubits. Sin embargo, para el caso no-homogéneo, figura 5.7, la curva en azul pierde la característica de ser cota inferior para el caso con interacción (curva en negro).

En la figura 5.8 se eligieron a otros representantes de la misma familia, gobernados también con el hamiltoniano homogéneo $\hat{H}_{1,5}^h$: en [a] el estado inicial es $|\Phi^{(1)}(\frac{\pi}{3})\rangle$, en [b] es $|\Phi^{(1)}(\frac{\pi}{5})\rangle$, en [c] $|\Phi^{(1)}(\frac{\pi}{7})\rangle$ y finalmente en [d] $|\Phi^{(1)}(\frac{\pi}{9})\rangle$. Aquí nuevamente se observa que la curva en rojo, aquella que corresponde a la evolución del estado con máximo enlazamiento, es cota superior del resto de las evoluciones con o sin interacción (curvas en negro y azul, respectivamente). Para el caso cuasi-homogéneo, figura 5.9, se aprecia con mayor claridad el hecho de que la curva azul (sin interacción) no es más una cota inferior para la evolución con interacción (curva en negro). Con estos

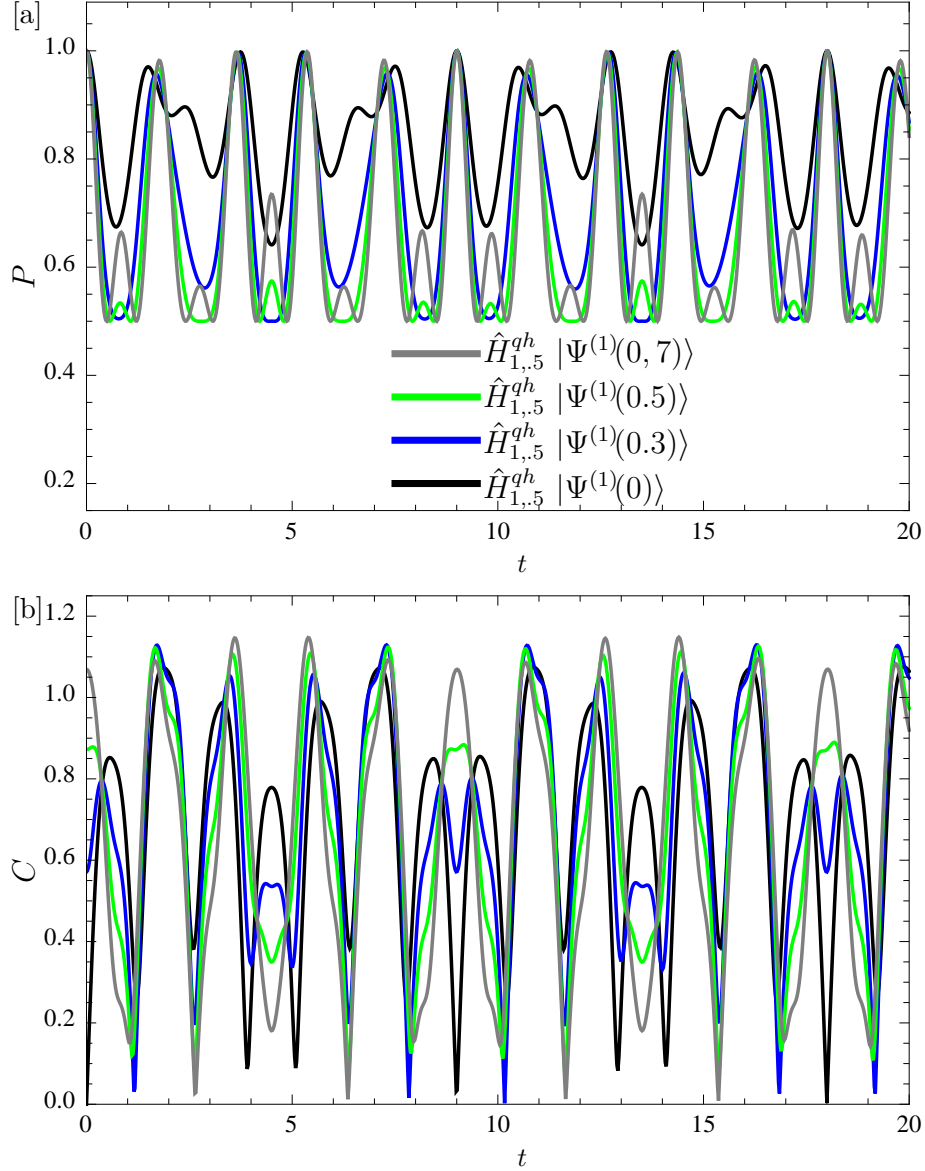


Figura 5.5: Mismos estados iniciales que en la figura 5.3 pero ahora considerando a la interacción dipolo-dipolo, $\kappa = 1$. En [a] se muestra las gráficas de las evoluciones de la pureza respecto al tiempo bajo con el Hamiltoniano homogéneo \hat{H}^h ; mientras que en [b] se muestran las dinámicas de la concurrencia respecto al tiempo con el mismo Hamiltoniano.

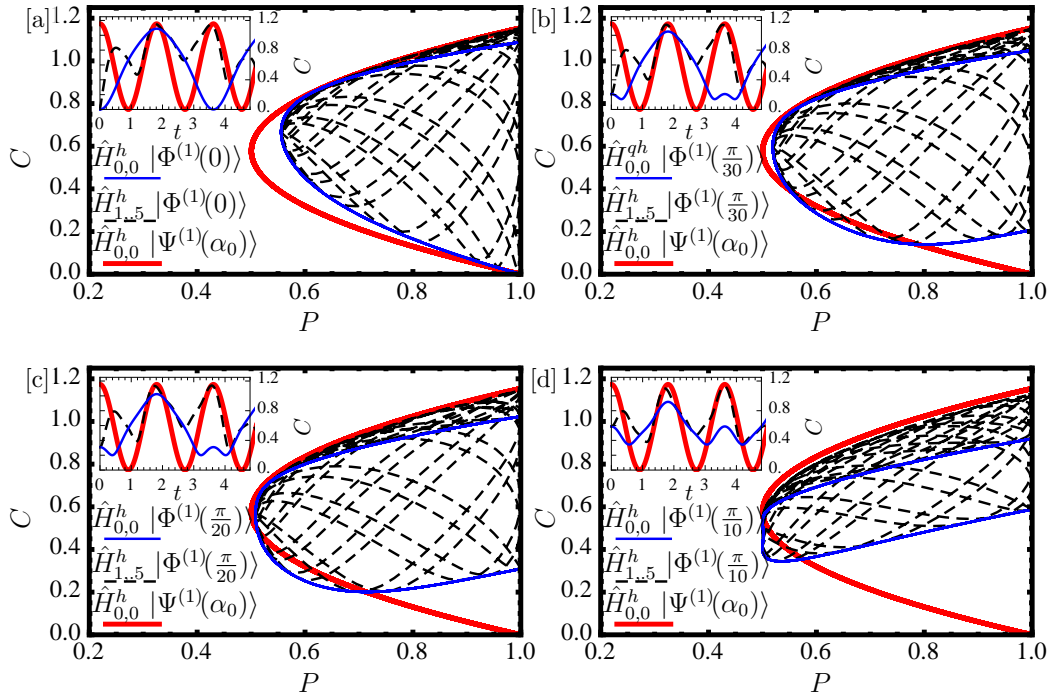


Figura 5.6: Curvas paramétricas de la concurrencia y pureza para los mismos estados iniciales que en el figura 5.2, bajo la evolución del Hamiltoniano homogéneo $H_{\kappa,J}^h$. Las curvas en azul son cota inferior para las respectivas dinámicas del caso con interacción (curvas en negro).

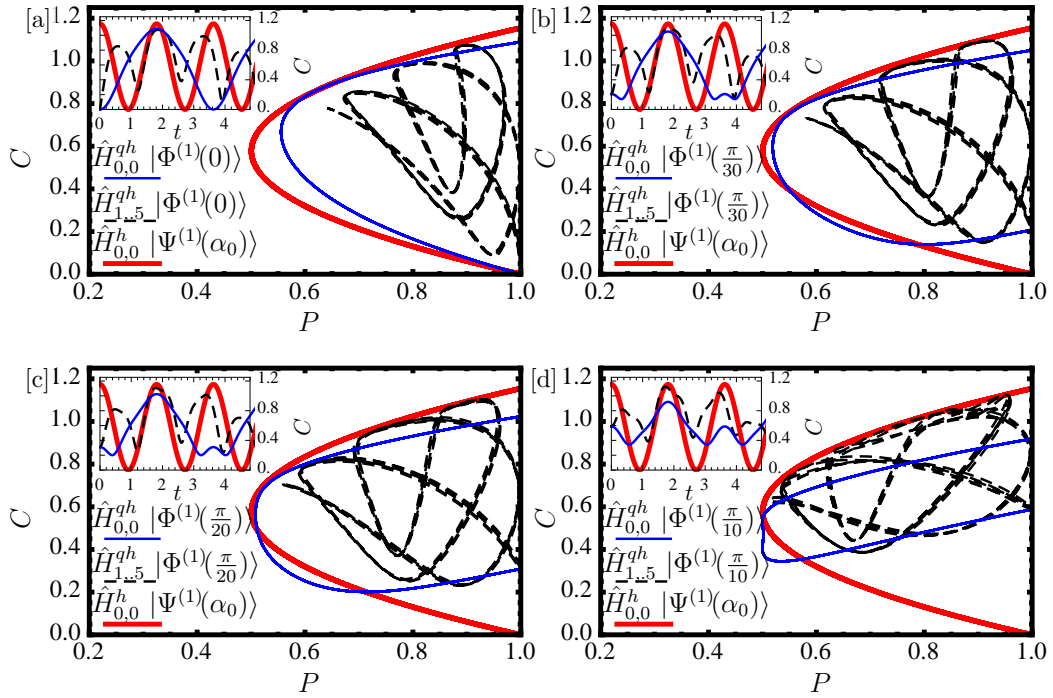


Figura 5.7: Curvas paramétricas de la concurrencia y pureza para los mismos estados iniciales que en el figura 5.6, pero ahora bajo la evolución del Hamiltoniano cuasi-homogéneo $H_{\kappa,J}^{qh}$. Las curvas en azul, no son cotas inferiores para sus respectivos casos con interacción (curvas en negro).

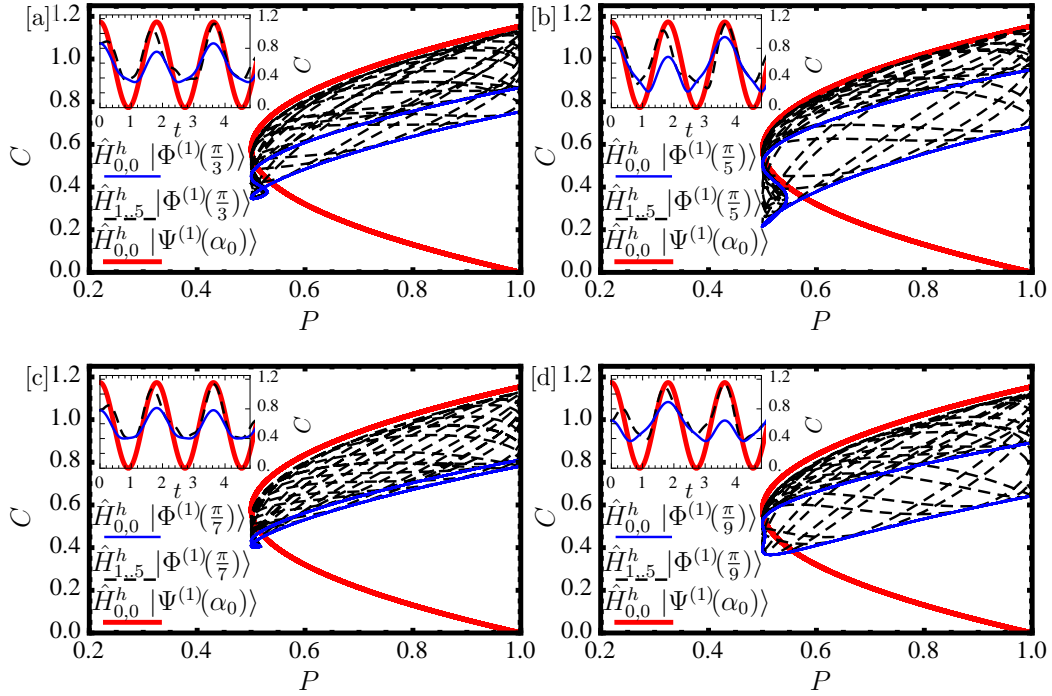


Figura 5.8: Curvas paramétricas de la concurrencia y pureza para los estados iniciales de la forma $|\Psi^{(n)}(\alpha)\rangle$ y $|\Phi^{(n)}(\alpha)\rangle$ con el Hamiltoniano homogéneo $H_{\kappa,J}^h$ e inicialmente con el estado de número $n = 1$. Las curvas en rojo representan el caso de tres átomos no interactuantes e inicialmente en el estado W . Las curvas en negro muestran el caso con interacción ($\kappa = 1$, $J = 0.5$) para cuatro estados iniciales distintos. En [a] se considera al estado inicial con $\alpha = \frac{\pi}{3}$, en [b] se considera $\alpha = \frac{\pi}{5}$, en [c] el caso en que $\alpha = \frac{\pi}{7}$, mientras que en [d] $\alpha = \frac{\pi}{9}$. Finalmente, las curvas en azul corresponden al caso sin interacción de los mismos estados iniciales que las curvas en negro. Las curvas en azul son cota inferior para las respectivas dinámicas del caso con interacción.

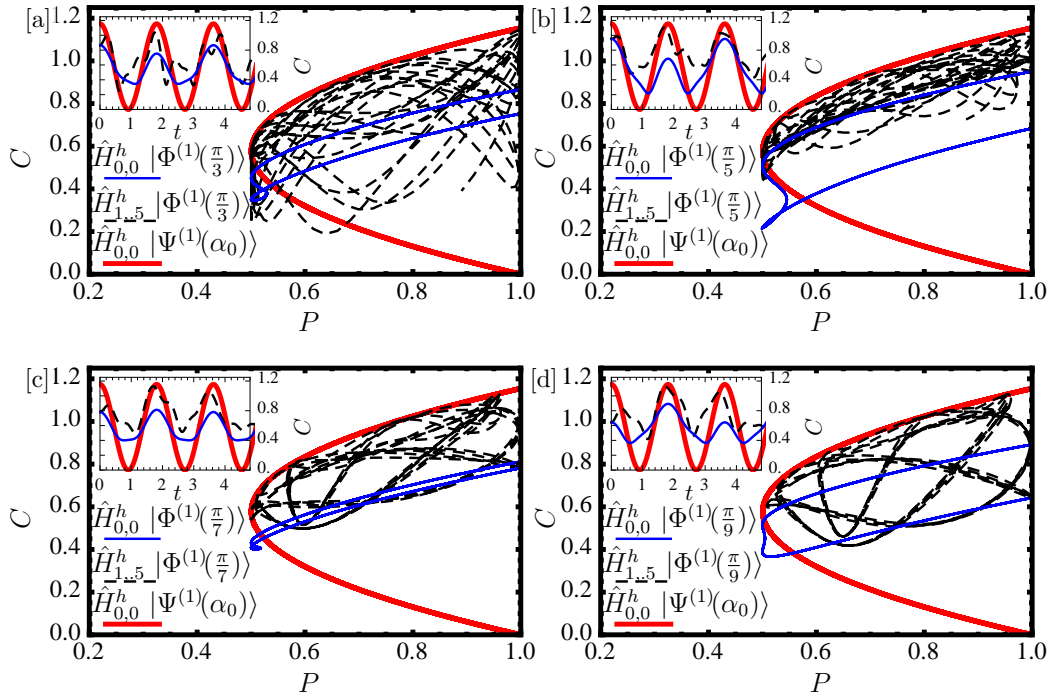


Figura 5.9: Curvas paramétricas de la concurrencia y pureza para los mismos estados iniciales que en el figura 5.8, pero ahora bajo la evolución del Hamiltoniano cuasi-homogéneo $H_{\kappa,J}^{qh}$. Las curvas en azul, no necesariamente son cotas inferiores para sus respectivos casos con interacción (curvas en negro).

ejemplos, se ha ilustrado que la propiedad de acotamiento de las evoluciones del hamiltoniano es sensible ante la presencia de inhomogeneidades.

Segunda Familia de Estados Iniciales

En las figuras 5.10 y 5.11 se ilustran cuatro casos: las curvas en rojo y azul representan a tres átomos *sin* interacción con estados iniciales definidos por $|\Psi^{(1)}(\alpha_0)\rangle$ y $|\Psi^{(1)}(\alpha)\rangle$, respectivamente; y en negro, el caso con interacción con $\kappa = 1$, $J = 0.5$ con el Hamiltoniano homogéneo $\hat{H}_{1,.5}^h$ (Fig. 5.10) y cuasi-homogéneo (Fig. 5.11). Las curvas en azul de la figura 5.10, corresponden a los estados iniciales $|\Psi^{(1)}(0)\rangle$ en [a], $|\Psi^{(1)}(.3)\rangle$ en [b], $|\Psi^{(1)}(.5)\rangle$ en [c], y $|\Psi^{(1)}(.7)\rangle$ en [d]. Nuevamente se observa que la evolución en rojo, correspondiente al estado inicial con máximo enlazamiento, es cota superior del resto de las evoluciones. La evolución con interacción, para el caso homogéneo (curvas en negro), figura 5.10, está acotada por su respectivo caso sin interacción (curvas en azul). Esta propiedad se pierde cuando las evoluciones se rigen bajo el Hamiltoniano cuasi-homogéneo, figura 5.11.

En la figura 5.12 se estudia el efecto de las interacciones tanto en estados inicialmente máximamente enlazados $|\Psi^{(n)}(\alpha_0)\rangle$ y estados parcialmente enlazados, $|\Psi^{(n)}(\alpha \neq \alpha_0)\rangle$. En este caso, la evolución de los estados con máximo enlazamiento sigue un patrón muy semejante que el caso sin interacción. Para el hamiltoniano homogéneo, las dos curvas coincide (curvas en rojo y negro en [a] y [c]); mientras que para el hamiltoniano cuasi-homogéneo, el caso con interacción (curvas en negro en [b] y [d]) actúan como una buena guía, pero imperfecta. Esta propiedad no se cumple si comenzamos inicialmente con un estado con menor enlazamiento. La curva en rojo sólo es cota superior para los casos interactuantes, pero muestran comportamientos oscilantes con periodos semejantes.

Finalmente, en la figura 5.13 se analiza en efecto de incrementar la diferencia entre las interacciones $|\kappa - J|$ sobre la región de evolución sobre los estados iniciales con interacción. En [a] y en [b] se eligió como estado inicial a $|\Phi^{(1)}(\frac{\Pi}{10})\rangle$ con la evolución de $\hat{H}_{\kappa,J}^h$: la curvas en negro representan al caso con interacción, aquí cuando la diferencia $\kappa = 4 - J = .5$, [a], es mayor, la región en donde la curva evoluciona es menor que en el caso $\kappa = 1 - J = .5$, [b]. Este mismo comportamiento se presenta en el representante de la segunda familia $|\Psi^{(1)}(0)\rangle$: en [c] la diferencia considerada es $\kappa = 1 - J = .5$, mientras que en [d] $\kappa = 6 - J = .5$, las evoluciones se tomaron con el Hamiltoniano homogéneo $\hat{H}_{\kappa,J}^h$. Esta propiedad se ha preservado desde el caso de dos qubits.

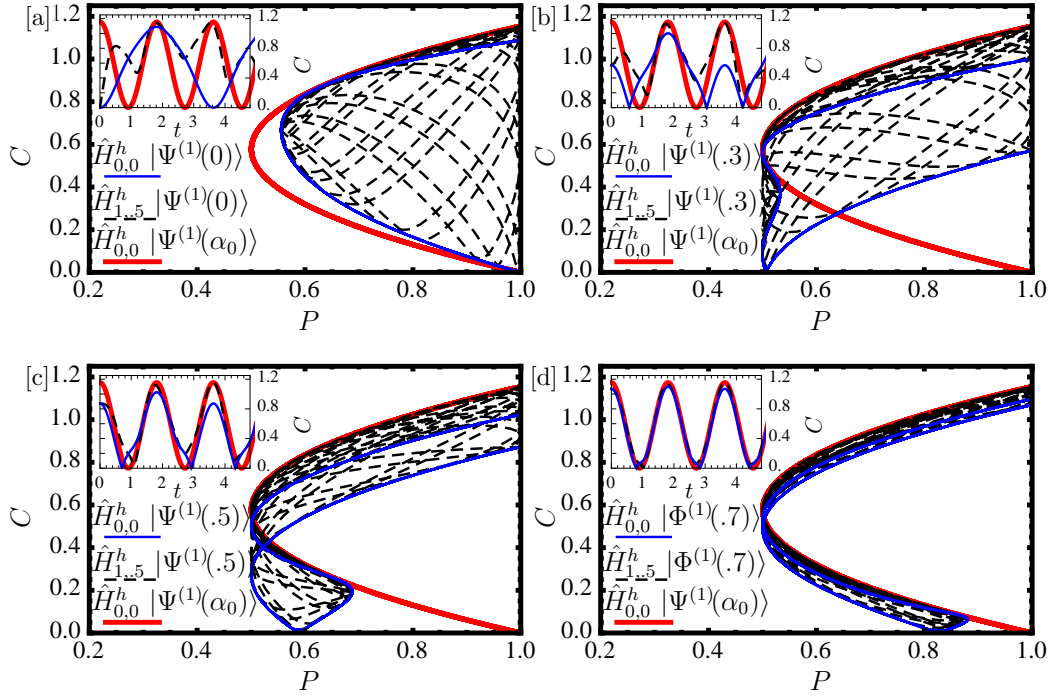


Figura 5.10: Parametrizaciones de la pureza y concurrencia con t , para los estados iniciales de la forma $|\Psi^{(n)}(\alpha)\rangle$ y $|\Phi^{(n)}(\alpha)\rangle$ evolucionando bajo el Hamiltoniano homogéneo $H_{\kappa,J}^h$ con $n = 1$. Las curvas en rojo representan el caso de tres átomos no interactuantes e inicialmente en el estado W . Las dinámicas en negro muestran el caso con interacción ($\kappa = 1$, $J = 0.5$) para cuatro estados iniciales distintos, representantes de la segunda familia: en [a] se considera al estado inicial con $\alpha = 0$, en [b] se considera $\alpha = 0.3$, en [c] el caso en que $\alpha = 0.5$, mientras que en [d] $\alpha = 0.7$. Finalmente, las curvas en azul corresponden al caso sin interacción de los respectivos estados iniciales. De igual forma que en la figura 5.6, las curvas en azul son cota inferior para las respectivas dinámicas del caso con interacción.

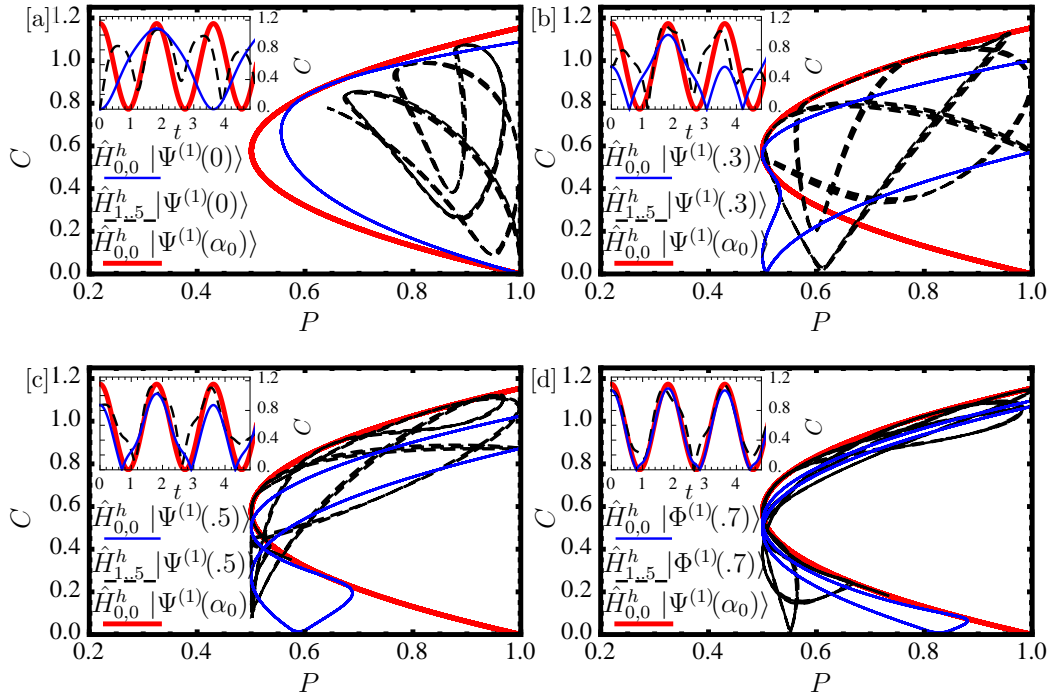


Figura 5.11: Curvas paramétricas de la concurrencia y pureza para los mismos estados iniciales que en el figura 5.10, pero ahora bajo la evolución del Hamiltoniano cuasi-homogéneo $H_{\kappa,J}^{qh}$. Las curvas en azul, no necesariamente son cotas inferiores para sus respectivos casos con interacción (curvas en negro), como también se observó en la figura 5.7.

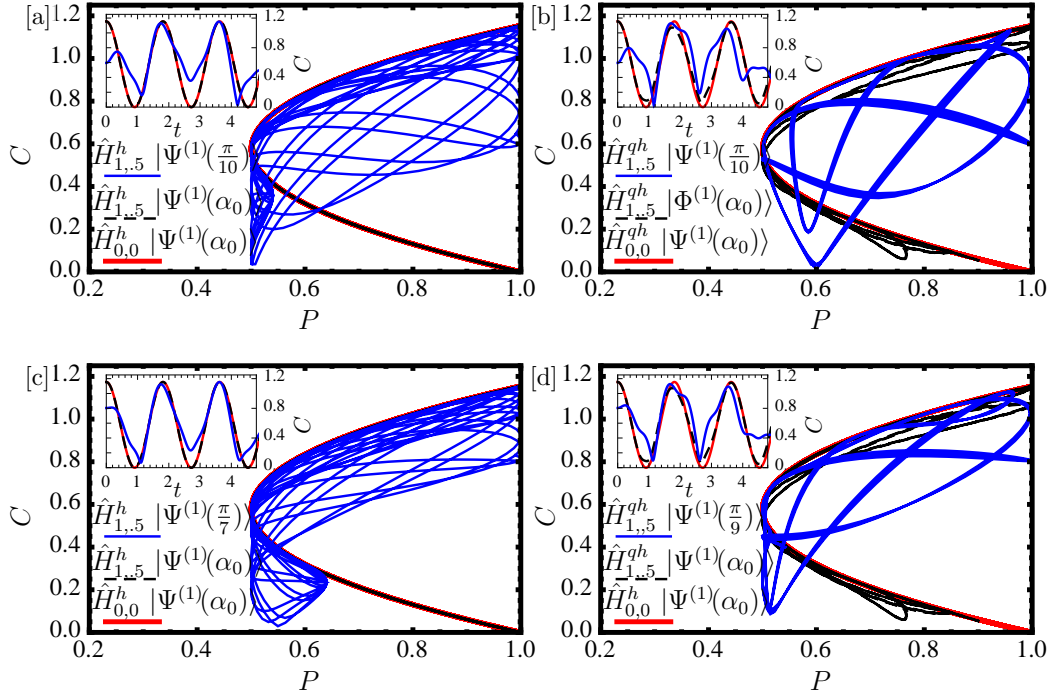


Figura 5.12: Mismas convenciones que en la figura 5.10 excepto que ahora se consideran únicamente estados de la forma $|\Psi^{(n)}(\alpha)\rangle$. En [a] se comparan las dinámicas entre el estado inicial $|\Psi^{(1)}(\frac{\pi}{10})\rangle$ y el de máximo enlazamiento $|\Psi^{(1)}(\alpha_0)\rangle$, bajo el Hamiltoniano $H_{1,5}^h$. En [b] se presentan las dinámicas del mismo estado inicial que en [a], pero con el Hamiltoniano cuasi-homogéneo $H_{1,5}^{qh}$. En [c] y [d] las dinámicas de los estados iniciales $|\Psi^{(1)}(\frac{\pi}{7})\rangle$, son presentadas, pero bajo la evolución de $H_{1,5}^h$ y $H_{1,5}^{qh}$, respectivamente. Lo que se observa es que la dinámica del estado de máximo enredamiento para el caso cuasi-homogéneo (curva en negro) parece confinarse en mayor medida a su contraparte homogénea, mientras que las evoluciones sin máximo enlazamiento (curvas en azul) no siguen el mismo confinamiento.

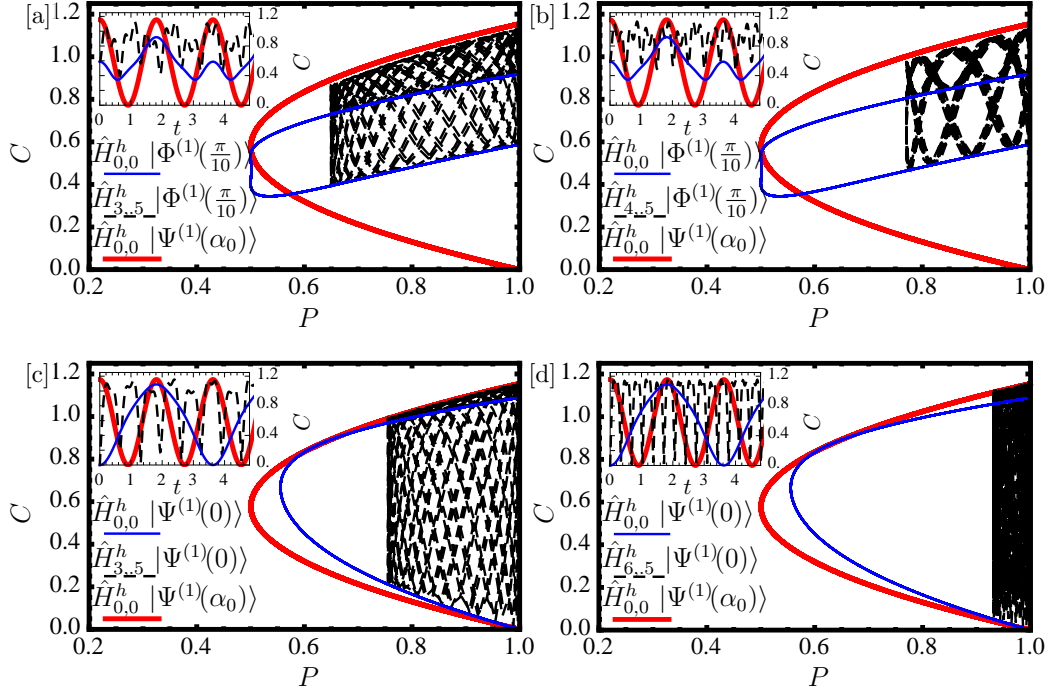


Figura 5.13: En este conjunto de diagramas CP , se estudia el comportamiento de la pureza vs la concurrencia al incrementar la diferencia de las interacciones $|\kappa - J|$. En [a] se presenta la evolución del estado inicial $|\Phi^{(1)}(\frac{\pi}{10})\rangle$, con el Hamiltoniano $\hat{H}_{3,0.5}^h$; mientras que en [b], se usa el mismo estado inicial que en [a] pero con $\kappa = 4$ y $J = 0.5$. Las evoluciones de los estados iniciales $|\Psi^{(1)}(0)\rangle$, se presentan en [c] y [d], pero con los hamiltonianos $\hat{H}_{3,0.5}^h$, y $\hat{H}_{6,0.5}^h$, respectivamente. Se observa que, cuando la diferencia $|\kappa - J|$ se incrementa, la región en la que evoluciona el sistema en este diagrama, disminuye.

Si incrementamos la diferencia de las intensidades entre los átomos el ínfimo de la pureza se incrementa. También se observa en los insets, que las gráficas de las concurrencias para dichos estados, tienen frecuencias crecientes. Este fenómeno nos permite interpretar que las correlaciones intrínsecas entre los átomos aumentan, al incrementar la diferencia de las intensidades y, el acoplamiento con el campo disminuye, permaneciendo en gran medida puro el estado tripartita. Se debe señalar que es bajo el incremento de la diferencia de las intensidades en la que este fenómeno ocurre, si tomamos intensidades altas e iguales, la cota de la pureza disminuye.

5.1.3. Diagrama de Densidad

En la sección anterior se presentaron los diagramas CP para distintos representantes de cada familia y se exhibieron ciertas propiedades presentes en el caso de dos átomos, pero que se han preservado en nuestro sistema. Para tener una visión más general sobre las dinámicas de las variaciones de la pureza y la concurrencia, se han propuesto a los diagramas de densidad. Los diagramas de densidad se construyen a partir de una función real de variable vectorial, en donde el dominio de la función, dependerá de dos parámetros. A los conjuntos de nivel para un valor fijo en el codominio $c \in I \subset \mathbb{R}$, denotados por $f^{-1}(c)$, se les asocia un color determinado. El resultado, es la interpretación de la gráfica de una función en términos de los colores asociados a cada conjunto de nivel. Las funciones que se utilizarán son la concurrencia y pureza, las cuales dependen de múltiples parámetros; sin embargo, en esta sección se considerarán como dominios de las funciones a los conjuntos formados por un intervalo temporal (eje y) producto cartesiano un conjunto de valores de la interacción de Ising (eje x), tomando como constante un valor determinado de la interacción dipolo-dipolo, κ . Así, a cada punto del dominio se le asociará un valor de la concurrencia o pureza que estará representado por un color tomado de una escala de colores, la cual representa al intervalo formado por los valores extremos de cada una de las funciones. Además, cada corte vertical corresponderá a un valor de la interacción de Ising y con una evolución en el tiempo hasta $t = 10$ (y que corresponden a las figuras presentadas en la primer sección).

En la figura 5.14 se comparan las dinámicas de la pureza (figuras [a] y [b]) y concurrencia (figuras [c] y [d]), vía el diagrama de densidad, con un estado inicial $|\Phi^{(1)}(\pi/4)\rangle$ con el Hamiltoniano $\hat{H}_{k,J}^h$. La pureza muestra un comportamiento regular con oscilaciones que parecen ser independientes de J

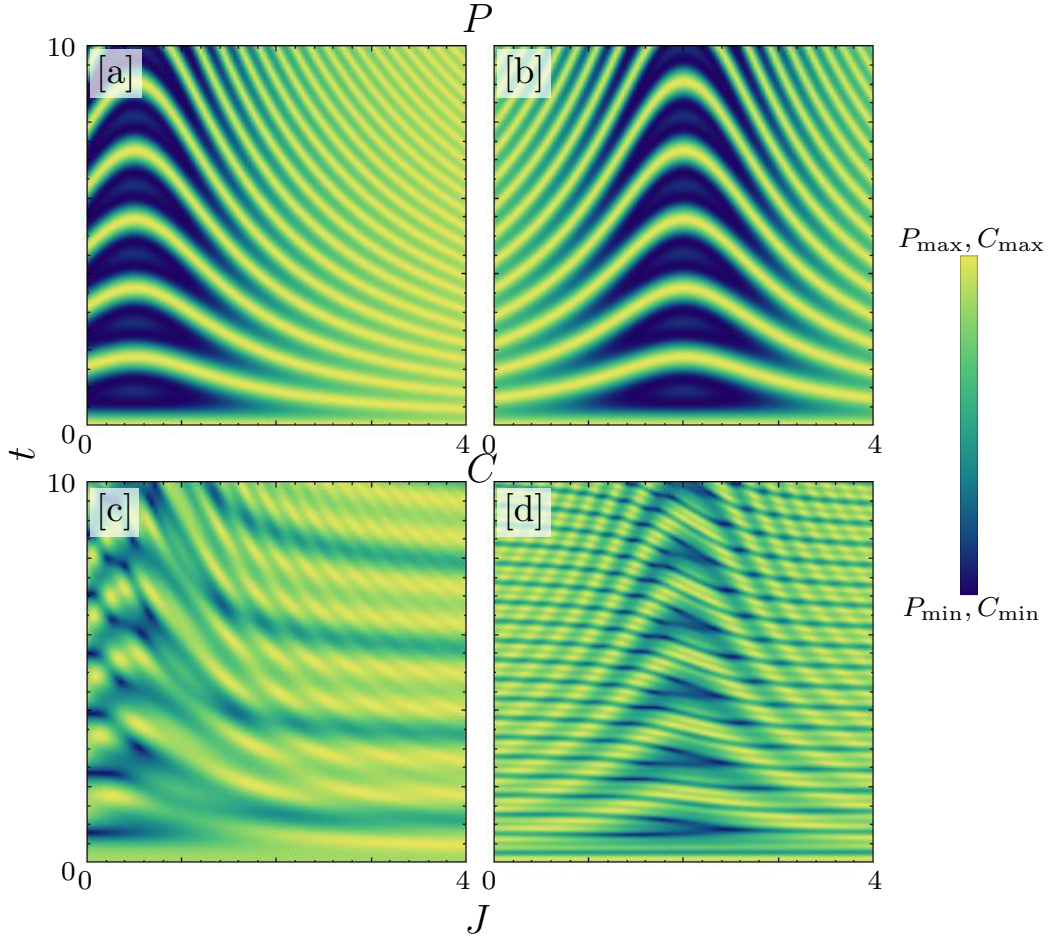


Figura 5.14: En este conjunto de figuras, se estudia el comportamiento de la concurrencia y pureza (como un diagrama de densidad, en unidades arbitrarias) con los parámetros interacción de Ising (en el eje x) y el tiempo (en el eje y), y con el estado inicial $|\Phi^{(1)}(\pi/4)\rangle$ y con el Hamiltoniano homogéneo $\hat{H}_{k,J}^h$. En [a] y [b] se muestra a la pureza con $k = 1$ y $k = 4$, respectivamente, sin algún comportamiento complejo. La concurrencia se muestra en [c] y [d], bajo las mismas condiciones iniciales que la pureza, pero con un comportamiento más complejo. En ambos casos, al incrementar la interacción dipolo-dipolo ($\kappa = 4$, casos [b] y [d]), la foliación presente en [a] y [c], parece trasladarse respecto a los valores de J .

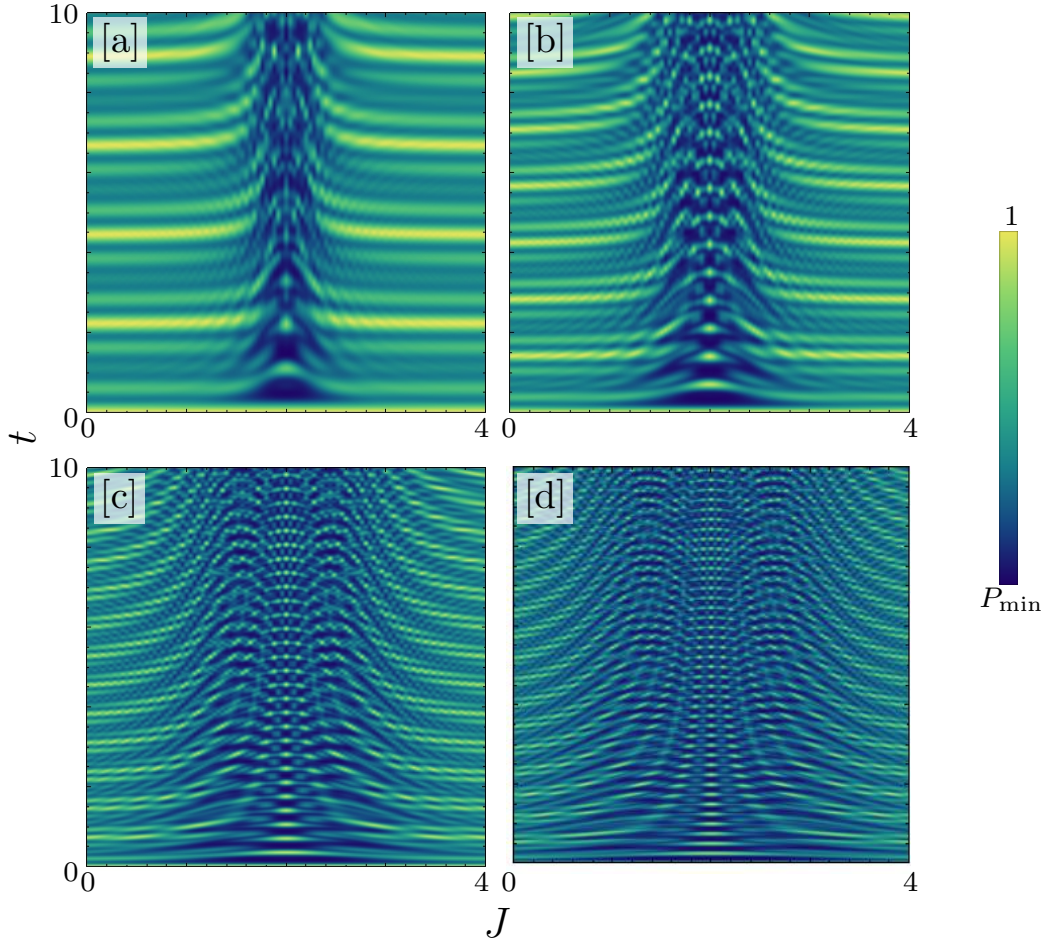


Figura 5.15: En este conjunto de figuras, se estudia el comportamiento de la pureza con los parámetros interacción de Ising (en el eje x) y el tiempo (en el eje y), al variar en número total de excitaciones $|\Phi^{(2,5,20,40)}(\pi/4)\rangle$ en [a], [b] [c] y [d] respectivamente, evolucionando con el hamiltoniano $\hat{H}_{20,J}^h$. Las regiones oscuras representan valores en la concurrencia cercanas al cero; mientras que las regiones más claras representan enredamiento máximo. Los valores contemplados para la interacción dipolo-dipolo son: a) $\kappa = 2$. b) $\kappa = 5$. c) $\kappa = 20$. d) $\kappa = 40$. La región que muestra el comportamiento complejo se incrementa con el número de excitaciones.

para valores grandes de aquella. En la figura [a] para valores de la interacción de Ising cercanos a cero, la dinámica en los cortes verticales se muestra más compleja, semejante a una función flan (bump function); para los valores lejanos al cero, las oscilaciones de la pureza parecen ser homogéneas. Cuando la interacción dipolo-dipolo se incrementa la función flan o chichón parece trasladarse a la derecha (figura [b]). Un comportamiento similar se observa para el caso de la concurrencia, sin embargo, para valores de J cercanos en cero (figura [c]) no se presentan bifurcaciones alrededor de una vecindad de la función chichón; cuando $\kappa = 4$, el área crítica se traslada nuevamente a la derecha. Esto nos confirma que el enlazamiento entre los átomos tiene un comportamiento más rico que el enlazamiento con el ambiente.

En la figura 5.15 se presenta el diagrama de densidad para la pureza con las mismas condiciones iniciales que en la figura 5.14. Aquí también observamos que existen intervalos en la interacción de Ising en donde se acentúa el mínimo de la pureza; además, existe una región en donde se acentúa la complejidad. Esta área se incrementa cuando el número de excitaciones aumenta. La presencia de valores críticos, en ambas dinámicas es una característica que debemos resalta.

En las figura 5.16 y 5.17 se analizan los casos análogos a presentados en las figuras 5.14 y 5.15, respectivamente, pero ahora se consideran como esta inicial representante de la segunda familia $|\Psi^{(1)}(\alpha_0)\rangle$. Nuevamente se observa que la dinámica de la pureza (figuras 5.16 [a] y [b]) se comportan de manera semejante al de la concurrencia (figuras 5.16 [c] y [d]), al variar la interacción dipolo-dipolo; sin embargo, la complejidad se presenta en el caso de la pureza con la presencia zonas aisladas, que se trasladan con forme κ crece. Mientras que en la figura 5.17 la región donde se concentran las bifurcaciones, se incrementan cuando el número de excitaciones crece.

5.2. Conclusiones

En este trabajo se estudió la dinámica de enlazamiento del sistema conformado por tres átomos de dos niveles dentro de una cavidad con interacciones de tipo dipolo-dipolo e Ising. Se analizaron múltiples casos, a partir de los cuales se concluyó que no existe una cota inferior para los casos de las evoluciones para el caso interactuante. Un hecho a destacar es que cuando la interacción de Ising tiende a cero, fijando la interacción dipolo-dipolo, la dinámica es más compleja. Un invariante también se encontró para las mues-

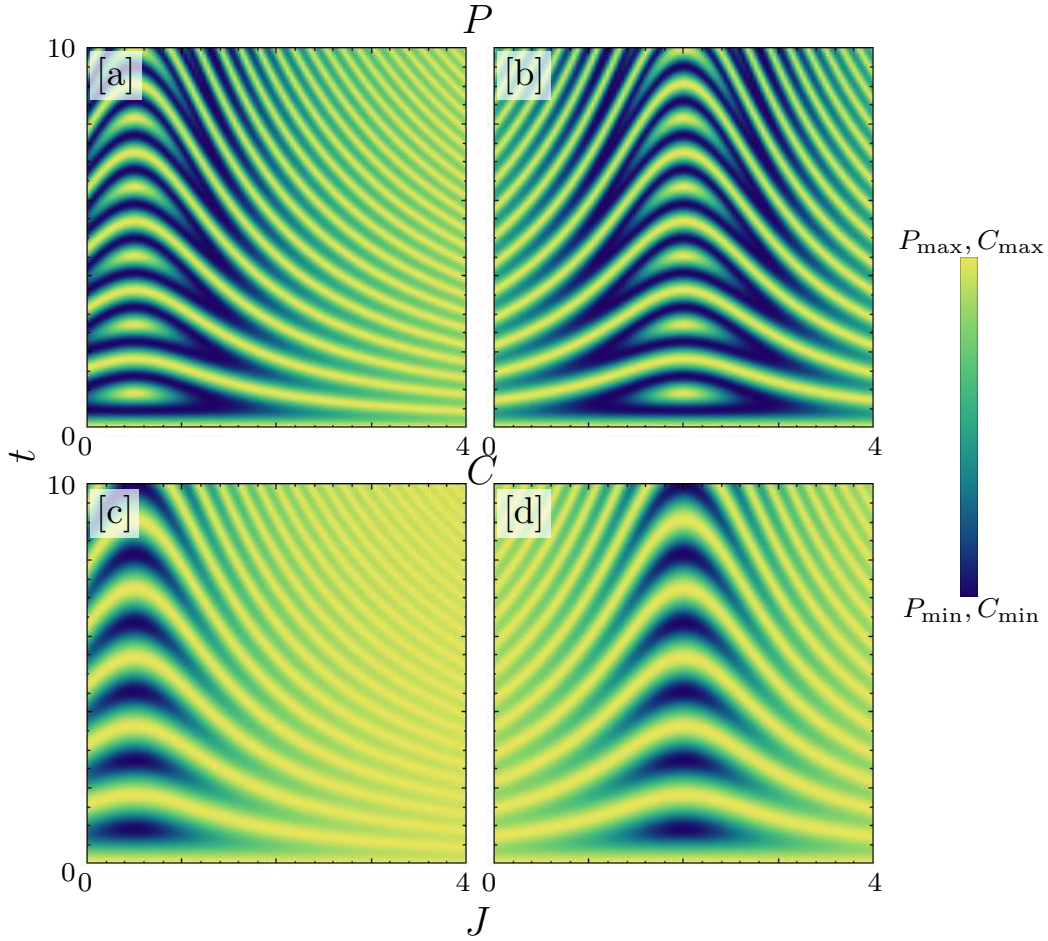


Figura 5.16: Nuevamente se estudia, en esta familia de figuras, el comportamiento de la concurrencia y pureza (como un diagrama de densidad, en unidades arbitrarias) con los parámetros interacción de Ising (en el eje x) y el tiempo (en el eje y), y con el estado inicial máximamente enlazado $|\Psi^{(1)}(\alpha_0)\rangle$ y con el Hamiltoniano homogéneo $\hat{H}_{k,J}^h$. En [a] y [b] se muestra a la pureza con $k = 1$ y $k = 4$, respectivamente, con un comportamiento complejo. La concurrencia se muestra en [c] y [d], bajo las mismas condiciones iniciales que la pureza, pero la complejidad mostrada en la figura 5.14[a] no se presenta más. En ambos casos, al incrementar la interacción dipolo-dipolo ($\kappa = 4$, casos [b] y [d]), la foliación presente en [a] y [c], parece trasladarse respecto a los valores de J .

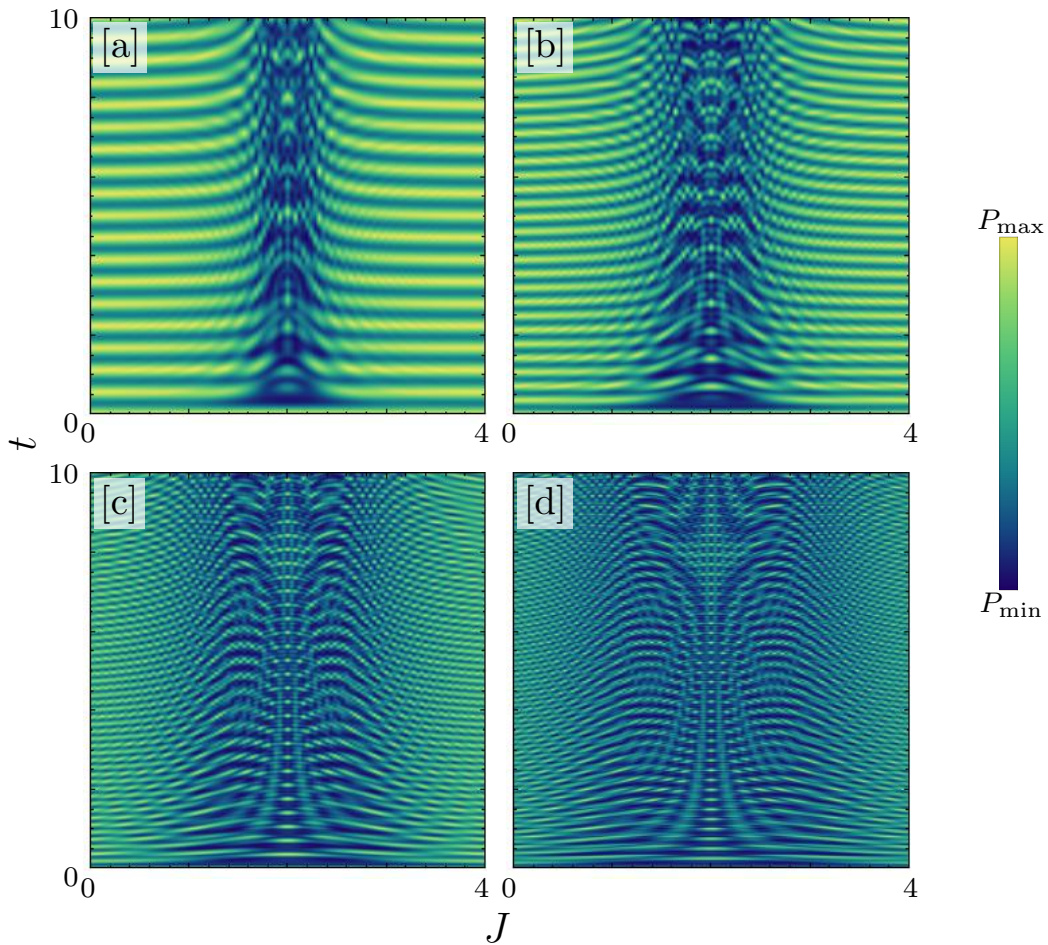


Figura 5.17: En este conjunto de figuras, se estudia el comportamiento de la pureza con los parámetros interacción de Ising (en el eje x) y el tiempo (en el eje y), al variar en número total de excitaciones pero ahora con el representante de la familia $|\Psi^{(2,5,20,40)}(\alpha_0)\rangle$, como estado inicial, en [a], [b] [c] y [d] respectivamente, evolucionando con el hamiltoniano $\hat{H}_{20,J}^h$. La región que muestra el comportamiento complejo se incrementa con el número de excitaciones, de manera análoga al caso de la figura 5.14.

tras de las dos familias de estados iniciales y es que la pureza alcanza un mínimo de $1/2$.

Se presentó una perspectiva global de la dinámica de la concurrencia y pureza como función del tiempo y de la Interacción de Ising, aquí se mostró que existe una traslación de los intervalos en donde dichas cantidades alcanzan el mínimo cuando se incrementa la interacción de Ising. Se muestra, además, la existencia de puntos críticos que dan pie a la presencia de bifurcaciones, cuando la interacción de Ising tiende a cero, siendo consistente con los resultados observados en los planos CP .

Cuando la diferencia entre la interacción de Ising y dipolo-dipolo se incrementa, el mínimo de la pureza se incrementa, dando lugar a que los efectos de decoherencia se vean minimizados. Para el Hamiltoniano homogéneo, la simetría con la que se trabajó, parece reflejarse en las propiedades cualitativas de los tres tipos de gráficas: primero, el carácter oscilante de la concurrencia y pureza respecto al tiempo, en los diagramas CP con la presencia de curvas tipo Lissajous y en los diagramas de densidad la presencia de figuras que parecen ser simétricas respecto a un eje de interacción. Para el caso no homogéneo, la pérdida de simetría del hamiltoniano se ve reflejado en el hecho de que las curvas sin interacción, para los planos CP , no son cotas inferiores del caso con interacción. Se mostró la existencia de invariantes en ambos sistemas (dos y tres qubits) en el caso homogéneo: como lo son las cotas inferiores y superiores para la dinámica con interacción en los diagramas CP y el ínfimo de $1/2$ para la pureza bajo cualquier dinámica.

APÉNDICE A

Esquema de Interacción

El esquema de interacción fue propuesto por Paul Dirac y es una formulación “intermedia” entre los esquemas de Schrödinger y Heisenberg. La principal diferencia radica en que tanto los operadores como los estados, tienen una dependencia temporal [Auleta, Quantum Mechanics pp. 128]. Las transformaciones unitarias juegan un papel importante, como a lo largo de toda la Mecánica Cuántica (MC en adelante), porque nos permiten transitar entre los distintos esquemas en que pueden representarse los elementos de la MC.

Para construir los vectores de estado y los operadores en el esquema de interacción, consideremos un Hamiltoniano \hat{H} que puede construirse de una parte libre \hat{H}_0 y un hamiltoniano de interacción \hat{H}_I ,

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_I. \quad (\text{A.1})$$

En general, no se cumple que $[\hat{H}, \hat{H}_0] = 0$ y $[\hat{H}, \hat{H}_I] = 0$. La evolución temporal de los vectores de estado en el esquema de interacción se define como,

$$|\psi(t)\rangle_I = \hat{U}_{H_0,t}^\dagger |\psi(t)\rangle_S, \quad (\text{A.2})$$

donde $\hat{U}_{H_0,t}^\dagger = e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0 t}$. Tomemos ahora el valor esperado de un operador \hat{O} ,

respecto a la base $\{|\psi\rangle_S\}$ en el esquema de Schrödinger, entonces tenemos que,

$${}_S \langle \psi(t) | \hat{O}^S | \psi(t) \rangle_S = {}_I \langle \psi(t) | \hat{U}_{H_0,t}^\dagger \hat{O}^S \hat{U}_{H_0,t} | \psi(t) \rangle_I = {}_I \langle \psi(t) | \hat{O}^I(t) | \psi(t) \rangle_I.$$

El cálculo anterior impone una relación entre el esquema de Schrödinger y el de interacción mediante la transformación,

$$\hat{O}^I(t) = \hat{U}_{H_0,t}^\dagger \hat{O}^S \hat{U}_{H_0,t}. \quad (\text{A.3})$$

Podemos ir un paso más y obtener las ecuaciones de movimiento para los operadores y vectores de estado en el esquema de interacción si derivamos respecto al tiempo a las ecuaciones A.2 y A.3,

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle_I = \hat{H}_I^I(t) |\psi(t)\rangle_I, \quad (\text{A.4})$$

donde $\hat{H}_I^I(t) = e^{\frac{i}{\hbar} \hat{H}_0 t} \hat{H}_I e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_0 t}$; mientras que la evolución de los operadores está dada por,

$$i\hbar \frac{d}{dt} \hat{O}^I(t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{O}^I(t) + [\hat{O}^I(t), \hat{H}_0], \quad (\text{A.5})$$

donde $\frac{\partial}{\partial t} \hat{O}^I(t) = \hat{U}_{H_0,t}^\dagger \left(\frac{\partial}{\partial t} \hat{O}^S \right) \hat{U}_{H_0,t}$.

APÉNDICE B

Espacios de Hilbert y Productos

Cuando se habla de productos tensoriales, generalmente se denota a una familia de conceptos en torno a la de un espacio vectorial y sus duales, que resultan ser semejantes entre ellos pero no idénticos; por ejemplo, se suelen llamar tensores a ciertas funciones multilineales cuyos dominios son productos cartesianos de espacios vectoriales y sus duales, al producto de dos elementos de espacios de Hilbert distintos, o bien al producto de operadores que actúan sobre espacios de Hilbert distinguibles. En la siguiente sección, se presentará la definición de espacio tensorial que se usa en nuestro contexto y servirá para fundamentar la noción de sistema compuesto.

Dados dos espacios vectoriales de dimensión finita, V y W , definimos el *producto tensorial* $V \otimes W$, como el conjunto de todas las funciones bilineales $F : V^* \times W^* \rightarrow \mathbb{C}$ que cumplen la siguiente condición $\forall f, g \in V^*, h, i \in W^*$,

$$F(f + \lambda g, h + \mu i) = F(f, h) + \mu F(f, i) + \lambda F(g, h) + \lambda \mu F(g, i).$$

Este conjunto resulta ser un espacio vectorial cuando se definen las siguientes operaciones: $F + G \equiv (F + G)(f, g) = F(f, g) + G(f, g)$ y $\lambda(F(f, g)) \equiv (\lambda F)(f, g)$. Los elementos del espacio pueden describirse en última instancia como funciones en que sus argumentos son nuevamente funciones que

dependen de los vectores de los espacios involucrados,

$$F \in V \otimes W \iff F\text{-bilineal}, F(f(v), g(w)) \in \mathbb{C}, \forall f \in V^*, g \in W^*, v \in V, w \in W.$$

Es posible caracterizar a todas las funciones $F \in V \otimes W$ mediante la siguiente identificación:

$$F(f, g) \equiv f(v)g(w), \forall f \in V^*, g \in W^*, v \in V, w \in W$$

donde $f(v)g(w) \in \mathbb{C}$.

Dado que la acción de F , bajo la anterior identificación está asociada a los elementos (v, w) , se define el producto tensorial de v con w , $v \otimes w$, como:

$$(v \otimes w)(f, g) := f(v)g(w), \forall f \in V^*, g \in W^*. \quad (\text{B.1})$$

La otra noción que nos importa es la del producto tensorial de operadores.

Definición 12. Consideremos, ahora, una familia de operadores acotados $\hat{A}_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1), \dots, \hat{A}_k \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_k)$, denotamos al *producto tensorial de k operadores*, $\hat{A}_1 \otimes \dots \otimes \hat{A}_k$ al operador lineal y acotado que actúa sobre $\mathcal{H}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_k$ con la siguiente regla: sea $x_1 \otimes \dots \otimes x_k$, tal que $x_i \in \mathcal{H}_1, \dots, x_k \in \mathcal{H}_k$

$$(\hat{A}_1 \otimes \dots \otimes \hat{A}_k)(x_1 \otimes \dots \otimes x_k) := \hat{A}_1(x_1) \otimes \dots \otimes \hat{A}_k(x_k).$$

Bajo esta definición es fácil representar a un operador que actúe sobre todo $\mathcal{H}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_k$, pero que sólo nos interese localmente; es decir, la acción sobre un subespacio \mathcal{H}_i . Así,

$$\tilde{A}_i := \hat{I}_1 \otimes \dots \otimes \hat{I}_{i-1} \otimes \hat{A}_i \otimes \hat{I}_{i+1} \otimes \dots \otimes \hat{A}_k.$$

APÉNDICE C

Artículo aceptado con los resultados de la tesis

Invited Comment

Multipartite entanglement dynamics in a cavity

J G Amaro¹ and C Pineda²

¹Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México, México DF 01000, México

²Instituto de Física, Universidad Nacional Autónoma de México, México DF 01000, México

Received 10 December 2014

Accepted for publication 19 December 2014

Published DD MM 2014



CrossMark

Abstract

Q1 We study the dynamics of two kinds of entanglement and their interplay. On one hand, we consider the intrinsic entanglement within a central system composed of three two-level atoms and measured by multipartite concurrence; on the other, we consider the entanglement between the central system and a cavity, acting as an environment and measured with purity. Using dipole-dipole and Ising interactions between atoms, we propose two Hamiltonians: one homogeneous and one quasi-homogeneous. We find an upper bound for concurrence as a function of purity, associated with the evolution of the W state. A lower bound is also observed for the homogeneous case. In both situations, we show the existence of critical values of the interaction, for which the dynamics of entanglement seem complex.

Keywords: decoherence, entanglement, multipartite

SQ1 (Some figures may appear in colour only in the online journal)

1. Introduction

Entanglement was appreciated by Schrödinger not as ‘one but rather *the* characteristic trait of quantum mechanics’ [1]. Its study has opened its own field [2, 3], which remains active because the understanding of entanglement has proven valuable to comprehending the transition from the quantum to the classical world. Also, from a pragmatic point of view, to build ever more complex quantum technologies, one needs to tame entanglement’s effects. Entanglement has been identified as a key resource in both, quantum simulation and quantum computing [4].

Several theoretical developments have been devoted to understanding the evolution of the entanglement of bipartite systems, both from theoretical and experimental points of view (see [5–7] and many articles citing these references). Nowadays, two-party entanglement is routinely produced, controlled, studied, and exploited in the laboratory. Moreover, it is well understood. Many aspects of multipartite entanglement, despite a huge effort, still remain as open questions (see [8] and [9]). In this paper, we will study the simplest case of multipartite entanglement—namely three qubits—and its interplay with bipartite entanglement, which is often

associated with decoherence. For this, we use the simplest possible ‘reservoir’ with an infinite spectrum: a harmonic oscillator.

Building upon [10], we generalize their model to allow for more qubit while retaining its simplicity. We consider three two-level atoms, coupled to each other via dipole and Ising interaction. Additionally, we consider a cavity that will be regarded as an *environment*, to which the atoms are coupled to a single mode. Both the qubits and the cavity have free dynamics. Except for very special cases, this model is not analytically solvable. However, number conservation will allow us to work on a finite Hilbert space and perform numerics. We will focus on the evolution of the entanglement within the three qubits, and of those, with the cavity as a measure of decoherence. Moreover, we will also study the relation between these two very different quantities, via a generalized CP map [6, 10, 11].

Our paper is organized as follows. In section 2, we introduce the model and discuss some of its symmetries. We use section 3, to recall some aspects of entanglement that will be discussed here. Special attention will be given to multipartite mixed entanglement, as quantified by the *concurrence*.

Q2

In section 4, we present our findings, and we finish with some conclusions in section 5.

2. The model

We will work in the Hilbert space associated with a harmonic oscillator and three qubits—that is, $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\text{ho}} \otimes \mathcal{H}_{q,1} \otimes \mathcal{H}_{q,2} \otimes \mathcal{H}_{q,3}$, with \mathcal{H}_{ho} being the Hilbert space of the oscillator, and the others being the Hilbert spaces of each of the three qubits ($\dim \mathcal{H}_{q,i} = 2$). The Hamiltonian that will determine the evolution of the system is

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \sum_{j=1}^3 \frac{\Delta_j}{2} \hat{\sigma}_z^{(j)} + \sum_{j=1}^3 g_j (\hat{a} \hat{\sigma}_+^{(j)} + \text{h.c.}) \\ & + 2 \sum_{j \neq k=1}^3 \kappa_{jk} (\hat{\sigma}_-^{(j)} \hat{\sigma}_+^{(k)} + \text{h.c.}) \\ & + \sum_{j \neq k=1}^3 J_{jk} \hat{\sigma}_z^{(j)} \hat{\sigma}_z^{(k)}, \end{aligned} \quad (1)$$

in which we use Pauli matrices, $\hat{\sigma}_{x,y,z}^{(j)}$, acting in the j th spin 1/2 particle, the lowering and rising operators of a harmonic oscillator (\hat{a} , \hat{a}^\dagger), and the rising and lowering operators of spin 1/2 particle, j , $\hat{\sigma}_\pm^{(j)} = \hat{\sigma}_x^{(j)} \pm i\hat{\sigma}_y^{(j)}$. We also introduce several parameters, namely the energy splitting in each qubit (Δ_j), the intensity of their interaction with the harmonic oscillator, g_j , the pairwise dipole-dipole interaction, κ_{jk} , and the Ising interaction, J_{jk} . Intrinsic dynamics in the oscillator can be safely ignored using the appropriate interaction picture.

Note that despite the simplicity of the model, it will admit several very distinct dynamical configurations, ranging from all qubits interacting with each other; a ‘line’ configuration, in which there is no interaction between qubits 1 and 3; a spectator configuration, in which one qubit does not interact with the other qubits; and finally, a configuration in which all qubits are decoupled from each other. This can be controlled by setting several of the coupling parameters, κ_{jk} and J_{jk} , to zero.

A very important feature that allows us to treat the model is that this Hamiltonian preserves the number of excitations, characterized by the operator

$$\hat{N} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \hat{\sigma}_z^{(j)} + \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{3}{2} \mathbb{1}. \quad (2)$$

One can thus write the Hamiltonian in block-diagonal form on

a suitable basis. We take this basis to be

$$\begin{aligned} |\phi_0^{(n)}\rangle &= |n\rangle|000\rangle, \\ |\phi_4^{(n)}\rangle &= |n-2\rangle|110\rangle, \\ |\phi_1^{(n)}\rangle &= |n-1\rangle|001\rangle, \\ |\phi_5^{(n)}\rangle &= |n-2\rangle|101\rangle, \\ |\phi_2^{(n)}\rangle &= |n-1\rangle|010\rangle, \\ |\phi_6^{(n)}\rangle &= |n-2\rangle|011\rangle, \\ |\phi_3^{(n)}\rangle &= |n-1\rangle|100\rangle, \\ |\phi_7^{(n)}\rangle &= |n-3\rangle|111\rangle, \end{aligned} \quad (3)$$

so that $\hat{N}|\phi_i^{(n)}\rangle = n|\phi_i^{(n)}\rangle$. (We use the convention in which $|1\rangle$ means an excitation and $|0\rangle$ means no excitation, so $\sigma_+|0\rangle = |1\rangle$.) Note that when using matrix representation, even though there is a one-to-one correspondence with the state of the qubits, there is additional information regarding the state of the harmonic oscillator via the superindex, (n) . The order chosen for the basis will allow us to write the partial trace in a particularly nice fashion. Given the matrix representations of an arbitrary mixed state, ρ , acting in the subspace of n excitations, we can write

$$\text{tr}_{\text{osc}} \rho = \begin{pmatrix} \rho_{00} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_{11} & \rho_{12} & \rho_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_{21} & \rho_{22} & \rho_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_{31} & \rho_{32} & \rho_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_{44} & \rho_{45} & \rho_{46} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_{54} & \rho_{55} & \rho_{56} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_{64} & \rho_{65} & \rho_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_{77} \end{pmatrix}. \quad (4)$$

A generic block of $n \geq 3$ excitations is given by

$$H^{(n)} = \begin{pmatrix} H_{AA}^{(n)} & H_{AB}^{(n)} \\ (H_{AB}^{(n)})^\dagger & H_{BB}^{(n)} \end{pmatrix} - \sum_{j \neq k=1}^3 J_{jk} \mathbb{1} \quad (5)$$

with the first block being

$$H_{AA} = \begin{pmatrix} 2J & g_1^+ & g_2^+ & g_3^+ \\ g_1^+ & \delta_1^+ & \kappa_{12} & \kappa_{13} \\ g_2^+ & \kappa_{12} & \delta_2^+ & \kappa_{23} \\ g_3^+ & \kappa_{13} & \kappa_{23} & \delta_3^+ \end{pmatrix} - \sum_{j=1}^3 \Delta_j \mathbb{1}, \quad (6)$$

if $g_i^\pm = g_i \sqrt{n \pm 1}$, $\delta_i^\pm = 2J_{\neq i} \pm 2\Delta_i$, and $T_{\Delta,J} = \sum_i J_{\neq i} - \Delta_i$. Note that we use the subindex, $\neq i$, to refer to a pair of subindices that are different from i and from each

other. The off-diagonal matrix is

$$H_{AB} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_3^0 & g_2^0 & 0 \\ g_3^0 & 0 & g_1^0 & 0 \\ g_2^0 & g_1^0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (7)$$

with $g_i^0 = g_i \sqrt{n}$. Finally, the second diagonal block is given by

$$H_{BB} = \begin{pmatrix} \delta_3^- & \kappa_{12} & \kappa_{13} & g_1^- \\ \kappa_{12} & \delta_2^- & \kappa_{23} & g_2^- \\ \kappa_{13} & \kappa_{23} & \delta_1^- & g_3^- \\ g_1^- & g_2^- & g_3^- & 2J \end{pmatrix} + \sum_{j=1}^3 \Delta_j \mathbf{1}. \quad (8)$$

For smaller values of n , the matrix will be the first block of 1, 4, and 7 states corresponding to (5), for $n = 0, 1, 2$, respectively.

This model has a large number of parameters. A simplification would be to consider a homogeneous situation, such as all $\kappa_{ij} = \kappa$, $J_{ij} = J$, $g_i = g$, and $\Delta_i = \Delta$. Moreover, we will set the detuning to be $\Delta = 0$ and the coupling to the oscillator to be $g = 1$ in our numerical calculations, so that we have the *homogeneous* Hamiltonian

$$\begin{aligned} \hat{H}_{\kappa,J}^h &= \sum_{j=1}^3 (\hat{a} \hat{\sigma}_+^{(j)} + \text{h.c.}) \\ &+ 2\kappa \sum_{j \neq k=1}^3 (\hat{\sigma}_-^{(j)} \hat{\sigma}_+^{(k)} + \text{h.c.}) \\ &+ J \sum_{j \neq k=1}^3 \hat{\sigma}_z^{(j)} \hat{\sigma}_z^{(k)}. \end{aligned} \quad (9)$$

To appreciate the effect of homogeneity in the Hamiltonian, we also consider a slightly inhomogeneous case. We change one dipole-dipole interaction, to obtain the *quasi-homogeneous* Hamiltonian

$$\hat{H}_{\kappa,J}^{\text{qh}} = \hat{H}_{\kappa,J}^h + \kappa (\hat{\sigma}_-^{(1)} \hat{\sigma}_+^{(2)} + \text{h.c.}). \quad (10)$$

Several other simple ways of introducing the inhomogeneity are also available. However, this one displays very clearly the effects we want to underline in this work.

Note that one further consideration, in the homogeneous case, could be considered: the Hamiltonian is invariant under rotations. In this case, the rotation operator, \hat{R} , that acts on the computational basis as $\hat{R}|n\rangle|i_1 i_2 i_3\rangle = |n\rangle|i_3 i_1 i_2\rangle$, $i_j = \pm$, has three eigenvalues, namely $\exp(2\pi i j/3)$, with $j = 0, 1, 2$. Let us define the vectors $|\varphi_0^{(n,k)}\rangle = \alpha^k |\phi_1^{(n)}\rangle + \alpha^{2k} |\phi_2^{(n)}\rangle + \alpha^{2k} |\phi_3^{(n)}\rangle$, $|\varphi_1^{(n,k)}\rangle = \alpha^k |\phi_4^{(n)}\rangle + \alpha^{2k} |\phi_5^{(n)}\rangle + \alpha^{2k} |\phi_6^{(n)}\rangle$, ($k = 0, 1, 2$) with $\alpha = \exp(2\pi i/3)$ and the additional $|\varphi_2^{(n,0)}\rangle = |\phi_0^{(n)}\rangle$ and $|\varphi_3^{(n,0)}\rangle = |\phi_7^{(n)}\rangle$. These are eigenvectors of \hat{R} with eigenvalues α^k ; that is, $\hat{R} |\varphi_l^{(n,k)}\rangle = \alpha^k |\varphi_l^{(n,k)}\rangle$. This leads to a splitting of the subspace in spaces of dimension 4, 2, and 2. Very lengthy expressions, however, make it very difficult to

extract the general behavior, and one would be forced to fall back on numerics. On the other hand, if one wishes to restrict to the symmetric subspace, the machinery of the Dicke states could be used, where some analytical results regarding entanglement are available [12, 13].

3. Multipartite entanglement

The notion of entanglement is defined using separability. Separable pure states, $|\psi\rangle$, are those which, in a multipartite Hilbert space, $\mathcal{H} = \otimes_i \mathcal{H}_i$, can be written as a tensor product. Thus, $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ is separable if $|\psi\rangle = \otimes_i |\psi_i\rangle$, with $|\psi_i\rangle \in \mathcal{H}_i$. Entangled states are those that are not a mixture of pure separable states. It is difficult to determine if a mixed state is entangled or not.

However, for the special case of pure bipartite states, all the information regarding entanglement is encoded in their Schmidt coefficients. One can choose any convex function of them, the von Neumann entropy and purity being the most common choices. We will use purity, defined for mixed states as

$$P(\rho) = \text{tr } \rho^2, \quad (11)$$

due to its algebraic simplicity. Purity can be regarded as an entanglement measure, provided that the state over which purity is calculated is given by

$$\rho = \text{tr}_{\text{env}} |\psi\rangle\langle\psi|. \quad (12)$$

If no *a priori* information is given about ρ , purity is simply a measure of mixedness. The value of purity ranges between $1/N \geq P \geq 1$, where N is the dimension of the Hilbert space in which ρ acts, with the minimum value corresponding to the maximally mixed state, and the maximum to a pure state.

Characterizing multipartite entanglement, on the other hand, proves more challenging, as even a unique maximally entangled state does not exist for more than two parties [14]. Most measures provide either well-founded physical grounds or numerically simple recipes. A convenient compromise is given by the multipartite concurrence. This measure, which is a generalization of the two-party concurrence [15], is inspired by the symmetry properties of pure states—that is, in expected values of projections over antisymmetric subspaces. The detailed construction is out of reach within this presentation, but it reduces to the very simple form [16] for pure states:

$$C(|\psi\rangle) = \frac{1}{2^{N/2-1}} \sqrt{(2^N - 2) - \sum_i \text{tr } \rho_i^2} \quad (13)$$

where the index, i , runs over all proper subsets of particles, except for the empty set. For example, in the three-particle case, we must consider all three partitions in which the particles can be divided: particle A against BC; B with AC; and C with AB. Thus, $C(|\psi\rangle)^2 \propto \langle 1 - P(\rho_i) \rangle$, where here, the average $\langle \cdot \rangle$ is taken again over all nontrivial subset particles, thus relating the measure with the entanglement over all possible partitions.

Q3

This measure, as presented above, will not suit our purposes, as it is defined only for pure states. We will use the *convex roof* construction, in which the measure is averaged over a particular realization of our mixed state, such as our state $\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$, with normalized $|\psi_i\rangle$ and positive p_i for all i . Then, we associate with this particular realization of ρ the measure $\sum_i p_i C(|\psi_i\rangle)$. The measure is obtained by finding the realization that minimizes this expression. This would mean, if one thinks about entanglement as a resource, the cheapest way of realizing this ensemble. Summarizing, we define

$$C(\rho) = \inf_{p_i, |\psi_i\rangle} \sum_i p_i C(|\psi_i\rangle), \quad (14)$$

with $\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$, $p_i > 0$, and $\langle\psi_i|\psi_i\rangle = 1$. Even though this is a very meaningful definition, the process of exact evaluation is normally difficult, as the landscape can be very complex. Upper bounds can be easily obtained using gradient methods to numerically optimize (14), and simple but useful lower algebraic bounds are also available. In particular, we will use the method of *quasi-pure approximation* [17]. It is derived by approximating a multimatrix representation of a mixed state with a single matrix that captures the first few order terms in expressions involving the Schmidt coefficients of ρ . We stress that this is not only an approximation, but also a lower bound that is, reasonably tight, even for some states close to the maximally mixed state [16, 18]. To obtain this bound no optimization procedure is involved, and only the diagonalization of a matrix of the same size as ρ is needed to evaluate it. A detailed description requires some technicalities that we do not wish to introduce. Instead, we refer the reader to [16]. Some properties of the concurrence should be highlighted: it is invariant under unitary local operations, it vanishes only for completely separable states, and it has the nice scaling property that $C(|\psi\rangle\langle\psi| \otimes |\phi\rangle\langle\phi|) = C(|\phi\rangle\langle\phi|)$ if $|\psi\rangle$ belongs to the Hilbert space of just one of the particles. Finally, the bound coincides with the concurrence for pure states.

The quasi-pure approximation is well suited to our needs, where repeated evaluation of such a quantity is required for many parameters and times. Moreover, as we will explore qualitative properties, the small errors inherent in this approximation can be ignored.

4. Results

In this section, we calculate entanglement and purity as functions of time, and we explore how they depend on each other. We consider two families of initial product states, with the condition that any member of the family must belong to the eigenspace formed by a given fixed eigenvalue of the operator, \hat{N} .

The first family corresponds to the normalized product state, with $n - 1$ photons in the cavity and the superposition

of the states $|001\rangle$ and $|010\rangle$,

$$|\Phi^{(n)}(\alpha)\rangle = |n - 1\rangle \otimes (\sin \alpha |001\rangle + \cos \alpha |010\rangle). \quad (15)$$

The states have no genuine tripartite entanglement, as one of the parties has an uncorrelated state, and the others share bipartite entanglement, parametrized by α . Its concurrence is $C(|\Phi^{(n)}(\alpha)\rangle) = \sin(2\alpha)$. The second family corresponds to the superposition of the states $|001\rangle$, $|010\rangle$, and $|100\rangle$,

$$|\Psi^{(n)}(\alpha)\rangle = |n - 1\rangle \otimes \left(\frac{\sin \alpha}{\sqrt{2}} |001\rangle + \cos \alpha |010\rangle + \frac{\sin \alpha}{\sqrt{2}} |100\rangle \right). \quad (16)$$

The states do have genuine tripartite entanglement, as one can see by setting $\alpha = \alpha_0 = \arctan \sqrt{2}$, for which we retrieve the $|W\rangle$ state. Moreover, its concurrence is

$$C(|\Psi^{(n)}(\alpha)\rangle) = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{2}} \sqrt{5 + 3 \cos(2\alpha)}, \quad (17)$$

with a maximum given by $C(|\Psi^{(n)}(\alpha_0)\rangle) = 2/\sqrt{3} \approx 1.15$. However, in both cases, we can range from a totally separable state for $\alpha = 0$ to a maximally mixed state for some critical α . These families of states also have the important characteristic that they will remain pure when the oscillator is traced out. The system evolves with the unitary evolution generated by Hamiltonian (1), and the state of the three qubits is given at time, t , by

$$\rho(t) = \text{tr}_{\text{ho}} e^{-it\hat{H}} |\psi(0)\rangle\langle\psi(0)| e^{it\hat{H}}, \quad (18)$$

where $|\psi(0)\rangle$ is the initial state of the system, which will be taken as either $|\Phi^{(n)}(\alpha)\rangle$ or $|\Psi^{(n)}(\alpha)\rangle$. One can then study the evolution of concurrence and purity by studying $C(t) = C(\rho(t))$ and $P(t) = P(\rho(t))$, respectively. Moreover, we shall study a homogeneous case, in which all $J_{ij} = J$ and all $\kappa_{ij} = \kappa$.

In figures 1 and 2, we present concurrence against purity with time as a parameter—that is, the so-called *CP* plane. We studied the sector $n = 1$ in these figures, but the conclusions drawn here can be extended to higher excitation numbers, unless we explicitly say otherwise. We also show the evolution of concurrence in the inset of the figures. We fix the Hamiltonians to the homogeneous and quasi-homogeneous with parameters $J = 0.5$ and $\kappa = 1$; using the notation of (9) and (10), we use $H_{1,0.5}^h$ and $H_{1,0.5}^{qh}$. In all cases, an important benchmark will be considered: a maximally mixed state, $|\Psi^{(n)}(\alpha_0)\rangle \propto |001\rangle + |010\rangle + |100\rangle$, evolved with an interaction-free model, $H_{0,0}^h$. This is plotted as a thick red curve.

In figure 1, we initially study nonmaximally entangled states, both with and without interaction. In both parts of figure 1, one can note that the red curve serves as an upper bound for the evolution of the states without maximal initial entanglement, similar to the two-atom case [10]. Remarkably, for three atoms, the dynamics of the noninteracting case is a lower bound in the homogeneous case (a) (as in the two qubit case), whereas that is no longer the case when the system is not homogeneous (b). We stress here that these observations

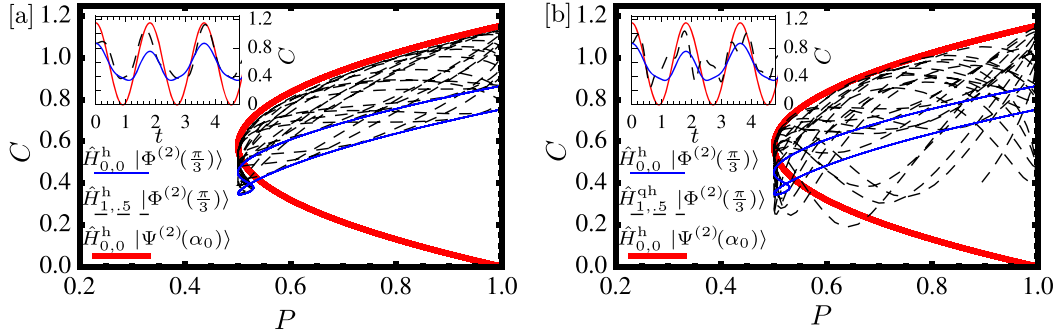


Figure 1. Parametric plot of concurrence and purity for initial states of the form (15) and (16), with Hamiltonians (9) and (10) and an initial number of excitations of $n = 2$. The red curve corresponds to three noninteracting atoms ($\kappa = J = 0$) initially in a W state. The black dashed curve shows the behavior of three interacting atoms, with $\kappa = 1$ and $J = 0.5$, initially in a pure but not maximally entangled state ($\alpha = \pi/3$). The homogeneous (9) and quasi-homogeneous (10) configurations are displayed in (a) and in (b) respectively. The blue curve shows the evolution of the decoupled system, with the same initial state as in the black dashed curve. All curves were parametrized by time up to $t = 20$. The insets display the corresponding evolution of concurrence as a function of time.

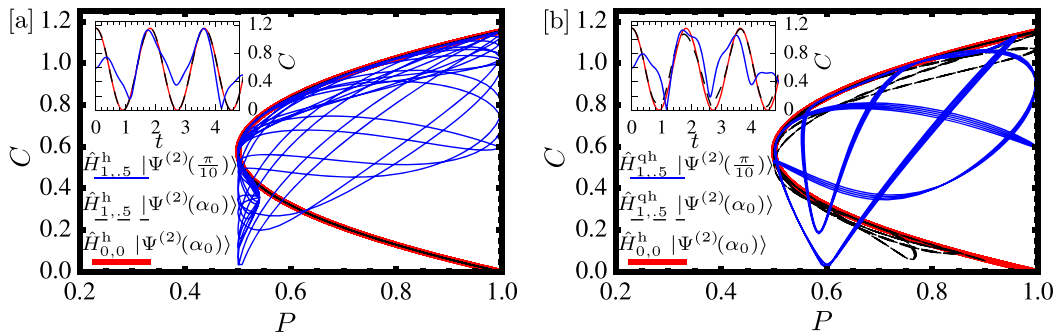


Figure 2. Same conventions as in 1, except that the initial states for the interacting case are given by (16). The parameters are identical to the aforementioned figure.

hold in all cases studied (and not shown), namely other parameters and excitation numbers. The behavior of concurrence and purity with time (displayed in the insets of the figures) will be discussed later, when we have a global picture with respect to the parameters and time. However, note that the nonhomogeneous case displays a richer behavior.

In figure 2, we study the effect of interactions on both maximally entangled initial states, $|\Psi^{(n)}(\alpha_0)\rangle$, and partially entangled states, $|\Psi^{(n)}(\pi/10)\rangle$. In this case, the behavior of states that initially have maximum entanglement, with already-large interaction, closely resembles the case with no interaction. In particular, for the homogeneous Hamiltonian, the two curves coincide, while for the quasi-pure Hamiltonian, the noninteracting case acts as an imperfect, but very good, guide. This is not the case if we start with a state with smaller entanglement. The red curve acts only as an upper bound for the interacting case. For larger values of the Ising interaction, the dynamics display an oscillatory behavior with almost the same periodicity. These observations are robust with respect to varying the systems and the total number of excitations.

To give a general view of the dynamics of purity and concurrence, we proposed a density diagram, which is

displayed in figures 3 and 4. There, concurrence and purity are color-coded for several values of the Ising interaction, for a given time span, under the influence of the homogeneous Hamiltonian. The initial state chosen was $|\Psi^{(2)}(\alpha = \pi/4)\rangle$.

In figure 3, we compare the dynamics of purity (figures 3(a) and (c)) and concurrence (figure 3(b)). Indeed, concurrence mimics the behavior of purity, with some additional nodes, which may be caused by the internal dynamics of the three qubits.

Purity displays a regular behaviour, with some oscillations that seem to be independent of J for large or small values of J . However, a critical area (around $J = 0.5$ for $\kappa = 1$, as seen in figure 3(a)) is clearly present. Varying the dipole-dipole coupling shifts this critical value of J to the right (figure 3(b)). For higher excitation numbers, this region shows higher complexity, whereas the regular areas remain largely unchanged (see figure 4). As concurrence mimics the behavior of purity, these observations are also valid for the internal entanglement.

In figure 4, we study the effects of increasing the number of excitations in the system. We observe that there is a region with complex behavior, whose size increases with n . A remarkable fact is also seen: the existence of critical points

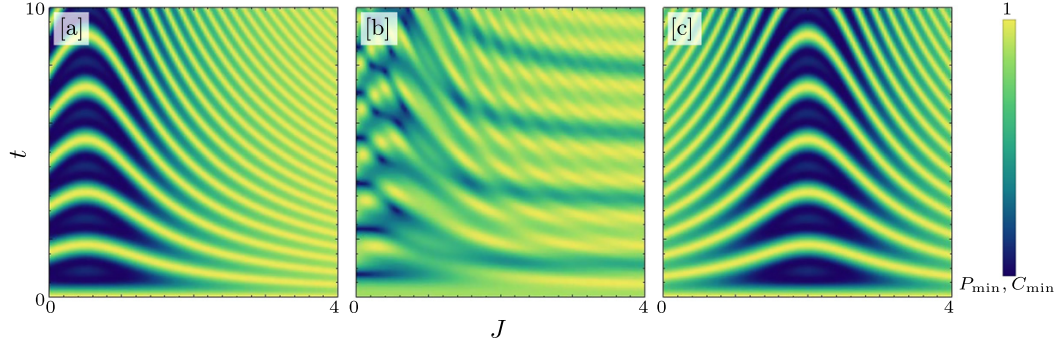


Figure 3. In this set of figures, we study the behavior of purity and concurrence (as color density, in arbitrary units) with the Ising interaction (in the x -axis) and time (in the y -axis) for the initial state, $|\Phi^{(2)}(\pi/4)\rangle$, and the Hamiltonian, $\hat{H}_{\kappa,J}^h$. In (a) we show purity, with $\kappa = 1$, and observe no complex behavior. Concurrence, plotted in (b), mimics this behavior of purity, with added complexity. A larger dipole-dipole coupling ($\kappa = 4$), shown in (c), displaces the bump observed in (a), to larger values of J .

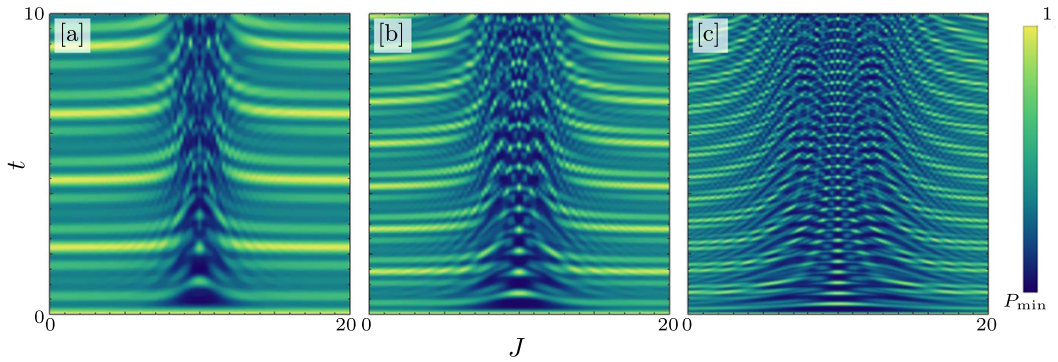


Figure 4. In these set of figures, we study the behavior of purity with the Ising interaction (in the x -axis) and time (in the y -axis), for a varying number of total excitations, $|\Phi^{(2,5,20)}(\pi/4)\rangle$ in (a), (b) and (c) respectively, evolved with $\hat{H}_{20,J}^h$. The region with complex behavior increases with the number of excitations.

seems to agree for all cases in the density diagrams (figures 3 and 4).

5. Conclusions and outlook

In this paper, we studied the entanglement dynamics of three interacting two-level atoms inside a cavity with dipole-dipole and Ising interactions. Entanglement within the atoms was measured by concurrence, and the atoms with the cavity were measured by purity. Despite measuring totally different properties of the system, concurrence and purity are quite related. In particular, in a concurrence-purity plane for a given state, concurrence is bounded by above, by the curve described by a noninteracting system, and initially in a W state. We believe that this upper bound is closely related to the with monogamy of entanglement, where entanglement cannot be freely shared among multiple parties [19]. Recall that our system is a four-partite state (three qubits and a bath) in which entanglement must be considered in this setting, not as a tripartite problem. In this respect, our analysis contributes to the existence of a hierarchy of strong monogamy inequalities (as proposed by Regula *et al* [20]), or

alternatively by viewing multipartite entanglement from the point of view of frustration [21]. In the homogeneous case, a lower bound, drawn by the evolution of the same initial state but with a noninteracting Hamiltonian, is also apparent. The inhomogeneous case, however, does not have a simple lower bound. In fact, for this lower bound, calculations could be pursued using the Dicke states and the symmetric subspace, where the block-diagonal Hamiltonian and the basis resemble the two-qubit case. In the present work, this bound is very sensitive to the presence of a small perturbation, which suggests a strong connection with the symmetric properties of the Dicke basis. A deeper study of these bounds might prove useful in the context of multipartite entanglement. Finally, we presented a global view for the dynamics of the concurrence and purity as function of time and Ising interaction, and we showed that there is a translation of the intervals where the dynamics exhibits complexity when the dipole-dipole interaction increases.

Acknowledgments

Support by the projects CONACyT 153190 and UNAM-PAPIIT IA101713 is acknowledged. Numerics were done building upon programs developed by Florian Minter and Andr Carvalho. Stimulating discussions with Thomas Seligman and Mauricio Torres are acknowledged.

Q4 References

- [1] Schrödinger E and Born M 1935 Discussion of probability relations between separated systems *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **31** 555
- [2] Horodecki R, Horodecki P, Horodecki M and Horodecki K 2009 Quantum entanglement *Rev. Mod. Phys.* **81** 865–942
- [3] De Martini F and Sciarrino F 2012 Colloquium *Rev. Mod. Phys.* **84** 1765–89
- [4] Modi K, Brodutch A, Cable H, Paterek T and Vedral V 2012 The classical-quantum boundary for correlations: discord and related measures *Rev. Mod. Phys.* **84** 1655–707
- [5] Konrad T, de Melo F, Tiersch M, Kasztelan C, Aragao A and Buchleitner A 2008 Evolution equation for quantum entanglement *Nat. Phys.* **4** 99–102
- [6] Pineda C and Seligman T H 2006 Evolution of pairwise entanglement in a coupled n -body system *Phys. Rev. A* **73** 012305
- [7] Xu J-S, Li C-F, Zhang C-J, Xu X-Y, Zhang Y-S and Guo G-C 2010 Experimental investigation of the non-markovian dynamics of classical and quantum correlations *Phys. Rev. A* **82** 042328
- [8] Clarisse L 2006 The distillability problem revisited *Quantum Inf. Comput.* **6** 539–60
- [9] Gisin N 2009 Bell inequalities: many questions, a few answers *In Quantum Reality, Relativistic Causality, and Closing the Epistemic Circle (The Western Ontario Series in Philosophy of Science vol 73)* (Berlin: Springer) pp 125–138
- [10] Torres J M, Sadurn E and Seligman T H 2010 Two interacting atoms in a cavity: exact solutions, entanglement and decoherence *J. Phys. A* **43** 192002
- [11] Ziman M and Buzek V 2005 Concurrence versus purity: Influence of local channels on bell states of two qubits *Phys. Rev. A* **72** 052325
- [12] Tsubasa I, Toshihiko S, Izumi T and Nobuhiro Y 2008 Exchange symmetry and multipartite entanglement *Phys. Rev. A* **78** 052105
- [13] Campbell S, Tame M S and Paternostro M 2009 Characterizing multipartite symmetric dicke states under the effects of noise *New J. Phys.* **11** 073039
- [14] Dür W, Vidal G and Cirac J I 2000 Three qubits can be entangled in two inequivalent ways *Phys. Rev. A* **62** 062314
- [15] Wootters W K 1998 Entanglement of formation of an arbitrary state of two qubits *Phys. Rev. Lett.* **80** 2245
- [16] Mintert F, Carvalho A R R, Marek K and Buchleitner A 2005 Measures and dynamics of entangled states *Phys. Rep.* **415** 207–59
- [17] Mintert F and Buchleitner A 2005 Concurrence of quasipure quantum states *Phys. Rev. A* **72** 012336
- [18] Mintert F and Buchleitner A 2007 Observable entanglement measure for mixed quantum states *Phys. Rev. Lett.* **98** 140505
- [19] Coffman V, Kundu J and Wootters W 2000 Distributed entanglement *Phys. Rev. A* **61** 052306
- [20] Regula B, Di Martino S, Lee S and Adesso G 2014 Strong monogamy conjecture for multiqubit entanglement: the four-qubit case *Phys. Rev. Lett.* **113** 110501
- [21] Facchi P, Florio G, Marzolino U, Parisi G and Pascazio S 2010 Multipartite entanglement and frustration *New J. Phys.* **12** 025015

QUERY FORM

JOURNAL: Physica Scripta

AUTHOR: J G Amaro and C Pineda

TITLE: Multipartite entanglement dynamics in a cavity

ARTICLE ID: ps507523

The layout of this article has not yet been finalized. Therefore this proof may contain columns that are not fully balanced/ matched or overlapping text in inline equations; these issues will be resolved once the final corrections have been incorporated.

SQ1

Please be aware that the colour figures in this article will only appear in colour in the online version. If you require colour in the printed journal and have not previously arranged it, please contact the Production Editor now.

Page 1

Q1

Please specify the corresponding author and provide his/her email address.

Page 1

Q2

Please define the acronym 'CP'.

Page 3

Q3

Please check the usage of the term [them] in this context.

Page 7

Q4

Please check the details for any journal references that do not have a link as they may contain some incorrect information.

Bibliografía

- [1] S. Haroche and J.-M. Raimond, *Exploring the quantum. Atoms, cavities and photons*. Oxford: Oxford University Press, 2006.
- [2] M. Schlosshauer, “Decoherence, the measurement problem, and interpretations of quantum mechanics,” *Rev. Mod. Phys.*, vol. 76, pp. 1267–1305, Feb 2005.
- [3] R. Horodecki, P. Horodecki, M. Horodecki, and K. Horodecki, “Quantum entanglement,” *Rev. Mod. Phys.*, vol. 81, pp. 865–942, Jun 2009.
- [4] M. A. Nielsen and I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information: 10th Anniversary Edition*. New York, NY, USA: Cambridge University Press, 10th ed., 2011.
- [5] C. Pineda, T. Gorin, and T. H. Seligman, “Decoherence of two-qubit systems: a random matrix description,” *New Journal of Physics*, vol. 9, no. 4, p. 106, 2007.
- [6] J. M. Torres, E. Sadurní, and T. H. Seligman, “Two interacting atoms in a cavity: exact solutions, entanglement and decoherence,” *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, vol. 43, no. 19, p. 192002, 2010.

- [7] B. Nagorny, T. Elsässer, and A. Hemmerich, “Collective atomic motion in an optical lattice formed inside a high finesse cavity,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 91, p. 153003, Oct 2003.
- [8] M. J. Hartmann, F. G. S. L. Brandão, and M. B. Plenio, “Effective spin systems in coupled microcavities,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 99, p. 160501, Oct 2007.
- [9] J. Chan and S. Afonin, *Solid State NMR*. Topics in Current Chemistry, Springer, 2011.
- [10] D. Porras and J. I. Cirac, “Effective quantum spin systems with trapped ions,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 92, p. 207901, May 2004.
- [11] M. J. Hartmann, F. G. S. L. Brandão, and M. B. Plenio, “Effective spin systems in coupled microcavities,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 99, p. 160501, Oct 2007.
- [12] A. Sørensen and K. Mølmer, “Spin-spin interaction and spin squeezing in an optical lattice,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 83, pp. 2274–2277, Sep 1999.
- [13] W. K. Wootters, “Entanglement of formation of an arbitrary state of two qubits,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 80, pp. 2245–2248, Mar 1998.
- [14] F. Mintert, A. R. Carvalho, M. Kuś, and A. Buchleitner, “Measures and dynamics of entangled states,” *Physics Reports*, vol. 415, no. 4, pp. 207 – 259, 2005.
- [15] F. Mintert, M. Kuś, and A. Buchleitner, “Concurrence of mixed multipartite quantum states,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 95, p. 260502, Dec 2005.
- [16] L. E. Ballentine, *Quantum mechanics: a modern development; 2nd ed.* World Scientific, Sep 2014.
- [17] M. Ziman and T. Heinosaari, *The Mathematical Language of Quantum Theory*. Velká Británie: Cambridge University Press, 2012.
- [18] M. Hirvensalo, *Quantum computing*. Natural computing series, Berlin, New York, Paris: Springer, 2004.
- [19] D. Petz, *Quantum information theory and quantum statistics*. Theoretical and Mathematical Physics, Berlin: Springer, 2008.

- [20] E. A. Jackson, *Equilibrium statistical mechanics*. Mineola, N.Y.: Dover Pub., 2000.
- [21] S. M. Barnett, *Quantum information*. Oxford Master Series in Atomic, Optical and Laser Physics, Oxford: Oxford Univ. Press, 2009.
- [22] P. Kaye, R. Laflamme, and M. Mosca, *An Introduction to Quantum Computing*. New York, NY, USA: Oxford University Press, Inc., 2007.
- [23] E. Rieffel and W. Polak, *Quantum computing: a gentle introduction*. Cambridge, MA: MIT Press, 2011.
- [24] D. D'Alessandro, *Introduction to quantum control and dynamics*. Chapman and Hall, CRC Applied Mathematics and Nonlinear Science, Hoboken, NJ: Taylor and Francis Ltd, 2007.
- [25] A. Uhlmann, “Roofs and convexity,” *Entropy*, vol. 12, no. 7, pp. 1799–1832, 2010.
- [26] E. Jaynes and F. W. Cummings, “Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to the beam maser,” *Proceedings of the IEEE*, vol. 51, pp. 89–109, Jan 1963.
- [27] F. W. Cummings, “Stimulated emission of radiation in a single mode,” *Phys. Rev.*, vol. 140, pp. A1051–A1056, Nov 1965.
- [28] C. C. Gerry and P. L. Knight, *Introductory quantum optics*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2004.
- [29] W. P. Schleich, *Quantum Optics in Phase Space*. Berlin: Wiley-VCH, 2001.
- [30] H. Paul, “Induzierte emission bei starker einstrahlung,” *Annalen der Physik*, vol. 466, no. 7-8, pp. 411–412, 1963.
- [31] M. Scully and S. Zubairy, *Quantum Optics*. Cambridge University Press, 1997.
- [32] P. J. Sheng and L. G. Xiang, *Introduction to modern quantum optics*. Singapore: World Scientific, 1998.

- [33] F. Mintert, M. Ku, and A. Buchleitner, “Concurrence of mixed bipartite quantum states in arbitrary dimensions,” *Physical Review Letters*, vol. 92, 2004.
- [34] W. e. a. Zurek, “Coherent states via decoherence,” *Physical Review Letters*, vol. 70, 3 1993.
- [35] G. Jaeger, *Quantum Information: An Overview*. New York, NY: Springer, 2007.
- [36] V. Coffman, J. Kundu, and W. K. Wootters, “Distributed entanglement,” *Phys. Rev. A*, vol. 61, p. 052306, Apr 2000.
- [37] D. Bruß, “Characterizing entanglement,” *Journal of Mathematical Physics*, vol. 43, no. 9, pp. 4237–4251, 2002.
- [38] F. Mintert, C. Viviescas, and A. Buchleitner, “Basic concepts of entangled states,” in *Entanglement and Decoherence* (A. Buchleitner, C. Viviescas, and M. Tiersch, eds.), vol. 768 of *Lecture Notes in Physics*, pp. 61–86, Springer Berlin Heidelberg, 2009.
- [39] O. Gühne and G. Tóth, “Entanglement detection,” *Physics Reports*, vol. 474, no. 1–6, pp. 1 – 75, 2009.
- [40] F. Mintert and A. Buchleitner, “Concurrence of quasipure quantum states,” *Phys. Rev. A*, vol. 72, p. 012336, Jul 2005.