UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN FILOSOFÍA
FACULTAD DE FILOSOFÍA Y LETRAS
INSTITUTO DE INVESTIGACIONES FILOSÓFICAS
ÁREA DE LÓGICA, FILOSOFÍA DEL LENGUAJE Y FILOSOFÍA DE LA MENTE

ANÁLISIS DE DOS CONCEPCIONES DE LA NOCIÓN DE CONSECUENCIA LÓGICA: CLÁSICA-TARSKIANA Y RELEVANTE. ¿QUÉ CONCEPCIÓN PROPORCIONA UNA ELUCIDACIÓN ADECUADA DE LA NOCIÓN INTUITIVA DE CONSECUENCIA?

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN FILOSOFÍA

PRESENTA:
CÉSAR DE JESÚS ESCOBEDO SÁNCHEZ

TUTOR:
DR. MARIO GÓMEZ TORRENTE
IIFS-UNAM

MÉXICO, D. F. JUNIO 2015

Índice:

Introducción.

Es un hecho que los razonamientos lógicamente correctos son uno de los principales intereses de la lógica (si no es que el mayor interés de la lógica), y no es para menos porque ellos permiten a los agentes racionales trabajar con cierto nivel de rigor cualquier información que reciben. Dos cosas hay que decir de esto último: i) Se trabaja con cierto nivel de rigor porque los razonamientos lógicamente correctos no se presentan sólo cuando se trabaja a determinado nivel de formalidad, sino que ellos son realizables desde la cotidianidad hasta los más altos niveles técnicos, como muestran los razonamientos (a) en lenguaje ordinario y (b) con precisión lógica:

a) Todo automóvil funciona con combustible,
mi vehículo no funciona con combustible
.’. mi vehículo no se mueve por sí mismo.

b) $\dfrac{\begin{array}{c}(p\supset r)\wedge(q\supset s)\\ p\vee q\end{array}}{r\vee s}$.

ii) Cualquier información que recibimos es susceptible de procesos racionales, pues al recibirla se suele pensar en <u>qué más se puede dar por cierto dada por hecho la información recibida</u>.

Tener un entendimiento lo más claro posible de la actividad racional es importante dada la cantidad de razonamientos que efectuamos tanto cotidianamente como a niveles de estudio específicos, y la lógica es la encargada de precisar dicha actividad al ofrecer caracterizaciones de lo que consiste el razonamiento lógicamente correcto. Sin embargo, como hemos visto en los casos (a) y (b), los razonamientos ocurren en prácticamente cualquier nivel de raciocinio, desde aquellos que hacemos cotidianamente hasta los realizados en teorías científicas muy específicas y con niveles de abstracción considerablemente superior a los intuitivos, y es deseable comprender lo mejor posible actividad racional en todos esos niveles.

Es importante hacer notar que la noción central que determina el efecto de los razonamientos es la noción de <u>consecuencia.</u> Al razonar lo hacemos partiendo de información que recibimos de diversos medios, después procesamos esa información lógicamente para pasar a otra información que pensamos “se sigue” de la información que se nos proporcionó al principio. Esto último concuerda con lo que se dijo anteriormente en (ii) y puede ser entendido como el funcionamiento de nuestro <u>proceso de razonamiento</u>, aunque dicho proceso es bastante más complicado y envuelve más detalles que lo dicho en esas líneas. La complejidad empieza a ser más notoria cuando observamos todos los componentes en juego en el proceso racional. La extracción de consecuencias está estrechamente vinculada con los llamados <u>procesos inferenciales</u>, pues éstos son los que permiten trabajar con la información recibida para extraer más información que se sigue de la primera. También pensamos que hemos efectuado <u>razonamientos válidos</u> cuando las consecuencias extraídas están garantizadas por la información proporcionada, siempre y cuando dicha información sea veraz. Como las anteriores, aún hay más nociones y conceptos involucrados en la actividad argumentativa que tenemos.[1]

En lo que hemos dicho hasta ahora de los razonamientos, son especialmente interesantes aquellos que solemos efectuar de manera "intuitiva", en sentido de que los realizamos cotidianamente y bajo reglas inferenciales que consideramos de uso común y generalmente aceptadas como correctas. Estos razonamientos son importantes porque son la base de evaluación de la mayoría de información que recibimos, con ellos empezamos a inferir conclusiones que después pueden someterse a un estudio más detallado y preciso con el uso de herramientas formales (esto suele hacerse en varias disciplinas de estudio específicas). Como parte del estudio de la lógica, estudiar los razonamientos en distintos niveles es importante porque se ha visto que al formularlos dentro de sistemas lógicos específicos adquieren características lógicas específicas. Los razonamientos intuitivos no son la excepción, pues en ellos también hay características importantes que requieren explicarse. Entre las características más importantes de los razonamientos intuitivos está la relación de "seguirse" entre las premisas y conclusión, que es expresada a través del concepto de consecuencia. La noción de consecuencia en los razonamientos intuitivos es de complejidad considerable dados numerosos razonamientos específicos que se hacen, pues no hay acuerdo sobre cómo funciona esta noción intuitiva de consecuencia en ellos. La riqueza de la noción intuitiva permite que muchos razonamientos con características muy concretas sean correctos bajo dicha noción.

Con lo dicho anteriormente podemos notar que la <u>noción intuitiva de consecuencia</u> es crucial al momento de comenzar a razonar. Más aún, solemos pensar que en los razonamientos válidos al garantizar que la información de las premisas es el caso <u>se sigue lógicamente</u> la veracidad de su conclusión, así que cualquiera que acepte las premisas se ve obligado (salvo que sea irracional) a reconocer que la conclusión es cierta. De modo que la noción intuitiva de consecuencia se fortalece al añadirle un cierto carácter lógico, haciendo que pensemos en una <u>noción intuitiva de consecuencia lógica</u> como la que, al cumplirse, nos garantiza que nuestros razonamientos son correctos.[2]

Ahora, ¿qué tan profundo es nuestro entendimiento de la noción intuitiva de consecuencia lógica? Esta pregunta es crucial para la lógica en su afán de elucidar nuestro modo de razonar, pero como se dijo anteriormente la complejidad de la noción es bastante grande, a tal magnitud que aún no hay una explicación cabal del funcionamiento total de ella. Aunque no por ello debemos resignarnos a abandonar el objetivo de esclarecerla. Hay varias características que están presentes en todos los razonamientos que son casos de consecuencia lógica intuitiva, una de ellas ya se ha esbozado en el párrafo anterior y establece que <u>en los razonamientos intuitivamente correctos su conclusión se sigue</u>

[1] Algo que deseo añadir es que a lo largo de este trabajo usaré los términos 'razonamiento' y 'argumento' indistintamente. Aunque no dudo que pueda establecerse una distinción interesante entre dichos términos.

[2] No pensaremos en dar una distinción entre las nociones intuitivas de consecuencia y consecuencia lógica pues la segunda puede verse como un refinamiento de la primera, la segunda es una manera de explicarnos por qué funcionan nuestros razonamientos.

necesariamente de sus premisas; otra característica consiste en que los razonamientos intuitivamente correctos poseen una cierta estructura formal que si otros razonamientos intuitivamente correctos respetan entonces pueden ser intuitivamente correctos también; otra característica es que en dichos razonamientos siempre hay pertinencia de información entre premisas y conclusión. Estas características son algunas que la noción intuitiva posee y han logrado aislarse gracias a análisis lógicos hechos a los razonamientos.

Resulta claro que el estudio de la noción intuitiva de consecuencia lógica sólo puede efectuarse con ayuda de una noción técnica de consecuencia lógica fundamentada en teorías rigurosamente creadas con base en leyes y principios lógicos, una noción técnica que explique las características como las mencionadas en el párrafo anterior ayudaría a tener un mejor entendimiento sobre la noción intuitiva. En este trabajo nos enfocaremos en dos propuestas de nociones técnicas: las nociones de consecuencia lógica tarskiana y relevantista:

1) La motivación para elegir la noción tarskiana está apoyada en dos razones: i) la claridad y profundidad con la que fue definida, ii) su papel vital en el avance que impulsó el desarrollo de la lógica clásica. Lo dicho en (i) es apoyado por la precisión semántica y matemática que Tarski fue capaz de otorgar a su concepto técnico de consecuencia lógica gracias a sus nociones formales de satisfacción, modelo, validez, etc., la noción tarskiana ofrece una forma clara de entender en qué consiste que un razonamiento sea lógicamente correcto a través de esas nociones. (ii) es impulsado por los avances que los lógicos han hecho gracias a la creación de teorías que utilizan la noción tarskiana de consecuencia lógica, esto desde que Frege impulsó el desarrollo de la lógica que tenía como principal base la silogística aristotélica, pues con la noción tarskiana se introdujo una manera alternativa pero tan efectiva como el enfoque prueba-teorético que Frege introdujo a la lógica, dicha manera es el enfoque modelo-teorético de la lógica.

2) La motivación para elegir la noción relevantista también se apoya en dos razones: i) el carácter prescriptivo que la lógica relevante tiene sobre la lógica clásica, ii) una nueva propuesta para desarrollar la lógica. (i) está fundamentado principalmente en una crítica que los relevantistas hacen a la lógica clásica, dicha crítica consiste en que ciertas formas de razonar clásicamente permitidas colisionan con nuestro sentido común, pues intuitivamente no solemos razonar de esas maneras paradójicas que surgen por cómo las nociones de validez lógica, constante lógica y por supuesto consecuencia lógica son clásicamente definidas (y esto afecta a la noción tarskiana en medida de que es una reestructuración de la consecuencia lógica clásica). La propuesta mencionada en (ii) consiste en que, ya que hay los defectos mencionados en el enfoque clásico de la lógica, debemos buscar un modo alternativo de explicar y precisar el funcionamiento de los razonamientos lógicamente correctos, y esto lo hacemos a través de nuevas nociones de validez lógica, constante lógica y obviamente consecuencia lógica que evadan las paradojas que clásicamente surgen.

A pesar de existir otros enfoques teóricos del estudio de la consecuencia lógica, como el intuicionista o los apoyados por lógicas difusas o paraconsistentes, me he decidido por los dos enfoques anteriores debido al carácter de las motivaciones anteriormente expuestas. La noción tarskiana de consecuencia lógica tiene entre sus objetivos ofrecer una mejor regimentación de lo que ocurre con el manejo, desde la perspectiva de la lógica clásica, de información y cómo es trabajada en niveles profundos de las disciplinas científicas (y un particular interés por la clarificación del quehacer matemático) a través de razonamientos con dicha información, esto con el uso de varias nociones definidas y de generalidad lo bastante amplia para poder aplicarlas a la totalidad de los razonamientos, y esta aplicabilidad incluye nuestra actividad racional más común. La teoría tarskiana propone maneras de sobrepasar los problemas que oscurecen el entendimiento del razonar cotidiano, maneras que se apoyan en la precisión y rigor matemáticos con los que se definen las herramientas formales para arreglar dichos problemas. Es importante hacer notar que esta noción ofrece una manera muy técnica y precisa de comprender varias características de la noción intuitiva que nos interesa, pues la consecuencia lógica tarskiana incorpora el componente formal en los razonamientos y es compatible con la necesidad que hay entre premisas y conclusión, por decir algunas características de la noción intuitiva.

La noción relevantista de consecuencia lógica surge con objetivos directamente centrados en ofrecer soluciones que rechazan una parte considerable del funcionamiento de la lógica clásica: ¿En lógica clásica cómo pueden ser aceptables ciertos esquemas formales de razonamiento que parecen tan contraintuitivos?, ¿cómo puede haber reglas de inferencia clásicamente aceptables en las que no se aprecia claramente el manejo de la información?, ¿qué ocurre con las conectivas lógicas clásicas cuando éstas no muestran todas las conexiones que debe haber en la información que envuelve su uso (como relacionar P y Q mediante una conjunción cuando esos enunciados no tienen nada en común)? Las preguntas anteriores son sólo algunas que los relevantistas han hecho a los lógicos clásicos, y al no obtener respuesta satisfactoria se han empeñado en crear maneras alternativas de involucrarse con todos los aspectos y características pertinentes de los razonamientos. Los relevantistas no aceptan mucho del trabajo clásico en lógica y pretenden reemplazarlo con nuevas nociones técnicas más acordes con el funcionamiento de los razonamientos en general, y sus mayores preocupaciones con esto involucran el ofrecer explicaciones claras del mayor número posible de detalles presentes en la actividad racional. Con la noción relevantista también podemos notar que se propone una explicación de las características de la noción intuitiva de modo más preciso: la forma de los razonamientos intuitivamente correctos es capturada con nuevas herramientas formales (nuevos conectivos lógicos, etc.), la necesidad entre premisas y conclusión se explica en relación a una noción técnica de relevancia, por mencionar algunas.

Con lo anterior dicho, el objetivo de este trabajo es presentar y analizar las nociones consideradas de consecuencia lógica y <u>ofrecer razones que ayuden a decidir cuál de las dos nociones técnicas, la tarskiana o la relevantista, es la que mejor elucida la noción intuitiva de consecuencia lógica</u>. Desde ahora tendremos como objetivo defender la siguiente tesis: A pesar de las críticas hechas por los relevantistas, hay buenas razones para sostener que es la noción clásica-tarskiana de consecuencia lógica la que mejor elucida nuestra noción intuitiva de consecuencia. En la primera parte nos centraremos en ofrecer una caracterización general de la noción clásica de consecuencia lógica y su relación con la noción intuitiva de consecuencia lógica y cómo surgen algunos problemas de ella, problemas que envuelven principalmente la no-elucidación de varias características esenciales de la noción intuitiva. En los capítulos siguientes presentaremos a detalle las nociones técnicas tarskiana y relevantista y cómo se encargan de los problemas que la sola noción clásica presenta, esto con la introducción de aparatos técnicos precisamente definidos. Después nos enfocaremos en presentar las ventajas para el estudio de la noción intuitiva al usar las nociones técnicas tarskiana y relevantista. Por último analizaremos algunos problemas que las nociones técnicas enfrentan y cómo su solución o no-solución afecta el estudio de la noción intuitiva. En el final ofreceremos razones para sostener que la noción tarskiana se apega más a la estructura y comportamiento de la noción intuitiva que la noción relevante, apelando en gran parte a que la noción tarskiana se apega en buena manera a nuestras intuiciones de razonamiento y a nuestra práctica racional intuitiva, es decir un carácter más bien pragmático de la noción intuitiva de consecuencia.

1.- Presentación y análisis de tres concepciones de consecuencia lógica: Clásica, tarskiana y relevante.

Concepción clásica. Tratamiento estándar de la noción de consecuencia lógica.

Con el surgimiento de la lógica como disciplina de estudio se ha requerido explicar las nociones que están en juego ahí, como la noción de argumento, de enunciado, de conectivo lógico, etc., esto incluye a la noción de consecuencia lógica. Ya desde Aristóteles (considerado el fundador de la lógica como disciplina) y varias de sus obras, puede verse una explicación de en qué consiste que un enunciado <u>se siga lógicamente</u> de otro u otros: "una deducción es un modo de habla en donde, al haber ciertas cosas supuestas otra cosa distinta de las primeras resulta por necesidad porque ellas son como son";[3] otro modo de decir en qué consiste la noción de consecuencia lógica similar a la nota anterior de la obra de Aristóteles es así: Dado un grupo de enunciados de los cuales se sigue otro enunciado, es imposible que los enunciados que fungen como premisas sean verdaderos y el enunciado que se sigue de ellos sea falso.[4] Así entendida la noción de consecuencia lógica es como se había venido trabajando con la lógica desde que Aristóteles hizo sus contribuciones en ella.[5]

Como ya se mencionó en el párrafo anterior, el componente modal en la noción de consecuencia lógica es importante para elucidar dicha noción. La <u>modalidad</u> en la noción de consecuencia lógica es lo que establece que se dé una relación de <u>necesidad lógica</u> entre las premisas y la conclusión de las inferencias. De modo que al tomar un enunciado o

[3] Aristóteles (1982), 24b18-20. Nótese aquí que ya en Aristóteles había una característica *modal* dentro de la elucidación de la noción de consecuencia lógica (necesidad). Más adelante se verá con más detalle esto.
[4] Nuevamente apareció un componente modal en esta explicación (imposibilidad). Ver nota anterior. Aquí se está asumiendo que esos enunciados hablan de objetos.
[5] Aquí hablo de otros estudiosos de la lógica, como los estoicos y los lógicos de la época medieval.

conjunto de enunciados *A* y otro enunciado *B,* al tener un razonamiento lógicamente correcto de *A* a *B* se tiene que $\Box(A \supset B)$. Una manera de enunciar la característica modal de la noción de consecuencia lógica es: Es <u>necesario</u> que si se tienen ciertos enunciados tales que algunos de ellos se <u>siguen lógicamente</u> de otros y estos otros son verdaderos entonces los lógicamente resultantes también serán verdaderos.[6] Y gracias a la interdefinibilidad de los operadores modales: $\neg\Diamond(A \wedge \neg B)$, es <u>imposible</u> que sean verdaderos los primeros enunciados y sean falsos los enunciados que se sigan lógicamente de los primeros. Siempre que una oración sea consecuencia lógica de otra o conjunto de otras, es lógicamente necesario que la conclusión se siga de las premisas.[7] Esta relación modal entre premisas y conclusión es un requerimiento muy fuerte en los argumentos lógicamente correctos, pues con dicho requerimiento se puede discernir más fácilmente cuándo una conclusión se sigue lógicamente de las premisas y cuando no es así. Un ejemplo de un razonamiento cuya conclusión no es consecuencia lógica de sus premisas es: 'El gato está parado en el muro del vecino' / 'El gato comenzará a maullar'. Es fácil apreciar que en este razonamiento la conclusión no se sigue por necesidad lógica de la premisa tenida, pues es posible que el gato parado en el muro no comience a maullar. De ahí que ¬□(El gato está parado en el muro del vecino ⊃ El gato comenzará a maullar), y la conclusión de ese razonamiento no es un caso de consecuencia lógica porque no es lógicamente necesario que su conclusión se siga de su premisa (la conclusión de ese razonamiento es un caso de consecuencia, no de consecuencia lógica). A diferencia de este otro razonamiento: 'Si la policía no llegó a tiempo entonces se cometió el crimen, pero no se cometió el crimen' / 'la policía llegó a tiempo'. La conclusión es un caso de consecuencia lógica porque ella se sigue necesariamente de su premisa.[8]

Otra característica de la noción de consecuencia lógica que es importante señalar es la de <u>formalidad</u>.[9] Esta característica está enfocada en la forma sintáctica de los razonamientos. O sea que si se tiene una inferencia con premisas *A, B, C,* etc., y conclusión lógica *X* entonces todas las inferencias <u>que tengan la misma forma</u> que la inferencia con premisas *A, B, C,* etc., y conclusión lógica *X* serán inferencias lógicamente correctas (su conclusión también es consecuencia lógica de sus premisas). Un ejemplo de forma que ilustra este punto es tomar la siguiente forma inferencial: $((P \supset Q) \wedge \neg Q)\ .\!\acute{}.\ \neg P$ (Modus Tollens), y todo argumento con esa forma inferencial tendrá a su conclusión como consecuencia lógica de sus premisas.

Otra manera de ver la característica de formalidad es como la <u>forma lógica</u> de un razonamiento lógicamente correcto, la forma de estos razonamientos garantiza que la conclusión se siga lógicamente de las premisas, y otros razonamientos que tengan la misma forma lógica que el razonamiento lógicamente correcto tendrán conclusiones que sean

[6] Después se hablará más del papel que tiene la noción de verdad en los razonamientos.
[7] En otros lugares también es considerada la propiedad modal que tiene la noción de consecuencia lógica. Por ejemplo, ver Gómez Torrente (2000), p. 15 y 16.
[8] Ver Gómez Torrente (2004), p. 144.
[9] Ver Gómez Torrente (2000). 14 y 15.

casos de consecuencia lógica: "[…] la forma lógica de un argumento es una cierta forma esquemática que tienen en común los argumentos que comparten forma lógica.".[10]

Para entender mejor el papel de la forma lógica, hay que pensar en ella como la forma esquemática que se menciona en la nota anterior. Tómese el siguiente razonamiento: 'Si llegas tarde entonces perderás tu oportunidad de conseguir el empleo' y 'no perdiste tu oportunidad de conseguir el empleo' / 'no llegaste tarde'. Esta es una inferencia cuya conclusión se sigue lógicamente de sus premisas, pues comparte su forma lógica con el esquema inferencial del Modus Tollens. Toda inferencia con esa forma tendrá una conclusión que se sigue lógicamente de sus premisas (para ver esto, solamente se requiere remplazar los signos no-lógicos P y Q del esquema inferencial Modus Tollens por los enunciados en juego en el razonamiento anterior). De este modo se pueden analizar los razonamientos para averiguar si su conclusión se sigue lógicamente de sus premisas, atendiendo a su forma lógica podemos darnos cuenta de si su conclusión es consecuencia lógica de sus premisas. La característica de formalidad puede enunciarse del siguiente modo: "[…] todo argumento con las misma forma lógica que un argumento lógicamente correcto es también lógicamente correcto; y la forma lógica de un argumento es el resultado de sustituir uniforme en él las expresiones no lógicas por letras esquemáticas.".[11] La forma lógica de un razonamiento lógicamente correcto contribuye a la búsqueda de otros razonamientos con la misma forma, pues es más probable que otros razonamientos con la misma forma sean lógicamente correctos que aquellos con otra forma.[12]

Es importante estudiar las características de modalidad y formalidad en la noción de consecuencia lógica porque se puede empezar a explicar qué significa que cierta o ciertas oraciones (que fungen como conclusión) se sigan lógicamente de otra u otras oraciones (que fungen como premisas): "un argumento es un caso de consecuencia lógica si y sólo si su conclusión se sigue por necesidad lógica de sus premisas y todo argumento con las misma forma lógica es un argumento en que la conclusión se sigue por necesidad lógica de las premisas.".[13] Sin embargo, como se dice en Gómez Torrente (2004), la explicación de la noción de consecuencia lógica sólo en términos de la modalidad o formalidad no es suficiente para aclarar su funcionamiento. Pues conceptos como el de necesidad lógica no gozan de un mejor entendimiento que la noción de consecuencia lógica. Mientras el entendimiento de los componentes que sirvan para explicar la noción de consecuencia lógica sea tan limitado como el de la noción misma de consecuencia lógica, no se puede aspirar a una elucidación adecuada de la noción de consecuencia lógica con sólo dichos componentes.

[10] Gómez Torrente (2004), p. 144.
[11] *Ibíd.* P. 147.
[12] Nótese que esto no es decir que otros razonamientos con forma lógica diferente no puedan ser lógicamente correctos.
[13] *Ibíd.* P. 148 y 149. Aunque como se dice más adelante en este texto, no se afirma que todo argumento lógicamente correcto es uno donde su conclusión se sigue por necesidad lógica de sus premisas y todo otro argumento con la misma forma lógica también tiene conclusión que se sigue por necesidad lógica.

Ahora, la formalidad y la modalidad son dos importantes características a tomar en cuenta en la elucidación de la noción de consecuencia lógica. Sin embargo, es necesario aclarar algo antes de seguir examinando la noción de consecuencia lógica: ¿La noción intuitiva de consecuencia se comporta de la misma manera que la noción más técnica y compleja de consecuencia lógica? No debemos perder de vista cuál es el tema de este trabajo: ofrecer argumentos que apoyen ya sea cierta concepción de consecuencia lógica (clásica, con el refinamiento tarskiano) o que apoyen otra concepción (relevante). Siguiendo lo que se dice en varios lugares, como en Gómez Torrente (2000), la noción de consecuencia es crucial para entender cómo funciona el razonamiento en general, pues los razonamientos están presentes constantemente en la vivencia humana. La gran mayoría de ocasiones (sino es que en todas) se logra la comunicación humana a través de razonamientos (por simples que puedan ser); el progreso científico puede avanzar gracias a razonamientos correctos y adecuados que lo permiten. Así que tener una clara comprensión de la noción intuitiva de consecuencia es indispensable para entender los procesos de razonamiento que se tienen. Ya desde la época de los griegos antiguos se cree que la noción de consecuencia lógica debería ser explicada para lograr el entendimiento deseado de la noción intuitiva de consecuencia (el mismo Aristóteles, considerado el fundador de la lógica como disciplina de estudio, creía esto), de modo que la noción de consecuencia lógica es crucial para la elucidación de la noción intuitiva: "[…] la investigación filosófica sobre el concepto de consecuencia se ha concentrado sobre el concepto especial de consecuencia lógica.".[14]

Lo dicho en el párrafo anterior constituye la principal motivación para buscar una comprensión adecuada de la noción de consecuencia lógica. Y el análisis de las propiedades de esa noción nos encamina a esa comprensión deseada. De modo que la comprensión de la noción de consecuencia lógica debe incluir una elucidación clara sobre la formalidad y modalidad de esta noción. Pero es deseable que, tomando en cuenta lo dicho en el párrafo antepasado, la comprensión de la noción de consecuencia lógica sea en términos más claros que los que se tienen solamente con la modalidad y formalidad (como la noción de necesidad lógica). Gracias a estudios realizados por varios filósofos y lógicos, se tienen teorías con las que se intenta dar una caracterización clara y más precisa de la noción de consecuencia lógica que no involucra solamente otras nociones que requieren igual clarificación que la consecuencia lógica.

Periodo histórico del desarrollo de la noción clásica.

Desde la antigüedad clásica griega se pueden rastrear caracterizaciones de lo que quiere decir que en un razonamiento la conclusión sea consecuencia lógica de sus premisas. En el primer párrafo de esta sección del ensayo se habló de Aristóteles y de cómo el silogismo proporciona una explicación de la consecuencia lógica.[15] Con la silogística aristotélica se busca capturar las propiedades de formalidad y modalidad, ello a través de

[14] Gómez Torrente (2000), p. 18.
[15] Ver nota 3.

algunos esquemas de razonamiento los cuales proporcionan formas lógicas de razonamientos lógicamente correctos, y dichos esquemas de razonamiento son casos en que la conclusión se sigue por necesidad lógica de las premisas. Después de la contribución aristotélica para definir la noción de consecuencia lógica, el trabajo para aclarar la noción continuó con los contemporáneos a Aristóteles, como los estoicos. Siguiendo la idea aristotélica de consecuencia lógica, los estoicos comenzaron a tratar dicha noción en relación a sistemas formales axiomáticos y lógica proposicional, así la noción de consecuencia lógica se explicaba a través de esquemas formales axiomáticos que aclaran la forma de los razonamientos, dichos esquemas axiomáticos constituyen buenos ejemplos de implicación por necesidad lógica (garantizando el seguimiento lógico de la conclusión a partir de las premisas).

Después de Aristóteles y el estoicismo, el estudio de la noción de consecuencia lógica no sufrió grandes modificaciones (esto fue así pasando por la edad media y la modernidad). Con la llegada del siglo XIX se empezaron a dar avances en la lógica gracias a contribuciones hechas por lógicos y matemáticos como Frege, pues muchas de las nociones con las que se trabaja en lógica fueron clarificadas. Se empezaron a crear lenguajes formales con los que se evalúan los razonamientos de modo más preciso, pues con esos lenguajes se tiene la ventaja de poder esclarecer fácilmente la forma de los argumentos. Para este aspecto, Frege contribuyó con la creación de un lenguaje formal de orden superior, además dicho lenguaje está diseñado para expresar el fragmento de 1er orden.[16] Siguiendo la postura estoica, Frege contribuyó al incremento del rigor formal al proponer sistemas axiomáticos matemáticamente más rigurosos con los cuales calcular lógicamente la corrección de los razonamientos a evaluar. Esta idea fregeana de sistema formal axiomático, en pocas palabras, es así: como base del sistema formal se proponen esquemas axiomáticos oracionales (axiomas, necesarios lógicamente) y reglas de inferencia (reglas que al aplicarse a cierta o ciertas oraciones <u>lógica y necesariamente implican</u> otras oraciones resultantes de las primeras), al sustituir los componentes no-lógicos (letras esquemáticas) en los esquemas axiomáticos oracionales por oraciones y aplicar $n \geq 1$ veces las reglas de inferencia disponibles se obtienen oraciones que se siguen por necesidad lógica de las primeras oraciones.[17]

Así, la noción de consecuencia lógica también recibió una explicación con términos más precisos: Un enunciado B es consecuencia lógica de otro enunciado o conjunto de enunciados A ssi partiendo de A se da una secuencia de enunciados C tales que todo $c \in C$ es un axioma o es un enunciado que se sigue lógicamente de otros enunciados (teorema) o es resultado de anteriores enunciados por aplicación de las reglas de inferencia, y dicha secuencia tiene como miembro final a $c_n = B$. B es consecuencia lógica de A cuando B es <u>derivable</u> o <u>demostrable</u> de A. La derivabilidad en la noción de consecuencia lógica cumple con el propósito de elucidar las propiedades de formalidad y modalidad de la noción.

[16] Ver Gómez Torrente (2000), p. 23.
[17] Ver *Ibíd.* P. 24.

Primero: se respeta la formalidad de la noción porque al haber un argumento en el que su conclusión se derivó (en el sentido anterior) de sus premisas, es un argumento lógicamente correcto, y todo argumento que comparta la forma del anterior argumento lógicamente correcto será también uno lógicamente correcto (pues su conclusión será consecuencia lógica de sus premisas al poderla derivar del mismo modo que en el primer argumento lógicamente correcto). Segundo: se respeta la modalidad de la noción porque desde la postulación de los axiomas base del sistema formal se busca que esos axiomas sean esquemas lógicamente necesarios (un ejemplo es: $(\alpha \supset (\beta \supset \gamma)) \supset ((\alpha \supset \beta) \supset (\alpha \supset \gamma))$ como esquema axiomático oracional), además las reglas de inferencia garantizan que al aplicarse a ciertas oraciones se generen otras oraciones lógica y necesariamente implicadas por las primeras. Con los sistemas formales axiomáticos definidos fregeanamente sólo se pueden derivar oraciones que sean implicadas por otras por necesidad lógica.[18]

Hasta este punto, es importante señalar otro rasgo de la consecuencia lógica que está a la par del aspecto derivativo de la noción. A diferencia del aspecto derivativo, que es de carácter sintáctico, el otro rasgo es de carácter semántico.[19] Este rasgo semántico es la noción de validez en los argumentos, el cual también respeta las características de formalidad y modalidad de la consecuencia lógica. Hay que hacer notar que junto con la validez viene la noción de verdad: En un argumento *A* / *B* cuya conclusión es consecuencia lógica de sus premisas toda asignación de valores de verdad que haga verdadero a *A* hace verdadero a *B*. Al ser *B* consecuencia lógica de *A* es imposible que haya una asignación de valores de verdad tal que haga a *A* verdadero y a *B* falso. Además todo argumento con la misma forma lógica del argumento *A* / *B* será un argumento en que no sea el caso que sus premisas sean verdaderas y su conclusión falsa.[20] Así es como este rasgo semántico de la validez de la consecuencia lógica viene involucrado con la noción de verdad (actuando en los valores de verdad que tienen las premisas y conclusión de los razonamientos); además con la noción de consecuencia lógica así definida vienen otras nociones relacionadas con ella muy estrechamente, como la noción de verdad lógica, de la cual se puede dar una primera caracterización también en relación a la característica modal de la consecuencia lógica: Es necesario que los enunciados que son implicados lógicamente por otros (sus antecedentes) sean lógicamente verdaderos siempre que sus antecedentes sean verdaderos, no podrían los enunciados implicados ser falsos al tener antecedentes verdaderos ya que una oración que es una verdad lógica consecuente de otras oraciones antecedentes es una oración que no puede ser falsa en ninguna asignación que haga a sus antecedentes verdaderos. Con esto, puede verse que la noción de consecuencia lógica viene acompañada de otras nociones que le ayudan a ser más precisa (como la noción de verdad lógica). Con

[18] Ver *Ibíd.* P. 24 y 25.

[19] Ilustremos, en pocas palabras, la diferencia entre la sintaxis y la semántica en lógica: Al concentrarnos en la sintaxis, nuestra atención se enfoca en el sistema lógico-formal que consideremos y en lo que se puede demostrar en él a partir de los axiomas y reglas de inferencia; al concentrarnos en la semántica, nuestro interés está en la nociones de verdad e interpretación respecto de nuestras expresiones bien formadas a trabajar en dicho sistema.

[20] Ver Gómez Torrente (2004), p. 152.

base en los términos de derivabilidad y validez, otros lógicos contemporáneos a Frege han hecho aportaciones a la elucidación de la noción de consecuencia lógica para intentar aclararla más.

Hasta aquí se ha hablado de la noción de consecuencia lógica a través de las propiedades de modalidad y formalidad, y de cómo los intentos de dar una elucidación de la noción de consecuencia lógica en términos de esas propiedades solamente no son adecuados para aclarar la noción. Para solucionar eso, las propuestas fregeana de la derivabilidad y la validez (con la noción de verdad) buscan proporcionar una elucidación más clara de la noción de consecuencia lógica, una elucidación en términos más claros y entendibles sin involucrar nociones igual de obscuras que la noción de consecuencia lógica. No obstante, esta noción de consecuencia lógica explicada hasta aquí ha sido criticada porque no ha sido capaz de solucionar ciertos problemas presentes, problemas como la presencia de razonamientos paradójicos o problemas como los límites de los sistemas axiomáticos formales: con los solos componentes de los sistemas formales (axiomas, reglas de inferencia) no se puede dar una demostración de ciertos razonamientos cuyas conclusiones son casos de consecuencia lógica (esta objeción implicaría, con más información apoyándola, que la noción intuitiva de consecuencia sigue teniendo una riqueza mayor que la noción técnica de consecuencia lógica, pues ésta última no agota todo el funcionamiento de aquella). En presencia de estas objeciones, ha habido intentos por responder a las críticas mencionadas. En este trabajo es de interés centrarnos en la teoría de Alfred Tarski de la noción de consecuencia lógica y cómo la elucidación de esa noción con dicha teoría bloquea las críticas que surgen con la sola noción clásica de consecuencia lógica (la de Frege y los que siguen esa noción clásica). Pero antes de entrar con detalle en la teoría tarskiana de consecuencia lógica, indaguemos más en las críticas a la noción clásica de consecuencia lógica.

1.1.- Objeciones al tratamiento estándar de la noción de consecuencia lógica. Casos contra-ejemplo a la concepción clásica.

Ya en el capítulo anterior se mencionó uno de los problemas que la noción clásica de consecuencia lógica tiene: cuando se le define sólo en términos de conceptos como los de forma lógica y necesidad lógica, no se ha dado una respuesta totalmente aclaradora de qué sea la consecuencia lógica. La noción de consecuencia lógica explicada en base a la forma lógica y necesidad lógica solamente no es alentadora porque las características de la implicación por necesidad lógica no gozan de un entendimiento mejor que la consecuencia lógica: "[…] es muy cuestionable que nuestra comprensión del concepto de consecuencia por necesidad lógica sea superior a nuestra comprensión del concepto de consecuencia lógica. […] El problema es que nuestra comprensión de ambos conceptos intuitivos parece *igualmente* pobre.".[21] La consecuencia lógica explicada como necesidad lógica se enfrenta a la dificultad de la no-coextensionalidad latente en varios argumentos. Pueden darse

[21] Gómez Torrente (2004), p. 149.

ejemplos de implicaciones por necesidad lógica que no son casos de consecuencia lógica, el siguiente es un ejemplo de un caso de implicación analítica:

Daniel es bípedo.

∴ Daniel tiene 2 píes.

La implicación anterior es por necesidad lógica porque los predicados "ser bípedo" y "tener 2 píes" tienen el mismo significado, cualquier cosa que sea bípedo implicará por virtud del significado solamente que esa cosa tenga 2 píes. Ahora, extráigase la forma lógica de la implicación anterior y se tendrá algo como lo siguiente:

Fx con *x* siendo una variable individual y

∴ Gx *F* y *G* siendo variables de predicado.

De modo que si interpretamos las variables individual y de predicados de otra manera, por ejemplo la siguiente:

Miguel es constructor.

∴ Miguel tiene 3 ojos.

Se obtiene un razonamiento con la misma forma lógica que el que maneja el predicado "ser bípedo", pero que no es un caso de consecuencia lógica. De hecho, el caso donde se maneja el predicado "ser bípedo" es un caso de implicación analítica y el caso del predicado "ser constructor" no es un caso de implicación por necesidad lógica, y aunque ambos comparten la misma forma lógica, no estaríamos dispuestos a reconocer que estamos ante genuinos casos de consecuencia lógica. Ambos razonamientos no son casos de consecuencia lógica porque el primero posee una forma lógica que no garantiza que otros razonamientos sean casos de implicación por necesidad lógica (como muestra el segundo caso), y el segundo tiene la misma forma lógica del primero pero, dado que el primero no es un caso de consecuencia lógica, éste tampoco es un caso de consecuencia lógica.[22]

Para evitar los casos de razonamientos problemáticos del párrafo anterior, se ofrece interpretar la noción clásica de consecuencia lógica en términos de nociones mejor comprendidas, como la derivabilidad y la validez. Sin embargo, esa manera de elucidar la noción de consecuencia lógica tampoco está libre de objeciones. Algunas de esas objeciones son debidas a Tarski.

En Tarski (1936), Tarski menciona que el concepto común de consecuencia no ha sido definido con total precisión, pues se suele hablar del concepto común de consecuencia con cierto grado de arbitrariedad que hace que su uso fluctúe.[23] Aunque gracias a los recientes avances en la lógica-matemática, ya podía intentarse ofrecer definiciones técnicamente rigurosas de la noción de consecuencia lógica. Ofrecer dichas definiciones rigurosas es motivado por razones para creer que el concepto formal de consecuencia lógica coincide con el concepto cotidiano de consecuencia:

[22] Ver Gómez Torrente (2000), p. 16 y 17. Como se dice en el libro, esta crítica apoya la postura de que el concepto intuitivo de consecuencia es distinto del concepto técnico de consecuencia lógica. Se profundizará en esta idea más adelante.

[23] Ver Tarski (1936b), p. 409 en Tarski (1983).

"[…] the proof of every theorem reduces to single or repeated application of some simple rules of inference […] These rules tell us what transformations of a purely structural kind (i.e. transformations in which only the external structure of sentences is involved) are to be performed upon the axioms or theorems already proved in the theory, […] Logicians thought that these few rules of inference exhausted the content of the concept of consequence. […] In order to defend this view against sceptics who doubted whether the concept of consequence when formalized in this way really coincided in extent with the common one, the logicians were able to bring forward a weighty argument: the fact that they had actually succeeded in reproducing in the shape of formalized proofs all the exact reasonings which had ever been carried out in mathematics."[24]

Si ponemos la suficiente atención a lo dicho por Tarski en la nota anterior, notaremos que él está hablando de una característica formal que tiene la noción de consecuencia lógica. Una oración o conjunto de oraciones *X* es consecuencia lógica de otra oración o conjunto de oraciones *K* ssi puede darse una demostración en un sistema formal *S* que posee axiomas y reglas de inferencia tales que permiten derivar *X* a partir de *K*. Con esto puede apreciarse la gran importancia que tiene la estructura de las oraciones al momento de evaluar si ellas son consecuencia lógica de otras oraciones, además la postulación de sistemas formales para demostrar las oraciones que son consecuencias lógicas de otro conjunto base de oraciones en el sistema (los axiomas y reglas de inferencia) es indispensable para exhibir cuándo una oración es consecuencia lógica de otra u otras.

Lo que dice la nota anterior también sugiere que esa característica formal de la noción de consecuencia lógica es necesaria y suficiente para elucidar la noción ordinaria de consecuencia. Pues basta recordar que en la nota se menciona que para varios lógicos las reglas de inferencia en los sistemas formales agotan el contenido del concepto de consecuencia, gracias a que los razonamientos matemáticos hasta ese momento considerados han sido exitosamente reproducidos formalmente (pueden replantearse en términos de sistemas formales), puede pensarse que si se llegase a construir un sistema formal con la suficiente sofisticación lógico-matemática y lo bastante rico como para manejar formalmente los razonamientos cotidianos, entonces todos los casos de consecuencia ordinaria serán traducibles a casos de consecuencia lógica en dicho sistema, habiéndose probado así que el concepto cotidiano de consecuencia es coextensivo con el concepto formal de consecuencia lógica.

Sin embargo, Tarski rechaza lo anterior dicho porque de hecho puede mostrarse que las nociones de consecuencia lógica intuitiva y basada en la noción de demostrabilidad no son coextensionales. Puede construirse un sistema formal *S* con axiomas y reglas de inferencia que permitan derivar oraciones del siguiente tipo (donde *P* es una propiedad):

A_0.- $S \vdash P(0)$,

A_1.- $S \vdash P(1)$,

A_2.- $S \vdash P(2)$,

y *S* es tal que toda oración particular de la forma

A_n.- $S \vdash P(n)$,

con *n* siendo cualquier número natural es derivable en el sistema construido. Pero

[24] *Ibíd.* P. 410.

A.- $S \nvdash \forall n P(n)$,

es decir que la generalización de todas las oraciones particulares no puede derivarse de los axiomas y reglas de *S*.[25] Este ejemplo de Tarski muestra que los conceptos intuitivo y técnico de consecuencia no coinciden: "It shows that the formalized concept of consequence, as it is generally used by mathematical logicians, by no means coincides with the common concept."[26]

Tarski analiza las maneras de arreglar esta dificultad. Una de ellas propone que se añadan ciertas reglas de inferencia a *S* que permitan derivar la oración *A*, una de esas reglas puede ser la de inducción infinita, pero dichas reglas no pueden añadirse sin ese compromiso infinitista que suponen, un compromiso que obliga a explicar cómo cada caso particular derivable puede obtenerse en *S* (algo imposible para seres finitos como nosotros). Ahora, otra sugerencia al problema de esas reglas es añadir oraciones que expresen que todas las oraciones A_n son derivables en *S:* digamos que *F* es una oración que expresa la derivabilidad de las oraciones A_n, luego se añade una regla que permita derivar, dada una demostración de *F* en *S*, la oración *A*. Pero esta sugerencia también presenta problemas, ya que tales oraciones *F* no pertenecen a *S* sino a una metateoría *S´* (piénsese en *S´* como un sistema formal aplicado a *S*, en *S´* se pueden derivar las propiedades[27] que pudiera tener *S*). El uso de reglas de inferencia tales que en ellas estén en juego oraciones como *F* implica que *S* y *S´* (el sistema lógico y el sistema metalógico) permitan traslados de información oracional entre sí.[28]

Sin embargo, los teoremas de incompleción de Gödel han mostrado que para los sistemas formales *S* lo suficientemente expresivos para desarrollar la aritmética elemental, donde D_S = teoremas de *S* y V_S = verdades de *S*, $D_S \subsetneq V_S$. Se ha sostenido que los sistemas formales lo bastante ricos para desarrollar la aritmética de los números naturales permiten que sus correspondientes sistemas metalógicos se interpreten en términos de números naturales. Con esto, puede construirse *S*-sistema formal cuyas oraciones estén en correspondencia 1-1 con número naturales, así toda oración de *S* corresponderá con una secuencia de números naturales, y *F* será una oración con su correspondiente número natural. La demostración que involucre a *F* dependerá del concepto 'oración probable en base a las reglas previamente usadas',[29] pero con dicho concepto se excede el nivel de *S´* dando surgimiento a una nueva regla con una oración *F´* que exprese la derivabilidad de las oraciones en *S´,* este proceso de aparición de reglas de inferencia se sigue dando *ad infinitum.* El surgimiento de esas reglas y oraciones que expresan la derivabilidad de oraciones da pauta al surgimiento de sistemas formales superiores a *S'* donde el 1er teorema de incompleción de Gödel se cumple para todos ellos: Para todo sistema formal *S* con un

[25] El ejemplo, como lo muestra Tarski, puede encontrarse en *Ídem.*
[26] Tarski (1936b), p. 411.
[27] Dichas propiedades de *S* son conocidas como propiedades metalógicas, ejemplos de dichas propiedades de *S* serían la corrección de *S,* la compleción de *S,* la consistencia de *S,* etc.
[28] Ver *ídem.*
[29] *Ídem*, la fuente original dice: 'sentence provable on the basis of the rules hitherto used'.

poder expresivo suficiente para expresar la aritmética elemental siempre podrán construirse oraciones verdaderas que sean indecidibles en *S*.

Se esperaba que la noción de derivabilidad con esa forma de obtener reglas de inferencia dicha en el párrafo anterior brindara las razones suficientes para mostrar que el concepto intuitivo de consecuencia es coextensivo con el concepto técnico de consecuencia lógica entendido como demostrabilidad. Pero gracias a los resultados de incompleción de Gödel, se vio que no era así.[30] Nuevamente la crítica de Tarski procede: El concepto técnico de consecuencia lógica, entendido en términos de la forma lógica de las inferencias y la noción de derivabilidad solamente, no es coextensional con el concepto común de consecuencia.[31]

Otra crítica Tarski está enfocada en un modo alternativo de elucidar la noción de consecuencia lógica. Ya que el concepto formal-técnico de consecuencia lógica no siempre coincide con el concepto común de consecuencia, Tarski hace un análisis sobre otro modo en que se explica la consecuencia lógica, un modo semántico. Este modo alternativo de caracterizar la consecuencia lógica se basa en la noción de verdad, y es que cualquier razonamiento que sea un caso de consecuencia lógica será uno en que no sucede que todas sus premisas sean verdaderas y su conclusión falsa; además todo razonamiento con la misma forma lógica que un razonamiento con esa característica será un razonamiento cuya conclusión es un caso de consecuencia lógica: "[…] si un argumento es lógicamente correcto, entonces no tiene premisas verdaderas y conclusión falsa; […] un argumento es lógicamente correcto sólo si ningún argumento con la misma forma lógica tiene premisas verdaderas y conclusión falsa.".[32] Todo razonamiento cuya conclusión es un caso de consecuencia lógica será uno en que se preserve la verdad de las premisas a la conclusión (por la característica modal de la consecuencia lógica, su conclusión se sigue por necesidad lógica de sus premisas), y la forma lógica de tal razonamiento es tal que todos los demás razonamientos con la misma forma lógica también son casos en que su conclusión se sigue lógicamente de sus premisas (por la característica formal de la consecuencia lógica, ningún razonamiento con una forma lógica tal que se siga la verdad de su conclusión por la verdad de sus premisas será tal que haya otro razonamiento con la misma forma lógica pero con todas sus premisas verdaderas y su conclusión falsa). Si un razonamiento cumple con lo anterior, se dirá que es un razonamiento válido. Esta es la manera alternativa de elucidar el concepto de consecuencia lógica que Tarski examina.

Todo razonamiento que tenga las características señaladas en el párrafo anterior será un razonamiento válido. Un razonamiento cuya conclusión es consecuencia lógica de sus premisas. Para elucidar el concepto de consecuencia lógica en términos de la noción de

---

[30] Ver *ídem.*

[31] Pese a la crítica, Tarski señala que el concepto técnico de consecuencia lógica definido para los sistemas formales como *S* (la noción de derivabilidad) no termina por rechazarse, ello debido a su utilidad en la construcción de sistemas formales en los que dicho concepto está estrechamente ligado a la noción de demostrabilidad en dichos sistemas. Ver *Ibíd.* P. 413.

[32] Gómez Torrente (2004), p. 152.

verdad dicha anteriormente, Tarski examina la condición (F): Sea un conjunto *K* de oraciones y una oración *X* que se sigue lógicamente de *K*, si en las oraciones de *K* y en la oración *X* se sustituyen las constantes (no-lógicas) por otras constantes del mismo tipo, obteniéndose así un conjunto de oraciones *K'* y una oración *X',* entonces si se ha garantizado que todas las oraciones de *K'* son verdaderas, la verdad de *X'* se habrá garantizado también.[33]

¿La condición (F) es necesaria y suficiente para decir cuándo una conclusión es consecuencia lógica de sus premisas? Tarski da razones para creer que la condición (F), aunque necesaria, no es suficiente para esclarecer el concepto de consecuencia lógica: "It may, and it does, happen –it is not difficult to show this by considering special formalized languages- that the sentence *X* does not follow in the ordinary sense from the sentences of the class *K* although the condition (*F*) is satisfied.".[34] Tarski añade que la condición (F) solo se satisfice porque el lenguaje considerado no tiene las suficientes constantes extra-lógicas que le permitan tener el suficiente poder expresivo para hablar de todos los objetos posibles en dicho lenguaje. Si esto último pudiera lograrse en un cierto lenguaje (poder denotar en él todos los posibles objetos) entonces la condición (F) sería tanto necesaria como suficiente para elucidar exitosamente el concepto de consecuencia lógica. Sin embargo, es imposible lograr que un cierto lenguaje tenga esa característica.[35]

Lo anterior se ejemplificará con ayuda de los lenguajes *LAr* y LAr^{+} tal como son definidos en Gómez Torrente (2004). El lenguaje *LAr* es de 1er orden y sirve para expresar una parte muy elemental de la aritmética de números naturales, en dicho lenguaje se tienen los siguientes signos con el significado usual: $\forall, \supset, \neg, =,)$ y (, la letra 'x' seguida de *n* apóstrofos (') para generar variables individuales ('x_n' para expresar la *n*-esima variable),[36] una constante individual '0', el predicado monádico 'N = ...es un número natural' y el predicado diádico 'M = … es menor o igual que…'. Varias oraciones pueden ser construidas con esos primitivos dados, como '¬∃x(Nx ∧ ¬x=0 ∧ Mx0)' (no hay número natural x tal que sea distinto de 0 y x sea menor que 0).[37]

Consideremos ahora al lenguaje LAr^{+} = *LAr* + {P = … es mayor que…} y sea el razonamiento <*K, X*> donde $K = \{\exists y \forall x(Ny \wedge Nx \wedge Myx)\}$ y $X = \{\forall x \exists y(Nx \wedge Ny \wedge (Pyx \supset Mxy)\}$, podemos notar que el razonamiento es lógicamente correcto bajo los

[33] La enunciación de la condición (F) tal como Tarski la hace se encuentra en Tarski (1936b), p. 415. Para apreciar el sentido de la condición (F) con un ejemplo, en Gómez Torrente (2004), p. 153-154 se considera un lenguaje de primer orden que permita expresar una parte de la aritmética elemental (*LAr*). Al enriquecer a *LAr* un poco (obteniendo así LAr^{+}), se aprecia cómo en un razonamiento *K/X,* con *X* siguiéndose lógicamente de *K,* se sustituyen las constantes no-lógicas por otras constantes no-lógicas y el razonamiento resultante *K'/X'* es un caso de consecuencia lógica. Se tomarán estos lenguajes como ejemplo en breve.

[34] Tarski (1936b), p. 415.

[35] Ver *Ibíd.* P. 415-416.

[36] Por comodidad, usaré también las letras *y, z,* etc., para expresar otras variables en los mismos lenguajes. Así $x = x_n$, $y = x_m$ donde $n \neq m$, etc.

[37] Como se aclara en Gómez Torrente (2000), p. 35-36, la postura tarskiana original no maneja la relativización implícita de los cuantificadores, estos se leen respecto de objetos cualesquiera, no sobre números naturales como es el caso de *LAr.* Por ello el uso de predicados como 'N' es indispensable aquí.

significados de las constantes no-lógicas en juego (*M* y *P*), pero si consideramos la relación binaria '… es doblemente mayor que…' como la nueva sustitución de *M* entonces el razonamiento se vuelve incorrecto al ser *X* falso. La condición (F) garantiza que ninguna otra sustitución de *M* haría inválido al razonamiento, pero en el ejemplo anterior se ve como de hecho hay sustituciones de constantes no-lógicas en razonamientos lógicamente correctos que falsean su conclusión.

Así, el concepto de consecuencia lógica en términos de la validez explicada por la condición (F) fracasa para elucidar el concepto común de consecuencia. Dada la condición (F) como está, se requiere una modificación para que el problema anterior no surja; la modificación buscada será hecha por Tarski teniendo en cuenta esta idea: "[…] la idea de que una oración *X* es consecuencia lógica de un conjunto de oraciones *K* cuando *toda interpretación en que todas las oraciones de K son verdaderas es una interpretación en que X es verdadera.*".[38] Es importante hacer notar que la condición (F) no elucida nuestra noción intuitiva de consecuencia porque generalmente no es el caso que nuestros razonamientos intuitivamente correctos lo sean únicamente al cambiar las constantes no-lógicas por otras del mismo tipo. Por los contraejemplos anteriores, es claro que hay más elementos involucrados en el funcionamiento de nuestra noción intuitiva de consecuencia que lo establecido sólo por la condición (F).

Con lo anterior dicho, hemos visto cómo la noción clásica de consecuencia lógica no puede apoyarse sólo en la noción formal de demostrabilidad o la condición (F), pues los problemas que surgen no pueden sobrepasarse con sólo eso. Tarski ofrece su propia teoría del concepto de consecuencia lógica la cual busca no caer en los problemas mencionados en esta sección. Explicar la teoría tarskiana de la consecuencia lógica será el trabajo de la siguiente sección.

1.2.- Concepción tarskiana de la noción de consecuencia lógica. Precisando la concepción clásica.

Dadas las críticas de la sección anterior, Tarski ofrece su postura con la que se intenta no caer en los problemas que la concepción clásica presenta. La postura tarskiana de consecuencia lógica está apoyada en términos semántico-formales matemáticamente definidos, dichos términos son indispensables para comprender el funcionamiento de la noción de consecuencia lógica. Con esto en mente, analizaré la concepción tarskiana explicando los términos y herramientas técnicas que se utilizan.

Ya se ha hablado de la condición F y del problema que presenta: aunque funge como condición necesaria de la consecuencia lógica, no constituye una condición suficiente de la noción. Esto debido a que las constantes no-lógicas de los razonamientos lógicamente correctos pueden ser reinterpretadas de modo que las premisas sean verdaderas y la conclusión sea falsa.[39] Pero Tarski no desecha la condición F por esa razón. En lugar de rechazarla, Tarski intenta rescatar la condición y fortalecerla, de modo que los argumentos

[38] *Ibíd.* P. 156.
[39] Ver final de la sección 1.1 de este trabajo para apreciar un ejemplo de esto.

lógicamente correctos no puedan reinterpretarse para obtener sus premisas verdaderas y su conclusión falsa, se busca que: "[…] una oración X es consecuencia lógica de un conjunto de oraciones K cuando *toda interpretación en que todas las oraciones de K son verdaderas es una interpretación en que X es verdadera.*".[40]

Ha de notarse que parte de la crítica a la condición F es que los lenguajes considerados no tienen un poder expresivo que abarque totalmente todos los objetos posibles (sus constantes no-lógicas no presentan todas las designaciones posibles[41]). Esto hace que la teoría tarskiana deba manejar nociones cuyo funcionamiento esté relativizado al lenguaje en cuestión estudiado. Para hablar de las definiciones de esas nociones será imprescindible hacerlo teniendo en cuenta un lenguaje (formalizado), aquí tomo el lenguaje *LAr* como es definido en Gómez Torrente (2000) ya que es sencillo de comprender.[42] El lenguaje *LAr* es para expresar una parte muy elemental de la aritmética y lo tomaré de manera similar a como lo expuse en la sección 1.1.1 de este trabajo, de modo que procederemos con ese supuesto.

Ya en la sección 1.1.1 hemos dado un ejemplo de razonamiento donde se satisface la condición (F) pero no resulta ser lógicamente correcto. Se dará un ejemplo adicional ahora: volveremos a considerar un lenguaje LAr^{+} = *LAr* + {'2', '*Ps* = …es un entero positivo', '*Pd* = …es predecesor inmediato de…'};[43] la característica de la condición F permite que los argumentos lógicamente correctos construidos en *LAr* sigan siendo lógicamente correctos en LAr^{+}. Pero como ya se vio, el problema para la condición F es que se puedan tener argumentos lógicamente correctos en los cuales se pueda interpretar sus constantes no-lógicas de modo que sus premisas sean verdaderas y su conclusión sea falsa. En el lenguaje LAr^{+} puede tenerse que X = {∀x∀y((Nx ∧ Ny) ⊃ (Pdxy ⊃ Mxy)} es consecuencia lógica de todo conjunto de premisas por la condición F (ya que *Pd* es relación irreflexiva y no-simétrica en ℕ, *M* es como *Pd* siempre que sea acotada a la relación estricta de minoría entre números), no se podrían sustituir las constantes no-lógicas *Pd* y *M* por otras constantes no-lógicas tales que hicieran a X falsa. No obstante si consideramos como premisa de X a K={N0} entonces X no será una consecuencia lógica de K, esto porque se puede interpretar a la constante *M* como la relación irreflexiva "ser doblemente mayor que", así X es falso cuando, por ejemplo, $x = y - 1$ y se tendrían casos de interpretaciones en que K es verdadero y X es falso. Así que los argumentos lógicamente correctos pueden convertirse en no-válidos, contradiciendo la condición F en el proceso. Es aquí donde Tarski propone conservar la condición F y dar razones para que un argumento lógicamente correcto no pueda interpretarse con sus premisas verdaderas y su conclusión falsa.

Tarski habla de la noción de función oracional. Entre las expresiones bien formadas de *LAr* y LAr^{+} se encuentran las oraciones, y cuando se sustituyen en ellas todas las

[40] Ver Gómez Torrente (2004), p. 156.
[41] Ver Tarski (1936b), p. 416.
[42] Ver Gómez Torrente (2000). P. 35. Los lenguajes considerados por Tarski son los que él llama lenguajes del cálculo de clases. La definición de dichos lenguajes puede encontrarse en su artículo de 1935.
[43] Ver Gómez Torrente (2000), p. 36.

constantes no-lógicas por variables de orden correspondiente se obtienen funciones oracionales. Tómese la oración '$\neg\exists x(Nx \land \neg x=0 \land Mx0)$' y al sustituir las constantes no-lógicas *N* y *M* por variables de predicado 'Φ' y 'Ψ' se tiene '$\neg\exists x(\Phi x \land \neg x=0 \land \Psi x0)$' y esta expresión es una función oracional. Es función porque como su dominio tiene a la colección de interpretaciones para las constantes no-lógicas y como su imagen tiene al conjunto {V, F} donde V es el valor de verdad 'Verdadero' y F es el valor 'Falso' (como funciones oracionales no son susceptibles de ser verdaderas o falsas; sólo cuando sus constantes no-lógicas han sido interpretadas se convierten en oraciones verdaderas o falsas).[44]

La noción de interpretación está ligada a la de función oracional, pues se dice que las oraciones son verdaderas o falsas respecto de interpretaciones en las cuales evaluar sus constantes no-lógicas (las funciones oracionales son satisfechas por interpretaciones). Se verá el caso dado en Gómez Torrente (2000) sobre el lenguaje *LAr*. Sea $<a, A, R>$ una interpretación tal que *a* es una constante individual, *A* un conjunto de objetos y *R* una relación entre objetos. La interpretación $<a, A, R>$ satisface la función formular *X* con respecto a una secuencia *f* (que asigna valores a las variables originales de *LAr*) si y sólo si:

α) (i) *X* es $\ulcorner Px_n \urcorner$ (para algún *n*) y $f(x_n) \in A$; o *X* es $\ulcorner Py \urcorner$ y $a \in A$; o

(ii) *X* es $\ulcorner Yx_nx_m \urcorner$ (para algunos *m* y *n*) y $<f(x_n), f(x_m)> \in R$; o *X* es $\ulcorner Yyx_n \urcorner$ (para algún *n*) y $<a, f(x_n)> \in R$; o *X* es $\ulcorner Yx_ny \urcorner$ (para algún *n*) $<f(x_n), a> \in R$; o *X* es 'Yyy' y $<a, a> \in R$; o

(iii) *X* es $\ulcorner x_n=x_m \urcorner$ (para algunos *n* y *m*) y $f(x_n)=f(x_m)$; o *X* es $\ulcorner y=x_n \urcorner$ (para algún *n*) y $a=f(x_n)$; o *X* es $\ulcorner x_n=y \urcorner$ (para algún *n*) y $f(x_n)=a$; o *X* es 'y=y'; o

β) hay una función formular Y tal que *X* es $\ulcorner \neg Y \urcorner$ y $<a, A, R>$ no satisface Y con respecto a la secuencia *f*; o

γ) hay funciones formulares Y y Z tales que *X* es $\ulcorner Y \rightarrow Z \urcorner$ y o bien $<a, A, R>$ no satisface Y con respecto a *f* o $<a, A, R>$ satisface Z con respecto a la secuencia *f*; o, por último,

δ) hay una función formular Y y un número *n* tales que *X* es $\ulcorner \forall x_n Y \urcorner$ y toda secuencia *g* que asigne valores a las variables de *LAr* y que difiere de *f* a lo sumo en lo que asigna a x_n es tal que $<a, A, R>$ satisface Y con respecto a *g*.[45]

Con la definición recursiva dada en (α)-(δ), se ofrece generalmente la definición de satisfacción para Tarski: una interpretación $<a, A, R>$ satisface una función oracional *X* sii para toda secuencia *f* de asignación de valores a las variables (en este caso, de *LAr*), $<a, A, R>$ es una interpretación que hace que de la función formular *X* se obtenga una oración verdadera.[46]

---

[44] Ver *Ibíd.* P. 39. Las funciones formulares son como las funciones oracionales salvo que las expresiones que sean funciones formulares pueden ser fórmulas abiertas (variables libres, no ligadas al alcance de cuantificadores).

[45] La definición de satisfacción aquí dicha es rescatada en Gómez Torrente (2000), p. 40 del artículo de Tarski (1935).

[46] Ver Gómez Torrente (2000), p. 40-41. Ver Gómez Torrente (2004), p. 159.

A partir de la noción de satisfacción se introduce la de modelo de oraciones. Cuando una interpretación satisface una función oracional se dice que dicha interpretación es un modelo de dicha oración. Esto aplica para conjuntos de oraciones: sea *K* un conjunto de oraciones, una interpretación será un modelo de *K* cuando dicha interpretación satisface a todos los miembros de *K*. Con esta noción de modelo se presenta la definición tarskiana de consecuencia lógica: Sea un conjunto de oraciones *K* y una oración *X*, <*K, X*> es un caso donde *X* se sigue lógicamente de *K* sii para cualquier interpretación *I* tal que sea un modelo de *K* también será un modelo de *X*.[47] Con los anteriores elementos también se puede dar la definición tarskiana de verdad lógica: Sea una oración *O, O* es lógicamente verdadera sii para toda interpretación del lenguaje en que *O* sea formada dicha interpretación es un modelo de *O*.[48]

No obstante, la definición tarskiana de consecuencia lógica no parece explicar la característica intuitiva de la noción de consecuencia lógica. Como se menciona en Gómez Torrente (2000): "[…] cuando nos preguntamos si una conclusión se sigue o no de un conjunto de premisas dado, nuestra mente no se hace una pregunta acerca de secuencias, funciones formulares, conjuntos… Todas son nociones que aparecen en la noción definida por Tarski, pero nadie se pregunta por verdades acerca de ellas cuando se pregunta por verdades acerca de la noción *intuitiva* de consecuencia lógica.".[49] Sin embargo, la noción tarskiana de consecuencia lógica tiene como una finalidad caracterizar el comportamiento de la noción intuitiva (y así ambas nociones, la tarskiana y la intuitiva, serían coextensionales: todos los razonamientos lógicamente correctos que sean casos de consecuencia lógica desde el punto de vista intuitivo serán casos de consecuencia lógica en sentido tarskiano).

En este punto es importante notar una modificación en la noción tarskiana de consecuencia lógica con la cual se entiende a la noción tarskiana hasta la fecha actual. Las interpretaciones para las funciones oracionales y formulares de los lenguajes formales tienen ciertas características que las forman, como los objetos denotados por constantes individuales, propiedades de objetos y relaciones entre ellos (tomándose el caso de *LAr*, las interpretaciones son de forma <*a, A, R*>). Ahora a dichas interpretaciones se les añade algo extra: un conjunto no-vacío de objetos los cuales son la denotación de las constantes no-lógicas del lenguaje formal en cuestión. Este conjunto proporciona el recorrido de las variables individuales y relativiza los cuantificadores del lenguaje en cuestión. Volviendo a tomar como ejemplo a *LAr*: las estructuras son de la forma <*U, a, A, R*> donde el primer miembro del cuarteto ordenado es un conjunto no-vacío *U* que es el dominio de discurso, el segundo miembro es un objeto singular de *U* que es la denotación de *a*, el tercer miembro es un conjunto de objetos $A \subseteq U$, y el cuarto miembro es un conjunto de pares ordenados $R \subseteq U^2$. Con los debidos cambios, las definiciones dadas en (α)-(δ) se adaptan a las

[47] Ver Gómez Torrente (2000), p. 41; Gómez Torrente (2004), p. 159; y Tarski (1936b), p. 417.
[48] Ver Gómez Torrente (2000), p. 41.
[49] Gómez Torrente (2000), p. 43.

estructuras de la forma <*U, a, A, R*>, de modo que se tiene ahora la definición de satisfacción como sigue: "*la estructura <U, a, A, R> satisface la función oracional X* si y sólo si <*U, a, A, R*> satisface la función formular X con respecto a toda secuencia *f* que asigna valores en *U* a las variables de *LAr*.",[50] usando los términos de Gómez Torrente (2000), adoptaré las siguientes definiciones de consecuencia lógica tarskiana y verdad lógica tarskiana:

"(CLT) Una oración *O* es una (consecuencia lógica)$_{\mathrm{T}}$ de un conjunto de oraciones *K* si y sólo si toda estructura modelo del conjunto *K* es también una estructura modelo de la oración *O*.

(VLT) Una oración *O* es una (verdad lógica)$_{\mathrm{T}}$ si y sólo si toda estructura para el lenguaje de *O* es una estructura modelo de *O*.".[51]

Las nociones de CLT y VLT capturan, esencialmente, las nociones de consecuencia lógica y verdad lógica tarskianas originales que se expusieron algunos párrafos atrás. La diferencia entre las nociones definidas anteriormente y las nuevas CLT y VLT es la manera de entender el rol que tiene el elemento *U,* es decir los conjuntos de objetos de los que se habla en las interpretaciones. Veamos esto con un ejemplo: Sea en LAr^{+} la oración X={∀x∀y((Nx ∧ Ny) ⊃ (Psxy ⊃ Mxy))}, dada la primera forma de definir la consecuencia lógica y verdad lógica tarskianas, 'N' (como 'Ps' y 'M') es una constante no-lógica que designa una propiedad de los objetos de los que habla *X* (a saber, números naturales); en las nuevas formas de CLT y VLT, 'N' puede ser tratado como el conjunto-dominio de discurso en las interpretaciones, es decir <*N, a, A, R*>, de modo que *N* deja de tener el mismo estatus que *M* y su interpretación limita las interpretaciones de las constantes no-lógicas (dichas interpretaciones están determinadas por la interpretación del conjunto-dominio), de modo que ahora X={∀x∀y(Psxy ⊃ Mxy)} teniendo el conjunto dominio de discurso $N = \mathbb{N}$. CLT y VLT serían coextensionales con las primeras nociones tarskianas que se vieron antes (pues las oraciones de los lenguajes formales que se construyan según las primeras nociones tarskianas solamente se abrevian cuando se toman en cuenta las nuevas nociones de CLT y VLT).[52]

Hasta ahora se han expuesto las características más importantes que la noción tarskiana de consecuencia lógica tiene: el apoyo en las nociones más precisas de interpretación, satisfacción, modelo, etc., permite entender mejor en qué consiste que una oración se siga lógicamente de otras, al menos desde el punto de vista técnico, y CLT y VLT son la síntesis la postura tarskiana que aquí nos interesa. Ahora cabe preguntarse si la noción tarskiana de consecuencia lógica es totalmente elucidatoria respecto de la noción intuitiva de consecuencia lógica. Antes de ver algunos argumentos a favor y en contra de la noción tarskiana, introduciremos en la discusión el otro enfoque para definir la noción de consecuencia lógica: el enfoque relevantista.

---

[50] *Ibíd.* P. 52.
[51] *Ídem.* En relación a la verdad lógica tarskiana, véase Tarski (1935), p. 187-188 y 195.
[52] *Ibíd.* P. 54-55.

1.3.- Noción de consecuencia lógica relevantista (enfoque prueba-teorético).

La noción de consecuencia lógica relevantista dada a continuación se basa en la noción de demostración que una lógica relevantista aceptaría. Por ejemplo, sea un sistema formal **E'** (similar a **E**, el cual será presentado más adelante**)** tal que entre su lista de axiomas se encuentran los siguientes:

identidad: $A \to A$

transitividad: $((A \to B) \to (B \to C)) \to (A \to C)$ *sufijación*

$((A \to B) \to (C \to A)) \to (C \to B)$ *prefijación*

contracción: $(A \to (A \to B)) \to (A \to B)$

permutación restringida: $(A \to (B \to C \to D)) \to (B \to C \to (A \to D))$.[53]

Una característica sumamente importante para los sistemas formales relevantistas similares a **E** es que incluyan la característica de relevancia definida en **R** (expresada formalmente a través de '→'). En este sistema formal se presta especial atención a que los razonamientos cumplan que sus premisas sean usadas en la consecución de la conclusión (a diferencia de otros sistemas no relevantistas donde, gracias a su corrección y compleción, se tienen casos de razonamientos <*a, b*> tales que $a \vdash b$ *sii* $a \vDash b$ y a es totalmente innecesario para *b*).[54] Esto se logra con la técnica de subindexar numéricamente cada paso en las demostraciones de los teoremas de **E**, pues como ocurre en **R**, se asegura la relevancia de las premisas para la conclusión cuando las premisas son efectivamente usadas en la deducción de la conclusión. El modo en que se usan los subíndices en las premisas y conclusiones es: Al probar que $A, A \to B \vdash B$

1.- |-- $A_{\{1\}}$ hip.

2.- | |-- $A \to B_{\{2\}}$ hip.

3.- | |-- $A_{\{1\}}$ reiteración

4.- $B_{\{1,2\}}$ 2, 3 →E (MP)

los números entre llaves indican cuándo las premisas son relevantes para llegar a la conclusión (en el caso anterior, {1, 2} nos indica que '$A_{\{1\}}$' y '$A \to B_{\{2\}}$' son relevantes en la adquisición de B en '$B_{\{1,2\}}$').

La introducción de la necesidad en E es dada mediante una definición dada por A&B en términos más primitivos de E que la hacen manejable:

$\Box A =_{df} A \to A \to A$,[55]

A&B vieron que el requisito de necesidad es importante para que se dé entailment (consecuencias relevantemente adquiridas) entre premisas y conclusiones: "[…] we simply register the convention that the notion of logical necessity is indissolubly linked with that of logical consequence (entailment), and in particular that if *A* is a logical consequence of a

[53] El resto de los axiomas puede encontrarse en A&B, (2da. imp. 1990), p. 26. Debe señalarse que las letras mayúsculas en los axiomas son esquemas proposicionales. Además nótese el uso del condicional relevante '→' en vez de '⊃' en la expresiones formales de los enunciados, la definición del condicional relevante será dada más adelante en este trabajo.

[54] Véase *Ibíd.* P. 20-22 para ver la estrategia de implementación de la relevancia, así como algunas herramientas formales preliminares consideradas.

[55] Esta definición de necesidad en sistemas formales es la que A&B aceptan. Ver *Ibíd.* P. 27.

true entailment, then A ought to be necessary.”.[56] Lo anterior se expresa en la siguiente proposición: “if $B \rightarrow C$ is true, then if A is a logical consequence thereof, then A is necessary.

1.- |-- $B \rightarrow C_{\{1\}}$ hyp
2.- | |-- $B \rightarrow C \rightarrow A_{\{2\}}$ hyp
3.- | | |-- $A \rightarrow A_{\{3\}}$ hyp
4.- | | | $B \rightarrow C_{\{1\}}$ 1 reit
5.- | | | $B \rightarrow C \rightarrow A_{\{2\}}$ 2 reit
6.- | | | $A_{\{1, 2\}}$ 4 5 $\rightarrow$E
7.- | | | $A_{\{1, 2, 3\}}$ 3 6 $\rightarrow$E
8.- | | $A \rightarrow A \rightarrow A_{\{1,2\}}$ 3-7 $\rightarrow$I
9.- | $B \rightarrow C \rightarrow A \rightarrow \Box A_{\{1\}}$ 2-8 $\rightarrow$I
10.- $B \rightarrow C \rightarrow (B \rightarrow C \rightarrow A \rightarrow \Box A)$ 1-9 $\rightarrow$I”[57]

Los requerimientos de necesidad y relevancia que E posee son tratados desde un punto de vista formal (al interior de E, dados los axiomas y las reglas de inferencia y la noción de derivabilidad, de modo que no ocurren inferencias que puedan violar alguno de los requisitos). Eso implica que en E no se dan inferencias tales que tengan premisas irrelevantes para la conclusión que se busca, es decir no se dan casos de derivaciones como:

premisa.- $A_{\{n\}}$ hip.
premisa.- $B_{\{m\}}$ hip.
premisa.- $C_{\{m\}}$ axioma o resultante de aplicar una regla a anteriores o teorema de **E**.
…
conclusión.- $D_{\{m,\ldots\}-\{n\}}$

donde n es irrelevante para la consecución de D. Además, las inferencias donde la conclusión no se sigue necesariamente de las premisas no cuentan como casos de consecuencia lógica en E, pues la proposición citada anteriormente (A&B, 1990, p. 28) garantiza que la noción de consecuencia lógica en E es cerrada bajo necesidad lógica.[58] Es decir, en **E** u otros sistemas formales similares se tiene la certeza de que los teoremas tienen las características de seguirse de premisas relevantes a ellos y de que son oraciones lógicamente necesarias en el sentido descrito de necesidad dicho antes. Todo lo que pueda demostrarse en **E** (o similares) es lógicamente necesario en el sistema.

La motivación detrás de la noción de relevancia como es tratada en **E** viene de una idea que los lógicos relevantistas sostienen: “The subscripting technique[…] may be constructed as a formal analysis of the intuitive idea that for A to be relevant to B it must be posible to *use* A in a deduction of B from A.[…] We claim, at any rate, that the analysis of proofs with the help of subscripts gives us a plausible and systematic handle of relevance in

[56] *Ibíd.* P. 28. Uno de los puntos cruciales de este trabajo tiene que ver con esto, lo dejaremos para el capítulo final.
[57] *Ídem*.
[58] Es decir, todas las fórmulas E-demostrables son lógicamente necesarias.

the sense of logical dependence.”.[59] De modo que los subíndices numéricos constituyen una manera práctica de apreciar cuándo se presentan casos de irrelevancia al interior de los razonamientos (bastará con ver cuáles premisas no están siendo usadas en la consecución de la conclusión). Además otro aspecto relacionado con la técnica de subíndices numéricos es el compartir-variables entre premisas y conclusiones en los razonamientos, pues las variables compartidas permiten apreciar que en las premisas y conclusiones hay contenido común que permite la transición:

> “[…] implication or entailment have frequently demanded “relevance” of A to B as a neccesary condition for the truth of $A \rightarrow B$, where relevance is now constructed as involving some “meaning content” common to both A and B. […] If this property [variable-sharing] fails, then the variables in A and B may be assigned propositional values, in such a way that the resulting propositions have no meaning content in common and are totally irrelevant to each other. $E_{\rightarrow}$ avoids such fallacies of relevance, as shown by the following
> Theorem. If $A \rightarrow B$ is provable in $E_{\rightarrow}$, then A and B share a variable.”.[60]

Algo que vale la pena notar desde ahora es que la técnica de los subíndices numéricos y la propiedad de compartir-variables afectan la noción de relevancia de **E** desde perspectivas diferentes. Pues la técnica de subíndices garantiza que A sea relevante para B desde una perspectiva sintáctica, cuando $A \vdash_{E} B$, pues hay una prueba que satisface la condición de relevancia (puede darse una demostración dentro de un sistema formal) de B a partir de A. La propiedad de compartir-variables afecta a **E** desde una perspectiva semántica o cuando $A \vDash_{E} B$, pues la asignación de contenido a las variables de premisas y conclusiones en los razonamientos permite apreciar la relevancia que tienen las premisas para la conclusión, la propiedad señala que en los **E**-teoremas debe ser el caso que las variables (proposicionales para el caso de lógica proposicional relevante, individuales y relacionales para el caso de lógica de 1er orden relevante, etc.) en las premisas tengan al menos una aparición en las conclusiones para asegurar el contenido semántico común entre antecedentes y consecuentes.[61]

Con las nociones expuestas anteriormente, ofrezcamos ahora una caracterización de la noción de consecuencia lógica prueba-teorética. Tómese el sistema formal proposicional **E** con la siguiente lista de axiomas:

1.	$A \rightarrow A$	Identidad
2.	$((A \rightarrow A) \rightarrow B) \rightarrow B$	EntT

---

[59] *Ibíd.* P. 30-31.

[60] *Ibíd.* P. 32-33. Nótese que A&B toman el caso de la lógica proposicional para explicar la propiedad de compartir-variables. Sin embargo, esta propiedad vale para los casos de lógicas con poder expresivo mayor. Las lógicas relevantes de primer orden también cumplirían este requisito.

[61] Ver *Ibíd.* P. 33. La propiedad de compartir-variables tiene una explicación adicional con la demostración del teorema en p. 34. Algo que se debe señalar es que aquí se está pensando en todos los teoremas posibles de obtenerse en el sistema, incluso aquellos que tienen el conjunto vacío de premisas como antecedentes. Esto último se explica porque esos teoremas son verdades lógicas y necesarias, ya que anteriormente se dijo que los teoremas en sistemas similares a **E** deben ser lógicamente necesarios.

3. $(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$ Sufijación (transitividad)

4. $(A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow B)$ Contracción

5. $(A \,\&\, B) \rightarrow A$, $(A \,\&\, B) \rightarrow B$ &-eliminación

6. $A \rightarrow (A \vee B)$, $B \rightarrow (A \vee B)$ ∨-introducción

7. $((A \rightarrow B) \,\&\, (A \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow (B \,\&\, C))$ & -introducción

8. $((A \vee B) \rightarrow C) \leftrightarrow ((A \rightarrow C) \,\&\, (B \rightarrow C))$ ∨-eliminación

9. $(A \,\&\, (B \vee C)) \rightarrow ((A \,\&\, B) \vee (A \,\&\, C))$ Distribución

10. $(A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow \neg A)$ Contraposición

11. $\neg\neg A \rightarrow A$ Doble negación

12. $A \rightarrow \neg A \rightarrow \neg A$

13. $\Box A \& \Box B \rightarrow \Box(A \& B)$ Distribución de □ sobre &

Junto con dos reglas de inferencia:

$A^* \rightarrow B^*, A^* \vdash B^*$ Modus Ponens[62]

$A, B \vdash A \,\&\, B$ Adjunción (conjunción)[63]

Además, la anterior base axiomática del sistema formal **E** está acompañada de las siguientes definiciones de teorema y demostración:

* Demostración.- Secuencia finita de oraciones S= $\{P1_i, P2_i, \ldots, Pn_i\}$ donde cada Pm_i con $0 < m \leq n$ es una instanciación de algún axioma de **E**, o es una teorema de **E** previamente demostrado, o es resultado de anteriores Pj_i y Pk_i con $j < m$ y $k < m$ por aplicación de alguna de las reglas de inferencia. Además $\forall Pm_i(\forall i(i \in I))$ donde I es un conjunto de subíndices.

* Teorema.- Es una oración del sistema **E** cuya verdad no es tan evidente y requiere de una demostración para el reconocimiento de su verdad (oración demostrable en el sistema **E**).

Con la noción de teorema recién dada, A&B dan el metateorema de implicación deductiva (Deducción, 'Entailment') formal para el sistema formal E:

"ENTAILMENT THEOREM. If there is a proof in **E** that $A_{1,\ldots,}A_n$ entail(s) B, then $(A_1,\ldots, A_n) \rightarrow B$ is provable in **E**.".[64]

[62] Los asteriscos indican que las expresiones A y B tienen relevancia entre ellas. Con esto en mente, esta es la versión relevantista del Modus Ponens definido clásicamente.

[63] A&B, (2da. imp. 1990), p. 231-232. Esta lista de axiomas y reglas de inferencia está complementada con algunos axiomas adicionales que Edwin Mares da en su presentación del sistema formal E en http://plato.stanford.edu/entries/logic-relevance/logice.html

[64] *Ibíd.* P. 278. Inmediatamente después, A&B dan un corolario referente al uso de los axiomas en las pruebas los cuales pueden ponerse en una conjunción que implica relevantemente al paso final de una prueba, dicha implicación relevante también es probable en E.

La técnica de subindexar las premisas en una demostración garantiza que en **E** las pruebas tengan un control de lo que se está demostrando, pues en los subíndices se exhibe qué premisas son las que llevan a la conclusión buscada. Anteriormente se habló de subindexar cada paso en una demostración en **E**, pero la importancia de hacer esto se evidencia más cuando se conecta con la noción técnica de consecuencia que se dará a continuación.

Sea $I=\{i \mid i$ es subíndice$\}$ y sea $<K, J>_S$ un razonamiento construible para un sistema formal S similar a **E** donde $K=\{k_{\{1\}}, k_{\{2\}},\ldots, K_{\{n\}}\}$ es un conjunto de oraciones y J es una oración.[65] J es <u>consecuencia formal</u> de K en E (simbólicamente, $K\vdash_E J$) sii

(1) $\forall k_{\{m\}} \in K(\forall m \in n\ (m \in I)$ y $\forall h(J_{\{h\}} \supset h \in I)$.

(2) Si $\forall k_{\{m\}}$ ($\exists P$-variable común en $k_{\{m\}}$ con $m = 1, 2,\ldots$ $\forall k_{\{i\}}$ con $0 < i \leq m$) entonces P-variable tiene al menos una aparición en J.

(3) $\forall k \in K$ ($\bigwedge_{i=1}^{n} k_{\{i\}}$ es parte de una **E**-<u>demostración</u> para J).[66]

Por (3), J es un teorema en S. Por el metateorema de 'Entailment' formal, $\bigwedge_1^m k_{\{m\}} \rightarrow J$ es **E**-demostrable ($\vdash^{E}_{S} \bigwedge_1^m k_{\{m\}} \rightarrow J$), y por esto la implicación anterior es un caso de necesidad lógica entendida en **E**.

Podría pensarse que en (2) y (3) el uso de los cuantificadores universales fortalece demasiado la definición de consecuencia formal, esto debido a que muy pocas deducciones podrían llegar a cumplir con dichos pasos para contar como E-demostraciones. Sin embargo, esto se soluciona al momento de hacer las inferencias porque <u>las premisas que no fueron usadas</u> en la consecución de la conclusión se desechan, quedando únicamente las que son relevantes para la conclusión. La conjunción generalizada de (3) se refiere justo a dichas premisas utilizadas, pues no debe olvidarse que la técnica de subindexación nos ayuda a saber exactamente qué premisas son esenciales en la derivación de la conclusión. No obstante, una formulación de las condiciones (2) y (3) que considere todas las premisas de K (incluyendo las que puedan ser irrelevantes para J) es posible, simplemente cambiando la cuantificación universal por una existencial acotada a las premisas usadas y reservando la cuantificación universal para mencionar todas las premisas a disposición (si esto último fuera necesario). De modo que (3) puede reformularse de la siguiente manera:

(3') $\exists K' \subseteq K(\forall k \in K'(\bigwedge_1^m k_{\{m\}}$ es parte de una **E**-<u>demostración</u> para J);

y esto nos da a entender que siempre es posible tomar el conjunto total de premisas a disposición y seleccionar aquellas pertinentes en la demostración solamente.

Hasta aquí con el enfoque prueba-teorético de la noción relevantista de consecuencia lógica. Hemos hecho notar cómo la implementación de varias nociones definidas relevantistamente, como la subindexación y el compartir-variables, justifican la noción sintáctica de consecuencia lógica que buscan, una que preserva la relevancia entre premisas y conclusión. No obstante, también puede ofrecerse otro enfoque para definir

[65] $\{k_{\{1\}}, k_{\{2\}},\ldots, k_{\{n\}}, J\} \in O_E$ donde O_E designa el conjunto de las oraciones bien formadas de E.

[66] Nótese aquí que en la conjunción generalizada se incluye todas las ocurrencias pertinentes de axiomas requeridos y las aplicaciones de las reglas de inferencia usadas.

dicha noción que respete los ideales relevantistas, que va por el camino de la semántica en lógica.

1.3.- Noción de consecuencia lógica relevantista (enfoque modelo-teorético).

La noción de consecuencia lógica relevantista como es explicada en la obra de A&B es de carácter formal, sin embargo hay intentos por ofrecer una teoría semántica que elucide la noción. A continuación examinaremos algunas propuestas y nociones semánticas que se ofrecen en Mares (2004) para construir una teoría semántica de consecuencia lógica relevantista.

Siguiendo varias ideas que A&B plantean en su obra, Mares ofrece varias herramientas técnicas para fundamentar semánticamente el sistema formal relevantista **R**. Los sistemas formales relevantes aquí considerados son dados en términos de lógica modal, y esto aplica a **R**, de modo que Mares se vale de varias nociones modales para establecer la semántica de **R**. La semántica modal de Mares es su semántica situacional. Esta semántica es una semántica referencial, o sea que el significado de los enunciados está en las condiciones de verdad que posean, y dichas condiciones están determinadas (en parte) por los referentes de los términos que forman a los enunciados.[67] La semántica de situaciones da una caracterización del contenido de los enunciados que utiliza herramientas y conceptos que tienen una base modal (esto es, marcos formados por estados de cosas en que las proposiciones tienen lugar, relaciones entre dichos estados de cosas, funciones de valuación, etc.), de ahí que sea una semántica modal. Sin embargo, la semántica de situaciones presenta diferencias importantes respecto a otras semánticas modales como la de mundos posibles estándar (modelos kripkeanos). Brevemente, una semántica estándar de modelos kripkeanos trabaja con modelos que son ternas ordenadas M=<W, R, e> donde *W* es un conjunto no-vacío de mundos posibles, *R* es una relación binaria de accesibilidad entre mundos (dicha relación puede tener varias propiedades según el sistema lógico modal en que se trabaje) y *e* es una función de valuación de un conjunto P de enunciados en el conjunto {V, F}, es decir $e: p \rightarrow \{V, F\}\ \forall p \in P$.

La semántica de situaciones, como la de mundos posibles, también trabaja con modelos de interpretación aunque estos son cuartetos. Los cuartetos en la semántica de situaciones son de la forma M=<S, sit lógicas, R, e> donde *S* ya no es un conjunto de mundos sino que es un conjunto no-vacío de situaciones las cuales son diferentes a los mundos posibles,[68] las *situaciones lógicas* son un tipo especial de situaciones,[69] *R* ya no es una relación binaria entre mundos sino una relación ternaria entre situaciones, y la función *e* no es la misma función de valuación de la semántica de mundos posibles sino que ahora es una función parcial[70] de valuación que va de los elementos de P y las situaciones hacia el conjunto {V, F}, esto es

[67] Ver Mares 2004, p. 20.
[68] Más adelante se hablará con detalle de las situaciones como se entienden en esta semántica.
[69] El papel y las características de estas situaciones especiales también se explicará más adelante.
[70] Es decir, no cualquier enunciado considerable podrá ser parte del dominio de la función porque las situaciones no determinan el valor de verdad de todos los enunciados posibles.

sea $p \in P$ y $s \in S$, entonces $f(<p, s>)=V$ o $f(<p, s>)= F$.

Ya se mencionó que las situaciones forman parte de los modelos de esta semántica. Ahora se explicará lo que son las situaciones para esta semántica. Una situación es una estructura de información relacionada con los agentes la cual les permite a estos hacer aseveraciones con la información proporcionada por dicha situación. Las situaciones les permiten a los agentes tener información proveniente de varias fuentes alrededor de ellos con la cual son capaces de comunicar lo que acontece. Hay que decir que, al ser estructuras de información proveniente de varias fuentes, las situaciones no se restringen a ser sólo localizaciones físicas de los agentes, éstas pueden usarse por ejemplo para modelar las creencias de algún agente.[71] La información de las situaciones es parcial para los agentes porque se limita a la información de sus alrededores: “We do not know what is going on in the whole world, but rather tell people what is going on in our own surroundings. These surroundings are situations.”.[72]

Las situaciones jugarán un rol importante dentro de la semántica que Mares propone, pues mediante ellas se expresa la conexión de relevancia que deben tener las premisas con la conclusión en los razonamientos. Puede notarse ahora que las situaciones definidas de este modo son compatibles con el aparato técnico-formal que A&B utilizan en la regimentación del sistema **E**. Esto se logra mediante la técnica de los números subíndices, pues ahora los números subíndices pueden entenderse como la expresión de las situaciones en que las premisas ocurren en los razonamientos; tomemos un ejemplo:

1.- |-- $A_{\{1\}}$ hip.
2.- | |-- $A\rightarrow B_{\{2\}}$ hip.
3.- | |-- $A_{\{1\}}$ reiteración
4.- $B_{\{1,2\}}$ 2, 3 $\rightarrow$E

y ahora los números subíndices indican la situaciones en que las premisas tienen lugar. ‘$A_{\{1\}}$’ indica que *A* es el caso en la situación 1, ‘$A\rightarrow B_{\{2\}}$’ indica que si *A* es el caso en la situación 2 entonces *B* lo es en la misma situación, etc. De modo que las situaciones ahora permiten apreciar cuándo las premisas son relevantes en la consecución de la conclusión. Además, el requisito de relevancia que se pide tengan los razonamientos es más manejable con la noción de situación debido a que ellas determinan la información contenida en las premisas (‘$A_{\{1\}}$’ indica que en la situación 1 ocurre cierto acontecimiento que es expresado mediante la oración *A*). Además la propiedad de compartir-variables se hace más manejable cuando se maneja con situaciones porque así es más fácil notar cuándo en los razonamientos ocurre una violación del requisito de relevancia, pues esto será indicado cuando en las interpretaciones dadas a los razonamientos la información determinada por las situaciones no determinen contenido común entre premisas y conclusión.

Es conveniente detenernos un poco a analizar la relación que hay entre las situaciones entendidas aquí con la noción de mundo posible en lógica modal. Algunas

[71] Ver *Ibíd*. P. 40.
[72] *Ídem.*

diferencias notorias entre mundos posibles y situaciones son las siguientes. Una característica de los mundos posibles es que ellos son completos en sentido de que en ellos se puede decidir sobre el valor de verdad de cada enunciado que se exprese en ellos (todos los enunciados evaluados en tal mundo tendrán un valor de verdad, en cada mundo habrá un conjunto exhaustivo de enunciados verdaderos y un conjunto exhaustivo de falsos). En cambio las situaciones pueden ser incompletas, en ellas no se puede decidir siempre sobre el valor de verdad de cada enunciado porque la información en ellas es parcial a lo que acontece en una parte del mundo. Otra característica de los mundos posibles es que ellos son completamente consistentes, esto es que en ellos se respetan las leyes de la lógica clásica como el principio de no-contradicción. Las situaciones no necesitan ser siempre consistentes, ello con el propósito de que algunas contradicciones pueden ser verdaderas en ellas; un ejemplo es: Dada la representación de un agente en una situación t, el agente puede sostener que frente a él hay un árbol y no hay un árbol. La representación que tiene dicho agente en tal situación es incompatible consigo misma, pero en ella tal enunciado contradictorio es verdadero.[73] ¿Por qué se requiere que tales situaciones, incompletas o inconsistentes, tengan lugar en algunos modelos relevantes? Porque ellas sirven para formar modelos que son contraejemplo a la validez de algunas inferencias con formas paradójicas como $(p \,\&\, \neg p) \rightarrow q$.[74]

Una explicación de la relación *R* de accesibilidad ternaria es indispensable ahora. Mares comienza a hablar de esta relación con ayuda de las semánticas relevantistas definidas por Routley y Meyer. La presencia de dicha relación es particularmente notoria en las condiciones de verdad de la implicación: ‘A → B’ es verdadero en una situación *s* sii para toda situación *x* y toda situación *y,* si *Rsxy* y ‘A’ es verdadera en *x,* entonces ‘B’ es verdadera en *y.*[75] Para comenzar a hablar de la relación *R* es necesario comenzar a hablar del papel de *s* en ella. *R* relaciona dos situaciones *x* e *y* con ayuda de una tercera situación *s* que es lógica: una situación lógica permite que dadas dos situaciones una extienda a la otra cuando una de ellas contiene más información que la otra (la información de la primera situación está contenida en la segunda y ésta contiene más información que la primera). Esto último es imprescindible para la relación de persistencia o heredad, la cual dice que dadas dos situaciones *t* y *u* podemos ver cuándo una extiende a la otra: $t \trianglelefteq u$.[76]

Definición de persistencia.- Para cualesquiera situaciones *t* y *u,* $t \trianglelefteq u$ sii hay alguna situación lógica *s* tal que *Rstu.*[77]

[73] No obstante, dicho enunciado será falso en toda otra situación consistente que sea accesible desde t. La postulación de situaciones inconsistentes en lógica relevante tiene que ver con el propósito de evitar las paradojas de la implicación (Ver Mares 2004, p. 73 y 75). Respecto a “ser accesible” de una situación a otra, eso se explicará con más detalle cuando se hable de la relación de accesibilidad ternaria.

[74] Recordemos que, clásicamente, cuando en un sistema formal es posible demostrar una contradicción el sistema es completo en sentido de que en él es posible demostrar cualquier cosa. Relevantistamente, esta “explosión” en sistemas formales se evita al sostener que una contradicción no genera cualquier oración.

[75] Ver *Ibíd.* P. 28.

[76] Esta relación es reflexiva, antisimétrica y transitiva.

[77] Ver *Ibíd.* P. 31.

Con esta definición se puede dar el siguiente lema:
(Lema de Persistencia) Para cualquier fórmula 'A', asignación de valores *v,* y situaciones s y *t,* si 'A' es verdadera en s de acuerdo con v y $s \trianglelefteq t$, entonces 'A' es verdadera en t de acuerdo con *v.*
Con dicho lema ya podemos hablar de extensión de situaciones con enunciados ocurriendo en ellas.[78]

Ahora, que *R* relacione situaciones de modo que una extienda a la otra con ayuda de una tercera situación que es lógica se debe a que la situación lógica es una conexión informacional. La conexión se da con las inferencias hechas en situaciones dadas, pues cuando estamos en una situación (con cierta información dada) donde un cierto enunciado se da debemos poder inferir a cuáles otras situaciones[79] (esto es, a cuánta más información que la que teníamos en la situación inicial) podemos llegar desde ella: "[…] informational links are themselves contained as information in situations, and vary from situation to situation. For example, the information that a particular convention is in place may be contained in one situation, but not in another.".[80]

Con lo anterior ya se puede definir el condicional relevante: A → B es verdadera en *s* sii hay alguna información en *s* tal que, por hipótesis, hay alguna situación *t* en el mismo mundo que *s* y *A* se sostiene en *t*, podemos legítimamente derivar que hay alguna situación *u* en el mismo mundo en que *B* se sostiene.[81] Con lo anterior, Mares ofrece el:
* Metateorema de la deducción semántica relevantista ("Semantic Entailment").- Si la deducción de *A* a *B* es válida en un modelo *M*, entonces 'A → B' es una fórmula válida en *M*.

Con este resultado se garantiza que de la deducción válida en cierto modelo de las premisas a la conclusión de cierto razonamiento se sigue que la implicación relevante de las premisas como antecedente y la conclusión como consecuente es válida en dicho modelo.[82]
Nótese aquí que la validez está siendo entendida con relación a la relevancia:
** Validez relevantista (V_r).- Sea *M* = <*S, sit. lóg., R, f*> un modelo para un lenguaje formalizado relevante *F* y *A* un fórmula en *F* y *t* una situación en *S*, decimos que $A_{\{t\}}$ es *Vr* sii $\forall s \in sit.lóg. \in M \forall x \in S \in M(Rstx \wedge f(A, x) = V)$.

A continuación se ofrecerá un ejemplo de un modelo en **R** para definir algunas de las conectivas lógicas. Un modelo *M* será un cuarteto <*S, sit lóg., R, v*> donde <*S, sit. lóg., R*> es un marco y *v* es una función de asignación de valores que va de enunciados y situaciones a valores de verdad tal que para cualquier asignación de valores *v,* para cualquier enunciado *p,* y cualesquiera situaciones *s* y *t,* si $s \in v(p)$ (*p* es verdadero en *s* de acuerdo a *v*) y $s \trianglelefteq t$, entonces $t \in v(p)$. Las condiciones de verdad para algunas conectivas

[78] *Ídem*.
[79] En el conjunto *S* de situaciones.
[80] *Ibíd.* P. 94.
[81] Ver *Ibíd* P. 43.
[82] La demostración del metateorema de la deducción requiere el uso de la relación de persistencia y el lema de la persistencia. Para ver la demostración como Mares la hace, ver *Ibíd.* P. 31.

lógicas se establecen a continuación. Para cualquier enunciado p y cualesquiera fórmulas A y B, las siguientes conectivas lógicas se definen recursivamente:

1. $s \vDash_v p$ sii $s \in v(\mathrm{p})$;
2. $s \vDash_v \mathrm{A} \land \mathrm{B}$ sii $s \vDash_v \mathrm{A}$ y $s \vDash_v \mathrm{B}$;
3. $s \vDash_v \mathrm{A} \lor \mathrm{B}$ sii $s \vDash_v \mathrm{A}$ o $s \vDash_v \mathrm{B}$;
4. $s \vDash_v \mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B}$ sii $\forall x \forall y((Rsxy \,\&\, x \vDash_v \mathrm{A}) \supset y \vDash_v \mathrm{B})$.[83]

Ahora que se tiene una clarificación mayor de las nociones de modelo, situación (lógicas/no-lógicas), verdad y validez, se puede ofrecer una noción de consecuencia semántica relevantista usando como base la semántica situacional definida para **R**:

Sean K un conjunto de oraciones y J una oración, sea $<K, J>$ un razonamiento formado en un lenguaje formal L similar a E.[84] Decimos que $K \vDash_L J$ (J es <u>consecuencia semántica</u> de K) sii $\forall M = \{S, sit.\,lóg., R, v\}$ de L se cumple

(1) $\forall s(k_{\{s\}} \in K \supset s \in S \in M)$ y $\forall h(J_{\{h\}} \supset h \in S \in M)$.

(2) Si $\exists\, s_1, \ldots, s_n \in S(0 < i \leq n \land k_{\{si\}}) \land \exists\, r_1, \ldots, r_n \in S(0 < i \leq n \land J_{\{ri\}})$ entonces $\exists l \in sit.\,lóg \in M(Rls_ir_i)$.

(3) Si $\exists l \in sit.\,lóg \in M(Rls_ir_i)$ entonces $(\exists K' \subseteq K(\forall k \in K'(v(k, \mathrm{s_i}) = \mathrm{V} \supset v(J, \mathrm{r_i}) = \mathrm{V}))$.

Si $<K, J>$ cumple con (1) y (2) entonces, por metateorema de 'Entailment' semántico, $K \vDash^M{}_L J$ implica lógicamente $\vDash^M{}_L K \rightarrow J$. Al cumplirse (3), $\vDash^M{}_L K \rightarrow J$ es V_r.

Cabe plantear la siguiente pregunta: ¿La noción de consecuencia semántica para **R** planteada en (1)-(3) es lo bastante acertada para considerarla como la noción semántica básica de consecuencia relevantista? Hay que notar que la definición dada en (1)-(3) está basada en las nociones semánticas que Mares propone para **R**, por lo que se requiere una justificación adicional de por qué la noción de consecuencia lógica para **R** funciona para **E**. Se tienen razones para creer que <u>la noción así definida funciona para ambas lógicas</u>, y las razones las proporcionan A&B:

(i) La lógica **E** está pensada como el resultado de reunir algunas ventajas que ofrecen dos sistemas lógicos: $(\boldsymbol{R} \cup \boldsymbol{S4}) \subset \boldsymbol{E}$. Para A&B, la lógica **E** es la lógica de la relevancia y necesidad; la relevancia viene dada por **R** al proponer con esta lógica una manera de garantizar que en los razonamientos lógicamente válidos las premisas estén siendo usadas en la consecución de la conclusión; la necesidad es añadida por **S4**, dicho sistema es la base formal para otra noción deseable que aprovecha **E**: la noción de implicación estricta '⥽', ésta es introducida por C. I. Lewis como un refinamiento formal para la noción de implicación lógica y se explica del siguiente modo: en un razonamiento $<K, J>$ tal que K ⥽ J no sólo sucede que $\neg(K \land \neg J)$ sino que $\neg \lozenge (K \land \neg J)$, es decir que en los razonamientos la relación entre premisas y conclusión es más estrecha. (cf. A&B (1975), Vol. I. §3-4)

(ii) La noción de situación maresiana es compatible con otra noción semántica más general que A&B admiten para las lógicas **R** y **E**: la noción de <u>pieza de información</u>. Éstas son

[83] *Ibíd.* P. 36.

[84] $\forall k \in K(k \in O_L)$ y $J \in O_L$. O_L es el conjunto de expresiones bien formadas de L.

conglomerados de oraciones sobre alguna materia o hecho, y tienden a ser más limitadas que los mundos posibles en lógica modal estándar.[85] Las piezas de información son importantes en el tratamiento semántico de la consecuencia relevantista, como ejemplo: Entiéndase '$x \Vdash p$' como 'la pieza de información x implica la oración p',

{Los humanos son bípedos} $\Vdash$ Los humanos tienen dos pies.

La relación de consecuencia no está fundamentalmente apoyada en la estructura lógica del razonamiento, sino en el significado de los términos de cada oración en juego y en los hechos presupuestos en el contexto del discurso.[86] Nótese que las piezas de información suelen ser vistas como la interpretación semántica de la técnica de subindexación: "$x \Vdash A \rightarrow B$ is written as $(A \rightarrow B)_x$, with x a class of numerals, and if $x \cup y$ means set union, we find we have simply an abstraction from the subscripting requirements [...] write $(A \rightarrow B)_x$ iff from A_y you can pass to $B_{x \cup y}$,".[87]

Gracias a (i) y (ii), se puede trasladar la noción de pieza de información de **R** a **E**. La noción de consecuencia de **E** usa la noción de pieza de información: "the fundamental notion for entailment is not simply logical consequence, but logical consequence *relative* to a set of background facts; we write "x, $w_i \Vdash p$" for "the piece of information x entails p if the facts are as in posible world w_i."".[88] Con lo anterior, se puede apreciar que las nociones semánticas maresianas en juego en la noción de consecuencia lógica dada en (1)-(3) no están en conflicto con las ideas que A&B proponen para una semántica de **E**.

Relación entre consecuencias sintáctica y semántica relevantistas.

Hasta ahora hemos dado una caracterización de en qué consistiría la noción de consecuencia lógica relevantista vista desde los enfoques sintáctico y semántico. Aunque ambas nociones están estrechamente relacionadas, nos concentraremos en la noción semántica porque ésta engloba las partes esenciales de la noción sintáctica, además de que la propiedad modal de la consecuencia lógica intuitiva encuentra una explicación más acorde con la noción semántica.

Las condiciones impuestas por la noción sintáctica son compatibles[89] con las que se piden para los casos de consecuencia semántica. Como ocurre en el caso de la lógica clásica, la noción de demostrabilidad en lógica relevante aquí considerada se encarga de mostrar cómo extraer las consecuencias de los cálculos lógicos relevantistas a un nivel estrictamente formal, pues los teoremas son resultado de los axiomas mediante demostraciones que respetan la condición de relevancia impuesta por sistemas como **R** o **E**.

---

[85] Ver A&B, (1975), Vol. II. P. 142-143. Nótese además que la característica dicha de las piezas de información coincide con la de las situaciones: situaciones y piezas de información son incompletas en sentido de que no tienen conjuntos exhaustivos de oraciones verdaderas o falsas. Los mundos posibles sí son completos.

[86] Ver *Ibíd.* P. 144.

[87] *Ídem.*

[88] *Ibíd*. P. 146.

[89] Hay que aclarar que está compatibilidad entre condiciones no implica que las condiciones de la noción sintáctica sean reducibles a las de la noción semántica. Como en el caso de la lógica clásica, la compatibilidad hace notar que la noción de demostración no entra en conflicto con la noción de validez.

No obstante, dichos sistemas formales suelen ser vistos como lenguajes susceptibles de diversas interpretaciones semánticas, por lo que es natural proponer interpretaciones para dichos lenguajes y analizar propiedades como verdad y validez en ellos. Es aquí donde se introduce una teoría de modelos con la que pueda evaluarse la noción de validez dentro de los lenguajes, dicha noción de validez ofrece una manera de entender por qué los razonamientos relevantemente válidos lo son.

Sean ‘(1)-$(3)_{SIN}$’ y ‘(1)-$(3)_{SEM}$’ abreviaciones para las condiciones de consecuencia relevantista sintáctica y semántica respectivamente. Globalmente, (1)-$(3)_{SIN}$ postula que un razonamiento es un caso de consecuencia sintáctica relevante cuando y sólo cuando: (i) todas las premisas pertinentes para la conclusión son subindexadas en la derivación, (ii) hay variables (del tipo apropiado) en común entre las premisas y la conclusión, y (iii) las premisas pertinentes para la conclusión forman parte de una demostración entendida en el sentido relevantista. Ahora, usaremos (i)-(iii) en un argumento para demostrar que las condiciones de consecuencia sintáctica relevantista son compatibles con (1)-$(3)_{SEM}$: Sea <*K, J*> un razonamiento tal que $K \vdash_{\mathrm{E}} J$, por el metateorema de ‘Entailment’ formal tenemos que $\exists K' \subseteq K(\bigwedge_{i=0}^{n} k_{\{i\}} \in K' \rightarrow J)$ es **E**-demostrable. Ahora, por razones expuestas para sostener que la semántica para **R** y **E** aceptada por A&B es compatible con la semántica maresiana para **R**, sea $M = \{S,\ sit.\ lóg.,\ R,\ v\}$ una estructura de interpretación para **E**. Con *M* se puede apreciar que cada subíndice $i \in I$ de <*K, J*> es interpretado como una situación $s \in S$ ($(1)_{SEM}$). También es apreciable que al haber al menos una variable común *X* (del tipo apropiado) que comparten las premisas *K* con la conclusión *J*, a *X* se le interpreta también como información en alguna situación *s*, y al ser <*K, J*> un caso de consecuencia sintáctica relevante habrá una $l \in sit.lóg.$ tal que l R-relaciona la información de las situaciones en que las premisas son el caso con la información de la situación en que la conclusión es el caso ($(2)_{SEM}$). Al haber una situación lógica que relaciona las situaciones de premisas *K* y conclusión *J*, siempre que la valuación *v* haga verdaderas a las premisas también hará verdadera a la conclusión($(3)_{SEM}$). Esto comprueba que la deducción de *K* a *J* es válida, y por el metateorema de deducción semántica relevantista dado anteriormente se tiene que $K \rightarrow J$ es Vr en **E**. Este argumento muestra cómo la noción de consecuencia sintáctica relevante se relaciona con la noción semántica de consecuencia relevante, que es lo que se quería demostrar.

Respecto a la noción de necesidad, la explicación formal que recibe en el enfoque sintáctico muestra cómo los teoremas respetan la condición de ser consecuencias necesarias de los axiomas propuestos, esto es: $\Box A = A \rightarrow A \rightarrow A$ con $\vdash_{\mathrm{E}} A$. Sin embargo, es dudoso que la propiedad modal de la noción intuitiva de consecuencia suela entenderse como una implicación relevante de oraciones a sí mismas. Anteriormente se ha dicho que la propiedad modal de la noción intuitiva suele pensarse como imposibilitando que las premisas sean verdaderas y la conclusión falsa, dado un razonamiento lógicamente correcto. Esta propiedad recibe una explicación más acorde desde el enfoque modelo-teórico de consecuencia relevantista, pues la noción de modelo maresiana permite pensar los razonamientos lógicamente correctos de una manera más adecuada: las situaciones donde las premisas son verdaderas son extendidas a otras situaciones donde la conclusión es verdadera, y es imposible que las situaciones en juego en el razonamiento sean tales que verifiquen las premisas sin la conclusión. Esta idea es más acorde con la propiedad modal que tiene la noción intuitiva de consecuencia.

Una pregunta importante que ahora cabe hacer es: ¿Cómo puede esta noción técnica de consecuencia relevantista servir para elucidar nuestra noción intuitiva de consecuencia? La respuesta a esta pregunta se conseguirá en lo sucesivo de este trabajo pero ayudará en la consecución de ella lo siguiente. Los conceptos y nociones técnicos de la consecuencia relevantista pueden ofrecer una explicación de algunas características importantes de la noción intuitiva. Por ejemplo, la noción relevantista de situación es una interesante opción para explicar el papel que tiene nuestro entorno cuando razonamos, y el entorno no es sólo físico sino que consiste en todo aquello que nos proporciona información con la que razonamos (creencias, datos conseguidos, acontecimientos físicos, etc.). Otro ejemplo lo da el concepto de conexión informacional (apoyado en las situaciones lógicas) manejado por la relación de accesibilidad ternaria, pues es una propuesta para comprender mejor cómo inferimos de cierta información otra como conclusión. El papel de V_r parece explicar adecuadamente en qué consiste que tomemos algo como válido, a saber aquella información de la que tenemos garantía de su verdad gracias a otra información que la sustenta relevantemente. Se dirá más después de cómo se relaciona la consecuencia relevantista con la noción intuitiva pero lo anterior sirve para comenzar a vislumbrar el método de elucidación ofrecido por esta noción técnica.

Con lo anterior dicho, de ahora en adelante el análisis de la eficacia de la noción de consecuencia lógica relevantista, así como su comparación con la noción tarskiana de consecuencia, será considerando el enfoque modelo-teórico de la noción.

2.- Noción clásica-tarskiana vs Noción relevante. Comportamiento de la noción de Consecuencia Lógica a nivel teórico.

Hasta ahora se ha ofrecido una caracterización de la noción de CL[90] explicada en términos tarskianos por una parte, y relevantistas por otra. Es importante notar que las nociones técnicas de CL de ambas concepciones tienen como un objetivo ser <u>correctas</u> respecto el concepto intuitivo de CL. Tarski ofreció su noción de CL en los términos formales matemáticamente definidos por él con el objetivo de que CL_I y CL_T capturaran los mismos casos de razonamientos que vemos como casos de consecuencia lógica, de modo que diríamos que tener un caso de CL_I implica tener un caso de CL_T porque el razonamiento intuitivo puede ser llevado al terreno más técnico de la lógica a través de la teoría tarskiana que involucra modelos, satisfactibilidad, interpretaciones, etc., (sobre la implicación inversa, tener un caso de CL_T implica tener un caso de CL_I, no hay aún una

[90] De aquí en adelante, usaré la notación CL_x para referirme a diversas nociones de consecuencia lógica consideradas, donde en vez de *x* irá *I* para intuitiva, *T* para tarskiana, *R* para relevante, etc.

respuesta definitiva pues este es justo el problema de la corrección de la definición tarskiana de CL respecto de la noción intuitiva de CL, esto se discutirá más adelante). La noción de CL_R busca reunir una serie de características definidas formalmente consideradas esenciales en los razonamientos que son casos de CL_I, de modo que esas características esenciales presentes en los razonamientos son adecuadamente capturadas por razonamientos que son casos de CL_R.

¿Por qué consideramos que las propuestas teóricas examinadas hasta ahora son interesantes y constituyen una elucidación viable del concepto técnico de CL? La respuesta a esta pregunta es algo a lo que me avocaré en este capítulo, explicando algunas características deseables que ofrecen las concepciones tarskiana y relevante de CL.

Formalidad y Modalidad en ambas teorías de CL.

Concepción de CL_T.

Como ya hemos visto, CL_T se vale de ciertos conceptos definidos matemáticamente haciéndola una noción muy precisa. Sin embargo nótese, a propósito de lo que dije en el penúltimo párrafo, que cuando Tarski ofrece su noción técnica de CL tiene en mente que su noción no sea <u>una sustitución</u> de la noción intuitiva de CL.[91] CL_I es conceptualmente muy rica y hasta ahora no hay un resultado definitivo que informe sobre todo su contenido conceptual, pero sí hay estudios que permiten apreciar algunos de sus rasgos esenciales.[92] Con los resultados adquiridos, es sensato pensar que dichos rasgos constituyen una parte necesaria (aunque no suficiente) del funcionamiento de CL_I, por lo que ofrecer una teoría de CL que recabe información sobre dichos rasgos sin duda ayudaría a comprender mejor el funcionamiento de CL_I. Aquí me refiero a los rasgos de formalidad y modalidad que he comentado antes.

Que CL_T reúna ambos rasgos es algo que hemos visto que se cumple. Para un ejemplo retomemos el lenguaje *LAr* como fue definido anteriormente y consideremos el siguiente ejemplo: Sea el razonamiento $<K, X>$ donde

$K = \{\forall x(0 \leq x)\}$.

.'. $X = \{\neg\exists x(0 \nleq x)\}$

y '$\leq$' tiene el significado usual en matemáticas; según la caracterización de CL_T con las consideraciones que se hacen en Gómez Torrente (2000) expuestas en la sección 1.2 de este trabajo, el razonamiento anterior es un caso de CL_T al cumplir con los rasgos de formalidad y modalidad. Se cumple el rasgo de formalidad al notar que todo razonamiento con la misma forma lógica es uno lógicamente válido: Si cambiamos la relación '$\leq$' en $<K, X>$ por una variable adecuada *P,* entonces nos resultan las funciones oracionales $K' = \{\forall x(P0x)\}$ y $X' = \{\neg\exists x(\neg P0x)\}$, y la conclusión es adquirida por simple interdefinibilidad de cuantificadores, de modo que al interpretar a P como $N = <$ tenemos un nuevo razonamiento con la misma forma que el anterior donde tanto su premisa como su conclusión son falsos, dando como resultado una implicación verdadera. También se

[91] Obviamente, esto no permite que podamos deshacernos de CL_I y quedarnos sólo con CL_T.
[92] Ver Gómez Torrente (2000).

cumple el rasgo de modalidad en ese razonamiento porque podemos observar que toda interpretación que haga verdadera a su premisa hace verdadera su conclusión: Como antes, sea la interpretación <*0,* ℕ*, M*> para *LAr* donde '0' es constante, 'ℕ*'* es el conjunto de números naturales y '*M'* es la relación '≤' entre números naturales, como podemos ver esa interpretación es un modelo del razonamiento <*K, X*> y toda interpretación <*a, U, P*> que es modelo de *K'* es también modelo de *X'*.[93] La relación de la modalidad con la noción de interpretación se hace notoria al considerar la característica de los razonamientos lógicamente válidos desde la teoría tarskiana: la preservación de la verdad de las premisas a la conclusión en todo razonamiento tarskianamente válido. La necesidad de la verdad de la conclusión en base a la de las premisas viene apoyada por dicha característica.

Con lo anterior vemos que los dos rasgos esenciales de la noción de CL reciben una explicación en términos mejor comprendidos dentro de la teoría de CL_T. La formalidad de los razonamientos lógicamente correctos es fácilmente analizable en términos de funciones oracionales y formulares, así se puede apreciar que su forma lógica garantice la corrección de los razonamientos.[94] La modalidad de los razonamientos lógicamente correctos es rescatada con el uso de las nociones tarskianas de modelo e interpretación (especialmente la característica mencionada antes), pues la imposibilidad de reinterpretar un razonamiento lógicamente correcto en uno con premisas verdaderas y conclusión falsa refuerza la justificación de que un razonamiento lógicamente válido cumple con ser lógicamente necesario al mantener la preservación de verdad de sus premisas a su conclusión.[95]

Concepción de CL_R.

Los relevantistas se preocupan, como Tarski, porque una explicación satisfactoria del concepto técnico de CL sea tal que concuerde en gran medida con los aspectos esenciales de CL_I. Ellos se han empeñado en sostener que, debido a esos rasgos esenciales, formas de razonamiento como ex falso quodlibet constituyen una violación de CL_I, de modo que prohibirlos es la vía inicial para ofrecer un concepto técnico adecuado de CL. En la sección 1.3 de este trabajo he expuesto la fundamentación relevantista de las lógicas **R** y **E** para bloquear el surgimiento de las paradojas, ahora me limito a hablar de los aspectos positivos de CL_R.

Para los relevantistas, CL_I presenta la propiedad de relevancia, de modo que como agentes competentes racionales tendemos a razonar con información pertinente y buscando evitar contradicción en nuestros razonamientos. Es debido a esto que formas de

[93] A primera vista, esto puede parecer dudoso acerca del razonamiento <*K, X*> construido de ese modo, pues para el lenguaje en que está construido puede pensarse en interpretaciones <*a, U, P*> en que *K* resulte verdadera y *X* resulte falsa. Para evitar eso, por mor del argumento, consideremos las interpretaciones que no arrojen resultados extraños en el razonamiento inicial, es decir interpretaciones que permitan preservar el propósito inicial de *LAr* el cual es ser un lenguaje para un fragmento específico de la aritmética elemental. Esta idea también permite rescatar las consideraciones de ampliar a *LAr* con más letras relacionales, conectivas lógicas, etc., de modo que pueden resultar en LAr^+ como en Gómez Torrente (2000). A esto cabe añadir que las ampliaciones de *LAr* considerables son expansiones bien-comportadas del lenguaje (o "well-behaved expansions" para usar los términos originales en inglés, ver Etchemendy (1990), cap. 3).

[94] Ver Gómez Torrente (2000), pp. 40, 41, 51, 52 y 53.

[95] Ver *Ibíd.* P. 39.

razonamiento como $A/B \supset A$ o $A \wedge \neg A/B$ no pueden considerarse como formas de razonar aceptables, así que los conceptos técnicos de CL deben ser tales que rechacen esas formas de razonar.

Si hemos de reconocer que las propiedades de formalidad y modalidad son esenciales para el concepto de CL, entonces es esperable que una teoría relevantista de CL incorpore ambas propiedades dándoles una clarificación en los términos de dicha teoría. La manera como la teoría de **E** incorpora la propiedad de formalidad es como sigue. Sea el razonamiento <*K, J*> donde

$K=\{(C \to A) \to (A \to B)\}$.

$J=\{C \to B\}$.

Es apreciable que, como en el ejemplo dado para la justificación de CL_T, cualquier otro razonamiento que posea la misma forma que <*K, J*> será un razonamiento lógicamente correcto que cumple con el requisito de relevancia: Es fácil notar que otro razonamiento con variables proposicionales D, E y F que tenga la misma forma que el original será un razonamiento lógicamente correcto al poderse ofrecer una demostración análoga a la del razonamiento original.[96] La propiedad modal de CL_R es alcanzable con una ligera complicación hecha a la propuesta de A&B: En A&B (2da imp. 1990) se vio que la propiedad de necesidad presente en los teoremas obtenibles de **E** es definida por medios sintácticos primitivos, es decir sea $\vdash_E A$:

$\Box A = A \to A \to A$;

A&B eligen esta manera de tratar la necesidad (formalmente) debido a que reúne ciertas características deseables que no se presentan en otros sistemas formales modales. Por ejemplo, A&B sostienen que la noción de necesidad en sistemas como **S1** y **S2** no permite probar que los **S1**-teoremas y los **S2**-teoremas son necesarios, y otros sistemas como **M** (debido a Feys-von Wright) carecen de un teorema de forma $A \to \Box A$ debido a que la regla de necesitación ahí no es la usual.[97] Lo que A&B desean para su sistema es que en **E** se pueda expresar la necesidad mediante una oración con una determinada forma lógica, con dicha forma puede demostrarse que todo **E**-teorema es necesario en el sistema:

$\boldsymbol{E} \vdash A \Longrightarrow \boldsymbol{E}, K \to ((A \to A \to A) =_{df} \Box A)$ donde K es un conjunto de oraciones del que se sigue relevantemente A y $|K| \geq 0$.[98]

Sin embargo, esta manera teórica de definir la modalidad presente en CL_R no es más esclarecedora para entender que dado un razonamiento relevantista, si es lógicamente

---

[96] Dicha demostración es como sigue:

1.- |_ $(A \to B) \to (C \to A)_{\{1\}}$ hip.
2.- | |_ $A \to B_{\{2\}}$ hip. adicional
3.- | | $(A \to B) \to (C \to A)_{\{1\}}$ 1, reiteración
4.- | $C \to A_{\{1,2\}}$ 2, 3 MP
∴ $C \to B$ 3, 4 Transitividad.

[97] Ver A&B, (2da. imp. 1990), p. 117.

[98] Ver la proposición y demostración de ella que A&B usan para sostener que todo **E**-teorema es una consecuencia necesaria de su sistema en el capítulo 1.3 de este trabajo.

correcto entonces es necesario.[99] Es aquí donde el enfoque semántico de la teoría entra en juego. Los modelos tal como se proponen en Mares (2004) constituyen una interpretación adecuada de los elementos en juego en los razonamientos: sea $M = \{S, sit.\ lóg.\ R, v\}$, si $M \vDash_E <K, J>$ entonces podemos notar que si las *k*-premisas son verdaderas bajo *M* entonces la conclusión *J* debe ser verdadera bajo *M*, pues el modelo proporciona el mecanismo que permite pasar de las premisas a la conclusión mediante la relación de accesibilidad ternaria y las situaciones lógicas (conexiones informacionales). Es decir que toda situación en que valen las premisas comparte información con las situaciones donde vale la conclusión, todo esto *vía* la *R*-relación. Así conseguimos la propiedad modal buscada que debe incluirse en CL_R: Para todo modelo *M* tal que *K* sea verdadero en *M*, será un *M* en que *J* sea verdadero, $<K, J>$ será *Vr.*[100]

Es así como las propiedades de formalidad y modalidad se incluyen en la noción de CL_R. La formalidad está presente en CL_R gracias a que todo razonamiento lógicamente correcto en **E** es uno para el que es posible dar una **E-**demostración, y todo otro razonamiento con la misma forma lógica que el original es uno para el que se puede reproducir la **E-**demostración. La modalidad está presente en CL_R con la propuesta de involucrar el estudio semántico que Mares ofrece con su noción de modelo, pues un razonamiento para el que todo *M*-modelo relevantista en que sea el caso que sus premisas son verdaderas es uno en que su conclusión es verdadera, esto debido a que en *M* están las conexiones informacionales (situaciones lógicas) que permiten explicar el tránsito de las premisas a la conclusión.

Hasta ahora se ha ofrecido una justificación de cómo los aspectos formal y modal de la noción de CL están presentes en ambas teorías revisadas. Ahora nos centraremos a ofrecer con detalle las ventajas y defectos presentes en cada teoría.

2.1.- Evaluando la concepción tarskiana de CL. ¿Todo razonamiento que es un caso de CL_T es también un caso de CL_I?

Ciertamente, tratar de dar una respuesta definitiva a la pregunta sobre la corrección de CL_T respecto a CL_I es un labor por demás complicada. Cuando Tarski ofrece su noción de CL menciona que su postura encaja bastante bien con el concepto ordinario de consecuencia.[101] No obstante es mucho mejor aclarar la evidencia para pensar eso exhibiendo las ventajas que CL_T ofrece. El presente capítulo está dedicado a esa labor, apoyándome principalmente en Gómez Torrente (2000) y (2004).

Hay estudios, como Gómez Torrente (2000), que sugieren que la corrección de CL_T respecto de CL_I es de hecho el caso. La noción tarskiana de modelo proporciona una buena explicación de cómo interpretar premisas y conclusión en razonamientos lógicamente correctos, esos modos de interpretar suponen que los objetos y relaciones de los que se

[99] Lo más que se consigue con esa manera de definir la modalidad es una propiedad común a todos los teoremas de **E**, a saber que ellos son consecuencias necesarias del sistema formal. Ver sección 1.3 de este trabajo.

[100] Esto último se tiene gracias al metateorema de la deducción semántico relevantista expuesto anteriormente.

[101] Ver Tarski (1936b), p. 416.

habla en los razonamientos sean tratados teórico-conjuntistamente, eso por esto que el 1er requisito en los modelos de Tarski es que el universo de interpretación sea un conjunto no-vacío. Sin embargo, dichos modos de interpretar son susceptibles de manejar otras colecciones de objetos que pueden no ser conjuntos, por ejemplo clases.[102] Una clase es una colección de objetos que puede o no ser un conjunto (por ejemplo la colección de los números ordinales en teoría de conjuntos no es un conjunto por la paradoja de Burali-Forti). La teoría tarskiana de CL pide que las colecciones de objetos sean colecciones sobre el mundo real (esto en parte al rechazo de Tarski de las nociones modales), el mismo Tarski eligió una manera muy específica de proponer esas colecciones: las colecciones de objetos en los modelos de Tarski son entendidas como conjuntos tal como son trabajados en la Teoría de Conjuntos como rama matemática. Esta noción técnica de conjunto engloba muchas colecciones de objetos que pueden entrar como componentes de los modelos tarskianos (ejemplos: todas las colecciones finitas de objetos, $\mathbb{N}$, $P(\mathbb{N})$, y otras colecciones más grandes).[103]

Sin embargo, algunas colecciones que no son conjuntos también entran en consideración (como los números ordinales), y no hay nada extraño en considerar interpretaciones de lenguajes donde esas colecciones sean el universo de discurso. Supongamos que tenemos un lenguaje similar a *LAr* en el que interpretamos sus constantes no-lógicas como objetos que pertenecen a una colección que no es conjunto sino una clase (Cl), ¿podemos tener razones para pensar que $CL_T \Rightarrow CL_{Cl}$? También es concebible tratar de interpretar las constantes no-lógicas del lenguaje considerado antes como elementos de un conjunto de objetos posibles (CoP), pues muchos de estos conjuntos no tienen como elementos a objetos reales, ¿podemos tener razones para pensar que $CL_T \Rightarrow CL_{CoP}$? Incluso es concebible llegar más lejos que CoP y considerar interpretar las constantes-lógicas como elementos de una colección de objetos posibles demasiado grande para ser conjunto, una clase posible de objetos (ClP), ¿podemos tener razones para pensar que $CL_T \Rightarrow CL_{ClP}$?

Dejando intacto el comportamiento de los modelos tarskianos en los casos de dominios como clases o conjuntos de objetos posibles o clases posibles, no parece difícil notar que toda CL_{Cl} o CL_{CoP} o CL_{ClP} es un caso de CL_T, la duda latente es si se puede dar la implicación contraria: de que toda CL_T sea CL_{Cl} o CL_{CoP} o CL_{ClP}. Tratar de argumentar a favor de esto último es bastante complicado, ya que el número de modos de interpretar con clases o conjuntos de objetos posibles o clases posibles como dominio es mayor que el número de modos de interpretar estándar con conjuntos.[104]

Afortunadamente, para el caso de lenguajes de 1er orden se cuenta con una respuesta afirmativa para la implicación contraria. En Gómez Torrente (2000) se habla del argumento de Kreisel que muestra cómo los sistemas formales de 1er orden son completos

[102] Ver Gómez Torrente (2000), p. 60.
[103] Ver *Ibíd.* P. 59.
[104] Ver *Ibíd.* P. 60-61.

e intuitivamente correctos con respecto a CL_{ClP}.[105] Un ejemplo de dicho sistema que cumple con corrección intuitiva y compleción es el sistema *Cal* descrito como sigue:

Axiomas

I. $\varphi \to (\psi \to \varphi)$;

II. $((\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$;

III. $((\neg\psi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \psi))$;

IV. $(\forall\alpha (\varphi \to \psi) \to (\forall\alpha\varphi \to \forall\alpha\psi))$;

V. $(\forall\alpha\varphi \to \varphi)$,

VI. $(\varphi \to \forall\alpha\varphi)$, donde α no aparece libre en φ;

VII. $\exists\alpha\ \alpha = \beta$;

VIII. $(\beta = \gamma \to (\varphi \to \psi))$, donde φ, ψ son atómicas y ψ se diferencia de φ solamente en contener una aparición de γ donde φ contiene una aparición de β.

Reglas de inferencia

Modus Ponens $(\alpha \to \beta), \alpha / \beta$;

Interdefinibilidad de cuantificadores $\exists x_n \equiv_{df} \neg\forall x_n \neg$

(donde φ, ψ, χ son fórmulas cualesquiera, α es una variable cualquiera y β y γ son símbolos individuales cualesquiera).[106] La compleción de *Cal* se alcanza gracias al teorema de compleción para la lógica de 1er orden de Gödel, y para demostrar que *Cal* es intuitivamente correcto respecto de CL_{ClP} se requiere probar que los axiomas I-VIII son universalmente válidos y que las reglas de inferencia preservan validez universal, no es complicado demostrar esto y lo daremos por hecho.[107]

El razonamiento va como sigue: supóngase que el razonamiento <*K, X*> es una CL_T, entonces por el teorema de compleción de Gödel se tiene que $K \vdash_{Cal} X$, pero *Cal* es intuitivamente correcto respecto de CL_{ClP}, por lo que <*K, X*> es una CL_{ClP}.[108]

Este resultado es vital para creer que CL_T es una buena manera de explicar el comportamiento de CL_I, esto porque CL_I incluye los demás modos de interpretar que sustituyen los conjuntos dominio de los modelos tarskianos. CL_I puede aplicarse al hablar de colecciones de objetos que son clases, o conjuntos de objetos posibles, o clases posibles. El argumento anterior muestra que, para el caso de la lógica de 1er orden, si cualquier razonamiento <*K, X*> es CL_T entonces es CL_{ClP}, y si es una CL_T entonces es una CL_{Cl} y si es una CL_T entonces es una CL_{CoP}. Esto ayuda a notar que el componente modal de CL_I es adecuadamente capturado por CL_T porque ningún razonamiento que sea un caso de CL_T podrá falsearse apelando a contraejemplos que se sirvan de colecciones de objetos posibles que no sean conjuntos (sólo conjuntos de objetos posibles).[109] Sin embargo, estos

---

[105] Ver *Ibíd.* P. 62.

[106] *Ídem.* Nótese que el uso del símbolo '→' aquí no es el mismo del condicional relevante.

[107] Véase *Ibíd.* P. 63 para una prueba de que el axioma VI es universalmente válido, en manera similar se demuestran el resto de axiomas.

[108] *Ibíd.* P. 64. Las implicaciones $CL_T \Rightarrow CL_{Cl}$ y $CL_T \Rightarrow CL_{CoP}$ se demuestran de modo análogo.

[109] Siempre y cuando, como se dice en *Ibíd.* P. 64, se esté dispuesto a aceptar las nociones que explican el comportamiento de CL_I cuando los modos de interpretar difieren del tarskiano.

resultados no pueden considerarse definitivos para zanjar definitivamente la duda sobre la corrección de CL_T respecto de CL_I, dos razones para pensar lo anterior son: En 1er lugar, los resultados obtenidos con CL_T y CL_{ClP} sirven sólo para la lógica de 1er orden (cálculos similares a *Cal*), por lo que las lógicas de orden superior no cuentan con el apoyo que el argumento de Kreisel brinda, no hay sistemas formales de orden superior que sean correctos y al mismo tiempo completos respecto de CL_T; en 2do lugar, el éxito del que parece gozar el argumento de Kreisel tiene un supuesto importante que no está exento de duda, a saber que CL_{Cl} (y afines mencionadas) sean condición suficiente para CL_I, pues no parece definitivo que CL_I esté restringida a darse en términos de clases o conjuntos de objetos posibles o clases posibles solamente. Si hay razones para pensar que CL_I no es totalmente explicada en términos de CL_{Cl} o CL_{CoP} o CL_{ClP} entonces no se puede sostener que se captura totalmente lo esencial de CL_I sólo con las nociones anteriores dichas.[110]

Ya se dijo anteriormente que el argumento de Kreisel sólo se sostiene para lenguajes de 1er orden, pero en órdenes superiores no puede reproducirse por la ausencia de un teorema de compleción para ellos. Sin embargo, hay buenas razones para pensar que CL_T implica CL_{Cl} en 2do orden (y también CL_T implicaría las otras nociones de CL_{CoP} y CL_{ClP}).[111] El argumento se basa en la siguiente proposición crucial:

"*(1) Para todo (modo de interpretar)$_{Cl}$ existe un (modo de interpretar)$_{Cl}$ isomorfo cuyo universo es una clase pura.*"[112]

donde una clase pura es tal que sus elementos son sólo conjuntos puros (construibles sólo con las operaciones básicas de teoría de conjuntos aplicadas al conjunto vacío). El isomorfismo entre clases se da cuando puede darse una biyección entre ellas que además preserva la estructura entre ellas. Supóngase un (modo de interpretar)$_{Cl}$ *I* con su *D*-universo. Contaremos con los siguientes resultados:

> "Es una consecuencia del axioma de elección global y el axioma de regularidad que toda clase *C* puede ponerse en correspondencia biyectiva con un segmento inicial de los ordinales […] Este segmento inicial será la clase de todos los ordinales, Ω, si *C* es una clase propia […] En particular, hay una correspondencia biyectiva entre un segmento inicial de la clase Ω de todos los ordinales y *D*. Luego, un isomorfismo entre *I* y un (modo de interpretar)$_{Cl}$ cuyo universo es ese segmento inicial queda incluido por esa correspondencia 1-1.".[113]

Debe ser clara la justificación de la idea sobre este isomorfismo entre clases. Toda clase puede corresponder con alguna subcolección de ordinales (que pueden ser todos ellos si la clase en cuestión es propia), dado que la clase de los ordinales es pura (pues su construcción se basa en reiteradas operaciones sobre el conjunto vacío que es el ordinal 0) toda clase de cualquier tamaño que sea el universo de un modo de interpretar podrá ponerse en correspondencia biunívoca con la clase de ordinales o una parte de ésta.

Para demostrar que $CL_{Cl} \Rightarrow CL_{ClP}$ lo hacemos por reducción al absurdo: Supóngase que el razonamiento <*K, X*> es un caso de CL_{Cl} pero no uno de CL_{ClP}, entonces hay un

[110] Ver *Ibíd.* P. 64-65.
[111] Ver *Ibíd.* P. 67. Es posible tener una demostración de $CL_{Cl} \Rightarrow CL_{ClP}$ (y $CL_{ClP} \Rightarrow CL_{CoP}$).
[112] *Ídem.*
[113] *Ibíd.* P. 68.

mundo posible *m* con una clase no-vacía de objetos *U* tal que se puede construir un (modo de interpretar)$_{Cl}$[114] *J* donde todo miembro de *K* es verdadero y *X* es falsa. (1) es una verdad matemática, así que se sostiene en todo mundo posible, de modo que *m* tiene un (modo de interpretar)$_{Cl}$ *L* con una clase pura como universo isomorfa a la clase-dominio de *J*. Como el universo de *L* es una clase pura, *L* es construible en todos los mundos posibles y es tal que *K* tiene a todos los miembros verdaderos en *L* y *X* falsa en *L* (pues, por hipótesis, el universo de *J* es isomorfo al de *L* y en *J* $<K, X>$ es no-válido), pero el mundo actual es también un mundo posible y en éste *L* haría que $<K, X>$ no sea un caso de CL_{Cl}, contradiciendo el supuesto inicial.[115] Luego, por (1), se tiene que $CL_{Cl} \Rightarrow CL_{ClP}$.

Ahora que el razonamiento anterior está dado, ¿se pueden dar razones para defender que $CL_T \Rightarrow CL_{Cl}$ para lenguajes de 2do orden? Tratar de responder a esta pregunta es bastante complicado, pues la información pertinente para responder afirmativa o negativamente no tiene una justificación que la haga certera, y dentro de la teoría de conjuntos no puede ofrecerse una base sólida para apoyar la respuesta.[116] El lenguaje de la teoría de conjuntos es el más importante lenguaje de 2do orden considerado para estudiar la cuestión, lenguaje cuya única constante no-lógica es la relación '∈', sin embargo, la teoría de conjuntos también se formaliza en 1er orden. Se considera aquí la formalización en 2do orden porque los resultados obtenidos respecto de $CL_T \Rightarrow CL_{CL}$ servirán como razones para apoyar o refutar dicha implicación respecto de lenguajes de 2do orden, que es la cuestión aquí. Hay que notar que los estudios hechos sobre la cuestión han considerado hasta ahora sólo los conjuntos finitos de premisas para tratar de responder. Si la implicación $CL_T \Rightarrow CL_{Cl}$ es verdadera entonces se requeriría más información de cómo los conjuntos finitos de premisas respetan la implicación anterior, ya que la respuesta supone que esos conjuntos tengan cierta propiedad o comportamiento que hace que los razonamientos funcionen en 2do orden, propiedad o comportamiento que en principio es analizable por la noción tarskiana.

Para tratar de ofrecer razones en favor de $CL_T \Rightarrow CL_{Cl}$ en 2do orden, un supuesto (controversial) requerido se enuncia en la siguiente proposición:

"*(2) Todos los argumentos con un conjunto finito de premisas que son casos de (consecuencia lógica)$_T$ en el lenguaje de '∈' son tales que o alguna premisa es falsa o la conclusión es verdadera en la clase de los conjuntos puros (con la relación de pertenencia).*".[117]

(Recuérdese que "el lenguaje de '∈'" es el formalizado en 2do orden para la teoría de conjuntos considerado anteriormente) Nuevamente se procede con una reducción al absurdo: Sea un razonamiento $<K, X>$ que es un caso de CL_T donde *K* es conjunto finito de premisas y sea un (modo de interpretar)$_{Cl}$ *I* tal que en *I* todo miembro de *K* es verdadero

[114] Este modo de interpretar tiene la clase *U* como actual en el mundo *m*, por eso no se usa un (modo de interpretar)$_{ClP}$.
[115] *Ídem.*
[116] *Ibíd.* P. 68-69.
[117] *Ibíd.* P. 69.

pero X es falsa. Ahora, fórmese el condicional $Z = K \supset X$ donde $K = \bigwedge_{i=0}^{n} k_i$, y sea Z' el condicional resultante de sustituir en <K, X> las constantes no-lógicas por variables del tipo correspondiente. Con esto puede formarse la clausura universal $\forall F \forall x Z'$ perteneciente al lenguaje de la teoría de conjuntos y que es CL_T de todo conjunto (incluso infinito) de premisas en dicho lenguaje, pero Z' es falsa en I por el supuesto inicial. No obstante, (2) hace que Z' sea verdadera en la clase de los conjuntos puros. Ya que <K, X> ha sido formado en lenguaje de la teoría de conjuntos, no posee términos no-lógicos, y su clausura Z' es falsa en todo (modo de interpretar)$_{Cl}$ que esté en correspondencia biyectiva con el dominio de I. De esto, y con el resultado de (1), podemos ver que toda clase propia corresponde biyectivamente con la clase de todos los conjuntos (pues esta clase puede biyectarse con la clase de los ordinales[118]). De modo que el dominio de I se biyecta con la clase de todos los conjuntos y los conjuntos puros, y Z' ha de ser falsa en la clase de los conjuntos puros, contradiciendo a (2).[119]

De hecho, el resultado anterior puede llevarse más lejos al considerar conjuntos de oraciones infinitos en el mismo lenguaje de la teoría de conjuntos. Nuevamente, defender esto dependerá de un supuesto similar a (2), aunque extendido:

"*(3) Todos los argumentos que son casos de (consecuencia lógica)$_T$ en el lenguaje infinitario de cardinalidad $\aleph_0$ de segundo orden con '$\in$' son tales que o alguna premisa es falsa o la conclusión es verdadera en la clase de los conjuntos puros (con la relación de pertenencia).".*[120]

El argumento para probar que $CL_T \Rightarrow CL_{Cl}$ en casos de conjuntos infinitos de premisas procede de manera muy similar al anterior dado para casos de conjuntos finitos de premisas (lo único distinto es la incursión del conjunto infinito en lugar del finito).[121] Con los supuestos (2) y (3) (con base en (1)), se puede ver que hay razones para pensar que $CL_T \Rightarrow CL_{Cl}$ en lenguajes de 2do orden.

Sin embargo, y como se mencionó antes, los supuestos (2) y (3) son controversiales aunque puedan servir como base para argumentos similares a los anteriores dados. En base a los argumentos anteriormente expuestos para ofrecer razones de que, en 2do orden, $CL_T \Rightarrow CL_{Cl}$, se han tratado de dar argumentos que muestren que (2) (y (3)) no puede sostenerse. Algunos ejemplos interesantes de ambos lados, junto con razones para creer que dichos ejemplos requieren un fortalecimiento importante para cumplir totalmente con su propósito, pueden encontrarse en Gómez Torrente (2000).[122]

---

[118] Una explicación de esto puede pensarse con los resultados obtenidos con el teorema de la recursión transfinita, pues así puede verse al universo conjuntista como jerarquía cumulativa de conjuntos donde en cada nivel los conjuntos con cierta cardinalidad corresponden a un número ordinal. Profundizar en los detalles técnicos de esto nos alejaría del objetivo principal.

[119] *Ibíd.* P. 69-70.

[120] *Ibíd.* P. 70.

[121] El argumento puede encontrarse en *Ibíd.* P. 70-71.

[122] En general, dichos ejemplos discutidos ahí se basan generalmente en varias nociones y resultados teórico-conjuntistas (cardinales inaccesibles, compactos, supercompactos, estructuras del universo conjuntista acotado hasta un cierto ordinal, etc.) al ser esgrimidos contra CL_T como base explicativa para la noción de CL

Para lenguajes de órdenes superiores a 1er orden, no se cuenta con una justificación satisfactoria de la noción de CL. Una razón de esto es que la noción de CL para lenguajes de 2do u órdenes superiores no puede ser exitosamente explicada con las herramientas formales tarskianas (satisfacción, validez, modelos, etc.), pues a falta de un teorema de compleción para lógica de 2do orden no se tiene la siguiente implicación crucial: para cualquier razonamiento $<K, X>$, $\mathrm{Val}_T(K, X) \Rightarrow \mathrm{Der}_S(K, X)$, donde '$\mathrm{Val}_T$' abrevia 'validez tarskiana' y 'Der_S' abrevia 'ser derivable en el sistema formal *S*'. [123] Dicho simplificadamente: en sistemas formales de 2do orden siempre es posible construir una oración verdadera dentro del sistema e imposible de demostrar en él. Con ese resultado, ha sido común pensar que hay algo erróneo en la metateoría encargada de elucidar la noción CL en dichos sistemas, hay dos alternativas centrales de esto: en 1er lugar, hay razones para creer que es CL_T la incorrecta respecto de la noción de CL en 2do orden; en 2do lugar, se ha argumentado que la noción general de demostrabilidad en lógica de 2do orden siempre es incompleta respecto de la noción de CL en 2do orden.

¿Cómo puede CL_T fallar en elucidar la noción CL para lógica de 2do orden? Los detractores de la noción tarskiana han sostenido frecuentemente lo siguiente: Cuando una conclusión es consecuencia lógica de sus premisas debe ser posible extraerla de ellas mediante un proceso de derivación a priori, y dicho proceso debe poderse reproducir efectivamente dentro de algún cálculo lógico. Encontrar algún ejemplo de razonamiento donde se tenga un caso de CL_T y que sea imposible reproducirlo efectivamente y a priori dentro de un cálculo lógico daría una buena razón para la incorrección de CL_T.[124]

Tratar de atacar la CL_T en lógica de 1er orden con la razón anterior no constituye mucho peligro para su corrección, pues una modificación en el argumento de Kreisel ayuda a eliminar objeciones de ese tipo: Suponiendo que fuéramos capaces de construir, en 1er orden, un razonamiento que sea un caso de CL_T y que no fuera a priori deducible en algún cálculo, tendríamos la obligación de ofrecer razones para que cálculos como *Cal* en los que pudiéramos reproducir efectivamente ese razonamiento son después de todo incompletos, pero el teorema de compleción para lógica de 1er orden dado por Gödel no permite tal maniobra.[125] Una objeción similar y más seria puede presentarse para el caso de lógicas de orden superior: Todo sistema formal *S* de 2do orden para CL_T es incompleto, es decir que cualquier *S* es tal que en él no se derivan todas las CL_T a través de sus axiomas y reglas de inferencia (no es recursivamente numerable), es decir ningún cálculo así es capaz de producir todas las VL_T generables en 2do orden; sin embargo, es característica de los razonamientos lógicamente correctos que ellos pueden ser reproducidos a priori en algún

en 2do orden. Analizarlos detalladamente aquí supone un alejamiento importante del objetivo central de este ensayo. Detalles en Gómez Torrente (2000), p. 71-75.

[123] Ver Gómez Torrente (2004), p. 161.

[124] Ver Gómez Torrente (2000), p. 77 y Gómez Torrente (2004), p. 165.

[125] Una profundización de esta maniobra, así como el argumento de Kreisel modificado para responderla, se encuentra en Gómez Torrente (2000), p. 77-80.

cálculo lógico; por lo tanto, existen casos de CL_T cuya conclusión es VL_T pero no es a priori.[126]

Argumentos como el anterior han sido dirigidos contra los que defienden que CL_T sea a priori, pero también se ha dado la siguiente respuesta: Sean las siguientes proposiciones las enunciaciones clave del argumento anterior (con el supuesto de que trabajamos con lógicas de orden superior)

(1) El razonamiento a priori debe poder efectuarse en algún cálculo lógico,

(2) para todo cálculo lógico existen VL_T que no son derivables sin premisas en él,

∴ (3) existen VL_T tales que para todo cálculo lógico no se les puede derivar sin premisas en él.

Puede ser admisible que (1) ⇒ (2), pero (2) ⇒ (3) es falaz. Analicemos nuevamente las proposiciones con un tratamiento semiformal. Sea <*K, X*> un razonamiento, O una oración y S un cálculo lógico de 2do orden

(1) $\forall < K, X > \exists S(< K, X >_{\text{a priori}} \Rightarrow < K, X >_{\text{S}})$.

(2) $\forall S \exists O(VL_{\text{T}}(O) \wedge \emptyset \nvdash_{\text{S}} O)$.

∴ (3) $\exists O \forall S(VL_{\text{T}}(O) \wedge \emptyset \nvdash_{\text{S}} O)$.

Lo que (1) y (3) implicarían es que hay razonamientos que son casos de CL_T sin ser a priori, lo que daría razón a los críticos de esto; pero de (2) no se sigue (3) debido a un mal uso de la cuantificación. Por la ordenación de los cuantificadores, (2) nos dice que en <u>cualquier</u> cálculo lógico se pueden construir VL_T que no son demostrables en él; pero la ordenación de los cuantificadores de (3) hace que se diga algo más fuerte (y sin justificación en el argumento), a saber que existe una oración que es VL_T y que no es demostrable en <u>ningún</u> cálculo. De modo que el argumento anterior es defectuoso y no constituye una objeción legítima a pensar que CL_T es a priori en lógica de orden superior.[127]

Otra manera de sostener que CL_T es incorrecta respecto de CL en orden superior es que puede fallar en ser un caso de <u>implicación analítica</u>. Es decir, para un razonamiento <*K, X*> se dice que *K* implica analíticamente a *X* sii *K* implica *X* <u>en virtud del significado de las constantes lógicas</u> del lenguaje formal en que está construido <*K, X*>.[128] ¿Puede haber un caso de razonamiento lógicamente correcto en sentido tarskiano que no sea un caso de implicación analítica? Nuevamente esto no es tan simple de responder, aunque para el caso de lógica de 1er orden la cuestión puede considerarse zanjada gracias a una extensión similar que puede hacerse al argumento de Kreisel para probar que CL_T es a priori.[129] En el caso de lógica de orden superior, la cuestión no está definitivamente resuelta, pero me

[126] Ver *Ibíd.* P. 80-81.

[127] El contra-argumento original a la objeción recién considerada se encuentra en *Ibíd.* P. 81.

[128] Ver *Ibíd.* P. 81. En dicha nota el autor hace notar que este uso de 'implicación analítica' no es el usual dado en términos de similitud semántica que comparten las expresiones, lógicas y no-lógicas, de un razonamiento. No obstante, la implicación analítica en el sentido especial recae en el uso común de implicación analítica. Yo también seguiré esta observación.

[129] *Ibíd.* P. 82.

concentraré en un argumento que ataca la característica analítica de CL_T dado en Etchemendy (1990) y la respuesta que da Gómez Torrente.

Sea *L* un lenguaje de 2do orden donde se expresan las siguientes oraciones:

(a) A es VL_T sii HC;

(b) B es VL_T sii ¬HC.

donde 'HC' es una abreviación de la hipótesis del continuo (dicha hipótesis dice que no hay conjuntos con una cardinalidad κ tal que $\omega = \aleph_0 < \kappa < \aleph_1$). Las siguientes premisas son:

(c) La hipótesis del continuo no es conceptualmente verdadera;

(d) La negación de la hipótesis del continuo no es conceptualmente verdadera.

Aquí 'conceptualmente verdadera' es 'ser analíticamente verdadera'. La siguiente premisa introducida no es clara:

(e) Para toda oración O, si no es conceptualmente verdadero que [O es VL_T], entonces O no es analítica.

Con (a)-(e), Etchemendy extrae las siguientes conclusiones: Con (a) y (c) se sigue

(f) no es conceptualmente verdadero que [A es una VL_T]

y con (b) y (d) se sigue

(g) no es conceptualmente que [B es una VL_T].

∴ Con (e)-(g), se concluye que ni *A* ni *B* son analíticas, pero una de ellas debe ser una VL_T ya que o HC o ¬HC es el caso. Por ende, hay oraciones que son VL_T y no analíticas.[130]

La conclusión anterior se apoya en (e), una premisa que no es del todo clara al no explicarse la relación que hay entre VL_T y la analiticidad en el argumento. Pero, aun si (e) no fuera falsa el argumento tiene una imprecisión lógica importante, a saber que se basa en el siguiente modo de razonar (lo ejemplificaré con una modalidad de necesidad estándar):

$(p \leftrightarrow q) \land \Box q \vdash \Box p$

con las premisas (a)-(d) y las conclusiones (f) y (g) estando en juego.[131] La línea de razonamiento que debiera seguirse con el razonamiento anterior se basa en una doble utilización del axioma *K* kripkeano dado en lógicas modales

$\Box(p \leftrightarrow q) \Rightarrow (\Box p \supset \Box q) \land (\Box q \supset \Box p)$

desde luego, con este esquema axiomático no habría problema con el argumento de Etchemendy; sin embargo, sostener que es conceptualmente verdadero (a) y es conceptualmente verdadero (b) es tan complicado como tratar de refutar que CL_T es implicación analítica.

¿Es más fructífero rechazar que $CL_T \Rightarrow CL_{Cl}$ en 2do orden argumentando que la noción de demostrabilidad (fundamental en el aspecto formal de CL_T) es incompleta para la consecuencia lógica en 2do orden? Un argumento en particular potente lo da el propio Tarski con la consideración de los argumentos-ω, el ejemplo que he analizado en la sección 1.1.1 de este trabajo es el que usa Tarski para hacer notar que en lenguajes de 2do orden y superiores (el lenguaje en que se formula el argumento-ω de la sección 1.1.1 es uno de

[130] Ver *Ibíd.* P. 82-83.

[131] Ver *Ibíd.* P. 84.

estos) muestra cómo se da la incompleción de esos sistemas formales respecto de la noción de consecuencia lógica.[132] Un análisis rápido de los argumentos-ω como el dado anteriormente muestra que no puede haber una interpretación en que las premisas sean verdaderas y la conclusión falsa (es decir, que no son razonamientos inconsistentes-ω donde, para $n \in \omega$, se concluye $\neg\exists n P(n)$ de una cantidad infinita de premisas de la forma *P(n)* todas verdaderas), pero Tarski muestra cómo las reglas de inferencia de los sistemas formales con este tipo de razonamientos no permiten derivar la conclusión de las premisas, y la estrategia consistente en incluir reglas de carácter infinitario a dichos sistemas implica enfrentar los teoremas de incompleción de Gödel. Esto es una razón para que Tarski propusiera su teoría de consecuencia lógica. Sin embargo, la observación tarskiana se basa en un supuesto no del todo justificado: que expresiones de tipo $\forall X$ donde *'X'* es una variable relacional para propiedades son expresiones o constantes lógicas. La noción de constante lógica no está explicada satisfactoriamente del todo, pero si expresiones como $\forall X$ son constantes lógicas entonces la observación de Tarski será indudablemente cierta y la noción de demostrabilidad será incompleta respecto de la noción de CL en 2do orden. Un análisis detallado de la noción de constante lógica excede los límites de este trabajo, más adelante se dirá algo extra al respecto pero por el momento me limito a mencionar una propuesta que aparece en Gómez Torrente (2002): "a natural view about the expressions in the usual set of logical constants is that they probably been selected by implicit application of some very complex, largely pragmatic principles.".[133]

Las consideraciones hasta aquí revisadas muestran cómo CL_T es una base explicativa viable para nociones de consecuencia lógica más generales como las que se basan en clases. Presumiblemente, CL_{Cl} (y sus similares) es una manera de caracterizar la noción de CL_I, y vemos que $CL_T \Rightarrow CL_{Cl}$ en 1er orden está eficientemente apoyada por argumentos convincentes. Además, para el caso de 2do orden, CL_T como base de CL_{Cl} parece funcionar adecuadamente (y no parece fallar en explicarla, como los detractores intentan mostrar), aunque no hay respuestas definitivas para sostener esto. También se vio cómo se intenta sostener que CL_T carecería de algunas características deseables que la noción de consecuencia lógica de orden superior parece tener, como aprioridad o analiticidad, pero los argumentos hechos en favor de ello son defectuosos. Por lo que CL_T tiene más razones a favor que en contra de servir como elucidación teórica de CL_I.

2.2.- Evaluando la concepción relevantista de CL. Adecuación de una elucidación de CL_I en términos de CL_R.

La noción relevantista de CL ha sido explicada en secciones anteriores desde el punto de vista formal y modelo-teórico, señalando al final de esa exposición que nos inclinaríamos por considerar la noción semántica de consecuencia relevantista por ser ésta la que intenta ofrecer una elucidación más cercana de algunas de las características de CL_I. En esta sección me enfocaré en analizar las virtudes que CL_R ofrece para dicha elucidación.

---

[132] Ver Gómez Torrente (2004), p. 168.

[133] Gómez Torrente (2002), p. 32.

Una de las ventajas más importantes de CL_R es la propuesta para eliminar las paradojas de la implicación material. Una de las objeciones que los no-clásicos han hecho a la lógica clásica es que ella valida razonamientos con forma

$p \supset (q \supset p)$

$p \supset (q \vee \neg q)$,

donde p y q son variables proposicionales que no tienen nada en común entre sí. La noción de CL_R no permite que ese tipo de razonamientos sean válidos porque no cumplen con el requisito de necesidad impuesto por **S4**: "an entailment, if true at all, is necessarily true. Because true entailment are necessarily so, we ought to grant, as we do, that truths entailed by necessary truths are themselves one and all necessary;".[134] El argumento para mostrar que esas formas de razonamiento son defectuosas según CL_R es como sigue: Para el caso de un razonamiento con forma $p \supset (q \supset p)$, supóngase que p es una oración cuyo valor de verdad depende de un hecho contingente, como ejemplo puede ser que p = 'El cauce del río es alterado por esa represa' es verdadero dependiendo de cierto acontecimiento geográfico, también supóngase que q es una oración cuyo valor de verdad depende de cierta información necesaria, como ejemplo que sea q = '2 es el único número entero positivo que es par y primo' y esa oración es verdadera gracias al modo en que se construye el conjunto de números primos en matemáticas, con el contenido de las oraciones p y q debe apreciarse de inmediato que el razonamiento $p \supset (q \supset p)$ carece de la preservación de necesidad impuesta por **S4**, pues nada en el acontecimiento contingente que hace verdadera a p implica lógicamente que q sea verdadera. Además una verdad matemática como q no parece tener influencia en absoluto para obtener a p lógicamente. La consecuencia de esto es que una forma de razonamiento como $p \supset (q \supset p)$ no es aceptada como $p \rightarrow (q \rightarrow p)$ cuando hay oraciones verdaderas necesarias y contingentes en juego (pues la conectiva relevantista '$\rightarrow$' debe otorgar necesidad a las oraciones verdaderas).[135] Un razonamiento similar al anterior puede hacerse para el caso de razonamientos con forma $p \supset (q \vee \neg q)$. Por lo tanto, razonamientos con esas formas no cuentan como casos de CL_R al no garantizar la necesidad de sus premisas a su conclusión.[136]

Al suponer que p y q son verdades de tipo diferente (verdades necesaria y contingente) surge otra objeción vinculada con la anterior: hay carencia de relevancia en la relación de implicación entre ellas. Veamos esto nuevamente para el caso de razonamientos

---

[134] A&B, (1975), Vol. I, p. 14.

[135] Una manera en que puede entenderse esto es como sigue: Suponiendo que relevantemente se tuviera a $p \rightarrow (q \rightarrow p)$ como correcto, tendría que suceder que además se obtenga $\Box(p \rightarrow (q \rightarrow p))$, y con el axioma *K* de Kripke la oración anterior es lógicamente equivalente a $\Box p \rightarrow (\Box q \rightarrow \Box p)$.

[136] Vale la pena hacer la siguiente observación: ¿Qué se puede esperar de los casos en que una oración verdadera por un acontecimiento contingente implica relevantemente otra oración del mismo tipo, es decir cuando $p \rightarrow q$ cuando p y q son ambas verdades contingentes? La exigencia de necesidad impuesta por **S4** no debe aplicarse a estos casos también, pues la cita de la p. 1 concerniente a dicho requerimiento de **S4** aclara que ese requerimiento está reservado para casos de implicaciones relevantes entre oraciones verdaderas necesariamente, de ahí que el argumento para mostrar que $p \rightarrow (q \rightarrow p)$ no es el caso cuando p es verdad contingente y q es verdad necesaria funcione. Varios lógicos relevantistas han sostenido que esta característica no es rescatado por el condicional material clásico.

con forma $p \supset (q \supset p)$: Para encontrar un absurdo, supongamos que un razonamiento de forma $p \supset (q \supset p)$ con p y q sin ningún contenido común es un caso de CL_R (es decir que $p \rightarrow (q \rightarrow p)$ se ha obtenido), entonces por el metateorema de Entailment formal para **E** hay una demostración del consecuente a partir del antecedente

1.- $p_{\{j\}}$ hip.

…

.’. *n*.- $(q \rightarrow p)_{\{k\}}$.

Por el metateorema de Entailment semántico para **R** sabemos que hay una deducción de la premisa a la conclusión y la implicación $p \rightarrow (q \rightarrow p)$ es *Vr*. De modo que hay un modelo *M* = (*S, sit. lóg., R, v*) en el que el razonamiento es lógicamente correcto. Sea *M’* el modelo donde el razonamiento es lógicamente correcto, entonces existe una situación lógica *l* dentro de *M’* que es la conexión informacional entre la premisa y la conclusión, pero por el supuesto inicial no hay contenido común entre p y $q \rightarrow p$, de modo que no puede establecerse ninguna conexión informacional *l* entre el antecedente y el consecuente de la implicación, por lo que *M’* no puede ser el modelo en cuestión. Al no haber conexión informacional entre las situaciones en que la premisa es verdadera con las situaciones en que la conclusión es verdadera, no puede establecerse ningún modelo *M* para el razonamiento, por lo que no es un caso de CL_R, y este es el absurdo que se buscaba. Nuevamente, un argumento análogo puede darse para el caso de razonamientos con forma $p \supset (q \vee \neg q)$.

Las formas inferenciales paradójicas mencionadas en los argumentos recién dados carecen de las características de necesidad y relevancia que CL_R exige de los razonamientos lógicamente correctos, así que no deben considerarse como razonamientos adecuados a aquellos con dichas formas, pues es deseable que un razonamiento que estemos dispuestos a reconocer intuitivamente como lógicamente válido sea tal que su conclusión sea impulsada por las premisas en juego. Además, otro aspecto notorio que CL_R involucra se tiene en relación al <u>principio de no-contradicción</u>, importante para la propiedad de <u>consistencia</u> en sistemas formales de lógica clásica. Clásicamente, dicho principio es enunciable como sigue: $\neg(p \wedge \neg p) \forall p \in P$ donde P representa el conjunto de las oraciones del sistema formal. Su uso permite establecer un parámetro que todos los teoremas del sistema formal deben respetar para evitar “explosiones” dentro del sistema, pues un resultado de forma $p \wedge \neg p \vdash q$ hace del sistema algo poco interesante en el sentido de que es un sistema donde cualquier oración q es demostrable en él.

Aunque se debe decir que el principio de no-contradicción tiene un uso peculiar en varias lógicas relevantes, dicho uso sirve para bloquear los razonamientos que tienen esa forma paradójica (pues $(p \wedge \neg p)\ /q$ es una forma de razonamiento lógicamente correcta en sentido clásico). En una sección anterior de este trabajo[137] se habló de cómo el enfoque modelo-teórico de CL_R usa la noción de situación en el análisis de la validez relevantista de los razonamientos, pues a diferencia de los mundos posibles kripkeanos las situaciones

[137] Ver sección 1.3 de este trabajo.

pueden ser incompletas e inconsistentes, esta segunda característica es la que permite rechazar relevantemente razonamientos con forma $p \wedge \neg p \,/q$.[138] Un esbozo de argumento se dio en la exposición de la noción de situación, ahora se verá en detalle cómo se evita tener razonamientos con forma de contradicción usando CL_R: Dentro de un lenguaje formal relevantista similar a **E**, puede construirse una expresión bien formada con forma $p \wedge \neg p$, además puede darse una interpretación M donde hay una situación inconsistente s tal que $p \wedge \neg p$ es el caso, esta conjunción es el caso en s pero falla en toda otra situación accesible desde s: "When a situation s is incompatible with itself, it is possible for it to make a formula A true, but A fail to be true in every situation compatible with s.",[139] de modo que cualquier otra oración $q_{\{t\}}$ no puede ser consecuencia relevante de $(p \wedge \neg p)_{\{s\}}$ cuando $Rst \in M$ pues $\forall l \in sit.lóg.\big(v\big((p \wedge \neg p) \rightarrow q\big), l\big) = F\big)$, a pesar de que la función valuación v del modelo es tal que $v\big((p \wedge \neg p), s\big) = V$. Por lo tanto un razonamiento con forma $p \wedge \neg p \,/q$ no es un caso de CL_R.

Los argumentos anteriores han servido para mostrar cómo ciertas formas paradójicas aceptadas en lógica clásica no son válidas dentro de las lógicas relevantes, pues violan requisitos que relevantistamente se consideran esenciales en cualquier noción pertinente de consecuencia. Pero no debe pensarse que sólo los razonamientos con formas paradójicas similares deben rechazarse, sino que todo argumento que no respete los requisitos de relevancia y necesidad debe excluirse también. Varios relevantistas han pensado en las lógicas relevantes como descriptivistas, es decir que tienen como un objetivo analizar varios elementos que se usan en lógica clásica para clarificar sus virtudes o fallas: elementos como verdad, validez, cuándo un razonamiento es lógicamente correcto, características de las conectivas lógicas, etc. Respecto a las conectivas lógicas, es destacable el rechazo por varias lógicas relevantes de la explicación clásica que reciben algunas conectivas, como las definiciones clásicas del condicional (la principal conectiva que motiva las objeciones relevantistas), la conjunción y la disyunción. Concentremos nuestra atención en las dos últimas conectivas mencionadas.

Hay relevantistas que ven a la conjunción clásica como conectiva meramente extensional: "The natural reading of 'and' is as extensional conjunction, such that 'p and q' is true iff p is true and q is true. That this homophonic truth-condition captures the truth-function of conjunction depends, clearly, on the reading of the occurrence of 'and' on the right-hand side.".[140] Este uso clásico de la conjunción permite que surjan paradojas del condicional material, como en el siguiente ejemplo: Sean A y B dos oraciones cualesquiera sin nada en común en un sistema formal

(1) $A \wedge B \vdash B$ simp.

Por construcción del razonamiento y el metateorema de la deducción se obtiene

[138] Algo que debe notarse es que esta característica hace a la lógica relevante en cuestión una paraconsistente también.
[139] Mares (2004), p. 76.
[140] Read, S., "Logical consequence as truth-preservation" en *Logique and Analyse* (2003), p. 11.

(2) $A, B \vdash A \;\Longrightarrow A \vdash B \supset A$,
empleando una vez más el metateorema de la deducción se obtiene
(3) $\vdash A \supset (B \supset A)$.
La forma de (3) coincide con la paradoja positiva en lógica clásica, y el uso clásico de la conjunción permite obtenerla como teorema en el sistema formal donde la regla de simplificación esté permitida.[141] Para evitarlo, se introduce una forma relevantista de definir la conjunción, una manera intensional en sentido de que no permite que cualesquiera dos premisas "conjuntadas" impliquen lógicamente una conclusión, las dos premisas deben estar en estrecha relación para poder "fusionarse": "The fusion of two formulae A and B is written $A \circ B$ (read 'A fuse B'). […] in relevant logic, $A_1,\ldots, A_n \vdash B$ is a valid sequent if and only if $(A_1 \circ,\ldots, \circ A_n) \vdash B$ is a valid sequent.".[142] En un razonamiento, la conclusión de dos premisas fusionadas es por implicación relevante: $(p \circ q) \rightarrow r$, además la conjunción estándar funciona como un caso especial de la conectiva de fusión (conjunción intensional), esto es
$(p \circ q) \rightarrow r \;\Longrightarrow\; (p \wedge q) \rightarrow r$,
aunque la implicación contraria no es el caso. Además, la regla de simplificación falla para la conectiva de fusión: $(p \circ q) \nvdash p$ y $(p \circ q) \nvdash q$.[143]

La relación entre la conectiva de fusión y la implicación relevante es más estrecha que la que se tenía entre la conjunción normal y dicha implicación. Los siguientes resultados se obtienen en **R**:
(*) $(p \circ q) \rightarrow r \dashv\vdash p \rightarrow (q \rightarrow r)$,
(**) $(p \circ q) \leftrightarrow \neg(p \rightarrow \neg q)$.[144]
La nueva conectiva de conjunción respeta las características de relevancia y necesidad de CL_R, pues con ella no pueden formarse conjunciones donde los conyuntos no tengan nada en común. Formas de razonamiento como la paradoja positiva '$p \rightarrow (q \rightarrow p)$' no surgen con la conectiva de fusión, pues (*) no lo permite. De modo que en los razonamientos $<K, J>$ cuya conclusión es CL_R de sus premisas, debemos ver si $K = \{k_1 \circ k_2 \circ \ldots \circ k_n\}$ y no sólo que las premisas sean conyuntos de conjunciones extensionales, pues las premisas "fusionadas" implican relevantemente la conclusión del razonamiento.[145]

La conectiva de la disyunción también ha representado problemas para los ideales relevantistas expuestos. El principal peligro que representa esta conectiva es en relación a la paradoja de Lewis o *ex falso quodlibet* '$p, \neg p \vdash q$', pues en su obtención se hace un uso demasiado libre de la disyunción. Clásicamente, *ex falso quodlibet* se obtiene de la siguiente manera:
(1) $p \wedge \neg p$ hip.
(2) p 1, simplificación

[141] Ver Mares (2004), p. 166-167.
[142] *Ibíd.* P. 167.
[143] Ver Read, S., "Logical consequence as truth-preservation" en *Logique and Analyse* (2003), p. 12.
[144] Ver *Ibíd.* P. 11 y 13. Ver Mares (2004), p. 167.
[145] Ver Read, S., "Logical consequence as truth-preservation" en *Logique and Analyse* (2003), p. 13.

(3) $p \vee q$ 2, adición
(4) $\neg p$ 1, simplificación
.'. (5) q 3 y 4, silogismo disyuntivo;

de (1)-(5) y el metateorema de la deducción se obtiene '$p, \neg p \vdash q$' que es *ex falso quodlibet*. Los aspectos principales para obtener la paradoja anterior son el uso irrestricto de la disyunción [146] y el silogismo disyuntivo (SD), además del paso (1)-(2) por simplificación. Esta última observación sirve como apoyo para que los relevantistas rechacen la regla de simplificación en todos los casos donde no se haya demostrado que el uso de la conjunción estándar está basado en la conectiva de fusión como se dijo unos párrafos atrás, así que el paso de (1) a (2) puede disputarse. Respecto a la disyunción y el uso de SD, hay relevantistas que han sugerido la eliminación de la regla SD de los sistemas formales relevantistas, aunque esta alternativa tiene el problema adicional de explicar cómo se puede razonar legítimamente con SD en algunas circunstancias. Otra alternativa sugerida es tratar de admitir SD en los sistemas formales relevantes haciendo acotaciones en el uso de la disyunción,[147] nos enfocaremos en esta manera menos radical de tratamiento de la disyunción.

¿Puede conservarse la regla SD y evitar el surgimiento de paradojas como *ex falso quodlibet*? SD es una manera de razonar altamente recurrente que por lo general arroja resultados adecuados, de modo que tratar de excluirla no parece sencillo ni deseable. Una propuesta para solucionar los defectos la da Read, empezando por introducir una nueva <u>conectiva lógica intensional</u> similar a la disyunción:

$A \oplus B \equiv_{df} \neg A \rightarrow B.$

Esta nueva conectiva, llamada <u>fisión</u>, debe su carácter intensional a la fusión de oraciones dicha anteriormente. En términos de fusión:

$A \oplus B \equiv_{df} \neg(\neg A \circ \neg B);$[148]

la información "fisionada" respeta la característica de relevancia y permite un mejor manejo de la extracción de conclusiones en los razonamientos. Esto es particularmente útil en los razonamientos donde hay más de una conclusión en juego:

$A1 \circ \ldots \circ An \vdash B1 \oplus \ldots \oplus Bn.$[149]

Con esta nueva conectiva puede introducirse una modificación a SD conocida como <u>silogismo disyuntivo intensional</u> (SDI):

$A \oplus B_{\{\alpha\}}$

---

[146] La objeción del uso irrestricto de la disyunción se basa fundamentalmente en que la disyunción sea tratada indistintamente de modo intensional y extensional. En el razonamiento de *ex falso quodlibet* la disyunción obtenida en (3) por adición es intensional, mientras que SD usado en (3) y (4) la maneja de modo extensional.

[147] Ya desde la obra de A&B se presentan propuestas de conciliación entre las lógicas relevantes y la regla γ de Ackermann:

$$\frac{\vdash \neg A \vee B \qquad \vdash A}{\vdash B}$$

que es una variante de SD. Ver A&B (1975), Vol. I. P.

[148] Mares (2004), p. 169.

[149] *Ídem.*

$\neg A_{\{\beta\}}$
$.'.\ B_{\{\alpha\cup\beta\}}$.
Además, la fisión no admite la regla de adición clásica para la disyunción: $A \nvDash A\oplus B$ para toda A-proposición. De este modo, (3) en la obtención de *ex falso quodlibet* se bloquea y no surge la paradoja.

Con lo anterior, se defiende que en los casos de razonamiento habitual donde parece funcionar SD es de hecho la forma de razonar SDI la que está detrás de esos casos. Para Mares, la revisión de los razonamientos donde esta regla está en juego requiere averiguar si hay una implicación relevante en las premisas (para asegurar que no se pierde la conexión relevante entre las premisas y la conclusión):
$A\oplus B_{\{\alpha\}} \equiv \neg A \ \rightarrow\ B_{\{\alpha\}}$
$\neg A_{\{\beta\}}$
$.'.\ B_{\{\alpha\cup\beta\}}$,
pues se ha visto formalmente que la regla restringida de MP preserva relevancia. Así, la disyunción intensional y SDI bloquean la paradoja de Lewis y permiten salvar los casos de razonamiento correctos que se tienen con SD.

Otra forma de encargarse de *ex falso quodlibet* es rechazando ciertas propiedades formales y esquemas de razonamiento que en lógica clásica se sostienen. Relevantistas como Tennant buscan lógicas relevantes que no permitan el surgimiento de *ex falso quodlibet* y al mismo tiempo conservar SD: "we understand "relevantizing" as the project of formulating a decent system of logic that does not endorse Lewis's First Paradox […] one can be relevantist yet preserve disjunctive syllogism as an essential derived rule of one's derived logic.".[150] Dicha formulación de un sistema formal relevante debe ser una que excluya, desde los cimientos, cualquier manera de obtener la paradoja mediante una demostración. Una manera de hacer esto es revisando el enfoque modelo-teórico usado en el estudio de sistemas formales para rechazar toda posibilidad de surgimiento de paradojas. Un estudio metalógico es requerido para llevar a efecto esta labor ya que, pese a que en nivel metalógico pueda tenerse la afirmación "Toda interpretación que sea modelo de *A* y ¬*A* es también un modelo de *B*" como un metateorema relevantista, lo importante es averiguar si hay una interpretación que sea modelo de una contradicción y que también sea modelo de una oración cualquiera que se siga de dicha contradicción. Aunque clásicamente esto sea el caso, relevantistamente esto no se presenta.[151]

Ya se ha comentado anteriormente que *ex falso quodlibet* surge en lógica clásica por el uso irrestricto de la disyunción y SD. Una de las soluciones dichas es cambiar las conectivas lógicas usuales de conjunción y disyunción por unas intensionales (fusión y fisión) para bloquear la paradoja, excluyendo algunas reglas de inferencia pertinentes para conseguirla. Pero otra manera de bloquear la paradoja es restringiendo algunas

[150] Tennant, N., "Relevance in reasoning" en *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic* (Ed. Shapiro, S., 2005), p. 696 y 698.
[151] *Ibíd.* P. 699.

características del comportamiento de la noción misma de inferencia. Tennant sostiene que es una mala idea tratar siquiera de modificar SD sin que se presenten pésimas consecuencias en matemáticas, pues bastantes resultados importantes obtenidos con teoremas matemáticos no se pueden rescatar empleando sistemas formales relevantes.[152] De modo que una solución para conservar SD sin que lleve al surgimiento de *ex falso quodlibet* es atacar otros aspectos en el argumento de Lewis.

En el razonamiento de *ex falso quodlibet* se ve que hay involucradas otras reglas de inferencia y propiedades para conseguir la conclusión paradójica. La estrategia de Tennant consiste en prohibir una o más de esas reglas y propiedades para evitar la paradoja.[153] Entre las propiedades de la inferencia para obtener *ex falso quodlibet* se encuentra la de Corte o transitividad de inferencia, una que permite obtener la conclusión mediante la contracción del razonamiento: si $X \vdash B$ y $Y, B \vdash C$ entonces $X, Y \vdash C$. Esta es una propiedad que tiene el razonamiento de la paradoja, pero también puede aplicarse como una regla de inferencia en los cálculos lógicos clásicos (es decir, Corte puede estar tanto en nivel lógico como en nivel metalógico). Tennant sostiene que la regla de Corte es una fuente de irrelevancia presente en la obtención de *ex falso quodlibet,* pues con las reglas de inferencia de Adición y SD se obtiene la paradoja:

$\frac{A}{A \vee B}$ por adición, $\frac{A \vee B, \neg A}{B}$ por SD y $\frac{A \vdash A \vee B,\ \ A \vee B, \neg A \vdash B}{A, \neg A \vdash B}$ por Corte.[154]

De modo que se tienen dos opciones: 1) Debe prohibirse la regla de SD o 2) Debe prohibirse la transitividad de la inferencia. Sin embargo, Tennant está consciente de que la eliminación de SD trae malos resultados dentro de la práctica matemática, así que él sostiene que Corte sea rechazado de los cálculos lógicos. Respecto de lo anterior, Tennant hace la siguiente acotación: "*We should ban Cut in those situations where its use can allow irrelevances to creep into our reasoning. But we expect the vast preponderance of Cuts in actual mathematical and scientific reasoning to be innocuous in this regard.*".[155] La prohibición del uso de Corte debe hacerse sólo en caso de que permita irrelevancia en los razonamientos. Principalmente, Corte debe ser prohibido como una regla de inferencia. Además, Tennant sostiene que la pérdida de esa regla no implica una pérdida de grandes ventajas en los cálculos lógicos, pues Corte suele ser utilizado solamente con el propósito de acelerar la consecución de las conclusiones en los razonamientos (es decir, su uso es meramente pragmático).[156]

La solución de Tennant implica que la regla de corte se prohíba en los sistemas formales que rescaten relevancia, en estos sistemas:

$X \vdash B$ y $Y, B \vdash C$, pero $X, Y \nvdash C$;

[152] Ver *Ibíd.* P. 698. Se profundizará en esta crítica después en este trabajo.
[153] Una de las reglas que Tennant considera introducen irrelevancia es "Dilution" o Debilitamiento. Esta regla debe prohibirse en los sistemas formales relevantes. Ver *Ibíd.* P. 704 – 705.
[154] Ver *Ibíd.* P. 707.
[155] *Ídem*.
[156] Ver *Ibíd.* P. 708.

el metateorema de la deducción en lógica clásica se debilita con esta propuesta al ya no sostenerse la siguiente implicación:

$X \vdash A \to B$ implica $X, A \vdash B$,

pues, aunque relevantemente se pudiera obtener $A \vdash \neg A \to B$, no podría pasarse a $A, \neg A \vdash B$. Para Tennant, esta solución cuenta con el apoyo de algunos resultados de Gentzen obtenidos con el teorema de eliminación de Corte, el cual elimina todas las aplicaciones de Corte en las inferencias cuya demostración pueda realizarse en cálculos de secuentes; a este resultado, Tennant añade que es posible demostrar el teorema de eliminación de Debilitamiento con el que se eliminan todas las aplicaciones de este regla en los razonamientos similarmente formalizables.[157]

Con lo anterior, "relevantizar" los sistemas formales debe obedecer ciertos criterios y restricciones. En dichos sistemas, las pruebas deben hacer uso de toda la información relevante para conseguir la conclusión buscada y las reglas de inferencia deben ser tales que preserven la relevancia de unas oraciones a otras (estos requerimientos ya están presentes en los sistemas formales **R** y **E** presentados en los capítulos anteriores de este trabajo). El requisito adicional añadido por Tennant señala que debe prohibirse el uso de ciertas reglas de inferencia cuando éste involucre la obtención de falacias de relevancia. Se pretende que los sistemas formales que respeten esos requisitos retengan algunas características deseables que se esperan de una lógica: i) Son un buen soporte para el desarrollo de la matemática en general y ii) su utilización es de gran ayuda en el quehacer científico.[158] Que (i) se cumpla en esos sistemas formales puede notarse porque en la práctica matemática los razonamientos donde se usan reglas de Adición y SD es bastante común, incluso Corte suele usarse en las pruebas por transitividad, pero no se suelen presentar razonamientos donde el uso de Corte conlleve la presencia de falacias de relevancia como:

$$\frac{El\ cielo\ \ es\ azul}{(\forall n \in \mathbb{N})(\neg\exists x, y, z \in \mathbb{Z})(n \geq 3 \wedge x^n + y^n = z^n)},$$

pues los sistemas formales relevantizados con las sugerencias de Tennant respetan esta característica. El cumplimiento de (ii) en dichos sistemas se garantiza con el manejo relevante de información como hipótesis en las teorías científicas, dicha información no permanece inutilizada en las inferencias permitiendo el alcance predictivo que las teorías suelen buscar en forma de conclusiones. Además, en las teorías donde la información supuesta conlleva a conclusiones irrelevantes en poder predictivo para la teoría dicha información se elimina, esto en los sistemas formales relevantes se traduce como información irrelevante en la inferencia y se prohíbe su uso en la consecución de conclusiones.

[157] Ver *Ibíd.* P. 711.

[158] Tennant pone como ejemplos de sistemas formales con dichos requisitos a los sistemas IR y CR, dichos sistemas son la relevantización de las lógicas intuicionista y clásica respectivamente. El comportamiento de las reglas de inferencia de esas lógicas Tennant lo expone en *Ibíd.* P. 712-717.

¿La información hasta ahora dicha de CL_R apoya la elucidación de CL_I en términos de la noción relevante? Las ventajas de aceptar la elucidación en términos relevantistas son las siguientes:

(i) No parece ser el caso que en el razonamiento cotidiano los agentes razonen con base en hipótesis e información que se considera sumamente controvertida, como contradicciones (y aunque así fuera los agentes no suelen estar enterados hasta que en el razonamiento lógico se esclarece la forma lógica de la información, apreciándose si ésta es contradictoria o consistente), lo común en el razonar cotidiano es extraer información en forma de conclusiones que esté mayor o menormente relacionada con la información inicial o hipótesis a disposición.

(ii) Los que se consideran buenos razonamientos tienden a ser aquellos donde se ve que sus premisas apoyan su conclusión debido a que la información inicial es pertinente para las consecuencias conseguidas, y esta pertinencia de información es lo que los relevantistas intentan rescatar en la teorización lógica del razonamiento, proponiendo el establecimiento de criterios para distinguir los razonamientos donde hay un apoyo legítimo de las premisas a las conclusiones de aquellos donde dicho apoyo es sólo aparente.

(iii) Los razonamientos donde el apoyo de premisas a conclusión es sólo aparente dan la impresión de ser lógicamente correctos, pero un examen minucioso de su estructura a través de su formalización lógica permite verificar que se tratan de razonamientos paradójicos y contraintuitivos. Dichos razonamientos deben su validez lógica a las definiciones de las propiedades metalógicas, el funcionamiento de las conectivas lógicas (principalmente el condicional material) y la postulación de las reglas de inferencia que la lógica clásica admite. No obstante, relevantistamente, varias de esas definiciones no son aceptadas y el funcionamiento de algunas conectivas lógicas es repensado para no admitir ciertas reglas de inferencia, de modo que las paradojas se bloquean. Esto último permite notar que lógicas como **R** y **E** ofrecen cierta ventaja para entender del comportamiento y estructura del razonar cotidiano, y clásicamente la carencia de dicho elemento explicativo es notoria.

La manera en que (i)-(iii) sirven para explicar el comportamiento de CL_I se basa en aspectos importantes presentes en nuestro razonar cotidiano. Con (i), se permite apreciar más claramente el enlace que hay entre premisas y conclusión en los razonamientos que consideramos válidos. Con (ii) se pretende mostrar que los razonamientos válidos son aquellos donde la característica de relevancia entre premisas y conclusión está presente todo el tiempo. Con (iii) se intenta mostrar cómo nuestro razonar cotidiano puede ser malinterpretado clásicamente con la introducción y utilización de varias nociones y propiedades lógicas, como las conectivas clásicas, además de cómo los sistemas relevantes solucionarían dichos defectos.

Respecto del comportamiento de algunas conectivas lógicas y reglas de inferencia, relevantemente se propone una redefinición de ellas para apoyar el surgimiento de razonamientos que cumplan con las condiciones impuestas por los sistemas lógicos relevantes. Nuevamente, esta redefinición está apoyada en el funcionamiento del razonar cotidiano, pues es claro que las disyunciones y conjunciones están formadas con información que no es ajena entre sí, la información manejada en disyunciones y conjunciones guarda relación entre sí y es posible extraer conclusiones de ella en forma de alternativas (disyuntos) o información parcializada (conyuntos). La propuesta de redefiniciones como fusión y fisión encaminan las teorías lógicas hacia la captura de esas características, además el surgimiento de irrelevancia disminuye drásticamente al prohibirse las reglas de inferencia que motivarían la irrelevancia (como adición y simplificación en algunos casos).

Aun si no se está dispuesto a aceptar las redefiniciones de las conectivas lógicas, es posible evadir las paradojas en lógica clásica restringiendo parcial o totalmente algunas reglas de inferencia y propiedades metalógicas dentro de los sistemas lógicos relevantes. Es común ver que en el razonamiento cotidiano ciertas formas de inferencia suelen tener excepciones de aplicación si ellas conllevan contradicciones:

$$\frac{Hoy\ llueve}{Hoy\ llueve\ o\ es\ un\ día\ soleado};\ \frac{Hoy\ llueve\ o\ es\ un\ día\ soleado, hoy\ no\ llueve}{Es\ un\ día\ soleado};\ \therefore\ \frac{Hoy\ llueve\ y\ hoy\ no\ llueve}{Es\ un\ día\ soleado}$$

Este es un razonamiento formado por información que a su vez también es resultado de razonar. Nos inclinamos a rechazar su conclusión porque, pese a que la información manejada en las premisas no parece tener ningún problema, la conclusión con forma de *ex falso quodlibet* choca con nuestras intuiciones. De esto que el manejo de la información como siempre transitiva no es aceptable en el razonamiento cotidiano. Otros factores que son de carácter presumiblemente pragmático están en juego, y estos ayudan a decidir la mayoría de las veces cuándo las reglas de inferencia suelen llevarnos correctamente a las conclusiones obtenidas.[159] Los relevantistas intentan introducir estas características en sus sistemas formales prohibiendo o restringiendo las reglas y propiedades causantes de las paradojas, siempre que las nociones relevantistas sean respetadas las paradojas no tienen ocasión de surgir. De este modo aún pueden conservarse las reglas de inferencia y propiedades clásicas, pero el uso irrestricto de ellas se elimina a cambio de obtener aplicaciones más acotadas de ellas donde se respeta la condición de relevancia impuesta por lógicas como **R** o **E**.

3.- Nociones tarskiana-clásica y relevantista de CL. Hacia la obtención de una elucidación de la noción intuitiva de consecuencia lógica.

En las secciones anteriores de este trabajo se ha hecho un análisis del funcionamiento que tienen algunas nociones técnicas de consecuencia lógica desde dos enfoques teóricos distintos. La noción clásica busca reunir las propiedades de formalidad y modalidad en su explicación de lo que significa ser un razonamiento lógicamente correcto, además la noción clásica recibe bastante precisión con las herramientas formales que Tarski postula, pues no sólo se mantienen la formalidad y modalidad en la noción de CL sino que se ofrecen razones para apoyar que la noción técnica de CL_T sería correcta respecto a la noción intuitiva. A través de las nociones de verdad, satisfacción, modelo, etc., se

[159] Se ahondará en esto en el siguiente capítulo.

proporciona una explicación precisa de cómo se efectúa el razonamiento en general.[160] Además anteriormente en este trabajo se han expuesto razones para creer que la noción tarskiana de CL puede ser correcta respecto de lenguajes de 2do orden.[161] Aunque hay controversia al respecto, las razones parecen ser lo bastante fuertes para apoyar dicha adecuación de CL_T respecto de esos lenguajes.

La noción relevantista se propone como una alternativa a la noción clásica, CL_R es resultado de la reacción de varios lógicos ante los problemas que estos le atribuyen a la noción clásica de consecuencia lógica. En este trabajo se han dado razones para pensar que la noción relevantista también es compatible con las propiedades de formalidad y modalidad (específicamente, dichas razones muestran que el que CL_R tenga esas propiedades es consecuencia de varios requisitos que la noción relevantista reúne, sin olvidar que esto es para el caso de los sistemas **R** y **E**), aunque según los relevantistas lo más importante que debe reunir una noción de consecuencia lógica son los componentes de necesidad y relevancia (ésta última entendida en el sentido de **R**).[162] Según los relevantistas, el razonamiento intuitivamente correcto es mejor explicado por una noción técnica de consecuencia que muestre que la conclusión se sigue lógica y necesariamente de sus premisas. Los razonamientos que son casos de CL_I ya tienen involucrados varios aspectos importantes que hacen que las premisas impliquen lógicamente la conclusión, aspectos como la relevancia y la necesidad. Los razonamientos lógicamente correctos son aquellos donde la verdad de sus premisas es preservad a su conclusión, y desde un punto de vista relevantista, ya hay un componente de relevancia en dichos razonamientos que se elucida con su teoría de CL.[163]

El objetivo restante de este trabajo es evaluar las nociones de CL hasta ahora analizadas (CL_T y CL_R) para decidir cuál de ellas ofrece una mejor explicación del comportamiento de la noción intuitiva de consecuencia lógica.

3.1.- Etchemendy y Ray: La propiedad modal de CL_T y la distinción de términos lógicos/no-lógicos.

(a) Crítica a la propiedad modal de CL_T: Solución de Ray al problema de Etchemendy.

Un argumento que suele esgrimirse en contra de <u>CL_T es que carece de una tratamiento adecuado para tratar la propiedad de necesidad presente en los razonamientos lógicamente correctos</u> (Tarski mismo no se adentró en nociones de modalidad cuando postuló su noción de CL). De hecho, en Etchemendy (1999) se apoya esta crítica aludiendo a un argumento que intenta mostrar que Tarski cometió una falacia en su definición de CL. El argumento se apoya en el hecho de que hay ciertos lenguajes relativamente simples en

[160] Nótese que esto no es decir que en el razonamiento cotidiano solemos pensar en términos de modelos tarskianos y todo lo que conllevan. En Gómez Torrente (2000) , p. 43 y en una parte anterior de este trabajo se ha dicho que lo adecuado para una noción técnica de CL es ofrecer una explicación del funcionamiento de la noción intuitiva. Remplazar la noción intuitiva con una técnica no es el objetivo de este trabajo.

[161] Ver sección 2.1 de este trabajo.

[162] Ver sección 1.3 de este trabajo.

[163] Esto es algo que Read defiende en Read, S., "Logical consequence as truth-preservation" en *Logique and Analyse* (2003). La noción de CL está fundamentada en la <u>preservación de verdad</u> de premisas a conclusión.

los que se forman razonamientos que son casos de CL_T, pero intuitivamente no los reconoceríamos como casos de CL. La objeción es como sigue: Sea L - lenguaje de 1er orden que tiene el conjunto de constantes no-lógicas L_{nl} = {'A. Lincoln', 'G. Washington', 'haber sido presidente', 'tener barba'}, y el siguiente conjunto de constantes lógicas L_{conlog} = {¬, ⊃}, parece claro que en interpretaciones estándar de las constantes no lógicas un razonamiento como

(*) $\frac{Washington\ fue\ presidente}{Lincoln\ tiene\ barba}$

no contaría como un caso de CL_T. Sin embargo, el argumento se apoya principalmente en el hecho de que no se cuenta con un criterio de selección que determine la distinción de términos lógicos / no-lógicos (la elección de constantes lógicas depende por entero de los agentes operantes del lenguaje), así que para el lenguaje de (*) una posible elección de los términos lógicos es una tal que $L_{nl} \subseteq L_{conlog}$ (es decir, que todos los términos introducidos en L sean lógicos),[164] así (*) se convierte en un caso de CL_T ya que toda interpretación que es modelo de la premisas también lo es de la conclusión. Esto es así ya que todo modelo de interpretación no altera el contenido de ninguno de los componentes de (*) (pues todos son lógicos). Pero parece claro que (*) no es un razonamiento lógicamente correcto desde el punto de vista intuitivo. De esto, el argumento concluye con la tesis de que hay razonamientos para los que parece evidente su invalidez pero que CL_T clasifica como lógicamente correctos.

El análisis hecho en este trabajo nos arrojó como resultado la tesis de que un caso de consecuencia lógica es tal que su conclusión se sigue de sus premisas por necesidad lógica. Pero el argumento anterior mostraría que CL_T no tiene un tratamiento adecuado del aspecto modal de la consecuencia lógica. En los términos del propio Etchemendy, la "falacia de Tarski" es la siguiente:[165] Sea un razonamiento <*K, X*> y sean P = X es CL_T de K, $Q = \forall k \in K(k\ es\ Verdadero)$, R = X es *Falso*; lo único que se tiene con la definición tarskiana de consecuencia lógica es

$\neg(P \wedge Q \wedge R)$ para todo razonamiento <*K, X*>,

y lo que se requeriría demostrar para incorporar el componente modal a la noción tarskiana de consecuencia lógica es

$P \Longrightarrow \neg(Q \wedge R)$ para todo razonamiento <*K, X*>;

la falacia cometida por Tarski es

$\frac{\Box((P \wedge Q) \Rightarrow \neg R)}{P \Rightarrow \Box(Q \Rightarrow \neg R)}.$

Para este argumento consideramos la respuesta que se da en Ray (1996)[166] en defensa de CL_T. El argumento anterior falla porque se le atribuye erróneamente a CL_T el propósito de ofrecer un tratamiento de la consecuencia lógica en términos de modalidad, CL_T es presentada por Tarski con el propósito de ser una noción materialmente adecuada de

[164] Ver Etchemendy, J., *The concept of Logical Consequence,* (1999), p. 87.
[165] *Ídem.*
[166] Me limitaré aquí a analizar la respuesta de Ray a la falacia modal supuestamente cometida por Tarski.

consecuencia lógica. Esto quiere decir que CL_T trabaja con las nociones de secuencia, satisfacción, modelo, etc., con el propósito de elucidar cuándo se tiene un argumento lógicamente correcto en relación a lo expresado por el lenguaje dada una interpretación de él (interés por el alcance <u>extensional</u> del lenguaje en que se formulan los razonamientos): "There are good reasons to suppose that Tarski's aim was to give a *materially adequate* characterization of logical consequence. However, Etchemendy thinks that Tarski's goal was to produce a conceptual analysis of logical consequence. […] that Tarski's should get the right answers in *any conceptually possible circumstance* […]",[167] es decir que CL_T no tiene el propósito de ser una noción <u>intensional</u> de consecuencia lógica ('intensional' entendida como la característica modal que Etchemendy parece atribuir a la noción), de modo que consideraciones como "si el mundo *hubiera* sido de tal o cual manera, cierta *P*-oración hubiera sido CL_T de otra información *Q*" no son el objetivo de la noción tarskiana de consecuencia lógica. Que se quiera que CL_T sea materialmente adecuada es motivado por un interés de Tarski al postular su noción de consecuencia lógica, a saber cómo es que en los razonamientos lógicamente correctos hay una preservación de verdad de las premisas a la conclusión, y su noción materialmente adecuada es resultado de ese interés.

Una respuesta directa al argumento que culpa a Tarski de cometer la falacia modal es el de atribuir a CL_T características que no tiene. Ray menciona que Etchemendy interpreta la posición tarskiana con la siguiente equivalencia: Sea un razonamiento $<K, X>$, (Si $(K \Rightarrow_T X)$ entonces $\Box(\forall k \in K(k\ es\ verdad) \Rightarrow X\ es\ verdad)$) $\Leftrightarrow$ (Si $(K \Rightarrow_T X)$ entonces *X* es consecuencia lógica de *K*). Ray sostiene que la implicación de izquierda-a-derecha requiere el siguiente supuesto (no asumido por Tarski):
(+) Si es necesario que si toda premisa en *K* es verdadera entonces *X* es verdadera, entonces *X* es consecuencia lógica de *K*.
Ray sostiene que esto es lo mismo que decir que la noción de implicación estricta es condición suficiente para la consecuencia lógica.[168] Etchemendy toma CL_T con la característica señalada en (+), pero para Ray esto va contra el propósito original de CL_T el cual es ser una relación formal. Ya se dijo anteriormente que la noción tarskiana de consecuencia lógica es extensional y no tiene como objetivo presentarse en términos de alguna modalidad, así que no debe entenderse $(K \Rightarrow_T X) \equiv K \mathrel{-\!\!3} X \equiv \neg\Diamond(K \wedge \neg X)$ ya que la primera equivalencia es incorrecta.[169]

Otro error señalado por Ray consiste en la pretensión de basar CL_T en lo siguiente:
(++) Para todos *K* y *X*, *X* es una consecuencia lógica de *K* sii hay una *F*-función de selección de términos fijos tal que *X* es una *F*-consecuencia de *K*.[170]

---

[167] Ray, G., "Logical Consequence. A defense of Tarski" en *Journal of Philosophical Logic* (1994), p. 643
[168] *Ibíd.* P. 650.
[169] *Ibíd.* P. 651.
[170] *Ídem.* Aquí puede surgir la siguiente pregunta: ¿Qué es una función de términos fijos? Ray la introduce como una forma de explicar una de las ideas centrales de la postura de Etchemendy. Éste piensa que, al no haber una manera clara de hacer la distinción entre términos lógicos/no-lógicos dentro de los lenguajes, queda a elección de los usuarios del lenguaje qué términos pueden ser lógicos (nótese que esto permite no sólo que los conectivos lógicos tradicionales puedan ser interpretados como no-lógicos, sino que cualquier término

Etchemendy cree que demostrando (++) se tendrá la corrección de CL_T, pero Ray rechaza esto diciendo que la corrección de CL_T depende de algo como:
(+++) Hay una *F*-función de selección de términos fijos tal que, para todos *K* y *X*, *X* es una consecuencia lógica de *K* sii *X* es una *F*-consecuencia de *K*.
Es fácil notar que (+++) es una aseveración existencial que debe ser evaluada según su cuantificador. Para el argumento de Etchemendy dado anteriormente en esta sección sobre un caso de CL_T que intuitivamente no lo es, el lado derecha-a-izquierda de (+++) nos sirve para apreciar que, al haber una función de selección *F* que erróneamente nos arroje 'Lincoln tiene barba es CL_T de que Washington fue presidente', no implica que ninguna otra función de selección pueda arrojarnos un resultado distinto de éste.[171]

De hecho, para que (+++) pudiera ser un criterio efectivo en la determinación de la corrección de CL_T se requieren al menos otros dos requisitos, uno de ellos ya mencionado por Tarski en su trabajo de 1936 en relación a la condición F: (i) Que el lenguaje considerado tenga un término para cado objeto posible, y (ii) que la función de selección de términos no esté relativizada a los usuarios del lenguaje. Sabemos ya por el propio Tarski que (i) es inalcanzable y (ii) requiere que se pueda dar una distinción clara de términos lógicos/no-lógicos. En realidad (+++) es muy preliminar si ha de pensarse que sirve para determinar la corrección de CL_T, pues los desafíos que enfrenta no son sencillos.

Pese a lo anterior, no debe pensarse que CL_T está desprovista de toda fuerza modal deseable en una noción técnica de consecuencia lógica.[172] Como ya se ha visto antes en secciones pasadas en este trabajo, hay motivos para pensar que las propiedades de CL_T permiten atribuirle un carácter modal a la noción: a pesar de que el propio Tarski no introdujo explícitamente un carácter modal a su noción de CL, tenemos razones para pensar que CL_T cumple la propiedad modal gracias a la idea de que ninguna interpretación que haga verdaderas a las premisas de un razonamiento hace falsa su conclusión, pues la verdad de las premisas así interpretadas se preserva a la conclusión de dicho razonamiento. Además podemos añadir las razones de Ray para fortalecer el carácter modal atribuido a CL_T. El mismo Tarski pensó que una noción de consecuencia lógica satisfactoria debe cumplir dos requisitos: (1) Debe ser capaz de preservar la verdad de las premisas a la conclusión, y (2) debe ser una relación formal en sentido de que el significado específico de las premisas no debe ser un factor determinante para concluir otra cosa. Según Ray,[173] (1) y (2) determinan la "condición de substitución" que es condición necesaria para que se establezca la consecuencia lógica entre premisas y conclusión (esa condición de la que habla Ray es lo que en el trabajo de Tarski es llamado Condición (F) de la cual ya hablamos

puede ser lógico y la cantidad de ellos puede ser variable). Esta idea fundamenta el argumento etchemendiano contra CL_T presentado antes en este capítulo. Lo que hace Ray en el texto citado antes es presentar esa idea en términos de funciones que van de lenguajes en los lenguajes mismos, por eso el que algo sea consecuencia lógica de otra cosa dependería en gran medida de qué términos estén en la imagen de la función de selección de términos, dichos términos son lógicos en el lenguaje dada una interpretación.

[171] Ver *Ibíd.* P. 652.

[172] *Ibíd.* P. 647.

[173] *Ibíd.* P. 653.

en una sección anterior). Para dar más apoyo a dicha idea, Ray formula el siguiente teorema que también demuestra:

"Theorem [T]. *For any φ and Γ, the Substitution Condition is a necessary condition for φ's being a Tarskian consequence for Γ. That is, if* $\Gamma \vDash_T \varphi$ *then, for all respectful replacement functions, ρ, if all the sentences in ρ(Γ) are true, then the sentence ρ(φ) is true.*".[174] El teorema T garantiza (1) porque la condición de sustitución se aplica a todas las funciones de remplazo ρ determinadas por los modelos que hacen a <Γ, φ> lógicamente válido, con cada interpretación de las constantes no-lógicas de Γ hay nuevas ρ's tales que si hacen a todo miembro de Γ verdadero entonces deben hacer verdadero a φ, las funciones ρ preservan la verdad de Γ a φ en este sentido; (2) es asegurado por el teorema T porque la forma lógica de los razonamientos <Γ, φ> lógicamente válidos no se altera con la condición de sustitución, y ya que la forma lógica de un razonamiento lógicamente correcto es un requisito para tener CL_T (pues es condición necesaria por la condición F) todas las funciones ρ la dejan inalterada. Ray sostiene que el uso tarskiano de los términos modales va encaminado a defender que la noción de consecuencia lógica es una relación necesaria entre premisas y conclusiones en razonamientos lógicamente correctos, a diferencia de Etchemendy que interpretó el uso tarskiano de los términos modales como atribuyendo necesidad a las conclusiones en dichos razonamientos.

(b) Sobre por qué es deseable una distinción de términos lógicos/no-lógicos.

En este trabajo se ha insistido en que CL_T es una noción tanto formal como modal. Ya debe ser evidente que la forma lógica de los razonamientos lógicamente correctos es crucial para la noción tarskiana de consecuencia, pues un razonamiento no-lógicamente correcto tendrá una forma lógica que no garantiza la preservación de verdad de sus premisas a su conclusión. De hecho, una objeción adicional que se puede hacer al ejemplo (*) de Etchemendy es que, aparte de ser problemático sostener que dicho ejemplo es un caso de CL_T y no un caso de consecuencia intuitiva, no ha dado razones para pensar que (*) cumple con la condición formal impuesta por CL_T. El lenguaje que Etchemendy presenta para construir (*) no está diseñado en principio para que la forma de (*) garantice la preservación de verdad de su premisa a su conclusión, pues la forma de ese razonamiento es $P \Rightarrow Q$ donde P y Q son las oraciones sobre la presidencia de Washington y la barba de Lincoln. Podría pensarse que Etchemendy elude la objeción al convertir todos los términos de su lenguaje en términos lógicos, sin embargo esa maniobra sólo es aceptable al concederle a Etchemendy que <u>no es posible</u> trazar una distinción clara entre términos lógicos/no-lógicos. Alguien que no reconozca modo alguno de catalogar términos lógicos puede aceptar la forma de proceder de Etchemendy y tratar todos los términos de los lenguajes como lógicos, así los razonamientos como (*) no tienen problema en ser lógicamente correctos (pues no hay interpretación en que un término lógico sea falso, ni siquiera se dice que los términos lógicos tengan un valor de verdad).

[174] *Ídem.* La prueba de dicho teorema se halla en ese mismo artículo en el apéndice A.

Dicho lo anterior, es claro que un estudio de la constancia lógica es imprescindible. En su trabajo de 1936, Tarski diseñó su propuesta de noción de consecuencia lógica bajo la idea de considerar algunos términos como lógicos y no a otros, pues su propósito era ofrecer una caracterización clara del concepto de consecuencia lógica que es tan ampliamente usado en varias disciplinas de estudio como las matemáticas.[175] En su tiempo (y aún ahora) es común a la práctica matemática que los sistemas axiomáticos y los teoremas estén formulados lógicamente con las conectivas lógicas usuales de implicación, disyunción, etc., y no se trata a todos los términos de los sistemas y teoremas como lógicos, pues vistos como estructuras matemáticas se da la importancia a saber cuáles modelos matemáticos satisfacen dichas estructuras y cuáles no. Esto último es algo irrealizable si las teorías se formaran con lenguajes donde todos los términos son lógicos, pues no tendría caso buscar modelos donde no fueran válidas (no existirían dichos modelos). Esta es una razón por la que el mismo Tarski y otros han pensado que, aunque no se ha dado una distinción clara entre términos lógicos/no-lógicos, es más ventajoso que haya términos lógicos y otros que no lo sean.

Tarski propone que los términos lógicos sean invariantes bajo permutaciones del conjunto-universo de interpretación sobre sí mismo;[176] otros como Mario Gómez Torrente proponen que las constantes lógicas no son definidas apelando simplemente a características matemáticas, semánticas o epistemológicas claramente explicadas, sino que ellas se escogen de acuerdo a su utilidad práctica: "The principles underlying this concept [logical constant] are subtle and numerous and reflect a variety of fundamentally pragmatic desiderata: general usability, degree of usability, level of utility... A logical constant may be just an expression which satisfies these desiderata, vague and complex as this characterization may be.".[177] Algo destacable es que algunos términos cumplen con las propiedades dichas porque su utilidad en algunas ciencias específicas es clara, pero es un hecho que hay otros términos comunes en la formalización de varias teorías, de modo que esto los hace aptos para figurar al interior de la lógica como encargada de brindar el rigor formal en otras ciencias. Esto constituye un apoyo a la idea de que debe haber una colección de términos considerados como lógicos que cuentan con características exclusivas que los distinguen de aquellos términos que no parecen formar parte de la estructura lógica analizable.

Lo dicho al respecto de la distinción términos lógicos/no-lógicos tiene repercusiones importantes en la noción intuitiva de consecuencia. Desde el comienzo de este trabajo se han tomado ejemplos de razonamientos que son analizables desde las posturas tarskiana o relevantistas. En algunos de esos razonamientos, a pesar de parecer evidente que su conclusión se sigue de sus premisas, no es del todo claro por qué esto ocurre hasta que se los analiza con algunas herramientas lógicas para extraer su forma lógica y observar su

[175] Ver Tarski (1936b), p. 409 y 410.
[176] Ver Tarski (1986). La idea de Tarski consiste en evaluar con distintas interpretaciones las expresiones de los lenguajes, y aquellos términos que permanecen inalterados bajo cada interpretación se consideran lógicos.
[177] Gómez Torrente (2002), p. 4.

comportamiento desde la semántica. Como ya se vio antes, hay buenas razones para creer que la propiedad de formalidad es esencial a los razonamientos, pues ésta fundamenta la idea de que hay una cierta estructura sintáctica en los razonamientos la cual proporciona información sobre su validez o no-validez. Pero la estructura sintáctica es analizable desde la lógica gracias a que hay la inclinación a pensar que ciertos elementos de la estructura permanecen fijos (estos elementos constituyen la primera base sintáctica para que sea posible analizar las expresiones en primer lugar), y dichos términos son pensados como los términos lógicos. Dichos términos permiten aislar ciertas estructuras lógicas que son la base para determinar una colección importante de razonamientos lógicamente correctos (el mismo Aristóteles efectuó la labor de caracterizar ciertas formas argumentales consideradas lógicamente correctas, dichas formas constituyen la silogística aristotélica), y esto es así para quienes admiten una noción de consecuencia tarskiana o relevantista. Pero si se sostiene la idea de que no hay tal distinción entre términos entonces el apoyo que recibe la propiedad de formalidad desaparece, y en el peor de los casos, si no hay una manera de justificar sin apelar a tal distinción cómo se comporta la forma lógica de los razonamientos entonces no hay manera de usarla como criterio en las pruebas formales de validez, lo cual es algo indeseable en la lógica como encargada de estudiar los razonamientos en general.

Cotidianamente tendemos a obedecer ciertos patrones de razonamiento cuando obtenemos conclusiones a partir de cierta información, y hay razones para pensar que la noción intuitiva de consecuencia funciona gracias a dichos patrones. En el razonamiento intuitivo se suele tomar a ciertas expresiones como "esqueletos" en los que al poner información obtenemos nuevos datos (esqueletos entendidos como estructuras argumentales, piénsese en "si … entonces …", "… y …", "… o …", "todos … tales que …", etc.), y parece innegable que dichos esqueletos están formados con ayuda de ciertos términos exentos de cualquier persona o información particular. Si la elección de términos lógicos fuera tan laxa como Etchemendy sugiere entonces no sería raro que cada individuo pudiera razonar de las maneras más diversas posibles y cualquier intento de argumentar a favor o en contra de cualquier información quedaría reducido a sostener algo como lo siguiente: "Dados mis esquemas lógico-formales, mi argumentación es correcta", de modo que sería imposible llegar a acuerdos acerca de conclusiones a menos que siempre se esté dispuesto a asumir los esquemas lógicos particulares de otros individuos para cada razonamiento. No parece que el estudio en lógica se rija por tales criterios, al contrario: se piensa en la lógica como disciplina de lo más objetiva y neutral respecto de todos los temas particulares analizados por ella. Y esto es gracias a que al interior de la lógica radican ciertos términos que fundamentan el estudio de los razonamientos.

Así, podemos pensar lo siguiente: aunque Etchemendy esté en lo correcto al sostener que no tengamos manera de distinguir claramente entre términos lógicos/no-lógicos, esto no implica que dicha distinción no exista en absoluto. En este punto concuerdo con Gómez Torrente en la idea de que solemos distinguir los términos lógicos gracias a ciertos factores pragmáticos. Esta manera de entender el funcionamiento de los términos lógicos es compatible con CL_I, pues desde la práctica argumentativa suele distinguirse una cierta manera en que razonamos, y dicha manera incluye algunos términos que nos permiten trabajar con la información tenida para así obtener nueva información, estos términos son los que comúnmente entendemos como las conectivas lógicas. Por lo que el comportamiento de CL_I se apoya en gran parte en asumir que ciertos términos son comunes en la mayoría de nuestros razonamientos, pues ellos permiten la obtención de conclusiones con la información tenida (el caso por excelencia es "si…entonces…"). Esto es así también para las disciplinas científicas, pues prácticamente toda teoría científica es susceptible de ser reconstruida con el rigor formal de la lógica, y es frecuente buscar las consecuencias que la teoría arroja con los términos y herramientas lógicas a disposición. De hecho, esto es particularmente evidente en la teoría tarskiana sobre la verdad y la consecuencia lógica con las nociones de función oracional y formular, pues cuando en una oración (o fórmula) se sustituyen todos los términos no-lógicos por variables de orden adecuado queda la estructura lógica fundamental de esa oración (o fórmula), y en esa estructura fungen los términos para saber qué condiciones de verdad tiene esa oración (o fórmula). Todo esto es llevado hasta CL_T a través de la noción de modelo, así que cuando se tiene un razonamiento $<K, X>$ tal que $K \Longrightarrow_{CLT} X$, es decir que todo modelo de K es modelo de X, nos convencemos de que cuando sea K verdadera X lo debe ser también, y esto es algo muy similar al funcionamiento del razonamiento intuitivo, pues cuando se tiene una información cualquiera que se piensa verdadera se suele creer verdadero todo lo que dicha información implica.

Ahora podemos sintetizar lo dicho hasta ahora. Etchemendy pretende objetar que CL_T es defectuosa respecto de la propiedad modal que los razonamientos lógicamente correctos deben cumplir (dicho defecto queda acentuado al atribuir a Tarski una falacia modal en la construcción de CL_T), pero Ray presenta razones para creer que Etchemendy atribuye a CL_T características y objetivos erróneos, destacando que si se tiene un razonamiento lógicamente correcto entonces CL_T no asegura que la conclusión sea necesaria (la propiedad modal no se atribuye sólo al consecuente) sino que el contenido de las premisas se relaciona necesariamente con el de la conclusión (la necesidad afecta a todo el razonamiento lógicamente correcto). Al ir más lejos, se vio que una razón fuerte para que Etchemendy construya su crítica contra CL_T se apoya en sostener que no hay distinción términos lógicos/no-lógicos, sin embargo tenemos razones para creer que eso ataca no sólo a CL_T sino también a CL_I. El funcionamiento de CL_I se apoya en gran medida en el papel desempeñado por los términos que tienen que ver con la estructura formal de los razonamientos, y más aún la fundamentación de la propiedad formal de consecuencia yace en que haya términos lógicos que permiten evaluar el comportamiento formal de los razonamientos. Aunque no es claro cómo definir la distinción entre términos lógicos/no-lógicos, hay propuestas viables para comenzar a ver tal distinción (la de Tarski y la de Gómez Torrente son algunas), y CL_T admite tal distinción en los razonamientos. Esta distinción ayuda a apreciar que CL_T concuerda con CL_I en medida de pensar que todo modelo de las premisas lo es de la conclusión es bastante similar a lo que se hace en nuestra práctica argumentativa cotidiana apoyada por CL_I.

3.2.- Revisando la propiedad de Modalidad en CL_R y sobre el requerimiento de nuevas definiciones de las conectivas lógicas.

(a) ¿La modalidad en CL_R está libre de dificultades?

En este trabajo se ha analizado el funcionamiento de la noción relevantista de consecuencia lógica en términos de dos de sus principales exponentes, los sistemas **R** y **E**. Los resultados adquiridos consistieron en una serie de características formales y semánticas que están en juego cuando en un razonamiento la conclusión se sigue relevantemente de sus premisas (un sistema formal relevante acepta ciertos axiomas y reglas de inferencia, con algunas restricciones; una interpretación semántica de la lógica relevante la da Mares en términos de situaciones, etc.). Además, hemos visto cómo CL_R puede cumplir con las propiedades de modalidad y formalidad esenciales de CL_I: 1) Formalmente, un razonamiento es un caso de CL_R cuando su forma lógica, estructurada con los componentes relevantes (condicional relevante, etc.), garantiza que todo razonamiento igualmente estructurado será un caso de CL_R; 2) modalmente, todo razonamiento que pueda modelarse mediante una estructura {*S, sit. lóg., R, v*} tal como se define en la semántica maresiana es un caso de CL_R, pues al ser sus premisas verdaderas dada una estructura como la anterior la verdad de su conclusión se garantiza en esa misma estructura, es decir que es necesario que la verdad de sus premisas implique relevantemente su conclusión.

Ahora nos enfocaremos en un punto en que CL_R se relaciona con la propiedad de modalidad de la noción de consecuencia lógica. En la sección 1.3 de este trabajo se expuso que, formalmente, <u>CL_R es cerrada bajo necesidad</u> y una proposición que A&B demuestran para defender esto. La idea de ellos es: "[…] the notion of logical necessity is indissolubly linked with that of logical consequence (entailment), and in particular that if *A* is a logical consequence of a *true* entailment, then *A* ought to be necessary.",[178] y la noción de necesidad que manejan es definida de acuerdo a sistemas lógicos como **S4** y **S5**: $\Box A=A\rightarrow A\rightarrow A$.

La proposición citada expresa que si un razonamiento $<P, Q>=K$ es un caso de CL_R entonces toda otra oración *X* tal que el razonamiento $<K, X>$ es un caso de CL_R cumple con que *X* es necesaria en el sentido anterior definido. Esto es importante porque, a diferencia de CL_T y su relación con la propiedad modal analizadas en la subsección anterior, la modalidad aquí tiene un comportamiento similar a como Etchemendy piensa, a saber que en un razonamiento lógicamente correcto su conclusión sí es necesaria siempre que sus premisas sean verdaderas: Sea $<P, Q>=K$ un caso de CL_R, para toda *A*-oración se cumple

$$\frac{K \vDash_R A}{K \rightarrow \Box A}.$$

Algo que debe aclararse es que la noción de necesidad que reconocen A&B adquiere una mayor justificación con el uso de la semántica situacional de Mares, es decir que un razonamiento $<K, J>$ que es caso de CL_R es tal que: i) formalmente, $\Box J=J\rightarrow J\rightarrow J$, ii) semánticamente, todo modelo {*S, sit. lóg. R, v*} de *K* es modelo de *J*. ¿Cómo está vinculada

[178] A&B, (2da. imp. 1990), p. 28.

la modalidad de CL_R en los enfoques formal y semántico con la propiedad modal de CL_I? A continuación ahondaremos en esto.

Los mismos A&B son conscientes de que la noción de modalidad para CL_R definida como se mencionó anteriormente es extraña, pues no parece haber una relación directa entre la necesidad de una conclusión J con una expresión de la forma $J \to J \to J$. Por lo que A&B redefinen la necesidad en su sistema **E** basándose en la siguiente idea: Para toda fórmula proposicional A tal que $p_1, \ldots, p_n$ son todas sus variables proposicionales, se tiene la demostrabilidad de A en **E** sólo si la fórmula $(\bigwedge_{i=1}^{n}(p_i \to p_i)) \to A$ es demostrable en **E**.[179] Usando esto se redefine la necesidad en **E** como sigue:

$\Box A = (\bigwedge_{i=1}^{n}(p_i \to p_i)) \to A$,

lo que en palabras significa que la necesidad de una oración está dada por el hecho de que cada componente suyo se implica relevantemente a sí mismo (la necesidad de A es equivalente por definición a que todas las proposiciones p_i en una fórmula A que se implican relevantemente a sí mismas implican A). Otra manera de expresar la definición anterior de necesidad es cuantificando sobre variables proposicionales como hacen A&B en el sistema $FE^{\forall\exists p}$:

(n**E**) $\Box A = \forall p(p \to p) \to A$.[180]

La nueva forma de expresar la modalidad difiere de la anterior únicamente en lo siguiente: para el caso de **E** la cantidad de variables proposicionales en una fórmula no es igual en general, de modo que especificarlas cada vez se vuelve imprescindible (mediante la conjunción de las n variables de la fórmula en cuestión); mientras que en $FE^{\forall\exists p}$ puede abarcarse toda variable proposicional con el uso de la cuantificación universal. Otra cosa que vale la pena notar es que la primera definición dada por A&B es un caso particular de las definiciones anteriores expuestas:

Sea $A=p$, entonces $\Box A = (\bigwedge_{i=0}^{0}(p_i \to p_i)) \to A = p \to p \to p$.

Para el caso de oraciones atómicas la necesidad se define como una conjunción degenerada de las oraciones que conforman la oración original (a saber, ninguna oración interna). La nueva definición de necesidad ofrecida es esencialmente una generalización de la definición ofrecida por A&B expuesta en el capítulo 1.3 de este trabajo. Una ventaja que A&B ven en esta manera de tratar la necesidad en **E** es que concuerda con la "ley de identidad" generalmente aceptada desde la antigüedad: "[…] we find here resuscitated one of the hoariest dogmas of logic, that the rock-bottom-cornerstone and foundation of all

[179] Ver A&B, (2da. imp. 1992), p. 17. Originalmente, A&B justifican esta idea para otro sistema formal estudiado en esa misma obra, Π'. No obstante, también ofrecen un modo de trasladar ese resultado de Π' al sistema **E**. Ver A&B, (2da. imp. 1990), p. 303.

[180] Ver A&B, (2da. imp. 1992), p. 17. A&B sostienen que algunas propiedades como la distribución de la modalidad sobre la conjunción y el condicional relevante definidas clásicamente se sostienen para su nueva definición de modalidad.

logical inference is the law of identity $\forall p(p \rightarrow p)$,”,[181] de esta manera la “ley de identidad” funciona como la base de la noción de necesidad en **E**.

Vale la pena preguntarnos por la relación entre la manera relevantista de definir la necesidad y la modalidad en CL_I. Hemos visto que en los razonamientos que son casos de CL_I se cumple la propiedad modal de modo que es necesario que las premisas verdaderas impliquen la conclusión, y es de esperar que la modalidad relevantista cumpla con ello y proporcione una explicación de lo que significa la modalidad en CL_I. Sin embargo, es difícil conciliar la modalidad entendida como lo hacen A&B con la de CL_I. ¿Intuitivamente, cómo podríamos explicar que, dado un razonamiento $<K, A>$, $\Box A$ equivale a $A \rightarrow A \rightarrow A$? No parece que la autoimplicación relevante nos ayude a comprender que, en los razonamientos que son casos de CL_I, necesariamente las premisas implican la conclusión. Así que se recurre a la teoría de Mares para explicar cómo se inserta la modalidad relevantista a la explicación de la propiedad modal de CL_I: la conexión entre premisas y conclusión en los razonamientos que son casos de CL_R está dada por el tránsito de información a través de las situaciones lógicas (conexiones informacionales). De esta manera se puede apoyar la explicación dada a la modalidad de CL_I en términos de la necesidad relevantista: $\frac{K \vDash_R A}{K \rightarrow \Box A}$ con $K=<P, Q>$ ocurre porque toda información implicada relevantemente de K es una consecuencia necesaria de dicho de ese razonamiento.

Ahora se dirán algunas dificultades que enfrenta esta noción de modalidad en **E**, tanto en nivel formal como en semántico. Formalmente (n**E**) parece ser una noción innovadora de necesidad que A&B introducen, pero hay razones para creer que <u>la lógica clásica también adoptaría dicha forma de modalidad</u>. Esto se aprecia como sigue: como los mismos A&B han señalado, el reconocimiento de que la ley de identidad funge como el pináculo de la inferencia lógica se ha tenido desde la antigüedad, de modo que clásicamente también se puede sostener que toda oración atómica o molecular es implicada por las autoimplicaciones de sus componentes, esto es $(\bigwedge_{i=1}^{n}(p_i \supset p_i)) \supset A$ para toda A atómica o molecular. Es verdad que de las autoimplicaciones de todos los componentes de cualquier oración se sigue la oración en cuestión, tanto relevante como clásicamente, por lo que la definición de A&B en realidad no ofrece gran novedad respecto de resultados que clásicamente ya se tienen. Puede haber la impresión de que (n**E**) sí otorga cierta ventaja a **E** en cuanto a modalidad debido a que el condicional relevante está en juego en (n**E**), pero esa ventaja aparente dejará de serlo una vez que se aclaren algunos puntos sobre las constantes lógicas entendidas clásica y relevantemente, algo que más adelante retomaremos.

Un problema adicional surge con (n**E**) y su relación con las oraciones no necesarias: ¿Cómo debe entenderse el que una oración no sea necesaria bajo (n**E**)? Formalmente:

$\neg\Box A = \forall p(p \rightarrow p) \circ \neg A$.

Primero, notemos que esta manera de negar la necesidad de una expresión tiene sentido porque la noción fue definida como un condicional relevante. Segundo, se ha utilizado la

---

[181] *Ídem.* Aquí hay que mencionar que la “ley de identidad” de la que A&B hablan está ligada a las tautologías en lógica proposicional, a las oraciones universalmente válidas en lógica de primer orden, etc.

conectiva de fusión definida en la sección 2.2 de este trabajo para sostener que la negación de la necesidad de una oración es equivalente a sostener que hay partes de información dentro de A que son compatibles con $\neg A$. De esto se afirmaría que $\neg A$ puede ponerse en conexión relevante con las partes de A.[182] Sin embargo, ¿Qué quiere decir que un enunciado no sea necesario en este sentido en relación a la propiedad modal que se tiene en CL_I? Sin ir demasiado lejos, considérese un razonamiento <*K, X*> que no es un caso de CL_R, de modo que aparte de que se puede afirmar que *K* no implica relevantemente a *X* también hay falta de relevancia entre *K* y *X*, y por la proposición citada en la sección 1.3 de este trabajo y en (A&B, 1990, p. 28) la necesidad de *X* no se sigue *K* y ninguna información que sea consecuencia lógica de *X* será necesaria a partir de <*K, X*>. De modo que la no-necesidad de la conclusión es expresada como:

$\neg\Box X = \neg(\forall p(p \rightarrow p) \rightarrow X) \equiv \forall p(p \rightarrow p) \circ \neg X$,

y esto expresa, por la definición de necesidad que A&B aceptan, que la información en X no implica relevantemente a X. Esto último puede entenderse en más de una forma: O (i) puede ser que la información de *X* (expresada en forma de las variables p_i's) no es implicada relevantemente por *K*, lo cual sencillamente se entiende como <*K, X*> no es un caso de CL_R; o (ii) puede ser que parte de la información de *X* no sea implicada relevantemente por *K*, esto es que existe alguna p_i en *X* tal que no hay nada en *K* que implique relevantemente a *X*, y por la nueva definición de necesidad relevantista aplicada a <*K, X*> se tiene que $\forall p(p \rightarrow p) \circ \neg X$.

En (i) no hay mayores complicaciones para evaluar <*K, X*>, pues la conclusión simplemente no se sigue en sentido relevantista de las premisas k. Sin embargo, (ii) presenta un fenómeno más complejo entre las premisas y la conclusión, pues ocurre una irrelevancia parcial entre *K* y *X*, parcial en sentido de que parte de la información de *X* sí es implicada relevantemente por *K*[183] pero una parte de *X* no es cubierta por *K*. A propósito de (ii), debe notarse aquí un detalle importante que fue mencionado al momento de definir la consecuencia relevante formal para **E** al final del capítulo 1.3: el detalle es sobre cómo se puede acotar la información en juego en un razonamiento <*K, X*> que cumpla con las condiciones (1)-(3) de consecuencia formal en **E** para quedarnos únicamente con la información relevante que permite pasar de *K* a *X*, esta salvedad era aplicada específicamente a la condición (3) de consecuencia formal:

(3) $\forall k \in K$ ($\bigwedge_{i=1}^{n} k_{\{i\}}$ es parte de una **E**-demostración para *X*),

y la salvedad modifica (3) de la siguiente forma:

(3') $\exists K' \subseteq K(\forall k \in K'(\bigwedge_{1}^{m} k_{\{m\}}$ es parte de una **E**-demostración para *X*);

se hace notar que (3') es una manera como de asegurar que de las premisas se pueda llegar relevantemente a la conclusión aunque se tenga información irrelevante en juego, pues el

[182] Nótese específicamente para esta parte que se está pensando en *A* como una expresión lógica de complejidad mayor que una oración atómica del lenguaje, pero lo dicho hasta ahora respecto de la negación de necesidad es aplicable también a oraciones atómicas.

[183] Esto recordando una de las propiedades que A&B reconocen como esencial a CL_R, la propiedad de compartir-variables. Ver capítulo 1.3 de este trabajo.

papel de (3') es justo el de acotar el conjunto de premisas hasta tener un nuevo conjunto que tenga sólo las premisas relevantes para alcanzar la conclusión relevantemente. Sin embargo (3') no tiene efecto para el caso en que la conclusión es la que debe acotarse, pues por la definición de necesidad en **E** es deseable acotar *X* en aquellos casos en que la información de *X* no es totalmente abarcada por el conjunto *K* de premisas ("totalmente abarcada" en sentido de que *K* es capaz de implicar relevantemente a *X*), si queremos rescatar la idea de necesidad definida por A&B, no podemos ignorar este hecho.

¿Esta objeción puede ser evadida al trasladar el problema de irrelevancia parcial de la conclusión al terreno semántico de la lógica relevante? Respecto del razonamiento <*K, X*> que no es caso de CL_R por (ii), la semántica situacional de Mares nos dirá que el modelo $M = \{S, sit.\,lóg., R, v\}$ de *K* no implica que el mismo modelo *M* lo sea de *X*, pero hay más que esto, la noción de consecuencia semántica relevantista definida en el capítulo 1.3 supone el cumplimiento las condiciones (1)-(3) para que algo sea consecuencia semántica relevantista. Veamos qué se puede decir de <*K, X*> cuando se presenta (ii) en relación a dichas condiciones:

La primera condición es (1) $\forall s(k_{\{s\}} \in K \supset s \in S \in M)$ y $\forall h(X_{\{h\}} \supset h \in S \in M)$, lo que para el caso de <*K, X*> con irrelevancia parcial significa que hay una situación h en que vale *X* que no pertenece a las situaciones de *M*. Puede pensarse que una solución al problema consiste en añadir *h* al conjunto *S* dentro de *M*, sin embargo esta solución queda descartada debido a que por hipótesis de (ii), lo que falta es la implicación relevante de *K* a *X*, y si todas las situaciones en que vale *K* ya son cubiertas por *M* entonces añadir *h* no hace que *K* implique relevantemente a *X*, pues ninguna *k*-premisa vale en *h*.

Otra propuesta para solucionar el problema de (ii) en <*K, X*> tiene que ver con la segunda condición de consecuencia semántica de **E**, que es (2) si $\exists s_1, \ldots, s_n \in S(0 < i \leq n \wedge k_{\{si\}})$ $\wedge \exists r_1, \ldots, r_n \in S(0 < i \leq n \wedge X_{\{ri\}})$ entonces $\exists l \in sit.\,lóg \in M(Rls_ir_i)$. Al no cumplir <*K, X*> con (2) lo que sucede es que no existe la situación lógica que permite el tránsito de las situaciones en que todo miembro de *K* es el caso a las situaciones donde *X* es el caso mediante *R*-relación ternaria de accesibilidad, y la solución consistiría en establecer la situación lógica requerida para llegar de las situaciones de las premisas a las de la conclusión. Por definición de situación lógica, se requiere que en $X_{\{ri\}}$ r_i extienda a alguna situación s_i donde valga alguna premisa *k* de *K* y aplicar el lema de persistencia a <*K, X*>,[184] pero esto supone añadir más información a *K* en forma de premisas adicionales que permitan establecer la situación lógica *l* que *R*-relacione a las situaciones de *K* y *X*. Notemos que para el caso de CL_I esta sería la solución que arregla el problema, pues intuitivamente cuando en un razonamiento <*K, X*> se presenta un fenómeno como (ii) parece adecuado fortalecer el cuerpo de premisas *K* para que *X* sea consecuencia de *K*, ¿y esta solución se transfiere sin problema al caso de CL_R? No parece ser así por las siguientes razones: 1) Anteriormente se dijo que los modelos de Mares están conformados por un conjunto de situaciones en las cuales se interpretan las oraciones, y las situaciones son el

[184] Ver capítulo 1.3 para la definición de situación lógica y el lema de persistencia.

conglomerado de información que los agentes obtienen del entorno que los rodea (sucesos físicos, creencias, etc.), de modo que si se pretende ampliar el conjunto *K* para que *X* se siga relevante y lógicamente de *K* se requiere aumentar el conjunto de situaciones del modelo para establecer la conexión informacional entre *K* y *X*, pero no puede hacerse esto sin que surja la dificultad sobre cómo manejar la información añadida a *K*, pues la información añadida con las situaciones puede ser incompleta o inconsistente con *X*, lo cual hace que *K* ampliado con la información extra no implique relevantemente a *X* sino a otra conclusión *Y*, este problema surge porque no hay nada en las nociones sintáctica o semántica de CL_R que permita escoger qué información es la pertinente para que *X* se siga relevantemente de *K*;[185] 2) ¿hay alguna garantía de que la relación de necesidad relevante que se supone hay entre *K* y *X* se alcance a cubrir con el aumento de información de *K*? Dada la conexión de información relevante entre *K* y *X* para tener un caso de CL_R, debe haber garantía de que la necesidad de *X* se siga relevantemente de la necesidad de *K*, pero es incierto si esta relación se mantendrá (incluso si se podrá alcanzar) con la información añadida a *K*.

Para bloquear los problemas que la irrelevancia parcial introduce, se puede recurrir a más nociones semánticas relevantistas para el manejo de la información faltante en los razonamientos con esa dificultad. La propuesta semántica de Urquhart ayuda en la siguiente forma. Como Mares, Urquhart considera que el entorno de los agentes racionales es crucial para obtener la información con la que razonan, y esa información viene dada por las piezas de información con las que se evalúan las proposiciones formadas (el papel de las piezas de información y las situaciones es esencialmente el mismo).[186] Lo que Urquhart añade a su semántica relevantista es la incursión de mundos posibles junto con las piezas de información, ello con el fin de que los modelos relevantistas dispongan de cantidades mayores de información: "In argumentation, we may have to consider not only what information may be avalaible, but also what the facts are… Let us consider in addition to the semilattice S a set W of possible worlds and write V(*A*, X, W_1) = T for "It may be concluded that *A* on the basis of the piece of information X, given that facts are as in possible world W_1."".[187] De esta manera, los razonamientos en que ocurre falta de relevancia de las premisas a la conclusión dejan de representar un problema porque los modelos de dichos razonamientos incluyen la información que pudiera faltar en las premisas dentro los mundos posibles que se incluyen. ¿La maniobra propuesta por Urquhart en su semántica puede solucionar totalmente el problema de irrelevancia parcial? Antes de dar una respuesta a esta pregunta, analicemos más el problema.

Aumentar la información de *K* para obtener relevantemente *X* no siempre garantizará la necesidad de *X* a partir de *K*. Esto se hace más evidente para el caso donde

---

[185] Puede pensarse que en lógica no existe ningún proceso por el cual se pueda discriminar información para modificar razonamientos como ha sido sugerido en las líneas anteriores, pero cabe añadir que este problema puede ser relativamente debilitado en lógica clásica con CL_T en relación a la propiedad de monotonicidad.
[186] Ver Urquhart, A., "Semantics for relevant logics" en *The Journal of Symbolic Logic* (1972). P. 159 y 160.
[187] *Ibíd.* P. 161.

K=<*P*, *Q*> es un caso de CL_R, pues por la proposición sobre la relación de CL_R con la noción de necesidad, la necesidad de *X* depende de que esta oración sea consecuencia relevante de *K*. Veamos un problema sobre esto en relación al manejo de información contingente en los razonamientos: Considérese la información contingente *P* = 'Acabas de pintar la casa' y Q = 'La pintura está fresca'. Si el razonamiento <*P, Q*> es modelable relevantemente entonces cumplirá las condiciones de CL_R: se aplica la subindexación, hay contenido común entre premisa y conclusión, obedece (1) – (3) de la definición. Sea el conjunto Cn_R(<*P, Q*>) = $\{x \mid x$ es CL_R de <*P, Q*>$\}$,[188] por la proposición citada anteriormente, toda la información relevantemente implicada por <*P, Q*> debe ser necesaria, aunque dicha información sea contingente, así $\forall x \in C_{nR}(< P, Q >)(< P, Q > \vDash_R x \Rightarrow (\forall p(p \rightarrow p) \rightarrow x))$. Si hay irrelevancia parcial entre *K* y *x*, ¿cómo se puede pasar a la necesidad relevantista de *x*? Una respuesta a esto puede ser que *x* no sea miembro de Cn_R(<*P, Q*>) después de todo, pero surge la siguiente pregunta: ¿hasta qué grado de información deben poseer los enunciados para ser miembros de Cn_R(<*P, Q*>)? El problema de irrelevancia parcial es uno de vaguedad de información en los razonamientos, y CL_R carece del criterio para evitarlo. Además, no parece que la modalidad en CL_I se comporte como la noción relevantista, pues no siempre creemos que cierta conclusión de un razonamiento es necesaria ¿cómo podemos evitar el compromiso de reconocer que los miembros de Cn_R(<*P, Q*>) son necesarios para cualquier información manejada? Para que CL_R ofrezca un tratamiento adecuado de la modalidad, requiere ofrecer un criterio para discriminar los razonamientos según la información en juego.

Lo importante a destacar aquí es que no hay nada que garantice que todas las j_i's de *X* serán abarcadas por las k_i's una vez que se añada más información a *K*, pues nada en la definición de necesidad de A&B ni en la semántica situacional de Mares permite averiguar qué información hay que añadir a *K* para que *X* se siga relevantemente de *K*, y ya se dijo antes que ni siquiera hay seguridad de que la información añadida a *K* permita obtener a *X* en vez de una conclusión distinta *Y*. Obtenido este resultado, el método para arreglar el problema consiste en encontrar la manera de añadir la información faltante al conjunto *K* para que *X* sea consecuencia lógica de *K*, pues con esta manera no se obtiene una conclusión $Y \neq X$ y la irrelevancia parcial entre *K* y *X* se desvanece. Aquí apreciamos que la solución nos lleva nuevamente al terreno de la lógica clásica: Sea <*K, X*> un razonamiento tal que *X* es CL clásica de *K,* entonces si se añaden premisas φ a *K* de modo que resulte en $K \cup \{\varphi\}$, entonces el razonamiento < $K \cup \{\varphi\}$, *X*> sigue siendo un razonamiento lógicamente correcto. Esta solución está vinculada a una propiedad que CL clásica cumple llamada monotonicidad, la cual permite el aumento de información en las premisas sin perder las conclusiones obtenidas.[189]Esta idea concuerda muy bien con el

[188] No debe ser complicado notar que Cn_R(<*K, Q*>) ≠ ∅ dada la información que maneja.

[189] Véase Tarski (1930b) en Tarski (1983) para ver una manera cómo Tarski expresa formalmente esta propiedad. Además, algo que debe recordarse es que estábamos revisando el problema de (ii) en relación a las condiciones (1)-(3) de la consecuencia semántica relevantista, y hasta ahora hemos analizado (1) y (2), pero al estar (3) directamente vinculada con (2) los puntos hasta ahora considerados se trasladan a (3) *eo ipso*.

modo como la CL_I suele comportarse, pues intuitivamente razonamos con conglomerados de datos de los cuales extraemos información, y cuando obtenemos más información podemos llegar a nuevas conclusiones sin descartar las que ya habíamos alcanzado dados los datos iniciales. Vale la pena mencionar que la monotonicidad permite evaluar la información añadida a los razonamientos, si la nueva información no nos lleva a las conclusiones buscadas podemos descartarla en lugar de otra (esto desde los razonamientos más simples que pueden darse cotidianamente hasta los más complicados y específicos dentro de las ciencias). De modo que el fenómeno de irrelevancia parcial resulta bastante problemático desde la perspectiva relevantista de consecuencia lógica, a tal grado de recurrir a una solución desde el enfoque clásico de la lógica para solucionarlo.

Con lo anterior, debe ser claro que las propuestas como la de Urquhart concuerdan bien con la idea de añadir información al cuerpo de premisas de los razonamientos con irrelevancia parcial. Al ser las piezas de información (o situaciones, según el caso) parciales respecto al entorno de los agentes racionales, debe ser posible en principio que otros datos no considerados por las piezas de información entren a consideración en los razonamientos. Los mundos posibles recaban el resto de información que las piezas de información no incluyen en principio, así es posible que los modelos relevantes puedan implementar la adición de información cuando haya presencia de irrelevancia parcial en un razonamiento. Esta maniobra ya está presente en la semántica (kripkeana) estándar clásica para la lógica modal y Urquhart la adopta para fortalecer la semántica relevantista. Con esto nuevamente concluimos que la solución al problema de irrelevancia parcial se apoya en nociones de lógica clásica.[190]

Hasta aquí hemos visto lo siguiente sobre la modalidad en CL_R. Esta definición no concuerda fácilmente con razonamientos en los que la información es incompleta, pues las características relevantistas propuestas por A&B y Mares no permiten que la información sea ampliada sin más, sino que el añadir información debe ligarse a las situaciones que queremos añadir al modelo del razonamiento; elegir esas situaciones y la información sólo está al alcance de CL_R con propuestas como la de Urquhart. Esto provoca que la irrelevancia parcial permita atribuir necesidad a conclusiones de razonamientos con contenido contingente (algo que CL_I no admitiría). La propiedad de monotonicidad clásicamente aceptable proporciona razones para eliminar el problema de irrelevancia parcial incluso para propuestas relevantistas como la de Urquhart.

(b) ¿Es necesario redefinir relevantemente las constantes lógicas?

¿Y qué se puede decir respecto de las constantes lógicas definidas relevantemente? Recordemos que parte de la motivación de los relevantistas al ofrecer su lógica está relacionada a los problemas alrededor de algunas conectivas lógicas (principalmente el

[190] Aquí no debe entenderse que se traslada la propiedad de monotonicidad de la lógica clásica a la lógica relevante sin más. La definición de monotonicidad clásica no incluye la elección de información relevante entre premisas y conclusión que la semántica relevante maneja. Ver Urquhart, A., "Semantics for relevant logics" en *The Journal of Symbolic Logic* (1972) para una discusión más detallada del papel de los mundos posibles en relación a la semántica relevantista que Urquhart maneja.

condicional material), por lo que muchos encuentran adecuado modificar las conectivas lógicas para detener el surgimiento de paradojas y problemas similares. En este trabajo hemos puesto especial atención en tres constantes lógicas que han sido modificadas por los relevantistas: el condicional material, la conjunción y la disyunción, que se han convertido en el condicional relevante, la fusión y la fisión respectivamente. Para empezar nos enfocaremos en las últimas dos, la primera la dejaremos para la siguiente sección.

La fusión o "conjunción relevante" permite que sólo información relacionada sea conjuntada:

(conjunción relevante) de $A_{\{\alpha\}}$ y $B_{\{\beta\}}$ se sigue $(A \circ B) \equiv (A \circ B)_{\{\alpha \cup \beta\}}$;[191]

la información de las situaciones entre A y B debe estar en estrecha relación para fusionarse. Para los relevantistas, esta es una manera de expresar adecuadamente la idea de que en un razonamiento lógicamente correcto todas las premisas son pertinentes para alcanzar la conclusión, pues la conjunción de todas las premisas es relevante. La fisión o "disyunción relevante" es definida en términos de la fusión y es una de las principales propuestas relevantistas para bloquear la paradoja de Lewis que analizamos anteriormente:

(disyunción relevante) $A \oplus B \equiv \neg(\neg A \circ \neg B) \equiv \neg A \rightarrow B$;[192]

con esta nueva conectiva se tiene una variante de la regla de silogismo disyuntivo (SD) llamada silogismo disyuntivo intensional (SDI), dicha regla junto con una formalización relevantista del razonamiento de Lewis impiden inferir $p, \neg p \vdash q$ (*ex falso quodlibet*).

Ahora, sobre la idea de definir la conectiva de fusión como se hace, quiero proceder con una idea que se halla en uno de los trabajos de Gómez Torrente que antes he citado en este trabajo: "the set of expressions logic should deal is not (and has not been) determined within the logicians' minds by any *philosophically* substantive intuitions or principles (and in particular not any semantic, epistemological or mathematical intuitions or principles). However, some philosophically unloaded and largely pragmatic principle or principles seem to have guided logicians' choices of expressions as logical,",[193] esta idea es básica para analizar la propuesta de las nuevas conectivas, pues como dicen la cita y apoyándonos en 3.1 (b) de este trabajo respecto a las conectivas lógicas: la motivación principal para definir las conectivas relevantemente es pragmática. Además de este componente pragmático en la elección de constantes lógicas, hay envueltos otros factores como el histórico: "This set [of logical constants] is presumably determined not just by application of pragmatic principles […] but also by historical accident.",[194] de modo que el cómo se ha desarrollado la lógica hasta nuestros días ha contribuido a que las constantes lógicas comúnmente aceptadas sean las que tenemos.

Las conectivas de fusión y fisión están definidas para tomar en cuenta la relación entre la información expresada en los enunciados fusionados o fisionados. Es este

[191] Mares (2004), p. 168. Nótese que la información de los enunciados se une con la conectiva de fusión.
[192] Mares (2004), p. 169.
[193] Gómez Torrente (2002), p. 2 y 3.
[194] *Ibíd.* P. 34.

desiderátum de tener la información relacionada el que motiva a los lógicos relevantistas a definir dichas conectivas, y ese *desiderátum* es de carácter pragmático porque esos lógicos encuentran razonable que en la práctica cotidiana los agentes racionales razonan con información no totalmente inconexa. A ellos les parece que este modo cotidiano de razonar con la información queda adecuadamente elucidado por las conectivas relevantistas ya que, por ejemplo, desde la semántica situacional maresiana se espera que la información proporcionada por el entorno de los agentes sea eficazmente trabajable por medio de una formalización con una estructura lógica que refleje la pertinencia de la información en el razonar de ellos, y entre mejor capturada sea esa pertinencia de información mejor para la claridad del razonamiento. Sin embargo, en sentido clásico la motivación ya es tomada en cuenta al definir las conectivas lógicas. Por ejemplo, la fusión es pensada como conector de información[195] que los agentes reciben de su entorno, así de $A_{\{s\}}$ y $B_{\{t\}}$ se puede formar $A \circ B_{\{s \cup t\}}$; la conjunción clásica, en cambio, se desempeña como conectiva que relaciona información de los acontecimientos que conforman nuestro entorno, así que en términos formales tenemos que si $A_{\{x\}}$ y $B_{\{x\}}$ son el caso entonces formamos $A \wedge B_{\{x\}}$ donde X engloba la información que hemos considerado pertinente para la conjunción. Aunque se recaba información de forma distinta para ambas conectivas, se respeta el *desiderátum* mencionado antes. Esa idea expuesta en el capítulo anterior de este trabajo sobre que la fusión aventaja a la conjunción clásica en que no admite la conexión de información ajena pierde fuerza con lo anterior dicho, pues en el razonar cotidiano solemos recibir información que es pertinente entre sí y de la que extraemos conclusiones, lo que sí sería extraño es que los agentes recibieran la información y tuvieran formas extrañas, casi erráticas, de razonar con ella, como el hecho de querer conjuntar los datos A y B siendo ellos totalmente ajenos o contradictorios (aunque para los relevantistas, un par de datos contradictorios no provocan un desastre en lógica relevante, esto *vía* la semántica situacional). No parece plausible que alguien diga seriamente que tiene una teoría científica llena de información inconexa de la cual pretenda explicar e interpretar algún fenómeno, y esto lo sabemos igualmente si tenemos el conectivo lógico relevantista o clásico. Además una ventaja adicional que se tiene al conservar la conjunción clásica es que algunas reglas de inferencia deseables son conservadas, como la regla de simplificación que está prohibida para la fusión.

Sobre la fisión, lo anterior dicho es aplicable a esta conectiva también, es decir que las mismas consideraciones pragmáticas que impulsan por igual a la fusión y la conjunción clásica se pueden trasladar *mutatis mutandis* al caso de la fisión y la disyunción clásica, pero también hago notar cómo afecta esto a la paradoja de Lewis. Como vimos en el capítulo anterior, la paradoja surge por dos razones: i) un par de usos extensional e intensional de la disyunción que no son claramente distinguidos, y ii) la regla SD usada para deducir una oración cualquiera de una contradicción; la siguiente manera muestra más

[195] Ver Mares (2004), p. 169.

específicamente cómo SD provoca que surja *ex falso quodlibet*: Sean p y q un par de oraciones

(1) $(p \vee q) \wedge \neg p \vdash q$ (esquema de SD)

(2) $(p \wedge \neg p) \vee (q \wedge \neg p) \vdash q$ (1, distribución)

(3) $p \wedge \neg p \vdash q$

$q \wedge \neg p \vdash q$ (2, par de entailments resultantes).[196]

El par de resultados en (3) son muy diferentes entre sí, mientras que el segundo resultado es una instancia de la regla de simplificación clásica el primer resultado es la paradoja de Lewis. Anteriormente se mostró cómo con la disyunción clásica, la regla de adición y SD se deduce la paradoja y se culpa a la disyunción clásica de permitir que cualquier información q sea añadida a cualquier información p para formar $p \vee q$, SD es aplicable sin distinguir si la información en $p \vee q$ está en relación o no.

Aquí podemos volver a recurrir al carácter pragmático detrás de la definición de las conectivas lógicas para sostener que en estos casos también hay la intención de razonar con información no inconexa. Algunos como Mares y Read sostienen que intuitivamente los razonamientos en que se extraen conclusiones por eliminación de información no es la regla de SD la usada sino que SDI:

$$\frac{\begin{array}{l}(p \oplus q)_{\{\alpha\}} \\ \neg p_{\{\beta\}}\end{array}}{q_{\{\alpha \cup \beta\}}}$$

proporciona el paso que lleva de las premisas a la conclusión. Read y Mares sostienen (Mares yendo más lejos) que para que SDI sea legítimamente aplicado el razonamiento debe poder expresarse con las conectivas definidas relevantemente: $\vDash_E ((p \oplus q) \circ \neg p) \rightarrow q$,[197] de modo que el razonamiento no es construido a base de información inconexa. Ahora, respecto del elemento pragmático en juego:

> "[…] whenever a mathematician or whoever seriously wants to argue by Disjunctive Syllogism from "*p* or *q*" and "not *p*" to *q*, the reasoned will be in a position to say *something* stronger than just *"$p \vee q$."* […] "$p \vee q$ and my present grounds for this assertion are not just the knowledge or assumption that *p* or the knowledge or assumption that *q*." […] if the reasoner is assuming *p* to get $p \vee q$, presumably the same reasoner will not also at the same time want to be assuming $\sim p$, the other premise needed for an application of Disjunctive Syllogism.",[198]

dentro de la práctica cotidiana los agentes tendemos a razonar con información que no extraemos de fuentes totalmente ajenas entre sí, no añadimos p a $p \vee q$ siendo ambas oraciones que expresan contenidos sin nada en común (pues seguramente cualquiera que hiciera esto no podría ser tomado en serio en una discusión crítica sobre cualquier tema). Esto es así sin necesidad de escoger $\otimes$ en vez de $\vee$, por lo que siempre y cuando estemos dentro de estándares aceptables dentro de la práctica racional en sentido de razonar con

[196] Ver Burgess, J. P., "No requirement of relevance" en *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic* (Ed. Shapiro, S.), 2005, p. 742.

[197] Ver Mares (2004), p. 181.

[198] Burgess, J. P., "No requirement of relevance" en *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic* (Ed. Shapiro, S.), 2005, p. 743.

información que sea pertinente a la argumentación no debe haber problema para la disyunción clásica, y es apreciable que esto es lo que suele suceder en el razonamiento intuitivo. Además, tal como pasa con la conjunción clásica, al mantener la disyunción clásica se preservan también varias reglas de inferencia que son de amplia utilización, como la regla de adición, en matemáticas pueden encontrarse varios ejemplos de la utilización de esta regla de inferencia, uno de ellos es el siguiente: El teorema fundamental de la aritmética postula lo siguiente '$(\forall n \in \mathbb{Z})(n \neq 0 \Rightarrow n = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_m)$ donde cada p_i con $1 \leq i \leq m$ es número primo', sea este teorema expresado por $P(x)$ y sea $Q(k)$ la oración '$(\forall x \in \mathbb{Z})(\exists y, z \in \mathbb{Z})((y, z) = x)$, i.e. todo número entero es máximo común divisor de algún par de números enteros', un matemático puede usar el teorema y tener como hipótesis la oración $P(k)$ para llegar a la conclusión $P(k) \vee Q(k)$, por adición y no estaría cometiendo algún equívoco en esto,[199] y aunque el matemático esté dispuesto a conceder que parte de su trabajo esté determinado por la información que recibe de su entorno a través de las situaciones que lo rodean, no parece que esté dispuesto a conceder que si las situaciones de su entorno hubieran variado entonces el uso de adición le hubiera ocasionado irrelevancia de la hipótesis a la conclusión. Para terminar, y considerando lo anterior dicho sobre la fisión y la disyunción clásica, aunque la paradoja de Lewis no alcanza a ser bloqueada clásicamente, sí tenemos razones para creer que nadie que hubiera trabajado alguna teoría científica medianamente seria lo hubiera hecho con información "adicionada" (en sentido de la regla de adición clásica) inconexa para extraer de ella un resultado cualquiera. La pretensión relevantista ya se encuentra en la definición de las constantes lógicas clásicas, y el razonar intuitivo que tenemos con CL_I que incluye dicha pretensión relevantista se expresa bien con CL_T.

Con el análisis hecho hasta ahora de algunas constantes lógicas relevantistas, nos hemos empeñado en mostrar que <u>las razones con que se pretende impulsar la definición de dichas conectivas no ofrecen una manera innovadora y diferente de estudiar el razonamiento intuitivo después de todo</u>. Las razones que hay para proponer constantes lógicas como fusión y fisión son trasladables como razones para pensar que la conjunción y disyunción clásicas son conectivas lógicas adecuadas para formalizar adecuadamente nuestros razonamientos.

3.3.- La relación entre el condicional y la consecuencia lógica: CL_T o CL_R, sobre cómo entender CL_I.

Como se dijo anteriormente, ahora hablaremos del condicional y cómo afecta la noción de consecuencia lógica. El mismo Tarski (1936) y otros lógicos han recalcado la importancia de la noción de constante lógica para hablar del comportamiento de la consecuencia lógica, y es innegable el papel del condicional cuando se trata de elucidar la forma lógica de los argumentos lógicamente correctos. Ahora discutiremos las definiciones clásica y relevantista del condicional y cómo afectan la noción de consecuencia lógica.

---

199 *Ibíd.* P. 744.

Es bueno recordar que no se deben tomar equivalentes al condicional y la noción de CL. El condicional establece una conexión entre ciertos enunciados para formar con ellos un nuevo enunciado (con antecedentes y consecuentes) con estructura lógica más compleja que cada enunciado que lo compone (semánticamente, el valor de verdad del nuevo enunciado estará determinado por el valor de verdad de sus componentes), asegurándose que este enunciado es verdadero sii su antecedente es falso o su consecuente es verdadero, pero intuitivamente lo que el condicional asegura es que dado su antecedente es permitido tener su consecuente; la noción de CL establece algo más fuerte, de cierta información expresada como enunciados o premisas debemos poder inferir conclusiones habiendo asegurado que las premisas son el caso, decimos que en un argumento en que ocurre esto su conclusión se sigue lógicamente de sus premisas, y entre otras cosas sabemos que CL debe respetar formalidad y modalidad. Sin embargo, la noción de CL está relacionada con el condicional principalmente cuando es necesario formalizar los razonamientos, pues es aquí cuando la noción queda expresada lógicamente en la estructura formalizada del razonamiento, y el paso de las premisas a la conclusión viene dado por el condicional, por lo que se vuelve indispensable explicar cómo dicha conectiva lógica expresa la relación de seguirse lógicamente en los razonamientos.

Sabemos por lógica elemental clásica que el condicional material '$\supset$' permite expresar formalmente el paso de un enunciado a otro, además los enunciados condicionales no suelen estar sujetos a restricciones en cuanto a qué enunciados pueden conformar un condicional, por lo que un condicional material puede formarse técnicamente con cualesquiera enunciados. Es aquí donde la lógica relevante señala un fallo importante al condicional material, pues clásicamente permite ciertos razonamientos y reglas de inferencia que intuitivamente sabemos que son problemáticos (*ex falso quodlibet* o la paradoja de Lewis y la paradoja positiva son algunas que hemos visto), por lo que propone una nueva definición del condicional que evada esos problemas. El condicional relevante '$\rightarrow$' cumple las siguientes características para su antecedente y consecuente: i) compartir-variables y ii) en las situaciones en que el antecedente y consecuente son el caso existe una situación lógica que establece la conexión informacional entre ellos.[200] Este condicional no permite el surgimiento de las paradojas que clásicamente surgen, pues sea por incumplir (i) o (ii) o ambas, este condicional no permite el paso del antecedente al consecuente al no cumplirse las características pedidas. Ya debe ser claro que las paradojas aquí estudiadas no cumplen (i) y (ii).

No obstante sí se puede defender que el condicional material involucra relevancia cuando debe hacerlo. Antes mencioné la importancia del papel del condicional al usarse para expresar formalmente la relación de CL, esta relación queda expresada formalmente con el condicional material así: "El lógico clásico se compromete a que todo teorema de *LC* con condicional como operador principal pueda ser interpretado como una regla válida de

[200] Nótese que (i) es una característica de la sintaxis relevantista y (ii) es una característica de la semántica relevantista. Ver capítulo 1.3 de este trabajo.

inferencia donde el condicional principal es reemplazado por un 'implica'. Esto le constriñe tan sólo a sostener que existe relevancia en el condicional principal de un teorema,",[201] es en este sentido que en la formalización de razonamientos lógicamente correctos el condicional material expresa exitosamente la relación de CL entre premisas y conclusión. Así, CL_T, que trabaja a nivel formal con el condicional material, rescata un rasgo importante que los relevantistas consideran esencial para explicar CL_I: el paso de la premisa a la conclusión está asegurado siempre que la información de la premisa sea pertinente para la conclusión, lo cual es expresado por el condicional material principal del razonamiento. Esta idea concuerda bien con sostener, para un razonamiento $<K, X>$ lógicamente correcto, que los modelos tarskianos de K lo son de X. CL_T esté dada en términos de modelos, todo modelo de K lo es de X porque las interpretaciones que validan K también validan X, en parte es esto lo que garantiza que un conjunto de premisas sea relevante para alcanzar una conclusión. En Morado (1988) se habla de esta característica en alusión a lenguajes formales definidos sintáctica y semánticamente, usando una noción de descripción de estado (DE) que es esencialmente idéntica a la noción de interpretación (I). De hecho puede establecerse una correspondencia biunívoca entre (DE) e (I): "A cada *I* le relacionamos aquella *DE* cuyas oraciones atómicas sean las correspondientes a los enunciados atómicos verdaderos bajo esa *I*.".[202]

Sabiendo que la información de la conclusión debe estar relacionada con la de las premisas y usando las nociones de (DE) e (I), se puede explicar cómo el condicional material incluye relevancia entre premisas y conclusión en los razonamientos lógicamente correctos: "*d*) $\vdash_{LC} (A' \supset' B')$ sii el conjunto de *DE* en que no vale *B* es un subconjunto del conjunto de *DE* en que no vale *A*, *e*) $\vdash_{LC} (A' \supset' B')$ sii el contenido semántico de *B* es parte del contenido semántico de *A*, *f*) $\vdash_{LC} (A' \supset' B')$ sii *A* es relevante para *B*. [...] El condicional de *LC* rebasa en estos casos el puro nivel veritativo funcional y adquiere, en la metateoría, el carácter semántico que necesitamos para nuestros análisis lógicos.".[203] Con la correspondencia biunívoca entre (DE) e (I), lo anterior se puede trasladar a la teoría de CL_T, de modo que (*d*), (e) y (*f*) son aplicables a $\vDash_{CLT} K \supset X$. Estas ideas concuerdan bien con el carácter de CL_I, pues en razonamientos intuitivos solemos pasar de premisas a conclusiones dada cierta información que "manipulamos lógicamente" (en sentido de inferir más información contenida en la dada), la información de la conclusión es condicionada a las premisas y si es el caso lo que se expresa en *K* entonces *X* debe ser el caso dado que lo que expresa *X* forma parte de lo expresado por *K*, *X* es obtenido de *K* por medio de procesos inferenciales. Que la definición de CL_T asegure esto con la noción técnica de modelo demuestra que rescata un rasgo importante de relevancia presente en la práctica racional intuitiva, a saber que nuestros razonamientos no manejan información inconexa entre premisas y conclusión.

[201] Morado, R., "El problema de la relevancia en lógica clásica" en *Cuarto Simposio Internacional de Filosofía* (Comp. Villanueva, E.), 1988, p. 113. "*LC*" es para 'lógica clásica'.
[202] *Ibíd*. P. 119.
[203] *Ibíd.* P. 120.

La definición relevantista del condicional es más restrictiva en cuanto a procesos inferenciales, es por eso que se prohíben ciertas reglas de inferencia que involucran esta conectiva cuando hay riesgo de que surjan paradojas (en el capítulo 1.3 de este trabajo se definió formalmente **E** con ciertos axiomas y reglas de inferencia, una de estas reglas es una versión relevantista restringida del Modus Ponens). El propósito de esto es evitar que CL_R cuente como razonamientos lógicamente correctos a aquellos que violen algún requisito de relevancia, sin embargo al hacer esto surgen algunas dificultades que vuelven complicada la coincidencia de CL_R con CL_I. El condicional relevante rechaza la regla de transitividad que es de amplio uso clásicamente, una razón de ello es porque en algunos razonamientos permite pasar a formas paradójicas, como en el caso de la paradoja de Lewis:

(1) $p \land \neg p$ hip.
(2) p 1, simplificación
(3) $p \lor q$ 2, adición
(4) $\neg p$ 1, simplificación
.'. (5) q 3 y 4, silogismo disyuntivo;

el paso a *ex falso quodlibet* ocurre con la regla de transitividad aplicada a la hipótesis y a SD en el razonamiento: $p \land \neg p \vdash_{LC} q$.[204] Como puede pensarse, esta manera de razonar no ocurre cotidianamente, y no se necesita pensar en *ex falso quodlibet* para notar esto. Puedo decir sin riesgo que 'si la pintura se secó entonces puedes recargarte en la pared pintada' y 'Si puedes recargarte en la pared pintada entonces te mancharás', pero con la transitividad se seguirá que 'si la pintura se secó entonces te mancharás' y esto contradice nuestro razonamiento intuitivo.

Relevantemente: "*A legitimate set of circumstances used to evaluate a conditional is a set of reasonably close circumstances that obeys the constraints regarding the antecedent and consequent.*",[205] este requerimiento vincula estrechamente el antecedente y el consecuente para hacer verdadero un condicional, si la información del antecedente y el consecuente están en estrecha relación entonces existirá la conexión informacional que permita el tránsito entre ellos (esto gracias al tratamiento semántico de Mares). Pese lo anterior, hay manera de cumplir los requerimientos relevantistas con el condicional material clásico. Burgess sostiene que, aunque los relevantistas no insisten encarnizadamente en defender que la conclusión de un razonamiento esté contenida en sus premisas, algo que ellos quieren como requisito de relevancia es que la conclusión y las premisas coincidan en la información manejada en el razonamiento. Clásicamente, la transitividad respeta esto con el teorema de interpolación de Craig: "[…] this bare minimum of relevance in fact obtains in all classical entailments where the premise is not contradictory and the conclusion is not tautologous, as a consequence of the Craig Interpolation Theorem. That theorem says that,

[204] Ver Orayen, R., "Deducibility Implies Relevance? A Negative Answer (II)" en *Crítica,* Vol. XV, n. 44, 1983, p. 15.
[205] Mares (2004), p. 133.

except in the degenerate cases just excluded, if $\alpha \vdash \gamma$, then there is a β, called an interpolant, such that $\alpha \vdash \beta$ and $\beta \vdash \gamma$, and every atom appearing in β appears both in α and in γ.”. [206] Burgess señala que Tennant define una noción de perfección para razonamientos: “[…] [Tennant’s perfectionist logic] call an enatilment $\alpha \vdash \beta$ *perfect* –or “as good as an argument can be on formal grounds”- if it holds classically and α is not contradictory and β is not tautologous; and call it *perfectible* if it is obtainable by substitution from a perfect entailment.”, [207] mientras los razonamientos lógicamente correctos cumplan esto no hay problema para que el condicional relevante sea una formalización adecuada del ‘seguirse lógicamente’ de CL_I, pero con el teorema de interpolación de Craig los requisitos para que un razonamiento sea perfecto o perfectible se cumplen clásicamente, pues la transitividad no se permite en premisas contradictorias o conclusiones tautológicas.

Burgess sostiene que las lógicas relevantes que prohíben la regla de transitividad aún pueden aceptarla a nivel metalógico, pues pueden definirse meta-reglas que permitan pasar de las hipótesis a la conclusión habiéndose demostrado que existe un tránsito inferencial entre ellas (dicho tránsito es lo que formalmente se entiende como demostración), así el perfeccionismo de Tennant en lógica es compatible con una formalización en lógica clásica (donde se respeta Transitividad, y con lo dicho en la subsección anterior también se respetan las reglas de inferencia sobre la conjunción y disyunción, como Simplificación y Adición respectivamente). En el capítulo 2.2 de este trabajo se habló de cómo relevantizar los sistemas formales y bloquear ciertas reglas de inferencia. Como sugiere Tennant, la relevantización satisface dos *desiderata*: i) el desarrollo de la matemática sigue basado en los sistemas lógicos, ii) el quehacer científico se ve impulsado por la práctica relevantista de la lógica. Sin embargo, las razones dadas en la subsección anterior y esta para aceptar las conectivas lógicas clásicas muestran que (i) se cumple para la lógica clásica: “[…] all the lemmas and theorems and corollaries are taken to follow from the axiom set initially assumed, as well as from any larger axiom set subsequently assumed. […] mathematicians treat entailment as transitive.”,[208] junto con esto Burgess sostiene que cualquier práctica lógica que rechace esta manera de trabajar en matemáticas debe rechazarse por introducir complicaciones. Que (ii) también se cumpla para la lógica clásica es inmediato, pues la formalización clásica de las teorías científicas ya involucra la idea de relevancia al interior de ellas que clásicamente se rescata.

Hasta ahora hemos explorado cómo los condicionales material y relevante afectan el modo de razonar en general, ahora podemos explorar razones más generales para pensar que no es CL_R la mejor opción para elucidar CL_I. En palabras de Orayen sobre una de las razones principales de A&B para defender su postura relevantista: “[…] that deducibility demands relevance is simply the appeal to the intuition that there is no real deduction when

[206] Burgess, J. P., “No requirement of relevance” en *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic* (Ed. Shapiro, S.), 2005, p. 734.
[207] *Ibíd.* P. 736.
[208] *Ibíd.* P. 737.

the premise is not relevant to the conclusion.",[209] para A&B esta es razón suficiente para creer que inferencias de forma $A \supset (B \supset A)$ deben rechazarse porque nuestra intuición racional nos señala que carecen de necesidad y relevancia (entendidas como A&B proponen), *ex falso quodlibet* también se rechaza en vista de que se percibe una enorme inconexión entre premisas y conclusión. Sin embargo, aunque el papel de las intuiciones que A&B toman como apoyo a su teoría es innegable, se pueden dar razones para creer que ellas solas no tienen el peso para CL_R que ellos creen. Las intuiciones mismas son elemento clave al momento de definir sistemas formales, pues puede verse al sistema formal como el encargado de formalizarlas.[210] Generalmente, es reconocida la presencia de ciertas intuiciones lógicas (formas intuitivas de razonar) cuando aprendemos a trabajar en lógica, sin embargo suele pasar que las intuiciones de razonamiento no concuerden con las conclusiones obtenidas una vez que se ha hecho el proceso inferencial, de modo que las intuiciones no pueden constituir la base innegable que fundamente todo el desarrollo de la lógica. Puede ser que las intuiciones que se tienen sobre la conclusión de los razonamientos no siempre concuerden con la conclusión obtenida, mostrando así que no necesariamente el desarrollo de los sistemas formales se apega totalmente a nuestras intuiciones: "I think that it is perfectly natural to say that the intuitions on which A&B are basing their case should be considered conclusive evidence against the prevalent logic only if they can effectively resist the argumentations of such logical theory. If, on the contrary, such intuitions decline in front of a contrary logical argumentation, their probatory force will be seriously diminished.",[211] aunque A&B insistan que su lógica obedece las intuiciones de los agentes racionales, eso no asegura que su lógica sea la adecuada para elucidar cada caso de CL.

Una consideración más acertada, particularmente sobre el trabajo matemático, es que en casos de CL_I cualquier conclusión obtenida por información ridícula o inconexa o irrelevante (ésta última en sentido de que nada tiene que ver la premisa con la conclusión) es descartada y el razonamiento es considerado defectuoso. Este tipo de motivaciones se tiene tanto en CL_R como en CL_T, así que no debe haber extrañeza en que un razonamiento con premisas inconexas o controvertidas sea rechazado, sea interpretado con modelos tarskianos o maresianos. Un matemático no aceptaría como teorema una afirmación trivial o cuya hipótesis sea información inconexa o absurda.[212] En esta parte debe ser evidente nuevamente que la práctica racional intuitiva no valida razonamientos como:

$$\frac{(\forall n \in \mathbb{N})(\neg\exists < x, y, z > \in \mathbb{Z}^3)(n \geq 3 \wedge x^n + y^n = z^n)}{(\forall n \in \mathbb{N})(\neg\exists x, y, z \in \mathbb{Z})(n \geq 3 \wedge x^n + y^n = z^n) \vee 2 = 1},$$

pues aunque la conclusión se sigue por la regla de adición, ¿la conclusión del razonamiento anterior es consecuencia lógica de su premisa? Para CL_T la conclusión es conseguida válidamente por adición, pero no se considera un buen razonamiento porque el segundo

[209] Orayen, R., "Deducibility Implies Relevance? A Negative Answer (I)" en *Crítica,* Vol. XV, n. 43, 1983, p. 7-8.
[210] Ver *Ibíd.* P. 11.
[211] *Ídem.*
[212] Ver *Ibíd.* P. 14-15.

disyunto de la conclusión no está relacionado con el primero de modo interesante o sustancial (cualquier información que esté relacionada disyuntivamente con una falsedad hará que el valor de verdad de la disyunción dependa sólo de la información en cuestión), la información de la hipótesis no es relevante para el segundo disyunto (relevante en sentido de Morado antes dicho: el paso de premisas a conclusión involucra relevancia); para CL_R el razonamiento está fuera de discusión, pues no hay conexión relevante (en sentido de los relevantistas) entre los disyuntos de la conclusión y el razonamiento falla. Con ambas nociones estaríamos en posición de rechazar el razonamiento anterior porque ambas respetan una práctica de CL_I: una condición que satisface un razonamiento efectivo e interesante es que no maneje información trivial o absurda.[213]

No obstante, me he referido aquí al papel de las intuiciones en lógica como algo que no es del todo rechazable sino como una manera de brindar apoyo a la que sería una noción técnica aceptable que elucide a CL_I, y si A&B apoyan su lógica relevante basándose en las intuiciones lógicas que solemos tener sobre razonamientos lógicamente correctos entonces también es posible que sean las intuiciones las que constituyan una razón para rechazar que las inferencias relevantistas sean las que modelan nuestro razonamiento intuitivo y no las clásicas. Orayen sostiene que varias intuiciones en las que supuestamente A&B apoyan su lógica relevante entran en conflicto con intuiciones más comunes que apoyan el entendimiento del razonamiento intuitivo, dichas intuiciones más comunes son también más básicas y ellas fundamentan los principios de inferencia clásicos como adición, SD y simplificación: la simplificación de una conjunción de dos o más enunciados verdaderos sobre cualquier acontecimiento permite que nos quedemos con cualquier conyunto particular, SD es el patrón inferencial que formaliza nuestros razonamientos por eliminación, y la adición permite aumentar el número de alternativas dada cierta información expresada en un enunciado (ya antes se vio la utilidad de esta regla en la labor matemática).[214]Esto mismo es aplicado a casos donde la hipótesis es $p \wedge \neg p$, pues una intuición lógica básica es que no es permitido razonar partiendo de contradicciones explicitas, de modo que aunque clásicamente se puede obtener *ex falso quodlibet* no estaríamos dispuestos a reconocer que un buen razonamiento tendría esta forma lógica. Orayen sostiene lo siguiente: "[…] if my intuitions on *simple, frequently-used* rules clash with intuitions about *more complex* and *less familiar,* situations it seems reasonable, *prima facie* to keep the first ones […] Because of theoretical reasons it could be better to give up the first ones rather than the second ones; but such reasons *must* exist, and they ought to be important and convincing.",[215] básicamente esto se entiende como poner el comportamiento de CL_I como la base del desarrollo de cualquier noción de CL que pretenda ofrecer una

[213] En otras palabras, el criterio para rechazar el razonamiento con CL_T es externo a su teoría (la relevancia entre premisas y conclusión como propiedad de la conectiva principal del razonamiento), mientras que es interno en el caso de CL_R (la formalización relevante del razonamiento no procede con el condicional relevante).

[214] Ver *Ibíd.* P. 22.

[215] *Ídem.*

elucidación de nuestra práctica racional. Las intuiciones que Orayen menciona en la cita anterior se refieren a nuestra base inferencial intuitiva que nos permite hacer razonamientos dados los acontecimientos de nuestro entorno. Concuerdo con Orayen respecto de que hacer una teoría lógica sobre dicha base inferencial tiene como un requisito principal modelarla para ser una adecuada interpretación formal de ella (de modo que el entendimiento de ella y su funcionamiento resulte más claro), si se pretende que una teoría lógica de este tipo se fundamente en intuiciones menos claras que las habituales que pretende formalizar entonces podemos pensar que dicha teoría lógica tiene una potencial desventaja: ¿cómo usar intuiciones menos claras y fundamentales para elucidar el razonamiento basado en intuiciones opuestas? Sin embargo, se aprecia que pese a la desventaja dicha teoría no tiene por qué ser rechazada inmediatamente, pues si ofrece razones teóricas lo bastante fuertes como para favorecer las intuiciones aparentemente menos evidentes y rechazar las que se tenían por claras entonces parece más sensato preferir la nueva teoría fundamentada en dichas intuiciones (no hay duda de que han habido resultados en la historia y desarrollo de la lógica y las matemáticas sobre esto).

Sabemos que una buena teoría lógica tiene como uno de sus propósitos ofrecer una noción clara de CL para saber en qué consiste tener un razonamiento lógicamente correcto, por lo que lo anterior dicho puede aterrizarse en las dos nociones de nuestro interés: CL_T y CL_R. Ahora, lo que hemos dicho en las últimas páginas sirve como apoyo a la lógica clásica en su papel de ser la lógica que modela nuestro razonar intuitivo, y ya que CL_T es una precisión de lo que podríamos entender como noción clásica de CL, tenemos razones para creer que la noción tarskiana concuerda en mayor medida con CL_I que la noción relevante pues: i) ya que la relación "seguirse lógicamente de" puede capturarse con el condicional material siempre y cuando el contenido de premisas y conclusión sea tal que si se garantizan las premisas entonces la conclusión debe ser cierta,[216] la formalización de razonamientos lógicamente correctos y las interpretaciones que sean modelos de ellos tomarán la conectiva principal (dicho condicional) como una conectiva que preserva verdad y relevancia dentro del modelo, ii) hay razones para creer que las reglas de inferencia clásicas (transitividad, etc.) envuelven relevancia, y semánticamente los modelos tarskianos interpretan los razonamientos hechos a partir de esas reglas, por lo que resulta natural pensar que la información del modelo que es trabajada en el razonamiento es siempre pertinente y relevante a lo largo de él (el desarrollo en matemáticas es prueba de esto), iii) las intuiciones del razonamiento intuitivo por lo general han sido capturadas por la teoría lógica clásica y sabemos que en CL_T se tiene (a) los modelos de razonamientos lógicamente correctos serán modelos de otros razonamientos con la misma forma lógica, (b) es necesario que todo modelo de las premisas sea modelo de la conclusión. La formalidad y modalidad y otras intuiciones lógicas (no razonar con información inconexa, no usar hipótesis contradictorias o ridículas, etc.) que tenemos de CL_I son rescatadas por CL_T al

[216] Entiéndase aquí el comportamiento del contenido como en los puntos (d), (e) y (f) de la nota 201. Nótese aquí que los condicionales materiales verdaderos donde no hay relación CL no cumplen con la relación de contenido especificada por (d), (e) y (f).

notar que los modelos tarskianos interpretan razonamientos con información que esperamos cumpla con esas intuiciones. Que la semántica tarskiana ya ofrezca interpretaciones con información así considerada garantiza que CL_T no arrojará resultados controvertidos o absurdos cuando el razonamiento a evaluar no lo sea.

Ahora, ¿en qué se puede estar pensando cuando se dice que una teoría lógica debe ofrecer razones teóricas lo bastante fuertes para rechazar intuiciones en favor de otras? Pienso que esta pregunta no es nada trivial porque puede pensarse como la búsqueda de razones teóricas para modificar el comportamiento de CL_I, y ya que sería inútil tratar de apoyarnos en una lógica "más intuitiva" para hacer esa búsqueda, parece que se puede decir que no hay una noción de CL más primitiva e intuitiva que CL_I para explicar ésta última. Pienso que hasta ahora lo más que podemos aspirar para la búsqueda es similar a lo sostenido por Gómez Torrente respecto de una elucidación de la noción de constante lógica: bases pragmáticas sobre el comportamiento de CL. Si tenemos dos teorías lógicas y parece mejor preferir la menos intuitiva entonces sería sensato esperar que nuestro modo de razonar restringido a la teoría menos intuitiva es mejor explicado por ella. De modo que nuestro criterio de evaluación para decidir qué teoría lógica elucida a CL_I y cuándo debemos renunciar a ciertas maneras de razonar intuitivas en favor de otras está principalmente fundamentado por cómo la intuición lógica determina nuestro modo de razonar.

Aún hay algo que decir sobre el papel de algunas intuiciones en el trabajo lógico. Respecto a varias nociones intuitivas que posteriormente recibieron un estudio técnico más preciso, como la noción de conjunto en matemáticas o validez en lógica, Kreisel dice que muchas veces surgen problemas (paradojas, etc.) por quedarnos únicamente con las nociones intuitivas como nuestra base teórica.[217] Anteriormente en este trabajo (capítulo 2.1) se habló de un razonamiento de Kreisel que es extendido para mostrar que otras nociones de CL, CL_{CoP} y CL_{ClP}, coinciden extensionalmente con CL_I cuando estamos en primer orden. Ahora para finalizar quiero tomar el argumento original de Kreisel por dos razones: i) disipar toda duda respecto de que la versión extendida del razonamiento brinde razones para creer que la noción de consecuencia de orden superior se comporta como CL_T, ii) en el argumento original se muestra claramente cómo CL_T y CL_I coinciden en los razonamientos lógicamente correctos, al menos en primer orden. El argumento original envuelve lo que Kreisel llama <u>rigor informal,</u> éste consiste en analizar las nociones intuitivas que tenemos para esclarecer lo más posible sus propiedades,[218] ciertamente el rigor informal envuelve nuestro entendimiento de CL_I. Kreisel da su argumento en relación a una noción de <u>validez intuitiva</u> y la relación de ésta con las nociones técnicas de validez lógica y demostrabilidad. La validez lógica consiste en validar razonamientos en toda estructura teórico-conjuntista, la validez intuitiva valida razonamientos en estructuras de cualquier tipo de dominio de discurso y claramente esta validez es la que se aplica para

[217] Ver Kreisel, G., "Informal rigour and completeness proofs" en *Problems in the Philosophy of Mathematics* (Ed. Lakatos, I.), 1967, p. 143.
[218] *Ibíd.* P. 138 y 139.

CL_I.[219] La validez intuitiva es muy general, por lo que tratar de esclarecerla como la validez lógica no funciona y sólo se pueden ofrecer argumentos lo bastante plausibles para entenderla. Kreisel señala los siguientes hechos (también para el caso de primer orden):
i) Los sistemas formales tienen su base en las intuiciones que tenemos para inferir intuitivamente, de modo que las reglas de inferencia de dichos sistemas deben asegurarnos que son una correcta interpretación de nuestras intuiciones: tomemos una fórmula α, D como la propiedad 'ser demostrable', Val como la propiedad 'ser intuitivamente válido',
$\forall\alpha(D\alpha \Rightarrow Val\alpha)$.
ii) Aunque ciertos resultados sean validados intuitivamente, no podemos esperar lo mismo si trabajamos con la noción técnica de validez (pues hemos visto que las nociones intuitivas pueden provocar el surgimiento de paradojas). Pero al pensar que las nociones técnicas sirven para elucidar dichas nociones intuitivas puede establecerse que: tomando V como la propiedad 'ser lógicamente válido',
$\forall i\forall\alpha(Val\alpha^i \Rightarrow V\alpha^i)$, donde α^i es una fórmula en cualquier orden.
Es importante destacar lo siguiente: "*Nobody will deny that one knows more about Val after one has established its relations with V and D; but that doesn't mean that Val was vague before.*".[220] Kreisel da el siguiente teorema: $\forall\alpha^1(Val\alpha^1 \Leftrightarrow V\alpha^1)$ y $\forall\alpha^1(Val\alpha^1 \Leftrightarrow D\alpha^1)$, donde el subíndice en α^1 indica que la fórmula es de primer orden. La demostración usa el teorema de compleción de Gödel (TCG) para lógica de primer orden y los hechos (i) y (ii): se sabe por (TCG) que $\forall\alpha(V\alpha \Rightarrow D\alpha)$, aplicando transitividad a esto y (i) se tiene $\forall\alpha(V\alpha \Rightarrow Val\alpha)$ y con (ii) se tiene el primer conyunto del teorema; al aplicar transitividad a (ii) y (TCG) se tiene $\forall\alpha(Val\alpha \Rightarrow D\alpha)$ y con (i) se tiene el segundo conyunto del teorema.[221] Esta es una razón más para pensar que, en primer orden, tanto V y Val como CL_T y CL_I coinciden exitosamente, y nuevamente afirmamos que CL_T es una noción técnica adecuada para elucidar a CL_I. Nuestro razonar intuitivo queda adecuadamente explicado con las razones ofrecidas respecto del rigor informal de Kreisel, y si tomamos la versión extendida expuesta en el capítulo 2.1 de este trabajo tenemos más razones para creer que incluso aquellos razonamientos lógicamente correctos sólo formalizables en orden superior serían adecuadamente analizados por CL_T.

Pese lo anterior, surge una crítica que los relevantistas harían al argumento de Kreisel. Se ha dicho antes que las intuiciones juegan un papel importante en el desarrollo teórico de la lógica, pues los sistemas formales sirven para brindar un mejor entendimiento a las intuiciones detrás de la práctica racional. En este trabajo hemos defendido que tanto LC como LR se apoyan en el carácter pragmático de las intuiciones detrás de la actividad racional, de modo que los sistemas formales clásicos y relevantistas tienen como un objetivo esclarecer el comportamiento de los razonamientos intuitivamente correctos mediante la elucidación de Val. ¿Por qué el relevantista tendría que aceptar que los sistemas

[219] Ver *Ibíd.* P. 153. Ya en la versión extendida de este razonamiento expuesta en el capítulo 2.1 se vieron estructuras con otros tipos de dominios, como dominios que son clases.
[220] *Ibíd.* P. 154.
[221] Ver *Ídem.*

formales clásicos son los adecuados para llevar a cabo la labor de aclarar *Val*?, ¿no es justo el aclarar *Val* una parte de la motivación de LR para postular sus nociones y conectivas lógicas relevantistas? En párrafos anteriores hemos argumentado a favor de que LC puede satisfacer los requisitos de relevancia de información, formalización y tratamiento de intuiciones básicas, etc., para mostrar que estos objetivos no son algo que no es exclusivo de LR. Sin embargo, de lo anterior no se sigue que hayamos demostrado que los sistemas clásicos constituyan el modo de interpretar y elucidar todas características intuitivas de CL_I y que los sistemas relevantistas estén completamente descartados para esa labor. En su ataque hacia LC, los relevantistas pueden rechazar las premisas $\forall\alpha(D\alpha \Rightarrow Val\alpha)$ y $\forall\alpha(V\alpha \Rightarrow Val\alpha)$ del argumento de Kreisel por lo siguiente: 1) Los sistemas formales clásicos permiten falacias de irrelevancia que intuitivamente no se reconocen como patrones inferenciales legítimos, de modo que *Val* no puede ser correctamente formalizada por D (siendo D entendida solamente como ser fórmula demostrable en sentido clásico); 2) Si V es entendida solamente como la noción técnica de validez clásica entonces, al proporcionar modelos que validan las paradojas clásicas, no puede constituir la base explicativa de *Val*, pues no diríamos que un razonamiento intuitivamente válido es uno que estuviera basado en *ex falso quodlibet* u otra paradoja. Así, el argumento de Kreisel no es concluyente para un relevantista que no acepte que *Val* es explicado por D y V entendidos como en el argumento. Además, como las premisas están apoyadas en cierto grado de plausibilidad, el argumento por si mismo no alcanza a fungir como apoyo contra el rechazo relevantista de LC.

Dicho lo anterior, para los relevantistas el argumento de Kreisel no muestra que CL_I es elucidada por una noción clásica de CL (particularmente por CL_T). Aunque las razones dadas en párrafos anteriores sirven para apoyar que CL_T sí explica adecuadamente a CL_I y con eso brindar apoyo a la plausibilidad del argumento de Kreisel, no dudo que puedan presentarse respuestas relevantistas hacia lo que hemos defendido a lo largo de esta sección, a saber que CL_T es más adecuada que CL_R para elucidar a CL_I. No obstante, explorar esas respuestas y tratar de defender nuestra postura es algo pendiente para un estudio posterior.

4.- Conclusión.

Para finalizar este trabajo, quiero sumarizar los resultados más importantes respecto de lo dicho en el capítulo anterior: cómo resultaron CL_T y CL_R en su elucidación de CL_I. Además quiero exponer una propuesta interesante sobre cómo la lógica relevante puede ser introducida no como una sustitución de la lógica clásica sino como una complementación de ésta.

He centrado el análisis de CL_T y CL_R respecto de la propiedad modal que CL debe cumplir y sobre la noción de constancia lógica, que es crucial en el desarrollo de sistemas lógicos que manejen sus nociones de CL. Hemos visto con la crítica etchemendiana que CL_T parecía no abordar adecuadamente la propiedad modal, pero la respuesta de Ray muestra que dicha crítica está basada en malas interpretaciones de la teoría tarskiana de CL, por lo que de principio no se aplica a CL_T. Es importante ofrecer teorías que aclaren en qué consiste que una constante sea lógica, pues las teorías lógicas dependen en gran medida de qué términos conformen su estructura, y esto claramente afecta la noción de CL aceptada en esas teorías (en qué consiste que una conclusión se siga lógicamente de unas premisas en cierta lógica depende de cómo ésta esté estructurada). Hay varios proponentes de definiciones para decir en qué consiste que ciertos términos sean lógicos pero hasta ahora no hay una propuesta totalmente satisfactoria al respecto, Tarski ofrece un criterio teórico para decir cuándo un término es lógico: invariancia bajo permutaciones del universo de discurso sobre sí mismo, pero no es capaz de discriminar adecuadamente los términos lógicos de los que no lo son porque hay términos que bajo el criterio contarían como lógicos pero no deseamos que lo sean; otros como Gómez Torrente ofrecen un criterio más bien pragmático que los términos lógicos tienden a obedecer: el uso y utilidad de ellos en diversas teorías sobre varias ciencias. Esto es aplicable a los términos lógicos usuales de la lógica clásica y hay razones para pensar que el criterio pragmático aplicado a la lógica clásica hace de ésta la usual para formalizar la mayoría de las teorías en otras ciencias (aunque esto depende de cada tema de estudio).

Vimos que la propiedad modal de CL adquiere ciertas dificultades dada la noción de modalidad que ofrecen A&B, pues por esa definición cualquier enunciado es necesario si la totalidad de sus componentes (a los que además se les aplica el principio de identidad $p \rightarrow p$) implican relevantemente al enunciado. A&B aseguran que cuando un razonamiento es un caso de CL_R entonces todo lo que sea consecuencia lógica de dicho razonamiento tiene que ser necesario en sentido relevantista, pero esto introduce problemas para algunos razonamientos donde se presenta irrelevancia parcial. Además también se requieren razones para pensar que la necesidad de un oración (en sentido de A&B) es implicada relevantemente por la totalidad de las componentes (esto es particularmente evidente cuando se tratan de razonamientos con contenido contingente y lo que es CL_R de ellos). Vimos que el problema de irrelevancia parcial puede ser superado usando una solución que es en esencia clásica, relacionada a la propiedad de monotonicidad que CL clásica cumple.

Las constantes lógicas definidas relevantemente en realidad no ofrecen una manera innovadora y mejor de trabajar en lógica, además prohíben ciertas reglas de inferencia que son de gran utilidad (en matemáticas hay varios resultados que confirman esto). Si se mantiene la sugerencia de Gómez Torrente en la definición de constante lógica entonces podemos creer que las reglas de inferencia de las constantes clásicas son bien comportadas respecto de la información que se maneja (no suele ser información inconexa o absurda).

Respecto al condicional se vio que las maneras clásica y relevante están vinculadas a CL_T y CL_R respectivamente, esto debido al papel del condicional en la formalización de los razonamientos. En la postulación de la lógica relevante al comienzo de este trabajo, se vio que el condicional relevante surge como alternativa para evitar las paradojas que el condicional material permite, además varias reglas de inferencia son restringidas o prohibidas para evitar el surgimiento de las paradojas y garantizar que se cumplen los requisitos de relevancia y necesidad en los razonamientos lógicamente correctos. Pero hemos visto razones para creer que el condicional material garantiza relevancia cuando es la conectiva lógica principal de un razonamiento lógicamente correcto. También se vieron razones para sostener que las reglas de inferencia para el condicional material (como la transitividad) preservan relevancia en la información manejada, pues si hay la restricción de no trabajar con contradicciones como hipótesis y no extraer tautologías de una información cualquiera entonces los razonamientos lógicamente correctos en sentido clásico no tienen por qué involucrar irrelevancia o resultados absurdos. Esto se traslada al nivel de CL, pues las motivaciones relevantistas del condicional son llevadas al nivel más general al sostener que la lógica relevante tiene como base las intuiciones lógicas que rigen el razonar intuitivo, sin embargo exploramos razones para pensar que la lógica clásica también tiene como base las intuiciones lógicas de los razonamientos intuitivos, clásicamente también se rescatan las propiedades más importantes que los relevantistas consideran cruciales en los buenos razonamientos cotidianos. Aunque se presente el hecho de rechazar ciertas intuiciones racionales en favor de otras menos evidentes, sabemos que en última instancia esto no lo deciden las nociones técnicas de CL *per se* sino nuestra práctica de razonar. Tal como ocurrió con la noción de constante lógica, parece claro que hay ciertos criterios pragmáticos no cubiertos por las teorías de CL que nos hacen razonar como de hecho lo hacemos, son esos criterios los que ayudan a decidir entre las teorías de CL a la que mejor explica nuestro modo de razonar. Tanto CL_T como CL_R intentan cumplir estos criterios pragmáticos, pero dado todo lo anterior nos ponemos a favor de CL_T como la que elucida mejor todas esas características de CL_I.

Finalmente, vimos el argumento de Kreisel que apoya la coextensionalidad de CL_T con CL_I para el caso de 1er orden. Con los teoremas de corrección y compleción (éste último de Gödel) Kreisel nos da razones para defender que la noción intuitiva de validez concuerda bien con las nociones técnicas de validez lógica y demostrabilidad para sistemas formales de primer orden. La versión extendida expuesta en el capítulo 2.1 (de Gómez Torrente (2000)) muestra que esto puede apoyar la coextensionalidad de CL_T con CL_I para razonamientos de orden superior. No obstante, vimos al final que los relevantistas no están obligados a reconocer el argumento de Kreisel debido a la ausencia de razones completamente concluyentes en favor de la noción clásica de CL sobre CL_R. El argumento por plausibilidad no obliga a los relevantistas a abandonar su proyecto, además de que es posible dar una respuesta relevantista en contra de las premisas del argumento (y que estén en contra del apoyo que brindan nuestros argumentos en favor de la noción clásica).

¿Todo lo anterior es motivo para desechar sin más a CL_R y la lógica relevante? Desde luego que no. Algo que vale la pena señalar es que todo teorema de la lógica clásica puede ser un **E**-teorema, y en este sentido parece más bien que la lógica relevante es una extensión de la lógica clásica y no un oponente, pero la rivalidad entre ambas lógicas aparece cuando los relevantistas (empezando por A&B) proponen reemplazar varias nociones clásicas por unas relevantistas, como la noción clásica de validez lógica o las conectivas clásicas.[222]

Orayen sostiene que al no pensar en la lógica relevante como sustituto de la lógica clásica se pueden rescatar varias nociones y resultados relevantistas interesantes que complementan el desarrollo de la lógica en general.[223] Propiedades como la de compartir-variables en razonamientos lógicamente correctos pueden ser de ayuda para identificar más fácilmente casos de falacias y paradojas, incluso una noción técnica de relevancia es bastante deseable en lógica para estudiar los razonamientos lógicamente correctos, por lo que la lógica relevante podría aportar bastante al respecto de esto. No debemos olvidar que una de las utilidades de la lógica es esclarecer nuestras intuiciones al razonar, así que para explicar más claramente cómo razonamos y qué utilizamos se requiere tener al alcance todo el aparato técnico lo más rico y entendible posible para explicar mejor todos los detalles y fineza que el razonamiento intuitivo envuelve. Por ejemplo, el condicional intuitivo es de gran interés para entender cómo se pasa de una información a otra, y es mejor tener junto con el condicional material las ventajas que el condicional relevante ofrece. Esta es otra manera favorable de usar la lógica relevante.[224]

[222] Ver Orayen, R., "Deducibility Implies Relevance? A Negative Answer (II)" en *Crítica,* Vol. XV, n. 43, 1983, p. 18.
[223] Ver *Ibíd.* P. 19.
[224] Ver *Ibíd.* P. 22.

Bibliografía:

- Anderson, A., R., Belnap, N. (contr. Dunn, M., Meyer, R.), *Entailment : The logical of relevance and necessity*, Vol. I y II, Princeton University Press, Nueva Jersey, 1975.
- Beall, J., C., y Restall, G., *Logical Consequence,* http://plato.stanford.edu/
- Burges, J. P., "No requirement of relevance" en Shapiro, S. (editor), *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic,* Oxford University Press, New York, 2005. P. 727-750.
- Dunn, M., yRestall, G., "Relevance Logic" en *The Handbook of Philosophical Logic* (Eds. Gabbay, D., Guenther, F.), second edition, Vol. 6, Kluwer, 2002. P. 1-136.
- Echemendy, J., *The Concept of Logical Consequence,* Harvard University Press, Cambridge (Mass.), London, 1990.
- Gómez, Torrente, M., "La noción de consecuencia lógica" en *Enciclopedia Iberoamericana de Filosofía: Filosofía de la lógica* (ed. Raúl Orayen y Alberto Moretti), Trota, Madrid, 2004. P. 143-178.
- Gómez, Torrente, M., *Forma y modalidad: una introducción al concepto de consecuencia lógica,* Eudeba, Buenos Aires, 2000.
- Gómez, Torrente, M., *The problem of logical constants,* The Bulletin of Symbolic Logic, Vol. 8, N. 1, New York, 2002. P. 1-37.
- Gómez, Torrente, M., *Logical Truth,* http://plato.stanford.edu/
- Gómez, Torrente, M., *Alfred Tarski*, http://plato.stanford.edu/
- Kreisel, G., "Informal rigour and completeness proofs" en *Problems in the Philosophy of Mathematics* (Ed. Lakatos, I.), North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1967. P. 138-186.
- Lewis, I., C., *A survey of Symbolic Logic,* Berkeley: University of California Press, California, 1918.
- Mares, E., *Relevance Logic,* http://plato.stanford.edu/
- Mares, E., *Relevant Logic. A philosophical Interpretation,* Cambridge University Press, United Kingdom, 2004.
- Morado, R., "El problema de la relevancia en la lógica clásica", en *Cuarto Simposio Internacional de Filosofía* (comp. Villanueva, E.,), Vol. I, UNAM, México, 1988. pág. 109-120.
- Morado, R., "Problemas filosóficos de la lógica no-monotónica" en *Enciclopedia Iberoamericana de Filosofía,* Trota y CSIC, Madrid, 2002. Pág. 313-344.
- Morado, R., "Deducibility Implies Relevance? A Cautious Answer (On Professor Orayen's Criticisms of Relevant Logic)" en *Crítica,*Vol. XV, No. 45, IIF-UNAM, México, 1983. P. 105-109.
- Moretti, A., "El concepto tarskiano de verdad" en *Enciclopedia Iberoamericana de filosofía: Filosofía de la lógica* (ed. Raúl Orayen y Alberto Moretti), Trota, Madrid, 2004. P. 105-142.

- Orayen, R., “Deducibility Implies Relevance? A Negative Answer (I)” en *Crítica,* Vol. XV, No. 43, IIF-UNAM, México, 1983. P. 3-29.
- Orayen, R., “Deducibility Implies Relevance? A Negative Answer (II)” en *Crítica,* Vol. XV, No. 44, IIF-UNAM, México, 1983. P. 3-25.
- Orayen, R., “On kinds of Relevance (Reply to Raymundo Morado)” en *Crítica,* Vol. XV, No. 45, IIF-UNAM, México, 1983. P. 109-110.
- Ray, .G., “Logical consequence: A defense of Tarski” en *Journal of Philosophical Logic,* Kluwer Academic Publishers, N. 25, Netherlands, 1996. P. 617-667.
- Read, S., “Logical consequence as truth preservation” en *Logique & Analize*, N. 183-184, Scotland, 2003. P. 1-15.
- Tarski, A. (1936), “The Concept of Truth in Formalized Languages” en *Logic, Semantics, Metamathematics* (tr. J. H. Woodger), Oxford at the Clarendon Press, Great Britain, 1983. P. 152-278.
- Tarski, A. (1936b), “On the Concept of logical consequence” en *Logic, Semantics, Metamathematics* (tr. J.H. Woodger), Oxford at the Clarendon Press, Great Britain, 1983. P. 409-420.
- Tarski, A. (1933), “Some observations of ω-consistency and ω-completeness” en *Logic, Semantics, Metamathematics* (tr. J. H. Woodger), Oxford at the Clarendon Press, Great Britain, 1983. P. 279-295.
- Tarski, A. (1986), “What are Logical Notions?” (Ed. Corcoran, J.) en *History and Philosophy of Logic* (Eds. Dawson, J., Peckhaus, V.), Taylor & Francis group, Germany, 1986. P. 143-154.
- Tennant, N., “Relevance in Reasoning” en Shapiro, S. (editor), *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic,* Oxford University Press, New York, 2005. P. 696-726.
- Urquhart, A., “Semantics for Relevant Logics” en *The Journal of Symbolic Logic,* Vol. 37, No. 1, Cambridge, United Kingdom, 1972. P. 159-169.