



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA
MAESTRÍA EN INGENIERÍA EN EXPLORACIÓN Y EXPLOTACIÓN DE
RECURSOS NATURALES – INGENIERÍA DE YACIMIENTOS

DETERMINACIÓN DE CONDICIONES DE EXPLOTACIÓN A PARTIR DE LA
INFORMACIÓN REGISTRADA CON SENSORES PERMANENTES DE PRESIÓN
Y TEMPERATURA

TESIS QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN INGENIERÍA

PRESENTA:
ING. JUAN MANUEL SÁNCHEZ GARCÍA

TUTOR
DR. HEBER CINCO LEY
FACULTAD DE INGENIERÍA

MÉXICO, D. F. JUNIO DE 2015



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

AGRADECIMIENTOS

A MIS PADRES

Elisa García Sánchez † y Manuel Sánchez Manríquez †, que aunque son parte de ese algo que me hace falta, sus incambiables palabras y oportunos regaños, han resultado esenciales para el logro de todas y cada una de mis metas. ¡Los extraño mucho!

A MI DIRECTOR DE TESIS

Dr. Heber Cinco Ley por haberme aceptado como su tesista y asignarme el tema para este trabajo de investigación.

A PEMEX

Por brindarme la oportunidad de fortalecer mis conocimientos y así disponer de más herramientas para desempeñarme eficientemente.

A LA FACULTAD DE INGENIERÍA DE LA UNAM

Mi alma mater. A la que a pesar de tanta adversidad, desde mi óptica, es una institución fundamental para el desarrollo de este maravilloso país.

A MI SOPORTE EN PROGRAMACIÓN

Fernando Trinidad Carranza por haberme soportado en los momentos de incertidumbre y proponerme soluciones que agilizaron el desarrollo del trabajo.

Juan Manuel Sánchez García

RESUMEN

Cuando en un pozo se registran simultáneamente gasto de producción, y presión y temperatura en el fondo puede ser posible apreciar cierta respuesta de la temperatura al provocarse cambios en el gasto de producción debidos a movimientos operativos “normales” realizados en superficie. Tal respuesta, a grandes rasgos indica que se pueden presentar incrementos en la temperatura de fondo al provocar incrementos en el gasto de producción, o viceversa; sin embargo esta peculiaridad depende de los fenómenos fisicoquímicos sufridos por el fluido almacenado en el yacimiento, de la profundidad donde se estén registrando los parámetros mencionados, de las condiciones mecánicas del pozo, y de algunos otros factores.

Enfocándose al caso donde es factible apreciar una correlación entre el gasto y la temperatura de fondo, se resaltaré que la temperatura de fondo puede llegar a ser un parámetro útil para validar la información de producción oficial de un pozo, y para esto se establecerán, de forma práctica, dos modelos de correlación: uno para periodos de flujo donde el gasto se mantiene constante y otro para periodos de flujo donde el gasto varía con el tiempo al efectuarse cambios operativos normales. Y una vez generados serán aplicados para estimar el gasto de producción en el mismo pozo donde se registró la información simultánea gasto – presión y temperatura tras colocarse un sensor permanente de P&T.

Por otro lado, en lo que respecta a los datos de presión, un sensor permanente puede registrar tal parámetro durante periodos prolongados de tiempo (meses o incluso años), por lo que la vasta cantidad de información recolectada puede proceder de señales originadas por cambios operativos “normales”, es decir útiles para realizar análisis de yacimiento, así como de eventos propensos a un gran descontrol. De esta manera, para efectuar análisis de yacimiento a partir de los datos de presión registrados, es recomendable someterlos a un proceso de depuración de tal manera de discriminar señales de yacimiento, que normalmente corresponden a señales de baja frecuencia, de las señales atribuidas a eventos no controlados, los cuales corresponden a señales de alta frecuencia^{3, 11, 12}.

A este respecto, una herramienta matemática que permite descomponer una señal (función) mediante la superposición de una función básica a diferentes componentes de frecuencia, son las series de Fourier; sin embargo, su aplicación se limita a funciones periódicas, siendo que en el caso de señales registradas por un sensor permanente éstas son de tipo no estacionarias, es decir que cambian con el tiempo, y en este caso, una herramienta que es útil para descomponer una señal no periódica en sus diferentes componentes de frecuencia son las series wavelet.

Los resultados obtenidos de ambos alcances serán mostrados en un programa de cómputo utilizando datos de campo.

ALCANCES

Este trabajo de tesis pretende destacar la utilidad que se le podría dar a la información recabada por un sensor permanente de presión y temperatura para establecer ciertas condiciones de explotación a nivel de pozo. En este sentido se persiguen esencialmente dos alcances:

- 1) Establecer de forma práctica dos modelos de correlación que permitan cuantificar el gasto de producción a partir de los cambios sufridos por la temperatura de fondo al efectuarse modificaciones del gasto de producción debido a cambios operativos “normales”. Para la generación de dichos modelos de correlación se tomará de base información de un pozo en el que simultáneamente son registrados presión, temperatura y gasto, por lo que su aplicabilidad es recomendable enfocarla a nivel de pozo.
- 2) Utilizar los fundamentos del análisis wavelet para procesar la información de presión, ya que tal herramienta matemática es capaz de eliminar información que no es sustancial para realizar análisis de yacimiento. La forma de lograr lo anterior es representando una señal de presión mediante una serie wavelet para diferenciar señales de baja frecuencia (atribuidas a señales de yacimiento) de las señales de alta frecuencia (atribuidas a señales de eventos no controlados).

NOMENCLATURA

ℓ^2 = espacio de las secuencias de modulo cuadrado sumable bi-infinito

\mathbb{R} = Conjunto de los números reales

\mathbb{Z} = Conjunto de los números enteros

N = Número de datos de una señal de presión, ventana de suavización

k = traslación integral en la transformada wavelet discreta

\bar{g} = conjugado de la función g

ψ = función wavelet

ω = frecuencia

$\hat{f}(\omega)$ = espectro de frecuencia de la función f o transformada de Fourier de la función f

$\|f\|$ = Norma de la función f

$\langle f, g \rangle$ = Producto punto o escalar de las funciones f y g

$\phi(t)$ = función de escalamiento, función ventana tiempo

$\hat{\phi}(\omega)$ = espectro de Fourier de la función de escalamiento ϕ ó ventana frecuencia

t^* = centro de una función ventana tiempo

ω^* = centro de una ventana frecuencia

C_ψ = Constante del principio de admisibilidad

A, B : Fronteras de la condición de estabilidad

ψ^* = wavelet dual

m = número de coeficientes de una secuencia de reconstrucción.

$:=$ = significa, está definido por

\oplus = suma ortogonal de espacios vectoriales

\mapsto = implica

\subset = contenido en

$\dot{+}$ = suma directa

$\cdot -$ = se define como

\cap = intersección

$[]$ = base o secuencia

\in = pertenece a

\perp = perpendicular

\prod = producto geométrico

$\hat{\phi}$ = Transformada de Fourier de la función de escalamiento ϕ

$\hat{\psi}$ = Transformada de Fourier de la función wavelet ψ

Δ_{ϕ} = radio de la función ventana tiempo ϕ

$\Delta_{\hat{\phi}}$ = radio de la función ventana frecuencia $\hat{\phi}$

Δ_{ψ} = radio de la función wavelet ψ

$\Delta_{\hat{\psi}}$ = radio de la función wavelet ventana ψ en el espacio de Fourier

ξ = frecuencia en la STFT

α = parámetro de dilatación de una función gaussiana

b = parámetro de traslación en la transformada wavelet continua

a = parámetro de dilatación en la transformada wavelet continua

$\psi_{j,k}$ = base formada por la wavelet ψ

MRA = Análisis Multiresolución

J = nivel de resolución más grueso o máximo nivel de descomposición

\equiv = Idéntico a

$L^2(0,2\pi)$ = Espacio vectorial de las funciones periódicas - 2π cuadrático integrables

$L^2(\mathbb{R})$ = Espacio vectorial de las funciones medibles cuadráticas integrables unidimensionales

$Clos_{L^2(\mathbb{R})}$ = Cerradura del espacio vectorial $L^2(\mathbb{R})$

SUBINDICES

i, j, k, l, n = índices enteros

SUPERINDICES

0 = nivel inicial o nivel de descomposición cero

N = número de datos

-1 = inversa

T = Transpuesta

LISTA DE TABLAS

III.1 Propiedades de algunos elementos piezoeléctricos.....	22
III.2 Especificaciones Mecánicas de los Medidores de Flujo de Fibra Óptica.....	51
V.1 Datos generales, caso de campo A.....	123
V.2 Datos generales, caso de campo B.....	136
B1 Valores de algunos spline en localizaciones enteras.....	207

LISTA DE FIGURAS

II.1 Sistema de Monitoreo de Nueva Generación.	6
III.1 Componentes de un sistema de monitoreo permanente de fondo.....	16
III.2 Componentes de un registrador electrónico permanente de fondo.....	19
III.3 Transductor de presión piezoeléctrico.....	21
III.4 Sensor basado en el efecto piezoeléctrico.....	22
III.5 Diseño básico de un sensor de capacitancia.....	23
III.6 Celda de presión basada en capacitancia.....	24
III.7 Tubo Bourdon en forma de “C”.....	25
III.8 Diseños típicos del tubo Bourdon.....	26
III.9 Transductor de presión mediante un alambre resonante.....	28
III.10 Sensor en modo transversal de espesor: (A) Sistema de montaje a dos puntos (B) Sistema de montaje a tres puntos.....	29
III.11 Isométrico de un sensor en modo transversal de espesor.....	30
III.12 Ejemplos de resonadores en modo flexible con terminado doble (a) Dispositivo de una sola viga, (b) Dispositivo de doble viga, (c) Dispositivo de triple viga.....	33
III.13 Sensor de viga vibratoria aplicado en fondo.....	34
III.14 Elementos de medición de un sensor electrónico de tensión (galga extensiométrica).....	35
III.15 Estructura de una fibra óptica.....	36

III.16 Sensor de fibra óptica basado en intensidad para la medición de presión a través de microcurvaturas.....	37
III.17 Esquema de funcionamiento de una rejilla Fiber-Bragg en fibra óptica.....	38
III.18 Estructura de un sensor de presión de rejillas Fiber-Braggs.....	39
III.19 Diagrama esquemático del elemento activo libre con modulo elástico del transductor de presión.....	40
III.20 Diagrama esquemático del cantiléver en forma de triángulo isósceles.....	41
III.21 Sensor interferométrico de fibra óptica tipo Mach-Zehnder.....	42
III.22 Salida típica de un sensor interferométrico para incrementos en la longitud de la trayectoria óptica.....	43
III.23 Esquema de la auto calibración de un sistema sensor basado en intensidad / interferometría.....	45
III.24 Esquema ilustrativo de la geometría de un sensor de presión SCIIB.....	45
III.25 Intensidad de salida de una cavidad Fabry-Perot.....	46
III.26 Sistema de medición de flujo de fibra óptica.....	49
III.27 Sistema de Medición de flujo totalmente ensamblado y su unidad de instrumentación superficial asociada.....	50
III.28 Sistema de medición de temperatura distribuida.....	52
III.29 Reflectometría óptica en el dominio del tiempo.....	53
III.30 Espectro de retro-dispersión mostrando la banda Brillouin y la banda Raman “Stokes”.....	54
III.31 Variación de la potencia retro-dispersa Anti-Stokes con la temperatura.....	55
IV.1 Menú de acceso a los módulos del programa de cómputo.....	58
IV.2 Interfaz del módulo “correlación producción – ΔT ”.....	59
IV.3 Barra de botones para la generación de los modelos de correlación.....	60
IV.4 Respuesta de la temperatura ante cambios en el gasto, visualizado con un registro PLT.....	62
IV.5 Registro PLT cargado al programa de cómputo.....	62
IV.6 Visualización gráfica del registro base cargado.....	63

IV.7 Botón de acceso para iniciar con la generación del modelo de correlación para periodos de flujo constante.....	64
IV.8 Panel “Correlación para periodos Q cte”	65
IV.9 Obtención de la relación lineal entre la velocidad del fluido y la rotación del molinete.....	66
IV.10a Ajuste por regresión polinomial a los datos de viscosidad de PVT.....	68
IV.10b Ajuste por regresión polinomial a los datos del factor de volumen del aceite de PVT.....	68
IV.11 Dificultad para delimitar periodos de flujo a gasto constante a partir de la temperatura de fondo.....	70
IV.12a Delimitación de un periodo a gasto constante basado en el comportamiento de la presión y haciendo un acercamiento.....	71
IV.12b Conjunto de periodos a gasto constante seleccionados, resaltándolos en color rojo.....	72
IV.13 Selección y almacenamiento del valor de Twe.....	73
IV.14 Listado de los valores de Gasto y ΔT , para cada periodo seleccionado.....	73
V.15 Gráfico Gasto contra ΔT	74
IV.16 Menú de técnicas de ajuste al oprimir el botón “Modelos para Q cte”	75
IV.17 Ecuación de ajuste usando análisis de regresión polinomial de grado 3.....	76
IV.18 Ajuste mediante la técnica de interpolación por spline cuadráticos.....	76
IV.19 Simulación de la información base con los modelos de correlación.....	78
IV.20 Incremento de la temperatura ante la variación “natural” del gasto.....	79
IV.21 Menú para evaluar periódicamente el modelo de correlación para periodos a gasto constante durante la variación “natural” del gasto.....	79
IV.22 Sección cortada de los datos de un sensor permanente de P&T cargados al programa.....	80
IV.23 Activación de la opción “Corrección de datos por Profundidad” para homologar con la información base.....	81
IV.24 Información del sensor permanente expresada a la misma profundidad de la información base.....	82

IV.25 Opción “Corrección de Datos por Profundidad” desactivada para indicar que existe homologación en profundidad.....	82
IV.26 Menú “Catalogar información” junto con el grafico de presión y temperatura contra tiempo.....	84
IV.27 Adición de líneas verticales móviles para delimitar periodos de flujo.....	85
IV.28 Designación de los modelos de correlación a cada periodo de flujo.....	86
IV.29 Periodicidad para estimar la variación “natural” del gasto en el caso de decaimiento o incremento de la temperatura de fondo.....	87
IV.30 Seccionamiento de datos de acuerdo a los modelos de correlación.....	88
IV.31 Asignación de los modelos de correlación.....	88
IV.32 Estimación del gasto con los modelos generados.....	89
IV.33 Interfaz del módulo “Procesamiento de datos de presión”.....	90
IV.34 Señal cruda (datos sin procesar).....	91
IV.35 Resumen de la validación de datos.....	92
IV.36 Errores de medición asociados a tendencias engañosas (datos fuera de tendencia).....	93
IV.37 Señal original sin errores por fuera de tendencia.....	93
IV.38 Funciones de escalamiento y wavelet Daubechies 4 (a) y 8 (b).....	96
IV.39 Funciones de Escalamiento y Wavelet Coiflet 6 (a), Coiflet 12 (b), Coiflet 18 (c) y Coiflet 24 (d).....	97
IV.40 Funciones de Escalamiento y Wavelet Symlet 8 (a) y Symlet 16 (b).....	98
IV.41 Descomposición wavelet usando el algoritmo piramidal.....	100
IV.42 Coeficientes de aproximación y detalle obtenidos a diferentes niveles de descomposición.....	104
IV.43 Matriz de descomposición wavelet.....	105
IV.44 Ilustración matricial de los cálculos wavelet con problemas de frontera (área encerrada en rojo).....	106
IV.45 Matriz de descomposición wavelet con frontera periódica ajustada.....	107
IV.46 Selección de la familia wavelet y sección cortada del cálculo de los coeficientes de aproximación y detalle con ajuste en las condiciones de frontera.....	108
IV.47a Coeficientes de aproximación y detalle sin depurar.....	110

IV.47b Coeficientes de detalle depurados con el criterio del umbral duro.....	111
IV.48 Reconstrucción wavelet usando el algoritmo piramidal.....	112
IV.49 Calculo matricial de la transformada wavelet inversa con problemas de frontera ajustados.....	113
IV.50 Selección de la familia wavelet e indicación del número de niveles de reconstrucción.....	113
IV.51 Señal depurada con el análisis wavelet.....	115
IV.52 Procesamiento de una señal deshabilitando el análisis wavelet en picos altos.....	115
IV.53 Reducción de datos de la señal depurada.....	116
IV.54 Sección cortada de una señal depurada y reducida al ser exportada a Excel.....	117
IV.55 Resultados del suavizado con la media móvil simple.....	119
IV.56 Comparación análisis wavelet – media móvil simple.....	119
IV.57 Resultados del suavizado con la media móvil ponderada.....	120
IV.58 Comparación análisis wavelet – media móvil ponderada.....	121
V.1 Registro PLT cargado al programa, caso de campo A.....	124
V.2 Grafica de temperatura y rotación contra tiempo.....	124
V.3 Relación lineal entre el ritmo de rotación y la velocidad del fluido.....	125
V.4a Ajuste por regresión polinomial del comportamiento de la viscosidad del aceite con la presión.....	126
V.4b Ajuste por regresión polinomial del comportamiento del factor de volumen del aceite con la presión.....	126
V.5 Resultado del cálculo del gasto a partir de la rotación.....	127
V.6 Grafico de presión y gasto contra tiempo para seleccionar periodos a gasto constante.....	127
V.7 Conjunto de periodos a gasto constante seleccionados.....	128
V.8 Resultados del cálculo de ΔT para los periodos a gasto constante.....	129
V.9 Modelo de correlación para periodos de flujo a gasto constante.....	129

V.10 Reproducción del registro PLT mediante los modelos de correlación generados.....	131
V.11 Datos de un sensor permanente a usarse para estimar el gasto de producción.....	132
V.12 Seccionamiento de la información y asignación de los modelos de correlación.....	132
V.13 Resultados arrojados en la estimación del gasto.....	133
V.14 Comparación de los resultados del gasto con los valores oficiales.....	134
V.15 Grafica de los datos de presión sin procesar	137
V.16 Resumen de la validación de datos.....	137
V.17a Grafica de la señal de presión, sin datos anómalos ni errores por fuera de tendencia.....	138
V.17b Acercamiento al grafico de la señal de presión, sin datos anómalos ni errores por fuera de tendencia.....	138
V.18 Coeficientes de aproximación y detalle para 10 niveles de descomposición usando la familia wavelet Daubechies de orden 5.....	139
V.19 Aplicación del criterio de umbral hard.....	140
V.20 Reconstrucción de la señal depurada.....	141
V.21 Deshabilitado del análisis wavelet en picos altos.....	142
V.22 Reducción de datos de la señal depurada.....	143
V.23 Comparación análisis wavelet – media móvil simple.....	143
V.24 Comparación análisis wavelet – media móvil ponderada.....	144
A1 Espectro $ H(\omega) $ sobre $[0, \pi]$	156
B1 Función Característica.....	169
B2 Ventana tiempo-frecuencia para la transformada de corto tiempo de Fourier.....	173
B3 Señal aguda con frecuencia cambiante linealmente en el tiempo.....	175
B4 Ventana tiempo-frecuencia para la transformada wavelet continua.....	179
B5 Representación multinivel de una función.....	190
B6 División de subespacios MRA.....	194

B7 Relaciones de dos escalas para el caso Haar.....	202
B8 Relaciones de descomposición.....	203
B9 Funciones polinomiales por trozos.....	204
B10 N_1 , spline de orden 1.....	206
B11 Funciones spline y su magnitud espectral.....	206
B12 No ortogonalidad del spline lineal mostrada por el área asurada.....	217
B13 Diezmado por un factor entero M	221
B14 Característica espectral del diezmado por 2.....	222
B15 Interpolador por un factor entero M	224
B16 Características espectrales de la interpolación por 2.....	225
B17 Convolución seguida por diezmado.....	227
B18 Interpolación seguida por convolución.....	228
B19 Grid típico tiempo-escala usando el algoritmo de descomposición.....	232
B20 Proceso de descomposición wavelet en un solo nivel.....	235
B21 Árbol de descomposición wavelet.....	235
B22 Reconstrucción de una señal a partir de la función de escalamiento y de los coeficientes wavelet.....	237

CONTENIDO

AGRADECIMIENTOS	i
RESUMEN	ii
ALCANCES	iv
NOMENCLATURA	v
LISTA DE TABLAS	viii
LISTA DE FIGURAS	ix

III.3.1.2.2 Sensores de viga vibratoria (Vibrating Beam Sensors).	31
III.3.2 Sensores Electrónicos de Tensión.	35
III.4 Sensores de Fibra Óptica.	35
III.4.1 Sensores de Rejillas Fiber-Braggs.	38
III.4.2 Sensores de Interferometría Fabry-Perot.	41
III.4.3 Sensores de fibra óptica de medición de flujo.	48
III.4.4 Sensores de fibra óptica de temperatura distribuida (DTS).	51
 CAPÍTULO IV PROGRAMA DE CÓMPUTO PARA DETERMINAR CONDICIONES DE EXPLOTACIÓN DE UN POZO	
IV.1 Introducción.	57
IV.2 Modulo para Correlacionar Producción – Cambios en la Temperatura de Fondo (ΔT).	59
IV.2.1 Información Base para la Generación de los Modelos de Correlación.	61
IV.2.2 Consideraciones Asumidas.	64
IV.2.3 Generación del modelo de correlación para periodos de flujo constante.	64
IV.2.4 Modelo de correlación para periodos de flujo donde el gasto varia con el tiempo.	77
IV.2.5 Estimaciones durante la variación “natural” del gasto.	78

IV.2.6 Aplicación de los modelos de correlación para estimar la producción de un pozo.	80
IV.3 Modulo para procesar datos de presión.	89
IV.3.1 Validación de Información.	90
IV.3.1.1 Eliminación de datos fuera de tendencia.	92
IV.3.2 Eliminación de información de alta frecuencia (ruido).	93
IV.3.2.1 Familias ortogonales: Haar, Daubechies, Coiflet y Symlet.	94
IV.3.2.2 Algoritmo piramidal para descomponer y reconstruir una señal.	98
IV.3.2.2.1 Descomposición de la señal de entrada.	100
IV.3.2.2.2 Eliminación de ruido por medio de la regla del umbral.	108
IV.3.2.2.3 Reconstrucción de la señal.	111
IV.3.3 Deshabilitamiento del análisis wavelet en saltos grandes de presión.	115
IV.3.4 Reducción de datos de la señal depurada.	116
IV.3.5 Exportación de los datos de la señal depurada.	116
IV.4 Comparación con técnicas de suavizado.	117
IV.4.1 Media Móvil Simple.	118
IV.4.2 Media Móvil Ponderada.	120

CAPÍTULO V APLICACIÓN A CASOS DE CAMPO Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS.

V.1 Introducción.	122
V.2 Caso de campo A.	122
V.2.1 Datos Generales.	122
V.2.2 Información Base.	123
V.2.3 Generación del modelo de correlación para gasto constante.	125
V.2.4 Modelo de correlación para periodos de flujo con gasto variable en el tiempo.	130
V.2.5 Estimación del gasto de producción.	131
V.2.6 Discusión de resultados.	134
V.3 Caso de campo B.	136
V.3.1 Datos generales.	136
V.3.2 Validación de la información.	137
V.3.3 Descomposición de la señal de entrada.	139
V.3.4 Eliminación de información de alta frecuencia.	140
V.3.5 Reconstrucción de la señal depurada.	140
V.3.5.1 Deshabilitamiento del análisis wavelet en saltos grandes de presión.	141
V.3.5.2 Reducción de datos de la señal depurada.	142
V.3.6 Comparación con técnicas de suavizado.	143
V.3.7 Discusión de resultados.	144

CAPÍTULO VI CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

VI. Estimación del gasto a partir de ΔT .	146
VI.2 Procesamiento de datos de presión.	147
ANEXO A	149
ANEXO B	158
ANEXO C	238
REFERENCIAS	262

CAPÍTULO I

INTRODUCCIÓN

Al comienzo del escrito se presentan dos capítulos (II y III) que describen cómo ha sido la evolución de los sistemas de monitoreo permanente y cuáles son los principios de operación de las principales tecnologías utilizadas recientemente para el monitoreo permanente.

En el Capítulo IV. “Programa de cómputo para determinar condiciones de explotación de un pozo” se describirá un programa de computo enfocado a estimar el gasto de producción de un pozo a partir de dos correlaciones: una para periodos de flujo donde el gasto es constante y otra para periodos donde el gasto varia en el tiempo cuando se efectúan cambios operativos normales en superficie; además se considera estimar la producción al tener una variación “natural” del gasto, ya que la temperatura en este caso muestra una tendencia a decaer / incrementar suavemente. Y por otro lado también se presenta un módulo para procesar las señales de presión mediante la aplicación de los fundamentos del análisis wavelet, discutidos en el Anexo B.

En el capítulo V. “Aplicación a casos de campo y discusión de resultados”, se mostrarán los resultados arrojados por el programa de cómputo al utilizar la información de dos casos de campo, los cuales serán discutidos para resaltar aspectos importantes.

Finalmente en el capítulo VI. “Conclusiones y recomendaciones” se resaltarán los logros obtenidos en los dos alcances del trabajo así como también se listaran los puntos que es necesario tomar en cuenta para mejorar los resultados.

CAPÍTULO II

EVOLUCIÓN DE LOS SISTEMAS DE MONITOREO PERMANENTE

II.1 Introducción.

En este capítulo se presenta una reseña histórica sobre la evolución de los sistemas de monitoreo permanente con el único propósito de conocer los pasos que se dieron antes de llegar a los actuales sistemas de monitoreo cuya precisión finalmente ha sido aceptable técnicamente.

En base a la literatura revisada, la evolución de los sistemas de monitoreo permanente se puede describir mediante etapas delimitadas por periodos de tiempo; por lo que en este sentido se describirán cada una de ellas.

II.2 Los primeros días.

Desde la década de los 60's los ingenieros de yacimientos tenían claro que el monitoreo de la presión de fondo a largo plazo permitía estimar el volumen de aceite en sitio que podía estar almacenado en un yacimiento, identificar fronteras y tomar las acciones necesarias para incrementar la producción diaria. Sin embargo, en ese entonces el monitoreo permanente estaba enfocado principalmente a monitorear las condiciones operativas de las bombas de fondo. De tal suerte que, alrededor de 1962, las bombas electro sumergibles (ESP) disponían de un sistema

de monitoreo integrado, principalmente para monitorear las condiciones de la bomba y dar aviso de posibles eventos tales como un sobrecalentamiento.

Es muy complicado investigar quién y dónde surgió el primer soporte para utilizar un sensor permanente en un yacimiento y así monitorear la producción, pero se ha visto que podría haber sido en 1963 en Nebraska, USA ¹.

En 1972 la compañía Schlumberger corrió el primer registrador permanente de presión costa afuera de Gabón, África, utilizando un cable trenzado similar al de los registros geofísicos para conectarlo hasta la superficie y al año siguiente instaló uno más en el Mar del Norte. Por su parte, Petrobras de Brasil, intentó la instalación de un sistema de monitoreo permanente en un pozo submarino, en 1977; y posteriormente en otra instalación submarina, costa afuera del oeste de África, la compañía Móvil utilizó un sistema de monitoreo del mismo tipo en 1978.

Petrobras continuó instalando más sistemas de monitoreo submarinos, pero la frecuencia en la ocurrencia de fallas era alta lo que ocasionó que dichos sistemas fueran cuestionados y que cada vez resultará más complicado justificar su instalación.

II.3 Evolución del monitoreo permanente de fondo ²

1980-1985

Alrededor de 1985, en Estados Unidos, en un cierto número de pozos de plataformas petroleras se instalaron sensores permanentes de P&T utilizando la misma solución para conectarlos hasta la superficie que Schlumberger empleó en Gabón (1972), pero el cable era asegurado a la tubería de producción por medio de flejes metálicos además de que eran corridos dos componentes registradores. Todo con muy baja confiabilidad y con muchos problemas de pérdidas de correas metálicas dentro del pozo, además el sensor se corría con torque y arrastre, y el

cable fallaba al momento de correrlo o tan pronto después de la instalación del sensor.

Otra tecnología usada era la instalación de “tubos capilares” dentro del pozo; basándose, en por ejemplo, un tubo hidráulico de ¼” que abarcaba desde el fondo del pozo hasta la superficie donde penetraba por el cabezal del pozo. El tubo era relleno con nitrógeno, y la presión se monitoreaba en superficie por medio de un registrador de presión. La idea era buena para altas temperaturas, pero rara vez daba datos de buena calidad debido a las condiciones desafiantes del aceite dentro del pozo.

En 1983 se instaló el primer registrador submarino que uso comunicación acústica desde el fondo marino, donde se tenía el cabezal del pozo, hasta la superficie.

Más tarde, alrededor de 1984, Shell trabajó en el desarrollo de una válvula de seguridad de fondo operada eléctricamente; para lo cual, contrataron a la compañía US/Dutch y desarrollaron el primer tubo encapsulador de ¼” del cable de fondo. Después, este cable fue usado para instalar sensores de fondo permanentes de presión, logrando mejorar sustancialmente la confiabilidad de la parte del cable de los sistemas de monitoreo permanente.

1985

La primera compañía que visualizó el potencial del monitoreo de fondo a largo plazo fue Statoil, por lo que desarrollo el sistema de nueva generación:

Cable revestido con un tubo y protección exterior de plástico, protectores de cable acoplados transversalmente (abrazaderas), sellos metálicos entre el sensor y el cable, porta sensor metálico, sistema de sellos metálicos para pasar a través

del cabezal del pozo y una barrera para hacer pruebas de presión en el cabezal.
Ver Fig. II.1.



Fig. II.1: Sistema de Monitoreo de Nueva Generación (fuente: [2]
http://www.hansenenergy.biz/activecompletions/The_Long_and_Winding_Road_Towards_The_Intelligent_Completion/1985....html)

Por otro lado, se ensambló un sistema de cómputo HP e instaló un software de programación para escribir el código requerido que permitiese muestrear múltiples sensores y transferir los datos a un sistema central (servidor).

Se usaron por primera vez sensores permanentes de cuarzo. En ese entonces Schlumberger usaba registradores de tensión, e instaló su primer sensor de cuarzo en 1987.

1987

En este año fue cuando el monitoreo permanente comenzó a despegar y su uso se expandió por el mundo ^{17,19}:

- ✓ Ya que la industria no creía que los sensores electrónicos pudiesen registrar por arriba de los 140°C, las compañías Shell y Alcatel (Noruega) comenzaron el desarrollo de un sensor de fondo de P&T de fibra óptica.

- ✓ En el Reino Unido (UK), se instaló el primer sistema de monitoreo permanente en una instalación submarina usando cableado eléctrico desde el fondo hasta la superficie (sin usar un sistema de interconexión submarina).
- ✓ Solo había un fabricante del cable eléctrico de fondo, lo cual llegó a ser un verdadero desafío en cuanto a los costos y el tiempo de entrega ya que estaban fuera de proporciones. Así, se contactó a un fabricante japonés de cable de fondo al que se le planteó la posibilidad de construir un cable eléctrico de fondo, logrando construir un cable de 3000 mts. de longitud con un diámetro exterior de 1/8" y un encapsulado de 11 x 11 mm.
- ✓ En 1988 una de las principales compañías operadoras de EEUU desarrolló un campo costa afuera de Noruega emitiendo un contrato con una compañía de servicio para que instalará tubos capilares de monitoreo permanente, sin entender los aspectos de integridad y seguridad del pozo (el contrato se terminó más tarde, no por el sistema seleccionado sino porque el campo no contemplaba con la economía anticipada).
- ✓ En 1989 en un campo costa afuera del Reino Unido (UK) se instaló el primer sistema de batería submarino operado acústicamente para el registro de datos, en el que el registrador era instalado y recuperado por medio de buzos.
- ✓ También en 1989, fueron instalados mandriles de bolsillo laterales con registradores reemplazables, en un campo costa afuera de Dinamarca.

1990

- ✓ Se instaló el primer registrador acústico reemplazable en aguas profundas, en un campo costa afuera de Noruega, monitoreando con

dos sensores de fondo. También se desarrolló el primer interconector eléctrico mojado.

- ✓ Saga Petroleum suministró el primer sistema registrador de P&T para pozos submarinos, en el cual se unieron todas las conexiones posibles para incrementar la confiabilidad: el cable de la caja reguladora, los empalmes del cable, conexiones de la caja registradora, etc.; tan bueno como el interconector mojado de cable eléctrico acoplado al cabezal del pozo.
- ✓ Fue implementado el primer sensor electrónico de P&T de interconexión en el sistema de control submarino acoplado al cabezal del pozo, en el Golfo de México, en aguas territoriales de los EEUU.

1992

- ✓ Statoil emitió el primer contrato mundial en el que se requería la implementación a gran escala de los sistemas de monitoreo permanente en pozos submarinos (proyecto satélite Statfjord).
- ✓ La compañía Sub-Tech desarrollo la primera válvula operada desde la superficie para controlar el flujo de fondo.
- ✓ En 1993 se instaló el primer sistema registrador de P&T de fibra óptica en una plataforma costa afuera de Noruega, por parte de Shell. La fibra óptica DTS (sensor de temperatura distribuida) fue desarrollada y promocionada por la cía. UK. También la compañía UK, desarrollo el primer sistema multi-caída (lo cual significa que más de un sensor van juntos en un mismo cable) y su primer instalación se dio en 1994.
- ✓ También en 1994 se instaló el primer sistema de mandriles de bolsillo laterales con registradores de P&T, en pozos costa afuera de Noriega por parte de Saga Petroleum.
- ✓ En 1994 se dio el primer gran cambio de los sistemas registradores analógicos a los digitales.

1995

- ✓ Se corrió el primer sistema registrador multi-caída, usando 6 registrados de P&T separados sobre un cable, colocados exitosamente en un pozo.
- ✓ En ese mismo año, fue instalado el primer sistema DTS en un pozo terrestre de California.
- ✓ En 1996 fue instalado el primer sistema permanente micro-sísmica de fondo por parte de PDO en Oman. (Habían solo dos compañías compitiendo en esto). Las primeras micro sísmicas que se habían probado obteniendo datos valiosos de salida fue por parte de Amoco en la plataforma Vallhal, costa afuera de Noruega.
- ✓ El monitoreo permanente de fondo de P&T comenzó a convertirse en un estándar de alta producción dentro de los componentes de la terminación de pozos en el Mar del Norte, el Golfo de México, costa afuera de Brasil así como costa fuera de Australia. También estos sistemas llegaron a aplicarse en algunos pozos terrestres, pero la principal “tecnología” que se tenía todavía estaba basada en los tubos capilares de nitrógeno.
- ✓ En ese mismo año, fue instalado el primer sistema registrador de fibra óptica de P&T en los pozos marinos de UK. Realmente no tuvieron un gran éxito.
- ✓ En Canadá, fue desarrollado el primer sistema registrador de P&T, inalámbrico, usando comunicación electromagnética hasta la superficie. El primer sistema registrador de P&T electromagnético, inalámbrico, fue instalado en un pozo marino de Noruega.

1997

- ✓ Costa afuera de Noruega, se instrumentó por primera vez un pozo submarino que estaba temporalmente abandonado, para el
-

monitoreo de la P&T y del contacto de fluidos. Se llegaron a colocar un total de 132 sensores sobre un cable, lo cual todavía es un record mundial.

- ✓ El sistema DTS se volvió una tecnología probada en aplicaciones de pozos inyectores de vapor (principalmente costa afuera de Canadá), pero la tecnología todavía era decepcionante en cuanto a los estándares de producción debido a la carencia de resolución requerida para realmente hacer alguna interpretación brillante. También la industria aprendió el reto del obscurecimiento de la fibra por el ingreso de nitrógeno dentro del cable de fibra óptica.
- ✓ Fue instalado un medidor de flujo de fondo basado en el tubo Venturi, en base al monitoreo de la presión en ambos lados de la restricción al flujo de fondo, en costa afuera de UK.
- ✓ El primer sistema registrador de presión de fondo acústico e inalámbrico fue probado a 7000 pies en un pozo terrestre, en Lousiana, USA.
- ✓ En 1998 se desarrolló la primera válvula de bombeo neumático operada eléctricamente desde la superficie, la cual también monitoreaba presión y temperatura tanto en el aparejo de producción como en el espacio anular (EA).
- ✓ Una compañía del Reino Unido (Flight Refueling Ltd.) instaló un enlace de comunicación inalámbrica sobre una tubería submarina que se podía remolcar y un año después se intentó en el fondo del pozo con resultados intermedios pero todavía promisorios. Con esto se dio el comienzo del sistema inalámbrico FRL dentro del fondo de un pozo que entro a los negocios, el cual hoy en día es el sistema CaTs (TM) que Expro está usando.
- ✓ En 1999 se vio el primer sensor permanente de P&T de fibra óptica con rejillas Bragg y la instalación de prueba de un registro sísmico 3C, por la compañía OptoPlan/Cidra (ahora Weatherford), en el campo Devine en Texas, USA.

- ✓ Una compañía noruego-norteamericana, especialista en el monitoreo de fondo con fibra óptica, realizó pruebas en varios cables construidos a 150°C con 30 bares de hidrogeno durante 7 meses, encontrando una solución para retrasar los desafíos del obscurecimiento de la fibra en el cable mismo. Para 2007, esta compañía había instalado aproximadamente 400,000 metros de dicho cable de fondo; sin embargo, la interfaz entre el cable y el sensor todavía estaba muy desprotegida del daño ocasionado por el hidrogeno.
- ✓ En el año 2000, la compañía ABB desarrollo un sistema de registro de fondo con fibra óptica – el DOGS (sistema registrador de fondo óptico). También estuvieron cerca de completar el desarrollo del sistema ADMARC (Sistema Avanzado de Monitoreo de Fondo y Control), el cual significo su entrada al monitoreo permanente de fondo y a las terminaciones “inteligentes”. No se sabe con certeza donde fallaron, pero se infiere que fue debido a que: a) el proyecto no tenía el apoyo real y dedicado por parte de la alta dirección, b) no tuvieron éxito al intentar reclutar especialistas competentes y experimentados en tecnología de fondo para integrarlos a la compañía, c) desafiaron la infracción de patentes.
- ✓ El primer registrador comercial de flujo óptico de dos fases, no intrusivo, fue instalado por OptoPlan/Cidra a partir de la plataforma Mars en el Golfo de México, USA.

2001

- ✓ En el Sur de Inglaterra fue instalado el primer registrador de P&T de fibra óptica junto con el sistema DTS, en un pozo terrestre de largo alcance. Por primera vez el sistema DTS transmitía en tiempo real al cliente. Esto fue mediante una combinación de un registrador de presión Citra y un DTS Sumitomo.

- ✓ Ese mismo año fue la primera vez que el sistema de monitoreo EPS transmitió los datos vía Internet.
- ✓ ICON (terminaciones inteligentes en la red) fue creado en 2002 para establecer una página basada en una base de datos sobre el historial de los sistemas permanentes de registro de fondo y de terminaciones “inteligentes”. (En marzo del 2007, los perfiles de la base de datos mostraban que más de 2000 registrados se tenían instalados alrededor del mundo). El primer aparejo de producción que conducía un sistema de monitoreo sísmico óptico fue instalado en una prueba de pozo en Wyoming, USA, por Optoplan/Cidra. Ese mismo año instalaron el primer sistema multi-caída de P&T en un pozo. Al siguiente año, instalaron el primer lapso de tiempo óptico VSP en una prueba de pozo terrestre, en Francia.
- ✓ En 2003 los proveedores de la instalación de los sistemas electrónicos de registro permanente lucharon por sobrevivir en un mercado difícil y restringido por los bajos precios del crudo. También muchas empresas “vaquero” entraron al negocio con la actitud “también podemos hacer eso”, y las fallas se incrementaron dramáticamente alrededor del mundo.
- ✓ En USA (al parecer), Optoplan/Cidra instalaron el primer registrador de fondo de fibra óptica Venturi basado en 3 fases.
- ✓ Ese mismo año, fue instalado el primer sistema de terminación multizona con válvulas de influjo operadas remotamente y con un registrador de P&T de fibra óptica multi-caída, por la misma compañía, en USA (?).
- ✓ La tubería de revestimiento conducía los sistemas de registro permanente llegando a probarse dicha metodología en pozos terrestres, principalmente de Canadá.
- ✓ Los sistemas de monitoreo de las bombas de fondo en conjunto con los ESP’s son comunes, mucho más confiables y su valor es proveer un incremento en la vida de la ESP, menos tiempo de inactividad e

incremento en la eficiencia. En el Reino Unido, se lanzó el primer sistema de monitoreo digital de la ESP.

- ✓ El primer despliegue de un sistema registrador de fondo de presión y temperatura acústico tipo inalámbrico fue desarrollado sobre tubería flexible en Canadá. El sistema estaba diseñado para ir en la tubería de producción por un largo tiempo. Surgieron problemas en la señal y en la confiabilidad, pero la tecnología era prometedora y se creía que podía ser rediseñada para tener éxito.
- ✓ La primer tubería de revestimiento con un desarrollo óptico multi estaciones 3-C sísmico y un sistema de presión y temperatura fue probado en pozos terrestres de USA por Optoplan/Cidra.

2005

- ✓ El método estándar para la implementación de fibras DTS todavía es conducirla hacia el fondo del pozo y entonces intentar traerla nuevamente a la superficie vía el tubo hidráulico dual instalado para esto; formando así un sistema de doble terminado. Esto es una gran idea, pero resultó que no era confiable y la fibra estaba sujeta al daño. También, la calidad de los datos a partir de los DTS está luchando por probar su valor para las compañías operadoras.
- ✓ Se desarrollaron medidores permanentes de fondo de corte de agua.

2006

- ✓ El primer sensor comercial permanente de fibra óptica sísmico junto con el de fibra óptica de P&T fue instalado costa afuera de Noruega en un pozo inyector (Weatherford/BP).
- ✓ La pequeña compañía Houston, basada en los sistemas de sensores acústicos inalámbricos de P&T (por Ziebel), comenzaba a trabajar satisfactoria y repetidamente en pozos poco profundos y de

muy poca comunicación. Los sistemas comenzaron a remplazar a los registros de memoria recuperados con cable destacados en las pruebas de incremento de presión realizadas en tierra, en Canadá (Más tarde, más o menos, desapareció del mercado, posiblemente debido a la falta de interés del cliente y a la complicada operación de la herramienta)

- ✓ En el Reino Unido, las fibras DTS se probaron a +600 °C así como también a -80°C.

2007

- ✓ El primer registrador de fibra óptica de P&T operando sobre la misma fibra como DTS se puso en marcha.
- ✓ El obscurecimiento de la fibra es todavía un problema, pero han habido mejoras.
- ✓ El monitoreo de vibración y de P&T en pozos con el sistema artificial PCP ha demostrado su valor, y las fallas de las bombas se han reducido drásticamente. Los sistemas también son acoplados a la velocidad de la bomba para optimizar el sistema artificial e incrementar la producción del pozo.
- ✓ El monitoreo PCP es cada vez más “inteligente”, donde la combinación de la sensibilidad en el fondo – y en el cabezal del pozo provee de la habilidad para analizar la eficiencia y condición de las bombas. Es observada una reducción substancial en el tiempo de inactividad de la bomba.
- ✓ Son lanzados los primeros sistemas registradores acústicos inalámbricos de P&T. Se logró la primera comunicación inalámbrica bidireccional entre la superficie y la herramienta activa de fondo.

CAPÍTULO III

TECNOLOGÍA ACTUAL DE MONITOREO PERMANENTE

III.1 Introducción

Actualmente, en la industria petrolera la tecnología aplicada para el monitoreo permanente de fondo es la electrónica de cuarzo o la fibra óptica. Ambas tecnologías presentan ventajas y desventajas según las condiciones presentes en el fondo de un yacimiento o pozo. En este capítulo se describirán a detalle los principios de operación de ambas tecnologías junto con otras que no han dejado de utilizarse.

Para comenzar se define lo qué es un sistema de monitoreo permanente señalando sus principales componentes y finalizando con la descripción de sus principios de operación.

III.2 Qué es un sistema de monitoreo permanente.

Un **sistema de monitoreo permanente de fondo** es aquel que permite medir y transmitir datos de fondo de un pozo hacia la superficie, en tiempo real ⁵. Por consiguiente, un sistema de monitoreo permanente no solo se refiere al registro de la presión y la temperatura.

En la **Fig. III.1** se ilustran los componentes básicos de un sistema de monitoreo permanente de fondo así como también el flujo seguido por la información registrada hasta que es enviada a la oficina del ingeniero petrolero encargado de interpretarla.

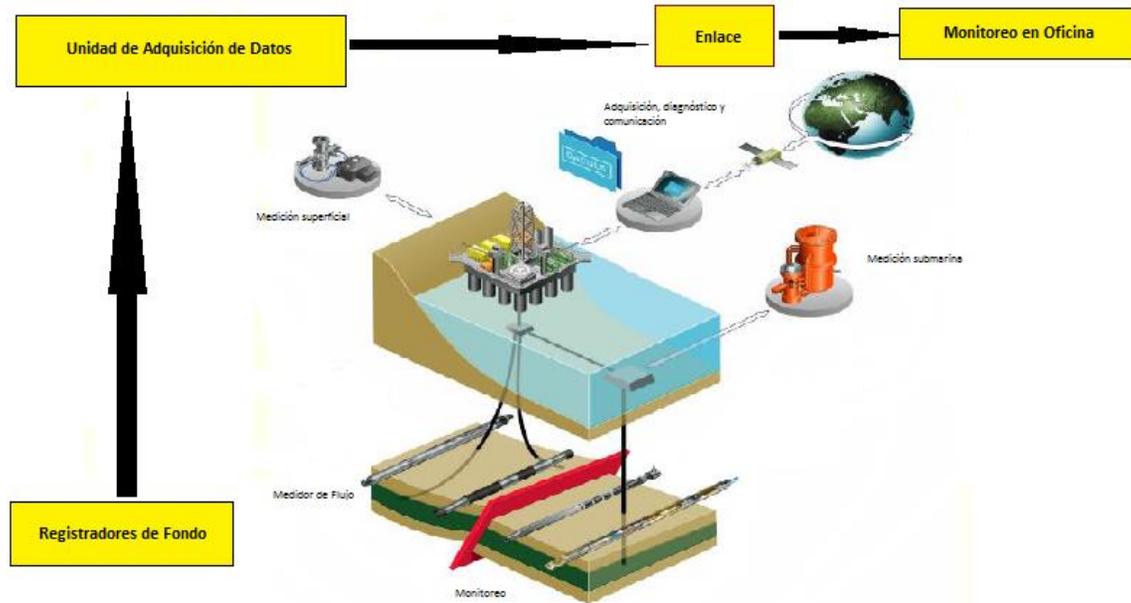


Fig. III.1: Componentes de un sistema de monitoreo permanente de fondo (Fuente: [5] Tita, G.E. 2007-2008. *Permanent Downhole Well Data Monitoring*. MS thesis, Eni Corporate University. Politecnico Di Torino. Italia).

Por su parte, un **sensor permanente** se puede definir como un dispositivo de medición basado en la cuantificación del cambio exhibido en ciertas propiedades por respuesta a una variable medida tal como presión, temperatura, flujo, etc. ⁶ Tales dispositivos pueden ser mecánicos, electrónicos o en forma de fibra óptica.

El término **transductor** o **registrador** se refiere al sensor junto con la electrónica y su cubierta mecánica (portasensor). El término **sensor**, como ya se mencionó, se refiere a la parte activa del registrador o transductor cuyas

propiedades cambian en respuesta a los cambios en las variables físicas que están siendo medidas ²⁵.

Actualmente, en la industria petrolera un sensor permanente de fondo es electrónico o de fibra óptica ^{5,6}. Y a su vez dentro de cada uno de estos se pueden tener diversos tipos los cuales se listan abajo, y en las secciones siguientes se describirán a detalle para entender sus principios de operación:

➤ Sensores Electrónicos

- De Cuarzo
 - Sensores de Cuarzo No Resonantes
 - ✓ Sensor Dinámico Piezoeléctrico
 - ✓ Sensor de Capacitancia
 - ✓ Sensor de Tubo Bourdon
 - Sensores de Cuarzo Resonantes
 - ✓ Sensor en modo transversal de espesor (Thickness Shear-Mode Sensor)
 - ✓ Sensor de Viga Vibratoria (Vibrating Beam Sensor)
- Registradores de tensión

➤ Sensores de Fibra Óptica

- De Presión
 - Rejillas Fiber-Bragg
 - Interferometría Fabry Perrot
- De Medición de Flujo
- Temperatura Distribuida (DTS)

III.3 Sensores electrónicos

Los dos tipos de sensores electrónicos comúnmente utilizados son: el sensor en modo transversal de espesor (thickness shear-mode sensor) y el sensor de viga vibratoria (vibrating beam sensor). De acuerdo a estudios realizados, el problema principal de un sensor electrónico de cuarzo es la presencia de electrónica en el fondo así como de partes móviles. Por su parte los sensores electrónicos de tensión tienen el problema de que no son muy estables a la temperatura generando lo que se llama **drift** que tiene que ver con los cambios en la capacidad de respuesta de un medidor.

A continuación se describen los dos tipos de sensores electrónicos que actualmente son utilizados en la industria petrolera, es decir los sensores electrónicos de cuarzo y los sensores de tensión.

III.3.1 Sensores electrónicos de cuarzo

En la **Fig. III.2** se ilustran los componentes típicos de un registrador electrónico de cuarzo para medir presión, y en ella se puede apreciar tanto la conexión del cable que va hacia la superficie y la localización del elemento de cuarzo.

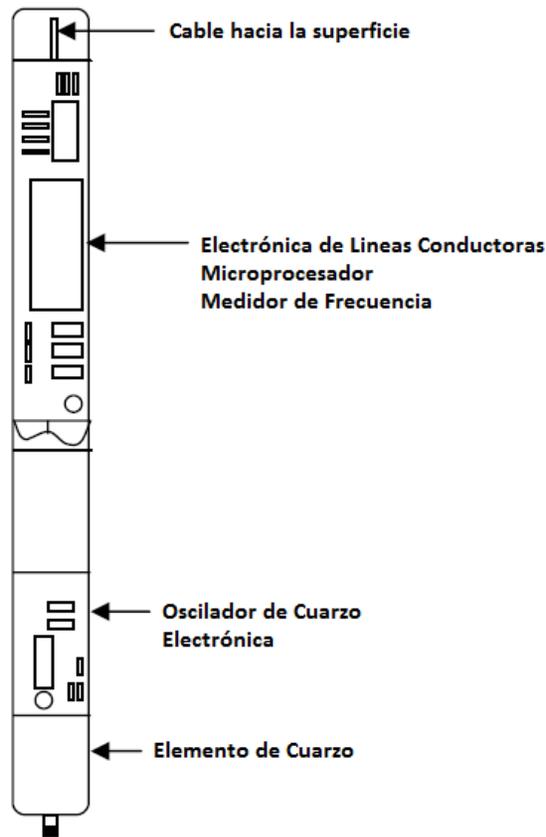


Fig. III.2: Componentes de un registrador electrónico permanente de fondo
(Fuente: Terry Moffat and Doug Craig, SPE Production and facilities Journal,
August 2001)

Actualmente, la gran mayoría de los registradores permanentes de fondo instalados para monitorear presión y temperatura son electrónicos de cuarzo ya que su resolución (0.001 psi) es mayor a la de un registrador de tensión (0.01 psi) y su drift (menor a 7 psi/año) es menor a la de un registrador de tensión (10 psi/año), y finalmente por que los registradores de cuarzo proveen de la tecnología necesaria para operar con una alta resolución sobre un amplio rango de temperaturas (0-200°C) y de variaciones de presión (0-15 psi) ⁶.

III.3.1.1 Sensores de cuarzo no resonantes

Hay tres tipos de sensores de cuarzo no resonantes: sensores dinámicos piezoeléctricos, sensores capacitivos y sensores de tubo Bourdon.

III.3.1.1.1 Sensor dinámico piezoeléctrico

Los sensores dinámicos piezoeléctricos operan bajo el principio del efecto piezoeléctrico directo; esto es, cuando una fuerza es ejercida sobre un elemento piezoeléctrico, se genera un voltaje, el cual es amplificado y medido para determinar la presión aplicada. Entre mayor sea la presión aplicada, mayor será el voltaje medido. Por consiguiente, el voltaje medido es directamente proporcional a la presión aplicada.

Generalmente, el voltaje generado en un sensor dinámico piezoeléctrico decae muy rápidamente debido a la auto-descarga. Por lo tanto, el circuito del sensor dinámico se debe diseñar de tal forma que registre y procese rápidamente el pico de voltaje generado por la fuerza aplicada. Debido al efecto de auto-descarga, los sensores dinámicos no son apropiados para un estado estacionario o cuando hay cambios lentos de presión. La **Fig. III.3** es un diagrama de un sensor dinámico piezoeléctrico en el que se ilustra al amplificador que incrementa el voltaje generado. La sección inferior es aumentada para visualizar el diafragma y el cristal de cuarzo. El diafragma es el encargado de convertir la presión aplicada a una fuerza, que a su vez genera el voltaje.

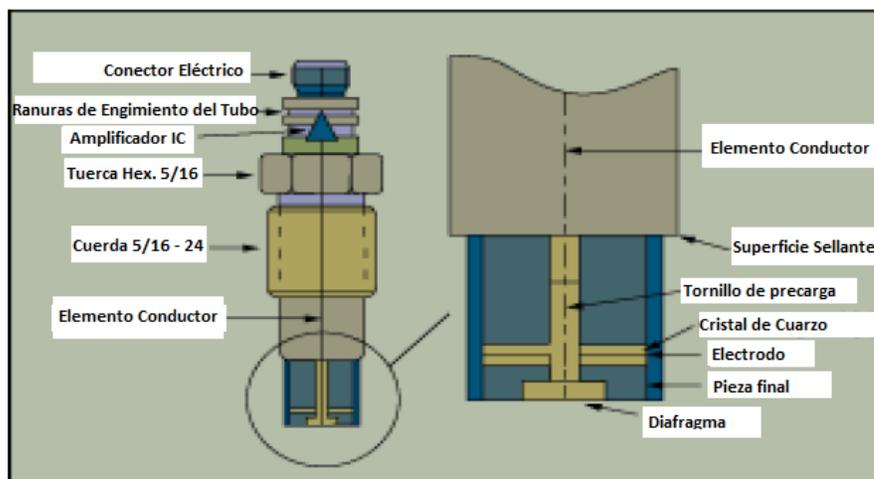


Fig. III.3: Transductor de presión piezoeléctrico (Fuente: B. R. Hollander, TRANSACTIONS in Measurement and Control, Volume 3, Force Related Measurements, October 1996).

El ritmo de decadencia que ocurre en los sensores dinámicos piezoeléctricos, los hace apropiados para la medición de sistemas que tienen cambios rápidos de presión (100 s de psi/s (decenas de bares/s)). La señal analógica del voltaje generado en un sensor dinámico puede ser registrada dentro de un periodo de tiempo más corto que el de una señal digital de la frecuencia generada por un sensor resonante. Una frecuencia digital tiene que ser contabilizada dentro de un periodo corto de tiempo (normalmente menor a un segundo) y durante ese periodo de tiempo debe ser promediada (fuente: R. W. Ward y R. B. Wiggins, hoja técnica localizada en www.quartzdyne.com, Quartzdyne Inc). El elemento piezoeléctrico puede consistir de cuarzo cristalino o cerámica piezoeléctrica sintética, dependiendo de la sensibilidad, resolución y temperatura requeridas. En la **Tabla III.1**, se muestran las propiedades de 3 elementos piezoeléctricos. La tabla muestra como la propiedad del registro de presión requerido, determina la selección del elemento apropiado. La temperatura Curie es la temperatura a la cual el elemento perderá su propiedad piezoeléctrica, mientras que la Q mecánica es una medida de frecuencia resonante.

Tabla III.1: Propiedades de algunos elementos piezoeléctricos

Propiedad	Símbolo	Elemento piezoeléctrico		
		Titanato de bario	Titanato zirconato de plomo	Cuarzo
Q mecánica	Q_m	720	80	> 1000
Temperatura Curie	°C	120	300	573
Densidad	10^3 kg/m^3	5.6	7.8	2.65
Constante elástica	10^{10} N/M	11.5	6.3	2.94

En la **Fig. III.4** se ilustra el principio de operación de un sensor basado en el efecto piezoeléctrico. Un cristal de cuarzo es colocado entre dos placas metálicas para formar un capacitor. La presión de los fluidos en el fondo causa que una fuerza externa sea aplicada sobre las placas de tal forma que los cristales son deformados, y a su vez de dicha deformación resulta una carga eléctrica que va a estar en función de la fuerza aplicada.

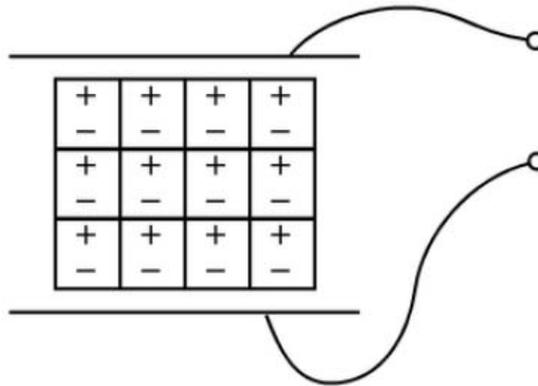


Fig. III.4: Sensor basado en el efecto piezoeléctrico (Fuente: William Putnam y Benjamin Knapp, CCRMA Course 252, University of Stanford, October 1996).

III.3.1.1.2 Sensores de capacitancia

El método más común de diseñar un sensor de capacitancia es utilizar uno o más diafragmas metálicos para formar una unidad sensorial de capacitancia. La capacitancia de dicha unidad cambiará en respuesta a la presión aplicada. En el

mayor de los casos, el cambio en la capacitancia es convertido a frecuencia haciendo que la unidad sea un elemento retro alimentador de un oscilador. Así, es posible medir la presión aplicada midiendo la frecuencia de resonancia.

Cuando la presión aplicada es baja, tal como la presión atmosférica, la unidad sensorial de capacitancia va a realizar mediciones exactas ya que su respuesta no es afectada por la fricción interna (no es retardada); mas sin embargo, a presiones y temperaturas altas, tal como las condiciones prevaecientes en el fondo de un pozo petrolero, la unidad es comprimida y tensionada, ocasionando un incremento en la fricción interna. Por lo tanto, para mantener registros de presión precisos, es decir, para que se tengan condiciones de trabajo de baja histéresis (0.01%) y alta resolución (0.0001 psi), son requeridos materiales con un buen comportamiento. Algunos fabricantes usan sílice de cuarzo fundido, ya que tiene un coeficiente térmico muy bajo y un comportamiento elástico ideal. No obstante, cualquier elemento sensor usado para medir presión debe ser corregido por temperatura para garantizar la exactitud requerida en las mediciones de campo.

El diseño básico de un sensor de capacitancia, como ya se comentó, consiste de dos placas metálicas que forman un capacitor separado por aire o vacío. En la **Fig. III.5** se ilustra el diseño básico.



Fig. III.5: Diseño básico de un sensor de capacitancia (Fuente: Torrey R. Filac-Bowen, Guen Hyung Kim and Yuri M. Shkel, IEEE Sensors Conference, Orlando Florida, June 2002)

Los sensores capacitivos son similares a los sensores piezoeléctricos, la diferencia está en que los segundos usan elementos piezoeléctricos como material dieléctrico entre las placas, mientras que los de capacitancia utilizan aire, vacío o alguna otra película dieléctrica común. En la **Fig. III.6** se ilustra un sensor de capacitancia de presión y en esta se puede ver como la presión causa una deflexión en el diafragma y en consecuencia la capacitancia también cambiará. El circuito puente detecta el cambio de capacitancia.

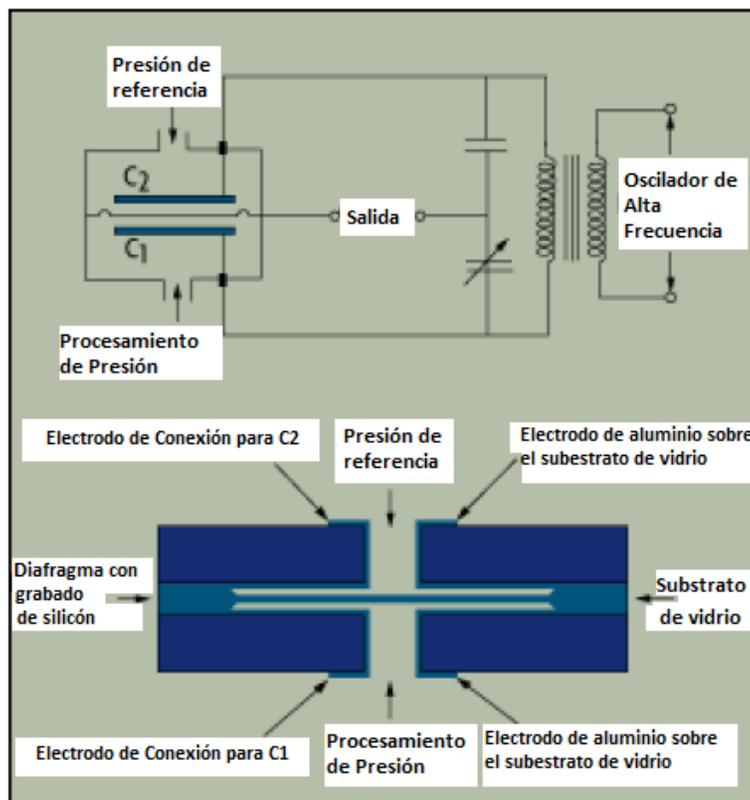


Fig. III.6: Celda de presión basada en capacitancia (Fuente: B.R. Hollander, TRANSACTIONS in Measurement and Control, Volume 3, Force Related Measurements, October 1996)

III.3.1.1.3 Sensores de tubo Bourdon

Los sensores de presión tipo tubo Bourdon básicamente consisten en un tubo metálico achatado en forma de “C”, abierto solo en un extremo (ver **Fig. III.7**). Al aplicar una presión al interior del tubo, la fuerza generada en la superficie exterior de la “C” es mayor que la fuerza generada en el interior de la “C”, de modo que la fuerza neta tiende a enderezar la “C”, es decir le provoca una deformación. Dicha deformación es utilizada para medir la presión aplicada, que puede determinarse por el desplazamiento mecánico de una aguja conectada al tubo Bourdon, o mediante un sistema de variación de resistencia o campos eléctricos o magnéticos.

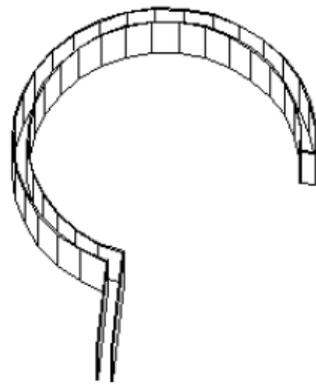


Fig. III.7: Tubo Bourdon en forma de “C” (Fuente:
<http://materias.fi.uba.ar/7609/material/S0304MedicionPresion1.pdf>)

Otras formas típicas del tubo Bourdon son la espiral y la helicoidal ilustradas en la **Fig. III.8**.

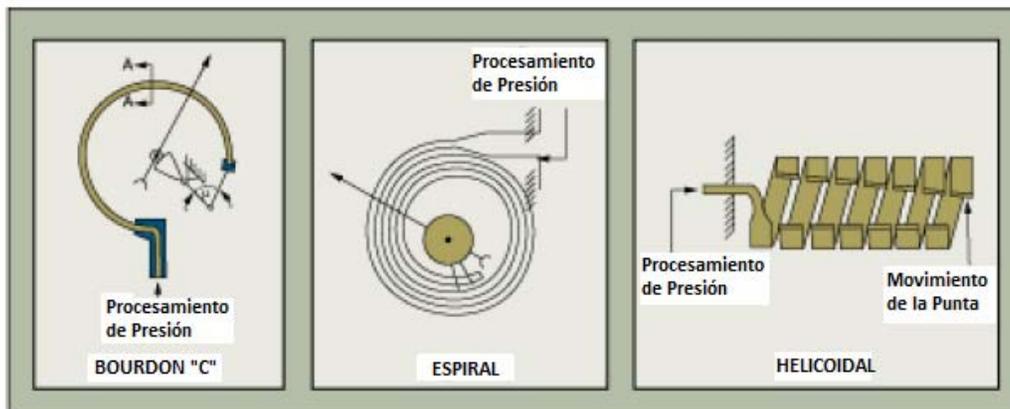


Fig. III.8: Diseños típicos del tubo Bourdon (Fuente: B.R. Hollander, TRANSACTIONS in Measurement and Control, Volume 3, Force Related Measurements, October 1996)

El comportamiento plástico ideal y el bajo coeficiente de expansión por temperatura del cuarzo fundido lo han hecho técnicamente adecuado para aplicarlo en los sensores de presión de tubo Bourdon. Los sensores de presión de cuarzo fundido tipo tubo Bourdon consisten de una bobina helicoidal de vidrio (cuarzo fundido) con dimensiones de aproximadamente 2.5 cm de diámetro por 3 – 6 cm de largo. La presión aplicada al helicoide ocasiona que la bobina tienda a desenrollarse. En la gran mayoría de los casos, es aplicada una técnica de balance fuerzas de retroalimentación para generar una fuerza opuesta que previene el desenrollamiento de la bobina. Debido a la naturaleza frágil de este tipo de sensor, su uso principalmente es en laboratorio, por lo que no es posible aplicarlo en campos petroleros para medición de presión en el fondo de un pozo.

III.3.1.2 Sensores de cuarzo resonantes

El cristal de cuarzo se utiliza en numerosas y variadas aplicaciones como elemento resonante. El cuarzo, como ya se mencionó, es un material piezoeléctrico. Cuando un material de este tipo no se encuentra sometido a un esfuerzo externo, los centros de gravedad de las cargas positivas y negativas de cada molécula coinciden, de modo que los efectos externos de dichas cargas

positivas y negativas se cancelan mutuamente, dando lugar a una molécula eléctricamente neutra. Por el contrario, cuando se ejerce una presión sobre el material, su estructura reticular interna se deforma, y en consecuencia los centros de gravedad de las cargas positivas y negativas se separan, generándose pequeños dipolos. Los polos que quedan enfrentados dentro del material se cancelan mutuamente, el resultado es la aparición de una carga ligada en la superficie del material; es decir, el material se polariza y en consecuencia aparece un campo eléctrico. Por tanto, se produce una transformación de energía mecánica, la empleada en la deformación del material, en energía eléctrica ⁷.

En la fabricación de los cristales resonadores de cuarzo, el material se corta en placas finas según determinadas orientaciones. Estos cortes proporcionan distintos tipos de resonadores, óptimos para aplicaciones concretas. Según el corte, para que un cristal vibre en el modo deseado es necesario aplicar una diferencia de potencial alterna entre los electrodos del cuarzo en una determinada dirección. Las propiedades piezoeléctricas de este material hacen que la presencia de dicha diferencia de potencial provoque la deformación del mismo y por tanto su vibración. Se produce, en consecuencia, una transformación de energía eléctrica en mecánica que puede ser cuantificada mediante un contador.

Los sensores de cuarzo resonantes son los sensores de presión más comúnmente utilizados en la industria petrolera, principalmente porque el cuarzo es químicamente inerte y de alta elasticidad; esto es, provee ciclos repetitivos consistentes, los cuales son requeridos para un buen sensor resonante, además exhibe histéresis despreciable. Por otro lado, un sensor resonante tiene la gran ventaja de generar señales digitales las cuales envían información directamente a un contador acoplado en un microprocesador.

El cuarzo es casi perfectamente elástico hasta su punto de ruptura. Las limitaciones comunes de un sensor resonante, son su sensibilidad a las variaciones de temperatura (0.2 % por 1000 °F), vibraciones y correlaciones no

lineales exhibidas entre la presión aplicada y la frecuencia resonante. La **Fig. III.9** es una ilustración de un transductor de presión de alambre resonante. En este diseño, un miembro estático sostiene el alambre en un extremo y al diafragma sensor en el otro. Un circuito oscilador causa que el alambre oscile a su frecuencia resonante. Un cambio en la presión cambia la tensión del alambre, la cual a su vez transforma la frecuencia resonante del alambre. Un circuito digital contador detecta este cambio. Hay dos tipos de sensores de cuarzo resonantes: el sensor en modo transversal de espesor y el sensor de viga vibratoria.

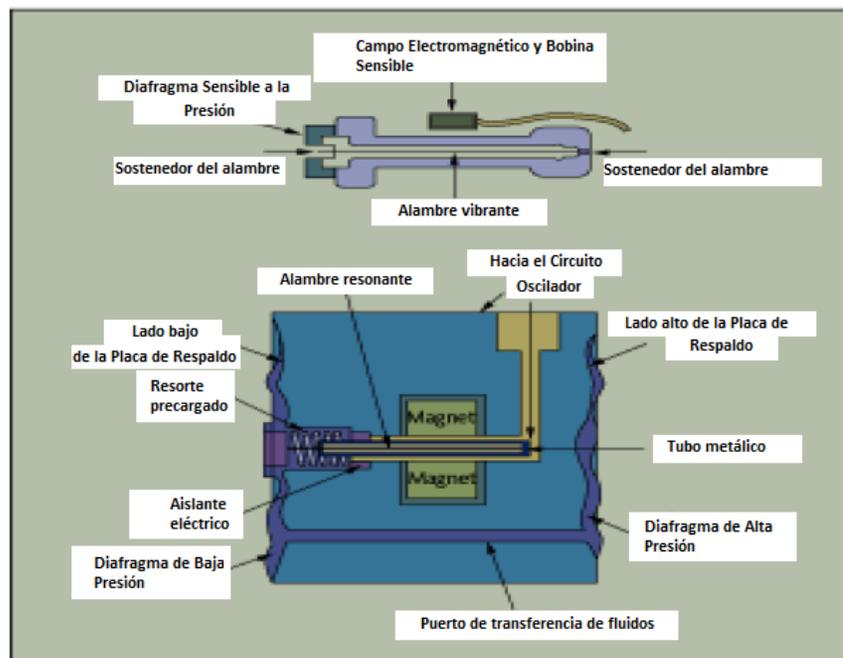


Fig. III.9: Transductor de presión mediante un alambre resonante (Fuente: B. R. Hollander, TRANSACTIONS in Measurement and Control, Volume 3, Force Related Measurements, October 1996)

III.3.1.2.1 Sensores en modo transversal de espesor (thickness shear-mode sensors)

Los sensores de cuarzo en modo transversal de espesor se basan en el **efecto fuerza-frecuencia** de los resonadores de cuarzo de precisión: si una

fuerza es ejercida sobre la circunferencia de un resonador de cuarzo, su frecuencia cambiará en proporción a la fuerza aplicada. El sensor también es conocido como un sensor de onda acústica grueso. Usualmente consiste de láminas de cuarzo piezoeléctrico con electrodos metálicos en las caras opuestas. En muchos casos, las láminas son de forma circular. El fluido de fondo interactúa con la superficie del cuarzo liberando energía mecánica. Esta energía mecánica causa un cambio en la frecuencia resonante, la cual es proporcional a la presión del fluido.

El efecto piezoeléctrico inverso es usado en un sensor en modo transversal de espesor para producir una vibración que responderá proporcionalmente al voltaje. La **Fig. III.10** es un diagrama esquemático de un sensor en modo transversal de espesor. La sensibilidad a la presión de un sensor en modo transversal de espesor se puede expresar como un cambio en la frecuencia derivada de la presión, dividida por la frecuencia del sensor a presión y temperatura ambiente. En la Fig. III.10 se muestran dos versiones de empaque: montaje a dos puntos y montaje a 3 puntos. El resonador de cuarzo al vacío es colocado en los bordes de estas configuraciones para maximizar la calidad mecánica, la cual es una medida de la calidad de la frecuencia resonante.

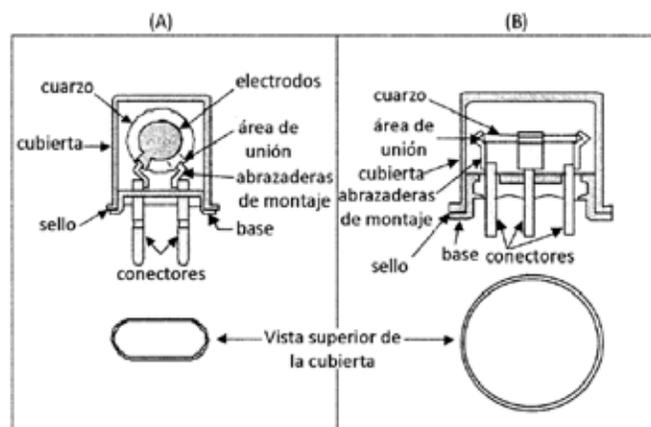


Fig. III.10: Sensor en modo transversal de espesor: (A) Sistema de montaje a dos puntos (B) Sistema de montaje a tres puntos (Fuente: Errol P. Eernisse and Robert B. Wiggins, IEEE Sensors Journal, Vol. 1 No. 1, June 2001)

La presión aplicada sobre las superficies externas del sensor causa que sus paredes sean desplazadas hacia dentro. Esto a su vez genera esfuerzos de compresión planos en respuesta al desplazamiento. Un circuito oscilador es usado para mantener las vibraciones resonantes. La frecuencia del sensor cambiará en respuesta al esfuerzo aplicado por la presión externa. Este cambio en la frecuencia resonante es directamente proporcional al cambio en la presión. Un contador electrónico entonces es usado para transformar el número de conteos generados por la señal del sensor a una frecuencia digital.

La **Fig. III.11** es una vista ampliada de un diseño reciente de un sensor de presión en modo transversal de espesor. Este sensor es diseñado para lograr sensibilidad sobre un amplio rango de presiones sin perder exactitud. Las dimensiones del resonador y de las capas en los extremos, así como la orientación cristalográfica, determinan el rango y sensibilidad para los diseños de los sensores de presión de cuarzo.

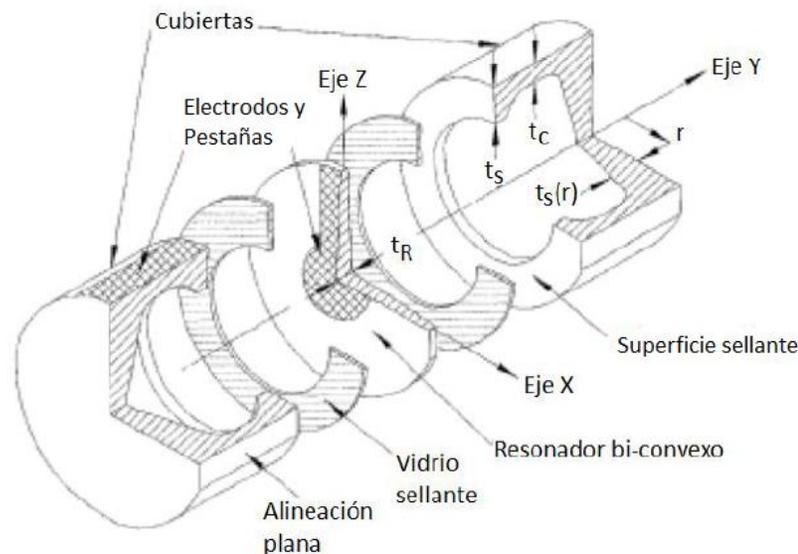


Fig. III.11: Isométrico de un sensor en modo transversal de espesor (Fuente: Errol P. Eernisse and Robert B. Wiggins, IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control, Vol. 45 No. 5, September 1998)

III.3.1.2.2 Sensores de viga vibratoria (vibrating beam sensor)

Dependiendo del rango de presión y de la aplicación, los transductores de presión de viga vibratoria de cuarzo están basados en dos sensores similares de cristal de cuarzo resonantes (típicamente 10-50 kHz) que miden la presión a partir de convertirla a una fuerza, esto es, son sensores de fuerza; y que a saber son: el de viga de cristal simple en modo flexible (single-beam flexure-mode cristal) y el de doble terminado de cuarzo en forma de diapasón* (double-ended quartz tuning fork) (DETF). A bajas presiones (menos de 1000 psi), la viga de cuarzo es enlazada a uno de los extremos de una palanca metálica con bisagras pequeñas (para controlar el eje de la fuerza de entrada y amplificar la fuerza total acorde al diseño de carga de la viga). En el extremo opuesto son enlazados unos fuelles. Conforme los fuelles se van presurizando, éstos empujan la palanca de modo que van cargando el resonador de cuarzo. A altas presiones (> 1000 psi), el resonador es conectado a un tubo Bourdon metálico. El tamaño del tubo es de acuerdo a la capacidad de carga de la viga y a la presión original de diseño.

Los transductores de viga vibratoria de cuarzo comúnmente son usados a presiones bajas (< 1000 psi) debido a que la naturaleza digital de la señal de salida no requiere una conversión a corriente directa, además la propiedad piezoeléctrica del cristal de cuarzo provee del medio para sostener su vibración a través de un circuito eléctrico oscilador conectado a unos electrodos soldados en los extremos del resonador. Las vigas de cuarzo son rugosas inherentemente, siendo parecidas al tamaño y la forma de fabricación de un diapasón de cuarzo empleado en los relojes actuales de pulsera de cuarzo.

Sin embargo, el gran tamaño de los mecanismos de sujeción de las vigas (flexibles o de tubo Bourdon metálico) ocasiona que estos sensores estén propensos a romperse por los choques o vibraciones, por lo que se requiere que sean montados apropiadamente sobre amortiguadores. Como el fluido no rodea directamente al fluido resonador de fuerza, no es sensible a errores transitorios no adiabáticos. Los efectos transitorios de presión o temperatura son debidos a:

- ✓ Efectos mecánicos en el sistema metálico (palanca, fuelles o tubo Bourdon)
- ✓ Adhesivos empleados para sujetar la viga de cuarzo, y
- ✓ Diferencias en las constantes térmicas de los sensores resonantes de presión y temperatura.

Como ya se comentó, los sensores de presión de viga vibratoria son sensores de fuerza, lo cual quiere decir que antes de que sea medida la presión, ésta es convertida a una fuerza a través de un tubo Bourdon o por una combinación de fuelles, bisagras y palancas. Así, los sensores de viga vibratoria trabajan bajo el principio de que una viga en vibración, larga, delgada lateralmente y flexible, es sensible a una fuerza longitudinal (tensión). La fuerza longitudinal generada como resultado de que la presión sea convertida a una fuerza, provocará un incremento en la frecuencia de resonancia de la viga. Este fenómeno se puede comparar con la manera en la cual la frecuencia de vibración de una cuerda de guitarra o violín es incrementada al ser tensionada. El incremento en la frecuencia ocurre debido al incremento de la fuerza de restauración, que a su vez es incrementada con la tensión longitudinal generada cuando la cuerda es tensionada. Este fenómeno se conoce como el efecto fuerza – frecuencia. Ahora, para el caso de un sensor de viga vibratoria, la tensión longitudinal es causada por la rigidez a la flexión de la viga.

Contrario al incremento de la frecuencia de vibración por el incremento de la tensión, la viga responderá a la compresión disminuyendo la frecuencia de oscilación.

La viga tiene la forma de un diapasón firmemente sostenido por sus dos extremos que son soportados de tal forma que es posible aplicar tensión o compresión. Esta es la razón por la cual es utilizado el término diapasón con doble terminado (DETF).

Para fabricar un buen resonador se deben minimizar las pérdidas de vibración eludiendo los momentos que actúan sobre el montaje de los acoplamientos. Las configuración que permiten minimizar dichas pérdidas, son: el diseño de viga simple, doble y triple, y son mostrados en la **Fig. III.12**.

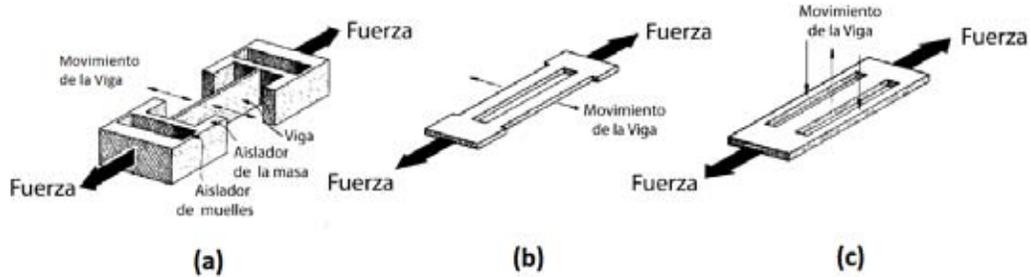


Fig. III.12: Ejemplos de resonadores en modo flexible con terminado doble (a) Dispositivo de una sola viga, (b) Dispositivo de doble viga, (c) Dispositivo de triple viga (Fuente: E.P. Eernisse, R.B. Wiggins and R.W. Ward, IEEE transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control, Vol. 35 No.3 May 1988)

El diseño de viga doble es el más común en aplicaciones de fondo al ofrecer una exactitud típica de 0.01% de la escala original, por la utilización de osciladores de precisión cuya frecuencia varía de acuerdo con los esfuerzos de presión inducidos sobre el cristal de cuarzo (efecto fuerza – frecuencia). Las oscilaciones en el cristal son mantenidas y detectadas por osciladores electrónicos, similares a los utilizados en los relojes o contadores de precisión. En la **Fig. III.13** se muestra un resonador de cuarzo de doble viga utilizado en aplicaciones de fondo.

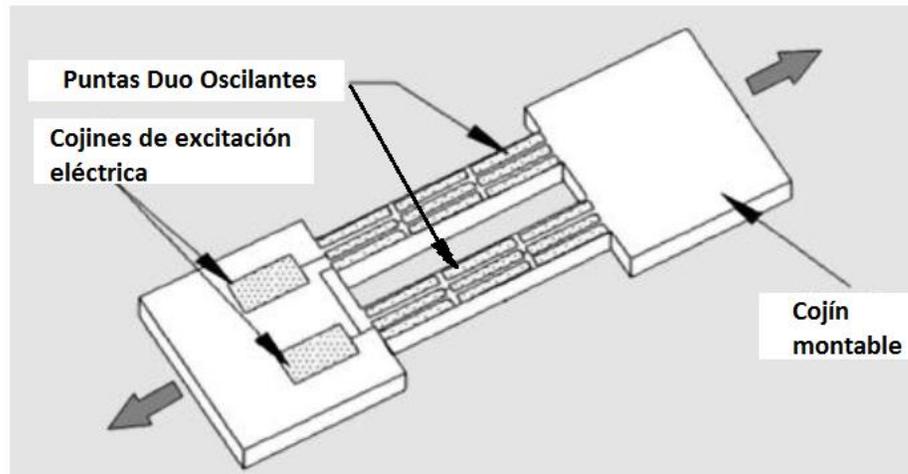


Fig. III.13: Sensor de viga vibratoria aplicado en fondo (Fuente: Mark H. Houston and J.M. Paros, IEEE Proceedings of the 1998 International symposium on Underwater Technology, April 15-17, 1998)

El diapasón con doble terminado consiste de dos vigas de cuarzo idénticas conductoras piezoeléctricamente y montadas en una fase de oposición de 180°. Así, la poca energía vibratoria es transmitida a las almohadillas de montaje de tal forma que es minimizada la pérdida de energía vibratoria. La frecuencia de resonancia está en función de la carga axial aplicada a la viga, de manera que, la frecuencia aumenta con un incremento en la fuerza de tensión y disminuye con un incremento en la fuerza de compresión. El resonador es insensible a la temperatura, sin embargo, las diferencias en el coeficiente de expansión térmica entre el cuarzo y otros materiales producen efectos térmicos, los cuales son compensados por un sensor digital de temperatura.

Las salidas de la carga del resonador y del sensor de temperatura se pueden combinar en una ecuación matemática, para obtener por resultado una salida compensada térmicamente.

III.3.2 Sensores electrónicos de tensión

Un sensor electrónico de tensión es conocido como “galga extensiométrica” o “extensómetro” y está basado en el efecto piezorresistivo, esto es, en la propiedad que tiene ciertos materiales de cambiar el valor nominal de su resistencia cuando se les somete a ciertos esfuerzos y se deforman en la dirección de los ejes mecánicos.

Una galga extensiométrica se une a una placa metálica y se conecta eléctricamente a un circuito de resistencias tipo puente, a medida que la placa se deforma debido a la presión, se puede observar un cambio en el voltaje cuyo magnitud es del orden de unos cuantos mili-volts. Los circuitos electrónicos sirven para amplificar el voltaje y producir una lectura que se pueda almacenar. Sin embargo, no son muy estables a la temperatura generando lo que se llama drift (ver **Fig. III.14**).

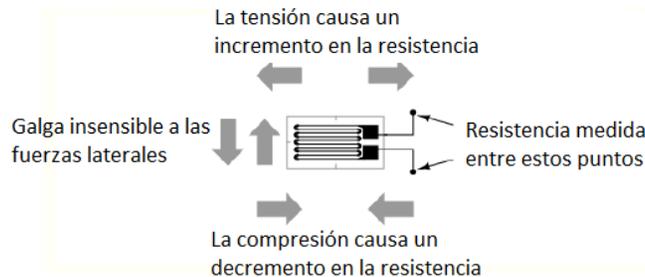


Fig. III.14: Elementos de medición de un sensor electrónico de tensión (galga extensiométrica) (Fuente: [29] Tita, G.E. 2007-2008. *Permanent Downhole Well Data Monitoring*. MS thesis, Eni Corporate University. Politecnico Di Torino. Italia).

III.4 Sensores de fibra óptica

En los últimos años, los sensores de fibra óptica han ido ganando aceptación dentro de la industria petrolera ya que tienen la gran ventaja de no poseer partes móviles ni de electrónica de fondo, además son invulnerables a la

radiación electromagnética y se pueden instalar después de la terminación de un pozo.

La fibra óptica puede ser fabricada con buenos estándares de calidad, con un alto ancho de banda, son un excelente medio de transmisión con bajas pérdidas y su velocidad de transmisión es muy alta (1×10^{12} bits/seg).

Una fibra óptica convencional está compuesta de un núcleo central por donde se propaga la luz, rodeado de algún revestimiento con un índice de refracción ligeramente bajo, que sirve de protección al núcleo. Generalmente el núcleo y el revestimiento son de sílice⁶. En la **Fig. III.15** se muestra la estructura principal de una fibra óptica convencional.

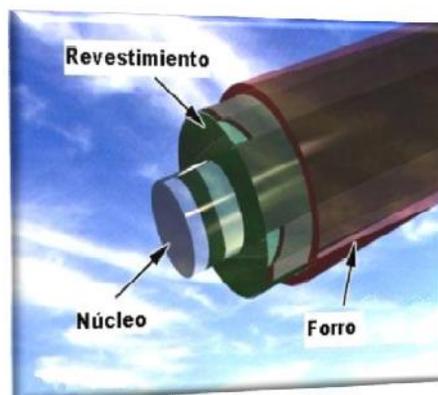


Fig. III.15: Estructura de una fibra óptica (Fuente: www.alava-ing.es)⁸

Cabe resaltar que en los campos petroleros son requeridos altos niveles de protección debido a las condiciones de temperatura, al ataque químico y a la abrasión mecánica. Los sensores de fibra óptica comerciales se pueden dividir en sensores de fibra óptica para la medición de presión y flujo, y en sistemas de temperatura distribuida. Estos últimos serán abordados al final de capítulo.

Para la medición de parámetros de fondo mediante fibra óptica se han explorado diversos métodos y procedimientos, siendo el más común la medición del cambio en la longitud de onda de un haz de luz en respuesta al parámetro que

se desea medir, como presión y temperatura. Entre los tipos más comunes de sensores de fibra óptica se tienen los basados en intensidad, en éstos una fuente de luz, como puede ser un diodo emisor de luz (LED), es utilizado junto con un foto-detector para determinar la potencia óptica en la salida del sensor.

Dentro de los sensores de fibra óptica basados en intensidad se tiene el sensor de micro curvaturas, el cual es ilustrado mediante el diagrama esquemático de la **Fig. III.16**.

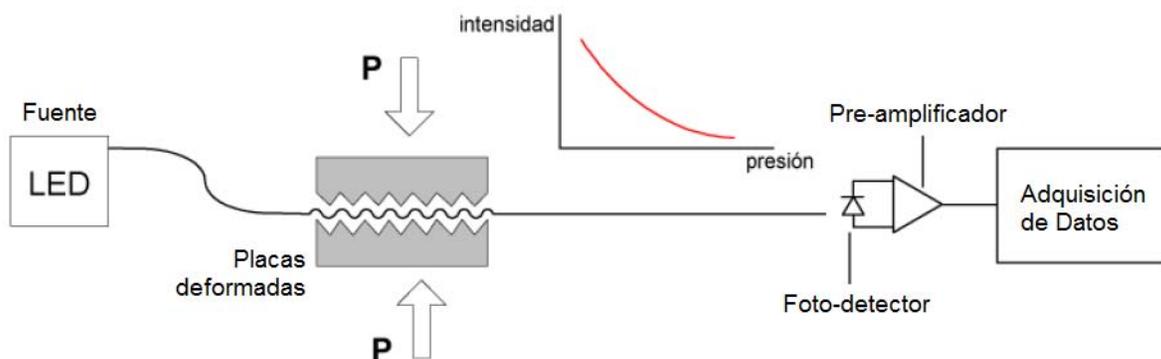


Fig. III.16: Sensor de fibra óptica basado en intensidad para la medición de presión a través de microcurvaturas (Fuente: Russell G. May, Anbo Wang, Hai Xiao and Jiangdong Deng, paper presented at the Oil and Gas Conference, sponsored by the Department of Energy, Dallas Texas, June 1999).

En un sensor de micro-curvaturas, un tramo de fibra óptica conectado a una fuente y a un detector, es colocado entre dos placas que poseen crestas maquinadas, de tal manera que la presión aplicada sobre las placas es medida en términos de la reducción en potencia óptica transmitida. Sin embargo, se pueden tener imprecisiones debido a que otros efectos también pueden causar disminución en la salida óptica como puede ser el debido a las mismas micro-curvaturas.

Los dos métodos comunes para utilizar a una fibra óptica como sensor de presión son los principios físicos de las rejillas Fiber-Braggs y la interferometría Fabry-Perot. Ambos son discutidos a continuación.

III.4.1 Sensores de rejilla Fiber-Braggs

Una rejilla Fiber-Bragg es un segmento de fibra óptica al que mediante la exposición parcial de luz ultravioleta, es grabada una perturbación periódica o aperiódica (rejilla) para modificar el índice de refracción de su núcleo. Así, cuando un haz de luz incide sobre la rejilla Fiber-Bragg, una banda muy estrecha de longitudes de onda es reflejada, mientras que las demás componentes espectrales de la luz continúan transmitiéndose. Las longitudes de onda reflejadas son llamadas longitudes de onda Braggs. En la **Fig. III.17** se presenta el esquema de funcionamiento de una rejilla Fiber-Bragg.

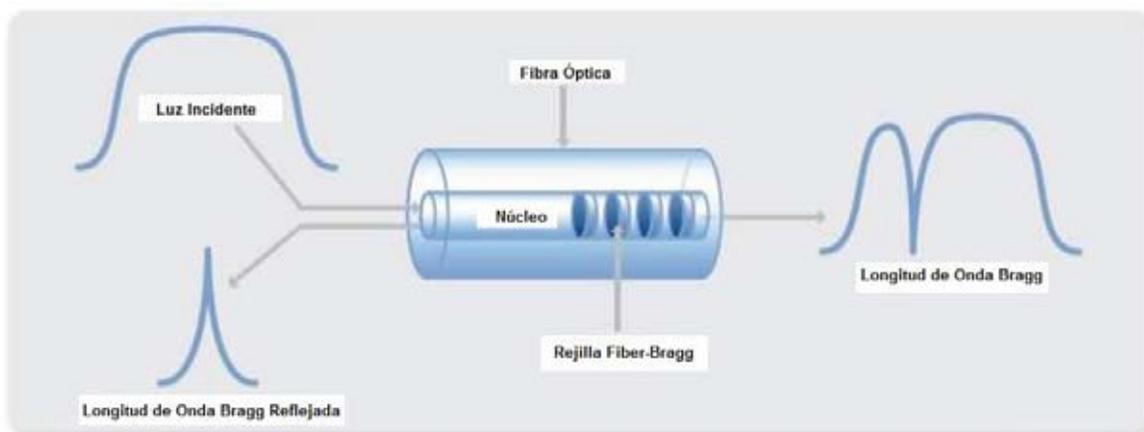


Fig. III.17: Esquema de funcionamiento de una rejilla Fiber-Bragg en fibra óptica (Fuente: Vallinas G., Ander y Benito P., David. 2011. Sensores de Fibra Óptica: Fundamentos de medida y análisis de la oferta comercial. Tesis de licenciatura. Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales y de Telecomunicación. Pamplona, España).

Para que a una rejilla Fiber-Bragg se le dé la aplicación de sensor, esta es estirada de manera que es alterada la longitud de onda de la luz reflejada. La **Fig. III.18** muestra la estructura de un sensor de presión Fiber-Bragg.

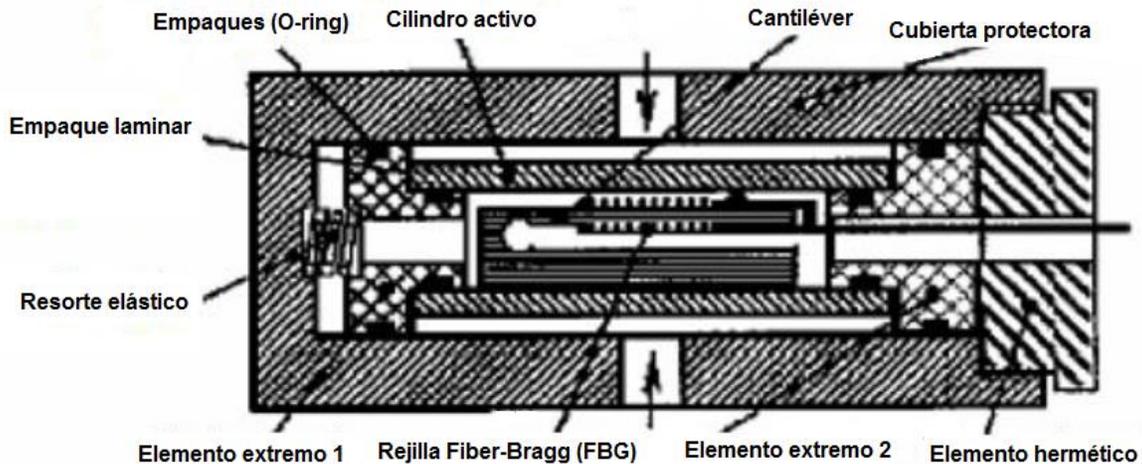


Fig. III.18: Estructura de un sensor de presión de rejillas Fiber-Braggs (Fuente: Yong Zhao, Yanbio Liao and Shurong Lai, IEEE Photonics Technology Letters, Volume 14, No.4, November 2002).

El principio de operación de los sensores de rejillas Fiber-Braggs está basado en la dependencia de la reflexión o del espectro de transmisión sobre el parámetro físico medido. Así, bajo la influencia de un esfuerzo aplicado sobre las rejillas Fiber-Braggs, la longitud de onda Bragg, cambia. La operación práctica del sensor requiere la detección de estos cambios en la longitud de onda y su conversión a una señal electrónica de salida.

El diagrama esquemático de la Fig. III.18 representa un novedoso dispositivo sensor basado en la estructura de un transductor con un elemento activo libre de modulo elástico para alta presión y un sensor diferencial de rejillas Fiber-Braggs (FBG) el cual permite medir simultáneamente la alta presión y la temperatura en el fondo de un pozo. Como se puede constatar en la Fig III.18, el ensamblaje del elemento activo del transductor es montado dentro de una cubierta protectora, y mantenido en su lugar por dos elementos extremos y un elemento

hermético; este ensamble puede ser considerado como un módulo activo del transductor. El empaque laminar entre las caras de los extremos y los o-ring es montado en unas ranuras apropiadamente diseñadas entre las caras cilíndricas de los elementos y son equipadas con lacre (pasta sólida, compuesta de goma laca y trementina con añadidura de bermellón o de otro color, que se emplea derretido para cerrar y sellar). El módulo activo del transductor es inmovilizado por un resorte. Un sensor diferencial de rejillas Fiber-Braggs (FBG) basado en un cantiléver en forma de triángulo isósceles es introducido dentro del módulo activo para transformar su presión dependiente de los cambios de diámetro interior (como en la **Fig. III.19**), hacia una deflexión del cantiléver (como en la **Fig. III.20**) y entonces hacia una señal luminosa de salida con longitud de onda modulada. Dos rejillas Fiber-Braggs (FBG), con la misma longitud de onda central Bragg, están adheridas, respectivamente, sobre la superficie superior e inferior del cantiléver ⁹.

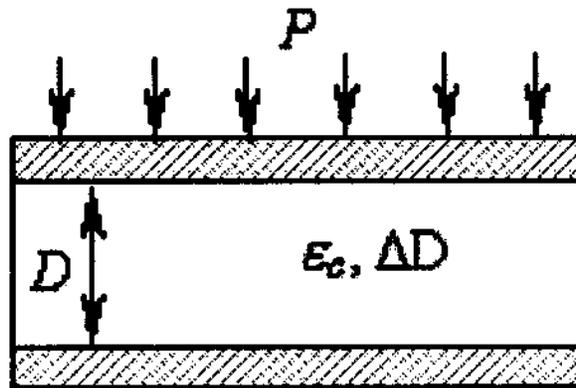


Fig. III.19: Diagrama esquemático del elemento activo libre con módulo elástico del transductor de presión (P es la presión aplicada, ϵ_c es el esfuerzo circunferencial, D es el diámetro interno del elemento activo y ΔD representa los cambios de diámetro interno del elemento activo debidos a la presión aplicada) (Fuente: [9] Yong Zhao, Yanbio Liao and Shurong Lai, IEEE Photonics Technology Letters, Volume 14, No.4, November 2002)

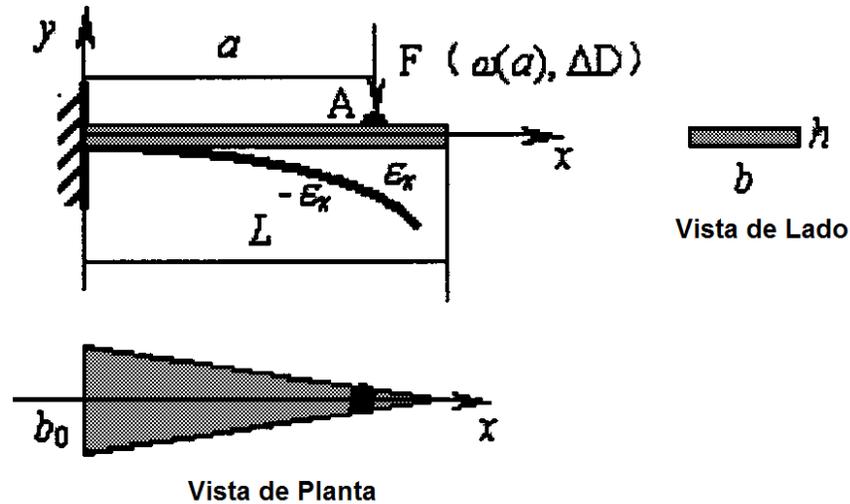


Fig. III.20: Diagrama esquemático del cantiléver en forma de triángulo isósceles
(Fuente: [9] Yong Zhao, Yanbio Liao and Shurong Lai, IEEE Photonics Technology Letters, Volume 14, No.4, November 2002)

Puesto que las dos rejillas Fiber-Braggs están muy cerca una de la otra, el cambio en sus longitudes de onda Braggs, debido a la temperatura, se considera que son idénticos, pero los cambios debidos a esfuerzos (o presión) están en direcciones opuestas (signo contrario) con el mismo valor absoluto. Es decir, el esfuerzo positivo tiene un efecto opuesto sobre la rejilla Fiber-Bragg inferior que con respecto a la rejilla Fiber-Bragg superior. Basándose en el método de medición diferencial y en el diseño especial de la estructura, las longitudes de onda Braggs se moverán, respectivamente, hacia direcciones de longitudes de onda más largas y más cortas con las mismas amplitudes, y la diferencia en el movimiento de las dos longitudes de onda Braggs corresponde a la presión⁹.

III.4.2 Sensores de Interferometría Fabry-Perot

Un sensor interferométrico de fibra óptica mantiene una íntima relación con el parámetro a medir, en el sentido de que la luz puede permanecer dentro del núcleo de la fibra para interactuar con algún agente externo. La fase de una onda luminosa que se propaga es modulada por el parámetro que se desea medir,

siendo luego detectada interferométricamente mediante la comparación con la fase de otra onda luminosa de referencia.

La interferometría basada en fibras ópticas puede dividirse en dos grandes categorías: aquellas en las que intervienen dos haces interferentes como las configuraciones tipo Michelson, Sagnac, y Mach-Zehnder; y los interferómetros de múltiples haces, representados mayoritariamente por la cavidad Fabry-Perot.

Un interferómetro de fibra óptica tipo Mach-Zehnder se ilustra en la **Fig. III.21**.

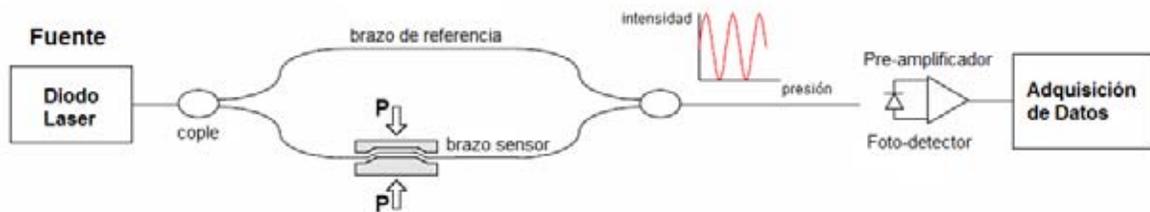


Fig. III.21: Sensor interferométrico de fibra óptica tipo Mach-Zehnder (Fuente: Russell G. May, Anbo Wang, Hai Xiao and Jiangdong Deng, paper presented at the Oil and Gas Conference, sponsored by the Department of Energy, Dallas Texas, June 1999)

La trayectoria óptica representada por el “brazo de referencia”, en la Fig. III.21, es aislada del parámetro físico a medirse, mientras que el “brazo sensor” (la otra trayectoria óptica), es sometido al parámetro físico. El sensor es diseñado de tal manera que el parámetro a medir (presión, temperatura, etc.) provoque un cambio en la longitud de onda de la trayectoria óptica transmitida por el “brazo sensor”. El cambio podría ser, ya sea en la elongación del brazo o en el índice de refracción. En la Fig. III.21, la presión aplicada a las placas genera una deformación, la cual ya sea que estire o acorte la fibra. A la salida, ocurre una combinación de la luz del “brazo de referencia” y del “brazo sensor”; esto causa que las dos trayectorias interfieran debido a que la luz es coherente, es decir todas las ondas de luz emitidas tienen la misma longitud de onda y la misma orientación. El grado de interferencia es dependiente de la diferencia relativa de fase entre las

longitudes de onda interfiriendo, la cual a su vez es dependiente de la presión o temperatura medida.

Si las ondas están en fase, la interferencia será constructiva de tal modo que se producirá potencia óptica. Por el contrario, si las ondas están fuera de fase, la interferencia será destructiva y causará una reducción en la potencia óptica. La **Fig. III.22** muestra la intensidad de salida de un sensor interferométrico típico como una función del cambio en la longitud de la trayectoria óptica.

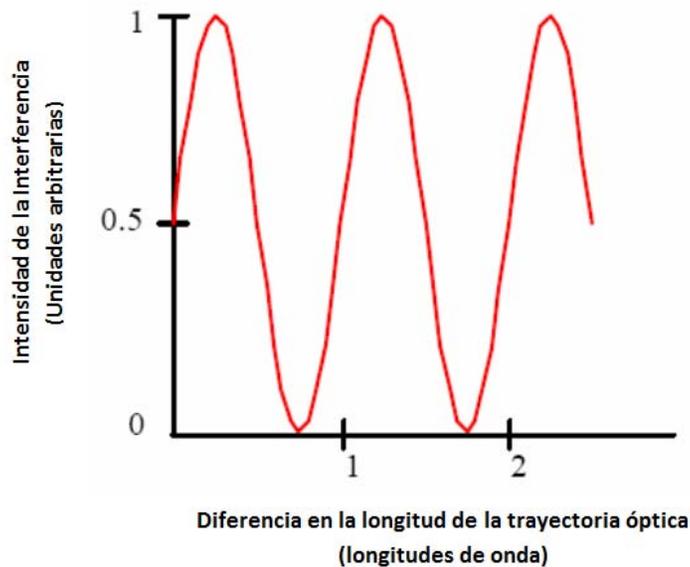


Fig. III.22: Salida típica de un sensor interferométrico para incrementos en la longitud de la trayectoria óptica (Fuente: Russell G. May, Anbo Wang, Hai Xiao and Jiangdong Deng, paper presented at the Oil and Gas Conference, sponsored by the Department of Energy, Dallas Texas, June 1999)

Debido a que la salida del interferómetro cambia considerablemente con cambios en la longitud de la trayectoria óptica de las longitudes de onda menores que la longitud de onda de la luz incidente, el interferómetro proporciona mediciones altamente sensibles a la elongación o al índice de refracción de la fibra. Incidentalmente, los cambios en la trayectoria óptica que exceden una longitud de onda producirán un cambio periódico en la potencia de salida del

sensor. Estos cambios periódicos en la salida hacen que la interferencia sea más difícil de medir e interpretar. Para hacer posible la interpretación efectiva de una salida, es necesario equipo adicional o un algoritmo para producir una salida que varíe monótonamente en función de la presión aplicada. Una de las técnicas utilizadas para derivar una medición ambigua es el uso de más de una longitud de onda y el conteo de “franjas”, que es un término usado comúnmente para cada pico en intensidad.

La configuración para la calibración automática de un sensor interferométrico basado en intensidad (SCIIB) fue recientemente inventada por el laboratorio Virginia Tech Photonics. Esta técnica combina la alta sensibilidad interferométrica con el procesamiento de la señal de los sensores basados en intensidad. El sensor ilustrado en la **Fig. III.23** emplea una estructura conocida como **interferómetro de cavidad Fabry-Perot**; formado por la alineación de dos extremos de fibra cuidadosamente pulidos y colocados dentro de un tubo capilar. Cuando un haz de luz entra al sensor a través de la **fibra de entrada**, se propagará hasta alcanzar el final de la fibra. Debido a la discontinuidad en el índice de refracción, cerca del 4 % de la potencia óptica es reflejada en el extremo de la fibra debido a las **reflexiones Fresnel**. La reflexión Fresnel es representada como R_1 en la Fig. III.23. El resto de la potencia óptica continúa viajando a través de la bolsa de aire de la cavidad, hasta que alrededor del 4 % de la luz es reflejada en el extremo de la segunda fibra, la cual es conocida como la **fibra reflectora**. Esta segunda reflexión (R_2) viaja de regreso a través de la bolsa de aire y entra a la primera fibra (fibra de entrada). Si la fuente de luz es suficientemente coherente (esto es, está compuesta de ondas con una diferencia de fase constante), ocurrirá interferencia y su intensidad dependerá totalmente de la diferencia relativa de fase de las dos reflexiones.

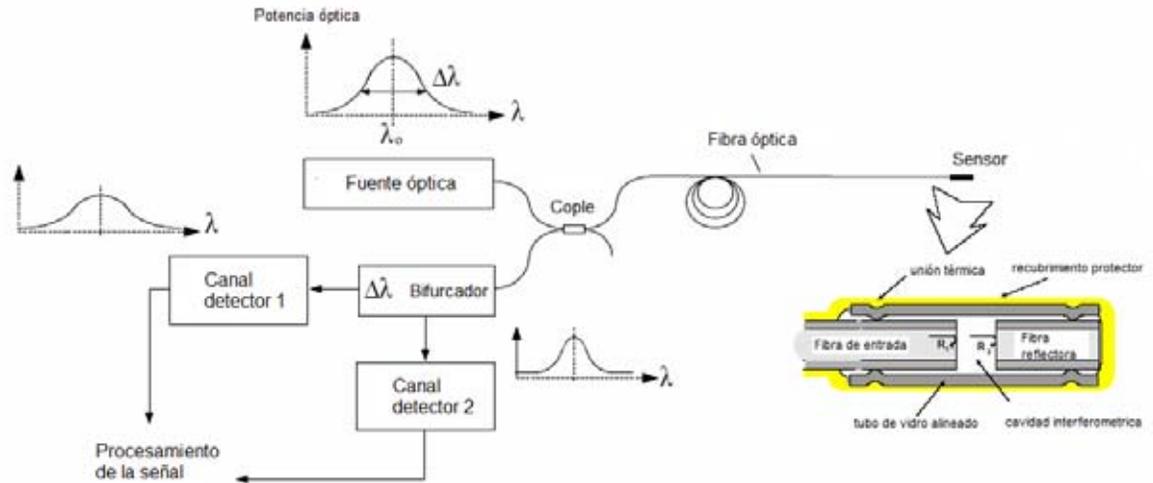


Fig. III.23: Esquema de la auto calibración de un sistema sensor basado en intensidad / interferometria (Fuente: Russell G. May, Ambo Wang, Hay Ciao and Jiangdong Deng, paper presented at the Oil and Gas Conference, sponsored by the Department of Energy, Dallas Texas, June 1999)

Observando con detenimiento la **Fig. III.24**, la presión hidrostática aplicada al sensor resultará en una deformación de la alineación del tubo de vidrio capilar. Cuando la presión aplicada excede la presión del aire atrapado dentro del sensor, el radio del tubo disminuirá con un incremento en la separación de las dos fibras (ΔL).

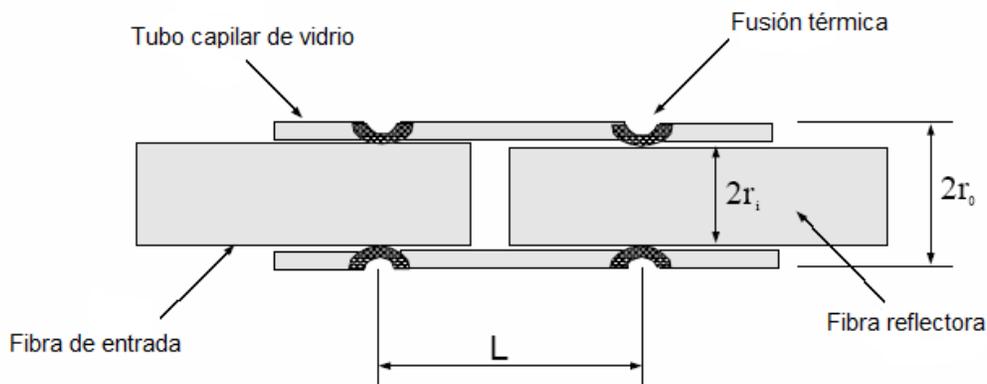


Fig. III.24: Esquema ilustrativo de la geometría de un sensor de presión SCIIB (Fuente: Russell G. May, Anbo Wang, Hai Xiao and Jiangdong Deng, paper presented at the Oil and Gas Conference, sponsored by the Department of Energy, Dallas Texas, June 1999)

Para simplificar el procesamiento y la interpretación de la salida del sensor, este es diseñado del tal forma que la intensidad óptica de salida sobre el rango completo esperado de la presión aplicada permanezca dentro de la porción cuasi-lineal de la salida sinusoidal (ver **Fig. III.25**). Esto se logra controlando la longitud, el diámetro, el espesor de pared y el modulo elástico del tubo de vidrio capilar alineado, durante la fase de fabricación del sensor. Cuando es diseñado apropiadamente, la separación de las dos fibras, ΔL , durante la aplicación de una presión puede estar limitada, así que la salida del sensor es restringida a la porción cuasi-lineal de la función interferométrica, correspondiente a la parte resaltada en azul en la Fig. III.25. De esta manera, se puede evitar el procesamiento de señales complicadas que involucran el conteo de franjas o la descomposición espectral, y un simple foto-detector puede ser usado, puesto que la potencia óptica de salida esta linealmente relacionada a la presión aplicada.

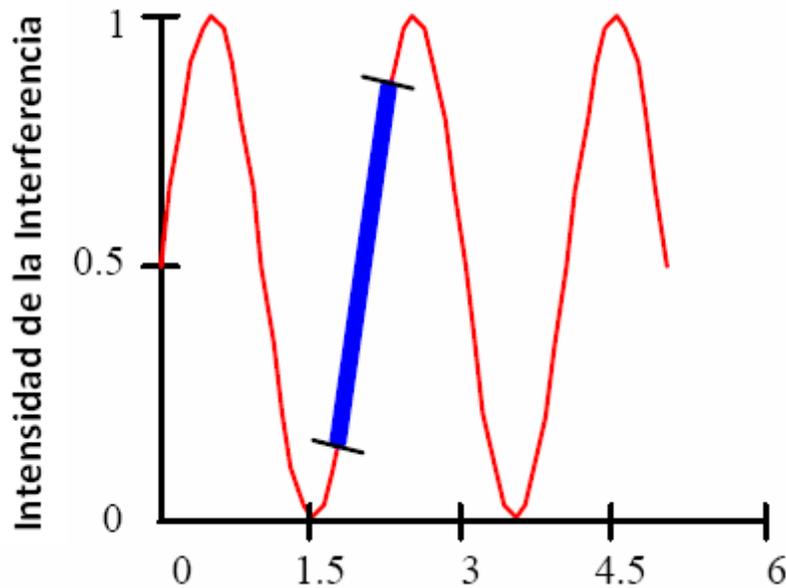


Fig. III.25: Intensidad de salida de una cavidad Fabry-Perot (Fuente: Russell G. May, Anbo Wang, Hai Xiao and Jiangdong Deng, paper presented at the Oil and Gas Conference, sponsored by the Department of Energy, Dallas Texas, June 1999)

Sin embargo, ya que la señal de salida del sensor esta ahora procesada como un sensor basado en intensidad, los cambios en la atenuación de la fibra de entrada o en la potencia de salida de la fuente puede generar errores. Para eliminar esta posibilidad, un bifurcador óptico es usado para separar la salida del sensor en dos canales. En el canal de referencia, la luz es ajustada para que tenga una longitud de coherencia corta; en el canal del sensor, la luz es modificada para que tenga una longitud de coherencia larga.

Cuando la longitud de coherencia de la fuente de luz es más grande que la diferencia de las trayectorias ópticas de los dos “brazos” en un interferómetro, se observa interferencia cuando la luz de los dos brazos son combinadas. Por el contrario, cuando la longitud de coherencia de la fuente es menor que la diferencia de las trayectorias, no ocurre interferencia, y el resultado de combinar los dos haces es de que sus intensidades se suman aritméticamente. En el sistema SCIB, la longitud de coherencia del canal sensor (Canal 2 en la Fig. III.23) es diseñado para exceder las diferentes longitudes de la trayectoria en la cavidad Fabry-Perot (la diferencia de longitudes de la trayectoria es dos veces la longitud de la cavidad, puesto que la reflexión R_2 en la Fig. III.23 tiene que atravesar dos veces la cavidad). Por consiguiente, la salida del Canal 2 exhibirá franjas de interferencia cuando la longitud de la cavidad es modificada debido a cambios en la presión aplicada. Como se explicó arriba, la salida del canal sensor será restringido para que el resultado sea una función lineal de la presión. Sin embargo, los cambios en la curvatura o conectores en la fibra de entrada también producirán cambios en la salida del canal de la señal. La función del canal de interferencia es eliminar estos cambios indeseables.

La longitud de coherencia del canal de referencia (Canal 1 en la Fig. III.23) es ajustado para que sea mucho más corta que la diferencia de la longitud en las trayectorias de la cavidad Fabry-Perot; por consiguiente no ocurre interferencia en la salida del canal de referencia. La potencia de salida por el Canal 1 es por

consiguiente únicamente la suma de la potencia óptica de las dos reflexiones R_1 y R_2 , sin interferencia. La potencia de aquellas reflexiones, sin embargo, es afectada por cambios en el daño de la fibra o conectores. Así, tanto el canal sensor y el canal de referencia exhiben cambios en la salida debido al daño en la fibra, daño en los conectores, o fluctuaciones en la potencia de salida de la fuente; únicamente el canal sensor exhibe cambios en la salida debido a cambios de longitud de la cavidad debido a la presión. Las fluctuaciones indeseadas en potencia están en modo normal para ambas señales y canal de referencia. Tomando el cociente de las salidas de los dos canales, las fluctuaciones son canceladas, dejando únicamente las variaciones interferométricas, las cuales contienen la información deseada acerca de la medición de presión.

III.4.3 Sensores de fibra óptica de medición de flujo

En la actualidad, existe solamente un tipo de medidor de flujo de fibra óptica en el mercado. Su principio de operación se basa en la medición de una correlación acústica, lo cual es similar en concepto al medidor de flujo Venturi. Un medidor de flujo de fibra óptica utiliza un arreglo de sensores de rejillas Bragg para poder realizar múltiples mediciones ópticas. Los sensores de fibra Braggs son multiplexados en un solo cable de fibra óptica. Como en la mayoría de los sensores de fibra óptica, no hay electrónica de fondo, partes móviles o ventanas ópticas. Este sensor es completamente no-intrusivo (no extrae energía del sistema bajo medición) y proporciona un acceso completo al pozo. Su colocación es mejor durante la fase de terminación de un pozo formando parte de la tubería de producción. Los medidores de flujo son diseñados en dos módulos. El primer módulo es el ensamblaje superior, que consiste de un porta sensor que contiene al transductor de presión y temperatura de fibra óptica. Un segundo módulo compuesto de un ensamblaje inferior que sostiene los sensores de flujo óptico y de fracción de fase. Ambos ensamblajes superior e inferior pueden ser interrogados con una sola fibra óptica. El sistema de medición de flujo comprendiendo su ensamblaje superior e inferior se muestra en la **Fig. III.26**.



Fig. III.26: Sistema de medición de flujo de fibra óptica (Fuente: T.K. Kragas, F.X. Bostick, and C. Mayeu, paper SPE 77655 presented at the SPE Annual Technical Conference and Exhibition held in San Antonio Texas, September 29-October2, 2002)

El hardware del medidor de flujo consiste de un tubo sensor interior, un enchufe exterior, sensores de flujo de fibra óptica, sensores de fracción de fase y un conector óptico para sellado. Un tubo sensor se corta de un bloque sólido de la aleación Inconel 718. El diámetro interior de este tubo sensor es suavizado sin intrusiones. Los sensores ópticos se adjuntan al tubo sensor exterior y se encapsulan dentro de una cavidad anular herméticamente sellada. La **Fig. III.27** muestra un medidor de flujo completamente ensamblado.



Fig. III.27: Sistema de medición de flujo totalmente ensamblado y su unidad de instrumentación superficial asociada (Fuente: T.K. Kragas, F.X. Bostick, and C. Mayeu, paper SPE 77655 presented at the SPE Annual Technical Conference and Exhibition held in San Antonio Texas, September 29-October 2, 2002)

Las especificaciones mecánicas de los medidores de flujo de fibra óptica se presentan en la **Tabla III.2**. Los medidores de flujo de fibra óptica realizan dos mediciones en la corriente del fluido: medición de la velocidad bruta y de la velocidad del sonido. Estas mediciones, junto con el conocimiento de las densidades y la velocidad del sonido de las fases individuales, a la presión y temperaturas medidas, permiten la determinación del gasto. Las mediciones de la velocidad del sonido son hechas usando mediciones de presión inestables. Estas mediciones de presión permiten la determinación del ruido generado dentro de la tubería de producción. Este ruido puede venir de cualquier fuente asociada con la producción tales como el flujo a través de las perforaciones, el flujo a través del árbol de estrangulación, liberación de burbujas de gas, etc. Las presiones se toman en múltiples ubicaciones dentro del medidor de flujo para obtener una resolución espacial y temporal que pueda ayudar a determinar la velocidad del sonido del flujo de fluido que está pasando a través de él.

Tabla III.2: Especificaciones Mecánicas de los Medidores de Flujo de Fibra Óptica ¹⁰

ESPECIFICACIONES MECÁNICAS DE LOS MEDIDORES DE FLUJO	
Material	Inconel 718 (NASCE MRO 175-98)
Presión de Cedencia API	18,400 psi-min @125°C
Presión de Operación	15,000 psi
Carga Limite a la Tensión	350,000 lbs
Carga Limite a la Compresión	145,500 lbs
Limite a la Torsión	6,730 pies-lb
Longitud Total	22.67 pies
Diámetro Interior	2.922 pg
Diámetro Exterior	5.5 pg
Peso	650 lbs
Conexiones	3.5"X10.2# VAM ACE o especificadas por el cliente

Al hacer mediciones de velocidad bruta, el aparato aplica una técnica de correlación cruzada para estimar la velocidad del fluido. En los medidores de flujo convencionales la técnica aplicada de correlación cruzada se basa comúnmente en mediciones dispersas axialmente de una propiedad del fluido variable en el tiempo que convecciona con el flujo del fluido. Para un medidor de flujo de fibra óptica, la técnica de correlación cruzada utiliza perturbaciones de presión convectivas. Se ha encontrado que estas técnicas pueden utilizarse igualmente tanto a flujo de una sola fase como a flujo multifasico.

III.4.4 Sensores de fibra óptica de temperatura distribuida (DTS)

Los sensores de temperatura distribuida (DTS) son los más exitosos de todos los sensores de fibra óptica. Los expertos en la industria creen que esto es porque no requieren un esfuerzo para mejorarlos o replicar un sensor ya existente. Al parecer, la detección distribuida ha sido exitosa porque solo aplica una única característica de la fibra óptica para medir temperatura. Así, la tecnología de la detección distribuida no se puede aplicar eficientemente en otros materiales.

El sensor de temperatura distribuida es una técnica de medición de la que resulta un perfil continuo de temperatura a lo largo de la longitud completa de una fibra óptica. A diferencia de otros sensores de fibra óptica, no requiere la impresión de rejillas Braggs o la cavidad Fabry-Perot, sino más bien usa las características de transmisión de la luz en la fibra óptica. Un sistema DTS tal como el que se muestra en la **Fig. III.28** hace uso de una combinación de las variaciones en la intensidad luminosa retro dispersada y la reflectometría en el dominio del tiempo para crear perfiles de temperatura-distancia. La fibra óptica actúa tanto como un elemento sensor y un sistema de transmisión. Los sistemas DTS proporcionan un perfil de medición continuo, así que un gran número de puntos discretos medidos sobre una distancia razonablemente grande (30 km) son realizados con una sola fibra. Los sistemas DTS pueden ser descritos mediante una combinación de mediciones de temperatura usando dos tipos de tecnología: (1) tecnología del uso de las señales retro-dispersas Raman para hacer mediciones de temperatura, y (2) tecnología de emisión laser para determinar la posición de los puntos de temperatura.

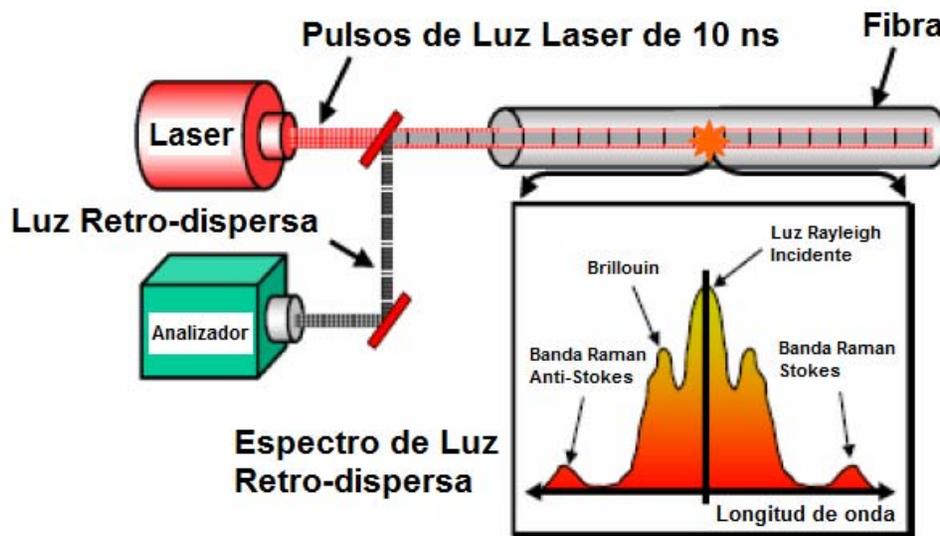


Fig. III.28: Sistema de medición de temperatura distribuida (Fuente: Schlumberger, Sensa, a Schlumberger Company, Schlumberger Information Manual 2003)

Los sensores DTS emplean la retro-dispersión de la luz incidente, resultante de la activación térmica de moléculas en la fibra, para proporcionar mediciones a lo largo de la fibra. Las **señales retro-dispersas Raman** ocurren cuando un pulso laser es realizado para viajar a través de una fibra óptica. El principio de un sensor de temperatura distribuida está basado sobre la reflectometría en el dominio tiempo (OTDR). Esto se conoce comúnmente como **“retro-dispersión”**. En esta técnica, un pulso de luz es centrado dentro de una fibra sensor usando un acoplador direccional. El principio es ilustrado en la **Fig. III.29**.

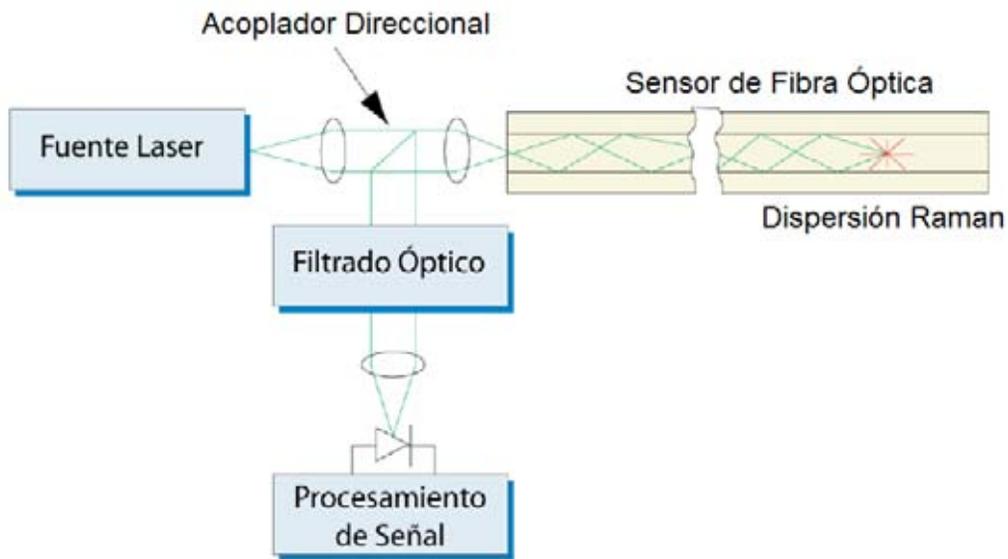


Fig. III.29: Reflectometría óptica en el dominio del tiempo (Fuente: Schlumberger, Schlumberger Information Manual, Schlumberger 2002)

Como la luz se mueve a través de la fibra óptica, los rayos son dispersados por diversos mecanismos, tales como fluctuaciones en la densidad y en la composición. Esto es referido como **dispersión Rayleigh**. Otro mecanismo común por el cual el pulso se mueve a través de la fibra son las **dispersiones Raman** y **Brillouin**, estas ocurren por la vibración molecular y de paquete (voluminosa), respectivamente. Una porción de esta luz dispersa es retenida dentro del núcleo de la fibra y guiada hacia la fibra. La señal retornada es dividida por el acoplamiento direccional y enviada a un receptor altamente sensible. Si esta fibra

es uniforme, la intensidad de la luz retornada decaerá exponencialmente con el tiempo. Por consiguiente puede ser usada para calcular la distancia cubierta por un rayo de luz mientras viaja por la fibra. Variaciones en parámetros tales como composición y temperatura pueden ser detectadas porque resultan de una correspondiente desviación de una curva de decaimiento exponencial de intensidad con la distancia.

Las dispersiones Raman y Brillouin son sensibles a la temperatura. Como se muestra en la **Fig. III.30**, las longitudes de onda de estas líneas son desplazadas de la longitud de onda lanzada, y la intensidad de las señales es mucho más baja que el trazo Rayleigh.

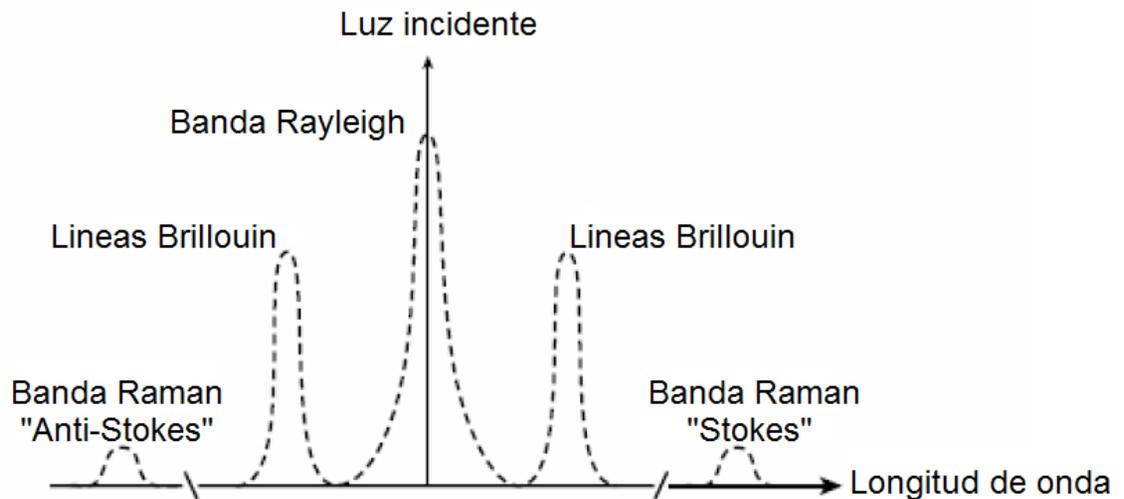


Fig. III.30: Espectro de retro-dispersión mostrando la banda Brillouin y la banda Raman "Stokes" (Fuente: Schlumberger, Sensa, a Schlumberger Company, Schlumberger Information Manual 2003)

Generalmente, es engorroso separar las líneas Brillouin de la longitud de onda lanzada porque están separadas en unas pocas decenas de giga Hertz. Por otro lado, es práctico usar las señales Raman para medir la temperatura debido a la señal fuerte y distintiva que provén.

Las señales Raman consisten de líneas Stokes y anti-Stokes. En fibras comúnmente utilizadas en telecomunicaciones, estas líneas pueden estar desplazadas en longitud de onda de la señal Rayleigh por un valor de 440 cm^{-1} . Esto significa que la fibra puede ser filtrada de un componente dominante del total de la luz dispersa. Las líneas Stokes con longitudes de onda mayores no son tan sensibles a las variaciones de temperatura, a diferencia de las longitudes de onda cortas.

Por otro lado, la intensidad de la luz retro-dispersa en las longitudes de onda cortas incrementa notablemente con el incremento en temperatura. Similarmente a una temperatura en decremento resultará una correspondiente intensidad en decremento. Esto es mostrado en la **Fig. III.31**.

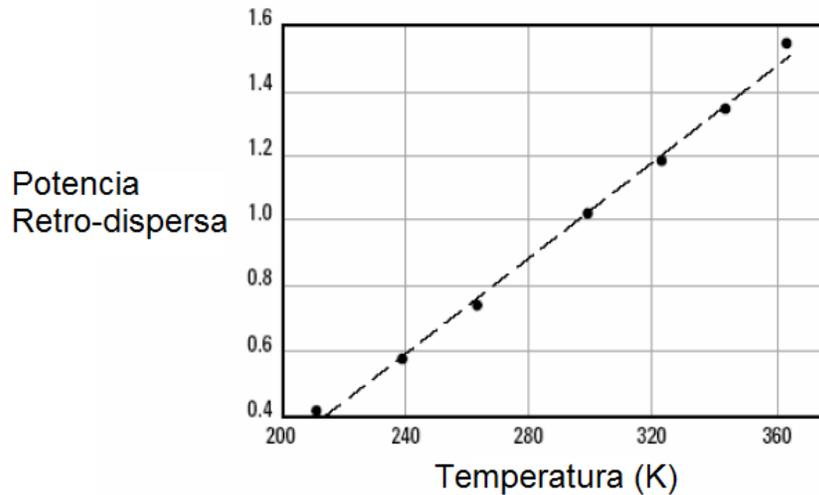


Fig. III.31: Variación de la potencia Retro-dispersa Anti-Stokes con la temperatura (Fuente: Schlumberger, Schlumberger Information Manual, Schlumberger 2002)

Es recomendable, para fines de precisión, adoptar una técnica de medición con doble terminado, para obtener mediciones del sensor. Esto se hace cambiando la fuente laser al otro extremo para una segunda medición y entonces tomando la media geométrica de ambas mediciones. Las mediciones de doble

terminación también permiten la eliminación de efectos de pérdida de fibra a partir de las mediciones.

Las mediciones de doble terminado se convierten en una desventaja donde hay roturas en la fibra porque resultan en una muestra interrumpida. Una gran cantidad de sistemas DTS han sido configurados de tal manera, que cuando ocurre una rotura, el sistema automáticamente cambia a una medición de terminado simple mientras que en tanto inmediatamente se determina la presencia y posición de las roturas. Un sistema DTS consiste de uno o más sensores, de cable de fibra óptica, de una unidad opto eléctrica con el software para el procesamiento integrado y de una unidad de visualización. Las unidades DTS contienen toda la óptica necesaria, la electrónica y la capacidad de procesamiento de datos para interrogar a las fibras y para generar perfiles de temperatura. Un ejemplo de una fuente laser para sistemas DTS es una fibra óptica (dopada con neodimio) laser a 1064 nm que puede suministrar impulsos de < 10 ns de amplitud (equivalente a < 1 de metro de longitud). Un acoplador direccional es utilizado para separar los pulsos lanzados por la señal retro-dispersa, y un interruptor en la fibra selecciona la detección de fibra a ser interrogada. La señal retro-dispersa Raman filtrada y detectada, es entonces amplificada y digitalizada por un convertidor analógico de alta velocidad. El convertidor muestrea entonces todas las señales de regreso en intervalos programables por debajo de 2.5 ns. Técnicas digitales promedio son usadas para mejorar la relación señal / ruido, antes de que los datos sean enviados a la unidad de visualización. Esto permite la adquisición precisa de los datos de temperatura de manera eficiente.

CAPÍTULO IV

PROGRAMA DE CÓMPUTO PARA DETERMINAR CONDICIONES DE EXPLOTACIÓN DE UN POZO

IV.1 Introducción

El propósito de este capítulo es mostrar que la información registrada por un sensor permanente puede ser útil para establecer ciertas condiciones de explotación de un pozo, y para esto se describirá un programa de cómputo que permita: 1) estimar el gasto de producción en base a la magnitud de los cambios ocurridos en la temperatura de fondo, para el caso de un yacimiento que se encuentra en etapa de bajosaturación sin incremento substancial del porcentaje de agua; y 2) aplicar los fundamentos del análisis wavelet para procesar los datos de presión eliminando señales de alta frecuencia ya que no son útiles para hacer análisis de yacimiento ^{3,11,12}. En cuanto al primer objetivo se planteará una metodología que permita correlacionar, a nivel de pozo, el gasto de producción en función de los cambios en la temperatura de fondo, partiendo para ello de información simultánea gasto - temperatura de fondo. Una vez establecido el modelo de correlación se buscare estimar la producción a partir de la disposición de datos de presión y temperatura de fondo provenientes de un sensor permanente. Por otro lado, en lo que respecta al procesamiento de datos de presión, se aplicarán los fundamentos del análisis wavelet, discutidos en el Anexo

B, para descomponer la señal registrada por un sensor permanente en una serie wavelet a diferentes niveles de resolución.

El desarrollo de este capítulo podría hacerse muy extenso, por lo que a fin de compactarlo se adicionó un Anexo C donde han sido colocadas las subrutinas más relevantes del programa.

En cuanto al software utilizado, el programa se estructuró en Visual Basic 2012 y básicamente está conformado por dos módulos denominados (ver **Fig. IV.1**):

- Correlación Producción – Cambios en la Temperatura de Fondo.
- Procesamiento de Datos de Presión.

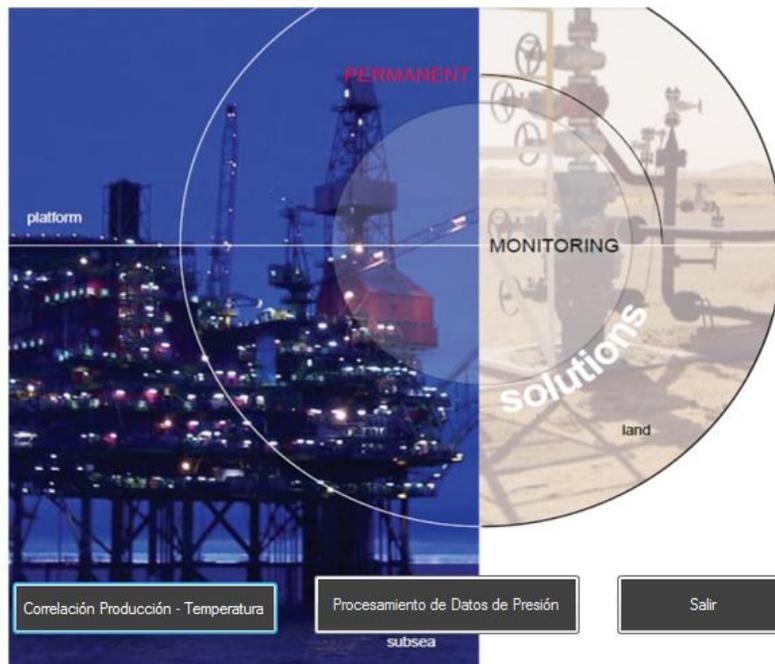


Fig. IV.1: Menú de acceso a los módulos del programa de cómputo

En las secciones subsecuentes se describirá el flujo de trabajo implementado para ambos módulos resaltando los aspectos matemáticos base y mostrando imágenes de su instauración.

IV.2 Módulo para Correlacionar Producción – Cambios en la Temperatura de Fondo (ΔT)

La interfaz de este módulo está constituida por una barra de herramientas destinada a la generación de los modelos de correlación a discutirse un poco más adelante, así como de una barra de menús con la que se pueden abrir archivos de datos, editar gráficos, guardar resultados, etc. Dicha interfaz es ilustrada en la **Fig. IV.2.**

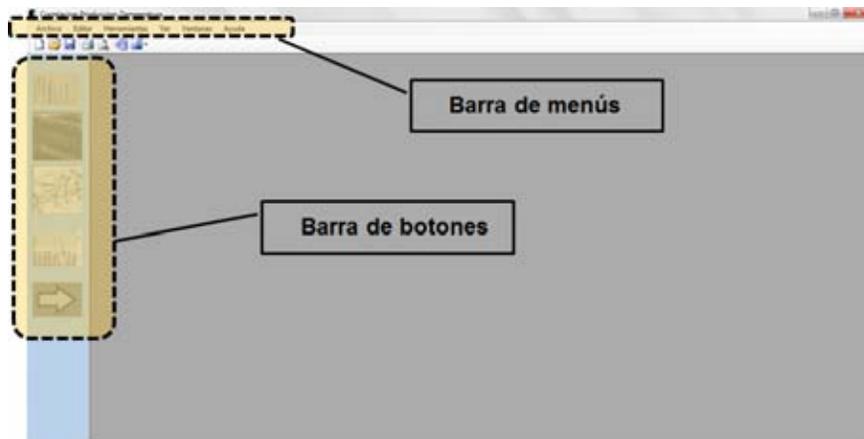


Fig. IV.2: Interfaz del módulo “correlación producción – ΔT ”

El flujo de trabajo para generar y aplicar los modelos de correlación se puede seguir de acuerdo al orden descendente de los botones que conforman la barra de botones vertical localizada en la parte izquierda de la interfaz. Ver **Fig. IV.3.**

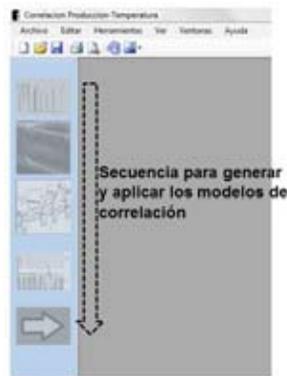


Fig. IV.3: Barra de botones para la generación de los modelos de correlación

Como introducción para iniciar con la discusión de los modelos de correlación propuestos, es conveniente señalar que los datos de presión y temperatura registrados por un sensor reflejan eventos que acontecen en la superficie, dentro de un pozo o en el subsuelo (yacimiento). En particular, cuando se presentan cambios en el gasto de producción o inyección, la temperatura de fondo también sufre cambios cuya magnitud depende de las propiedades térmicas de la formación y de los fluidos que almacena, además de la terminación del pozo, de la energía del yacimiento y de algunos otros factores ^{13, 14}. Si las condiciones mecánicas del pozo y la configuración del entorno roca-fluidos no sufren modificaciones, entonces al declinar la energía del yacimiento, se espera que la magnitud del gasto de producción sea proporcional a los cambios en la temperatura de fondo. Esto es, podría ser factible determinar el gasto de producción en base a la cuantificación de los cambios en la temperatura de fondo, siempre y cuando el medio encargado de transmitir la energía calorífica del yacimiento al punto donde se estén evaluando los cambios en la temperatura de fondo (profundidad del sensor permanente), no sea modificado. Luego entonces, convendría intentar evaluar los cambios en la temperatura de fondo para diferentes gastos y ajustar un modelo matemático que permita predecir el gasto ante cualquier cambio en la temperatura de fondo.

La aplicabilidad de lo que se acaba de plantear estaría restringido a periodos de flujo constante, mas sin embargo, es bien sabido que pueden ocurrir

periodos donde el gasto varía con el tiempo cuando se realizan cambios operativos “normales”. En tal caso, se ha visto que la temperatura de fondo varía logarítmicamente con el tiempo ¹⁵, por lo que se visualizó la practicidad de implementar una función de tipo exponencial.

Por otro lado, también es necesario tener en cuenta que durante la presencia de la variación “natural” del gasto, la temperatura de fondo puede mostrar una tendencia a incrementarse o decaer suavemente. Ante esto, se propone evaluar periódicamente los cambios en la temperatura de fondo (anual, mensual, semanal, etc.) y determinar los gastos de producción con el modelo planteado para periodos de flujo constante.

De acuerdo a lo descrito arriba, en esta Sección IV.2 se detallará la metodología propuesta para estimar el gasto de producción a partir de los cambios en la temperatura de fondo, enfocándose a cada uno de los tres casos descritos arriba: modelo de correlación para periodos de flujo constante, flujo variable y variación “natural” del gasto, pero previamente se recalcará cual es la información requerida y las consideraciones asumidas para lograrlo.

IV.2.1 Información Base para la Generación de los Modelos de Correlación

La respuesta cualitativa y cuantitativa de la temperatura de fondo al variar el gasto de producción puede ser visualizada a través de dos tipos de registros que miden simultáneamente gasto y temperatura de fondo:

- ✓ Registros PLT (Tool Logging Production), ó bien,
- ✓ Aforos con sensor de P y T en fondo

En la **Fig. IV.4** se muestra el caso de un registro PLT, en el que a grandes rasgos se puede apreciar que al incrementar el ritmo de rotación del molinete, la

temperatura de fondo también incrementa, o viceversa. Otra característica importante es la estabilización de la temperatura al mantenerse el gasto constante.

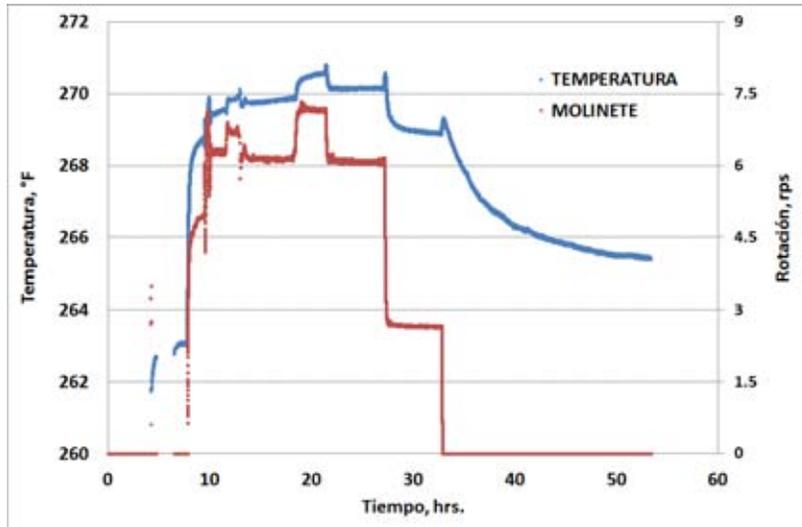


Fig. IV.4: Respuesta de la temperatura ante cambios en el gasto, visualizado con un registro PLT.

Para cargar al programa alguno de los dos tipos de registros base, se pueden seguir dos opciones: crear una tabla desde el menú “Archivo” y seleccionando la opción “Nuevo” para tipiar manualmente la información, o seleccionando la opción “Abrir” para importar un archivo en formato txt o xls. En la Fig. IV.5 se muestra una sección cortada de un registro PLT cargado.

Fecha Recor (Número)	DIA_HORA (DD-MM-AAAA)	PRESION (lb./pg ²)	TEMPERAT (°C)	MOLINETE (RPS)	GRADIO (ft./pg ²)
36942.05	20/02/2001 01:15	14.865	25.31111111	0	0
36942.05	20/02/2001 01:16	14.862	25.33333333	0	0
36942.05	20/02/2001 01:16	14.809	25.35	0	0
36942.05	20/02/2001 01:17	14.826	25.37222222	0	0
36942.05	20/02/2001 01:17	14.962	25.4	0	0
36942.05	20/02/2001 01:18	14.789	25.42777778	0	0
36942.05	20/02/2001 01:18	14.685	25.45	0	0
36942.05	20/02/2001 01:19	14.879	25.47222222	0	0
36942.05	20/02/2001 01:19	14.926	25.5	0	0
36942.05	20/02/2001 01:20	73.687	25.78333333	0	-1.24856
36942.05	20/02/2001 01:20	520.949	30.67222222	0	0.62428
36942.05	20/02/2001 01:21	530.745	28	0	1.24856
36942.05	20/02/2001 01:21	530.293	26.99444444	0	1.24856
36942.05	20/02/2001 01:22	530.409	26.67222222	0	1.24856
36942.05	20/02/2001 01:22	530.324	26.53888889	0	1.24856
36942.05	20/02/2001 01:23	530.3	26.5	0	1.24856
36942.05	20/02/2001 01:23	530.222	26.44444444	0	1.24856

Fig. IV.5: Registro PLT cargado al programa de cómputo.

La información cargada o calculada puede ser visualizada gráficamente mediante el botón “Graficar Datos” ubicado en la parte superior de la barra de herramientas vertical. En la **Fig. IV.6** se muestran de forma gráfica los registros de la temperatura y de la rotación del molinete del PLT cargado.

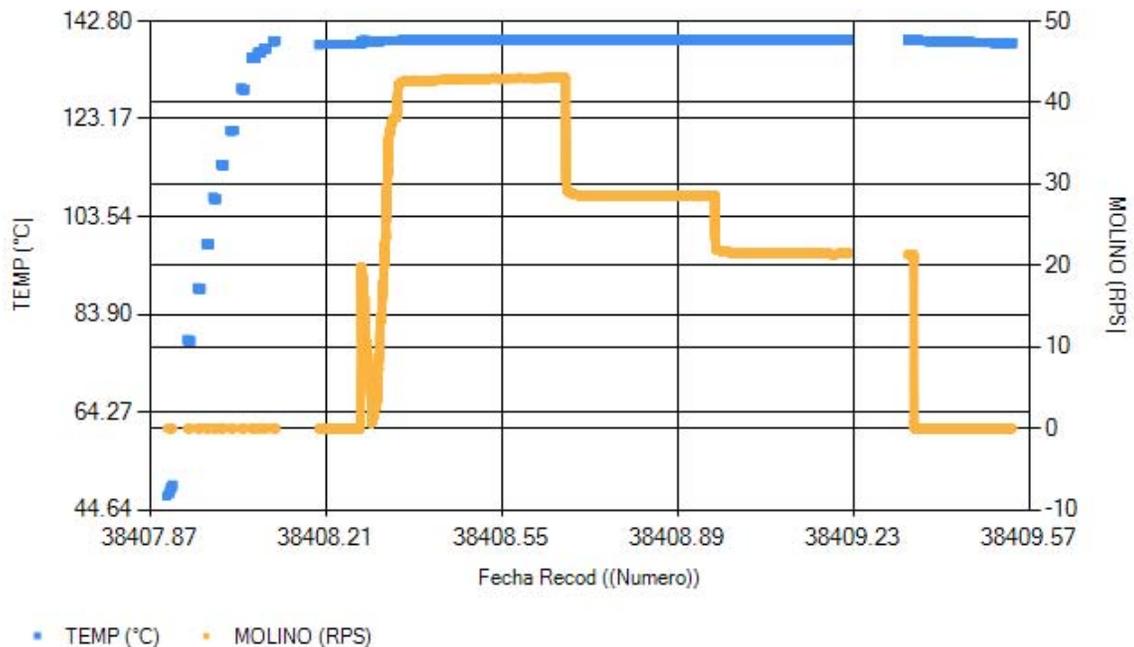
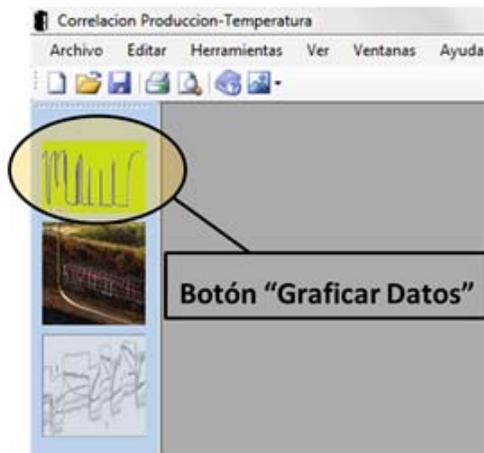


Fig IV.6: Visualización gráfica del registro base cargado

IV.2.2 Consideraciones Asumidas

Para la generación de los modelos de correlación propuestos es necesario cumplir con las siguientes consideraciones:

- ✓ Yacimiento bajosaturado sin incremento sustancial del flujo fraccional ($\%f_w = 0$).
- ✓ Misma formación productora.
- ✓ Condiciones mecánicas fijas (Terminación sin modificaciones).
- ✓ Flujo monofásico hasta la profundidad del sensor.

IV.2.3 Generación del Modelo de Correlación para Periodos de Flujo Constante

La vía para ingresar a la fase de generación del modelo de correlación para periodos de gasto constante es a través del botón “Modelos Q Constante” de la barra de herramientas vertical. Ver **Fig. IV.7**.

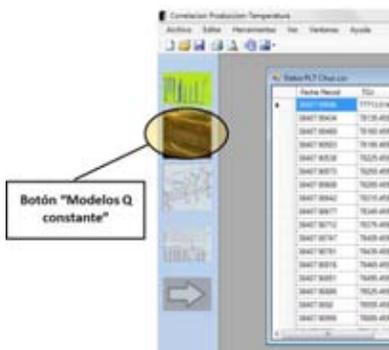


Fig. IV.7: Botón de acceso para iniciar con la generación del modelo de correlación para periodos de flujo constante.

El botón “Modelos Q constante” conducirá al panel “Correlación para periodos Q cte” el cual esta seccionado en tres compartimentos ordenados de izquierda a derecha a fin de seguir la secuencia de generación del modelo, tal como se muestra en la **Fig. IV.8**. Dichos compartimentos han sido denominados:

- 1) Conversión de rotación a gasto
- 2) Cálculo de ΔT
- 3) Modelo de correlación para gasto constante



Fig. IV.8: Panel “Correlación para periodos Q cte”.

Las tareas asignadas a cada uno de los compartimentos son detalladas a continuación.

Conversión de rotación a gasto

Si la información base es un registro de producción PLT, en este compartimento se efectuará el cálculo del gasto a partir de la rotación del molinete siguiendo el proceso descrito en la literatura ¹⁴; mientras que por otro lado tratándose de un aforo con medición simultanea de presión y temperatura en fondo, este cálculo no es requerido, por consiguiente el compartimento no será visualizado.

Asumiendo que la rotación del molinete responde al flujo total, el gasto de producción puede ser calculado a partir de la velocidad del fluido usando la siguiente ecuación:

$$Q = 1.4 C v_f D^2 \dots \dots \dots (IV. 1)$$

donde

Q : gasto de producción a condiciones de fondo, bpd

v_f : velocidad del fluido, pies/min

D : diámetro interno de la tubería de revestimiento, pg

C : factor de corrección de la velocidad

El factor de corrección, C , depende del número de Reynolds, N_{Re} , del diámetro del molinete, del diámetro de la TR, D , de la viscosidad el fluido y de otros parámetros. Se ha visto que valores de 0.83 y 0.5 son satisfactorios para flujo turbulento y laminar, respectivamente.

Regresando a la ecuación (IV.1), la velocidad del fluido es linealmente proporcional a la rotación del molinete. Por consiguiente, para determinar la velocidad del fluido a partir del ritmo de rotación, son importados los datos de calibración a pozo cerrado y mediante regresión lineal es obtenida la línea recta de mejor ajuste. El flujo anterior es llevado a cabo oprimiendo el botón “Cargar calibración” con lo cual se mostrará y almacenarán los coeficientes resultantes del ajuste, tal como se muestra en la **Fig. IV.9**.

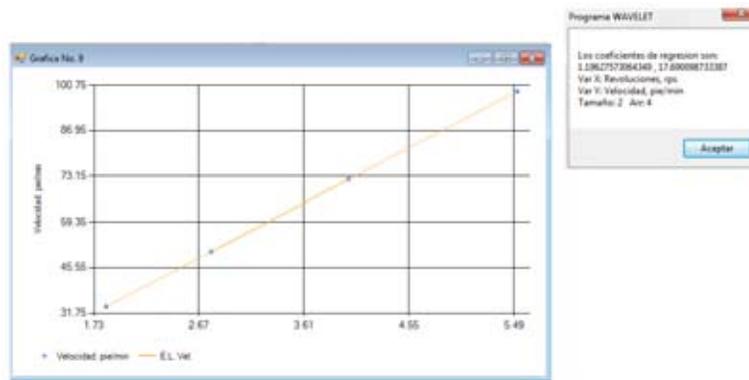


Fig. IV.9: Obtención de la relación lineal entre la velocidad del fluido y la rotación del molinete.

Por su parte la definición del factor de corrección, C , y la expresión del gasto a condiciones de superficie requerirán las siguientes propiedades del fluido expresadas en función de la presión: densidad, viscosidad y factor de volumen. La densidad es tomada del gradiomanómetro, mientras que la viscosidad y factor de volumen son importados de un análisis PVT representativo, a fin de ajustarles una ecuación por medio de regresión polinomial tanto a las condiciones por arriba como por debajo de la presión de saturación, y las cuales serán utilizadas para evaluar el número de Reynolds, N_{Re} , expresado por:

$$N_{Re} = \frac{\rho D v_f}{\mu} \dots\dots\dots (IV.2)$$

donde

ρ : densidad del fluido

D : diámetro de la sección transversal al flujo

μ : viscosidad del fluido

En las **Figs. IV.10a** y **IV.10b** se muestran los resultados del ajuste por regresión polinomial aplicados a los datos experimentales junto con sus coeficientes.

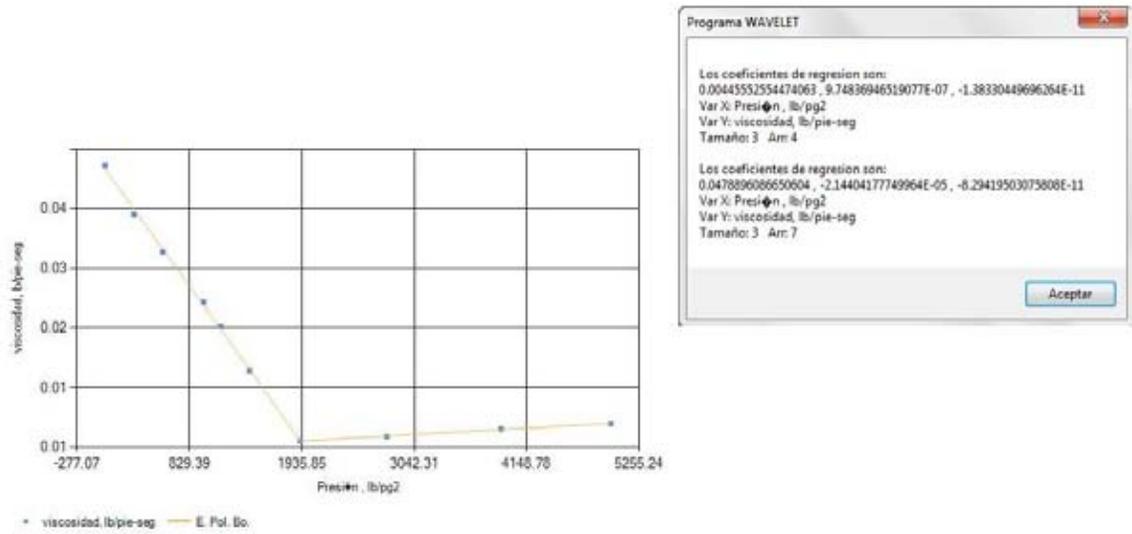


Fig. IV.10a: Ajuste por regresión polinomial a los datos de viscosidad de PVT

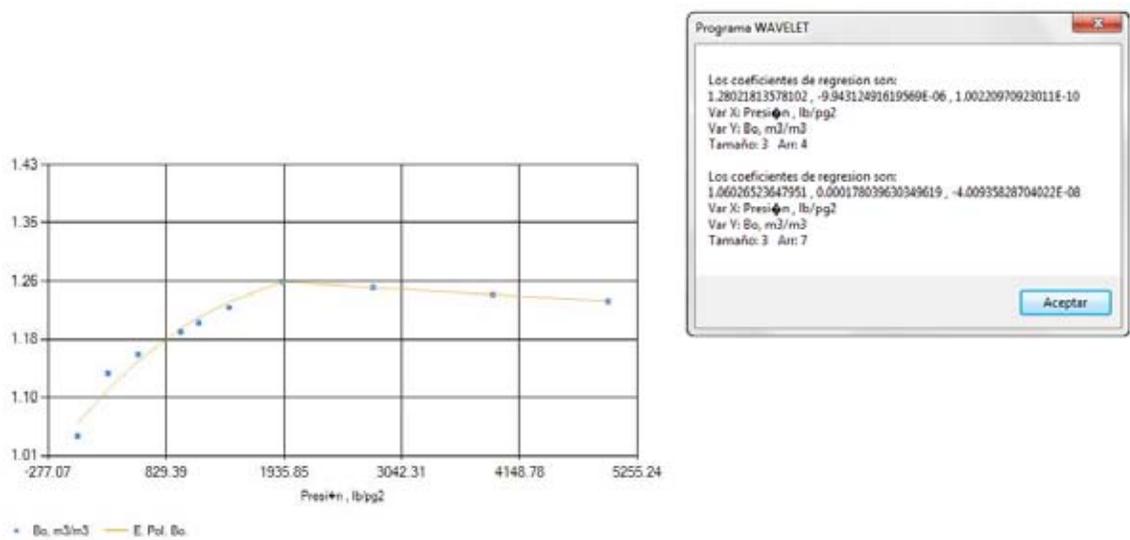


Fig. IV.10b: Ajuste por regresión polinomial a los datos del factor de volumen del aceite de PVT

Con

$N_{Re} > 2000$, se tiene flujo turbulento, y con

$N_{Re} < 2000$, flujo laminar

De tal forma que el gasto a condiciones de superficie es dado por:

$$Q = 0.5 (1/B_o) v_f A, \text{ para flujo laminar} \dots\dots\dots (IV.3)$$

$$Q = 0.83 (1/B_o) v_f A, \text{ para flujo turbulento} \dots\dots\dots (IV.4)$$

donde

B_o : Factor de volumen del aceite

El diámetro de la sección transversal (D) debe ser introducido dentro del cuadro de texto “Diámetro de la tubería”.

Determinación de los cambios en la temperatura de fondo (ΔT)

Para cuantificar el cambio en la temperatura de fondo asociado a un cierto periodo de flujo a gasto constante, se definió el parámetro ΔT dado por:

$$\Delta T = T_{wf} - T_{we} \dots\dots\dots (IV.5)$$

donde:

T_{wf} : Temperatura de fondo fluyendo estabilizada a un cierto periodo de flujo constante.

T_{we} : Temperatura de fondo estática estabilizada ($q = 0$).

De esta forma, la cuantificación del parámetro ΔT implica identificar y delimitar todos aquellos periodos de flujo donde el gasto alcanza una estabilización.

La delimitación de dichos periodos se torna complicada basándose únicamente en el comportamiento de la temperatura de fondo ya que ésta es afectada por fenómenos transitorios una vez que el gasto de producción comienza a estabilizarse ¹⁶. Una representación gráfica ilustrando lo anterior se puede observar en la **Fig. IV.11**.

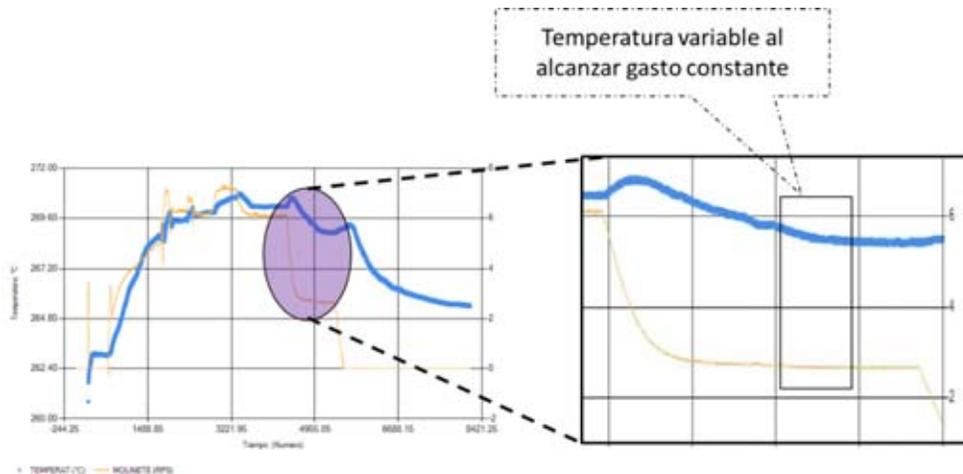


Fig. IV.11: Dificultad para delimitar periodos de flujo a gasto constante a partir de la temperatura de fondo.

No obstante, otra alternativa es apoyarse en el comportamiento de la presión de fondo ya que de acuerdo a los principios físicos que rigen el flujo de fluidos en tuberías o en las correlaciones de flujo multifásico ^{17, 18}, el flujo volumétrico a una cierta posición es constante siempre y cuando la presión se mantenga estable y las propiedades del fluido no cambien. De esta manera, para llevar a cabo la selección de periodos de flujo a gasto constante, fue implementado un método grafico consistente en delimitar mediante cuadros de

selección aquellas porciones de datos donde la presión permanece constante. Por consiguiente es utilizado un gráfico de presión y gasto contra tiempo. A fin de aumentar la precisión del comienzo y fin de un periodo, es posible hacer acercamientos modificando la escala tanto del eje del tiempo como del eje de la presión. En la **Fig. IV.12a** se muestra un ejemplo de la selección grafica de un periodo a gasto constante haciendo un acercamiento para afinar su delimitación y de igual forma se muestra la selección del periodo encerrándolo mediante un cuadro de selección. Por otra parte, en la **Fig. IV.12b** se muestra a todo un conjunto de periodos de flujo detectados a lo largo de la duración de un registro PLT. Cabe mencionar que lo anterior es igualmente realizable para el caso de un aforo con registro simultáneo de presión y temperatura en fondo.

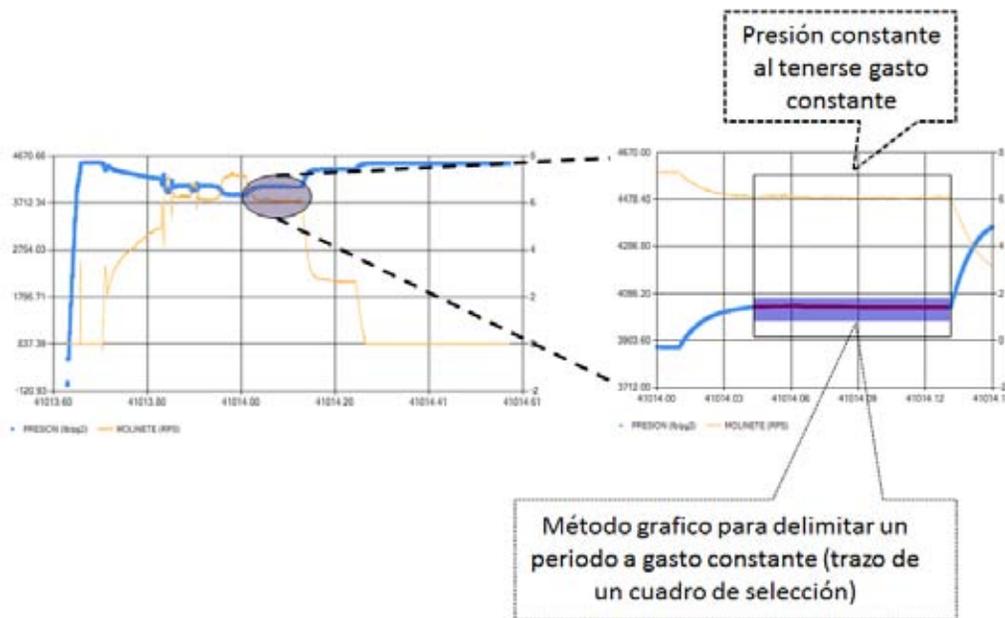


Fig. IV.12a: Delimitación de un periodo a gasto constante basado en el comportamiento de la presión y haciendo un acercamiento.

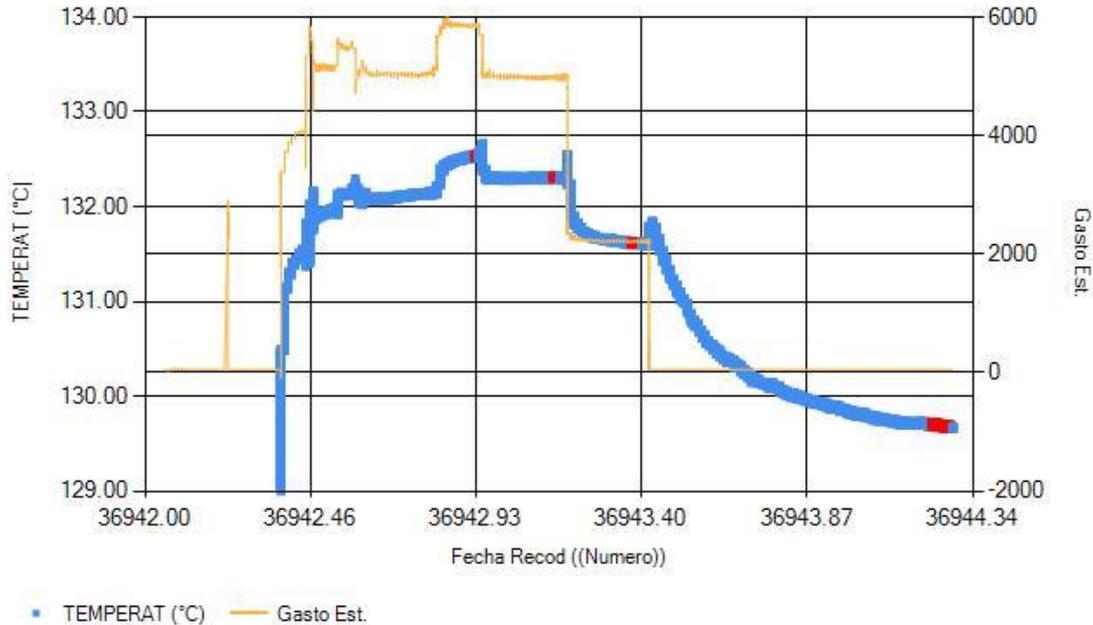
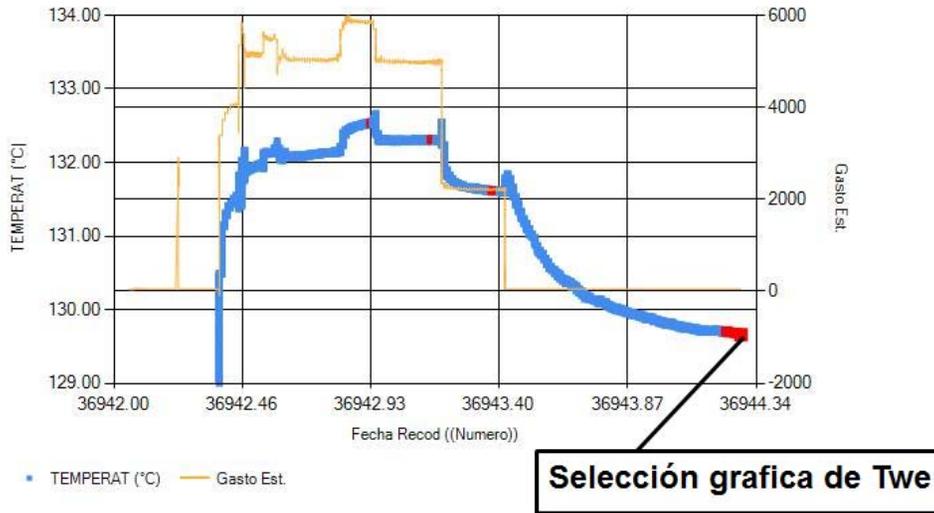


Fig. IV.12b: Conjunto de periodos a gasto constante seleccionados, resaltándolos en color rojo.

Los periodos de flujo a gasto constante seleccionados, son almacenados en tablas no visibles, conservando todos sus datos (tiempo, temperatura, gasto, presión, etc.). ya que serán utilizados para el cálculo de los cambios en la temperatura de fondo, ΔT , mediante la ecuación (IV.5).

De acuerdo a la definición del parámetro, ΔT , se debe disponer tanto de la temperatura de fondo fluvente (T_{wf}), como de la temperatura de fondo estática (T_{ws}). Las temperaturas de fondo fluyentes, son extraídas de los datos extremos de cada periodo de flujo seleccionado (fin de un periodo a gasto constante), mientras que la temperatura de fondo estática, es extraída gráficamente seleccionando el punto donde esta alcanza estabilidad durante un periodo a gasto constante cero (cierre del pozo) y su valor es almacenado en un cuadro de texto localizado dentro del compartimiento. La **Fig. IV.13** ilustra el punto tomado para representar el valor de T_{ws} así como su impresión en el formulario.



**Impresión en el compartimento
"Cálculo de ΔT "**

Fig. IV.13: Selección y almacenamiento del valor de Twe.

Finalmente, al oprimir el botón "Calcular ΔT " se desplegarán los valores de ΔT y gasto, Q , asociados a cada periodo de flujo a gasto constante, tal como se muestra en la **Fig. IV.14**.

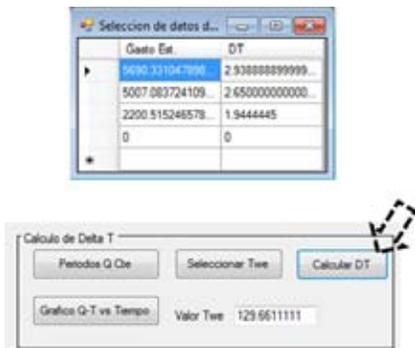


Fig. IV.14: Listado de los valores de Gasto y ΔT , para cada periodo seleccionado

Modelo de Correlación para periodos de flujo a gasto constante

En este compartimiento se ajustará una ecuación a los pares de puntos (ΔT , Q) la cual representará el modelo de correlación para periodos de flujo constante. Como es sabido, una de las técnicas para ajustar una ecuación a un conjunto de datos discretos es el análisis de regresión lineal y no lineal, sin embargo, en algunos casos donde el espaciamiento de ΔT es fuertemente variable esta técnica resulta inconveniente al no proporcionar una curva consistente, por lo que se adiciono la técnica de interpolación por splines en su modalidad cuadrática y cúbica.

La implementación de las técnicas de ajuste mencionadas, primeramente consiste en mostrar un gráfico de los puntos (ΔT , Q) al oprimir el botón “Gráfico ΔT vs Q ” (ver **Fig. IV.15**).

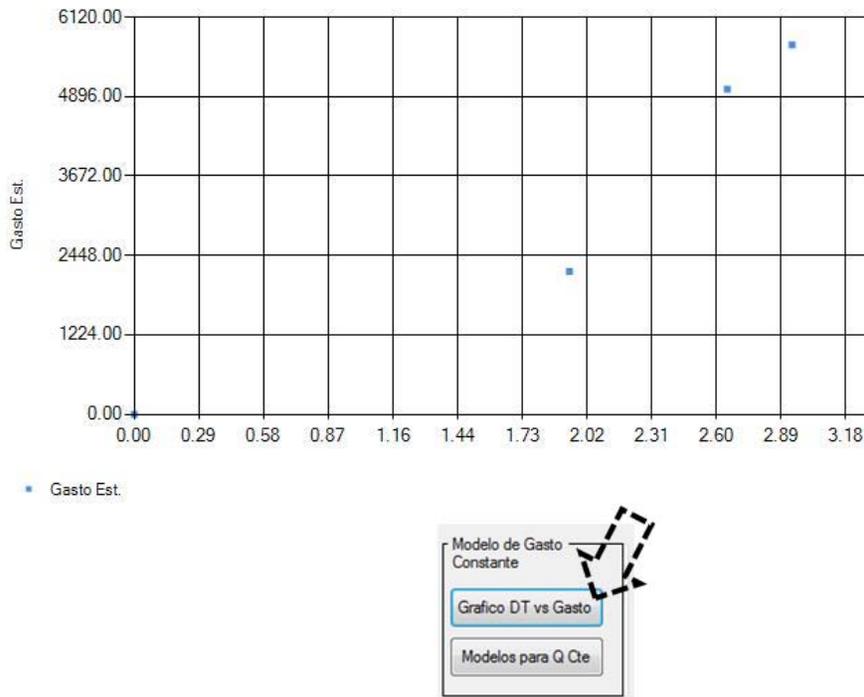


Fig. IV.15: Gráfico Gasto contra ΔT

A continuación, a través del botón “modelos Q cte” se desplegara un menú con las técnicas numéricas de ajuste mencionadas, ver **Fig. IV.16**. Con la selección de una de ellas, al oprimir el botón “aceptar” los coeficientes del ajuste resultante son almacenados en un formulario para su posterior aplicación en la estimación del gasto a partir de los datos de presión y temperatura de un sensor permanente (Sección IV.2.6).

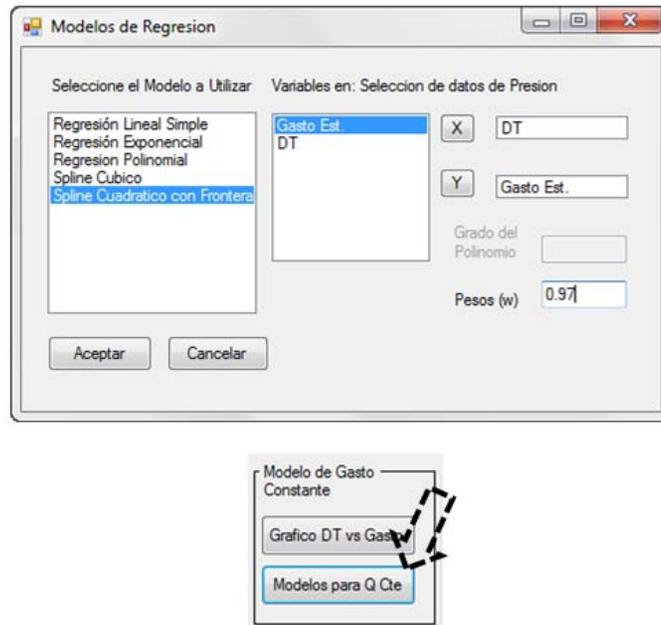


Fig. IV.16: Menú de técnicas de ajuste al oprimir el botón “Modelos para Q cte”

Antes de continuar describiendo el flujo de trabajo, es importante comentar que la técnica de interpolación por splines solo es recomendable dentro del rango de datos de interpolación, por lo que al alejarse de los extremos de interpolación, su aplicación será errática. Por otro lado, en cuanto a la técnica de regresión se observó que al tener datos con un espaciamiento variable en el parámetro ΔT las curvas de ajuste son inconsistentes, ver **Fig. IV.17**.

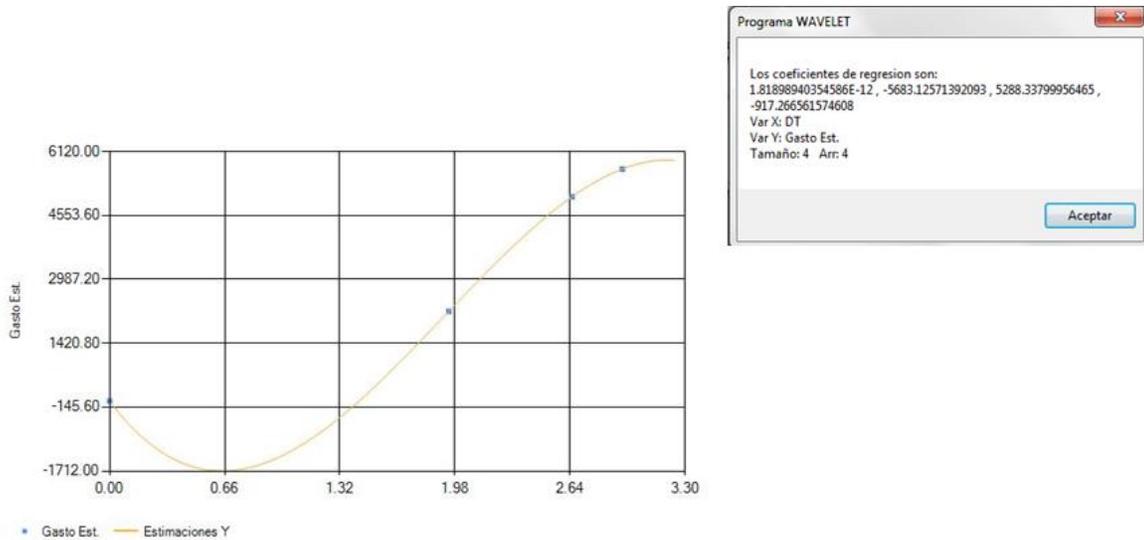


Fig. IV.17: Ecuación de ajuste usando análisis de regresión polinomial de grado 3

En la **Fig. IV.18** se ilustran los resultados obtenidos mediante el método de interpolación por spline cuadráticos.

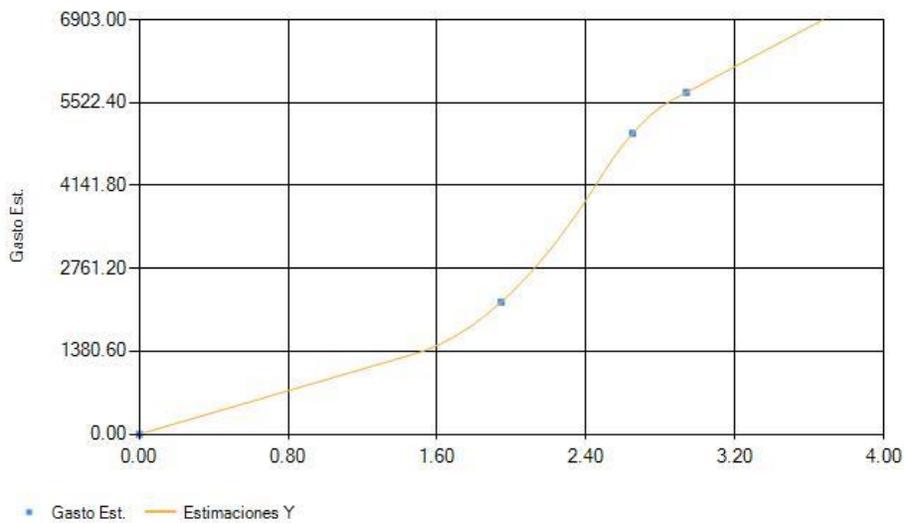


Fig. IV.18: Ajuste mediante la técnica de interpolación por spline cuadráticos.

IV.2.4 Modelo de correlación para periodos de flujo donde el gasto varía con el tiempo

Para el caso de periodos de flujo donde el gasto varía con el tiempo al realizar cambios operativos “normales” en superficie, se definió utilizar una función de tipo exponencial para simular su comportamiento ya que en base a la literatura el temperatura de fondo varía logarítmicamente con el tiempo ¹⁵. El modelo exponencial utilizado es de la forma

$$q(t) = e^{[n(t-t_1)+c_q(t)]} + q_1 - 1, \quad c_q(t) = (t - t_1)(t - t_2)F_f \quad \text{para estrangulamiento}$$

$$q(t) = e^{[n(t-t_2)+c_q(t)]} + q_2 - 1, \quad c_q(t) = (t - t_1)(t - t_2)F_f \quad \text{para apertura}$$

donde t es el tiempo expresado en formato de número, $c_q(t)$ es una variable para ajustar la forma del modelo exponencial a los datos reales, F_f es un factor de forma que puede ser sensibilizado ($F_f \in \mathbb{R}^+$) y n es un parámetro de ajuste que sirve para unir dos periodos a gasto constante contiguos siendo determinado por medio de la solución de un sistema de ecuaciones, llegando a que:

$$n = \begin{cases} \frac{\ln(q_2 - q_1 + 1)}{t_1 - t_2} & \text{para ampliación del estrangulador} \\ \frac{\ln(q_1 - q_2 + 1)}{t_1 - t_2} & \text{para reducción del estrangulador} \end{cases}$$

donde

q_1 : gasto estabilizado antes de ampliar / estrangular un pozo

q_2 : gasto estabilizado después de ampliar / estrangular un pozo

t_1 : tiempo al que finaliza un periodo a gasto constante antes de ampliar / estrangular un pozo

t_2 : tiempo al que comienza un periodo a gasto constante después de ampliar / estrangular un pozo.

En la **Fig. IV.19** se muestra la forma real adoptada por el gasto durante la toma de un registro PLT junto con su simulación empleando los modelos para gasto variable y gasto constante.

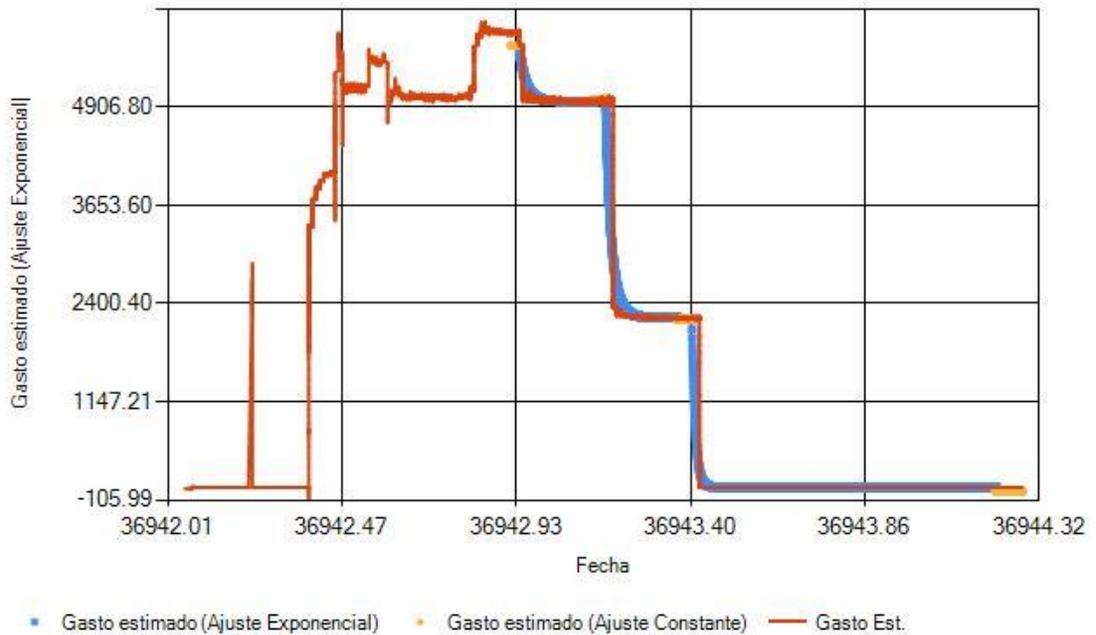


Fig. IV.19: Simulación de la información base con los modelos de correlación

IV.2.5 Estimaciones durante la variación “natural” del gasto

Durante la etapa de explotación de un yacimiento, el comportamiento de la temperatura registrada por un sensor permanente puede mostrar una tendencia de decaimiento o incremento suave ante la variación “natural” de gasto, tal como se ilustra en la **Fig. IV.20**.

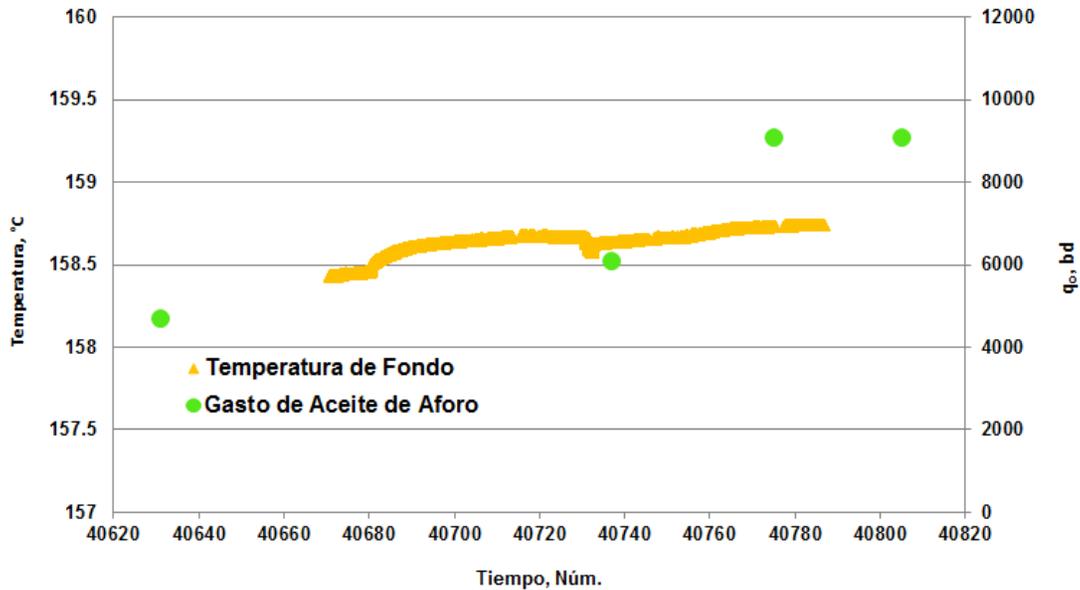


Fig. IV.20: Incremento de la temperatura ante la variación “natural” del gasto

De esta manera, se definió tomar en cuenta la variación “natural” de la producción evaluando en forma periódica la correlación para gastos constantes, donde los periodos de evaluación pueden ser: por hora, diaria, semanal, mensual y anual, tal como se muestra en el menú de la **Fig. IV.21**.

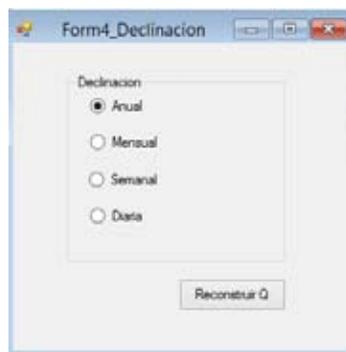
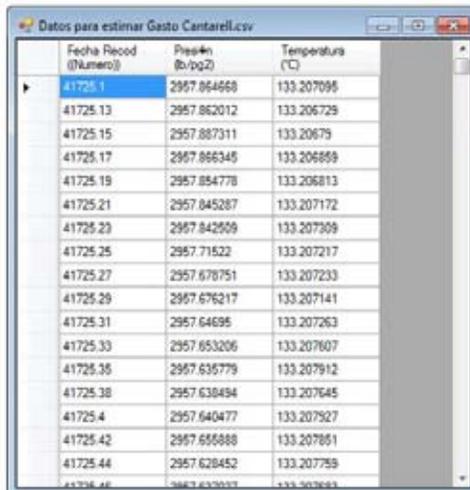


Fig. IV.21: Menú para evaluar periódicamente el modelo de correlación para periodos a gasto constante durante la variación “natural” del gasto

IV.2.6 Aplicación de los modelos de correlación para estimar la producción de un pozo

En esta fase del programa lo que se pretende es estimar el gasto de producción de un pozo al aplicar los modelos de correlación propuestos usando la información de presión y temperatura registrada por un sensor permanente. En relación a esto, es importante tener presente que factores tales como la terminación, propiedades petrofísicas, eventos geológicos, etc., pueden variar de un pozo a otro, por lo que es recomendable que la aplicación se haga en el mismo pozo de donde proviene la información base. En tal caso, el flujo de trabajo implementado consiste en los siguientes pasos:

- 1) Cargar la información de presión y temperatura de un sensor permanente ingresando al menú “Archivo” y después seleccionando la opción “Nuevo” si se desea capturarla de forma manual ó seleccionando la opción “Abrir” para importar un archivo en formato txt o xls. En la **Fig. IV.22** se muestra una sección cortada de datos provenientes de un sensor permanente que han sido importados.



Fecha Recod (Número)	Presión (lb/pg2)	Temperatura (°C)
41725.1	2957.054660	133.207095
41725.13	2957.862012	133.206729
41725.15	2957.887311	133.20679
41725.17	2957.866345	133.206859
41725.19	2957.854778	133.206813
41725.21	2957.845287	133.207172
41725.23	2957.842509	133.207309
41725.25	2957.71522	133.207217
41725.27	2957.678751	133.207233
41725.29	2957.676217	133.207141
41725.31	2957.64695	133.207263
41725.33	2957.653206	133.207607
41725.35	2957.636779	133.207912
41725.38	2957.638494	133.207645
41725.4	2957.640477	133.207927
41725.42	2957.656888	133.207851
41725.44	2957.628452	133.207759
41725.46	2957.632033	133.207683

Fig. IV.22: Sección cortada de los datos de un sensor permanente de P&T cargados al programa

- 2) Referenciar la información cargada al mismo nivel de profundidad de la información base (PLT o aforo con medición simultánea de presión y temperatura en fondo). Esto se lleva a cabo oprimiendo el botón “Reconstruir Q” de la barra de herramientas vertical, con lo cual se mostrará el panel “Homologación de información en profundidad”.

Sí la profundidad del sensor permanente es diferente al de la herramienta utilizada durante el registro de la información base, entonces al activar la opción “Corrección de datos por profundidad” deberán introducirse una serie de datos referentes al giroscópico del pozo y a los valores de los gradientes dinámicos de presión y temperatura, los cuales servirán para referenciar la información del sensor permanente a la misma profundidad de la información base. Los cálculos para lograr lo anterior, primeramente consisten en obtener la proyección vertical tanto de la profundidad del sensor permanente como de la herramienta usada en el registro de la información base apoyándose en los datos del registro giroscópico del pozo y aplicando la técnica de interpolación lineal. Con la diferencia en profundidades verticales, los datos del sensor son expresados a la misma profundidad de la información base afectándolos por los gradientes dinámicos de presión y temperatura. En la **Fig. IV.23** se muestra el panel “Homologación de información en profundidad” con los datos introducidos del registro giroscópico y los valores de los gradientes dinámicos de presión y temperatura.

PLT		Sensor Permanente	
Prof. Hta. PLT (md)	4266.8	Prof. Sensor Permanente (md)	3170.29
Gradiente Dinamico (°C/m)	0.0028	Gradiente Dinamico (lb/bulg2/m)	0.5459
Dd1S1 4260	Dv1S1 3716.05	Dd1S2 3168	Dv1S2 2851.11
Dd2S1 4275	Dv2S1 3724.46	Dd2S2 3196	Dv2S2 2875.26

Fig. IV.23: Activación de la opción “Corrección de datos por Profundidad” para homologar con la información base

Y por su parte, en la **Fig. IV.24** se muestra la información antes de ser homologada en profundidad como después de la homologación.



Fig. IV.24: Información del sensor permanente expresada a la misma profundidad de la información base

Si las profundidades de la información base y del sensor permanente, coinciden, no es necesario activar la opción “Corrección de datos por profundidad” indicando, de esta manera, que existe homologación, tal como se ilustra en la **Fig. IV.25**.

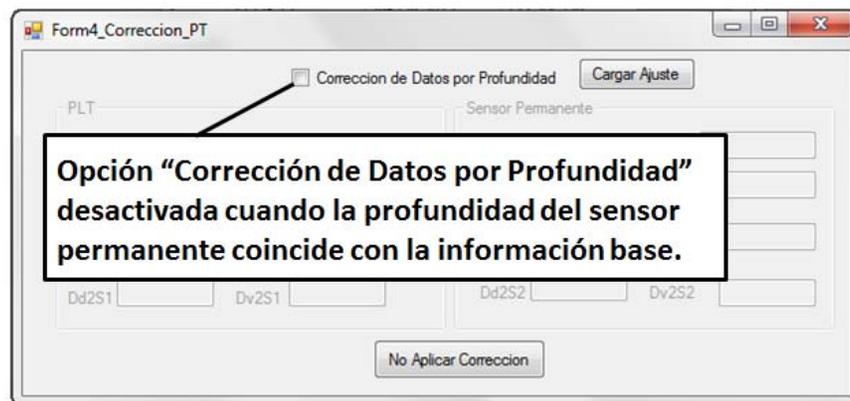


Fig. IV.25: Opción “Corrección de Datos por Profundidad” desactivada para indicar que existe homologación en profundidad

- 3) Catalogar la información del sensor permanente de acuerdo a los periodos de flujo de los modelos de correlación.

A lo largo de un periodo extenso de información registrada por un sensor permanente es posible visualizar periodos donde la presión se mantiene casi constante, lo cual puede ser asociado a un periodo de gasto constante, o también se pueden identificar comportamientos de tipo exponencial en la temperatura, pudiendo estos ser asociados a periodos de gasto variable debidos a un cambio operativo normal efectuado en superficie. Otra característica, es lo ya mencionado en relación a mostrar un decaimiento o incremento suave en la temperatura de fondo, conforme se presenta una declinación o incremento de la producción, respectivamente. Así, los modelos de correlación generados pueden ser enfocados a estimar el gasto de producción seccionando la información de un sensor permanente de acuerdo a los modelos de correlación apoyándose en un gráfico de presión y temperatura contra tiempo.

La implementación, a nivel del programa, de lo descrito arriba, consistió en desplegar el grafico de presión y temperatura contra tiempo junto con el menú “Catalogar información” al oprimir el botón “Aplicar corección” del panel Homologación de Datos en profundidad”.

El menú “Clasificación de Información” considera tres opciones para catalogar la información de un sensor permanente: presencia de periodos de flujo con gasto constante y gasto variable (Modelo Mixto), variaciones del gasto por el decaimiento / incremento de la temperatura (Modelo de Declinación) y presencia de periodos a gasto constante, variable y variaciones del gasto por el decaimiento de la temperatura (Seccionar datos). En la **Fig. IV.26** se muestra el menú “Catalogar Información” con

sus tres opciones, así como el grafico de presión y temperatura contra tiempo.

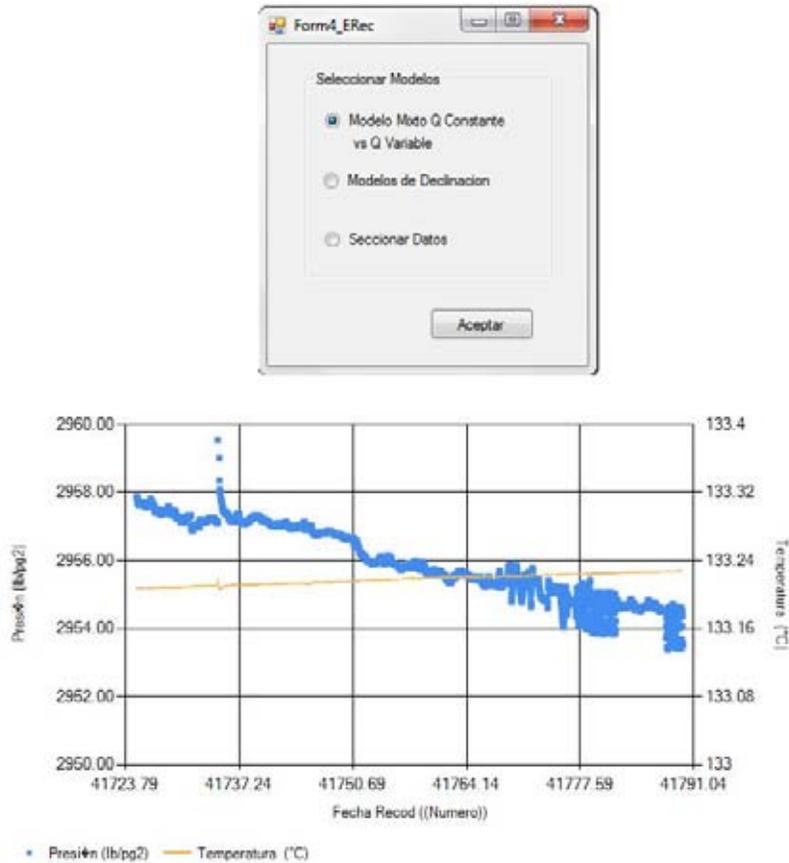


Fig. IV.26 Menú “Catalogar información” junto con el grafico de presión y temperatura contra tiempo.

La opción “**Modelo Mixto Q cte, Q variable**”, como ya se indicó, se destinó para el caso donde se tengan exclusivamente periodos a gasto constante y gasto variable. Tras su selección, en el gráfico de presión y temperatura contra tiempo se trazará una línea vertical móvil para iniciar con la delimitación de los periodos de flujo. En caso de requerir adicionar líneas de delimitación, éstas pueden generarse a partir del menú conceptual desplegable al estar sobre el grafico, tal como se ilustra en la **Fig. IV.27**.

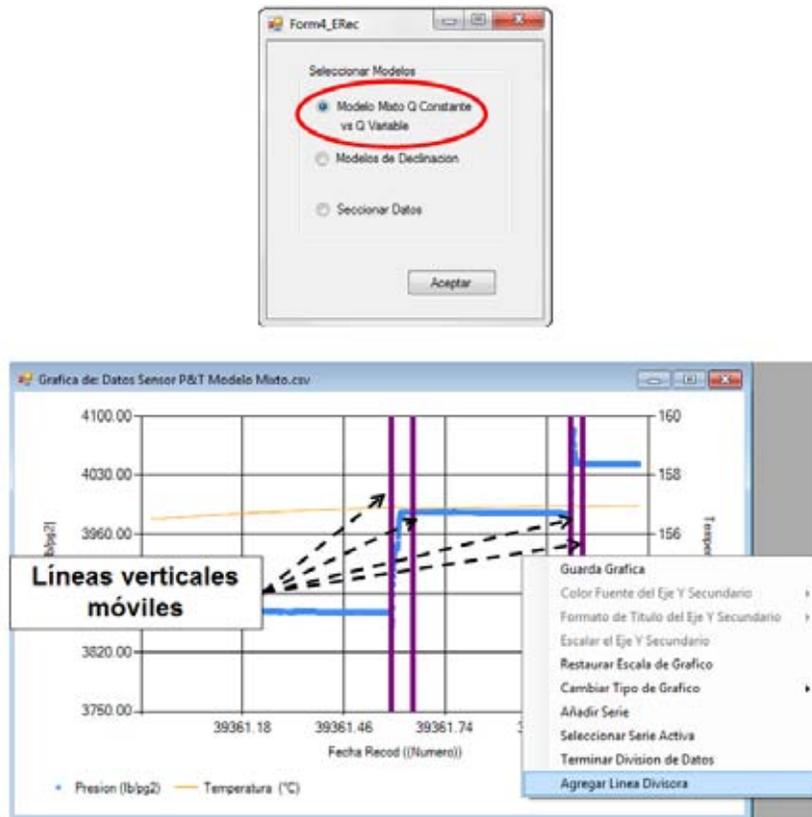


Fig. IV.27: Adición de líneas verticales móviles para delimitar periodos de flujo

Por su parte, la asignación de los modelos de correlación a aplicarse en cada periodo de flujo delimitado, es realizado al seleccionar la opción “Terminar División de Datos” del menú conceptual desplegable para mostrar el menú “Asignación de modelos” que permitirá llevar a cabo la especificación de los modelos acordes a cada sección, tal como se muestra en la **Fig. IV.28**.

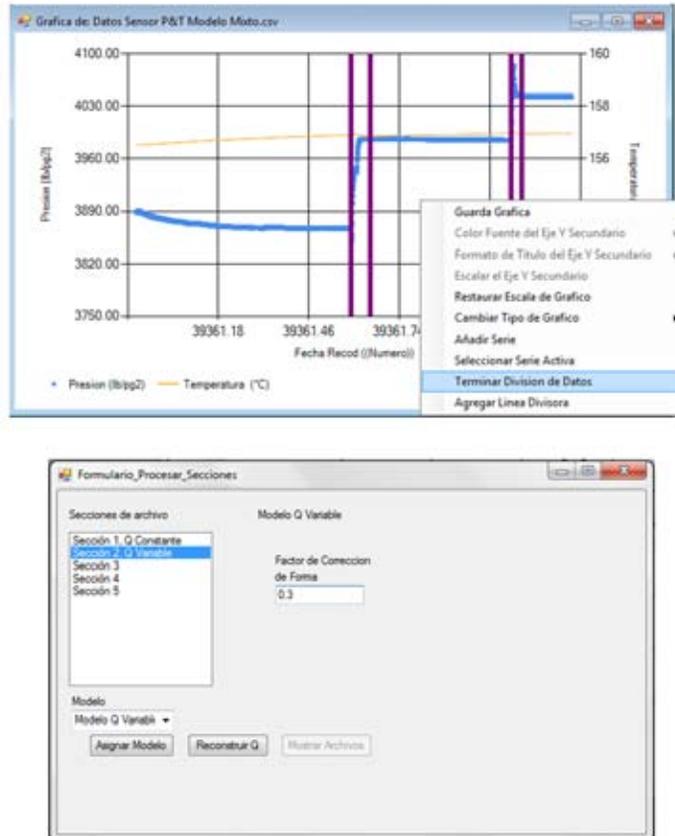


Fig. IV.28: Designación de los modelos de correlación a cada periodo de flujo

La opción “**Modelo de declinación**” se destinó para el caso donde se tiene un decaimiento o incremento suave en la temperatura de fondo, y tras su selección se mostrará el menú “Periodos de estimación” para indicar la periodicidad con la que se desea llevar a cabo el cálculo del gasto, tal como se ilustra en la **Fig. IV.29**.

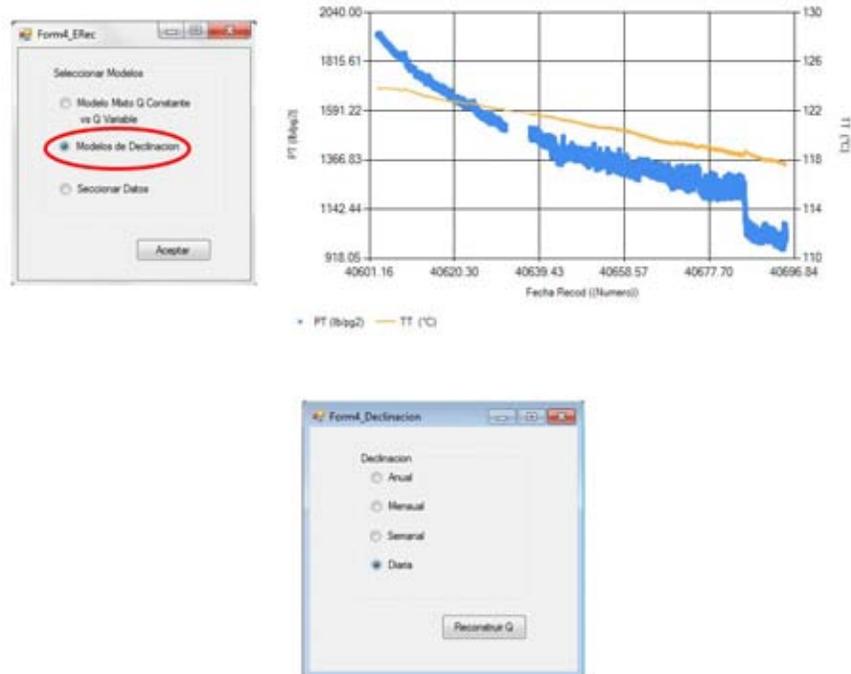


Fig. IV.29: Periodicidad para estimar la variación “natural” del gasto en el caso de decaimiento o incremento de la temperatura de fondo

La opción “**Seccionar Datos**” se refiere a la presencia de periodos a gasto constante, gasto variable y/o decaimiento / incremento en la temperatura de fondo, por consiguiente tras su elección también en el gráfico de presión y temperatura contra tiempo se trazará una línea vertical móvil para delimitar los periodos mencionados. Esto se ilustra en la **Fig. IV.30**. En los casos donde no sea posible identificar periodos de flujo acordes a los modelos de correlación, estos pueden ser eludidos asignándoles la opción “No aplica”, tal como se muestra en la **Fig. IV.31**.

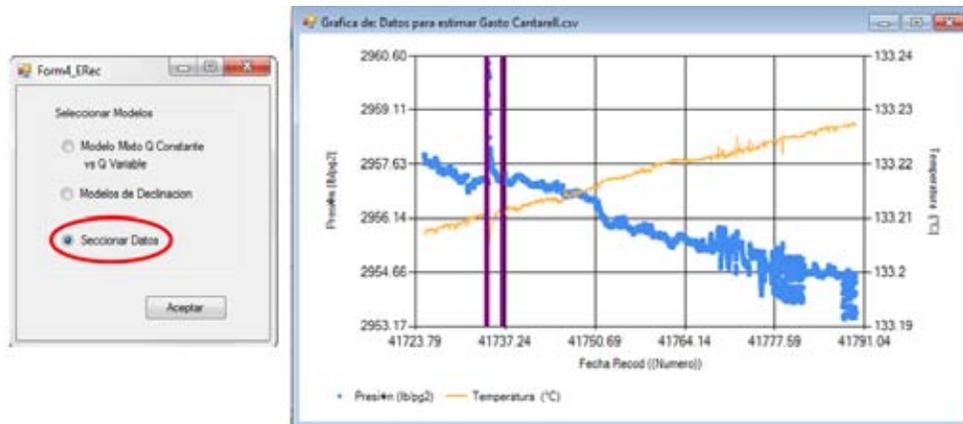


Fig. IV.30: Seccionamiento de datos de acuerdo a los modelos de correlación

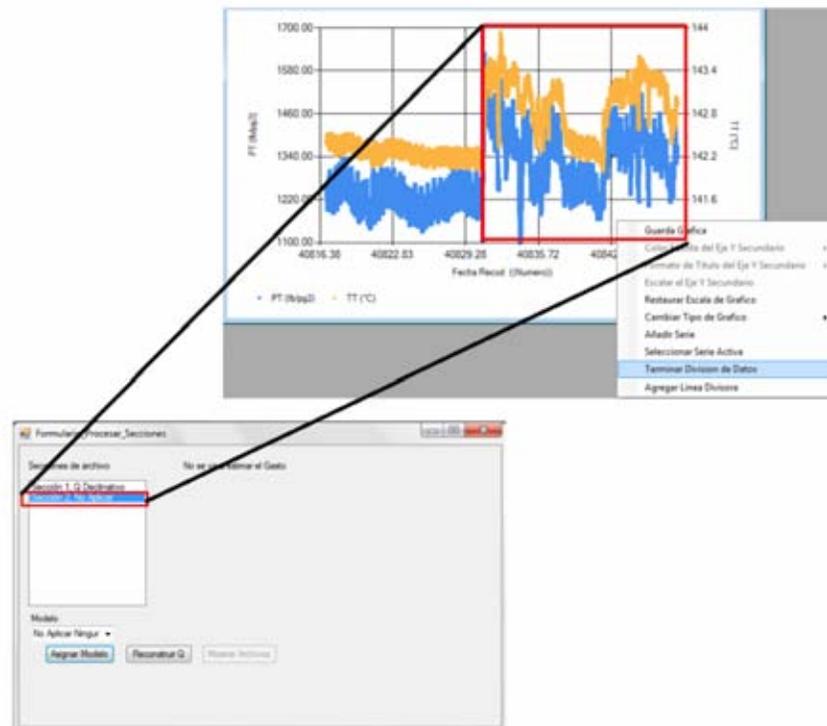


Fig. IV.31: Asignación de los modelos de correlación

- 4) Con la información catalogada de acuerdo a los modelos de correlación, al oprimir el botón “Reconstruir Q” se efectuarán los cálculos del gasto, mostrando un gráfico de los resultados, tal como se ilustra en la **Fig. IV.32**.

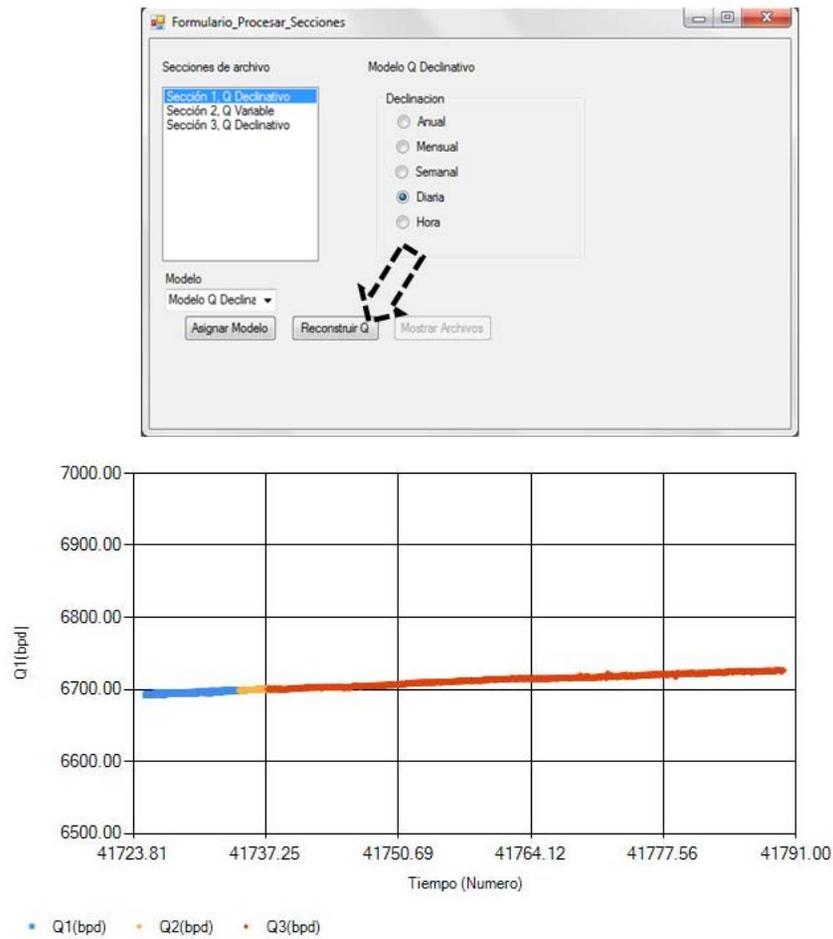


Fig. IV.32: Estimación del gasto con los modelos generados

IV.3 Módulo para procesar datos de presión

Este módulo se estructuró en 5 secciones a fin de establecer el flujo de trabajo propuesto en el procesamiento de los datos de presión registrados por un sensor permanente. Dichas secciones son:

- 1) Validación de datos.
- 2) Eliminación de errores de tipo fuera de tendencia.
- 3) Eliminación de errores de dispersión (ruido).
- 4) Reconstrucción de la señal depurada.

- 5) Reducción de datos de la señal depurada y envió de la información final a archivos xls o txt.

En cuanto a su interfaz también se compone de una barra de botones ordenados en forma vertical para seguir la secuencia descrita por la numeración de las secciones listadas arriba, y por otro lado también contiene una barra de menús para abrir archivos de datos, editar gráficos o realizar otras tareas relacionadas con el proceso de depuración. En la **Fig. IV.33** se muestra la interfaz.

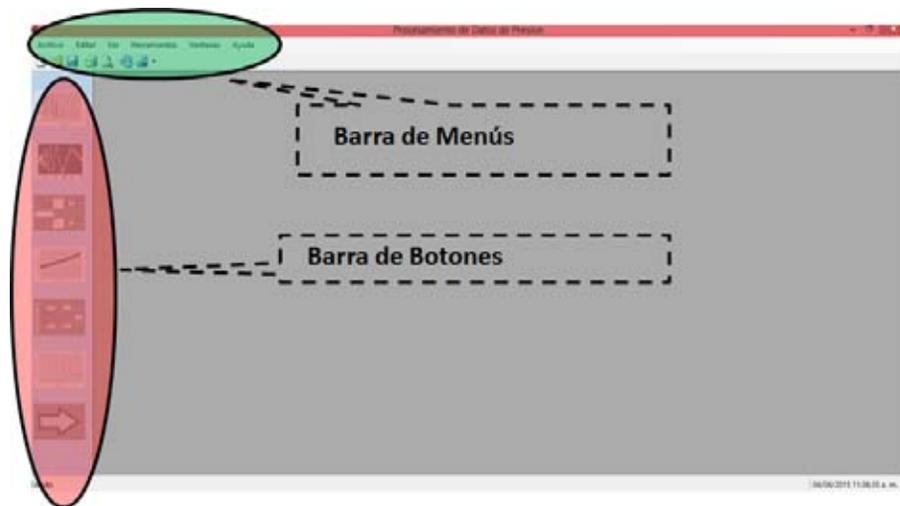


Fig. IV.33: Interfaz del módulo “Procesamiento de datos de presión”

A continuación, se discutirán cada una de las secciones del módulo resaltando el soporte matemático y mostrando imágenes de su implementación.

IV.3.1 Validación de Información

Esta sección principalmente se enfoca a detectar datos anómalos, brindando la opción de corregirlos o removerlos antes de continuar con el proceso de eliminación de ruido estrechamente relacionado con el marco teórico del análisis wavelet, y lo cual corresponde a las secciones 3 (eliminación de información de alta frecuencia) y 4 (reconstrucción de la señal depurada).

Los datos anómalos que pueden ser detectados son:

- ✓ Datos nulos – datos con valor cero de presión.
- ✓ Datos vacíos – datos sin un valor de presión.
- ✓ Datos faltantes – datos de presión no registrados a un cierto tiempo.
- ✓ Datos traslapados – existencia de dos o más datos de presión a un cierto tiempo.
- ✓ Datos repetidos – datos de presión iguales en tiempos continuos.

Los datos anómalos detectados pueden ser listados y remplazados por medio de interpolación lineal, sin embargo es recomendable solo eliminarlos para no alterar la señal original. En la **Fig. IV.34** se muestra una señal cruda (sin procesar) y en la **Fig. IV.35** se muestra una lista con la cantidad de datos anómalos detectados para cada una de las categorías mencionadas.

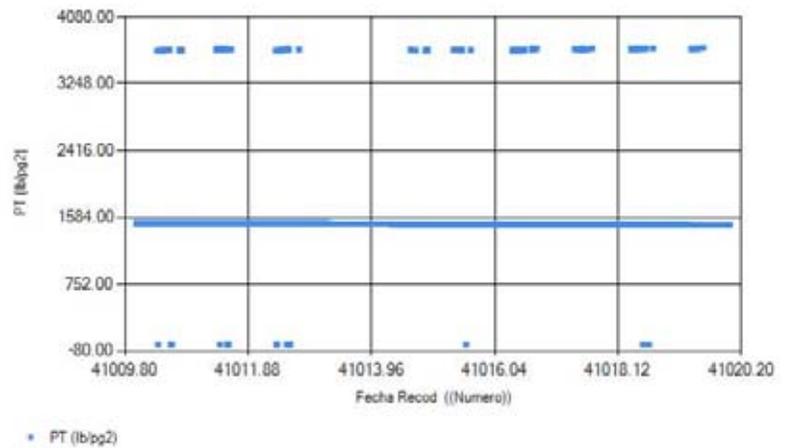
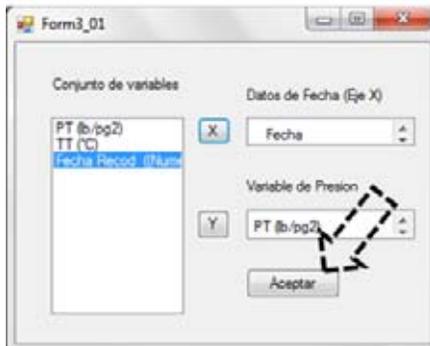


Fig. IV.34: Señal cruda (datos sin procesar)

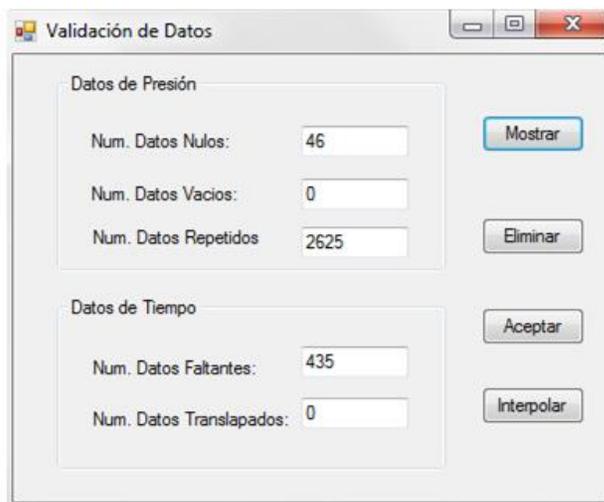


Fig. IV.35: Resumen de la validación de datos

IV.3.1.1 Eliminación de datos fuera de tendencia

Adicionalmente a las anomalías de datos, es posible encontrarse con dos errores de medición, los cuales son catalogados como: ruido y fuera de tendencia. El ruido son datos dispersos alrededor de los datos promedio, y fuera de tendencia son datos que son engañosos en cuanto a la tendencia de los datos ¹¹.

Respecto a los errores de medición por fuera de tendencia, en el programa se implementó una herramienta gráfica para removerlos, y la cual consiste en utilizar cuadros de selección para capturarlos y eliminarlos mediante el botón "borrar datos fuera de tendencia" ubicado en el menú Herramientas, así por consiguiente serán dejados espacios sin dato dentro de la información original. En las siguientes **Figs. IV.36** y **IV.37**, se ilustra un caso donde se tiene la presencia de errores de medición asociados a datos fuera de tendencia y su remoción a partir de cuadros de selección.

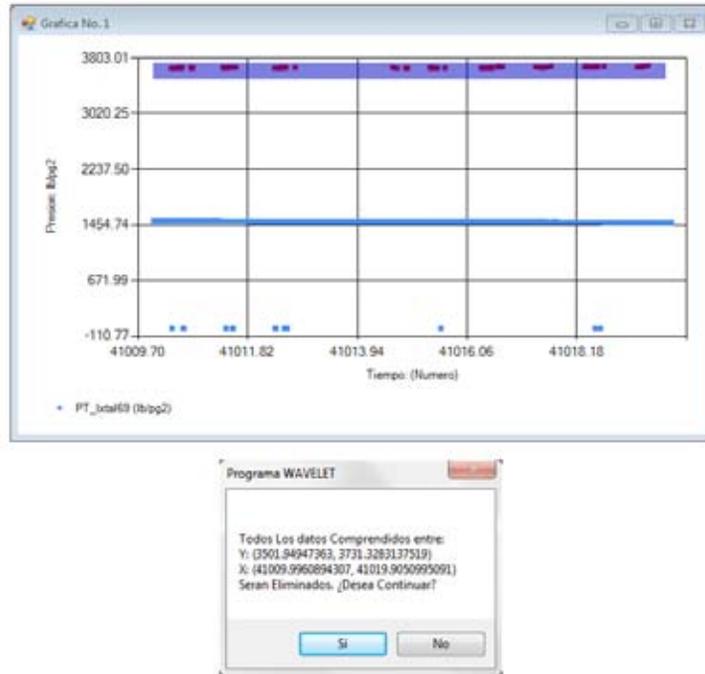


Fig. IV.36: Errores de medición asociados a tendencias engañosas (datos fuera de tendencia)

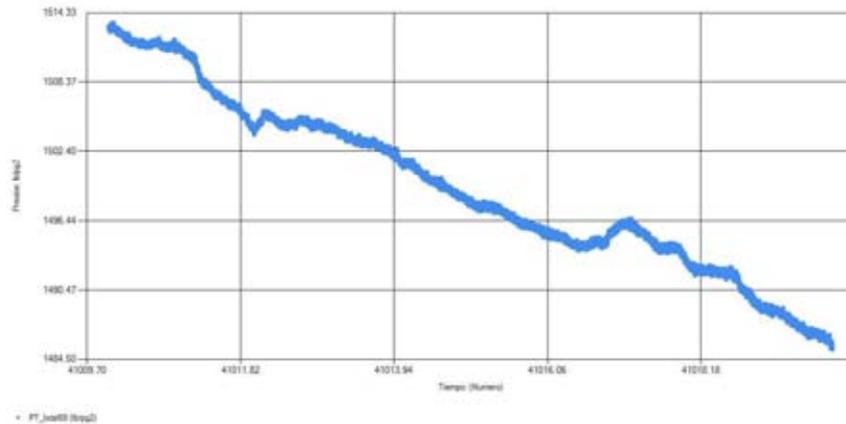


Fig. IV.37: Señal original sin errores por fuera de tendencia

IV.3.2 Eliminación de información de alta frecuencia (ruido)

En cuanto a los errores de medición asociados a ruido, estos son tratados mediante el análisis wavelet (consultar Anexos A y B), ya que se trata de una

técnica para representar una señal o función perteneciente al espacio vectorial de las funciones medibles cuadrático integrables, $L^2(\mathbb{R})$, por medio de su expansión en una *serie wavelet* a diferentes niveles de resolución.

Las series wavelet están compuestas por dos funciones a múltiples niveles de resolución. En una de las funciones es almacenada la información de baja frecuencia por lo que es llamada **función aproximación**, y la cual es construida por medio de una función de escalamiento básica, ϕ ; y en la otra, es almacenada la información de alta frecuencia, conocida como **función de detalle**, y en este caso es construida a través de una función wavelet básica, ψ .

La obtención de las señales aproximación y de detalle a un cierto nivel de resolución, j , se puede lograr por medio de los diferentes tipos de familias wavelet: ortonormales, semiortogonales y biortogonales. Sin embargo para el desarrollo del programa de cómputo se optó por la utilización de 4 familias pertenecientes al tipo ortonormal a fin de delimitar el tema de tesis.

El cálculo de las funciones de detalle y aproximación se realizó mediante un algoritmo conocido como **piramidal** ya que es propio para bases ortogonales.

El código de las principales subrutinas implementadas puede ser consultado en el Anexo C, por lo que en este capítulo solo se mostraran las principales ecuaciones así como imágenes que ilustran su implementación dentro del programa de cómputo.

IV.3.2.1 Familias ortogonales: Haar, Daubechies, Coiflet y Symlet

Las cuatro familias wavelet pertenecientes al tipo ortogonal utilizadas para el tratamiento de los errores de medición asociados al ruido son: Haar, Daubechies, Coiflet y Symlet. Tal como se describe en el Anexo B, sus secuencias

$g_1[k]$, $h_0[k]$ y $h_1[k]$ pueden ser obtenidas a partir de la secuencia $g_0[k]$. A continuación se describirán sus características principales.

Wavelet de Haar

La función wavelet de Haar es el ejemplo más antiguo de una función ψ que define a una familia wavelet $\psi_{j,k}(t)$ y constituye una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$ la cual no tiene una perfecta localización tiempo – frecuencia.

Sus expresiones para las funciones de escalamiento y wavelet son obtenidas a partir de las relaciones multiescala establecidas por un análisis multiresolución.

Para una función de escalamiento y wavelet Haar

$$\begin{aligned}g_0[0] &= g_0[1] = 1 \\g_1[0] &= 1, g_1[1] = -1 \\h_0[0] &= h_0[1] = \frac{1}{2} \\h_1[0] &= \frac{1}{2}, h_1[1] = -\frac{1}{2} \\g_0[k] &= g_1[k] = h_0[k] = h_1[k] = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0,1\}.\end{aligned}$$

Wavelets Daubechies

Son una amplia familia de funciones ortogonales que se adaptan bien a señales que poseen cierta suavidad siendo esa una de sus principales ventajas. Las funciones de escalamiento y wavelets pueden llegar a tener soportes grandes.

Debido a la ortogonalidad de las secuencias de dos escalas y de descomposición, la secuencia de descomposición (filtro pasa altas) es obtenida a partir de la secuencia de dos escalas (filtro pasa bajas), mediante la relación:

$$h(k) = (-1)^k g(m - 1 - k)$$

donde m es el número de coeficientes de la secuencia de descomposición ($g[k]$)

En la **Fig. IV.38** se pueden apreciar las formas de las funciones de escalamiento y wavelet para las familias Daubechies de orden, m , 4 y 8.

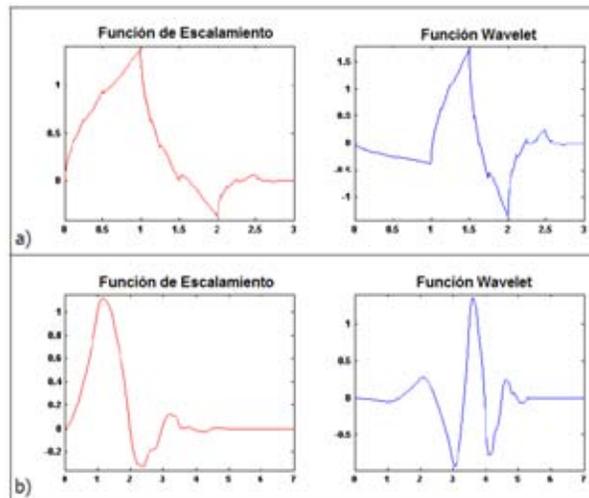


Fig. IV.38: Funciones de escalamiento y wavelet Daubechies 4 (a) y 8 (b)

Wavelets Coiflet

Las wavelet Coiflet son casi simétricas y aproximadas a las wavelet Daubechies. En este caso la familias wavelet ψ tienen p momentos nulos y un tamaño de soporte mínimo, y sus funciones de escalamiento ϕ cumplen:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) dt = 1 \quad y \quad \int_{-\infty}^{\infty} t^k \phi(t) dt = 0 \quad para \quad 1 \leq k < p$$

En la **Fig. IV.39** se pueden apreciar las formas de las funciones de escalamiento y wavelet con secuencias de tamaño 6, 12, 18 y 24 coeficientes.

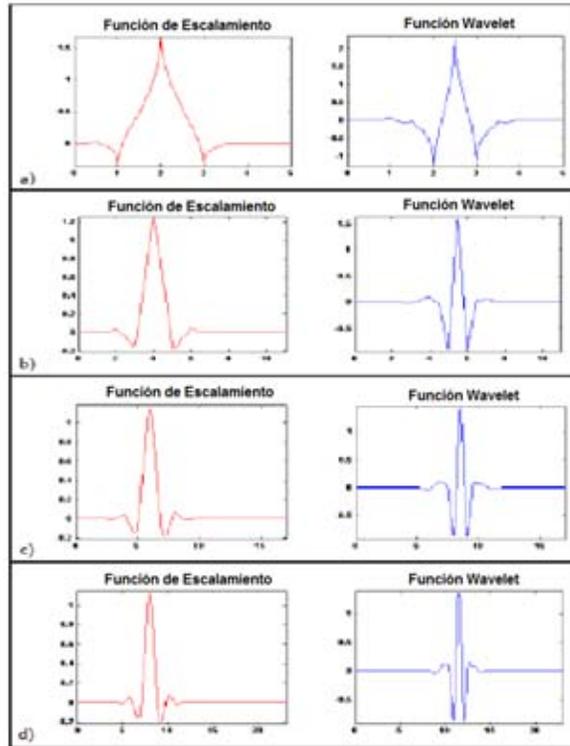


Fig. IV.39: Funciones de escalamiento y wavelet Coiflet 6 (a), Coiflet 12 (b), Coiflet 18 (c) y Coiflet 24 (d)

Wavelets Symlet

La familia de funciones Symlet también son casi simétricas y tienen el mayor número de momentos nulos en un soporte relativamente compacto.

Las secuencias de descomposición $h_0[k]$ y $h_1[k]$ así como la reconstrucción $g_1[k]$ son derivadas a partir de la secuencia $g_0[k]$ mediante las relaciones multiescala, de tal manera que:

$$h_0[k] = (-1)^k g_0(m - 1 - k)$$

$$g_1[k] = g_0(m - 1 - k)$$

$$h_1[k] = h_0(m - 1 - k), \quad k = 0, 1, \dots, m - 1$$

En la **Fig. IV.40** se pueden apreciar las funciones Symlet de orden 8 y 16.

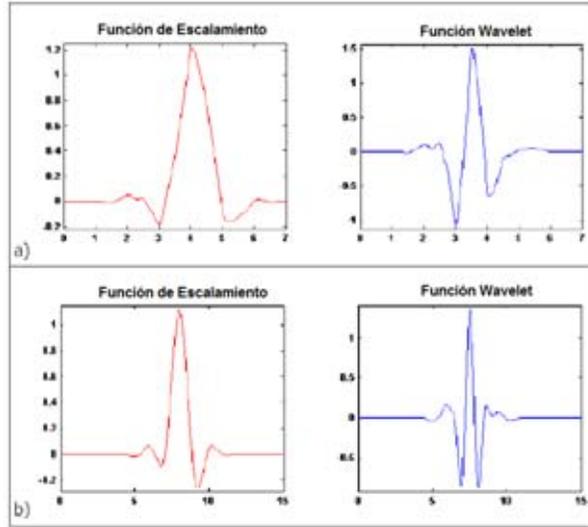


Fig. IV.40: Funciones de escalamiento y wavelet Symlet 8 (a) y Symlet 16 (b)

IV.3.2.2 Algoritmo piramidal para descomponer y reconstruir una señal

De acuerdo al marco teórico de un análisis multiresolución (**MRA**), una expresión general para representar una función $f(t)$ por medio de una serie en la que intervienen las funciones de escalamiento y wavelet, puede escribirse como

$$f(t) = \sum_k c_{0,k} \phi_{0,k}(t) + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_k d_{j,k} \psi_{j,k}(t) \dots \dots \dots (IV.6)$$

donde la primer sumatoria del lado izquierdo representa a la función aproximación perteneciente al subespacio A_0 , al nivel de resolución 0, y la doble sumatoria del lado derecho representa a la función de detalle perteneciente al subespacio

wavelet, W_j , a un cierto nivel de resolución, j . El índice k es un número entero finito o infinito.

Los coeficientes de la función aproximación, $c_{j,k}$, están dados por el producto interno

$$\langle f(t), \phi_{j,k}(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \phi_{j,k}(t) dt \dots \dots \dots (IV.7)$$

conocido como *transformada complementaria*, $C_{\phi}f$.

Y por su parte, los coeficientes de la función de detalle, $d_{j,k}$, están dados por el producto interno

$$\langle f(t), \psi_{j,k}(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi_{j,k}(t) dt \dots \dots \dots (IV.8)$$

correspondiendo a la definición de transformada wavelet, (ver Anexo B).

El proceso para obtener los coeficientes de aproximación, $c_{j,k}$, y de detalle, $d_{j,k}$, a diferentes niveles de resolución puede ser llevado a cabo mediante las relaciones multiescala existentes entre las funciones de escalamiento, ϕ , y wavelet, ψ . Puesto que durante el proceso de obtención de los coeficientes de aproximación y de detalle a niveles de resolución crecientes (más finos), la cantidad de datos es reducida a la mitad, el algoritmo utilizado para su obtención, en esta caso que se usarán familias wavelet ortogonales, es conocido como **algoritmo piramidal**. En la **Fig. IV.41** se muestra una representación de dicho algoritmo.

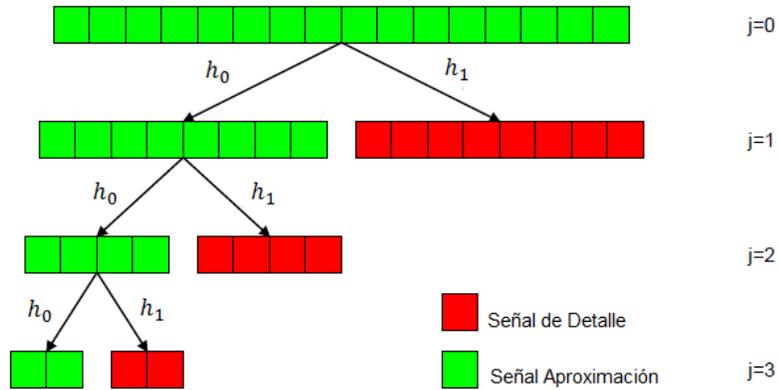


Fig. IV.41: Descomposición wavelet usando el algoritmo piramidal (Fuente: [11] Athichanagorn, S.: “Development of an Interpretation Methodology for Long-Term Pressure Data from Permanent Downhole Gauges”, PhD dissertation, Stanford University, June 1999).

IV.3.2.2.1 Descomposición de la señal de entrada

El cálculo de las funciones de aproximación y wavelet a diferentes niveles de resolución es conocido como **proceso de descomposición** y la escala j algunas veces también es llamada **nivel de descomposición**.

Al nivel de resolución cero, $j = 0$, los datos de una función, $f(t)$, pueden ser representados como

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{0,k} \phi_{0,k}(t) \in A_0. \dots \dots \dots (IV.9)$$

donde $c_{0,k}$ es la sucesión discreta de los datos originales; y puesto que la secuencia de funciones $\{\phi_{0,k}\}, k \in \mathbb{Z}$ forman una base ortogonal, los coeficientes de aproximación están dados por

$$c_{0,k} = \langle f(t), \phi(t - k) \rangle \dots \dots \dots (IV.10)$$

A niveles más altos de descomposición, los coeficientes de aproximación y de detalle son determinados mediante las relaciones multiescala establecidas por una secuencia de subespacios que forman un análisis multiresolución. De esta manera el cálculo de los coeficientes de aproximación, puede ser realizado mediante

$$c_{j,k} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} h_0[2k - l]c_{j+1,l} \dots \dots \dots (IV. 11)$$

donde $h_0[2k - l]$ son las secuencias de descomposición.

Por su parte, los coeficientes de las funciones de detalle se pueden calcular usando la relación entre las funciones de escalamiento y wavelet a través de las escalas, llegando a que los coeficientes wavelet, $d_{j,k}$, pueden ser expresados como

$$d_{j,k} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} h_1[2k - l]c_{j+1,l} \dots \dots \dots (IV. 12)$$

Por consiguiente, la función de detalle a un nivel de descomposición j puede ser calculada tomando cada una de las muestras de la convolucion discreta entre c_{j+1} y h_1 . El tamaño de la función de detalle al nivel de descomposición j es reducido a la mitad, esto es, es diezmado por un factor de 2. Así, comenzando de la señal discreta $c_{0,k}$, las señales de detalle a subsecuentes niveles de descomposición pueden ser determinados.

Sin embargo, cuando se trata con señales muestreadas finitamente, no se puede tener una representación como la dada por la ecuación (IV.6) donde la sumatoria de tiempo con el índice k encima y la sumatoria de escala con el índice

j son infinitas. No obstante, ambas pueden ser finitas con muy poco e inclusive sin error. Por consiguiente en el caso de señales muestreadas finitamente, se tendrá una señal aproximación y no una representación de la señal como la dada por la ecuación (IV.6). El límite inferior de j en la ecuación (IV.6) se hace finito simplemente seleccionando algún nivel de resolución deseado, usualmente seleccionado como cero. El límite superior será delimitado por la frecuencia de muestreo. En general, esto dará una buena aproximación si las muestras de la señal son suficientemente densas.

$$f(t) \approx \sum_k c_{0,k} \phi_{0,k}(t) + \sum_{j=0}^{J-1} \sum_k d_{j,k} \psi_{j,k}(t) \quad k \in 0,1, \dots, 2^j - 1 \dots \dots (IV.13)$$

El nivel de resolución más grueso, J , estará limitado por el número de muestras disponibles de la señal y está dado por ¹⁹

$$J = \log_2(N/m) + 1, \quad \dots \dots \dots (IV.14)$$

donde N es el número de muestras de la señal y m es el número de coeficientes de las secuencias de reconstrucción, h . Esto permitirá calcular los coeficientes de detalle y de aproximación a partir de las ecuaciones (IV.11) y (IV.12) con $k \in 0,1, \dots, 2^j - 1$, donde $j \in 0,1, \dots, J - 1$. La resolución más fina, $j = 0$, como ya se comento es aproximada por las muestras de la señal. Esto es, las ecuaciones (IV.11) y (IV.12) pueden reescribirse con índices finitos como:

$$c_{j,k} = \sum_{l=0}^{2^j-1} h_0[2k - l]c_{j+1,l} \dots \dots \dots (IV.15)$$

$$d_{j,k} = \sum_{l=0}^{2^j-1} h_1[2k - l]d_{j+1,l} \dots \dots \dots (IV.16)$$

El rango de $2k - l$ en las ecuaciones de arriba dependerá de la función wavelet considerada. En el caso de la wavelet Haar $2k - l \in 0,1$, mientras que en el caso de la wavelet Daubechies con cuatro coeficientes de escalamiento y wavelet $2k - l \in 0,1,2,3$.

El proceso de descomposición mediante la transformada wavelet discreta puede ilustrarse mejor con un ejemplo.

Ejemplo 1. Descomposición de una señal usando la wavelet Daubechies con 2 coeficientes en sus secuencias de reconstrucción.

Si una wavelet con dos coeficientes wavelet y dos coeficientes de escalamiento es considerada con una señal muestreada 8 veces, solo se podría obtener la señal aproximación hasta el nivel $J = 3$, dado por la ecuación (IV.14). La señal al menor nivel de resolución será aproximada por las muestras de la señal. En el primer nivel de descomposición, tenemos 4 coeficientes de aproximación y 4 coeficientes de detalle. En el siguiente nivel de descomposición, tendremos 2 coeficientes de aproximación y 2 coeficientes de detalle (+4 coeficientes de detalle a partir del nivel de resolución previo). En el tercer nivel de descomposición tendremos 1 coeficiente de aproximación y 1 coeficiente de detalle (+6 coeficientes de detalle a partir de los 2 niveles de resolución previos). Esto es ilustrado en la **Fig. IV.42**. Es obvio que en el nivel $j = 3$ en la transformada wavelet con únicamente un coeficiente de aproximación remanente, no se puede continuar agregando niveles de resolución adicionales y más gruesos. La señal en el nivel de resolución más grueso será representada por un solo coeficiente de aproximación y todos los detalles serán almacenados dentro de los 7 coeficientes de detalle (4 en el nivel $j = 1$, 2 en el nivel $j = 2$ y 1 en el nivel $j = 3$).

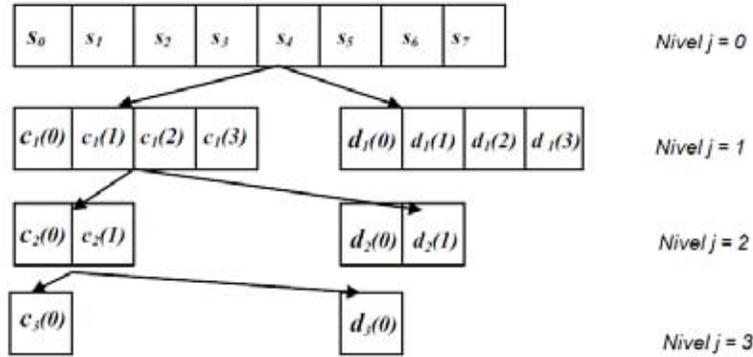


Fig. IV.42: Coeficientes de aproximación y detalle obtenidos a diferentes niveles de descomposición (Fuente: [19] Olsen, S. 2011. *On Automatic Data Processing and Well-Test Analysis in Real-time Reservoir Management Applications*. PhD dissertation, University of Bergen, Bergen, Norwegian)

Otra forma de visualizar el cálculo de los coeficientes de detalle y de aproximación a partir de la ecuaciones (IV.15) y (IV.16) es representando los cálculos en forma matricial. La transformada wavelet en el primer nivel de descomposición se lleva a cabo por convolución entre los coeficientes wavelet / escalamiento y las mediciones discretas de la señal. La convolución de 8 mediciones de la señal con dos coeficientes wavelet y dos coeficientes de escalamiento, puede ser calculada por medio de operaciones matriciales como se ilustra en la **Fig. IV.43**. La matriz desarrollada de esta forma para calcular los coeficientes de aproximación y detalle a diferentes niveles de resolución es denominada **matriz de descomposición wavelet**. $h(0)$ y $h(1)$ denotan los dos coeficientes de escalamiento mientras que $h_1(0)$ y $h_1(1)$ denotan los dos coeficientes wavelet. Recordando que en el caso de únicamente dos coeficientes de escalamiento y dos coeficientes wavelet; esto es necesario para los coeficientes de escalamiento y wavelet de la función Haar.

En el siguiente nivel de resolución más grueso en la transformada wavelet, los coeficientes de aproximación obtenidos a partir de los cálculos de arriba, se utilizan el lugar de las mediciones de la señal en los cálculos matriciales.

$$\begin{pmatrix} c(0) \\ d(0) \\ c(1) \\ d(1) \\ c(2) \\ d(2) \\ c(3) \\ d(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_0(0) & h_0(1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_1(0) & h_1(1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_0(0) & h_0(1) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_1(0) & h_1(1) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h_0(0) & h_0(1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h_1(0) & h_1(1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_0(0) & h_0(1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_1(0) & h_1(1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(0) \\ f(1) \\ f(2) \\ f(3) \\ f(4) \\ f(5) \\ f(6) \\ f(7) \end{pmatrix}$$

Fig. IV.43: Matriz de descomposición wavelet

Cuando se calcula la señal aproximación $f(t)$ con un número finito de muestras de la señal sobre un intervalo finito, poca información de lo que ha sucedido antes de la primera muestra y después de la última muestra estará disponible. Sin embargo, el cómputo de la señal aproximación a partir de la ecuación (IV.15) puede requerir conocer lo que sucedió antes de la primera muestra de la señal y más allá de la última muestra.

La problemática anterior puede ilustrarse fácilmente por medio de cálculos matriciales en el primer nivel de descomposición. En esta ocasión se selecciona utilizar la wavelet Daubechies con cuatro coeficientes wavelet y cuatro coeficientes de escalamiento.

Ejemplo 2. Descomposición de una señal usando la wavelet Daubechies con 4 coeficientes

Nuevamente se considera una señal muestreada 8 veces y donde el nivel de resolución más fino es aproximado por las mediciones de la señal. El cálculo matricial requerido para calcular los coeficientes de aproximación en el primer nivel de descomposición es ilustrado en la **Fig. IV.44**. $h(0) - h(3)$ denotan los cuatro coeficientes de escalamiento y $h_1(0) - h_1(3)$ denotan los cuatro coeficientes wavelet. El índice l en la ecuación (IV.15) por consiguiente, es seleccionado para ser un número entero entre 0 a 3. Nótese que l puede igualmente ser seleccionado desde -1 a 2. Esto es simplemente una selección que se necesita hacer. Para calcular los coeficientes de aproximación con el índice

3 en el primer nivel de descomposición, el siguiente cálculo matricial es requerido; $c(3)_1 = h(0)s_6 + h(1)s_7 + h(2)s_8 + h(3)s_9$. Sin embargo, las mediciones de la señal s_8 o s_9 no están disponibles. El mismo problema ocurrirá en cada nivel de descomposición subsecuente en la transformada wavelet. Por tanto se requiere hacer una suposición en cuanto a los valores a utilizar en el cálculo matricial más allá de las últimas mediciones disponibles de la señal.

$$\begin{pmatrix} c(0) \\ d(0) \\ c(1) \\ d(1) \\ c(2) \\ d(2) \\ c(3) \\ d(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_0(0) & h_0(1) & h_0(2) & h_0(3) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_1(0) & h_1(1) & h_1(2) & h_1(3) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_0(0) & h_0(1) & h_0(2) & h_0(3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_1(0) & h_1(1) & h_1(2) & h_1(3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h_0(0) & h_0(1) & h_0(2) & h_0(3) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h_1(0) & h_1(1) & h_1(2) & h_1(3) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_0(0) & h_0(1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_1(0) & h_1(1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(0) \\ f(1) \\ f(2) \\ f(3) \\ f(4) \\ f(5) \\ f(6) \\ f(7) \end{pmatrix}$$

Fig. IV.44: Ilustración matricial de los cálculos wavelet con problemas de frontera (área encerrada en rojo)

El método más popular y común usado para tratar con problemas de frontera para señales muestreadas de forma finita, es asumir señales periódicas. Sin embargo, frecuentemente esta es una suposición pobre puesto que se prefieren hacer análisis si se trata con señales no estacionarias. No obstante, debido a la facilidad de la implementación numérica este enfoque es frecuentemente preferido. Considerando el caso donde la señal es muestreada N veces sobre el intervalo $[0,1]$. Por tanto, asumiendo una señal periódica en la frontera de $t = 0$ y $t = 1$ se tiene que;

$$f^{per}(t) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} f(t + p) \quad p \in \mathbb{Z}. \quad \dots \dots \dots (IV. 17)$$

Normalmente esto resultará en coeficientes de gran detalle en las fronteras en la transformada wavelet. Un mejor enfoque es asumir que la señal puede ser desdoblada (o reflejada) alrededor de las fronteras en $t = 0$ y $t = 1$. Nuevamente

si la señal es muestreada N veces sobre el intervalo $[0,1]$, el desdoblamiento de la señal alrededor de las fronteras en $t = 0$ y $t = 1$ implica que;

$$f^{fold}(t) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} f(t - 2p) + \sum_{p=-\infty}^{\infty} f(2p - t) \quad p \in \mathbb{Z}. \quad \dots \dots \dots (IV.18)$$

Este método es mucho mejor que asumir que la señal es periódica, pero desdoblar la señal alrededor de las fronteras en $t = 0$ y $t = 1$ causara discontinuidades en las derivadas. Esto nuevamente creara coeficientes de gran detalle en las fronteras en la transformada wavelet.

El cálculo matricial requerido cuando se utilizan condiciones de frontera es mostrado en la **Fig. IV.45**. Los coeficientes $c(3)_1$ y $d(3)_1$ son calculados con el uso de las mediciones de la señal s_1 y s_2 en lugar de s_8 y s_9 .

$$\begin{pmatrix} c(0) \\ d(0) \\ c(1) \\ d(1) \\ c(2) \\ d(2) \\ c(3) \\ d(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_0(0) & h_0(1) & h_0(2) & h_0(3) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_1(0) & h_1(1) & h_1(2) & h_1(3) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_0(0) & h_0(1) & h_0(2) & h_0(3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_1(0) & h_1(1) & h_1(2) & h_1(3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h_0(0) & h_0(1) & h_0(2) & h_0(3) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h_1(0) & h_1(1) & h_1(2) & h_1(3) \\ h_0(2) & h_0(3) & 0 & 0 & 0 & 0 & h_0(0) & h_0(1) \\ h_1(2) & h_1(3) & 0 & 0 & 0 & 0 & h_1(0) & h_1(1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(0) \\ f(1) \\ f(2) \\ f(3) \\ f(4) \\ f(5) \\ f(6) \\ f(7) \end{pmatrix}$$

Fig. IV.45: Matriz de descomposición wavelet con frontera periódica ajustada

En la **Fig. IV.46** se muestra el menú implementado para seleccionar la familia wavelet a utilizarse en el proceso de descomposición así como una sección cortada del cálculo de los coeficientes de aproximación y de detalle a diferentes niveles de resolución, j , haciendo el ajuste por condiciones de frontera.

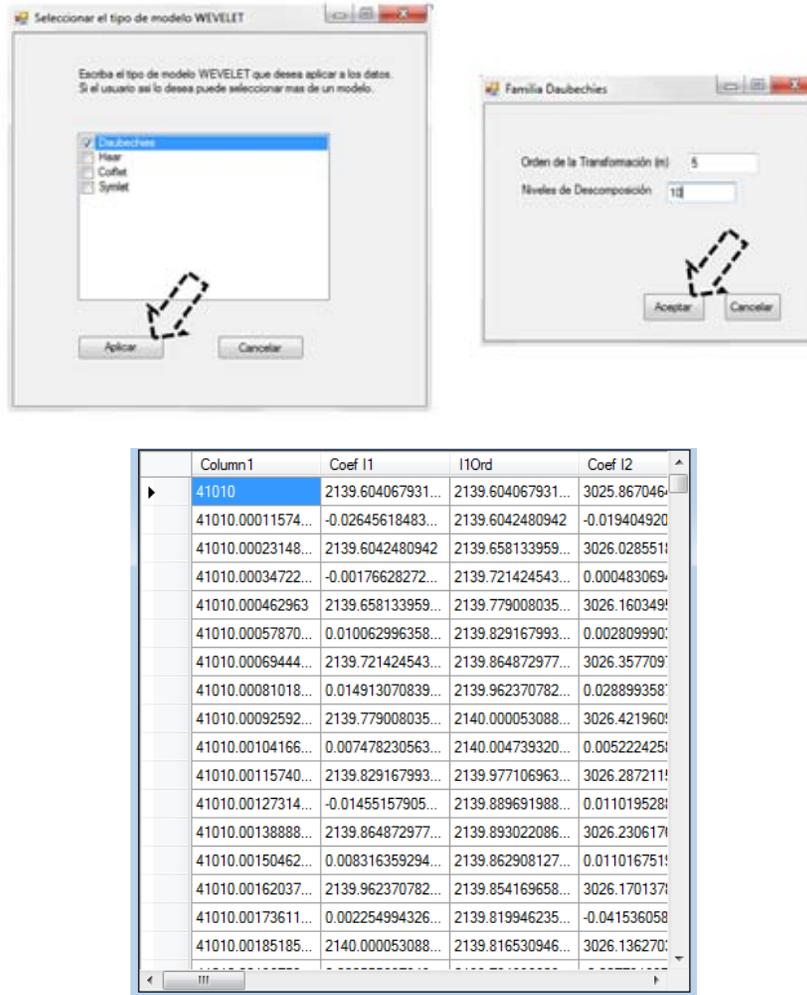


Fig. IV.46: Selección de la familia wavelet y sección cortada de los cálculos de los coeficientes de aproximación y detalle con ajuste en las condiciones de frontera.

IV.3.2.2.2 Eliminación de ruido por medio de la regla del umbral

Tal como ya ha sido mencionado, las funciones de detalle representan los cambios relativos de los datos a través de su transformación en escalas. Por lo tanto si se asume que todos los coeficientes de detalle pequeños son mayoritariamente originados del ruido, y todos los coeficientes de detalle grandes son mayoritariamente originados por la señal en sí misma, se puede de hecho decidir mantener los coeficientes de detalle grandes y remover los pequeños. Para aplicar tal enfoque se puede considerar que los coeficientes de detalle por arriba de un umbral especificado, σ , son grandes, y que todos los coeficientes (de

detalle) por debajo de dicho umbral son pequeños ¹⁹. Este proceso algunas veces es llamado *contracción wavelet* puesto que las señales de detalle son contraídas a cero ¹¹.

Umbral Hard (Duro) ^{11, 19}

Donoho y Johnstone (1994) introdujeron el método del umbral “duro” para detectar detalles significativos en las funciones de detalle. El criterio de este método es remplazar los coeficientes de detalle, $d_{j,k}$, con ceros cada vez que su magnitud es más pequeña que un umbral preestablecido, σ , de lo contrario son retenidos. El umbral “duro” matemáticamente se puede establecer como

$$d_{j,k}^{Hard} = \begin{cases} d_{j,k} & \text{para } |d_{j,k}| > \sigma \\ 0 & \text{para cualquier otro caso} \end{cases}$$

Umbral Soft (Suave) ^{11, 19}

También introducido por Donoho y Johnson (1994), el criterio del umbral “suave” es similar al del umbral “duro”. Adicionalmente al reemplazo de los coeficientes de detalle usando el criterio del umbral duro, la magnitud del resto de los coeficientes de detalle son reducidos por el umbral, σ . El umbral “suave” matemáticamente se puede establecer como

$$d_{j,k}^{Soft} = \begin{cases} d_{j,k} - \sigma & \text{para } d_{j,k} > \sigma \\ d_{j,k} + \sigma & \text{para } d_{j,k} < -\sigma \\ 0, & \text{para } |d_{j,k}| \leq \sigma. \end{cases}$$

El criterio del umbral duro generalmente es usado en aplicaciones en las que los datos de una señal, $f(t)$, contiene picos altos y discontinuidades por la naturaleza aguda de la función del umbral duro. Sin embargo, tal propiedad puede conducir a artefactos ocasionales que alisan la apariencia de la señal depurada.

Por otro lado, el criterio del umbral suave es recomendable en aplicaciones en las que se busca la suavidad de las estimaciones ya que la función del umbral suave comprime todas las funciones de detalle hacia cero.

En lugar de recombinar los coeficientes de aproximación, $c_{j,k}$, con los coeficientes de detalle originales, $c_{j,k}$, para regresar a la señal original, los coeficientes de aproximación, $c_{j,k}$, son combinados con los coeficientes de detalle modificados, $d_{j,k}^{Hard}$ o $d_{j,k}^{Soft}$.

En la **Fig. IV.47a** se muestran coeficientes de aproximación y de detalle sin aplicar el criterio del umbral suave a los segundos; mientras que en la **Fig. IV.47b** el menú para seleccionar el criterio del umbral así como los coeficientes depurados. La familia wavelet usada en el proceso de descomposición es la Coiflet de 5 coeficientes wavelet con 10 niveles ($j = 10$).

Column1	Coef I1	I1Ord	Coef I2
41010	2139.604067931...	2139.604067931...	3025.867046...
41010.00011574...	-0.02645618483...	2139.6042480942	-0.019404920
41010.00023148...	2139.6042480942	2139.658133959...	3026.0285511
41010.00034722...	-0.00176628272...	2139.721424543...	0.000483069...
41010.000462963	2139.658133959...	2139.779008035...	3026.160349...
41010.00057870...	0.010062996358...	2139.829167993...	0.002809990...
41010.00069444...	2139.721424543...	2139.864872977...	3026.357709...
41010.00081018...	0.014913070839...	2139.962370782...	0.028899358...
41010.00092592...	2139.779008035...	2140.000053088...	3026.421960...
41010.00104166...	0.007478230563...	2140.004739320...	0.005224251...
41010.00115740...	2139.829167993...	2139.977106963...	3026.287211...
41010.00127314...	-0.01455157905...	2139.889691988...	0.011019528...
41010.00138888...	2139.864872977...	2139.893022086...	3026.230617...
41010.00150462...	0.008316359294...	2139.862908127...	0.011016751...
41010.00162037...	2139.962370782...	2139.854169658...	3026.170137...
41010.00173611...	0.002254994326...	2139.819946235...	-0.041536058
41010.00185185...	2140.000053088...	2139.816530946...	3026.136270...

Fig. IV.47a: Coeficientes de aproximación y detalle sin depurar

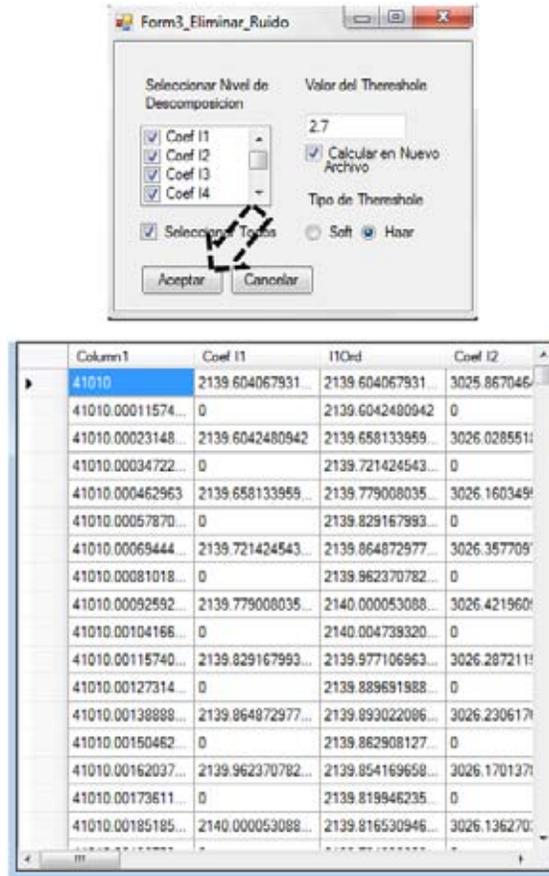


Fig. IV.47b: Coeficientes de detalle depurados con el criterio del umbral duro

IV.3.2.2.3 Reconstrucción de la señal

Sabiendo que para reconstruir la función aproximación a un nivel $j + 1$, se debe determinar una base ortonormal del subespacio aproximación A_{j+1} , y para ello puesto que el subespacio wavelet, W_j es el complemento ortogonal del subespacio aproximación A_j en A_{j+1} , la unión de las bases $\{\psi_{j,k}\}, k \in \mathbb{Z}$ y $\{\phi_{j,k}\}, k \in \mathbb{Z}$ forman una base ortogonal de A_{j+1} . Por consiguiente los coeficientes de la señal aproximación a un nivel $j + 1$ son expresados como ¹¹

$$c_{j+1,l} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_0(l-2k)c_{j,k} + \sum_{l=-\infty}^{\infty} g_1(l-2k)d'_{j,k} \dots \dots \dots (IV.19)$$

La ecuación (IV.19) indica que la función aproximación, $c_{j+1,k}$, puede ser reconstruida insertando ceros entre cada muestra de $c_{j,k}$ y $d'_{j,k}$, y sumando las convoluciones discretas entre las funciones resultantes y los filtros g_0 y g_1 , respectivamente. Donde $d'_{j,k}$ son los coeficientes de las señales de detalle modificados mediante los criterios del umbral duro o suave. Así, comenzando desde cualquier nivel de descomposición, tanto las funciones de aproximación a subsecuentes niveles más bajos de descomposición como la señal original pueden ser reconstruidas. La **Fig. IV.48** representa un diagrama esquemático del algoritmo piramidal para la reconstrucción.

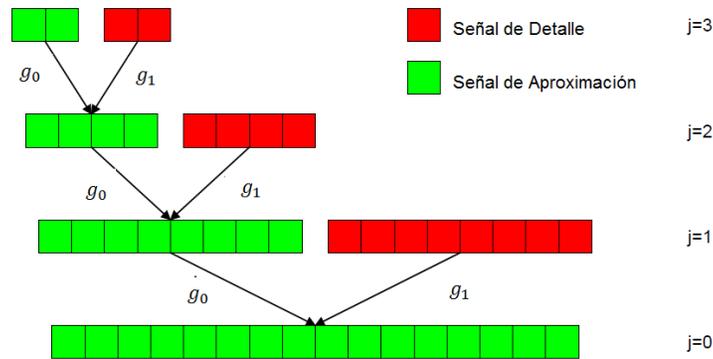


Fig. IV.48: Reconstrucción wavelet usando el algoritmo piramidal (Fuente: [11] Athichanagorn, S.: “Development of an Interpretation Methodology for Long-Term Pressure Data from Permanent Downhole Gauges”, PhD dissertation, Stanford University, June 1999).

Al realizar la transformada wavelet inversa por medio de la ecuación (IV.19), nuevamente se requieren hacer ajustes por las condiciones de frontera, y el cálculo matricial con las condiciones de frontera periódicas, por tanto se hacen como se muestra en la **Fig. IV.49**. La matriz desarrollada de esta forma para calcular la señal procesada es denominada **matriz de reconstrucción wavelet**.

Donde $g_0(0), g_0(1), \dots, g_0(n)$ representan la secuencia de dos escalas de la función de escalamiento, $g_1(0), g_1(1), \dots, g_1(n)$ representan la secuencia de dos escalas de la función wavelet y f' la señal reconstruida depurada.

$$\begin{pmatrix} f'(0) \\ f'(1) \\ f'(2) \\ f'(3) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ f'(L) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_0(0) & g_1(0) & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & g_0(n) & g_1(n) \\ g_0(1) & g_1(1) & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & g_0(0) & g_0(1) & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & g_0(1) & g_1(1) & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \dots & g_0(0) & g_1(0) & 0 & 0 \\ g_0(n) & g_1(n) & \cdot & \cdot & \dots & \dots & g_0(1) & g_1(1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \dots & \dots & \cdot & \cdot & g_0(0) & g_1(0) \\ 0 & 0 & g_0(n) & g_1(n) & \dots & \dots & \cdot & \cdot & g_0(1) & g_1(1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 0 & 0 & \dots & \dots & g_0(n) & g_1(n) & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \dots & 0 & 0 & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c(0) \\ d'(0) \\ c(1) \\ d'(1) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}$$

Fig. IV.49: Cálculo matricial de la transformada wavelet inversa con problemas de frontera ajustados (fuente: [19] Olsen, S.: “On Automatic Data Processing and Well-Test Analysis in Real-time Reservoir Management Applications”, PhD dissertation, University of Bergen, 2011).

La implementación del algoritmo piramidal para reconstruir una señal depurada es mostrado en la **Fig. IV.50**, en la que se observa el número de niveles de reconstrucción y la familia wavelet seleccionada para llevar a cabo el algoritmo piramidal de reconstrucción.

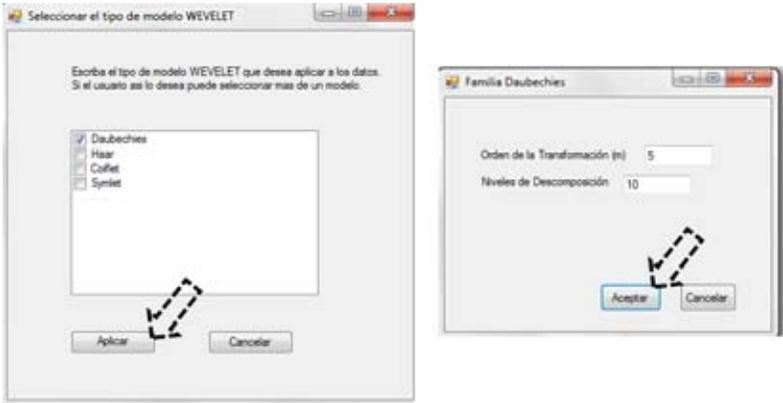
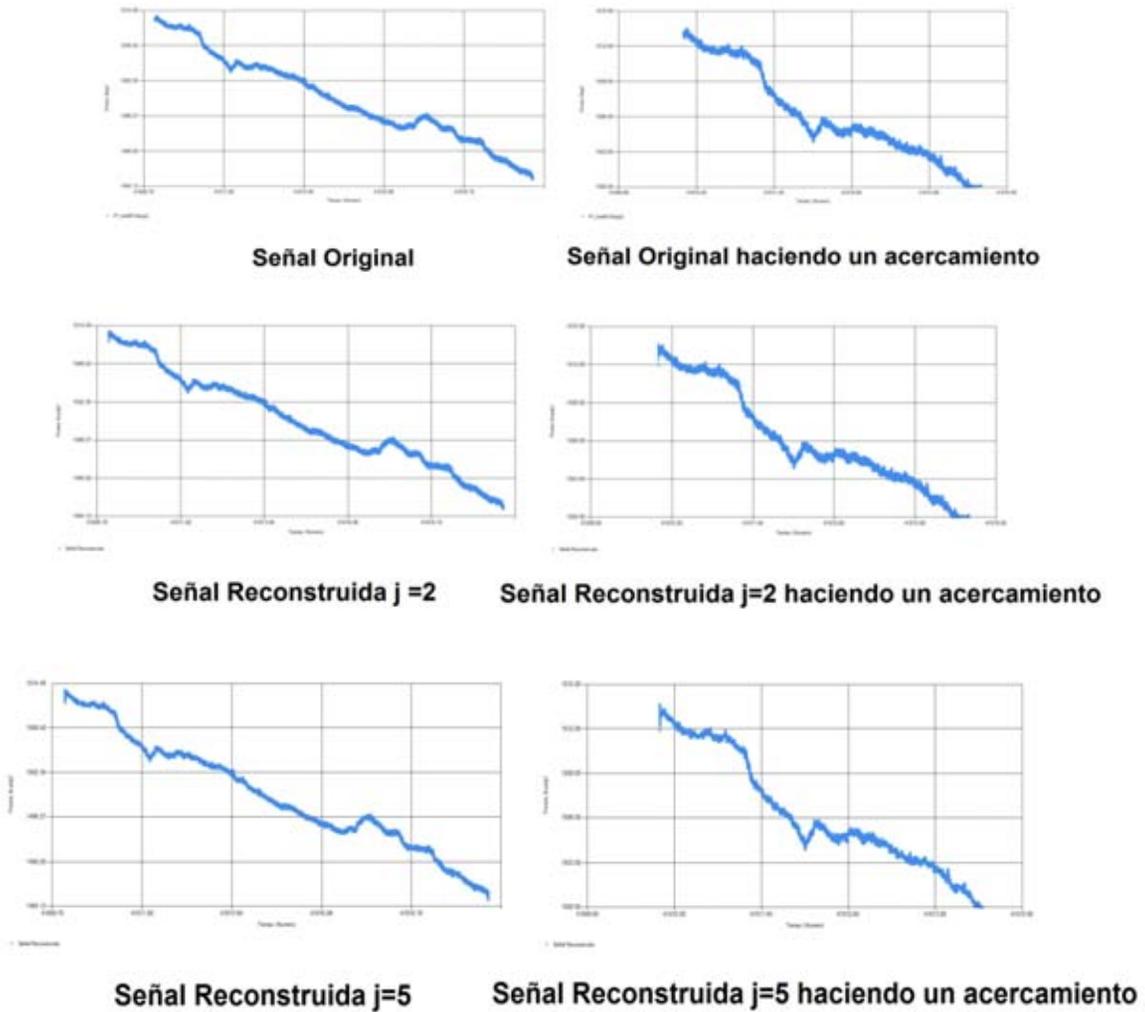


Fig. IV.50: Selección de la familia wavelet e indicación del número de niveles de reconstrucción

En la **Fig. IV.51** se muestran los resultados obtenidos al procesar una señal mediante la familia Daubechies de orden 5 (longitud de las secuencias de dos escalas) y aplicando 1, 5 y 10 niveles de reconstrucción. Para apreciar la eliminación de ruido al irse incrementando los niveles de resolución, se muestra un acercamiento a una sección de los datos procesados.



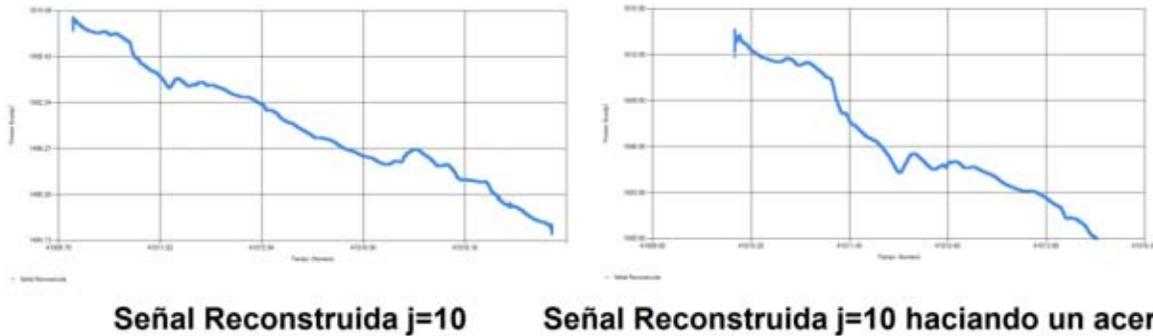


Fig. IV.51: Señal depurada con el análisis wavelet

IV.3.3 Deshabilitamiento del análisis wavelet en saltos grandes de presión

El problema es que la filtración puede borrar algunos de los puntos de ruptura conservados por la función wavelet. La solución es deshabilitar la eliminación de los puntos de ruptura identificados por la wavelet, como se muestra en la **Fig. IV.52**. En general la respuesta no se verá tan limpia porque mantiene algunos pequeños puntos de ruptura locales erróneamente preservados por los algoritmos, pero las altas frecuencias de los puntos de ruptura no serán eliminados.

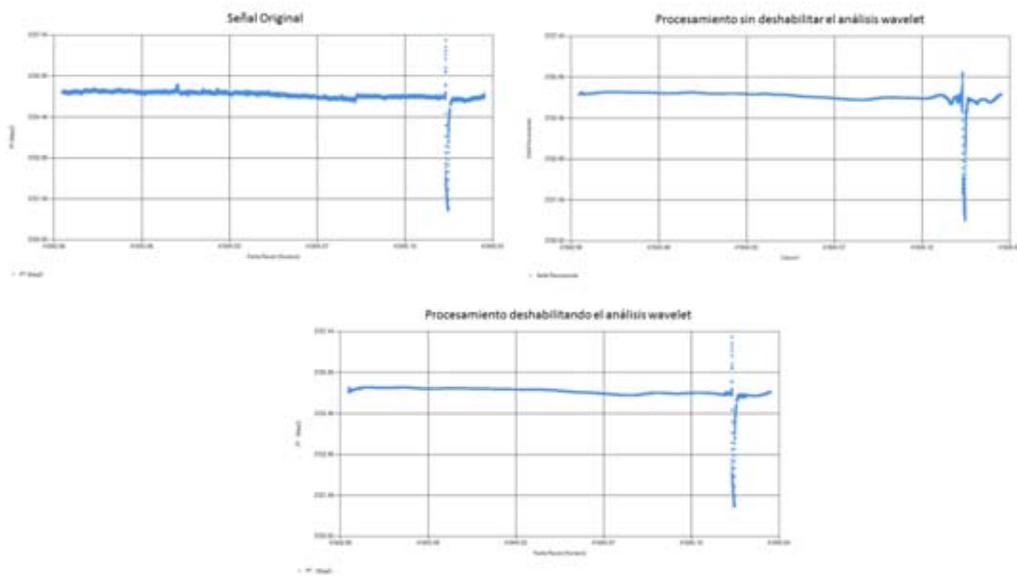


Fig. IV.52: Procesamiento de una señal deshabilitando el análisis wavelet en picos altos

IV.3.4 Reducción de datos de la señal depurada

Una vez que ha sido seleccionado el umbral correcto, el número de puntos sigue siendo el mismo que el conjunto de datos original, pero es posible ahora reducir los datos usando una simple filtración, típicamente con una combinación de intervalos de tiempo y cambios máximos de presión. La **Fig. IV.53** muestra el resultado de esta simple post-filtración.

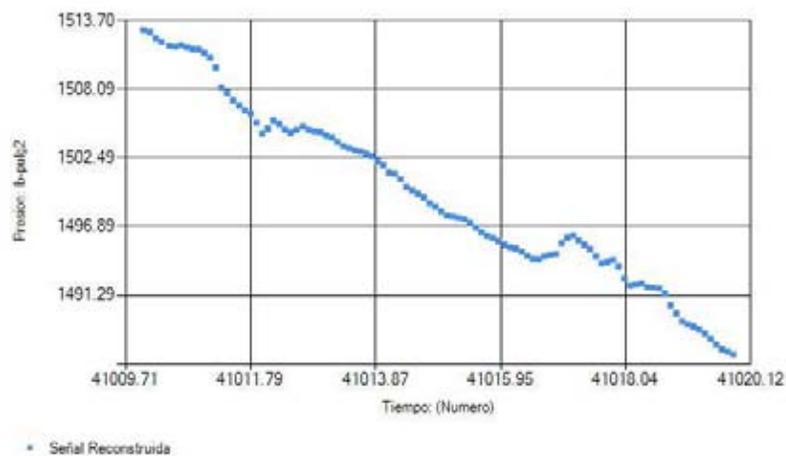


Fig. IV.53: Reducción de datos de la señal depurada

IV.3.5 Exportación de los datos de la señal depurada

Como última fase del flujo de trabajo implementado en este módulo, la información resultante del procesamiento es importante poder ser trasladada a una herramienta especializada en el análisis de datos presión. El tipo de archivo en el que es posible exportar el resultado de los datos de presión puede ser de tipo texto (txt) o Excel (xls), tal como se muestra en la **Fig. IV.54**.

	A	B	C	U	V
1	Fecha (Núm)	Coef I10 Ord	Coef I10	Coef I1	Señal Reconstruida, P (lbs/pg2)
2	41010	48407.0032	48407.0032	2139.55899	1512.90515
3	41010.00012	48388.8947	(0	1512.658937
4	41010.00023	48374.8512	48388.8947	2139.31611	1512.874727
5	41010.00035	48370.0792	(0	1513.473462
6	41010.00046	48374.9297	48374.8512	2139.57123	1511.895711
7	41010.00058	48364.4326	-2.74014275	0	1513.186328
8	41010.00069	48366.7248	48370.0792	2140.30642	1513.122011
9	41010.00081	48351.0881	(0	1513.423135
10	41010.00093	48335.7896	48374.9297	2138.64585	1513.147566
11	41010.00104	48279.0208	(0	1512.225949
12	41010.00139	48248.9027	48364.4326	2140.11945	1512.31031
13	41010.0015	48227.7425	(0	1513.345786
14	41010.00162	48210.001	48366.7248	2140.11217	1513.57306
15	41010.00174	48197.4373	(0	1513.240344
16	41010.00185	48166.5979	48351.0881	2140.49472	1513.326382
17	41010.00197	48141.886	3.77650575	0	1513.577056
18	41010.00208	48171.4011	48335.7896	2140.15736	1513.53982
19	41010.0022	48169.635	(0	1513.309346
20	41010.00231	48149.3068	48279.0208	2139.01154	1512.991234
21	41010.00243	48148.6672	(0	1512.511582
22	41010.00255	48160.6635	48248.9027	2139.05996	1512.355184
23	41010.00266	48152.3128	(0	1512.563796
24	41010.00278	48150.0377	48227.7425	2140.23275	1512.859128
25	41010.00289	48142.1927	(0	1513.369048

Fig. IV.54: Sección cortada de una señal depurada y reducida al ser exportada a Excel

IV.4 Comparación con técnicas de suavizado

El suavizado de una señal consiste en un estimador lineal local basado en los vecinos más cercanos a un punto (ventana de suavización).

La ventana de suavización, N , determina el grado de suavizamiento y representa la cantidad de puntos vecinos más cercanos a usarse en el ajuste local.

Una de las técnicas para efectuar el ajuste local se basa en el parámetro estadístico de la media móvil, es decir mediante el cálculo las medias aritméticas consecutivas, utilizando una ventana de suavización conformada por datos sucesivos en la serie temporal, todas con el mismo número de datos pero retirando el primero de la media anterior e incorporando el dato siguiente. Matemáticamente la media móvil se podría expresar como:

$$\frac{i_1 + i_2 + \dots + i_N}{N}, \frac{i_2 + i_3 + \dots + i_{N+1}}{N}, \frac{i_3 + i_4 + \dots + i_{N+2}}{N}$$

donde N es el número de datos de la ventana de suavización e i es cada uno de los datos que conforman la ventana de suavización.

IV.4.1 Media Móvil Simple

La media móvil simple otorga el mismo peso a cada uno de los puntos de la ventana de suavización. Matemáticamente se expresa como:

$$P_{suav} = \frac{1}{N} \sum_{j=i+(N-1)/2}^{i+(N-1)/2} P_j, \text{ para } N \text{ impar}$$

En la **Fig. IV.55** se muestra una señal suavizada por medio de la media móvil simple, y en la **Fig. IV.56** una comparación entre los resultados obtenidos con el análisis wavelet y la media móvil simple.

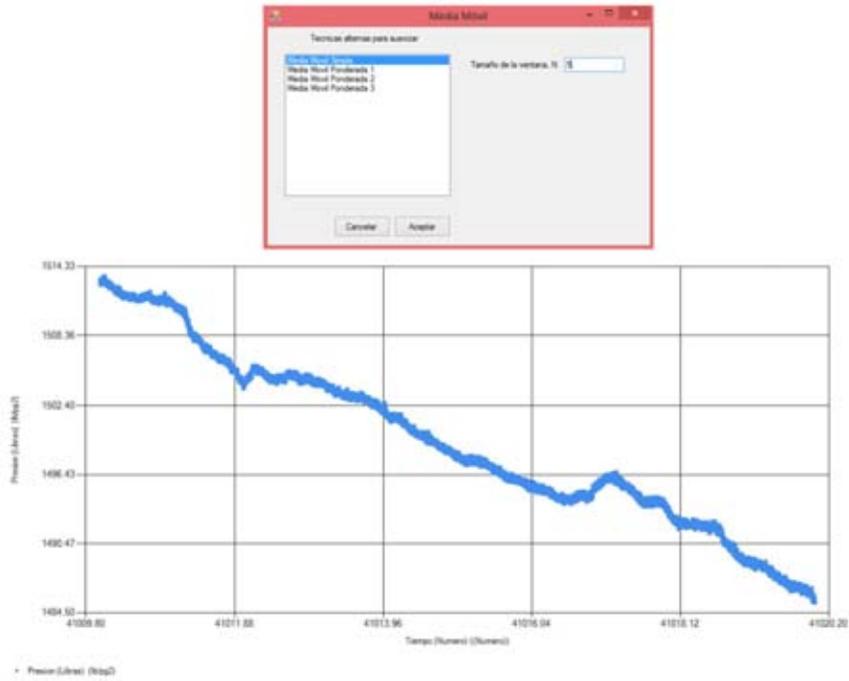


Fig. IV.55: Resultados del suavizado con la media móvil simple

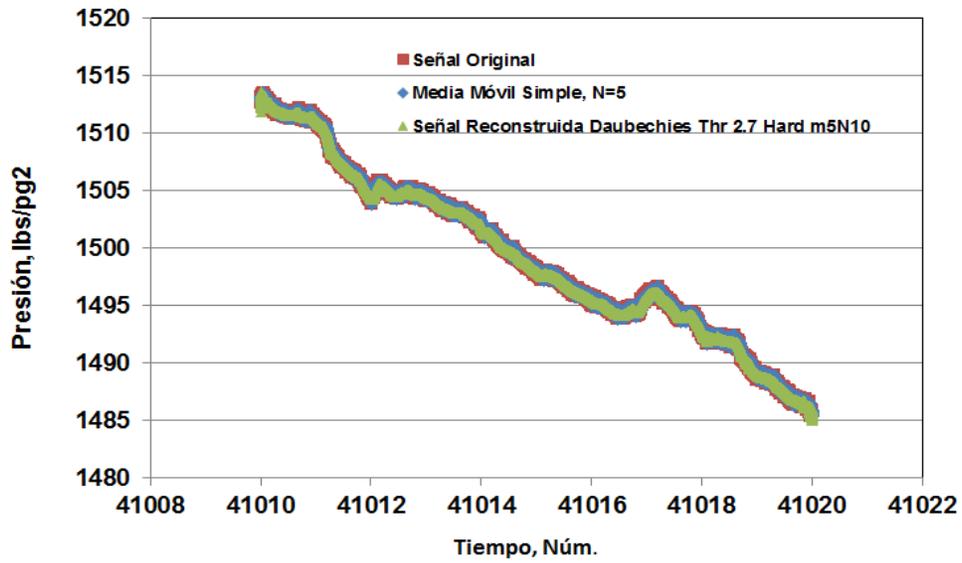


Fig. IV.56: Comparación análisis wavelet – media móvil simple

IV.4.2 Media Móvil Ponderada

En la media móvil ponderada cada punto de la ventana de suavización es multiplicado por un peso, w , para la estimación de la media local. A los puntos más cercanos al punto actual se les otorga un mayor peso. Matemáticamente se expresa como

$$P_{suav} = \frac{1}{\sum_{i=1}^N (N + 1 - i)} \sum_{i=1}^N w_i P_i$$

donde uno de los criterios para asignar el peso es

$$w_i = N - 1 + i, \quad i = 1, 2, 3, 4, \dots$$

En la **Fig. IV.57** se muestra una señal suavizada por medio de la media móvil ponderada, y en la **Fig. IV.58** una comparación entre los resultados obtenidos con el análisis wavelet y la media móvil ponderada.

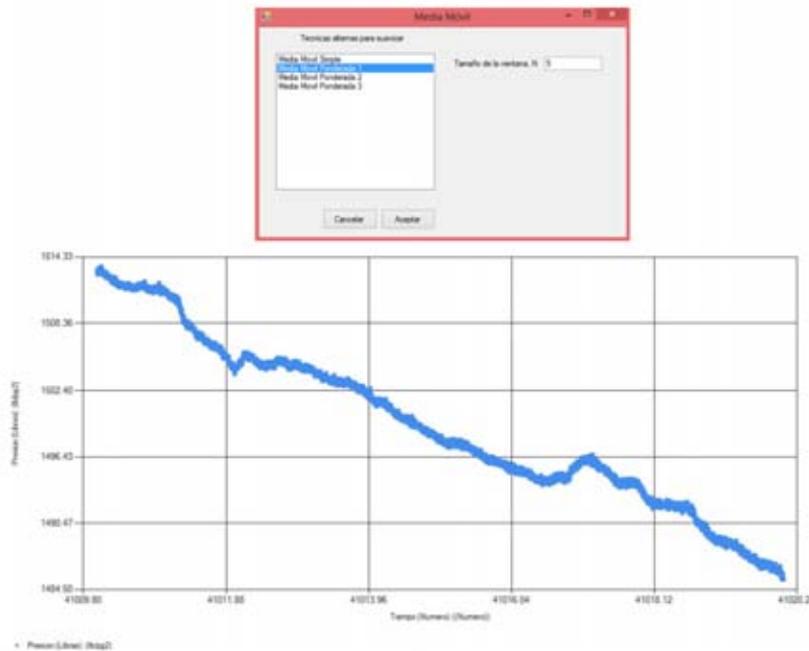


Fig. IV.57: Resultados del suavizado con la media móvil ponderada

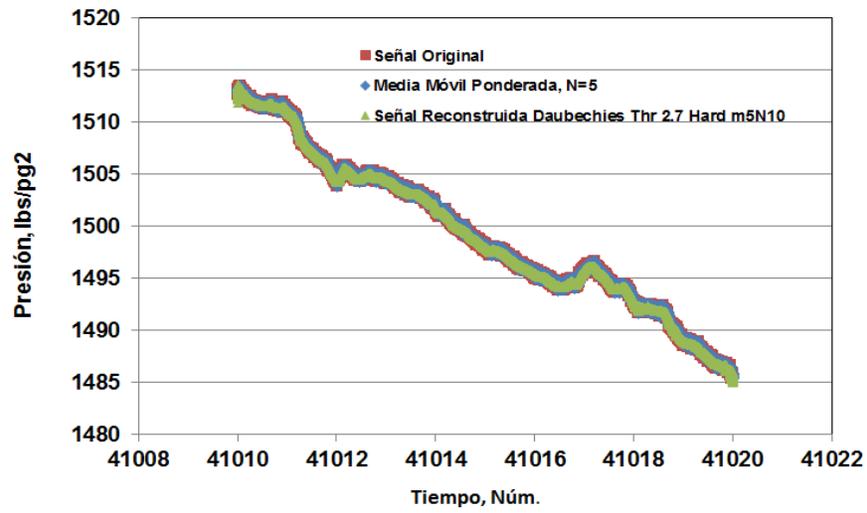


Fig. IV.58: Comparación análisis wavelet – media móvil ponderada

CAPÍTULO V

APLICACIÓN A CASOS DE CAMPO Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS

V.1 Introducción

Para valorar los resultados arrojados por el programa de cómputo, en este capítulo se utilizará la información de dos casos de campo, cuyos nombres no se indican por razones obvias. El primer caso, destinado a la estimación del gasto de producción a partir de los cambios en la temperatura de fondo, será denominado **caso A**; mientras que el segundo, enfocado al procesamiento de datos de presión, será denominado **caso B**.

Es importante realizar comentarios de los resultados por lo que también se discutirán.

V.2 Caso de campo A

V.2.1 Datos generales

En la **Tabla V.1** se presentan algunas características generales del tipo de fluido, pozo y yacimiento.

Tabla V.1: Datos generales, caso de campo A

Fluido	
Clasificación	Aceite Ligero
°API	30
Viscosidad, cp	0.2694
Presión de saturación, kg/cm ²	235
Pozo	
Trayectoria	Desviado
Profundidad total, md	4300
Profundidad del sensor, md	3182
Profundidad de la hta. PLT, md	4280
Tirante de Agua, mts	32
Yacimiento	
Clasificación	Naturalmente Fracturado
Presión inicial, kg/cm ²	399
Presión @ mar 2010, kg/cm ²	250
Temperatura de yac., °C	138

V.2.2 Información base

La información base del caso de campo A se trata de un registro PLT, el cual al ser cargado al programa de cómputo luce como en la **Fig. V.1**.

Fecha Recod ((Numero))	TOJ ((Numero))	PROF. ((Numero))	PRESION (kg/cm2)	PRESION2 (lb/pulg2)	TEMP (°C)	TEMP2 (°F)	GRADIO (gr/cm3)	MOLINO (RPS)
38407.89946	77713.0148	20	63.82549	907.8118	47.4387	117.38966	0.2153	0
38407.90434	78135.4595	20	63.82765	907.8425	47.8569	118.14242	0.2094	0
38407.90469	78165.4595	20	63.82889	907.8602	47.991	118.3838	0.2047	0
38407.90503	78195.4595	20	63.83409	907.9341	48.2151	118.78718	0.1964	0
38407.90538	78225.4595	20	63.84181	908.044	48.3078	118.95404	0.188	0
38407.90573	78255.4595	20	63.85135	908.1797	48.3789	119.08202	0.182	0
38407.90608	78285.4595	20	63.86281	908.3427	48.5917	119.46506	0.1724	0
38407.90642	78315.4595	20	63.87471	908.5119	48.6685	119.6033	0.1689	0
38407.90677	78345.4595	20	63.88779	908.6979	48.741	119.7338	0.1618	0
38407.90712	78375.4595	20	63.90178	908.8969	48.7807	119.80526	0.1608	0
38407.90747	78405.4595	20	63.91549	909.092	48.8419	119.91542	0.1544	0
38407.90781	78435.4595	20	63.92993	909.2973	48.9794	120.16292	0.1528	0
38407.90816	78465.4595	20	63.94452	909.5048	49.0998	120.37964	0.1492	0
38407.90851	78495.4595	20	63.95918	909.7134	49.1212	120.41816	0.1464	0
38407.90885	78525.4595	20	63.97527	909.9422	49.1674	120.50132	0.1472	0
38407.9092	78555.4595	20	63.99069	910.1615	49.29	120.722	0.1409	0
38407.90955	78585.4595	20	64.00606	910.3801	49.329	120.7922	0.1427	0
38407.90989	78615.4595	20	64.02122	910.5988	49.3682	120.86456	0.1382	0

Fig. V.1: Registro PLT cargado al programa, caso de campo A

De forma gráfica, el comportamiento de la temperatura de fondo (eje primario) así como el de la rotación del molinete (eje secundario), son mostrados en la Fig. V.2.

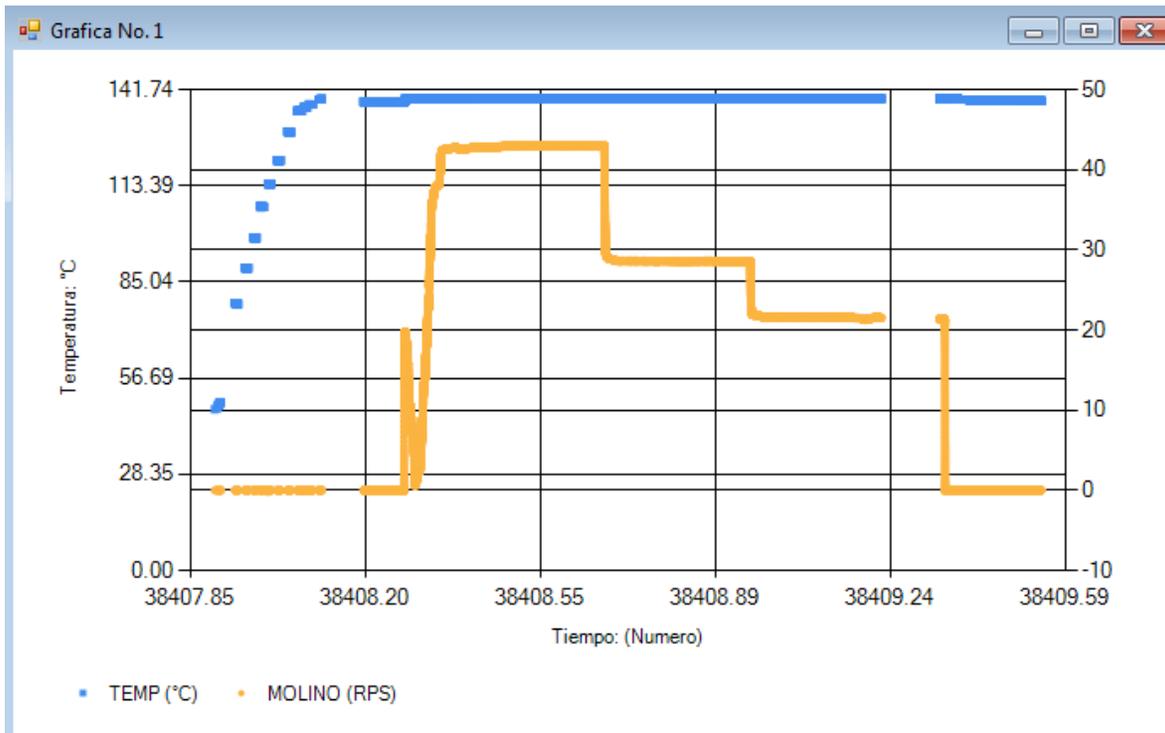


Fig. V.2: Gráfica de temperatura y rotación contra tiempo

V.2.3 Generación del modelo de correlación para gasto constante

Cálculo del gasto a partir del ritmo de rotación del molinete

La relación lineal entre el ritmo de rotación del molinete y la velocidad del fluido, obtenida a partir de la calibración a pozo cerrado, es mostrada en la **Fig. V.3**, donde los puntos corresponden a los resultados de la calibración y la línea continúa al ajuste por regresión lineal cuyos coeficientes son mostrados en el recuadro del lado derecho.

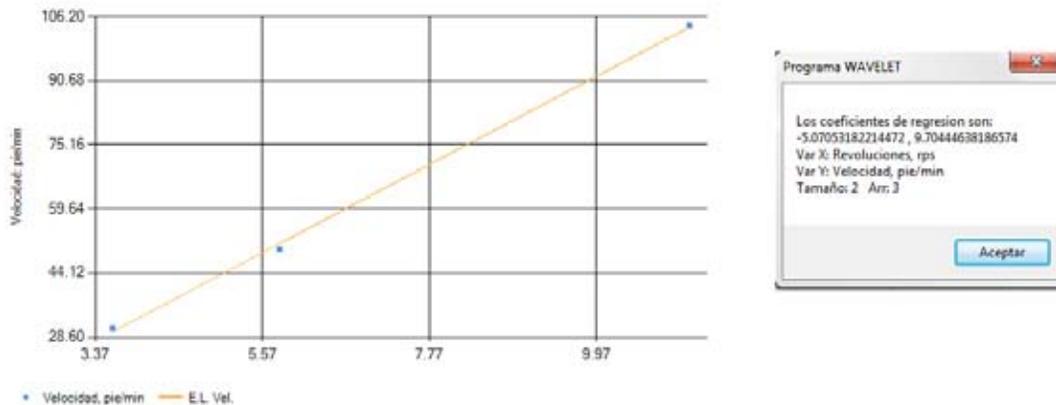


Fig. V.3: Relación lineal entre el ritmo de rotación y la velocidad del fluido

Los parámetros del fluido, μ_o y B_o , requeridos para identificar el tipo de flujo (laminar o turbulento) mediante el número de Reynolds, N_{Re} , son mostrados en las **Figs. V.4a** y **V.4b**, respectivamente. Los puntos discretos corresponden a los datos de un PVT representativo del yacimiento y las curvas continuas al ajuste mediante regresión polinomial cuyos coeficientes son mostrados en los recuadros del lado derecho.

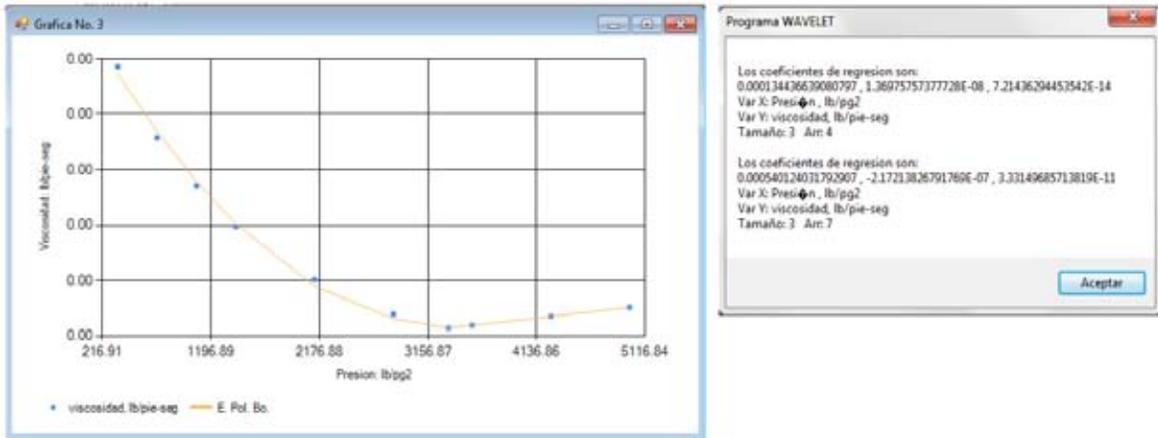


Fig. V.4a: Ajuste por regresión polinomial del comportamiento de la viscosidad del aceite con la presión

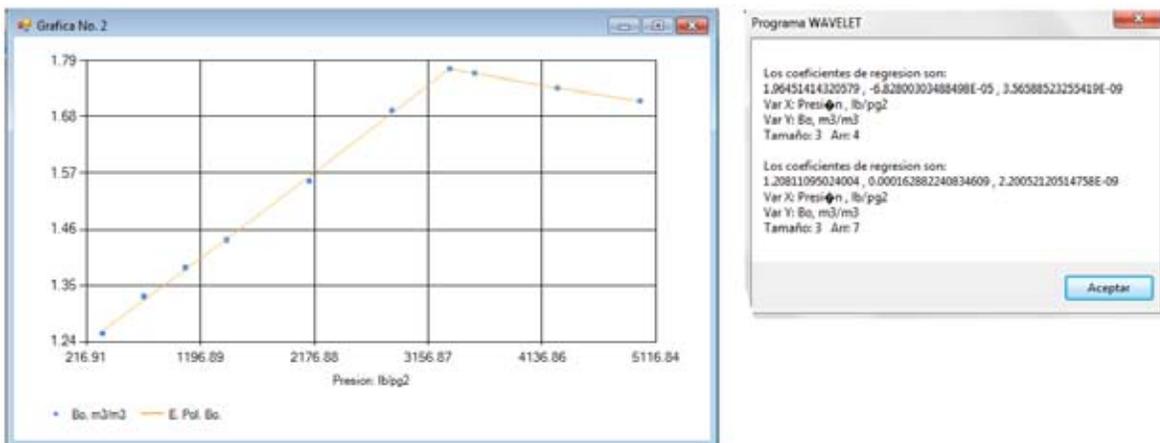


Fig. V.4b: Ajuste por regresión polinomial del comportamiento del factor de volumen del aceite con la presión

Finalmente, la conversión de la velocidad del fluido a flujo volumétrico considerando el área de la sección transversal al flujo, A , así como las correcciones debidas al tipo de flujo son mostrados en la **Fig. V.5** en la que también se puede observar la temperatura de fondo.

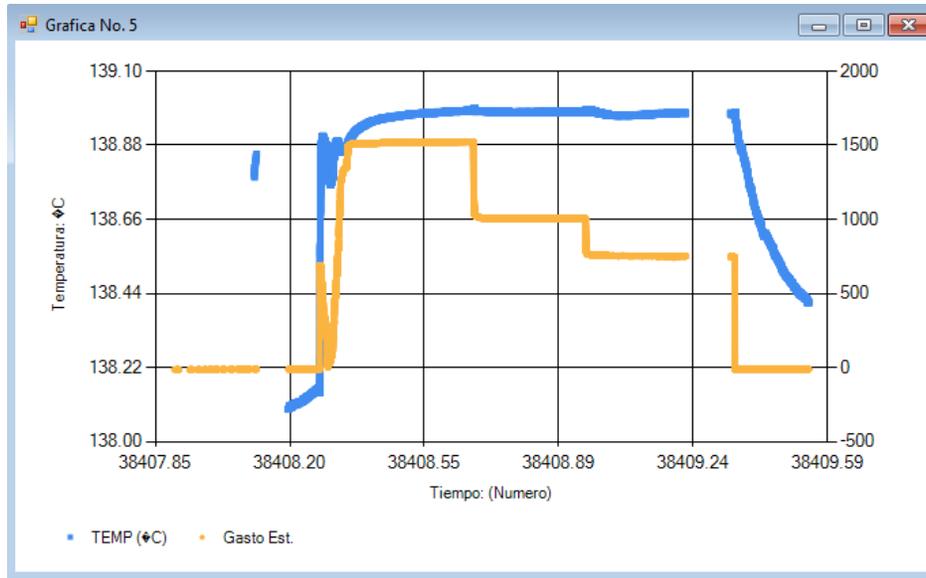


Fig. V.5: Resultado del cálculo del gasto a partir de la rotación

Determinación de los cambios en la temperatura de fondo (ΔT)

La delimitación de los periodos a gasto constante presentes durante la toma del registro PLT son mostrados en la **Fig. V.6**, y tal como se planteó en el capítulo IV, esto es llevado a cabo apoyándose en el gráfico de presión y gasto contra tiempo mediante el trazo de cuadros de selección.

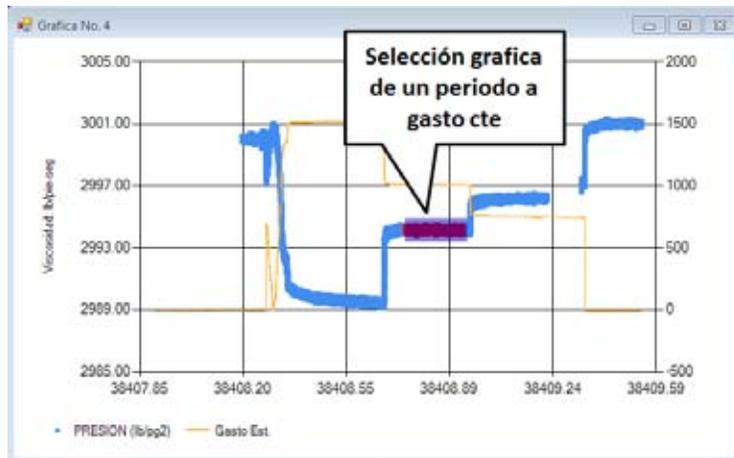


Fig. V.6: Grafico de presión y gasto contra tiempo para seleccionar periodos a gasto constante

El conjunto de los periodos de flujo a gasto constante seleccionados son mostrados en el gráfico de temperatura y gasto contra tiempo como se ilustra en la **Fig. V.7** y en está es extraído el valor de la temperatura de fondo estática, T_{we} , de 138.1 °C. Por su parte, los valores de la temperatura de fondo fluyendo estabilizada, T_{wf} , de cada periodo, son tomados de los puntos finales. Así, el cálculo de los cambios en la temperatura de fondo (ΔT) asociados a cada uno de los periodos a gasto constante pueden ser determinados mediante la ecuación (V. 7), cuyos resultados se muestran en la **Fig. V.8**.



Fig. V.7: Conjunto de periodos a gasto constante seleccionados

Gasto Est.	DT
1523.414755418...	0.8847000000000
1004.108473803...	0.8796000000000
746.3058449662...	0.8723999999999
0	0

Fig. V.8: Resultados del cálculo ΔT para los periodos a gasto constante.

El modelo de correlación que resulta de aplicar la técnica de ajuste por interpolación de spline cuadráticos a los pares de puntos (ΔT , Q), es mostrado en la **Fig. V.9**.

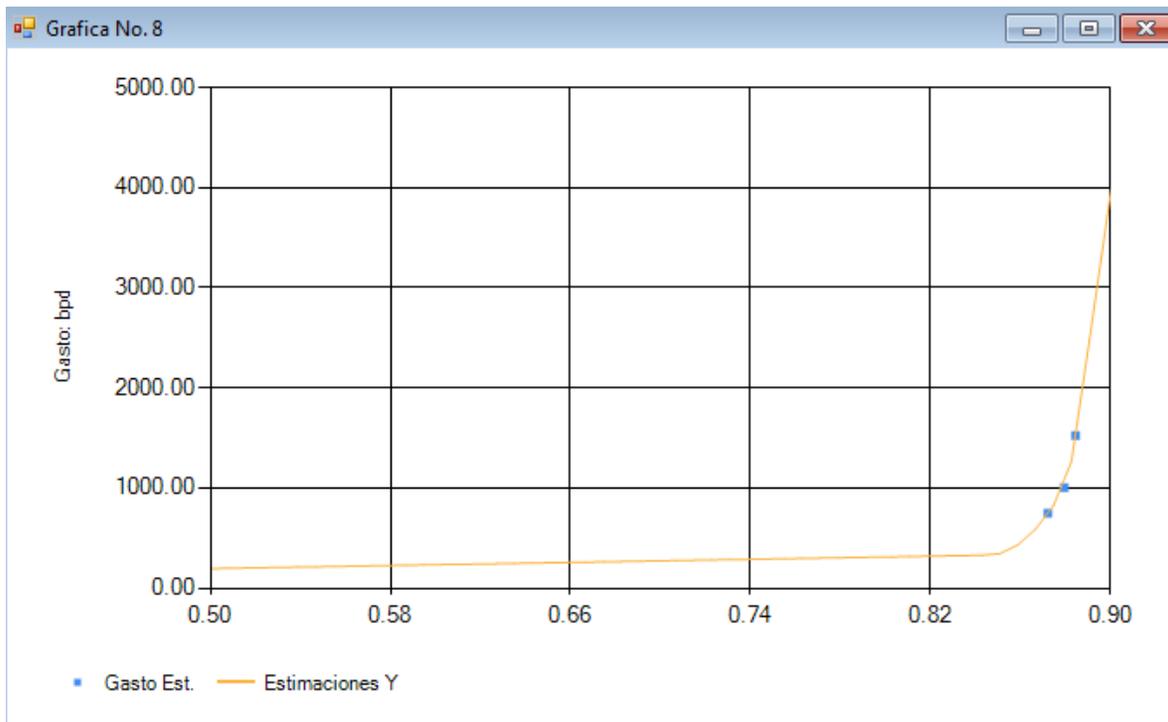
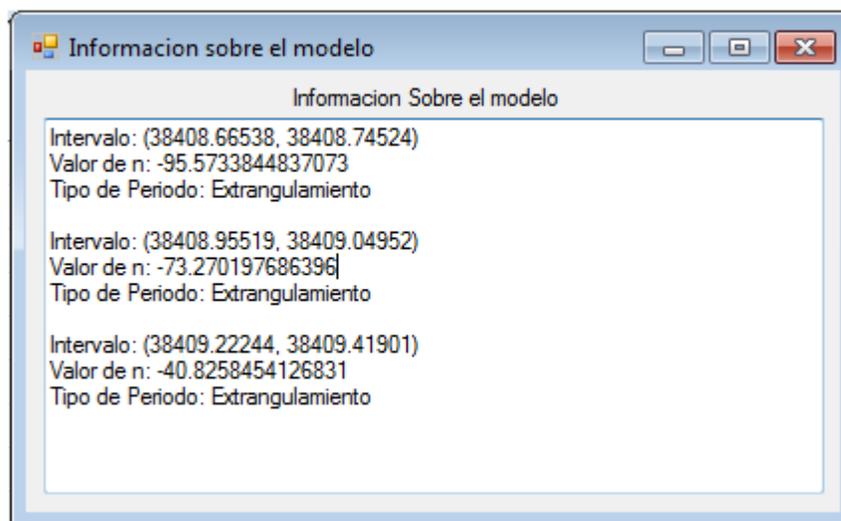


Fig. V.9: Modelo de correlación para periodos de flujo a gasto constante.

V.2.4 Modelo de correlación para periodos de flujo con gasto variable en el tiempo

La aplicación del modelo de correlación exponencial para el caso de periodos de flujo con gasto variable en el tiempo, puede visualizarse en la **Fig. V.10** en la que se adicionaron los datos reales y su simulación a partir de los modelos de correlación generados.

Los valores de n resultantes fueron:



Para lograr un ajuste aceptable, el parámetro F_f se fijó en 100.





Fig. V.10: Reproducción del registro PLT mediante los modelos de correlación generados.

V.2.5 Estimación del gasto de producción

La estimación del gasto de producción a partir de los modelos de correlación generados, en este caso, utilizará la información de presión y temperatura registrada por un sensor permanente colocado posteriormente a la toma del registro PLT. En la **Fig. V.11** se muestra la información registrada por el sensor permanente, y en la **Fig. V.12** el seccionamiento de la misma así como la asignación de los modelos.

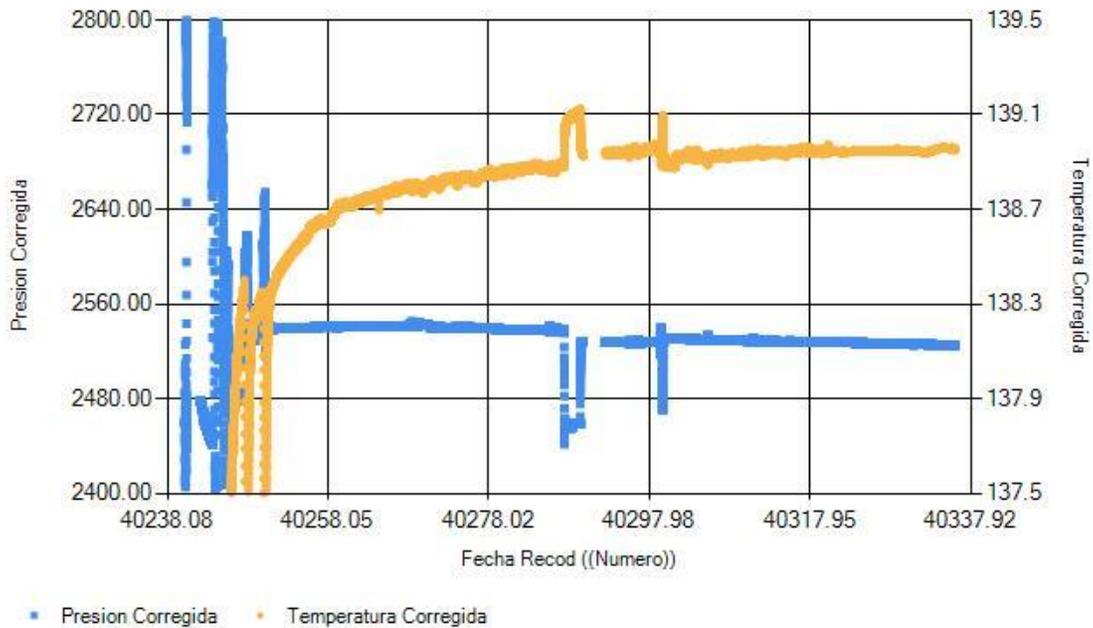


Fig. V.11: Datos de un sensor permanente a usarse para estimar el gasto de producción

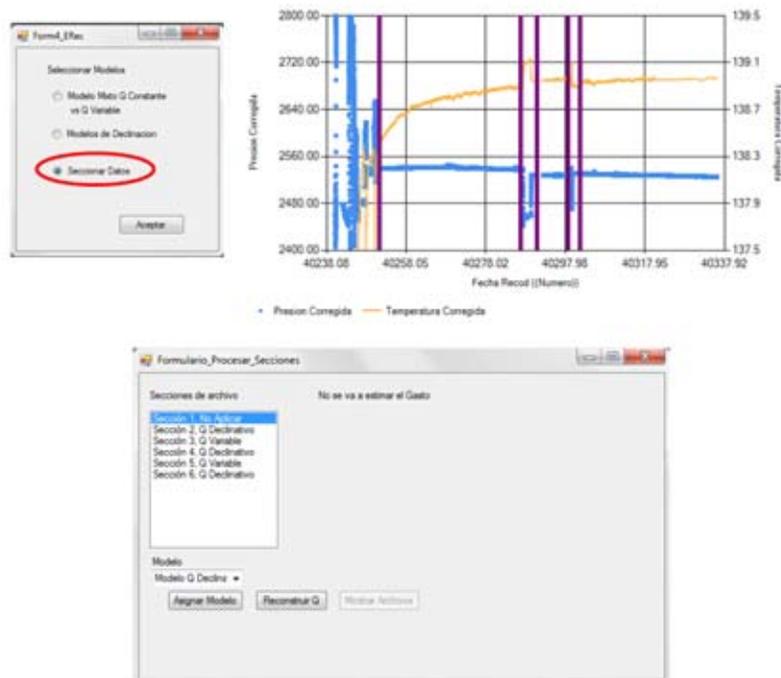


Fig. V.12: Seccionamiento de la información y asignación de los modelos de correlación

Por su parte de la **Fig. V.13** se muestra el resultado de la estimación de los gastos de producción.

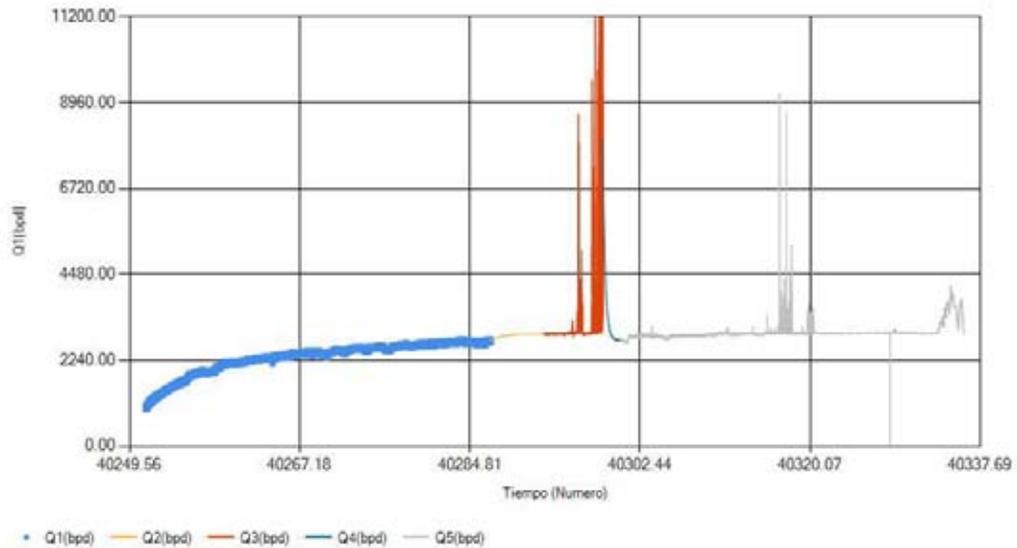


Fig. V.13: Resultados arrojados en la estimación del gasto

Para comparar los resultados con la producción oficial, en la **Fig. V.14** se muestra un gráfico con los gastos obtenidos y los oficiales.

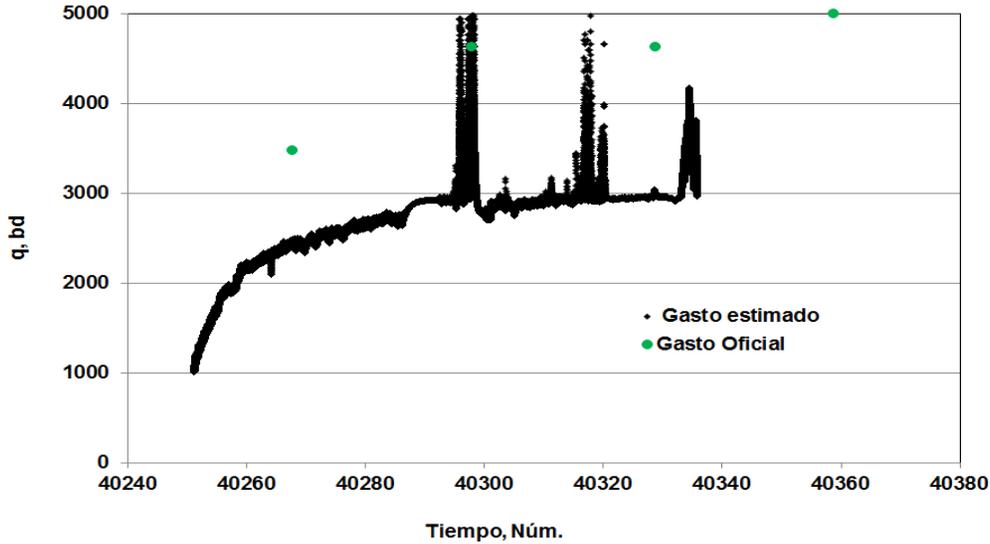


Fig. V.14: Comparación de los resultados del gasto con los valores oficiales

V.2.6 Discusión de resultados

Hay dos factores que juegan un papel determinante en la definición de los modelos de correlación propuestos, especialmente para el correspondiente a periodos de flujo a gasto constante:

- ✓ Disponer de una mayor cantidad de puntos ($\Delta T, Q$) llevado a cabo mediciones por la mayor cantidad posible de diámetros de estrangulador.
- ✓ Evitar afectar los datos de un sensor permanente para expresarlos al mismo nivel de profundidad de la información base ya que en tal caso los valores de los gradientes dinámicos de presión y temperatura deben ser estrictamente bien conocidos. Ante esto cabe hacer la recomendación de procurar tener homologada la información base – sensor permanente al ser colocados ambos a un mismo nivel de profundidad.

Para mejorar la confiabilidad de los resultados en estimar el gasto de producción al aplicar los modelos de correlación propuestos, también es necesario evaluar el impacto de los efectos de marea y de los cambios de la temperatura por el día y la noche.

Es recomendable efectuar la toma de registros PLT o aforos con medición simultánea de P&T en la mayor cantidad de pozos posible de un yacimiento para generar los modelos de correlación acordes a cada uno y así disponer de una herramienta para validar la información de producción.

Particularmente, en este caso de campo, los valores del parámetro ΔT resultaron del orden de 0.8 °C por lo que para garantizar tener información confiable de temperatura de fondo se sugiere utilizar un sensor de alta resolución para aceites del tipo utilizado. Aunado a lo anterior se puede mencionar que después de producciones por arriba de 1000 bpd el gasto de producción está cada vez asociado a valores menos espaciados de ΔT , es decir esto recalcaría la necesidad de utilizar herramienta de alta resolución.

Los gastos de producción oficiales están de un 40 a 50% más elevados que los obtenidos mediante los modelos de correlación, aunque concuerdan en el sentido de que a mayor temperatura, mayor es el gasto de producción, sin embargo regresando a lo que se mencionó de la diferencia entre los oficial y lo calculado, los valores obtenidos con los modelos de correlación se deben tomar con reserva por los dos factores comentados al principio.

Para evaluar los cambios de temperatura para el caso de cambios en la composición del fluido y la presencia de dos o tres fases, es menester señalar la importancia de modelar analíticamente los fenómenos de transmisión de calor, lo cual de hecho es un trabajo más avanzado y cauteloso.

V.3 Caso de campo B

V.3.1 Datos generales

En la **Tabla V.2** se presentan algunas características generales del tipo de fluido, pozo y yacimiento.

Tabla V.2: Datos generales, caso de campo B

Fluido	
Clasificación	Aceite Ligero
°API	38
Viscosidad, cp	0.22
Presión de saturación, kg/cm ²	251
Pozo	
Trayectoria	Desviado
Profundidad del sensor, md	4135
Yacimiento	
Clasificación	Naturalmente Fracturado
Profundidad promedio, mv	4450
Presión inicial, kg/cm ²	306
Presión @ jul. 2014, kg/cm ²	297
Temperatura de yac., °C	155

La señal cruda consta de 77702 datos de presión de los cuales una cierta porción se trata de datos anómalos y errores de medición por fuera de. Los datos crudos (sin procesar) son mostrados en la **Fig. V.15**.

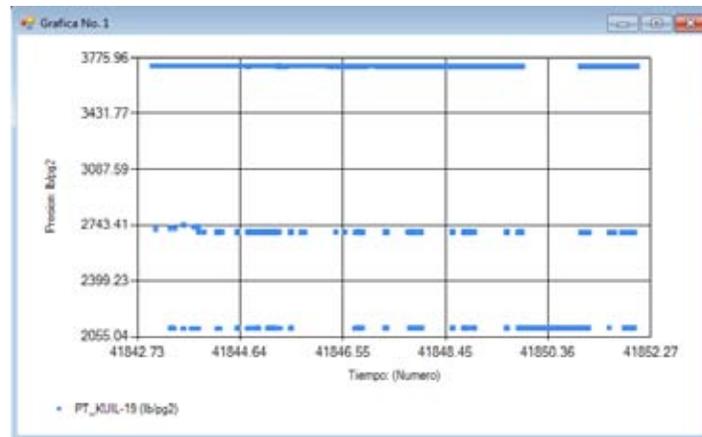


Fig. V.15: Gráfica de los datos de presión sin procesar

V.3.2 Validación de la información

El resumen de la validación de datos se muestra en la **Fig. V.16**.

Fig. V.16: Resumen de la validación de datos

En tanto que la señal cruda sin datos anómalos y eliminando los errores por fuera de tendencia adopta la forma mostrada en la **Fig. V.17a**, donde se pueden apreciar errores de dispersión (ruido).

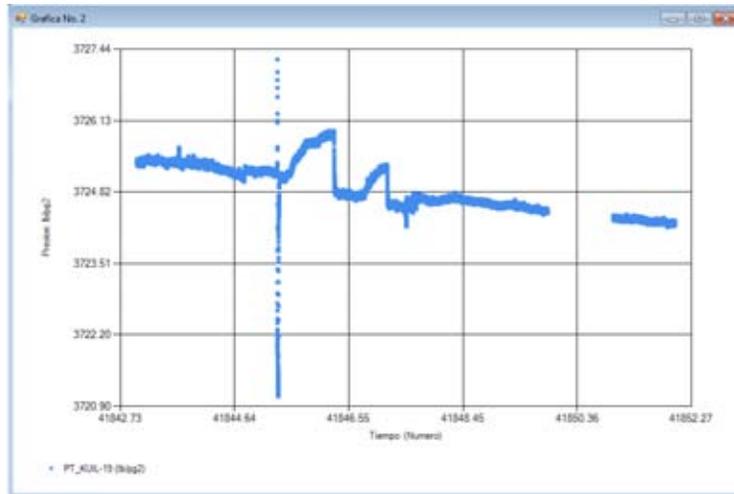


Fig. V.17a: Gráfica de la señal de presión, sin datos anómalos ni errores por fuera de tendencia

La apreciación de los errores de dispersión puede resaltarse haciendo un acercamiento tal como se muestra en la **Fig. V.17b**.

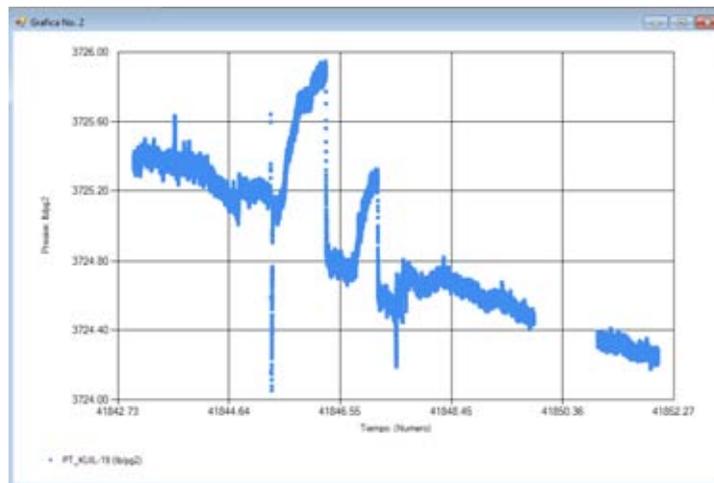


Fig. V.17b: Acercamiento al gráfico de la señal de presión, sin datos anómalos ni errores por fuera de tendencia

V.3.3 Descomposición de la señal de entrada.

Los coeficientes de aproximación, $c_{j,k}$, y de detalle, $d_{j,k}$, para 10 niveles de descomposición y usando la familia Daubechies de orden 5, son mostrados en las Fig. V.18.

15Ord	Coef 15	16Ord	Coef 17	17Ord	Coef 18	18Ord	Coef 19	19Ord	Coef 110	110Ord
21073.91475550	29802.886138995	29802.886138995	42147.75895444	42147.75895444	59605.69312022	59605.69312022	84295.36824185	84295.36824185	119212.6501085	119212.6501085
21073.86256456	0.050181303206	29803.06023303	-0.0842910955	42147.552085173	-0.04001875043	59605.52159429	-0.14248322833	84295.75962261	0.113347845381	119212.75645182
21073.79176727	29803.06023303	29802.88315771	42147.552085173	42147.62281523	59605.52159429	59605.50452073	84295.75962261	84296.64193319	119212.75645182	119212.57140911
21073.96488963	0.007573624849	29802.67864878	0.011969449217	42147.73681828	0.264008490403	59605.52376473	0.128138578216	84296.17751451	0.213361378948	119211.6565541
21073.54660634	29802.88315771	29802.95671502	42147.62281523	42147.79933919	59605.90462073	59606.54287731	84296.64193319	84296.00153754	119212.97140911	119212.2458307
21073.77754814	0.096995633085	29802.88161170	0.002680839001	42147.81244886	-0.15460781621	59606.77340793	0.339987665602	84296.32044864	0.486180657426	119211.90074005
21073.77954531	29802.67864878	29802.854306731	42147.73681828	42147.68811458	59605.92376473	59606.65115172	84296.17751451	84296.12182352	119211.6565541	119211.51048323
21073.68259407	-0.02355754460	29802.96266654	-0.07789043933	42147.55478334	0.449061984169	59606.40570892	-0.264446076647	84295.30170347	-0.43018499937	119211.0524488
21073.71738352	29802.95671502	29802.98693156	42147.79933919	42148.10648135	59606.54287731	59606.33189109	84296.00153754	84295.42323591	119212.2458307	119210.8511829
21073.81260334	-0.08329171657	29802.57675827	0.06486250328	42148.31730230	-0.05167615026	59605.99935457	-0.03415583907	84295.38715860	-0.07940148513	119210.4192963
21073.57125467	29802.88161170	29803.00665793	42147.81244886	42148.21123840	59606.77340793	59606.58478815	84296.32044864	84296.20370899	119211.90074005	119208.78265849
21073.78436013	0.11818553652	29803.04394818	-0.10589269236	42148.077501009	0.251863387449	59606.58141104	0.049704284310	84295.67360960	-0.43165999968	119207.4332546
21073.78097145	29802.854306731	29802.91942773	42147.68811458	42148.67007123	59606.65115172	59606.32151212	84296.12182352	84295.06123353	119211.51048323	119206.0111891
21073.88210888	0.079212573393	29802.95831668	-0.11779585478	42148.241804644	0.080000294938	59606.43834100	0.081828381680	84295.34274595	0.103103343430	119203.9543433
21073.76400212	29802.96266654	29802.81908757	42147.55478334	42148.14123472	59606.40570892	59606.10520702	84295.30170347	84295.07098819	119211.0524488	119205.6395972
21073.83953382	-0.07586411916	29802.88377160	-0.02044437168	42147.95899554	0.142116299557	59605.77041156	0.100582134554	84295.25193439	0.068231961882	119206.2688835
21073.97972646	29802.98693156	29802.85868682	42148.10648135	42148.22297798	59606.33189109	59605.71351010	84295.42323591	84294.53089261	119210.8511829	119206.24934963

Fig. V.18 Coeficientes de aproximación y detalle para 10 niveles de descomposición usando la familia wavelet Daubechies de orden 5

Es importante comentar que los coeficientes de detalle dan la información espectral de los componentes de alta frecuencia (ruido) y los coeficientes de aproximación, la información de baja frecuencia (información gruesa).

V.3.4 Eliminación de información de alta frecuencia

En la siguiente **Fig. V.19** se muestran los resultados de aplicar el criterio del umbral hard a los coeficientes de detalle (contenido de alta frecuencia) para eliminar ruido.

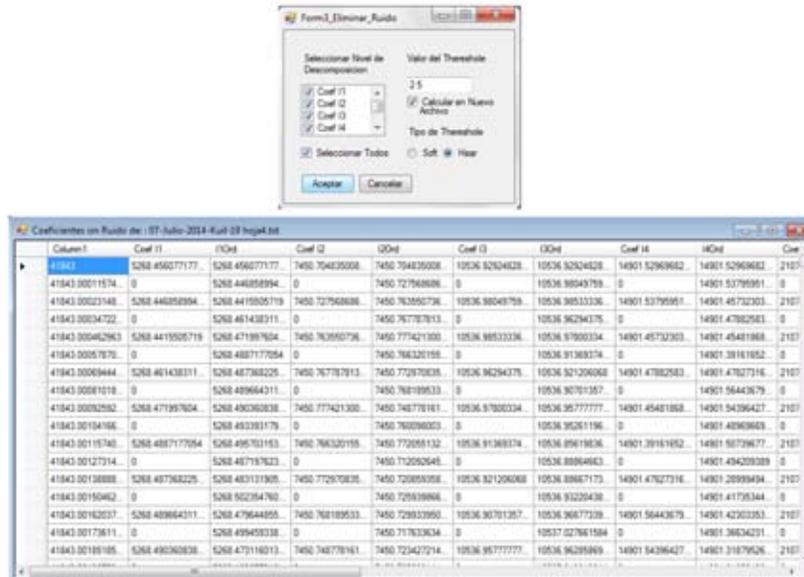


Fig. V.19: Aplicación del criterio de umbral hard

V.3.5 Reconstrucción de la señal depurada

La reconstrucción de la señal aplicando el algoritmo de reconstrucción piramidal visto en el capítulo V, se muestra en la siguiente **Fig. V.20** para cada uno de los niveles de reconstrucción (aplicación de la transformada wavelet inversa discreta).

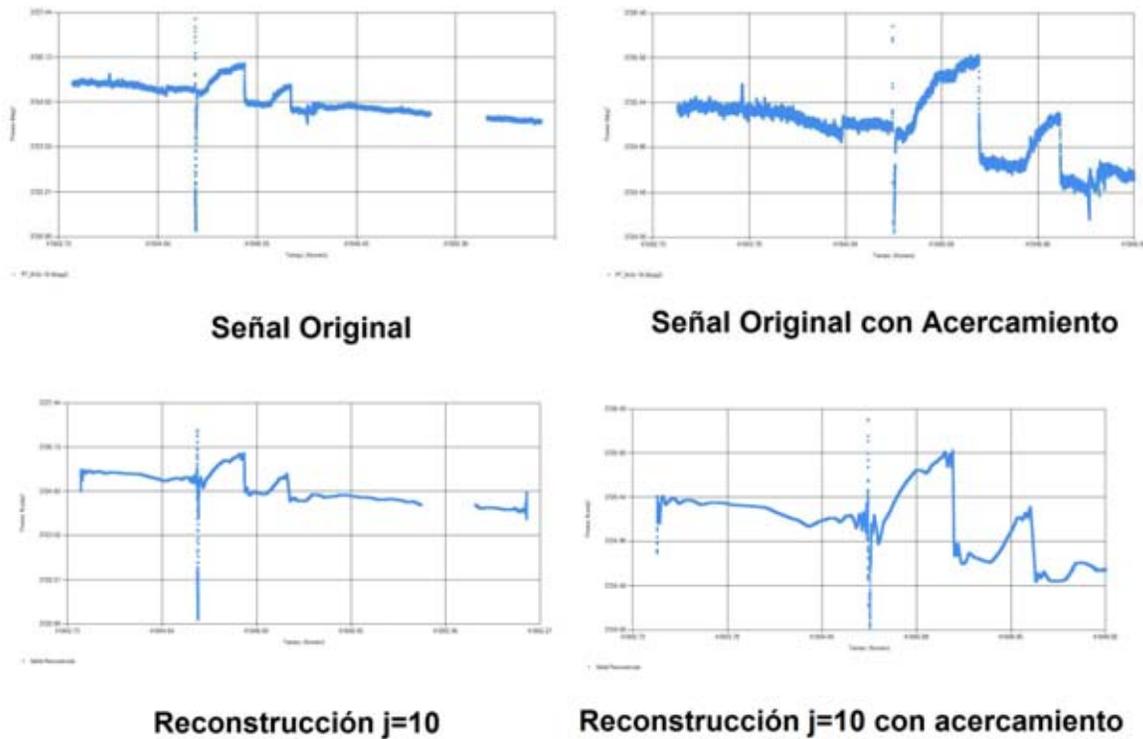


Fig. V.20: Reconstrucción de la señal depurada

V.3.5.1 Deshabilitado del análisis wavelet en saltos grandes de presión

El tratamiento wavelet suaviza una señal incluyendo cambios bruscos de presión sabiendo que estos pueden estar asociados a eventos importantes para el análisis de yacimiento tal como la modificación del gasto de producción. Así, empleando la herramienta para deshabilitar el tratamiento wavelet en picos altos de presión, la señal procesada se muestra en la **Fig. V.21**.

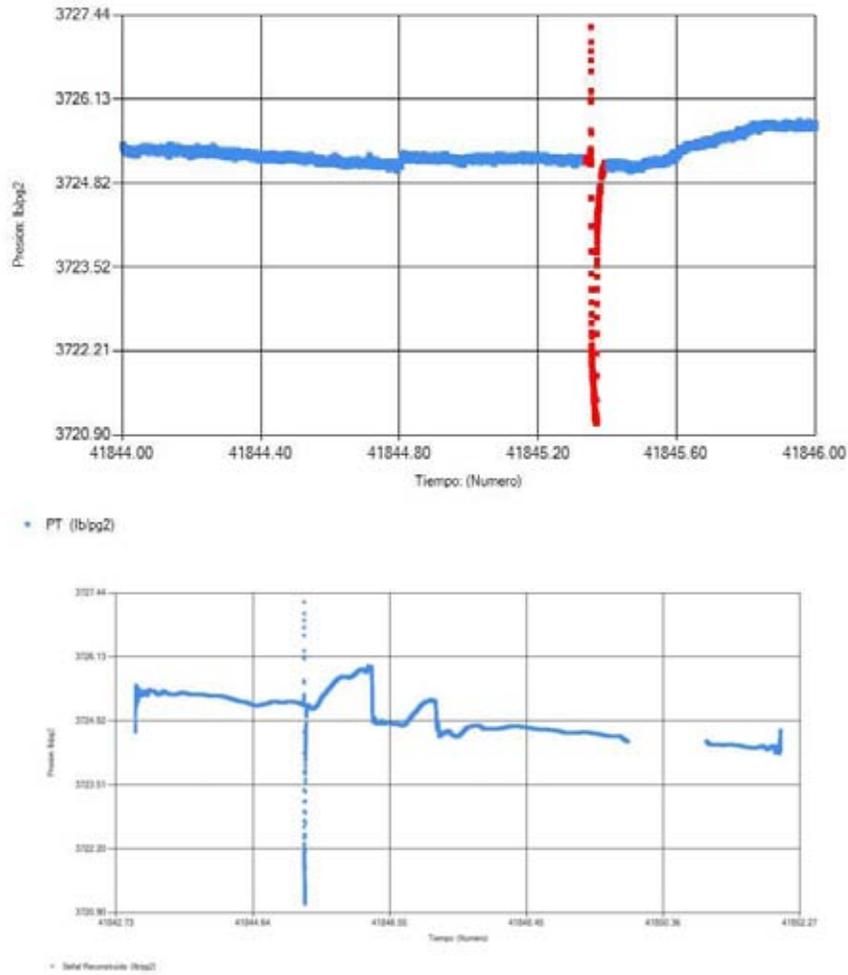


Fig. V.21: Deshabilitado del análisis wavelet en picos altos

V.3.5.2 Reducción de datos de la señal depurada

Aplicando el criterio de Δt máx y ΔP máx para reducir la cantidad de datos sin perder la forma general de la señal procesada se tiene una señal con menos cantidad de datos tal como se muestra en la **Fig. V.22**.

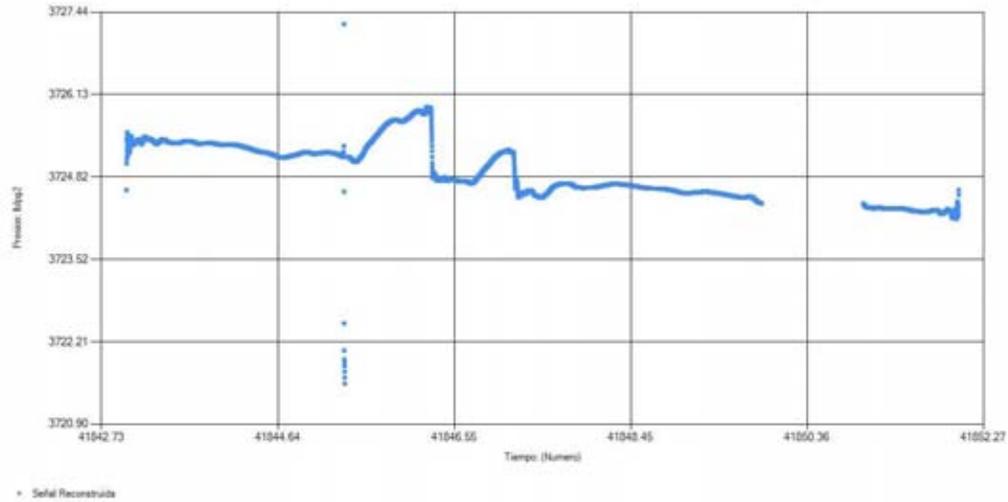


Fig. V.22: Reducción de datos de la señal depurada

V.3.6 Comparación con técnicas de suavizado

En las **Figs. V.23** y **V.24** se muestra la comparación de la señal procesada mediante al análisis wavelet con las técnicas de suavizamiento de la media móvil simple y ponderada, respectivamente.

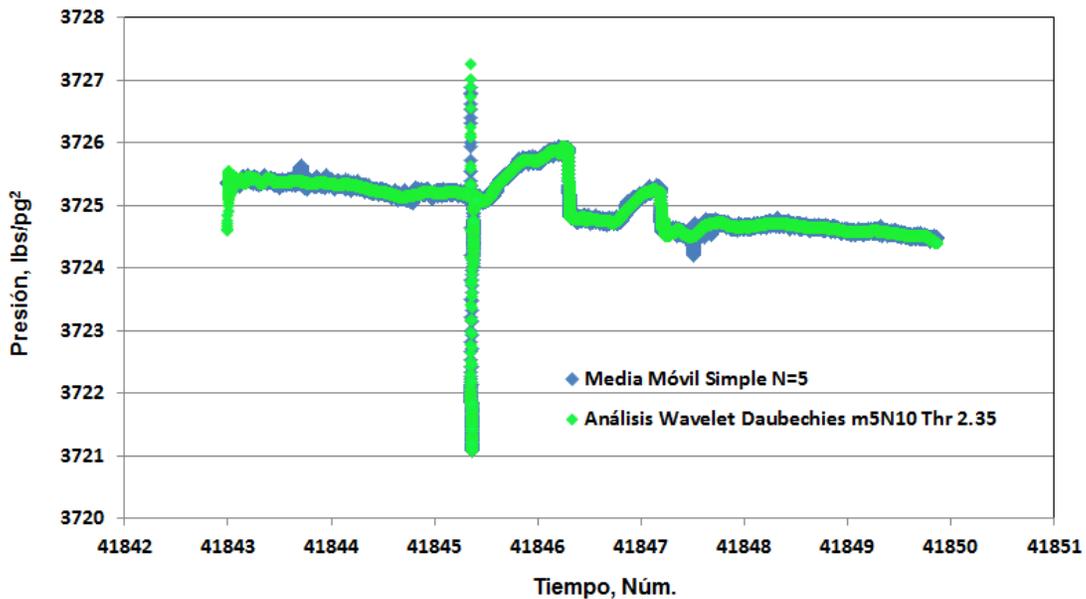


Fig. V.23: Comparación análisis wavelet – media móvil simple

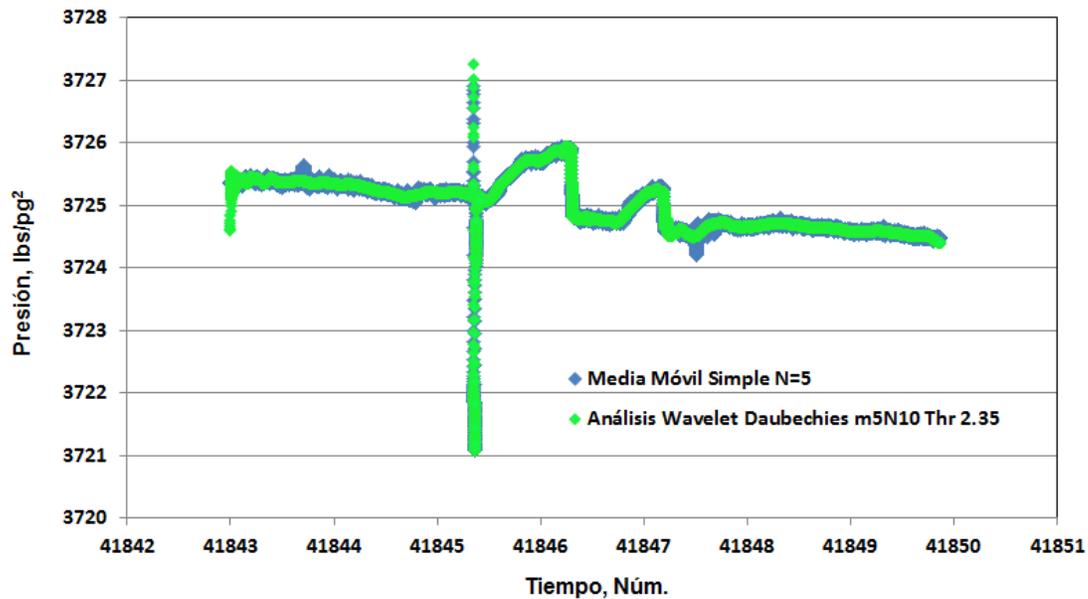


Fig. V.24: Comparación análisis wavelet – media móvil ponderada

V.3.7 Discusión de resultados.

- ✓ El análisis wavelet puede tratar la señal de presión registrada por un sensor permanente de presión a diferentes niveles de resolución, y su eficiencia se puede apreciar en los resultados obtenidos en el caso de campo B.
- ✓ La cantidad de operaciones que se requieren realizar para el proceso de descomposición y reconstrucción depende de la cantidad de datos que constituyen a la señal de presión, por ejemplo en el caso de una señal de 500000 datos se requieren realizar 500000 x 500000 operaciones, lo cual puede resultar limitativo con respecto a la capacidad de cálculo de una computadora comercial convencional.
- ✓ Debido a la delimitación del trabajo de investigación, no se trabajó con las familias wavelet biortogonales para el tratamiento de la señal, por lo cual

este punto se podría considerar como un complemento pendiente de este trabajo de investigación.

- ✓ La alteración de la señal en los extremos de la señal depurada es debido al ajuste que se hace por las condiciones de frontera, sin embargo al ser una extensión periódica de la señal estos podrían ser eliminados.
- ✓ La ventaja del análisis wavelet con respecto a las técnicas de suavizado mediante la media móvil es que el primero es capaz de realizar una separación de los diferentes componentes de frecuencia de una señal registrada por un sensor permanente eliminando aquellas que no son requeridas para realizar análisis de yacimiento, y por su parte mediante las técnicas de suavizado se eliminan datos que podrían corresponder señales de yacimiento.

CAPÍTULO VI

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

VI.1 Estimación del gasto a partir de ΔT

- ✓ Dependiendo de las propiedades del fluido de yacimiento, el gasto de producción es altamente sensible al parámetro ΔT , por lo cual es necesario utilizar un sensor de temperatura de alta resolución para garantizar valores precisos de ΔT .
- ✓ Cuando la profundidad de la herramienta usada para registrar la información base difiera de la profundidad de colocación de un sensor permanente, uno de los parámetros que se deben conocer con precisión, para homologar en profundidad los datos recolectados por ambas fuentes de información, son los gradientes dinámicos de temperatura y presión. Por lo tanto para evitar afectar los datos originales, se recomienda procurar colocar ambos a un mismo nivel de profundidad.
- ✓ Las técnicas de regresión y de interpolación por spline, de acuerdo la teoría, arrojan resultados confiables dentro del rango de los datos ajustados, sin embargo el error es mayor al alejarse de estos; así, cabe resaltar que durante la medición simultánea de gasto y temperatura de fondo, es recomendable realizar mediciones por la mayor cantidad de

diámetros de estrangulador posibles ya que se dispondrán de una mayor cantidad de datos para la generación de las correlaciones, particularmente para el correspondiente a periodos de flujo constante.

- ✓ La confiabilidad de la estimación del gasto de producción con base en el parámetro ΔT , usando los modelos de correlación propuestos, depende de la calidad de la información para correlacionar temperatura-gasto (PLT, aforos), por lo que es recomendable llevar a cabo toma de información completa y de calidad en el momento oportuno.
- ✓ Es importante extender los modelos de correlación para el caso de yacimientos saturados ($P_{yac} < P_b$) y considerando el flujo de calor para tomar en cuenta la presencia de dos o más fases.
- ✓ Tomar registros PLT en todos los pozos de un yacimiento para generar los modelos de correlación y consigo disponer de una herramienta para validar los datos oficiales de producción.

VI.2 Procesamiento de datos de presión.

- ✓ El procesamiento de los datos de presión registrados por un sensor permanente puede ser realizado mediante el análisis wavelet al brindar la opción de separar los componentes de alta y baja frecuencia. Y esto cobra importancia considerando que al mantenerse registrando por perdidos prolongados de tiempo, la información puede estar afectada por eventos propensos a un descontrol, generadores de ruido.
- ✓ El tipo de familias wavelet aplicadas para el procesamiento de los datos de presión registrados por un sensor permanente corresponde al tipo ortonormal, sin embargo existen otros tipos de familias, a saber las

semiortogonales y biortogonales, las cuales poseen algunas características adicionales, por lo cual es recomendable probarlas para evaluar su eficacia.

- ✓ Dependiendo de la cantidad de datos que compongan una señal, el número de operaciones requeridas para efectuar el cálculo de las funciones de aproximación y detalle pueden llegar a ser inmensas, por ejemplo, en el caso de una señal compuesta de 500000 datos el número de operaciones a efectuar son de 500000×500000 , lo cual dificultó la programación del algoritmo piramidal al rebasar la capacidad de memoria de una computadora convencional.
- ✓ El procesamiento de los datos de presión mediante el análisis wavelet tiene la ventaja de separar los componentes de alta y baja frecuencia, a diferentes niveles de resolución, y a diferencia de las técnicas de suavizado mediante la media móvil, indiscriminadamente, pueden eliminar datos para depurar una señal.

ANEXO A

CONCEPTOS BÁSICOS

Campo. Un campo $(\mathbb{F}, +, \cdot)$ es un conjunto \mathbb{F} con dos operaciones, usualmente llamadas adición, $+$, y multiplicación, \cdot , tal que satisfacen las siguientes propiedades, conocidas como axiomas ²⁰:

A1. (Cerradura para la adición) Para todo $x, y \in \mathbb{F}$, $x + y$ está definido y es un elemento de \mathbb{F} .

A2. (Conmutatividad para la adición) $x + y = y + x$, para todo $x, y \in \mathbb{F}$.

A3. (Asociatividad para la adición) $x + (y + z) = (x + y) + z$, para todo $x, y, z \in \mathbb{F}$.

A4. (Existencia de un elemento neutro aditivo) Existe un elemento en \mathbb{F} , denotado por 0 , tal que $x + 0 = x$, para todo $x \in \mathbb{F}$.

A5. (Existencia de un elemento inverso aditivo) Para cada $x \in \mathbb{F}$, existe un elemento en \mathbb{F} , denotado por $-x$, tal que $x + (-x) = 0$.

M1. (Cerradura para la multiplicación) Para todo $x, y \in \mathbb{F}$, $x \cdot y$ está definido y es un elemento de \mathbb{F} .

M2. (Conmutatividad para la multiplicación) $x \cdot y = y \cdot x$, para todo $x, y \in \mathbb{F}$.

M3. (Asociatividad para la multiplicación) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$, para todo $x, y, z \in \mathbb{F}$.

M4. (Existencia de un elemento neutro multiplicativo) Existe un elemento en \mathbb{F} , denotado por 1, tal que $1 \neq 0$ y $x \cdot 1 = x$, para todo $x \in \mathbb{F}$.

M5. (Existencia de un elemento inverso multiplicativo) Para cada $x \in \mathbb{F}$, tal que $x \neq 0$, existe un elemento en \mathbb{F} , denotado por x^{-1} (ó $1/x$), tal que $x \cdot (x^{-1}) = 1$.

D. (Ley Distributiva) $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$, para todo $x, y, z \in \mathbb{F}$.

Espacio Vectorial. Un espacio vectorial real V es un conjunto de objetos llamados vectores, junto con dos operaciones, llamadas suma y multiplicación por un escalar, que satisfacen diez axiomas ²¹, los cuales se dejarán como consulta en alguna referencia. La definición anterior corresponde a un espacio vectorial real; sin embargo es muy fácil definir un espacio vectorial complejo usando números complejos en lugar de números reales.

Soporte compacto de una función f . Es el conjunto cerrado más pequeño fuera del cual f se desvanece idénticamente ^{22, 23}. La notación estándar es

$$\text{supp } f = [0, m]$$

Producto Punto o Escalar. Sea V un espacio vectorial sobre el campo K . Un producto punto en V es una función que asigna a cada par ordenado de elementos $x, y \in V$ un escalar en K , representado por (x, y) ó $\langle x, y \rangle$.

Un ejemplo de producto interno, es el producto usual entre elementos del espacio \mathbb{R}^n . Es decir, si $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ y $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ pertenecen a \mathbb{R}^n , entonces ²³

$$x \cdot y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

define un producto interno en \mathbb{R}^n .

Conjuntos ortogonales. Sea V un espacio vectorial con producto interno y sean $X, Y \subset V$. Se dice que X y Y son ortogonales y se escribe $X \perp Y$ si $v \perp w$ para todo $v \in X$ y todo $w \in Y$, donde

$$v \perp w, \text{ significa que } \langle v, w \rangle = 0.$$

Conjunto Ortogonal. Un conjunto de vectores $S = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_k\}$ es ortogonal si

$$v_i \cdot v_j = 0, \quad i \neq j$$

Conjunto Ortonormal. Un conjunto de vectores $S = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_k\}$ es ortonormal si

$$v_i \cdot v_j = 0, \quad i \neq j$$

$$v_i \cdot v_i = 1$$

Base Ortogonal. Una base ortogonal es un conjunto ortogonal contenido en un espacio vectorial.

Base Ortonormal. Una base ortonormal es un conjunto ortonormal contenido en un espacio vectorial.

Suma Directa. Sean V un espacio vectorial y X, Y subespacios de V . Se dice que V es la suma directa de X y Y y se escribe $V = X \dot{+} Y$ si para cualquier $v \in V$ existe un único par ordenado (v, w) tal que $v \in X$, $w \in Y$ y $v = v + w$, es decir:

$$\forall v \in V \quad \exists (v, w) \in X \times Y, \quad v = v + w$$

Suma Ortogonal. Sea V un espacio vectorial con producto interno y sean X, Y subespacios de V . Se dice que V es suma ortogonal de X y Y y se escribe $V = X \oplus Y$ si

$$V = X + Y \quad \text{y} \quad X \perp Y$$

Secuencia de números reales. Se dice que una secuencia, $\{x_n\}_{n=M}^{\infty}$, es de números reales, si para $M \in \mathbb{Z}$ y $x \in \mathbb{R}$, la secuencia $\{x_n\}_{n=M}^{\infty}$ converge a x , si para todo $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - x| < \epsilon$ para toda $n \in N$. Una secuencia $\{x_n\}_{n=M}^{\infty}$ es convergente si converge a algún $x \in \mathbb{R}$ ³⁰.

Espacio cerrado (cerradura). Sea H un espacio vectorial y E un subconjunto de H . Se dice que E es cerrado si cualquier $\{v_j\}_{j=1}^{\infty}$ es una secuencia de elementos de E que convergen en H para algún $v \in H$, entonces $v \in E$ (es decir, E contiene a todos sus puntos límite) ²⁰.

Subespacio Propio. Cada espacio vectorial V , siempre contendrá dos subespacios llamados triviales: al mismo espacio V y al subespacio $\{0\}$. Cualesquiera subespacios diferentes a los dos anteriores se les llama subespacios propios ²¹.

Combinación Lineal. Dado un espacio vectorial V sobre el campo K , una combinación lineal de elementos de V es una expresión de la forma:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$$

donde

$$a_i \in K, x_i \in V, i = 1, 2, \dots, n$$

Señal. Una señal se puede definir como una función de una o más variables que tienen información acerca de la naturaleza del comportamiento del estado de un fenómeno físico ²⁴.

Señal analógica. Señal que se puede representar en forma de una función continua ²⁵.

Señal digital. Señal que se puede representar mediante muestreos discretos en el tiempo ²⁵.

Función Gaussiana. Es aquella que es expresada como ²³

$$g(t) = e^{-\alpha t^2}$$

donde el parámetro α es usado para controlar el ancho del pulso gaussiano. Un valor grande de α produce un pulso angosto, pero su espectro es amplio sobre el eje de frecuencia.

Función de Autocorrelación. La función de autocorrelación de una señal real, $x(t)$, con energía finita, es una medida de la relación existente entre dos ejemplares temporales de la señal. En términos formales se define como

$$A_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t - \tau)dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau)x(t)dt$$

Función global. Son aquellas que están definidas sobre la línea real $(-\infty, +\infty)$.

Onda. Una onda se define como una función oscilatoria en el tiempo o el espacio, tal como una función seno ²⁶.

Frecuencia. Es el número de veces en las que un evento se repite dentro de un periodo de tiempo dado.

Frecuencia de una onda periódica. Es el número de crestas (o valles o cualquier otro punto de la onda) que pasa un punto determinado en un intervalo de tiempo dado ²⁷.

Frecuencia de muestreo. Es el número de muestras por unidad de tiempo que se toman de una señal continua, para producir una señal discreta durante el proceso necesario para convertirla de analógica en digital.

Teorema de muestreo. Establece que si una señal $f(t)$ está limitada con un ancho de banda de 2Ω , la señal $f(t)$ puede reconstruirse perfectamente a partir de sus muestras discretas en puntos equidistantes. La distancia entre muestras adyacentes, llamado el periodo de muestreo h , no debe exceder π/Ω ²⁸.

Si $h = \pi/\Omega$, la frecuencia de muestreo, $f_s = 1/h = \pi/\Omega$, es llamada **frecuencia de muestreo de Nyquist**. Teóricamente, $f(t)$ siempre puede ser reconstruida perfectamente a partir de sus muestras si $h < \pi/\Omega$.

Aliasing. Ocurrencia de solapamiento espectral (interferencia) debido a que la frecuencia de muestreo es menor a la frecuencia de Nyquist ²⁹.

Filtro. Es un proceso computacional o algoritmo mediante el cual una señal digital (secuencia de muestras) es transformada en una segunda secuencia de muestras o señal digital de salida.

Los filtros son secuencias de números ³⁰.

Filtro Causal. Sea h un filtro. Se dice que h es un filtro causal si $h_k = 0$ para algún entero positivo L y $L > k > 0$ ³⁰. Esto es, los filtros causales, típicamente, tienen la forma

$$h = (\dots, 0, 0, h_0, h_1, h_2, \dots, h_L, 0, 0, \dots)$$

Filtros FIR (Filtros de Respuesta Finita a un Impulso). Sea h un filtro causal y asumiendo $L > 0, L \in \mathbb{Z}$. Si $h_k = 0$ para $k > L$, y $h_0, h_L \neq 0$, entonces se dice que h es un Filtro de Respuesta Finita a un Impulso (FIR)³⁰ y se escribe

$$h = (h_0, h_1, \dots, h_L)$$

Filtros IIR (Filtros de Respuesta Infinita a un Impulso). En este tipo de filtros, la señal discreta de salida del filtro se reinyecta a la entrada del mismo, constituyendo un circuito recursivo.

La ecuación típica de un filtro IIR se expresa de la siguiente manera:

$$y[n] = a_0 \cdot x[n] + a_1 \cdot x[n-1] + a_2 \cdot x[n-2] + \dots + a_N \cdot x[n-N] - b_1 \cdot y[n-1] \\ - b_2 \cdot y[n-2] - b_3 \cdot y[n-3] - \dots - b_M \cdot y[n-M]$$

Esta ecuación expresa que la salida es función de $N + 1$ muestras de la entrada (actual y N anteriores), así como de M muestras anteriores de salida.

El término de filtro es aplicado en el dominio de frecuencia, por lo que para desarrollar cierta terminología, se considerará el grafico de $|H(\omega)|$ mostrado en la figura A1.

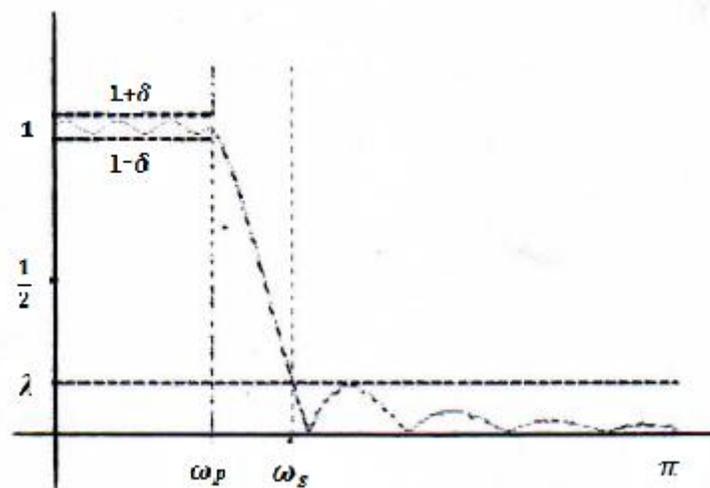


Fig. A1. Espectro $|H(\omega)|$ sobre $[0, \pi]$

Considerando la línea vertical punteada $\omega = \omega_p$ y notando que $1 - \delta \leq |H(\omega)| \leq 1 + \delta$ para $0 \leq \omega \leq \omega_p$. El intervalo $[0, \omega_p]$ es llamado pasabanda. Luego, también notando que para $\omega_s \leq \omega \leq \pi$, se tiene $|H(\omega)| \leq \lambda$. El intervalo $[\omega_p, \pi]$ es llamado alto de banda y λ es referido como la atenuación del alto de banda. Finalmente, se denomina al intervalo $[\omega_p, \omega_s]$ **banda de transición**³⁰.

Filtro pasa bajas (LP)³⁰. Sea h alguna secuencia. Teniendo que $0 < \omega_p \leq \omega_s < \pi$ y suponiendo que existe $0 < \delta < 1/2$, con $1 - \delta \leq |H(\omega)| \leq 1 + \delta$ para $0 \leq \omega \leq \omega_p$ y un $0 < \lambda < 1/2$, así que para $\omega_s \leq \omega \leq \pi$, $|H(\omega)| \leq \lambda$. Entonces a h se le llama filtro pasa bajas.

Si h es un filtro pasa bajas, entonces $|H(\omega)| \approx 1$ para $0 \leq \omega \leq \omega_p$ para algún $0 < \omega_p < \pi$ y $H(\omega) \approx 0$ para $\omega_s \leq \omega \leq \pi$ donde se requiere que $\omega_p \leq \omega_s < \pi$.

Suponiendo que h es un filtro pasa bajas. Entonces

$$|H(0)| = 1 \text{ y } |H(\pi)| = 0$$

Filtro pasa altas (HP)³⁰. Sea g alguna secuencia. Teniendo que $0 < \omega_p \leq \omega_s < \pi$ y suponiendo que existe $0 < \lambda < 1/2$, así que $|G(\omega)| \leq \lambda$ para $0 \leq \omega \leq \omega_p$ y un $0 < \delta < 1/2$, con $1 - \delta \leq |G(\omega)| \leq 1 + \delta$ para $\omega_s \leq \omega \leq \pi$. Entonces a g se le llama filtro **pasa altas**.

Los filtros pasa altas aniquilan porciones de datos localmente constantes y preservan aquellos segmentos de datos que son oscilatorios.

Si g es un filtro pasa altas, entonces $|G(\omega)| \approx 0$ para $0 \leq \omega \leq \omega_p$ para algún $0 < \omega_p < \pi$, $|G(\omega)| \approx 1$ para $\omega_s \leq \omega \leq \pi$ donde se requiere que $\omega_p \leq \omega_s < \pi$.

Suponiendo que g es un filtro pasa altas. Entonces

$$|G(0)| = 0 \text{ y } |G(\pi)| = 1$$

Filtro pasa banda (BP). Son aquellos que dejan pasar las frecuencias que están situadas dentro de la banda de transición, es decir entre dos determinadas frecuencias.

Banco de Filtros³⁰. El acoplamiento de filtros pasa bajas, para proveer una aproximación de las porciones localmente constantes de una señal original, con filtros pasa altas para representar la diferencia entre la señal original y la aproximación del filtro pasa bajas, es denominado **banco de filtros**.

ANEXO B

FUNDAMENTOS DEL ANÁLISIS

WAVELET

B.1 Del Análisis de Fourier al Análisis Wavelet.

Denotando con $L^2(0,2\pi)$ a la colección de todas las funciones medibles f sobre el intervalo $(0,2\pi)$, cuya definición es:

$$\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt < \infty .$$

Sí f es una función continua a trozos con un número finito de discontinuidades de salto en $[0,2\pi]$, entonces se puede asegurar la existencia de la integral^{22, 30}. Y por otro lado, siempre se asumirá que las funciones en $L^2(0,2\pi)$ se extienden periódicamente en la línea real

$$\mathbb{R} := (-\infty, \infty),$$

es decir: $f(t) = f(t - 2\pi)$ para toda t . Por lo tanto, la colección $L^2(0,2\pi)$ a menudo es llamada **espacio de las funciones periódicas- 2π cuadrático integrables**.

Cualquier f en $L^2(0,2\pi)$ tiene una representación en series de Fourier:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{int}, \dots\dots\dots (B.1)$$

donde los coeficientes C_n , denominados **coeficientes de Fourier de f** , están definidos por:

$$C_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt \dots\dots\dots (B.2)$$

Es conveniente resaltar que la convergencia de la serie en (B.1) está en $L^2(0,2\pi)$, es decir:

$$\lim_{M,N \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \left| f(t) - \sum_{n=-M}^N C_n e^{int} \right|^2 dt = 0$$

Hay dos características distintivas de la representación de una función $f \in L^2(0,2\pi)$ en series de Fourier (B.1). La primera, como se puede apreciar, es que f es descompuesta en una suma infinita de componentes mutuamente ortogonales $g_n(t) := C_n e^{int}$, donde ortogonalidad significa que:

$$\langle g_m, g_n \rangle^* = 0, \quad \text{para toda } m \neq n, \dots\dots\dots (B.3)$$

con $\langle g_m, g_n \rangle^*$ en (B.3) denotando al “*producto interior*” de funciones definido por:

$$\langle g_m, g_n \rangle^* := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g_m(t) \overline{g_n(t)} dt \dots\dots\dots (B.4)$$

El que la ecuación (B.3) se mantenga es consecuencia del importante, y a la vez sencillo hecho de que:

$$w_n(t) := e^{int}, \quad n = \dots, -1, 0, 1, \dots, \dots \dots \dots (B.5)$$

forma una base ortogonal (o.n.) de $L^2(0, 2\pi)$. La segunda característica distintiva de la representación en series de Fourier (B.1) es que la base o.n. $\{w_n\}$ es generada por “*dilatación*” de una función única:

$$w(t) := e^{it}; \dots \dots \dots (B.6)$$

esto es, $w_n(t) = w(nt)$ para todo n entero, lo cual es llamado *dilatación integral*.

Resumiendo lo anterior se puede afirmar que cualquier función periódica- 2π cuadrático integrable, es generada por una “*superposición*” de dilataciones integrales de la función básica $w(t) = e^{it}$.

Y también se puede remarcar que a partir de la propiedad de ortogonalidad de $\{w_n\}$, la representación en series de Fourier (B.1) satisface la llamada *Identidad de Parseval*²²:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2 \dots \dots \dots (B.7)$$

De tal forma que denotando con ℓ^2 al espacio de todas las secuencias de modulo cuadrado sumable bi-infinito; esto es, $\{C_n\} \in \ell^2$ si y solo si

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2 < \infty.$$

Por lo tanto, si la raíz cuadrada del lado izquierdo de (B.7) es usada como la “*norma*” para la medición de las funciones en $L^2(0, 2\pi)$, y similarmente, la raíz cuadrada del lado derecho de (B.7) es usada como la *norma* para ℓ^2 , entonces el

espacio de funciones $L^2(0,2\pi)$ y el espacio de las secuencias ℓ^2 son “isométricos” uno a otro. Retornando a la observación mencionada arriba sobre la representación en series de Fourier (B.1), también se puede decir que cualquier función periódica- 2π cuadrático integrable es una combinación lineal- ℓ^2 de dilataciones integrables de la función básica $w(t) = e^{it}$.

Recalcando que la función básica

$$w(t) = e^{it} = \cos t + i \operatorname{sen} t,$$

que es una “onda sinusoidal”, es la única función requerida para generar todas las funciones periódicas- 2π cuadrático sumables. Para cualquier entero n con un valor absoluto grande, la onda $w_n(t) = w(nt)$ tiene “alta frecuencia”, y para n con valor absoluto pequeño, la onda w_n tiene “baja frecuencia”. Así, cada función en $L^2(0,2\pi)$ está compuesta de ondas con varias frecuencias.

Ahora, considerando a $L^2(\mathbb{R})$ como el espacio de las funciones medibles f , definidas sobre la línea real \mathbb{R} , que satisfacen

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty.$$

Es claro que los dos espacios de funciones $L^2(0,2\pi)$ y $L^2(\mathbb{R})$ son bastante diferentes. En el caso del espacio $L^2(\mathbb{R})$, puesto que cada función debe “decaer” a cero en $\pm\infty$ (el valor promedio local), las funciones sinusoidales (ondas) w_n no entran en el espacio $L^2(\mathbb{R})$. De hecho, si se buscan “ondas” que generen $L^2(\mathbb{R})$, estas deben decaer a cero en $\pm\infty$; y para todo propósito práctico, el decaimiento debe ser muy rápido. Esto es, se deben buscar ondas pequeñas, o “wavelets”, para generar $L^2(\mathbb{R})$. Y al igual que en la situación del espacio $L^2(0,2\pi)$, donde una simple función $w(t) = e^{it}$ genera el espacio entero, también es preferible tener una simple función, es decir ψ , que genere todo el espacio $L^2(\mathbb{R})$. Pero dado que

A lo largo del presente trabajo de investigación, se usara la siguiente notación para el producto interno y la norma del espacio $L^2(\mathbb{R})$, respectivamente:

$$\langle f, g \rangle := \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{g(t)} dt; \dots \dots \dots (B.9)$$

$$\| f \| := \langle f, f \rangle^{1/2} \dots \dots \dots (B.10)$$

donde $f, g \in L^2(\mathbb{R})$. Nótese que para cualquier $j, k \in \mathbb{Z}$, se tiene

$$\| f(2^j \cdot -k) \| = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |f(2^j t - k)|^2 dt \right\}^{1/2} = 2^{-j/2} \| f \|$$

Por lo tanto, si una función $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ tiene longitud unitaria (norma), entonces todas las funciones $\psi_{j,k}$, definidas por

$$\psi_{j,k}(t) := 2^{j/2}\psi(2^j t - k), \quad j, k \in \mathbb{Z}, \dots \dots \dots (B.11)$$

también tienen longitud unitaria; esto es,

$$\| \psi_{j,k} \| := \| \psi \| = 1, \quad j, k \in \mathbb{Z} \dots \dots \dots (B.12)$$

La siguiente notación (símbolo de Kronecker):

$$\delta_{j,k} := \begin{cases} 1 & \text{para } j = k; \\ 0 & \text{para } j \neq k, \end{cases} \dots \dots \dots (B.13)$$

definido sobre $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, se usara frecuentemente.

Una función $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ es llamada una **wavelet ortogonal** (o wavelet o.n.), si la familia $\{\psi_{j,k}\}$, como se definió en (B.11), forma una base ortogonal de $L^2(\mathbb{R})$; esto es,

$$\langle \psi_{j,k}, \psi_{\ell,m} \rangle = \delta_{j,\ell} \cdot \delta_{k,m}, \quad j, k, \ell, m \in \mathbb{Z}, \dots \dots \dots (B.14)$$

y cada $f \in L^2(\mathbb{R})$ puede escribirse como

$$f(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_{j,k} \psi_{j,k}(t), \dots \dots \dots (B.15)$$

donde la convergencia de la serie en (B.15) está en $L^2(\mathbb{R})$, es decir:

$$\lim_{M_1, N_1, M_2, N_2 \rightarrow \infty} \left\| f - \sum_{j=-M_2}^{N_2} \sum_{k=-M_1}^{N_1} C_{j,k} \psi_{j,k} \right\| = 0$$

El ejemplo más simple de una wavelet ortogonal es la función Haar, ψ_H , definida por

$$\psi_H(t) := \begin{cases} 1 & \text{para } 0 \leq t < 1/2 \\ -1 & \text{para } 1/2 \leq t < 1 \dots \dots \dots (IV.16) \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

La representación en serie de una función f , como en (B.15), es llamada **serie wavelet**. Análogo a la noción de coeficientes de Fourier en (B.2), los **coeficientes wavelet**, $C_{j,k}$, están dados por

$$C_{j,k} = \langle f, \psi_{j,k} \rangle \dots \dots \dots (B.17)$$

Esto es, definiendo una transformada integral W_ψ sobre $L^2(\mathbb{R})$ dada por

$$(W_\psi f)(b, a) := |a|^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt, \quad f \in L^2(\mathbb{R}), \dots \dots \dots (B.18)$$

entonces los coeficientes wavelet en (B.15) y (B.17) se convierten en

$$C_{j,k} = (W_\psi f)\left(\frac{k}{2^j}, \frac{1}{2^j}\right), \dots \dots \dots (B.19)$$

La transformación lineal W_ψ es llamada “transformación integral wavelet” relativa a la “wavelet básica” ψ . Por lo tanto, el (j, k) –ésimo coeficiente wavelet de f está dado por la transformación integral wavelet de f evaluada en la posición diádica $b = k/2^j$ con dilatación binaria $a = 2^{-j}$, donde la misma wavelet ortogonal ψ es usada para generar la serie wavelet (B.15) y definir la transformación integral wavelet (B.18).

Dicha transformada integral wavelet mejora considerablemente el potencial de la transformada de Fourier (integral), \mathcal{F} , definida por^{22, 31}

$$(\mathcal{F}f)(y) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iyx} f(x) dx, \quad f \in L^2(\mathbb{R}). \dots \dots \dots (B.20)$$

Como bien se sabe, la transformada de Fourier es el otro componente importante del análisis de Fourier. Por lo tanto, es interesante notar que mientras los dos componentes del análisis de Fourier, a saber: las series de Fourier y la transformada de Fourier, están básicamente relacionados; los dos componentes correspondientes del análisis wavelet, a saber: las series wavelet (B.15) y la transformada integral wavelet (B.18), tienen una íntima relación como se describió en (B.19).

B.2 Análisis Tiempo – Frecuencia y la Transformada Integral Wavelet

B.2.1 Análisis Tiempo - Frecuencia

La transformada de Fourier, \mathcal{F} , definida en (B.20) no solamente es una herramienta matemática muy poderosa, sino que también tiene una interpretación física en aplicaciones. Por ejemplo, si una función $f \in L^2(\mathbb{R})$ es considerada una señal analógica con energía finita, que es dada por su norma $\|f\|$, entonces la transformada de Fourier

$$\hat{f}(\omega) := (\mathcal{F}f)(\omega) \dots \dots \dots (B.21)$$

de f representa el espectro de la señal. Las señales analógicas están definidas en el dominio-tiempo, y la información espectral de esas señales está dado en el dominio-frecuencia. Para facilitar el desarrollo teórico, se permitirán las frecuencias negativas por el momento. Por lo tanto, los dominios del tiempo y la frecuencia están en la línea real \mathbb{R} . Análogo a la Identidad de Parseval para las series de Fourier, la Identidad de Parseval que describe la relación entre funciones de $L^2(\mathbb{R})$ y su transformada de Fourier, está dada por ^{22, 31}

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle, \quad f, g \in L^2(\mathbb{R}). \dots \dots \dots (B.22)$$

donde es usada la notación de producto interior introducida en (B.9). Como una consecuencia de (B.22), se observa que la energía de una señal analógica es directamente proporcional a su contenido espectral; esto es,

$$\|f\| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|\hat{f}\|, \quad f \in L^2(\mathbb{R}) \dots \dots \dots (B.23)$$

Sin embargo, la formula

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-it\omega} dt \dots\dots\dots (B.24)$$

de la transformada de Fourier, aunque incuestionablemente es el método más versátil para extraer la información espectral de un señal, por si sola, es sumamente inadecuada para otras aplicaciones. En primer lugar, observando la definición (B.24), la integración no puede llevarse a cabo hasta que se conozca la forma entera de la señal $f(t)$ en toda la línea real $(-\infty, \infty)$. Esto es porque las funciones $e^{-i\omega t}$ ó $\cos \omega t$ y $\sin \omega t$ son *funciones globales*, lo cual significa que al presentarse una pequeña perturbación de la función $f(t)$ en cualquier punto a lo largo del eje del tiempo, generará una influencia en cada punto sobre el eje ω , y viceversa²⁸.

Otra observación que se debe destacar sobre la transformada de Fourier es que la integral puede ser evaluada únicamente a una frecuencia en un tiempo. Aunque hay algoritmos rápidos para calcular la transformada digitalmente, no se puede llevar a cabo en tiempo real. Además, la fórmula (B.24) no siempre refleja el contenido de frecuencia local, es decir, el espectro de Fourier no da información acerca de la evolución de frecuencias en el tiempo. En este sentido, debido a que la frecuencia de una señal es directamente proporcional al número de ciclos por unidad de tiempo, se desprende que para información espectral de alta-frecuencia, el intervalo de tiempo debe ser relativamente pequeño para dar una mejor exactitud, y para información espectral de baja-frecuencia, el intervalo de tiempo debe ser relativamente amplio para dar información completa. En otras palabras, es importante tener una ventana tiempo-frecuencia flexible que automáticamente se contraiga a alta “frecuencia-central” y se amplíe a baja frecuencia-central. Afortunadamente, la transformada integral Wavelet, W_{ψ} , relativa a alguna “wavelet básica” ψ , introducida en (B.18), tiene esta capacidad de comprimirse y expandirse.

Para ser más específico, tanto ψ y su transformada de Fourier $\hat{\psi}$ deben tener una decadencia suficientemente rápida para que puedan ser usadas como “funciones ventana”. Una función, ϕ , en $L^2(\mathbb{R})$, califica como función ventana, siempre y cuando sea posible identificar su “centro” y “ancho”, lo cual es definido a continuación.

B.2.1.1 Función Ventana

Una función no trivial $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ es llamada una función ventana si $t\phi(t)$ también está en $L^2(\mathbb{R})$. El **centro** t^* y **radio** Δ_ϕ de una función ventana ϕ están definidos como ²²

$$t^* := \frac{1}{\|\phi\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} t|\phi(t)|^2 dt \quad \dots \dots \dots (B.25)$$

y

$$\Delta_\phi := \frac{1}{\|\phi\|} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} (t - t^*)^2 |\phi(t)|^2 dt \right\}^{1/2}, \dots \dots \dots (B.26)$$

respectivamente. El **ancho de la función ventana** es definido por $2\Delta_\phi$.

Suponiendo que $\phi(t) \in L^2(\mathbb{R})$ es una función ventana real-valuada. Entonces el producto $f(t)\phi(t-b) := f_b(t)$ contendrá la información de $f(t)$ cercana a $t = b$. En particular, si $\phi(t) = \mathcal{X}_{[-\tau, \tau]}(t)$, como se muestra en la **Fig. B1**, entonces

$$f_b(t) = \begin{cases} f(t), & t \in [b - \tau, b + \tau] \\ 0, & \text{en cualquier otro caso} \end{cases} \quad \dots \dots \dots (B.27)$$

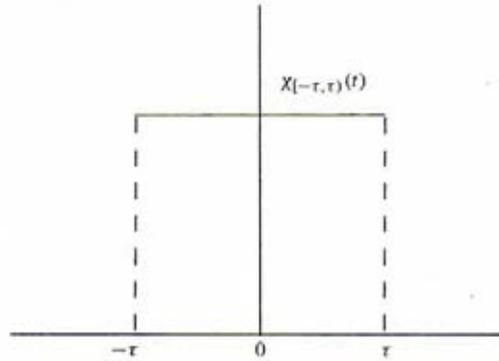


Fig. B1: Función característica (Fuente: [28] Goswami, J. C. y Chan, A. K. 1999. *Fundamentals of Wavelets: Theory, Algorithms, and Applications*. New York: John Wiley & Sons, Inc.)

Cambiando el parámetro b se puede deslizar la función ventana a lo largo del eje del tiempo para analizar el comportamiento local de la función $f(t)$ en diferentes intervalos.

La función $\phi(t)$ descrita arriba con Δ_ϕ finito es llamada una **ventana tiempo**. Similarmente se puede tener una **ventana frecuencia** $\hat{\phi}(\omega)$ con centro ω^* y radio $\Delta_{\hat{\phi}}$ definidos análogamente a (B.25) y (B.26) como ²⁸

$$\omega^* := \frac{1}{\|\hat{\phi}\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} \omega |\hat{\phi}(\omega)|^2 d\omega, \dots\dots\dots (B.28)$$

$$\Delta_{\hat{\phi}} := \frac{1}{\|\hat{\phi}\|} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} (\omega - \omega^*)^2 |\hat{\phi}(\omega)|^2 d\omega \right\}^{1/2} \dots\dots\dots (B.29)$$

Como es sabido, teóricamente una función no puede estar limitada en tiempo y frecuencia simultáneamente. Sin embargo, se puede tener $\phi(t)$ de tal manera que tanto Δ_ϕ y $\Delta_{\hat{\phi}}$ sean finitos; en tal caso la función $\phi(t)$ es llamada una **ventana tiempo-frecuencia**. Se podría verificar que para la ventana de la Fig. B1,

$\omega^* = 0$ y $\Delta_\phi = \infty$. Esta ventana (ideal) es la mejor ventana tiempo pero la peor (inadecuada) ventana frecuencia.

Un aspecto importante de la ventana tiempo-frecuencia es el producto de los radios tiempo-frecuencia, $\Delta_\phi \Delta_{\hat{\phi}}$, el cual está delimitado por el principio de incertidumbre y es esta dado por

$$\Delta_\phi \Delta_{\hat{\phi}} \geq \frac{1}{2},$$

donde la igualdad se sostiene únicamente cuando ϕ es del tipo Gaussiano ²⁸.

B.2.2 Transformada de Corto Tiempo de Fourier (STFT)

En la sección anterior se indicó que es posible obtener el contenido de frecuencia aproximado de una señal $f(t)$ en la vecindad de alguna localización deseada en el tiempo, es decir $t = b$, primeramente ventaneando la función mediante una función ventana apropiada $\phi(t)$ para producir la función ventaneada $f_b(t) = f(t)\phi(t - b)$ y entonces tomando la transformada de Fourier de $f_b(t)$. Esta técnica es referida como la transformada de corto tiempo de Fourier (STFT). Formalmente, se puede definir la STFT de una función $f(t)$ con respecto a la función ventana $\phi(t)$ evaluada en la localización (b, ξ) sobre el plano tiempo-frecuencia como

$$G_\phi f(b, \xi) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{\phi_{b, \xi}(t)} dt \quad \dots \dots \dots (B.30)$$

donde

$$\phi_{b, \xi}(t) := \phi(t - b) e^{i\xi t}. \quad \dots \dots \dots (B.31)$$

La función ventana $\phi(t)$ en (B.30) puede ser compleja y satisface la condición

$$\hat{\phi}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) dt \neq 0.$$

En otras palabras, $\hat{\phi}(\omega)$ se comporta como un filtro pasa bajas. Esto es, el espectro es diferente de cero en $\omega = 0$.

A diferencia del caso de la transformada de Fourier, en donde la función $f(t)$ debe ser conocida en el eje entero del tiempo antes de que su componente espectral, a cualquier frecuencia, pueda ser computada, la STFT necesita conocer $f(t)$ únicamente en el intervalo en el cual $\phi(t - b)$ es diferente de cero. En otras palabras, $G_{\phi}f(b, \xi)$ da el espectro aproximado de f cerca de $t = b$.

Si la función ventana $\phi_{b,\xi}(t)$ en (B.30) es considerada como la función que modula al senoide $e^{-i\xi t}$, la STFT puede ser escrita como

$$G_{\phi}f(b, \xi) = \langle f(t), \phi(t - b)e^{i\xi t} \rangle. \dots \dots \dots (B.32)$$

La función $\phi_{b,\xi}(t) = \phi(t - b)e^{i\xi t}$ se comporta como un paquete de ondas, donde la onda sinusoidal oscila dentro de la función envolvente $\phi(t)$. Adicionalmente, (B.31) indica que cada uno de estos paquetes de ondas se comporta como una base de funciones, así que la STFT puede ser interpretada como las componentes de la función $f(t)$ con respecto a esta base en el plano tiempo-frecuencia.

B.2.2.1 La Transformada de Gabor

La transformada de Gabor fue desarrollada por D. Gabor, quien uso la función Gaussiana

$$g_{\alpha}(t) = \frac{1}{2\pi\alpha} = \alpha e^{-t^2/4\alpha}, \quad \alpha > 0 \quad \dots\dots\dots (B.33)$$

como la función ventana. La transformada de Fourier de (B.33) es

$$\hat{g}_{\alpha}(\omega) = e^{-\alpha\omega^2}, \quad \alpha > 0. \quad \dots\dots\dots (B.34)$$

El centro y radio de la ventana $g_{\alpha}(t)$ pueden ser calculadas usando las formulas de la Sección B.4.1.1 obteniendo $t^* = \omega^* = 0$, $\Delta_{g_{\alpha}} = \sqrt{\alpha}$, y $\Delta_{\hat{g}_{\alpha}} = 1/2\sqrt{\alpha}$. Nótese que $\Delta_{g_{\alpha}}\Delta_{\hat{g}_{\alpha}} = 0.5$ alcanza el límite inferior del principio de incertidumbre.

B.2.2.2 Ventana Tiempo – Frecuencia

Considerando la función ventana $\phi(t)$ en (B.30). Si t^* es el centro y Δ_{ϕ} el radio de la función ventana, entonces (B.30) da la información de la función $f(t)$ en la ventana tiempo

$$[t^* + b - \Delta_{\phi}, t^* + b + \Delta_{\phi}]. \quad \dots\dots\dots (B.35)$$

Para derivar la correspondiente ventana en el dominio de la frecuencia, aplicando la identidad de Parseval (B.22) a (B.30). Se tiene:

$$\begin{aligned} G_{\phi}f(b, \xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{\phi(t-b)} e^{-i\xi t} dt \quad \dots\dots\dots (B.36) \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{-i\xi t} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\overline{\hat{\phi}(\omega-\xi)} e^{ib\omega} d\omega \end{aligned}$$

$$= e^{-i\xi b} \left[\hat{f}(\omega) \overline{\hat{\phi}(\omega - \xi)} \right]^V (b), \quad \dots \dots \dots (B.37)$$

donde el símbolo "V" representa a la transformada inversa de Fourier. Obsérvese que (B.36) tiene una forma similar a (B.30). Si ω^* es el centro y $\Delta_{\hat{\phi}}$ es el radio de la función ventana $\hat{\phi}(\omega)$, entonces (B.36) da información acerca de la función $\hat{f}(\omega)$ en el intervalo

$$[\omega^* + \xi - \Delta_{\hat{\phi}}, \omega^* + \xi + \Delta_{\hat{\phi}}]. \quad \dots \dots \dots (B.38)$$

Debido a la similitud de las representaciones en (B.30) y (B.36), la STFT da información acerca de la función $f(t)$ en la ventana tiempo-frecuencia:

$$[t^* + b - \Delta_{\phi}, t^* + b + \Delta_{\phi}] \times [\omega^* + \xi - \Delta_{\hat{\phi}}, \omega^* + \xi + \Delta_{\hat{\phi}}] \quad \dots \dots \dots (B.39)$$

La **Fig. B2** representa gráficamente la noción de la ventana tiempo-frecuencia dada por (B.38). Aquí se ha asumido que $t^* = \omega^* = 0$.

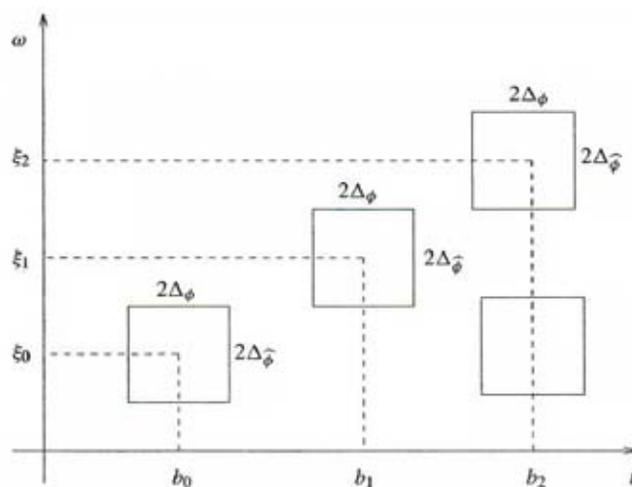


Fig. B2: Ventana tiempo-frecuencia para la transformada de corto tiempo de Fourier (Fuente: [28] Goswami, J. C. y Chan, A. K. 1999. *Fundamentals of Wavelets: Theory, Algorithms, and Applications*. New York: John Wiley & Sons, Inc.)

En concreto, se puede concluir que el ancho de la ventana tiempo-frecuencia formada para observar el espectro en todas las frecuencias se mantiene fijo, tanto para la STFT como para la transformada Gabor, lo que hace que su aplicación para el estudio de señales con frecuencias altas y bajas, este restringida.

B.2.3 Transformada Integral Wavelet

El término **transformada wavelet continúa** (CWT) y **transformada integral wavelet** (IWT) pueden ser usados indistintamente. El desarrollo de la transformada wavelet discreta (DWT) y de las series wavelet (WS), abordados más adelante, permiten que el método wavelet sea más poderoso para el procesamiento de señales. Para clarificar el punto anterior, démonos cuenta que los radios Δ_ϕ y $\Delta_{\hat{\phi}}$ de la función ventana para la STFT no dependen de la localización en el plano $t - \omega$. De hecho, si se selecciona $\phi(t) = g_\alpha(t)$ como en la transformada Gabor (ver Sección B.3.2.1), una vez que se fija α , así que Δ_{g_α} y $\Delta_{\hat{g}_\alpha}$, son independientes de la localización de la ventana en el plano $t - \omega$. Una ventana tiempo-frecuencia típica de la STFT ha sido mostrada en la Fig. B2. Una vez que la función ventana es seleccionada, como ya se discutió, la resolución tiempo-frecuencia es fija a lo largo del procesamiento. Para entender las implicaciones de tener una resolución fija, consideremos a la señal de un sonido agudo mostrado en la **Fig. B3**, en la cual la frecuencia de la señal incrementa con el tiempo.

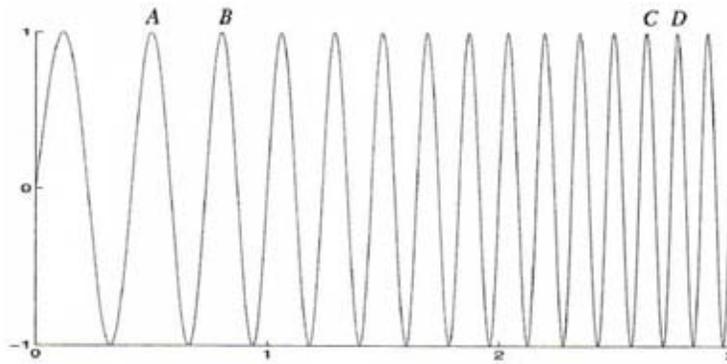


Fig. B3: Señal de un sonido agudo con frecuencia cambiante linealmente en el tiempo (Fuente: [28] Goswami, J. C. y Chan, A. K. 1999. *Fundamentals of Wavelets: Theory, Algorithms, and Applications*. New York: John Wiley & Sons, Inc.)

Si se seleccionan los parámetros de la función ventana $\phi(t)$ [α en el caso de $g_\alpha(t)$] tal que Δ_ϕ es aproximadamente igual a AB, la STFT computada usando (B.30) podrá resolver mejor la porción de baja frecuencia de la señal, mientras que será de pobre resolución en la porción de alta frecuencia. Por otro lado, si Δ_ϕ es aproximadamente igual a CD, la baja frecuencia no será resuelta apropiadamente. Obsérvese que si Δ_ϕ es muy pequeño, $\Delta_{\hat{f}}$ será proporcionalmente grande, y por lo tanto la parte de baja frecuencia será borrosa.

Así, el objetivo es idear un método que pueda dar una buena resolución tiempo-frecuencia en alguna localización arbitraria del plano $t - \omega$. En otras palabras, se debe tener una función cuyo radio incremente en tiempo (reducción en frecuencia) mientras se resuelve el contenido de baja frecuencia, y decrezca en tiempo (incremento en frecuencia) mientras se resuelve el contenido de alta frecuencia de la señal. Este objetivo conduce al desarrollo de las funciones wavelet $\psi(t)$.

La transformada integral wavelet de una función $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$ con respecto a algún análisis wavelet ψ es definida como

$$W_{\psi}f(b, a) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{\psi_{b,a}(t)}dt, \quad \dots\dots\dots (B.40)$$

donde

$$\psi_{b,a}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}}\psi\frac{t-b}{a}, \quad a > 0. \quad \dots\dots\dots (B.41)$$

Los parámetros b y a son llamados parámetros de **traslación** y **dilatación**, respectivamente. Es incluido el factor de normalización $a^{-1/2}$ así que $\|\psi_{b,a}\| = \|\psi\|$.

Para que ψ sea una función ventana y se pueda recuperar $f(t)$ a partir de su transformada wavelet inversa (IWT), $\psi(t)$ debe satisfacer la siguiente condición 11, 22, 28, 32 .

$$\hat{\psi}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t)dt = 0. \quad \dots\dots\dots (B.42)$$

Adicionalmente, para satisfacer (B.42), una wavelet es construida de modo que tenga un orden superior de momentos nulos ²⁸. Se dice que una wavelet tiene momentos nulos de orden m si

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^p \psi(t)dt = 0, \quad p = 0, \dots, m - 1. \quad \dots\dots\dots (B.43)$$

Estrictamente hablando, la transformada integral wavelet provee análisis tiempo-escala y no análisis tiempo-frecuencia. Sin embargo, por la apropiada transformación de escala a frecuencia (discutida a continuación), se puede obtener un análisis muy cercano al análisis tiempo-frecuencia. Obsérvese que en (B.41), reduciendo a , el soporte de $\psi_{b,a}$ es reducido en tiempo y por lo tanto cubre un rango grande de frecuencia, y viceversa. Por consiguiente, $1/a$ es una medida

de la frecuencia. El parámetro b , por otro lado, indica la localización de la ventana wavelet a lo largo del eje del tiempo. Así, cambiando (b, a) , $W_\psi f$ puede ser computada sobre el plano entero tiempo-frecuencia. Además, debido a la condición (B.42), se concluye que toda wavelet debe oscilar, dándole la naturaleza de pequeñas ondas y de ahí el nombre de wavelets. Recordando que semejante oscilación no es requerida para la función ventana en la STFT. Comparando con la definición de STFT en (B.30), la wavelet $\psi_{b,a}(t)$ toma el lugar de $\phi_{b,\xi}$. Por consiguiente una wavelet también se comporta como una función ventana. El comportamiento y medidas de la función ventana son discutidos con más detalle a continuación.

B.2.3.1 Ventana Tiempo - Frecuencia

Las definiciones del centro y radio en el dominio de frecuencia, discutidos en la Sección B.2.1.1, no aplican a ventanas wavelet porque a diferencia de la ventana de la STFT en la cual $\hat{\phi}(0) = 1$, aquí la ventana wavelet $\hat{\psi}(0) = 0$. En otras palabras, $\hat{\psi}(\omega)$ exhibe características de filtro pasa bandas. Consecuentemente, se tienen dos centros y dos radios para $\hat{\psi}(\omega)$. Sin embargo, únicamente interesan las frecuencias positivas. Definamos, por consiguiente, el centro ω_+^* y el radio $\Delta_{\hat{\psi}}^+$ sobre el eje de frecuencia positivo como

$$\omega_+^* := \frac{\int_0^\infty \omega |\hat{\psi}(\omega)|^2 d\omega}{\int_0^\infty |\hat{\psi}(\omega)|^2 d\omega} \dots \dots \dots (B.44)$$

$$\Delta_{\hat{\psi}}^+ := \left[\frac{\int_0^\infty (\omega - \omega_+^*)^2 |\hat{\psi}(\omega)|^2 d\omega}{\int_0^\infty |\hat{\psi}(\omega)|^2 d\omega} \right]^{1/2} \dots \dots \dots (B.45)$$

Las definiciones para t^* y Δ_ϕ siguen siendo las mismas que las de la Sección B.2.1.1, con $\phi(t)$ remplazada por $\psi(t)$. Para funciones wavelet, el principio de incertidumbre resulta

$$\Delta_\psi \Delta_{\hat{\psi}}^+ > \frac{1}{2}. \dots\dots\dots (B.46)$$

Si t^* es el centro y Δ_ψ es el radio de $\psi(t)$, entonces $W_\psi f(b, a)$ contiene la información de $f(t)$ en la ventana tiempo

$$[at^* + b - a\Delta_\psi, a + b + a\Delta_\psi]. \dots\dots\dots (B.47)$$

Aplicando la identidad de Parseval a (B.40) para tener una idea de la ventana frecuencia:

$$W_\psi f(b, a) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt \dots\dots\dots (B.48)$$

$$= \frac{\sqrt{a}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) \overline{\hat{\psi}(a\omega)} e^{ib\omega} d\omega. \dots\dots\dots (B.49)$$

De (B.49) se tiene que la ventana frecuencia es ²⁸

$$\left[\frac{1}{a}(\omega_+^* - \Delta_{\hat{\psi}}^+), \frac{1}{a}(\omega_+^* + \Delta_{\hat{\psi}}^+) \right]. \dots\dots\dots (B.50)$$

El producto de la ventana tiempo-frecuencia $= 2a\Delta_\psi \times \frac{2}{a} \Delta_{\hat{\psi}}^+ = 4\Delta_\psi \Delta_{\hat{\psi}}^+ =$ *constante*. Esto es llamado análisis de frecuencia “*constante-Q*”.

La **Fig. B4** representa gráficamente la noción de ventana tiempo-frecuencia para la transformada wavelet. Comparando la Fig. B4 con la correspondiente Fig. B2 para la STFT, se observa la naturaleza flexible de la ventana en la transformada wavelet. Para frecuencias más altas ($1/a_2$), la ventana tiempo es pequeña, mientras que para las frecuencias más bajas ($1/a_0$), la ventana tiempo

es grande. Para un nivel de frecuencia fijo, $(1/a_0)$, por ejemplo, tanto las ventanas tiempo-frecuencia son fijas. Recordando que en la STFT la ventana tiempo-frecuencia se fija independientemente del nivel de frecuencia.

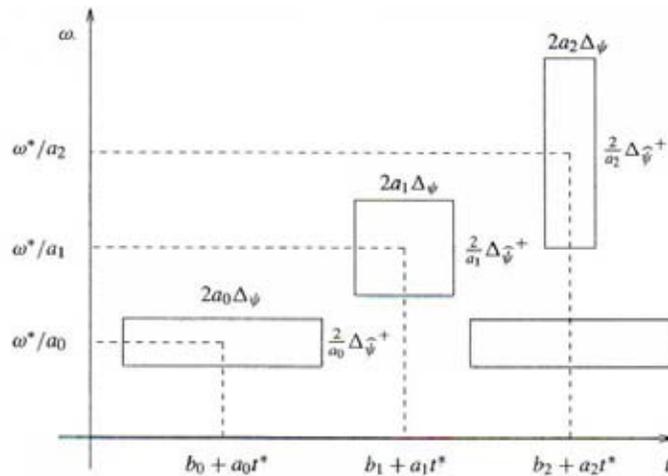


Fig. B4: Ventana tiempo-frecuencia para la transformada wavelet continua (Fuente: [28] Goswami, J. C. y Chan, A. K. 1999. *Fundamentals of Wavelets: Theory, Algorithms, and Applications*. New York: John Wiley & Sons, Inc.)

La importancia de la ventana “tiempo-frecuencia” es que se comprime para un centro-frecuencia grande ω^*/a y se expande para un centro-frecuencia pequeño ω^*/a (véase la Fig. B4), aunque como ya se hizo notar, el área de la ventana es una constante, dada por $4\Delta_\psi\Delta_{\hat{\psi}}$.

B.3 Formulas de Inversión y Duales

La transformada integral wavelet $(W_\psi f)(b, a)$ da la localización (en términos de $b + at^*$), la “proporción” (en términos de a), y la cantidad de cambio de f (medida por el valor de $(W_\psi f)(b, a)$), con la capacidad de acercamiento y de alejamiento. Esta información es extremadamente valorable en muchas aplicaciones tales como el análisis tiempo-frecuencia. Por ejemplo, en disminución de ruido, los valores de $(W_\psi f)(b, a)$ por debajo de cierto nivel de tolerancia son

removidos; y en un filtro pasabajas, $(W_\psi f)(b, a)$ es remplazada por cero para valores pequeños de a . En cualquier caso, la función f (nueva y modificada) tiene que ser reconstruida a partir de los valores de $(W_\psi f)(b, a)$. Cualquier fórmula que exprese a cada $f \in L^2(\mathbb{R})$ en términos de $(W_\psi f)(b, a)$ será llamada “*fórmula inversa*”, y la función $\tilde{\psi}$ (kernel) usada en esta fórmula será llamada una “*dual*” de la wavelet básica ψ . Por lo tanto, en la práctica ψ puede ser usada como una wavelet básica, solo si existe una fórmula de inversión.

A continuación, se estudiarán cuatro situaciones diferentes, que deben ser consideradas a fin de restringir el dominio de la información de $W_\psi f$.

(1°) Recuperación a partir de $(W_\psi f)(b, a)$, con $a, b \in \mathbb{R}$

Para reconstruir f a partir de $W_\psi f$, se necesita conocer la constante ^{22, 28}

$$C_\psi := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty. \dots \dots \dots (B.51)$$

La finitud de la constante C_ψ en la condición (B.51), conocida como **condición de admisibilidad**, restringe la clase de funciones ψ en $L^2(\mathbb{R})$ que pueden ser usadas como “wavelets básicas” dentro de la definición de la transformada integral wavelet. En particular, si ψ también debe ser una función ventana, entonces ψ necesariamente está en $L^1(\mathbb{R})$, esto significa que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t)| dt < \infty,$$

así que $\hat{\psi}$ es una función continua en \mathbb{R} (para una demostración de esto consultar la referencia [22 pg 25]), y por lo tanto, se desprende de (B.51) que $\hat{\psi}$ debe tender a cero en el origen; esto es

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0, \dots \dots \dots (B.52)$$

Así, la gráfica de una wavelet básica ψ es una onda pequeña. Con la constante C_ψ , se tiene la siguiente fórmula de reconstrucción ^{22, 28}:

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_{\mathbb{R}^2} \int \{(W_\psi f)(b, a)\} \left\{ |a|^{-1/2} \psi \left(\frac{t-b}{a} \right) \right\} \frac{dad b}{a^2}, f \in L^2(\mathbb{R}), \dots \dots \dots (B.53)$$

donde $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Obsérvese que el mismo núcleo (kernel),

$$|a|^{-1/2} \psi \left(\frac{t-b}{a} \right),$$

con la excepción del complejo conjugado, es usado para definir tanto la transformada integral wavelet en (B.18) y su inversa en (B.53). Por lo tanto, $\bar{\psi}$ puede ser llamada una “dual” de la wavelet básica ψ . Sin embargo, no se puede esperar unicidad de esta dual ²².

(2°) Recuperación a partir de $(W_\psi f)(b, a)$, con $b \in \mathbb{R}$ y $a > 0$.

En el análisis tiempo-frecuencia, tal como se discutió en la sección previa, se usa un múltiplo constante positivo de a^{-1} para representar frecuencia. Por lo que, puesto que solo las frecuencias positivas son de interés, se necesita una fórmula de reconstrucción donde la integración sea sobre $\mathbb{R} \times (0, \infty)$, en lugar de \mathbb{R}^2 . Por lo tanto, ahora se debe considerar incluso una clase más pequeña de wavelet básica ψ , a saber: las wavelets ψ satisficieran ²²

$$\int_0^\infty \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{\omega} d\omega = \int_0^\infty \frac{|\hat{\psi}(-\omega)|^2}{\omega} = \frac{1}{2} C_\psi < \infty, \dots \dots \dots (B.54)$$

donde C_ψ está definido en (B.51). Por ejemplo, cualquier ψ real-valuada que satisfice (B.51) puede ser usada como una wavelet básica en esta situación. Para cualquier ψ que satisfaga (B.54), se tiene la siguiente formula de reconstrucción ²²:

$$f(t) = \frac{2}{C_\psi} \int_0^\infty \left[\int_{-\infty}^\infty \{(W_\psi f)(b, a)\} \left\{ \frac{1}{\sqrt{a}} \psi \left(\frac{t-b}{a} \right) \right\} db \right] \frac{da}{a^2}, \quad f \in L^2(\mathbb{R}) \dots \dots (B.55)$$

Con la excepción de un factor de 2, esta fórmula es la misma que la fórmula de reconstrucción (B.53), pero la wavelet básica ψ en (B.55) es más restrictiva. Como en (1°), el complejo conjugado $\bar{\psi}$ de ψ es llamado una “dual” de la wavelet básica ψ para la situación (2°). Una vez más, no hay una razón para esperar una única dual.

(3°) Recuperación a partir de $(W_\psi f)(b, a)$, con $b \in \mathbb{R}, a = \frac{1}{2^j}; j \in \mathbb{Z}$.

Al restringir la atención para $a = 2^{-j}$, donde j se ejecuta para todos los enteros, se puede considerar la localización tiempo-frecuencia con la ventana de frecuencia

$$B_j := [2^j \omega^* - 2^j \Delta_{\hat{\psi}}, 2^j \omega^* + 2^j \Delta_{\hat{\psi}}], \quad j \in \mathbb{Z}. \dots \dots \dots (B.56)$$

En particular, si el centro ω^* de la función ventana $\hat{\psi}$ es seleccionado para que sea

$$\omega^* = 3\Delta_{\hat{\psi}},$$

entonces las bandas de frecuencia $B_j, j \in \mathbb{Z}$ en (B.56) forman una partición desarticulada en todo el eje de frecuencia $[0, \infty)$, con la excepción de los puntos finales de los intervalos B_j . La transformada integral wavelet (B.28) es usada para

determinar los intervalos de tiempo $[b + 2^{-j}t^* - 2^{-j}\Delta_\psi, b + 2^{-j}t^* + 2^{-j}\Delta_\psi]$ sobre los cuales el contenido espectral de la señal f , con frecuencias en el rango B_j , es de cierta significancia, es decir: el valor de $|(W_\psi f)(b, 2^{-j})|$ está por encima de un cierto umbral.

Puesto que únicamente se tiene disponible información parcial de $W_\psi f$, la wavelet básica ψ debe de nuevo satisfacer una condición más estricta que (B.51) para que una fórmula de reconstrucción esté disponible. La condición que impuesta sobre la ψ , es la llamada “**condición de estabilidad**”²²

$$A \leq \sum_{j=-\infty}^{\infty} |\hat{\psi}(2^{-j}\omega)|^2 \leq B, \dots \dots \dots (B.57)$$

donde A y B , con $0 < A \leq B < \infty$, son constantes independientes de ω . A partir de (B.57) se desprende que ψ también satisface

$$A \ln 2 \leq \int_0^\infty \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{\omega} d\omega, \int_0^\infty \frac{|\hat{\psi}(-\omega)|^2}{\omega} d\omega \leq B \ln 2, \dots \dots \dots (B.58)$$

lo cual implica que C_ψ se encuentre entre $2A \ln 2$ y $2B \ln 2$. Si $\hat{\psi}$ satisface (B.57), entonces la wavelet básica ψ tiene una “dual” ψ^* cuya transformada de Fourier está dada por²²

$$\hat{\psi}^*(\omega) := \frac{\overline{\hat{\psi}(\omega)}}{\sum_{j=-\infty}^{\infty} |\hat{\psi}(2^{-j}\omega)|^2}. \dots \dots \dots (B.59)$$

La fórmula de reconstrucción usando esta dual puede ser establecida como sigue:

$$f(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \{2^{j/2}(W_{\psi}f)(b, 2^{-j})\} \{2^j \psi^*(2^j(t - b))\} db, \quad f \in L^2(\mathbb{R}) \dots (B. 60)$$

Puesto que la wavelet básica ψ , para esta situación, tiene valores tanto prácticos ($a = 1/2^j$) como teóricos ($b \in \mathbb{R}$), se le da el siguiente nombre especial.

Una función $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ es llamada una “*wavelet diádica*” si satisface la condición de estabilidad (B.57) para casi toda $\omega \in \mathbb{R}$, para algunas constantes A y B con $0 < A \leq B < \infty$.

Las wavelets diádicas no tienen una única dual general ²². Los ejemplos más interesantes de wavelets diádicas son probablemente las llamadas “*frames*”, las cuales no son abordadas en este trabajo de tesis.

(4°) Recuperación a partir de $(W_{\psi}f)(b, a)$, con $b = \frac{k}{2^j}$, $a = \frac{1}{2^j}$; $j, k \in \mathbb{Z}$.

Con el propósito de construir algoritmos eficientes para determinar la transformada integral wavelet $(W_{\psi}f)(b, a)$ y reconstruir f a partir de $(W_{\psi}f)(b, a)$, solamente se consideran muestras discretas. Si bien es importante particionar el eje de frecuencia en bandas de frecuencia usando potencias de dos para el parámetro de escala a , es decir, como en (3°); es mucho más eficiente considerar solamente las muestras a los valores diádicos $b = k/2^j$ sobre el eje del tiempo, cuando $a = 2^{-j}$, $j \in \mathbb{Z}$, en lugar de toda $b \in \mathbb{R}$. En muchas aplicaciones, el sacrificio de usar este muestreo discreto uniforme, es mínimo.

Primero obsérvese que

$$(W_{\psi}f)\left(\frac{k}{2^j}, \frac{1}{2^j}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{\{2^{j/2} \psi(2^j t - k)\}} dt = \langle f, \psi_{j,k} \rangle, \quad \dots \dots \dots (B. 61)$$

donde, de (B. 11)

$$\psi_{j,k}(t) := 2^{j/2}\psi(2^j t - k), \quad j, k \in \mathbb{Z}, \dots \dots \dots (B. 62)$$

No obstante, en general no se requiere que $\{\psi_{j,k}\}$ forme una base ortogonal de $L^2(\mathbb{R})$, como en la Sección B.2. Ciertamente una base “estable”, como se define a continuación, es suficiente.

Una función $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ es llamada una *función – \mathcal{R}* si $\{\psi_{j,k}\}$, como se definió en (B.62), forma una base Riesz de $L^2(\mathbb{R})$, en el sentido de que la combinación lineal de $\psi_{j,k}, j, k \in \mathbb{Z}$, es densa en $L^2(\mathbb{R})$ y de que las constantes positivas A y B existan, con $0 < A \leq B < \infty$, tal que

$$A\|\{C_{j,k}\}\|_{\ell^2}^2 \leq \left\| \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_{j,k}\psi_{j,k} \right\|^2 \leq B\|\{C_{j,k}\}\|_{\ell^2}^2, \dots \dots \dots (B. 63)$$

para toda secuencia de doble sumatoria cuadrada bi-infinita $\{C_{j,k}\}$; esto es,

$$\|\{C_{j,k}\}\|_{\ell^2}^2 = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |C_{j,k}|^2 < \infty.$$

Suponiendo que ψ es una *función – \mathcal{R}* . Entonces hay una única base Riesz $\{\psi^{j,k}\}$ de $L^2(\mathbb{R})$ la cual es dual para $\{\psi_{j,k}\}$ en el sentido que

$$\langle \psi_{j,k}, \psi^{\ell,m} \rangle = \delta_{j,\ell} \cdot \delta_{k,m}, \quad j, k, \ell, m \in \mathbb{Z} \dots \dots \dots (B. 64)$$

Por lo tanto, cualquier función $f \in L^2(\mathbb{R})$ tiene la siguiente expansión en serie (única):

$$f(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi^{j,k}(t) \dots \dots \dots (B. 65)$$

Sin embargo, aunque los coeficientes son los valores de la transformada integral wavelet de f relativa a ψ , las series (B.65) no son necesariamente una serie wavelet. Para calificar como una serie wavelet, debe existir alguna función $\tilde{\psi} \in L^2(\mathbb{R})$, tal que la base dual $\{\psi^{j,k}\}$, en las series (B.65), se obtenga a partir de $\tilde{\psi}$ por medio de ³

$$\psi^{j,k}(t) = \tilde{\psi}_{j,k}(t) \dots \dots \dots (B. 66)$$

donde, como de costumbre, la notación

$$\tilde{\psi}_{j,k}(t) := 2^{j/2} \tilde{\psi}(2^j t - k) \dots \dots \dots (B. 67)$$

es usada. Si $\{\psi_{j,k}\}$ es una base ortogonal de $L^2(\mathbb{R})$, como ya se discutió en (B.14), (B.15), y (B.17), entonces es claro que (B.64) es sostenida con $\psi^{j,k} = \psi_{j,k}$, o $\tilde{\psi} \equiv \psi$. Sin embargo, es común que $\tilde{\psi}$ no exista. Si ψ es muy bien elegida de tal manera que $\tilde{\psi}$ exista, entonces el par $(\psi, \tilde{\psi})$ es de gran utilidad para mostrar los valores de la transformada integral de $f \in L^2(\mathbb{R})$ en las posiciones diádicas y en los diferentes niveles de escalas binaria (o octavas), y para recuperar f a partir de estos valores de su transformada integral wavelet. Teniendo precisamente que

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \tilde{\psi}_{j,k}(t) \dots \dots \dots (B. 68) \\ &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle f, \tilde{\psi}_{j,k} \rangle \psi_{j,k}(t) \end{aligned}$$

B.4 Clasificación de Wavelets

Suponiendo que $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ es una *función* $-\mathcal{R}$; esto es, $\{\psi_{j,k}\}$, como se definió en (B.63), es una base Riesz de $L^2(\mathbb{R})$. Entonces restaría saber si la base dual $\{\psi^{j,k}\}$, relativa a $\{\psi_{j,k}\}$, tal como se definió en (B.64), es derivada a partir de alguna función $\tilde{\psi} \in L^2(\mathbb{R})$ como en (B.66) – (B.67). Por lo general se llega a una conclusión negativa (consultar la referencia [3 pg 13] para más detalles).

Lo anterior motiva a la siguiente definición de “wavelets”.

Una *función* $-\mathcal{R}$, $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ es llamada una *wavelet* $-\mathcal{R}$ (o wavelet), si existe una función $\tilde{\psi} \in L^2(\mathbb{R})$, tal que $\{\psi_{j,k}\}$ y $\{\tilde{\psi}_{j,k}\}$, como se definió en (B.62) y (B.67), son bases dual de $L^2(\mathbb{R})$. Si ψ es una *wavelet* $-\mathcal{R}$, entonces $\tilde{\psi}$ es llamada una wavelet dual correspondiente a ψ .

Una wavelet dual $\tilde{\psi}$ es única y en sí misma una *wavelet* $-\mathcal{R}$. Para ser más preciso, el par $(\psi, \tilde{\psi})$ es simétrico en el sentido de que ψ es la wavelet dual de $\tilde{\psi}$ también. Por comodidad, ψ es llamada una “**wavelet**” y $\tilde{\psi}$ la “**dual**” de ψ . Como ya se remarcó en la Sección B.3, si ψ es una wavelet ortogonal, entonces es dual en sí misma en el sentido de que $\tilde{\psi} \equiv \psi$.

Es importante enfatizar una vez más que cada wavelet ψ , ortogonal o no, genera una representación en “series wavelet” de cualquier $f \in L^2(\mathbb{R})$, es decir:

$$f(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_{j,k} \psi_{j,k}(t),$$

donde cada $C_{j,k}$ es la transformada integral wavelet de f relativa a la dual $\tilde{\psi}$ de ψ , evaluada en la coordenada tiempo-escala

$$(b, a) = \left(\frac{k}{2^j}, \frac{1}{2^j} \right).$$

Siendo ψ cualquier wavelet y considerando que es la generadora de la base Riesz $\{\psi_{j,k}\}$. Para cada $j \in \mathbb{Z}$, se tiene que W_j denota el cierre de la combinación lineal de $\{\psi_{j,k}: k \in \mathbb{Z}\}$, es decir:

$$W_j := \text{clos}_{L^2(\mathbb{R})} \langle \psi_{j,k}: k \in \mathbb{Z} \rangle. \dots \dots \dots (B. 69)$$

Entonces es claro que $L^2(\mathbb{R})$ puede ser descompuesto en una suma directa de los subespacios W_j :

$$L^2(\mathbb{R}) = \dot{\sum}_{j \in \mathbb{Z}} W_j := \dots \dot{+} W_{-1} \dot{+} W_0 \dot{+} W_1 \dot{+} \dots, \dots \dots \dots (B. 70)$$

en el sentido de cada función $f \in L^2(\mathbb{R})$ tiene una descomposición única:

$$f(t) = \dots + x_{-1}(t) + x_0(t) + x_1(t) + \dots, \dots \dots \dots (B. 71)$$

donde $x_j \in W_j$ para toda $j \in \mathbb{Z}$. El punto arriba de la sumatoria y los signos más en (B. 70) indican “sumas directas”.

Si ψ es una wavelet ortogonal, entonces los subespacios W_j de $L^2(\mathbb{R})$ son mutuamente ortogonales, lo que significa que:

$$\langle x_i, x_\ell \rangle = 0, j \neq \ell \text{ donde } x_j \in W_j \text{ y } x_\ell \in W_\ell. \dots \dots \dots (B. 72)$$

En este caso, se usa la notación:

$$W_j \perp W_\ell, j \neq \ell. \dots \dots \dots (B. 73)$$

Consecuentemente, la suma directa en (B.70) se convierte en una suma ortogonal:

$$L^2(\mathbb{R}) = \oplus_{j \in \mathbb{Z}} W_j := \cdots \oplus W_{-1} \oplus W_0 \oplus W_1 \oplus \cdots, \quad \dots \dots \dots (B.74)$$

donde los círculos rodeando al signo más en (B.74) indican “sumas ortogonales”. La descomposición (B.74) usualmente es llamada “**descomposición ortogonal**” de $L^2(\mathbb{R})$. Esto quiere decir que la descomposición (B.71) de cualquier $f \in L^2(\mathbb{R})$ como la suma (infinita) de funciones $x_j \in W_j$ no solo es única, sino que estos componentes de f son también mutuamente ortogonales, como se describió en (B.72).

Así, una wavelet ortogonal ψ genera una descomposición ortogonal de $L^2(\mathbb{R})$. Sin embargo, no se han usado todas las propiedades de ortogonalidad de $\{\psi_{j,k}\}$, esto es, para cada j , la condición de ortogonalidad $\langle \psi_{j,k}, \psi_{j,\ell} \rangle = \delta_{k,\ell}$ no está reflejada en (B.74). Esto quiere decir que hay una clase más grande de wavelets que pueden ser usadas para generar descomposiciones ortogonales de $L^2(\mathbb{R})$. Por lo que se desprende la siguiente clase de wavelets.

Una wavelet ψ en $L^2(\mathbb{R})$ es llamada una wavelet **semi-ortogonal** (o wavelet s.o.) si la base Riesz $\{\psi_{j,k}\}$ generada satisface

$$\langle \psi_{j,k}, \psi_{\ell,m} \rangle = 0, \quad j \neq \ell; \quad j, k, \ell, m \in \mathbb{Z}. \dots \dots \dots (B.75)$$

Obviamente, cualquier wavelet s.o. genera una descomposición ortogonal (B.74) de $L^2(\mathbb{R})$, y cualquier wavelet o.n. es también una wavelet s.o. Una wavelet (o para ser más precisos, una *wavelet* – \mathcal{R}) ψ es llamada una wavelet no ortogonal (o n.o.) si no es una wavelet s.o. Sin embargo, siendo una *wavelet* – \mathcal{R} , que tiene su dual $\tilde{\psi}$, el par $(\psi, \tilde{\psi})$ satisface la propiedad de **bi-ortogonalidad**

$$\langle \psi_{j,k}, \tilde{\psi}_{\ell,m} \rangle = \delta_{j,\ell} \cdot \delta_{k,m}, \quad j, k, \ell, m \in \mathbb{Z} \dots \dots \dots (B.76)$$

B.5 Análisis Multiresolución, Splines y Wavelets

B.5.1 Espacios Multiresolución

Analizando la **Fig. B5** Cada vez que se baja un nivel duplicando el tamaño de paso (h) es removida cierta porción de la función, como se muestra en las gráficas del lado derecho. Entonces hay partes “sobrantes” que son descompuestas aún más. Las funciones del lado izquierdo son asignadas a A_j y las del lado derecho a W_j , donde j representa escalas individuales. Permitiendo que A_j sea generada por la base $\{\phi_{j,k}: 2^{j/2}\phi(2^j t - k); k \in \mathbb{Z}\}$ y W_j por $\{\psi_{j,k}: 2^{j/2}\psi(2^j t - k); k \in \mathbb{Z}\}$. En otras palabras, cualquier función $x_j(t)$ y $y_j(t)$ pueden ser representadas como la combinación lineal de $\phi_{j,k}(t)$ y $\psi_{j,k}(t)$, respectivamente.

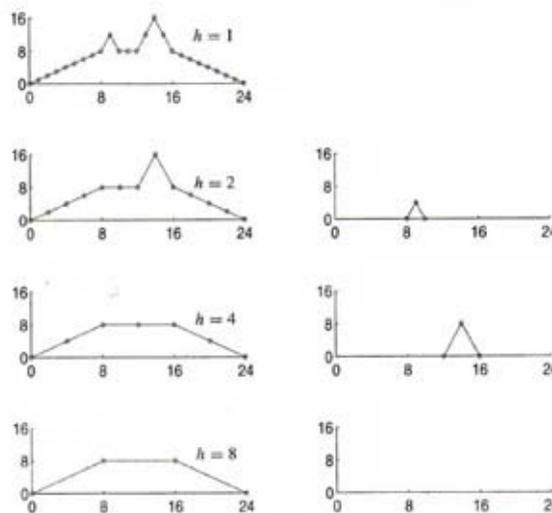


Fig. B5: Representación multinivel de una función (Fuente: [28] Goswami, J. C. y Chan, A. K. 1999. *Fundamentals of Wavelets: Theory, Algorithms, and Applications*. New York: John Wiley & Sons, Inc.)

Obsérvese que las funciones $x_{j-1}(t) \in A_{j-1}$ y $y_{j-1}(t) \in W_{j-1}$, ambas son derivadas de $x_j \in A_j$. Por consiguiente, se esperaría que las bases $\phi_{j-1,k}$ de A_{j-1} y $\psi_{j-1,k}$ de W_{j-1} deben estar de alguna forma relacionadas a la base $\phi_{j,k}$ de A_j . Tal relación será útil al momento de diseñar un algoritmo para obtener las funciones x_{j-1} y y_{j-1} a partir de x_j , en una forma eficiente.

Para lograr un análisis multiresolución de una función como el que se muestra en la Fig. B5, se debe tener una función de energía finita $\phi(t) \in L^2(\mathbb{R})$, conocida como **función de escala**, la cual genera una secuencia anidada $\{A_j\}$, es decir

$$\{0\} \leftarrow \dots \subset A_{-1} \subset A_0 \subset A_1 \subset \dots \rightarrow L^2,$$

y satisface una ecuación de dilatación (refinamiento)

$$\phi(t) = \sum_k g_0[k] \phi(at - k)$$

para alguna $a > 0$ y coeficientes $\{g_0[k]\} \in \ell^2$. Considerando a $a = 2$, lo cual corresponde a octavas de escala, la función $\phi(t)$ es representada mediante la superposición de una versión escalada y trasladada de ella misma – es por ello el nombre de función de escala. Siendo más precisos, A_0 es generado por $\{\phi(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ y, en general, A_j , por $\{\phi_{j,k} : j, k \in \mathbb{Z}\}$, el cual es conocido como **subespacio aproximación**. Consecuentemente, se tienen los siguientes dos resultados obvios:

$$x(t) \in A_j \Leftrightarrow x(2t) \in A_{j+1} \dots \dots \dots (B. 77)$$

$$x(t) \in A_j \Leftrightarrow x(t + 2^{-j}) \in A_j \dots \dots \dots (B. 78)$$

Hay muchas funciones que generan secuencias de subespacios anidados. Pero las propiedades (B.77) y (B.78), y la ecuación de dilatación son únicas para el análisis multiresolución (MRA).

Para cada j , ya que A_j es un subespacio propio de A_{j+1} , hay algún espacio faltante en A_{j+1} , llamado W_j , tal que cuando es combinado con A_j resulta A_{j+1} . Este espacio $\{W_j\}$ es llamado **subespacio wavelet** y es complementario a A_j en A_{j+1} , esto significa que

$$A_j \cap W_j = \{0\}, \quad j \in \mathbb{Z} \dots \dots \dots (B.79)$$

$$A_j \oplus W_j = A_{j+1}. \quad \dots \dots \dots (B.80)$$

Con la condición (B.79), la sumatoria en (B.80), como ya se mencionó en la Sección B.4, es referida como una **suma ortogonal** y la descomposición en (B.80) como una **descomposición ortogonal**.

Los subespacios $\{W_j\}$ son generados por $\psi(t) \in L^2(\mathbb{R})$, llamada **función wavelet**, de la misma manera que $\{A_j\}$ es generado por $\phi(t)$. En otras palabras, cualquier $x_j(t) \in A_j$, denominada comúnmente como **función de aproximación**, puede ser escrita como

$$x_j(t) = \sum_k c_{j,k} \phi(2^j t - k), \quad \dots \dots \dots (B.81)$$

y cualquier función $y_j(t) \in W_j$, denominada comúnmente **función de detalle**, puede ser escrita como

$$y_j(t) = \sum_k d_{j,k} \psi(2^j t - k), \quad \dots \dots \dots (B.82)$$

para algunos coeficientes $\{c_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}, \{d_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}} \in \ell^2$, llamados **coeficientes de aproximación** y de **detalle**, respectivamente.

Puesto que

$$\begin{aligned} A_{j+1} &= A_j \oplus W_j \\ &= W_j \oplus W_{j-1} \oplus A_{j-1} \\ &= W_j \oplus W_{j-1} \oplus W_{j-2} \oplus \dots, \quad \dots \dots \dots (B.83) \end{aligned}$$

se tiene

$$A_j = \bigoplus_{\ell=-\infty}^{j-1} W_\ell$$

Obsérvese que los subespacios aproximación $\{A_j\}$ son anidados mientras que los subespacios wavelet $\{W_j\}$ son mutuamente ortogonales. Consecuentemente, se tiene que

$$\begin{cases} A_\ell \cap A_m = A_\ell, & m > \ell \\ W_\ell \cap W_m = \{0\}, & \ell \neq m \\ A_\ell \cap W_m = \{0\}, & \ell \leq m \end{cases}$$

Una representación esquemática de la naturaleza jerárquica de A_j y W_j es mostrada en la **Fig. B6**.

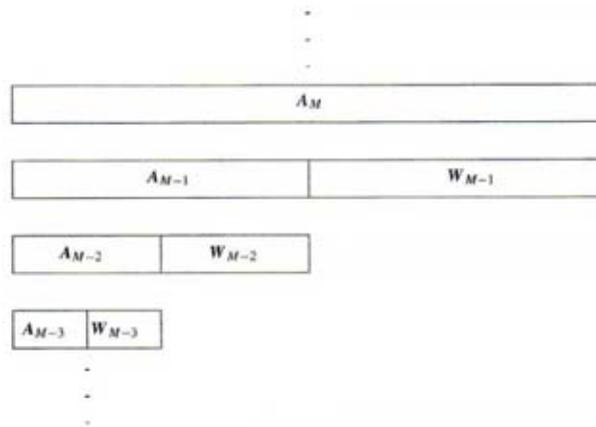


Fig. B6: División de subespacios MRA (Fuente: [28] Goswami, J. C. y Chan, A. K. 1999. *Fundamentals of Wavelets: Theory, Algorithms, and Applications*. New York: John Wiley & Sons, Inc.)

B.5.2 Descomposición Ortogonal, Biortogonal y Semiortogonal

En la Sección B.5.1 se vio que el único requerimiento que tiene el subespacio wavelet W_j es que sea complementario al subespacio aproximación A_j en A_{j+1} . En adición a esto, si también se requiere que $W_j \perp A_j$, este tipo de descomposición, como ya se comentó, se llama **descomposición ortogonal**. Se ahondará en la ortogonalidad de A_j y W_j un poco más adelante. Por simplicidad, haciendo $j = 0$. Para este caso, la combinación lineal de $\{\phi(t - k): k \in \mathbb{Z}\}$ expande A_0 ; similarmente, la combinación lineal de $\{\psi(t - k): k \in \mathbb{Z}\}$ expande W_0 . Entonces $A_0 \perp W_0$ implica que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) \psi(t - \ell) dt = 0 \quad \text{para toda } \ell \in \mathbb{Z} \dots \dots \dots (B.84)$$

En general, $\{\phi(t - k): k \in \mathbb{Z}\}$ y $\{\psi(t - k): k \in \mathbb{Z}\}$ no necesitan ser ortogonales a sí mismas; esto es,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) \phi(t - \ell) dt \neq 0 \dots \dots \dots (B.85)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) \psi(t - \ell) dt \neq 0 \dots \dots \dots (B.86)$$

La condición de que los subespacios aproximación y wavelet, A_j y W_j , respectivamente, sean ortogonales uno a otro es favorecedor, y se asume que la wavelet $\psi_{j,k} \in W_j$ tiene una dual, $\tilde{\psi}_{j,k} \in \tilde{W}_j$. Dualidad implica, como ya se vio, que la condición de biortogonalidad es satisfecha, esto es

$$\langle \psi_{j,k}, \tilde{\psi}_{\ell,m} \rangle = \delta_{j,\ell} \cdot \delta_{k,m}, \quad j, k, \ell, m \in \mathbb{Z} \dots \dots \dots (B.87)$$

Aunque no se requiere que $W_j \perp A_j$, se necesita $\tilde{W}_j \perp A_j$, importancia que se precisara más adelante. Similar a la wavelet dual $\tilde{\psi}_{j,k}$, también se va a considerar una función de escalamiento dual $\tilde{\phi}_{j,k}$ que genera otro MRA $\{\tilde{A}_j\}$ de L^2 . En otras palabras, $\phi_{j,k}$ y $\psi_{j,k}$, están asociadas con el MRA $\{A_j\}$, y $\tilde{\phi}_{j,k}$ y $\tilde{\psi}_{j,k}$ están asociadas con el MRA $\{\tilde{A}_j\}$ ^{28, 29}.

Resumiendo los resultados hasta aquí, antes de que se proceda a explicar su importancia.

MRA $\{A_j\}$:

$$\begin{aligned} A_{j+1} &= A_j + W_j, & m > \ell \\ A_\ell \cap A_m &= A_\ell, & m > \ell \\ W_\ell \cap W_m &= \{0\}, & \ell \neq m \\ A_\ell \cap W_m &= \{0\}, & \ell \leq m. \end{aligned}$$

MRA $\{\tilde{A}_j\}$:

$$\tilde{A}_{j+1} = \tilde{A}_j + \tilde{W}_j, \quad m > \ell$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{A}_\ell \cap \tilde{A}_m &= \tilde{A}_\ell, & m > \ell \\
 \tilde{W}_\ell \cap \tilde{W}_m &= \{0\}, & \ell \neq m \\
 \tilde{A}_\ell \cap \tilde{W}_m &= \{0\}, & \ell \leq m. \\
 W_j \perp \tilde{A}_j &\Rightarrow \tilde{A}_\ell \cap W_m = \{0\} \text{ para } \ell \leq m \\
 \tilde{W}_j \perp A_j &\Rightarrow A_\ell \cap \tilde{W}_m = \{0\} \text{ para } \ell \leq m
 \end{aligned}$$

El proceso de descomposición discutido hasta ahora es llamado **descomposición biortogonal**. Para comprender su importancia, se examinará brevemente el procedimiento de descomposición de una función en escalas, como se muestra en la Fig. B.5. Los detalles son dejados para consulta en alguna de las siguientes referencias: [11, 22, 28, 19].

Dada una función $x(t) \in L^2$, la descomposición en varias escalas comienza por el mapeo de la función dentro de un subespacio aproximación con suficientemente alta resolución A_M , esto es,

$$L^2 \ni x(t) \mapsto x_M = \sum_k a_{M,k} \phi(2^M t - k) \in A_M. \dots \dots \dots (B.88)$$

Ahora, puesto que

$$\begin{aligned}
 A_M &= W_{M-1} + A_{M-1} \\
 &= W_{M-1} + W_{M-2} + A_{M-2} \\
 &= \sum_{n=1}^N W_{M-n} + A_{M-N}, \dots \dots \dots (B.89)
 \end{aligned}$$

se puede escribir

$$x_M(t) = \sum_{n=1}^N y_{M-n} + x_{M-N}, \dots \dots \dots (B.90)$$

donde $x_{M-N}(t)$ es la función aproximación más gruesa de $x_M(t)$ y

$$x_j(t) = \sum_k c_{j,k} \phi(2^j t - k) \in A_j \dots \dots \dots (B.91)$$

$$y_j(t) = \sum_k d_{j,k} \psi(2^j t - k) \in W_j \dots \dots \dots (B.92)$$

Mediante la condición de biortogonalidad (B.87), se pueden obtener los coeficientes de detalle $\{d_{j,k}\}$ como

$$d_{j,k} = 2^j \int_{-\infty}^{\infty} y_j(t) \tilde{\psi}(2^j t - k) dt \dots \dots \dots (B.93)$$

Es importante recordar que $\tilde{\psi}(2^j t - k) \in \tilde{W}_j$ y $A_\ell \perp \tilde{W}_j$ para $\ell \leq j$. Por consiguiente, realizando el producto interno de (B.90) con $\tilde{\psi}_{j,k}(t)$ y usando la condición (B.87), se tiene

$$\begin{aligned} d_{k,j} &= 2^j \int_{-\infty}^{\infty} x_M(t) \tilde{\psi}(2^j t - k) dt \\ &= 2^{j/2} W_{\tilde{\psi}} x_M \left(\frac{k}{2^j}, \frac{1}{2^j} \right) \dots \dots \dots (B.94) \end{aligned}$$

La wavelet dual $\tilde{\psi}$ puede ser usada para analizar una función aproximación, x_M , calculando su transformada integral wavelet a una localización tiempo-escala deseada, mientras que ψ puede ser usada para obtener su función representativa a cualquier escala. Por consiguiente, se llama a $\tilde{\psi}$ una **wavelet análisis**, mientras que ψ es llamada una **wavelet síntesis**.

Por supuesto, si se tiene una descomposición ortogonal $W_j \perp A_j$ con bases ortonormales $\{\phi, \psi\}$, las wavelet análisis y síntesis son las mismas. Obsérvese que cuando se dice wavelets ortonormales, significa que las wavelets son ortonormales con respecto a la escala o bien con respecto a la traslación a una escala dada. Pero función ortonormal de escalamiento implica que las funciones de escalamiento son ortonormales solamente con respecto a la traslación a una escala dada, no con respecto a la escala, debido a la naturaleza del MRA.

Una de las características atractivas en delegar las responsabilidades de análisis y síntesis a dos funciones diferentes, en el caso biortogonal, en contraposición a una única función en el caso ortonormal, es que se puede tener soporte compacto simétrico en el análisis-síntesis de funciones wavelets y funciones de escalamiento, algo que una base ortonormal continua no puede alcanzar. Además, las funciones de escalamiento y wavelets ortonormales tienen pobre localización tiempo-escala ²⁸.

En algunas aplicaciones, se necesitan intercambiar los roles de los pares análisis y síntesis, $\{\phi, \psi\}$ y $\{\tilde{\phi}, \tilde{\psi}\}$, respectivamente. En descomposición biortogonal, no se puede tan fácil hacerlo ya que ϕ y $\tilde{\phi}$ generan dos diferentes MRA, A y \tilde{A} , respectivamente. Para este tipo de intercambio, se necesita mapear la función dada $x \mapsto \tilde{x}_M \in \tilde{A}_M$, y entonces poder usar ψ como analizador y $\tilde{\psi}$ como sintetizador wavelet.

Adicionalmente a la descomposición biortogonal y ortonormal, hay otra clase de descomposición, llamada **descomposición semiortogonal**, para la cual $A_j \perp W_j$. Puesto que en este sistema, las funciones de escalamiento y wavelet son ortonormales, todavía se necesitan sus duales, $\tilde{\phi}$ y $\tilde{\psi}$. Sin embargo, a diferencia del caso biortogonal, no hay espacios duales. Esto es, $\phi, \tilde{\phi} \in A_j$ y $\psi, \tilde{\psi} \in W_j$, para alguna escala apropiada j . En este sistema es muy fácil intercambiar los roles de ϕ, ψ con los de $\tilde{\phi}, \tilde{\psi}$.

Para funciones de escalamiento y wavelets semiortogonales, se tiene

$$\langle \phi(t - k), \tilde{\phi}(t - \ell) \rangle = \delta_{k,\ell}, \quad k, \ell \in \mathbb{Z} \dots \dots \dots (B. 95)$$

y

$$\langle \psi_{j,k}, \tilde{\psi}_{\ell,m} \rangle = 0 \quad \text{para } j \neq \ell \quad \text{y } j, k, \ell, m \in \mathbb{Z} \dots \dots \dots (B. 96)$$

Las wavelets $\{\phi, \psi\}$ están relacionadas a $\{\tilde{\phi}, \tilde{\psi}\}$ como

$$\hat{\tilde{\phi}}(\omega) = \frac{\hat{\phi}(\omega)}{E_{\phi}(e^{i\omega})} \dots \dots \dots (B. 97)$$

y

$$\hat{\tilde{\psi}}(\omega) = \frac{\hat{\psi}(\omega)}{E_{\psi}(e^{i\omega})} \dots \dots \dots (B. 98)$$

con

$$E_x(e^{i\omega}) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{x}(\omega + 2\pi k)|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_x(k) e^{ik\omega}, \quad \dots \dots \dots (B. 99)$$

donde $A_x(t)$ es la función autocorrelación de $x(t)$. Una demostración de (B. 97), (B. 98) y (B. 99), se puede consultar en la referencia [28 pg 157]. En la Sección B.6 se discutirá la construcción de las funciones de escalamiento y wavelets ortogonales y semiortogonales.

B.5.3 Relaciones de Dos Escalas

Las relaciones de dos-escalas vinculan a las funciones de escalamiento y wavelet a una escala dada (resolución gruesa), j , con la función de escalamiento a la siguiente escala superior (resolución más fina), $j + 1$. Puesto que

$$\phi(t) \in A_0 \subset A_1 \dots \dots \dots (B. 100)$$

$$\psi(t) \in W_0 \subset A_1 \dots \dots \dots (B. 101)$$

se debe poder escribir $\phi(t)$ y $\psi(t)$ en términos de la base que genera A_1 . En otras palabras, hay dos secuencias $g_0[k], g_1[k] \in \ell^2$ tales que

$$\phi(t) = \sum_k g_0[k] \phi(2t - k) \dots \dots \dots (B. 102)$$

$$\psi(t) = \sum_k g_1[k] \phi(2t - k) \dots \dots \dots (B. 103)$$

Las ecuaciones (B.102) y (B.103) se conocen como **relaciones de dos-escalas**. En general, para cualquier $j \in \mathbb{Z}$, la relación entre A_j y W_j con A_{j+1} está gobernada por

$$\begin{aligned} \phi(2^j t) &= \sum_k g_0[k] \phi(2^{j+1} t - k) \\ \psi(2^j t) &= \sum_k g_1[k] \phi(2^{j+1} t - k) \end{aligned}$$

Las secuencias $g_0[k]$ y $g_1[k]$ son llamadas **secuencias de reconstrucción o de dos escalas**, y son únicas debido a la relación en suma directa $A_{j+1} = A_j \dot{+} W_j$. A la secuencia $g_0[k]$ se le conoce como **coeficientes de escalamiento**, mientras que a la secuencia $g_1[k]$ como **coeficientes wavelet**.

Tomando la transformada de Fourier de las relaciones de dos-escalas, se tiene

$$\hat{\phi}(\omega) = G_0(z)\hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \dots \dots \dots (B.104)$$

$$\hat{\psi}(\omega) = G_1(z)\hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right), \dots \dots \dots (B.105)$$

donde

$$G_0(z) := \frac{1}{2} \sum_k g_0[k]z^k \dots \dots \dots (B.106)$$

$$G_1(z) := \frac{1}{2} \sum_k g_1[k]z^k \dots \dots \dots (B.107)$$

con $z = e^{-i\omega/2}$. Un ejemplo de relaciones de dos-escalas para el caso de la función de Haar (H) es mostrado en la **Fig. B7**. Las expansiones de (B.102) y (B.103), usando la notación del producto de n términos de una progresión geométrica, conducen a ^{22, 28}

$$\hat{\phi}(\omega) = \prod_{\ell=1}^{\infty} G_0 \exp\left(-i \frac{\omega}{2^\ell}\right) \dots \dots \dots (B.108)$$

$$\hat{\psi}(\omega) = G_1 \exp\left(-i \frac{\omega}{2}\right) \prod_{\ell=2}^{\infty} G_0 \exp\left(-i \frac{\omega}{2^\ell}\right) \dots \dots \dots (B.109)$$

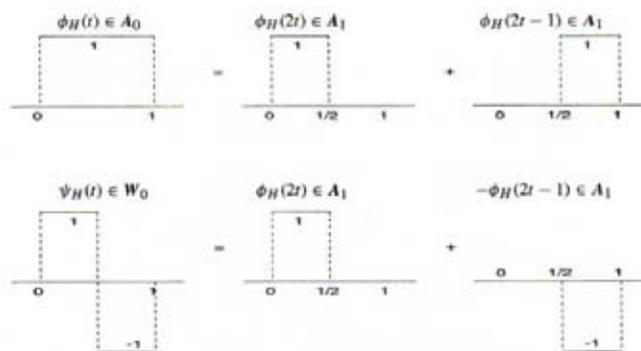


Fig. B7: Relaciones de dos escalas para el caso Haar (Fuente: [28] Goswami, J. C. y Chan, A. K. 1999. *Fundamentals of Wavelets: Theory, Algorithms, and Applications*. New York: John Wiley & Sons, Inc.)

Puesto que las funciones de escalamiento exhiben características de filtro pasa-bajas [$\hat{\phi}(0) = 1$], todos los coeficientes $\{g_0[k]\}$ suman hasta dos, mientras que debido a las características de filtro pasabandas de las wavelets ($\hat{\psi}(0) = 0$), los coeficientes $\{g_1[k]\}$ suman hasta cero.

B.5.4 Relaciones de Descomposición

Las relaciones de descomposición dan la función de escalamiento a cualquier escala, j , en términos de la función de escalamiento y wavelet a la escala inferior siguiente (resolución más gruesa), $j - 1$. Puesto que $A_1 = A_0 + W_0$ y $\phi(2t)$, $\phi(2t - 1) \in A_1$, existen dos secuencias $h_0[k]$, $h_1[k]$ en ℓ^2 tales que

$$\phi(2t) = \sum_k \{h_0[2k]\phi(t - k) + h_1[2k]\psi(t - k)\}$$

$$\phi(2t - 1) = \sum_k \{h_0[2k - 1]\phi(t - k) + h_1[2k - 1]\psi(t - k)\}$$

Combinando estas dos relaciones, se tiene

$$\phi(2t - \ell) = \sum_k \{h_0[2k - \ell]\phi(t - k) + h_1[2k - \ell]\psi(t - k)\} \dots \dots \dots (B. 110)$$

para toda $\ell \in \mathbb{Z}$. En general, se tiene

$$\phi(2^{j+1}t - \ell) = \sum_k \{h_0[2k - \ell]\phi(2^j t - k) + h_1[2k - \ell]\psi(2^j t - k)\} \dots \dots (B. 111)$$

Las secuencias $h_0[k]$ y $h_1[k]$ son llamadas **secuencias de descomposición**, y también son únicas debido a la relación en suma directa $A_{j+1} = A_j \dot{+} W_j$.

La **Fig. B8** muestra un ejemplo de relaciones de descomposición para el caso de la función de Haar (H).

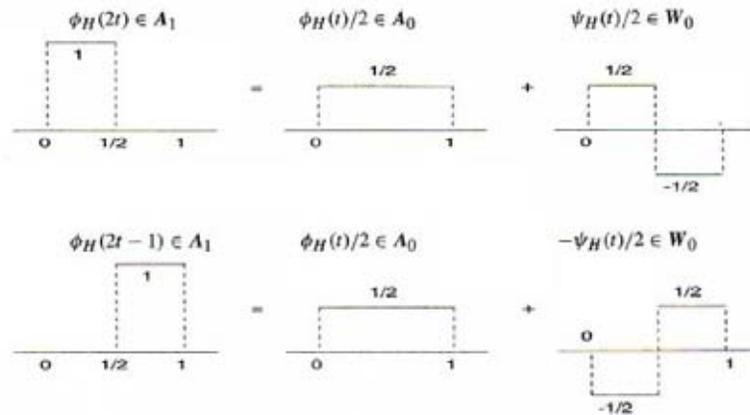


Fig. B8: Relaciones de descomposición (Fuente: [28] Goswami, J. C. y Chan, A. K. 1999. *Fundamentals of Wavelets: Theory, Algorithms, and Applications*. New York: John Wiley & Sons, Inc.)

B.5.5 Funciones Spline

En esta sección se describirán brevemente a las funciones spline, y se listarán algunas de sus propiedades. Para consultar más detalles se recomienda referirse a [22, 30].

Las funciones spline consisten en trozos de polinomios (ver **Fig. B9**) unidos suavemente en puntos de quiebre (nudos: t_0, t_1, \dots), donde el grado de suavizamiento depende del orden de los splines. Para spline-B cardinales, estos puntos de quiebre están igualmente espaciados. Polinomios diferentes, forman bases locales y tienen propiedades muy útiles que pueden ser aplicadas para la función aproximación, x_M .

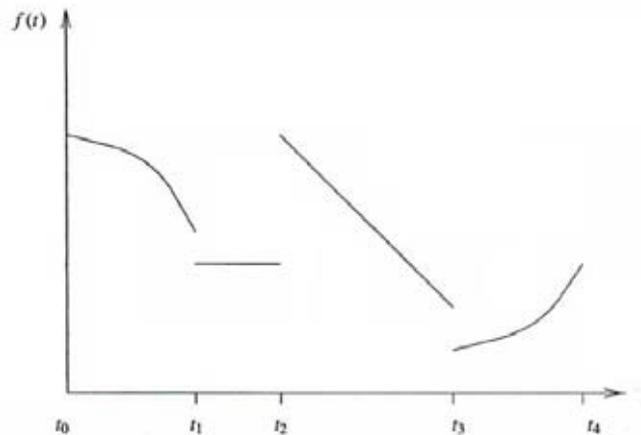


Fig. B9: Funciones polinomiales por trozos (Fuente: [28] Goswami, J. C. y Chan, A. K. 1999. *Fundamentals of Wavelets: Theory, Algorithms, and Applications*. New York: John Wiley & Sons, Inc.)

El spline-B de m –ésimo orden, $N_m(t)$, tiene la secuencia de nudos $\{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$ y consiste de polinomios de orden m (grado $m - 1$) entre los nudos. Considerando que $N_1(t) = x_{[0,1)}(t)$ es la función característica de $[0, 1)$. Entonces para cada entero $m \geq 2$, el orden m –ésimo del spline-B cardinal está definido, inductivamente, por

$$N_m(t) := (N_{m-1} * N_1)(t) \dots \dots \dots (B. 112)$$

$$:= \int_{-\infty}^{\infty} N_{m-1}(t-x)N_1(x) dx$$

$$= \int_0^1 N_{m-1}(t-x) dx \dots \dots \dots (B. 113)$$

Un cálculo rápido de $N_m(t)$ para $m \geq 2$ se logra usando la formula

$$N_m(t) = \frac{1}{m-1} N_{m-1}(t) + \frac{m-t}{m-1} N_{m-1}(t-1)$$

recursivamente hasta llegar al spline-B de primer orden, N_1 , (ver **Fig. B10**). Los spline de orden 2 a 6, junto con la magnitud de su espectro, se muestran en la **Fig. B11**. Los spline más comúnmente usados son los lineales ($m = 2$) y los cúbicos ($m = 4$). Sus expresiones explícitas son

$$N_2(t) = \begin{cases} t, & t \in [0,1] \\ 2-t, & t \in [1,2] \\ 0, & \text{en cualquier otro caso} \end{cases} \dots \dots \dots (B. 114)$$

$$N_4(t) = \begin{cases} t^3, & t \in [0,1] \\ 4-12t+12t^2-3t^3, & t \in [1,2] \\ -44+60t-24t^2+3t^3, & t \in [2,3] \\ 64-48t+12t^2-t^3, & t \in [3,3] \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \dots \dots \dots (B. 115)$$

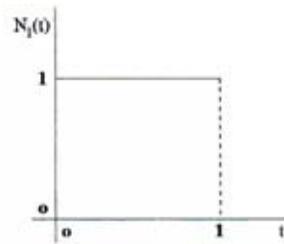


Fig. B10: N_1 , spline de orden 1 (Fuente: [28] Goswami, J. C. y Chan, A. K. 1999. *Fundamentals of Wavelets: Theory, Algorithms, and Applications*. New York: John Wiley & Sons, Inc.)

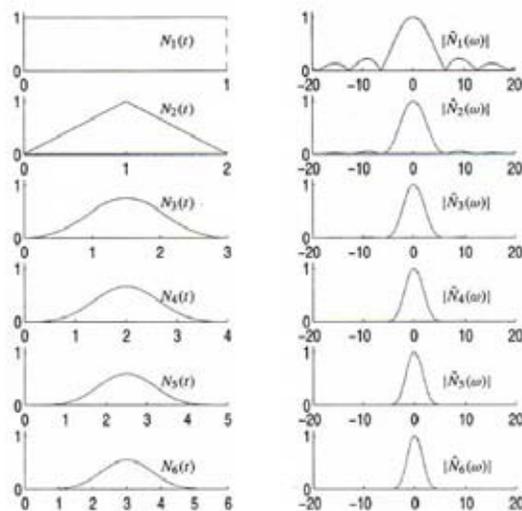


Fig. B11: Funciones spline y su magnitud espectral (Fuente: [28] Goswami, J. C. y Chan, A. K. 1999. *Fundamentals of Wavelets: Theory, Algorithms, and Applications*. New York: John Wiley & Sons, Inc.)

En muchas aplicaciones se necesita calcular splines en puntos enteros. La **Tabla B.1** da valores de splines a localizaciones enteras. La propiedad de simetría puede ser usada para establecer valores en otros puntos.

Tabla B1: Spline-B Cardinales en Puntos Enteros²⁸

k	$(m-1)!N_m(k)$	k	$(m-1)!N_m(k)$	k	$(m-1)!N_m(k)$
$m=3$		$m=8$		$m=11$	
1	1	1	1	1	1
$m=4$		2	120	2	1,013
1	1	3	1,191	3	47,840
2	4	4	2,416	4	455,192
$m=5$		$m=9$		5	1,310,354
1	1	1	1	$m=12$	
2	11	2	247	1	1
$m=6$		3	4,293	2	2,036
1	1	4	15,619	3	152,637
2	26	$m=10$		4	2,203,488
3	66	1	1	5	9,738,114
$m=7$		2	502	6	15,724,248
1	1	3	14,608		
2	57	4	88,234		
3	302	5	156,190		

Para obtener la transformada de Fourier de $N_m(t)$, obsérvese que (B.112) puede escribirse como

$$N_m(t) = \underbrace{(N_1 * \dots * N_1)}_m(t), \dots \dots \dots (B.116)$$

Consecuentemente,

$$\hat{N}_m(\omega) = \left(\frac{1 - e^{-i\omega}}{i\omega} \right)^m, \dots \dots \dots (B.117)$$

ya que

$$\hat{N}_1(\omega) = \int_0^1 e^{-i\omega t} dt = \frac{1 - e^{-i\omega}}{i\omega}, \dots \dots \dots (B.118)$$

La propiedad importante de los spline, para el propósito de este trabajo de tesis, está en el hecho de que son funciones de escalamiento. Esto es, existe una secuencia $\{g_0[m, k]\} \in \ell^2$ tal que

$$N_m(t) = \sum_k g_0[m, k] N_m(2t - k), \dots \dots \dots (B.119)$$

Para más detalles de lo anterior consultar [28 pg 156].

B.5.5.1 Propiedades de los Spline

Algunas propiedades importantes de los spline, son discutidas en esta sección sin demostrarlas.

1. $Supp N_m = [0, m]$ con $N_m(0) = N_m(m) = 0$
2. $N_m(t) \in C^{m-2}$; C^k es el espacio de las funciones continuas que son k veces diferenciables.
3. $N_m|_{[k-1, k]} \in \pi_{m-1}, k \in \mathbb{Z}$; π_k es el espacio de los polinomios de grado k (orden $k - 1$)
4. $\int_{-\infty}^{\infty} N_m(t) dt = 1$
5. $N'_m(t) = N_{m-1}(t) - N_{m-1}(t - 1)$
6. $N_m(t)$ es simétrico con respecto al centro $t^* = m/2$, esto es,

$$N_m\left(\frac{m}{2} + t\right) = N_m\left(\frac{m}{2} - t\right), \quad t \in \mathbb{R}. \quad \dots \dots \dots (B.120)$$

7. $N_m(t)$ se comporta como un filtro pasabajas [$\hat{N}_m(0) = 1$; ver Fig. B11].
8. $N_m(t)$ tiene $m - \text{ésimo}$ orden de aproximación en el sentido de que $\hat{N}_m(\omega)$ satisface la condición

$$\begin{cases} \widehat{N}_m(0) = 1 \\ D^j \widehat{N}_m(2\pi k) = 0, \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \text{ y } j = 1, \dots, m-1, \dots \dots (B.121) \end{cases}$$

donde D^j denota a la derivada de j -ésimo orden. Consecuentemente, $N_m(t)$ reproduce localmente todos los polinomios de orden m .

9. $\sum_k N_m(t-1) \equiv 1$ para toda t . Esta propiedad es referida como la partición de la unidad
10. Positividad total: $N_m(t) \geq 0$, para $t \in [0, m]$. Por virtud de la propiedad de positividad total de los spline-B, los coeficientes de una serie spline-B siguen la forma de los datos. De hecho, si $g(t) = \sum_j \alpha_j N_m(t-j)$, entonces

$$\alpha_j \geq 0 \forall j \Rightarrow g(t) \geq 0$$

$$\alpha_j \uparrow (\text{incrementa}) \Rightarrow g(t) \uparrow$$

$$\alpha_j (\text{converje}) \Rightarrow g(t) \text{ converje}$$

11. Por consiguiente, el número de cambios de signo de $g(t)$ no excede a los de la secuencia de coeficientes $\{\alpha_j\}$.
12. Conforme el orden m incrementa, $N_m(t)$ tiende a una función Gaussiana ($\Delta_{N_m} \Delta_{\widehat{N}_m} \rightarrow 0.5$). De hecho, en el caso de un spline cubico ($m = 4$), el producto de la ventana tiempo-frecuencia es 0.501.

B.6 Construcción de Wavelets

El propósito de esta sección es describir el proceso matemático para construir wavelets ortogonales y semiortogonales. En lo que respecta a las biortogonales, estas no se abordarán ya que únicamente son aplicadas las ortogonales para el procesamiento de datos de presión; sin embargo se puede consultar la referencia [28 pg. 129].

El problema de construcción es equivalente a encontrar las secuencias apropiadas de dos escalas y de descomposición tal como se introdujo en la

Sección B.5. Resulta que estos coeficientes para wavelets ortogonales pueden fácilmente derivarse a partir de los de las wavelets semiortogonales. Por consiguiente, primeramente se discutirán las wavelets semiortogonales seguidas por las ortonormales.

Recordando que para las wavelets semiortogonales, tanto $\phi(t)$ y $\tilde{\phi}(t)$ están en A_0 , y $\psi(t)$ y $\tilde{\psi}(t)$ están en W_0 . Consecuentemente, se puede escribir $\phi(t)$ en términos de $\tilde{\phi}(t)$; similarmente para $\psi(t)$. Estas relaciones dadas por (B.97) y (B.98) son

$$\hat{\phi}(\omega) = \frac{\hat{\phi}(\omega)}{E_{\phi}(e^{i\omega})} \dots \dots \dots (B.122)$$

y

$$\hat{\psi}(\omega) = \frac{\hat{\psi}(\omega)}{E_{\psi}(e^{i\omega})} \dots \dots \dots (B.123)$$

con el polinomio Euler-Frobenius-Laurent $E_f(e^{i\omega})$ dado por

$$E_f(e^{i\omega}) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega + 2\pi k)|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_f(e^{ik\omega}) , \quad \dots \dots \dots (B.124)$$

Por consiguiente, solo basta con enfocarse a la construcción de ϕ y ψ .

El primer paso para la construcción de wavelets, es expresar $h_0[k]$, $h_1[k]$ y $g_1[k]$ en términos de $g_0[k]$ así que únicamente $g_0[k]$, y por lo tanto, la función de escalamiento necesitan ser construidas. En el caso semiortogonal, todas estas secuencias tienen diferentes longitudes, en general. Más adelante se mostrará que para el caso ortogonal, todas estas secuencias tienen la misma longitud y que hay una relación muy simple entre ellas la cual puede ser derivada fácilmente como un caso especial de la relación para el caso semiortogonal.

B.6.1 Ingredientes Necesarios para Construir Wavelets

Como se puntualizó antes, se necesita obtener la secuencia de coeficientes $g_0[k]$ y $g_1[k]$ para poder construir wavelets. La meta en esta sección es encontrar una relación entre varias secuencias. Se considerará el caso de la descomposición semiortogonal de un espacio multiresolución.

B.6.1.1 Relación entre las Secuencias de Dos Escalas

Recordando de la Sección B.5.2 que como resultado de las propiedades multiresolución, las funciones de escalamiento y wavelet a una escala (gruesa) están relacionadas a la función de escalamiento en la siguiente escala más alta (fina) por las relaciones de dos escalas, esto es

$$\phi(t) = \sum_k g_0[k] \phi(2t - k) \dots \dots \dots (B.125)$$

$$\psi(t) = \sum_k g_1[k] \phi(2t - k) \dots \dots \dots (B.126)$$

Tomando la transformada de Fourier de las relaciones de arriba, se tiene

$$\hat{\phi}(\omega) = G_0(z) \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \dots \dots \dots (B.127)$$

$$\hat{\psi}(\omega) = G_1(z) \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right), \dots \dots \dots (B.128)$$

donde $z = e^{-i\omega/2}$ y

$$G_0(z) := \frac{1}{2} \sum_k g_0[k]z^k \dots \dots \dots (B.129)$$

$$G_1(z) := \frac{1}{2} \sum_k g_1[k]z^k \dots \dots \dots (B.130)$$

Obsérvese que $\phi(t) \in A_0$, $\phi(2t) \in A_1$, y $\psi(t) \in W_0$. De la propiedad de anidamiento del MRA se sabe que $A_0 \subset A_1$ y $A_0 \perp W_0$ tal que $A_0 \oplus W_0 = A_1$. La ortogonalidad de los subespacios A_0 y W_0 implica que para cualquier $\ell \in \mathbb{Z}$,

$$\langle \phi(t - \ell), \psi(t) \rangle = 0. \dots \dots \dots (B.131)$$

La ecuación (B.131) puede ser reescrita usando la identidad de Parseval como

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\phi}(\omega) e^{-i\ell\omega} \overline{\hat{\psi}(\omega)} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_0(z) \overline{G_1(\bar{z})} \left| \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \right|^2 e^{-i\ell\omega} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_k \int_{4\pi k}^{4\pi(k+1)} G_0(z) \overline{G_1(\bar{z})} \left| \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \right|^2 e^{-i\ell\omega} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_k \int_0^{4\pi} G_0(z) \overline{G_1(\bar{z})} \left| \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2} + 2\pi k\right) \right|^2 e^{-i\ell\omega} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{4\pi} G_0(z) \overline{G_1(\bar{z})} E_\phi(z) e^{-i\ell\omega} d\omega, \dots \dots \dots (B.132) \end{aligned}$$

donde $z = e^{-i\omega/2}$. Particionando el límite de integración $[0,4\pi]$ en $[0,2\pi]$ y $[2\pi, 4\pi]$, y mediante un cambio de variable, se puede verificar que (B.132) es lo mismo que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [G_0(z) \overline{G_1(\bar{z})} E_\phi(z) + G_0(-z) \overline{G_1(-\bar{z})} E_\phi(-z)] e^{-i\ell\omega} d\omega = 0 \dots \dots \dots (B.133)$$

La expresión (B.133) es sostenida para toda $\ell \in \mathbb{Z}$. Esto implica mediante el recordatorio de que una función periódica- 2π cuadrático integrable $f(t)$ tiene la representación en series de Fourier

$$f(t) = \sum_{\ell} c_{\ell} e^{i\ell t}, \dots\dots\dots (B.134)$$

donde

$$c_{\ell} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-i\ell t} dt. \dots\dots\dots (B.135)$$

Entonces, regresando a lo de arriba, es claro que la cantidad del lado izquierdo de (B.133) representa el ℓ -ésimo coeficiente de Fourier de una función periódica $G_0(z)\overline{G_1(z)}E_{\phi}(z) + G_0(-z)\overline{G_1(-z)}E_{\phi}(-z)$. Puesto que todos los coeficientes son cero, implica que

$$G_0(z)\overline{G_1(z)}E_{\phi}(z) + G_0(-z)\overline{G_1(-z)}E_{\phi}(-z) \equiv 0 \dots\dots\dots (B.136)$$

para $|z| = 1$.

La solución de (B.136) da la relación entre $G_1(z)$ y $G_0(z)$. Por sustitución directa, se puede verificar que

$$G_1(z) = -cz^{2m+1}\overline{G_0(-z)}E_{\phi}(-z) \dots\dots\dots (B.137)$$

para cualquier entero m , y una constante $c > 0$ se tiene una solución de (B.136). Sin alguna pérdida de generalidad se puede establecer $c = 1$. El efecto de m es desplazar el índice de la secuencia $g_1[k]$. Usualmente, m es seleccionado de tal forma que el índice comience con cero.

B.6.1.2 Relación entre las Secuencias de Reconstrucción y Descomposición

Recordando de la Sección B.5.3 que la función de escalamiento a una cierta escala (fina) puede ser obtenida de las funciones de escalamiento y wavelet a la siguiente escala más baja (gruesa). En términos matemáticos, significa que existen secuencias de energía finita $h_0[k]$, $h_1[k]$ tales que

$$\phi(2t - \ell) = \sum_k \{h_0[2k - \ell]\phi(t - k) + h_1[2k - \ell]\psi(t - k)\}, \quad \dots \dots (B.138)$$

donde, como se discutió $h_0[k]$ y $h_1[k]$ son las secuencias de descomposición.

Tomando la transformada de Fourier de la relación de descomposición, se tiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) e^{-i\omega\ell/2} &= \sum_k h_0[2k - \ell] e^{-ik\omega} \hat{\phi}(\omega) + \sum_k h_1[2k - \ell] e^{-ik\omega} \hat{\psi}(\omega) \\ &= \left\{ G_0(z) \sum_k h_0[2k - \ell] e^{-ik\omega} + G_1(z) \sum_k h_1[2k - \ell] e^{-ik\omega} \hat{\psi}(\omega) \right\} \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \end{aligned}$$

La ecuación de arriba se reduce a

$$\begin{aligned} \left(\sum_k h_0[2k - \ell] e^{-i(2k-\ell)\omega/2} \right) G_0(z) + \left(\sum_k h_1[2k - \ell] e^{-i(2k-\ell)\omega/2} \right) G_1(z) &\equiv \frac{1}{2} \quad \forall \ell \\ &\in \mathbb{Z} \dots \dots \dots (B.139) \end{aligned}$$

Combinando las transformadas de Fourier de las relaciones de descomposición y de dos escalas, se tiene

$$[H_0(z) + H_0(-z)]G_0(z) + [H_1(z) + H_1(-z)]G_1(z) = \frac{1}{2} \quad \text{para } \ell \text{ par } \dots \dots (B.140)$$

$$[H_0(z) + H_0(-z)]G_0(z) + [H_1(z) + H_1(-z)]G_1(z) = 0 \quad \text{para } \ell \text{ impar } \dots \dots (B.141)$$

donde $z = e^{-i\omega/2}$ y

$$H_0(z) := \frac{1}{2} \sum_k h_0[k]z^k$$

$$H_1(z) := \frac{1}{2} \sum_k h_1[k]z^k.$$

Estas ecuaciones conducen a

$$H_0(z)G_0(z) + H_1(z)G_1(z) = \frac{1}{2}$$

$$H_0(-z)G_0(z) + H_1(-z)G_1(z) = 0.$$

La última ecuación también puede ser escrita como

$$H_0(z)G_0(-z) + H_1(z)G_1(-z) = 0. \quad \dots \dots \dots (B.142)$$

En forma matricial se tiene

$$\begin{bmatrix} G_0(z) & G_1(z) \\ G_0(-z) & G_1(-z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_0(z) \\ H_1(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \dots \dots \dots (B.143)$$

la cual tendría como solución

$$H_0(z) = \frac{1}{2} \times \frac{G_1(-z)}{\Delta_{G_0G_1}(z)} \quad \dots \dots \dots (B.144)$$

$$H_1(z) = -\frac{1}{2} \times \frac{G_0(-z)}{\Delta_{G_0G_1}(z)} \dots \dots \dots (B.145)$$

con

$$\Delta_{G_0G_1}(z) = G_0(z)G_1(-z) - G_0(-z)G_1(z) \dots \dots \dots (B.146)$$

Se puede demostrar que

$$\Delta_{G_0G_1}(z) = cz^m E_\phi(z^2), \dots \dots \dots (B.147)$$

donde $c > 0$ y m es un entero. Puesto que ϕ genera una base estable o Riesz, $E_\phi(z)$ y por lo tanto $\Delta_{G_0G_1}(z) \neq 0$.

B.6.2 Construcción de Wavelets Spline Semiortogonales

La importancia de los resultados obtenidos en la Sección B.6.1 es que únicamente se necesita construir la función de escalamiento (esto es, solo es necesario encontrar la secuencia $g_0[k]$). En esta sección se obtienen estas secuencias para las wavelets spline semiortogonales. Aquí los spline-B cardinales N_m son seleccionados para ser las funciones de escalamiento. Se mostrará que una secuencia de energía finita $g_0[k]$ existe tal que la relación de escalamiento

$$N_m(t) = \sum_k g_0[m, k] N_m(2t - k) \dots \dots \dots (B.148)$$

es satisfecha y por consiguiente $N_m(t)$ es una función de escalamiento. Para $m = 1$, $\{N_1(t - k): k \in \mathbb{Z}\}$ forma una base ortonormal de A_0 . Para este caso ya se ha visto que $g_0[0] = g_0[1] = 1$ (ver Fig. B7). En esta sección se considerarán los casos en los cuales $m \geq 2$.

Para $m \geq 2$, las funciones de escalamiento $\{N_m(t - k): k \in \mathbb{Z}\}$ ya no son ortogonales; esto es

$$\int_{-\infty}^{\infty} N_m(t)N_m(t - \ell) dt \neq \delta_{0,\ell}, \dots \dots \dots (B.149)$$

para toda $\ell \in \mathbb{Z}$ y $m \geq 2$. Un ejemplo de la no ortogonalidad de $N_2(t)$ es mostrado en la **Fig. B12**. La integral $\int_{-\infty}^{\infty} N_2(t)N_2(t - \ell) dt$ es mostrada con el área asurada, la cual es diferente de cero.

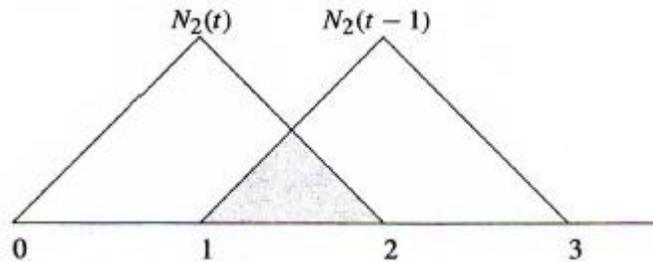


Fig. B12: No ortogonalidad del spline lineal mostrada por el área asurada (Fuente: [28] Goswami, J. C. y Chan, A. K. 1999. *Fundamentals of Wavelets: Theory, Algorithms, and Applications*. New York: John Wiley & Sons, Inc.)

B.6.2.1 Expresión para $g_0[k]$

Recordando la definición de $N_m(t)$ de la Sección B.5.5

$$N_m(t) = \underbrace{(N_1 * \dots * N_1)}_m(t)$$

y que

$$\hat{N}_m(\omega) = \left(\frac{1 - e^{-i\omega}}{i\omega} \right)^m \dots \dots \dots (B.150)$$

A partir de la transformada de Fourier de la relación de dos escalas, se tiene

$$G_0(z) = \frac{1}{2} \sum_k g_0[m, k] z^k = \frac{\hat{N}_m(\omega)}{\hat{N}_m(\omega/2)} \dots \dots \dots (B. 151)$$

$$= \left(\frac{1 + e^{-i(\omega/2)}}{2} \right)^m$$

$$= 2^{-m} (1 + z)^m, \quad z = e^{-i\omega/2}$$

$$= 2^{-m} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} z^k \dots \dots \dots (B. 152)$$

Comparando los coeficientes de las potencias de z , se tiene

$$g_0[k] := g_0[m, k] = \begin{cases} 2^{-m+1} \binom{m}{k}, & 0 \leq k \leq m \\ 0, & \text{en cualquier otro caso} \end{cases} \dots \dots \dots (B. 153)$$

Una vez teniendo $g_0[k]$, el resto de las secuencias $g_1[k]$, $h_0[k]$, y $h_1[k]$ pueden encontrarse usando las relaciones derivadas en la Sección B.6.1. La expresión de $g_1[k]$ es derivada abajo.

Para $N_m(t)$, el polinomio Euler-Frobenius-Laurent $E_{N_m}(z)$ toma la forma

$$E_{N_m}(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| \hat{N}_m \left(\frac{\omega}{2} + 2\pi k \right) \right|^2$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_{N_m}(k) z^k$$

$$= \sum_{k=-m+1}^{m+1} N_{2m}(m+k) z^k \dots \dots \dots (B. 154)$$

con $z := e^{-i\omega/2}$ y la función de autocorrelación

$$A_{N_m}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} N_m(x)N_m(k+x)dx = N_{2m}(m+k). \quad \dots\dots\dots (B.155)$$

Finalmente usando la relación (B.137), se tiene

$$g_1[k] := g_1[m, k] = (-1)^k \cdot 2^{-m+1} \sum_{\ell=0}^m \binom{m}{\ell} N_{2m}(k+1-\ell), \quad \dots\dots\dots (B.156)$$

$$0 \leq k \leq 3m - 2 \quad \dots\dots\dots (B.157)$$

Comentarios: Recordando que en las expresiones para $H_0(z)$ y $H_1(z)$, en términos de $G_0(z)$ y $G_1(z)$, hay un término $\Delta_{G_0G_1}(z) = z^m E_{N_m}(z)$ en el denominador, consecuentemente las secuencias $h_0[k]$, y $h_1[k]$ son infinitamente largas, aunque su magnitud decae exponencialmente. Estas son las secuencias que serán usadas en el desarrollo de los algoritmos de descomposición y reconstrucción en la Sección B.7. Mientras que las expresiones de G_0 y G_1 forman filtros FIR, H_0 y H_1 son siempre IIR.

B.7 Transformada Wavelet Discreta y Algoritmo de Banco de Filtros

La transformada wavelet continua (CWT) coloca información redundante sobre el plano tiempo-frecuencia. Para superar esta deficiencia, la CWT es discretizada y adicionalmente se han desarrollado algoritmos equivalentes a banco de filtros de dos canales para la representación y procesamiento de señales. Antes de desarrollar el álgebra para estos algoritmos, se discutirán los conceptos básicos del cambio en la frecuencia de muestreo a través del diezmado y la interpolación.

B.7.1 Diezmado e Interpolación

En el procesamiento de señales a menudo se tienen señales cuyo espectro puede variar con el tiempo. La señal de un sonido agudo es un buen ejemplo de esto. Para evitar distorsión, esta señal aguda debe ser muestreada al menos dos veces en su frecuencia más alta. Sin embargo, para una señal aguda con un amplio ancho de banda, esta frecuencia de muestro de Nyquist puede ser muy alta para la porción de baja frecuencia. Consecuentemente, se tendrá mucha información redundante que será acarreada si se usa una frecuencia de muestreo fija para el sonido agudo entero. Los mecanismos para cambiar la frecuencia de muestreo son el diezmado y la interpolación. Se discutirán sus características básicas en los dominios del tiempo y de la frecuencia.

B.7.1.1 Diezmado o Submuestreo

El diezmado por un factor entero M retiene cada M -ésima muestra de una señal dada. En el dominio del tiempo, el diezmado por un factor entero M de una secuencia de entrada $x[n]$ esta dada por

$$y[n] = x[nM] \quad \text{para } n \in \mathbb{Z}. \quad \dots \dots \dots (B. 158)$$

La **Fig. B13** representa el diagrama sistemático del diezmado por un factor entero M . La salida del diezmado puede ser escrita en términos del producto de $x[n]$ por una secuencia de impulsos unitarios separados por M muestras $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta[n - kM]$. Sea

$$u[n] = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x[n] \delta[n - kM] \quad \text{para } k \in \mathbb{Z}, \quad \dots \dots \dots (B. 159)$$

el cual selecciona las kM -ésimas muestras de $x[n]$. La representación en series de Fourier de la secuencia de impulsos periódicos M -puntual (B. 159) es

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta[n - kM] = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} e^{-i2\pi kn/M} \dots \dots \dots (B. 160)$$

Basándose en la suma geométrica

$$\sum_{k=0}^{M-1} e^{-i2\pi kn/M} = \begin{cases} M & \text{para } k = \ell M, \quad \ell \in \mathbb{Z} \\ 0, & \text{en cualquier otro caso,} \end{cases}$$

la identidad en (B.160) es comprobada. Escribiendo $y[n] = u[nM]$, en el dominio espectral, se obtendría la transformada discreta de Fourier de $y[n]$ como

$$\hat{y}(e^{i\omega}) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} \hat{x}(e^{i[(\omega-2\pi k)/M]}). \dots \dots \dots (B. 161)$$

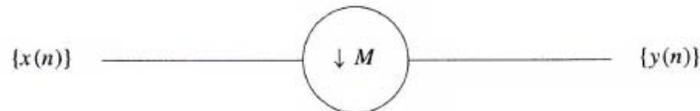


Fig. B13: Diezmado por un factor entero M (Fuente: [28] Goswami, J. C. y Chan, A. K. 1999. *Fundamentals of Wavelets: Theory, Algorithms, and Applications*. New York: John Wiley & Sons, Inc.)

El espectro del diezmado de salida contiene M copias del espectro de entrada. La amplitud de la copia es reducida por un factor de $1/M$. Adicionalmente, el ancho de banda de la copia es expandida M veces. Como resultado, si el ancho de banda espectral de la señal de entrada es más grande que π/M (esto es, $|\omega| > \pi/M$), un diezmado por un factor entero M introducirá aliasing en su señal de salida. Más adelante se verá que el aliasing en realidad ocurre en un árbol de descomposición wavelet o en un algoritmo de descomposición en banco de filtros de dos canales. Sin embargo, el aliasing es cancelado por el diseño cuidadoso del

algoritmo de reconstrucción que permite remover el aliasing y recuperar la señal original.

Para $M = 2$, una secuencia es diezmada tomando todos los otros puntos de datos. De (B.161), se obtiene

$$\hat{y}(e^{i\omega}) = \frac{1}{2} \left[\hat{x}\left(e^{i\left(\frac{\omega}{2}\right)}\right) + \hat{x}\left(-e^{i\left(\frac{\omega}{2}\right)}\right) \right]. \quad \dots \dots \dots (B.162)$$

El espectro de $\hat{y}(e^{i\omega})$ es mostrado en la **Fig. B14**.

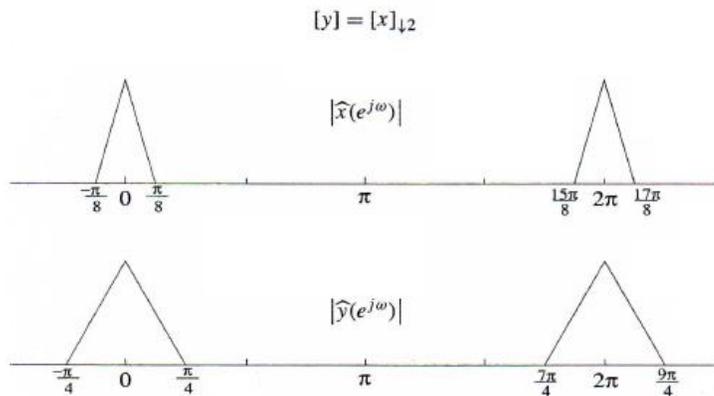


Fig. B14: Característica espectral del diezmado por 2 (Fuente: [28] Goswami, J. C. y Chan, A. K. 1999. *Fundamentals of Wavelets: Theory, Algorithms, and Applications*. New York: John Wiley & Sons, Inc.)

En aras de simplificar utilizando la forma matricial, se considerará como ejemplo únicamente el caso donde $M = 2$. Se usa $\downarrow 2$ en el subíndice para representar el diezmado por 2. Escribiendo

$$[y] = [x]_{\downarrow 2} \quad \dots \dots \dots (B.163)$$

como

$$\begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ y(-2) \\ y(-1) \\ y(0) \\ y(1) \\ y(2) \\ y(3) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ x(-4) \\ x(-2) \\ x(0) \\ x(2) \\ x(4) \\ x(6) \\ x(8) \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} \dots\dots\dots (B.164)$$

En términos de un operador matricial, (B.164) se escribe como

$$\begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ y(-2) \\ y(-1) \\ y(0) \\ y(1) \\ y(2) \\ y(3) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \cdot & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ x(-2) \\ x(-1) \\ x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \\ x(4) \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} \dots\dots\dots (B.165)$$

ó

$$[y] = [DEC_{\downarrow 2}][x].$$

La propiedad de desplazamiento variable del diezmado es evidente cuando se mueve la columna de entrada hacia arriba o hacia abajo por un determinado número de posición. Adicionalmente, la matriz de diezmado es una matriz ortogonal puesto que

$$[DEC_{\downarrow 2}]^{-1} = [DEC_{\downarrow 2}]^{-t}$$

Consecuentemente, el diezmado es una transformación ortogonal.

B.7.1.2 Interpolación

Interpolación de datos significa insertar puntos de datos adicionales dentro de una secuencia para incrementar la frecuencia de muestreo. Sea $y[n]$ la entrada al interpolador. Si se desea incrementar el número de muestras por M dobles, se insertan $M - 1$ ceros entre cualesquiera dos muestras adyacentes, así que el interpolador de salida daría

$$x'[n] = \begin{cases} y\left[\frac{n}{M}\right] & \text{para } n = kM, \quad k \in \mathbb{Z} \\ 0, & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases} \dots\dots\dots (B.166)$$

El diagrama sistemático de un interpolador por un factor entero M es mostrado en la **Fig. B15**. También se puede escribir la expresión de interpolación en la forma estándar de una sumatoria de convoluciones

$$x'[n] = \sum_k y[k] \delta[n - kM]. \dots\dots\dots (B.167)$$

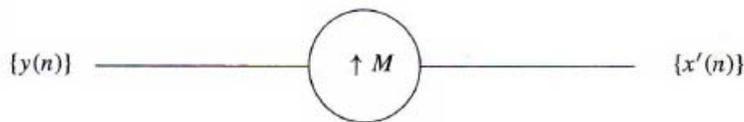


Fig. B15: Interpolador por un factor entero M (Fuente: [28] Goswami, J. C. y Chan, A. K. 1999. *Fundamentals of Wavelets: Theory, Algorithms, and Applications*. New York: John Wiley & Sons, Inc.)

El espectro del interpolador de salida está dado por

$$\widehat{x'}(e^{i\omega}) = \sum_n \sum_k y[k] \delta[n - kM] e^{-in\omega}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_k y[k] e^{-ikM\omega} \\
 &= \hat{y}(e^{-iM\omega}). \quad \dots\dots\dots (B.168)
 \end{aligned}$$

La interpolación incrementa la frecuencia de muestreo colocando ceros entre las muestras. La secuencia de salida tiene M veces más puntos que la secuencia de entrada, y el espectro de salida es reducido por un factor M sobre el eje ω . A diferencia del diezmado, no hay peligro de aliasing por el interpolador ya que el espectro de salida tiene un menor ancho de banda que el espectro de entrada. El espectro de un interpolador dual es mostrado en la **Fig. B16**.

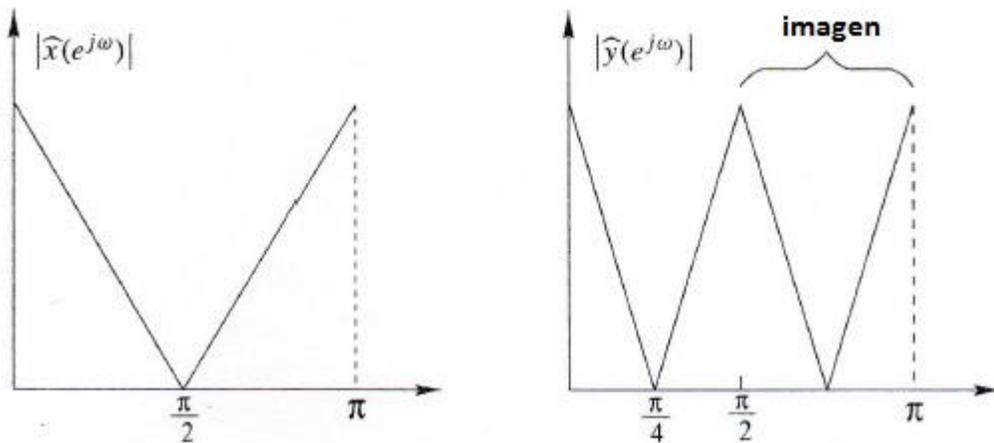


Fig. B16: Características espectrales de la interpolación por 2 (Fuente: [28] Goswami, J. C. y Chan, A. K. 1999. *Fundamentals of Wavelets: Theory, Algorithms, and Applications*. New York: John Wiley & Sons, Inc.)

Usando $M = 2$ como ejemplo, se escribe

$$\begin{aligned}
 x'[n] &= y[n]_{\uparrow 2} \\
 &= \begin{cases} y\left[\frac{n}{2}\right] & \text{para } n \text{ entero} \\ 0, & \text{en cualquier otro caso} \end{cases} \quad \dots\dots (B.169)
 \end{aligned}$$

En forma matricial se tiene

$$\begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ x'(-2) \\ x'(-1) \\ x'(0) \\ x'(1) \\ x'(2) \\ x'(3) \\ x'(4) \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ y(-1) \\ 0 \\ y(0) \\ 0 \\ y(1) \\ 0 \\ y(2) \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} \dots\dots\dots (B.170)$$

Como antes, el interpolador se puede representar por un operador matricial lineal. La interpolación matricial lineal resulta de transponer la matriz de diezmado, es decir

$$\begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ x'(-2) \\ x'(-1) \\ x'(0) \\ x'(1) \\ x'(2) \\ x'(3) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & 0 & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & 1 & 0 \\ & & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ y(-2) \\ y(-1) \\ y(0) \\ y(1) \\ y(2) \\ y(3) \\ y(4) \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} \dots\dots\dots (B.171)$$

o se puede escribir

$$[y] = [INT_{12}][x]. \dots\dots\dots (B.172)$$

Las operaciones de convolución seguidas por diezmado, e interpolación seguida por convolución son dos de los más importantes componentes de un algoritmo.

B.7.1.3 Convolución Seguida de Diezmado

Matemáticamente, esta operación se expresa como

$$y[n] = \{h[n] * x[n]\}_{\downarrow 2}. \dots \dots \dots (B.173)$$

El diagrama de este proceso es dado en la **Fig. B17**. Si se etiqueta la salida intermedia como $u[n]$, la convolucion de $x[n]$ y $h[n]$ esta dada por

$$u[n] = \sum_k x[n-k]h[n-k] \dots \dots \dots (B.174)$$

El diezmado por un factor entero de 2 queda

$$y[n] = u[2n] = \sum_k x[k]h[2n-k]. \dots \dots \dots (B.175)$$

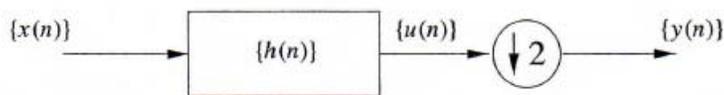


Fig. B17: Convolución seguida por diezmado (Fuente: [28] Goswami, J. C. y Chan, A. K. 1999. *Fundamentals of Wavelets: Theory, Algorithms, and Applications*. New York: John Wiley & Sons, Inc.)

B.7.1.4 Interpolación Seguida por Convolución

La expresión en el dominio del tiempo de esta operación está dada por

$$y[n] = \{g[n] * [x(n)]_{\uparrow 2}\}. \dots \dots \dots (B.176)$$

Usando $v[n]$ como la salida intermedia, se tiene

$$y[n] = \sum_k v[k]g[n - k] \dots \dots \dots (B.177)$$

Puesto que $v[k] = x[k/2]$ para k par, se tiene

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k:\text{par}} x\left[\frac{k}{2}\right]g[n - k] \\ &= \sum_{\ell} x[\ell]g[n - 2\ell] \dots \dots \dots (B.178) \end{aligned}$$

Este proceso es mostrado en la **Fig. B18**.

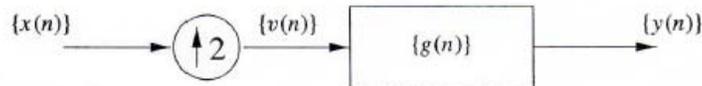


Fig. B18: Interpolación seguida por convolución (Fuente: [28] Goswami, J. C. y Chan, A. K. 1999. *Fundamentals of Wavelets: Theory, Algorithms, and Applications*. New York: John Wiley & Sons, Inc.)

B.7.2 Representación de una Señal en el Subespacio Aproximación (A_j)

En la Sección B.5 se mostró que los subespacios aproximación A_j son anidados, así se tiene que los subespacios $A_\infty = L^2$, $A_{-\infty} = \{0\}$, y $A_j \subset A_{j+1}$ para toda $j \in \mathbb{Z}$. En el caso de una señal arbitraria de energía finita $x(t)$, no hay una garantía de que esta señal este en alguno de estos subespacios aproximación. Esto es, tal vez no se puedan encontrar unos coeficientes $c_{j,k}$ tales que

$$x(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{j,k} \phi(2^j t - k) \quad \text{para alguna } j. \quad \dots \dots \dots (B.179)$$

Haciendo uso de las relaciones de dos escalas para el procesamiento, la señal debe de estar en alguno de estos subespacios aproximación anidados. Una manera de cumplir con este requerimiento es proyectando la señal en alguno de los subespacios A_j , para cierta j . Esto es particularmente importante si únicamente se conocen los valores de las muestras de la señal en $x(t = k/2^j, k \in \mathbb{Z})$ para algún valor grande de j .

Asumiendo que la señal $x(t)$ no está en alguno de los subespacios aproximación A_j , entonces se desea encontrar $x_j(t) \in A_j$ tal que

$$x(t) \cong x_j(t) = \sum_k c_{j,k} \phi_{j,k}(t) = \sum_k c_{j,k} \phi(2^j t - k), \quad \dots \dots \dots (B.180)$$

donde $c_{j,k}$ son los coeficientes de la función de escalamiento a ser computados en base a las muestras de la señal. La forma de determinar los coeficientes $c_{j,k}$ a partir de las muestras $x(t = k/2^j)$ es obteniendo la proyección ortogonal de $x(t)$ en el espacio A_j .

Puesto que A_j es un subespacio de L^2 y $x(t) \in L^2$, se considera a $x_j(t)$ como la proyección ortogonal de $x(t)$ en el subespacio A_j . Entonces $x(t) - x_j(t)$ es ortogonal a A_j y por consiguiente ortogonal a la base de funciones $\phi_{j,\ell}$:

$$\langle (x(t) - x_j(t)), \phi_{j,\ell} \rangle = 0 \quad \forall \ell \in \mathbb{Z}. \quad \dots \dots \dots (B.181)$$

Consecuentemente, los coeficientes son determinados de la ecuación

$$\langle x_j(t), \phi_{j,\ell} \rangle = \langle x(t), \phi_{j,\ell} \rangle = \left\langle \sum_k c_{j,k} \phi_{j,k}(t), \phi_{j,\ell}(t) \right\rangle. \dots \dots \dots (B.182)$$

Expandiendo la última igualdad, se llega a

$$\begin{aligned} 2^{j/2} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \overline{\phi(2^j t - \ell)} dt &= 2^j \sum_k c_{j,k} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \phi(2^j t - k) \overline{\phi(2^j \ell - k)} dt \right] \\ &= \sum_m c_{j,m} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) \overline{\phi(t - m)} dt \right], \dots \dots \dots (B.183) \end{aligned}$$

donde se ha hecho el cambio de índice $m = \ell - k$. La forma matricial de (B.183) es

$$\begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_1 & \alpha_0 & \alpha_1 \\ \cdot & \alpha_0 & \alpha_1 \\ \cdot & \alpha_0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \alpha_0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_{j,m} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \langle x(t), \phi_{j,m} \rangle \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}, \dots \dots \dots (B.184)$$

donde

$$\alpha_m = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) \overline{\phi(t - m)} dt = \overline{\alpha_{-m}}$$

es la autocorrelación de la función de escalamiento $\phi(t)$. Si la función de escalamiento es de soporte compacto, la matriz de autocorrelación es agrupada con una banda diagonal de tamaño finito. Si la función de escalamiento y sus traslaciones forman una base ortogonal, entonces

$$\alpha_m = \delta_{m,0}.$$

Asumiendo una base ortogonal, la matriz de autocorrelación es la matriz identidad y los coeficientes son obtenidos computando el producto interno

$$a_{j,m} = \langle x(t), \phi_{j,m} \rangle. \dots \dots \dots (B.185)$$

Si se tienen únicamente los valores de las muestras de la señal $x(t)$ en $x(t = k/2^j)$, se puede aproximar la integral con una sumatoria. Esto es,

$$\begin{aligned} c_{j,m} &= 2^{j/2} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \overline{\phi(2^j t - m)} dt \\ &\cong 2^{-j/2} \sum_k x\left(\frac{k}{2^j}\right) \overline{\phi(k - m)}. \dots \dots \dots (B.186) \end{aligned}$$

Esta ecuación demuestra la diferencia entre los coeficientes de la función de aproximación y los valores de las muestras de la señal. Los primeros son los coeficientes de expansión de una señal analógica, mientras que los posteriores son las muestras de una señal discreta en el tiempo.

En la práctica los datos de una señal digital son recolectados a una resolución finita, j ; por convención, la frecuencia de muestro es normalizada a 1. Así, siguiendo la notación usada por el marco teórico del análisis wavelet, la frecuencia de muestro es igual 2^j , y puesto que la frecuencia de muestreo es normalizada a 1, la escala de los datos originales es 0. Por consiguiente, siguiendo la deducción de arriba,

$$c_{0,k} = \langle x(t), \phi(t - k) \rangle$$

la cual es la definición de los coeficientes de la señal aproximación al nivel de resolución 0 y significa que la mejor aproximación al nivel 0 es en realidad la señal original en si misma ¹¹.

B.7.3 Algoritmo de Descomposición Wavelet

Recordando que la expresión de la CWT de una señal $f(t)$ es

$$W_{\psi}f(b, a) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt. \dots\dots\dots (B.187)$$

Denotando a la escala con $a = 1/2^j$ y a la traslación con $b = k/2^j$, donde j y k pertenecen al conjunto de los números enteros \mathbb{Z} . La CWT de $f(t)$ es un numero en $(k/2^j, 1/2^j)$ sobre el plano tiempo-escala. Representa la correlación entre $f(t)$ y $\bar{\psi}(t)$ en ese punto tiempo-escala. A esto se le llama la **transformada wavelet discreta (DWT)**, la cual genera un conjunto limitado de valores sobre el plano tiempo-escala. Normalmente se usa

$$d_{j,k} = W_{\psi}f\left(\frac{k}{2^j}, \frac{1}{2^j}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{\psi\left(\frac{t - k/2^j}{1/2^j}\right)} dt \dots\dots\dots (B.188)$$

para representar los coeficientes wavelet en $(b = k/2^j, a = 1/2^j)$. Un mapeo discreto tiempo-escala representando a la señal $f(t)$ puede observarse como en la **Fig. B19**.

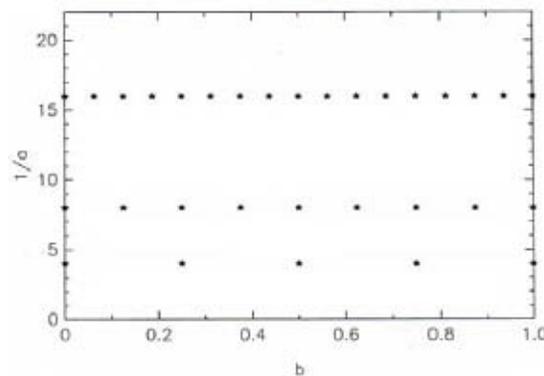


Fig. B19: Grid típico tiempo-escala usando el algoritmo de descomposición (Fuente: [28] Goswami, J. C. y Chan, A. K. 1999. *Fundamentals of Wavelets: Theory, Algorithms, and Applications*. New York: John Wiley & Sons, Inc.)

Es sabido que la CWT genera información redundante acerca de la señal sobre el plano tiempo-escala. Pero seleccionando $(b = k/2^j, a = 1/2^j)$, es mucho más eficiente usando la DWT para procesar una señal. Ya ha sido mostrado que la DWT mantiene suficiente información de la señal tal que reconstruye la señal perfectamente a partir de los coeficientes wavelet. En realidad, el número de coeficientes necesarios para la reconstrucción perfecta es el mismo que el número de muestras de datos. Conocido como **muestreo crítico**, este minimiza información redundante ²⁸.

El algoritmo de descomposición (análisis) es usado muy a menudo en el procesamiento de señales wavelet. El algoritmo separa una señal en componentes a varias escalas correspondientes a octavas de frecuencia sucesivas. Cada componente puede ser procesado individualmente por un algoritmo diferente. La versatilidad de este algoritmo es que retiene toda la información pertinente así que se puede recuperar la señal original (si es necesario). El algoritmo está basado en las relaciones de descomposición de un MRA, discutidas en la Sección B.5. Se describirán varias de estas relaciones para una fácil referencia

Teniendo que

$$\begin{aligned}x_{j+1}(t) \in A_{j+1}, &\Rightarrow x_{j+1}(t) = \sum_k c_{j+1,k} \phi_{j+1,k}(t) \\x_j(t) \in A_j, &\Rightarrow x_j(t) = \sum_k c_{j,k} \phi_{j,k}(t) \\y_j(t) \in W_j, &\Rightarrow y_j(t) = \sum_k d_{j,k} \psi_{j,k}(t).\end{aligned}$$

Y puesto que el MRA requiere que

$$A_{j+1} = A_j + W_j, \quad \dots \dots \dots (B.189)$$

entonces se tiene

$$x_{j+1}(t) = x_j(t) + y_j(t)$$

$$\sum_k c_{j+1,k} \phi_{j+1,k}(t) = \sum_k c_{j,k} \phi_{j,k}(t) + \sum_k d_{j,k} \psi_{j,k}(t). \quad \dots \dots \dots (B.190)$$

Sustituyendo las relaciones de descomposición

$$\phi(2^{j+1}t - \ell) = \sum_k \{h_0[2k - \ell] \phi(2^j t - k) + h_1[2k - \ell] \psi(2^j t - k)\} \quad \dots \dots (B.191)$$

dentro de (B.190) se llega a una ecuación en la cual todas las bases están a una resolución j . Después de intercambiar el orden de los sumandos y comparar los coeficientes de $\phi_{j,k}(t)$ y $\psi_{j,k}(t)$ en ambos lados de la ecuación, se obtiene

$$c_{j,k} = \sum_{\ell} h_0[2k - \ell] c_{j+1,\ell}$$

$$d_{j,k} = \sum_{\ell} h_1[2k - \ell] c_{j+1,\ell}$$

donde el lado derecho de las ecuaciones corresponde a la operación de convolución seguida del diezmado por 2 (ver Sección B.7.1.3), por lo cual el tamaño de los coeficientes de aproximación y detalle son reducidos por un factor de 2 conforme se incrementan los niveles de descomposición. Por otro lado, las fórmulas de arriba relacionan los coeficientes de la función aproximación y de detalle a cualquier escala con los coeficientes de la función aproximación a la siguiente escala más alta (resolución más fina). Repitiendo este algoritmo, se obtienen las componentes de la señal a varias octavas de frecuencia. Este algoritmo es representado en la **Fig. B20**, donde es usada la notación vectorial

$$a_j := \{c_{j,k}\}, w_j := \{d_{j,k}\}, h_0 := \{h_0[k]\} \text{ y } h_1 := \{h_1[k]\} \dots \dots \dots (B.192)$$

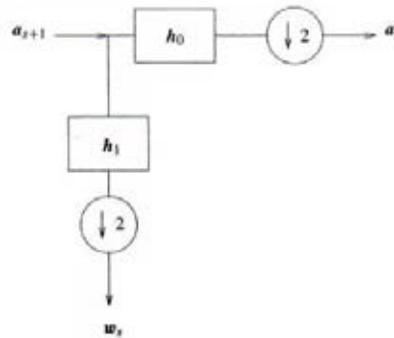


Fig. B20: Proceso de descomposición wavelet a un solo nivel (Fuente: [28] Goswami, J. C. y Chan, A. K. 1999. *Fundamentals of Wavelets: Theory, Algorithms, and Applications*. New York: John Wiley & Sons, Inc.)

con $k \in \mathbb{Z}$. Esta descomposición en componentes puede ser aplicada repetidamente a los coeficientes de aproximación a una resolución más baja para construir un árbol de descomposición wavelet como se muestra en la **Fig. B21**.

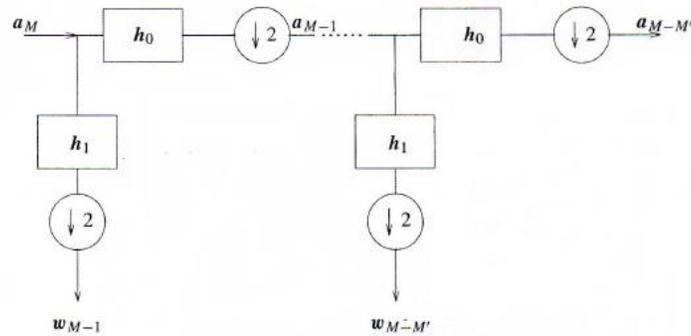


Fig. B21: Árbol de descomposición wavelet (Fuente: [28] Goswami, J. C. y Chan, A. K. 1999. *Fundamentals of Wavelets: Theory, Algorithms, and Applications*. New York: John Wiley & Sons, Inc.)

Es preciso hacer notar que el árbol de descomposición wavelet no es simétrico ya que solamente los coeficientes de la función aproximación son

descompuestos reiteradamente para obtener los componentes de la señal a las resoluciones más bajas (escalas más gruesas).

B.7.4 Algoritmo de Reconstrucción

Es importante para cualquier transformada tener una única inversa tal que los datos originales puedan ser recuperados perfectamente. Existe una única transformada wavelet inversa discreta (o la transformada síntesis) tal que la función original pueda ser recuperada perfectamente a partir de sus componentes a diferentes escalas. El algoritmo de reconstrucción está basado en las relaciones de dos escalas de la función de escalamiento y wavelet. Considerando una suma de estos componentes a la resolución j –ésima:

$$x_j(t) + y_j(t) = \sum_k c_{j,k} \phi_{j,k}(t) + \sum_k d_{j,k} \psi_{j,k}(t) = x_{j+1}(t). \quad \dots \dots \dots (B.193)$$

Sustituyendo las relaciones de dos escalas en (B.193), se obtiene

$$\begin{aligned} \sum_k c_{j,k} \sum_{\ell} g_0[\ell] \phi(2^{j+1}t - 2k - \ell) + \sum_k d_{j,k} \sum_{\ell} g_1[\ell] \phi(2^{j+1}t - 2k - \ell) \\ = \sum_{\ell} c_{j+1,\ell} \phi(2^{j+1}t - \ell). \quad \dots \dots \dots (B.194) \end{aligned}$$

Comparando los coeficientes de $\phi(2^{j+1}t - \ell)$ en ambos lados de (B.194) se llega a

$$c_{j+1,\ell} = \sum_k \{g_0[\ell - 2k]c_{j,k} + g_1[\ell - 2k]d_{j,k}\}, \quad \dots \dots \dots (B.195)$$

donde el lado derecho de la ecuación corresponde a interpolación seguida por convolución, como se discutió en la Sección B.7.1.4. La ecuación (B.195) muestra que los coeficientes de la señal aproximación a una resolución $j + 1$,

pueden ser reconstruidos insertando ceros entre cada muestra de $c_{j,k}$ y $d_{j,k}$ y sumando las convoluciones discretas entre los coeficientes y los filtros g_0 y g_1 , respectivamente. El algoritmo de reconstrucción de (B.195) es mostrado gráficamente en la **Fig. B22**.

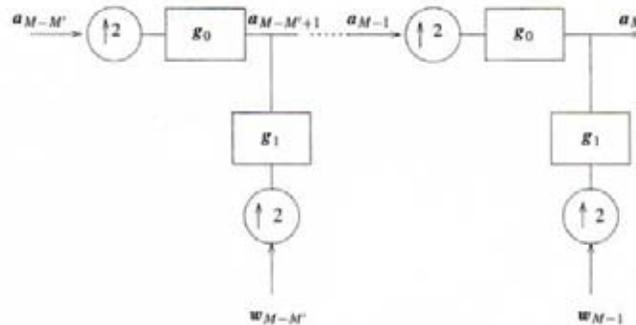


Fig. B22: Reconstrucción de una señal a partir de la función de escalamiento y de los coeficientes wavelet (Fuente: [28] Goswami, J. C. y Chan, A. K. 1999. *Fundamentals of Wavelets: Theory, Algorithms, and Applications*. New York: John Wiley & Sons, Inc.)

Comenzando de cualquier nivel de descomposición, los coeficientes de las señales aproximación a subsecuentes niveles de descomposición más altos (resolución más fina) y la señal original pueden ser reconstruidos.

ANEXO C

SUBRRUTINAS FUNDAMENTALES

MODULO CORRELACIÓN PRODUCCIÓN - ΔT

Rutinas de Regresión

Rutina de Regresión Lineal aplicada a los puntos: Aplicar Regresion Lineal (DT,Q)

La rutian Aplicar_Regresion_Lineal se encarga de aplicar la regresión para dos columnas seleccionas de un archivo CX, CY

```
''' <summary>
''' Toma 2 Columnas de un Archivo. Les aplica Regresion Lineal y guarda lso
resultados en Nuevo
''' </summary>
''' <param name="FDatos"> De Aqui se Extraen los datos </param>
''' <param name="Nuevo">Aqui escribirá las estimaciones del modelo lineal. Si ya
tiene columnas lo hara en la ultima disponible</param>
''' <param name="CX">Columna de Variables Independientes</param>
''' <param name="CY">Columna de Variables Dependientes</param>
''' <param name="Inicio"> Renglon Inicial</param>
''' <param name="Final"> Renglon Final </param>
''' <remarks></remarks>
Public Sub Aplicar_Regresion_Lineal(ByRef FDatos As Form_Archivo, ByRef Nuevo As
Form_Archivo, ByRef CX As Integer, ByRef CY As Integer, ByRef Inicio As Integer,
ByRef Final As Integer)
    Dim X() As Double = {0}, Y() As Double = {0}
    Dim Res() As Double = {0}

    'Obtenemos los Datos del Archivo'
    Call Obtener_Datos(FDatos, X, Y, CX, CY, Inicio, Final)
    Res = Fit.Line(X, Y)

    FDatos.MdiParent = F4
    Dim Nuevo_Modelo As Form4.Modelo

    'Guardamos el modelo lineal en una variable temporal que nos ayudara a
graficar la recta entera'
    'Se usa esta variable en el form_herramientas al generar el modelo de gasto
constante (es temporal para que no interfiera con el resto del proceso)'
    MGastoC_Temp = Nuevo_Modelo
End Sub
```

Rutina de Regresión Lineal aplicada a los puntos: Regresion Exponencial (DT,Q)

```

''' <summary>
''' Toma 2 Columnas de un Archivo. Les aplica Regresion Lineal y guarda los
resultados en Nuevo
''' </summary>
''' <param name="FDatos"> De Aqui se Extraen los datos </param>
''' <param name="Nuevo">Aqui escribirá las estimaciones del modelo lineal. Si ya
tiene columnas lo hara en la ultima disponible</param>
''' <param name="CX">Columna de Variables Independientes</param>
''' <param name="CY">Columna de Variables Dependientes</param>
''' <param name="Inicio"> Renglon Inicial</param>
''' <param name="Final"> Renglon Final </param>
''' <remarks></remarks>
Sub Regresion_Exponencial(ByRef FDatos As Form_Archivo, ByRef Nuevo As
Form_Archivo, ByRef CX As Integer, ByRef CY As Integer, ByRef Inicio As Integer,
ByRef Final As Integer)
    Dim X() As Double = {0}, Y() As Double = {0}
    Dim Res() As Double = {0}

    'Obtenemos los Datos del Archivo'
    Call Obtener_Datos(FDatos, X, Y, CX, CY, Inicio, Final)

    'Aplicamos logaritmo natural a los datos'
    Call Aplicar_Log(Y)
    'Resolvemos problema lineal'
    Res = Fit.Line(X, Y)

    'Resolvemos problema Exponencial'
    Call Modificar_Coef(Res) 'Modifiamos los coeficientes y aplicamos regresion
lineal'

End Sub

```

Para aplicar el modelo exponencial debemos transformar los coeficientes mediante la función

```

Public Sub Modificar_Coef(ByRef Res() As Double)
    For i = 0 To UBound(Res)
        Res(i) = Math.Exp(Res(i))
    Next i
End Sub

```

Rutina de Regresión Lineal aplicada a los puntos: Regresion Exponencial (DT,Q)

```

Public Sub Aplicar_Regresion_Polinomial(ByRef FDatos As Form_Archivo, ByRef
Nuevo As Form_Archivo, ByRef CX As Integer, ByRef CY As Integer, ByRef Orden As
Integer, ByRef Inicio As Integer, ByRef Final As Integer)
    Dim X() As Double = {0}, Y() As Double = {0}
    Dim Res() As Double = {0}

    'Obtenemos los Datos del Archivo'
    Call Obtener_Datos(FDatos, X, Y, CX, CY, Inicio, Final)
    Res = Fit.Polynomial(X, Y, Orden)

End Sub

```

Rutinas modelos Spline

Las rutinas para los modelos spline son:

Rutina de Spline Cubisco sobre (DT,Q)

```

''' <summary>
''' Toma 2 Columnas de un Archivo. Les aplica El modelo de Spline Cubico
''' </summary>
''' <param name="Puntos">De Aquí se Extraen los datos </param>
''' <param name="Padre">Aquí escribirá las estimaciones del modelo lineal. Si ya
tiene columnas lo hará en la última disponible</param>
''' <param name="CF">Columna de Variables Independientes</param>
''' <param name="AEscritura">Columna de Variables Dependientes</param>
''' <remarks></remarks>
Public Sub Generar_Spline_Cubico(ByRef Puntos(,) As Double, ByRef Padre As
Form4, ByRef CF As Integer, ByRef AEscritura As Form_Archivo)
    Dim A(,) As Double, x(,) As Double, b() As Double, Coef(,) As Double
    Dim Sistema As List(Of Object)

    Sistema = Construir_Matriz_Diseño(Puntos, CF)
    Call Aplicar_Condiciones_Frontera(Sistema, Puntos, CF)
    A = Sistema(0) : b = Sistema(1)
    x = Resolver_Sistema(A, b)

    'Generamos coeficientes de los n - 1 polinomios'
    Coef = Generar_Coeficientes_Polinomios(Puntos, x)
    Call Generar_Estimaciones_SplineC(Puntos, Coef, AEscritura)
    'Finalmente agregamos el Modelo'
End Sub

```

Rutina de Spline Cubisco sobre (DT,Q): Construir Matriz Diseño

Esta función se encarga de construir el sistema de ecuaciones lineales que se desea resolver, el sistema depende de los puntos que se desea unir

```

Public Function Construir_Matriz_Diseño(ByRef Puntos(,) As Double, ByRef CF As
Integer) As List(Of Object)
    Dim di As Double, ai As Double, DX1 As Double, DX2 As Double, DG1 As Double,
DG2 As Double
    Dim X() As Double, G() As Double, b() As Double
    Dim MD(,) As Double, i As Integer

    X = Vectorizar_Columna(Puntos, 0)
    G = Vectorizar_Columna(Puntos, 1)

    'Generamos la matriz del sistema
    ReDim MD(UBound(Puntos), UBound(Puntos))
    ReDim b(UBound(Puntos))

    If (CF = 1) Or (CF = 2) Then
        For i = 1 To (UBound(Puntos, 1) - 1)
            di = 2
            DX1 = X(i + 1) - X(i)
            DX2 = X(i) - X(i - 1)
            DG1 = G(i + 1) - G(i)
            DG2 = G(i) - G(i - 1)

            ai = DX1 / (DX2 + DX1)
            b(i) = (DX1 / DX2) * (DG2 / (DX2 + DX1))
            b(i) = b(i) + (DX2 / DX1) * ((DG1) / (DX2 + DX1))
            b(i) = 3 * b(i)

            'Una vez calculados los valores cable generamos la matriz'
            MD(i, i) = di
        Next i
    End If
End Function

```

```

        MD(i, i - 1) = ai
        MD(i, i + 1) = (1 - ai)
    Next i
ElseIf CF = 3 Then
End If

Dim Res As New List(Of Object)
Res.Add(MD) : Res.Add(b)
Return Res
End Function

```

Rutina de Spline Cubisco sobre (DT,Q): Aplicar Condiciones Frontera

El sistema de ecuaciones que se desea resolver no puede ser especificado de manera única usando solamente los puntos que vamos a unir, esta rutina se encarga de establecer las condiciones de frontera para el algoritmo

```

''' <summary>
''' Toma la Matriz de diseño y aplica Condiciones de Frontera. Modifica el punto
1 y el n
''' </summary>
''' <param name="sistema">El lugar donde almacenamos el sistema (A, b)</param>
''' <param name="Puntos">Valores X,Y del Problema</param>
''' <param name="TC">Tipo de condicion de Frontera</param>
''' <remarks></remarks>
Public Sub Aplicar_Condiciones_Frontera(ByRef Sistema As List(Of Object), ByRef
Puntos(,) As Double, ByRef TC As Integer)
    Dim A(,) As Double = Sistema(0)
    Dim b() As Double = Sistema(1)
    Dim n = UBound(A, 1)

    If TC = 2 Then
        'Punto 1'
        A(0, 0) = 2
        A(0, 1) = 1
        b(0) = (Puntos(1, 1) - Puntos(0, 1)) / (Puntos(1, 0) - Puntos(0, 0))
        b(0) = 3 * b(0)

        'Punto n'
        A(n, n - 1) = 1
        A(n, n) = 2
        b(n) = (Puntos(n, 1) - Puntos(n - 1, 1)) / (Puntos(n, 0) - Puntos(n - 1,
0))

        b(n) = 3 * b(n)
    ElseIf TC = 3 Then
        A(0, 0) = Puntos(2, 0) - Puntos(1, 0)
        A(0, 1) = Puntos(2, 0) - Puntos(0, 0)
    ElseIf TC = 2 Then
        A(0, 0) = 1
        b(0) = 0

        A(n, n) = 1
        b(n) = (Puntos(n, 1) - Puntos(n - 1, 1)) / (Puntos(n, 0) - Puntos(n - 1,
0))

        b(n) = 3 * b(n)
        b(n) = 0
    End If
End Sub

```

Rutina de Spline Cubisco sobre (DT,Q): Resolver Sistema

Una vez que el sistema ha sido definido, se resuelve

```

''' <summary>
''' Resuelve un sistema de ecuaciones lineales mediante el algoritmo de
Factorizacion QR
''' </summary>
''' <param name="A">El lugar donde almacenamos el sistema (A, b)</param>
''' <param name="b">Valores X,Y del Problema</param>
''' <returns>Solucion del sistema. Es una matriz nx1</returns>
Public Function Resolver_Sistema(ByRef A(,) As Double, b() As Double) As
Double(,)
    Dim Solucion(,) As Double

    Dim AM As DenseMatrix = DenseMatrix.OfArray(A)
    Dim bM As DenseMatrix = DenseVector.OfEnumerable(b).ToColumnMatrix
    Solucion = AM.QR().Solve(bM).ToArray

    Return Solucion
End Function

```

Rutina de Spline Cubisco sobre (DT,Q): Resolver Sistema

La solución del sistema de ecuaciones no da los coeficientes, se deben obtener a partir de la solución del sistema, que son las derivadas de orden n del polinomio solución.

```

''' <summary>
''' Mediante la solucion de un sistema de ecuaciones lineales genera los
Coeficientes de los polinomios del Spline
''' </summary>
''' <param name="Puntos">Valores X,Y del Problema</param>
''' <param name="Sol_Sist">Solucion del sistema lineal</param>
''' <remarks></remarks>
Public Function Generar_Coeficientes_Polinomios(ByRef Puntos(,) As Double, ByRef
Sol_Sist(,) As Double)
    Dim Coef(,) As Double, S() As Double, X() As Double, G() As Double
    Dim n As Integer = UBound(Puntos)
    Dim i As Integer, DX As Double, DX2 As Double, DGE As Double 'Delta G
estandarizada'

    S = Vectorizar_Columna(Sol_Sist, 0)
    X = Vectorizar_Columna(Puntos, 0)
    G = Vectorizar_Columna(Puntos, 1)

    ReDim Coef(n - 1, 3)
    For i = 0 To UBound(Coef)
        DGE = (G(i + 1) - G(i)) / (X(i + 1) - X(i))
        DX = X(i + 1) - X(i) : DX2 = (DX ^ 2)

        Coef(i, 0) = G(i)
        Coef(i, 1) = S(i)

        Coef(i, 2) = -2 / DX
        Coef(i, 2) = Coef(i, 2) * ((2 * S(i)) + S(i + 1) - (3 * DGE))

        Coef(i, 3) = 6 / DX2
        Coef(i, 3) = Coef(i, 3) * (S(i) + S(i + 1) - (2 * DGE))
    Next i

    Return Coef

```

End Function

Rutina de Spline Cuadratico sobre (DT,Q): Aplicar Splin Cuadratico

```
''' <summary>
''' Toma 2 Columnas de un Archivo. Les aplica El modelo de Spline Cuadratico
''' </summary>
''' <param name="Puntos">De Aqui se Extraen los datos </param>
''' <param name="CF">Columna de Variables Independientes</param>
''' <param name="w"> Peso usado en el calculo de los puntos de ruptura.</param>
''' <param name="AEscritura">Columna de Variables Dependientes</param>
''' <remarks></remarks>
Public Sub Aplicar_Splin_Cuadratico(ByRef Puntos(,) As Double, ByRef CF As
Integer, ByRef w As Double, ByRef AEscritura As Form_Archivo)
    Dim Sistema As List(Of Object)
    Dim A(,) As Double, b() As Double, X(,) As Double
    Dim Coef(,) As Double, Rupturas() As Double

    Sistema = Crear_Matriz_Diseño_Cuadratico(Puntos, CF, w)
    A = Sistema(0) : b = Sistema(1)
    X = Resolver_Sistema(A, b)

    Coef = Sistema(2) : Rupturas = Sistema(3)
End Sub
```

Rutina de Spline Cuadratico sobre (DT,Q): Crear Matriz Diseño Cuadratico

Al formar la matriz de diseño en este caso también generó los coeficientes, o sea los coeficientes no tienen su propia rutina

```
''' <summary>
''' Usa los Valores X,Y para construir la matriz con ai, di y ci
''' </summary>
''' <param name="Puntos">De Aqui se Extraen los datos </param>
''' <param name="CF">Condiciones de fontera a utilizar en el algoritmo. (1 ó
2)</param>
''' <param name="w">Peso usado apra calcular los puntos de ruptura</param>
''' <remarks></remarks>
Public Function Crear_Matriz_Diseño_Cuadratico(ByRef Puntos(,) As Double, ByRef
CF As Integer, ByRef w As Double) As List(Of Object)
    Dim Res As New List(Of Object)
    Dim Xi As Double 'xi son los x(i), que representan los valores de DT'
    Dim Yi As Double, Yim1 As Double 'Yi es el valor de Y(i), Estos representan
a los gastos'
    Dim Alfa() As Double, Beta() As Double
    Dim DEim1 As Double, DEi As Double
    Dim ai As Double, ci As Double, di As Double
    Dim E() As Double

    Dim MDiseño(,) As Double, b() As Double

    E = Generar_Puntos_De_Ruptura_Spline(Puntos, w) 'Puntos de ruptura del
spline'
    Alfa = Generar_Alfas(Puntos, E)
    Beta = Generar_Betas(Puntos, E)

    'MsgBox(Imprimir_Arreglo(Beta))

    ReDim MDiseño(UBound(Puntos, 1) + 1, UBound(Puntos, 1) + 1)
    ReDim b(UBound(Puntos, 1) + 1)
```

```

If CF = 4 Then
  For i = 1 To (UBound(Puntos, 1))
    Xi = Puntos(i, 0) : Yi = Puntos(i, 1) : Yim1 = Puntos(i - 1, 1)

    DEim1 = (E(i) - E(i - 1)) : DEi = (E(i + 1) - E(i))

    ai = Alfa(i - 1) - (1 / DEim1)
    ci = Beta(i) - (1 / DEi)
    di = Beta(i - 1) + (1 / DEim1) + Alfa(i) + (1 / DEi)
    b(i) = Yim1 * (Alfa(i - 1) + Beta(i - 1)) + Yi * (Alfa(i) + Beta(i))

    MDiseño(i, i) = di
    MDiseño(i, i - 1) = ai
    MDiseño(i, i + 1) = ci
  Next i

  'Establecemos condiciones de frontera'
  di = Alfa(0) : ci = Beta(0) : Yi = Puntos(0, 1)

  MDiseño(0, 0) = di
  MDiseño(0, 1) = ci
  b(0) = (Alfa(0) + Beta(0)) * Yi

  ai = Alfa(UBound(Puntos, 1)) : di = Beta(UBound(Puntos, 1)) : Yi =
Puntos(UBound(Puntos, 1), 1)
  MDiseño(UBound(Puntos, 1) + 1, UBound(Puntos, 1)) = ai
  MDiseño(UBound(Puntos, 1) + 1, UBound(Puntos, 1) + 1) = di
  b(UBound(Puntos, 1) + 1) = (ai + di) * Yi
End If

Dim V(,) As Double, Coef(,) As Double
V = Resolver_Sistema(MDiseño, b)

ReDim Coef(UBound(Puntos, 1), 2)
For i = 0 To UBound(Puntos, 1)
  Yi = Puntos(i, 1) : DEi = (E(i + 1) - E(i))

  Coef(i, 0) = V(i, 0)

  Coef(i, 2) = Beta(i) * (V(i + 1, 0) - Puntos(i, 1))
  Coef(i, 2) = Coef(i, 2) - Alfa(i) * (Yi - V(i, 0))
  Coef(i, 2) = (Coef(i, 2) * 2) / DEi

  Coef(i, 1) = Alfa(i) * (Yi - V(i, 0))
  Coef(i, 1) = Coef(i, 1) - (0.5 * Coef(i, 2) / Alfa(i))
Next i
'MsgBox(Imprimir_Arreglo(MDiseño) & Chr(10) & Chr(10) & Imprimir_Arreglo(b))
'MsgBox(Imprimir_Arreglo(V))

Res.Add(MDiseño) : Res.Add(b) : Res.Add(Coef) : Res.Add(E)
Return Res
End Function

```

Rutina de Spline Cuadrático sobre (DT,Q): Resolver Sistema
Rutina para resolver el sistema planteado

```

Public Function Resolver_Sistema(ByRef A(,) As Double, b() As Double) As
Double(,)
  Dim Solucion(,) As Double

```

```

Dim AM As DenseMatrix = DenseMatrix.OfArray(A)
Dim bM As DenseMatrix = DenseVector.OfEnumerable(b).ToColumnMatrix
Solucion = AM.QR().Solve(bM).ToArray

```

```

Return Solucion
End Function

```

Rutinas Modelo Exponencial Gasto Variable

Rutina de Q Variable Modelo exponencial: Ajuste Exp inv

```

''' <summary>
''' Realiza el Ajuste exponencial a los datos contenidos en un archivo y una
grafica
''' </summary>
''' <param name="FA">Archivo con los datos. este es cargado inicialmente
(PLT)</param>
''' <param name="FG">Grafica que contiene la grafica de Gasto, Temp vs
Tiempo</param>
''' <remarks></remarks>
Public Sub Ajuste_Exp_inv(ByRef FA As Form_Archivo, ByRef FG As Form_Grafica)
Dim i As Integer, CG As Integer, CT As Integer, RI As Integer
Dim R As Rect, R1 As Rect
Dim P1(1) As Double, P2(1) As Double
Dim Datos As DataGridView = FA.Datos_Formulario
Dim Archivo_Respaldo As New Form_Archivo : Archivo_Respaldo.Text = "Ajuste
para Gasto Variable"

    Archivo_Respaldo.Datos_Formulario.Rows.Clear() : Archivo_Respaldo.MdiParent
= FA.MdiParent

    RI = 0 : CG = Obtener_Columna_Unidad(Datos, "Gasto") : CT =
Obtener_Columna_Unidad(Datos, "Tiempo")

    For i = 0 To (Lista_Puntos_Temperatura.Count - 2)
        R = Lista_Puntos_Temperatura(i)
        R1 = Lista_Puntos_Temperatura(i + 1)

        'Del rectangulo i y del (i + 1) tomamos lso puntos que vamos a unir'
        P2(0) = CDb1(Datos(CT, R.IX2).Value) : P2(1) = CDb1(Datos(CG,
R.IX2).Value)
        P1(0) = CDb1(Datos(CT, R1.IX1).Value) : P1(1) = CDb1(Datos(CG,
R1.IX1).Value)

        Call Ajuste_Modelo_QVariable_Exponencial(P2, P1, FG, Archivo_Respaldo,
RI) 'Los unimos con el modelo exponencial'
        RI = RI + 1500
    Next i

```

```
End Sub
```

Rutina de Q Variable Modelo exponencial: Ajuste Modelo QVariable Exponencial

```

''' <summary>
''' Escribe las estimaciones del modelo exponencial en un archivo
''' </summary>
''' <param name="P1">Punto 1 a unir (X1, X2)</param>
''' <param name="P2">Punto 2 a unir</param>
''' <param name="FG">Grafica donde se colocaran las estimaciones</param>

```

```

''' <param name="Archivo_Respaldo">Archivo donde se Escribieran las
estimaciones</param>
''' <param name="RI"></param>
''' <remarks></remarks>
Public Sub Ajuste_Modelo_QVariable_Exponencial(ByRef P1() As Double, ByRef P2()
As Double, ByRef FG As Form_Grafica, ByRef Archivo_Respaldo As Form_Archivo, ByRef
RI As Integer)
    Dim i As Integer, Exponencial_Elegida As Integer
    Dim n As Double, TI As Double, Inter As Double, Min As Double, Argumento As
Double, Resultado As Double
    Dim Mens As String

    'Decidimos la funcion que vamos a usar'
    If P1(1) < P2(1) Then 'Usamos funcion a'
        Exponencial_Elegida = 1
        n = (Math.Log(P2(1) - P1(1) + 1)) / (P1(0) - P2(0))
        Me.Valores_n.Add(n)
        Me.Tipo_Periodo.Add("Apertura") ' :MsgBox("Gasto 1 < Gasto 2")
    Else 'Usamos funcion b'
        Exponencial_Elegida = 2
        n = (Math.Log(Math.Abs(P1(1) - P2(1) + 1))) / (P1(0) - P2(0))
        Me.Valores_n.Add(n)
        Me.Tipo_Periodo.Add("Extrangulamiento") ' :MsgBox("Gasto 1 > Gasto 2")
    End If

    TI = Math.Abs(P1(0) - P2(0))
    Inter = TI / 1500
    Min = Math.Min(P1(0), P2(0))

    For i = 0 To 1500
        Argumento = Min + (Inter * i)
        If Exponencial_Elegida = 1 Then
            Resultado = Evaluar_Exponencial_Apertura(Argumento, n, P1(0), P1(1))
        ElseIf Exponencial_Elegida = 2 Then
            'Resultado = Evaluar_Exponencial_Cierre(Argumento, n, P2(0), P2(1))
            Resultado = Evaluar_Exponencial_CierreC(Argumento, n, P2(0), P2(1),
P1(0))
        End If

        'Añadimos datos al archivo auxiliar'
        Archivo_Respaldo.Datos_Formulario.Rows.Add()
        Archivo_Respaldo.Datos_Formulario(0, RI + i).Value = Argumento
        Archivo_Respaldo.Datos_Formulario(1, RI + i).Value = Resultado
    Next i

End Sub

```

Rutina de Q Variable Modelo exponencial: Evaluar Exponencial AperturaC2

Una vez que se ha elegido que tipo de exponencial usar. Por ejemplo el modelo de apertura es:

```

Public Function Evaluar_Exponencial_AperturaC2(ByRef t As Double, ByRef n As
Double, ByRef t1 As Double, ByRef G2 As Double, ByRef t2 As Double)
    Dim res As Double
    Dim Denominador As Double, TA As Double, cons As Double

    cons = (t - t1) * (t - t2) * (-Me.Factor_Correccion_Forma)

```

```

Denominador = (1 / Math.Exp(n * (t - t2) + cons))
TA = (G2 + 1)
res = TA - Denominador
Return res
End Function

```

Rutina de Q Variable Modelo exponencial: Evaluar Exponencial AperturaC2

El modelo para la apertura es el siguiente:

```

Public Function Evaluar_Exponencial_AperturaC(ByRef t As Double, ByRef n As Double, ByRef t1 As Double, ByRef G1 As Double, ByRef t2 As Double)
Dim res As Double
Dim Denominador As Double, TA As Double, cons As Double

cons = (t - t1) * (t - t2) * Me.Factor_Correccion_Forma
Denominador = Math.Exp(n * (t1 - t) + cons)
TA = (G1 - 1)
res = Denominador + TA
Return res
End Function

```

Rutina de Q Declinativo: Gasto D

Esta rutina es la rutina principal del algoritmo y llama al resto de las rutinas.

```

Private Sub Gasto_D(sender As Object, e As EventArgs) Handles Button1.Click
Dim Datos As DataGridView
Dim Intervalo As Double, Twe As Double

Dim NA As New Form_Archivo
Twe = Utilidades_Temperatura.Twe
Datos = Archivo_base.Datos_Formulario

If Me.Radio1.Checked Then
Intervalo = 365
Generar_Archivo(Intervalo, Datos, Twe)
ElseIf Me.Radio2.Checked Then
Intervalo = 30
Generar_Archivo(Intervalo, Datos, Twe)
ElseIf Me.Radio3.Checked Then
Intervalo = 7
Generar_Archivo(Intervalo, Datos, Twe)
Else
Intervalo = 1
Generar_Archivo(Intervalo, Datos, Twe)
End If

End Sub

```

Rutina de Q Declinativo: Generar Archivo

Esta rutina se encarga de muestrear los datos con respecto a la periodicidad de los datos, ya sea 1 = Diario, 7 Semanal, o el periodo que el usuario haya escogido

```

Public Sub Generar_Archivo(ByRef Intervalo As Double, ByRef Datos As DataGridView, ByRef VTwe As Double, ByRef TextoF As String, ByRef Numero As Integer)
Dim DT As Double, Q As Double, Fecha As Double
Dim i As Integer, j As Integer, CDT As Integer, CF As Integer
Dim FC As New Form4_SCalculo, Modelo As Form4.Modelo =
Padre.Lista_Modelos(0) 'Tomamos el modelo de gasto constante'
Dim DatosOT As New DataTable, R As DataRow
Dim Nuevo As New Form_Archivo

```

```

CDT = Obtener_Columna_Unidad(Datos, "Temperatura")
CF = Obtener_Columna_Unidad(Datos, "Tiempo")
'Generamos el archivo'
Call Inicializar_Archivo0(Nuevo, DatosOT)
j = 1

'Recorremos el archivo'
For i = 0 To (Datos.Rows.Count - 2)
    DT = CDb1(Datos(CDT, i).Value) - CDb1(VTwe)
    Fecha = CDb1(Datos(CF, i).Value)

registro'
    'Si la fecha es entera y ademas coincide con el intervalo tomamos el
registro'
    If (j Mod Intervalo = 0) Then
        If Modelo.Tipo_Modelo = "E. Polinomial" Then
            Q = Generar_Estimacion_Polinomio(DT, Modelo.Coeficientes)
        ElseIf Modelo.Tipo_Modelo = "E. Lineal" Then
            Q = Generar_Estimacion_Lineal(DT, Modelo.Coeficientes)
        ElseIf Modelo.Tipo_Modelo = "E. Exponencial" Then
            Q = Generar_Estimacion_Exponencial(DT, Modelo.Coeficientes)
        ElseIf Modelo.Tipo_Modelo = "Spline 3" Then
            Q = F(DT, Modelo.Matriz_Coef, Modelo.PuntosI)
        ElseIf Modelo.Tipo_Modelo = "Spline 2" Then
            Q = F2(DT, Modelo.Matriz_Coef, Modelo.PuntosI)
        End If
        R = DatosOT.Rows.Add
        R.Item(0) = Fecha : R.Item(1) = DT : R.Item(2) = Q
    End If
    j = j + 1

'Reportamos el prgreso'
    If (i Mod CInt(((Datos.Rows.Count - 2) / 10)) = 0) Then
        Segundo_Plano.ReportProgress(((i / (Datos.Rows.Count - 2)) * 100))
    End If
Next i
Nuevo.Datos_Formulario.DataSource = DatosOT

'Finalmente renombramos los encabezados'
Nuevo.Datos_Formulario.Columns(0).HeaderText = "Fecha" & Numero :
Nuevo.Datos_Formulario.Columns(1).HeaderText = "DT" & Numero :
Nuevo.Datos_Formulario.Columns(2).HeaderText = "Q" & Numero
Nuevo.Text = TextoF : Archivo_Activo = Nuevo 'Reference....'

End Sub

```

MODULO PROCESAMIENTO DE DATOS DE PRESIÓN

Rutina Para mostrar datos Anómalos

```

''' <summary>
''' Antes de cargar el formulario y mostrarlo crea las listas y asigna
referencias pertinentes
''' </summary>
''' <param name="FA">Archivo de donde llenaremos las listas</param>
''' <param name="Padre">Form3</param>
''' <remarks></remarks>
Public Sub Mostrar_Defectos(ByRef FA As Form_Archivo, ByRef Padre As Form3)
    Dim Datos As DataGridView = FA.Datos_Formulario
    Dim ListaNulos As New List(Of Object()), ListaVacios As New List(Of
Object()), TFal As New List(Of Object()), TTras As New List(Of Object())
    Dim CP(0) As Integer, Ct(0) As Integer, RenglonDG() As Object,
Espaciamientos(0) As Double
    Dim i As Integer, j As Integer, TipoLista As Integer
    Dim Cad As String, Err As Boolean = False

    ListaNulos.Clear() : ListaVacios.Clear() : TFal.Clear() : TTras.Clear()
    'Identificamos Columnas de presion y de Tiempo'
    Call Obtener_Columnas_Presion(CP, FA)
    Call Obtener_Columnas_Tiempo(Ct, FA)

    Cad = "Las Columnas de presion son: " & Imprimir_Arreglo(CP) & Chr(10) &
"Las Columnas de Tiempo son: " & Imprimir_Arreglo(Ct)

    Espaciamientos(0) = 0.000115740738692693
    For i = 0 To (Datos.Rows.Count - 3) 'Recorremos datagridview (Le quitamos un
indice)'
        'Call Mostrar_Valores(Datos, i, 10, Cad, Err, False)

'=====
='

        'Análisis de las Columnas de Presion'
        Call Determinar_Error_Columna_de_Presion(Datos, CP, TipoLista, i, Err)
'1: Ceros (Nulos), 2: Vacios'

        If Err = True Then 'Si detectamos un error copiamos renglon y agregamos
a la lista'
            ReDim RenglonDG(Datos.Columns.Count - 1)
            For j = 0 To (Datos.Columns.Count - 1)
                RenglonDG(j) = Datos(j, i).Value
            Next j

            If TipoLista = 1 Then : ListaNulos.Add(RenglonDG)
            ElseIf TipoLista = 2 Then : ListaVacios.Add(RenglonDG)
            End If
        End If
    End For
End Sub

```

```

'=====
'
'Análisis de las columnas de tiempo'
Call Determinar_Error_Columna_de_Tiempo(Datos, Ct, TipoLista, i, Err,
Espaciamientos) '3: Faltantes, 4: Traslapados

If Err = True Then
    ReDim RenglonDG(Datos.Columns.Count - 1)
    For j = 0 To (Datos.Columns.Count - 1)
        RenglonDG(j) = Datos(j, i).Value
    Next j

    'If TipoLista = 3 Then : TFal.Add(RenglonDG)
    If TipoLista = 3 Then : Crear_Elemento_Faltantes(Datos, i,
RenglonDG, Ct, TFal)
    ElseIf TipoLista = 4 Then : TTras.Add(RenglonDG)
    End If
End If

Next i
End Sub

```

Rutina Para mostrar datos Anómalos: Determinar Error Columna de Presion

Esta rutina es a la que se encarga de determinar si hay un error en la columna de presión, o sea si hay algún dato nulo, alguno vacío, etc

```

Public Sub Determinar_Error_Columna_de_Presion(ByRef Datos As DataGridView,
ByRef CP() As Integer, ByRef TipoLista As Integer, ByRef Indice As Integer, ByRef
Err As Boolean)
    Err = False
    If CP(0) = -1 Then : Exit Sub : End If
    Dim Temp As Double

    For j = 0 To UBound(CP) 'Para todas las columnas de presion en el archivo'

        Try
            Temp = CDb1(Datos(CP(j), Indice).Value) 'Si es numerico solo hay que
verificar si es cero'
            If Temp = 0 Then : TipoLista = 1 : End If
        Catch ex As Exception
            If TypeOf (Datos(CP(j), Indice).Value) Is DBNull Then 'DBNull es
vacío'

                Err = True : TipoLista = 2 : Exit For
            ElseIf Datos(CP(j), Indice).Value Is Nothing Then 'Nothing es vacío
(Espacio en blanco)'

                Err = True : TipoLista = 2 : Exit For
            ElseIf Datos(CP(j), Indice).Value = "" Then 'Cadena nula es espacio
en blanco'

                Err = True : TipoLista = 2 : Exit For
            ElseIf Replace(Str(Datos(CP(j), Indice).Value), " ", "") = "" Then
'Puede que tenga espacios, también está vacía'

                Err = True : TipoLista = 2 : Exit For
            ElseIf Replace(Str(Datos(CP(j), Indice).Value), Chr(9), "") = ""
Then 'Tabulaciones'

                Err = True : TipoLista = 2 : Exit For
            Else
                MsgBox("Elemento extraño")
            End If
        End Try
    Next j
End Sub

```

```
End Try
```

```
Next j
End Sub
```

Rutina Para mostrar datos Anómalos: Determinar Error Columna de Tiempo

Esta rutina se encarga de determinar los errores pero en la columna de tiempo.

```
''' <summary>
''' Determina si la columna de Tiempo tiene errores
''' </summary>
''' <param name="Datos">El grid con los datos</param>
''' <param name="Ct">Columna de Tiempo</param>
''' <param name="TipoLista">Indicara el tipo de error del que padece el
registro</param>
''' <param name="Indice">Renglon del datagridview a analizar</param>
''' <param name="Err">Boolean que indica si hay error o no</param>
''' <param name="Espaciamientos">El espaciamiento en segundos</param>
''' <remarks></remarks>
Public Sub Determinar_Error_Columna_de_Tiempo(ByRef Datos As DataGridView, ByRef
Ct() As Integer, ByRef TipoLista As Integer, ByRef Indice As Integer, ByRef Err As
Boolean, ByRef Espaciamientos() As Double)
    Dim Diferencia As Double, DD As Double

    Err = False
    For j = 0 To UBound(Ct)
        Diferencia = CDb1(Datos(Ct(j), Indice).Value) - CDb1(Datos(Ct(j), Indice
+ 1).Value) 'Abs(R(I) - R(i + 1) )
        Diferencia = Math.Abs(Diferencia) : DD = Math.Abs(Diferencia -
Espaciamientos(0))

        If DD > 0.0000115740738692693 Then
            'MsgBox("Diferencia: " & Diferencia & " Y el espaciamiento" &
Espaciamientos(0))
            Err = True : TipoLista = 3 : Exit For
        ElseIf (Diferencia = 0) Then
            Err = True : TipoLista = 4 : Exit For
        End If
    Next j

End Sub
```

Rutina Para mostrar datos Anómalos: Eliminar Datos Seleccionados

```
Public Sub Eliminar_Datos_Seleccionados(ByRef FG As Form_Grafica, ByRef Linea As
Form_Grafica.LineEndPoints, ByRef minY As Double, ByRef maxY As Double, ByRef IX As
Double, ByRef FX As Double)
    Dim MinimoY As Double, MaximoY As Double, InicioY As Double, FinalY As
Double, TotalY As Double, LowL As Double, HigL As Double
    Dim Respuesta As Integer, Continuar As Boolean = False, Xmin As Double, Xmax
As Double
    Dim Serie As Charting.Series : Dim Tipo As Charting.AxisType : Dim Area As
Charting.ChartArea
    Dim DatosT As DataTable, Temp As Form_Archivo = Nothing, Datos As
DataGridView = Obtener_Datos_Serie(FG).Datos_Formulario

    TotalY = CDb1(maxY - minY) : InicioY = CDb1(Math.Min(Linea.StartPoint.Y,
Linea.endPont.Y) - minY) / TotalY
```

```

    FinalY = 1 - CDb1(maxY - Math.Max(Linea.StartPoint.Y, Linea.endPont.Y)) /
TotalY
    Serie = FG.Grafica_Datos.Series(FG.Serie_Activa) : Tipo = Serie.YAxisType :
Area = FG.Grafica_Datos.ChartAreas(Serie.ChartArea)

    'Obtнемos el minimos y el maximo del eje para saber cuanto sumar'
    If Tipo = DataVisualization.Charting.AxisType.Primary Then
        MinimoY = Area.AxisY.Minimum : MaximoY = Area.AxisY.Maximum
        Xmin = Area.AxisX.Minimum + (IX * (Area.AxisX.Maximum -
Area.AxisX.Minimum))
        Xmax = Area.AxisX.Minimum + (FX * (Area.AxisX.Maximum -
Area.AxisX.Minimum))
    ElseIf Tipo = DataVisualization.Charting.AxisType.Secondary Then
        MinimoY = Area.AxisY2.Minimum : MaximoY = Area.AxisY2.Maximum
        Xmin = Area.AxisX2.Minimum + (IX * (Area.AxisX2.Maximum -
Area.AxisX2.Minimum))
        Xmax = Area.AxisX2.Minimum + (FX * (Area.AxisX2.Maximum -
Area.AxisX2.Minimum))
    End If

    HigL = MinimoY + ((MaximoY - MinimoY) * (1 - InicioY)) : LowL = MinimoY +
((MaximoY - MinimoY) * (1 - FinalY))

    If AEliminacion Is Nothing Then
        DatosT = New DataTable
        AEliminacion = New Form_Archivo : Call Formatear_Archivo(AEliminacion,
DatosT, Obtener_Datos_Serie(FG))
    Else
        'Si ya esta inicializado solo agregamos mas datos'
        DatosT = AEliminacion.Datos_Formulario.DataSource
    End If

    Respuesta = MsgBox(Rep, MsgBoxStyle.YesNo)

    If Respuesta = vbYes Then
        Call Eliminar_Seleccion2(FG, Xmin, Xmax, LowL, HigL, DatosT)
        If Respuesta = vbYes Then : Continuar = True
        Else
            Temp = AEliminacion : Continuar = False : AEliminacion = Nothing
        End If
    Else
        If Respuesta = vbYes Then : Continuar = True
        Else
            Temp = AEliminacion : Continuar = False : AEliminacion = Nothing
        End If
    End If

End Sub

```

Rutinas Descomposición Wavelet

Rutina para descomposición: Descomponer Señal2

```

Sub Descomponer_Señal2(ByRef FDatos As Form_Archivo, ByRef g0() As Double, ByRef
Niveles As Integer, ByRef AEscritura As Form_Archivo)

```

```

    Dim g1() As Double, Coef(,) As Double, Fecha(,) As String, CosA As Double =
0, CosB As Double = 0
    Separador = 0 : JI = 0 : Ultimo = 0 : Dim Lista_V As New List(Of Double(,))
    Continuar = True : ReDim Fecha(0, 0)
    Call Llenar_Archivo(FDatos, AEscritura, 1)
    Call Obtener_Señal2(Señal, Fecha, FDatos.Datos_Formulario,
Message_Segundo_Plano)
    g0 = Producto_Escalar(g0, 1 / (Math.Sqrt(2)))
    g1 = Generar_G1(g0) : ReDim Coef(0, 0)
    'Proceso de Descomposicion'
    For i = 0 To (Niveles - 1)
        CosA = (CDBl(i) / Niveles) : CosB = (CDBl(i + 1) / Niveles) - CosA :
        If i = 0 Then
            Coef = Generar_Coeficientes(Señal, g0, g1, 1, Message_Segundo_Plano,
10 + CInt(CosA * 90), (i + 1))
        Else
            Coef = Crear_Sub_Matriz(Coef, 0, JI, g0, Continuar)
            'Rep = Imprimir_Arreglo(Coef) : MsgBox(Rep)
            If Continuar Then
                Coef = Generar_Coeficientes(Coef, g0, g1, 1,
Message_Segundo_Plano, CInt(10 + (CosA + CosB * (1 / 3)) * 90), (i + 1))
            End If
        End If
        If Continuar = False Then : Exit For : End If
        Call Escribir_Ordenar(Coef, AEscritura, i, Continuar, Separador, JI, g0,
Ultimo, Lista_V, False)
    Next i
End Sub

```

Rutina para descomposición: Coeficientes

Esta rutina se encarga de generar los coeficientes

```

Public Function Generar_Coeficientes(ByRef DSeñal(,) As Double, ByRef g0() As
Double, ByRef g1() As Double, ByRef Tipo As Integer, Optional ByRef CadenaP As
String = "", Optional ByRef PI As Integer = 0, Optional ByRef Niveles As Integer =
0) As Double(,)
    ReDim Ren(0, UBound(DSeñal, 1))
    ReDim Temp(UBound(DSeñal, 1), 0)

    For i = 0 To UBound(DSeñal, 1)
        'Generamos el i-esimo Renglon: 1. Normal 2. Transpuesta'
        If Tipo = 1 Then
            Crear_Renglon_M(i, g0, g1, DSeñal.Length, Ren)
            'Rep = Imprimir_Arreglo(Ren) : MsgBox("Renglon i es: " & Chr(10) &
Rep)
        Else
            Crear_Renglon_MT(i, g0, g1, DSeñal.Length, Ren)
            'Rep = Imprimir_Arreglo(Ren) : MsgBox("Renglon i es: " & Chr(10) &
Rep)
        End If

        'Generamos la i-esima entrada del vector de Coeficientes'
        Temp(i, 0) = ProductoMatricial(Ren, DSeñal)(0, 0)

        If (((i + 1) Mod CInt(UBound(DSeñal, 1) / 20)) = 0) And (CadenaP <> "")
And (PI > 0) And (Niveles > 0) Then
            If Tipo = 1 Then

```

```

        CadenaP = "Se esta descomponiendo la señal. Nivel de
descomposicion: " & Niveles & ", " & CInt((i / UBound(DSeñal, 1)) * 100) & "%
Porcentaje completado: "
    Else
        CadenaP = "Se esta reconstruyendo la señal. Nivel de
descomposicion: " & Niveles & ", procesando coeficientes, " & CInt((i /
UBound(DSeñal, 1)) * 100) & "% Porcentaje completado: "
    End If

    Segundo_Plano.ReportProgress(PI)
End If

Next i
'MsgBox("Fer: " & Imprimir_Arreglo(Temp))
Return Temp
End Function

```

Rutina para descomposición: Crear Renglon M

```

Public Sub Crear_Renglon_M(ByRef R As Integer, ByRef g0() As Double, ByRef g1()
As Double, ByRef Tamaño As Integer, ByRef Ren(,) As Double)
    Dim Inicio As Integer, IFin As Integer
    Dim g() As Double

    ReDim Ren(0, Tamaño - 1)
    If (R Mod 2 = 0) Then
        Inicio = R
        g = g0
    Else
        Inicio = R - 1
        g = g1
    End If

    'MsgBox("Inicio " & Inicio & Chr(10) & "URen + 1: " & (UBound(Ren) + 1) &
Chr(10) & " i: " & i & Chr(10) & "IFin: " & IFin & Chr(10))
    For i = Inicio To (UBound(g) + Inicio)
        IFin = (i Mod Tamaño)
        Ren(0, IFin) = g(i - Inicio)
    Next i
End Sub

```

Rutina para descomposición: Crear Renglon MT

```

Public Sub Crear_Renglon_MT(ByRef R As Integer, ByRef g0() As Double, ByRef g1()
As Double, ByRef Tamaño As Integer, ByRef Ren(,) As Double)
    Dim Inicio As Integer, NVal As Integer, Primer_Indice As Integer
    Dim j As Integer = 0
    Dim Jg0 As Integer = 0, Jg1 As Integer = 0
    Dim IFin As Integer = 0

    ReDim Ren(0, Tamaño - 1)
    If (R Mod 2 = 0) Then
        NVal = Math.Min(Math.Max(R * 2, 2), UBound(g0) + UBound(g1) + 2)
    Else
        NVal = Math.Min(Math.Max((R - 1) * 2, 2), UBound(g0) + UBound(g1) + 2)
    End If

    If (R <= UBound(g0)) Then
        Inicio = 0
    ElseIf (R Mod 2 = 0) Then

```

```

        Inicio = R - UBound(g0) + 1
    Else
        Inicio = R - UBound(g0)
    End If
    'Decidimos si usamos pares o impares'
    Primer_Indice = Math.Min(R, (UBound(g0) + UBound(g1)) / 2)
    If (R > Primer_Indice) And (R Mod 2 = 1) And (Primer_Indice Mod 2 = 0) Then
        Primer_Indice = Primer_Indice - 1
    ElseIf (R > Primer_Indice) And (R Mod 2 = 0) And (Primer_Indice Mod 2 = 1)
Then
        'MsgBox("Entre!")
        Primer_Indice = Primer_Indice - 1
    End If

    For i = Inicio To (NVal + Inicio - 1)
        IFin = (i Mod Tamaño)
        'MsgBox("Inicio " & Inicio & Chr(10) & "NVal " & NVal & Chr(10) & " i: "
& i & Chr(10) & "IFin: " & IFin & Chr(10) & "Primer Indice: " & Primer_Indice)

        If (j Mod 2 = 0) And (Primer_Indice >= 0) Then
            'Usamos g0'
            Ren(0, IFin) = g0(Primer_Indice)
            j = j + 1
        ElseIf (Primer_Indice >= 0) Then
            'Usamos g1'
            Ren(0, IFin) = g1(Primer_Indice)
            Primer_Indice = Primer_Indice - 2
            j = j + 1
        Else
            Exit For
        End If
    Next i

    Primer_Indice = Math.Min(R, (UBound(g0) + UBound(g1)) / 2)
    'MsgBox(Primer_Indice & " " & R)
    If Primer_Indice = R Then
        Dim Cantidad As Integer
        Cantidad = (Tamaño - 1) - (((UBound(g0) + UBound(g1)) / 2) - R)
        j = 0 : Primer_Indice = Primer_Indice + 2

        For i = (Tamaño - 1) To Cantidad Step -1
            IFin = (i Mod Tamaño)

            If (j Mod 2 = 0) And (Primer_Indice <= (UBound(g0) + UBound(g1)) /
2) Then
                'Uamos g1'
                Ren(0, IFin) = g1(Primer_Indice)
                j = j + 1
            ElseIf (j Mod 2 = 1) And (Primer_Indice <= (UBound(g0) + UBound(g1))
/ 2) Then
                'Usamos g0'
                Ren(0, IFin) = g0(Primer_Indice)
                Primer_Indice = Primer_Indice + 2
                j = j + 1
            Else
                Exit For
            End If

```

```

        Next i

    End If
End Sub

```

Rutina para descomposición: Producto matricial

```

Public Function ProductoMatricial(ByRef M1(,) As Double, ByRef M2(,) As Double)
As Double(,)
    Dim i As Integer, j As Integer, k As Integer
    Dim M3(,) As Double
    ReDim M3(UBound(M1, 1), UBound(M2, 2))
    Dim pass As Boolean

    If UBound(M1, 2) = UBound(M2, 1) Then
        pass = True
    Else
        'Error'
        pass = False
    End If

    If pass = True Then
        For i = 0 To UBound(M1, 1)
            For j = 0 To UBound(M2, 2)
                M3(i, j) = 0
                For k = 0 To UBound(M2, 1)
                    M3(i, j) = M3(i, j) + (M1(i, k) * M2(k, j))
                Next k
            Next j
        Next i
    Else
        MsgBox("Error en el producto de matrices. Dimensiones incompatibles")
    End If
    ProductoMatricial = M3
End Function

```

Rutinas Eliminar ruido de la Señal

Rutina para Eliminar Ruido: Eliminar

La rutina que es llamada para eliminar el ruido de los coeficientes es esta:

```

''' <summary>
''' Elimina el ruido para una columna dada
''' </summary>
''' <param name="THR">Valor de THR a utilizar</param>
''' <param name="Tipo">Tipo de THR</param>
''' <param name="FDatos">Archivo al cual eliminaremos el ruido</param>
''' <param name="CE">Entero que denota el numero de la columna del archivo que
eliminarremos</param>
''' <param name="PI">Denota el progreso del que partiremos (Solo aplica cuando
se desea reportar el progreso de la tarea)</param>
''' <remarks></remarks>
Public Sub Eliminar(ByRef THR As Double, ByRef Tipo As Integer, ByRef FDatos As
Form_Archivo, ByRef CE As Integer, Optional ByRef PI As Integer = 0, Optional ByRef
ReportarP As Boolean = False)
    Dim Datos As DataGridView = FDatos.Datos_Formulario : Dim Ren As Integer =
(Datos.Rows.Count - 2)
    Dim Valor_Final As Double : Dim Cont As Integer = 0 : Dim NDj As Integer = 0
    Dim DatosT As DataTable = Datos.DataSource

```

```

For i = 0 To Ren
'Si no hay nada o son nulos o nulos de base de datos nos lso saltamos
If (Datos.Item(CE, i).Value Is Nothing) Then
    Datos.Item(CE, i).Value = Nothing : Cont = Cont + 1
    If Cont = 6 Then : Exit For : End If
ElseIf TypeOf (Datos.Item(CE, i).Value) Is DBNull Then
    Datos.Item(CE, i).Value = Nothing : Cont = Cont + 1
    If Cont = 6 Then : Exit For : End If
ElseIf Datos.Item(CE, i).Value = "" Then
    Datos.Item(CE, i).Value = Nothing : Cont = Cont + 1
    If Cont = 6 Then : Exit For : End If
ElseIf CStr(Datos.Item(CE, i).Value) = "" Then
    Datos.Item(CE, i).Value = Nothing : Cont = Cont + 1
    If Cont = 6 Then : Exit For : End If
Else 'Para los alternados'
    If (i Mod 2 = 1) Then
        NDj = NDj + 1
        Valor_Final = Aplicar_THR2(Datos.Item(CE, i).Value, THR, Tipo)
        Datos.Item(CE, i).Value = Valor_Final
    End If
End If
Next i

For i = NDj To Ren

If IsNumeric(Datos(CE, i).Value) Then 'Para los alternados'
    Valor_Final = Aplicar_THR2(Datos.Item(CE + 1, i).Value, THR, Tipo)
    Datos.Item(CE + 1, i).Value = Valor_Final
'Si no hay nada o son nulos o DBNull nos los saltamos
Else
    Datos(CE, i).Value = Nothing : Cont = Cont + 1
    If Cont = 6 Then : Exit For : End If
End If
Next i

End Sub

```

Rutina para Eliminar Ruido: Aplicar THR2

```

Public Function Aplicar_THR2(ByRef X As Double, ByRef thr As Double, ByRef Tipo
As Integer) As Double
    Dim Res As Double
    If Tipo = 1 Then
        Res = Aplicar_THR_Har2(X, thr)
    Else
        Res = Aplicar_THR_Soft2(X, thr)
    End If

    Return Res
End Function

```

Rutina para Eliminar Ruido: Aplicar THR Har2

```

Public Function Aplicar_THR_Har2(ByRef X As Double, ByRef thr As Double) As
Double
    Dim Res As Double
    If Math.Abs(X) <= thr Then

```

```

        Res = 0
    Else
        Res = X
    End If
    Return Res
End Function

```

Rutina para Eliminar Ruido: Aplicar THR_Soft2

```

Public Function Aplicar_THR_Soft2(ByRef X As Double, ByRef thr As Double) As Double
    Dim Res As Double

    If X <= thr Then
        Res = 0
    Else
        Res = Math.Sign(X) * (Math.Abs(X) - thr)
    End If
    Return Res
End Function

```

Rutinas Reconstrucción de la señal Wavelet

Rutina para Reconstrucción: Reconstrucción

```

Public Sub Reconstruccion(ByRef Niveles As Integer, ByVal g0() As Double, ByRef
Nuevo_Archivo As Form_Archivo)
    Dim g1() As Double, Columna(,) As Double, Coef(,) As Double
    Dim Lista As List(Of Double(,)), inicio As Integer = (Niveles * 2)
    Dim Datos As DataGridView, Datos0 As DataGridView =
Nuevo_Archivo.Datos_Formulario, Fecha(,) As String : ReDim Fecha(0, 0)
    Dim CosA As Double = 0, CosB As Double = 0, h As Integer = 0, LVAct As
Integer = 0

    Nuevo_Archivo.Datos_Formulario.Columns.Clear() : g0 = Producto_Escalar(g0, 1
/ (Math.Sqrt(2)))
    Datos = Archivo_Activo.Datos_Formulario : g1 = Generar_G1(g0) : ReDim
Coef(0, 0)
    'Rep = Imprimir_Arreglo(g0) : Rep = Rep & Chr(10) & Imprimir_Arreglo(g1)
    Nuevo_Archivo.Hide() : Fecha = Col_Arreglo2(Datos, 0) : Call
Escribir_Datos(Datos0, Fecha, "Fecha")

    'Tomamos la columna del final y la colocamos en un nuevo archivo'
    Columna = Col_Arreglo(Datos, inicio) : Call Escribir_Datos(Datos0, Columna,
"Coef I" & (inicio / 2) & " Ord")

    For i = inicio To 1 Step -1
        If h = 0 Then
    Else : h = 0
        End If

        CosA = (1 - (Cdbl(i) / inicio)) : CosB = (1 - (Cdbl(i - 1) / inicio)) -
CosA :

        If i < inicio Then
            Lista = Dividir_Arreglo(Columna)
            Call Agregar_Extras(Coef, Lista(0))
            Coef = Concatenar_Arreglos(Coef, Lista.Last)
            Escribir_Datos(Datos0, Coef, "Coef I" & (i / 2) & " Ord", True, 10 +
CInt(CosA * 90), LVAct, Mensaje_Segundo_Plano)

```

```

End If

If i = inicio Then
    Coef = Alternar_Arreglo(Columna)
Else
    Coef = Alternar_Arreglo(Coef)
End If

Escribir_Datos(Datos0, Coef, "Coef I" & (i / 2), True, CInt(10 + (CosA +
CosB * (2 / 3)) * 90), LVAct, Mensaje_Segundo_Plano)
Coef = Generar_Coeficientes(Coef, g0, g1, 2, Mensaje_Segundo_Plano,
CInt(10 + (CosA + CosB * (2 / 3)) * 90), LVAct)
i = i - 1
Next i

Escribir_Datos(Datos0, Coef, "Señal Reconstruida", True, CInt(10 + (CosA +
CosB * (2 / 3)) * 90), LVAct, Mensaje_Segundo_Plano)

'Antes de terminar le ponemos unidades al archivo'
ReDim Nuevo_Archivo.Unidades(Datos0.Columns.Count - 1) : ReDim
Nuevo_Archivo.TipoU(Datos0.Columns.Count - 1)
For i = 0 To (Datos0.Columns.Count - 1)
    If i = 0 Then
        Nuevo_Archivo.Unidades(i) = "(Numero)" : Nuevo_Archivo.TipoU(i) =
"Tiempo"
    ElseIf i = (Datos0.Columns.Count - 1) Then
        Nuevo_Archivo.Unidades(i) = "lb-pulg2" : Nuevo_Archivo.TipoU(i) =
"Presion"
    Else
        Nuevo_Archivo.Unidades(i) = "NA" : Nuevo_Archivo.TipoU(i) =
"Coeficientes Wavelet"
    End If
Next i
End Sub

```

Rutina para Reconstrucción: Dividir Arreglo

```

Public Function Dividir_Arreglo(ByRef Arr(,) As Double) As List(Of Double(,))
    Dim Lista As New List(Of Double(,))
    Dim Divisor As Integer
    Dim C(,) As Double, D(,) As Double

    Lista.Clear()
    Divisor = (Arr.Length / 2) - 1

    ReDim C(Divisor, 0) : ReDim D(Divisor, 0)

    For i = 0 To UBound(Arr)
        If i <= Divisor Then
            C(i, 0) = Arr(i, 0)
        Else
            D(i - Divisor - 1, 0) = Arr(i, 0)
        End If
    Next i
    Lista.Add(C) : Lista.Add(D)
    Return Lista
End Function

```

Rutina para Reconstrucción: Agregar extras

```

Public Sub Agregar_Extras(ByRef CoefR(,) As Double, ByRef Coef0(,) As Double)
    Dim i As Integer
    If UBound(CoefR, 1) < UBound(Coef0, 1) Then
        'Calculamos la diferencia'
        For i = 0 To UBound(CoefR, 1)
            Coef0(i, 0) = CoefR(i, 0)
        Next i
        CoefR = Coef0
    End If
End Sub

```

Rutina para Reconstrucción: Concatenar Arreglos

```

Public Function Concatenar_Arreglos(ByRef M1(,) As Double, ByRef M2(,) As Double)
As Double(,)
    Dim Res(,) As Double
    ReDim Res(UBound(M1, 1) + UBound(M2, 1) + 1, UBound(M1, 2) + UBound(M2, 2))
    Dim I1 As Integer = 0

    For i = 0 To UBound(Res, 1)
        For j = 0 To UBound(Res, 2)
            If i > UBound(M1, 1) Then
                Res(i, j) = M2(I1, j)
                I1 = I1 + 1
            Else
                Res(i, j) = M1(i, j)
            End If
        Next j
    Next i
    Concatenar_Arreglos = Res
End Function

```

Rutina para Reconstrucción: Concatenar Arreglos

```

Public Function Alternar_Arreglo(ByRef C(,) As Double) As Double(,)
    Dim Res(,) As Double
    Dim JI As Integer = 0, IP As Integer = 0, II As Integer = 1

    ReDim Res(UBound(C, 1), UBound(C, 2))

    If (UBound(C, 1) Mod 2 = 0) Then
        JI = UBound(C, 1) / 2
    Else
        JI = (UBound(C, 1) - 1) / 2
    End If

    For i = 0 To UBound(Res, 1)
        For j = 0 To UBound(Res, 2)
            If (i Mod 2 = 0) Then
                Res(i, j) = C(IP, j) : IP = IP + 1
            Else
                Res(i, j) = C(II + JI, j) : II = II + 1
            End If
        Next j
    Next i

```

```

Next i

Alternar_Arreglo = Res
End Function

```

Rutinas Reducir datos señal

Rutina para Reconstrucción: Reconstrucción

```

Private Sub Aceptar_Click(sender As Object, e As EventArgs) Handles
Aceptar.Click
    Dim Umbral As Integer, Dtmax As Integer, Dpmax As Integer
    Dim Fp As Form4, Fp3 As Form3
    'Dpmax = 10 : Dtmax = 30 : Umbral = 0.2

    If TXT_DP.Text = "" Or TXT_DT.Text = "" Or TXT_U.Text = "" Then
        MsgBox("No se pueden dejar campos vacios")
    ElseIf Lista_Variables.SelectedIndex < 0 Then
        MsgBox("debe seleccionar la variable a codificar")
    Else
        Try
            Umbral = CDb1(TXT_U.Text)
            Dtmax = CDb1(TXT_DT.Text)
            Dpmax = CDb1(TXT_DP.Text)
        Catch
            MsgBox("Los datos introducidos en alguno de lso formularios no es
numerico")
        End Try

        ReducDatos(Datos, Umbral, Dtmax, Dpmax, Me.Form_Padre,
Me.Lista_Variables.SelectedIndex)

        If TypeOf (Me.Form_Padre) Is Form4 Then
            Fp = Me.Form_Padre
            Fp.TReconstruirQ.Enabled = True
            Me.Close()
        ElseIf TypeOf (Me.Form_Padre) Is Form3 Then
            Fp3 = Me.Form_Padre
            Fp3.TExportar.Enabled = True
        End If

    End If

End Sub

```

REFERENCIAS

1. Nestlerode, W.A. 1963. The Use of Pressure Data from Permanently Installed Bottom Hole Pressure Gauges. Presentado en SPE Rocky Mountain Joint Regional Meeting, Denver, Colorado, mayo 27-28. SPE-590-MS. <http://dx.doi.org/10.2118/590-MS>.
2. Hansen Energy Solutions LLC. 2010. Towards: The Intelligent Wells. www.hansenergy.biz/activecompletions/The_Long_and_Winding_Road_Towards_The_Intelligent_Completion/Welcome.html (Fecha de acceso 28 de junio de 2013).
3. Khong, C.K. 2001. *Permanent Downhole Gauge Data Interpretation*. MS thesis, University of Stanford, Stanford, California (June 2001). <https://earthsciences.stanford.edu/ERE/pdf/pereports/MS/Khong01.pdf> (Fecha de acceso 22 de diciembre de 2013).
4. Li, X. 2010. *Processing and Analysis of Transient Data from Permanent Down-Hole Gauges (PDG)*. PhD dissertation, Heriot-Watt University, Institute of Petroleum Engineering, Edinburg, Scotland (June 2010).
5. Tita, G.E. 2007-2008. *Permanent Downhole Well Data Monitoring*. MS thesis, Eni Corporate University. Politecnico Di Torino, Italia.
6. Omotosho, R.J. 2004. *Permanent Downhole Sensors in Today's Petroleum Industry: Current Trends, Problem and Case Studies*. MS thesis, University of Texas at Austin, Austin, Texas (August 2004).

-
-
- <https://www.pge.utexas.edu/images/pdfs/theses04/risi.pdf> (Fecha de acceso 18 de enero de 2014).
7. Fernández Díaz, R. 2008. *Estudio y Análisis del Efecto Rugoso sobre la Respuesta del Sensor de Cuarzo AT en Medios Fluidos*. Tesis doctoral, Universidad Politécnica de Valencia, Valencia, España. https://www.upv.es/pls/soarc/sal_doc_deptesis.Veradj?p_nreg=3071&P_VISTA=&P_IDIOMA=c (Fecha de acceso 27 de marzo de 2014).
 8. Grupo Alava Ingenieros. 2015. <http://www.alava-ing.es/ingenieros/productos/sensores-adquisicion-de-datos-y-calibracion/medida-con-fibra-optica> (Fecha de acceso 23 de junio de 2013).
 9. Zaho, Y., Liao, Y. y Lai, S. 2002. Simultaneous Measurement of Down-Hole High Pressure and Temperature with a Bulk-Modulus and FBG Sensor. *IEEE Photonics Technology Letters* **14** (11): 1584-1586.
 10. Kragas, T.K., Bostick III, F.X., Mayeu, C. et al. 2002. Downhole Fiber Optic Multiphase Flow Meter: Design, Operating Principle and Testing. Presentado en SPE Annual Technical Conference and Exhibition, San Antonio Texas, septiembre 29-octubre 2. SPE-77655-MS. <http://dx.doi.org/10.2118/77655-MS>.
 11. Athichanagorn, S. 1999. *Development of an Interpretation Methodology for Long-Term Pressure Data from Permanent Downhole Gauges*. PhD dissertation, Stanford University, Stanford, California (June 1999). <https://geo.stanford.edu/ERE/pdf/pereports/PhD/Athichanagorn99.pdf> (Fecha de acceso 15 de noviembre de 2013).
 12. Nomura, M. 2006. *Processing and Interpretation of Pressure Transient Data from Permanent Downhole Gauges*. PhD dissertation, Stanford University, Stanford, California (September 2006).
 13. Curtis, M.R. y Witterholt, E.J. 1973. Use of the Temperature Log for Determining Flow Rates in Producing Wells. Presentado en 48th Annual Fall Meeting of the Society of Petroleum Engineers of AIME, Las Vegas, Nevada, september 30 – october 3. SPE-4637-MS. <http://dx.doi.org/10.2118/4637-MS>
-
-

-
-
14. Hill, A.D. 1990. *Production Logging—Theoretical and Interpretive Elements*, Vol. 14. Richardson, Texas: Monograph Series, SPE.
 15. Roux, B., Sanyal, S.K., and Brown, S. L. 1980. An Improve Approach to Estimating True Reservoir Temperature from Transient Temperature Data. SPE Paper 8888 Presented at the 1980 SPE California Regional Meeting, Los Angeles, California.
 16. Duru, O. 2008. *Modeling of Reservoir Temperature Transients, and Parameter Estimation Constraint to a Reservoir Temperature Model*. MS thesis, Stanford University, Stanford, California (June 2008). <https://pangea.stanford.edu/ERE/pdf/pereports/MS/Duru08.pdf> (Fecha de acceso 22 de octubre de 2014).
 17. Streeter, V.L. 2000. *Mecánica de Fluidos*, novena edición. Santafé de Bogotá, Colombia: McGraw-Hill Interamericana.
 18. Fuentes Nucamendi, F. 1986. *Análisis Nodal: Fundamentos y Aplicaciones*. Tesis de Licenciatura, UNAM, Facultad de Ingeniería, México, D.F.
 19. Olsen, S. 2011. *On Automatic Data Processing and Well-Test Analysis in Real-time Reservoir Management Applications*. PhD dissertation, University of Bergen, Bergen, Norwegian. <https://bora.uib.no/handle/1956/4825?show=full> (Fecha de acceso 29 de abril de 2014).
 20. Frazier, M.W. 1999. *An Introduction to Wavelets Through Linear Algebra*, New York: Springer Verlag.
 21. Grossman, S.I. 1987. *Álgebra Lineal*, segunda edición. México, D.F.: Grupo Editorial Iberoamérica.
 22. Chui, C.K. 1992. *An Introduction to Wavelets*. Boston: Academic Press.
 23. Navarro Fuentes, J. y Elizarraraz Martínez, M. 2010. *Introducción a la Transformada Wavelet Continua*. México, D.F.: Universidad Autónoma Metropolitana. Reverté.
 24. Sosa Flores, O. 2009. *Oscilaciones Dansgaard-Oeschger: Aplicando Wavelet de Coherencia*. Tesis de Maestría, UNAM, Programa de Maestría y Doctorado en Ingeniería, México, D.F.
-
-

-
-
25. Acevedo Martínez, L. 2009. *Computación Paralela de la Transformada Wavelet: Aplicaciones de la Transformada Wavelet al Álgebra Lineal Numérica*. Tesis doctoral, Universidad Politécnica de Valencia, Valencia, España.
<https://riunet.upv.es/bitstream/handle/10251/7107/tesisUPV3101.pdf?sequence=1&isAllowed=y> (Fecha de acceso 18 de noviembre de 2013).
 26. González Tamez, F. 2000. *Filtro para Ruido de Truncamiento en Pruebas de Variación de Presión*. Tesis de Maestría, UNAM, Facultad de Ingeniería, México, D.F. (abril de 2000).
 27. Serway, R.A. 2008. *Física para Ciencias e Ingeniería*, vol. 1, séptima edición. México, D.F.: CENGAGE Learning.
 28. Goswami, J.C. y Chan, A.K. 1999. *Fundamentals of Wavelets: Theory, Algorithms, and Applications*. New York: John Wiley & Sons, Inc.
 29. Mix, D.F. 2003. *Elements of Wavelets for Engineers and Scientists*. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, Inc.
 30. Van Fleet, P.J. 2008. *Discrete Wavelet Transformations*. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, Inc.
 31. Zill, D.G. 2008. *Cálculo Vectorial, Análisis de Fourier y Análisis Complejo*, tercera edición. México, D.F.: McGraw-Hill.
 32. Kamal, M.M. 2009. *Transient Well Testing*, Vol. 23. Richardson, Texas: Monograph Series, SPE.