



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

**MAESTRÍA EN CIENCIAS (FÍSICA)
INSTITUTO DE CIENCIAS FÍSICAS**

**EL PROBLEMA RESTRINGIDO DE CINCO CUERPOS
EN EL PLANO Y ANILLOS PLANETARIOS DELGADOS**

**TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS (FÍSICA)**

**PRESENTA:
JORGE ANTONIO PÉREZ HERNÁNDEZ**

**DR. LUIS BENET FERNÁNDEZ
INSTITUTO DE CIENCIAS FÍSICAS**

**DRA. GLORIA SUZANNE KOENIGSBERGER HOROWITZ
INSTITUTO DE CIENCIAS FÍSICAS**

**DR. THOMAS HENRY SELIGMAN SCHURCH
INSTITUTO DE CIENCIAS FÍSICAS**

CUERNAVACA, MOR., JUNIO 2015



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

El problema restringido de 5 cuerpos en el plano
y anillos planetarios delgados

Jorge Antonio Pérez Hernández

Maestría en Ciencias (Física)
Instituto de Ciencias Físicas
Universidad Nacional Autónoma de México
Email: jperez@fis.unam.mx

Cuernavaca, Mor., México, Junio de 2015

A mi abuelito,

Almirante C.G. D.E.M.
Antonio Teódulo Pérez Encalada

IN MEMORIAM

*La pensée n'est qu'un éclair au milieu d'une
longue nuit. Mais c'est cet éclair qui est tout.*

*El pensamiento no es más que un relámpago
en medio de una noche larga. Pero este
relámpago, lo es todo.*

Jules Henri Poincaré

AGRADECIMIENTOS

Agradezco al Dr. Luis Benet Fernández por sus enseñanzas, consejos, apoyo, pláticas, asesoría y apoyo incondicional a lo largo de los últimos seis años, así como sus exigencias y llamadas de atención cuando fueron necesarias: Luis, gracias por tu profesionalismo y tu ejemplo de trabajo duro y dedicado, llevo para siempre conmigo todo lo que me enseñaste, dentro y fuera del salón de clases.

Agradezco asimismo a la Dra. Gloria Koenigsberger Horowitz también por sus enseñanzas y sus consejos, por mostrarme el maravilloso mundo de la astronomía desde mis primeros meses en la carrera, por tu ejemplo de excelencia académica y colaboración. Gloria: Gracias por recibirme siempre con una sonrisa, y por creer siempre en mí.

Al Dr. Thomas Seligman Schurch agradezco el honor de colaborar con él desde mi tesis de licenciatura y durante mis estudios de maestría, por su franqueza, tenacidad y sabiduría. Thomas: gracias por cada una de las pláticas que tuvimos, y por compartir conmigo tu amplia experiencia académica.

A la Dra. María Dolores Maravilla Meza, así como a los Dres. David Philip Sanders, Frédéric Sylvain Masset, y Joaquín Escalona Segura, por todo su apoyo y sus valiosos comentarios y aportaciones para la presentación de este trabajo.

A mi abuelito, el Almirante Antonio Teódulo Pérez Encalada, gracias por enseñarme el valor del trabajo honesto y dedicado, gracias por enseñarme que la vida es una gran celebración, y gracias por enseñarme a disfrutar los detalles más sencillos, desde el sabor de una fruta hasta la majestuosidad de los paisajes de Yucatán, gracias por cada momento que pasamos juntos, y gracias por compartirme tu gran pasión por los astros: ahora tú eres uno de ellos...

Agradezco a mis padres, Irma y Jorge Antonio, por su cariño, apoyo, compañía y amistad, en especial el último año fue difícil y con muchas sorpresas, pero mi tiempo hospitalizado y en recuperación me ha permitido también estar más tiempo con ustedes y disfrutarlos. Son una gran bendición en mi vida, gracias por todos sus cuidados y consejos; gracias por estar conmigo, especialmente en los momentos más difíciles y también gracias por enseñarme a disfrutar la vida y el significado del amor incondicional.

A mis hermanos, Irma Carolina y José Antonio, gracias por estar conmigo y apoyarme, han sido años y años de tantísimas experiencias, gracias por enseñarme el amor, la complicidad, la confianza y el respeto entre hermanos. Gracias por estar conmigo cada vez que me caí y me ayudaron a levantarme. Una mención especial a mi hermano: Toño, muchas gracias por ser mi gurú computacional y electrónico, y por tus contribuciones a este trabajo, especialmente en la parte de métodos numéricos y optimización.

A mis tíos, Juan Pedro y Tila María, gracias por el gran ejemplo que siempre han sido para mí, por todo el cariño y apoyo que me han dado desde pequeño. Gracias por mostrarme desde niño el increíble mundo de la ciencia. Y a no comer tantos waffles en el desayuno.

A toda mi familia, los Pérez y los Hernández, por apoyarme de tantas maneras, los admiro enormemente y así también les agradezco su apoyo, cariño y aprecio. Es un orgullo llevar el mismo apellido y la misma sangre que ustedes.

A mi novia, Denisse Carranza: chaparra, gracias por estar ahí para mí en los momentos más difíciles y por inspirarme así como lo haces. Gracias por creer en mí, y por hacerme sentir tan vivo. Eres una gran bendición en mi vida. Recuerda siempre lo mucho que te amo...

A cada uno de mis profesores de maestría, mi bagaje académico no lo recuerdo por el apellido de los autores de los libros de texto, sino por cada uno de sus rostros y voces... y chistes! A mis amigos, por las infinitas veces que reímos, las tareas que resolvimos, las pizzas después de ocho horas de examen, las desveladas y las risas dentro y fuera del salón de clases.

Al Comité Académico del Posgrado en Ciencias Físicas por su excelencia, profesionalismo y apoyo; ha sido un honor y una experiencia inolvidable estudiar la Maestría en Ciencias. Gracias por hacer esto posible para mí, y para cada alumno del posgrado.

A la UNAM, por abrirme las puertas para estudiar la Maestría en Ciencias. Llevo mi corazón azul y mi piel dorada hasta siempre.

Finalmente, agradezco el apoyo para la realización de este trabajo al proyecto PAPIIT IG-101113.

Por mi raza hablará el espíritu,

Jorge Antonio Pérez Hernández

RESUMEN

El objetivo del proyecto es estudiar, mediante integraciones numéricas, el sistema formado por: Urano y sus lunas Cordelia, Ofelia y Ariel, así como una partícula de prueba, que está sujeta al campo gravitacional de estos primeros cuatro cuerpos. En concreto, se desea conocer la relevancia de este modelo en la ocurrencia del anillo ϵ de Urano. Se incluye el efecto del achatamiento polar planetario en la integración numérica de estas órbitas.

Para la partícula de prueba, se explora la región de condiciones iniciales comprendida entre las lunas Cordelia y Ofelia, en donde se observan los anillos ϵ y λ de Urano. Las órbitas que permanecen confinadas después de 5×10^6 periodos de Cordelia se caracterizan mediante un análisis de frecuencias, utilizando el cociente de la desviación estándar sobre el promedio del semieje mayor como un índice de estabilidad.

Se propone la introducción de un filtro respecto del índice de estabilidad así definido, argumentando que las órbitas que no satisfagan la condición de filtrado eventualmente escapan de la región entre Cordelia y Ofelia. Al aplicar este filtrado sobre el conjunto de órbitas integradas, se obtiene un anillo casi circular, delgado, con bordes bien definidos y con un semieje mayor consistente con el valor reportado para el anillo ϵ de Urano. La excentricidad y el ancho calculados para este anillo no son consistentes con los datos observacionales.

Finalmente, se discute la relevancia de este subconjunto de condiciones iniciales en la ocurrencia del anillo ϵ de Urano, así como la posible existencia de un mecanismo de confinamiento, análogo al mecanismo descrito por Benet y Jorba para el anillo F de Saturno [2]. Estos resultados sugieren que en el contexto de este modelo, la excentricidad y la fuerza relativa de la luna mayor respecto de la fuerza ejercida por el planeta, son importantes para que el sistema exhiba el mecanismo de dispersión y confinamiento propuesto.

Se concluye que para comprobar la existencia de un mecanismo de confinamiento para el anillo ϵ de Urano, análogo al descrito para el anillo F de Saturno, probablemente se requieran integraciones numéricas mucho más largas que 5×10^6 periodos de Cordelia.

ABSTRACT

The main objective of this thesis is to study, by means of numerical integrations, the system formed by: Uranus, and its moons, Cordelia, Ophelia, and Ariel, as well as a test particle which is subject to the gravitational influence from these massive bodies. In particular, we wish to address the relevance of this model for the occurrence of the ϵ ring of Uranus. The effect caused by planetary oblateness is included in the numerical integrations performed.

For the test particle, we explore a set of initial conditions which lie between the region bounded by the orbits of Cordelia and Ophelia, where the ϵ and λ rings of Uranus are observed. The orbits which remain confined to this region after 5×10^6 Cordelia periods are characterised by means of a frequency analysis, where we use the quotient of the standard deviation and the mean value of the semimajor axis as a stability index.

We propose to apply a filter with respect to the stability index thus defined, and we argue that the orbits which do not satisfy the filtering condition will eventually escape the region between Cordelia and Ophelia. When we apply this filtering over the whole set of integrated orbits, we obtain a quasi-circular, narrow ring, with well defined edges, and with a semimajor axis value consistent with the observed corresponding value for the ϵ ring. The calculated eccentricity and width for this ring are not consistent with observational data.

Finally, we discuss the relevance of this filtered subset of initial conditions for the occurrence of the ϵ ring of Uranus, as well as the possibility of the existence of a confining mechanism, analogous to the mechanism described by Benet and Jorba for Saturn's F ring. These results suggest that, within the model considered, the eccentricity and the relative force of the most massive moon (Ariel) with respect to the force exerted by the planet, are important factors for the system to exhibit the proposed mechanism for confinement and escape.

We conclude that, in order to verify the existence of a confining mechanism for the ϵ ring of Uranus, analogous to that described for the F ring of Saturn, numerical integrations considerably longer than 5×10^6 Cordelia periods are needed.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Anillos planetarios	1
1.2. Anillos planetarios en el Sistema Solar	1
1.3. Los anillos de Urano: anillos planetarios delgados	4
1.4. Relevancia del estudio de los anillos planetarios	8
1.5. El enfoque de la dispersión hamiltoniana	9
1.6. Un modelo minimalista del anillo ϵ de Urano	9
1.7. Objetivo de la tesis	10
2. El problema restringido de $N + 1$ cuerpos	13
2.1. Problema de Kepler: órbitas elípticas	19
2.1.1. Elipses keplerianas perturbadas: planetas oblatos	23
3. Método de Taylor: P_{NBP} y $PR(N + 1)BP$	27
4. Simulación numérica del $P(4+1)BP$	35
4.1. Integración numérica del problema restringido de 4+1 cuerpos en el plano	35
4.2. Selección de unidades de masa, longitud y tiempo	37
4.3. Condiciones iniciales	39
4.4. Criterio de escape	41
4.5. Método de estimación de elementos orbitales: semieje mayor y excentricidad	42
4.6. Análisis de frecuencias: índice de estabilidad	43
4.7. Pruebas preliminares	44
4.7.1. Variación de los parámetros orbitales de Urano, Cordelia, Ofelia y Ariel	44

4.7.2. Variación de la energía y el momento angular del P4BP como función del tiempo	47
5. Resultados	49
5.1. Distribución del error de la energía del PR(4 + 1)BP en la región $B(e_{\text{máx}})$	49
5.2. Distribución de los tiempos de colisión en el PR(4 + 1)BP en la región $B(e_{\text{máx}})$	50
5.3. Análisis de frecuencias del PR(4 + 1)BP en la región $B(e_{\text{máx}})$	51
5.4. Anillos planetarios	57
6. Discusión y conclusiones	61
A. Generación de clusters HPC	65

Índice de figuras

1.1.	En (a) se muestra una imagen tomada por la misión Cassini en Saturno, con vista al polo norte de Saturno y sus anillos. Crédito de imagen: NASA/JPL/Space Science Institute. En (b) se muestra otra imagen tomada por la misión Cassini en la cual Saturno eclipsa el Sol. Rodeando al resto de los anillos, se encuentra un anillo de polvo, denominado anillo G. Crédito de imagen: NASA/JPL/Space Science Institute.	2
1.2.	En (a) se muestra una imagen tomada por la misión Galileo en Júpiter, en un ángulo análogo al de la figura 1.1a, en donde Júpiter eclipsa la luz del Sol. En esta imagen pueden verse las partículas de polvo que componen los anillos de este planeta, iluminadas por la luz del Sol. Crédito de imagen: NASA. En (b) se muestra una imagen tomada por la misión espacial Voyager 2, donde es posible observar los anillos del planeta Neptuno, junto con al menos tres regiones en donde el brillo del anillo aumenta; estas regiones se conocen como arcos. Crédito de imagen: NASA/JPL.	3
1.3.	Esquema del sistema de anillos de Urano. Las unidades de distancia en el eje horizontal corresponden al radio medio de Urano, el cual tiene un valor de $R_{Ur} = 25,362$ km [44]. El límite de Roche se muestra por medio de una línea punteada. El radio de Urano, el semieje mayor de los satélites y los anillos, así como la anchura de los anillos ζ , μ y ν se muestran a escala. El diámetro de los satélites de Urano no está a escala.	5

- 1.4. Dos vistas de los anillos de Urano, como fueron observados por el Voyager 2, se comparan en esta imagen compuesta del sistema de anillos. Los nombres de los anillos se encuentran en la parte superior de la imagen. La imagen superior corresponde a un ángulo de fase solar (i.e., ángulo Sol-anillos-Voyager) bajo (~ 0 grados), y la segunda imagen corresponde a un ángulo de fase solar alto (~ 180 grados). La mayor parte de la estructura vista en la imagen inferior son partículas con diámetros del orden de micrómetros, las cuales son difícilmente vistas en otras imágenes de los anillos. Todos los anillos son visibles tanto en fase alta como fase baja, aunque algunos están recorridos en la posición radial aparente en la imagen. Este efecto visual es debido al ángulo de visualización y a la excentricidad e inclinación de los anillos respecto del plano ecuatorial de Urano. Crédito de la imagen: NASA/JPL. 6
- 1.5. Procesamiento digital de imagen generada por datos de ocultación estelar de la misión Voyager 2 [49]. Esta vista en dos dimensiones del anillo ϵ muestra varios detalles internos. Por ejemplo, es visible una terminación abrupta del material del anillo en los bordes interior y exterior. También es visible en la imagen un súbito aumento en el brillo cerca del centro del anillo y la alta concentración de material en la mitad exterior del anillo. Imagen tomada del libro *Planetary Rings* [39]. 7
- 2.1. Coordenadas del problema restringido de $N+1$ cuerpos. La posición de cada cuerpo se denota $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_{N+1}$, respecto de un marco de referencia inercial con origen O , y coordenadas cartesianas (x, y, z) . El índice 1 corresponde al planeta (con masa m_1), mientras que el índice $N + 1$ corresponde a la partícula de prueba. En general, posición de la j -ésima partícula relativa a la i -ésima partícula es $\vec{r}_{ji} = \vec{r}_j - \vec{r}_i$; y en particular la posición de la j -ésima partícula relativa al planeta es $\vec{r}_{j1} = \vec{r}_j - \vec{r}_1$ 14
- 2.2. Planetas con achatamiento polar: el planeta tiene una masa m_1 y posición \vec{r}_1 , y el satélite tiene una masa m_j y posición \vec{r}_j respecto de un marco de referencia inercial. Los ángulos α y β denotan, respectivamente, la latitud y la longitud del satélite respecto del plano ecuatorial del planeta. El vector \vec{r}_{j1} da la posición del satélite (masa m_j), respecto del planeta (masa m_1). 15

- 2.3. Elipse kepleriana sobre el plano orbital. El origen del sistema de coordenadas relativas se encuentra sobre el planeta, m_1 (en este punto, el vector de posición relativa, $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$, se anula). El punto C denota el centro geométrico de la elipse. Los puntos de distancia relativa mínima y máxima se conocen como periapse y apoapse, respectivamente; la línea formada por estos dos puntos se conoce como línea de ápsides. La longitud verdadera ϕ corresponde al ángulo azimutal del vector de posición relativa, \vec{r} , respecto de una línea de referencia (eje x positivo). El semieje mayor, a , corresponde a la mitad de la distancia entre las ápsides de la elipse. La excentricidad, e , corresponde a la distancia del centro de la elipse a la posición del planeta, medida en unidades del semieje mayor. La longitud de pericentro, ϖ , corresponde al ángulo formado por la línea de referencia (eje x positivo) y la línea de ápsides. 21
- 4.1. P4BP: Gráfica de los elementos orbitales de Cordelia, a_{Co} y e_{Co} , como función del tiempo. En esta serie de tiempo, el valor promedio del semieje mayor y la excentricidad es $\bar{a}_{Co} = 1.947$ y $\bar{e}_{Co} = 0.00027$, lo cual es consistente, dentro de la incertidumbre observacional, con los valores reportados por la NASA (véase tabla 4.2). 45
- 4.2. P4BP: Gráfica de los elementos orbitales de Ofelia, a_{Of} y e_{Of} , como función del tiempo. En esta serie de tiempo, el valor promedio del semieje mayor redondeado es $\bar{a}_{Of} = 2.104$, lo cual es consistente con el valor reportado por la NASA (véase tabla 4.2). Por otra parte, el valor promedio de la e es $\bar{e}_{Of} = 0.00993$, lo cual es consistente, dentro de la incertidumbre observacional, con el valor reportado por la NASA (véase tabla 4.3). 46
- 4.3. P4BP: Gráfica de los elementos orbitales de Ariel, a_{Ar} y e_{Ar} , como función del tiempo. En esta serie de tiempo, el valor promedio del semieje mayor redondeado a tres cifras decimales es $\bar{a}_{Ar} = 7.470$, lo cual es consistente con el valor reportado por la NASA (véase tabla 4.2). Por otro lado, el valor promedio de la excentricidad es $\bar{e}_{Ar} = 0.00123$, lo cual es consistente, dentro de la incertidumbre observacional, con el valor reportado por la NASA (véase tablas 4.3 y 4.6). 46

4.4.	Gráfica de la variación relativa de la energía del problema de 4 cuerpos en el plano (ecuación 2.13) como función del tiempo. Los cuerpos incluidos en este sistema son: Urano, Cordelia, Ofelia y Ariel. El valor inicial de la energía es $E_0 \approx -7.674 \times 10^{-6} m_{U_r} R_{U_r}^2 / T_{C_o}^2$. La variación absoluta de la energía genera una gráfica idéntica a esta, multiplicada por el factor E_0	48
4.5.	Gráfica de la variación relativa del momento angular del P4BP como función del tiempo. Los cuerpos incluidos en este sistema son: Urano, Cordelia, Ofelia y Ariel. El valor inicial del momento angular es $L_0 \approx 1.157 \times 10^{-4} m_{U_r} R_{U_r}^2 / T_{C_o}$. La variación absoluta del momento angular genera una gráfica idéntica a esta, multiplicada por el factor L_0	48
5.1.	PR(4 + 1)BP: Histograma de la distribución de error en la energía para distintos tiempos de integración. En la figura los colores rojo, anaranjado, verde, azul y lila representan, respectivamente, el error a un tiempo de $5 \times 10^4 T_{C_o}$, $1 \times 10^5 T_{C_o}$, $5 \times 10^5 T_{C_o}$, $1 \times 10^6 T_{C_o}$ y $5 \times 10^6 T_{C_o}$. Los datos mostrados en ambos incisos de la figura son los mismos, cambiando solamente el orden de la superposición de los distintos colores. Interpretando la sucesión de errores relativos en la energía, $\delta E_t = (E(t_t) - E(t_{t-1})) / E_0$, como una caminata aleatoria, y ajustando una distribución gaussiana a cada una de ellas, obtenemos un coeficiente de difusión $D_E = 1.914 \cdot \epsilon_M \approx 4.251 \times 10^{-16}$, donde ϵ_M es el épsilon de la máquina para tipo de dato <code>double</code> en el lenguaje de programación <code>C++</code>	50
5.2.	Histograma de la distribución de los tiempos de escape de la región $B(e_{máx})$. El criterio de escape es el descrito en la sección 4.4. . . .	51
5.3.	PR(4 + 1)BP: Gráfica de $\log_{10}(\Delta a)$ para condiciones iniciales de confinamiento tomadas aleatoriamente en la región $B(e_{máx} = 0.04)$, proyectada sobre el plano $\Theta_a \times \Theta_e$ integradas durante $5 \times 10^4 T_{C_o}$ (5.3a) y $5 \times 10^6 T_{C_o}$ (5.3b).	53
5.4.	PR(4 + 1)BP: Gráfica de $\log_{10}(\Delta e)$ para condiciones iniciales de confinamiento tomadas aleatoriamente en la región $B(e_{máx} = 0.04)$, proyectada sobre el plano $\Theta_a \times \Theta_e$ integradas durante $5 \times 10^4 T_{C_o}$ (5.4a) y $5 \times 10^6 T_{C_o}$ (5.4b).	54
5.5.	Histograma de la distribución de $\log_{10}(\Delta a)$. En (a) el tiempo de integración es de $5 \times 10^4 T_{C_o}$ y los datos corresponden a los mostrados en la figura 5.3a. En (b) el tiempo de integración es de $5 \times 10^6 T_{C_o}$, correspondiente a los datos mostrados en la figura 5.3b.	55

5.6.	Histograma de la distribución de $\log_{10}(\Delta e)$. En (a) el tiempo de integración es de $5 \times 10^4 T_{Co}$ y los datos corresponden a los mostrados en la figura 5.4a. En (b) el tiempo de integración es de $5 \times 10^6 T_{Co}$, correspondiente a los datos mostrados en la figura 5.4b.	55
5.7.	Gráfica de $\log_{10}(\Delta a)$ en el plano $\Theta_a \times \Theta_e$ usando el filtrado $\log_{10}(\Delta a) < -7.0$	56
5.8.	Visualización sobre el plano ecuatorial de Urano del anillo generado al graficar las posiciones, después de $5 \times 10^6 T_{Co}$, de las órbitas en la figura 5.7. Se muestra esquemáticamente Urano al centro, así como Cordelia y Ofelia, ubicadas al interior y exterior del anillo, respectivamente. Las unidades de los ejes x y y corresponden al radio medio de Urano, R_{Ur}	57
5.9.	Visualización sobre el plano ecuatorial de Urano del anillo generado al graficar las posiciones, después de $5 \times 10^6 T_{Co}$, de las órbitas en la figura 5.7. Se muestra esquemáticamente Urano al centro, y la posición de Ariel en su órbita alrededor de Urano, así como Cordelia y Ofelia, ubicadas al interior y exterior del anillo, respectivamente. Las unidades de los ejes x y y corresponden al radio medio de Urano, R_{Ur}	58
5.10.	Visualización en coordenadas polares de las posiciones a $5 \times 10^6 T_{Co}$ de las órbitas en la figura 5.7. En color rojo se muestra la posición de las partículas de prueba que a $5 \times 10^6 T_{Co}$ cumplen la condición de filtrado $\log_{10}(\Delta a) < -7.0$. El ancho del anillo graficado es $\sim 0.07 R_{Ur} = 1,800\text{km}$. En color azul se muestra un ajuste del conjunto de datos a una elipse kepleriana; los elementos orbitales asociados a esta elipse kepleriana son $a = 2.009 R_{Ur}$, $e = 0.0002$. La línea negra cerca al inferior de la gráfica representa el anillo λ , cuyos elementos orbitales son $a_\lambda = 1.957 R_{Ur}$, $e_\lambda = 0.0$, y con un ancho reportado $\sim 10^{-4} R_{Ur} = 2\text{km}$. Por otra parte, en color negro se muestran las lunas pastoras, Cordelia y Ofelia (los diámetros mostrados no están a escala). Las tres líneas onduladas representan la elipse kepleriana asociada al anillo ϵ , con $a_\epsilon = 2.006 R_{Ur}$ y $e_\epsilon = 0.0079$, así como el ancho promedio del mismo ($\sim 0.002 R_{Ur} = 60\text{km}$).	59

Índice de tablas

4.1.	Primera columna: valores reportados por Jacobson, y Karkoschka et al. para las masas de Urano, Cordelia, Ofelia y Ariel (kilogramos) [26, 30]. Segunda columna: valores de la primera columna normalizados respecto de la masa de Urano.	37
4.2.	Primera columna: valores reportados por Seidelmann et al. para el radio medio de Urano [44], así como los valores reportados por Jacobson y Laskar para los semiejes mayores de Cordelia, Ofelia y Ariel (kilómetros) [35, 25]. Segunda columna: valores normalizados respecto del radio ecuatorial de Urano.	38
4.3.	Primera columna: Valores reportados por Jacobson y Laskar para las excentricidades de Cordelia, Ofelia y Ariel [35, 25, 27].	38
4.4.	Primera columna: Valores reportados por Jacobson y Laskar [25, 27, 35] para los periodos orbitales de Cordelia, Ofelia y Ariel, expresados en segundos. Segunda columna: Periodos orbitales de Cordelia, Ofelia y Ariel en términos del periodo orbital de Cordelia, T_{Co}	38
4.5.	Primera columna: Valores reportados por Jacobson y Laskar [25, 35] para los periodos de precesión longitud de periapse, $T_{\varpi} = 2\pi/\dot{\varpi}$, de Cordelia, Ofelia y Ariel, expresados en grados por día. Segunda columna: Valores de la primera columna en términos del periodo orbital de Cordelia.	38
4.6.	Primera columna: Nombre del satélite. Segunda columna: Parámetro orbital asociado a cada satélite. Tercera columna: Valores observados para cada elemento orbital; tomados de las tablas 4.2 y 4.3. Cuarta columna: Valor promedio de los elementos orbitales durante la integración numérica del P4BP, durante un tiempo de integración de $1 \times 10^7 T_{Co} \approx 9,000$ años.	45

Capítulo 1

Introducción

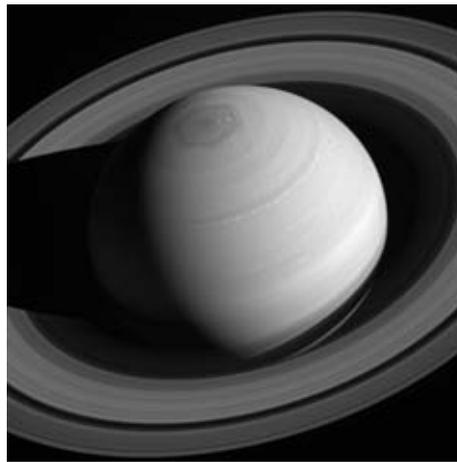
1.1. Anillos planetarios

Un anillo planetario se define como cualquier ensemble (conjunto) de partículas en órbita alrededor de un planeta [23]. Típicamente, los anillos planetarios son circulares, verticalmente delgados respecto de su anchura horizontal, se encuentran sobre el ecuador del planeta que orbitan y simétricos respecto del eje de rotación planetario; aunque existen anillos específicos que no satisfacen al menos una de estas propiedades generales [6]. Actualmente, se sabe que los cuatro “gigantes” del Sistema Solar (Júpiter, Saturno, Urano, Neptuno) poseen sistemas de anillos, ubicados dentro del límite de Roche [41, 14]. Este límite es la distancia más cercana a la cual una partícula de fluido en equilibrio hidrostático es destruida por las fuerzas de marea del planeta; a esta distancia límite, las fuerzas de marea se balancean con la auto-gravedad del objeto [7, 50].

1.2. Anillos planetarios en el Sistema Solar

Desde el descubrimiento del sistema de anillos planetarios de Saturno, hecho por Galileo Galilei alrededor de 1610 [15], los anillos planetarios han sido objeto de estudio en astronomía y mecánica celeste. Inicialmente, Galileo interpretó erróneamente sus observaciones: estas parecían indicar la presencia de dos lunas a ambos lados del planeta que paulatinamente se ocultaban y posteriormente reaparecían [41]. En 1659 Huygens —en gran parte gracias a su fascinación por la teoría de vórtices de Descartes para explicar los

movimientos de los cuerpos celestes [15]—, en su obra *Systema Saturnium* [24], interpretó correctamente este fenómeno, al establecer que se debía a las diferentes vistas de un disco delgado de material rodeando a Saturno. En 1857 James Clerk Maxwell dio una demostración matemática de que estos anillos no podían ser rígidos (como se creía en ese entonces); sino que debían estar compuestos de pequeños satélites orbitando el planeta [36].

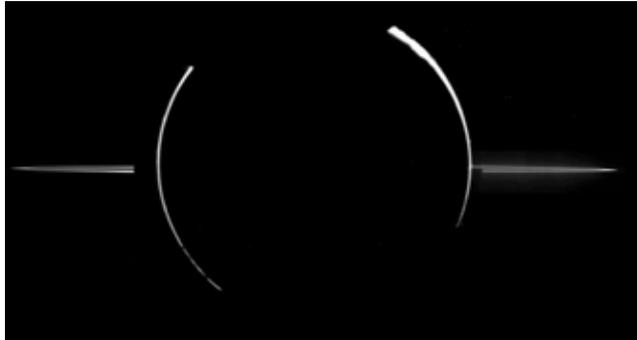


(a)

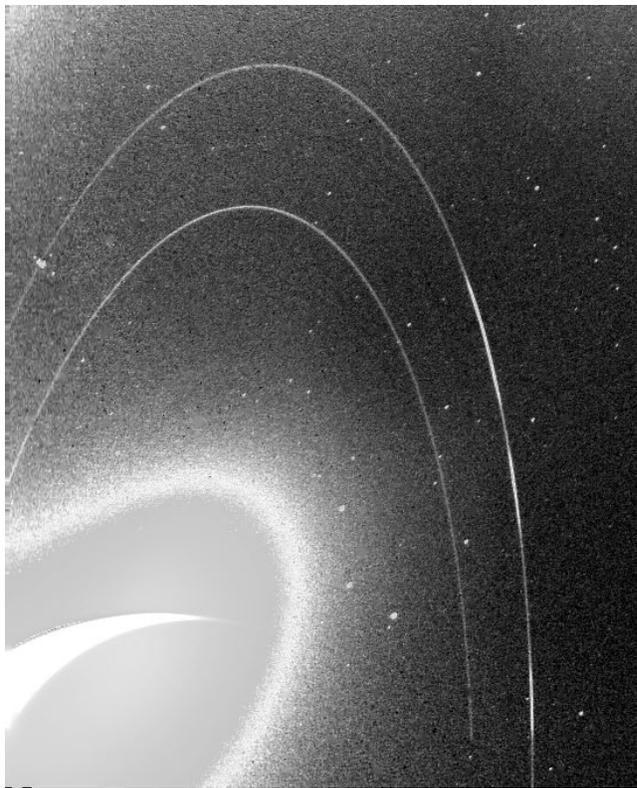


(b)

Figura 1.1: En (a) se muestra una imagen tomada por la misión Cassini en Saturno, con vista al polo norte de Saturno y sus anillos. Crédito de imagen: NASA/JPL/Space Science Institute. En (b) se muestra otra imagen tomada por la misión Cassini en la cual Saturno eclipsa el Sol. Rodeando al resto de los anillos, se encuentra un anillo de polvo, denominado anillo G. Crédito de imagen: NASA/JPL/Space Science Institute.



(a)



(b)

Figura 1.2: En (a) se muestra una imagen tomada por la misión Galileo en Júpiter, en un ángulo análogo al de la figura 1.1a, en donde Júpiter eclipsa la luz del Sol. En esta imagen pueden verse las partículas de polvo que componen los anillos de este planeta, iluminadas por la luz del Sol. Crédito de imagen: NASA. En (b) se muestra una imagen tomada por la misión espacial Voyager 2, donde es posible observar los anillos del planeta Neptuno, junto con al menos tres regiones en donde el brillo del anillo aumenta; estas regiones se conocen como arcos. Crédito de imagen: NASA/JPL.

1.3. Los anillos de Urano: anillos planetarios delgados

Durante mucho tiempo se pensó que Saturno era el único planeta con un sistema de anillos, hasta que en 1977, durante la observación del paso de Urano frente a la estrella SAO158687 para estudiar la atmósfera de Urano, se observó que la estrella SAO158687, una estrella gigante naranja en la constelación de Libra, parpadeó inesperadamente varias veces antes de desaparecer detrás de Urano [15]. Elliot, Dunham y Mink interpretaron adecuadamente este fenómeno, al proponer que estos parpadeos se debían a la existencia de un sistema de anillos alrededor de Urano [12]. A diferencia de los anillos conocidos en Saturno, cuya anchura se extiende a lo largo de decenas de miles de kilómetros (véase figura 1.1), los anillos de Urano tenían una extensión radial de apenas decenas de kilómetros. Poco después, en 1979, la nave espacial Pioneer 11 descubrió el anillo F de Saturno [20], el cual tiene una extensión similar a los anillos de Urano descubiertos por el Voyager 2. Estos anillos se conocen actualmente como *anillos planetarios delgados*.

Los anillos de Urano, en comparación con los anillos de Saturno, resultaron ser excéntricos ($e \sim 10^{-3}$), delgados (con un ancho radial ~ 100 km, mientras que los anillos A y B de Saturno tienen un grosor $\sim 20 \times 10^3$ km) y opacos, además de poseer bordes bien definidos [18, 32, 17, 10]. Este descubrimiento produjo un interés renovado en el estudio de los anillos planetarios.

Durante el mes de enero de 1986, como parte de su misión, la nave espacial Voyager 2 de la NASA tuvo un acercamiento con Urano. En su punto más cercano, el cual ocurrió el 24 de enero de 1986, la nave estuvo a 81,500 km de la atmósfera de Urano, pasando hasta el interior de la órbita de una de sus lunas, Miranda. Voyager 2 envió imágenes y datos acerca del planeta, sus lunas, sus anillos y su atmósfera, así como del interior y del entorno que rodea a Urano [17, 25, 30, 32]. Voyager 2 logró confirmar la existencia de los 9 anillos descubiertos anteriormente, además de descubrir dos nuevos anillos: el anillo ζ y el anillo λ [48].

En 2006, utilizando el telescopio espacial Hubble, Showalter y Lissauer [46, 45] reportaron el descubrimiento de dos anillos adicionales en Urano, los cuales denominaron anillos μ y ν , trayendo así a trece el total de anillos descubiertos en Urano. Este último par de

1.3. LOS ANILLOS DE URANO: ANILLOS PLANETARIOS DELGADOS 5

anillos forma lo que ahora se llama el sistema exterior de anillos de Urano.

En la figura 1.3 se muestra un esquema del sistema de los 13 anillos de Urano conocidos hasta ahora, junto con los satélites de Urano que se encuentran en esa región. El semieje mayor nominal de los satélites y los anillos ζ , μ y ν , y el radio de Urano se muestran a escala. El diámetro de los satélites y la anchura del resto de los anillos (6, 5, 4, α , β , η , γ , δ , λ , ϵ) no está a escala, indicando sólo cualitativamente que Ariel y Miranda son mucho más masivas (alrededor de 10^5 veces) que las lunas interiores (Cordelia, Ofelia, Bianca, etc.) de Urano [25, 26, 27]. Las unidades del eje horizontal corresponden al radio medio de Urano, el cual tiene un valor $R_{Ur} = 25,362$ km [44]. El límite de Roche para un cuerpo con densidad $1 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$ se muestra por medio de una línea punteada. En las figuras 1.4 y 1.5 se muestran detalles de la estructura del sistema de anillos de Urano, así como un detalle de la estructura radial del anillo ϵ .

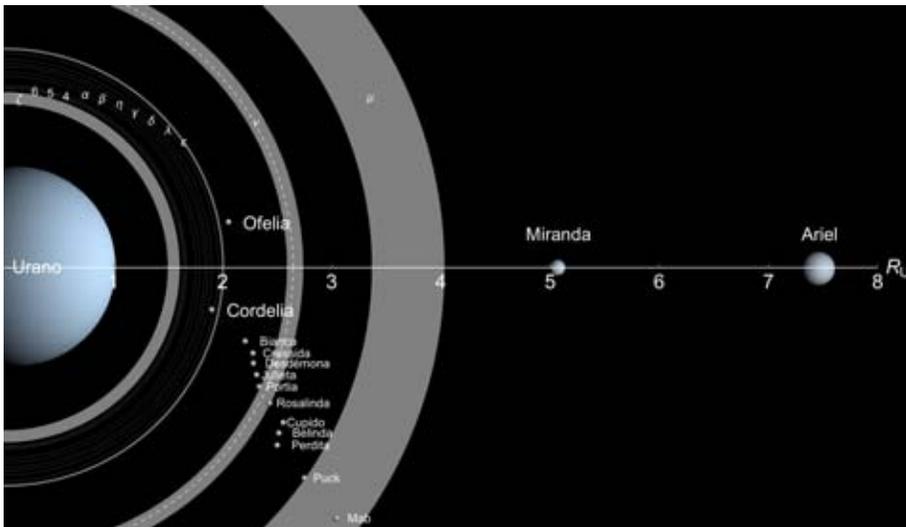


Figura 1.3: Esquema del sistema de anillos de Urano. Las unidades de distancia en el eje horizontal corresponden al radio medio de Urano, el cual tiene un valor de $R_{Ur} = 25,362$ km [44]. El límite de Roche se muestra por medio de una línea punteada. El semieje mayor de los satélites y los anillos ζ , μ y ν se muestran a escala. El diámetro de los satélites de Urano no está a escala.

La misión Voyager 2 proveyó las primeras imágenes resueltas de los anillos de Urano y de muchos satélites menores que pueden influir sobre ellos gravitacionalmente. También obtuvo datos a partir de una variedad de sensores y sobre una variedad de ángulos y condiciones de iluminación que ayudan a determinar las propiedades reflectivas y la composición de las partículas del anillo, así como la distribución de sus tamaños. Sin embargo, mediciones realizadas a los anillos desde la Tierra por medio de ocultación estelar han provisto una base de datos más amplia y mediciones más precisas en cuanto a radios, formas, inclinaciones, anchuras, profundidades ópticas (i.e., transparencia), tasas de precesión (i.e., qué tan rápido las órbitas cambian su orientación), y estabilidad dinámica. Esta información no fue obtenida durante el breve lapso de tiempo durante el cual el Voyager 2 estuvo en la vecindad de Urano [39].

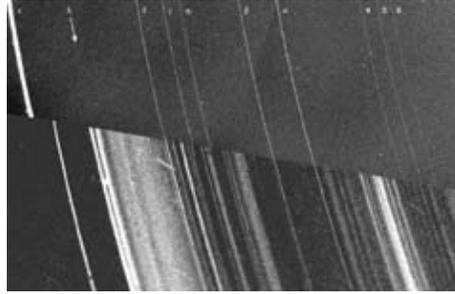


Figura 1.4: Dos vistas de los anillos de Urano, como fueron observados por el Voyager 2, se comparan en esta imagen compuesta del sistema de anillos. Los nombres de los anillos se encuentran en la parte superior de la imagen. La imagen superior corresponde a un ángulo de fase solar (i.e., ángulo Sol-anillos-Voyager) bajo (~ 0 grados), y la segunda imagen corresponde a un ángulo de fase solar alto (~ 180 grados). La mayor parte de la estructura vista en la imagen inferior son partículas con diámetros del orden de micrómetros, las cuales son difícilmente vistas en otras imágenes de los anillos. Todos los anillos son visibles tanto en fase alta como fase baja, aunque algunos están recorridos en la posición radial aparente en la imagen. Este efecto visual es debido al ángulo de visualización y a la excentricidad e inclinación de los anillos respecto del plano ecuatorial de Urano. Crédito de la imagen: NASA/JPL.

Aún después del encuentro del Voyager 2 con Urano, y más de 20 años de datos teóricos y observacionales desde 1986, aún no hay una explicación consistente del mecanismo que confina radialmente los anillos de Urano. Dado que, por ejemplo, Cordelia y Ofelia son los satélites de Urano más cercanos al anillo ϵ , una posibilidad es que estos dos cuerpos impidan el esparcimiento radial del mismo.

1.3. LOS ANILLOS DE URANO: ANILLOS PLANETARIOS DELGADOS 7



Figura 1.5: Procesamiento digital de imagen generada por datos de ocultación estelar de la misión Voyager 2 [49]. Esta vista en dos dimensiones del anillo ϵ muestra varios detalles internos. Por ejemplo, es visible una terminación abrupta del material del anillo en los bordes interior y exterior. También es visible en la imagen un súbito aumento en el brillo cerca del centro del anillo y la alta concentración de material en la mitad exterior del anillo. Imagen tomada del libro *Planetary Rings* [39].

La teoría más aceptada para el confinamiento radial del anillo ϵ es la teoría propuesta por Goldreich y Tremaine en 1979 [21], conocida como teoría de pastoreo, o teoría de las lunas pastoras. Esta teoría fue propuesta antes del descubrimiento de Cordelia y Ofelia, e intenta explicar el confinamiento de un anillo planetario delgado por medio de transferencias de momento angular entre las partículas del anillo y un par de lunas ubicadas cerca de los bordes interior y exterior del anillo. En particular, en el contexto de esta teoría, las lunas pastoras del anillo ϵ de Urano son Cordelia y Ofelia. Sin embargo, para el resto de la mayoría de los anillos de Urano, no se han observado hasta ahora satélites que puedan proveer las fuerzas gravitacionales necesarias para confinar las partículas que forman parte de estos. Por lo tanto, o bien los satélites que dan forma a los anillos de Urano son demasiado pequeños como para haber sido detectados, o bien, existe un mecanismo alternativo al pastoreo gravitacional que está actuando dentro de este sistema de anillos [39].

Por otro lado, utilizando la teoría de Goldreich y Tremaine, se deduce que hay un tiempo máximo durante el cual puede actuar el mecanismo de pastoreo [13]. Por lo tanto, es posible dar una estimación de la edad de los anillos basada en la duración de la actuación del mecanismo de pastoreo entre el anillo y las lunas. Para el anillo

ϵ de Urano, este tiempo es de 6×10^8 años, la cual es mucho menor que la edad del Sistema Solar (4.5×10^9 años) [39]. De acuerdo con Esposito et al. [13], esto implica que, a menos de que Urano esté pasando por un momento particular en su historia, este resultado requiere un proceso continuo para reabastecer el material que compone el anillo. Por lo tanto, dado el corto tiempo de vida del anillo ϵ predicho por la teoría de pastoreo, para rescatar la consistencia de esta teoría se debe postular que eventos muy improbables (tales como destrucción de lunas masivas por impactos de meteoros) dan cuenta de los anillos que se observan actualmente en Urano [15]. En conclusión, actualmente no hay un enfoque auto-consistente para el confinamiento de anillos planetarios delgados, que explique su estructura radial y azimutal [37, 15].

1.4. Relevancia del estudio de los anillos planetarios

En julio de 2004, la sonda espacial Cassini-Huygens entró en órbita alrededor de Saturno. Los objetivos principales de esta misión incluyen realizar mediciones de la magnetosfera de Saturno, analizar sus anillos y estudiar la composición de su interior y su atmósfera [42]. Esta misión, junto con las observaciones del telescopio Keck en Hawaii (e.g., [11, 10]) y el telescopio espacial Hubble [25, 46, 45], así como los análisis de datos y modelajes que diversos grupos de investigación realizan utilizando esta información, dan testimonio del interés actual de la comunidad científica por entender la dinámica del Sistema Solar, y en particular de los anillos planetarios [14, 39].

La importancia del estudio de los anillos planetarios radica en que el conjunto de fenómenos observados en estos puede ser utilizado para entender los procesos que tienen lugar en otros sistemas astrofísicos planos [15]. Los procesos observados hasta ahora en los sistemas de anillos planetarios tienen un paralelo con aquellos que ocurrieron durante la formación de los planetas del Sistema Solar, particularmente los procesos que involucran interacciones entre el disco y protoplanetas que orbitan en el interior o en las cercanías de este [15, 39]. Los modelos de los procesos presentes en los anillos pueden ser comparados en detalle con las observaciones en los anillos, permitiendo así un refinamiento que no es posible actualmente

para el Sistema Solar temprano [14].

Actualmente, existe inquietud en la comunidad científica por una misión orbital a Urano, que ayude a estudiar su sistema planetario, sus anillos y su magnetosfera [1].

1.5. El enfoque de la dispersión hamiltoniana

La dispersión es un proceso en el cual la trayectoria de una partícula es perturbada por un potencial localizado [37]. El enfoque de la dispersión hamiltoniana se refiere al estudio de este tipo de procesos en el contexto de la teoría de sistemas hamiltonianos. En estos procesos, las trayectorias (u órbitas) que escapan de una región acotada se llaman trayectorias de escape, mientras que las trayectorias que permanecen dentro de esta región se llaman trayectorias de confinamiento, o trayectorias confinadas. En particular, para sistemas formados por un planeta alrededor del cual orbitan varias lunas, las órbitas de confinamiento existentes dentro de regiones de escape por dispersión, pueden dar lugar a la ocurrencia anillos planetarios [37].

1.6. Un modelo minimalista del anillo ϵ de Urano

A priori, una descripción completa de la dinámica del anillo ϵ de Urano debe incluir, por lo menos, las interacciones gravitacionales de Urano, incluyendo efectos por su achatamiento polar, las lunas mayores de Urano (Ariel, Umbriel, Miranda, Titania y Oberón), las lunas pastoras del anillo ϵ , Cordelia y Ofelia, y las interacciones entre las partículas del anillo. En particular, las interacciones entre las partículas del anillo incluyen complejos procesos de agrupamiento (coalescencia) y desintegración por colisiones. Realizar simulaciones numéricas de un modelo completo del anillo ϵ representa por lo tanto un objetivo que implicaría una adecuada comprensión de estos efectos, además de requerir recursos computacionales bastante ambiciosos [2].

Consideramos por lo tanto un modelo más sencillo, que incluye las interacciones gravitacionales de Urano (incluyendo efectos por achatamiento polar), las lunas pastoras del anillo ϵ , Cordelia y Ofelia, así como Ariel, la tercera luna más masiva del sistema uranio [27], y

un ensemble (conjunto) de partículas del anillo que no interactúan entre ellas, ignorando la influencia que las partículas del anillo (tanto individualmente como en su conjunto) tienen sobre Urano, Cordelia, Ofelia y Ariel. Esta suposición es equivalente a describir las partículas de este ensemble como *partículas de prueba* (i.e., partículas de masa nula). Dado que la inclinación, respecto del plano ecuatorial de Urano, de las órbitas de Cordelia, Ofelia, Ariel [35, 25] y el anillo ϵ [48, 17], tienen un valor medio de décimas de grado, hacemos también la aproximación de considerar el movimiento confinado al plano ecuatorial de Urano.

Las suposiciones anteriormente descritas, nos permiten considerar una instancia del problema restringido de 4+1 cuerpos (capítulos 2 y 4). En el contexto de este modelo, se plantea la existencia de un posible mecanismo de confinamiento del anillo ϵ , y se consideran las propiedades del anillo obtenido (capítulo 5).

Estudiamos la dinámica del ensemble de partículas de prueba, definida por sus condiciones iniciales en el espacio fase, así como la evolución temporal de sus órbitas, definiendo un criterio de escape, el cual determina si una partícula permanece atrapada (confinada) o escapa de la región entre Cordelia y Ofelia; es decir, estudiamos la ocurrencia del anillo ϵ de Urano en el contexto de este modelo mediante el enfoque de la dispersión hamiltoniana [4, 3, 37, 2].

1.7. Objetivo de la tesis

El objetivo principal de esta tesis es analizar la ocurrencia de anillos planetarios delgados, usando un modelo para el anillo ϵ de Urano. El modelo utilizado para este sistema es el problema restringido de cinco cuerpos en el plano ecuatorial planetario (PR(4+1)BP, por sus siglas en inglés: *Planar, Restricted, Five-Body Problem*). En particular, estudiar mediante el enfoque de la dispersión hamiltoniana, propuesto por Merlo y Benet [37], la ocurrencia de anillos delgados en la región entre las lunas pastoras Cordelia y Ofelia, que interactúan con estas dos lunas pastoras y una tercera luna, Ariel. Esto se hace tomando en cuenta términos debidos al achatamiento polar en el potencial de atracción gravitacional del planeta. Se realizan simulaciones numéricas de alta precisión (esto es, comparables a la precisión de la máquina) utilizando el método de Taylor hasta $5 \times 10^6 T_{Co}$ (T_{Co} es el periodo orbital de Cordelia) y se caracterizan

órbitas de escape y confinamiento. Se realiza un análisis de frecuencias y se propone el cociente de la desviación estándar y el promedio del semieje mayor de la partícula de prueba como índice de estabilidad. Al realizar un filtro de las condiciones iniciales integradas por medio de este índice de estabilidad, se obtiene un anillo delgado y casi circular con bordes bien definidos en la región entre Cordelia y Ofelia. Finalmente, se realiza una comparación cualitativa de los resultados obtenidos con los anillos ϵ y λ de Urano.

En el capítulo 2 se introduce el problema restringido de $N + 1$ cuerpos, las ecuaciones de movimiento que se integrarán numéricamente, incluyendo correcciones debidas al achatamiento polar del planeta, y el problema de Kepler, junto con una definición de los parámetros orbitales de este problema. En el capítulo 3 se introduce el método de Taylor para la integración numérica de problemas de valor inicial; esto es, ecuaciones diferenciales ordinarias con condiciones iniciales, así como la implementación de este método para la integración numérica del PR($N + 1$)BP. En el capítulo 4 se detalla la instancia particular del PR($4 + 1$)BP que se estudia en esta tesis, definiendo los parámetros y unidades utilizadas para Urano, Cordelia, Ofelia y Ariel, un criterio de escape y colisión, un método para estimar los elementos orbitales de las partículas del anillo, y pruebas preliminares que validan la implementación descrita. En el capítulo 5 se presentan los resultados obtenidos. En el capítulo 6 se discuten los resultados y se plantean conclusiones y perspectivas. Finalmente, en el apéndice A se detalla el equipo de cómputo utilizado para realizar las integraciones numéricas presentadas en este trabajo.

Capítulo 2

El problema restringido de $N + 1$ cuerpos

El problema restringido de $N + 1$ cuerpos se define como el problema de conocer la trayectoria (órbita) de una partícula de masa despreciable, conocida como partícula de prueba, sujeta a la atracción gravitacional de N cuerpos masivos. Este es uno de los problemas básicos de la mecánica celeste [41, 16].

El problema restringido de $N + 1$ cuerpos es importante en el contexto del estudio de los anillos planetarios delgados, pues si se considera el sistema formado por un planeta, $N - 1$ lunas y m partículas que forman el anillo (problema de $N + m$ cuerpos), y al ignorar las interacciones entre estas últimas, entonces sus trayectorias quedan desacopladas en m sistemas independientes de $N + 1$ cuerpos. Esta hipótesis puede considerarse como una primera aproximación al problema, tal como fue planteado por Benet y Seligman [3].

Considérese, pues, el problema restringido de $N + 1$ cuerpos sobre el plano (PR($N + 1$)BP, por sus siglas en inglés: *Planar, Restricted $N + 1$ Body Problem*); esto es, el movimiento de una partícula de prueba en el campo gravitacional de N cuerpos que se atraen gravitacionalmente entre sí, sobre el plano ecuatorial planetario. Concretamente, consideramos el caso $N = 4$ del sistema formado por el planeta Urano, alrededor del cual orbitan $N - 1 = 3$ lunas: Cordelia, Ofelia y Ariel.

Fijamos unidades en las que la masa del planeta $m_1 = 86.8103 \times 10^{24} \text{kg} \equiv 1$ y el radio medio de Urano $R_{\text{Ur}} = 25,362 \text{km} \equiv 1$ [26, 44].

Desarrollamos ahora las ecuaciones de movimiento del PR($N +$

1)BP. Considérese la figura 2.1. En general, para $i = 1, 2, \dots, N$, sean $\vec{r}_i(t)$ la solución de las ecuaciones de movimiento del problema de N cuerpos con masas m_i , respecto de un marco de referencia inercial con origen O . El índice del planeta corresponde a $i = 1$. Sean, además, \vec{r}_{N+1} y \vec{p}_{N+1} los vectores de posición y momento de la partícula de prueba, respectivamente. Definimos el vector de posición relativa entre la j -ésima partícula respecto de la i -ésima partícula como $\vec{r}_{ji} \equiv \vec{r}_j - \vec{r}_i$ para $i = 1, \dots, N + 1$ y $j \neq i$. Denotamos así mismo la distancia relativa entre la j -ésima y i -ésima partícula como $r_{ji} \equiv \|\vec{r}_j - \vec{r}_i\|$.

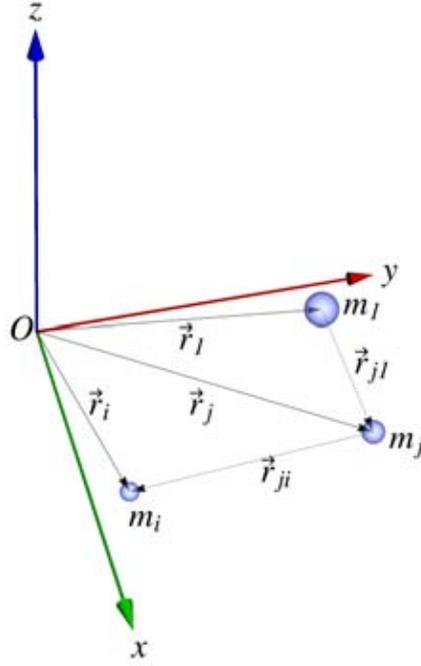


Figura 2.1: Coordenadas del problema restringido de $N + 1$ cuerpos. La posición de cada cuerpo se denota $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_{N+1}$, respecto de un marco de referencia inercial con origen O , y coordenadas cartesianas (x, y, z) . El índice 1 corresponde al planeta (con masa m_1), mientras que el índice $N + 1$ corresponde a la partícula de prueba. En general, posición de la j -ésima partícula relativa a la i -ésima partícula es $\vec{r}_{ji} = \vec{r}_j - \vec{r}_i$; y en particular la posición de la j -ésima partícula relativa al planeta es $\vec{r}_{j1} = \vec{r}_j - \vec{r}_1$.

Para escribir las ecuaciones de movimiento del PR($N + 1$)BP es necesario obtener una expresión para el potencial gravitacional

generado por el planeta, que tome en cuenta su achatamiento polar. El achatamiento polar de un planeta genera términos extras en el potencial de atracción gravitacional newtoniano, alterando la dinámica de los objetos que atrae gravitacionalmente, y es por lo tanto importante en la integración del PR($N + 1$)BP. Obtenemos a continuación una expresión para el potencial gravitacional de un planeta con achatamiento polar.

Considérese la ilustración en la figura 2.2, en donde se muestra un planeta con masa m_1 , y un satélite con masa m_j orbitando este planeta. Sean α y β , respectivamente, la latitud y longitud del satélite respecto del plano ecuatorial planetario. La posición del planeta y del satélite respecto de un marco de referencia inercial están dadas, respectivamente, por \vec{r}_j y \vec{r}_1 . El vector de posición del satélite, relativa al planeta, es $\vec{r}_{j1} = \vec{r}_j - \vec{r}_1$.

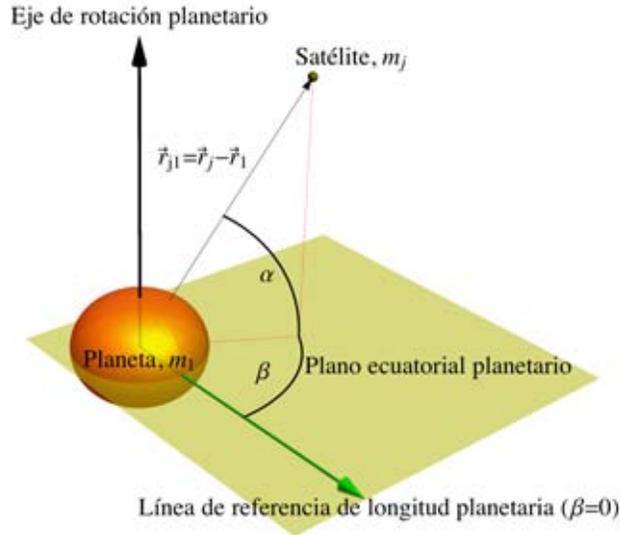


Figura 2.2: Planetas con achatamiento polar: el planeta tiene una masa m_1 y posición \vec{r}_1 , y el satélite tiene una masa m_j y posición \vec{r}_j respecto de un marco de referencia inercial. Los ángulos α y β denotan, respectivamente, la latitud y la longitud del satélite respecto del plano ecuatorial del planeta. El vector \vec{r}_{j1} da la posición del satélite (masa m_j), respecto del planeta (masa m_1).

Sea R_e el radio ecuatorial del planeta (i.e., el radio del planeta sobre el plano perpendicular a su eje de rotación) y R_p su radio polar (i.e., el radio del planeta en la dirección de su eje de rotación). Denotamos por R el valor medio del planeta. Con esta notación definimos la *elipticidad*, ψ , del planeta como [16]

$$\psi = \frac{R_e - R_p}{R} \quad . \quad (2.1)$$

Considérese ahora $|\psi| \ll 1$, de manera que la superficie del planeta tenga una forma superficial cercana a una esfera. Para $R_p < R_e$, tenemos $\psi > 0$, y en este caso la forma superficial del planeta se conoce como un *esferoide oblato*. Bajo estas condiciones, la forma superficial del planeta, $S(\alpha, \beta)$, está dada por [16]

$$S(\alpha, \beta) = S(\alpha) = R \left[1 - \frac{2}{3} \psi P_2(\sin \alpha) \right] \quad . \quad (2.2)$$

donde la dependencia respecto de la longitud β se suprime, dado que la no-esfericidad del planeta es causada principalmente por la rotación del mismo, y esto genera una simetría azimutal (i.e., una simetría alrededor del eje de rotación) [41].

El potencial gravitacional en el exterior de una distribución de masa con este tipo de simetría puede escribirse

$$V(r_{1j}, \alpha) = \frac{Gm_1}{R} \sum_{n=0}^{\infty} J_n \left(\frac{R}{r_{1j}} \right)^{n+1} P_n(\sin \alpha) \quad , \quad (2.3)$$

donde $G = 6.67384 \times 10^{-11} \text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}$ es la constante de gravitación universal [40]; $r_{1j} = |\vec{r}_1 - \vec{r}_j|$; $P_n(\sin \alpha)$ es el n -ésimo polinomio de Legendre evaluado en $\sin \alpha$; y el n -ésimo armónico zonal J_n se define como

$$J_n = -\frac{2\pi R^2}{M} \int_0^{\infty} dr \int_{-\pi}^{\pi} d\alpha \cdot \rho(r, \alpha) P_n(\sin \alpha) \cos \alpha \quad (2.4)$$

(la función $\rho(r, \alpha)$ representa la distribución de densidad del planeta). La expresión 2.3 se conoce como la *expansión multipolar* del potencial gravitacional para distribuciones de masa con simetría azimutal [16]. En particular, a primer orden en la elipticidad ψ , el potencial 2.3 se reduce a

$$V(r_{1j}, \alpha) = -\frac{Gm_1}{r_{1j}} + J_2 \frac{Gm_1 R^2}{r_{1j}^3} P_2(\sin \alpha) + O(\psi^2) \quad , \quad (2.5)$$

donde $J_2 \sim O(\psi)$. Interpretamos el término asociado al armónico zonal J_2 como el momento cuadrupolar de la distribución de masa del planeta.

Por lo tanto, para el potencial de atracción gravitacional del planeta escribimos:

$$V_1(r_{j1}, \alpha) = -\frac{Gm_1}{r_{j1}} \left[1 - \frac{J_2}{r_{j1}^2} P_2(\sin \alpha) \right] \quad , \quad (2.6)$$

donde, para Urano, el segundo armónico zonal tiene un valor $J_2 \equiv 3510.7 \times 10^{-6}$ [27].

Dado que la inclinación de las órbitas de Cordelia, Ofelia, Ariel [35, 25] y el anillo ϵ [48, 17], tienen un valor medio de décimas de grado respecto del plano ecuatorial de Urano, hacemos una aproximación a las ecuaciones de movimiento del PR($N+1$)BP restringiendo el movimiento a este plano.

En particular, sobre el plano ecuatorial tenemos $\alpha = 0$, y por lo tanto para sistemas planetarios con inclinación pequeña respecto al ecuador, podemos hacer la aproximación ($j = 2, \dots, N+1$):

$$V_1(r_{j1}) = V_1(r_{j1}, \alpha = 0) = -\frac{Gm_1}{r_{j1}} \left[1 + \frac{J_2}{2r_{j1}^2} \right] \quad . \quad (2.7)$$

Nótese que este potencial sólo depende de la coordenada radial y por lo tanto es central. Por otro lado, para $i = 2, \dots, N$ y $j \neq i$ tenemos

$$V_i(r_{ji}) = -\frac{Gm_i}{r_{ji}} \quad , \quad (2.8)$$

i.e., el potencial gravitacional newtoniano. Definimos ahora el símbolo Λ_{ji} de acuerdo con la siguiente regla:

$$\Lambda_{ji} \equiv \begin{cases} \frac{3}{2}J_2, & \text{si } i = 1 \text{ o } j = 1 \\ 0, & \text{si } i \neq 1 \text{ y } j \neq 1 \end{cases} \quad . \quad (2.9)$$

Usando esta notación, para $i = 1, \dots, N$ tenemos

$$V_i(r_{ji}) = -\frac{Gm_i}{r_{ji}} \left[1 + \frac{\Lambda_{ji}}{3r_{ji}^2} \right] \quad . \quad (2.10)$$

El hamiltoniano de la partícula del anillo en este modelo es, por lo tanto,

$$H_{\text{PR}(N+1)\text{BP}} = \frac{1}{2} \dot{p}_{N+1}^2 - \sum_{i=1}^N \frac{Gm_i}{r_{i(N+1)}} \left[1 + \frac{\Lambda_{i(N+1)}}{3r_{i(N+1)}^2} \right] \quad . \quad (2.11)$$

De aquí se sigue que las ecuaciones de movimiento del PR($N + 1$)BP, incluyendo los efectos del achatamiento polar planetario, son

$$\ddot{\vec{r}}_{N+1} = \sum_{i=1}^N Gm_i \left[\frac{\vec{r}_{i(N+1)}}{r_{i(N+1)}^3} + \Lambda_{i(N+1)} \frac{\vec{r}_{i(N+1)}}{r_{i(N+1)}^5} \right] , \quad (2.12)$$

donde $\vec{r}_i = \vec{r}_i(t)$ son las soluciones asociadas al hamiltoniano del problema de N cuerpos en el plano (PNBP, por sus siglas en inglés: *Planar N Body Problem*):

$$H_{\text{PNBP}} = \sum_{j=1}^N \left[\frac{\vec{p}_j^2}{2m_j} - \sum_{i=1, i < j}^N \frac{Gm_i m_j}{r_{ij}} \left(1 + \frac{\Lambda_{ij}}{3r_{ij}^2} \right) \right] . \quad (2.13)$$

Las ecuaciones de movimiento del hamiltoniano (2.13) están dadas por

$$\ddot{\vec{r}}_j = \sum_{i=1, i \neq j}^N Gm_i \left[\frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}^3} + \Lambda_{ij} \frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}^5} \right] \quad (2.14)$$

para $j = 1, \dots, N$.

Nótese que, en principio, para obtener una solución al PR($N + 1$)BP (ec. 2.12), primero debe especificarse una solución particular del PNBP asociado (ec. 2.14). Sin embargo, es posible obtener una formulación simultánea de las ecuaciones de movimiento, y por lo tanto, una solución simultánea de estos problemas. Esta formulación simultánea simplifica la implementación de la integración numérica del PR($N + 1$)BP.

En efecto, si en las ecuaciones de movimiento 2.14 sustituimos formalmente $N \rightarrow N + 1$ y hacemos $m_{N+1} = 0$, obtenemos, para $j = 1, \dots, N + 1$:

$$\ddot{\vec{r}}_j(t) = \sum_{i=1, i \neq j}^N Gm_i \left[\frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}^3} + \Lambda_{ij} \frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}^5} \right] \quad (j = 1, \dots, N + 1), \quad (2.15)$$

obteniendo así en 2.15 una formulación simultánea de las ecuaciones de movimiento 2.14 y 2.12 correspondientes al PNBP y al PR($N + 1$)BP, respectivamente.

El problema en particular que se trata en este proyecto es el problema restringido de 5 cuerpos en el plano (PR(4 + 1)BP, por sus siglas en inglés: *Planar, Restricted, N + 1 Body Problem*) formado

por Urano, las lunas Cordelia, Ofelia y Ariel, y una partícula de prueba, sobre el plano ecuatorial de Urano.

2.1. Problema de Kepler: órbitas elípticas

En esta sección se introduce el problema de Kepler, así como el concepto de órbitas elípticas y la correspondiente notación de los elementos orbitales de tales trayectorias.

Considérese el P2BP, es decir, el problema correspondiente a un planeta con masa m_1 y un satélite con masa m_2 (i.e., $m_1 > m_2$). En esta sección ignoramos el achatamiento polar: $J_2 = 0$. En las ecuaciones (2.14), fíjese, por tanto, $N = 2$ y $\Lambda_{ij} = 0$, $\forall i, j$.

Las ecuaciones de movimiento resultantes son

$$\ddot{\vec{r}}_1 = \frac{Gm_2\vec{r}_{21}}{r_{21}^3} \quad , \quad (2.16)$$

$$\ddot{\vec{r}}_2 = \frac{Gm_1\vec{r}_{12}}{r_{12}^3} \quad . \quad (2.17)$$

Sin pérdida de generalidad (el movimiento del centro de masa no es de interés en este caso), podemos fijar $m_1\vec{r}_1(t) + m_2\vec{r}_2(t) = 0$ (i.e., fijamos el centro de masas en el origen y en reposo).

Definimos ahora el vector de la posición relativa de la partícula 2 (el satélite) respecto de la partícula 1 (el planeta) mediante $\vec{r} \equiv \vec{r}_2 - \vec{r}_1$. Restando (2.16) de (2.17) obtenemos la ecuación de movimiento del problema de Kepler [8, 41]:

$$\ddot{\vec{r}} = -\mu \frac{\vec{r}}{r^3} \quad , \quad (2.18)$$

donde $\mu = G(m_1 + m_2)$.

Tomando el producto cruz de \vec{r} con la ecuación (2.18) obtenemos una integral de movimiento, $\vec{h} = \vec{r} \times \dot{\vec{r}}$, la cual puede interpretarse como el momento angular por unidad de masa de la partícula 2 cuando $m_2 \ll m_1$ [41]. Denotamos la magnitud del vector \vec{h} mediante $h \equiv |\vec{h}|$. En particular, la existencia de esta última integral implica que los vectores de posición y velocidad siempre yacen en un plano perpendicular a \vec{h} , llamado plano orbital.

Sobre el plano orbital denotamos las coordenadas polares –distancia radial y longitud verdadera– por r y ϕ , respectivamente (véase figura

2.3). El ángulo ϕ se mide respecto de una línea arbitraria de referencia. En términos de estas coordenadas, la posición y la velocidad relativas están dadas, respectivamente, por

$$\vec{r} = r\hat{e}_r \quad , \quad y \quad (2.19)$$

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\phi}\hat{e}_\phi \quad . \quad (2.20)$$

Sustituyendo las ecuaciones (2.19) y (2.20) en la expresión $\vec{h} = \vec{r} \times \dot{\vec{r}}$,

$$h \equiv |\vec{h}| = r^2\dot{\phi} = \text{const} \quad . \quad (2.21)$$

Al expresar la ecuación de movimiento (2.18) en coordenadas polares se obtiene la ecuación del movimiento radial,

$$\ddot{r} - \frac{h^2}{r^3} = -\frac{\mu}{r^2} \quad . \quad (2.22)$$

Multiplicando la ecuación (2.22) por \dot{r} , e integrando respecto al tiempo t obtenemos la integral de la energía del problema de Kepler:

$$E = \frac{1}{2}\dot{r}^2 + \frac{h^2}{2r^2} - \frac{\mu}{r} = \text{const} \quad . \quad (2.23)$$

La solución general de este problema, para $E < 0$, es [8, 41]

$$r(f) = \frac{h^2/\mu}{1 + e \cos(f)} \quad , \quad (2.24)$$

donde $f \equiv \phi - \varpi$ se denomina la anomalía verdadera y representa la distancia angular de la posición orbital desde el punto de distancia mínima entre el planeta y la luna (este punto de distancia mínima se denomina periapse). Así mismo, $e \in [0, 1)$ y $\varpi \in [0, 2\pi)$ son constantes de integración de la ecuación diferencial (2.22) determinadas por las condiciones iniciales. La solución (2.24) representa una órbita elíptica, y se denomina *elipse kepleriana*. Nótese que el planeta (partícula m_1) se encuentra en uno de los focos de esta elipse (primera ley de Kepler). En la figura 2.3 se muestra una gráfica de una elipse kepleriana sobre el plano orbital.

Los puntos orbitales de mínima y máxima distancia entre el satélite m_2 y el planeta m_1 se llaman periapse y apoapse, respectivamente; la línea formada por estos dos puntos se llama línea de

ápsides. En particular, las distancias mínima y máxima entre m_1 y m_2 están dadas, respectivamente, por:

$$r_{\text{mín}} = r(\phi = \varpi) = \frac{h^2/\mu}{1+e} \quad , \quad y \quad (2.25)$$

$$r_{\text{máx}} = r(\phi = \varpi + \pi) = \frac{h^2/\mu}{1-e} \quad . \quad (2.26)$$

La interpretación geométrica de la constante e es la excentricidad de la elipse; mientras que ϖ corresponde a la longitud de periapse. Nótese que en general la línea de ápsides no coincide con la línea de referencia de la longitud verdadera; es decir, la línea de ápsides se encuentra sobre la referencia $\phi = 0$ sólo si $\varpi = 0$.

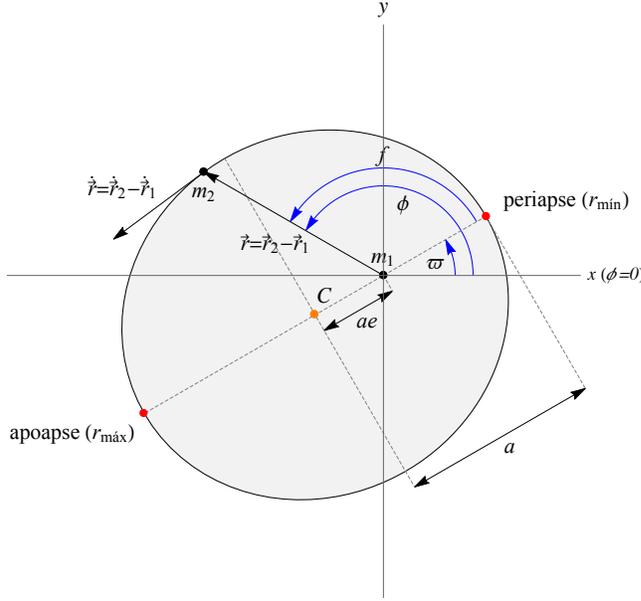


Figura 2.3: Elipse kepleriana sobre el plano orbital. El origen del sistema de coordenadas relativas se encuentra sobre el planeta, m_1 (en este punto, el vector de posición relativa, $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$, se anula). El punto C denota el centro geométrico de la elipse. Los puntos de distancia relativa mínima y máxima se conocen como periapse y apoapse, respectivamente; la línea formada por estos dos puntos se conoce como línea de ápsides. La longitud verdadera ϕ corresponde al ángulo azimutal del vector de posición relativa, \vec{r} , respecto de una línea de referencia (eje x positivo). El semieje mayor, a , corresponde a la mitad de la distancia entre las ápsides de la elipse. La excentricidad, e , corresponde a la distancia del centro de la elipse a la posición del planeta, medida en unidades del semieje mayor. La longitud de pericentro, ϖ , corresponde al ángulo formado por la línea de referencia (eje x positivo) y la línea de ápsides.

Por otro lado, en términos de las integrales de movimiento E y h , la excentricidad está dada por

$$e = \left(1 + \frac{2h^2 E}{\mu^2} \right)^{1/2} ; \quad (2.27)$$

mientras que el semieje mayor de la elipse (2.24) está dado por

$$a = \frac{r_{\text{máx}} + r_{\text{mín}}}{2} = \frac{h^2}{\mu(1 - e^2)} . \quad (2.28)$$

En términos del semieje mayor, a , y del factor $\mu = G(m_1 + m_2)$ la energía es

$$E = -\frac{\mu}{2a} . \quad (2.29)$$

Dada una condición inicial para el problema de Kepler y un instante arbitrario t , la posición y velocidad en una de estas elipses keplerianas sobre el plano está determinada por cuatro parámetros: el semieje mayor, a (también llamado radio mayor [16]); la excentricidad, e ; la longitud de periapse, ϖ ; y la longitud verdadera inicial $\phi_0 \equiv \phi(t = 0)$. Estas constantes se conocen como los *elementos orbitales* de la elipse kepleriana en el plano [41]. En términos de estos elementos orbitales, el movimiento orbital radial (ecuación 2.24) puede describirse como

$$r(\phi) = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos(\phi - \varpi)} . \quad (2.30)$$

Geoméricamente, el semieje mayor a y la excentricidad e fijan la forma de la elipse kepleriana; mientras que los ángulos ϖ y ϕ_0 pueden considerarse como los parámetros que determinan, respectivamente, la orientación de la elipse y la posición inicial de la órbita en el plano respecto a un marco de referencia inercial con el origen en el foco de la órbita elíptica.

Obtenemos ahora una expresión para los componentes de las velocidades cartesianas como función de ϕ y ϖ . Elegimos un sistema de coordenadas cartesianas con el eje x orientado sobre la línea $\phi = 0$. Es decir, elegimos la parametrización

$$x = r(\phi) \cos \phi \quad , \quad (2.31)$$

$$y = r(\phi) \sin \phi \quad . \quad (2.32)$$

Con esta elección, el apoapse y el periapse (i.e., la línea de ápsides) no necesariamente se encontrarán sobre el eje x . Con esta convención, las componentes cartesianas, \dot{x} y \dot{y} , de una elipse kepleriana dextrógira en términos de la parametrización dada por 2.31 y 2.32 son

$$\dot{x} = -\frac{na}{\sqrt{1-e^2}}(\sin \phi + e \sin \varpi) \quad , \quad (2.33)$$

$$\dot{y} = +\frac{na}{\sqrt{1-e^2}}(\cos \phi + e \cos \varpi) \quad . \quad (2.34)$$

El parámetro $n \equiv 2\pi/T$ corresponde a la velocidad angular orbital promedio, y se denomina movimiento medio (T es el periodo orbital). El movimiento medio se relaciona con el semieje mayor a mediante la tercera ley de Kepler:

$$n^2 a^3 = \mu \quad . \quad (2.35)$$

Para un tratamiento completo acerca del problema de Kepler véase [41, 16, 8].

2.1.1. Elipses keplerianas perturbadas: planetas oblatos

En la sección anterior se observó que en el problema de Kepler los elementos orbitales a , e , ϖ y ϕ_0 son constantes que se determinan unívocamente a partir de la posición y velocidad del vector de movimiento relativo [41]. Ahora, si una fuerza adicional perturba el sistema, cualquier conjunto de vectores instantáneos de posición y velocidad definen un conjunto de elementos orbitales en ese instante. Es decir, en general, en el problema de Kepler perturbado, la órbita que sigue el vector de movimiento relativo puede modelarse como una elipse kepleriana, cuyos elementos orbitales no son constantes, sino que varían continuamente con el tiempo. Esta clase de órbitas se conocen como *elipses keplerianas perturbadas*. Este método se conoce como variación de parámetros y fue introducido por Joseph Louis Lagrange en la segunda edición de su obra, *Mécanique Analytique*, publicada en 1811, para el estudio de diversos problemas de mecánica celeste [31].

En términos de la teoría de sistemas hamiltonianos, los cuatro parámetros a , e , ϖ , ϕ_0 forman, de hecho, un sistema completo de constantes de movimiento del problema de Kepler en el plano (co-

rrespondientes a dos grados de libertad y consecuentemente un espacio fase de cuatro dimensiones), y si bien no son variables canónicamente conjugadas, se relacionan biunívocamente con variables canónicas (e.g., variables de Delaunay) del mismo problema [41, 38]. Por lo tanto, al estudiar la variación de estos elementos orbitales, podemos conocer la estructura del espacio fase.

En [8] puede encontrarse información más detallada acerca de la teoría de Hamilton-Jacobi, así como el cálculo explícito de las variables de ángulo-acción en el problema de Kepler.

En particular, el efecto causado por el achatamiento polar del planeta corresponde a una perturbación del problema de Kepler. Si en la ecuación del movimiento relativo 2.18 se incluye en el potencial gravitacional la corrección asociada al término J_2 (ecuación 2.7) se tiene

$$\ddot{\vec{r}} = -\mu \frac{\vec{r}}{r^3} \left(1 + \frac{3}{2} J_2 \frac{R^2}{r^2} \right) . \quad (2.36)$$

Si n denota el movimiento medio (i.e., el valor promedio de la velocidad angular $\dot{\phi}$) y κ denota la frecuencia epicíclica (i.e., la frecuencia radial), entonces incluyendo correcciones hasta primer orden en la excentricidad puede demostrarse que [41]

$$r(t) = a(1 + e \cos(\kappa t)) + O(e^2) \quad y \quad (2.37)$$

$$\phi(t) = nt - 2 \left(\frac{n}{\kappa} \right) e \sin(\kappa t) + O(e^2) \quad (2.38)$$

donde, hasta segundo orden en R/a inclusive,

$$n^2 = \frac{\mu}{a^3} \left[1 + \frac{3}{2} J_2 \left(\frac{R}{a} \right)^2 + O \left(e^2, \left(\frac{R}{a} \right)^4 \right) \right] , y \quad (2.39)$$

$$\kappa^2 = \frac{\mu}{a^3} \left[1 - \frac{3}{2} J_2 \left(\frac{R}{a} \right)^2 + O \left(e^2, \left(\frac{R}{a} \right)^4 \right) \right] . \quad (2.40)$$

A partir de estas ecuaciones, notamos que en general el movimiento medio es distinto de la frecuencia epicíclica; o bien, $n \neq \kappa$. Es decir, la perturbación causada por el achatamiento del planeta en general rompe la degeneración de la frecuencia radial y azimutal, dando lugar al fenómeno conocido como *precesión de periapse* o *precesión de línea de ápsides*. La velocidad de precesión de la línea de ápsides $\dot{\varpi}$ está dada por $\dot{\varpi} = n - \kappa$ [41, 27].

A continuación, se describe un método para el cálculo de los elementos orbitales en el contexto de la aproximación descrita en los párrafos anteriores. A partir de las ecuaciones del párrafo anterior, puede escribirse una expresión aproximada para la energía en términos del semieje mayor, correcta hasta primer orden en la excentricidad y hasta segundo orden en el cociente R/a . En términos de las coordenadas r y ϕ , la energía del problema de Kepler modificado por el término asociado al armónico zonal J_2 es

$$E = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) - \frac{\mu}{r} \left[1 + \frac{1}{2}J_2 \left(\frac{R^2}{r^2} \right) \right] \quad , \quad (2.41)$$

y por otro lado, usando las ecuaciones 2.37 y 2.38 hasta primer orden en la excentricidad se tiene

$$\dot{r}^2 = a^2 e^2 \sin^2(\kappa t) = O(e^2) \quad (2.42)$$

$$r^2 = a^2(1 + 2e \cos(\kappa t)) + O(e^2) \quad (2.43)$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{a}(1 - e \cos(\kappa t)) + O(e^2) \quad (2.44)$$

$$\frac{1}{r^3} = \frac{1}{a^3}(1 - 3e \cos(\kappa t)) + O(e^2) \quad (2.45)$$

$$\dot{\phi}^2 = n^2 - 4n^2 e \cos(\kappa t) + O(e^2) \quad . \quad (2.46)$$

Sustituyendo 2.39 y 2.42 hasta 2.46, en la ecuación 2.41 obtenemos

$$E = -\frac{\mu}{2a} \left[1 - \frac{1}{2}J_2 \left(\frac{R}{a} \right)^2 \right] + O \left(e^2, \left(\frac{R}{a} \right)^4 \right) \quad , \quad (2.47)$$

y notamos que, dentro de esta aproximación, la energía no depende de la excentricidad, además de que en el límite $J_2 \rightarrow 0$ recuperamos la fórmula conocida para el problema de Kepler: $E = -G/2a$ (véase ecuación 2.29). La generalización de la ecuación 2.27 para planetas oblatos (i.e., incluyendo la corrección asociada a J_2) es

$$e = \left(1 - \frac{h^2}{\mu a} \left(1 - \frac{1}{2}J_2 \frac{R^2}{a^2} \right) \right)^{1/2} + O \left(\left(\frac{R}{a} \right)^4 \right) \quad . \quad (2.48)$$

Combinando las ecuaciones 2.41 y 2.29 puede demostrarse que la magnitud de la velocidad orbital está dada por

$$v^2 = |\dot{\vec{r}}|^2 = \mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} + J_2 R^2 \left(\frac{1}{r^3} + \frac{1}{2a^3} \right) \right) + O \left(e^2, \left(\frac{R}{a} \right)^4 \right) \quad . \quad (2.49)$$

Por lo tanto, una manera de calcular los elementos orbitales (semieje mayor y excentricidad) asociados a una órbita con energía E es la siguiente: dado algún instante t en el que se cuente con los valores numéricos de las posiciones y velocidades de la partícula de prueba, calcular el valor numérico del semieje mayor a mediante la ecuación 2.49 (nótese que para resolver esta ecuación se debe encontrar la raíz de un polinomio de tercer grado en a); y después de obtener el valor de a usar la ecuación 2.48 para calcular la excentricidad.

Capítulo 3

Método de Taylor: PNBP y PR($N + 1$)BP

El método de integración numérica de ecuaciones diferenciales que se utiliza en este trabajo es el método de Taylor, a través de una implementación desarrollada para simular el PR($N + 1$)BP (i.e., sobre el plano ecuatorial del planeta). Tal como lo indica su nombre, el método de Taylor se basa en calcular las sumas parciales de la serie de Taylor de las ecuaciones diferenciales del sistema que se desea resolver.

Un programa computacional que implementa el método de Taylor para integración numérica de ecuaciones diferenciales ordinarias se conoce como integrador de Taylor.

Un problema con valor inicial queda definido por la búsqueda de la función paramétrica $x : t \rightarrow \mathbb{R}^N$, con $N \in \mathbb{N}$, que sea solución de una ecuación diferencial ordinaria $\dot{x} = f(x, t)$ sobre el intervalo de tiempo $[0, T] \subset \mathbb{R}$, donde $f : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$ es una función suave en el sentido $f \in C^\infty$ (C^∞ representa el conjunto de las funciones infinitamente diferenciables definidas sobre el dominio de f), junto con una condición inicial $x_0 \equiv x(0) \in \mathbb{R}^N$ (T es el tiempo total de integración).

La implementación del integrador de Taylor para problemas con valor inicial de este tipo se realiza de la siguiente manera: a partir del estado inicial, $x(t_0)$, del sistema en el instante inicial t_0 , y dada una ley de evolución temporal (e.g., $\dot{x} = f(x, t)$) se calculan, los coeficientes de la serie de Taylor de f en el instante t , y posteriormente se calculan las sumas parciales de la serie de Taylor de estos

coeficientes hasta un orden n y con un paso de tiempo Δt , para así obtener el estado $x(t + \Delta t)$ del sistema en el instante $t_1 = \Delta t$. Este proceso se itera M veces hasta el instante $t_M = T$, generando en cada paso un estado $x_m = x(t_m)$, $m = 0, 1, \dots, M$, y definiendo así una sucesión de estados $\{x_m\}_{m=0}^M$. Esta sucesión de estados sobre el intervalo $[0, M]$ es una aproximación a la solución del problema con valor inicial definido en el párrafo anterior.

Dados dos pasos de tiempo consecutivos, t_m y t_{m+1} ($m \in \mathbb{N}$), el error relativo $\delta_R x$ y el error absoluto $\delta_A x$ en el cálculo del vector x en el paso de tiempo t_{m+1} , se definen, respectivamente, como

$$\delta_R x \equiv \frac{|x(t_{m+1}) - x(t_m)|}{|x(t_m)|} \quad . \quad (3.1)$$

$$\delta_A x \equiv |x(t_{m+1}) - x(t_m)| = |x(t_m)| \cdot \delta_R x \quad (3.2)$$

El teorema de Taylor [47] y el teorema de aproximación de Weierstrass [28], aseguran la existencia de un orden n y un paso de tiempo Δt , tales que el error absoluto y el error relativo en pasos consecutivos de integración sean arbitrariamente pequeños.

A continuación se describe la implementación del método de Taylor para el problema de N cuerpos en el plano (PNBP), tomando en cuenta la primera corrección en el potencial de atracción gravitacional del planeta debida al achatamiento polar del mismo.

Para el problema de N cuerpos, el método de Taylor consiste en calcular, dadas las posiciones $\vec{r}_j(t)$ y las velocidades $\dot{\vec{r}}_j(t)$ ($j = 1, \dots, N$) de los elementos del sistema planetario, la serie de Taylor de cada una de estas las trayectorias al tiempo t :

$$\vec{r}_j(t + \Delta t) = \sum_{k=0}^{\infty} \vec{r}_j^{[k]}(t) (\Delta t)^k \quad , \quad (3.3)$$

donde

$$\vec{r}_j^{[k]}(t) \equiv \frac{1}{k!} \frac{d^k}{dt^k} \vec{r}_j(t) \quad (3.4)$$

es la k -ésima derivada normalizada de \vec{r}_j , evaluada al tiempo t . También calculamos la serie de Taylor de los momentos $\vec{p}_j(t)$. En efecto, derivando la ec. (3.3), tenemos

$$\vec{p}_j(t + \Delta t) = \vec{p}_j(t) + m_j \sum_{k=1}^{\infty} (k+1) \vec{r}_j^{[k+1]}(t) (\Delta t)^k \quad . \quad (3.5)$$

En la práctica se calcula la serie de Taylor sumando los coeficientes $\vec{r}_j^{[k]}(t)$ ($k = 0, 1, 2, \dots$), multiplicados por $(\Delta t)^k$, hasta algún orden finito n mediante las ecuaciones 3.3 y 3.5. Para esto, a su vez es suficiente obtener una relación recursiva entre las derivadas normalizadas al tiempo t a partir de las ecuaciones de movimiento de este problema.

Para obtener estas relaciones, se considera el hamiltoniano del PNBP dado por

$$H_{\text{PNBP}} = \sum_{j=1}^N \left[\frac{\vec{p}_j^2}{2m_j} - \sum_{i=1, i < j}^N \frac{Gm_i m_j}{r_{ij}} \left(1 + \frac{\Lambda_{ij}}{3r_{ij}^2} \right) \right] \quad , \quad (3.6)$$

donde $\vec{r}_{ij} \equiv \vec{r}_i - \vec{r}_j$ y el símbolo Λ_{ij} se define mediante

$$\Lambda_{ji} \equiv \begin{cases} \frac{3}{2} J_2, & \text{si } i = 1 \text{ o } j = 1 \\ 0, & \text{si } i \neq 1 \text{ y } j \neq 1 \end{cases} \quad . \quad (3.7)$$

Usando las ecuaciones de Hamilton para $j = 1, 2, \dots, N$ obtenemos

$$\dot{\vec{r}}_j = \frac{\vec{p}_j}{m_j} \quad , \text{ y} \quad (3.8)$$

$$\dot{\vec{p}}_j = \sum_{i=1, i \neq j}^N \frac{Gm_i m_j}{r_{ij}^3} \left(1 + \frac{\Lambda_{ij}}{r_{ij}^2} \right) \vec{r}_{ij} \quad . \quad (3.9)$$

Sustituyendo 3.8 en 3.9 obtenemos las ecuaciones de movimiento del PNBP:

$$\ddot{\vec{r}}_j = \sum_{i=1, i \neq j}^N Gm_i \left[\frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}^3} + \Lambda_{ij} \frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}^5} \right] \quad , \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (3.10)$$

Introducimos ahora nueva notación. Para cada par i, j definimos

$$\vec{F}_{2\alpha, ij}(t) = \frac{\vec{r}_{ij}(t)}{[r_{ij}(t)]^{2\alpha}} \quad , \quad (3.11)$$

con $\alpha \in \{\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \dots\}$. Con esta notación, reescribimos la ec. 3.10:

$$\ddot{\vec{r}}_j(t) = \sum_{i=1, i \neq j}^N Gm_i \left[\vec{F}_{3, ij}(t) + \Lambda_{ij} \vec{F}_{5, ij}(t) \right] \quad . \quad (3.12)$$

La k -ésima derivada normalizada de $\vec{r}_j^{[k]}(t)$ es, por tanto,

$$\begin{aligned} \vec{r}_j^{[k]}(t) &= \frac{1}{k!} \frac{d^{k-2}}{dt^{k-2}} \ddot{\vec{r}}_j \\ &= \frac{1}{k(k-1)} \sum_{i=1, i \neq j}^N Gm_i \left[\vec{F}_{3,ij}^{[k-2]}(t) + \Lambda_{ij} \vec{F}_{5,ij}^{[k-2]}(t) \right] \quad . \quad (3.13) \end{aligned}$$

Reducimos así el cálculo de $\vec{r}_j^{[k]}(t)$ al cálculo de $\vec{F}_{3,ij}^{[k-2]}(t)$ y $\vec{F}_{5,ij}^{[k-2]}(t)$. Sean ahora $A_{ij}(t)$ y $C_{ij}(t)$ definidas por

$$A_{ij}(t) \equiv [x_{ij}(t)]^2 + [y_{ij}(t)]^2 = [r_{ij}(t)]^2 \quad , \quad (3.14)$$

y

$$C_{2\alpha,ij}(t) \equiv [A_{ij}(t)]^\alpha = [r_{ij}(t)]^{2\alpha} \quad . \quad (3.15)$$

Usando las reglas de la derivación (regla de Leibnitz para el producto, etc.) puede demostrarse para $n = 1, 2, \dots$, que

$$A_{ij}^{[n]}(t) = \sum_{k=0}^n \left[x_{ij}^{[n-k]}(t) x_{ij}^{[k]}(t) + y_{ij}^{[n-k]}(t) y_{ij}^{[k]}(t) \right] \quad (3.16)$$

y

$$C_{2\alpha,ij}^{[n]}(t) = \frac{1}{n A_{ij}^{[0]}(t)} \sum_{k=0}^{n-1} (n\alpha - k(\alpha + 1)) A_{ij}^{[n-k]}(t) C_{2\alpha,ij}^{[k]}(t) \quad . \quad (3.17)$$

Utilizando estos resultados se sigue que

$$\begin{aligned} \vec{F}_{3,ij}^{[n]}(t) &= \frac{d^{[n]} \vec{r}_{ij}}{dt^{[n]} C_{3,ij}(t)} \\ &= \frac{1}{[r_{ij}(t)]^3} \left[\vec{r}_{ij}^{[n]}(t) - \sum_{k=1}^n \left(C_{3,ij}^{[k]}(t) \right) \left(\vec{F}_{3,ij}^{[n-k]}(t) \right) \right] \quad . \quad (3.18) \end{aligned}$$

Finalmente, para la n -ésima derivada normalizada de $\vec{F}_{5,ij}(t)$ tenemos

$$\begin{aligned} \vec{F}_{5,ij}^{[n]}(t) &= \frac{d^{[n]} \vec{r}_{ij}(t)}{dt^{[n]} [r_{ij}]^5} = \frac{d^{[n]}}{dt^{[n]}} \left(C_{-2,ij}(t) \vec{F}_{3,ij}(t) \right) \\ &= \sum_{k=0}^n C_{-2,ij}^{[k]}(t) \vec{F}_{3,ij}^{[n-k]}(t) \quad . \quad (3.19) \end{aligned}$$

Con estas fórmulas es posible ahora describir el algoritmo de integración numérica del PNBP. Dadas las masas, las posiciones y los momentos de los N cuerpos al tiempo t , así como n , el orden de desarrollo de la serie de Taylor, y Δt , el paso de tiempo, realizamos las siguientes operaciones:

1. Calcular la matriz de derivadas normalizadas de las coordenadas relativas a orden cero (i.e., matriz de posiciones relativas):
 $\vec{r}_{ij}^{[0]}(t) = \vec{r}_i(t) - \vec{r}_j(t)$, para $i, j = 1, 2, \dots, N$, $i \neq j$.
2. Calcular la matriz de derivadas normalizadas de las coordenadas relativas a orden uno (i.e., matriz de velocidades relativas):
 $\vec{r}_{ij}^{[1]}(t) = \dot{\vec{r}}_{ij} = \vec{p}_i(t)/m_i - \vec{p}_j(t)/m_j$, para $i, j = 1, 2, \dots, N$, $i \neq j$.
3. Para $k = 2, 3, \dots, n$:
 - a) Calcular $A_{ij}^{[k-2]}(t)$, para $i, j = 1, 2, \dots, N$, $i \neq j$, usando la primera ecuación de (3.17).
 - b) Calcular $C_{3,ij}^{[k-2]}(t)$, para $i, j = 1, 2, \dots, N$, $i \neq j$, usando la segunda ecuación de (3.17) con $\alpha = 3/2$.
 - c) Calcular $C_{-2,ij}^{[k-2]}(t)$, para $i, j = 1, 2, \dots, N$, $i \neq j$, usando la segunda ecuación de (3.17) con $\alpha = -1$.
 - d) Calcular $\vec{F}_{3,ij}^{[k-2]}(t)$ a partir de (3.18), para $i, j = 1, 2, \dots, N$, $i \neq j$.
 - e) Calcular $\vec{F}_{5,ij}^{[k-2]}(t)$ a partir de (3.19), para $i, j = 1, 2, \dots, N$, $i \neq j$.
 - f) Calcular $\vec{r}_j^{[k]}(t)$ de la ecuación (3.13), para $j = 1, 2, \dots, N$.
4. Calcular el desarrollo en serie de Taylor de $\vec{r}_j(t + \Delta t)$, hasta orden n , usando la fórmula (3.3).
5. Calcular el desarrollo en serie de Taylor de $\vec{p}_j(t + \Delta t)$, hasta orden n , usando la fórmula (3.5).

Este proceso se repite desde $t = 0$ hasta $t = T$, donde T es el tiempo total de integración. La convergencia de la serie con precisión ϵ se asegura con una elección adecuada de n y Δt ; es decir, se requiere un algoritmo de control del error que calcule la elección óptima de estos parámetros en cada paso de tiempo. El control del error se vuelve particularmente importante en eventos de colisión, en donde

hay fuerzas grandes que actúan en tiempos cortos. En este proyecto se implementó el algoritmo de control del error descrito en [29]; reproducimos aquí las fórmulas utilizadas. En efecto, si se denota por ε_a y ε_r la cota del error absoluto y relativo prescritos por el usuario, respectivamente, y para el l -ésimo paso de integración se define

$$\varepsilon_l = \begin{cases} \varepsilon_a & \text{si } \varepsilon_r \|\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_{N+1}\|_\infty \leq \varepsilon_a \\ \varepsilon_r & \text{si } \varepsilon_r \|\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_{N+1}\|_\infty > \varepsilon_a \end{cases}, \quad (3.20)$$

entonces el orden óptimo del polinomio de Taylor que minimiza el número de operaciones [29] en el l -ésimo paso de integración es

$$n_l = \left\lceil 1 - \frac{1}{2} \log(\varepsilon_l) \right\rceil, \quad (3.21)$$

donde $\|\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_{N+1}\|_\infty = \max(x_1, y_1, \dots, x_{N+1}, y_{N+1})$ denota la norma infinito y $\lceil \cdot \rceil$ denota la función techo. Por otra parte, si para el l -ésimo paso de integración se define ($1 \leq j \leq n_l$)

$$\rho_l^{(j)} = \begin{cases} \left(\frac{1}{\|\vec{r}_1^{[j]}, \dots, \vec{r}_{N+1}^{[j]}\|_\infty} \right)^{1/j} & \text{si } \varepsilon_r \|\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_{N+1}\|_\infty \leq \varepsilon_a \\ \left(\frac{\|\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_{N+1}\|_\infty}{\|\vec{r}_1^{[j]}, \dots, \vec{r}_{N+1}^{[j]}\|_\infty} \right)^{1/j} & \text{si } \varepsilon_r \|\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_{N+1}\|_\infty > \varepsilon_a \end{cases}, \quad (3.22)$$

entonces para el m -ésimo paso de tiempo se escoge

$$(\Delta t)_l = \frac{\rho_l}{\exp(2)}, \quad (3.23)$$

donde

$$\rho_l = \min\{\rho_l^{(p_l-1)}, \rho_l^{(p_l)}\}. \quad (3.24)$$

Esta selección para n_l y $(\Delta t)_l$ asegura por un lado la optimización del número de operaciones necesarias para calcular las sumas parciales de las series de Taylor involucradas en el problema, y por otro lado asegura que el error en el cálculo numérico de estas series se encuentre dentro de la precisión prescrita por el usuario mediante ε_a y ε_r . En particular, n_l y $(\Delta t)_l$ pueden escogerse de manera que el error se encuentre dentro de la precisión numérica de la computadora.

Finalmente, una vez que se ha implementado el método de Taylor para el PNBP, la implementación del mismo para el PR($N+1$)BP es inmediata. En efecto, utilizando las ecuaciones (2.15), utilizamos el algoritmo descrito en la sección anterior, con $N \rightarrow N+1$ y $m_{N+1} = 0$, siendo el $(N+1)$ -ésimo cuerpo la partícula de prueba.

Capítulo 4

Simulación numérica del P(4+1)BP

4.1. Integración numérica del problema restringido de 4+1 cuerpos en el plano

Para el desarrollo del presente trabajo, el autor creó un integrador de Taylor de alta precisión en el lenguaje de programación C++, basado en el trabajo de À. Jorba [29]. Esta implementación es capaz de integrar el PR(4 + 1)BP, incluyendo la corrección por achatamiento polar del planeta asociada al armónico zonal J_2 .

Mediante un criterio de convergencia, puede determinarse el orden de truncamiento de la serie de manera que en cada paso de tiempo se asegure que el error absoluto y el error relativo no excedan valores preestablecidos por el usuario. En particular, se buscan integraciones numéricas en las que en cada paso de integración el error numérico sea del orden de ε_M , el épsilon de la máquina. Para el estándar 754 de la IEEE (por sus siglas en inglés, *Institute of Electrical and Electronic Engineers*) para el formato binario de punto flotante de doble precisión, se tiene $\varepsilon_M = 2.220446049250313 \times 10^{-16} \approx 2^{-52}$ [9]. En la implementación realizada por el autor para el presente trabajo, este valor para ε_M se revisó usando la función `std::numeric_limits<double>::epsilon()`.

El orden máximo permitido para la suma parcial de la serie de Taylor (polinomio de Taylor) en la implementación realizada es $n_{\text{máx}} = 40$ (establecer este valor máximo permite una integración dentro de los errores numéricos permitidos en la mayor parte de la

misma, sin realizar expansiones innecesarias, por ejemplo, hasta orden $n = 1,000$), mientras que el valor máximo permitido para el error absoluto y relativo se fijó, respectivamente, en $\varepsilon_a = 10^{-16}$ y $\varepsilon_r = 10^{-16}$.

Una propiedad importante de los integradores de Taylor de alto orden es que son particularmente adecuados para cálculos que requieren alta precisión. Por ejemplo, si en un paso dado de una integración numérica se utiliza un paso de tiempo $h \ll 1$ y un orden p para obtener un error $\epsilon \ll 1$, entonces el número de operaciones que se necesita para calcular todos los coeficientes de la serie de Taylor hasta orden p es $O(p^2)$ [29]. Dado que el número de operaciones que se necesita para sumar la serie es solo $O(p)$, el número total de operaciones para un paso de integración del método de Taylor continúa siendo $O(p^2)$. Por lo tanto, si se desea incrementar la precisión hasta ε^l , con $l > 2$, puede incrementarse simplemente el orden del método de Taylor hasta lp , de manera que el número de operaciones se incremente por un factor l^2 . Por otro lado, si se desea alcanzar el mismo nivel de precisión reduciendo el paso de tiempo h en lugar de aumentar el orden del integrador, se debe utilizar un paso de tiempo h^l . Esto significa que se deben utilizar $1/h^{l-1}$ pasos, cada uno de tamaño h^l , para calcular la órbita hasta h unidades de tiempo, de manera que el número total de operaciones se incrementa en este caso por un factor de $1/h^{l-1}$, usualmente mucho mayor que l^2 [29].

En el presente capítulo se definen las unidades de masa, longitud y tiempo que se utilizaron para la implementación del integrador de Taylor y se presentan los valores de las masas y los parámetros orbitales de Urano, Cordelia, Ofelia y Ariel. Posteriormente, se especifican las condiciones iniciales de la integración, el criterio de escape del sistema, y un método de estimación de los elementos orbitales. Finalmente, se introducirá un índice de estabilidad, con el cual se realizará un análisis de frecuencias del PR(4 + 1)BP, para caracterizar la dinámica.

En el capítulo A se incluyen los detalles del cluster de 640 procesadores utilizado para realizar las simulaciones numéricas presentadas en este trabajo.

4.2. Selección de unidades de masa, longitud y tiempo

En el contexto de este proyecto, las unidades de masa se eligen de tal manera que la masa de Urano $m_{\text{Ur}} \equiv 1$, mientras las unidades de longitud son de tal forma que el radio ecuatorial de Urano $R_{\text{Ur}} = 25,362.0\text{km} \equiv 1$. Las unidades de tiempo, finalmente, son tales que el periodo orbital de Cordelia $T_{\text{Co}} \equiv 2\pi$. Finalmente, el coeficiente del armónico zonal de segundo orden de Urano tiene un valor $J_2 = 3510.7 \times 10^{-6}$ (adimensional) [27].

En las tablas 4.1, 4.2, 4.3, 4.4 y 4.5 se muestran los valores reportados para las masas, los semiejes mayores, las excentricidades, los periodos orbitales y las frecuencias angulares de precesión de periapse para el sistema formado por Urano, Ariel, Cordelia y Ofelia. Estos valores se expresan tanto en unidades convencionales (kilómetros, kilogramos, segundos, etc.), como en términos de las unidades utilizadas en la integración numérica del PR(4 + 1)BP.

Con esta selección de unidades la constante de gravitación universal adquiere el valor $G = 7.37047$, calculado a partir de la ecuación 2.39 sustituyendo $R = R_{\text{Ur}} \equiv 1$, así como los valores de n y a correspondientes a Cordelia: $n_{\text{Co}} \equiv 2\pi/T_{\text{Co}} = 1$, y $a_{\text{Co}} = 1.947$ (véase tablas 4.1, 4.2 y 4.4).

A partir de los datos en la tabla 4.5, notamos que el periapse de Cordelia completa un ciclo de precesión aproximadamente cada 715 periodos orbitales, mientras que el periapse de Ofelia completa un ciclo de precesión aproximadamente cada 940 periodos orbitales de Cordelia. Por su parte, el periapse de Ariel completa un ciclo de precesión cada 62,362 periodos orbitales de Cordelia.

Tabla 4.1: Primera columna: valores reportados por Jacobson, y Karkoschka et al. para las masas de Urano, Cordelia, Ofelia y Ariel (kilogramos) [26, 30]. Segunda columna: valores de la primera columna normalizados respecto de la masa de Urano.

Parámetro	Masa (kg)	Masa (m_{Ur})
m_{Ur}	8.68×10^{25}	1
m_{Co}	4.50×10^{16}	5.179×10^{-10}
m_{Of}	5.40×10^{16}	6.215×10^{-10}
m_{Ar}	13.5×10^{20}	1.559×10^{-5}

Tabla 4.2: Primera columna: valores reportados por Seidelmann et al. para el radio medio de Urano [44], así como los valores reportados por Jacobson y Laskar para los semiejes mayores de Cordelia, Ofelia y Ariel (kilómetros) [35, 25]. Segunda columna: valores normalizados respecto del radio ecuatorial de Urano.

Parámetro	km	R_{Ur}
R_{Ur}	$25,362 \times 10^3$	1
a_{Co}	49.77×10^3	1.947
a_{Of}	53.79×10^3	2.104
a_{Ar}	191.02×10^3	7.470

Tabla 4.3: Primera columna: Valores reportados por Jacobson y Laskar para las excentricidades de Cordelia, Ofelia y Ariel [35, 25, 27].

Parámetro	adimensional
e_{Co}	0.00026
e_{Of}	0.00992
e_{Ar}	0.00122

Tabla 4.4: Primera columna: Valores reportados por Jacobson y Laskar [25, 27, 35] para los periodos orbitales de Cordelia, Ofelia y Ariel, expresados en segundos. Segunda columna: Periodos orbitales de Cordelia, Ofelia y Ariel en términos del periodo orbital de Cordelia, T_{Co} .

Parámetro	horas	T_{Co}
T_{Co}	8.041	1
T_{Of}	9.034	1.123
T_{Ar}	60.480	7.522

Tabla 4.5: Primera columna: Valores reportados por Jacobson y Laskar [25, 35] para los periodos de precesión longitud de periapse, $T_{\varpi} = 2\pi/\dot{\varpi}$, de Cordelia, Ofelia y Ariel, expresados en grados por día. Segunda columna: Valores de la primera columna en términos del periodo orbital de Cordelia.

Parámetro	días	T_{Co}
$T_{\varpi,Co}$	239.546	714.973
$T_{\varpi,Of}$	314.41	938.42
$T_{\varpi,Ar}$	20,893.8	62,361.8

4.3. Condiciones iniciales

En el PR($N + 1$)BP, con $N > 1$, en general a y e dejan de conservarse para cada una de las partículas presentes en el sistema: la presencia de cuerpos adicionales en el potencial gravitacional del sistema induce una perturbación en la órbita kepleriana de la partícula de prueba, dando lugar a variaciones temporales en los elementos orbitales. Tal como se mencionó anteriormente, estas órbitas se conocen como *elipses keplerianas perturbadas*, en las que los elementos orbitales varían continuamente en el tiempo. Por lo tanto, una manera de estudiar la dinámica de estas órbitas es mediante una cuantificación de la variación de los elementos orbitales. En concreto, se estudian los elementos a y e de la partícula de prueba para un número de condiciones iniciales, suficiente para realizar una caracterización adecuada del espacio fase en la región de interés.

Dado que la implementación del método de Taylor del PR($4 + 1$)BP se realizó en términos de las coordenadas cartesianas de los vectores de posición y velocidad de cada una de las partículas presentes en el sistema (planeta, lunas y partícula de prueba), se requiere calcular las condiciones iniciales en términos de estas coordenadas. Fijamos el origen de este sistema inercial de coordenadas cartesianas en el centro de masas.

Como una primera aproximación al problema, en este proyecto tanto la longitud inicial de periapse, $\varpi(t = 0) = \varpi_0$, así como la longitud verdadera inicial ϕ_0 se varían aleatoriamente (distribución uniforme) en el rango $[-\pi, \pi)$ para cada condición inicial de la partícula de prueba; mientras que el semieje mayor a y la excentricidad e se restringirán al movimiento elíptico ($0 \leq e < 0.04$) en la región entre las lunas Cordelia y Ofelia, en la que se observan los anillos ϵ y λ de Urano. Para las lunas, los ángulos iniciales ϖ_0 y ϕ_0 se fijan en cero.

Introducimos ahora la siguiente notación. Sean $\Theta_a, \Theta_e, \Theta_\varpi, \Theta_\phi$ el conjunto de todos los valores que pueden tomar, respectivamente, las condiciones iniciales del PR($4 + 1$)BP en el semieje mayor a , la excentricidad e , la longitud de periapse ϖ y la longitud verdadera

ϕ . Entonces

$$\begin{aligned}\Theta_a &= [R_{Ur}, \infty) \quad , \\ \Theta_e &= [0, 1) \quad , \\ \Theta_\varpi &= \Theta_\phi = \mathbb{T} \quad ,\end{aligned}\tag{4.1}$$

donde $\mathbb{T} = \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$ denota el toro unidimensional y el intervalo $[0, R_{Ur})$ se excluye en Θ_a , debido a que físicamente este corresponde al interior de Urano. Consideramos el intervalo $[-\pi, \pi) \subset \mathbb{R}$ como un modelo para \mathbb{T} .

Denominamos ahora Θ al espacio fase del problema de Kepler (en variables de ángulo–acción) al espacio generado por el producto cartesiano de los conjuntos definidos en 4.1, i.e.

$$\Theta = \Theta_a \times \Theta_e \times \Theta_\varpi \times \Theta_\phi = [R_{Ur}, \infty) \times [0, 1) \times \mathbb{T}^2 \quad ,\tag{4.2}$$

y denotamos por $B(e_{\text{máx}})$ al subconjunto

$$B(e_{\text{máx}}) = [a_{Co}, a_{Of}] \times [0, e_{\text{máx}}) \times \Theta_\varpi \times \Theta_\phi \subset \Theta \quad .\tag{4.3}$$

Las condiciones iniciales para la partícula de prueba son, por lo tanto, puntos dentro del subconjunto $B(e_{\text{máx}})$ del espacio fase Θ para algún valor fijo de $e_{\text{máx}}$. Como se verá más adelante, existe un valor $e_{\text{máx}}$ para la excentricidad por encima del cual la mayoría de las órbitas son de escape. Elegimos $e_{\text{máx}} = 0.04$, ya que por arriba de este valor, las órbitas son de escape (en el sentido de que abandonan la región confinada por las lunas pastoras) para cualquier valor del semieje mayor en la región considerada. La evolución temporal de estas condiciones iniciales en el espacio de configuración corresponde a elipses keplerianas perturbadas con movimiento medio inicial n , corregido por el achatamiento polar del planeta Urano (véanse ecuaciones 2.33 a 2.32 y 2.39).

Las condiciones iniciales para las lunas se eligen nuevamente utilizando las ecuaciones 2.31–2.34, fijando los ángulos iniciales en $\varpi = 0$ y $\phi_0 = 0$, y utilizando los valores mostrados en las tablas 4.1, 4.2 y 4.3 para los elementos orbitales asociados.

Finalmente, las condiciones iniciales, y en general la posición y la velocidad del planeta a cualquier instante t , se eligen de manera que el centro de masas permanezca en el origen y en reposo. Es decir, dado algún instante t , y dados los valores $\vec{r}_i(t)$, $\dot{\vec{r}}_i(t)$ para

$i = 2, 3, \dots, N$, entonces

$$\begin{aligned}\vec{r}_1(t) &= -\frac{1}{m_1} \sum_{i=2}^N m_i \vec{r}_i(t) \quad , \\ \dot{\vec{r}}_1(t) &= -\frac{1}{m_1} \sum_{i=2}^N m_i \dot{\vec{r}}_i(t) \quad .\end{aligned}\tag{4.4}$$

4.4. Criterio de escape

Simultáneamente al análisis de las variaciones de los elementos orbitales, se desea caracterizar órbitas de confinamiento y de escape. Consideramos que una partícula de prueba tiene una órbita de escape, si en algún paso de tiempo de la integración, esta se encuentra dentro del radio de Hill de alguna de las lunas pastoras, su distancia a Urano es mayor al semieje mayor de Ofelia (pastora “exterior” al anillo ϵ), o bien su distancia a Urano es menor al semieje menor de Cordelia (pastora “interior” al anillo ϵ). El radio de Hill en general se define como

$$R_{\text{Hill}} = a \left(\frac{m}{3M} \right)^{1/3} \quad ,\tag{4.5}$$

para una luna con masa m y semieje mayor a orbitando alrededor de un planeta con masa M . Ahora, usando los valores dados en las tablas 4.1, 4.2 y 4.3 encontramos que dentro de la precisión dada para las masas y los elementos orbitales de Cordelia y Ofelia $R_{\text{Hill,Co}} = 0.0011R_{\text{Ur}} \approx 27\text{km}$ y $R_{\text{Hill,Of}} = 0.0013R_{\text{Ur}} \approx 31\text{km}$. Por otro lado, el radio medio de Cordelia es de 20km, mientras que el de Ofelia es de 21km [30]. Vemos así que aproximadamente el 50 % del área encerrada por el radio de Hill de cada luna está ocupada físicamente por la misma en ambos casos. Por lo tanto, en al menos la mitad de los casos esta condición de hecho es equivalente a la caída de la partícula de anillo sobre la superficie de alguna de las lunas pastoras.

Una vez caracterizada la evolución temporal de una condición inicial como órbita de escape, la integración numérica de la misma se trunca. Este criterio de escape está justificado a partir de la evidencia que se tiene de que esta clase de órbitas, para tiempos suficientemente largos, efectivamente escapan de la región entre las

lunas pastoras (en el caso del anillo ϵ Urano, estas lunas son Cordelia y Ofelia) [2].

4.5. Método de estimación de elementos orbitales: semieje mayor y excentricidad

En general para $N > 2$ en el PNBP y por lo tanto en el PR($N + 1$)BP los elementos orbitales a y e no son constantes, por lo cual es necesario realizar una estimación de los elementos orbitales durante cada periodo orbital alrededor de Urano.

En la sección 2.1.1 se planteó un método para el cálculo de los elementos orbitales. Sin embargo, debe tenerse cuidado con ese método, ya que las ecuaciones 2.39 y 2.40 no incluyen correcciones a segundo orden en la excentricidad y para los valores considerados para los elementos orbitales en las simulaciones numéricas del presente trabajo ($e \sim 10^{-2}$) estas correcciones son importantes, ya que se desea una precisión en el cálculo en los elementos orbitales del orden del ϵ de la máquina, ϵ_M [9].

Para este fin, consideramos un método alternativo para conocer el valor numérico de los elementos orbitales de la partícula de prueba, basado en el cálculo numérico de los radios máximo y mínimo consecutivos de dicha órbita durante cada periodo de la misma. Este método de estimación de los elementos orbitales (semieje mayor y excentricidad) de Cordelia, Ofelia, Ariel y la partícula de prueba se basa en el cálculo de $r_{\text{máx}}$ y $r_{\text{mín}}$, el máximo y mínimo de la posición radial relativa a Urano. De la ecuación (2.24), tenemos

$$r_{\text{máx}} \equiv r(f = \pi) = a(1 + e) \quad (4.6)$$

$$r_{\text{mín}} \equiv r(f = 0) = a(1 - e) \quad , \quad (4.7)$$

y de aquí se sigue

$$a = \frac{r_{\text{máx}} + r_{\text{mín}}}{2} \quad (4.8)$$

$$e = \frac{r_{\text{máx}} - r_{\text{mín}}}{r_{\text{máx}} + r_{\text{mín}}} = \frac{r_{\text{máx}} - r_{\text{mín}}}{2a} \quad . \quad (4.9)$$

Es posible, por lo tanto, tomar máximos y mínimos consecutivos de la posición radial de un satélite dado, y a partir de estos datos obtener estimaciones para el semieje mayor y la excentricidad

de la órbita de este. Para obtener una estimación de alta precisión para r_{\min} y r_{\max} se ocupa el método de falsa posición (también llamado método *regula falsi*) [5]. Utilizando este método se calcula numéricamente el instante t^* en el cual la velocidad radial se anula. Numéricamente la condición que se establece para finalizar el cálculo de este instante es $\dot{r}(t^*) \sim \varepsilon_M$. Una vez establecido el valor de t^* , si en el paso de integración anterior se tiene, por ejemplo, $\dot{r}_1 > 0$ y para el paso de integración posterior $\dot{r}_2 < 0$, entonces se guarda el valor $r_{\max} = r(t^*)$ como el valor numérico del radio máximo. De otra manera, si $\dot{r}_1 < 0$ y $\dot{r}_2 > 0$, se establece el radio mínimo como $r_{\min} = r(t^*)$. En la práctica se han hechos pruebas tanto con el método de falsa posición como el método de Newton-Raphson para el cálculo de radios máximos y mínimos. Se ha encontrado que, aunque los detalles de la implementación de cada método son distintos, tanto el método de falsa posición como el método de Newton-Raphson tienen un desempeño muy similar, ocupando típicamente 3 o 4 iteraciones para alcanzar la precisión deseada. Este procedimiento se repite cada vez que se requiere calcular el valor numérico de los elementos orbitales a y e .

4.6. Análisis de frecuencias: índice de estabilidad

El uso de análisis de frecuencias como un indicador de la dinámica es una de las aplicaciones más comunes para el estudio de las diversas instancias del problema de N cuerpos en el Sistema Solar [33, 34]. En particular, para estudiar las propiedades de estabilidad del PR(4 + 1)BP en la región $B(e_{\max})$, aplicamos un análisis de frecuencias para distinguir entre movimiento cuasiperiódico y caótico.

Tal como fue planteado por Benet y Jorba para el anillo F de Saturno [2], definimos el *índice de estabilidad* $\Delta\chi$ de una serie de tiempo χ como

$$\Delta\chi = \frac{\sigma_\chi}{\bar{\chi}} \quad , \quad (4.10)$$

donde $\bar{\chi} \neq 0$ y σ_χ son, respectivamente, el promedio y la desviación estándar de χ calculados a lo largo del intervalo completo que abarca la serie de tiempo.

La idea básica de este tipo de análisis es tomar dos muestras de una órbita en intervalos disjuntos de tiempo. Si se obtienen las mis-

mas frecuencias en ambos intervalos la órbita se considera regular; de otra manera, se considera que esta es caótica. Es decir, en términos del índice $\Delta \chi$, para movimiento cuasiperiódico se tiene $\Delta \chi = 0$, mientras que valores no nulos de $\Delta \chi$ indican un alejamiento respecto del movimiento cuasiperiódico [22].

4.7. Pruebas preliminares

En esta sección se presentan pruebas preliminares de la integración numérica del P4BP que incluye a Urano, Cordelia, Ofelia y Ariel. Los parámetros de masas y los elementos orbitales son los listados en las tablas 4.1, 4.2, 4.3, 4.4 y 4.5. Para realizar las pruebas preliminares presentadas en esta sección, el tiempo total de integración fue de $10^7 T_{Co}$, que equivalen aproximadamente a 9,000 años.

4.7.1. Variación de los parámetros orbitales de Urano, Cordelia, Ofelia y Ariel

En las figuras 4.1a-4.3b se muestra la variación, dentro de la integración numérica del P4BP, del semieje mayor y la excentricidad de las órbitas de Cordelia, Ofelia y Ariel como función del tiempo.

Observamos que el semieje mayor y la excentricidad de Cordelia, Ofelia y Ariel, oscilan con una amplitud bien definida alrededor de un valor promedio, y que el valor promedio de cada elemento orbital, para cada satélite considerado, es consistente, dentro de la incertidumbre observacional, con el valor correspondiente reportado por la NASA. Nótese la diferencia de escalas de la figura 4.3 respecto de las figuras 4.1 y 4.2: la amplitud de la variación en el semieje mayor de Cordelia y Ofelia es del orden de $10^{-6} R_{Ur}$ respecto de su valor promedio, mientras que la variación en el semieje mayor de Ariel es del orden de $10^{-10} R_{Ur}$. Análogamente, la amplitud de la variación en las excentricidades de Cordelia y Ofelia es de 10^{-6} (adimensional), mientras que para Ariel es del orden de 10^{-10} . Interpretamos estos resultados como variaciones causadas por las perturbaciones asociadas al achatamiento polar del planeta, así como de la interacción gravitacional entre Cordelia, Ofelia y Ariel.

Esta diferencia en orden de magnitud en las variaciones es consistente con el hecho de que en general, Cordelia y Ofelia sufren perturbaciones más fuertes que Ariel: por un lado, Cordelia y Ofe-

lia perturban mutuamente sus órbitas en cada evento de conjunción entre ellas; y por otro lado, la perturbación causada por el achataamiento polar de Urano, es alrededor de 15 veces más tenue alrededor de la órbita de Ariel, respecto de la intensidad de esta misma perturbación en la región de las órbitas de Cordelia y Ofelia.

En la tabla 4.6 se muestra una comparación del valor promedio de la variación de cada uno de estos elementos orbitales respecto de los valores mostrados en las tablas 4.2 y 4.3.

Tabla 4.6: Primera columna: Nombre del satélite. Segunda columna: Parámetro orbital asociado a cada satélite. Tercera columna: Valores observados para cada elemento orbital; tomados de las tablas 4.2 y 4.3. Cuarta columna: Valor promedio de los elementos orbitales durante la integración numérica del P4BP, durante un tiempo de integración de $1 \times 10^7 T_{C_o} \approx 9,000$ años.

Satélite	Parámetro	Valor observado	Valor promedio en la integración numérica del P4BP
Cordelia	a_{C_o}	1.947	1.94699
	e_{C_o}	0.00026	0.000271458
Ofelia	a_{O_f}	2.104	2.01399
	e_{O_f}	0.00992	0.00993078
Ariel	a_{A_r}	7.470	7.47012
	e_{A_r}	0.00122	0.00123561

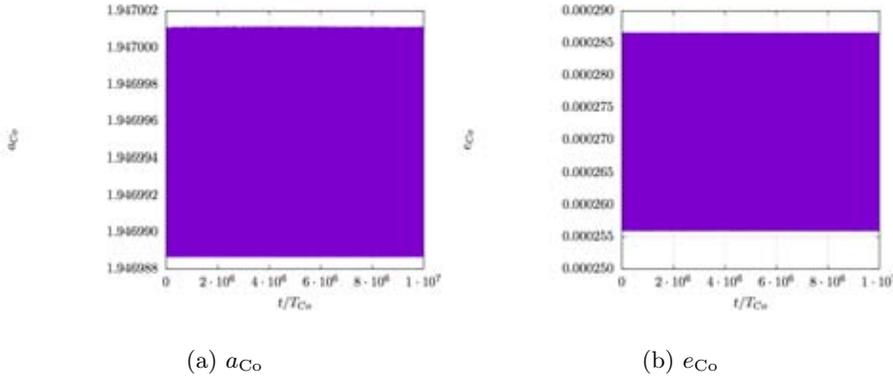


Figura 4.1: P4BP: Gráfica de los elementos orbitales de Cordelia, a_{C_o} y e_{C_o} , como función del tiempo. En esta serie de tiempo, el valor promedio del semieje mayor y la excentricidad es $\bar{a}_{C_o} = 1.947$ y $\bar{e}_{C_o} = 0.00027$, lo cual es consistente, dentro de la incertidumbre observacional, con los valores reportados por la NASA (véase tabla 4.2).

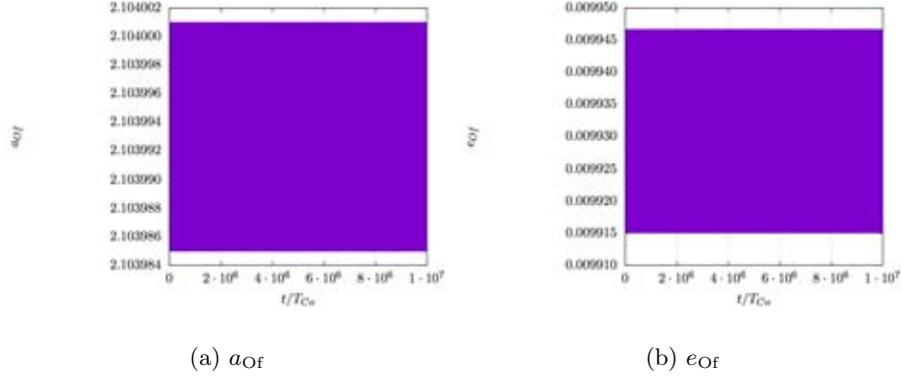


Figura 4.2: P4BP: Gráfica de los elementos orbitales de Ofelia, a_{Ar} y e_{Ar} , como función del tiempo. En esta serie de tiempo, el valor promedio del semieje mayor redondeado es $\bar{a}_{Of} = 2.104$, lo cual es consistente con el valor reportado por la NASA (véase tabla 4.2). Por otra parte, el valor promedio de la es $\bar{e}_{Of} = 0.0093$, lo cual es consistente, dentro de la incertidumbre observacional, con el valor reportado por la NASA (véase tabla 4.3).

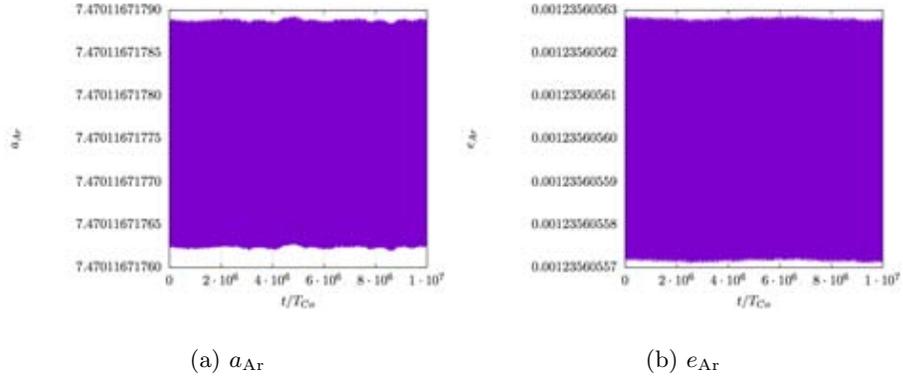


Figura 4.3: P4BP: Gráfica de los elementos orbitales de Ariel, a_{Ar} y e_{Ar} , como función del tiempo. En esta serie de tiempo, el valor promedio del semieje mayor redondeado a tres cifras decimales es $\bar{a}_{Ar} = 7.470$, lo cual es consistente con el valor reportado por la NASA (véase tabla 4.2). Por otro lado, el valor promedio de la excentricidad es $\bar{e}_{Ar} = 0.00123$, lo cual es consistente, dentro de la incertidumbre observacional, con el valor reportado por la NASA (véase tablas 4.3 y 4.6).

4.7.2. Variación de la energía y el momento angular del P4BP como función del tiempo

A continuación se presenta el estudio preliminar realizado de la variación relativa de la energía total del P4BP como función del tiempo. Para tal efecto, durante $10^7 T_{C_0}$ se monitorea la variación de la energía total del P4BP respecto de la energía inicial, como función del tiempo. Para un paso de tiempo $l \in \mathbb{N}$ dado, la variación absoluta y relativa (o error absoluto y relativo), respectivamente, de la energía se define como

$$\Delta E_l \equiv E(t_l) - E(t_{l-1}) \quad , \quad (4.11)$$

$$\delta E_l \equiv \frac{\Delta E_l}{E_0} = \frac{E(t_l) - E(t_{l-1})}{E(t_l)} \quad . \quad (4.12)$$

En general la energía total del PNBP (incluyendo los términos asociados al armónico zonal J_2) está dada por el valor numérico del hamiltoniano 2.13:

$$E_{\text{PNBP}} = \sum_{j=1}^N \left[\frac{1}{2} m_j \dot{\vec{r}}_j^2 - \sum_{i=1, i < j}^N \frac{G m_i m_j}{r_{ij}} \left(1 + \frac{\Lambda_{ij}}{r_{ij}^2} \right) \right] \quad . \quad (4.13)$$

Los resultados se muestran en la figura 4.4. Vemos que la variación relativa máxima a lo largo de $10^7 T_{C_0}$ es $\sim 4,000 \cdot \varepsilon_M$. El valor inicial de la energía es $E_0 \approx -7.674 \times 10^{-6} m_{\text{Ur}} R_{\text{Ur}}^2 / T_{C_0}^2$.

Análogamente, estudiamos el momento angular total del P4BP. El momento angular total del PNBP, en general está dado por

$$L_{\text{PNBP}} = \left(\sum_{j=1}^N m_j \vec{r}_j \times \dot{\vec{r}}_j \right) \cdot \hat{z} = \sum_{j=1}^N m_j (x_j \dot{y}_j - y_j \dot{x}_j) \quad . \quad (4.14)$$

Al graficar durante $10^7 T_{C_0}$ las variaciones del momento angular total como función del tiempo, obtenemos la gráfica mostrada en la figura 4.5. En este caso observamos que la variación relativa máxima a lo largo de $10^7 T_{C_0}$ es $\sim 2,000 \cdot \varepsilon_M$. El valor inicial del momento angular es $L_0 \approx 1.157 \times 10^{-4} m_{\text{Ur}} R_{\text{Ur}}^2 / T_{C_0}$.

En la gráfica de la variación relativa de la energía se observa una tendencia marginal hacia valores positivos, mientras que la gráfica de la variación relativa del momento angular presenta una tendencia hacia valores negativos. Sin embargo, esta tendencia puede

entenderse si se interpretan ambas gráficas como comportamientos semejantes a los generados por caminatas aleatorias. En el siguiente capítulo se analiza esta interpretación.

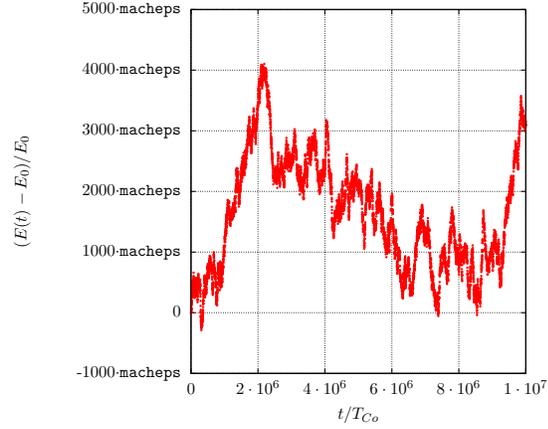


Figura 4.4: Gráfica de la variación relativa de la energía del problema de 4 cuerpos en el plano (ecuación 2.13) como función del tiempo. Los cuerpos incluidos en este sistema son: Urano, Cordelia, Ofelia y Ariel. El valor inicial de la energía es $E_0 \approx -7.674 \times 10^{-6} m_{U_r} R_{U_r}^2 / T_{C_0}^2$. La variación absoluta de la energía genera una gráfica idéntica a esta, multiplicada por el factor E_0 .

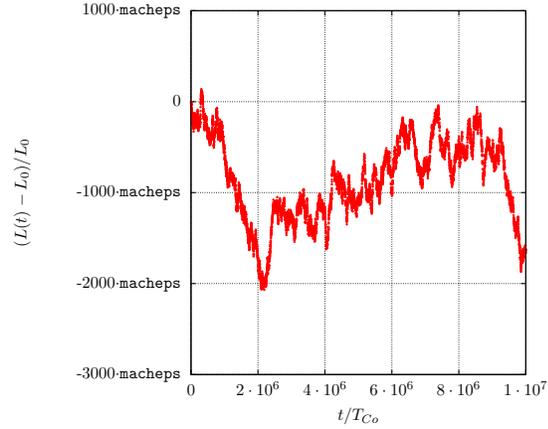


Figura 4.5: Gráfica de la variación relativa del momento angular del P4BP como función del tiempo. Los cuerpos incluidos en este sistema son: Urano, Cordelia, Ofelia y Ariel. El valor inicial del momento angular es $L_0 \approx 1.157 \times 10^{-4} m_{U_r} R_{U_r}^2 / T_{C_0}$. La variación absoluta del momento angular genera una gráfica idéntica a esta, multiplicada por el factor L_0 .

Capítulo 5

Resultados

5.1. Distribución del error de la energía del PR(4 + 1)BP en la región $B(e_{\text{máx}})$

En esta sección se presentan los resultados del error absoluto de la energía del P4BP asociado al PR(4 + 1)BP respecto del valor inicial de la energía E_0 al integrar durante $5 \times 10^6 T_{\text{Co}} \sim 50,000$ condiciones iniciales tomadas al azar (distribución uniforme) dentro del conjunto $B(e_{\text{máx}} = 0.04) \subset \Theta$. En la figura 5.1 se muestran gráficas con histogramas de la distribución del error en la energía. En ambas figuras, el color rojo, anaranjado, verde, azul y lila representan, respectivamente, el error en la energía a un tiempo de $5 \times 10^4 T_{\text{Co}}$, $1 \times 10^5 T_{\text{Co}}$, $5 \times 10^5 T_{\text{Co}}$, $1 \times 10^6 T_{\text{Co}}$ y $5 \times 10^6 T_{\text{Co}}$. Si se ajusta una distribución gaussiana

$$n(x; \nu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left[-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2} \right] \quad (5.1)$$

a cada una de estas curvas y se interpreta la sucesión de diferencias relativas $\delta E_l = (E(t_l) - E(t_{l-1}))/E_0$ para una condición inicial dada como una caminata aleatoria, entonces la desviación estándar σ_E de estas distribuciones se relaciona con el tiempo de integración t y el coeficiente de difusión D de la caminata mediante

$$(\sigma_E)^2 = Dt \quad , \quad (5.2)$$

obteniendo un valor de $D_E = 1.914 \cdot \varepsilon_M \approx 4.251 \times 10^{-16}$ para el coeficiente de difusión. Con base en estos resultados, se concluye que el error en el valor numérico en la energía se debe al redondeo

de la aritmética de punto flotante en la última cifra significativa: es decir, que el método de Taylor implementado en este trabajo es capaz de alcanzar una precisión comparable al épsilon de la máquina ($\varepsilon_M \sim 2.22e-16$) para el tipo de dato `double` en el lenguaje `C++` [9].

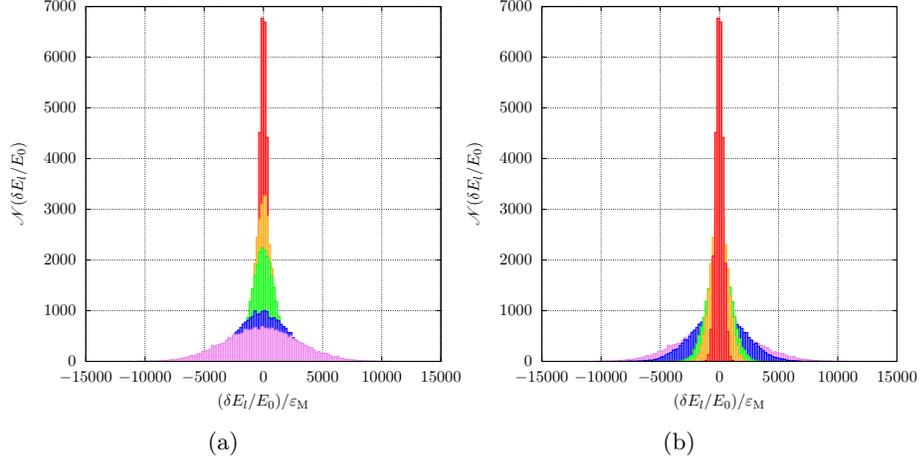


Figura 5.1: PR(4 + 1)BP: Histograma de la distribución de error en la energía para distintos tiempos de integración. En la figura los colores rojo, anaranjado, verde, azul y lila representan, respectivamente, el error a un tiempo de $5 \times 10^4 T_{Co}$, $1 \times 10^5 T_{Co}$, $5 \times 10^5 T_{Co}$, $1 \times 10^6 T_{Co}$ y $5 \times 10^6 T_{Co}$. Los datos mostrados en ambos incisos de la figura son los mismos, cambiando solamente el orden de la superposición de los distintos colores. Interpretando la sucesión de errores relativos en la energía, $\delta E_l = (E(t_l) - E(t_{l-1}))/E_0$, como una caminata aleatoria, y ajustando una distribución gaussiana a cada una de ellas, obtenemos un coeficiente de difusión $D_E = 1.914 \cdot \varepsilon_M \approx 4.251 \times 10^{-16}$, donde ε_M es el épsilon de la máquina para tipo de dato `double` en el lenguaje de programación `C++`.

5.2. Distribución de los tiempos de colisión en el PR(4 + 1)BP en la región $B(e_{\text{máx}})$

Consideramos ahora brevemente la distribución de los tiempos de colisión y de escape para el mismo conjunto de condiciones iniciales de la sección anterior (i.e. $\sim 80,000$ condiciones iniciales dentro de la región $B(e_{\text{máx}} = 0.04)$). Al tomar en cuenta el criterio de colisiones descrito en la sección 4.4 obtenemos el histograma mostrado en la figura 5.2.

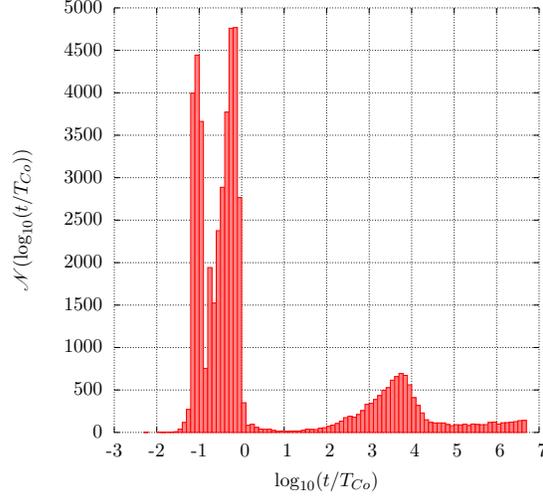


Figura 5.2: Histograma de la distribución de los tiempos de escape de la región $B(e_{\text{máx}})$. El criterio de escape es el descrito en la sección 4.4.

En ella se observan dos picos pronunciados alrededor de $t = 10^{-1}T_{Co}$ y $t = T_{Co}$ asociados principalmente a escape de la región entre las lunas pastoras, después de lo cual disminuyen para posteriormente aumentar hasta alcanzar un pico alrededor de $\log_{10}(t/T_{Co}) = 3.3$. Este pico, así como el resto de las condiciones iniciales de escape a la derecha del mismo, está asociado a eventos de colisión con las pastoras. Después de este pico la frecuencia de colisiones decae y alcanza un estado prácticamente constante. También se observa que las colisiones continúan consistentemente hasta un corte en la gráfica alrededor de $\log_{10}(t/T_{Co}) \approx 6.7$, el cual indica el tiempo máximo de integración de las condiciones iniciales, $t = 5 \times 10^6 T_{Co}$. Cerca de este corte se observa una ligera pendiente positiva, pero para observar la evolución de esta tendencia, hace falta realizar integraciones hasta al menos $10^8 T_{Co}$.

5.3. Análisis de frecuencias del PR(4 + 1)BP en la región $B(e_{\text{máx}})$

Se calculó el índice de estabilidad 4.10 asociado al promedio del semieje mayor de cada órbita durante 200 revoluciones de Cordelia alrededor de Urano; esta es una medida de las excursiones radiales

realizadas por cada partícula de prueba [2]. En las figuras 5.3a y 5.3b se muestra el índice de estabilidad del semieje mayor, Δa , calculado en la región $B(e_{\text{máx}} = 0.04)$ para $\sim 80,000$ condiciones iniciales y proyectado sobre el plano $\Theta_a \times \Theta_e$. El código de colores corresponde a los valores de $\log_{10}(\Delta a)$, como se indica al costado derecho de las gráficas. El tiempo de integración en la figura 5.3a es de $5 \times 10^4 T_{\text{Co}}$, mientras que en la figura 5.3b es de $5 \times 10^6 T_{\text{Co}}$. Aquí se observa cómo las órbitas de confinamiento (i.e., que no tienen eventos de colisión) forman una región triangular, mientras que los eventos de colisión y escape en la región entre las pastoras “erosionan” los bordes de esta región triangular, conforme aumenta el tiempo total de integración. Notamos también que en los “vértices” de este triángulo a medida que pasa el tiempo se observan condiciones iniciales que van aumentando su índice de estabilidad Δa , sin escapar.

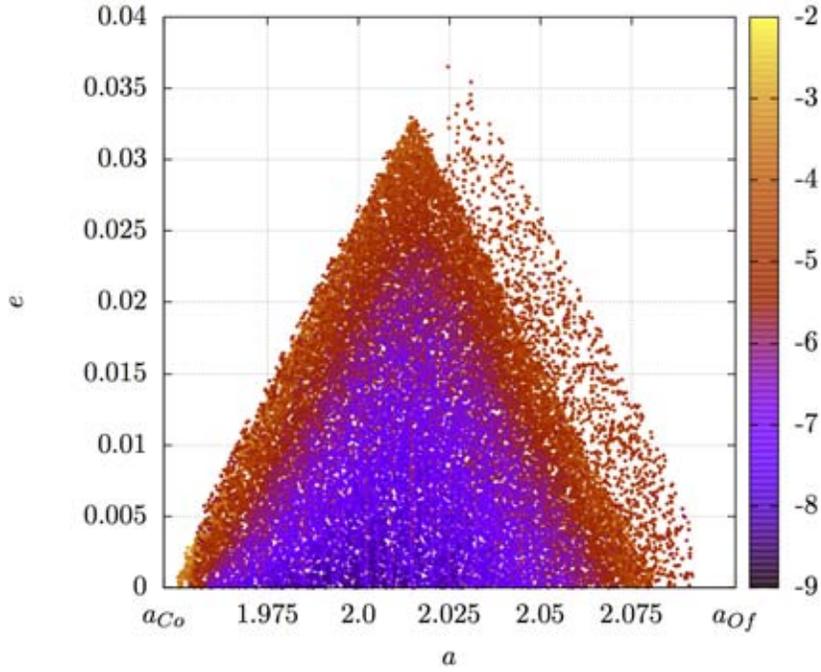
Análogamente, en las figuras 5.4a y 5.4b se muestra el índice de estabilidad asociado a la excentricidad, Δe , calculado en la misma región $B(e_{\text{máx}} = 0.04)$ y proyectado sobre el plano $\Theta_a \times \Theta_e$. Nuevamente, el tiempo de integración en la figura 5.4a es de $5 \times 10^4 T_{\text{Co}}$; mientras que en la figura 5.4b es de $5 \times 10^6 T_{\text{Co}}$.

En la región triangular se observa cómo la inestabilidad en el coeficiente Δe es mayor sobre las “aristas” de la región triangular, mientras que las zonas de alta estabilidad se concentran en una “mancha” en el interior de esta región.

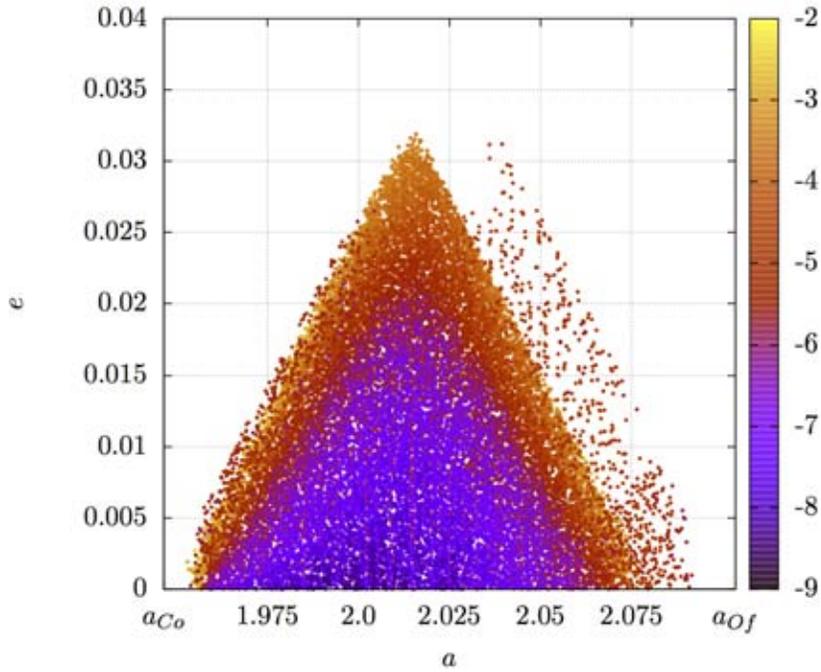
Por otro lado, en la figura 5.5 se muestran los histogramas de la distribución de valores de $\log_{10}(\Delta a)$ correspondientes a las figuras 5.3a (5.5a) y 5.3b (5.5b), respectivamente. Aquí se puede observar la “erosión” causada por las lunas pastoras (Cordelia y Ofelia) y Ariel, que ocasiona eventos de colisión y escape de la región principalmente en el intervalo $\log_{10}(\Delta a) > -7.0$, mientras que para $\log_{10}(\Delta a) < -7.0$ la distribución de $\log_{10}(\Delta a)$ permanece prácticamente sin cambios.

Asimismo, en la figura 5.6 se muestra la distribución en $\log_{10}(\Delta e)$ correspondientes a los datos de las figuras 5.4a (5.6a) y 5.4b (5.6b), respectivamente. Nótese el pico alrededor de $\log_{10}(\Delta e) \sim -3.5$ en la figura 5.6a. Conforme transcurre el tiempo de integración, este pico se “erosiona”, dando lugar a mayores variaciones en la excentricidad.

5.3. ANÁLISIS DE FRECUENCIAS DEL PR(4+1)BP EN LA REGIÓN $B(e_{\text{máx}})$ 53



(a) $5 \times 10^4 T_{Co}$



(b) $5 \times 10^6 T_{Co}$

Figura 5.3: PR(4 + 1)BP: Gráfica de $\log_{10}(\Delta a)$ para condiciones iniciales de confinamiento tomadas aleatoriamente en la región $B(e_{\text{máx}} = 0.04)$, proyectada sobre el plano $\Theta_a \times \Theta_e$ integradas durante $5 \times 10^4 T_{Co}$ (5.3a) y $5 \times 10^6 T_{Co}$ (5.3b).

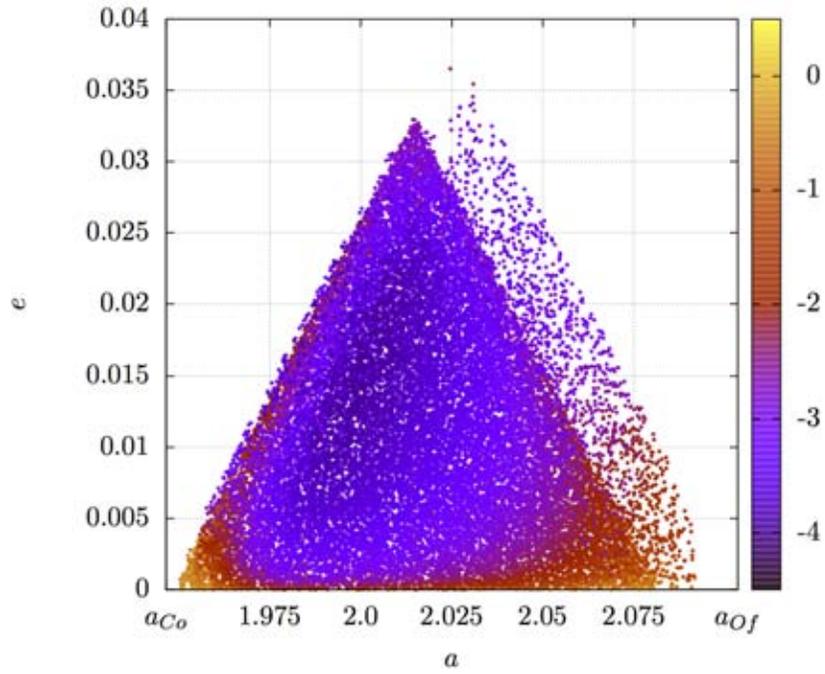
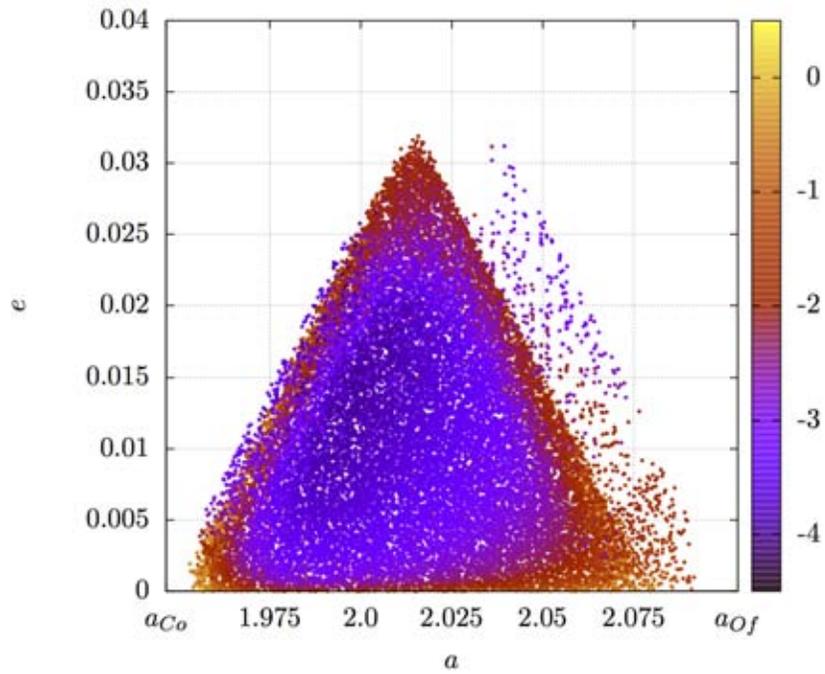
(a) $5 \times 10^4 T_{Co}$ (b) $5 \times 10^6 T_{Co}$

Figura 5.4: PR(4 + 1)BP: Gráfica de $\log_{10}(\Delta e)$ para condiciones iniciales de confinamiento tomadas aleatoriamente en la región $B(e_{\max} = 0.04)$, proyectada sobre el plano $\Theta_a \times \Theta_e$ integradas durante $5 \times 10^4 T_{Co}$ (5.4a) y $5 \times 10^6 T_{Co}$ (5.4b).

5.3. ANÁLISIS DE FRECUENCIAS DEL PR(4+1)BP EN LA REGIÓN $B(e_{\text{máx}})$ 55

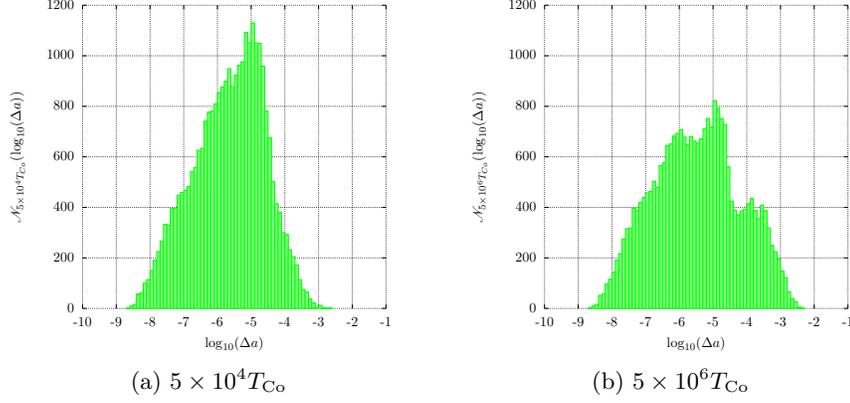


Figura 5.5: Histograma de la distribución de $\log_{10}(\Delta a)$. En (a) el tiempo de integración es de $5 \times 10^4 T_{C_0}$ y los datos corresponden a los mostrados en la figura 5.3a. En (b) el tiempo de integración es de $5 \times 10^6 T_{C_0}$, correspondiente a los datos mostrados en la figura 5.3b.

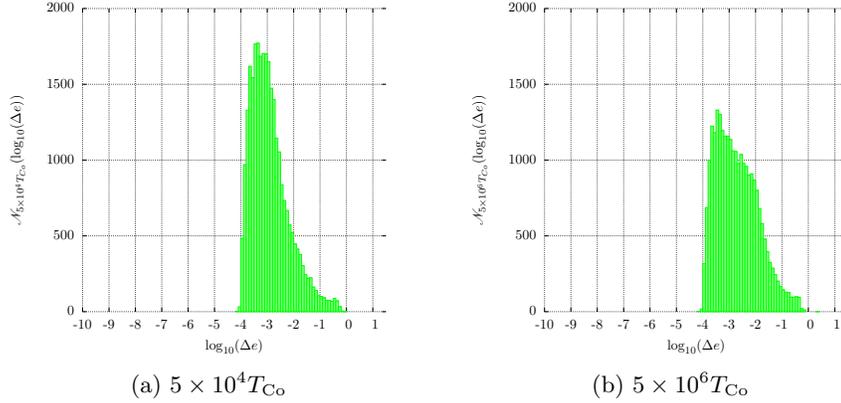


Figura 5.6: Histograma de la distribución de $\log_{10}(\Delta e)$. En (a) el tiempo de integración es de $5 \times 10^4 T_{C_0}$ y los datos corresponden a los mostrados en la figura 5.4a. En (b) el tiempo de integración es de $5 \times 10^6 T_{C_0}$, correspondiente a los datos mostrados en la figura 5.4b.

A diferencia de los resultados obtenidos por Benet y Jorba para el anillo F de Saturno, mientras que en la figura 5.3b se observan zonas de líneas verticales de condiciones iniciales con $\log_{10}(\Delta a) < -8.0$, estas líneas no están claramente separadas del resto de las órbitas. Más aún, en la figura 5.5 no hay un hueco en la distribución de $\log_{10}(\Delta a)$ que permita separar las condiciones iniciales en dos escalas bien definidas. Sin embargo, en la figura 5.5b observamos que

la distribución de $\log_{10}(\Delta a)$ permanece prácticamente sin cambios para $\log_{10}(\Delta a) < -7.0$. Esto parece indicar que el mecanismo de “erosión” (i.e., inestabilidad) que se busca en este tipo de modelos (i.e., PR($N + 1$)BP) parece ser lento para el anillo ϵ de Urano, en comparación con la velocidad de erosión que se obtiene para el anillo F de Saturno [2].

Por lo tanto, proponemos que las partículas de prueba que después de $5 \times 10^6 T_{C_0}$ cumplen con la condición $\log_{10}(\Delta a) > -7.0$, son partículas que están realizando –muy lentamente– excursiones radiales cada vez mayores, hasta que eventualmente colisionan con una de las lunas pastoras. En particular, proponemos filtrar las órbitas que cumplen la condición $\log_{10}(\Delta a) < -7.0$ hasta $5 \times 10^6 T_{C_0}$ y estudiar las propiedades de este subconjunto de órbitas.

Entonces, para los datos mostrados en la figura 5.5 introducimos *a fortiori* el filtro $\log_{10}(\Delta a) < -7.0$ (i.e., $\Delta a < 10^{-7}$), obteniendo los resultados mostrados en la figura 5.7. En ella se puede observar las órbitas más “estables” respecto al índice Δa . En la siguiente sección se presenta el anillo generado por las partículas que satisfacen la condición de filtrado, así como los elementos orbitales asociados al mismo. Finalmente, se hace una comparación con el anillo ϵ de Urano.

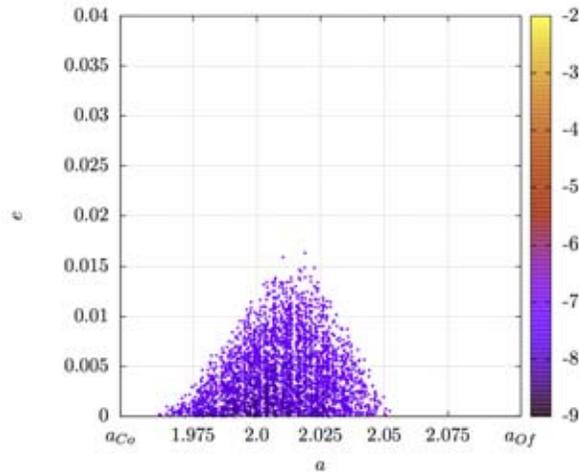


Figura 5.7: Gráfica de $\log_{10}(\Delta a)$ en el plano $\Theta_a \times \Theta_e$ usando el filtrado $\log_{10}(\Delta a) < -7.0$.

5.4. Anillos planetarios

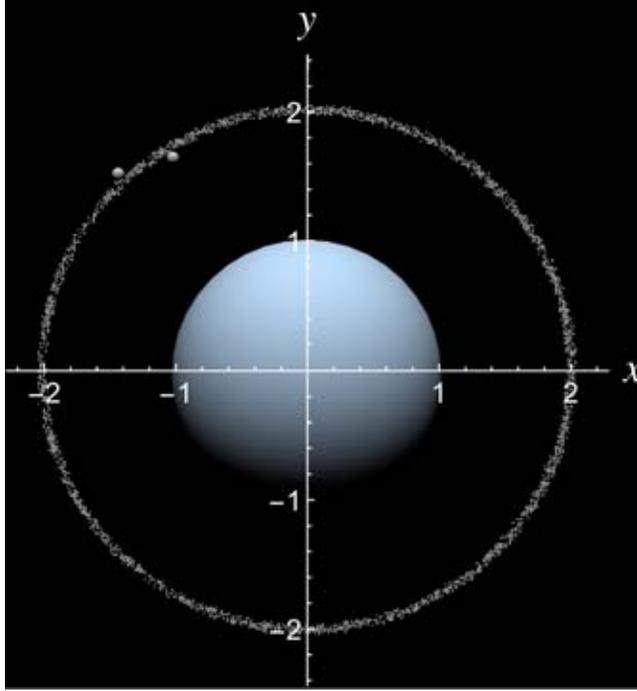


Figura 5.8: Visualización sobre el plano ecuatorial de Urano del anillo generado al graficar las posiciones, después de $5 \times 10^6 T_{Co}$, de las órbitas en la figura 5.7. Se muestra esquemáticamente Urano al centro, así como Cordelia y Ofelia, ubicadas al interior y exterior del anillo, respectivamente. Las unidades de los ejes x y y corresponden al radio medio de Urano, R_{Ur} .

Al graficar en el espacio de configuración las órbitas que satisfacen el filtro $\log_{10}(\Delta a) < -7.0$, obtenemos el anillo mostrado en las figuras 5.8, 5.9 y 5.10. Considérese, en particular, la figura 5.10. El anillo mostrado en esta figura (color rojo) es claramente delgado (el ancho calculado es $\sim 0.07 R_{Ur} = 1,800\text{km}$), casi circular ($e = 0.0002$) y con bordes muy bien definidos. En color azul se muestra el ajuste de estos datos a una elipse kepleriana. Los elementos orbitales asociados a esta elipse kepleriana son $a = 2.009 R_{Ur}$, $e = 0.0002$. La línea negra en la parte inferior de la gráfica representa el anillo λ , cuyos elementos orbitales son $a_\lambda = 1.957$, $e_\lambda = 0.0$, y con un ancho reportado $\sim 10^{-4} R_{Ur} = 2\text{km}$. Por otra parte, en color negro se

muestran las lunas pastoras, Cordelia y Ofelia (los diámetros mostrados no están a escala). Las tres líneas onduladas representan la elipse kepleriana asociada al anillo ϵ , así como el ancho promedio del mismo. El valor reportado por la NASA para el semieje mayor del anillo ϵ es $a_\epsilon = 2.006R_{Ur}$ con un ancho $\sim 0.002R_{Ur} = 60\text{km}$; para la excentricidad $e_\epsilon = 0.0079$ [30]. Para el anillo λ los valores reportados son $a_\lambda = 1.957R_{Ur}$ y $e_\lambda = 0$ [48, 19]. La diferencia porcentual entre estos valores reportados y los valores calculados es de 0.14% para el semieje mayor y del 97% para la excentricidad. Es decir, que si bien el valor obtenido para la excentricidad no es consistente con las observaciones, vemos que en el contexto de este modelo, al realizar el filtrado mencionado anteriormente, se obtiene un valor en el semieje mayor cercano para los valores reportados.

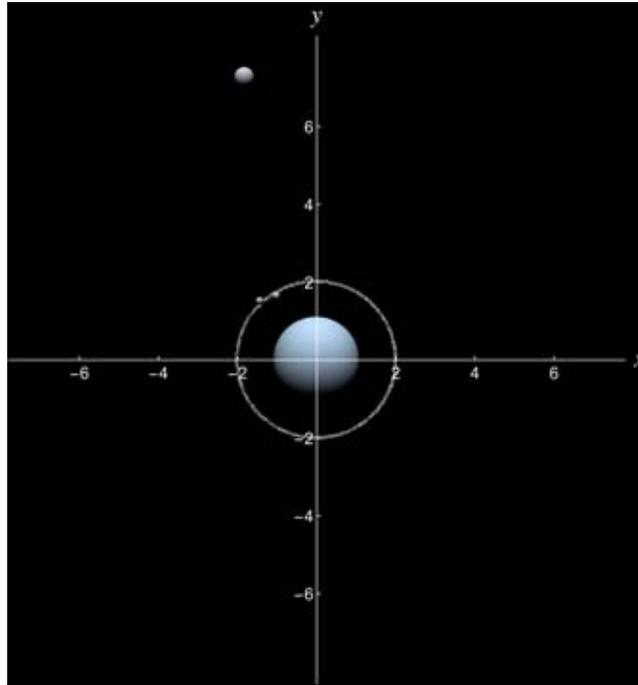


Figura 5.9: Visualización sobre el plano ecuatorial de Urano del anillo generado al graficar las posiciones, después de $5 \times 10^6 T_{Co}$, de las órbitas en la figura 5.7. Se muestra esquemáticamente Urano al centro, y la posición de Ariel en su órbita alrededor de Urano, así como Cordelia y Ofelia, ubicadas al interior y exterior del anillo, respectivamente. Las unidades de los ejes x y y corresponden al radio medio de Urano, R_{Ur} .

Ahora, es importante enfatizar que esta prueba de consistencia *a posteriori* del filtro $\log_{10}(\Delta a) < -7.0$ no es una demostración de la consistencia dinámica del filtrado. La única manera de demostrar la consistencia de este filtro es realizar integraciones numéricas más largas, de hasta $5 \times 10^7 T_{C_0}$ o incluso $1 \times 10^8 T_{C_0}$, para probar si las partículas filtradas realmente escapan de la región entre Cordelia y Ofelia [2].

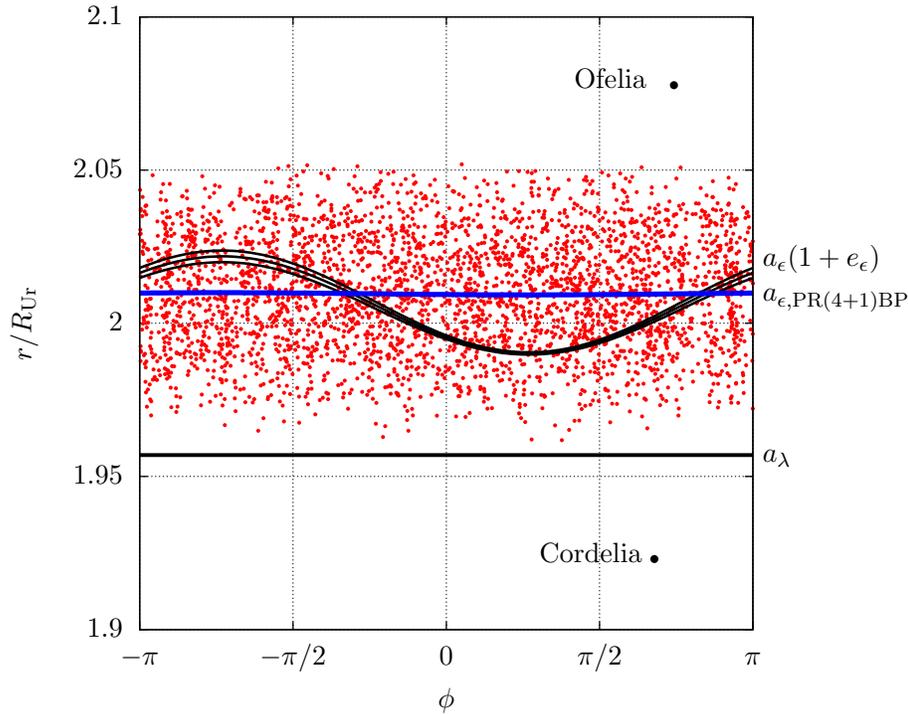


Figura 5.10: Visualización en coordenadas polares de las posiciones a $5 \times 10^6 T_{C_0}$ de las órbitas en la figura 5.7. En color rojo se muestra la posición de las partículas de prueba que a $5 \times 10^6 T_{C_0}$ cumplen la condición de filtrado $\log_{10}(\Delta a) < -7.0$. El ancho del anillo graficado es $\sim 0.07 R_{Ur} = 1,800\text{km}$. En color azul se muestra un ajuste del conjunto de datos a una elipse kepleriana; los elementos orbitales asociados a esta elipse kepleriana son $a = 2.009 R_{Ur}$, $e = 0.0002$. La línea negra cerca al inferior de la gráfica representa el anillo λ , cuyos elementos orbitales son $a_\lambda = 1.957 R_{Ur}$, $e_\lambda = 0.0$, y con un ancho reportado $\sim 10^{-4} R_{Ur} = 2\text{km}$. Por otra parte, en color negro se muestran las lunas pastoras, Cordelia y Ofelia (los diámetros mostrados no están a escala). Las tres líneas onduladas representan la elipse kepleriana asociada al anillo ϵ , con $a_\epsilon = 2.006 R_{Ur}$ y $e_\epsilon = 0.0079$, así como el ancho promedio del mismo ($\sim 0.002 R_{Ur} = 60\text{km}$).

Capítulo 6

Discusión y conclusiones

En esta tesis, se introdujo un modelo basado en el PR(4 + 1)BP para el anillo ϵ de Urano, el cual incluye a Urano, Cordelia, Ofelia y Ariel; modelados como partículas masivas y puntuales, incluyendo una corrección dipolar para el potencial gravitacional de Urano asociada al armónico zonal J_2 , proporcional a $1/r^3$, debido al achatamiento polar del mismo, así como un conjunto de partículas de prueba en la región entre Cordelia y Ofelia; bajo el efecto de la atracción gravitacional de los primeros cuatro cuerpos masivos.

Después de realizar integraciones numéricas de alta precisión hasta $5 \times 10^6 T_{C_o}$ (i.e., integraciones en las cuales la diferencia relativa en la energía entre dos pasos sucesivos de integración es comparable al ϵ de la máquina, ϵ_M) utilizando el método de Taylor, considerando eventos de colisión y escape de la región considerada, encontramos un subconjunto extenso de condiciones iniciales que generan órbitas de confinamiento dentro del conjunto $B(e_{m\acute{a}x})$ hasta $5 \times 10^6 T_{C_o}$. Para estas órbitas de confinamiento realizamos un análisis de frecuencias calculando el índice de estabilidad asociado al promedio del semieje mayor de la órbita durante 200 periodos de Cordelia. A diferencia del modelo equivalente para el anillo F de Saturno [2], para el anillo ϵ de Urano no encontramos dos picos localizados y bien separados en la distribución de $\log_{10}(\Delta a)$ que permitan justificar la introducción de un filtro en términos del índice Δa .

Se propuso argumentar que las condiciones iniciales con valores mayores de Δa son las que eventualmente escapan de la región entre Cordelia y Ofelia, y al introducir *a fortiori* un filtro de las

condiciones iniciales de confinamiento de acuerdo con la condición $\log_{10}(\Delta a) < -7.0$ obtenemos un anillo casi circular, delgado, y con bordes bien definidos con un semieje mayor consistente con el observado para el anillo ϵ de Urano. Por otro lado, el ancho del anillo excede por un factor ≈ 10 los datos observacionales; mientras que la excentricidad es menor por un factor ≈ 40 respecto del valor observado para el anillo ϵ , dando lugar a un anillo con una excentricidad prácticamente nula.

Se enfatizó que la prueba de consistencia *a posteriori* del filtro $\log_{10}(\Delta a) < -7.0$ no es una demostración de la validez del mismo, sino que debe ser validado por integraciones de hasta $5 \times 10^7 T_{C_0}$ o $1 \times 10^8 T_{C_0}$ inclusive, para probar si las partículas filtradas realmente escapan de la región entre Cordelia y Ofelia. Las integraciones numéricas hasta estos tiempos, con el equipo de cómputo utilizado, tardarían alrededor de un día para integrar la órbita de *una sola condición inicial*.

Surge la pregunta de cuáles son las diferencias entre el anillo ϵ de Urano y el anillo F de Saturno en el contexto del PR(4 + 1)BP. Por un lado, Ariel es la luna más masiva de Urano que ejerce mayor fuerza gravitacional en promedio en la región del anillo ϵ . Esta elección es equivalente a la inclusión de Titán para el modelo basado en el PR(4 + 1)BP del anillo F. Sin embargo, si se calcula la fuerza promedio de atracción gravitacional de Ariel en la región del anillo ϵ relativa a la fuerza de Urano en la misma zona, encontramos $F_{Ar}/F_{Ur} \sim 1.39 \cdot 10^{-6}$, mientras que para Saturno, Titán y el anillo F tenemos $F_{Ti}/F_{Sa} \sim 3.32 \cdot 10^{-6}$. Estos cocientes son una medida de la intensidad de la perturbación respecto del movimiento kepleriano de una partícula de prueba por efecto del planeta, por lo cual podemos decir que una partícula de prueba es perturbada con el doble de intensidad respecto de su movimiento kepleriano en la región del anillo F por efecto de Titán comparada con una partícula de prueba en la región del anillo ϵ por efecto de Ariel. Por otro lado, si bien Ariel es la segunda luna con mayor excentricidad en el sistema uraniano, la excentricidad de Titán es mayor por un factor ~ 8 comparada con la excentricidad de Ariel. Por lo tanto, una partícula de prueba en la región del anillo F sufrirá excitaciones en sus elementos orbitales con mayor intensidad por efecto de Titán respecto de una partícula en la región del anillo ϵ respecto de Ariel.

Para el anillo F de Saturno, Benet y Jorba proponen la existencia

de barreras de transporte que atrapan y confinan las partículas del anillo, y sugieren que el mecanismo que explica dinámicamente el confinamiento del anillo F de Saturno es originado por estructuras invariantes presentes en esa región [2]. Sin embargo, aún tomando en cuenta que las integraciones numéricas realizadas en este trabajo son un poco más largas que en el trabajo citado para el anillo F, no hay evidencia concluyente que permita proponer la existencia de este mecanismo para el anillo ϵ de Urano en el contexto de este modelo, al menos hasta $5 \times 10^6 T_{Co}$. Así, concluimos que el filtro de partículas debe ser validado por integraciones a tiempos aún más largos que $5 \times 10^6 T_{Co}$ antes de afirmar que este modelo puede ayudar a comprender el mecanismo de confinamiento y las propiedades geométricas del anillo ϵ en Urano.

Quedan varias preguntas por contestar respecto de los alcances de este modelo para el anillo ϵ de Urano. Por ejemplo, podrían compararse estos resultados con aquellos de un modelo del problema restringido de ocho cuerpos en el plano, el PR(7+1)BP, que incluya a las lunas principales de Urano: Titania, Miranda y Umbriel, además de Ariel, Cordelia y Ofelia. Otra pregunta es qué sucede al realizar simulaciones numéricas del PR(4 + 1)BP hasta $10^7 T_{Co}$ o inclusive $10^8 T_{Co}$ periodos de Cordelia para 10^8 o más condiciones iniciales dentro de la región $B(e_{\text{máx}} = 0.04)$, o bien, considerar el movimiento del problema restringido en tres dimensiones, para realmente conocer las estructuras invariantes presentes dentro de esta región que dan lugar a órbitas de confinamiento.

Después de más de 400 años desde su descubrimiento, muchas preguntas acerca de la formación y dinámica de los anillos planetarios permanecen sin respuesta [43].

Apéndice A

Generación de clusters HPC

Para realizar estas simulaciones numéricas se utilizó el EC2 (por sus siglas en inglés, *Elastic Compute Cloud*) de AWS (*Amazon Web Services*). La implementación del EC2 de Amazon está basada en Xen, un estándar de código abierto para la creación de máquinas virtuales. Una de las cualidades de Xen es que soporta la tecnología de multi-hilado simultáneo de Intel, denominada HyperThreading. De acuerdo con los desarrolladores del proyecto Xen, la tecnología HyperThreading permite al procesador ejecutar las instrucciones provenientes de un hilo de procesamiento mientras espera por una lectura de memoria para otro hilo de procesamiento, aprovechando así los recursos del procesador durante un tiempo que de otra manera sería tiempo de espera. Así, en promedio la velocidad de ejecución de procesos en paralelo aumenta, no obstante que ambos hilos están compartiendo los recursos del procesador. Los hilos de ejecución operando de esta manera se conocen como hiper-hilos (en inglés, *hyperthreads*); y en la nomenclatura del EC2 de Amazon a estos hiper-hilos se les denomina procesadores virtuales o vCPU, por sus siglas en inglés, *virtual CPU*. En particular, Xen permite crear, a partir de un mismo procesador físico, máquinas virtuales con un distinto número de vCPUs; sin embargo, las instancias de máquinas virtuales del EC2 de Amazon cuentan con una razón fija de vCPUs por núcleos lógicos del CPU físico la cual no puede ser modificada por el usuario para una instancia dada de un tipo específico de máquina virtual.

Utilizando la herramienta MIT-Starcluster especializada para el EC2 de AWS (la cual incluye la instalación del sistema Sun Grid Engine para la ejecución en paralelo de programas mediante el protocolo MPI), se generó un cluster con 20 nodos de procesamiento. Cada uno de estos nodos cuenta con un procesador Intel Xeon E5-2680 v2 (Ivy Bridge) de 20 núcleos, a una velocidad de 2.8GHz. En la nomenclatura del EC2 de AWS este tipo de instancia corresponde al tipo `c3.8xlarge`. Así, se generó un cluster de $(20 \text{ nodos}) \times (32 \text{ vCPU}) = 640$ procesadores efectivos, especializado en HPC (en inglés, *High Performance Computing*) para realizar las simulaciones numéricas descritas en el texto. Para información más detallada acerca de EC2 de AWS, Xen, y la herramienta Starcluster de MIT, puede accederse a los siguientes sitios:

- <http://wiki.xenproject.org/wiki/Hyperthreading>
- <https://aws.amazon.com/ec2/>
- <https://aws.amazon.com/ec2/instance-types/>
- <http://star.mit.edu/cluster/>

Bibliografía

- [1] C.S. Arridge et al. The science case for an orbital mission to Uranus: Exploring the origins and evolution of ice giant planets. *Planetary and Space Science*, 104, Part A(0):122 – 140, 2014. Surfaces, atmospheres and magnetospheres of the outer planets and their satellites and ring systems: Part X.
- [2] L. Benet and À. Jorba. Numerical results on a simple model for the confinement of Saturn’s F ring. *Progress and Challenges in Dynamical Systems, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics*, 54:65–75, 2013.
- [3] L. Benet and T.H. Seligman. *Generic occurrence of rings in rotating scattering systems. Phys. Lett. A*, 273:331–337, 2000.
- [4] L. Benet, T.H. Seligman, and D. Trautmann. *Chaotic scattering in the restricted three-body problem II. Small mass parameters. Cel. Mech. Dyn. Astron.*, 71:167—189, 1999.
- [5] R.L. Burden and J.D. Faires. *Numerical Analysis*. Brooks-Cole, 9 edition, 2011.
- [6] J. A. Burns. *The new Solar System*, chapter 16, page 230. Sky Publishing Corporation, Cambridge University Press, 1999.
- [7] S. Chandrasekhar. *Ellipsoidal Figures of Equilibrium*. Dover, 1987.
- [8] H.C. Corben and P. Stehle. *Classical Mechanics*. Dover, 2nd edition, 1994.
- [9] Goldberg D. What every computer scientist should know about floating-point arithmetic. *ACM Computing Surveys*, 23(1), 1991.

- [10] I. de Pater, S.G. Gibbard, and H.B. Hammel. *Evolution of the dusty rings of Uranus*. *Icarus*, 180:186–200, 2006.
- [11] I. de Pater, S.G. Gibbard, B.A. Macintosh, H.G. Roe, D.T. Gavel, and C.E. Max. *Keck Adaptive Optics of Uranus and its Rings*. *Icarus*, 160:359–374, 2002.
- [12] J.L. Elliot, E. Dunham, and D. Mink. *The rings of Uranus*. *Nature*, 267:328–330, 1977.
- [13] L. W. Esposito and Joshua E. Colwell. Creation of the uranus rings and dust bands. *Nature*, 339(6226):605–607, 06 1989.
- [14] L.W. Esposito. *Planetary Rings*. Cambridge University Press, 2006.
- [15] L.W. Esposito. *Planetary rings: a post-equinox view*. Cambridge University Press, second edition, 2014.
- [16] R. Fitzpatrick. *An Introduction to Celestial Mechanics*. Cambridge University Press, 2012.
- [17] R.G. French, J.L. Elliot, L.M. French, J.A. Kangas, K.J. Meech, and M.E. Ressler. *Uranian ring Orbits from Earth-based and Voyager Occultation Observations*. *Icarus*, 73:349–378, 1988.
- [18] R.G. French, J.L. Elliot, and S.E. Levine. *Structure of the Uranian Rings II. Orbits and Widths*. *Icarus*, 67:134–163, 1986.
- [19] R.G. French, F. Roques, P.D. Nicholson, C.A. McGhee, P. Bouchet, S.A. Maene, E.C. Mason, K.M. Matthews, and I. Mosquera. Earth-based detections of Uranus’ lambda ring. *Icarus*, 119(2):269–284, 1996.
- [20] T. Gehrels et al. Imaging photopolarimeter on Pioneer Saturn. *Science*, 207(4429):434–439, 1980.
- [21] P. Goldreich and S. Tremaine. *Towards a theory for the uranian rings*. *Nature*, 277:97–99, 1979.
- [22] G. Gómez, J.M. Mondelo, and C. Simò. A collocation method for the numerical Fourier analysis of quasiperiodic functions, I: numerical tests and examples. *DCDS Ser. B*, 14:41–74, 2010.
- [23] E. Grün, B.A.S. Gustafson, S. Dermott, and H. Fechtig, editors. *Interplanetary Dust*. Springer—Verlag, 2001.

- [24] C. Huygens. *Systema Saturnium*. Hagæ-Comitis, ex typographia A. Vlacq, 1659.
- [25] R.A. Jacobson. *The Orbits of the Inner Uranian Satellites from Hubble Space Telescope and Voyager Observations*. *Astronomical Journal*, 115:1195, 1997.
- [26] R.A. Jacobson. The gravity field of the Uranian system and the orbits of the Uranian satellites and rings. *BAAS*, 39:453, 2007.
- [27] R.A. Jacobson. The orbits of the Uranian satellites and rings, the gravity field of the Uranian system, and the orientation of the pole of Uranus. *Astronomical Journal*, 148(76), 2014.
- [28] H. Jeffreys and B. Jeffreys. *Methods of Mathematical Physics*. Cambridge University Press, 2000.
- [29] À. Jorba and M. Zou. *A software package for the numerical integration of ODE by means of high-order Taylor methods*. *Experimental Mathematics*, 14:99–117, 2004.
- [30] E. Karkoschka. Voyager’s eleventh discovery of a satellite of Uranus and photometry and the first size measurements of nine satellites. *Icarus*, 151:69–77, 2001.
- [31] J.L. Lagrange, A. Boissonnade (trans.), and V.N. Vagliente (trans.). *Analytical Mechanics*. Kluwer Academic Publishers, 2010.
- [32] A.L. Lane, C.W. Hord, R.A. West, L.W. Esposito, K.E. Simmons, R.M. Nelson, B.D. Wallis, B.J. Buratti, L.J. Horn, A.L. Graps, and W.R. Pryor. *Photometry from Voyager 2: Initial Results from the Uranian Atmosphere, Satellites, and its Rings*. *Science*, 233:65–70, 1986.
- [33] J. Laskar. The chaotic motion of the Solar System. A numerical estimate of the size of the chaotic zones. *Icarus*, 88, 1990.
- [34] J. Laskar. Introduction to frequency map analysis. In C. Simò, editor, *NATO ASI Hamiltonian Systems with Three or More Degrees of Freedom*, pages 134–150, 1999.
- [35] J. Laskar and R.A. Jacobson. Gust86. an analytical ephemeris of the uranian satellites. *Astronomy & Astrophysics*, 188:212, 1987.

- [36] J.C. Maxwell. *On the stability of the motion of Saturn's rings*. Cambridge, London, MacMillan and Co., 1859.
- [37] O. Merlo and L. Benet. *Strands and Braids in Narrow Planetary Rings: A Scattering Approach*. *Cel. Mech. Dyn. Astr.*, 97(24):49—72, 2007.
- [38] K.R. Meyer, G.R. Hall, and D. Offin. *Introduction to Hamiltonian dynamical systems and the N-body problem*. Springer, 2009.
- [39] E.D. Miner, R.R. Wessen, and J.N. Cuzzi. *Planetary Ring Systems*. Springer, 2007.
- [40] P.J. Mohr, B.N. Taylor, and D.B. Newell. Codata recommended values of the fundamental physical constants: 2010. *Rev. Mod. Phys.*, 84:1527—1605, 2012.
- [41] C.D. Murray and S.F. Dermott. *Solar System Dynamics*. Cambridge University Press, 1999.
- [42] C.C. Porco, E. Baker, and J. Barbara. Cassini imaging science: Initial results on saturn's rings and small satellites. *Science*, 307, 2005.
- [43] J. Salmon, S. Charnoz, A. Crida, and A. Brahic. *Long-term and large-scale viscous evolution of dense planetary rings*. *Icarus*, 209:771—785, 2010.
- [44] P.K. Seidelmann, B.A. Archinal, M.F. A'Hearn, A. Conrad, G.J. Consol-magno, D. Hestroffer, J.L. Hilton, G.A. Krasinsky, G. Neumann, J. Oberst, P. Stooke, E.F. Tedesco, D.J. Tholen, P.C. Thomas, and L.P. Williams. Report of the IAU/IAG working group on cartographic coordinates and rotational elements: 2006. *Cel. Mech. and Dyn. Astr.*, 98:155—180, 2007.
- [45] M. R. Showalter, J. J. Lissauer, R. G. French, D. P. Hamilton, P. D. Nicholson, and I. de Pater. The Outer Dust Rings of Uranus in the Hubble Space Telescope. In *AAS/Division of Dynamical Astronomy Meeting #39*, volume 39 of *AAS/Division of Dynamical Astronomy Meeting*, May 2008.
- [46] M.R. Showalter and J.J. Lissauer. *The Second Ring-Moon System of Uranus: Discovery and Dynamics*. *Science*, 311:973—977, 2006.

- [47] M. Spivak. *Calculus*. Publish or Perish, 1994.
- [48] E.C. Stone and E.D. Miner. The Voyager 2 encounter with the Uranian system. *Science*, 233:39–43, 1986.
- [49] G.L. Tyler, D.N. Sweetnam, J.D. Anderson, J.K. Campbell, V.R. Eshleman, D.P. Hinson, G.S. Levy, G.F. Lindal, E.A. Marouf, and R.A. Simpson. Voyager 2 radio science observations of the Uranian system: atmosphere, rings, and satellites. *Science*, 233:79–84, 1986.
- [50] S.J. Weidenschilling, C.R. Chapman, D.R. Davis, and R. Greenberg. *Planetary Rings*. University of Arizona Press, 1988.