



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**

FACULTAD DE CIENCIAS

Candidatos a materia oscura a partir de portales de Higgs

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

FÍSICO

P R E S E N T A:

JORGE ARMANDO ARROYO TRONCOSO



**DIRECTOR DE TESIS:
Dr. Saúl Noé Ramos Sánchez
2015**

Ciudad Universitaria, D. F.



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno

Arroyo

Troncoso

Jorge Armando

56485650

Universidad Nacional Autónoma de

México

Facultad de Ciencias

Física

307049342

2. Datos del tutor

Dr

Saúl Noé

Ramos

Sánchez

3. Datos del sinodal 1

Dr

José David

Vergara

Oliver

4. Datos del sinodal 2

Dr

Paul Artur Jens

Erler

5. Datos del sinodal 3

Dra

Gabriela

Murguía

Romero

6. Datos del sinodal 4

Dr

Alexis Armando

Aguilar

Arévalo

7. Datos del trabajo escrito

Candidatos a materia oscura a partir de
portales de Higgs

127 pp.

2015

Dedicado a mi madre, por ser madre, padre y
todo al mismo tiempo

Esta investigación fue realizada con el apoyo del proyecto CONACyT 151234 “Fenomenología y Geometría de la Teoría de Cuerdas”.

Índice general

Introducción	III
1. Teoría Cuántica de Campos y el Mecanismo de Higgs	1
1.1. Formalismo	1
1.2. Cuantización del campo escalar	3
1.3. Cuantización del Campo de Dirac	7
1.4. Ruptura espontánea de la simetría	11
1.4.1. Mecanismo de Higgs	13
1.4.2. Mecanismo de Stueckelberg	15
2. Materia Oscura	17
2.1. Evidencia sobre la existencia de Materia Oscura	19
2.1.1. Rayos-X en cúmulos de galaxias	19
2.1.2. Lentes gravitacionales	21
2.1.3. Curvas de rotación de galaxias	23
2.1.4. Anisotropías en el CMB	25
2.2. Materia oscura como una WIMP	26
2.3. Detección de materia oscura	30
2.3.1. DAMA	31
2.3.2. CoGeNT	31
2.3.3. CRESST	32
2.3.4. CDMS	32
2.3.5. XENON	33
2.3.6. LUX	34
3. Portales de Higgs	35
3.1. El portal a un segundo Higgs	36
3.2. El Higgs y la materia oscura	38
3.3. Inflación y el Higgs	41

4. El portal vectorial a la materia oscura	45
4.1. Decaimiento invisible del Higgs	49
4.2. Aniquilación de materia oscura	51
4.3. Cálculos a nivel de un lazo del portal vectorial	54
4.4. Contribuciones a un lazo del portal escalar	64
4.5. Estimación de las $ \mathcal{M}_i ^2$	68
4.5.1. Materia oscura vectorial	68
4.5.2. Materia oscura escalar	78
4.6. Interpretación Física	83
5. Conclusiones	87
A. Integrales de un lazo	91
A.1. Materia oscura vectorial	91
A.1.1. Lazo escalar	91
A.1.2. Lazo fermiónico	94
A.1.3. Lazo vectorial	97
A.1.4. Corrección al vértice	99
A.1.5. $h^2 X_\mu X^\mu$	100
A.1.6. Contribución del término de auto-interacción $(X_\mu X^\mu)^2$	101
A.2. Materia oscura escalar	102
A.2.1. Lazo $h^2 S^2$	102
A.2.2. Auto-energía del Higgs proveniente de S	103
A.2.3. Auto-interacción S^4	104
A.2.4. Corrección al vértice escalar	104
B. Cálculo de la tasa de decaimiento y otras fórmulas útiles	107
B.1. Integrales de Feynman	109
C. Elementos de Relatividad General	111
D. Reglas de Feynman	113
D.1. Materia oscura vectorial	113
D.2. Materia oscura escalar	114

Introducción

La teoría del Modelo Estándar (SM, por sus siglas en inglés), formulada en 1967 por Weinberg, Glashow y Salam, ha pasado todas las pruebas experimentales de los últimos 50 años. El descubrimiento del bosón (escalar) de Higgs [1, 2] en el LHC fue la última prueba que establece al SM como probablemente la teoría más exitosa y predictiva de nuestros tiempos.

A pesar de su éxito, el SM exhibe algunas limitaciones y preguntas abiertas. El SM describe tres de las cuatro fuerzas fundamentales de la naturaleza, el electromagnetismo, la fuerza débil y la fuerza fuerte, mediante tres teorías cuánticas de campos, excluyendo de este formalismo a la interacción restante, la gravitación, descrita por la teoría de la Relatividad General de Einstein. Mientras que es prácticamente un consenso que la descripción *clásica* de la gravedad es válida hasta la escala de Planck ($M_{Pl} \sim 10^{19}$ GeV), el SM no define hasta qué escala la descripción *cuántica* de las partículas es válida ni cómo conjugar estos dos formalismos tan disímiles. Otro aspecto débil del SM sigue siendo la estabilidad de la masa medida de la partícula de Higgs ($m_h \sim 125$ GeV) ante correcciones radiativas, las cuales exhiben divergencias cuadráticas. Típicamente, estas “deficiencias” son despreciadas, juzgando que el SM nunca ha pretendido explicar la gravedad cuántica, o bien, suponiendo parámetros ajustados finamente para cancelar las divergencias en la masa del Higgs mediante los mecanismos de *regularización y renormalización*.

Independientemente de esos temas, una pregunta ineludible nace del hecho de que, según la cosmología moderna, el SM sólo explica la naturaleza del 5 % del contenido del universo. De acuerdo con las observaciones más recientes de la sonda PLANCK [3], los datos obtenidos se ajustan a la cosmología sólo si ~ 68 % del contenido del universo se encuentra en una forma de energía que produce la expansión acelerada del universo (observada desde finales de los 1990s) mientras que el ~ 27 % restante es un tipo de materia compuesto por partículas muy masivas. Lo más peculiar de este 95 % de materia y energía oscuras es que, aunque el movimiento gravitacional de las estrellas, galaxias, cúmulos, etc. revela su probable presencia, ningún experimento ha sido capaz de observar estos ingredientes directamente. La conjetura a la que estas componentes del universo le deben el calificativo de “oscuras” es que no han sido detectadas porque las observaciones astrofísicas se basan esencialmente en las señales luminosas emitidas y estas sustancias no interactúan electromagnéticamente. Con el SM comprobado en su totalidad, un interesante reto se vislumbra: ¿es posible concebir una vía en el SM que permita explicar al menos la naturaleza de la materia oscura? Quizá la física de la partícula de Higgs, actualmente bajo el escrutinio experimental en el LHC,

podría arrojar una respuesta positiva. La posible resolución de este problema es el tema central de esta tesis y representa una contribución más allá del SM.

La explicación de la materia oscura en el formalismo del SM requiere la introducción de campos/partículas adicionales que interactúen con los campos del SM mediante algún mecanismo. El campo de Higgs H es el único operador del SM que se puede acoplar a un nivel (súper)renormalizable con campos adicionales y es, además, invariante de Lorentz, por lo cual éste ocupa una posición privilegiada en la física de partículas. Consecuentemente, podemos admitir la construcción de modelos en los que el Higgs se acople con sectores ocultos, i.e. sectores que no interactúan mediante las fuerzas explicadas por el SM, proporcionando candidatos viables a materia oscura. Los campos del sector oculto podrían ser estables y acoplarse débilmente con el sector del Higgs del SM; tal escenario es prometedor, pues la materia oscura interactúa gravitacionalmente y si lo hace de alguna otra forma se espera que, a lo más, lo haga débilmente. Este modelo está entonces en concordancia con la hipótesis cosmológica de que la materia oscura fría (CDM, por sus siglas en inglés) puede ser considerada compuesta de un tipo de partículas masivas débilmente-interactuantes (WIMPs, por sus siglas en inglés)[4].

El escenario planteado en el que la materia oscura interactúa sólo a través del Higgs con la materia conocida se conoce como mecanismo de *portales de Higgs*. Este término fue acuñado en [5] y lleva este nombre por motivos ligeramente poéticos, ya que se espera que el Higgs sea el que se convierta en el portal a sectores ocultos que han permanecido elusivos hasta la fecha. En estos modelos se construye una extensión del sector del Higgs, introduciendo nuevos campos escalares S y/o fuerzas adicionales basadas en simetrías locales $U^1(1)$ con sus respectivos vectores de norma X_μ , y típicamente una simetría Z_2 , impuesta sólo por estabilidad.¹ Dado que, tanto S como X_μ tienen dimensiones de masa, como el Higgs, en cuatro dimensiones acoplamientos del tipo

$$X_\mu X^\mu H^\dagger H, \quad S^2 H^\dagger H$$

son renormalizables e invariantes de Lorentz, i.e. perfectamente admisibles.

También es posible concebir un portal de Higgs con campos espinoriales ψ , pero estos presentan varios problemas. En un portal de Higgs fermiónico el término esencial tendría la forma

$$\frac{\lambda_{hf}}{\Lambda} \psi \bar{\psi} H^\dagger H,$$

el cual, en primer lugar, es no renormalizable, por lo que arrojaría divergencias insostenibles a menos de que ψ fuera integrado a una escala ultravioleta Λ , la cual a su vez requeriría, para ser explicada, una incursión en temas más complejos como supersimetría, gran unificación o teoría de cuerdas. En segundo lugar, es posible mostrar [6] que la materia oscura espinorial es fácilmente descartable al considerar los límites cosmológicos. Es por esto que en este trabajo nos enfocaremos en extensiones con campos vectoriales y escalares, neutros bajo todos los números cuánticos del SM, pero con

¹Esta simetría impide interacciones peligrosas en la Lagrangiana tales como el “renacuajo” αS o la mezcla cinética $F_{\mu\nu} G^{\mu\nu}$, con $G_{\mu\nu} = \partial_\mu X_\nu - \partial_\nu X_\mu$.

interacciones directas con el bosón de Higgs. Los campos débiles podrían adquirir masa mediante el rompimiento de simetría electrodébil o de la simetría adicional $U'(1)$ [7, 8] y podrían decaer, siempre que este cinemáticamente permitido, en partículas de Higgs. Adicionalmente, el Higgs podría decaer en materia oscura, por medio del portal de Higgs. Sin embargo, esta posibilidad es remota pues el decaimiento *invisible* del Higgs se encuentra muy constreñido [9].

En los portales de Higgs, la materia oscura se puede aniquilar y dar lugar a una partícula de Higgs, la cual decae partículas del SM, tales como quarks y leptones. Este proceso de aniquilación es relevante fenomenológicamente, pues conduce a señales que podrían haber sido o ser observadas. Para contrastar los datos, uno puede calcular la amplitud de aniquilación de materia oscura y producción de fermiones, y, a partir de esta, obtener la sección eficaz promedio $\langle\sigma v_r\rangle$, la cual está relacionada directamente con las observaciones cosmológicas, específicamente con la abundancia relicta Ωh^2 , que ya ha sido medida por distintos medios.

Hasta ahora, estos modelos han sido estudiados con detalle considerando sólo interacciones a nivel árbol [9, 10, 11, 12]. Sin embargo, dado que los portales de Higgs incluyen varios parámetros en principio arbitrarios, es posible que algunas contribuciones de mayor orden en teoría de perturbaciones resulten relevantes y modifiquen considerablemente los resultados previos. La finalidad del presente trabajo es iniciar la exploración de los canales de interacción a un lazo, particularmente considerando los límites en $\langle\sigma v_r\rangle$, para lo cual es preciso el cálculo detallado de las amplitudes de los procesos relevantes. Dado que, en general, tales contribuciones conducen a divergencias (logarítmicas, cuadráticas y cuárticas), deberemos recurrir a un proceso de regularización. Una de las preguntas que buscaremos responder es qué tan importantes pueden ser las contribuciones a $\langle\sigma v_r\rangle$ de los procesos que nos ocupan aquí.

En nuestro trabajo, será imprescindible tener un ojo en las datos experimentales que nos indique la validez de nuestros resultados. Observaciones de colaboraciones, tales como XENON [13], DAMA [14] y CoGeNT [15, 16], establecen constricciones para modelos de materia oscura y, en consecuencia, para los parámetros involucrados en los modelos de portales de Higgs. Estos experimentos están basados, en su mayoría, en detectores de bajo fondo, es decir, detectores que son capaces de alguna manera de cancelar el ruido de fondo producido por muones, fotones o partículas alfa provenientes de rayos cósmicos, ya que la tasa de eventos esperados producidos por la dispersión elástica de las WIMPs con núcleos es pequeña. Además, la sonda WMAP ha establecido el modelo cosmológico Λ CDM con gran precisión [17] y más recientemente PLANCK ha medido la abundancia relicta $\Omega_{CDM} h^2$ con un 3% de precisión, con valor de 0.1196 ± 0.0031 [18], brindando otra restricción a los modelos de materia oscura.

Organización de la tesis

A continuación, damos un breve resumen del contenido de los capítulos del presente trabajo, con la finalidad de guiar al lector no experimentado y de proporcionar datos que permitan al lector experto conocer dónde se encuentran los puntos fundamentales de nuestro estudio.

§ 1 Teoría cuántica de campos y el Higgs

La Teoría Cuántica de Campos es la rama de la física que engloba la mecánica cuántica y la relatividad especial de Einstein; con esta teoría es posible explicar fenómenos que ocurren a distancias muy pequeñas y escalas de energía muy altas. En esta sección se brinda una pequeña introducción en la cuantización del campo escalar de Klein-Gordon y el campo de Dirac. En la parte final, se presenta una breve descripción de los mecanismos teóricos desarrollados para generar la masa de partículas. En este sentido, se discuten el mecanismo de Higgs y el mecanismo de Stueckelberg.

§ 2 Materia oscura

De acuerdo con las observaciones astrofísicas y cosmológicas que se han realizado en los últimos años, la materia visible con la que interactuamos todos los días es tan sólo un pequeño porcentaje de la materia total del universo. La materia restante recibe el nombre de materia oscura, ya que sólo se sabe de su existencia por medio de sus efectos gravitacionales y no se conoce otro tipo de interacción entre esta y la materia visible por lo que ha permanecido elusiva a la detección directa. En esta sección se presenta, a manera de resumen, evidencia que apoya la existencia de este tipo de materia, así como los fundamentos teóricos que apoyan esta evidencia dados por el modelo cosmológico de Λ CDM. En la parte final de esta sección, se mencionan diferentes proyectos cuyos objetivos son la detección de la materia oscura.

§ 3 Portales de Higgs

Como se mencionó anteriormente, la naturaleza del campo de Higgs permite construir modelos en los que este se acopla de manera renormalizable a sectores ocultos. Dichos sectores podrían contener candidatos viables para la elusiva materia oscura. Esta sección está dedicada a presentar los portales de Higgs y sus diferentes fenomenologías. Al construir una extensión del sector de Higgs e introducir un nuevo campo de $U'(1)$ surgen diferentes posibilidades que dependen del tamaño del VEV de este nuevo campo. En particular para un campo escalar S , si este genera un VEV de la magnitud del VEV del campo de Higgs, S puede mezclarse con el Higgs y dar lugar a dos eigenestados de masa, uno de los cuales se puede identificar con el Higgs observado en el LHC y el otro con un campo que podría descubrirse muy pronto. La otra posibilidad es que si el campo S tiene un VEV $v \gg M_Z$ se vuelve un candidato a materia oscura. Aquí se discute la posibilidad de introducir también un portal vectorial $X^\mu X_\mu H^\dagger H$. Para concluir el capítulo, se menciona el papel que un portal de Higgs podría tener también en modelos inflacionarios.

§ 4 La materia oscura a través de los portales de Higgs

Este capítulo es el más importante de esta tesis pues aquí se presenta el análisis concerniente a la materia oscura. La materia oscura vectorial y escalar adquiere una masa después del rompimiento de la simetría electrodébil (o una simetría adicional). Con esta suposición, se realiza el cálculo de la tasa de decaimiento de la partícula de Higgs en materia oscura $\Gamma(h \rightarrow XX)$, pensando en la (remota) posibilidad de que esta partícula sea detectada en el

LHC. Posteriormente, se calcula la amplitud de aniquilación de materia oscura en partículas (fermiónicas) del Modelo Estándar a través del canal s a nivel árbol tanto para la materia oscura escalar como la vectorial y se comparan con los valores que son obtenidos en [10, 9]. A partir de esta amplitud, es posible determinar la sección eficaz de aniquilación σ y la sección eficaz promedio $\langle\sigma v_r\rangle$. Una vez conseguidos estos resultados, se prosigue con los cálculos completamente nuevos a nivel de un lazo; para simplificar los cálculos, debido al gran número de contribuciones involucradas a nivel de un lazo, nos concentramos únicamente en los más relevantes y totalmente nuevos. Después de obtener estas contribuciones llevo a cabo un análisis para estimar la magnitud de estas contribuciones y así poder determinar qué tan relevantes puedan ser en el cálculo de la amplitud de aniquilación total y por lo tanto, en la sección eficaz. Es importante mencionar que en esta sección se emplea el método de regularización dimensional, bajo el supuesto de que no existe una escala más fundamental que pueda alterar la física aquí estudiada.

§ 5 Conclusiones y Apéndices

Aquí se presentan las conclusiones de la tesis y los planes a futuro de la investigación. Es importante recalcar que en el primer Apéndice se presentan cálculos que no han sido realizado en la literatura existente, donde se introduce, entre otras cosas, una escala de corte Λ^2 para poder tratar con las divergencias que aparecen en las contribuciones a un lazo.

Capítulo 1

Teoría Cuántica de Campos y el Mecanismo de Higgs

La teoría cuántica de campos (QFT, por sus siglas en inglés) es la aplicación de la mecánica cuántica a sistemas dinámicos de campos, es decir, es la rama de la física que engloba el concepto de campo, la mecánica cuántica y la relatividad especial de Einstein ya que su principal objetivo es estudiar procesos que ocurren a escalas pequeñas y a muy altas energías. La teoría cuántica de campos surge de la necesidad de explicar aquello que la mecánica cuántica (no relativista) no puede, así como la mecánica cuántica fue necesaria cuando la mecánica Newtoniana falla en explicar diversos fenómenos. Por otro lado, la Relatividad de Einstein implica la existencia de antipartículas, a distancias más cortas que la longitud de onda Compton, los pares partícula-antipartícula se vuelven relevantes y hay probabilidades más grandes de que estos sean detectados. La presencia de estas partículas y antipartículas son responsables del fracaso de intentar escribir la ecuación de Schrödinger, por ejemplo, para un número fijo de partículas. Dado que no existe un mecanismo en mecánica cuántica para lidiar con esta situación, si uno quisiera escribir una versión relativista de la ecuación de Schrödinger surgen problemas como probabilidades negativas o estados de energía negativa así como ruptura de la causalidad, es por esto que en el caso de sistemas relativistas es necesario el formalismo de la teoría cuántica de campos.

1.1. Formalismo

El formalismo que utiliza la teoría cuántica de campos es el mismo que se utiliza en la teoría clásica de campos en donde las ecuaciones de movimiento de la mecánica clásica se pueden obtener a partir de las ecuaciones de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (1.1)$$

q_i son las coordenadas generalizadas de las partículas y $\dot{q}_i = dq_i/dt$; el Lagrangiano es

$$L \equiv T - V, \quad (1.2)$$

donde T y V son la energía cinética y potencial del sistema, respectivamente.

La cantidad fundamental en mecánica clásica es la acción, S , la integral temporal del Lagrangiano L . En una teoría local el Lagrangiano se puede escribir como la integral espacial de una densidad Lagrangiana \mathcal{L} comúnmente referida sólo como Lagrangiano, que es una función de uno o mas campos, $\phi(x)$ y sus derivadas, $\partial_\mu\phi$

$$S = \int L dt = \int \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi) d^4x. \quad (1.3)$$

El principio de mínima acción nos dice que cuando un sistema evoluciona de una configuración a otra en un intervalo de tiempo $\Delta t = t_2 - t_1$ lo hace a lo largo de la trayectoria para la cual S es un extremo, es decir

$$0 = \delta S = \int d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta (\partial_\mu \phi) \right\} = \int d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta \phi \right) + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta \phi \right) \right\}. \quad (1.4)$$

El último término puede convertirse en una integral de superficie a lo largo de la frontera de la región de integración cuatro dimensional, la cual se puede desvanecer si consideramos deformaciones de $\delta\phi$ que desaparezcan en la parte espacial de la frontera de dicha región. Dado que la integral debe ser cero para un $\delta\phi$ arbitrario, al factorizar $\delta\phi$ de los primeros dos términos se obtienen las ecuaciones de Euler-Lagrange del campo ϕ ,

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0 \quad (1.5)$$

El formalismo Hamiltoniano también es de gran utilidad; el Hamiltoniano H está relacionado con el Lagrangiano, en un sistema discreto, a través de una transformación de Legendre, $H \equiv \Sigma p \dot{q} - L$. Para generalizar a un sistema continuo es conveniente definir la densidad de momento conjugada a $\phi(\mathbf{x})$,

$$\pi(\mathbf{x}) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}(\mathbf{x})} \quad (1.6)$$

por lo tanto, el Hamiltoniano se puede escribir de la siguiente forma

$$H = \int d^3x [\pi(\mathbf{x}) \dot{\phi}(\mathbf{x}) - \mathcal{L}] \equiv \int d^3x \mathcal{H}, \quad (1.7)$$

con \mathcal{H} la densidad Hamiltoniana.

Otro de los conceptos importantes es el de simetrías; el rol de las simetrías en teoría cuántica de campos es más importante que en mecánica cuántica. Existen diferentes tipos de simetrías, de

norma, internas, supersimetrías, entre otras. La relación entre simetrías y leyes de conservación está contenida en el teorema de Noether. Por simetría, entiéndase una transformación que deja las ecuaciones de movimiento invariantes. El teorema de Noether dice que cada simetría continua del Lagrangiano da lugar a una corriente conservada $j^\mu(x)$, tal que las ecuaciones de movimiento implican

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \quad (1.8)$$

Una corriente conservada implica una carga conservada, definida como:

$$Q = \int d^3x j^0, \quad (1.9)$$

la conservación de Q es evidente cuando estudiamos su evolución temporal

$$\frac{dQ}{dt} = \int d^3x \frac{\partial j^0}{\partial t} = - \int d^3x \nabla \cdot \mathbf{j} = 0. \quad (1.10)$$

Aplicando el teorema de Noether a transformaciones espacio-temporales como son las traslaciones infinitesimales

$$x^\mu \rightarrow x^\mu - a^\mu; \quad (1.11)$$

las cuales aplicadas a un campo ϕ se ven como

$$\phi(x) \rightarrow \phi(x + a) = \phi(x) + a^\mu \partial_\mu \phi(x), \quad (1.12)$$

entonces, dado que el Lagrangiano es un escalar, este se debe de transformar como tal:

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + a^\mu \partial_\mu \mathcal{L} = \mathcal{L} + a^\nu \partial_\mu (\delta_\nu^\mu \mathcal{L}), \quad (1.13)$$

ya que el Lagrangiano debe ser invariante hasta una divergencia [19], obtenemos así cuatro corrientes conservadas

$$T^\mu{}_\nu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \partial_\nu \phi - \mathcal{L} \delta_\nu^\mu. \quad (1.14)$$

Este es el tensor de energía-momento del campo ϕ , cuya carga conservada asociada con traslaciones temporales es el Hamiltoniano:

$$H = \int T^{00} d^3x = \int \mathcal{H} d^3x. \quad (1.15)$$

1.2. Cuantización del campo escalar

El campo más simple es el famoso campo de Klein-Gordon; considérese un campo $\phi(\mathbf{x})$ que satisface el Lagrangiano

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2, \quad (1.16)$$

cuya ecuación de movimiento es, de acuerdo a (1.5),

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + m^2\right)\phi = 0 \quad \text{o} \quad (\partial^\mu \partial_\mu + m^2)\phi = 0, \quad (1.17)$$

que es la conocida ecuación de Klein-Gordon. El Hamiltoniano de esta teoría está dado por (1.7)

$$H = \int d^3x \mathcal{L} = \int d^3x \left[\frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2 \right]. \quad (1.18)$$

La ecuación de Klein-Gordon a pesar de ser una ecuación relativista, es una ecuación de campo clásica, al igual que las ecuaciones de Maxwell y no una ecuación de la mecánica cuántica. Para cuantizar esta teoría se promueven ϕ y π a operadores y se imponen relaciones de conmutación apropiadas; en un sistema discreto de una o más partículas las relaciones de conmutación son

$$[q_i, p_j] = i\delta_{ij}; \quad [q_i, q_j] = [p_i, p_j] = 0. \quad (1.19)$$

La generalización para un sistema continuo, dado que $\pi(x)$ es una densidad de momento, solamente consiste en sustituir la delta de Kronecker por una función delta de Dirac,

$$[\phi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{y})] = i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}); \quad [\phi(\mathbf{x}), \phi(\mathbf{y})] = [\pi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{y})] = 0. \quad (1.20)$$

Hasta este punto los conceptos utilizados son los mismos que se utilizan en la mecánica cuántica; usualmente la información que uno busca extraer de una teoría cuántica es el espectro del Hamiltoniano H . En teorías de campo esto puede ser muy complicado, debido al número infinito de grados de libertad que existen, al menos uno por cada punto \mathbf{x} . Sin embargo, existen teorías llamadas *teorías libres* en las que se puede escribir la dinámica de forma que cada grado de libertad evoluciona independientemente de los demás. La ecuación de Klein-Gordon (1.17) es el ejemplo más sencillo de una teoría libre relativista.

En general, si los operadores ϕ y π dependen del tiempo

$$\phi(x) = \phi(\mathbf{x}, t) = e^{iHt}\phi(\mathbf{x})e^{-iHt}, \quad (1.21)$$

la ecuación de Heisenberg nos permite saber la dependencia temporal de ϕ y π :

$$\begin{aligned} i\frac{\partial}{\partial t}\phi(\mathbf{x}, t) &= [\phi(x), H] = i\pi(\mathbf{x}, t) \\ i\frac{\partial}{\partial t}\pi(\mathbf{x}, t) &= [\pi(x), H] = -i(-\nabla^2 + m^2)\phi(\mathbf{x}, t). \end{aligned} \quad (1.22)$$

Combinando estas dos ecuaciones llegamos nuevamente a la ecuación (1.17)

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi = (\nabla^2 - m^2)\phi. \quad (1.23)$$

Para mostrar como se desacoplan los grados de libertad unos de otros, es conveniente escribir la ecuación de Klein-Gordon en el espacio de Fourier,

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \phi(\mathbf{p}, t), \quad (1.24)$$

la ecuación de Klein-Gordon se vuelve

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + (|\mathbf{p}|^2 + m^2) \right) \phi(\mathbf{p}, t) = 0. \quad (1.25)$$

Esta es, en esencia, la ecuación de movimiento para un oscilador armónico con frecuencia

$$\omega_{\mathbf{p}} = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2}. \quad (1.26)$$

Para la ecuación de Klein-Gordon podemos realizar el mismo truco utilizado en mecánica cuántica de introducir operadores escalera a y a^\dagger ; pero en este caso cada modo de Fourier se trata como un oscilador independiente con sus propios operadores a y a^\dagger , es decir,

$$\phi(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} [a_{\mathbf{p}} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} + a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}]; \quad (1.27)$$

$$\pi(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} (-i) \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{p}}}{2}} [a_{\mathbf{p}} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} - a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}]. \quad (1.28)$$

No es difícil demostrar que los operadores ϕ y π satisfacen las reglas de conmutación (ec. (1.20)); sí asumimos que a y a^\dagger satisfacen

$$[a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{q}}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}), \quad (1.29)$$

entonces en efecto, los operadores ϕ y π satisfacen las relaciones (1.20)

$$\begin{aligned} [\phi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{y})] &= \int \frac{d^3p d^3q}{(2\pi)^3 (2\pi)^3} \frac{-i}{2} \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{q}}}{\omega_{\mathbf{p}}}} \left([a_{\mathbf{p}}^\dagger, a_{\mathbf{q}}] e^{-i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x} - \mathbf{q}\cdot\mathbf{y})} - [a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{q}}^\dagger] e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x} - \mathbf{q}\cdot\mathbf{y})} \right) \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{i}{2} (e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x} - \mathbf{y})} + e^{-i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x} - \mathbf{y})}) \\ &= i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \end{aligned} \quad (1.30)$$

De esta forma podemos escribir el Hamiltoniano en términos de los operadores escalera; si reorganizamos las ecuaciones (1.27) y (1.28) de la siguiente forma

$$\phi(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} (a_{\mathbf{p}} + a_{-\mathbf{p}}^\dagger) e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}; \quad (1.31)$$

$$\pi(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} (-i) \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{p}}}{2}} (a_{\mathbf{p}} - a_{-\mathbf{p}}^\dagger) e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}, \quad (1.32)$$

el Hamiltoniano (1.18) queda escrito como

$$\begin{aligned} H &= \int d^3x \int \frac{d^3p d^3q}{(2\pi)^6} e^{i(\mathbf{p}+\mathbf{q})\cdot\mathbf{x}} \left\{ -\frac{\sqrt{\omega_{\mathbf{p}}\omega_{\mathbf{q}}}}{4} (a_{\mathbf{p}} - a_{-\mathbf{p}}^\dagger)(a_{\mathbf{q}} - a_{-\mathbf{q}}^\dagger) \right. \\ &\quad \left. + \frac{-\mathbf{p}\cdot\mathbf{q} + m^2}{4\sqrt{\omega_{\mathbf{p}}\omega_{\mathbf{q}}}} (a_{\mathbf{p}} + a_{-\mathbf{p}}^\dagger)(a_{\mathbf{q}} + a_{-\mathbf{q}}^\dagger) \right\} \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \omega_{\mathbf{p}} (a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} + \frac{1}{2} [a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{p}}^\dagger]) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \omega_{\mathbf{p}} \left(a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} + \frac{1}{2} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(0) \right). \end{aligned} \quad (1.33)$$

Nuevamente, en analogía con el oscilador armónico, el vacío $|0\rangle$ se define como el estado que satisface

$$a_{\mathbf{p}} |0\rangle = 0, \quad (1.34)$$

y tiene $E = 0$, si se ignora el término $\frac{1}{2}(2\pi)^3 \delta^{(3)}(0)$ en (1.33), él cual es la contribución de todos los modos de energías $\omega_{\mathbf{p}}/2$ en el punto cero. Los eigenestados de energía se construyen haciendo actuar a $a_{\mathbf{p}}^\dagger$ sobre el vacío $|0\rangle$

$$|\mathbf{p}\rangle = a_{\mathbf{p}}^\dagger |0\rangle, \quad (1.35)$$

estos estados tienen momento \mathbf{p} y energía

$$\omega_{\mathbf{p}} = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2}, \quad (1.36)$$

identificando $E_{\mathbf{p}} = \omega_{\mathbf{p}}$, la relación (1.36) es la relación de dispersión relativista para una partícula con masa m y momento \mathbf{p} . De igual forma los estados de múltiples partículas $a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{q}}^\dagger \dots |0\rangle$, poseen momento $\mathbf{p} + \mathbf{q} + \dots$. Dado que los operadores $a_{\mathbf{p}}^\dagger$ y $a_{\mathbf{q}}^\dagger$ conmutan, entonces el estado $a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{q}}^\dagger |0\rangle$ es idéntico al estado $a_{\mathbf{q}}^\dagger a_{\mathbf{p}}^\dagger |0\rangle$, por lo tanto, las partículas de Klein-Gordon siguen la estadística de Bose-Einstein.

El espacio de Hilbert completo de la teoría se genera a través de las posibles combinaciones de $a_{\mathbf{p}}^\dagger$ actuando sobre el vacío

$$|0\rangle, \quad a_{\mathbf{p}}^\dagger |0\rangle, \quad a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{q}}^\dagger |0\rangle, \dots \quad (1.37)$$

Este espacio recibe el nombre de *espacio de Fock*, el cual es la suma de los espacios de Hilbert de n-partículas. Aquí se puede definir un operador N que conmuta con el Hamiltoniano

$$N = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}}, \quad (1.38)$$

lo cual quiere decir que el número de partículas se conserva, esta es una propiedad de las teorías libres.

1.3. Cuantización del Campo de Dirac

En la naturaleza la mayoría de las partículas posee un momento angular intrínseco, en la sección anterior vimos que la cuantización de un campo escalar da lugar a partículas de espín 0. La cuantización de la ecuación de Dirac da lugar a partículas de espín 1/2, es decir, fermiones. Debido a esto las representaciones del grupo de Lorentz correspondientes a espín 1/2 son importantes. Tomando un conjunto de matrices de $n \times n$ que satisface el álgebra de Clifford o álgebra de Dirac

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} \times 1_{n \times n}. \quad (1.39)$$

De esta forma se puede escribir una representación n-dimensional del álgebra de Lorentz:

$$S^{\mu\nu} = \frac{i}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \quad (1.40)$$

Estas matrices $S^{\mu\nu}$ forman una representación del álgebra de Lorentz, ya que

$$[S^{\mu\nu}, S^{\rho\sigma}] = S^{\mu\sigma} g^{\nu\rho} - S^{\nu\sigma} g^{\rho\mu} + S^{\rho\mu} g^{\nu\sigma} - S^{\rho\nu} g^{\sigma\mu} \quad (1.41)$$

En el caso de el espacio de Minkowski 4-dimensional, las matrices γ^μ que satisfacen el álgebra de Dirac son, en la llamada representación de Weyl,

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \quad (1.42)$$

donde σ^i con $i = 1, 2, 3$, son las matrices de Pauli. En dicha representación los generadores de los boost y rotaciones son

$$S^{0i} = \frac{i}{4} [\gamma^0, \gamma^i] = \frac{-i}{2} \begin{pmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & -\sigma^i \end{pmatrix} \quad (1.43)$$

y

$$S^{ij} = \frac{i}{4} [\gamma^i, \gamma^j] = \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} \begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix}. \quad (1.44)$$

Un campo ψ que se transforma bajo boosts y rotaciones de acuerdo a las ecuaciones (1.43) y (1.44) se llama *espinor de Dirac*. Para construir una ecuación de movimiento que sea invariante de Lorentz, se requiere una acción que también sea invariante de Lorentz. Dado que la representación del grupo de Lorentz no es unitaria, se define el adjunto de Dirac como:

$$\bar{\psi}(x) = \psi^\dagger(x) \gamma^0 \quad (1.45)$$

Con el espinor de Dirac ψ y su adjunto $\bar{\psi}$ se pueden formar varios objetos covariantes, por ejemplo, el producto $\bar{\psi}\psi$ es un escalar de Lorentz, mientras que $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ se transforma como un vector,

$$\bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) \rightarrow \Lambda_\nu^\mu \bar{\psi}(\Lambda^{-1}x) \gamma^\nu \psi(\Lambda^{-1}x) \quad (1.46)$$

y de igual forma $\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^\nu\psi$ se transforma como un tensor. Con estos campos bilineales de Dirac es posible construir la acción de Dirac invariante de Lorentz,

$$S = \int d^4x \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x). \quad (1.47)$$

La ecuación de movimiento de (1.47) se obtiene a partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange (1.5). La ecuación de movimiento que se obtiene para el campo $\bar{\psi}$ es la *ecuación de Dirac*

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = 0. \quad (1.48)$$

La otra ecuación que se obtiene (al derivar respecto al campo ψ) es la conjugada

$$i\partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu + m\bar{\psi} = 0 \quad (1.49)$$

La ecuación de Dirac es invariante de Lorentz y cada uno de sus componentes es solución a la ecuación de Klein-Gordon (1.17)

$$\begin{aligned} & (-i\gamma^\mu\partial_\mu - m)(i\gamma^\nu\partial_\nu - m)\psi \\ &= (\gamma^\mu\gamma^\nu\partial_\mu\partial_\nu + m^2)\psi = \left(\frac{1}{2}\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\}\partial_\mu\partial_\nu + m^2\right)\psi \\ &= (\partial^2 + m^2)\psi = 0 \end{aligned} \quad (1.50)$$

El espinor de Dirac posee 4 componentes complejas, ergo, 8 componentes reales pero esto no quiere decir que existan 8 grados de libertad para el espinor. Como la densidad de momento de ψ esta dada por

$$\pi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\psi}} = i\psi^\dagger, \quad (1.51)$$

el espacio fase del espinor está parametrizado por ψ y ψ^\dagger y posee 8 dimensiones reales, por lo tanto el número de grados de libertad es 4.

Ahora, como la ecuación de Dirac da lugar a la ecuación de Klein-Gordon y las componentes de ψ son soluciones de esta, es posible escribir a ψ como una combinación lineal de ondas planas (en el caso de frecuencias positivas, i.e. $p^0 > 0$),

$$\psi(x) = u(p)e^{-ip^\mu x_\mu} \quad \text{y} \quad p^2 = m^2 \quad (1.52)$$

Al sustituir la expresión anterior en la ecuación de Dirac (1.48) se obtiene una condición para el vector columna $u(p)$:

$$(\gamma^\mu p_\mu - m)u(p) = 0 \quad (1.53)$$

En el marco de referencia en reposo ($p = (m, \mathbf{0})$), la ecuación (1.53) se ve de la forma

$$(m\gamma^0 - m)u(p_0) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} u(p_0) = 0 \quad (1.54)$$

con solución

$$u(p_0) = \sqrt{m} \begin{pmatrix} \xi \\ \xi \end{pmatrix} \quad (1.55)$$

para un espinor arbitrario ξ . Para obtener la forma general de $u(p)$ en cualquier marco de referencia basta con aplicarle un boost. La solución para una dirección arbitraria de \mathbf{p} se ve de la forma

$$u(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \xi \\ \sqrt{p \cdot \sigma} \xi \end{pmatrix}. \quad (1.56)$$

El ansatz

$$\psi = v(\mathbf{p}) e^{ip^\mu x_\mu}, \quad (1.57)$$

también es solución a la ecuación de Dirac, estas soluciones oscilan como e^{iEt} y se conocen como soluciones de frecuencias negativas, no obstante estas soluciones, al igual que (1.52), poseen energía positiva. El espinor $v(\mathbf{p})$ satisface

$$(\gamma^\mu p_\mu + m)v(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} m & p_\mu \sigma^\mu \\ p_\mu \bar{\sigma}^\mu & m \end{pmatrix} v(\mathbf{p}) = 0 \quad (1.58)$$

cuya solución análogo a (1.55) es

$$v(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \eta \\ -\sqrt{p \cdot \sigma} \eta \end{pmatrix}. \quad (1.59)$$

Para cuantizar el campo de Dirac el proceso llevado a cabo es similar al de la cuantización del campo de Klein-Gordon, pero fundamentalmente diferente. El teorema espín-estadística dice que los campos con espín entero deben cuantizarse como bosones, mientras que los campos con espín semientero se tienen que cuantizar como fermiones. La diferencia con la cuantización de la sección anterior 1.2 es que el campo de Dirac describe partículas de espín 1/2, por lo tanto obedecen la estadística de Fermi-Dirac. Entonces para poder cuantizar esta teoría se utilizan relaciones de anticonmutación $\{a, b\}$ en lugar de las relaciones (1.20)

$$\{\psi_a(x), \psi_b(y)\} = \{\psi_a^\dagger(x), \psi_b^\dagger(y)\} = 0; \quad \{\psi_a(x), \psi_b^\dagger(y)\} = \delta_{ab} \delta^{(3)}(x - y). \quad (1.60)$$

En el marco de Heisenberg, el espinor $\psi(\mathbf{x}, t)$ definido sobre todo punto del espacio-tiempo, satisface la ecuación de Heisenberg

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = i[H, \psi] \quad (1.61)$$

Nuevamente, las soluciones se pueden escribir como suma de ondas planas ya que se trata de una teoría libre

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \Sigma \left(a_{\mathbf{p}}^s u^s(p) e^{-ip^\mu x_\mu} + b_{\mathbf{p}}^{s\dagger} v^s(p) e^{ip^\mu x_\mu} \right); \\ \bar{\psi}(x) &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \Sigma \left(b_{\mathbf{p}}^s \bar{v}^s(p) e^{-ip^\mu x_\mu} + a_{\mathbf{p}}^{s\dagger} \bar{u}^s(p) e^{ip^\mu x_\mu} \right), \end{aligned} \quad (1.62)$$

donde los operadores $a_{\mathbf{p}}^s$ y $a_{\mathbf{p}}^{s\dagger}$ son los operadores de creación y aniquilación asociados a los espinores $u^s(p)$ y los operadores $b_{\mathbf{p}}^s$ y $b_{\mathbf{p}}^{s\dagger}$ asociados a $v^s(p)$, cuyas relaciones de anticonmutación

$$\{a_{\mathbf{p}}^r, a_{\mathbf{q}}^{s\dagger}\} = \{b_{\mathbf{p}}^r, b_{\mathbf{q}}^{s\dagger}\} = (2\pi)^3 \delta^{rs} \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}), \quad (1.63)$$

son equivalentes a las relaciones (1.60).

El vacío $|0\rangle$, es el estado definido como

$$a_{\mathbf{p}}^s |0\rangle = b_{\mathbf{p}}^s |0\rangle = 0. \quad (1.64)$$

El Hamiltoniano se puede escribir, ignorando el término infinito que surge del anticonmutador de $b_{\mathbf{p}}^s$ y $b_{\mathbf{p}}^{s\dagger}$, como

$$H = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \Sigma E_{\mathbf{p}} \left(a_{\mathbf{p}}^{s\dagger} a_{\mathbf{p}}^s + b_{\mathbf{p}}^{s\dagger} b_{\mathbf{p}}^s \right), \quad (1.65)$$

y este obedece las siguientes reglas de conmutación con los operadores a y b ,

$$\begin{aligned} [H, a_{\mathbf{p}}^r] &= -E_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}^r & \text{y} & \quad [H, a_{\mathbf{p}}^{r\dagger}] = E_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}^{r\dagger} \\ [H, b_{\mathbf{p}}^r] &= -E_{\mathbf{p}} b_{\mathbf{p}}^r & \text{y} & \quad [H, b_{\mathbf{p}}^{r\dagger}] = E_{\mathbf{p}} b_{\mathbf{p}}^{r\dagger}, \end{aligned} \quad (1.66)$$

por tanto, es posible construir eigenestados de energía haciendo actuar a los operadores a y b en el vacío para crear partículas y antipartículas. Los estados de una partícula se definen de la siguiente forma:

$$|\mathbf{p}, s\rangle \equiv \sqrt{2E_{\mathbf{p}}} a_{\mathbf{p}}^{s\dagger} |0\rangle \quad (1.67)$$

de tal manera que su producto interior es invariante de Lorentz

$$\langle \mathbf{p}, r | \mathbf{q}, s \rangle = 2E_{\mathbf{p}} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \delta^{rs}. \quad (1.68)$$

Y en el caso de estados de dos partículas, estos satisfacen

$$|\mathbf{p}, r_1; \mathbf{q}, r_2\rangle \equiv 2\sqrt{E_{\mathbf{p}} E_{\mathbf{q}}} a_{\mathbf{p}}^{r_1\dagger} a_{\mathbf{q}}^{r_2\dagger} |0\rangle, \quad (1.69)$$

de donde se puede apreciar que las partículas obedecen la estadística de Fermi-Dirac. En el caso de $\mathbf{p} = \mathbf{q}$ y $r_1 = r_2$ se tiene el principio de exclusión de Pauli.

El propagador fermiónico se define por medio de las reglas de conmutación (1.60) de la siguiente manera

$$iS_{ab} = \{\psi_a(x), \bar{\psi}_b(y)\} \quad (1.70)$$

donde, si reemplazamos las expresiones (1.62), el propagador se ve como

$$\begin{aligned} iS(x-y) &= \int \frac{d^3p d^3q}{(2\pi)^3 (2\pi)^3} \frac{1}{2\sqrt{E_{\mathbf{p}} E_{\mathbf{q}}}} \left[\{a_{\mathbf{p}}^r, a_{\mathbf{q}}^{s\dagger}\} u^r(\mathbf{p}) \bar{u}^s(\mathbf{q}) e^{-i(p^\mu x_\mu - q^\mu y_\mu)} + \right. \\ &\quad \left. \{b_{\mathbf{p}}^r, b_{\mathbf{q}}^{s\dagger}\} v^r(\mathbf{p}) \bar{v}^s(\mathbf{q}) e^{i(p^\mu x_\mu - q^\mu y_\mu)} \right] \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} \left[(\not{p} + m) e^{-ip^\mu(x_\mu - y_\mu)} + (\not{p} - m) e^{ip^\mu(x_\mu - y_\mu)} \right] \end{aligned} \quad (1.71)$$

Este se puede escribir en términos del propagador del campo escalar $D(x - y)$

$$iS(x - y) = (i\cancel{\partial} + m)(D(x - y) - D(y - x)), \quad (1.72)$$

donde $D(x - y)$ está escrito

$$D(x - y) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} e^{-ip^\mu(x_\mu - y_\mu)} \quad (1.73)$$

Para los fermiones fuera del cono de luz

$$\{\psi_a(x), \bar{\psi}_b(y)\} = 0, \quad (x - y)^2 < 0, \quad (1.74)$$

la causalidad se mantiene siempre y cuando los operadores fermiónicos no sean observables.

1.4. Ruptura espontánea de la simetría

En la Electrodinámica Cuántica y la Cromodinámica Cuántica (QED y QCD, por sus siglas en inglés respectivamente), uno de los requerimientos para los fotones y los gluones es que estos no deben tener masa ya que la presencia de un término de masa acaba con la invariancia de norma del Lagrangiano. Al querer aplicar estas ideas a la interacción débil uno se encuentra con problemas ya que esta interacción está mediada por los bosones de norma W^\pm , Z , los cuales se sabe tienen masas del orden de 100 GeV . Si uno introduce un término al Lagrangiano de la forma $M^2 W_\mu W^\mu$ e ignora los términos adicionales y su efecto de rompimiento de la simetría aparecen divergencias no-renormalizables [20].

Consideremos el siguiente Lagrangiano,

$$\mathcal{L} \equiv T - V = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \left(\frac{1}{2}\mu^2 \phi^2 + \frac{1}{4}\lambda \phi^4\right), \quad (1.75)$$

con ϕ un campo escalar y $\lambda > 0$. Es fácil notar que \mathcal{L} es invariante ante la transformación $\phi \rightarrow -\phi$. El caso $\mu^2 > 0$ describe un campo escalar con masa μ con estado base $\phi = 0$ y el término ϕ^4 es el término de auto-interacción. Sin embargo, el caso $\mu^2 < 0$ es más interesante; el Lagrangiano posee un término de masa con signo incorrecto para ϕ . En este caso el potencial tiene dos mínimos que satisfacen

$$\frac{\partial V}{\partial \phi} = \phi(\mu^2 + \lambda \phi^2) = 0. \quad (1.76)$$

Estos mínimos se localizan en

$$\phi = \pm \sqrt{-\mu^2/\lambda} = \pm v. \quad (1.77)$$

Para realizar cálculos perturbativos, desarrollamos alrededor del mínimo $\phi = v$,

$$\phi(x) = v + \eta(x), \quad (1.78)$$

donde $\eta(x)$ representa las fluctuaciones cuánticas alrededor de dicho mínimo. Al sustituir (1.78) en el Lagrangiano (1.75) se llega a un “nuevo” Lagrangiano,

$$\mathcal{L}' = \frac{1}{2}(\partial_\mu\eta)^2 - \lambda v^2\eta^2 - \lambda v\eta^3 - \frac{1}{4}\lambda\eta^4 + cte. \quad (1.79)$$

Y de esta forma, el signo del término de masa de η es correcto esta vez,

$$m_\eta = \sqrt{2\lambda v^2} = \sqrt{-2\mu^2}. \quad (1.80)$$

Los Lagrangianos (1.75) y (1.79) son equivalentes, por lo tanto la transformación que llevamos a cabo con (1.78) no altera la física del sistema. Sin embargo, si quisieramos llevar a cabo un cálculo perturbativo utilizando \mathcal{L} nuestro resultado no convergería ya que estamos desarrollando alrededor de un punto inestable $\phi = 0$; en cambio si utilizamos \mathcal{L}' y desarrollamos alrededor de $\phi = +v$ (o $\phi = -v$, por simetría el resultado es el mismo) obtendríamos el resultado correcto ya que la partícula escalar posee una masa m_η . La manera en como esta masa es “generada” se conoce como *ruptura espontánea de la simetría*.

Ahora repitiendo el mismo procedimiento para un campo escalar complejo $\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + \phi_2)$ con Lagrangiano

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu\phi)^*(\partial^\mu\phi) - \mu^2\phi^*\phi - \lambda(\phi^*\phi)^2, \quad (1.81)$$

el cual tiene una simetría global de norma $U(1)$, ya que es invariante bajo la transformación $\phi \rightarrow e^{i\alpha}\phi$ y considerando nuevamente el caso en que $\lambda > 0$ y $\mu^2 < 0$, el Lagrangiano se puede reescribir como,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_1)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_2)^2 - \frac{1}{2}\mu^2(\phi_1^2 + \phi_2^2) - \frac{1}{4}\lambda(\phi_1^2 + \phi_2^2). \quad (1.82)$$

En este caso el mínimo del potencial $V(\phi)$ vive en un círculo de radio v en el plano ϕ_1, ϕ_2 , como se muestra en la figura (?). Si trasladamos a ϕ a la posición de mínima energía y consideramos, sin pérdida de generalidad, $\phi_1 = v$ y $\phi_2 = 0$ y desarrollamos \mathcal{L} alrededor del vacío, al sustituir

$$\phi(x) = \sqrt{\frac{1}{2}}[v + \eta(x) + i\xi(x)] \quad (1.83)$$

en la ecuación (1.82), se obtiene

$$\mathcal{L}' = \frac{1}{2}(\partial_\mu\xi)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\eta)^2 + \mu^2\eta^2 + \mathcal{O}(\eta^3) + cte \quad (1.84)$$

donde el tercer término tiene la forma de un término de masa ($-\frac{1}{2}m_\eta^2\eta^2$) para el campo η . Por lo tanto, $m_\eta = \sqrt{-2\mu^2}$. Por otro lado, el primer término en \mathcal{L}' corresponde a la energía cinética del campo ξ , sin embargo, no hay un término de masa correspondiente a ξ . Entonces, la teoría contiene un escalar sin masa conocido como bosón de Goldstone.

El Lagrangiano (1.82) es un claro ejemplo del teorema de Goldstone, el cual nos dice que estados sin masa ocurren siempre que una simetría continua de un sistema físico se rompe “espontáneamente”. De esta forma parecería que al querer encontrar una teoría de norma para las interacciones débiles uno se encuentra con indeseables partículas escalares sin masa, sin embargo, falta considerar el caso de una teoría de norma local.

1.4.1. Mecanismo de Higgs

Consideremos una teoría con una simetría de norma $U(1)$, de manera que nuestro Lagrangiano sea invariante bajo una transformación local de norma,

$$\phi \rightarrow e^{i\alpha(x)}\phi. \quad (1.85)$$

Al igual que en el caso de QED hay que reemplazar la derivada usual ∂_μ , por la derivada covariante,

$$D_\mu = \partial_\mu - iqA_\mu, \quad (1.86)$$

con la transformación del campo de norma dada por

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \frac{1}{q}\partial_\mu\alpha. \quad (1.87)$$

Tomando el Lagrangiano usual de QED para una partícula escalar cargada de masa μ (salvo el término ϕ^4 y recordando que $\mu^2 < 0$).

$$\mathcal{L} = (\partial^\mu + iqA^\mu)\phi^*(\partial_\mu - iqA_\mu)\phi - \mu^2\phi^*\phi - \lambda(\phi^*\phi)^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \quad (1.88)$$

Repitiendo el procedimiento de trasladar al campo ϕ al estado base y reemplazando en (1.88), el Lagrangiano adopta la forma

$$\mathcal{L}' = \frac{1}{2}(\partial_\mu\xi)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\eta)^2 - v^2\lambda\eta^2 + \frac{1}{2}q^2v^2A_\mu A^\mu - qvA_\mu\partial^\mu\xi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \text{términos de int.} \quad (1.89)$$

Entonces el Lagrangiano \mathcal{L}' contiene un bosón de Goldstone ξ , un escalar masivo η y un vector masivo A_μ ,

$$m_\xi = 0, \quad m_\eta = \sqrt{2\lambda}v, \quad m_A = qv. \quad (1.90)$$

Nuevamente nos enfrentamos al problema del bosón de Goldstone a pesar de que hemos generado una masa para el campo de norma A_μ . Sin embargo, la presencia del bosón del Goldstone se debe a la libertad que tenemos de realizar una transformación de norma. Si escribimos

$$\phi = \sqrt{\frac{1}{2}}(v + \eta)e^{i\xi/v}, \quad (1.91)$$

nos damos cuenta que en realidad el campo ϕ escrito como en (1.83) en realidad es una aproximación a primer orden en ξ de la expresión anterior. Si sustituimos por un conjunto diferente de campos reales h , θ , A_μ , tales que

$$\begin{aligned} \phi &\rightarrow \sqrt{\frac{1}{2}}(v + h(x))e^{i\theta(x)/v}, \\ A_\mu &\rightarrow A_\mu + \frac{1}{qv}\partial_\mu\theta, \end{aligned} \quad (1.92)$$

en el Lagrangiano (1.88), obtenemos:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu h)^2 - \lambda v^2 h^2 + \frac{1}{2}q^2 v^2 A_\mu A^\mu - \lambda v h^3 - \frac{1}{4}\lambda h^4 + \frac{1}{2}q^2 A_\mu A^\mu h^2 + v e^2 A_\mu A^\mu h - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \quad (1.93)$$

El Lagrangiano, con esta norma en particular, está libre del bosón de Goldstone. Por lo tanto, este bosón de Goldstone no masivo se ha convertido en una polarización longitudinal de la partícula masiva. Este mecanismo, a través del cual se ha generado la masa del campo de norma A_μ , es el famoso *mecanismo de Higgs*.

Más en general, consideremos un doblete de $SU(2)$ de campos escalares:

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_a \\ \phi_b \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} \phi_1 + i\phi_2 \\ \phi_3 + i\phi_4 \end{pmatrix} \quad (1.94)$$

con el Lagrangiano

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi)^\dagger (\partial^\mu \phi) - \mu^2 \phi^\dagger \phi - \lambda (\phi^\dagger \phi)^2, \quad (1.95)$$

Este Lagrangiano es invariante ante transformaciones de la forma

$$\phi \rightarrow \phi' = e^{i\alpha_k \tau_k / 2} \phi \quad (1.96)$$

Realizando el mismo procedimiento que en el caso de $U(1)$ hay que emplear la derivada covariante

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu + ig \frac{\tau_k}{2} W_\mu^k \quad (1.97)$$

con $k = 1, 2, 3$ y W_μ^k un campo de $SU(2)$, bajo una transformación infinitesimal de (1.96), el Lagrangiano (1.95) adquiere la forma

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi + ig \frac{1}{2} \boldsymbol{\tau} \cdot W_\mu \phi)^\dagger (\partial^\mu \phi + ig \frac{1}{2} \boldsymbol{\tau} \cdot W^\mu \phi) - \frac{1}{4} W_{\mu\nu} W^{\mu\nu} - V(\phi), \quad (1.98)$$

donde $V(\phi) = \mu^2 \phi^\dagger \phi + \lambda (\phi^\dagger \phi)^2$. Repitiendo el procedimiento anterior obtenemos el mínimo del potencial V

$$\frac{1}{2}(\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 + \phi_4^2) = \frac{-\mu^2}{2\lambda} = v^2. \quad (1.99)$$

Está superficie para la cual $V(\phi)$ es invariante ante transformaciones de $SU(2)$, escogiendo el siguiente mínimo

$$\phi_1 = \phi_2 = \phi_4 = 0, \quad \phi_3 = \sqrt{-\frac{\mu^2}{\lambda}} \equiv v, \quad (1.100)$$

y desarrollando a $\phi(x)$ alrededor de dicho mínimo tal como se hizo en el caso de la ruptura espontánea en $U(1)$, se tiene

$$\phi(x) = \sqrt{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + h(x) \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad \phi_0 = \sqrt{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \quad (1.101)$$

donde $h(x)$ es el campo de Higgs. Nuevamente en analogía con el caso $U(1)$, la fluctuaciones del vacío se parametrizan en términos de los 4 campos θ_i , $i = 1, 2, 3$ y $h(x)$

$$\phi(x) = e^{i\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\theta}(x)/v} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v+h(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (1.102)$$

Y para perturbaciones pequeñas

$$\phi(x) \simeq \sqrt{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} \theta_2 + i\theta_1 \\ v + h - i\theta_3 \end{pmatrix} \quad (1.103)$$

De esta forma el Lagrangiano (1.95) es localmente invariante ($SU(2)$) y por tanto, al igual que en el caso anterior, es posible librarse de los bosones de Goldstone ($\theta(x)$). Sustituyendo ϕ_0 en el Lagrangiano se obtienen las masas que se generaron para los bosones W_μ^k ,

$$\begin{aligned} \left| ig \frac{1}{2} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{W}_\mu \phi \right|^2 &= \frac{g^2}{8} \left| \begin{pmatrix} W_\mu^3 & W_\mu^1 - iW_\mu^2 \\ W_\mu^1 + iW_\mu^2 & W_\mu^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \right|^2 \\ &= \frac{g^2 v^2}{8} [(W_\mu^1)^2 + (W_\mu^2)^2 + (W_\mu^3)^2]. \end{aligned} \quad (1.104)$$

El Lagrangiano (1.95) describe 3 campos de norma masivos y un campo escalar masivo h . Este es otro ejemplo del mecanismo de Higgs.

1.4.2. Mecanismo de Stueckelberg

El mecanismo de Stueckelberg es un mecanismo para generar masas de campos vectoriales, similar al mecanismo de Higgs, en este mecanismo se introducen nuevos campos para revelar una simetría de una teoría de norma fija.

En el caso del potencial electromagnético, este está descrito por un campo vectorial neutro A_μ , el cual obedece las ecuaciones de Maxwell. La cuantización de este campo da lugar a una partícula no-masiva, el fotón, que posee sólo dos grados de libertad (sus helicidades $+1$ y -1), mientras que el potencial A_μ posee cuatro; si uno agrega un término de masa a la ecuación de onda de A_μ la invariancia de norma se pierde ya que A_μ se transforma de manera no trivial y el término de masa no es invariante. Stueckelberg introdujo un nuevo campo escalar B además de las cuatro componentes de A_μ para un total de cinco campos, este campo, llamado campo de Stueckelberg, restaura la simetría de norma que fue rota por el término de masa.

En el mecanismo de Stueckelberg la ecuación de movimiento que se utiliza es la siguiente [21]

$$(\partial^2 + m^2)A_\mu = 0 \quad (1.105)$$

la cual se obtiene del Lagrangiano

$$\mathcal{L} = \partial_\mu A_\nu^\dagger \partial^\mu A^\nu + m^2 A_\mu^\dagger A^\mu. \quad (1.106)$$

Siguiendo el procedimiento de la electrodinámica cuántica, se llega a que la condición de norma debe ser impuesta ya que esta no proviene de las ecuaciones de movimiento. En electrodinámica cuántica surge el mismo problema:

$$\partial^\mu A_\mu = 0 \quad (1.107)$$

Las relaciones de conmutación del campo de Stueckelberg son las mismas que las del fotón en QED en la norma de Feynman

$$[A_\mu(x), A_\nu(y)] = 0, \quad [A_\mu(x), A_\nu^\dagger(y)] = -ig_{\mu\nu} D_m(x-y) \quad (1.108)$$

Stueckelberg introdujo el campo $B(x)$, el cual obedece la ecuación (1.106) y posee la misma masa que A_μ

$$(\partial^2 + m^2)B(x) = 0 \quad (1.109)$$

Análogamente el campo de Stueckelberg $B(x)$ también satisface las ecuaciones (1.108).

El Lagrangiano más sencillo para un campo vectorial masivo A_μ se puede escribir como

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{m^2}{2}(A_\mu - \frac{1}{m}\partial_\mu B)^2 \quad (1.110)$$

con $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ el término cinético del campo A_μ . Este Lagrangiano es invariante ante una transformación de norma $U(1)$ de la forma

$$\begin{aligned} A_\mu &\rightarrow A_\mu + \partial_\mu \epsilon; \\ B &\rightarrow B + m\epsilon \end{aligned} \quad (1.111)$$

El Lagrangiano total se puede expresar como la suma del Lagrangiano de Stueckelberg (1.110) y un Lagrangiano fijador de norma

$$\mathcal{L}_{fn} = -\frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu + \xi m B)^2. \quad (1.112)$$

De esta forma

$$\mathcal{L}_{tot} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + m^2 A_\mu A^\mu - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu B)^2 - \frac{\xi}{2}m^2 B^2 \quad (1.113)$$

y el término que combinaba a los campos A_μ y B , $B\partial_\mu A^\mu$ se cancela con el que aparece en \mathcal{L}_{fn} . El campo B adquiere una masa proporcional a un parámetro arbitrario $\sqrt{\xi}$ lo que implica que el campo B no es un campo físico y no tiene influencia alguna en el campo vectorial A_μ . Por lo tanto, el mecanismo de Stueckelberg se divide en dos partes, una es la extensión del término de masa del bosón de norma $U(1)$ a través de la mezcla con el campo escalar y la otra es la selección especial de la norma para cancelar la combinación de los bosones escalares y de norma.

Capítulo 2

Materia Oscura

La materia visible que conocemos y con la cual interactuamos todos los días es tan sólo una pequeña parte de la materia existente en el universo, mientras que aproximadamente el 85 % de la materia es *materia oscura* [17]. Actualmente, a pesar de ser la materia más abundante en el Universo, la materia oscura no ha podido ser detectada en los grandes aceleradores de partículas que existen, como el LHC. Evidencia que apoye la existencia de materia oscura y de la cual se discutirá mas adelante, proviene en gran parte de observaciones astrofísicas y cosmológicas como son, las lentes gravitacionales, curvas de rotación de galaxias, entre otras. El nombre de *materia oscura* proviene del hecho de que esta no interactúa con la radiación, esto quiere decir que dichas partículas son eléctricamente neutras. A su vez, estudios de la dinámica de cúmulos de galaxias indican que las partículas de materia oscura poseen velocidades no relativistas, está es una consideración muy importante y tiene implicaciones en cálculos posteriores.

El modelo actual de la evolución del Universo está basado en el famoso modelo del Big Bang o modelo de Friedman-Robertson-Walker (FRW). Dos de los aspectos fundamentales de la cosmología actual son que el Universo se encuentra en expansión y que el universo es homogéneo e isotrópico.

La geometría del espacio-tiempo en este modelo, está dada por la métrica de FRW

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{a^2(t)}{1-kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2(t)r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a^2(t)r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

cuyo elemento de línea es

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2 \right), \quad (2.2)$$

donde k es una constante con valores $k = -1, 0, 1$, dependiendo si el universo es cerrado, plano o abierto, respectivamente. Para conocer como es la expansión del universo hay que hacer uso de las

ecuaciones de campo de Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad (2.3)$$

donde $R_{\mu\nu}$ es el tensor de Ricci, R es el escalar de curvatura y $T_{\mu\nu}$ es el tensor de energía momento (ver apéndice). Suponiendo que el universo está conformado por un fluido perfecto, el tensor de energía momento es:

$$T_{\nu}^{\mu} = \text{diag}(\rho, -p, -p, -p) \quad (2.4)$$

Aplicando este tensor de energía momento (2.4) a las ecuaciones (2.3) uno obtiene las siguientes ecuaciones de Einstein:

$$\left(\frac{2k}{a^2} + \frac{2\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\ddot{a}^2}{a^2}\right) = 4\pi(\rho - p); \quad (2.5)$$

$$\frac{3\ddot{a}^2}{a} = -4\pi(\rho + 3p). \quad (2.6)$$

Estas dos ecuaciones se pueden combinar para poder deshacemos los términos con \ddot{a} , llegando así a la ecuación

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi}{3}\rho - \frac{k}{a^2}. \quad (2.7)$$

Esta es la ecuación de Friedmann, la cual rige la expansión del Universo. Para un Universo plano ($k = 0$), esta ecuación se reduce a

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho \quad (2.8)$$

Es conveniente definir las siguientes cantidades, las cuales son importantes para entender la dinámica del Universo como, $H_0 = \dot{a}(t_0)/a(t_0)$, que es la razón de expansión del Universo medida al tiempo actual t_0 , la densidad crítica actual $\rho_c \equiv 3H_0^2/8\pi$ y $\Omega \equiv \rho_0/\rho_c$, con ρ_0 la densidad de masa actual y ρ_c la densidad crítica (ver [22]), entonces la ecuación (2.8) se puede reescribir como

$$\frac{H^2(t)}{H_0^2} = \frac{\rho}{\rho_c}, \quad (2.9)$$

aquí ρ es la densidad de energía para materia, radiación y energía oscura.

Es lógico pensar que la densidad promedio del Universo se puede medir determinando la densidad de galaxias y la masa promedio por galaxia y con esta cantidad encontrar Ω_0 Medir la masa de una galaxia involucra detectar sus efectos gravitacionales. El método más simple consiste en utilizar la tercera ley de Kepler

$$GM(r) = v^2 r \quad (2.10)$$

donde v es la velocidad orbital a una distancia r del centro de la galaxia. Al aplicar esta técnica a galaxias espirales se encuentra que la gracción de la densidad crítica asociada con la luz es

$$\Omega_{LUM} \sim 0.01 \quad (2.11)$$

Entonces, ¡la masa asociada con la luz contribuye con menos de 1% de la densidad crítica! Mediciones de curvas de rotación de galaxias indican que todas las galaxias espirales tienen un halo oscuro asociado que contribuye con al menos de 3 a 10 veces la masa de la materia visible,

$$\Omega_{HALO} > 0.1 \simeq 10\Omega_{LUM} \quad (2.12)$$

2.1. Evidencia sobre la existencia de Materia Oscura

2.1.1. Rayos-X en cúmulos de galaxias

El estudio de los rayos X provenientes de cúmulos de galaxias permiten conocer la razón entre la fracción Ω_B de la densidad crítica proveniente de la materia bariónica (nucleones y electrones) y la fracción Ω_M de todas las formas de materia no relativista, ya que únicamente las colisiones entre partículas bariónicas producen rayos-X. La densidad bariónica satisface la ecuación de equilibrio hidrostático, la cual se sigue del equilibrio entre la presión y la fuerza gravitacional actuando sobre los bariones en un área pequeña A y entre los radios r y $r + \delta r$

$$A(p_B(r + \delta r) - p_B(r)) = -\frac{A\delta r\rho_B(r)G}{r^2} \int_0^r 4\pi r^2 \rho_M(r) dr \quad (2.13)$$

Y usando la ley del gas ideal $p_B = \frac{k_B T_B \rho_B}{m_B}$

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{k_B T_B(r) \rho_B}{m_B} \right) = -\frac{G\rho_B(r)}{r^2} \int_0^r 4\pi r^2 \rho_M(r) dr. \quad (2.14)$$

donde $\rho_M(r)$ es la densidad de masa total, r la distancia al centro del cúmulo y m_B es la masa característica de las partículas bariónicas. Esta ecuación se puede reescribir como

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{r^2}{\rho_B(r)} \frac{d}{dr} \left(\frac{k_B T_B \rho_B(r)}{m_B} \right) \right] = -4\pi G r^2 \rho_M(r). \quad (2.15)$$

Si uno supone que la materia oscura posee una distribución isotrópica de velocidades, dichas partículas y su densidad $\rho_D = \rho_M - \rho_B$ satisfacen la misma ecuación

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{r^2}{\rho_D(r)} \frac{d}{dr} \left(\frac{k_D T_D r \rho_D(r)}{m_D} \right) \right] = -4\pi G r^2 \rho_M(r), \quad (2.16)$$

con T_D y m_D la temperatura y masa de la materia oscura respectivamente. Si se conoce la distancia a la fuente, se podría medir la densidad de luminosidad de los rayos-X $L_X(r)$ con datos de rayos-X y utilizando el espectro la temperatura bariónica en cada T_B en el cúmulo y utilizar la ecuación $L_X = \Lambda(T_B)\rho_B^2$ y la ecuación (2.15) para encontrar la densidad $\rho_B(r)$ y la densidad de masa total respectivamente. En la práctica se utilizan modelos de cúmulos donde se recurre a una esfera isotérmica donde las temperaturas T_B y T_D son independientes de la posición, por lo menos cerca

del centro del cúmulo de donde provienen la mayoría de los rayos-X y también se supone que la concentración de la materia oscura también se debe a los efectos gravitacionales que provocan la concentración del gas intergaláctico, de manera que las densidades ρ_B y ρ_M son proporcionales. Esto se representa con la razón Ω_B/Ω_M entre bariones y la materia no-relativista. Las ecuaciones (2.15) y (2.16) indican que ρ_B y ρ_D son proporcionales entre si y por lo tanto también a ρ_M . Definiendo un r_0 como

$$r_0 \equiv \sqrt{\frac{9\sigma^2}{4\pi G\rho_M(0)}}; \quad (2.17)$$

donde σ es la dispersión de velocidades de la materia oscura y las partículas bariónicas, de las ecuaciones (2.15) y (2.16) se tiene

$$\rho_M(r) = \rho_M(0)F(r/r_0), \quad (2.18)$$

donde la función $F(u)$ satisface la ecuación

$$\frac{d}{du} \left(\frac{u^2}{F(u)} \frac{dF(u)}{du} \right) = -9u^2F(u) \quad (2.19)$$

con $F(0) \equiv 1$ y pidiendo que ρ_M sea analítica cerca del origen. Sustituyendo el subíndice M por un subíndice B en la ecuación (2.18), esta también es solución de (2.15) para la misma función F . La luminosidad total de rayos-X es, bajo estas aproximaciones

$$L_X = \int d^3x \mathcal{L}_X = 4\pi\Lambda(T_B)r_0^3\rho_B(0)^2\mathcal{I}, \quad (2.20)$$

donde

$$\mathcal{I} = \int_0^\infty u^2 F(u) du. \quad (2.21)$$

Esta integral da como resultado una masa infinita, sin embargo la luminosidad total de rayos-X es finita, con $\mathcal{I} = 0.1961$. Si se aproxima $F(u)$ por $F(u) \simeq (1 + u^2)^{-3/2}$, \mathcal{I} tiene un valor de $\pi/16 = 0.1963$.

En un cúmulo con corrimiento al rojo z , el radio r_0 que se infiere a través de las observaciones del tamaño angular del cúmulo es proporcional a la distancia $d_A(z)$, entonces de (2.17), se obtiene que $\rho_M(0)$ es proporcional a $d_A^{-2}(z)$ ya que

$$\rho_M(0) \propto \frac{1}{r_0^2} \propto \frac{1}{d_A^2(z)}. \quad (2.22)$$

Por otra parte, la luminosidad L_X , por tratarse de una luminosidad absoluta, es proporcional a $d_L^2(z)$, así que de (2.20) se obtiene la siguiente relación de proporcionalidad para $\rho_B(0)$

$$\rho_B(0) \propto \left(\frac{d_L^2(z)}{d_A^3(z)} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.23)$$

entonces la razón entre las densidades $\rho_B(0)$ y $\rho_M(0)$ satisface

$$\frac{\rho_B(0)}{\rho_M(0)} \propto \frac{d_L(z)}{d_A^{1/2}(z)} = (1+z)^2 d_A^{3/2}, \quad (2.24)$$

ya que $d_L \propto d_A$; para $z \ll 1$ se tiene que $d_A \simeq d_L \simeq z/H_0$ entonces

$$\frac{\rho_B(0)}{\rho_M(0)} \propto H_0^{-3/2} \quad (2.25)$$

para $H_0 = 65 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$

$$\frac{\Omega_B}{\Omega_M} \simeq 0.06 h^{-3/2} \quad (2.26)$$

con h en unidades de $100 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$. Por lo tanto de este resultado se puede concluir que sólo una pequeña parte de la masa en cúmulos de galaxias está en forma de materia bariónica que puede emitir rayos-X.

2.1.2. Lentes gravitacionales

La mejor forma de estudiar la materia oscura es a través de su influencia gravitacional sobre partículas más “detectables”. El método más directo es el estudio de las lentes gravitacionales, es decir, la desviación de fotones mientras estos pasan a través del espacio-tiempo deformado debido a un campo gravitacional. Los rayos de luz provenientes de fuentes lejanas que pasan cerca de objetos masivos como estrellas, cúmulos de galaxias o materia oscura, no siguen trayectorias rectas. Es un efecto similar a la refracción óptica, sin embargo la física de fondo es muy diferente. La primera vez que se observó este efecto y donde se obtuvo la primera verificación experimental de la Relatividad General, fue en 1919 durante un eclipse solar frente al cúmulo Hyades.

Las lentes gravitacionales se observan con mayor facilidad alrededor de concentraciones densas de masa como son los núcleos o cúmulos de galaxias. Existen diferentes tipos de lentes gravitacionales, fuertes y débiles. En el régimen de fuerte, el espacio-tiempo está tan deformado que la luz puede viajar a través de múltiples trayectorias alrededor de la lente y aún así reflejarse hacia el observador. Una fuente distante detrás de una lente circular aparece como un *Anillo de Einstein*. El radio de este anillo, también llamado radio de Einstein, es proporcional a la raíz cuadrada de la masa proyectada en el interior de este. Si la fuente está ligeramente desplazada, esta puede aparecer en múltiples lugares vista desde ángulos ligeramente diferentes y dependiendo del enfocamiento(?) del camino óptico, cada una de estas imágenes puede ser más o menos brillante. Galaxias lejanas aparecen como arcos tangenciales alrededor del lente, como se muestra en la figura 2.1 o si la masa del lente se encuentra muy concentrada, como una línea radiando fuera del lente.

El primer lente gravitacional fuerte fue descubierto con el radio telescopio Jodrell Bank MkIA en 1979. Con el lanzamiento del Telescopio Hubble (HST, por sus siglas en inglés) con su gran resolución revolucionó el estudio de las lentes gravitacionales, pudiendo así estudiar un gran número de arcos y múltiples imágenes en varios cúmulos.



Figura 2.1: Cúmulo de galaxias Abell 370. En esta imagen tomada por el telescopio Hubble se puede apreciar el efecto de una lente gravitacional. Los objetos elongados son galaxias distantes que yacen detrás del cúmulo amplificadas y distorsionadas por el efecto de la lente gravitacional. (Imagen tomada del sitio web del Hubble <http://hubblesite.org/>).

La distribución de masa en una lente gravitacional se puede reconstruir por medio de la posición y las formas de las imágenes observadas. El efecto de magnificación aumenta los flujos observados de los objetos, de forma que una lente gravitacional fuerte se puede utilizar como un telescopio gravitacional permitiendo ver objetos aún más lejanos de los observables con algún otro método. La detección de este tipo de lentes también permite determinar constricciones en otros parámetros cosmológicos utilizando muestras estadísticas enormes.

2.1.3. Curvas de rotación de galaxias

Las curvas de rotación de galaxias (de disco) se incrementan abruptamente en las regiones interiores y en regiones exteriores son prácticamente planas. Para explicar esto en el contexto de la gravedad newtoniana se requiere una gran cantidad de masa “invisible”. Esta materia invisible o faltante se infirió inicialmente usando el teorema del virial para la dinámica de galaxias elípticas midiendo Ω_M para estimar las masas de diversos cúmulos de galaxias, calcular la razón promedio de masa entre la luminosidad absoluta y utilizar las observaciones de la luminosidad total para poder estimar la densidad de masa total.

En la derivación del teorema del virial gravitacional, se considera un sistema no relativista gravitacionalmente ligado de masas puntuales m_n con posiciones relativas al centro de masa x_n cuyas ecuaciones de movimiento son

$$m_n \ddot{x}_n^i = -\frac{\partial V}{\partial x_n^i}, \quad (2.27)$$

con la energía potencial dada por

$$V = -\frac{1}{2} \sum_{n \neq l} \frac{G m_n m_l}{|x_n - x_l|} \quad (2.28)$$

Al multiplicar la ecuación (2.27) por x_n^i se obtiene

$$-x_n^i \frac{\partial V}{\partial x_n^i} = m_n x_n^i \ddot{x}_n^i = m_n (\dot{x}_n^{i2} + x_n \ddot{x}_n^i) - m_n \dot{x}_n^{i2} \quad (2.29)$$

donde la última igualdad se puede reescribir, sumando sobre n , como

$$\frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \sum_n m_n \mathbf{x}_n^2 - 2T \quad (2.30)$$

con T la energía cinética interna

$$T = \frac{1}{2} \sum_n m_n \dot{\mathbf{x}}_n^2 \quad (2.31)$$

Suponiendo que el sistema ha alcanzado un estado de equilibrio de manera que la evolución estadística se ha detenido, es decir,

$$\frac{d^2}{dt^2} \sum_n m_n \mathbf{x}_n^2 = 0 \quad (2.32)$$

El término

$$-x_n^i \frac{\partial V}{\partial x_n^i} \quad (2.33)$$

tiene unidades de V , por lo tanto combinando (2.32) con (2.30), se obtiene el teorema del virial

$$2T + V = 0 \quad (2.34)$$

De esta forma se pueden expresar a la energía cinética T y al potencial V en términos de la velocidad media cuadrada $\langle v^2 \rangle$ y de la media de la distancia de separación $\langle 1/r \rangle$, es decir,

$$T = \frac{1}{2}M\langle v^2 \rangle \quad V = -\frac{1}{2}GM^2\langle \frac{1}{r} \rangle, \quad (2.35)$$

donde $M = \sum_n m_n$ es la masa total. Sustituyendo en la ecuación (2.34) se obtiene

$$M = \frac{2\langle v^2 \rangle}{G\langle 1/r \rangle}, \quad (2.36)$$

con esto, estimando los valores de la velocidad media cuadrada y la distancia de separación se puede calcular la masa M de un cúmulo.

Sin embargo, el teorema del virial posiblemente no pueda aplicarse a cúmulos irregulares de galaxias ya que dichos cúmulos no parecen haber alcanzado un estado de equilibrio, de forma que la condición (2.32) no se satisface.

Para cúmulos con un corrimiento al rojo $z \ll 1$ la distancia angular d_A es aproximadamente z/H_0 así que la distancia transversal propia, dada en términos de la separación angular θ es $d = \theta d_A \simeq \theta z/H_0$, entonces el valor de $\langle 1/r \rangle$ se obtiene de las separaciones angulares, para $z \ll 1$, es del orden de H_0 y por lo tanto M es del orden $1/H_0$.

La luminosidad absoluta para este corrimiento al rojo está dada por

$$L = \frac{4\pi z^2 l}{H_0^2}, \quad (2.37)$$

con l la luminosidad aparente dada por $l = L/4\pi d_L^2$; así que la luminosidad absoluta es del orden de H_0^{-2} , así que la razón masa-luz de dichos cúmulos es del orden de

$$\frac{M}{L} \approx \frac{H_0^{-1}}{H_0^{-2}} = H_0 \quad (2.38)$$

Estimaciones de M/L para cúmulos abundantes han proporcionado resultados del orden de 200 a $300 hM_\odot/L_\odot$, donde h es la constante de Hubble en unidades de $100 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ y M_\odot y L_\odot son la masa y luminosidad absoluta del Sol respectivamente. Por otra parte, utilizando el teorema del virial en galaxias elípticas individuales con $\sqrt{\langle v^2 \rangle}$ como la velocidad de dispersión de las estrellas de estas galaxias, se obtienen valores de M/L del orden de 10 a $20 hM_\odot/L_\odot$.

Entonces, dado que la luz visible proveniente de los cúmulos de galaxias debe provenir de las galaxias que los conforman, es factible pensar, dada la diferencia entre las razones de masa-luz, que la mayor parte de la masa en tales cúmulos debe encontrarse en una forma no luminosa, ya se en las regiones no luminosas de estas galaxias o en el espacio intergaláctico.

El teorema del virial, como ya se mencionó, no es aplicable a cúmulos de galaxias irregulares y para galaxias espirales es más difícil calcular M/L , sin embargo, desde hace ya varios años por [23] se sabe que la mayor parte de la masa de dichas galaxias no se encuentra en la forma de estrellas como el Sol.

2.1.4. Anisotropías en el CMB

La radiación de fondo cósmica (CMB, por sus siglas en inglés), como su nombre lo indica, es radiación de microondas que permea el universo casi de manera uniforme y es de hecho, el calor remanente del Big Bang el cual se originó aproximadamente 380,000 años después del big bang. Actualmente, la radiación de fondo posee una temperatura muy baja, aproximadamente 2.725 grados por encima del cero absoluto con un pico en la longitud de onda cercana a los 2 mm y un espectro de cuerpo negro casi ideal. Los fotones que se observan actualmente, provienen literalmente de los primeros instantes del tiempo, por lo tanto son una herramienta poderosa para estudiar el universo joven.

Se han encontrado pequeñas anisotropías en la radiación de fondo cósmica. Estas anisotropías surgen de pequeñas perturbaciones en la densidad de energía del universo temprano, la detección de estas anisotropías ha proporcionado evidencia de la existencia de perturbaciones en la densidad del universo joven. Para estudiar estas anisotropías en el CMB se puede hallar información sobre tales perturbaciones, para eso se hace un desarrollo de la diferencia de temperatura ΔT entre la temperatura medida en dirección de un vector unitario \hat{n} y la temperatura promedio T_0 en términos de los armónicos esféricos Y_m^l

$$\Delta T \equiv T - T_0 = \sum_{l,m} a_{lm} Y_l^m, \quad T_0 \equiv \frac{1}{4\pi} \int d^2 \hat{n} T. \quad (2.39)$$

con $l \in \mathbb{Z}^+$ y $-l \leq m \leq l$. Dado que en Cosmología las cantidades de interés son promedios, la cantidad más sencilla de observar en las fluctuaciones de temperatura es el promedio de dos ΔT . Como esta cantidad debe ser invariante ante rotaciones se impone la condición

$$\langle a_{lm} a_{l'm'}^* \rangle = \delta_{l,l'} \delta_{m,-m'} C_l \quad (2.40)$$

entonces el promedio del producto de dos diferencias de temperatura es

$$\langle \Delta T(\hat{n}) \Delta T(\hat{n}') \rangle = \sum_{l,m} C_l Y_l^m(\hat{n}) Y_l^{-m}(\hat{n}') = \sum_l C_l \left(\frac{2l+1}{4\pi} \right) P_l(\hat{n} \cdot \hat{n}') \quad (2.41)$$

con P_l un polinomio de Legendre de grado l , donde se usó la propiedad aditiva de los armónicos esféricos $P_l = \frac{2l+1}{4\pi} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^* Y_{lm}$. Invirtiendo la relación (2.41) se obtienen los coeficientes C_l

$$C_l = \frac{1}{4\pi} \int d^2 \hat{n} d^2 \hat{n}' P_l(\hat{n} \cdot \hat{n}') \langle \Delta T(\hat{n}) \Delta T(\hat{n}') \rangle. \quad (2.42)$$

Estos coeficientes son reales positivos, la l está relacionada con el ángulo θ entre las diferentes direcciones de \hat{n} por $l \sim 1/\theta$, por lo tanto, ángulos pequeños corresponden a valores grandes de l .

Dado que resulta imposible promediar sobre todas las posiciones en el universo para un observador desde la Tierra o medir ΔT en diferentes universos y promediar tales mediciones para

así calcular (2.42). Por lo tanto, la mejor opción es calcular un

$$C_l^{obs} \equiv \frac{1}{4\pi} \int d^2 \hat{n} d^2 \hat{n}' P_l(\hat{n} \cdot \hat{n}') \langle \Delta T(\hat{n}) \Delta T(\hat{n}') \rangle \quad (2.43)$$

y ver que tan buena aproximación es para C_l , es decir, existe una incertidumbre en la información que se pueda obtener de las C_l 's. A esta incertidumbre se le conoce como *varianza cósmica* (cosmic variance, en inglés) y es la raíz cuadrada del inverso del número de posibles muestras,

$$\left(\frac{\Delta C_l}{C_l} \right) = \sqrt{\frac{2}{2l+1}}. \quad (2.44)$$

Para l grande está expresión se aproxima a cero y para l pequeña (ángulos grandes) la incertidumbre de C_l crece. Las fluctuaciones en la temperatura del CMB para $l \geq 2$ se interpretan como resultado de perturbaciones en la densidad del universo joven. Diferentes regiones en l poseen diferentes orígenes físicos.

Las anisotropías de ángulos grandes no son afectadas por alguna microfísica, es decir, al momento de la recombinación las perturbaciones responsables de estas anisotropías se encontraban en escalas muy grandes como para estar conectadas causalmente. En la mayoría de los modelos cosmológicos, la recombinación ocurre mucho después de la igualdad materia/radiación. Los efectos de ángulos grandes (l pequeña) son producto de perturbaciones en el potencial gravitacional, a este efecto se le conoce como Sachs-Wolfe en honor a los primeros que calcularon estas anisotropías en 1967. Pequeños pozos de potencial atraerán materia y estos pozos se volverán más profundos, fotones emitidos desde alguno de estos pozos tendrán un corrimiento en su frecuencia y por lo tanto un corrimiento en la temperatura de la temperatura promedio con valor de $\delta\phi(\mathbf{x})$.

2.2. Materia oscura como una WIMP

La teoría de partículas elementales posee múltiples candidatos que puedan conformar la materia oscura fría (CDM). Uno de los candidatos más viables, es una partícula masiva que interactúa débilmente (WIMP) la cual estuvo en contacto con el resto del plasma cósmico a temperaturas altas y posteriormente sufrió un congelamiento (*freeze-out*) cuando la temperatura cayó por debajo de su masa. En el escenario genérico de la WIMP dos partículas pesadas X se aniquilan produciendo dos partículas ligeras l , las cuales se supone que están fuertemente acopladas con el plasma cósmico, por lo tanto se encuentran en equilibrio cinético y químico ($n_l = n_l^{(0)}$) y sólo queda encontrar la abundancia n_X , de la partícula pesada. La ecuación de Boltzmann para un sistema de este tipo en un universo en expansión es de acuerdo con [4]

$$a^{-3} \frac{d(n_1 a^3)}{dt} = \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_1}} \int \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_2}} \int \frac{d^3 p_3}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_3}} \int \frac{d^3 p_4}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_4}} \quad (2.45)$$

$$\times (2\pi)^4 \delta^3(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \delta(E_1 + E_2 - E_3 - E_4) |\mathcal{M}|^2$$

$$\times f_3 f_4 [1 \pm f_1][1 \pm f_2] - f_1 f_2 [1 \pm f_3][1 \pm f_4].$$

con $f_i(E) = e^{\mu_i - E_i/T}$ y el signo en $1 \pm f_i$ depende si se tratan de fermiones (-) o bosones (+).

Para encontrar la abundancia n_X se puede utilizar la ecuación (2.45), de manera que:

$$a^{-3} \frac{d(n_X a^3)}{dt} = \langle \sigma v_r \rangle \left\{ (n_X^{(0)})^2 - n_X^2 \right\}. \quad (2.46)$$

Ahora, dado que $T \sim a^{-1}$ se puede extraer el factor $(aT)^3$ de la ecuación (2.46) al multiplicar y dividir a $n_X a^3$ por T^3 , de forma que (2.2) se ve ahora como:

$$\frac{dY}{dt} = T^3 \langle \sigma v_r \rangle \{ Y_{EQ}^2 - Y^2 \}, \quad (2.47)$$

donde definimos $Y \equiv \frac{n_X}{T^3}$ y $Y_{EQ} \equiv n_X^{(0)}/T^3$. Introduciendo una nueva variable,

$$x \equiv \frac{m}{T} \quad (2.48)$$

con m la masa de la partícula pesada; así uno puede establecer una escala de temperatura en la región de interés. Para temperaturas altas ($x \ll 1$), las reacciones ocurren rápidamente, entonces $Y \simeq Y_{EQ}$. Para x grande, Y_{EQ} es suprimido por e^{-x} . Debido a esta supresión, las partículas X se vuelven tan escasas que no son capaces de encontrarse unas a otras lo suficientemente rápido como para mantener la abundancia de equilibrio.

La producción de materia oscura ocurre comúnmente durante la época de radiación donde la densidad de energía es proporcional a T^4 . De esta forma la ecuación de evolución (2.47) se vuelve

$$\frac{dY}{dx} = -\frac{\lambda}{x^2} \{ Y^2 - Y_{EQ}^2 \}, \quad (2.49)$$

donde se utilizó el Jacobiano $\frac{dx}{dt} = Hx$ para realizar el cambio de variable $t \rightarrow x$ y la razón entre la aniquilación y expansión está parametrizado por

$$\lambda \equiv \frac{m^3 \langle \sigma v_r \rangle}{H(m)}. \quad (2.50)$$

La ecuación (2.49) es una ecuación de Riccati para la cual, en general, no existe solución analítica pero se pueden obtener soluciones cualitativas. Recordando las siguientes relaciones cosmológicas

$$H^2(T) = \frac{8\pi}{3} G \rho(T) \quad (2.51)$$

$$\rho_R(T) = \frac{\pi^2}{30} g_* T^4, \quad \text{radiación} \quad (2.52)$$

con $H = \dot{a}/a$ y ρ_R es la densidad de energía para partículas relativistas. Mientras la tasa de aniquilación $\Gamma \sim \langle \sigma v \rangle T^3$ es mucho mayor que la tasa de expansión H , la densidad Y permanece en equilibrio térmico y se mantiene a la par de Y_{EQ} . Cuando $\Gamma \approx H$ para algún x_f , en dicho punto

Y se mantiene aproximadamente constante, por lo tanto, $Y(x) \approx Y(x_f)$ por lo que el número de partículas en un volumen comóvil se ha congelado. Para los neutrinos esto ocurre mientras las partículas son relativistas, en el caso de las WIMPs esto pasa cuando las partículas ya no son relativistas.

Por otra parte, en los límites relativista ($x \gg 3$) y no relativista ($x \ll 3$) el valor del número de partículas X por unidad de volumen comovil tienen la siguiente forma [24]

$$Y_{EQ}(x) \approx \frac{45}{2\pi^4} \left(\frac{\pi}{8}\right)^{1/2} \frac{g}{g_*} x^{3/2} e^{-x} \quad (x \gg 3)$$

$$Y_{EQ}(x) \approx \frac{45\zeta(3)}{2\pi^4} \frac{g_{eff}}{g_*} \quad (x \ll 3) \quad (2.53)$$

con $g_{eff} = g$ (*bosones*) y $g_{eff} = 3g/4$ (*fermiones*).

Como $H \propto x^{-2}$, entonces $H(T) = x^{-2}H(m)$, por lo tanto se puede reescribir (2.49)

$$\frac{x}{Y_{EQ}} \frac{dY}{dx} = -\frac{n_X^{(0)} \langle \sigma v_r \rangle}{H} \left[\left(\frac{Y}{Y_{EQ}} \right)^2 - 1 \right] \quad (2.54)$$

de donde es más fácil ver que el cambio de X por unidad de volumen comóvil está controlado por la efectividad de las aniquilaciones, el factor $n_X^{(0)} \langle \sigma v_r \rangle / H$ veces una medida de la desviación del equilibrio. Cuando este factor es menor que la unidad el cambio relativo en el número de partículas X por volumen comóvil se vuelve pequeño

$$-\frac{\Delta Y}{Y} \sim -\frac{x}{Y_{EQ}} \frac{dY}{dx} \sim \frac{n_X^{(0)} \langle \sigma v_r \rangle}{H} < 1 \quad (2.55)$$

y las aniquilaciones sufren un congelamiento.

Si el congelamiento ocurre mientras las partículas son no-relativistas ($x \gtrsim 3$), es un caso más complicado que si fueran relativistas ya que Y_{EQ} decrece exponencialmente con x . Para parametrizar la dependencia en la temperatura de la sección eficaz de aniquilación. En general, la sección eficaz es proporcional a una potencia de la velocidad, $\sigma v_r \propto v^n$, como $\langle v \rangle \propto T^{1/2}$, la dependencia en la temperatura de la sección eficaz de aniquilación es

$$\langle \sigma v \rangle \equiv \sigma_0 \left(\frac{T}{m} \right)^n = \sigma_0 x^{-n} \quad \text{para } (x \gtrsim 3) \quad (2.56)$$

Con esta parametrización la ecuación de Boltzmann es justo la ecuación (2.49)

$$\frac{dY}{dx} = -\lambda x^{-n-2} \{Y^2 - Y_{EQ}^2\}, \quad (2.57)$$

esta ecuación diferencial se puede resolver aproximadamente, considerando $\Delta \equiv Y - Y_{EQ}$, la salida del equilibrio es

$$\Delta' = -Y'_{EQ} + Y' = -Y'_{EQ} - \lambda x^{-n-2} \{Y^2 - Y_{EQ}^2\} = -Y'_{EQ} - \lambda x^{-n-2} \Delta (2Y_{EQ} \Delta + \Delta). \quad (2.58)$$

En tiempos tempranos ($1 < x \ll x_f$) tanto Δ como Δ' son muy pequeños por lo que se puede aproximar una solución con $\Delta' = 0$, por lo tanto,

$$\Delta \simeq -\frac{x^{n+2}}{\lambda} \frac{Y'_{EQ}}{2Y_{EQ} + \Delta} \simeq \frac{x^{n+2}}{2\lambda}. \quad (2.59)$$

En tiempos tardíos ($x \gg x_f$) Y se encuentra muy lejos del equilibrio, entonces $\Delta \simeq Y \gg Y_{EQ}$, así que

$$\begin{aligned} \Delta' &= -\lambda x^{-n-2} \Delta^2 \\ \Rightarrow \frac{d\Delta}{\Delta^2} &= \lambda x^{-n-2} dx \end{aligned} \quad (2.60)$$

y al integrar esta ecuación de $x = x_f$ hasta $x = \infty$ se obtiene

$$Y_\infty = \Delta_\infty = \frac{n+1}{\lambda} x_f^{n+1}. \quad (2.61)$$

Dado que en $x = x_f$ es la época de congelamiento Y deja de mantenerse al paso de Y_{EQ} , entonces Δ es proporcional a Y_{EQ} , así que es posible definir x_f con

$$\Delta(x_f) = k Y_{EQ}(x_f), \quad (2.62)$$

donde k es una constante del orden de la unidad. La solución a tiempos tempranos (2.59) da

$$\Delta(x_f) \simeq \frac{x_f^{n+2}}{\lambda(2+k)} \quad (2.63)$$

y de esta forma es posible conocer la temperatura de congelamiento

$$x_f \simeq \log[(2+k)\lambda a k] - \left(n + \frac{1}{2}\right) \log(\log[(2+k)\lambda a k]), \quad (2.64)$$

con $a = 0.145g/g_*$.

Resolviendo numéricamente se puede obtener la temperatura de congelamiento [24], y también se puede calcular la densidad relicta $\Omega_X h^2$ la cual es proporcional a la sección eficaz de aniquilación promedio $\langle \sigma v_r \rangle^{-1}$. La densidad relicta para la materia oscura (CDM) se puede formular como [25]

$$\Omega_{CDM} h^2 = 1.1 \times 10^9 \frac{x_f}{\sqrt{g_*} m_{Pl} \langle \sigma v_r \rangle} GeV^{-1} \quad (2.65)$$

La densidad relicta se puede obtener calculando la sección eficaz de aniquilación de la materia oscura en especies del modelo estándar a través del intercambio del Higgs y así poder estudiar las constricciones dadas por WMAP [26] y recientemente por PLANCK [18]

$$\Omega_{CDM} h^2 = 0.1196 \pm 0.0031. \quad (2.66)$$

2.3. Detección de materia oscura

Actualmente existe diversas colaboraciones alrededor del mundo cuya finalidad es la detección de materia oscura. Estos experimento establecen límites en la masa de las WIMPs de materia oscura. Desafortunadamente el intervalo de masas para las partículas detectadas abarca alrededor de 11 órdenes de magnitud, por lo que no existen aún datos contundentes que puedan determinar con certeza si en verdad se ha detectado ya materia oscura o si las señales detectadas corresponden al ruido de fondo. El CDMS, por ejemplo, ha detectado señales para masas de 8.6 GeV [27]; CRESST reporta señales para masas de 25.3 GeV [28]; DAMA reporta una señal alrededor de los 52 GeV [29], mientras que las mediciones realizadas por XENON descartan la región correspondiente a todos los resultados citados anteriormente. Es importante aclarar que todos los valores de la masa aún están

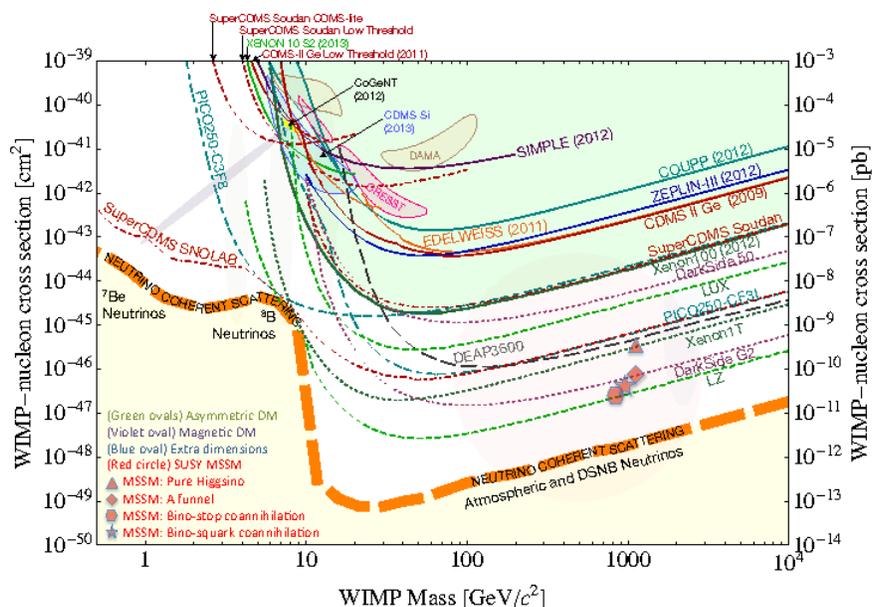


Figura 2.2: En esta gráfica se presentan los límites existentes en la sección eficaz de dispersión de materia oscura en nucleones dados por múltiples colaboraciones. Mientras que experimentos como DAMA o CDMS han reportado señales que podrían provenir de interacciones de materia oscura, XENON y LUX han determinado que las regiones. Imagen tomada de <https://inspirehep.net/record/1278570/plots>.

permitidos, lo que ha sido descartado por XENON son las secciones eficaces correspondientes como se muestra en la figura 2.2. Otros experimentos como Fermi LAT, el cual es un telescopio de imágenes de rayos gammas de alta energía, reporta masas alrededor de 129.8 GeV [30]. El satélite PAMELA también ha presentado resultados para la abundancia de positrones en la radiación cósmica que podrían evidenciar indirecta de aniquilación de partículas de materia oscura [31].

En esta sección presentamos algunos de estos experimentos y los límites que se han obtenido para la materia oscura en los últimos años los cuales se pueden observar en la figura 2.2. En esta gráfica se presentan las señales que han sido detectadas por algunos experimentos y que podrían corresponder a materia oscura así como los límites que establecen XENON o LUX sobre los cuales no se presentan tales eventos y también aparecen las predicciones en la sensibilidad de las mejoras en los experimentos como SuperCDMS o XENON1T.

2.3.1. DAMA

El proyecto DAMA es un observatorio para procesos raros ubicado bajo tierra en el Laboratorio Nazionale del Gran Sasso del Instituto Nacional de Física Nuclear (INFN) en Italia. Está basado en el desarrollo y uso de centelladores de bajo fondo.

DAMA/LIBRA es el aparato principal y se encuentra investigando la presencia de partículas de materia oscura en el halo galáctico. Como consecuencia de la órbita de la Tierra alrededor del Sol, el cual se mueve en la galaxia con respecto al Sistema de Reposo Local hacia la estrella Vega cerca de la constelación de Hércules, la Tierra debería de ser atravesada por un gran flujo de partículas de materia oscura alrededor del 2 de Junio y por uno más pequeño cerca del 2 de Diciembre; esta modulación anual es muy distintiva ya que los efectos producidos por la materia oscura deben satisfacer varias condiciones simultáneamente; la razón debe tener un componente modulado de acuerdo a una función coseno con periodo de un año y una fase que alcance un máximo cerca del 2 de Junio; dicha modulación sólo se debe encontrar en el rango de bajas energías donde los efectos debidos a la materia oscura están presentes; debe aplicarse únicamente a eventos en el que un detector de varios se dispara ya que la interacción múltiple es despreciable para las partículas de materia oscura.

La observable en los experimentos del proyecto DAMA es la componente modulada de la señal en el blanco NaI(Tl). La exposición total de la fase 1 de DAMA/LIBRA es de $1.04 \text{ ton} \times \text{año}$ en siete ciclos anuales.

Los datos recolectados durante dos ciclos anuales de DAMA favorecen la presencia de una WIMP con masa de 52 GeV y sección eficaz $7.2 \times 10^{-6} \text{ pb}$ con 4σ de confianza. Los valores permitidos de la masa se extienden hasta 105 GeV (1σ) [29].

2.3.2. CoGeNT

El experimento de materia oscura CoGeNT, busca directamente las señales de partículas de materia oscura en un detector de germanio de bajo fondo localizado en el Laboratorio Subterráneo de Sudán.

Este experimento utiliza un único cristal de 440 gramos y alta pureza enfriado hasta temperaturas del nitrógeno líquido. Este detector tiene la ventaja de poseer un umbral de bajas energías (~ 0.5 KeV) lo cuál permite la búsqueda de materia oscura de masa relativamente baja (5 GeV). Además de la configuración de bajo fondo, el detector es capaz de distinguir y rechazar eventos de fondo por medio de mediciones del tiempo de subida de la señal del detector.

La colaboración CoGeNT reporta masas de WIMPs de materia oscura en el intervalo de 7 – 11 GeV con un nivel de confianza del 90 % [32].

2.3.3. CRESST

El experimento CRESST es un experimento que busca detectar WIMPs de materia oscura por medio de su dispersión elástica con núcleos. Estos núcleos se encuentran en un detector criogénico capaz de detectar energías pequeñas de núcleos que han sido golpeados por una WIMP incidente.

Debido a la baja tasa de eventos esperados en la dispersión elástica WIMP-núcleo, se requiere un ambiente con un fondo extremadamente bajo. Además de las WIMPs también los muones, neutrones, electrones, fotones y partículas alpha, provenientes de rayos cósmicos o inducidos por radioactividad cercada al detector, interactúan con este. Por lo tanto, si estas señales de fondo no son suprimidas aparecerán con mayor frecuencia que las señales esperadas de las WIMPs. Es por esto que el experimento se encuentra también bajo tierra debajo de la montaña del Gran Sasso en Italia.

Los criodetectores son extremadamente sensibles y pueden medir la energía total depositada por una partícula. Para obtener las bajas temperaturas necesarias (del orden de miliKelvin), el detector está montado en un refrigerador que puede alcanzar temperaturas por debajo de 10 mK. Este sistema funcionó con cristales de safiro durante la primera fase de CRESST.

Los detectores de la segunda fase, CRESST II, aprovechan el hecho de que la mayor parte de los “fondos” produzcan luz en el material centellante y las WIMPs, por otro parte, producen poca o ninguna luz.

Los resultados de CRESST II [28] reportan dos máximos en el espacio de parámetros con masas para la materia oscura de 25.3 y 11.6 GeV con señales de 29.4 y 24.2 eventos, respectivamente.

2.3.4. CDMS

La colaboración CDMS (Cryogenic Dark Matter Search) identifica retrocesos nucleares utilizando detectores semiconductores operando a 40 mK. Estos detectores usan mediciones simultáneas de ionización y fonones fuera del equilibrio para identificar tales eventos (WIMPs) entre los eventos más numerosos de fondo como los retrocesos de electrones. El SuperCDMS es el sucesor del experimento CDMS II localizado originalmente en Minnesota, EE.UU. y se planea reubicarlo a instalaciones más profundas en Sudbury Canadá. El objetivo del SCDMS es medir la energía impartida sobre núcleos de Germanio por medio de colisiones WIMP-nucleón utilizando equipo sensible de detección de fonones.

En la exposición final del CDMS II [27] reportan los eventos más probables para masas de 8.6 GeV y una sección eficaz de $1.9 \times 10^{-41} \text{ cm}^2$.

2.3.5. XENON

El experimento XENON100 es la segunda fase del programa XENON el cual tiene como objetivo principal la detección directa de materia oscura en el universo utilizando Cámaras de Proyección de Tiempo (TPCs, por sus siglas en inglés) llenas de xenón líquido ultra puro (LXe). El experimento XENON100 es un detector TPC de dos fases (líquido-gas) con una masa de 161 kg de LXe el se enfoca principalmente en la detección de WIMPs y se localiza también en el LNGS.

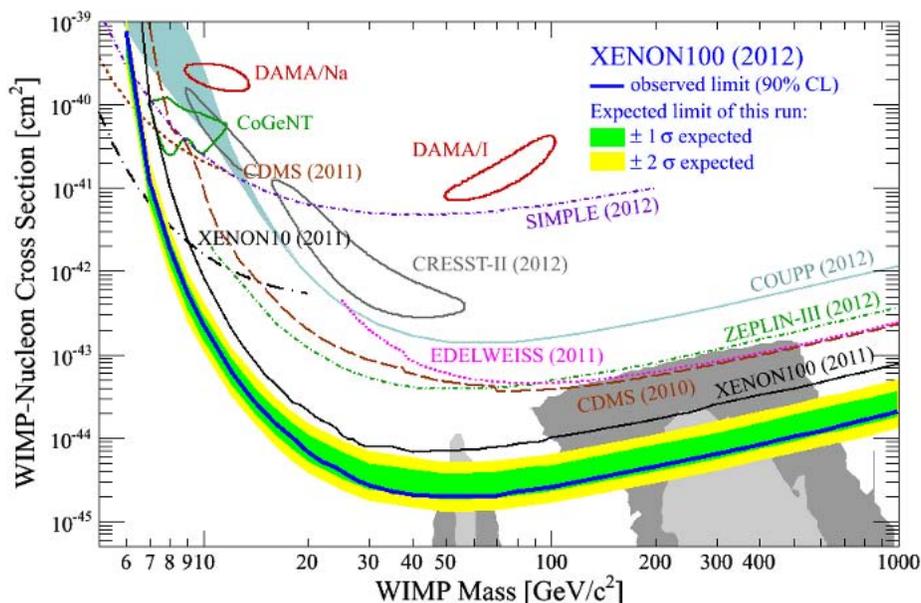


Figura 2.3: Resultados de la sección eficaz de dispersión WIMP-nucleón del XENON100. En esta corrida la sensibilidad se muestra en la banda verde/amarilla correspondiente a $1\sigma/2\sigma$ y el límite de exclusión azul. Se muestran otros límites experimentales por comparación. (Grafica tomada de [33])

El LXe ultra puro actúa como medio detector al igual que como objetivo, combinando una alta sensibilidad a un WIMP así como una gran capacidad de autoblindaje. El TPC se encuentra montado en un criostato aislado con paredes dobles de titanio y acero inoxidable, embebido en un escudo pasivo de radiación. Gracias al diseño del XENON100 se ha logrado reducir el fondo electromagnético en dos órdenes de magnitud a diferencia del XENON10 e incrementando la masa del objetivo diez veces. El fondo electromagnético verificado experimentalmente se encuentra por

debajo de los $5 \times 10^{-3} \text{ eventos}/(\text{keV}_{ee} \cdot \text{kg} \cdot \text{dia})$ en la región de bajas energías de interés para la búsqueda de materia oscura [13].

Los datos de XENON100 durante 225 días de exposición no presentan evidencia de interacciones de materia oscura, con un límite en la sección eficaz de dispersión WIMP-nucleón para masas superiores a 8 GeV con un mínimo de $2 \times 10^{-45} \text{ cm}^2$ a 55 GeV y 90% de nivel de confianza [33]. En la figura 2.3 se muestran los resultados de XENON100 los cuales difieren completamente de las mediciones realizadas por experimentos como DAMA, CDMS o CoGeNT.

Desafortunadamente, los resultados que se han obtenido en los diferentes experimentos enfocados en la búsqueda de materia oscura no coinciden entre ellos, más aún, los resultados de XENON rechazan todos los reportes de WIMPs de materia oscura de los otros experimentos. Muchas de estas colaboraciones prometen mejoras en la sensibilidad de detección, sin embargo, el escenario de materia oscura como una WIMP se encuentra tan constreñido que en el futuro no será posible distinguir entre interacciones de WIMPs y neutrinos. Si este escenario se llegara a presentar, no implica que las WIMPs estén descartadas, simplemente que son muy difíciles de detectar.

2.3.6. LUX

Otro de los experimentos enfocados en la detección de materia oscura que no reportan ningún evento es la colaboración LUX (Large Underground Xenon). Este experimento también es un detector de xenon de dos fases en búsqueda de WIMPs. El objetivo de LUX es detectar o excluir WIMPs con una sección eficaz independiente del espín por nucleón de $2 \times 10^{-46} \text{ cm}^2$.

Los datos de las mediciones de LUX proveen constricciones directas sobre todas las fuentes de fondo que contribuyen al modelo de fondo. La tasa esperada del modelo de fondo para la búsqueda de WIMPs de 85.3 días es $2.6 \times 10^{-3} \text{ eventos} \cdot \text{KeV}_{ee}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{dia}^{-1}$ en un volumen fiducial de 118 kg. La tasa observada es de $3.6 \times 10^{-3} \text{ eventos} \cdot \text{keV}_{ee}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{dia}^{-1}$ [34].

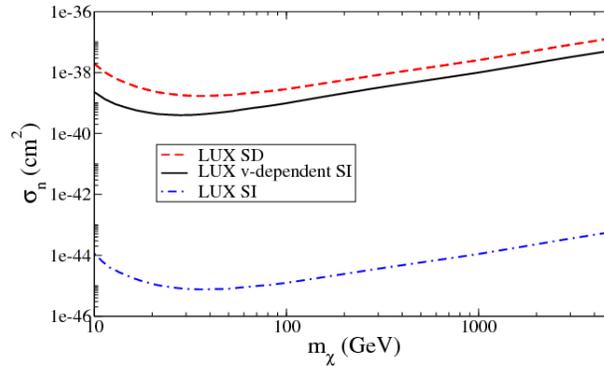


Figura 2.4: Límites de LUX en la sección eficaz independiente del espín (línea azul). Para masas inferiores a 400 GeV la sección eficaz es del orden $\leq 10^{-44}$.

Capítulo 3

Portales de Higgs

A pesar del innegable éxito del Modelo Estándar en la física de partículas, se tiene la creencia de que existe física nueva más allá del SM, la cual se manifiesta en escalas altas de energía. El principal fundamento teórico para pensar que esto es posible está basado en el problema de la jerarquía. En otras palabras, la escala electrodébil es inestable contra correcciones cuánticas y es muy sensible a la escala energética ultravioleta, la cual se considera la escala de la física más allá del Modelo Estándar [10].

Por otra parte, aclarar la naturaleza de la materia oscura es aún un problema abierto en la cosmología y la física de partículas. Dado que el SM no posee candidatos viables para la materia oscura, la sola observación de esta es indicativo de nueva física. Como ya se mencionó anteriormente, una WIMP es uno de los candidatos más prominentes a materia oscura y en este caso, la materia oscura presente en el universo es el vestigio térmico (thermal relic) y su abundancia relic es insensible a la historia del universo temprano antes del congelamiento (freeze-out). En este escenario es posible obtener la densidad relic resolviendo la ecuación de Boltzmann (como se vio en el capítulo 2) llegando a la conclusión de que la masa de la materia oscura como una WIMP se encuentra por debajo de la escala de los TeV . Por lo tanto incluso si escenarios, como el que se plantea en [10], son verdaderos la materia oscura se encuentra dentro de las escalas accesibles en los aceleradores que existen actualmente como el LHC.

En los modelos conocidos como portales de Higgs (el término se acuñó en [5]), las WIMPs de materia oscura interactúan con las partículas del modelo estándar únicamente a través del bosón de Higgs. Estos modelos son atractivos ya que todas las interacciones del Modelo Estándar están asociadas a interacciones renormalizables y el Higgs posee un lugar privilegiado en el Modelo Estándar por ser el único operador 4-dimensional renormalizable e invariante de Lorentz.

En diversos ambientes teóricos existen motivaciones para creer que los sectores “ocultos” están conformados por singletes de $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$. Estos sectores del modelo estándar reciben dicho nombre debido a que en la mayoría de los escenarios se encuentran asociados a escalas de energía muy altas e.g. $E_8 \times E_8$ en la teoría heterótica de cuerdas. El término de masa del Higgs, $\Delta\mathcal{L} = -\mu^2\phi^*\phi$, por poseer dimensión de masa 2 está abierto a acoplamientos super-renormalizables

con los campos en $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$.

Debido a estos acoplamientos con los sectores ocultos a un nivel renormalizable o superrenormalizable, se permiten términos de interacción de la forma

$$\Delta\mathcal{L} = \frac{\lambda_{hs}}{2} H^\dagger H s^2 \quad (3.1)$$

donde s es, en este caso, un campo escalar del modelo estándar. La fenomenología en este escenario depende de sí s adquiere o no un VEV. En el caso de que s adquiera un VEV, el Higgs se mezcla con este singulete y permite la aparición de dos eigenestados de masa, en caso de que no lo haga y s sea muy masivo, este es un candidato a materia oscura.

3.1. El portal a un segundo Higgs

En el escenario de portales de Higgs se considera una extensión del sector electrodébil del SM, introduciendo un campo escalar el cual es neutro bajo todos los números cuánticos del Modelo Estándar y se acopla al campo de Higgs (h) a través de un potencial $V(h, s)$. El Lagrangiano renormalizable más genérico es de la forma

$$\mathcal{L} = (D^\mu h)^\dagger (D_\mu h) + (\partial_\mu s)^2 - V(h, s), \quad (3.2)$$

donde el potencial es

$$V(h, s) = \frac{\lambda_h}{4} h^4 + \frac{\lambda_{hs}}{4} h^2 s^2 + \frac{\lambda_s}{4} s^4 + \frac{1}{2} \mu_h^2 h^2 + \frac{1}{2} \mu_s^2 s^2. \quad (3.3)$$

Utilizando el doblete de Higgs bajo la norma unitaria $(0, h/\sqrt{2})$. Al potencial se le impone una simetría Z_2 , $s \rightarrow -s$, por estabilidad. En el caso en que s adquiera un VEV distinto de cero y h adquiere un VEV $\langle h \rangle \simeq 246.2 \text{ GeV}$, el potencial es mínimo cuando

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial s} &= \frac{\lambda_{hs}}{2} h^2 s + \lambda_s s^3 + \mu_s^2 s = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial h} &= \lambda_h h^3 + \frac{\lambda_{hs}}{2} h s^2 + \mu_h^2 h = 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

cuyas soluciones son

$$\langle h \rangle^2 = \frac{2\lambda_{hs}\mu_s^2 - 4\lambda_s\mu_h^2}{4\lambda_h\lambda_s - \lambda_{hs}^2} \equiv v^2, \quad \langle s \rangle^2 = \frac{2\lambda_{hs}\mu_h^2 - 4\lambda_h\mu_s^2}{4\lambda_h\lambda_s - \lambda_{hs}^2} \equiv w^2 \quad (3.5)$$

La matriz de masa al cuadrado es la matriz Hessiana evaluada en v y w , es decir,

$$\mathcal{M}^2 = \begin{pmatrix} 3\lambda_h h^2 + \frac{\lambda_{hs}}{2} s^2 & \lambda_{hs} h s \\ \lambda_{hs} h s & \frac{\lambda_{hs}}{2} h^2 + 3\lambda_s s^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda_h v^2 & \lambda_{hs} v w \\ \lambda_{hs} v w & 2\lambda_s w^2 \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

La matriz \mathcal{M}^2 se puede diagonalizar con una transformación ortogonal

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (3.7)$$

de forma que $\mathcal{O}^T \mathcal{M}^2 \mathcal{O} = \text{diag}(m_{H_1}^2, m_{H_2}^2)$, así que

$$\mathcal{O}^T \mathcal{M}^2 \mathcal{O} = \begin{pmatrix} 2(\lambda_h v^2 \cos^2 \theta + \lambda_s w^2 \sin^2 \theta) - \lambda_{hs} v w \sin 2\theta & (\lambda_h v^2 - \lambda_s w^2) \sin 2\theta + \lambda_{hs} v w \cos 2\theta \\ (\lambda_h v^2 - \lambda_s w^2) \sin 2\theta + \lambda_{hs} v w \cos 2\theta & 2(\lambda_h v^2 \cos^2 \theta + \lambda_s w^2 \sin^2 \theta) + \lambda_{hs} v w \sin 2\theta \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

donde al exigir la diagonalidad se obtiene que el ángulo θ satisface

$$\tan 2\theta = \frac{\lambda_{hs} v w}{\lambda_s w^2 - \lambda_h v^2} \quad (3.9)$$

con

$$\sin 2\theta = \frac{\lambda_{hs} v w}{\sqrt{(\lambda_{hs} v w)^2 + (\lambda_s w^2 - \lambda_h v^2)^2}}, \quad \cos 2\theta = \frac{\lambda_s w^2 - \lambda_h v^2}{\sqrt{(\lambda_{hs} v w)^2 + (\lambda_s w^2 - \lambda_h v^2)^2}}. \quad (3.10)$$

Por otra parte, los eigenvalores de \mathcal{M}^2 se obtienen con el determinante

$$|\mathcal{M}^2 - m \mathbf{1}_{2 \times 2}| = 0 \quad (3.11)$$

así que, usando (3.10), los eigenestados de masa son

$$m_{H_1, H_2}^2 = \lambda_h v^2 + \lambda_s w^2 \pm \sqrt{(\lambda_{hs} v w)^2 + (\lambda_s w^2 - \lambda_h v^2)^2} = \lambda_h v^2 + \lambda_s w^2 \pm \frac{\lambda_s w^2 - \lambda_h v^2}{\cos 2\theta}. \quad (3.12)$$

En el caso de que el VEV de s sea mucho mayor a $\langle h \rangle$, de la ecuación anterior (3.12) se tiene que

$$\begin{aligned} m_{H_1}^2 &\simeq \left(2\lambda_h - \frac{\lambda_{hs}^2}{\lambda_s} \right) v^2 \\ m_{H_2}^2 &\simeq 2\lambda_s w^2 + \frac{\lambda_{hs}^2}{2\lambda_s} v^2 \end{aligned} \quad (3.13)$$

En la base de eigenestados, los campos se escriben como combinaciones lineales de h y s

$$\begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta (h - \langle h \rangle) - \sin \theta (s - \langle s \rangle) \\ \cos \theta (s - \langle s \rangle) + \sin \theta (h - \langle h \rangle) \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

donde se identifica al estado H_1 con el Higgs descubierto en el LHC de 125 GeV .

Los parámetros λ_h y λ_s se pueden escribir en términos de $m_{H_1}^2, m_{H_2}^2$ y v

$$\lambda_h = \frac{m_{H_1}^2}{2v^2} + \sin^2 \theta \frac{m_{H_2}^2 - m_{H_1}^2}{2v^2}, \quad (3.15)$$

$$\lambda_s = \frac{2\lambda_{hs}^2}{\sin^2 2\theta} \frac{v^2}{m_{H_2}^2 - m_{H_1}^2} \left(\frac{m_{H_2}^2}{m_{H_2}^2 - m_{H_1}^2} - \sin^2 \theta \right). \quad (3.16)$$

El parámetro λ_{hs} se puede dejar como una variable independiente a cual está directamente relacionada la tasa de decaimiento de H_2 en un par H_1 , si es que este proceso está permitido (cuando $m_{H_2} > 2m_{H_1} \sim 250 \text{ GeV}$). Los acoplamientos de estos campos escalares con el Modelo Estándar están dados por

$$\mathcal{L} \supset \frac{H_1 \cos \theta + H_2 \sin \theta}{v} \left[2m_W^2 W_\mu^+ W^{\mu-} + m_Z^2 Z_\mu Z^\mu - \sum_f m_f \bar{f} f \right]. \quad (3.17)$$

A partir de esto se pueden estudiar las constricciones que se imponen en el espacio de parámetros si se quiere que los acoplamientos sigan siendo perturbativos y el vacío electrodébil permanezca estable incluso en escalas como la de Planck. Un análisis más detallado de esto se puede encontrar en [35, 36].

3.2. El Higgs y la materia oscura

Como ya se ha mencionado, el bosón de Higgs es particularmente importante en el contexto de materia oscura ya que se cree que las partículas de materia oscura se acoplan débilmente con el SM. En este caso, el campo adicional S cargado bajo un $U(1)'$ adicional no genera un VEV (o dicho de un manera más correcta, el VEV de S se encuentra por arriba de la escala electrodébil), de manera que la simetría de norma $U(1)'$ (donde la prima denota que se trata de una simetría del sector oscuro) no se rompe y el escalar es estable. El potencial más genérico que involucra al Higgs y al escalar S es

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{SM} + \frac{1}{2} \partial_\mu S \partial^\mu S - \frac{1}{2} \mu_S^2 S^2 - \frac{1}{4} \lambda_{hs} H^\dagger H S^2 - \frac{1}{4} \lambda_s S^4 - \frac{1}{2} \kappa_1 H^\dagger H S - \frac{\kappa_2}{3} S^3 \quad (3.18)$$

donde \mathcal{L}_{SM} es la lagrangiana del Modelo Estándar. Al imponer una simetría Z_2 , $S \rightarrow -S$, en el modelo los términos lineales o potencias impares de S que dan lugar a decaimientos de S , quedan prohibidos, por lo que $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$.

Después de la ruptura espontánea de la simetría, la componente neutra del doblete del Higgs se traslada a $v + h/\sqrt{2}$ ¹ y la parte del lagrangiano (3.18) que involucra al Higgs y S toma la forma

$$\mathcal{L}_S = -\frac{1}{2} \mu_S^2 S^2 - \frac{1}{4} \lambda_{hs} \left(\frac{h}{\sqrt{2}} \right)^2 - \frac{1}{4} \lambda_{hs} v^2 S^2 - \frac{1}{4} \lambda_{hs} \sqrt{2} v h S^2 - \frac{\lambda}{4} S^4 + \text{términos cinéticos} \quad (3.19)$$

lo cual “genera” una masa para S

$$m_S^2 = \mu_S^2 + \frac{\lambda_{hs}}{2} v^2 \quad (3.20)$$

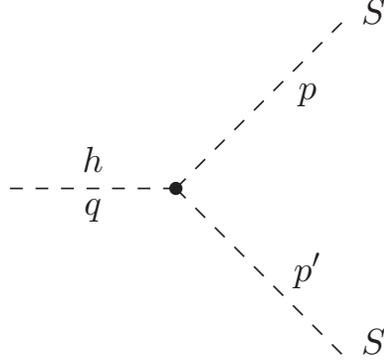


Figura 3.1: Diagrama de Feynman del decaimiento invisible del Higgs en materia oscura escalar $h \rightarrow SS$

Si está permitido, el Higgs puede decaer en un par de escalares S , la amplitud de este proceso (figura 3.1) se obtiene por medio del siguiente cálculo

$$i\mathcal{M} = i\frac{\lambda_{hs}}{2}\sqrt{2}v, \quad (3.21)$$

cuyo modulo al cuadrado es

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{\lambda_{hs}^2}{2}v^2; \quad (3.22)$$

insertando esto en la fórmula (B.12), con $m_f = m_S$ y $m_A = m_h$, se obtiene la tasa de decaimiento del higgs

$$\Gamma = \frac{\lambda_{hs}^2 v^2}{32\pi m_h} \sqrt{1 - 4\frac{m_S^2}{m_h^2}}. \quad (3.23)$$

Para calcular $\langle\sigma v_r\rangle$ se necesitan conocer los modos de aniquilación de S (figura 3.2). Suponiendo que la aniquilación se da a través del canal s por medio del intercambio del Higgs, la amplitud para el proceso $SS \rightarrow f\bar{f}$ es

$$-i\mathcal{M} = u^{(s)}(k)i\frac{m_f}{v}\bar{v}^{(r)}(k')\frac{i}{q^2 - m_h^2}i\frac{\lambda_{hs}\sqrt{2}}{2}v, \quad (3.24)$$

¹Es importante mencionar que hemos adoptado la convención utilizada en [9] para el VEV del Higgs, v .

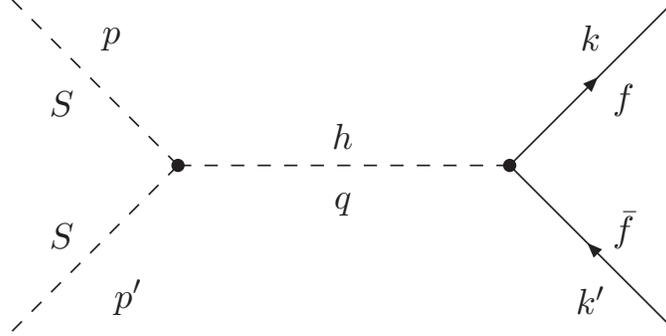


Figura 3.2: Diagrama de Feynman de aniquilación de la materia oscura escalar.

entonces

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{\lambda_{hs}^2 m_f^2}{2} \left(\frac{1}{(q^2 - m_h^2)^2} \right) \sum_{s,r} u^{(s)}(k) \bar{u}^{(s)}(k) \bar{v}^{(r)}(k') v^{(r)}(k') \quad (3.25)$$

donde los espinores u y v satisfacen relaciones de completéz

$$\begin{aligned} \sum_s u^{(s)}(p) \bar{u}^{(s)}(p) &= \not{p} + m, \\ \sum_r v^{(r)}(p') \bar{v}^{(r)}(p') &= \not{p}' - m, \end{aligned} \quad (3.26)$$

de modo que

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}|^2 &= \frac{\lambda_{hs}^2 m_f^2}{2} \left(\frac{1}{(q^2 - m_h^2)^2} \right) \text{Tr}(\not{k} \not{k}' - m_f^2) \\ &= 2\lambda_{hs}^2 m_f^2 \left(\frac{1}{(q^2 - m_h^2)^2} \right) (k \cdot k' - m_f^2) \end{aligned} \quad (3.27)$$

Dado que en el sistema de referencia del centro de masa se satisface

$$4E^2 = q^2 = (k + k')^2 = k^2 + k'^2 + 2k \cdot k' = 2m_f^2 + 2k \cdot k' \quad \Rightarrow \quad k \cdot k' = 2E^2 - m_f^2 \quad (3.28)$$

$$E = \frac{E_{cm}}{2}$$

$$|\mathcal{M}|^2 = 4\lambda_{hs}^2 m_f^2 \left(\frac{E^2 - m_f^2}{(4E^2 - m_h^2)^2} \right) = \lambda_{hs}^2 m_f^2 E_{cm}^2 \left(\frac{1 - m_f^2/E^2}{(4E^2 - m_h^2)^2} \right). \quad (3.29)$$

Al sustituir en (B.13) se obtiene

$$\frac{|\mathbf{k}|}{64\pi^2 E^2 E_{cm} |\mathbf{v} - \mathbf{v}'|} \lambda_{hs}^2 m_f^2 E_{cm}^2 \frac{1 - m_f^2/E^2}{(4E^2 - m_h^2)^2} = \frac{\sqrt{1 - m_f^2/E^2}}{32\pi^2 |\mathbf{v} - \mathbf{v}'|} \lambda_{hs}^2 m_f^2 \frac{1 - m_f^2/E^2}{(4E^2 - m_h^2)^2}. \quad (3.30)$$

Por lo tanto, al integrar sobre $d\Omega$, la sección eficaz es

$$\sigma = \frac{\lambda_{hs}^2 m_f^2}{16\pi |\mathbf{v} - \mathbf{v}'|} \frac{(1 - m_f^2/E^2)^{3/2}}{(4E^2 - m_h^2)^2}. \quad (3.31)$$

Análogo a (3.18) se pueden construir portales para el caso de campos del sector oscuro vectoriales

$$\mathcal{L}_X = \frac{1}{2} \mu_X^2 X_\mu X^\mu + \frac{1}{4} \lambda_{hv} H^\dagger H X_\mu X^\mu + \frac{1}{4} \lambda_s (X_\mu X^\mu)^2, \quad (3.32)$$

y fermiónicos

$$\mathcal{L}_f = -\frac{1}{2} \mu_f \bar{\chi} \chi - \frac{1}{4} \frac{\lambda_{hf}}{\Lambda} H^\dagger H \bar{\chi} \chi; \quad (3.33)$$

los cuales, después del rompimiento de la simetría electrodébil

$$\mathcal{L}_X = \frac{1}{2} \mu_X^2 X_\mu X^\mu + \frac{1}{4} \lambda_{hv} v^2 X_\mu X^\mu + \frac{1}{4} \sqrt{2} \lambda_{hv} v h X_\mu X^\mu + \frac{\lambda_{hv}}{4} \left(\frac{h}{\sqrt{2}} \right)^2 X_\mu X^\mu + \frac{\lambda}{4} (X_\mu X^\mu)^2 \quad (3.34)$$

$$\mathcal{L}_f = \frac{1}{2} \mu_f \bar{\chi} \chi - \frac{1}{4} \frac{\lambda_{hf}}{\Lambda} v^2 \bar{\chi} \chi - \frac{1}{4} \frac{\lambda_{hf}}{\Lambda} \sqrt{2} v h \bar{\chi} \chi - \frac{1}{4} \frac{\lambda_{hf}}{\Lambda} \left(\frac{h}{\sqrt{2}} \right)^2 \bar{\chi} \chi \quad (3.35)$$

adquieren masas

$$m_X^2 = \mu_X^2 + \frac{\lambda_{hv}}{2} v^2 \quad (3.36)$$

$$m_f = \mu_f + \frac{1}{2} \frac{\lambda_{hf}}{\Lambda} v^2 \quad (3.37)$$

3.3. Inflación y el Higgs

De forma análoga a la sección 3.1, se puede acoplar al Higgs y un campo escalar adicional S a la curvatura escalar R

$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{L} &= \xi_h H^\dagger H R, \\ \Delta\mathcal{L} &= \xi_s H^\dagger H R; \end{aligned} \quad (3.38)$$

para $\xi_s \gg 1$, valores grandes en el campo del Higgs pueden producir, en el universo temprano, una expansión acelerada exponencialmente. Considerando al inflatón como una mezcla entre el higgs y el singlete S .

En el marco de Jordan, el Lagrangiano con el nuevo grado de libertad es

$$\mathcal{L}/\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}M_{Pl}^2 R - \frac{1}{2}\xi_h h^2 R - \frac{1}{2}\xi_s S^2 R + \frac{1}{2}(\partial_\mu h)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu S)^2 - V(h, S) \quad (3.39)$$

con $\xi_{h,s} > 0$ y $V(h, S)$ dado como en (3.3).

Para pasar al marco de Einstein donde la curvatura solamente esta acoplada con $-1/2M_{Pl}^2 R$, la transformación conforme usada es, de acuerdo con [37],

$$\hat{g}_{\mu\nu} = \Omega^2 g_{\mu\nu}; \quad \Omega^2 = 1 + \frac{\xi_h h^2 + \xi_s s^2}{M_{Pl}^2}. \quad (3.40)$$

En el límite de $\xi_h h^2 + \xi_s s^2 \gg M_{Pl}^2$ y unidades de $M_{Pl} = 1$ se tiene que $\Omega^2 \simeq \xi_h h^2 + \xi_s s^2$, de forma que los términos cinéticos en el marco de Einstein ahora son

$$\frac{3}{4} (\partial_\mu \log(\xi_h h^2 + \xi_s s^2))^2 + \frac{1}{2(\xi_h h^2 + \xi_s s^2)} ((\partial_\mu h)^2 + (\partial_\mu s)^2) \quad (3.41)$$

y el potencial se vuelve

$$\frac{1}{(\xi_h h^2 + \xi_s s^2)^2} V = U. \quad (3.42)$$

Estos términos se pueden escribir en una forma más manejable realizando el cambio de variables,

$$\chi = \sqrt{\frac{3}{2}} \log(\xi_h h^2 + \xi_s s^2), \quad (3.43)$$

$$\tau = \frac{h}{s},$$

cómo

$$\frac{1}{2} \left(1 + \frac{\tau^2 + 1}{6(\xi_h \tau^2 + \xi_s)} \right) (\partial_\mu \chi)^2 + \frac{1}{\sqrt{6}} \left(\frac{(\xi_s - \xi_h)\tau}{(\xi_h \tau^2 + \xi_s)^2} \right) (\partial_\mu \chi)(\partial^\mu \tau) + \frac{\xi_h^2 \tau^2 + \xi_s^2}{2(\xi_h \tau^2 + \xi_s)^3} (\partial_\mu \tau)^2 \quad (3.44)$$

En el caso de acoplamientos grandes, $\xi = \xi_h + \xi_s \gg 1$ los términos cinéticos y el potencial están dados por

$$\mathcal{L}_{kin} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \chi)^2 + \frac{\xi_h^2 \tau^2 + \xi_s^2}{2(\xi_h \tau^2 + \xi_s)^3} (\partial_\mu \tau)^2, \quad (3.45)$$

$$U = \frac{\lambda_h \tau^4 + \lambda_{hs} \tau^2 + \lambda_s}{4(\xi_h \tau^2 + \xi_s)^2}. \quad (3.46)$$

Los mínimos de este potencial se encuentran en

$$\tau = \sqrt{\frac{2\lambda_s \xi_h - \lambda_{hs} \xi_s}{2\lambda_h \xi_s - \lambda_{hs} \xi_h}}, \quad \tau = 0, \quad \tau = \infty, \quad (3.47)$$

en estos mínimos el campo τ es pesado, $m \sim 1/\sqrt{\xi}$ en unidades de Planck y por lo tanto se puede integrar [38], entonces el potencial para χ , si conservamos el término $M_{Pl}^2/(\xi_h h^2 + \xi_s s^2)$ en el factor conforme Ω^2 , se vuelve

$$U(\chi) = \frac{\lambda_{eff}}{4\xi_h^2} \left(1 + \exp\left(-\frac{2\chi}{\sqrt{6}}\right) \right)^{-2}, \quad (3.48)$$

donde

$$\lambda_{eff} = \frac{1}{4} \frac{4\lambda_s\lambda_h - \lambda_{hs}^2}{\lambda_s + \lambda_h x^2 - \lambda_{hs}x}; \quad x = \frac{\xi_s}{\xi_h}. \quad (3.49)$$

En valores grandes de χ el potencial es plano y da lugar a inflación. Sin embargo, un requisito para inflación es que λ_{eff} sea positivo para altas energías y dado que el valor de la masa del Higgs es baja, la inflación del Higgs (Higgs inflation) se vuelve problemática.

Capítulo 4

El portal vectorial a la materia oscura

Consideremos un portal de Higgs 4-dimensional que acopla el doblete del Higgs con un campo vectorial masivo X_μ , de forma que la única comunicación entre este y el Modelo Estándar está dada por

$$\mathcal{L} = \frac{\lambda_{hv}}{4} H^\dagger H X_\mu X^\mu + (\epsilon_1 H^\dagger i D_\mu H X^\mu + \epsilon_2 H^\dagger H i \partial_\mu X^\mu + h.c) \quad (4.1)$$

donde H es el campo de Higgs, D_μ la derivada covariante del Modelo Estándar y a X_μ se le puede asociar una simetría $U'(1)$ [7]. Este campo adquiere una masa debido al mecanismo de Higgs o también puede volverse masivo debido al mecanismo de Stueckelberg [39].

El campo X_μ es estable si las $\epsilon_{1,2}$ son cero, suponiendo que el decaimiento de este dentro del mismo sector oscuro este cinemáticamente prohibido, entonces el portal goza de una simetría Z_2 ($X_\mu \rightarrow -X_\mu$).

A través del mecanismo de Stueckelberg (sección 1.4.2) el campo vectorial de $U(1)'$ se vuelve masivo. El lagrangiano de Stueckelberg correspondiente es:

$$\mathcal{L}_{st} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m^2 X_\mu X^\mu, \quad (4.2)$$

donde $F_{\mu\nu} = \partial_\mu X_\nu - \partial_\nu X_\mu$ y se tiene la transformación de norma

$$\begin{aligned} X_\alpha &\equiv X'_\alpha + \frac{1}{\mu} \partial_\alpha \phi, \\ \delta X'_\alpha &= \partial_\alpha \epsilon, \\ \delta \phi &= -\mu \epsilon, \end{aligned} \quad (4.3)$$

con ϕ el campo de Stueckelberg y μ una escala de masa. Este Lagrangiano goza de la simetría Z_2 , que es equivalente a $X'_\alpha \rightarrow -X'_\alpha$ y $\phi \rightarrow -\phi$.

Si $\mu = m$, bajo la transformación de norma (4.3) el Lagrangiano (4.2) es

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= -\frac{1}{4}F'_{\mu\nu}F'^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2(X'_\mu + \frac{1}{m}\partial_\mu\phi)(X'^\mu + \frac{1}{m}\partial^\mu\phi) \\ &= -\frac{1}{4}F'_{\mu\nu}F'^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2X'_\mu X'^\mu + \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 + \dots,\end{aligned}\quad (4.4)$$

donde el término, $1/2(\partial\phi)^2$, es el término cinético del axión. La masa m sin embargo, puede depender de otros campos, es decir,

$$m^2 = \mu^2 f(S), \quad (4.5)$$

con S un campo escalar, en este caso también se recupera un término cinético del axión pues el Lagrangiano (4.2) toma la forma

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F'_{\mu\nu}F'^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\mu^2 f(S)X'_\mu X'^\mu + \frac{1}{2}f(S)(\partial_\mu\phi)^2 + \frac{1}{2}\mu f(S)(X'_\mu\partial^\mu\phi + X'^\mu\partial_\mu\phi). \quad (4.6)$$

Bajo la suposición de que m depende de otros campos y considerando el límite $\mu \rightarrow 0$, existen diversas posibilidades, una es que el término de masa sea dependiente del Higgs

$$m^2 = \mu^2 \left(1 + \xi \frac{H^\dagger H}{M^2}\right), \quad (4.7)$$

sustituyendo en (4.2)

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{st} &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\mu^2 \left(1 + \xi \frac{H^\dagger H}{M^2}\right) X_\mu X^\mu = \\ &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\mu^2 X_\mu X^\mu + \frac{1}{2}\mu^2 \xi \frac{H^\dagger H}{M^2} X_\mu X^\mu,\end{aligned}\quad (4.8)$$

entonces comparando con (4.1), se puede ver que el acoplamiento $H^\dagger H X_\mu X^\mu$ está dado por

$$\lambda_{hv} = 2\xi \frac{\mu^2}{M^2}. \quad (4.9)$$

Es importante notar que estas cantidades no están relacionadas con la escala electrodébil ni entre ellas.

Otra posibilidad es que m^2 dependa de algún campo escalar S del sector oculto, por ejemplo,

$$m^2 = \mu^2 \frac{S^2}{M^2}; \quad (4.10)$$

además si S tiene un potencial $V(S)$ y un acoplamiento con el Higgs dado como en (3.18)

$$\frac{\lambda_{hs}}{4} H^\dagger H S^2 \quad (4.11)$$

los términos relevantes del Lagrangiano son

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\mu^2\frac{S^2}{M^2}X_\mu X^\mu + \frac{\lambda_{hs}}{4}H^\dagger HS^2 - V(S). \quad (4.12)$$

Para poder conocer el acoplamiento λ_{hv} se tiene que integrar el campo pesado S , es decir, obtener su ecuación de movimiento y obtener a S como una función de H [40]. Dado que se trata de un potencial general lo que se hace es un desarrollo en serie de Taylor de $V(S)$ alrededor de un mínimo S_0

$$V(S) \approx V(S_0) + \frac{m_S^2}{2}(S)^2 + \dots, \quad (4.13)$$

de esta manera haciendo uso de las ecuaciones de Euler-Lagrange (1.5) y sin considerar términos cinéticos ya que S , al tratarse de un campo muy pesado, se puede considerar una teoría efectiva la cual se encuentra a una escala de energía bajas de forma que los efectos cinéticos de S no son relevantes y obtener la ecuación de movimiento de S . Con todo esto en consideración la ecuación de movimiento de S es

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial S} = \mu^2 \frac{S^2}{M^2} + \frac{1}{2}\lambda_{hs}H^\dagger HS - m_S^2 S, \quad (4.14)$$

sin embargo, la información que proporciona está ecuación no es útil ya que de ella se obtiene que $S = 0$, por lo tanto hay que recurrir un procedimiento ligeramente diferente. Análogo al procedimiento realizado con el campo de Higgs, se escribe al campo S como su VEV más una perturbación δS ,

$$S = S_0 + \delta S, \quad (4.15)$$

con $S_0 = \langle S \rangle$; evaluando en (4.12) y desarrollando $V(S)$ alrededor de S_0

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\mu^2\frac{(S_0 + \delta S)^2}{M^2}X_\mu X^\mu + \frac{\lambda_{hs}}{4}H^\dagger H(S_0 + \delta S)^2 - V(S_0) - \frac{1}{2}m_S^2(\delta S)^2 + \text{términos cinéticos}, \quad (4.16)$$

se obtiene la ecuación de movimiento para δS

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\delta S)} = \frac{\mu^2}{M^2}\delta S X_\mu X^\mu + \frac{\lambda_{hs}}{2}H^\dagger H\delta S - m_S^2\delta S + \frac{\mu^2}{M^2}S_0(X_\mu X^\mu) + \frac{\lambda_{hs}}{2}H^\dagger HS_0 = 0 \quad (4.17)$$

entonces

$$\delta S \left(\frac{\mu^2}{M^2}X_\mu X^\mu + \frac{\lambda_{hs}}{2}H^\dagger H - m_S^2 \right) = - \left(\frac{\mu^2}{M^2}S_0(X_\mu X^\mu) + \frac{\lambda_{hs}}{2}H^\dagger HS_0 \right) \quad (4.18)$$

por lo tanto,

$$\delta S = \frac{- \left(\frac{\mu^2}{M^2}S_0(X_\mu X^\mu) + \frac{\lambda_{hs}}{2}H^\dagger HS_0 \right)}{\frac{\mu^2}{M^2}(X_\mu X^\mu) + \frac{\lambda_{hs}}{2}H^\dagger H - m_S^2}. \quad (4.19)$$

Tomando en cuenta que S es un campo pesado entonces la masa m_S^2 es mucho mayor que los demás términos en el denominador de (4.19), por lo tanto,

$$\delta S \approx \frac{\left(\frac{\mu^2}{M^2} S_0 (X_\mu X^\mu) + \frac{\lambda_{hs}}{2} H^\dagger H S_0\right)}{m_S^2}; \quad (4.20)$$

sustituyendo este valor de δS en (4.16), los términos relevantes son

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \mu^2 \frac{S_0}{M^2} \left(\frac{\mu^2}{M^2} \frac{S_0}{m_S^2} X_\mu X^\mu + \frac{\lambda_{hs}}{2} \frac{H^\dagger H}{m_S^2} S_0 \right) X_\mu X^\mu \\ &+ \frac{\lambda_{hs}}{2} H^\dagger H S_0 \left(\frac{\mu^2}{M^2} \frac{S_0}{m_S^2} X_\mu X^\mu + \frac{\lambda_{hs}}{2} H^\dagger H S_0 \right) + \dots \\ &= \frac{\mu^4}{M^4} \frac{S_0^2}{m_S^2} (X_\mu X^\mu)^2 + \lambda_{hs} \frac{\mu^2}{M^2} \frac{S_0^2}{m_S^2} H^\dagger H X_\mu X^\mu + \frac{\lambda_{hs}^2}{4} (H^\dagger H)^2 S_0^2 + \mathcal{O}(\delta S^2). \end{aligned} \quad (4.21)$$

De este último Lagrangiano, se obtiene el acoplamiento para $\lambda_{hv}/4 H^\dagger H X_\mu X^\mu$ está dado por:

$$\lambda_{hv} = \lambda_{hs} \frac{\mu^2}{M^2} \frac{\langle S \rangle^2}{m_S^2} = \lambda_{hs} \frac{2m_X^2}{m_S^2}; \quad (4.22)$$

más aún, en el Lagrangiano (4.21) también aparece un término de auto-interacción

$$\frac{\mu^4}{M^4} \frac{\langle S \rangle^2}{m_S^2} (X_\mu X^\mu)^2. \quad (4.23)$$

El higgs desarrolla un VEV después de la ruptura de la simetría generando un término de masa adicional para X

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \lambda_{hs} \frac{\mu^2}{M^2} \frac{\langle S \rangle^2}{m_S^2} v^2 X_\mu X^\mu + \lambda_{hs} \frac{\mu^2}{M^2} \frac{\langle S \rangle^2}{m_S^2} \frac{\sqrt{2}}{2} h v X_\mu X^\mu \\ &+ \lambda_{hs} \frac{\mu^2}{M^2} \frac{\langle S \rangle^2}{m_S^2} \left(\frac{h}{\sqrt{2}} \right)^2 + \frac{\mu^4}{M^4} \frac{\langle S \rangle^2}{m_S^2} (X_\mu X^\mu)^2. \end{aligned} \quad (4.24)$$

En general S puede ser complejo, cuyo Lagrangiano es

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + D_\mu S^* D^\mu S - V(S) + \frac{\lambda_{hs}}{4} H^\dagger H S^* S; \quad (4.25)$$

este sistema también goza de una simetría $S \rightarrow S^*$ y $X_\mu \rightarrow -X_\mu$.

Del análisis anterior se tiene que el acoplamiento del portal vectorial, después del rompimiento de la simetría es

$$\begin{aligned}\Delta\mathcal{L} &= \left(\frac{1}{2}m^2 + \frac{\lambda_{hv}}{4}v^2 + \frac{\lambda_{hv}}{4}\sqrt{2}vh + \frac{\lambda_{hv}}{4}\left(\frac{h}{\sqrt{2}}\right)^2 \right) X_\mu X^\mu \\ &= \left(\frac{1}{2}m_X^2 + \frac{\lambda_{hv}}{4}\sqrt{2}hv + \frac{\lambda_{hv}}{4}\left(\frac{h}{\sqrt{2}}\right)^2 \right) X_\mu X^\mu,\end{aligned}\tag{4.26}$$

con m_X^2 la masa del campo X dada por

$$m_X^2 = m^2 + \frac{\lambda_{hv}}{2}v^2.\tag{4.27}$$

4.1. Decaimiento invisible del Higgs

Para estudiar la fenomenología del portal de Higgs y las constricciones que existen actualmente para la materia oscura hay que estudiar sus interacciones o aniquilación de esta en partículas del Modelo Estándar [9]. Tomando el Lagrangiano

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{SM} + \frac{\lambda_{hv}}{4}H^\dagger H X_\mu X^\mu + \frac{1}{2}m^2 X_\mu X^\mu + \frac{\lambda}{4}(X_\mu X^\mu)^2\tag{4.28}$$

vemos nuevamente que al desarrollar el Higgs un VEV, el vector X adquiere una masa como en la expresión (4.27). Si esta masa es menor a la mitad de la masa del Higgs ($2m_X < m_h$), el decaimiento (invisible) del Higgs $h \rightarrow XX$ está cinemáticamente permitido produciendo de esta forma materia oscura; para obtener la tasa de decaimiento $\Gamma(h \rightarrow XX)$ de este proceso (ver diagrama) se debe calcular primero, utilizando las reglas de Feynman, la amplitud de dicho proceso, $|\mathcal{M}|^2$.

De la figura 4.1 y la ecuación (4.26) se obtiene que el factor del vértice es

$$i\frac{\lambda_{hv}}{4}\sqrt{2}vg_{\mu\nu}\tag{4.29}$$

con $g_{\mu\nu}$ la métrica. Entonces la amplitud es

$$i\mathcal{M} = i\frac{\lambda_{hv}}{4}\sqrt{2}vg_{\mu\nu}\epsilon_{(\lambda)}^\mu(p)\epsilon_{(\lambda')}^\nu(p')\tag{4.30}$$

donde $\epsilon_{(\lambda)}^\mu$ son vectores de polarización que satisfacen la relación de completitud [20]

$$\sum_{\lambda} \epsilon_{(\lambda)}^\mu(p)\epsilon_{(\lambda)}^\nu(p) = -g^{\mu\nu} + \frac{p^\mu p^\nu}{M^2},\tag{4.31}$$

donde M es la masa de la partícula vectorial.

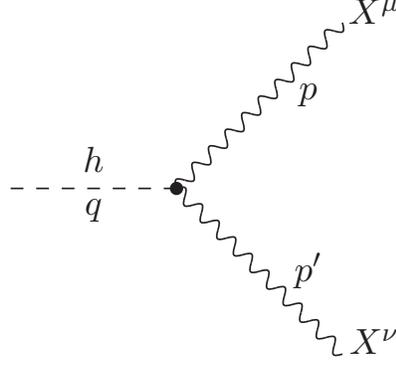


Figura 4.1: Diagrama de Feynman del decaimiento invisible del Higgs $h \rightarrow XX$

De esta forma, multiplicando por el conjugado de (4.30) y sumando sobre todas las polarizaciones λ y λ' se obtiene el cuadrado de la amplitud

$$|\mathcal{M}|^2 = \left(\frac{\lambda_{hv}}{4} \sqrt{2} v \right)^2 \sum_{\lambda, \lambda'} g_{\mu\nu} \epsilon_{(\lambda)}^\mu(p) \epsilon_{(\lambda')}^\nu(p') g_{\alpha\beta} \epsilon_{(\lambda)}^\alpha(p) \epsilon_{(\lambda')}^\beta(p') \quad (4.32)$$

aplicando las relaciones de completitud de los vectores de polarización la expresión anterior se vuelve

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}|^2 &= \left(\frac{\lambda_{hv}^2}{8} v^2 \right) g_{\mu\nu} \left(-g^{\mu\alpha} + \frac{p^\mu p^\alpha}{m_X^2} \right) g_{\nu\beta} \left(-g^{\nu\beta} + \frac{p'^\nu p'^\beta}{m_X^2} \right) \\ &= \left(\frac{\lambda_{hv}^2}{8} v^2 \right) \left(-g_\nu^\alpha + \frac{p_\nu p^\alpha}{m_X^2} \right) \left(-g_\alpha^\nu + \frac{p'_\alpha p'^\nu}{m_X^2} \right) \\ &= \left(\frac{\lambda_{hv}^2}{8} v^2 \right) \left(4 - \frac{p^\nu p_\nu}{m_X^2} - \frac{p'^\nu p'_\nu}{m_X^2} + \frac{p_\nu p'^\nu p^\alpha p'_\alpha}{m_X^4} \right). \end{aligned} \quad (4.33)$$

Como p y p' son los 4-momentos de los vectores X , $p^\nu p_\nu = p^2 = p'^\alpha p'_\alpha = p'^2 = m_X^2$, entonces

$$|\mathcal{M}|^2 = \left(\frac{\lambda_{hv}^2}{8} v^2 \right) \left(2 - \frac{(p \cdot p')^2}{m_X^4} \right). \quad (4.34)$$

Utilizando la conservación de momento,

$$\begin{aligned} q^2 = m_h^2 &= (p + p')^2 = p^2 + p'^2 + 2p \cdot p' = 2m_X^2 + 2p \cdot p' \\ &\Rightarrow p \cdot p' = \frac{m_h^2 - 2m_X^2}{2}, \end{aligned} \quad (4.35)$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}|^2 &= \left(\frac{\lambda_{hv}^2 v^2}{8} \right) \left(2 - \frac{(m_h^2 - 2m_X^2)^2}{4m_X^4} \right) \\ &= \left(\frac{\lambda_{hv}^2 v^2}{8} \right) \left(12 + \frac{m_h^4}{m_X^4} - 4 \frac{m_h^2}{m_X^2} \right) \left(\frac{m_X^4}{m_h^4} \right) \left(\frac{m_h^4}{m_X^4} \right) \end{aligned} \quad (4.36)$$

Así que el cuadrado de la amplitud para el proceso $h \rightarrow XX$ es

$$|\mathcal{M}|^2 = \left(\frac{\lambda_{hv}^2 m_h^4 v^2}{8m_X^4} \right) \left(1 - 4 \frac{m_X^2}{m_h^2} + 12 \frac{m_X^4}{m_h^4} \right). \quad (4.37)$$

Sustituyendo está amplitud en la ecuación (B.12), se obtiene la tasa de decaimiento invisible del Higgs

$$\Gamma = \frac{1}{16\pi m_h} \sqrt{1 - 4 \frac{m_X^2}{m_h^2}} \left(\frac{\lambda_{hv}^2 m_h^4 v^2}{8m_X^4} \right) \left(1 - 4 \frac{m_X^2}{m_h^2} + 12 \frac{m_X^4}{m_h^4} \right) \quad (4.38)$$

$$\Rightarrow \Gamma = \frac{\lambda_{hv}^2 v^2 m_h^3}{128\pi m_X^4} \sqrt{1 - 4 \frac{m_X^2}{m_h^2}} \left(1 - 4 \frac{m_X^2}{m_h^2} + 12 \frac{m_X^4}{m_h^4} \right). \quad (4.39)$$

donde $v = 174 \text{ GeV}$ es el VEV del Higgs.

4.2. Aniquilación de materia oscura

La abundancia rélica de la materia oscura se obtiene a través del canal s de aniquilación a través del intercambio del bosón de Higgs. Para obtenerla se calcula primero la sección eficaz de aniquilación de materia oscura en fermiones del Modelo Estándar (figura 4.2).

Empezando con la fórmula [19]

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{4E_A E_B} \frac{1}{|\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B|} \frac{|\mathbf{k}_1|}{16\pi^2 E_{cm}} |\mathcal{M}|^2 \quad (4.40)$$

con $\mathbf{v}_A = \mathbf{v}$ y $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}'$ las velocidades de las partículas iniciales. La amplitud del proceso $XX \rightarrow f\bar{f}$, se calcula de la siguiente manera utilizando las reglas de Feynman, del acoplamiento del higgs con fermiones (acoplamiento de Yukawa), el factor del vértice izquierdo es

$$i \frac{m_f}{v}, \quad (4.41)$$

el vértice derecho es (4.29) y el propagador es

$$\frac{i}{q^2 - m_h^2}, \quad (4.42)$$

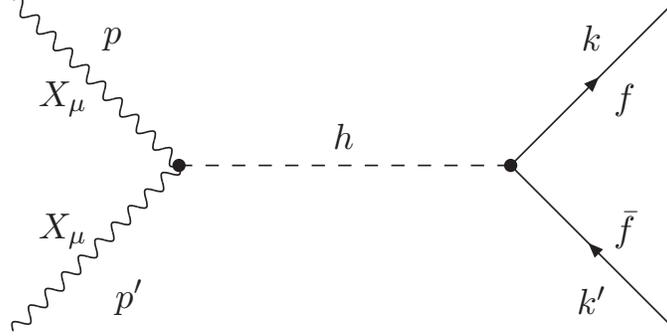


Figura 4.2: Diagrama de Feynman de aniquilación de la materia oscura vectorial en partículas del ME.

por lo tanto,

$$-i\mathcal{M} = u^{(s)}(k) i \frac{m_f}{v} \bar{v}^{(r)}(k') \frac{i}{q^2 - m_h^2} i \frac{\lambda_{hv}}{2} \sqrt{2} v g_{\mu\nu} \epsilon^\mu_{(\lambda)}(p) \epsilon^\nu_{(\lambda')}(p') \quad (4.43)$$

multiplicando nuevamente por el conjugado y sumando sobre los espines y polarizaciones

$$|\mathcal{M}|^2 = \left(\frac{\lambda_{hv}^2 m_f^2}{2} \right) \left(\frac{1}{q^2 - m_h^2} \right)^2 \sum_{s,r} v^{(r)} \bar{u}^{(s)} u^{(s)} \bar{v}^{(r)} \frac{1}{9} \sum_{\lambda,\lambda'} g_{\mu\nu} \epsilon^\mu_{(\lambda)}(p) \epsilon^\nu_{(\lambda')}(p') g_{\alpha\beta} \epsilon^\alpha_{(\lambda)}(p) \epsilon^\beta_{(\lambda')}(p') \quad (4.44)$$

Usando las relaciones de completéz (4.31) para la parte vectorial y (3.26) para la parte espinorial, $|\mathcal{M}|^2$ se vuelve

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}|^2 &= \frac{\lambda_{hv}^2 m_f^2}{2} \frac{1}{(q^2 - m_h^2)^2} \text{Tr}(\not{k} + m_f)(\not{k}' - m_f) \frac{1}{9} \left(2 + \frac{(p \cdot p')^2}{m_X^4} \right) \\ &= \frac{\lambda_{hv}^2 m_f^2}{2} \frac{1}{(q^2 - m_h^2)^2} \text{Tr}(\not{k}\not{k}' - m_f^2) \frac{1}{9} \left(2 + \frac{(p \cdot p')^2}{m_X^4} \right) \\ &= \frac{\lambda_{hv}^2 m_f^2}{2} \frac{1}{(q^2 - m_h^2)^2} (4k \cdot k' - 4m_f^2) \frac{1}{9} \left(2 + \frac{(p \cdot p')^2}{m_X^4} \right) \end{aligned} \quad (4.45)$$

en la última igualdad se utilizaron las propiedades de la traza $\text{Tr}(\not{a}\not{b}) = 4a \cdot b$ y $\text{Tr}(\mathbb{I}) = 4$.

En el capítulo 2 se mencionó que la materia oscura es *no relativista*, esto quiere decir que $|\mathbf{p}| \ll m_X$, por lo tanto la relación de dispersión

$$E^2 = |\mathbf{p}|^2 + m_X^2 \quad (4.46)$$

se vuelve

$$E^2 \approx m_X^2. \quad (4.47)$$

Bajo esta hipótesis en el límite no relativista el término $(p \cdot p')^2/m_X^4$ es, en el sistema de referencia del centro de masa, con $\mathbf{p} = -\mathbf{p}'$ y $p^0 = p'^0 = E$,

$$\begin{aligned} (p + p')^2 &= p^2 + p'^2 + 2p \cdot p' \\ \Rightarrow p \cdot p' &= 2E^2 - m_X^2 \approx m_X^2, \end{aligned} \quad (4.48)$$

ademas $q^2 = (p + p')^2 = 4E^2$, por lo tanto,

$$|\mathcal{M}|^2 \approx 2\lambda_{hv}^2 v^2 \frac{1}{(4m_X^2 - m_h^2)^2} (k \cdot k' - m_f^2) \frac{1}{9} \left(2 + \frac{(m_X^2)^2}{m_X^4} \right) \quad (4.49)$$

Por otra parte los momentos k y k' satisfacen también que $4E^2 = q^2 = (k+k')^2 = 2m_f^2 + 2k \cdot k' \Rightarrow k \cdot k' = 2E^2 - m_f^2$, por lo que,

$$|\mathcal{M}|^2 \approx \frac{4\lambda_{hv}^2 v^2}{3} \frac{1}{(4m_X^2 - m_h^2)^2} E^2 \left(1 - \frac{m_f^2}{E^2} \right). \quad (4.50)$$

Multiplicando por un factor de simetría $1/2$ y recordando la condición del centro de masa $E_{cm} = 2E$, el cuadrado de la amplitud para (figura) es

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{\lambda_{hv}^2 v^2}{6} E_{cm}^2 \frac{(1 - m_f^2/m_X^2)}{(4m_X^2 - m_h^2)^2}; \quad (4.51)$$

sustituyendo esto en la fórmula (B.13) y utilizando la relación para la velocidad relativa en el límite no relativista [41]

$$v_r = |\mathbf{v} - \mathbf{v}'|, \quad (4.52)$$

se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{|\mathbf{k}|}{32\pi^2 v_r E_{cm}^2} \frac{\lambda_{hv}^2 m_f^2}{6} E_{cm}^2 \frac{1 - m_f^2/m_X^2}{4m_X^2 - m_h^2} \\ &= \frac{\lambda_{hv}^2 m_f^2}{32\pi^2 v_r} \frac{1}{6} \frac{(1 - m_f^2/m_X^2)^{3/2}}{4m_X^2 - m_h^2}. \end{aligned} \quad (4.53)$$

Integrando la expresión anterior se obtiene la sección eficaz σ

$$\sigma_X = \frac{\lambda_{hv}^2 m_f^2}{48\pi v_r} \frac{(1 - m_f^2/m_X^2)^{3/2}}{(4m_X^2 - m_h^2)^2}, \quad (4.54)$$

por último para la sección eficaz promedio, se usa la fórmula encontrada en [42]

$$\langle \sigma_X v_r \rangle = \frac{\int_0^\infty dv_r v_r^2 (\sigma v_r) e^{-v_r^2/4x}}{2\sqrt{\pi}x^{3/2}}, \quad x = \frac{T}{m} \quad (4.55)$$

de forma que, al sustituir (4.54) se cancela el factor v_r en el denominador obteniéndose así la sección eficaz promediada térmicamente

$$\langle \sigma_X v_r \rangle = \frac{\lambda_{hv}^2 m_f^2 (1 - m_f^2/m_X^2)^{3/2}}{48\pi (4m_X^2 - m_h^2)^2}. \quad (4.56)$$

Si comparamos con la sección eficaz del campo escalar (3.31)

$$\sigma_S = \frac{\lambda_{hs}^2 m_f^2 (1 - m_f^2/m_S^2)^{3/2}}{16\pi v_r (4m_S^2 - m_h^2)^2}, \quad (4.57)$$

cuyo promedio “térmico” es

$$\langle \sigma_S v_r \rangle = \frac{\lambda_{hs}^2 m_f^2 (1 - m_f^2/m_S^2)^{3/2}}{16\pi (4m_S^2 - m_h^2)^2} \quad (4.58)$$

se puede notar que es 3 veces la sección eficaz promedio (4.56), esto se debe a que al obtener \mathcal{M} para el portal vectorial se promedió sobre todas las polarizaciones del vector X .

4.3. Cálculos a nivel de un lazo del portal vectorial

En la sección anterior se calculó la amplitud para los procesos de aniquilación de materia oscura en fermiones del Modelo Estándar y a partir de esto se obtuvo la sección eficaz de aniquilación promediada térmicamente (4.56) para el portal vectorial y para el portal escalar (4.58), sin embargo, este es el cálculo únicamente a nivel árbol. Los términos como $h^2 X_\mu X^\mu$ o $(X_\mu X^\mu)^2$ en el Lagrangiano (3.34) o $h^2 S^2$ y S^4 en (3.19) contribuyen al nivel de un lazo en el cálculo de $|\mathcal{M}|^2$. En el Apéndice A se incluyen la mayor parte de los cálculos para las posibles contribuciones a un lazo y se resuelven las integrales resultantes introduciendo escalas de corte Λ^2 .

El diagrama correspondiente al término $h^2 X_\mu X^\mu$ se encuentra en la figura A.5, cuya integral de lazo es

$$I_{hhXX}(q^2) = \int \frac{d^n p}{(2\pi)^n} \left[i \frac{\lambda_{hv}}{4} g_{\mu\nu} \left(\frac{i}{(p+q)^2 - m_h^2} \right) i \frac{3m_h^2}{\sqrt{2}v} \left(\frac{i}{p^2 - m_h^2} \right) \right], \quad (4.59)$$

con $n = 4 - \epsilon$; introduciendo una escala μ para mantener las dimensiones y los parámetros de Feynman para simplificar la integral uno obtiene

$$\frac{3\lambda_{hv}m_h^2}{4\sqrt{2}v} g_{\mu\nu} \int_0^1 dx \mu^\epsilon \int \frac{d^n p}{(2\pi)^n} \left[\frac{1}{(p^2 + 2xp \cdot q + xq^2 - m_h^2)^2} \right] \quad (4.60)$$

donde realizando el ya conocido cambio de variable $k = p + xq$, se reduce a:

$$\frac{3\lambda_{hv}m_h^2}{4\sqrt{2}v}g_{\mu\nu}\int_0^1 dx\mu^\epsilon\int\frac{d^n k}{(2\pi)^n}\left[\frac{1}{(k^2+x(1-x)q^2-m_h^2)^2}\right]. \quad (4.61)$$

Renombrando al factor independiente, $M^2 = m_h^2 - x(1-x)q^2$ se obtiene, a partir de la fórmula (B.18), la solución para la integral de momentos,

$$\mu^\epsilon\frac{i}{(4\pi)^{n/2}}\Gamma(2-\frac{n}{2})(M^2)^{n/2-2}=\frac{i}{(4\pi)^{2-\epsilon/2}}\Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right)\left(\frac{M^2}{\mu^2}\right)^{-\epsilon/2}. \quad (4.62)$$

Utilizando la aproximación para la función gamma (B.22)

$$\Gamma(\epsilon)=\epsilon^{-1}+\Gamma'(1)+\mathcal{O}(\epsilon), \quad \Gamma'(1)=-\gamma_E\approx 0.5772, \quad (4.63)$$

y aproximando $\left(\frac{M^2}{\mu^2}\right)^{-\epsilon}$ y $(4\pi)^\epsilon$ como $1-\frac{\epsilon}{2}\log\left(\frac{M^2}{\mu^2}\right)$ y $1+\frac{\epsilon}{2}\log(4\pi)$ respectivamente, se obtiene

$$I_{hhXX}(q^2)=\frac{3\lambda_{hv}m_h^2}{4\sqrt{2}v}g_{\mu\nu}\int_0^1 dx\frac{i}{(4\pi)^2}\left(\frac{2}{\epsilon}-\gamma_E\right)\left(1-\frac{\epsilon}{2}\log\left(\frac{M^2}{\mu^2}\right)\right)\left(1+\frac{\epsilon}{2}\log 4\pi\right) \quad (4.64)$$

de donde es claro que en el límite de $\epsilon \rightarrow 0$, la expresión anterior diverge a infinito. Estas divergencias se pueden cancelar introduciendo los contratérminos correspondientes. Sin embargo, los términos de orden ϵ^0 son finitos y son de interés para este estudio. De esta última expresión se obtienen dichos términos por lo que I_{hhXX} se reduce a

$$I_{hhXX}(q^2)=i\frac{3\lambda_{hv}m_h^2}{4\sqrt{2}v}g_{\mu\nu}\int_0^1 dx\frac{1}{(4\pi)^2}\left(\frac{2}{\epsilon}-\gamma_E+\log 4\pi-\log(m_h^2-x(1-x)q^2)+\log(\mu^2)\right). \quad (4.65)$$

Esta cantidad sigue siendo infinita cuando $\epsilon \rightarrow 0$, sin embargo, es posible definir una nueva cantidad finita como

$$\mathcal{I}_{hhXX}\equiv I_{hhXX}(q^2)-I_{hhXX}(0)=i\frac{3\lambda_{hv}m_h^2}{64\sqrt{2}\pi^2v}g_{\mu\nu}\int_0^1 dx\log\left(\frac{m_h^2}{m_h^2-x(1-x)q^2}\right) \quad (4.66)$$

la cual es ya independiente de $\epsilon \rightarrow 0$ y es la que contiene información física.

En el caso de $q^2 < 0$, lo que corresponde a un propagador en el canal t o u [19], \mathcal{I} es real mientras que para un proceso en el canal s (el cual es el canal en el que estamos trabajando), q^2 es positivo. Cuando el argumento del logaritmo en (4.66) se vuelve negativo hay un corte en la rama logarítmica. Como el máximo de $x(1-x)$ es $1/4$, el corte comienza en $q^2 = 4m_h^2$, es decir, en el umbral para la creación de bosones de Higgs.

La integral de $\log(m_h^2 - x(1-x)q^2)$ se resuelve integrando por partes para obtener

$$\log(m_h^2) - 2 + 2\frac{\sqrt{4m_h^2 - q^2}}{q}\tan^{-1}\left(\frac{q}{\sqrt{4m_h^2 - q^2}}\right) \quad (4.67)$$

por lo tanto, sustituyendo en (4.66), la parte finita de la contribución a un lazo de $h^2 X_\mu X^\mu$ es

$$i \frac{3\lambda_{hv} m_h^2}{64\sqrt{2}\pi^2 v} g_{\mu\nu} (2 - 2\Theta_h^{-1} \tan^{-1} \Theta_h), \quad (4.68)$$

donde

$$\Theta_h = \frac{q}{\sqrt{4m_h^2 - q^2}} \quad (4.69)$$

cuando $4m^2 > q^2$. La solución más general ($4m^2 < q^2$) es, por (A.14)

$$i \frac{3\lambda_{hv} m_h^2}{64\sqrt{2}\pi^2 v} g_{\mu\nu} \left(2 - \frac{\sqrt{q^2 - 4m_h^2}}{q} \log \left| \frac{q + \sqrt{q^2 - 4m_h^2}}{q - \sqrt{q^2 - 4m_h^2}} \right| \right) \quad (4.70)$$

De forma similar a la sección anterior, la contribución a la amplitud es

$$i\mathcal{M}_{hhXX} = u^{(s)}(k) i \frac{m_f}{v} \bar{v}^{(r)}(k') \frac{i}{q^2 - m_h^2} (2 - 2\Theta_h^{-1} \tan^{-1} \Theta_h) \left(i \frac{3\lambda_{hv} m_h^2}{64\sqrt{2}\pi^2 v} \right) g_{\mu\nu} \epsilon_{(\lambda)}^\mu(p_1) \epsilon_{(\lambda')}^\nu(p'_1) \quad (4.71)$$

para $4m_h^2 > q^2$. Para el caso de $4m_h^2 < q^2$, la amplitud es

$$i\mathcal{M}_{hhXX} = u^{(s)}(k) i \frac{m_f}{v} \bar{v}^{(r)}(k') \left(\frac{i}{q^2 - m_h^2} \right) \left(2 - \frac{\sqrt{q^2 - 4m_h^2}}{q} \log \left| \frac{q + \sqrt{q^2 - 4m_h^2}}{q - \sqrt{q^2 - 4m_h^2}} \right| \right) \times \left(i \frac{3\lambda_{hv} m_h^2}{64\sqrt{2}\pi^2 v} \right) g_{\mu\nu} \epsilon_{(\lambda)}^\mu(p_1) \epsilon_{(\lambda')}^\nu(p'_1) \quad (4.72)$$

Otra de las contribuciones a un lazo, al igual que en el Apéndice A, está dada por la auto-energía del Higgs (figura A.1), la integral del lazo es

$$I_h(q^2) = \frac{1}{2} \int \frac{d^n p}{(2\pi)^n} \left[i \frac{3m_h^2}{\sqrt{2}v} \left(\frac{i}{(p+q)^2 - m_h^2} \right) i \frac{3m_h^2}{\sqrt{2}v} \left(\frac{i}{p^2 - m_h^2} \right) \right]. \quad (4.73)$$

El factor un medio es el factor de simetría asociado con intercambiar los propagadores semicirculares superior e inferior [43]

Esta integral se puede reescribir usando los parámetros de Feynman (ecuación (B.14)) como

$$\frac{9m_h^4}{2v^2} \mu^\epsilon \int_0^1 dx \int \frac{d^n l}{(2\pi)^n} \frac{1}{(l^2 + x(1-x)q^2 - m_h^2)^2}, \quad (4.74)$$

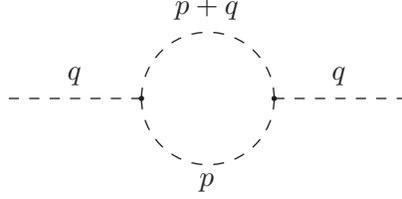


Figura 4.3: Auto-energía del Higgs

con l , μ y n igual que en el cálculo anterior; la solución a esta integral se obtiene por medio de la ecuación (B.19), por lo tanto,

$$I_h(q^2) = \frac{9m_h^4}{2v^2} \mu^\epsilon \int_0^1 dx \left(\frac{i}{(4\pi)^{2-\epsilon/2}} \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) (m_h^2 - x(1-x)q^2)^{-\epsilon/2} \right). \quad (4.75)$$

Nuevamente, usando la aproximación (B.22) se obtiene

$$I_h(q^2) = i \frac{9m_h^4}{32\pi^2 v^2} \int_0^1 dx \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma_E + \log 4\pi - \log(m_h^2 - x(1-x)q^2) + \log \mu^2 \right) \quad (4.76)$$

y al evaluar esta última integral con ayuda de (A.11) finalmente obtenemos

$$I_h(q^2) = i \frac{9m_h^4}{32\pi^2 v^2} \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma_E + \log \left\{ \frac{4\pi\mu^2}{m_h^2} \right\} + 2 - \frac{2}{q} \sqrt{4m_h^2 - q^2} \tan^{-1} \frac{q}{\sqrt{4m_h^2 - q^2}} \right). \quad (4.77)$$

Esta cantidad sigue siendo divergente para $\epsilon \rightarrow 0$, pero es posible definir nuevamente una cantidad finita

$$\mathcal{I}_h(q^2) \equiv I_h(q^2) - I_h(0) = i \frac{9m_h^4}{32\pi^2 v^2} \int_0^1 \log \left(\frac{m_h^2}{m_h^2 - x(1-x)q^2} \right) \quad (4.78)$$

y por (A.14)

$$\mathcal{I}_h(q^2) = i \frac{9m_h^4}{32\pi^2 v^2} \left(2 - \frac{2}{q} \sqrt{4m_h^2 - q^2} \tan^{-1} \left\{ \frac{q}{\sqrt{4m_h^2 - q^2}} \right\} \right) \quad (4.79)$$

Así que la contribución a la amplitud de aniquilación de este loop es

$$i\mathcal{M}_h = u^{(s)}(k) i \frac{m_f}{v} \bar{v}^{(r)}(k') \left(\frac{i}{q^2 - m_h^2} \right) \frac{9m_h^4}{32\pi^2 v^2} \left(2 - \frac{2}{q} \sqrt{4m_h^2 - q^2} \tan^{-1} \frac{q}{\sqrt{4m_h^2 - q^2}} \right) \quad (4.80)$$

$$\times \left(\frac{i}{q^2 - m_h^2} \right) i \frac{\lambda_{hv}}{\sqrt{2}} g_{\mu\nu} \epsilon^\mu(p) \epsilon^\nu(p')$$

Dado que el acoplamiento $\mathcal{L} \supset hX_\mu X^\mu$ existe (de hecho es el mismo acoplamiento que se uso en el cálculo de la amplitud de aniquilación a nivel árbol), también existe una contribución de la auto-energía del Higgs proveniente de los vectores X (figura A.3) cuya integral de lazo es

$$\begin{aligned} I_X(q^2) &= \frac{\mu^\epsilon}{2} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \left[\left(i \frac{\lambda_{hv} v}{\sqrt{2}} \right) \frac{-i}{(p+q)^2 - m_X^2} \left(g^{\mu\nu} - \frac{(p+q)^\mu (p+q)^\nu}{m_X^2} \right) \left(i \frac{\lambda_{hv} v}{\sqrt{2}} \right) \right. \\ &\quad \left. \times \frac{-i}{p^2 - m_X^2} \left(g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{m_X^2} \right) \right] \\ &= \frac{\lambda_{hv}^2 v^2}{4} \mu^\epsilon \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{1}{((p+q)^2 - m_X^2)(p^2 - m_X^2)} \left(g_{\mu\nu} - \frac{(p+q)_\mu (p+q)_\nu}{m_X^2} \right) \left(g^{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{m_X^2} \right). \end{aligned} \quad (4.81)$$

con la típica escala μ para conservar las mismas dimensiones tanto en dimensión 4 como en dimensión $4 - \epsilon$; en este caso $g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = d$ ya que estamos trabajando en $d = 4 - \epsilon$ dimensiones.

Esta integral se puede reescribir usando la parametrización de Feynman

$$\frac{\lambda_{hv}^2 v^2}{4m_X^4} \int_0^1 dx \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \left[\frac{1}{(p^2 + 2xp \cdot q + xq^2 - m_X^2)^2} \{ dm_X^2 - m_X^2(2p^2 + q^2 + 2p \cdot q) + (p^2 + p \cdot q) \} \right]. \quad (4.82)$$

Haciendo el cambio de variable $l = p + xq$ y $M_X^2 = m_X^2 - x(1-x)q^2$ se obtiene

$$\frac{\lambda_{hv}^2 v^2}{4m_X^4} \int_0^1 dx \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \left[\frac{dm_X^4 - m_X^2[2(l-xq)^2 + q^2 + 2lq - 2xq^2] + (l^2 + x^2q^2 - 2xql + lq - xq^2)^2}{(l^2 - M_X^2)^2} \right]; \quad (4.83)$$

con un poco de álgebra y rearrreglando términos obtenemos

$$\begin{aligned} I_X(q^2) &= \frac{\lambda_{hv}^2 v^2}{4m_X^4} \int_0^1 dx \int \frac{d^d p}{(2\pi)^n} \left[\frac{1}{(l^2 - M_X^2)^2} \right] \{ l^2(2q^2x(x-1) + q^2d^{-1}(1-2x)^2 - 2m_X^2) \\ &\quad + l^4 + q^4x^2(1-x)^2 - m_X^2q^2(2x^2 - 2x + 1) + dm_X^4 \}. \end{aligned} \quad (4.84)$$

donde se uso la siguiente sustitución

$$(l \cdot q)^2 = l^\mu l^\nu q_\mu q_\nu \rightarrow \frac{g^{\mu\nu}}{d} l^2 q_\mu q_\nu = \frac{1}{d} l^2 q^2 \quad (4.85)$$

La solución de (4.84) se limita ahora a resolver las siguientes integrales

$$\int \frac{d^d l}{(2\pi)^n} \frac{l^2(2q^2x(x-1) + q^2d^{-1}(1-2x)^2 - 2m_X^2)}{(l^2 - M_X^2)^2} \quad (4.86)$$

$$\int \frac{d^d l}{(2\pi)^n} \frac{(l^2)^2}{(l^2 - M_X^2)^2} \quad (4.87)$$

$$\int \frac{d^d l}{(2\pi)^n} \frac{q^4 x^2 (1-x)^2 - m_X^2 q^2 (2x^2 - 2x + 1) + dm_X^4}{(l^2 - M_X^2)^2} \quad (4.88)$$

utilizando las fórmulas (B.20) y (B.19), obteniéndose

$$\begin{aligned} I_X(q^2) &= \frac{\lambda_{hv}^2 v^2}{4m_X^4} \int_0^1 dx \left(\frac{i}{16\pi^2} \right) \left\{ -(4\pi)^{\epsilon/2} (2q^2 x(x-1) + q^2 d^{-1} (1-2x)^2 - 2m_X^2) \frac{d}{2} \right. \\ &\times \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2} - 1\right) \left(\frac{M_X^2}{\mu^2}\right)^{-\epsilon/2} M_X^2 + (4\pi)^{\epsilon/2} \frac{\Gamma(4 - \frac{\epsilon}{2})}{\Gamma(2 - \frac{\epsilon}{2})} \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2} - 2\right) \left(\frac{M_X^2}{\mu^2}\right)^{-\epsilon/2} M_X^4 \\ &\left. + (q^4 x^2 (1-x)^2 - m_X^2 q^2 (2x^2 - 2x + 1) + dm_X^4) (4\pi)^{\epsilon/2} \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \left(\frac{M_X^2}{\mu^2}\right)^{\epsilon/2} \right\}. \end{aligned} \quad (4.89)$$

Usando las propiedades de la función Gamma obtenemos:

$$\begin{aligned} I_X(q^2) &= \frac{\lambda_{hv}^2 v^2}{4m_X^4} \int_0^1 dx \left(\frac{i}{16\pi^2} \right) \left\{ -(2q^2 x(x-1) + q^2 d^{-1} (1-2x)^2 - 2m_X^2) \frac{d}{2} \right. \\ &\times \left(\frac{2}{\epsilon} + \psi(2) + \log 4\pi - \log\left(\frac{M_X^2}{\mu^2}\right) \right) M_X^2 + \frac{\Gamma(4 - \frac{\epsilon}{2})}{\Gamma(2 - \frac{\epsilon}{2})} \left(\frac{2}{\epsilon} + \psi(3) + \log 4\pi - \log\left(\frac{M_X^2}{\mu^2}\right) \right) M_X^4 \\ &\left. + (q^4 x^2 (1-x)^2 - m_X^2 q^2 (2x^2 - 2x + 1) + dm_X^4) \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma_E + \log 4\pi - \log\left(\frac{M_X^2}{\mu^2}\right) \right) \right\}. \end{aligned} \quad (4.90)$$

Esta expresión aún contiene términos infinitos, sin embargo, al igual que en las contribuciones anteriores en las que aparecen cantidades divergentes es posible “deshacerse” de ellas al definir nuevamente la cantidad

$$\mathcal{I}_X(q^2) \equiv I_X(q^2) - I_X(0). \quad (4.91)$$

A partir de la ecuación (4.84) encontramos $I_X(q^2 = 0)$

$$I_X(0) = \frac{\lambda_{hv}^2 v^2}{4m_X^4} \int_0^1 dx \int \frac{d^d p}{(2\pi)^n} \left[\frac{1}{(l^2 - M_X^2)^2} \right] \{-2m_X^2 l^2 + l^4 + dm_X^4\} \quad (4.92)$$

y análogo al cálculo anterior, de las fórmulas (B.19) y (B.20):

$$\begin{aligned} I_X(0) &= i \frac{\lambda_{hv}^2 v^2}{64\pi^2 m_X^4} \int_0^1 dx \left[-2m_X^2 \frac{d}{2} \left(\frac{2}{\epsilon} + \psi(2) + \log 4\pi - \log\left(\frac{M_X^2}{\mu^2}\right) \right) \right. \\ &+ M_X^4 \left(\frac{2}{\epsilon} + \psi(3) + \log 4\pi - \log\left(\frac{M_X^2}{\mu^2}\right) \right) \frac{\Gamma(4 - \epsilon/2)}{\Gamma(2 - \epsilon/2)} \\ &\left. + dm_X^4 \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma_E + \log 4\pi - \log\left(\frac{M_X^2}{\mu^2}\right) \right) \right]; \end{aligned} \quad (4.93)$$

pero cuando $q^2 = 0$, $M_X^2 = m_X^2$ por lo tanto,

$$\begin{aligned}
I_X(0) = i \frac{\lambda_{hv}^2 v^2}{64\pi^2 m_X^4} \int_0^1 dx \left[-2m_X^2 \frac{d}{2} \left(\frac{2}{\epsilon} + \psi(2) + \log 4\pi - \log \frac{m_X^2}{\mu^2} \right) \right. \\
+ m_X^4 \left(\frac{2}{\epsilon} + \psi(3) + \log 4\pi - \log \frac{m_X^2}{\mu^2} \right) \frac{\Gamma(4 - \epsilon/2)}{\Gamma(2 - \epsilon/2)} \\
\left. + dm_X^4 \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma_E + \log 4\pi - \log \frac{m_X^2}{\mu^2} \right) \right]; \tag{4.94}
\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_X(q^2) = i \frac{\lambda_{hv}^2 v^2}{64\pi^2 m_X^4} \int_0^1 dx \left\{ -(q^2 x(x-1)d + \frac{q^2}{2}(1-2x)^2 - m_X^2 d)(m_X^2 - q^2 x(1-x)) \left(A + \log \frac{\mu^2}{M_X^2} \right) \right. \\
+ \left[\frac{\Gamma(4 - \epsilon/2)}{\Gamma(2 - \epsilon/2)} \left(B - \log \frac{\mu^2}{M_X^2} \right) (m_X^4 + q^4 x^2(1-x)^2 - 2m_X^2 x(1-x)) \right] \\
+ [q^4 x^2(1-x)^2 - m_X^2 q^2(2x^2 - 2x + 1) + m_X^4 d] \left(C + \log \frac{\mu^2}{M_X^2} \right) \\
\left. - m_X^4 d \left(A + \log \frac{\mu^2}{m_X^2} \right) - \frac{\Gamma(4 - \epsilon/2)}{\Gamma(2 - \epsilon/2)} m_X^4 \left(B + \log \frac{\mu^2}{m_X^2} \right) - m_X^4 d \left(C + \log \frac{\mu^2}{m_X^2} \right) \right\} \tag{4.95}
\end{aligned}$$

donde A , B y C son

$$\begin{aligned}
A \equiv \frac{2}{\epsilon} + \psi(2) + \log 4\pi, \quad B \equiv \frac{2}{\epsilon} + \psi(3) + \log 4\pi \\
C \equiv \frac{2}{\epsilon} - \gamma_E + \log 4\pi \tag{4.96}
\end{aligned}$$

Reacomodando esta expresión

$$\begin{aligned}
i \frac{\lambda_{hv}^2 v^2}{64\pi^2 m_X^4} \int_0^1 dx \left\{ m_X^4 \log \frac{m_X^2}{M_X^2} \left(2d + \frac{\Gamma(4 - \epsilon/2)}{\Gamma(2 - \epsilon/2)} \right) \right. \\
+ q^4 \left[A \left(dx^2(1-x)^2 + \frac{x(1-x)(1-2x)^2}{2} \right) + x^2(1-x)^2 \frac{\Gamma(4 - \epsilon/2)}{\Gamma(2 - \epsilon/2)} B + x^2(1-x)^2 C \right] \\
- q^4 \log \frac{M_X^2}{m_X^2} \left[dx^2(1-x)^2 + \frac{x(1-x)(1-2x)^2}{2} + x^2(1-x)^2 \frac{\Gamma(4 - \epsilon/2)}{\Gamma(2 - \epsilon/2)} + x^2(1-x)^2 \right] \\
- q^2 \left[\frac{m_X^2(1-2x)^2}{2} A + 2m_X^2 x(1-x) \frac{\Gamma(4 - \epsilon/2)}{\Gamma(2 - \epsilon/2)} B + m_X^2(2x^2 - 2x + 1) C \right] \\
\left. + q^2 \log \frac{M_X^2}{m_X^2} \left[\frac{m_X^2(1-2x)^2}{2} + 2m_X^2 x(1-x) \frac{\Gamma(4 - \epsilon/2)}{\Gamma(2 - \epsilon/2)} + m_X^2(2x^2 - 2x + 1) \right] \right\} \tag{4.97}
\end{aligned}$$

notamos que no todos los términos divergentes desaparecieron, para cancelar estos términos infinitos hay que introducir contratérminos adecuados en el Lagrangiano de tal forma que el Lagrangiano total contenga los términos físicos y los contratérminos que cancelen las cantidades divergentes, i.e.

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{físico} + \mathcal{L}_{contraterminos} \quad (4.98)$$

de esta manera las divergencias de la teoría se cancelan y conservamos los términos con información física. Sin embargo, no nos concentraremos en obtener tales términos ya que para nuestro estudio es suficiente conocer la parte finita de estas contribuciones así que en la ecuación (4.97) ignoramos los términos que contienen las cantidades de regularización A , B , C y nos centramos sólo en la cantidad

$$\begin{aligned} i \frac{\lambda_{hv}^2 v^2}{64\pi^2 m_X^4} \int_0^1 dx \left\{ m_X^4 \log \frac{m_X^2}{M_X^2} \left(8 + \frac{\Gamma(4)}{\Gamma(2)} \right) - q^4 \log \frac{M_X^2}{m_X^2} \left[4x^2(1-x)^2 + \frac{x(1-x)(1-2x)^2}{2} \right. \right. \\ \left. \left. + x^2(1-x)^2 \frac{\Gamma(4)}{\Gamma(2)} + x^2(1-x)^2 \right] \right. \\ \left. + q^2 \log \frac{M_X^2}{m_X^2} \left[\frac{m_X^2(1-2x)^2}{2} + 2m_X^2 x(1-x) \frac{\Gamma(4)}{\Gamma(2)} + m_X^2(2x^2 - 2x + 1) \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.99)$$

que es independiente de $\epsilon \rightarrow 0$. Evaluando las integrales en Mathematica obtenemos

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx x^2(1-x)^2 \log(m_X^2 - q^2 x(1-x)) &= \frac{\sqrt{4m_X^2 - q^2}}{15q^5} (6m_X^4 + 2m_X^2 q^2 + q^4) \\ &\times \tan^{-1} \left(\frac{q}{\sqrt{4m_X^2 - q^2}} \right) + \frac{1}{30} \log m_X^2 - \frac{1}{900q^4} (360m_X^2 + 90m_X^2 q^2 + 47q^4) \end{aligned} \quad (4.100)$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx x(1-x)(1-2x)^2 \log(m_X^2 - q^2 x(1-x)) &= \frac{8m_X^4}{q^4} - \frac{4m_X^2}{q^2} - \frac{31}{450} \\ - \left(\frac{8m_X^4}{5q^5} - \frac{2m_X^2}{15q^3} - \frac{1}{15q} \right) \sqrt{4m_X^2 - q^2} \tan^{-1} \left(\frac{q}{\sqrt{4m_X^2 - q^2}} \right) &+ \frac{1}{30} \log m_X^2 \end{aligned} \quad (4.101)$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx x(1-x) \log(m_X^2 - q^2 x(1-x)) &= -\frac{2m_X^2}{3q^2} - \frac{5}{18} + \frac{1}{3\sqrt{4m_X^2 - q^2}} \left(\frac{8m_X^4}{q^3} + \frac{2m_X^2}{q} - q \right) \\ &\times \tan^{-1} \left(\frac{q}{\sqrt{4m_X^2 - q^2}} \right) + \frac{1}{6} \log m_X^2 \end{aligned} \quad (4.102)$$

$$\int_0^1 dx (2x^2 - 2x + 1) \log(m_X^2 - q^2 x(1-x)) = \frac{4m_X^2}{3q^2} - \frac{13}{9} + \left(\frac{1}{q} - \frac{m_X^2}{q^3}\right) \frac{4}{3} \sqrt{4m_X^2 - q^2} \\ \times \tan^{-1} \left(\frac{q}{\sqrt{4m_X^2 - q^2}} \right) + \frac{2}{3} \log m_X^2 \quad (4.103)$$

$$\int_0^1 dx (1-2x)^2 \log(m_X^2 - q^2 x(1-x)) = -\frac{2}{3} \frac{(4m_X^2 - q^2)^{3/2}}{q^3} \tan^{-1} \left(\frac{q}{\sqrt{4m_X^2 - q^2}} \right) + \frac{8m_X^2}{3q^2} - \frac{8}{9} + \frac{1}{3} \log m_X^2 \quad (4.104)$$

por lo tanto, la parte finita es

$$i \frac{\lambda_{hv}^2 v^2}{64\pi^2 m_X^4} \left[\left\{ \frac{\sqrt{4m_X^2 - q^2}}{15q} \left(266m_X^4 + 4m_X^2 q^2 - \frac{q^4}{2} \right) + \frac{4m_X^2}{\sqrt{4m_X^2 - q^2}} \left(\frac{8m_X^4}{q} + 2m_X^2 q - q^3 \right) \right\} \right. \\ \left. \times \tan^{-1} \left(\frac{q}{\sqrt{4m_X^2 - q^2}} \right) - \frac{1054m_X^4}{15} + \frac{1609}{90} m_X^2 q^2 + \frac{143}{150} q^4 \right] \quad (4.105)$$

Entonces, la amplitud del diagrama correspondiente a este lazo es:

$$i\mathcal{M}_X = u^{(s)}(k) i \frac{m_f}{v} \bar{v}^{(r)}(k') \left(\frac{i}{q^2 - m_h^2} \right) \left(i \frac{\lambda_{hv}^2 v^2}{64\pi^2 m_X^4} \right) \\ \times \left[\left\{ \frac{\sqrt{4m_X^2 - q^2}}{15q} \left(266m_X^4 + 4m_X^2 q^2 - \frac{q^4}{2} \right) + \frac{4m_X^2}{\sqrt{4m_X^2 - q^2}} \left(\frac{8m_X^4}{q} + 2m_X^2 q - q^3 \right) \right\} \right. \\ \left. \times \tan^{-1} \left(\frac{q}{\sqrt{4m_X^2 - q^2}} \right) - \frac{1054m_X^4}{15} + \frac{1609}{90} m_X^2 q^2 + \frac{143}{150} q^4 \right] \left(\frac{i}{q^2 - m_h^2} \right) \left(i \frac{\lambda_{hs} v}{\sqrt{2}} g_{\mu\nu} \right) \epsilon^\mu(p) \epsilon^\nu(p') \quad (4.106)$$

La contribución a la auto-energía por parte de los bosones de norma W^\pm y Z^0 se calcula de la misma forma únicamente cambiando los factores en los vértices por

$$ig \frac{m_{Z,W}}{\cos \theta_W} g_{\mu\nu}$$

y para el caso del bosón W , se omite el factor de simetría $1/2$ ya que las partículas en el lazo no son iguales.

El siguiente proceso que estudiaremos es la contribución a la autoenergía del Higgs proveniente de un par fermión-antifermión (figura A.2).

La expresión para esta contribución es (el (-1) se agrega por tratarse de un loop fermiónico)

$$\begin{aligned}
 I_f(q^2) &= (-1) \frac{\mu^\epsilon}{2} \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \text{tr} \left[\left(i \frac{m_f}{v} \right) \frac{i(\not{k} + \not{q} + m_f)}{(k+q)^2 - m_f^2} \left(i \frac{m_f}{v} \right) \frac{\not{k} + m_f}{k^2 - m_f^2} \right] \\
 &= (-1) \frac{m_f^2}{2v^2} \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{k^2 + q \cdot k + m_f^2}{((k+q)^2 - m_f^2)(k^2 - m_f^2)},
 \end{aligned} \tag{4.107}$$

donde se usó la propiedad de la traza $\text{Tr}\{(\not{k} + \not{q} + m_f)(\not{k} + m_f)\} = 4(k^2 + k \cdot q + m_f^2)$. Reescribiendo la integral con la parametrización de Feynman se obtiene

$$\begin{aligned}
 I_f(q^2) &= (-1) \frac{m_f^2}{2v^2} \mu^\epsilon \int_0^1 dx \int \frac{d^n l}{(2\pi)^n} \frac{(l-xq)^2 + l \cdot q - xq^2 + m_f^2}{(l^2 - M_f^2)^2} \\
 &= -\frac{4m_f^2}{v^2} \mu^\epsilon \int_0^1 dx \int \frac{d^n l}{(2\pi)^n} \frac{l^2 + (1-2x)l \cdot q + M_f^2}{(l^2 - M_f^2)^2}.
 \end{aligned} \tag{4.108}$$

Descartando la integral con términos lineales de l queda resolver

$$\int \frac{d^n l}{(2\pi)^n} \frac{l^2}{(l^2 - M_f^2)^2}, \quad \int \frac{d^n l}{(2\pi)^n} \frac{M_f^2}{(l^2 - M_f^2)^2} \tag{4.109}$$

Realizando el procedimiento ya familiar se sigue que

$$\begin{aligned}
 I_f(q^2) &= (-i) \frac{m_f^2}{8\pi^2 v^2} \int_0^1 dx \left\{ M_f^2 \frac{d}{2} \left(\frac{2}{\epsilon} + \psi(2) + \log \frac{4\pi\mu^2}{M_f^2} \right) \right. \\
 &\quad \left. + M_f^2 \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma_E + \log \frac{4\pi\mu^2}{M_f^2} \right) \right\}
 \end{aligned} \tag{4.110}$$

Por otra parte, de la ecuación (4.108), en $q^2 = 0$

$$I_f(0) = (-i) \frac{m_f^2}{8\pi^2 v^2} \int_0^1 dx m_f^2 \left\{ \frac{d}{2} \left(\frac{2}{\epsilon} + \psi(2) + \log 4\pi + \log \frac{\mu^2}{m_f^2} \right) + \frac{2}{\epsilon} - \gamma_E + \log 4\pi + \log \frac{\mu^2}{m_f^2} \right\} \tag{4.111}$$

así que usando la solución (A.27) encontramos $\mathcal{I}_f(q^2)$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{I}_f(q^2) &= (-i) \frac{m_f^2}{8\pi^2 v^2} \int_0^1 dx M_f^2 \left\{ \frac{d}{2} \left(\frac{2}{\epsilon} + \psi(2) + \log 4\pi + \log \frac{\mu^2}{M_f^2} \right) + \frac{2}{\epsilon} - \gamma_E + \log 4\pi + \log \frac{\mu^2}{M_f^2} \right\} \\
 &\quad - m_f^2 \left\{ \frac{d}{2} \left(\frac{2}{\epsilon} + \psi(2) + \log 4\pi + \log \frac{\mu^2}{m_f^2} \right) + \frac{2}{\epsilon} - \gamma_E + \log 4\pi + \log \frac{\mu^2}{m_f^2} \right\}.
 \end{aligned} \tag{4.112}$$

Nuevamente nos concentramos sólo en los términos físicamente relevantes e independientes de ϵ así que finalmente obtenemos

$$(-i) \frac{m_f^2}{8\pi^2 v^2} \left[\frac{d}{2} \left(\frac{q^2}{6} \log \frac{m_f^2}{\mu^2} - \frac{4}{3} m_f^2 + \frac{5}{18} q^2 + \frac{(4m_f^2 - q^2)^{3/2}}{3q} \tan^{-1} \left(\frac{q}{\sqrt{4m_f^2 - q^2}} \right) \right) \right. \\ \left. + \frac{q^2}{6} \log \frac{m_f^2}{\mu^2} - \frac{4}{3} m_f^2 + \frac{5}{18} q^2 + \frac{(4m_f^2 - q^2)^{3/2}}{3q} \tan^{-1} \left(\frac{q}{\sqrt{4m_f^2 - q^2}} \right) \right] \quad (4.113)$$

Por lo tanto la amplitud $|\mathcal{M}_f|^2$ es

$$i\mathcal{M}_f = u^{(s)}(k) i \frac{m_f}{v} \bar{v}^{(r)}(k') \left(\frac{i}{q^2 - m_h^2} \right) \left(-i \frac{3m_f^2}{8\pi^2 v^2} \right) \left[\frac{q^2}{6} \log \frac{m_f^2}{\mu^2} - \frac{4}{3} m_f^2 + \frac{5}{18} q^2 \right. \\ \left. + \frac{(4m_f^2 - q^2)^{3/2}}{3q} \tan^{-1} \left(\frac{q}{\sqrt{4m_f^2 - q^2}} \right) \right] \left(\frac{i}{q^2 - m_h^2} \right) \left(i \frac{\lambda_{hv}}{\sqrt{2}} \right) g_{\mu\nu} \epsilon^\mu(p) \epsilon^\nu(p') \quad (4.114)$$

4.4. Contribuciones a un lazo del portal escalar

En el caso de la materia oscura escalar, el cálculo de las contribuciones a nivel de un lazo son más sencillas por el hecho de ser escalares. A continuación se realizan los cálculos considerados relevantes y algunos de ellos ya se calcularon en la sección anterior.

El término $h^2 S^2$ también contribuye a un lazo a la amplitud \mathcal{M} y por lo tanto a la sección eficaz σ_S . El diagrama correspondiente a tal contribución se encuentra en la figura A.7 y para conocer cual es esa contribución se debe resolver la siguiente integral

$$I_{hhSS} = \frac{1}{2} \int \frac{d^n p}{(2\pi)^4} \left[i \frac{3m_h^2}{\sqrt{2}v} \left(\frac{i}{(p+q)^2 - m_h^2} \right) \left(i \frac{\lambda_{hs}}{2} \right) \left(\frac{i}{p^2 - m_h^2} \right) \right]. \quad (4.115)$$

Con los parámetros de Feynman (B.14) la integral se vuelve

$$I_{hhSS} = i \frac{3m_h^2}{\sqrt{2}v} \frac{\lambda_{hs}}{2} \mu^\epsilon \int_0^1 dx \int \frac{d^n p}{(2\pi)^n} \frac{1}{(p^2 + 2xp \cdot q + xq^2 - m_h^2)^2} \\ = 3 \frac{m_h^2 \lambda_{hs}}{2\sqrt{2}v} \mu^\epsilon \int_0^1 dx \int \frac{d^n l}{(2\pi)^n} \frac{1}{(l^2 - M_{hh}^2)^2}, \quad (4.116)$$

con $l = p + xq$ y $M_{hh}^2 = m_h^2 - x(1-x)q^2$ y μ una escala que se introduce para preservar las dimensiones originales de la integral. Por la fórmula (B.18)

$$I_{hhSS} = 3 \frac{m_h^2 \lambda_{hs}}{2\sqrt{2}v} \int_0^1 dx \mu^{2\epsilon} \left(\frac{i}{(4\pi)^{n/2}} \Gamma \left(2 - \frac{n}{2} \right) (M_{hh}^2)^{n/2-2} \right) \quad (4.117)$$

como $n = 4 - \epsilon$ entonces,

$$I_{hhSS} = 3 \frac{m_h^2 \lambda_{hs}}{2\sqrt{2}v} \int_0^1 dx \frac{i}{(4\pi)^{2-\epsilon/2}} \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \left(\frac{M_{hh}^2}{\mu^2}\right)^{-\epsilon/2} \quad (4.118)$$

y análogo a los casos anteriores, se utiliza la aproximación

$$\Gamma(\epsilon/2) = \frac{2}{\epsilon} - \gamma_E + \mathcal{O}(\epsilon), \quad (M_{hh}^2)^{-\epsilon/2} \approx 1 - \frac{\epsilon}{2} \log(M_{hh}^2) \quad (4.119)$$

y así obtener la contribución finita del lazo

$$3i \frac{m_h^2 \lambda_{hs}}{32\sqrt{2}\pi^2 v} \int_0^1 dx \left\{ \frac{2}{\epsilon} - \gamma_E + \log 4\pi - \log\left(\frac{M_{hh}^2}{\mu^2}\right) \right\} \quad (4.120)$$

La integral en dx es la misma que aparece en el caso de la contribución $h^2 X_\mu X^\mu$ en el portal vectorial, por lo tanto la verdadera contribución es

$$3i \frac{m_h^2 \lambda_{hs}}{32\sqrt{2}\pi^2 v} \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma_E + \log 4\pi - \log\left\{ \frac{m_h^2}{\mu^2} \right\} + 2 - 2\Theta_h^{-1} \tan^{-1}(\Theta_h) \right), \quad (4.121)$$

cuando $4m_h^2 > q^2$ e igual a

$$3i \frac{m_h^2 \lambda_{hs}}{32\sqrt{2}\pi^2 v} \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma_E + \log 4\pi - \log\left\{ \frac{m_h^2}{\mu^2} \right\} + 2 - \Theta_h^{-1} \log\left| \frac{q + \sqrt{q^2 - 4m_h^2}}{q + \sqrt{q^2 - 4m_h^2}} \right| \right) \quad (4.122)$$

en el caso opuesto y de donde se puede notar que es igual a la contribución $h^2 X_\mu X^\mu$ salvo el factor antes del paréntesis.

Ahora para obtener la parte física sustraemos de la ecuación anterior

$$I_{hhSS}(0) = 3i \frac{m_h^2 \lambda_{hs}}{32\sqrt{2}\pi^2 v} \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma_E + \log 4\pi + \log\left\{ \frac{\mu^2}{m_h^2} \right\} \right) \quad (4.123)$$

entonces

$$\mathcal{I}_{hhSS}(q^2) = 3i \frac{m_h^2 \lambda_{hs}}{32\sqrt{2}\pi^2 v} \left(2 - \Theta_h^{-1} \log\left| \frac{q + \sqrt{q^2 - 4m_h^2}}{q + \sqrt{q^2 - 4m_h^2}} \right| \right). \quad (4.124)$$

La amplitud “parcial” del diagrama de esta contribución es

$$\mathcal{M}_{hhSS} = u^{(s)}(k) i \frac{m_f}{v} \bar{v}^{(r)}(k') \left(\frac{i}{q^2 - m_h^2} \right) \left(3i \frac{m_h^2 \lambda_{hs}}{32\sqrt{2}\pi^2 v} \right) \left(2 - \Theta_h^{-1} \log\left| \frac{q + \sqrt{q^2 - 4m_h^2}}{q + \sqrt{q^2 - 4m_h^2}} \right| \right) \quad (4.125)$$

El término de auto-interacción de la materia oscura S^4 es idéntico al anterior salvo factores, sin embargo, no es necesario realizarlo ya que no es relevante para nuestro estudio ya que al tratarse de interacción de materia oscura consigo misma se puede descartar al igual que en el caso del término de autointeracción $(X_\mu X^\mu)^2$ de la sección anterior.

La siguiente contribución importante es la contribución a la auto-energía del Higgs por parte de los escalares S , (figura 4.4)

$$I_S(q^2) = \frac{1}{2} \mu^\epsilon \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \left[i \frac{\lambda_{hs} v}{\sqrt{2}} \left(\frac{i}{(p+q)^2 - m_S^2} \right) i \frac{\lambda_{hs} v}{\sqrt{2}} \left(\frac{i}{p^2 - m_S^2} \right) \right]. \quad (4.126)$$

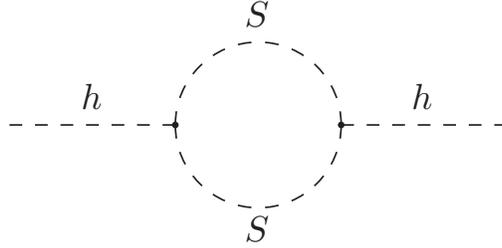


Figura 4.4: Contribución a la auto-energía del Higgs proveniente de los escalares S .

Repitiendo el procedimiento previo tenemos

$$I_S(q^2) = \frac{\lambda_{hs}^2 v^2}{4} \mu^\epsilon \int_0^1 dx \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{1}{(l^2 - M_S^2)^2} \quad (4.127)$$

con el clásico $l = p + xq$ y $M_S^2 \equiv m_S^2 - q^2 x(1-x)$. Por (B.19) obtenemos

$$I_S(q^2) = i \frac{\lambda_{hs}^2 v^2}{64\pi^2} \int_0^1 dx \left[\frac{2}{\epsilon} - \gamma_E + \log 4\pi + \log \frac{\mu^2}{m_S^2 - q^2 x(1-x)} \right] \quad (4.128)$$

y también

$$I_S(0) = i \frac{\lambda_{hs}^2 v^2}{64\pi^2} \int_0^1 dx \left[\frac{2}{\epsilon} - \gamma_E + \log 4\pi + \log \frac{\mu^2}{m_S^2} \right], \quad (4.129)$$

por lo tanto,

$$\mathcal{I}_s(q^2) = i \frac{\lambda_{hs}^2 v^2}{64\pi^2} \left(2 - \frac{2}{q} \sqrt{4m_S^2 - q^2} \tan^{-1} \left\{ \frac{q}{\sqrt{4m_S^2 - q^2}} \right\} \right) \quad (4.130)$$

y la amplitud es, por las reglas de Feynman,

$$i\mathcal{M}_s = u^{(s)}(k) i \frac{m_f}{v} \bar{v}^{(r)}(k') \frac{i}{q^2 - m_h^2} \left(i \frac{\lambda_{hs} v^2}{64\pi^2} \right) \left(2 - 2 \frac{\sqrt{4m_S^2 - q^2}}{q} \tan^{-1} \left[\frac{q}{\sqrt{4m_S^2 - q^2}} \right] \right)^2 \times \left(\frac{i}{q^2 - m_h^2} \right) \left(i \frac{\lambda_{hs} v}{\sqrt{2}} \right) \quad (4.131)$$

Las contribuciones de la auto-energía del Higgs proveniente de los bosones de norma o fermiones son idénticas a las obtenidas en la sección anterior por lo tanto no es necesario repetirlos cálculos y sólo copiaremos el resultado.

$$i\mathcal{M}_f = u^{(s)}(k) i \frac{m_f}{v} \bar{v}^{(r)}(k') \left(\frac{i}{q^2 - m_h^2} \right) \left(-i \frac{3m_f^2}{8\pi^2 v^2} \right) \left[\frac{q^2}{6} \log \frac{m_f^2}{\mu^2} - \frac{4}{3} m_f^2 + \frac{5}{18} q^2 + \frac{(4m_f^2 - q^2)^{3/2}}{3q} \tan^{-1} \left(\frac{q}{\sqrt{4m_f^2 - q^2}} \right) \right] \left(\frac{i}{q^2 - m_h^2} \right) \left(i \frac{\lambda_{hs} v}{\sqrt{2}} \right) \quad (4.132)$$

para la contribución a la autoenergía de h por parte de los fermiones y

$$i\mathcal{M}_h = u^{(s)}(k) i \frac{m_f}{v} \bar{v}^{(r)}(k') \left(\frac{i}{q^2 - m_h^2} \right) \frac{9m_h^4}{32\pi^2 v^2} \left(2 - \frac{2}{q} \sqrt{4m_h^2 - q^2} \tan^{-1} \frac{q}{\sqrt{4m_h^2 - q^2}} \right) \times \left(\frac{i}{q^2 - m_h^2} \right) i \frac{\lambda_{hs} v}{\sqrt{2}} \quad (4.133)$$

para la contribución de la auto-interacción del Higgs.

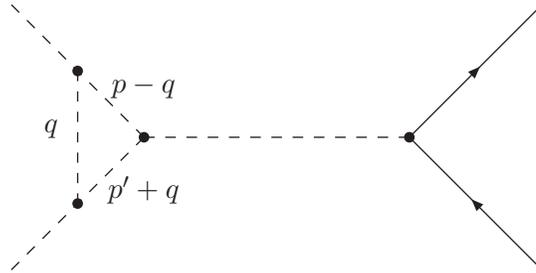


Figura 4.5: Diagrama de Feynman de la corrección al vértice de la materia oscura escalar.

El lazo faltante por calcular es la corrección al vértice cuyo diagrama se encuentra en la figura 4.5; sin embargo, no nos enfocaremos en obtener esta contribución pues como señala en el apéndice A esta contribución a pesar de ser finita cuando uno desea resolver la integral resultante uno encuentra que esta integral tiene una complejidad mayor a los casos anteriores por lo que esta contribución se dejará como un objetivo a futuro.

4.5. Estimación de las $|\mathcal{M}_i|^2$

Lo siguiente que haremos es calcular las amplitudes de aniquilación $|\mathcal{M}_i|^2$ correspondientes a cada uno de los diagramas con un lazo estudiados en la sección previa con el fin de compararlas con la amplitud obtenida a nivel árbol (4.51).

4.5.1. Materia oscura vectorial

En primer lugar, para la materia oscura vectorial, la amplitud correspondiente a la auto-energía del Higgs proveniente de la auto-interacción del Higgs es por (4.80)

$$i\mathcal{M}_h = u^{(s)}(k) i \frac{m_f}{v} \bar{v}^{(r)}(k') \left(\frac{i}{q^2 - m_h^2} \right) \frac{9m_h^4}{64\pi^2 v^2} \left(2 - \frac{2}{q} \sqrt{4m_h^2 - q^2} \tan^{-1} \frac{q}{\sqrt{4m_h^2 - q^2}} \right) \quad (4.134)$$

$$\times \left(\frac{i}{q^2 - m_h^2} \right) i \frac{\lambda_{hv}}{\sqrt{2}} g_{\mu\nu} \epsilon^\mu(p) \epsilon^\nu(p')$$

entonces

$$|\mathcal{M}_h|^2 = \left(\frac{\lambda_{hv}^2}{2} v^2 \right) \left(\frac{m_f^2}{v^2} \right) \left(\frac{9m_h^4}{64\pi^2 v^2} \right)^2 \left(\frac{1}{(q^2 - m_h^2)^4} \right) (2 - 2\Theta_h^{-1} \tan^{-1} \Theta_h)^2 \sum_{s,r} u^{(s)}(k) \bar{u}^{(s)}(k')$$

$$\times \left[\frac{1}{9} g_{\mu\nu} g_{\alpha\beta} \sum_{\lambda,\lambda'} \epsilon_{(\lambda)}^\mu(p) \epsilon_{(\lambda)}^{*\alpha}(p) \epsilon_{(\lambda')}^\nu(p') \epsilon_{(\lambda')}^{*\beta}(p') \right] \quad (4.135)$$

recordando que

$$\Theta_h = \frac{q}{\sqrt{4m_h^2 - q^2}}.$$

Siguiendo el procedimiento de la sección 4.2 obtenemos

$$|\mathcal{M}_h|^2 = \left(\frac{\lambda_{hv}^2}{2} v^2 \right) \left(\frac{m_f^2}{v^2} \right) \left(\frac{9m_h^4}{64\pi^2 v^2} \right)^2 \left(\frac{1}{(q^2 - m_h^2)^4} \right) (2 - 2\Theta_h^{-1} \tan^{-1} \Theta_h)^2 \frac{8E^2}{3} \frac{1 - m_f^2/E^2}{(4E^2 - m_h^2)^4} \quad (4.136)$$

recordando la condición del centro de masa $q^2 = 4E^2$ y el hecho de que la materia oscura es no-relativista ($E^2 \approx m_X^2$), Θ_h se vuelve

$$\frac{E}{\sqrt{m_h^2 - E^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{m_h^2}{m_X^2} - 1}},$$

así que juntando estos resultados obtenemos finalmente la amplitud

$$|\mathcal{M}_h|^2 = \frac{27\lambda_{hv}^2 m_f^2 m_h^8}{512\pi^4 v^4} E^2 \frac{1 - m_f^2/m_X^2}{(4m_X^2 - m_h^2)^4} \left[1 - 2\sqrt{\frac{m_h^2}{m_X^2} - 1} \tan^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{\frac{m_h^2}{m_X^2} - 1}} \right) \right]^2. \quad (4.137)$$

De esta expresión vemos que la condición $4m_h^2 > q^2$ se traduce en $m_h^2 > m_X^2$, en el caso contrario, es decir, que la masa de la materia oscura sea mayor que la del Higgs basta hacer la sustitución $\tan^{-1} ix \rightarrow -i \tanh^{-1} x$ o también podemos reescribir $|\mathcal{M}_h|^2$ como

$$|\mathcal{M}_h|^2 = \frac{27\lambda_{hv}^2 m_f^2 m_h^8}{512\pi^4 v^4} E^2 \frac{1 - m_f^2/m_X^2}{(4m_X^2 - m_h^2)^4} \left[1 - 2\sqrt{1 - \frac{m_h^2}{m_X^2}} \log \left| \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{m_h^2}{m_X^2}}}{1 - \sqrt{1 - \frac{m_h^2}{m_X^2}}} \right| \right]^2. \quad (4.138)$$

La amplitud (4.137) se puede escribir de la siguiente forma

$$|\mathcal{M}_h|^2 = \frac{162m_f^2 m_h^8}{2048\pi^4 v^6} \frac{1}{(4m_X^2 - m_h^2)^2} \left[1 - 2\sqrt{\frac{m_h^2}{m_X^2} - 1} \tan^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{\frac{m_h^2}{m_X^2} - 1}} \right) \right]^2 \left(\frac{\lambda_{hv}^2 v^2}{6} E_{cm}^2 \frac{(1 - m_f^2/m_X^2)}{(4m_X^2 - m_h^2)^2} \right) \quad (4.139)$$

donde el último término entre paréntesis corresponde a la amplitud a nivel árbol, por lo tanto, con esta expresión podemos estimar el tamaño de la amplitud $|\mathcal{M}_h|^2$ respecto a la amplitud a nivel árbol, asignando valores a los parámetros conocidos como m_h , m_f y v .

Si tomamos m_f como la masa del quark top, el más pesado de los fermiones (de hecho es la partícula elemental más pesada), tenemos $m_f \sim 173.21$ GeV [44] y $m_h = 125$ GeV, $v = 174$ GeV obtenemos

$$|\mathcal{M}_h|^2 \approx \frac{5.3 \times 10^4}{(4m_X^2 - m_h^2)^2} \left[1 - 2\sqrt{\frac{m_h^2}{m_X^2} - 1} \tan^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{\frac{m_h^2}{m_X^2} - 1}} \right) \right]^2 |\mathcal{M}_{tree}|^2. \quad (4.140)$$

Ahora, si la masa m_X se encuentra alrededor de 100 GeV obtenemos

$$|\mathcal{M}_h|^2 = 1.4 \times 10^{-5} |\mathcal{M}_{tree}|^2 \quad (4.141)$$

entonces este lazo tiene una contribución de alrededor del 0.02%; por otro lado, cerca del polo con $m_X \sim 62 \text{ GeV}$ ocurre algo diferente ya que

$$|\mathcal{M}_h|^2 = 0.56 |\mathcal{M}_{tree}|^2 \quad (4.142)$$

por lo tanto este lazo tiene una contribución mayor al 50% de la amplitud (4.51) y para materia oscura ligera con masa menor a unos 50 GeV las contribuciones también son pequeñas, si $m_X = 25 \text{ GeV}$

$$|\mathcal{M}_h|^2 = 3 \times 10^{-4} |\mathcal{M}_{tree}|^2. \quad (4.143)$$

En el caso de que $m_X > m_h$ la contribución de este diagrama es aún más pequeña, suponiendo $m_X = 300 \text{ GeV}$ obtenemos

$$|\mathcal{M}_h|^2 = 10^{-7} |\mathcal{M}_{tree}|^2. \quad (4.144)$$

Estos valores de m_X están permitidos por WMAP sin embargo, valores aproximadamente menores a 80 GeV están descartados por XENON100, cómo se puede ver en el análisis que realizan en [6] dónde hacen un barrido en el espacio de parámetros y descartan diferentes regiones de acuerdo a XENON100 y WMAP. Por otro lado los datos de CoGeNT, CDMS o CRESST no descartan la posibilidad de materia oscura más ligera. Si graficamos la razón de las amplitudes $|\mathcal{M}_h|^2$ y $|\mathcal{M}_{tree}|^2$ como función de m_X podemos darnos una idea de que tan significativa es la contribución de el lazo de la figura A.1 para diferentes valores de m_X . En la figura 4.6 vemos que, en efecto, en valores cercanos a $m_h/2$ la razón $R_h^2 \equiv |\mathcal{M}_h|^2/|\mathcal{M}_{tree}|^2$ se vuelve cada vez mas grande y mientras más masivo se vuelve X la contribución es más pequeña.

De la ecuación (4.106) tenemos que

$$i\mathcal{M}_X = u^{(s)}(k) i \frac{m_f}{v} \bar{v}^{(r)}(k') \left(\frac{i}{q^2 - m_h^2} \right) \left(i \frac{\lambda_{hv}^2 v^2}{64\pi^2 m_X^4} \right) \left[\mathcal{A} \tan^{-1} \left(\frac{q}{\sqrt{4m_X^2 - q^2}} \right) + \mathcal{B} \right] \times \left(\frac{i}{q^2 - m_h^2} \right) \left(i \frac{\lambda_{hs} v}{\sqrt{2}} g_{\mu\nu} \right) \epsilon^\mu(p) \epsilon^\nu(p') \quad (4.145)$$

con

$$\mathcal{A} = \left\{ \frac{\sqrt{4m_X^2 - q^2}}{15q} \left(266m_X^4 + 4m_X^2 q^2 - \frac{q^4}{2} \right) + \frac{4m_X^2}{\sqrt{4m_X^2 - q^2}} \left(\frac{8m_X^4}{q} + 2m_X^2 q - q^3 \right) \right\} \quad (4.146)$$

y

$$\mathcal{B} = -\frac{1054}{15} m_X^4 + \frac{1609}{90} m_X^2 q^2 + \frac{143}{150} q^4 \quad (4.147)$$

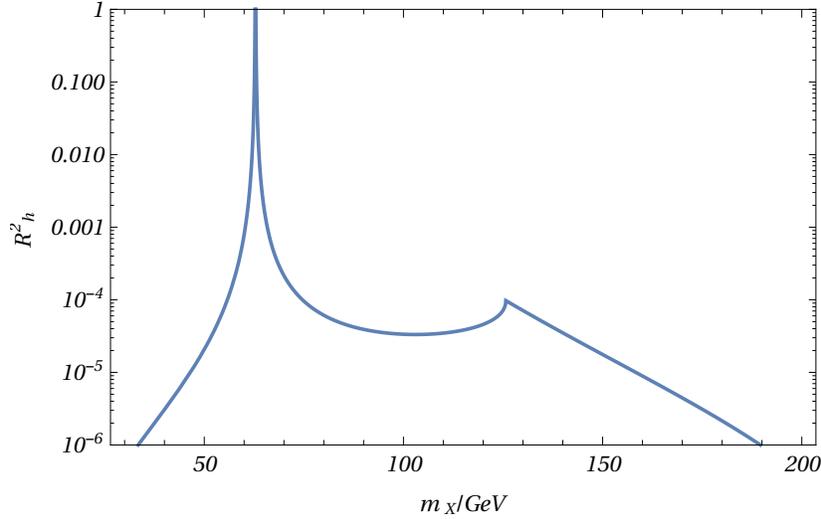


Figura 4.6: Relación entre la razón R_h^2 y m_X^2 . Para una masas alrededor de 62 GeV la contribución es grande. Fuera de este intervalo, $R_h^2 \leq 10^{-4}$.

por lo tanto,

$$|\mathcal{M}_X|^2 = \left(\frac{m_f^2}{v^2}\right) \left(\frac{\lambda_{hv}^2 v^2}{64\pi^2 m_X^4}\right)^2 \left(\frac{\lambda_{hv} v}{\sqrt{2}}\right)^2 \left(\frac{1}{q^2 - m_h^2}\right)^4 \text{Tr}(k k' - m_f^2) \frac{1}{9} \left(2 + \frac{(p \cdot p')^2}{m_X^4}\right) \times \left[\mathcal{A} \tan^{-1} \left(\frac{q}{\sqrt{4m_X^2 - q^2}} \right) + \mathcal{B} \right]^2 \quad (4.148)$$

y con la condición del centro de masa $q^2 = 4E^2$, la amplitud al cuadrado se reduce a

$$|\mathcal{M}_X|^2 = \frac{\lambda_{hv}^6 m_f^2 v^4}{3072\pi^4 m_X^8} E^2 \frac{(1 - m_f^2/E^2)}{(4E^2 - m_h^2)^4} \left[\mathcal{A} \tan^{-1} \left(\frac{q}{\sqrt{4m_X^2 - q^2}} \right) + \mathcal{B} \right]^2 \quad (4.149)$$

sin embargo, al hacer uso de la naturaleza no-relativista de la materia oscura tenemos que $E^2 \approx m_X^2$, nos encontramos con un problema, este valor de q^2 es un polo en el argumento del arcotangente en $|\mathcal{M}_X|^2$, entonces cuando

$$\tan^{-1} \left(\frac{2E}{\sqrt{4m_X^2 - 4E^2}} \right) \rightarrow \frac{\pi}{2} \quad \text{cuando} \quad 4E^2 \rightarrow 4m_X^2,$$

pero el factor $(4m_X^2 - 4E^2)^{-1/2}$ en \mathcal{A} tiende a infinito cuando $E^2 \rightarrow m_X^2$. Si utilizamos el desarrollo

$$(1-x)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \dots; \quad \text{si } x < 1 \quad (4.150)$$

podríamos deshacernos del problema pero este desarrollo es válido únicamente para $E^2/m_X^2 < 1$; por otra parte el factor en \mathcal{A}

$$\frac{8m_X^4}{q} + 2m_X^2 q - q^3 \quad (4.151)$$

es igual a cero en $q^2 = 4m_X^2$ por lo tanto, el factor \mathcal{A} se anula y el único término que sobrevive en los paréntesis cuadrados es \mathcal{B} , así que

$$|\mathcal{M}_X|^2 = \frac{\lambda_{hv}^6 m_f^2 v^4}{3072\pi^4 m_X^8} E^2 \frac{(1 - m_f^2/m_X^2)}{(4m_X^2 - m_h^2)^4} \left[-\frac{1054}{15} m_X^4 + \frac{1609}{90} \cdot 4m_X^4 + \frac{143}{150} \cdot 16m_X^4 \right]^2$$

$$|\mathcal{M}_X|^2 \approx 0.088 \frac{\lambda_{hv}^6 m_f^2 v^4}{\pi^4} E^2 \frac{(1 - m_f^2/m_X^2)}{(4m_X^2 - m_h^2)^4}. \quad (4.152)$$

Si comparamos con la ecuación (4.51) y recordamos que $E_{cm} = 2E$ notamos que la amplitud anterior satisface

$$|\mathcal{M}_X|^2 \approx 0.132 \frac{\lambda_{hv}^4 v^2 m_f^2}{\pi^4} \frac{1}{(4m_X^2 - m_h^2)^2} |\mathcal{M}_{tree}|^2. \quad (4.153)$$

Realizando un análisis como el de la contribución anterior con $m_f = 175 \text{ GeV}$ y $m_h = 125 \text{ GeV}$, tenemos que, cerca del polo ($m_X \approx m_h/2$)

$$|\mathcal{M}_X|^2 = 20.26 \lambda_{hv}^4 |\mathcal{M}_{tree}|^2 \quad (4.154)$$

y basándonos en el estudio de [6] dónde realizan un barrido en el espacio de parámetros y proporcionan valores de m_X y λ_{hv} contrastando con los datos de WMAP y XENON100 para determinar las regiones permitidas tenemos que para una masa $m_X \sim 62 \text{ GeV}$ corresponde un acoplamiento $\lambda_{hv} \sim 0.2$, entonces

$$|\mathcal{M}_X|^2 = 0.32 |\mathcal{M}_{tree}|^2 \quad (4.155)$$

nuevamente vemos que aquí se vuelve significativa esta contribución, para $m_X \approx 80 \text{ GeV}$ y un acoplamiento de $\lambda_{hv} \approx 1$

$$|\mathcal{M}_X|^2 = 0.012 |\mathcal{M}_{tree}|^2 \quad (4.156)$$

la amplitud \mathcal{M}_X aún tiene una contribución significativa, poco más del 1% de la amplitud al cuadrado a nivel árbol. No obstante, este “pseudo-análisis” que hemos realizado fue únicamente de observando la gráfica 2 en [6] aproximando valores; para darnos una mejor idea de la magnitud de $|\mathcal{M}_X|^2$ definimos nuevamente el cociente

$$R_X^2 \equiv \frac{|\mathcal{M}_X|^2}{|\mathcal{M}_{tree}|^2} = \frac{3\lambda_{hv}^4 m_f^2 v^2}{2(3072)\pi^4} \frac{1}{(4m_X^2 - m_h^2)^2} \left[-\frac{1054}{15} + \frac{1609}{90} \cdot 4 + \frac{143}{150} \cdot 16 \right]^2 \quad (4.157)$$

de esta manera podemos graficar R_X^2 como una función de los parámetros λ_{hv} y m_X como se muestra en la figura 4.7.

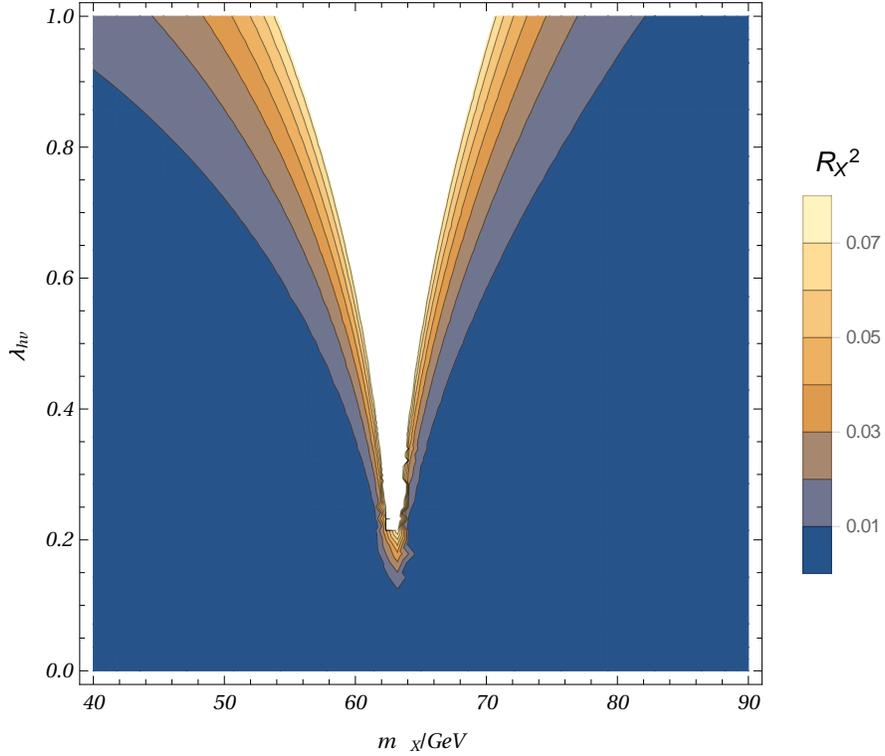


Figura 4.7: Cociente R_X^2 en función de m_X . $R_X^2 \geq 10^{-2}$ para valores de m_X en el intervalo de 40 – 90 GeV.

Para el lazo fermiónico contribuyente a la auto-energía del Higgs (figura A.2) obtuvimos en la sección anterior

$$\begin{aligned}
 i\mathcal{M}_f = & u^{(s)}(k) i \frac{m_f}{v} \bar{v}^{(r)}(k') \left(\frac{i}{q^2 - m_h^2} \right) \left(-i \frac{3m_f^2}{8\pi^2 v^2} \right) \left[\frac{q^2}{6} \log \frac{m_f^2}{\mu^2} - \frac{4}{3} m_f^2 + \frac{5}{18} q^2 \right. \\
 & \left. + \frac{(4m_f^2 - q^2)^{3/2}}{3q} \tan^{-1} \left(\frac{q}{\sqrt{4m_f^2 - q^2}} \right) \right] \left(\frac{i}{q^2 - m_h^2} \right) \left(i \frac{\lambda_{hv} v}{\sqrt{2}} \right) g_{\mu\nu} \epsilon^\mu(p) \epsilon^\nu(p')
 \end{aligned} \tag{4.158}$$

así que repitiendo el procedimiento ya familiar, obtenemos

$$|\mathcal{M}_f|^2 = \frac{\lambda_{hv}^2 m_f^6}{128\pi^4 v^4} \frac{4(k \cdot k' - m_f^2)}{3(q^2 - m_h^2)^4} \left[\frac{q^2}{6} \log \frac{m_f^2}{\mu^2} - \frac{4}{3} m_f^2 + \frac{5}{18} q^2 + \frac{(4m_f^2 - q^2)^{3/2}}{3q} \tan^{-1} \left(\frac{q}{\sqrt{4m_f^2 - q^2}} \right) \right]^2 \quad (4.159)$$

y con las condiciones del centro de masa $(k + k')^2 = q^2 = (p + p')^2 = 4E^2$ y $E^2 \approx m_X^2$,

$$|\mathcal{M}_f|^2 = \frac{9m_f^6}{32\pi^4 v^6} \frac{|\mathcal{M}_{tree}|^2}{(4m_X^2 - m_h^2)^2} \left[\frac{2m_X^2}{3} \log \frac{m_f^2}{\mu^2} - \frac{4}{3} m_f^2 + \frac{10}{9} m_X^2 + \frac{4(m_f^2 - m_X^2)^{3/2}}{3m_X} \tan^{-1} \left(\frac{m_X}{\sqrt{m_f^2 - m_X^2}} \right) \right]^2 \quad (4.160)$$

donde nuevamente factorizamos el cuadrado de la amplitud a nivel árbol y así poder determinar la proporción entre estas. Graficando una vez más la razón $R_f^2 \equiv |\mathcal{M}_f|^2/|\mathcal{M}_{tree}|^2$ como función de m_X observamos la magnitud de la contribución de este lazo (figura 4.8). La amplitud (4.159) es únicamente válida si $m_X < m_f$, en el caso de que la masa de la materia oscura vectorial sea mayor a la del fermión la amplitud es

$$|\mathcal{M}_f|^2 = \frac{9m_f^6}{32\pi^4 v^6} \frac{|\mathcal{M}_{tree}|^2}{(4m_X^2 - m_h^2)^2} \left[\frac{2m_X^2}{3} \log \frac{m_f^2}{\mu^2} - \frac{4}{3} m_f^2 + \frac{10}{9} m_X^2 + \frac{2}{3} (m_X^2 - m_f^2)^{-3/2} \log \left| \frac{m_X + \sqrt{m_X^2 - m_f^2}}{m_X - \sqrt{m_X^2 - m_f^2}} \right| \right]^2. \quad (4.161)$$

Para graficar el cociente R_f^2 se consideró μ del orden de $m_Z \approx 91.17$ GeV [45].

La última contribución que obtuvimos en el portal vectorial es la proveniente del diagrama en la figura A.5, de la sección anterior obtuvimos que

$$i\mathcal{M}_{hhXX} = u^{(s)}(k) i \frac{m_f}{v} \bar{v}^{(r)}(k') \frac{i}{q^2 - m_h^2} (2 - 2\Theta_h^{-1} \tan^{-1} \Theta_h) \left(i \frac{3\lambda_{hv} m_h^2}{64\sqrt{2}\pi^2 v} \right) g_{\mu\nu} \epsilon_{(\lambda)}^\mu(p_1) \epsilon_{(\lambda')}^\nu(p_1') \quad (4.162)$$

así que

$$|\mathcal{M}_{hhXX}|^2 = \left(\frac{3\lambda_{hv} m_h^2 m_f}{64\sqrt{2}\pi^2 v^2} \right)^2 \left(\frac{1}{q^2 - m_h^2} \right)^2 \frac{4(k \cdot k' - m_f^2)}{3} \left(2 - 2 \frac{\sqrt{4m_h^2 - q^2}}{q} \tan^{-1} \frac{q}{\sqrt{4m_h^2 - q^2}} \right)^2 \quad (4.163)$$

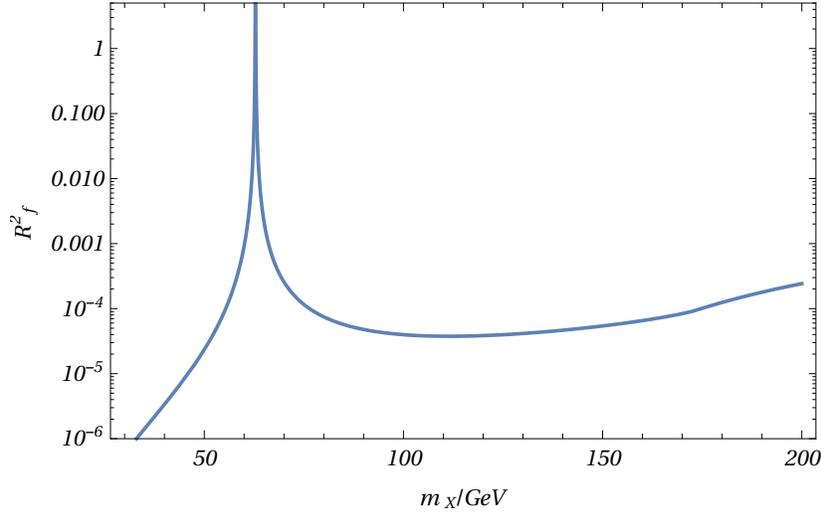


Figura 4.8: Gráfica de R_f^2 como función de m_X^2 . De esta gráfica podemos notar que la contribución es realmente pequeña para casi todos los valores de m_X , salvo aquellos cercanos al polo. Para materia oscura muy masiva $m_X \gtrsim 190$ GeV, $R_f^2 \geq 10^{-40}$.

Con las condiciones del centro de masa $E_{cm} = 2E$, $q^2 = 4E^2 \approx 4m_X^2$, tenemos

$$\begin{aligned}
 |\mathcal{M}_{hhXX}|^2 &= \frac{9m_h^4 m_f^2}{2048\pi^4 v^6} \left(2 - 2 \frac{\sqrt{m_h^2 - m_X^2}}{q} \tan^{-1} \left\{ \frac{m_X}{\sqrt{m_h^2 - m_X^2}} \right\} \right)^2 \\
 &\quad \times \frac{\lambda_{hv}^2 v^2}{6} E_{cm}^2 \frac{(1 - m_f^2/m_X^2)}{(4m_X^2 - m_h^2)^2} \quad (4.164) \\
 &= \frac{9m_h^4 m_f^2}{2048\pi^4 v^6} \left(2 - 2 \frac{\sqrt{m_h^2 - m_X^2}}{q} \tan^{-1} \left\{ \frac{m_X}{\sqrt{m_h^2 - m_X^2}} \right\} \right)^2 |\mathcal{M}_{tree}|^2.
 \end{aligned}$$

Nuevamente factorizamos el cuadrado de la amplitud a nivel árbol para poder hacer un estimado de la magnitud de $|\mathcal{M}_{hhXX}|^2$ en proporción a la anterior. Claramente, de (4.164) para $m_X < m_h$ tenemos que

$$R_{hhXX}^2 \equiv \frac{|\mathcal{M}_{hhXX}|^2}{|\mathcal{M}_{tree}|^2} = \frac{9m_h^4 m_f^2}{2048\pi^4 v^6} \left(2 - 2 \frac{\sqrt{m_h^2 - m_X^2}}{m_X} \tan^{-1} \left\{ \frac{m_X}{\sqrt{m_h^2 - m_X^2}} \right\} \right)^2 \quad (4.165)$$

mientras que si la materia oscura vectorial tiene masa superior a la del Higgs observado, obtenemos

$$R_{hhXX}^2 \equiv \frac{|\mathcal{M}_{hhXX}|^2}{|\mathcal{M}_{tree}|^2} = \frac{9m_h^4 m_f^2}{2048\pi^4 v^6} \left(2 - \frac{\sqrt{m_X^2 - m_h^2}}{m_X} \log \left\{ \frac{m_X + \sqrt{m_X^2 - m_h^2}}{m_X - \sqrt{m_X^2 - m_h^2}} \right\} \right)^2. \quad (4.166)$$

Con base en estas fórmulas, la figura 4.9 muestra la razón de la contribución a un lazo del diagrama A.5 sobre la contribución a nivel árbol para materia oscura vectorial. Observamos que esta razón es significativa solamente si la masa de la partícula es cercana al polo $m_X \sim m_h/2$. Particularmente, valores de uno por mil son posibles sólo si $m_X \in [61.6, 64.1]$ GeV. Aunque este escenario no está del todo descartado, es improbable, por lo que concluimos que estas contribuciones son genéricamente pequeñas.

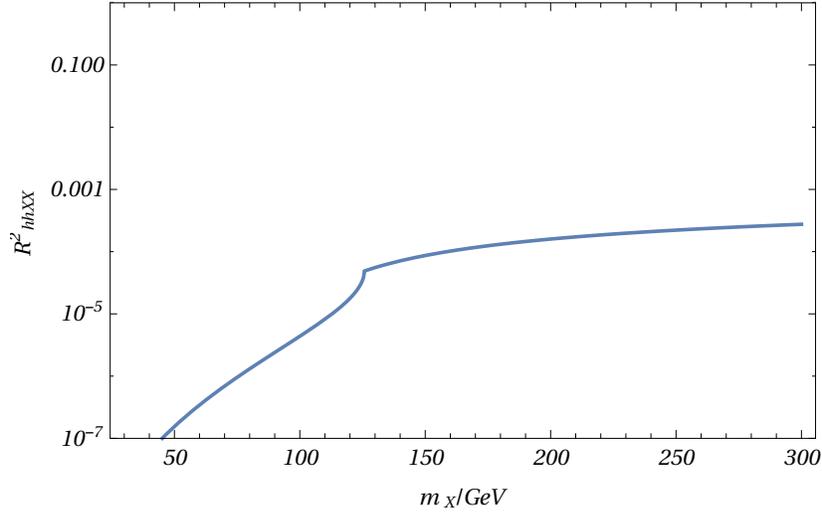


Figura 4.9: Cociente R_{hhXX}^2 en función de m_X . $R_{hhXX}^2 \sim 10^{-4}$ sólo si la materia oscura vectorial tiene masas superiores a ~ 150 GeV.

Como sabemos la amplitud total es igual a la suma de todas las amplitudes las contribuciones de los diagramas conexos que existe, es decir,

$$i\mathcal{M}_{tot} = i\mathcal{M}_{tree} + i\mathcal{M}_X + i\mathcal{M}_{hhXX} + i\mathcal{M}_h + i\mathcal{M}_f + \dots \quad (4.167)$$

y con el análisis que hemos realizado podemos obtener una estimación de la magnitud de estas contribuciones y por lo tanto su relevancia, de manera que si obtenemos el promedio de la amplitud cuadrada de estas contribuciones, podremos darnos una idea general de la magnitud de las contribuciones a nivel de un lazo; como en todas las contribuciones que calculamos factorizamos $|\mathcal{M}_{tree}|^2$

y definimos un cociente R_i^2 es más útil calcular un cociente promedio, $\langle R^2 \rangle$, dado por

$$\langle R^2 \rangle \equiv \frac{R_X^2 + R_f^2 + R_h^2 + R_{hhXX}^2}{4}. \quad (4.168)$$

Esta R^2 promedio, por contener al cociente R_X^2 , es una función de m_X y del parámetro λ_{hv} . La figura 4.10 contiene la gráfica de este promedio como función de los parámetros m_X y λ_{hv} ; aquí se puede apreciar en promedio, las contribuciones a un lazo son mayores al 1% para valores de m_X entre 40 – 90 GeV. Suponiendo que la materia oscura vectorial posee una masa dentro de este intervalo, entonces las contribuciones a un lazo son relevantes y pueden contribuir a la amplitud total de aniquilación. A pesar de que XENON100 ha descartado gran parte de esta región nada es definitivo todavía.

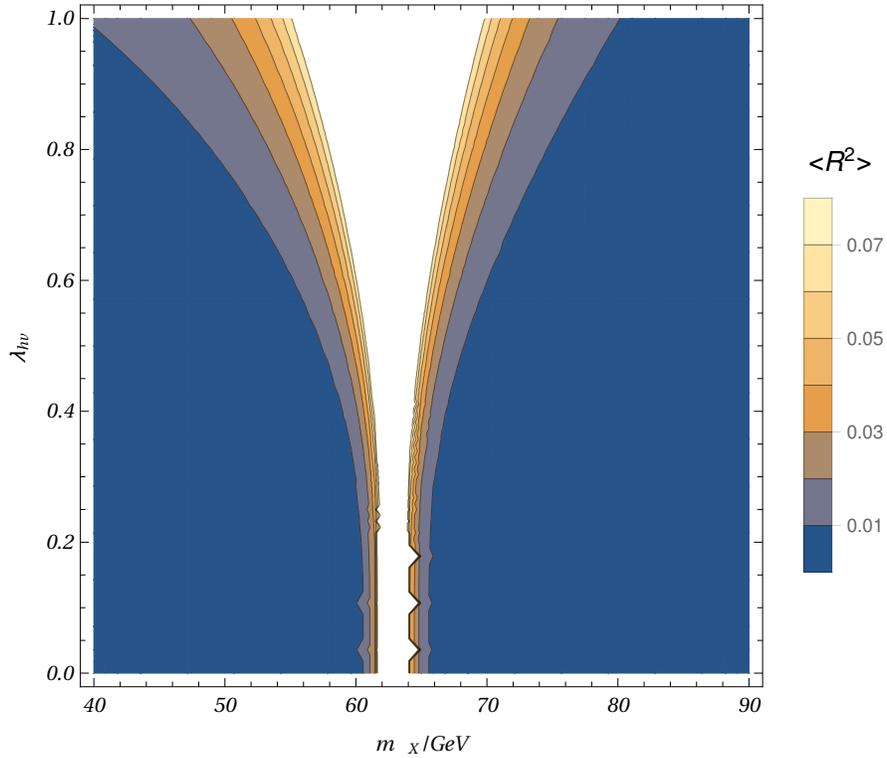


Figura 4.10: R^2 promedio para la materia oscura vectorial.

4.5.2. Materia oscura escalar

Ahora, en el caso de los escalares S obtuvimos en el caso de la auto-energía del Higgs proveniente de los escalares S

$$i\mathcal{M}_s = u^{(s)}(k) i \frac{m_f}{v} \bar{v}^{(r)}(k') \frac{i}{q^2 - m_h^2} \left(i \frac{\lambda_{hs}^2 v^2}{64\pi^2} \right) \left(2 - 2 \frac{\sqrt{4m_S^2 - q^2}}{q} \tan^{-1} \left[\frac{q}{\sqrt{4m_S^2 - q^2}} \right] \right)^2 \times \left(\frac{i}{q^2 - m_h^2} \right) \left(i \frac{\lambda_{hs} v}{\sqrt{2}} \right). \quad (4.169)$$

Omitiendo el procedimiento ya conocido obtenemos

$$|\mathcal{M}_s|^2 = \frac{\lambda_{hs}^6 m_f^2 v^4}{1024\pi^4} \left(\frac{(1 - m_f^2/m_S^2)}{(4m_S^2 - m_h^2)^2} \right) E_{cm}^2 \quad (4.170)$$

donde el factor con el arcotangente desapareció pues en el centro de masa $q^2 = 4E^2 \approx 4m_S^2$. Factorizando nuevamente la amplitud $|\mathcal{M}_s|^2$, resulta

$$|\mathcal{M}_s|^2 = \frac{3\lambda_{hs}^4 m_f^2 v^2}{512\pi^4} \frac{1}{(4m_S^2 - m_h^2)^2} |\mathcal{M}_{tree}|^2; \quad (4.171)$$

y si nos basamos nuevamente en los resultados de [6] vemos que, si m_S se encuentra cerca del polo $\sim 62 \text{ GeV}$ entonces $\lambda_{hs} \sim 0.5$ así que

$$|\mathcal{M}_s|^2 \approx 0.08 |\mathcal{M}_{tree}|^2.$$

Para observar mejor la relación entre estas amplitudes repetimos el procedimiento realizando en el caso de materia oscura vectorial y la contribución de los vectores X en la auto-energía del Higgs. Definimos la cantidad:

$$R_S^2 \equiv \frac{|\mathcal{M}_s|^2}{|\mathcal{M}_{tree}|^2} = \frac{3\lambda_{hs}^4 m_f^2 v^2}{512\pi^4} \frac{1}{(4m_S^2 - m_h^2)^2} \quad (4.172)$$

para así obtener la gráfica de la figura 4.11 como una función de los parámetros λ_{hs} y m_S . De acuerdo a la figura 4.11 para el intervalo de masas $40 - 90 \text{ GeV}$, el cociente $R_S^2 \geq 10^{-3}$ por lo que esta contribución puede ser considerable, aproximadamente mayor al tres por ciento.

Para la contribución proveniente de la auto-interacción del Higgs (figura A.1) obtuvimos previamente

$$i\mathcal{M}_h = u^{(s)}(k) i \frac{m_f}{v} \bar{v}^{(r)}(k') \left(\frac{i}{q^2 - m_h^2} \right) \frac{9m_h^4}{32\pi^2 v^2} \left(2 - \frac{2}{q} \sqrt{4m_h^2 - q^2} \tan^{-1} \frac{q}{\sqrt{4m_h^2 - q^2}} \right) \times \left(\frac{i}{q^2 - m_h^2} \right) i \frac{\lambda_{hs} v}{\sqrt{2}} \quad (4.173)$$

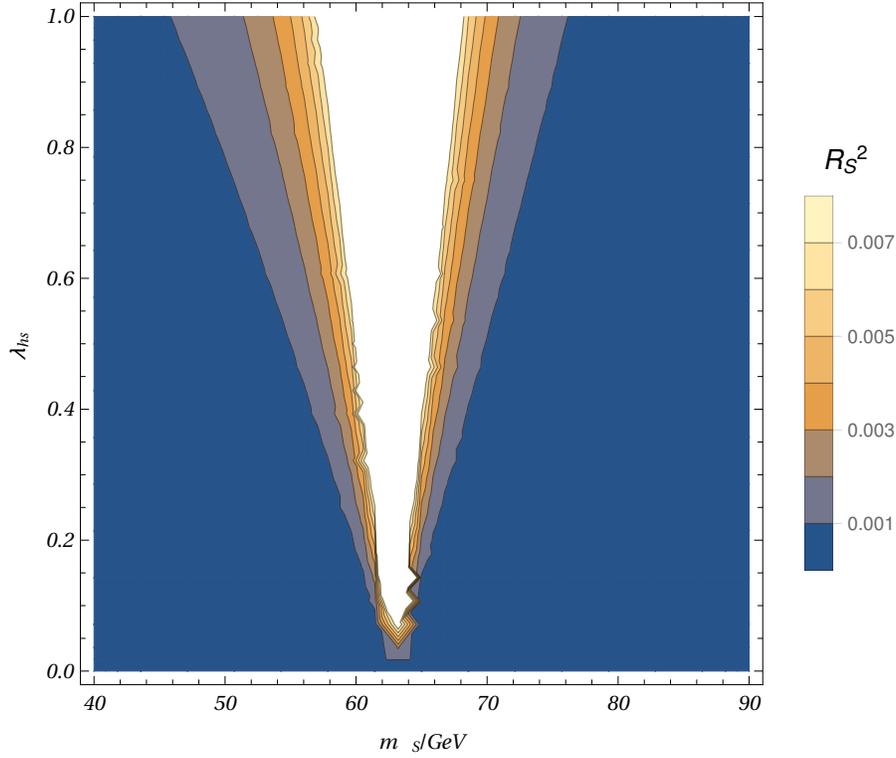


Figura 4.11: Cociente R_S^2 en función de m_S y λ_{hs} . Para valores de masa de la materia oscura escalar entre 40 – 90 GeV el cociente promedio es de orden $\geq 10^{-3}$.

Así que

$$|\mathcal{M}_h|^2 = \frac{81\lambda_{hs}^2 m_f^2 m_h^8 (1 - m_f^2/m_S^2)}{1024\pi^4 v^4 (4m_S^2 - m_h^2)^4} E_{cm}^2 \left[2 - \frac{2}{m_S} \sqrt{m_h^2 - m_S^2} \tan^{-1} \left(\frac{m_S}{\sqrt{m_h^2 - m_S^2}} \right) \right]^2 \quad (4.174)$$

siempre y cuando $m_S < m_h$, en el caso contrario

$$|\mathcal{M}_h|^2 = \frac{81\lambda_{hs}^2 m_f^2 m_h^8 (1 - m_f^2/m_S^2)}{1024\pi^4 v^4 (4m_S^2 - m_h^2)^4} E_{cm}^2 \left[2 - \frac{1}{m_S} \sqrt{m_S^2 - m_h^2} \log \left(\frac{m_S + \sqrt{m_S^2 - m_h^2}}{m_S - \sqrt{m_S^2 - m_h^2}} \right) \right]^2 ;$$

de esta expresión factorizamos $|\mathcal{M}_{tree}|^2$ y de esta manera obtenemos la gráfica que se muestra en

la figura 4.12 para el coeficiente R_h^2 , definido igual que los anteriores como una función de m_S .

$$R_h^2 \equiv \frac{|\mathcal{M}_h|^2}{|\mathcal{M}_{tree}|^2} = \frac{243m_f^2 m_h^8}{512\pi^4 v^6} \frac{1}{(4m_S^2 - m_h^2)^2} \left[2 - \frac{2}{m_S} \sqrt{m_h^2 - m_S^2} \tan^{-1} \left(\frac{m_S}{\sqrt{m_h^2 - m_S^2}} \right) \right]^2. \quad (4.175)$$

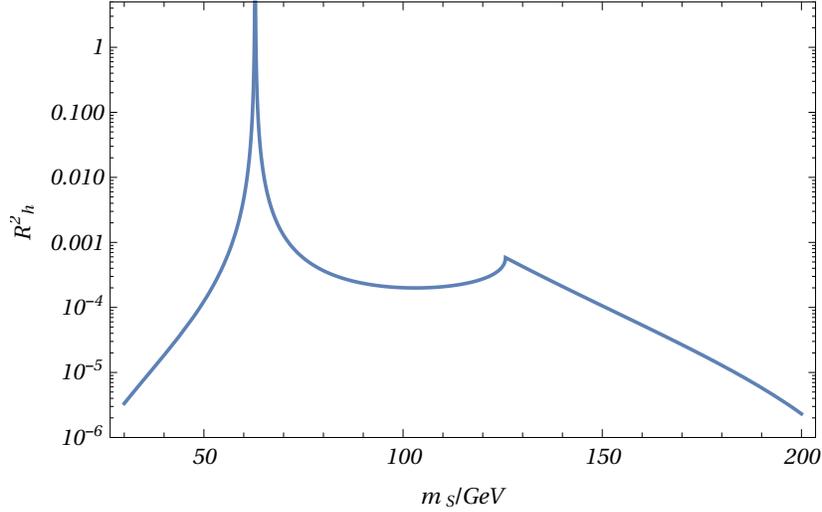


Figura 4.12: Cociente R_h^2 como función de m_S . Para masas de la materia oscura escalar en el intervalo de 70 – 150 GeV, $R_h^2 \geq 10^{-4}$. Es posible que dentro de este intervalo la contribución \mathcal{M}_f se vuelva relevante.

Entonces, de la gráfica 4.11 se puede observar que R_h^2 es mayor a 10^{-4} en los intervalos de 50 – 97 GeV y 100 – 140 GeV aproximadamente, de hecho en valores superiores a los 140 GeV y menores a 50 el cociente es mayor a 10^{-6} por lo que podemos decir que esta contribución es mayor y por lo tanto más relevantes que las anteriores.

Ahora, para la contribución del lazo fermiónico obtuvimos la siguiente amplitud dada por la ecuación (4.132),

$$i\mathcal{M}_f = u^{(s)}(k) i \frac{m_f}{v} \bar{v}^{(r)}(k') \left(\frac{i}{q^2 - m_h^2} \right) \left(-i \frac{3m_f^2}{8\pi^2 v^2} \right) \left[\frac{q^2}{6} \log \frac{m_f^2}{\mu^2} - \frac{4}{3} m_f^2 + \frac{5}{18} q^2 \right. \\ \left. + \frac{(4m_f^2 - q^2)^{3/2}}{3q} \tan^{-1} \left(\frac{q}{\sqrt{4m_f^2 - q^2}} \right) \right] \left(\frac{i}{q^2 - m_h^2} \right) \left(i \frac{\lambda_{hs} v}{\sqrt{2}} \right) \quad (4.176)$$

que al multiplicar por su conjugado y repitiendo todos los pasos anteriores llegamos a que,

$$|\mathcal{M}_f|^2 = \frac{27m_f^6}{32\pi^4v^6} \frac{|\mathcal{M}_{tree}|^2}{(4m_S^2 - m_h^2)^2} \left[\frac{2m_S^2}{3} \log \frac{m_f^2}{\mu^2} - \frac{4}{3}m_f^2 + \frac{10}{9}m_S^2 + \frac{4(m_f^2 - m_S^2)^{3/2}}{3m_S} \tan^{-1} \left(\frac{m_S}{\sqrt{m_f^2 - m_S^2}} \right) \right]^2, \quad (4.177)$$

de donde ya se ha factorizado la amplitud a nivel árbol. Una vez más definimos R_f^2 como el cociente de esta amplitud y la amplitud a nivel árbol cuyo gráfico como función de m_S se encuentra en la figura 4.13. En esta gráfica podemos ver un comportamiento similar al encontrado para la misma contribución en el caso de materia oscura vectorial, no obstante, debido al promedio de las polarizaciones de los vectores X , la contribución con materia oscura escalar es ligeramente mayor.

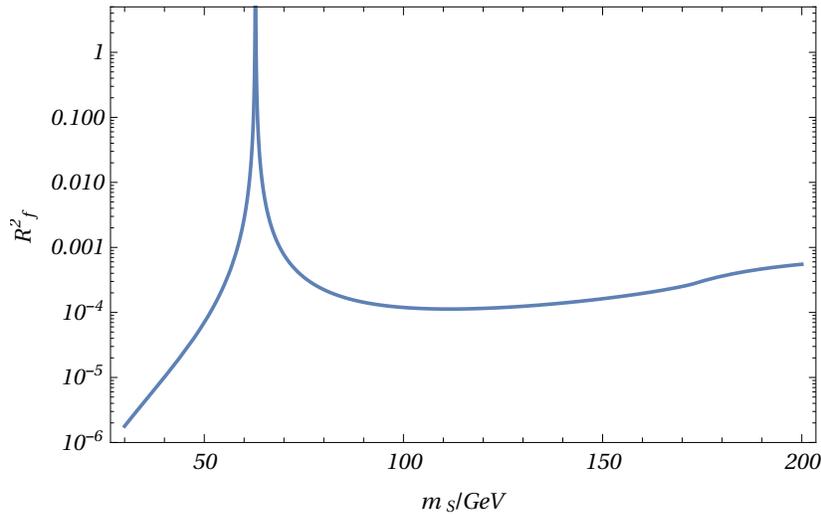


Figura 4.13: Cociente R_f^2 como función de m_S . Podemos notar que esta gráfica es muy similar a la obtenida en el caso de materia oscura vectorial con la salvedad de que en este caso las contribuciones son ligeramente mayores debido al factor 3 debido al promedio sobre las polarizaciones del vector X .

La última contribución por estudiar es aquella proveniente del diagrama A.7 cuya amplitud está dada por la ecuación (4.125),

$$i\mathcal{M}_{hhSS} = u^{(s)}(k) i \frac{m_f}{v} \bar{v}^{(r)}(k') \left(\frac{i}{q^2 - m_h^2} \right) \left(3i \frac{m_h^2 \lambda_{hs}}{32\sqrt{2}\pi^2 v} \right) \left(2 - \frac{\sqrt{q^2 - 4m_h^2}}{q} \log \left| \frac{q + \sqrt{q^2 - 4m_h^2}}{q + \sqrt{q^2 - 4m_h^2}} \right| \right), \quad (4.178)$$

donde al multiplicar por su conjugado repitiendo el procedimiento familiar y factorizando la amplitud a nivel árbol se obtiene,

$$|\mathcal{M}_{hhSS}|^2 = \frac{27m_h^4 m_f^2}{512\pi^4 v^6} \left(2 - \frac{\sqrt{m_S^2 - m_h^2}}{m_S} \log \left| \frac{m_S + \sqrt{m_S^2 - m_h^2}}{m_S + \sqrt{m_S^2 - m_h^2}} \right| \right)^2 |\mathcal{M}_{tree}|^2 \quad (4.179)$$

así que podemos definir nuevamente un cociente R_{hhSS}^2 como una función de m_S cuya gráfica se encuentra en la figura 4.14 y en la que se puede apreciar que esta contribución es mayor a 10^{-4} en un intervalo aproximadamente entre 80–95 GeV y entre 100–170 GeV, no obstante la contribución siempre es menor al orden de 10^{-2} , es decir, menor a un uno por ciento.

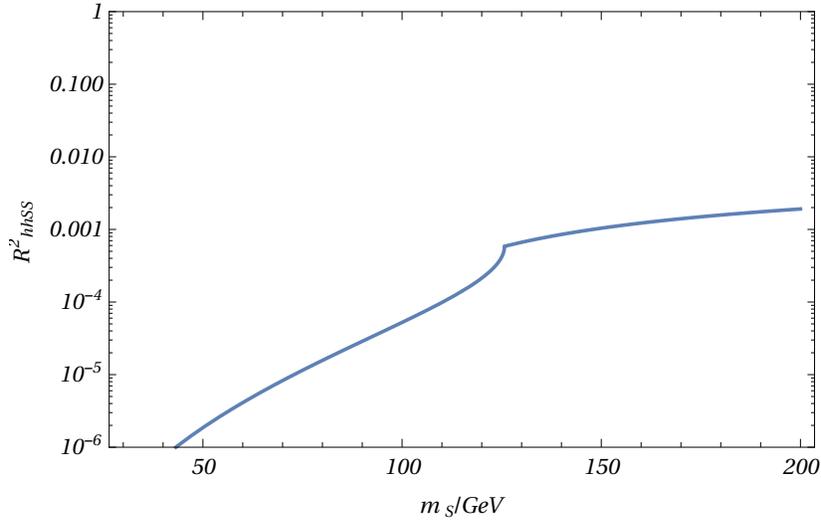


Figura 4.14: Cociente R_{hhSS}^2 como función de m_S . Esta contribución se encuentra siempre por debajo del orden de 10^{-2} . Sin embargo, podría ser relevante para materia oscura escalar con masas ≥ 150 GeV dónde el cociente $R_{hhSS}^2 \gtrsim 10^{-3}$.

Finalmente, calculamos el promedio de los cocientes R_i^2 de forma análoga a los resultados de la materia oscura vectorial,

$$\langle R^2 \rangle \equiv \frac{R_h^2 + R_S^2 + R_f^2 + R_{hhSS}^2}{4} \quad (4.180)$$

este cociente promedio es una función, tanto de m_S como del parámetro λ_{hs} es por esto que la gráfica en la figura 4.15 es una gráfica de contorno. En esta gráfica notamos que la contribución promedio es alrededor del orden $\geq 10^{-2}$ en la región de masas de 58–60 GeV y un acoplamiento λ_{hs} del orden de la unidad así como en la región de m_S entre 66–70 GeV también para λ_{hs} del orden de la unidad; mientras que la región alrededor del polo está prohibida.

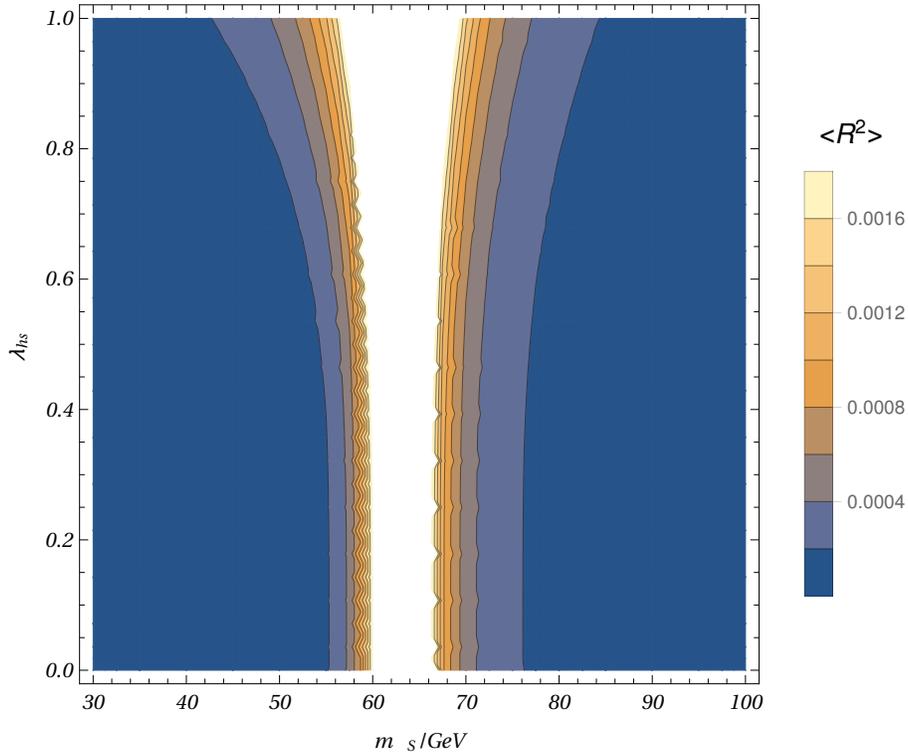


Figura 4.15: R^2 promedio para la materia oscura escalar.

Por lo tanto, estas contribuciones a un lazo, a pesar de que los valores de m_s antes mencionados no han sido descartados totalmente, la probabilidad de que estas contribuciones se vuelvan relevantes es muy remota pues a pesar de que los experimentos de CRESST o CoGeNT no descartan materia oscura ligera, el proyecto XENON ha descartado estos valores. No obstante, la palabra definitiva la tendrán los experimentos.

4.6. Interpretación Física

El estudio de las contribuciones como modificación a la auto-energía del Higgs son importantes para estudiar el origen fundamental de la interacción entre el Higgs y la materia oscura. Sin embargo, al considerar el SM como la teoría efectiva de interés, en donde la masa del Higgs “revestida” corresponde a la medición actual de 125 GeV, estas contribuciones no son relevantes para procesos físicos como la aniquilación de materia oscura. Las únicas contribuciones que físicamente afectan la tasa de aniquilación de materia oscura son, por lo tanto, las determinadas por las amplitudes

\mathcal{M}_{hhSS} y \mathcal{M}_{hhXX} dadas por las ecuaciones (4.125) y (4.72), respectivamente.

En el caso de materia oscura escalar el tamaño de la contribución \mathcal{M}_{hhSS} lo determinamos por medio del cociente R_{hhSS}^2 el cual graficamos como una función de m_S . De esta gráfica (figura 4.16) obtenemos que la contribución es de orden $\geq 10^{-3}$ para masas superiores a los 120 GeV, lo cual corresponde a una contribución del 0.1 % respecto a la amplitud de aniquilación a nivel árbol. Para el caso de materia oscura vectorial, el cociente R_{hhXX}^2 es del orden 10^{-4} si m_X es mayor a ~ 150 GeV y menor a 2 TeV.

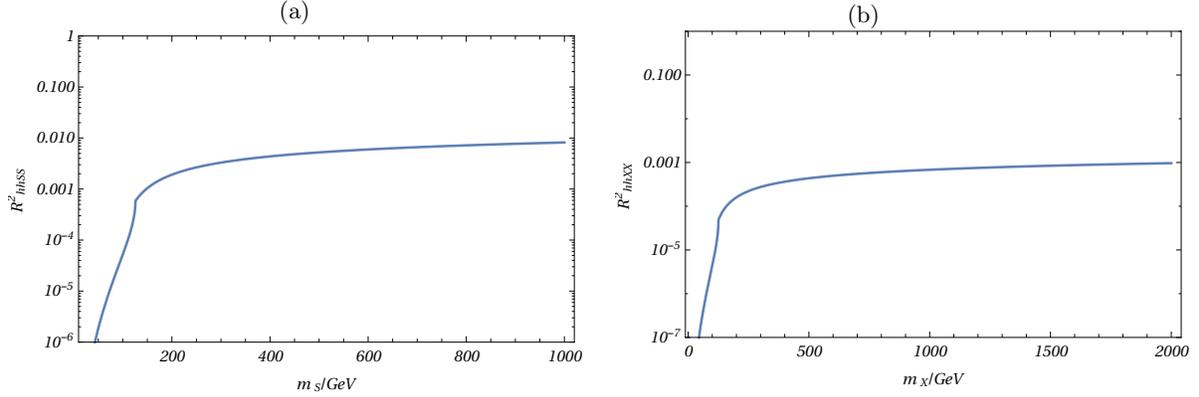


Figura 4.16: Correcciones físicas a la amplitud de aniquilación de materia oscura escalar (gráfica (a)) y vectorial (gráfica (b)), para $30 \text{ GeV} \leq m_S \leq 1 \text{ TeV}$ y $30 \text{ GeV} \leq m_X \leq 2 \text{ TeV}$, respectivamente.

De la gráfica 4.16 (a) podemos notar que para masas $\geq 1 \text{ TeV}$ el cociente $R_{hhSS}^2 \sim 10^{-2}$, por lo tanto, para materia oscura escalar muy masiva este diagrama contribuye en un 1 % respecto a la amplitud a nivel árbol. En la figura 4.17 aparecen las regiones donde algunos experimentos han detectado señales de materia oscura y en particular, se muestran las regiones que aún no han sido descartadas por experimentos como XENON o LUX. En esta gráfico podemos observar que contribuciones a un lazo como \mathcal{M}_{hhSS} pueden volverse relevantes en la región contenida en el cuadro verde (de acuerdo a los límites de la colaboración LUX) y la región dentro del cuadro azul (límite esperado de la mejora del experimento XENON, XENON1T).

Para la materia oscura vectorial, esta contribución alcanza el mismo nivel de relevancia en las regiones delimitadas por el recuadro rojo (LUX) y el recuadro morado (XENON1T), i.e. la contribución a un lazo en la tasa de aniquilación de materia oscura vectorial es del orden del 0.1 %, si la materia oscura es sumamente masiva. Por lo tanto, estos datos pueden ser de gran relevancia al momento de realizar cálculos de precisión relacionados con la detección de materia oscura.

A pesar de que las contribuciones \mathcal{M}_h , \mathcal{M}_f , \mathcal{M}_S y \mathcal{M}_X no contribuyen a la tasa de aniquilación de materia oscura, existen otras contribuciones relevantes como A.4 y otras que serán estudiadas en el futuro. Además, el cálculo de las correcciones a la auto-energía del Higgs contenidas en las amplitudes mencionadas son de extrema utilidad para estudios de modelos más fundamentales

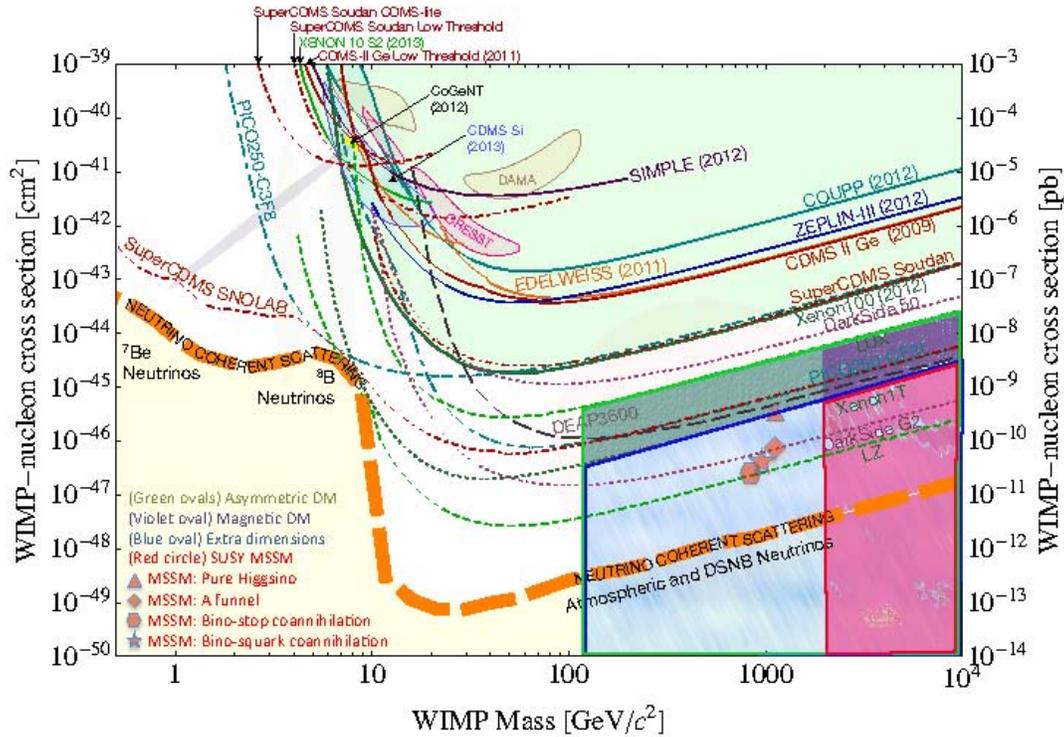


Figura 4.17: En esta gráfica, dentro del trapecio de colores, se muestran las regiones dentro de las cuales las contribuciones a un lazo pueden ser relevantes en el cálculo de la amplitud de aniquilación de materia oscura y que no han sido, ni serán descartadas por LUX y XENON1T, respectivamente. Las regiones dentro de los trapecios verde y azul corresponden a las regiones donde la contribución $|\mathcal{M}_{hhSS}|^2$ adquiere relevancia ya que allí, la magnitud de esta contribución se encuentra entre el 0.1 – 1 % respecto a la amplitud a nivel árbol. Los regiones dentro de los trapecios morado y rojo son las regiones donde $|\mathcal{M}_{hhXX}|^2$ adquiere una magnitud entre 0.01 – 0.1 % respecto a la amplitud a nivel árbol.

tales como modelos supersimétricos, teorías de gran unificación (GUT's) y modelos emergentes de la teoría de cuerdas. En estas teorías existen parámetros más fundamentales (e.g., la tensión de la cuerda o el “acoplamiento de unificación” (unified coupling constant)), de los cuales dependen cantidades como la masa del Higgs, es por eso que conocer las contribuciones mencionadas con

anterioridad es de suma importancia en el contexto de estas teorías. En este estudio al considerar al Modelo Estándar como la teoría de interés, las contribuciones provenientes de correcciones al propagador como \mathcal{M}_h , \mathcal{M}_f , etcétera, pierden relevancia física en nuestro estudio.

Capítulo 5

Conclusiones

En este trabajo se estudiaron posibles candidatos de materia oscura en el escenario de los portales de Higgs con el objetivo de determinar ciertas observables como son la tasa del decaimiento invisible del Higgs $\Gamma_{h \rightarrow DM}$ y la sección eficaz promedio $\langle \sigma v_r \rangle_{DM-DM \rightarrow SM}$, las cuales pueden ser contrastadas con las mediciones que existen actualmente por parte de experimentos enfocados en la detección de materia oscura y así poder determinar la viabilidad de los modelos propuestos. Para obtener dichas observables, se calculó detalladamente la amplitud del proceso de aniquilación de materia oscura en especies del Modelo Estándar por medio del intercambio del Higgs a nivel árbol, para después extender este estudio a nivel de un lazo de algunas de las posibles contribuciones que existen en este proceso; en esto es en lo que se enfoca la mayor parte del capítulo 4 así como el Apéndice A, y representa la contribución esencial de la presente tesis.

Para poder tratar con el tema central de este trabajo, dado que la naturaleza de la materia oscura es un tema que concierne tanto a la física de partículas cómo a la cosmología, consideramos prudente presentar en los primeros capítulos i) los fundamentos de la teoría cuántica de campos, incluyendo el mecanismo de Higgs y su relevancia en el SM; y ii) los fundamentos cosmológicos que llevan al consenso de que la materia visible descrita por el SM es tan sólo el 5% de la materia total del Universo, mientras que la materia restante se presenta en una forma oscura (que no emite radiación electromagnética) que sólo interactúa gravitacionalmente con la materia visible. A su vez se presenta evidencia que apoya esta idea y algunos de los esfuerzos que existen actualmente por parte de diferentes colaboraciones alrededor del mundo para lograr detectar materia oscura y poder determinar la naturaleza de esta.

Una vez planteados los fundamentos teóricos, se introducen los portales de Higgs en sus diferentes variantes, enfatizando su importante carácter en la descripción de candidatos a materia oscura. Los elementos introducidos, permitieron el cálculo explícito de la tasa de decaimiento del Higgs en materia oscura, $\Gamma(h \rightarrow SS)$ y $\Gamma(h \rightarrow XX)$, i.e. el decaimiento del Higgs en materia oscura tanto escalar como vectorial. Como siguiente paso, la amplitud de aniquilación a nivel árbol $|\mathcal{M}|^2$ de materia oscura en quarks o leptones. En el caso de materia oscura escalar, la amplitud de aniquilación fue 3 veces mayor a la de la materia oscura vectorial debido al promedio sobre las polarizaciones

de los vectores X ; esta es una diferencia sutil pues, aunque se trate de un factor 3, al momento de contrastar con los datos experimentales este factor podría ser crucial para determinar la naturaleza de la materia oscura. La amplitud condujo trivialmente a la sección eficaz promedio $\langle\sigma v_r\rangle$, que, como se ha mencionado antes, es la cantidad sobre la cual podemos establecer límites con ayuda de los experimentos.

Los cálculos a nivel árbol exhibidos representan el preámbulo de los datos que deseamos estudiar a un lazo. Los cálculos detallados a un lazo se presentan a distintos niveles en el texto principal (ver capítulo 4) y en el apéndice A. Es importante destacar que estos cálculos constituyen contribuciones originales del presente trabajo. En esta tesis, se ha considerado sólo un número reducido del enorme conjunto de contribuciones a un lazo, las cuales han sido elegidas por considerarlas más relevantes y por constituir una guía para el cálculo directo de las otras contribuciones en un trabajo futuro. Particularmente, se tomaron en cuenta los diagramas A.7, 4.4, A.3 y A.5.

El método empleado para determinar qué tan dominantes pueden ser las contribuciones a un lazo en la aniquilación de materia oscura, consistió en calcular el comportamiento del cociente entre $|\mathcal{M}_{loop}|^2$ y $|\mathcal{M}_{tree}|^2$ mediante sus representaciones gráficas en función de la masa de los candidatos a materia oscura y los acoplamientos λ_i en un intervalo de 30 – 200 GeV.

En este punto es importante aclarar que, como se discute en la sección 4.6, no todas las contribuciones a un lazo calculadas representan contribuciones físicas a la tasa de aniquilación de materia oscura. De hecho, de las cantidades discutidas en todo detalle, sólo la representada por el diagrama A.5 afecta directamente el cálculo de la tasa de aniquilación. Adicionalmente, aunque es claro que la cantidad relevante físicamente es¹ $|\mathcal{M}_{loop} + \mathcal{M}_{tree}|^2$ en lugar de $|\mathcal{M}_{loop}|^2 + |\mathcal{M}_{tree}|^2$, el estudio propuesto aquí permite determinar la relevancia de calcular con toda precisión las correcciones a un lazo.

Uno de los resultados importantes de este trabajo es que las contribuciones físicas a un lazo, según se aprecia en las gráficas 4.16, pueden ser incluso mayores al 0.1 % de la contribución a orden árbol cuando la materia oscura escalar tiene un masa superior a 120 GeV. Más aún, si la materia escalar fuese muy masiva, i.e. si $m_S \geq 1$ TeV, las contribuciones físicas se vuelven ≥ 1 % respecto a la amplitud a nivel árbol. En el caso de la materia oscura vectorial, esta contribución es típicamente menor. Sin embargo, para materia oscura vectorial con $m_X \geq 2$ TeV, estas correcciones también alcanzan el mismo nivel de significancia. Ambos resultados son independientes del acoplamiento entre la materia oscura y el Higgs (λ_{hs} y λ_{hv}), por lo que deben considerarse seriamente en estudios de precisión sobre la detección de materia oscura en los canales aún no descartados por los resultados de LUX.

El presente trabajo constituye el primer paso de un análisis completo que se publicará en otro trabajo. Para completarlo, deberemos calcular todas las posibles contribuciones a un lazo que estén permitidas por los Lagrangianos. En este trabajo consideramos solamente el decaimiento del Higgs directamente en quarks o leptones sin interacciones adicionales de partículas del SM. No obstante, también existe la posibilidad de que el Higgs decaiga en un par de bosones Z o W como se muestra

¹Aquí \mathcal{M}_{loop} debe contener sólo contribuciones a un lazo que no pueden ser absorbidas por correcciones teóricas a la masa “desnuda” de la masa del Higgs.

en las figuras 5.1 y 5.2, o fotones. La amplitud correspondiente a este proceso es

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{g^2 m_Z^2 \lambda_{hv}^2 v^2}{4 \cos^2 \theta_W} \frac{1}{(4m_X^2 - m_h^2)^2} \left[1 + 4 \frac{m_X^2}{m_Z^2} \left(1 - \frac{m_X^2}{m_Z^2} \right) \right] \quad (5.1)$$

para la materia oscura vectorial. En el caso de los bosones W basta reemplazar m_Z por m_W . El decaimiento del Higgs en los bosones de norma, aunque no se mide directamente, puede contribuir a un lazo pues estos bosones decaen posteriormente en otro tipo de partículas como son los leptones.

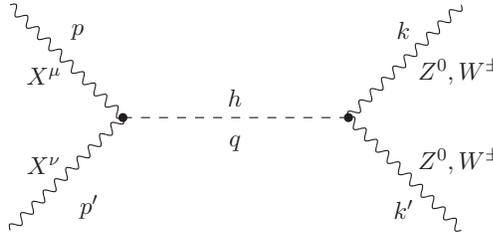


Figura 5.1: Aniquilación de materia oscura vectorial en los bosones de norma Z y W

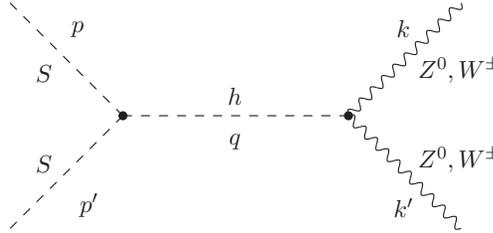


Figura 5.2: Aniquilación de materia oscura escalar en los bosones de norma Z y W

Adicionalmente, deberemos considerar los cálculos presentados en el Apéndice A, en los que se calcularon las integrales de lazo introduciendo una escala de corte Λ , la cual podrá ser incorporada a una formalismo más fundamental probablemente relacionado con teorías de unificación o teorías supersimétricas. Podremos encontrar resultados interesantes variando la escala de corte, los cuales podrán establecer límites sobre los portales de Higgs como teorías efectivas de las propuestas fundamentales planteadas.

Con la finalidad de comprobar el grado de precisión de nuestros cálculos explícitos, valdrá la pena emplear alguna herramienta automatizada como `FeynArts` [46]. Finalmente, para poder determinar qué tanto se ajusta nuestro modelo a las mediciones experimentales, ajustaremos el código `micromegas` [47], el cual es un código que establece las propiedades de la materia oscura fría en algún modelo propuesto de física de partículas. El código permite calcular la densidad relicta así como las tasas de detección directa e indirecta y compararlas con las constricciones experimentales actuales. Este código aprovecha el hecho de que la materia oscura exhibe una simetría discreta (Z_2).

Antes de concluir, vale la pena destacar que, al término de la escritura de este trabajo, en [48] se presentó la última determinación de la masa del Higgs, la cual no esperamos que altere los resultados aquí expuestos, pero que también deberá ser considerada en futuros estudios.

Apéndice A

Integrales de un lazo

A.1. Materia oscura vectorial

A.1.1. Lazo escalar

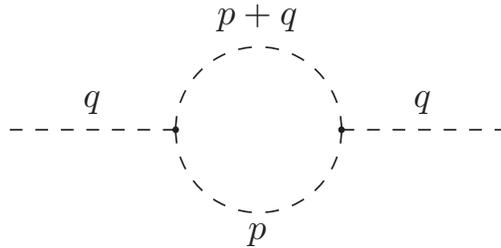


Figura A.1: Contribución a la auto-energía del Higgs proveniente de la auto-interacción del Higgs.

Para el loop escalar, se tiene

$$\begin{aligned}
 I_h &= \frac{1}{2} \int \frac{d^n p}{(2\pi)^n} \left[i \frac{3m_h^2}{\sqrt{2}v} \left(\frac{i}{(p+q)^2 - m_h^2} \right) i \frac{3m_h^2}{\sqrt{2}v} \left(\frac{i}{p^2 - m_h^2} \right) \right] \\
 &= \frac{9m_h^4}{4v^2} \int \frac{d^n p}{(2\pi)^n} \frac{1}{((p+q)^2 - m_h^2)(p^2 - m_h^2)} = \frac{m_h^4}{2v^2} \int_0^1 dx \int \frac{d^n p}{(2\pi)^n} \frac{1}{(p^2 + 2xp \cdot q + xq^2 - m_h^2)^2}.
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

Realizando un cambio de variable $l = p + xq \Rightarrow dl = dp$, la integral I_h se convierte

$$I_h = \frac{9m_h^4}{4v^2} \int_0^1 dx \int \frac{d^n l}{(2\pi)^n} \frac{1}{(l^2 + xq^2 - x^2q^2 - m_h^2)^2} = \frac{9m_h^4}{4v^2} \int_0^1 dx \int \frac{d^n l}{(2\pi)^n} \frac{1}{(l^2 + x(1-x)q^2 - m_h^2)^2}. \tag{A.2}$$

En $n = 4$ vemos que en el numerador hay momento a la cuarta así como en el denominador, por lo que la integral diverge logarítmicamente. Renombrando al término independiente en el denominador $\Delta_h = m_h^2 - x(1-x)q^2$ y aplicando una rotación de Wick $l^0 \rightarrow il_E^0$, la integral se vuelve

$$I_h = i \frac{9m_h^4}{4v^2} \int_0^1 dx \int \frac{d^n l_E}{(2\pi)^n} \frac{1}{(l_E^2 + \Delta_h)^2}, \quad (\text{A.3})$$

por otra parte $d^n l_E = d\Omega_n |l_E|^{n-1} d|l_E|$, así que para $n = 4$, obtenemos

$$I_h = i \frac{9m_h^4}{4v^2} \int_0^1 dx \int d\Omega_4 \int_0^\infty \frac{d|l_E|}{(2\pi)^4} \frac{|l_E|^3}{(|l_E|^2 + \Delta_h)^2} \quad (\text{A.4})$$

Realizando un cambio de variable $y = |l_E|^2$, $dy = 2|l_E|d|l_E|$ se obtiene

$$\Rightarrow i \frac{9m_h^4}{4v^2} \int_0^1 dx \int d\Omega_4 \int_0^\infty \frac{dy}{(2\pi)^4} \frac{y}{(y + \Delta_h)^2} = i \frac{9m_h^4}{4v^2} \int_0^1 dx \int_0^\infty \frac{dy}{16\pi^2} \left(\frac{y + \Delta_h}{(y + \Delta_h)^2} - \frac{\Delta_h}{(y + \Delta_h)^2} \right), \quad (\text{A.5})$$

donde se utilizó el hecho de que $\int d\Omega_4 = 2\pi^2$. Finalmente con un último cambio de variable $u = y + \Delta_h$ se obtiene la solución a la integral

$$i \frac{9m_h^4}{64\pi^2 v^2} \int_0^1 dx \int_0^\infty du \left(\frac{1}{u} - \frac{\Delta_h}{u^2} \right) = i \frac{9m_h^4}{64\pi^2 v^2} \int_0^1 dx (\log(u) + u^{-1} \Delta_h) \quad (\text{A.6})$$

Entonces, sustituyendo nuevamente el valor de u se obtiene

$$i \frac{9m_h^4}{64\pi^2 v^2} \int_0^1 dx \left(\log(|l_E|^2 + \Delta_h) + \frac{\Delta_h}{|l_E|^2 + \Delta_h} \right) \Big|_{|l_E|^2=0}^\infty. \quad (\text{A.7})$$

Es evidente que el término logarítmico en (A.7) diverge cuando $|l_E|^2 \rightarrow \infty$, confirmando la aseveración anterior de que la integral diverge logarítmicamente. Dado que se espera nueva física a partir de cierta escala de energía, introducimos una escala de corte $|l_E|^2 = \Lambda^2$ obteniéndose así la contribución

$$\begin{aligned} & i \frac{9m_h^4}{64\pi^2 v^2} \int_0^1 dx \left(\log(|l_E|^2 + \Delta_h) + \frac{\Delta_h}{|l_E|^2 + \Delta_h} \right) \Big|_{|l_E|^2=0}^{\Lambda^2} \\ &= i \frac{9m_h^4}{64\pi^2 v^2} \int_0^1 dx \left(\log(\Lambda^2 + \Delta_h) + \frac{\Delta_h}{\Lambda^2 + \Delta_h} - \log \Delta_h - 1 \right). \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Usando las soluciones siguientes

$$\int_0^1 dx \log(\Lambda^2 + m_h^2 - x(1-x)q^2) = \log(\Lambda^2 + m_h^2) - 2 + \frac{2\sqrt{4(\Lambda^2 + m_h^2) - q^2}}{q} \tan^{-1} \left(\frac{q}{\sqrt{4(\Lambda^2 + m_h^2) - q^2}} \right) \quad (\text{A.9})$$

$$\int_0^1 dx \frac{m_h^2 - x(1-x)q^2}{\Lambda^2 + m_h^2 - x(1-x)q^2} = 1 - \frac{4\Lambda^2}{q\sqrt{4(m_h^2 + \Lambda^2) - q^2}} \tan^{-1} \left(\frac{q}{\sqrt{4(\Lambda^2 + m_h^2) - q^2}} \right) \quad (\text{A.10})$$

$$\int_0^1 dx \log(m_h^2 - x(1-x)q^2) = \log(m_h^2) - 2 + \frac{2\sqrt{4m_h^2 - q^2}}{q} \tan^{-1} \left(\frac{q}{\sqrt{4m_h^2 - q^2}} \right) \quad (\text{A.11})$$

y sustituyéndolas en (A.10), se obtiene:

$$I_h = i \frac{9m_h^4}{64\pi^2 v^2} \left[\log \left(\frac{\Lambda^2 + m_h^2}{m_h^2} \right) + \left\{ 2\Theta_\Lambda^{-1} - \frac{4\Lambda^2}{q^2} \Theta_\Lambda \right\} \tan^{-1} \Theta_\Lambda - 2\Theta_h^{-1} \tan^{-1} (\Theta_h) \right], \quad (\text{A.12})$$

donde, Θ_Λ y Θ_h son,

$$\Theta_\Lambda = \frac{q}{\sqrt{4(\Lambda^2 + m_h^2) - q^2}}, \quad \Theta_h = \frac{q}{\sqrt{4m_h^2 - q^2}} \quad (\text{A.13})$$

Un detalle a considerar es que esta solución, particularmente la solución (A.11), es únicamente válida cuando $4m_h^2 - q^2 > 0$, es decir, para momentos pequeños. Para $4m_h^2 - q^2 < 0$, la solución a (A.11) es

$$\log m_h^2 - 2 + \frac{\sqrt{q^2 - 4m_h^2}}{q} \log \left(\left| \frac{q + \sqrt{q^2 - 4m_h^2}}{q - \sqrt{q^2 - 4m_h^2}} \right| \right) \quad (\text{A.14})$$

que es equivalente a realizar el cambio de $\tan^{-1} \Theta_h$ en (A.11) por $i \tanh^{-1} \Theta_h$. Considerando el caso más general ($q^2 - 4m_h^2 > 0$) la integral del lazo escalar es

$$i \frac{9m_h^4}{64\pi^2 v^2} \left[\log \left(\frac{\Lambda^2 + m_h^2}{m_h^2} \right) + \left\{ 2\Theta_\Lambda^{-1} - \frac{4\Lambda^2}{q^2} \Theta_\Lambda \right\} \tan^{-1} (\Theta_\Lambda) - \frac{\sqrt{q^2 - 4m_h^2}}{q} \log \left| \frac{q + \sqrt{q^2 - 4m_h^2}}{q - \sqrt{q^2 - 4m_h^2}} \right| \right]; \quad (\text{A.15})$$

por lo tanto, la contribución a la amplitud de aniquilación a un lazo de la auto-energía del Higgs es

$$\begin{aligned} i\mathcal{M}_h &= u^{(s)}(k) i \frac{m_f}{v} \bar{v}^{(r)}(k') \left(\frac{i}{q^2 - m_h^2} \right) i \frac{9m_h^4}{64\pi^2 v^2} \left[\log \left(\frac{\Lambda^2 + m_h^2}{m_h^2} \right) \right. \\ &+ \left\{ 2\Theta_\Lambda^{-1} - \frac{4\Lambda^2}{q^2} \Theta_\Lambda \right\} \tan^{-1} (\Theta_\Lambda) - \frac{\sqrt{q^2 - 4m_h^2}}{q} \log \left| \frac{q + \sqrt{q^2 - 4m_h^2}}{q - \sqrt{q^2 - 4m_h^2}} \right| \left. \right] \\ &\times \left(\frac{i}{q^2 - m_h^2} \right) i \frac{\lambda_{hv}}{\sqrt{2}} g_{\mu\nu} \epsilon_{(\lambda)}^\mu(p) \epsilon_{(\lambda')}^\nu(p') \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

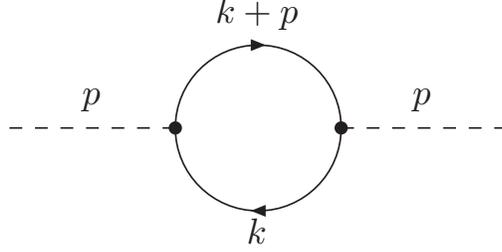


Figura A.2: Contribución a la auto-energía del Higgs proveniente de un par fermión antifermión.

A.1.2. Lazo fermiónico

En el loop fermiónico (figura A.2), la integral del momento es

$$\begin{aligned}
 I_f &= (-1) \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \text{tr} \left[i \frac{m_f}{v} \frac{i(\not{k} + \not{p} + m_f)}{(k+p)^2 - m_f^2} \left(i \frac{m_f}{v} \right) \frac{\not{k} + m_f}{k^2 - m_f^2} \right] \\
 &= \frac{m_f^2}{v^2} \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \text{tr} \left[\frac{(\not{k} + \not{p} + m_f)(\not{k} + m_f)}{((k+p)^2 - m_f^2)(k^2 - m_f^2)} \right] = \frac{4m_f^2}{v^2} \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{k^2 + p \cdot k + m_f^2}{((k+p)^2 - m_f^2)(k^2 - m_f^2)}.
 \end{aligned} \tag{A.17}$$

Esta integral tiene en el numerador unidades de momento a la sexta y en el denominador momento a la cuarta, por lo que parece diverger cuadráticamente.

Introduciendo los parámetros de Feynman se puede reescribir la integral como

$$I_f = (-1) \frac{4m_f^2}{v^2} \int_0^1 dx \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{k^2 + p \cdot k + m_f^2}{(k^2 + 2xk \cdot p + xp^2 - m_f^2)^2} \tag{A.18}$$

la cual con el clásico cambio de variable $l = k + xp$, es

$$\begin{aligned}
 &(-1) \frac{4m_f^2}{v^2} \int_0^1 dx \int \frac{d^n l}{(2\pi)^n} \frac{(l - xp)^2 + p \cdot l - xp^2 + m_f^2}{(l^2 + x(1-x)p^2 - m_f^2)^2} \\
 &= (-1) \frac{4m_f^2}{v^2} \int_0^1 dx \int \frac{d^n l}{(2\pi)^n} \frac{l^2 - x(1-x)p^2 + p \cdot l(1-2x) + m_f^2}{(l^2 + x(1-x)p^2 - m_f^2)^2} \\
 &= (-1) \frac{4m_f^2}{v^2} \int_0^1 dx \int \frac{d^n l}{(2\pi)^n} \frac{l^2 + p \cdot l(1-2x) + \Delta_f}{(l^2 - \Delta_f)^2},
 \end{aligned} \tag{A.19}$$

donde $\Delta_f = m_f^2 - x(1-x)p^2$. Utilizando nuevamente la rotación de Wick se obtienen tres integrales

$$i \int \frac{d^n l_E}{(2\pi)^n} \frac{1}{|l_E|^2 + \Delta_f}$$

$$\begin{aligned}
& i \int \frac{d^n l_E}{(2\pi)^n} \frac{2\Delta_f}{(|l_E|^2 + \Delta_f)^2} \\
& i \int \frac{d^n l_E}{(2\pi)^n} \frac{(1-2x)p \cdot l_E}{(|l_E|^2 + \Delta_f)^2}
\end{aligned} \tag{A.20}$$

La segunda integral en (A.20), para $n = 4$, es la misma que en el caso anterior, por lo tanto conocemos su valor y el tipo de divergencia que posee

$$2\Delta_f \left(\log(|l_E|^2 + \Delta_f) + \frac{\Delta_f}{|l_E|^2 + \Delta_f} \right) \Big|_{|l_E|^2=0}^{\infty}. \tag{A.21}$$

La primer integral de (A.20) se resuelve de manera similar; escribiendo $\int d^n k$ como una integral sobre el ángulo sólido $\int d\Omega_n \int_0^\infty d|l_E| |l_E|^{n-1}$ y haciendo el cambio de variable $y = |l_E|^2$ se obtiene, para $n = 4$

$$\frac{i}{2} \int d\Omega_4 \int_0^\infty \frac{dy}{(2\pi)^4} \frac{y}{y + \Delta_f} = \frac{1}{16\pi^2} \int du \frac{u - \Delta_f}{u}, \tag{A.22}$$

con $u = y + \Delta$; de esta forma

$$= \frac{i}{16\pi^2} (|l_E|^2 + \Delta_f - \Delta_f \log(|l_E|^2 + \Delta_f)) \Big|_{|l_E|^2=0}^{\infty}. \tag{A.23}$$

Introduciendo nuevamente una escala de corte Λ^2

$$\frac{i}{16\pi^2} [\Lambda^2 - \Delta_f \log(\Lambda^2 + \Delta_f) + \Delta_f \log(\Delta_f)] \tag{A.24}$$

La tercera integral en (A.20) se puede escribir como

$$i \int \frac{d^n l_E}{(2\pi)^n} \frac{(1-2x)g_{\mu\nu} p^\mu l_E^\nu}{(|l_E|^2 + \Delta_f)^2} \tag{A.25}$$

cómo la integral depende únicamente de la magnitud de l_E entonces por simetrías es igual a cero.

Por lo tanto, con la escala de corte Λ^2 la contribución total del lazo fermiónico es

$$I_f = -i \frac{m_f^2}{4\pi^2 v^2} \int_0^1 dx \left(\Lambda^2 + \Delta_f \log(\Lambda^2 + \Delta_f) - \Delta_f \log \Delta_f + \frac{2\Delta_f^2}{\Lambda^2 + \Delta_f} - 2\Delta_f \right). \tag{A.26}$$

Utilizando las siguientes soluciones

$$\begin{aligned}
\int_0^1 dx (\Lambda^2 + m_f^2 - x(1-x)p^2) \log(\Lambda^2 + m_f^2 - x(1-x)p^2) &= \left(\Lambda^2 + m_f^2 - \frac{p^2}{6} \right) \log(\Lambda^2 + m_f^2) \\
&- \frac{4}{3} m_f^2 + \frac{5}{18} p^2 + \frac{(4m_f^2 + 4\Lambda^2 - p^2)^{3/2}}{3q} \tan^{-1} \left(\frac{p}{\sqrt{4(\Lambda^2 + m_f^2) - p^2}} \right)
\end{aligned} \tag{A.27}$$

$$\int_0^1 dx \frac{2(m_f^2 - x(1-x)p^2)^2}{\Lambda^2 + m_f^2 - x(1-x)p^2} = 2m_f^2 - \frac{p^2}{3} + \frac{8\Lambda^4}{p\sqrt{4(\Lambda^2 + m_f^2) - p^2}} \tan^{-1} \left(\frac{p}{\sqrt{4(\Lambda^2 + m_f^2) - p^2}} \right) \quad (\text{A.28})$$

se obtiene

$$I_f = -i \frac{m_f^2}{4\pi^2 v^2} \left[-\frac{\Lambda^2}{3} + \left(\Lambda^2 + m_f^2 - \frac{p^2}{6} \right) \log \left(\frac{\Lambda^2 + m_f^2}{m_f^2} \right) + \left(\frac{p^2}{3} \Theta_\Lambda^{-3} + \frac{8\Lambda^4}{p^2} \Theta_\Lambda \right) \tan^{-1}(\Theta_\Lambda) - \left(2\Lambda^2 + \frac{4}{3}m_f^2 - \frac{p^2}{3} \right) \Theta_f^{-1} \tan^{-1}(\Theta_f) \right] \quad (\text{A.29})$$

con Θ_1 y Θ_2 dados por

$$\Theta_\Lambda = \frac{p}{\sqrt{4(\Lambda^2 + m_f^2) - p^2}}, \quad \Theta_f = \frac{p}{\sqrt{4m_f^2 - p^2}}. \quad (\text{A.30})$$

Esta solución (ecuación (A.29)), al igual que en el ejemplo anterior, es válida solamente cuando $4m_f^2 - p^2 > 0$; para $4m_f^2 - p^2 < 0$ I_f es

$$I_f = -i \frac{m_f^2}{4\pi^2 v^2} \left[-\frac{\Lambda^2}{3} + \left(\Lambda^2 + m_f^2 - \frac{p^2}{6} \right) \log \left(\frac{\Lambda^2 + m_f^2}{m_f^2} \right) + \left(\frac{p^2}{3} \Theta_\Lambda^{-3} + \frac{8\Lambda^4}{p^2} \Theta_\Lambda \right) \tan^{-1}(\Theta_\Lambda) - \left(\Lambda^2 + \frac{4}{3}m_f^2 - \frac{p^2}{3} \right) \Theta_f^{-1} \log \left| \frac{p + \sqrt{p^2 - 4m_f^2}}{p - \sqrt{p^2 - 4m_f^2}} \right| \right] \quad (\text{A.31})$$

Por lo tanto

$$i\mathcal{M}_f = u^{(s)}(k) i \frac{m_f}{v} \bar{v}^{(r)}(k') \frac{i}{p^2 - m_h^2} (-1) i \frac{m_f^2}{4\pi^2 v^2} \left[-\frac{\Lambda^2}{3} + \left(\Lambda^2 + m_f^2 - \frac{p^2}{6} \right) \log \left(\frac{\Lambda^2 + m_f^2}{m_f^2} \right) + \left(\frac{p^2}{3} \Theta_\Lambda^{-3} + \frac{8\Lambda^4}{p^2} \Theta_\Lambda \right) \tan^{-1}(\Theta_\Lambda) - \left(\Lambda^2 + \frac{4}{3}m_f^2 - \frac{p^2}{3} \right) \Theta_f^{-1} \log \left| \frac{p + \sqrt{p^2 - 4m_f^2}}{p - \sqrt{p^2 - 4m_f^2}} \right| \right] \times \left(\frac{i}{p^2 - m_h^2} \right) i \frac{\lambda_{hv}}{\sqrt{2}} g_{\mu\nu} \epsilon_{(\lambda)}^\mu(p') \epsilon_{(\lambda')}^\nu(p'') \quad (\text{A.32})$$

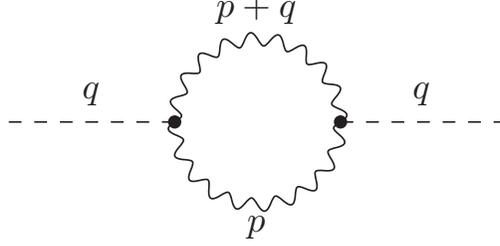


Figura A.3: Contribución a la auto-energía del Higgs proveniente de los bosones vectoriales de materia oscura.

A.1.3. Lazo vectorial

El loop vectorial (figura A.3) es

$$\begin{aligned}
 I_X &= \int \frac{d^n p}{(2\pi)^n} \left[\left(i \frac{\lambda_{hv} v}{\sqrt{2}} \right) \frac{-i}{(p+q)^2 - m_X^2} \left(g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} - \frac{(p+q)^\mu (p+q)_\mu}{m_X^2} \right) \left(i \frac{\lambda_{hv} v}{\sqrt{2}} \right) \right. \\
 &\quad \left. \times \frac{-i}{p^2 - m_X^2} \left(g_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} - \frac{p^\alpha p_\alpha}{m_X^2} \right) \right] \\
 &= \frac{\lambda_{hv}^2 v^2}{2} \int \frac{d^n p}{(2\pi)^n} \frac{1}{((p+q)^2 - m_X^2)(p^2 - m_X^2)} \left(4 - \frac{(p+q)^2}{m_X^2} \right) \left(4 - \frac{p^2}{m_X^2} \right). \quad (\text{A.33})
 \end{aligned}$$

Esta integral, comparando las potencias del numerador y denominador, notamos que contiene términos que divergen cuadráticamente. Separando la integral

$$\begin{aligned}
 \frac{\lambda_{hv}^2 v^2}{2} \int \frac{d^n p}{(2\pi)^n} \left\{ \frac{16}{((p+q)^2 - m_X^2)(p^2 - m_X^2)} - \frac{4}{m_X^2} \frac{p^2 + (p+q)^2}{((p+q)^2 - m_X^2)(p^2 - m_X^2)} \right. \\
 \left. + \frac{1}{m_X^4} \frac{p^2(p+q)^2}{((p+q)^2 - m_X^2)(p^2 - m_X^2)} \right\} \quad (\text{A.34})
 \end{aligned}$$

del primer término ya se conoce su solución. Para los demás términos se pueden sumar ceros convenientes, es decir,

$$\begin{aligned}
 &\frac{p^2 - m_X^2}{((p+q)^2 - m_X^2)(p^2 - m_X^2)} + \frac{(p+q)^2 - m_X^2}{((p+q)^2 - m_X^2)(p^2 - m_X^2)} \\
 &\quad + \frac{2m_X^2}{((p+q)^2 - m_X^2)(p^2 - m_X^2)} \\
 &= \frac{1}{(p+q)^2 - m_X^2} + \frac{1}{p^2 - m_X^2} + \frac{2m_X^2}{((p+q)^2 - m_X^2)(p^2 - m_X^2)} \quad (\text{A.35})
 \end{aligned}$$

y el segundo término

$$\begin{aligned}
& \frac{p^2((p+q)^2 - m_X^2)}{((p+q)^2 - m_X^2)(p^2 - m_X^2)} + \frac{p^2 m_X^2}{((p+q)^2 - m_X^2)(p^2 - m_X^2)} \\
&= \frac{p^2}{p^2 - m_X^2} + \frac{p^2 m_X^2}{((p+q)^2 - m_X^2)(p^2 - m_X^2)} \\
&= 1 + \frac{m_X^2}{p^2 - m_X^2} + \frac{m_X^2}{(p+q)^2 - m_X^2} + \frac{m_X^4}{((p+q)^2 - m_X^2)(p^2 - m_X^2)},
\end{aligned} \tag{A.36}$$

De esta forma las integral I_X se resuelve fácilmente utilizando los resultados previos

$$\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2 - m_X^2} \rightarrow i \int \frac{d^4 p_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{|p_E|^2 + m_X^2} = \frac{i}{16\pi^2} (|p_E|^2 + m_X^2 - m_X^2 \log(|p_E|^2 + m_X^2)) \Big|_{|k_E|^2=0}^{\infty} \tag{A.37}$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{((p+q)^2 - m_X^2)(p^2 - m_X^2)} &= \int_0^1 dx \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - M^2)^2} \\
&= \frac{i}{16\pi^2} \int dx (\log(|k_E|^2 + M^2) + \frac{M^2}{|k_E|^2 + M^2}) \Big|_{|k_E|^2=0}^{\infty}
\end{aligned} \tag{A.38}$$

donde $M^2 = m_X^2 - x(1-x)q^2$ y $k = p + xq$. Entonces, sustituyendo los valores anteriores e introduciendo la escala de corte Λ^2 ,

$$\begin{aligned}
I_X &= i \frac{\lambda_{hv}^2 v^2}{32\pi^2} \left[(16 - 8 + 1) \int_0^1 dx \left\{ \log(\Lambda^2 + M^2) + \frac{M^2}{\Lambda^2 + M^2} - \log(M^2) - 1 \right\} \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{2}{m_X^2} - \frac{8}{m_X^4} \right) \{ \Lambda^2 - m_X^2 \log(\Lambda^2 + m_X^2) + m_X^2 \log(m_X^2) \} + \frac{\Lambda^4}{2m_X^4} \right].
\end{aligned} \tag{A.39}$$

De las ecuaciones (A.9), (A.10) y (A.11) resulta

$$\begin{aligned}
I_X &= i \frac{\lambda_{hv}^2 v^2}{32\pi^2} \left[15 \log \left(\frac{\Lambda^2 + m_X^2}{m_X^2} \right) + 9 \left(\frac{2}{q} \sqrt{4(\Lambda^2 + m_X^2) - q^2} - \frac{4\Lambda^2}{q \sqrt{4(\Lambda^2 + m_X^2) - q^2}} \right) \tan^{-1} \Theta_{\Lambda X} \right. \\
&\quad \left. - \frac{18}{q} \sqrt{4m_X^2 - q^2} \tan^{-1} \Theta_X - 6 \frac{\Lambda^2}{m_X^2} + \frac{\Lambda^4}{2m_X^4} \right]
\end{aligned} \tag{A.40}$$

De esta forma, la contribución del lazo vectorial a la amplitud es

$$\begin{aligned}
i\mathcal{M}_X &= u^{(s)}(k) i \frac{m_f}{v} \bar{v}^{(r)}(k') \left(\frac{i}{q^2 - m_h^2} \right) \left(i \frac{\lambda_{hv}^2 v^2}{32\pi^2} \right) \left[15 \log \left(\frac{\Lambda^2 + m_X^2}{m_X^2} \right) \right. \\
&+ 9 \left(2\Theta_{\Lambda X}^{-1} - \frac{4\Lambda^2}{q^2} \Theta_{\Lambda X} \right) \tan^{-1} \Theta_{\Lambda X} - \frac{18}{q} \sqrt{4m_X^2 - q^2} \tan^{-1} \Theta_X - 6 \frac{\Lambda^2}{m_X^2} + \frac{\Lambda^4}{2m_X^4} \Big] \\
&\quad \times \left(\frac{i}{q^2 - m_h^2} \right) i \frac{\lambda_{hv} v}{\sqrt{2}} g_{\mu\nu} \epsilon^\mu(p) \epsilon^\nu(p')
\end{aligned} \tag{A.41}$$

para las demás tenemos

$$\begin{aligned}
& \frac{-3}{m_X^2} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(q+p)^2 - m_X^2][q^2 - m_h^2]} \\
&= \frac{-3i}{16\pi^2 m_X^2} \left[\left(\frac{\sqrt{4p^2(\Lambda^2 + m_h^2)} - (m_h^2 - m_X^2 + p^2)}{p^2} - \frac{2\Lambda^2}{\sqrt{4p^2(\Lambda^2 + m_h^2)} - (m_h^2 - m_X^2 + p^2)} \right) \right. \\
&\times \left(\tan^{-1} \left(\frac{m_h^2 - m_X^2 + p^2}{\sqrt{4p^2(\Lambda^2 + m_h^2)} - (m_h^2 - m_X^2 + p^2)} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{m_h^2 - m_X^2 - p^2}{\sqrt{4p^2(\Lambda^2 + m_h^2)} - (m_h^2 - m_X^2 + p^2)} \right) \right) \\
&\left. + \frac{1}{2p^2} \left\{ (m_h^2 - m_X^2 + p^2) \log \left(\frac{\Lambda^2 + m_h^2}{m_h^2} \right) + (m_h^2 - m_X^2 - p^2) \log \left(\frac{m_X^2}{\Lambda^2 + m_X^2} \right) \right\} \right], \quad (\text{A.45})
\end{aligned}$$

la segunda integral es idéntica a la anterior, sólo hay que realizar la sustitución $p^2 \rightarrow p'^2$. Por último; la primer integral es finita sin tener que introducir escalas de corte, sin embargo integrando de 0 a un Λ^2 :

$$\begin{aligned}
& \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{9}{[(q+p)^2 - m_X^2][(q-p')^2 - m_X^2][q^2 - m_h^2]} \\
&= \int dx dy \frac{i}{16\pi^2} \left(\frac{-1}{\Lambda^2 + M^2} + \frac{M^2}{2(\Lambda^2 + M^2)^2} + \frac{1}{2M^2} \right) \quad (\text{A.46})
\end{aligned}$$

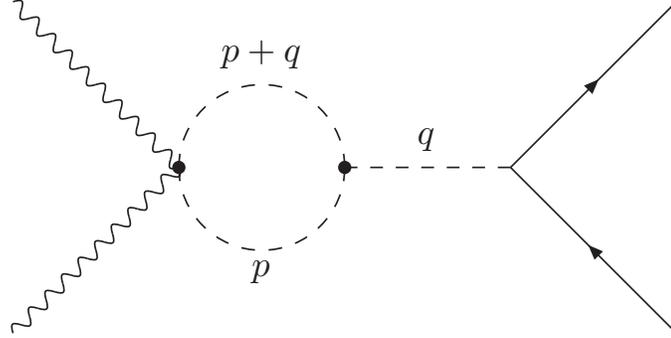
donde $M^2 = m_h^2 - p'^2 x(1-x) - y[p^2(1-y) + 2xp \cdot p' + m_h^2 - m_X^2] - x(m_h^2 - m_X^2)$.

Para obtener el valor total de esta contribución es claro que el paso final es evaluar la integral anterior, sin embargo, esta es una contribución diferente a las demás pues involucra una integral tanto en x como en y . La integral sobre la variable y se puede resolver sin mucha dificultad pues presenta una forma muy similar a las demás integrales con las que nos hemos encontrado en esta sección. El problema surge al tratar de evaluar la integral en x pues como hemos visto el resultado de la integral en y contiene términos con arcotangentes o logaritmos que al intentar integrar resulta complicado inclusive utilizando herramientas como Mathematica. No obstante, esta integral puede resolverse con métodos numéricos y se dejará como un objetivo a futuro y continuación del presente trabajo

A.1.5. $h^2 X_\mu X^\mu$

La contribución del término $h^2 X_\mu X^\mu$ es

$$I_{h^2 X^2} = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \left[\left(i \frac{\lambda_{hv}}{4} g_{\mu\nu} \right) \left(\frac{i}{(q+p)^2 - m_h^2} \right) \left(i \frac{3m_h^2}{\sqrt{2}v} \right) \left(\frac{i}{q^2 - m_h^2} \right) \right] \quad (\text{A.47})$$

Figura A.5: Contribución $h^2 X_\mu X^\mu$.

y con la parametrización de Feynman

$$\frac{3\lambda_{hv}m_h^2}{4\sqrt{2}v}g_{\mu\nu}\int_0^1 dx \int \frac{d^n p}{(2\pi)^n} \left[\frac{1}{(p^2 + 2xp \cdot q + xq^2 - m_h^2)^2} \right]. \quad (\text{A.48})$$

Por los resultados anteriores obtenemos

$$I_{h^2 X^2} = \frac{3\lambda_{hv}m_h^2}{4\sqrt{2}v}g_{\mu\nu}\int_0^1 dx \left(\log(\Lambda^2 + M_{h^2 X^2}) + \frac{M_{h^2 X^2}}{\Lambda^2 + M_{h^2 X^2}} - \log M_{h^2 X^2} - 1 \right) \quad (\text{A.49})$$

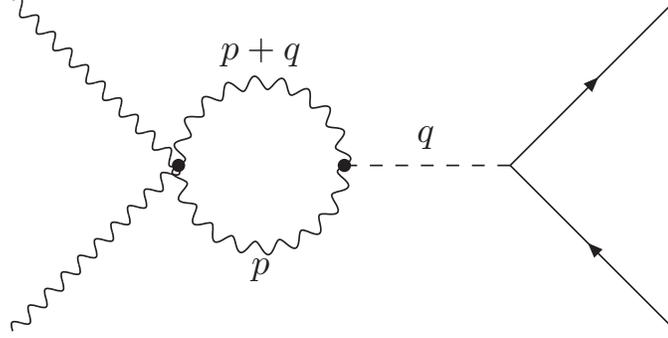
con $M_{h^2 X^2} = m_h^2 - q^2 x(1-x)$, entonces usando (A.9) obtenemos

$$I_{h^2 X^2} = i \frac{3\lambda_{hv}m_h^2}{64\sqrt{2}\pi^2 v} g_{\mu\nu} \left\{ \log \left(\frac{\Lambda^2 + m_h^2}{m_h^2} \right) + \left[\frac{2}{q} \sqrt{4(\Lambda^2 + m_h^2) - q^2} - \frac{4\Lambda^2}{q \sqrt{4(\Lambda^2 + m_h^2) - q^2}} \right] \right. \\ \left. \times \tan^{-1} \left(\frac{q}{\sqrt{4(\Lambda^2 + m_h^2) - q^2}} \right) - \frac{2}{q} \sqrt{4m_h^2 - q^2} \tan^{-1} \left(\frac{q}{\sqrt{4m_h^2 - q^2}} \right) \right\} \quad (\text{A.50})$$

A.1.6. Contribución del término de auto-interacción $(X_\mu X^\mu)^2$

La integral que corresponde al término $(X_\mu X^\mu)^2$ es

$$I_{X^4} = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \left[\left(i \frac{\lambda}{4} g_{\mu\nu} g_{\alpha\beta} \right) \left(\frac{i}{(p+q)^2 - m_X^2} \right) \left(g^{\mu\nu} - \frac{(p+q)^\mu (p+q)^\nu}{m_X^2} \right) \right. \\ \left. \times \left(i \frac{\lambda_{hv} v}{\sqrt{2}} g_{\mu\nu} \right) \left(\frac{i}{p^2 - m_X^2} \right) \left(g^{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{m_X^2} \right) \right] \quad (\text{A.51})$$

Figura A.6: Contribución $(X_\mu X^\mu)^2$

sin embargo, esta contribución no es relevante para el estudio ya que se trata de interacción de materia oscura consigo misma, de hecho es posible amputar este diagrama y obtener el diagrama de aniquilación a nivel árbol, por lo tanto podemos omitir el estudio de este caso.

A.2. Materia oscura escalar

A.2.1. Lazo $h^2 S^2$

Al igual que en el portal vectorial, la contribución a un lazo del término $h^2 S^2$ es relevante para este estudio. La integral correspondiente a este caso es, de la figura A.7

$$I_{h^2} = \int \frac{d^n p}{(2\pi)^4} \left[i \frac{3m_h^2}{\sqrt{2}v} \left(\frac{i}{(p+q)^2 - m_h^2} \right) \left(i \frac{\lambda_{hs}}{2} \right) \left(\frac{i}{p^2 - m_h^2} \right) \right] \quad (\text{A.52})$$

donde siguiendo el ya conocido procedimiento se reduce a

$$I_{h^2 S^2} = 3 \frac{m_h^2 \lambda_{hs}}{2\sqrt{2}v} \int_0^1 dx \int \frac{d^n l}{(2\pi)^n} \frac{1}{(l^2 - M_{hh}^2)^2} \quad (\text{A.53})$$

con $M_{hh}^2 = m_h^2 - x(1-x)q^2$ y $l = p + xq$. Entonces

$$I_{h^2 S^2} = 3 \frac{m_h^2 \lambda_{hs}}{2\sqrt{2}v} \int_0^1 dx \frac{i}{16\pi^2} \left(\log(\Lambda^2 + M_{hh}^2) + \frac{M_{hh}^2}{\Lambda^2 + M_{hh}^2} - \log(M_{hh}^2) - 1 \right) \quad (\text{A.54})$$

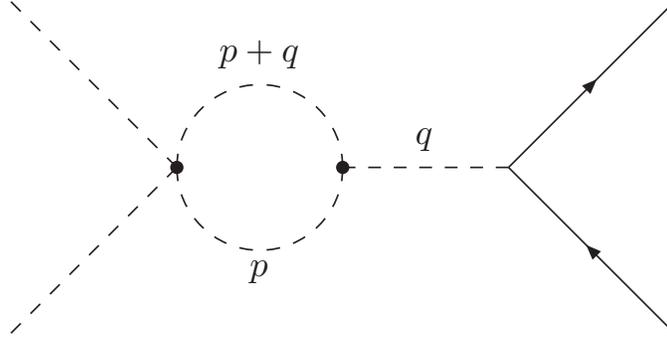


Figura A.7: El diagrama de Feynman para el término de auto-interacción S^4 es el mismo que para el término $h^2 S^2$ con la salvedad de que en el primero el lazo está formado por escalares S y en el segundo caso por h

cuyo resultado final es

$$I_{h^2 S^2} = 3i \frac{m_h^2 \lambda_{hs}}{32\sqrt{2}\pi^2 v} \left[\log \left\{ \frac{\Lambda^2 + m_h^2}{m_h^2} \right\} - \left(2\Theta_\Lambda^{-1} - \frac{4\Lambda^2}{q\sqrt{4\Lambda^2 + 4m_h^2 - q^2}} \right) \tan^{-1} \Theta_\Lambda - 2\Theta_h^{-1} \tan^{-1} \Theta_h \right] \quad (\text{A.55})$$

en donde

$$\Theta_\Lambda = \frac{q}{\sqrt{4\Lambda^2 + 4m_h^2 - q^2}} \quad \text{y} \quad \Theta_h = \frac{q}{\sqrt{4m_h^2 - q^2}} \quad (\text{A.56})$$

A.2.2. Auto-energía del Higgs proveniente de S

El cálculo para obtener esta contribución es idéntico al realizado en la contribución proveniente de la interacción del Higgs consigo mismo, entonces

$$I_{hS^2S} = \frac{1}{2} \int \frac{d^n p}{(2\pi)^n} \left[i \frac{\lambda_{hs} v}{\sqrt{2}} \left(\frac{i}{(p+q)^2 - m_S^2} \right) i \frac{\lambda_{hs} v}{\sqrt{2}} \left(\frac{i}{p^2 - m_S^2} \right) \right] \quad (\text{A.57})$$

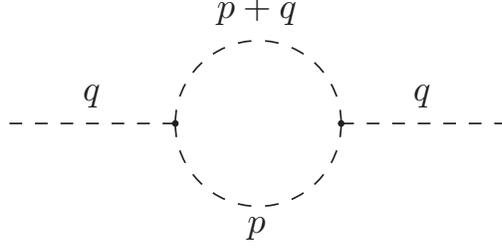


Figura A.8: Contribución de la auto-energía del Higgs proveniente de los escalares S .

se puede resolver exactamente de la misma forma, por lo tanto,

$$I_{hS^2h} = i \frac{\lambda_{hs}^2 v^2}{64\pi^2} \left[\log \left(\frac{\Lambda^2 + m_S^2}{m_S^2} \right) + \left\{ 2\Theta_\Lambda^{-1} - \frac{4\Lambda^2}{q^2} \Theta_\Lambda \right\} \tan^{-1} \Theta_\Lambda - \frac{\sqrt{q^2 - 4m_S^2}}{q} \log \left| \frac{q + \sqrt{q^2 - 4m_S^2}}{q - \sqrt{q^2 - 4m_S^2}} \right| \right]; \quad (\text{A.58})$$

con

$$\Theta_\Lambda = \frac{q}{\sqrt{4(\Lambda^2 + m_S^2) - q^2}} \quad (\text{A.59})$$

A.2.3. Auto-interacción S^4

$$I_{S^4} = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \left[i\lambda_S \left(\frac{i}{(p+q)^2 - m_S^2} \right) \left(i \frac{\lambda_{hs} v}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{i}{p^2 - m_S^2} \right) \right] \quad (\text{A.60})$$

La autointeracción de S consigo misma, al igual que en el caso vectorial, no es relevante para este trabajo ya que las interacciones de la materia oscura consigo misma no afectan la interacción de esta con la materia visible en la época actual.

A.2.4. Corrección al vértice escalar

Al igual que en el portal vectorial, también existe una contribución proveniente de la corrección al vértice en la aniquilación de materia oscura escalar, para obtenerla calculamos

$$I = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \left[\left(\frac{i}{q^2 - m_h^2} \right) \left(i \frac{\lambda_{hs} v}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{i}{(q-p)^2 - m_S^2} \right) \left(i \frac{\lambda_{hs} v}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{i}{(q+p')^2 - m_S^2} \right) \left(i \frac{\lambda_{hs} v}{\sqrt{2}} \right) \right] \quad (\text{A.61})$$

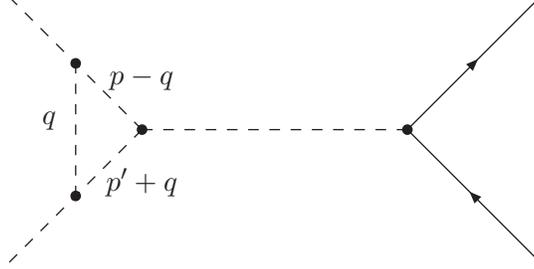


Figura A.9: Corrección al vértice en la aniquilación de materia oscura escalar.

Extrayendo las constantes

$$I = -\frac{\lambda_{hs}^3}{2\sqrt{2}}v^3 \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \left[\frac{1}{(q^2 - m_h^2)((q-p)^2 - m_S^2)((q+p')^2 - m_S^2)} \right]; \quad (\text{A.62})$$

usando la fórmula (B.16), podemos reescribir la integral como

$$-\frac{\lambda_{hs}^3}{2\sqrt{2}}v^3 \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \int dx dy dz \delta(x+y+z-1) \frac{1}{[x((q-p)^2 - m_S^2) + y((q+p')^2 - m_S^2) + z(q^2 - m_h^2)]^3}. \quad (\text{A.63})$$

Haciendo uso del hecho de que $x+y+z=1$ e integrando sobre z , con un poco de álgebra se obtiene en el término entre paréntesis cuadrados del denominador

$$q^2 + x(p^2 - 2q \cdot p - m_S^2 + m_h^2) + y(p'^2 + 2q \cdot p' - m_S^2 + m_h^2) - m_h^2, \quad (\text{A.64})$$

donde al hacer el cambio de variable, $l = q - xp' + yp$, se obtiene

$$l^2 - M^2, \quad (\text{A.65})$$

con $M^2 = m_h^2 - p^2x(1-x) - y(p'^2(1-y) + 2xp \cdot p' + m_h^2 - m_S^2) - x(m_h^2 - m_S^2)$. Por tanto,

$$I = -\frac{\lambda_{hs}^3}{2\sqrt{2}}v^3 \int dx dy \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{1}{(l^2 - M^2)^3}. \quad (\text{A.66})$$

Nuevamente para resolver la última integral se realiza una rotación de Wick ($l^0 \rightarrow il_E^0$)

$$i \int \frac{d^4l_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{(|l_E|^2 + M^2)^3} = \frac{i}{(2\pi)^4} \int d\Omega_4 \int_0^\infty d|l_E| \frac{|l_E|^3}{(|l_E|^2 + M^2)^3} \quad (\text{A.67})$$

con el cambio de variable $u = |l_E|^2$ se obtiene

$$\frac{i}{16\pi^2} \int du \frac{u}{(u + M^2)^3} = \frac{i}{16\pi^2} \left(-\frac{1}{|l_E|^2 + M^2} + \frac{M^2}{2(|l_E|^2 + M^2)^2} \right) \Big|_{|l_E|^2=0}^{\infty}. \quad (\text{A.68})$$

Esta última integral no diverge cuando $|l_E| \rightarrow \infty$, lo cual se podía especular desde el inicio al comparar potencias en el numerador y el denominador, de hecho se obtiene

$$\frac{i}{32\pi^2 M^2}; \quad (\text{A.69})$$

sin embargo, aún podemos introducir una escala Λ^2 de forma ilustrativa, entonces integrando hasta dicha escala (A.68) se vuelve

$$\frac{i}{16\pi^2} \left(\frac{-1}{\Lambda^2 + M^2} + \frac{M^2}{2(\Lambda^2 + M^2)^2} + \frac{1}{2M^2} \right) \quad (\text{A.70})$$

Sustituyendo de vuelta en (A.66)

$$I_{ShS} = -i \frac{\lambda_{hs}^3}{32\sqrt{2}\pi^2} v^3 \int dxdy \left(\frac{-1}{\Lambda^2 + M^2} + \frac{M^2}{2(\Lambda^2 + M^2)^2} + \frac{1}{2M^2} \right) \quad (\text{A.71})$$

reemplazando el valor de M^2 sólo queda resolver la integral

$$\begin{aligned} I_{ShS}(p^2, p'^2) = \int dxdy & \left(\frac{-1}{\Lambda^2 + m_h^2 - p^2x(1-x) - y(p'^2(1-y) + 2xp \cdot p' + m_h^2 - m_S^2) - x(m_h^2 - m_S^2)} \right. \\ & + \frac{m_S^2 + x(m_h^2 - m_S^2) - 2yzp \cdot p' - y(1-y)p^2 - z(1-z)p'^2}{2(\Lambda^2 m_h^2 - p^2x(1-x) - y(p'^2(1-y) + 2xp \cdot p' + m_h^2 - m_S^2) - x(m_h^2 - m_S^2))} \\ & \left. + \frac{1}{2(m_h^2 - p^2x(1-x) - y(p'^2(1-y) + 2xp \cdot p' + m_h^2 - m_S^2) - x(m_h^2 - m_S^2))} \right). \quad (\text{A.72}) \end{aligned}$$

Esta última integral, al igual que en el caso vectorial se puede resolver con métodos numéricos, sin embargo tampoco nos enfocaremos en resolverla aquí y se dejará como un ejercicio a futuro.

Apéndice B

Cálculo de la tasa de decaimiento y otras fórmulas útiles

Para obtener la tasa de decaimiento de una partícula \mathcal{A} en dos estados finales se utiliza la fórmula encontrada en [19] para la tasa de decaimiento diferencial

$$d\Gamma = \frac{1}{2m_{\mathcal{A}}} \left(\prod_f \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_f} \right) |\mathcal{M}(m_{\mathcal{A}} \rightarrow \{p_f\})|^2 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_{\mathcal{A}} - \sum p_f). \quad (\text{B.1})$$

donde p_f y E_f son los 4-momentos y las energías de los estados finales, respectivamente.

La delta de Dirac 4-dimensional se puede reescribir como un producto de funciones delta de Dirac

$$\begin{aligned} \delta^{(4)}(p_{\mathcal{A}} - (p + p')) &= \delta(p_{\mathcal{A}}^0 - (p_f + p'_f)^0) \delta^{(3)}(\mathbf{p} + \mathbf{p}') \\ &= \delta(m_{\mathcal{A}} - (E_{\mathbf{p}} + E_{\mathbf{p}'})) \delta^{(3)}(\mathbf{p} + \mathbf{p}') \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Usando la relación de dispersión $E_{\mathbf{p}}^2 = |\mathbf{p}|^2 + m_f^2$ y que $|\mathbf{p}| = |\mathbf{p}'|$, esta última expresión se vuelve

$$\delta(m_{\mathcal{A}} - 2\sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m_f^2}) \delta^{(3)}(\mathbf{p} + \mathbf{p}') \quad (\text{B.3})$$

Por otro lado, la propiedad de la delta de dirac

$$\delta(f(x)) = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|f'(x_i)|}, \quad (\text{B.4})$$

donde las x_i son los ceros de la función f , permiten reescribir (B.3), considerando el argumento de la delta, $m_{\mathcal{A}} - 2\sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m_f^2}$, como una función de $|\mathbf{p}|$ la cual es cero si

$$|\mathbf{p}| = \frac{m_{\mathcal{A}}}{2} \sqrt{1 - 4 \frac{m_f^2}{m_{\mathcal{A}}^2}} \quad (\text{B.5})$$

entonces,

$$\delta(m_{\mathcal{A}} - 2\sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m_f^2}) = \delta\left(\mathbf{p} - \frac{m_{\mathcal{A}}}{2}\sqrt{1 - 4\frac{m_f^2}{m_{\mathcal{A}}^2}}\right) \frac{1}{\frac{2|\mathbf{p}|}{\sqrt{m_f^2 + |\mathbf{p}|^2}}} \quad (\text{B.6})$$

Sustituyendo nuevamente en (B.3) se obtiene

$$\delta^{(4)}(p_{\mathcal{A}} - (p + p')) = \frac{E_{\mathbf{p}}}{2|\mathbf{p}|} \delta\left(|\mathbf{p}| - \frac{m_{\mathcal{A}}}{2}\sqrt{1 - 4\frac{m_f^2}{m_{\mathcal{A}}^2}}\right) \delta^{(3)}(\mathbf{p} + \mathbf{p}'), \quad (\text{B.7})$$

al sustituir todo esto en (B.1)

$$\begin{aligned} d\Gamma &= \frac{1}{2m_{\mathcal{A}}} \left(\frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}'}} \right) (2\pi)^4 \frac{E_{\mathbf{p}}}{2|\mathbf{p}|} \delta\left(|\mathbf{p}| - \frac{m_{\mathcal{A}}}{2}\sqrt{1 - 4\frac{m_f^2}{m_{\mathcal{A}}^2}}\right) \delta^{(3)}(\mathbf{p} + \mathbf{p}') |\mathcal{M}|^2 \\ &= \frac{1}{64\pi^2 m_{\mathcal{A}}} \left(\frac{d^3p d^3p'}{|\mathbf{p}|} \frac{1}{E_{\mathbf{p}}} \right) \delta\left(|\mathbf{p}| - \frac{m_{\mathcal{A}}}{2}\sqrt{1 - 4\frac{m_f^2}{m_{\mathcal{A}}^2}}\right) \delta^{(3)}(\mathbf{p} + \mathbf{p}') |\mathcal{M}|^2 \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Integrando ambos lados de la ecuación se obtiene Γ

$$\begin{aligned} \Gamma &= \int \frac{1}{64\pi^2 m_{\mathcal{A}}} \left(\frac{d^3p d^3p'}{|\mathbf{p}|} \frac{1}{E} \right) \delta\left(|\mathbf{p}| - \frac{m_{\mathcal{A}}}{2}\sqrt{1 - 4\frac{m_f^2}{m_{\mathcal{A}}^2}}\right) \delta^{(3)}(\mathbf{p} + \mathbf{p}') |\mathcal{M}|^2 \\ &= \frac{|\mathcal{M}|^2}{64\pi^2 m_{\mathcal{A}}} \int \left(\frac{d^3p d^3p'}{|\mathbf{p}|} \frac{1}{E} \right) \delta\left(|\mathbf{p}| - \frac{m_{\mathcal{A}}}{2}\sqrt{1 - 4\frac{m_f^2}{m_{\mathcal{A}}^2}}\right) \delta^{(3)}(\mathbf{p} + \mathbf{p}') \\ &= \frac{|\mathcal{M}|^2}{64\pi^2 m_{\mathcal{A}}} \int d^3p \frac{1}{|\mathbf{p}| E_{\mathbf{p}}} \delta\left(|\mathbf{p}| - \frac{m_{\mathcal{A}}}{2}\sqrt{1 - 4\frac{m_f^2}{m_{\mathcal{A}}^2}}\right) \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

donde $|\mathcal{M}|^2$ salió de la integral dado que no depende del momento.

Esta última integral se puede reemplazar por una integral sobre el ángulo sólido $d\Omega$ y la magnitud de \mathbf{p}

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{|\mathcal{M}|^2}{64\pi^2 m_{\mathcal{A}}} \int d\Omega \int d|\mathbf{p}| \frac{|\mathbf{p}|}{E_{\mathbf{p}}} \delta\left(|\mathbf{p}| - \frac{m_{\mathcal{A}}}{2}\sqrt{1 - 4\frac{m_f^2}{m_{\mathcal{A}}^2}}\right) = \\ &= \frac{|\mathcal{M}|^2}{16\pi m_{\mathcal{A}}} \int d|\mathbf{p}| \frac{|\mathbf{p}|}{E_{\mathbf{p}}} \delta\left(|\mathbf{p}| - \frac{m_{\mathcal{A}}}{2}\sqrt{1 - 4\frac{m_f^2}{m_{\mathcal{A}}^2}}\right) \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

Finalmente utilizando la propiedad

$$\int f(x)\delta(x-a)dx = f(a) \quad (\text{B.11})$$

y la relación de dispersión, la tasa de decaimiento es

$$\Gamma = \frac{1}{16\pi m_A} \sqrt{1 - 4 \frac{m_f^2}{m_A^2} |\mathcal{M}|^2} \quad (\text{B.12})$$

La sección eficaz diferencial se encuentra por medio de la fórmula

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{4E_A E_B} \frac{1}{|\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B|} \frac{|\mathbf{k}_1|}{16\pi^2 E_{cm}} |\mathcal{M}|^2 \quad (\text{B.13})$$

B.1. Integrales de Feynman

La fórmula integral de los parámetros de Feynman es

$$\frac{1}{AB} = \int dx dy \frac{\delta(x+y-1)}{(xA+yB)^2} = \int_0^1 dx \frac{1}{[Ax+B(1-x)]^2}; \quad (\text{B.14})$$

en general, para distintas potencias a y b

$$\frac{1}{A^a B^b} = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \int_0^1 \frac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{[Ax+B(1-x)]^{a+b}}. \quad (\text{B.15})$$

Y para n factores en el denominador

$$\frac{1}{A_1 A_2 \cdots A_n} = \int_0^1 dx_1 dx_2 \cdots dx_n \delta\left(\sum_i x_i - 1\right) \frac{(n-1)!}{[\sum_i x_i A_i]^n} \quad (\text{B.16})$$

Cuando uno calcula las contribuciones a un loop de algún proceso, es común que aparezcan integrales parecidas a

$$\int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{1}{p^2 - m^2} \quad (\text{B.17})$$

por lo que es conveniente conocer su solución, la cual está dada por [49]:

$$\int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{1}{p^2 - m^2} = \frac{-i}{(4\pi)^{d/2}} \Gamma\left(1 - \frac{d}{2}\right) (m^2)^{d/2-1}, \quad (\text{B.18})$$

en general [50]

$$\int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{1}{(p^2 - m^2)^N} = i \frac{(-1)^N}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(N - \frac{d}{2})}{\Gamma(N)} (m^2)^{d/2-N} \quad (\text{B.19})$$

y para potencias diferentes de cero en el numerador [51]

$$\int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{(p^2)^r}{(p^2 - m^2)^N} = i \frac{(-1)^{N+r}}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(r + \frac{d}{2})\Gamma(N - r - \frac{d}{2})}{\Gamma(\frac{d}{2})\Gamma(N)} (m^2)^{d/2 - N + r} \quad (\text{B.20})$$

Las representaciones integrales de las funciones Gamma y Beta son

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty dt t^{z-1} e^{-t} \quad \text{y} \quad B(\alpha, \gamma) \equiv \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha + \gamma)} = \int_0^\infty dy y^{\alpha-1} (1+y)^{-\alpha-\gamma} \quad (\text{B.21})$$

respectivamente.

Para un ϵ pequeño, la función Gamma evaluada en ϵ se puede aproximar de la siguiente forma

$$\Gamma(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon} - \gamma_E + \frac{1}{2} \left(\gamma^2 + \frac{\pi^2}{6} \right) \epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (\text{B.22})$$

donde γ_E es la constante de Euler-Mascheroni.

El desarrollo en ϵ de la función gamma es [50]

$$\Gamma(\epsilon - n) = \frac{(-1)^n}{n!} \left\{ \frac{1}{\epsilon} + \psi(n+1) + \frac{\epsilon}{2} \left(\frac{\pi^2}{3} + \psi^2(n+1) - \psi'(n+1) \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \right\}, \quad (\text{B.23})$$

donde $\psi(z) \equiv \Gamma'(z)/\Gamma(z)$ es la función *Digamma de Euler*.

Para $z \equiv n$ entero la función Digamma satisface

$$\psi(n) = -\gamma_E + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}. \quad (\text{B.24})$$

Apéndice C

Elementos de Relatividad General

En el espacio de Mikowski, en ausencia de una fuerza, las partículas se mueven en líneas rectas, sin embargo en espacio-tiempos curvos la noción de líneas rectas se generaliza a *geodésicas*, las trayectorias que siguen partículas en ausencia de fuerzas. La generalización de la Ley de Newton en ausencia de fuerzas,

$$\frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = 0, \quad (\text{C.1})$$

es la ecuación de la geodésica

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda}; \quad (\text{C.2})$$

donde, $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu$ son los símbolos de Christoffel y están dados por

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\alpha} (g_{\alpha\mu,\nu} + g_{\alpha\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\alpha}) \quad (\text{C.3})$$

Para la métrica de FRW (2.1), los elementos de la conexión afín son, para $\lambda, \mu = 0$,

$$\Gamma_{0\nu}^0 = \frac{1}{2} g^{00} (g_{00,\nu} + g_{0\nu,0} - g_{0\nu,0}) = 0 \quad (\text{C.4})$$

para $\lambda = 0, \mu = i \neq 0, \nu = j \neq 0$

$$\Gamma_{ij}^0 = \frac{1}{2} g^{00} (-g_{ij,0}) \quad (\text{C.5})$$

y $g_{ij,0} = 2\frac{\dot{a}}{a}g_{ij}$, por lo tanto

$$\Gamma_{ij}^0 = -\frac{\dot{a}}{a}g_{ij} \quad (\text{C.6})$$

si $\mu = \nu = 0$ y $\lambda = i$

$$\Gamma_{00}^i = \frac{1}{2} g^{ii} (g_{i\mu,\nu} + g_{i\nu,\mu} - g_{\mu\nu,i}) = 0 \quad (\text{C.7})$$

$$\Gamma_{j0}^i = \frac{1}{2}g^{ii}2\frac{\dot{a}}{a}g_{ij} = \frac{\dot{a}}{a}\delta_j^i \quad (\text{C.8})$$

con $\lambda = i, \mu = j, \nu = 0$. Finalmente para $\lambda = i, \mu = j$ y $\nu = k$

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2}g^{ii}(g_{ij,k} + g_{ik,j} - g_{jk,i}) = 0. \quad (\text{C.9})$$

Con estos símbolos de Christoffel se puede calcular las componentes del tensor de Ricci

$$R_{\nu\beta} = \Gamma_{\nu\beta,\mu}^\mu - \Gamma_{\nu\mu,\beta}^\mu + \Gamma_{\sigma\mu}^\mu \Gamma_{\nu\beta}^\sigma - \Gamma_{\sigma\beta}^\mu \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \quad (\text{C.10})$$

por lo que

$$\begin{aligned} R_{00} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(3\frac{\dot{a}}{a} \right) - \frac{\dot{a}}{a}\delta_j^j \\ &= -3 \left(\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) - 3\frac{\dot{a}^2}{a^2} = -3\frac{\ddot{a}}{a} \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

$$R_{ij} = - \left(\frac{\ddot{a}}{a} + 2\frac{\dot{a}^2}{a^2} + 2\frac{k}{a^2} \right) g_{ij} \quad (\text{C.12})$$

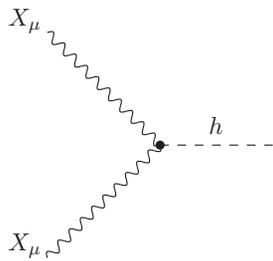
Y el escalar de Ricci es

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = R_{00} + g^{ji} R_{ji} = -6 \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} \right) \quad (\text{C.13})$$

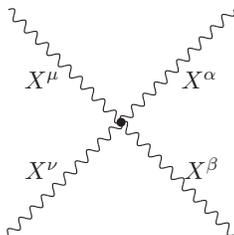
Apéndice D

Reglas de Feynman

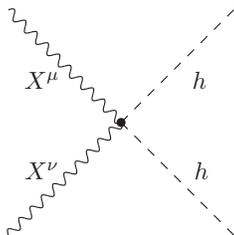
D.1. Materia oscura vectorial



$$= i \frac{\lambda_{hv}}{\sqrt{2}} g_{\mu\nu} \quad (\text{D.1})$$



$$= i \lambda_X g_{\mu\nu} g_{\alpha\beta} \quad (\text{D.2})$$



$$= i \frac{\lambda_{hw}}{4} g_{\mu\nu} \quad (\text{D.3})$$

$$\begin{array}{c} \bullet \text{---} \text{wavy line} \text{---} \bullet \\ p \end{array} = \frac{i}{p^2 - m_X^2} \left(g^{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{m_X^2} \right) \quad (\text{D.4})$$

D.2. Materia oscura escalar

$$\begin{array}{c} S \\ \diagdown \\ \bullet \\ \diagup \\ S \end{array} \text{---} h \text{---} = i \frac{\lambda_{hs} v}{\sqrt{2}} \quad (\text{D.5})$$

$$\begin{array}{c} S \quad S \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ S \quad S \end{array} = i \lambda_S \quad (\text{D.6})$$

$$\begin{array}{c} S \quad h \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ S \quad h \end{array} = i \frac{\lambda_{hs}}{4} \quad (\text{D.7})$$

$$\begin{array}{c} \bullet \text{---} \text{dashed line} \text{---} \bullet \\ p \end{array} = \frac{i}{p^2 - m_S^2} \quad (\text{D.8})$$

Bibliografía

- [1] ATLAS Collaboration, G. Aad et al., Phys.Lett. **B710** (2012), 49–66, [1202.1408].
- [2] CMS Collaboration, S. Chatrchyan et al., Phys.Lett. **B710** (2012), 26–48, [1202.1488].
- [3] Planck, P. Ade et al., (2015), 1502.01589.
- [4] S. Dodelson, *Modern cosmology*, Academic Press, 2003.
- [5] B. Patt and F. Wilczek, (2006), hep-ph/0605188.
- [6] A. Djouadi, O. Lebedev, Y. Mambrini, and J. Quevillon, Phys.Lett. **B709** (2012), 65–69, [1112.3299].
- [7] P. Langacker, Rev.Mod.Phys. **81** (2009), 1199–1228, [0801.1345].
- [8] E. Rojas and J. Erler, (2015), 1505.03208.
- [9] O. Lebedev, H. M. Lee, and Y. Mambrini, Phys.Lett. **B707** (2012), 570–576, [1111.4482].
- [10] S. Kanemura, S. Matsumoto, T. Nabeshima, and N. Okada, Phys.Rev. **D82** (2010), 055026, [1005.5651].
- [11] Y. Mambrini, Phys.Rev. **D84** (2011), 115017, [1108.0671].
- [12] X. Chu, T. Hambye, and M. H. Tytgat, JCAP **1205** (2012), 034, [1112.0493].
- [13] XENON Collaboration, S. Orrigo, (2015), 1501.03492.
- [14] R. Bernabei, P. Belli, F. Cappella, R. Cerulli, C. J. Dai, A. D’Angelo, H. L. He, A. Incicchitti, H. H. Kuang, X. H. Ma, F. Montecchia, F. Nozzoli, D. Prosperi, X. D. Sheng, R. G. Wang, and Z. P. Ye, European Physical Journal C **67** (2010), 39–49, [1002.1028].
- [15] CRESST-II, G. Angloher et al., Eur.Phys.J. **C74** (2014), no. 12, 3184, [1407.3146].
- [16] C. E. e. a. Aalseth, Phys. Rev. Lett. **106** (2011), 131301.

- [17] WMAP Collaboration, D. Spergel et al., *Astrophys.J.Suppl.* **170** (2007), 377, [astro-ph/0603449].
- [18] Planck, P. Ade et al., *Astron.Astrophys.* **571** (2014), A16, [1303.5076].
- [19] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, *An introduction to quantum field theory*, Westview Press, 1995.
- [20] F. Halzen and A. D. Martin, *Quarks & leptons: An introductory course in modern particle physics*, John Wiley & Sons, 1984.
- [21] H. Ruegg and M. Ruiz-Altaba, *Int.J.Mod.Phys.* **A19** (2004), 3265–3348, [hep-th/0304245].
- [22] S. Weinberg, *Cosmology*, Oxford University Press, 2008.
- [23] V. Rubin, N. Thonnard, and J. Ford, W.K., *Astrophys.J.* **238** (1980), 471.
- [24] E. Kolb and M. Turner, *The early universe*, Westview Press, 1990.
- [25] T. Mondal and T. Basak, *Phys.Lett.* **B744** (2015), 208–212, [1405.4877].
- [26] E. Komatsu, K. M. Smith, J. Dunkley, C. L. Bennett, B. Gold, G. Hinshaw, N. Jarosik, D. Larson, M. R. Nolte, L. Page, D. N. Spergel, M. Halpern, R. S. Hill, A. Kogut, M. Limon, S. S. Meyer, N. Odegard, G. S. Tucker, J. L. Weiland, E. Wollack, and E. L. Wright, *Astrophys.J.* **192** (2011), 18, [1001.4538].
- [27] CDMS, R. Agnese et al., *Phys.Rev.Lett.* **111** (2013), no. 25, 251301, [1304.4279].
- [28] G. e. a. Angloher, *European Physical Journal C* **72** (2012), 1971, [1109.0702].
- [29] DAMA, R. Bernabei et al., *Phys.Lett.* **B480** (2000), 23–31.
- [30] C. Weniger, *JCAP* **1208** (2012), 007, [1204.2797].
- [31] PAMELA, O. Adriani et al., *Nature* **458** (2009), 607–609, [0810.4995].
- [32] C. E. Aalseth, P. S. Barbeau, N. S. Bowden, B. Cabrera-Palmer, J. Colaresi, J. I. Collar, S. Dazeley, P. de Lurgio, J. E. Fast, N. Fields, C. H. Greenberg, T. W. Hossbach, M. E. Keillor, J. D. Kephart, M. G. Marino, H. S. Miley, M. L. Miller, J. L. Orrell, D. C. Radford, D. Reyna, O. Tench, T. D. van Wechel, J. F. Wilkerson, and K. M. Yocum, *Physical Review Letters* **106** (2011), no. 13, 131301, [1002.4703].
- [33] E. e. a. Aprile, *Physical Review Letters* **109** (2012), no. 18, 181301, [1207.5988].
- [34] D. S. Akerib and A. et. al., *Astroparticle Physics* **62** (2015), 33–46, [1403.1299].
- [35] A. Falkowski, C. Gross, and O. Lebedev, (2015), 1502.01361.

-
- [36] G. M. Pruna and T. Robens, *Phys.Rev.* **D88** (2013), no. 11, 115012, [1303.1150].
- [37] O. Lebedev and H. M. Lee, *Eur.Phys.J.* **C71** (2011), 1821, [1105.2284].
- [38] O. Lebedev, *Eur.Phys.J.* **C72** (2012), 2058, [1203.0156].
- [39] Y. Zhang, S.-Z. Wang, and Q. Wang, *JHEP* **0803** (2008), 047, [0803.1275].
- [40] S. de Alwis, *Phys.Lett.* **B628** (2005), 183–187, [hep-th/0506267].
- [41] M. Cannoni, *Phys. Rev. D* **89** (2014), 103533.
- [42] J. D. Wells, (1994), hep-ph/9404219.
- [43] M. Srednicki, *Quantum field theory*, University of California, 2006.
- [44] ATLAS, CDF, CMS, D0, (2014), 1403.4427.
- [45] J. e. a. Beringer, *Phys. Rev. D* **86** (2012), 010001.
- [46] T. Hahn, *Comput.Phys.Commun.* **140** (2001), 418–431, [hep-ph/0012260].
- [47] G. Belanger, F. Boudjema, and A. Pukhov, (2014), 1402.0787.
- [48] ATLAS Collaboration and CMS Collaboration, G. e. a. Aad, *Phys. Rev. Lett.* **114** (2015), 191803.
- [49] R. Casalbuoni, *Lectures on advanced quantum field theory*, University of Florence, 1999.
- [50] H. Kleinert and V. Schulte-Frohlinde, *Critical properties of ϕ^4 -theories*, Freie Universitat Berlin, 2001.
- [51] G. Heinrich, *Introduction to loop calculations*, 2010.