



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ANÁLISIS DE LA DINÁMICA DE LA
ENERGÍA OSCURA POR MEDIO DE LAS
OSCILACIONES ACÚSTICAS DE BARIONES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Físico

PRESENTA:

Luis Odín Estrada Ramos

TUTOR

Dr. Axel Ricardo De la Macorra Pettersson
Moriel



CIUDAD UNIVERSITARIA, MÉXICO, D.F., 2015



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradecimientos

Aprovechando y quizá abusando de este apartado, el cual es el único en la tesis en el que todas las ideas expresadas le pertenecen completamente al autor y no al formalismo característico del resto del manuscrito, deseo hacer un intento por exteriorizar mis sentimientos y mi gratitud. Es muy difícil poder escribir palabras en gratitud a toda esa gente que de una u otra forma ha contribuido directa e indirectamente en la creación de lo que hoy en día es este trabajo de tesis.

A lo largo de todo el tiempo de elaboración de la tesis me he cuestionado qué escribir, a quienes agradecer y cómo agradecerles. Sin embargo se requiere de una gran inspiración para expresar en unas pocas cuartillas todas aquellas sensaciones que han pasado por mi mente y por mi corazón durante todo este tiempo. No encuentro un momento más idóneo en esta travesía para finalmente conseguir esa inspiración motivada por las bendiciones que han inundado mi vida, por las alegrías y las enseñanzas donde he evocado el entusiasmo e incluso la presión por la responsabilidad que implica para mí el hecho de que siempre he considerado que una tesis debe representar el trabajo cumbre durante la época estudiantil, como un reflejo de todo lo que se ha aprendido no sólo durante el pequeño periodo que representa la carrera, sino durante toda una vida estudiando. Así mismo, debo agregar que desde niño siempre había soñado con el momento de la culminación en el cual yo presentaría una tesis, siendo una de mis más antiguas metas, una de las razones por las que decidí titularme de esta manera y finalmente un sueño cumplido.

Agradezco muy sinceramente a mi tutor, el Dr. Axel de la Macorra, a quien le reconozco el tiempo que ha invertido en guiarme, enseñarme desde cero todo lo que sé ahora acerca de la cosmología y la paciencia que me ha tenido durante todo el proceso. A mis sinodales, los doctores Miguel Alcubierre, Octavio Valenzuela, Myriam Mondragón y Jaime Besprosvany por haber dedicado su tiempo a mis consultas y a haber leído en tiempo y forma mi tesis para poder entrar a la maestría sin problemas el siguiente semestre, eso se los agradezco mucho.

Quiero agradecer de manera muy especial y dedicar esta tesis a mis abuelos Georgina Luna y Mario Rodríguez, por haberme dado su apoyo y asilo en su hogar durante tantos años en el transcurso de la carrera, permitiéndome tener el privilegio de con-

vivir con ustedes e intentar compensar los años en los que no pude hacerlo por haber vivido en Aguascalientes. Sin ustedes no se que habría hecho.

De igual forma quiero agradecer a mi familia nuclear, quienes desde que nací han velado por mí, a la cual también dedico este trabajo.

A mi madre Gloria Ramos Valenzuela, quien siempre ha sido el motor de mis éxitos impulsándome a superarme día con día y quien además me motivó a realizar el examen de ingreso a la UNAM creyendo siempre en mí y me convenció de permanecer ahí, de no haberla escuchado seguramente habría cometido un error del que me habría arrepentido el resto de mi vida. Desde primaria siempre tuve la ilusión de estudiar en la UNAM y de no haber sido por ti habría olvidado ese sueño, entrando en un conformismo en el cual no sé dónde estaría ahora.

A mi padre y amigo José Luis Estrada Luna, quien introdujo en mi la capacidad de la paciencia, el ser una persona educada y el amor al área físico-matemática, gracias a ti siempre supe que estudiaría algo en ese ámbito. Me enseñaste incluso mejor que muchos de mis maestros las bases de lo que ahora empleo. A veces me apoyabas hasta tarde para cumplir con los trabajos e incluso ya grande, aunque no haya sido igual, me seguiste ayudando mucho en la medida de lo posible y te has esforzado por satisfacer mi sed de conocimiento al explicarme cada una de las dudas que en mi han surgido. Sin ti seguramente habría estudiado algo más y no sería la persona educada que me enseñaste a ser.

A mi hermano mayor José Gandhi Estrada Ramos, que en base a sus críticas y consejos he ido corrigiendo malos hábitos. Tú me has impulsado a ser más competitivo en la vida a través de la sana rivalidad entre hermanos, el ejemplo y la admiración. Me has enseñado que para conseguir los deseos que uno más quiere se debe trabajar primero. Sin ti seguramente no andaría en buenos pasos.

A Kiara la Chucha Loca, por acompañarnos desde que yo tenía 12 años. Incluso de ti he podido aprender a ser noble, no hacer a otros lo que no me gustaría que me hicieran y divertirme a mi manera.

Agradezco a la Dra. Enriqueta Hernández S. y a Alejandra Sánchez Estrada por haberme permitido trabajar con ellas durante un año y por la ayuda y amabilidad que ambas me han brindado.

Quiero agradecer a todos mis amigos de la facultad, corriendo el riesgo de no mencionar a algunos, principalmente del grupo de los Bubus del pasillo o los Saporri-nopuercos a los que menciono en orden de como recuerdo fui conociendo. Agradezco a Ricardo J. H. B. (Bubu), Adolfo M. M. (Pechan), Ruben R. J. (Auti), J. Gabriel M. T. (Gaby abuelo), Fernando G. J. (Ferny), Christian R. M. (Chrispy), M. Tomas R. R. (Calostro), J. Jesús G. C. (Chucho), Daniel A. V. R. (Chiva), Andres S. M. C. (Tarzán), H. Diego E. L. (Mono), Ricardo M. (Pichardo), U. U. Giovanni N. C.

(Gio), Cesar I. C. G. (BJ) y Víctor A. (Vicks), sin ustedes no sé cómo habría soportado toda la tortura de la carrera. También quiero agradecer a mis muy buenos amigos físicos Jorge C. C. (George) y Carlos C. E. P. (Carlitos). Al grupo de "los matemáticos" de Jairo H. N. V. G. (actuuario), Gerónimo S. (Gina) y Humberto A. V. (Darky). A las matemáticas Perla C., Michel S. P. T. (Mich), Adareli G. R. (Ada), Araceli N. G. (Chely) y a la actuaria Gabriela R. (Gaby actuaria). A los biólogos Gabriela (Gabioloca), Alejandro M. M. (Monterrosas) y Yahir (Proca) y en general a todos aquellos que de una u otra forma han formado parte de mis experiencias en la escuela, tanto amigos, maestros, conocidos y hasta enemigos, pues de todos ustedes he aprendido mucho tanto de física, matemáticas y de la vida.

Agradezco de igual forma al resto de las personas que han formado parte en mi vida y particularmente en los últimos años, otorgándome momentos muy hermosos, especialmente a Clara Isabel Ríos de filosofía quien me ayudo en la corrección de esta tesis. A gente de diferentes lugares y grupos, como al resto de mi familia, personas de otras facultades, vecinos, amigos antiguos de la primaria, secundaria, preparatoria, ajedrez, smash, inglés, natación, baile, kung fu, cartas y más, porque sin todos ustedes simplemente no habría llegado a ser quien soy ahora. Se que muchas otras cosas se podrían decir pero nunca es suficiente para expresarlo todo.

Termino deseando que el presente trabajo sea por lo menos de utilidad a otros estudiantes que como yo tengan que incursionar por los retos de elaborar una tesis en algún tópico de la cosmología, esperando que las futuras generaciones no tengan que sufrir tanto como lo hice yo.

Resumen

A pesar de que sabemos de la existencia de la energía oscura, aun no hay un modelo teórico con el cual la energía oscura pueda ser comprendida completamente y concuerde con los datos obtenidos. Uno de los modelos más simples y que es la base del modelo estándar de la cosmología, es considerar a la energía oscura igual a una constante cosmológica. Sin embargo los investigadores también han propuesto diferentes teorías partiendo de primeros principios para explicar una energía oscura, que en general podría variar en el tiempo con modelos tales como Quintaesencia, gas Chaplygin, campo fantasma, gravedad modificada y otras. Lamentablemente ninguna de estas teorías ha resuelto por completo el problema, por lo que no se considera a ninguna de ellas como la teoría definitiva. Un camino alternativo para avanzar en la construcción de una teoría sólida ha sido vía el conocimiento empírico.

En el desarrollo de esta tesis se realizará un estudio relacionado con la dinámica de la energía oscura a través de una propuesta de parametrización de su ecuación de estado ω , apoyándose en el conocimiento de las oscilaciones acústicas de bariones (BAO) como prueba cosmológica aplicada al método de constricción de χ^2 , para finalmente enfrentar los resultados obtenidos con los resultados de mediciones en BAO y con los valores teóricos de los parámetros cosmológicos.

En el capítulo 1 se realiza una introducción a los conceptos básicos usados en cosmología. En el capítulo 2 se hace una revisión de las evidencias de la existencia de la energía oscura. En el capítulo 3 se introducen conceptos fundamentales para la elaboración del presente trabajo tales como las oscilaciones del fotón-barión enfocándose en los efectos producidos en la radiación del CMB. En el capítulo 4 se muestran los conceptos teóricos principales en los cuales está basado este trabajo, en donde se vuelve a hacer un estudio de las oscilaciones acústicas del fluido fotón-barión centrándose ahora en las impresiones que deja sobre la materia. En el capítulo 5 se afronta la problemática de estudiar la energía oscura haciendo uso de todo lo expuesto anteriormente, pero principalmente de lo dicho en la teoría de BAO, por lo que se plantea la hipótesis de una propuesta de parametrización y se explica el procedimiento realizado en la creación de 40 programas que representan a un modelo distinto proveniente de la misma forma general propuesta para la ecuación de estado.

Los objetivos en este trabajo consisten en: implementar una propuesta de parametrización de la ecuación de estado de la energía oscura para determinar su comportamiento y su validez frente a los datos experimentales, obtener los mejores ajustes a distintos parámetros cosmológicos utilizando la parametrización propuesta y comparar el modelo propuesto con el modelo de Λ CDM.

Con los resultados obtenidos se espera encontrar una congruencia con los datos observacionales, así mismo corroborar que éstos confirmen o den pie a una confrontación con los resultados de otros modelos de la teoría.

Índice general

1. Introducción a la Cosmología Científica	6
1.1. Bases de la Cosmología	6
1.2. La Métrica de Friedmann-Robertson-Walker	7
1.3. Ecuaciones de Friedmann	11
1.4. La Ecuación de Estado y la Solución de la Ecuación de Continuidad .	13
1.4.1. Ecuación de Estado	13
1.4.2. Solución de la Ecuación de Continuidad	14
1.4.3. Tipos de Partículas	15
1.4.4. Dependencia del factor de escala con el tiempo y requisito necesario para una expansión acelerada	17
1.5. Corrimiento al Rojo y Ley de Hubble	20
1.6. Tipos de Distancia	24
1.6.1. Distancia Comóvil y Distancia Física	24
1.6.2. Horizontes	27
1.6.3. Distancia Diametral Angular y Distancia Luminosa	28
1.7. Contenido del Universo y Panorama Actual	31
2. Evidencias de Energía Oscura	39
2.1. Supernova Tipo Ia	39
2.2. Lentes Gravitatorias	47

3. Radiación de Fondo Cósmico de Microondas CMB	54
3.1. La Radiación de Fondo Cósmico de Microondas (CMB)	54
3.1.1. Las Primeras Etapas del Universo y el Origen del Fondo Cósmico de Microondas	55
3.1.2. Tratamiento Matemático de la Radiación de Fondo	66
3.1.3. Tipos de Anisotropías de la Radiación de Fondo	71
4. Oscilaciones Acústicas de Bariones	76
4.1. Crecimiento de las Perturbaciones y Formación y Desarrollo de la Estructura a Gran Escala	76
4.1.1. Jerarquía en la formación de estructuras	76
4.1.2. Contraste de Densidad	77
4.1.3. Tratamiento Newtoniano en la Aproximación Lineal, Ecuaciones de Poisson, de Movimiento de Euler y de Conservación de Masa o de Continuidad	78
4.1.4. Longitud de Jeans y Masa de Jeans	80
4.1.5. Distinción entre los tipos de perturbaciones, adiabáticas e isotérmicas	81
4.2. Relación de BAO con la Estructura a Gran Escala	83
4.3. Horizonte Acústico	85
4.4. BAO como Regla Estándar	88
4.5. Técnicas de Análisis de BAO	92
4.5.1. Función de Correlación	92
4.5.2. Espectro de Potencias	95
4.6. Efectos Sistemáticos	98
4.6.1. Distorsiones en el corrimiento al rojo	98
4.6.2. Efectos No Lineales	99
4.6.3. Bias	101
4.7. Varianza Cósmica	102

4.8. Función de Correlación Angular	102
4.9. Estudios y experimentos en BAO	104
4.9.1. Selección de Objetivos Luminosos	104
4.9.2. Estudios Realizados	105
4.9.3. Resultados	106
5. Análisis de la Dinámica de la Energía Oscura	111
5.1. Parametrizaciones Clásicas de la Energía Oscura	112
5.2. Parametrización Propuesta	114
5.3. Ecuaciones Cosmológicas Útiles en los Modelos	119
5.4. Procedimiento de Estudio	122
5.5. Resultados de los Modelos Cosmológicos	124
5.5.1. Modelos con Tres Parámetros	125
5.5.2. Modelos con Dos Parámetros	133
5.5.3. Discusión	142
6. Conclusiones	159
A. Prueba de χ^2 y formas de analizar usando BAO	162
B. Gráficas de Variación de Tres Parámetros	166
C. Gráficas de Variación de Dos Parámetros	171
D. Transformación de Unidades a Gev	173
E. Parámetros Cosmológicos	174

Introducción

¿Qué es la Cosmología?

Desde tiempos de la antigüedad y posiblemente desde que el hombre tiene uso de razón, el ser humano se ha maravillado y cuestionado sobre todo aquello que podía alcanzar a apreciar mirando al cielo en la oscuridad de una despejada noche. Cuando los primeros eruditos fijaron su mirada al universo algunas de las preguntas que posiblemente se hicieron y que cualquier persona que inicia su estudio en la cosmología naturalmente se podría hacer son: ¿cuál es la forma del universo?, ¿qué tan grande es?, ¿cuánto tiempo ha existido?, ¿cuáles son sus contenidos?, etc.

En un intento por dar explicación a todas estas preguntas surge la palabra cosmología, en donde el concepto de cosmología deriva de las palabras griegas *κόσμος* que quiere decir orden de acuerdo a Pitágoras o conjunto de todas las cosas creadas de acuerdo a Heráclito y *λογία* que significa tratado [14]. En otras palabras, la cosmología es el estudio del universo, su estructura a gran escala y su comportamiento. La cosmología trata entonces de explicar el origen, evolución, estructura, contenidos, forma y límites del universo por medio de leyes y teorías de carácter matemático que intervengan en la dinámica del sistema a grandes escalas apoyándose para ello de las observaciones y mediciones.

A través de los años el deseo por resolver las preguntas de la cosmología ha llevado a diferentes culturas tales como la babilónica, china, azteca, maya, egipcia, griega, etc. a asociar a la cosmología con deidades y connotaciones religiosas, creando así diferentes modelos mitológicos del universo. Los antiguos griegos, basados en un modelo desarrollado por el egipcio de Alejandría Ptolomeo, creían en una idea antropocéntrica en la que la Tierra debía estar en el centro del cosmos con el Sol, la Luna y los demás planetas y cuerpos celestes girando a su alrededor. Sin embargo, con la llegada primeramente de Newton con su teoría de la gravedad y posteriormente Einstein con el surgimiento de la teoría de la relatividad general y las subsiguientes observaciones de Hubble en 1929, dieron paso firme en la construcción de una cosmología científica.

Postulados Clásicos de la Cosmología

Con el paso de los años, la visión antropocéntrica de Ptolomeo se dejó de lado por una donde la Tierra no se encuentra en el centro del universo y ni siquiera en una posición privilegiada; esto se conoce como Principio de Copérnico y dice:

Principio 1 (Principio de Copérnico) *La Tierra o el sistema solar no ocupan algún lugar especial en el universo.*

Más tarde fueron surgiendo nuevos principios y postulados, algunos muy parecidos a los anteriores pero con alguna ligera modificación. Fue así como entonces la cosmología empezó a basarse en tres puntos que son:

- Principio Cosmológico
- Postulado de Weyl
- Relatividad General

Principio 2 (Principio Cosmológico) *El universo es homogéneo e isotrópico en el espacio tridimensional, siempre ha sido así y siempre lo será.*

El principio cosmológico indica que a grandes escalas el universo es homogéneo e isotrópico. Esta idea fue algo que incluso el mismo Einstein creía que debía suceder. Pero ésto va más allá, ya que no sólo nosotros no somos el centro del universo como bien dice el principio de Copérnico sino que no existe un punto en el universo que sea privilegiado sobre todos los demás. Si esta idea fuese cierta, nos llevaría a concluir que no existe un lugar en el universo al que podamos llamar centro.

A lo que nos referimos con homogeneidad es a la propiedad de ser idéntico en cualquier parte del espacio, mientras que isotropía es la propiedad de mirarse igual en todas direcciones para las distintas cantidades vectoriales medibles. De esta forma, no existen regiones privilegiadas ya sea por sus direcciones o su proporción en alguno de los contenidos del universo. Quizá parezca al mirar al cielo que el universo es bastante inhomogéneo y anisotrópico, sin embargo a distancias más allá de las trazadas por la estructura a gran escala de la distribución de galaxias (100 Mpc o más), el universo puede ser considerado aproximadamente homogéneo e isotrópico. Para tener una mejor idea de las dimensiones que intervienen en el universo, en la tabla 1 se muestra una serie de objetos con su respectiva escala de longitud.

Universo, radio de Hubble	10^{26}m	10^3Mpc
Supercúmulos de Galaxias	10^{24}m	10^1Mpc
Galaxia	10^{21}m	10^{-2}Mpc
Estrella	10^9m	10^{-14}Mpc
Tierra	10^7m	10^{-16}Mpc
Hombres	10^0m	10^{-23}Mpc
Átomos	10^{-10}m	10^{-33}Mpc
Núcleos	10^{-14}m	10^{-37}Mpc
Protón	10^{-15}m	10^{-38}Mpc
Límite observacional presente	10^{-19}m	10^{-42}Mpc
Longitud de Planck	10^{-35}m	10^{-58}Mpc

Cuadro 1: Escalas de tamaño típicas en el universo en metros y en megaParsecs. La conversión exacta entre 1Mpc a metros es $1\text{Mpc} = 3.08567758 \times 10^{22}\text{m}$.

Existe un principio más que generaliza lo establecido por el principio cosmológico añadiendo una restricción más, en el cual el universo no sólo es el mismo en todos los lugares y direcciones, sino que también en todos los tiempos. El principio cosmológico perfecto es el siguiente:

Principio 3 (Principio Cosmológico Perfecto) *No existe algún punto especial en el tiempo, al igual que en el espacio, es decir, el universo es el mismo en cada punto del espacio y en cada punto en el tiempo.*

En la actualidad esta idea de un principio cosmológico se ha visto respaldada por diversas observaciones y mediciones, en particular por la increíblemente idéntica medición de la temperatura de la radiación de fondo cósmico de microondas (CMB) realizada en diferentes direcciones del cielo. Si un punto del universo fuese privilegiado sobre los demás, entonces la temperatura de la radiación de fondo cósmico de microondas dejaría de ser la misma en todas partes (bajo cierto margen de error), es así como ahora de manera experimental podemos confirmar el principio cosmológico y partir de ahí con mayor seguridad para realizar predicciones acerca del universo.

Otro de los tres puntos importantes es el postulado de Weyl, el cual dice:

Postulado 1 (Postulado de Weyl) *Las galaxias, los constituyentes básicos del universo, pueden modelarse como partículas materiales inmersas en un substrato. Estas partículas se mueven a través del espacio-tiempo en una congruencia de geodésicas temporaloides que divergen de un punto en el pasado finito o infinito. Cada galaxia posee un observador fundamental capaz de aplicar el principio cosmológico.*

Gracias al postulado de Weyl es posible la sincronización de los relojes para cada galaxia y con ello hablar de un tiempo universal, tiempo propio cosmológico o tiempo cósmico que sirva de coordenada. Se podría decir que no son las galaxias las que se mueven sino el espacio el que se expande.

En ocasiones resulta útil valerse del conocimiento de otras áreas de la física (como la física de partículas elementales o de altas energías) y de la ciencia en general para poder tener un mejor entendimiento de los fenómenos que podrían suscitarse, así mismo, las predicciones y conocimientos obtenidos por la cosmología deben ser congruentes con la teoría existente y aceptada en otras áreas. De acuerdo al modelo estándar de partículas elementales existen 4 fuerzas fundamentales las cuales son la fuerza gravitatoria, la electromagnética, la nuclear débil y la nuclear fuerte. A grandes escalas del orden de las consideradas por el principio cosmológico, la única fuerza fundamental que mantiene un papel protagónico es la fuerza gravitatoria, ya que tanto la fuerza nuclear débil como la nuclear fuerte son de corto alcance. Por otra parte pese a que la fuerza electromagnética es de largo alcance, al observarse que el universo es en su mayoría eléctricamente neutro, la fuerza electromagnética pierde importancia.

Por lo anterior, la cosmología está basada en la teoría de la relatividad general. Cabe mencionar que muchas de las ideas de la cosmología pueden ser explicadas sin la necesidad de la relatividad general a partir de la mecánica Newtoniana, sin embargo al ser la teoría de la relatividad general la teoría actualmente aceptada y una teoría mucho más precisa que la teoría Newtoniana, creemos que es más formal y adecuada para tratar los diferentes problemas que se presentan (como en el estudio de lentes gravitatorias) donde la teoría de Newton no es del todo confiable.

Cabe señalar que estos principios y postulados surgen en un inicio como una serie de hipótesis asumidas como ciertas por los pioneros de la cosmología moderna en la necesidad por crear una cosmología científica con bases matemáticas sustentadas por la teoría de la relatividad general. Sin embargo, hoy en día los avances en la tecnología han permitido obtener resultados fieles y reproducibles en las mediciones del CMB, confirmando las ideas manifestadas en el principio cosmológico. Puesto que la homogeneidad e isotropía del universo está comprobada hasta un error del orden de 10^{-5} de acuerdo al CMB, el principio cosmológico es un hecho real más que comprobado y debe ser considerado como tal y no como una hipótesis o una suposición. Por lo tanto, basaremos la cosmología moderna no en la hipótesis de un principio cosmológico sino en los resultados verídicos de mediciones hechas por satélites tales como el COBE, WMAP y más actualmente del satélite Planck.

En el presente trabajo de tesis discutiremos diferentes temas, enfocados al entendimiento del estudio de la energía oscura y centrados principalmente en su estudio a través de las oscilaciones acústicas de bariones, lo cual será abordado a lo largo de 5 capítulos más de acuerdo a la siguiente estructura:

En el capítulo 1 se enuncian las bases del modelo estándar de la cosmología moderna, construyendo los cimientos a partir de la teoría de la relatividad general y de los resultados de mediciones hechas por los satélites y sondas espaciales.

En el capítulo 2 se discute brevemente los fundamentos de las explosiones de supernova tipo Ia y de las lentes gravitatorias, cada uno de los cuales representa por sí mismo una evidencia para postular la existencia de una energía oscura causante de la expansión acelerada del universo.

En el capítulo 3 se desarrolla un tratamiento más completo de la radiación de fondo cósmica de microondas, como una tercera evidencia para postular la existencia de energía oscura, haciendo hincapié en su importancia debida a su estrecha relación con el trasfondo de las oscilaciones acústicas de bariones.

En el capítulo 4 se emprende el estudio de las oscilaciones acústicas de bariones como una cuarta evidencia de energía oscura, partiendo del crecimiento de las perturbaciones de densidad originadas en los primeros instantes del universo, su posterior evolución y su relación con la formación de estructuras, así como el análisis estadístico del horizonte acústico por medio de la función de correlación y el espectro de potencias, cuya regla estándar se muestra como una herramienta de estudio de la energía oscura, tema principal en el cual está basado el trabajo de ésta tesis.

En el capítulo 5 se afronta la problemática de estudiar la energía oscura a través de la teoría expuesta en los capítulos anteriores por medio de un planteamiento fenomenológico de una propuesta de parametrización de la ecuación de estado de la energía oscura con ayuda de la elaboración de 40 programas divididos en dos bloques de 20 para variaciones de tres y dos parámetros cada uno y cuyos resultados son enfrentados por medio de la prueba de χ^2 contra resultados medidos de acuerdo a BAO por diversos grupos de investigación.

Capítulo 1

Introducción a la Cosmología Científica

1.1. Bases de la Cosmología

Una vez considerado el principio cosmológico como cierto, al igual que al postulado de Weyl y a la teoría de la relatividad general como base de la cosmología, procederemos a revisar algunas de las ideas básicas que forman parte del cimiento del modelo estándar de la cosmología. Cada una de las ideas vistas en el capítulo anterior nos proveerán de un resultado útil, es así como

- ◆ La Teoría de la Relatividad General: Contribuye con las ecuaciones de campo de Einstein.
- ◆ La Homogeneidad e Isotropía: Caracterizan al universo con una de tres formas posibles por medio de una métrica, la cual es la métrica de Friedmann-Robertson-Walker (*FRW*).
- ◆ El Postulado de Weyl: Nos permite proponer un tensor de energía-momento para un fluido perfecto.

Las ecuaciones fundamentales de la gravedad en la teoría de la relatividad general son las ecuaciones de campo de Einstein escritas en forma tensorial como

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} \equiv G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (1.1)$$

donde $G_{\mu\nu}$ es el tensor de Einstein, $T_{\mu\nu}$ es el tensor de energía–momento y Λ es una constante cosmológica.

Además como ya hemos visto, la métrica que describe al universo es la métrica de Friedmann–Robertson–Walker

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \text{sen}^2(\theta) d\phi^2 \right] \quad (1.2)$$

cuyo tensor métrico será entonces

$$\mathbf{g}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a^2}{1-Kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2 r^2 \text{sen}^2(\theta) \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

El postulado 1 de Weyl determina que el substrato es un fluido perfecto dado que podemos modelar a las componentes constituyentes del universo como partículas de un fluido, es decir un fluido sin viscosidad que se oponga a las deformaciones y que además sea visto isotrópico alrededor de un observador comóvil que se mueva con el fluido, por lo que el tensor de energía–momento $T_{\mu\nu}$ toma la forma

$$T_{\mu\nu} = \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) u_\mu u_\nu + p g_{\mu\nu} \quad (1.4)$$

en el cual la cuadrivelocidad es $u_\mu = (-c, 0, 0, 0)$, por lo que el tensor de energía–momento puede ser visto en forma matricial como

$$\mathbf{T}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a^2 p}{1-Kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 r^2 p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2 r^2 \text{sen}^2(\theta) p \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

1.2. La Métrica de Friedmann-Robertson-Walker

Se puede demostrar que la métrica que cumple con las propiedades de homogeneidad e isotropía es la métrica de Friedmann-Robertson-Walker, la cual se puede escribir como:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + R^2(t) \left[\frac{d\bar{r}^2}{1 - k\bar{r}^2} + \bar{r}^2 d\Omega^2 \right] \quad (1.6)$$

o explícitamente como:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + R^2(t) \left[\frac{d\bar{r}^2}{1 - k\bar{r}^2} + \bar{r}^2 d\theta^2 + \bar{r}^2 \text{sen}^2(\theta) d\phi^2 \right] \quad (1.7)$$

bajo esta forma de la métrica FRW la coordenada radial \bar{r} es adimensional con un rango de valores de 0 a 1, mientras que la cantidad $R(t)$ llamada factor de escala tiene dimensiones de longitud.

Por otro lado, además del factor de escala $R(t)$ para describir los cambios espaciales, la métrica FRW responde a la pregunta de “¿cuál es la forma del universo?”, diciéndonos que el universo sólo puede tener una de tres formas posibles que cumplen con ser homogéneas e isotrópicas y que son englobadas en la constante adimensional k . La constante k de curvatura puede tomar los valores $k = 1$ para un universo cerrado o de curvatura positiva, $k = -1$ para un universo abierto o de curvatura negativa y $k = 0$ para un universo plano o de curvatura nula. Las tres posibles formas geométricas del universo son esfera ($k = 1$), paraboloides hiperbólico o silla de montar ($k = -1$) y la de un plano ($k = 0$). En la figura 1.1 se muestran las tres posibles geometrías del universo que vienen descritas en la métrica FRW.

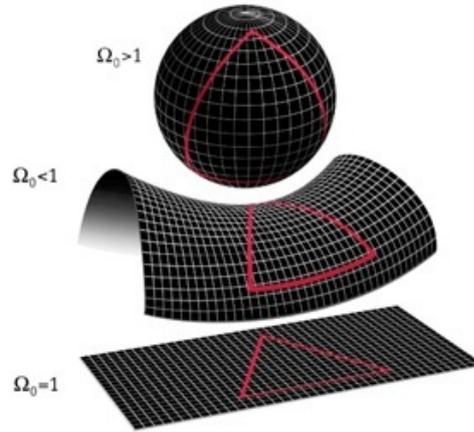


Figura 1.1: Tipos de curvaturas

En ocasiones es preferido por algunos trabajar con otra forma de la métrica de Friedmann-Robertson-Walker, donde el factor de escala es en este caso adimensional. Para ello realizaremos las siguientes sustituciones en la métrica FRW 1.7.

$$a(t) = \frac{R(t)}{R_0} \quad (1.8)$$

$$r = R_0 \bar{r} \quad (1.9)$$

$$K = \frac{k}{R_0^2} \quad (1.10)$$

Dando la siguiente forma de la métrica de Friedmann-Robertson-Walker

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \text{sen}^2(\theta) d\phi^2 \right] \quad (1.11)$$

La forma de la métrica FRW 1.11, la cual provee a la coordenada radial r de unidades de longitud mientras que el factor $a(t)$ se vuelve adimensional, muestra que 1.7 es invariante ante las transformaciones 1.8, 1.9 y 1.10. Por otra parte, debe hacerse notar que en este caso la constante de curvatura K no se limita a los valores de $1, -1$ y 0 .

Las coordenadas espaciales (r, θ, ϕ) en la métrica FRW son llamadas coordenadas comóviles de un punto en el espacio. La característica de las coordenadas comóviles es la de mantener un valor constante con el tiempo siempre y cuando se cumpla con una expansión del universo homogénea e isotrópica, por tanto el valor de las coordenadas comóviles no cambia por la expansión del universo. La coordenada temporal es el tiempo propio cosmológico, también llamado tiempo cósmico, el cual es medido por un observador que ve al universo expandirse uniformemente alrededor de él, éste observador se encuentra en reposo en un sistema de referencia comóvil donde por tanto sus demás coordenadas mantendrán un valor constante.

La cantidad $a(t)$ es llamada factor de escala cósmico o simplemente factor de escala al igual que $R(t)$ y es una función del tiempo que representa el crecimiento o decrecimiento espacial de las distancias en el universo con el tiempo. Por convención se suele manejar $a_0 = 1$, donde a_0 es el factor de escala al tiempo actual y $a = 0$ para el inicio del universo en el momento del Big Bang.

Una tercera forma de escribir la métrica de FRW es por medio de la coordenada $\bar{\chi}$ con el cambio de variable

$$d\bar{\chi} = \frac{d\bar{r}}{\sqrt{1 - k\bar{r}^2}} \quad (1.12)$$

el cual integrando da

$$\bar{r} = S_k(\bar{\chi}) \quad (1.13)$$

donde

$$S_k(\bar{\chi}) = \begin{cases} \text{sen}(\bar{\chi}) & \text{si } k = +1 \\ \bar{\chi} & k=0 \\ \text{senh}(\bar{\chi}) & k=-1 \end{cases} \quad (1.14)$$

dando la forma de la métrica FRW

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + R^2(t) \left[d\bar{\chi}^2 + S_k^2(\bar{\chi}) d\Omega^2 \right] \quad (1.15)$$

Nuevamente las unidades de distancia están dentro de $R(t)$ por lo que realizando una sustitución semejante a 1.8, 1.9 y 1.10 se tiene

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \left[d\chi^2 + S_k^2(\chi) d\Omega^2 \right] \quad (1.16)$$

con las unidades de longitud dentro de χ .

Una vez establecida la métrica de Friedmann-Robertson-Walker como la métrica que describe al universo, podemos emplearla para obtener información de ella resolviendo las ecuaciones de campo de Einstein 1.1, para ello calcularemos primeramente los símbolos de Christoffel para posteriormente calcular el tensor de Ricci y el escalar de Ricci. En particular, nos basaremos en la segunda forma de la métrica FRW 1.11 para realizar los cálculos. Los símbolos de Christoffel que son diferentes de cero son:

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^0 &= \frac{a\dot{a}}{1-Kr^2} & \Gamma_{22}^0 &= a\dot{a}r^2 & \Gamma_{01}^1 &= \Gamma_{02}^2 \\ \Gamma_{22}^1 &= -r(1-Kr^2) & \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{13}^3 = \frac{1}{r} & \Gamma_{03}^3 &= \frac{\dot{a}}{a} \\ \Gamma_{33}^2 &= -\text{sen}(\theta)\cos(\theta) & \Gamma_{11}^1 &= \frac{Kr}{1-Kr^2} & \Gamma_{33}^0 &= a\dot{a}r^2\text{sen}^2(\theta) \\ \Gamma_{33}^1 &= -r(1-Kr^2)\text{sen}^2(\theta) & \Gamma_{23}^3 &= \cot(\theta) \end{aligned} \quad (1.17)$$

Ahora mediante la expresión

$$R_{\sigma\nu} = R_{\sigma\rho\nu}^{\rho} = \partial_{\rho}\Gamma_{\nu\sigma}^{\rho} - \partial_{\nu}\Gamma_{\rho\sigma}^{\rho} + \Gamma_{\rho\lambda}^{\rho}\Gamma_{\sigma\nu}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\lambda}^{\rho}\Gamma_{\rho\sigma}^{\lambda} \quad (1.18)$$

se calculan las correspondientes componentes del tensor de Ricci, cuyas componentes no nulas son:

$$R_{00} = -3\frac{\ddot{a}}{a} \quad (1.19)$$

y las componentes ij

$$R_{11} = \frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2K}{1 - Kr^2} \quad (1.20)$$

$$R_{22} = r^2(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2K) \quad (1.21)$$

$$R_{33} = r^2(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2K)\text{sen}^2(\theta) \quad (1.22)$$

que en general pueden ser escritas como

$$R_{ij} = \left[\frac{\ddot{a}}{a} + 2\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{2K}{a^2} \right] g_{ij} \quad (1.23)$$

y el escalar de Ricci es entonces

$$R = 6 \left[\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{K}{a^2} \right] \quad (1.24)$$

1.3. Ecuaciones de Friedmann

Este modelo estándar de la cosmología consiste en la descripción de la solución homogénea e isotrópica de las ecuaciones de campo de Einstein de la relatividad general. Para ello emplearemos los resultados 1.19, 1.23 y 1.24, obtenidos de la métrica FRW 1.11, en las ecuaciones de campo de Einstein 1.1 haciendo uso además del tensor de energía–momento $T_{\mu\nu}$ 1.4 y del tensor métrico $g_{\mu\nu}$ 1.3.

Sustituyendo en la ecuación de Einstein el valor del escalar de Ricci 1.24, así como las componentes $\mu\nu = 00$ del tensor de Ricci 1.19, el tensor métrico $g_{\mu\nu}$ 1.3 y el tensor de energía–momento $T_{\mu\nu}$ 1.4, se obtiene

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \rho - \frac{K}{a^2} \quad (1.25)$$

Mientras que si se consideran las componentes $\mu\nu = ij$ de los mismos, obtendremos

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{K}{a^2} = -\frac{8\pi G}{c^4}p \quad (1.26)$$

Si restamos la primera ecuación 1.25 a la segunda ecuación 1.26 se eliminarán los términos $\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{K}{a^2}$ y podremos simplificar para conseguir así una ecuación en la que sólo intervenga la aceleración \ddot{a} .

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3c^4}(3p + \rho c^2) \quad (1.27)$$

A las ecuaciones 1.25 y 1.27 se les conoce por el nombre de ecuaciones de Friedmann. Usualmente la gente se refiere a la primera de ellas 1.25 simplemente por el nombre de ecuación de Friedmann, mientras que la segunda ecuación 1.27 es llamada la segunda ecuación de Friedmann o incluso a veces como la ecuación de aceleración.

Derivando la ecuación de Friedmann 1.25 con respecto al tiempo

$$2\frac{\dot{a}}{a}\left(\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2}\right) = \frac{8\pi G}{3c^2}\dot{\rho} + 2\frac{K\dot{a}}{a^3} \quad (1.28)$$

y sustituyendo la segunda ecuación de Friedmann 1.27 en ella para eliminar el término $\frac{\ddot{a}}{a}$, además de usar la primera ecuación de Friedmann 1.25 para simplificar el resultado, se termina obteniendo

$$\dot{\rho} = -\frac{3}{c^2}\frac{\dot{a}}{a}(p + \rho c^2) \quad (1.29)$$

la cual es referida en ocasiones como la ecuación de continuidad.

Como se puede observar en la ecuación de Friedmann 1.25, dado que la cantidad $\frac{\dot{a}}{a}$ aparece constantemente en las ecuaciones de la cosmología, es conveniente asignarle un nombre dado por

$$H \equiv \frac{\dot{a}}{a} \quad (1.30)$$

donde H es llamado el parámetro de Hubble. El parámetro de Hubble da información acerca de la tasa de expansión del universo, además de las densidades de energía de las diferentes componentes y la curvatura del universo. Así mismo, está estrechamente relacionado con la edad del universo y/o equivalentemente con el tamaño del universo visible. El valor del parámetro de Hubble hoy en día es $H_0 = 100h \frac{km}{Mpc \cdot s}$ y se modifica

su nombramiento de parámetro por el de constante de Hubble. La constante adimensional h dentro del valor de H_0 tiene un valor dentro del intervalo de $0.4 < h < 0.8$ aunque algunas mediciones le atribuyen un valor de $h \sim 0.7 \pm 0.1$. La importancia de h radica en poder separar el orden de la magnitud de H_0 o cualquier otro valor que sea descrito por medio de h y dejar la parte desconocida de todas las incertidumbres dentro de la constante h , de esta forma una cantidad dada será tan precisa como su valor de h esté determinado. Como el factor h está íntimamente relacionado con el parámetro de Hubble H , ambos valores serán frecuentes en el estudio de la cosmología.

1.4. La Ecuación de Estado y la Solución de la Ecuación de Continuidad

1.4.1. Ecuación de Estado

De las ecuaciones 1.25, 1.27 y 1.29 solamente dos son independientes, de las cuales 1.25 y 1.29 son generalmente tomadas como tales. Dado que tenemos únicamente dos ecuaciones independientes para las tres funciones desconocidas $a(t)$, $\rho(t)$ y $p(t)$, las ecuaciones no podrían determinar la forma de las tres funciones. Sin embargo, se ha visto que p y ρ están relacionadas entre ellas y su relación es conocida como una ecuación de estado. En otras palabras, para hablar más sobre las soluciones de las ecuaciones de Friedmann y de continuidad se necesita una relación entre p y ρ con una ecuación de estado para un fluido perfecto de la forma $p = p(\rho)$ de manera similar a la ecuación de estado de un gas ideal. De esta forma, dando una ecuación de estado y las dos ecuaciones independientes 1.25 y 1.29, se pueden determinar las funciones $a(t)$, $\rho(t)$ y $p(t)$. Una ecuación de estado es una ecuación de equilibrio que relaciona las coordenadas termodinámicas tales como la presión, volumen, temperatura, densidad de energía, tensión superficial, etc. y que priva de su independencia a una de ellas.

Recordemos que si el camino libre medio entre colisiones de partículas es mucho menor que las escalas de interés físico, entonces el fluido puede ser tratado como perfecto y dadas las escalas cosmológicas anteriormente mencionadas que se consideran, podemos tratar al contenido del universo como un fluido perfecto. Sin embargo, el universo no está formado por un sólo tipo de contenido y por ende de un sólo tipo de fluido perfecto.

No obstante, en muchos casos de interés físico, la ecuación de estado apropiada puede ser propuesta, ya sea exactamente o aproximadamente, en la forma

$$p = \omega \rho c^2 = (\gamma - 1) \rho c^2 \quad (1.31)$$

donde γ es el coeficiente adiabático definido en termodinámica y que se simplifica por medio del parámetro ω , el cual es más usual en cosmología, por medio de $\omega = \gamma - 1$. Cada tipo de fluido perfecto que esté contenido en el universo seguirá una ecuación de estado de la forma 1.31, con un valor característico del parámetro ω que en el modelo estándar de la cosmología es tomado como constante.

Puede parecer raro nombrar a ω como parámetro cuando se le otorgan valores como constante. Sin embargo cabe señalar que es posible hacer una generalización de la ecuación de estado para los diferentes tipos de fluidos perfectos, definiendo al parámetro $\omega(a) = p/(\rho c^2)$ no como una constante, sino como una función con dependencia del factor de escala $a(t)$ o equivalentemente del corrimiento al rojo z . Éste punto es precisamente uno de los aspectos principales a tratar en el trabajo de esta tesis.

1.4.2. Solución de la Ecuación de Continuidad

Utilizando la ecuación de estado 1.31, con ω igual a una constante aún sin definir, para resolver la ecuación de continuidad 1.29 se tiene

$$\begin{aligned}\dot{\rho} &= \frac{d\rho}{dt} = -\frac{3}{c^2} \frac{\dot{a}}{a} (p + \rho c^2) = -\frac{3}{c^2} \frac{1}{a} (\omega \rho c^2 + \rho c^2) \frac{da}{dt} \\ \frac{d\rho}{\rho} &= -3(\omega + 1) \frac{da}{a} \\ \int_{\rho_i}^{\rho} \frac{d\rho}{\rho'} &= -3(\omega + 1) \int_{a_i}^a \frac{da}{a} \\ \ln \left(\frac{\rho}{\rho_i} \right) &= -3(\omega + 1) \ln \left(\frac{a}{a_i} \right) = \ln \left[\left(\frac{a}{a_i} \right)^{-3(\omega+1)} \right]\end{aligned}$$

dando finalmente una expresión para la densidad en términos del factor de escala $a(t)$ como

$$\rho = \rho_i \left(\frac{a}{a_i} \right)^{-3(\omega+1)} \quad (1.32)$$

por lo que conociendo el valor de la densidad ρ_i de alguno de los tipos de fluidos perfectos que corresponda a un valor particular del factor de escala a_i , podremos determinar su valor referente a otra época con un factor de escala a . En particular, si conocemos en la época actual (donde $a(t_0) = a_0 = 1$) el valor de la densidad ρ_0 , podremos determinar su valor en cualquier otra época.

Por otro lado, el parámetro ω está también relacionado a la velocidad del sonido del fluido en un proceso adiabático por medio de

$$v_s = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_S^{\frac{1}{2}} \quad (1.33)$$

cuya relación es de vital importancia para entender el origen de las oscilaciones acústicas de bariones (BAO) y una demostración de la ecuación de onda, a partir de la cual se extrae esta expresión de la velocidad, puede ser encontrada en la referencia [40].

Para determinar en qué rango de valores podría encontrarse el parámetro ω , se puede utilizar la definición de la velocidad del sonido dada en 1.33. La causalidad requiere que $-1 \leq \omega \leq 1$, ya que para una ecuación de estado la velocidad del sonido debe ser menor que la velocidad de la luz. Esto es debido a que el caso $\omega > 1$ implica que $v_s > c$, por lo cual es imposible. Por otro lado, si $\omega < 0$, entonces el resultado sería imaginario y ya no se podría relacionar con la velocidad del sonido. Estos dos casos forman parte de un primer límite para el parámetro ω de $0 < \omega < 1$ llamado el intervalo Zel'dovich. Sin embargo, hay situaciones de importancia física en las cuales es conveniente manejar un fluido que se comporte con $\omega < 0$ como se verá posteriormente.

1.4.3. Tipos de Partículas

Con el objeto de designar un valor concreto a ω , es necesario especificar los diferentes tipos de fluidos perfectos que hay en el universo. Por el momento, podemos clasificar su contenido en dos grupos que son el de las partículas no relativistas y el de las partículas relativistas, dejando para el final de esta sección una explicación para un tercer grupo que curiosamente resulta ser el más numeroso. Además se agrega la correspondencia entre la temperatura y el factor de escala para los dos tipos de partículas.

Partículas No Relativistas

La temperatura T puede ser transformada en unidades de energía por la relación

$$E = k_B T \quad (1.34)$$

donde k_B es la constante de Boltzmann. De ésta forma, una partícula es no relativista cuando su energía cinética es pequeña en comparación con su masa y entonces

$$k_B T \ll mc^2 \quad (1.35)$$

Para partículas no relativistas el parámetro ω toma el valor de

$$\omega_m = 0 \quad (1.36)$$

por lo tanto

$$p_m = 0 \quad (1.37)$$

donde el subíndice en ω_m de ahora en adelante caracterizará a las partículas no relativistas.

Se puede demostrar además que la temperatura de las partículas no relativistas tiene una dependencia con el factor de escala como

$$T_M \propto a^{-2} \quad (1.38)$$

Partículas Relativistas

Una partícula es relativista cuando su energía cumple con

$$E = k_B T > 10mc^2 \quad (1.39)$$

Para partículas relativistas, como los fotones, se tiene una ecuación de estado

$$\omega_r = \frac{1}{3} \quad (1.40)$$

donde el subíndice en ω_r de ahora en adelante caracterizará a las partículas relativistas. Por lo tanto la presión y la densidad están relacionadas como

$$p_r = \frac{1}{3}\rho_r \quad (1.41)$$

Por otra parte se puede demostrar que debido a que E escala como a^{-1} , se sigue que además la temperatura de radiación T_r escala como a^{-1}

$$E = \rho_r V = \rho_{r0} a^{-3(\omega_r+1)} V = \frac{4}{3} \pi \rho_{r0} a^{-3(\omega_r+1)} a^3 \chi^3 = \frac{4}{3} \pi \rho_{r0} a^{-3\omega_r} \chi^3 = k_B T_r$$

como $\omega_r = \frac{1}{3}$ para radiación, entonces

$$T_r \propto a^{-1} \propto 1 + z$$

Esta relación ha sido verificada por mediciones de la temperatura de la radiación de fondo cósmico de microondas (CMB) en diferentes tiempos.

1.4.4. Dependencia del factor de escala con el tiempo y requisito necesario para una expansión acelerada

Recordemos que uno de los objetivos era poder determinar p , ρ y $a(t)$ con ayuda de la ecuación de estado. Con lo hecho hasta ahora, se ha podido expresar a p en términos de ρ y a su vez a ρ en términos de a . Finalmente veamos cual es la correspondencia entre el factor de escala a y el tiempo t tomando por simplicidad el caso en que $\Lambda = K = 0$ en la ecuación de Friedmann, teniendo

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = C a^{-3(1+\omega)}$$

donde se ha tomado $C = \frac{8\pi G}{3c^2} \rho_0$ para simplificar la expresión. Por lo que al resolver la ecuación diferencial para el factor de escala a se tiene

$$a(t) = \widehat{C}(\omega) t^{\frac{2}{3(\omega+1)}} \quad (1.42)$$

con $\widehat{C}(\omega) = \left(\frac{3(1+\omega)}{2} \right)^{\frac{2}{3(\omega+1)}} C^{\frac{1}{3(\omega+1)}}$.

Si sustituimos la expresión del factor de escala 1.42 en la definición del parámetro de Hubble 1.30, podemos obtener una expresión sencilla que determine la edad del universo a un valor H para el caso particular de un universo plano dominado por un tipo de fluido perfecto

$$t = \frac{2}{3(\omega+1)H} \quad (1.43)$$

Caracterizando al valor de H como $H_0 = 70 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ para un universo dominado por materia, se tiene una primera aproximación de la edad del universo de

$$t = \frac{2}{3H_0} \approx 9 \times 10^9 \text{ años} \quad (1.44)$$

Esta cifra representó la primera aproximación de la edad del universo. Para un universo dominado por radiación el valor sería menor, siendo aproximadamente de 6.98×10^9 años. Sin embargo, ambos valores representaron un grave problema a la teoría debido a la incongruencia con la edad ya conocida en ese entonces de diferentes objetos, como el de las estrellas más antiguas. Cabe aclarar que mediante una corrección en el cálculo de la edad del universo se obtiene un valor de 13.7×10^9 años, el cual coincide mejor con los datos conocidos de diferentes edades.

Como se puede observar, el recíproco del parámetro de Hubble presenta unidades de tiempo y representa una buena primera aproximación a la edad del universo. Por esta razón se define al tiempo de Hubble como la estimación de la edad del universo a través del inverso de la constante de Hubble $t_H = \frac{1}{H_0}$. El tiempo de Hubble también es llamado el periodo de Hubble o edad de Hubble. Así mismo se define al radio de Hubble R_H como la distancia recorrida por un rayo de luz a lo largo de una geodésica recta en un tiempo de Hubble.

Se puede observar que el valor del factor de escala $a(t)$ en el tiempo dependerá de la ecuación de estado utilizada debido al parámetro ω . Empleemos ahora ésta forma del factor de escala a y sus correspondientes derivadas en la definición del parámetro de desaceleración

$$q \equiv -\frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2} = -\frac{\ddot{a}}{aH^2} \quad (1.45)$$

para obtener

$$q = \frac{1}{2}(1 + 3\omega) \quad (1.46)$$

La evolución del universo dependerá de la forma del parámetro de Hubble H y del parámetro de desaceleración q , teniendo así un universo que cumpla con una de las siguientes siete posibilidades

1. $H > 0, q > 0$: expandiéndose y desacelerando
2. $H > 0, q < 0$: expandiéndose y acelerando

3. $H < 0, q > 0$: contrayéndose y desacelerando
4. $H < 0, q < 0$: contrayéndose y acelerando
5. $H > 0, q = 0$: expandiéndose con desaceleración cero
6. $H < 0, q = 0$: contrayéndose con desaceleración cero
7. $H = 0, q = 0$: estático

Basándonos en las observaciones de un universo en expansión acelerada, utilizaremos estos resultados para determinar la forma o el intervalo en el que es necesario que se encuentre ω para que describa al universo. De la solución de la ecuación de continuidad 1.32, tenemos que un comportamiento en expansión corresponde a

$$1 + \omega > 0 \tag{1.47}$$

Por otra parte, para que dicha expansión sea acelerada debe cumplirse en el parámetro de desaceleración 1.46 la condición

$$1 + 3\omega < 0 \tag{1.48}$$

por lo tanto, juntando ambas condiciones de expansión 1.47 y expansión acelerada 1.48 se tiene el intervalo

$$-1 < \omega < -\frac{1}{3} \tag{1.49}$$

Tales valores de ω salen del intervalo de Zel'dovich y no pueden ser interpretados por medio de la ecuación 1.33. De esta forma observamos que los valores negativos para ω surgen como una necesidad a la descripción de la expansión acelerada del universo. Los valores negativos de ω se interpretan como presiones negativas en la ecuación de estado, por lo tanto tendremos que las presiones positivas causan que la expansión del universo desacelere, mientras que las presiones negativas provocan que la expansión del universo sea acelerada.

Actualmente la fuente que causa la expansión acelerada del universo es desconocida y es referida simplemente como energía oscura, sin embargo se le suele asociar con la constante cosmológica, el mismo término que Albert Einstein había introducido en sus ecuaciones de campo para describir un universo que él creía debía ser estático. La constante cosmológica puede ser interpretada como una contribución a la masa-energía del universo que produce una fuerza repulsiva, un tipo de término

Características	Partículas	Partículas	Energía
	No Relativistas	Relativistas	Oscura
Parámetro ω	0	$\frac{1}{3}$	-1
Ecuación de Estado	$p_M = 0$	$p_r = \frac{1}{3}\rho_r$	$p_\Lambda = -\rho_\Lambda$
Densidad	$\rho_M = \rho_{M_0} \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3}$	$\rho_r = \rho_{r_0} \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-4}$	$\rho_\Lambda = \rho_{\Lambda_0}$
Factor de Escala	$a(t) \propto t^{\frac{2}{3}}$	$a(t) \propto t^{\frac{1}{2}}$	$a(t) \propto e^{\lambda t}$
Temperatura	$T_M \propto a^{-2}$	$T_r \propto a^{-1}$	

Cuadro 1.1: Tabla que resume los valores de las diferentes características para partículas no relativistas, partículas relativistas y energía oscura.

de energía negativa. En este caso, Λ correspondería a una energía negativa asociada con el vacío del espacio en sí mismo que impulsa la aceleración en la expansión del universo. La energía del vacío es la energía asociada con un espacio vacío, eso es, el vacío en sí mismo y su argumento teórico tiene sus bases en el principio de incertidumbre de Heisenberg para la energía y el tiempo. No obstante, la mecánica cuántica predice mucha más energía del vacío de la que se observa como energía oscura.

A la energía oscura generalmente se le atribuye un valor de $\omega_\Lambda = -1$, de tal forma que la densidad de energía oscura sea constante a lo largo del tiempo, de acuerdo a la solución de la ecuación de continuidad 1.32. En la siguiente tabla 1.1 se resumen los valores para las diferentes características de ambos tipos de partículas y para la energía oscura.

Cabe mencionar que diferentes modelos cosmológicos no fijan un valor de ω_Λ como $\omega_\Lambda = -1$, sino que se le atribuye un valor negativo como el determinado por el intervalo 1.49, llamando a este tipo de energía oscura como quintaesencia. La quintaesencia es una hipotética forma exótica de materia o energía que produce una presión negativa y una aceleración cosmológica como una constante cosmológica. Una quintaesencia no necesita ser constante en el tiempo, entonces la fuerza efectiva de Λ puede cambiar conforme el universo evoluciona.

1.5. Corrimiento al Rojo y Ley de Hubble

En cosmología las cantidades espaciales y temporales están estrechamente relacionadas en cantidades como el parámetro de Hubble H , esto es así desde que la luz proveniente de una estrella distante u otro objeto luminoso llega a nosotros portando información que describa al objeto, sin embargo al ser la velocidad de la luz una velocidad finita, la luz puede tardar cientos de miles de años en llegar a nosotros, por lo que la descripción de este objeto será la de cómo fue cuando la luz fue emitida hace

cientos de miles de años atrás. Es decir que si deseamos estudiar objetos distantes estaremos estudiando su pasado, o dicho de otra forma, si deseamos estudiar el pasado entonces necesitamos estudiar objetos más distantes. Una cantidad que cumple con ser interpretada tanto espacial como temporalmente es el corrimiento al rojo que será visto en esta sección y que es de gran importancia en la cosmología.

En 1929 Edwin Hubble estudiando la distancia a diferentes galaxias con ayuda del corrimiento al rojo, descubrió que cuanto más lejos estaba una galaxia más alta era su velocidad de recesión, es decir que se alejaban a mayor velocidad, lo cual forma una relación lineal entre la velocidad de la galaxia y la distancia a ella mediante la constante de Hubble como la constante de proporcionalidad entre ambas. A esto se le conoce como ley de Hubble y fue el primer indicador de la expansión del universo.

Para entender el resultado de Hubble, imaginemos un objeto distante y luminoso como una galaxia emitiendo luz hacia nosotros. Desde el punto de vista ondulatorio, un fotón parte de la fuente luminosa con una cresta desde una posición $r = r_1$ en un tiempo t_1 y llega a un detector de coordenada $r = r_0 = 0$ donde se registra su tiempo de llegada como t_0 . Debido a que la luz viaja por una geodésica, cumpliendo $ds^2 = 0$ en la métrica FRW, se tiene

$$cdt = a(t) \frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}} \quad (1.50)$$

por lo que entonces se relaciona la coordenada temporal y espacial del fotón por medio de

$$\int_{t_1}^{t_0} c \frac{dt}{a(t)} = \int_{r_1}^{r_0} \frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}} \quad (1.51)$$

Al tiempo $t_1 + \delta t_1$ es emitida una segunda cresta en la onda de luz, la cual llega al detector en el tiempo $t_0 + \delta t_0$, cumpliéndose nuevamente

$$\int_{t_1 + \delta t_1}^{t_0 + \delta t_0} c \frac{dt}{a(t)} = \int_{r_1}^{r_0} \frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}} \quad (1.52)$$

Dado que las coordenadas de posición r_1 y r_0 son comóviles, estas no cambiarán por la expansión del universo, manteniendo el miembro derecho de ambas ecuaciones 1.51 y 1.52 idéntico, lo cual nos permite igualar estas dos ecuaciones

$$\int_{t_1}^{t_0} c \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_1 + \delta t_1}^{t_0 + \delta t_0} c \frac{dt}{a(t)} \quad (1.53)$$

Reajustando los límites de integración en 1.53 sumando $\int_{t_0}^{t_1+\delta t_1} \frac{dt}{a(t)}$ en ambos lados de la igualdad tenemos

$$\int_{t_1}^{t_1+\delta t_1} c \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_0}^{t_0+\delta t_0} c \frac{dt}{a(t)} \quad (1.54)$$

Como el intervalo de tiempo δt es tan pequeño como para que el valor de $a(t)$ cambie mucho, $a(t)$ puede ser considerado constante en este periodo de tiempo y salir de la integración quedando

$$\frac{\delta t_1}{a(t_1)} = \frac{\delta t_0}{a(t_0)} \quad (1.55)$$

Dado que el periodo de la onda de luz cuando es emitida y observada es δt_1 y δt_0 respectivamente, tenemos que usando la relación entre la velocidad, longitud de onda y periodo de una onda $c = \lambda \nu = \frac{\lambda}{\delta t}$, la ecuación 1.55 se puede reescribir también como

$$\frac{a(t_0)}{a(t_1)} = \frac{\lambda_0}{\lambda_1} \quad (1.56)$$

En base a la relación anterior se puede inferir que un corrimiento al rojo, es decir, un aumento en las longitudes de onda observadas de la fuente luminosa, implicaría un aumento en el valor del factor de escala $a(t)$ con respecto al tiempo t_1 y con ello una expansión del espacio entre la fuente y el detector. Por el contrario, si la medición de las longitudes de onda de llegada fuera un corrimiento al azul, es decir, una reducción en la medida de las longitudes de onda, se tendría una disminución del factor de escala $a(t)$ con respecto al tiempo inicial en que el rayo fue emitido t_1 y con ello una contracción del espacio entre ambos puntos.

Debido a la relación existente entre el cociente de los factores de escala y el cociente de las longitudes de onda se define una cantidad, que suele ser más práctica de manejar que $a(t)$, llamada corrimiento al rojo z como

$$1 + z \equiv \frac{a_0}{a(t_1)} = \frac{\lambda_0}{\lambda_1} \quad (1.57)$$

donde es fácil observar que valores positivos de z ($z > 0$) son corrimientos al rojo, mientras que valores negativos ($z < 0$) son corrimientos al azul. Así mismo cabe señalar como ya se había mencionado antes, que las cantidades espaciales y temporales están estrechamente relacionadas, por lo que el corrimiento al rojo nos debe dar tanto

información de distancias como de una época en el pasado. A partir de esta idea, el corrimiento al rojo z para distancias cortas del orden de las manejadas usualmente en la vida cotidiana, donde la luz puede ser percibida prácticamente al instante en que es emitida, es de $z = 0$. Por lo que hablar de $z = 0$ es hablar de distancias cortas o hablar del momento actual.

Con el fin de expresar la distancia a un objeto luminoso por medio del corrimiento al rojo z , se procede a realizar una expansión en serie de Taylor del recíproco del primer y segundo miembro de la definición 1.57 para tiempos cercanos al tiempo actual t_0 o equivalentemente $z = 0$.

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + \dots \quad (1.58)$$

Así mismo, de la expansión del segundo miembro da

$$\frac{a(t)}{a_0} = 1 + \frac{\dot{a}_0}{a_0}(t - t_0) + \frac{1}{2} \frac{\ddot{a}_0}{a_0}(t - t_0)^2 + \dots \quad (1.59)$$

o también escrito de otra forma

$$\frac{a(t)}{a_0} = 1 + H_0(t - t_0) - \frac{1}{2} q_0 H_0^2 (t - t_0)^2 + \dots \quad (1.60)$$

donde se ha utilizado la definición de la constante de Hubble y la del parámetro de desaceleración 1.45 dada por $q_0 = -\frac{\ddot{a}_0 a_0}{\dot{a}_0^2} = -\frac{\ddot{a}_0}{a_0 H_0^2}$. Por lo que uniendo ambas expansiones 1.58 y 1.60 tenemos

$$z = H_0(t_0 - t) + \frac{1}{2} q_0 H_0^2 (t_0 - t)^2 \quad (1.61)$$

la cual mediante $d = c(t_0 - t)$ y restringiendo el miembro derecho de 1.61 a un sólo término para z pequeña $z < 1$, nos provee de la conocida ley de Hubble para la medición de distancias a objetos cercanos.

$$cz \approx H_0 d \quad (1.62)$$

donde en esta aproximación la velocidad del objeto luminoso v es equivalente a decir $v \approx cz$. En la gráfica 1.2 se muestra un registro de la medición de la velocidad frente a la distancia con los datos originales de 1929, la pendiente de la recta de ajuste corresponde al valor del parámetro de Hubble en dicho momento de la medición.

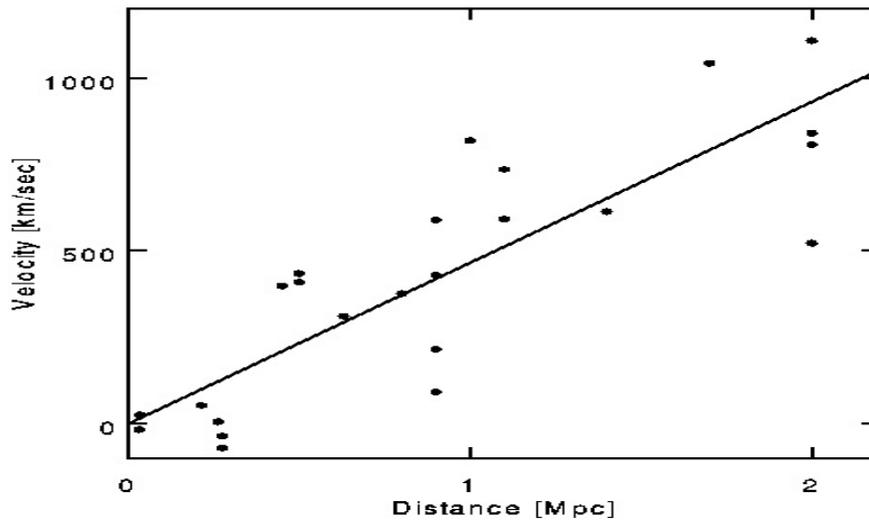


Figura 1.2: Gráfica de 1929 de la velocidad contra su distancia de varias galaxias. Se cumple la ley de Hubble con pendiente de la recta de ajuste igual a H_0 [27]

1.6. Tipos de Distancia

Al ser nuestro tema de estudio la cosmología, una ciencia que implica longitudes de gran magnitud en el espacio como los dados por objetos de enorme tamaño al igual que las distancias entre estos, es evidente la importancia de trabajar con distancias. Sin embargo, desde que la métrica FRW fue construida de modo tal que sus coordenadas fuesen coordenadas comóviles, se presentarán distintos tipos de distancia que pueden ser útiles.

1.6.1. Distancia Comóvil y Distancia Física

Distancia Comóvil

De la definición de coordenada comóvil procedente de la métrica FRW, es posible definir una distancia comóvil como aquella longitud entre dos puntos de coordenadas comóviles r_1 y r_2 cuya característica principal es la de no variar su valor en el tiempo a causa de la expansión del universo. La distancia comóvil obtiene la forma

$$\chi = \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}} \quad (1.63)$$

la cual es el cambio de variable utilizado para generar la forma de la métrica FRW 1.16, con las soluciones dadas por

$$\chi = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{K}}[\arcsen(\sqrt{K}r_2) - \arcsen(\sqrt{K}r_1)] & \text{para } K > 0 \\ r_2 - r_1 & K = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{K}}[\operatorname{arcsenh}(\sqrt{|K|}r_2) - \operatorname{arcsenh}(\sqrt{|K|}r_1)] & \text{para } K < 0 \end{cases} \quad (1.64)$$

Si consideramos un rayo de luz propagándose a lo largo de la geodésica $ds^2 = 0$, de la métrica 1.16 eligiendo $d\theta^2 = 0$, $d\phi^2 = 0$ se sigue que

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) d\chi^2 = 0$$

$$cdt = a(t)d\chi$$

$$\chi = c \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{a(t)} \quad (1.65)$$

donde la cantidad dada por la integral 1.65 se conoce como tiempo conforme y se le simboliza por η . El tiempo conforme puede ser sustituido en la forma de la métrica FRW para dar una quinta forma de ésta. Una característica del tiempo conforme es dar a la métrica FRW una estructura similar a la métrica de Minkowski. Tanto la expresión 1.63 y 1.65 son equivalentes para obtener la distancia comóvil.

La distancia comóvil no es un observable inmediato al igual que $a(t)$, sin embargo lo que sí se puede observar es la luz procedente de un objeto luminoso lejano y de ésta su corrimiento al rojo. Es fundamental poder establecer una relación entre la distancia comóvil y un observable como el corrimiento al rojo. Por esta razón usando la definición del corrimiento al rojo 1.57 y del parámetro de Hubble en la ecuación 1.65, podemos expresar la integral 1.65 como

$$\begin{aligned} \chi &= c \int_{a_1}^{a_2} \frac{1}{a} \frac{dt}{da} da = c \int_{a_1}^{a_2} \frac{1}{a\dot{a}} da = c \int_{a_1}^{a_2} \frac{1}{a^2} \frac{a}{\dot{a}} da \\ &= -c \int_{z_1}^{z_2} \frac{(1+z)^2}{H(z)(1+z)^2} dz = c \int_0^z \frac{1}{H(z')} dz' \end{aligned}$$

$$\chi = c \int_0^z \frac{1}{H(z')} dz' \quad (1.66)$$

donde la medición de la distancia comóvil se hace con respecto a nosotros, por lo que $a_2 = a_0 = 1$ y $z_2 = 0$. La dependencia del parámetro de Hubble con el corrimiento al rojo se puede determinar a partir de las ecuaciones de Friedmann y en general la integral resultante no puede ser resuelta de manera analítica, además de que su resultado dependerá tanto de los contenidos del universo como de la curvatura de éste.

Distancia Física

Nuevamente de la definición de la métrica FRW, la distancia real entre dos puntos de coordenadas comóviles r_1 y r_2 llamada distancia física es

$$D(t) = a(t)\chi \quad (1.67)$$

o explícitamente

$$D(t) = a(t) \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}} \quad (1.68)$$

cuya longitud sí varía con respecto al tiempo debido a la expansión del universo a diferencia de la distancia comóvil. Dado que una distancia física siempre tendrá el mismo valor de su distancia comóvil χ , es posible determinar el valor de una distancia física en un tiempo t_1 si se conoce su valor en otro tiempo t_2 y el valor del cociente de los factores de escala de los correspondientes tiempos.

$$D(t_1) = a(t_1)\chi \quad (1.69)$$

$$D(t_2) = a(t_2)\chi \quad (1.70)$$

Despejando χ en 1.69 y sustituyéndola en 1.70 o viceversa, se tiene

$$D(t_1) = \frac{a(t_1)}{a(t_2)} D(t_2) \quad (1.71)$$

Por otro lado tomemos en cuenta un rayo de luz moviéndose a lo largo de la geodésica $ds^2 = 0$ con $d\theta^2 = 0$ y $d\phi^2 = 0$ al igual que se hizo en 1.65. La distancia que recorre un rayo de luz desde el tiempo t_i hasta t es

$$D(t) = a(t)\chi = a(t)c \int_{t_i}^t \frac{dt'}{a(t')} \quad (1.72)$$

o en términos del corrimiento al rojo, la distancia que recorre un rayo de luz desde el corrimiento al rojo z hasta nuestros días con $z_f = 0$ es

$$D(z) = c \int_0^z \frac{1}{H(z')} dz' \quad (1.73)$$

Para valores pequeños de z con $z \ll 1$ el parámetro de Hubble es prácticamente constante con valor $H(z) \approx H_0$. Por lo que la integral anterior se reduce a la ya conocida ley de Hubble

$$D(z) = \frac{c}{H_0} z$$

Con estas definiciones es posible definir dos distancias importantes que son el horizonte de partícula y el horizonte de eventos.

1.6.2. Horizontes

Horizonte de Partícula

Dado que la velocidad de la luz marca un límite en la velocidad en la que se puede transmitir información, se define el horizonte de partícula como la mayor distancia comóvil del cual una señal de luz podría habernos alcanzado si esta fue emitida en un tiempo $t = t_{min} < t_0$. Esta definición del horizonte de partícula especifica un tamaño o una porción del universo que ha llegado a estar en contacto causal con nosotros desde el tiempo inicial t_{min} , por lo que los eventos sucedidos a distancias mayores al horizonte de partícula no han tenido el tiempo suficiente de estar causalmente conectados a nosotros, definiendo así un tamaño del universo observable si t_{min} toma el menor valor posible desde que la luz fue emitida. Como se verá posteriormente, existe una época para el tiempo mínimo a partir del cual el universo llegó a ser transparente a la luz, conocida como la época de la última dispersión. Antes de eso la interacción entre la luz y la materia era tan grande que la luz estaba atrapada por la materia, por lo que no se podía emitir libremente y por ende dicha época del

universo no es visible. Si t_{min} es igual a la época de la última dispersión, entonces el horizonte de partícula del universo observable es

$$\chi_{hp} = c \int_{t_{min}}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} \quad (1.74)$$

Horizonte de Eventos

De manera similar al horizonte de partícula, se puede definir al horizonte de eventos como la distancia comóvil al evento presente más distante cuya línea de mundo puede alguna vez alcanzar nuestra línea de mundo

$$\chi_{he} = c \int_{t_0}^{t_{max}} \frac{dt}{a(t)} \quad (1.75)$$

Si χ_{he} diverge cuando $t_{max} \rightarrow \infty$, entonces cada evento en el universo entrará en el horizonte de eventos. Sin embargo, si el comportamiento de $a(t)$ describe a un universo en expansión acelerada (como todo parece indicar), entonces las partes del universo más lejanas a nosotros se alejarán con una velocidad de recesión mayor a la velocidad de la luz y entonces habrá un último horizonte de eventos.

1.6.3. Distancia Diametral Angular y Distancia Luminosa

Siendo la luz el único observable que puede ser medible de los objetos lejanos, sería de gran utilidad determinar otras relaciones además de 1.73 o de la ley de Hubble 1.62, que contribuyan en la delimitación de la distancia a tales objetos. Dichas relaciones para la obtención de una distancia física nuevamente involucran al corrimiento al rojo z y adquieren un nombre característico por el método de obtención, las cuales se conocen como distancia diametral angular D_A y distancia luminosa D_L .

Distancia Diametral Angular

Imaginemos un objeto lejano como una galaxia a gran distancia de nosotros y empleemos la métrica FRW 1.16 con $dt = 0$ para describir el diámetro l del objeto. Así mismo consideremos que estamos en el centro de coordenadas, además de un plano formado por el vector que nos une con el objeto y el vector que va de un extremo al otro del diámetro, de esta forma se puede tomar a alguno de los dos ángulos de las coordenadas esféricas como constante, en particular $d\phi = 0$. Como cada extremo del

diámetro se encuentra a la misma distancia de nosotros entonces $d\chi = 0$. Finalmente tendríamos

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dl^2 = a^2(t) S_K^2(\chi) d\theta^2$$

$$dl = a(t) S_K(\chi) d\theta$$

e integrando

$$l = a(t) S_K(\chi) \theta \quad (1.76)$$

Por lo tanto, podemos definir a la distancia diametral angular como la distancia radial de nosotros al objeto que puede ser estimada como el cociente de la distancia física del diámetro del objeto y el ángulo observado a éste, es decir

$$D_A = \frac{l}{\theta} = a(t) S_K(\chi) = \frac{S_K(\chi)}{1+z} \quad (1.77)$$

la cual es básicamente la expresión para la longitud de un arco.

Distancia Luminosa

Consideremos un objeto astronómico como una galaxia con una emisión de luz de manera isotrópica y con una potencia total de emisión en un determinado rango de frecuencias, también llamada luminosidad L con unidades de WHz^{-1} . Un observador que detecte la luz procedente de este objeto desde la Tierra, podrá medir una fracción de la luminosidad emitida por el objeto que estará pasando por una determinada área de su detector. La fracción de la potencia total que emite el objeto y que es detectada en un área determinada se le conoce como flujo observado F_0 y tiene unidades de $Wm^{-2}Hz^{-1}$. Debido a que la emisión de luz es isotrópica, el flujo observado será igual a la potencia que pasa a través de un área igual a la del detector en una región del espacio a una distancia igual a la que separa el objeto luminoso de la Tierra. De esta forma la medición del flujo observado sería una aproximación de una densidad de potencia superficial a una distancia igual a la que nos separa a nosotros con el objeto luminoso. Queda claro entonces que la densidad de potencia superficial medida por el flujo observado debe ser igual a la densidad de potencia superficial generada por la potencia total emitida por el objeto o la luminosidad sobre el área total delimitada por una esfera de radio igual a la distancia del objeto a nosotros.

De esta forma podemos definir la distancia luminosa como

$$F_0 = \frac{L}{4\pi D_L^2} \quad (1.78)$$

o equivalentemente

$$D_L = \sqrt{\frac{L}{4\pi F_0}} \quad (1.79)$$

donde L es la luminosidad en el momento de la emisión.

En un universo estático con el objeto luminoso estacionario con respecto a nosotros, la distancia D_L podría corresponder a la distancia física D . Sin embargo ya que el universo se encuentra en expansión, la tasa de llegada de los fotones sufrirá un corrimiento al rojo de $1 + z$. Así mismo la energía de los fotones emitidos se verá reducida por un corrimiento al rojo en su frecuencia en $1 + z$. Si la luminosidad es de la forma

$$L = \dot{n}h\nu \quad (1.80)$$

donde \dot{n} es la tasa de emisión de fotones, entonces la luminosidad observada L_0 está relacionada con la luminosidad inicial L cuando los fotones fueron emitidos por

$$L_0 = \dot{n}_0 h\nu_0 = \frac{\dot{n}}{1+z} \frac{h\nu}{1+z} = \frac{L}{(1+z)^2} \quad (1.81)$$

Además, el área de la esfera A_0 al tiempo actual t_0 de recepción de la señal de luz es $A_0 = 4\pi\chi^2$, por lo tanto

$$F_0 = \frac{L}{4\pi\chi^2(1+z)^2} \quad (1.82)$$

Relacionando las ecuaciones 1.78 y 1.82, podemos determinar una relación entre la distancia luminosa y la distancia comóvil como

$$D_L = (1+z)\chi = \frac{\chi}{a(t)} \quad (1.83)$$

Por lo tanto podemos determinar la distancia a un objeto como una galaxia si conocemos su luminosidad y el flujo observado. Para caracterizar el valor de la luminosidad de una galaxia espiral se puede utilizar la relación empírica de Tully–Fisher,

la cual relaciona la velocidad de rotación de la galaxia con su luminosidad por medio de una constante de proporcionalidad α_{TF}

$$L = \alpha_{TF} v_{rot}^4 \quad (1.84)$$

Para galaxias elípticas dentro de un cúmulo puede ser aplicada la relación de Faber–Jackson, la cual es otra relación de origen empírico que relaciona la raíz cuadrada del promedio del cuadrado de las velocidades de las galaxias, es decir la dispersión de velocidades de las galaxias σ_v , con su luminosidad mediante una constante de proporcionalidad α_{FJ}

$$L = \alpha_{FJ} \sigma_v^4 \quad (1.85)$$

Los astrónomos usualmente reemplazan las cantidades L y F por dos cantidades definidas de manera empírica, las cuales son la magnitud absoluta M de un objeto luminoso y su magnitud aparente m , mediante la relación

$$m - M = 5 \log \left[\frac{D_L(z)}{Mpc} \right] + 25 \quad (1.86)$$

donde D_L está en unidades de Megaparsec y el logaritmo es de base 10. En unidades de parsecs la expresión tomaría la forma

$$m - M = 5 \log \left[\frac{D_L(z)}{10pc} \right] = -5 + 5 \log D_L \quad (1.87)$$

donde $m - M$ recibe el nombre de distancia módulo μ .

1.7. Contenido del Universo y Panorama Actual

El 18 de noviembre de 1989 fue lanzado el satélite espacial COBE (Cosmic Background Explorer) cuyo objetivo era estudiar la radiación de fondo cósmico de microondas (CMB), sin embargo para ese entonces la tecnología del COBE no permitía observar el CMB con suficiente resolución espacial para generar un mapa de las fluctuaciones de temperatura en detalle. Posteriormente el 30 de junio de 2001 fue lanzado el satélite WMAP (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe), cuyo equipo ya era el adecuado para realizar mediciones al nivel de las fluctuaciones de temperatura en diferentes tamaños angulares en el cielo. Sus observaciones han sido relacionadas con diversos modelos teóricos del origen de las fluctuaciones en el universo primitivo. Los

resultados de estas mediciones han contribuido a la creación del modelo estándar de la cosmología, también llamado modelo de concordancia del universo o incluso también conocido por el modelo Λ -CDM (abreviatura de Lambda-Cold Dark Matter), el cual provee los mejores valores actualmente aceptados de las diferentes cantidades cosmológicas para describir a nuestro universo. En dicho modelo, se considera un universo plano expandiéndose aceleradamente debido a una componente de energía oscura que ocupa aproximadamente un 70 % del universo, mientras que casi el 30 % restante es ocupado por materia, donde la mayor parte es dominada por una desconocida materia no bariónica llamada materia oscura.

La geometría del universo así como el valor de K , quedan determinados por las proporciones en los diferentes contenidos del universo. Aunque una forma de hacer referencia a los contenidos del universo es a través de la densidad ρ , es conveniente emplear el parámetro Ω llamado parámetro de densidad, el cual queda definido por

$$\Omega = \frac{\rho}{\rho_c} \quad (1.88)$$

donde $\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}$ es la densidad crítica definida como la densidad necesaria para poseer un universo plano. De esta forma, el parámetro de densidad Ω compara la densidad medida en nuestro universo con la densidad que debiese tener un universo plano, teniendo así

$$\begin{aligned} \Omega > 1 &\Rightarrow \rho > \rho_c \Rightarrow K > 0 \Rightarrow k = 1 && \text{universo esférico} \\ \Omega = 1 &\Rightarrow \rho = \rho_c \Rightarrow K = 0 \Rightarrow k = 0 && \text{universo plano} \\ \Omega < 1 &\Rightarrow \rho < \rho_c \Rightarrow K < 0 \Rightarrow k = -1 && \text{universo paraboloides hiperbólico} \end{aligned}$$

Ya que el modelo de concordancia propone un universo plano, el parámetro de densidad será $\Omega = 1$ y las diferentes componentes del universo tendrán valores menores a uno, es decir, la suma de todas las componentes de Ω debe ser igual a la unidad.

$$\sum_i \Omega_i = 1 \quad (1.89)$$

Como se dijo en la sección anterior, todo el contenido del universo puede ser catalogado en tres secciones por su ecuación de estado, que son: partículas no relativistas, partículas relativistas y energía oscura. A continuación hablaremos un poco más de estos tres tipos describiendo a sus principales representantes.

- Partículas No Relativistas, $\Omega_m = \Omega_b + \Omega_{DM}$
 - **Materia Bariónica:** También en ocasiones referida como materia ordinaria ya que representa a la totalidad de la materia que conocemos en la vida diaria y que está formada en su mayoría por protones y neutrones los cuales son bariones. En cosmología se incluye dentro del grupo de materia bariónica a todas las partículas no relativistas del modelo estándar de partículas elementales, tales como los electrones que son fermiones, a pesar de que éstas no sean estrictamente bariones. Sin embargo como los bariones contribuyen en mayor grado, éstos representan casi la totalidad de su densidad en lugar de los electrones, por lo cual a esta componente se le conoce simplemente como materia bariónica. Su contribución es cerca del 16 % de la masa del universo y del 4 % al 5 % de la densidad de masa–energía del mismo. Nos referiremos a su parámetro de densidad por Ω_b .
 - **Materia Oscura:** La materia oscura es un tipo de materia que se dice ser invisible ya que o emite muy poca luz o no interactúa con la radiación electromagnética, es decir que no la emite ni la absorbe. Se detecta por la fuerza gravitacional que ejerce sobre los objetos visibles, por ejemplo, haciéndolos girar en torno a ella como es el caso de las curvas de rotación de galaxias, dispersión de velocidades en cúmulos de galaxias o incluso por efectos de lentes gravitatorias. De manera general, la materia oscura puede incluir tanto materia bariónica ordinaria así como cualquier forma exótica de materia. Diversos modelos proponen diferentes formas de materia oscura, las cuales se pueden dividir en dos tipos que son materia oscura caliente y materia oscura fría. La materia oscura caliente es una forma de materia oscura no bariónica que viaja a grandes velocidades poseyendo una gran cantidad de energía. Por otra parte, la materia oscura fría es un tipo de materia oscura no bariónica que posee baja velocidad al igual que poca energía. De acuerdo al modelo de concordancia o modelo Λ –CDM, la mayor parte de la masa del universo proviene de un tipo de materia oscura fría (Cold Dark Matter CDM), siendo casi el 83.33 % del total de ésta y ocupando de un 23 % a un 26 % de la densidad de masa–energía total del universo. El mejor candidato a materia oscura es un tipo de materia oscura fría hipotética denotada como WIMP (Partícula Masiva de Interacción Débil). Denotaremos el correspondiente parámetro de densidad de materia oscura por Ω_{DM} .
- Partículas Relativistas, $\Omega_r = \Omega_\gamma + \Omega_\nu$
 - **Radiación Electromagnética:** La radiación electromagnética es un campo eléctrico y uno magnético que transportan energía. Comprende todas las longitudes y energías posibles. El fotón es la partícula asociada a la

radiación electromagnética. En el universo, la radiación de fondo cósmica de microondas es el mejor ejemplo de ésta componente ya que cubre todo el universo cumpliendo con el principio cosmológico. La radiación electromagnética ocupa aproximadamente un 0.005% de la densidad de materia–energía en el universo y utilizaremos el símbolo Ω_γ para referirnos al parámetro de densidad de radiación electromagnética.

- Neutrinos: Son un tipo de partículas fermiónicas pertenecientes al modelo estándar de partículas elementales. Existen tres tipos de neutrinos cada uno con su respectivo antineutrino y están asociados a una de las tres familias, es decir existe un neutrino electrónico, un neutrino muónico y un neutrino taónico. Los neutrinos son partículas extremadamente ligeras sin carga eléctrica que casi no interactúan con la materia por ser regidas por la fuerza nuclear débil y por la fuerza gravitatoria, aunque ésta última muy débilmente debido a su poca masa. Viajan a velocidades cercanas a la de la luz y poseen una helicidad zurda. Se producen en reacciones termonucleares de las estrellas y las explosiones de supernova. Utilizaremos el símbolo Ω_ν para hablar del parámetro de densidad de neutrinos.
- Energía Oscura: Es el término dado a la energía que es responsable de una aceleración del universo entero. Posibles energías oscuras incluyen una constante cosmológica Λ , una energía de vacío distinta de cero, o de otra manera formas desconocidas de energía denominadas quintaesencia. La propuesta de la postulación de la existencia de energía oscura surge a partir de diversas evidencias observaciones tales como las obtenidas por el estudio de supernovas tipo Ia, lentes gravitatorias, radiación de fondo cósmico de microondas (CMB) y oscilaciones acústicas de bariones (BAO). Se empleará Ω_Λ para expresar el parámetro de densidad de energía oscura.

En la figura 1.3 se muestra una gráfica de las proporciones de los diferentes componentes del universo, así mismo en la tabla 1.2 se presentan algunos de los valores promedio de diferentes parámetros cosmológicos aceptados en el modelo Λ –CDM.

Parámetro	Símbolo	Valor
Constante de Hubble	H_0	$72 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$
Geometría	Ω_K	0 plano
Densidad de Masa	Ω_m	0.3
Densidad de Bariones	Ω_b	0.04
Densidad de Materia Oscura	Ω_{DM}	0.26
Constante Cosmológica	Ω_Λ	0.7
Desaceleración	q_0	-0.55
Edad	t_0	13.7 mil millones de años

Cuadro 1.2: Tabla que resume los valores de los diferentes parámetros cosmológicos.

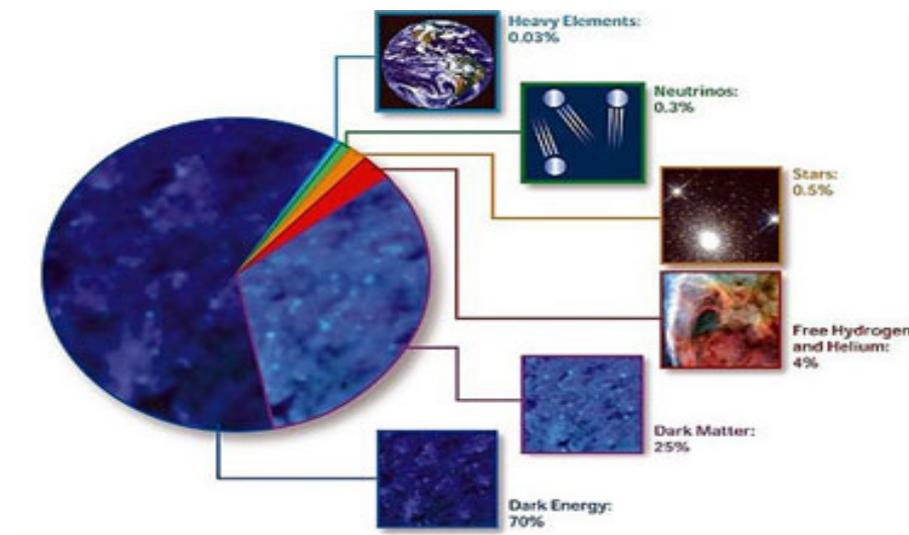


Figura 1.3: Gráfica de la proporción de los diferentes componentes del universo

Una vez que se han especificado las diferentes componentes del universo, se puede expresar al parámetro de Hubble con una dependencia del corrimiento al rojo a partir de la ecuación de Friedmann

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{Kc^2}{a^2} \quad (1.90)$$

Normalmente se realiza la siguiente sustitución del segundo término de la ecuación 1.90 con el fin de manipularla mejor junto con la densidad

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{Kc^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{8\pi G}{3}\rho_K = \frac{8\pi G}{3}(\rho + \rho_K) \quad (1.91)$$

De esta manera ρ_K toma la forma

$$\rho_K = -\frac{3}{8\pi G} \frac{Kc^2}{a^2} = \rho_{K_0} a^{-2} \quad (1.92)$$

y se le conoce como la densidad de curvatura, y dado que la densidad crítica es $\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}$, también posee un parámetro de densidad de curvatura dado por

$$\Omega_K = \frac{\rho_K}{\rho_c} = -\frac{Kc^2}{a^2 H^2} \quad (1.93)$$

Luego entonces si seguimos desarrollando la ecuación 1.91 llegaremos a

$$\begin{aligned} H^2 &= \frac{8\pi G}{3}(\rho + \rho_K) = \frac{8\pi G}{3}(\rho_m + \rho_r + \rho_K + \rho_\Lambda) \\ &= \frac{H_0^2}{\rho_c} \left(\rho_{m_0} \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-3} + \rho_{r_0} \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-4} + \rho_{K_0} \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-2} + \rho_{\Lambda_0} \right) \\ &= H_0^2 \left(\Omega_{m_0} \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-3} + \Omega_{r_0} \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-4} + \Omega_{K_0} \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-2} + \Omega_{\Lambda_0} \right) \end{aligned}$$

sacando raíz cuadrada

$$H(a) = H_0 \left(\Omega_{m_0} \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-3} + \Omega_{r_0} \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-4} + \Omega_{K_0} \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-2} + \Omega_{\Lambda_0} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.94)$$

y sustituyendo los factores de escala por z

$$H(z) = H_0 (\Omega_{m_0} (1+z)^3 + \Omega_{r_0} (1+z)^4 + \Omega_{K_0} (1+z)^2 + \Omega_{\Lambda_0})^{\frac{1}{2}} \quad (1.95)$$

Donde se ha introducido en ρ_m la contribución tanto de la materia oscura como de la materia ordinaria y los subíndices 0 hacen referencia a los correspondientes valores de dichas cantidades hoy en día.

Esta expresión es muy importante para desarrollar cálculos que relacionen los diferentes parámetros cosmológicos con cantidades que sí son directamente medibles

como el corrimiento al rojo z . Una forma generalizada de esta expresión, considerando una densidad de energía oscura ρ_Λ dependiente del factor de escala, será utilizada en el presente trabajo en el capítulo cuatro.

Un ejemplo de la utilidad de las expresiones 1.94 y 1.95 está en el cálculo más preciso de la edad del universo, como

$$t = \int_0^1 \frac{da}{H_0 a \left(\Omega_{m0} \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-3} + \Omega_{r0} \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-4} + \Omega_{K0} \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-2} + \Omega_{\Lambda_0} \right)^{\frac{1}{2}}} \approx 13.7 \times 10^9 \text{ años} \quad (1.96)$$

cuya expresión puede ser obtenida mediante el uso de la definición del parámetro de Hubble igualándolo con la expresión 1.94 y resolviendo la ecuación diferencial mediante integración. La solución de la integral no puede ser expresada de manera analítica para obtener una forma general del factor de escala a dependiente del tiempo t .

Para finalizar se muestran a continuación una serie de gráficas (1.4 y 1.5) del valor del parámetro de densidad Ω contra el factor de escala a y contra el corrimiento al rojo z para los tres tipos de fluidos perfectos. Nótese que para ciertas épocas algunos de los tres tipos de fluidos perfectos se vuelven despreciables con respecto a los demás.

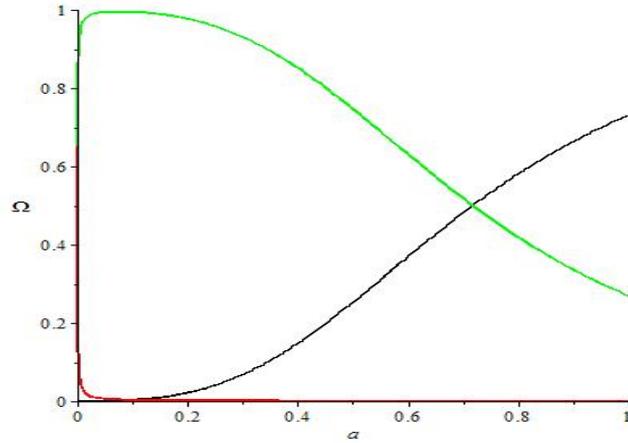


Figura 1.4: Gráfica del parámetro de densidad contra el factor de escala para partículas no relativistas (verde), partículas relativistas (rojo) y energía oscura (negro).

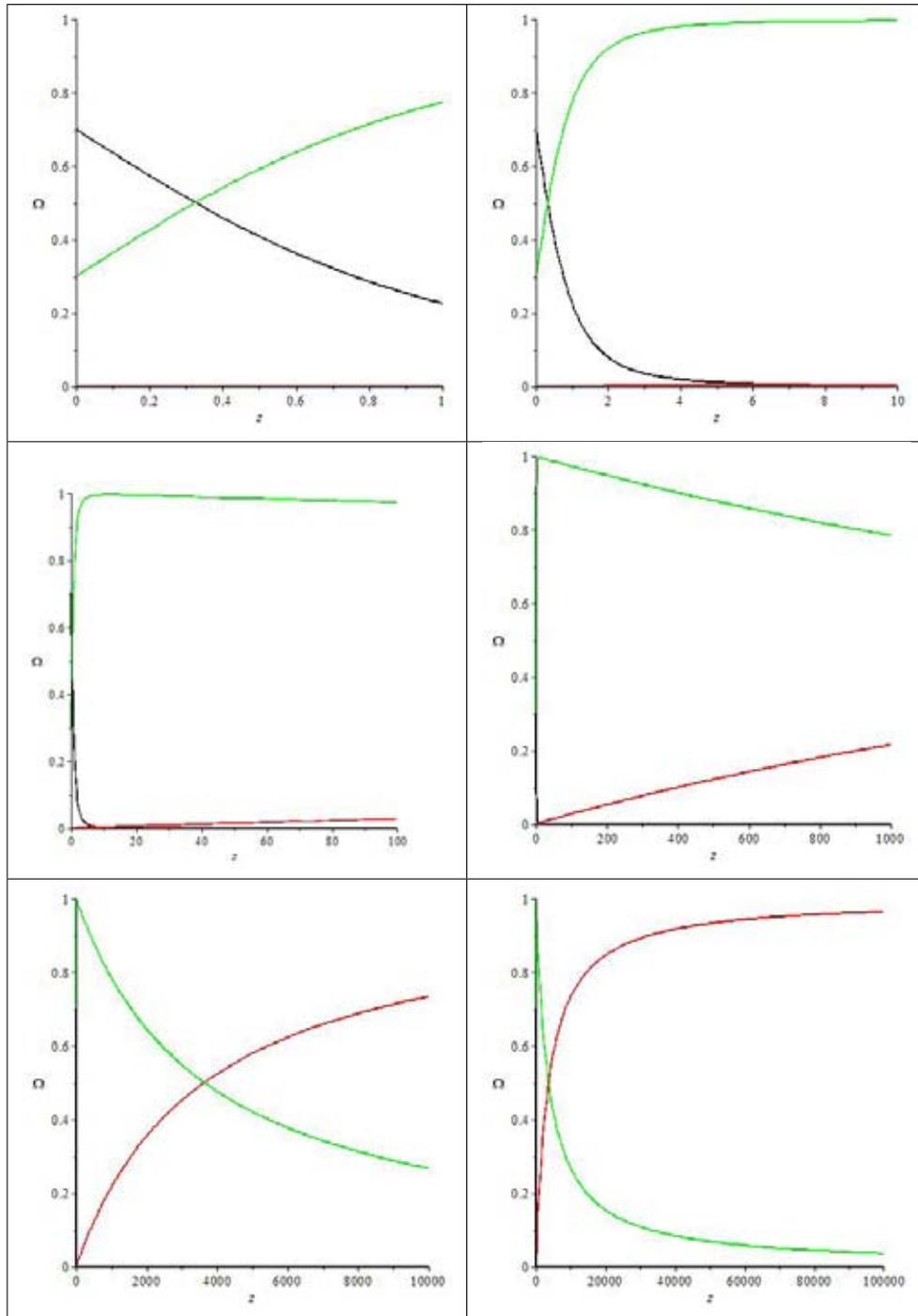


Figura 1.5: Gráficas del parámetro de densidad contra el corrimiento al rojo a diferentes escalas de z para partículas no relativistas (verde), partículas relativistas (rojo) y energía oscura (negro) tomando como referencia los valores de la tabla 1.2.

Capítulo 2

Evidencias de Energía Oscura

2.1. Supernova Tipo Ia

Además de los dos métodos revisados en la sección 1.79 para obtener una relación de la luminosidad que pueda ser usada para determinar la distancia luminosa, existen otros procedimientos que sirven de indicadores de distancia usando el brillo de distintos objetos. Por ejemplo, para distancias relativamente cortas desde el punto de vista cosmológico, como pueden ser aproximadamente $750kpc$, se puede llegar a usar el brillo de estrellas cefeidas para determinar una distancia.

Una cefeida es un tipo de estrella que varía su luminosidad con un periodo fijo. El periodo de variación de la luminosidad de la estrella, el cual se encuentra dentro del rango de 3 a 50 días, está relacionado al máximo de su luminosidad, teniendo así que las más brillantes varían más despacio.

Una vez que la luminosidad de un tipo particular de estrella como la cefeida es conocida, ésta llega a ser una candela estándar, un término que es referido a algún objeto de luminosidad conocida, es decir, en otras palabras una candela estándar es un objeto de luminosidad intrínseca conocida, útil en la medida de distancias de luminosidad.

Estas estrellas cefeidas incluso pueden servir como calibradores de otros indicadores de distancia que abarcan longitudes superiores a las que comprenden las cefeidas. Estos indicadores de distancia incluye a la relación Tully–Fisher, plano fundamental para galaxias elípticas, fluctuaciones de brillo superficial, supernovas tipo II, supernovas tipo Ia y más. De todos estos indicadores, los más interesantes y que resultan ser los más importantes para el estudio de la expansión acelerada del universo son las supernovas, particularmente las supernovas tipo Ia debido a las enormes distancias que implican (cerca de $z \sim 1$ o aproximadamente $4Gpc$).

Actualmente debido a su gran importancia en el estudio de la energía oscura, existen diversos grupos dedicados a la búsqueda de supernovas tipo Ia como puede ser el equipo de investigación conocido como Supernova Cosmology Project (SCP), el cual en su muestra “Union2.1” reúne datos de hasta 833 supernovas.

Incluso en el pasado los antiguos astrónomos solían buscar supernovas sin saber realmente qué eran y el origen de éstas. Esto debido a que ya conocían el aspecto del cielo con una posición muy clara de cada una de las estrellas visibles a simple vista, sin embargo en algunas ocasiones en el cielo aparecían puntos muy brillantes en lugares donde días antes parecía no haber nada. De ahí que los astrónomos de aquel entonces pensaran que el nuevo punto brillante se trataba de una nueva estrella que acababa de generarse espontáneamente, por lo que decidieron llamar a este tipo de puntos brillantes por el nombre de estrellas nova, donde nova proviene del latín novus que quiere decir nueva o nuevo.

La realidad es que no se trata de una nueva estrella que ha aparecido repentinamente en el cielo, sino que la estrella que origina ese gran brillo ya estaba en dicho sitio desde hace mucho tiempo, sólo que antes no brillaba con la suficiente intensidad para ser apreciada. Este gran aumento en el brillo de la estrella proviene de una enorme explosión originada en ella y estas explosiones llegan a ser tan intensas que incluso se tienen registros de que en el año 1054 los astrónomos chinos observaron una enorme explosión de supernova justamente en las coordenadas de lo que ahora sólo parecen ser sus restos dentro de la nebulosa del Cangrejo.



Figura 2.1: Imagen de la nebulosa del Cangrejo. La nebulosa del Cangrejo son los restos de la supernova vista por los astrónomos chinos en 1054.

Aunque el nombre de nova persiste hasta nuestros días, cabe mencionar que pese a la relación etimológica y al hecho de haber una gran similitud en el proceso de explosión derivada de una estrella, existe una clara distinción entre simples novas y supernovas que hasta 1934 no había sido claro. No fue hasta ese año en que Fritz

Zwicky y Baade hicieron la diferencia entre ambos procesos, apoyados de diversas observaciones. Entre las observaciones más importantes en las que se basaron Fritz Zwicky y Baade resaltan las hechas a la SN 1895*B* Z Centauri y las realizadas por Lundmark en 1920 sobre la explosión de supernova registrada por Hartwig en 1885, donde midiendo la distancia a la galaxia Andrómeda (*M31*) logró concluir que la explosión vista por Hartwig era miles de veces más brillante que una nova normal, donde fue más que clara la diferencia de intensidad de las explosiones.

Para ser más específicos, una nova es la abrupta y muy brillante explosión que surge de una estrella y cuyo nombre proviene del latín “nova stella” que significa “estrella nueva”, puesto que la estrella no era visible a simple vista antes de la explosión como ya se ha mencionado anteriormente. La raíz de estas explosiones proviene de los sistemas de estrellas binarias formadas por una enana blanca y una gigante, donde la nova es producida debido a que parte de la materia de la atmósfera de la gigante (principalmente hidrógeno) cae sobre la superficie de la enana blanca. Posteriormente, la materia acumulada incrementa su presión y temperatura para tiempo después desencadenar una serie de reacciones termonucleares en la enana blanca que dan origen a un aumento súbito en el diámetro de la estrella y a la consiguiente explosión de nova que arroja parte de su material al espacio. Su brillo es tan grande que su máximo de luminosidad puede llegar a ser 100,000 veces mayor a la luminosidad del Sol. Ya que una nova no es la muerte de una estrella, una vez que la nova se ha producido la estrella enana continuará en su mismo sitio con descenso en su brillo e incluso puede seguir acumulando material de la gigante para así volver a producir otra explosión, por este motivo las novas resultan ser muy comunes.

Por otro lado, una supernova resulta ser la cataclísmica explosión que da muerte a una estrella, por ende las supernovas resultan ser un proceso mucho más violento y brillante, además de más raro debido a que no se puede repetir el proceso como en las novas. Durante este evento, la estrella primeramente colapsa para posteriormente mandar una onda de choque hacia sus capas más externas y finalmente explotar y arrojar gran parte de su materia al espacio donde se encuentra gran cantidad de los elementos más ligeros que el hierro producidos en las reacciones de fusión de la estrella e incluso elementos más pesados que pueden producirse en el proceso de esta gran explosión proveyendo al universo de éstos. El núcleo remanente que llega a quedar de esta gran explosión se transforma en una estrella de neutrones o en un hoyo negro dependiendo de la masa de la estrella. Su brillo llega a ser tan intenso que puede alcanzar miles de millones de veces el brillo del Sol e incluso es capaz de opacar con su inmenso brillo al brillo de la misma galaxia en la que ocurre, al menos por unas cuantas semanas. Su potente brillo capaz de atravesar enormes distancias para poder llegar a nosotros, da a las supernovas una de las principales características que debe cumplir una candela estándar para distancias cosmológicas, el de ser muy brillantes para alcanzar a distinguirlas a distancias muy grandes. Sin embargo aun falta ver que se cumpla el hecho de que su luminosidad sea fácilmente determinada.

Estudios realizados a los espectros de las supernovas mostraban que estos no eran muy distintos a los de una nova normal. Sin embargo, en el año 1937 con el registro primeramente de la supernova SN1937c en IC 4182 y de otras más que aparecieron en los pocos años venideros, se observó una muy leve variación en el máximo de luminosidad así como en su imagen espectral. Esto llevó a Fritz Zwicky (en 1938) y poco después a Wilson (en 1939) a proponer a las supernovas como posibles indicadores de distancia. Sin embargo, en 1940 apareció la supernova SN1940c en NGC 4725, la cual resultó ser una supernova totalmente distinta a las observadas poco tiempo antes cuando se les propuso como indicadores de distancia, teniendo como principal diferencia su espectro. Es así como Minkowski en el año de 1940 divide a las supernovas en dos tipos, haciendo la clasificación de supernova tipo I para aquellas supernovas con un espectro similar al de la SN1937c y supernova tipo II para aquellas que muestren un espectro como el de la supernova SN1940c. Representando supernovas sin y con líneas espectrales de Balmer del hidrógeno cerca del máximo de luz.

En general, una explosión de supernova es tipo II cuando es generada por el colapso de una estrella masiva de más de ocho masas solares, esto debido a que la estrella ha alcanzado ya la etapa final de su proceso de fusión nuclear. Para llegar a esta etapa la estrella ha tenido que fusionar el hidrógeno y los sucesivos elementos que han surgido como producto de las reacciones de fusión, liberando así energía en cada uno de estos procesos de fusión hasta llegar al hierro. Las reacciones de fusión generan energía hasta llegar al hierro lo cual da a las estrellas su gran brillo, sin embargo al llegar al hierro los siguientes elementos absorben energía en lugar de producirla. Por lo tanto con la llegada a un núcleo de hierro, la ausencia de los procesos term nucleares de fusión es evidente y la estrella finalmente ya no es capaz de hacer frente a su propia atracción gravitatoria, con lo que termina por colapsar. La explosión es tan fuerte que crea los elementos más pesados expulsándolos hacia el espacio. No obstante, a pesar de que la explosión crea los elementos más pesados, también arroja grandes cantidades de hidrógeno la cual es una de las principales características para identificar una supernova tipo II. Los astrónomos se basan principalmente en dos características para saber si una supernova se trata de una supernova tipo II. Por una parte, se analiza el espectro de la supernova en busca de líneas de absorción o emisión del hidrógeno. Por otro lado, la magnitud de la luminosidad de las explosiones varían en gran medida.

Por otra parte, las supernovas tipo I se dividen en tres variedades que son: supernovas tipo Ia, Ib y Ic. Todas ellas, y entonces las supernovas tipo I de manera genérica, se caracterizan por no emitir líneas espectrales de emisión o de absorción del hidrógeno. Sin embargo también presentan grandes diferencias entre ellas, por ejemplo, las supernovas tipo Ib no tienen una curva de luz característica, así mismo presentan líneas espectrales de helio mientras que las tipo Ic no muestran señales de éste tipo de líneas. Así mismo, tanto las supernovas tipo Ib como las Ic difieren de las tipo Ia pues ambas no presentan líneas espectrales de silicio. Además el proceso

actualmente aceptado en el cual se generan las tipo Ib y Ic no coincide con las tipo Ia, ya que las tipo Ib y Ic se cree que son el resultado de la explosión de una estrella al final de su etapa de fusión que ya no contiene hidrógeno.

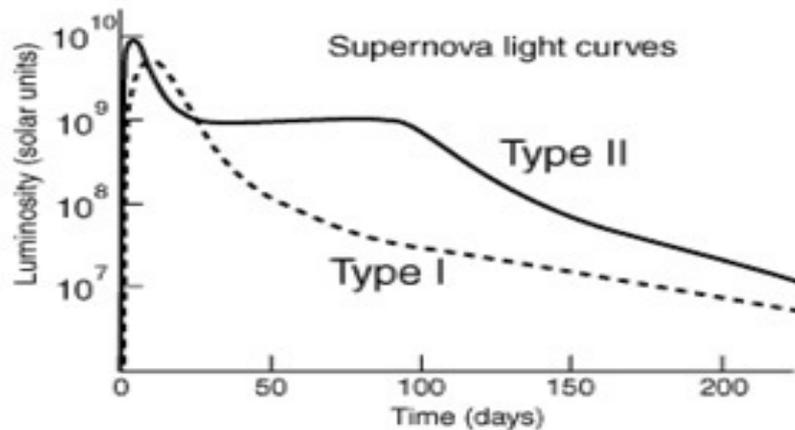


Figura 2.2: Gráfica que muestra la variación en la luminosidad en el transcurso de los días para ambos tipos de supernovas. Nótese que la luminosidad de las supernovas tipo II no presenta una caída tan uniforme en el transcurso de los días como en las supernovas tipo I.

Por su parte, las supernovas tipo Ia no son producidas por la muerte de estrellas masivas como las tipo II, sino que se requiere de una estrella más ligera que haya llegado a su etapa de enana blanca. Al igual que las novas, las supernovas tipo Ia se producen en sistemas de estrellas binarias donde una de las estrellas es una enana blanca y la otra una gigante roja. En estos tipos de sistemas de estrellas binarias cada una de las estrellas se encuentra dentro de una región, donde su campo gravitatorio domina sobre el campo de la otra estrella, llamada lóbulo de Roche. Dado que la fuerza gravitatoria es de alcance infinito, los lóbulos de Roche de ambas estrellas se cruzarán en un punto donde la magnitud de la fuerza gravitatoria de ambas estrellas es igual, conocido como punto de Lagrange. Normalmente un sistema de estrellas binarias alejadas puede mantenerse sin que una de las estrellas interfiera en el estado de la otra. Sin embargo en sistemas donde las estrellas se encuentran más cercanas y una de ellas ha llegado a su etapa de gigante roja, las capas exteriores de la gigante roja pueden sobrepasar su lóbulo de Roche para adentrarse en el lóbulo de Roche de la enana blanca. Una vez pase esto, la enana blanca empezará a robar el material de la gigante que caerá mientras orbita a la enana blanca formando lo que se conoce como un disco de acrecimiento o acreción. La formación ya sea de una nova o de una supernova tipo Ia dependerá tanto de la distancia entre ambas estrellas así como de la velocidad en que la enana blanca absorbe el material de la gigante roja.



Figura 2.3: Formación del disco de acrecimiento debido a la caída de material de la gigante roja sobre la enana blanca. La enana blanca recogerá material de la gigante roja hasta llegar al límite de Chandrasekhar.

Tras esto surge la pregunta, ¿puede la enana blanca absorber todo el material de la gigante roja sin restricción alguna?. Recordemos que mientras la estrella se encuentra fusionando hidrógeno en su secuencia principal y posteriormente fusionando helio en su etapa de gigante roja, las reacciones termonucleares se oponen al colapso gravitatorio del núcleo de la estrella. Sin embargo cuando una estrella menor a 8 masas solares ha agotado el helio que le servía de combustible transformándolo en carbono, el núcleo de la estrella se contrae bajo su propio campo gravitatorio y se convierte en enana blanca. El material se vuelve tan compacto que junta a los electrones ocupando todos los estados cuánticos de baja energía. No obstante, el principio de exclusión de Pauli interviene aquí, evitando que dos o más electrones ocupen el mismo estado cuántico, por lo que los electrones se ven obligados a ocupar estados de mayor energía. Con el principio de exclusión de Pauli haciendo frente al aglutinamiento de los electrones en un mismo estado cuántico, se crea una nueva presión que es independiente de la temperatura, llamada presión de degeneración electrónica que evita un colapso total gravitatorio.

Pero entonces, ¿existe un punto límite en el cual la presión de degeneración electrónica ya no sea suficiente para evitar el colapso gravitatorio?. Efectivamente existe un límite para ello y posiblemente esta fue una pregunta que el mismo Chandrasekhar se hizo. En 1930 el hindú Subramaynyan Chandrasekhar se dio cuenta que para mantener la presión de aquellas enanas blancas, que con la masa absorbida de la gigante roja habían superado la cantidad de $1.4M_{\odot}$, los electrones degenerados tendrían que moverse a velocidades superiores a las de la luz, lo cual entraría en contradicción con la teoría de la relatividad.

De este modo la relatividad impone un límite superior a la masa de estas estrellas antes de que exploten como supernovas tipo Ia, el llamado límite de Chandrasek-

har. Esto resulta de gran importancia dado que todas las enanas blancas que hayan llegado al punto de generar una supernova, tendrán aproximadamente las mismas características y con ello muchas de las propiedades de las explosiones de supernova Ia (como puede ser su luminosidad) serán similares. Esta es la razón de que todas las supernovas tipo Ia tengan aproximadamente la misma luminosidad y entonces puedan ser aprovechadas junto con su enorme brillo a manera de candela estándar.

Algunas de las características de una supernova tipo Ia son:

- Sus explosiones son aproximadamente iguales en luminosidad.
- No expulsan hidrógeno.
- Su magnitud absoluta ronda el valor de $M \approx -19.30 \pm 0.03 + 5 \ln\left(\frac{H_0}{60}\right)$
- La energía emitida se encuentra dentro del intervalo $1 \times 10^{44} J < E < 2 \times 10^{44} J$

Hasta antes de 1998 se creía que el universo se encontraba dominado por una componente de materia y que por ello el universo se encontraba expandiéndose de manera desacelerada, por lo tanto un parámetro de desaceleración positivo ajustaría con este supuesto. Intentando determinar el valor del parámetro de desaceleración, por medio del brillo máximo de las supernovas Ia, fue como dos grupos de investigación independientes, dirigidos por Riess en 1998 y Perlmutter en 1999, lograron determinar que el universo se encuentra en aceleración y con ello que el universo posiblemente esté dominado por un tipo de contenido muy distinto a la materia.

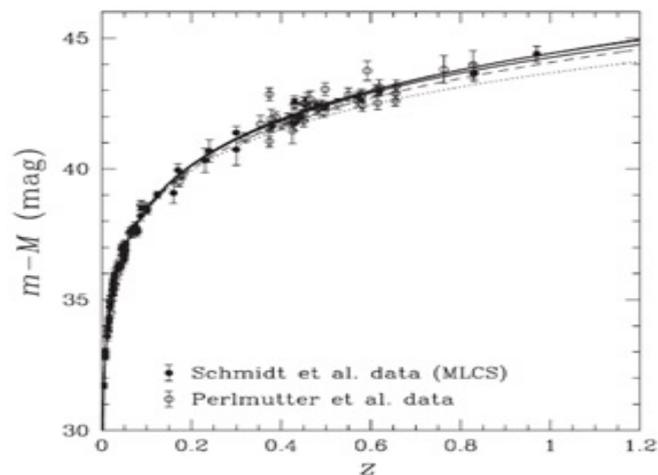


Figura 2.4: Gráfica de la distancia módulo μ contra el corrimiento al rojo z cuyos datos son los usados por los equipos de investigación de Riess (1998) y Perlmutter (1999) [54].

El procedimiento utilizado por ambos grupos consistió en medir el brillo máximo aparente o la magnitud aparente m de varias supernovas Ia para relacionarlo con la distancia a la respectiva supernova. Así mismo, se utilizó el espectro de cada supernova para determinar su corrimiento al rojo y de esta forma relacionar la distancia a la supernova con su corrimiento al rojo z como en un diagrama de Hubble. Generalmente se sustrae el valor de la magnitud absoluta M de una supernova Ia al valor de la magnitud aparente m para obtener la distancia módulo μ de cada supernova y relacionarla con su corrimiento al rojo. En la figura 2.4 se muestra una típica gráfica de μ contra z con los datos utilizados por ambos equipos de investigación, con la cual se determinó la expansión del universo.

Para obtener un modelo que ajuste mejor a los datos de supernovas, como los considerados en la figura 2.4, se suele utilizar la función χ_{SN}^2 . Esta función compara los datos medidos de la distancia módulo μ con los datos predichos por un modelo cosmológico, es decir, con un grupo de valores particulares de los parámetros cosmológicos. La función χ_{SN}^2 está definida como

$$\chi_{SN}^2 = \sum_{i=1}^N \frac{[\mu_{th}(z_i, \Omega_m, \Omega_\Lambda, h, \omega, \dots) - \mu_{obs}(z_i)]^2}{\sigma_{\mu,i}^2} \quad (2.1)$$

donde N es el número de datos de medición, μ_{th} es la distancia módulo predicha teóricamente, μ_{obs} es la distancia módulo medida y $\sigma_{\mu,i}$ hace referencia al error de la medición en la distancia módulo μ_{obs} .

Los valores en los parámetros cosmológicos que minimicen el valor de χ_{SN}^2 se consideran el mejor ajuste a los datos. Para ello se debe recordar que la distancia módulo μ está relacionada con los parámetros cosmológicos por medio de

$$\mu(z_i) = 5 \log_{10}[D_L(z_i)] + \mu_0 \quad (2.2)$$

donde el valor de μ_0 depende de las unidades de D_L . Así mismo D_L depende de los parámetros cosmológicos por medio de la expresión

$$\begin{aligned} D_L &= (1+z)\chi = (1+z)c \int_0^z \frac{1}{H(z')} dz' \\ &= (1+z)c \int_0^z \frac{1}{H_0(\Omega_{m0}(1+z')^3 + \Omega_{\gamma0}(1+z')^4 + \Omega_{K0}(1+z')^2 + \Omega_{\Lambda0})^{\frac{1}{2}}} dz' \end{aligned} \quad (2.3)$$

2.2. Lentes Gravitatorias

Desde hace mucho tiempo se había considerado, dentro del marco de una teoría corpuscular de la luz como la de Newton, que la trayectoria recta de un rayo de luz podría ser desviada a causa de un objeto masivo como el Sol. De acuerdo a la mecánica clásica es claro que una partícula masiva con movimiento rectilíneo pasando cerca de un campo gravitatorio modificará su trayectoria rectilínea, pareciendo que ésta se ha doblado. Sin embargo la teoría de Newton requiere que ambos cuerpos posean una masa distinta de cero, lo cual en base a nuestro conocimiento actual de la luz, sabemos que los fotones poseen una masa igual a cero creándose un problema con la teoría de Newton. No obstante, se puede calcular una desviación de la luz por medio de la mecánica Newtoniana en el límite en el que la masa del fotón tiende a cero.

Albert Einstein propuso una forma completamente nueva de comprender la gravitación basada en similitudes entre la gravedad y un sistema de referencia no inercial acelerado, lo cual se conoce como el principio de equivalencia. Einstein razonó que si la luz parece curvarse en un sistema de referencia acelerado también debería hacerlo en un campo gravitatorio. La predicción de Einstein fue puesta a prueba durante un eclipse de Sol por Arthur Eddington; un día Eddington observó en las islas Príncipe en 1919 que el Sol y la Luna parecían moverse entre dos estrellas, cuando el Sol se encontraba directamente entre ambas estrellas y su luz estaba oculta por la Luna, las estrellas parecieron verse a más distancia una de la otra. Los rayos de luz procedentes de las estrellas resultaron curvados por el campo gravitatorio del Sol. La desviación gravitatoria de la luz por el Sol calculado en la teoría Newtoniana para un fotón masivo resultaba ser de 0.87 arcosegundos. Sin embargo los resultados obtenidos por Eddington estaban en completo acuerdo con la teoría de Einstein dentro de las barras de error, el cual resulta ser el doble del valor calculado en la teoría de Newton, es decir, 1.74 arcosegundos.

Tratando de una manera más matemática estos resultados, consideraremos la ecuación geodésica que describirá la trayectoria seguida por la luz.

$$\frac{d^2 x^\sigma}{d\lambda^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0 \quad (2.4)$$

Si el objeto masivo tiene forma esférica como el Sol, entonces se debe emplear la métrica de Schwarzschild

$$ds^2 = -c^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2) \quad (2.5)$$

Dado que se trata de una simetría esférica, tomaremos el movimiento del rayo de luz dentro de un ángulo polar $\theta = \frac{\pi}{2}$, es decir, en el plano ecuatorial por lo cual la parte angular de la métrica cambiará simplemente a $r^2 d\phi^2$. Utilizando tanto la ecuación de geodésica 2.4, así como la métrica de Schwarzschild 2.5 y haciendo el cambio de variable $\omega = \frac{1}{r}$ se llega a la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{d^2\omega}{d\phi^2} + \omega = 3\frac{GM}{c^2}\omega^2 \quad (2.6)$$

El efecto de la curvatura del espacio-tiempo dado por el lado derecho de la ecuación es muy pequeño para una masa como la del Sol, por lo cual podemos resolver esta ecuación por iteración con lo que a orden cero para una masa $M = 0$ tendríamos la siguiente solución para la ecuación diferencial homogénea resultante

$$\omega_0(\phi) = \frac{\cos(\phi + \phi_0)}{b} \quad (2.7)$$

donde sin pérdida de generalidad podemos tomar el valor inicial del ángulo $\phi_0 = 0$ y donde b es el parámetro de impacto. Para resolver la ecuación diferencial 2.6, sustituiremos la solución de la ecuación homogénea 2.7 en el lado derecho de la ecuación 2.6

$$\frac{d^2\omega}{d\phi^2} + \omega = 3\frac{GM}{c^2}\omega^2 = 3\frac{GM}{c^2}\frac{\cos^2(\phi)}{b^2} \quad (2.8)$$

de la cual se puede obtener la solución particular

$$\omega_{part}(\phi) = \frac{2GM(1 - \cos^2(\phi)/2)}{c^2 b^2} \quad (2.9)$$

por lo cual la solución completa de la ecuación será la suma de la solución homogénea más la solución particular

$$\omega(\phi) = \omega_0(\phi) + \omega_{part}(\phi) = \frac{\cos(\phi)}{b} + \frac{2GM(1 - \cos^2(\phi)/2)}{c^2 b^2} \quad (2.10)$$

La ecuación anterior se puede simplificar debido a que los valores angulares cercanos a $\phi = \pm\frac{\pi}{2}$ representan puntos muy lejanos en el espacio donde $\omega = \frac{1}{r} \rightarrow 0$, así mismo podemos anular el término de $\cos^2(\phi)$ para finalmente representar la ecuación 2.10 a primer orden como

$$\frac{\cos(\phi)_{\phi \approx \pm \frac{\pi}{2}}}{b} + \frac{2GM}{c^2 b^2} = 0$$

$$\cos(\phi)_{\phi \approx \pm \frac{\pi}{2}} = -\frac{2GM}{c^2 b} \quad (2.11)$$

Esto significa que los valores asintóticos de ϕ son $\frac{\pi}{2} + \frac{2GM}{c^2 b}$ y $-\frac{\pi}{2} - \frac{2GM}{c^2 b}$ y por lo tanto la desviación causada por la masa M será

$$\delta = \Delta\phi = \frac{4GM}{c^2 b} \quad (2.12)$$

Si tomamos el parámetro de impacto igual al radio del Sol, lo cual sería para un rayo de luz pasando rasante al Sol y sustituimos los correspondientes valores en 2.12, obtendremos un valor para el ángulo de desviación de 1.74 arcosegundos.

Ahora aprovecharemos el resultado de 2.12 para obtener una ecuación para lentes gravitacionales dentro de una aproximación paraxial, donde el valor de los ángulos utilizados es muy pequeño debido a las grandes distancias que se manejan en estos sistemas. Dentro de esta aproximación usaremos el hecho de que

$$\theta = \frac{s}{r} \quad (2.13)$$

donde θ es el ángulo necesario para abarcar una longitud de arco s a una distancia r de un punto.

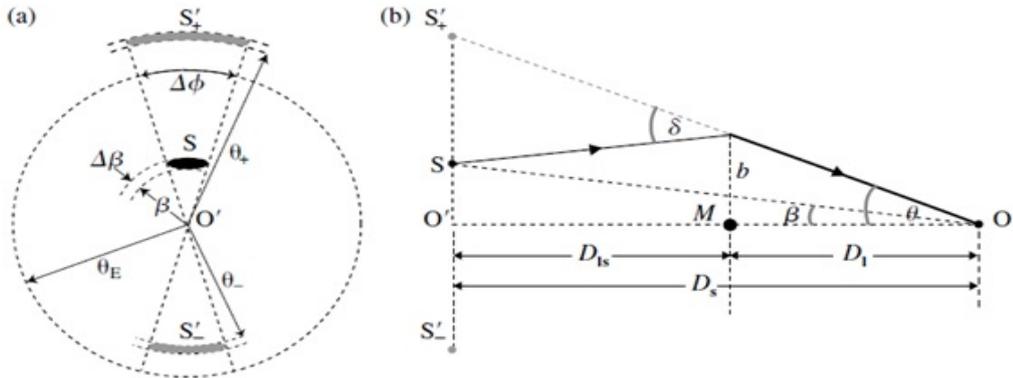


Figura 2.5: Esquema representativo del efecto de lente gravitatoria. Un observador en O observa una fuente de emisión de luz S , sin embargo debido a la presencia de un objeto masivo M a una distancia D_{ls} de la fuente y a una distancia D_l del observador, el rayo de luz procedente de la fuente desvía su trayectoria en un ángulo δ y entonces el observador mira la imagen de S en S'_+ a un ángulo θ con respecto a la recta que lo une con el objeto M [16].

De esta forma, de acuerdo a la ecuación 2.13 y a la figura 2.5 la distancia $S'S$ será igual a

$$S'S = D_s(\theta - \beta) \quad (2.14)$$

Así mismo, $S'S$ también puede ser descrito a través del ángulo δ y nuevamente con ayuda de la ecuación 2.13 como

$$S'S = D_{ls}\delta \quad (2.15)$$

Igualando las ecuaciones 2.14 y 2.15 y despejando δ , obtenemos

$$S'S = D_s(\theta - \beta) = D_{ls}\delta$$

$$\delta = \frac{D_s}{D_{ls}}(\theta - \beta) \quad (2.16)$$

Tanto la ecuación 2.12 como la ecuación 2.16 representan el ángulo de desviación en la trayectoria del rayo de luz. Sin embargo la ecuación 2.12 relaciona esta desviación por medio de cantidades físicas, mientras que la ecuación 2.16 es una expresión meramente geométrica. Igualando las ecuaciones 2.12 y 2.16 y despejando β tenemos

$$\delta = \frac{D_s}{D_{ls}}(\theta - \beta) = \frac{4GM}{c^2b}$$

$$\beta = \theta - \frac{D_{ls}}{D_s} \frac{4GM}{c^2b} \quad (2.17)$$

Nuevamente de acuerdo a la figura 2.5, el parámetro de impacto puede ser escrito dentro de la aproximación paraxial como

$$b \approx D_t\theta \quad (2.18)$$

por lo tanto llegamos a

$$\beta = \theta - \frac{D_{ls}}{D_s D_t} \frac{4GM}{\theta c^2} \quad (2.19)$$

la cual es la ecuación de la lente. En el caso particular en el que la fuente de luz se encuentre perfectamente alineada con el objeto masivo y el observador, el valor del ángulo β será cero y por lo tanto el ángulo de observación aparente de la fuente será

$$\theta_E = \sqrt{\frac{D_{ls}}{D_s} \frac{4GM}{c^2}} \quad (2.20)$$

En este caso el observador mirará una imagen de la fuente de luz con la forma de un anillo, lo cual se conoce como anillo de Einstein. Sin embargo para el caso general en el cual β no necesariamente es cero, la forma de los anillos de Einstein se deforma y se crean dos arcos de la imagen de la fuente en su lugar (figura 2.6). Podemos reescribir la ecuación 2.19 con ayuda de la ecuación 2.20

$$\beta = \theta - \frac{\theta_E^2}{\theta} \quad (2.21)$$

La ecuación 2.21 es una ecuación cuadrática en θ , por lo cual esta ecuación presenta dos soluciones para θ correspondientes a cada arco de la imagen de la fuente. Las soluciones a la ecuación 2.21 serán de la forma

$$\theta_{\pm} = \frac{1}{2} \left(\beta \pm \sqrt{\beta^2 + 4\theta_E^2} \right) \quad (2.22)$$

Una de estas soluciones corresponde a un valor dentro del anillo de Einstein, mientras que el otro valor se encuentra fuera del anillo. Gracias a la ecuación 2.22 es posible calcular la masa del objeto masivo que desvía la luz a partir de la medición del ángulo de los arcos de las imágenes que se forman.



Figura 2.6: Imagen que muestra el efecto de lente gravitatoria fuerte donde aparece la forma del anillo de Einstein.

Estas ecuaciones son muy importantes, ya que nos proveen de una poderosa herramienta para estudiar muchos de los objetos que existen en el universo que producen un efecto gravitatorio considerable. Sin embargo, de acuerdo a Einstein puede darse el caso en que las imágenes enfocadas por la lente no puedan ser resueltas por un ángulo, no obstante tales lentes gravitatorias también pueden producir deformaciones y amplificaciones en las imágenes. Los tipos de lentes gravitatorias dependen de la distancia entre la fuente, la lente y el observador, además de la forma y masa del objeto lente. Es así como de acuerdo a la variación de estos parámetros se tienen diferentes tipos de lentes gravitatorias tales como:

- **Lentes Gravitacionales Fuertes:** Este es el caso que hemos tratado, donde la curvatura de la luz es tan grande que la alineación de la fuente, la lente y el observador pueden generar anillos de Einstein o en su defecto múltiples imágenes en arcos. En este caso la masa de la lente puede ser bastante grande además de que la distancia entre la fuente y la lente es lo suficientemente cercana. Las múltiples imágenes generadas pueden ser resueltas, con lo cual con ayuda de las ecuaciones se puede modelar una distribución de la masa de la lente.
- **Lentes Gravitacionales Débiles:** En este caso la curvatura de la luz es tan pequeña que no logran crearse múltiples imágenes, sin embargo se siguen presentando efectos de distorsión de la imagen como estiramientos y magnificación. Debido a la pequeña distorsión que puede generar este efecto, no es posible detectarlo para una galaxia individual, sin embargo este tipo de lente afecta a muchas galaxias de la misma forma dentro de una zona, pudiéndose hacer un estudio estadístico de las galaxias para detectar su efecto. Teniendo un conocimiento estadístico del tamaño y forma de las fuentes es posible obtener información acerca de la lente.
- **Microlentes Gravitacionales:** En este caso la masa de la lente es tan pequeña como la masa de un planeta generando así que la desviación de la luz por éste sea muy poca. La imagen resultante es tan pequeña o débil que no genera múltiples imágenes, sin embargo los múltiples rayos que convergen aun crean una magnificación en el brillo de la fuente que puede ser detectado.

Tomando en cuenta que la materia oscura posee una interacción gravitatoria detectable, estas ecuaciones pueden ser usadas para realizar un análisis de ella en el universo. Se cree que la materia oscura puede ser tanto materia bariónica como materia no bariónica, dentro de la materia oscura bariónica se encuentran objetos tales como planetas similares a Júpiter, estrellas marrones, etc. los cuales en conjunto se les suele denotar por el nombre de Objetos Masivos de Halo Compacto o simplemente MACHOs. Dado que este tipo de objetos no emite radiación son difíciles de detectar a simple vista. No obstante si el MACHO pasa entre un objeto luminoso y nosotros,

podremos detectar un efecto de microlente gravitacional midiendo un aumento en la intensidad de la luz de la fuente.

Otra participación importante por parte de las lentes gravitatorias en el estudio de la materia oscura ha sido en el análisis de colisiones de cúmulos de galaxias, en particular en el llamado "Bullet Cluster" donde la aplicación del método de lentes gravitatorias pudo mostrar que posterior al choque, la mayor cantidad de la masa del sistema se encontraba en la región exterior (zona morada figura 2.7) mientras que toda la masa debida a la materia luminosa permanecía en el centro (zona rosa figura 2.7). Si la materia oscura fuese una partícula que interactúa débilmente únicamente por medio de la fuerza gravitatoria y nuclear débil, entonces esto dificultaría su interacción con la materia luminosa ordinaria que forma ambos cúmulos, dando como resultado que posterior al choque la materia oscura en cada uno de los cúmulos siguiera su trayectoria debido a la inercia sin interactuar, separando así la materia oscura de la materia ordinaria.



Figura 2.7: Imagen del Bullet Cluster, la mayor cantidad de masa del sistema se encuentra en la zona morada de la imagen, mientras que la materia debida a la materia luminosa se ha quedado en el centro. Imagen de <http://chandra.harvard.edu/photo/2006/1e0657/>.

La técnica de lentes gravitatorias ha sido usada en los últimos años para crear mapas de la materia oscura y estudiar la forma que ésta adquiere en ciertas zonas. Es así como la teoría de las lentes gravitatorias forma parte esencial en este estudio.

Capítulo 3

Radiación de Fondo Cósmico de Microondas CMB

3.1. La Radiación de Fondo Cósmico de Microondas (CMB)

El descubrimiento de la radiación de fondo cósmico de microondas en 1965 por parte de Arno Penzias y Robert Woodrow Wilson y posteriormente corroborado por los satélites COBE (Cosmic Background Explorer) (1989 – 1992), WMAP (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe) (2001 – ...) y actualmente por el satélite Planck (2009 – ...), constituye una prueba fehaciente a la teoría del Big Bang propuesta por George Gamow al poder demostrar muchos de los resultados predichos por esta teoría, un ejemplo de ello es la determinación de la temperatura de la radiación de fondo. Así mismo, la radiación de fondo nos permite cambiar el carácter de hipótesis del principio cosmológico, de una suposición en la que se basa la cosmología estándar a un hecho real.

Actualmente la radiación de fondo cósmico de microondas tiene implicaciones que van más allá, haciendo uso de ella con el fin de resolver uno de los problemas más enigmáticos de la cosmología, es decir, el de la energía oscura y la materia oscura. Desde hace ya unos años, se emplean técnicas de análisis a la radiación de fondo con el fin de poder determinar las proporciones de los diferentes parámetros cosmológicos. Sin embargo, para poder entender mejor las características del fondo cósmico y la manera en que ésta se analiza, es conveniente dar un panorama general del ambiente en el que la radiación de fondo se originó, así como del preámbulo que sienta las bases del origen de ésta.

3.1.1. Las Primeras Etapas del Universo y el Origen del Fondo Cósmico de Microondas

Los Primeros Momentos del Universo

La expansión del universo desde el momento inicial del Big Bang con una temperatura enorme, trajo consigo un correspondiente enfriamiento que ha llevado a los constituyentes del universo a pasar por varias etapas que caracterizan las épocas del universo. En general se pueden describir estas etapas por medio del tiempo transcurrido después del Big Bang, su temperatura y/o su energía de la siguiente manera:

- Tiempo de Planck: Transcurrido a un tiempo $\sim 10^{-44}s$ con una energía $\sim 10^{19}GeV$ y una temperatura de $\sim 10^{32}K$:
 - No se tiene un conocimiento claro de lo sucedido.
 - Se ha trabajado teóricamente por intentar entender esta época pero sin pruebas suficientes que corroboren las teorías.
 - Se cree que en este momento las fuerzas fundamentales se encontraban unificadas.
 - Los aceleradores de partículas actuales aun no son capaces de llegar a estas energías.

- Inflación, transcurrido en un intervalo de tiempo de $\sim 10^{-35}s - 10^{-32}s$ con una energía del orden de $\sim 10^{15}GeV$ y una temperatura de $\sim 10^{28}K$:
 - El universo, de ser del tamaño de un átomo, sufre una repentina expansión exponencial.
 - La gravedad se separa de la unificación de fuerzas.
 - Los aceleradores de partículas tampoco han sido capaces de alcanzar la energía de esta época.
 - A pesar de no poder llegar a las energías de esta época a través de los aceleradores convencionales, la inflación es aceptada como parte del modelo estándar de la cosmología.
 - La hipótesis de la inflación, provee una explicación natural a diversos problemas de la cosmología como lo son el problema del horizonte y de la planitud.
 - La inflación provee de las primeras irregularidades en el universo que posteriormente dieron origen a las estructuras.

- Post-inflación, transcurrido en un intervalo de tiempo de $10^{-32}s - 10^{-6}s$ con una energía entre $\sim 10^{15}GeV - 10^{-1}GeV$ y una temperatura en el rango de $\sim 10^{27}K - 10^{12}K$:
 - Se genera un recalentamiento debido a que la energía potencial del campo inflatón se transforma en energía en forma de calor, generando así un plasma de partículas relativistas.
 - Se crea un conglomerado de distintas partículas (y sus respectivas anti-partículas) como electrones, muones, taones, neutrinos y quarks, y diversos bosones de norma como fotones, gluones y los bosones Z y W^\pm .
 - Hay una separación de las fuerzas en gravitatoria, electrodébil y fuerte.
 - Dentro de esta transición de energías los aceleradores ya son capaces de llegar, más no a la energía máxima de esta época.
 - Se empiezan a eliminar partículas con sus respectiva antipartícula.

- Bariogénesis, transcurrido en un intervalo de tiempo de $10^{-6}s - 1s$ con una energía entre $\sim 10^{-1}GeV - 10^{-4}GeV$ y una temperatura en el rango de $\sim 10^{12}K - 10^9K$:
 - El plasma quark-gluon forma hadrones, en particular los bariones protón y neutrón.
 - Los neutrinos se desacoplan, viajando libremente por el espacio.
 - Al final de la etapa solamente electrones, protones, neutrones y fotones se encuentran acoplados.

- Nucleosíntesis, efectuada a los $\sim 3min$ de edad del universo con una energía entre $\sim 10^{-4}GeV - 10^{-5}GeV$ y una temperatura en el rango de $\sim 10^9K - 10^8K$:
 - Los protones y neutrones generados en la época anterior se unen para formar núcleos de iones de hidrógeno, helio y muy pocos núcleos de litio y berilio.
 - La proporción de hidrógeno es cerca del 75 % del total formado, mientras que el helio forma casi el 25 %. La contribución del litio y el berilio es mínima y no llega ni siquiera a ser del 1 %.
 - Finalizando esta época, la temperatura disminuyó lo suficiente para que cesasen las reacciones nucleares de fusión y ya no se produjeran los elementos más pesados.

- Igualdad Radiación-Materia, transcurrido en un tiempo cercano a $\sim 60000años$, equivalente a un corrimiento al rojo de $z \sim 3402$ de acuerdo al satélite Planck, con una energía aproximada de $\sim 1eV$ y una temperatura de $\sim 4300K$:

- Se crea la transición entre un universo primeramente dominado por radiación para posteriormente ser dominado por materia. Por lo tanto, en esta época la densidad de radiación es igual a la densidad de materia.
- Recombinación, transcurrido aproximadamente entre el intervalo de tiempo de $300000años - 400000años$ y en z equivalente a $910 \leq z_{rec} \leq 1340$, con etapas especiales de última dispersión $z = 1065$ y desacople a $z \approx 890$ equivalente a una edad de $380000años$ con una energía de $\sim 0.1eV$ y una temperatura de $\sim 3000K$:
 - Época formada por un plasma de fotones y bariones (se incluyen los electrones, por convención en cosmología, dentro de los bariones).
 - Los electrones empiezan a combinarse con los núcleos para formar átomos.
 - El universo llega a ser transparente y los fotones son libres para viajar desde ese entonces por todo el espacio como la radiación de fondo cósmica que observamos a través de los detectores. Esta época es la de principal importancia a tratar en este trabajo y será discutida con mayor profundidad posteriormente.
- Formación de Estructuras y Reionización, transcurrido aproximadamente entre $\sim 0.1 - 13.7Gaños$ de edad del universo, con una energía de $\sim 10^{-12}GeV$ y una temperatura de $\sim 15K$:
 - El universo se encuentra dominado por materia.
 - La fuerza gravitatoria empieza a juntar el gas de hidrógeno y helio para empezar a formar estructuras.
 - Se crean estrellas, galaxias y cúmulos de galaxias.
 - Se generan las primeras supernovas.
 - Al corrimiento al rojo $z \sim 11.35$ (Planck), se calcula hubo una reionización posiblemente debida a las primeras estrellas de población III, quasares y posiblemente también supernovas. Esta es una de las causas de anisotropía secundaria.
- Expansión Acelerada, época actual que abarca aproximadamente un corrimiento al rojo entre $0 \leq z \leq 0.4$, con una energía de $2.3 \times 10^{-13}GeV$ y una temperatura característica de la radiación de fondo de $2.725K$:
 - El universo se encuentra dominado por energía oscura y comienza una expansión acelerada.

Las figuras 3.1 y 3.2 muestran de manera gráfica los eventos principales de cada época del universo, su tiempo y su temperatura.

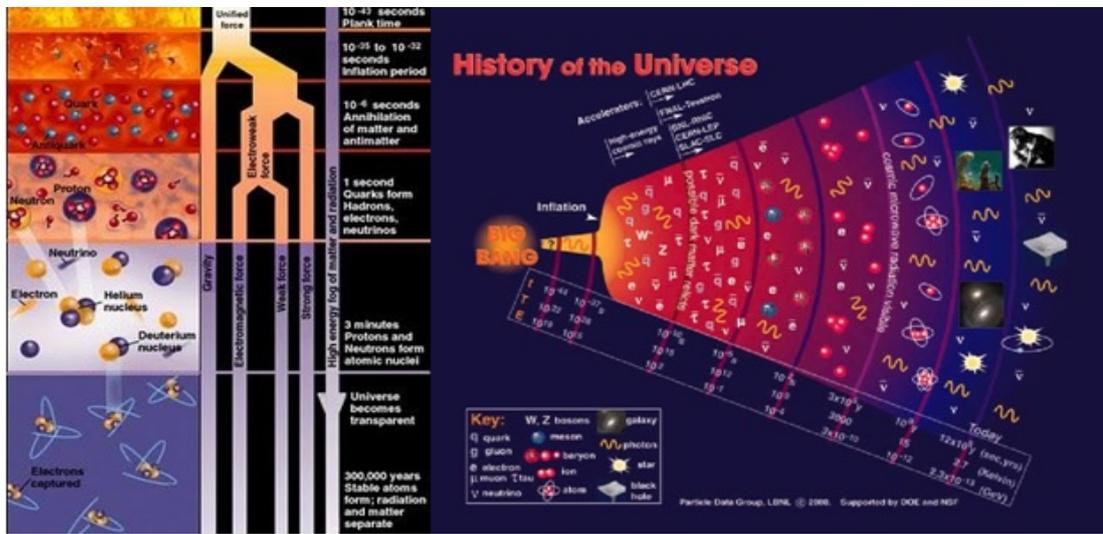


Figura 3.1: Imagen de la historia del universo. Del lado izquierdo se observa la separación de las fuerzas fundamentales en el transcurso de las épocas. Del lado derecho se muestra el tiempo, temperatura y energía de cada época.

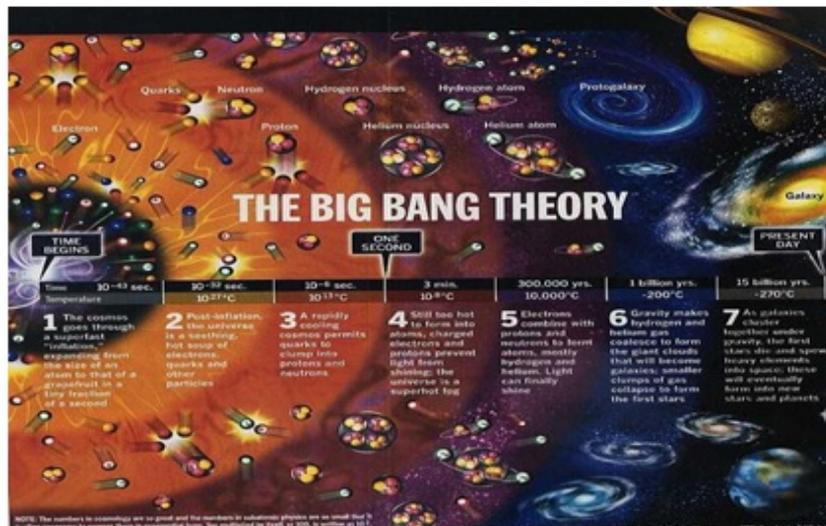


Figura 3.2: Otra imagen acerca de la historia del universo.

El Plasma Fotón-Barión

Una vez mostradas las características principales de la evolución del universo, podemos centrar nuestro análisis a la época de recombinación entendiendo sus condiciones iniciales, tales como las irregularidades iniciales de las fluctuaciones cuánticas producidas desde la inflación, como resultado de las épocas previas del universo. Así mismo, la rápida revisión de las épocas siguientes da una idea de las consecuencias que los fenómenos producidos en la época de recombinación llevan consigo.

Después de la nucleosíntesis, el universo se encuentra constituido por materia bariónica y radiación, donde por materia bariónica nos referimos a los núcleos de iones de hidrógeno y helio principalmente, formados por protones y neutrones. Además se considera por convención en cosmología incluir a los electrones dentro de la categoría de bariones a pesar de que estrictamente estos no son bariones sino leptones. Por lo tanto, el universo se hallaba atestado de un plasma comprendido por fotones y bariones, o de otra forma, por un plasma de fotones, electrones y nucleones.

Mientras el plasma fotón-barión se mantuvo a una temperatura superior a $3000K$, los fotones estuvieron fuertemente acoplados a los bariones. Sin embargo, estrictamente hablando los fotones interactúan sólo con los electrones mediante el límite a baja energía de la dispersión de Compton, es decir, mediante dispersión de Thomson. Por otro lado, el acoplamiento con los protones viene del hecho de que los electrones interactúan con los protones por medio de la fuerza de Coulomb. De esta forma cuando fotones y electrones sufrían dispersión Thomson, los electrones jalaban consigo a los protones por su interacción eléctrica, manteniendo a todos los componentes del plasma en un mismo movimiento como si de un sólo fluido se tratase.

Asimismo, la presencia de regiones con una ligera sobre densidad tenderán a acumular más materia bariónica por atracción gravitatoria. Estas sobre densidades son el producto de las fluctuaciones cuánticas generadas en el universo temprano y que han ido aumentando debido a su inestabilidad gravitatoria. Ya que la cantidad de materia oscura domina sobre la cantidad de materia bariónica, se considera que los pozos de potencial gravitatorios, donde tiende a acumularse toda la materia, son generados principalmente por materia oscura. En otras palabras, el plasma fotón-barión es atraído por los pozos de potencial de materia oscura.

Sin embargo al aumentar la densidad de materia bariónica, también se aumenta la densidad de radiación. Como se ha visto ya, a diferencia de las partículas no relativistas cuya ecuación de estado nos dice que no ejercen presión alguna, las partículas relativistas si la ejercen, siendo ésta igual a $P = \frac{1}{3}\rho c^2$. Es así como entre más se acumule el plasma de fotón-barión dentro de los pozos de potencial gravitatorios de la materia oscura, mayor es la densidad de radiación y con ello la presión de radiación. Por lo tanto, no se puede comprimir la componente fotónica del plasma fotón-barión

sin experimentar una presión de radiación. Esta presión de radiación crea una fuerza que se opone a la caída del plasma a los pozos de potencial. Cuando la fuerza ejercida por la presión de radiación aleja al plasma fotón-barión del centro del pozo de potencial, la densidad del plasma disminuye y por consiguiente su presión de radiación, por lo que la fuerza gravitatoria del pozo de potencial vuelve a ser dominante y atrae nuevamente al plasma hacia su interior.

Por consiguiente, mientras la fuerza gravitatoria del pozo de potencial de la materia oscura trata de juntar al plasma fotón-barión en su centro, la fuerza producida por la presión de radiación se opone a ello, dando como resultado el origen de una serie de oscilaciones en el fluido fotón-barión conocidas como oscilaciones acústicas de bariones. La figura 3.3 muestra un esquema de lo sucedido al plasma fotón-barión debido a la interacción con los pozos de potencial gravitatorio de materia oscura y a la presión de radiación.

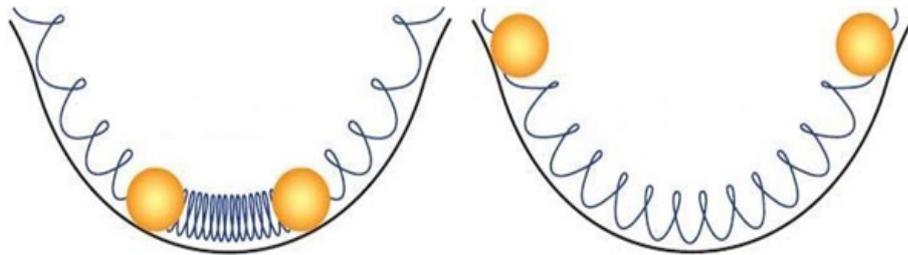


Figura 3.3: Esquema sencillo que muestra la competencia entre la atracción debida a los pozos de potencial y la presión de radiación.

Estas oscilaciones continuaron hasta que la constante expansión del universo realizada durante los 380,000 años de edad del universo hasta llegar a la época de recombinación, equivalente a un corrimiento al rojo aproximado de $z = 1100$, produjo que el universo alcanzara una temperatura de $3000K$. A esta temperatura los fotones con una energía necesaria para ionizar un átomo de hidrógeno son muy escasos y los electrones pueden juntarse con los protones (o los núcleos de los iones producidos en la época de nucleosíntesis) para formar átomos neutros de hidrógeno, helio, litio y berilio sin que la dispersión de Thomson lo evite. Cabe señalar, que pese a que la literatura llama a esta época donde electrones y protones se unen para formar átomos neutros por el nombre de recombinación, este nombre no es del todo adecuado debido a que los electrones y los protones (o núcleos de iones) nunca antes se habían juntado para formar átomos neutros.

Desde el momento en que los fotones se dispersan por última vez con los electro-

nes, los fotones se desacoplan de ellos y son libres para viajar por todo el espacio hasta nuestros días formando la radiación de fondo cósmico de microondas, donde la expansión del universo ha reducido su temperatura hasta el valor de $2.725K$. Es así como se dice que a partir de ese momento el universo llega a ser visible, pues antes la radiación electromagnética no era libre para viajar por el espacio y por ello el universo antes de esa época se considera opaco. De esta forma, el momento en que los fotones de la radiación de fondo cósmico de microondas tuvieron su última dispersión de Thomson, nos da un límite máximo al cual podemos llegar a apreciar al universo a través de esta radiación. La era de la recombinación proporciona un límite observacional crucial más allá del cual no podemos esperar ver usando radiación electromagnética.

El punto de último contacto con la materia forma un cascarón esférico nombrado “la superficie de última dispersión”. Es importante mencionar que la superficie de última dispersión no es única y que ésta depende del observador que la mire, por lo que a diferentes observadores, diferentes superficies de última dispersión. Finalmente los procesos de recombinación, desacople y última dispersión no suceden instantáneamente y al mismo tiempo, por este motivo la superficie de última dispersión será una cáscara con un grosor Δz en el corrimiento al rojo medio al que se mida.

La Física de la Era de la Recombinación, la Última Dispersión y del Desacoplamiento

En ocasiones los nombres de época de recombinación, desacople y última dispersión son usados de forma indistinta debido a su cercanía temporal, sin embargo esto no es lo más correcto ya que existe una clara distinción entre los tres eventos.

- La época de la recombinación se define como el tiempo en el que el 90% de los electrones se han combinado con los núcleos de iones para formar átomos neutros, lo cual ocurre a un corrimiento al rojo dentro del intervalo $910 \leq z_{rec} \leq 1340$.
- La última dispersión se define como el momento en el cual los fotones empiezan a viajar libremente, lo cual ocurre a un corrimiento al rojo de $z_{LS} = 1065 \pm 80$.
- El desacoplamiento se define como el tiempo en el que la tasa de reacción de dispersión Γ cae por debajo de la tasa de expansión del universo y la materia se desprende del equilibrio térmico con los fotones. Esto ocurre a un corrimiento al rojo aproximado de $z_{dec} \approx 890$.

Si la recombinación se hubiera dado de manera instantánea, los tres procesos habrían coincidido en el mismo valor de z . Sin embargo esto no se cumple y para

determinar el momento en que sucedió cada uno se debe usar su respectiva definición. Una manera sencilla de simplificar estos cálculos es considerando que todos los átomos que se forman son de hidrógeno. Aunque parezca normal que la temperatura de recombinación debería ser aquella en la cual la energía media por fotón sea equivalente a la energía de enlace del hidrógeno ($13.6eV$), esto no es así por la siguiente razón.

Los fotones se mantienen en equilibrio térmico con los electrones y protones a una temperatura T mientras sigan dispersándose con los electrones. Como resultado de este equilibrio térmico, los fotones tienen un espectro de cuerpo negro, donde el número de fotones con una frecuencia ν por unidad de volumen e intervalo de frecuencia es

$$n_\gamma(\nu)d\nu = \frac{8\pi}{c^3} \frac{\nu^2 d\nu}{\exp \frac{h\nu}{k_B T} - 1} \quad (3.1)$$

Para determinar la energía promedio por fotón, se procede a calcular el número de fotones de todas las frecuencias por unidad de volumen N_γ y la densidad de energía total de los fotones ϵ_γ

$$N_\gamma = \int_0^\infty n_\gamma(\nu)d\nu = \zeta(3) \frac{2}{\pi^2} \left(\frac{k_B T}{c\hbar} \right)^3 \cong 1.202 \frac{2}{\pi^2} \left(\frac{k_B T}{c\hbar} \right)^3 \quad (3.2)$$

$$\epsilon_\gamma = \int_0^\infty h\nu n_\gamma(\nu)d\nu = \frac{\pi^2 k_B^4 T^4}{15 c^3 \hbar^3} \equiv a_s T^4 \quad (3.3)$$

donde $\zeta(3) \approx 1.202$ es la función zeta de Riemann y $a_s = 4723eVm^{-3}K^{-4}$. La energía media por fotón vendrá dada como

$$\langle E \rangle = \frac{\epsilon_\gamma}{N_\gamma} = \frac{\int_0^\infty h\nu n_\gamma(\nu)d\nu}{\int_0^\infty n_\gamma(\nu)d\nu} = \frac{\pi^4 k_B T}{30(1.202)} \approx 2.7k_B T \quad (3.4)$$

Por lo tanto, un fotón con una energía promedio igual a la energía de ligadura del hidrógeno de $13.6eV$, tendrá una temperatura de $58452K$ lo cual excede por mucho a la temperatura dada en la época de recombinación. La razón de esto se debe a que se está omitiendo el hecho de que existen muchos más fotones que bariones, a pesar de que la recombinación se efectúa en la época en la que el universo es dominado por materia. Por ende, existirán aun muchos fotones en la región de alta energía del espectro de cuerpo negro capaces de ionizar el hidrógeno.

En el momento en el que las interacciones entre partículas se vuelven despreciables, ya no hay nada que varíe la cantidad de éstas en el espacio, ya que las partículas no

pueden simplemente desaparecer. Sin embargo, la densidad numérica de las partículas dependerá del factor de escala como $n \propto \frac{1}{a^3}$ por la expansión del universo. Dicho esto, el cociente de las densidades numérica de bariones y fotones será una constante ya que tendrán la misma dependencia con el factor de escala y ambas se cancelarán.

Usando el valor de la temperatura actual del CMB ($T = 2.725K$) en la ecuación 3.2 se tiene $n_{\gamma 0} = 4.1 \times 10^8 m^{-3}$. Usando el valor del parámetro de densidad de bariones $\Omega_{b0} = 0.04$, la densidad de energía bariónica es $\epsilon_b = \rho_b c^2 = \Omega_b \rho_c c^2 = 3.3 \times 10^{-11} \frac{J}{m^3}$, por lo que combinándolo con la masa del protón y del neutrón de aproximadamente $939MeV$ se obtiene $n_{b0} = 0.22 m^{-3}$. Por lo tanto la tasa de barión-fotón η en el universo desde aquella época hasta nuestros días es de

$$\eta = \frac{n_{b0}}{n_{\gamma 0}} \approx 5.36 \times 10^{-10} \quad (3.5)$$

Lo cual quiere decir que aunque la densidad de energía de bariones sea mayor a la densidad de radiación electromagnética, sigue habiendo más fotones que bariones, apoyando el argumento de por qué no es correcta la suposición de tomar una energía promedio por fotón de $13.6eV$.

Una mejor aproximación se consigue mediante el empleo de la ecuación de Maxwell-Boltzmann para la densidad numérica de las partículas no relativistas

$$n_x = g_x \left(\frac{m_x k_B T}{2\pi \hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} \exp \left(- \frac{m_x c^2}{k_B T} \right) \quad (3.6)$$

donde g_x hace referencia a los grados de libertad dados por el espín de la partícula, por lo que $g = 2$ para electrones, protones y $g = 4$ para el hidrógeno. En este caso, se usa la ecuación 3.6 para relacionar la densidad numérica de los electrones, protones y átomos de hidrógeno formados. La ecuación resultante se conoce como ecuación de Saha

$$\frac{n_H}{n_p n_e} = \left(\frac{m_e k_B T}{2\pi \hbar^2} \right)^{-\frac{3}{2}} \exp \left(\frac{Q}{k_B T} \right) \quad (3.7)$$

donde $Q = 13.6eV$ es la energía para ionizar al hidrógeno cuando el electrón está en su estado base. Para hacer congruente la ecuación de Saha con la definición de la época de recombinación, se define la ionización fraccional X como

$$X \equiv \frac{n_p}{n_p + n_H} = \frac{n_p}{n_b} = \frac{n_e}{n_b} \quad (3.8)$$

donde X toma el valor $X = 1$ para una ionización completa y $X = 0$ cuando ya no hay ionización. Por lo cual combinando la ionización fraccional X 3.8, la tasa barión-fotón η 3.5 y la ecuación de Saha 3.7, se tiene

$$\frac{1 - X}{X^2} = 3.84\eta \left(\frac{k_B T}{m_e c^2} \right)^{\frac{3}{2}} \exp \left(\frac{Q}{k_B T} \right) \quad (3.9)$$

La recombinación se define como el momento en el que el 90 % de los electrones se han combinado para formar átomos neutros, por lo tanto esto corresponde a un valor de $X = 0.1$ de donde se infiere, después de resolver numéricamente la ecuación, que la temperatura a la cual sucede esto es de $T = 3430K$, equivalente a $z = 1258$ y a una edad del universo de $290,000años$.

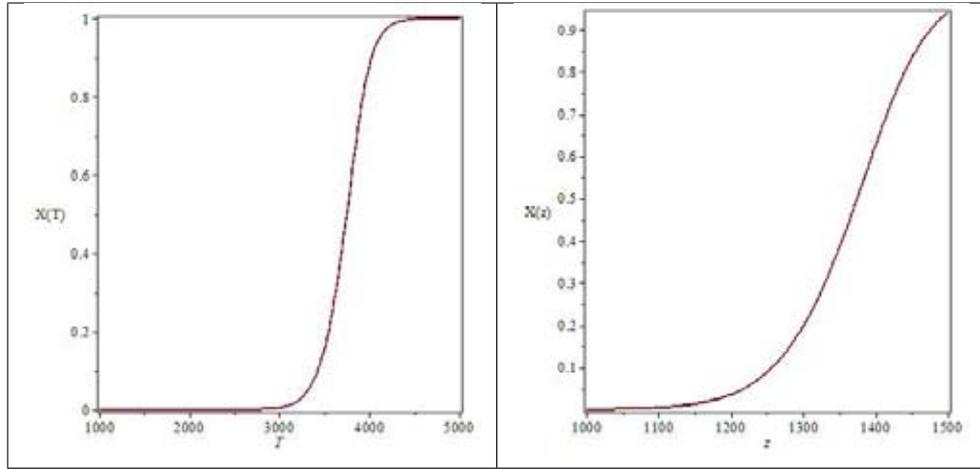


Figura 3.4: A la izquierda una gráfica de la ionización fraccional contra la temperatura, mientras que a la izquierda se grafica la ionización fraccional contra z

Por otro lado, el desacoplamiento se da cuando el camino libre medio $\lambda_\gamma = \frac{1}{n_e \sigma}$ entre fotones y electrones es mayor que el radio de Hubble $R_H = \frac{c}{H}$ y por lo tanto la distancia necesaria para que interactúen se vuelve mayor que la distancia de una sección del universo causalmente conectada, por lo que ya no alcanzan a interactuar. Dicho de otro modo, la frecuencia en las reacciones de dispersión cae por debajo de la tasa de expansión del universo, donde la tasa de reacción de dispersión Γ esta dada como

$$\Gamma = \left\langle \frac{c}{\lambda} \right\rangle = \langle n v \sigma(E) \rangle \quad (3.10)$$

siendo $\sigma(E)$ la sección eficaz con unidades de m^2 y v la velocidad de la partícula, en este caso la velocidad c del fotón. Por lo tanto, una determinación del corrimiento al rojo al cual sucede el desacoplamiento requiere igualar el valor de la tasa de reacción de dispersión con el parámetro de Hubble, ambos con una dependencia del corrimiento al rojo z . La tasa de reacción de dispersión $\Gamma(z)$ dependiente del corrimiento al rojo es

$$\Gamma(z) = n_e(z)\sigma_e c = X(z)(1+z)^3 n_{b0}\sigma_e c = 4.4 \times 10^{-21} s^{-1} X(z)(1+z)^3 \quad (3.11)$$

Esta expresión de $\Gamma(z)$ se puede igualar con la expresión 1.95 para obtener numéricamente un valor de $z = 1130$. Sin embargo, se puede demostrar que considerando un universo dominado por materia en la ecuación de Friedmann (como se supone debió ser en dicha época), el corrimiento al rojo en el momento del desacoplamiento es

$$1 + z_{dec} = \frac{43}{X(z_{dec})^{\frac{2}{3}}} \quad (3.12)$$

el cual concuerda con un valor de 1130.

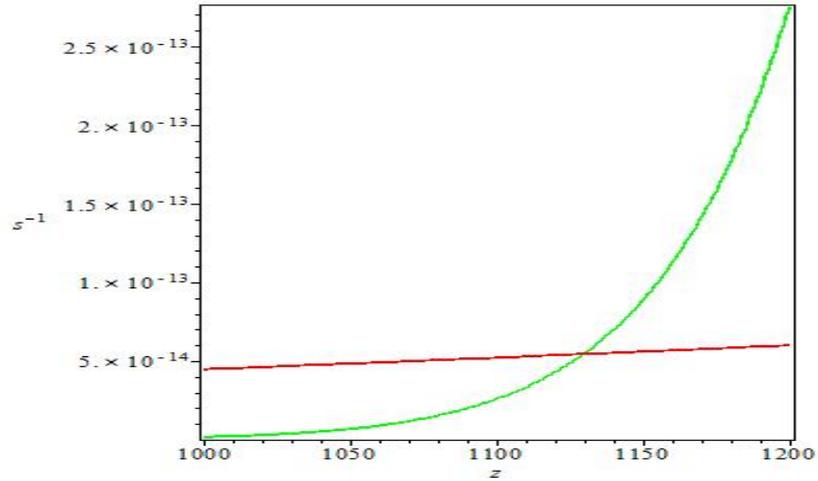


Figura 3.5: Gráfica de la evolución de la tasa de dispersión y del parámetro de Hubble con respecto a z .

Finalmente para tratar el momento de la última dispersión, es útil emplear una definición adicional que muestre el número de dispersiones que ha sufrido un fotón desde un tiempo t hasta ser detectado por nosotros en t_0 , llamado profundidad óptica τ y cuya relación es

$$\tau(t) = \int_t^{t_0} \Gamma(t) dt \quad (3.13)$$

donde el tiempo para el cual $\tau = 1$ es el momento de la última dispersión. Haciendo algunas sustituciones se puede llegar a expresar a la profundidad óptica en términos de z como

$$\tau(z) = \int_0^z \frac{\Gamma(z')}{H(z')(1+z')} dz' = 0.0035 \int_0^z X(z')(1+z')^{\frac{1}{2}} dz' \quad (3.14)$$

Cabe señalar que la utilización de $X(z)$ por medio de la ecuación de Saha no es del todo adecuado, ya que la ecuación de Saha sólo aplica cuando la reacción de fotoionización $H + \gamma \leftrightarrow p + e^-$ se encuentra en equilibrio. Sin embargo para fines prácticos el valor en z de la última dispersión debe ser muy semejante al del momento de desacoplamiento.

Después de la dispersión de un fotón con uno de los electrones, el fotón queda polarizado. Esta polarización es una característica importante ya que la polarización que tengan los fotones del CMB será la debida a su última dispersión con los electrones, es decir, a la realizada en la época de la última dispersión. Por lo tanto la polarización resulta ser una de las características deseables a medir en el CMB para estudiar estas épocas. Lamentablemente la detección de la polarización no es tan fácil. No obstante su temperatura resulta ser todo lo contrario y es otra de las características importantes a detectar del CMB.

3.1.2. Tratamiento Matemático de la Radiación de Fondo

Características de la Radiación de Fondo Cósmico de Microondas.

Tras las observaciones realizadas al fondo cósmico de microondas por los diversos experimentos algunos de los resultados a resaltar son:

- El espectro de la radiación de fondo cósmica de microondas es muy similar al de un cuerpo negro, e incluso resulta ser el cuerpo negro más perfecto que se haya generado. Como ya se había mencionado antes, en la recombinación el espectro de la radiación ya era parecida al de un cuerpo negro con una temperatura cercana a $3000K$ y ha mantenido su forma hasta nuestros días, únicamente recorriendo su espectro hacia la región de las microondas.
- La radiación de fondo presenta una anisotropía dipolar, por lo que su temperatura varía ligeramente de tal forma que se encuentra máximamente corrida

al azul en una dirección del cielo y máximamente corrida al rojo en la dirección contraria. Esta anisotropía se debe a un corrimiento Doppler debido al movimiento del satélite de observación alrededor de la Tierra a 8km s^{-1} , el movimiento de la Tierra alrededor del Sol a 30km s^{-1} , el movimiento del sistema solar alrededor de la galaxia a 220km s^{-1} y el movimiento de la galaxia con respecto a nuestro grupo local de 80km s^{-1} , el cual a su vez se dirige hacia el supercúmulo de Hydra-Centaurus en la constelación de Virgo a una velocidad de 630km s^{-1} . El CMB muestra la existencia de un sistema de referencia no en reposo para el cual el CMB es isotrópico y por lo tanto es comóvil con la expansión del universo.

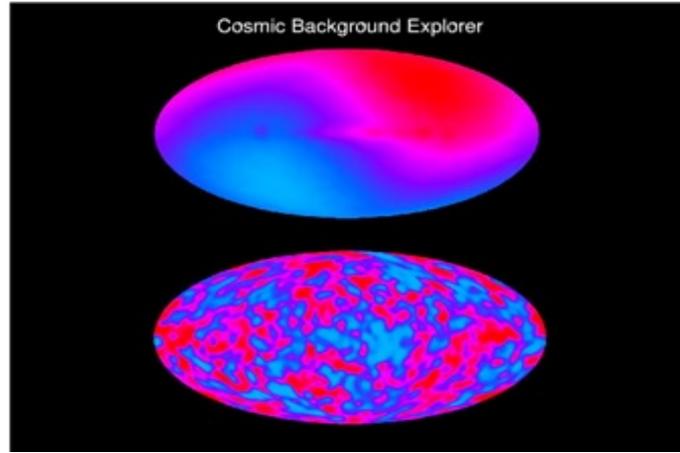


Figura 3.6: Imagen que muestra el efecto generado por la anisotropía dipolar en el mapa de anisotropías. La imagen de arriba considera la anisotropía dipolar mientras que la de abajo no lo hace.

- Después de remover la anisotropía dipolar, persisten pequeñas fluctuaciones en la temperatura del CMB. Al promediar la temperatura del CMB en cada punto en el cielo, se obtiene una temperatura promedio del CMB de

$$T_0 = \langle T \rangle = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi T(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi = 2.725\text{K} \quad (3.15)$$

Con esta temperatura promedio actual del CMB podemos calcular la densidad de energía y la energía promedio por fotón del CMB hoy en día por medio de las ecuaciones 3.3 y 3.4 dando como resultado $\epsilon_\gamma = 4.17 \times 10^{-14} \text{J m}^{-3} = 2.6 \times 10^5 \text{eV m}^{-3}$ y $\langle E \rangle = 1.01 \times 10^{-22} \text{J} = 6.34 \times 10^{-4} \text{eV}$.

Descripción a través de Armónicos Esféricos

Uno de los estudios más importantes que se realizan al CMB son los hechos a su temperatura $T(\theta, \phi)$, dirigidos especialmente a la medición de sus fluctuaciones con respecto a la temperatura promedio $\langle T \rangle$, definiendo así las anisotropías del CMB $\frac{\Delta T}{T}$ en un punto de coordenadas (θ, ϕ) como

$$\frac{\Delta T}{T}(\theta, \phi) = \frac{T(\theta, \phi) - \langle T \rangle}{\langle T \rangle} \quad (3.16)$$

donde los cálculos arrojan que después de eliminar la anisotropía dipolar de los datos, la fluctuación de temperatura raíz cuadrática media del CMB es muy pequeña, del orden de

$$\left\langle \left(\frac{\Delta T}{T} \right)^2 \right\rangle^{\frac{1}{2}} = 1.1 \times 10^{-5}$$

Los satélites empleados para el estudio de las fluctuaciones de temperatura tienen dos secciones por donde son detectados los fotones del CMB provenientes de dos regiones separadas por un ángulo θ . Estos satélites poseen un límite angular en su resolución, el cual permite observar con mayor detalle las anisotropías. Por ejemplo, la resolución del satélite COBE era de apenas 7° , lo cual significa que los detalles en las anisotropías a escalas menores a estos 7° no eran tan claros pues entre más chico sea el límite angular de resolución más precisa será la imagen de las fluctuaciones. Esta distancia angular puede ser relacionada con una distancia sobre la superficie de última dispersión por medio de la definición de distancia angular 1.77.

Dada la limitación en la resolución de los instrumentos de medición para detectar con claridad las anisotropías del CMB a cualquier ángulo, resulta conveniente emplear la simetría esférica que implica el problema del análisis de los fotones provenientes de la superficie de última dispersión para expresar las anisotropías por medio de una expansión en serie de armónicos esféricos.

$$\frac{\Delta T}{T}(\theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{lm} Y_m^l(\theta, \phi) \quad (3.17)$$

donde los coeficientes a_{lm} dan información acerca del tamaño de las anisotropías a diferentes escalas angulares.

Análisis Estadístico y la Función de Correlación

Con el fin de poder comparar los resultados observacionales con la teoría no es importante conocer el patrón exacto de las fluctuaciones sino sus propiedades estadísticas. Una manera de conseguir esto es por medio de la función de correlación $C(\theta)$ definida como

$$C(\theta) = \left\langle \frac{\Delta T}{T}(\hat{m}) \frac{\Delta T}{T}(\hat{n}) \right\rangle_{\hat{m} \cdot \hat{n} = \cos \theta} \quad (3.18)$$

La función de correlación se encarga de realizar el producto de las irregularidades $\frac{\Delta T}{T}$ en dos direcciones de observación en el cielo representadas por los vectores \hat{m} y \hat{n} , las cuales se encuentran separadas por un ángulo θ , y promediarlo sobre todas las direcciones α donde los puntos a evaluar se encuentren separados por un ángulo θ .

Las limitaciones en la resolución de las mediciones afectan a la función de correlación para tener una descripción estadística completa para todos los ángulos. Por este motivo se utiliza la expansión 3.17 en armónicos esféricos dentro de la definición de función de correlación 3.18, dando como resultado

$$C(\theta) = \frac{1}{4\pi} \sum_{l=2}^{\infty} C_l (2l+1) P_l(\cos \theta) \quad (3.19)$$

donde P_l son los polinomios de Legendre de orden l . La suma es expresada desde $l \geq 2$ debido a que el término monopolar $l = 0$ se anula por hacer referencia a la temperatura promedio y el término dipolar $l = 1$, que representa al efecto Doppler anteriormente mencionado, es omitido por representar ruido pues deseamos centrar los estudios en las causas de las anisotropías originadas en las épocas previas.

Los coeficientes C_l son llamados momentos multipolares de la función de correlación y se relacionan con los coeficientes a_{lm} para dar información acerca del tamaño de las anisotropías por medio de

$$C_l = C_l \delta_{ll'} \delta_{mm'} = \langle a_{lm}^* a_{l'm'} \rangle = \langle |a_{lm}|^2 \rangle \quad (3.20)$$

El coeficiente a_{lm}^* es utilizado debido a que los armónicos esféricos son definidos como complejos, por lo que los coeficientes a_{lm} no son necesariamente positivos y por lo tanto la cantidad $a_{lm}^* a_{l'm'} = |a_{lm}|^2$ proporciona un tamaño real positivo de las irregularidades del CMB independientemente si las anisotropías en una dirección en particular están por encima o por debajo del valor promedio de la temperatura T_0 . La falta del índice m en los coeficientes C_l es porque se ha realizado un promedio

sobre los diferentes valores de m asociado con todas las posibles formas del universo, o en su defecto con un promedio acorde a las observaciones realizadas por todos los posibles observadores, es decir, la estadística de las anisotropías del CMB no debe depender de la elección de las coordenadas.

Se puede relacionar el ángulo θ de separación entre las direcciones de observación con el valor de l por medio de

$$\theta \approx \frac{180^\circ}{l} \quad (3.21)$$

esto significa que a valores pequeños en l corresponden a valores angulares grandes en θ y entre más grande sea el valor de l más precisa será la observación con escalas angulares cada vez menores.

La distribución que resulta de los valores C_l contra los valores de l es conocida como espectro de potencias de las fluctuaciones. Las fluctuaciones de temperatura se suelen expresar por medio de los momentos multipolares C_l como

$$\Delta T = \left(\frac{l(l+1)}{2\pi} C_l \right)^{\frac{1}{2}} \langle T \rangle \quad (3.22)$$

sin embargo, por convención se suele utilizar el cuadrado de la expresión 3.22 para graficar contra l o contra θ . La figura 3.7 muestra una gráfica del espectro de potencias con respecto a l en el eje de abajo y con respecto a una escala angular θ en el eje de arriba.

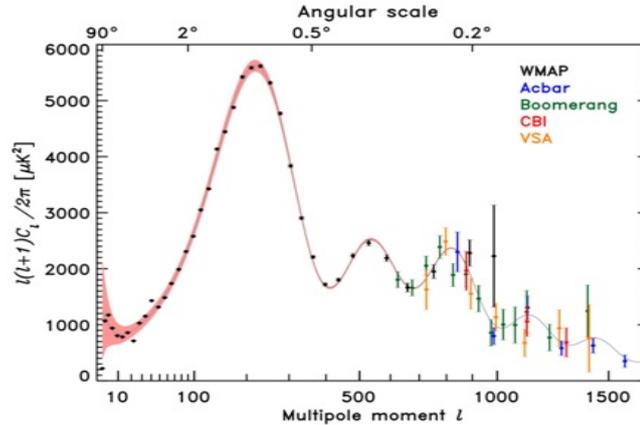


Figura 3.7: Espectro de potencias con respecto a l en una escala logarítmica y con respecto a una escala angular θ , generado a partir de los datos de diferentes experimentos. Aparece un primer pico de anisotropías cerca de $l = 200$. Los Términos monopolar $l = 0$ y dipolar $l = 1$ no son expresados en la gráfica por no ser de interés [7].

En la figura 3.7 se puede observar un primer pico cerca del valor $l = 200$, el cual utilizando la relación 3.21 corresponde a un ángulo de casi 1° . Esto es importante, pues coincide con el ángulo de Hubble θ_H , es decir, el ángulo generado por un arco de circunferencia de longitud igual al radio o distancia de Hubble en la época de la última dispersión visto por nosotros, o dicho de otra forma

$$\theta_H = \frac{c/H(z_{ls})}{D_A} \approx \frac{0.2Mpc}{13Mpc} \approx 0.015rad \approx 1^\circ \quad (3.23)$$

lo cual hace que la posición del primer pico sea congruente con un universo plano. Finalmente los efectos que causan las anisotropías en el CMB tendrán una escala angular a la cual logran ser detectados y que pueden ser divididos en aquellos de escala angular intermedia con valores $\theta_{ls} < \theta < \theta_H$ y aquellos de gran escala angular $\theta_H < \theta$, donde θ_{ls} es la escala angular de la última dispersión. Las anisotropías en escalas angulares pequeñas $\theta < \theta_{ls}$ no pueden ser detectados pues sus efectos son opacados por otros.

3.1.3. Tipos de Anisotropías de la Radiación de Fondo

Anisotropías Primarias

La radiación de fondo cósmico puede ser afectada por varios fenómenos que pueden llegar a alterarla tanto de manera global al espectro de cuerpo negro como de manera direccional como en el caso de las anisotropías. Las observaciones indican que las alteraciones a nivel global son muy pequeñas y el espectro mantiene una forma muy similar a la de un cuerpo negro. Las anisotropías son pequeñas desviaciones en la forma del espectro de cuerpo negro del CMB a una temperatura de $T_0 = 2.725K$.

Las anisotropías se pueden dividir en anisotropías primarias, secundarias e incluso terciarias dependiendo del momento o manera en que se forman, Las anisotropías primarias son las de origen más antiguo, pues se formaron sobre la superficie de última dispersión cuando el universo tenía cerca de 380000 años de edad.

La anisotropía en una dirección \hat{n} esta dada por

$$\frac{\Delta T}{T}(\hat{n}) = \frac{1}{3} \frac{\Delta \rho_b}{\rho_b} - \hat{n} \cdot \bar{v} - \frac{1}{3} \frac{d\Phi}{c^2} \quad (3.24)$$

donde el primer término representa fluctuaciones adiabáticas de la densidad, el segundo término representa la anisotropía observada en la dirección \hat{n} por un observador con una velocidad \bar{v} con respecto a la superficie de última dispersión, mientras que

el tercer término representa una contribución debida al efecto conocido como Sachs-Wolfe.

Fluctuaciones de Densidad

Como ya se ha mencionado anteriormente, al terminar la etapa de inflación se crearon una serie de fluctuaciones de origen cuántico las cuales al transcurrir los años fueron aumentando debido a la atracción gravitatoria. Posteriormente se crearon pozos de potencial gravitatorios de materia oscura, los cuales atraían al plasma fotón-barión a su interior teniendo como consecuencia un aumento en la densidad de materia bariónica y la densidad de radiación, así como un correspondiente aumento en la temperatura y la presión. La presión de radiación crece a tal grado que se opone a la contracción y se crea una serie de oscilaciones acústicas en el plasma fotón-barión. Las irregularidades en la densidad bariónica del plasma generan anisotropías en la temperatura las cuales se relacionan en la forma $\frac{1}{3} \frac{\Delta \rho_b}{\rho_b}$ como se muestra en la ecuación 3.28, pues partiendo del hecho de que antes del desacoplamiento los fotones y los bariones poseían la misma temperatura $T \propto a^{-1}$ se tiene que

$$\begin{aligned}\rho_m &= \rho_{m0} \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-3} = CT^3 \\ d\rho_m &= 3CT^2 dT \\ \frac{d\rho_m}{\rho_m} &= \frac{3CT^2}{CT^3} dT = 3 \frac{dT}{T} \\ \frac{dT}{T} &= \frac{1}{3} \frac{d\rho_m}{\rho_m}\end{aligned}\tag{3.25}$$

Así mismo en el caso de que las fluctuaciones sean adiabáticas, se tiene como consecuencia una serie de irregularidades en la componente fotónica del plasma la cual se relaciona con cambios en la temperatura en la forma $\frac{1}{4} \frac{\Delta \rho_\gamma}{\rho_\gamma}$

$$\begin{aligned}\rho_\gamma &= \rho_{\gamma 0} \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-4} = CT^4 \\ d\rho_\gamma &= 4CT^3 dT \\ \frac{d\rho_\gamma}{\rho_\gamma} &= \frac{4CT^3}{CT^4} dT = 4 \frac{dT}{T} \\ \frac{dT}{T} &= \frac{1}{4} \frac{d\rho_\gamma}{\rho_\gamma}\end{aligned}\tag{3.26}$$

De esta forma pasada la época de la última dispersión las oscilaciones acústicas quedan registradas dentro de la radiación del CMB, cuyas anisotropías son detectables dentro de la escala angular

$$\theta > \theta_H \quad (3.27)$$

Dipolo, Cuadrupolo y efectos Doppler

Cuando existe un movimiento relativo entre una fuente y un observador, se produce un desplazamiento Doppler. De esta forma se altera la temperatura del espectro de cuerpo negro en la dirección del movimiento relativo como ya se ha dicho anteriormente, creando anisotropías.

En este caso, las oscilaciones de densidad en la superficie de última dispersión causan cambios en el potencial gravitatorio que ocasionan movimientos en el plasma. Los puntos de máxima compresión y máxima expansión que corresponden a los puntos donde el potencial gravitatorio se ha igualado con la presión de radiación corresponden a un máximo de velocidad. La temperatura del CMB será más fría o más caliente en una dirección por efecto Doppler dependiendo de si el plasma fotón-barión se encontraba contrayéndose o expandiéndose en el momento del desacoplamiento. Si el efecto Doppler no tuviera una dependencia direccional dada por la componente de la velocidad en la línea de visión y se presentara por igual forma en todas partes, los efectos causados por los picos acústicos no serían notorios. Finalmente las anisotropías de origen Doppler se pueden representar por medio de una suma de las velocidades debidas a los términos dipolar y cuadrupolar más una velocidad extra debida a la velocidad de las oscilaciones en el plasma como

$$\frac{\Delta T}{T}(\hat{n}) = -\hat{n} \cdot (\bar{v}_{dip} + \bar{v}_{cua} + \bar{v}_{osc}) \quad (3.28)$$

donde la dirección \hat{n} es la dada por un observador y cuyas anisotropías debidas al movimiento oscilatorio son detectables dentro de la escala angular

$$\theta < \theta_H \quad (3.29)$$

y se van atenuando después de θ_H o equivalente a $l \approx 180$.

Efecto Sachs-Wolfe como causa de las anisotropías primarias

El efecto Sachs-Wolfe surge a partir del corrimiento al rojo gravitatorio en los fotones que salen de la superficie de última dispersión debido a los campos gravitatorios heterogéneos, generados principalmente por materia oscura, por los que tienen que pasar los fotones en su última dispersión. Por el principio de equivalencia, los

fotones experimentan un cambio en su energía lo cual lleva a fluctuaciones de temperatura que representan una disminución en la temperatura en aquellas zonas donde el potencial gravitatorio es mayor, ya que los fotones pierden energía para poder salir de los pozos de potencial. Se puede demostrar que las anisotropías debidas al efecto Sachs-Wolfe tienen la forma

$$\frac{\Delta T}{T} = -\frac{1}{3} \frac{d\Phi}{c^2} \quad (3.30)$$

donde Φ es el potencial gravitatorio. Este tipo de anisotropías se contraponen al incremento de temperatura debido a las fluctuaciones de densidad. El efecto Sachs-Wolfe es despreciable para escalas angulares menores a θ_H por lo que se presenta con un valor casi constante a valores angulares de

$$\theta > \theta_H \quad (3.31)$$

Anisotropías Secundarias

Las anisotropías secundarias son aquellas que surgen después de la última dispersión de los fotones con los electrones mientras los fotones siguen su viaje hasta llegar a nosotros.

Efecto Sunyaev-Zel'dovich

Las distribuciones inhomogeneas de material en el camino de los fotones desde la superficie de última dispersión hasta nosotros, pueden introducir anisotropías en su temperatura. El efecto Sunyaev-Zel'dovich se produce precisamente por la presencia de sobredensidades de gas muy caliente que contiene grandes cantidades de electrones libres que provocan una dispersión Compton inversa en los fotones llevándolos hacia energías más elevadas del orden de rayos X. Se cree que la época de reionización fue una época en la cual se presentó en gran medida este efecto debido a la gran cantidad de electrones libres que rondaban en el universo.

Un aspecto especialmente útil del efecto Sunyaev-Zel'dovich es el poder calcular la distancia a un cúmulo de manera independiente al corrimiento al rojo.

Las anisotropías producidas por efecto Sunyaev-Zeldovich son de escala angular pequeña $\theta < \theta_H$ dominando principalmente a valores de $l > 1000$.

Existe el también llamado efecto Sunyaev-Zel'dovich cinético el cual es debido a un desplazamiento Doppler provocado por la componente de la velocidad en nuestra dirección de los cúmulos por los que pasa el CMB.

Efecto Sachs-Wolfe

A diferencia del efecto Sachs-Wolfe descrito anteriormente como causa de las anisotropías primarias, el efecto Sachs-Wolfe para anisotropías secundarias se origina una vez que los fotones han dejado la superficie de última dispersión y se encuentran con un potencial gravitatorio. Si el potencial gravitatorio que atraviesan los fotones es constante, los fotones serán primeramente corridos al azul mientras van cayendo al pozo de potencial y posteriormente corridos al rojo cuando salen de él, cancelando ambos efectos. Sin embargo, si el potencial varia mientras los fotones lo atraviesan entonces los efectos ya no se cancelarán y los fotones quedarán corridos al azul o al rojo dependiendo si el potencial se ha diluido o ha aumentado.

Anisotropías Terciarias

Las anisotropías terciarias son causadas por la combinación de la radiación de fondo cósmico de microondas con otras radio-fuentes distintas que pueden ser desde radio-galaxias, cuásares o incluso fuentes de otra índole debidas a procesos de sincrotrón debidos al gas y polvo de la galaxia. Al no ser un tipo de anisotropía de importancia cosmológica, se suelen omitir estas anisotropías en los estudios.

Capítulo 4

Oscilaciones Acústicas de Bariones

4.1. Crecimiento de las Perturbaciones y Formación y Desarrollo de la Estructura a Gran Escala

4.1.1. Jerarquía en la formación de estructuras

De acuerdo al principio cosmológico nuestro universo es homogéneo e isotrópico y esto puede parecer contradictorio, ya que el universo está lleno tanto de estructuras como de vacíos. Sin embargo a escalas mayores a $100Mpc$ la aparente inhomogeneidad empieza a desaparecer y por ende puede ser utilizado el principio cosmológico. Pero para poder entender mejor la evolución que han tenido las diferentes componentes del universo, para parecer actualmente a nosotros como homogéneamente distribuidas a grandes escalas, es conveniente cruzar la transición de $100Mpc$ hacia escalas menores.

En el universo es posible encontrar principalmente estructuras tales como varios tipos de galaxias bien definidas por la teoría, así como cúmulos de galaxias y supercúmulos de galaxias. Así que la observación repetida de éste tipo de objetos sugiere que debe existir un orden en el proceso de formación de estructuras. Los modelos que sugieren un orden de formación de estructuras iniciando por galaxias cuya agrupación forma cúmulos de galaxias y posteriormente supercúmulos de galaxias, son conocidos como escenarios “de abajo hacia arriba” ó “bottom-up”. Mientras que los modelos que sugieren un orden contrario, iniciando por supercúmulos que al separarse dan paso a cúmulos y posteriormente a galaxias individuales, son conocidos como escenarios “de arriba hacia abajo” ó “top-down”.

Tras poner atención a estas escalas y mirar las diferentes disposiciones de las es-

estructuras que abundan en el universo, surge la pregunta ¿qué es lo que forma estas estructuras?. De las cuatro fuerzas fundamentales de la naturaleza queda claro que sólo la gravedad puede intervenir en el proceso de formación puesto que el electromagnetismo es despreciable tomando en cuenta que por observación el universo es eléctricamente neutro y que las otras dos fuerzas no actúan a largo alcance ¹. Por lo tanto, la principal causa de la inestabilidad en la materia del universo es la gravedad. Conforme pasa el tiempo la homogeneidad del universo se vuelve cada vez más caótica a causa de la gravedad, por lo tanto el universo primitivo tuvo que ser más homogéneo aún.

Pese a que la formación de la estructura a gran escala está relacionada con la gravedad, la formación de estructuras de escala inferior tales como planetas, estrellas, etc. es producto de procesos físicos más complejos que salen de la visión de este trabajo. Por tal motivo es importante definir la estructura a gran escala como todas las estructuras más grandes que una sola galaxia.

En la actualidad se considera al escenario bottom-up con materia oscura fría dominante sobre la caliente como el mejor modelo para describir las observaciones. De esta forma, la generación de estructuras se origina en uno de los excesos de densidad generados después de la época de inflación para empezar a crecer en la época de igualdad radiación-materia, una vez que la radiación ya no domina tan fuertemente sobre la componente de materia. Estos bultos de densidad quedan impresos en las anisotropías del CMB como se ha mencionado anteriormente.

El inicio del crecimiento de estructuras se da a partir del momento posterior a la recombinación ($z = 1100$) para modelos donde la materia está formada únicamente por una componente bariónica y a partir de la época de igualdad radiación y materia ($z_{eq} = 3570$) para modelos con materia oscura no bariónica.

4.1.2. Contraste de Densidad

Las grandes concentraciones de materia generan grandes concentraciones de huecos o vacíos, por lo tanto una densidad media de materia $\bar{\rho}_M$ es aquella medida a partir de un gran volumen y que es equivalente a la densidad en un universo perfectamente homogéneo. Por lo tanto, la densidad en un momento t y un lugar definido por la coordenada comóvil \vec{r} quedaría expresada por medio de la densidad media como

$$\rho(\vec{r}, t) = \bar{\rho}(t)[1 + \delta(\vec{r}, t)] \quad (4.1)$$

¹No obstante a un corrimiento al rojo de $z = 11.35$ se presentó una época de reionización en la cual las fuerzas electromagnéticas pudieron intervenir en la formación de estructuras.

siendo $\delta(\vec{r}, t)$ la variación en la densidad en un punto con respecto a la densidad media. Sin embargo, es conveniente trabajar la formación de estructuras no a partir de la densidad $\rho(\vec{r}, t)$ sino de la cantidad $\delta(\vec{r}, t)$ llamada contraste de densidad y definida como

$$\delta(\vec{r}, t) = \frac{\rho(\vec{r}, t) - \bar{\rho}(t)}{\bar{\rho}(t)} \quad (4.2)$$

El contraste de densidad δ puede tomar tanto valores negativos como positivos donde los valores negativos implican densidades menores a la media y valores positivos implican densidades superiores a la misma. Así mismo el valor $\delta = -1$ representa el límite inferior en el contraste de densidad, el cual expresa que no existe energía debida a la correspondiente componente del universo a la cual la cantidad δ esté haciendo referencia en dicha región. Mientras que por el otro lado, no existe un límite superior para el contraste de densidad.

4.1.3. Tratamiento Newtoniano en la Aproximación Lineal, Ecuaciones de Poisson, de Movimiento de Euler y de Conservación de Masa o de Continuidad

Un método adecuado para el estudio de la formación de estructuras es por medio de la consideración de la materia como un fluido no estático y viscoso ². Para ello un análisis relativista se reduce al enfoque clásico Newtoniano bajo estas consideraciones dando como resultado tres ecuaciones diferenciales que son:

- Ecuación de Continuidad o de Conservación de Masa

$$\frac{d\rho}{dt} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \quad (4.3)$$

- Ecuación de Movimiento de Euler

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} = -\nabla \phi - \frac{1}{\rho} \nabla p \quad (4.4)$$

- La Ecuación de Poisson

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho \quad (4.5)$$

²A estas consideraciones debe agregarse el hecho de que las distancias implicadas en la formación de estructuras no sean cercanas al radio de Hubble, pues en ese caso el estudio ya no se podría reducir a un tratamiento Newtoniano.

donde ϕ es el potencial gravitatorio y \vec{u} es el campo de velocidad. Así mismo, el tratamiento Newtoniano es válido para regiones menores al radio de Hubble.

Además, es posible obtener una gran cantidad de resultados por medio de este método, usando una aproximación lineal para ρ , ϕ y \vec{u} de la forma $\rho = \bar{\rho} + \rho'$ la cual es válida para pequeñas perturbaciones, es decir, siempre que $|\delta| \ll 1$. Bajo estas consideraciones, es posible combinar las tres ecuaciones diferenciales para obtener

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} = (4\pi G \bar{\rho}) \rho' + c_s^2 \nabla^2 \rho' \quad (4.6)$$

donde $c_s^2 = \frac{d\rho}{d\rho}$ es la velocidad del sonido en el medio. Las soluciones a la ecuación 4.6 son de la forma de ondas planas, es decir

$$\rho' \propto \exp i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \quad (4.7)$$

Si se desea, es posible expresar estas mismas soluciones en términos del contraste de densidad de masa, es decir

$$\delta_m(\vec{r}, t) \propto \exp i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \quad (4.8)$$

De esta forma, un patrón cualquiera en las fluctuaciones de densidad puede ser descrito por medio de una suma de diferentes ondas con su respectivo vector de onda \vec{k} , longitud de onda λ y una amplitud δ_k , o dicho de otra manera, por medio de una expansión en serie de Fourier

$$\delta_m(\vec{r}, t) \propto \sum \delta_k(t) \exp i\vec{k} \cdot \vec{r} \quad (4.9)$$

o más correctamente como la transformada de Fourier

$$\delta_m(\vec{r}, t) = \frac{V}{(2\pi)^3} \int \delta_k \exp -i\vec{k} \cdot \vec{r} d^3k \quad (4.10)$$

donde las componentes δ_k vienen dadas como

$$\delta_k = \frac{1}{V} \int \delta(\vec{r}) \exp i\vec{k} \cdot \vec{r} d^3r \quad (4.11)$$

Se puede relacionar una de estas longitudes de onda λ con la masa contenida dentro de una esfera de radio igual a $\frac{1}{2}\lambda$. Por lo tanto, $\lambda^3 \propto M$ o equivalentemente $k = \frac{2\pi}{\lambda} \propto M^{-\frac{1}{3}}$.

El contraste de densidad δ es considerado un campo Gaussiano cuando las fases de sus componentes de Fourier son diferentes y sin relación alguna.

4.1.4. Longitud de Jeans y Masa de Jeans

Si se sustituye la solución 4.7 en la ecuación diferencial 4.6, se obtiene la condición de ω

$$\omega^2 = -4\pi G\bar{\rho} + c_s^2 k^2 \quad (4.12)$$

Dependiendo del valor de ω serán el tipo de soluciones. En el primer caso $\omega^2 < 0$ y por lo tanto ω es imaginario, luego entonces

$$-4\pi G\bar{\rho} + c_s^2 k^2 < 0$$

$$c_s^2 k^2 < 4\pi G\bar{\rho}$$

$$\lambda > c_s \sqrt{\frac{\pi}{G\bar{\rho}}} \quad (4.13)$$

lo cual al sustituir ω en 4.7 se obtienen soluciones de la forma de exponenciales reales y en consecuencia las perturbaciones crecerían exponencialmente.

Por otro lado, en el segundo caso donde $\omega^2 > 0$, el valor de ω es real dando así

$$-4\pi G\bar{\rho} + c_s^2 k^2 > 0$$

$$c_s^2 k^2 > 4\pi G\bar{\rho}$$

$$\lambda < c_s \sqrt{\frac{\pi}{G\bar{\rho}}} \quad (4.14)$$

lo cual al sustituir ω en 4.7 se obtienen soluciones de la forma de exponenciales imaginarias y en consecuencia las perturbaciones oscilarán.

Como en el caso de las oscilaciones acústicas en el plasma fotón-barión, es importante saber cuando un exceso de densidad de materia crecerá exponencialmente sin detenerse y cuando ésta se mantendrá oscilando. Se define entonces la longitud característica λ_J , llamada longitud de Jeans, como aquella longitud en la cual se crea

la transición entre una solución de crecimiento exponencial y una oscilatoria en las perturbaciones, es decir cuando

$$\lambda_J = c_s \sqrt{\frac{\pi}{G\bar{\rho}}} \quad (4.15)$$

Cuando $\lambda < \lambda_J$ la presión actuará para evitar el colapso, tal y como lo hace la presión de radiación en el caso de BAO. Mientras que a valores de $\lambda_J < \lambda$ la gravedad será la fuerza dominante. También es posible identificar esta transición por medio de una masa característica M_J llamada masa de Jeans, la cual se define como la masa contenida dentro de una esfera de radio igual a media longitud de Jeans, es decir

$$M_J = \frac{4}{3}\pi\rho_m\left(\frac{\lambda_J}{2}\right)^3 = \frac{1}{6}\pi\rho_m\lambda_J^3 = \frac{1}{6}\pi\rho_m c_s^3 \left(\frac{\pi}{G\bar{\rho}}\right)^{\frac{3}{2}} \quad (4.16)$$

4.1.5. Distinción entre los tipos de perturbaciones, adiabáticas e isotérmicas

Hasta ahorita hemos hecho mención sobre las perturbaciones de densidad sin ser más explícitos en ellas. Una perturbación puede estar formada por cualquiera de dos tipos, ya sea perturbación de curvatura o de isocurvatura.

Una perturbación de curvatura es aquella en la cual la densidad de energía total es modificada pero no la entropía. Se llama perturbación de curvatura pues al modificarse la densidad de energía también se está modificando la curvatura de acuerdo a las ecuaciones de campo de Einstein.

Si se define la entropía como

$$S = \frac{p + \rho c^2}{T} V \quad (4.17)$$

en la época dominada por radiación se pueden omitir las demás componentes del universo por simplicidad, además de considerar las relaciones $T \propto a^{-1}$, $V \propto a^3$ y $T^{-3} \propto V$, se tiene entonces

$$S = \frac{4\rho c^2}{3T} V \propto \frac{4}{3}c^2\rho_0 T^3 V = cte$$

por lo tanto la entropía se conserva y se trata entonces de un proceso isentrópico o isoentrópico.

En un proceso reversible, el cambio en la entropía universal es cero, no obstante en la naturaleza esto no sucede así pues los procesos tendrían que ser muy lentos. Tomando en cuenta los enormes tiempos que implica el desarrollo de las perturbaciones en el universo, se pueden considerar como un proceso reversible. Un proceso isoentrópico que es reversible no genera un intercambio de energía por calor, y por lo tanto el proceso isoentrópico es también un proceso adiabático, es decir, si el proceso es isoentrópico con un cambio en la entropía del fluido de $\Delta S = 0$ y $\Delta S = \int \frac{\delta Q}{T}$, entonces el cambio en la energía debe ser cero. Por tal motivo a las perturbaciones de curvatura también se les conoce como perturbaciones adiabáticas.

Por otra parte, las perturbaciones de isocurvatura son aquellas en las cuales la entropía sí cambia pero la densidad de energía no lo hace. En este caso al no verse modificada la densidad de energía tampoco lo hace la curvatura, de ahí el nombre de perturbación de isocurvatura.

Dado que la densidad de energía es constante, el cambio en la densidad de energía es $d\rho = 0$ y por lo tanto $d\rho_r = -d\rho_M - d\rho_\Lambda$, así mismo en la época de dominación de radiación donde ρ_Λ no tiene un papel relevante y ρ_M sigue siendo inferior a ρ_r , se tiene

$$\frac{dT}{T} = \frac{1}{4} \frac{d\rho_r}{\rho_r} = -\frac{1}{4} \frac{d\rho_M}{\rho_r} = -\frac{1}{4} \frac{\rho_M}{\rho_r} \frac{d\rho_M}{\rho_M}$$

por lo dicho anteriormente, la cantidad $\frac{\rho_M}{\rho_r}$ es muy pequeña y entonces $\frac{dT}{T} \approx 0$. Por tal motivo a las perturbaciones de isocurvatura también se les conoce como perturbaciones isotérmicas.

Sin consideración de materia oscura, los modelos de formación de estructuras sugieren un orden de tipo “top-down” para perturbaciones adiabáticas. Mientras que para perturbaciones isotérmicas el orden sería “bottom-up”.

Por otro lado, tomando en cuenta la presencia de materia oscura, tal y como lo hace el modelo estándar de la cosmología, los modelos de formación de estructuras sugieren un orden de tipo “bottom-up” para perturbaciones adiabáticas con materia oscura fría y “top-down” para el mismo tipo de perturbaciones pero con materia oscura caliente.

4.2. Relación de BAO con la Estructura a Gran Escala

Las oscilaciones acústicas de bariones (vistas en la sección 3.1.1 página 59) tienen grandes implicaciones en la distribución espacial de la materia en el universo. En la figura 4.1 se ha considerado una única perturbación de densidad del plasma fotón-barión dentro del pozo de potencial de materia oscura y una componente de neutrinos, todo con simetría esférica y se ha hecho evolucionar la imagen de cada una de las componentes a través del corrimiento al rojo z .

Se puede observar como antes de lo que sería un corrimiento al rojo $z = 1100$, el plasma fotón-barión, aun unido, se propaga como una onda acústica alejándose de los pozos de potencial gravitatorio de la materia oscura, mientras que la materia oscura continúa en la posición de la perturbación original y los neutrinos, desacoplados desde la época de bariogénesis, escapan libremente de la acumulación de las otras componentes.

Después de que han pasado las épocas de recombinación, última dispersión y del desacoplamiento la presión de radiación ha desaparecido, los fotones se han desprendido de los bariones y se alejan rápidamente del exceso de densidad originalmente situado en el centro del pozo de potencial gravitatorio de la materia oscura. Así mismo, las ondas acústicas han dejado de propagarse y la posición de los bariones queda congelada en el espacio y en el transcurso han llevado consigo por arrastre parte de la materia oscura del pozo. Los diferentes componentes evolucionan de acuerdo a su respectiva ecuación de estado y la distribución de toda la densidad de materia-energía del universo es el resultado de la agrupación de las fluctuaciones de todas las componentes del universo.

Las zonas donde la materia barionica ha quedado fija tienden a acumular más materia por inestabilidad gravitatoria, particularmente a la materia oscura que había arrastrado consigo. Igualmente el pozo de materia oscura que sigue manteniéndose cerca del origen de las gráficas acumula materia, principalmente la materia barionica que se alejó pero que se encuentra dentro de la región donde su campo gravitatorio aun domina y la materia oscura que se alejó del origen de la perturbación.

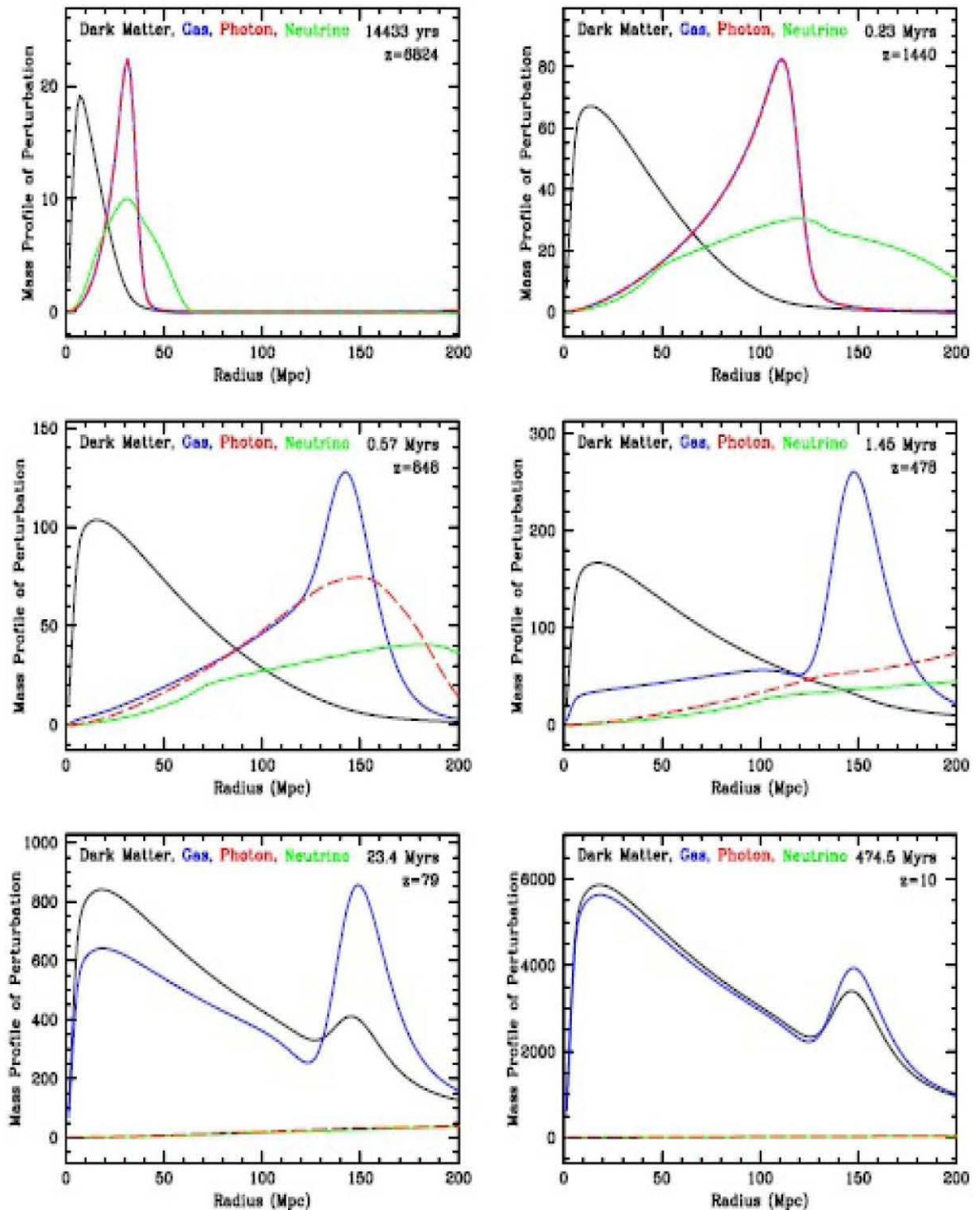


Figura 4.1: En las gráficas se muestra la evolución de las perturbaciones para las diferentes componentes del universo con los colores negro, azul, rojo y verde para la materia oscura, bariones, fotones y neutrinos respectivamente. El corrimiento al rojo z va desde valores muy grandes correspondientes a épocas del universo muy antiguas hasta corrimientos al rojo más pequeños correspondientes a épocas más recientes [6]

La gráfica final muestra los dos excesos de densidad, uno formado principalmente por materia oscura en el origen de la perturbación inicial y el otro formado por la materia bariónica que viajó en la onda acústica. La distancia a la que se encontrarán ambos excesos será la distancia recorrida por la onda acústica en el plasma fotón-barión desde los primeros minutos del universo hasta llegar a una época cercana a $z_{drag} = 1059.29$ correspondiente a la época de arrastre de bariones.

La acumulación de materia por parte de ambos excesos provoca que en estos puntos exista una mayor probabilidad de que se formen galaxias. Esto significa que las gráficas sugieren que existe una distancia r_s , llamada horizonte acústico, a la cual es más probable encontrar una galaxia a partir de otra.

El horizonte acústico r_s no sólo es importante por lo ya mencionado arriba, sino que también haciendo uso de este hecho es posible utilizar el horizonte acústico como una especie de regla para medir distancias cosmológicas pues su tamaño únicamente ha cambiado por la expansión del universo, además de que también puede ser usada como un método para determinar la curvatura del universo. Esta distancia puede ser obtenida tanto de manera observacional por medio de los estudios de muestras de galaxias como teóricamente como se determinará en la siguiente sección 4.3 y cuyo valor ronda entre los $140Mpc$ y $150Mpc$.

4.3. Horizonte Acústico

El plasma fotón-barión se encuentra oscilando hasta antes de la época de recombinación. Los máximos y mínimos de oscilación (o las compresiones y enrarecimientos) generarán máximos y mínimos en el contraste de densidad.

Las oscilaciones comienzan después de la inflación a un tiempo $t \sim 0$ y viajan a través del plasma como una onda de presión a la velocidad del sonido v_s hasta llegar al momento de la última dispersión de los fotones, donde las oscilaciones acústicas llegan a ser congeladas y sus características quedan registradas tanto en el espectro de potencias angular del CMB como en la distribución de materia del espectro de potencia de las galaxias. La distancia que llegan a viajar las ondas acústicas desde $t \sim 0$ hasta que se detienen en el momento de la última dispersión se conoce como horizonte acústico.

El horizonte acústico representa una escala característica de la señal de BAO y para expresarla se debe calcular primero la velocidad del sonido. La rapidez del sonido en el plasma fotón-barión está dada como

$$v_s^2 = \frac{dp}{d\rho} \quad (4.18)$$

Para obtener el valor de esta velocidad es necesario determinar la forma de p y ρ . Sobre la densidad total del universo, sabemos que está formada por varias contribuciones tales como la densidad bariónica, densidad de radiación, densidad de materia oscura y densidad de Λ . De esta forma, podemos escribir la densidad total como

$$\rho_T = \rho_b + \rho_r + \rho_{DM} + \rho_\Lambda = \rho_{b_0} \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3} + \rho_{r_0} \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-4} + \rho_{DM} + \rho_\Lambda \quad (4.19)$$

Como las oscilaciones acústicas únicamente viajan a través de un plasma generado por bariones y fotones, se tiene que la densidad que nos importa estará dada sólo por:

$$\rho_T = \rho_b + \rho_\gamma = \rho_{b_0} \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3} + \rho_{\gamma_0} \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-4} \quad (4.20)$$

La diferencial de densidad será entonces

$$d\rho = -3\rho_{b_0} \frac{a_0^3}{a^4} da - 4\rho_{\gamma_0} \frac{a_0^4}{a^5} da \quad (4.21)$$

Por otra parte de la ecuación de estado, la contribución a la presión por parte de la materia bariónica ($\omega = 0$) es

$$p = 0\rho_b c^2 = 0 \quad (4.22)$$

Y para radiación ($\omega = \frac{1}{3}$)

$$p = \frac{1}{3}\rho_\gamma c^2 = \frac{1}{3}\rho_{\gamma_0} c^2 \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-4} \quad (4.23)$$

Por lo tanto, únicamente la radiación ejerce presión en el fluido fotón-barión. La diferencial de presión estará dada como

$$dp = d\left(\frac{1}{3}\rho_\gamma c^2\right) = -\frac{4}{3}\rho_{\gamma_0} c^2 \frac{a_0^4}{a^5} da \quad (4.24)$$

De esta forma finalmente tenemos que la velocidad es

$$v_s^2 = \frac{dp}{d\rho} = \frac{-\frac{4}{3}\rho_{\gamma_0} c^2 \frac{a_0^4}{a^5} da}{-3\rho_{b_0} \frac{a_0^3}{a^4} da - 4\rho_{\gamma_0} \frac{a_0^4}{a^5} da} = \frac{1}{3} \frac{c^2}{\left(1 + \frac{3}{4} \frac{\rho_{b_0}}{\rho_{\gamma_0}} \frac{a}{a_0}\right)} = \frac{1}{3} \frac{c^2}{\left(1 + R \frac{a}{a_0}\right)}$$

$$v_s = \frac{c}{\sqrt{3\left(1 + R\frac{a}{a_0}\right)}} \quad (4.25)$$

donde se ha hecho la sustitución $R = \frac{3}{4} \frac{\rho_{b0}}{\rho_{\gamma 0}} = \frac{3}{4} \frac{\Omega_{b0}}{\Omega_{\gamma 0}}$. Expresando la velocidad acústica v_s en términos del corrimiento al rojo z se obtiene

$$v_s = \frac{c}{\sqrt{3\left(1 + R\frac{1}{1+z}\right)}} \quad (4.26)$$

Por otra parte, de la definición de distancia comóvil

$$dr_s = \frac{dD_{r_s}}{a(t)} = \frac{v_s}{a(t)} dt \quad (4.27)$$

donde r_s es la distancia comóvil referente al horizonte acústico y D_{r_s} es su distancia física. Por lo tanto, r_s puede ser expresada como

$$r_s = \int_0^{t_{drag}} \frac{v_s}{a(t')} dt' \quad (4.28)$$

Sí hiciéramos un cambio de variable al tiempo conforme

$$d\eta' = \frac{c}{a} dt' \quad (4.29)$$

la distancia comóvil referente al horizonte acústico anterior tomaría la forma

$$r_s = \int_0^{\eta} \frac{v_s}{c} d\eta' = \int_0^{\eta(z_{drag})} \frac{d\eta'}{\sqrt{3\left(1 + \frac{R}{1+z}\right)}} \quad (4.30)$$

Si en lugar de ello, decidimos expresar r_s en términos del corrimiento al rojo z llegaremos a

$$r_s = \int_0^{t_{drag}} \frac{v_s}{a(t')} dt' = \int \frac{v_s}{a(t')} \frac{dt'}{da} da = \int \frac{v_s}{a\dot{a}} da = \int \frac{v_s}{a^2 H} da \quad (4.31)$$

Aquí, tanto el parámetro de Hubble H como el factor de escala a tienen dependencia en z , con lo cual obtenemos la diferencial de $a(z)$ en términos de z haciendo uso de la definición $\frac{a_0}{a} = 1 + z$ de esta última

$$da = -\frac{a_0}{(1+z')^2} dz' \quad (4.32)$$

Por lo tanto tenemos

$$r_s = -\int_{\infty}^z \frac{v_s}{a_0 H(z')} dz' \quad (4.33)$$

donde en ocasiones $H(z)$ suele ser expresado en términos de $E(z)$ definido como

$$E(z) \equiv \frac{H(z)}{H_0} = \sqrt{\Omega_m(1+z)^3 + \Omega_r(1+z)^4 + \Omega_K(1+z)^2 + \Omega_{\Lambda} f(z)} \quad (4.34)$$

La ecuación 4.33 para el horizonte acústico es una expresión que será usada más adelante en el trabajo de esta tesis.

4.4. BAO como Regla Estándar

La información de las oscilaciones acústicas queda registrada tanto en el espectro de potencias angular del CMB como en la distribución de materia del espectro de potencias de las galaxias.

Los datos obtenidos del CMB nos proveen del horizonte acústico comóvil en la época de la última dispersión del fotón z_* . En este sentido, los resultados del satélite Planck arrojan una medida para el tamaño comóvil del horizonte acústico en $z = z_*$, de

$$r_s(z_*) = 144.75 \pm 0.66 Mpc \quad (4.35)$$

$$z_* = 1090.37 \pm 0.65 \quad (4.36)$$

Por otro lado la escala BAO, medida en los estudios del corrimiento al rojo de las galaxias, corresponde a la escala del horizonte acústico en la época de arrastre z_{drag} . La época de arrastre ocurre cuando la presión de radiación fotónica (o “arrastre de Compton”) no puede prevenir por más tiempo la inestabilidad gravitacional de los

bariones. Así mismo, de acuerdo a los mismos datos del satélite Planck, el tamaño comóvil del horizonte acústico en $z = z_{drag}$ es

$$r_s(z_{drag}) = 147.53 \pm 0.64 Mpc \quad (4.37)$$

$$z_{drag} = 1059.29 \pm 0.65 \quad (4.38)$$

La época de la última dispersión del fotón dada por el corrimiento al rojo z_* , es el momento en el cual la profundidad óptica del fotón τ es igual a la unidad. Igualmente la época de arrastre de bariones dada por el corrimiento al rojo z_{drag} es el momento en el cual la profundidad óptica del arrastre de bariones τ_{drag} es igual a uno. La expresión que relaciona ambas épocas a través de sus profundidades ópticas es

$$\dot{\tau}_{drag} = \frac{\dot{\tau}}{R} \quad (4.39)$$

en donde R es nuevamente $R = \frac{3}{4} \frac{\rho_{b0}}{\rho_{\gamma0}} = \frac{3}{4} \frac{\Omega_{b0}}{\Omega_{\gamma0}}$. Claramente la única forma en que ambas épocas ocurrieran al mismo tiempo sería si $R = 1$. Sin embargo dado que $R \neq 1$, se demuestra que la época de arrastre ocurre después de la época del desacoplamiento del fotón, es decir, $z_{drag} < z_*$.

Una regla estándar es una distancia de magnitud conocida útil en la medición de distancias en el universo. Así mismo una regla estándar para ser útil debe cumplir con poder ser calibrada con precisión, ser medida sobre gran parte del volumen del universo y finalmente poder hacer mediciones de gran precisión de la regla. El horizonte acústico es la regla estándar de BAO porque podemos determinar su distancia por medio de la ecuación 4.33, donde aparece la velocidad del fluido fotón-barión 4.26 y cantidades como la densidad de bariones y fotones, que ya se determinan como fijas en la cantidad $R = \frac{3}{4} \frac{\rho_{b0}}{\rho_{\gamma0}} = \frac{3}{4} \frac{\Omega_{b0}}{\Omega_{\gamma0}} = 669.974$ gracias a las observaciones en experimentos de distintos tipos como los realizados en el CMB por WMAP y Planck.

Similar a la definición de horizonte de partícula, el horizonte acústico representa aquellas zonas conectadas causalmente por las ondas acústicas. Esto tiene implicaciones importantes en las estructuras a gran escala como ya se ha mencionado. Para visualizar su efecto en la estructura a gran escala véase la figura 4.2, en la cual se observa cómo puede irse creando una distribución de galaxias de manera computacional basándose en BAO. Para ello primeramente se coloca una galaxia en una posición al azar. Posteriormente se inserta una nueva galaxia a una distancia equivalente a r_s , con una cierta probabilidad P ya establecida y en una dirección cualquiera. Finalmente se repite el proceso con esta nueva galaxia hasta obtener el número deseado de galaxias.

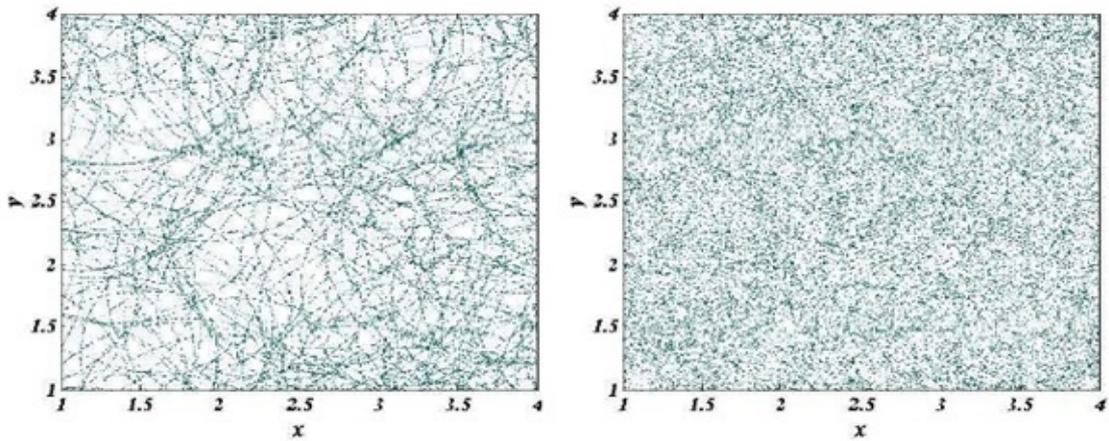


Figura 4.2: Distribución de galaxias creada computacionalmente utilizando una regla estándar que relaciona pares de galaxias [6].

Puede observarse en la gráfica izquierda de la figura 4.2, como al introducir relativamente pocas galaxias resultan evidentes los patrones circulares que se forman. Mientras que en la gráfica del lado derecho, se han colocado una cantidad mayor de galaxias, perdiéndose los patrones circulares de la otra gráfica y con ello ocultando la escala estadística preferencial de separación de galaxias.

Dos galaxias creadas consecutivamente en el programa no necesariamente se encontrarán a una distancia r_s debido a la probabilidad P que interviene, sin embargo se debe pensar en la imagen de una gaussiana cuya media se encuentra a la distancia r_s de la galaxia anterior. La probabilidad P que se menciona está muy relacionada con la cantidad ξ , llamada función de correlación, la cual se verá más adelante.

La señal de BAO es un fenómeno que se presentó en todas las direcciones de una perturbación, por lo tanto se pueden medir tanto sobre la línea de visión como transversalmente a ésta, tal y como se puede observar en la figura 4.3.

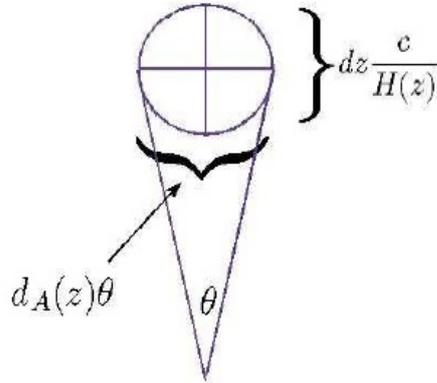


Figura 4.3: La escala BAO es un fenómeno en tres dimensiones, por lo tanto debe ser apreciable a lo largo de nuestra línea de visión y de manera transversal [6].

Por lo tanto, la medida del horizonte acústico a lo largo de la línea de visión $r_{s\parallel}$ está dada como

$$r_{s\parallel} = \frac{c\Delta z}{H(z)} \quad (4.40)$$

Así mismo, la medida del horizonte acústico a lo largo de la línea transversal $r_{s\perp}$ está dado como

$$r_{s\perp} = \Delta\theta(1+z)D_A(z) \quad (4.41)$$

Como se puede observar la medida del horizonte acústico se puede relacionar tanto con el parámetro de Hubble $H(z)$ como con la distancia diametral angular D_A , dependiendo de la dirección que elijan para medir. Es así como mientras $r_{s\parallel}$ se relaciona con $H(z)$, $r_{s\perp}$ se vincula con D_A . Entonces utilizando el valor teórico ya determinado de r_s se podrían estimar valores tanto de $H(z)$ como de D_A .

Se podría pensar que en principio, dado que $r_{s\parallel}$ y $r_{s\perp}$ corresponden al mismo valor del horizonte acústico, ambas deberían ser iguales, sin embargo esto no es así. A pesar de que la regla estándar estadística provista por las BAO es principalmente un fenómeno lineal, existen algunos efectos que pueden modificar el valor del horizonte acústico en su medición radial y transversal. Entre estos efectos se encuentran distorsiones en el corrimiento al rojo y efectos no lineales que se tratarán más adelante.

Por otra lado, Eisenstein propuso en 2005 una relación en la cual se define una

distancia, llamada escala de dilatación o distancia volumen promediado $D_V(z)$, como la raíz cúbica del producto de la dilatación radial $r_{s\parallel}$ por el cuadrado de la dilatación transversal $r_{s\perp}$, es decir

$$D_V(z) = \left[(1+z)^2 D_A^2(z) \frac{cz}{H(z)} \right]^{\frac{1}{3}} \quad (4.42)$$

La razón por la cual se expresa la dilatación transversal al cuadrado es debido a que el observador mira esta misma distancia en dos direcciones que son perpendiculares entre sí y con la línea de visión. La definición de D_V propone una distancia a partir de la media geométrica del volumen generado por la medición de la escala acústica radial y transversal, tal y como su nombre lo indica, y de esta forma evita los problemas generados por las diferencias entre la escala transversal y radial.

4.5. Técnicas de Análisis de BAO

Hemos visto como la cantidad de galaxias en los cúmulos oculta la escala estadística preferencial de separación entre galaxias, por lo tanto será necesario revisar que existen dos posibles métodos para extraer la escala estadística preferencial en los cúmulos de galaxias, los cuales son la función de correlación y el espectro de potencias.

En ambos casos se compara la distribución real de galaxias con muestras de distribuciones aleatorias de galaxias hechas a computadora, las cuales están sometidas a las mismas restricciones de corrimiento al rojo, magnitud y máscara como las galaxias reales.

4.5.1. Función de Correlación

La función de correlación a dos puntos se define por medio del contraste de densidad $\delta(\vec{r})$ como

$$\xi(r) \langle \delta(\vec{x} + \vec{r}) \delta(\vec{x}) \rangle \quad (4.43)$$

donde el promedio se calcula sobre todos los puntos dentro de un volumen de gran tamaño tales que cumplan con que la distancia entre ambos puntos siempre sea el valor fijo de la magnitud del vector \vec{r} . En ocasiones se suele escribir $\xi(\vec{r})$ en lugar de $\xi(r)$, sin embargo esto es el resultado de la isotropía del fenómeno de las BAO, la cual se expresa como $\xi(\vec{r}) = \xi(r)$.

Para entender mejor el significado de la función de correlación, pensemos en lo siguiente. Si se desea medir la probabilidad de encontrar una galaxia en un volumen dV de una distribución aleatoria de galaxias, se tendría que

$$dP = \bar{n}dV \quad (4.44)$$

donde \bar{n} es la densidad numérica media de galaxias equivalente a la que habría en una distribución uniforme. En otro caso, si se desea obtener la probabilidad simultanea de encontrar dos galaxias sin relación alguna, una dentro de un volumen dV_1 y la otra dentro de un volumen dV_2 , se tendría que

$$dP_{12} = \bar{n}^2 dV_1 dV_2 \quad (4.45)$$

En este último caso no existe una relación entre el par de galaxias, por lo que la probabilidad de encontrar ambas es simplemente el producto de la probabilidad de encontrar cada una. Sin embargo, si existe una relación entre ambas galaxias como lo es la escala característica de BAO, entonces la probabilidad conjunta de encontrar ambas galaxias en los volúmenes dV_1 y dV_2 ya no es simplemente el producto de ambas, sino

$$dP_{12} = \bar{n}^2(1 + \xi(\vec{r}))dV_1 dV_2 \quad (4.46)$$

Aquí la función de correlación $\xi(\vec{r})$ muestra el exceso de densidad de galaxias o vacíos representado en una variación en la probabilidad de encontrar una galaxia en un punto \vec{r} con respecto a la probabilidad que habría en una distribución uniforme con la misma densidad media.

En la figura 4.4 se puede observar la gráfica de la función de correlación, donde es visible un pico llamado pico acústico bariónico. El efecto de las oscilaciones acústicas de bariones aparece como este pico alrededor de la escala del horizonte acústico en la época de arrastre de bariones $r_s(z_{drag}) = 147.53 \pm 0.64 Mpc$, ya estimada teóricamente con anterioridad.

Cabe señalar que como la distribución de densidad en una galaxia es Gaussiana, basta con tomar en cuenta la función de correlación a dos puntos. De no ser así, sería necesario utilizar la función de correlación a tres o más puntos para hacer un análisis más completo, las cuales poseen expresiones mucho más complejas dependiendo de cuántos puntos se trate.

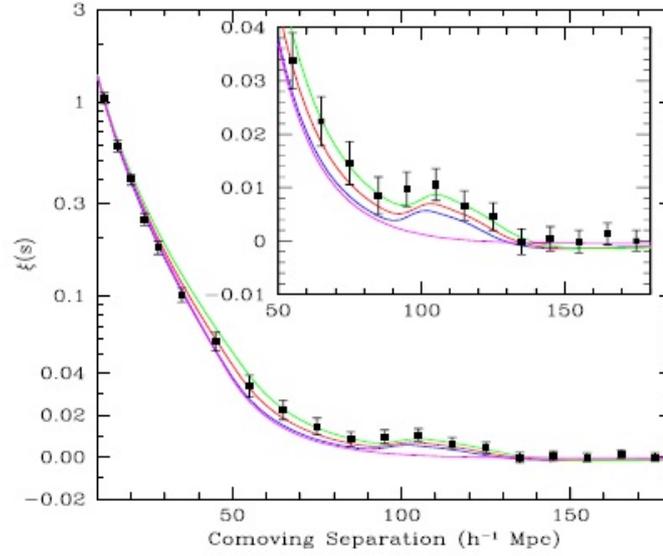


Figura 4.4: En la gráfica se muestra la función de correlación. Se puede observar como a una distancia aproximada de poco más de $100h^{-1}Mpc$ hay un pico correspondiente a la escala acústica. La distancia hasta este pico simboliza la distancia a la cual es más probable encontrar una galaxia a partir de otra [6].

La función de correlación entre galaxias está descrita, dentro del intervalo de $10kpc \leq hr \leq 10Mpc$, por la ley de potencias

$$\xi_{gg}(r) = \left(\frac{r_g}{r}\right)^\gamma \quad (4.47)$$

donde $r_g \sim 5h^{-1}Mpc$ y $1.7 \leq \gamma \leq 1.8$. Por otro lado, existe una relación similar para la función de correlación entre cúmulos de galaxias válida dentro del intervalo $5Mpc \leq hr \leq 75Mpc$, dada como

$$\xi_{cc}(r) = \left(\frac{r_c}{r}\right)^\gamma \quad (4.48)$$

donde $12h^{-1} \leq r_c \leq 25h^{-1}Mpc$. Multiplicando y dividiendo al mismo $\xi_{cc}(r)$ por r_g , se puede demostrar que $\xi_{cc}(r) \approx 6\xi_{gg}(r)$, lo cual implica que los cúmulos que cumplen con esta ley de potencias están acumulados más fuertemente que las galaxias.

Para calcular la función de correlación, se compara la distribución real de galaxias con muestras de distribuciones aleatorias de galaxias hechas a computadora, las cuales están sometidas a las mismas restricciones de corrimiento al rojo, magnitud y máscara como las galaxias reales. Se cuentan los pares de galaxia dentro de compartimentos

periódicos de separación π_s a lo largo de la línea de visión y separación transversal a la línea de visión r_p para evaluar $\xi(r_p, \pi_s)$. Se tiene un primer estimador

$$\xi(r) = \frac{DD(r)}{RR(r)} - 1 \quad (4.49)$$

4.5.2. Espectro de Potencias

Así como la función de correlación está definida a partir del contraste de densidad $\delta(\vec{r})$, el espectro de potencias esta definido a partir de δ_k como

$$P(k) \equiv \langle |\delta_k|^2 \rangle \quad (4.50)$$

Por lo tanto, como el contraste de densidad $\delta(\vec{r})$ y las amplitudes δ_k están relacionadas a través de una transformada de Fourier, entonces la función de correlación y el espectro de potencias están igualmente relacionados a través de una transformada de Fourier como

$$P(\vec{k}, z) = \int \xi(\vec{r}, z) \exp -i\vec{k} \cdot \vec{r} d^3\vec{r} \quad (4.51)$$

Es decir, el espectro de potencias es la transformada de Fourier de la función de correlación. Entonces la función de correlación es expresada por medio del espectro de potencias como

$$\xi(r) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int P(k) \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r}) d^3k \quad (4.52)$$

Con el fin de observar la relación entre la función de correlación y el espectro de potencias en sus gráficas, imagínese el pico de la escala de BAO de la función de correlación representado por una función delta de Dirac. Aplicando la correspondiente transformada de Fourier, la imagen de este pico acústico en el espectro de potencias sería representado por una serie de oscilaciones.

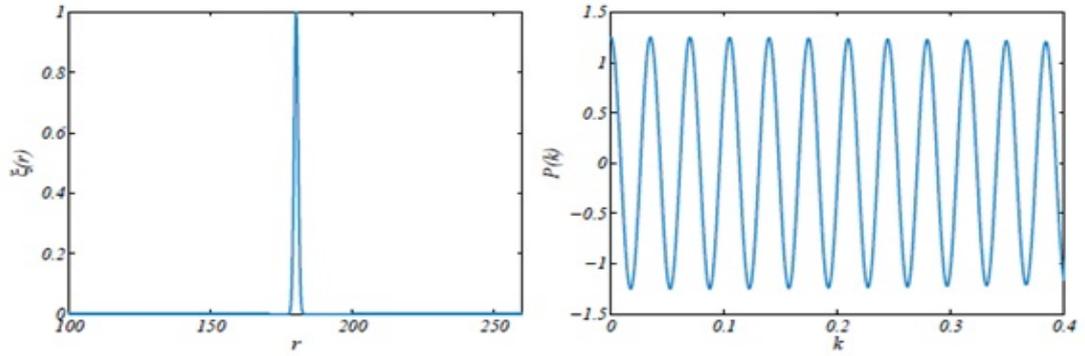


Figura 4.5: La transformada de Fourier de una función de correlación ejemplificada por la distribución delta de Dirac toma la forma de oscilaciones en su correspondiente espectro de potencias [6].

En la figura 4.6 se muestra la gráfica referente al espectro de potencias. Se puede observar como en una región de la gráfica se producen unas oscilaciones.

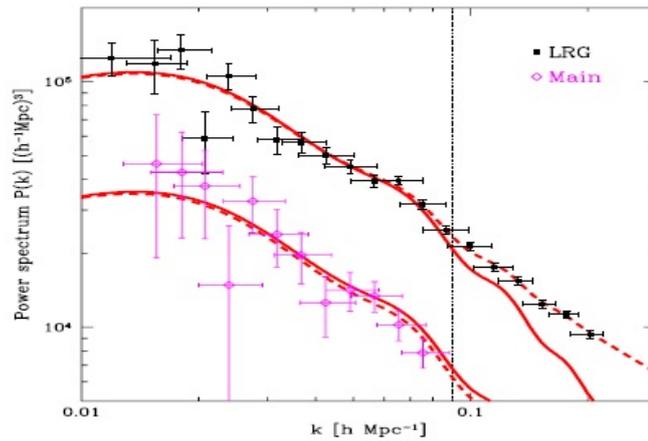


Figura 4.6: Gráfica del espectro de potencias en BAO. La curva de la gráfica presenta unas oscilaciones en su región derecha, estas oscilaciones son precisamente lo que se obtiene al registrar las BAO [6].

Así como en el caso de la función de correlación, las propiedades estadísticas de un campo Gaussiano homogéneo e isotrópico están recopiladas en el espectro de potencias. Tomando al contraste de densidad δ como un campo Gaussiano, entonces su distribución de probabilidad Gaussiana estaría dada como

$$p(\delta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{\delta^2}{2\sigma^2}\right) \quad (4.53)$$

donde su desviación estándar viene dada en términos del espectro de potencias como

$$\sigma = \frac{V}{(2\pi)^3} \int P(k) d^3k = \frac{V}{2\pi^2} \int_0^\infty P(k) k^2 dk \quad (4.54)$$

Esto es importante ya que la mayoría de los modelos inflacionarios predicen que las fluctuaciones de densidad creadas en los primeros instantes del universo, son campos Gaussianos homogéneos e isotrópicos. Así mismo, estos modelos de inflación predicen una forma para el espectro de potencias primordial dado por

$$P(k) \propto k^n \quad (4.55)$$

donde el valor del índice espectral n favorecido por los modelos es $n = 1$, también llamado espectro de Harrison-Zel'dovich. Si $n \gg 1$ se tendría que las perturbaciones se manifestarían principalmente a pequeñas escalas y habría una gran cantidad de agujeros negros que no se observan. Por otra parte, si $n \ll 1$ las perturbaciones se manifestarían a gran escala y entrarían en conflicto con el grado de homogeneidad que presenta nuestro universo en esta escala.

Las fluctuaciones de densidad de materia hoy en día no serán idénticas a las fluctuaciones primordiales, puesto que estas han evolucionado con el tiempo. Sin embargo, el espectro de potencias actual puede ser visto como un producto de tres funciones donde el espectro de potencias primordial $P_0(k)$ es modificado por un factor de crecimiento de las perturbaciones por atracción gravitatoria conocido como función de crecimiento $G(z)$ y un factor llamado función de transferencia $T(k)$ relacionado con otros tipos de interacciones que pudieran darse entre todos los tipos de partículas desde el inicio de las fluctuaciones primordiales hasta hoy en día y la cantidad y tipo de materia oscura que domina el universo, es decir

$$P(k, z) = G^2(z) T^2(k) P_0(k) \quad (4.56)$$

Finalmente las fluctuaciones de densidad de masa cuadráticas medias dentro de una esfera será proporcional al tamaño de la esfera y al espectro de potencias como

$$\frac{\delta M}{M} \equiv \left\langle \left(\frac{M - \langle M \rangle}{\langle M \rangle} \right)^2 \right\rangle \propto k^3 P(k) \quad (4.57)$$

cuyo radio de la esfera es igual a media longitud de onda correspondiente a k .

4.6. Efectos Sistemáticos

Como se ha comentado en la sección 4.4, la escala de BAO puede ser obtenida tanto a lo largo de la línea de visión como transversalmente a ésta. A pesar de que en teoría se trata del mismo fenómeno en ambos casos, las mediciones de la escala BAO difieren a lo largo de la línea de visión en comparación con las mediciones transversales.

Existe una serie de efectos sistemáticos, es decir, efectos que se producen de igual modo en todas las mediciones que se realizan, que pueden afectar más en una dirección. Estos efectos son las distorsiones en el corrimiento al rojo, efectos no lineales y el bias que relaciona la distribución de galaxias con la distribución de materia.

Cabe mencionar que para trabajar con el análisis cuantitativo de este tipo de efectos y ver la magnitud de éstos en las mediciones realizadas, es necesario hacer uso de simulaciones computacionales de N-cuerpos asumiendo un modelo cosmológico. A continuación se explicará brevemente en que consiste cada uno de estos efectos.

4.6.1. Distorsiones en el corrimiento al rojo

Las distorsiones en el espacio de corrimiento al rojo son debidas a los movimientos peculiares de las galaxias en un cúmulo, los cuales generan un corrimiento Doppler adicional al producido por el flujo de Hubble. Este corrimiento adicional ocasiona que la relación dada por la ley de Hubble entre la distancia de una galaxia y su corrimiento al rojo se vea modificada, provocando mediciones incorrectas de la distancia. Graficando la distribución de galaxias sin corregir las distorsiones en z se pueden observar dos efectos a distintas escalas, los cuales son conocidos como dedos de Dios y efecto Kaiser, como se pueden observar en la gráfica 4.7.

El efecto de los dedos de Dios es un fenómeno apreciable a pequeñas escalas, atribuido a los movimientos aleatorios de las galaxias en el cúmulo relacionadas con el teorema del virial. El fenómeno se aprecia como un alargamiento en el espacio de z sobre la línea de visión.

El efecto Kaiser es un fenómeno apreciable a grandes escalas, atribuido al movimiento congruente en dirección al centro del cúmulo. El fenómeno se aprecia como un aplanamiento de la distribución de galaxias perpendicular a la línea de visión. Por las grandes escalas que implica, resulta ser menos apreciable que el efecto de los dedos de Dios.

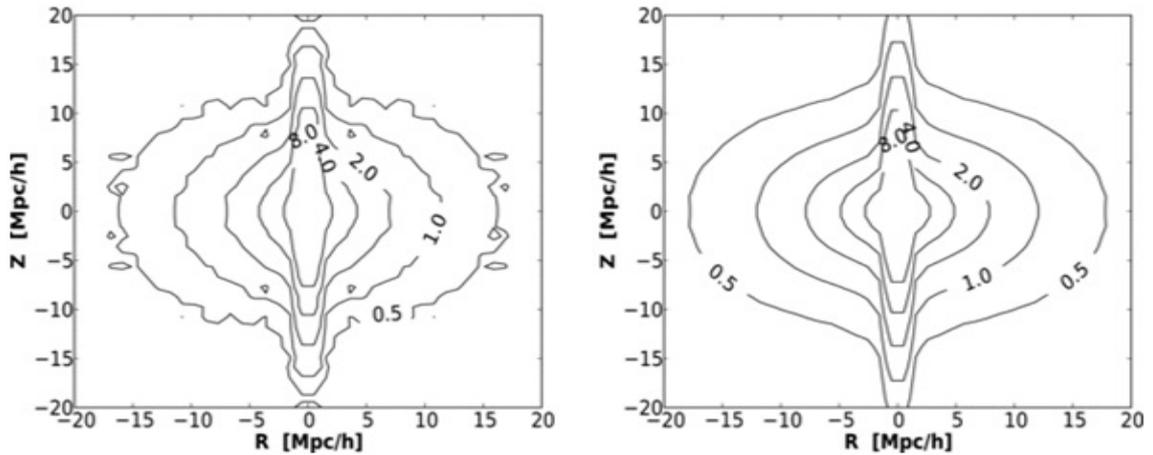


Figura 4.7: La gráfica muestra las distorsiones generadas en el espacio de z a pequeñas escalas con los dedos de Dios y a grandes escalas con el efecto Kaiser. Los dedos se observan como figuras alargadas en la dirección del observador, mientras que el efecto Kaiser se observa como un aplanamiento entre más grandes son los contornos [55].

4.6.2. Efectos No Lineales

Los efectos no lineales son los efectos producidos al considerar términos de orden superior en las ecuaciones de movimiento, para los cuales ya no se cumple $|\delta| \ll 1$. Mientras es válido el límite lineal a muy grandes escalas, las longitudes de onda comóvil no se encuentran acopladas. Sin embargo cuando el límite ya no se cumple, los modos de las longitudes de onda llegan a ser cada vez más acoplados, es decir, dependiendo unas de otras, produciéndose ahí un crecimiento no lineal de las perturbaciones.

Intentar trabajar aun dentro de la teoría lineal bajo estas condiciones filtra desviaciones de magnitud considerable, por lo cual es importante tomar en cuenta con el fin de realizar un análisis más completo o correcto en la función de correlación y en el espectro de potencias. Los efectos se producen por la interacción gravitatoria entre una galaxia con grandes densidades de materia, lo cual provoca arrastres y estiramientos en la galaxia.

Específicamente, los cambios que se producen debido a los efectos no lineales consisten en un desplazamiento del pico acústico bariónico en la función de correlación, una ampliación y suavización del pico acústico y esta ampliación del pico acústico se traduce en un amortiguamiento de las oscilaciones en el espectro de potencias, haciéndolas más difícil de detectar. A continuación esbozaremos brevemente la causa de cada uno de estos efectos.

Posteriormente a la época de recombinación, cuando ya no existe una presión de radiación que se oponga a la atracción gravitatoria, se esperaría en un modelo similar al utilizado en 4.2 que en una evolución no lineal de los excesos de densidad, el exceso de densidad formado por el pozo de potencial de materia oscura y el exceso formado por la oscilación acústica bariónica se atraigan nuevamente colapsando en algún momento. Esta atracción gravitatoria, producida cuando los excesos de densidad no cumplen la relación $|\delta| \ll 1$, recorre el pico de la señal de BAO en la función de correlación. La figura 4.8 muestra el desplazamiento del pico acústico con respecto a la posición que mantendría en el análisis lineal.

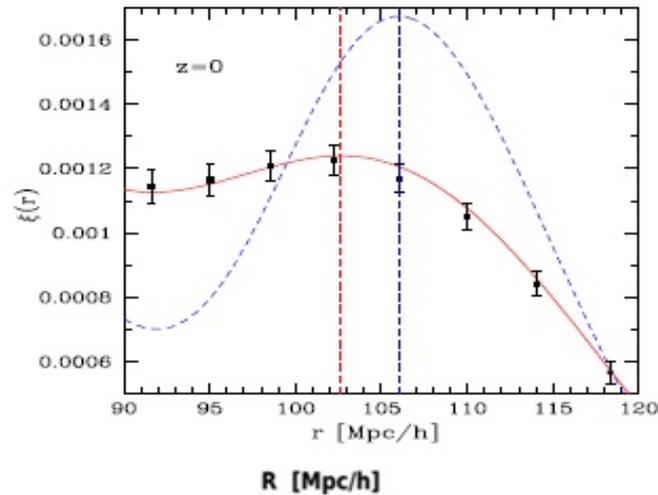


Figura 4.8: Se muestra como la gráfica de color rojo ha recorrido su pico debido al efecto de las no linealidades [6].

Así mismo, la interacción gravitatoria con todos los excesos de densidad y las subdensidades crea una fuerza que tiende a jalar a la galaxia, dando como resultado un ensanchamiento del pico de la función de correlación.

Matemáticamente se puede mostrar como al ensanchar una distribución tipo Gaussiana y posteriormente al aplicar la correspondiente transformada de Fourier para obtener el espectro de potencias, las oscilaciones en el espectro de potencias se amortiguarán con mayor rapidez entre más ancha sea la distribución. La figura 4.9 muestra el amortiguamiento de las oscilaciones en el espectro de potencias entre mayor es la anchura de la distribución.

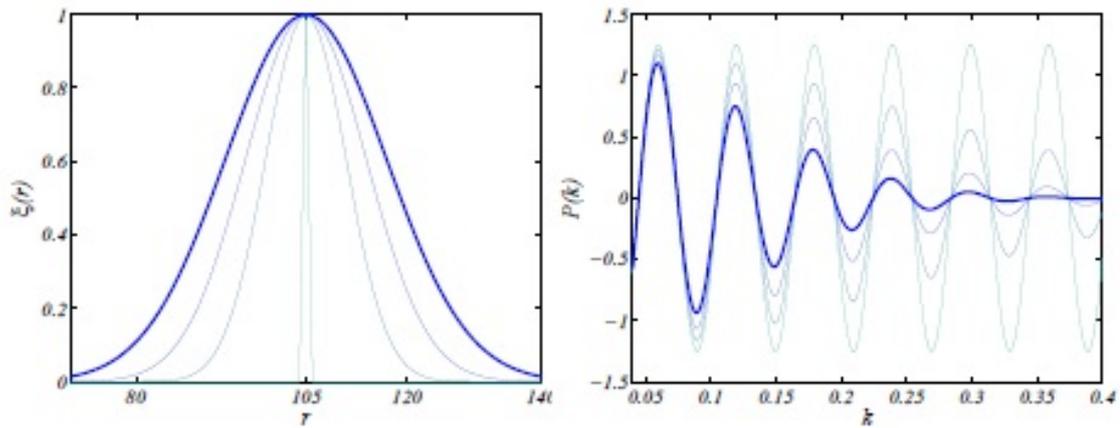


Figura 4.9: Amortiguamiento de las oscilaciones en el espectro de potencias al ir ensanchando la forma de la distribución del pico acústico en la función de correlación [6].

La manera de trabajar con las no linealidades resulta de generar un campo de velocidades de las galaxias, el cual deshace los efectos de la no linealidad por medio de la restauración de la forma del pico acústico lineal, moviendo las densidades a donde habrían estado si la evolución lineal se hubiera mantenido todo el tiempo.

4.6.3. Bias

Pese a que las técnicas de análisis por medio del espectro de potencias hacen uso de las muestras de galaxias, las galaxias apenas conforman una pequeña parte de la materia total. Sin embargo, las galaxias pueden ser utilizadas para trazar la distribución real de materia a través de un factor llamado parámetro de bias $b(k, z)$. De esta forma se puede relacionar el espectro de potencias de galaxias $P_g(k, z)$ con el espectro de potencias de materia $P_m(k, z)$ como

$$P_g(k, z) = b^2(k, z)P_m(k, z) \quad (4.58)$$

De manera general el parámetro de bias tiene una dependencia en k y z . Incluso una pequeña dependencia en k del parámetro de bias puede generar errores si no se toma en cuenta correctamente. Estos errores pueden ir desde corrimientos del pico acústico en la función de correlación e incluso mostrar oscilaciones no presentes realmente en el espectro de potencias de la distribución.

El parámetro de bias depende del tipo de muestra de galaxias que se utilice para trazar la distribución de materia, pues por su luminosidad, forma, espectro y más

estas galaxias nos indican una cantidad presencial distinta de materia. Una correcta determinación de la escala BAO exige un buen modelaje del bias, sin embargo el parámetro de bias no puede ser obtenido a partir de primeros principios sino únicamente por medio de estudios observacionales que comparan la cantidad de materia contenida en los distintos tipos de galaxias.

4.7. Varianza Cósmica

La varianza cósmica se manifiesta como un error estadístico debido al hecho de que únicamente tenemos un universo observable en el cual medir, siendo nuestro universo observable sólo uno de los muchos universos observables que podrían haber surgido. La varianza cósmica es apreciable cuando dentro de nuestro universo observable se toma una muestra en la cual no se alcanza a abarcar todas las propiedades, patrones y más elementos de interés como una imagen completa de éstos.

Claramente, como factores que intervienen en la magnitud de este error se encuentran tanto el área de observación como el número de galaxias. Con el fin de disminuir los errores debidos a las propiedades no contenidas en las muestras, se puede aumentar el tamaño de la muestra. No obstante el tamaño tiene un límite dado por el tamaño de nuestro universo observable.

Existen diferentes métodos para estimar el valor del error de la varianza cósmica, entre ellos se encuentran simulaciones a computadora que describen otros posibles universos observables compatibles con las mismas leyes físicas, submuestreos en diferentes regiones del universo e incluso el análisis de muestras utilizando distintos trazadores a los que les correspondan parámetros de bias distintos.

4.8. Función de Correlación Angular

La función de correlación angular se define de manera similar a la función de correlación a dos puntos, es decir, por medio de la probabilidad conjunta de encontrar dos galaxias separadas por un ángulo θ dentro de los ángulos sólidos $d\Omega_1$ y $d\Omega_2$

$$dP_{12} = \bar{\sigma}^2(1 + \omega(\vec{r}))d\Omega_1d\Omega_2 \quad (4.59)$$

donde $\bar{\sigma}$ es la densidad superficial media por unidad de ángulo sólido.

La función de correlación angular $\omega(\theta)$ se puede relacionar con la función de correlación a dos puntos $\xi(r)$ por medio de la integración a una profundidad D expresada

como

$$\omega(\theta) \propto \int_0^D dr_1 \int_0^D dr_2 r_1^2 r_2^2 \xi[(r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(\theta))^{\frac{1}{2}}] \quad (4.60)$$

donde se ha usado el teorema del coseno con r para cambiar a las coordenadas r_1 y r_2 . Esta misma relación bajo las aproximaciones de ángulos pequeños, $4r_1 r_2 \approx (r_1 + r_2)^2$ y las transformaciones de coordenadas $u = \frac{1}{2D}(r_1 + r_2)$ y $v = \frac{1}{D\theta}(r_1 - r_2)$ se puede expresar como

$$\omega(\theta) \propto \int_0^\infty du \int_0^\infty dv u^4 \xi[(u^2 + v^2)^{\frac{1}{2}} D\theta] \theta \quad (4.61)$$

Dado que la función de correlación angular trabaja mediante el uso del ángulo θ , es posible definir varias relaciones en analogía con el tratamiento matemático del CMB. Por ejemplo, usando armónicos esféricos se puede expresar al contraste de densidad en la dirección \hat{n} como

$$\delta(\hat{n}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{lm} Y_m^l(\theta, \phi) \quad (4.62)$$

Así mismo la función de correlación puede definirse como

$$\omega(\theta) = \langle \delta(\hat{m}) \delta(\hat{n}) \rangle_{\hat{m} \cdot \hat{n} = \cos \theta} \quad (4.63)$$

Con lo cual al combinar ambas expresiones 4.62 y 4.63, se llega a la expresión de la función de correlación angular por medio de los polinomios de Legendre

$$\omega(\theta) = \frac{1}{4\pi} \sum_{l=2}^{\infty} C_l (2l+1) P_l(\cos(\theta)) \quad (4.64)$$

Los coeficientes C_l son los momentos multipolares de la función de correlación y se relacionan con los coeficientes a_{lm} para dar información acerca del tamaño de los excesos de densidad por medio de

$$C_l = C_l \delta_{l'l'} \delta_{mm'} = \langle a_{lm}^* a_{l'm'} \rangle = \langle |a_{lm}|^2 \rangle \quad (4.65)$$

La importancia de $\omega(\theta)$ radicaba anteriormente en el hecho de poder determinar $\xi(r)$, pues en ese entonces los catálogos se limitaban a registrar la información de

la posición de las galaxias en el cielo sin hacer referencia a su profundidad. Sin embargo actualmente $\xi(r)$ puede ser determinado directamente por los experimentos, sin necesidad de ser reconstruido a partir de $\omega(\theta)$.

4.9. Estudios y experimentos en BAO

4.9.1. Selección de Objetivos Luminosos

La elección del tipo de trazador depende de las necesidades en las mediciones debido a la diferencia en el parámetro de bias para los distintos trazadores. Para elegir un tipo de trazador se debe considerar tanto el parámetro de bias como los tiempos de integración. Algunos trazadores podrán tener un parámetro de bias efectivo para ciertas necesidades pero un tiempo de integración ineficaz, por tal motivo tiene que haber un equilibrio entre el bias y el tiempo de integración.

El incremento en el número de objetivos requiere tiempos de integración más largos en la misma zona del cielo para ir a una mayor profundidad, teniendo como consecuencia una reducción en el área estudiada en un mismo tiempo de observación.

Algunos de los objetivos usados como trazadores son los siguientes:

- Galaxias Rojas Luminosas (LRG) Son galaxias elípticas pasivas y rojas sin un espectro característico. Son seleccionadas en base a su color y magnitud con el objetivo de tener aproximadamente una muestra uniforme dentro de un volumen con los colores más rojos. Tienen un parámetro de bias grande y requieren tiempos de integración grandes.
- Galaxias Azules Son galaxias con formación de estrellas azules lo cual genera claras y muy fuertes líneas de emisión como la del OII en $372.7nm$. Posee un parámetro de bias bajo y el tiempo de integración para la línea de OII está alrededor de $15min$.

Además de estos tipos de galaxias, se usan otros objetivos que cumplen con ser apreciables a grandes distancias y con poder determinar su brillo o su espectro. Estos objetivos son las supernovas tipo Ia que se han comentado con anterioridad, el bosque de Lyman-alfa basado en el corrimiento al rojo de las líneas espectrales del átomo de hidrógeno en la transición de Lyman-alfa (transición de $n = 2$ a $n = 1$) originadas en galaxias y la línea de emisión de $21cm$ del átomo de hidrógeno.

4.9.2. Estudios Realizados

Debido a las propiedades de los objetivos luminosos, los experimentos para la detección de la escala BAO se pueden dividir en dos partes, los espectroscópicos y los fotométricos.

Espectroscópicos

Algunos de los experimentos realizados y planeados a futuro para la detección de la escala BAO basados en las líneas espectrales de los objetivos luminosos son:

- Sloan Digital Sky Survey (SDSS-I SDSS-II): El SDSS es un proyecto dedicado al estudio espectroscópico del corrimiento al rojo en el visible de los objetos en el universo y llevado a cabo en el observatorio Apache Point de Nuevo México. El SDSS-I trabajó durante el 2000 al 2005 para posteriormente actualizarse con el SDSS-II. Como SDSS-II trabajó durante los años del 2005 al 2008. Sus principales medidas fueron realizadas a los corrimientos al rojo $z \simeq 0.35$ y $z \simeq 0.1$ dentro de un ángulo sólido de $10,000deg^2$ del hemisferio norte.
- WiggleZ: Es un estudio realizado de 2006 a 2011 en el Anglo-Australian Telescope (AAT), su rango de observación se encontró entre $0.2 < z < 1$ a unos $1000deg^2$, midiendo el corrimiento de hasta 240,000 galaxias.
- Baryon Oscillation Spectroscopic Survey (BOSS), parte del SDSS-III: Esta dedicado a mapear la distribución espacial de las galaxias rojas luminosas y cuásares desde 2009 hasta 2014. Su rango de detección se encuentra a valores de $z \leq 0.7$ para galaxias rojas luminosas y de $2.2 < z < 3$ para las líneas del bosque de Lyman-alfa.

Fotométricos

Los estudios fotométricos, a diferencia de los espectroscópicos, no se basan en las líneas espectrales que son emitidas por los diferentes astros sino por su brillo.

- MegaZ: Tienen objetivos luminosos como galaxias rojas luminosas. Sus observaciones rondan el valor de $z \sim 0.7$ a unos $10,000deg^2$.
- Dark Energy Survey (DES): Inició sus observaciones del cielo del hemisferio sur en 2012 para trabajar durante 5 años. Usa el telescopio de CTIO (Cerro Tololo Inter-American Observatory) en los Andes chilenos. Cubre $5000deg^2$ dentro del rango de $0.2 < z < 1.3$.

4.9.3. Resultados

Datos obtenidos por algunos de los proyectos anteriormente mencionados y otros más, han sido reunidos y utilizados por grupos de investigación para comparar con sus modelos cosmológicos. En la figura 4.10 se muestra una gráfica realizada por el grupo de Planck usando algunos datos de diferentes experimentos, los cuales son colocados en la lista 5.2. Como se puede ver en esta gráfica, el método de BAO puede ser usado de tal forma que el cociente de $\frac{r_s}{D_V(z)}$ sirva para verificar con los datos la concordancia de una propuesta de modelo cosmológico, esto debido al hecho de que dentro de las cantidades r_s y $D_V(z)$ se encuentran involucrados parámetros tales como $\Omega_m, \Omega_\Lambda, h$ y ω .

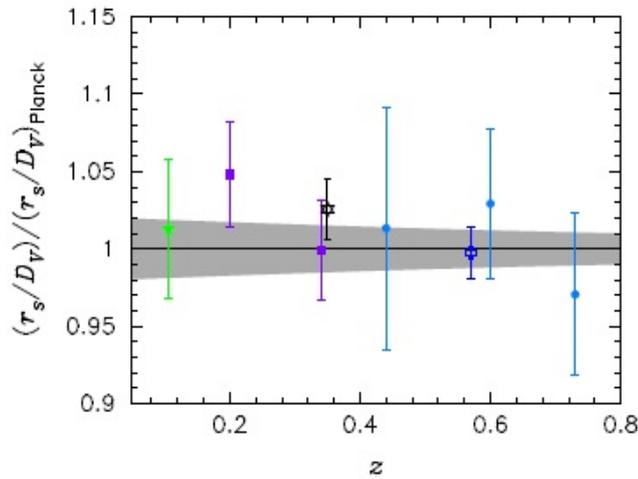


Figura 4.10: Gráfica de la tasa de distancia acústica $r_s/D_V(z)$ dividida entre la tasa de distancia del modelo Λ CDM usado por el grupo de Planck [43]. El punto con forma de estrella verde es un dato perteneciente a 6dF, mientras que los puntos cuadrados púrpura al igual que la estrella negra a SDSS-DR7, el punto azul oscuro a BOSS-DR9 y los círculos azules claros al WiggleZ. Seis de los datos mostrados en esta gráfica se encuentran en la tabla 5.2.

Así como se ha mencionado aquí la importancia de BAO para determinar la confiabilidad en los parámetros cosmológicos de un modelo, también se ha mencionado en los capítulos 2 y 3 la relación de otras pruebas cosmológicas con estos parámetros. En las figuras 4.11 (a) y (b), 4.12, 4.13 y 4.14, se muestra el uso de las pruebas referentes a SN Ia, CMB y BAO para generar contornos de forma ovaloide correspondientes a diferentes modelos. Estas gráficas con formas ovaloides son conocidas como contornos de confianza y a cada una de las tres pruebas le corresponden tres contornos de confianza referentes a 1σ , 2σ y 3σ , equivalentes a 68%, 95% y 99% respectivamente, es decir, que les corresponden tres regiones que describen cuán bien se ajusta un conjunto de observaciones a la teoría. Los contornos de bondad dan

la discrepancia entre los valores observados y los valores esperados en el modelo de estudio. Como se puede observar, los contornos de confianza de las diferentes pruebas cosmológicas sirven como constrictores de los parámetros, en otras palabras, el uso de más de una prueba sirve para delimitar con mayor precisión el intervalo de confianza donde podría encontrarse el valor de los parámetros en cuestión.

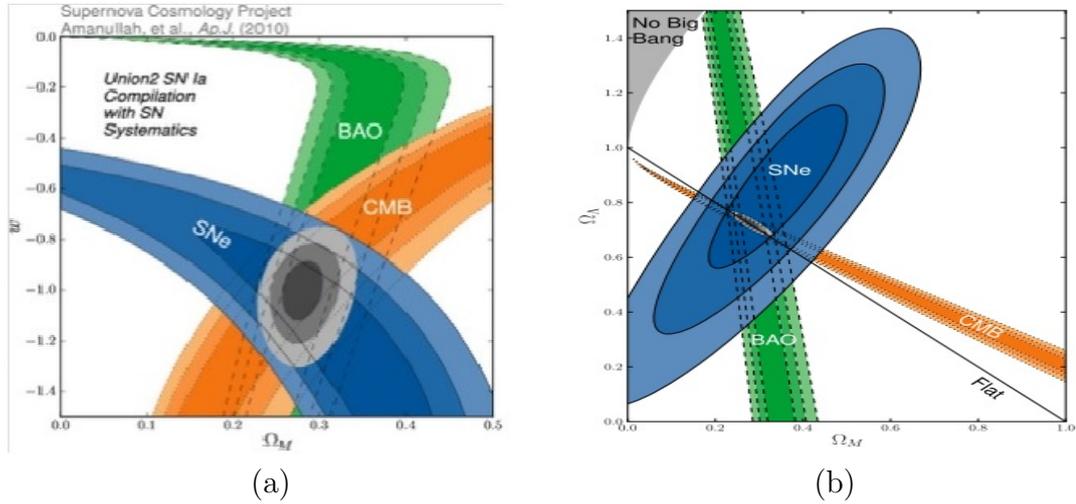


Figura 4.11: El panel (a) muestra una gráfica de ω contra Ω_m mientras que el panel (b) muestra una gráfica de Ω_Λ contra Ω_m . En ambas gráficas se presenta un conjunto de contornos de confianza para las pruebas de SN Ia, CMB y BAO, cada una caracterizada por tres regiones referentes a 1σ , 2σ y 3σ . En el caso de la gráfica (a) se ha considerado una curvatura igual a cero [1].

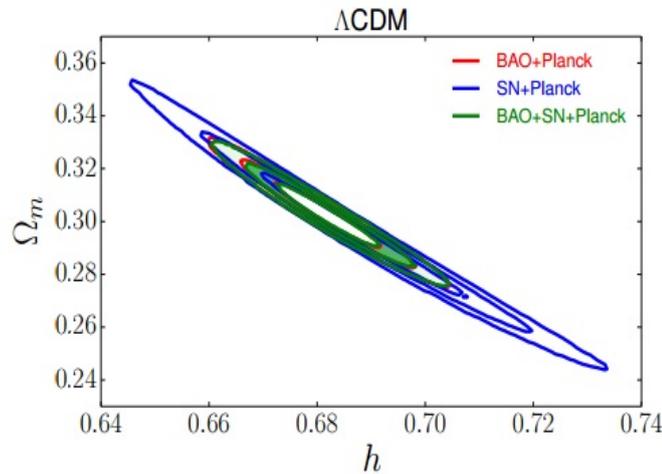


Figura 4.12: Gráfica de Ω_m vs h que muestra las curvas referentes a los contornos de confianza para la combinación de datos de BAO+Planck (en rojo), SN Ia+Planck (en azul) y BAO+SN Ia+Planck (en verde) correspondientes al 68%, 95% y 99.7% para el modelo Λ CDM descrito por la ecuación $\frac{H^2}{H_0^2} = \Omega_m a^{-3} + \Omega_r a^{-4} + \Omega_\Lambda$ [3].

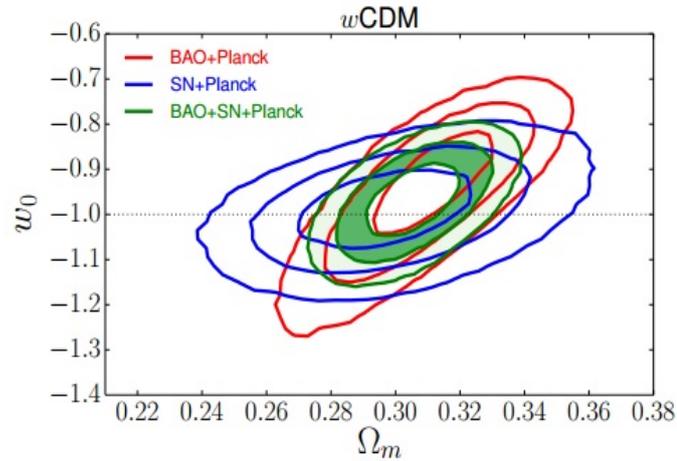


Figura 4.13: Gráfica de w_0 vs Ω_m que muestra las curvas referentes a los contornos de confianza para la combinación de datos de BAO+Planck (en rojo), SN Ia+Planck (en azul) y BAO+SN Ia+Planck (en verde) correspondientes al 68%, 95% y 99.7% para el modelo $wCDM$ descrito por la ecuación $\frac{H^2}{H_0^2} = \Omega_m a^{-3} + \Omega_r a^{-4} + \Omega_{DE} a^{-3(1+w)}$ [3].

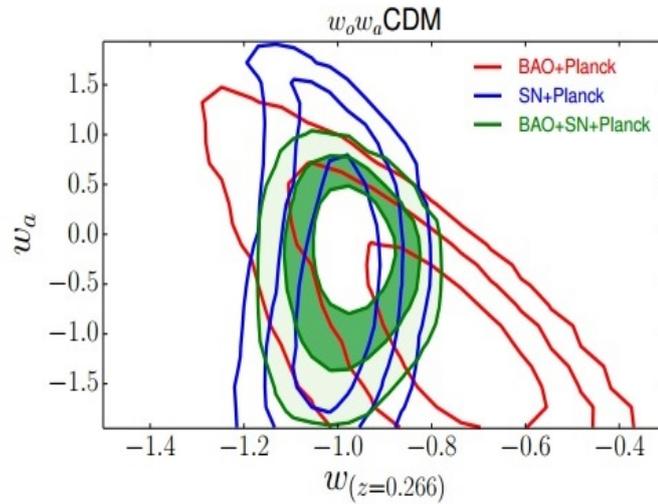


Figura 4.14: Gráfica de w_a vs $w(z=0.266)$ que muestra las curvas referentes a los contornos de confianza para la combinación de datos de BAO+Planck (en rojo), SN Ia+Planck (en azul) y BAO+SN Ia+Planck (en verde) correspondientes al 68%, 95% y 99.7% para el modelo $w_0 w_a CDM$ descrito por la ecuación $\frac{H^2}{H_0^2} = \Omega_m a^{-3} + \Omega_r a^{-4} + \Omega_{DE} a^{-3(1+w_0+w_a)} \exp[-3w_a(1-a)]$ [3].

En febrero del 2015, el grupo de colaboración de Planck ha mostrado nuevos resultados en los valores de los diferentes parámetros cosmológicos haciendo uso de

diferentes pruebas [44]. Un resumen de estos valores se muestra en las tablas 4.1 y 4.2. No obstante, en la elaboración de este trabajo se han utilizado los resultados mostrados por el grupo de Planck en 2013 [43], los cuales son enlistados en el apéndice E, ésto debido a que los resultados de esta tesis fueron obtenidos antes de la publicación de [44].

Parameter	TT	TT+lensing	TT+lensing +ext	TT, TE, EE	TT, TE, EE +lensing	TT, TE, EE +lensing+ext
Ω_K	$-0.052^{+0.049}_{-0.055}$	$-0.005^{+0.016}_{-0.017}$	$-0.0001^{+0.0054}_{-0.0052}$	$-0.040^{+0.038}_{-0.041}$	$-0.004^{+0.015}_{-0.015}$	$0.0008^{+0.0040}_{-0.0039}$
$\Sigma m_\nu [eV]$	< 0.715	< 0.675	< 0.234	< 0.492	< 0.589	< 0.194
N_{eff}	$3.13^{+0.64}_{-0.63}$	$3.13^{+0.62}_{-0.61}$	$3.15^{+0.41}_{-0.40}$	$2.99^{+0.41}_{-0.39}$	$2.94^{+0.38}_{-0.38}$	$3.04^{+0.33}_{-0.33}$
Y_P	$0.252^{+0.041}_{-0.042}$	$0.251^{+0.040}_{-0.039}$	$0.251^{+0.035}_{-0.036}$	$0.250^{+0.026}_{-0.027}$	$0.247^{+0.026}_{-0.027}$	$0.249^{+0.025}_{-0.026}$
$dn_s/dlnk$	$-0.008^{+0.016}_{-0.016}$	$-0.003^{+0.015}_{-0.015}$	$-0.003^{+0.015}_{-0.014}$	$-0.006^{+0.014}_{-0.014}$	$-0.002^{+0.013}_{-0.013}$	$-0.002^{+0.013}_{-0.013}$
$r_{0.002}$	< 0.103	< 0.114	< 0.114	< 0.0987	< 0.112	< 0.113
ω	$-1.54^{+0.62}_{-0.50}$	$-1.41^{+0.64}_{-0.56}$	$-1.006^{+0.085}_{-0.091}$	$-1.55^{+0.58}_{-0.48}$	$-1.42^{+0.62}_{-0.56}$	$-1.019^{+0.075}_{-0.080}$

Cuadro 4.2: Constricciones en los parámetros del modelo Λ CDM para las combinaciones de los espectros de potencia de Planck, Planck lensing y datos externos (BAO+JLA+ H_0 , denotado “ext”). Nótese que se han citado los límites del 95% aquí de acuerdo a [44].

Como se puede observar en la tabla 4.2, el parámetro Ω_K tiene un valor prácticamente igual a cero, por lo que es sensato considerar $\Omega_K = 0$ en nuestros modelos. En el presente trabajo únicamente se trabaja mediante la prueba de BAO para un universo plano. Cabe señalar que un estudio completo de un modelo cosmológico requiere de más de una prueba, con el fin de restringir más el intervalo de confianza, tal y como se muestra en 4.11, 4.12, 4.13 y 4.14 con la intersección de los contornos de confianza de SN Ia, CMB y BAO. En la sección 5.5, se coloca una serie de gráficas de contornos de confianza del estilo de las gráficas 4.10, 4.11 (a), 4.12 y 4.13 para algunos de los modelos propuestos, mientras que la lista completa de gráficas de este estilo para cada uno de los modelos trabajados puede ser revisada en los apéndices B y C.

Parameter	TT+lowP	TT+lowP	TT+lowP	TT, TE, EE	TT, TE, EE	TT, TE, EE+lowP
	68 % limite	68 % limite	68 % limite	68 % limite	68 % limite	68 % limite
$\Omega_b h^2$	0.02222 ± 0.00023	0.02226 ± 0.00023	0.02227 ± 0.00020	0.02225 ± 0.00016	0.02226 ± 0.00016	0.02230 ± 0.00014
$\Omega_{DM} h^2$	0.1197 ± 0.0022	0.1186 ± 0.0020	0.1184 ± 0.0012	0.1198 ± 0.0015	0.1193 ± 0.0014	0.1188 ± 0.0010
$100\theta_{MC}$	1.04085 ± 0.00047	1.04103 ± 0.00046	1.04106 ± 0.00041	1.04077 ± 0.00032	1.04087 ± 0.00032	1.04093 ± 0.00030
τ	0.078 ± 0.019	0.066 ± 0.016	0.067 ± 0.013	0.079 ± 0.017	0.063 ± 0.014	0.066 ± 0.012
$\ln(10^{10} A_s)$	3.089 ± 0.036	3.062 ± 0.029	3.064 ± 0.024	3.094 ± 0.034	3.059 ± 0.025	3.064 ± 0.023
n_s	0.9655 ± 0.0062	0.9677 ± 0.0060	0.9681 ± 0.0044	0.9645 ± 0.0049	0.9653 ± 0.0048	0.9667 ± 0.0040
H_0	67.31 ± 0.96	67.81 ± 0.92	67.90 ± 0.55	67.27 ± 0.66	67.51 ± 0.64	67.74 ± 0.46
Ω_Λ	0.685 ± 0.013	0.692 ± 0.012	0.6935 ± 0.0072	0.6844 ± 0.0091	0.6879 ± 0.0087	0.6911 ± 0.0062
Ω_m	0.315 ± 0.013	0.308 ± 0.012	0.3065 ± 0.0072	0.3156 ± 0.0091	0.3121 ± 0.0087	0.3089 ± 0.0062
$\Omega_m h^2$	0.1426 ± 0.0020	0.1415 ± 0.0019	0.1413 ± 0.0011	0.1427 ± 0.0014	0.1422 ± 0.0013	0.14170 ± 0.00097
$\Omega_m h^3$	0.09597 ± 0.00045	0.09591 ± 0.00045	0.09593 ± 0.00045	0.09601 ± 0.00029	0.09596 ± 0.00030	0.09598 ± 0.00029
σ_s	0.829 ± 0.014	0.8149 ± 0.0093	0.8154 ± 0.0090	0.831 ± 0.013	0.8150 ± 0.0087	0.8159 ± 0.0086
$\sigma_s \Omega_m^{0.5}$	0.466 ± 0.013	0.4521 ± 0.0088	0.4514 ± 0.0066	0.4668 ± 0.0098	0.4553 ± 0.0068	0.4535 ± 0.0059
$\sigma_s \Omega_m^{0.25}$	0.621 ± 0.013	0.6069 ± 0.0076	0.6066 ± 0.0070	0.623 ± 0.011	0.6091 ± 0.0067	0.6083 ± 0.0066
z_{re}	$9.9_{-1.6}^{+1.8}$	$8.8_{-1.4}^{+1.7}$	$8.9_{-1.2}^{+1.3}$	$10.0_{-1.5}^{+1.7}$	$8.5_{-1.2}^{+1.4}$	$8.8_{-1.1}^{+1.2}$
$10^9 A_s$	$2.198_{-0.085}^{+0.076}$	2.139 ± 0.063	2.143 ± 0.051	2.207 ± 0.074	2.130 ± 0.053	2.142 ± 0.049
$10^9 A_s e^{-2\tau}$	1.880 ± 0.014	1.874 ± 0.013	1.873 ± 0.011	1.882 ± 0.012	1.878 ± 0.011	1.876 ± 0.011
Age/Gyr	13.813 ± 0.038	13.799 ± 0.038	13.796 ± 0.029	13.813 ± 0.026	13.807 ± 0.026	13.799 ± 0.021
z_*	1090.09 ± 0.42	1089.94 ± 0.42	1089.90 ± 0.30	1090.06 ± 0.30	1090.00 ± 0.29	1089.90 ± 0.23
r_*	144.61 ± 0.49	144.89 ± 0.44	144.93 ± 0.30	144.57 ± 0.32	144.71 ± 0.31	144.81 ± 0.24
$100\theta_*$	1.04105 ± 0.00046	1.04122 ± 0.00045	1.04126 ± 0.00041	1.04096 ± 0.00032	1.04106 ± 0.00031	1.04112 ± 0.00029
z_{drag}	1059.57 ± 0.46	1059.57 ± 0.47	1059.60 ± 0.44	1059.65 ± 0.31	1059.62 ± 0.31	1059.68 ± 0.29
r_{drag}	147.33 ± 0.49	147.60 ± 0.43	147.63 ± 0.32	147.27 ± 0.31	147.41 ± 0.30	147.50 ± 0.24
k_D	0.14050 ± 0.00052	0.14024 ± 0.00047	0.14022 ± 0.00042	0.14059 ± 0.00032	0.14044 ± 0.00032	0.14038 ± 0.00029
z_{eq}	3393 ± 49	3365 ± 44	3361 ± 27	3395 ± 33	3382 ± 32	3371 ± 23
k_{eq}	0.01035 ± 0.00015	0.01027 ± 0.00014	0.010258 ± 0.000083	0.01036 ± 0.00010	0.010322 ± 0.000096	0.010288 ± 0.000071
$100\theta_{s,eq}$	0.4502 ± 0.0047	0.4529 ± 0.0044	0.4533 ± 0.0026	0.4499 ± 0.0032	0.4512 ± 0.0031	0.4523 ± 0.0023
f_{2000}^{143}	29.9 ± 2.9	30.4 ± 2.9	30.3 ± 2.8	29.5 ± 2.7	30.2 ± 2.7	30.0 ± 2.7
$f_{2000}^{143 \times 217}$	32.4 ± 2.1	32.8 ± 2.1	32.7 ± 2.0	32.2 ± 1.9	32.8 ± 1.9	32.6 ± 1.9
f_{2000}^{217}	106.0 ± 2.0	106.3 ± 2.0	106.2 ± 2.0	105.8 ± 1.9	106.2 ± 1.9	106.1 ± 1.8

Cuadro 4.1: Parámetros cosmológicos con límites de confianza del 68 % en el modelo Λ CDM obtenidos a partir del espectro de potencias del CMB de Planck, en combinación con reconstrucción por lentes gravitatorias (lensing) y datos externos (“ext”, BAO+JLA+ H_0). [44].

Capítulo 5

Análisis de la Dinámica de la Energía Oscura

A pesar de que sabemos de la existencia de la energía oscura, aun no hay un modelo teórico con el cual la energía oscura pueda ser comprendida completamente y concuerde con los datos obtenidos.

Uno de los modelos más simples y que es la base del modelo estándar de la cosmología es considerar a la energía oscura igual a una constante cosmológica. Su éxito radica precisamente en su simpleza y en una compatibilidad aceptable con los datos, sin embargo presenta el inconveniente de no poderse explicar el pequeño valor de la constante cosmológica a través de la física conocida.

Este problema ha llevado a diferentes investigadores a proponer diferentes teorías candidatas partiendo de primeros principios para explicar una energía oscura que en general variaría en el tiempo. Propuestas de modelos teóricos tales como Quintaesencia, gas Chaplygin, campo fantasma, gravedad modificada y más, han aparecido. Estas teorías de manera simplificada exponen lo siguiente:

- **Quintaesencia:** Es la propuesta más popular para energía oscura. La quintaesencia emplea un campo escalar ϕ que ésta ligeramente acoplado a la gravedad. Su desarrollo matemático es muy similar a los propuestos en los modelos de inflación [55].
- **Campo Fantasma:** Es el modelaje de la energía oscura por medio de un campo escalar para los cuales el valor de $\omega_\Lambda < -1$, surgidas después del apoyo de datos observacionales para los cuales se presenta un 68 % de nivel de confianza en esa región del valor de ω_{Λ} . La física de trasfondo implica energías cinéticas negativas que pueden ser bien justificadas a partir de teoría de cuerdas [55].

- **Gas Chaplygin:** Es un fluido que lleva a la expansión acelerada del universo en tiempos tardíos. La ecuación de estado generalizada de un gas de Chaplygin es de la forma $P = -\frac{A}{\rho^\alpha}$, con A una constante positiva. La propuesta de este modelo puede surgir a partir de teoría de cuerdas y supersimetría. Ha llegado a ser un candidato para unificar a la energía oscura con la materia oscura. No obstante, su uso lleva a un crecimiento exponencial en el espectro de potencias en ausencia de materia oscura fría, lo cual deja dudas sobre su posible uso para explicar a la materia oscura también [55].
- **Gravedad Modificada:** Son teorías alternativas de la gravedad que explican la expansión acelerada del universo. Modifican la teoría de la relatividad general cambiando el lado referente a la geometría del espacio-tiempo en las ecuaciones de campo de Einstein [55].

Lamentablemente ninguna de estas teorías ha resuelto por completo el problema, por lo que no se considera a ninguna de ellas como la teoría definitiva aun. Un camino alternativo que ha surgido para seguir avanzando en la construcción de una teoría de la energía oscura ha sido vía el conocimiento empírico. En otras palabras, esta pragmática ideología nos lleva más a la idea de describir el fenómeno antes de querer entender las causas que lo provocan, proponiendo para ello una función que parametrice a la energía oscura.

Una buena parametrización describe lo mejor posible un fenómeno observable a partir de los datos registrados, utilizando para ello una cierta cantidad de parámetros. Generalmente la parametrización que modela a la energía oscura bajo este procedimiento, actúa en su ecuación de estado. La parametrización es comparada con los datos y sus parámetros son ajustados por medio de un método estadístico llamado χ^2 , de tal forma que se obtengan los valores de los parámetros en los cuales la parametrización sea compatible con las observaciones. Finalmente obtenido un modelo de parametrización aceptable, se pueden comparar sus resultados con los obtenidos por diversos modelos teóricos que estudian a la energía oscura a partir de primeros principios.

5.1. Parametrizaciones Clásicas de la Energía Oscura

El modelaje de la energía oscura ha dejado algunas parametrizaciones interesantes, todas ellas construidas a partir de un poco de intuición e información previa. Algunas de las más sobresalientes son las siguientes:

Constante Cosmológica

El modelo de una constante cosmológica resulta ser la propuesta más simple de todas para describir el comportamiento de la energía oscura. Este modelo resulta de agregar la constante cosmológica Λ dentro de las ecuaciones de campo de Einstein 1.1 y es la base del modelo estándar Λ CDM de la cosmología. A esta constante cosmológica se le asocia una densidad descrita por la ecuación de estado

$$\omega = -1 \quad (5.1)$$

Se suele atribuir el origen de físico de esta densidad de energía a la densidad de energía del vacío.

Parametrización de Chevallier-Polarski-Linder

Suele ser la parametrización más popular debido a su buen comportamiento con tan simple forma y llega a ser la base para desarrollar más propuestas de parametrización. Esta parametrización define a la ecuación de estado de la energía oscura como

$$\omega(a) = \omega_0 + \omega_a(1 - a) \quad (5.2)$$

o en términos del corrimiento al rojo z como

$$\omega(z) = \omega_0 + \omega_a \left(\frac{z}{1+z} \right) \quad (5.3)$$

donde ω_0 corresponde al valor de la ecuación de estado de la energía oscura hoy en día, como se puede observar al tomar el valor de $a = 1$ o equivalentemente $z = 0$.

Parametrización de Wang

Es una extensión del modelo de Chevallier-Polarski-Linder que intenta resolver el problema de éste en la débil restricción en el parámetro ω_a . La forma de la parametrización de Wang en términos del factor de escala es

$$\omega(a) = 3\omega_{0.5} - 2\omega_0 + 3(\omega_0 - \omega_{0.5})a = \omega_0(-2 + 3a) + 3\omega_{0.5}(1 - a) \quad (5.4)$$

o en términos del corrimiento al rojo z está dada como

$$\omega(z) = 3\omega_{0.5} - 2\omega_0 + \frac{3(\omega_0 - \omega_{0.5})}{1+z} \quad (5.5)$$

donde $\omega_{0.5}$ corresponde al valor de $\omega(z)$ en el corrimiento al rojo $z = 0.5$. Nuevamente al tomar los valores de $a = 1$ o $z = 0$ la ecuación de estado se reduce al valor de ω_0 .

Parametrizaciones Polinómicas

La parametrización polinómica, al igual que la parametrización de Wang, se encuentra motivada por la parametrización de Chevallier-Polarski-Linder. No obstante su forma varía bastante, pues además considera una expansión en potencias de $1 + z$. La primera parametrización polinómica que surgió fue debida a Weller y Albrecht, con la forma

$$\omega(z) = -1 + c_1(1 + z) + c_2(1 + z)^2 \quad (5.6)$$

Aunque esta parametrización presenta un problema para z grandes, pues $|\omega(z)|$ incrementa indefinidamente con el valor de z .

Una generalización de este modelo es proponer

$$\omega(z) = -1 + c_1g_1(1 + f(z)) + c_2g_2(1 + z)^2 \quad (5.7)$$

donde g_1 , g_2 y $f(z)$ son funciones suaves tomadas a decisión del modelo. Para un modelo polinómico convencional se suele usar $g_1 = 1$, $g_2 = 1$ y

$$f(z) = \frac{z}{1 + z} \quad (5.8)$$

el cual está basado igualmente en la parametrización de Chevallier-Polarski-Linder.

5.2. Parametrización Propuesta

Basados en el conocimiento de las parametrizaciones previas, propondremos una ecuación de estado para la energía oscura con $\omega(z)$ definida como

$$\omega(z) = \omega_0 + \omega_1 f(z) \quad (5.9)$$

donde

$$f(z) = \frac{\left(\frac{z}{z_t}\right)^q}{1 + \left(\frac{z}{z_t}\right)^q} \quad (5.10)$$

y donde además el parámetro z_t será llamado z de transición.

Nótese que al tomar el valor de los parámetros z_t y q como $z_t = 1$ y $q = 1$, la parametrización propuesta se reduce a la forma de la parametrización de Chevallier-Polarski-Linder.

La forma de $f(z)$ es tal que cumple

$$f(z) = \begin{cases} 0 & \text{para } z = 0 \\ 1 & \text{para } z \gg z_t \end{cases} \quad (5.11)$$

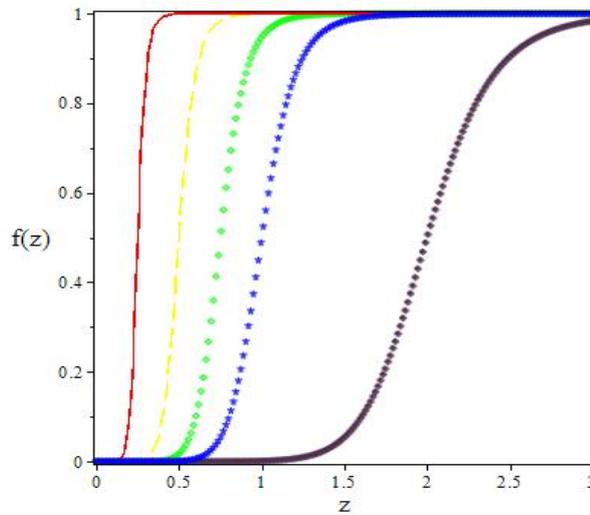


Figura 5.1: Gráfica de $f(z)$ donde se muestra la forma de esta función al variar los valores de z_t en 0.25, 0.5, 0.75, 1 y 2, representados por las formas de línea continua roja, guiones en amarillo, puntos verdes, asteriscos azules y diamantes violetas respectivamente.

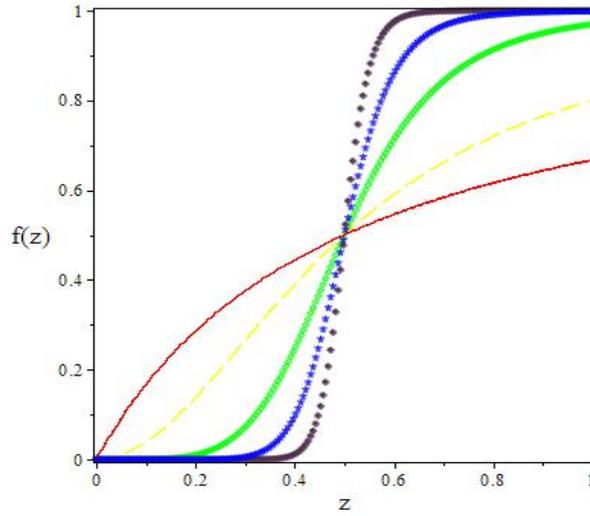


Figura 5.2: Gráfica de $f(z)$ donde se varía q en los valores 1, 2, 5, 10 y 20, representados por las formas de línea continua roja, guiones en amarillo, puntos verdes, asteriscos azules y diamantes violetas respectivamente.

En las figuras 5.1 y 5.2 se muestran dos ejemplos de la forma adoptada por la función $f(z)$ al variar los parámetros z_t y q respectivamente. En la figura 5.1 se puede apreciar una transición en la función justo en el valor correspondiente a z_t , de tal forma que la parte superior de la función pase de ser cóncavo a uno convexo, de ahí que se haya decidido llamar z de transición. Igualmente, de la figura 5.2 se puede observar que la cantidad q hará más intensa esta transición entre mayor sea el valor de q , llegando a tomar cada vez más la forma de una función escalón de Heaviside. Para el valor $q = 0$, $f(z)$ tendría el valor de $f(z) = 0.5$ independientemente del valor de z_t y de z , es decir sería una constante. Así mismo, una z_t muy grande, tal que $z_t \rightarrow \infty$, daría lugar a una $f(z) = 0$, con lo cual se regresa al caso en que $\omega(z) = \omega_0$ utilizado en el modelaje de la energía oscura por medio de una constante cosmológica.

Por otro lado, la presencia de la función $f(z)$ en la ecuación 5.9 de la definición de parametrización de $\omega(z)$, genera un comportamiento similar en $\omega(z)$ al de $f(z)$, como se puede observar en las figuras 5.3, 5.4 y 5.5. La función $f(z)$ genera que el valor de la ecuación de estado de la energía oscura $\omega(z)$ varíe en el tiempo, a diferencia del modelo Λ CDM donde $\omega = -1$. De esta forma se puede definir una ω para el estado inicial de la energía oscura como ω_i , tal que

$$\omega_i \equiv \lim_{z \rightarrow \infty} \omega(z) \quad (5.12)$$

o dicho de otra forma, dada la anterior explicación sobre el comportamiento de $f(z)$ resumida en 5.11, se tiene también que

$$\omega_i = \omega_0 + \omega_1 \quad (5.13)$$

donde en general el valor de ω_i puede ser mayor, igual o menor al valor de la ecuación de estado hoy en día ω_0 .

La figura 5.3 muestra una serie de líneas para la función de estado $\omega(z)$ dependiendo de su valor inicial en el tiempo ω_i . La localización de ω_i nos da información sobre la naturaleza de la energía oscura al inicio del universo. Por ejemplo, una $\omega_i = 0$ nos diría que la energía oscura fue en algún momento una partícula no relativista y que en transcurso del tiempo cambió su naturaleza para finalmente estar caracterizada por un estado dado por ω_0 . Así mismo el valor de ω_0 nos aporta información sobre la naturaleza de la energía oscura hoy en día.

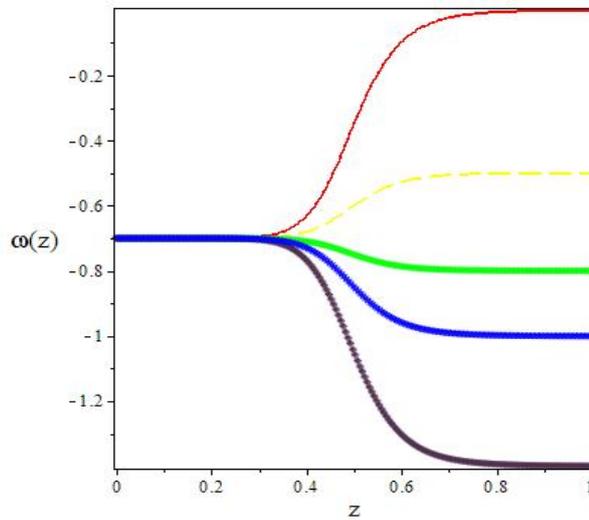


Figura 5.3: Gráfica de $\omega(z)$ donde se varía ω_i en los valores 0, -0.5 , -0.8 , -1 y -1.4 , representados por las formas de línea continua roja, guiones en amarillo, puntos verdes, asteriscos azules y diamantes violetas respectivamente.

En la figura 5.4 se muestra una variación del punto de transición entre el tipo de naturaleza inicial de la energía oscura ω_i y su naturaleza hoy en día ω_0 . Esta transición entre una naturaleza y otra ha sido caracterizada a través del parámetro z_t .

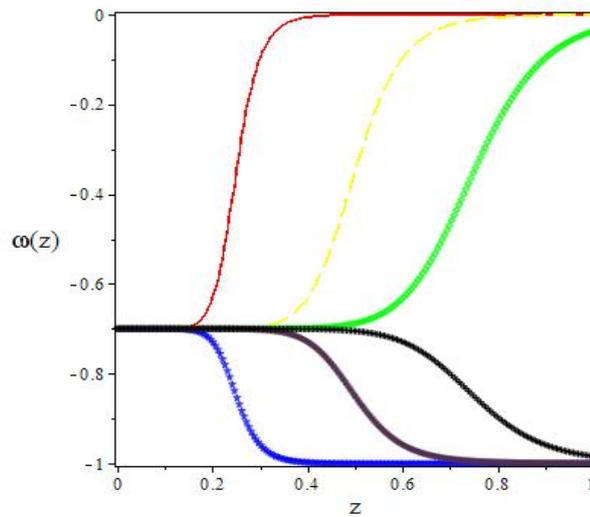


Figura 5.4: Gráfica de $\omega(z)$ donde se varía z_t en los valores 0.25, 0.5 y 0.75 para los valores de ω_i iguales a 0 y -1, representados por las formas de línea continua roja, guiones en amarillo, puntos verdes, asteriscos azules y diamantes violetas respectivamente.

Finalmente, el parámetro q nos muestra que tan fuerte es esta transición entre ω_i y ω_0 . Al igual que en 5.2, entre mayor sea el valor de q , la transición será efectuada con mayor violencia.

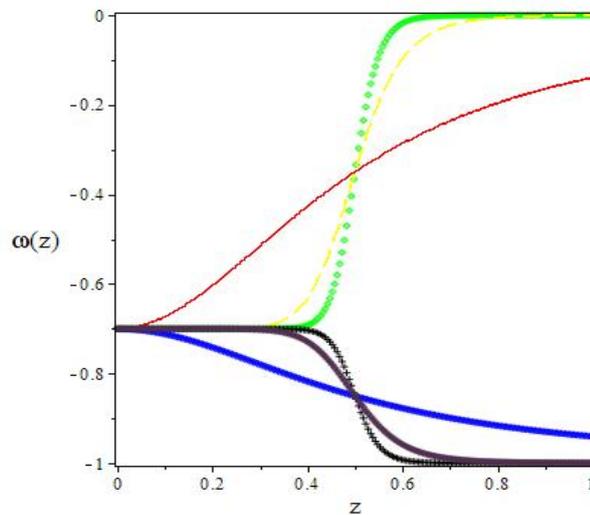


Figura 5.5: Gráfica de $\omega(z)$ donde se varía q en los valores 1, 2, 5, 10 y 20, representados por las formas de línea continua roja, guiones en amarillo, puntos verdes, asteriscos azules y diamantes violetas respectivamente.

En el trabajo se utilizó esta parametrización en la elaboración de 40 programas

divididos en dos bloques de 20 para la variación de tres y dos parámetros, cada uno caracterizado por valores particulares de los parámetros fijos q , z_t y ω_i . En la sección 5.4 se explicará más sobre los valores elegidos para q , z_t y ω_i y la forma en como se trabajó con esta parametrización.

5.3. Ecuaciones Cosmológicas Útiles en los Modelos

Dentro del presente trabajo se tomarán en cuenta 20 casos a estudiar, usando como base un universo plano, es decir con $K = 0$ o $\Omega_{K0} = 0$ basados en la cercanía a este valor de acuerdo a las observaciones. Además de esto, nos apoyaremos del hecho de que en ciertas épocas del universo algunas de las componentes constituyentes de éste, no presentan una contribución relevante a las cantidades calculadas, con lo cual las expresiones se simplifican. La tabla 5.1 así como las gráficas de la figura 1.5, muestran los valores que toman los parámetros de densidad Ω_r , Ω_m y Ω_Λ en el modelo estándar de la cosmología a diferentes escalas del corrimiento al rojo, en donde Ω_m contempla bariones y energía oscura, es decir $\Omega_m = \Omega_b + \Omega_{DM}$.

z	10000	1000	10	1	0
Ω_r	0.75	0.23	3.33×10^{-3}	4.55×10^{-4}	8.24×10^{-5}
Ω_m	0.24	0.76	0.99	0.747	0.27
Ω_Λ	6.67×10^{-13}	2.06×10^{-9}	2.02×10^{-3}	0.25	0.73

Cuadro 5.1: Valores de los parámetros de densidad de radiación Ω_r , materia Ω_m y energía oscura Ω_Λ a diferentes escalas del corrimiento al rojo.

En base a lo anterior tenemos las siguientes ecuaciones que son útiles en los diversos modelos:

- Parámetro de densidad total del universo hoy en día Ω_{T0} :

$$\Omega_{T0} = \Omega_{m0} + \Omega_{\Lambda0} = 1 \quad (5.14)$$

Donde se ha despreciado la contribución del parámetro de densidad de radiación de hoy en día Ω_{r0} por ser de magnitud insignificante en comparación con los demás parámetros de densidad en la época actual de acuerdo a la tabla 5.1. Esta ecuación nos permitirá reducir en uno los parámetros a considerar en los modelos, ya que permite escribir a $\Omega_{\Lambda0}$ en función de Ω_{m0} o viceversa.

- Parámetro de hubble

$$H(z) = H_0 \left[\Omega_{m0}(1+z)^3 + \Omega_{r0}(1+z)^4 + \Omega_{\Lambda0}(1+z)^3 e^{\left(-3 \int_1^{1+z} \frac{\omega(a)}{a} da\right)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5.15)$$

Sin embargo esta expresión para el parámetro de Hubble sólo es usada en el horizonte acústico donde, debido a que el fenómeno tiene su origen en épocas muy tempranas, la radiación sí juega un papel importante. Para el resto de las expresiones el término del parámetro de densidad de radiación es omitido. El término que incluye a la exponencial debe ser calculado individualmente para cada caso previsto para $\omega(a)$ en los modelos.

- La distancia comóvil del horizonte acústico r_s , vista en la ecuación 4.33 de la sección 4.3:

$$r_s = c \int_{z_{drag}}^{\infty} \frac{1}{H(z) \sqrt{3(1 + R \frac{1}{1+z})}} dz \quad (5.16)$$

Con $R = \frac{3}{4} \frac{\rho_{b0}}{\rho_{\gamma0}} = \frac{3}{4} \frac{\Omega_{b0}}{\Omega_{\gamma0}} = \frac{3}{4} \frac{\Omega_{b0} h^2}{\Omega_{\gamma0} h^2} = 669.974$ utilizando la densidad $\Omega_{b0} h^2 = 0.022068$ y la ecuación 5.21. En esta ecuación no es correcto despreciar Ω_{r0} como en el caso anterior, debido a que la época en consideración corresponde a valores del corrimiento al rojo desde z_{drag} hasta valores de z mayores, donde de acuerdo a la tabla 5.1 y a las gráficas de la figura 1.5 la radiación toma un papel importante. Por otra parte si se tomara $\omega(a') = -1$, en principio se podría despreciar la contribución de $\Omega_{\Lambda0}$ en tales épocas.

- La distancia de dilatación o distancia volumen promediado $D_V(z)$, vista en la ecuación 4.42 de la sección 4.4:

$$D_V(z) \equiv \left[(1+z)^2 D_A^2(z) \frac{cz}{H(z)} \right]^{\frac{1}{3}} \quad (5.17)$$

- La distancia diametral angular $D_A(z)$:

$$D_A(z) \equiv \frac{c}{H_0} \frac{\chi(z)}{1+z} \quad (5.18)$$

- Cantidad $\chi(z)$:

$$\chi(z) \equiv \int_0^z \frac{H_0 dz'}{H(z')} \quad (5.19)$$

Esta cantidad se puede interpretar como la distancia comóvil entre el punto de observación y el observador. Tal distancia comóvil correspondería a la ecuación 1.66, salvo que algunos valores dentro de χ han sido eliminados durante el proceso de obtención de las ecuaciones finales. Por otra parte, el parámetro de densidad de radiación se ha tomado en $D_V(z)$, $D_A(z)$ y $\chi(z)$ como $\Omega_{r0} \approx 0$ debido al insignificante aporte que genera éste a la densidad total en la época actual, esto último en base a que el análisis que se realizará en los modelos únicamente proviene de la comparación con datos medidos a corrimientos al rojo entre $z = 0$ y $z = 1$.

- El cociente $d_z(z)$:

$$d_z(z) = \frac{r_s}{D_V(z)} \quad (5.20)$$

Una de las maneras en que es posible utilizar los picos acústicos como una de las pruebas cosmológicas es a través del cociente $d_z(z)$, de tal forma que se compare un valor de $d_z(z)$ obtenido a través de un modelo cosmológico con un valor de $d_z(z)$ obtenido a través de la medición. Para este propósito final, es igualmente importante presentar el método de comparación entre ambos datos, para ello nos basaremos en la prueba de χ_r^2 que se expresa más abajo y cuya forma tiene una ventaja sobre la prueba de χ^2 normal vistas en A .

- Parámetro de Densidad de Fotones $\Omega_{\gamma 0}$:

$$\Omega_{\gamma 0} = \frac{2.4704 \times 10^{-5}}{h^2} \quad (5.21)$$

dependiendo únicamente de h su valor.

Manejaremos los valores en unidades naturales, por lo que las cantidades físicas estarán en términos de GeV cuya relación se muestra en el apéndice D.

Como se puede observar, en varias de las ecuaciones escritas está presente la cantidad

$$\frac{\rho_\Lambda}{\rho_{c0}} = \Omega_{\Lambda 0} (1+z)^3 e^{-3 \int_1^{1+z} \frac{\omega(a')}{a'} da'} \quad (5.22)$$

por lo que será importante determinar la forma de esta cantidad dependiendo del valor que tome $\omega(a')$ en cada modelo. Los parámetros utilizados en cada modelo serán variados acorde al intervalo especificado para cada uno.

5.4. Procedimiento de Estudio

Con base en el modelo de parametrización de la energía oscura propuesto en la sección 5.2, se emplearon 40 programas escritos en MAPLE, divididos en dos bloques de 20 programas caracterizados cada uno por valores particulares en los parámetros fijos q , ω_1 y z_t , con el afán de determinar un rango de valores en cada uno de los programas para los parámetros cosmológicos Ω_{m0} , h y ω_0 .

En ambos bloques, los rangos de los parámetros cosmológicos, también conocidos como contornos de confianza, son tales que poseen un mejor ajuste con los datos obtenidos de manera experimental por diversos grupos de investigación, los cuales son nombrados en la tabla 5.2 junto con sus respectivas mediciones. La determinación de los contornos de confianza para cada una de las variaciones del modelo propuesto es llevada a cabo de acuerdo con el método estadístico de χ^2 para $d_z = \frac{r_s(z_{drag})}{D_V(z)}$ anteriormente mencionado y descrito en el apéndice A.

Corrimiento al Rojo z	$d_z = \frac{r_s}{D_V(z)}$	Grupo de Datos
0.1	0.336 ± 0.015	6dFGRS
0.35	0.113 ± 0.002	SDSS-DR7-rec
0.57	0.073 ± 0.001	SDSS-DR9-rec
0.44	0.0916 ± 0.0071	WiggleZ
0.60	0.0726 ± 0.0034	WiggleZ
0.73	0.0592 ± 0.0032	WiggleZ

Cuadro 5.2: Tabla de los datos experimentales utilizados en los programas para ajustar los modelos por medio del método de χ^2 .

En cada uno de los programas del primer bloque se utilizaron tres parámetros a variar, es decir Ω_{m0} , h y ω_0 , los cuales fueron estudiados dentro de cierto rango en el cual sabemos deben encontrarse sus respectivos valores. Por ejemplo, de las observaciones en CMB del grupo de Planck se obtiene que $\Omega_{m0} = 0.315 \pm 0.013$ [44]. Por lo tanto, se utilizó el intervalo de estudio de

$$0.1 < \Omega_{m0} < 0.5 \quad (5.23)$$

donde se consideró adecuado, dada la precisión mencionada de Ω_{m0} en los datos de Planck, realizar incrementos en Ω_{m0} de $\Delta\Omega_{m0} = 0.01$.

A su vez la teoría ha restringido el valor del parámetro h dentro de un cierto intervalo, proponiendo comúnmente un valor cercano a $h \sim 0.7$. Nosotros consideraremos un intervalo para h de

$$0.5 < h < 0.8 \quad (5.24)$$

con incrementos de $\Delta h = 0.01$.

Finalmente, para la descripción del modelo de parametrización de la energía oscura se utilizan las ecuaciones 5.9 y 5.10

$$\omega = \omega_0 + \omega_1 f(z) \quad (5.25)$$

donde $f(z)$

$$f(z) = \frac{\left(\frac{z}{z_t}\right)^q}{1 + \left(\frac{z}{z_t}\right)^q} \quad (5.26)$$

cumple con las propiedades descritas en 5.11

Así mismo, es importante tomar en cuenta la definición de la ecuación de estado inicial de la energía oscura ω_i dada en las ecuaciones 5.12 y 5.13, es decir

$$\omega_i \equiv \lim_{z \rightarrow \infty} \omega(z) = \omega_0 + \omega_1 \quad (5.27)$$

con la cual el parámetro ω_1 se puede escribir como

$$\omega_1 = \omega_i - \omega_0 \quad (5.28)$$

y así la ecuación de estado queda reescrita como

$$\omega(z) = \omega_0 + (\omega_i - \omega_0) f(z) \quad (5.29)$$

En este estudio el valor de ω_0 fue analizado dentro del intervalo

$$-1.5 < \omega_0 < -0.5 \quad (5.30)$$

con incrementos de $\Delta\omega_0 = 0.025$.

De esta forma, la realización de los 20 casos distintos se ha llevado a cabo tomando la variación de los parámetros fijos q , ω_1 y z_t entre los valores:

$$q = \{1, 2\} \quad \omega_1 = \{-\omega_0, -\omega_0 - 1\} \quad z_t = \{0.25, 0.5, 0.75, 1, 2\}$$

Los valores elegidos para el parámetro ω_1 son tales que se cumplen

$$\omega_i = 0 \leftrightarrow \omega_1 = -\omega_0 \quad (5.31)$$

$$\omega_i = -1 \leftrightarrow \omega_1 = -1 - \omega_0 \quad (5.32)$$

Posteriormente en el segundo bloque, se elaboraron otros 20 programas similares a los anteriores, es decir, caracterizados también por los parámetros fijos q , ω_1 y z_t con los mismo valores, pero variando únicamente dos parámetros que son Ω_{m0} y ω_0 dentro de los mismos intervalos considerados en el bloque de tres parámetros. De ésta forma se constriñe al parámetro de Hubble en el valor de $h = 0.7$ ¹.

A continuación se muestran los resultados numéricos de los 20 casos para las variaciones de tres y dos parámetros. Además se agregan gráficas de ciertos modelos realizados que se puede comparar con la gráfica (a) de la sección 4.11².

5.5. Resultados de los Modelos Cosmológicos

A continuación se exponen los resultados obtenidos en los 40 modelos, presentándolos en dos partes. Primeramente se muestra el bloque referente a los modelos donde se han variado tres parámetros y posteriormente los correspondientes resultados del bloque donde se varían sólo dos parámetros.

En cada uno de los 20 programas referentes a cada bloque se arrojaron un total de cuatro listas de datos. Una lista referente a la cantidad total de datos de los parámetros calculados por el programa y una lista para cada grupo de datos cuya

¹La determinación de la constricción de h al valor de 0.7 fue hecha tomando en cuenta un promedio entre el valor registrado por el WMAP de $h = 0.72$ y el grupo de Planck de $h = 0.68$.

²La lista completa de gráficas de este estilo puede ser revisada en el apéndice B para los resultados de la variación de tres parámetros y en el apéndice C para la variación de dos parámetros.

χ_r^2 está asociada con un contorno de confianza de 1σ , 2σ y 3σ ³. Las listas de datos de ambos bloques no son enseñadas en su totalidad en este trabajo, ya que sólo se presentan los mejores ajustes de cada modelo, sin embargo en las gráficas de los apéndices B y C se muestran gráficamente los resultados de las listas referentes a 1σ , 2σ y 3σ .

Cada uno de los programas representa a un sólo modelo, el cual es caracterizado por sus respectivos valores de los parámetros fijos q , ω_i y z_t . Dicho lo anterior, con el fin de referirnos con mayor facilidad a cada uno de los modelos, los nombraremos tal y como están enumerados en las tablas 5.3, 5.4, 5.5 y 5.6.

5.5.1. Modelos con Tres Parámetros

Por medio de la estadística de χ^2 se obtuvieron los mejores ajustes en los 20 modelos para los parámetros Ω_m , h y ω_0 . Con el fin de identificar características similares en aquellos modelos que comparten algunos de los parámetros fijos, los 20 modelos son exhibidos en cuatro casos, cada uno con su respectiva tabla. Cada tabla engloba un total de cinco modelos, los cuales están relacionados entre sí debido al hecho de que comparten el mismo valor de q y ω_i . Los resultados son los siguientes:

Caso 1: Con $q = 1$ y $\omega_i = 0$

Modelo	z_t	Ω_m	Ω_Λ	h	ω_0	χ^2	χ_r^2
1	0.25	0.11	0.89	0.71	-1.225	5.709	1.903
2	0.5	0.12	0.88	0.65	-0.975	4.801	1.600
3	0.75	0.11	0.89	0.61	-0.85	4.341	1.447
4	1	0.12	0.88	0.60	-0.825	4.092	1.364
5	2	0.11	0.89	0.56	-0.725	3.662	1.220

Cuadro 5.3: Tabla de resultados para los modelos propuestos del 1 al 5 para la variación de tres parámetros. Todos estos modelos comparten los mismos valores de $q = 1$ y $\omega_i = 0$.

- En la tabla 5.3 se observa que todos los modelos poseen un valor de χ_r^2 dentro del intervalo $1 < \chi_r^2 < 2$.
- Ninguno de los modelos del caso 1 posee un contorno de confianza referente a 1σ , véase tabla A.1.

³La restricción en χ^2 para ser asociada con los contornos de confianza de 1σ , 2σ y 3σ depende de los grados de libertad en la prueba. Los grados de libertad en los programas de variación de tres parámetros son $\nu = 3$ y los grados de libertad en los programas de variación de dos parámetros son $\nu = 4$. La condición en χ^2 puede ser verificada en el apéndice A.

- Los resultados en Ω_m están pegados a la frontera inferior de su intervalo considerado.
- El valor del parámetro h disminuye conforme aumenta el valor de z_t , mientras que ω_0 va aumentando su valor al incrementar z_t .
- Los modelos ajustan mejor entre mayor sea el valor de z_t .

Caso 2: Con $q = 1$ y $\omega_i = -1$

Modelo	z_t	Ω_m	Ω_Λ	h	ω_0	χ^2	χ_r^2
6	0.25	0.19	0.81	0.57	-0.5	2.716	0.905
7	0.5	0.16	0.84	0.54	-0.5	2.599	0.866
8	0.75	0.13	0.87	0.52	-0.5	2.555	0.851
9	1	0.11	0.89	0.51	-0.5	2.642	0.880
10	2	0.11	0.89	0.51	-0.55	2.780	0.926

Cuadro 5.4: Tabla de resultados para los modelos propuestos del 6 al 10 para la variación de tres parámetros. Todos estos modelos comparten los mismos valores de $q = 1$ y $\omega_i = -1$.

- En la tabla 5.4 se observa que todos los modelos poseen un valor de χ_r^2 dentro del intervalo $0 < \chi_r^2 < 1$, por lo que resultan ser un buen ajuste.
- Debido a lo anterior, todos los modelos de este caso poseen un contorno de confianza referente a 1σ , véase tabla A.1.
- El mínimo de χ_r^2 , para los modelos pertenecientes a este caso, se encuentra entre los valores de $0.5 < z_t < 1$.
- El mejor ajuste al valor de ω_0 está casi siempre situado en el límite superior considerado en su intervalo de análisis, es decir, $\omega_0 = -0.5$.
- Los modelos con z_t mayor, tienden a acercar sus resultados en los parámetros Ω_m y h al extremo inferior de sus respectivos intervalos de estudio, es decir, entre mayor es z_t menor es el valor de Ω_m y h .

Caso 3: Con $q = 2$ y $\omega_i = 0$

Modelo	z_t	Ω_m	Ω_Λ	h	ω_0	χ^2	χ_r^2
11	0.25	0.11	0.89	0.80	-1.075	68.561	22.853
12	0.5	0.11	0.89	0.80	-0.9	6.365	2.121
13	0.75	0.11	0.89	0.73	-0.75	4.247	1.415
14	1	0.11	0.89	0.68	-0.675	3.760	1.253
15	2	0.11	0.89	0.59	-0.65	3.257	1.085

Cuadro 5.5: Tabla de resultados para los modelos propuestos del 11 al 15 para la variación de tres parámetros. Todos estos modelos comparten los mismos valores de $q = 2$ y $\omega_i = 0$.

- En la tabla 5.5 se observa que todos los modelos poseen un valor de χ_r^2 dentro del intervalo $1 < \chi_r^2 < 23$. Por lo que varios de los modelos de este caso tienen un valor de χ_r^2 bastante grande y no ajustarían del todo bien a los datos.
- Los modelos presentan una χ^2 menor entre mayor es el valor de z_t .
- El valor de los parámetros h y ω_0 disminuye mientras aumenta el valor de z_t .
- El mejor ajuste al valor de Ω_m es siempre $\Omega_m = 0.11$ el cual está situado en el límite inferior del intervalo de análisis considerado. Esto sugiere que el valor de χ_r^2 podría ser menor si se hubiera ampliado el límite inferior del intervalo de estudio de Ω_m .

Caso 4: Con $q = 2$ y $\omega_i = 1$

Modelo	z_t	Ω_m	Ω_Λ	h	ω_0	χ^2	χ_r^2
16	0.25	0.20	0.80	0.57	-0.5	2.350	0.783
17	0.5	0.11	0.89	0.51	-0.5	2.156	0.718
18	0.75	0.11	0.89	0.51	-0.55	2.555	0.851
19	1	0.11	0.89	0.51	-0.55	2.744	0.914
20	2	0.11	0.89	0.52	-0.625	2.992	0.997

Cuadro 5.6: Tabla de resultados para los modelos propuestos del 16 al 20 para la variación de tres parámetros. Todos estos modelos comparten los mismos valores de $q = 2$ y $\omega_i = -1$.

- En la tabla 5.6 se observa que todos los modelos poseen un valor de χ_r^2 dentro del intervalo $0 < \chi_r^2 < 1$, por lo que resultan ser un buen ajuste.
- Debido a lo anterior, todos los modelos de este caso poseen un contorno de confianza referente a 1σ , véase tabla A.1.

- El mínimo de χ_r^2 , para los modelos considerados en éste caso, se encuentra entre los valores de $0.25 < z_t < 0.75$.
- En la mayoría de los modelos de este caso los parámetros Ω_m , h y ω_0 se encuentran cerca de los valores extremos de sus intervalos de estudio.

A continuación se muestra un compendio de las tablas anteriores 5.3, 5.4, 5.5 y 5.6, donde se han ordenado los resultados de los modelos de acuerdo a su valor de χ_r^2 , manteniendo los mejores ajustes hasta arriba de la tabla y los peores hasta abajo.

Modelo	q	z_t	ω_i	ω_0	Ω_m	h	χ^2	χ_r^2	Intervalo
17	2	0.5	-1	-0.5	0.11	0.51	2.156	0.718	0 < 1
16	2	0.25	-1	-0.5	0.20	0.57	2.350	0.783	
18	2	0.75	-1	-0.55	0.11	0.51	2.555	0.851	
8	1	0.75	-1	-0.5	0.13	0.52	2.555	0.851	
7	1	0.5	-1	-0.5	0.16	0.54	2.599	0.866	
9	1	1	-1	-0.5	0.11	0.51	2.642	0.880	
6	1	0.25	-1	-0.5	0.19	0.57	2.716	0.905	
19	2	1	-1	-0.55	0.11	0.51	2.744	0.914	
10	1	2	-1	-0.55	0.11	0.51	2.780	0.926	
20	2	2	-1	-0.625	0.11	0.52	2.992	0.997	
15	2	2	0	-0.65	0.11	0.59	3.257	1.085	1 < 1.5
5	1	2	0	-0.725	0.11	0.56	3.662	1.220	
14	2	1	0	-0.675	0.11	0.68	3.760	1.253	
4	1	1	0	-0.825	0.12	0.60	4.092	1.364	
13	2	0.75	0	-0.75	0.11	0.73	4.247	1.415	
3	1	0.75	0	-0.85	0.11	0.61	4.341	1.447	
2	1	0.5	0	-0.975	0.12	0.65	4.801	1.600	1.5 < 2
1	1	0.25	0	-1.225	0.11	0.71	5.709	1.903	
12	2	0.5	0	-0.9	0.11	0.80	6.365	2.121	2 <
11	2	0.25	0	-1.075	0.11	0.80	68.561	22.853	

Cuadro 5.7: Tabla de resultados de los diferentes modelos propuestos variando tres parámetros. Los resultados han sido ordenados de acuerdo a su valor de χ_r^2 , dejando los mejores ajustes hasta arriba de la tabla.

Mediante el uso de la tabla 5.7 se puede observar con mayor facilidad la relación entre los modelos que mejor ajustan a los datos de la tabla 5.2. De esta forma se percibe que los modelos trabajados en la variación de tres parámetros ajustan de mejor manera cuando poseen un valor de $\omega_i = -1$. En contraparte, los modelos para los cuales $\omega_i = 0$ resultan ser los peores ajustes.

Los modelos cuyo ω_i y z_t son iguales presentan valores en χ^2 muy cercanos y sus resultados en los diferentes parámetros son similares. Se observa también que varios de los modelos presentan los mejores ajustes en sus parámetros en los extremos de sus correspondientes intervalos de estudio. Esto sugiere que el valor de χ_r^2 podría ser incluso menor si se hubieran expandido los intervalos de estudio de los diferentes parámetros. Esta situación se suele repetir en modelos pertenecientes al mismo caso.

En general se observa que tanto el parámetro h como el parámetro ω_0 suelen disminuir su valor entre más chico sea el valor de χ^2 , no obstante hay ciertas excepciones. En este sentido, los modelos con $\omega_0 = 0$ tienden a seguir más este comportamiento, disminuyendo su valor en los parámetros h y ω_0 al aumentar el valor de z_t , equivalente a disminuir su χ^2 , como se mencionó en la descripción de sus respectivos casos. En consecuencia, si recordamos la forma de la gráfica 5.4, una $z_t \rightarrow \infty$ en los casos donde $\omega_i = 0$ podría disminuir su χ_r^2 y tender a parecerse a los modelos con $\omega_i = -1$. De esta forma se mostraría nuevamente, como lo hace ya la tabla 5.7, que los modelos con $\omega_i = -1$ ajustan mejor a los datos.

En seguida, tomando el estilo de la gráfica 4.10 expuesta en la sección 4.9.3, se presenta una serie de gráficas donde se muestran las curvas generadas por el mejor ajuste de algunos modelos calculados. Las curvas han sido construidas de tal forma que se acerquen lo más posible a los datos experimentales exhibidos en la tabla 5.2. Así mismo, los modelos han sido elegidos, de entre todos los modelos realizados, como una muestra para evidenciar a los buenos ajustes de los malos. Por tal motivo se han tomado modelos en todos los rangos de χ_r^2 obtenidos. Para facilitar la visualización de los mejores ajustes con respecto a los peores, se han utilizado los colores rojo, café, amarillo, verde oscuro, azul oscuro y violeta para representar los modelos con χ_r^2 más pequeña a más grande.

Las gráficas 5.6 y 5.7 son la misma gráfica mostrada a distinta escala del eje de la ordenada, con el fin de poder apreciar mejor los detalles. La primera de ellas, 5.6, es mostrada a una escala similar a 4.10, exhibiendo el detalle de las incertidumbres de los datos experimentales, mientras que 5.7 realiza un acercamiento a las curvas para visualizar mejor el detalle de sus formas.

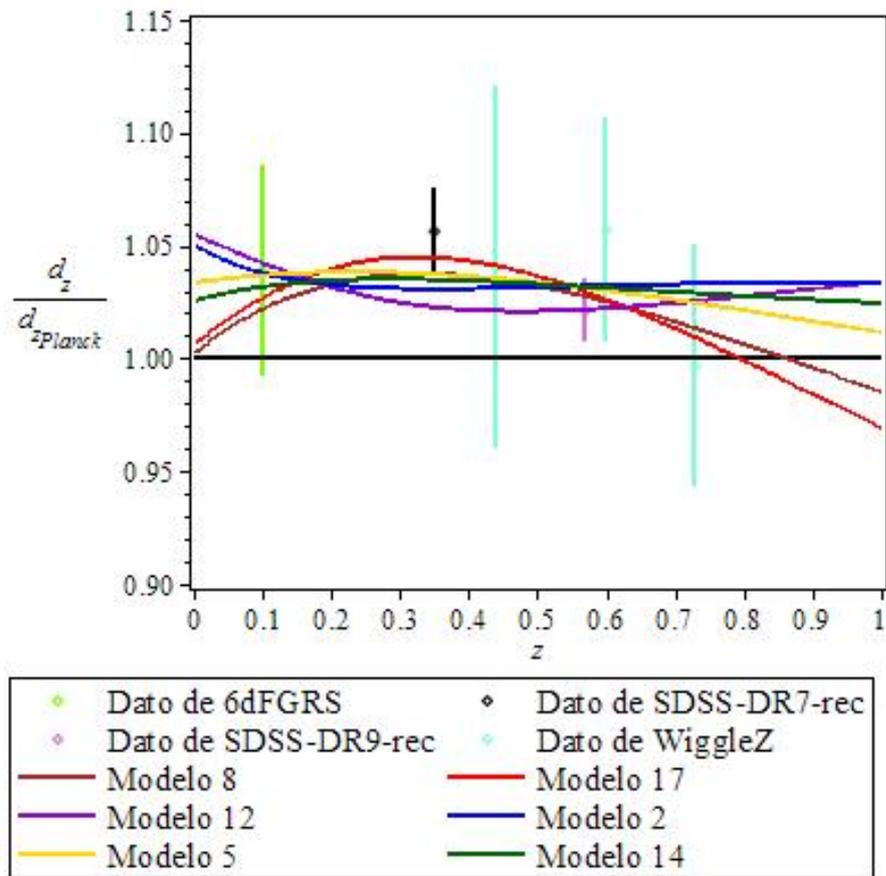


Figura 5.6: Gráfica para la variación de tres parámetros de la tasa de distancia acústica $r_s/D_V(z)$, de acuerdo a los modelos 17 en rojo, 8 en café, 5 en amarillo, 14 en verde, 2 en azul oscuro y 12 en violeta, divididos entre la tasa de distancia del modelo Λ CDM usado por el grupo de Planck [43]. El punto verde claro es un dato perteneciente a 6dF, mientras que el negro a SDSS-DR7, el punto rosa a SDSS-DR9 y los azules claros a WiggleZ.

Como puede observarse de 5.6, prácticamente todos los modelos parecen ajustar de manera aceptable a los datos. Sin embargo, si miramos con detalle en 5.7 se puede apreciar como el modelo 17, caracterizado por el color rojo, resulta ser el modelo que se acerca más a todos los puntos, es decir, el mejor ajuste. En contraparte, el modelo 12, caracterizado por el color violeta, se aleja más de los puntos centrales de los datos pese a que parece ser un buen ajuste, llegando incluso a no tocar la barra de error del dato a $z = 0.35$.

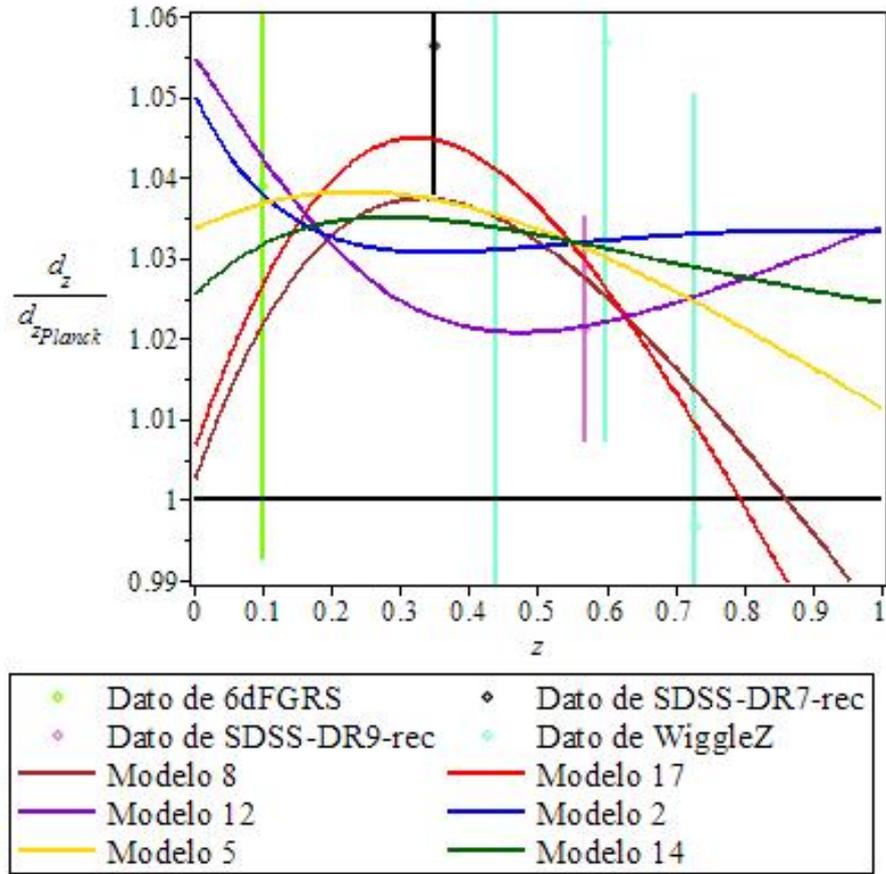


Figura 5.7: Gráfica para la variación de tres parámetros de la tasa de distancia acústica $r_s/D_V(z)$, de acuerdo a los modelos 17 en rojo, 8 en café, 5 en amarillo, 14 en verde, 2 en azul oscuro y 12 en violeta, divididos entre la tasa de distancia del modelo Λ CDM usado por el grupo de Planck [43]. El punto verde claro es un dato perteneciente a 6dF, mientras que el negro a SDSS-DR7, el punto rosa a SDSS-DR9 y los azules claros a WiggleZ.

La mayor parte de todas las curvas se encuentra por encima de la recta de valor constante 1 que representa al modelo Λ CDM con los datos de Planck, esto como era de esperarse dada la posición de los puntos experimentales. Por tal motivo, los modelos estudiados con la parametrización propuesta representan un mejor ajuste a los datos experimentales en comparación con el modelo Λ CDM.

Se debe observar de la gráfica 5.7 que los modelos con $\chi_r^2 < 1.5$ tienden a aumentar su valor desde $z = 0$ hasta llegar a su máximo para posteriormente volver a disminuirlo, mientras que los modelos con χ_r^2 mayores inician disminuyendo su valor a partir de $z = 0$ hasta llegar a un mínimo para posteriormente volver a incrementar su valor. Adicionalmente, el final de las curvas cerca de $z = 1$ tiene un valor más pequeño entre mejor es el ajuste. Posteriormente en la subsección 5.5.3, se discutirá la relación de la ecuación de estado ω con las formas de las gráficas 5.6 y 5.7.

Así mismo, la evolución en z de la densidad de energía oscura para cada uno de estos modelos se muestra en las gráficas 5.8 y 5.9, donde se ha incluido la evolución de la densidad de radiación, materia y de energía oscura de acuerdo al modelo Λ CDM. La forma de estas curvas también depende fuertemente de los valores de la ecuación de estado ω y en principio se esperaría que cada modelo iniciara su evolución en $z = 0$ conforme a su respectivo valor de ω_0 para posteriormente a su valor de z_t iniciar una transición en su ecuación de estado al valor de ω_i .

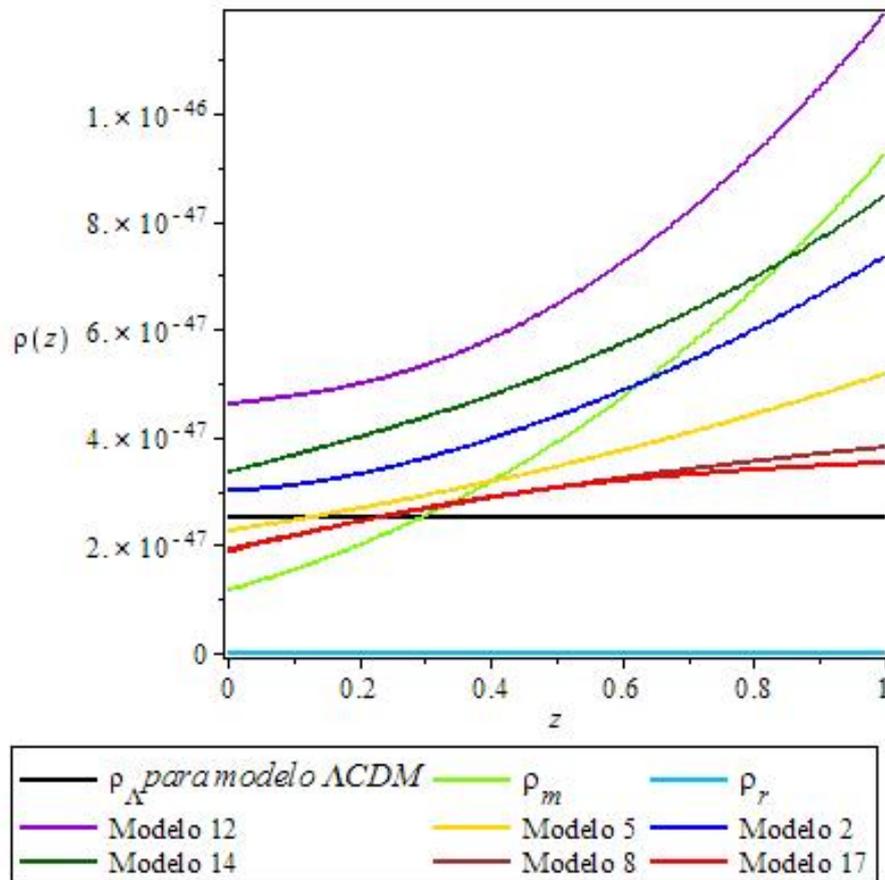


Figura 5.8: Gráfica de la evolución de densidad de energía oscura en GeV^4 para los modelos 17 en rojo, 8 en café, 5 en amarillo, 14 en verde oscuro, 2 en azul oscuro y 12 en violeta. Además se agrega la evolución de las densidades de radiación en azul claro, la densidad de materia en verde claro y de energía oscura de acuerdo a Λ CDM en negro, para ser comparadas con las de los modelos.

Pasada la época de transición en z_t , algunos de los modelos con $\omega_i = -1$ (como los modelos 17 y 8) tienden a un comportamiento similar al de la energía oscura descrita por el modelo Λ CDM, evolucionando de manera prácticamente paralela a esta; mientras que el modelo 12 con $\omega_i = 0$ tiende a evolucionar de manera similar a la densidad de materia.

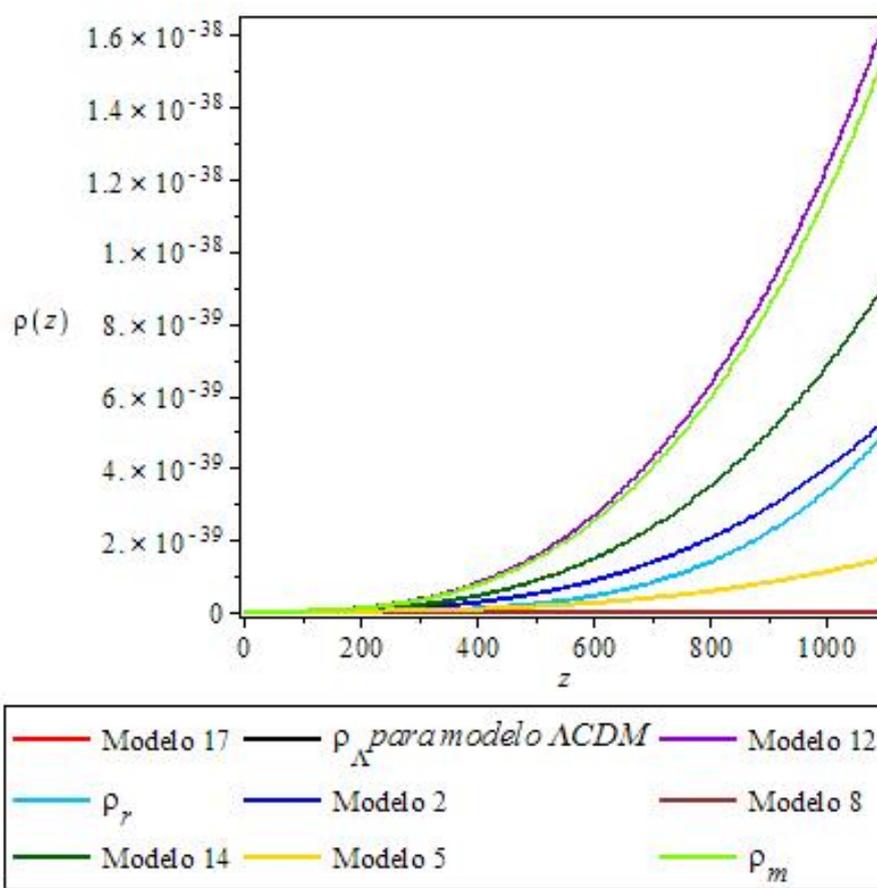


Figura 5.9: Gráfica de acercamiento de la gráfica 5.8. De igual forma se muestra la evolución de la densidad de energía oscura en GeV^4 para los modelos 17 en rojo, 8 en café, 5 en amarillo, 14 en verde oscuro, 2 en azul oscuro y 12 en violeta. Además se agrega la evolución de la densidades de radiación en azul claro, la densidad de materia en verde claro y de energía oscura de acuerdo a Λ CDM en negro, para ser comparadas con las de los modelos.

Como era de esperarse por los resultados expuestos en la tabla 5.7, los modelos que mejor ajustan a los datos muestran una evolución similar al modelo con constante cosmológica y están caracterizados por $\omega_i = -1$.

5.5.2. Modelos con Dos Parámetros

Pese a que en la variación de tres parámetros se obtuvieron resultados cuya χ_r^2 representa un buen ajuste, la mayoría de los parámetros en todos los modelos obtienen valores muy lejanos a los considerados por la teoría. Por tal motivo se optó por realizar un bloque extra de los 20 modelos exigiendo una restricción adicional a los

parámetros, el cual fue fijar al parámetro h en el valor de $h = 0.7$.⁴

Nuevamente los resultados de los 20 modelos son presentados en una serie de 4 casos caracterizados de igual manera a la realizada en la variación de tres parámetros. Tales resultados son los siguientes:

Caso 1: Con $q = 1$ y $\omega_i = 0$

Modelo	z_t	Ω_m	Ω_Λ	ω_0	χ^2	χ_r^2
1	0.25	0.11	0.89	-1.25	6.015	1.503
2	0.5	0.20	0.80	-1.175	6.996	1.749
3	0.75	0.24	0.76	-1.125	5.017	1.254
4	1	0.25	0.75	-1.125	4.871	1.217
5	2	0.28	0.72	-1.075	4.615	1.153

Cuadro 5.8: Tabla de resultados para los modelos propuestos del 1 al 5 para la variación de dos parámetros. Todos estos modelos comparten los mismos valores de $h = 0.7$, $q = 1$ y $\omega_i = 0$

- En la tabla 5.8 se observa que todos los modelos poseen un valor de χ_r^2 dentro del intervalo $1 < \chi_r^2 < 2$.
- Ninguno de los modelos del caso 1 posee un contorno de confianza referente a 1σ a excepción del modelo 5.
- Únicamente el modelo 1 presenta su resultado de Ω_m pegado a la frontera inferior de su intervalo de estudio considerado, al igual que los modelos del caso 1 de variación de tres parámetros. Los demás modelos arrojan resultados mayores que oscilan entre $0.20 \leq \Omega_m \leq 0.28$.
- El valor de los parámetros Ω_m y ω_0 aumenta conforme se realizan incrementos al valor de z_t .
- Los modelos ajustan mejor entre mayor es el valor de z_t .

⁴Como ya se mencionó antes, la determinación de la restricción de h al valor de 0.7 fue hecha tomando en cuenta un promedio entre el valor registrado por el WMAP de $h = 0.72$ y el grupo de Planck de $h = 0.68$.

Caso 2: Con $q = 1$ y $\omega_i = -1$

Modelo	z_t	Ω_m	Ω_Λ	ω_0	χ^2	χ_r^2
6	0.25	0.30	0.70	-0.95	4.071	1.017
7	0.5	0.30	0.70	-0.95	4.104	1.026
8	0.75	0.30	0.70	-0.975	4.121	1.030
9	1	0.30	0.70	-0.975	4.120	1.030
10	2	0.30	0.70	-0.975	4.120	1.030

Cuadro 5.9: Tabla de resultados para los modelos propuestos del 6 al 10 para la variación de dos parámetros. Todos estos modelos comparten los mismos valores de $h = 0.7$, $q = 1$ y $\omega_i = -1$

- En la tabla 5.9 se observa que todos los modelos poseen un valor de χ_r^2 dentro del intervalo $1 < \chi_r^2 \leq 1.03$, por lo que resultan ser un buen ajuste.
- Debido a lo anterior, todos los modelos de este caso poseen un contorno de confianza referente a 1σ , véase tabla A.1.
- El mínimo de χ_r^2 , para los modelos pertenecientes a este caso, se encuentra en el valor mínimo de z_t .
- Los valores del mejor ajuste de ω_0 para los diferentes modelos de este caso están en los dos valores muy cercanos de $\omega_0 = -0.95$ y $\omega_0 = -0.975$.
- El valor de Ω_m prácticamente no cambia del valor de $\Omega_m = 0.30$.
- En general Ω_m , ω_0 y χ^2 no varían tanto al cambiar el z_t .

Caso 3: Con $q = 2$ y $\omega_i = 0$

Modelo	z_t	Ω_m	Ω_Λ	ω_0	χ^2	χ_r^2
11	0.25	0.11	0.89	-0.85	160.455	40.113
12	0.5	0.11	0.89	-0.9	49.564	12.391
13	0.75	0.11	0.89	-0.825	8.068	2.017
14	1	0.16	0.84	-0.75	3.951	0.987
15	2	0.27	0.73	-0.925	4.088	1.022

Cuadro 5.10: Tabla de resultados para los modelos propuestos del 11 al 15 para la variación de dos parámetros. Todos estos modelos comparten los mismos valores de $h = 0.7$, $q = 2$ y $\omega_i = 0$

- En la tabla 5.10 se observa que todos los modelos poseen un valor de χ_r^2 dentro del intervalo $0.98 < \chi_r^2 < 40.113$, por lo que hay tanto modelos que ajustan muy bien como modelos que no lo hacen.
- El valor del parámetro Ω_m se encuentra en el límite inferior de su intervalo de estudio y va aumentando a partir de $z_t = 1$ al aumentar z_t .
- Los modelos que ajustan mejor tienen una z_t grande, aunque la χ_r^2 mínima de éste caso no se encuentra en $z_t = 2$ sino en $z_t = 1$.

Caso 4: Con $q = 2$ y $\omega_i = 1$

Modelo	z_t	Ω_m	Ω_Λ	ω_0	χ^2	χ_r^2
16	0.25	0.31	0.69	-0.90	3.952	0.988
17	0.5	0.30	0.70	-0.95	4.034	1.008
18	0.75	0.30	0.70	-0.95	4.073	1.018
19	1	0.30	0.70	-0.95	4.083	1.020
20	2	0.29	0.71	-0.975	4.101	1.025

Cuadro 5.11: Tabla de resultados para los modelos propuestos del 16 al 20 para la variación de dos parámetros. Todos estos modelos comparten los mismos valores de $h = 0.7$, $q = 2$ y $\omega_i = -1$

- En la tabla 5.11 se observa que todos los modelos poseen un valor de χ_r^2 dentro del intervalo $0.98 < \chi_r^2 \leq 1.025$, por lo que los modelos ajustan muy bien con los datos.
- Debido a lo anterior, todos los modelos de este caso poseen un contorno de confianza referente a 1σ , véase tabla A.1.
- El valor de χ_r^2 disminuye al disminuir z_t . De esta forma el mínimo de χ_r^2 se encuentra en el valor más bajo de z_t en $z_t = 0.25$.
- Pareciera que el valor de Ω_m y ω_0 disminuye ligeramente al aumentar z_t .

En la tabla 5.12 se muestra el conjunto de datos expuestos en las tablas 5.8, 5.9, 5.10 y 5.11, ordenando los resultados de menor valor de χ_r^2 arriba a mayor valor abajo.

Modelo	q	z_t	ω_i	ω_0	Ω_m	χ^2	χ_r^2	Intervalo
14	2	1	0	-0.75	0.16	3.951	0.987	$0 < 1$
16	2	0.25	-1	-0.90	0.31	3.952	0.988	
17	2	0.5	-1	-0.95	0.30	4.034	1.008	$1 < 1.5$
6	1	0.25	-1	-0.95	0.30	4.071	1.017	
18	2	0.75	-1	-0.95	0.30	4.073	1.018	
19	2	1	-1	-0.95	0.30	4.083	1.020	
15	2	2	0	-0.925	0.27	4.088	1.022	
20	2	2	-1	-0.975	0.29	4.101	1.025	
7	1	0.5	-1	-0.95	0.30	4.104	1.026	
9	1	1	-1	-0.975	0.30	4.120	1.030	
10	1	2	-1	-0.975	0.30	4.120	1.030	
8	1	0.75	-1	-0.975	0.30	4.121	1.030	
5	1	2	0	-1.075	0.28	4.615	1.153	
4	1	1	0	-1.125	0.25	4.871	1.217	
3	1	0.75	0	-1.125	0.24	5.017	1.254	
1	1	0.25	0	-1.25	0.11	6.015	1.503	$1.5 < 2$
2	1	0.5	0	-1.175	0.20	6.996	1.749	
13	2	0.75	0	-0.825	0.11	8.068	2.017	$2 <$
12	2	0.5	0	-0.9	0.11	49.564	12.391	
11	2	0.25	0	-0.85	0.11	160.455	40.113	

Cuadro 5.12: Tabla de resultados de los diferentes modelos propuestos variando dos parámetros. Los resultados han sido ordenados de acuerdo a su valor de χ_r^2 , dejando los mejores ajustes hasta arriba de la tabla. Todos los modelos comparten un mismo valor de $h = 0.7$.

Nuevamente se puede observar que en su mayoría, los modelos con $\omega_i = -1$ poseen los valores mas bajos en χ_r^2 . Sin embargo se debe hacer notar que los modelos 14 y 15 con $\omega_i = 0$ tienen una χ_r^2 muy pequeña e incluso menor que modelos con $\omega_i = -1$, ya que el modelo 14 resulta ser el modelo con menor χ_r^2 . Así mismo, el resto de los modelos con $\omega_i = 0$ resultan ser los peores ajustes al igual que en el bloque de variación de tres parámetros, compartiendo ambos bloques al modelo 11 caracterizado por $q = 2$, $z_t = 0.25$ y $\omega_i = 0$ como el peor ajuste.

Se aprecia que la mayoría de los modelos cuya $\chi_r^2 < 1.5$ presentan los mejores ajustes a sus parámetros en valores muy cercanos a la teoría, pues la mayoría de ellos se asemejan a valores de $\Omega_m = 0.30$ y $\omega_0 = -1$. No obstante, el ajuste con la menor χ_r^2 , es decir el modelo 14, sigue difiriendo a los valores teóricos al igual que los modelos del bloque de tres parámetros.

Además, la tabla muestra que el parámetro fijo q es radical, ya que los modelos con

$q = 2$ ocupan los mejores ajustes y también los peores pero no los ajustes intermedios. Esto viene de la mano con el hecho de que el parámetro q provoca un cambio más violento en ω entre más grande sea q , tal y como puede ser observado en la gráfica 5.5.

En las figuras 5.10 y 5.11 se aprecian las mismas gráficas (del tipo de la gráfica 4.10) de ajuste a los de los datos de la tabla 5.2 a diferentes escalas. Nuevamente se ha usado una muestra de modelos en diferentes rangos de χ_r^2 en todas las figuras.

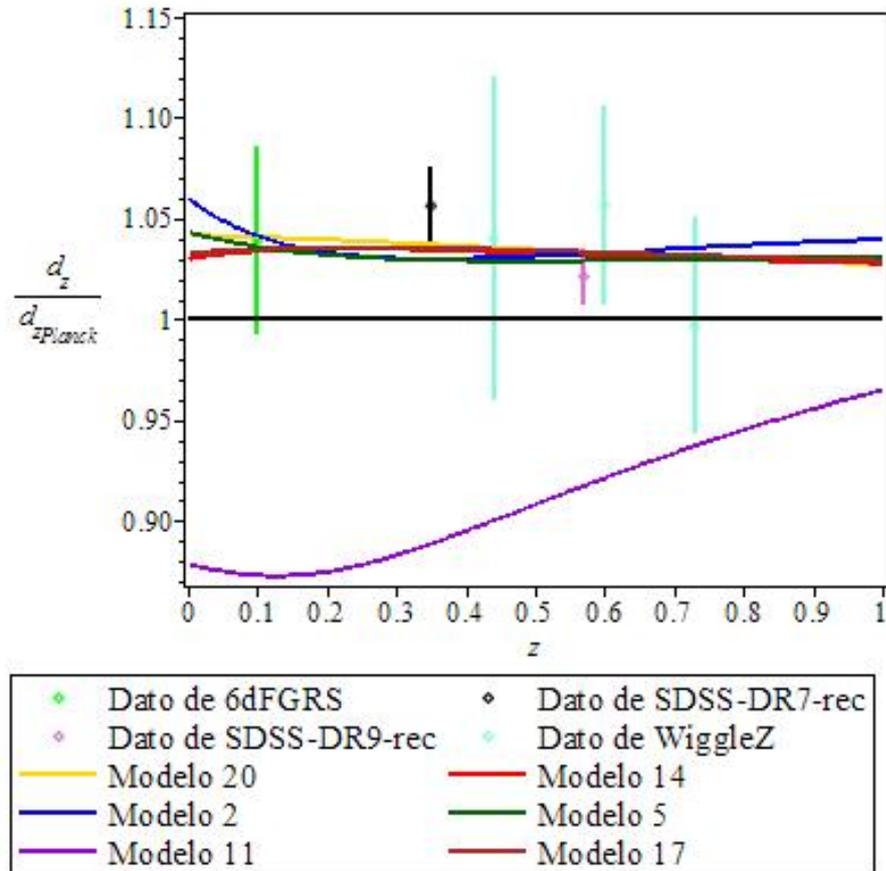


Figura 5.10: Gráfica para la variación de dos parámetros de la tasa de distancia acústica $r_s/D_V(z)$, de acuerdo a los modelos 14 en rojo, 17 en café, 20 en amarillo, 5 en verde oscuro, 2 en azul oscuro y 11 en violeta, divididos entre la tasa de distancia del modelo Λ CDM usado por el grupo de Planck [43]. El punto verde claro es un dato perteneciente a 6dF, mientras que el negro a SDSS-DR7, el punto rosa a SDSS-DR9 y los azules claros a WiggleZ.

De la figura 5.10 es visible que el modelo 11, caracterizado por $q = 2$, $z_t = 0.25$ y $\omega_i = 0$, no representa realmente a los datos como era de esperarse por ser la de mayor χ_r^2 . Ya que además de permanecer del otro lado de la recta de color negro situada en el valor de $\frac{d_z}{d_{zPlanck}} = 1$ (que representa al modelo de Planck), se aleja completamente

de los puntos e incluso no hace contacto con ninguna de las barras de error.

Así mismo realizando un acercamiento a las gráficas por medio de la figura 5.11 se observa que, de manera similar al bloque de tres parámetros, los modelos con mejor ajuste presentan máximos en sus gráficas; mientras que los modelos con peores ajustes tienen mínimos.

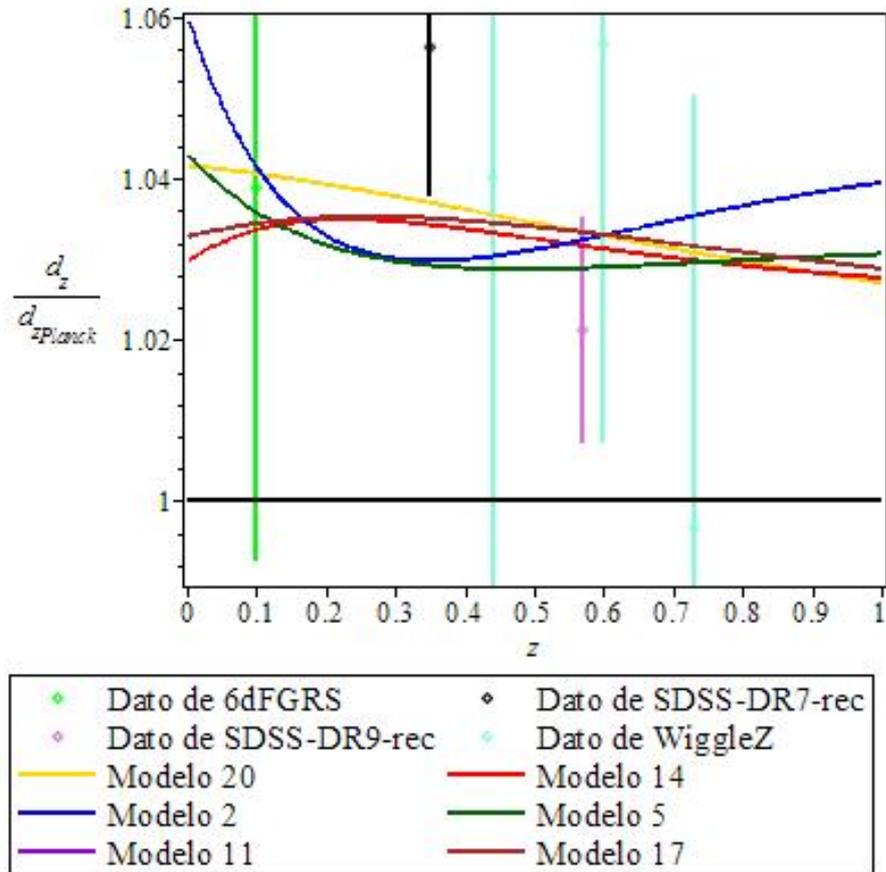


Figura 5.11: Gráfica para la variación de dos parámetros de la tasa de distancia acústica $r_s/D_V(z)$, de acuerdo a los modelos 14 en rojo, 17 en café, 20 en amarillo, 5 en verde oscuro, 2 en azul oscuro y 11 en violeta, divididos entre la tasa de distancia del modelo Λ CDM usado por el grupo de Planck [43]. El punto verde claro es un dato perteneciente a 6dF, mientras que el negro a SDSS-DR7, el punto rosa a SDSS-DR9 y los azules claros a WiggleZ.

De igual forma, si se ve la evolución de la densidad de energía oscura para los diferentes modelos de dos parámetros se aprecia que los modelos con buen ajuste 17, 20 e incluso el 5 se encuentran muy cercanos al comportamiento de la densidad de energía oscura dada por una constante cosmológica, dejando a los modelos 11 y 2 con mayor χ_r^2 más alejados de esta conducta. De hecho el modelo 11 evoluciona de manera similar al comportamiento de la densidad de materia debido al valor escogido

para su parámetro fijo $\omega_i = 0$.

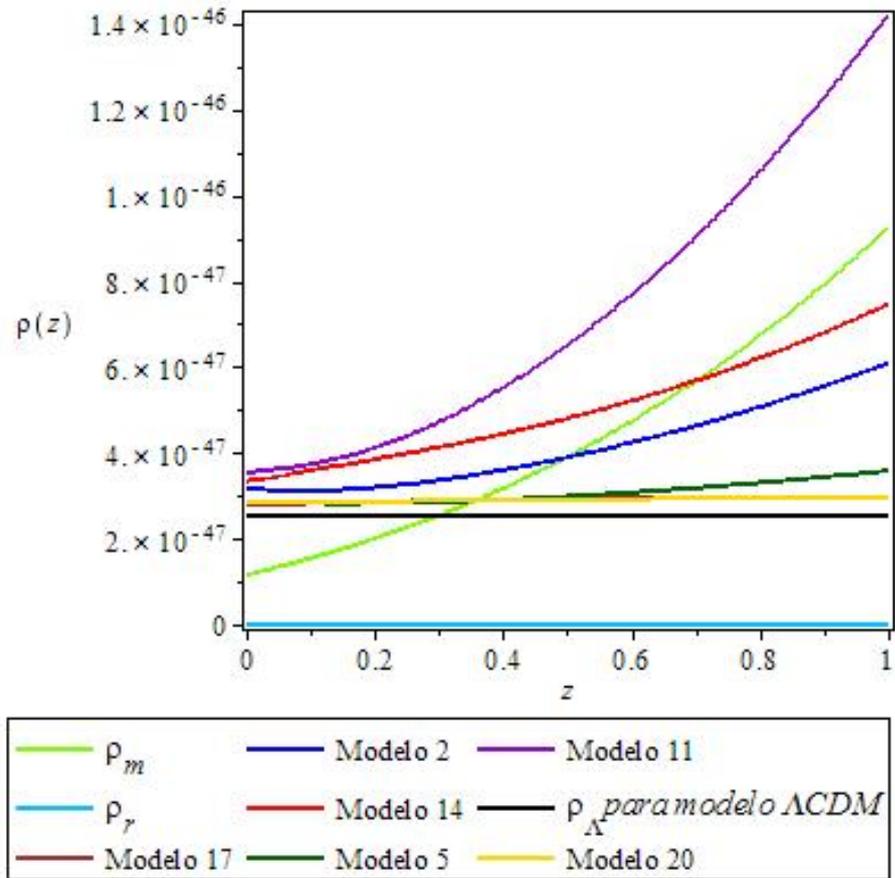


Figura 5.12: Gráfica de la evolución de densidad de energía oscura en GeV^4 para los modelos 18 en rojo, 17 en café, 20 en amarillo, 5 en verde oscuro, 2 en azul oscuro y 11 en violeta. Además se agrega la evolución de la densidades de radiación en azul claro, la densidad de materia en verde claro y de energía oscura de acuerdo a ΛCDM en negro, para ser comparadas con las de los modelos.

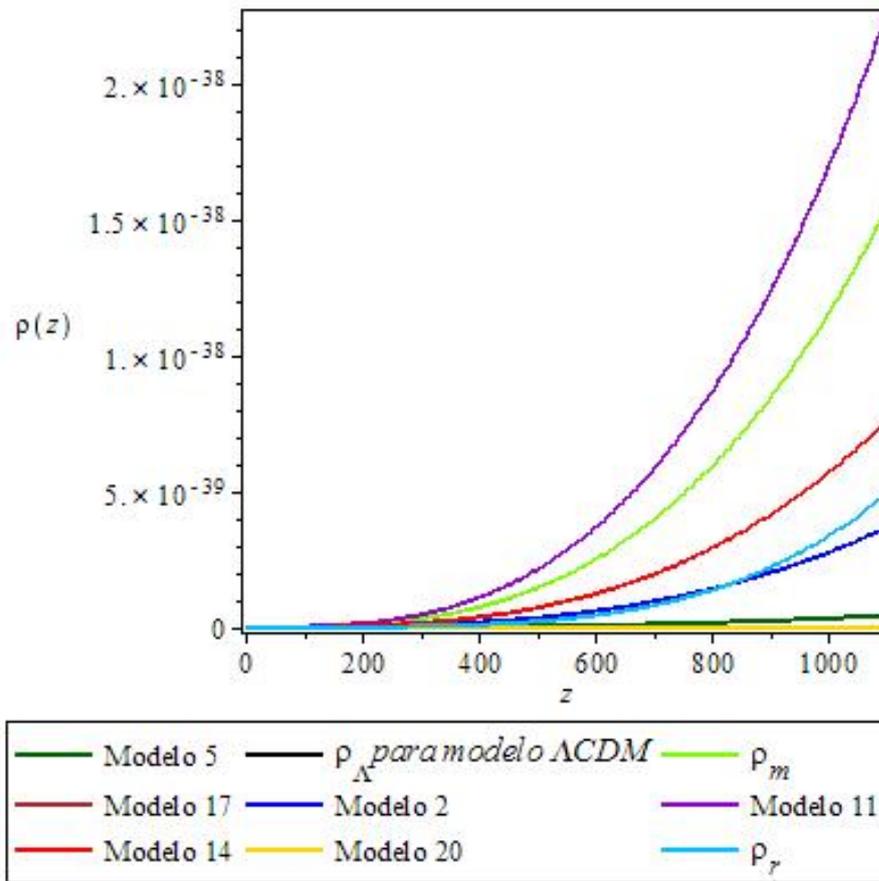


Figura 5.13: Gráfica de acercamiento de la gráfica 5.12. De igual forma se muestra la evolución de densidad de energía oscura en GeV^4 para los modelos 18 en rojo, 17 en café, 20 en amarillo, 5 en verde oscuro, 2 en azul oscuro y 11 en violeta. Además se agrega la evolución de la densidades de radiación en azul claro, la densidad de materia en verde claro y de energía oscura de acuerdo a ΛCDM en negro, para ser comparadas con las de los modelos.

Sin embargo, es de hacerse notar que el modelo 14, el cual es el modelo con menor χ_r^2 de todos los casos con dos parámetros estudiados, pese a ser un buen ajuste a los datos usados como puede observarse en las gráficas 5.10 y 5.11, no representa realmente a la dinámica de la energía oscura. Esto se concluye al observar que los resultados en los diferentes parámetros calculados con este modelo se encuentran muy alejados de lo calculado por la teoría. Igualmente su comportamiento en la evolución de la densidad de energía oscura está muy alejado del comportamiento que se esperaría obtener, es decir, una tendencia a evolucionar similar al de una constante cosmológica.

Aunque el modelo 14 posea la menor χ_r^2 de todos los modelos de dos parámetros estudiados, no implica que sea el mejor ajuste de todos. De hecho, cualquier modelo con $\chi_r^2 < 1$ es igualmente bueno y en este sentido el modelo 16 cuya χ_r^2 difiere de la del

modelo 14 en el orden de las milésimas, debería ser considerado como un modelo más representativo de la dinámica de la energía oscura en comparación al modelo 14, pues los resultados de este modelo si concuerdan con los resultados de la teoría. Asimismo el modelo 17, el cual es muy cercano al modelo 16 también puede ser juzgado como un buen modelo que sea representativo de la evolución de la energía oscura.

El hecho de que el modelo 14 posea la mínima χ_r^2 habiendo obtenido resultados en los parámetros cosmológicos muy distintos a los esperados, sólo es una muestra de la necesidad de incluir más pruebas cosmológicas como las dadas por el CMB o las SN Ia al análisis de los datos que constriñan aun más los intervalos de los resultados.

5.5.3. Discusión

Se analizará de manera cualitativa la repercusión del valor de la ecuación de estado ω en las gráficas 5.6, 5.7, 5.10 y 5.11.

Sean ω_1 y ω_2 dos ecuaciones de estado diferentes con valor constante tal que

$$\omega_1 < \omega_2 \quad (5.33)$$

y que a su vez ambas modelan el comportamiento de la energía oscura. Sabemos por la ecuación 1.32 que la densidad de energía oscura estaría relacionada con el respectivo valor de ω por medio de

$$\rho = \rho_i \left(\frac{a}{a_i} \right)^{-3(\omega+1)} \quad (5.34)$$

Si consideramos que la densidad respectiva a cada ecuación de estado posee un mismo valor de la densidad en $z = 0$, entonces para toda $z > 0$ se tiene que

$$\rho_{\Lambda 2}(\omega_2) > \rho_{\Lambda 1}(\omega_1) \quad (5.35)$$

esto implica que la densidad crece más rápido hacia el pasado entre más grande sea la ecuación de estado ω .

Por otra parte, de la ecuación de Friedmann 1.25 sabemos que la densidad afecta al parámetro de Hubble, siendo ρ proporcional a éste como

$$H^2 \propto \rho \quad (5.36)$$

con lo que de acuerdo a lo anterior se tendría que

$$H(\omega_2) > H(\omega_1) \quad (5.37)$$

Así como ω afecta a ρ y ρ afecta a H , el parámetro de Hubble H afecta también a la distancia de dilatación cúbica D_V . Para ver dicha dependencia de D_V con H notemos que en la construcción de D_V , descrita en la ecuación 5.17, aparece la distancia diametral angular D_A en la cual a su vez aparece la cantidad χ definida en 5.19, la cual también se ve modificada por el parámetro de Hubble que se encuentra dentro de una integral de la forma $\int \frac{1}{H}$. Debido a la presencia de esta integral no podemos decir de manera exacta que H sea inversamente proporcional a χ , pero sí podemos decir de modo cualitativo que entre mayor sea el valor de ω menor será el valor de χ , por lo que

$$\chi(\omega_2) < \chi(\omega_1) \quad (5.38)$$

y también

$$D_A(\omega_2) < D_A(\omega_1) \quad (5.39)$$

De esta forma el parámetro D_V disminuirá conforme aumente ω como

$$D_V(H(\omega_2)) < D_V(H(\omega_1)) \quad (5.40)$$

Por otro lado, la distancia del horizonte acústico r_s se mantiene constante aunque cambie el valor de la ecuación de estado ω dentro del intervalo $0 < z < 1$ debido a que el valor de r_s queda establecido mucho tiempo antes en la época de z_{drag} y se mantiene como un valor constante por siempre después de eso. Por lo tanto, al juntar todo esto en la expresión de d_z , se llega a que las variaciones en ω sólo afectan al valor de D_V al ser inversamente proporcionales y no al de r_s , por lo que ω es directamente proporcional a d_z .

$$d_z \propto \omega \quad (5.41)$$

De esta forma ω_2 y ω_1 cumplen que

$$d_z(\omega_1) < d_z(\omega_2) \quad (5.42)$$

Como se puede observar de las gráficas 5.6, 5.7, 5.10 y 5.11 de $d_z/d_{zPlanck}$, los modelos que se ven favorecidos son aquellos para los cuales su gráfica muestra un

máximo. Además todas las gráficas que representan un buen ajuste se encuentran por encima de la recta de valor constante uno a valores de z pequeños y tienden a ir bajando este valor después de tener su máximo, acercándose cada vez más a la recta constante de valor uno llegando incluso a cruzarla.

En este sentido, las gráficas de las figuras 5.14 y 5.15 muestran el comportamiento de $D_V/D_{V_{Planck}}$ en el intervalo de $0 < z < 1$ para los modelos con tres y dos parámetros respectivamente. De estas gráficas puede observarse que los máximos que se presentan en las figuras 5.6, 5.7, 5.10 y 5.11 también aparecen en los mismos valores de z pero como mínimos, ya que D_V es inversamente proporcional a d_z .

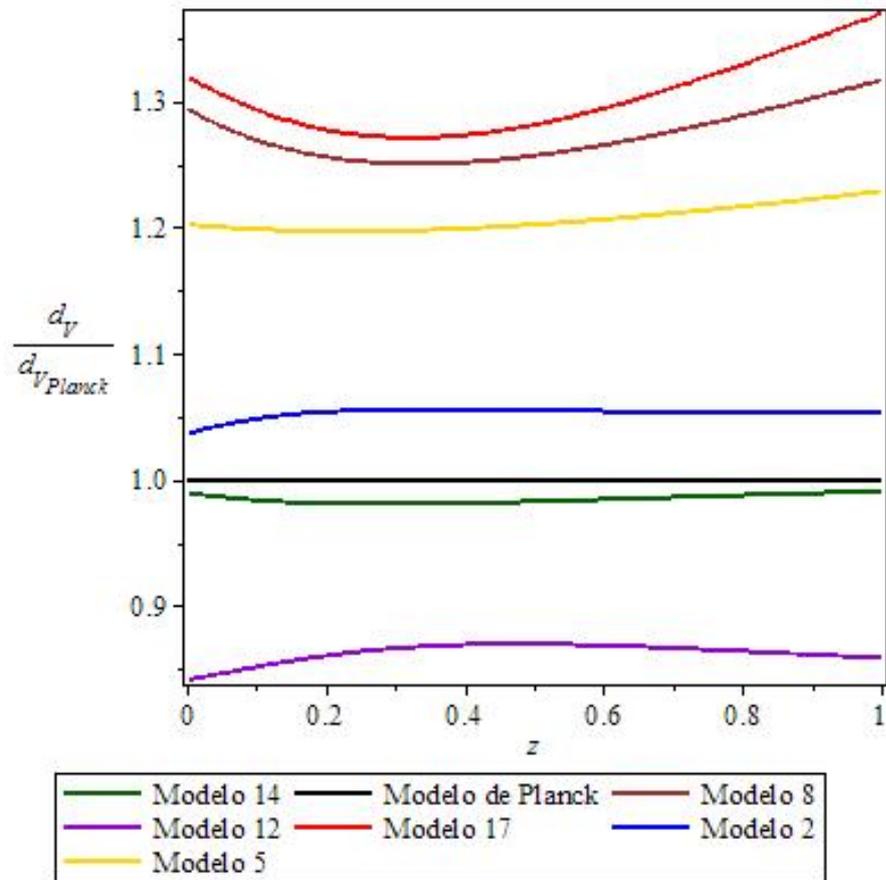


Figura 5.14: Gráfica del cociente de la distancia de dilatación D_V de cada uno de los modelos de tres parámetros entre D_V calculado en el modelo Λ CDM con datos de Planck. La distancia de cada una de las curvas con la recta de color negro muestra la discrepancia en el valor de D_V para los distintos modelos con respecto a Planck.

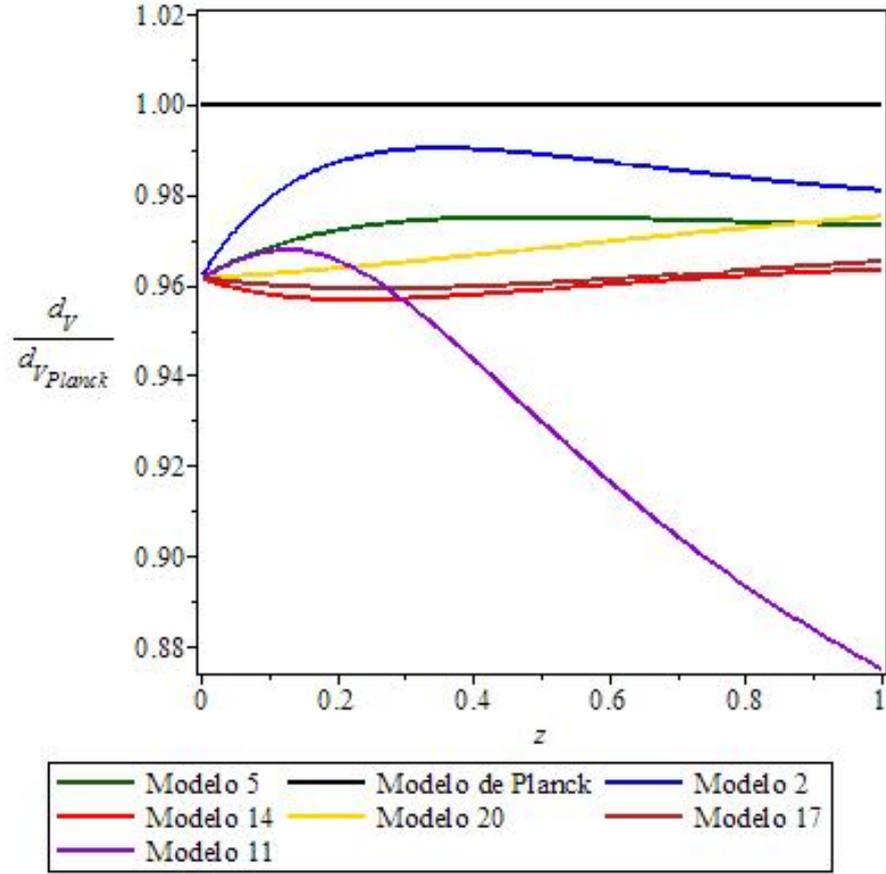


Figura 5.15: Gráfica del cociente de la distancia de dilatación D_V de cada uno de los modelos de dos parámetros entre D_V calculado en el modelo Λ CDM con datos de Planck. La distancia de cada una de las curvas con la recta de color negro muestra la discrepancia en el valor de D_V para los distintos modelos con respecto a Planck.

Dado que d_z sólo varía por los cambios en D_V como puede ser apreciado en las figuras 5.14 y 5.15, se tiene que $d_z/d_{z_{Planck}}$ es proporcional a

$$\frac{d_z}{d_{z_{Planck}}} = \frac{r_s}{r_{s_{Planck}}} \frac{D_{V_{Planck}}}{D_V} \propto \frac{D_{V_{Planck}}}{D_V} \quad (5.43)$$

Luego entonces, a valores en z pequeños se cumple

$$\frac{d_z}{d_{z_{Planck}}} > 1 \quad (5.44)$$

$$d_z > d_{z_{Planck}} \quad (5.45)$$

Esto implica que

$$D_V < D_{V Planck} \quad (5.46)$$

$$\omega_{\Lambda_{modelos}} > \omega_{\Lambda_{Planck}} = -1 \quad (5.47)$$

Lo cual sugiere que la energía oscura debe tener una ecuación de estado mayor a la de una constante cosmológica a valores de z bajos. Por otra parte a valores de z más grandes, cuando $d_z/d_{z Planck}$ ha cruzado la recta de valor constante uno, se tiene

$$\frac{d_z}{d_{z Planck}} < 1 \quad (5.48)$$

$$d_z < d_{z Planck} \quad (5.49)$$

Esto conlleva a que

$$D_V > D_{V Planck} \quad (5.50)$$

$$\omega_{\Lambda_{modelos}} < \omega_{\Lambda_{Planck}} = -1 \quad (5.51)$$

Teniendo una transición en la ecuación de estado de la energía oscura.

En la figura 5.16 se muestra el efecto de la ecuación de estado ω en $d_z/d_{z Planck}$. Para ello se han utilizado los valores particulares para las ecuaciones de estado constante $\omega_1 = -1.3$ representado por el color violeta y $\omega_2 = -0.7$ en verde y se han comparado con el modelo 16 de dos parámetros que se muestra con línea roja. Nótese como a valores más grandes en la ecuación de estado, las gráficas tienden a aumentar su valor.

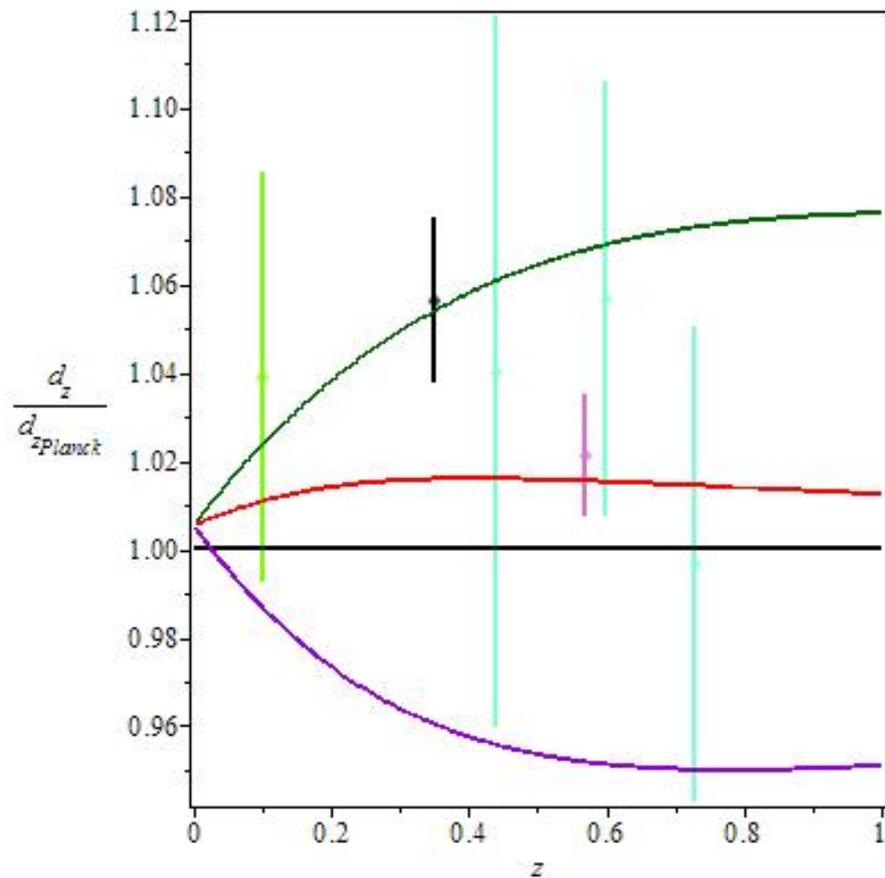


Figura 5.16: Gráfica de $d_z/d_{z_{Planck}}$ contra z . En esta gráfica se observa el efecto en las curvas al variar el valor de ω , para esto la línea roja corresponde al modelo 16 de dos parámetros, mientras que las líneas de color verde y violeta hacen referencia a modelos con ecuación de estado ω constante mayor y menor a la ecuación de estado hoy en día ω_0 para el modelo 16. Para la línea verde fue usada una $\omega = -0.7$ y para la línea violeta se usó $\omega = -1.3$.

De acuerdo a este análisis, tanto las figuras 5.6 y 5.7 de tres parámetros como las figuras 5.10 y 5.11 de dos parámetros, parecen sugerir la presencia de una densidad de energía oscura mayor a la densidad de energía oscura proporcionada por una constante cosmológica a valores de z relativamente bajos y con ello una ecuación de estado mayor a la de una constante cosmológica $\omega > -1$.

Sin embargo, al revisar la figura 5.8 se puede apreciar que los mejores modelos de tres parámetros inician con una densidad menor a la de una constante cosmológica a $z < 0.4$ aproximadamente para posteriormente tener un valor por encima de ésta. Esto puede deberse al hecho de que apesar de que los resultados mostrados en 5.7 del parámetro Ω_m son tales que Ω_Λ es mayor que la registrada en el mejor ajuste del grupo de Planck de $\Omega_{\Lambda_{Planck}} = 0.6825$ [43], los valores obtenidos del parámetro h alteran a tal grado que la densidad resulta menor a $z < 0.4$. Por otra parte, los

mejores ajustes de las figuras 5.6 y 5.7 de tres parámetros llegan a cruzar la recta negra de valor constante uno, lo que implicaría tener $\omega_{\Lambda_{3\text{parámetros}}} < \omega_{\Lambda_{\text{Planck}}} = -1$ como ya se mostró, desde valores en el corrimiento al rojo menores a $z = 1$.

De todos los modelos de tres parámetros estudiados, el modelo 17 resulta ser el de menor χ_r^2 , por lo que puede ser juzgado como uno de los mejores modelos del bloque de tres parámetros. En las figuras 5.17 y 5.18 se muestran tres gráficas de contornos de confianza referentes a ω_0 vs Ω_m , h vs Ω_m y ω_0 vs h para el modelo 17 de tres parámetros. Se observa que las tres gráficas cuentan con sus tres contornos de confianza referentes a 1σ en naranja, 2σ amarillo y 3σ en marrón, además se ha agregado un punto de color rojo que muestra la posición del mejor ajuste obtenido por el menor valor de χ_r^2 . Aunque las tres gráficas engloban dentro de los contornos de confianza asociados a 1σ y 2σ valores cercanos a los registrados en la tabla E.2, claramente en todas ellas se muestra el punto concerniente al mejor ajuste en los extremos de las gráficas a valores muy lejanos de los esperados dentro de los intervalos de estudio. Todas las gráficas concernientes a estos tres tipos para cada uno de los modelos de tres parámetros pueden ser revisadas en el apéndice B.

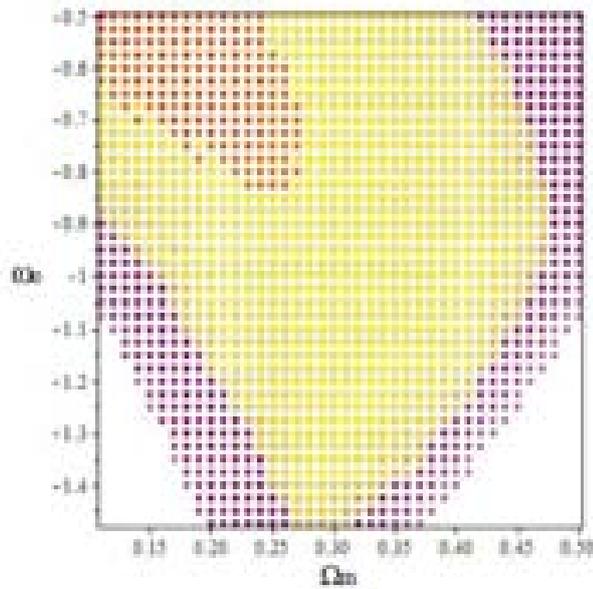


Figura 5.17: Gráfica del modelo 17 de variación de tres parámetros. La gráfica corresponde a ω_0 contra Ω_m . El punto rojo es para el mínimo en χ_r^2 , mientras que las zonas naranja, amarilla y marrón corresponden a los contornos de confianza de 1σ , 2σ y 3σ respectivamente.

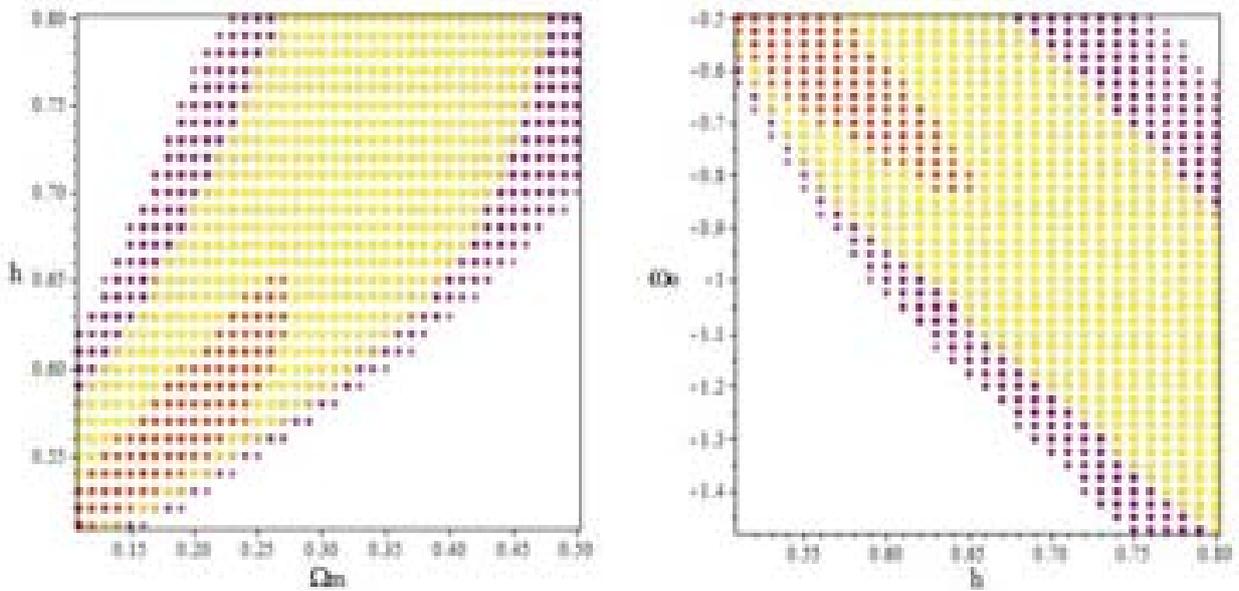


Figura 5.18: Gráficas pertenecientes al modelo 17 de variación de tres parámetros. La gráfica de la primera columna corresponden a Ω_m contra h , mientras que en la segunda columna aparece ω_0 contra h . El punto rojo es para el mínimo en χ_r^2 , mientras que las zonas naranja, amarilla y marrón corresponden a los contornos de confianza de 1σ , 2σ y 3σ respectivamente.

Dado que los resultados de los diferentes parámetros libres en los modelos de tres parámetros están muy alejados de los resultados teóricos, pese a tener valores en χ_r^2 muy cercanos a 1, se considera que los mejores ajustes obtenidos en los modelos de tres parámetros no son los ideales para describir el comportamiento de la energía oscura y por tanto es necesario aplicar otros métodos cosmológicos adicionales tales como CMB o SN Ia para constreñir los resultados de las gráficas de contornos de confianza, como ya se ha mencionado con anterioridad.

De esta forma la constricción adicional de $h = 0.7$ en los modelos de dos parámetros provee de resultados más confiables. Si ahora se presta atención en las gráficas de la densidad de energía oscura de los modelos de dos parámetros de la figura 5.12, se puede distinguir que los mejores modelos, si bien se encuentran muy cercanos a la densidad de energía oscura dada por una constante cosmológica, éstos siempre se encuentran por encima de ella como era de esperarse a diferencia de los modelos de tres parámetros. En las figuras 5.10 y 5.11 de dos parámetros, las gráficas no llegan a cruzar la recta constante negra a valores menores de $z = 1$, aunque si lo llegan a hacer a valores en z mucho mayores. Para poder discernir si realmente hay una transición en ω a valores menores a $\omega = -1$ es necesario recurrir a más datos, incluso a datos provenientes de corrimientos al rojo mayores a $z = 1$. Así mismo, recordemos que en nuestros modelos tanto de tres como de dos parámetros, únicamente se han conside-

rado transiciones a valores de $\omega_i = 0$ y $\omega_i = -1$, por lo que no se han considerado realmente los casos en donde $\omega < -1$ para $z > 0$, lo cual está en congruencia con el hecho de que los modelos de dos parámetros no crucen la recta negra constante en dichas gráficas.

De lo anterior y discriminando al modelo 14 de dos parámetros por tener resultados en sus parámetros libres muy alejados a la teoría como ya se discutió, podemos concluir que nuestros mejores modelos de todos los casos estudiados son aquellos con menor χ_r^2 en los modelos de dos parámetros, particularmente podemos resaltar a los modelos 16 y 17 de dos parámetros como tales modelos que cumplen con proporcionar una densidad de energía oscura mayor a la de una constante cosmológica y con ello tener una ecuación de estado $\omega > -1$, por lo que podemos decir que estos modelos representan adecuadamente el comportamiento de la dinámica de la energía oscura.

A continuación se muestran tres tablas de comparación entre los modelos Λ CDM de Planck, y los modelos 16 y 17 de dos parámetros que recopilan la información de r_s , D_V , d_z y algunas combinaciones entre ellos. Es de hacerse notar que los valores de r_s y D_V para el modelo de Planck, siempre son mayores que los referentes a los modelos 16 y 17. No obstante, el cociente de d_z resulta ser siempre menor en Planck que en los modelos 16 y 17 debido a que $\frac{r_s}{r_{sPlanck}}$ siempre es mayor que $\frac{D_V}{D_{VPlanck}}$ en ambos casos. Posteriormente se agregan algunas gráficas de los modelos 16 y 17 de dos parámetros, del mismo tipo de algunas gráficas ya mostradas, para poder concentrarse mejor en la forma de los dos mejores ajustes.

Planck	Punto 1 en $z = 0.106$	Punto 2 en $z = 0.35$	Punto 3 en $z = 0.44$	Punto 4 en $z = 0.57$	Punto 5 en $z = 0.60$	Punto 6 en $z = 0.73$
r_s	2.306×10^{40}	2.306×10^{40}	2.306×10^{40}	2.306×10^{40}	2.306×10^{40}	2.306×10^{40}
D_V	7.130×10^{40}	2.155×10^{41}	2.619×10^{41}	3.226×10^{41}	3.356×10^{41}	3.882×10^{41}
d_z	0.323	0.107	0.088	0.071	0.068	0.059

Cuadro 5.13: Tabla donde se registran los valores del horizonte acústico r_s , la distancia de dilatación D_V y el cociente $d_z = \frac{r_s}{D_V}$ de acuerdo al modelo Λ CDM correspondiente a los datos de Planck mostrados en la tabla E.2 y evaluados en los corrimientos al rojo z referentes a cada uno de los datos experimentales exhibidos en la tabla 5.2. Los valores numéricos tanto de r_s como de D_V han sido colocados en unidades de GeV^{-1} .

Modelo 16	Punto 1 en $z = 0.106$	Punto 2 en $z = 0.35$	Punto 3 en $z = 0.44$	Punto 4 en $z = 0.57$	Punto 5 en $z = 0.60$	Punto 6 en $z = 0.73$
r_s	2.271×10^{40}	2.271×10^{40}	2.271×10^{40}	2.271×10^{40}	2.271×10^{40}	2.271×10^{40}
D_V	6.817×10^{40}	2.051×10^{41}	2.491×10^{41}	3.071×10^{41}	3.195×10^{41}	3.699×10^{41}
d_z	0.333	0.110	0.091	0.074	0.071	0.061
$\frac{r_s}{r_{sPlanck}}$	0.984	0.984	0.984	0.984	0.984	0.984
$\frac{D_V}{D_{VPlanck}}$	0.9560	0.9515	0.9514	0.9518	0.9520	0.9528
$\frac{d_z}{d_{zPlanck}}$	1.0299	1.0348	1.0349	1.0344	1.0343	1.0334

Cuadro 5.14: Tabla donde se registran los valores del horizonte acústico r_s , la distancia de dilatación D_V y el cociente $d_z = \frac{r_s}{D_V}$ de acuerdo al modelo 16 de variación de dos parámetros y evaluados en los corrimientos al rojo z referentes a cada uno de los datos experimentales exhibidos en la tabla 5.2. Los valores numéricos tanto de r_s como de D_V han sido colocados en unidades de GeV^{-1} .

Modelo 17	Punto 1 en $z = 0.106$	Punto 2 en $z = 0.35$	Punto 3 en $z = 0.44$	Punto 4 en $z = 0.57$	Punto 5 en $z = 0.60$	Punto 6 en $z = 0.73$
r_s	2.289×10^{40}	2.289×10^{40}	2.289×10^{40}	2.289×10^{40}	2.289×10^{40}	2.289×10^{40}
D_V	6.844×10^{40}	2.068×10^{41}	2.513×10^{41}	3.099×10^{41}	3.226×10^{41}	3.736×10^{41}
d_z	0.334	0.110	0.091	0.073	0.070	0.061
$\frac{r_s}{r_{sPlanck}}$	0.992	0.992	0.992	0.992	0.992	0.992
$\frac{D_V}{D_{VPlanck}}$	0.9598	0.9592	0.9597	0.9608	0.9611	0.9623
$\frac{d_z}{d_{zPlanck}}$	1.0344	1.0351	1.0345	1.0334	1.0331	1.0317

Cuadro 5.15: Tabla donde se registran los valores del horizonte acústico r_s , la distancia de dilatación D_V y el cociente $d_z = \frac{r_s}{D_V}$ de acuerdo al modelo 17 de variación de dos parámetros y evaluados en los corrimientos al rojo z referentes a cada uno de los datos experimentales exhibidos en la tabla 5.2. Los valores numéricos tanto de r_s como de D_V han sido colocados en unidades de GeV^{-1} .

Las figuras 5.19 y 5.20 muestran de manera gráfica el comportamiento en las tablas 5.14 y 5.15 para las funciones de $D_V/D_{VPlanck}$ y $d_z/d_{zPlanck}$ como resultado de la comparación entre los modelos 16 y 17 de dos parámetros con el modelo Λ CDM de Planck. El modelo 17 resulta ser más cercano al comportamiento del modelo de Planck en la gráfica de $D_V/D_{VPlanck}$ en comparación al modelo 16, sin embargo en $d_z/d_{zPlanck}$ el modelo 16 se encuentra más cercano al comportamiento de la recta negra, por lo menos a valores en z muy cercanos a cero. Nuevamente se señala en ambas gráficas que pese a que se encuentran a escala distinta, cada máximo de la gráfica 5.20 le corresponde un mínimo en 5.19 en el mismo valor de z debido a que

D_V es inversamente proporcional a d_z y que $r_s/r_{sPlanck}$ es constante. Aunque en la figura 5.19 ambas gráficas parten de un mismo punto en $z = 0$, el respectivo factor de r_s provoca que no coincidan en la figura 5.20.

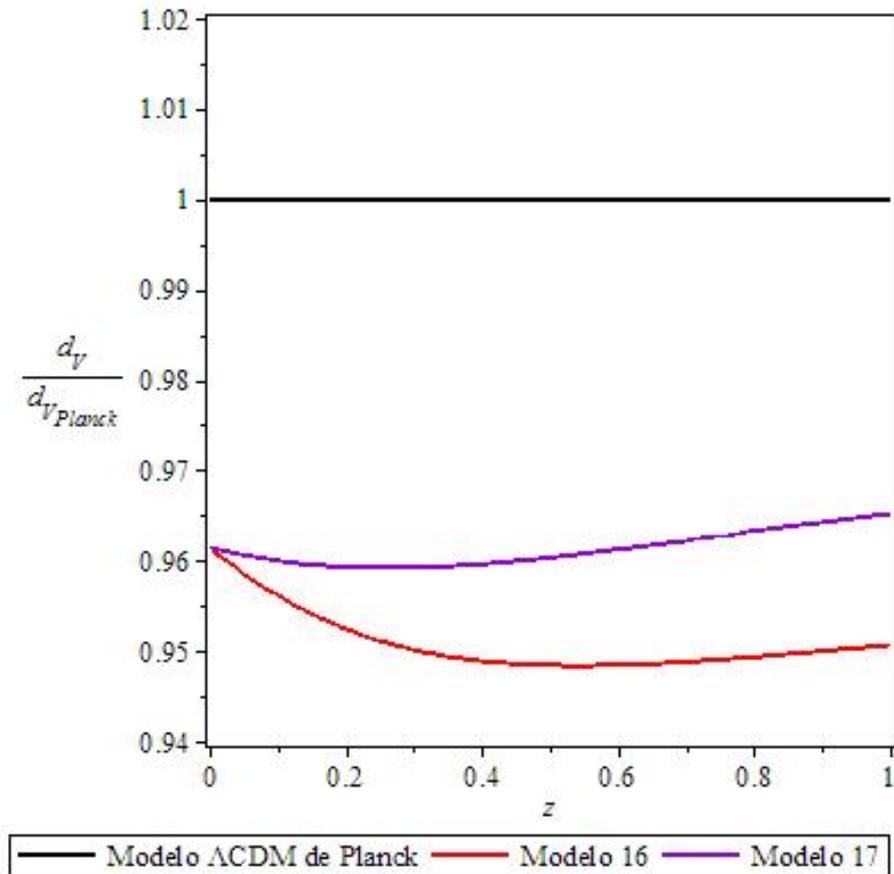


Figura 5.19: Gráfica de $D_V/D_{VPlanck}$ para los modelos 16 en rojo y 17 en violeta de dos parámetros. La línea negra compara los modelos con el modelo Λ CDM usado por el grupo de Planck [43].

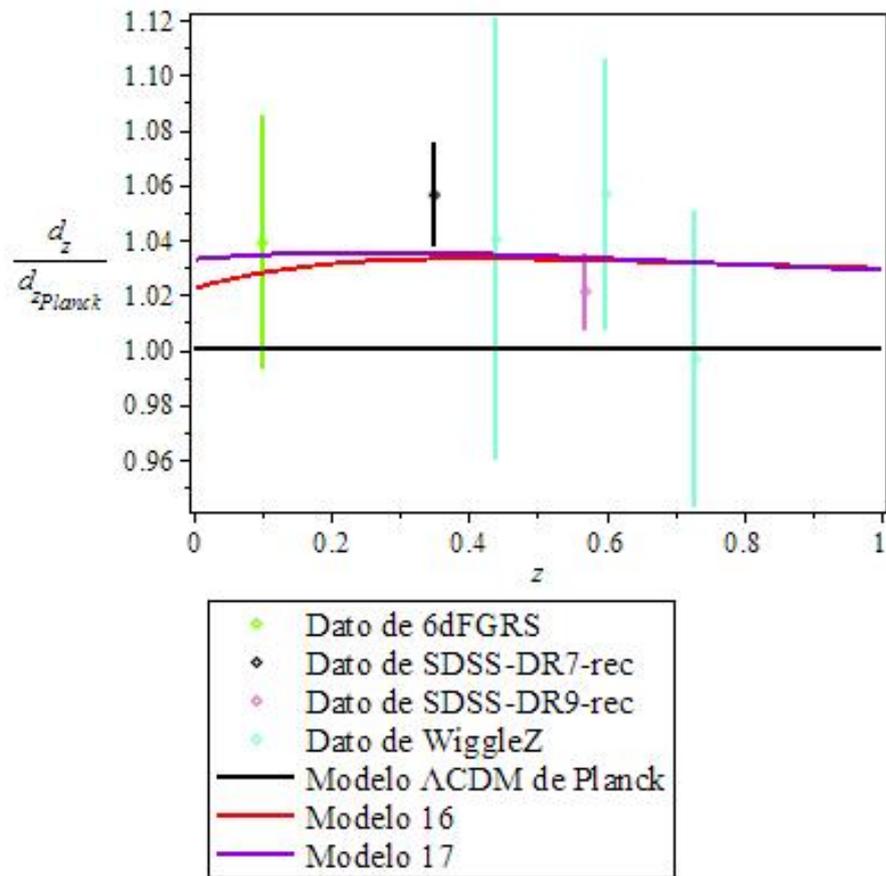


Figura 5.20: Gráfica de $d_z/d_{zPlanck}$ para los modelos 16 en rojo y 17 en violeta de dos parámetros. La línea negra compara los modelos con el modelo Λ CDM usado por el grupo de Planck [43]. El punto verde claro es un dato perteneciente a 6dF, mientras que el negro a SDSS-DR7, el punto rosa a BOSS-DR9 y los azules claros a WiggleZ.

Dado que las gráficas correspondientes a ambos modelos se encuentran por encima de la recta negra que representa al modelo Λ CDM de Planck, se concluye que los modelos 16 y 17 proponen una densidad de energía oscura mayor a la de Λ CDM de Planck y con ello a su vez que la ecuación de estado en $z = 0$ sea mayor, es decir $-1 < \omega_0$. En la figura 5.21 es notorio el incremento en la densidad de energía oscura debido al modelo 16 en rojo y al modelo 17 en violeta con respecto al modelo clásico con $\omega = -1$. Nótese que los valores de ρ_Λ son muy cercanos entre ambos modelos propuestos, a tal grado que las líneas del modelo 16 y 17 parecen incluso llegar a empalmarse.

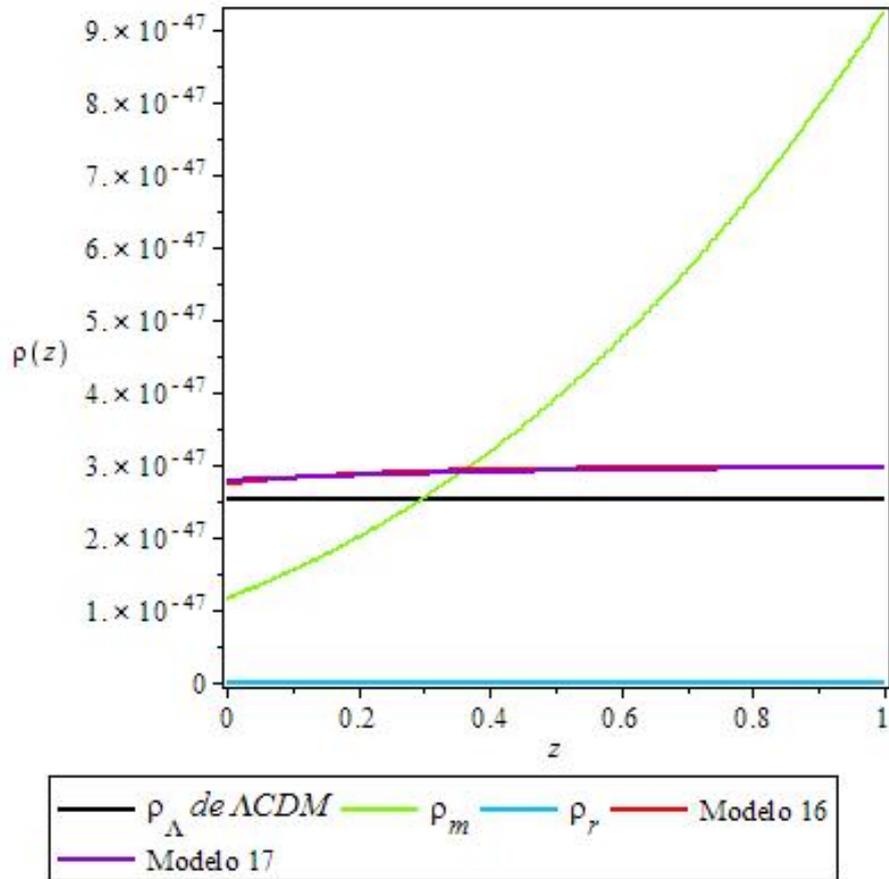


Figura 5.21: Gráfica de $\rho(z)$ en GeV^4 para los modelos 16 en rojo y 17 en violeta de dos parámetros. La línea negra compara los modelos con la densidad de energía oscura del modelo ΛCDM usado por el grupo de Planck [43], así mismo la línea verde y azul clara denotan las densidades de materia y radiación respectivamente.

En seguida se presentan las gráficas concernientes a los contornos de confianza para los modelos 16 y 17 de dos parámetros. En ambos casos los resultados son óvalos concéntricos centrados dentro de los intervalos en los que fueron estudiados los parámetros ω_0 y Ω_m , con el punto rojo correspondiente al mejor ajuste prácticamente en el centro de los contornos de confianza tomando los valores de $\Omega_m = 0.31$ y $\omega_0 = -0.90$ para el modelo 16 y $\Omega_m = 0.30$ y $\omega_0 = -0.95$ para el modelo 17, los cuales son muy cercanos a la teoría. Una lista completa de las gráficas de contornos de confianza para todos los modelos de dos parámetros puede ser encontrada en el apéndice C.

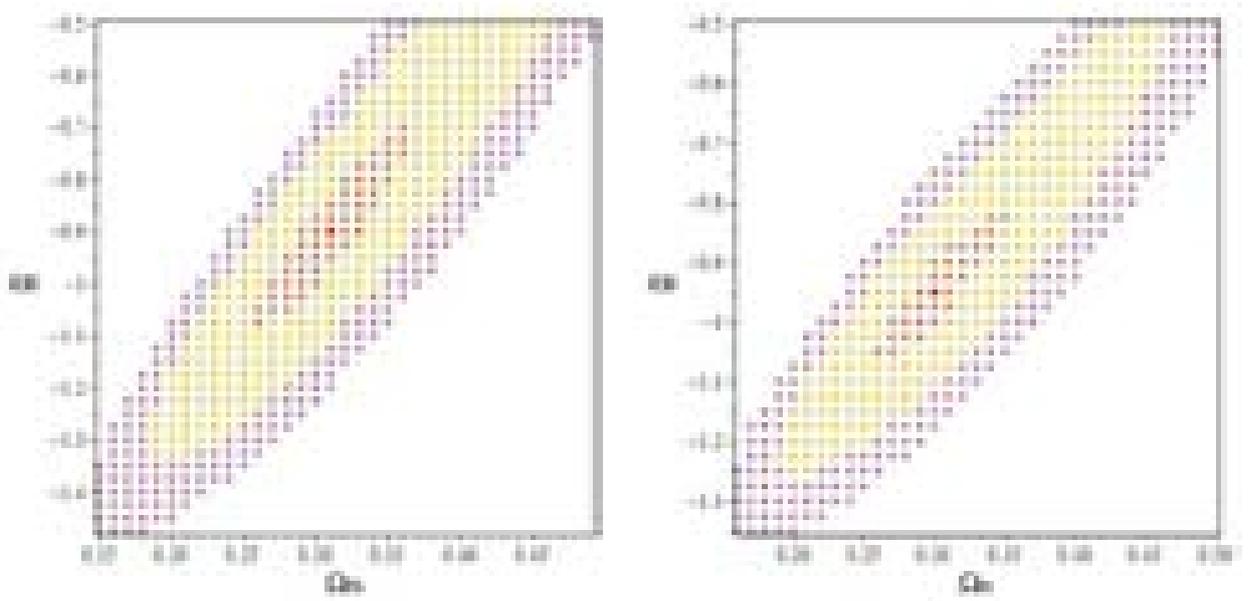


Figura 5.22: Gráficas pertenecientes al modelo 16 de dos parámetros a la izquierda y al modelo 17 a la derecha. Ambas gráficas son del tipo ω_0 contra Ω_m . El punto rojo es para el mínimo en χ_r^2 , mientras que las zonas naranja, amarilla y marrón corresponden a los contornos de confianza de 1σ , 2σ y 3σ respectivamente.

En varias de las gráficas y tablas se han comparado los resultados de los modelos propuestos con los datos del modelo Λ CDM usado por Planck. No obstante, se considera pertinente hacer lo propio con otros modelos igualmente viables como lo son los modelos dados por una parametrización de Chevallier-Polarski-Linder o CPL, mostrada en la ecuación 5.3. Para ello es de hacerse notar que la parametrización propuesta en 5.9 se reduce a la forma de 5.3 cuando se cumple que los parámetros q y z_t toman los valores de $q = 1$ y $z_t = 1$. Los únicos modelos estudiados que cumplen con reducirse a la forma CPL son los modelos 9 y 4 de tres y dos parámetros.

Así mismo cabe señalar que se realizaron los cálculos correspondientes a cinco modelos adicionales a los 40 modelos trabajados en esta tesis que comprenden variaciones entre la parametrización de CPL y la de $\omega = cte$. El análisis de estos cinco casos añadidos ha sido llevado a cabo dentro de las mismas condiciones de intervalos de estudio empleados en los 40 modelos originales y son incluidos con la finalidad de dar completud al trabajo de comparación con otros modelos. En la tabla 5.16 se resumen los valores de los parámetros cosmológicos y de χ^2 de diferentes modelos considerados de importancia, con el objeto de poder compararlos con los dos mejores obtenidos de los 40 modelos realizados, es decir, los modelos 16 y 17 de dos parámetros.

Modelo	Ω_m	Ω_Λ	h	ω_0	χ^2	χ_r^2
Modelo 16 dos parámetros	0.31	0.69	0.70	-0.90	3.952	0.988
Modelo 17 dos parámetros	0.30	0.70	0.70	-0.95	4.034	1.008
Modelo 17 tres parámetros	0.11	0.89	0.51	-0.5	2.156	0.718
Λ CDM de Planck	0.3175	0.6825	0.6711	-1		
CPL (modelo 9 de tres parámetros) $\omega_i = -1$	0.11	0.89	0.51	-0.5	2.642	0.880
CPL (modelo 4 de tres parámetros) $\omega_i = 0$	0.12	0.88	0.60	-0.825	4.092	1.364
CPL (modelo 9 de dos parámetros) $\omega_i = -1$	0.30	0.70	0.70	-0.975	4.120	1.030
CPL (modelo 4 de dos parámetros) $\omega_i = 0$	0.25	0.75	0.70	-1.125	4.871	1.217
CPL con $h = 0.7$ fijo	0.33	0.67	0.70	$\omega_0 = -0.70$ $\omega_a = -1.45$	3.230	1.076
CPL	0.21	0.79	0.58	$\omega_0 = -0.50$ $\omega_a = -1.25$	2.409	1.204
Variando Ω_m y h con $\omega = -1$ fijo	0.29	0.71	0.70	-1	4.156	1.039
Variando Ω_m y ω con $h = 0.7$ fijo	0.30	0.70	0.70	-0.975	4.127	1.031
Variando Ω_m , h y ω con ω constante	0.11	0.89	0.52	-0.625	3.138	1.046

Cuadro 5.16: Tabla donde se registran los valores de los parámetros cosmológicos para diferentes modelos de interés. Las dos primeras filas corresponden a los dos mejores modelos de la parametrización propuesta. La tercera fila indica los resultados del mejor modelo estudiado de tres parámetros. La cuarta fila da los resultados de los mejores ajustes de Planck [43]. Los modelos CPL se refieren a los modelos referentes a la parametrización de Chevallier-Polarski-Linder. De la fila cinco a la ocho, se presentan los modelos que fueron trabajados en nuestro análisis inicial de tres y dos parámetros y que se reducen a la forma de la parametrización CPL debido a que cumplen con tener los valores de $q = 1$ y $z_t = 1$ en sus parámetros fijos; los únicos modelos estudiados que cumplen con reducirse a la forma CPL son los modelos 9 y 4 de tres y dos parámetros. De la fila nueve a la trece se presentan los resultados de cinco modelos que fueron trabajados de manera independiente a los 40 modelos principales que son tocados en este trabajo, ya que todos ellos no incluyen a la parametrización propuesta en esta tesis en sus cálculos y únicamente son incluidos en ésta tabla por completez al trabajo de comparación con otros modelos. Las filas nueve y diez atañen de igual forma a la parametrización CPL, donde el modelo de la fila nueve varía los parámetros Ω_m , ω_0 y ω_a y se mantiene al parámetro h como una constante igual a $h = 0.7$; de forma equivalente, la fila diez fue obtenida al variar los parámetros Ω_m , h , ω_0 y ω_a con la parametrización CPL. Los tres últimos casos de la tabla han sido modelos en los cuales ω es constante y por lo tanto su densidad de energía oscura es de la forma de la ecuación 5.34.

De acuerdo a la tabla 5.16, los únicos modelos cuya χ_r^2 es menor que la correspondiente a los modelos 16 y 17 de dos parámetros son los modelos 17 de tres parámetros y el modelo CPL referente al modelo 9 de tres parámetros. Sin embargo, pese a que ambos resultados ajustan de buen modo a los datos, no representan adecuadamente a la naturaleza de la energía oscura por tener resultados en los parámetros cosmológicos muy lejanos a la teoría.

Conforme a lo dicho, otros modelos que de igual forma obtienen sus mejores ajustes en valores muy lejanos a los esperados son los modelos correspondientes a CPL (modelo 4 de tres parámetros), el modelo “variando Ω_m , h y ω con ω constante” y en menor medida CPL. Esto es debido a que todos ellos caen en el uso de tres o más parámetros, lo que provoca que el simple uso de una única prueba cosmológica como BAO no sea suficiente para restringir sus parámetros y que por lo tanto no podamos considerar sus resultados como adecuados para describir a la naturaleza.

El modelo CPL (modelo 4 de dos parámetros) también resulta ligeramente desviado de los resultados ideales. No obstante, al ser un modelo perteneciente al bloque de dos parámetros, se ha visto que tanto el modelo 16 como el modelo 17 resultan ser superiores a este modelo tanto por el valor de sus parámetros cosmológicos como por su resultado en χ_r^2 . De hecho como se puede corroborar en la tabla A.1, el modelo CPL (modelo 4 de dos parámetros) con un número de grados de libertad $\nu = 4$ posee una $\chi^2 > 4.72$, por lo que dicho modelo no presenta un contorno de confianza referente a 1σ .

En este mismo sentido, otros modelos que tampoco poseen todos sus contornos de confianza son el modelo CPL (modelo 4 de tres parámetros) y el CPL, siendo el modelo CPL (modelo 4 de tres parámetros) el de mayor χ_r^2 con $\chi_r^2 = 1.364$.

Por otra parte, además de los modelos 16 y 17 de dos parámetros, los modelos que han ajustado mejor a los datos y que de igual forma describen adecuadamente a los parámetros cosmológicos han sido los modelos CPL (modelo 9 de dos parámetros), CPL con $h = 0.7$ fijo, “variando Ω_m y h con $\omega = -1$ fijo” y “variando Ω_m y ω con $h = 0.7$ fijo”. Todos ellos han sido modelos de dos parámetros a variar, a excepción del modelo CPL con $h = 0.7$ fijo que ha sido de tres parámetros. Entre los casos de “variando Ω_m y h con $\omega = -1$ fijo” y “variando Ω_m y ω con $h = 0.7$ fijo” únicamente se ha intercambiado el parámetro a variar, observándose una diferencia prácticamente nula, pues ambos casos tienen resultados muy similares.

En general, tanto los modelos 16 y 17 de dos parámetros, como los modelos CPL (modelo 9 de dos parámetros), CPL con $h = 0.7$ fijo, “variando Ω_m y h con $\omega = -1$ fijo” y “variando Ω_m y ω con $h = 0.7$ fijo”, presentan resultados muy cercanos al modelo Λ CDM de Planck considerado actualmente como el mejor modelo para describir al universo. Si bien es difícil decir que alguno de los dos mejores modelos resultantes de nuestro análisis, es decir los modelos 16 y 17 de dos parámetros, son

los modelos definitivos o incluso decir que son muy superiores a los demás modelos aceptables, sí podemos decir que ambos son modelos muy buenos que coinciden con las observaciones y que por lo tanto sus resultados pueden ser utilizados hasta que no se demuestre lo contrario.

En lo que respecta a la parametrización de la ecuación de estado de la energía oscura propuesta en esta tesis, se tiene una forma más general que la descripción dada por una constante cosmológica o por una parametrización de CPL, pues ambas vienen englobadas en nuestra parametrización dependiendo del valor adoptado por los parámetros q , z_t y w_1 . Si el comportamiento de la energía oscura fuese tal que coincidiera con el de una constante cosmológica entonces se tendría $w_1 = 0$, si por otro lado coincidiera con CPL se tendría $q = 1$ y $z_t = 1$.

La parametrización propuesta da más libertad a la descripción de la evolución de la energía oscura debido a los parámetros q y z_t y su uso puede servir para debatir sobre la viabilidad de los modelos de constante cosmológica y CPL, aplicando las pruebas cosmológicas tanto de BAO como de CMB, SN Ia y otras más, lo cual se tiene como un futuro proyecto para ampliar el trabajo expuesto en esta tesis. Por el momento ha quedado mostrado en éste trabajo, la preferencia por parte de nuestra parametrización por adquirir los valores en sus parámetros fijos de $q = 2$ y $\omega_i = -1$.

Capítulo 6

Conclusiones

En este trabajo se realizó un estudio para determinar la dinámica de la energía oscura a través de una propuesta de parametrización de su ecuación de estado ω , con apoyo del conocimiento de las oscilaciones acústicas de bariones (BAO) como prueba cosmológica para determinar el valor de los parámetros cosmológicos Ω_m , Ω_Λ , h y ω_0 . Para ello, se aplicó el método estadístico de constrictión de χ^2 en BAO con el cual se obtuvieron los mejores ajustes a tales parámetros para finalmente enfrentar los resultados obtenidos con los resultados de mediciones en BAO, con los valores teóricos de los parámetros cosmológicos y con los resultados obtenidos por otros modelos.

El trabajo consistió en el estudio de 40 modelos divididos en dos bloques de 20 cada uno. En el primer bloque cada uno de los modelos varió tres parámetros los cuales fueron Ω_m , h y ω_0 , mientras que en el segundo se varió Ω_m y ω_0 dejando a $h = 0.7$.

Los resultados obtenidos en los modelos del bloque de tres parámetros, expuestos en la tabla 5.7, fueron los siguientes:

- Se percibió que los modelos ajustan mejor cuando poseen un valor de $\omega_i = -1$. En contraste, los modelos para los cuales $\omega_i = 0$ resultan ser los peores ajustes.
- En general, los casos en que ω_i y z_t fueron iguales se vieron beneficiados por un valor de $q = 2$ para los modelos con χ_r^2 cercano a uno y afectados por este mismo valor cuando χ_r^2 representa un mal ajuste.
- Se observó también que varios de los modelos presentaron los mejores ajustes en sus parámetros en los extremos de sus correspondientes intervalos de estudio.
- El modelo 17 y 16 resultaron ser los de menor χ^2 , mientras que los modelos 11 y 12 fueron los de peor ajuste.

Dado que el uso de BAO como única prueba cosmológica no fue suficiente para constreñir los intervalos de los parámetros, se aplicó el segundo bloque donde se variaron dos parámetros cuyos resultados mostrados en la tabla 5.12 fueron:

- Nuevamente se mostró una preferencia de los modelos con $\omega_i = -1$ sobre los modelos con $\omega_i = 0$
- También hubo una preferencia por el parámetro q con valor $q = 2$ sólo en los modelos con muy buen ajuste y en los de peor ajuste.
- Aunque en general la mayoría de los modelos tuvieron valores muy cercanos a lo esperado, los modelos 14, 16 y 17 son los modelos que poseyeron menor valor de χ_r^2 , sin embargo de estos tres modelos el 14 es el único cuyos resultados en sus parámetros cosmológicos no fueron cercanos a la teoría, por lo que no fue considerado como un buen modelo para describir a la naturaleza de la energía oscura.
- Otra vez los modelos 11 y 12 fueron los peores ajustes.

De los resultados obtenidos y de las gráficas 5.6 y 5.10 se discutió la preferencia por parte de los modelos estudiados por sugerir la presencia de una densidad de energía oscura mayor a la densidad de energía oscura proporcionada por una constante cosmológica a valores de z cercanos a cero como se puede corroborar en las gráficas 5.8 y 5.12, lo cual implicó una ecuación de estado $\omega > -1$.

Posteriormente se tomaron los modelos 16 y 17 como candidatos para representar a los mejores modelos de dos parámetros, dado su bajo valor de χ^2 . No obstante es de resaltar que todos los modelos de dos parámetros, con 4 grados de libertad, con $\chi^2 < 4.72$ o equivalente a $\chi_r^2 < 1.18$, correspondiente a un contorno de confianza de 1σ como puede ser verificado en la tabla A.1, son igualmente viables para describir la evolución de la energía oscura.

De la comparación de los modelos 16 y 17 con otros modelos estudiados y con diferentes variaciones de modelos con parametrización de CPL y de $\omega = cte$ se tuvo que todos los modelos con tres y cuatro parámetros obtienen resultados muy lejanos a lo establecido por la teoría a excepción del modelo CPL con $h = 0.7$ fijo. Con lo cual se concluye que el uso de una única prueba cosmológica como BAO no es suficiente para restringir a los parámetros cosmológicos en la mayoría de los casos en los que se realice un estudio de este tipo.

En general, tanto los modelos 16 y 17 de dos parámetros, como los modelos CPL (modelo 9 de dos parámetros), CPL con $h = 0.7$ fijo, “variando Ω_m y h con $\omega = -1$ fijo” y “variando Ω_m y ω con $h = 0.7$ fijo”, presentaron resultados muy cercanos al modelo Λ CDM de Planck considerado actualmente como el mejor modelo para

describir al universo. Si bien es difícil decir que alguno de los dos mejores modelos resultantes de nuestro análisis, es decir los modelos 16 y 17 de dos parámetros, son los modelos definitivos o incluso decir que son muy superiores a los demás modelos aceptables, sí podemos decir que ambos son modelos muy buenos que coinciden con las observaciones y que por lo tanto sus resultados pueden ser utilizados hasta que no se demuestre lo contrario.

A lo que respecta a la parametrización de la ecuación de estado de la energía oscura propuesta en esta tesis, se tiene una forma más general que la descripción dada por una constante cosmológica o por una parametrización de CPL, pues ambas vienen englobadas en nuestra parametrización dependiendo del valor adoptado por los parámetros q , z_t y w_1 . La parametrización propuesta da más libertad a la descripción de la evolución de la energía oscura debido a los parámetros q y z_t y su uso puede servir para debatir sobre la viabilidad de los modelos de constante cosmológica y CPL, aplicando las pruebas cosmológicas tanto de BAO como de CMB, SN Ia y otras más, lo cual se tiene como un futuro proyecto para ampliar el trabajo expuesto en esta tesis. Por el momento ha quedado mostrado en este trabajo, la preferencia por parte de nuestra parametrización por adquirir los valores en sus parámetros fijos de $q = 2$ y $\omega_i = -1$, por lo que esto sugiere que el modelo de parametrización de la ecuación de estado de la energía oscura con el que se trabajó no es concordante con un modelo que prediga un estado inicial de la energía oscura similar al de materia no relativista como bien sí lo podría ser con un modelo que prediga un estado inicial igual al de una constante cosmológica.

Con todo lo anterior queda claro que el uso de la prueba de BAO implica por sí misma una verificación de la existencia de la energía oscura en el universo, pudiendo determinar con ella el valor de los parámetros cosmológicos bajo cierto margen de error. Sin embargo, la determinación más precisa de los distintos parámetros cosmológicos requiere de la aplicación de más de una prueba cosmológica, tales como SN Ia y CMB, en las cuales se debe emplear de igual modo la estadística de χ^2 en la forma $\chi_{Total}^2 = \chi_{SNIa}^2 + \chi_{CMB}^2 + \chi_{BAO}^2 + \dots$ donde los puntos suspensivos representan pruebas cosmológicas adicionales, de tal manera que se constriñan aun más los intervalos de los parámetros en los contornos de confianza, tal y como se muestra en la figura 4.11 con la intersección de los contornos de confianza de SN Ia, CMB y BAO.

Apéndice A

Prueba de χ^2 y formas de analizar usando BAO

Cuando se propone una parametrización es necesario verificar si nuestras predicciones concuerdan con los datos observados. Para ello se tendría que cumplir que la diferencia entre el valor teórico esperado k -ésimo E_k menos el correspondiente valor observado k -ésimo O_k fuera pequeña. Se dice entonces que esta diferencia es pequeña si se cumple que su valor sea del orden del error σ_k asociado a la medición de O_k . En otras palabras si se cumple que

$$|E_k - O_k| \leq \sigma_k \quad (\text{A.1})$$

Esta expresión se puede elevar al cuadrado para eliminar el valor absoluto y dividirse todo entre σ_k^2 para tener

$$\frac{(E_k - O_k)^2}{\sigma_k^2} \leq 1 \quad (\text{A.2})$$

Si se suman los correspondientes cocientes de la diferencia k -ésima entre su error k -ésimo para todos los elementos k desde $k = 1$ hasta n , donde n es el número total de datos observacionales, se tiene

$$\sum_{k=1}^n \frac{(E_k - O_k)^2}{\sigma_k^2} \leq n \quad (\text{A.3})$$

Si se define la cantidad χ^2 como la suma de este cociente, es decir

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^n \frac{(E_k - O_k)^2}{\sigma_k^2} \quad (\text{A.4})$$

tendremos entonces una primera forma de comparar nuestras predicciones con las observaciones. Se tiene entonces que, si $\chi^2 \leq n$ la predicción del modelo concuerda con las observaciones y por lo tanto el modelo es aceptable. Por otro lado, si $\chi^2 > n$ la predicción no concuerda con las observaciones y por lo tanto el modelo no es útil.

La parametrización propuesta puede utilizar uno, dos, tres o hasta l parámetros y en general una mayor cantidad de parámetros implicaría una descripción más completa del fenómeno y con ello un valor de χ^2 más chico. Por tal motivo lo más adecuado no es comparar χ^2 con n sino con los grados de libertad ν , definido como la diferencia entre el número de datos observados menos el número de parámetros utilizados en el modelo, es decir

$$\nu = n - l \quad (\text{A.5})$$

y entonces χ^2 se esperaría que tuviera un valor cercano a

$$\chi^2 = \nu \quad (\text{A.6})$$

Con fundamento en lo anterior, se puede plantear una nueva forma de χ^2 , llamada chi-cuadrada reducida χ_r^2 , la cual se define como el valor de χ^2 dividido por los grados de libertad ν

$$\chi_r^2 = \frac{\chi^2}{\nu} \quad (\text{A.7})$$

con lo cual se esperará que χ_r^2 tenga un valor cercano a

$$\chi_r^2 = 1 \quad (\text{A.8})$$

En la práctica se suele desear conocer el valor límite de χ^2 o de χ_r^2 tal que se tenga una probabilidad P de que el modelo con ν grados de libertad posea un valor de χ^2 o de χ_r^2 menor que el límite. Para ello se expresa la función de densidad de probabilidad de χ^2 como

$$\rho_\nu(\chi^2) = \frac{\exp -\frac{\chi^2}{2} (\chi^2)^{\frac{\nu}{2}-1}}{2^{\frac{\nu}{2}} \Gamma(\frac{\nu}{2})} \quad (\text{A.9})$$

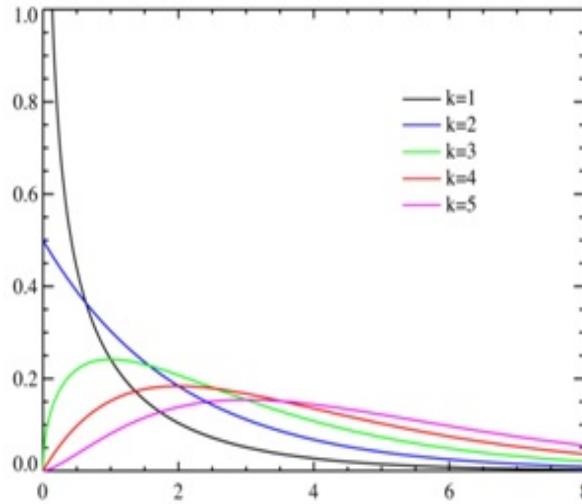


Figura A.1: Se muestra la función de densidad de probabilidad para diferentes valores de los grados de libertad representados por k en la figura.

Luego entonces, la probabilidad de obtener un valor de χ^2 entre los valores límite χ_i^2 y χ_f^2 es

$$P = \int_{\chi_i^2}^{\chi_f^2} \rho_\nu(\chi^2) d\chi^2 \quad (\text{A.10})$$

En particular, para el caso en que $\chi_i^2 = 0$ se suele requerir χ_f^2 tal que $P_{1\sigma} = 0.682689$, $P_{2\sigma} = 0.9545$ y $P_{3\sigma} = 0.9973$. La tabla A.1 resume el valor que adopta χ_f^2 para cada uno de estos casos y para distintos valores de ν .

Grados de Libertad ν	χ_f^2 para $P_{1\sigma}$	χ_f^2 para $P_{2\sigma}$	χ_f^2 para $P_{3\sigma}$
1	1	4	9
2	2.29575	6.18007	11.8292
3	3.52674	8.02488	14.1564
4	4.719474022	9.715627149	16.25117115

Cuadro A.1: Valores adoptados por χ_f^2 para diferentes valores de los grados de libertad correspondientes a cada una de las probabilidades características.

La prueba de χ^2 ha sido un método para probar modelos de energía oscura basados en los datos de supernovas tipo IA (SN IA), de radiación de fondo cósmico de

microondas (CMB) y de oscilaciones acústicas de bariones (BAO). Una gráfica en la que se muestran resultados para SN IA, CMB y BAO es mostrada en la figura 4.11. Para el caso de las oscilaciones acústicas, la prueba de χ^2 suele ser empleada de tres maneras distintas, las cuales son:

1. Por medio del pico acústico $A(z) = \frac{D_V(z)\sqrt{\Omega_m H_0^2}}{cz}$
2. Usando el cociente $f(z) = \frac{D_V(z)}{D_V(z')}$
3. Mediante el pico acústico $d_z(z) = \frac{r_s(z_{drag})}{D_V(z)}$

Como puede observarse de los tres métodos, todos ellos hacen uso de la cantidad $D_V(z)$. En el presente trabajo se empleó la prueba de χ^2 , para determinar la bondad de nuestro modelo de estudio 5.9, basado en datos experimentales de BAO y cuyo análisis fue efectuado utilizando la tercera manera, descrita por $d_z(z)$. Para este caso la prueba de χ^2 toma la forma de

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(d_{z\,obs}(z_i) - d_z(z_i, \Omega_{m0}, h, \omega_0))^2}{\sigma(z_i)^2} \quad (\text{A.11})$$

Apéndice B

Gráficas de Variación de Tres Parámetros

A continuación se muestra una serie de 4 tablas donde aparecen los resultados de manera gráfica de los 20 modelos para la variación de tres parámetros. Cada tabla corresponde a uno de los cuatro casos descritos en 5.5.1 para los cuales los parámetros q y ω_i mantienen un valor constante e incluyen un total de 15 gráficas.

Las gráficas son presentadas en tres columnas que se extienden a lo largo de cinco filas. Cada fila representa un modelo distinto y cada una de las columnas corresponde a un tipo de gráfica distinta. Las gráficas pertenecientes a la primera columna de izquierda a derecha, son aquellas en las cuales se confronta al parámetro ω_0 contra Ω_m , mientras que en la segunda y tercer columna se confronta a los parámetros h contra Ω_m y ω_0 contra h respectivamente.

Este tipo de gráficas se conocen como gráficas de contornos de confianza y son similares a la que aparecen en 4.11(a). El código de colores utilizado en las gráficas es el siguiente:

- Punto Rojo: Muestra la posición, en los parámetros correspondientes a la gráfica, del punto mínimo en χ_r^2 .
- Zona Naranja: Muestra la región referente a 1σ .
- Zona Amarilla: Muestra la región referente a 2σ .
- Zona Marrón: Muestra la región referente a 3σ .

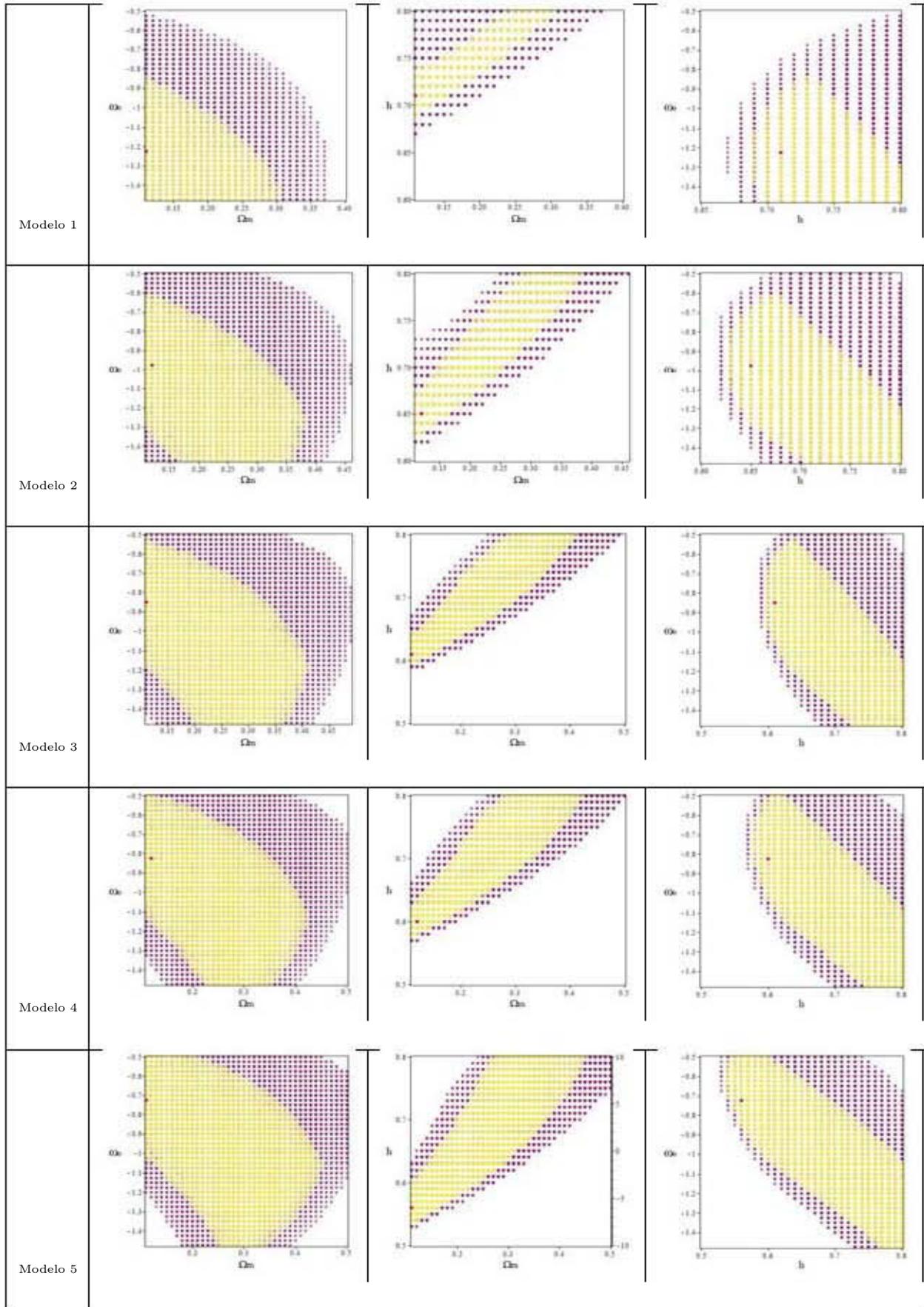


Figura B.1: Tabla en la que se muestran las gráficas pertenecientes al primer caso para el cual $q = 1$ y $\omega_i = 0$. Las gráficas de la primera columna corresponden a ω_0 contra Ω_m , mientras que en la segunda y tercer columna aparecen h contra Ω_m y ω_0 contra h respectivamente. El punto rojo es para el mínimo en χ_r^2 , mientras que las zonas naranja, amarilla y marrón corresponden a las regiones de 1σ , 2σ y 3σ respectivamente.

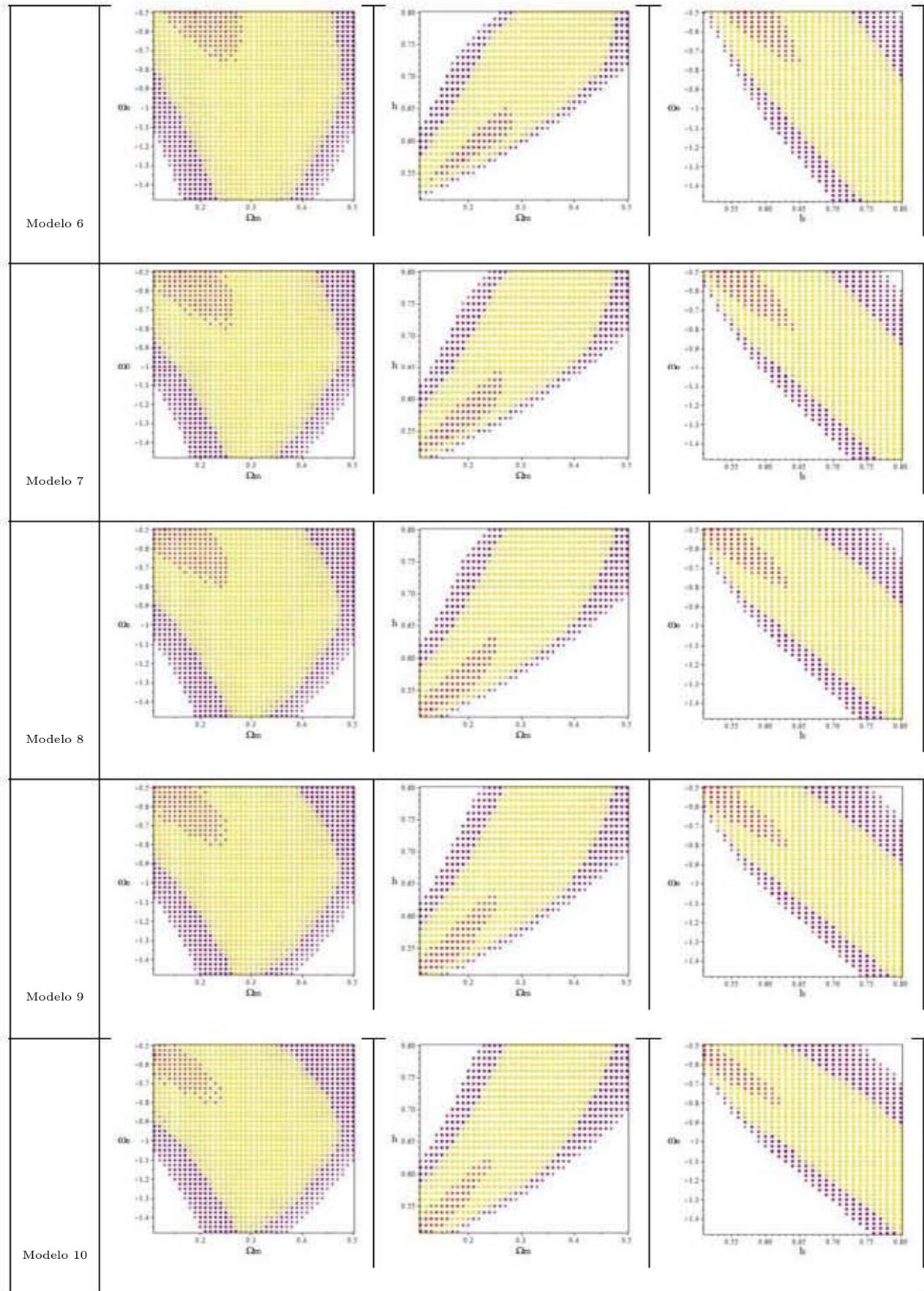


Figura B.2: Tabla en la que se muestran las gráficas pertenecientes al segundo caso para el cual $q = 1$ y $\omega_i = -1$. Las gráficas de la primera columna corresponden a ω_0 contra Ω_m , mientras que en la segunda y tercer columna aparecen h contra Ω_m y ω_0 contra h respectivamente. El punto rojo es para el mínimo en χ_r^2 , mientras que las zonas naranja, amarilla y marrón corresponden a las regiones de 1σ , 2σ y 3σ respectivamente.

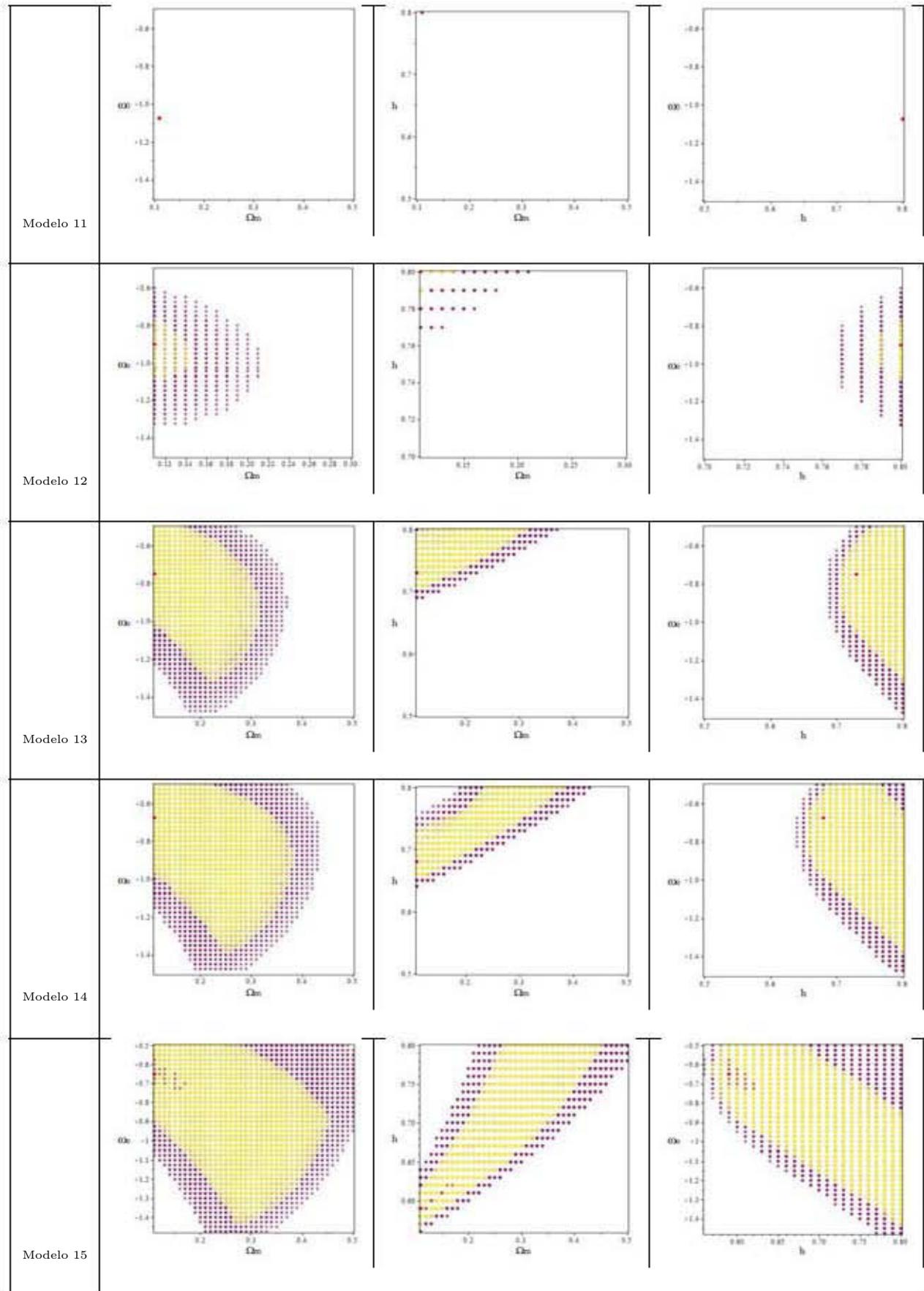


Figura B.3: Tabla en la que se muestran las gráficas pertenecientes al tercer caso para el cual $q = 2$ y $\omega_i = 0$. Las gráficas de la primera columna corresponden a ω_0 contra Ω_m , mientras que en la segunda y tercer columna aparecen h contra Ω_m y ω_0 contra h respectivamente. El punto rojo es para el mínimo en χ_r^2 , mientras que las zonas naranja, amarilla y marrón corresponden a las regiones de 1σ , 2σ y 3σ respectivamente.

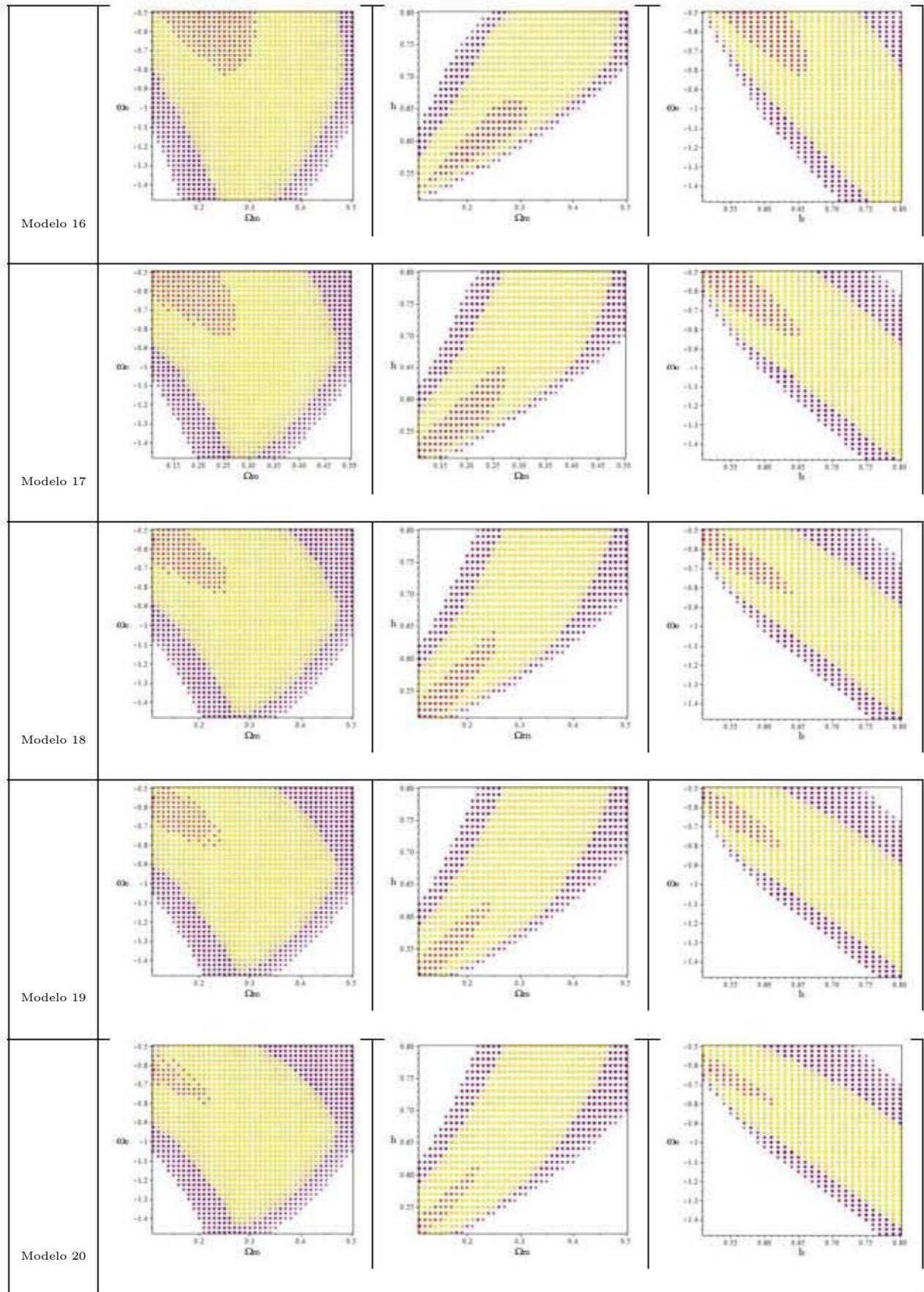


Figura B.4: Tabla en la que se muestran las gráficas pertenecientes al cuarto caso para el cual $q = 2$ y $\omega_i = -1$. Las gráficas de la primera columna corresponden a ω_0 contra Ω_m , mientras que en la segunda y tercer columna aparecen h contra Ω_m y ω_0 contra h respectivamente. El punto rojo es para el mínimo en χ_r^2 , mientras que las zonas naranja, amarilla y marrón corresponden a las regiones de 1σ , 2σ y 3σ respectivamente.

Apéndice C

Gráficas de Variación de Dos Parámetros

En este apéndice se muestra una serie de gráficas donde aparecen los resultados de los 20 modelos para la variación de dos parámetros. Cada 5 tablas corresponde a uno de los cuatro casos descritos en 5.5.2 para los cuales los parámetros q y ω_i mantienen un valor constante. En este bloque se ha mantenido el valor de $h = 0.7$, por lo que no aparecen gráficas del tipo h contra Ω_m y ω_0 contra h como en el apéndice B del bloque de variación de tres parámetros.

Las gráficas son presentadas en cuatro columnas que se extienden a lo largo de cinco filas. Este tipo de gráficas se conocen como gráficas de contornos de confianza y son similares a la que aparecen en 4.11(a). El código de colores utilizado en las gráficas es el siguiente:

- Punto Rojo: Muestra la posición, en los parámetros correspondientes a la gráfica, del punto mínimo en χ_r^2 .
- Zona Naranja: Muestra la región referente a 1σ .
- Zona Amarilla: Muestra la región referente a 2σ .
- Zona Marrón: Muestra la región referente a 3σ .

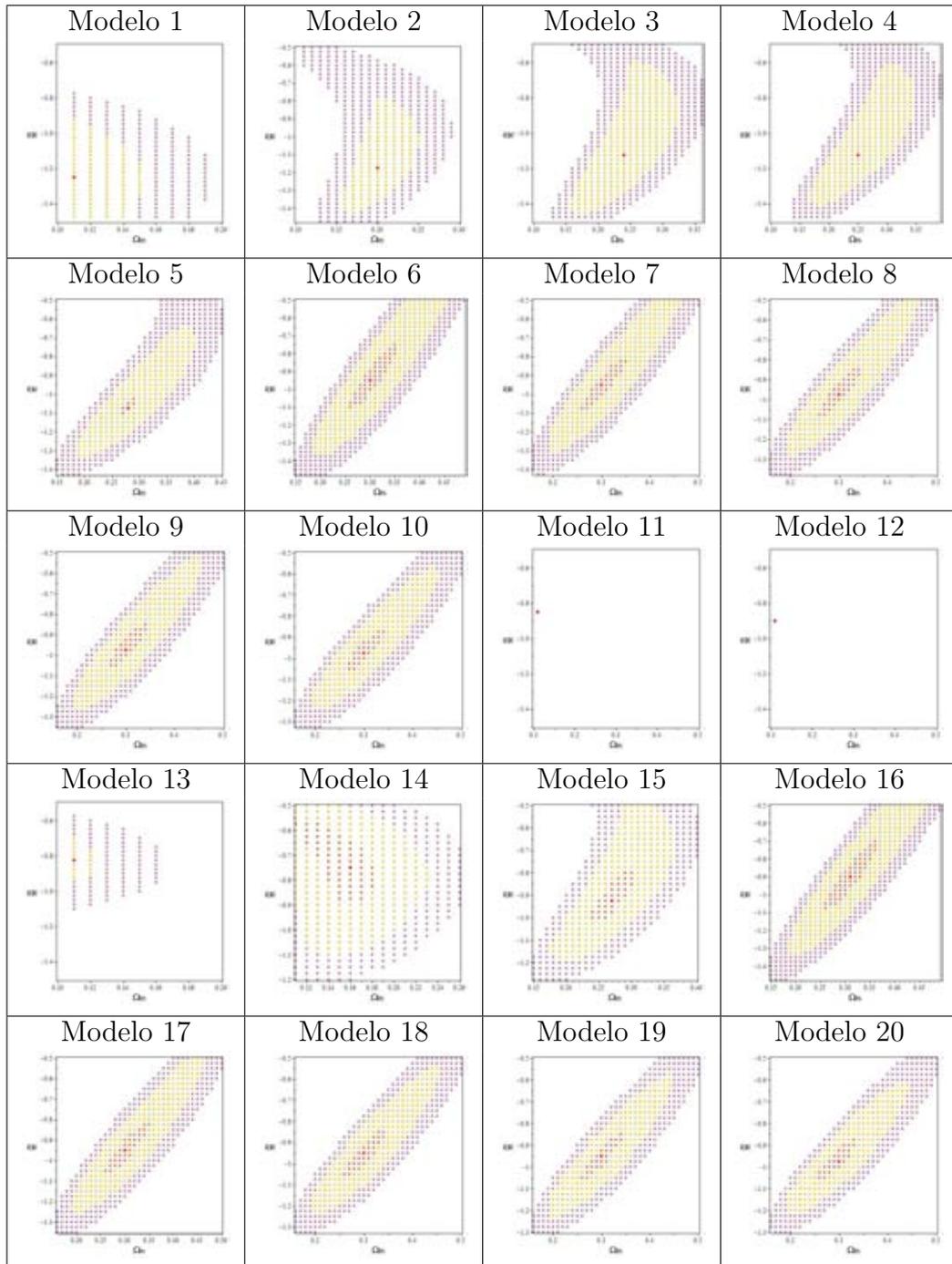


Figura C.1: Tabla en la que se muestran las gráficas pertenecientes al bloque de dos parámetros. Todas las gráficas corresponden a ω_0 contra Ω_m . El punto rojo es para el mínimo en χ^2_r , mientras que las zonas naranja, amarilla y marrón corresponden a las regiones de 1σ , 2σ y 3σ respectivamente.

Apéndice D

Transformación de Unidades a GeV

En el trabajo relacionado al capítulo 5 se manejan unidades naturales donde $\hbar = c = k_B = 1$ por lo que las siguientes cantidades físicas están en términos de GeV como se muestra a continuación.

$$[Energía] = [Masa] = [Temperatura] = [Longitud]^{-1} = [Tiempo]^{-1}$$

Las relaciones de equivalencia entre las unidades de longitud, masa, tiempo y temperatura con los GeV son:

$$Longitud : 1GeV^{-1} = 1.9733 \times 10^{-14} cm$$

$$Masa : 1GeV = 1.7827 \times 10^{-24} g$$

$$Tiempo : 1GeV^{-1} = 6.5822 \times 10^{-25} s$$

$$Temperatura : 1GeV = 1.1605 \times 10^{13} K$$

De esta forma, los valores de los parámetros y constantes fundamentales en GeV se encuentran establecidos en la tabla D.1:

Constante de Newton de Gravitación Universal G	$G = 6.67384 \times 10^{-8} cm^3 g^{-1} s^{-2}$	$G = 6.708367647 \times 10^{-39} GeV^{-2}$
Constante de Stefan-Boltzmann σ	$\sigma = \frac{\pi^2 k_B^2}{60c^2 \hbar^3} = 5.6704 \times 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4}$	$\sigma = \frac{\pi^2}{60} = 0.16449$
Parámetro de Hubbllle H_0	$H_0 = 100 h km Mpc^{-1} s^{-1}$	$H_0 = 2.1332 h \times 10^{-42} GeV$
Temperatura del CMB $T_{\gamma 0}$	$T_{\gamma 0} = 2.725 K$	$T_{\gamma 0} = 2.348125808 \times 10^{-13} GeV$

Cuadro D.1: Valores de los parámetros y constantes utilizados en GeV .

Apéndice E

Parámetros Cosmológicos

A continuación se muestra un resumen de algunos de los parámetros utilizados en cosmología dando una breve definición o descripción del mismo. Posteriormente se enlistan los valores de algunos de éstos parámetros utilizados.

Parámetro	Difinición
$\omega_b \equiv \Omega_b h^2$	Densidad de bariones hoy.
$\omega_{CDM} \equiv \Omega_{CDM} h^2$	Densidad de materia oscura fría hoy.
$100\theta_{MC}$	$100\times$ aproximación a r_*/D_A (CosmoMC)
τ	Profundidad óptica de dispersión de Thomson debido a la reionización.
Ω_K	Parámetro de curvatura hoy con $\Omega_T = 1 - \Omega_K$.
Σm_ν	La suma de las masas de neutrinos en eV .
ω_0	Valor de la ecuación de estado de la energía oscura hoy.
N_{eff}	Número efectivo de grados de libertad para partículas relativistas.
Y_P	Fracción de masa bariónica en helio.
A_L	Amplitud de la potencia de lente en relación con el valor ffsico.
n_s	Índice espectral escalar ($k_0 = 0.05 Mpc^{-1}$).
n_t	Índice espectral tensorial ($k_0 = 0.05 Mpc^{-1}$).
$dn_s/dlnk$	Running of the spectral index.
$ln(10^{10} A_s)$	Potencia logarítmica de las perturbaciones de curvatura primordiales ($k_0 = 0.05 Mpc^{-1}$).
$r_{0.05}$	Proporción del tensor de potencia primordial a potencia de curvatura en $k_0 = 0.05 Mpc^{-1}$.
Ω_Λ	Densidad de energía oscura dividida por la densidad crítica hoy.
t_0	Edad del universo hoy en (Gyr).
Ω_m	Densidad de materia (incluyendo neutrinos masivos) hoy dividido por la densidad crítica.
σ_8	Fluctuaciones de materia RMS hoy en la teoría lineal.
z_{re}	Corrimiento al rojo al cual el universo esta reionizado a la mitad.
H_0	Proporción actual de expansión en $km.s^{-1} Mpc^{-1}$.
$r_{0.002}$	Proporción del tensor de potencia primordial con la potencia de curvatura en $k_0 = 0.002 Mpc^{-1}$.
$10^9 A_s$	$10^9\times$ espectro de potencia de curvatura adimensional en $k_0 = 0.05 Mpc^{-1}$.
$\omega_m \equiv \Omega_m h^2$	Densidad de materia total hoy (inclusive neutrinos masivos).
z_*	Corrimiento al rojo para el cual la profundidad óptica es igual a uno.
$r_* = r_s(z_*)$	Distancia comóvil del horizonte acústico en $z = z_*$.
$100\theta_*$	$100\times$ distancia angular del horizonte acústico en $z = z_*(r_*/D_A)$.
z_{drag}	Corrimiento al rojo al cual la profundidad óptica del arrastre de bariones es igual a uno.
$r_{drag} = r_s(z_{drag})$	Distancia comóvil del horizonte acústico en $z = z_{drag}$.
k_D	Número de onda comóvil de amortiguamiento característico (Mpc^{-1}).
$100\theta_D$	$100\times$ extensión angular de la difusión de fotones en la última dispersión.
z_{eq}	Corrimiento al rojo de la igualdad de radiación–materia (sin masa de neutrinos).
$100\theta_{eq}$	$100\times$ distancia angular del horizonte comóvil en la igualdad de radiación–materia.
$d_z(0.57) = r_{drag}/D_V(0.57)$	Razón de distancia de BAO en $z = 0.57$.

Cuadro E.1: Resumen de los parámetros cosmológicos. En cada uno se agrega el símbolo y su respectiva definición o descripción [43].

La siguiente tabla muestra los datos de los parámetros cosmológicos utilizados en la elaboración de este trabajo. Los datos pertenecen a los resultados obtenidos por el grupo de Planck en 2013, publicados en la referencia [43].

Parámetro	Planck		Planck+lensing		Planck+WP	
	Mejor ajuste	límite de 68 %	Mejor ajuste	límite de 68 %	Mejor ajuste	límite de 68 %
$\Omega_b h^2$	0.022068	0.02207 ± 0.00033	0.022242	0.02217 ± 0.00033	0.022032	0.02205 ± 0.00028
$\Omega_{DM} h^2$	0.12029	0.1196 ± 0.0031	0.11805	0.1186 ± 0.0031	0.12038	0.1199 ± 0.0027
Ω_Λ	0.6825	0.686 ± 0.020	0.6964	0.693 ± 0.019	0.6817	$0.685^{+0.018}_{-0.016}$
Ω_m	0.3175	0.314 ± 0.020	0.3036	0.307 ± 0.019	0.3183	$0.315^{+0.016}_{-0.018}$
H_0	67.11	67.4 ± 1.4	68.14	67.9 ± 1.5	67.04	67.3 ± 1.2
$\Omega_m h^2$	0.14300	0.1423 ± 0.0029	0.14094	0.1414 ± 0.0029	0.14305	0.1426 ± 0.0025
$\Omega_m h^3$	0.09597	0.09590 ± 0.00059	0.09603	0.09593 ± 0.00058	0.09591	0.09589 ± 0.00057
<i>Age/Gyr</i>	13.819	13.813 ± 0.058	13.784	13.796 ± 0.058	13.8242	13.817 ± 0.048
z_*	1090.43	1090.37 ± 0.65	1090.01	1090.16 ± 0.65	1090.48	1090.43 ± 0.54
r_*	144.58	144.75 ± 0.66	145.02	144.96 ± 0.66	144.58	144.71 ± 0.60
$100\theta_*$	1.04139	1.04148 ± 0.00066	1.04164	1.04156 ± 0.00066	1.04136	1.04147 ± 0.00062
z_{drag}	1059.32	1059.29 ± 0.65	1059.59	1059.43 ± 0.64	1059.25	1059.25 ± 0.58
r_{drag}	147.34	147.53 ± 0.64	147.74	147.70 ± 0.63	147.36	147.49 ± 0.59
$100\theta_D$	0.161332	0.16137 ± 0.00037	0.161196	0.16129 ± 0.00036	0.161375	0.16140 ± 0.00034
z_{eq}	3402	3386 ± 69	3352	3362 ± 69	3403	3391 ± 60
$100\theta_{eq}$	0.8128	0.816 ± 0.013	0.8224	0.821 ± 0.013	0.8125	0.815 ± 0.011
$r_{drag}/D_V(0.57)$	0.07130	0.0716 ± 0.0011	0.07207	0.0719 ± 0.0011	0.07126	0.07147 ± 0.00091

Cuadro E.2: Parámetros cosmológicos del modelo Λ CDM para el grupo de planck [43]. Las columnas 2 y 3 son los datos del espectro de potencia de temperatura de Planck únicamente. Las columnas 4 y 5 combinan los datos de temperatura de Planck con los de lentes gravitatorias de Planck, y las columnas 6 y 7 incluyen polarización del WMAP en multipolos bajos. Se muestran los mejores ajustes al igual que los límites de confianza al 68 %.

Bibliografía

- [1] Amanullah R., Rubin D., Aldering G., Astier P., et al. *Spectra and Light Curves of Six Type Ia Supernovae at $0.511 < Z < 1.12$ and the Union2 Compilation*. Astrophysical Journal. arXiv:1004.1711v1 Abril 2010.
- [2] Anderson L., et al. *The clustering of galaxies in the SDSS–III Baryon Oscillation Spectroscopic Survey: Baryon Acoustic Oscillations in the Data Release 9 Spectroscopic Galaxy Sample*. MNRAS. arXiv:1203.6594v1 Marzo 2012.
- [3] Aubourg Éric, et al. *Cosmological implications of baryon acoustic oscillation (BAO) measurements*. arXiv:1411.1074v2 Noviembre 2014.
- [4] Avelino Huerta Arturo. *Modelos Cosmológicos dominados por materia con viscosidad volumétrica para explicar la expansión acelerada del Universo*. Instituto de Física y Matemáticas - Universidad Michoacana de San Nicolás Hidalgo (IFM-UMSNH). Tesis de Doctorado. Noviembre de 2010. pp. 1, 19-23, 54.
- [5] Bartelmann Matthias, Schneider Peter. *Weak Gravitational Lensing*. 12 Julio 2006. pp. 12, 17.
- [6] Bassett Bruce A.& Hlozek Renée. *Baryon Acoustic Oscillations*. arXiv:0910.5224v1. 27 de Octubre 2009.
- [7] Bennett C. L. et. al. *Three-year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) observations: Temperature analysis*. Astrophys. J. Suppl. arXiv:astro-ph/0603451v2. 2007
- [8] Bergström Lars, Goobar Ariel. *Cosmology and Particle Astrophysics*. Springer. 2006. pp. 89-105, 148.
- [9] Berry M. *Principles of Cosmology and Gravitation*. Cambridge, Cambridge University Press. 2001. pp. 1-2.
- [10] Beutler F., et al. *The 6dF Galaxy Survey: Baryon Acoustic Oscillations and the Local Hubble Constant*. MNRAS. arXiv:1106.3366v1. Junio 2011.

- [11] Blake C., et al. *The WiggleZ Dark Energy Survey: mapping the distance–redshift relation with baryon acoustic oscillations*. MNRAS. arXiv:1108.2635v1 Agosto 2011.
- [12] Carnero Rosell Aurelio *Determinación de parámetros cosmológicos usando oscilaciones acústicas de bariones en cartografiados fotométricos de galaxias*. Departamento de Física Teórica, Facultad de Ciencias Físicas, Universidad Complutense de Madrid. Tesis de Doctorado. 2011.
- [13] Carroll Sean. *Spacetime and Geometry an Introduction to General Relativity*. Addison Wesley. pp. 329-336.
- [14] Cepa Jordi. *Cosmología Física*. Akal. 2007. pp. 13, 129.
- [15] Chávez Ricardo. *Constraining the Dark Energy Equation of State Using Alternative Cosmic Tracers*. Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica. Tesis de Maestría. 2010.
- [16] Cheng Ta-Pei. *Relativity, Gravitation and Cosmology*. Oxford University Press. 2005. pp. 38-53, 87-112.
- [17] Coles Peter, Lucchin Francesco. *Cosmology The Origin and Evolution of Cosmic Structure*. Wiley. 2002 pp. 4, 33-34.
- [18] Durrer Ruth. *The Cosmic Microwave Background*. Cambridge, Cambridge University Press. 2008. pp. 14.
- [19] Eisenstein Daniel J., et al. *Detection of the Baryon Acoustic Peak in the Large-Scale Correlation Function of SDSS Luminous Red Galaxies* The Astrophysical Journal. 2005.
- [20] Eisenstein Daniel J., Hu Wayne *Baryonic Features in the Matter Transfer Function* Institute for Advanced Study, Princeton, NJ. The Astrophysical Journal. 1998.
- [21] Filippenko Alexei V. *Type Ia Supernovae and Cosmology*. arXiv:astro-ph/0410609v1 25 de Octubre 2004.
- [22] Génova Santos Ricardo T. *Anisotropías primarias y secundarias del fondo cósmico de microondas: parámetros cosmológicos y la distribución de bariones*. I.S.B.N.: 978-84-7756-772-1 2007.
- [23] Gil-Marín Hector, et al. *The power spectrum and bispectrum of SDSS DR11 BOSS galaxies II: cosmological interpretation*. arXiv:1408.0027v1 Mon. Not. R. Astron. Soc. Julio 2014.

- [24] Hawley John F., Holcomb Katherine A. *Foundations of Modern Cosmology*. Oxford University Press. pp. 135-141, 148, 159-163, 282-292, 402.
- [25] Hillebrandt Wolfgang, Niemeyer Jens C. *Type Ia Supernova Explosion Models*. Annual Review of Astronomy and Astrophysics. arxiv:astro-ph/0006305v1. 2000. pp. 1-3.
- [26] Hinshaw G., Larson D., Komatsu E., et al. *Nine-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Cosmological Parameter Results*. arXiv:1212.5226v3 Junio 2013.
- [27] Hubble Edwin. *A relation between distance and radial velocity among extragalactic nebulae*. N. A. S. 1929.
- [28] Islam J. N. *An Introduction to Mathematical Cosmology*. Cambridge, Cambridge University Press. 2001. pp. 1.
- [29] Khokhlov A., Müller E., Höflich P. *Light curves of Type Ia supernova models with different explosion mechanisms*. Astronomy & Astrophys. pp. 223-248, 270. 1993.
- [30] Kolb E. W., Turner M. S. *The early universe*. pp. 50.
- [31] Komatsu E., et al. *Seven-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Cosmological Interpretation*. Astrophysical Journal Supplement Series. arXiv:1001.4538v3 Noviembre 2010.
- [32] Liddle Andrew. *An Introduction to Modern Cosmology*. Wiley. pp. 1, 46.
- [33] Liddle Andrew, Lyth David H. *Cosmological Inflation and Large Scale Structure*. Cambridge, Cambridge University Press. 2000. pp. 12, 29-31.
- [34] Magaña Zapata Juan Aldebarán *Materia Oscura Escalar: Implicaciones Astronómicas y Formación de Estructuras Cósmicas* Instituto de Astronomía, Universidad Nacional Autónoma de México. Tesis de Doctorado. 2012.
- [35] Mortonson M. J., Weinberg D. H., White M. *Dark Energy*. arXiv:1401.0046v1 2013.
- [36] Nair Remya, Jhingan Sanjay. *Is dark energy evolving?*. Centre for Theoretical Physics. Journal of Cosmology and Astroparticle Physics. 2013.
- [37] Norbury J. *General Relativity and Cosmology for Undergraduates*. pp. 6-7.
- [38] Padmanabhan N., Xu X., Eisenstein, D. J., et al. *A 2% Distance to $z = 0.35$ by Reconstructing Baryon Acoustic Oscillations – I: Methods and Application to the Sloan Digital Sky Survey*. MNRAS. arXiv:1202.0090v1 Febrero 2012.

- [39] Papantonopoulos. *The Physics of the Early Universe*. pp. 6, 11-14.
- [40] Peacock John A. *Cosmological Physics*. Cambridge University Press. 2002. pp. 37.
- [41] Peimbert Manuel, Fierro Julieta. *La evolución química del universo*. FCE. 2012. pp. 55-57, 191-213.
- [42] Pérez Pérez Juan Luis. *Materia Oscura y Cosmología de Mundos Brana*. Tesis de Maestría, Escuela Superior de Física y Matemáticas - Instituto Politécnico Nacional (ESFM-IPN). Junio 2010. pp. IV.
- [43] Planck Collaboration. *Planck 2013 results. XVI. Cosmological parameters*. Astronomy & Astrophysics. 21 de Marzo 2013.
- [44] Planck Collaboration. *Planck 2015 results. XIII. Cosmological parameters*. Astronomy & Astrophysics. 9 de Febrero 2015
- [45] Planck Collaboration. *Planck 2015 results. XIV. Dark energy and modified gravity*. Astronomy & Astrophysics. 6 de Febrero 2015.
- [46] Raine. *An Introduction to the Science of Cosmology*. Institute of Physics Publishing Bristol and Philadelphia. pp. 75.
- [47] Riess Adam G., et al. Type Ia Supernova Discoveries at $z < 1$ From the Hubble Space Telescope: Evidence for Past Deceleration and Constraints on Dark Energy Evolution. *Astrophysical Journal*. arXiv:astro-ph/0402512v2 Junio 2004.
- [48] Roos M. *Introduction to Cosmology*. 3ed. Wiley. 2003. pp. 14-17, 118-121.
- [49] Ryden Barbara. *Introduction to Cosmology*. Addison Wesley. 2002. pp. 9, 12-14, 36, 37-41, 54-56.
- [50] Sendra Irene, Lazkoz Ruth. *SN and BAO constraints on (new) polynomial dark energy parametrizations: current results and forecasts*. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* arXiv:1105.4943v4. 2012. pp. 1-7.
- [51] Torregrosa Lillo Ángel. *Relatividad y Universo: Relatividad y Cosmología básicas*. pp. 142.
- [52] Ureña López Luis Arturo, Vaquera Araujo Carlos Alberto. *Relatividad y Cosmología*. Notas de curso del IFUG. pp. 140, 148.
- [53] Vázquez E. *Notas de Cosmología*. CRyA/UNAM. pp. 63.
- [54] Wang Yun. *Flux-Averaging Analysis of Type Ia Supernova Data*. *The Astrophysical Journal*. Junio 2000.

- [55] Wang Yun. *Dark Energy*. Wiley. 2010.
- [56] Weinberg Steven. *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the general Theory of Relativity*. Wiley. 1972. pp. 188.