



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA  
CAMPO ELÉCTRICA-ÁREA INSTRUMENTACIÓN

**ANÁLISIS DE LAS CÁUSTICAS DE ESPEJOS CÓNCAVOS PARA  
OPTIMIZAR LA PRUEBA CON PANTALLAS NULAS**

TESIS  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
DOCTOR EN INGENIERÍA

PRESENTA  
FÍS. SAMUEL MACA GARCÍA

TUTOR PRINCIPAL  
DR. MAXIMINO AVENDAÑO ALEJO, CCADET  
COMITÉ TUTOR  
DRA. MARTHA ROSETE AGUILAR, CCADET  
DR. JOSÉ RUFINO DÍAZ URIBE, CCADET

MÉXICO, D. F. JUNIO DE 2015



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**JURADO ASIGNADO:**

Presidente: Dra. MARTHA ROSETE AGUILAR  
Secretario: DR. JOSÉ RUFINO DÍAZ URIBE  
Vocal: DR. MAXIMINO AVENDAÑO ALEJO  
1<sup>er</sup>. Suplente: DR. ALEJANDRO A. CORNEJO RODRÍGUEZ  
2<sup>do</sup>. Suplente: DR. VÍCTOR MANUEL VELÁZQUEZ AGUILAR

Lugar o lugares donde se realizó la tesis:

**TUTOR DE TESIS:**

DR. MAXIMINO AVENDAÑO ALEJO

---

**FIRMA**

# Índice general

---

<b>Dedicatoria</b>	<b>5</b>
<b>Agradecimientos</b>	<b>7</b>
<b>Declaración de autenticidad</b>	<b>9</b>
<b>Resumen</b>	<b>11</b>
<b>Abstract</b>	<b>13</b>
<b>Introducción</b>	<b>21</b>
<b>1. Método para el diseño de pantallas nulas de gotas</b>	<b>25</b>
1.1. Análisis geométrico para generar el plano de observación . . . . .	26
1.2. Análisis para determinar las ecuaciones generadoras de las gotas . . . . .	28
1.3. Características de los espejos disponibles . . . . .	36
1.4. Pantalla nula, montaje del sistema para evaluar el espejo F/0.147 y obtención de la imagen . . . . .	37
1.5. Referencias . . . . .	45
<b>2. Estudio de las cáusticas</b>	<b>47</b>
2.1. Introducción . . . . .	47
2.2. Preliminares . . . . .	48
2.3. Aproximación a tercer orden . . . . .	53
2.4. Catacústica para un frente de onda plano incidente . . . . .	60
2.5. Círculo de mínima confusión en un espejo cónico cóncavo . . . . .	61
2.6. Aberración esférica . . . . .	64
2.7. Expresiones analíticas para la aberración esférica . . . . .	67
2.8. Dobles reflexiones en superficies elípticas cóncavas . . . . .	72
2.8.1. Análisis de las cáusticas producidas por segundas reflexiones por un espejo elíptico cóncavo prolato . . . . .	72
2.9. Aplicación de resultados en el diseño de pantallas nulas cilíndricas . . . . .	83
2.9.1. Trazo de rayos . . . . .	83
2.10. Referencias . . . . .	87

<b>3. Diseño y montaje de las pantallas nulas para la prueba</b>	<b>91</b>
3.1. Diseño de las pantallas nulas de gotas . . . . .	91
3.2. Captura de las imágenes y obtención de los centroides . . . . .	100
3.3. Procesamiento de las imágenes . . . . .	100
3.4. Cálculo de la distorsión de la lente . . . . .	102
3.5. Cálculo de las normales a la superficie de referencia . . . . .	104
3.6. Integración de la superficie . . . . .	108
3.7. Resultados . . . . .	111
3.8. Análisis de los resultados . . . . .	113
3.9. Referencias . . . . .	114
<b>4. Conclusiones y trabajo a futuro</b>	<b>115</b>

# Dedicatoria

---

A Dios, por ser mi roca y fortaleza, por ser mi compañero y amigo, por darme abrigo y porque sin Él no hubiera podido terminar esto; porque me dió la oportunidad laboral cuando más la necesitaba, para así poder sustentarme económicamente y poder continuar en el programa del posgrado; porque escuchó los rezos y oraciones de todas aquellas personas que suplicaban por mi vida, estando yo en el lecho de muerte; y en atención a ellos y por su voluntad y misericordia me permitió seguir en este mundo cuando parecía que no había más camino que la tumba; y porque siempre me ha recordado su palabra, me ha tendido su mano y me ha guiado a través de mi peregrinar por la vida. Porque,

*“No me ha dado Dios espíritu de cobardia; sino de poder, de amor y de dominio propio.”*

Y ha agregado,

*“No temas, porque yo estoy contigo; no desmayes, porque yo soy tu Dios que te esfuerzo; siempre te ayudaré, siempre te sustentaré con la diestra de mi justicia.”*

A mi madre por ser mi apoyo incondicional, por la formación que me ha dado, por sus oraciones, por sus desvelos, por sus lágrimas, por tomarse muy en serio el papel que Dios le encomendó en la Tierra.

A mis hermanos, que han colaborado con su grano de arena para que la economía no resultara un escoyo insalvable a lo largo de esta aventura, también por sus oraciones cuando estuve al borde de la muerte, las que sin duda alguna fueron escuchadas.

A todos y cada uno de mis amigos, que con sus palabras de aliento y sus acciones me transmitieron energía en los momentos en los que la necesitaba.

Mi gratitud es para ustedes, por quienes, reitero, es posible el presente trabajo.

Gracias, muchas, muchas gracias.

*“Señor: Si en la victoria te glorificamos, en la derrota también hemos de darte gloria.”*

Samuel Maca García.



# Agradecimientos

---

Quiero agradecer al Departamento de Óptica y Microondas, al Grupo de Sistemas Ópticos y, en particular, al Laboratorio de Pruebas Ópticas; del Centro de Ciencias Aplicadas y Desarrollo Tecnológico (CCADET), de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM); por permitirme realizar mis actividades de investigación para poder realizar este trabajo.

Al Dr. Maximino Avendaño Alejo por su paciencia, dedicación, comprensión, motivación y apoyo; para poder llevar a buen término esta tesis. Así como a los miembros del comité tutorial: Dra. Martha Rosete Aguilar y el Dr. José Rufino Díaz Uribe, por sus observaciones y oportunos consejos.

A compañeros y amigos: Dr. Amílcar Estrada Molina, M. en I. Edgar Alfredo González Galindo, Fís. Oliver Huerta Carranza, M. en C. Martín Isaías Rodríguez Rodríguez, Ing. Diana Castán Ricaño, Ing. Gabriel Castillo Santiago, Fís. Jesús Alberto Del Olmo Márquez y Fís. César Cossio Guerrero; por sus aportaciones, observaciones y camaradería.

A los proyectos de investigación PAPIIT #IN114414 Y CONACYT #168570.





# Declaración de autenticidad

---

Por la presente declaro que, salvo cuando se haga referencia específica al trabajo de otras personas, el contenido de esta tesis es original y no se ha presentado total o parcialmente para su consideración para cualquier otro título o grado en esta o cualquier otra Universidad. Esta tesis es resultado de mi propio trabajo y no incluye nada que sea el resultado de algún trabajo realizado en colaboración, salvo que se indique específicamente en el texto.

Samuel Maca García. México. D. F. Junio de 2015



## Resumen

---

Se hace un estudio de las cáusticas por reflexión producidas por espejos cónicos cóncavos, considerando una fuente puntual sobre el eje óptico (equivalente a la posición del pinhole en el diseño de pantallas nulas cilíndricas); y como un caso especial, un análisis de las segundas reflexiones en espejos elípticos prolatos, para explicar las razones por las que, en algunas pruebas de espejos elípticos cóncavos rápidos con pantallas nulas de configuración cilíndrica, las imágenes muestran diferencias considerables respecto a la imagen de diseño. Los resultados muestran que la ubicación del pinhole, sobre el eje óptico, puede determinar que el CCD, utilizado para captar y grabar la imagen durante la evaluación, no capte información debida a segundas reflexiones; y que el diseño de pantallas nulas, como las mencionadas previamente, sólo puede llevarse a cabo para algunas combinaciones de valores de la distancia focal de la lente que se usa en la prueba, el diámetro del espejo y la posición del pinhole.

Se ha obtenido una expresión para reducir la aberración esférica a cualquier orden, para espejos cónicos cóncavos (excepto para espejos elípticos oblatos), en términos de la posición de la fuente puntual, de la constante de conicidad y la curvatura paraxial; y además, se han conseguido expresiones analíticas para el cálculo de la aberración esférica producida por las primeras reflexiones, en espejos cónicos cóncavos.

Finalmente, el estudio de las cáusticas que se ha realizado en este trabajo ha permitido obtener algunos resultados, que han sido presentados en otros trabajos, pero que han sido conseguidos con otra metodología, diferente a la que aquí se propone.



# Abstract

---

We study the formation of caustic surfaces produced by a concave conic mirror considering a point source placed at arbitrary position along the optical axis (equivalent to the position of the pinhole in the design of null cylindrical screens); and as a special case, an analysis of the second reflections produced by prolate elliptical mirrors in order to explain the reasons why, in some tests of rapid elliptical concave mirrors where null screens with cylindrical configuration have been implemented, the captured images show considerable differences respect to images designed. The results show that the pinhole position along the optical axis can be determined that the CCD, used to capture and record image during the evaluation, not capture information due to second reflections and; that null screens design, as mentioned previously, can only be performed for some combinations of values of the focal length of the lens forming the image and used in the test, the mirror diameter and the position of the pinhole. It has obtained an expression to reduce spherical aberration to any order, for concave conic mirrors (except for oblate elliptical mirrors), in terms of the position of the point source, conic constant and the paraxial curvature; and we have gotten analytical expressions to compute spherical aberration produced by the first reflections in concave conic mirrors. Finally, the study of caustics have been done in this work has yielded some results that have been presented in other studies, but there have been a distinct methodology, different from the one proposed here.



## Presentación

Tradicionalmente, la construcción de dispositivos ópticos estuvo restringida principalmente al uso de superficies esféricas, debido a la facilidad de construcción y evaluación, además de los costos relativamente más económicos. En la actualidad, se han ido incorporando superficies asféricas, mayoritariamente dentro de la instrumentación óptica, y en particular, superficies elípticas cóncavas. Las cuales se pueden implementar en sistemas de comunicación e iluminación, por mencionar algunas aplicaciones. Por su gran utilidad y uso, es necesario probar

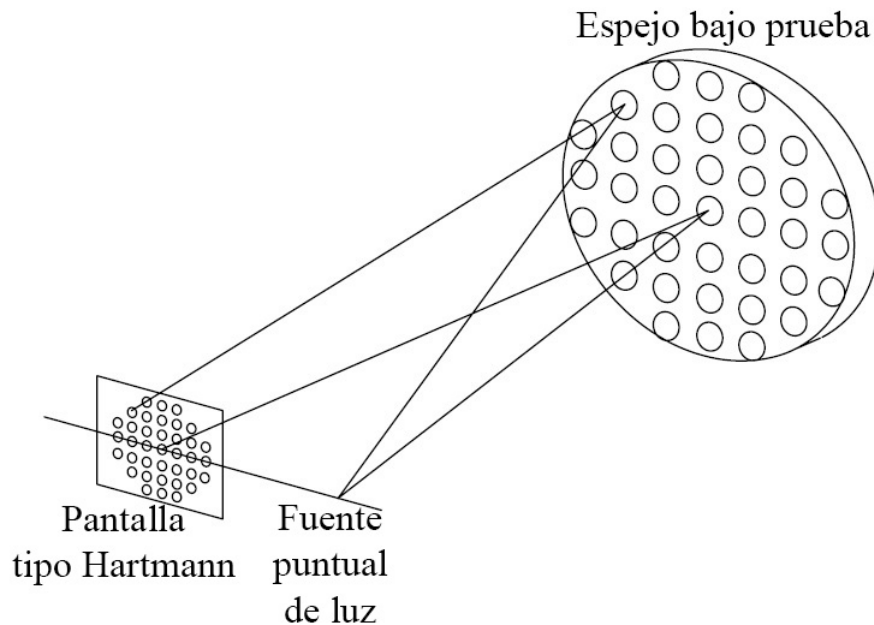


Figura I: Ejemplo esquemático del dispositivo experimental de la prueba de Hartmann.

estas superficies lo mejor posible, durante y al final del proceso de fabricación. Para esto hay dos clases de pruebas que se han estado aplicando, las geométricas y las llamadas no geométricas[1]. A esta etapa se le conoce con el nombre genérico de pruebas ópticas. Dentro de las pruebas geométricas se cuenta con las de Hartmann[2]-[3], Fig. (I); y las de Ronchi[4]-[5], Fig.(II); que se utilizan principalmente para espejos esféricos o asféricas cóncavas, ya que aprovechan las propiedades de enfoque de esas superficies. Estas emplean pantallas para obtener el frente de onda iluminando la superficie con una fuente puntual, el patrón observado nos proporciona información sobre la derivada del frente de onda. En las pruebas no geométricas se encuentran las interferométricas, como



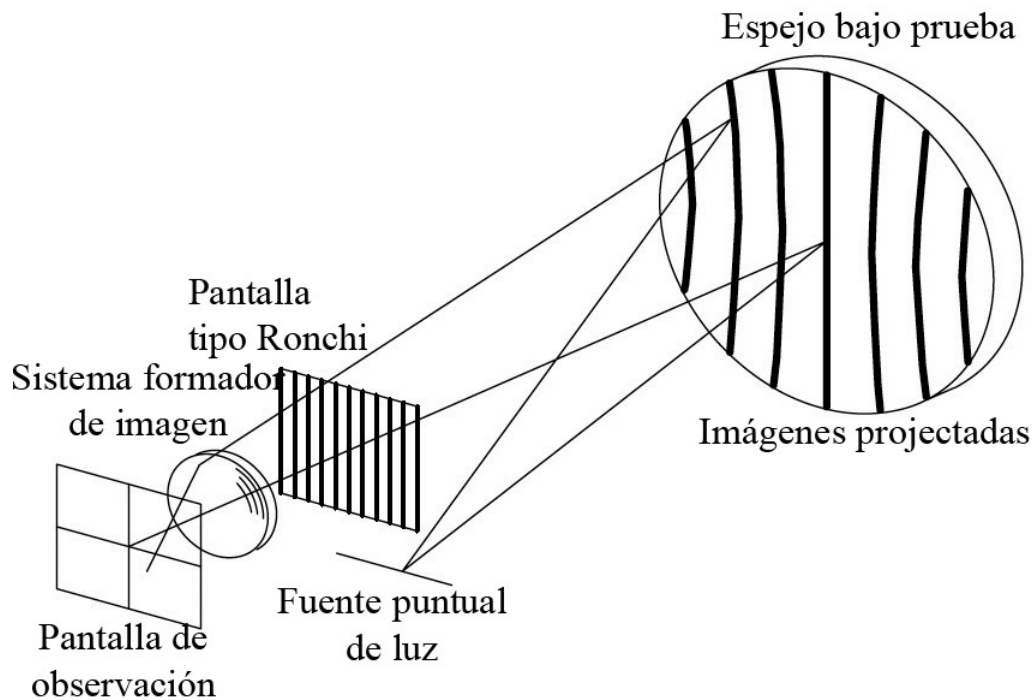


Figura II: Ejemplo esquemático del dispositivo experimental de la prueba de Ronchi.

la de Fizeau, Fig. (III); o Twyman-Green[6]-[7], Fig.(IV); por mencionar algunas. Estas evaluaciones analizan los patrones de interferencia generados por la superposición del haz reflejado en la superficie de prueba y el haz de interferencia [7]-[9], de los que se extrae información como: deformaciones de la superficie, aberraciones asociadas al espejo bajo prueba, etc. Todas estas pruebas son, en términos generales, adecuadas para superficies con  $F/\#$  grande ( $F/\# = \text{Distancia focal del espejo}/\text{diámetro del espejo}$ ). Conforme el número  $F/\#$  disminuye se ha podido observar que la imagen detectada por el CCD no permite hacer una evaluación cuantitativa de la superficie bajo prueba como en el caso de los espejos lentos, al menos en el caso, particular, de espejos elípticos cóncavos rápidos con simetría de revolución; pues se ha observado que las imágenes que generan algunos de estos espejos, en el proceso de reflexión, se desvían mucho de la correspondiente imagen de diseño utilizada para elaborar la pantalla nula de gotas.

## Motivación

Desde hace varios años se ha venido implementando una técnica para probar las superficies esféricas de revolución convexas y cóncavas rápidas[10]-[15] en eje y fuera de eje; conocida como prueba por medio de pantallas nulas; y que ha sido desarrollada en el Departamento de Óptica y Microondas, en el Grupo de Sistemas Ópticos, dentro del Laboratorio de Pruebas Ópticas; CCADET (UNAM). Este método se clasifica dentro de las pruebas geométricas y es una extensión de las pruebas de Hartmann y Ronchi. La propuesta principal es diseñar pantallas nulas, las cuales consisten en un patrón geométrico predeterminado, ya sea de líneas, puntos o manchas[10]-[13], haciendo la suposición de que se conoce, idealmente, la forma de la superficie a evaluar; de tal manera que después del proceso de reflexión la imagen de la pantalla reflejada sobre la superficie de prueba

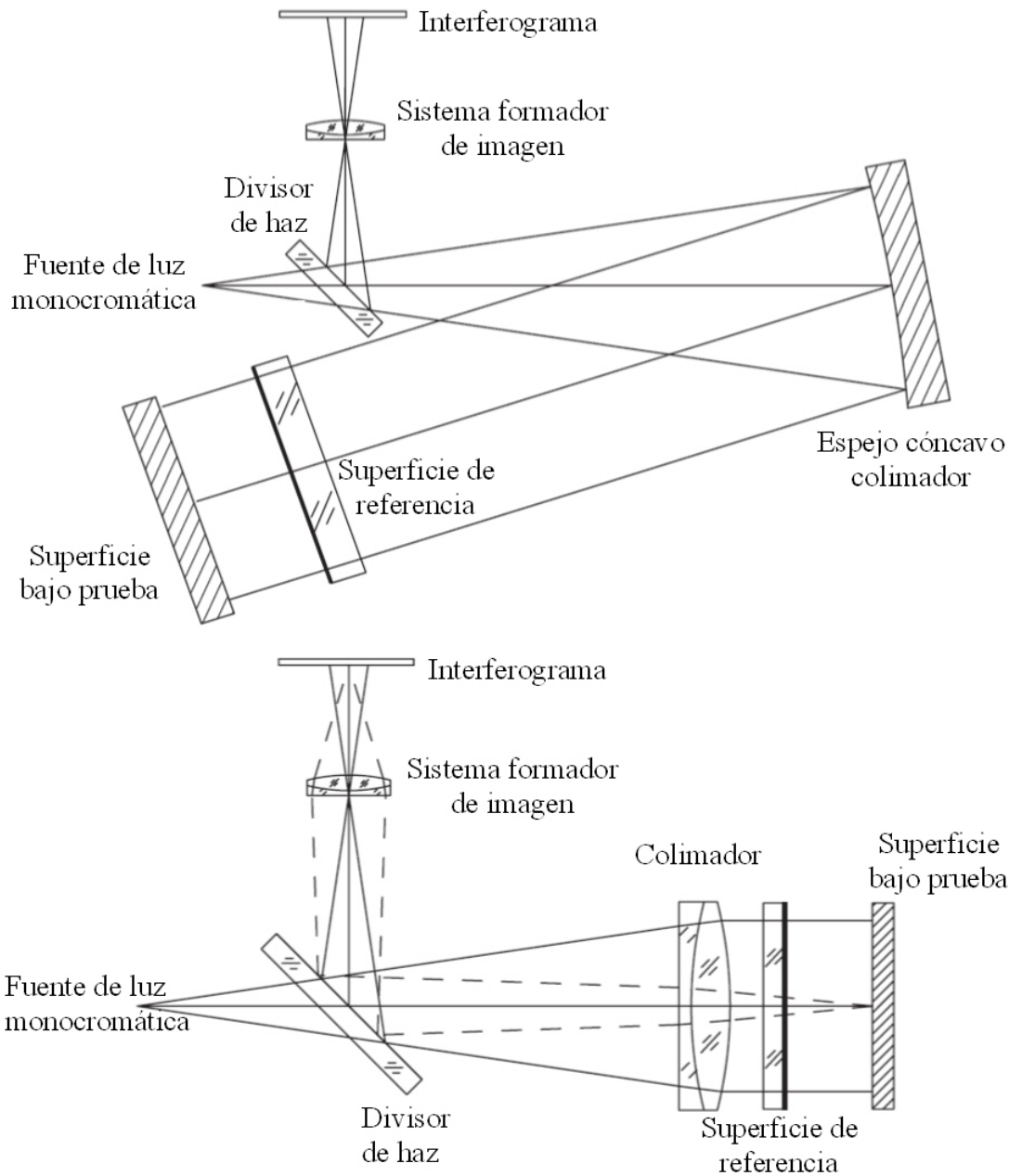


Figura III: Ejemplos esquemáticos de los dispositivos experimentales de la prueba de Fizeau.

y captada por una cámara CCD muestre un arreglo geométrico ya definido con anterioridad. En particular, estos arreglos geométricos definidos con antelación pueden estar compuestos por líneas, círculos, circunferencias, o cualquier otro que permita obtener información cualitativa y cuantitativa tanto de la superficie bajo prueba como del diseño de la propia pantalla. Una vez que se obtiene la imagen se compara con la superficie ideal, también llamada de superficie de diseño, y si la imagen no corresponde a la superficie de diseño las deformaciones del arreglo estarán asociadas a imperfecciones del espejo bajo prueba, de ahí el nombre de prueba nula. También se ha abordado el problema de probar superficies esféricas fuera de eje con pantallas nulas planas ortogonales a

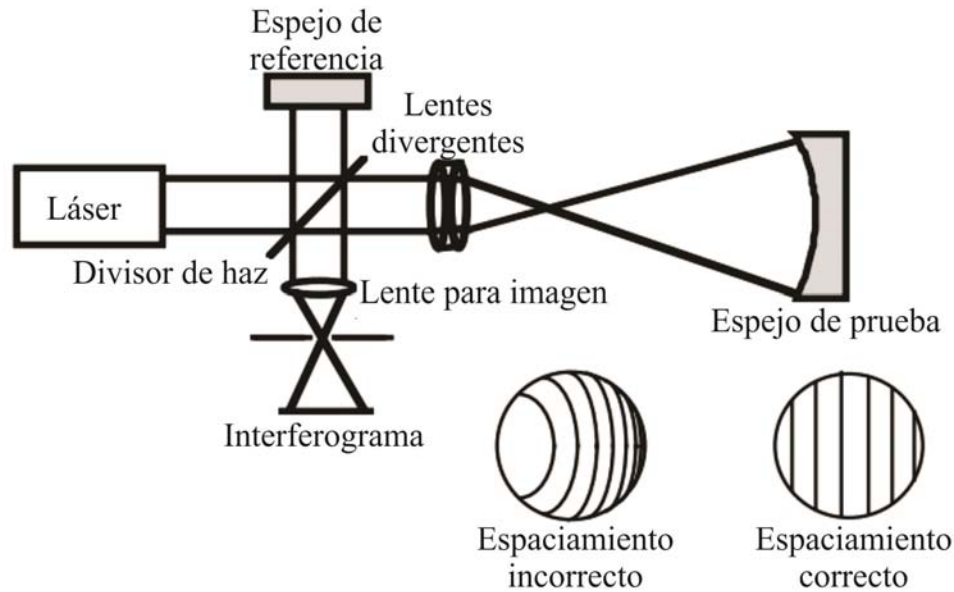


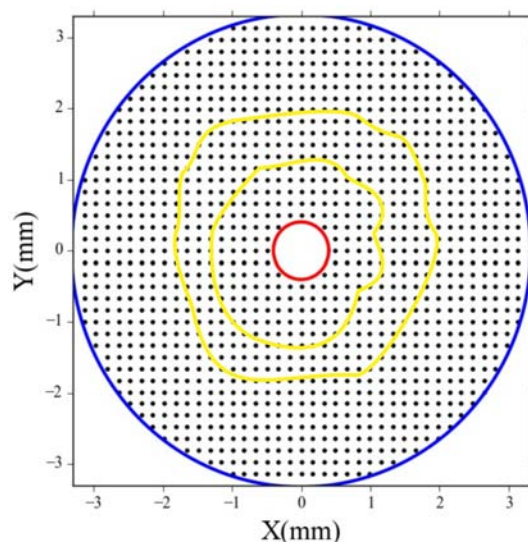
Figura IV: Esquema del arreglo para probar un espejo con el interferómetro de Twyman-Green.

la normal del punto medio central de la superficie[14], y también pantallas nulas inclinadas en la región de las cáusticas normales a la superficie[15]. Se han hecho pruebas preliminares con espejos parabólicos fuera de eje, que muestran la factibilidad de la propuesta, además de la facilidad de alinear la superficie de la pantalla. Es importante recordar que la alineación es un problema complejo para las pruebas en donde se usa el eje de simetría de la superficie base. No obstante, éstos métodos, todavía, sólo alcanzan precisión media, siendo útiles en casos particulares en donde la precisión óptica no es un requisito. Aún necesitan ser afinados para alcanzar las precisiones requeridas de las pruebas ópticas tradicionales. Aquí presentamos algunas consideraciones adicionales a la prueba de pantallas nulas.

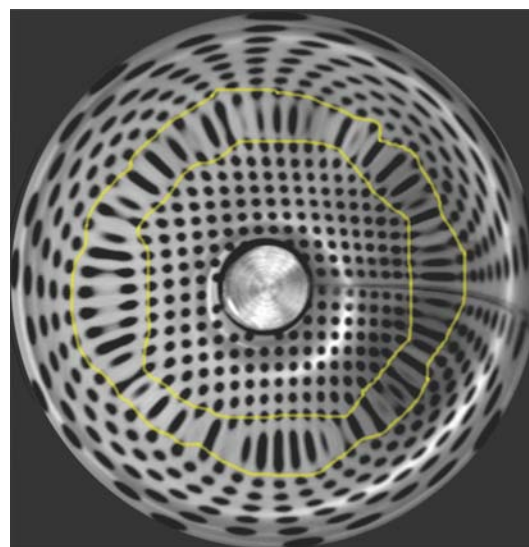
## Justificación

Los espejos elípticos son necesarios en algunos sistemas y dispositivos ópticos, tales como sistemas de enfoque para radares[16], sistemas de rayos X[17], sistemas de medición de iluminación[18], en la nueva generación de concentradores solares[19], dispositivos de super espejos elípticos para enfocar un haz de neutrones en un rango amplio de longitudes de onda[20], cavidades láser; por citar algunos ejemplos. Por lo que es necesario probar este tipo de superficies también, durante y al final del proceso de fabricación, y para el caso particular de superficies elípticas cóncavas se ha usado un tipo de pantalla nula de configuración cilíndrica con un patrón geométrico formado por imágenes tipo gotas, de diversos tamaños dependiendo de la posición sobre el cilindro, el método consiste en imprimir sobre papel, a través de una impresora, un arreglo semejante a gotas, luego se coloca el papel sobre la superficie de un cilindro, por la parte exterior del mismo, y una vez montada la pantalla sobre el cilindro, ésta se pone en el interior del espejo cóncavo bajo prueba haciendo coincidir el eje del cilindro con el eje óptico del espejo, la pantalla cilíndrica se refleja sobre la

superficie óptica[10]. La imagen producida por el espejo se capta por medio de una cámara CCD y se observa una pantalla plana con una distribución de puntos circulares en una red cuadrada, porque esa es la imagen que se espera de acuerdo al diseño de la pantalla. Si la diferencia entre la imagen y el patrón determinado es nula entonces la geometría de la superficie cumple con su diseño. La prueba ha correspondido a lo esperado en el caso de la evaluación de un espejo elíptico cóncavo con  $F/0.273$ [10]; sin embargo, se han presentado discrepancias en los resultados, respecto a lo que se requiere cuando  $F/\# < 0.273$ , veáse la Fig.(V), por lo que se hace necesario un análisis adicional para determinar las razones de tales diferencias. Es preciso hacer notar que en el diseño de este tipo de pantallas se toma en consideración un sensor CCD de  $8\text{mm} \times 6\text{mm}$  de área activa y un instrumento óptico generador de imágenes (lente), de manera que la imagen reflejada por la superficie de prueba esté embebida en un área cuadrada con un lado igual al extremo más corto del CCD.



(a) Plano de observación.



(b) Imagen generada por el espejo bajo prueba.

Figura V: Diferencias entre la imagen de diseño y la imagen obtenida en la aplicación de la prueba de pantallas nulas de gotas con configuración cilíndrica, en un espejo elíptico cóncavo rápido. (a) Imagen de diseño y, (b) imagen detectada en el plano de observación.

## Objetivo

Hacer un estudio de las cáusticas producidas por las primeras reflexiones sobre espejos cónico cóncavos; posteriormente, obtener la cáustica producida por las segundas reflexiones sobre espejos elípticos cóncavos; y aplicar algunos de los resultados obtenidos en este proceso, para seguir implementando la prueba de pantallas nulas en espejos elípticos cóncavos rápidos; en ambos casos se considera una fuente puntual sobre el eje óptico. También, evaluar dos espejos elípticos cóncavos rápidos con simetría de revolución y presentar los resultados de la prueba.

## Metodología

Se utiliza el proceso tradicional de la prueba con pantallas nulas cilíndricas, con el que se ha trabajado en pruebas anteriores en el Departamento de Óptica y Microondas, en el Grupo de Sistemas Ópticos, dentro del Laboratorio de Pruebas Ópticas; CCADET (UNAM), [10], pero tomando en consideración que es importante determinar una posición apropiada para el “pinhole” a fin de evitar que las segundas reflexiones producidas durante el proceso de reflexión puedan ser captadas por el CCD, lo que ayuda a obtener una imagen, después de la reflexión, que corresponde al diseño de la pantalla nula cilíndrica de gotas con la que se evalúa a cada una de las superficies de prueba con las que se ha trabajado.

A lo largo de este trabajo se han elaborado algunos programas que han sido utilizados para: el diseño de la pantalla nula de gotas con configuración cilíndrica, el cálculo de las normales, la integración de la superficie y el ajuste por mínimos cuadrados; lo cuales se han realizado en el lenguaje de programación *Python*<sup>1</sup>; junto con el módulo para graficar *matplotlib*<sup>2</sup>; cuyas ventajas principales son que pueden ser de adquisición totalmente gratuita. Para la obtención de los centroides se ha usado el software de procesamiento de imágenes *Image J*<sup>3</sup>.

## Contribuciones

Este trabajo aporta un estudio de las cáusticas generadas por superficies cónicas cóncavas a través del proceso de reflexión; así como un estudio de las segundas reflexiones en espejos elípticos cóncavos, en ambos casos se considera una fuente puntual ubicada sobre el eje óptico; dicho análisis proporciona diversos resultados que han sido obtenidos en otros trabajos, pero con diferente metodología. Los resultados principales de esta investigación son, el hecho de que la posición de la fuente puntual luminosa (que equivale a la posición del pinhole en el diseño de pantallas nulas cilíndricas) determina si la aberración esférica es positiva o negativa, y que ésta posición puede también determinar que existan segundas reflexiones que puedan afectar los resultados esperados en el diseño de las pantallas nulas cilíndricas, para probar espejos elípticos cóncavos rápidos a la hora de la detección de la imagen generada tras la reflexión. Además, usando la fórmula de la cáustica y una aproximación paraxial, se han obtenido expresiones analíticas para evaluar la aberración esférica a tercer orden. También, se tiene una fórmula para reducir la aberración esférica a cualquier orden, la que proporciona la condición para obtener los llamados puntos estigmáticos. Más aún, se han aplicado las fórmulas para evaluar el círculo de mínima confusión en espejos cónicos cóncavos como función de todos los parámetros involucrados en el proceso de reflexión. Finalmente, se han obtenido expresiones analíticas para el cálculo de la aberración esférica de primeras reflexiones, cuando la fuente puntual se coloca sobre el eje óptico.

## Estructura de la tesis

Este trabajo está dividido en cuatro capítulos, el primero corresponde a la descripción del proceso a través del cual se diseñan las pantallas nulas de gotas con configuración cilíndrica, y se muestran

---

<sup>1</sup><http://www.python.org/>

<sup>2</sup><http://matplotlib.org/>

<sup>3</sup><http://rsbweb.nih.gov/ij/>

las diferencias entre la imagen de diseño y la imagen producida por un espejo elíptico cóncavo rápido, lo que a su vez motiva la investigación reportada; en el segundo capítulo se lleva a efecto un estudio de la cáusticas por reflexión, también conocidas como *catacáusticas*; además, se presenta un análisis de las segundas reflexiones en espejos elípticos cóncavos prolatos y la aplicación de algunos de los resultados obtenidos en el propio capítulo dos y el trazo de rayos para las primeras y segundas reflexiones en espejos elípticos cóncavos prolatos; ya en el capítulo tres se aplican algunos de los resultados del capítulo dos para elaborar las pantallas nulas de gotas con configuración cilíndrica para evaluar dos espejos elípticos cóncavos rápidos prolatos y en el capítulo cuatro se enlistan las conclusiones. Cada uno de los capítulos tiene sus referencias.

## Referencias

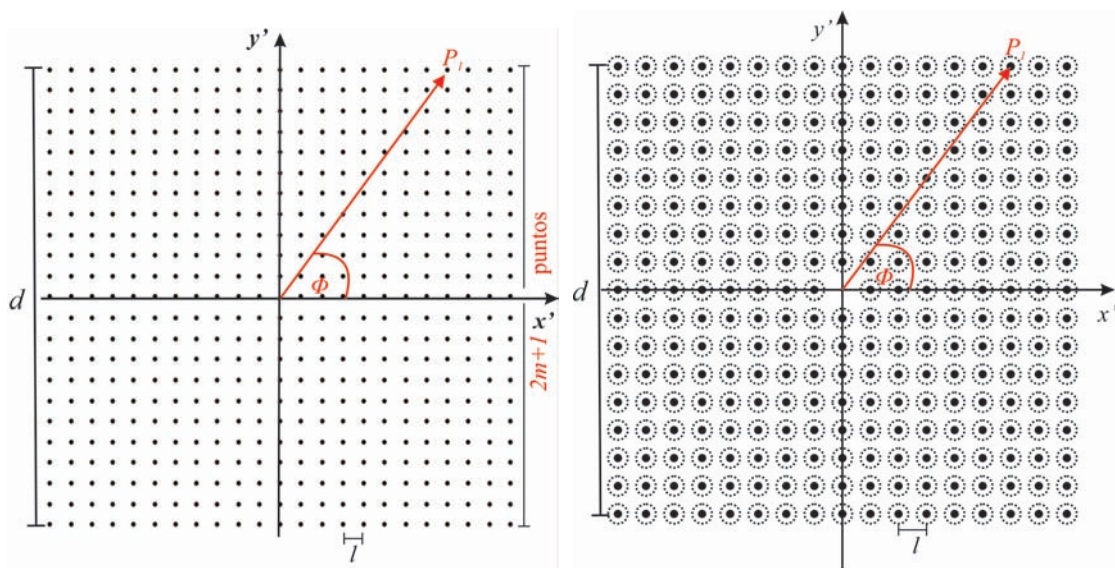
1. D. Malacara, A. D. Cornejo and M. V. R. K. Murty, “Bibliography of Varius Testing Methods”, *App. Opt.* **14**, 1065 (1995).
2. A. Muñoz, L. Porras, S. Aquino y H. Molero, “Implementación de la prueba de Hartmann para el estudio de textura de superficies metálicas”, *Revista Latinoamericana de Metalurgia y Materiales*, **31**, 85-90 (2011).
3. Y. Mejía Barbosa, “La prueba de Hartmann en ciencias de la visión”, *Cien. Tecnol. Salud. Vis. Ocul.* **1**, 149-165 (2012).
4. D. Malacara, “Geometrical Ronchi Test of Aspherical Mirrors”, *App. Opt.* **11**, 1371-1374 (1965).
5. E. Luna-Aguilar, A. Cornejo-Rodríguez y A. Cordero-Dávila, “Prueba nula de Ronchi-Hartmann”, *Rev. Mex. Fís.* **38**, 150-161 (1992).
6. D. Malacara, M. Servín y Z. Malacara, *Interferogram Analysis for Optical Testing*, 2th ed. (Taylor & Francis, 2005).
7. D. Malacara and B. J. Thompson, *Handbook of Optical Engineering*. (Marcel Dekker, 2001), Chap. 11.
8. M. V. Mantravadi, “Fizeau Interferometer”, in *Optical Shop Testing*, 2nd ed. (Wiley, New York, 1992), p. 18-36.
9. D. Malacara, *Optical Shop Testing*, 2th ed. (John Wiley & Sons, 1992).
10. R. Bolado Gómez, Tesis de Licenciatura “Prueba de un espejo elipsoidal cóncavo en eje ( $F/0.273$ ) por medio de una pantalla nula cilíndrica”. Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), 2005.
11. M. Campos-García, R. Bolado-Gómez, and R. Díaz-Uribe, “Testing fast aspheric concave surfaces with a cylindrical null screen”, *Appl. Opt.* **47**, 849-859 (2008).
12. Libia Georgina Carmona Paredes, Tesis de Maestría “Imágenes de aberturas elípticas en la prueba de superficies convexas con pantallas nulas”. Posgrado en Ciencias Físicas, Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), 2005.
13. R. Díaz-Uribe and M. Campos-García, “Null screen testing of fast convex aspheric surfaces,” *Appl. Opt.* **39**, 2670-2677 (2000).
14. M. Campos-García, R. Díaz-Uribe and F. Granados-Agustín, “Testing fast aspheric convex surfaces with a linear array of sources”, *Appl. Opt.* **43**, 6255-6264 (2004).
15. M. Avendaño-Alejo, M. Campos-García, R. Díaz-Uribe, “Testing a fast off-axis parabolic mirror using tilted null-screens”, *Eight International Symposium on Laser Metrology*, edited by R. Rodríguez-Vera, F. Mendoza-Santoyo, Proc. of SPIE Vol. 5776 (SPIE, Bellingham, WA, 2005) 553-560.

16. J. Montero de Paz, O. A. Garcá Pérez, A. Rivera Lavado, E. Ugarte Muñoz, B. Andres García, R. Molina Romero, T. Finn, J. A. López, V. Gonzlez Posadas, L. E. Garca Muoz y D. Segovia Vargas, (2011). Sistema de enfoque basado en dos espejos elípticos y un espejo plano rotatorio para un radar a 300 GHz. En: “XXVI Edición USRI 2011”, 06/09/2011 - 09/09/2011, Leganés, Madrid, España.
17. R. G. van Silfhout. “Microradian figure tolerance elliptical and parabolic x-ray mirror systems”, Proc. SPIE 4501, X-Ray Mirrors, Crystals, and Multilayers, 169 (November 14, 2001); doi:10.1117/12.448491.
18. <http://www.google.com/patents/WO2014005531A1?cl=en>
19. <http://www.alternative-energy-news.info/new-generation-of-solar-devices-with-trapped-sunlight/>
20. M. Nagano, F. Yamaga, D. Yamazaki, R. Maruyama, K. Soyama and K. Yamamura. “Quadruple Stacked Elliptical Supermirror Device for One Dimensional Neutron Focusing”, Key Engineering Materials (Vols 523 - 524), 272-275 (2012).
21. M. Campos-García, V. I. Moreno-Oliva, R. Díaz-Uribe, F. Granados-Agustín and A. Santiago-Alvarado, “Improving fast aspheric convex surface test with dynamic null screens using LCDs”, Appl. Opt. **50**, 3101-3109 (2011).
22. A. Estrada-Molina, M. Campos-García and R. Díaz-Uribe, “Saggital and meridional radii of curvature for a surface with symmetry of revolution by using a null-screen testing method”, Appl. Opt. **52**, 625-634 (2013).





# Método para el diseño de pantallas nulas de gotas



(a) Arreglo cuadrado de puntos, en este caso  $m = 11$ , el total de puntos es 529. (b) Esquema del proceso del relleno de círculos

Figura 1.1: Esquema geométrico del plano de detección para el diseño de la pantalla nula de gotas. (a) Red cuadrada de puntos, limitada por el lado más corto del CCD. (b) Esquema del proceso para el relleno de los círculos en el arreglo cuadrado.

Para probar los espejos elípticos cóncavos rápidos se utiliza el método propuesto por la referencia [1], es decir, se usa el método de pantalla nula cilíndrica con un patrón de figuras geométricas similares a gotas, y se espera que la imagen capturada por una cámara CCD, y que es formada debido al proceso de reflexión de la pantalla nula sobre la superficie bajo prueba, debe ser un arreglo de círculos (por círculo se entiende el área limitada por una circunferencia y, en este caso, cada círculo es de color negro.) ordenados y espaciados de manera regular sobre una red cuadrada. En principio, cualquier desvío de la geometría propuesta se atribuye a ciertas deformaciones en la superficie evaluada, suponiendo que se han corregido todos los desajustes en la alineación o los desenfoques de la imagen. Para proyectar la imagen sobre el sensor CCD se requiere una lente de distancia focal fija. El diseño de la pantalla se imprime en hoja de papel y se enrolla en un cilindro

formando la pantalla nula, la cual se posiciona en la parte central del espejo para captar su imagen sobre el plano de detección (cámara CCD) con la mayor cantidad de rayos provenientes de cada figura geométrica (gotas) sobre la pantalla nula después de haber sido reflejados por la superficie de prueba y además aprovechar la simetría de revolución del espejo.

## 1.1. Análisis geométrico para generar el plano de observación

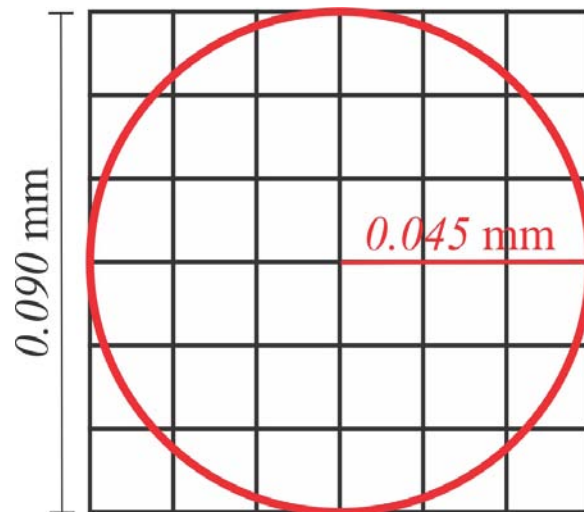


Figura 1.2: Número de píxeles que se esperan captar por cada uno de los círculos que forman el arreglo cuadrado del plano de diseño, sobre el CCD.

Para realizar el diseño de la pantalla nula nos ubicamos primero en el plano de observación (o de detección), es decir, el plano donde se coloca el sensor CCD de la cámara, que es propiamente un rectángulo pero que, por conveniencia, en el análisis se considera un cuadrado de lado  $d$ , donde  $d$  es la longitud más corta de los lados del propio CCD. Esto tiene como objetivo que, al realizarse la prueba, toda la imagen de la superficie bajo valoración quede embebida dentro del área del cuadrado del plano de detección. Para fines prácticos se toma en cuenta un arreglo cuadrado de puntos sobre el plano de observación, cada punto de la red debe estar separado a distancias regulares de los consecutivos en cada dirección sobre el plano, véase la Fig. (1.1 a), de manera tal que cada punto cumpla igualmente la condición:

$$y' = il, \quad x' = jl, \quad (1.1)$$

donde  $l$  es la separación entre los puntos e  $i, j$  son índices que determinan la ubicación de cada punto a partir de la propia longitud  $l$ ; además,  $i, j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm m$ , y  $m$  es un número entero positivo. El total de centros, que constituye también el número de círculos, sobre el plano de detección queda determinado por la relación:

$$n = (2m + 1)^2. \quad (1.2)$$

Cabe hacer la aclaración de que la relación (1.2) se usa, y es válida, para el momento en que se está elaborando el arreglo cuadrado de puntos, véase la Fig. (1.1), puesto que en el diseño final se eliminan varios puntos, lo que se explica más adelante. Por otra parte, el valor de  $l$  está determinado

por la mitad de la longitud del CCD dividida entre el número de puntos que se quieren en el arreglo cuadrado, es decir

$$l = \frac{d}{2m}, \quad (1.3)$$

donde  $d$  es la longitud del CCD y  $m$  el número que determina el total de puntos en el arreglo a través de la relación (1.2). Así, los valores de cada una de las coordenadas de cada punto en el arreglo cuadrado se encuentran en los intervalos  $x' \in [-d/2, d/2]$  e  $y' \in [-d/2, d/2]$ .

Ahora bien, uno cualesquiera de los centros de los círculos tiene las coordenadas  $P_1 = (z_1, y', x')$ , donde  $z_1$  es la distancia medida desde el origen de coordenadas del sistema de referencia principal (al que se le asignan las letras  $\mathbf{Z} - \mathbf{Y} - \mathbf{X}$ ) hasta el plano que contiene al plano del CCD, y que es perpendicular al eje  $\mathbf{Z}$ . Entonces, si llamamos  $\rho_1$  a la distancia del centro del plano de detección a uno de cualquiera de los centros de los círculos, tenemos que, en coordenadas polares, esta longitud está determinada por:

$$\rho_1 = \sqrt{y'^2 + x'^2} = l\sqrt{j^2 + i^2}, \quad (1.4)$$

y así, el ángulo de barrido sobre el plano del CCD ( $\phi$ ), véase la Fig. (1.1), está definido por la relación:

$$\phi = \arctan\left(\frac{y'}{x'}\right) = \arctan\left(\frac{j}{i}\right). \quad (1.5)$$

Una vez que se tienen estos puntos que, ya se ha mencionado, ellos mismos constituyen los centros de círculos sobre el plano de detección, lo que prosigue es generar los círculos, para ello se traza una circunferencia a partir de 360 puntos, cada uno correspondiente a un grado, véase la Fig. (1.1 b), uno por cada grado, en este caso; luego, cada círculo se rellena de color negro utilizando una función predefinida en el lenguaje de programación que se ha usado. Debido a que el área activa del CCD con el que se ha trabajado es de 8.8 mm  $\times$  6.6 mm, equivalente a 640 pixeles  $\times$  480 pixeles; entonces, 8.8 mm/640 = 6.6 mm /480  $\approx$  0.014 mm, el tamaño aproximado de la longitud del pixel del CCD, lo que significa que un pixel cubre un área aproximada de 0.014 mm  $\times$  0.014 mm = 0.000196 mm<sup>2</sup>, sobre la superficie del CCD. Por lo tanto, si tomamos un círculo de radio 0.045 mm, inmerso en un cuadrado de longitud 0.090 mm, habrá aproximadamente 36 pixeles cubriendo el área de ese círculo, que es lo que se ha determinado para el diseño del arreglo de círculos de la pantalla nula de gotas que se ha trabajado, es decir, que por cada círculo en el arreglo cuadrado del plano de observación se esperan captar 36 pixeles, aproximadamente, véase la Fig. (1.2). Sólo resta observar que como la superficie a evaluar tiene simetría de revolución, y que además tiene un agujero simétrico, alrededor del eje óptico, la imagen que se genere en el plano de detección estará confinada a una especie de “dona plana” circular, por lo que también deben cumplirse las condiciones  $|\rho_1| < d/2$  y  $|\rho_1| > r_l$  (esta última condición es debido al agujero interno del espejo) ya que los puntos fuera de tales condiciones no van a proporcionar información acerca de la superficie del espejo, y por ello se eliminan, lo anterior puede verse en la Fig. (1.3). Con

$$r_l = \frac{V}{2} + \frac{V}{2(z(V/2) - S_o)}(S_o + a - z(V/2)), \quad (1.6)$$

donde  $V$  es el diámetro del orificio interno del espejo (apertura de vértice),  $z(V/2)$  la sagita evaluada en el semi vértice,  $S_o$  la distancia medida desde el vértice del espejo (origen del sistema de referencia) hasta la ubicación del pinhole y,  $a$  la distancia desde el pinhole hasta el CCD. Con esto ya tenemos el diseño de lo que se quiere observar, idealmente, en el plano de detección. Lo que prosigue es determinar a qué corresponde esa imagen, lo que se describe a continuación.

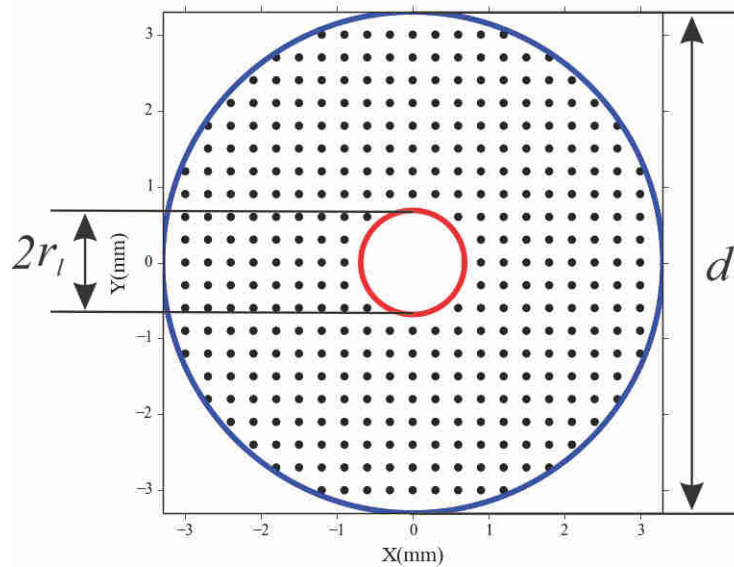


Figura 1.3: Plano de detección para el diseño de la pantalla nula de gotas, considerando  $|\rho_1| < d/2$  y  $|\rho_1| > r_l$ . Algo similar es lo que se espera observar al implementarse la prueba.

## 1.2. Análisis para determinar las ecuaciones generadoras de las gotas

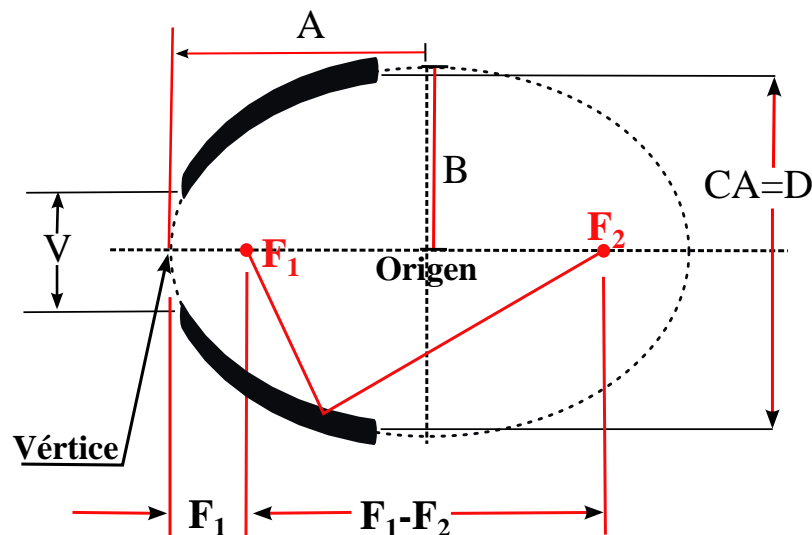


Figura 1.4: Especificación del claro de apertura (diámetro del espejo) y del claro de vértice de los espejos elípticos cóncavos.  $A$  es el semi eje mayor y  $B$  representa el semi eje menor del espejo. Estos parámetros son los que proporciona el fabricante.

Para hacer el diseño de la pantalla, lo que sabemos es que cada círculo del arreglo cuadrado de la imagen sobre el CCD proviene de una gota sobre la pantalla cilíndrica [1, 2]; más simple aún, cada punto sobre la imagen viene de un punto sobre la pantalla. Entonces, utilizando el principio de reversibilidad se hace un trazo exacto de rayos inverso para encontrar el diseño de la pantalla nula cilíndrica. Aprovechando la simetría de revolución del espejo, se trabaja en un plano que contiene a los dos semiejes de la superficie de prueba, junto con los rayos incidentes, las reflexiones y las normales a la superficie, es decir, un plano meridional; tomando como coordenadas a  $Z$  para las abscisas, y  $Y$  para las ordenadas. Se hace un estudio considerando que se va utilizar una lente con distancia focal fija; la que incluye un diafragma para regular el paso de la iluminación que llega al CCD y al orificio del diafragma se le da el nombre de *pinhole*. Además, para la elaboración de la pantalla nula se toman en cuenta los parámetros de la superficie de prueba y del CCD, concretamente el diámetro del espejo,  $D$ ; conocida también como la apertura; el diámetro del orificio alrededor del vértice del espejo,  $V$ ; los semi ejes del espejo,  $A$  y  $B$  (a partir de los cuales se calcula el radio de curvatura paraxial,  $r$ ; Fig. (1.4); la curvatura paraxial,  $C$ ; la excentricidad,  $\epsilon$ ; y la constante de conicidad,  $k = -\epsilon^2$ ; además de la longitud más corta de entre los lados del CCD y el radio,  $R$ ; del cilindro en el que se enrolla la pantalla (tomando en cuenta el grosor del papel sobre el que se imprime la pantalla); el esquema correspondiente se ve en la Fig. (1.5). Cabe hacer mención de que, para el caso de los espejos elípticos prolatos, el radio de curvatura en la región paraxial se determina a partir de los semi ejes de la superficie en la siguiente forma,  $r = B^2/A$ ; por lo que la curvatura paraxial definida como  $C = 1/r$  queda determinada por  $C = A/B^2$ [3]; y ya que la excentricidad es igual a  $\epsilon^2 = 1 - B^2/A^2$ , entonces la constante de conicidad es  $k = -1 + B^2/A^2$ . Ahora bien, el ángulo de emisión tiene un valor mínimo y un valor máximo, limitados por los rayos marginales inferior y superior, respectivamente, Fig(1.6); y sus valores quedan determinados explícitamente por:

$$\begin{aligned}
 \alpha_{max} &= \arctan \left[ \frac{D}{2(|S_o| - |Z_{D/2}|)} \right], & \text{para } |S_o| \geq |Z_{D/2}|, \\
 \alpha_{max} &= \frac{\pi}{2} + \arctan \left[ \frac{2(|S_o| - |Z_{D/2}|)}{D} \right], & \text{para } |S_o| < |Z_{D/2}|, \\
 \alpha_{min} &= \arctan \left[ \frac{V}{2(|S_o| - |Z_{V/2}|)} \right], & \text{para } |S_o| \geq |Z_{V/2}|, \\
 \alpha_{min} &= \frac{\pi}{2} + \arctan \left[ \frac{2(|S_o| - |Z_{V/2}|)}{V} \right], & \text{para } |S_o| < |Z_{V/2}|.
 \end{aligned} \tag{1.7}$$

Para el caso que analizamos, en el que se pretende que la imagen resultante del proceso de reflexión de la pantalla nula de gotas de configuración cilíndrica quede completamente capturada en el plano de detección formado por el área limitada por el lado más corto del CCD, los ángulos máximo y mínimo de emisión pueden escribirse también como:

$$\begin{aligned}
 \alpha_{max} &= \arctan \left[ \frac{d}{2a} \right], & \text{para } |S_o| \geq |Z_{D/2}|, \\
 \alpha_{min} &= \arctan \left[ \frac{r_l}{a} \right], & \text{para } |S_o| \geq |Z_{V/2}|,
 \end{aligned} \tag{1.8}$$

donde  $r_l$  está determinado por la relación (1.6);  $Z_{D/2}$ , es la sagita evaluada en el semi diámetro del espejo y;  $Z_{V/2}$ , la sagita evaluada en el semi diámetro del vértice del espejo.

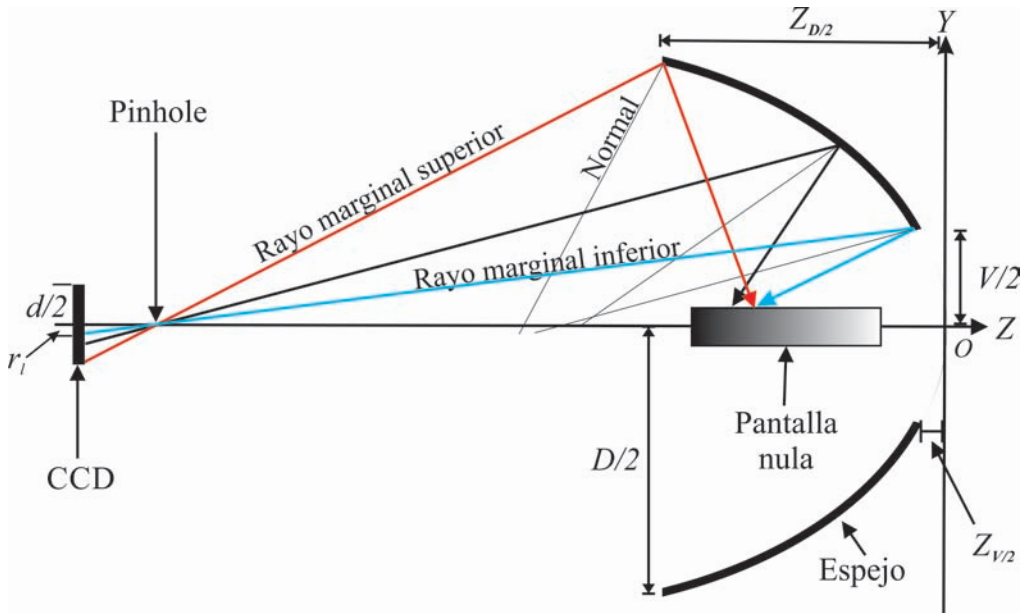


Figura 1.5: Esquema del sistema experimental.  $D$  es el diámetro del espejo,  $V$  el diámetro del orificio alrededor del vértice,  $Z_{D/2} = z(D/2)$ , que se calcula a partir de la Ec. (1.10) y que corresponde a la coordenada  $y = D/2$ ;  $Z_{V/2} = z(V/2)$ , que se obtiene también de la Ec. (1.10) y que concuerda con la coordenada  $y = V/2$ .

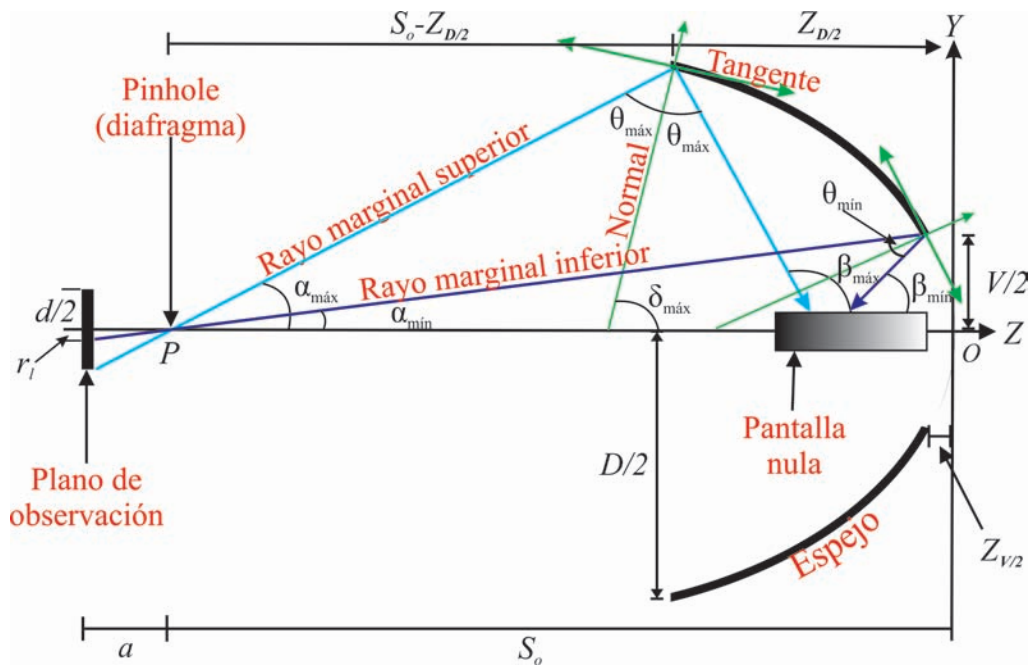


Figura 1.6: Esquema del sistema experimental. Se muestran los rayos marginales y los ángulos, mínimo y máximo, de emisión.

El problema del diseño de la pantalla nula

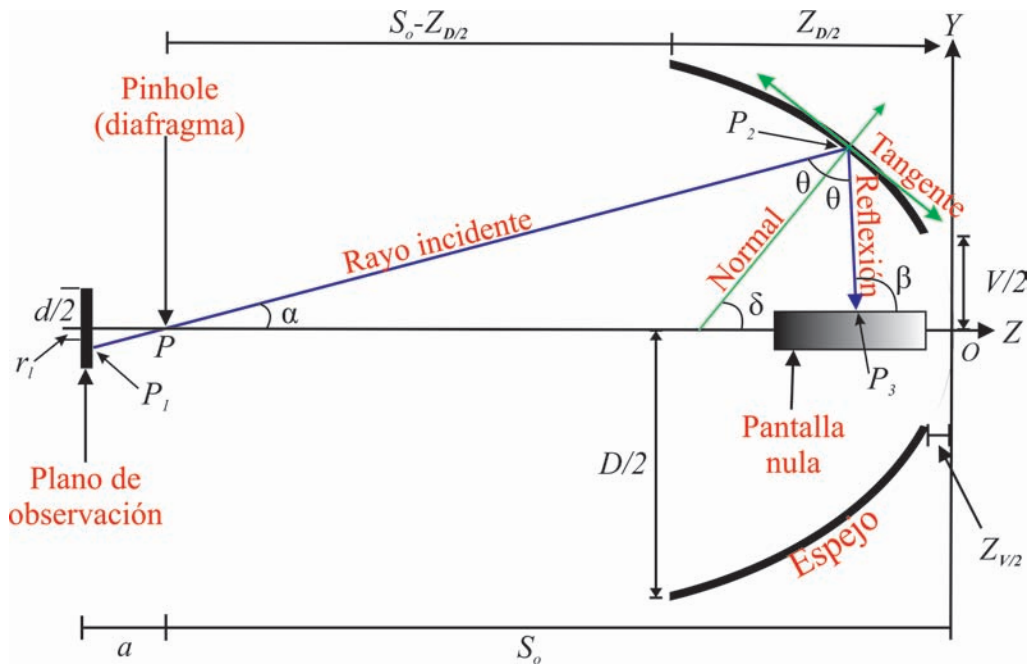


Figura 1.7: Descripción del sistema CCD-espejo-pantalla nula, considerando un plano meridional ubicado en el plano  $Z - Y$  del sistema de referencia.

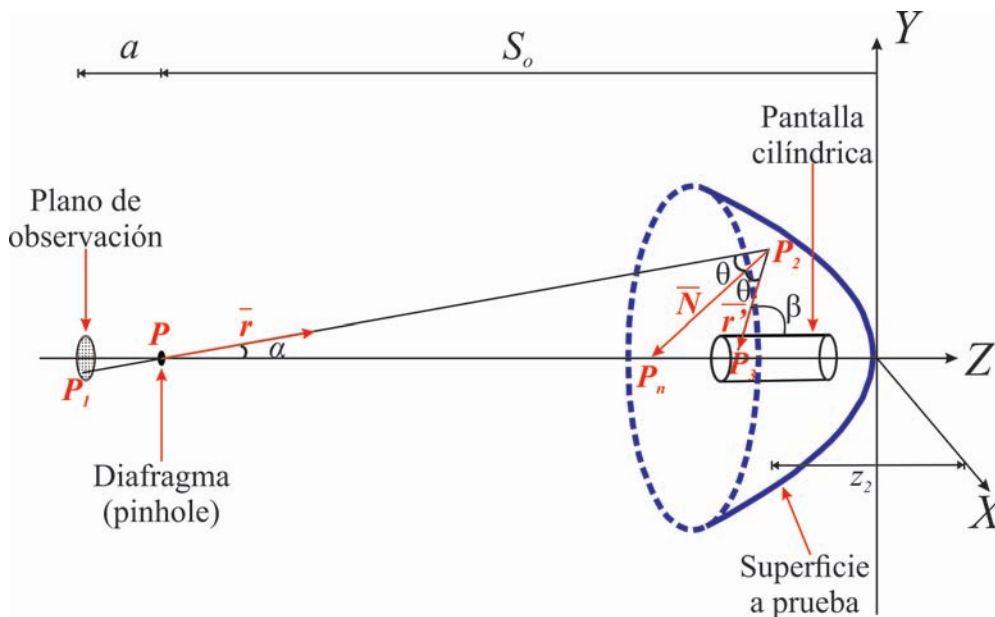


Figura 1.8: Esquema del sistema experimental, en tres dimensiones. Se observan los vectores que intervienen en la ley de reflexión vectorial.

de gotas cilíndrica consiste en encontrar las intersecciones de los rayos emitidos desde el plano de observación con la superficie óptica; luego, determinar las intersecciones de los rayos reflejados por el espejo con la pantalla nula cilíndrica, ver Fig. (1.7). Posteriormente, se busca la longitud  $a$ , Figs. (1.7), (1.8) y (1.9), que es la distancia medida desde el plano de detección al pinhole; y la longitud  $S_o$ , que representa la distancia medida desde el pinhole hasta el vértice del espejo, mismo al que se



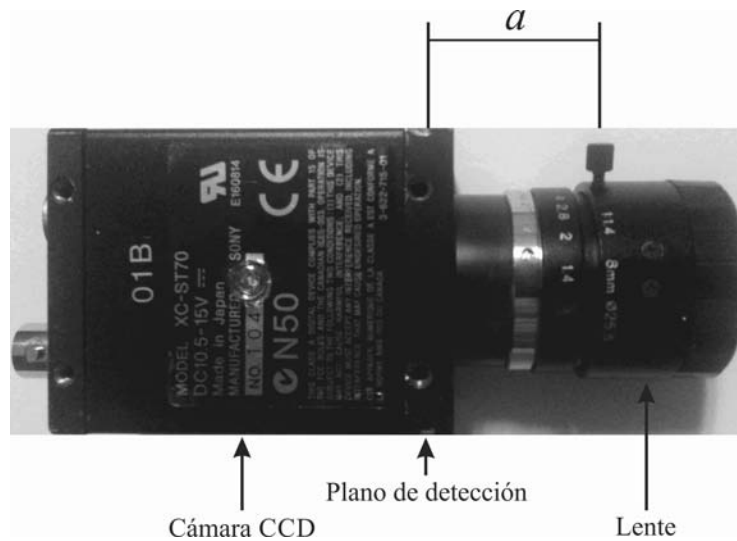


Figura 1.9: Cámara CCD. Descripción de la medida de la distancia del plano de detección al diafragma (pinhole).

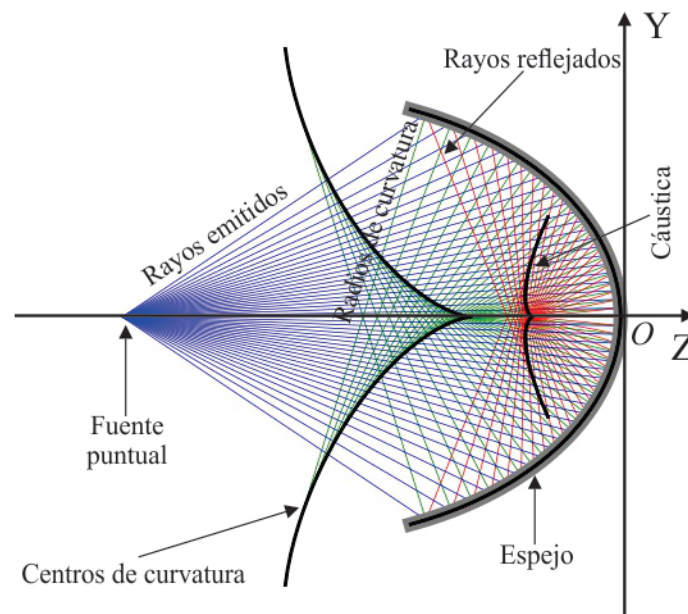


Figura 1.10: Esquema de una superficie esférica, se observa que los radios de curvatura no son constantes.

le ubica en el origen del sistema coordenado; en forma tal que la imagen generada por el proceso de reflexión sobre la superficie de prueba sea detectada completamente, y se encuentre embebida, en el área activa del CCD [1]. Para ello el sistema experimental CCD-espejo-pantalla nula se describe considerando un plano meridional ubicado en el plano  $Z - Y$  del sistema de referencia. Donde, en tres dimensiones,  $P = P(S_o, 0, 0)$ ,  $P_1 = P_1(z_1, y_1, x_1)$ ,  $P_2 = P_2(z_2, y_2, x_2)$ ,  $P_3 = P_3(z_3, y_3, x_3)$ . El sistema  $Z_1 - Y_1 - X_1$  corresponde a las coordenadas del plano de detección, el sistema  $Z_2 - Y_2 - X_2$  se asigna a las coordenadas del espejo y el sistema  $Z_3 - Y_3 - X_3$  a las coordenadas sobre la pantalla

cilíndrica, Fig.(1.7). Donde  $\alpha$  es el ángulo de emisión,  $\theta$  el ángulo de reflexión y  $\beta$  el ángulo que forma el rayo reflejado con el eje Z. Entonces, si llamamos  $\zeta = \phi + \pi$ ,  $r_1 = (x_1^2 + y_1^2)^{1/2}$ ,  $r_2 = (x_2^2 + y_2^2)^{1/2}$  y  $r_3 = (x_3^2 + y_3^2)^{1/2}$  en coordenadas polares, se tiene

$$P_1 = (z_1, \phi, r_1), \quad P_2 = (z_2, \zeta, -r_2), \quad P_3 = (z_3, \zeta, -r_3), \quad P = (S_o, 0, 0).$$

Si se iguala el valor de la pendiente de una línea que pasa por los puntos  $P_1$  y  $P$  con la de la pendiente de una línea que contiene a los puntos  $P$  y  $P_2$ , se tiene

$$z_2 = S_o - \frac{a}{r_1} r_2. \quad (1.9)$$

Ahora, como la superficie del espejo es una superficie esférica, es decir, una superficie que no es plana y que no tiene radios de curvatura constantes, pero en donde se incluye como caso particular a las superficies esféricas, véase la Fig. (1.10), entonces puede ser descrita por medio de la expresión para la sagita[4]-[5]; considerando que las constantes de deformación[5] son todas cero, puesto que es una superficie cónica de revolución. Así los puntos sobre esta superficie satisfacen la ecuación siguiente:

$$z_2 = \frac{Cr_2^2}{1 + \sqrt{1 - (k+1)C^2r_2^2}}, \quad (1.10)$$

y si se iguala la Ec. (1.9) con la Ec. (1.10), tomando en cuenta que  $C = 1/r$ , y se hace un poco de álgebra se puede obtener una ecuación de segundo grado para  $r_2$ ,

$$[r_1^2 + (k+1)a^2]r_2^2 + 2ar_1[r - (k+1)S_o]r_2 + S_or_1^2((k+1)S_o - 2r) = 0, \quad (1.11)$$

que tiene las siguientes soluciones:

$$r_2 = \frac{a[(k+1)S_o - r] \pm \sqrt{(ar)^2 + [2r - (k+1)S_o]S_or_1^2}}{r_1^2 + (k+1)a^2} r_1. \quad (1.12)$$

Para determinar cuál de las dos soluciones es la adecuada se hace lo siguiente, se toma el caso de un paraboloides, cuyo valor para  $(k+1) = 0$ , con ello

$$r_2 = \frac{-ar \pm \sqrt{(ar)^2 + 2S_orr_1^2}}{r_1}.$$

Si ahora hacemos que  $S_o \rightarrow 0$  entonces  $r_2 \rightarrow 0$ , esto se satisface si en la ecuación anterior se toma el signo positivo para el radical, por lo tanto, la solución que se va a tomar para  $r_2$  es

$$r_2 = \frac{a[(k+1)S_o - r] + \sqrt{(ar)^2 + (2r - (k+1)S_o)S_or_1^2}}{r_1^2 + (k+1)a^2} r_1. \quad (1.13)$$

En el caso en el que el denominador de la expresión (1.13) sea igual a cero, es decir,  $r_1^2 + (k+1)a^2 = 0$ , esto sólo ocurriría si  $k = -1$  y  $r_1 = 0$ ; esto es, para un espejo parabólico que cuente con el vértice.

Por otra parte, el radical de la misma expresión debe ser mayor o igual a cero para tener un sentido físico, esto es,  $(ar)^2 + (2r - (k + 1)S_o)S_or_1^2 \geq 0$ , lo que se satisface para

$$S_o \geq \frac{rr_1^2 \pm rr_1 \sqrt{a^2(1+k) + r_1^2}}{(1+k)r_1^2},$$

lo que a su vez conduce a imponer la condición  $a^2(1+k) + r_1^2 \geq 0$ .

Continuando, veámos las figuras (1.7) y (1.8), se observa que

$$\begin{aligned}\bar{r} &= P_2 - P = (z_2, \zeta_2, -r_2) - (S_o, \zeta_2, 0) = (z_2 - S_o, 0, -r_2), \\ \bar{r}' &= P_3 - P_2 = (z_3, \zeta_3, -r_3) - (z_2, \zeta_3, -r_2) = (z_3 - z_2, 0, -r_3 + r_2), \\ \bar{N} &= P_n - P_2 = (z_n, \zeta_2, 0) - (z_2, \zeta_2, -r_2) = (z_n - z_2, 0, r_2),\end{aligned}$$

donde  $z_n$  es la coordenada Z del punto  $P_n$ , que corresponde a la intersección del rayo reflejado con el eje óptico. Ahora bien, la pendiente de la recta que contiene al vector  $\bar{N}$  está determinada por

$$m_N = \frac{r_2}{z_n - z_2}. \quad (1.14)$$

Si derivamos la Ec. (1.10) obtenemos

$$\frac{dr_2}{dz_2} = \frac{r - (k+1)z_2}{r_2} = m_t, \quad (1.15)$$

que nos proporciona la pendiente de la recta tangente a cualquier punto de la superficie, particularmente al punto  $P_2$ . Pero sabemos que entre la pendiente de la tangente y la normal, en el punto  $P_2$  se cumple la relación  $m_N \cdot m_t = -1$ ; así, de las Ecs. (1.14) y (1.15)

$$\frac{r_2}{z_n - z_2} = -\frac{r_2}{r - (k+1)z_2} \quad \Rightarrow \quad z_n - z_2 = (k+1)z_2 - r,$$

por lo tanto

$$z_n - z_2 = (k+1)z_2 - r, \quad (1.16)$$

con esto y con la Ec. (1.9) se obtiene

$$\bar{r} = \left( -\frac{a}{r_1}r_2, 0, -r_2 \right), \quad \bar{r}' = (z_3 - z_2, 0, -r_3 + r_2), \quad \bar{N} = ((k+1)z_2 - r, 0, r_2).$$

Ahora, recurriendo a la ley de la reflexión en forma vectorial,  $\hat{r}' = \hat{r} - 2(\hat{r} \cdot \hat{N})\hat{N}$ , veáse la Fig. (1.8), cuyo producto punto  $\bar{N} \cdot \bar{r}$ , es

$$\bar{N} \cdot \bar{r} = \left( (k+1)z_2 - r, 0, r_2 \right) \cdot \left( -\frac{a}{r_1}r_2, 0, -r_2 \right) = -\mathcal{W}, \quad (1.17)$$

con  $\mathcal{W} = ((k+1)z_2 - r)ar_2/r_1 + r_2^2$ . Llevando este resultado, a la ley de reflexión vectorial resulta en

$$\frac{(z_3 - z_2, 0, -r_3 + r_2)}{|\bar{r}'|} = \frac{\left( -\frac{a}{r_1}r_2, 0, -r_2 \right)}{|\bar{r}|} + \frac{2\mathcal{W}}{|\bar{r}||\bar{N}|^2} * ((k+1)z_2 - r, 0, r_2),$$

igualando componente a componente

$$\frac{z_3 - z_2}{|\bar{r}'|} = \frac{-\frac{a}{r_1}r_2N^2 + 2\mathcal{W}((k+1)z_2 - r)}{|\bar{r}|\bar{N}^2}, \quad (1.18)$$

$$\frac{r_3 - r_2}{|\bar{r}'|} = \frac{r_2N^2 - 2\mathcal{W}r_2}{|\bar{r}|\bar{N}^2}. \quad (1.19)$$

Sea

$$\mathcal{F} = \frac{-\frac{a}{r_1}r_2N^2 + 2\mathcal{W}((k+1)z_2 - r)}{|\bar{r}|\bar{N}^2},$$

y

$$\mathcal{G} = \frac{r_2N^2 - 2\mathcal{W}r_2}{|\bar{r}|\bar{N}^2}.$$

Entonces

$$|\bar{r}'| = \frac{z_3 - z_2}{\mathcal{F}}, \quad (1.20)$$

$$|\bar{r}'| = \frac{r_3 - r_2}{\mathcal{G}}. \quad (1.21)$$

Igualando las Ecs. (1.20) y (1.21), y despejando a  $z_3$ , obtenemos

$$z_3 = z_2 + (r_3 - r_2)\frac{\mathcal{F}}{\mathcal{G}}. \quad (1.22)$$

Así

$$\frac{\mathcal{F}}{\mathcal{G}} = \frac{-ar_2N^2 + 2\mathcal{W}r_1((k+1)z_2 - r)}{r_1r_2(N^2 - 2\mathcal{W})},$$

$$N^2 = [(k+1)z_2 - r]^2 + r_2^2.$$

Ahora bien, hay que determinar el valor máximo de la sagita, es decir  $Z_{D/2}$ ; para poder conocer el valor de  $S_o$ , en términos de la apertura del espejo,  $D$ ; de la longitud mínima del rectángulo del CCD,  $d$ ; y de la distancia focal de la lente,  $f$ ; a través de  $a$ . Para ello, retomamos la Ec. (1.9), haciendo  $r_2 = D/2$ ,  $r_1 = d/2$  y  $z_2 = Z_{D/2}$  con lo que tenemos

$$S_o = Z_{D/2} + a\frac{D}{d}. \quad (1.23)$$

Y si se sustituye  $r_2 = D/2$  y  $z_2 = Z_{D/2}$  en la Ec. (1.10) entonces

$$Z_{D/2} = \frac{r}{(k+1)} \left[ 1 - \sqrt{1 - \frac{(k+1)D^2}{4r^2}} \right]. \quad (1.24)$$

Casi se ha concluido, se puede recurrir a la fórmula para lentes delgadas para determinar el valor de  $a$ , entonces de

$$\frac{1}{l_i} + \frac{1}{l_o} = \frac{1}{f} \quad \Rightarrow \quad l_i = \frac{l_o f}{l_o - f},$$

donde  $l_i$  es la distancia imagen y  $l_o$  la distancia objeto. Si consideramos  $l_o \approx S_o - Z_{D/2} = aD/d$  y  $l_i = a$  obtenemos

$$a = \frac{f(D+d)}{D}. \quad (1.25)$$

Haciendo una recopilación de los resultados obtenidos, que son totalmente análogos a los presentados en [1], tenemos las ecuaciones que han de utilizarse para hacer la transformación del plano de la imagen a la pantalla nula de gotas, así:

$$\begin{aligned} Z_{D/2} &= \frac{D^2}{4r + 2\sqrt{4r^2 - (k+1)D^2}}, \\ a &= \frac{f(D+d)}{D}, \\ S_o &= Z_{D/2} + a\frac{D}{d}, \\ r_1 &= \sqrt{x^2 + y^2}, \text{ para } x \in [-d/2, d/2] \text{ e } y \in [-d/2, d/2], \\ r_2 &= \frac{a[(k+1)S_o - r] + \sqrt{(ar)^2 + [2r - (k+1)S_o]S_or_1^2}}{r_1^2 + (k+1)a^2}r_1, \\ z_2 &= S_o - a\frac{r_2}{r_1}, \\ r_3 &= R, \\ z_3 &= z_2 + (r_3 - r_2)\frac{-ar_2^2 + a[(k+1)z_2 - r]^2 + 2r_1r_2[(k+1)z_2 - r]}{-r_1r_2^2 + r_1[(k+1)z_2 - r]^2 - 2ar_2[(k+1)z_2 - r]}. \end{aligned} \quad (1.26)$$

Donde  $r_2$  y  $z_2$  representan las intersecciones de los rayos que van del CCD a la superficie óptica y  $r_3$  y  $z_3$  son las intersecciones de los rayos reflejados, por el espejo, con la pantalla nula cilíndrica; y  $R$  es el radio del cilindro que se forma con la propia pantalla nula de gotas, es decir, en  $R$  se toma en cuenta el radio del cilindro donde se monta la pantalla y el espesor de la hoja de papel en la que se imprime la pantalla.

Entonces, con el conjunto de ecuaciones (1.26) se puede elaborar un programa con cualquier lenguaje de programación para realizar la pantalla nula de gotas con configuración cilíndrica, en este caso se ha elegido el lenguaje de programación Python. Una vez realizado el programa lo único que resta es conocer el valor de los parámetros involucrados en el diseño de la pantalla nula.

### 1.3. Características de los espejos disponibles

En el laboratorio de pruebas ópticas se cuenta con algunos espejos elípticos cóncavos rápidos que se muestran en la Fig. (1.11). Sus parámetros de fabricación, de acuerdo al proveedor, se enlistan en la tabla (1.1); algunos de los cuales quedan más explícitos al observar la Fig. (1.4); y en donde,  $F/\#$  = distancia focal del espejo/diámetro del espejo,  $r$  = radio de curvatura medido en el vértice del espejo,  $C$  = curvatura medida en el vértice del espejo,  $k$  = constante de conicidad,  $A$  = semi eje mayor de la elipse que le da forma al espejo,  $B$  = semi eje menor de la elipse que le da forma al espejo,  $CA = D$  = claro de apertura o diámetro del espejo,  $V$  = claro del vértice o diámetro del orificio interno del espejo y  $F_1-F_2$  = distancia entre los focos de la elipse.

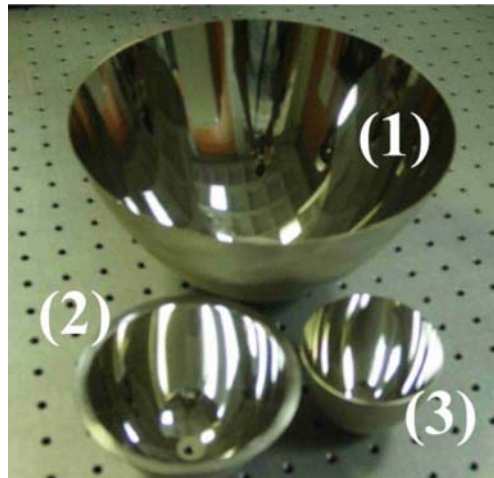


Figura 1.11: Superficies elípticas reflectoras.

Espejo	$F/\#$	$r$ (mm)	$C$ ( $\text{mm}^{-1}$ )	$k$ (mm)	$A$ (mm)	$B$ (mm)	$CA = D$ (mm)	$V$ (mm)	$F_1 - F_2$ (mm)
(1)	0.142	63.749	0.016	-0.779	287.867	135.467	224.282	50.800	508.000
(2)	0.169	33.867	0.029	-0.556	76.200	50.800	100.178	15.875	113.589
(3)	0.147	21.880	0.046	-0.655	63.500	37.275	74.397	12.700	102.768

Tabla 1.1: Parámetros de los espejos elípticos cóncavos observados en la Fig. (1.11).

#### 1.4. Pantalla nula, montaje del sistema para evaluar el espejo $F/0.147$ y obtención de la imagen

Se decidió probar el espejo (3), con  $F/0.147$ . Primeramente se ha elaborado la pantalla nula cilíndrica con un patrón de gotas considerando el conjunto de ecuaciones (1.26), el resultado se muestra en la imagen de la Fig (1.12). La parte superior de la pantalla corresponde a los rayos reflejados cerca del orificio interno del espejo y, la parte inferior de la pantalla a los rayos reflejados cerca de la periferia externa del espejo. Donde,  $F/0.147$ ,  $S_o = 157.619$  mm,  $a = 8.710$  mm.  $L = 19.308$  mm, es el largo de la pantalla, es decir, de la  $z_3$  máxima a la  $z_3$  mínima, sobre la pantalla;  $P = 35.444$  mm, es el perímetro de la pantalla cilíndrica.

La pantalla presentada en la Fig. (1.12) se ha desechado debido a que presenta una acumulación de gotas a causa de la repetición de valores en el cálculo de la coordenada  $z_3$  sobre la superficie del cilindro, pero además se observan valores negativos para esta misma coordenada que no corresponden a la situación física esperada; lo que puede observarse en la Fig. (1.13), que muestra que parte de la pantalla debería colocarse fuera del espejo; sin embargo, se muestra el diseño porque esas situaciones no se contemplaban en la elaboración de las pantallas nulas de gotas. Debido a lo anterior se ha elaborado otra pantalla, considerando las Ecs. (1.26), pero sin tomar en cuenta la tercera expresión de ese mismo conjunto de ecuaciones; en lugar de ello se ha seleccionado un valor para la posición del pinhole cercana al primer foco del espejo (cuando el origen del sistema

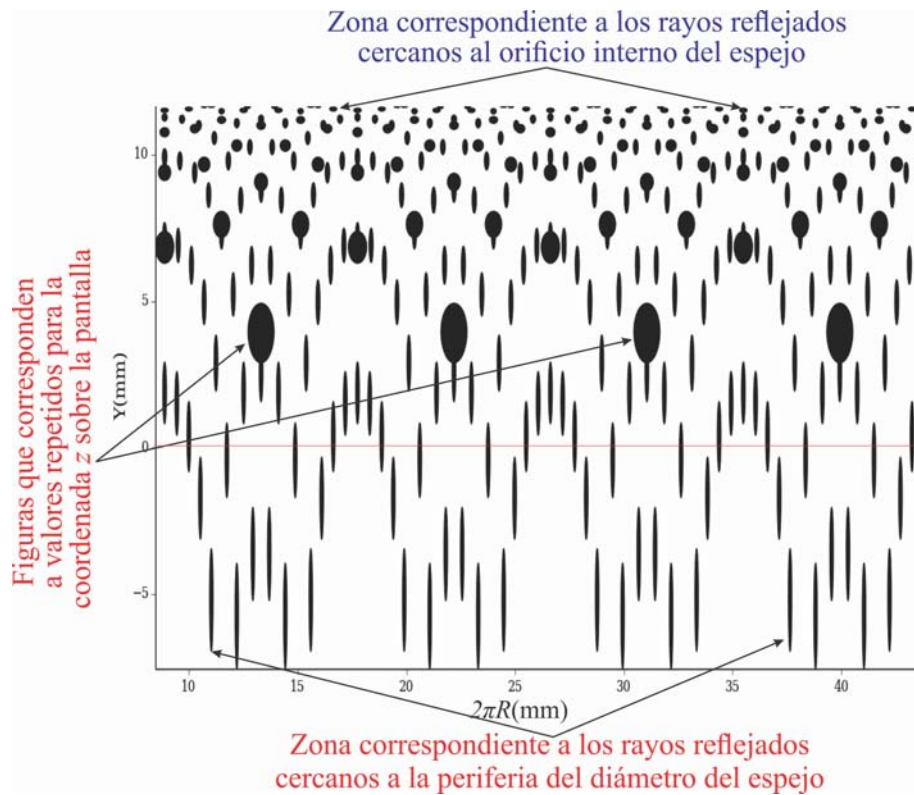


Figura 1.12: Pantalla nula cilíndrica con patrón de gotas, se observa un acumulamiento de gotas en la parte superior de la imagen originada por repeticiones en los cálculos de la coordenada  $z_3$  sobre el cilindro.

Especificación	
Distancia focal	8 mm
Tipo de montaje	C
Rango de iris	$F/1.4$ a 16
Operación de iris	Manual con bloqueo
Operación de enfoque	Manual con bloqueo
Ángulo de visión	1/3": 33.1 x 25.0
	1/2": 43.6 x 33.1
	2/3": 59.3 x 45.2
Diámetro efectivo	13.7 mm / 10.4 mm
Distancia objeto mínima	10.2"(0.26 mm)
Back focus	11.60 mm (en aire)
Diámetro máximo	1.1"(29 mm)
Longitud total	1.1" (27 mm)
Peso	1.4 oz (40 g)

Tabla 1.2: Especificaciones de la lente Tamron 23FM08L.

coordinado coincide con el vértice del espejo, el primer foco es el más alejado al vértice, el que aparece primero, de acuerdo a la dirección de propagación de la luz emitida por una fuente luminosa colocada del lado izquierdo del origen del sistema de referencia; así que el segundo foco es el que está más próximo al vértice), para evitar los resultados obtenidos en el diseño de la primera pantalla elaborada. En el diseño se ha tomado en cuenta una cámara CCD blanco y negro, marca Sony, modelo XC-ST60.00; con un área activa de  $640 \times 480$  pixeles; y una lente 23FM08/23FM08L 2/3" 8mm F/1.4 Standard High Resolution C-Mount Lens with Lock, marca Tamron. Esto significa que la Tamron 23FM08L es una lente de distancia focal fija de 2/3" de alta resolución con iris manual. Una descripción más detallada de la lente se observa en las especificaciones enlistadas en la tabla (1.2).

Para hacer las manchas, tipo gotas, de la pantalla nula, se ha elegido un radio para los círculos que les corresponden en el plano de diseño, de 0.045 mm; para que se capturen en la imagen aproximadamente 36 pixeles por gota. La pantalla resultante se observa en la Fig. (1.14). En la Fig. (1.15) se puede ver la simulación que permite estimar la posición de la pantalla nula, la que queda completamente dentro del espejo.

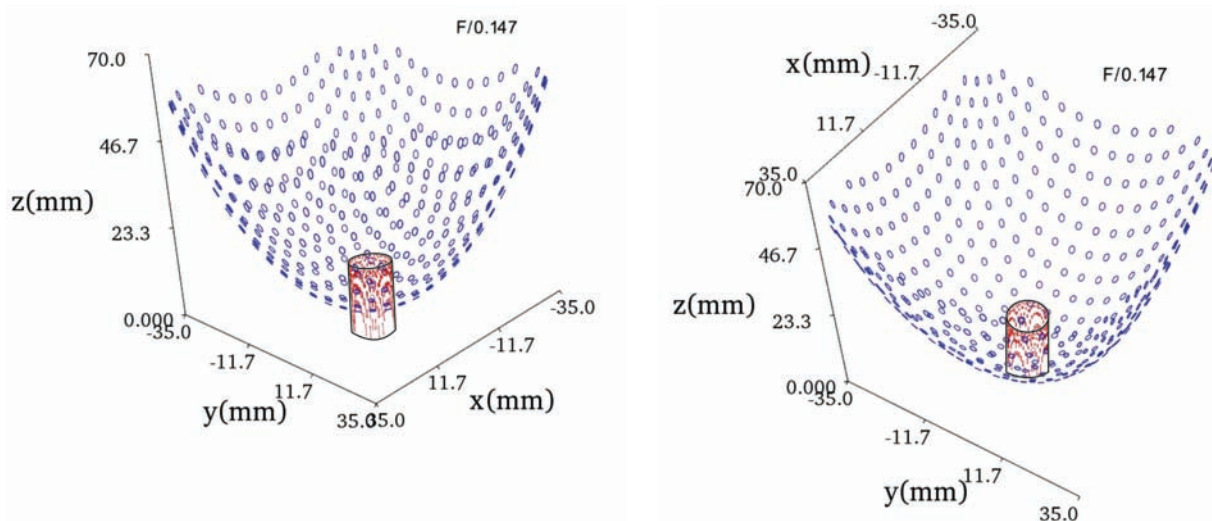


Figura 1.13: En estos esquemas se muestra la forma en que debe ser colocada la pantalla nula de gotas, parte de ella debe quedar fuera del espejo debido a los valores de  $z_3$  negativos. En estos esquemas se han usado 360 puntos para generar la periferia de cada gota hueca, en este caso, para simplificar la simulación.

Para el montaje de la pantalla nula se eligió un cilindro sólido de aluminio y como fuente de iluminación una lámpara fluorescente circular, de 32 W, de 120V-130V y 0.421A; también la superficie óptica se sujetó por medio de un aro que cuenta con tres tornillos para ajustar, que a su vez queda fijo a través de un poste atornillado a la mesa holográfica; el cilindro que sostiene la pantalla se fijó a un juego de platinas que permite un movimiento en las tres direcciones cartesianas además de una variación del eje del cilindro a lo largo del ángulo polar y del ángulo azimutal; por otra parte, la cámara CCD se fijó a otro juego de platinas con el que se puede efectuar movimientos en las tres direcciones cartesianas. Lo anterior se muestra en las Figs. (1.16) y (1.17).

Una vez lograda una alineación adecuada se procedió a capturar la imagen producida por el espejo. Los resultados muestran que se ha tenido una iluminación adecuada al utilizar una la lámpara circu-



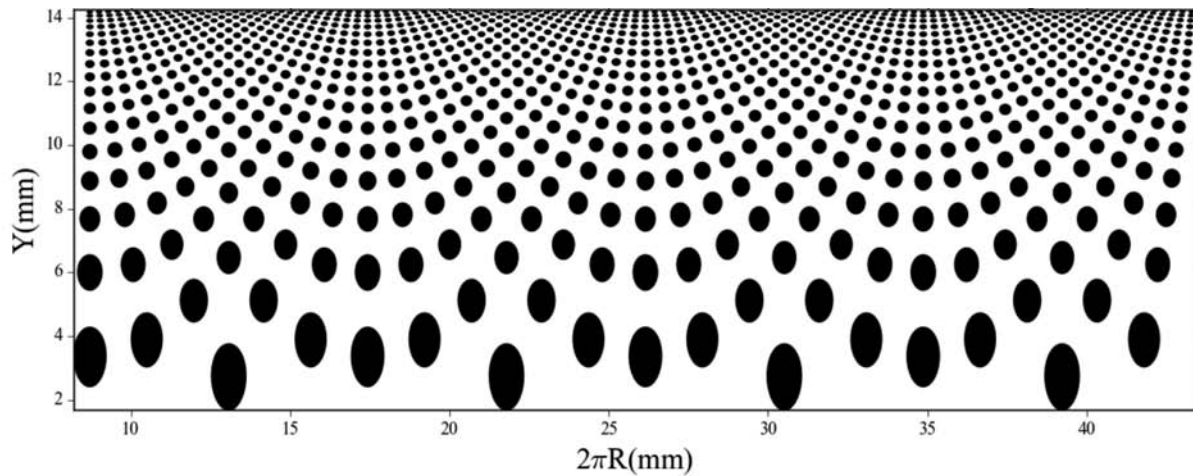


Figura 1.14: Pantalla nula cilíndrica con patrón de gotas utilizada en la prueba del espejo con  $F/0.147$ . Donde,  $S_o = 124.909$  mm,  $a = 8.710$  mm,  $L = 13.335$  mm, es el largo de la pantalla, es decir, de la  $z_3$  máxima a la  $z_3$  mínima, sobre la pantalla;  $P = 35.876$  mm, es el perímetro de la pantalla cilíndrica.

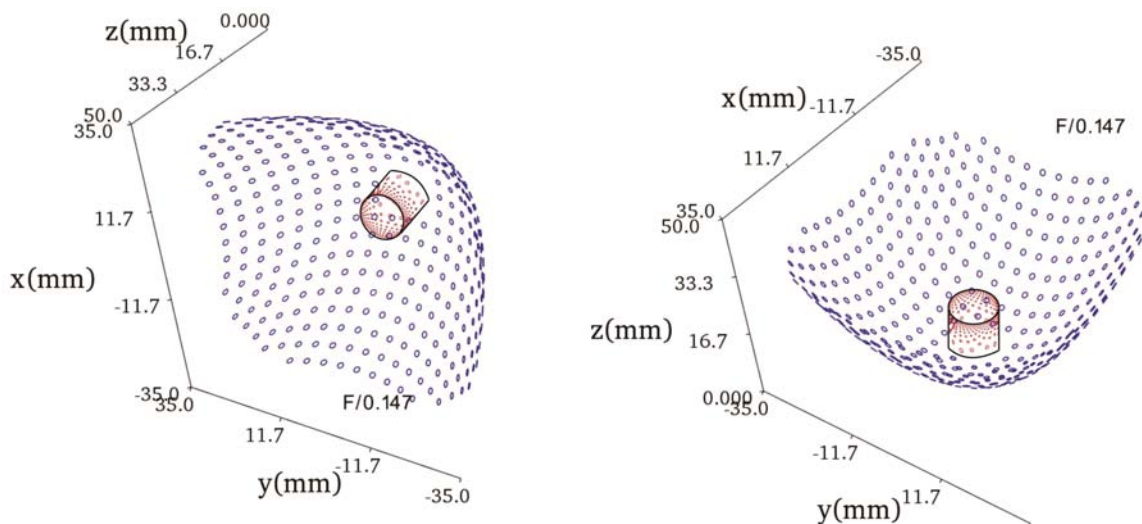


Figura 1.15: Pantalla nula cilíndrica con patrón de gotas, se muestra que la pantalla se ubica completamente dentro del espejo. En estos esquemas también se han usado 360 puntos para generar la periferia de cada gota hueca para simplificar la simulación.

lar, lo que es importante, ya que permite un enfoque apropiado de la imagen antes de la grabación de la misma, a través del CCD; y porque durante el procesamiento de la imagen, para la obtención de los centroides, se requiere establecer un umbral que divida la escala de grises de los píxeles de la imagen, para formar dos conjuntos de los propios píxeles, que se cambiarán a blancos y negros; por ello, resulta importante tener una buena iluminación que permita distinguir las zonas oscuras que corresponden a las gotas de la pantalla, reflejadas sobre el espejo, de aquellas zonas oscuras que pudieran ser resultado de una iluminación pobre. Lo relevante de los resultados obtenidos es el hecho de que la imagen capturada para la superficie óptica muestra deformaciones que no corresponden a lo esperado, de acuerdo al diseño de la pantalla nula, ya que debería obtenerse algo

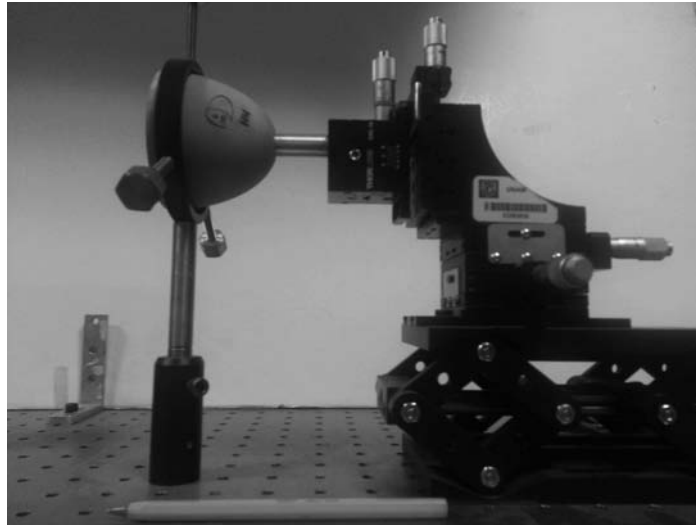


Figura 1.16: Montaje para la prueba del espejo con F/0.147



Figura 1.17: Iluminación del sistema bajo prueba, espejo con F/0.147.

más similar a lo que se observa en la Fig. (1.3); sin embargo, en la imagen capturada, tal como se puede ver en la Fig. (1.18), hay una zona limitada por dos curvas cerradas, que no corresponde a la continuación de una cuadrícula, como la que se genera en la zona central de la misma imagen. Estas deformaciones, además de no ser causadas por el diseño de la pantalla nula, no pueden ser atribuidas a irregularidades en la superficie del espejo pues, aunque parezca contradictorio, si se considera una deformación de la superficie valorada, presenta una regularidad geométrica que iría en contra de los estándares de fabricación del proveedor, es decir, tendríamos un espejo bastante

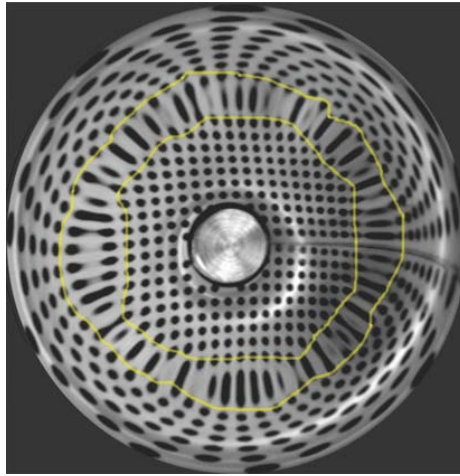


Figura 1.18: Imagen obtenida en la prueba del espejo con  $F/0.147$ . Las líneas en color amarillo delimitan la zona producida por el reflejo y que no corresponde a lo esperado, de acuerdo a lo pretendido por el diseño de la pantalla nula de gotas, véase la Fig. (1.3).

defectuoso, en el que deberían notarse a simple vista las irregularidades de la superficie, porque la franja en donde se observan las deformaciones afecta a una parte considerable de la imagen. En base a lo antes expuesto, algunas posibles hipótesis acerca de la razón de las deformaciones observadas son: que el CCD esté captando información generada a partir de segundas reflexiones o la generación simultánea de una imagen real y una imagen virtual.

También, se ha hecho un mapeo de los cambios de la coordenada  $z$  sobre el cilindro, esto es, la coordenada  $z_3$ , con la intención de determinar los intervalos de validez de  $z_3$ , en términos de la posición del pinhole, definida por  $S_o$ ; así como de la distancia focal de la lente que forma la imagen sobre el CCD,  $f$ ; otro más en términos de la apertura del espejo, determinada por  $D$ ; y de la ubicación del pinhole; y uno como función del diámetro del espejo,  $D$ , y de la distancia focal de la lente que se usa para formar la imagen sobre el CCD,  $f$ ; es decir, estos mapeos permiten observar las zonas en las que se pueden elaborar pantallas nulas (como de las que se ha estado hablando) para el espejo con  $F/0.147$ , con los parámetros de fabricación que se listan en la tabla (1.1); además de que se considera un CCD cuadrado de lado = 6.6 mm, un radio para la pantalla nula de 5.650 mm. El rango de la distancia focal que se usa en el mapeo está en el intervalo  $[0, 25]$  mm, y el de la posición del pinhole en el intervalo  $[0, 200]$  mm. Para el mapeo con respecto al diámetro del espejo y a la posición del pinhole, en éste  $f = 8.0$  mm,  $D \in [0, 75.0]$  mm y  $S_o \in [0, 200]$  mm. En el tercer mapeo  $S_o = 157.619$  mm,  $D \in [0, 75.0]$  y  $f \in [0, 25]$ .

En la Fig. (1.19) puede verse cómo la coordenada  $z$  del cilindro tiene discontinuidades para diferentes combinaciones de la distancia focal de la lente y de la posición del pinhole, lo que significa que sólo es posible elaborar pantallas nulas cilíndricas para algunas combinaciones de éstos parámetros; en otras palabras, si se fija alguno de estos dos parámetros, entonces el otro tendrá que elegirse dentro del intervalo de validez que muestra el mapeo. En la Fig. (1.20) también se observa que la coordenada  $z$  sobre el cilindro presenta algunas discontinuidades para algunas combinaciones del diámetro del espejo y de la posición del pinhole, esto implica que no siempre será posible cubrir toda la superficie a evaluar, para ciertas posiciones del pinhole. Y en el tercer mapeo se puede ver que no siempre se podrá evaluar la totalidad de la superficie reflectora cuando se tiene determinada alguna distancia focal para la lente que forma la imagen sobre el CCD, si se quiere que la imagen

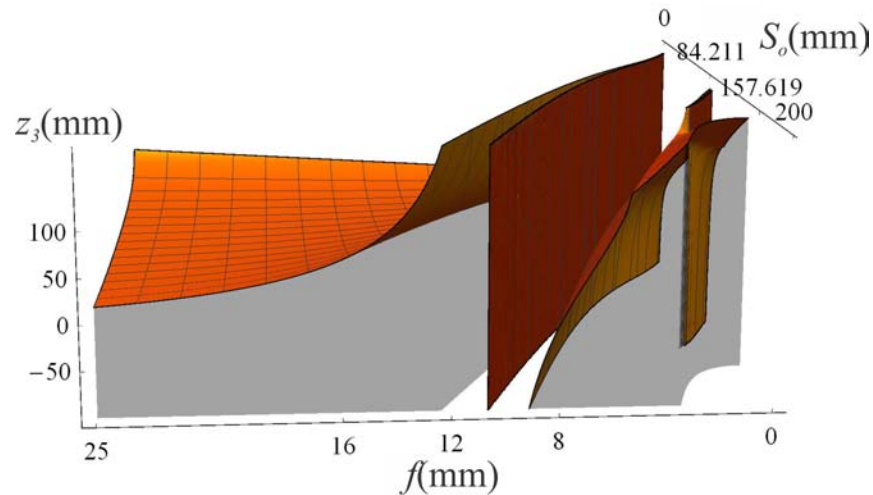
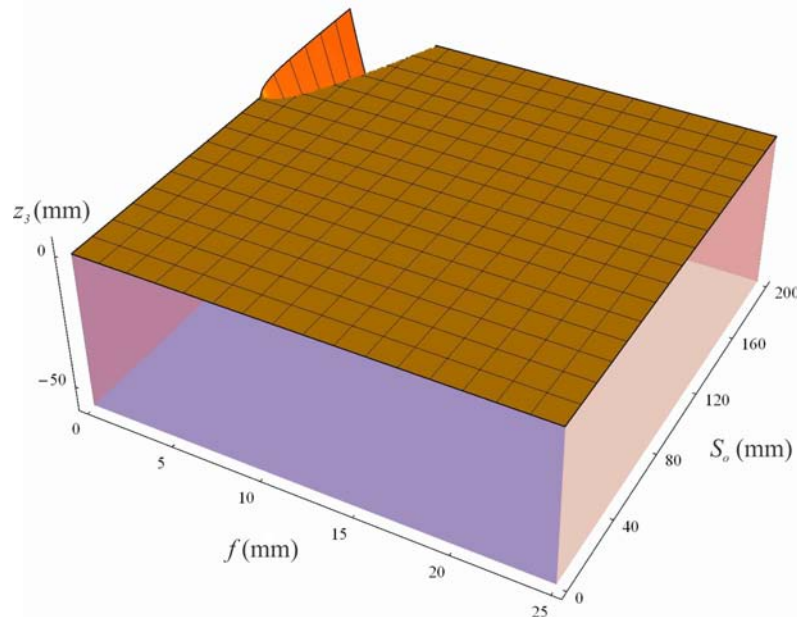
(a) Parte real de  $z_3$ (b) Parte imaginaria de  $z_3$ 

Figura 1.19: Variaciones de la coordenada  $z_3$ , para el espejo con  $F/0.147$ . (a) Muestra que sólo es posible diseñar pantallas nulas para diferentes valores de la distancia focal de la lente y de la posición del pinhole, en la parte que corresponde a la superficie suave y sin discontinuidades; (b) muestra la parte imaginaria.

quede capturada sobre el área de este último. Lo anterior sugiere que si se fija el valor de la distancia focal de la lente entonces la posición del pinhole determina el comportamiento de la imagen generada por el espejo a través del proceso de reflexión y evidencia que hay valores para  $S_o$  que no deben considerarse para un diseño de pantalla nula de gotas; así como el hecho de que una vez fijada la distancia focal de la lente no necesariamente se podrá evaluar toda la superficie al elegir un valor para la posición del pinhole.

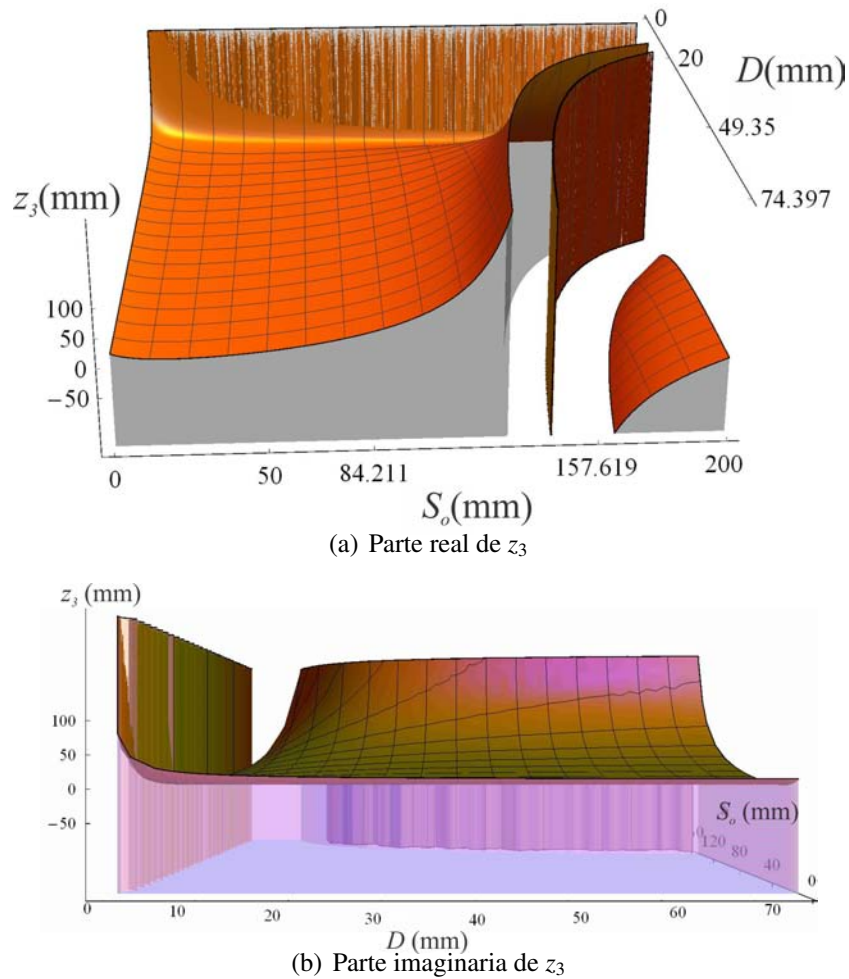


Figura 1.20: Variaciones de la coordenada  $z_3$ , para el espejo con  $F/0.147$ , con una distancia focal fija para la lente, de 8.000 mm. Las gráficas muestran que no todas las combinaciones de la posición para el pinhole y el diámetro del espejo permiten diseños aceptables de pantallas nulas.

En concreto, de acuerdo a las Figs. (1.19), (1.20) y (1.21), si se mantiene fija la distancia focal de la lente, así como el valor del diámetro del espejo, entonces elegir una posición para la ubicación del pinhole no garantiza que se pueda probar la superficie, y si esto es posible, no queda seguro que se pueda evaluar la totalidad del espejo. Por otra parte, si se mantiene fija la distancia focal de la lente y se elige una posición adecuada del pinhole, dentro del intervalo de validez que muestra el mapeo, entonces no necesariamente se podrá evaluar toda la superficie del espejo.

Estas observaciones han conducido a tomar la decisión de trabajar por el camino de la hipótesis de las segundas reflexiones, y se ha realizado un estudio de las cáusticas por reflexión que producen los espejos cónicos cóncavos, así como un análisis de las segundas reflexiones en superficies elípticas cóncavas prolatas, que al mismo tiempo ha encaminado a realizar un trazo de rayos en donde se muestran las segundas reflexiones y cómo éstas pueden ser captadas por el sensor CCD, produciendo las deformaciones que se ven en la Fig. (1.18).

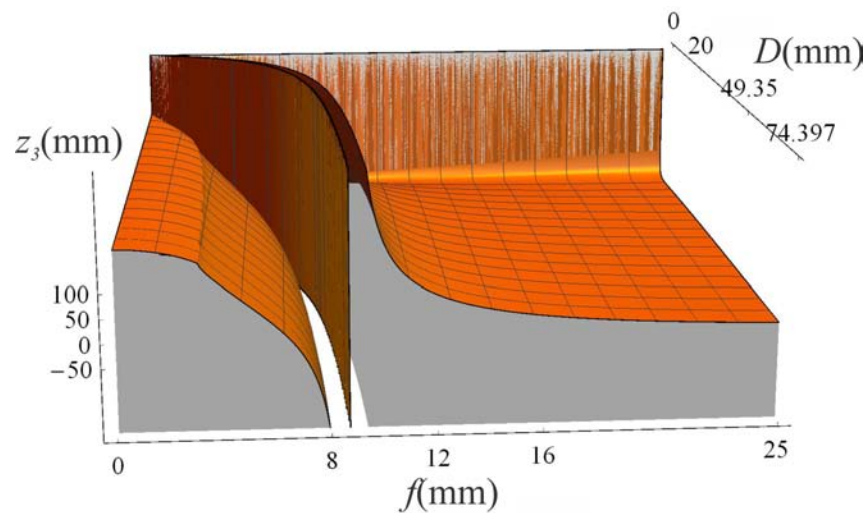
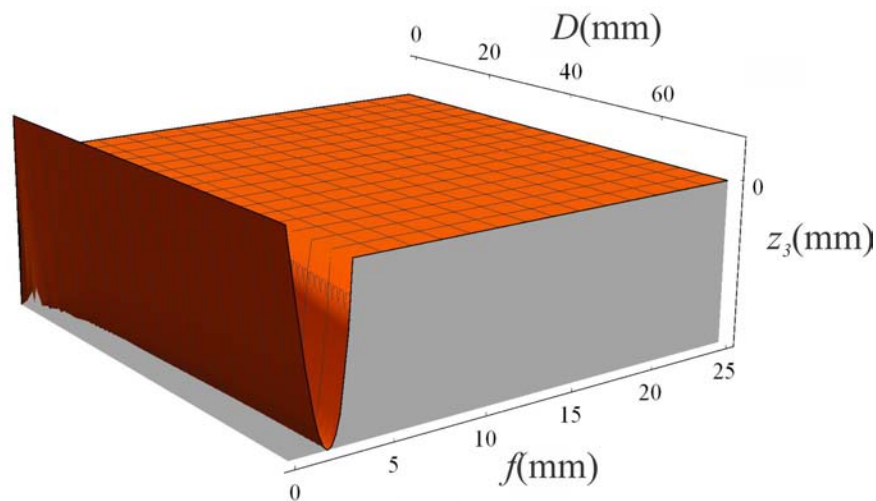
(a) Parte real de  $z_3$ (b) Parte imaginaria de  $z_3$ 

Figura 1.21: Variaciones de la coordenada  $z_3$ , para el espejo con  $F/0.147$ , con una distancia  $S_o$  fija de 157.619 mm. Las gráficas muestran que no todas las combinaciones de la distancia focal de la lente formadora de la imagen y el diámetro del espejo permiten diseños aceptables de pantallas nulas.

## 1.5. Referencias

1. R. Bolado Gómez, Tesis de Licenciatura “Prueba de un espejo elipsoidal cóncavo en eje ( $F/0.273$ ) por medio de una pantalla nula cilíndrica”. Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), 2005.
2. M. Campos-García, R. Bolado-Gómez, and R. Díaz-Urbe, “Testing fast aspheric concave surfaces with a cylindrical null screen”, *Appl. Opt.* **47**, 849-859 (2008).

3. M. Avendaño-Alejo, S. Maca García. “Angular Magnification for a Confocal Off-Axis Optical System”. RIAO/OPTILAS (2007).
4. D. Malacara, *Optical Shop Testing*, 2th ed. (John Wiley & Sons, 1992).
5. A. G. Rojas H., F. Renero C., W. Calleja A., R. Pérez R., O. Totolhua P. y F. Gracia. “Diseño de una superficie cónica en silicio cristalino”, *Revista Mexicana de Física*, **51**, 620-625 (2005).
6. L. G. Carmona Paredes, Tesis de Maestría “Imágenes de aberturas elípticas en la prueba de superficies convexas con pantallas nulas”. Posgrado en Ciencias Físicas, Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), 2005.
7. R. Díaz-Uribe and M. Campos-García, “Null screen testing of fast convex aspheric surfaces,” *Appl. Opt.* **39**, 2670-2677 (2000).
8. M. Campos-García, R. Díaz-Uribe and F. Granados-Agustín, “Testing fast aspheric convex surfaces with a linear array of sources”, *Appl. Opt.* **43**, 6255-6264 (2004).
9. M. Avendaño-Alejo, M. Campos-García, R. Díaz-Uribe, “Testing a fast off-axis parabolic mirror using tilted null-screens”, *Eight International Symposium on Laser Metrology*, edited by R. Rodríguez-Vera, F. Mendoza-Santoyo, *Proc. of SPIE Vol. 5776* (SPIE, Bellingham, WA, 2005) 553-560.

# Estudio de las cáusticas

---

Como se ha hecho mención en el capítulo previo, las deformaciones obtenidas en la imagen producida por el espejo con  $F/0.147$ , Fig. (1.18), ha motivado un análisis de las cáusticas por reflexión producidas por superficies cónicas cóncavas. En este capítulo se presentan varios resultados interesantes derivados de este estudio, pero sobre todo, para el propósito de este trabajo y como una contribución al diseño de las pantallas nulas cónicas, se muestra que la posición de una fuente puntual (lo que equivale a la posición del pinhole en el diseño de pantallas nulas cilíndricas) es muy importante para evitar que las segundas reflexiones puedan ser captadas por el sensor CCD.

## 2.1. Introducción

La cáustica asociada a un sistema óptico tiene un papel importante en la toma de decisiones en el diseño e implementación de pruebas geométricas para la evaluación de superficies reflectoras o refractoras; así, por ejemplo, es posible elegir los parámetros apropiados para la prueba de superficies con algunos métodos como el de pantallas nulas o la prueba de Ronchi; permite valorar la calidad de una prueba por pantallas nulas; así como determinar la posición conveniente para la fuente de luz para diseñar sistemas de iluminación eficientes [1].

La óptica de las cáusticas ha sido un tema de investigación por muchos años. Se han publicado recientemente varios trabajos en relación a las cáusticas por refracción, también conocidas como diacáusticas [2]-[6] y cáusticas por reflexión, llamadas también catacáusticas [7]-[10].

La cáustica puede definirse como la envolvente de un sistema ortonormal de rayos [11], y también como la localización de los centros principales de curvatura de un frente de onda [7],[12]. En forma alternativa, los rayos que provienen de una fuente puntual en un medio isotrópico forman una congruencia normal, y estos rayos inciden sobre una superficie óptica, ya sea refractora o reflectora; dando lugar a un agregado de rayos refractados o reflejados, respectivamente, los cuales constituyen una congruencia normal también. En otras palabras, si se miden longitudes de camino óptico iguales, a lo largo de cada rayo emitido desde la fuente, la superficie construida por los puntos finales será normal a todos los rayos en la congruencia. Estas superficies son los frentes de fase del sistema ondulatorio, para los cuales los rayos son la aproximación óptica geométrica [13]. Stavroudis y sus colaboradores han presentado una solución general a la ecuación de la eikonal para propagaciones en medios homogéneos [14], [15]. Esta solución se hizo en coordenadas cartesianas y se expresó en términos de una función arbitraria, a la que se le ha llamado la función  $k$ . Una solución a la ecuación de la eikonal proporciona las ecuaciones para un frente de onda y las superficies cáusticas después de la refracción o la reflexión. Como fue comentado por Stavroudis, la función  $k$  proporciona toda la información acerca de las aberraciones introducidas al frente de onda



por la superficie refractora o reflectora. Recientemente, en [16]-[17], se ha presentado una evaluación explícita de la función  $k$  por refracción y reflexión de una onda plana de una superficie con simetría de revolución, que concuerda con los resultados mostrados previamente en la literatura. Por otra parte, utilizando el concepto de mapeo diferencial entre dos subconjuntos tridimensionales de  $\mathcal{R}^3$  (espacio objeto-imagen) en [18]-[19], los autores han obtenido una fórmula para la cáustica asociada con los rayos de luz reflejados y han generalizado el estudio a espejos con simetría de revolución con una fuente colocada en una ubicación arbitraria sobre el eje óptico. Aplicando estos resultados, ellos han proporcionado una fórmula para el círculo de mínima confusión para una superficie reflectora esférica. Alternativamente, una fórmula para la iluminancia (densidad de flujo) en [20] fue deducida en forma vectorial con el uso formal de la geometría diferencial. Ya que la superficie cáustica también puede definirse como la posición de puntos para los cuales la densidad de flujo es infinita, o en otras palabras como el lugar de las singularidades de la densidad de flujo de la radiación emitida, los autores también han obtenido una fórmula para las superficies cáusticas producidas por refracción y reflexión. Es importante establecer que, en [12]-[20] la superficie cáustica es considerada como un problema tridimensional. Desde un punto de vista diferente, con una teoría basada en las propiedades de las transformaciones de Legendre, es posible conectar la superficie cáustica con la aberración transversal del sistema óptico en un plano meridional como se reporta en [21].

Aunque la cáustica, ya sea por refracción o por reflexión, ha sido bastante estudiada, este trabajo permite hacer un análisis de algunas propiedades de la superficie cáustica y su relación con los coeficientes de Seidel causados por la reflexión sobre una superficie reflectora cónica cóncava exclusivamente en un plano meridional. Más aún, se puede aplicar esta fórmula para evaluar el círculo de mínima confusión siguiendo un procedimiento similar al que se muestra en [2]-[22] donde una fórmula para el círculo de mínima confusión para una lente cónica convexa y un espejo cóncavo esférico son obtenidas. Finalmente, con el uso de la fórmula para la cáustica, es posible recuperar el frente de onda reflejado, el cual se produce a través de un espejo cónico cóncavo en cualquiera de los casos analítico o experimental.

## 2.2. Preliminares

Se define el eje  $\mathbf{Z}$  para que se ubique a lo largo del eje óptico, y se asume que el plano de incidencia coincide con el plano  $\mathbf{Y} - \mathbf{Z}$  y con una sección transversal del espejo cónico cóncavo, cuyo radio paraxial es  $r$ , y el origen del sistema de referencia  $O$  se ubica en el vértice del espejo. Se asume que hay simetría de revolución alrededor del eje  $\mathbf{Z}$ . Sin pérdida de generalidad, se asume que la luz incide desde el lado izquierdo y que una fuente puntual se coloca en la posición  $S_o$ , considerando idealmente un haz de rayos propagándose a la superficie cónica, o en otros términos un frente de onda esférico que incide sobre el espejo cóncavo.  $P_1$  es un punto imagen formado por la intersección de los rayos reflejados A y B, y  $P_2$  es un punto imagen formado por la intersección de los rayos reflejados B y C como se muestra en la Fig. (2.1). De esta forma, cada rayo reflejado corta al contiguo a él. El lugar de todos los puntos de intersección es la cáustica requerida por reflexión, también llamada catacáustica. Se considera el rayo reflejado  $P_i P_1$  como el representante de todos los rayos reflejados. Se asume que  $P_i$  es un punto de la superficie cónica, cuyas coordenadas están dadas por  $P_i = (z_+, y_+)$  dentro del plano meridional. Con el fin de obtener estas coordenadas, se interseca un rayo arbitrario incidente que se propaga desde la fuente puntual con la superficie

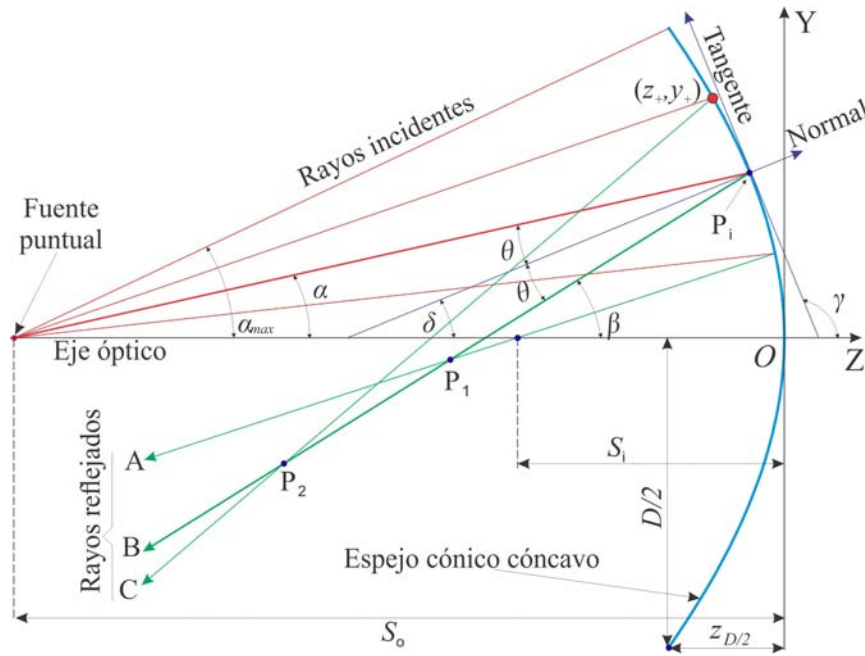


Figura 2.1: Proceso de reflexión producido por un espejo cónico cóncavo, con los parámetros asociados considerando que la fuente puntual se localiza en  $S_o$ .

óptica, cuya ecuación puede escribirse como

$$y = (z - S_o) \tan \alpha , \tag{2.1}$$

donde  $\alpha$  es un ángulo de emisión particular medido desde la fuente puntual, y para cada rayo incidente se requiere que  $\alpha \in [-\alpha_{max}, \alpha_{max}]$ , tomando en cuenta las siguientes posiciones para  $S_o$ :

$$\alpha_{max} = \arctan \left[ \frac{D}{2(|S_o| - |Z_{D/2}|)} \right], \quad \text{para } |S_o| \geq |Z_{D/2}|, \tag{2.2}$$

$$\alpha_{max} = \frac{\pi}{2} + \arctan \left[ \frac{2(|S_o| - |Z_{D/2}|)}{D} \right], \quad \text{para } |S_o| < |Z_{D/2}| ,$$

donde  $D/2$  es el semidiámetro de la superficie y  $Z_{D/2}$  es la longitud de la sagita a lo largo del eje óptico, la cual es evaluada a partir de la Ec. (2.3) tomando en cuenta los parámetros predefinidos para la superficie cónica  $z(D/2) = Z_{D/2}$  como se muestra en la Fig. (2.1). La ecuación para la superficie cónica  $z$  como función de  $y$  se escribe simplemente como

$$z = \frac{Cy^2}{1 + \sqrt{1 - (1+k)y^2C^2}} , \tag{2.3}$$

donde  $C = 1/r$  es la curvatura paraxial de la superficie y  $k$  la constante de conicidad [13].

Resolviendo las Ecs. (2.1) y (2.3) para  $z$  y  $y$ , se tiene

$$\begin{aligned} z_{\pm} &= \frac{1 + S_o C \tan^2 \alpha \pm \sqrt{1 + [2 - (1 + k)S_o C]S_o C \tan^2 \alpha}}{C(1 + k + \tan^2 \alpha)}, \\ y_{\pm} &= \tan \alpha \left[ \frac{1 - (1 + k)S_o C \pm \sqrt{1 + [2 - (1 + k)S_o C]S_o C \tan^2 \alpha}}{C(1 + k + \tan^2 \alpha)} \right], \end{aligned} \quad (2.4)$$

donde las coordenadas  $z_+$  y  $y_+$  son funciones de  $\alpha$  y representan las intersecciones de los rayos incidentes sobre el espejo. Para saber cuál es la solución adecuada, podemos hacer que  $S_o \rightarrow 0$ , entonces  $z_+ \rightarrow 0$ , lo que únicamente puede cumplirse si se toma el signo negativo para el radical. Por lo tanto

$$\begin{aligned} z_+ &= \frac{1 + S_o C \tan^2 \alpha - \sqrt{1 + [2 - (1 + k)S_o C]S_o C \tan^2 \alpha}}{C(1 + k + \tan^2 \alpha)}, \\ y_+ &= \tan \alpha \left[ \frac{1 - (1 + k)S_o C - \sqrt{1 + [2 - (1 + k)S_o C]S_o C \tan^2 \alpha}}{C(1 + k + \tan^2 \alpha)} \right], \end{aligned} \quad (2.5)$$

Es importante establecer que se ha usado la convención de signos sugerida en [23]. De la Ec. (2.3) se puede obtener la  $\tan \gamma$ , donde  $\gamma$  es el ángulo que forma la tangente a la superficie con el eje  $z$ , Fig. (2.1); evaluada sobre el espejo con coordenadas  $(z_+, y_+)$ , la cual puede escribirse simplemente como

$$\tan \gamma = \left[ \frac{\partial y}{\partial z} \right]_{y_+} = \frac{\sqrt{1 - (1 + k)y_+^2 C^2}}{C y_+}.$$

La normal a la superficie y la tangente a la superficie en el punto de incidencia cumplen la relación  $(\tan \gamma)(\tan \delta) = -1$  así se tiene

$$\delta = \arctan \left[ \frac{-C y_+}{\sqrt{1 - (1 + k)y_+^2 C^2}} \right]. \quad (2.6)$$

De la Fig. (2.1) se puede ver que  $\delta = \theta + \alpha$  y  $\beta = \theta + \delta$ , donde  $\beta$  es el ángulo entre el rayo reflejado  $PiP_1$  y el eje  $Z$ , así que utilizando la Ec. (2.6), obtenemos a  $\beta$  como función de  $\alpha$ , dada por

$$\beta(\alpha) = 2 \arctan \left[ \frac{-C y_+}{\sqrt{1 - (1 + k)y_+^2 C^2}} \right] - \alpha. \quad (2.7)$$

Continuando con el análisis para la obtención de las cáusticas, el rayo reflejado  $PiP_1$  se puede escribir en forma simple como

$$y \cos \beta - z \sin \beta = y_+ \cos \beta - z_+ \sin \beta. \quad (2.8)$$

Ésta es una familia paramétrica de rayos reflejados, en términos del ángulo de emisión  $\alpha$ , como se muestra en las Figs. (2.2a) y (2.2b) para dos superficies diferentes. La catacústica es la envolvente de esta familia de rayos. Diferenciando la Ec. (2.8) con respecto al parámetro  $\alpha$ , utilizando la regla de la cadena, y reduciendo términos, tenemos

$$y \sin \beta + z \cos \beta = y_+ \sin \beta + z_+ \cos \beta - \mathcal{M}, \quad (2.9)$$

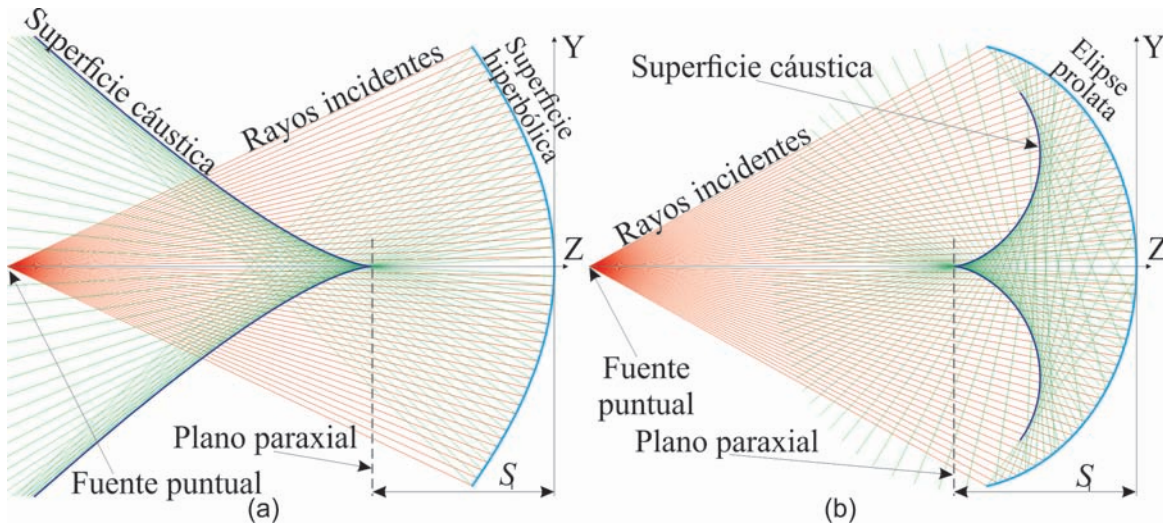


Figura 2.2: (a) Se muestra como ejemplo la cáustica producida por una rama de un espejo hiperbólico mostrando aberración esférica negativa; (b) ejemplo de una cáustica producida por una sección transversal de una elipse oblata mostrando aberración esférica positiva. En ambos casos la fuente puntual se ubica en  $2R$ .

donde se ha definido

$$\mathcal{M} \equiv \left[ \left( \frac{\partial y_+}{\partial \alpha} \right) \cos \beta - \left( \frac{\partial z_+}{\partial \alpha} \right) \text{sen} \beta \right] \left/ \left( \frac{\partial \beta}{\partial \alpha} \right) \right.$$

Por simplicidad se escriben las derivadas en la forma siguiente

$$\begin{aligned} \frac{\partial z_+}{\partial \alpha} &= \frac{\text{sen} \alpha [1 - (1+k)S_o C - \Delta]^2}{C\Delta(1+k + \tan^2 \alpha)^2 \cos^3 \alpha}, \\ \frac{\partial y_+}{\partial \alpha} &= \frac{2S_o C(1+k)[S_o C(1+k) - 2] \tan^2 \alpha - (1+k - \tan^2 \alpha)[1 - \{1 - S_o C(1+k)\}\Delta]}{C\Delta(1+k + \tan^2 \alpha)^2 \cos^2 \alpha}, \\ \frac{\partial \beta}{\partial \alpha} &= - \frac{(1 - C^2 k y_+^2) \sqrt{(1 - (k+1)C^2 y_+^2)} + 2C[\partial y_+ / \partial \alpha]}{(1 - C^2 k y_+^2) \sqrt{(1 - (k+1)C^2 y_+^2)}}, \end{aligned} \quad (2.10)$$

con

$$\Delta = \sqrt{1 + [2 - (1+k)S_o C]S_o C \tan^2 \alpha}.$$

Para obtener la envolvente de la familia de rayos reflejados de acuerdo a [24], se resuelven las Ecs. (2.8) y (2.9) para  $(z, y)$ ; de esta manera se tiene

$$\begin{aligned} Z_c &= z_+ - \mathcal{M} \cos \beta, \\ Y_c &= y_+ - \mathcal{M} \text{sen} \beta, \end{aligned} \quad (2.11)$$

donde se ha reescrito  $z \rightarrow Z_c$  y  $y \rightarrow Y_c$ , con la finalidad de tener en claro que se hace referencia a las ecuaciones paramétricas de la cáustica, ya que el subíndice  $c$  indica catacústica. Es importante recordar nuevamente, que la Ec. (2.11) es la cáustica producida por un espejo cónico cóncavo para rayos meridionales como función de un ángulo de emisión arbitrario, para cada uno de los rayos procedentes de la fuente puntual, que inciden sobre el espejo, cuando la fuente es colocada en  $S_o$ , en otras palabras, la Ec. (2.11) proporciona las coordenadas del lugar de puntos que paraméricamente

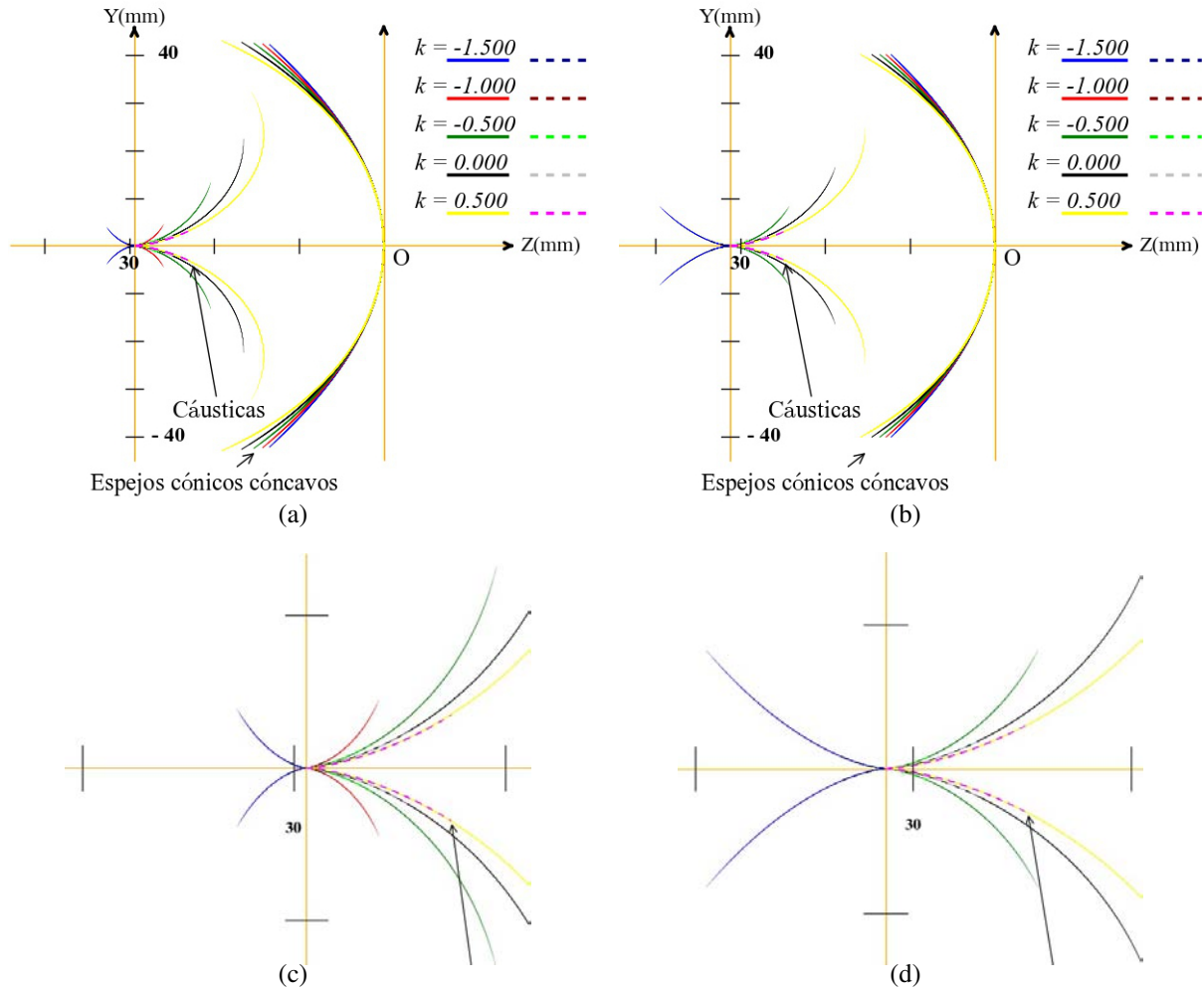


Figura 2.3: Comparación entre las cáusticas producidas por espejos cónicos cóncavos considerando cinco constantes de conicidad, las curvas continuas representan las cáusticas exactas y, las curvas punteadas corresponden a las cáusticas paraxiales; (a) para un frente de onda esférico, con  $S_o = 500$  mm; (b) para un frente de onda plano, con  $S_o \rightarrow \infty$ ; (c) Zoom para las cáusticas exactas y paraxiales que se ven en (a), desde un sistema de referencia centrado en  $S_i = 29.412$  mm; (d) Zoom para las cáusticas exactas y paraxiales que se ven en (b), desde un sistema de referencia centrado en  $S_i = 31.250$  mm. Para ambos casos  $C = -0.016$  mm<sup>-1</sup>.

representan la catacáustica producida por un espejo cónico cóncavo en un plano meridional como función de  $\alpha$  cuando la fuente puntual es ubicada en  $S_o$ . Para  $\alpha \rightarrow 0$ , en la región paraxial, donde las alturas de los puntos de incidencia de los rayos emitidos por la fuente, medidas respecto al eje óptico, son muy pequeñas; se tiene que la Ec. (2.11) se reduce simplemente a

$$Z_c(0) \equiv S_i = S_o / (2S_o C - 1), \quad Y_c(0) = 0, \quad (2.12)$$

donde  $S_i$  es un punto singular, el cual proporciona la posición para la imagen paraxial a lo largo del eje óptico, y está relacionado a la distancia focal en la siguiente forma:  $1/f = 2C = 1/S_o + 1/S_i$  de

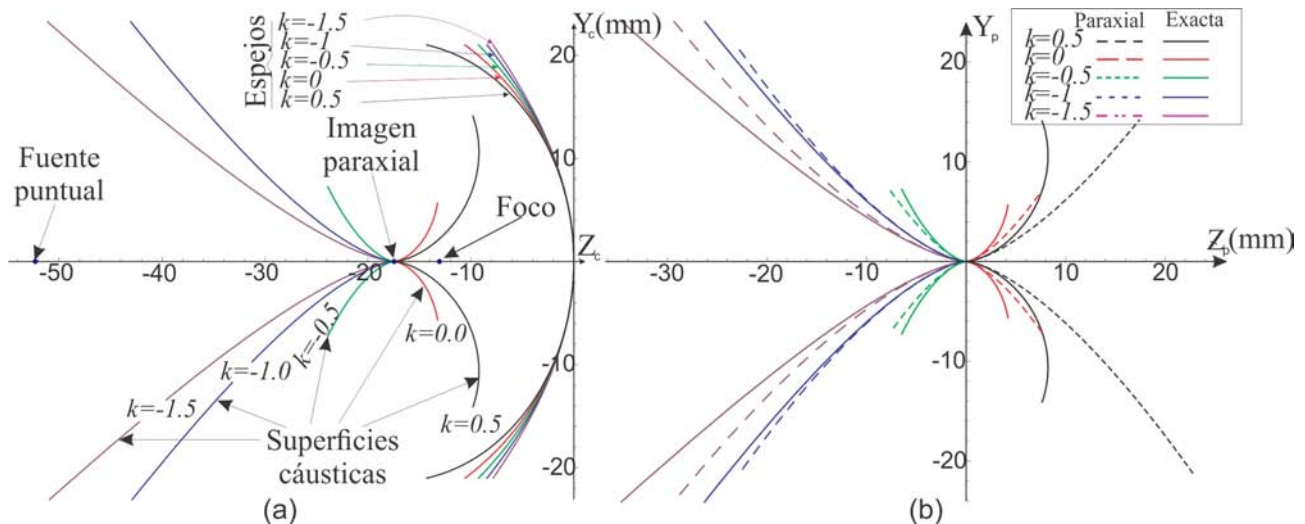


Figura 2.4: (a) Otra comparación entre las cáusticas producidas por espejos cónicos cóncavos considerando cinco constantes de conicidad, aquí  $S_o = 52.000$  mm y  $S_i = 18.000$  mm; (b) acercamiento exclusivamente de las superficies cáusticas exactas y paraxiales. La apertura de entrada para todos los casos es de  $-21$  mm  $\leq h \leq 21$  mm.

acuerdo al sistema de referencia con el que se ha trabajado, en esta configuración se ha considerado que  $C < 0$  y que  $-S_o > 0$ ; por lo tanto  $f > 0$ . Es importante comentar que, de la Ec. (2.12),  $Z_c(0)$  conduce a la llamada ecuación de Gauss.

De la Ec. (2.11) puede verificarse que la cáustica toca a la superficie si  $\mathcal{M} = 0$ ; o equivalentemente, si  $\partial\beta/\partial\alpha = \infty$  solamente si el denominador  $(1 - C^2ky_+^2) \sqrt{(1 - (k + 1)C^2y_+^2)} = 0$ ; así, la Ec. (2.10) requiere que  $|r| = |y_+ \sqrt{k + 1}|$ , para  $k \geq -1$ ; esto significa geoméricamente que las reflexiones de los rayos incidentes en puntos sobre la superficie, que tengan un valor para  $y_+$  menor o igual al de la condición mostrada, contribuyen a la formación de la cáustica. Para el trazado de rayos, se han considerado cinco espejos usando los siguientes parámetros: posición de la fuente puntual  $S_o = 500$  mm y  $S_o \rightarrow \infty$ , radio de curvatura paraxial  $r = 62.500$  mm, curvatura  $C = 0.016$  mm<sup>-1</sup>, diámetro  $D = 84$  mm, para  $k = -1.500, -1.000, -0.500, 0.000, 0.500$ ; que representan la forma de una hipérbola, una parábola, una elipse prolata, una esfera, y una elipse oblata, respectivamente, como se muestra en las Figs. (2.3). También, se hace un trazo de rayos para el que se consideran  $F/\# = 0.311$  con los siguientes parámetros: radio de curvatura  $r = 26.150$  mm,  $C = 0.038$  mm<sup>-1</sup>,  $S_o = 52.000$  mm,  $S_i = 18.000$  mm, diámetro  $D = 42.000$  mm, para  $k = -1.500, -1.000, -0.500, 0.000, 0.500$ , véase la Fig. (2.4).

### 2.3. Aproximación a tercer orden

Para poder observar el comportamiento de las cáusticas por reflexión de las superficies cónicas cóncavas cerca de la zona paraxial se hace una expansión de la Ec. (2.11) en serie de Taylor para  $Z_c(\alpha)$  y  $Y_c(\alpha)$ , que nos proporcionan una serie asintótica para cada función paramétrica (una serie asintótica es una serie formal de funciones tal que converge asintóticamente a una función dada, lo cual quiere decir que si se corta la serie se obtiene una aproximación de la función de la que es serie asintótica, pero el límite formal de la serie al momento de sumar todos sus elementos no es

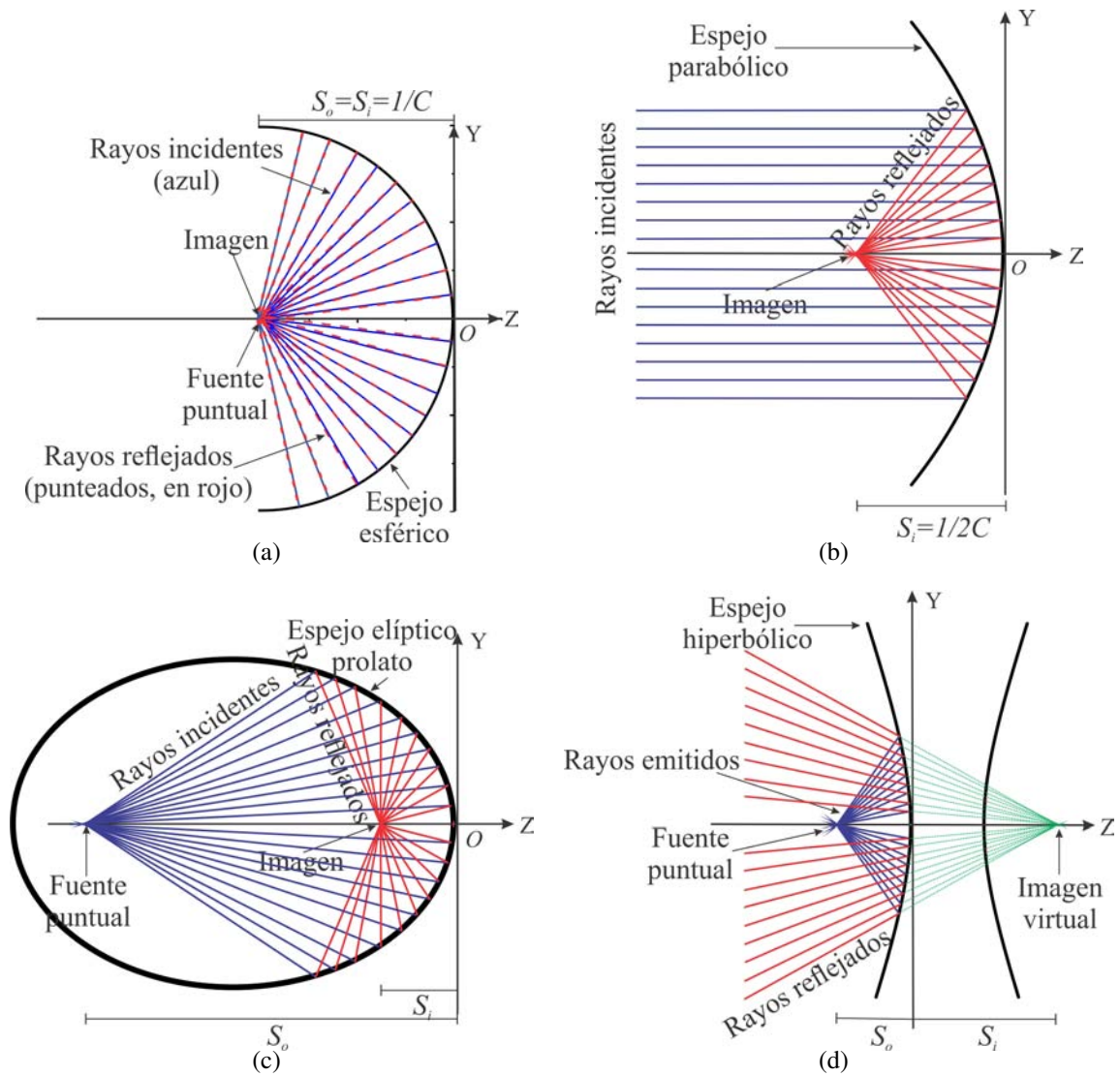


Figura 2.5: Esquema de la posición del objeto y la imagen correspondiente para diferentes espejos cónicos. A los puntos esquematizados se les conoce como puntos conjugados o puntos estigmáticos, es decir, los lugares del sistema óptico en los que un punto objeto corresponde a un punto imagen. (a) Espejo esférico, (b) espejo parabólico, (c) espejo elíptico prolato y (d) espejo hiperbólico.

esa misma función, de hecho diverge, pudiendo el argumento de la serie diverger también a infinito o no), y donde la condición para estar cerca de la región paraxial es que el ángulo de emisión sea muy pequeño, es decir,  $\alpha \ll 1$ , lo que queda establecido a partir de las Ecs. (2.1) y (2.3), en la

siguiente forma

$$\alpha_{max} = \arctan \left[ \frac{|y|}{(|S_o| - |z_y|)} \right], \quad \text{para } |y| \ll |S_o| - |z_y|,$$

$$\alpha_{max} = \frac{\pi}{2} - \arctan \left[ \frac{(|z_y| - |S_o|)}{|y|} \right], \quad \text{para } |y| \ll |z_y| - |S_o|.$$
(2.13)

Con esta condición tenemos, al hacer la expansión en serie de Taylor, que

$$Z_c(\alpha) = \frac{S_o}{-1 + 2S_o C} - \frac{S_o^2 C [1 - S_o C (2 - S_o C (1 + k))]}{(2S_o C - 1)^2} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} g_n \alpha^{2n} \right],$$

$$Y_c(\alpha) = \frac{S_o^2 C [1 - S_o C (2 - S_o C (1 + k))]}{(2S_o C - 1)} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} G_n \alpha^{2n+1} \right],$$
(2.14)

donde  $g_n$  y  $G_n$  son funciones de  $[C, k, S_o]$ . Se puede ver que  $Z_c$  es una función par y  $Y_c$  es una función impar de  $\alpha$ . Ya que  $\alpha \ll 1$  significa físicamente que estamos considerando la región paraxial, si tomamos los polinomios a primer orden  $n = 1$  y despreciamos los términos de orden superior de la Ec. (2.14), con  $g_1 = 3$  y  $G_1 = -2$ , conseguimos

$$Z_{c_{par}}(\alpha) = \frac{S_o}{-1 + 2S_o C} - \frac{3S_o^2 C [1 - S_o C (2 - S_o C (1 + k))] \alpha^2}{(2S_o C - 1)^2},$$

$$Y_{c_{par}}(\alpha) = -\frac{2S_o^2 C [1 - S_o C (2 - S_o C (1 + k))] \alpha^3}{(2S_o C - 1)},$$
(2.15)

donde el subíndice  $c_{par}$  significa catacústica paraxial; por lo tanto, la Ec. (2.15) proporciona una ecuación paramétrica para la cáustica en la región paraxial. Alternativamente, de la Ec. (2.15), se puede eliminar el parámetro  $\alpha$  para así tener una forma no paramétrica dada por

$$\mathcal{Y}_p = -\mathcal{K}^{1/2} \mathcal{Z}_p^{3/2},$$
(2.16)

donde  $\mathcal{K} = -4(2S_o C - 1)^4 / (27 [S_o^2 C \{1 - [2 - S_o C (1 + k)] S_o C\}])$  es una constante que depende de todos los parámetros involucrados en el proceso de reflexión. Además, se ha realizado un cambio de coordenadas dado por  $\mathcal{Z}_p = Z_{c_{par}} - S_i$  y  $\mathcal{Y}_p = Y_{c_{par}}$ . Entonces, como es bien sabido, la catacústica en la región paraxial es una parábola semicúbica con origen en  $S_i$ , de acuerdo a [25]- [33], tal como se muestra en la Fig. (2.4(b)), donde se tiene la aproximación a tercer orden para cada uno de los espejos cerca del plano paraxial común; la constante  $\mathcal{K}$  modula la forma de la catacústica. Más aún, esta ecuación es una buena aproximación para  $-1 < k < 0$  pero falla para  $k \geq 0$ . Un hecho importante es que, si se reduce la apertura de entrada, las cáusticas exactas y las cáusticas a tercer orden son muy similares, incluso si  $k \geq 0$ ; se puede ver también que la aberración esférica cambia de signo positivo a signo negativo para  $k > 0$ , y viceversa para  $k < 0$ .

Matemáticamente, de la Ec. (2.16),  $\mathcal{K}$  está directamente relacionada a la cantidad de aberración esférica producida por los espejos, y como puede observarse en la Fig. (2.4(b)) el área bajo la curva proporciona la cantidad de la aberración mencionada; así, si  $\mathcal{K} = 0$ , es decir, aberración esférica cero, entonces  $S_o = 1/2C$  o  $C = 1/2S_o$ . Por lo tanto, como es bien sabido, un espejo



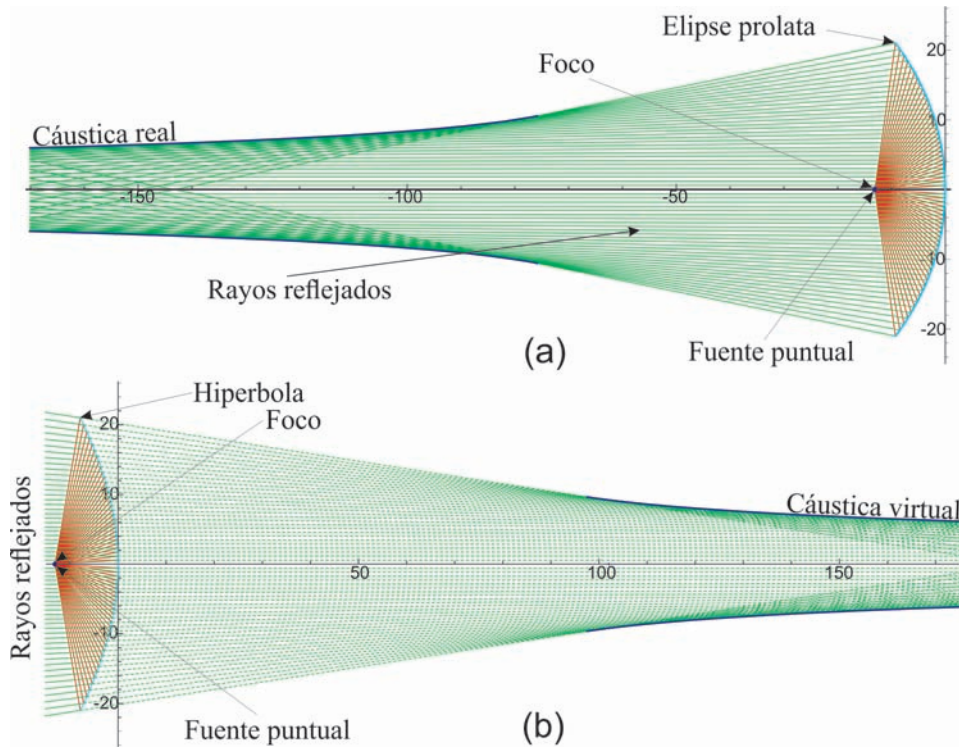


Figura 2.6: (a) Superficie cáustica real producida por un espejo elíptico prolato; (b) superficie cáustica virtual producida por una rama de hipérbola. En ambos casos, se ha asumido  $S_o = 1/(2C)$ .

parabólico produce menor aberración esférica que cualquiera de los otros tipos de espejos cuando son iluminados con un haz colimado. Es importante establecer que, de la Ec. (2.14) o (2.15), si

$$S_o^2 C [1 - S_o C (2 - S_o C (1 + k))] = 0, \tag{2.17}$$

entonces  $Y_c = Y_{c_{par}} \rightarrow 0$  y  $Z_c = Z_{c_{par}} \rightarrow S_i$ ; esto significa que los espejos producen una imagen puntual; entonces, la Ec. (2.17) constituye una fórmula para reducir la aberración esférica a cualquier orden cuando un espejo cónico cóncavo se encuentra iluminado con un frente de onda esférico cuya fuente puntual se localiza en  $S_o$ . Se puede notar de la Ec. (2.17) que tres parámetros se encuentran involucrados en el proceso de reflexión para un espejo cónico cóncavo, y que si se definen *a priori* dos de esos valores es posible resolver la Ec. (2.17) para el restante. Así, considerando que  $S_o^2 C \neq 0$  y resolviendo para cada uno de los parámetros en el proceso, tenemos

$$\begin{aligned} S_o &= \frac{1}{C(1 \mp \sqrt{-k})}, \\ C &= \frac{1}{S_o(1 \mp \sqrt{-k})}, \\ k &= -\left[1 - \frac{1}{S_o C}\right]^2, \end{aligned} \tag{2.18}$$

lo anterior está en concordancia con el hecho de que, para objetos distantes,  $S_o \rightarrow \infty$ , entonces, de la tercera expresión,  $k = -1$ , lo que corresponde a una superficie parabólica [34]. Además, en la Ec.

(2.18) se puede ver claramente la simetría para  $S_o$  y  $C$ , lo que significa que los resultados que se puedan obtener con las variaciones de la posición de la fuente puntual también son semejantes para un cambio de curvatura en los espejos cónicos cóncavos. Notemos también que, de la Ec. (2.18), los valores para  $S_o$  y  $C$  sólo tienen sentido físico si  $k \leq 0$ , y por lo tanto un elipsoide oblató no reduce la aberración esférica. Si sustituimos la Ec. (2.18) para  $S_o$  en la Ec. (2.12) y la reducimos, tenemos

$$S_i = \frac{1}{C(1 \pm \sqrt{-k})}. \quad (2.19)$$

Se puede ver claramente que las Ecs. (2.18) y (2.19) son un par de puntos conjugados<sup>1</sup>, a los que también se les conoce como puntos estigmáticos<sup>2</sup>. Por ejemplo, si se sustituye  $k = 0$  en las Ecs. (2.18) y (2.19), obtenemos  $S_{o_{\mp}} = S_{i_{\pm}} = 1/C$ , que es comúnmente considerado en las pruebas geométricas tradicionales (Ronchi y Hartmann), a fin de reducir la aberración esférica introducida por la superficie esférica bajo prueba, y entonces tenemos una superficie esférica, véase la Fig. (2.5(a)). Si se considera  $k = -1$  en las mismas ecuaciones, tenemos  $S_{o_{-\infty}} = S_{i_{+}} = 1/(2C)$ , y viceversa, por lo que se trata de una superficie parabólica, véase la Fig. (2.5(b)). Por otra parte, como  $k = -\epsilon^2$ , para una elipse  $-k = (A^2 - B^2)/A^2$  y  $C = -A/B^2$  (que se puede calcular con la Ec. (3), de la referencia [35],  $C = AB/[A^2 \cos^2(t) + B^2 \sin^2(t)]^{3/2}$ ), si se sustituyen en las Ecs. (2.18) y (2.19), se consigue  $S_{o_{-}} = -[A + (A^2 - B^2)^{1/2}]$  y  $S_{i_{+}} = -[A^2 - (A^2 - B^2)]$ , lo que geométricamente significa que, si la fuente puntual se coloca en el segundo foco de un elipsoide prolato, entonces su imagen se ubicará en el primer foco, y viceversa, Fig. (2.5(c)). Ahora, si se sustituye  $-k = (A^2 + B^2)/A^2$  y  $C = -A/B^2$  en las Ecs. (2.18) y (2.19), se consigue  $S_{o_{+}} = -[A - (A^2 + B^2)^{1/2}]$  y  $S_{i_{-}} = -[A^2 + (A^2 + B^2)]$ , cuyo significado geométrico es que, si la fuente puntual se coloca sobre el foco de la rama izquierda de una hipérbola, entonces la imagen puntual se ubica en el foco de la rama derecha de la hipérbola eliminando la aberración esférica, Fig. (2.5(d)); donde  $0 < B < A$  son el semieje menor y semieje mayor para la elipse y la hipérbola, respectivamente, y estos resultados concuerdan con [12]-[33].

Es importante comentar que, de las Ecs. (2.14) y (2.15), si  $S_o = 1/(2C)$ , entonces el denominador tiende a cero y, por lo tanto, se tiene una singularidad. Geométricamente se puede interpretar de la siguiente forma, si la fuente puntual se coloca en el foco paraxial, entonces la imagen se formará en infinito. De la Ec. (2.18) se tiene que,  $S_{o_{+}} = 1/(2C)$  y  $S_{i_{-}} = \pm\infty$ , donde  $S_{i_{-}} \rightarrow -\infty$  para elipses oblatas, esferas, elipses prolatas, y superficies parabólicas; y  $S_{i_{-}} \rightarrow +\infty$  para hipérbolas, como se observa en las Figs. (2.6(a)) y (2.6(b)), respectivamente. También, si se utilizan las Ecs. (2.18) y (2.19), es posible proveer una expresión sencilla para la longitud de camino óptico ( $LCO$ ) para un rayo arbitrario propagándose desde la fuente puntual hasta la imagen puntual dada por  $LCO = S_o + S_i = 2/(C[1 + k])$ , en concordancia con [40], Ec. (2.35).

Además, considerando que la posición de la fuente puntual entre el foco y el vértice de la superficie ( $0 < |S_o| < |Z_d|$ ), el espejo produce por reflexión superficies cáusticas reales y virtuales, donde la parte real es formada considerando los rayos marginales o las reflexiones que van en el sentido de los rayos incidentes. En otras palabras, considerando valores angulares mayores que la incidencia rasante (cerca del eje óptico), la cáustica virtual se forma sobre las extensiones de los rayos paraxiales o las extensiones de las reflexiones. Considerando ángulos cercanos a la incidencia normal,

<sup>1</sup>Del principio de reversibilidad una fuente puntual en  $S_i$  formaría una imagen en  $S_o$  y, por ello, se les llama puntos conjugados.

<sup>2</sup>Si para un cono de rayos procedente de  $S_o$  hay un cono correspondiente de rayos que pasa por  $S_i$ , al sistema óptico se le llama estigmático para esos puntos, y a ellos se les nombra puntos estigmáticos.

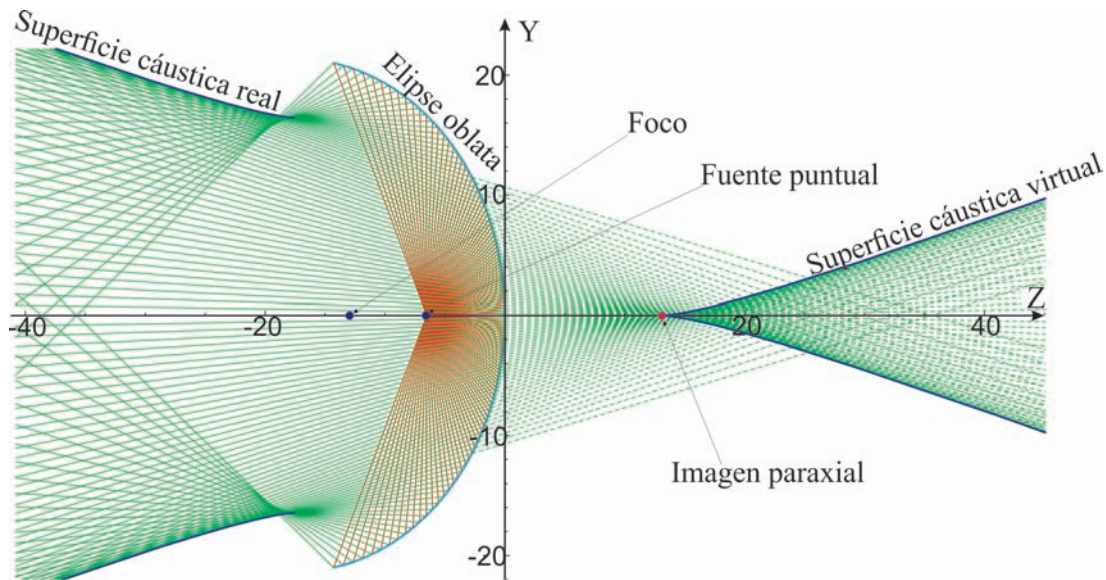


Figura 2.7: Cáusticas real y virtual producidas por una elipse oblata considerando que la fuente puntual está colocada en  $|S_o| < |1/(2C)|$ .

la cáustica virtual se forma en las extensiones de los rayos como se muestra en la Fig. (2.7). Se ha considerado el ángulo máximo de incidencia a través de la Ec. (2.2). La cúspide formada por la cáustica virtual proporciona la posición donde la imagen paraxial está localizada de acuerdo a la representación acostumbrada por la ecuación espejo-imagen. La superficie cáustica real se extiende más cerca de la superficie reflectora para  $k > 0$  que para  $k < -1$ , pero el área bajo la curva para la superficie cáustica virtual es mayor para  $k < -1$  que para  $1 < k$ , como se muestra en la Fig. (2.8). Finalmente, en la Fig. (2.9), se muestra una comparación entre las cáusticas producidas por un espejo cónico cóncavo con  $F/0.169$ ; constante de conicidad,  $k = -0.556$ ; curvatura paraxial,  $C = -0.030 \text{ mm}^{-1}$ ; radio paraxial,  $r = 33.867 \text{ mm}$ ; semi eje mayor,  $A = 76.200 \text{ mm}$ ; semi eje menor,  $B = 50.800 \text{ mm}$  y diámetro,  $D = 100.178 \text{ mm}$ ; cuando la fuente puntual se ubica sobre el eje óptico en diversas posiciones. Las cáusticas en azul, rojo y verde corresponden a una aberración esférica positiva; mientras que las cáusticas en negro, amarillo y mostaza corresponden a una aberración esférica negativa.

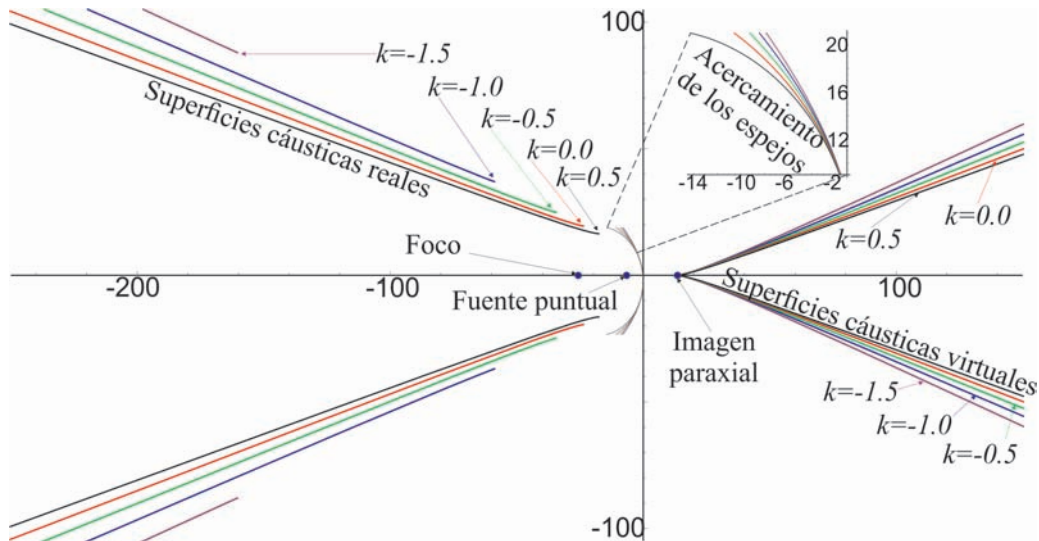


Figura 2.8: Comparación entre las cáusticas reales y virtuales producidas analizando cinco constantes cónicas diferentes. El diámetro en todos los casos es  $D = 42$  mm, el acercamiento de las líneas continuas del lado derecho representa a los espejos. La cúspide de la cáustica virtual representa la posición de la imagen de acuerdo a la ecuación de los espejos.

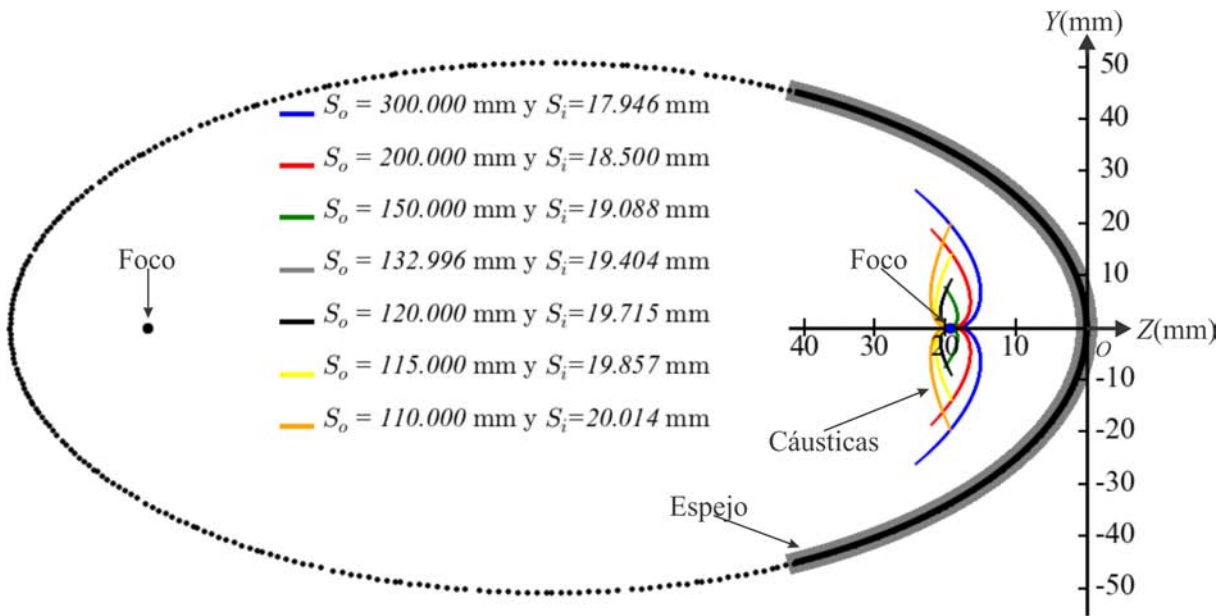


Figura 2.9: Comparación entre las cáusticas producidas por un espejo cónico cóncavo considerando diferentes valores para la posición de la fuente puntual; con  $F/0.169$ ; constante de conicidad,  $k = -0.556$ ; curvatura paraxial,  $C = -0.030$  mm<sup>-1</sup>; radio paraxial,  $r = 33.867$  mm; semi eje mayor,  $A = 76.200$  mm; semi eje menor,  $B = 50.800$  mm y diámetro,  $D = 100.178$  mm.

## 2.4. Catacústica para un frente de onda plano incidente

A través de esta sección, se ha considerado  $h$  como una variable de la altura de cada rayo incidente y  $H$  como un valor predeterminado para un rayo incidente sobre la superficie óptica. Sea  $H$  la apertura de entrada; en esta forma  $h \in [-H, H]$ , mediante el uso de los parámetros mencionados anteriormente para  $r = 1/C$  y  $k$ , tomando una apertura de entrada de  $-21 \text{ mm} \leq h \leq 21 \text{ mm}$ . Sin pérdida de generalidad, se asume que los rayos provienen del lado izquierdo y que la fuente puntual se ubica en infinito, y una onda plana incide sobre el espejo cónico cóncavo a lo largo del eje óptico. En la sección 2.2, de la Fig. (2.1), se ha comentado que  $\delta = \theta + \alpha$ , donde  $\theta$  representa el ángulo de incidencia o el de reflexión (son iguales), medidos a partir de la normal con la superficie; y que  $\beta = 2\delta - \alpha$ ; por lo que para un frente plano el ángulo de emisión es igual a cero, es decir,  $\alpha = 0$ , por lo tanto, en este caso  $\delta = \theta_i$  y  $\beta = 2\delta = 2\theta_i$ . Entonces, si cambiamos  $y_+$  por  $h$  en las Ecs. (2.6) y (2.7), tomando en cuenta que  $\alpha = 0$ , obtenemos que

$$\begin{aligned}\theta_i &= \arctan \left[ \frac{-Ch}{\sqrt{1 - (k+1)C^2h^2}} \right], \\ \beta &= 2 \arctan \left[ \frac{-Ch}{\sqrt{1 - (k+1)C^2h^2}} \right],\end{aligned}\quad (2.20)$$

así que simplemente se puede escribir

$$\begin{aligned}z_+ &= \frac{Ch^2}{1 + \sqrt{1 - (k+1)C^2h^2}}, \\ y_+ &= h,\end{aligned}\quad (2.21)$$

que proporcionan las coordenadas para un punto sobre la superficie cónica desde la parte superior del espejo. Si derivamos la última expresión con respecto al parámetro  $h$  se tiene

$$\begin{aligned}\frac{\partial z_+}{\partial h} &= \frac{C^3h^2(1+k)}{\sqrt{1 - C^2h^2(1+k)} \left[ 1 + \sqrt{1 - C^2h^2(1+k)} \right]^2} + \frac{C}{1 + \sqrt{1 - C^2h^2(1+k)}}, \\ \frac{\partial z_+}{\partial h} &= 1.\end{aligned}\quad (2.22)$$

Y mediante la sustitución de los valores de las Ecs. (2.20), (2.21) y (2.22) en la Ec. (2.8) y reduciendo términos, se puede obtener la ecuación para un rayo reflejado, que está dada por

$$y = h \left( 1 + \frac{2\sqrt{1 - (1+k)h^2C^2} \left( 1 - \sqrt{1 - (1+k)h^2C^2} - (1+k)Cz \right)}{(1+k)(1 - (2+k)C^2h^2)} \right). \quad (2.23)$$

Ahora bien, haciendo un paréntesis, es conveniente hacer unas definiciones que permitan comprender mejor lo que se escribe en la siguiente sección, concerniente al círculo de mínima confusión. Cuando  $\beta = \pi/2$ , entonces el ángulo de reflexión es  $\theta_i = \pi/4$ . Así que se puede convenir que todos los rayos reflejados, para los cuales  $\pi/2 < \beta$  y  $\pi/4 < \theta_i$  se llamen rayos obtusos; y que aquellos rayos reflejados que cumplan con  $\beta < \pi/2$  y  $\theta_i < \pi/4$  se nombren rayos agudos.

Continuando, a fin de obtener la envolvente de esta familia de rayos reflejados o, en otras palabras, la catacústica, se sigue el procedimiento explicado previamente; diferenciando la Ec. (2.23) con

respecto a  $h$  y resolviendo entre el resultado y la Ec. (2.23) para  $(z, y)$ , se tiene

$$\begin{aligned} Z_{pw} &= \frac{Ch^2}{1 + \sqrt{1 - (1+k)h^2C^2}} + \frac{[1 - (2+k)C^2h^2 \sqrt{1 - (1+k)C^2h^2}]}{2C}, \\ Y_{pw} &= (1+k)C^2h^3, \end{aligned} \quad (2.24)$$

donde  $z \rightarrow Z_{pw}$  y  $y \rightarrow Y_{pw}$ , nos dan las coordenadas del lugar de los puntos que paraméricamente representan la cáustica producida por un espejo cónico cóncavo en un plano meridional como función de  $h$ , tomando en cuenta que un frente de onda plano incide sobre el espejo a lo largo del eje óptico, como se muestra en las Figs. (2.10(a)) y (2.10(b)). Estas fórmulas concuerdan con [8]. Es importante notar que la Ec. (2.24) puede obtenerse de la Ec. (5) de [2] asumiendo que  $t = 0$ ,  $n_i = -n_a$ .

## 2.5. Círculo de mínima confusión en un espejo cónico cóncavo

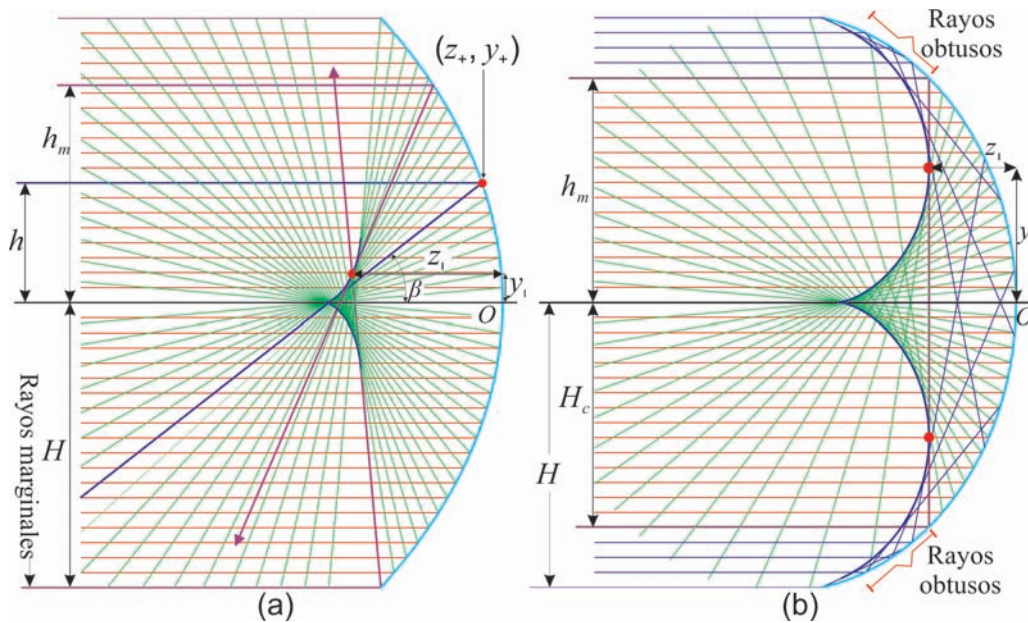


Figura 2.10: Proceso de reflexión producido por un espejo cónico cóncavo y sus parámetros asociados para obtener el círculo de mínima confusión considerando que la fuente puntual está localizada en infinito. (a) Rayos agudos; (b) rayos obtusos.

Es bien conocido que hay un plano donde el haz enfocado de rayos tiene un diámetro mínimo, y este plano puede ser considerado geoméricamente como el mejor enfoque [36],[37]. El disco de luz que se forma en este mejor enfoque así definido es conocido como el círculo de mínima confusión (CMC). La forma de obtener el CMC es relativamente simple [22]. Si se considera un rayo marginal de la parte de abajo del espejo como se muestra en la Fig. (2.10(a)), el CMC es colocado en la intersección entre un rayo marginal y la superficie cáustica de los rayos incidentes de la parte de arriba cuyas coordenadas se han definido como  $(z_1, y_1)$ . Como puede verse en la Fig. (2.10(b)), los rayos obtusos no contribuyen al CMC porque ellos producirán múltiples reflexiones

[7]. De esta forma, de la Ec. (2.24), la condición  $(\partial Y_{c_{pw}}/\partial Z_{c_{pw}}) \rightarrow \infty = 2CH(1-C^2H^2(1+k))^{1/2}/[1-C^2H^2(2+k)]$  proporciona una fórmula para un rayo reflejado de propagación perpendicular al eje óptico solamente si  $C^2H^2(2+k) = 1$ ; así, finalmente resolviendo para  $H$  y  $k$ , se obtiene

$$\begin{aligned} H_c &= \frac{1}{C\sqrt{k+2}} = \frac{R}{\sqrt{k+2}}, \quad \text{si } k > -2, \\ k_c &= \frac{1-2C^2H^2}{C^2H^2} = \frac{R^2-2H^2}{H^2}, \quad \text{si } H < d, \end{aligned} \quad (2.25)$$

donde el subíndice  $c$  quiere decir crítico. La Ec. (2.25) impone que,  $|H_c| > |H|$  y  $k_c > k$ , no hay rayos obtusos; por otra parte, si  $|H| > |H_c|$  y  $k > k_c$ , el espejo puede ser utilizado en aplicaciones que no requieran formación de imágenes, por ejemplo en iluminación. Con el fin de obtener el CMC, se ha impuesto de la Ec. (2.25) que  $|H_c| > |H|$  se satisfaga considerando de esta forma exclusivamente rayos agudos, y se ha elegido  $H < 0$  como la altura para el rayo marginal incidente, y su ecuación puede ser escrita como

$$y = -H \left( 1 + \frac{2\sqrt{1-(1+k)C^2H^2} \left( 1 - \sqrt{1-(1+k)C^2H^2} - (1+k)Cz \right)}{(1+k)(1-C^2H^2(2+k))} \right). \quad (2.26)$$

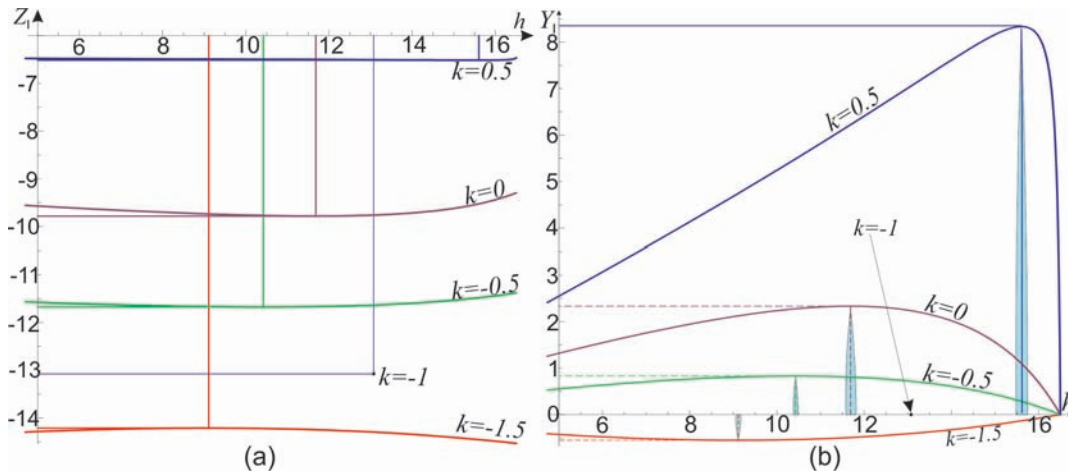


Figura 2.11: (a) Valores máximos o mínimos para  $h$  evaluado en la coordenada  $Z_I$  que proporciona la distancia a la que se encuentra el CMC; (b) Valores máximos y mínimos para  $h$  evaluada en la coordenada  $Y_I$  que proporciona el radio del CMC de cada espejo, considerando una apertura de entrada de  $H = 16.5$  mm.

El siguiente paso es el de resolver para  $(z, y)$  comparando las Ecs. (2.24) y (2.26), obteniendo un polinomio para  $h$  dado por

$$C^2(h+H)^2(1+k)^2 \times [H(2h-H)\{1-k(U^2+C^2H^2)\} - 3C^2h^2H^2 - C^2h^3(h-2H)(1+k)\{1+k(U^2-C^2H^2)\}] = 0,$$

considerando que  $C^2(h+H)^2(1+k)^2 \neq 0$ , se reduce a

$$H(2h-H)[1-k(U^2+C^2H^2)] = 3C^2h^2H^2 + C^2h^3(h-2H)(1+k)[1+k(U^2-C^2H^2)], \quad (2.27)$$

donde se ha definido  $U = (1 - (k + 1)C^2H^2)^{1/2}$  y cuya solución para  $h$  se puede escribir como  $h_m$ . Resolver la Ec. (2.27) es realmente complicado porque se requiere resolver una ecuación de cuarto grado para  $h$ . Incluso, a pesar de que actualmente existe software para resolverla por métodos numéricos, es importante remarcar que requerimos que  $h_m$  sea un número real. Un método alternativo para obtener el CMC es utilizando la Ec. (2.26) e intersectándola con un rayo que provenga de la parte de arriba del espejo cuya altura  $h > 0$  no se conoce. Resolviendo para  $(z, y)$  de las Ecs. (2.26) y (2.23) obtenemos un punto donde ambos rayos inciden, las coordenadas de este punto quedan en términos de  $h$  y están dadas por

$$\begin{aligned} Z_I(h) &= \frac{1}{(1+k)C} + \frac{C(h^2H^2(h+H)C^2 - H^3u^2 - h^3U^2)}{2(Hu + hU)(uU - hHC^2)} \\ &\quad - \frac{(1-k)((h+H)u^2U^2 - hHC^2(Hu^2 + hU^2))}{2C(1+k)(Hu + hU)(uU - hHC^2)}, \\ Y_I &= \frac{hH(uU(1-k)(u-U) - (1+k)C^2(H^2u - h^2U))}{(1+k)(Hu + hU)(hHC^2 - uU)}, \end{aligned} \quad (2.28)$$

donde se ha definido  $U = \sqrt{1 - (k + 1)C^2H^2}$  y  $u = \sqrt{1 - (k + 1)C^2h^2}$  y el subíndice  $I$  significa que es la intersección entre el rayo marginal y un rayo reflejado con una altura arbitraria. De la Ec. (2.28),  $h$  es la única cantidad que varía, y es posible obtener el valor para cada altura y posteriormente buscar el valor máximo o mínimo que nos proporcione los valores críticos para  $h_m$ . Es decir, la Ec. (2.28), es una función de  $h$  que geoméricamente representa los puntos de intersección entre el rayo marginal reflejado y el resto de los rayos reflejados por el espejo. Diferenciando la Ec. (2.28) con respecto a  $h$  para  $Z_I$  o para  $Y_I$  y resolviendo a fin de encontrar los valores críticos para  $h_m$  como se sugiere en [25]-[26], este método se muestra en la Fig. (2.11(a)) para varios espejos cóncavos. Alternativamente, resolviendo  $Y_I(h) = Y_{c_{pw}}$  de las Ecs. (2.24) y (2.28) proporciona una ecuación similar a la Ec. (2.27). Con el fin de tener una solución más simple, sin pérdida de generalidad, se puede considerar que  $|h| \ll |R|$ ; así, de la Ec. (2.27), haciendo una expansión en serie de Taylor a segundo orden para  $h$  y reduciendo términos, se tiene

$$3C^2h^2H \approx (2h - H)(1 - k + C^2H^2k^2). \quad (2.29)$$

Finalmente, resolviendo para  $h$ , esta ecuación da la altura para los rayos incidentes, que proporcionan las coordenadas del CMC, cuya solución puede ser escrita como

$$h_m \approx \frac{1 - k(1 - kC^2H^2) - \sqrt{[1 - k(1 - kC^2H^2)][1 - k - C^2H^2(3 - k^2)]}}{3C^2H}. \quad (2.30)$$

Sustituyendo la Ec. (2.30) en cualquiera de las ecuaciones, la Ec. (2.24) o la Ec. (2.28), tenemos para  $z_l = Z_{c_{pw}}(h_m) = Z_I(h_m)$  la longitud a lo largo del eje  $\mathbf{Z}$  donde el CMC está colocado, como se muestra en la Fig. (2.11(a)). Para el eje  $\mathbf{Y}$ ,  $y_l = Y_{c_{pw}}(h_m) = Y_I(h_m)$  proporciona el radio del CMC, como se muestra en la Fig. (2.11(b)). Para  $k = -1.5$ , el plano del CMC está más lejos del vértice del espejo que para  $k = 0.5$ ; más aún, para  $k \rightarrow \pm 0$ , el radio del CMC es menor que para  $k \neq \pm 0$ . Se concluye que, para  $k = -1$ , el espejo produce una imagen perfecta y que, para  $k > 0$ , el espejo puede aplicarse a sistemas ópticos no formadores de imágenes.



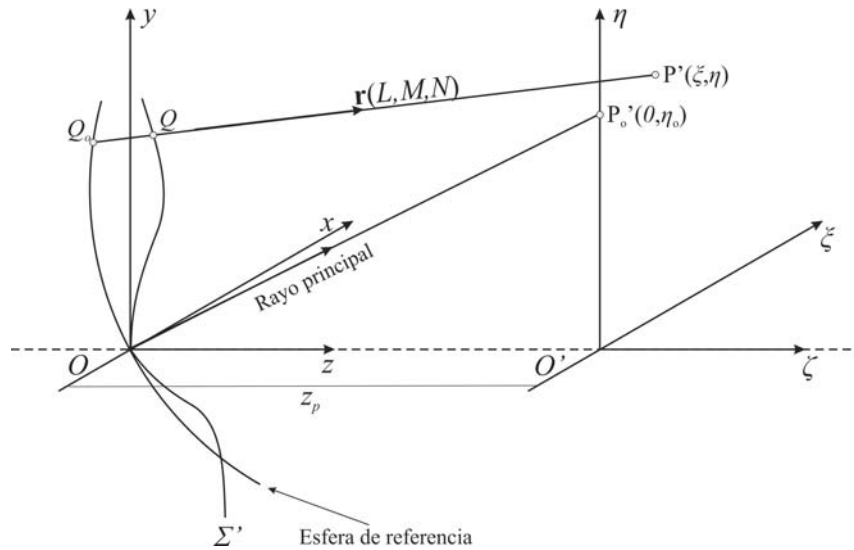


Figura 2.12: Aberración del frente de onda incidente y aberración transversal del rayo incidente. Se muestra el centro de la pupila de salida de un sistema óptico simétrico ubicado en  $O$ , el rayo principal  $OP'_0$  emitido desde un punto  $P$  (éste último no se muestra en la imagen),  $\Sigma'$  el frente de onda desde  $P$  hasta  $P'$ , la esfera de referencia,  $(L, M, N) = (x, y, z)/|\vec{r}|$  los cosenos directores del vector unitario  $\vec{r}$ , que se ubica sobre el rayo  $Q_0P'$ , la aberración del frente de onda, que es la longitud de camino óptico desde  $Q_0$  hasta  $Q$ .

## 2.6. Aberración esférica

En [27] se ha demostrado que la aberración de Seidel puede ser escrita como

$$W(x^2 + y^2, y\eta, \eta^2) \approx b_1(x^2 + y^2)^2 + b_2y\eta(x^2 + y^2) + b_3y^2\eta^2 + b_4\eta^2(x^2 + y^2) + b_5y\eta^3 + \text{términos de orden superior} + \dots \quad (2.31)$$

en donde la expansión en series de potencias se hace en términos del grado de las variables de la función, en este caso, segundo grado; es decir, que el término de primer orden en la expansión en series corresponde al segundo grado de la potencia de la variable a partir de la cual se realiza la expansión; así,  $(x^2 + y^2)^2$ ,  $y\eta(x^2 + y^2)$ ,  $y^2\eta^2$ ,  $\eta^2(x^2 + y^2)$  y  $y\eta^3$ , son todos términos a segundo orden. Para clarificar mejor esto, podemos hacer unos cambios de variables y llamamos  $\Upsilon = x^2 + y^2$ ,  $\Psi = y\eta$  y  $\Omega = \eta^2$ , de esta forma la Ec. (2.31) puede reescribirse como

$$W(\Upsilon, \Psi, \Omega) \approx b_1\Upsilon^2 + b_2\Psi\Upsilon + b_3\Psi^2 + b_4\Omega\Upsilon + b_5\Psi\Omega + \text{términos de orden superior} + \dots \quad (2.32)$$

Ahora bien, en las Ecs. (2.31) y (2.32), los coeficientes  $b_1$  y  $b_5$  son llamados comúnmente aberración a tercer orden. Para obtener el orden de la aberración de la Ec. (2.31), al grado de la potencia de cada término en la serie se le resta uno; y de la Ec. (2.32), al grado de la potencia de cada término le sumamos uno. En la Ec. (2.31),  $x$  y  $y$  son las coordenadas de la pupila de salida (o de entrada); y  $\eta$  y  $\zeta$  son las coordenadas del punto imagen con origen en  $O'$ , véase la Fig. (2.12). Se ha asumido

que tanto el frente de onda como la esfera de referencia se eligen de forma que coincidan en el centro de la pupila, así que  $W$  debe ser cero en el origen  $O$  del sistema de coordenadas  $x, y$ , por lo tanto, el término constante de la expansión en serie, Ecs. (2.31) y (2.32), no aparece. También se han descartado los coeficientes de los términos de primer grado porque no están catalogados como aberraciones propias del sistema óptico. Es común en la teoría Hamiltoniana postular que, en la expansión de la aberración del frente de onda, la esfera de referencia para cada ángulo de campo tiene su centro en el punto imagen Gaussiano, es decir, las aberraciones son medidas considerando la imagen Gaussiana como una imagen puntual ideal [27].

Se ha considerado exclusivamente un haz de rayos que provienen de un objeto puntual sobre el eje colocado en  $S_o$  en la sección meridional  $\mathbf{Y} - \mathbf{Z}$  (una onda esférica incide hacia el espejo cóncavo a lo largo del eje óptico). Este haz de rayos y su cáustica son simétricos con respecto al eje óptico. Por lo tanto, de la Ec. (2.31) se ha tomado el primer término  $b_1(x^2 + y^2)^2$ . Tomando en cuenta que el conocimiento de la cáustica meridional sobre el eje es suficiente para construir la superficie cáustica completa en el caso de un sistema óptico con simetría rotacional. Para rayos meridionales, los radios de curvatura del frente de onda todavía se encuentran en un plano perpendicular al plano meridional. La cáustica es algo más complicada para los rayos oblicuos que para los rayos meridionales, ya que las direcciones principales<sup>3</sup> no permanecieran en general en el plano de incidencia [20]. De esta forma, considerando exclusivamente aberración esférica debido a que es bien sabido que la aberración esférica es simétrica alrededor del eje principal. Siguiendo todos los pasos explicados con todo detalle en [27] de acuerdo a la Ec. (6.44), la superficie cáustica asociada al frente de onda reflejado puede escribirse como

$$\eta = - \left[ \frac{1}{3\mathcal{R}^2} \sqrt{\frac{n}{-3b_1}} \right] \zeta^{3/2}, \quad (2.33)$$

donde  $\mathcal{R}$  es el radio de la esfera de referencia ( $\mathcal{R} = S_i$ ) y  $n$  es el índice de refracción en el espacio imagen. Si se sustituye  $n = -1$ ,  $\mathcal{R} = S_o/(2S_oC - 1)$ ,  $\eta = \mathcal{Y}_p$ ,  $\zeta = \mathcal{Z}_p$  en la Ec. (2.33), tenemos

$$\mathcal{Y}_p = - \frac{\mathcal{Z}_p^{3/2}}{3} \left( \frac{2S_oC - 1}{S_o} \right)^2 \frac{1}{\sqrt{3b_1}}. \quad (2.34)$$

Si se resuelven las Ecs. (2.16) y (2.34) para  $b_1$ , que es el coeficiente de aberración esférica a tercer orden, se obtiene su valor para un espejo cónico cóncavo como una función de los parámetros de reflexión, que está dado por

$$b_1 = \left[ \frac{-C}{4S_o^2} \right] \{1 - [2 - S_oC(1 + k)]S_oC\}. \quad (2.35)$$

Es importante notar que, si se conoce *a priori* el valor de  $b_1$ , por ejemplo con el uso de una prueba interferométrica, se puede obtener cualquiera de los valores de diseño, como son: el radio de curvatura, la posición de la fuente puntual, o la constante de conicidad del espejo cónico cóncavo sometido a prueba. Como se ha considerado solamente la aberración esférica a tercer orden, es posible agregar esta aberración algebraicamente a fin de calcular las contribuciones de la aberración a cada superficie utilizando la contribución de Petzval [38]-[39].

<sup>3</sup>En geometría diferencial, se llaman direcciones principales a aquellas en que la curvatura normal es máxima o mínima. Los valores que alcanza la curvatura en esas direcciones se denominan curvaturas principales.

Por otra parte, si tenemos un frente de onda plano, es decir, si colocamos la fuente puntual muy lejos de la superficie ( $S_o \rightarrow \infty$ ), entonces podemos calcular el límite de  $b_1$  para este caso, lo que conduce a

$$\lim_{S_o \rightarrow \infty} b_1 = -\frac{C^3}{4}(1+k). \quad (2.36)$$

La Ec. (2.36) nos dice que la aberración esférica a tercer orden puede ser reducida completamente a cero cuando la superficie reflectora es un paraboloide, para el cual  $k = -1$ . Por otro lado, si la superficie reflectora es un esferoide entonces  $k = 0$  y  $C = 1/r$ , así

$$b_1 = -\frac{1}{4r^3}, \quad (2.37)$$

lo que significa que en el caso de un espejo esférico la aberración disminuye en forma inversamente proporcional al cubo del radio de curvatura.

Alternativamente, de [33] en concordancia con la Ec. (6.36), la superficie cáustica asociada con el frente de onda reflejado se puede escribir como

$$\Delta\Phi = -\frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{-3\mathcal{A}}} (\mathcal{F}\Delta s')^{3/2}, \quad (2.38)$$

donde  $\mathcal{A}$  es el coeficiente de aberración esférica a tercer orden y  $\mathcal{F}$  está relacionado al factor de escala de la imagen como  $\mathcal{F} = 1/(f^*)^2 = (S_o/(S_i[S_o - T]))^2$ , donde  $f^*$  es el factor de escala de la imagen del sistema y  $T$  es la ubicación del plano de la pupila de entrada, así que considerando que  $T = 0$ , el plano de la pupila de entrada colocado en el vértice de la superficie cónica cóncava produce  $\mathcal{F} = [(2S_oC - 1)/S_o]^2$ , y sustituyendo en la Ec. (2.38) asumiendo que  $\Delta\Phi \rightarrow \mathcal{Y}_p$  y  $\Delta s' \rightarrow \mathcal{Z}_p$ , se obtiene

$$\mathcal{Y}_p = -2 \left( \frac{\mathcal{Z}_p}{3} \right)^{3/2} \left( \frac{2S_oC - 1}{S_o} \right)^3 \frac{1}{\sqrt{-\mathcal{A}}}. \quad (2.39)$$

Finalmente, resolviendo las Ecs. (2.16) y (2.39) para  $\mathcal{A}$ , se puede también obtener el coeficiente de aberración esférica a tercer orden, que está dado por

$$\mathcal{A} = C \left[ \frac{2S_oC - 1}{S_o^2} \right]^2 \{1 - [2 - S_oC(1+k)]S_oC\}. \quad (2.40)$$

Para un frente de onda plano, cuando la fuente se aleja mucho de la superficie, tenemos, al tomar el límite de  $\mathcal{A}$  cuando  $S_o \rightarrow \infty$ , que

$$\lim_{S_o \rightarrow \infty} \mathcal{A} = 4C^5(1+k). \quad (2.41)$$

La expresión 2.41 nos permite observar que la aberración esférica a tercer orden puede reducirse completamente a cero cuando la superficie reflectora es un espejo parabólico, pero en el caso de un espejo esférico se tiene que

$$\mathcal{A} = \frac{4}{r^5}, \quad (2.42)$$

es decir, la aberración esférica a tercer orden disminuye con el inverso de la quinta potencia del radio de curvatura.

Cabe hacer notar que  $b_1$  y  $\mathcal{A}$  están relacionados a sistemas de referencia diferentes,  $b_1$  está medido sobre el plano principal, mientras que  $\mathcal{A}$  está medido en el plano de la pupila de entrada (o de salida).

## 2.7. Expresiones analíticas para la aberración esférica

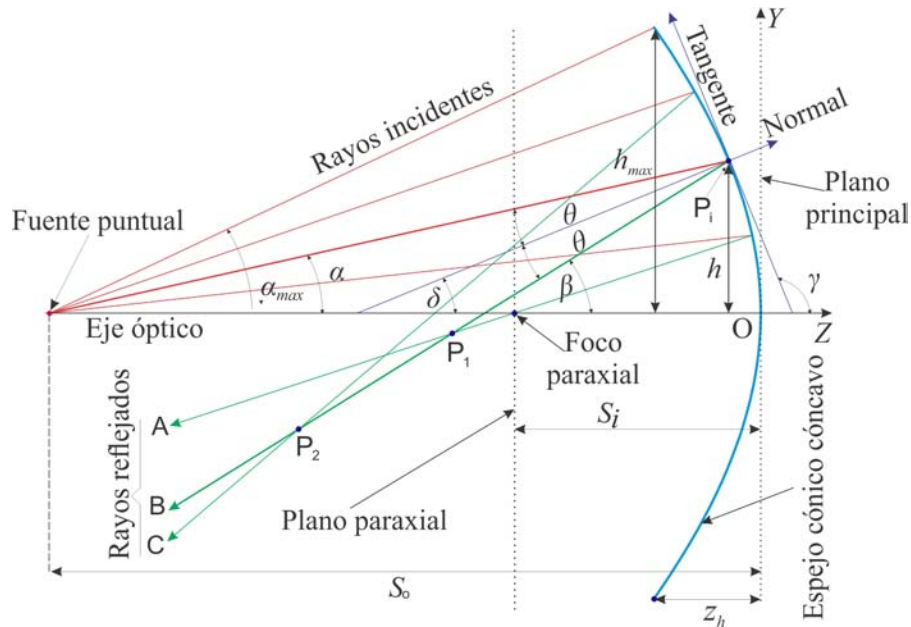


Figura 2.13: Proceso de reflexión producido por un espejo cónico cóncavo, con los parámetros asociados, considerando que la fuente puntual se localiza en  $S_o$ , sobre el eje óptico. Se muestra el plano principal y el plano paraxial.

Ya sabemos que la posición de la imagen gaussiana, cuando se tiene una fuente puntual sobre el eje óptico, a una distancia  $S_o$  del vértice de un espejo cónico cóncavo, y que corresponde a un frente de onda esférico; a partir de las Ecs. (2.12), se encuentra localizada en

$$Z_c(0) \equiv S_i = S_o / (2S_o C - 1), \quad Y_c(0) = 0, \quad (2.43)$$

donde  $C$  es la curvatura paraxial del espejo cónico cóncavo. También sabemos que el ángulo de emisión de los rayos de la fuente es  $\alpha$ , y que su valor máximo, en analogía con las Ecs. (2.2), está determinado por

$$\alpha_{max} = \arctan \left[ \frac{h}{(|S_o| - |Z_h|)} \right], \quad \text{para } |S_o| \geq |Z_h|, \quad (2.44)$$

$$\alpha_{max} = \frac{\pi}{2} + \arctan \left[ \frac{(|S_o| - |Z_h|)}{h} \right], \quad \text{para } |S_o| < |Z_h|,$$

donde  $h$  es un parámetro que mide la altura, medida desde el eje óptico hasta el punto de incidencia, de un rayo arbitrario, emitido por la fuente puntual; y que cumple con  $h \in [-D/2, D/2]$ , donde  $D$  es el diámetro del espejo. Por otra parte, las intersecciones de los rayos emitidos con la superficie

cónica cóncava están determinadas por las ecuaciones

$$\begin{aligned} z_+ &= \frac{1 + S_o C \tan^2 \alpha - \sqrt{1 + [2 - (1 + k)S_o C]S_o C \tan^2 \alpha}}{C(1 + k + \tan^2 \alpha)}, \\ y_+ &= \tan \alpha \left[ \frac{1 - (1 + k)S_o C - \sqrt{1 + [2 - (1 + k)S_o C]S_o C \tan^2 \alpha}}{C(1 + k + \tan^2 \alpha)} \right], \end{aligned} \quad (2.45)$$

y que el ángulo, que hacen las primeras reflexiones con el eje óptico, veáse la Fig. (2.13), está dado por

$$\beta(\alpha) = 2 \arctan \left[ \frac{-Cy_+}{\sqrt{1 - (1 + k)y_+^2 C^2}} \right] - \alpha. \quad (2.46)$$

Cuando  $S_o \rightarrow \infty$  y  $\alpha \rightarrow 0$ , que equivale a tener un frente de onda plano, las Ecs. (2.43), (2.45) y (2.46) se reducen a

$$\begin{aligned} Z_{ch}(0) &\equiv S_i = 1/2C, & Y_{ch}(0) &= 0, \\ z_{+h} &= \frac{1 - \sqrt{1 - (1 + k)C^2 h^2}}{C(1 + k)} = \frac{Ch^2}{1 + \sqrt{1 - (k + 1)C^2 h^2}}, & y_{+h} &= h, \\ \beta_h &= 2 \arctan \left[ \frac{-Ch}{\sqrt{1 - (k + 1)C^2 h^2}} \right]. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Ahora, la ecuación de la familia de las primeras reflexiones, de la Ec. (2.8), puede escribirse como

$$y = y_+ + \tan \beta (z - z_+). \quad (2.48)$$

Entonces, manteniendo nuestro análisis en un plano meridional paralelo al plano  $\mathbf{Z}-\mathbf{Y}$ , si queremos determinar la aberración esférica transversal (AET), debemos encontrar las intersecciones de las prolongaciones de las primeras reflexiones con el plano paraxial, que se ubica en  $z_{par} = S_o / (2S_o C - 1)$ . Esta condición puede escribirse de la Ec. (2.48), simplemente como

$$y_{AET} = y_+ + \tan \beta \left( \frac{S_o}{2S_o C - 1} - z_+ \right). \quad (2.49)$$

Por lo tanto, la AET, de manera analítica, es igual a

$$\begin{aligned} AET &= \left( h, \tan \alpha \left[ \frac{1 - (1 + k)S_o C - \sqrt{1 + [2 - (1 + k)S_o C]S_o C \tan^2 \alpha}}{C(1 + k + \tan^2 \alpha)} \right] \right. \\ &\quad \left. + \tan \beta \left( \frac{S_o}{2S_o C - 1} - \frac{1 + S_o C \tan^2 \alpha - \sqrt{1 + [2 - (1 + k)S_o C]S_o C \tan^2 \alpha}}{C(1 + k + \tan^2 \alpha)} \right) \right). \end{aligned} \quad (2.50)$$

Por otro lado, para conocer la aberración esférica longitudinal (AEL), debemos calcular las diferencias entre los focos de las primeras reflexiones con respecto al foco gaussiano, para ello es necesario conocer las intersecciones de las primeras reflexiones con el eje óptico, lo que puede obtenerse de la Ec. (2.48), al imponer la condición de que  $y = 0$ , lo que conduce a

$$z_{AEL} = z_+ - \frac{y_+}{\tan \beta}. \quad (2.51)$$

Con esto, la AEL, escrita en forma analítica, está dada por

$$AEL = (h, z_{AEL} - S_i) = \left( h, \frac{1 + S_o C \tan^2 \alpha - \sqrt{1 + [2 - (1 + k)S_o C]S_o C \tan^2 \alpha}}{C(1 + k + \tan^2 \alpha)} - \frac{\tan \alpha \left[ \frac{1 - (1 + k)S_o C - \sqrt{1 + [2 - (1 + k)S_o C]S_o C \tan^2 \alpha}}{C(1 + k + \tan^2 \alpha)} \right]}{\tan \beta} - \frac{S_o}{2S_o C - 1} \right). \quad (2.52)$$

Para un frente de onda plano, en el límite cuando  $S_o \rightarrow \infty$  y  $\alpha \rightarrow 0$ , las expresiones (2.50) y (2.52) se reducen simplemente a

$$\begin{aligned} AET &= \left( h, h + \tan \beta_h \left[ \frac{1}{2C} - \frac{Ch^2}{1 + \sqrt{1 - (k+1)C^2 h^2}} \right] \right), \\ AEL &= \left( h, \frac{Ch^2}{1 + \sqrt{1 - (k+1)C^2 h^2}} - \frac{h}{\tan \beta_h} - \frac{1}{2C} \right). \end{aligned} \quad (2.53)$$

En el caso de un espejo parabólico,  $k = -1$ ; y para un frente de onda plano, tenemos

$$\tan \beta_h = \frac{-2Ch}{1 - C^2 h^2}, \quad (2.54)$$

así que si sustituimos tanto  $k = -1$ , como el valor de  $\tan \beta_h$ , en las Ecs. (2.53), obtenemos

$$\begin{aligned} AET &= \left( h, h - \frac{2Ch}{1 - C^2 h^2} \left[ \frac{1}{2C} - \frac{Ch^2}{2} \right] \right), \\ AEL &= \left( h, \frac{Ch^2}{2} + \frac{h(1 - C^2 h^2)}{2Ch} - \frac{1}{2C} \right), \end{aligned} \quad (2.55)$$

$$\begin{aligned} AET &= (h, 0), \\ AEL &= (h, 0). \end{aligned} \quad (2.56)$$

Este último resultado sólo evidencia algo muy conocido, el hecho de que si tenemos una fuente puntual en infinito, es decir, se tiene un frente de onda plano; y el espejo es parabólico; entonces no hay aberración esférica; los rayos reflejados convergen al foco paraxial o foco gaussiano, no importando el valor de  $h$ . En la Fig. (2.14) se muestran algunos ejemplos de aberración esférica producida por las primeras reflexiones, para varios espejos cónicos cóncavos.

Si de la Ec. (2.18), consideramos  $S_o = 1/[C(1 - \sqrt{-k})]$ , para  $k \in [-1.5, -0.5, 0]$ , puesto que  $k = -1$  está considerado en la Fig. (2.14(b)) y  $k = 0.5$  no forma parte del dominio de tal expresión; podemos observar que cuando la fuente se coloca en la posición determinada por  $S_o = 1/[C(1 - \sqrt{-k})]$ , el espejo con alguno de estos valores de  $k$  no produce aberración esférica, como debe ser, puesto que la posición corresponde a uno de los puntos estigmáticos. Esto, por supuesto, es válido para cualquier valor de  $k$  dentro del dominio para  $S_o$ , dado por la Ec. (2.18). Lo anterior se ilustra en las Figs. (2.15).

Ahora, si hacemos una expansión en series de potencias, considerando valores muy pequeños para el ángulo de emisión, es decir, para  $\alpha \ll 1$ , las Ecs. (2.50) y (2.52), se pueden escribir en la siguiente

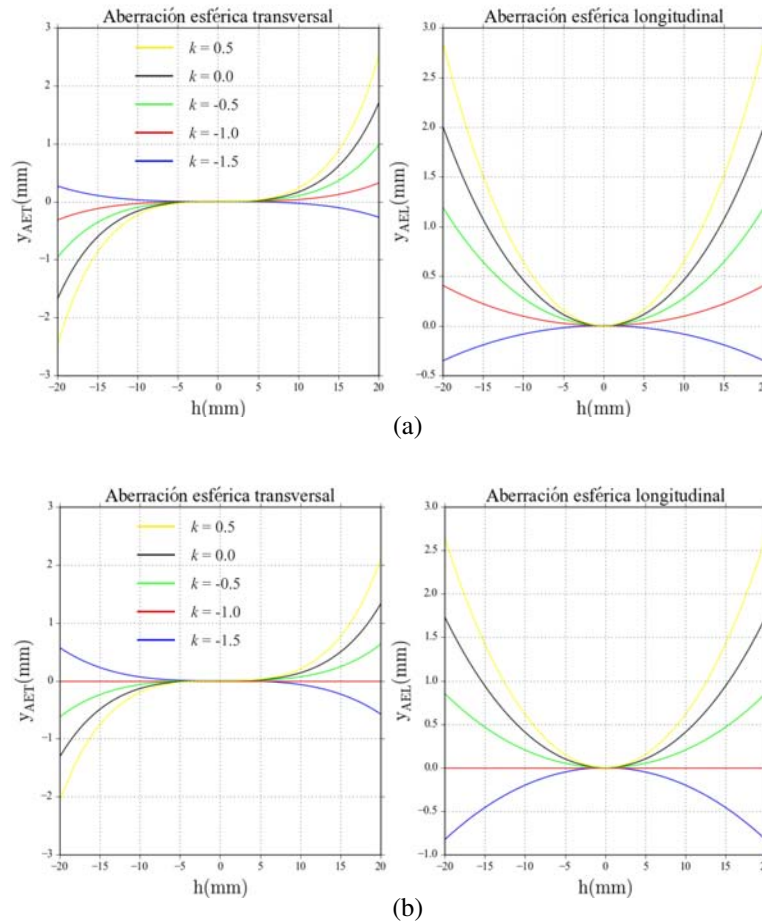


Figura 2.14: Comparación entre la aberración esférica producida por espejos cónicos cóncavos, correspondientes a los espejos de la Fig. (2.3). (a) Para un frente de onda esférico, con  $S_o = 500$  mm; (b) para un frente de onda plano, con  $S_o \rightarrow \infty$ . En cualquiera de ambos casos  $C = -0.016 \text{ mm}^{-1}$  y  $D = 80$  mm.

forma

$$\begin{aligned}
 AEL(h) &= \left( h, -\frac{S_o^2 C [1 - S_o C (2 - S_o C (1 + k))]}{(2S_o C - 1)^2} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} q_n \alpha^{2n} \right] \right), \\
 AET(h) &= \left( h, \frac{S_o^2 C [1 - S_o C (2 - S_o C (1 + k))]}{(2S_o C - 1)} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} Q_n \alpha^{2n+1} \right] \right),
 \end{aligned}
 \tag{2.57}$$

donde  $q_n$  y  $Q_n$  son funciones de  $[C, k, S_o]$ . Se puede ver que  $AEL$  es una función par y  $AET$  es una función impar de  $\alpha$ .

Resulta muy interesante la similitud que hay entre las Ecs. (2.14) y las Ecs. (2.57), aunque ya habíamos comentado que la cáustica está relacionada con la cantidad de aberración esférica, de manera directa, cuando la fuente puntual se ubica sobre el eje óptico. De las Ecs. (2.14) y las Ecs. (2.57), podemos percatarnos que la diferencia estriba en que la aberración esférica medida a través de las (2.14), se hace con referencia al plano principal; mientras que cuando se mide por medio de las Ecs. (2.57), se hace desde el plano paraxial. Pero esto simplemente nos hace ver que las

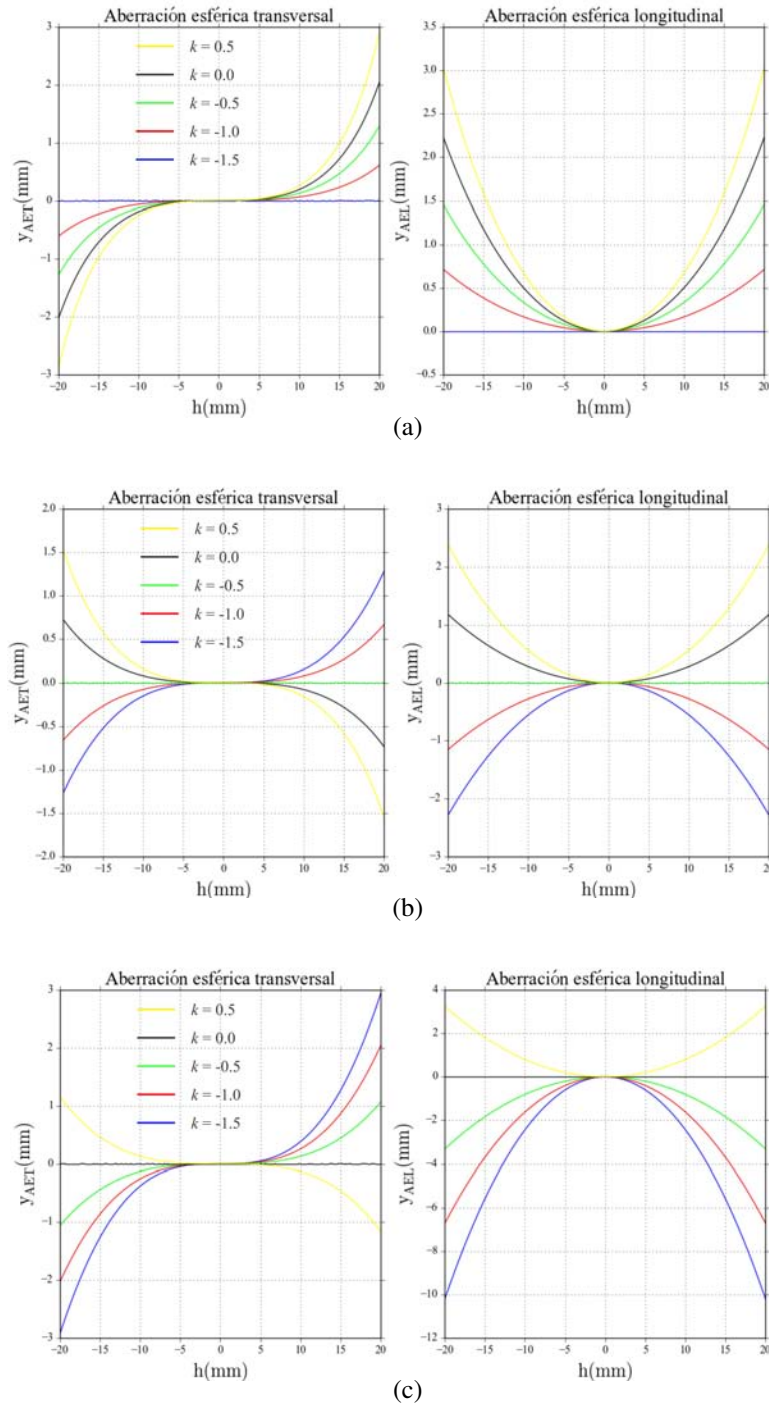


Figura 2.15: Aberración esférica producida por espejos cónicos cóncavos cuando la fuente puntual se ubica en  $S_o = 1/[C(1 - \sqrt{-k})]$ ; con  $C = -0.016 \text{ mm}^{-1}$  y  $D = 80 \text{ mm}$ . (a) Espejo hiperbólico; (b) espejo elíptico y; (c) espejo esférico.

segundas coordenadas tanto de  $AEL$ , como de  $AET$ , no son más que las coordenadas paramétricas, linealmente dependientes, proporcionales a las ecuaciones de la catacústica, pero vista desde el plano paraxial.



## 2.8. Dobles reflexiones en superficies elípticas cóncavas

En esta sección se analizará las cáusticas producidas por segundas reflexiones sobre las superficies elípticas cóncavas, como un caso particular de las superficies cónicas cóncavas; pues es éste tipo de superficies reflectoras, junto con las esféricas, y en casos especiales las hiperbólicas, las que pueden producir segundas reflexiones en el trazo de rayos; también se mostrará la forma en que éstas afectan el diseño de las pantallas nulas de gotas con configuración cilíndrica; lo que hace ver que resulta importante evitarlas en la evaluación de superficies elípticas cóncavas, a fin de que la prueba de pantallas nulas de gotas nos permita evaluar superficies cónicas rápidas. Particularmente se tratará acerca de las segundas reflexiones en una elipse prolata, que es el tipo de superficies que se han evaluado en este trabajo.

### 2.8.1. Análisis de las cáusticas producidas por segundas reflexiones por un espejo elíptico cóncavo prolato

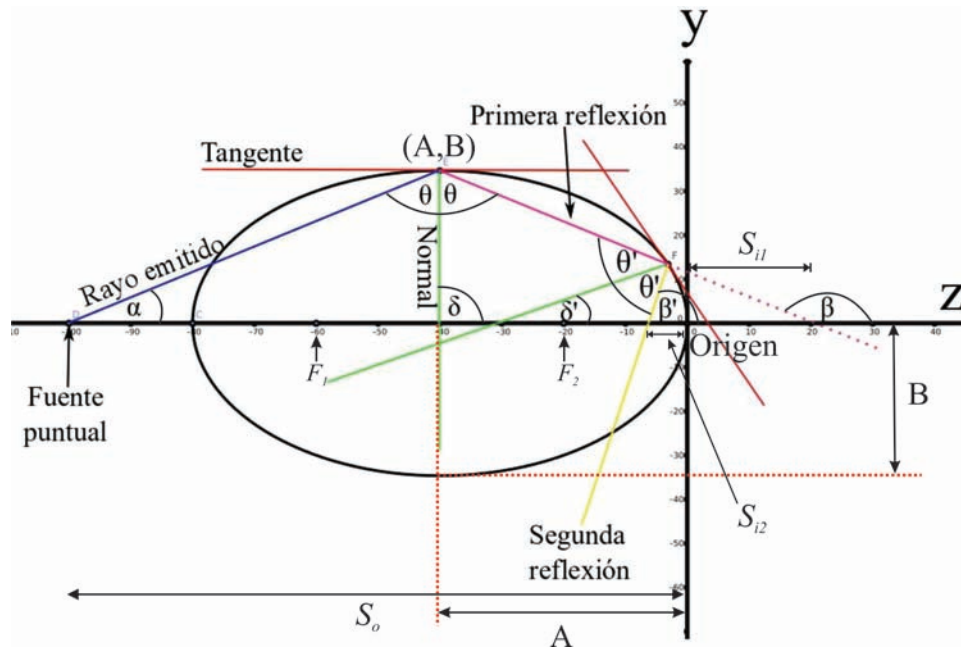


Figura 2.16: Esquema básico del sistema. Los ángulos  $\alpha$ ,  $\delta$ ,  $\delta'$ ,  $\beta$  y  $\beta'$  se miden respecto al eje Z.

La ecuación de la sagita para una elipse prolata con vértice en el origen está determinada por la Ec. (2.3), simplemente se tiene que sustituir el valor de la constante de conicidad, así como el de la curvatura paraxial, correspondientes. Para una elipse prolata se tiene que  $\epsilon^2 = 1 - (B/A)^2$ , por lo tanto,  $k = -\epsilon^2 = -1 + (B/A)^2$ ; y el radio de curvatura paraxial está determinado como  $r = B^2/A$ , por lo cual la curvatura paraxial es  $C = 1/r = A/B^2$ . Si se sustituyen estos valores en la Ec. (2.3) y reducimos términos tenemos

$$z = \frac{Ay^2}{B^2 + B\sqrt{B^2 - y^2}}, \tag{2.58}$$

Ahora la ecuación que describe un rayo emitido por la fuente luminosa ubicada sobre el eje óptico a una distancia  $S_o$  del vértice es

$$y = (z - S_o) \tan \alpha, \quad (2.59)$$

por lo que si se quieren conocer las intersecciones de los rayos emitidos por la fuente luminosa con la superficie reflectora, se debe sustituir la Ec. (2.59) en la Ec. (2.58), obteniéndose una ecuación de segundo grado para  $z$ , cuyas soluciones son

$$z_{\pm} = \frac{AB^2 + A^2 S_o \tan^2 \alpha \pm AB \sqrt{B^2 + (2AS_o - S_o^2) \tan^2 \alpha}}{B^2 + A^2 \tan^2 \alpha}. \quad (2.60)$$

Si se sustituye la Ec. (2.60) en la Ec. (2.59) se obtiene

$$y_{\pm} = \tan \alpha \left[ \frac{(A - S_o)B^2 \pm AB \sqrt{B^2 + (2AS_o - S_o^2) \tan^2 \alpha}}{B^2 + A^2 \tan^2 \alpha} \right], \quad (2.61)$$

con  $\alpha$  como el ángulo de emisión, véase Fig. (2.16). En el caso particular en el que la fuente luminosa se ubique en la posición  $S_o = (2A, 0)$  y que el rayo emitido incida en el espejo en el punto  $P_1 = (A, B)$ , entonces  $\tan \alpha = -B/A$ , y en este caso las soluciones para las Ecs. (2.60) y (2.61) son

$$z_{\pm}(\arctan[-B/A]) = \frac{3A \pm A}{2}, \quad (2.62)$$

y para  $y_+$

$$y_{\pm}(\arctan[-B/A]) = -B \left[ \frac{-1 \pm 1}{2} \right]. \quad (2.63)$$

Ahora bien, el ángulo que hace la normal a la superficie en el punto de incidencia, con el eje óptico está determinado por

$$\delta = \arctan \left[ -\frac{Ay_+}{B \sqrt{B^2 - y_+^2}} \right], \quad (2.64)$$

y el ángulo de la recta que describe al rayo reflejado a partir del punto de incidencia sobre el espejo es

$$\beta = 2 \arctan \left[ -\frac{Ay_+}{B \sqrt{B^2 - y_+^2}} \right] - \alpha, \quad (2.65)$$

lo que se deduce de la Fig. (2.16).

En el caso especial en el que  $\beta = \pi/2$ , tenemos que

$$\alpha = 2 \arctan \left[ -\frac{Ay_+}{B \sqrt{B^2 - y_+^2}} \right] - \frac{\pi}{2}, \quad (2.66)$$

o también

$$y_+ = \pm \frac{B^2 \tan \left( \frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4} \right)}{\sqrt{A^2 + B^2 \tan^2 \left( \frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4} \right)}}, \quad (2.67)$$

esto nos permite saber el valor de las intersecciones de los rayos emitidos con el espejo, cuando la segunda reflexión hace un ángulo de noventa grados con el eje Z. Si convenimos nuevamente en que

para  $\beta < \pi/2$  los rayos reflejados se llamen rayos agudos; y para  $\beta > \pi/2$ , los rayos reflejados se llamen rayos obtusos; podemos percatarnos de que en el diseño de pantallas nulas de configuración cilíndrica son algunos de los rayos obtusos los que pueden incidir en las diferencias entre la imagen de diseño y la imagen generada sobre el CCD en el proceso de reflexión.

Ahora, la ecuación del rayo reflejado queda como

$$y_r = y_+ + (z_r - z_+) \tan \beta. \quad (2.68)$$

Si se interseca esta línea con la Ec. (2.58), se encuentra que las soluciones para la ecuación de segundo grado resultante en términos de  $z_r$  son

$$z_r = \frac{AB^2 + A^2 z_+ \tan^2 \beta - A^2 y_+ \tan \beta \pm AB \sqrt{B^2 + (z_+ \tan \beta - y_+)[(2A - z_+) \tan \beta + y_+]}}{B^2 + A^2 \tan^2 \beta}. \quad (2.69)$$

Si se sustituye la Ec. (2.69) en la Ec. (2.68) se obtiene

$$y_r = y_+ + \tan \beta \left[ \frac{(A - z_+)B^2 - A^2 y_+ \tan \beta \pm AB \sqrt{B^2 + (z_+ \tan \beta - y_+)[(2A - z_+) \tan \beta + y_+]}}{B^2 + A^2 \tan^2 \beta} \right]. \quad (2.70)$$

En el caso particular en el que el rayo reflejado proviene del punto  $P_1 = (A, B)$  tenemos que  $\delta = \pi/2$  y  $\beta = \pi - \alpha$ , entonces  $\tan \beta = -\tan \alpha$  y, por lo tanto

$$z_r(\alpha) = \frac{A \pm A}{2}, \quad (2.71)$$

y para  $y_r$

$$y_r(\alpha) = B + B \left[ \frac{-1 \pm 1}{2} \right]. \quad (2.72)$$

Ahora, si se considera el límite de las Ecs. (2.69) y (2.70) cuando  $\beta \rightarrow \pi/2$ , tenemos que

$$\begin{aligned} z_r(\pi/2) &= z_+, \\ y_r(\pi/2) &= \pm \frac{B \sqrt{(2A - z_+)z_+}}{A}. \end{aligned} \quad (2.73)$$

Para la segunda reflexión, el ángulo de la normal a la superficie en el punto donde ocurre la segunda reflexión está dado por

$$\delta' = \arctan \left[ -\frac{Ay_r}{B \sqrt{B^2 - y_r^2}} \right], \quad (2.74)$$

veáse Fig. (2.16), y el ángulo de la recta que describe a la segunda reflexión es

$$\beta' = 2(\delta' - \delta) + \alpha + \pi = 2 \left( \arctan \left[ -\frac{Ay_r}{B \sqrt{B^2 - y_r^2}} \right] - \arctan \left[ -\frac{Ay_+}{B \sqrt{B^2 - y_+^2}} \right] \right) + \alpha + \pi. \quad (2.75)$$

Considerando la posibilidad de que  $\beta' = \alpha$ , lo que físicamente implica que algunas de las segundas reflexiones llevan la misma dirección que algunos de los rayos emitidos y estas segundas reflexiones no causarían diferencias entre la imagen de diseño y la imagen producida por el proceso de reflexión en una prueba de pantallas nulas de configuración cilíndrica, tenemos que

$$\delta = \delta' + \frac{\pi}{2}. \quad (2.76)$$

Por otra parte, como  $\beta' = 2\delta' - \beta + \pi$ , si  $\beta = \pi/2$ , entonces

$$\beta' = 2\delta' + \frac{\pi}{2} = 2\delta - \frac{\pi}{2} = 2 \arctan \left[ -\frac{Ay_+}{B\sqrt{B^2 - y_+^2}} \right] - \frac{\pi}{2}, \quad (2.77)$$

y utilizando la Ec. (2.67), tenemos

$$\beta_{\pm}' = 2 \arctan \left[ \mp \frac{A \tan \left( \frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4} \right)}{\sqrt{A^2 + B^2 \tan^2 \left( \frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \mp B^2 \tan^2 \left( \frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4} \right)}} \right] - \frac{\pi}{2} \quad (2.78)$$

así que

$$\begin{aligned} \beta_-' &= -(\alpha + \pi), \\ \beta_+' &= 2 \arctan \left[ \frac{A \tan \left( \frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4} \right)}{\sqrt{A^2 + 2B^2 \tan^2 \left( \frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4} \right)}} \right] - \frac{\pi}{2}. \end{aligned} \quad (2.79)$$

Continuando, la recta que describe a la segunda reflexión es

$$y_d = y_r + (z_d - z_r) \tan \beta'. \quad (2.80)$$

Si intersectamos esta ecuación con la Ec. (2.58), podemos obtener una ecuación de segundo grado para  $z_d$ , que tiene como soluciones a

$$z_d = \frac{AB^2 + A^2 z_r \tan^2 \beta' - A^2 y_r \tan \beta' \pm AB \sqrt{B^2 + (z_r \tan \beta' - y_r)[(2A - z_r) \tan \beta' + y_r]}}{B^2 + A^2 \tan^2 \beta'}. \quad (2.81)$$

Si se sustituye la Ec. (2.81) en la Ec. (2.80) se obtiene

$$y_d = y_r + \tan \beta' \left[ \frac{(A - z_r)B^2 - A^2 y_r \tan \beta' \pm AB \sqrt{B^2 + (z_r \tan \beta' - y_r)[(2A - z_r) \tan \beta' + y_r]}}{B^2 + A^2 \tan^2 \beta'} \right]. \quad (2.82)$$

Retomando el caso particular en el que la posición de la fuente luminosa está determinada por  $S_o = (2A, 0)$  y el rayo emitido se refleja en el punto  $P_1 = (A, B)$ , entonces, obedeciendo la ley de la reflexión, la línea que contiene a la segunda reflexión debe intersectar al espejo en los puntos  $P_2 = (0, 0)$  y  $P_2 = (A, -B)$ . En este caso, sabemos que  $\delta = \pi/2$ ,  $\delta' = 0$  y, por lo tanto,  $\beta' = \alpha$ , por lo cual,  $\tan \beta' = \tan \alpha = -B/A$ . En esta consideración se tiene que

$$z_d(\arctan[-B/A]) = \frac{A \pm A}{2}, \quad (2.83)$$

y para  $y_d$

$$y_d(\arctan[-B/A]) = -B - B \left[ \frac{-1 \pm 1}{2} \right]. \quad (2.84)$$

Así que si se toman los signos negativos del radical de las Ecs. (2.62) y (2.63), estos corresponden con los signos positivos para el radical de las Ecs. (2.71) y (2.72); y a su vez, los signos positivos

del radical de las Ecs. (2.71) y (2.72) les corresponden los signos negativos del radical de las Ecs. (2.83) y (2.84).

Ahora, para obtener las ecuaciones paramétricas de la cáustica por reflexión de las primeras reflexiones, véase la Fig. (2.16), tomamos la ecuación de uno cualesquiera de esos rayos, así

$$y \cos \beta - z \sin \beta = y_+ \cos \beta - z_+ \sin \beta, \quad (2.85)$$

y se procede a la derivación de la Ec. (2.85) respecto a  $\alpha$ , para tener

$$y \sin \beta + z \cos \beta = y_+ \sin \beta + z_+ \cos \beta - \mathcal{M}, \quad (2.86)$$

donde

$$\mathcal{M} \equiv \left[ \left( \frac{\partial y_+}{\partial \alpha} \right) \cos \beta - \left( \frac{\partial z_+}{\partial \alpha} \right) \sin \beta \right] \left/ \left( \frac{\partial \beta}{\partial \alpha} \right) \right., \quad (2.87)$$

y además

$$\begin{aligned} \frac{\partial z_+}{\partial \alpha} &= \frac{AB \sin \alpha (BS_o - AB + A\gamma)^2}{\gamma \cos^3 \alpha (B^2 + A^2 \tan^2 \alpha)^2}, \\ \frac{\partial y_+}{\partial \alpha} &= \frac{-B^4(AB - A\gamma + S\gamma) + AB^2 [A^2(B - \gamma) + AS(\gamma - 4B) + 2BS^2] \tan^2 \alpha}{\gamma \cos^2 \alpha (B^2 + A^2 \tan^2 \alpha)^2}, \\ \frac{\partial \beta}{\partial \alpha} &= -1 - \frac{2AB^3 \partial y_+ / \partial \alpha}{(B^4 + A^2 y_+^2 - B^2 y_+^2) \sqrt{B^2 - y_+^2}}, \end{aligned} \quad (2.88)$$

donde  $\gamma = \sqrt{B^2 + (2AS_o - S_o^2) \tan^2 \alpha}$ .

Las ecuaciones paramétricas de la cáustica de las primeras reflexiones se encuentran al resolver las Ecs. (2.85) y (2.86) para  $(z, y)$ , así

$$\begin{aligned} Z_c &= z_+ - \mathcal{M} \cos \beta, \\ Y_c &= y_+ - \mathcal{M} \sin \beta, \end{aligned} \quad (2.89)$$

donde se ha reescrito  $z \rightarrow Z_c$  y  $y \rightarrow Y_c$  y el subíndice  $c$  significa catacústica. En la Fig. (2.17) puede observarse un esquema del proceso de reflexión con la cáustica generada por las primeras reflexiones.

En el caso de las ecuaciones paramétricas de la cáustica de las segundas reflexiones el análisis es completamente similar al que corresponde a las primeras reflexiones, salvo que hay que tomar en cuenta que  $\beta' = 2\delta' - \beta + \pi$ , véase la Fig. (2.16); así que tomamos la ecuación de uno cualesquiera de esos rayos, entonces

$$y \cos \beta' - z \sin \beta' = y_r \cos \beta' - z_r \sin \beta', \quad (2.90)$$

y se procede a la derivación de la Ec. (2.85) respecto a  $\beta$ , para tener

$$y \sin \beta' + z \cos \beta' = y_r \sin \beta' + z_r \cos \beta' - \mathcal{M}', \quad (2.91)$$

donde

$$\mathcal{M}' \equiv \left[ \left( \frac{\partial y_r}{\partial \beta} \right) \cos \beta' - \left( \frac{\partial z_r}{\partial \beta} \right) \sin \beta' \right] \left/ \left( \frac{\partial \beta'}{\partial \beta} \right) \right., \quad (2.92)$$

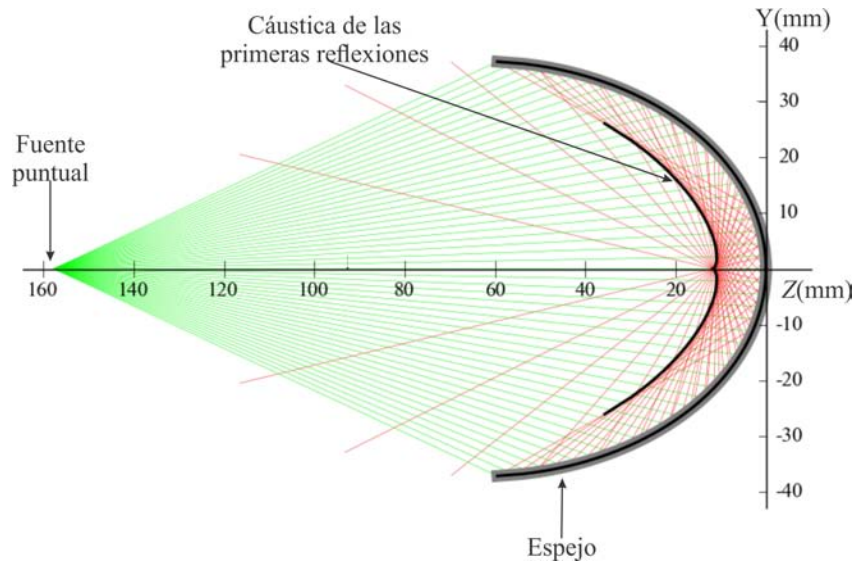


Figura 2.17: Esquema de la cáustica de las primeras reflexiones. Las líneas verdes simulan los rayos emitidos por la fuente puntual, las líneas en rojo son las primeras reflexiones.  $F/0.147$ ,  $r = 21.880$  mm,  $C = 0.046$  mm<sup>-1</sup>,  $k = -0.655$ ,  $A = 63.500$  mm,  $B = 37.275$  mm,  $D = 74.397$  mm, datos correspondientes al espejo (3) de la Tabla(1.1); además,  $S_o = 157.619$  mm y  $S_i = 10.230$  mm.

y además

$$\frac{\partial z_r}{\partial \beta} = \frac{AB [y_+(A - z_+) + z_+(z_+ - 2A) \tan \beta]}{\cos^2 \beta (B^2 + A^2 \tan^2 \beta) \gamma'} - \frac{A^2 y_+}{\cos^2 \beta (B^2 + A^2 \tan^2 \beta)},$$

$$\frac{\partial y_r}{\partial \beta} = \frac{(z_r - z_+)}{\cos^2 \beta} + \left( \frac{\partial z_r}{\partial \beta} \right) \tan \beta, \tag{2.93}$$

$$\frac{\partial \beta'}{\partial \beta} = -1 - \frac{2AB^3 \partial y_r / \partial \beta}{(B^4 + A^2 y_r^2 - B^2 y_r^2) \sqrt{B^2 - y_r^2}},$$

con  $\gamma' = \sqrt{B^2 + (z_+ \tan \beta - y_+)[(2A - z_+) \tan \beta + y_+]}$ .

Las Ecs. (2.93) se dejan en términos del punto  $(z_+, y_+)$  debido a que su simplificación no constituye un trabajo trivial. También se ha considerado para la derivación el signo negativo del radical de la Ec. (2.69), que se corresponde con el signo negativo de la Ec. (2.60).

Las ecuaciones paramétricas de la cáustica producida por las segundas reflexiones se encuentran al resolver las Ecs. (2.90) y (2.91) para  $(z, y)$ , así

$$\begin{aligned} Z_{cd} &= z_r - \mathcal{M}' \cos \beta', \\ Y_{cd} &= y_r - \mathcal{M}' \sin \beta', \end{aligned} \tag{2.94}$$

donde se ha reescrito  $z \rightarrow Z_{cd}$  y  $y \rightarrow Y_{cd}$  y el subíndice  $cd$  significa catacústica de las segundas reflexiones. El esquema correspondiente a la cáustica producida por las segundas reflexiones puede ser observado en la Fig. (2.18).

Hasta ahora se ha hablado del ángulo de emisión ( $\alpha$ ) como si se tuviera una elipse cerrada, sin embargo, en la situación física real, en la que se ha trabajado, la superficie es abierta, por lo que

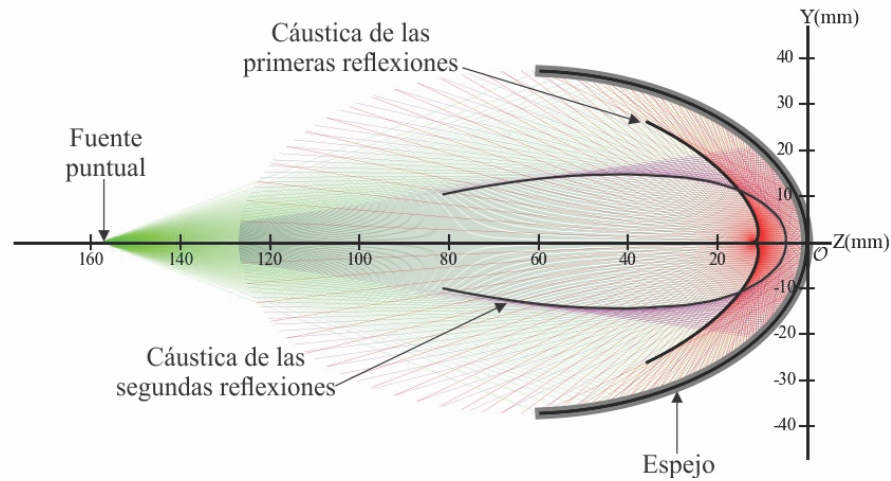


Figura 2.18: Esquema de la caústica de las segundas reflexiones. Las líneas verdes simulan los rayos emitidos por la fuente puntual, las líneas en rojo son la primeras reflexiones y las líneas púrpura corresponden a las segundas reflexiones.  $F/0.147$ ,  $r = 21.880$  mm,  $C = 0.046$  mm<sup>-1</sup>,  $k = -0.655$ ,  $A = 63.500$  mm,  $B = 37.275$  mm,  $D = 74.397$  mm, datos correspondientes al espejo (3) de la Tabla(1.1); con  $S_o = 157.619$  mm y  $S_i = 10.230$  mm.

el ángulo de emisión tiene un valor máximo y un valor mínimo, es decir es un ángulo de emisión particular medido desde la posición del pinhole y para cada rayo incidente se requiere que  $\alpha \in [\alpha_{min}, \alpha_{max}]$  y  $\alpha \in [-\alpha_{max}, -\alpha_{min}]$ , tomando en cuenta las siguientes posiciones para  $S_o$ :

$$\begin{aligned}
 \alpha_{max} &= \arctan \left[ \frac{D}{2(|S_o| - |Z_{D/2}|)} \right], & \text{para } |S_o| \geq |Z_{D/2}|, \\
 \alpha_{max} &= \frac{\pi}{2} + \arctan \left[ \frac{2(|S_o| - |Z_{D/2}|)}{D} \right], & \text{para } |S_o| < |Z_{D/2}|, \\
 \alpha_{min} &= \arctan \left[ \frac{V}{2(|S_o| - |Z_{V/2}|)} \right], & \text{para } |S_o| \geq |Z_{V/2}|, \\
 \alpha_{min} &= \frac{\pi}{2} + \arctan \left[ \frac{2(|S_o| - |Z_{V/2}|)}{V} \right], & \text{para } |S_o| < |Z_{V/2}|,
 \end{aligned} \tag{2.95}$$

donde  $D/2$  es el semidiámetro de la superficie,  $V/2$  es el semidiámetro del orificio interno de la superficie y, tanto  $Z_{D/2}$  como  $Z_{V/2}$ , son longitudes a lo largo del eje óptico, las cuales pueden ser evaluadas a partir de las Ec. (2.3) ó Ec. (2.58) tomando en cuenta los parámetros predefinidos para la superficie cónica  $z(D/2) = Z_{D/2}$  o  $z(V/2) = Z_{V/2}$ , como se muestran en la Tabla (1.1) y en la Fig. (1.4).

Se han puesto a prueba los resultados obtenidos al momento, para ello se han realizado las simulaciones del proceso de reflexión hasta las segundas reflexiones para el espejo 3, con  $F/0.147$ , colocando una fuente puntual ubicada en donde estaría el pinhole para un diseño de pantallas nulas

de gotas con configuración cilíndrica, en dos casos, el primero considerando todo el conjunto de las Ecs. (1.26) y, el segundo, tomando en cuenta la sugerencia de colocar la posición del pinhole acercándose desde la izquierda al primer foco del espejo, es decir, el que está más alejado del vértice. Los resultados, que pueden observarse en las Figs. (2.19) y (2.20), muestran que en ambos casos existen segundas reflexiones que afectan la formación de la imagen de diseño, de acuerdo al diseño inicial de la pantalla correspondiente. En ambos casos el ángulo máximo de emisión está determinado por  $\alpha_{max} = \arctan [D/(2(|S_o| - |Z_{D/2}|))]$ , donde  $D$  es el diámetro del espejo.  $k = -0.655$ ,  $r = 21.880$  y  $F/0.147$ . Por otra parte, en las Figs. (2.21) puede observarse que cuando  $S_o = 157.619$  mm hay rayos que ya no cumplen con la condición de cubrir toda la superficie del espejo, mientras que cuando  $S_o = 124.909$  mm existen rayos que no cumplen la condición de cubrir todo el CCD.

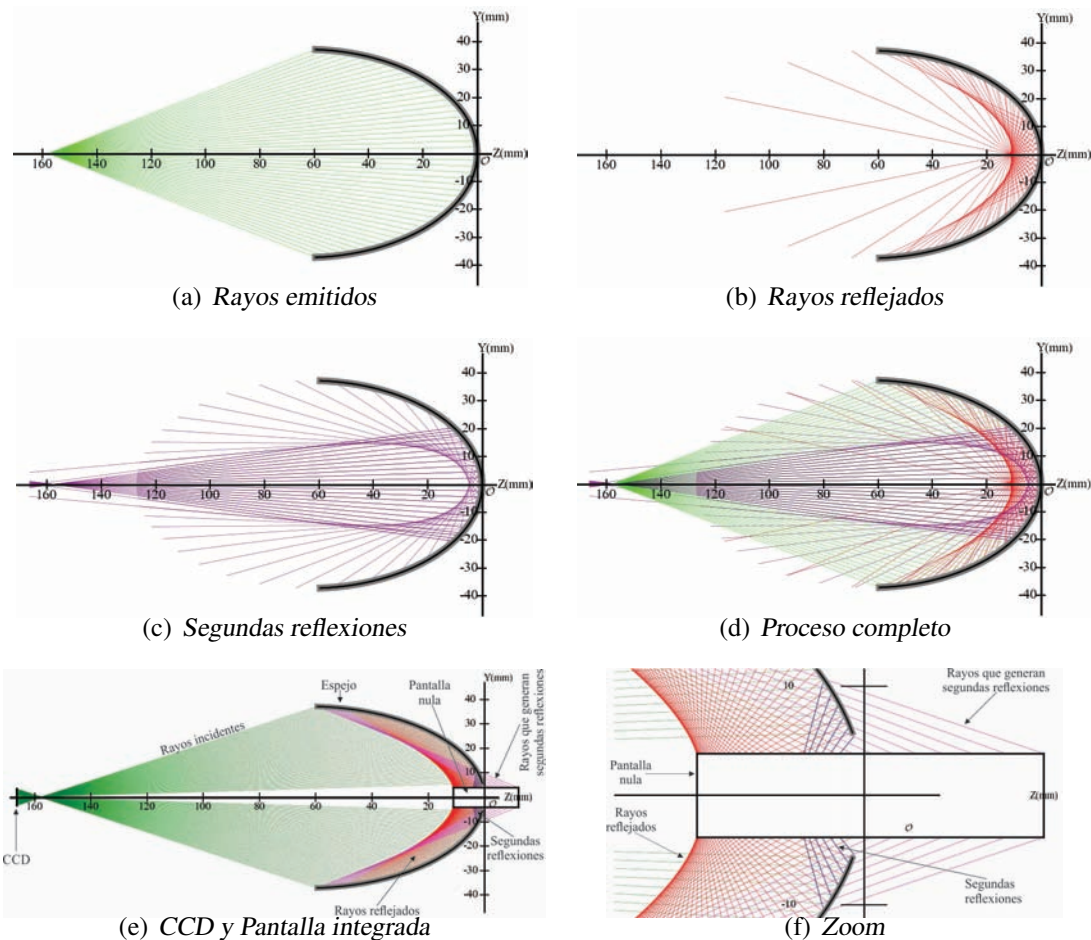


Figura 2.19: Simulación para el proceso de reflexión, hasta las segundas reflexiones, cuando la fuente puntual se coloca en la posición sugerida por el conjunto de Ecs. (1.26). (a) Las líneas verdes son los rayos emitidos, (b) las líneas rojas representan las primeras reflexiones, (c) las líneas púrpura son las segundas reflexiones y en (d) se muestra el proceso completo. Estos últimos se han limitado a la periferia de la elipse que da forma al espejo. Con  $S_o = 157.619$  mm,  $S_i = 10.230$  mm y  $\alpha_{max} = 0.362$  rad. En (e) se integra el CCD y la pantalla nula, mostrando cómo las segundas reflexiones afectan la imagen que se captura por el CCD; en (f) se hace un acercamiento en la zona de las segundas reflexiones.



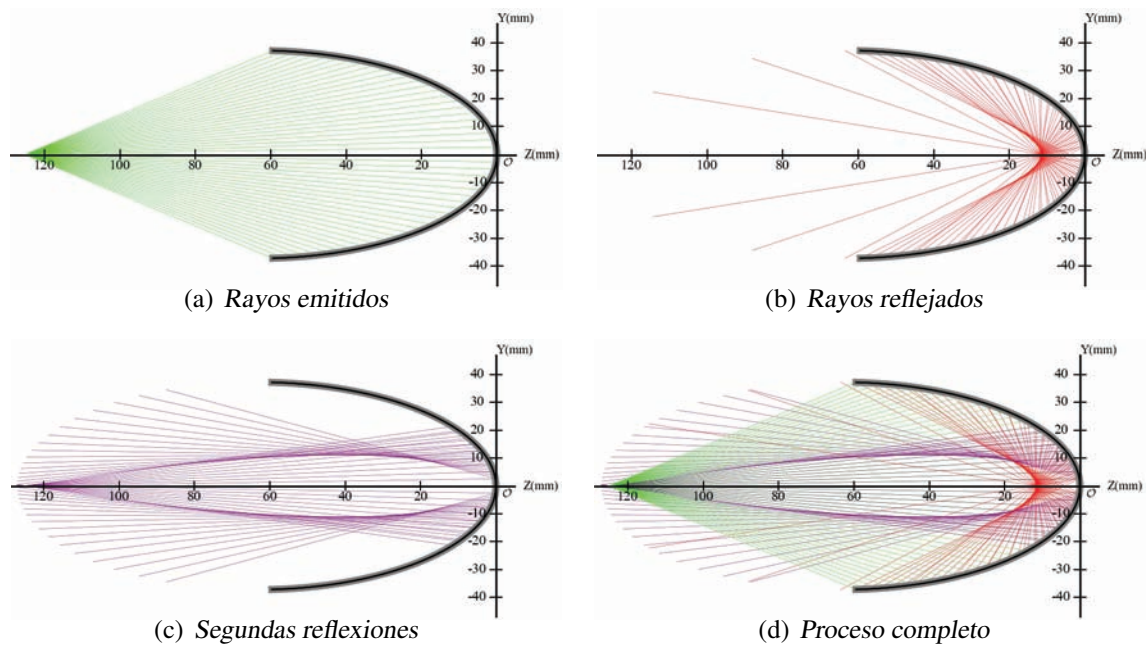


Figura 2.20: Simulación para el proceso de reflexión, hasta las segundas reflexiones, cuando la fuente puntual se aproxima por la izquierda al primer foco del espejo (el más alejado del vértice). (a) Las líneas verdes representan los rayos emitidos, (b) las líneas rojas son las primeras reflexiones, (c) las líneas púrpura muestran las segundas reflexiones y en (d) se muestra el proceso completo. En este caso  $\alpha_{max} = 0.517$  rad,  $S_o = 124.909$  mm y  $S_i = 10.059$  mm.

Para la incorporación del plano de detección de la imagen generada por el espejo en la simulación del proceso de reflexión, a través de un trazo de rayos, se consideran los mismos instrumentos de trabajo que han sido mencionados previamente, para el diseño de pantallas nulas de gotas. Tomando en cuenta que la superficie a evaluarse debe poder ser captada en su totalidad por el CCD. Esto último depende de la distancia focal de la lente que se utiliza con la cámara. La pantalla nula de gotas resultante para la simulación de la Fig. (2.20) es la misma que se ha presentado en el primer capítulo de este trabajo, y que puede observarse en la Fig. (2.22), junto a la simulación para el proceso de reflexión hasta las segundas reflexiones y la imagen grabada por la cámara CCD.

Entonces, de acuerdo a los resultados mostrados, hay dos soluciones para evitar las deformaciones en las imágenes generadas por el espejo con  $F/0.147$ . Primero, buscar una posición para el pinhole, de tal manera que se eviten las segundas reflexiones, lo que sin duda limita las características de los instrumentos de detección de la imagen (cámara CCD y lente), si queremos mantener la condición de que la imagen de superficie que se va a evaluar abarque toda la superficie del CCD en un radio igual a la mitad de su lado más corto; o también, continuar con los instrumentos con los que se ha trabajado y con esta misma condición pero reduciendo la superficie con la que se cuenta. Segundo, desarrollar una pantalla nula de gotas de configuración cilíndrica (o tal vez de cualquier otra configuración) en la que se tomen en cuenta las segundas reflexiones.

En este trabajo se ha optado por la primera solución, manteniendo los instrumentos de detección de la imagen con los que se ha venido trabajando. La segunda propuesta se reserva para un trabajo a futuro.

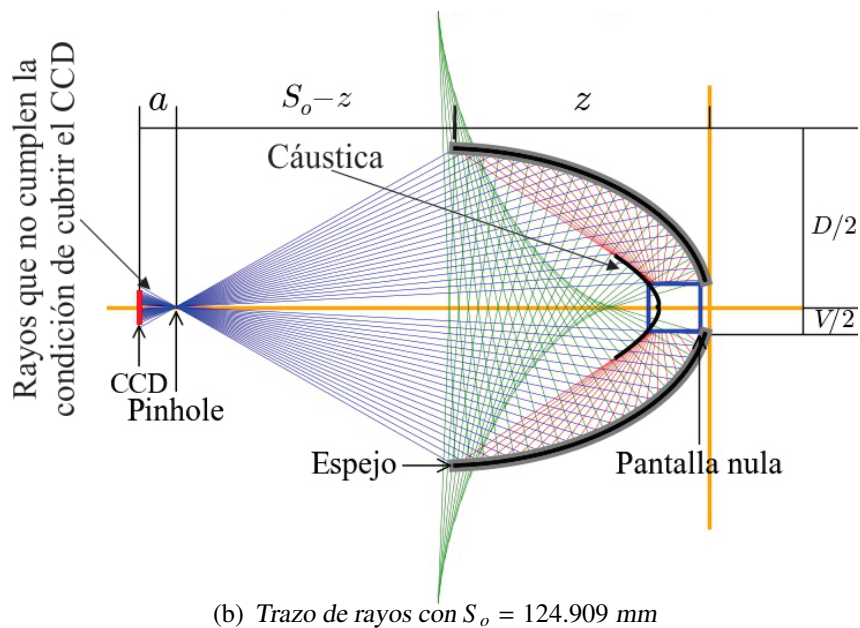
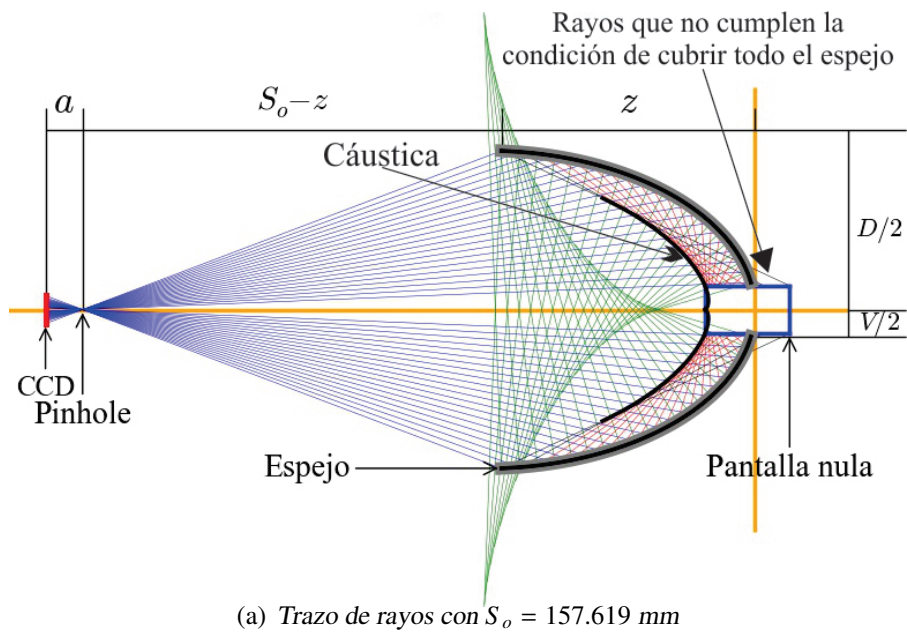


Figura 2.21: Trazo de rayos de las primeras reflexiones, para el espejo con  $F/0.147$ ; en (a) se pueden ver rayos que no cumplen con la condición de cubrir todo el espejo; en (b) hay rayos que no cumplen con la condición de cubrir todo el CCD;  $f = 8.000 \text{ mm}$  para ambos casos.

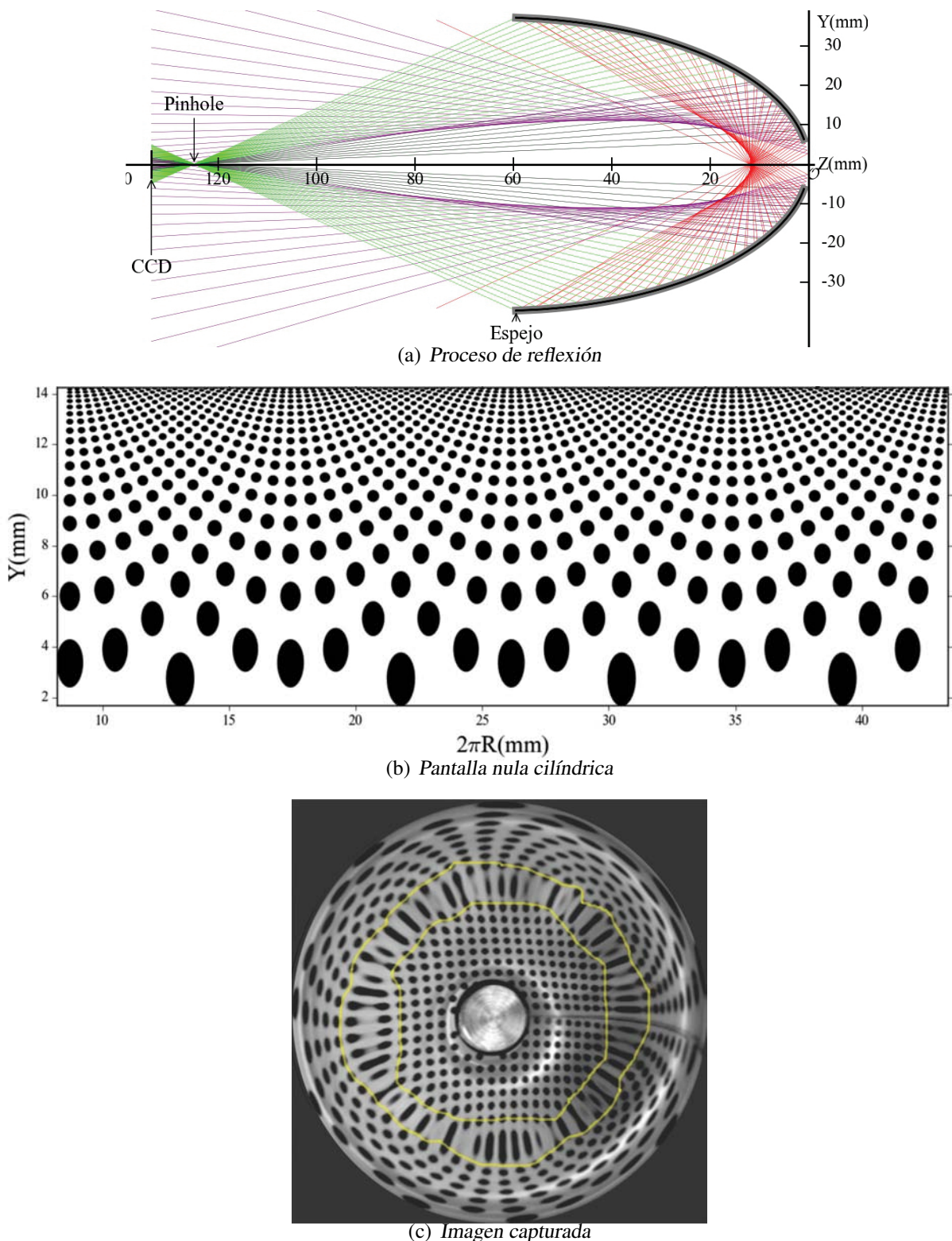


Figura 2.22: (a) Trazo de rayos, (b) la pantalla nula correspondiente a la simulación y (c) la imagen resultante capturada por la cámara CCD. En este caso  $\alpha_{max} = 0.517$  rad,  $\alpha_{min} = 0.051$  rad,  $S_o = 124.909$  mm y  $S_i = 10.059$  mm.

## 2.9. Aplicación de resultados en el diseño de pantallas nulas cilíndricas

En el capítulo 1 se había comentado que las posibles causas de las deformaciones obtenidas en las imágenes capturadas a través del CCD podían ser producidas por alguna de las siguientes dos razones, la formación simultánea de una imagen real y una imagen virtual o por segundas reflexiones. Se agregó que se tomó la decisión de trabajar por el rumbo de las segundas reflexiones, y se decidió hacer un estudio de las cáusticas por reflexión para los espejos cónicos cóncavos con simetría de revolución, lo que produjo diversos resultados conocidos que ya habían sido publicados y obtenidos por otros métodos diferentes al propuesto en este trabajo. En esta sección podrá comprobarse que son las segundas reflexiones las responsables de las deformaciones producidas en las imágenes capturadas y que son producidas por el espejo bajo prueba; aquí mismo se mostrará la importancia que ocupa la posición de la fuente puntual (que equivale a la posición del pinhole en el diseño de las pantallas nulas de gotas, con configuración cilíndrica) en la aparición de segundas reflexiones y que es esta ubicación la que determina que las segundas reflexiones lleguen o no al sensor CCD. Así, es necesario hacer un trazo de rayos para el diseño de la pantalla, que corresponde al espejo  $F/0.147$ , en el que se eviten las segundas reflexiones. Y es de lo que trata este capítulo.

### 2.9.1. Trazo de rayos

Para hacer la simulación del proceso de reflexión considerando un sistema óptico formado por el espejo  $F/0.147$ , la pantalla nula de gotas con configuración cilíndrica y el sistema de detección de la imagen producida por la superficie reflectora, es importante recordar que en el diseño de la pantalla se toma en consideración un sistema formador de imagen, es decir, una lente que sirve para proyectar la imagen sobre el sensor CCD y, que si se impone la restricción de que toda la imagen sea captada por el área del cuadro formado por lado más corto del CCD, entonces esto también influye en el diseño de la pantalla.

En el capítulo 3 se hace una descripción de los instrumentos que se han utilizado para el montaje del sistema experimental, así como un resumen de los parámetros de diseño de las pantallas nulas de gotas con configuración cilíndrica que se han elaborado para cada uno de los espejos que se han evaluado.

Para el cálculo de la posición del pinhole se ha hecho una aproximación numérica a través del mismo programa que se usa para el trazo de rayos, dando un intervalo de valores para la posición del pinhole que se utiliza en las expresiones de las Ecs. (2.60), (2.61), (2.69), (2.70), (2.81) y (2.82). Con el programa se va observando el comportamiento de las segundas reflexiones con el cambio de posición del pinhole, y se elige una a partir de la que las segundas reflexiones no puedan ser captadas en la simulación. El valor aproximado para el espejo  $F/0.147$  es  $S_o = 84.211$  mm. Los valores del resto de los parámetros que se han empleado en el trazo de rayos se muestran en la Tabla (2.1).

La simulación del proceso de reflexión correspondiente al espejo  $F/0.147$ , con una posición para el pinhole  $S_o = 84.211$  mm, puede verse en las Figs. (2.23), en ellas se observa que si se quiere trabajar con la lente cuya distancia focal es de  $f = 8.000$  mm, no solamente siguen apareciendo las segundas reflexiones, sino que además estas segundas reflexiones pueden ser grabadas por el CCD, después de haber cruzado por el pinhole, causando así las deformaciones que se han venido mencionando; y también, la imagen generada por el espejo desborda al CCD; por lo que se debe

Parámetro	Símbolo	Magnitud (mm)
Radio de la pantalla	$R$	5.650
Distancia focal de la lente	$f$	8.000
Distancia del CCD al pinhole	$a$	9.065
Distancia del vértice del espejo al pinhole	$S_o$	84.211
Diámetro del espejo	$D$	74.397
Claro del vértice	$V$	12.700
Radio de curvatura paraxial	$r$	21.880
Constante de conicidad	$k$	-0.655 (adimensional)

Tabla 2.1: Parámetros que se han usado en el trazo de rayos del proceso de reflexión para el espejo  $F/0.147$ .

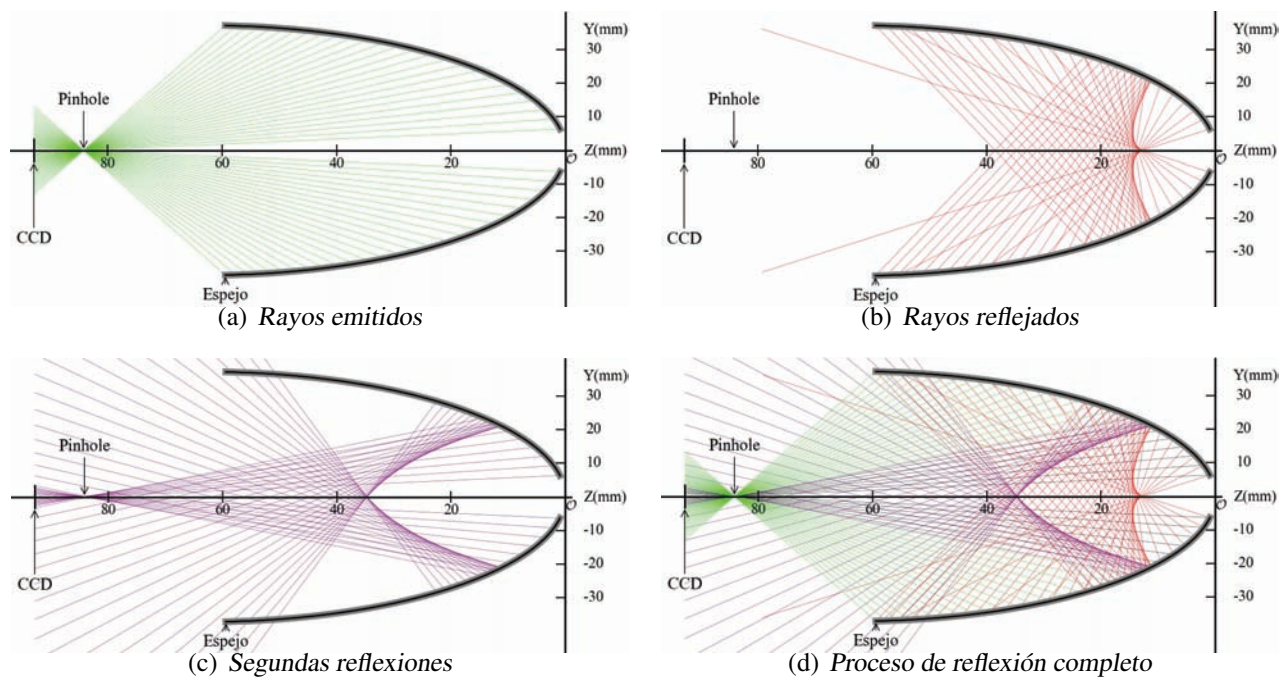


Figura 2.23: Simulación del proceso de reflexión para el espejo  $F/0.147$ . Las líneas verdes (a), representan los rayos que van desde el CCD, pasando por el pinhole, hasta la superficie reflectora; (b) los rayos rojos corresponden a las primeras reflexiones y (c) los rayos púrpura muestran las segundas reflexiones. La pantalla cumple un fin esquemático, para indicar dónde debería estar colocada.

cambiar de distancia focal para la lente o prescindir de él o, reducir la cantidad de superficie a evaluar. El ángulo máximo de emisión está determinado por  $\alpha_{max} = \arctan [D/(2(|S_o| - |Z_{D/2}|))]$ , donde  $D$  es el diámetro del espejo, mientras que el ángulo mínimo emisión está dado por  $\alpha_{min} = \arctan [V/(2(|S_o| - |Z_{V/2}|))]$ , donde  $V$  es el diámetro del orificio interno del espejo. En este caso se ha optado por reducir el tamaño de la superficie bajo prueba, debido a que es más sencillo ir

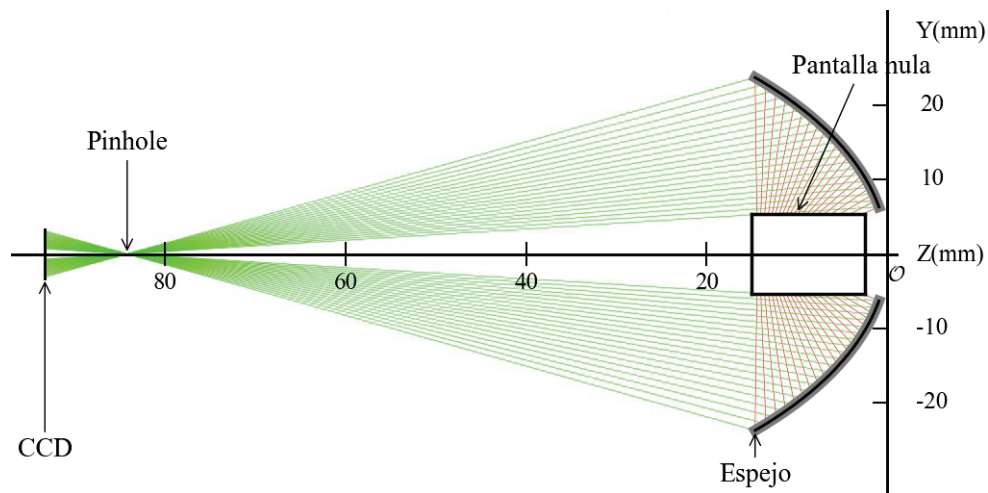


Figura 2.24: Simulación del proceso de reflexión para el espejo  $F/0.221(0.147)$ , en la región en la que se evitan las segundas reflexiones. Las líneas verdes representan los rayos que van desde el CCD, pasando por el pinhole, hasta la superficie reflectora y los rayos rojos corresponden a las primeras reflexiones; considerando un trazo inverso de las trayectorias reales.  $k = -0.655$ ,  $r = 21.880$  mm,  $F/0.221(0.147)$  y  $S_o = 84.211$  mm.

reduciendo la superficie que contar con distancias focales para la lente dentro de un continuo de valores. De acuerdo al mismo programa con el que se ha determinado la posición para el pinhole, se ha determinado evaluar, aproximadamente, una superficie correspondiente a  $2/3$  de la apertura de claro, es decir,  $2/3$  del diámetro del espejo. Entonces, considerando este dato, los parámetros para la nueva simulación se muestran en la Tabla (3.2).

En las Figs. (2.24) es posible observar que ya no hay segundas reflexiones y que la imagen generada por reflexión por la superficie bajo prueba es completamente captada por la cámara CCD, optimizando el área determinada por el lado más corto del propio CCD. Lo anterior sugiere que la prueba del espejo  $F/0.147$ , considerando una posición para el pinhole de  $S_o = 84.211$  mm, medidos desde el vértice del espejo, y utilizando un diámetro de aproximadamente  $2/3$  para el espejo; ya no debería presentar alguna diferencia sustancial entre la imagen capturada y la imagen de diseño correspondiente a la pantalla nula, y así ocurre, como se mostrará en el siguiente capítulo.

Antes de avanzar al próximo capítulo se va a mostrar otra simulación del trazo de rayos para otro de los espejos, mismo que también se ha evaluado utilizando la misma prueba geométrica de la que se ha estado hablando, la pantalla nula de gotas. Se ha elegido el espejo con  $F/0.142$ , junto con la misma cámara CCD y la misma lente que se han utilizado para  $F/0.147$ . El resto de los parámetros empleados en la simulación del proceso de reflexión se encuentran registrados en la Tabla (3.3). En este caso se ha tomado el conjunto de Ecs. (1.26) completo, es decir, que se ha calculado la posición para el pinhole de acuerdo a ellas. El trazo de rayos sin considerar la pantalla nula de gotas muestra que también existen segundas reflexiones; sin embargo, éstas no llegan a pasar por el pinhole y por ello no pueden ser captadas por el CCD, de hecho, al colocar una pantalla nula de gotas ni siquiera se generan segundas reflexiones para este caso y, por lo tanto, no generan diferencias entre la imagen capturada respecto a la imagen de diseño que corresponde a la pantalla nula elaborada para el espejo. Entonces, lo anterior significa que no deben de existir problemas en la evaluación del espejo con  $F/0.142$ , como así se mostrará en el capítulo siguiente también.

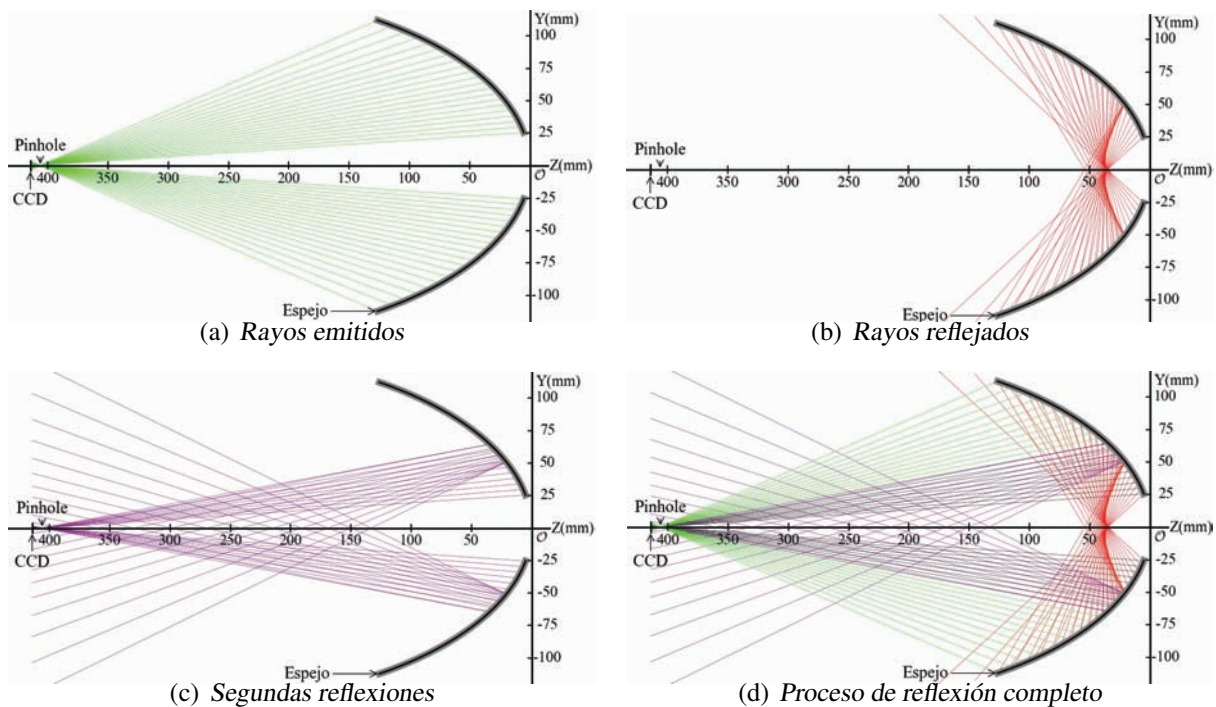


Figura 2.25: Simulación del proceso de reflexión para el espejo  $F/0.142$ . (a) Las líneas verdes representan los rayos que van desde el CCD, pasando por el pinhole, hasta la superficie reflectora; (b) los rayos rojos corresponden a las primeras reflexiones y (c) los rayos púrpura muestran las segundas reflexiones; considerando un trazo inverso de las trayectorias reales. Con  $S_o = 84.211$  mm,  $S_i = 9.684$  mm,  $\alpha_{max} = 0.983$  rad y  $\alpha_{min} = 0.076$  rad.

En relación a las cáusticas de las primeras reflexiones, algo que se puede observar en las Figs. (2.24) y (2.25), es que en ambos casos (espejos  $F/0.147$  y  $F/0.142$ ) las cáusticas son negativas, lo que corresponde a una aberración esférica negativa producida por las dos superficies; lo que sugiere que una posible condición suficiente para que las segundas reflexiones no sean captadas por la cámara CCD y no se produzcan deformaciones que no puedan ser atribuidas al diseño de pantalla, ni a la alineación del sistema o a deformaciones en la superficie bajo prueba; es que se busque una posición para el pinhole de manera que la cáustica producida por las primeras reflexiones sea negativa, véase la sección 2.3 del capítulo 2.

## 2.10. Referencias

1. Á. Castañeda-Mendoza, E. Román-Hernández y V. I. Moreno-Oliva, "Cáusticas generadas por superficies deformadas," XXV REUNIÓN ANUAL DE ÓPTICA, Morelia, Michoacán (2012).
2. M. Avendaño-Alejo, D. González Utrera, and L. Castañeda, "Caustics in a meridional plane produced by plano-convex conic lenses," J. Opt. Soc. Am. A **28**, 2619-2628, (2011).
3. M. Avendaño-Alejo, D. González Utrera, N. Qureshi, and L. Castañeda, "Null Ronchi-Hartmann test for a lens," Opt. Express **18**, 21131-21137, (2010).
4. M. Avendaño-Alejo, L. Castañeda, and I. Moreno, "Properties of caustics produced by a positive lens: meridional rays," J. Opt. Soc. Am. A **27**, 2252-2260, (2010).
5. M. Avendaño-Alejo, R. Díaz-Uribe, and I. Moreno, "Caustics caused by refraction in the interface between an isotropic medium and a uniaxial crystal," J. Opt. Soc. Am. A **25**, 1586-1593, (2008).
6. J. A. Lock, C. L. Adler, and E. A. Hovenac, "Exterior caustics produced in scattering of a diagonally incident plane wave by a circular cylinder: semiclassical scattering theory analysis," J. Opt. Soc. Am. A **17**, 1846-1856, (2000).
7. M. Avendaño-Alejo, I. Moreno, and L. Castañeda, "Caustics caused by multiple reflections on a circular surface," Am. J. Phys. **78**, 1195-1198, (2010).
8. A. Cordero-Dávila and J. Castro-Ramos, "Exact calculation of the circle of the least confusion of a rotationally symmetric mirror," Appl. Opt. **37**, 6774-6778, (1998).
9. D. G. Burkhard and D. L. Shealy, "Formula for the density of tangent rays over a caustic surface," Appl. Opt. **21**, 3299-3306, (1982).
10. P. S. Theocaris, "Properties of caustics from conic reflectors 1: meridional rays," Appl. Opt. **16**, 1705-1716, (1977).
11. D. Malacara and B. J. Thompson, *Handbook of Optical Engineering*, (Marcel Dekker, 2001), Cap. 1, pp. 1-2.
12. O. N. Stavroudis, "The  $k$ -function and its Ramifications," in *The Mathematics of Geometrical and Physical Optics* (Wiley-VCH Verlag, 2006), Cap. 12, pp. 179-186.
13. O. N. Stavroudis, *The Optics of Rays, Wavefronts, and Caustics* (Academics, 1972), Cap. 10, pp. 161-179.
14. O. N. Stavroudis and R. C. Fronczek, "Caustics surfaces and the structure of the geometrical image," J. Opt. Soc. Am. **66**, 795-800, (1976).
15. O. N. Stavroudis, "The  $k$  function in geometrical optics and its relationship to the archetypal wave front and the caustic surface," J. Opt. Soc. Am. A **12**, 1010-1016, (1995).



16. D. L. Shealy and J. A. Hoffnagle, "Wavefront and caustics of a plane wave refracted by an arbitrary surface," *J. Opt. Soc. Am. A* **25**, 2370-2382, (2008).
17. J. A. Hoffnagle and D. L. Shealy, "Refracting the  $k$  function: Stavroudis solution to the eikonal equation for multielement optical systems," *J. Opt. Soc. Am. A* **28**, 1312-1321 (2011).
18. G. Silva-Ortigoza, J. Castro-Ramos, and A. Cordero-Dávila, "Exact calculation of the circle of least confusion of a rotationally symmetric mirror II," *Appl. Opt.* **40**, 1021-1028, (2001).
19. J. Castro-Ramos, O. de Ita Prieto, and G. Silva-Ortigoza, "Computation of the disk of least confusion for conic mirrors," *Appl. Opt.* **43**, 6080-6089, (2004).
20. D. G. Burkhard and D. L. Shealy, "Simplified formula for the illuminance in an optical system," *Appl. Opt.* **20**, 897-909, (1981).
21. A. V. Gitin, "Legendre transformation: connection between transverse aberration of an optical system and its caustic," *Opt. Commun.* **281**, 3062-3066, (2008).
22. R. W. Hosken, "Circle of least confusion of a spherical reflector," *Appl. Opt.* **46**, 3107-3117, (2007).
23. F. A. Jenkins and H. E. White, *Fundamentals of Optics* (McGraw-Hill, 1976), Cap. 3, pp. 44-57.
24. J. Stoker, *Differential Geometry* (Wiley-Interscience, 1969), Cap. 2, pp. 12-52.
25. A. E. Conrady, *Applied Optics and Optical Design, Part I*, (Dover, 1957), Cap. II, pp. 72-125.
26. H. A. Buchdahl, *An Introduction to Hamiltonian Optics*, (Cambridge University, 1970), Cap. 4, pp. 35-82.
27. W. T. Welford, *Aberrations of the Symmetrical Optical Systems*, (Academic, 1974), Cap. 6, pp. 73-110.
28. D. Malacara and Z. Malacara, *Handbook of Lens Design*, (Marcel Dekker, 1994), Cap. 5, pp. 149-153.
29. D. Malacara, M. Servín and Z. Malacara, *Interferogram Analysis for Optical Testing*, 2th ed. (Taylor & Francis, 2005), Cap. 1, pp. 1-53.
30. D. Malacara, *Optical Shop Testing*, 2th ed. (John Wiley & Sons, 1992), Caps. 1, 2 y 10.
31. P. Mouroulis and J. Macdonald, *Geometrical Optics and Optical Design*, (Oxford University Press, 1997), Cap. 7, pp. 188-222.
32. W. J. Smith, *Modern Geometrical Engineering*, 3th ed. (McGraw Hill, 2000), Caps. 3-6, pp. 61-169.
33. D. Korsch, *Reflective Optics*, (Academic, 1991), Cap. 2-6, pp. 15-135.
34. S. A. April, P. Bilodeau, and M. Piche, "Focusing a  $TM_{01}$  beam with a slightly tilted parabolic mirror," *Opt. Exp.* **19**, 9201-9212, (2011).

35. M. Avendaño-Alejo, S. Maca García. “Angular Magnification for a Confocal Off-Axis Optical System”. RIAO/OPTILAS (2007).
36. R. C. Spencer and G. Hyde, “Studies of the focal region of a spherical reflector:geometric optics,” IEEE Trans. Antennas Propag. **AP-16**, 317-324, (1968).
37. C. Y. Tsai, “A general calculation of the 3-D disk of least confusion using skew ray tracing,” Appl. Phys. B **96**, 517-525, (2009).
38. O. Stavroudis, *Handbook of Optical Engineering* (Marcel Dekker, 2001), Cap. 1, pp. 1-38.
39. M. Born and E. Wolf, *Principles of Optics*, 7th ed. (Cambridge University, 1999), Cap. V, pp. 229-260.
40. O. Stavroudis, *The Mathematics of Geometrical and Physical Optics* (Wiley-VCH, 2006), Cap. 2, pp. 15-27.
41. Berry, M. V. and Upstill, C., “Catastrophe optics: morphologies of caustics and their diffraction patterns”. Progress in Optics, **18**, 257-346, (1980).
42. Berry, M. V. and Nye, J. F., “Fine structure in caustic junctions”, Nature, **267**, 34-36, (1977).



---

# Diseño y montaje de las pantallas nulas para la prueba

---

En este capítulo se detalla el diseño de las pantallas nulas de gotas con configuración cilíndrica para la prueba de dos espejos elípticos cóncavos con simetría de revolución, mostrando el montaje de cada uno de los sistemas, así como los resultados obtenidos. Cabe hacer la aclaración de que uno de esos espejos (el que presentó diferencias entre la imagen capturada y la imagen de diseño, y que tiene  $F/0.147$  de fabricación) se ha evaluado considerando un aproximado de  $2/3$  de su diámetro, para evitar la región donde se producen las segundas reflexiones. Este cambio en el tamaño del diámetro, y con ello la apertura de entrada, determina que el espejo es de  $F/0.221$  y  $D = 49.598$  mm, pero sigue siendo un espejo rápido.

El proceso de análisis de la imagen para la obtención de los centroides, de las normales a la superficie y trayectos de integración se fundamenta mayoritariamente en las referencias [1]-[6]; no obstante, se presentan algunas otras referencias que sirven para complementar el desarrollo del capítulo.

El diseño de la pantalla nula de gotas, así como el trabajo con los centroides para hacer el cálculo de las normales, determinar los trayectos de integración y la propia integración pueden llevarse a cabo con un programa que puede ser escrito en cualquier lenguaje de programación.

## 3.1. Diseño de las pantallas nulas de gotas

Se ha decidido evaluar las superficies reflectoras (1) y (3) correspondientes a la Fig. (3.1), y cuyos parámetros de fabricación se enlistan en la Tabla (3.1), es decir, los espejos con  $F/0.142$  y  $F/0.147$  respectivamente; debido a que ambas son superficies rápidas. Además, la superficie con  $F/0.147$  porque es la que mostró diferencias en la imagen capturada por el CCD después del proceso de reflexión respecto a la pantalla de diseño, véase la Fig. (1.18); la otra superficie, con  $F/0.142$ , se eligió para asegurar que el estudio hecho puede aplicarse a otro espejo diferente.

En ambos casos, se ha trabajado en el diseño para una cámara CCD blanco y negro, marca Sony, modelo XC-ST60.00; con un área activa de  $640 \times 480$  pixeles, que equivale a  $8.8\text{mm} \times 6.6$  mm, lo que proporciona un tamaño de pixel de  $0.014$  mm; y una lente 23FM08/23FM08L 2/3" 8mm F/1.4 Standard High Resolution C-Mount Lens with Lock, Tamron, Fig. (3.2). Cabe aclarar que en el proceso de diseño de la pantalla nula sólo es necesario uno de los lados del área del CCD, y el más corto es el adecuado. Hay que hacer notar que dicha pantalla debe producir una imagen de manchas que cubra la mayor parte de la superficie que se desea probar, recordando que esto depende de la posición del pinhole, y también de la distancia focal de la lente que se ha utilizado; que todos los

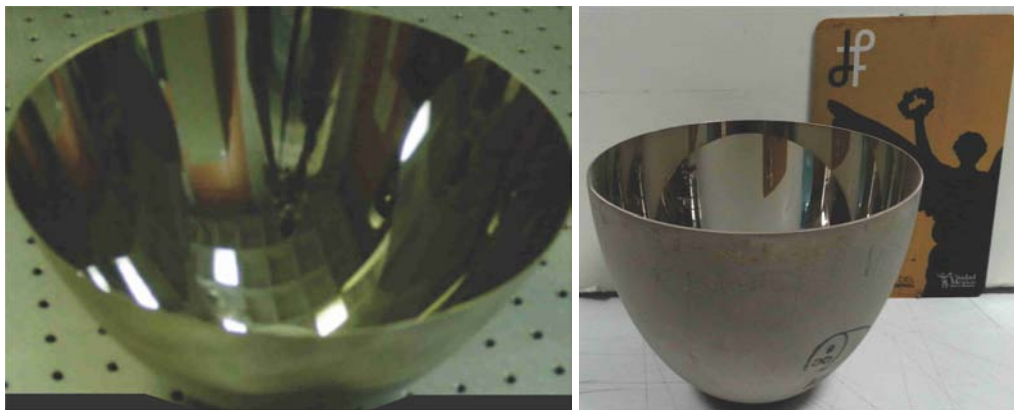
(a) Espejo (1) con  $F/0.142$ .(b) Espejo (2) con  $F/0.147(0.221)$ .

Figura 3.1: Superficies ópticas con simetría de revolución, espejos elípticos cóncavos rápidos en este caso. Los parámetros del fabricante correspondientes se muestran en la Tabla 3.1.

puntos tengan el mismo tamaño sin importar en que región se encuentren y que no se superpongan entre sí ni que lleguen a estar muy juntos el uno del otro. Para evitar esto, se ha propuesto que la separación entre cada punto del contorno de un círculo del patrón de diseño sobre el CCD sea al menos de un diámetro del mismo tamaño, o que la separación entre cada centro de los círculos debe ser, al menos, cuatro veces el radio de éste. Así, la separación entre cada centro es  $l = d/2n$ , donde  $d$  es el lado menor del CCD y  $n$  es el número de círculos que se quiere tener en la longitud de un cuadrante en el CCD, teniendo como límite la resolución del propio CCD. Entonces, para el tamaño del círculo sobre la pantalla de diseño se ha elegido un valor de 0.045 mm de radio, lo que garantiza que se tengan 36 pixeles por círculo, aproximadamente.

Espejo	$F/\#$	$r$ (mm)	$C$ ( $\text{mm}^{-1}$ )	$k$ (mm)	$A$ (mm)	$B$ (mm)	$CA = D$ (mm)	$V$ (mm)
(1)	0.142	63.749	0.016	-0.779	287.867	135.467	224.282	50.800
(2)	0.221 (0.147)	21.880	0.046	-0.655	63.500	37.275	49.598	12.700

Tabla 3.1: Parámetros de los espejos elípticos cóncavos observados en la Fig. (3.1).

Primero hacemos una simulación del proceso de reflexión para ambos espejos, utilizando los parámetros registrados en las Tablas (3.2) y (3.3), el cual puede observarse en las Figs. (3.3) y (3.4). Para una mejor perspectiva, se ha hecho una simulación en tres dimensiones en la que se puede ver la posición de la pantalla nula y la superficie reflectora, para ambos espejos, en los dos casos se tiene que la pantalla se ubica completamente en el interior de los espejos, lo que puede observarse en las Figs. (3.5). Teniendo la seguridad de que las cosas han marchado como se espera, se realiza el diseño de las pantallas nulas de gotas que han de usarse para la prueba de los espejos, las cuales se observan en la Fig. (3.6). Los parámetros de diseño de las pantallas nulas, para cada uno de los espejos, se resumen en las tablas 3.2 y 3.3.

Una vez que se tienen listos los diseños de las pantallas nulas de gotas se procede al montaje del

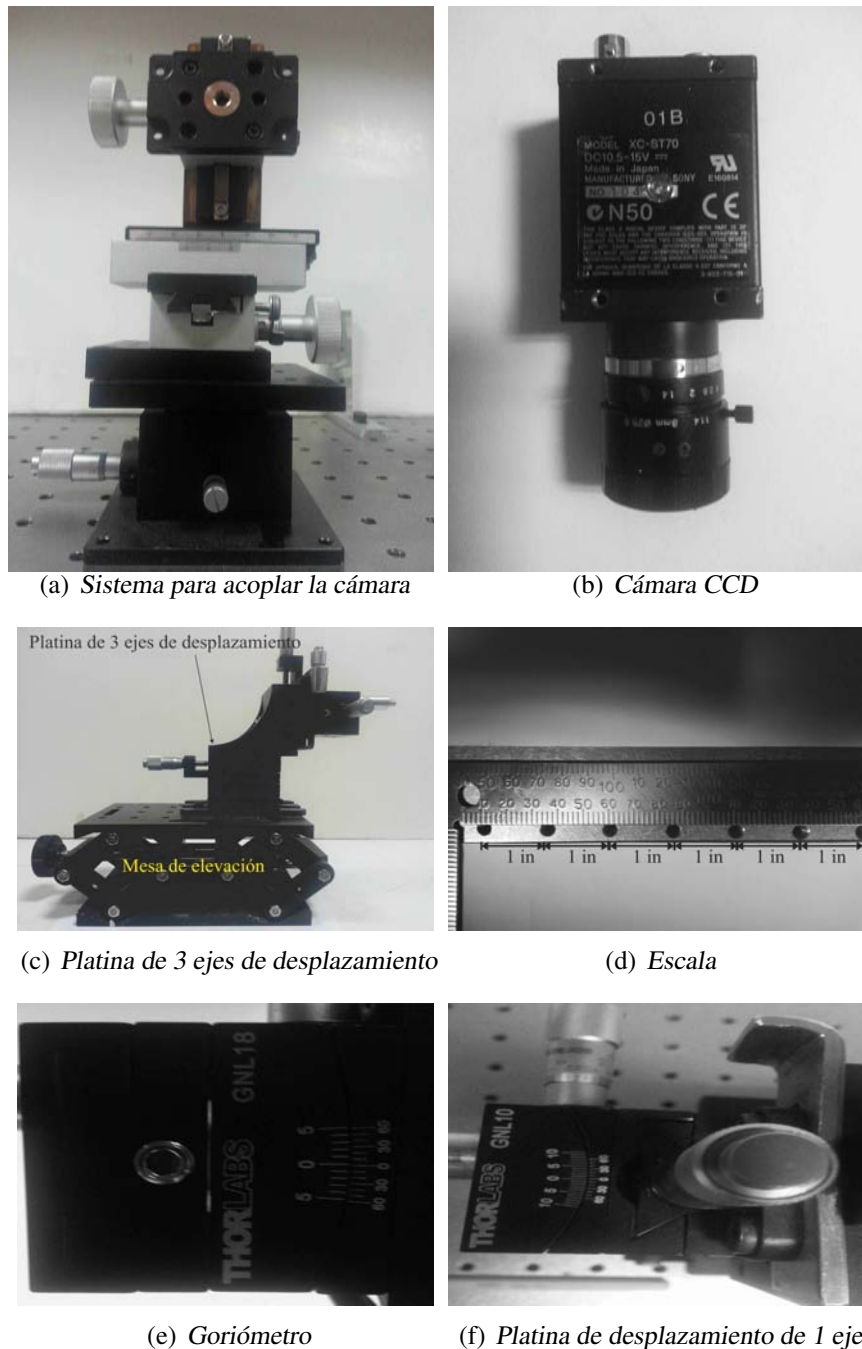


Figura 3.2: Dispositivos para el montaje del sistema experimental. La regla se coloca para dar una idea de la separación de los agujeros de la mesa de aire y de la escala real, en la que se ha trabajado.

sistema experimental para cada uno de los espejos. En ambos casos se ha usado el mismo sistema de platinas para montar la cámara, las cuales permiten un desplazamiento de la misma en las tres dimensiones cartesianas; también para ambos casos se ha usado el mismo sistema de platinas y elevador, en el que se ha ubicado el cilindro sobre el cual se monta la pantalla nula de gotas y que

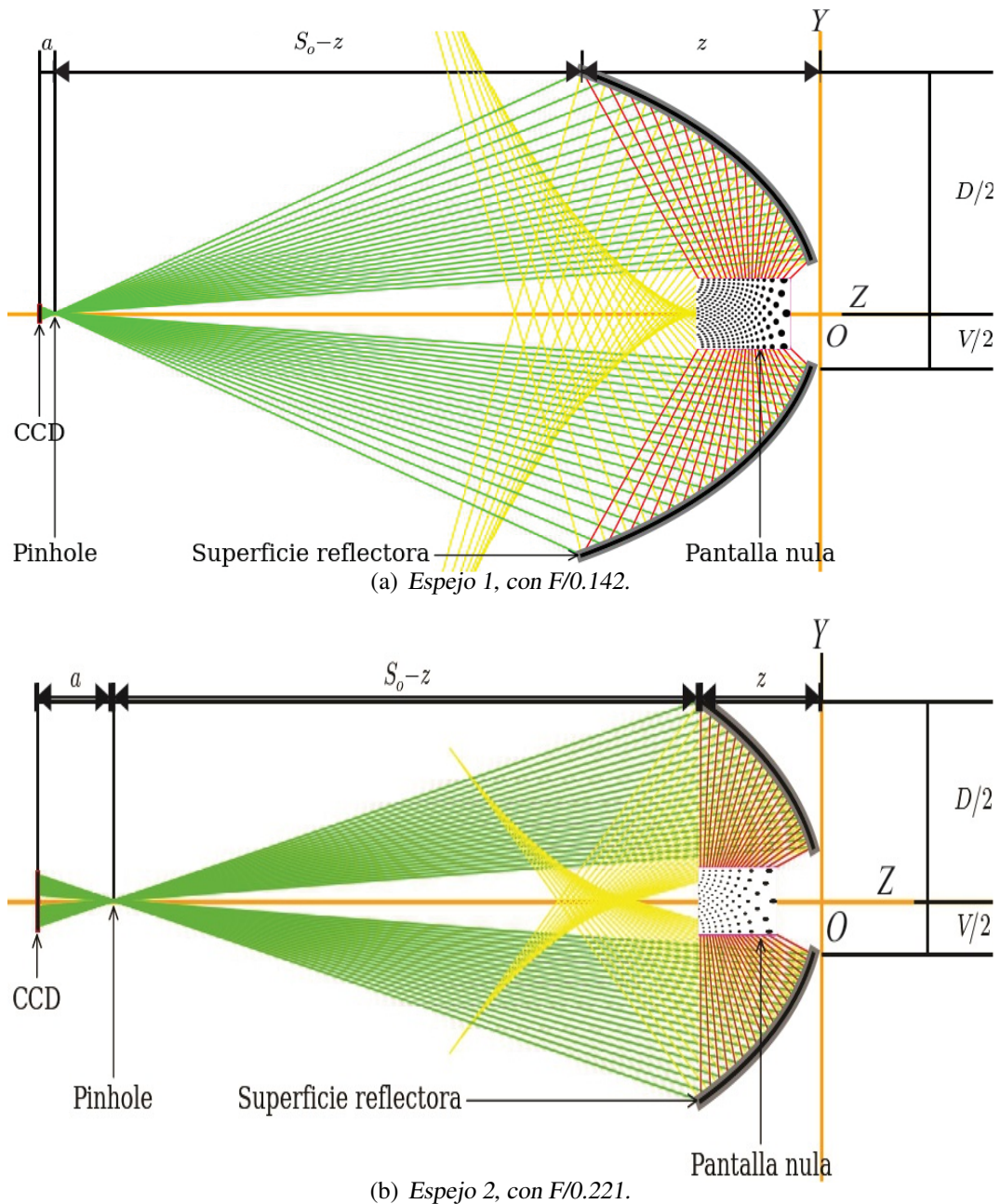


Figura 3.3: Trazo de rayos para el diseño de las pantallas nulas de gotas con configuración cilíndrica. (a) espejo (1), con  $a = 8.235$  mm y  $S_o = 406.229$  mm; (b) espejo (2), y  $a = 9.065$  mm y  $S_o = 84.211$  mm. Las líneas verdes son los rayos emitidos, las amarillas corresponden a las normales a la superficie y las líneas rojas simulan las reflexiones.

permite también un movimiento en las tres coordenadas cartesianas pero, además, es posible mover el cilindro a lo largo del ángulo azimutal y a lo largo del ángulo polar, en la Fig. (3.2) se muestran esos instrumentos.

Para la iluminación se ha utilizado un adaptador con lámpara circular de 32 W, modelo 9400580, marca ARGOS, cuyas características eléctricas son: 120 – 130 V, ~ 60 Hz, 32 W. Se ha usado

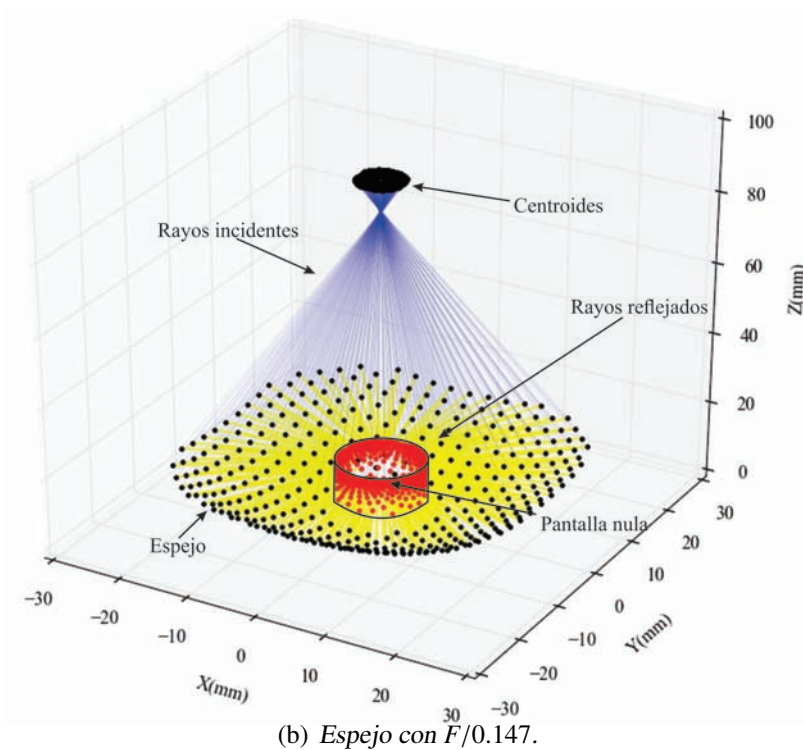
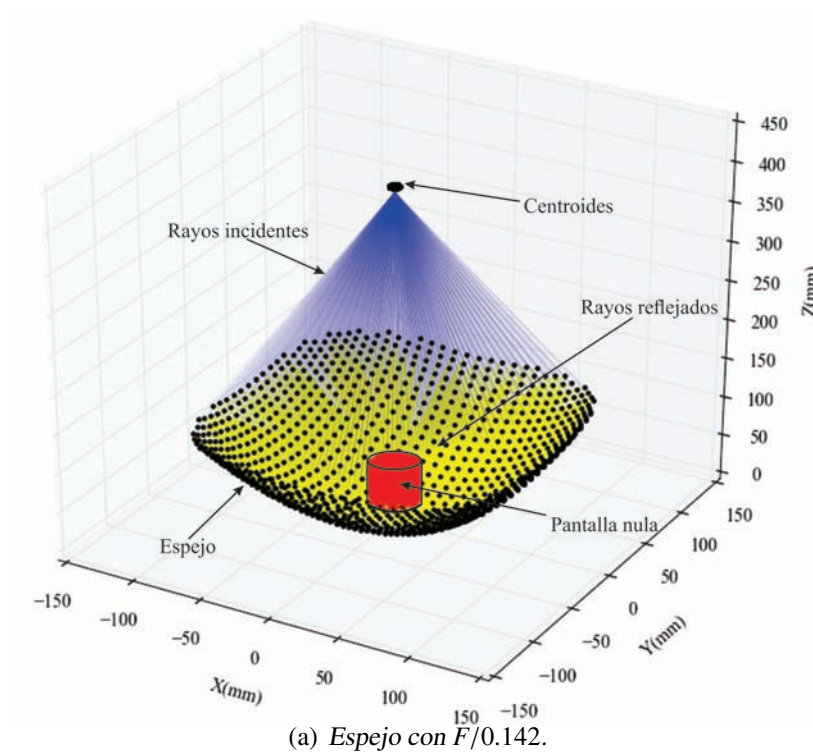


Figura 3.4: Simulación del proceso de reflexión de los espejos, en tres dimensiones. Se consideran los centroides, las intersecciones de los rayos emitidos con la superficie ideal, los rayos reflejados y la pantalla nula. (a) Espejo (1); y (b) espejo (2).



Parámetro	Símbolo	Magnitud (mm)
Radio de la pantalla	$R$	15.800
Largo de la pantalla	$L$	49.230
Perímetro de la pantalla	$P$	99.863
Distancia focal de la lente	$f$	8.000
Distancia del CCD al pinhole	$a$	8.235
Distancia del vértice del espejo al pinhole	$S_o$	406.229
Diámetro del espejo	$D$	224.282
Claro del vértice	$V$	50.800
Tamaño (radio) de la gota sobre el CCD		0.045
Radio de curvatura paraxial	$r$	63.749
Zeta máxima	$z_{máx}$	64.769
Zeta mínima	$z_{mín}$	15.539
Constante de conicidad	$k$	-0.779 (adimensional)

Tabla 3.2: Parámetros de diseño de la pantalla nula de gotas para el espejo  $F/0.142$ .

Parámetro	Símbolo	Magnitud (mm)
Radio de la pantalla	$R$	5.650
Largo de la pantalla	$L$	11.081
Perímetro de la pantalla	$P$	35.303
Distancia focal de la lente	$f$	8.000
Distancia del CCD al pinhole	$a$	9.065
Distancia del vértice del espejo al pinhole	$S_o$	84.211
Diámetro del espejo	$D$	49.598
Claro del vértice	$V$	12.700
Tamaño (radio) de la gota sobre el CCD		0.045
Radio de curvatura paraxial	$r$	21.880
Zeta máxima	$z_{máx}$	14.977
Zeta mínima	$z_{mín}$	3.896
Constante de conicidad	$k$	-0.655 (adimensional)

Tabla 3.3: Parámetros de diseño de la pantalla nula de gotas para el espejo  $F/0.221$ .

el valor  $f/16$  para el diafragma de la lente de la cámara, para obtener una buena profundidad de campo y un enfoque adecuado.

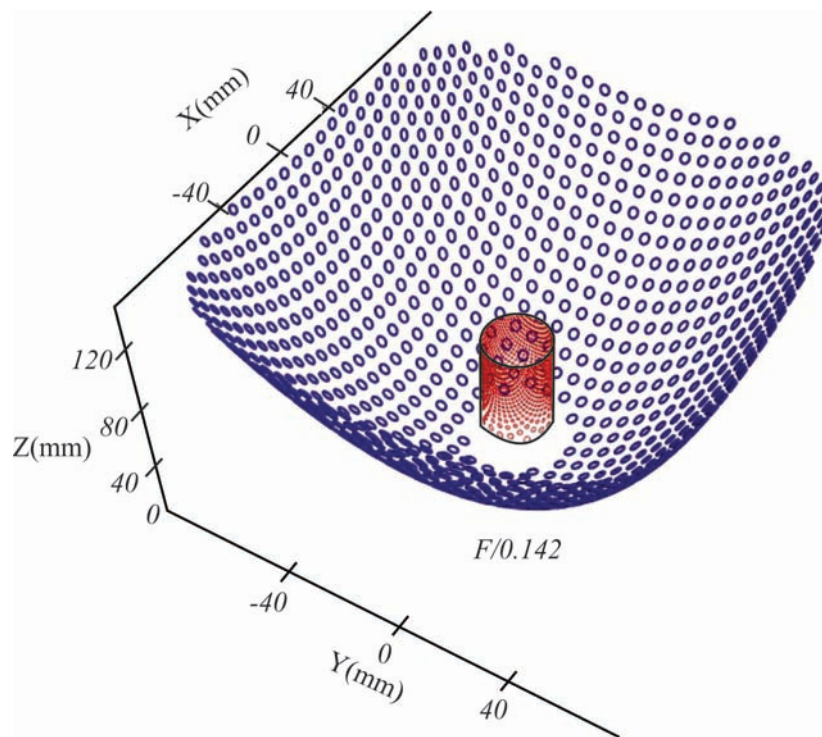
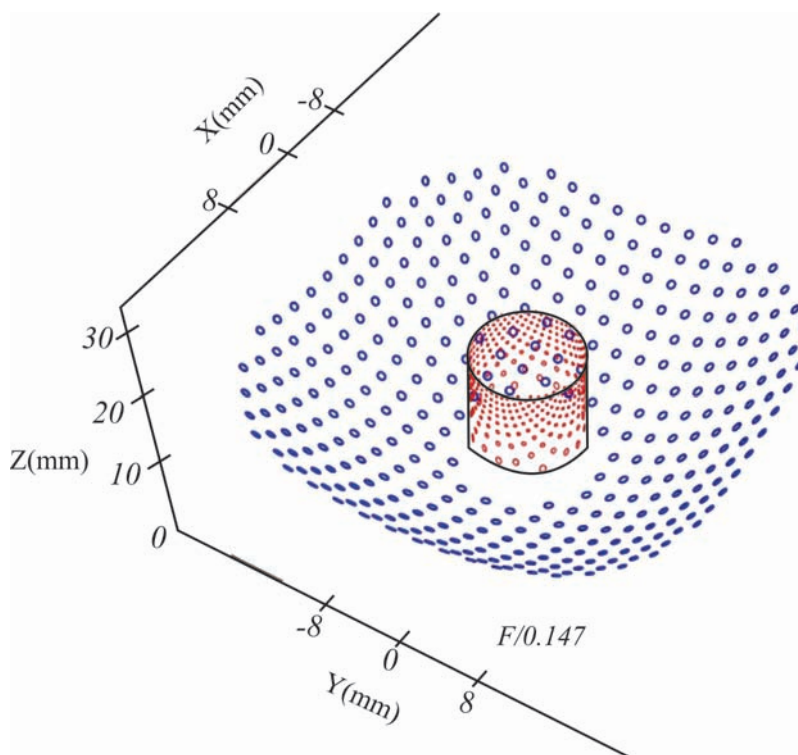
(a) Espejo con  $F/0.142$ .(b) Espejo con  $F/0.147$ .

Figura 3.5: Simulación en tres dimensiones para verificar la ubicación de la pantalla nula de gotas. En la parte superior, (a) se muestra el que corresponde al espejo (1), y en la inferior, (b) el del espejo (2). No se rellenan las gotas porque sólo se requiere saber la colocación para la pantalla.

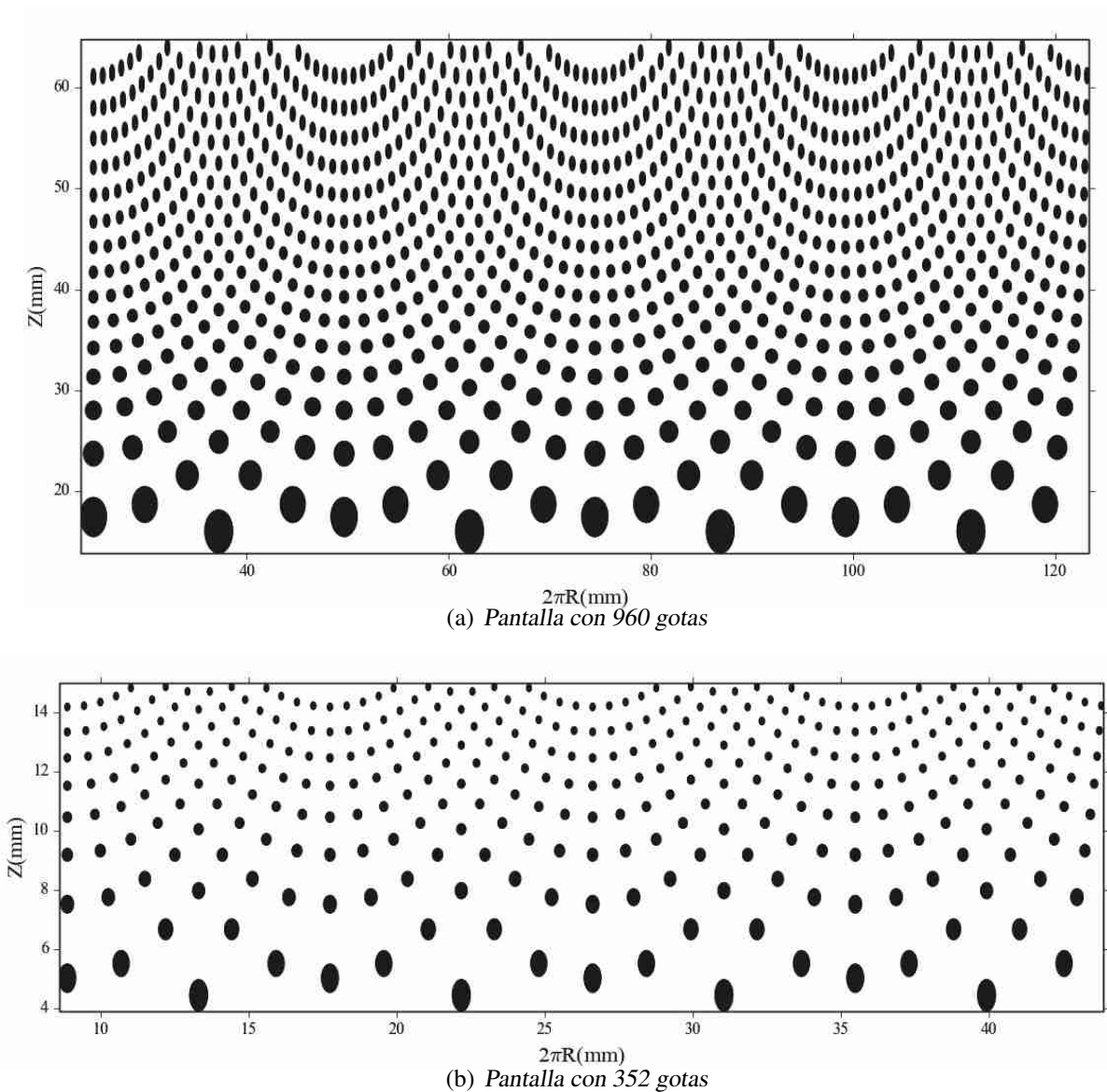


Figura 3.6: Pantallas nulas de gotas con configuración cilíndrica para la prueba de los espejos. (a) Espejo (1), con  $F/0.142$ ; (b) espejo (2), con  $F/0.147$ .



Figura 3.7: Sistema experimental para el espejo (1).

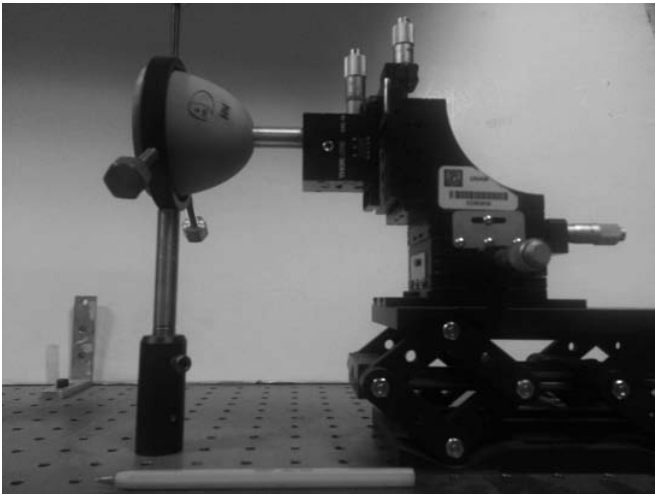


Figura 3.8: Sistema experimental para el espejo (2).

### 3.2. Captura de las imágenes y obtención de los centroides

La imagen de cada una de las pantallas nulas cilíndricas, una vez capturada, nos muestra un patrón de círculos, a lo largo de líneas en un arreglo cuadrado sobre un plano, como puede verificarse en la Fig. (3.9). Las imágenes obtenidas son del tipo RGB de 24 bits, que se convierten a 8 bits con el programa ImageJ. La imagen capturada para el espejo (1) muestra una rotación respecto a los ejes cartesianos, que se colocan paralelos a los lados de la cámara, siendo el eje horizontal paralelo al lado más largo de la cámara y el eje vertical al lado más corto de la cámara; el origen se ubica en la intersección de las diagonales del rectángulo que limita el área de la propia cámara.

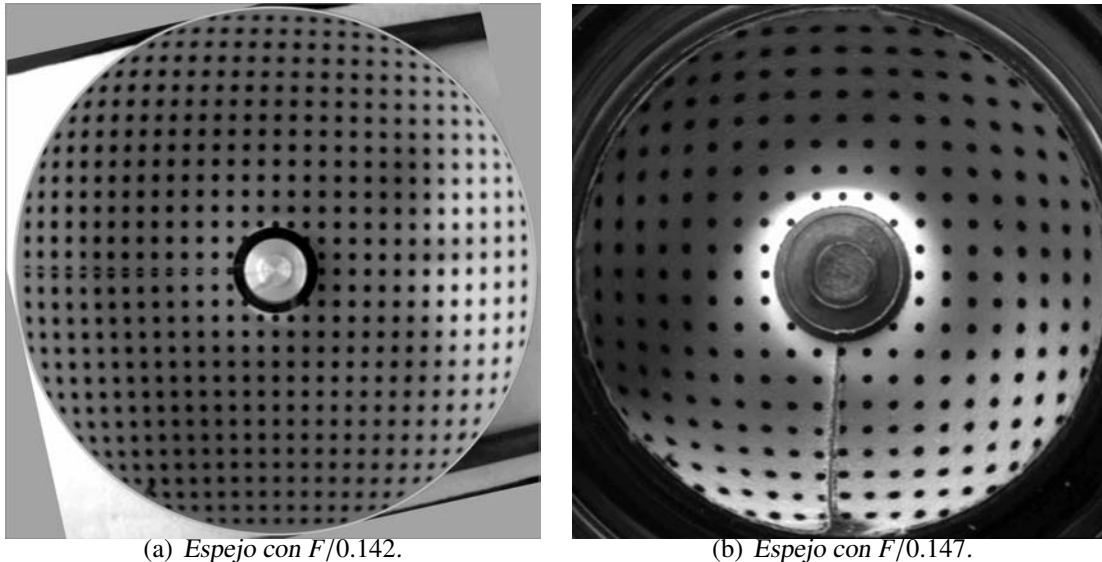


Figura 3.9: Imágenes capturadas por el CCD después del proceso de reflexión de la pantalla nula de gotas sobre la superficie de prueba. A la izquierda, (a) se tiene la imagen para el espejo (1), puede verse una rotación respecto a los ejes cartesianos sobre la superficie del CCD; a la derecha, (b) se muestra la imagen generada para el espejo (2). En ambos casos se tiene un patrón de círculos ordenados en una red cuadrada, correspondiendo al diseño de la pantalla nula de gotas.

### 3.3. Procesamiento de las imágenes

En el caso de la imagen obtenida para el espejo (1) se ha hecho una rotación para hacer que las líneas que forman la red cuadrada de puntos sean paralelas respecto a los ejes cartesianos, los cuales son paralelos a los lados del CCD. Una vez que las imágenes están derechas, lo que permite observar cuadrículas de puntos a lo largo de líneas paralelas a los ejes cartesianos (que a su vez son paralelos a los lados del CCD), con el programa se crea un umbral adecuado para cada uno de los tonos RGB, de esta forma, todos los tonos por encima de ese umbral se convierten a negro y los que están por debajo del umbral se cambian a blanco; posteriormente se recorta la imagen, de forma tal que forma un círculo, cuyo diámetro tiene una longitud igual al lado menor de la imagen capturada, y además se elimina la zona que corresponde al círculo del orificio interno del espejo, donde se

interna el cilindro que da soporte a la pantalla y que no proporciona información del espejo, así, la imagen queda lista para obtener los centroides con el programa ImageJ. Los resultados del proceso se esbozan en las Figs. (3.10) y (3.11).

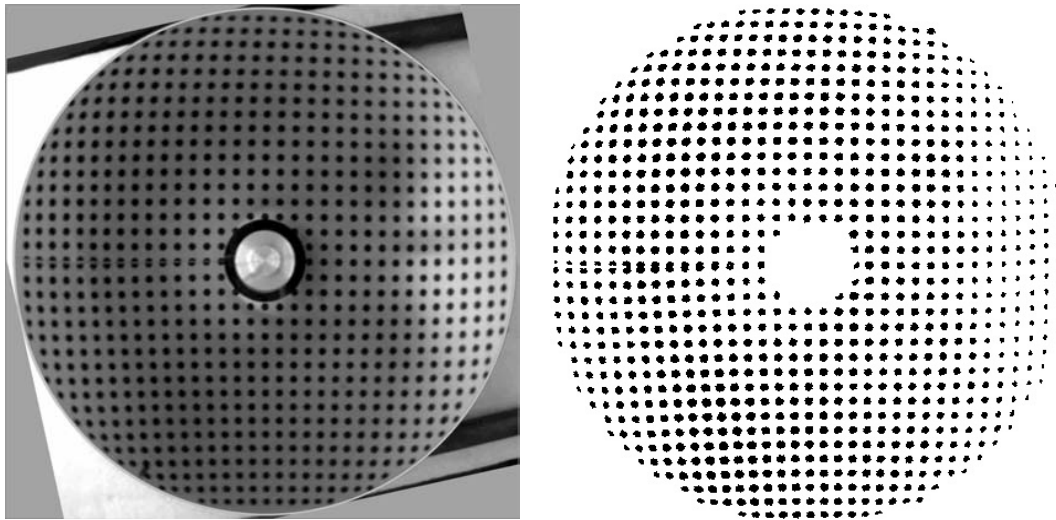


Figura 3.10: Esbozo del procesamiento de la imagen proveniente del espejo (1) y capturada a través del CCD. La iluminación no es uniforme, pero no representa algún problema para el análisis.

Para obtener los centroides es necesario, en el caso de ImageJ, que las imágenes se traten como imágenes de 8 bits, luego se hace un ajuste (umbral), llamado treshold, y se elige la opción auto, finalmente se despliega una ventana con los centroides en pixeles, todo este procedimiento se encuentra explicado en el manual del programa ImageJ.

El cálculo de los centroides de cada una de las manchas se realiza tal como si se estuviera calculando el centro de masa de un sistema de partículas, y en este proceso debe tomarse en cuenta que los datos son provistos por una imagen capturada por el CCD, y que la tarjeta de adquisición de datos genera una imagen en pixeles, formato bmp, los cuales tienen su origen en la parte superior izquierda de la propia imagen; por lo que no se encuentran referidos al mismo marco de referencia donde se diseña la imagen que corresponde a la pantalla nula de gotas, la cual tiene su origen en un punto ubicado sobre el eje óptico, a una distancia  $S_o + a$  del vértice del espejo. Como uno quiere que los centroides estén en el mismo marco de referencia que la imagen de diseño para la pantalla nula de gotas  $(x_d, y_d)$ , se hace una transformación de coordenadas de pixeles a milímetros, en la siguiente forma

$$x_d = \sigma x_c - 4.4mm, \quad (3.1)$$

$$y_d = \sigma y_c - 3.3mm,$$

donde  $\sigma = 0.01375$  mm (para la cámara CCD que se ha utilizado), que es el factor de conversión de distancia para que las coordenadas  $x_d$  y  $y_d$ , que son las coordenadas de los centroides en el marco de referencia de la imagen de diseño, estén dadas en milímetros; y  $x_c$  y  $y_c$  son las coordenadas de los centroides dadas en pixeles con respecto al marco de referencia en la imagen generada por el CCD; además, 4.4 mm es el valor de la mitad de la longitud del lado más largo del CCD y 3.3 mm es el valor que corresponde a la mitad de la longitud del lado más corto del CCD.

Ya que se tienen los centroides y se ha hecho el cambio de dimensiones de pixeles a milímetros y se trasladan los centroides a un plano cartesiano, cuyos ejes de abscisas y ordenadas tienen una longitud igual a los ejes horizontal y vertical del CCD, respectivamente; y que tenemos el origen del plano cartesiano ubicado en la intersección de las líneas paralelas que cortan a la mitad a cada uno de los lados del CCD; entonces, se hace la corrección de la distorsión introducida por la lente utilizada con la cámara, y en seguida se ordenan los centroides (ya sea a partir de las abscisas o a partir de las ordenadas); con esto se hace una comparación de los centroides con los puntos de diseño, tal como se muestra en las Figs. (3.14). Para la conversión de pixeles a milímetros sólo se toman las coordenadas de los centroides en pixeles y se multiplica por 0.014 mm, que es al tamaño del pixel en el detector CCD; después, para hacer la traslación de la coordenada  $x$  de los centroides se resta 4.4 mm, que corresponde a la mitad del lado más largo del CCD; y luego, para la traslación de la coordenada  $y$  se resta 3.3 mm, que viene determinado por la mitad del lado más corto del CCD.

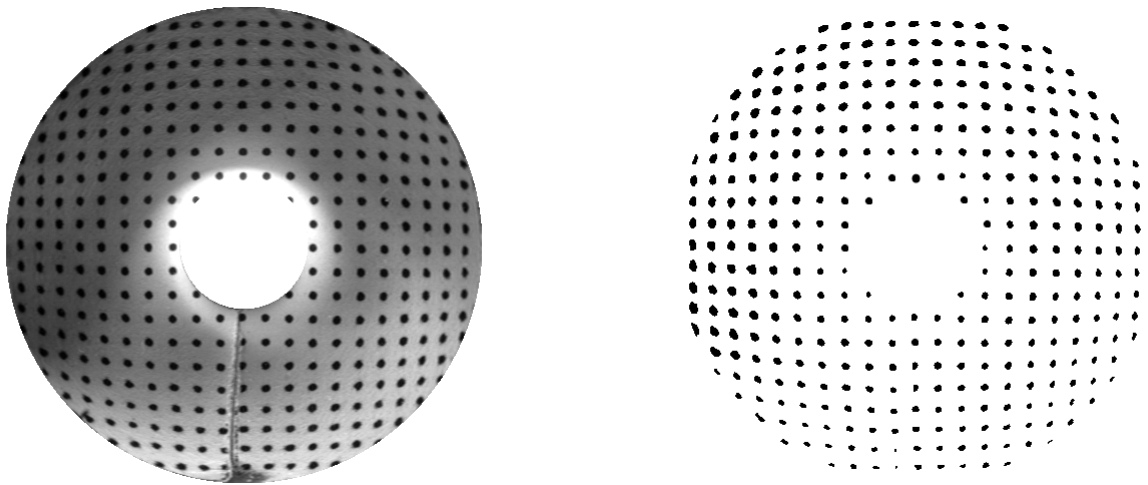


Figura 3.11: Esbozo del procesamiento de la imagen proveniente del espejo (2) y grabada a través del CCD. Se observa una iluminación adecuada, aunque no uniforme, pero que no es relevante para el trabajo desarrollado, en este caso.

### 3.4. Cálculo de la distorsión de la lente

Como es conocido, la distorsión es una aberración monocromática primaria, ésta se origina porque en la realidad las lentes no se comportan de acuerdo a las predicciones de la óptica paraxial; una mejor aproximación a la descripción de ese comportamiento puede darse a través de la teoría de tercer orden. En este caso, la amplificación transversal,  $M_T$ , puede ser una función de la distancia que hay del eje óptico a un punto imagen, distancia que puede ser diferente a la que predice la teoría paraxial, en donde  $M_T$  es una constante. Si no existen otras aberraciones, la distorsión se manifiesta como una deformación de la imagen en conjunto. Si un objeto tiene coordenadas  $(x_o, y_o)$ , las coordenadas de la imagen de tal objeto al existir distorsión serán

$$\begin{aligned} x_i &= Mx_o + E(x_o^2 + y_o^2)x_o, \\ y_i &= My_o + E(x_o^2 + y_o^2)y_o, \end{aligned} \quad (3.2)$$

con  $M$  igual a la magnificación del sistema y  $E$  el coeficiente de distorsión[1]. Ahora, para sistemas ópticos con simetría de revolución se tiene que

$$\begin{aligned} r_i &= \sqrt{x_i^2 + y_i^2}, \\ r_o &= \sqrt{x_o^2 + y_o^2}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Así que las coordenadas del punto imagen, determinados por la Ec. (3.2), se pueden reescribir como

$$r_i = Mr_o + Er_o^3. \quad (3.4)$$

Si  $E > 0$ , la distorsión es positiva y es conocida como distorsión de *corset*, debido a la semejanza con la prenda del mismo nombre. Cuando  $E < 0$ , la distorsión es negativa y es conocida con el nombre de distorsión de *barril*.

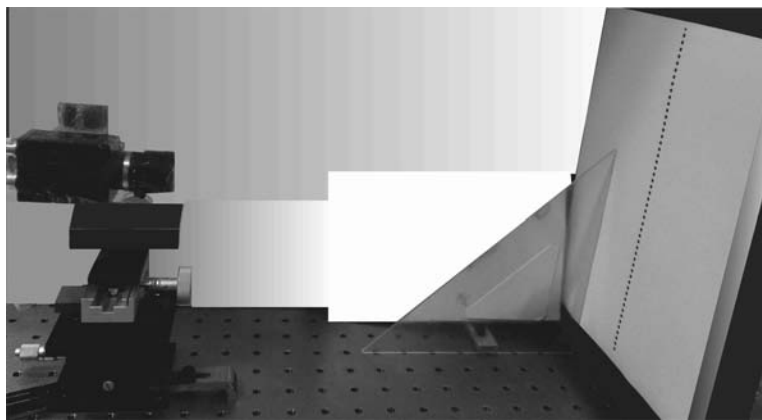


Figura 3.12: Arreglo para determinar el coeficiente de distorsión.

Para conocer el coeficiente de distorsión y el de magnificación de la lente usada, se realizó la toma de una imagen lineal con un arreglo de 53 manchas circulares negras, igualmente espaciadas y del mismo diámetro cada una, alineando el dispositivo lo mejor posible, de forma que el plano del arreglo de los puntos fuese perpendicular al eje óptico de la lente, vease la Fig. (3.12). Realizado lo anterior, se continuó a centrar la imagen y a localizar los centroides de cada uno de los puntos con la ayuda del programa para procesamiento de imágenes ImageJ. Finalmente, a los datos obtenidos se les ajustó la Ec. (3.4) a través del método de Levenberg-Marquart, vease la Fig. (3.13), encontrándose los siguientes valores:  $E = 3.786e^{-08} \text{ mm}^{-2}$  y  $M = 0.021$ . Debido a que el coeficiente de distorsión es mayor a cero, se tiene una distorsión en forma de corset.



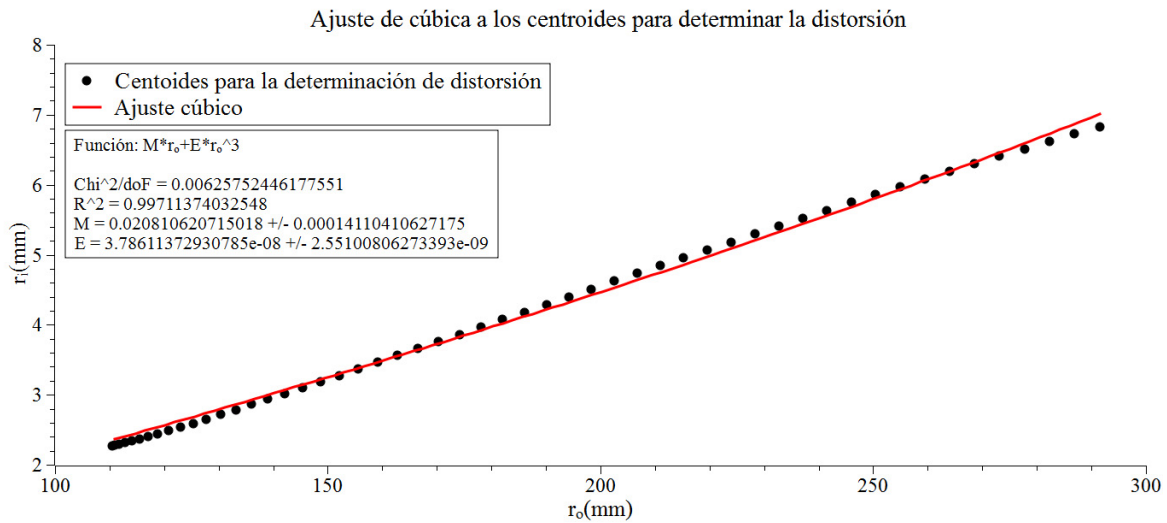


Figura 3.13: Ajuste a una cúbica para determinar los valores de los coeficientes de magnificación y el de distorsión para la lente usada.

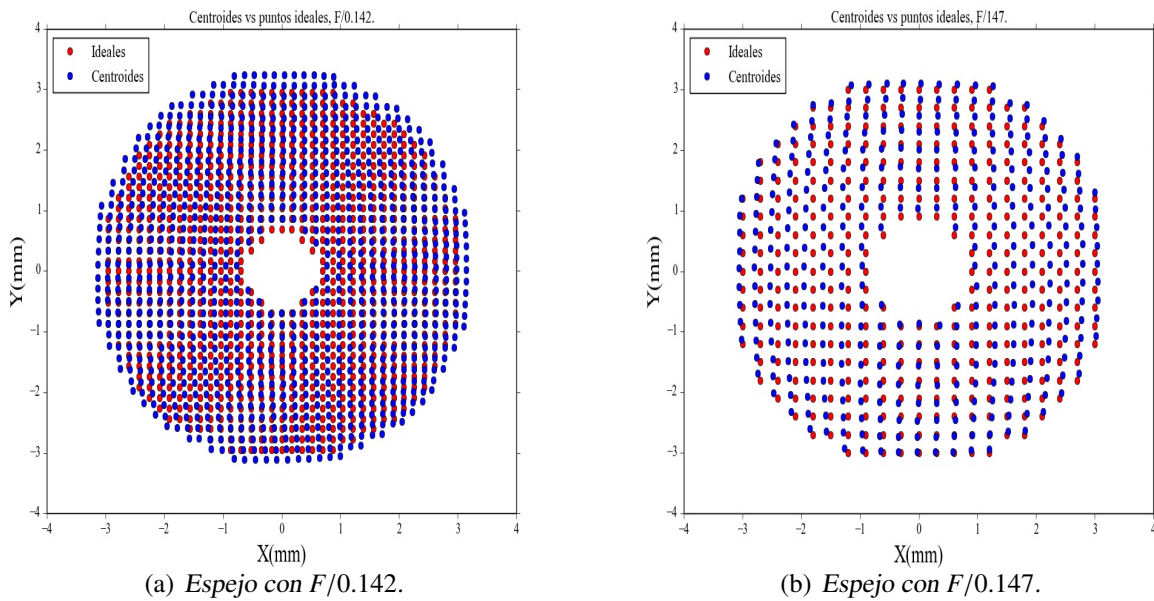


Figura 3.14: Comparación de los centroides obtenidos para el espejo (1), (a); y para el espejo (2), (b); con los puntos de diseño para la pantalla nula sobre el plano del CCD.

### 3.5. Cálculo de las normales a la superficie de referencia

Ya que se tienen los centroides corregidos por distorsión, se procede a hacer el cálculo de las normales, usando para ello los centroides sin distorsión y los centroides de la pantalla nula de gotas. Para hacer el cálculo de la normal a cada punto de la superficie bajo prueba se procede de la siguiente forma, se toma un rayo reflejado conocido, que al reflejarse sobre la superficie, éste

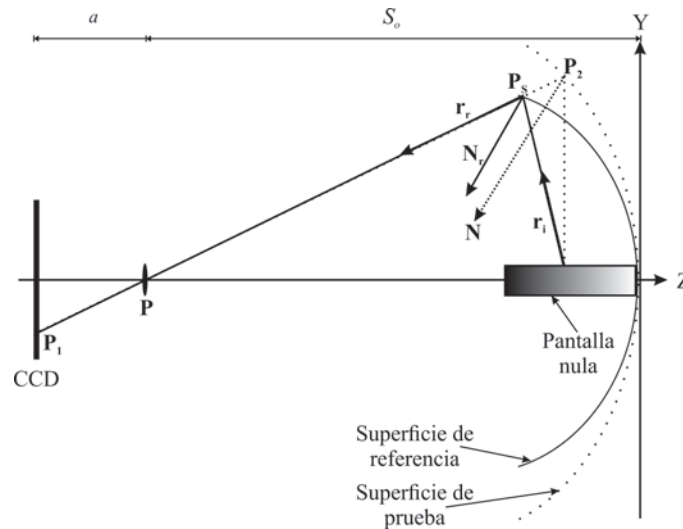


Figura 3.15: Esquema del procedimiento del cálculo de las normales ( $\mathbf{r}_r$  y  $\mathbf{r}_i$  no necesariamente están en el plano Z-Y).

pasa a través del punto  $\mathbf{P}(S_o, 0, 0)$ , es decir, cruzando el pinhole, para llegar al CCD en el punto  $\mathbf{P}_1(a + S_o, y_1, x_1)$ . Por otra parte, el rayo incidente sobre la superficie reflectora proviene de un punto  $\mathbf{P}_3(z_3, y_3, x_3)$  sobre la pantalla nula (en el sentido real del proceso de reflexión), llegando a un punto  $\mathbf{P}_s(z_s, y_s, x_s)$  en la superficie de prueba que es desconocido, debido a que la superficie de prueba no se conoce, porque es justamente la que se está evaluando, véase la Fig. (3.15). Entonces, es posible aproximar la superficie de prueba a una superficie de referencia, así el rayo incidente llegará a un punto  $\mathbf{P}_s(z_s, y_s, x_s)$  sobre la superficie de referencia, de este modo, entre más se parezca la superficie de referencia a la superficie que se está evaluando el error para el cálculo de la normal disminuirá. En la práctica se ha utilizado como superficie de referencia la misma superficie de diseño para la pantalla nula. Así, teniendo el rayo de incidencia y el de reflexión se puede conocer la normal a cada punto sobre la superficie, de acuerdo a la ecuación:

$$\hat{\mathbf{N}} = \frac{\hat{\mathbf{r}}_r - \hat{\mathbf{r}}_i}{\|\hat{\mathbf{r}}_r - \hat{\mathbf{r}}_i\|}, \quad (3.5)$$

y la dirección del rayo reflejado se puede obtener a través de la diferencia entre los vectores  $\mathbf{P}_1$  y  $\mathbf{P}$ , teniendo como resultado

$$\hat{\mathbf{r}}_r = \frac{(a, y_1, x_1)}{\sqrt{a^2 + y_1^2 + x_1^2}}. \quad (3.6)$$

Para conocer la dirección del rayo incidente se realiza la diferencia entre los puntos  $\mathbf{P}_s$  y  $\mathbf{P}_3$ , obteniéndose

$$\hat{\mathbf{r}}_i = \frac{(z_s - z_3, y_s - y_3, x_s - x_3)}{\sqrt{(z_s - z_3)^2 + (y_s - y_3)^2 + (x_s - x_3)^2}}, \quad (3.7)$$

aclarando que las coordenadas con subíndice  $s$  son las mismas que describen la superficie de diseño. Con esto, el vector reflejado intersecta a la superficie reflectora de referencia en el punto

$\mathbf{P}_s(z_s, y_s, x_s)$ , cuyas coordenadas quedan explícitamente como

$$\begin{aligned} x_s &= \left\{ \left( a[(k+1)S_o - r] + \sqrt{(ar)^2 + [2r - S_o(k+1)]S_or_1^2} \right) / [r_1^2 + (k+1)a^2] \right\} x_1, \\ y_s &= \left\{ \left( a[(k+1)S_o - r] + \sqrt{(ar)^2 + [2r - S_o(k+1)]S_or_1^2} \right) / [r_1^2 + (k+1)a^2] \right\} y_1, \\ z_s &= S_o - \left\{ \left( a[(k+1)S_o - r] + \sqrt{(ar)^2 + [2r - S_o(k+1)]S_or_1^2} \right) / [r_1^2 + (k+1)a^2] \right\} a, \end{aligned} \quad (3.8)$$

donde  $r_1 = (y_1^2 + x_1^2)^{(1/2)}$  y  $r$  el radio de curvatura paraxial. Se prosigue con la sustitución de las Ecs. (3.7) y (3.6) en la Ec. (3.5) para poder conocer las coordenadas de las normales aproximadas a la superficie de prueba, así

$$\hat{\mathbf{N}} = \left( a/\gamma_1 + (z_3 - z_s)/\gamma_2, y_1/\gamma_1 + (y_3 - y_s)/\gamma_2, x_1/\gamma_1 + (x_3 - x_s)/\gamma_2 \right) / \gamma_3, \quad (3.9)$$

con

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \sqrt{a^2 + y_1^2 + x_1^2}, \\ \gamma_2 &= \sqrt{(z_s - z_3)^2 + (y_s - y_3)^2 + (x_s - x_3)^2}, \\ \gamma_3 &= \sqrt{((a/\gamma_1) + (z_3 - z_s)/\gamma_2)^2 + ((y_1/\gamma_1) + (y_3 - y_s)/\gamma_2)^2 + ((x_1/\gamma_1) + (x_3 - x_s)/\gamma_2)^2}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Con esto, a través de una simulación en un programa desarrollado en algún lenguaje de programación, es posible determinar las normales a la superficie de referencia, lo que puede observarse en las Figs. (3.16).

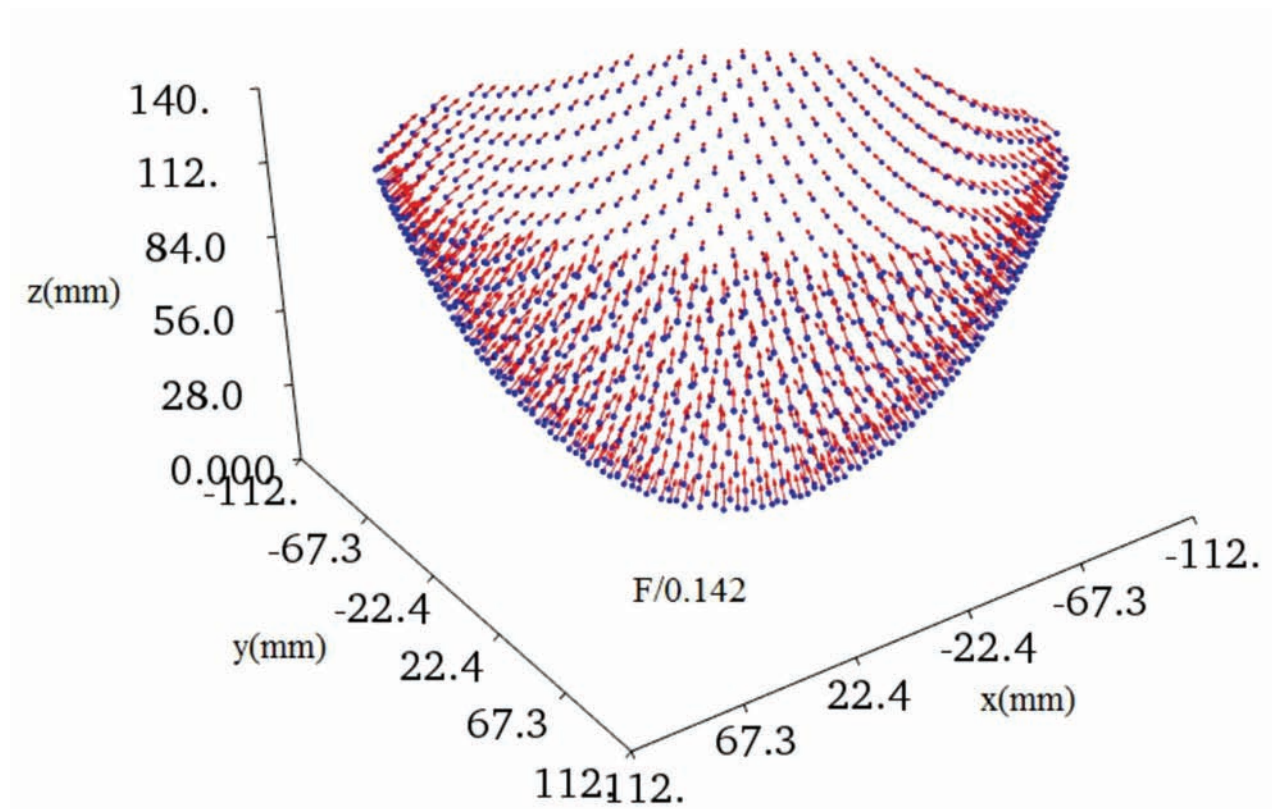
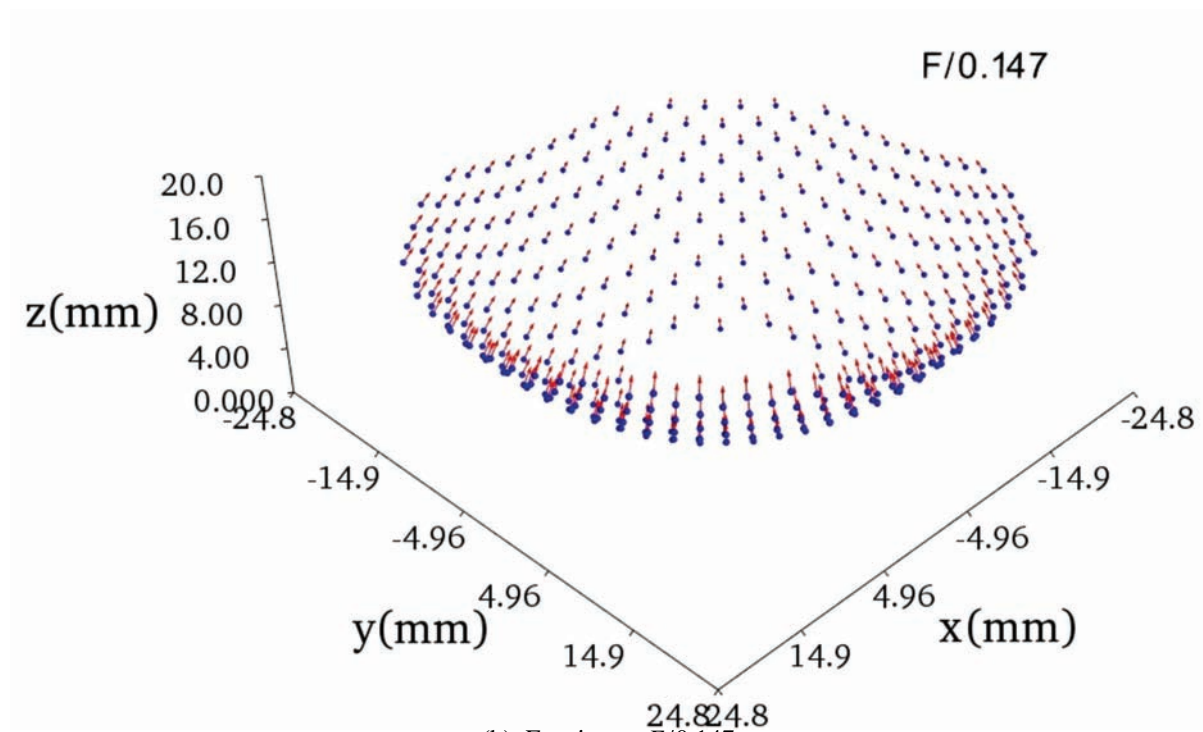
(a) Espejo con  $F/0.142$ .(b) Espejo con  $F/0.147$ .

Figura 3.16: Representación de las normales en cada punto de la superficie de prueba. Espejo (1), (a); y espejo (2), (b).

### 3.6. Integración de la superficie

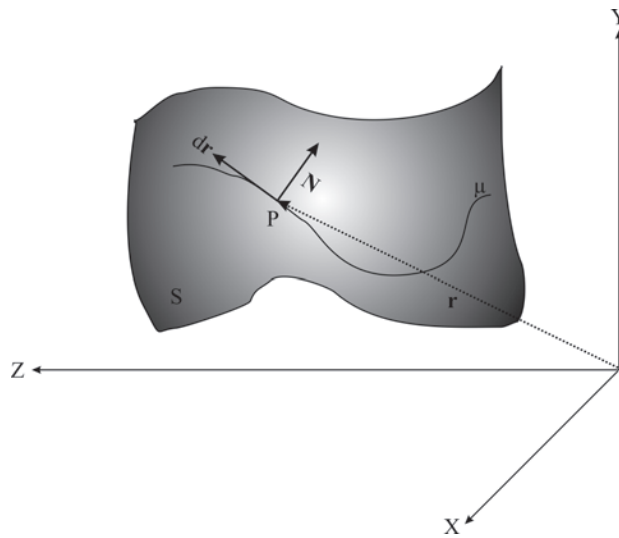


Figura 3.17: Esquema que describe las Ecs. (3.11) y (3.12).

La forma de la superficie puede ser obtenida a través de las normales en cada punto de evaluación, para ello se supone que la superficie bajo prueba es suave y que se puede representar en forma matemática por una función  $f(z, y, x) = 0$ . También se hace la hipótesis de que el punto de incidencia describe una trayectoria, que es arbitraria, sobre la superficie, cuando el haz luminoso se refleja sobre ella. Entonces, para cualquier punto  $\mathbf{P}$  de la trayectoria de un rayo descrito por el vector  $\mathbf{r} = (z, y, x)$ , se tiene un elemento diferencial sobre la superficie  $ds = (dz, dy, dx)$ , y que representa un vector tangente a la misma superficie, cuyo vector normal en ese punto está descrito por  $\mathbf{N} = (N_z, N_y, N_x)$ , veáse la Fig. (3.17). Con ello, se puede llevar a efecto el producto punto del vector normal con el elemento diferencial en el mismo punto, es decir,

$$\mathbf{N} \cdot ds = 0. \quad (3.11)$$

A la expresión anterior se le conoce como la ecuación fundamental de la deflectometría por reflexión, la cual nos dice que si se conocen las normales a la superficie en cada punto de incidencia es posible integrar la Ec. (3.11) y así obtener su forma. Desarrollando el producto punto e integrando, en coordenadas cartesianas, se tiene

$$z = z_m - \int_{P_0(y_0, x_0)}^{P(y, x)} \left( \frac{N_y}{N_z} dy + \frac{N_x}{N_z} dx \right), \quad (3.12)$$

donde  $z_m$  es la sagita de un punto sobre la superficie, que se toma como punto inicial y que debe ser conocido previamente. Una buena aproximación, de este punto sobre la superficie, es elegir uno de los centroides y evaluar sus coordenadas en la superficie de diseño, para que nos proporcione el valor de  $z_m$ . La Ec. (3.12) es una expresión exacta, pero los cálculos numéricos requieren de aproximaciones porque las componentes de las normales a la superficie de referencia no son funciones analíticas sino valores discretos en cada punto de la evaluación. Para resolverla se puede usar cualquier método de integración numérica, pero en este trabajo se ha usado el método del trapecio, que

se usa cuando los datos no están igualmente espaciados, y que consiste en dividir un intervalo de la variable de integración en  $n - 1$  partes y que no necesariamente son iguales. Con este método, la Ec. (3.12) puede reducirse a una suma discreta de la forma

$$z = z_m - \sum_{i=1}^j \left[ \left( \frac{N_{x_i}}{N_{z_i}} + \frac{N_{x_{i+1}}}{N_{z_{i+1}}} \right) \frac{(x_{i+1} - x_i)}{2} + \left( \frac{N_{y_i}}{N_{z_i}} + \frac{N_{y_{i+1}}}{N_{z_{i+1}}} \right) \frac{(y_{i+1} - y_i)}{2} \right], \quad (3.13)$$

y es la relación que se va a usar para conocer la forma del espejo. En la ecuación previa  $j$  corresponde al número de puntos en la trayectoria de integración, misma que debe definirse con anticipación en el plano que corresponde al CCD, es decir, al de las coordenadas  $(y_1, x_1)$ . El valor de  $z_m$  en la Ec. (3.13) representa la elevación del primer punto para cada trayectoria de integración y es común a todas las posibles trayectorias, esto significa que  $z_m$  es la sagita inicial. Es conveniente hacer notar que existen diversos métodos de integración, cada uno con sus ventajas y desventajas; sin embargo, dado que el propósito de este trabajo no es el de analizar los métodos numéricos de integración, lo que ya se ha hecho por varios autores, se ha elegido el método del trapecio por su simplicidad y porque los resultados obtenidos son lo suficientemente aceptables para el objetivo de esta investigación.

Como se ha mencionado, para realizar la integración numérica es necesario hacer un trazo de las trayectorias de integración, para ello es conveniente etiquetar cada uno de los centroides y dibujar los caminos dentro del plano que los contiene, lo que se puede hacer con ayuda de un programa que numera cada centroide y hace el trazo de los trayectos, de acuerdo a las listas de puntos que hayamos elegido según la trayectoria. Se han hecho dos trazos de trayectorias diferentes para cada uno de los espejos, los que se muestran en las Figs. (3.18) y los de las Figs. (3.19). Para los cálculos numéricos se han elegido ambos trazos de las trayectorias, sin embargo, estos cálculos corroboran que los que corresponden a los que se observan en las Figs. (3.19) son más adecuados, debido a que se introduce un error menor en las iteraciones.

Superficie	Rango para $r$ (mm)	Rango para $k$	Rango para $z_o$ (mm)
$F/0.142$	[63.729, 74.500]	[-0.870, -0.750]	[-5.000, 8.000]
$F/0.221$	[20.500, 24.500]	[-0.850, -0.600]	[-1.500, 1.500]

Tabla 3.4: Intervalo de valores para cada uno de los parámetros que se han ajustado, según el espejo que corresponde. Estos rangos se han determinado suponiendo, en primera instancia, que los radios de curvatura y las constantes de conicidad reales se encuentran alrededor de los valores que reporta el fabricante.

Es importante mencionar que las trayectorias se han elegido de manera que el error acumulado en cada una de las iteraciones, y que se sabe aumenta con la segunda potencia de la separación entre dos puntos adyacentes, sea lo más corta posible y que se eviten las diagonales, para que de esta forma se procure que en cada iteración sólo contribuya al error una de las coordenadas a la vez, dentro de lo posible.

Una vez que se han definido las trayectorias de integración, se realizan los cálculos numéricos con ayuda de la Ec. (3.13). A partir de los resultados se pueden graficar los datos para observar las

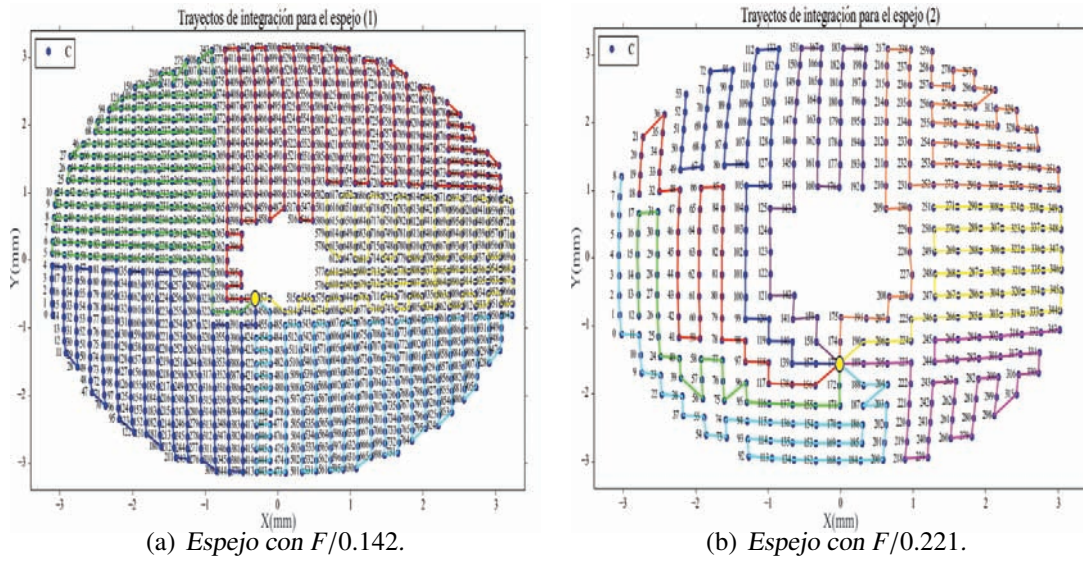


Figura 3.18: Etiquetación de los centroides y elección de las trayectorias de integración, para cada uno de los espejos. (a) Espejo (1); (b), espejo (2). En este caso los trayectos son demasiado largos y el error acumulado por las iteraciones en los cálculos numéricos es considerable.

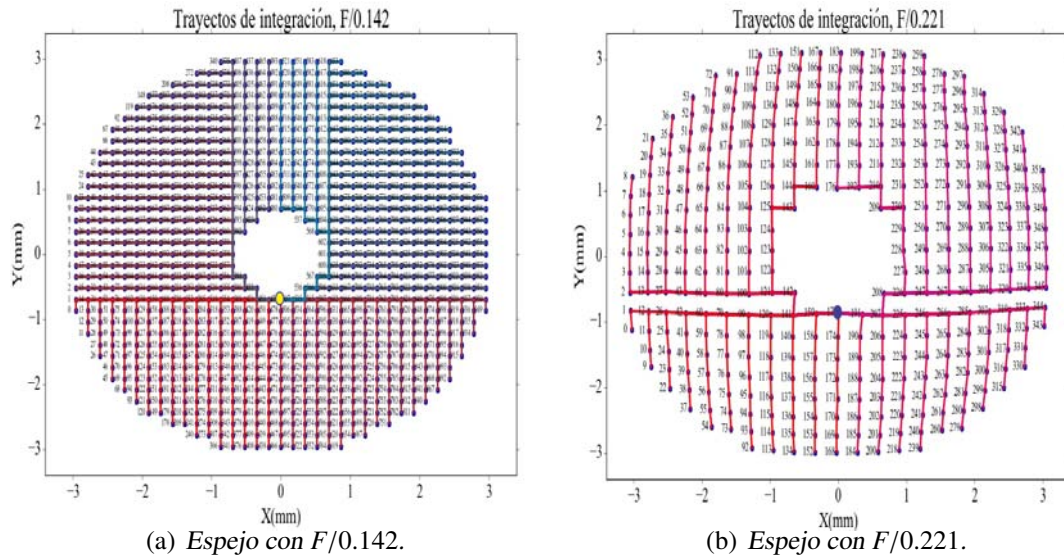


Figura 3.19: Etiquetación de los centroides y elección de las trayectorias de integración, para cada uno de los espejos. (a) Espejo (1) y (b) espejo (2).

elevaciones de los centroides, correspondientes a cada una de las superficies. Estas gráficas pueden observarse en las Figs. (3.20).

Para poder analizar los detalles de la evaluación, los datos de cada una de las superficies bajo prueba, que se han obtenido en forma experimental, se han ajustado a una superficie cónica por el

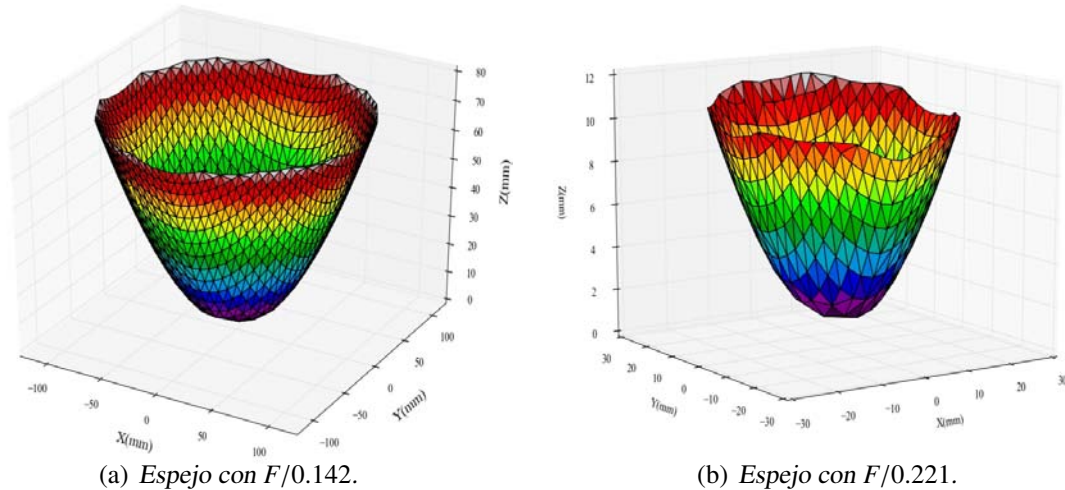


Figura 3.20: Elevaciones de las sagitas reales correspondientes a cada una de las superficies bajo prueba. En (a), se observan los de la superficie  $F/0.142$ ; en (b), los de la superficie  $F/0.221$ .

método de mínimos cuadrados, dada por

$$z = \frac{1}{k+1} \left( r - \sqrt{r^2 - [k+1][(x-x_o)^2 + (y-y_o)^2]} \right) + z_o, \quad (3.14)$$

donde, en la Ec. (3.14),  $(z_o, y_o, x_o)$  son las coordenadas del vértice de la superficie, pero para la valoración  $y_o$  y  $x_o$  corresponden a un término de descentramiento, y  $z_o$  es un cambio de profundidad. Estos datos se han ajustado a través del método para ecuaciones no lineales de Levenberg-Marquart, con un programa diseñado en el lenguaje de programación Python (del que ya se ha hablado previamente). Este programa permite establecer un intervalo de valores de trabajo para cada uno de los parámetros que se están ajustando, en este caso, el radio de curvatura en el vértice de la superficie reflectora, la constante de conicidad y la elevación inicial. Así, el espacio de valores de dichos parámetros, que se ha elegido en forma arbitraria en un intervalo alrededor de los valores reportados, para cada uno de los espejos con los que se ha trabajado se reportan en la Tabla (3.4). Los resultados obtenidos pueden verse en la Tabla (3.5) a continuación.

### 3.7. Resultados

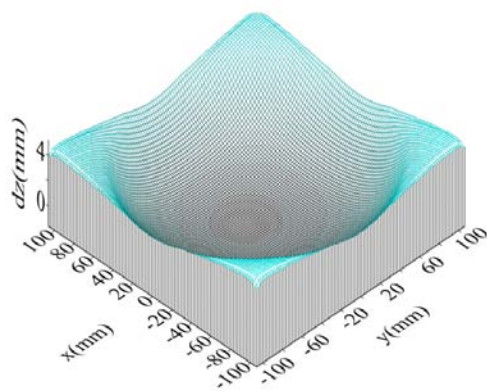
Los productos del ajuste de mínimos cuadrados por el método de Levenberg-Marquart se encuentran organizados en la Tabla (3.5). Con estos valores se ha hecho una simulación de la superficie, para cada uno de los espejos, las que pueden ser observadas en las Figs. (3.20). También se han graficado las diferencias entre las sagitas reales y los valores del ajuste para cada una de las superficies, lo que se muestra en las Figs. (3.21); y un mapa de curvas de nivel para las diferencias entre las elevaciones reales y las ajustadas, Figs. (3.22).



Superficie evaluada	$r_{rep}$ (mm)	$r_{aj}$ (mm)	$k_{rep}$	$k_{aj}$	$z_o$ (mm)	$y_o$ (mm)	$x_o$ (mm)	$\Delta z_{rms}$ (mm)
F/0.142	63.749	65.215	-0.778	-0.793	-0.084	0.816	-0.059	0.014
F/0.221	21.880	22.556	-0.655	-0.673	-0.665	-0.221	-0.086	0.044

Tabla 3.5: Comparación de los radios de curvatura y de las constantes de conicidad, para cada una de las superficies bajo prueba. Los subíndices *rep* se refieren a lo que reporta el fabricante, y los subíndices *aj* son los que corresponden al ajuste.

Diferencias, sagitas reales y el ajuste, F/0.142.



Diferencias, sagitas reales y el ajuste, F/0.221.

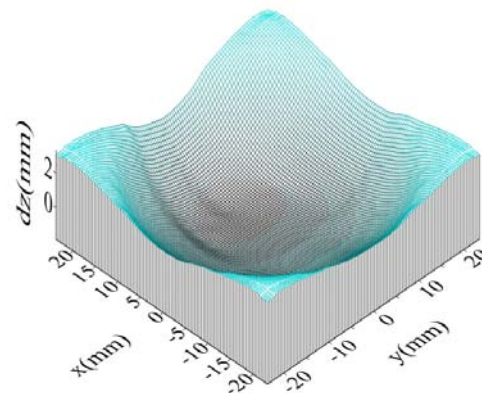
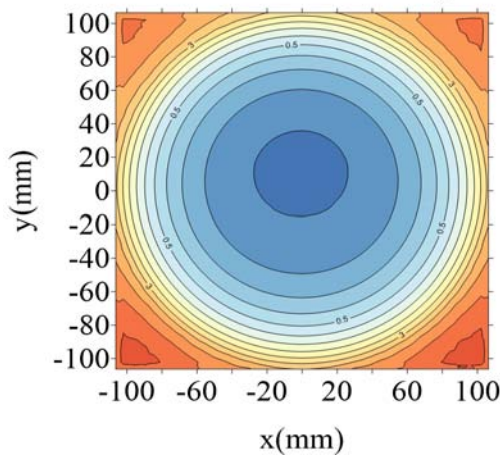


Figura 3.21: Diferencias entre las superficies ajustadas y las superficie real. Arriba, espejo (1); abajo, espejo (2).

Diferencias de las elevaciones, F/0.142.



Diferencias de las elevaciones, F/0.221.

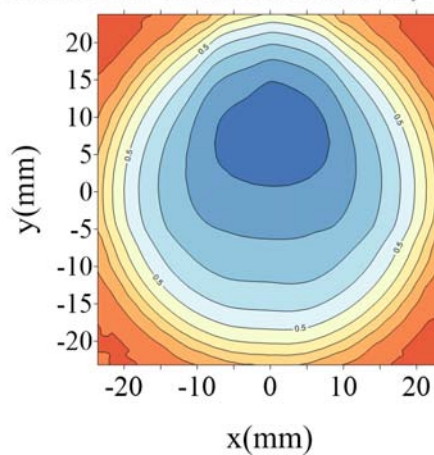


Figura 3.22: Mapa de diferencias entre las superficies ajustadas y las superficie real. Arriba, espejo F/0.142; abajo, espejo F/0.221.

### 3.8. Análisis de los resultados

Si no existieran diferencias entre la superficie que mejor se ajusta y la superficie real, sólo debería observarse un plano, cuyos valores para la coordenada  $z$  tendrían que ser ceros; sin embargo, puede observarse en las Figs. (3.21) que existen desviaciones entre ambas superficies. Estas desviaciones pueden presentarse debido a múltiples factores, algunos de los cuales pueden ser: errores en la impresión de la pantalla nula, de posicionamiento, de alineación, de la precisión de los valores de  $a$  y  $S_o$ , que han sido utilizados durante la evaluación cuantitativa; además, se tienen los errores involucrados en la obtención del centroide, la aproximación de las normales, y el error de truncamiento del método del trapecio. Lo anterior permite establecer que las diferencias obtenidas son una evaluación de la precisión del propio método.

Los valores de las coordenadas  $(z_o, y_o, x_o)$ , el radio de curvatura  $r$ , la constante de conicidad  $k$  y el valor  $\Delta z_{rms}$  que corresponde al valor  $rms$  de las diferencias de elevación y que está asociado al error del método de ajuste que se ha utilizado, se pueden observar en la Tab. (3.5). Estos resultados muestran que para ambas superficies ha habido un descentramiento, es decir, no han sido debidamente centradas; y que también no fueron colocadas correctamente sobre el eje  $z$ ; en otras palabras, que el vértice de cada uno de los espejos no concuerda con el origen. Por otra parte, para la superficie  $F/0.142$  se tiene que  $\Delta r = 1.466$  mm, lo que corresponde a un 2.3 %; mientras que  $\Delta k = 0.015$ , esto es, un 1.9 %. En el caso de la superficie  $F/0.221$  tenemos que  $\Delta r = 0.676$  mm, que es igual al 3.0 %; y  $\Delta k = 0.018$ , que concuerda con el 2.7 %. Ahora bien, en las Figs. (3.22) se observa el mapa de las diferencias entre las sagitas reales y las sagitas que proporciona el ajuste por mínimos cuadrados, y se puede ver en la Fig. (3.22(a)) que los niveles de color en el mapa de elevaciones se organizan en curvas con cierta simetría de revolución, lo que indica que la alineación de la superficie  $F/0.142$ , durante la prueba, ha sido aceptable; también puede notarse que las diferencias aumentan desde el centro hacia la periferia. En el caso de la superficie  $F/0.221$ , puede verse en la Fig. (3.22(b)), las curvas de nivel presentan cierto alargamiento a lo largo del eje  $y$ , lo que es indicativo de que el eje óptico del espejo no coincidió con el eje  $z$ , esto significa que hubo una desalineación considerable; y también se ve que los incrementos aumentan del centro hacia la periferia del espejo; no obstante esto, se ha podido realizar un ajuste aceptable. En ambos casos es evidente que la falta de alineación y el descentramiento afectan los cálculos para la integración de las superficies; sin embargo, los resultados que se han obtenido para los radios de curvatura, la constante de conicidad y las diferencias entre las sagitas reales y las sagitas estimadas, de ambos espejos, se ubican dentro de los márgenes de error todavía válidos y se acercan a los valores que reporta el fabricante.

### 3.9. Referencias

1. Rufino Bolado Gómez, Tesis de Licenciatura “Prueba de un espejo elipsoidal cóncavo en eje ( $F/0.273$ ) por medio de una pantalla nula cilíndrica”. Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), 2005.
2. M. Campos-García, R. Bolado-Gómez, and R. Díaz-Uribe, “Testing fast aspheric concave surfaces with a cylindrical null screen”, *Appl. Opt.* **47**, 849-859 (2008).
3. R. Díaz-Uribe and M. Campos-García, “Null screen testing of fast convex aspheric surfaces,” *Appl. Opt.* **39**, 2670-2677 (2000).
4. V. I. Moreno-Olivo, M. Campos-García, R. Bolado-Gomez and R. Díaz-Uribe, “Point Shifting in the Optical Testing of Fast Aspheric Concave Surfaces by a Cylindrical Screen”. *Appl Opt.* **47** (5), 644-651 (2008).
5. Libia Georgina Carmona Paredes, Tesis de Maestría “Imágenes de aberturas elípticas en la prueba de superficies convexas con pantallas nulas”. Posgrado en Ciencias Físicas, Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), 2005.
6. Manuel Campos García, Prueba de Superficie Asféricas Rápidas con Pantallas Nulas, Tesis de Doctorado, Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), México 2005.
7. M. Campos-García, R. Díaz-Uribe and F. Granados-Agustín, “Testing fast aspheric convex surfaces with a linear array of sources”, *Appl. Opt.* **43**, 6255-6264 (2004).
8. M. Avendaño-Alejo, M. Campos-García, R. Díaz-Uribe, “Testing a fast off-axis parabolic mirror using tilted null-screens”, *Eight International Symposium on Laser Metrology*, edited by R. Rodríguez-Vera, F. Mendoza-Santoyo, Proc. of SPIE Vol. 5776 (SPIE, Bellingham, WA, 2005) 553-560.
9. L. Carmona-Paredes and R. Díaz-Uribe, “Geometric analysis of the null screens used for testing convex optical surfaces”, *Rev Mex Fís.* **53** (5), 421-430 (2007).
10. Rufino Díaz-Uribe, “Medium Precision Null Screen Testing of Off-Axis Parabolic Mirrors for Segmented Primary Telescope Optics: The Case of the Large Millimeter Telescope”. *Appl Opt.* **39**, 2970-2804 (2000).
11. W. H. Press et al, *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing*, 3a ed, Cambridge University Press, New York 2007.

## Conclusiones y trabajo a futuro

---

1. Se ha hecho un análisis de las cáusticas por reflexión producidas por superficies cónicas cóncavas.
2. Usando la fórmula de la cáustica y una aproximación paraxial, se han obtenido expresiones analíticas para evaluar la aberración esférica a tercer orden.
3. Se tiene una fórmula para reducir la aberración esférica a cualquier orden, la que proporciona la condición para obtener los llamados puntos estigmáticos.
4. Se han aplicado las fórmulas de la cáustica para evaluar el círculo de mínima confusión en espejos cónicos cóncavos como función de todos los parámetros involucrados en el proceso de reflexión.
5. Se han obtenido expresiones analíticas para el cálculo de la aberración esférica de primeras reflexiones, cuando la fuente puntual se coloca sobre el eje óptico.
6. Se ha hecho un análisis para observar el comportamiento de las segundas reflexiones en espejos elípticos cóncavos prolatos.
7. A través de una simulación del proceso de reflexión, hasta las segundas reflexiones, en superficies elípticas cóncavas rápidas, se ha podido comprobar que las segundas reflexiones causan las diferencias entre la imagen detectada y la imagen de diseño en la imagen generada por el espejo  $F/0.147$  (véase el capítulo 1).
8. De este análisis se ha encontrado que la posición del pinhole resulta muy importante en el diseño de las pantallas nulas de gotas para los espejos mencionados previamente, cuando se utiliza una lente para formar la imagen.
9. Se ha observado que para que la prueba de pantallas nulas de gotas, con configuración cilíndrica, pueda seguir implementándose con la misma eficacia en espejos elípticos cóncavos rápidos, que se ha conseguido en otras pruebas similares, es necesario colocar el pinhole en una posición sobre el eje óptico que permita que, durante la grabación de la imagen que se utiliza en el proceso de evaluación, no se registre información generada por segundas reflexiones en el CCD, cuando se utiliza una lente para formar la imagen.
10. Una vez que se ha elegido la posición para el pinhole, entonces, el diseño de la pantalla nula de gotas queda en términos de la distancia focal de la lente que forma la imagen sobre el CCD, si se quiere que la imagen de la totalidad de la superficie, generada por los espejos, sea

captada por el área activa del CCD, limitada por su lado más corto y, finalmente, por el resto de los parámetros relacionados con la superficie reflectora y el detector de las imágenes, el CCD.

11. No se puede implementar la prueba de pantallas nulas cilíndricas en espejos elípticos cóncavos rápidos para cualquier valor de la posición del pinhole, de la distancia focal de la lente que forma la imagen, de la longitud del CCD y del diámetro del espejo, si se quiere que la superficie a evaluar quede contenida en el área del CCD.
12. Los resultados muestran que los parámetros de ajuste obtenidos por el método de mínimos cuadrados, para las dos superficies que han sido evaluadas, se encuentran en el intervalo de validez permitidos para el error, y estos parámetros son parecidos a los que reporta el fabricante.
13. Se ha cumplido con el objetivo de evaluar dos de las superficies reflectoras elípticas cóncavas rápidas.
14. Se propone, como trabajo a futuro, elaborar una pantalla nula en la que se consideren las segundas reflexiones.
15. A lo largo de esta investigación se ha trabajado utilizando una lente con la cámara CCD, así que también se hace la propuesta de realizar la prueba de pantallas nulas cilíndricas sin usar lente alguna, para evitar la limitante que esto genera en la evaluación de la superficie.
16. Publicar los resultados del estudio de las segundas reflexiones en espejos elípticos cóncavos.
17. Realizar la publicación de los resultados obtenidos, respecto a las expresiones analíticas de la aberración esférica producida por primeras reflexiones por espejos cónicos cóncavos.