# UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
## POSGRADO CONJUNTO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS
CENTRO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS


**LA CONJETURA DE FARRELL-JONES PARA LOS GRUPOS DE TRENZAS PURAS.**

# TESINA

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

**MAESTRO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS**

PRESENTA:


**LUIS JORGE SÁNCHEZ SALDAÑA**

**TUTOR DE LA TESINA: DR. DANIEL JUAN PINEDA**
**CENTRO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS**



**MORELIA, MICHOACAN. AGOSTO, 2012**

# Índice general

# INTRODUCCIÓN

En 1993 Thomas Farrell y Lowel Jones establecieron su conjetura la cual dice lo siguiente:

CONJETURA 0.1. *(Farrell-Jones) Sean $G$ un grupo discreto y $F : Groups \to ESPECTRA$ el funtor de K-teoría, L-teoría o Pseudoisotopía. Entonces para todo $n \in \mathbb{Z}$ la función*

$$A_{Vcyc} : H_n^G(\underline{\underline{E}}G; F) \to H_n^G(pt; F) \cong \pi_n(F(G)) \tag{0.1}$$

*que es inducida por la proyección $\underline{\underline{E}}G \to pt$ es un isomorfismo. En el enunciado $\underline{\underline{E}}$ denota el espacio clasificante de la familia de subgrupos virtualmente cíclicos de $G$.*

Esta conjetura ha sido verificada en el caso del funtor de Pseudoisotopía, entre otros, para los grupos fundamentales de variedades Riemannianas cerradas con curvatura seccional no positiva, subgrupos libres de torsión de $Gl_n(\mathbb{R})$, grupos de 3-variedades Haken y para los grupos de trenzas puras y completas. Sin embargo sus análogos para el caso del funtor de K-teoría permanecen como problemas abiertos.

En el presente trabajo nos centramos en la conjetura de Farrell-Jones para el funtor de K-teoría y demostramos que los grupos de trenzas puras satisfacen la conjetura de Farrell-Jones en su versión fibrada, la cual generaliza la conjetura de Farrell-Jones antes mencionada.

Morelia, Michoacán
UNAM-UMSNH

*Noviembre de 2011*

Capítulo 1

# Preliminares.

## 1. Espacios clasificantes.

Definición 1.1. Sea $G$ un grupo topológico. Una $G$-célula de dimensión $n$ es un espacio de la forma $G/H \times D^n$, donde $H$ es un subgrupo cerrado de $G$ y $D^n$ es un disco de dimensión $n$. Un G-CW-complejo $X$ es un espacio topológico construido de manera inductiva adjuntando $G$-células. De manera explícita $X$ es un $G$- espacio que tiene una filtración $G$-invariante

$$X^0 \subseteq X^1 \subseteq \cdots \subseteq \bigcup_{n\geq 0} X^n = X \tag{1.1}$$

y existen $G$-pushouts

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{i\in I}(G/H \times S^n) & \longrightarrow & X^n \\ \downarrow & & \downarrow \\ \coprod_{i\in I}(G/H \times D^n) & \longrightarrow & X^{n+1} \end{array}$$

de manera que $X$ tiene la topología débil o topología colímite respecto a la filtración. Diremos que un $G$-CW-complejo es propio si todos sus grupos de isotropía son compactos.

Notemos que si $G$ es un grupo discreto entonces $X$ tiene una estructura natural de CW-complejo. En este caso también cabe resaltar que para cada $g \in G$ y para cada célula $e$ de $X$ tales que $ge \cap e \neq \emptyset$ se tiene que la acción de $g$ en $e$ es trivial ya que $G$ actúa en la $G$-célula $G/H \times D^n$ en el factor izquierdo.

Definición 1.2. Una familia de subgrupos $\mathcal{F}$ de un grupo $G$ es una colección de subgrupos que es cerrada bajo conjugación y es cerrado bajo intersecciones finitas.

Algunos autores definen una familia de subgrupos $\mathcal{F}$ como una colección de subgrupos que es cerrada bajo conjugación y tomar subgrupos (ver [**7**], pag. 156).

Definición 1.3. Sea $G$ un grupo y $\mathcal{F}$ una familia de subgrupos. Un espacio clasificante $E_{\mathcal{F}}G$ para $\mathcal{F}$ es un $G$-CW-complejo que cumple:

1. Todos sus subgrupos de isotropía pertenecen a $\mathcal{F}$.

2. Si $H \in \mathcal{F}$ entonces $E_{\mathcal{F}}^{H}$, el conjunto de puntos fijos de $H$, es contraible.

TEOREMA 1.4. *Sean $G$ un grupo, $\mathcal{F}$ una familia de subgrupos de $G$ y $E_{\mathcal{F}}G$ un espacio clasificante para $\mathcal{F}$. Si $X$ es un $G$-CW-complejo tal que todos sus grupos de isotropía pertenecen a $\mathcal{F}$ entonces existe una $G$-función $f : X \to E_{\mathcal{F}}G$ única salvo $G$-homotopía. En particular $E_{\mathcal{F}}G$ es único salvo $G$-homotopía.*

DEMOSTRACIÓN. Ver [**5**] Teorema 1.9. ❑

También se puede demostrar que dada una familia $\mathcal{F}$, $E_{\mathcal{F}}G$ siempre existe(ver [**7**] Teoremas A.2, A.3).

1. Sea $Fin$ la familia de subgrupos finitos de $G$ entonces $E_{Fin}G$ usualmente se denota por $\underline{E}G$.
2. Un grupo se dice que es virtualmente cíclico si contiene un subgrupo cíclico de índice finito. Sea $Vcyc$ de subgrupos virtualmente cíclicos $E_{Vcyc}G$ se denota por $\underline{\underline{E}}G$.
3. En caso de que $\mathcal{F}$ conste únicamente del subgrupo trivial $E_{\mathcal{F}}G$ es el espacio total del $G$-haz principal universal usualmente denotado por $EG$.

Para una amplia variedad de grupos $\underline{E}G$ es bien entendido y en general $\underline{E}G$ ha sido mas estudiado. Por otra parte $\underline{\underline{E}}G$ sigue siendo un misterio en muchos aspectos, sin embargo, su importancia radica en el papel que juega en la conjetura de Farrell-Jones. Como ejemplo de su alto grado de dificultad tenemos la siguiente conjetura planteada en [**12**].

CONJETURA 1.5. *(Juan-Pineda, Leary) Si $G$ es un grupo para el cual existe un modelo finito para $\underline{\underline{E}}G$, entonces $G$ es virtualmente cíclico.*

Veamos algunos ejemplos.

EJEMPLO 1.6. Los ejemplos mas comunes para $EG$ son los siguientes:

1. $E\mathbb{Z}^n = \mathbb{R}^n$, donde $\mathbb{Z}$ actúa por traslación.
2. $EF_n = Cay(F_n, S)$, donde $F_n$ es el grupo libre en n generadores, $S$ es una basey y $Cay(F_n, S)$ es su gráfica de Cayley.
3. Definimos la esfera infinita $S^\infty$ como $\cup_{n\geq 0} S^n$, donde $S^n$ se encaja en $S^{n+1}$ en el ecuador. $E(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = S^\infty$, donde $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ actúa de manera antipodal.

Un espacio $CAT(0)$ es un espacio métrico con curvatura negativa en el sentido de Alexandrov, para una definición formal puede ver [**13**], parte dos. Los siguientes dos teoremas son útiles para construir ejemplos de modelos para $\underline{E}G$, cabe mencionar que el primero es consecuencia del segundo. Las demostraciones se pueden ver en [**5**], Teorema 4.5 y Teorema 4.6.

Teorema 1.7. *Sea $G$ un grupo topológico Hausdorff localmente compacto. Suponga que $G$ actúa de manera propia y por isometrías en la variedad Riemanniana simplemente conexa $M$ con curvatura seccional no positiva. Entonces $M$ es un modelo para $\underline{E}G$.*

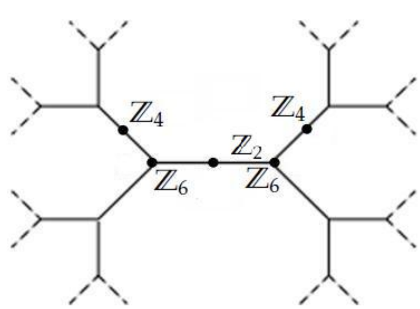
Teorema 1.8. *Sea $G$ un grupo topológico Hausdorff localmente compacto. Sea $X$ un $G$-CW compacto propio. Suponga que $X$ tiene estructura de un espacio $CAT(0)$ completo en el cual $G$ actúa por isometrías. Entonces $X$ es un modelo para $\underline{E}G$.*

Ejemplo 1.9. Sean $L = SL_2(\mathbb{R})$, $G = SL_2(\mathbb{Z})$ y $\mathcal{F}$ la familia de subgrupos compactos de $L$. Denotemos por $\mathbb{H}$ al plano hiperbólico. Si tomamos el modelo del semiplano superior para $\mathbb{H}$ entonces $L$ actúa en él por isometrías vía las transformaciones de MÃ¶ebius. Esta acción es propia y transitiva, en efecto, el grupo de isotropía de $i$ es $SO(2)$, el cual es compacto. Como $\mathbb{H}$ es una variedad Riemanniana completa, simplemente conexa y con curvatura seccional constante igual a -1, por el Teorema 1.7 tenemos que $\mathbb{H}$ es un modelo para $E_{\mathcal{F}}L$.

Si restringimos la acción de $L$ a $G$ por el mismo teorema obtenemos que $\mathbb{H}$ es un modelo para $\underline{E}G$. Por otra parte, $G \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} *_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$. Esto implica que existe un árbol $T$ en el cual $G$ actúa con estabilizadores finitos. Dicho árbol es un modelo de dimensión uno para $G$. Se concluye que $\mathbb{H}$ y $T$ son $G$-homotópicamente equivalentes. De hecho la equivalencia se puede dar de manera explícita.

Dividamos el disco de Poincaré en regiones fundamentales para la acción de $G$. Esta región es el espacio móduli para el conjunto de estructuras holomorfas del toro. Cada región fundamental es un triángulo geodésico con un vértice en la frontera del disco. Entonces la unión de las aristas, cuyos vértices están en el interior del disco, forman un árbol $T$ con una acción de $G$. $T$ es una $G$-retracción del disco. Una retracción viene dada al mover un punto $p$ en el disco de Pincaré a lo largo de la geodésica que comienza en el vértice que está en la frontera, que pertenece al triángulo donde vive $p$, hasta el primer punto de $T$ que intersecta a dicha geodésica.

En la siguiente figura se ve el módelo uno-dimensional que hemos construido para $\underline{E}SL_2(\mathbb{Z})$ con sus grupos de isotropía en cada vértice y en las aristas:



Ejemplo 1.10. Como vimos en nuestro primer ejemplo $\mathbb{R}^n$ es un modelo para $\underline{E}\mathbb{Z}^n$. Si hacemos producto cartesiano con $\mathbb{R}$ con la acción trivial obtenemos otro modelo para $\underline{E}\mathbb{Z}^n$. Sea $\{C_k|k \in \mathbb{Z}\}$ una lista de todos los subgrupos cíclicos de $\mathbb{Z}^n$. Entonces un modelo para $\underline{\underline{E}}\mathbb{Z}$ se obtiene de $\mathbb{R}^{n+1}$ colapsando para todo $k \in \mathbb{Z}$ el espacio vectorial de dimensión $n$ $\mathbb{R}^n \times \{k\}$ al espacio vectorial de dimensión $n-1$ $\mathbb{R}^n/V_C$, donde $V_C$ es el espacio vectorial de dimensión 1 generado por la $C$-órbita que pasa a travez del origen.

## 2. $G$-Teorías de (Co)homología

Sea $G$ un grupo discreto. Sea $\mathfrak{G}^2$ la categoría de parejas $(K, L)$, con K un G-CW-complejo y $L \subseteq K$ un G-subcomplejo.

Definición 1.11. Una $G$-teoría de homología generalizada es una colección de funtores covariantes

$$H_n^G : \mathfrak{G}^2 \to Ab \tag{2.1}$$

$n \in \mathbb{Z}$, junto con transformaciones naturales

$$\partial_n : H_n^G(K, L) \to H_{n-1}^G(L, \emptyset) \tag{2.2}$$

que cumplen los siguientes axiomas:

1. (Invarianza homotópica) Si $f_0, f_1 : (K, L) \to (K', L')$ son funciones $G$-homotópicas entonces $H_n^G(f_0) = H_n^G(f_1)$
2. (Escisión) La inclusión $(K, K \cap L) \subset (K \cup L, L)$ induce un isomorfismo
$$H_n^G(K, K \cap L) \xrightarrow{\cong} H_n^G(K \cup L, L)$$
para toda $n \in \mathbb{Z}$
3. Si $(K, L) \in \mathfrak{G}^2$ entonces la sucesión
$$\cdots \to H_n^G(L, \emptyset) \xrightarrow{i_*} H_n^G(K, \emptyset) \xrightarrow{j_*} H_n^G(K, L) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}^G(L, \emptyset) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}^G(K, \emptyset) \xrightarrow{j_*} \cdots$$
donde $i : (L, \emptyset) \to (K, \emptyset)$ y $j : (K, \emptyset) \to (K, L)$ son inclusiones, es exacta.
4. (Unión disjunta) Si $\{X_i|i \in I\}$ es una familia de $G$-espacios, entonces
$$H_n^G\left(\coprod_{i\in I} X_i\right) \cong \bigoplus_{i\in I} H_n^G(X_i)$$

Definición 1.12. Un $G$-espectro $E$ es una colección $\{E_n|n \in \mathbb{Z}\}$ de $G$-espacios, junto con $G$-funciones

$$\epsilon_n : \Sigma E_n \to E_{n+1}$$

o equivalentemente $s_n : E_n \to \Omega E_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Tal como sucede en el caso no equivariante (ver [**3**]) si $E$ es un $G$-espectro entonces la asignación

$$H_n(X, Y; E) = \pi_n((X_+ \cup_{A_+} CA_+) \wedge E)$$

define una $G$-teoría de homología. Veamos brevemente la construcción de la teoría de homología equivariante de Bredon, la cual, es lo que se podría denominar, la $G$-teoría de homología celular.

Definición 1.13. Sea $G$ un grupo. La categoría de órbitas Orb($G$) de $G$ es la categoría cuyos objetos son los $G$-espacios homogéneos $G/H$ y sus homomorfismos son las $G$-funciones $G/H \to G/K$.

Notemos que las funciones $G/H \to G/K$ son de la forma $f_a(gH) = gaK$ siempre que $aHa^{-1} \subseteq K$.

La categoría de órbitas es muy importante por lo siguiente. Cuando se construye un complejo CW , se van adjuntando $n$-células, que son homotópicamente equivalentes a un punto. Así que en una teoría de homología clásica la homología de un punto, lo que llamamos los coeficientes de nuestra teoría, son esenciales a la hora de hacer cálculos. En cambio, cuando se contruye un $G$-CW-complejo se adjuntan $G$-células de la forma $G/H \times D^n$, por lo tanto el equivalente equivariante a los puntos son los espacios homogéneos, así pues, los coeficientes en una $G$-teoría de homología van variando dependiendo del tipo de G-células que utilicemos al momento de construir nuestro $G$-CW-complejo. Así que esto motiva la siguiente definición.

Definición 1.14. Sea $G$ un grupo. Un sistema de coeficientes para $G$ es un funtor covariante

$$M : Orb(G) \to Ab$$

Sea X un $G$-CW-complejo. Ahora definimos el funtor contravariante

$$C_*(X) : Orb(G) \to \mathbb{Z} - comp$$

dador por

$$G/H \longmapsto C_*(Hom_G(G/H, X)) \cong C_*(X^H)$$

donde $C_*(X^H)$ es el complejo de cadenas celulares de $X^H$. Denotemos por $C_*(X) \otimes_{Orb(G)} M$ al siguiente complejo de cadenas

$$\bigoplus_{H \leq G} (C_*(X)(G/H) \otimes_{\mathbb{Z}} M(G/H)) / \sim$$

donde la relación de equivalencia es generada por $(\sigma g^*, x) \sim (\sigma, g_* x)$ para cualquier cadena $\sigma \in C_*(X^H)$, $x \in M(G/H)$ y $g : G/H \to G/K$. Así pues, la $G$-teoría de homología de Bredon de $X$ con coeficientes en el funtor $M$ se define como

$$H_*^G(X; M) = H_*(C_*(X) \otimes_{Orb(G)} M).$$

Ahora definiremos la $G$-teoría de cohomología de Bredon, la construcción que aquí se presenta es equivalente a la dada en [**8**]. Supongamos que $M : Orb(G) \to Ab$ es un funtor contravariante.

Definición 1.15. Un Orb($G$)-módulo es un funtor contravariante $A : Orb(G) \to Ab$. Un homomorfismo entre dos Orb($G$)-módulos es una transformación natural $f : A \to B$ y $Hom_{Orb(G)}(A, B)$ es el grupo de homomorfismos de $A$ en $B$.

Con este enfoque el funtor $C_*(X)$ se puede ver como un complejo de $Orb(G)$-módulos

$$\cdots \to C_{n+1}(X) \to C_n(X) \to C_{n-1}(X) \to \cdots$$

De esta manera podemos definir el complejo de cadenas $Hom_{Orb(G)}(C_*(X), M)$

$$\cdots \to Hom_{Orb(G)}(C_{n-1}(X), M) \to Hom_{Orb(G)}(C_n(X), M) \to Hom_{Orb(G)}(C_{n+1}(X), M) \to \cdots$$

Entonces, la $G$-cohomología de Bredon viene dada por

$$H_G^*(X; M) = H_*(Hom_{Orb(G)}(C_*(X), M))$$

Dado un sistema de coeficientes para $G$ puede ser realmente complicado calcular $H_*^G(X, M)$ y $H_G^*(X, M)$, tan complicado como calcular grupos de K-teoría o de L-teoría como veremos mas adelante. Notemos que si $G = \{1\}$ entonces $H_n^G$ son los funtores usuales de homología celular.

## 3. Teorías de homología equivariantes

Para la conjetura de Farrell-Jones usaremos una variante de la contrucción de Bredon. Esencialmente las diferencias son las siguientes: El sistema de coeficientes será un funtor $M : Orb(G) \to ESPECTRA$ y las $G$-teorías de homología no serán aisladas sino que estarán conectadas de tal forma que respeten cierta estructura inductiva.

Sea $\alpha : H \to G$ un homomorfismo de grupos. Dado un $H$-espacio $X$, definimos la inducción $ind_\alpha X$ de $X$ con $\alpha$ como el $G$-espacio obtenido por el cociente de $G \times X$ por la acción $(g, x) \cdot h = (g\alpha(h), h^{-1}x)$ para $h \in H$ y $(g, x) \in G \times H$.

Definición 1.16. Una teoría de homología equivariante $H_*^?$ consiste en una $G$-teoría de homología $H_*^G$ para cada grupo $G$ junto con la siguiente estructura inductiva: Dado un homomorfismo de grupos $\alpha : H \to G$ y un $H$-CW- par $(X, A)$ tal que $ker(\alpha)$ actúa libremente en $X$, existen para cada $n \in \mathbb{Z}$ isomorfismos naturales

$$ind_\alpha : H_n^H(X, A) \to H_n^G(ind_\alpha(X, A))$$

que satisfacen las siguientes condiciones:

1. $\partial_n^G \circ ind_\alpha = ind_\alpha \circ \partial_n^H$.
2. Sea $\beta : G \to K$ otro homomorfismo de grupos tal que $\ker(\beta \circ \alpha)$ actúa libremente en $X$. Entonces para $n \in \mathbb{Z}$

$$ind_{\beta\circ\alpha} = H_n^K(f_1) \circ ind_\beta \circ ind_\alpha : H_n^H(X, A) \to H_n^K(ind_{\beta\circ\alpha}(X, A))$$

   donde $f_1 : ind_\beta ind_\alpha(X, A) \to ind_{\beta\circ\alpha}(X, A)$, es el homomorfismo natural.
3. Para $n \in \mathbb{Z}$, $g \in G$ y $(X, A)$ un $G$-CW par, el homomorfismo

$$ind_{c(g):G\to G} : H_n^G(X, A) \to H_n^G(ind_{c(g):G\to G}(X, A))$$

   coincide con $H_n^G(f_2)$, donde el $G$-homeomorfismo

$$f_2 : (X, A) \to ind_{c(g):G\to G}(X, A)$$

   manda $x$ a $(1, g^{-1}x)$ y $c(g) : G \to G$ manda $g'$ a $gg'g^{-1}$.

Para crear una teoría de homología equivariante utilizaremos la construcción que hace LÃ$\frac{1}{4}$ck en [**2**]. Sea $Y$ un $G$- espacio. Definimos un funtor contravariante como sigue

$$Hom_G(\_, Y) : Orb(G) \to Top$$

$$G/H \longmapsto Hom_G(G/H, Y) = Y^H.$$

Por otra parte, si $X$ es un funtor covariante $X : Orb(G) \to Top$ definimos

$$Hom_G(\_, Y) \wedge_{Orb(G)} X = \bigvee_{Orb(G)} Hom_G(G/H, Y) \wedge Y(G/H)/\sim$$

donde la relación de equivalencia viene dada por $(x\varphi^*, y) \sim (x, \varphi_* y)$ para toda función $\varphi : G/H \to G/K$ en Orb($G$) y puntos $x \in map_G(G/H, Y)$, $y \in X(G/K)$.

Si tenemos un funtor covariante $E : Orb(G) \to ESPECTRA$ entonces podemos verlo como un conjunto de funtores $\{E_n : Orb(G) \to Top | n \in \mathbb{Z}\}$ y transformaciones naturales $s_n : E_n \to SE_{n+1}$. De manera que tiene sentido definir el espectro

$$Hom_G(\_, Y) \wedge_{Orb(G)} E.$$

Definimos la $G$-teoría de homología del par $(X, A)$ con coeficientes en $E$ como

$$H_*^G(X; M) = \pi_n(Hom_G(\_, X_+ \cup_{A_+} CA_+) \wedge_{Orb(G)} E).$$

En particular

$$H_n^G(G/H; E) = \pi_n(E(G/H)).$$

El siguiente objetivo es crear funtores $E : Orb(G) \to ESPECTRA$ de manera que obtengamos una teoría de homología equivariante tal que $H_*^G(pt; E) = K_*(\mathbb{Z}G)$.

Un grupoide es una categoría pequeña donde todo morfismo es un isomorfismo. Un grupo lo podemos ver como un grupoide con un sólo objeto $*$ y $Hom(*, *) = G$. La categoría de grupos se puede ver como una subcategoría de la categoría de grupoides. Tenemos un funtor $K : Groups \to ESPECTRA$ que a cada grupo $G$ le asocia el espectro de K-teoría algebraica del anillo de grupo $\mathbb{Z}G$(ver [**10**], [**11**]). Este funtor se puede extender a un funtor

$$K : GRUPOIDS \to ESPECTRA.$$

Notemos que cualquier espacio homogéneo $G/H$ puede ser dotado con una estructura de grupoide. En efecto, el conjunto de objetos es $G/H$ mismo y para cada par de puntos $x, y \in G/H$ definimos $Hom(x, y) = \{g \in G | gx = y\}$, en particular $Hom(x, x)$ es un conjugado en $G$ de $H$. Así obtenemos un encaje de la categoría de órbitas de $G$ en la categoría de grupoides para todo grupo. Finalmente podemos definir una teoría de homología equivariante $H_*^?(\_, K)$ cuya $G$-teoría de homología subyacente sea la asociada al funtor

$$Orb(G) \hookrightarrow GRUPOIDS \xrightarrow{K} ESPECTRA.$$

En particular nuestra teoría de homología equivariante cumple:

$$H_n^G(G/H; K) = \pi_n(K(\mathbb{Z}G)) \cong K_n(\mathbb{Z}G)$$

(ver [**2**], proposición 157)

ésta es la teoría de homología equivariante que se usa en la formulación de la conjetura de Farrell-Jones para K-teoría. De ahora en adelante omitiremos la $K$ de los coeficientes pero quedará sobreentendido que estamos trabajando con esta teoría de homología equivariante.

Capítulo 2

# La conjetura de Farrell-Jones para los grupos de trenzas puras.

## 1. La conjetura de Farrell-Jones y su versión fibrada.

Originalmente T. Farrell y L. Jones plantearon su conjetura para los funtores de K-teoría, L-teoría, Pseudoisotopía y Pseudoisotopía diferenciable en [**7**]. Como en este trabajo estamos especialmente interesados en el funtor de K-teoría, plantearemos la conjetura para este caso particular. Usaremos la notación desarrollada en las secciones anteriores.

Conjetura 2.1. *(Farrell-Jones) Sea $G$ un grupo discreto. Entonces para todo $n \in \mathbb{Z}$ la función*

$$A_{Vcyc} : H_n^G(\underline{\underline{E}}G; K) \to H_n^G(pt; K) \cong K_n(\mathbb{Z}G) \tag{1.1}$$

*que es inducida por la proyección $\underline{\underline{E}}G \to pt$ es un isomorfismo.*

La conjetura de Farrell-Jones es importante porque da una herramienta bastante útil para hacer cálculos ya que tanto los anillos $\mathbb{Z}G$ como sus grupos de K-teoría son dificiles de manejar. Sin embargo, bajo el isomorfismo dado por la función de ensamblaje $A_{Vcyc}$ podemos identificar los grupos de K-teoría de $\mathbb{Z}G$ con los grupos de homología del espacio clasificante $\underline{\underline{E}}G$. Estos grupos de homología son potencialmente mas sencillos de calcular usando sucesiones espectrales del tipo Atiyah-Hirzebruch.

Una generalización de la conjetura de Farrell-Jones es lo que se conoce como la versión fibrada a la que nos referiremos por FIC por sus siglas en inglés (Fibered isomorphism conjecture). Esta generalización tiene como principal ventaja sus propiedades hereditarias (ver [**6**] y [**9**]) y será nuestra pincipal herramienta en el siguiente capítulo.

Definición 2.2. Dado un homomorfismo de grupos $\varphi : K \to G$ y una familia $\mathcal{F}$ de subgrupos de $G$, definimos la familia inducida

$$\varphi^*\mathcal{F} = \{H \leq K | \varphi(H) \in \mathcal{F}\}$$

Definición 2.3. Sea $G$ un grupo y $\mathcal{F}$ una familia de subgrupos de $G$. Decimos que el par $(G, \mathcal{F})$ satisface FIC si para todo homomorfismo de grupos $\varphi : K \to H$ el par $(K, \varphi^*\mathcal{F})$ satisface que

$$A_{\varphi^*\mathcal{F}} : H_n^K(E_{\varphi^*\mathcal{F}}G; K) \to H_n^G(pt; K)$$

es un isomorfismo para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Una de las propiedades hereditarias mas interesantes que posee FIC es el llamado Principio de transitividad el cual demostraremos mediante el siguiente lema.

Lema 2.4. *Sea $G$ un grupo y sea $\mathcal{F}$ una familia de subgrupos de $G$. Sea $Z$ un $G$-CW-complejo. Consideremos $N \in \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$. Para $H \leq G$ sea $\mathcal{F} \cap H$ la familia de subgrupos de $H$ dada por $\{K \cap H | K \in \mathcal{F}\}$. Suponga para cada $H \leq G$ que aparece como grupo de isotropía en $Z$, que la función inducida por $pr : E_{\mathcal{F}\cap H}H \to pt$*

$$pr_* : H_n^H(E_{\mathcal{F}\cap H}H) \to H_n^H(pt)$$

*es un isomorfismo para todo $n \in \mathbb{Z}, n \leq N$. Entonces la función inducida por la proyección $pr_2$ : $E_{\mathcal{F}}G \times Z \to Z$*

$$pr_{2*} : H_n^G(E_{\mathcal{F}}G) \to H_n^G(Z)$$

*es un isomorfismo para todo $n \in \mathbb{Z}, n \leq N$.*

Demostración. Primero demostraremos la afirmación para un $G$-CW-complejo $Z$ de dimensión finita por inducción en la dimensión $d$. La base de inducción para dim(Z)=0 es claro. En el paso de inducción de $d-1$ a $d$ escogemos un $G$-pushout

$$\begin{tikzcd} \coprod_{i\in I}(G/H \times S^{d-1}) \arrow[r] \arrow[d] & Z^{d-1} \arrow[d] \\ \coprod_{i\in I}(G/H \times D^d) \arrow[r] & Z^d \end{tikzcd}$$

Si hacemos producto cartesiano con $E_{\mathcal{F}}G$, obtenemos otro $G$-pushout de $G$-CW-complejos. Las proyecciones en el segundo factor induce una función entre las sucesiones de Mayer-Vietoris de ambos $G$-pushouts. Por el lema del cinco es suficiente demostrar que las siguientes funciones

$$pr_{2*} : H_n^G\left(E_{\mathcal{F}}G \times \coprod_{i\in I}(G/H \times S^{d-1})\right) \to H_n^G\left(\coprod_{i\in I}(G/H \times S^{d-1})\right)$$

$$pr_{2*} : H_n^G\left(E_{\mathcal{F}}G \times Z^{d-1}\right) \to H_n^G\left(Z^{d-1}\right)$$

$$pr_{2*} : H_n^G\left(E_{\mathcal{F}}G \times \coprod_{i\in I}(G/H \times D^{d})\right) \to H_n^G\left(\coprod_{i\in I}(G/H \times D^{d})\right)$$

son biyectivas para todo $n \in \mathbb{Z}, n \leq N$. Esto se sigue, para las primeras dos funciones, de la hipótesis de inducción y de que $G$ es un grupo discreto. Por el axioma de la unión disjunta y del axioma de invarianza homotópica de nuestra teoría de homología, la afirmación se sigue para la tercera función si podemos demostrar que para cualquier $H \leq G$ que aparece como grupo de isotropía de $Z$ la función

$$pr_{2*} : H_n^G(E_{\mathcal{F}}G \times G/H) \to H_n^G(G/H) \tag{1.2}$$

es biyectiva para todo $n \in \mathbb{Z}, n \leq N$. La $G$-función

$$G \times res_G^H E_{\mathcal{F}}G \to G/H \times E_{\mathcal{F}}G$$

$$(g, x) \longmapsto (gH, gx)$$

es un $G$-homomorfismo donde $res_G^H$ denota la restricción a $H$ de la acción de $G$. Claramente $res_G^H E_{\mathcal{F}}G$ es un modelo para $E_{\mathcal{F}\cap\mathcal{H}}H$. Como nuestra teoría de homología es equivariante, i.e, respeta estructuras inductivas tenemos que la función 1.2 se puede identificar con la función

$$pr_* : H_n^H(E_{\mathcal{F}\cap H}H \times G/H) \to H_n^H(pt)$$

la cual es inyectiva para todo $n \in \mathbb{Z}, n \leq N$ por hipótesis. Esto termina la demostración en el caso de dimensión finita. El caso general se sigue tomando colímite en los esqueletos de $Z$. ❑

Como una consecuencia inmediata de este teorema tenemos el siguiente:

TEOREMA 2.5. *Sea $G$ un grupo y sean $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ dos familias de subgrupos de $G$. Consideremos $N \in \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$. Suponga para cada $H \in \mathcal{G}$, que la función inducida por $pr : E_{\mathcal{F}\cap H}H \to pt$*

$$pr_* : H_n^H(E_{\mathcal{F}\cap H}H) \to H_n^H(pt)$$

*es un isomorfismo para todo $n \in \mathbb{Z}, n \leq N$. Entonces la función inducida por la única $G$-función $pr : E_{\mathcal{F}}G \to E_{\mathcal{G}}G$*

$$pr_* : H_n^G(E_{\mathcal{F}}G) \to H_n^G(E_{\mathcal{G}}G)$$

*es un isomorfismo para todo $n \in \mathbb{Z}, n \leq N$.*

Finalmente obetenemos el Principio de Transitividad.

TEOREMA 2.6. *Sea $G$ un grupo y sean $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ dos familias de subgrupos de $G$. Consideremos $N \in \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$. Supongamos que para todo elemento $H \in \mathcal{G}$ el grupo $H$ satisface FIC para la familia $\mathcal{F} \cap H$ para $n \leq N$. Entonces $(G, \mathcal{G})$ satiface FIC para $n \leq N$ si y sólo si $(G, \mathcal{F})$ satisface FIC para $n \leq N$.*

DEMOSTRACIÓN. Consideremos un homomorfismo de grupo $\varphi : K \to G$. Entonces para cualquier subgrupo $H$ de $K$ concluimos que

$$(\varphi^*|_H)(\mathcal{F} \cap \varphi(H)) = (\varphi^*\mathcal{F}) \cap H$$

donde $\varphi^*|_H : H \to \varphi(H)$ es la resticción de $\varphi$. Para todo $H \in \varphi^*\mathcal{G}$ la función

$$H_p^H(E_{(\varphi^*|_H)(\mathcal{F}\cap\varphi(H))}H) = H_p^H(E_{(\varphi^*\mathcal{F})\cap H}H) \to H_p^H(pt)$$

es biyectiva para todo $p \in \mathbb{Z}, p \leq N$ por que estamos suponiendo que $\varphi(H) \in \mathcal{G}$ satisface FIC para $(\mathcal{F}) \cap \varphi(H)$ para $n \leq N$. Luego por el Teorema 2.5 aplicado a la inclusión $\varphi^*\mathcal{F} \subset \varphi^*\mathcal{G}$ obtenemos un isomorfismo

$$H_p^K(E_{\varphi^*\mathcal{F}}K) \to H_p^K(E_{\varphi^*\mathcal{G}}K)$$

para todo $n \leq N$. Entonces la función $H_p^K(E_{\varphi^*\mathcal{F}}K) \to H_p^K(pt)$ es biyectiva para todo $p \in \mathbb{Z}, p \leq N$ si y sólo si la función $H_p^K(E_{\varphi^*\mathcal{G}}K) \to H_p^K(pt)$ es biyectiva para todo $p \in \mathbb{Z}, p \leq N$. Si centramos nuestro argumento a $\varphi = Id_G$ entonces solamente necesitamos FIC para $\mathcal{F} \cap H$ para $n \leq N$ y esto demuestra lo que queriamos.

❏

El siguiente teorema es muy útil para hacer cálculos y muestra una de las propiedades inductivas que se obtienen de la Conjetura en su versión fibrada.

Teorema 2.7. *Sea $f : G \to Q$ un homomorfismo suprayectivo de grupos. Supongamos que FIC vale para $(Q, Vcyc(Q))$ y que todo $H \in p^*Vcyc(Q)$ cumple FIC. Entonces FIC es válida para $(G, Vcyc(G))$.*

Demostración. Como FIC se vale para $(Q, Vcyc(Q))$ por hipótesis, entonces FIC vale para $(G, p^*Vcyc(Q))$. Tenemos que demostrar que FIC se cumple para $(G, Vcyc(G))$ pero esto se sigue del Principio de Transitividad. ❏

Supongamos que $G$ es un grupo libre de torsión. En este caso la familia de subgrupos virtualmente cíclicos $Vcyc$ se reduce a la familia de subgrupos cíclicos $Cyc$. Aplicando el Principio de transitividad se demuestra que la siguiente función de ensamblaje es un isomorfismo:

$$A : H_n^G(EG) \to H_n^G(E_{Cyc}G).$$

Usando esto último y la definición de nuestra teoría de homología, se obtiene el siguiente:

Teorema 2.8. *Sea G un grupo libre de torsión. Entonces G satisface la conjetura de Farrell-Jones si y sólo si la función de ensamblaje*

$$H_n(BG) \to K_n(\mathbb{Z}G)$$

*es un isomorfismo para todo $n \in \mathbb{Z}$.*

## 2. Resultado Principal.

DEFINICIÓN 2.9. Un grupo discreto $G$ se dice que es poli-libre si existe una filtración de $G$ de subgrupos $1 = G_0 \subset G_1 \subset \cdots \subset G_n = G$ tal que cumple las siguientes condiciones:

1. $G_i$ es normal en $G$ para cada $i$.
2. $G_{i+1}/G_i$ es un grupo libre finitamente generado.

En esta situación decimos que $G$ tiene rango menor o igual a $n$. Ahora enunciaremos dos resultados que serán útiles después, las demostraciones se pueden encontrar en [**6**], Teorema 2.6 y en [**6**] Teorema 0.1 respectivamente.

LEMA 2.10. *Sea* $1 \to K \to G \to Q \to 1$ *es una extensión de grupos. Suponga que* $K$ *es libre y* $Q$ *es libre de torsión y satisface FIC. Entonces la función de ensamblaje*

$$H_n(BG) \to K_n(\mathbb{Z}G)$$

*es un isomorfismo para todo* $n \in \mathbb{Z}$

TEOREMA 2.11. *Cualquier grupo hiperbólico satisface FIC. En particular cualquier grupo libre finitamente generado satisface FIC.*

A continuación se enunciarán y demostrarán los resultados principales de este trabajo.

TEOREMA 2.12. *Sean* $F$ *un grupo libre finitamente generado y* $\gamma : F \to F$ *un automorfismo. Entonces* $F \rtimes \mathbb{Z}$ *cumple FIC.*

DEMOSTRACIÓN. Como $F$ y $\mathbb{Z}$ son libres de torsión se tiene que $F \rtimes \mathbb{Z}$ también es libre de torsión. Por el Teorema 2.10 y el Teorema 2.8, $F \rtimes \mathbb{Z}$ cumple la conjetura de Farrell-Jones en su versión no fibrada para cualquier $\gamma$. Consideremos la proyección

$$f : F \rtimes \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$$

y apliquemos el Teorema 2.7. En efecto, $F^{-1}(\{1\}) \cong F$ así que cumple la conjetura de Farrell-Jones por el Teorema 2.11. Por otra parte $f^{-1}(n\mathbb{Z})$ es de la forma $F \rtimes \mathbb{Z}$, así que por la discusión anterior también cumple la conjetura de Farrell-Jones y concluimos la demostración. ∎

TEOREMA 2.13. *Cualquier grupo poli-libre* $G$ *satisface FIC.*

DEMOSTRACIÓN. Probaremos el teorema procediendo por inducción en el rango de $G$. Nuestra base de inducción, cuando $G$ tiene rango $\leq 1$, es cierta ya que en este caso $G$ resulta ser un grupo libre finitamente generado, así que usamos el Teorema 2.11.

Supongamos que los grupos poli-libres de rango $\leq n$ satisfacen FIC, y procedamos para los grupos de rango $\leq n+1$. Comenzamos aplicando el Teorema 2.7 al homomorfismo suprayectivo $q : G \to G/G_n$, notemos que esto es posible porque $G/G_n$ es un grupo libre finitamente generado.

Sea $C$ un subgrupo cíclico de $G/G_n$. Si $C = \{1\}$ entonces $q^{-1}(C) = G_n$, el cual es poli-libre de rango $\leq n$, así que satisface la conjetura de Farrell-Jones. Ahora supongamos que $C$ es un subgrupo cíclico infinito de $G/G_n$. Entonces aplicamos el Teorema 2.7 al homomorfismo suprayectivo $q_1 : q^{-1}(C) \to q^{-1}(C)/G_{n-1}$. Notemos que $q^{-1}(C)/G_{n-1} \cong (G_n/G_{n-1}) \rtimes C$, donde el generador de $C$ actúa por conjugación en el factor izquierdo, así que por el Teorema 2.12 cumple FIC.

Sea $C_1$ un subgrupo cíclico de $q^{-1}(C)/G_{n-1}$. Si $C_1 = \{1\}$ entonces $q_1^{-1}(C) = G_{n-1}$, el cual es de rango $\leq n-1$, así que por hipótesis de inducción cumple la conjetura de Farrell-Jones. Ahora supongamos que $C_1$ es un cíclico infinito. Consideremos la proyección $q_2 : G \to G_{n-1}$. Bajo esta proyección $q^{-1}(C)$ va a $q^{-1}(C)/G_{n-1}$. La filtración $1 = G_0 \subset G_1 \subset \cdots \subset G_{n-1} \subset q_2^{-1}(C)$ muestra que $q_2^{-1}$ es poli-libre de rango $\leq n$, así que cumple la conjetura de Farrell-Jones. Por lo tanto $q^{-1}(C)$ satisface la conjetura de Farrell-Jones y finalmente $G$ satisface FIC. ❏

Ahora definiremos los grupos de trenzas puras.

Definición 2.14. Sean $S$ una superficie con frontera y $P_k = \{x_1^0, ..., x_k^0\} \subset S^0$ un subconjunto finito. Definimos el espacio de configuración $M_n^k(S) = \{(x_1, x_2, ..., x_n) | x_i \in S - P_k,\ x_i \neq x_j \ si\ i \neq j\}$. El grupo de Trenzas puras en $S$ con $n$ cuerdas $B_n(S)$ es por definición $\pi_1(M_n^0(S)) = \pi_1(M_n^0(S^0))$, .

La demostración del siguiente lema se puede encontrar en [**14**], Lema 1.27.

Lema 2.15. *Sea $S$ una superficie con frontera. Para $n > r \geq 1$ y $k \geq 0$, la proyección en las primeras $r$ coordenadas $M_n^k(S^0) \to M_r^k(S^0)$ es una fibración con fibra $M_{m-r}^{k+r}(S^0)$.*

Lema 2.16. *Supongamos que $S = \mathbb{C}$ o que $S$ es una superficie compacta con frontera no vacía. Entonces para cualesquiera $m \geq 0$, $n \geq 1$ la variedad $M_n^m(S^0)$ es asférica.*

Demostración. Consideremos la fibración $M_n^m(S^0) \to M_1^m(S^0) = S^0 - P_m$ con fibra $M_{n-1}^{m+1}(S^0)$ dada por el lema anterior. La sucesión exacta de homotopía asociada a esta fibración queda como sigue

$$\cdots \to \pi_{i+1}(S^0 - P_m) \to \pi_i(M_{n-1}^{m+1}(S^0)) \to \pi_i(M_n^m(S^0)) \to \pi_i(S^0 - P_m) \to \cdots$$

Como $S^0 - P_m$ es asférico, ya que la frontera es no vacía, $\pi_i(S^0 - P_m) = 0$ para todo $i \geq 2$. Así que para todo $i \geq 2$, $\pi_i(M_{n-1}^{m+1}(S^0)) \cong \pi_i(M_n^m(S^0))$. Un argumento inductivo nos muestra que para todo $i \geq 2$

$$\pi_i(M_n^m(S^0)) \cong \pi_i(M_1^{m+n}(S^0)) \cong \pi_i(S^0 - P_{m+n-1}) = 0.$$

❏

TEOREMA 2.17. *Supongamos que $S = \mathbb{C}$ o que $S$ es una superficie compacta con frontera no vacía. Entonces el grupo de trenzas puras $B_n(S)$ es poli-libre de rango $\leq n$ para todo $n \geq 1$.*

DEMOSTRACIÓN. Del teorema anterior obtenemos la sucesión exacta

$$1 \to \pi_1(M^{k+j}_{m-k}) \to \pi_1(M^j_m) \to \pi_1(M^j_k) \to 1.$$

Definimos una filtración de $B_n(S)$ como sigue: $1 = G_0 \subset G_1 \subset \cdots \subset G_n = B_n(S)$, donde $G_i = \pi_i(M^{n-i}_i(S))$. Por la sucesión exacta sabemos que $G_i$ es normal en $B_n$ para cada $i$. Con esto verificamos la primera condición de la definición de grupo poli-libre. Consideremos la fibración $M^{n-i-1}_{i+1}(S^0) \to M^{n-i-1}_1(S^0)$ con fibra $M^{n-i}_i(S^0)$. $G_{i+1}/G_i \cong \pi_1(M^{n-i-1}_1(S))$ es libre finitamente generado porque $M^{n-i-1}_1(S) = S - P_{n-i-1}$ tiene el tipo de homotopía de una gráfica. Y así verificamos la segunda condición y queda demostrado el teorema.

❏

Recordemos que los grupos de trenzas puras sobre $\mathbb{C}$ o sobre una superficie compacta diferente de $S^2$ o $\mathbb{R}P^2$ son libres de torsión.

TEOREMA 2.18. *Sea $S = \mathbb{C}$ o $S$ una superficie compacta con frontera distinta de $S^2$ o $\mathbb{R}P^2$. Entonces los grupos de Trenzas puras $B_n(S)$ satisfacen FIC para todo $n \geq 1$.*

DEMOSTRACIÓN. Si $S$ tiene frontera no vacía, la conclusión se sigue del Teorema 2.13 y del Teorema 2.17. Supongamos que $S$ tiene frontera vacía y consideremos el fibrado $M^0_n \to M^0_1 = S$ con fibra $M^1_{n-1}(S) = M^0_{n-1}(S - pt)$. Como $S$ es asférica, la fibración induce la sucesión exacta

$$1 \to \pi_1(M^0_{n-1}(S - pt)) \to B_n(S) \xrightarrow{p} \pi_1(S) \to 1.$$

Notemos que $\pi_1(S)$ es abeliano finitamente generado o hiperbólico, en cualquier caso satisface FIC, así que podemos aplicar el Teorema 2.7.

$p^{-1}(\{1\}) = \pi_1(M^1_{n-1}(S - pt))$ es poli-libre, así que cumple la conjetura de Farrell-Jones, mientras que $p^{-1}(C)$, con $C$ subgrupo cíclico infinito de $\pi_1(S)$, es isomorfo a $\pi_1(M^1_{n-1}) \rtimes C$ el cual es poli-libre, por lo tanto cumple la Conjetura de Farrell-Jones. Finalmente obtenemos que $B_n(S)$ cumple FIC. ❏

# Bibliografía

[1] Matthias Kreck; Wolfgang Lück *The Novikov Conjecture*. Birkhauserl, 2005.

[2] E.M. Friedlande; D.R. Grayson *Handbook of K-theory II*. Springer, 2005.

[3] J.F. Adams *Stable Homotopy and Generalized Homology*.The University of Chicago Press, 1974.

[4] Aravinda, C. S;Farrell, F. T. ; Roushon, S. K. *Algebraic $K$-theory of pure braid groups*. volume 4 of Asian J. Math.,337–343, 2000.

[5] Lück, Wolfgang *Survey on classifying spaces for families of subgroups*. volume 248 of Progr. Math.,269–322. Birkhäuser 2005.

[6] Bartels, Arthur; Lück, Wolfgang; Reich, Holger *On the Farrell-Jones conjecture and its applications*. Volume 1 of Journal of Topology, Editorial, 57–86, 1995.

[7] Farrell, F. T.; Jones, L. E. *Isomorphism conjectures in algebraic $K$-theory*. Volume 6 of Journal of the American Mathematical Society, 249–297. 1993.

[8] Bredon, Glen E. *Equivariant cohomology theories*. Lecture Notes in Mathematics, No. 34. Springer, 1967.

[9] Bartels, Arthur; Lück, Wolfgang *Induction theorems and isomorphism conjectures for K- and L-theory*. Volume 19 of Forum Mathematicum, 379–406. 2007.

[10] Gersten, S. M. *On the spectrum of algebraic $K$-theory*. Volume 78 of Bulletin of the American Mathematical Society, 216–219. 1972.

[11] Pedersen, Erik K.; Weibel, Charles A. *A nonconnective delooping of algebraic $K$-theory*. Volume 1126 of Lecture Notes in Math., 166–181. Springer, 1985.

[12] Juan-Pineda, Daniel; Leary, Ian J. *On classifying spaces for the family of virtually cyclic subgroups*. Volume 407 of Contemp. Math., 135–145. Amer. Math. Soc., 2006.

[13] Bridson, Martin R.; Haefliger, André *Metric spaces of non-positive curvature*. Springer-Verlag, 1999.

[14] Kassel, Christian; Turaev, Vladimir *Braid groups*. Graduate Texts in Mathematics volume 247. Springer, 2008.