



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Aproximantes de Padé en AdS/CFT

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Físico

PRESENTA:

Ricardo Espindola Romero

TUTOR

José Antonio Rafael García Zenteno



Ciudad Universitaria, D. F.



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



FACULTAD DE CIENCIAS
COMITÉ ACADÉMICO DE LA LICENCIATURA EN FÍSICA
Of. No. FCIE/CAL/315/15

ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ
Jefe de la División de Estudios Profesionales
Facultad de Ciencias
Presente

Por este medio, el Comité Académico de la Licenciatura en Física informa a usted que el día 13 de mayo de 2015, aprobó que el alumno

Espindola Romero Ricardo

con número de cuenta 30830467-9, presente el trabajo titulado

Aproximantes de Padé en AdS/CFT

como trabajo escrito correspondiente a la opción de titulación por "Tesis".

Asimismo, este Comité informa a usted que el tutor y los sinodales autorizados para la dirección y revisión del trabajo arriba señalado son:

Presidente Dr. José David Vergara Oliver
Vocal Dr. Genaro Toledo Sánchez
Secretario Dr. José Antonio Rafael García Zenteno
(Tutor)
Suplente Dr. Erick Leonardo Patiño Jaidar
Suplente Dr. Saúl Noé Ramos Sánchez

En consecuencia, este Comité solicita a usted se entregue al citado alumno la papelería que conforme a la normatividad aplicable debe llenar, se proceda a la elaboración de los votos aprobatorios y se dé inicio al proceso de revisión de estudios correspondiente.

Atentamente,
"POR MI RAZA HABLARÁ EL ESPÍRITU"
Ciudad Universitaria, D. F., a 13 de mayo de 2015.
EL COORDINADOR DEL COMITÉ ACADÉMICO DE LA LICENCIATURA EN FÍSICA
Mirna Villavicencio Torres
M. EN C. MIRNA VILLAVICENCIO TORRES

FACULTAD DE CIENCIAS
CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
FÍSICA

*„Die Stunde, wo ihr sagt: »Was liegt an meinem Glücke!
Es ist Armut und Schmutz und ein erbärmliches Behagen.
Aber mein Glück sollte das Dasein selber rechtfertigen!«.“*

– Friedrich Nietzsche: Also sprach Zarathustra

A mis padres y hermanas con cariño

Agradecimientos

A mis padres: Rosa Isela Romero Cerón y Ricardo Espindola Escobedo, por la confianza, el apoyo incondicional y las enormes enseñanzas de humildad, respeto y trabajo duro brindados. Gracias a ustedes mi carrera profesional y muchos de mis sueños se han vuelto realidad. A mis hermanas: Daniela L. y Alejandra L., por toda su paciencia y cariño.

A todos mis abuelitos: Guadalupe y Pedro, cuya tenacidad, responsabilidad y coraje me motivan todos los días a no rendirme, no conformarme ni mucho menos a asustarme frente a los nuevos retos que supone mi carrera. Ventura y Ofelia, personas valerosas y aunque hoy ausentes, de ellos aprendí valiosas lecciones de humildad a través de mi padre.

A mis tíos y primos por ser un gran ejemplo que me inspira a seguir adelante dando el máximo para llegar a ser tan grande como ellos.

A Toño, mi asesor de tesis. Mi más sincero agradecimiento por la infinita paciencia que me has tenido desde el bachillerato, la grandiosa franqueza con la que platicamos y las enseñanzas de orden, calma, claridad y respeto que me has inculcado. También quiero agradecer a Alberto Güijosa cuyos consejos y palabras francas me impulsan a no aletargarme a causa de la conformidad, y me motivan a aspirar al campo de investigación del extranjero. ¡Creo que formaremos un buen equipo en el futuro cercano!

A mis sinodales, José David Vergara, Genaro Toledo, Erick Leonardo Patiño y Saúl Noé Ramos, por sus valiosos consejos y comentarios. También agradezco profundamente a Darío Nuñez por haber aportado a mi formación académica en etapas muy tempranas de mi carrera.

Quiero agradecer a la Universidad Nacional Autónoma de México, y en particular a la Facultad de Ciencias cuyos distintos espacios me han permitido obtener una formación de calidad.

Investigación realizada gracias al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) de la UNAM PAPIIT IN107115, “Teoría de campos y la correspondencia Norma/Gravedad”. Agradezco a la DGAPA-UNAM la beca recibida.

Ricardo Espindola Romero

Índice general

Resumen	VII
1. Introducción	1
1.1. Elementos Básicos	4
1.2. Propiedades Generales	8
1.3. Aproximantes de Padé de N puntos	16
1.3.1. Ejemplos de Aproximantes de Padé en Mecánica Cuántica	20
1.4. Paisaje de Aproximantes	26
1.4.1. Criterio para obtener el “mejor” Aproximante de Padé	27
1.5. Modelo de Ising en $2D$	29
1.6. Método de suma <i>Borel-Padé</i>	33
2. Correspondencia AdS/CFT	41
2.1. Motivación	42
2.2. Teoría de Cuerdas	43
2.3. El argumento de Maldacena	45
2.3.1. Supergravedad	45
2.3.2. D-branas	46
2.4. Dualidad de acoplamientos: <i>fuerte/débil</i>	49
2.5. Diccionario AdS/CFT	51
2.6. $\mathcal{N} = 4$ SYM, una teoría <i>Integrable</i>	55
3. Aproximantes de Padé en AdS/CFT	59
3.1. Modelo de Migdal	59
3.2. Teorías de campo térmicas	65
3.3. Viscosidad de Corte	70
3.4. Función Bremsstrahlung	80
4. Conclusiones	87
A. Efecto Zeeman	89
B. Teoría φ^4 cero dimensional	91
C. Modelo de Ising en $2D$	93
D. Energía Libre en SYM	95

VI

ÍNDICE GENERAL

E. Viscosidad de Corte	97
F. Función Bremsstrahlung	99
G. Entropía de Enredamiento en ABJM	101
H. Energía libre en ABJM	105

Resumen

En el presente trabajo estudiamos el problema de interpolación de distintas cantidades físicas de interés (observables), entre los regímenes de acoplamiento, de 't Hooft $\lambda = g_{YM}^2 N_c$, débil y fuerte, asociados a una teoría de campo supersimétrica en el contexto de la correspondencia AdS/CFT. El cálculo de estas cantidades puede realizarse, en el acoplamiento débil, empleando la teoría de perturbaciones en la teoría de norma, mientras que cuando el acoplamiento es fuerte, es posible hallar su comportamiento a partir de soluciones de gravedad en un régimen de acoplamiento débil. Sin embargo, la expresión analítica correspondiente a la función de interpolación no es conocida. Para arrojar algo de luz acerca del comportamiento de esta función empleamos el método de aproximantes de Padé. Dichas funciones tienen propiedades de convergencia que superan a las de la bien conocida serie de Taylor al converger en un dominio mucho más amplio. El grado de complejidad también aumenta, sin embargo. A pesar ello, esta herramienta ha mostrado ser muy útil en una gran cantidad de aplicaciones que involucran distintas áreas de la física teórica. El hecho de que para su construcción no es necesario conocer la forma explícita de la función a aproximar, en contraste con lo que ocurre con la serie de Taylor, es responsable de numerosas aplicaciones. Además, es posible dotarla de más información asintótica a partir de series perturbativas alrededor de distintos puntos. Esto la convierte en una herramienta adecuada para que de las 2 expansiones perturbativas, a digamos $\mathcal{O}(\lambda^a)$ y $\mathcal{O}(\lambda^{-a})$, sea posible construir funciones de interpolación. Antes de abordar los problemas centrales de interés en el presente trabajo, repasaremos algunas de las principales propiedades y aplicaciones de los aproximantes de Padé a distintos sistemas mecánico-cuánticos: sistema de dos niveles, efecto Stark y efecto Zeeman. Así como el modelo de Ising en 2 dimensiones, para comprender qué ocurre cuando la función a aproximar tiene regiones de no analiticidad, como es el caso del punto crítico en el cual ocurre una transición de fase. Además, proponemos una prescripción para obtener el mejor aproximante de entre todos los posibles, *i.e.* de entre el paisaje de aproximantes. Exponemos, también, las ideas introductorias a la correspondencia AdS/CFT, así como el cálculo de la entropía y viscosidad de corte, a primer orden, en la región de acoplamiento fuerte de la teoría Super Yang Mills $\mathcal{N} = 4$ con cierto detalle. Finalmente se aplicará el método de aproximantes de Padé a estos casos y a la función $B(\lambda)$ de Maldacena, no sin antes repasar el modelo de Migdal, en el cual, empleando la técnica de aproximantes se obtienen los mismos resultados que los que se obtendrían empleando la correspondencia *AdS/CFT*. Se incluyen, además, en un apéndice el cálculo de aproximantes de la entropía de enredamiento y energía libre en la teoría ABJM, que por su complejidad escapa al análisis de la presente tesis, pero forman parte de un posible trabajo futuro en el cual se apliquen los aproximantes de Padé a la correspondencia Norma/Gravedad.

Capítulo 1

Introducción

Las simetrías y los principios variacionales han sido siempre herramientas de gran ayuda para analizar y comprender diversas teorías de la física. Este paradigma básico ha sido trastocado profundamente con el surgimiento de las simetrías de dualidad. Muchas de estas simetrías tienen propiedades muy distintas a las simetrías ordinarias de los modelos con interacciones fundamentales. Algunas son redefiniciones de campos, otras funcionan solamente en las ecuaciones de movimiento pero no a nivel del principio variacional correspondiente. Tal vez el ejemplo más sobresaliente e importante de esta clase de simetrías entre dos teorías de la física cualitativamente distintas, pero que comparten simetrías globales, es la dualidad de Maldacena o correspondencia *AdS/CFT*. Esta dualidad plantea que una teoría de gravedad en 5 dimensiones en un espacio asintóticamente AdS (anti-de Sitter) es dual a una teoría de norma en un espacio de Minkowski en 4 dimensiones que coincide con la frontera del espacio AdS. Es posible describir todas las fuerzas fundamentales, excepto la de gravedad, en el marco de las teorías de norma *i.e.* la fuerza electromagnética, fuerza nuclear débil y fuerte. Por ejemplo, la teoría electromagnética está descrita por una teoría de norma con grupo de norma $U(1)$, y la fuerza fuerte se describe por la teoría de norma $SU(3)$, conocida como Cromodinámica Cuántica, o QCD por sus siglas en inglés.

Una propiedad que hace a esta dualidad particularmente útil desde un punto de vista práctico es que en un límite específico, la teoría de gravedad se vuelve clásica y la correspondiente teoría de norma dual, fuertemente acoplada. Por otros métodos los procesos dinámicos de la teoría de norma son inaccesibles en el régimen de acoplamiento fuerte: normalmente, los cálculos en la teoría de campo se realizan a través de teoría de perturbaciones, sin embargo, esto solo funciona cuando el acoplamiento es débil. QCD en la red es una poderosa herramienta para lidiar con este dilema en algunos casos, pero es difícil de utilizar para capturar la dinámica asociada a la teoría de campo en cuestión, en particular a temperatura y densidad finitas. Así que la correspondencia *AdS/CFT* nos ofrece la oportunidad única de acceder a regiones del acoplamiento de teorías de norma que antes estaban fuera de todo análisis teórico, y estudiar propiedades importantes de teorías de norma fuertemente acopladas usando soluciones de gravedad en un régimen de acoplamiento débil. Sin embargo, es importante tener claro que QCD y las teorías de norma estudiadas en *AdS/CFT* tienen diferencias importantes. Primero, la correspondencia *AdS/CFT* considera típicamente una teoría con grupo de norma $SU(N_c)$. En tal teoría, N_c juega el rol de un parámetro, y el “acoplamiento fuerte” es el llamado *límite a N_c grande*¹.

¹En realidad la teoría tiene dos parámetros, la constante acoplamiento de la teoría de norma g_{YM} y el número de colores N_c , o la combinación expresada por el acoplamiento de 't Hooft $\lambda := g_{YM}^2 N_c$. Con esto el límite a N_c

Segundo, *AdS/CFT* considera típicamente una teoría de norma supersimétrica. En particular, la teoría Super Yang Mills $\mathcal{N} = 4$ (SYM) provee el ejemplo más sencillo de la correspondencia. Aquí, $\mathcal{N} = 4$ denota el número de supersimetrías que tiene la teoría. La teoría tiene también invariancia de escala debido a que no tiene ningún parámetro dimensional. Más aún, tiene una simetría aún más larga conocida como *invariancia conforme*, la cual contiene invariancia de Poincaré e invariancia de escala. Este tipo de teorías son generalmente conocidas como *teorías de campo conformes*, o CFT. Razón por la cual la dualidad tiene el nombre de *AdS/CFT*.

El uso de la correspondencia no se limita a teorías conformes, es posible discutir a la dualidad en el contexto de teorías con parámetros dimensionales, así que pierden la invariancia de escala. Cuando uno elige una teoría de norma particular, uno tiene que elegir un espacio-tiempo apropiado, típicamente un espacio-tiempo que sea asintóticamente AdS en el infinito.

Las teorías de norma analizadas por la correspondencia *AdS/CFT* no son muy realistas. Sin embargo, esto es típico de cualquier modelo analítico. Uno usualmente encuentra problemas fuertemente acoplados en teoría de campo, pero solo unos pocos métodos analíticos y exactamente solubles existen. Pero aquellos ejemplos jugaron un rol vital en desarrollar nuestra intuición sobre la teoría de campos. Dichas técnicas son valiosas y trajeron un progreso importante al desarrollo de la teoría de campo, incluso si sólo se aplican a una clase restringida de teorías. Se podría considerar a la correspondencia *AdS/CFT* como otro ejemplo de este tipo de técnicas.

El ejemplo más famoso del estudio de la interacción fuerte a través de la correspondencia *AdS/CFT* es el que involucra al plasma de quarks y gluones (QGP). En años recientes se han construido aceleradores de iones pesados, por ejemplo RHIC en Brookhaven desde el 2000 o el experimento de iones pesados construido en CERN utilizando al LHC desde el 2010, estos colisionan núcleos pesados, de oro por ejemplo. Estos núcleos son eléctricamente neutros así que para acelerarlos se tienen que quitar electrones para ionizarlos. El plasma que se forma después de la colisión, si la temperatura es suficientemente alta, existe solo transitoriamente. Al final, la temperatura está por debajo de la temperatura de transición, por lo que los quarks están confinados en hadrones. Lo que se observa en los detectores son estas partículas secundarias. Esto muestra parte de las dificultades a la se enfrentan los experimentalistas al hablar de la formación de un plasma de quarks y gluones. A pesar de todas estas dificultades en 2005 RHIC anunció que “*el plasma de quarks y gluones no se comporta como un gas libre sino que tiene un comportamiento más parecido al de un fluido perfecto*”. La diferencia entre estos sistemas subyace en el hecho de que el último no tiene viscosidad. Usando análisis dimensional es posible deducir que la viscosidad de corte tiene la forma

$$\eta \simeq \rho \bar{v} l_{mfp} \simeq \varepsilon \tau_{mfp} \quad (1.1)$$

donde ρ es la densidad de masa, \bar{v} es la velocidad media de las partículas, l_{mfp} el camino libre medio, ε la densidad de energía y τ_{mfp} es el tiempo libre medio. Ahora modifiquemos la constante de acoplamiento. Cuando el acoplamiento es fuerte, el camino libre medio se vuelve más corto. La viscosidad surge debido a la transferencia de momento entre las partículas del plasma, y la transferencia es menos efectiva cuando el acoplamiento es fuerte. Por tanto, la viscosidad se vuelve más pequeña cuando el acoplamiento es fuerte. En particular, un fluido perfecto no tiene viscosidad, así que un fluido perfecto es un límite de acoplamiento fuerte, mientras que el gas ideal es el límite libre. Una viscosidad pequeña implica, por tanto, que la interacción es fuerte y de acuerdo con RHIC, el QGP tiene una viscosidad pequeña así que no es posible confiar en QCD perturbativa para su análisis. Es aquí donde la correspondencia *AdS/CFT* hace su aparición, resulta que la

grande se traduce en $N_c \rightarrow \infty$ mientras $\lambda = \text{constante y grande}$.

predicción de la viscosidad de corte que hace la correspondencia se encuentra cerca al resultado de RHIC, según anunciaron [1, 2].

En algunas ocasiones es posible calcular cuál es comportamiento de algún observable supersimétrico en el acoplamiento fuerte, gracias a la conjetura de Maldacena, y también el comportamiento general de dicho observable en el acoplamiento débil usando teoría de perturbaciones en una teoría de norma. Sin embargo, no existe técnica conocida para realizar cálculos cuando la constante de acoplamiento tiene un valor finito, y por tanto *no* se conoce la solución completa que interpola entre estos dos regímenes opuestos. Los problemas de mayor interés para la realización de esta tesis son justamente de este tipo, además, nuestro trabajo sigue la línea de investigación de 3 autores. Primero Ashoke Sen, quien en [3] explora la posibilidad de construir funciones de interpolación suaves que coincidan con las expansiones perturbativas en ambos extremos, y que conduzcan a la determinación precisa de la cantidad en consideración sobre todo el rango de la constante de acoplamiento. Para ello estudia 3 tipos de funciones de interpolación, entre ellas los aproximantes de Padé. Sus resultados sugieren que la función de interpolación empleada, proveniente de cualquiera de los tres métodos, aproxima a la función exacta con un 10% de precisión. Como las expansiones perturbativas son asintóticas, en este caso, es de esperarse que uno no pueda aproximarse de manera arbitraria al resultado exacto. Llega a esta conclusión después de, primero, comparar las funciones de interpolación con las expansiones perturbativas a partir del punto λ_c en el cual ambas expansiones se intersectan, y segundo, de comparar a las funciones de interpolación entre ellas mismas a distintos ordenes (la mayoría de sus razones rondan el 10% de la unidad). Todo este análisis es realizado en el contexto del estudio de la masa de un estado estable no-BPS en la teoría de cuerdas $SO(32)$ heterótica/tipo I, tomando en cuenta 1 bucle en el cálculo. Y después, Tom Banks y T.J. Torres quienes en [4] proponen el uso de aproximantes de Padé para hallar expresiones válidas uniformemente en la constante de acoplamiento. Se centran en particular en modelos con dualidad fuerte/débil, cuando las simetrías no determinan expresiones exactas para algún observable. Los resultados obtenidos son prometedores en el sentido de que los aproximantes interpolan de manera suave entre ambos regímenes, y el error entre las expansiones y las funciones racionales es pequeño. Nuevamente, este error es calculado respecto al punto más cercano entre las expresiones perturbativas, o en el caso ideal, al punto de intersección. En el caso en que existe solución exacta, los resultados entre la función de interpolación y dicha solución, concuerdan asombrosamente. Además, sustentan la convergencia de los aproximantes a ambas expansiones en “un teorema bastante general”, posiblemente la conjetura de Padé que revisaremos en la primer parte de este trabajo.

Los aproximantes de Padé son funciones de interpolación con propiedades de convergencia mucho más complejas que las pertenecientes a las usuales series de Taylor, de hecho, como revisaremos en la primer parte de este trabajo, el si convergen o no es hoy día un problema de matemáticas puras abierto. No es problema empero para que el método de los aproximantes de Padé haya probado ser muy útil al proveer información cuantitativa sobre la solución de muchos problemas interesantes de la física y la química. Obtiene esta información a partir de expansiones perturbativas (usualmente más fáciles de obtener que la soluciones exactas) y sus excepcionales propiedades de convergencia le permiten ser una herramienta confiable para acceder a regiones donde el análisis perturbativo, basado en las bien conocidas y ampliamente utilizadas, series de Maclaurin, no puede llegar. A pesar del avance que se ha logrado en los trabajos antes citados, aún no queda claro porqué los aproximantes de Padé funcionan tan bien en problemas que involucran un dual gravitacional. Para ir un paso más allá en la exploración de estas cuestiones analizamos con mayor profundidad el gran

conjunto de aproximantes de Padé que se pueden formar con la información perturbativa a mano, lo que constituye el *paisaje de aproximantes* (ver sec. 1.4). Para hallar el mejor aproximante de entre todo este paisaje proponemos un criterio para su elección inspirado en otra cuestión: ¿hasta dónde son confiables las expansiones perturbativas? Como hemos visto es usual comparar a Padé con las expansiones perturbativas a partir de un punto en común, sin embargo, esto no es necesariamente correcto pues es de esperar que ambas expansiones se alejen de la solución exacta mucho antes de dicho punto. Proponemos, entonces, una manera para lidiar con esta información espuria y hallar la mejor aproximación posible que resulta del método de aproximantes. Estudiamos, además, la habilidad de los aproximantes para hallar puntos críticos en los cuales ocurren transiciones de fase. No podemos dejar de mencionar que el trabajo tiene, también, una motivación académica, pues desde un punto de vista nos parece una manera pedagógica de estudiar los elementos básicos asociados al amplio campo de investigación conocido como correspondencia *AdS/CFT*.

1.1. Elementos Básicos

Las aplicaciones del método de aproximantes de Padé cubren varios campos de la física teórica [5], van desde modelos cosmológicos [6, 7, 8, 9], modelos moleculares [10], teoría cuántica de campos [11, 12, 13], entre otras [14]. En esta primer parte repasaremos los elementos básicos suficientes de la teoría de aproximantes de Padé [15], para el presente trabajo, y en secciones subsecuentes, aplicaremos el método de aproximantes de dos puntos a casos en los cuales las expansiones perturbativas, en la región de acoplamiento fuerte, fueron calculadas empleando la correspondencia *AdS/CFT*.

Un aproximantes de Padé es un polinomio racional de la forma

$$[N|M] = \frac{a_0 + a_1z + \cdots + a_Nz^N}{b_0 + b_1z + \cdots + b_Mz^M}, \quad (1.2)$$

el cual tiene una expansión en serie que coincide con la serie de Maclaurin de una función $f(z)$, tanto como sea posible,

$$f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i, \quad c_i = 0, 1, 2, \dots \quad (1.3)$$

En la expresión (1.2) hay $N + 1$ coeficientes en el numerador y $M + 1$ en el denominador. Existe también un factor común irrelevante entre ambos. Si adoptamos la definición $b_0 = 1$, entonces habrá $N + 1$ coeficientes independientes en el numerador y M independientes en el denominador, haciendo en total $N + M + 1$ coeficientes por determinar en la expresión completa. Esto sugiere que el aproximante debe coincidir con la expansión (1.3) en las potencias: $1, z, z^2, \dots, z^{N+M}$. En términos de la serie formal de potencias esto e

$$\sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i - \frac{a_0 + a_1z + \cdots + a_Nz^N}{b_0 + b_1z + \cdots + b_Mz^M} = \mathcal{O}(z^{N+M+1}), \quad (1.4)$$

i.e. el comportamiento del aproximante de Padé reproduce el de la función $f(z)$ hasta orden $N + M + 1$. Por ejemplo, si consideramos la función $f(z) = 1 - \frac{1}{2}z + \frac{1}{3}z^2 + \cdots$, tendrá como aproximantes,

$$[1|0] = 1 - \frac{1}{2}z = f(z) + \mathcal{O}(z^2), \quad (1.5)$$

$$[0|1] = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}z} = f(z) + \mathcal{O}(z^2), \quad (1.6)$$

$$[1|1] = \frac{1 + \frac{1}{2}z}{1 + \frac{2}{3}z} = f(z) + \mathcal{O}(z^3). \quad (1.7)$$

De la ecuación (1.4) obtenemos

$$(b_0 + b_1z + \cdots + b_Mz^M)(c_0 + c_1z + \cdots) = a_0 + \cdots + a_Nz^N + \mathcal{O}(z^{N+M+1}), \quad (1.8)$$

e igualando las potencias en ambos lados,

$$\begin{aligned} b_Mc_{N-M+1} + b_{M-1}c_{N-M+2} + \cdots + b_0c_{N+1} &= 0 \\ b_Mc_{N-M+2} + b_{M-1}c_{N-M+3} + \cdots + b_0c_{N+2} &= 0 \\ &\vdots \\ b_Mc_N + b_{M-1}c_{N-1} + \cdots + b_0c_{N+M} &= 0. \end{aligned}$$

Como $b_0 = 1$, estas ecuaciones se convierten en un conjunto de M ecuaciones lineales para M coeficientes del denominador,

$$\begin{pmatrix} c_{N-M+1} & c_{N-M+2} & c_{N-M+3} & \cdots & c_N \\ c_{N-M+2} & c_{N-M+3} & c_{N-M+4} & \cdots & c_{N+1} \\ c_{N-M+3} & c_{N-M+4} & c_{N-M+5} & \cdots & c_{N+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_N & c_{N+1} & c_{N+2} & \cdots & c_{N+M-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_M \\ b_{M-1} \\ b_{M-2} \\ \vdots \\ b_1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} c_{N+1} \\ c_{N+2} \\ c_{N+3} \\ \vdots \\ c_{N+M} \end{pmatrix}, \quad (1.9)$$

a partir de las cuales se puede obtener el valor de b_i . Los coeficientes del numerador $\{a_i\}$ se obtienen de (1.8), al igualar los coeficientes de $1, z, z^2, \dots, z^N$,

$$\begin{aligned} a &= c_0 \\ a_1 &= c_1 + b_1c_0 \\ a_2 &= c_2 + b_1c_1 + b_2c_0 \\ &\vdots \\ a_N &= c_N + \sum_{i=1}^{\min(N,M)} b_i c_{N-i}. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Las ecuaciones (1.9) y (1.10) determinan el numerador y denominador del aproximante de Padé y son denominadas *ecuaciones de Padé*; con esto hemos logrado la construcción de aproximantes de Padé a partir de información perturbativa. Vale la pena remarcar que el punto de partida en esta construcción fue la serie de potencias, por tanto nunca necesitamos saber la forma exacta de la función $f(z)$, con $\sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i$ como su serie de Maclaurin. Es de esperar que una serie de aproximantes

“bien” elegidos, se acercarán a la función $f(z)$. Sin embargo, los problemas de convergencia y de construcción, son problemas distintos, de hecho, mostrar la convergencia del aproximante (1.2) resulta una tarea formidable como se verá en la siguiente sección, y en la mayoría de los casos prácticos, la convergencia empírica es considerada satisfactoria dentro de sus propias limitaciones. El siguiente ejemplo muestra cómo los aproximantes de Padé convergen en regiones más amplias del dominio. Este es un comportamiento genérico de dichas funciones y vale la pena ser apreciado. Consideremos $f(z) = ((1 + 1/2 z) / (1 + 2z))^{1/2} = 1 - 3/4 z + 39/32 z^2 - \dots$. Para calcular el aproximante $[1|1]$, de la ecuación (1.9) se tiene $(-3/4)b_1 = -39/32$, y por tanto $b_1 = 13/8$. De la ecuación (1.10) se obtiene, análogamente, $a_0 = 1$ y $a_1 = 7/8$. Con lo anterior obtenemos el aproximante de orden $[1|1]$,

$$[1|1] = \frac{1 + \frac{7}{8}z}{1 + \frac{13}{8}z}. \quad (1.11)$$

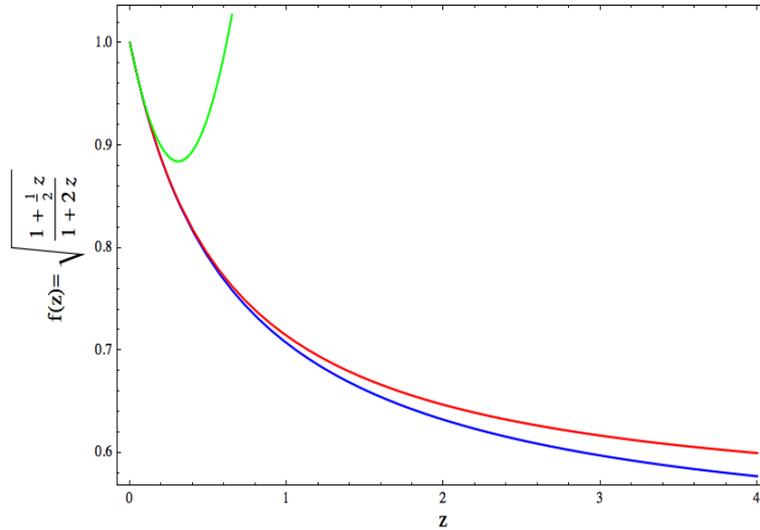


Figura 1.1: La solución exacta $f(z)$, se muestra con color azul. El aproximante de Padé $[1|1]$ de color rojo y la serie de Maclaurin hasta $\mathcal{O}(z^2)$ con color verde.

En la figura 1.1 podemos observar como la serie de Maclaurin diverge rápidamente, mientras que en contraste, el aproximante de Padé se mantiene estable para un mayor rango de valores de z . De hecho, sorpresivamente los valores para $z \gg 1$ son

$$f(\infty) = 0,5,$$

$$[1|1](\infty) = \frac{7}{13} \approx 0,54.$$

Hemos logrado esta precisión con el aproximante de Padé de menor orden que puede ser construido. Más aún, la capacidad de computo para calcular estos aproximantes es muy poca. Esto convierte

a los aproximantes de Padé en herramientas muy útiles para explorar el comportamiento cualitativo de cada problema tratado. Sin embargo, la convergencia de estos aproximantes no ha sido comprendida del todo y es usual que aparezcan polos que hacen que el aproximante en cuestión, no exista.

La construcción de los aproximantes de Padé que hemos hecho a partir de las ecuaciones de Padé, puede formalizarse. Si empleamos la regla de Cramer, podemos calcular los coeficientes $\{b_i\}$ directamente de la ecuación (1.9) y por tanto el denominador de la ecuación (1.2) tiene la forma

$$Q^{[N|M]}(z) = \det \begin{pmatrix} c_{N-M+1} & c_{N-M+2} & \cdots & c_N & c_{N+1} \\ c_{N-M+2} & c_{N-M+3} & \cdots & c_{N+1} & c_{N+2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ c_{N-1} & c_N & \cdots & c_{N+M-2} & c_{N+M-1} \\ c_N & c_{N+1} & \cdots & c_{N+M-1} & c_{N+M} \\ z^M & z^{M-1} & \cdots & z & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.12)$$

hasta un factor numérico. Ahora, si consideramos

$$Q^{[N|M]}(z) \sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i = \det \begin{pmatrix} c_{N-M+1} & c_{N-M+2} & \cdots & c_{N+1} \\ c_{N-M+2} & c_{N-M+3} & \cdots & c_{N+2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{N-1} & c_N & \cdots & c_{N+M-1} \\ c_N & c_{N+1} & \cdots & c_{N+M} \\ \sum_{i=0}^{\infty} c_i z^{M+i} & \sum_{i=0}^{\infty} c_i z^{M+i-1} & \cdots & \sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i \end{pmatrix}, \quad (1.13)$$

y restamos z^{N+1} veces el primer renglón del último, z^{N+2} veces el segundo renglón del último, etc., hasta z^{N+M} veces el penúltimo renglón del último, reducimos las series correspondientes al último renglón. Las series se convierten en series *lacunares*, con una brecha de M términos entre coeficientes. Usando los términos iniciales de estas series, definimos para el numerador en (1.2) como

$$P^{[N|M]}(z) = \det \begin{pmatrix} c_{N-M+1} & c_{N-M+2} & \cdots & c_{N+1} \\ c_{N-M+2} & c_{N-M+3} & \cdots & c_{N+2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{N-1} & c_N & \cdots & c_{N+M-1} \\ c_N & c_{N+1} & \cdots & c_{N+M} \\ \sum_{i=0}^{N-M} c_i z^{M+i} & \sum_{i=0}^{N-M+1} c_i z^{M+i-1} & \cdots & \sum_{i=0}^N c_i z^i \end{pmatrix}. \quad (1.14)$$

Con lo anterior, se pueden formalizar los aproximantes de Padé con los siguientes teoremas [15]:

Teorema 1 Con las definiciones (1.12) y (1.14),

$$Q^{[N|M]}(z) \sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i - P^{[N|M]}(z) = \mathcal{O}(z^{N+M+1}). \quad (1.15)$$

Teorema 2 (Jacobi) Con las definiciones (1.12) y (1.14), el aproximante de Padé $[N|M]$ de $\sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i$ está dado por

$$[N|M] = \frac{P^{[N|M]}(z)}{Q^{[N|M]}(z)}, \quad (1.16)$$

siempre que $Q^{[N|M]}(0) \neq 0$.

Por último, introducimos un arreglo útil para organizar los aproximantes de Padé, la *tabla de Padé*:

N	0	1	2	...
M				
0	[0 0]	[1 0]	[2 0]	...
1	[0 1]	[1 1]	[2 1]	...
2	[0 2]	[1 2]	[2 2]	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Tabla 1.1 *Tabla de Aproximantes de Padé.*

1.2. Propiedades Generales

Las propiedades generales de convergencia de los aproximantes de Padé son más complejas que aquellas de la serie de Taylor, de ahí que exista una gran discusión sobre la convergencia de distintas series de aproximantes, para diferentes tipos de funciones. A pesar de ello, estos aproximantes tienen la sobresaliente capacidad de converger para un amplio conjunto de funciones, incluso en el caso de series de potencias asintóticas o cuya convergencia es muy lenta. Además, es usual que el error sea más pequeño con respecto del que se obtiene con las expansiones de Taylor y más aún, en muchos casos se ha encontrado que los aproximantes proveen de una buena aproximación incluso más allá de su rango esperado de aplicabilidad. Vale la pena enfatizar que a pesar de estas cualidades, demostrar la convergencia de los aproximantes sigue siendo un tema abierto de investigación. Incluso dentro del círculo de convergencia de la serie de Taylor, no hay una prueba general de que tales series de aproximantes convergan. Intuitivamente, en este caso particular, esto se debe a que para probar la convergencia de la serie de Taylor uno solo necesita constricciones absolutas sobre los coeficientes conforme $N \rightarrow \infty$, mientras que, presumiblemente, la convergencia de los aproximantes de Padé implica que la serie puede ser continuada analíticamente fuera de dicho círculo, y por tanto se requiere de propiedades relativas entre los coeficientes.

Con respecto al problema genérico de mostrar la convergencia de Padé para cualquier tipo de función, la dificultad básica radica en la localización de los polos de los aproximantes, *i.e.*, los ceros de los denominadores, o más en general, a los *defectos* debidos a la estructura de los aproximantes, *i.e.*, polos espurios (que no corresponden a los de la función aproximada) y ceros del numerador muy cercanos; la convergencia uniforme de la serie solo se puede obtener afuera de pequeños círculos que rodean estos polos. Un ejemplo de una función en la que se presenta dicho problema es la siguiente [17]:

$$f(z) = \left[\int_0^z \left(\frac{\sin y}{y^3} - \frac{\cos y}{y^2} \right)^2 dy \right]^2, \quad (1.17)$$

donde el aproximante [5|5] tiene los polos y ceros

$$\begin{aligned} \text{Raíz del numerador} &= 2,8852000 \\ \text{Raíz del denominador} &= 2,8851989. \end{aligned}$$

Lo primero que viene a la mente es pensar que estas raíces son las mismas, excepto por un error numérico, sin embargo esto no resulta así y el problema se debe tratar con mucho más cuidado. Nótese que en general, la convergencia puede ser cierta solo para una subsecuencia de la serie de aproximantes (como se expondrá más adelante), algunos podrían no existir, ya que sus polos pueden aparecer en la región de convergencia del resto de la serie.

Otras propiedades cualitativas que se han encontrado en las series de aproximantes a través de análisis numérico son, por ejemplo, cuando las funciones a aproximar tienen polos dobles, los aproximantes los simulan con dos polos simples muy cercanos. En el caso de singularidades esenciales, el comportamiento genérico de los aproximantes es acumular sus polos cerca del punto donde se encuentra la singularidad. Si la función tiene cortes en el plano complejo, debido a que los aproximantes son funciones meromorfas, mimetizan dicho comportamiento acumulando sus polos a lo largo de dichos cortes. Más aún, cuando solo hay un punto ramal en el plano complejo, los aproximantes, $[N|N]$, “convergen” a la función formando un corte a lo largo de un rayo. Por último, en el caso de series asintóticas, si la serie diverge suficientemente rápido entonces el valor del aproximante, $[N|N]$, en el infinito, converge a algún límite. Para más detalles sobre estas propiedades véase [16].

Hay 3 maneras principales de tratar el problema de convergencia debido a los defectos. La primera es probar analíticamente la convergencia de clases especiales de funciones. Por ejemplo, series de Stieltjes y series de frecuencia de Polya. Los teoremas más precisos sobre convergencia se obtienen para este tipo de series porque la localización de los polos puede ser determinada [18]. Por serie de Stieltjes nos referimos a que

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} f_j (-z)^j, \quad (1.18)$$

es una serie de Stieltjes si y solo si, existe una función $\varphi(u)$, acotada y no decreciente, la cual toma un número infinito de valores en el intervalo $0 \leq u \leq +\infty$, tal que

$$f_j = \int_0^{\infty} u^j d\varphi(u), \quad (1.19)$$

(nótese que no se asume, necesariamente, que la serie sea convergente). La serie (1.18) es *formal*, debido a que podría no converger para toda z ; sin embargo, es una representación útil de la función $f(z)$. Las funciones de Stieltjes son funciones simétricas reales definidas en el plano, excluyendo al eje negativo como un corte ramal. La convergencia de los aproximantes de Padé ocurre, en gran parte, debido a que es posible mostrar que los polos de los aproximantes de Padé se encuentran en los cortes de la función de Stieltjes, como lo expresa el siguiente resultado:

Teorema 3 Si $\sum_{j=0}^{\infty} f_j (-z)^j$ es una serie de Stieltjes, entonces los polos del aproximante de Padé $[N|N+j]$, $j \geq -1$, se encuentran sobre el eje real negativo. Más aún, los polos de aproximantes sucesivos se entrelazan y todos sus residuos son positivos. Las raíces del numerador también entrelazan a aquellos del denominador.

Y con respecto a la convergencia tenemos que:

Teorema 4 *Cualquier secuencia de aproximantes de Padé $[N|N+j]$ para una serie de Stieltjes converge a una función analítica en el plano complejo sin el corte $(-\infty \leq z \leq 0)$. Si además, $\sum_{p=0}^{\infty} (f_p)^{-1/(2p+1)}$ diverge, entonces todas las secuencias tienden a un límite común (esta condición es aproximadamente equivalente a $|f_p| \leq (2p)!$). Si las f_p son una serie convergente con radio de convergencia R , entonces cualquier secuencia $[N|N+j]$ converge en el plano complejo cortado $(-\infty \leq z \leq -R)$ a la función analítica definida por la serie de potencias.*

Para una serie de Stieltjes, los coeficientes de la serie de potencias del aproximante de Padé satisfacen la desigualdad

$$|[N|N+j]^{(p)}(z)/(p!)| \leq f_p. \quad (1.20)$$

Las series de Pólya se caracterizan por alternar sus signos de acuerdo a cierta regla, por ejemplo, es bien conocido que el aproximante de Padé de la función $\exp(z)$ tiene una forma explícita para su numerador y denominador [19], en particular,

$$Q^{[M|N]}(0) = (-1)^{M(M-1)/2} \prod_{k=1}^M \frac{1}{k(k+1)\cdots(k+N-1)}, \quad N, M \leq 1, \quad (1.21)$$

el signo no depende de N ; para $M = 1, 2, 3, \dots$ los signos son $+, -, -, +, +, -, -, \dots$. Este patrón de signos caracterizan la clase de funciones conocidas como series de frecuencia de Pólya. Todas las funciones de esta clase tienen la representación

$$f(z) = a_0 e^{\gamma z} \frac{\prod_{j=1}^{\infty} (1 + \alpha_j z)}{\prod_{j=1}^{\infty} (1 + \beta_j z)}, \quad a_0 > 0 \quad (1.22)$$

y los coeficientes satisfacen [17]

$$\gamma, \alpha_j, \beta_j \geq 0, \sum_j (\alpha_j + \beta_j) < \infty. \quad (1.23)$$

Este tipo de funciones no tienen solo aproximantes convergentes, sino que también los numeradores y denominadores convergen a lo largo de cualquier rayo en la tabla de aproximantes de Padé.

Teorema 5 *Si $f(z)$ es una serie de frecuencia de Pólya definida por (1.22), y $N_k \rightarrow \infty$, $M_k \rightarrow \infty$ con $(M_k/N_k) \rightarrow \omega$ conforme $k \rightarrow \infty$, entonces*

$$A^{[N_k|M_k]}(z) \rightarrow a_0 \exp\left(\frac{\gamma}{1+\omega}z\right) \prod_{j=1}^{\infty} (1 + \alpha_j z), \quad (1.24)$$

$$B^{[N_k|M_k]}(z) \rightarrow \exp\left(\frac{-\gamma\omega}{1+\omega}z\right) \prod_{j=1}^{\infty} (1 - \beta_j z) \quad (1.25)$$

uniformemente sobre cualquier región compacta del plano complejo.

En particular si $f(z) = e^{\gamma z}$,

$$A^{[N_k|M_k]}(z) \rightarrow \exp\left(\frac{\gamma z}{1+\omega}\right) \quad y \quad B^{[N_k|M_k]}(z) \rightarrow \exp\left(\frac{-\gamma\omega z}{1+\omega}\right). \quad (1.26)$$

Como $\exp(z) = [\exp(-z)]^{-1}$, el *teorema dual*² muestra que el cero del aproximante $[N|M]$ de $\exp(z)$ es un polo del aproximante $[M|N]$ de $\exp(-z)$. Debido a que $\exp(+\infty) = +\infty$ y $\exp(-\infty) = 0$, es de esperar que los polos del aproximante de $\exp(x)$ se acumulen en $x = +\infty$ y los ceros en $x = -\infty$, al incrementar el orden de los aproximantes. Si $N_1 > N_2$, hay más ceros en $[N_1|M]$ que en $[N_2|M]$, y por tanto $[N_1|M]$ tiene una región más pequeña libre de ceros. Esta estructura se hace explícita en el siguiente teorema,

Teorema 6 *Sea $z = x + iy$ un punto genérico en el plano complejo. El aproximante de Padé $[N|M]$ de $\exp(z)$ está libre de ceros en la región parabólica*

$$y^2 \leq 4(M+1)(x+M+1), \quad (1.27)$$

o rescalando los ejes por un factor de $M+1$, el aproximante $\exp(M+1)z$ está libre de ceros en la región,

$$\left(\frac{y}{2}\right)^2 \leq x+1 \quad (1.28)$$

La localización de los ceros del aproximante $[N|M]$ con $N \leq 25$, $M \leq 25$ se muestran en la figura 1.2. Las notables trayectorias que muestran los ceros no se comprenden, aún, por completo. Esta imagen deja claro que la información contenida e los aproximantes de Padé es realmente compleja y tener control sobre ella resulta, por tanto, en una tarea complicada.

El segundo acercamiento al problema, es tratar la convergencia de una subsecuencia de aproximantes punto a punto. Existen básicamente dos tipos de secuencias de aproximantes de Padé que pueden ser consideradas. El primer tipo corresponde a aquellos aproximantes cuyo grado del numerador o del denominador, permanece finito mientras que el grado del otro, tiende al infinito. En el segundo tipo, ambos grados del numerador y denominador tienden al infinito. Este segundo tipo parece ser más poderoso en términos prácticos, mientras que el primero es el caso más sencillo para obtener resultados rigurosos.

Se discutirán primero secuencias verticales u horizontales de aproximantes $[N|M]$, en donde uno de los grados se mantiene finito. Basta considerar solamente las últimas porque debido al teorema dual, el análisis de las secuencias verticales de los aproximantes de Padé es prácticamente el mismo que el de las secuencias horizontales.

Un resultado inmediato es que por el teorema de Taylor la secuencia $[N|0]$ converge a $f(z)$ cuando $N \rightarrow \infty$. El teorema para la secuencia $[N|1]$ fue obtenido por Beardon:

Teorema 7 *Sea $f(z)$ analítica en $|z| \leq R$. Entonces una subsecuencia infinita de $[N|1]$ aproximantes de Padé converge a $f(z)$ uniformemente en $|z| \leq R$.*

La generalización de este teorema para secuencias del tipo $[N|2]$ fue mostrada por Baker y Graves-Morris, ellos probaron que una subsecuencia horizontal $[N|2]$ converge, siempre que $f(z)$ sea analítica en todo el plano complejo debido a que la analiticidad en $|z| \leq R$ es insuficiente como mostraron Buslaev, Gončar y Suetin, empleando el siguiente contra ejemplo:

²Si P_N/Q_M es el aproximante $[N|M]$ de la función $f(z)$, entonces Q_M/P_N es el aproximante $[M|N]$ de $1/f(z)$ (con la sutileza de que la serie para $1/f(z)$ existe solo si $f(0) \neq 0$).

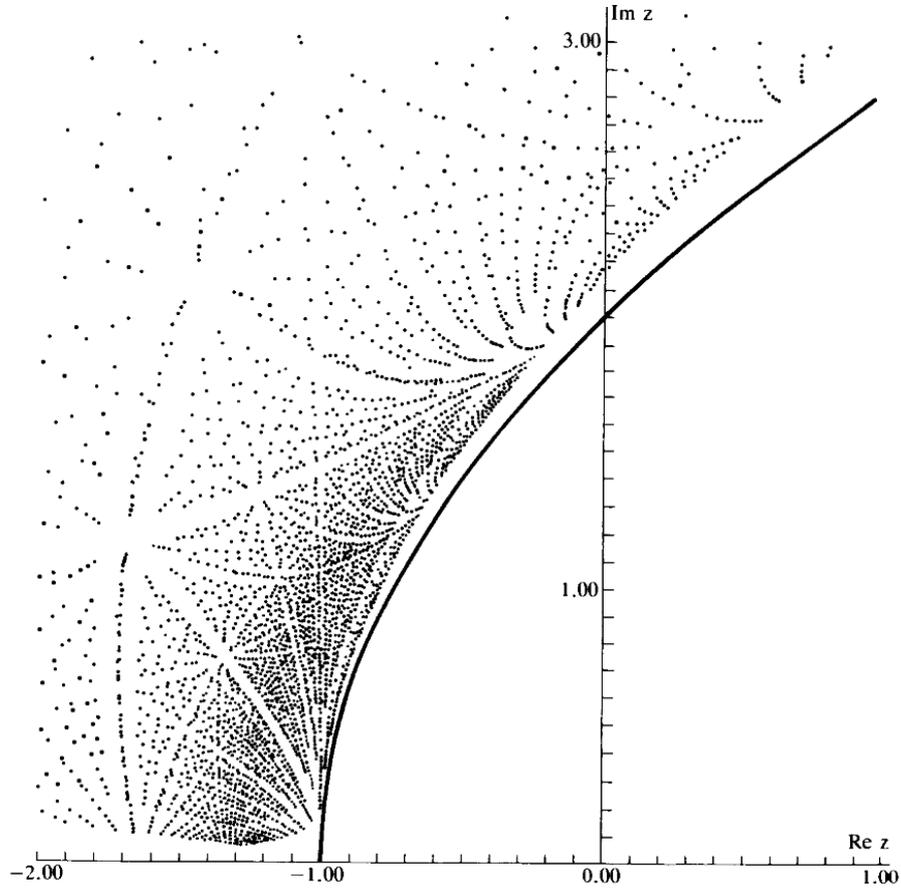


Figura 1.2: Región libre de ceros del aproximante de Padé $[N|M]$ de la $\exp\{(M+1)z\}$, [19].

$$f(z) = \frac{1 + \sqrt[3]{2}z}{1 - z^3} = 1 + \sqrt[3]{2}z + z^3 + \sqrt[3]{2}z^4 + \dots \quad (1.29)$$

Esta función es analítica en $|z| < 1$ y a pesar de ello todo aproximante del tipo $[N|2]$ contiene un polo en $|z| < 1$.

Otro resultado importante que ha permitido aplicaciones directas a la física [20] es el teorema de Montessus. Este teorema permite la posibilidad de convergencia en el caso en que la función $f(z)$ tenga polos múltiples.

Teorema 8 Sea $f(z)$ una función meomorfa en el disco en $|z| \leq R$, con precisamente m polos en puntos distintos z_1, z_2, \dots, z_M , donde

$$0 < |z_1| \leq |z_2| \leq \dots \leq |z_m| < R. \quad (1.30)$$

Suponiendo que el polo en el punto z_k tenga multiplicidad μ_k , y sea la multiplicidad total precisamente $\sum_{k=1}^m \mu_k = M$. Entonces

$$f(z) = \lim_{N \rightarrow \infty} [N|M], \quad (1.31)$$

uniformemente sobre cualquier subconjunto compacto de

$$\mathcal{D}_M = \{z, |z| \leq R, z \neq z_i, i = 1, 2, \dots, m\}. \quad (1.32)$$

Para el segundo tipo de secuencia existen también resultados interesantes, por ejemplo, el siguiente teorema muestra que el dominio natural de convergencia para la secuencia $[N|N]$ de aproximantes no es el círculo en el origen como sucede con la serie de Taylor, sino más bien una región determinada de alguna manera por la localización de singularidades no polares de la función considerada.

Teorema 9 Si $P_N(z)/Q_N(z)$ es el aproximante de Padé $[N|N]$ de $f(z)$ y $C + Df(0) \neq 0$, entonces

$$\frac{A + B \left[P_N \left(\frac{\alpha w}{1 + \beta w} \right) / Q_N \left(\frac{\alpha w}{1 + \beta w} \right) \right]}{C + D \left[P_N \left(\frac{\alpha w}{1 + \beta w} \right) / Q_N \left(\frac{\alpha w}{1 + \beta w} \right) \right]} \quad (1.33)$$

es el aproximante de Padé $[N|N]$ de

$$\left[A + Bf \left(\frac{\alpha w}{1 + \beta w} \right) \right] \left[C + Df \left(\frac{\alpha w}{1 + \beta w} \right) \right]^{-1}. \quad (1.34)$$

A, B, C y D , son constantes arbitrarias, y w es un número complejo. La transformación

$$f(z) \rightarrow \frac{A + Bf(z)}{C + Df(z)} \quad (1.35)$$

se conoce como transformación homográfica de la función f en el plano complejo. El teorema anterior muestra entonces que el aproximante de Padé preserva la propiedad de transformación homográfica de la función f y de la variable

$$z \rightarrow \frac{\alpha w}{1 + \beta w}, \quad (1.36)$$

la cual deja el origen invariante. Este resultado es de suma importancia, pues permite explicar muchas de las propiedades de los aproximantes [21, 22]:

- Esta propiedad puede ser utilizada para obtener relaciones entre aproximantes contiguos, $[N \pm 1|N]$ con $[N|N]$, y en particular para obtener coeficientes de un modo recursivo.
- Con esta propiedad resulta que los polos de $f(z)$ no deben ser considerados como puntos especiales de los aproximantes, propiedad opuesta a las series de Taylor, debido a que pueden ser regularizadas con la transformación homográfica adecuada. En particular, los aproximantes de Padé suman series geométricas exactamente.

- Con las transformaciones de Euler sobre la variable

$$z = \frac{\lambda y}{1 + \mu y}, \quad (1.37)$$

se puede mapear parte del dominio holomorfo al círculo de convergencia de la función $f(z)$. Es una enorme virtud que el aproximante de Padé realizan transformaciones de Euler de un modo sistemático, y eligen λ y μ en términos de los coeficientes f_i de la expansión (y no arbitrariamente) del modo más eficiente posible. Esta propiedad es muy importante en problemas de convergencia. Como se vio antes, el dominio de convergencia es mucho más grande que el de Taylor. Supongamos, por ejemplo, que hemos probado la convergencia del aproximante dentro del círculo de convergencia de la serie de Taylor. Empleando la transformación homográfica sobre la variable, inmediatamente extendemos esta región a la unión de todos los círculos en el dominio analítico que contengan al origen.

- Finalmente esta propiedad de covariancia bajo transformaciones homográficas es también responsable del hecho de que en las amplitudes de dispersión, los aproximantes de Padé sean unitarios. De hecho las ondas parciales de la matriz S satisfacen $S_l S_l^*$, o equivalentemente

$$s_l = (s_l^*)^{-1}, \quad (1.38)$$

y resulta que esta propiedad será preservada por aproximantes de Padé diagonales

$$s_l^{[N|N]} = \left(s_l^{*[N|N]} \right)^{-1}. \quad (1.39)$$

La unicidad de la convergencia de una secuencia de aproximantes de Padé esta asegurada por el siguiente teorema, formulado con el concepto de convergencia en la esfera de Riemann, y es consecuencia directa de la unicidad de la continuación analítica.

Teorema 10 *Sea $\mathcal{P}_k(z) = [N_k|M_k]$ una secuencia de aproximantes de Padé de la función $f(z)$, la cual es regular en el origen y tal que $N_k + M_k \rightarrow \infty$ conforme $k \rightarrow \infty$. Si $\{\mathcal{P}_k(z)\}$ es equicontinua sobre la esfera en una región compacta y simplemente conexa \mathcal{R} , de la cual el origen es un punto interior, entonces el dominio de definición de $f(z)$ puede ser extendido de tal manera que $f(z)$ sea meromorfa en el interior de \mathcal{R} y $[N_k|M_k]$ converge a $f(z)$ sobre la esfera para todo $z \in \mathcal{R}$.*

El teorema para convergencia ordinaria es similar.

Resulta útil considerar el problema de la convergencia en términos de dicha esfera, básicamente porque la convergencia de una secuencia de aproximantes de Padé es equivalente a que dicha secuencia sea equicontinua sobre la esfera, *i.e.*, una sola δ puede ser seleccionada para toda la secuencia de manera que si $|z - z_0| < \delta$, entonces la distancia sobre la esfera de cualquier aproximante de Padé en z y z_0 es menor que una ϵ preasignada para toda z y z_0 en alguna región cerrada relevante R . Por tanto, este resultado reduce una propiedad más complicada, la de convergencia, a una más sencilla, equicontinuidad en la esfera. Es de notar que la propiedad de equicontinuidad necesariamente excluye la aparición de polos y ceros arbitrariamente cercanos. De hecho existe una gran variedad de teoremas sobre convergencia de secuencias generales de aproximantes bajo la hipótesis de que polos y ceros espurios son excluidos de cierta región, y distintas suposiciones acerca de la distribución de los extraños polos y ceros, y el comportamiento de la función fuera de esta región dan como resultado conclusiones de distinta fuerza.

La tercer manera de tratar el problema genérico de convergencia de los aproximantes es buscar un tipo de convergencia distinto al puntual empleando el concepto de *medida*. La idea es encontrar una cota para $Q^{[N|M]}(z)^{-1}$ en la fórmula para el error cometido por el aproximación de Padé,

$$f(z) - [N|M] = \frac{z^{N+M+1}}{2\pi i Q^{[N|M]}(z) R_M(z)} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi) Q^{[N|M]}(\xi) R_M(\xi) d\xi}{\xi^{N+M+1} (\xi - z)} \quad (1.40)$$

donde Γ es el contorno dentro del cual $f(z)$ es analítica y sobre el cual es continua, y además encierra tanto a z como al origen. R_M es un polinomio arbitrario de grado a lo más M , pero no idénticamente cero (en la práctica puede ser tomado como $R_M = 1$). Esta fórmula es consecuencia directa de la fórmula de Hermite para la expansión de Maclaurin. La cota para $Q^{[N|M]}(z)^{-1}$ debe ser hallada utilizando una cota para un polinomio arbitrario de grado M . Esta cota viene dada por

$$|q_m(z)| \geq \eta^m, \quad (1.41)$$

donde $q_m(z)$ es un polinomio cuyo coeficiente de orden principal es la unidad, y es cierto excepto para z , perteneciente a un conjunto \mathcal{E} de medida a lo más $\pi\eta^2$. Usualmente no se tiene ningún conocimiento acerca de la localización de dicho conjunto excepcional, pero se tiene una cota dada para su área. Los teoremas basados en esta idea de medida no son válidos sobre conjuntos de medida arbitrariamente pequeña. Esto significa que dichos resultados no contienen enunciados acerca de convergencia en un punto particular en el plano complejo. Los resultados son todos en el sentido de que el área alrededor de divergencias producidas por combinaciones de polos y ceros no deseados de los aproximantes, son arbitrariamente pequeñas.

Este tipo de acercamiento al problema lleva a una gran variedad de teoremas sobre la convergencia de distintas secuencias de aproximantes y parecen ser la manera más general de obtener resultados sobre la convergencia de los aproximantes de Padé. El pionero en estos estudios fue Nuttall en 1970, él mostró que [23],

Teorema 11 *Sea $f(z)$ analítica en el origen y también en el círculo $|z| \leq R$ excepto por m polos, contando la multiplicidad. Considere la secuencia $[N_k|M_k]$ de aproximantes de Padé de $f(z)$ con $M_k \geq m$, y $N_k/M_k \rightarrow \infty$ ($M_k \neq 0$). Sean ϵ y δ números positivos arbitrariamente pequeños. Entonces existe k_0 tal que*

$$|f(z) - [N_k|M_k]| < \epsilon, \quad (1.42)$$

para toda $k > k_0$ y para toda $|z| < R$ excepto para $z \in \mathcal{E}$, donde \mathcal{E} es un conjunto de puntos en el plano complejo de medida menor que δ .

Otro teorema muy importante en este mismo sentido es el teorema de Pommerenke, el cual establece que la secuencia de aproximantes diagonales, *i.e.*, $[N|N]$, a una función meromorfa es convergente en todos lados en cualquier conjunto compacto del plano complejo excepto, a lo más, en un conjunto con medida cero, formalmente

Teorema 12 *Sea $f(z)$ una función analítica en el origen y analítica en todo el plano complejo excepto para un número contable de polos aislados y singularidades esenciales. Supongamos que $\epsilon > 0$ y $\delta > 0$ están dadas. Entonces, existe M_0 tal que cualquier aproximante de Padé $[N|M]$ de la secuencia de rayo con $N/M = \lambda$ ($\lambda \neq 0, \lambda \neq \infty$) satisface*

$$|f(z) - [N/M]| < \epsilon, \quad (1.43)$$

para cualquier $M \geq M_0$, sobre cualquier conjunto compacto del plano z excepto para un conjunto \mathcal{E}_M de medida menor a δ .

Es claro que dicho conjunto incluye los polos de $f(z)$, donde la función original está mal definida. Más aún, el aproximante de Padé puede producir una serie de polos ausentes originalmente en $f(z)$. Entonces, para una región compacta \mathcal{K} dada en el plano complejo, el teorema de Pommerenke requiere que estos polos no deseados se alejen de la región \mathcal{K} conforme el orden del aproximante crece, o se emparejen de manera muy cercana a un cero convirtiéndose en lo que antes se describió como un defecto. Aunque la aproximación se viene abajo en la vecindad de estos polos extraños, lejos, la aproximación está a salvo. Asimismo, un aproximante de Padé puede aproximar una función multivaluada (por ejemplo, una función con un corte ramal logarítmico) y la serie de aproximantes agrupará sus polos a lo largo del corte. Para más detalles sobre este tercer tipo de tratamiento ver [17, 24]

A pesar de la gran cantidad de resultados que involucran la convergencia de los aproximantes de Padé, estos no terminan por agotar el rango de convergencia de dicha herramienta. Por ello, Beker et al. plantearon la siguiente conjetura [16], e incluso aunque con ella se extiende el rango de convergencia, probablemente no se da el rango de convergencia completo de los aproximantes.

Conjetura 1 (Conjetura de Padé) *Si $P(z)$ es una serie de potencias representando a una función regular para $|z| \leq 1$, excepto para m polos dentro de este círculo y excepto para $z = +1$, punto en el cual la función se asume continua cuando solo los puntos $|z| \leq 1$ son considerados, entonces al menos una subsecuencia $[N|N]$ de aproximantes de Padé converge uniformemente a la función (conforme N tiene a infinito) en el dominio formado por la remoción del interior de pequeños círculos centrados en estos polos.*

Esta conjetura fue tan efectiva que no fue sino hasta el 2003 que Lubinsky halló un contraejemplo [25]. Y en su lugar, el mismo Baker formuló un teorema para suturar dicha deficiencia [26]. Salvo este tipo de ejemplos escasos, los aproximantes muestran cualidades de convergencia admirables y resultan de mucha utilidad en distintas áreas de la ciencia.

1.3. Aproximantes de Padé de N puntos

Hasta ahora solo hemos discutido sobre los aproximantes de Padé como una aproximación a una función $f(z)$, en un solo punto z . Es posible generalizar esta idea si dotamos de más información perturbativa a los aproximantes en N puntos distintos, z_1, z_2, \dots, z_N [24]. Consideremos N puntos distintos $\{z_i\}$ en el plano complejo, y asociado a cada uno la representación de una función

$$\left\{ \sum_{j=0}^{m_i-1} u_{i,j} (z - z_i)^j + \mathcal{O}[(z - z_i)^{m_i}] \right\}. \quad (1.44)$$

El problema es buscar una fracción racional $P_L(z)/Q_M(z)$ tal que tenga las propiedades (1.44) y los grados del numerador y denominador satisfagan

$$L + M = \sum_{i=1}^n m_i - 1, \quad (1.45)$$

de modo que el número de coeficientes independientes coincidan exactamente con el número de condiciones impuestas. Si sólo hay un punto, el problema es justamente el problema de Padé. Si todas las $m_i = 1$, el problema se denomina como problema de *Cauchy-Jacobi*. Para resolver este problema es conveniente emplear la fórmula de interpolación generalizada de Lagrange³. Para ello resulta útil emplear la función auxiliar

$$f(z) = \prod_{i=1}^n (z - z_i)^{m_i}. \quad (1.46)$$

Podemos verificar que la siguiente ecuación tiene la propiedad (1.44),

$$\varphi(z) = \sum_{i=1}^n f(z) [(m_i - 1)!]^{-1} \left(\frac{d}{da} \right)^{m_i-1} \left[\sum_{j=0}^{m_i-1} \frac{u_{ij} (a - z_i)^{m_i+j}}{(z - a) f(a)} \right] \Bigg|_{a=z_i}. \quad (1.47)$$

Si $z \approx z_1$ entonces en (1.47) solo el término $i = 1$ contribuirá a la suma pues

$$f(z_1) = f^{(1)}(z_1) = \dots = f^{(m_1-1)}(z_1) = 0, \quad (1.48)$$

y es justamente el término $i = 1$ el que nos lleva a la forma (1.44) cerca de $z = z_1$. Si ahora consideramos cada punto a la vez, resulta que (1.47) tiene la propiedad (1.44). De la forma de (1.47) vemos que es de grado a los más N .

Si aplicamos la fórmula general de interpolación de Lagrange (1.47) a x^p , $p \leq N$, obtenemos

$$z^p = \sum_{i=1}^n f(z) [(m_i - 1)!]^{-1} \left(\frac{d}{da} \right)^{m_i-1} \left[\frac{a^p (a - z_i)^{m_i}}{(z - a) f(a)} \right] \Bigg|_{a=z_i}. \quad (1.49)$$

Para el caso especial $z = 0$ tenemos

$$0 = \sum_{i=1}^n [(m_i - 1)!]^{-1} \left(\frac{d}{da} \right)^{m_i-1} \left[\frac{a^{p-1} (a - z_i)^{m_i}}{f(a)} \right] \Bigg|_{a=z_i}, \quad 0 < p \leq N. \quad (1.50)$$

La construcción de los aproximantes requiere que se satisfagan las ecuaciones

$$P_L(z) - \left[\sum_{j=0}^{m_i-1} u_{i,j} (z - z_i)^j \right] Q_M(z) = \mathcal{O}[(z - z_i)^{m_i}], \quad i = 1, \dots$$

$$Q_M(0) = 1, \quad (1.51)$$

y como consecuencia directa de 1.51 obtenemos

$$\left(\frac{d}{da} \right)^{m_i-1} \left\{ a^{p-1} (a - z_i)^{m_i} \frac{\left[P_L(a) - Q_M(a) \sum_{j=0}^{m_i-1} u_{i,j} (a - z_i)^j \right]}{f(a)} \right\} \Bigg|_{a=z_i} = 0, \quad (1.52)$$

³Dado que existe un único polinomio interpolador para un determinado número de puntos, un mejor nombre sería, la fórmula de interpolación polinómica generalizada en la forma de Lagrange.

para toda p . Si multiplicamos la ecuación (1.52) por el factor $[(m_i - 1)!]^{-1}$ y sumamos sobre i , obtenemos

$$\sum_{i=1}^n [(m_i - 1)!]^{-1} \left(\frac{d}{da} \right)^{m_i-1} \left\{ a^{p-1} (a - z_i)^{m_i} \frac{\left[P_L(a) - Q_M(a) \sum_{j=0}^{m_i-1} u_{i,j} (a - z_i)^j \right]}{f(a)} \right\} \Bigg|_{a=z_i} = 0, \quad p = 1, \dots, M. \quad (1.53)$$

Comparando con (1.50), los términos que involucran a $P_L(z)$ se hacen cero y obtenemos ecuaciones que tienen que ver solo con los coeficientes de $Q_M(z)$. Definiendo

$$Q_M(z) = \sum_{\mu=0}^M q_\mu z^\mu, \quad (1.54)$$

la ecuación (1.53) se reduce a

$$\sum_{\mu=0}^M q_\mu v_{\mu+p} = 0, \quad p = 1, \dots, M, \quad (1.55)$$

donde hemos definido

$$v_p = \sum_{i=1}^n [(m_i - 1)!]^{-1} \left(\frac{d}{da} \right)^{m_i-1} \left\{ \sum_{j=0}^{m_i-1} \frac{u_{i,j} (a - z_i)^{m_i+j} a^{p-1}}{f(a)} \right\} \Bigg|_{a=z_i}. \quad (1.56)$$

Las ecuaciones (1.55) son exactamente de la misma forma que las de Padé (1.10). De hecho, si hacemos $n = 1$, entonces (1.56), con $z_i = 0$, se reduce a

$$v_p = u_{1,N+1-p}, \quad (1.57)$$

con lo que (1.55) se convierten en (1.10) exactamente. El otro caso importante que vale la pena revisar es el de Cauchy-Jacobi ($m_i = 1$). En este caso (1.56) se reduce a

$$v_p = \sum_{i=1}^n \frac{z_i^{p-1} u_{i,0}}{f'(z_i)}. \quad (1.58)$$

Podemos resolver (1.55) directamente para obtener los coeficientes correspondientes, con esto

$$Q_M(z) = \frac{\det \begin{pmatrix} v_{2M} & v_{2M-1} & \cdots & v_M \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{M+1} & v_M & \cdots & v_1 \\ z^M & z^{M-1} & \cdots & 1 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} v_{2M-1} & \cdots & v_M \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_M & \cdots & v_1 \end{pmatrix}}. \quad (1.59)$$

Para determinar el numerador, es conveniente emplear nuevamente la fórmula de Lagrange (1.47). Usando, además, la ecuación (1.51) para escribir los coeficientes de la expansión en términos de las $u_{i,j}$ de (1.44) y de las q_μ de (1.54), se obtiene

$$P_L(z) = \sum_{i=1}^n f(z) [(m_i - 1)!]^{-1} \left(\frac{d}{da} \right)^{m_i-1} \left\{ \frac{(a - z_i)^{m_i}}{(z - a) f(a)} \left[\sum_{\mu=0}^M q_\mu a^\mu \right] \left[\sum_{j=0}^{m_i-1} u_{i,j} (a - z_i)^j \right] \right\} \Big|_{a=z_i} \quad (1.60)$$

Si introducimos los polinomios auxiliares

$$T_\mu(z) = \sum_{i=1}^n f(z) [(m_i - 1)!]^{-1} \left(\frac{d}{da} \right)^{m_i-1} \left\{ \frac{a^\mu (a - z_i)^{m_i}}{(z - a) f(a)} \sum_{j=0}^{m_i-1} u_{i,j} (a - z_i)^j \right\} \Big|_{a=z_i} \quad (1.61)$$

se obtiene, empleando la expresión para $Q_M(z)$ (1.59),

$$P_L(z)/Q_M(z) = \frac{\det \begin{pmatrix} v_{2M} & v_{2M-1} & \cdots & v_M \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{M+1} & v_M & \cdots & v_1 \\ T_M & T_{M-1} & \cdots & T_0 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} v_{2M} & v_{2M-1} & \cdots & v_M \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{M+1} & v_M & \cdots & v_1 \\ z^M & z^{M-1} & \cdots & 1 \end{pmatrix}}. \quad (1.62)$$

En el caso especial de Padé, $n = 1$ y $z_i = 0$, los polinomios (1.61) se reducen a

$$T_\mu(z) = \sum_{j=\mu}^N u_{1,j-\mu} z^j, \quad (1.63)$$

con lo que la ecuación (1.62) es idéntica a (1.16) si se emplea (1.57), excepto que el grado del numerador parece demasiado grande. Esto se puede arreglar manipulando los renglones de la expresión (1.62). Las potencias extra de z se eliminan y el límite superior de la suma (1.63) se

reduce de N a L . Con esto (1.62) coincide perfectamente con el aproximante de Padé (1.16). En el caso especial de Cauchy-Jacobi, en el cual todas las $m_i = 1$, los polinomios auxiliares (1.61) se reducen a

$$T_\mu = \sum_{i=1}^n \frac{z_i^\mu u_{i,0} f(z)}{(z - z_i) f'(z_i)}. \quad (1.64)$$

Nuevamente, como con la ecuación (1.63), el grado de (1.64) es N , pero la combinación lineal formada en (1.62) reduce el grado del numerador a L , por cancelación.

La mayoría de los resultados de la sección anterior pueden generalizarse al caso de N puntos [24, 14], salvo detalles muy particulares y muy técnicos que no trataremos aquí.

En el presente trabajo emplearemos aproximantes de Padé de $N = 2$ puntos, por lo que las expansiones de $f(z)$ alrededor de los puntos z_1 y z_2 , hacen que la expresión genérica para el aproximante de Padé (1.62), se reduzca considerablemente y sea sencillo obtener una solución numérica.

En resumen

- Las propiedades de convergencia de los aproximantes de Padé son más complejas que las de las asociadas a las comúnmente empleadas series de Taylor, y la convergencia está garantizada por la conjetura de Padé.
- Es posible dotar de mayor información asintótica a los aproximantes de Padé al añadir series perturbativas alrededor de tantos puntos como queramos. Además, todos los resultados de convergencia son fácilmente generalizables al caso de N puntos. En el presente trabajo nos concentraremos en el caso particular de dos puntos
- La construcción de los aproximantes de Padé de N puntos no requiere del conocimiento de la función exacta a aproximar, en contraste con otros métodos de interpolación que sí requieren de dicha información y por ello resultan ser menos efectivos.

1.3.1. Ejemplos de Aproximantes de Padé en Mecánica Cuántica

Veamos ahora algunos ejemplos de aproximantes de Padé de 2 puntos, que por su contenido físico, resultan de interés:

Sistema de dos niveles

Este sistema mecánico-cuántico está descrito por el Hamiltoniano

$$H = \sigma_x + \lambda \sigma_z, \quad (1.65)$$

donde las σ_i 's son las matrices de Pauli y la constante de acoplamiento λ se asume mayor que cero. Para $\lambda \ll 1$, el término con σ_z puede ser tratado como una perturbación, cuyo espectro a segundo orden en teoría de perturbaciones viene dado por [27]:

$$E_\pm = \pm 1 \pm \frac{\lambda^2}{2}, \quad \lambda \ll 1. \quad (1.66)$$

Para $\lambda \gg 1$, el Hamiltoniano se puede reescribir como $H = \lambda \left(\sigma_z + \frac{1}{\lambda} \sigma_x \right)$, y el término σ_x puede ser tratado como una perturbación, cuyo espectro a segundo orden en teoría de perturbaciones es [27]:

$$E_{\pm} = \pm \lambda \pm \frac{1}{2\lambda}, \quad \lambda \gg 1. \quad (1.67)$$

El aproximante de Padé correspondiente se puede calcular empleando la ecuación (1.62) para el caso $N = 2$. Sin embargo, debido a la simpleza de las expansiones es mejor aprovechar el hecho de que el aproximante $[N|M]$ debe reproducir las expansiones (1.66) y (1.67) cuando $\lambda \ll 1$ y $\lambda \gg 1$ respectivamente. Además, de la construcción (1.46) se deduce que si $N = 3$, entonces $M = 2$. Haciendo las respectivas expansiones se obtienen todos los coeficientes del aproximante. Los resultados son [28]:

$$E_{\pm}^{[3|2]} = \pm \frac{1 + \frac{3}{2}\lambda + \frac{3}{2}\lambda^2 + \lambda^3}{1 + \frac{3}{2}\lambda + \lambda^2}. \quad (1.68)$$

Se sabe que este sistema mecánico cuántico tiene como solución exacta [27]:

$$E_{\pm} = \pm \sqrt{1 + \lambda^2} \quad (1.69)$$

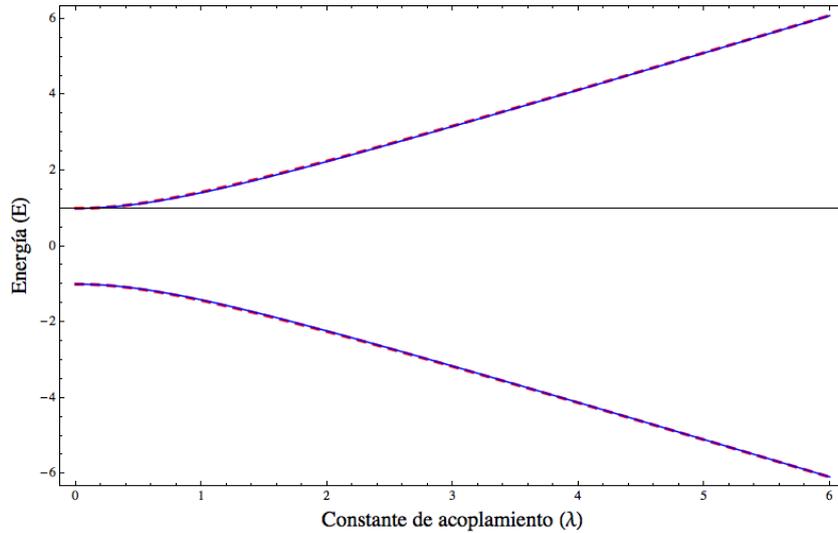


Figura 1.3: Energía del sistema cuántico de dos niveles, en rojo los aproximantes de Padé de orden $[3|2]$ (1.68), y en azul la solución exacta (1.69).

Efecto Stark

Consideremos ahora el *efecto Stark* para los niveles de Hidrógeno $2S_{1/2}$ y $2P_{1/2}$ y un campo eléctrico ε suficientemente pequeño, de tal forma que el término $\varepsilon \varepsilon a_0$ sea pequeño con respecto a

la estructura fina. Tomemos en cuenta, además, el desplazamiento de Lamb, δ . Definiendo $\alpha = 3ea_0$, e carga del electrón y a_0 el radio de Bohr. La mezcla de niveles en el efecto Stark está dada por la matriz [27]

$$H' = \begin{pmatrix} \delta & \alpha\varepsilon \\ \alpha\varepsilon & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.70)$$

El espectro exacto de este sistema es conocido y está dado por [27]:

$$E = \frac{\delta}{2} \pm \sqrt{\frac{\delta^2}{4} + (\alpha\varepsilon)^2}. \quad (1.71)$$

Para emplear la aproximación de Padé es necesario obtener información perturbativa, para ello, notemos que es posible separar el problema de la forma

$$H' = \delta H_1 + \varepsilon H_2, \quad H_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad y \quad H_2 = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.72)$$

Con esto se obtienen los casos límite

$$H' = \delta \left(H_1 + \frac{\varepsilon}{\delta} H_2 \right), \quad \varepsilon \ll \delta \quad (1.73)$$

$$H' = \varepsilon \left(H_2 + \frac{\delta}{\varepsilon} H_1 \right), \quad \varepsilon \gg \delta \quad (1.74)$$

con ello se pueden leer directamente los eigenvalores de cada matriz H_1 y H_2 . Empleando el método usual de teoría de perturbaciones a segundo orden obtenemos las expansiones [27],

$$E = \delta\alpha^2 \left(\frac{\varepsilon}{\delta} \right)^2, \quad \delta - \delta\alpha^2 \left(\frac{\varepsilon}{\delta} \right)^2 \varepsilon \ll \delta \quad (1.75)$$

$$E = \delta\alpha \left(\frac{\varepsilon}{\delta} \right) + \frac{\delta}{2} + \frac{\delta\alpha}{2} \left(\frac{\delta}{\varepsilon} \right), \quad -\delta\alpha \left(\frac{\varepsilon}{\delta} \right) + \frac{\delta}{2} - \frac{\delta\alpha}{2} \left(\frac{\delta}{\varepsilon} \right) \quad \varepsilon \gg \delta. \quad (1.76)$$

Empleando estas expansiones obtenemos los aproximantes de Padé [4|3]:

$$E = \pm \frac{8,33333 \varepsilon^2 + 20,6399 \varepsilon^3 + 2,96213 \varepsilon^4}{1 + 3,14751 \varepsilon + 3,95025 \varepsilon^2 + 0,592426 \varepsilon^3}. \quad (1.77)$$

Efecto Zeeman

El siguiente ejemplo a tratar es la interpolación del efecto Zeeman entre la región débil y fuerte del campo magnético [27, 29], en la capa $n = 2$ del átomo de hidrógeno. El Hamiltoniano del sistema está dado por

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_{fs} + \mathcal{H}_z, \quad (1.78)$$

donde \mathcal{H}_0 es el término coulombiano, \mathcal{H}_{fs} es el Hamiltoniano asociado a la estructura fina del átomo de hidrógeno incluyendo la corrección relativista y el acoplamiento espín órbita. \mathcal{H}_z representa el potencial que describe al átomo de hidrógeno en un campo magnético uniforme dado por

$$\mathcal{H}_z = -(\boldsymbol{\mu}_l + \boldsymbol{\mu}_s) \cdot \mathbf{B}_{Ext} \quad (1.79)$$

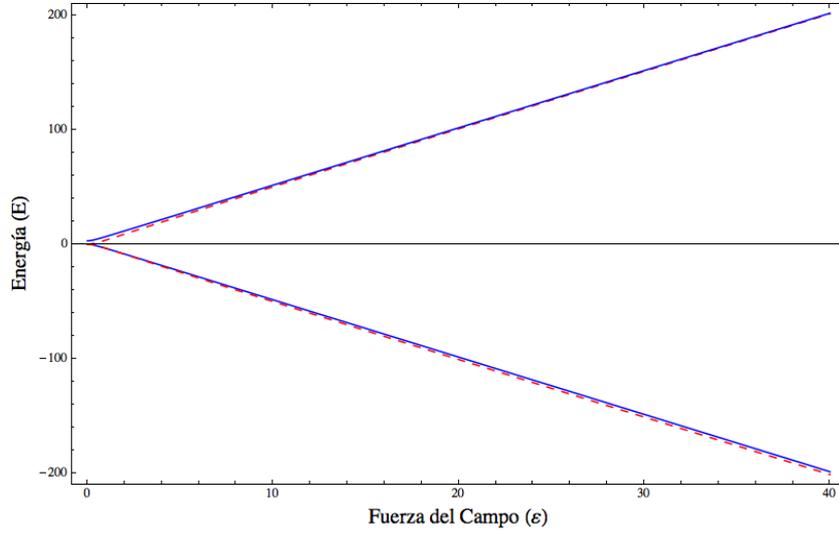


Figura 1.4: Energía de los niveles de Hidrógeno $2S_{1/2}$ y $2P_{1/2}$, en presencia de un campo eléctrico. En rojo se aprecian los aproximante de Padé de orden $[4/3]$ (1.77) y en azul las soluciones exactas (1.71) (ambos con signo positivo).

donde μ_s es el momento dipolar magnético asociado con el espín del electrón, μ_l es el momento dipolar asociado con el movimiento orbital y \mathbf{B}_{Ext} el campo magnético externo en el que esta inmerso el sistema. Suponiendo que \mathbf{B}_{Ext} es muy pequeño; entonces el ultimo término de (1.78) puede ser tratado como una perturbación. Usando $n = 2$, el espectro de este sistema a primer orden en teoría de perturbaciones viene dado por [29]

$$E_{l_j m_j} = -\frac{13,6 \text{ eV}}{4} \left[1 + \frac{\alpha^2}{4} \left(\frac{2}{j+1/2} - \frac{3}{4} \right) \right] + \mu_B g_J B m_j, \quad (1.80)$$

donde μ_B es el magnetón de Bohr y g_J el factor de Landé. Con esto se obtienen los estados mostrados en la tabla 1.2, donde $\varepsilon = -13,4 \text{ eV}$, $\gamma = |\varepsilon|^2/16$ y $\beta = \mu_B B$.

Estado $ l, j, m_j\rangle$	Energía
$ 0, \frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\rangle$	$\varepsilon - 5\gamma + \beta$
$ 0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle$	$\varepsilon - 5\gamma - \beta$
$ 1, \frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\rangle$	$\varepsilon - 5\gamma + \frac{1}{3}\beta$
$ 1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle$	$\varepsilon - 5\gamma - \frac{1}{3}\beta$
$ 1, \frac{3}{2}, +\frac{3}{2}\rangle$	$\varepsilon - \gamma + 2\beta$
$ 1, \frac{3}{2}, +\frac{1}{2}\rangle$	$\varepsilon - \gamma + \frac{2}{3}\beta$
$ 1, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\rangle$	$\varepsilon - \gamma - \frac{2}{3}\beta$
$ 1, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\rangle$	$\varepsilon - \gamma - 2\beta$

Tabla 1.2 Energías para $n = 2$ en la aproximación de campo débil del efecto Zeeman.

Suponiendo que la magnitud de \mathbf{B}_{Ext} es muy grande; el término $B_{Ext} (1/B_{Ext}) \mathcal{H}_{fs}$ de (1.78) se puede considerar como la perturbación. Entonces, el espectro y los estados del sistema (ver tabla 1.3) son a primer orden [29]

$$E_{lm_l m_s} = \frac{-13,6 \text{ eV}}{4} \left[1 - \frac{\alpha^2}{2} \left(\frac{3}{8} - \left\{ \frac{l(l+1) - m_l m_s}{l(l+1/2)(l+1)} \right\} \right) \right] + \mu_B B (m_l + 2m_s). \quad (1.81)$$

Estado $ l, m_l, m_s\rangle$	Energía
$ 0, 0, +\frac{1}{2}\rangle$	$\varepsilon - 5\gamma + \beta$
$ 0, 0, -\frac{1}{2}\rangle$	$\varepsilon - 5\gamma - \beta$
$ 1, +1, +\frac{1}{2}\rangle$	$\varepsilon - \gamma + 2\beta$
$ 1, +1, -\frac{1}{2}\rangle$	$\varepsilon - \frac{11}{3}\gamma$
$ 1, 0, +\frac{1}{2}\rangle$	$\varepsilon - \frac{7}{3}\gamma + \beta$
$ 1, 0, -\frac{1}{2}\rangle$	$\varepsilon - \frac{7}{3}\gamma - \beta$
$ 1, -1, +\frac{1}{2}\rangle$	$\varepsilon - \frac{11}{3}\gamma$
$ 1, -1, -\frac{1}{2}\rangle$	$\varepsilon - \gamma - \beta$

Tabla 1.3 Energías para $n = 2$ en la aproximación de campo fuerte del efecto Zeeman.

Cuatro de los estados mostrados en las tablas 1.2 y 1.3 se mantienen iguales, por tanto, son soluciones “exactas”, al menos hasta primer orden en teoría de perturbaciones, mientras que los otros cuatro estados se mezclan. Es posible deducir como se conectan los estados mezclados notando que los estados $|1, \frac{3}{2}, \pm\frac{1}{2}\rangle$ y $|1, \frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\rangle$, parten del mismo punto y conforme el campo magnético aumenta, el signo de β se preserva. Por tanto los estados se conectan de la forma:

$$\begin{aligned} \left| 1, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle &\rightarrow \left| 1, 1, -\frac{1}{2} \right\rangle, & \left| 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle &\rightarrow \left| 1, -1, \frac{1}{2} \right\rangle \\ \left| 1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle &\rightarrow \left| 1, 0, -\frac{1}{2} \right\rangle, & \left| 1, \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle &\rightarrow \left| 1, 0, \frac{1}{2} \right\rangle. \end{aligned} \quad (1.82)$$

Resulta que las soluciones analíticas de los eigenvalores asociados con los estados anteriores son conocidas para toda β , y tienen la forma [29]:

Estado $ l, j, m_j\rangle$	Energía
$ 1, \frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\rangle$	$\varepsilon - 3\gamma + \frac{\beta}{2} - \sqrt{4\gamma^2 + \frac{2}{3}\gamma\beta + \frac{1}{4}\beta^2}$
$ 1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle$	$\varepsilon - 3\gamma - \frac{\beta}{2} - \sqrt{4\gamma^2 - \frac{2}{3}\gamma\beta + \frac{1}{4}\beta^2}$
$ 1, \frac{3}{2}, +\frac{1}{2}\rangle$	$\varepsilon - 3\gamma + \frac{\beta}{2} + \sqrt{4\gamma^2 + \frac{2}{3}\gamma\beta + \frac{1}{4}\beta^2}$
$ 1, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\rangle$	$\varepsilon - 3\gamma - \frac{\beta}{2} + \sqrt{4\gamma^2 - \frac{2}{3}\gamma\beta + \frac{1}{4}\beta^2}$

Tabla 1.4 Energías para $n = 2$ en la aproximación de campo fuerte del efecto Zeeman.

A partir de las expresiones de las tablas 1.2 y 1.3, y con la información (1.82), calculamos los aproximantes de Padé correspondientes. Sus expresiones se muestran en el apéndice A y en la figura 1.5 se comparan con las expresiones exactas.

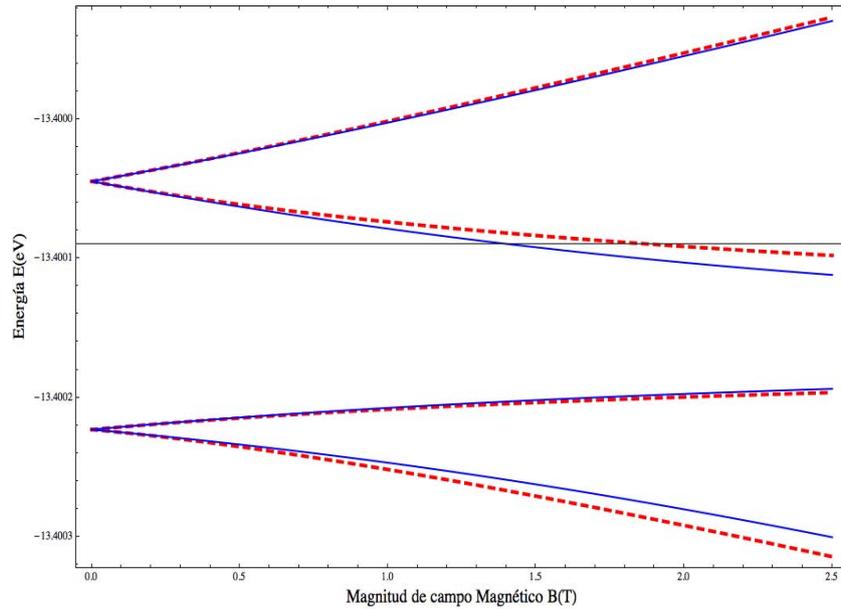


Figura 1.5: Energía de los estados no lineales correspondientes al efecto Zeeman. En rojo se aprecian los aproximantes de Padé calculados con los resultados de las Tablas 2 y 3. En azul las soluciones exactas correspondientes a los estados de la Tabla 4.

En los 3 ejemplos anteriores pudimos apreciar como los aproximantes de Padé hacen una gran labor al interpolar el comportamiento de una función entre dos puntos a partir, únicamente, de la información perturbativa en esos puntos. Además, tienen un significado físico muy preciso.

1.4. Paisaje de Aproximantes

Hasta ahora hemos comparado aproximantes de Padé, calculados a partir de información perturbativa, con soluciones exactas correspondientes a cada problema particular. Pero, *¿cómo obtener un “buen” aproximante cuando no hay solución exacta al problema?* Más aún, en casos en los que la información perturbativa es poca debido a la gran complejidad del problema particular. En primera instancia se podría pensar en calcular la diferencia entre el aproximante y las expansiones perturbativas hasta un punto común \tilde{z} , sin embargo, existen un par de problemas básicos respecto a este razonamiento. En primer lugar, es de esperar que más de un aproximante mantengan este error pequeño debido a las propiedades de convergencia que hemos apreciado en diversos ejemplos. En otras palabras, existe un *paisaje de aproximantes*, y no es para nada obvio, saber cual de ellos forma la mejor aproximación. Y por otro lado, el punto \tilde{z} no es un punto confiable pues es muy probable que las expansiones perturbativas diverjan antes y después de ese punto, ocasionado que el error aumente más, llevando a conclusiones erróneas.

Con respecto al primer problema, consideremos la función de partición en la teoría φ^4 cero dimensional,

$$\mathcal{Z}(m^2, g) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varphi}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{m^2}{2}\varphi^2 - g\varphi^4}, \quad (1.83)$$

la cual se puede representar en términos de la función de Bessel de segundo tipo $K_{\frac{1}{4}}$ donde $Re(g) > 0$ y el reescalamiento es $\lambda = \frac{4g^2}{3m^2}$,

$$\mathcal{Z}(m^2, \lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{m^2\lambda}} e^{\frac{1}{\lambda}} K_{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{\lambda}\right). \quad (1.84)$$

La expansión en serie de potencias de (1.84) es [30]:

$$\mathcal{Z}(m^2, \lambda)|_{m^2=1} = 1 - \frac{3}{32}\lambda^2 + \frac{105}{2048}\lambda^4 - \frac{3465}{65536}\lambda^6 + \frac{67675}{8388608}\lambda^8 - \dots \quad (1.85)$$

y la serie asintótica está dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}(m^2, \lambda)|_{m^2=1} = & \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \times \left(\left(\frac{2}{3\pi^2}\right)^{\frac{1}{4}} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{2}{3\pi^{\frac{2}{3}}}\right)^{\frac{3}{4}} \Gamma\left(-\frac{1}{4}\right) \lambda^{-1} + \frac{4}{3} \left(\frac{2}{3\pi^2}\right)^{\frac{1}{4}} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \lambda^{-2} + \right. \\ & \left. + \frac{4}{3} \left(\frac{2}{3\pi^{\frac{2}{3}}}\right)^{\frac{3}{4}} \Gamma\left(-\frac{1}{4}\right) \lambda^{-3} + \frac{40}{27} \left(\frac{2}{3\pi^2}\right)^{\frac{1}{4}} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \lambda^{-4} \right), \end{aligned} \quad (1.86)$$

en la figura 1.6 se muestran los aproximantes calculados a partir de (1.85) y (1.86). En particular, podemos apreciar que los aproximantes de orden [6|8] y [7|8] dan una excelente aproximación a las series perturbativas. Sin embargo, a partir únicamente de esta información no es obvio saber cual de ellos da la mejor aproximación a la función de partición $\mathcal{Z}(1, \lambda)$.

Usando la información de la solución exacta (1.84), resulta que el mejor aproximante es el de orden [7|8] (ver Fig. 1.7). Con este análisis mostramos, explícitamente, el problema del *paisaje de aproximantes*.

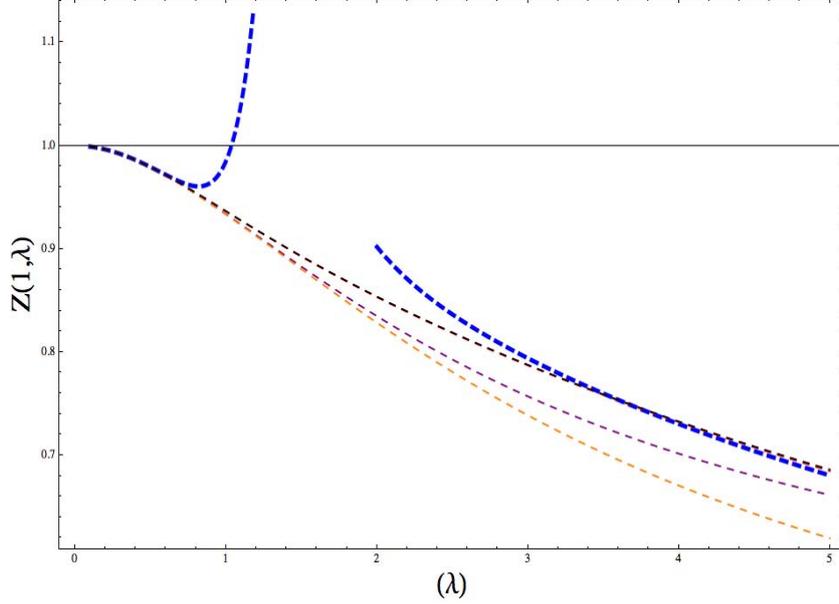


Figura 1.6: En esta gráfica se muestran los aproximantes de Padé (ver Apéndice B) y en azul las series asintóticas asociadas a la función de partición de la teoría de campo cero dimensional φ^4 .

1.4.1. Criterio para obtener el “mejor” Aproximante de Padé

Para resolver ambos problemas propondremos, en este trabajo, un criterio para elegir el mejor aproximante dentro del paisaje. Para ello supongamos primero que sabemos la serie de potencias de la función $F(\lambda)$ alrededor de los puntos $\lambda = 0$ y $\lambda = \infty$. Esto es, sabemos la forma explícita de la funciones,

$$F_s^{(N_s)}(\lambda) = \lambda^a \sum_{k=0}^{N_s} s_k \lambda^k, \quad F_l^{(N_l)}(\lambda) = \lambda^b \sum_{k=0}^{N_l} l_k \lambda^{-k}, \quad (1.87)$$

pero ¿cuán buenas son ambas expansiones? En primera instancia podríamos considerar que,

$$F(\lambda) = F_s^{(N_s)}(\lambda) + \mathcal{O}(\lambda^{a+N_s+1}) = F_l^{(N_l)}(\lambda) + \mathcal{O}(g^{\lambda-N_l-1}), \quad (1.88)$$

en tal caso, si nuestra precisión es de $\mathcal{O}(\lambda^{a+N_s})$ podemos compararla con el término de siguiente orden, $\mathcal{O}(\lambda^{a+N_s+1})$, de tal manera que la cantidad,

$$E(\lambda) = |F_s^{(N_s)}(\lambda) - \lambda^{a+N_s+1}|, \quad (1.89)$$

es $E(\lambda) \leq \varepsilon$, $\varepsilon \ll 1$ la tolerancia de la aproximación, y la igualdad en el punto que definiremos como λ_s^* , da como resultado la máxima precisión de la aproximación. De manera análoga para $F_l^{(N_l)}(\lambda)$ obtenemos el punto de máxima precisión λ_l^* . Consideremos la función de prueba $G(\lambda)$ (candidata a ser el mejor aproximante) y sean las cantidades,

$$I_s[G] = \int_0^{\lambda_s^*} dg |G(\lambda) - F_s^{(N_s)}(\lambda)|, \quad I_l[G] = \int_{\lambda_l^*}^{\Lambda} dg |G(\lambda) - F_l^{(N_l)}(\lambda)|, \quad (1.90)$$

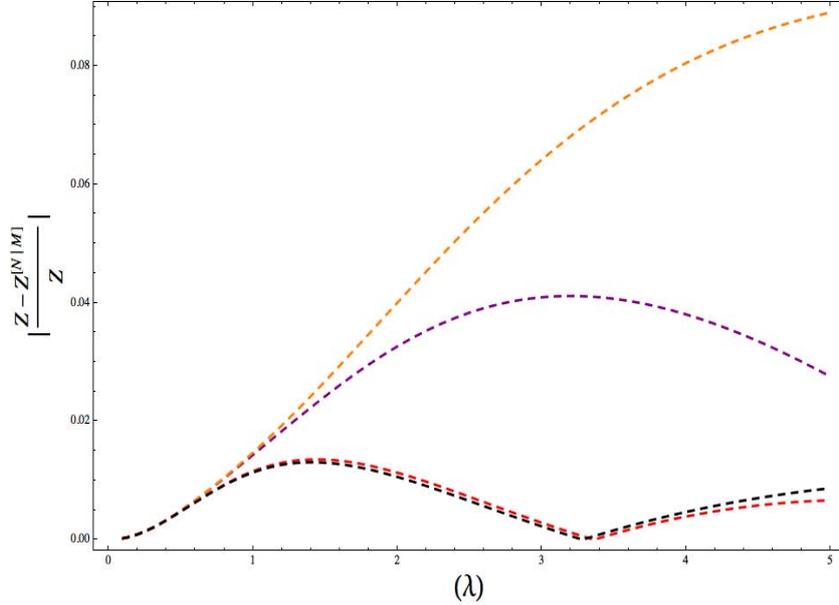


Figura 1.7: Error entre los aproximantes mostrados en la figura 1.6 y la solución exacta (1.84).

donde el parámetro Λ en $I_l[G]$ es el punto de corte de la integral hecho para hacer de $I_l[G]$ una función bien definida y por tanto toma un valor grande. El criterio propuesto está basado en la siguiente observación: las cantidades $I_s[G]$ y $I_l[G]$ miden la precisión de la aproximación $G(\lambda)$ a la función $F(\lambda)$, por tanto, el mejor aproximante $G(\lambda)^*$ debe satisfacer la identidad,

$$I_s[G^*] + I_l[G^*] = \min \{I_s[G] + I_l[G]\}. \quad (1.91)$$

Con el criterio (1.91), hemos eliminado ambos problemas: el de la información espuria en el cálculo del error, a través de las variables λ_s^* y λ_l^* en la definición de (1.90), y el de la existencia del paisaje de aproximantes, al extraer el *mejor aproximante* del conjunto de aproximantes que define $\{I_s[G] + I_l[G]\}$.

Aplicemos este criterio al caso de la teoría cero dimensional φ^4 . En la expansión perturbativa (1.85) los coeficientes oscilan pero, son siempre de orden $\sim 10^{-1}$, así que usaremos la ecuación (1.89) con el término $-0,1 \lambda^{10}$. De esta manera deducimos que $\lambda_s^* \approx 1,3$, donde hemos usado $\varepsilon \approx 10^{-3}$. Por otro lado la expansión (1.86) también oscila, aunque al contrario que antes, los coeficientes aumentan pero son de orden 10^0 , así que usaremos $\lambda^{-11/2}$ en (1.89). Con ello deducimos que $\lambda_l^* \approx 10^2$, para lo cual hemos empleado $\varepsilon \approx 10^{-1}$. Finalmente, aplicando el criterio propuesto (1.91) a la teoría cero dimensional φ^4 confirmamos que el mejor aproximante de padé es de orden [7]8. Lo importante a destacar aquí es que hemos obtenido este resultado sin hacer alusión a la solución exacta (1.84).

$[N M](\lambda)$	$\Lambda^{-1} \int dg \left \frac{[N M]-z}{z} \right $	$I_s [N M]$	$I_l [N M]$	$I_s + I_l$
[8 9]	1.17557	0.00531226	95.4767	95.482
[8 9]	0.478845	0.00536905	38.9982	39.0036
[5 5]	0.720873	0.00481535	59.0657	59.0705
[7 8]	0.0128215	0.00477461	0.934595	0.939369
[4 5]	0.371874	0.00726129	30.2773	30.2846
[3 7]	0.993119	0.0172557	79.6557	79.6729
[8 10]	0.942762	0.0173036	76.0463	76.0636
[10 10]	0.269484	0.00542181	21.5357	21.5411
[6 7]	1.48176	0.216424	121.507	121.723
[3 4]	1.89676	0.00541963	152.467	152.473
[2 4]	0.703063	0.025103	57.5135	57.5386

Tabla 1.5 Resultados obtenidos al aplicar el criterio (1.91) al problema de la teoría cero dimensional φ^4 .

1.5. Modelo de Ising en 2D

Muchos sistemas físicos en los que se puede aplicar el formalismo de la mecánica estadística presentan comportamientos muy peculiares en sus funciones termodinámicas. Estas funciones, dependientes de la temperatura, presentan en muchos de los casos, discontinuidades ó singularidades, las cuales corresponden a distintos tipos de transiciones de fase. Algunos ejemplos son: la condensación de distintos tipos de gases, fenómenos de ferromagnetismo y antiferromagnetismo, etc. El rasgo característico de la interacción entre partículas en estos sistemas es que estas no pueden ser “removidas” al hacer una transformación de coordenadas del problema y como consecuencia los niveles de energía del sistema no pueden estar relacionados con los niveles de energía de los constituyentes individuales. Al contrario, bajo ciertas circunstancias, un gran número de constituyentes microscópicos del sistema pueden exhibir una tendencia de interacción, unas con otras de una manera bastante fuerte. Esta característica asume un significado macroscópico a una temperatura particular, T_c , conocida como temperatura crítica, por tanto, localizar y analizar éste tipo de puntos es de suma importancia debido a la gran cantidad de información física que contienen. Una característica muy interesante de los aproximantes de Padé, es su capacidad para localizar singularidades al momento de interpolar funciones entre dos puntos analíticos. Pero ¿Cómo es que los aproximantes de Padé capturan puntos críticos? Para entender dicha cuestión con mayor profundidad empleemos el método de aproximantes al modelo de Ising en dos dimensiones.

El modelo de Ising se puede concebir como un modelo de transición magnética, pero es igualmente correcto pensarlo como uno de transición orden-desorden. El modelo consiste de N dipolos magnéticos, a los cuales llamaremos espines. Las simplificaciones del modelo son las siguientes:

1. Cada espín puede apuntar únicamente hacia arriba o abajo. Estas direcciones son elegidas como la dirección z positiva y negativa. Entonces uno puede describir el estado de cualquier espín por un número σ , el cual es $+1$ para arriba y -1 para abajo, y el estado del sistema completo es especificado dando el valor de σ para cada uno de los N espines.
2. Los espines, en el caso 3D se arreglan en una red cúbica simple. Entonces hay un espín en cada una de las posiciones:

$$\mathbf{X}_{lmn} = (l, m, n), \quad (1.92)$$

en la base con coordenadas cartesianas, y l, m y n son enteros. En el caso del modelo cuadrado $2D$ los espines se localizan en un arreglo cuadrado en el plano $x - y$.

3. Existe una energía de interacción entre los espines que tiende a alinearlos. Cada par de espines vecinos más cercanos que son paralelos hacen una contribución $-J$ a la energía total del sistema, y cada espín vecino más cercano que es antiparalelo da una contribución $+J$. J es una constante positiva. Entonces la energía total se puede escribir como:

$$E = -J \sum_{pq} \sigma_p \sigma_q, \quad (1.93)$$

donde la suma se restringe a los pares de vecinos más cercanos pq de espines.

A temperatura cero hay una probabilidad de 0,5 de encontrar al sistema en cualquiera de los dos estados de energía más baja, vemos entonces que el modelo de Ising de hecho exhibe la propiedad de magnetización espontánea. Estados de energía más alta, los cuales son importantes a temperatura diferente de cero, son producidos al revertir la dirección de algunos de los espines. Es claro que estos espines tendrán una magnetización espontánea menor y por tanto esperamos que la magnitud de la magnetización espontánea disminuya conforme la temperatura aumente. Podemos ver entonces que aunque a primera vista el modelo parece ser muy simple, de hecho ya exhibe algunas de las propiedades características de un sistema magnético real.

En 1944 L. Onsager encontró, en su famoso artículo [33], que el modelo 2 dimensional tiene solución exacta. Su resultado dice que la función de partición tiene la forma:

$$\mathcal{Z} = [2 \cosh (2J/k_B T) e^I]^N, \quad (1.94)$$

donde

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi d\phi \log \left\{ (1/2) \left[1 + (1 - \kappa^2 \sin^2 \phi)^{1/2} \right] \right\}, \quad (1.95)$$

$$\kappa = 2 \sinh (2J/k_B T) / \cosh^2 (2J/k_B T). \quad (1.96)$$

De la expresión para \mathcal{Z} en (1.94) podemos calcular la energía interna U y el calor específico C usando:

$$U = k_B T^2 d \log \mathcal{Z} / dT \quad (1.97)$$

$$C = dU/dT. \quad (1.98)$$

Es bien conocido que el calor específico C del modelo tiene una singularidad a la temperatura T_c tal que:

$$\sinh (2J/k_B T_c) = 1 \quad (1.99)$$

Cerca de esta temperatura C tiene una contribución singular que varía con la temperatura como:

$$(8k_B/\pi)(J/k_B T_c)^2 \log |1/(T - T_c)|. \quad (1.100)$$

Estamos interesados en estudiar cómo el aproximante de Padé captura esta singularidad así que necesitamos las expresiones de (1.94) en las regiones donde la temperatura es baja y alta en comparación con T_c . Primero trataremos el caso a bajas temperaturas.

La función de partición del modelo de Ising se escribe como:

$$\mathcal{Z} = \sum_{\{\sigma_p\}} e^{-\beta E_n} = \sum_{\{\sigma_p\}} \exp \left(\beta J \sum_{pq} \sigma_p \sigma_q \right), \quad (1.101)$$

donde $\{\sigma_p\}$ representa la suma sobre todos los estados. El límite de bajas temperaturas corresponde a $\beta J \rightarrow \infty$, donde la función de partición puede ser aproximada por la suma de los primeros estados de energía más baja. Solo se necesita listarlos, por ejemplo los estados base corresponden a todos los espines arriba o todos abajo. Cada uno de ellos tiene energía $E_0 = 2NJ$, etc. Los siguientes estados se pueden obtener de manera diagramática, dibujando las siguientes orientaciones y sus interacciones con los vecinos más cercanos. Sumando sobre todas estas gráficas se obtiene la expansión de \mathcal{Z} en potencias de $e^{-\beta J} \ll 1$. Ver [34]:

$$\mathcal{Z}_w = 2e^{2N\beta J} \left(1 + Ne^{-8\beta J} + 2N^{-12\beta J} + \frac{1}{2} (N^2 + 9N)^{-16\beta J} + \dots \right), \quad (1.102)$$

donde \mathcal{Z}_w es la función de partición a bajas temperaturas.

Para el límite de altas temperaturas $\beta J \ll 1$ reescribimos a \mathcal{Z} como:

$$\mathcal{Z} = \sum_{\{\sigma_p\}} \exp \left(-\beta J \sum_{pq} \sigma_p \sigma_q \right) = \sum_{\{\sigma_p\}} \prod_{pq} e^{\beta J \sigma_p \sigma_q}, \quad (1.103)$$

Usando el hecho de que los productos $\sigma_q \sigma_p$ solo pueden tomar los valores ± 1 , la siguiente identidad es válida:

$$e^{\beta J \sigma_p \sigma_q} = \cosh \beta J + \sigma_p \sigma_q \sinh \beta J = \cosh \beta J (1 + \sigma_p \sigma_q \tanh \beta J) \quad (1.104)$$

La función de partición toma entonces la forma

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{\{\sigma_p\}} \prod_{pq} \cosh \beta J (1 + \sigma_p \sigma_q \tanh \beta J) \\ &= (\cosh \beta J)^{qN/2} \sum_{\{\sigma_p\}} \prod_{pq} (1 + \sigma_p \sigma_q \tanh \beta J) \end{aligned} \quad (1.105)$$

Donde el número de vecinos más cercanos es $q = 4$ en $2D$. En el límite $\beta J \ll 1$, lo cual implica, $\tanh \beta J \ll 1$ se puede calcular la expansión correspondiente a Z , esto se hace sumando sobre todas las gráficas representativas de las interacciones entre vecinos más cercanos. El resultado final es:

$$Z_s = 2^N (\cosh \beta J)^2 N \left(1 + N (\tanh \beta J)^4 + 2N (\tanh \beta J)^6 + \frac{1}{2} (N^2 + 9N) (\tanh \beta J)^8 + \dots \right), \quad (1.106)$$

donde Z_s es la función de partición a altas temperaturas.

De las expresiones $Z_{w/s}$ podemos obtener $C_{w/s} = dU_{w/s}/dT$, donde $U_{w/s} = k_B T^2 d \log Z_{w/s}/dT$. Como estamos interesados en el cálculo numérico del aproximante de Padé, designamos los valores de $N = 1$ y $J = 1$. La expansión en serie de potencias de (1.102) y (1.106) son las siguientes:

El calor específico a $T \ll 1$:

$$C_w(T) = 9,9786 \times 10^{-23} - 4,0471 \times 10^{-21}T + 6,1567 \times 10^{-20}T^2 - 4,1633 \times 10^{-19}T^3 + \dots \quad (1.107)$$

A $T \gg 1$:

$$C_s(T) = \frac{6800}{9T^9} + \frac{128}{T^7} + \frac{40}{T^5} + \frac{4}{T^3} + \dots \quad (1.108)$$

Con estas expansiones logramos calcular varios aproximantes, a los cuales les aplicamos el criterio (1.91) para determinar cuál de ellos es la mejor función de interpolación. Los resultados se pueden apreciar en la Tabla 1.6. La gráfica del mejor aproximante se muestra en la Figura 1.8.

Dicho aproximante calculado tiene un máximo cerca de la temperatura crítica de la solución exacta. El máximo del aproximante se encuentra en $T_c = 2,2597$, lo cual concuerda muy bien con el resultado teórico [32], $T_c = 2,269$.

Calculando polinomios de orden más alto se puede ver que el aproximante localiza de manera mucho más precisa la singularidad, mientras que lejos de ella el aproximante diverge de la solución exacta de forma más y más rápida.

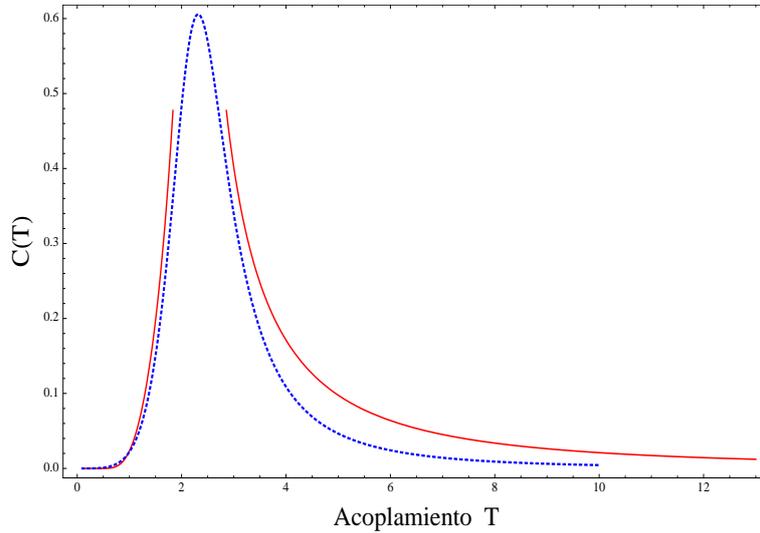


Figura 1.8: Aproximante de Padé de orden $G_{5,8}$ (azul), y resultado exacto (rojo).

$[N M](\lambda)$	$I_s [N M]$	$I_l [N M]$	$I_s + I_l$
[4 7]	$1,48154 \times 10^{-7}$	0.0115745	0.0121601
[4 7]	$1,78447 \times 10^{-8}$	0.347288	0.347328
[5 8]	$2,75659 \times 10^{-8}$	0,00146668	0,00156356
[7 10]	$1,25312 \times 10^{-8}$	0.231093	0.231355
[6 9]	$5,42306 \times 10^{-7}$	0.00234908	0.00337068
[6 9]	$8,51597 \times 10^{-7}$	0.340322	0.358287
[4 11]	$1,72172 \times 10^{-6}$	0.17912	0.184508
[5 12]	$7,86636 \times 10^{-6}$	0.17245	0.186683
[6 9]	0.0000186153	0.343097	0.352223
[7 10]	0.0000154759	0.341062	0.350347

Tabla 1.6 Resultados obtenidos al aplicar el criterio (1.91) al modelo de Ising en 2D.

1.6. Método de suma *Borel-Padé*

La mayoría de las series perturbativas que aparecen en la teoría cuántica de campos son asintóticas en vez de convergentes y por ello, surge la cuestión de hallar una manera de extraer la información que guardan para reconstruir cantidades físicas de interés subyacentes. Una técnica muy útil para manejar este problema es la teoría de transformadas y suma de Borel. En esta última sección del primer capítulo describiremos cómo es posible mejorar el método de suma de Borel a través de la técnica de aproximantes de Padé. En situaciones favorables, este procedimiento permite reconstruir la solución completa expresada solo formalmente a través de la serie perturbativa.

Siguiendo muy de cerca los artículos [35, 36], consideremos, primero, la ecuación de Euler,

$$\frac{d\varphi}{dz} + A\varphi(z) = \frac{A}{z} \quad (1.109)$$

la cual tiene una singularidad esencial en el punto $z = \infty$. La solución a esta ecuación tiene una serie de potencias formal,

$$\varphi_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^{n+1}}, \quad a_n = A^{-n} n! \quad (1.110)$$

Esta solución es una serie asintótica, con radio de convergencia cero, debido a que los coeficientes crecen como $\sim n!$ Es posible mostrar que podemos construir una familia de soluciones, formales, a la ecuación diferencial de Euler basada en $\varphi_0(z)$,

$$\varphi(z) = \varphi_0(z) + C e^{-Az}, \quad (1.111)$$

donde C es una constante arbitraria, la cual parametriza a la familia de soluciones. Esta ecuación es un ejemplo de *trans-series* y tiene tres propiedades importantes típicas de una trans-serie formal:

- El término añadido en (1.111) no es analítico en $z = \infty$, y va más allá de la solución estándar en la forma de una serie asintótica dada por (1.110). Es invisible en la expansión perturbativa al rededor de $z = \infty$, y es por tanto una corrección no perturbativa.

- La expresión formal resultante tiene dos parámetros pequeños, $1/z$ y e^{-Az} .
- Hay una relación entre la “fuerza” del efecto no perturbativo, dado por A y la divergencia de la serie asintótica. Es decir, A codifica el comportamiento a siguiente orden de a_n cuando n es grande.

En su encarnación más simple, una trans-serie involucra tanto al parámetro pequeño z como a las exponenciales pequeñas

$$e^{-S_\alpha/z}, \quad \alpha \in \mathcal{A}. \quad (1.112)$$

$\alpha \in \mathcal{A}$ son las distintas etiquetas de los sectores no perturbativos de la teoría. En el caso genérico, entonces, la trans-serie toma la forma,

$$\Sigma(z) = \varphi(z) + \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} C_\alpha e^{-S_\alpha/z} \varphi_\alpha(z), \quad (1.113)$$

donde las $\varphi_\alpha(z)$ son series en potencias de z , y C_α (en general números complejos), son los pesos de los sectores instantónicos. Cuando los efectos no perturbativos son asociados a instantones, las cantidades S_α son interpretadas como acciones instantónicas, y usualmente aparecen como singularidades en el plano complejo de la transformada de Borel de $\varphi(z)$.

Estas series formales dan aproximaciones asintóticas de funciones bien definidas, las cuales son “verdaderas” soluciones a la ecuación de Euler (o en general, soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias). Surge entonces, de manera explícita, la cuestión antes planteada: ¿cómo podemos recuperar la solución original, no perturbativa, a partir de su representación asintótica?

Como la serie asintótica es divergente, la respuesta no es para nada obvia. Sin embargo, en principio, la respuesta no perturbativa para el problema particular puede obtenerse empleando la técnica de suma de Borel de las series $\varphi(z)$, $\varphi_\alpha(z)$, y después sustituyendo el resultado en la ecuación (1.113), con una elección apropiada para C_α . La suma de trans-series resultante está usualmente bien definida para valores pequeños de z .

Sea

$$\varphi = \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{z^n} \quad (1.114)$$

una serie divergente con $a_n \sim n!$ Su *transformada de Borel* se define por,

$$\widehat{\varphi}(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} \zeta^n, \quad (1.115)$$

la cual tiene radio de convergencia $|A|$ en $\zeta = 0$. El plano complejo de la variable ζ se conoce como *plano de Borel*. En algunas situaciones, es posible extender analíticamente $\widehat{\varphi}(\zeta)$ a una función en el plano ζ complejo. La función resultante tendrá singularidades y cortes ramales, pero si es analítica en una vecindad del eje real positivo, y si crece suficientemente lento en infinito, podemos definir su transformada de Laplace,

$$s(\varphi)(z) = \int_0^{\infty} e^{-\zeta} \widehat{\varphi}(z\zeta) d\zeta = z^{-1} \int_0^{\infty} e^{-\zeta/z} \widehat{\varphi}(\zeta) d\zeta, \quad (1.116)$$

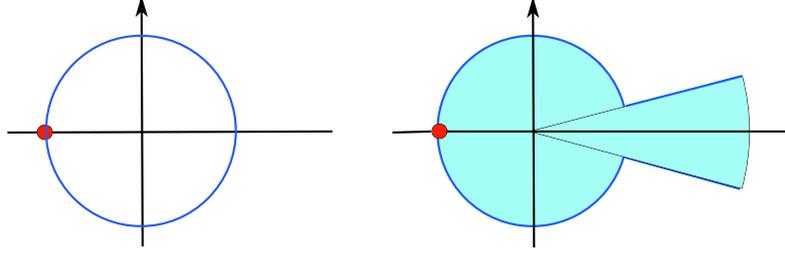


Figura 1.9: La transformada de Borel define una función analítica alrededor de $\zeta = 0$. Hay una singularidad en el círculo de radio $|A|$ (punto rojo). Si es posible continuar analíticamente esta función a una vecindad del eje real positivo, y su transformada de Laplace existe, decimos que la serie es Borel sumable [35].

la cual existirá en alguna región del plano z complejo. En este caso decimos que la serie $\varphi(z)$ es Borel sumable y $s(\varphi)(z)$ es su suma de Borel.

Regresando a nuestro ejemplo (1.109), con $A = -1$, la solución formal es la serie asintótica,

$$\varphi(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n n!}{z^{n+1}}. \quad (1.117)$$

Tiene por transformada de Borel

$$\widehat{\varphi}(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \zeta^{n-1} = \frac{1}{1+\zeta}. \quad (1.118)$$

Como $\widehat{\varphi}(z)$ no tiene singularidades en el eje real positivo, podemos definir la suma de Borel

$$s(\varphi)(z) = \int_0^{\infty} e^{-z\zeta} \frac{d\zeta}{1+\zeta}, \quad (1.119)$$

la cual define una función analítica en la región $\text{Re } z > 0$ y reconstruye una verdadera solución a la ecuación diferencial original (Figura 1.9).

En este ejemplo todas las singularidades en el plano de Borel son reales y negativas, *i.e.* $S_\alpha < 0$, así que la respuesta no perturbativa al problema está dada por la suma de Borel de la serie perturbativa original $\varphi(z)$. Sin embargo, cuando algunas de las acciones ocurren a lo largo del eje real positivo, *i.e.* $S_\alpha > 0$, obstruyen la sumabilidad de Borel de la serie perturbativa y se deben realizar sumas de Borel laterales definidas por,

$$s_{\pm}(\varphi)(z) = z^{-1} \int_{\mathcal{C}_{\pm}} e^{-\zeta/z} \widehat{\varphi}(\zeta) d\zeta, \quad (1.120)$$

donde los contornos \mathcal{C}_{\pm} evitan las singularidades y los cortes ramales al seguir caminos ligeramente por encima y debajo del eje real positivo, e incluir explícitamente la correspondiente trans-serie para obtener el resultado correcto.

Las propiedades de continuación analítica de los aproximantes de Padé pueden ser combinadas con la teoría de transformadas de Borel en un método llamado *método de Borel-Padé*, el cual resulta en una poderosa herramienta para sumar series. Tal combinación se obtiene, primero, empleando los aproximantes para reconstruir la continuación analítica de la transformada de Borel $\widehat{\varphi}(z)$. Para ello empleamos el aproximante,

$$\mathcal{P}_n^\varphi(\zeta) = [(n/2)/(n+1)/2]_{\widehat{\varphi}}(\zeta) \quad (1.121)$$

el cual requiere del conocimiento de los primeros $n+1$ coeficientes de la serie original. La integral

$$s(\varphi)_n(z) = z^{-1} \int_0^\infty d\zeta e^{-\zeta/z} \mathcal{P}_n^\varphi(\zeta) \quad (1.122)$$

da una aproximación a la suma de Borel de la serie (1.116), y puede ser mejorada al incrementar n . Resulta instructivo mostrar el ejemplo expuesto en [36] con cierto detalle para apreciar mejor cómo se aplica el método de suma Borel-Padé. Consideremos el oscilador cuártico puro definido por el hamiltoniano,

$$H(q, p) = p^2 + V(q), \quad V(q) = q^4. \quad (1.123)$$

Como este es un potencial de confinamiento, con $V(q) \rightarrow \infty$ cuando $q \rightarrow \infty$, el operador hamiltoniano tiene un espectro discreto de eigenvalores. En este problema no es posible emplear teoría de perturbaciones, y el único parámetro es \hbar . Esto sugiere usar la expansión WKB para encontrar los niveles de energía. Este método comienza con la condición de cuantización de Bohr-Sommerfeld,

$$\text{vol}_0(E) = 2\pi\hbar \left(k + \frac{1}{2} \right), \quad k \geq 0. \quad (1.124)$$

donde,

$$\text{vol}_0(E) = \oint_\gamma \lambda(q), \quad (1.125)$$

γ es un contorno alrededor de los dos puntos de retorno reales definidos por $V(q) = E$, y

$$\lambda(q) = p(q, E) dq, \quad p(q, E) = \sqrt{E - q^4} \quad (1.126)$$

es una diferencial sobre la curva de energía constante definida por

$$H(q, p) = E. \quad (1.127)$$

La notación (1.125) se debe al hecho de que la integral de arriba calcula el volumen del espacio fase encerrado dentro de la curva (1.127).

Como se sabe, la condición de Bohr-Sommerfeld es solo el término a primer orden de la expansión en potencias \hbar . La condición de cuantización con correcciones cuánticas puede ser formulada de una manera más geométrica de la siguiente manera: podemos resolver la ecuación de Schrödinger

$$\left(-\hbar^2 \frac{d^2}{dq^2} + q^4 - E \right) \psi(q) = 0 \quad (1.128)$$

en términos de la función $p(q, E; \hbar)$ de la forma

$$\psi(q) = \frac{1}{\sqrt{p(q, E; \hbar)}} \exp \left(\frac{i}{\hbar} \int^q p(q', E; \hbar) dq' \right). \quad (1.129)$$

Definimos entonces la diferencial “cuántica”,

$$\lambda(q; \hbar) = p(q, E; \hbar) dq. \quad (1.130)$$

Esta diferencial tiene una expansión en potencias de \hbar cuyo primer término es la diferencial “clásica” $\lambda(q)$. En términos de la diferencial “cuántica” $\lambda(q; \hbar)$ definimos el volumen con correcciones cuánticas como

$$\text{vol}_p(E) = \oint_{\gamma} \lambda(q; \hbar), \quad (1.131)$$

el cual se reduce a $\text{vol}_0(E)$ conforme $\hbar \rightarrow 0$. La condición de cuantización es entonces,

$$\text{vol}_p(E) = 2\pi\hbar \left(k + \frac{1}{2} \right), \quad k \geq 0. \quad (1.132)$$

En el caso del oscilador cuártico puro, se puede escribir [37]

$$\text{vol}_p(E) = \sum_{n=0}^{\infty} \hbar^{2n} \oint_{\gamma} u_{2n}(q) dq, \quad (1.133)$$

donde $u_0(q) = p(q, E)$ y los términos de orden más alto están dados por la relación de recurrencia:

$$\begin{aligned} u_{2n} &= (-1)^n v_{2n}, \quad n \geq 0, \\ v_n &= \frac{1}{2p} \left(v'_{n-1} - \sum_{k=1}^{n-1} v_k v_{n-k} \right). \end{aligned} \quad (1.134)$$

Esto implica que todas las $u_{2n}(q)$ son sumas de funciones racionales de la forma q^n/p^m , y las integrales pueden ser evaluadas explícitamente. Usando la variable

$$\sigma = \frac{\Gamma(1/4)^2}{3\hbar} \sqrt{\frac{2}{\pi}} E^{3/4}, \quad (1.135)$$

se puede mostrar que

$$\frac{1}{\hbar} \text{vol}_p(E) = \sum_{n \geq 0} b_n \sigma^{1-2n}, \quad (1.136)$$

donde los coeficientes b_n pueden ser calculados completamente, y $b_0 = 1$. Esta serie tiene radio de convergencia cero y es posible, entonces, emplear el método de suma Borel-Padé para obtener una serie perturbativa con sentido. En [36] se emplea dicho método y en particular se utiliza a los aproximantes de Pade para extraer información acerca de la estructura de las singularidades en el plano de Borel de la transformada

$$\widehat{\varphi}(\zeta) = \sum_{n \geq 0} \frac{b_{n+1}}{(2n)!} \zeta^{2n} \quad (1.137)$$

de la serie (1.136), que, siguiendo [36], se reescribe convenientemente de la forma,

$$\frac{1}{\hbar} \text{vol}_p(E) = \sigma + \frac{1}{\sigma} \varphi(\sigma), \quad \varphi(\sigma) = \sum_{n \geq 0} b_{n+1} \sigma^{-2n}. \quad (1.138)$$

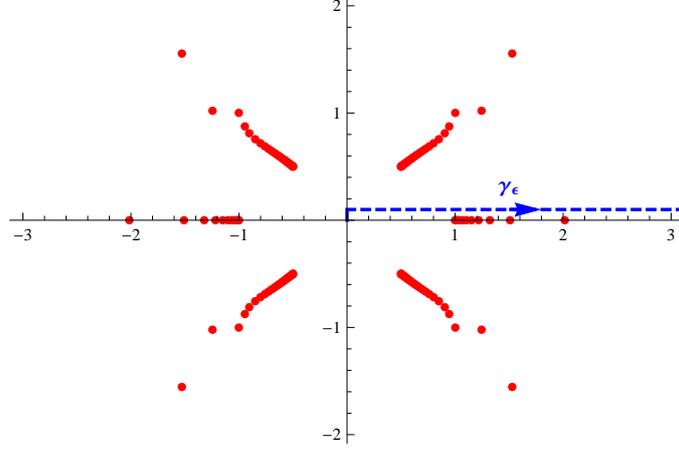


Figura 1.10: Polos del aproximante de Padé (1.121) en el plano ζ , con $n = 320$, para la serie (1.137) [36].

Esto se realiza calculando numéricamente la estructura de polos del aproximante, para $n = 320$, de la transformada de Borel (1.137) para detectar la presencia de cortes ramales, empleando así, la propiedad genérica que tienen los aproximantes de acumular sus polos a lo largo de segmentos para mimetizar los cortes ramales de la función a aproximar. Esta estructura se muestra en la Fig. 1.10. Las 4 líneas de acumulación a ángulos $k\pi/4$, con $k = \pm 1, \pm 3$, las cuales comienzan en los puntos $\pm(1+i)/2$ y $\mp(1-i)/2$, señalan la presencia de instantones complejos (esta estructura coincide con el resultado previo de Voros [38] como se explica en [36]). Además ocurre una acumulación de polos a partir del punto $\zeta = 1$, la cual muestra la última contribución instantónica real, la cual obstruiría la sumabilidad de Borel de $\varphi(z)$. Por ello, es necesario considerar la suma de Borel lateral a lo largo del camino (ver figura 1.121),

$$\gamma_\epsilon = L[0, 1\epsilon] + L[i\epsilon, \infty + i\epsilon] \quad (1.139)$$

donde $L[a, b]$ denota una línea recta en el plano complejo del punto a a b . El camino γ_ϵ evita las singularidades y es homotópico al camino \mathcal{C}_+ . Empleando el procedimiento de suma de Borel con este camino se obtiene una función

$$F_n^{\text{BP}}(\sigma) = \sigma + \frac{1}{\sigma} s(\varphi)_{n, \gamma_\epsilon}(\sigma), \quad (1.140)$$

donde

$$s(\varphi)_{n, \gamma_\epsilon}(z) = z^{-1} \int_{\gamma_\epsilon} d\zeta e^{-\zeta/z} \mathcal{P}_n^\varphi(\zeta) \quad (1.141)$$

y n es el orden del aproximante de Padé. Las funciones (1.140), para $n = 1, 2, \dots$, proveen aproximaciones a la suma de Borel de la serie (1.136). Sin embargo, son complejas debido al contorno de integración complejo (1.139). Es posible verificar que

$$\text{Im}(F_n^{\text{BP}}(\sigma)) \sim \exp(-\sigma), \quad (1.142)$$

para n suficientemente grande, y con todo lo anterior, es posible encontrar una aproximación numérica a los niveles de energía, usando la condición de cuantización, basada en la suma de Borel

de (1.136), *i.e.*

$$\operatorname{Re} (F_n^{\text{BP}}(\sigma)) = 2\pi \left(k + \frac{1}{2} \right), \quad k \geq 0. \quad (1.143)$$

$E_n^{(0)}(k)$ denota los niveles de energía obtenidos a partir de esta condición de cuantización (el subíndice (0) indica que no se están considerando contribuciones instantónicas explícitamente). En la siguiente tabla 5 se muestran algunos de los resultados obtenidos en [36]. Como ahí se explica, los resultados coinciden con los obtenidos en otros trabajos.

El método de Borel–Padé para identificar de manera explícita las distintas regiones asintóticas de la teoría, se ha empleado, también en [36], para resumir series perturbativas de la teoría de cuerdas, en el contexto de la teoría correspondencia norma/gravedad para la teoría *ABJM*, y estudiar la contribución debida a instantones complejos en las series.

k	$E(k)$	$E_{320}^{(0)}(k)$
6	26.528 471 183 682 518 191 8	26.528 471 181 399 704 803
3	11.644 745 511 378	11.644 768 005 3
0	1.060	0.96

Tabla 5: Energía de los niveles $k = 0, 3, 6$ del oscilador armónico cuártico con $\hbar = 1$. En la primer columna se muestra el valor obtenido numéricamente en [40] para $k = 0, 6$ y [39] para $k = 3$, mientras que la segunda columna muestra el valor de la energía obtenida al usar la condición de cuantización (1.143) con $n = 320$.

Con todo lo anterior hemos visto que el método de aproximantes de Padé resulta ser muy útil en varios problemas de física. En este trabajo nos centraremos en una clase muy interesante de problemas de acoplamiento fuerte/débil en teorías de campo que en el contexto de la correspondencia *AdS/CFT*, permiten calcular observables en ambas regiones del acoplamiento, pero la solución exacta que interpola entre ambos comportamientos es desconocida. En el siguiente capítulo repasaremos algunas de las ideas básicas de esta gran área del conocimiento conocida como correspondencia norma/gravedad o *AdS/CFT*.

Capítulo 2

Correspondencia AdS/CFT

La correspondencia AdS/CFT propuesta originalmente por Maldacena [41], junto con las adiciones de Witten [42] y Gubser, Klebanov y Polyakov [43] a inicios del 98, se ha convertido en uno de los mayores desarrollos de la física teórica de la década pasada. En términos generales la correspondencia establece la equivalencia entre dos teorías que a primera vista parecen completamente distintas:

*Una teoría de norma fuertemente acoplada en 4 dimensiones =
Una teoría con gravedad en el espacio-tiempo AdS 5 dimensional.*

Se relaciona entonces la física en 4 dimensiones con la física 5 dimensional, debido a esto se le ha acuñado también el nombre de correspondencia holográfica.

Los fundamentos detrás de 3 de las 4 interacciones fundamentales de la naturaleza, el electromagnetismo y las fuerzas nucleares débil y fuerte, se han logrado formular bajo el marco teórico de cierto tipo de teorías cuánticas de campo conocidas como teorías de norma. Las teorías de norma que constituyen el lado izquierdo de la correspondencia se diferencian de estas últimas en el hecho de que contienen un mayor número de simetrías. Además como era de esperar no es una tarea sencilla hacer cálculos cuando el acoplamiento es fuerte. La dualidad AdS/CFT establece que es posible analizar una teoría de norma fuertemente acoplada usando el concepto de espacio-tiempo curvo, es decir, el espacio-tiempo de anti-de Sitter (AdS).

Aunque la correspondencia AdS/CFT fue formulada originalmente en el contexto de la teoría de cuerdas, con el paso del tiempo la situación se ha ido modificando y la dualidad se ha discutido más allá del contexto de la teoría de cuerdas. Esto se debe a que la correspondencia, desde un punto de vista práctico, se ha convertido en una herramienta de cálculo para entender modelos que se asemejan al mundo real. Existen muchos intentos, por ejemplo, por analizar la fuerza fuerte a través de la correspondencia AdS/CFT , como por ejemplo el plasma de quarks y gluones. De acuerdo con la cromodinámica cuántica (QCD), bajo circunstancias normales los quarks y gluones se encuentran confinados dentro de protones y neutrones. Pero, a temperaturas suficientemente elevadas no existe más este confinamiento y se forma un plasma de quarks y gluones. De acuerdo con los experimentos, el plasma se comporta como un fluido con una viscosidad de corte muy pequeña. Esto implica que el plasma es un sistema fuertemente acoplado (pues no se ha alcanzado la temperatura suficiente para que las partículas se muevan libremente según el fenómeno de libertad asintótica) y el análisis teórico se complica. Sorpresivamente resulta que la viscosidad de corte predicha por la correspondencia AdS/CFT es cercana a la medida experimentalmente.

Las aplicaciones de la correspondencia no se limitan a QCD, se ha aplicado también en el campo de la física nuclear y más recientemente al área de materia condensada.

Desde un punto de vista fundamental, la correspondencia *AdS/CFT* plantea un nuevo paradigma en la comprensión de las teorías de campo fuertemente acopladas y su relación con la gravedad, cuestión realmente sorprendente.

En esta sección describiremos las ideas básicas de la formulación de la correspondencia *AdS/CFT* siguiendo muy de cerca [44, 45, 46, 47, 48, 49].

2.1. Motivación

Esta motivación está basada en la aproximación del grupo de renormalización Kadanoff-Wilson al análisis de sistemas en la red. Consideremos un sistema no gravitacional en la red con espaciamiento a y el hamiltoniano definido por:

$$H = \sum_{x,i} J_i(x, a) \mathcal{O}^i(x) , \quad (2.1)$$

donde x denota los distintos puntos sobre la red, las i 's rotulan los distintos operadores \mathcal{O}^i y las $J_i(x, a)$ son constantes de acoplamiento (o fuentes) del operador correspondiente. En la aproximación del grupo de renormalización podemos engrosar la red como se muestra en la figura 2.1, de tal manera que el hamiltoniano mantenga su forma (2.1), pero las constantes de acoplamiento cambien en cada paso. Si aumentamos el espacio en la red al doble en cada paso los acoplamientos se volverán dependientes de la escala y su evolución estará dada por las ecuaciones de flujo:

$$u \frac{\partial}{\partial u} J_i(x, u) = \beta_i(J_j(x, u), u) , \quad u = (a, 2a, 4a, \dots) , \quad (2.2)$$

donde β_i es la llamada *función β* de la constante de acoplamiento i -ésima. En el acoplamiento débil, las funciones β se pueden determinar a través de aplicar teoría de perturbaciones. En el acoplamiento fuerte la propuesta de la correspondencia *AdS/CFT* es considerar a u como una dimensión extra. Con esta idea, la sucesión de redes para distintos valores de u , se puede visualizar como una sucesión de capas, en la dirección z , en un espacio 5 dimensional. Más aún, las fuentes son consideradas como campos en un espacio con una dimensión extra:

$$J_i(x, u) = \phi_i(x, u) . \quad (2.3)$$

La dinámica de las fuentes ϕ 's estará determinada por alguna acción. Resulta que en la dualidad *AdS/CFT* dicha dinámica está determinada por una teoría gravitacional (*i.e.* por alguna geometría). Por tanto, es posible considerar a la dualidad como una *geometrización* de la dinámica cuántica codificada por el grupo de renormalización. Los acoplamientos microscópicos de la teoría de campo en el *UV* (ultra violeta) pueden ser identificados con los valores de los campos del bulto (*i.e.* en la teoría gravitacional) en la frontera del espacio extra dimensional, definida por un corte a un valor z_0 . Entonces, podemos decir que la teoría de campo corre con la variable z del espacio 5 dimensional.

Las fuentes ϕ_i de la teoría dual gravitacional deben tener la misma estructura tensorial de los operadores duales correspondientes \mathcal{O}^i de la teoría de campo, de tal manera que el producto $\phi_i \mathcal{O}^i$ sea un escalar. Por tanto, un campo escalar será dual a un operador escalar, un campo vectorial A_μ será dual a una corriente J^μ , mientras que un campo de espín dos $g_{\mu\nu}$ será dual a un tensor

simétrico de segundo orden $T_{\mu\nu}$, el cual puede ser identificado de manera natural con el tensor energía momento de la teoría de campo $T_{\mu\nu}$.

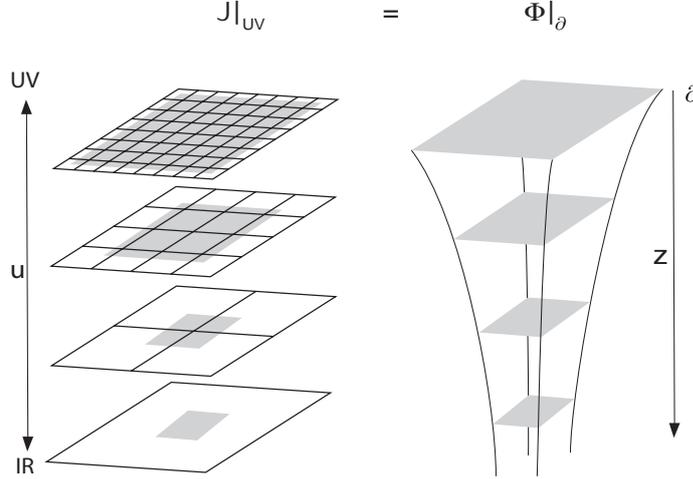


Figura 2.1: En el lado izquierdo se ilustra el método de renormalización Kadanoff-Wilson. En la correspondencia *AdS/CFT* las distintas redes se consideran como capas en un espacio altamente dimensional [44].

2.2. Teoría de Cuerdas

La *cuerda fundamental* es el elemento básico en esta teoría y es descrita por una curva unidimensional en el espacio (*i.e.* una superficie dos dimensional en el espacio-tiempo) que tiene tensión constante $T = \frac{1}{2\pi\alpha'}$, donde α' es una constante con unidades de $(longitud)^2$ y es la única constante dimensional en teoría de cuerdas. Por ello, todo está medido en unidades de $\alpha' = l_s^2$ (longitud de la cuerda). La cuerda se mueve en un espacio \mathcal{M} con métrica $G_{\mu\nu}$. El encaje de la hoja mundo Σ , parametrizada por las variables $(\xi^0, \xi^1) = (\tau, \sigma)$, en el espacio-tiempo \mathcal{M} está caracterizado por el mapeo $\Sigma \rightarrow \mathcal{M}$ con $\xi^\alpha \rightarrow X^\mu(\xi^\alpha)$. La métrica inducida en Σ es entonces:

$$\hat{G}_{\alpha\beta} \equiv G_{\mu\nu} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu, \quad (2.4)$$

Y la dinámica está descrita por la acción,

$$S_{NG} = -T \int d^2\xi \sqrt{-det \hat{G}_{\alpha\beta}}. \quad (2.5)$$

Esta acción depende de manera no lineal de las funciones de encaje $X^\mu(\tau, \sigma)$. Las ecuaciones clásicas de movimiento derivadas de (2.5), son ecuaciones diferenciales parciales, las cuales tienen solución cuando el espacio-tiempo es plano, *i.e.* $G_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$, con condiciones de frontera de Neumann y Dirichlet. Las funciones $X^\mu(\tau, \sigma)$ se pueden representar en sus modos de Fourier, y de hecho es posible separarlos en modos izquierdos y derechos, los cuales representan el movimiento

de la cuerda en la dirección respectiva (análogo a lo que ocurre con la ecuación de onda en una dimensión).

Al cuantizar la cuerda, por el método de cuantización canónica, los distintos modos de oscilación pueden ser interpretados como partículas y el espectro de la cuerda contiene una torre infinita de partículas con masas y espines cada vez más altos, organizadas en trayectorias de Regge¹ con masas del orden $\mathcal{O}(1/l_s)$.

El espectro de masas contiene también taquiones (partículas con $m^2 < 0$), el cual es un signo de inestabilidad de la teoría. Para resolver este problema se debe considerar una cuerda que también tenga coordenadas fermiónicas, y, además, requerir que el sistema sea supersimétrico. En la teoría de supercuerdas, se reinterpreta a la acción de la cuerda como una teoría conforme que vive en la hoja mundo 2 dimensional.

Otro requerimiento de consistencia impuesto por la cuantización es que el número de dimensiones D del espacio en el cual se mueve la cuerda está fijo. Para la supercuerda este valor² es $D = 10$. Esta propiedad ha sido objeto de muchas críticas, sin embargo, estas dimensiones extra no tienen porque tener el mismo significado que las 3+1 dimensiones ordinarias del espacio-tiempo de Minkowski. De hecho en la correspondencia *AdS/CFT* pueden pensarse como aquellas que definen un espacio de configuración (análogo al espacio fase en mecánica clásica).

Como hemos mencionado, las partículas masivas tienen una masa que es múltiplo de $1/l_s$, por tanto son prácticamente inobservables en el límite de bajas energías $l_s \rightarrow 0$. Por tanto, las partículas no masivas son las excitaciones restantes del espectro a bajas energías. Resulta que para convertir el sector *RNS* (*Ramond-Neveu-Schwarz*)³ de la teoría de cuerdas en una teoría consistente (libre de partículas con masa imaginaria, por ejemplo) se debe imponer una restricción adicional conocida como *proyección GSO*⁴. Esta restricción trunca (o proyecta) el espectro de forma tan específica que elimina al taquión y nos deja con una teoría supersimétrica en 10 dimensiones espacio-temporales. Además la proyección GSO implica que los estados resultantes tendrán cierta quiralidad.

La teoría, de cuerdas abiertas y cerradas, con la misma quiralidad, izquierda y derecha, es nombrada “*tipo I*”. Las teorías de cuerdas cerradas se denotan como “*tipo II*”. Si las quiralidades izquierda y derecha se eligen como opuestas, la teoría es “*tipo IIA*” (con modos izquierdos y derechos simétricos) y si son las mismas, la teoría de cuerdas es “*tipo IIB*” (modos izquierdos y derechos antisimétricos). El espectro no masivo de cada una de las teorías tipo IIA/B contiene dos gravitinos (Majorana-Weyl), y por tanto, forman multipletes de la teoría de supergravedad con $\mathcal{N} = 2$ (supersimetrías). Cada uno de los estados en estos multipletes juega un rol importante en la teoría. Hay en total 64 estados en cada uno de los cuatro sectores de la teoría, *i.e.* R-R, R-NS, NS-R y NS-NS (definidos de acuerdo a las condiciones de frontera impuestas en los puntos extremos de la cuerda). El espectro completo es:

Sector NS-NS: Este sector es el mismo para las teorías tipo IIA/B. El espectro contiene un escalar llamado *dilatón* (un estado), un campo de norma dos-forma antisimétrico (28 estados) y un tensor simétrico sin traza de rango 2, el *gravitón* (35 estados).

¹En los años 50 se descubrió que mesones y bariones tienen muchos estados excitados de alto espín arbitrario J y masas M a lo largo de las denominadas trayectorias de Regge: $J = \alpha_0 + \alpha' M^2$ con $\alpha' \approx 1(\text{GeV})^{-2}$.

²En la perspectiva en la cual los campos viven en una teoría de campo conforme dos dimensional, es posible probar que la *anomalía conforme* es eliminada por completo solo si hay 10 escalares. Por tanto, se concluye que la supercuerda vive en 10 dimensiones.

³El formalismo *Ramond-Neveu-Schwarz* es empleado para incorporar la supersimetría a la teoría de cuerdas. Otros formalismos son el de *Green-Schwarz* (GS) y *Berkovits*.

⁴Gliozzi, Scherk y Olive.

Sector NS-R y R-NS: Cada uno de estos sectores contiene un *gravitino* de espín 3/2 (56 estados) y un fermión de espín 1/2 llamado *dilatino* (8 estados). En el caso IIB los dos gravitinos tienen quiralidad positiva, mientras que en la tipo IIA tienen opuestas quiralidades.

Sector R-R: Estos estados son bosones, los cuales se obtienen multiplicando de forma tensorial un par de espinores Majorana-Weyl. En el caso IIA, los dos espinores tienen quiralidad opuesta, y se obtienen un campo de norma vectorial uno-forma (8 estados) y un campo de norma 3-forma (56 estados). En el caso IIB, los espinores tienen la misma quiralidad, y se obtienen un campo escalar cero-forma (1 estado), un campo de norma dos-forma (28 estados) y un campo de norma 4-forma con una intensidad de campo autodual (35 estados).

En particular la teoría de cuerdas tipo *IIB* es la involucrada en la correspondencia *AdS/CFT* y nos será de principal interés.

2.3. El argumento de Maldacena

2.3.1. Supergravedad

La teoría de cuerdas describe un conjunto finito de partículas cuando ignoramos la longitud de la cuerda l_s , así que la teoría de cuerdas debería poderse describir por teorías de campo. Más aún, cuando la constante acoplamiento de las cuerdas $g_s \ll 1$, únicamente dominan los diagramas a nivel árbol. En ese caso las teorías clásicas de campo deberían ser suficientes para describir a la teoría de cuerdas. Dicha teoría se conoce como *supergravedad*, y de hecho, hoy día se encuentran bien establecidos dos resultados sorprendentes al respecto: 1.- el límite de baja energía de la teoría de cuerdas coincide con la teoría de supergravedad y 2.- la teoría de cuerdas produce correcciones a la acción de supergravedad y a las ecuaciones de movimiento asociadas, en la forma de derivadas de orden superior.

La forma de la acción de supergravedad puede ser determinada a partir de principios generales. Por ejemplo, es posible mostrar que el gravitón de la teoría de cuerdas satisface el principio de covariancia, así que la parte de la acción que involucra a la interacción gravitacional está dada por

$$S = \frac{1}{16\pi G_{10}} \int d^{10}x \sqrt{-g} R, \quad (2.6)$$

igual que en relatividad general. La escribimos en 10 dimensiones puesto que la teoría de supercuerdas puede ser cuantizada consistentemente sólo en 10 dimensiones espacio-temporales. G_{10} es la constante de Newton. De manera similar, existen campos invariantes de norma en la teoría de cuerdas, y la parte de la acción que involucra a estos campos está dada por la acción de una teoría de norma usual.

La constante de acoplamiento de la teoría de cuerdas es g_s . En la teoría de supergravedad, las constantes de acoplamiento son G_{10} y g_{YM} asociada a los campos de norma. Entonces, podemos relacionar g_s con las constantes de acoplamiento de supergravedad. Expandiendo $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, la acción del gravitón se escribe de manera esquemática como

$$S = \frac{1}{16\pi G_{10}} \int d^{10}x (\partial h \partial h + h \partial h \partial h + h^2 \partial h \partial h + \dots). \quad (2.7)$$

Esto implica que la emisión de un gravitón es proporcional a $G_{10}^{1/2}$. Debido a que la emisión de una cuerda cerrada es proporcional a g_s , obtenemos que $G_{10} \sim g_s^2$. Similarmente, la acción del campo de norma es esquemáticamente:

$$S = \frac{1}{g_{YM}^2} \int d^{p+1}x (\partial A \partial A + A^2 \partial A + A^4). \quad (2.8)$$

Esto implica que la emisión de un campo de norma es proporcional a g_{YM} . Como la emisión de una cuerda abierta es proporcional a $g_s^{1/2}$ obtenemos,

$$g_{YM}^2 \sim g_s. \quad (2.9)$$

El análisis dimensional constriñe aún más la forma de las constantes de acoplamiento de la teoría de campo. Como usualmente se toma a la métrica como adimensional, deducimos a partir de (2.6) que la constante de Newton tiene dimensiones $[G_{10}] = L^8$. En teoría de cuerdas, la escala fundamental es la longitud de la cuerda l_s , la cual representa la escala de longitud característica de la cuerda. Entonces,

$$G_{10} \sim g_s^2 l_s^8 \quad (2.10)$$

En cuanto al campo de norma, tiene dimensiones de $[A] = L^{-1}$ a partir de (2.7). Para que la acción sea adimensional, $[g_{YM}^2] = L^{p-3}$. Entonces $g_{YM}^2 \sim g_s l_s^{p-3}$.

2.3.2. D-branas

El descubrimiento de que las *branas de Dirichlet* o D-branas, son objetos dinámicos extendidos no perturbativos de diversas dimensiones, presentes de manera natural en las teorías de cuerdas tipo I y II, ha llevado a un notable progreso en la comprensión de las conexiones existentes entre campos de norma y cuerdas. Estos avances tienen como punto central la doble naturaleza de las D-branas:

- Por un lado, las D-branas admiten una descripción en términos de la teoría perturbativa de cuerdas abiertas. Se definen como hiperplanos p -dimensionales sobre los cuales pueden terminar los extremos de la cuerda. Los modos no masivos de las cuerdas abiertas que terminan en una D-brana describen las fluctuaciones transversales de la brana y originan campos de norma en su volumen mundo.
- Por otro lado, las D-branas pueden entenderse como fuentes de campos de cuerdas cerradas. Son soluciones clásicas no perturbativas de la teoría de cuerdas, es decir soluciones de las ecuaciones de movimiento a baja energía de la teoría de supergravedad.

Resulta que a intensidad con la que una pila de N Dp-branas reaccionan con el espacio tiempo en el cual están inmersas, es gobernada por el acoplamiento $G_N M \sim g_s^2 \frac{N}{g_s} = g_s N$. Por un lado $g_s N$ es el parámetro que controla la expansión perturbativa de las cuerdas abiertas que describen excitaciones de la pila de Dp-branas, y controla, además, la emisión de gravitones por parte de la pila de Dp-branas. Podemos entender, por tanto, a esta pila como viviendo en un fondo plano y describir a sus excitaciones con una expansión perturbativa de cuerdas abiertas solo en la región $g_s N \ll 1$. Por otro lado, cuando $g_s N \gg 1$, las branas reaccionan fuertemente con el espacio-tiempo convirtiéndose en fuente de una geometría de p-brana negra extremal (el análogo 10 dimensional del agujero negro extremal de Reissner-Nordström, extendido en p dimensiones espaciales). La

validez de esta descripción en dicho régimen se puede entender a partir del hecho de que el radio característico de la p-brana negra extremal es⁵ $L^{7-p} = c_p g_s N l_s^{7-p}$, por lo que esta solución de supergravedad es confiable solo si $g_s N \gg 1$.

En ambos regímenes obtenemos, por tanto, 2 descripciones alternativas del mismo sistema físico, aunque válidas en regímenes opuestos, por lo que *no* existe una dualidad entre ambas. En otras palabras, tenemos un sólo sistema N Dp-branas inmersas en el fondo de supergravedad que ellas mismas generan, y distintos aspectos de la teoría cobran relevancia según el valor del acoplamiento $g_s N$.

El argumento de Maldacena toma como punto de partida la *dualidad* entre ambas descripciones, es decir, si bien la geometría de p-brana negra extremal originada por la pila de D-branas, y la descripción de sus excitaciones a través de cuerdas cerradas, acepta un tratamiento perturbativo cuando $g_s N \gg 1$, podemos imaginar que esta descripción es válida también en el régimen no perturbativo $g_s N \leq 1$. De manera similar, podemos imaginar que la descripción en términos de la pila de N Dp-branas en el fondo plano, y sus excitaciones como cuerdas abiertas y cerradas, la cual se describe por teoría de perturbaciones cuando $g_s N \ll 1$, es válida también en el régimen no perturbativo, $g_s N \geq 1$. Con este punto de vista, sí tendríamos una dualidad puesto que ambas descripciones se traslapan para todo valor del acoplamiento.

Esta dualidad está sustentada en distintos argumentos por ejemplo, que ambas descripciones conducen al mismo resultado para las amplitudes de dispersión de cuerdas cerradas a bajas energías [58], y también para la amplitud de absorción de cuerdas cerradas en el caso $p = 3$ [59], además, el hecho de que un sistema de D-branas es capaz de reproducir la tasa de radiación de Hawking de la brana negra correspondiente [60].

Tomando como punto de partida esta dualidad, la idea de Maldacena para relacionar ambos sistemas fue considerar un *límite de baja energía*, en el cual la teoría de gravedad cuántica de cuerdas cerradas se reduce a una teoría de supergravedad. Del lado de las cuerdas abiertas esto corresponde, esencialmente, a la aproximación de punto silla en el cual el límite plano $N \rightarrow \infty$ de la teoría de norma $SU(N)$ es tomado. Para ver esto con más detalle consideremos a la teoría de cuerdas tipo IIB con una pila de N D3-branas paralelas en un espacio-tiempo 10 dimensional, estas se extienden a lo largo de un hiperplano 3+1 dimensional y supongamos que están localizadas en el mismo punto del espacio transversal 6 dimensional. La teoría contiene dos tipos de excitaciones: cuerdas abiertas y cerradas. Las cuerdas abiertas son excitaciones de las D3-branas. A energías por debajo de la escala de masa de las cuerdas $(\alpha')^{-1/2}$, solo estados no masivos de las cuerdas son excitados. Las cuerdas cerradas son excitaciones del espacio 10 dimensional (*i.e.* el *bulto*). Como mencionamos antes, la descripción a bajas energías de las cuerdas cerradas está dada por la teoría de supergravedad tipo IIB. En el caso de las cuerdas abiertas, la descripción a bajas energías está dada por la teoría $\mathcal{N} = 4$ $SU(N)$ Super Yang-Mills. De manera esquemática, la acción efectiva para las excitaciones no masivas de N D3-branas a bajas energías tiene la forma:

$$S = S_{\text{bulto}} + S_{\text{brana}} + S_{\text{int}}, \quad (2.11)$$

donde, S_{bulto} = supergravedad en $D = 10$ incluyendo derivadas de orden superior, *i.e.* correcciones α' .

S_{brana} = acción de Dirac-Born-Infeld más el término de Chern-Simons, definida en el volumen mundo 3+1 dimensional:

⁵ c_p es una constante que depende de las dimensiones espaciales p y está dada por el valor $(4\pi)^{(5-p)/2} \Gamma\left(\frac{7-p}{2}\right)$.

cuando α' es pequeña obtenemos la acción de $\mathcal{N} = 4$ Super Yang Mills, $SYM \sim Tr \{F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\}$ más interacciones $\sim \alpha' Tr \{F^4\} + \dots$.

S_{int} = interacción bulto-brana: el término principal proviene de la métrica de fondo g en la acción de la brana.

Cuando $\alpha' \rightarrow 0$, la acción del bulto se reduce a la acción de Einstein-Hilbert con acoplamiento $\kappa = \sqrt{8\pi G_{10}} \sim g_s \alpha'^2$. Podemos expandir esta acción alrededor del espacio plano $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu}$ obteniendo:

$$S_{\text{bulto}} = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^{10}x \sqrt{-g} R_g \sim \int d^{10}x \left((\partial h)^2 + \kappa (\partial h)^2 h + \dots \right). \quad (2.12)$$

Esta forma describe la propagación de modos no masivos libres (incluyendo al gravitón), más algunas interacciones que son proporcionales a potencias positivas de la raíz cuadrada de la constante de Newton. En el límite de bajas energías $\kappa \sim g_s \alpha'^2 \rightarrow 0$, los términos de $\mathcal{O}(\kappa)$ no contribuyen de tal manera que la gravedad se vuelve libre a distancias grandes (IR).

Haciendo la misma expansión en el lagrangiano de interacción obtenemos potencias de κ solamente,

$$S_{\text{int}} \sim \int d^4x \sqrt{g} Tr \{F^2\} + \dots \sim \kappa \int d^4x h_{\mu\nu} Tr \left\{ F_{\mu\nu}^2 - \frac{\delta_{\mu\nu}}{4} F^2 \right\} + \dots \quad (2.13)$$

Es importante mencionar que el término “bajas energías” se refiere a que las energías relevantes E se mantienen fijas mientras que $\alpha' \rightarrow 0$ (manteniendo todos los demás parámetros adimensionales como N o g_s finitos). En este límite los términos de interacción de S_{int} se anulan.

En resumen, en el límite bajas energías terminamos con dos teorías desacopladas: Supergravedad de partículas no masivas y libres en el bulto, y $\mathcal{N} = 4$ $SU(N)$ Super Yang-Mills en la brana.

Ahora, consideremos el otro lado de la dualidad. Las Dp-branas son soluciones tipo solitón de la acción de supergravedad y actúan como fuente de los campos en el bulto. Tienen una hipersuperficie plana $p + 1$ dimensional con invariancia bajo el grupo de Poincaré $\mathbb{R}^{p+1} \times SO(1, p)$ y el espacio transversal es de dimensión $D - p - 1$.

Un ansatz que resuelve la ecuación de movimiento asociada a la acción de supergravedad tipo IIB, para $p = 3$ (geometría de una 3-brana extremal [61]) es

$$ds^2 = \frac{1}{\sqrt{H(\mathbf{y})}} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + \sqrt{H(\mathbf{y})} (dy^2 + y^2 d\Omega_5^2), \quad (2.14)$$

$$\text{donde } H(\mathbf{y}) = 1 + \left(\frac{L}{y}\right)^4, \quad L^4 := 4\pi g_s N \alpha'^2.$$

Las variables x^μ son coordenadas sobre el volumen mundo de la D3-brana y \mathbf{y} denota las coordenadas perpendiculares a la brana. En el límite $y^4 \gg L^4$ recuperamos el espacio-tiempo plano 10 dimensional. Cuando $y < L$, la métrica parece singular, no obstante, empleando la nueva coordenada $z := L^2/y$ vemos que en el límite cuando z es grande la métrica toma la siguiente forma asintótica:

$$ds^2|_{z \rightarrow \infty} = \frac{L^2}{z^2} \left(\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dz^2 \right) + L^2 d\Omega_5^2, \quad (2.15)$$

y en este límite cerca del horizonte, i.e. $y \rightarrow 0 \Leftrightarrow z \gg L$, la geometría cerca de la brana es regular y altamente simétrica (tiene grupo de isometría $SO(4, 2) \times SO(6)$). Aparte de la esfera S^5

representada por $d\Omega_5^2$, recuperamos la métrica del espacio anti-de Sitter en 5 dimensiones (AdS_5). Una propiedad muy importante la métrica (2.14) es que tiene un corrimiento al rojo no constante, $g_{tt} = (H(\mathbf{y}))^{-1/4}$ con los siguientes límites cerca del horizonte:

$$(H(\mathbf{y}))^{-1/4} = \left(1 + \frac{L^4}{y^4}\right)^{-1/4} = \begin{cases} \sim 1 & \text{:si } y \text{ es grande} \\ \sim y/L & \text{:si } y \text{ es pequeña.} \end{cases} \quad (2.16)$$

La energía E_p de un objeto medido por un observador a y constante, difiere de la energía E_i del mismo objeto, medida por un observador en el infinito según la ecuación:

$$(H(\mathbf{y}))^{-1/4} E_p = E_i. \quad (2.17)$$

Cuando el objeto se acerca a $y \rightarrow 0$, parece tener cada vez menor energía para el observador en el infinito. Tomemos el límite de baja energía en el marco definido por (2.14). Hay dos tipos de excitaciones a bajas energías desde el punto de vista de un observador en infinito: partículas no masivas propagándose en la región del bulto con longitudes de onda cada vez más grandes, y cualquier tipo de excitación de partículas acercándose a $y \rightarrow 0$. En el límite de bajas energía estos dos tipos de excitaciones se desacoplan una de la otra. Las partículas no masivas del bulto se desacoplan de la región cerca del horizonte (alrededor de $y = 0$) porque la sección transversal de absorción a baja energía se comporta como $\sigma \sim \omega^3 L^8$ [59], donde ω es la energía. Esto puede entenderse a partir del hecho de que en este límite la longitud de onda de cada partícula se vuelve mucho más grande que el tamaño gravitacional típico de la brana de orden L . De manera similar, para las excitaciones que viven muy cerca a la región $y = 0$ es cada vez más difícil escapar del potencial gravitacional de la región $AdS_5 \times S^5$. Por tanto, la teoría a baja energía consiste de dos partes desacopladas una de la otra, una es la teoría de supergravedad libre en el bulto y la segunda es la región cerca del horizonte, *i.e.* la geometría del espacio $AdS_5 \times S^5$.

Hemos visto, por tanto, que desde ambos puntos de vista, el de una teoría de campo de cuerdas abiertas viviendo en la brana, y de la descripción de supergravedad, tenemos dos teorías desacopladas en el límite de bajas energías. En ambos casos uno de los sistemas desacoplados es la teoría de supergravedad en un espacio-tiempo plano, y dado que teníamos una equivalencia entre descripciones desde el principio, esto llevó a Maldacena [41, 62] a concluir que las dos componentes restantes son equivalentes, es decir:

$$\text{Teoría de cuerdas en } AdS_5 \times S^5 \simeq \text{Teoría de norma } SU(N), \mathcal{N} = 4 \text{ en } 4D. \quad (2.18)$$

El signo \simeq indica una dualidad completa: los dos lados son lenguajes distintos que describen la *misma* física. El enunciado “Teoría de cuerdas en $AdS_5 \times S^5$ ” se refiere a que la teoría de cuerdas vive en un espacio 10 dimensional, el cual es *asintóticamente* $AdS_5 \times S^5$. En particular, todos los procesos gravitacionales están incluidos en el lado izquierdo; por ejemplo es posible colapsar un agujero negro en AdS .

2.4. Dualidad de acoplamiento: fuerte/débil

La conjetura (2.18) también especifica cómo los parámetros de ambos lados se relacionan entre sí. Del lado de la teoría de cuerdas tenemos dos parámetros, el acoplamiento de las cuerdas g_s y

la escala de curvatura (en unidades de las cuerdas) del espacio-tiempo que genera la pila de N D3-branas en el límite $g_s N \gg 1$: L/l_s . Del lado de la teoría de norma, están el rango del grupo de norma N y el acoplamiento de Yang-Mills g_{YM} . En cambio, resulta más conveniente emplear N y el llamado *acoplamiento de 't Hooft* $\lambda := g_{\text{YM}} N$ como parámetros independientes. Esto último debido al descubrimiento de 't Hooft, quién mostró que para teorías de norma $SU(N)$, en el límite $N \rightarrow \infty$ mientras λ está fija, sólo diagramas de Feynman planos contribuyen de tal manera que corresponden a una expansión de teoría de cuerdas con acoplamiento $1/N$. Esto sugiere que teorías de norma $SU(N)$ son equivalentes a teorías de cuerdas, al menos cuando N es grande.

Si recordamos las ecuaciones (2.9) y (2.14), la relación entre los parámetros de ambas teorías es:

$$4\pi g_s = g_{\text{YM}}^2 \sim \frac{\lambda}{N} \quad \text{y} \quad \frac{L}{l_s} = (4\pi g_s N)^{1/4} \sim \lambda^{1/4} \quad (2.19)$$

El régimen en el cual la solución de gravedad (sin correcciones a la geometría por parte de la teoría de cuerdas) es válida, requiere que L sea muy grande (en unidades de las cuerdas), *i.e.* $\lambda \gg 1$. Por otro lado, para suprimir las correcciones cuánticas necesitamos mantener g_s pequeña. Por tanto, la teoría de gravedad clásica es válida en el régimen de parámetros $N \gg \lambda \gg 1$.

La forma más fuerte de la correspondencia conjetura que la dualidad entre la teoría de norma supersimétrica $SU(N)$ y la teoría de supergravedad tipo IIB, es válida para cualquier valor de N y g_s , *i.e.* la teoría $\mathcal{N} = 4$ $SU(N)$ SYM es exactamente equivalente a la teoría, *completa*, de cuerdas IIB en $AdS_5 \times S^5$. Por otro lado la forma más débil de la correspondencia establece a la dualidad como cierta en el límite $\lambda \gg 1$. Esto relaciona la teoría SYM $\mathcal{N} = 4$ en el régimen de acoplamiento fuerte y en el límite cuando N es grande, con supergravedad clásica. Esto es:

$$N \rightarrow \infty \quad \& \quad \lambda \rightarrow \infty \quad \Leftrightarrow \quad g_s \rightarrow 0 \quad \& \quad \alpha' \rightarrow 0. \quad (2.20)$$

Vemos entonces que la correspondencia *AdS/CFT* es una *dualidad entre acoplamientos fuerte/débil*: Cuando la teoría de norma es fuertemente acoplada (y por tanto todas las técnicas de cálculo perturbativo son inútiles), podemos estudiarla usando gravedad débilmente acoplada, en el contexto de teoría de cuerdas.

Resumiendo

- La forma más fuerte de la correspondencia *AdS/CFT* o conjetura de Maldacena, establece la equivalencia entre dos teorías: 1.- la teoría de cuerdas tipo IIB en el espacio $AdS_5 \times S^5$ donde ambos AdS_5 y S^5 tienen el mismo radio L , y donde el acoplamiento de cuerdas es g_s . Y 2.- la teoría $\mathcal{N} = 4$ SYM en 4 dimensiones, con grupo de norma $SU(N)$ y acoplamiento g_{YM} . La identificación entre los parámetros de ambos lados de la dualidad son:

$$g_s = g_{\text{YM}}^2 \quad L^4 = 4\pi g_s N (\alpha')^2. \quad (2.21)$$

- *AdS/CFT* es una *dualidad de acoplamientos fuerte/débil*: cuando la teoría de norma es fuertemente acoplada (y por tanto todas las técnicas perturbativas fallan), podemos estudiarla usando el contexto de una teoría de cuerdas débilmente acoplada.
- El mapeo *AdS/CFT* es *holográfico*. De hecho, la correspondencia provee el ejemplo más concreto del principio holográfico, sugerido años atrás por 't Hooft [50] y Susskind [51].

2.5. Diccionario AdS/CFT

Una cosa particularmente sorprendente acerca de la correspondencia es la existencia de una quinta coordenada radial, y ó $z := L^2/y$ del lado de la gravedad.

$$ds_{AdS_5}^2 = \frac{L^2}{z^2}(-dt^2 + d\vec{x}^2 + dz^2). \quad (2.22)$$

Esta resulta ser un ingrediente crucial en los modelos donde se aplica la correspondencia AdS/CFT , así como su identificación con la escala de energía en la teoría de campo dual. Consideremos a la métrica euclidiana de AdS_5 en coordenadas de Poincaré (con $L = 1$)

$$H = \{(z, \mathbf{x}), z > 0, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4\}, \quad \partial H = \mathbb{R}^4, \quad (2.23)$$

esto es, consideremos:

$$ds^2 = \frac{1}{z^2}(dz^2 + d\mathbf{x}^2), \quad (2.24)$$

La identificación entre el radio, y ó $z := L^2/y$, y la escala de energía se sigue de notar que la dilatación $\mathbf{x} \rightarrow \lambda \mathbf{x}$ en SYM, que es una transformación conforme perteneciente al grupo $SO(4, 2)$, corresponde del lado de la teoría de cuerdas a la isometría de AdS_5 ,

$$\mathbf{x} \rightarrow \lambda \mathbf{x}, \quad z \rightarrow \lambda z. \quad (2.25)$$

Con esto vemos que al explorar distancias más pequeñas o más grandes en SYM, estamos explorando del lado de AdS, ubicaciones con menores o mayores valores de la coordenada radial z : Las rebanadas de AdS a distinto valor de z contienen información sobre lo que ocurre en SYM a distintas escalas de distancia o energía. Descubrimos entonces que la coordenada radial invertida z en AdS corresponde a una *escala de distancia* (en el sentido de una escala de resolución espacial) en SYM. Equivalentemente la coordenada radial r/L^2 corresponde a una escala de energía de SYM. Notemos que la región cercana a la frontera en AdS, que es el IR (distancias grandes) en la teoría gravitacional, corresponde al UV de la teoría de la teoría de norma, y viceversa. Por esta razón, el mapeo:

$$z \Leftrightarrow l \quad \text{ó} \quad \frac{r}{L^2} \Leftrightarrow E \quad (2.26)$$

se conoce como *conexión UV/IR*. Esta conexión provee de una buena guía para entender varios procesos físicos. Por ejemplo, una partícula en el bulto que cae en lo profundo de AdS (debido al potencial atractivo generado por la curvatura de AdS) es descrita por una excitación localizada que se extiende con el tiempo en la teoría de norma. En la presencia de un agujero negro, la partícula del bulto acercándose al horizonte puede ser pensada como la excitación térmica de la teoría de norma. Sin embargo, la forma precisa de la dualidad UV/IR se ve oscurecida para cualquier otra geometría distinta a AdS puro, así que para una geometría genérica en el bulto es más útil sólo asintóticamente; en lo profundo del bulto o para procesos que evolucionan rápidamente no necesariamente provee de una guía confiable.

Un último punto al respecto es que frecuentemente se dice que la teoría de campo “vive en la frontera de AdS”, porque es en el límite $z \rightarrow 0$ donde los datos de la teoría de cuerdas describen excitaciones completamente localizadas de SYM. Es importante, sin embargo, tener presente que al hablar de la teoría de cuerdas en AdS, es incorrecto considerar simultáneamente a alguna teoría

de campo que vive en $z = 0$ (o en cualquier otra hoja de la foliación radial). La correspondencia expresa, en el mejor de los casos, que SYM es una descripción alternativa de supergravedad en AdS, y contiene información sobre lo que ocurre en *todos* los valores de z , no solo en algún z particular

Dualidad Bulto/Frontera

Es natural preguntarse ¿a qué corresponden los observables de SYM en el bulto? Al nivel más elemental posible la respuesta es bastante sencilla: *a cada operador en el bulto ϕ corresponde un operador \mathcal{O} en la teoría de norma.* Para llegar a tal conclusión consideremos el caso más sencillo posible, el del campo escalar. Un observable típico en SYM $\mathcal{N} = 4$ en $D = 4$ está dado por los valores esperados de operadores locales invariantes de norma, *i.e.*

$$\mathcal{O}_\Delta(x) = sTr \{ X^{i_1} X^{i_2} \dots X^{i_\Delta} \} = N^{(1-\Delta)/2} C_{i_1 \dots i_\Delta} Tr \{ X^{i_1} X^{i_2} \dots X^{i_\Delta} \} \quad (2.27)$$

operadores de traza individual, donde Δ denota la dimensión conforme de los operadores, X^i son los campos escalares de SYM $\mathcal{N} = 4$, los cuales se transforman bajo la representación $\mathfrak{6}$ del grupo $SO(6) \cong SU(4)$ y $C_{i_1 \dots i_\Delta}$ pertenecen a la representación simétrica tensorial de rango Δ del grupo $SO(6)$. La traza se toma sobre los índices de color (todos los campos se transforman en la representación adjunta de $SU(N)$). El factor de normalización se elige de tal manera que los diagramas planos escalen como N^2 . Nótese el hecho importante de que estos operadores están localizados en las coordenadas del espacio de Minkowski x^μ pero *no* en las coordenadas del espacio interno S^5 asociado a la simetría $\mathcal{R} SU(4)$. De hecho, tienen números cuánticos específicos bajo esta simetría, es decir, pertenecen a alguna representación específica (con dimensión finita) de este grupo de transformaciones. Sabiendo que el espacio interno S^5 en SYM corresponde al factor S^5 del espacio-tiempo dual⁶, debemos esperar entonces que los operadores $\mathcal{O}_\Delta(x)$ correspondan no a campos localizados en las 9+1 dimensiones del espacio-tiempo $\phi(x^M)$, sino a campos $\phi(x^m)$ en AdS_5 , con propiedades de transformación específicas bajo el grupo de isometrías de la esfera. Es decir, cada campo 10-dimensional se descompone en una torre infinita de modos de Kaluza-Klein (KK) sobre la esfera 5-dimensional.

Consideremos la métrica Euclidiana de AdS_5 escrita en coordenadas de Poincaré, *i.e.*

$$ds^2 = \frac{1}{z^2} (dz^2 + d\mathbf{x}^2), \quad (2.28)$$

parece que diverge en la frontera $z \rightarrow 0$, pero esto se debe únicamente a las coordenadas empleadas. Descompongamos ahora los campos que viven en AdS en modos de KK sobre la esfera S^5 , *i.e.* expandamos los campos en armónicos esféricos $Y_\Delta(\mathbf{y})$ asociados a la esfera S^5 :

$$\phi(x, \mathbf{y}) = \sum_{\Delta=0}^{\infty} \phi_\Delta(x) Y_\Delta(\mathbf{y}) \quad (2.29)$$

Viven en AdS_5 , así que deben estar rotulados por su dimensión Δ . Lejos de la región de interacción del bulto, asumimos que los campos son asintóticamente libres (justo como se asume en la derivación del formalismo LSZ en la teoría de campo en espacio plano). Los campos libres satisfacen entonces:

$$(\square_5 + m_\Delta^2) \phi_\Delta^0(x) = 0, \quad m_\Delta^2 = \Delta(\Delta - 4) \text{ para escalares.} \quad (2.30)$$

⁶Una manera de argumentar tal aseveración se basa en el pegado de simetrías que debe existir entre ambos lados de la correspondencia en caso de ser cierta.

La ecuación (2.30) tiene soluciones caracterizadas por su comportamiento asintótico cuando $z \rightarrow 0$,

$$\phi_{\Delta}^0(z, \mathbf{x}) \sim \begin{cases} \sim z^{\Delta} & : \text{normalizable,} \\ \sim z^{4-\Delta} & : \text{no normalizable.} \end{cases} \quad (2.31)$$

Regresando a la teoría interactuante, las soluciones tendrán los mismos comportamientos asintóticos que el caso libre. Además, los campos no normalizables definen campos en la frontera [43], como:

$$\bar{\phi}_{\Delta} := \lim_{z \rightarrow 0} \phi_{\Delta}(z, \mathbf{x}) z^{\Delta-4}. \quad (2.32)$$

Podemos identificar los modos normalizables de AdS ϕ_{Δ} como valores de expectación del vacío (vev) de los operadores de la teoría de campo \mathcal{O}_{Δ} y los modos no normalizables $\bar{\phi}_{\Delta}$ como las fuentes de estos operadores. El campo clásico tiene entonces la información:

$$\phi_{\Delta}(z, \mathbf{x}) \sim \langle \mathcal{O}_{\Delta} \rangle z^{\Delta} + \bar{\phi}_{\Delta} z^{4-\Delta}. \quad (2.33)$$

Podemos entonces expresar la correspondencia *AdS/CFT* en términos de la equivalencia entre las funciones de correlación de la teoría SYM y la dinámica de supergravedad como sigue: la función generadora $W[\bar{\phi}_{\Delta}]$ para todos los operadores de una traza \mathcal{O}_{Δ} en SYM está dada en términos de las fuentes $\bar{\phi}_{\Delta}$. *Los valores en la frontera, 4 dimensional del espacio 5 dimensional AdS, de estos campos se convierten en fuentes para los operadores de campo.* En otras palabras, en el lado de la teoría de campo se cumple

$$e^{-W[\bar{\phi}_{\Delta}]} = \left\langle \exp\left(-\int_{\partial H} d^4 z \bar{\phi}_{\Delta} \mathcal{O}_{\Delta}\right) \right\rangle, \quad (2.34)$$

El lado de *AdS* está gobernado por una acción en términos de los operadores en el bulto $S[\bar{\phi}_{\Delta}]$ en el marco de supergravedad tipo IIB en $AdS_5 \times S^5$. La conjetura *AdS/CFT* para funciones de correlación expresa que es precisamente esta acción clásica la que entra como la funcional generadora para la subclase de operadores $\{\mathcal{O}_{\Delta}\}$ en la teoría de campo dual. La correspondencia *AdS/CFT* para correladores es entonces

$$W[\bar{\phi}_{\Delta}] = S[\phi_{\Delta}] \Big|_{\lim_{z_0 \rightarrow 0} (\phi_{\Delta}(z_0, \mathbf{z}) z_0^{\Delta-4}) = \bar{\phi}_{\Delta}(\mathbf{z})}. \quad (2.35)$$

Esta última fórmula expresa cómo la función generadora de la teoría de campo (2.34) se identifica con la acción clásica en el espacio Anti-de Sitter, sujeta a la condición de frontera de que los campos ϕ_{Δ} tengan el valor $\bar{\phi}_{\Delta}$ en la frontera. La acción S es entonces la función generadora de los diagramas a nivel árbol en el espacio *AdS*, un enunciado realmente no trivial. La relación (2.34) se conoce como ecuación de GKP-Witten, en honor a sus descubridores, y aunque en este apartado tratamos únicamente el caso del campo escalar, esta ecuación es válida también para otros grados de libertad de la teoría SYM.

Parámetros

Con respecto a la relación entre los parámetros de ambos lados de la dualidad,

$$\begin{aligned}
L^4 &\simeq g_s N l_s^4, \\
G_{10} &\simeq g_s^2 l_s^8, \\
g_s &\simeq g_{YM}^2.
\end{aligned} \tag{2.36}$$

Ver ecuaciones (2.10) y (2.19). Eliminando g_s de estas expresiones obtenemos,

$$N^2 \simeq \frac{L^8}{G_{10}}, \quad \lambda \simeq \left(\frac{L}{l_s}\right)^4. \tag{2.37}$$

La esfera \mathbb{S}^5 corresponde a la simetría \mathcal{R} desde el punto de vista de la teoría de campo. Usualmente se compactifica a \mathbb{S}^5 y se considera la teoría gravitacional 5 dimensional resultante. La teoría resultante de este procedimiento recibe el nombre de *Norma/Gravedad*.

El procedimiento de compactificación es bastante complicado, tanto como la acción de la teoría norma/gravedad, pero en nuestro caso, no es necesario ir a través de todo el cálculo, pues es posible inferir la acción. La parte 5 dimensional es el espacio-tiempo AdS_5 , esta es una solución a las ecuaciones de Einstein con constante cosmológica negativa con acción,

$$S_5 = \frac{1}{10\pi G_5} \int d^5x \sqrt{-g_5} (R_5 - 2\Lambda), \quad 2\Lambda := -12/L^2. \tag{2.38}$$

Como \mathbb{S}^5 tiene radio L , la compactificación da como resultado

$$\frac{1}{16\pi G_{10}} \int d^{10}x \sqrt{-g_{10}} R_{10} = \frac{L^5 \Omega_5}{16\pi G_{10}} \int d^5x \sqrt{-g_5} (R_5 + \dots). \tag{2.39}$$

Entonces, la constante de Newton G_5 está dada por $G_5 \simeq G_{10}/L^5$. Por tanto, podemos reescribir (2.36) como,

$$N^2 = \frac{\pi L^3}{2 G_5}, \quad \lambda = \left(\frac{L}{l_s}\right)^4. \tag{2.40}$$

Las ecuaciones (2.40) se conocen como el *diccionario AdS/CFT*.

Simetrías

Es interesante ver cómo se revela la correspondencia en las simetrías de ambas teorías. Del lado de $AdS_5 \times \mathbb{S}^5$ el grupo de isometría de AdS_5 es $SO(4, 2)$, el cual es explícito cuando escribimos AdS como el hiperboloide encajado.

$$-X_{-1}^2 - X_0^2 + X_1^2 + \dots + X_4^2 = -L^2 \tag{2.41}$$

en $\mathbb{R}^{4,2}$ con métrica $ds^2 = -dX_{-1}^2 - dX_0^2 + dX_1^2 + \dots + dX_4^2$; y de manera similar, el grupo de isometría de \mathbb{S}^5 es $SO(6)$, así que la simetría (bosónica) completa es $SO(4, 2) \times SO(6)$. Del lado de la teoría conforme, el grupo conforme en cuatro dimensiones es $SO(4, 2)$ (el cual incluye tanto a las transformaciones de Poincaré como transformaciones de escala y transformaciones conformes especiales), y los seis campos escalares ϕ^i y cuatro fermiones están relacionados a través de la simetría \mathcal{R} global $SU(4) \simeq SO(6)$. Ambos lados también tienen 32 supersimetrías, las cuales se manifiestan como espionres de Killing en $AdS_5 \times \mathbb{S}^5$ del lado de gravedad, y como un álgebra superconforme del lado de la teoría de norma.

2.6. $\mathcal{N} = 4$ SYM, una teoría *Integrable*

La teoría de QCD objeto de una amplia gama de estudios por parte de la comunidad científica, difiere en distintos aspectos de la teoría SYM. Esta última tiene un mayor número de simetrías: supersimetría y simetría conforme. En particular, la última implica que no existen campos de materia en la teoría. No obstante, partículas compuestas y su espectro de masas tienen un análogo en teorías de campo conformes: estos son llamados *operadores locales*. Ellos están compuestos de campos fundamentales en un punto en común del espacio-tiempo. Como en QCD, las cargas de color están balanceadas haciendo a los compuestos objetos invariantes de norma. Por último existe una cantidad que reemplaza a la masa: la *dimensión de escala*. Clásicamente, es igual a la suma de las dimensiones constituyentes, y como la masa, tiene asociadas correcciones cuánticas (las llamadas dimensiones anómalas) de las interacciones entre sus constituyentes. En el límite plano de SYM es posible expresar la dimensión de escala $D_{\mathcal{O}}$ del operador local \mathcal{O} como función de la constante de acoplamiento

$$D_{\mathcal{O}} = f(\lambda). \quad (2.42)$$

En general esta función es resultado de un conjunto de ecuaciones integrables. Más aún, en casos particulares las ecuaciones pueden ser resueltas de forma numérica para un amplio conjunto de valores de λ . Estas ecuaciones se siguen del llamado *ansatz de Bethe termodinámico* o técnicas relacionadas (*sistema Y*). En un cierto límite, las ecuaciones se simplifican a un conjunto de ecuaciones algebraicas llamadas *ecuaciones de Bethe asintóticas*. Cada vez se vuelve más claro que no únicamente el espectro, sino muchos otros observables pueden ser determinados de esta manera. Así que la conclusión parece ser que el límite plano de SYM puede ser resultado exactamente.

A partir del estudio de observables y sus soluciones, se espera obtener respuestas a varias incógnitas, no sólo en este modelo particular, sino también en las teorías de norma genéricas: ¿Qué es lo que hace a la teoría planar SYM $\mathcal{N} = 4$ calculable y a otros modelos no?, ¿es su comportamiento genérico o muy especial?, ¿podemos emplear la solución como punto de partida o primera aproximación para otros modelos? Por un lado podemos ver a SYM como una teoría de campo muy especial, y por otro, cualquier otra teoría de norma 4-dimensional puede ser vista como $\mathcal{N} = 4$ SYM con algunas partículas e interacciones añadidas o removidas: por ejemplo, muchas cantidades muestran un comportamiento universal a lo largo de toda la clase de teorías de norma 4-dimensionales.

La propiedad que permite obtener resultados exactos en la teoría planar $\mathcal{N} = 4$ SYM es generalmente conocida como *integrabilidad*, y sorprendentemente aparece en una teoría de Yang-Mills. En el contexto de la correspondencia *AdS/CFT* esta propiedad se traduce en la integrabilidad de la hoja mundo de la cuerda. Esto último es un modelo sigma no lineal 2-dimensional en un espacio cociente simétrico para el cual la integrabilidad es un fenómeno común. Consecuentemente, la integrabilidad se ha convertido en una herramienta importante para realizar cálculos en ambos lados, y se ha convertido en un argumento fuerte que soporta la credibilidad de la conjetura.

En cuanto al espacio de parámetros de la teoría de norma con dual gravitacional. La región en la cual $\lambda \ll 1$ llamada comúnmente de *acoplamiento débil*, está bajo control debido a que la teoría de perturbaciones de la teoría de norma basada en diagramas de Feynman es confiable. Añadiendo más bucles a las series perturbativas uno puede obtener resultados más precisos y cada vez más cercanos al centro del espacio de parámetros. Desafortunadamente, en la práctica, los métodos convencionales permite sólo la evaluación de los primeros coeficientes de la serie. Por tanto, no podemos examinar el espacio de parámetros más allá del régimen de acoplamiento débil. Por otra parte, la región alrededor del punto $\lambda = \infty$ es donde el régimen perturbativo de la teoría de cuer-

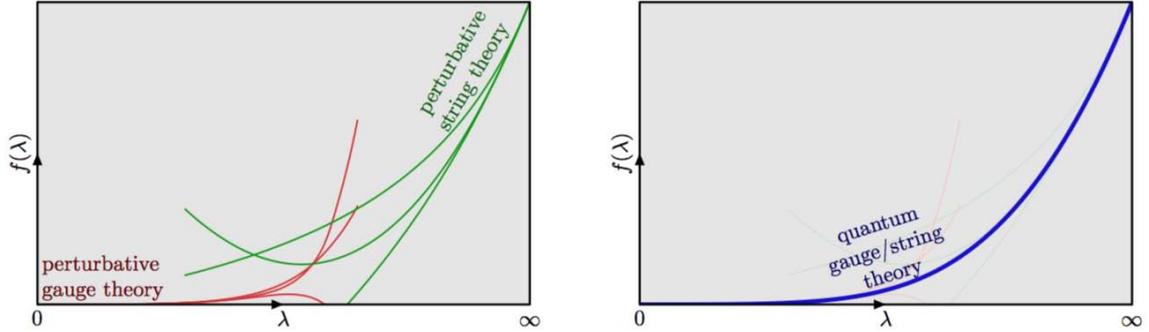


Figura 2.2: Expansiones a acoplamiento débil (3, 5, 7 bucles) y acoplamiento fuerte (0, 1, 2 bucles) [izquierda] y el cálculo numérico exacto [derecha] de alguna función de interpolación $f(\lambda)$.

das es válido. Aquí, las cuerdas están débilmente acopladas, y con respecto a la teoría de norma, recibe el nombre de: *acoplamiento fuerte*. La teoría de cuerdas provee de una doble expansión alrededor de este punto. Hacia la región de λ finita, la precisión de las series puede ser aumentada al añadir correcciones cuánticas al modelo sigma de la cuerda (bucles de la hoja mundo). Y correcciones a g_s finita, las cuales corresponden a añadir más agujeros a la hoja mundo de la cuerda (expansión de género, “bucles de cuerdas”). Igual que antes, ambas expansiones están lejos de ser triviales, y típicamente solo los primeros coeficientes pueden ser calculados en la práctica. Consecuentemente, las series de expansión no dan resultados confiables más allá del punto $\lambda = \infty$, $g_s = 0$.

En la Fig. 2.2 podemos apreciar el dilema débil/fuerte de la correspondencia *AdS/CFT*. Los regímenes perturbativos de ambos modelos no se traslapan. La integrabilidad provee de nuevas técnicas computacionales en $\mathcal{N} = 4$ SYM en el límite plano, para cualquier valor de λ . La correspondencia relaciona este límite con la teoría de cuerdas tipo IIB débilmente acoplada en $AdS_5 \times S^5$. Además conecta el régimen perturbativo de la teoría de norma con el régimen perturbativo de la teoría de cuerdas. Los cálculos mediante las técnicas de integrabilidad concuerdan en ambos regímenes en varios casos, proveen datos confiables sobre el rango completo de λ , y en la región central se encuentra una función $f(\lambda)$ que interpola de manera suave entre ambos regímenes, como se observa en la Fig. 2.2. Resumiendo, el concepto de integrabilidad nos puede dar información valiosa acerca de la verdadera teoría de norma cuántica y/o teoría de cuerdas en la región intermedia.

Los aproximantes de Padé se caracterizan por tener excepcionales propiedades de convergencia, útiles en muchas áreas de la física, como vimos en el capítulo anterior. Dada información asintótica podemos aproximar a la función de interpolación $f(\lambda)$ con aproximantes de Padé de orden $[N|M](\lambda)$, de hecho con el mejor aproximante siguiendo el criterio (1.91). Con esta modesta herramienta pretendemos en el siguiente capítulo adentrarnos a la región de acoplamiento de λ finita, para obtener información que de otra manera resulta muy difícil de extraer. Los casos de mayor interés son, por supuesto, aquellos en los que no se conoce la forma explícita de la función de interpolación, aunque también es importante tratar aquellos problemas en los que sí se conoce la solución exacta, para comparar con nuestra aproximación numérica. Si los aproximantes de Padé tienen un buen funcionamiento, es decir, dan como resultado funciones suaves, sin puntos singulares debidos a los defectos de la estructura del método, que interpolen entre ambas regiones,

esto podría deberse al hecho de que la teoría Super Yang Mills con $\mathcal{N} = 4$ en 4 dimensiones es integrable. Para mayores detalles acerca del concepto de integrabilidad en SYM ver el excelente compendio [53].

Capítulo 3

Aproximantes de Padé en AdS/CFT

Dentro de la amplia gama de problemas que involucran a la correspondencia *AdS/CFT* existen aquellos en los cuales se emplea como una poderosa herramienta de computo para estudiar propiedades importantes de teorías de norma fuertemente acopladas usando soluciones de gravedad en un régimen de acoplamiento débil. En particular, existen problemas en los cuales es posible obtener el comportamiento de algún observable tanto en el acoplamiento fuerte como en el acoplamiento débil, empleando teoría de perturbaciones en la correspondiente teoría de norma. Sin embargo, no se conoce la solución completa que interpola entre estos dos regímenes. En esta sección mostraremos los resultados obtenidos de aplicar el método de los aproximantes de Padé de dos puntos, que como hemos hecho notar son una gran herramienta de interpolación, a varios problemas de este tipo. Estos resultados son la parte central del presente trabajo, pero antes, expondremos una aplicación de los aproximantes que se relaciona directamente con la correspondencia *AdS/CFT*.

3.1. Modelo de Migdal

En los años 70 Migdal calculó masas de mesones en la teoría QCD, en el límite cuando el número de colores, N_c , es grande, aproximando con Padé correladores corriente-corriente. Con este método encontró que las masas eran raíces de funciones de Bessel. El programa de Migdal tiene como objetivo reproducir los correladores de la teoría de norma cuando el momento, q^2 , es pequeño usando información del régimen euclidiano profundo. El punto principal es el comportamiento no analítico de las funciones de correlación cuando el momento euclidiano es grande, donde los correladores, a primer orden, exhiben un comportamiento conforme. Esta expresión asintótica es aproximada por el polinomio racional de Padé de orden N , $f_0(q^2/\mu^2) \approx R_N(q^2/\mu^2)/Q_N(q^2/\mu^2)$. Finalmente, el resultado es continuado analíticamente para q^2 pequeño y tipo tiempo, y se toma el límite cuando N_c es grande. Veamos con más detalle el cálculo de la función de correlación de dos puntos de corrientes vectoriales conservadas en una teoría de campo conforme presentado en [54]:

Los correladores de dos puntos de operadores con dimensión conforme arbitraria en el ultra

violeta generalmente involucran expresiones de la forma,

$$\Sigma_\nu(q^2) = (q^2)^\nu \log \frac{q^2}{\mu^2}. \quad (3.1)$$

La escala μ es una escala de renormalización y $\nu = \Delta - 2$, donde Δ es la dimensión conforme del operador involucrado. Para una corriente vectorial conservada, $\Delta = 3$ y $\nu = 1$. Consideremos la cantidad adimensional,

$$f_0(t) = \log t \quad (3.2)$$

tal que $f_0(q^2/\mu^2) = (q^2)^{-\nu} \Sigma_\nu(q^2)$. Migdal propuso hallar el aproximante de Padé de orden N de $f_0(t)$ con respecto a un punto arbitrario, el cual elegimos como $t = -1$, *i.e.* $q^2 = -\mu^2$. Como hemos visto, en general funciones con posibles polos y cortes ramales son bien representadas por polinomios mediante esta aproximación.

Los polinomios $R_N(t)$ y $Q_N(t)$ de grado N deben satisfacer, por definición,

$$f_0(t) - \frac{R_N(t)}{Q_N(t)} = \mathcal{O}((t+1)^{2N+1}), \quad (3.3)$$

lo cual implica,

$$\left. \frac{d^m}{dt^m} [Q_N f_0(t) - R_N] \right|_{t=-1} = 0, \quad m = 0, 1, \dots, 2N. \quad (3.4)$$

Como $R_N(t)$ tiene grado N , es determinado completamente por las primeras $N+1$ ecuaciones (3.4) para $m = 0, 1, \dots, N$. Si Q_N es conocida; las N ecuaciones restantes determinan el denominador $Q_N(t)$ hasta una constante global,

$$\left. \frac{d^m}{dt^m} Q_N f_0(t) \right|_{t=-1} = 0, \quad m = N+1, \dots, 2N. \quad (3.5)$$

Para obtener el valor de Q_N podemos continuar analíticamente (3.5) al plano complejo. La función $f_0(t)$ tiene un corte ramal el cual es tomado a lo largo del eje real positivo. Este corte es aproximado por una serie de polos correspondientes al aproximante, y las masas de resonancia se interpretan como las ubicaciones de dichos polos. La parte imaginaria de la función $f_0(t)$ salta por un factor de 2π a través del corte. En cualquier lugar del plano- t complejo lejos del eje real positivo, las derivadas de la función $Q_N f_0(t)$ están dadas por la fórmula integral de Cauchy a lo largo de camino en la figura 3.1. Las integrales sobre los círculos grandes y pequeños no contribuyen (para los ordenes de las derivadas que estamos considerando), y las integrales por encima y debajo del corte se cancelan excepto para el cambio en la parte imaginaria de f_0 . Lo que queda es entonces,

$$\left. \frac{d^m}{dt^m} Q_N f_0(t) \right|_{t=-1} = \frac{m!}{2\pi} \int_0^\infty ds \frac{Q_N \Delta \text{Im} f_0(s)}{(s+1)^{m+1}} = 0, \quad m = N+1, \dots, 2N, \quad (3.6)$$

donde $\Delta \text{Im} f_0(t) = \text{Im} f_0(t+i\epsilon) - \text{Im} f_0(t-i\epsilon)$ es el cambio en $f_0(t)$ a través del corte. Por otro lado, a partir de (3.4) tenemos

$$\begin{aligned} R_N &= Q_N f_0(t) - \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left. \frac{d^n}{dt^n} Q_N f_0(t) \right|_{t=-1} (t+1)^n \\ &= Q_N f_0(t) - \sum_{n=N+1}^{\infty} \int_0^\infty ds \frac{1}{2\pi} \frac{Q_N \Delta \text{Im} f_0(s)}{(s+1)^{n+1}} (t+1)^n \\ &= Q_N f_0(t) - \int_0^\infty ds \frac{1}{2\pi} \frac{Q_N \Delta \text{Im} f_0(s)}{s-t} \left(\frac{t+1}{s+1} \right)^{N+1}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

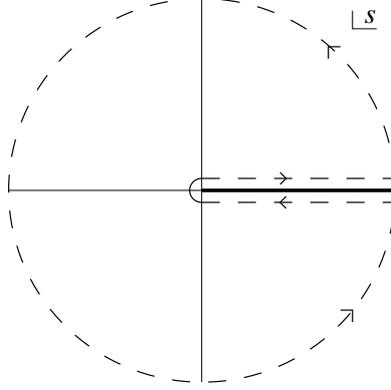


Figura 3.1: Contorno empleado para calcular las derivadas $Q_N f_0(t)$ en (3.6), [54].

El segundo término del lado derecho cancela los términos de orden más alto en la expansión de la serie de Taylor de $Q_N f_0(t)$ de tal forma que el resultado es un polinomio de orden N . En este caso en particular, $\Delta \text{Im} f_0 = -2\pi$, y de las ecuaciones (3.5) y (3.6) obtenemos para Q_N ,

$$\int_0^\infty ds \frac{Q_N}{(s+1)^{m+1}} = 0, \quad m = N+1, \dots, 2N. \quad (3.8)$$

Este conjunto de condiciones para Q_N son más claras después de hacer el cambio de variable $s = (1-x)/(1+x)$,

$$\int_{-1}^1 dx (1+x)^{m-1} Q_N \left(\frac{1-x}{1+x} \right) = 0, \quad (3.9)$$

y cambiando $m \rightarrow m' = m - N - 1$,

$$\int_{-1}^1 dx (1+x)^{m'} (1+x)^N Q_N \left(\frac{1-x}{1+x} \right) = 0, \quad m' = 0, 1, \dots, N-1. \quad (3.10)$$

Esta ecuación contiene el producto de dos polinomios. El primero puede ser escrito como la suma sobre polinomios de Legendre

$$(1+x)^{m'} = \sum_{i=0}^{m'} c_i P_i(x), \quad (3.11)$$

donde los coeficientes c_i pueden ser calculados. La segunda parte

$$(1+x)^N Q_N \left(\frac{1-x}{1+x} \right) \quad (3.12)$$

es un polinomio de grado N dependiente de x . Esto puede verse al darnos cuenta de que $Q_N((1-x)/(1+x))$ es un polinomio de orden N en $(1-x)/(1+x)$, y entonces el factor $(1+x)^N$ remueve todas las potencias de $(1+x)$ en el denominador de la expansión de Q_N . Los polinomios de Legendre satisfacen la relación de ortogonalidad

$$\int_{-1}^1 dx P_a(x) P_b(x) = 0 \quad \text{for } a \neq b \quad (3.13)$$

la cual combinada con (3.10) implica que podemos identificar la segunda parte (3.12) como

$$(1+x)^N Q_N \left(\frac{1-x}{1+x} \right) = P_N(x). \quad (3.14)$$

Esta identificación es única debido a que (3.10) con $m' = N - 1$ implica que (3.12) debe ser un polinomio de al menos grado N , pero ya hemos mostrado que (3.12) es un polinomio de grado exactamente N . Reescribiendo (3.14) en términos de la variable original s obtenemos

$$Q_N(s) = (s+1)^N P_N \left(\frac{1-s}{1+s} \right), \quad (3.15)$$

hasta una normalización global. La normalización no afecta el cálculo de la función de dos puntos debido a que es cancelada entre el numerador y el denominador en (3.3).

Ahora, como hemos mencionado en el capítulo 1, no existe un resultado genérico que nos diga cual es el límite correcto en el cual se obtiene en mejor aproximante de Padé, de una secuencia de aproximantes. Sin embargo, en este caso, para lograr que el aproximante en (3.3) sea tan preciso como sea posible, Migdal propuso tomar $N \rightarrow \infty$ y también el límite de bajas energías $q^2 \ll \mu^2$, caso en el cual el polinomio de Legendre se reduce a una función de Bessel. Esto se puede ver de manera más sencilla al reescribir el polinomio de Legendre como un caso especial del polinomio de Jacobi $P_N(x) = P_N^{(0,0)}(x)$ y usando la relación [55],

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N^{-a} P_N^{(a,b)} \left(\cos \frac{z}{N} \right) = \lim_{N \rightarrow \infty} N^{-a} P_N^{(a,b)} \left(1 - \frac{z^2}{2N^2} \right) = \left(\frac{z}{2} \right)^{-a} J_a(z). \quad (3.16)$$

Por tanto, en este límite con $(a, b) \rightarrow (0, 0)$ tenemos que

$$Q_N(t) \rightarrow J_0(2N\sqrt{t}) \equiv Q_\infty(t). \quad (3.17)$$

Si se piensa en μ como el corte UV de la teoría, entonces en los límites de baja energía y $N \rightarrow \infty$, una nueva escala infrarroja emerge como μ/N . Esta escala μ/N no está determinada por el aproximante de Padé, en lugar de ello, actúa como una especie de condición de frontera: podemos tomar el corte UV μ y el grado N al infinito mientras mantenemos la razón μ/N fija,

$$\mu \rightarrow \infty, \quad N \rightarrow \infty, \quad \frac{\mu}{N} = \mu_{ir} = \text{fijo}. \quad (3.18)$$

También podemos calcular el numerador del aproximante de Padé usando (3.7),

$$\begin{aligned} R_\infty(t) &\equiv Q_\infty(t) f_0(t) - \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty ds \frac{Q_\infty(s) \Delta \text{Im} f_0(s)}{s-t} \\ &= Q_\infty(t) f_0(t) - \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty ds \frac{(-2\pi) I_0(2N\sqrt{-s})}{s-t} \\ &= J_0(2N\sqrt{t}) (\log t) - \pi Y_0(2N\sqrt{t}). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Hasta una constante global la cual ha sido factorizada de (3.1). El aproximante de Padé de la polarización $\Sigma(q^2)$ se convierte entonces en

$$\Sigma(q^2) \propto q^2 \frac{J_0(2Nq/\mu) \log(q^2/\mu^2) - \pi Y_0(2Nq/\mu)}{J_0(2Nq/\mu)}. \quad (3.20)$$

Resulta que (3.20) puede obtenerse también empleando la correspondencia AdS/CFT. Desde un punto de vista fenomenológico es suficiente considerar un sistema más sencillo, que el planteado en la conjetura original (2.40), entre teorías de campo no supersimétricas en un fondo Randall-Sundrum en 5D y teorías fuertemente acopladas con N_c grande y con invariancia conforme rota espontáneamente [56]. Este sistema 5 dimensional involucra una rebanada del espacio AdS_5 limitado por dos branas en $z = z_{UV}$ y $z = z_{IR}$. El bulto contiene campos de norma y posiblemente otros campos con espín, los cuales representan operadores compuestos en la teoría conforme dual. Una manera de sondear la dinámica de dichas teorías es calcular correladores UV en la frontera asociados con los campos 5 dimensionales del bulto. Por ejemplo, la función de correlación irreducible por una partícula de dos puntos de campos de norma en la frontera. El diccionario holográfico relaciona este correlador en la frontera con la función de correlación conexas de dos puntos de una corriente conservada bajo una simetría global de la teoría de campo conforme 4 dimensional. De forma más precisa, consideremos la métrica¹:

$$ds^2 = \frac{1}{z^2} (\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu - dz^2), \quad (3.21)$$

la ecuación de GKP-Witten establece que:

$$\langle e^{i \int d^4x \phi_0(x) \mathcal{O}(x)} \rangle_{\text{CFT}} = e^{i S_{\text{AdS}}[\phi^{\text{cl}}]} \Big|_{\phi^{\text{cl}}(x, z=0) = \phi_0}, \quad (3.22)$$

donde $S_{\text{AdS}}[\phi^{\text{cl}}]$ es la acción clásica en el espacio AdS y ϕ^{cl} es solución a las ecuaciones de movimiento cuyo valor a la frontera se fija para ser la fuente $\phi_0(x)$ (hasta un reescalamiento conforme). En la práctica se introduce un regulador UV $z = \epsilon$ y después se toma $\epsilon \rightarrow 0$. Para una corriente vectorial $J^\mu = \bar{q}\gamma^\mu q$ en la teoría conforme, hay un campo de norma en el bulto $A_M(x, z)$ cuyo valor a la frontera es la fuente para J^μ . La acción 5-dimensional en el espacio AdS es

$$S_{\text{AdS}} = - \int d^4x dz \sqrt{-g} \frac{1}{4g_5^2} F_{MN} F^{MN}, \quad (3.23)$$

donde $M, N = 0, 1, 2, 3, z$; hemos despreciado el término de masa para A_M debido a que estamos considerando corrientes conservadas. De acuerdo con la correspondencia AdS/CFT , para calcular el correlador corriente-corriente calculamos la acción 5-dimensional sobre una solución a las ecuaciones de movimiento del campo de norma correspondiente de tal forma que el campo de norma 5 dimensional en la frontera UV tenga el perfil de la fuente 4 dimensional de la corriente. Como hemos mencionado antes, consideraremos un espacio AdS finito con una frontera infraroja en $z = z_0$. El perfil del campo de norma 5 dimensional que satisface aquellas condiciones de frontera es el propagador bulto-frontera, el cual llamaremos $V(q, z)$. Variando la acción dos veces con respecto a la fuente en la frontera obtenemos el correlador corriente-corriente. Imponemos la norma $A_z = 0$ y empleamos la transformada de Fourier del campo de norma en 4 dimensiones,

$$A_\mu(q, z) = \frac{1}{V(q, \epsilon)} \tilde{A}_\mu(q) V(q, z), \quad (3.24)$$

donde $\tilde{A}_\mu(q)$ es la transformada de Fourier de la fuente. La condición a la frontera $A_\mu(q, \epsilon) = \tilde{A}_\mu(q)$ se obtiene de (3.24). La condición a la frontera en $z = z_0$ no está completamente predeterminada, pero por finitud asumimos condiciones de frontera de Neumann ahí, $\partial_z V(q, z_0) = 0$, correspondientes a la condición $F_{\mu z}(x, z_0) = 0$ invariante de norma. Las ecuaciones de movimiento para la

¹En esta parte del cálculo emplearemos $\eta_{\mu\nu} = \text{Diag}(+, -, -, -)$.

parte transversal del campo de norma son,

$$z \partial_z \left(\frac{1}{z} \partial_z V(q, z) \right) + q^2 V(q, z) = 0, \quad (3.25)$$

las cuales, dadas las condiciones de frontera, conducen a

$$V(q, z) = qz (Y_0(qz_0)J_1(qz) - J_0(qz_0)Y_1(qz)). \quad (3.26)$$

y al evaluar la acción en la solución deja solo el término de frontera en el UV

$$S_{\text{AdS}} = -\frac{1}{2g_5^2} \int d^4 q \tilde{A}_\mu(q) \tilde{A}^\mu(-q) \left(\frac{1}{z} \frac{\partial_z V(q, z)}{V(q, z)} \right)_{z=\epsilon}. \quad (3.27)$$

Si escribimos la transformada de Fourier de la función de dos puntos para corrientes vectoriales como

$$\int d^4 x e^{iq \cdot x} \langle J_\mu(x) J_\nu(0) \rangle = \left(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) \Sigma(q^2), \quad (3.28)$$

entonces, derivando funcionalmente la acción (3.27) con respecto a la fuente $\tilde{A}_\mu(q)$ se obtiene el correlador vectorial corriente-corriente determinado por *AdS/CFT*:

$$\begin{aligned} \Sigma(q^2) &= -\frac{1}{g_5^2} \frac{1}{z} \frac{\partial_z V(q, z)}{V(q, z)} \Big|_{z=\epsilon \rightarrow 0} \\ &= -\frac{1}{g_5^2} \frac{1}{z} q \frac{Y_0(qz_0)J_0(qz) - J_0(qz_0)Y_0(qz)}{Y_0(qz_0)J_1(qz) - J_0(qz_0)Y_1(qz)} \Big|_{z=\epsilon} \\ &\rightarrow \frac{q^2 \log(q\epsilon) J_0(qz_0) - (\pi/2) Y_0(qz_0)}{g_5^2 J_0(qz_0)}, \end{aligned} \quad (3.29)$$

donde hemos retenido la principal contribución no nula de cada función de Bessel en el límite $q\epsilon \rightarrow 0$, *i.e.*

$$J_0(q\epsilon) \rightarrow 1, \quad J_1(q\epsilon) \rightarrow \frac{q\epsilon}{2} \rightarrow 0, \quad Y_0(q\epsilon) \rightarrow \frac{2}{\pi} \log(q\epsilon), \quad Y_1(q\epsilon) \rightarrow -\frac{2}{\pi} \frac{1}{q\epsilon}. \quad (3.30)$$

Hemos despreciado términos en (3.29) que pueden ser absorbidos en la redefinición de ϵ , tales como la constante de Euler γ_E en la expansión de $Y_0(q\epsilon)$. De la ecuación (3.29) vemos que las masas de las resonancias en la teoría de campo, dadas por los polos simples en $\Sigma(q^2)$, están determinadas por las raíces de la función de Bessel $J_0(qz_0)$. Por otra parte, si de manera simultánea tomamos $qz_0 \gg 1$, entonces el espectro se vuelve continuo y el vector de polarización $\Sigma(q^2)$ se convierte en,

$$\Sigma(q^2) \rightarrow \frac{1}{2g_5^2} q^2 \log(q^2 \epsilon^2). \quad (3.31)$$

Ecuación en la cual vemos explícitamente que ϵ juega el rol de regulador UV.

Si identificamos en (3.20)

$$\frac{1}{\mu} = \epsilon, \quad \frac{2}{\mu_{ir}} = z_0, \quad (3.32)$$

recuperamos exactamente el mismo resultado que se obtiene de la correspondencia *AdS/CFT* (3.31), para la función de dos puntos, sin hacer referencia al espacio anti-de Sitter y a la holografía.

Además, en el propagador bulto-frontera la dependencia correcta en la frontera infraroja es reproducida por el aproximante de Padé en el límite $N \rightarrow \infty$ y $q^2/\mu^2 \ll 1$.

Podemos ver la relación entre Padé y *AdS/CFT* estudiando con más cuidado la estructura analítica de las funciones de Bessel de la ecuación (3.26) para el propagador bulto-frontera. La función de Bessel de primer tipo, $J_\nu(x)$, es analítica y no tiene polos en el plano complejo. Cerca del origen se comporta como $J_\nu(x) \sim x^\nu$. Por otro lado, la función de Bessel de segundo tipo $Y_\nu(x)$ tiene la siguiente expansión en serie, cuando ν es un entero,

$$Y_\nu(x) \sim \sum_{m=0}^{\nu-1} a_m \frac{x^{2m}}{x^\nu} + \frac{2}{\pi} J_\nu(x) \log \frac{x}{2} + \sum_{m=0}^{\infty} b_m x^{2m+\nu} . \quad (3.33)$$

Esto es $Y_\nu(x)$ tiene un polo de orden ν en el origen y una parte no analítica, $J_\nu(x) \log x$. Veamos entonces en (3.26) que los términos no analíticos en el momento q “conspiran” para cancelarse unos a otros. Tanto el denominador como el numerador de la función de dos puntos determinada por *AdS/CFT*, (3.29), son analíticos en el momento q . Por tanto, el cálculo a través de la correspondencia *AdS/CFT* está construyendo secretamente la aproximación de Padé a la función de dos puntos. La razón de esto se remonta al límite N_c grande en el cual las correcciones cuánticas pueden ser ignoradas. No hay fuente de no analiticidad cuando N_c es grande, y las resonancias se convierten en polos simples de la función de dos puntos. Lo que hemos encontrado es que la correspondencia *AdS/CFT* da la mejor aproximación al comportamiento conforme en el UV por medio de un conjunto de resonancias infinitamente estrechas.

En [54] se muestra que incluso después de romper la simetría conforme al añadir correcciones a la función de dos puntos, (3.1), el aproximante de Padé sigue reproduciendo los resultados de la correspondencia *AdS/CFT*. Esta inesperada coincidencia se ha estudiado ampliamente en el contexto de modelos de deconstrucción [57]. En todo caso, este ejemplo muestra como las propiedades de los aproximantes logran hacer sentido de la región no perturbativa de la función estudiada.

El modelo de Migal, resulta entonces, ser una aplicación interesante de los aproximantes de Padé y se relaciona directamente con la correspondencia *AdS/CFT*, de un modo complementario.

3.2. Teorías de campo térmicas

Motivados por el éxito de la correspondencia en su forma original mucha gente comenzó a cuestionarse si dualidades similares son posibles para teorías de campos menos simétricas. Esto permitiría, por ejemplo, resolver el problema de confinamiento en QCD. Aunque este objetivo se encuentra aún muy lejos de poderse realizar, se han logrado formular generalizaciones de la correspondencia para emplear gravedad débilmente acoplada y poder realizar predicciones en sistemas fuertemente acoplados. Consideremos por ejemplo la dualidad norma/gravedad para teorías a temperatura, T , y densidad finitas. Veamos cual es el diccionario para relacionar SYM $\mathcal{N} = 4$ a temperatura finita (manteniendo N grande).

La función de partición en el ensamble canónico es

$$\mathcal{Z} = \text{Tr} e^{-H\beta}, \quad \beta = \frac{1}{T} \quad \text{y} \quad k_B = 1 \quad (3.34)$$

El valor esperado, en la teoría térmica, de un operador \mathcal{O} a temperatura finita es

$$\langle \mathcal{O} \rangle_T = \frac{\text{Tr} [\mathcal{O} e^{-H\beta}]}{\mathcal{Z}} \quad (3.35)$$

En el formalismo de la integral de camino,

$$\langle \mathcal{O} \rangle_T \sim \int \mathcal{D}\phi \langle \phi(x), t | \mathcal{O} e^{-H\beta} | \phi(x), t \rangle, \quad (3.36)$$

para una teoría de campo con campos ϕ , donde el valor es tomado entre el mismo estado inicial y final $|\phi(x), t\rangle$. Como el Hamiltoniano genera la evolución temporal del estado podemos escribir,

$$\langle \mathcal{O} \rangle_T \sim \int \mathcal{D}\phi \langle \phi(x), t | \mathcal{O} | \phi(x), t + i/T \rangle. \quad (3.37)$$

Entonces para calcular operadores debemos considerar la evolución temporal como imaginaria y tenemos que imponer condiciones de frontera periódicas en el espacio de Hilbert (antiperiódicas para fermiones). En otras palabras, obtenemos una teoría térmica de campos al hacer una rotación de Wick $t \rightarrow -i\tau$ y al compactificar el tiempo euclidiano en un círculo de radio $\beta = 1/T$. Con esto (3.34) es

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &= \sum_{\text{Edos. } \beta \text{ periódicos.}} \langle \phi_\beta | e^{-\beta H} | \phi_\beta \rangle \\ &= \int_{\text{Edos. } \beta \text{ periódicos.}} \mathcal{D}\phi e^{-S_E[\phi]}, \end{aligned} \quad (3.38)$$

donde $S[\phi]$ es la acción euclidiana. Usando la aproximación de punto silla: sea ϕ^* el punto silla de la acción euclidiana, entonces podemos aproximar la función generadora semiclásicamente,

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\phi e^{-S_E[\phi]} \approx e^{-S_E[\phi^*]}. \quad (3.39)$$

De acuerdo con la correspondencia *AdS/CFT*, la función de partición de la teoría clásica en el bulto con condiciones de frontera asintóticamente *AdS* es equivalente a la función de partición de la teoría de campo cuando N es grande. La métrica g toma entonces el rol del campo ϕ ,

$$\mathcal{Z}_{\text{grav}} = e^{-S_E[g^*]}. \quad (3.40)$$

El punto silla, *i.e.* una solución a las ecuaciones de movimiento está dada por

$$ds^2 = \frac{L^2}{z^2} \left[f(z) d\tau^2 + dx^i dx_i + \frac{dz^2}{f(z)} \right], \quad f(z) = 1 - \frac{z^4}{z_0^4}. \quad (3.41)$$

Esta métrica coincide con la continuación analítica de la métrica *AdS* de Schwarzschild al espacio Euclidiano, donde z_0 es el horizonte de Schwarzschild. Consideremos el comportamiento de la métrica cerca del horizonte z_0 . En esta región, la métrica en el plano (τ, z) se convierte en

$$ds^2 = L^2 \left(\frac{4z'}{z_0} d\tau^2 + \frac{z_0}{4z'} dr'^2 \right), \quad z' = z_0 - z. \quad (3.42)$$

La cual se puede reescribir como

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 \frac{4}{z_0^2} d\tau^2, \quad \rho = z' L, \quad (3.43)$$

esta métrica corresponde a la métrica plana en coordenadas polares con $\theta = 2\tau/z_0$. Con esta elección se puede evitar la singularidad. La periodicidad de θ puede traducirse en la periodicidad de τ con período

$$\frac{2}{z_0}\beta = 2\pi. \quad (3.44)$$

Si identificamos la relación entre el radio del horizonte z_0 y la temperatura de Hawking del agujero negro de Schwarzschild en *AdS* como

$$T = \frac{1}{\pi z_0}. \quad (3.45)$$

El diccionario es entonces: *La temperatura de Hawking del agujero negro es identificada con la temperatura de la teoría de campo en la frontera.*

El horizonte es la hipersuperficie $z = z_0$ y t constante, cuya área en la métrica (3.41) es,

$$A_H = \int d^3x \sqrt{g} = \left(\frac{L}{z_0}\right)^3 \int d^3x = \left(\frac{L}{z_0}\right)^3 V_3, \quad (3.46)$$

donde V_3 es el volumen a lo largo de las direcciones espaciales. En términos de la temperatura (3.45),

$$A_H = \pi^2 L^3 T^3 V_3, \quad (3.47)$$

y la entropía puede ser calculada con la celebre fórmula de Bekenstein-Hawking,

$$S_{BH} = \frac{A_H}{4G_5} = \frac{1}{4G_5} \pi^3 L^3 T^3 V_3, \quad (3.48)$$

Finalmente, empleando el diccionario de la correspondencia (2.19) obtenemos:

$$S_{BH} = \frac{\pi^2}{2} N^2 T^3 V_3. \quad (3.49)$$

La primera vez que se realizó este cálculo de la entropía asociada a la geometría (3.41) fue en el año 96, por Gubser, Klebanov y Peet [63].

Como se menciona en [66], el escalamiento T^3 concuerda con la invariancia conforme de la teoría y el factor N^2 indica que uno trabaja con una teoría con N^2 grados de libertad no confinados y sin masa. En cuanto al acoplamiento débil de la teoría podemos calcular la entropía asociada a $8N^2$ bosones y fermiones libres sin masa (problema del cuerpo negro). La función de partición en el ensamble canónico para un gas relativista de bosones y fermiones no interactuantes es

$$\log Z = \mp V_3 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \log \left(1 \mp e^{-\frac{\omega(p)}{T}} \right), \quad (3.50)$$

donde el signo menos (más) corresponde a bosones (fermiones) y $\omega(p) = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$. En el caso no masivo tomamos simplemente $\omega(p) = |\mathbf{p}|$. Integrando en coordenadas esféricas obtenemos:

$$\frac{\log Z}{V_3} = \mp \int_0^\infty \frac{dp}{2\pi^2} p^2 \log \left(1 \mp e^{-\frac{p}{T}} \right). \quad (3.51)$$

Cambiando la variable de integración en (3.51), de p a $x = p/T$, y después de integrar por partes tenemos:

$$\frac{\log Z}{V_3} = \frac{T^3}{6\pi^2} \int_0^\infty dx \frac{x^3}{e^x \mp 1}. \quad (3.52)$$

Para computar estas integrales usamos los resultados generales, validos para $n \in \mathbb{Z}$:

$$\int_0^\infty dx \frac{x^{2n-1}}{e^x + 1} = \frac{2^{2n-1} - 1}{2n} \pi^{2n} B_n, \quad \int_0^\infty dx \frac{x^{2n-1}}{e^x - 1} = \frac{(2\pi)^{2n} B_n}{4n}, \quad (3.53)$$

donde B_n denota los números de Bernoulli. En particular para $n = 2$, como $B_2 = 1/30$, tenemos:

$$\int_0^\infty dx \frac{x^3}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15}, \quad \int_0^\infty dx \frac{x^3}{e^x + 1} = \frac{7\pi^4}{120}. \quad (3.54)$$

Entonces, para bosones:

$$\frac{\log Z}{V_3} = \frac{\pi^2}{90} T^3, \quad (\text{bosones}), \quad (3.55)$$

mientras que, para fermiones:

$$\frac{\log Z}{V_3} = \frac{7\pi^2}{720} T^3, \quad (\text{fermiones}). \quad (3.56)$$

La densidad de entropía puede calcularse a partir de la función de partición a través de la relación:

$$s = \frac{\partial}{\partial T} \left[T \frac{\log Z}{V_3} \right] = 4 \frac{\log Z}{V_3}. \quad (3.57)$$

Entonces, se sigue que:

$$s_{\text{bosones}} = \frac{2\pi^2}{45} T^3, \quad s_{\text{fermiones}} = \frac{7\pi^2}{180} T^3. \quad (3.58)$$

En $\mathcal{N} = 4$ SYM el número de bosones que tenemos es:

$$[2(\text{campos de norma}) + 6(\text{campos escalares})] N^2 = 8N^2, \quad (3.59)$$

mientras que, el número de fermiones es:

$$[2 \times 4(\text{espinores de Weyl})] N^2 = 8N^2, \quad (3.60)$$

el cual, debido a la supersimetría, es el mismo número que el de bosones. Por tanto, la densidad de entropía total de $\mathcal{N} = 4$ SYM cuando la constante de acoplamiento es cero es:

$$s_{\mathcal{N}=4 \text{ gas libre}} = 8N^2 \left[\frac{2\pi^2}{45} + \frac{7\pi^2}{180} \right] T^3 = \frac{2\pi^2}{3} N^2 T^3. \quad (3.61)$$

y la entropía tiene la forma

$$S_{\mathcal{N}=4 \text{ gas libre}} = \frac{2\pi^2}{3} N^2 T^3 V_3. \quad (3.62)$$

Por tanto, $S_{BH} = \frac{3}{4} S_{\mathcal{N}=4 \text{ gas libre}}$. Después de obtenerse por primera vez este resultado, se llevo a pensar que era una contradicción de la teoría, pero en [66] se menciona porqué no existe tal:

“¿Hay alguna contradicción aquí? La respuesta es no, porque S_{BH} es relevante para la teoría SYM en el límite cuando $N \rightarrow \infty$ y el acoplamiento de 't Hooft, $g_{YM}^2 N$ es grande”.

$[N M] (\lambda)$	$I_s [N M]$	$I_l [N M]$	$I_s + I_l$
[3 3]	0,0279555	0,00750815	0,0354636
[2 2]	0.0172885	0.12317	0.140458
[3 2]	0.0275256	182447	182447
[2 3]	0.0685713	738.555	738.624
[4 4]	0.0392646	0.019161	0.0584256
[4 4]	0.0529252	0.0182981	0.0712233

Tabla 3.1 Resultados obtenidos al aplicar el criterio (1.91) al problema de la energía libre en SYM.

En otras palabras, tal resultado no es un error sino una predicción de la teoría. En el mismo artículo se conjetura que $f(g_{YM}^2 N)$ es una función monótona decreciente que interpola ambos acoplamientos, fuerte y débil, en los cuales $f(0) = 1$ y $f \sim \frac{3}{4}$, respectivamente. Es interesante que comportamientos similares han sido observados en QCD en la red. En ese caso se encontró que, cuando el acoplamiento es fuerte, $s_{\text{QCD}} \simeq (4/5)S_{\text{libre}}$ [64]. Notase que $4/5$ es más cercano a $3/4$ que a 1, lo cual sugiere que el valor de la entropía puede ser interpretada como indicadora de un plasma de quarks y gluones fuertemente acoplados. Por otro lado, también se ha argumentado que es imposible interpolar de manera suave entre ambos acoplamientos y se concluye que debe haber una transición de fase en algún punto crítico a temperatura finita [67].

Consideremos la siguiente factorización:

$$S = \frac{2\pi^2}{3} N^2 V_3 T^3 f(x), \quad (3.63)$$

donde $x = \sqrt{2\lambda} = \sqrt{2g_{YM}^2 N}$. Cuando λ es pequeña es posible realizar cálculos perturbativos, y estos dan como resultado la expansión [65]:

$$f(x) = 1 - \frac{3}{4\pi^2} x^2 + \frac{(\sqrt{2} + 3)x^3}{\pi^3 2^{3/2}} - \dots \quad (3.64)$$

Para λ grande, cálculos utilizando teoría de cuerdas resultan en [66],

$$f(x) = \frac{3}{4} + \frac{45}{32} \zeta(3) x^{-3} + \dots \quad (3.65)$$

Con esta información asintótica logramos construir varios aproximantes de Padé (ver apéndice D). Para determinar cual de ellos realiza la mejor aproximación empleamos el criterio (1.90). Para ello, estudiamos primero las expansiones: los coeficientes de la serie (3.64) son de orden $\sim 10^{-2}$, por tanto comparamos dicha serie con el término $-0,01x^4$. En cuando a la expansión (3.65) los coeficientes son de orden ~ 1 y por tanto, comparamos con el término x^{-5} . Empleando las expresiones para los errores (1.89) (con una tolerancia de $\varepsilon = 0,01$) determinamos el valor de las variables $\lambda_s^* = 1,2$ y $\lambda_l^* = 5,0$. Con todo lo anterior el criterio (1.91) da como resultado que el mejor aproximante es el de orden [3|3], como lo muestra la Tabla 3.1.

Nuestro aproximante de Padé [3|3] reproduce los comportamientos de $f(x)$ en ambos extremos del acoplamiento, de manera muy precisa. Además, muestra un comportamiento monotónicamente

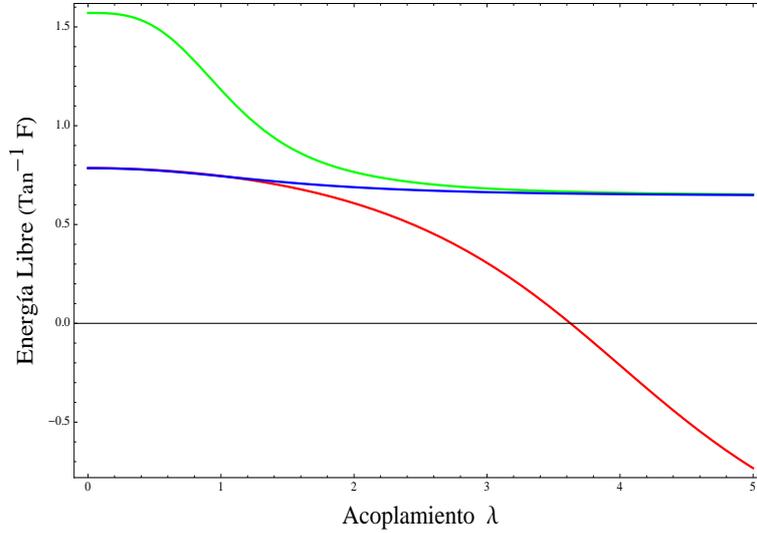


Figura 3.2: Aproximante de Padé de orden [3|3] (Azul). Expansiones del acoplamiento débil (rojo) y fuerte (verde).

decreciente conforme el acoplamiento de 't Hooft λ se vuelve fuerte (ver figura 3.2) en correcto acuerdo con [66], y no contiene, por tanto, puntos en los cuales ocurra alguna transición de fase. En este problema en particular no se conoce la solución exacta que interpola entre ambos regímenes del acoplamiento, por tanto, los valores intermedios calculados son una predicción de los aproximantes de Padé, los cuales, basados en el criterio (1.90), no deben encontrarse muy lejos de los valores asociados a la función analítica (3.63), cuya forma explícita es aún desconocida.

3.3. Viscosidad de Corte

A temperatura finita, el comportamiento, a grandes distancias y largos tiempos, de teorías de norma se describe, como en cualquier otro fluido, por una teoría hidrodinámica [68]. Para escribir las ecuaciones de hidrodinámica debemos conocer la termodinámica (*i.e.* la ecuación de estado) del medio, así como los coeficientes de transporte: las viscosidades de corte y de bulto, la conductividad eléctrica (en la presencia del grupo de norma $U(1)$) y las constantes de difusión (en la presencia de cargas conservadas globales). El conocimiento de estas cantidades en teorías de campos térmicas es crucial para numerosas aplicaciones, como por ejemplo, a la física del plasma de quark y gluones creado, posiblemente, en colisiones entre iones pesados.

Cuando el acoplamiento de la teoría es pequeño (en el caso de QCD esto es, temperaturas más grandes que la escala de confinamiento), tanto la ecuación de estado como los coeficientes de transporte se pueden calcular de manera perturbativa. En el acoplamiento fuerte (*i.e.* a temperaturas no más grandes que la escala de confinamiento), la termodinámica se puede obtener a través de simulaciones en la red. Sin embargo, los coeficientes de transporte se encuentran más allá del alcance de las técnicas numéricas actuales. Es necesario subsanar esta situación pues existe evidencia muy significativa de que el plasma de quarks y gluones creado en los aceleradores, como RHIC, se comporta como un sistema fuertemente acoplado [69].

Un camino posible para arrojar algo de luz sobre este problema es utilizar la correspondencia AdS/CFT (a temperatura finita T). Esto nos permitiría tener una descripción de plasmas térmicos en teorías fuertemente acopladas, en términos de agujeros negros en el espacio AdS, por ejemplo, en el cálculo de coeficientes de transporte.

En esta sección repasaremos esta interesante aplicación al cálculo de la viscosidad de corte η basándonos principalmente en [44, 70, 71], y presentaremos nuestros resultados obtenidos al aplicar el método de aproximantes de Padé.

Para estudiar la dinámica de este sistema (continuo a escalas de distancia y tiempo grandes) tenemos que analizar el tensor de energía momento $T^{\mu\nu}$, el cual es conservado ($\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$). Asumiremos que el sistema se encuentra a equilibrio térmico local y que el estado del sistema a un tiempo dado está determinado por la temperatura local $T(x)$ y la velocidad del fluido $u^\mu(x)$, la cual cumple que $u_\mu u^\mu = -1$.

La relación entre $T^{\mu\nu}$ y u^μ , y las funciones termodinámicas se expresa a través de las conocidas relaciones constitutivas, las cuales para fluidos isotrópicos toman la forma:

$$T^{\mu\nu} = (\epsilon + p) u^\mu u^\nu + p g^{\mu\nu} - \sigma^{\mu\nu}, \quad (3.66)$$

donde ϵ es la densidad de energía y p es la presión, mientras que $\sigma^{\mu\nu}$ es la llamada parte disipativa de $T^{\mu\nu}$ y depende de las derivadas de $T(x)$ y u^μ . Para parametrizar $\sigma_{\mu\nu}$ a primer orden en las derivadas, consideremos un marco en reposo en el cual $u^i(x) = 0$ (y $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$). Uno puede elegir este marco de tal manera que las correcciones disipativas a las componentes del tensor energía momento $T^{0\mu}$ se anulen. Entonces, $\sigma^{00} = \sigma^{0i} = 0$ ó, equivalentemente, $T^{00} = \epsilon$, $T^{0i} = 0$. Los únicos elementos distintos de cero del tensor energía momento disipativo son σ_{ij} . A primer orden en las derivadas σ_{ij} puede escribirse como:

$$\sigma_{ij} = \eta(\partial_i u_j + \partial_j u_i - \frac{2}{3} \delta_{ij} \partial_k u_k) + \zeta \delta_{ij} \partial_k u_k, \quad (3.67)$$

donde η es la viscosidad de corte y ζ es la viscosidad de bulto.

Escribamos $\sigma^{\mu\nu}$ de manera covariante. Primero definamos el proyector sobre las direcciones perpendiculares a u^μ , como:

$$P^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} + u^\mu u^\nu. \quad (3.68)$$

Entonces, en una métrica curva arbitraria $\sigma_{\mu\nu}$ puede escribirse como:

$$\sigma^{\mu\nu} = P^{\mu\alpha} P^{\nu\beta} \left[\eta(\nabla_\alpha u_\beta + \nabla_\beta u_\alpha) + \left(\zeta - \frac{2}{3} \eta \right) g_{\alpha\beta} \nabla \cdot u \right], \quad (3.69)$$

donde las derivadas covariantes de los vectores u_β se definen como:

$$\nabla_\alpha u_\beta = \partial_\alpha u_\beta - \Gamma_{\alpha\beta}^\mu u_\mu, \quad (3.70)$$

con $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu$ los símbolos de Christoffel definidos como:

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} \left[\frac{\partial g_{\lambda\alpha}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\lambda\beta}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\lambda} \right]. \quad (3.71)$$

El objetivo es hallar a $\sigma^{\mu\nu}$ como (menos) la función de un solo punto de $T^{\mu\nu}$ en la presencia de una perturbación de la métrica del tipo $g^{\mu\nu} \rightarrow \eta^{\mu\nu} + h^{\mu\nu}$. De la teoría de repuesta lineal podemos escribir la función de un punto como:

$$\sigma^{\mu\nu}(x) = \int G_R^{\mu\nu,\alpha\beta}(x-y) h_{\alpha\beta}(y) dy , \quad (3.72)$$

donde G_R es la función de Green retardada:

$$i G_R^{\mu\nu,\alpha\beta}(x-y) = \theta(x^0 - y^0) \langle [T^{\mu\nu}(x), T^{\alpha\beta}(y)] \rangle . \quad (3.73)$$

La fórmula (3.72) proviene de la teoría general de respuesta lineal en la cual la función de un punto del operador \mathcal{O} en la presencia de una fuente $\varphi(x)$ es:

$$\langle \mathcal{O}(x) \rangle_\varphi = - \int G_R(x-y) \varphi(y) dy . \quad (3.74)$$

Consideremos ahora la siguiente perturbación de la métrica:

$$g_{00}(t, \vec{x}) = -1 , \quad g_{0i}(t, \vec{x}) = 0 , \quad g_{ij}(t, \vec{x}) = \delta_{ij} + h_{ij}(t) . \quad (3.75)$$

con $h_{ij} \ll 1$ y tal que tiene traza nula ($h_{ii} = 0$). Asumiremos que h_{ij} es función de t y que esta variación con t es pequeña. La métrica inversa es:

$$g^{00}(t, \vec{x}) = -1 , \quad g^{0i}(t, \vec{x}) = 0 , \quad g^{ij}(t, \vec{x}) = \delta_{ij} - h_{ij}(t) , \quad (3.76)$$

a partir de la cual obtenemos las distintas componentes del proyector $P^{\mu\nu}$:

$$P^{00} = 0 , \quad P^{0i} = 0 , \quad P^{ij} = \delta_{ij} - h_{ij} . \quad (3.77)$$

A primer orden en la perturbación, los símbolos de Christoffel están dados por:

$$\Gamma_{00}^0 = \Gamma_{0i}^0 = 0 , \quad \Gamma_{ij}^0 = \frac{1}{2} \partial_0 h_{ij} . \quad (3.78)$$

Por tanto las derivadas covariantes de la velocidad son:

$$\nabla_0 u_0 = \nabla_0 u_i = 0 , \quad \nabla_i u_j = \frac{1}{2} \partial_0 h_{ij} . \quad (3.79)$$

A partir de estos valores y la hipótesis de que la perturbación de la métrica tiene traza nula se sigue que la divergencia de la velocidad es cero,

$$\nabla \cdot u = \frac{1}{2} \partial_0 h_{ii} = 0 . \quad (3.80)$$

Asumamos que el único valor distinto de cero de h_{ij} es h_{12} . Entonces, el valor, en la aproximación de la respuesta lineal, de σ^{12} en el espacio de frecuencias es:

$$\sigma^{12}(\omega) = G_R^{12,12}(\omega, \vec{k} = 0) h_{12}(\omega) . \quad (3.81)$$

Más aún, usando los valores de las derivadas covariantes de la velocidad obtenemos

$$\sigma^{12}(t) = \eta \partial_0 h_{12}(t) , \quad (3.82)$$

o, en el espacio de frecuencias (para ω pequeña):

$$\sigma^{12}(\omega) = -i\eta \omega h_{12}(\omega) . \quad (3.83)$$

Comparando las dos expresiones para σ^{12} , obtenemos la *fórmula de Kubo* para la viscosidad de corte:

$$\eta = - \lim_{\omega \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\omega} \text{Im} G_R^{12,12}(\omega, \vec{k} = 0) \right], \quad (3.84)$$

o en términos de las funciones de Green retardadas y avanzadas:

$$\eta = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{1}{2\omega i} [G_A(\omega) - G_R(\omega)] = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{1}{2\omega} \int dt dx^3 e^{i\omega t} \langle [T_{xy}(t, \mathbf{x}), T_{xy}(0, 0)] \rangle \quad (3.85)$$

donde

$$-i G_A^{\mu\nu, \alpha\beta}(x - y) = \theta(y^0 - x^0) \langle [T^{\mu\nu}(x), T^{\alpha\beta}(y)] \rangle. \quad (3.86)$$

La observación clave que subyace el cálculo de la viscosidad de corte del lado de gravedad es que: “*el lado derecho de la fórmula de Kubo (3.85) es proporcional a la sección eficaz de absorción clásica de los gravitones de baja energía debido a una 3-brana a la misma temperatura*” [72, 73]

Si uno envía un gravitón a la brana, hay una probabilidad de que sea absorbido. Del lado de gravedad, la sección transversal de absorción puede ser calculada al resolver la ecuación de onda en la métrica de fondo. Del lado de la teoría de norma la razón a la que los gravitones son absorbidos mide la parte imaginaria del correlador tensor de esfuerzos–tensor de esfuerzos, debido a que los gravitones polarizados paralelos a la brana están acoplados al tensor de energía momento de los grados de libertad de la brana. La relación entre la sección transversal de absorción $\sigma(\omega)$ de un gravitón con energía ω , polarizado de forma paralela a la brana (a lo largo de las direcciones xy por ejemplo) y cayendo a un ángulo recto sobre la brana está relacionado al correlador en la teoría de campo como

$$\sigma(\omega)_{\text{abs}} = \frac{\kappa_{10}^2}{\omega} \int dt dx^3 e^{i\omega t} \langle [T_{x,y}(t, \mathbf{x}), T_{x,y}(0, 0)] \rangle, \quad \kappa_{10} = \sqrt{8\pi G} \quad (3.87)$$

(esta relación solo se ha verificado explícitamente para D3-branas a temperatura cero, o branas negras extremales [74]).

Para inferir esta proporcionalidad escribamos a la parte imaginaria de la función de Green retardada (3.73) en su representación espectral:

$$\begin{aligned} \text{Im} G_R(\omega) &= \sum_{i,j} \frac{e^{-\beta E_i}}{Z} |\langle f | T_{xy}(0, 0) | i \rangle|^2 (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i) \\ &\times \pi [\delta(E_f - E_i + \omega) - \delta(E_f - E_i - \omega)]. \end{aligned} \quad (3.88)$$

Ahora utilicemos la regla de oro de Fermi para calcular la razón neta a la cual los gravitones son absorbidos por las branas a partir de una onda plana de gravitones polarizados de tal manera que solo la componente h_{xy} , de la perturbación de la métrica ($h_{x,y} = g_{xy} - \eta_{xy}$), es distinta de cero. Tenemos que entender primero las interacciones de los campos del bulto y la frontera. Estos campos pueden interactuar en la frontera, por ejemplo, el gravitón del bulto produce retrodispersión entre los gluones de la frontera. La interacción relevante para gravitones externos polarizados de forma paralela a la brana (plano xy) es

$$S_{\text{int}} \sim \int d^4x \delta h^{xy} T_{xy}, \quad (3.89)$$

donde T_{xy} es el tensor de energía momento de la teoría de norma. Tal interacción puede obtenerse al expandir la acción de Dirac-Born-Infeld alrededor del valor esperado del campo del gravitón. Lejos de las D3-branas, en el espacio asintóticamente plano, tomemos $h_{xy} = e^{-i\omega(t-x_4)}$ donde x_4 es una de las direcciones normales a la brana. Entonces, el flujo de gravitones es

$$\mathcal{F} = \frac{\omega}{8\pi G_{10}}. \quad (3.90)$$

ω proviene de la estructura usual de flujos de bosones: $\mathcal{F} = \frac{1}{2i}\phi^* \overleftrightarrow{\partial} \phi$ para un bosón complejo canónicamente normalizado ϕ . Pero h_{xy} no está canónicamente normalizado, debido al factor $1/16\pi G_{10}$ enfrente de la acción de Einstein-Hilbert en 10 dimensiones. El factor $8\pi G_{10}$ en el denominador compensa esto, así como el hecho de que debemos tomar la parte real de h_{xy} al final. La regla de oro de Fermi establece que la razón neta de absorción de los gravitones es

$$\begin{aligned} \Gamma &= V_3 \sum_{i,f} \frac{e^{-\beta E_i}}{Z} |\langle f | T_{xy}(0,0) | i \rangle|^2 (2\pi) \delta^3(\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i) \\ &\quad \times 2\pi [\delta(E_f - E_i - \omega) - \delta(E_f - E_i + \omega)] \\ &= -2V_3 \text{Im} G_R(\omega). \end{aligned} \quad (3.91)$$

Por otro lado, la relación para $\sigma(\omega)_{\text{QFT}}$ es $\Gamma = \sigma(\omega)_{\text{QFT}} \mathcal{F}$. Por tanto, utilizando la representación para η (3.85) obtenemos

$$\sigma(\omega)_{\text{QFT}} = \frac{\kappa_{10}^2}{\omega} \int dt dx^3 e^{i\omega t} \langle [T_{xy}(t, \mathbf{x}, T_{xy}(0,0))] \rangle. \quad (3.92)$$

En el contexto de la D3-brana, es natural pensar en la razón de decaimiento del gravitón como la sección transversal de absorción debida a la D3-brana, es decir

$$\sigma_{\text{QFT}} = \sigma_{\text{abs}}. \quad (3.93)$$

Del lado de gravedad, la sección transversal de absorción puede ser calculada al resolver la ecuación de onda en la métrica de fondo. Para la sección transversal de absorción de la 3-brana, el parámetro de expansión es

$$N\kappa_{10}\omega^4 \sim Ng_s\alpha'^2\omega^4. \quad (3.94)$$

Entonces, podemos considerar el límite doble

$$Ng_s \rightarrow \infty, \quad \omega^2\alpha' \rightarrow 0, \quad (3.95)$$

donde el parámetro de expansión se mantiene pequeño.

Tomando el límite $\omega \rightarrow 0$, podemos relacionar $\sigma(0)_{\text{abs}}$ con la viscosidad de corte del plasma SYM a temperatura finita (ver (3.85)),

$$\eta = \frac{1}{2\kappa_{10}^2} \sigma_{\text{abs}}(0). \quad (3.96)$$

Por tanto, *el problema de calcular la viscosidad de corte se ha reducido a un problema de gravedad clásica.*

La métrica (en la signatura de Minkowski) de una 3-brana negra no extremal tiene la forma

$$ds^2 = H^{-1/2}(r) [-f(r)dt^2 + d\mathbf{x}^2] + H^{1/2}(r) [f^{-1}(r)dr^2 + r^2d\Omega_5^2], \quad (3.97)$$

donde $H(r) = 1 + R^4/r^4$, $f(r) = 1 - r_0^4/r^4$, R el radio de AdS, y r_0 el radio del horizonte. el caso extremal corresponde a $r_0 = 0$, y el caso casi extremal, $r_0 \ll R$, y la temperatura de Hawking asociada a este agujero negro se puede calcular a partir de la fórmula [75]:

$$T_H = \frac{\kappa_s}{2\pi}, \quad (3.98)$$

donde κ_s es la gravedad de la superficie,

$$\kappa_s = \sqrt{g^{\mu\nu}\partial_\mu V \partial_\nu V} \Big|_{r=r_{\text{hor}}}, \quad V = \sqrt{-g_{tt}(r)}. \quad (3.99)$$

Para el agujero negro no extremal (3.97), $g_{tt}(r) = -(H^{-1/2}f)(r) = -(1 - r_0^4/r^4)/\sqrt{1 + R^4/r^4}$, y $\kappa_s = \sqrt{g^{rr}(\partial_r V)^2} \Big|_{r=r_0}$. Con esto la ecuación (3.98) da como resultado $T_H = \frac{r_0}{\pi R^2} \left(1 + \frac{r_0^4}{R^4}\right)^{-1}$, y en el límite casi extremal ($r_0 \ll R$) obtenemos

$$T_H = \frac{r_0}{\pi R^2}. \quad (3.100)$$

Das, Gibbons y Mathur [76] mostraron que para agujeros negros esféricamente simétricos, la sección transversal de dispersión a bajas energías para escalares no masivos y mínimamente acoplados es siempre el área del horizonte. Podemos ver esto mismo para el caso de agujeros negros casi extremales al resolver la parte radial, onda s ($l=0$), de la ecuación de Laplace para un escalar mínimamente acoplado (tal como el gravitón polarizado paralelamente a la brana, y propagándose perpendicularmente a ella)

$$\partial_\mu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\phi) = 0, \quad (3.101)$$

usando la métrica (3.97), en el límite casi extremal, se convierte en:

$$\phi'' + \frac{5r^4 - r_0^4}{r(r^4 - r_0^4)}\phi' + \omega^2 \frac{r^4(r^4 + R^4)}{(r^4 - r_0^4)^2}\phi = 0. \quad (3.102)$$

Es importante mencionar que el campo del gravitón (polarizado), el cual es la perturbación gravitacional h_{xy} , satisface la misma ecuación de movimiento que un campo escalar no masivo mínimamente acoplado a la métrica de fondo como se menciona en [77].

Queremos resolver esta ecuación diferencial en el límite $\omega \rightarrow 0$ y a temperaturas elevadas, así que asumiremos que $\omega \ll T_H$. Buscamos soluciones en varias regiones y después pegamos el resultado donde quiera que se traslapen.

En la región $r > r_0, r - r_0 \ll r_0$ (**A**), la ecuación diferencial (3.102) tiene la forma

$$\phi'' + \frac{\phi'}{r - r_0} + \frac{\lambda^2}{16} \frac{\phi}{(r - r_0)^2} = 0, \quad \lambda = \frac{\omega}{\pi T_H} = \frac{\omega R^2}{r_0} \ll 1. \quad (3.103)$$

Dos soluciones independientes son

$$\phi_\pm(x) = A(1 - x)^{\sigma_\pm}, \quad (3.104)$$

A es una constante, $x = \frac{r_0^2}{r^2}$, y $\sigma_{\pm} = \pm i\lambda/4$. Consideremos solo la solución asociada a la onda entrante (la solución asociada a la onda saliente es no física) en el horizonte, la cual corresponde a tomar $\sigma = -i\lambda/4$, *i.e.*

$$\phi_A(x) = A(1-x)^{-i\lambda/4}. \quad (3.105)$$

En la región $r_0 < r \ll \omega^{-1}$ (**B**), el término proporcional a ω^2 del lado izquierdo de la ecuación (3.102) puede ser despreciado, como

$$\omega^2 r^8 (r^4 - r_0^4)^{-2} \ll (r - r_0)^{-2} \quad (3.106)$$

debido a que $r_0 \ll \omega^{-1}$, y

$$\omega^2 r^4 R^4 (r^4 - r_0^4)^{-2} \ll (r - r_0)^{-2}, \quad (3.107)$$

debido a que $\omega \ll T \sim r_0 R^{-2}$. Entonces obtenemos,

$$\phi'' + \frac{5r^4 - r_0^4}{r(r^4 - r_0^4)} \phi' = 0, \quad (3.108)$$

con solución $\phi_B = A$, la cual se pega suavemente con la solución obtenida en la primer región (**A**). En la región $r \gg R \gg r_0$, la ecuación diferencial se simplifica a

$$\phi'' + \frac{5}{r} \phi' + \omega^2 \phi = 0, \quad (3.109)$$

ecuación diferencial de Bessel. Las soluciones son de la forma

$$\phi(r) = \alpha \frac{J_2(\omega r)}{(\omega r)^2} + \beta \frac{Y_2(\omega r)}{(\omega r)^2}, \quad (3.110)$$

donde J_2 y Y_2 son funciones de Bessel de primer y segundo tipo respectivamente. α y β son constantes.

Para que las soluciones en las regiones (**B**) y (**C**) peguen suavemente, requerimos que $\alpha = 8A$ y $\beta = 0$. Esto se puede ver al notar que J_α tiene la forma asintótica

$$J_\alpha(\omega r) \sim \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \left(\frac{\omega r}{2}\right)^\alpha \quad (3.111)$$

para $0 < \omega r \ll \sqrt{\alpha + 1}$ y $\alpha > 0$, y que Y_2 diverge en el límite $\omega \rightarrow 0$.

Podemos descomponer el campo a grandes distancias en términos de una onda que entrante y saliente, respectivamente, como sigue:

$$\phi_c(r) = \frac{4A}{(\omega r)^2} (H_2^{(1)}(\omega r) + H_2^{(2)}(\omega r)), \quad (3.112)$$

donde $H_2^{(1,2)}(x) = J_2(x) \pm iY_2(x)$ son funciones de Hankel.

La probabilidad de absorción P es la razón entre flujo J_A de ϕ_A y el flujo entrante j_c de ϕ_C en $r = r_0$, donde

$$j_k = \frac{2\pi}{i} (\phi_k^* \phi_k' - \phi_k \phi_k^{*'}) \quad (3.113)$$

Notase que la corriente j es puramente radial, y es integrada sobre el área de una esfera. Usando ϕ_A , la parte entrante de ϕ_C , y tomando en cuenta solo el orden más bajo en r en el producto de las funciones Hankel, obtenemos:

$$j_A = -4\pi\lambda|A|^2 \frac{r_0^2}{r^3}, \quad (3.114)$$

$$j_C = -128|A|^2 \frac{1}{\omega^4 r^5}.$$

Dado que $\lambda = \omega/(\pi T_H)$, con $T_H = r_0/(\pi R^2)$, obtenemos

$$P = \left(\frac{j_A}{j_C} \right) \Big|_{r=r_0} = \frac{\pi}{32} \omega^5 r_0^3 R^2. \quad (3.115)$$

Como la región transversal de absorción σ está relacionada con P (por un teorema óptico) a través de [76]

$$\sigma = \frac{32\pi^2}{\omega^5} P, \quad (3.116)$$

obtenemos

$$\sigma(0) = \pi^3 r_0^3 R^2 \quad (\text{Área del horizonte del agujero negro en AdS.}) \quad (3.117)$$

Finalmente, empleando la ecuación (3.96) obtenemos la viscosidad de corte asociada a la teoría térmica SYM:

$$\eta = \frac{\pi}{8} N^2 T^3 \quad (3.118)$$

A partir de esta última expresión podemos obtener la razón entre la viscosidad de corte y la densidad de entropía, si usamos primero la fórmula de Bekenstein-Hawking:

$$s = \frac{Ak_B}{4\hbar G} = \frac{\sigma(0)k_B}{4\hbar G} = \frac{2\kappa_{10}^2 \eta}{4\pi G} \quad (3.119)$$

donde hemos utilizado (3.96). Finalmente obtenemos la razón

$$\frac{\eta}{s} = \frac{\hbar}{4\pi k_B} \approx 6,08 \times 10^{-3} K s, \quad (3.120)$$

un número muy pequeño ($\eta/s \approx 3 \times 10^3 K s$ bajo circunstancias normales). Como todas las relaciones utilizadas son genéricas, el resultado debe ser universal, *i.e.* independiente de los detalles de agujeros negros o teorías de norma (cuando el acoplamiento de 't Hooft es grande). Así que la afirmación es: **Plasmas descritos por una teorías de campo térmicas, los cuales tienen duales gravitacionales tienen un valor universal mínimo de η/s cuando el acoplamiento de 't Hooft es grande.**

Esta es una afirmación realmente sorprendente, debido a que hay teorías de campo muy distintas que conducen a la misma propiedad dual gravitacional. No hay hasta la fecha una explicación de la constancia de η/s en estas teorías basada en argumentos de teoría de campos solamente. A pesar de que existen muchas teorías de campo con duales gravitacionales realmente complicados,

se especula que estos resultados son ciertos en un contexto más amplio, *i.e.* se cree que la razón η/s tiene un límite inferior

$$\frac{\eta}{s} \geq \frac{\hbar}{4\pi k_B} \quad (3.121)$$

para todas las teorías de campo a temperatura finita. La desigualdad es saturada por teorías con duales gravitacionales. Una pieza de evidencia sustentando esta afirmación proviene de un cálculo reciente [78], la primer corrección en potencias inversas de $g^2 N$ proveniente de la teoría de cuerdas a la gravedad de Einstein. El resultado es

$$\frac{\eta}{s} = \frac{\hbar}{4\pi k_B} \left(1 + \frac{135\zeta(3)}{8(2\lambda)^{3/2}} + \dots \right). \quad (3.122)$$

La corrección positiva está de acuerdo con la cota (3.121). Por tanto, es natural asumir que η/s es más grande que la cota inferior para todos los valores de λ .

Con respecto a las mediciones experimentales llevadas a cabo en RHIC, en [79, 80] ajustan un conjunto de ecuaciones pertenecientes a la hidrodinámica relativista con viscosidad, a los datos de RHIC. Ellos analizaron datos correspondientes al flujo elíptico de hadrones cargados del experimento STAR. Encontraron un rango permitido de $0,08 < \eta/s < 0,2$ para ciertas condiciones iniciales específicas. Sin embargo, los errores experimentales son grandes, y los datos no son del todo confiables. Ellos también establecen una cota máxima de $\eta/s < 5 \times 1/4\pi \sim 0,4$.

En cuanto a la región de acoplamiento débil, aunque es posible, en principio, utilizar la ecuación (3.85) para calcular la viscosidad de corte, este camino directo es realmente complicado, debido a que requiere sumar un conjunto infinito de series de diagramas de Feynman. Un método más práctico es usar la ecuación cinética de Boltzmann, la cual da los mismos resultados que el método diagramático [81]. Para teorías de norma en el acoplamiento débil, la viscosidad de corte tiene el comportamiento paramétrico siguiente:

$$\eta = \mathcal{K} \frac{N^2 T^3}{\lambda^2 \ln(1/\lambda)} \quad (3.123)$$

Donde \mathcal{K} es un coeficiente numérico. Esto es básicamente: η es proporcional al producto de la densidad de energía $\varepsilon \sim N^2 T^4$ y el tiempo de transporte medio $\tau \sim (g^2 N)^2 \ln(\frac{1}{g^2 N}) T$. El coeficiente numérico \mathcal{K} puede ser, en principio, calculado al resolver la ecuación linealizada de Boltzmann [82]. Empleando esta ecuación los coeficientes numéricos fueron calculados dando como resultado [83]:

$$\frac{\eta}{s} \simeq \frac{6,174}{\lambda^2 \ln(2,36/\sqrt{\lambda})}. \quad (3.124)$$

En cuanto QCD, la teoría no masiva con $N_f = 3$ es el caso más cercano al mundo real, porque las temperaturas en colisiones de iones pesados tienen $m_u, m_d, m_s < T$ pero $m_c \gg T$. Los resultados para la viscosidad de corte dividida por la densidad de entropía a primer orden $s = 2\pi^2 T^3 g_*/45$ (con g_* el número de campos bosónicos más $7/8$ el número de campos fermiónicos, $16 + 36(7/8) = 47,5$ para $N_f = 3$ QCD) son

$$\frac{\eta}{s} \approx \frac{A}{N_c^2 g^4 \ln(B/g\sqrt{N_c})}, \quad A, B = \begin{cases} 34,8, & 4,67 & N_f = 0 \\ 46,1, & 4,17 & N_f = 3. \end{cases} \quad (3.125)$$

La física determinante de la viscosidad de corte en la región de acoplamiento débil es la *dispersión de Coulomb*. Dos acoplamientos son relevantes en este acoplamiento; el acoplamiento de cuasipartículas a bosones de norma, y el acoplamiento de ese bosón de norma con todos los demás grados de libertad del plasma. El primer acoplamiento (sumado sobre los bosones de norma disponibles) va como $C_R g^2$, donde C_R el Casimir del grupo relevante. En el caso de SYM, $C_R = C_A = N_c$; para QCD $N_c = 3$ para gluones y $(N_c^2 - 1)/2N_c = \frac{4}{3}$ para quarks. El segundo factor depende del número, representación, y estadística de otros grados de libertad en el plasma, en la combinación exacta que entra en la masa de apantallamiento de Debye al cuadrado. El apantallamiento de Debye es característico de cualquier plasma. En plasmas descritos por una teoría de campo abeliana, el campo eléctrico inducido por una carga de prueba estática decrece exponencialmente con la distancia a la carga, $\langle \mathbf{E}(\mathbf{r}) \rangle \propto e^{-m_D |\mathbf{r}|}$, con m_D la masa de Debye (o el inverso de la longitud de apantallamiento de Debye). Por tanto, es natural esperar que $\eta/s \approx C_R g^2 (m_D^2/T^2)$.

Los quarks en SYM se encuentra en la representación adjunta, lo cual conduce a un factor de 2 en el Casimir y 1/2 en η/s . Pero mucho más importante, el conteo de grados de libertad que entra en m_D^2 es más grande en SYM que en QCD. Por ejemplo, para N_c , SYM tiene $4 \times 2 \times 8 = 64$ grados de libertad fermiónicos (cuatro especies de fermiones de Weyl, los cuales consisten de una partícula y antipartícula en 8 colores) y $(6 + 2) \times 8 = 64$ grados de libertad bosónicos (6 escalares y 2 polarizaciones asociadas a un bosón de norma por 8 colores), para un total de 128; mientras que en $N_f = 3$ QCD, hay solo $3 \times 4 \times 3 = 36$ grados de libertad fermiónicos y 16 bosónicos. Las masas de Debye correspondientes son muy distintas; $m_D^2 = 2\lambda T^2$ en SYM, pero $m_D^2 = \frac{1}{2}\lambda T^2$ en $N_c = 3, N_f = 3$ QCD.

Cuando el acoplamiento λ es débil, SYM tiene un valor de η/s el cual es alrededor de 1/7 el valor en QCD. Esta diferencia existe porque los quarks tienen un acoplamiento más pequeño con los gluones que la autointeracción entre ellos, debido a que están en una representación distinta; y de manera más significativa, porque SYM tiene muchos más grados de libertad disponibles como objetivos de dispersión de los que tiene QCD.

La potencia de T en la expresión para η (3.118) está completamente fija por la dimensionalidad de η y la invariancia de escala de la teoría. Además, el factor N^2 proviene del número de grados de libertad del plasma. Es realmente interesante es que η se aproxime a un valor constante conforme el acoplamiento de 't Hooft va al infinito. De la relación $\eta \sim \varepsilon \tau$, podemos interpretar este comportamiento como indicador de que el “tiempo de relajación” τ permanece de orden T^{-1} (pero no más pequeño) en el límite de acoplamiento fuerte. Como el inverso del tiempo de relajación es comparable con la energía por grado de libertad, el plasma fuertemente acoplado no puede verse como una colección de partículas, y la fórmula $\eta \sim \varepsilon \tau$ no se puede aplicar en estricto sentido. Sin embargo, podemos esperar que el conteo de potencias de N siga funcionando. Este conteo, combinado con las expresiones de η en los límites de acoplamiento débil (3.124) y fuerte (3.122), sugieren que para $\lambda = g^2 N$ finito, la viscosidad de corte tiene la forma [71]

$$\eta = f(g^2 N) N^2 T^3, \quad (3.126)$$

donde $f(x) \sim x^{-2} \log^{-1}(1/\sqrt{x})$ cuando $x \ll 1$ y $f(x) = \pi/8$ cuando $x \gg 1$. Lo más probable es que $f(x)$ sea una función monótona de x , de hecho, el que la primera corrección a la viscosidad de corte en (3.124) sea positiva es un indicador a favor de ello, análogo a lo que ocurre con la entropía en SYM, excepto que cuando el acoplamiento es pequeño $\eta \rightarrow \infty$, mientras que la entropía permanece finita. Sin embargo, aún no se conoce la forma explícita de la función $f(x)$.

$[N M] (\lambda)$	$I_s [N M]$	$I_l [N M]$	$I_s + I_l$
[8 8]	0,305929	4,94215	5.24808
[5 5]	0,358589	0,115097	0,473685
[6 6]	0.422549	0.0695932	0.492142
[8 8]	11.0018	0.130975	11.1328
[2 2]	0.271904	354.008	354.28
[3 3]	0.240015	342.786	343.026
[7 7]	0.116677	1.3587	1.47537

Tabla 3.2 Resultados obtenidos al aplicar el criterio (1.91) al problema de la viscosidad de corte en SYM.

Toda esta información asintótica nos permitió construir distintos aproximantes de Padé (ver apéndice E), y empleando el criterio (1.91), con las expresiones para los errores (1.89) (con una tolerancia de $\varepsilon = 0,1$) determinamos el valor de las variables $\lambda_s^* = 0,01$ (punto respecto al cual expandimos en serie para obtener la expresión para el acoplamiento débil) y $\lambda_l^* = 5,0$. Con todo lo anterior el criterio (1.91) da como resultado que el mejor aproximante es el de orden [5|5], como lo muestra la Tabla 3.2.

El aproximante [5|5] aproxima muy bien ambos regímenes de acoplamiento según el criterio (1.90). Además, decrece de manera monótona conforme λ aumenta en completo acuerdo con las propiedades esperadas de la función (3.126). Es importante mencionar una limitante de este método numérico: debido a que no existe una serie de potencias convergente que aproxime el logaritmo involucrado en la expresión (3.124), debemos emplear una aproximación numérica al rededor de un punto tal que $\lambda \ll 1$. Como la serie calculada será finita no esperamos que capture la singularidad con todo detalle. A pesar de ello, podemos recorrer cada vez más dicho punto para obtener más y más puntos en la interpolación. Interpolación, que tomará valores muy cercanos a los que tomaría la función $f(x)$, basando este enunciado en la gran cantidad de ejemplos en los cuales los aproximantes de Padé de dos puntos aproximan de manera increíblemente precisa una función arbitraria a partir sólo de su información asintótica. En cuanto a su comportamiento con respecto al acoplamiento λ , el aproximante tiende a la expansión del acoplamiento fuerte a partir de valores de $\lambda \approx 10$, lo cual indica que para estos valores la entropía de corte está completamente dominada por el acoplamiento λ como uno esperaría de un sistema fuertemente acoplado. Por otro lado, el comportamiento de nuestro aproximante sugiere que la expansión débil es válida para valores muy próximos a cero. En contraste, en [83] se argumenta que esto no es del todo cierto pues la validez de la expansión (3.124) depende de m_D^2/T^2 en lugar de solo λ , combinación que incluye el conteo de grados de libertad del plasma y es más relevante para el comportamiento térmico. Para que nuestro aproximante reproduzca este comportamiento tal vez es necesario indicarle que se acerque más a la expansión débil, modificando así el método de Padé para construir aproximantes. Sin embargo, este análisis escapa del objetivo del presente trabajo y podría formar parte de un trabajo futuro.

3.4. Función Bremsstrahlung

Uno de los primordiales intereses al usar la correspondencia AdS/CFT ha sido el estudio de varios tipos de propiedades físicas pertenecientes a teorías de norma fuertemente acopladas. Una

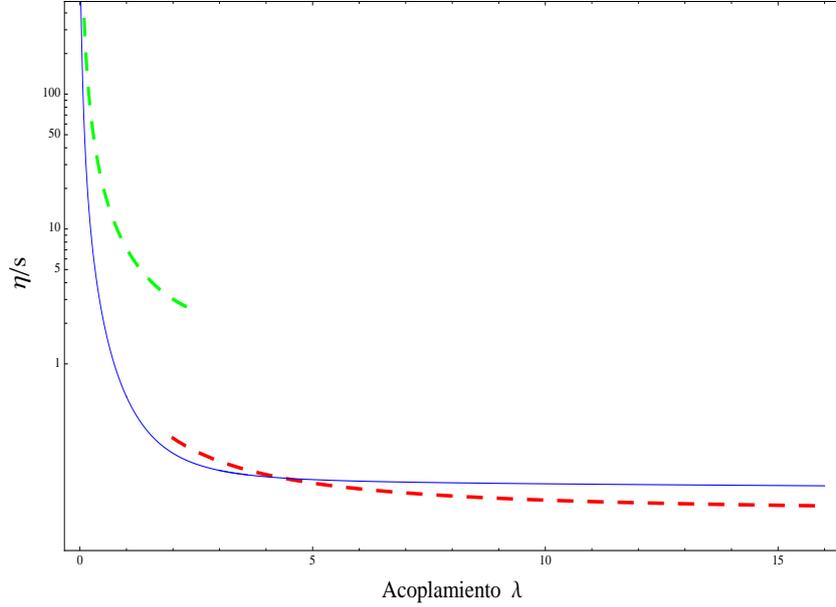


Figura 3.3: Aproximante de Padé de orden [5/5] (Azul). Expansiones del acoplamiento débil (rojo) y fuerte (verde).

manera muy natural y ampliamente investigada en los últimos años ha sido la exploración de teorías de campo a través de hacer interactuar sus campos con “sondas” de prueba, parecido a lo que uno hace al estudiar el campo eléctrico por primera vez.

Se sabe que es posible añadir, a la teoría de campo SYM, N_f sabores (hipermultipletes) de materia en la representación fundamental del grupo de norma $SU(N_c)$ al introducir un sector de cuerdas abiertas asociado a una pila de N_f D7- branas. A estos grados de libertad, colocados a mano, se les llaman “quarks”, a pesar de que, al ser $\mathcal{N} = 2$ supersimétricos, contienen tanto campos de espín 1/2 como de espín 0. Para $N_f \ll N_c$, la reacción de las D7-branas a la geometría en las que están inmersas puede ser despreciada; del lado de la teoría de campo esto corresponde a la aproximación apagada (*quenched*), la cual no tiene en cuenta interacciones provenientes de bucles de quarks.

Estas D7-branas cubren las 4 direcciones correspondientes a la teoría de norma, (t, \mathbf{x}) , y se extienden a lo largo de la dirección radial de AdS, desde la frontera a $z = 0$ hasta la posición $z = z_m$, donde $z_m = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi m}$. Un quark aislado de masa m es dual a una cuerda abierta que se extiende en la dirección radial desde las D7-branas hasta el horizonte de AdS en $z \rightarrow \infty$, y su dinámica está gobernada por la acción de Nambu-Goto. Además, el cuerpo de la cuerda codifica el perfil del campo gluónico generado por el quark.

Al menos para las implementaciones más sencillas de esta identificación (*i.e.* en la ausencia de escalas adicionales como masa finita, o temperatura distinta de cero), los observables que se han calculado revelan una característica en común: si identificamos a la constante de acoplamiento λ , en el acoplamiento débil, como el análogo de la carga al cuadrado, en la región de acoplamiento fuerte hay un apantallamiento de esta carga en el sentido de que los resultados obtenidos son similares a

aquellos que obtendríamos en el análogo clásico, pero con la identificación

$$e^2 \sim \sqrt{\lambda}. \quad (3.127)$$

Este comportamiento genérico se deriva del hecho de que la acción de Nambu-Goto evaluada para las hojas mundo embebidas en el espacio AdS van como

$$S_{NG} = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int d^2\sigma \sqrt{-|g|} = -\frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi L^2} \int d^2\sigma \sqrt{-|g|}, \quad (3.128)$$

donde L es el radio de AdS , el cual generalmente se cancela en esta expresión cuando se sustituyen métricas, asociadas a la hoja mundo, particulares [84]. Por ejemplo, al considerar el movimiento de un quark, infinitamente masivo, en el vacío de la teoría $\mathcal{N} = 4$ SYM, y empleando la correspondencia AdS/CFT , Mikhailov [85] fue capaz de resolver la ecuación de movimiento para la cuerda dual en AdS , para una trayectoria arbitraria tipo tiempo del punto final de la cuerda, dando como resultado,

$$X^\mu(\tau, z) = z \frac{dx^\mu(\tau)}{d\tau} + x^\mu(\tau), \quad (3.129)$$

con $x^\mu(\tau)$ la línea mundo del punto final de la cuerda en la frontera AdS , o de manera equivalente, la línea mundo del quark masivo dual, parametrizado por su tiempo propio τ .

Usando la métrica de $AdS_5 \times S^5$

$$ds^2 = \frac{L^2}{z^2}(-dt^2 + d\mathbf{x}^2 + dz^2) + L^2 d\Omega_5, \quad (3.130)$$

$$\frac{L^4}{l_s^4} = g_{YM}^2 N_c := \lambda,$$

donde l_s denota la longitud de la cuerda, y la solución (3.129), la métrica inducida sobre la hoja mundo tiene componentes

$$g_{\tau\tau} = \frac{L^2}{z^2}(z^2 \overset{\circ}{x}^2 - 1), \quad g_{zz} = 0, \quad g_{z\tau} = -\frac{L^2}{z^2}, \quad (3.131)$$

donde $\overset{\circ}{x}^\mu := \frac{dx^\mu}{d\tau}$, τ es el tiempo propio (definido tal que $\overset{\circ}{x}^\mu \overset{\circ}{x}_\mu = -c^2$). Las cuales en particular implican que las líneas a τ constante son nulas. La solución (3.129) es “retardada”, en el sentido de que el comportamiento a tiempo $t = X^0(\tau, z)$ del segmento localizado en la posición radial z está determinado completamente por el comportamiento del punto final de la cuerda a un tiempo anterior $t_{\text{ret}}(t, z)$ obtenido al proyectar de nuevo hacia la frontera a lo largo de la línea nula a τ fija. A partir de la componente $\mu = 0$ de (3.129), parametrizando la línea mundo del quark con $x^0(\tau)$ en lugar de τ , y usando $d\tau = \sqrt{1 - \mathbf{v}^2} dx^0$, donde $\mathbf{v} := \frac{d\mathbf{x}}{dx^0}$, la relación que define el tiempo de retardo es:

$$t = z \frac{1}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2}} + t_{\text{ret}}, \quad (3.132)$$

donde la velocidad del punto final \mathbf{v} se evalúa al tiempo t_{ret} . Con estas mismas consideraciones, las componentes espaciales de (3.129), se pueden formular como

$$\mathbf{X}(t, z) = z \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2}} + \mathbf{x}(t_{\text{ret}}) = (t - t_{\text{ret}})\mathbf{v} + \mathbf{x}(t_{\text{ret}}). \quad (3.133)$$

Finalmente, usando (3.132) y (3.133), Mikhailov fue capaz de reescribir la energía total de la cuerda en la forma

$$E(t) = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \int_{-\infty}^t dt_{ret} \frac{\mathbf{a}^2 - [\mathbf{v} \times \mathbf{a}]^2}{(1 - \mathbf{v}^2)^3} + E_q(\mathbf{v}(t)), \quad (3.134)$$

con $\mathbf{a} := d\mathbf{v}/dx^0$. El primer término codifica la energía acumulada perdida por el quark sobre todos los tiempos anteriores a t , y sorprendentemente, esta expresión tiene la misma forma que la fórmula de Lienard de la electrodinámica clásica. El segundo término proviene de una derivada total sobre la hoja mundo, y da la expresión covariante para la energía intrínseca al quark,

$$E_q(\mathbf{v}(t)) = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2}} \frac{1}{z} \right) \Big|_{\infty}^{z_m=0} = \gamma m. \quad (3.135)$$

El problema análogo en electrodinámica clásica tiene como solución la fórmula de Liénard:

$$\Delta E = \frac{2}{3} e^2 \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{\mathbf{a}^2 - [\mathbf{v} \times \mathbf{a}]^2}{(1 - \mathbf{v}^2)^3} \quad (3.136)$$

La forma funcional de esta expresión se sigue del análisis dimensional e invariancia relativista bajo la suposición de que la energía emitida es una función local de la trayectoria asociada a la partícula. Esta suposición se basa en el hecho de que las ecuaciones de Maxwell son lineales. De hecho, el campo originado por la partícula en cualquier momento de su historia es independiente de los campos creados antes; solo se añade a ellos. Aparte de eso, el campo electromagnético en cualquier punto del espacio dado, digamos \mathcal{P} , depende únicamente de la trayectoria de la partícula cerca de la intersección con el cono de luz del pasado de \mathcal{P} ; por tanto no hay interferencia entre ondas electromagnéticas creadas a distintos tiempos.

La teoría SYM es no lineal, por tanto es de esperar que la energía emitida por la fuente moviéndose sea una función no local de la trayectoria. Sin embargo, como hemos visto en el régimen de validez de la correspondencia, resulta que la respuesta está dada por la fórmula de Liénard (3.136) con coeficiente global $\sqrt{\lambda}/2\pi$. Como se menciona en [85]: “*Es sorprendente que la energía radiada sea una función local de la trayectoria en la teoría de campo fuertemente acoplada Yang-Mills, la cual es altamente no lineal. Esta es una manifestación de la integrabilidad del modelo clásico sigma de la hoja mundo*”.

Algunos años después, Maldacena et al. [86] hallaron una generalización del resultado de Mikhailov (3.134), *i.e.* un resultado que es válido para toda λ . Ellos estudiaron una cantidad conocida como la cúspide de dimensión anómala, la cual está relacionada con una variedad de observables físicas como sus casos particulares. A ángulos pequeños se comporta de manera:

$$\Gamma_{\text{cusp}}(\phi) = -B(\lambda, N)\phi^2 + \mathcal{O}(\phi^4), \quad (3.137)$$

$B(\lambda, N)$ es llamada la función *Bremsstrahlung* por su relación con la energía emitida por un quark en movimiento,

$$\Delta E = 2\pi B \int_{-\infty}^{\infty} dt (\dot{v})^2. \quad (3.138)$$

en el límite de bajas velocidades. El resultado para cualquier velocidad puede obtenerse al aplicar un boost y es igual a la fórmula de Liénard hasta el reemplazo $\frac{2e^2}{3} \rightarrow 2\pi B$ en (3.136).

La solución exacta para todos los valores del acoplamiento y para toda N es [86]:

$$B = \frac{1}{2\pi^2} \lambda \partial_\lambda \log \left(\frac{1}{N} L_{N-1}^1 \left(-\frac{\lambda}{4N} \right) \right) \exp \left(\frac{\lambda}{8N} \right),$$

donde L es el polinomio de Laguerre modificado y $\lambda = g_{YM}^2 N$. Usando las siguientes identidades de los polinomios de Laguerre:

$$\partial_\lambda L_{N-1}^1 \left(-\frac{\lambda}{4N} \right) = \frac{1}{4N} L_{N-2}^2 \left(-\frac{\lambda}{4N} \right),$$

$$L_{N-1}^1 = L_{N-1}^2 - L_{N-2}^2,$$

B se puede reescribir como:

$$B(\lambda, N) = \frac{\lambda}{16\pi^2 N} \frac{L_{N-1}^2 \left(-\frac{\lambda}{4N} \right) + L_{N-2}^2 \left(-\frac{\lambda}{4N} \right)}{L_{N-1}^1 \left(-\frac{\lambda}{4N} \right)}$$

En el límite plano, cuando N es grande se obtiene,

$$B = \frac{1}{4\pi^4} \frac{\sqrt{\lambda} I_2(\sqrt{\lambda})}{I_1(\sqrt{\lambda})} + \mathcal{O}(1/N^2)$$

Sus expansiones cuando el acoplamiento λ es débil y fuerte son, respectivamente,

$$B = \frac{\lambda}{16\pi^2} - \frac{\lambda^2}{384\pi^2} + \frac{\lambda^3}{6144\pi^2} - \frac{\lambda^4}{92160\pi^2} + \dots$$

$$B = \frac{\sqrt{\lambda}}{4\pi^2} - \frac{3}{8\pi^2} + \frac{3}{32\pi^2\sqrt{\lambda}} + \frac{3}{32\pi^2\lambda} + \dots$$

Vemos que en el acoplamiento débil, la ecuación (3.138) se reduce a la vieja fórmula de la electrodinámica, mientras que el resultado en el acoplamiento fuerte concuerda con el obtenido por Mikhailov (3.134). Con esta información asintótica logramos construir varios aproximantes de Padé (ver apéndice F), y empleando el criterio (1.91), con las expresiones para los errores (1.89) (con una tolerancia de $\varepsilon = 0,001$) determinamos el valor de las variables $\lambda_s^* = 0,2$ y $\lambda_l^* = 8,0$. Con todo lo anterior el criterio (1.91) da como resultado que el mejor aproximante de Padé es de orden [6|5], como lo muestra la Tabla 3.3. Resulta realmente sorprendente el gran parecido que existe entre nuestro aproximante de Padé y la solución exacta. Son indistinguibles hasta orden $\mathcal{O}(10^{-4})$. Este ejemplo nos permite sustentar con mayor solidez los cálculos hechos para la entropía en SYM y la viscosidad de corte. E incluso pensar que de que la existencia de la existencia de funciones suaves entre ambos acoplamientos, aún desconocidas, a las que se acercan los aproximantes, son consecuencia del hecho de que la teoría SYM con $\mathcal{N} = 4$ en 4 dimensiones es integrable. En otras palabras, la integrabilidad de la teoría puede ser la razón de porqué el método de aproximantes de Padé está funcionando tan bien.

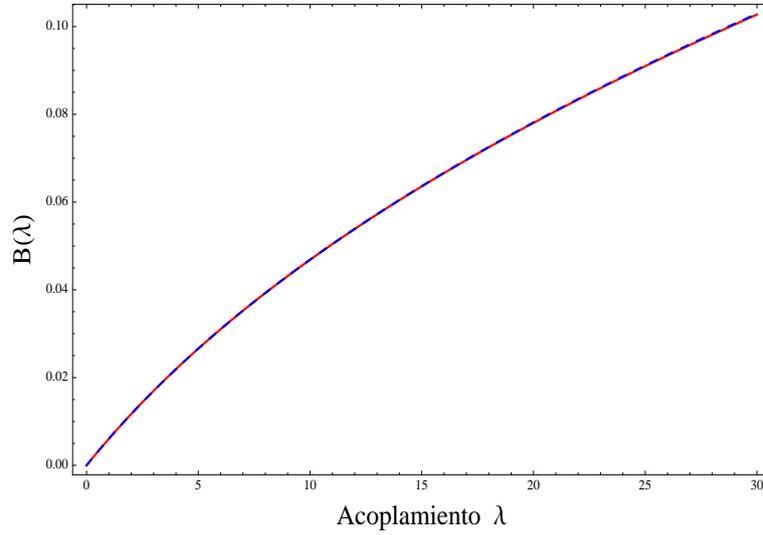


Figura 3.4: Aproximante de Padé de orden [6|5] (Rojo). Solución Exacta (Azul).

$[N M](\lambda)$	$\Lambda^{-1} \int d\lambda \left \frac{[N M]-B(\lambda)}{B(\lambda)} \right $	$I_s [N M]$	$I_l [N M]$	$I_s + I_l$
[6 5]	0,000129699	$5,842 \times 10^{-13}$	0,00338383	0,00338383
[10 9]	0.278869	$3,39 \times 10^{-7}$	0.0444645	0.0444649
[9 8]	0.00291088	$1,757 \times 10^{-7}$	0.00788312	0.0078833
[6 5]	0.00151134	$6,436 \times 10^{-9}$	0,00379481	0,00379482
[5 4]	0.00154895	$1,286 \times 10^{-10}$	0.00426118	0.00426118
[7 6]	0.00371727	8.792×10^{-7}	0.0108514	0.0108523
[8 7]	0.0077689	$2,473 \times 10^{-6}$	0.00361866	0.00362113
[8 7]	0.00494955	0.0000123009	0.00383014	0.00384244
[8 7]	0.032354	$2,377 \times 10^{-6}$	0.0246735	0.0246759
[7 6]	0.000824946	$2,516 \times 10^{-7}$	0.00616609	0.0246737
[9 8]	0.0521666	0.000114466	0.0205279	0.024788
[6 5]	0.00295803	$9,386 \times 10^{-9}$	0.00115962	0.0246735

Tabla 3.3 Resultados obtenidos al aplicar el criterio (1.91) al problema de la función B en SYM .

Capítulo 4

Conclusiones

A lo largo de este trabajo estudiamos el problema de interpolación entre dos regímenes de acoplamiento, fuerte y débil, correspondientes a teorías de campo supersimétricas con dual gravitacional, en el contexto de la correspondencia *AdS/CFT*. Los casos que resultan de mayor interés son, por supuesto, aquellos en los cuales no existe solución analítica para la función de interpolación, como por ejemplo, la entropía y la viscosidad de corte en SYM. En estos casos se tiene a mano únicamente parte de la información asintótica de ambos regímenes. Del lado débil es posible calcular correcciones a partir de la teoría perturbativa en $\mathcal{N} = 4$ Super Yang Mills, a temperatura cero y finita, respectivamente. Mientras que del lado fuertemente acoplado, las correcciones se originan de la aplicación de la correspondencia *AdS/CFT*. Los cálculos en ambas regiones requieren de un análisis muy cuidadoso debido al alto grado de complejidad que implican. Surge, entonces, el problema de encontrar el comportamiento asociado a la función de interpolación partiendo de la información asintótica en dos puntos distintos para comprender qué ocurre en la teoría de norma cuántica y/o teoría de cuerdas correspondiente a la región con acoplamiento de 't Hooft finito.

Motivados por las propiedades de convergencia de los aproximantes de Padé que, como repasamos en el primer capítulo de esta tesis, en muchos sentidos superan a los pertenecientes a las usuales series de Taylor, como por ejemplo el hecho de que para construirlos alrededor de un punto no es necesario conocer la forma explícita de la función a aproximar, y además es posible añadirles más información asintótica acerca del comportamiento de esta función alrededor de tantos puntos como queramos; empleamos el método de aproximantes de dos puntos para construir una aproximación a la función de interpolación $f(\lambda)$. Pero, antes de abordar los problemas centrales para esta tesis, estudiamos varios sistemas mecánico-cuánticos sencillos como “modelos de juguete” en los cuales aplicar el método de aproximantes de dos puntos: el sistema de dos niveles, efecto Stark y efecto Zeeman. En tales modelos apreciamos cómo los aproximantes se acercan, de manera muy precisa, a las soluciones exactas conocidas. Después, discutimos el problema del paisaje de aproximantes (ver sec. 1.4) en un caso muy sencillo, el de la teoría φ^4 cero dimensional, y le dimos solución al proponer una prescripción para hallar el mejor aproximante de entre todos los posibles, obteniendo resultados satisfactorios para este modelo, después de comparar con la solución exacta conocida para la función de partición. En otras palabras, hallamos que el aproximante, $G(\lambda)$, que minimiza el error calculado con respecto a la solución exacta, satisface también el criterio propuesto (1.91), y por tanto, le acuñamos el carácter de *el mejor aproximante de Padé*. Calculamos aproximantes de Padé, también, asociados al modelo de Ising en dos dimensiones cuya

expresión completa para la función de partición es conocida. Aprendimos que, al menos en este caso, los aproximantes de Padé localizan de manera cada vez más precisa el punto crítico, en su punto máximo, donde ocurre la transición de fase, conforme se aumenta el grado del aproximante. En este modelo, pusimos a prueba, una vez más, nuestro criterio al comparar con la solución exacta, obteniendo nuevamente resultados favorables.

Finalmente, aplicamos el método de aproximantes al caso del cálculo de la entropía y la viscosidad de corte en la teoría SYM. Basándonos en los resultados antes descritos concluimos que hallamos los mejores aproximantes de Padé, los cuales se aproximan de manera precisa a la función de interpolación desconocida. Más aún, nuestros aproximantes calculados reproducen el comportamiento esperado de estas funciones y son, por tanto, un buen indicador de su comportamiento genérico. Es sorprendente que con muy poca cantidad de computo hallamos obtenido resultados numéricos tan precisos en problemas que involucran un alto grado de complejidad en cada una de sus correcciones analíticas. El tercer ejemplo, la función $B(\lambda)$ de Maldacena, considerado sustenta lo anterior de manera explícita, pues el cálculo de cada una de las correcciones es un problema que dista mucho de la trivialidad, así como el computo del resultado exacto, una combinación de funciones especiales complicadas. A pesar de ello, el mejor aproximante de Padé calculado numéricamente, con la información asintótica finita, se acerca de manera muy precisa a la solución exacta. El error entre el aproximante y la solución exacta es del orden de $\sim 10^{-4}$.

La razón a la cuestión planteada al inicio: *¿porqué los aproximantes de Padé funcionan tan bien en este tipo de problemas?*, puede deberse, tal vez, al hecho de que la teoría SYM es integrable, sin embargo, esto último debe ser analizado con mayor profundidad. En cualquier caso la eficacia del método de aproximantes de Padé en el ejemplo de la función $B(\lambda)$ es el argumento más sólido que tenemos para pensar que el método funciona de manera correcta, también, en los casos en los que no se conoce a la función de interpolación $f(\lambda)$ de manera exacta.

Finalmente, agregamos dos ejemplos en el contexto de la teoría ABJM, en los cuales se puede observar que la técnica de aproximantes funciona de manera muy precisa. Sin embargo, por la complejidad de la teoría ABJM, esta escapa al análisis del presente trabajo, aunque podría ser parte de un trabajo futuro en el que se estudie la técnica de Padé aplicada a una clase más general de teorías involucradas en la correspondencia *Norma/Gravedad* y su relación con el concepto de integrabilidad.

Apéndice A

Efecto Zeeman

Aproximantes de Padé calculados con la información de las tablas 1.2 y 1.3, correspondientes al efecto Zeeman.

$$E_{1, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}}^{[1|1]} = \frac{-13,4 - 4,34574 \varepsilon}{1 + 0,324305 \varepsilon} \quad (\text{A.1})$$

$$E_{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{[1|1]} = \frac{-13,4002 - 4,34574 \varepsilon}{1 + 0,324305 \varepsilon} \quad (\text{A.2})$$

$$E_{1, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}}^{[2|1]} = \frac{-13,4 - 4,34566 \varepsilon + 0,000018772 \varepsilon^2}{1 + 0,324305 \varepsilon} \quad (\text{A.3})$$

$$E_{1, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}}^{[2|1]} = \frac{-13,4002 - 4,34578 \varepsilon - 0,000018772 \varepsilon^2}{1 + 0,324305 \varepsilon} \quad (\text{A.4})$$

Apéndice B

Teoría φ^4 cero dimensional

Aproximantes de Padé calculados con la información de las series (1.85) y (1.86),

$$[4|5] = \frac{0,453\lambda^2 + 1,597\sqrt{\lambda} + 1.}{0,1497\lambda^{5/2} + 0,546\lambda^2 + 1,597\sqrt{\lambda} + 1.} \quad (\text{B.1})$$

$$[2|4] = \frac{-5,313\lambda - 23,303\sqrt{\lambda} + 1.}{-2,184\lambda^{3/2} - 0,540\lambda^2 - 5,219\lambda - 23,303\sqrt{\lambda} + 1.} \quad (\text{B.2})$$

$$[3|4] = \frac{-0,143\lambda^{3/2} - 0,071\lambda + 0,874\sqrt{\lambda} + 1.}{-0,143\lambda^{3/2} + 0,093\lambda^2 - 0,071\lambda + 0,874\sqrt{\lambda} + 1.} \quad (\text{B.3})$$

$$[8|9] = \frac{1,448\lambda^{5/2} + 0,429\lambda^4 + 1,985\lambda^2 + 1,396\sqrt{\lambda} + 1.}{1,579\lambda^{5/2} + 0,076\lambda^{9/2} + 0,573\lambda^4 + 2,079\lambda^2 + 1,396\sqrt{\lambda} + 1.} \quad (\text{B.4})$$

$$[8|9] = \frac{2,400\lambda^{5/2} + 0,429\lambda^4 + 1,985\lambda^2 + 2,313\sqrt{\lambda} + 1.}{2,617\lambda^{5/2} + 0,126\lambda^{9/2} + 0,573\lambda^4 + 2,079\lambda^2 + 2,313\sqrt{\lambda} + 1.} \quad (\text{B.5})$$

$$[5|5] = \frac{0,385\lambda^{5/2} + 0,484\lambda^3 + 1,037\lambda^2 + 1,069\lambda + 0,850\sqrt{\lambda} + 1.}{0,465\lambda^{5/2} + 0,054\lambda^4 + 0,585\lambda^3 + 1,131\lambda^2 + 1,069\lambda + 0,850\sqrt{\lambda} + 1.} \quad (\text{B.6})$$

$$[7|8] = \frac{0,238\lambda^{3/2} + 0,790\lambda^{5/2} + 0,108\lambda^{7/2} + 0,071\lambda^3 + 1,037\lambda^2 + 0,157\lambda + 1,743\sqrt{\lambda} + 1.}{0,238\lambda^{3/2} + 0,953\lambda^{5/2} + 0,130\lambda^{7/2} + 0,054\lambda^4 + 0,086\lambda^3 + 1,131\lambda^2 + 0,157\lambda + 1,743\sqrt{\lambda} + 1.} \quad (\text{B.7})$$

$$[3|7] = \frac{-0,171\lambda^{3/2} + 2,079\lambda - 0,109\sqrt{\lambda} + 1.}{-0,181\lambda^{3/2} - 0,011\lambda^{5/2} + 0,002\lambda^{7/2} + 0,022\lambda^4 - 0,044\lambda^3 + 0,152\lambda^2 + 2,17\lambda - 0,109\sqrt{\lambda} + 1.} \quad (\text{B.8})$$

$$[8|10] = \frac{0,860\lambda^{3/2} + 0,710\lambda^{5/2} - 0,022\lambda^{7/2} + 0,106\lambda^4 + 0,248\lambda^3 - 0,175\lambda^2 + 0,934\lambda + 0,936\sqrt{\lambda} + 1.}{0,948\lambda^{3/2} + 0,751\lambda^{5/2} + 0,0489\lambda^{7/2} - 0,059\lambda^{9/2} + 0,0710\lambda^5 + 0,109\lambda^4 + 0,236\lambda^3 - 0,130\lambda^2 + 1,028\lambda + 0,936\sqrt{\lambda} + 1.} \quad (\text{B.9})$$

$$[6|7] = \frac{-0,710\lambda^{3/2} + 7,087\lambda^{5/2} - 0,807\lambda^3 - 2,182\lambda^2 + 1,186\lambda - 4,799\sqrt{\lambda} + 1.}{-1,160\lambda^{3/2} + 7,224\lambda^{5/2} + 0,483\lambda^{7/2} - 1,018\lambda^3 - 2,113\lambda^2 + 1,279\lambda - 4,799\sqrt{\lambda} + 1.} \quad (\text{B.10})$$

$$[10|10] = \frac{4,650\lambda^{5/2} + 0,634\lambda^{9/2} + 0,429\lambda^4 + 8,314\lambda^3 + 1,985\lambda^2 + 8,012\lambda + 3,131\sqrt{\lambda} + 1.}{4,943\lambda^{5/2} + 0,937\lambda^{9/2} + 0,439\lambda^5 + 0,573\lambda^4 + 9,065\lambda^3 + 2,079\lambda^2 + 8,0124\lambda + 3,131\sqrt{\lambda} + 1.} \quad (\text{B.11})$$

Apéndice C

Modelo de Ising en 2D

$$[4|7] = \frac{0,00993T^4}{1 + 1,362T - 0,168T^3 + 0,024T^5 - 0,0024T^7} \quad (\text{C.1})$$

$$[4|7] = \frac{0,065T^4}{1 - 1,521T + 1,391T^2 + 1,112T^3 - 0,163T^5 + 0,0163T^7} \quad (\text{C.2})$$

$$[5|8] = \frac{0,0136T^4 + 0,0056T^5}{1 + 0,354T - 0,768T^2 + 0,232T^3 + 0,095T^4 - 0,034T^5 - 0,014T^6 + 0,0034T^7 + 0,0014T^8} \quad (\text{C.3})$$

$$[6|9] = \frac{-0,794T^3 + 0,4117T^4 - 0,122T^5 + 0,053T^6}{1 + 0,313T - 0,249T^2 + 0,278T^3 + 0,095T^4 + 0,127T^5 - 0,107T^6 + 0,029T^7 + 0,03T^8 - 0,013T^9} \quad (\text{C.4})$$

$$[6|9] = \frac{0,326T^4 - 0,055T^5 + 0,056T^6}{1 + 2,177T + 1,223T^2 - 2,143T^3 - 0,936T^4 + 0,137T^5 + 0,137T^6 - 0,0585T^7 - 0,0137T^8 + 0,014T^9} \quad (\text{C.5})$$

$$[6|9] = \frac{0,3628T^4 + 0,0638T^5 + 0,0471T^6}{1 - 1,553T - 0,6413T^2 + 0,307T^3 - 1,0855T^4 + 0,104T^5 + 0,159T^6 + 0,0272T^7 - 0,0159T^8 - 0,011T^9} \quad (\text{C.6})$$

$$[4|11] = \frac{-0,92T^4}{1 + 0,946T - 1,262T^2 - 1,375T^3 - 0,352T^4 + 0,806T^5 + 1,327T^6 - 0,718T^7 + 0,025T^8 - 0,0424T^9 + 0,0071T^{11}} \quad (\text{C.7})$$

$$[7|10] = \frac{-0,644T^3 - 1,441T^4 + 2,994T^5 - 0,04T^6 + 0,36T^7}{1 + 2,527T - 0,557T^2 - 3,591T^3 - 2,998T^4 - 2,908T^5 + 1,512T^6 + 0,258T^7 + 0,153T^8 + 0,01T^9 - 0,09T^{10}} \quad (\text{C.8})$$

$$[7|10] = \frac{0,069T^5 + 0,003T^6 - 0,0051T^7}{1 - 0,8645T + 0,0592T^2 + 0,469T^3 + 0,473T^4 - 0,0581T^5 - 0,0859T^6 + 0,0085T^7 + 0,0044T^8 - 0,00085T^9 + 0,0012T^{10}} \quad (\text{C.9})$$

$$[5|12] = \frac{7,193T^4 - 4,784T^5}{1 + 9,966T - 12,38T^2 - 8,383T^3 - 3,415T^4 + 1,855T^5 + 12,807T^6 - 1,995T^7 + 6,026T^8 + 5,237T^9 - 0,22T^{10} - 0,0561T^{11} + 0,0373T^{12}} \quad (\text{C.10})$$

Apéndice D

Energía Libre en SYM

Aproximantes de Padé calculados con la información de las series (3.64) y (3.65),

$$[3|3] = \frac{\frac{2x^3}{15\zeta(3)} + \frac{9x^2}{4\pi^2} + 1}{\frac{8x^3}{45\zeta(3)} + \frac{3x^2}{\pi^2} + 1} \quad (\text{D.1})$$

$$[2|2] = \frac{\frac{9x^2}{4\pi^2} + 1}{\frac{3x^2}{\pi^2} + 1} \quad (\text{D.2})$$

$$[3|2] = \frac{\frac{2x^3}{15\zeta(3)} + \frac{9x^2}{4\pi^2} + 1}{\frac{3x^2}{\pi^2} + 1} \quad (\text{D.3})$$

$$[2|3] = \frac{\frac{9x^2}{4\pi^2} + 1}{\frac{8x^3}{45\zeta(3)} + \frac{3x^2}{\pi^2} + 1} \quad (\text{D.4})$$

$$[4|4] = \frac{-0,045x^4 - 0,244x^3 + 0,227x^2 - 0,412x + 1.}{-0,060x^4 - 0,326x^3 + 0,303x^2 - 0,412x + 1} \quad (\text{D.5})$$

$$[4|4] = \frac{-0,050x^4 - 0,254x^3 + 0,227x^2 - 0,453x + 1.}{-0,067x^4 - 0,339x^3 + 0,303x^2 - 0,453x + 1} \quad (\text{D.6})$$

Apéndice E

Viscosidad de Corte

$$[2|2] = \frac{0,079577 + \frac{132,755}{\lambda} + \frac{159,292}{\sqrt{\lambda}}}{1 + \frac{0,157088}{\lambda} + \frac{0,188488}{\sqrt{\lambda}}} \quad (\text{E.1})$$

$$[3|3] = \frac{0,0795 - \frac{15,4043}{\lambda^{3/2}} + \frac{124,826}{\lambda} + \frac{140,092}{\sqrt{\lambda}}}{1 - \frac{0,00966}{\lambda^{3/2}} + \frac{0,078280}{\lambda} - \frac{0,03554}{\sqrt{\lambda}}} \quad (\text{E.2})$$

$$[5|5] = \frac{0,0795 + \frac{0,36251}{\lambda^{5/2}} + \frac{0,6923}{\lambda^2} - \frac{0,02838}{\lambda^{3/2}} - \frac{0,499034}{\lambda} + \frac{0,386523}{\sqrt{\lambda}}}{1 + \frac{0,000428}{\lambda^{5/2}} + \frac{0,000819}{\lambda^2} + \frac{0,00269}{\lambda^{3/2}} + \frac{0,000128}{\lambda} + \frac{0,7366}{\sqrt{\lambda}}} \quad (\text{E.3})$$

$$[6|6] = \frac{0,07957 + \frac{6,28991}{\lambda^3} - \frac{6,89564}{\lambda^{5/2}} - \frac{4,30593}{\lambda^2} - \frac{5,20294}{\lambda^{3/2}} + \frac{13,2696}{\lambda} - \frac{3,19352}{\sqrt{\lambda}}}{1 + \frac{0,007442}{\lambda^3} - \frac{0,008159}{\lambda^{5/2}} + \frac{0,04228}{\lambda^2} + \frac{0,4923}{\lambda^{3/2}} + \frac{17,85}{\lambda} - \frac{1,7299}{\sqrt{\lambda}}} \quad (\text{E.4})$$

$$[8|8] = \frac{0,0795 - \frac{5,421}{\lambda^4} - \frac{36,885}{\lambda^{7/2}} - \frac{2,963}{\lambda^3} - \frac{44,5303}{\lambda^{5/2}} - \frac{46,4677}{\lambda^2} - \frac{24,7124}{\lambda^{3/2}} + \frac{32,0433}{\lambda} - \frac{27,8223}{\sqrt{\lambda}}}{1 - \frac{0,00213}{\lambda^4} - \frac{0,01449}{\lambda^{7/2}} - \frac{0,0420}{\lambda^3} - \frac{0,295}{\lambda^{5/2}} - \frac{0,525}{\lambda^2} - \frac{3,641}{\lambda^{3/2}} - \frac{4,91364}{\lambda} - \frac{20,9718}{\sqrt{\lambda}}} \quad (\text{E.5})$$

$$[8|8] = \frac{0,07957 + \frac{2,12878}{\lambda^4} + \frac{2,72764}{\lambda^{7/2}} - \frac{0,8897}{\lambda^3} + \frac{1,23099}{\lambda^{5/2}} + \frac{2,80586}{\lambda^2} + \frac{1,59962}{\lambda^{3/2}} - \frac{3,246}{\lambda} + \frac{0,997466}{\sqrt{\lambda}}}{1 + \frac{0,00251897}{\lambda^4} + \frac{0,00322}{\lambda^{7/2}} + \frac{0,0149812}{\lambda^3} - \frac{1,49551}{\lambda^{5/2}} - \frac{4,29861}{\lambda^2} - \frac{0,670587}{\lambda^{3/2}} - \frac{1,86902}{\lambda} + \frac{3,223}{\sqrt{\lambda}}} \quad (\text{E.6})$$

$$[7|7] = \frac{0,07957 + \frac{0,4973}{\lambda^{7/2}} - \frac{1,64624}{\lambda^3} + \frac{0,957038}{\lambda^{5/2}} + \frac{1,24342}{\lambda^2} - \frac{0,199875}{\lambda^{3/2}} + \frac{0,387951}{\lambda} + \frac{0,361471}{\sqrt{\lambda}}}{1 + \frac{0,000311871}{\lambda^{7/2}} - \frac{0,00103239}{\lambda^3} + \frac{0,004583}{\lambda^{5/2}} - \frac{0,01240}{\lambda^2} + \frac{0,0437713}{\lambda^{3/2}} - \frac{1,70769}{\lambda} - \frac{0,026356}{\sqrt{\lambda}}} \quad (\text{E.7})$$

Apéndice F

Función Bremsstrahlung

$$[6|5] = \frac{\frac{\lambda}{16\pi^2} + \frac{3\lambda^{3/2}}{160\pi^2} + \frac{7\lambda^2}{1440\pi^2} + \frac{17\lambda^{5/2}}{23040\pi^2} + \frac{\lambda^3}{17280\pi^2}}{1 + \frac{3\sqrt{\lambda}}{10} + \frac{43\lambda}{360} + \frac{7\lambda^{3/2}}{288} + \frac{19\lambda^2}{5760} + \frac{\lambda^{5/2}}{4320}} \quad (\text{F.1})$$

$$[5|4] = \frac{\frac{\lambda}{16\pi^2} + \frac{3\lambda^{3/2}}{128\pi^2} + \frac{31\lambda^2}{5376\pi^2} + \frac{\lambda^{5/2}}{1344\pi^2}}{1 + \frac{3\sqrt{\lambda}}{8} + \frac{15\lambda}{112} + \frac{37\lambda^{3/2}}{1344} + \frac{\lambda^2}{336}} \quad (\text{F.2})$$

$$[6|5] = \frac{0,0063\lambda - 0,005\lambda^{3/2} + 0,001\lambda^2 + 0,0013\lambda^{5/2} + 0,00043\lambda^3}{1 - 0,870\sqrt{\lambda} + 0,290\lambda + 0,172\lambda^{3/2} + 0,077\lambda^2 + 0,017\lambda^{5/2}} \quad (\text{F.3})$$

$$[6|5] = \frac{0,00633\lambda + 0,0047\lambda^{3/2} + 0,0073\lambda^2 + 0,0032\lambda^{5/2} + 0,00081\lambda^3}{1 + 0,752\sqrt{\lambda} + 1,207\lambda + 0,543\lambda^{3/2} + 0,176\lambda^2 + 0,032\lambda^{5/2}} \quad (\text{F.4})$$

$$[7|6] = \frac{0,0063\lambda + 0,010\lambda^{3/2} - 0,015\lambda^2 - 0,014\lambda^{5/2} + 0,0076\lambda^3 + 0,0166\lambda^{7/2}}{1 + 1,621\sqrt{\lambda} - 2,384\lambda - 2,254\lambda^{3/2} + 1,107\lambda^2 + 1,29\lambda^{5/2} + 0,658\lambda^3} \quad (\text{F.5})$$

$$[8|7] = \frac{0,0063\lambda - 0,000078\lambda^{3/2} - 0,00287\lambda^2 + 0,00049\lambda^{5/2} - 0,00167\lambda^3 - 0,021\lambda^{7/2} + 0,013\lambda^4}{1 - 0,012\sqrt{\lambda} - 0,411\lambda + 0,078\lambda^{3/2} - 0,2842\lambda^2 - 0,339\lambda^{5/2} - 0,048\lambda^3 + 0,532\lambda^{7/2}} \quad (\text{F.6})$$

$$[8|7] = \frac{0,0063\lambda - 0,0369\lambda^{3/2} - 0,006\lambda^2 - 0,004\lambda^{5/2} + 0,004\lambda^3 + 0,152\lambda^{7/2} - 0,099\lambda^4}{1 - 5,832\sqrt{\lambda} - 0,910\lambda - 1,009\lambda^{3/2} + 0,663\lambda^2 + 1,835\lambda^{5/2} + 0,122\lambda^3 - 3,935\lambda^{7/2}} \quad (\text{F.7})$$

$$[8|7] = \frac{0,0063\lambda - 0,0032\lambda^{3/2} + 0,00026\lambda^2 - 0,0061\lambda^{5/2} + 0,00068\lambda^3 - 0,016\lambda^{7/2} + 0,007\lambda^4}{1 - 0,521\sqrt{\lambda} + 0,083\lambda - 0,996\lambda^{3/2} + 0,109\lambda^2 - 0,4309\lambda^{5/2} - 0,235\lambda^3 + 0,279\lambda^{7/2}} \quad (\text{F.8})$$

$$[7|6] = \frac{0,0063\lambda - 0,0053\lambda^{3/2} - 0,0023\lambda^2 + 0,006\lambda^{5/2} + 0,0058\lambda^3 + 0,0041\lambda^{7/2}}{1 - 0,839\sqrt{\lambda} - 0,333\lambda + 0,964923\lambda^{3/2} + 0,90299\lambda^2 + 0,476441\lambda^{5/2} + 0,16438\lambda^3} \quad (\text{F.9})$$

$$[9|8] = \frac{0,0063\lambda - 0,03\lambda^{3/2} + 0,0134\lambda^2 + 0,025\lambda^{5/2} - 0,0147\lambda^3 - 0,138\lambda^{7/2} + 0,044\lambda^4 + 0,0108\lambda^{9/2}}{1 - 4,816\sqrt{\lambda} + 2,158\lambda + 3,858\lambda^{3/2} - 2,239\lambda^2 - 0,416\lambda^{5/2} - 2,04\lambda^3 + 2,401\lambda^{7/2} + 0,4288\lambda^4} \quad (\text{F.10})$$

$$[9|8] = \frac{0,0063\lambda - 0,0069\lambda^{3/2} - 0,007\lambda^2 + 0,011\lambda^{5/2} + 0,0059\lambda^3 - 0,004\lambda^{7/2} - 0,009\lambda^4 - 0,01\lambda^{9/2}}{1 - 1,094\sqrt{\lambda} - 1,077\lambda + 1,779\lambda^{3/2} + 0,889\lambda^2 - 0,607\lambda^{5/2} - 1,534\lambda^3 - 1,012\lambda^{7/2} - 0,412\lambda^4} \quad (\text{F.11})$$

$$[10|9] = \frac{0,0063\lambda + 0,0194\lambda^{3/2} - 0,0046\lambda^2 - 0,0075\lambda^{5/2} + 0,00707\lambda^3 + 0,011\lambda^{7/2} - 0,023\lambda^4 + 0,039\lambda^{9/2} - 0,0022\lambda^5}{1 + 3,072\sqrt{\lambda} - 0,691\lambda - 1,066\lambda^{3/2} + 1,086\lambda^2 + 1,825\lambda^{5/2} - 3,668\lambda^3 + 1,262\lambda^{7/2} + 1,439\lambda^4 - 0,086\lambda^{9/2}} \quad (\text{F.12})$$

Apéndice G

Entropía de Enredamiento en ABJM

El descubrimiento de Aharony, Bergman, Jafferis y Maldacena (ABJM) de una teoría mundovolumen de M2-branas coincidentes provee una nueva teoría de campo interactuante con expansiones en el acoplamiento débil y fuerte bien definidas. Se ha hecho una gran cantidad de esfuerzo al estudiar estos dos límites de la teoría: teoría $\mathcal{N} = 6$ Chern-Simons-masiva supersimétrica 3 dimensional y la teoría de cuerdas tipo IIA en $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ (o teoría M en $AdS_4 \times S^7/\mathbb{Z}_k$). Sin embargo, ambas descripciones de la teoría son mucho más complicadas que su análogo en el contexto de D3-branas: 4D SYM $\mathcal{N} = 4$ y la teoría de cuerdas tipo IIB en $AdS_5 \times S^5$. Cuando el acoplamiento es débil, los cálculos perturbativos en ABJM son bastante más sutiles que para muchas teorías de campo y para muchas cantidades, estos están dados en potencias pares del acoplamiento, mientras que la geometría de \mathbb{CP}^3 es más complicada que la de S^5 .

El cálculo de la entropía de enredamiento fue realizado por Maldacena y Lewkowycz recientemente, quienes consideraron una región esférica con un quark pesado en el medio [87]. Mientras que el de la energía libre plana fue realizado por Drukker, N., Mariño, M., & Putrov, empleando la relación que existe entre la función de partición de la teoría ABJM y un modelo súper-matricial en cero dimensiones, el cual a su vez está relacionado con un modelo matricial que describe la teoría topológica de Chern-Simons en el espacio lenticular [88].

El resultado exacto para la entropía de enredamiento es [87]

$$S_w = \log \left(\frac{2N}{\sqrt{\lambda}} I_1(\sqrt{\lambda}) \right) - \frac{2}{3} \frac{\sqrt{\lambda} I_2(\sqrt{\lambda})}{I_1(\sqrt{\lambda})},$$

con lo cual las expansiones a acoplamiento débil y fuerte son

$$S_w(\lambda \gg 1) = \log N + \frac{\sqrt{\lambda}}{3} - \frac{3}{4} \log \lambda + \dots$$

$$S_w(\lambda \ll 1) = \log N - \frac{\lambda}{24} + \dots$$

Con estas expansiones construimos distintos aproximantes de Padé (ver apéndice G), y empleando el criterio (1.91), con las expresiones para los errores (1.89) (con una tolerancia de $\varepsilon = 0,1$)

$[N M](\lambda)$	$\Lambda^{-1} \int d\lambda \left \frac{[N M]-S(\lambda)}{S(\lambda)} \right $	$I_s [N M]$	$I_l [N M]$	$I_s + I_l$
[8 7]	0.42553	$3,67062 \times 10^{-6}$	32.3009	32.3009
[8 7]	0.432027	0.000371024	32.3205	32.3209
[7 6]	0.243326	$2,81886 \times 10^{-8}$	33.5223	33.5223
[9 8]	1.93231	0.271978	25.6649	25.9369
[8 8]	13.7829	16.4183	138.331	154.749
[10 9]	4.17598	0.171687	45.4166	45.5883
[7 6]	0.419271	$5,32903 \times 10^{-7}$	32.2818	32.2818
[6 4]	0,417329	$9,048 \times 10^{-8}$	32,2847	32,1847
[6 5]	0.489872	$2,1909 \times 10^{-8}$	32.7546	32.7546
[6 5]	1.58242	0.00843973	26.6378	32.763

Tabla 3.4: Resultados obtenidos al aplicar el criterio (1.91) al problema de la entropía de enredamiento en SYM.

determinamos el valor de las variables $\lambda_s^* = 2$ y $\lambda_l^* = 9,0$. Con todo lo anterior, el criterio (1.91) da como resultado que el mejor aproximante es el de orden [6|4], como lo muestra la Tabla 3.4.

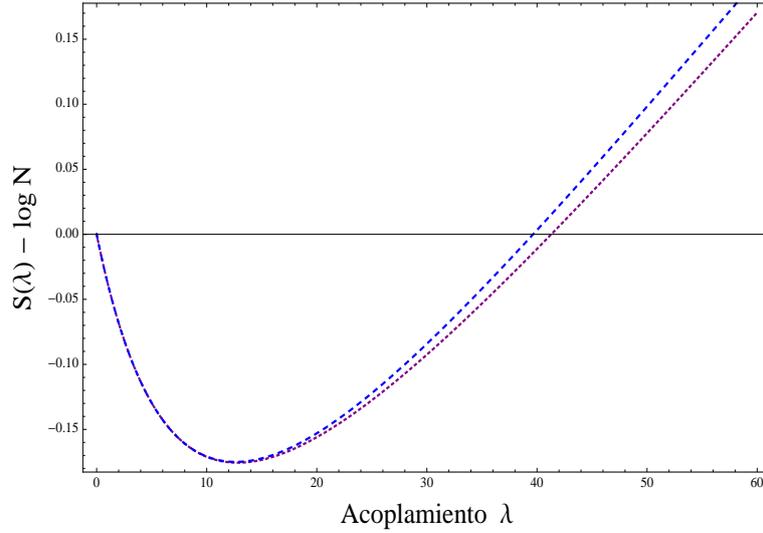


Figura G.1: Aproximante de Padé de orden [6|4] (morado) y el resultado exacto (azul).

$$[8|7] = \frac{-0,041\lambda - 0,0018\lambda^2 + 0,014\lambda^3 + 0,025\lambda^4 - 0,0267\lambda^5 + 0,0245\lambda^6 - 0,000076\lambda^7 - 0,000012\lambda^8}{1 + 0,147\lambda - 0,345\lambda^2 - 0,640\lambda^3 + 0,578\lambda^4 - 0,523\lambda^5 - 0,057\lambda^6 - 0,0012\lambda^7} \quad (\text{G.1})$$

$$[8|7] = \frac{-0,041\lambda + 0,107\lambda^2 + 0,21\lambda^3 - 0,017\lambda^4 - 0,286\lambda^5 + 0,12\lambda^6 - 0,0003\lambda^7 - 0,000058\lambda^8}{1 - 2,478\lambda - 5,306\lambda^2 - 0,114\lambda^3 + 6,899\lambda^4 - 2,175\lambda^5 - 0,273\lambda^6 - 0,0061\lambda^7} \quad (\text{G.2})$$

$$[7|6] = \frac{-0,041\lambda - 0,141\lambda^2 + 0,052\lambda^3 + 0,139\lambda^4 - 0,0098\lambda^5 - 0,000026\lambda^6 + 4,374 \times 10^{-6}\lambda^7}{1 + 3,499\lambda - 0,896\lambda^2 - 3,457\lambda^3 - 0,114\lambda^4 + 0,015\lambda^5 + 0,00045\lambda^6} \quad (\text{G.3})$$

$$[9|8] = \frac{-0,041\lambda + 0,0073\lambda^2 - 0,013\lambda^3 + 0,039\lambda^4 + 0,022\lambda^5 - 0,033\lambda^6 + 0,043\lambda^7 - 0,023\lambda^8 + 0,00071\lambda^9}{1 - 0,072\lambda + 0,304\lambda^2 - 0,915\lambda^3 - 0,630\lambda^4 + 0,735\lambda^5 - 0,973\lambda^6 + 0,456\lambda^7 + 0,074\lambda^8} \quad (\text{G.4})$$

$$[8|8] = \frac{-0,041\lambda^2 + 0,647\lambda^3 - 0,069\lambda^4 + 0,494\lambda^5 - 0,012\lambda^6 - 11,901\lambda^7 - 1,09\lambda^8}{1 - 15,535\lambda + 1,782\lambda^2 - 13,485\lambda^3 + 0,483\lambda^4 + 0,345\lambda^5 + 0,084\lambda^6 + 11,557\lambda^7 + 1,059\lambda^8} \quad (\text{G.5})$$

$$[10|9] = \frac{-0,0416\lambda + 0,029\lambda^2 + 0,093\lambda^3 - 0,0085\lambda^4 - 0,0165\lambda^5 - 0,022\lambda^6 + 0,0018\lambda^7 + 0,0212\lambda^8 - 0,147\lambda^9 + 0,0031\lambda^{10}}{1 - 0,592\lambda - 2,322\lambda^2 - 0,032\lambda^3 + 0,412\lambda^4 + 0,583\lambda^5 + 0,013\lambda^6 - 0,512\lambda^7 - 2,617\lambda^8 + 0,325\lambda^9} \quad (\text{G.6})$$

$$[7|6] = \frac{-0,041\lambda + 0,078\lambda^2 + 0,218\lambda^3 + 0,086\lambda^4 + 0,225\lambda^5 - 0,00085\lambda^6 - 0,00011\lambda^7}{1 - 1,776\lambda - 5,436\lambda^2 - 2,632\lambda^3 - 5,640\lambda^4 - 0,549\lambda^5 - 0,011\lambda^6} \quad (\text{G.7})$$

$$[6|4] = \frac{-0,041\lambda - 0,037\lambda^2 + 0,0034\lambda^3 - 0,00026\lambda^4 - 5,48 \times 10^{-7}\lambda^5 + 1,333 \times 10^{-7}\lambda^6}{1 + 1,0008\lambda + 0,0126\lambda^2 + 0,00047\lambda^3 + 0,00048\lambda^4} \quad (\text{G.8})$$

$$[6|5] = \frac{-0,041\lambda - 0,0301\lambda^2 + 0,0109\lambda^3 - 0,00079\lambda^4 - 1,998 \times 10^{-6}\lambda^5 + 3,670 \times 10^{-7}\lambda^6}{1 + 0,828\lambda - 0,185\lambda^2 - 0,006\lambda^3 + 0,0012\lambda^4 + 0,000038\lambda^5} \quad (\text{G.9})$$

$$[6|5] = \frac{-0,041\lambda + 0,0087\lambda^2 + 0,043\lambda^3 + 0,034\lambda^4 + 0,049\lambda^5 - 0,0015\lambda^6}{1 - 0,106\lambda - 1,0719\lambda^2 - 0,927\lambda^3 - 1,143\lambda^4 - 0,161\lambda^5} \quad (\text{G.10})$$

Apéndice H

Energía libre en ABJM

En el caso de la energía libre plana, es posible escribir funciones de interpolación de manera explícita [88]:

$$\lambda(\kappa) = \frac{\kappa}{8\pi} {}_3F_2\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1, \frac{3}{2}; -\frac{\kappa^2}{16}\right)$$
$$\partial_\lambda F_0(\lambda) = \frac{\kappa}{4} G_{3,3}^{2,3}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \middle| -\frac{\kappa^2}{16}\right) + 4\pi^3 i\lambda$$

La expresión del acoplamiento débil en κ es:

$$\partial_\lambda F(\lambda) \approx -8\pi^2 \lambda \left(\ln\left(\frac{\pi\lambda}{2}\right) - 1 \right)$$

El acoplamiento fuerte:

$$\partial_\lambda F(\lambda) \approx 2\pi^3 \sqrt{2(\lambda - 1/24)}$$

Una vez más construimos los distintos aproximantes de Padé correspondientes (ver apéndice H), y empleando el criterio (1.91), con las expresiones para los errores (1.89) (con una tolerancia de $\varepsilon = 0,1$) determinamos el valor de las variables $\lambda_s^* = 0,002$ y $\lambda_l^* = 0,04$. Con todo lo anterior, el criterio (1.91) da como resultado que el mejor aproximante es el de orden [7|6], como lo muestra la Tabla 3.5.

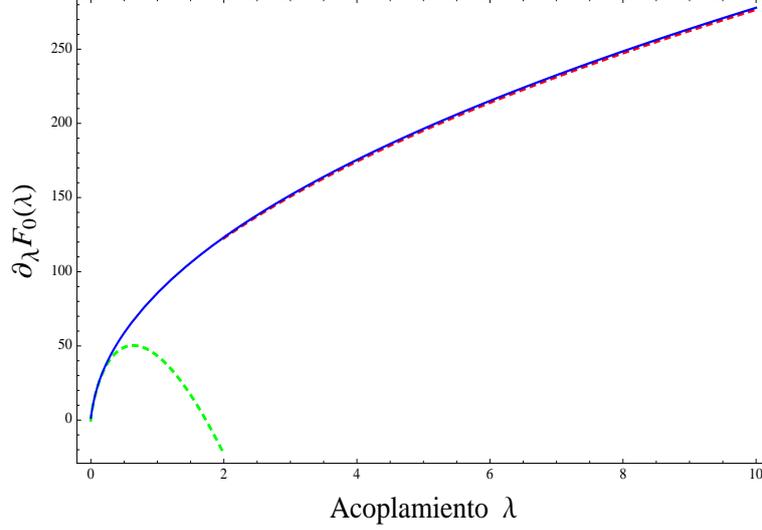


Figura H.1: Aproximante de Padé de orden [7|6] (Azul). Expansiones del acoplamiento fuerte (rojo) y débil (verde).

$$[11|10] = \frac{1,579 + 2,263\sqrt{\lambda} + 318,481\lambda + 457,14\lambda^{3/2} - 35,168\lambda^2 + 60,545\lambda^{5/2} + 575,222\lambda^3 + 416,036\lambda^{7/2} - 13,413\lambda^4 + 2150,27\lambda^{9/2} - 45,995\lambda^5 + 2395,63\lambda^{11/2}}{1 + 1,433\sqrt{\lambda} + 4,963\lambda + 7,47\lambda^{3/2} + 1,302\lambda^2 + 2,351\lambda^{5/2} - 37,964\lambda^3 - 53,7093\lambda^{7/2} + 66,346\lambda^4 - 0,524\lambda^{9/2} + 27,316\lambda^5} \quad (\text{H.1})$$

$$[11|10] = \frac{1,579 - 0,727\sqrt{\lambda} + 319,56\lambda - 145,792\lambda^{3/2} + 177,1\lambda^2 + 205,958\lambda^{5/2} - 517,186\lambda^3 + 326,683\lambda^{7/2} - 143,223\lambda^4 - 188,853\lambda^{9/2} + 169,761\lambda^5 + 121,317\lambda^{11/2}}{1 - 0,46\sqrt{\lambda} + 5,646\lambda - 1,7004\lambda^{3/2} + 1,348\lambda^2 + 4,241\lambda^{5/2} - 55,724\lambda^3 + 26,078\lambda^{7/2} + 33,568\lambda^4 + 1,935\lambda^{9/2} + 1,383\lambda^5} \quad (\text{H.2})$$

$$[9|8] = \frac{1,579 - 0,480\sqrt{\lambda} + 322,162\lambda - 94,390\lambda^{3/2} + 694,272\lambda^2 + 504,26\lambda^{5/2} - 2125,17\lambda^3 + 1016,91\lambda^{7/2} + 2698,45\lambda^4 + 168,888\lambda^{9/2}}{1 - 0,303\sqrt{\lambda} + 7,294\lambda + 0,021\lambda^{3/2} + 4,635\lambda^2 + 11,122\lambda^{5/2} - 72,515\lambda^3 + 30,769\lambda^{7/2} + 1,925\lambda^4} \quad (\text{H.3})$$

$$[9|8] = \frac{1,579 - 0,438\sqrt{\lambda} + 320,15\lambda - 86,905\lambda^{3/2} + 296,27\lambda^2 + 309,097\lambda^{5/2} - 521,754\lambda^3 - 1426,14\lambda^{7/2} - 710,533\lambda^4 + 569,722\lambda^{9/2}}{1 - 0,277\sqrt{\lambda} + 6,0206\lambda - 0,418\lambda^{3/2} + 3,243\lambda^2 + 0,531\lambda^{5/2} - 57,492\lambda^3 - 8,101\lambda^{7/2} + 6,496\lambda^4} \quad (\text{H.4})$$

$$[10|9] = \frac{1,579 + 4,867\sqrt{\lambda} + 292,691\lambda + 1067,11\lambda^{3/2} - 4946,65\lambda^2 + 17012,4\lambda^{5/2} + 59640,4\lambda^3 - 22929,1\lambda^{7/2} - 12104,5\lambda^4 + 58056,2\lambda^{9/2} + 15377,2\lambda^5}{1 + 3,082\sqrt{\lambda} - 11,368\lambda + 69,413\lambda^{3/2} + 103,826\lambda^2 + 200,693\lambda^{5/2} + 865,474\lambda^3 - 335,64\lambda^{7/2} + 661,994\lambda^4 + 175,34\lambda^{9/2}} \quad (\text{H.5})$$

$$[7|6] = \frac{1,579 - 10,162\sqrt{\lambda} + 320,891\lambda - 2069,67\lambda^{3/2} + 395,715\lambda^2 - 3909,27\lambda^{5/2} - 10616,7\lambda^3 - 18971,7\lambda^{7/2}}{1 - 6,435\sqrt{\lambda} + 6,489\lambda - 44,683\lambda^{3/2} - 26,061\lambda^2 - 121,059\lambda^{5/2} - 216,327\lambda^3} \quad (\text{H.6})$$

$$[7|6] = \frac{1,579 + 0,948\sqrt{\lambda} + 320,686\lambda + 204,622\lambda^{3/2} + 428,114\lambda^2 + 2683,67\lambda^{5/2} + 4251,07\lambda^3 + 1829,59\lambda^{7/2}}{1 + 0,6\sqrt{\lambda} + 6,360\lambda + 11,445\lambda^{3/2} + 19,936\lambda^2 + 48,473\lambda^{5/2} + 20,862\lambda^3} \quad (\text{H.7})$$

$$[8|7] = \frac{1,579 - 1,877\sqrt{\lambda} + 320,801\lambda - 398,795\lambda^{3/2} + 432,22\lambda^2 - 4027,71\lambda^{5/2} + 413,859\lambda^3 - 3507,84\lambda^{7/2} + 114,764\lambda^4}{1 - 1,189\sqrt{\lambda} + 6,432\lambda - 18,628\lambda^{3/2} + 8,261\lambda^2 - 75,11\lambda^{5/2} - 39,998\lambda^3 + 1,3086\lambda^{7/2}} \quad (\text{H.8})$$

$[N M](\lambda)$	$I_s [N M]$	$I_l [N M]$	$I_s + I_l$
[11 10]	$6,255 \times 10^{-9}$	11.4055	11.4055
[11 10]	$7,421 \times 10^{-9}$	5.25284	5.25284
[9 8]	$6,106 \times 10^{-9}$	16.3805	16.3805
[9 8]	$6,234 \times 10^{-9}$	83.3654	83.3654
[10 9]	$6,871 \times 10^{-9}$	2.45668	2.45668
[7 6]	$8,035 \times 10^{-9}$	0,441078	0,441078
[7 6]	$5,631 \times 10^{-9}$	0.530677	0.530677
[8 7]	$7,437 \times 10^{-9}$	5.85248	5.85248
[8 7]	$7,476 \times 10^{-9}$	0.971881	0.971881
[8 7]	$5,794 \times 10^{-9}$	1.99921	0.971881

Tabla 3.2 Resultados obtenidos al aplicar el criterio (1.91) al problema de la energía libre en la teoría ABJM.

$$[8|7] = \frac{1,579 - 1,542\sqrt{\lambda} + 320,921\lambda - 296,432\lambda^{3/2} + 459,566\lambda^2 + 2990,58\lambda^{5/2} + 1062,35\lambda^3 - 2535,78\lambda^{7/2} + 353,454\lambda^4}{1 - 0,976\sqrt{\lambda} + 6,508\lambda + 4,458\lambda^{3/2} + 10,678\lambda^2 + 39,8554\lambda^{5/2} - 28,914\lambda^3 + 4,03\lambda^{7/2}} \quad (\text{H.9})$$

$$[8|7] = \frac{1,579 + 1,305\sqrt{\lambda} + 319,003\lambda + 268,902\lambda^{3/2} + 85,802\lambda^2 + 1120,8\lambda^{5/2} + 3700,96\lambda^3 + 208,075\lambda^{7/2} - 3139,73\lambda^4}{1 + 0,826\sqrt{\lambda} + 5,294\lambda + 7,714\lambda^{3/2} + 12,840\lambda^2 + 18,602\lambda^{5/2} + 2,372\lambda^3 - 35,801\lambda^{7/2}} \quad (\text{H.10})$$

Bibliografía

- [1] Adams, J., Aggarwal, M. M., Ahammed, Z., Amonett, J., Anderson, B. D., Arkhipkin, D., ... & Cherny, M. (2005). “*Experimental and theoretical challenges in the search for the quark–gluon plasma: The STAR Collaboration’s critical assessment of the evidence from RHIC collisions*”. Nuclear Physics A, 757(1), 102-183, [arXiv:0501009].
- [2] Casalderrey-Solana, J., Liu, H., Mateos, D., Rajagopal, K., & Wiedemann, U. A. (2011). “*Gauge/string duality, hot QCD and heavy ion collisions*”. [arXiv:1101.0618].
- [3] Sen, A. (2013). “*S-duality improved superstring perturbation theory. Journal of High Energy Physics*”, 2013(11), 1-23, [arXiv:1304.0458].
- [4] Banks, T., & Torres, T. J. (2013). “*Two point Padé approximants and duality*”, [arXiv:1307.3689].
- [5] Nuttall, J., Baker, G. A., & Gammel, J. (1970). “*The Padé Approximant in Theoretical Physics*”. Academic Press, New York, 219.
- [6] Wei, H., Yan, X. P., & Zhou, Y. N. (2014). “*Cosmological applications of Padé approximant*”. Journal of Cosmology and Astroparticle Physics, 2014(01), 045, [arXiv:1312.1117].
- [7] Gruber, C., & Luongo, O. (2014). “*Cosmographic analysis of the equation of state of the universe through Padé approximations*”. Physical Review D, 89(10), 103506, [arXiv:1309.3215].
- [8] Blas, D., Garny, M., & Konstandin, T. (2014). “*Cosmological perturbation theory at three-loop order*”. Journal of Cosmology and Astroparticle Physics, 2014(01), 010, [arXiv:1309.3308].
- [9] Zunckel, C., & Clarkson, C. (2008). “*Consistency tests for the cosmological constant*”. Physical review letters, 101(18), 181301, [arXiv:0807.4304].
- [10] Carnahan, N. F., & Starling, K. E. (1969). “*Equation of state for nonattracting rigid spheres*”. The Journal of Chemical Physics, 51(2), 635-636.
- [11] Samuel, M. A., Ellis, J., & Karliner, M. (1995). “*Comparison of the Pade approximation method to perturbative QCD calculations*”. Physical Review Letters, 74(22), 4380, [arXiv:9503411].
- [12] Peris, S. (2006). “*Large- N_c QCD and Pade approximant theory*”. Physical Review D, 74(5), 054013, [arXiv:0603190v2].

- [13] Beem, Christopher, et al. “Resummation and S -duality in $N=4$ SYM”. Journal of High Energy Physics 2014.4 (2014): 1-24, [arXiv:1306.3228].
- [14] Baker, G. A., & Graves-Morris, P. (1981). “*Padé approximants. Part 2: Extensions and applications*”. Encyclopedia of Mathematics and its applications, Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1981, 1.
- [15] Baker, G. A., & Graves-Morris, P. (1981). “*Padé approximants. Part 1: Basic theory*”. Encyclopedia of Mathematics and its applications, Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1981, 1.
- [16] Baker, G. A., Gammel, J. L., & Wills, J. G. (1961). “An investigation of the applicability of the Padé approximant method”, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2(3), 405-418.
- [17] Baker Jr, G. A. (2000). “Defects and the convergence of Padé approximants”, Acta Applicandae Mathematica, 61(1-3), 37-52.
- [18] Baker, G. A., & Graves-Morris, P. R. (1996). “*Padé Approximants*” (Vol. 59). Cambridge University Press.
- [19] Baker, G. A., & Graves-Morris, P. R. (1981). “*Padé Approximants, Vol. 1 & 2*”. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Addison Wesley, Reading, Mass., Vols, 13.
- [20] Masjuan, Pere, and Juan José Sanz-Cillero. “*Padé Approximants and resonance poles*”, [arXiv:1306.6308].
- [21] G. A. Baker, “*Advances in theoretical physics*”, Vol.1, p.1, Academic Press, New York (1970).
- [22] J. Zinn-Justin - Physics Reports Vol. 1C No 3 (1971).
- [23] Nuttall, J. (1970). “*The convergence of Padé approximants of meromorphic functions*”. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 31(1), 147-153.
- [24] Baker, G. A., & Baker, G. A. (1975). “*Essentials of Padé approximants*”.
- [25] Lubinsky, D. S. (2003). “*Rogers-Ramanujan and the Baker-Gammel-Wills (Padé) conjecture*”. Annals of mathematics, 847-889, [arXiv:0402305].
- [26] Baker, G. A. (2005). “*Counter-examples to the Baker-Gammel-Wills conjecture and patchwork convergence*”. Journal of computational and applied mathematics, 179(1), 1-14.
- [27] Sakurai, J. J., & Napolitano, J. (2011). “*Modern quantum mechanics*”. Addison-Wesley.
- [28] Leung, C. N., & Murakowski, J. A. (2000). “*Padé interpolation: Methodology and application to quarkonium*”. Journal of Mathematical Physics, 41(5), 2700-2705, [arXiv:0001043].
- [29] Griffiths, D. J. (2005). “*Introduction to quantum mechanics*”. Pearson Education India.
- [30] Malbouisson, A. P. C., Portugal, R., & Svaiter, N. F. (2001). *A note on the non-perturbative zero-dimensional $\lambda\phi^4$ model*. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 292(1), 485-493.

- [31] Honda, M. (2014). “*On perturbation theory improved by strong coupling expansion*”. Journal of High Energy Physics, 2014(12), 1-44, [arXiv:1408.2960].
- [32] H. J. Maris & L. P. Kadanoff, Am. J. Phys. 46, 652 (1978).
- [33] L. Onsager, Phys. Rev. **65**, 117 (1944).
- [34] D. Tong, Statistical Physics, www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/statphys/, 2012.
- [35] M. Mariño, “*Lectures on non perturbative effects in large N gauge theories, matrix models and strings*”, Fortsch. Phys. **62**, 455 (2014), [arXiv:1206.6272].
- [36] Grassi, Alba, Marcos Marino, & Szabolcs Zakany. “*Resumming the string perturbation series*”, [arXiv:1405.4214].
- [37] Balian, R., G. Parisi, & A. Voros. “*Quartic oscillator*”. Feynman path integrals. Springer Berlin Heidelberg, 1979. 337-360.
- [38] A. Voros, “*The return of the quartic oscillator. The complex WKB method*”, Ann. Inst. H. Poincaré A **39**, 211 (1983).
- [39] K. Banerjee, S. P. Bhatnagar, V. Choudhry & S. S. Kanwal, “*The Anharmonic Oscillator*”, Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences, **1703** (1978) 360.
- [40] H. Taşeli, “*Accurate computation of the energy spectrum for potentials with multiminima*”, International Journal of Quantum Chemistry, Vol. 46, pp. 319-334, 1993.
- [41] J. M. Maldacena, “*The Large N limit of superconformal field theories and supergravity*”, Int.J.Theor.Phys. 38 (1999) 1113–1133, [arXiv:9711200].
- [42] E. Witten, “*Anti-de Sitter space and holography*”, Adv. Theor. Math. Phys. 2 (1998) 253, [arXiv:9802150].
- [43] S. S. Gubser, I. R. Klebanov, & A. M. Polyakov, “*Gauge theory correlators from noncritical string theory*”, Phys. Lett. B428 (1998) 105, [arXiv:9802109].
- [44] Ramallo, A. V. (2015). “*Introduction to the AdS/CFT correspondence*”. In Lectures on Particle Physics, Astrophysics and Cosmology (pp. 411-474). Springer International Publishing, [arXiv:1310.4319].
- [45] J. Erdmenger, “*Introduction to gauge/gravity duality*”, In Strings and Fundamental Physics (pp. 99-145), Springer Berlin Heidelberg.
- [46] Nastase, H. (2007). “*Introduction to AdS-CFT*”, [arXiv:0712.0689].
- [47] A. Güijosa, *notas del curso: Correspondencia Norma/Gravedad*, [www.nucleares.unam.mx/~alberto/zapuntes/indice.html].
- [48] Becker, K., Becker, M., & Schwarz, J. H. (2006). “*String theory and M-theory: A modern introduction*”. Cambridge University Press.
- [49] Kiritsis, E. (2011), “*String theory in a nutshell*”. Princeton University Press.

- [50] G. 't Hooft, “*Dimensional reduction in quantum gravity*”, [arXiv:9310026].
- [51] L. Susskind, “*The World as a hologram*”, J.Math.Phys. 36 (1995) 6377–6396, [arXiv:9409089].
- [52] Hubeny, V. E. (2014). “*The AdS/CFT Correspondence*”, [arXiv:1501.00007].
- [53] Beisert, N., Ahn, C., Alday, L. F., Bajnok, Z., Drummond, J. M., Freyhult, L., ... & Zoubos, K. (2012). “*Review of AdS/CFT integrability: an overview*”. Letters in Mathematical Physics, 99(1-3), 3-32, [arXiv:1012.3982].
- [54] Erlich, J., Kribs, G. D., & Low, I. (2006). “*Emerging holography*”. Physical Review D, 73(9), 096001, [arXiv:0602110].
- [55] Ver, por ejemplo, G. Szego, “*Orthogonal Polynomials*”, American Mathematical Society Colloquium Publications, Volume XXIII, 1975.
- [56] Arkani-Hamed, N., Porrati, M., & Randall, L. (2001). “*Holography and phenomenology*”. Journal of High Energy Physics, 2001(08), 017, [arXiv:0012148].
- [57] A. Falkowski & M. Perez-Victoria, JHEP 0702, 086 (2007), [arXiv:0610326].
- [58] Hashimoto, A., & Klebanov, I. R. (1997). “*Scattering of strings from D-branes*”. Nuclear Physics B-Proceedings Supplements, 55(2), 118-133, [arXiv:9611214].
- [59] Klebanov, I. R. (1997). “*World-volume approach to absorption by non-dilatonic branes*”. Nuclear Physics B, 496(1), 231-242, [arXiv:9702076v2].
- [60] Maldacena, J., & Strominger, A. (1997). “*Black hole greybody factors and D-brane spectroscopy*”. Physical Review D, 55(2), 861, [arXiv:9609026].
- [61] Horowitz, Gary T., & Andrew Strominger. “*Black strings and P-branes*”. Nuclear Physics B 360.1 (1991): 197-209.
- [62] Para más detalles ver: Aharony, O., Gubser, S. S., Maldacena, J., Ooguri, H., & Oz, Y. (2000). “*Large N field theories, string theory and gravity*”. Physics Reports, 323(3), 183-386, [arXiv:9905111].
- [63] S.S. Gubser, I.R. Klebanov and A.W. Peet, “*Entropy and temperature of black 3-branes*”, Phys. Rev. D **54** (1996) 3915, [arXiv:0406264].
- [64] Braun-Munzinger, P., & Stachel, J. (2007). “*The quest for the quark-gluon plasma*”. Nature, 448(7151), 302-309, [QGPnature06080].
- [65] A. Fotopoulos, T.R. Taylor, “*Remarks on Two-Loop Free Energy in N=4 Supersymmetric Yang-Mills Theory at Finite Temperature*”, [arXiv:9811224];
M. Vázquez-Mozo, “*A note on Supersymmetric Yang-Mills Thermodynamics*”, [arXiv:9905030];
C. Kim & S.-J. Rey, “*Thermodynamics of Large N Super Yang-Mills Theory and AdS/CFT Correspondence*”, [arXiv:9905205];
A. Nieto & M. Tytgat, “*Effective field theory approach to N=4 supersymmetric Yang-Mills at finite temperature*”, [arXiv:9906147].

- [66] S.S. Gubser, I.R. Klebanov and A.A. Tseytlin, “*Coupling Constant Dependence in the Thermodynamics of $\mathcal{N} = 4$ Supersymmetric Yang-Mills Theory*”, [arXiv:9805156].
- [67] M. Li, J. *High Energy Phys.* **03** (1999) 004, [arXiv:9807196]; Y. Gao and M. Li, *Nucl. Phys. B* **551** (1999) 229, [arXiv:9810053].
- [68] L.D. Landau & E.M. Lifshitz, “*Fluid Mechanics*”, Pergamon Press, New York, 1987, 2nd ed.
- [69] Gyulassy, M., & McLerran, L. (2005). “*New forms of QCD matter discovered at RHIC*”. *Nuclear Physics A*, 750(1), 30-63, [arXiv:0405013].
- [70] N. Rughonauth, “*Calculation of shear viscosity in AdS/CFT*”, 2011,
- [71] Policastro, G., Son, D. T., & Starinets, A. O. (2001). “*Shear viscosity of strongly coupled $N=4$ supersymmetric Yang-Mills plasma*”. *Physical Review Letters*, 87(8), 081601, [arXiv:0104066].
- [72] Gubser, S.S., Klebanov, I.R. and Tseytlin, A.A., “*String Theory and Classical Absorption by Threebranes*”, [arXiv:9703040].
- [73] Klebanov, I.R., “*World Volume Approach to Absorption by Non-dilatonic Branes*”, [arXiv: 9702076].
- [74] Gubser, S. S., Klebanov, I. R., & Tseytlin, A. A. (1997). “*String theory and classical absorption by three-branes*”. *Nuclear Physics B*, 499(1), 217-240, [arXiv: 9703040].
- [75] Townsend, P. K. (1997). “*Black holes*”. [arXiv: 9707012].
- [76] Das, S.R., Gibbons, G. & Mathur, S.D., “*Universality of Low Energy Absorption Cross-Sections for Black Holes*”, [arXiv: 9609052].
- [77] Policastro, G., Son, D. T., & Starinets, A. O. (2002). “*From AdS/CFT correspondence to hydrodynamics*”. *Journal of High Energy Physics*, 2002(09), 043, [arXiv: 0205052].
- [78] A. Buchel, J. T. Liu, & A. O. Starinets, “*Coupling constant dependence of the scalar viscosity in $\mathcal{N} = 4$ supersymmetric Yang-Mills theory*”, [arXiv: 0804.4015].
- [79] Luzum, M, & Romatschke, P., “*Conformal Relativistic Viscous Hydrodynamics: Applications to RHIC results at $\sqrt{S_{NN}} = 200\text{GeV}$* ”, [arXiv: 0804.4015].
- [80] Song, H. & Heinz, U.W., “*Extracting the QGP viscosity from RHIC data - A status report from viscous hydrodynamics*”, [arXiv: 0812.4274].
- [81] S. Jeon & L.G. Yaffe, *Phys. Rev. D* **53**, 5799 (1996).
- [82] P. Arnold, G.D. Moore, and L.G. Yaffe, *J. High Energy Phys.* **11**, 001 (2000).
- [83] Huot, S. C., Jeon, S., & Moore, G. D. (2007). “*Shear viscosity in weakly coupled $N=4$ super Yang-Mills theory compared to QCD*”. *Physical review letters*, 98(17), 172303, [arXiv: 0608062].
- [84] Fiol, B., Garolera, B., & Lewkowycz, A. (2012). “*Exact results for static and radiative fields of a quark in mathcal $N=4$ super Yang-Mills*”. *Journal of High Energy Physics*, 2012(5), 1-14, [arXiv: 1202.5292].

- [85] Mikhailov, A. (2003). “*Nonlinear waves in AdS/CFT correspondence*”, [arXiv: 0305196].
- [86] D. Correa, J. Henn, J. Maldacena & A. Sever, “*An exact formula for the radiation of a moving quark in $\mathcal{N} = 4$ super Yang-Mills*”, [arXiv: 1202.4455].
- [87] Lewkowycz, A., & Maldacena, J. (2014). “*Exact results for the entanglement entropy and the energy radiated by a quark*”. *Journal of High Energy Physics*, 2014(5), 1-29, [arXiv: 1312.5682].
- [88] Drukker, N., Mariño, M., & Putrov, P. (2011). “*From weak to strong coupling in ABJM theory*”. *Communications in mathematical physics*, 306(2), 511-563, [arXiv: 1007.3837].