



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

El Problema de Kepler Asimétrico.

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

FÍSICO

PRESENTA:

PEDRO PORRAS FLORES

DIRECTOR DE TESIS:

Dr. Ricardo Méndez Fragoso.



México D.F.

Mayo

2015



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno
Porras
Flores
Pedro
55 11 39 40 67
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
409076332

2. Datos del tutor
Dr
Ricardo
Méndez
Fragoso

3. Datos del sinodal 1
Dr
Luis
Benet
Fernández

4. Datos del sinodal 2
Dr
David
Philip
Sanders

5. Datos del sinodal 3
M en C
Lorea
Chaos
Cador

6. Datos del sinodal 4
Dra
Catherine
García
Reimbert

7. Datos del trabajo escrito
EL problema de Kepler Asimétrico
104p
2015

“El científico no estudia la naturaleza por la utilidad que le pueda reportar; la estudia por el gozo que le proporciona, y este gozo se debe a la belleza que hay en ella... . La belleza intelectual se basta a sí misma, y es por ella, más que quizá por el bien futuro de la humanidad, por lo que el científico consagra su vida a un trabajo largo y difícil.”

Henri Poincaré

Resumen

En esta tesis se propone estudiar un sistema cuya característica principal es la conservación de la energía, y que bajo cierta condición de simetría (la cual se especifica en el capítulo 3), su dinámica es periódica, conmensurable y además posee todas las propiedades del problema de Kepler, es por eso que recibe el nombre de *Problema de Kepler Asimétrico* (PKA), cuando se cumple la condición de simetría se dice que se tiene el *Problema de Kepler Simétrico* (PKS). Pero si dicha condición no se cumple el sistema parece comportarse de manera caótica, y en esta tesis tratamos de aseverar este hecho con el uso de herramientas numéricas. El sistema que se estudió consta de dos cuerpos que interactúan gravitacionalmente, el primero con masa m_1 , restringido a moverse en el plano xy , y un segundo cuerpo con masa m_2 , que sólo se mueve en el eje z . Algo que es muy importante mencionar es que no poseemos conocimiento alguno sobre trabajos ya realizados con respecto a este sistema, así que suponemos o al menos que se muestre lo contrario que este sistema es una nueva aportación que hacemos al estudio de los sistemas dinámicos, ya que en la literatura lo más parecido al sistema que se trabajó en la tesis es un problema que propuso Sitnikov en 1961 [1], el cual es un caso particular del problema restringido de tres cuerpos, y el nuestro es un problema de dos cuerpos.

La elección de este problema tiene como objetivo exhibir la transición al caos en sistemas Hamiltonianos con más integrales de movimiento que grados de libertad. Esto hace que el sistema no pierda todas las integrales de movimiento como se verá a lo largo del trabajo. En particular se toma como referencia a la energía y las integrales de movimiento que persisten para hacer un rastreo de la transición al caos. En el caso de sistemas que tienen un número de integrales de movimiento iguales a los grados de libertad, se observa que al perderse la integrabilidad, el análisis sobre el comportamiento de la transición al caos se hace muy complicado, debido a que se pierden muchas simetrías al mismo tiempo. Aquí se aprovecha la super-integrabilidad del problema de Kepler, un problema de tres grados de libertad y cuatro integrales de movimiento [2–4]. Al perder dos de ellas, se conservan dos para hacer el seguimiento al caos, además de que proporcionan un mejor entendimiento del rompimiento de la simetrías.

En este caso las cantidades de movimiento que siempre se conservan (para el caso simétrico y el asimétrico) son: la energía y la proyección en el eje z del momento angular. Para el caso simétrico, además de las cantidades anteriores, se conservan la geometría de la órbita y el módulo al cuadrado del momento angular. En el caso asimétrico, debido a la complejidad de las ecuaciones de movimiento, el problema se resuelve de manera numérica mediante una simulación computacional. En la cual se realizaron secciones de Poincaré, para cuando la masa m_2 cruza por el plano xy , además se analizó el espectro de Fourier para la masa m_2 . Con estas herramientas es posible discriminar entre la integrabilidad, la periodicidad, la cuasiperiodicidad y la no-periodicidad del sistema PKA.

Una parte fundamental para la solución de PKA es la elección de las condiciones iniciales, para lo cual se hizo un breve análisis del potencial efectivo que involucra principalmente el análisis en curvas equipotenciales de energía como función de las distintas variables involucradas en la dinámica. De esta manera, se obtienen dos conjuntos de condiciones iniciales simétricas para la masa m_2 . El primer conjunto de condiciones iniciales es con $z = 0$ y $p_z \neq 0$ que corresponde a poner la masa m_2 en el origen y darle impulso en la dirección z . El otro conjunto de condiciones es con $z \neq 0$ y $p_z = 0$ que corresponde a colocar dicha masa en alguna posición distinta del origen y soltarla. Con estas dos condiciones se puede hacer un análisis del potencial efectivo, y en general del problema.

Agradecimientos

A papá y mamá, quienes han dedicado los últimos veinticuatro años de sus vidas a sembrar en el alma de cuatro individuos el valor del trabajo y del esfuerzo como principio de vida. Gracias papá y mamá, por la oportunidad de formar parte de sus vidas.

A Ignacio Porras Flores, Jesús Edgardo Porras Flores y Erick Porras Flores. Mis hermanos y amigos, quienes me han enseñado a el significado de fraternidad. También a los integrantes más pequeños de mi familia Ángel Ignacio Porras Sánchez e Izael Porras Sánchez, quienes me recuerdan lo colorida que es la vida. A mis abuelitos; abuelita Rosa, abuelita Toña, abuelito Leandro y muy en especial a mi abuelito Nacho.

A la señora Coty, por los consejos que me dio y me sigue dando, además de hacerme un integrante más de su familia. Agradezco también; a Rafael Beristain, José Beristain, Doña Toña Beristain, la señora Lupita Beristain, Don Raúl, Luis Beristain, Gustavo Beristain, Guadalupe Beristain, Miguel Ortega, Jorge Romo Beristain, David y a toda la familia Beristain por hacerme sentir un Beristain mas.

A mi hermana académica, Monse, por haber disfrutado conmigo la belleza de estudiar física, por sufrir y a la vez disfrutar esas tareas imposibles, por soportar mi dislexia durante la toma de datos en los laboratorios.

A el Dr. Ricardo Méndez Fragoso “Rich”. Que más que un asesor, gurú, sensei o Jedi, es un amigo de quien aprendí lo poco que sé. Gracias por la paciencia, por explicarme una y otra vez, por mostrarme la física desde otro punto de vista y en especial muchas gracias por las enseñanzas extra académicas.

También agradezco a el Dr. Fernando Magaña y a Rich el gusto por la teoría electromagnética, a la Dra. Rocío Juaregui el gusto por la mecánica cuántica, a Lorea Chaos y a Rich el gusto por la mecánica clásica. También agradezco a Ernesto Alejandro Vázquez Navarro el gusto por la geometría y en especial a los Doctores; Luis Benet, Arturo Olvera y Ricardo Méndez por quienes tengo este encanto exorbitante por los sistemas dinámicos continuos.

A mis hermanos académicos y amigos, quienes de una u otra forma hicieron que mi formación fuera más rica; Ernesto Vázquez Navarro, Gasde Hunedy Lopez, David Hinojosa Romero, David Reyes Hernández, Mijaíl Matínez Ramos, Karina Portillo y muy especialmente a Gloria Chávez Vázquez.

Y sin duda gracias a mis sinodales; el Dr. Luis Benet Fernández, el Dr. David P. Sanders, la Dra. Catherine García Reimbert y la M en C. Lorea Chaos Cador. Por sus valiosas y constructivas opiniones, sugerencias, observaciones y correcciones de este trabajo.

A mi alma mater la Universidad Nacional Autónoma de México, por abrirme las puertas y brindarme la oportunidad de formarme como individuo en esta la máxima casa de estudios que existe, y por crear en mí este sentimiento de identidad.

Se agradece el apoyo económico otorgado por el proyecto DGAPA-PAPIIT IA 102414 y DGAPA-PAPIME PE 106615 para la realización de esta tesis.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Sistemas mecánicos.	1
1.1.1. Sistemas superintegrables.	2
1.2. Objetivos de la tesis.	2
1.3. Breve descripción del contenido de la tesis.	3
2. Sistemas integrables, simetrías, súper-integrabilidad y caos	5
2.1. Formulación Lagrangiana de la mecánica	5
2.2. Formulación Hamiltoniana de la mecánica	8
2.3. Teorema de Noether y simetrías	15
2.4. Secciones de Poincaré	15
2.5. Espectro de Potencias.	17
3. Problema de Kepler asimétrico.	21
3.1. Descripción del sistema	21
3.2. Lagrangiana y Hamiltoniana del PKA en coordenadas curvilíneas	22
3.2.1. Descripción en coordenadas cartesianas	22
3.2.2. Descripción en coordenadas cilíndricas	24
3.2.3. Descripción en coordenadas esféricas	26
3.3. El Problema de Kepler Simétrico (PKS)	28
4. Análisis dinámico de PKA	37
4.1. El código de la simulación.	37
4.2. Pozo de potencial efectivo	40
4.3. Condiciones iniciales	45
4.3.1. Condición inicial con $z = 0$ y $p_z \neq 0$	45
4.3.2. Condición inicial con $z \neq 0$ y $p_z = 0$.	49
5. Resultados de PKA.	51
5.1. Resultados del conjunto de condiciones iniciales con $z = 0$ y $p_z \neq 0$.	51
5.1.1. Secciones de Poincaré de PKA con $z = 0$ y $p_z \neq 0$.	51
5.1.2. Espectro de potencias de PKA con $z = 0$ y $p_z \neq 0$.	58
5.1.3. Secciones de Poincaré de PKA con $z \neq 0$ y $p_z = 0$.	61
5.2. Gráficas de las cantidades no conservadas.	66
6. Conclusiones	69
A. El Problema de Fuerza Central.	73

B. Transformada de Legendre.	77
C. Código de simulación.	79
C.1. Rutina principal <i>PKA.py</i>	79
C.2. Librería <i>Mapeo_lib.py</i>	80
C.3. Librería <i>lib_PKA.py</i>	84
Bibliografía	91

Introducción

1.1. Sistemas mecánicos.

Con la formulación de la mecánica hecha por Isaac Newton en el siglo XVII se tuvo una manera precisa de describir la dinámica de un cuerpo para cualquier instante en el tiempo [5]. Al poco tiempo, el resolver problemas tan cotidianos, como el péndulo simple, se volvió un tarea complicada por las ecuaciones diferenciales que se obtenían. Más aún, cuando se tuvo que resolver problemas más importantes, como el movimiento de sol, la luna y el planeta tierra, se descubrió que no se puede resolver más que bajo ciertas condiciones, y esto no era porque la teoría no lo permitiera, sino por la falta de métodos con los cuales resolver este problema. A la postre, a éste se le conocería como el problema de los tres cuerpos. Con ello se motivó el desarrollo de estudios cualitativos de las ecuaciones diferenciales involucradas, además de la formulaciones alternativas a la mecánica clásica que incorporaban el principio de la conservación de la energía, como el formalismo de Euler-Lagrange y el de Hamilton-Lagrange. Cabe mencionar que este último produjo importantes avances en la geometría diferencial. En ambos formalismos se destaca la existencia de constantes dinámicas con las cuales se puede caracterizar completamente a un sistema. A estas constantes se les suele llamar integrales de movimiento. Una de las conclusiones importantes a la que se llegó es que si el sistema tenía el mismo número de cantidades conservadas como grados de libertad, éste se podía resolver salvo una integral que involucra la energía. De esta manera, se decía que el problema es integrable. A partir de esto se idearon formalismos con los cuales poder describir un sistema en términos de sus integrales de movimiento. Esto se logró indagando las propiedades de simetría y topológicas de un sistema. Una de las formulaciones más exitosas en dicho esquema es el formalismo de Hamilton-Jacobi [2].

Durante el estudio de los sistemas integrables se observó que si éstos tenían muchos grados de libertad las constantes de movimiento se perdían con facilidad ante perturbaciones pequeñas. Consecuentemente el sistema dejaba de ser integrable, pero se observó que existían sistemas que eran más estables que otros. Esto dio origen a estudios sobre la estabilidad de un sistema dinámico y al teorema de Kolmogorov–Arnold–Moser (KAM) [6]. Éste consiste en estudiar la periodicidad de un sistema dinámico bajo pequeñas perturbaciones para diferentes condiciones iniciales. De hecho se definen superficies invariantes, relacionadas con las integrales de movimiento, en las que las trayectorias pueden estar para diferentes condiciones iniciales. En el caso de perturbaciones pequeñas las trayectorias solución quedan cerca dichas superficies en trayectorias quasi-periódicas haciendo que el sistema sea estable.

Muchos físicos y matemáticos interesados en el estudio de los sistemas dinámicos comenzaron a buscar herramientas que les permitieran saber cuando un sistema es o no integrable. Y fue Emmy Nother quien entre los años de 1917 – 1918, al tratar de encontrar soluciones a las ecuaciones de Einstein, formuló un teorema que involucra uno de los conceptos más importantes que relaciona la física y la matemática de un problema. Esta aportación consiste en relacionar el concepto de un grupo de simetrías y con el concepto de integrales de

movimiento. Tal teorema que asegura que cada integral de movimiento tiene asociada una simetría, y viceversa. Por lo tanto, podemos saber si un sistema es integrable estudiando el número de simetrías que tiene, o el número de cantidades dinámicas conservadas. Este teorema no sólo ha sido relevante en mecánica clásica, sino también en mecánica cuántica, teoría cuántica de campos, etc. Unos de los ejemplos más recientes de esto se encuentra en el modelo estándar de partículas, el cual se basa en el principio de simetría de norma que implementa una serie de transformaciones de simetrías internas, es decir, no se fija en las coordenadas sino el espacio en donde las partículas (campos) pueden existir. Ejemplos de lo anterior son las cantidades conservadas de carga eléctrica en la electrodinámica cuántica, la carga de color en cromodinámica, etc.

Las consecuencias sobre el estudio de los sistemas mecánicos derivó en la creación de toda una rama de estudio que hoy conocemos como Teoría del Caos. Ésta tiene sus orígenes en el estudio de sistemas para predecir el clima, y ha tenido impacto en diferentes disciplinas como física, ingeniería, economía, biología, etc. Como se menciona al principio de este trabajo, uno de los principales objetivos que se tiene en la ciencia es la capacidad de predecir el comportamiento de un sistema cuando se dan condiciones iniciales. Con ellos, típicamente se obtienen ecuaciones diferenciales que dependen del tiempo y que modelan un fenómeno. Las soluciones a éstas proporcionan información del sistema a tiempos futuros. Sin embargo, como mencionamos anteriormente, encontrar soluciones analíticas puede ser una tarea no sencilla, pero se pueden tomar dos caminos. El primero consiste en hacer aproximaciones que simplifiquen el problema a uno que sea más fácil de manipular con la ventaja de que se tengan parámetros de control que aproximen, en buena medida, al sistema original. Esta metodología es mejor conocida como teoría de perturbaciones. La segunda forma de proceder es haciendo una simulación numérica que encuentre las soluciones al sistema de ecuaciones diferenciales. En ambos casos se creía que pequeños cambios en las condiciones iniciales implicaban pequeños cambios en el comportamiento futuro del sistema. Sin embargo, esto no resultó cierto, y uno de los casos emblemáticos de este comportamiento es el atractor de Lorentz [7], mismo que es un sistema de ecuaciones diferenciales para tratar de predecir el clima.

1.1.1. Sistemas superintegrables.

Cuando un sistema integrable es tal que puede tener más integrales de movimiento que grados de libertad, se dice que el sistema es superintegrable. Estas constantes de movimiento tienen que ser independientes entre sí, es decir, cada constante de movimiento representa una superficie invariante diferente en el espacio fase. Estos sistemas tienen propiedades topológicas que se reflejan en la estabilidad de un sistema y que no se han explorado de manera exhaustiva.

1.2. Objetivos de la tesis.

La motivación principal de este trabajo proviene del estudio de sistemas dinámicos que bajo ciertas condiciones son superintegrables. Para ello en este trabajo se propone un sistema mecánico que bajo ciertas condiciones se reduce al problema de Kepler, razón por la cual lo llamaremos Problema de Kepler Asimétrico (PKA), mismo que también le da el título a este trabajo de tesis. Debido a que el análisis de este tipo de sistemas está poco explorado y requieren de mucho tiempo, el objetivo principal de este trabajo es proporcionar herramientas necesarias para poder hacer su análisis. Más en específico se consideran los siguientes objetivos

1. Proporcionar un algoritmo y programas de cómputo que faciliten la obtención numérica de las soluciones al problema que se plantea. Más concretamente para generar las secciones de Poincaré del sistema.
 2. Exhibir que bajo ciertas condiciones el problema aquí planteado se convierte en el Problema de Kepler.
 3. Proporcionar condiciones iniciales a las que se les pueda dar seguimiento para realizar un análisis exhaustivo sobre la dinámica del sistema.
 4. Incorporar herramientas de análisis, como la transformada de Fourier, para mostrar la periodicidad del sistema.
-

1.3. Breve descripción del contenido de la tesis.

En el segundo capítulo de este trabajo se hace una breve revisión de los elementos de *mecánica clásica* que son indispensables para analizar la dinámica del sistema que se plantea. Los elementos que se revisan son la formulación Lagrangiana y Hamiltoniana de la mecánica clásica; con ello se obtienen las ecuaciones de Euler Lagrange y de Hamilton Lagrange, respectivamente. Además se utilizan los paréntesis de Poisson para exhibir la super-integrabilidad del sistema. También, de forma general, se abordan las transformaciones canónicas y el formalismo de Hamilton Jacobi para reforzar el concepto de integrabilidad y con relacionar el problema con el teorema de Noether. Este último relaciona las simetrías del sistema con la existencia de integrales de movimiento. Finalmente, en este capítulo se da una pequeña explicación de las herramientas utilizadas como: las secciones de Poincaré y la transformada de Fourier para sistemas dinámicos.

En el tercer capítulo se hace la descripción del sistema con el que se trabaja. Éste consiste de dos partículas que interactúan gravitacionalmente. Una de las partículas de masa m_1 está restringida a moverse en plano xy y otra de masa, m_2 , sólo se mueve en el eje z , es decir, es un sistema de tres grados de libertad. Con esto se escribe la función lagrangiana en términos del parámetro ϵ , el cual es el cociente de masas¹. A la lagrangiana se le efectuaron dos cambios de coordenadas, uno en cilíndricas y el otro en esféricas. En ambos casos se construyó la función Hamiltoniana mediante una transformación de Legendre para indagar cuáles son las integrales de movimiento del sistema, ya que las simetrías que preserva PKA se pueden encontrar en un cilindro o a una esfera. Como resultado de esto, las ecuaciones de Hamilton Lagrange tanto en coordenadas cilíndricas como en esféricas conservan la componente z del momento angular, y cuando $\epsilon = 1$, PKA se reduce a un problema equivalente al de Kepler (*PKS*). En este caso se obtienen las tres leyes de Kepler y mediante el uso del paréntesis de Poisson, se muestra que el sistema tiene cuatro integrales de movimiento: la energía, el momento angular total, la proyección en la dirección z del momento angular y el vector de Laplace-Runge-Lenz (*LRL*), es decir, el sistema es super-integrable con $\epsilon = 1$.

Debido a que las ecuaciones de movimiento para el caso asimétrico son no-lineales y además están acopladas entre sí, éstas se integran de manera numérica. En el capítulo 4 se describe mediante un diagrama de flujo la simulación realizada para la integración de dichas ecuaciones de movimiento. Esta simulación se hizo en Python y principalmente realiza la integración de las ecuaciones de movimiento en coordenadas cartesianas, construye las secciones de Poincaré para el plano (P_ρ, ρ) en coordenadas cilíndricas y esféricas. Además, el programa también calcula la transformada de Fourier para la componente z para complementar el análisis del sistema. También en este capítulo se construyen un par de familias de condiciones iniciales que sirven como control para estudiar la dinámica que se quiere exhibir. En el primer conjunto de condiciones iniciales se impone que $z = 0$ y $p_z \neq 0$, y para el segundo se impone que $z \neq 0$ y $p_z = 0$. Estos conjuntos de condiciones iniciales se obtuvieron después de hacer un análisis del potencial efectivo e incorporando las cantidades de movimiento que aún se conservan.

En el capítulo 5 se muestran los resultados obtenidos de la simulación para los dos conjuntos de condiciones iniciales antes mencionadas. Primero se muestran las secciones de Poincaré para el conjunto $z = 0$ y $p_z \neq 0$, en coordenadas cilíndricas, y en seguida la transformada de Fourier para el movimiento de la partícula de masa m_2 correspondiente al mismo conjunto de condiciones iniciales. Luego se presenta de forma análoga las secciones de Poincaré y la transformada de Fourier para el conjunto de condiciones iniciales $z \neq 0$ y $p_z = 0$. Todos los resultados se muestran en una secuencia representativa en la que ϵ va incrementando para observar la forma en la que las simetrías se van perdiendo y la dinámica se va modificando. En las secciones de Poincaré se observan estructuras relacionadas a la conmensurabilidad del problema en las que se puede apreciar la formación de puntos fijos y puntos sillas. En el espectro de potencias se exhibe la cantidad de frecuencias asociadas al movimiento del sistema y con ello se completa el análisis de la dinámica de PKA. Por último se muestra tanto la proyección en z del vector de Laplace Runge Lenz (*LRL*) y vector de momento angular, para distintos valores de ϵ en los que se puede observar la pérdida de estas integrales de movimiento.

¹ $m_2 = m_1 \epsilon$.

Finalmente, en el capítulo 6 se analizan los resultados y entre las conclusiones más importantes podemos destacar las siguientes:

- Para el caso simétrico $\epsilon = 1$ el sistema es super-integrable y sigue las tres leyes de Kepler. La sección de Poincaré es un punto y la transformada de Fourier un pico tipo delta de Dirac.
- Para $\epsilon \neq 1$ el sistema pierde dos integrales de movimiento que son: el momento angular y el vector LRL . Además, tanto en las secciones de Poincaré como en el espectro de potencias se observa que el sistema tiene comportamientos, periódicos, cuasiperiódicos y no periódicos.
- Cuando la sección de Poincaré y el espectro de potencias son densos se puede decir con certeza que el sistema es caótico.
- La transición al caos es algo análogo a la duplicación de periodo, ya que al observar la secciones de Poincaré, éstas tienen un comportamiento parecido al que presenta el mapeo logístico.

Es importante mencionar que si el lector posee los conocimientos fundamentales de mecánica clásica, este puede omitir el capítulo 2 e ir directamente al capítulo 3, donde se comienza el estudio de PKA.

Sistemas integrables, simetrías, súper-integrabilidad y caos

En este capítulo se hace una breve revisión teórica de los elementos de mecánica clásica que son necesarios para el análisis del problema que se aborda en esta tesis. Dichos elementos van desde la introducción del concepto de coordenadas generalizadas, pasando por la formulación Lagrangiana y Hamiltoniana de la mecánica clásica, hasta enunciar el teorema de Noether y sus implicaciones. También se discuten los conceptos de sistemas integrables, simetrías, súper-integrabilidad y algunos elementos de la teoría del caos.

2.1. Formulación Lagrangiana de la mecánica

Considérese un sistema clásico \mathcal{S} formado por n partículas puntuales¹. Para describir la dinámica de \mathcal{S} son necesarios n vectores de posición $\vec{r}_i(t)$. Debido a que los vectores pertenecen a un espacio vectorial de tres dimensiones, son necesarias tres cantidades para describir la posición de cada partícula. Entonces la configuración espacial de \mathcal{S} está dada por $3n$ cantidades. Si existen k restricciones al movimiento de las partículas, el número de cantidades para especificar el sistema serán $3n$ menos el número de restricciones, es decir

$$f = 3n - k,$$

donde f se define como el número de grados de libertad del sistema [9,10].

También es necesario un sistema de referencia inercial² a partir del cual determinar la posición de cada partícula. Este marco de referencia puede ser un sistema cartesiano y los vectores de posición estarían dados por $\vec{r}_i = x_i\hat{e}_1 + y_i\hat{e}_2 + z_i\hat{e}_3$ con $i = 1, \dots, n$, con n el número de partículas del sistema. Si el sistema \mathcal{S} tiene alguna característica geometría, intrínseca por ejemplo cilíndrica, esférica, elíptica, toroidal etc, se puede elegir un marco de coordenadas curvilíneas, q_i , de tal manera que la descripción espacial sea más apropiada para \mathcal{S} . Dicho de otra manera las coordenadas q_i , pueden depender tanto de la geometría del sistema, como de las restricciones. Pero una característica importante que deben cumplir es que necesitan ser linealmente independientes entre sí, ya que este conjunto de coordenadas debe generar el espacio donde la dinámica del sistema se lleva a cabo. A éstas q_i se les conoce como *coordenadas generalizadas*, las cuales no necesariamente deben tener dimensiones de longitud sino que podrían tener dimensiones de energía, de longitud al cuadrado, angulares, etc, e incluso adimensionales. Las anteriores q_i , sus *velocidades generalizadas* \dot{q}_i , las posiciones iniciales y velocidades iniciales $q_i(t_0)$, $\dot{q}_i(t_0)$ especifican completamente tanto el estado mecánico, como la dinámica de \mathcal{S} , mediante una función que depende de las coordenadas y velocidades generalizadas e implícitamente del tiempo t . En particular con

¹Se denomina partícula puntual a un cuerpo cuyas dimensiones pueden despreciarse al describir su movimiento.

²Es aquel marco de referencia en el que las leyes de Newton son válidas, es decir, si un cuerpo no está sujeto a alguna fuerza externa, éste se mueve velocidad constante, ver [9].

lo anterior se determinan las *aceleraciones generalizadas*, las cuales son función de las *posiciones y velocidades generalizadas*:

$$\ddot{q}_i = f(q_i, \dot{q}_i; t). \quad (2.1)$$

A la ecuación anterior se le conoce como *segunda ley de Newton*, y es equivalente al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\dot{q}_i(t) = v_i(t); \quad \dot{v}_i(t) = f(q_i, v_i; t). \quad (2.2)$$

En el contexto de las ecuaciones diferenciales el espacio al cual pertenecen las funciones (q, \dot{q}) , se le conoce como *espacio fase*, pero esto es un abuso de lenguaje ya que el espacio de fases, el espacio al cual pertenecen las coordenadas generalizadas y momentos generalizados (q, p) , esto se puede ver con más detalle en [3]. El lado derecho de (2.2) determina un campo vectorial en este espacio. Una solución ψ a la ec. (2.2) describe el movimiento de un punto en el espacio fase. A este movimiento se le llama *trayectoria en el espacio fase*, donde la velocidad a cada instante de tiempo es igual al campo vectorial. La imagen de ψ es llamada *curva fase* y estas curvas están dadas por las siguientes ecuaciones paramétricas:

$$x = \psi(t); \quad v = \dot{\psi}(t).$$

Por el teorema de existencia y unicidad de ecuaciones diferenciales, dichas curvas no se intersectan en el espacio fase, por lo que cada curva es una interpretación geométrica de la dinámica en \mathcal{S} . Sin embargo, existen cantidades cuyos valores permanecen constantes durante el movimiento, dependiendo solamente de la condición inicial. Esta situación se refleja claramente en el espacio fase en el que se observan contantes, en otras palabras se dice que las cantidades que permanecen constante durante movimiento son “invariantes en el espacio fase”. A estas cantidades se les denomina *constantes de movimiento*.

Para describir la dinámica de un sistema mecánico, se apela a uno de los principios más fundamentales en física, el *principio de mínima acción o principio de Hamilton*. Éste establece que todo sistema mecánico está caracterizado por una función diferenciable,

$$L(q_i, \dot{q}_i; t), \quad (2.3)$$

que recibe el nombre de *función Lagrangiana del sistema*. Ésta depende de las coordenadas generalizadas, de las velocidades generalizadas y posiblemente del tiempo³. Ahora supóngase que para el tiempo t_1 y t_2 , \mathcal{S} ocupa un estado mecánico caracterizado por dos conjuntos de coordenadas generalizadas $q_i(t_1), q_i(t_2)$ tal que \mathcal{S} se mueve entre estas posiciones, de forma que la siguiente integral tome el menor valor posible⁴:

$$\mathbb{S} = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt. \quad (2.4)$$

A \mathbb{S} , se le llama *acción*. Si $q_i(t)$ es la función para la cual \mathbb{S} es un mínimo, entonces \mathbb{S} cambia cuando se sustituye $q_i(t)$ por otra función cualquiera, por ejemplo

$$q_i(t) + \delta q_i(t),$$

donde el término $\delta q_i(t)$ es una pequeña variación en el intervalo $[t_1, t_2]$. En el argot del cálculo de variaciones, a esta función se le llama *variación de la función $q_i(t)$* . Además, todas las variaciones en los extremos deben tomar los mismo valores, ver [9, 11], $q_i(t_1), q_i(t_2)$ y por las condiciones de frontera, se tiene que:

$$\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0.$$

³Cuando el sistema es conservativo, L depende de manera implícita del tiempo.

⁴Se pide que de todas las posibles trayectorias entre $q_i(t_1), q_i(t_2)$ se elija la que minimice la distancia entre dichas posiciones, en otras palabras se pide que ésta sea una geodésica.

Para determinar el mínimo, se busca que la variación de \mathbb{S} sea cero⁵, con lo que el principio de mínima acción se escribe como:

$$\delta\mathbb{S} = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt = 0. \quad (2.5)$$

Debido a que L es diferenciable y realizando la variación de L , se tiene que

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) dt = 0.$$

Integrando por partes el término $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i$, se llega a

$$\delta\mathbb{S} = \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q \right]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt = 0.$$

Debido a que $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$, el primer término es cero, y puesto que la integral debe ser cero para toda $\delta q_i dt$ el argumento de la integral debe ser cero, para cada q_i con lo que se tiene

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0. \quad (2.6)$$

Las ecuaciones 2.6 describen completamente la dinámica del sistema y se les conocen como *ecuaciones de Euler-Lagrange*. A esta manera de abordar la dinámica del sistema se le conoce como el *formalismo de Euler-Lagrange*. Observese que las ecs. (2.6) son de segundo de orden y el número de ellas es igual al número de grados de libertad. De estas ecuaciones, se pueden obtener las ecuaciones de movimiento de \mathcal{S} . La Lagrangiana es una función que se define como

$$L = T - U,$$

la diferencia entre la energía cinética T y la energía potencial U . Pero más que definir a la Lagrangiana, ésta se puede construir si se recurre a que el espacio es homogéneo e isotrópico localmente y que el tiempo es homogéneo localmente, esto se estudia más a detalle en [11]. Entonces para el caso de una partícula en la que no se ejerce alguna fuerza externa, es decir una partícula libre, la energía potencial es cero y debido a la homogeneidad del espacio-tiempo, L no depende de las posiciones y del tiempo explícitamente. Como el espacio es isotrópico, L es invariante ante rotaciones, haciendo que la Lagrangiana dependa del módulo de la velocidad al cuadrado. Lo anterior hace que la lagrangiana al menos, sea proporcional al módulo de la velocidad al cuadrado

$$L \propto |\vec{v}|^2.$$

es decir, la energía cinética. Si ahora se considera que la partícula interactúa con una fuerza externa y ésta proviene de menos el gradiente de una cierta función potencial, entonces la función potencial es función de las coordenadas generalizadas, es decir, de la energía potencial $U(q_i)$. Por lo tanto, la Lagrangiana debe tener la forma que se propuso con anterioridad,

$$L = T - U = \frac{1}{2} m |\dot{q}_i|^2 - U(q_i).$$

Para una descripción más formal y detallada de la Lagrangiana se pueden consultar las referencias [11, 12].

⁵Estrictamente sólo se pide que la variación sea un extremo.

2.2. Formulación Hamiltoniana de la mecánica

Como se observa en el formalismo de Euler-Lagrange, la formulación de la mecánica presupone que la dinámica de \mathcal{S} está completamente determinada por las coordenadas y velocidades generalizadas. Sin embargo, no es la única forma en la cual se puede describir la dinámica de \mathcal{S} , ya que existe otro conjunto de variables independientes, distintas a las velocidades generalizadas, con las cuales se puede describir a \mathcal{S} . La descripción de la dinámica de \mathcal{S} en términos de las coordenadas y los *momentos generalizados* ofrece ciertas ventajas, especialmente en el estudio geométrico de \mathcal{S} y la interpretación de las constantes de movimiento. A este formalismo se le conoce como formalismo de *Hamilton-Lagrange*. Estas cantidades los momentos generalizados o impulsos generalizados se determinan a continuación.

Al derivar $L(q_i, \dot{q}_i; t)$ con respecto al tiempo se tiene⁶

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}L(q_i, \dot{q}_i; t) &= \frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d\dot{q}_i}{dt} + \frac{\partial L}{\partial t} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d\dot{q}_i}{dt} + \frac{\partial L}{\partial t}, \\ \frac{d}{dt}L(q_i, \dot{q}_i; t) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) + \frac{\partial L}{\partial t}. \end{aligned}$$

Si se define a $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = p_i$ como los *momentos generalizados* y organizando términos de manera adecuada, se tiene

$$\frac{d}{dt}(p_i \dot{q}_i - L) = -\frac{\partial L}{\partial t}. \quad (2.7)$$

La función entre paréntesis se define como la *función de Hamilton* o *función Hamiltoniana*

$$H(q_i, p_i; t) = p_i \dot{q}_i(q, p; t) - L(q_i, \dot{q}_i(q, p; t); t), \quad (2.8)$$

donde se ha hecho explícita la dependencia de q y p por medio de $\dot{q} = \dot{q}(q, p; t)$.

Se observa que la función Hamiltoniana es el resultado de hacer una *transformada de Legendre* a la Lagrangiana (ver apéndice B y las referencias [12–14]) y es función de las coordenadas generalizadas, los momentos generalizados y posiblemente del tiempo. Al calcular la diferencial de H se tiene ⁷

$$\begin{aligned} dH &= \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt, \\ &= \dot{q}_i dp_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i + p_i d\dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt \\ &= \dot{q}_i dp_i - \dot{p}_i dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \end{aligned}$$

Al identificar los coeficientes de dp_i , dq_i y dt , se obtiene:

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i, \quad \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i, \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}. \quad (2.10)$$

⁶Obsérvese que $\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right)$, debido a las ecuaciones de Euler-Lagrange, si $T(\dot{q}_i^2)$ y $U(q_i)$.

⁷Para este cálculo se hace uso de que $\dot{q} = \dot{q}(q, p; t)$ al considerar las derivadas parciales $\frac{\partial H}{\partial p_i}$ y $\frac{\partial H}{\partial q_i}$.

La 3ltima ecuaci3n relaciona el cambio de H y L con respecto al tiempo. Si L no depende expl3citamente del tiempo, entonces, por la Ec. (2.7), H es una constante. Dicha constante es la energ3a, pues al realizar la transformaci3n de Legendre para las respectivas coordenadas se obtiene que

$$H = \frac{p_i^2}{2m} + U(q_i) = E.$$

En las Ecs. (2.9), a las variables p_i y q_i , se les llama *variables can3nicamente conjugadas* y se les conoce con el nombre de *ecuaciones can3nicas de Hamilton-Lagrange*. Se observa que estas ecuaciones tienen estructura simpl3ctica, [3,12]) y a diferencia de las ecuaciones de Euler-Lagrange, 3stas son el doble de ecuaciones, pero de primer orden. Por lo tanto, la din3mica de \mathcal{S} se describe en un espacio que se denota por Ω , donde su dimensi3n es el doble del espacio configuraci3n. El conjunto anterior de ecuaciones proporciona m3s informaci3n del aspecto geom3trico de la din3mica de \mathcal{S} ; una muestra de lo anterior es la siguiente relaci3n:

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_i} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_i} \right) = 0.$$

3sta impone una restricci3n geom3trica y din3mica muy interesante, debido a que la ecuaci3n de Hamilton que involucra la parcial de H con respecto a las coordenadas generalizadas tiene un menos, que aunado a la suposici3n de que H es continua, se puede pensar en un an3logo hidrodin3mico, en el que la divergencia de H es cero. Entonces se puede hablar de un *flujo Hamiltoniano* incompresible, es decir, se puede pensar que toda la din3mica de \mathcal{S} fluye en Ω y el hipervolumen del flujo, es constante. En otras palabras, si se cuantifica el flujo Hamiltoniano en una determinada secci3n de Ω para un determinado tiempo t_0 y en seguida se hace para un incremento infinitesimal de tiempo $t_1 = t_0 + dt$ y si se observa un cambio en el flujo de la secci3n, entonces en las dem3s secciones ocurre un cambio tal que el hipervolumen es constante.

Otro ejemplo importante es el que se presenta a continuaci3n. Consid3rese la funci3n, f , la cual depende de q_i , p_i y posiblemente del tiempo. La derivada de f con respecto al tiempo es

$$\frac{d}{dt} f(q_i, p_i; t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial f}{\partial t}.$$

De las ecuaciones can3nicas de Hamilton (2.9), se tiene

$$\frac{d}{dt} f(q_i, p_i; t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} + \frac{\partial f}{\partial t}.$$

Se define el *par3ntesis de Poisson* como $\{f, H\} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i}$; por lo tanto, se puede escribir

$$\frac{d}{dt} f = \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t}. \quad (2.11)$$

M3s a3n, se define como un operador de dos funciones continuas $f(q_i, p_i)$ y $h(q_i, p_i)$ que dependen de momentos y coordenadas generalizadas, tal que cumple con la siguiente regla de operaci3n⁸

$$\{f, h\} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial h}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial h}{\partial q_i} \right). \quad (2.12)$$

El par3ntesis de Poisson trae consigo un 3lgebra intr3nseca⁹, la cual es 3til al momento de realizar c3lculos funcionales con cantidades conservadas. Algunas propiedades de la relaci3n en la Ec.(2.12) son

⁸El par3ntesis de Poisson opera sobre el n3mero total de coordenadas y momentos generalizados.

⁹3lgebra del grupo simpl3ctico de Lie [12].

- $\{f, f\} = 0$, el paréntesis de Poisson de una función consigo misma es cero ¹⁰.
- Antisimetría, $\{f, h\} = -\{h, f\}$.
- Bilineal, $\{af + bg, h\} = a\{f, h\} + b\{g, h\}$, donde a y b son constantes.
- $\{fg, h\} = \{f, h\}g + f\{g, h\}$.
- *Identidad de Jacobi* $\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$, es decir, la suma de permutaciones cíclicas del doble paréntesis de Poisson de tres funciones es cero.

La prueba de estas propiedades es relativamente fácil; se demuestran usando la definición del paréntesis de Poisson y considerar que las funciones f , g y h son continuas con segunda derivada continua. Sin embargo, el paréntesis de Poisson tiene implicaciones muy útiles e interesantes cuando se trata de discriminar constantes de movimiento independientes. A continuación se exhiben algunas aplicaciones del paréntesis de Poisson en la función Hamiltoniana, las coordenadas y momentos generalizados ¹¹.

- a) $\{q_i, H\} = \dot{q}_i$, $\{p_i, H\} = \dot{p}_i$.
- b) $\{q_i, q_j\} = 0$, $\{p_i, p_j\} = 0$.
- c) $\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$.
- d) Si una cantidad C , que no depende explícitamente del tiempo y además conmuta con la Hamiltoniana, es decir, $\{C, H\} = 0$, entonces C es una constante de movimiento del sistema.

Estas propiedades ilustran el álgebra antes mencionada y la prueba de las mismas se obtienen de manera directa utilizando esencialmente la definición de paréntesis de Poisson, la función Hamiltoniana y las ecuaciones de Hamilton-Lagrange, por lo que dichas pruebas se omiten [9,13]. Sin embargo, la última de las propiedades es un resultado muy importante, ya que permite saber cuándo alguna función es o no una integral de movimiento, por lo que a continuación se realiza la prueba de esta propiedad.

Proposición 1.

Sea $C = C(q_i, p_i; t)$, una función de las coordenadas generalizadas y de los momentos generalizados, la cual no depende explícitamente del tiempo y que además conmuta con la Hamiltoniana $\{C, H\} = 0$. Entonces C es una constante de movimiento.

Prueba.

Al derivar a C con respecto a el tiempo se tiene $\frac{dC}{dt} = \frac{\partial C}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial C}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial C}{\partial t}$. De las ecuaciones de Hamilton-Lagrange, $\frac{dC}{dt} = \frac{\partial C}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial C}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} + \frac{\partial C}{\partial t}$. Al utilizar la definición de paréntesis de Poisson, se llega a $\frac{dC}{dt} = \{C, H\} + \frac{\partial C}{\partial t}$. Por hipótesis, $\{C, H\} = 0$ y como C no depende explícitamente del tiempo, $\frac{\partial C}{\partial t} = 0$, entonces $\frac{dC}{dt} = 0$. Por lo tanto $C = cte$, es decir, es una constante de movimiento.

□

Una consecuencia importante de la última propiedad y de la identidad de Jacobi es que el paréntesis de Poisson de dos constantes de movimiento es, a su vez, una constante de movimiento. Así, al aplicar la identidad de Jacobi a F , G constantes de movimiento y H , la función Hamiltoniana, se tiene:

¹⁰Si el paréntesis de Poisson se anula, entonces se dice que las cantidades conmutan. Esta expresión es muy utilizada en mecánica cuántica donde se tiene una estructura algebraica similar.

¹¹Recuérdese que H depende de q_i y p_i .

$$\{F, \{G, H\}\} + \{G, \{H, F\}\} + \{H, \{F, G\}\} = 0. \quad (2.13)$$

Por la propiedad *d*), los primeros términos son cero y, por tanto, $\{F, G\}$ es una integral de movimiento. Sin embargo, lo anterior no proporciona alguna información de si las integrales de movimientos son independientes entre sí. La independencia de estas integrales de movimiento es de gran importancia en el estudio de sistemas Hamiltonianos, ya que la existencia de m de estas cantidades permite reducir el estudio de un sistema de n grados de libertad, \mathcal{S}_n , a uno de menos grados de libertad, \mathcal{S}_{n-m} [3]. Por lo tanto, entre mayor sea el número de integrales de movimiento, el estudio del sistema se reduce aún más. Por eso resulta importante estudiar las constantes de movimiento linealmente independientes de un sistema \mathcal{S} , en particular es importante saber si dicho sistema tiene tantas constantes de movimiento independientes como grados de libertad; si esto sucede, se dice que el sistema es *integrable*. La independencia lineal de las constantes de movimiento se determina cuando el paréntesis de Poisson es igual a cero. A esto se le conoce como involución (para una descripción más detallada ver [3, 4]): dos integrales de movimiento I_1 e I_2 están en involución si

$$\{I_1, I_2\} = 0 \quad (2.14)$$

Como se ha notado, en los dos formalismos que se han presentado, las ecuaciones de movimiento no dependen del sistema de referencia ni del sistema coordenadas curvilíneas que se elija, pero sí es importante notar que al hacer una transformación de coordenadas y momentos, se preserve el volumen del flujo Hamiltoniano. Es decir, dadas las coordenadas canónicas (q, p) y si existe un isomorfismo de coordenadas T_c tal que la imagen de (q, p) bajo T_c sea (Q, P) y ésta transformación preserva el flujo Hamiltoniano, entonces T_c es una *transformación canónica de coordenadas y momentos*, $T_c : (q_i, p_i) \mapsto (Q_i, P_i)$. En términos analíticos, el determinante de la matriz Jacobiana sea uno, i.e. $\frac{\partial(p, q)}{\partial(P, Q)} = 1$, para que

$$\int_{\gamma} dqdp = \int_{\Gamma} \frac{\partial(p, q)}{\partial(P, Q)} dQdP,$$

con γ y Γ los hipervolumenes en los respectivos espacios fase.

Una síntesis de lo anterior se ilustra en el siguiente cuadro, ya que para hacer un cambio de coordenadas entre dos langrangianas L_1 y L_2 sólo basta con una transformación de coordenadas, que denotaremos por T_c ¹². El cambio de L_1 a H_1 o de L_2 a H_2 es mediante una transformación de Legendre T_l y como resultado el cambio de H_1 a H_2 se hace mediante una transformación canónica.

Un cambio de coordenadas entre H_1 y H_2 se puede hacer de dos maneras. La primera es mediante un transformación canónica y la segunda es realizar la transformada de Legendre para obtener la Lagrangiana, luego hacer el cambio de coordenadas y por último hacer la transformada de Legendre, para así obtener la nueva Hamiltoniana en las respectivas coordenadas, como se muestra en la Fig.(2.1).

De todo lo anterior, para una Hamiltoniana, H , las ecuaciones canónicas son:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i},$$

y las ecuaciones canónicas después de aplicar una transformación canónica son:

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial H'(Q, P; t)}{\partial P_i}, \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial H'(Q, P; t)}{\partial Q_i}.$$

¹²Se debe asegurar el cambio de cartas sea completos para los respectivos atlas, una descripción mas formal de esto de puede ver en [15].

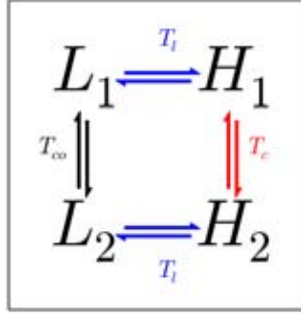


Figura 2.1: Cuadro conmutativo que ilustra el cambio de una Hamiltoniana H_1 , a una Hamiltoniana H_2 , mediante transformaciones de coordenadas, de Legendre y canónicas.

El caso más óptimo de una transformación canónica es cuando todas las variables Q_i son cíclicas, es decir, que la transformación canónica de una función Hamiltoniana dependa solamente de los nuevos momentos generalizados P_i ,

$$H(q_i, p_i) : T_c \mapsto H'(P_i), \quad (2.15)$$

donde las ecuaciones de Hamilton tendrán la forma

$$\dot{P}_i = \frac{\partial H'}{\partial Q_i} = 0, \quad \dot{Q}_i = \frac{\partial H'}{\partial P_i} = f_i(P_i). \quad (2.16)$$

Aquí $f_i(P_i)$ es una función de P_i e independiente del tiempo. Pensar en una transformación que realice lo anterior es muy importante, pues los nuevos momentos generalizados se obtienen por simple integración. Además, estos momentos son integrales de movimiento del sistema, con los cuales se obtienen las nuevas coordenadas generalizadas y con ello la solución del sistema salvo, una integral de cuadratura. Con esto se puede hablar de que el *sistema es integrable* cuando se tienen, tantos momentos generalizados como grados de libertad.

Ahora se expondrá qué tipo de transformación hace que se cumpla la Ec. (2.15). Al regresar a la Ec.(2.5) y ocupando la Ec.(2.9) para una transformación canónica se tiene:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} (p_i \dot{q}_i(q, p; t) - H(q_i, p_i; t)) dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} (P_i \dot{Q}_i(Q, P; t) - H'(Q_i, P_i; t)) dt = 0.$$

Por tanto se tiene que

$$p_i dq_i - H(q_i, p_i; t) dt = P_i dQ_i - H'(Q_i, P_i; t) dt + dF_1,$$

es decir,

$$dF_1 = p_i dq_i - P_i dQ_i - (H(q_i, p_i; t) - H'(Q_i, P_i; t)) dt.$$

Con lo que F_1 es una función de q, Q y posiblemente del tiempo, es decir, $F_1 = F_1(q, Q; t)$. Por otro lado, la diferencial de F_1 es

$$dF_1 = \frac{\partial F_1}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial F_1}{\partial Q_i} dQ_i + \frac{\partial F_1}{\partial t} dt.$$

Entonces se tiene que:

$$p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i}, P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i} \quad \text{y} \quad H'(Q_i, P_i; t) = H(q_i, p_i; t) + \frac{\partial F_1}{\partial t},$$

o bien

$$p_i dq_i - H dt = P_i dQ_i - H' dt + dF_1. \quad (2.17)$$

Ahora si se hace una transformación de Legendre de tal manera que se transforme F_1 a una función que dependa de q, P y quizá del tiempo tal que se tenga $F_2(q_i, P_i; t)$

$$F_1 = F_1(q_i, Q_i; t) = F_2(q_i, P_i; t) - P_i Q_i.$$

A F_2 , se le conoce como *función generadora*. Por lo tanto, la diferencial de F_1 es

$$dF_1 = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} dq_i - p_i dQ_i + \left[\frac{\partial F_2}{\partial P_i} - Q_i \right] dP_i + \frac{\partial F_2}{\partial t} dt.$$

Sustituyendo esta última ecuación en la ec.(2.17), se obtiene:

$$p_i dq_i - H dt = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} dq_i + \left[\frac{\partial F_2}{\partial P_i} - Q_i \right] dP_i + \left[\frac{\partial F_2}{\partial t} - H' \right] dt \quad (2.18)$$

y de esta ecuación se sigue que

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} \quad Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i} \quad H' = H + \frac{\partial F_2}{\partial t}. \quad (2.19)$$

Esta metodología puede ser usado para integrar explícitamente una clase importante de sistemas Hamiltonianos. A este tratamiento se le conoce como formalismo de *Hamilton-Jacobi*, en el cual a la función generadora se le denota por $S = S(q_i, \alpha_i)$, y por convención a los momentos en este formalismo se les denotan como α_i :

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial}{\partial q_i} S(q_i, \alpha_i), \\ \beta_i &= \frac{\partial}{\partial \alpha_i} S(q_i, \alpha_i), \end{aligned} \quad (2.20)$$

donde β_i son las nuevas coordenadas conjugadas de α_i

$$H \left(q_i, \frac{\partial}{\partial q_i} S(q_i, \alpha_i) \right) = H'(\alpha_i). \quad (2.21)$$

La Ec. (2.21) se conoce como ecuación de *Hamilton-Jacobi independiente del tiempo*. Para el caso particular en el que se encuentra un par de variables conjugadas tal que la coordenada conjugada se incremente por 2π después de completar un periodo de movimiento, denotando estas variables como I y Θ , donde I es el momento conjugado constante. Con ello las Ecs. (2.20) se escriben como:

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial}{\partial q_i} S(q_i, I_i), \\ \Theta_i &= \frac{\partial}{\partial I_i} S(q_i, I_i), \end{aligned} \quad (2.22)$$

y la ecuación de Hamilton-Jacobi toma la forma

$$H\left(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}\right) = \alpha_i = H'(I), \quad (2.23)$$

para una trayectoria con un valor fijo de α de la Ec.(2.22), se obtiene:

$$\frac{d\Theta_i}{dq_i} = \frac{\partial}{\partial I_i} \left(\frac{\partial S}{\partial q_i} \right).$$

Al pedir que sobre un ciclo alrededor de una curva invariante \mathcal{C} para algún valor fijo de α el cambio en Θ_i sea de 2π , implica que

$$2\pi = \oint_{\mathcal{C}} d\Theta = \frac{\partial}{\partial I} \oint_{\mathcal{C}} \frac{\partial S}{\partial q} dq,$$

la condición anterior se satisface sólo si

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint_{\mathcal{C}} p(q, \alpha) dq. \quad (2.24)$$

La Ec.(2.24) es la definición de la variable acción. Esta se calcula alrededor de una curva invariante para un valor fijo de $\alpha = H'(I) = E$ y las ecuaciones de Hamilton para la transformación son:

$$\dot{I} = -\frac{\partial H'(I)}{\partial \Theta} = 0, \quad (2.25)$$

$$\dot{\Theta} = \frac{\partial H'(I)}{\partial I} = \omega(I), \quad (2.26)$$

La integración de estas ecuaciones da:

$$I = I_0 = cte, \quad (2.27)$$

$$\Theta = \omega(I)t + \delta, \quad (2.28)$$

donde $\omega(I)$ es la frecuencia característica de la dinámica de \mathcal{S} , para una discusión mas detallada ver [2-4,11-13].

El hecho de que dos constantes de movimiento conmuten, Ec.(2.14), tiene implicaciones geométricas muy interesantes ya que al estar en involución y del formalismo de Hamilton-Jacobi se tienen dos direcciones principales x_1 y x_2 independientes y estas tienen asociada una frecuencia ω_1 y ω_2 (el ángulo de periodo 2π). Es decir, se tiene una circunferencia \mathbb{S}^1 para cada constante de movimiento, y puesto que son dos direcciones independientes, la variedad que se genera es $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, que representa un toro Π^2 de dimensión 2, como se muestra en la Fig.(2.2).

La dinámica del sistema se restringe a la superficie de un toro y esta es función de las variables angulares ω_1 y ω_2 , por lo que para cada par de integrales de movimiento I se tiene un toro en específico y la dinámica de \mathcal{S} se encuentra en dicho toro como se muestra en la Fig.(2.3) dependiendo de las condiciones iniciales. Esta idea se generaliza para n integrales de movimiento independientes, resultando que la dinámica del sistema se encuentra en un toro n -dimensional ¹³ $\Pi^n = \underbrace{\mathbb{S}^1 \times \dots \times \mathbb{S}^1}_{n \text{ veces}}$, donde la dinámica es descrita por el conjunto de frecuencias asociadas $\{\omega_n\}$. Una muy buena síntesis de esto se tiene en [17].

¹³Hay veces que dependiendo de la estructura topológica de las variables del sistema, éste puede estar en variables, similares a un cilindro, $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$.

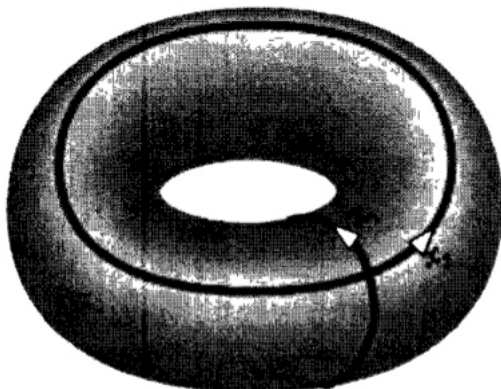


Figura 2.2: Variedad para un sistema integrable.

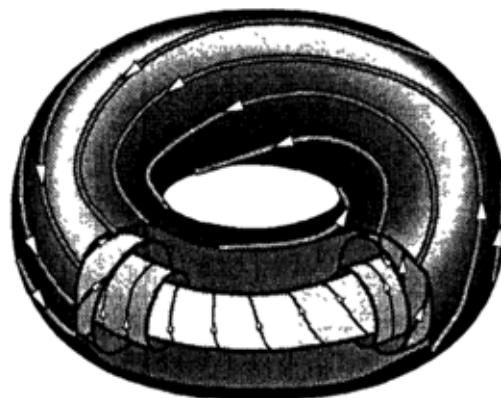


Figura 2.3: Dinámica para diferentes integrales de movimiento.

2.3. Teorema de Noether y simetrías

Un sistema \mathcal{S} es simétrico si al aplicarle una transformación, su Lagrangiana o Hamiltoniana permanece sin cambios. En el caso de la Lagrangiana, esto ocurre cuando en las ecuaciones de Euler-Lagrange el término de la parcial con respecto a alguna coordenada generalizada sea nulo¹⁴, $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_0} \right) = 0$. Es decir, no existe una dependencia explícita de dicha coordenada y, en consecuencia, la derivada total del momento generalizado asociado es constante, $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_0} = cte$. Para el caso de la función Hamiltoniana, si en las ecuaciones de Hamilton-Lagrange la parcial de la Hamiltoniana respecto a alguna coordenada generalizada, o momento generalizado, es cero, $\dot{p}_0 = -\frac{\partial H}{\partial q_0} = 0$, $\dot{q}_0 = \frac{\partial H}{\partial p_0} = 0$, entonces existe una simetría asociada a la transformación de dicha variable. Lo anterior nos indica que cuando se tienen simetrías en un sistema podemos asociar una constante dinámica. Esto último también es válido en sentido inverso [3, 4, 12], es decir, una constante dinámica tiene asociada una transformación que deja invariante las variables del sistema. Algunos ejemplos de esto son: La invarianza de la Lagrangiana o Hamiltoniana bajo desplazamiento en el tiempo, la invarianza del momento lineal bajo translaciones espaciales en una partícula libre y la invarianza de momento angular en un sistema que rota, por citar algunos de los ejemplo más comunes.

Lo anterior se generaliza en un teorema que formuló en 1917 – 1918, la matemática *Emmy Noether* y se le conoce por *Teorema de Noether*, el cual en palabras de Eugene Saletan y Jorge José [3] dice:

Teorema de Noether

\mathfrak{g} es una constante de movimiento si y sólo si H es invariante bajo el grupo de transformaciones infinitesimalmente generadas por \mathfrak{g} .

2.4. Secciones de Poincaré

La sección de Poincaré es particularmente útil en el estudio de sistemas periódicos, cuasi-periódicos y/o con periodicidad forzada. Para exhibir esto, considérese una órbita periódica de un sistema \mathcal{S} , sobre la variedad

¹⁴Sólo en el caso en que la coordenada sea invariante.

de fase \mathbb{M}^{15} cuya dimensión es n . Si $\xi(t, \xi_0)$ es una solución de periodo τ , entonces $\xi(t + \tau, \xi_0) = \xi(t, \xi_0)$. Ahora llamemos \mathbb{P} a una subvariedad de \mathbb{M} de co-dimensión $n - 1$, tal que es transversal a la órbita en el tiempo. En otras palabras, la intersección de la órbita y la variedad \mathbb{P} es un punto $\xi(t + \tau, \xi_0) = p \in \mathbb{P}$ como se muestra en la Fig (2.4), (esto para el caso en el que la órbita tiene un sólo periodo, pero puede haber órbitas con periodos multiples). En este caso se dice que el sistema es periódico.

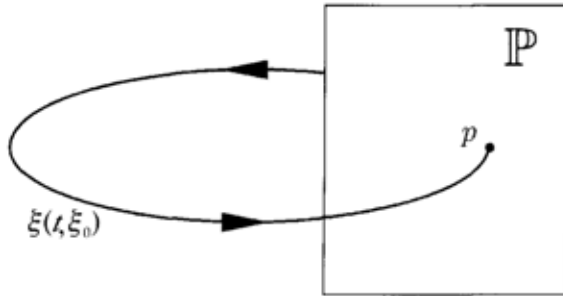


Figura 2.4: Sección de Poincaré para un sistema periódico.

Ahora bien, si \mathcal{S} está sujeta a una perturbación de tal manera que la órbita del sistema es forzada a cambiar cerca de la órbita $\xi(t)$, entonces $\xi(t_0 + \tau)$ en general no será el mismo punto que $\xi(t_0) = p_0$ en \mathbb{P} . Esto quiere decir que después de un tiempo τ , $\xi(t)$ cruza a \mathbb{P} en otro punto $\xi(t_0 + \tau) = p_1$, tal como se muestra en la Fig.(2.5), es decir, el sistema exhibe multiplicidad en su periodo. En dicha figura se observa que la intersección de la órbita con \mathbb{P} se alterna entre los puntos p_0 y p_1 ; a esta secuencia de puntos que se describen en \mathbb{P} se le llaman *mapeo de Poincaré* y \mathbb{P} es la *sección de Poincaré*. De ésta forma la dinámica de un sistema define la función $\Phi : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$, la cual se conoce como mapeo de Poincaré o aplicación de Poincaré, ya que el punto p_k lo manda p_{k+1} de forma que $p_{k+1} = \Phi(p_k)$ forma un conjunto de puntos en \mathbb{P} .

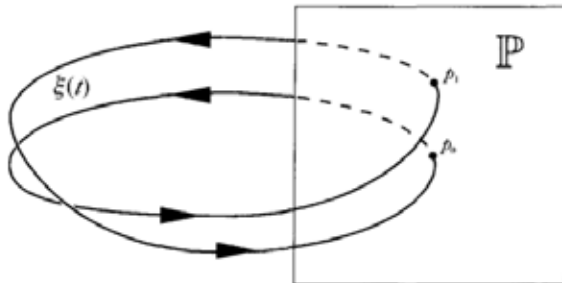


Figura 2.5: Sección de Poincaré para un sistema con duplicidad de periodo.

¹⁵Una variedad topológica de dimensión n es un espacio topológico de Hausdorff en el que todo punto tiene un entorno abierto homeomorfo a una bola abierta en \mathbb{R}^n , es decir, localmente se parece a \mathbb{R}^n .

Un sistema es *periódico* si las frecuencias independientes del toro son *commensurables*, esto es, dadas ω_1 y ω_2 , el cociente entre ellas es racional, es decir, $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{p}{q}$, con p, q primos relativos. Y un sistema es *cuasi-periódico* si dichas frecuencias son *incommensurables*, es decir, el cociente entre ellas es irracional, $\frac{\omega_1}{\omega_2} \neq \frac{p}{q}$. Una caracterización de estos conceptos se especifica mediante el mapeo de Poincaré ya que describe de manera cualitativa si un sistema es commensurable o incommensurable.

Es decir, \mathcal{S} es periódico, si se tiene que la traza de la órbita en la sección consta de un número finito de puntos. \mathcal{S} es cuasi-periódico si se tienen un número infinito de puntos en \mathbb{P} . Para esclarecer esta idea consideremos la Hamiltoniana de una partícula que tiene dos grados de libertad:

$$E = H = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2) + U(x, y). \quad (2.29)$$

La órbita de la partícula se encuentra en un espacio fase de cuatro dimensiones (coordenadas x, y y sus respectivos momentos p_x y p_y). El estudio se puede reducir a un problema de dos dimensiones, ya que para una energía dada se elige una sección de Poincaré para algún valor de y_0 fijo; sin perder generalidad se elige $y = 0$. La órbita de este sistema se puede obtener de manera numérica y el mapeo se hace cada vez que la órbita pasa por $y = 0$; obteniendo los puntos en \mathbb{P} , correspondientes a los valores sucesivos para x y p_x y con esto, un mapeo en el plano (x, p_x) . Lo anterior es la sección de Poincaré y los puntos en esta sección definen el estado mecánico del sistema ya que para la energía, E , y $y = 0$, se tiene:

$$p_y = \pm \sqrt{2m \left(E - \frac{1}{2m} p_x^2 - U(x, 0) \right)}. \quad (2.30)$$

La sección de Poincaré se construye utilizando únicamente uno de los signos. Es importante observar que un mapeo puede tener un número infinito de puntos de tal manera que la traza de la órbita dejada en la sección de Poincaré (el mapeo) sea una curva suave. Esta curva corresponde al corte transversal del toro en el cual sobre su superficie se encuentra la órbita. Este toro es la variedad \mathbb{M} y por tanto la dinámica del sistema se encuentra en un único toro cuando el sistema es integrable. Cuando el sistema no es integrable la sucesión de puntos en el mapeo no sólo se restringe a una curva, sino que comienza a llenar la sección de manera densa e infinita, y esto se debe a que la órbita ya no se encuentra sobre la superficie del toro sino que ahora la órbita ocupa varios toros de diferentes radios, con lo cual el sistema deja de ser integrable, y más aún el sistema puede llegar a ser caótico debido a la pérdida de integrales de movimiento. Esta situación se exhibe más adelante en los resultados obtenidos de este trabajo y en las referencias [3, 13, 17, 18].

2.5. Espectro de Potencias.

Otra herramienta útil para el estudio de caos, en particular para la caracterización de las órbitas, es describirlas en términos de su *espectro de potencias*. Éste proporciona información cuantitativa sobre la periodicidad o aperiodicidad de las frecuencias que componen la dinámica de la órbita, (ver [13, 19]). Considérese una órbita periódica, es decir, el movimiento de la órbita está confinado sobre la superficie de un toro. Más aún, la intersección de ésta con una sección de Poincaré es únicamente un punto, por lo que sólo existe una frecuencia asociada a dicho movimiento. Dicho movimiento de acuerdo con el teorema de Fourier [19], se puede escribir en términos de una base ortonormal:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right]. \quad (2.31)$$

A la ecuación anterior se le conoce como *serie de Fourier*, donde L es la mitad del periodo y los coeficientes a_0 , a_n y b_n son:

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_L^L f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx. \quad (2.32)$$

Utilizando que $\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ y $\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$, tenemos:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[(a_n - ib_n) e^{(in\pi x/L)} + (a_n + ib_n) e^{-in\pi x/L} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\sum_{n=-\infty}^0 (a_{-n} - ib_{-n}) e^{(-in\pi x/L)} + \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + ib_n) e^{(-in\pi x/L)} \right] \end{aligned}$$

Debido a la paridad de las funciones seno y coseno, los coeficientes se pueden escribir de la forma $a_n = a_{-n}$ y $b_{-n} = -b_n$, con los cuales se puede definir un nuevo coeficiente c_n , tal que $c_n = \frac{a_n + ib_n}{2}$ y $c_0 = a_0$. Por lo tanto, la serie de Fourier toma la forma

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{(-in\pi x/L)}, \quad (2.33)$$

donde

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{(in\pi x/L)} dx \quad (2.34)$$

Al sustituir (2.34) en (2.33) se obtiene:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x') e^{(in\pi x'/L)} dx' \right] e^{(-in\pi x/L)} \quad (2.35)$$

Para algún n la frecuencia es $\omega = \frac{n\pi}{L}$, por lo que, para dos valores consecutivos de n , la frecuencia es $\Delta\omega = \frac{\pi}{L}$. Por lo, tanto

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{\Delta\omega}{2\pi} \int_{-L}^L f(x') e^{(i\omega x')} dx' \right] e^{(-i\omega x)}$$

Si se impone que $L \rightarrow \infty$ y $\Delta\omega \rightarrow 0$, se obtiene:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x') e^{i\omega x'} dx' \right] e^{-i\omega x} d\omega \quad (2.36)$$

De esta ecuación se observa que la función es la composición de una transformación y su inversa, un estudio más detallados se muestran en [19, 20]. Además, esta transformación tiene información sobre las frecuencias asociadas al sistema en un intervalo infinito, es decir, las frecuencias con las que se puede reconstruir la función inicial. A esta transformación se le conoce como *la transformada de Fourier* y se define como:

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\omega x} dx, \quad (2.37)$$

y su inversa es

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-i\omega x} d\omega \quad (2.38)$$

Si a la órbita con la cual se inicio la discusión se le aplica la transformada de Fourier, debido a que ésta tiene sólo una frecuencia, el resultado de la transformada será una delta de Dirac, situada justo en la frecuencia asociada del sistema. El espectro de frecuencias, $I(\omega)$, es el módulo de las frecuencias asociadas de un sistema. Para ejemplificar esta herramienta, considérese la siguiente función:

$$f(x) = \sin(x) + 3 \cos(5x), \quad (2.39)$$

la cual se muestra en la Fig.(2.6). Si obtenemos la transformada de Fourier de la Ec.(2.39) por medio la Ec.(2.37) se sigue que:

$$I(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [\pi\delta(\omega - 1) + 3\pi\delta(\omega - 5)] \quad (2.40)$$

De la ecuación anterior se tiene que el espectro de potencias estará formado por dos picos, uno situado en $\omega_1 = 1$ y un segundo en $\omega_2 = 5$. Además, este último tiene una amplitud tres veces más grande que el primero, tal y como se muestra en la Fig(2.7).

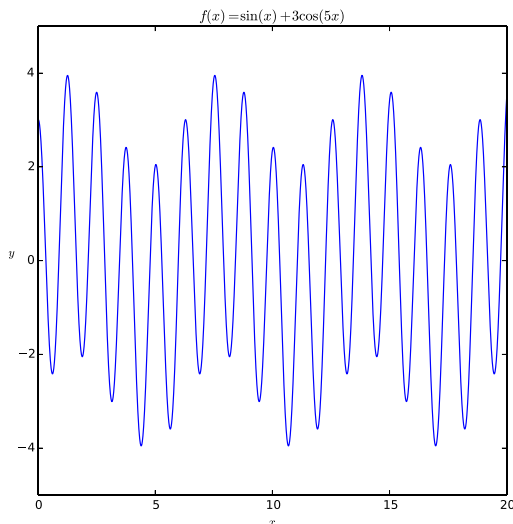


Figura 2.6: Función a la cual se le examina su espectro de potencias, para identificar el número de frecuencias.

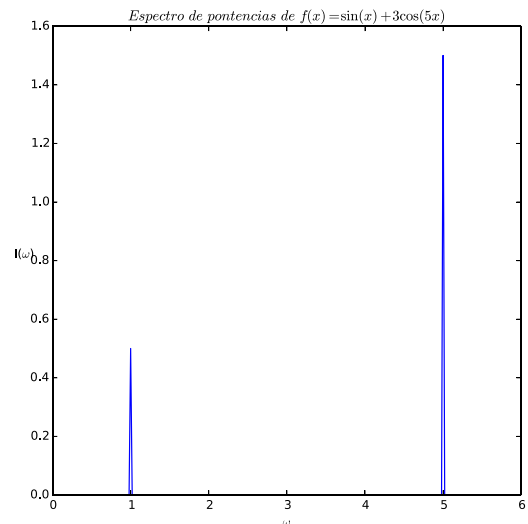


Figura 2.7: El espectro de potencias muestra que la función tiene únicamente frecuencias en 1 y en 5.

Cuando se tiene una función asociada a un sistema dinámico que tiene un gran número de frecuencias, el espectro de potencias se llena y esto es una medida de la aperiodicidad del sistema. Esta herramienta se explotará fuertemente más adelante para los espectros de Fourier del problema de Kepler asimétrico.

Capítulo 3

Problema de Kepler asimétrico.

El problema de Kepler es de los pocos problemas en mecánica clásica que además de ser totalmente soluble, es especial debido a que tiene al menos cuatro constantes de movimiento independientes y tres grados de libertad, haciéndolo super-integrable. En este capítulo se propone un sistema que bajo ciertas condiciones de simetría se reduce al problema de Kepler, y que se le asignará el nombre de Problema de Kepler Asimétrico (PKA), debido al rompimiento de algunas simetrías, como se detallará más en el capítulo.

3.1. Descripción del sistema

Considérese una partícula de masa m_1 , restringida a moverse en el plano (x, y) , y una segunda partícula de masa m_2 , con la restricción de moverse en el eje z . Éstas interactúan a través de un potencial gravitacional como se muestra en Fig. (3.1). Las coordenadas de dichas partículas son $\vec{r}_1 = (x_1, y_1, 0)$ y $\vec{r}_2 = (0, 0, z_2)$. Por simplicidad se escribirá $\vec{r}_1 = (x, y, 0)$ y $\vec{r}_2 = (0, 0, z)$, teniendo en cuenta que las coordenadas x, y corresponden a la partícula de masa m_1 y la coordenada z a la partícula de masa m_2 . Como consecuencia de la ley de gravitación universal de Newton¹, dichas partículas interactúan mediante el potencial gravitacional $U = -\frac{Gm_1m_2}{r}$.

Como se discutió en el capítulo 2 los grados de libertad son $f = 3n - k$ [9]. En PKA se tiene que $n = 2$ (dos partículas) y $k = 3$ (restricciones), ya que para m_1 hay una restricción, puesto que se mueve en plano (x, y) y para m_2 son 2 debido a que sólo se mueve en el eje z . Por lo anterior los grados de libertad del sistema son $f = 3$.

¹Cada partícula con masa m atrae a otra partícula con masa m' con una fuerza que varía directamente como el producto de las dos masas y es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellas, $\vec{F} = -G\frac{mm'}{r^2}\hat{e}_r$, donde \hat{e}_r es un vector unitario en la dirección radial, [9].

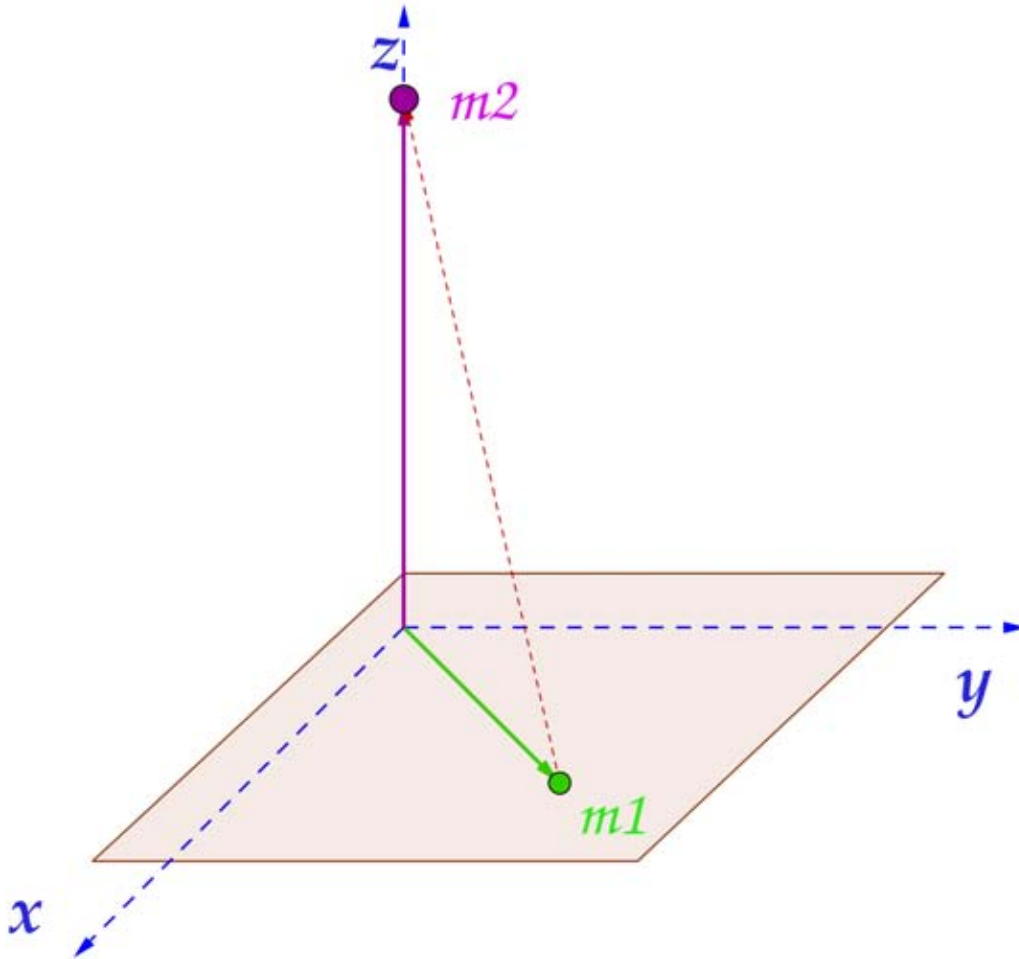


Figura 3.1: El sistema del PKA.

3.2. Lagrangiana y Hamiltoniana del PKA en coordenadas curvilíneas

Debido a que PKA tiene una simetría cilíndrica y el potencial sólo depende de la posición, PKA se describirá en tres sistemas de coordenadas: cartesianas, cilíndricas y esféricas. Esto tiene la finalidad de indagar las simetría y explorar la existencia de cantidades características del sistema que son útiles en su análisis dinámico.

3.2.1. Descripción en coordenadas cartesianas

La energía cinética T del sistema PKA es la suma de la energía cinética de la partícula 1 más la energía cinética de la partícula 2:

$$T = \frac{1}{2}m_1(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}m_2(\dot{z}^2), \quad (3.1)$$

donde la derivada con respecto al tiempo es: $\frac{dq}{dt} = \dot{q}$. Se usa un círculo, « \circ », sobre las coordenadas para denotar la derivada con respecto al tiempo, \tilde{t} , ya que se reescalará la lagrangiana en unidades más apropiadas donde se usará la notación de un punto, « \cdot », para indicar la derivada con respecto al tiempo escalado t .

Puesto que las partículas interactúan a través de un potencial gravitacional, la energía potencial es:

$$U = -\frac{Gm_1m_2}{r}, \quad (3.2)$$

con $r = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ y G la constante de gravitación universal.

Del formalismo de Euler-Lagrange y de la resta de la Ec. (3.2) a la Ec. (3.1) se obtiene la lagrangiana de PKA:

$$L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}; \tilde{t}) = \frac{1}{2}m_1(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}m_2(\dot{z}^2) + \frac{Gm_1m_2}{r}. \quad (3.3)$$

Para que la manipulación algebraica sea más simple, se reescala la lagrangiana, de tal manera que esté escrita en un sistema de unidades más apropiado para su análisis. Si se factoriza m_1 de (3.3) se tiene:

$$L = m_1 \left[\frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} \frac{m_2}{m_1} \dot{z}^2 + \frac{Gm_2}{r} \right].$$

Definimos $\epsilon = \frac{m_2}{m_1}$; con ello la lagrangiana toma la forma:

$$L = m_1 \left[\frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \epsilon \dot{z}^2) + \frac{Gm_2\epsilon}{r} \right]. \quad (3.4)$$

Si ahora se toma $t = \sqrt{Gm_1} \tilde{t}$, para cualquier coordenada generalizada q_i ,

$$\dot{q} = \frac{dq}{dt} = \frac{dq}{dt} \frac{dt}{d\tilde{t}} = \dot{q} \sqrt{Gm_1},$$

donde $\frac{dq}{dt} = \dot{q}$. Finalmente la lagrangiana se expresa de forma más práctica:

$$L = Gm_1^2 \left[\frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \epsilon \dot{z}^2) + \frac{\epsilon}{r} \right].$$

Renombrando la lagrangiana escalada por un factor de $\frac{1}{Gm_1^2}$, ésta se escribe

$$\mathcal{L}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}; t) = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \epsilon \dot{z}^2) + \frac{\epsilon}{r}. \quad (3.5)$$

Obsérvese que las unidades de (3.5) son de [distancia]⁻¹ y estas son las unidades más convenientes en las que se puede describir el sistema. Además, éstas unidades hacen que PKA sólo dependa del cociente de masas ϵ como parámetro libre.

De las ecuaciones de Euler-Lagrange y de la lagrangiana en la Ec. (3.5) se obtienen las ecuaciones de movimiento para PKA:

$$\ddot{x} + \epsilon \frac{x}{r^3} = 0; \quad (3.6)$$

$$\ddot{y} + \epsilon \frac{y}{r^3} = 0; \quad (3.7)$$

$$\ddot{z} + \frac{z}{r^3} = 0. \quad (3.8)$$

Se observa que las Ecs. (3.6) a (3.8) son un sistema de tres ecuaciones diferenciales de segundo orden no lineales, acopladas en el término r . El sistema anterior es soluble para $\epsilon = 1$.

La Hamiltoniana es,

$$\mathcal{H} = \sum_{j=1}^3 p_j \dot{q}_j - \mathcal{L},$$

donde los momentos generalizados son $p_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}$ y j es el índice que se refiere a las componentes de las coordenadas generalizadas. Con ello la Hamiltoniana de PKA es

$$\mathcal{H}(\vec{x}, \vec{p}; t) = \frac{1}{2} \left(p_x^2 + p_y^2 + \frac{p_z^2}{\epsilon} \right) - \frac{\epsilon}{r}, \quad (3.9)$$

y las ecuaciones de Hamilton-Lagrange son:

$$\dot{x} = p_x; \quad (3.10)$$

$$\dot{y} = p_y; \quad (3.11)$$

$$\dot{z} = \frac{p_z}{\epsilon}; \quad (3.12)$$

$$\dot{p}_x = -\frac{\epsilon x}{r^3}; \quad (3.13)$$

$$\dot{p}_y = -\frac{\epsilon y}{r^3}; \quad (3.14)$$

$$\dot{p}_z = -\frac{\epsilon z}{r^3}. \quad (3.15)$$

Como se observa, a diferencia de las ecuaciones de movimiento del formalismo de Euler-Lagrange, éstas son el doble del número ecuaciones pero de primer orden.

3.2.2. Descripción en coordenadas cilíndricas

Al resolver cualquier problema físico es útil adquirir el mayor beneficio de la geometría. Al escribir la configuración espacial de un sistema en un marco de coordenadas apropiado a la geometría del mismo, resulta que en algunas ocasiones se puede obtener de manera analítica la solución al sistema.

Por ello PKA se escribirá en los sistemas de coordenadas cilíndricas y esféricas para aprovechar su geometría cilíndrica y que el potencial depende de la distancia. En el caso cilíndrico se hace el siguiente cambio de variables:

$$x = \rho \cos \phi, \quad y = \rho \sin \phi, \quad z = z. \quad (3.16)$$

donde $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ en el intervalo $0 \leq \rho < \infty$, $\phi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ donde $0 \leq \phi < 2\pi$ y $-\infty \leq z < \infty$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{\rho} \cos \phi - \rho \dot{\phi} \sin \phi, \\ \dot{y} &= \dot{\rho} \sin \phi + \rho \dot{\phi} \cos \phi. \end{aligned} \quad (3.17)$$

De las Ecs. (3.5), (3.16) y (3.17) se obtiene la lagrangiana en coordenadas cilíndricas:

$$\mathcal{L}_{cyl} = \frac{1}{2} \left(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\phi}^2 + \epsilon \dot{z}^2 \right) + \frac{\epsilon}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}. \quad (3.18)$$

De igual forma que se hizo en la lagrangiana en coordenadas cartesianas, Ec. (3.5), y de las ecuaciones de Euler-Lagrange se obtienen las ecuaciones de movimiento para la lagrangiana en coordenadas cilíndricas:

$$\ddot{\rho} - \rho \left[\dot{\phi}^2 + \frac{\epsilon}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} \right] = 0; \quad (3.19)$$

$$\ddot{\phi} = 0; \quad (3.20)$$

$$\ddot{z} + \frac{z}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} = 0. \quad (3.21)$$

Al realizar la correspondiente transformada de Legendre a la Ec. (3.18) se obtiene la Hamiltoniana de PKA en cilíndricas,

$$\mathcal{H}_{cyl} = \sum_{j=1}^3 p_j \dot{q}_j - \mathcal{L}_{cyl}.$$

En este caso los momentos generalizados son:

$$p_\rho = \frac{\partial \mathcal{L}_{cyl}}{\partial \dot{\rho}} = \dot{\rho};$$

$$p_\phi = \frac{\partial \mathcal{L}_{cyl}}{\partial \dot{\phi}} = \rho^2 \dot{\phi};$$

$$p_z = \frac{\partial \mathcal{L}_{cyl}}{\partial \dot{z}} = \epsilon \dot{z}.$$

Por lo tanto la Hamiltoniana en coordenadas cilíndricas es

$$\mathcal{H}_{cyl} = \frac{1}{2} \left(p_\rho^2 + \frac{p_\phi^2}{\rho^2} + \frac{p_z^2}{\epsilon} \right) - \frac{\epsilon}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}. \quad (3.22)$$

De esta ecuación se tiene las ecuaciones de *Hamilton-Lagrange* en coordenadas cilíndricas:

$$\dot{\rho} = p_\rho, \quad (3.23)$$

$$\dot{\phi} = \frac{p_\phi}{\rho^2}; \quad (3.24)$$

$$\dot{z} = \frac{p_z}{\epsilon}; \quad (3.25)$$

$$\dot{p}_\rho = \frac{p_\phi^2}{\rho^3} - \epsilon \frac{\rho}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}}; \quad (3.26)$$

$$\dot{p}_\phi = 0; \quad (3.27)$$

$$\dot{p}_z = -\epsilon \frac{z}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}}; \quad (3.28)$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}_{cyl}}{\partial t} = 0. \quad (3.29)$$

De las ecuaciones anteriores se observa claramente que \mathcal{H}_{cyl} y p_ϕ son constantes de movimiento y esta última la podemos identificar con el momento angular de la partícula en el plano (x, y) ; por lo tanto, se renombra a p_ϕ de la siguiente manera:

$$l_\phi = p_\phi = \dot{\phi}\rho^2. \quad (3.30)$$

De la Ec. (3.23) se tiene $p_\rho = \dot{\rho} = \frac{d}{dt}(\sqrt{x^2 + y^2}) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}}(2x\dot{x} + 2y\dot{y}) = \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ y de las ecs. (3.10) y (3.11) se obtiene

$$p_\rho = \frac{xp_x + yp_y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \quad (3.31)$$

Con lo anterior $\frac{1}{2} \left(p_x^2 + p_y^2 + \frac{p_z^2}{\epsilon} \right) - \frac{\epsilon}{r} = \frac{1}{2} \left(p_\rho^2 + \frac{l_\phi^2}{\rho^2} + \frac{p_z^2}{\epsilon} \right) - \frac{\epsilon}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}$, obteniéndose

$$p_x^2 + p_y^2 = p_\rho^2 + \frac{l_\phi^2}{\rho^2}. \quad (3.32)$$

Usando (3.31), la ecuación anterior se expresa como

$$l_\phi^2 = (x^2 + y^2) \left[p_x^2 + p_y^2 - \left(\frac{xp_x + yp_y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)^2 \right] = (x^2 + y^2) \left[\frac{(p_x^2 + p_y^2)(x^2 + y^2) - (xp_x + yp_y)^2}{(x^2 + y^2)} \right],$$

y reduciendo se tiene

$$l_\phi = xp_y - yp_x. \quad (3.33)$$

Aprovechamos las expresiones anteriores para calcular los paréntesis de Poisson de l_ϕ con \mathcal{H}_{car} , esto es:

$$\{l_\phi, \mathcal{H}_{car}\}_{q_j, p_j} = \sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial l_\phi}{\partial q_j} \frac{\partial \mathcal{H}_{car}}{\partial p_j} - \frac{\partial l_\phi}{\partial p_j} \frac{\partial \mathcal{H}_{car}}{\partial q_j} \right) =$$

$$\left(\frac{\partial l_\phi}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{H}_{car}}{\partial p_x} - \frac{\partial l_\phi}{\partial p_x} \frac{\partial \mathcal{H}_{car}}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial l_\phi}{\partial y} \frac{\partial \mathcal{H}_{car}}{\partial p_y} - \frac{\partial l_\phi}{\partial p_y} \frac{\partial \mathcal{H}_{car}}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial l_\phi}{\partial z} \frac{\partial \mathcal{H}_{car}}{\partial p_z} - \frac{\partial l_\phi}{\partial p_z} \frac{\partial \mathcal{H}_{car}}{\partial z} \right).$$

Como l_ϕ no depende de z y p_z , se sigue que

$$\{l_\phi, \mathcal{H}_{car}\} = \left(\frac{\partial l_\phi}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{H}_{car}}{\partial p_x} - \frac{\partial l_\phi}{\partial p_x} \frac{\partial \mathcal{H}_{car}}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial l_\phi}{\partial y} \frac{\partial \mathcal{H}_{car}}{\partial p_y} - \frac{\partial l_\phi}{\partial p_y} \frac{\partial \mathcal{H}_{car}}{\partial y} \right) = p_y p_x + \frac{yx\epsilon}{r^3} - p_x p_y - \frac{xy\epsilon}{r^3}.$$

Por lo tanto, l_ϕ es una constante de movimiento, pues no depende explícitamente del tiempo y conmuta con la Hamiltonian:

$$\{l_\phi, \mathcal{H}_{car}\} = 0 \quad (3.34)$$

Así al describir PKA en coordenadas cilíndricas, se mostró de manera inherente que l_ϕ es una constante de movimiento.

3.2.3. Descripción en coordenadas esféricas

De manera análoga al caso en cilíndricas se escribirá la lagrangiana (3.5) en un sistema de coordenadas esférico para examinar cómo son las ecuaciones de movimiento y las ecuaciones de Hamilton-Lagrange. Hacemos el siguiente cambio de variables:

$$x = r \sin \theta \cos \phi, y = r \sin \theta \sin \phi, z = r \cos \theta, \quad (3.35)$$

con $0 \leq r < \infty$, $0 \leq \phi < 2\pi$ y $0 \leq \theta < \pi$, y $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. De la ec. (3.35) se obtiene que

$$\dot{x} = \dot{r} \sin \theta \cos \phi + r \left[\dot{\theta} \cos \theta \cos \phi - \dot{\phi} \sin \theta \sin \phi \right]; \quad (3.36)$$

$$\dot{y} = \dot{r} \sin \theta \sin \phi + r \left[\dot{\phi} \sin \theta \cos \phi + \dot{\theta} \sin \phi \cos \theta \right]; \quad (3.37)$$

$$\dot{z} = \dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta, \quad (3.38)$$

por lo que la Lagrangiana en esféricas es

$$\mathcal{L}_{sph} = \frac{1}{2} \left[\dot{r}^2 (\sin^2 \theta + \epsilon \cos^2 \theta) + r^2 \dot{\theta}^2 (\epsilon \sin^2 \theta + \cos^2 \theta) + r^2 \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + r \dot{\theta} \sin(2\theta) (1 - \epsilon) \right] + \frac{\epsilon}{r}. \quad (3.39)$$

Por lo tanto, las ecuaciones de movimiento de la lagrangiana anterior son

$$\ddot{r} (\sin^2 \theta + \epsilon \cos^2 \theta) + (1 - \epsilon) \dot{r} \dot{\theta} \sin(2\theta) + r \left[\frac{(1 - \epsilon)}{2} \ddot{\theta} \sin(2\theta) + \dot{\theta}^2 [(1 - \epsilon) \cos(2\theta) - (\epsilon \sin^2 \theta + \cos^2 \theta)] - \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta \right] + \frac{\epsilon}{r^2} = 0, \quad (3.40)$$

$$\ddot{\theta} r^2 (\epsilon \sin^2 \theta + \cos^2 \theta) + 2\dot{\theta} r \dot{r} (\epsilon \sin^2 \theta + \cos^2 \theta) + \frac{r^2 \dot{\theta}^2}{2} (\epsilon - 1) \sin(2\theta) + \frac{r}{2} \sin(2\theta) [(1 - \epsilon) \ddot{r} - \dot{\phi}^2 r] = 0, \quad (3.41)$$

$$r^2 \ddot{\phi} \sin^2 \theta + 2\dot{\phi} r \left[\dot{r} \sin^2 \theta + \frac{r^2 \dot{\theta}}{2} \sin(2\theta) \right] = 0. \quad (3.42)$$

Las Ecs. (3.40) a (3.42) son las ecuaciones de movimiento para r , θ y ϕ , respectivamente. Ahora, en este sistema coordenado se obtienen las siguientes velocidades:

$$\dot{r} = \frac{r^2 (\epsilon \sin^2 \theta + \cos^2 \theta) p_r - \frac{1}{2} (1 - \epsilon) r \sin(2\theta) p_\theta}{\epsilon r^2}, \quad (3.43)$$

$$\dot{\theta} = \frac{(\sin^2 \theta + \epsilon \cos^2 \theta) p_\theta - \frac{1}{2} (1 - \epsilon) r \sin(2\theta) p_r}{\epsilon r^2}, \quad (3.44)$$

$$\dot{\phi} = \frac{p_\phi}{r^2 \sin^2 \theta}. \quad (3.45)$$

De las Ecs. (3.43) a (3.45) y de la lagrangiana en la Ec. (3.39) se obtiene la Hamiltoniana en coordenadas esféricas:

$$\mathcal{H}_{sph} = \frac{1}{2\epsilon} \left(p_r \cos \theta - \frac{p_\theta \sin \theta}{r} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(p_r \sin \theta + \frac{p_\theta \cos \theta}{r} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{p_\phi^2}{r^2 \sin^2 \theta} - \frac{\epsilon}{r}, \quad (3.46)$$

De la Hamiltoniana escrita en coordenadas esféricas se obtienen las ecuaciones las siguientes ecuaciones de Hamilton-Lagrange:

$$\dot{r} = \frac{p_r}{\epsilon} (\epsilon \sin^2 \theta + \cos^2 \theta) + \frac{p_\theta}{2\epsilon r} \sin(2\theta) (\epsilon - 1); \quad (3.47)$$

$$\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{\epsilon r^2} (\sin^2 \theta + \epsilon \cos^2 \theta) + \frac{p_r}{2\epsilon r} \sin(2\theta) (\epsilon - 1); \quad (3.48)$$

$$\dot{\phi} = \frac{p_\phi}{r^2 \sin^2 \theta}; \quad (3.49)$$

$$\dot{p}_r = \frac{p_\theta^2}{\epsilon r^3} (\sin^2 \theta + \epsilon \cos^2 \theta) + \frac{p_\phi^2}{r^3 \sin^2 \theta} + \frac{p_r p_\theta}{2\epsilon r^2} \sin(2\theta) (\epsilon - 1) - \frac{\epsilon}{r^2}; \quad (3.50)$$

$$\dot{p}_\theta = \frac{p_r^2}{2\epsilon} \sin(2\theta) (1 - \epsilon) + \frac{p_\theta^2}{2\epsilon r^2} \sin(2\theta) (\epsilon - 1) + \frac{p_\phi^2 \cos \theta}{r^2 \sin^3 \theta} + \frac{p_r p_\theta}{\epsilon r} \cos(2\theta) (1 - \epsilon); \quad (3.51)$$

$$\dot{p}_\phi = 0; \quad (3.52)$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}_{sph}}{\partial t} = 0. \quad (3.53)$$

Las ecs. (3.52) y (3.53) se obtienen de nueva cuenta dos constantes de movimiento que se utilizarán en la sección 3.3. Si se derivan las Ecs. (3.47) a (3.49) y se sustituyen las Ecs. (3.50) a (3.52), y con una sencilla manipulación algebraica, se muestra que las ecuaciones de Hamilton-Lagrange son equivalentes a la ecuaciones de movimiento.

Antes de comenzar con el análisis correspondiente para PKA, es importante revisar el caso simétrico PKS, con $\epsilon = 1$, obteniendo resultados ya conocidos. Esto servirá como punto de partida y de confrontación entre PKA y PKS.

3.3. El Problema de Kepler Simétrico (PKS)

En esta sección se analizará el caso simétrico, PKS, esto debido a que el sistema posee tantas integrales de movimientos como grados de libertad. De la Hamiltonia PKA escrita en las diferentes coordenadas: cartesianas, cilíndricas y esféricas. En las Ecs. (3.9),(3.22), (3.46) y en sus respectivas ecuaciones de *Hamilton-Lagrange* se evalúa $\epsilon = 1$ obteniendo

- La Hamiltoniana y ecuaciones de Hamilton-Lagrange en coordenadas cartesianas, con $\epsilon = 1$:

$$\mathcal{H}_{car} = \frac{1}{2} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \quad (3.54)$$

$$\dot{x} = p_x, \quad \dot{p}_x = -\frac{x}{\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)^3};$$

$$\dot{y} = p_y, \quad \dot{p}_y = -\frac{y}{\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)^3};$$

$$\dot{z} = p_z, \quad \dot{p}_z = -\frac{z}{\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)^3};$$

- Hamiltoniana y ecuaciones de *Hamilton-Lagrange* en coordenadas cilíndricas, con $\epsilon = 1$:

$$\mathcal{H}_{cyl} = \frac{1}{2} \left(p_\rho^2 + \frac{p_\phi^2}{\rho^2} + p_z^2 \right) - \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}, \quad (3.55)$$

$$\begin{aligned}\dot{\rho} &= p_\rho, & \dot{p}_\rho &= \frac{p_\phi^2}{\rho^3} - \frac{\rho}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}}; \\ \dot{\phi} &= \frac{p_\phi}{\rho^2}, & \dot{p}_\phi &= 0; \\ \dot{z} &= p_z, & \dot{p}_z &= -\frac{z}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}};\end{aligned}$$

- Hamiltoniana y ecuaciones de *Hamilton-Lagrange* en coordenadas esféricas, con $\epsilon = 1$:

$$\mathcal{H}_{sph} = \frac{1}{2} \left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\phi^2}{r^2 \sin^2 \theta} \right) - \frac{1}{r}. \quad (3.56)$$

$$\begin{aligned}\dot{r} &= p_r, & \dot{p}_r &= \frac{p_\theta^2}{r^3} + \frac{p_\phi^2}{r^3 \sin^2 \theta} - \frac{1}{r^2}; \\ \dot{\theta} &= \frac{p_\theta}{r^2}, & \dot{p}_\theta &= \frac{p_\phi^2 \cos \theta}{r^2 \sin^3 \theta}; \\ \dot{\phi} &= \frac{p_\phi}{r^2 \sin^2 \theta}, & \dot{p}_\phi &= 0;\end{aligned}$$

La Hamiltoniana en cartesianas, es idéntica a la ecuación (A.7) del apéndice A, es decir, el caso con simétrico es equivalente al *Problema de Kepler* PK. A continuación se demostrarán las *tres leyes de Kepler*.

La Hamiltoniana en esféricas se puede escribir de manera más reducida al definir la siguiente cantidad:

$$\ell^2 = p_\theta^2 + \frac{p_\phi^2}{\sin^2 \theta}. \quad (3.57)$$

En seguida se examina qué sucede con la derivada con respecto al tiempo de ℓ^2 :

$$\frac{d}{dt} (\ell^2) = \frac{d}{dt} \left(p_\theta^2 + \frac{p_\phi^2}{\sin^2 \theta} \right) = 2 \left(p_\theta \dot{p}_\theta + \frac{p_\phi \dot{p}_\phi}{\sin^2 \theta} - \frac{\dot{\theta} p_\phi^2 \cos \theta}{\sin^3 \theta} \right) = 2 \left(p_\theta \dot{p}_\theta - \frac{\dot{\theta} p_\phi^2 \cos \theta}{\sin^3 \theta} \right).$$

Sustituyendo las ecuaciones de Hamilton-Lagrange, obtenemos

$$\frac{d}{dt} (\ell^2) = 2 \left(\frac{\dot{\theta} r^2 p_\phi^2 \cos \theta}{r^2 \sin^3 \theta} - \frac{\dot{\theta} p_\phi^2 \cos \theta}{\sin^3 \theta} \right) = 0.$$

Que ℓ^2 sea constante es de esperarse, ya que \mathcal{H} es invariante ante rotaciones y ℓ^2 es una constante del movimiento². Lo anterior también se corrobora con su paréntesis de Poisson:

$$\{\ell^2, \mathcal{H}_{sph}\} = -\frac{2p_\phi^2 p_\theta \cos \theta}{r^2 \sin^3 \theta} + \frac{2p_\theta p_\phi^2 \cos \theta}{r^2 \sin^3 \theta} = 0.$$

La pregunta natural es, ¿Se trata de una constante de movimiento independiente a p_ϕ ? Para responder esta pregunta, se examina si estas constantes están en involución,³. El paréntesis de Poisson de ℓ^2 con p_ϕ es:

$$\{\ell^2, p_\phi\} = 0,$$

²Al aludir a \mathcal{H} , se refiere a la Hamiltoniana escrita en cualquier sistema coordenado.

³Dos integrales de movimiento \mathcal{F} y \mathcal{G} , están en involución si el paréntesis de Poisson se anula $\{\mathcal{F}, \mathcal{G}\} = 0$

por lo que dichas constantes de movimiento son independientes entre sí.

Siguiendo con este análisis, se muestra a continuación que ℓ^2 es el módulo al cuadrado del momento angular total.

Utilizando las Ecs. (3.35), el radio vector es de la forma $\vec{r} = r \sin \theta \cos \phi \hat{i} + r \sin \theta \sin \phi \hat{j} + r \cos \theta \hat{k}$ y su derivada con respecto al tiempo es

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r} \hat{r} + r \dot{\theta} \left(\cos \theta \cos \phi \hat{j} + \cos \theta \sin \phi \hat{j} - \sin \theta \hat{k} \right) + r \sin \theta \dot{\phi} \left(-\sin \phi \hat{i} + \cos \phi \hat{j} \right).$$

Los términos $\left(\cos \theta \cos \phi \hat{j} + \cos \theta \sin \phi \hat{j} - \sin \theta \hat{k} \right)$ y $\left(-\sin \phi \hat{i} + \cos \phi \hat{j} \right)$ corresponden a los vectores unitarios $\hat{\theta}$ y $\hat{\phi}$ respectivamente, por lo tanto se obtiene:

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r} \hat{r} + r \dot{\theta} \hat{\theta} + r \sin \theta \dot{\phi} \hat{\phi}. \quad (3.58)$$

Utilizando las ecuaciones de Hamilton-Lagrange con $\epsilon = 1$ en la Ec. (3.58) y que $\vec{p} = \dot{\vec{r}}$, en este sistema de unidades, entonces el vector momento angular es:

$$\begin{aligned} \vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} &= r \hat{r} \times \left(\dot{r} \hat{r} + r \dot{\theta} \hat{\theta} + r \sin \theta \dot{\phi} \hat{\phi} \right) = r^2 \left(\dot{\theta} \left(\hat{r} \times \hat{\theta} \right) + \dot{\phi} \sin \theta \left(\hat{r} \times \hat{\phi} \right) \right) = r^2 \left(\dot{\theta} \hat{\phi} - \dot{\phi} \sin \theta \hat{\theta} \right), \\ \vec{L} &= r^2 \left(\dot{\theta} \hat{\phi} - \dot{\phi} \sin \theta \hat{\theta} \right), \end{aligned} \quad (3.59)$$

con lo que el módulo al cuadrado es: $|\vec{L}|^2 = r^4 \left(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta \right)$, y utilizando los momentos generalizados en esféricas de las Ecs. (3.56) se obtiene que:

$$|\vec{L}|^2 = r^4 \left(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta \right) = \ell^2. \quad (3.60)$$

Se sabe que una de las consecuencias más importantes en el problema de fuerza central es que el momento angular es una constante de movimiento. Puesto que $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$, del hecho que $\vec{p} = \dot{\vec{r}}$, el momento angular es $\vec{L} = \vec{r} \times \dot{\vec{r}}$ y la derivada de lo anterior es $\frac{d}{dt} \left(\vec{r} \times \dot{\vec{r}} \right) = \dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}} + \vec{r} \times \ddot{\vec{r}} =^4 0$, entonces $\vec{L} = cte$, es decir un vector constante.

Como el vector de momento angular es constante, implica que el plano generado por el vector posición \vec{r} y el vector de cantidad de movimiento \vec{p} siempre es el mismo, por lo que la dinámica del sistema se puede describir respecto a este plano y se nombrará *plano de la órbita*, Π_{orb} , por razones que se aclaran más adelante en el capítulo. La configuración espacial en Π_{orb} está dada por las coordenadas (δ, η) , las cuales al parametrizarlas en coordenadas polares toman la forma

$$\begin{aligned} \delta &= \varrho \cos \xi, \\ \eta &= \varrho \sin \xi. \end{aligned}$$

Puesto que \vec{r} pertenece tanto a Π_{orb} , el cual está asociado a un sistema de referencia s , como al sistema de configuración, marco de referencia s' . La magnitud del vector de posición es el mismo en ambos marcos de referencia, con lo que coincide que ϱ es igual a ρ , es decir:

$$\rho \hat{r}_{s'} = \rho \hat{r}_s. \quad (3.61)$$

Al derivar la ecuación anterior y tomar la norma de la expresión obtenida⁵ se llega a:

⁴Como se trata de un problema de fuerza central, se tiene que $f(r)\hat{r} = m\ddot{\vec{r}}$.

⁵Primero se deriva (3.61) $\rho \dot{\hat{r}}_{s'} + \dot{\rho} \hat{r}_{s'} = \rho \dot{\hat{r}}_s + \dot{\rho} \hat{r}_s$, enseguida se obtiene la norma al cuadrado, $\rho^2 + \rho^2 \dot{\hat{r}}_{s'}^2 = \rho^2 + \rho^2 \dot{\hat{r}}_s^2$.

$$|\dot{\hat{r}}_{s'}| = |\dot{\hat{r}}_s|, \quad (3.62)$$

En otras palabras:

$$\begin{pmatrix} -\dot{\xi} \sin \xi \\ \dot{\xi} \cos \xi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \cos \theta \cos \phi - \dot{\phi} \sin \theta \sin \phi \\ \dot{\theta} \cos \theta \sin \phi + \dot{\phi} \sin \theta \cos \phi \\ -\dot{\theta} \sin \theta \end{pmatrix}.$$

De lo anterior se obtiene:

$$\dot{\xi}^2 = \dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta. \quad (3.63)$$

Del cálculo anterior se muestra que el movimiento del problema equivale a uno parametrizado por ξ con respecto a Π_{orb} . Por lo tanto resulta conveniente describir a éste en el marco de referencia s . De esta forma la Ec. (3.60) se escribe como $\ell = r^2 \dot{\xi}$ con lo que:

$$\dot{\xi} = \frac{\ell}{r^2}. \quad (3.64)$$

A continuación se mostrará la utilidad de describir al sistema PKS en Π_{orb} . De las ecuaciones de Hamilton en esféricas, la derivada de r es $\dot{r} = p_r$ y al derivar \dot{r} se tiene $\ddot{r} = \dot{p}_r = \frac{p_\theta^2}{r^3} + \frac{p_\phi^2}{r^3 \sin^2 \theta} - \frac{1}{r^2} = \frac{l^2}{r^3} - \frac{1}{r^2}$, es decir:

$$\ddot{r} = \frac{\ell^2}{r^3} - \frac{1}{r^2} \quad (3.65)$$

Ahora se hace el siguiente cálculo para escribir la derivada temporal en términos de ξ , $\frac{d}{dt} = \frac{d\xi}{dt} \frac{d}{d\xi} = \dot{\xi} \frac{d}{d\xi}$, con lo que se llega a:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\ell}{r^2} \frac{d}{d\xi}. \quad (3.66)$$

Entonces la segunda derivada es:

$$\frac{d^2}{dt^2} = \frac{\ell}{r^2} \frac{d}{d\xi} \left(\frac{\ell}{r^2} \frac{d}{d\xi} \right). \quad (3.67)$$

Seguindo esta serie de manipulaciones algebraicas se define el siguiente cambio de variable para r :

$$r = \frac{1}{u} \quad (3.68)$$

Ahora derivando u respecto a ξ , $\frac{du}{d\xi} = \frac{du}{dr} \frac{dr}{d\xi} = -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\xi}$, la primera derivada toma la forma:

$$\frac{du}{d\xi} = -u^2 \frac{dr}{d\xi} \quad (3.69)$$

Al aplicarle a r el operador de segunda derivada con respecto al tiempo (escalado), se tiene:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \ell u^2 \frac{du}{d\xi} \left(\ell u^2 \frac{du}{d\xi} \right) = -\ell^2 u^2 \frac{d^2 u}{d^2 \xi},$$

Al utilizar esto en la Ec.(3.65) se tiene: $-\ell^2 u^2 u'' = \ell^2 u^3 - u^2$, con $u \neq 0$ y $u' = \frac{du}{d\xi}$. Por lo que se tiene:

$$u'' + u - \frac{1}{\ell^2} = 0. \quad (3.70)$$

La ecuación anterior es bien conocida, pues se trata de la ecuación de un oscilador armónico no lineal unidimensional, cuya solución es $u(\xi) = C \cos(\xi + \varphi) + \frac{1}{\ell^2}$, donde φ es una fase. Sin pérdida de generalidad se puede hacer la fase igual a cero, $\varphi = 0$. Regresando a la variable r se obtiene:

$$r(\xi) = \frac{\ell^2}{1 + \varepsilon \cos(\xi)}. \quad (3.71)$$

La ecuación (3.71) es la parametrización en coordenadas polares de una sección cónica con $\varepsilon = l^2 C$, la excentricidad de la cónica. Si, $0 < \varepsilon < 1$, se tiene una trayectoria cerrada, pues se trata de la parametrización de una elipse (ver [9]) y esta es la *primera ley de Kepler*.

Finalmente al introducir ℓ^2 en la Hamiltoniana ésta toma la forma:

$$\mathcal{H}_{sph} = \frac{1}{2} \left(p_r^2 + \frac{\ell^2}{r^2} \right) - \frac{1}{r} \quad (3.72)$$

En seguida se obtendrá ε como función de la energía y ℓ^2 , pues éstas son cantidades conservadas del sistema. Del hecho que la energía es una cantidad conservada, se obtiene:

$$E = \frac{1}{2} \left(\dot{r}^2 + \frac{\ell^2}{r^2} \right) - \frac{1}{r}, \quad (3.73)$$

por otra parte al aplicar el operador de derivada temporal, \dot{r}^2 es de la forma;

$$\dot{r}^2 = \left(\frac{\ell}{r^2} \frac{dr}{d\xi} \right)^2 = \ell^2 C^2 \sin^2 \xi. \quad (3.74)$$

donde se ha utilizado la Ec. (3.66). Sustituyendo (3.71) y (3.74) en (3.73) se tiene que la excentricidad es:

$$\varepsilon = \sqrt{2E\ell^2 + 1}. \quad (3.75)$$

Entonces la primera ley en términos de la energía y ℓ^2 se escribe:

$$r(\xi) = \frac{\ell^2}{1 + (\sqrt{2E\ell^2 + 1}) \cos(\xi)}. \quad (3.76)$$

En el caso particular en el que la excentricidad es cero ($\varepsilon = \sqrt{2E\ell^2 + 1} = 0$), la trayectoria es una circunferencia, entonces $r_c = \ell^2$ y $E = -\frac{1}{2\ell}$ son condiciones suficientes y necesarias para que la trayectoria sea una circunferencia⁶. Otra manera de encontrar la trayectoria circular es encontrar el mínimo del potencial efectivo. Para ello de la Ec.(3.72) se observa que le potencial efectivo es:

$$\mathcal{U}_{eff} = \frac{\ell^2}{2r^2} - \frac{1}{r}. \quad (3.77)$$

El mínimo se encuentra cuando $\frac{\partial \mathcal{U}_{eff}}{\partial r} = -\frac{\ell^2}{r^3} + \frac{1}{r^2} = 0$, mismo que se encuentra con $r = \ell^2$, y compatible con la Ec. (3.76).

Debido a que la trayectoria es una cónica cerrada, con $0 < \varepsilon < 1$ se puede suponer sin pérdida de generalidad que está en el origen. Por lo tanto la excentricidad se puede poner en términos de los semiejes de la elipse a y b : $\varepsilon^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}$. De la primera ley se puede obtener la magnitud de cualquiera de los semiejes, en particular del semieje mayor (a), si se evalúa en $\xi = 0$ y $\xi = \pi$ se obtendrá el doble de la magnitud del semieje mayor. En seguida se hace dicho cálculo obteniéndose:

⁶El subíndice c hace referencia a que la trayectoria es una circunferencia

$$r_0 = \frac{\ell^2}{1 + \varepsilon}, \quad (3.78)$$

$$r_\pi = \frac{\ell^2}{1 - \varepsilon}. \quad (3.79)$$

Al sumar las Ecs. (3.78) y (3.79):

$$r_0 + r_\pi = \frac{\ell^2}{1 + \varepsilon} + \frac{\ell^2}{1 - \varepsilon} = \frac{2\ell^2}{1 - \varepsilon^2}.$$

Por otro lado se tiene que $2a = r_0 + r_\pi = \frac{2\ell^2}{1 - \varepsilon^2}$. De la definición de excentricidad se obtiene que:

$$\ell^2 = \frac{b^2}{a}. \quad (3.80)$$

Obsérvese que si se integra en un periodo la Ec. (3.66) y haciendo uso de la Ec. (3.80), se escribe:

$$\tau^2 = 4\pi^2 a^3 \quad (3.81)$$

Esta ecuación es precisamente la *tercera ley de Kepler*, misma que relaciona el tamaño de la órbita con su periodo.

De las ecuaciones de Hamilton-Lagrange, en particular, si se integra la ecuación $p_\theta = r^2\dot{\theta}$ con respecto al tiempo se obtiene: $\int_{t_0}^{t_1} p_\theta dt = \int_{\theta_0(t)}^{\theta_1(t)} r^2(\theta) \frac{d\theta}{dt} = \int_{\theta_0(t)}^{\theta_1(t)} r^2(\theta) d\theta$. Nótese que el lado derecho de la igualdad es el doble del área en coordenadas polares. Entonces $p_\theta \Delta t = 2A$, con $\Delta t = t_0 - t_1$ y A el área entre el ángulo θ_0 y θ_1 , con ello se obtiene:

$$p_\theta \Delta t = 2A. \quad (3.82)$$

La ecuación anterior es la *segunda ley de Kepler*, misma que nos dice que el radio vector barre áreas iguales en tiempos iguales. Con esto se completan las tres leyes de Kepler.

Hasta el momento sólo se han obtenido tres constantes de movimiento independientes, la primera es la energía, por ser un sistema Hamiltoniano independiente del tiempo, la segunda es el módulo al cuadrado del vector momento angular, debido a que se trata de un problema de campo central, y la componente ϕ del momento angular. Pero, ¿qué se puede extraer de la simetría de la órbita?. El teorema de *Noether*, expresa que las simetrías de un sistema físico están asociadas con integrales de movimiento. Entonces usemos el hecho de la simetría en la trayectoria para la búsqueda de otra u otras integrales de movimiento, y para ello es inmediato pensar que dichas integrales de movimiento están en Π_{orb} y de alguna u otra manera deben estar relacionadas con \vec{L} , \vec{p} ó \vec{L} , \vec{r} . En un primer intento por hallar otra integral de movimiento, se calcula el producto vectorial de la cantidad de movimiento con el momento angular, pues cumple con las suposiciones anteriores. El resultado de esto es el vector $\vec{A} = \vec{p} \times \vec{L}$, y aprovechando el hecho de que \vec{L} es una cantidad conservada se deriva el vector \vec{A} con respecto al tiempo:

$$\dot{\vec{A}} = \dot{\vec{p}} \times \vec{L} + \vec{p} \times \dot{\vec{L}} = \dot{\vec{p}} \times \vec{L} = \vec{F} \times (\vec{r} \times \vec{p}).$$

Como $\vec{F} = -\frac{\hat{r}}{r^2}$, en el sistema de unidades que se definió al inicio y usando la identidad para el triple producto vectorial⁷.

$$\dot{\vec{A}} = \frac{\hat{r}}{r} \times (\vec{r} \times \vec{p}) = -\frac{\hat{r}}{r} (\hat{r} \cdot \vec{p}) + \frac{\vec{p}}{r},$$

⁷ $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) + \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$

pero $\hat{r} \cdot \vec{p} = \dot{r}$ y se sabe que $\dot{\hat{r}} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{r}}{r} \right) = \frac{\dot{\vec{r}}}{r} - \frac{\vec{r}}{r^2} \dot{r}$. Por lo tanto $\dot{\vec{A}} = \dot{\hat{r}}$, es decir, $\frac{d}{dt} (\vec{A} - \hat{r}) = 0$ y en consecuencia.

$$\vec{A} = \vec{p} \times \vec{L} - \hat{r}, \quad (3.83)$$

es un vector constante. A éste se le conoce como *vector de Laplace-Runge-Lenz*, LRL. En seguida se calcula el vector LRL, es coordenadas esféricas. De las Ecs. (3.58) y (3.59), se tiene que:

$$\vec{A} = \left(p_r \hat{r} + \frac{p_\theta}{r} \hat{\theta} + \frac{p_\phi}{r \sin \theta} \hat{\phi} \right) \times \left(p_\theta \hat{\phi} - \frac{p_\phi}{\sin \theta} \hat{\theta} \right) - \hat{r} = \left(\frac{\ell^2}{r} - 1 \right) \hat{r} - p_r p_\theta \hat{\theta} - \frac{p_r p_\phi}{\sin \theta} \hat{\phi}. \quad (3.84)$$

Si se analiza la proyección del vector LRL sobre el vector posición, se observa que por un lado es $\vec{A} \cdot \vec{r} = Ar \cos \varphi$, con φ el ángulo entre \vec{A} y \vec{r} . Por otra parte $\vec{A} \cdot \vec{r} = \ell^2 - r$. Por tanto:

$$r = \frac{\ell^2}{1 + |\vec{A}| \cos \varphi} \quad (3.85)$$

Al comparar la ecuación anterior con la ecuaciones (3.71) y (3.76) se obtiene que el módulo del vector LRL es la excentricidad de la cónica:

$$|\vec{A}| = \varepsilon = \sqrt{2E\ell^2 + 1} \quad (3.86)$$

Por esta razón al vector LRL se le conoce también como *vector excentricidad*.

Además de escribir la primera ley de Kepler en términos del vector LRL, se responde a la pregunta que se realizó como motivación en la búsqueda de una constante de movimiento más y esto es precisamente, el módulo al cuadrado del vector LRL \mathcal{A}^2 . Al calcular el paréntesis de Poisson con las demás cantidades que se conservan (integrales de movimiento) éste es cero y por tanto están en involución. A continuación se muestra la afirmación anterior para ello se hace el cálculo del paréntesis de Poisson de \mathcal{A}^2 con \mathcal{H}_{sph} haciendo uso de los paréntesis ya calculados y de sus propiedades algebraicas:

$$\begin{aligned} \{\mathcal{A}^2, \mathcal{H}_{sph}\} &= \left\{ \left(\frac{\ell^2}{r} - 1 \right)^2 + p_r^2 \ell^2, \mathcal{H}_{sph} \right\} = \left\{ \left(\frac{\ell^2}{r} - 1 \right)^2, \mathcal{H}_{sph} \right\} + \{p_r^2 \ell^2, \mathcal{H}_{sph}\} = \\ &= 2 \left(\frac{\ell^2}{r} - 1 \right) \left\{ \frac{\ell^2}{r} - 1, \mathcal{H}_{sph} \right\} + p_r^2 \{\ell^2, \mathcal{H}_{sph}\} + \ell^2 \{p_r^2, \mathcal{H}_{sph}\} = \\ &= 2 \left(\frac{\ell^2}{r} - 1 \right) \left\{ \frac{\ell^2}{r} - 1, \mathcal{H}_{sph} \right\} + \ell^2 \{p_r^2, \mathcal{H}_{sph}\} = \\ &= 2 \left(\frac{\ell^2}{r} - 1 \right) \ell^2 \left\{ \frac{1}{r}, \mathcal{H}_{sph} \right\} + 2 \left(\frac{\ell^2}{r} - 1 \right) \frac{1}{r} \{\ell^2, \mathcal{H}_{sph}\} + \ell^2 \{p_r^2, \mathcal{H}_{sph}\} = \\ &= -2 \left(\frac{\ell^2}{r} - 1 \right) \frac{\ell^2 p_r}{r^2} - 2 p_r \ell^2 \left(-\frac{\ell^2}{r^3} + \frac{1}{r^2} \right) = 0 \end{aligned}$$

Con lo que se muestra que $\{\mathcal{A}^2, \mathcal{H}_{sph}\} = 0$. También el paréntesis de Poisson de \mathcal{A}^2 con p_ϕ es nulo porque \vec{A} no depende de ϕ $\{\mathcal{A}^2, p_\phi\} = 0$. Por último se calcula el paréntesis de Poisson de \mathcal{A}^2 con ℓ^2 , esto es:

$$\{\mathcal{A}^2, \ell^2\} = \left\{ \left(\frac{\ell^2}{r} - 1 \right)^2 + p_r^2 \ell^2, \ell^2 \right\} =$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \left(\frac{\ell^2}{r} - 1 \right) \left\{ \frac{\ell^2}{r} - 1, \ell^2 \right\} + \ell^2 \{p_r^2, \ell^2\} = \\
&= 2 \left(\frac{\ell^2}{r} - 1 \right) \ell^2 \left\{ \frac{1}{r}, \ell^2 \right\} + 2\ell^2 p_r \{p_r, \ell^2\} = 0.
\end{aligned}$$

y por tanto $\{\mathcal{A}^2, \ell^2\} = 0$,

Con el cálculo anterior y con los paréntesis previamente calculados, se muestra que las variables ℓ^2 , \mathcal{A}^2 y p_ϕ están en involución entre sí. Como conmutan con \mathcal{H}_{sph} , entonces se tienen cuatro integrales de movimiento independientes y como PKS tiene tres grados de libertad, se concluye que dicho sistema es super-integrable⁸. En el caso asimétrico, PKA, las cantidades ℓ^2 y \mathcal{A}^2 no son integrales de movimiento debido que $\epsilon \neq 1$, y por lo tanto PKA no es integrable,⁹ ya que no existe otra integral de movimiento.

⁸Un sistema es super-integrable, si posee más integrales de movimiento que grados de libertad.

⁹Un sistema no es integrable, si tiene más grados de libertad que integrales de movimiento.

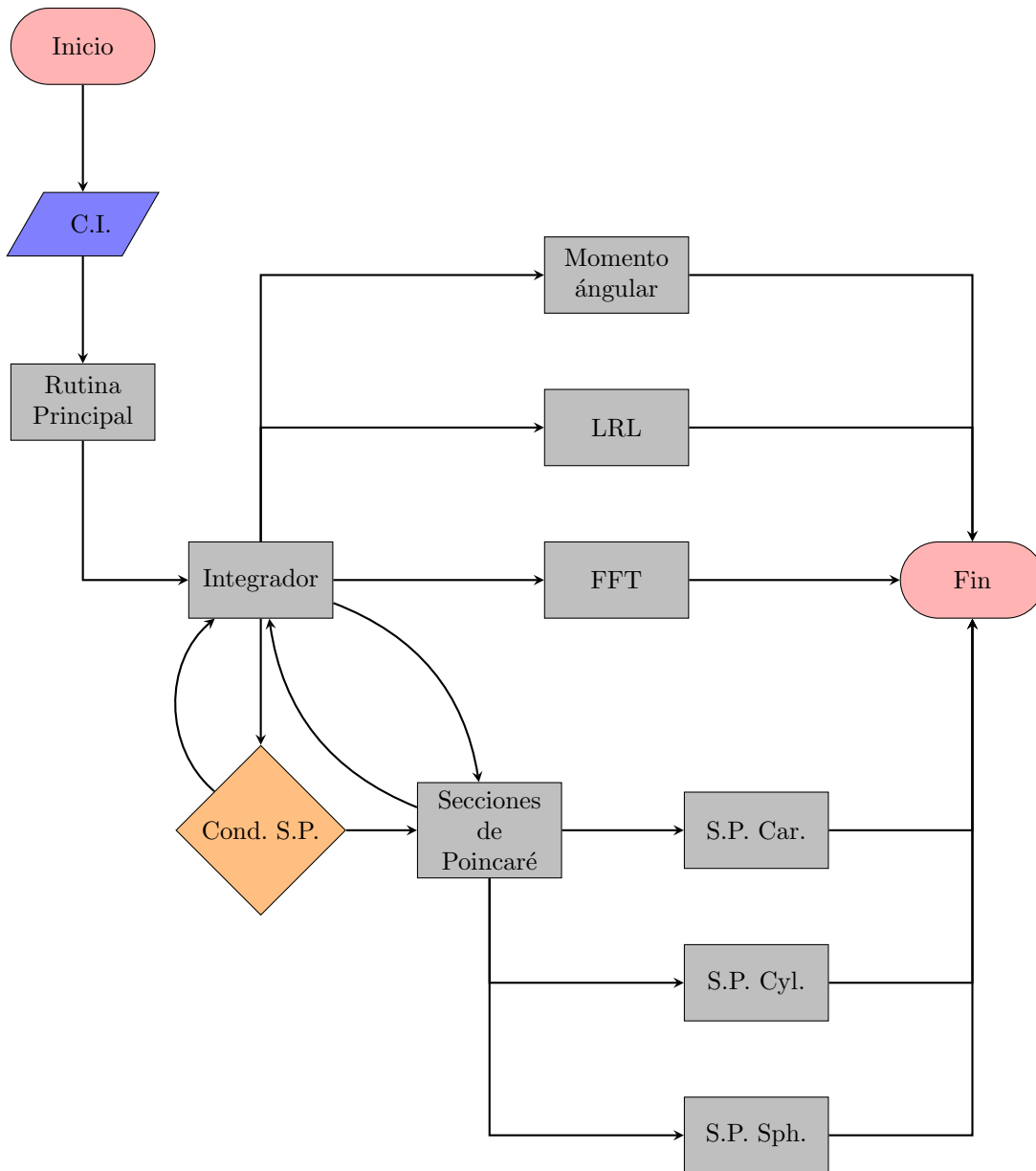
Capítulo 4

Análisis dinámico de PKA

Hasta el momento se ha tratado el caso simétrico del Problema de Kepler, cuando $\epsilon = 1$, debido a que puede resolverse de manera analítica. Pero ahora surge la pregunta: ¿Qué sucede en el caso en el que $\epsilon \neq 1$? Como se mostró en el capítulo anterior, las ecuaciones a resolver en el mejor de los casos son ecuaciones de primer orden no-lineales acopladas, las cuales no son solubles analíticamente. Pero esto no es un impedimento, pues empleando métodos numéricos se puede hacer un análisis dinámico muy abundante de PKA. En este capítulo se introducen y desarrollan los elementos necesarios para analizar PKA de manera numérica. Se utilizarán las secciones de Poincaré que serán de gran importancia en el análisis y el espectro de Fourier para analizar la trayectoria de la partícula que se mueve en el eje z . Tales herramientas son propias de la caracterización de sistemas dinámicos. Como se mencionó con anterioridad para el caso con $\epsilon \neq 1$, es decir el caso asimétrico, se emplean métodos numéricos con los cuales se desarrolla una simulación para el análisis del sistema. El lenguaje de programación utilizado fue Python, (ver [21, 22]) una de las plataformas más versátiles y dinámicas de programación, el cual además de ser de código abierto permite ser no sólo un usuario más, sino que posibilita ser un desarrollador de código.

4.1. El código de la simulación.

Para analizar la dinámica de PKA, se elaboró un código, el cual se seccionó en tres archivos: el primero es la rutina principal que se llama `PKA.py` y dos librerías `Mapeo_lib.py` y `lib_PKA.py`. En éstos se encuentra todo el algoritmo numérico necesario para el cálculo de PKA. Dicho código se puede ver en el apéndice C. A continuación se muestra un diagrama de flujo, como una representación esquemática del código realizado, además de una breve explicación.



A continuación se describe el código realizado con la ayuda del diagrama anterior.

- *Inicio.*- Se ejecuta el programa.
- *C.I.*- Se ingresan las condiciones iniciales, y todos los parámetros, en especial ϵ , el cociente de masas.
- *Rutina principal.*- Una vez que se tienen las condiciones iniciales, se calcula la energía, el campo vectorial a integrar y el jacobiano del campo vectorial. Este último le sirve al integrador para que la integración sea más precisa.
- *Integrador.*- Para integrar el campo vectorial se utiliza la herramienta de integración `odeint`, la cual pertenece a la paquetería de Python `scipy`. La documentación completa del integrador y de `scipy`, se puede consultar en [23] y [24], respectivamente. Para integrar PKA se usan los siguientes parámetros:

```
odeint(func, y0, t, args=(), Dfun=None, rtol=None, atol=None, mxstep=0)
```

donde `func` es el campo vectorial a integrar; `y0` es la condición inicial con la que se inicia la integración, la cual puede ser un arreglo; `t` es la secuencias de puntos para los cuales se hace la integración; `Dfun` es el jacobiano de la función que se desea integrar, ya que esto mejora la precisión de la integración; `rtol` y `atol` son la tolerancia relativa y tolerancia absoluta que determinan la tolerancia de la integración y `mxstep` es el máximo número de iteraciones para cada `t`. Los parámetros se introducen a dicha función, como sigue:

```
odeint(campo_vec,ent,t,args=(epsilon,),rtol=1e-10, atol=1e-12,
mxstep=int(1e6),Dfun=jab),
```

donde `campo_vec`, es el campo vectorial que se integra, `ent` es un vector cuyos componentes son las posiciones y velocidades, `t` es una secuencia de puntos de tiempo para el integrador, `args = (epsilon,)` señala la opción de un argumento extra de la función a integrar, en este caso es el cociente de masas ϵ , `Dfun=jab` es la matriz jacobiana del campo vectorial esto para hacer una integración más precisa. Por último, los parámetros `rtol=1e-10` y `atol=1e-12` son opcionales pero sirven para determinar la tolerancia del error, debido al error numérico.

Por último, la salida del integrador es un arreglo formado de dos tuplas, la primera tupla es el valor inicial con el cual se integra, la segunda tupla contiene el valor de `ent` para cada tiempo deseado en `t`, en otras palabras la salida es de la forma `(ent(t), ent(t0))`.

- *Cond. S.P.*- La salida del integrador se utilizó para realizar secciones de Poincaré, esto es si el producto del valor inicial con el ya integrado es negativo, $(ent(t))(ent(t0)) < 0$ en las coordenadas donde se requiere hacer el mapeo, entonces se realiza el análisis correspondiente para hacer dichas secciones. Al ser negativo el producto de la salida y como la integral es continua, entonces la trayectoria de la partícula con masa $m : 2$ cruza el plano $x - y$, y cuando esto sucede se guardan todas las posiciones y velocidades. Una vez que se determina lo anterior se realiza la siguiente iteración, de lo contrario si el producto de las salidas es positivo simplemente se sigue con la siguiente con la integración.
- *Secciones de Poincaré.*- Para efectuar dichas secciones, se rastrea la coordenada z de PKA y se guardan todas las coordenadas y velocidades del sistema cuando $z = 0$. Para obtener esto, se hizo numéricamente, mediante el método de bisección con un error de 10^{-8} . La bisección se hizo seccionando el intervalo de integración en dos y este nuevo intervalo se ocupó para integrar y analizar nuevamente el producto de la salida, repitiendo esto hasta que se cumpla el error propuesto.
- *S.P. Car.*- Una vez que se obtienen los datos se hacen la secciones de Poincaré para la coordenada z .
- *S.P. Cyl.*- Además a los resultados de las secciones de Poincaré se les aplica una transformación de coordenadas cartesianas a coordenadas cilíndricas para graficar las secciones en dichas coordenadas.

- *S.P. Sph.*- Debido a que PKA se ha integrado en coordenadas cartesianas, a los datos de la sección de Poincaré se les aplica una transformación de coordenadas cartesianas a coordenadas esféricas.
- *FFT.*- La salida del integrador se utiliza para aplicarle la transformada rápida de Fourier. Para hacer esto se utiliza la librería `numpy` (la descripción completa se puede consultar en [25]) la cual tiene la función `fft.rfft`:

```
fft.rfft(a)
```

donde el parámetro a es un arreglo al cual se le efectúa la transformada de Fourier. El resultado de `fft.rfft` es un arreglo. Para una descripción más detallada del método consultar [25].

- *LRL.*- Otro producto de la integración de PKA es el análisis del vector de Laplace-Runge-Lenz y éste se calculó simplemente con la definición en la Ec.(3.83).
- *Momento angular.*- Se calcula el vector momento angular de la salida del integrador.

La rutina anterior se ejecutó para valores del parámetro ϵ en el intervalo de $\epsilon = 1$ a $\epsilon = 5$ y para un conjunto representativo de condiciones iniciales. Con los resultados se graficaron con `matplotlib`, (los detalles sobre esta paquetería se pueden ver en [26]), las respectivas secciones de Poincaré y los espectros de potencias.

4.2. Pozo de potencial efectivo

El teorema de existencia y unicidad de ecuaciones diferenciales afirma que la solución a una Ecuación Diferencial Ordinaria (ODE) existe y es única dada la condición inicial. Este teorema fundamental de la teoría de ecuaciones diferenciales es transcendental en análisis dinámico de PKA, pues éste se resuelve de manera numérica con el algoritmo ya descrito, pero las condiciones iniciales se deben elegir de manera que éstas correspondan a una misma energía. Un buen indicio de esto se encuentra en las cantidades conservadas y en especial en la energía, por lo que a continuación se analiza el potencial efectivo de PKA.

De la Ec. (3.22), se observa que el potencial efectivo es¹

$$U_{eff} = \frac{l_\phi^2}{2\rho^2} - \frac{\epsilon}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}. \quad (4.1)$$

En la Fig.(4.1), se observa que el potencial efectivo, es muy parecido al potencial del problema de Kepler, por lo tanto es interesante indagar cual es el comportamiento de este potencial, ya que como se observa en la ec.(4.1), este depende de las coordenadas ρ y z , pero también de la proyección en z del momento angular l_ϕ y del cociente de masas ϵ . Nos interesa saber bajo que condiciones el sistema es más estable, es decir, nos interesan las regiones de confinamiento², ya que esta condición es necesaria para la existencia de caos.

¹Debido a que el potencial depende sólo de las coordenadas y como la parte de la energía cinética asociada a p_ϕ^2 depende las coordenadas entonces a ésta fracción de la energía se le asocia como un potencial efectivo de interacción.

²Llamaremos región de confinamiento, cuando una curva equipotencial en acotada, tal como se muestra en la figura (4.4).

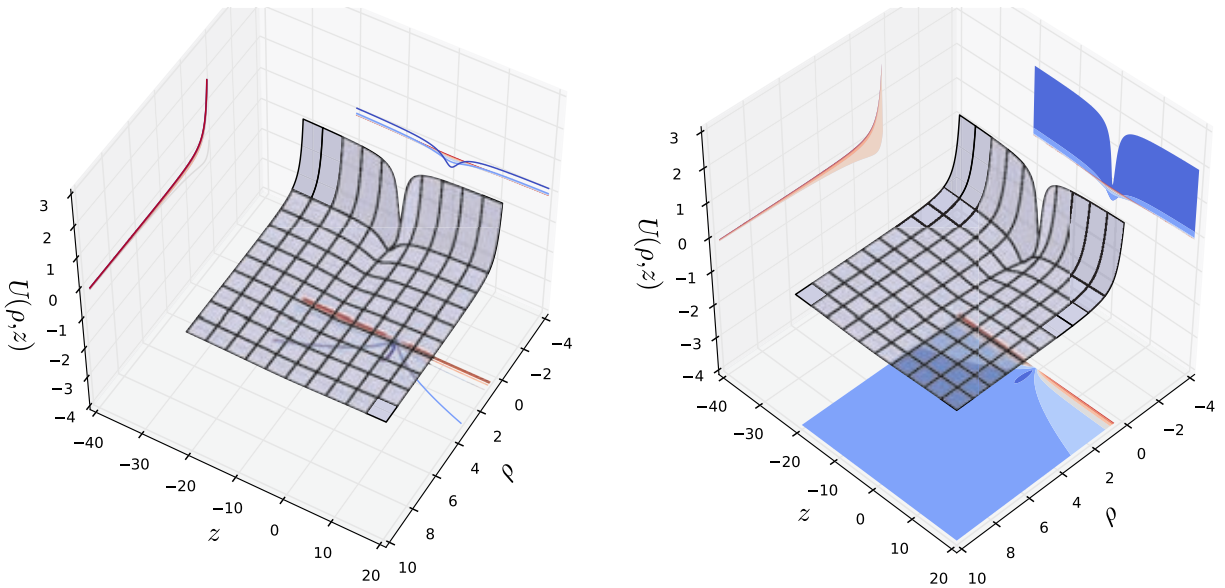


Figura 4.1: Superficie del potencial efectivo observado desde dos ángulos diferentes para PKS con $l_\phi = 1$.

En la Fig.4.2, se muestra la proyección del pozo de potencial en el plano $(\mathcal{U}_{eff}(\rho, z_0), \rho)$, en la que se observa que el pozo es menos cóncavo, menos profundo y que el mínimo se recorre hacia la derecha, cuando la coordenada z es mayor a cero, por lo tanto el sistema estará menos confinado y se tendrán órbitas con excentricidad cercanas a 1, esto para $\epsilon = 1$.

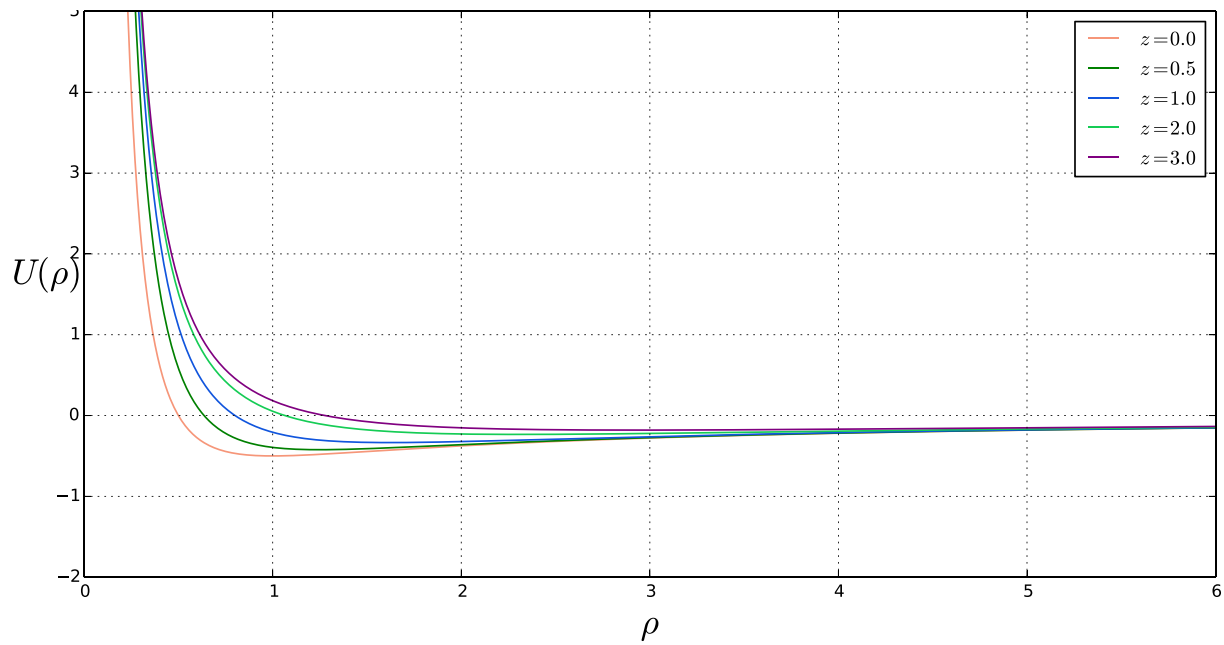


Figura 4.2: Proyección del potencial efectivo en el plano $(\mathcal{U}_{eff}(\rho, z_0), \rho)$. Para PKS con $l_\phi = 1$.

En la figura 4.3, en la cual ahora se muestran curvas de nivel en el plano $(\mathcal{U}_{eff}(\rho_0, z), z)$, donde se ve que cuando ρ , es cercano a cero, el pozo prácticamente es un pozo tipo delta de Dirac, es decir, se tiene que la región de confinamiento es prácticamente nula y el sistema podría escapar por una recta, pero cuando ρ aumenta, el pozo se ensancha, en otras palabras la región de confinamiento es mayor y con esto se tendrán órbitas elípticas y el sistema no podrá escapar, al menos que se elija una energía mayor a la región de confinamiento.

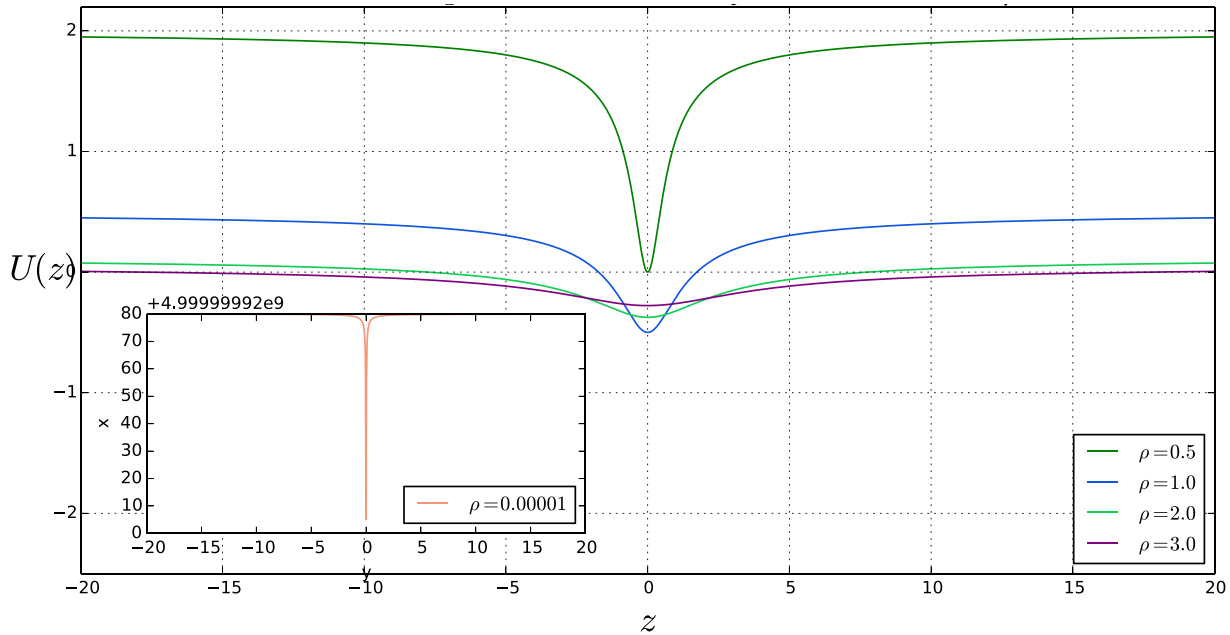


Figura 4.3: Proyección del potencial efectivo en el plano $(\mathcal{U}_{eff}(\rho_0, z), z)$. Para PKS con $l_\phi = 1$.

En la figura (4.4), se muestran curvas equipotenciales de z como función de ρ , en la que para energías cercanas a 1, la región de confinamiento es menor debido a que nos acercamos al mínimo del potencial. Notemos que cuando $\mathcal{U}_{eff} = 1$, la órbita es una circunferencia y elipses para $0 < \mathcal{U}_{eff} < 1$. Esto es relevante pues nos permite explorar condiciones iniciales para una misma energía y diferentes valores de z y ρ .

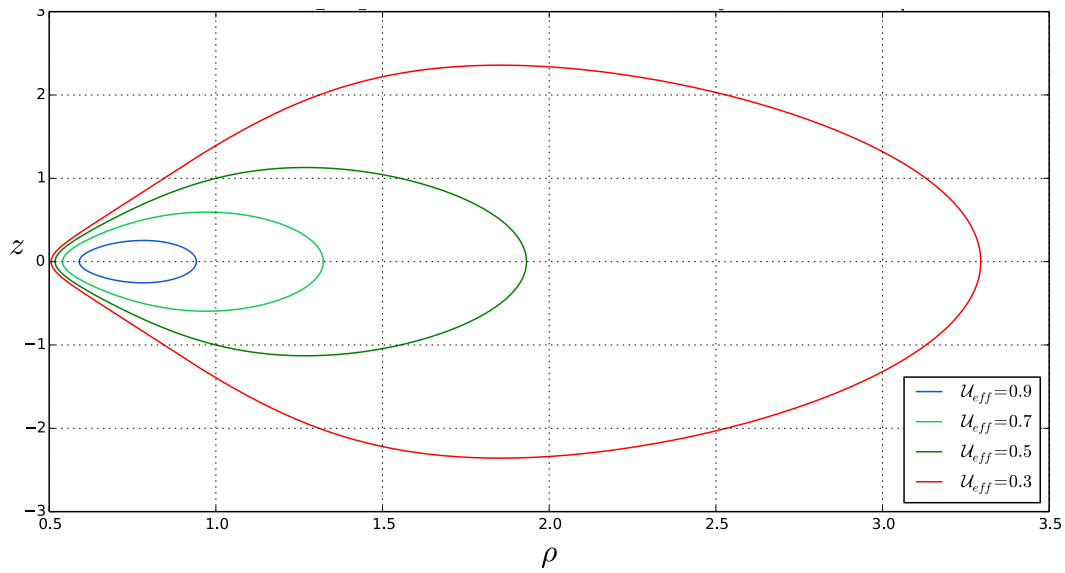


Figura 4.4: Proyección del potencial efectivo en el plano (z, ρ) . Para PKS con $l_\phi = 1$.

En las Figs. (4.5) y (4.6), se observan curvas de nivel correspondientes a la proyección en el plano $(U_{eff}(\rho), \rho)$, para diferentes valores de l_ϕ y ϵ , respectivamente, para la primera se observa que el pozo de potencial es más cóncavo y el mínimo se recorre hacia la derecha y a hacia arriba, cuando l_ϕ crece, con lo que se tiene regiones de confinamiento no acotadas y por lo tanto órbitas hiperbólicas por las cuales el sistema puede escapar. En la se Fig.(4.6), se tiene el caso opuesta pues al incrementar ϵ , se tiene regiones de confinamiento más acotadas, con lo que el sistema es más estable pues la órbitas tiene una menor excentricidad.

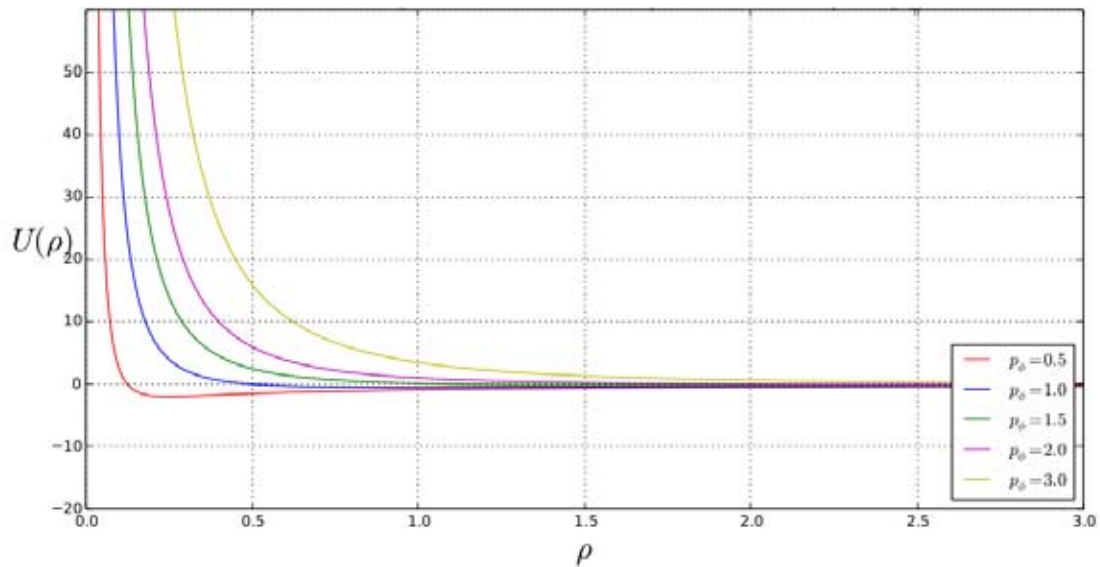


Figura 4.5: Proyección del potencial efectivo en el plano $(U_{eff}(\rho, z_0), \rho)$. Para PKS en donde se fija $z = 0$ y l_ϕ varía.

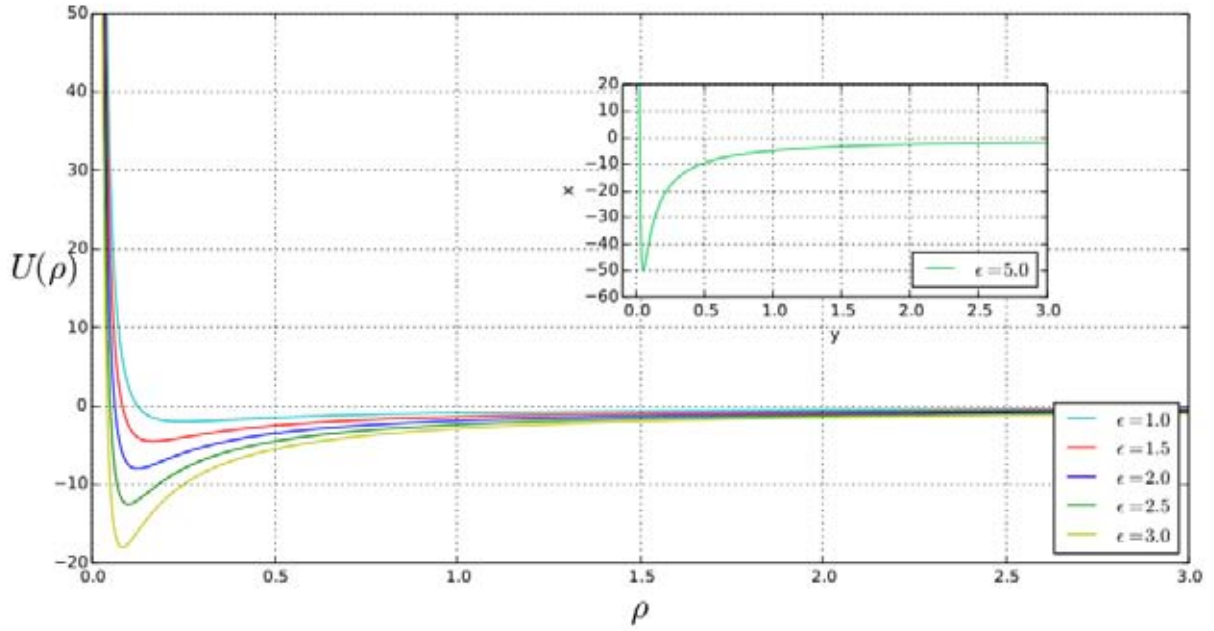


Figura 4.6: Proyección del potencial efectivo en el plano $(\mathcal{U}_{eff}(\rho, z_0), \rho)$. Para PKA, en donde se fija $z = 0$ y $l_\phi = 0.5$.

Para poder explorar el comportamiento del sistema a una energía dada y diferentes valores de ρ , z , l_ϕ y ϵ . Podemos aprovechar que para energías correspondientes al mínimo del potencial efectivo Ec.(4.1), las órbitas son circulares, esto es relevante ya que si se conoce el mínimo del potencial se puede analizar la dinámica de PKA utilizando superficies equipotenciales correspondientes a alguna fracción del mínimo de energía. Comencemos por encontrar el mínimo del pozo de potencial.

Al derivar parcialmente la Ec. (4.1) con respecto a z , e igualando a cero, se obtiene:

$$\frac{\partial \mathcal{U}_{eff}}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{l_\phi^2}{2\rho^2} - \frac{\epsilon}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \right) = \frac{\epsilon z}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} = 0,$$

lo que implica que $z = 0$. Ahora bien de la parcial respecto a ρ se obtiene:

$$\frac{\partial \mathcal{U}_{eff}}{\partial \rho} = \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{l_\phi^2}{2\rho^2} - \frac{\epsilon}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \right) = \frac{\epsilon \rho}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{l_\phi^2}{\rho^3} = 0,$$

Despejando ρ de la ecuación anterior se obtiene que el mínimo se encuentra en $\rho_0 = \varrho = \frac{l_\phi^2}{\epsilon}$. Note que $\rho \neq 0$,

entonces $l_\phi^2 \neq 0$ y $\epsilon \neq 0$. Con ello el punto crítico es $\mathbf{x}_0 = (\varrho, 0) = \left(\frac{l_\phi^2}{\epsilon}, 0 \right)$. La situación anterior se observa claramente en las Figs. (4.2) y (4.3). Para determinar el mínimo recurrimos al criterio de la segunda derivada [27], de forma que:

$$\left. \frac{\partial^2 \mathcal{U}_{eff}}{\partial \rho^2} \right|_{\mathbf{x}_0} = \left. \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\epsilon \rho}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{l_\phi^2}{\rho^3} \right) \right|_{\mathbf{x}_0} = \left. \left(\frac{\epsilon}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{3\epsilon \rho^2}{(\rho^2 + z^2)^{5/2}} + \frac{3l_\phi^2}{\rho^4} \right) \right|_{\mathbf{x}_0}$$

$$\left. \frac{\partial^2 \mathcal{U}_{eff}}{\partial \rho^2} \right|_{\mathbf{x}_0} = \frac{2\epsilon^4}{l_\phi^6} > 0.$$

Por último se examina que se cumpla $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right) > 0$, tal y como se muestra en [27]

$$\left. \frac{\partial^2 \mathcal{U}_{eff}}{\partial z^2} \right|_{\mathbf{x}_0} = \left. \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\epsilon z}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} \right) \right|_{\mathbf{x}_0} = \left. \left(\frac{\epsilon}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{3\epsilon z^2}{(\rho^2 + z^2)^{5/2}} \right) \right|_{\mathbf{x}_0}$$

$$\left. \frac{\partial^2 \mathcal{U}_{eff}}{\partial \rho^2} \right|_{\mathbf{x}_0} = \frac{\epsilon^4}{l_\phi^6},$$

$$\left. \frac{\partial^2 \mathcal{U}_{eff}}{\partial \rho \partial z} \right|_{\mathbf{x}_0} = \left. \frac{\partial^2}{\partial \rho} \left(\frac{\epsilon z}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} \right) \right|_{\mathbf{x}_0} = \left. \left(\frac{\epsilon z}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} \right) \right|_{\mathbf{x}_0} = \left. \left(-3 \frac{\epsilon z}{(\rho^2 + z^2)^{5/2}} \right) \right|_{\mathbf{x}_0} = 0,$$

con lo se tiene que $\left(\left. \frac{\partial^2 \mathcal{U}_{eff}}{\partial \rho^2} \right|_{\mathbf{x}_0}\right)\left(\left. \frac{\partial^2 \mathcal{U}_{eff}}{\partial z^2} \right|_{\mathbf{x}_0}\right) - \left(\left. \frac{\partial^2 \mathcal{U}_{eff}}{\partial \rho \partial z} \right|_{\mathbf{x}_0}\right) = 2 \frac{\epsilon^8}{l_\phi^{12}} > 0$.

Lo anterior muestra que $\left(\frac{l_\phi^2}{\epsilon}, 0\right)$ es un mínimo y al evaluarlo en el potencial efectivo se obtiene el mínimo del potencial:

$$\mathcal{U}_{effmin} \left(\frac{l_\phi^2}{\epsilon}, 0 \right) = -\frac{\epsilon^2}{2l_\phi^2}. \quad (4.2)$$

Ahora que se conoce el mínimo del pozo de potencial se pueden elegir condiciones iniciales correspondientes a una equipotencial que sea una fracción del mínimo del pozo de potencial, es decir, considérese una fracción α de de este mínimo.

$$E_\alpha = -\frac{\alpha \epsilon^2}{2l_\phi^2}, \quad (4.3)$$

donde $0 \leq \alpha \leq 1$.

4.3. Condiciones iniciales

4.3.1. Condición inicial con $z = 0$ y $p_z \neq 0$

Debido a que se tienen seis parámetros a determinar para las condiciones iniciales de PKA, (las tres coordenadas y sus respectivos momentos), es necesario acotarlos de tal manera que las condiciones iniciales nos permitan tratar de caracterizar la dinámica del sistema. Para ello, empleamos que la energía es una integral de movimiento, por lo que las condiciones se restringen a una superficie de energía constante en el potencial efectivo. Al igualar las ecs.(4.3) y (3.22) se tiene

$$-\frac{\alpha \epsilon^2}{2l_\phi^2} = \frac{1}{2} \left(p_\rho^2 + \frac{l_\phi^2}{\rho^2} + \frac{p_z^2}{\epsilon} \right) - \frac{\epsilon}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}. \quad (4.4)$$

Otra restricción es imponer que la energía cinética en la dirección radial sea cero, es decir, $p_\rho = 0$, por lo tanto de la Ec.(3.31) se obtiene

$$0 = p_\rho = \frac{x p_x + y p_y}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$x p_x = -y p_y.$$

Debido a la simetría angular y sin perder generalidad, se elige $y = 0$ lo que implica que $p_x = 0$.

Además el sistema se caracteriza por poseer momento angular y cantidad de movimiento en la dirección z , por lo que se tiene

$$-\frac{\alpha\epsilon^2}{2l_\phi^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{l_\phi^2}{\rho^2} + \frac{p_z^2}{\epsilon} \right) - \frac{\epsilon}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}.$$

Como el potencial efectivo depende sólo de las coordenadas (ρ, z) se indaga sobre en que variable se puede imponer alguna otra restricción. La restricción $\rho = 0$ se descarta de inmediato debido a que ésta es precisamente la condición de colisión de ambas partículas. El caso $z = 0$ se pueden sugerir, ya que el mínimo del potencial está en $z = 0$ y con esto se puede imponer una restricción más:

$$\begin{aligned} -\frac{\alpha\epsilon^2}{2l_\phi^2} &= \frac{1}{2} \left(\frac{l_\phi^2}{\rho^2} + \frac{p_z^2}{\epsilon} \right) - \frac{\epsilon}{\rho}. \\ p_z^2 &= \frac{2\epsilon^2}{\rho} - \frac{\alpha\epsilon^3}{l_\phi^2} - \frac{l_\phi^2\epsilon}{\rho^2} \end{aligned} \quad (4.5)$$

En la ecuación anterior se tiene a p_z como función de ρ . Si se deriva la ecuación anterior con respecto a ρ y se iguala a cero, se tiene un punto singular de la función y con ello una condición para ρ ,

$$\frac{\partial p_z^2}{\partial \rho} = 2 \left(\frac{l_\phi^2\epsilon}{\rho^3} - \frac{\epsilon^2}{\rho^2} \right) = 0,$$

por lo que dicho punto es $\rho = \frac{l_\phi^2}{\epsilon}$ que es justamente el mínimo del potencial. Debido a que $y = 0$ se tiene que $x = \frac{l_\phi^2}{\epsilon}$. Si se evalúa este mínimo en la Ec.(4.5) se tiene que $p_z^2 = \frac{\epsilon^3}{l_\phi^2} (1 - \alpha)$, con lo que $p_z = \frac{\epsilon\sqrt{\epsilon}}{l_\phi} \sqrt{1 - \alpha}$. De la Ec.(3.33) se obtiene que $p_y = \frac{\epsilon}{l_\phi}$. Como resultado de lo anterior se tiene que el conjunto de condiciones iniciales es:

$$x = \frac{l_\phi^2}{\epsilon}, y = 0, z = 0, p_x = 0, p_y = \frac{\epsilon}{l_\phi}, p_z = \frac{\epsilon\sqrt{\epsilon}}{l_\phi} \sqrt{1 - \alpha}. \quad (4.6)$$

Este conjunto de condiciones depende únicamente del cociente de masas ϵ , de la fracción de la energía α y de la proyección del momento angular l_ϕ . En la Fig.(4.5), cuando l_ϕ es mayor que 1.5, el mínimo del pozo de potencial se hace menos cóncavo con lo que la región de confinamiento es menor y puesto que queremos analizar, el sistema cuando este está confiado, el movimiento se debe dar en una cónica cerrada, por lo que se elige l_ϕ igual a 0.75. Por el mismo argumento se elige que la fracción de la energía sea tal que la partícula esté confinada, por ejemplo para $\alpha = \frac{3}{4}, \frac{1}{2}$ o $\alpha = \frac{1}{4}$ y por el último determinamos ϵ . Este parámetro es el que induce el caos en el sistema, ya que éste está fuertemente ligado a la pérdida de integrales de movimiento como se muestra en las secciones de Poincaré del siguiente capítulo.

Otro conjunto de condiciones iniciales se elige partiendo de las restricciones iniciales $z = 0$ y $p_z \neq 0$. Como en el caso anterior el mínimo del pozo está en $\rho = \frac{l_\phi^2}{\epsilon}$ y con esto se tiene $p_z = \frac{\epsilon\sqrt{\epsilon}}{l_\phi} \sqrt{1 - \alpha}$, pero ahora no se impone la restricción sobre y igual a cero sino se toma $\rho^2 = x^2 + y^2$, obteniendo:

$$y = \sqrt{\left(\frac{l_\phi^2}{\epsilon} \right)^2 - x^2}. \quad (4.7)$$

Si se sigue imponiendo la restricción de $p_\rho = 0$ y de las Ecs. (3.31) y (3.33), se sigue el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} xp_y - yp_x &= l_\phi, \\ yp_y + xp_x &= 0 \end{aligned}$$

al resolver el sistema se tiene

$$p_x = -\frac{y\epsilon^2}{l_\phi^3}, \quad p_y = \frac{x\epsilon^2}{l_\phi^3} \quad (4.8)$$

Con lo anterior el conjunto de condiciones iniciales está determinado salvo la posición en x pues ésta determina las Ecs. (4.7) y (4.8). Nótese que cuando $x = \frac{l_\phi^2}{\epsilon}$, de la Ec.(4.7) $y = 0$ y con esto en las Ecs.(4.8) $p_x = 0$ y $p_y = \frac{\epsilon}{l_\phi}$, con lo cual se recupera el conjunto de condiciones iniciales, correspondiente a las Ecs.(4.6). Si se elige $x = 0$ se obtiene el caso simétrico del anterior debido a la simetría angular ya que sólo se cambia x por y en la Ec.(4.6). Debido a que se quiere estudiar condiciones muy cercanas, se elige x muy pequeña tal que cumpla $\frac{l_\phi^2}{\epsilon} > x > 0$. Un buen candidato es $x = \beta \frac{l_\phi^2}{\epsilon}$, con β un parámetro auxiliar en el intervalo $0 < \beta < 1$, el cual al multiplicarlo por $\frac{l_\phi^2}{\epsilon}$ se obtiene una fracción del valor de x para el conjunto anterior de condiciones iniciales. El segundo sistema de condiciones iniciales es de la forma:

$$x = \frac{\beta l_\phi^2}{\epsilon}, y = \frac{l_\phi^2}{\epsilon} \sqrt{1 - \beta^2}, z = 0, p_x = -\frac{\epsilon}{l_\phi} \sqrt{1 - \beta^2}, p_y = \frac{\beta \epsilon}{l_\phi}, p_z = \frac{\epsilon \sqrt{\epsilon}}{l_\phi} \sqrt{1 - \alpha}. \quad (4.9)$$

Éste es más general que el primero, ya que cuando $\beta = 1$ se recuperan las Ecs. (4.6). Además, de nueva cuenta se tienen las condiciones iniciales en términos de ϵ , α y l_ϕ .

Por último se relaja la condición de que p_ρ sea cero, por lo que las condiciones para x, y, z y p_z no son afectadas, pero si las condiciones para p_x y p_y . Para este caso se debe resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} xp_y - yp_x &= l_\phi, \\ yp_y + xp_x &= \rho p_\rho, \end{aligned}$$

cuyas soluciones son:

$$p_x = p_\rho \beta - \frac{\epsilon}{l_\phi} \sqrt{1 - \beta^2}, \quad p_y = \beta \frac{\epsilon}{l_\phi} + p_\rho \sqrt{1 - \beta^2}. \quad (4.10)$$

Por lo que este último conjunto de condiciones iniciales es:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\beta l_\phi^2}{\epsilon}; & p_x &= p_\rho \beta - \frac{\epsilon}{l_\phi} \sqrt{1 - \beta^2}; \\ y &= \frac{l_\phi^2}{\epsilon} \sqrt{1 - \beta^2}; & p_y &= \beta \frac{\epsilon}{l_\phi} + p_\rho \sqrt{1 - \beta^2}; \\ z &= 0; & p_z &= \frac{\epsilon}{l_\phi} \sqrt{\epsilon(1 - \alpha)}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Éstas, como en casos anteriores dependen de parámetros dinámicos como como l_ϕ y p_ρ el cociente de masas ϵ y cantidades asociadas a la energía y a la simetría del sistema. Con lo anterior se tienen condiciones iniciales para

explorar la dinámica de PKA. Debido a que las secciones de Poincaré se realizaron para el plano fase (P_ρ, ρ) , a continuación se muestran curvas equipotenciales de dicho plano para distintos valores de α y ϵ .

En la figura 4.7 se observa que la geometría cambia en función de ϵ , ya que si ϵ es cercano a 1 las masas son muy parecidas, éstas están muy cercas y por lo tanto se tienen velocidades pequeñas, pero cuando el cociente de masas es distinto de 1, es por que las masas son diferentes y en consecuencia tienen mayor libertad de movimiento y de mayor velocidad.

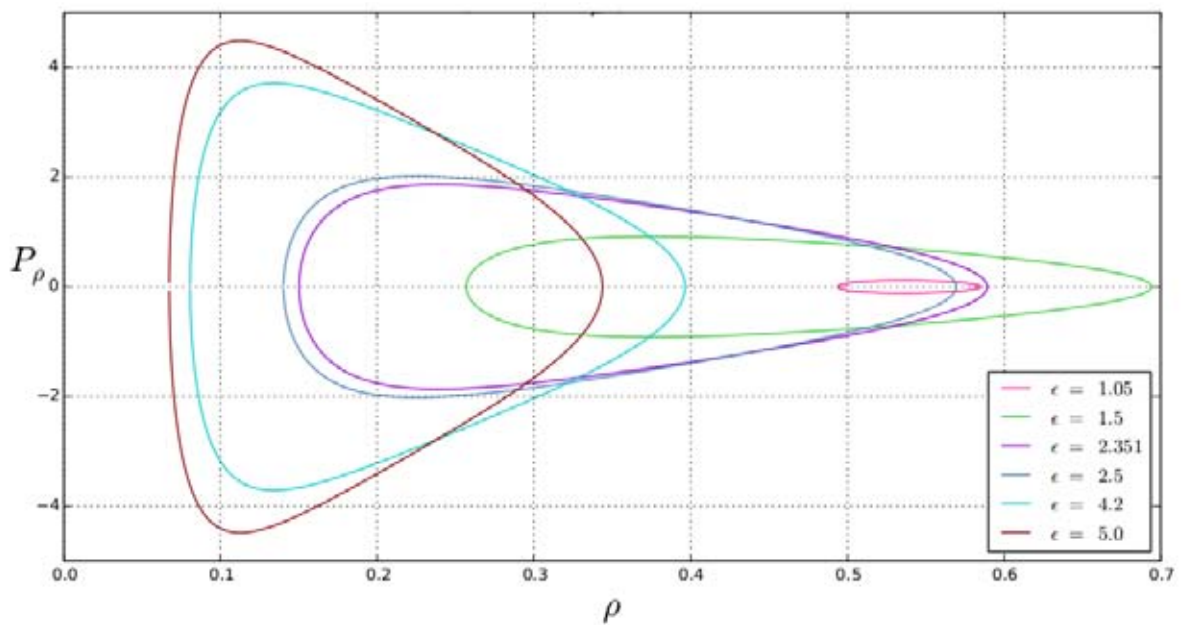


Figura 4.7: Superficie del potencial efectivo con $\alpha = 0.5$ y $l_\phi = 0.75$.

En la figura 4.8 se observa que el tamaño de las equipotenciales aumenta si disminuye, es decir, si la se toman energías mas cercanas al mínimo del pozo y aumenta cuando nos alejamos del mínimo. Este comportamiento se debe a que al estar más cerca del mínimo, las partículas se mantienen a una distancia casi constante entre ellas y se mueven con una velocidad casi constante, (cuando la energía corresponde al mínimo las partículas se mantienen a una distancia constante, y se mueven con velocidad constante). Cuando nos alejamos del mínimo la curva crece debido a que ahora se tiene acceso a una cantidad de velocidades y posiciones.

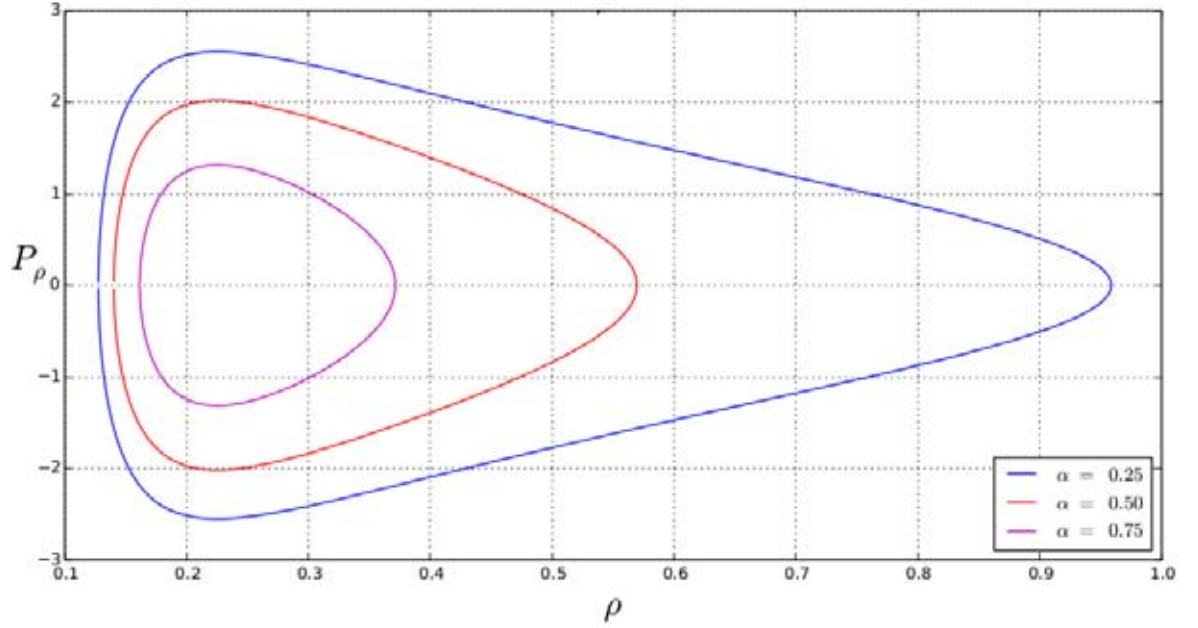


Figura 4.8: Superficie del potencial efectivo con $\epsilon = 0.5$, $l_\phi = 0.75$ y $\epsilon = 2.5$

4.3.2. Condición inicial con $z \neq 0$ y $p_z = 0$.

Ahora se propone un conjunto de condiciones iniciales equivalente al anterior, en el cual la partícula de masa m_2 tiene coordenada z distinta de cero e impulso igual a cero. Para esto se retoma la Ec.(4.4), imponiendo la condición $p_z = 0$ y $p_\rho = 0$ con lo que se obtiene:

$$z^2 = \frac{4l_\phi^4 \epsilon^2 \rho^4}{(l_\phi^2 + \alpha \epsilon^2 \rho^2)^2} - \rho^2. \quad (4.12)$$

Análogo al caso anterior se deriva la ecuación (4.13) y se iguala a cero para así obtener el punto de retorno de la partícula m_2 en términos de ρ (partícula m_1) como condición inicial. Lo anterior implica que se tienen que encontrar las raíces ρ_0 de:

$$8\epsilon^2 l_\phi^8 \rho^2 - (l_\phi^4 + \alpha \epsilon^2 \rho^2)^3 = 0. \quad (4.13)$$

Las raíces para ρ , de la Ec.(4.13) se encuentran de manera numérica con el algoritmo de Brent,³ ya que se tiene un polinomio de tercer grado en ρ . El algoritmo de Brent requiere de un intervalo donde la función a evaluar cambie de signo y además físicamente se requiere que la raíz encontrada tenga sentido. Estas condiciones se satisfacen cuando z es idénticamente cero en la Ec.(4.12) por lo que el intervalo propuesto es:

$$\left[\sqrt{\frac{l_\phi^4 (2 - \alpha - 2\sqrt{1 - \alpha})}{\alpha^2 \epsilon^2}}, \sqrt{\frac{l_\phi^4 (2 - \alpha + 2\sqrt{1 - \alpha})}{\alpha^2 \epsilon^2}} \right].$$

Una vez encontrada la raíz ρ_0 , ésta se evalúa en (4.12) con lo que se obtiene z , la cual es distinta de cero. Además, como se ya se analizó, debido a la simetría se puede elegir $y = 0$ con lo que $x = \rho_0$, $p_x = 0$ y $p_y = \frac{l_\phi}{x}$.

³El método de Brent es un algoritmo para encontrar raíces, el cual combina el método de bisección, el método de la secante y el método de interpolación cuadrática inversa, el cual es tan confiable como el de bisección pero con una convergencia mucho mayor.

Por lo que se tiene el siguiente conjunto de condiciones iniciales:

$$x = \rho_0, y = 0, z = \frac{4l_\phi^4 \epsilon^2 x^4}{(l_\phi^2 + \alpha \epsilon^2 x^2)^2} - x^2, p_x = 0, p_y = \frac{l_\phi}{x}, p_z = 0. \quad (4.14)$$

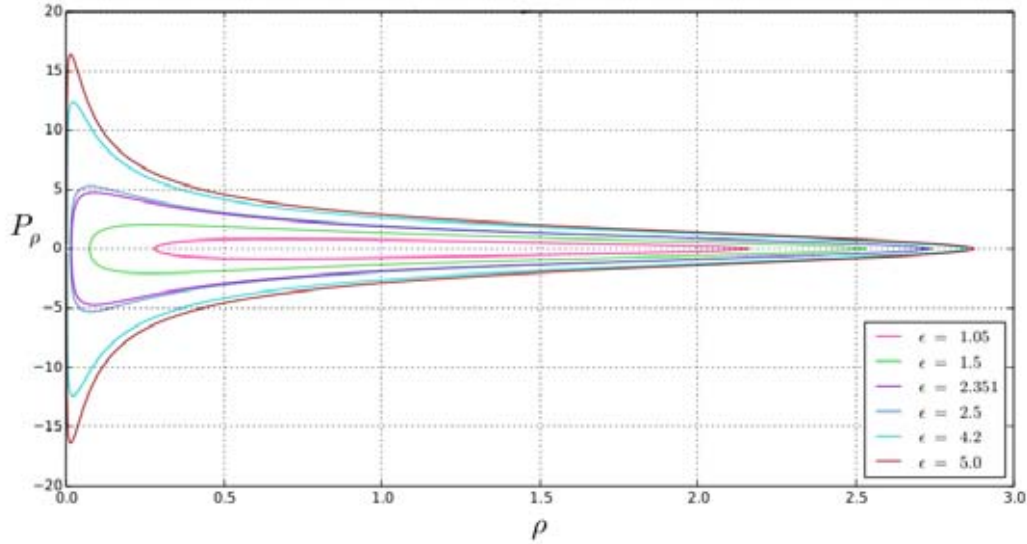


Figura 4.9: Superficie del potencial efectivo con $l_\phi = 0.75$ y $\epsilon = 2.5$.

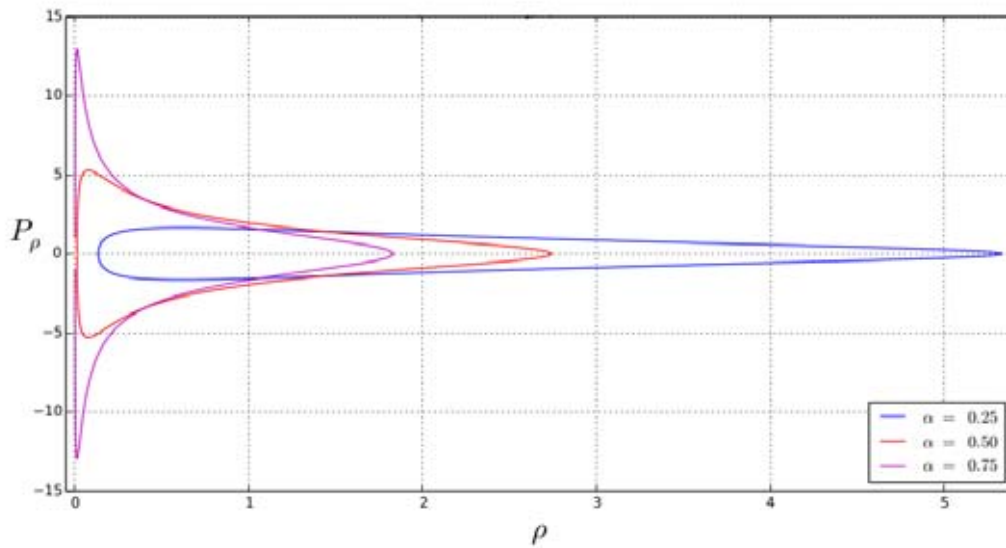


Figura 4.10: Superficie del potencial efectivo con $l_\phi = 0.75$.

Resultados de PKA.

De la simulación numérica realizada para PKA se obtuvieron las secciones de Poincaré, espectro de potencias, la proyección en el plano (x, y) del momento angular y del vector de Laplace-Runge-Lenz, para los conjuntos de condiciones iniciales encontrados en el capítulo (4). Con esto se hace una descripción dinámica y del comportamiento periódico y cuasi-periódico, además de las cantidades conservadas del PKA. En este capítulo se muestran las gráficas obtenidas producto de la simulación realizada.

5.1. Resultados del conjunto de condiciones iniciales con $z = 0$ y $p_z \neq 0$.

De las Ecs. (4.11), se eligieron los siguientes parámetros para realizar la simulación $l_\phi = \frac{3}{4}$, $\alpha = \frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ y $p_\rho = 0$. Las secciones de Poincaré que se muestran son para el plano fase (p_ρ, ρ) , ya que para este plano, ninguna de las variables canónicas es una cantidad conservada o es la variable para la cual se realizaron las secciones.

5.1.1. Secciones de Poincaré de PKA con $z = 0$ y $p_z \neq 0$.

A continuación se presentan las secciones de Poincaré en coordenadas cilíndricas, ya que en estas coordenadas se exhibe de manera explícita la conservación de algunas de las cantidades mencionadas en el capítulo 3. La manera en la que se presentan las secciones es mediante una secuencia de izquierda a derecha y de arriba hacia abajo de manera progresiva en el parámetro ϵ . Para cada sección se graficaron seis diferentes condiciones iniciales. Para la elección de las condiciones se tomaron los mismos parámetros l_ϕ , α , etc, excepto el parámetro β , el cual se varió de 0.0 a 1.0 en intervalos de 0.2.

En las pags. 53 y 54, se muestran las secciones de Poincaré de PKA, con $\alpha = 0.25$, los valores de beta son: 1, 1.2, 1.5, 1, 1.9, 2.57, 3, 4.3 y 5. En este caso para $\epsilon = 1$, se observa un punto que corresponde al caso superintegrable. Luego este punto degenera en una estructura compuesta por curvas suaves tal como se muestra en la figura 5.1b. Además en esta última sólo se observan los puntos correspondientes a $\beta = 1$ debido a que se inició con condiciones cercanas que al evolucionar se mantienen cercanas, por lo que al graficar la última condición inicial ($\epsilon = 1$), ésta eclipsa el resto de las gráficas haciendo parecer que sólo se grafica una condición inicial cuando en realidad son seis. En las figuras 5.1c, 5.1d, 5.2a, 5.2b y 5.2c se observa que a pesar de iniciar con seis condiciones iniciales muy cercanas los puntos en la sección de Poincaré no se eclipsan como en el caso anterior y además la dinámica no está restringida a un sólo toro, sino que a una región que llamaremos semidensa, debido a que el toro fase se ha roto y ahora la dinámica invade varios toros fase. En la figura 5.2c se observa que los puntos comienzan a llenar la sección de manera más densa, y este comportamiento nos sugiere que el sistema además de no ser integrable es caótico. No podemos garantizar que la región se llena densamente, ya que las secciones se obtuvieron de una simulación. Sin embargo, este comportamiento sugiere que eventualmente

se llenará densamente la sección de Poincaré. Por último en la fig. 5.2d, se muestra que la región degenera nuevamente en una estructura compuesta por curvas suaves, pero conforme ϵ aumenta dichas curvas se rompen dando lugar a regiones como en las figuras anteriores.

En las páginas 55 y 56 se muestran las secciones de Poincaré, con $\alpha = 0.5$ y los valores para ϵ son 1, 1.5, 1.9, 2.342, 2.35, 2.351, 4.2 y 4.7 con la diferencia de que se ha usado $\alpha = 0.25$. Y en las pags. 57 y 58 se muestran las secciones para $\alpha = 0,75$ y los valores para ϵ son 1, 1.8, 2.41, 2.57, 3, 3.6, 4.3 y 5. En ambos casos, las secciones de Poincaré muestran comportamientos parecidos al que se describió en el párrafo anterior. De las páginas 59 y 60 se exhiben los espectros de potencias con $\beta = 0$ correspondientes a las secciones de Poincaré antes mencionadas. En estos espectros se observan un pico tipo delta de Dirac y sus armónicos cuando el sistema es integrable, pero cuando el sistema comienza a tener más frecuencias involucradas en su movimiento, el espectro de potencias comienza a poblarse de picos. En las siguientes secciones se sólo muestran los espectros de potencias para $\alpha = 0.25$ ya que para los demás otros casos y condiciones iniciales se muestran comportamientos similares. Cada una de las secciones de Poincaré se presentan a una escala fija de -3 a 3 en el eje de las ordenadas y de 0 a 6 en el eje de las abscisas, esto para observar como evoluciona el tamaño de las secciones, en términos del parámetro epsilon. En la parte inferior derecha de las gráficas, se muestra un recuadro de la sección a escala auto-ajustada, esto para exhibir la evolución global del sistema en términos del parámetro epsilon. Por último en la parte superior derecha de muestra un recuerdo en el cual se hacen acercamientos en los que se observan; puntos sillas, puntos fijos y en general estructura típicas de caos. A continuación se muestra los colores que se usaron para las secciones de Poincaré.







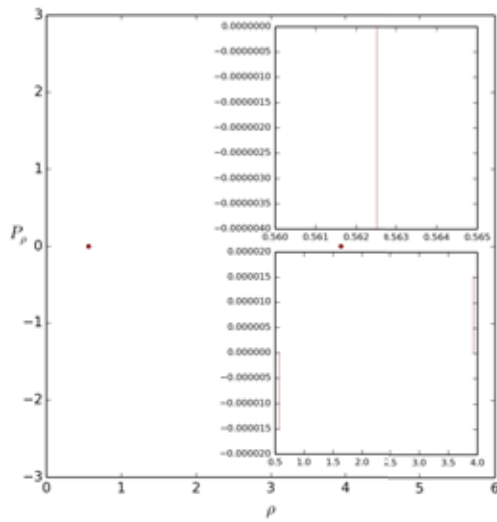
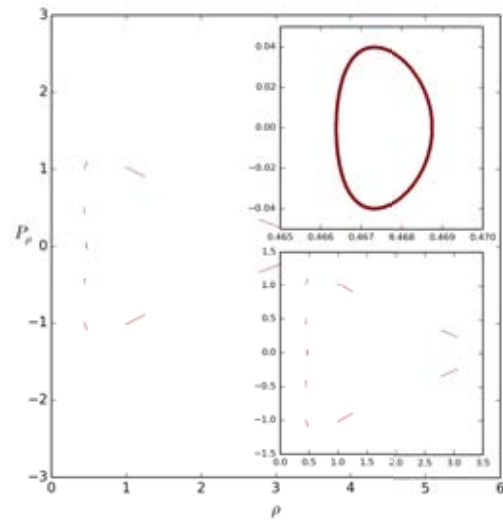
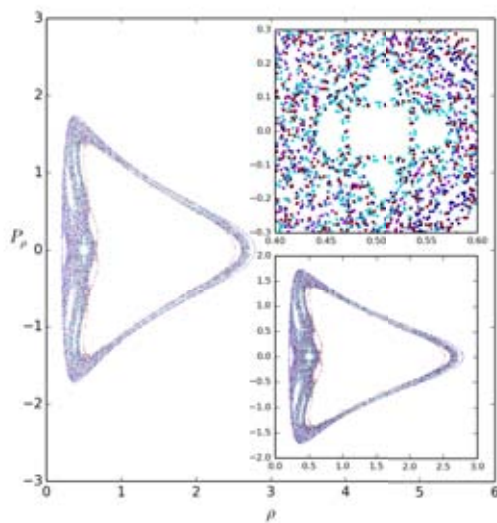
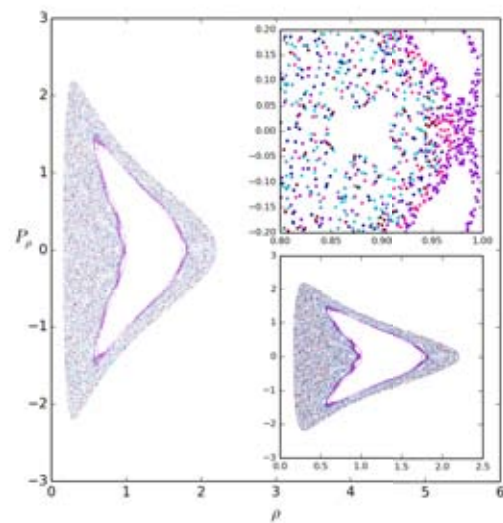
β	color
0.0	
0.2	
0.4	
0.6	
0.8	
1.0	

Tabla 5.1: Paleta de colores que se usaron en las secciones de Poincaré.

Secciones de Poincaré en coordenadas cilíndricas para $\alpha = 0.25$.

En la Fig. 5.1a se observa que la sección de Poincaré es un punto, lo cual corresponde al caso simétrico, luego en la Fig. 5.1b se observa como el punto degenera en una estructura compuesta por *curvas suaves*. En seguida esta estructura evoluciona a una *región semidenda* tal y como se muestran en las Figs. 5.1c y 5.1d, las cuales exhiben la posible existencia de puntos fijos y puntos sillas.

(a) $\epsilon = 1.0$ (b) $\epsilon = 1.2$ (c) $\epsilon = 1.5$ (d) $\epsilon = 1.9$ Figura 5.1: Secciones de Poincaré para $\epsilon = 1.0, 1.2, 1.5$ y 1.9

Las regiones semidensas poco a poco se van llenando de punto como en las Fig. 5.2a y 5.2b, las cuales muestran un posible punto silla y dos puntos fijo. Los puntos van llenando la región hasta formar una región llena de puntos la cual se llamó *región densa* tal como se muestran en la Fig.5.2c. Por último en la Fig. 5.2d se observa que la región densa se vuelve una curva suave, es decir, hay un reacomodo de lo puntos, algo parecido a lo que sucede en el mapeo logístico, sugiriendo que la transición al caos es debido a algo parecido a la duplicación de periodo.

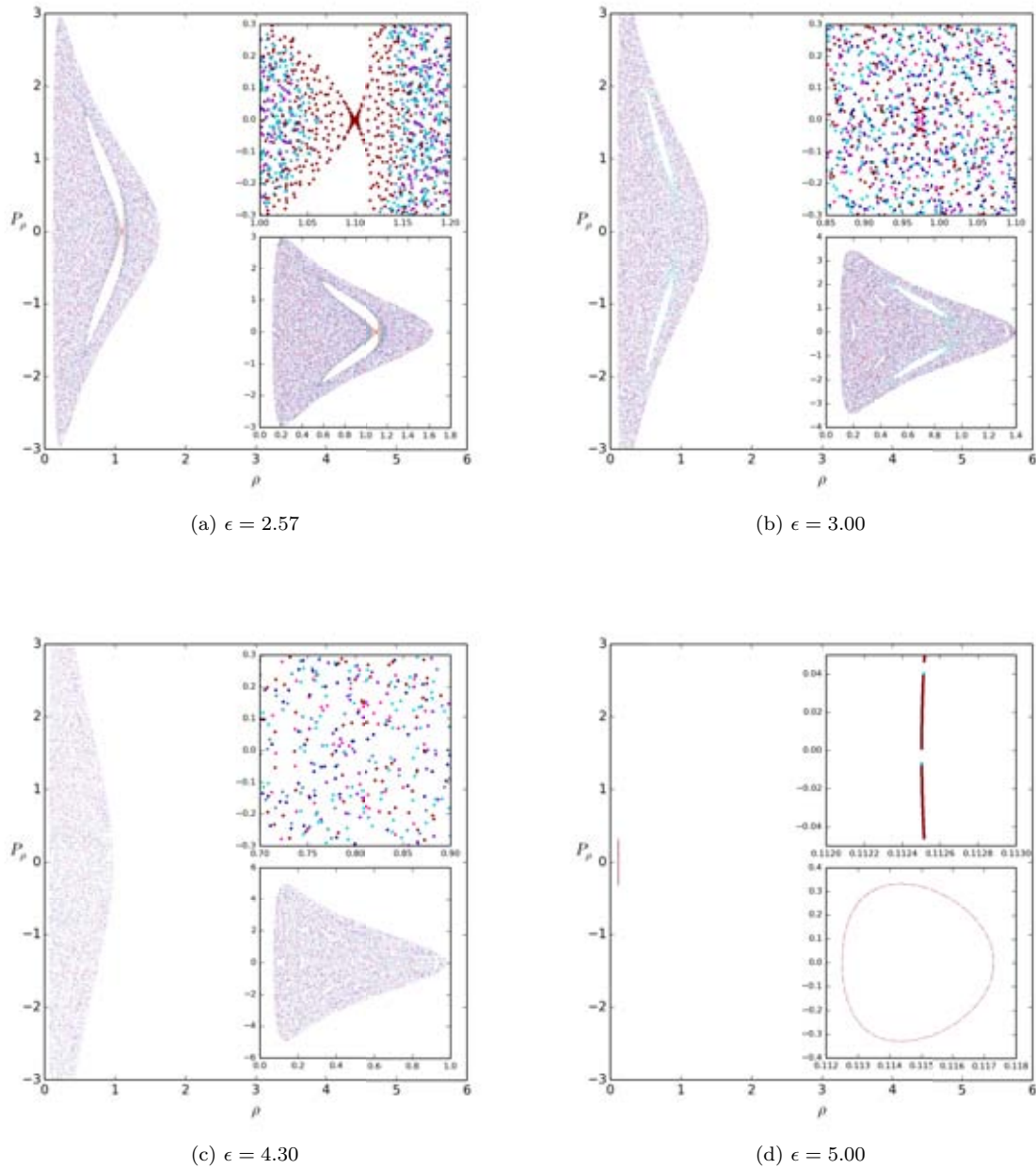
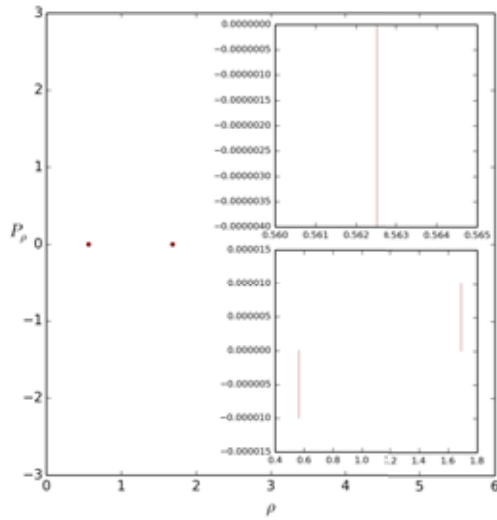
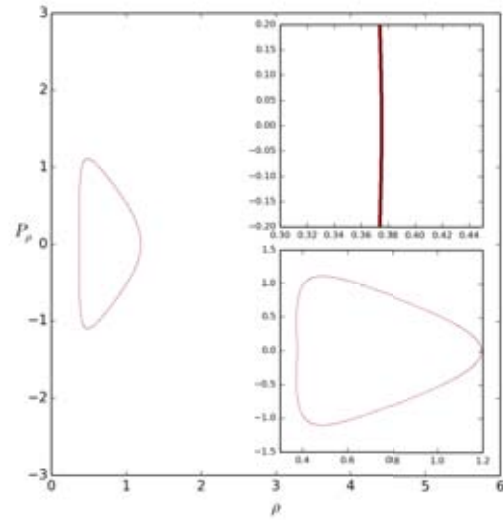
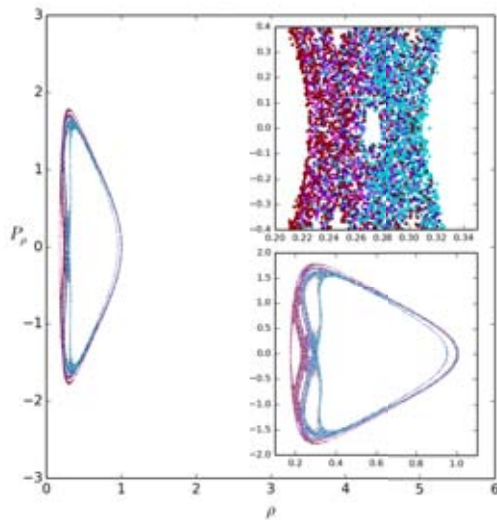
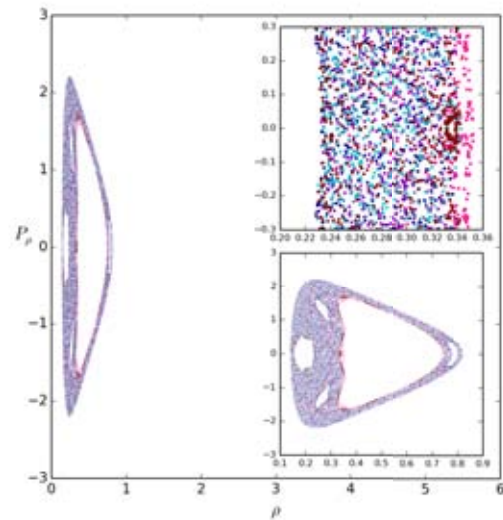


Figura 5.2: Secciones de Poincaré para $\epsilon = 2.57, 3.00, 4.30$ y 5.00

Secciones de Poincaré en coordenadas cilíndricas para $\alpha = 0.5$.

De nueva cuenta se observa que para el caso simétrico que se muestra en la Fig. 5.3a, la sección es un punto, el cual se convierte en una curva suave como se puede ver en la Fig. 5.3b, esto debido a la pérdida de simetrías. En seguida en las Figs.5.3c y 5.3d se ve que la curva suave degenera regiones semidensas una más poblada de puntos que otra exhibiendo que sigue perdiendo la simetría.

(a) $\epsilon = 1.000$ (b) $\epsilon = 1.500$ (c) $\epsilon = 1.900$ (d) $\epsilon = 2.342$ Figura 5.3: Secciones de Poincaré para $\epsilon = 1.000, 1.500, 1.900$ y 2.342

En la Fig. 5.4a se muestra que la región semidensa se convierte en una estructura la cual a su vez es una estructura formada por curvas suaves, en seguida en la Fig. 5.4b, se observa que esta se convierte en una estructura formada ahora por regiones semidensas. En la Fig. 5.4c, la sección es una región semidensa que exhibe un posible punto silla y un punto fijo. Por último en la Fig. 5.4d se observa que la región semidensa evoluciona en una estructura compuesta por curvas suaves, reforzando la idea que la transición al caos es debido a algo parecido a la duplicación de periodo.

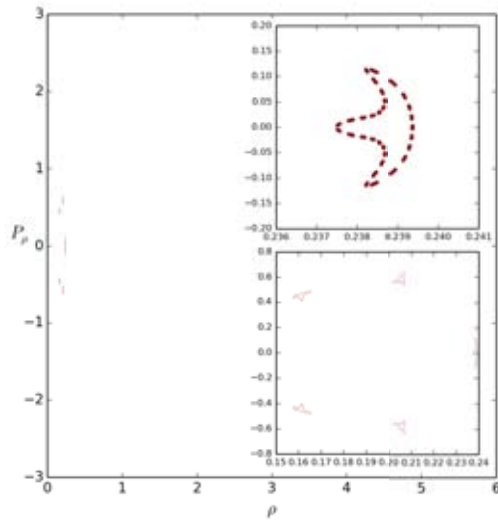
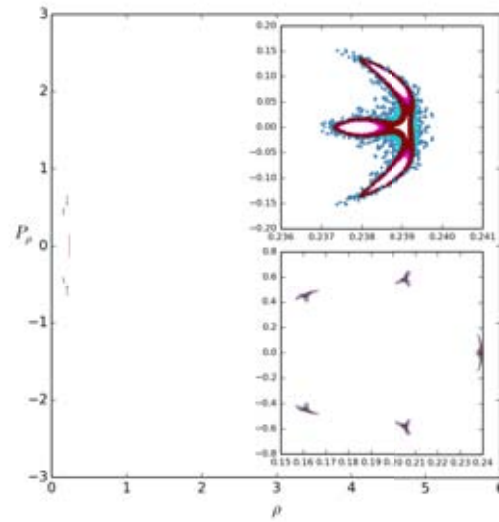
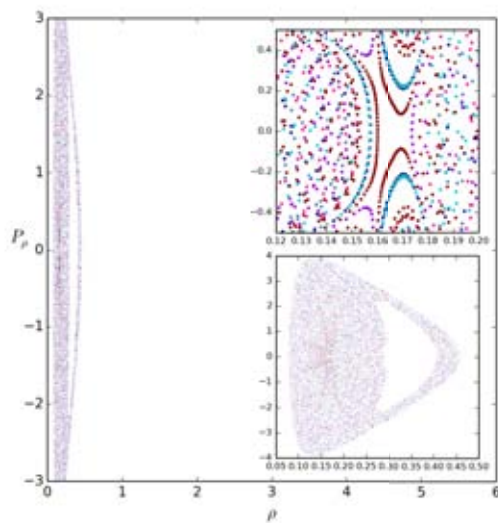
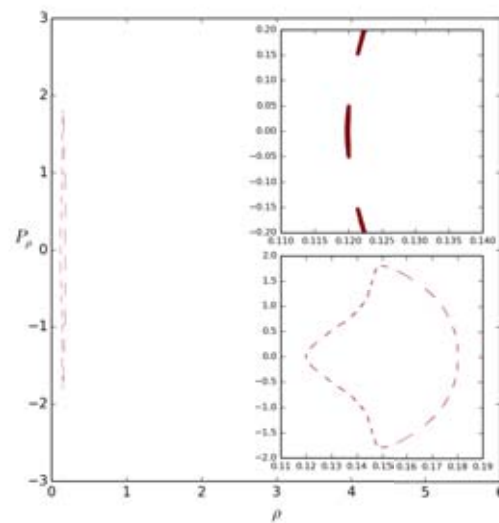
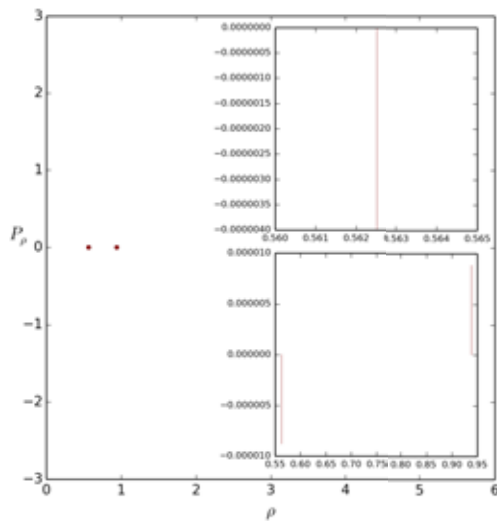
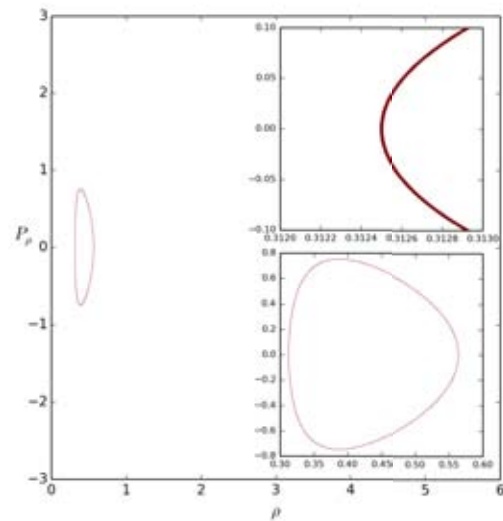
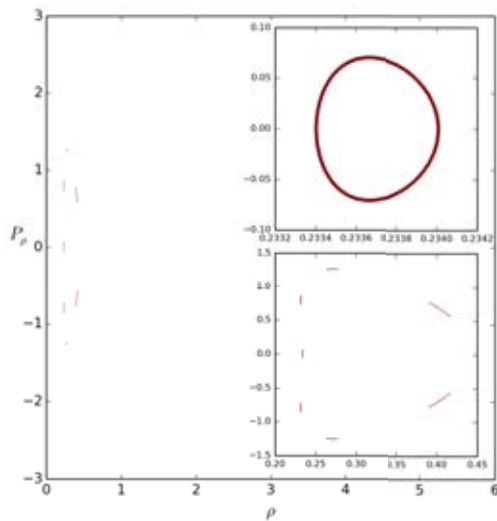
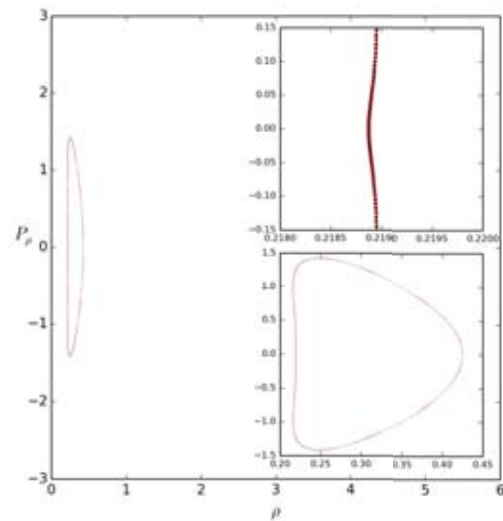
(a) $\epsilon = 2.350$ (b) $\epsilon = 2.351$ (c) $\epsilon = 4.200$ (d) $\epsilon = 4.700$

Figura 5.4: Secciones de Poincaré para $\epsilon = 2.350, 2.351, 4.200$ y 4.700

Secciones de Poincaré en coordenadas cilíndricas para $\alpha = 0.75$.

En la Fig. 5.5a se vuelve a observar un punto debido a que el sistema es superintegrable, en la Fig. 5.5b este degenera en una curva suave, la cual se convierte en una estructura compuesta por varias curvas suaves como se observa en la Fig. 5.5c, esta enseguida se convierte de nueva cuenta en una curva suave Fig. 5.5d.

(a) $\epsilon = 1.00$ (b) $\epsilon = 1.80$ (c) $\epsilon = 2.41$ (d) $\epsilon = 2.57$ Figura 5.5: Secciones de Poincaré para $\epsilon = 1.00, 1.80, 2.41$ y 2.57

En la Fig.5.6a se muestra que la curva suave se convierte en una región semidensa, luego esta de nueva cuenta se vuelve una curva suave la cual se fragmenta en dos curvas suaves que se de nueva cuentas se vuelve una curva suave, tal y como se muestra en las Figs. 5.6b,5.6c y 5.6d.

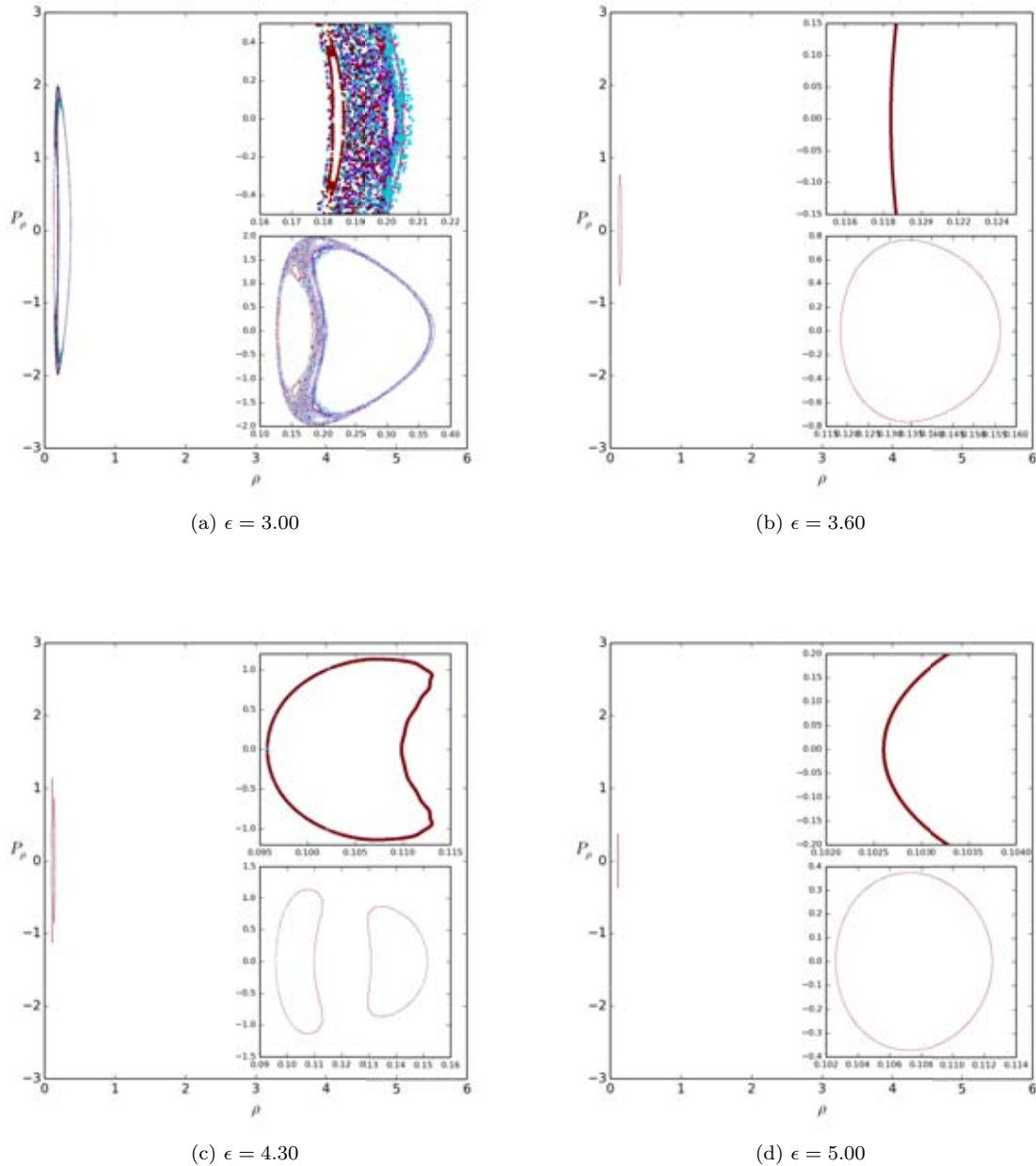


Figura 5.6: Secciones de Poincaré para $\epsilon = 3.00, 3.60, 4.30$ y 5.00

5.1.2. Espectro de potencias de PKA con $z = 0$ y $p_z \neq 0$.

En todas la siguientes gráficas se muestra la transformada de Fourier para la coordenada z (masa m_2), la cual proporciona la cantidad de frecuencias involucradas en su movimiento, situación que esta fuertemente

relacionada con las secciones de Poincaré antes descritas.

Espectro de potencias $\alpha = 0.25$.

En la Fig.5.7a, se observa la existencia de dos frecuencias fundamentales y mezclas de sus armónicos. En la Fig. 5.7b se comienza a observar una mayor cantidad de frecuencias con sus respectivos armónicos. En las Figs. 5.7c y 5.7d se observa que el espectro comienza a llenarse de muchas frecuencias debido a no periodicidad del sistema.

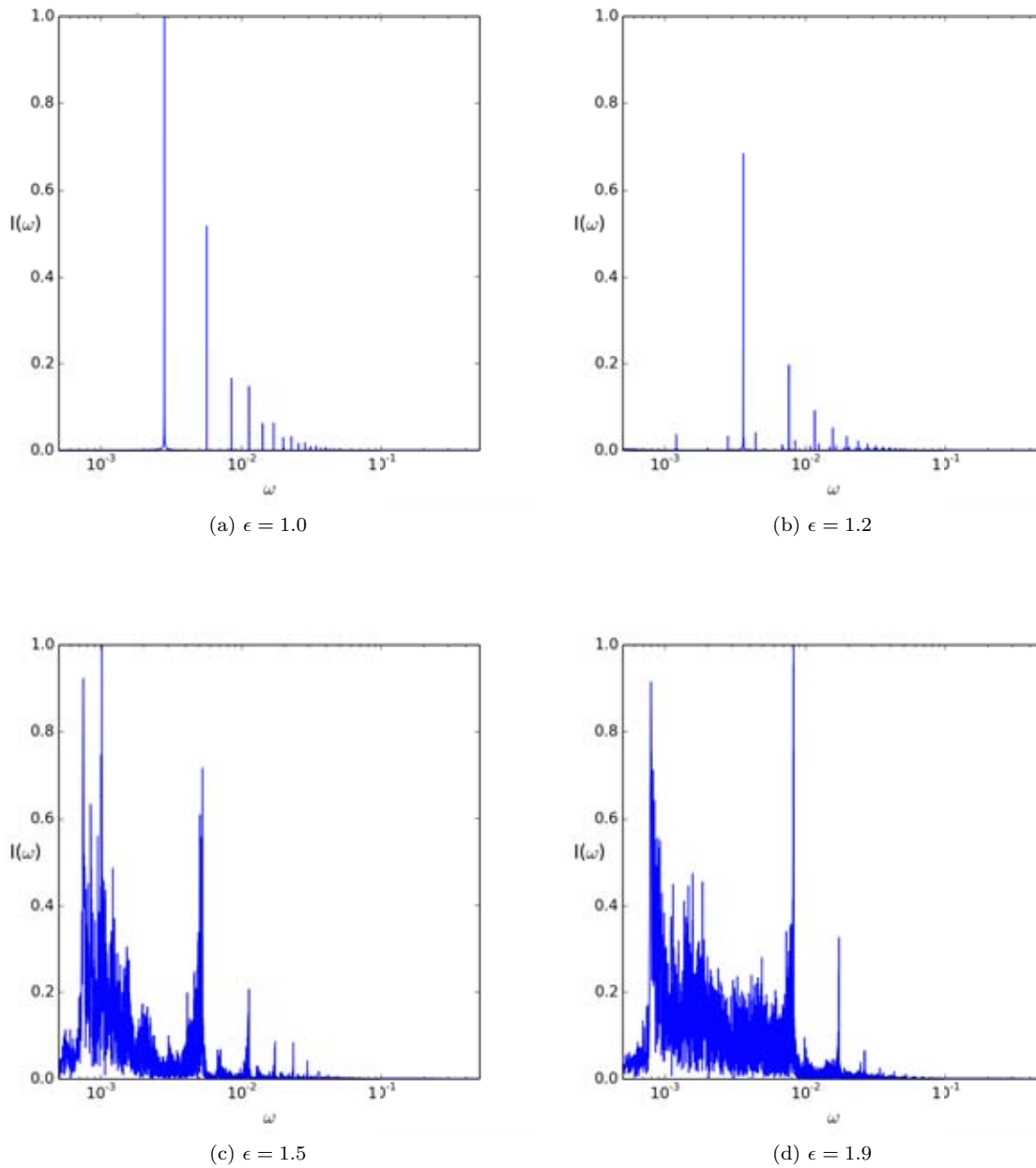


Figura 5.7: Espectros de potencias para $\epsilon = 1.0, 1.2, 1.5$ y 1.9

En las Figs.5.8a y 5.8b se observa que el espectro esta más lleno de frecuencias pero en la Fig.5.8c se observa una disminución de las frecuencias y de que predominan las frecuencias cercanas 10^{-3} . Por último en la Fig.5.8d se observan unas cuantas frecuencias lo que corresponde que el sistema a vuelto a ser cuasi periodico.

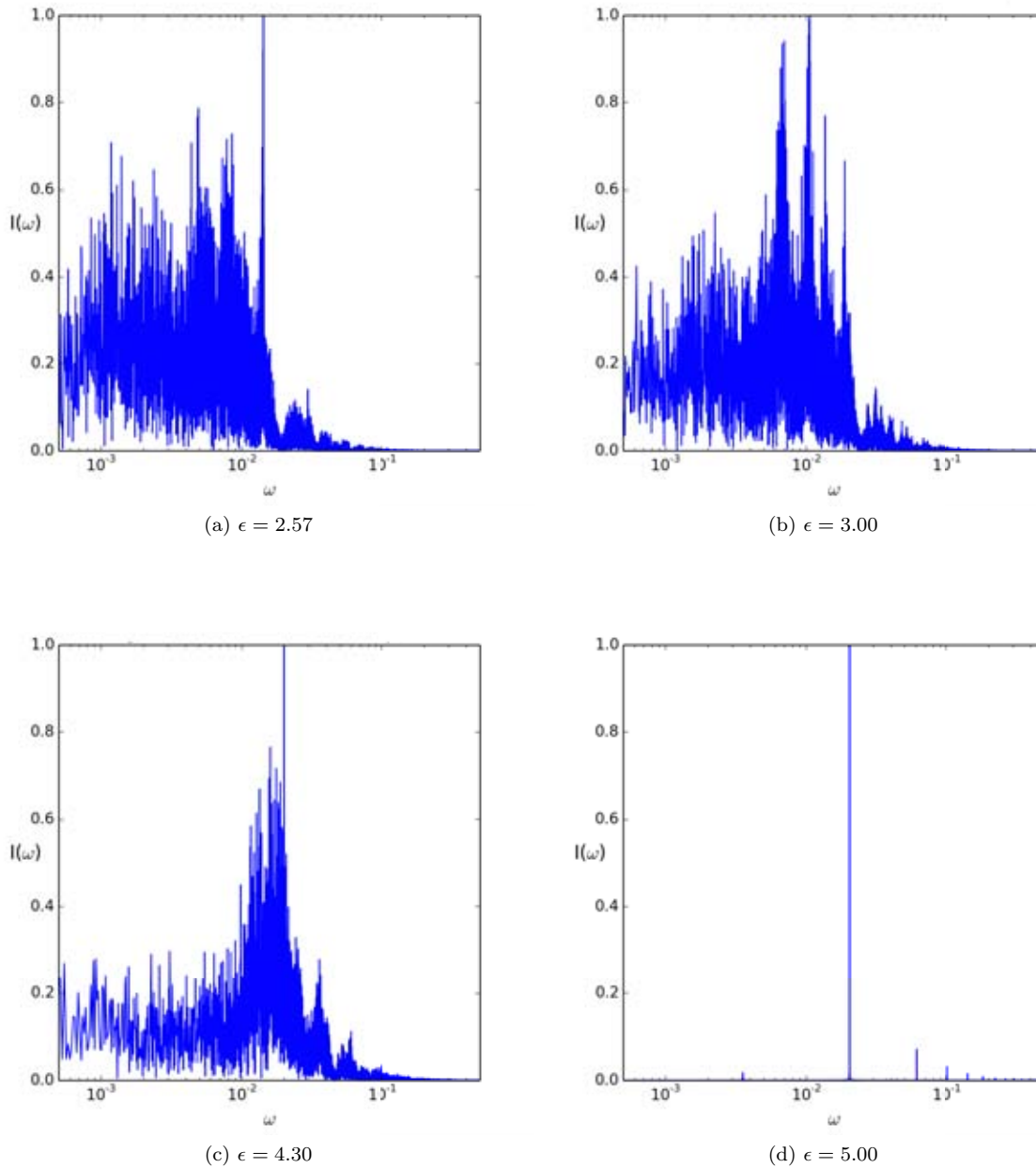
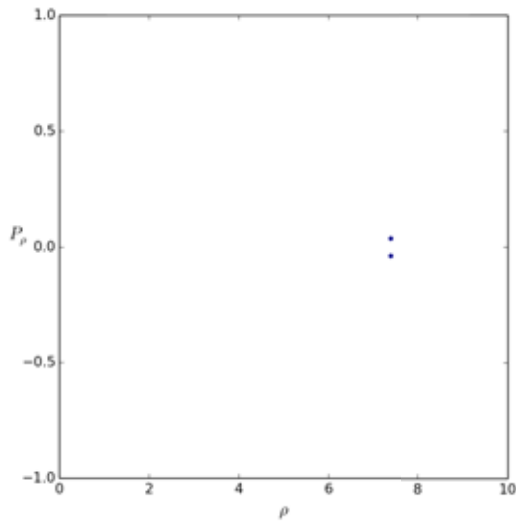
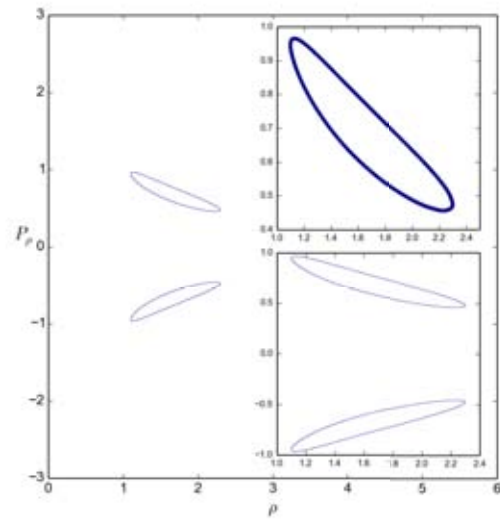
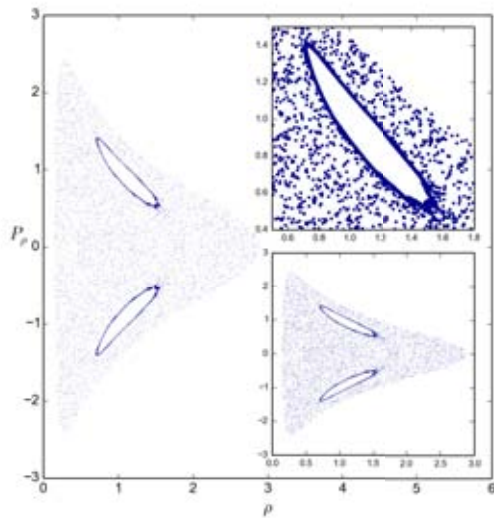
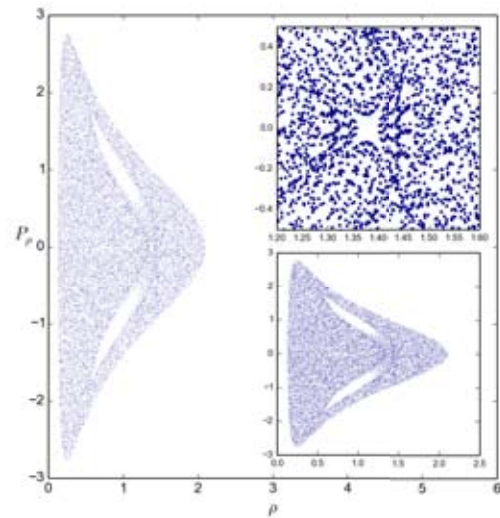


Figura 5.8: Espectros de potencias para $\epsilon = 2.57, 3.00, 4.30$ y 5.00

5.1.3. Secciones de Poincaré de PKA con $z \neq 0$ y $p_z = 0$.

A continuación se muestran los resultados para el conjunto de condiciones iniciales equivalentes al antes descrito con la diferencia de que ahora β se toma como cero. En la Fig.(5.9a) se muestra un punto en la sección debido a que el sistema es superintegrable, luego en la Fig.(5.9b) este punto se convierte en dos curvas suaves, las cuales se convierten en una región semidensa como se muestra en la Fig.(5.9c), lo cual se sigue llenándose de puntos, además de que presenta posibles puntos silla y puntos fijos como se observa en la Fig.(5.9d).

(a) $\epsilon = 1.000$ (b) $\epsilon = 1.500$ (c) $\epsilon = 2.000$ (d) $\epsilon = 2.342$ Figura 5.9: Secciones de Poincaré para $\epsilon = 1.000, 1.500, 2.000$ y 2.342

En las Figs.(5.10a, 5.10b, 5.10c y 5.10d) se muestra como las regiones se llenan de puntos, además de presentar puntos silla y la aparición de regiones sin puntos.

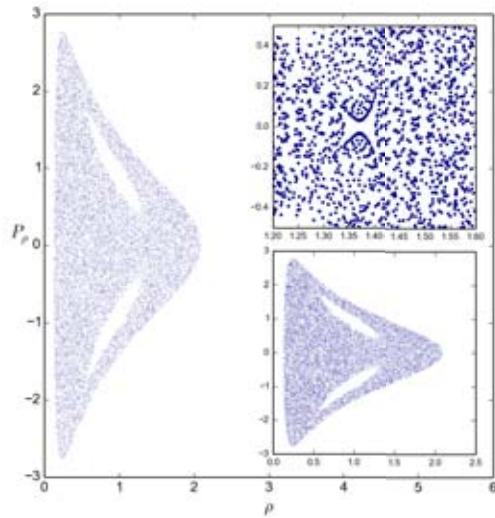
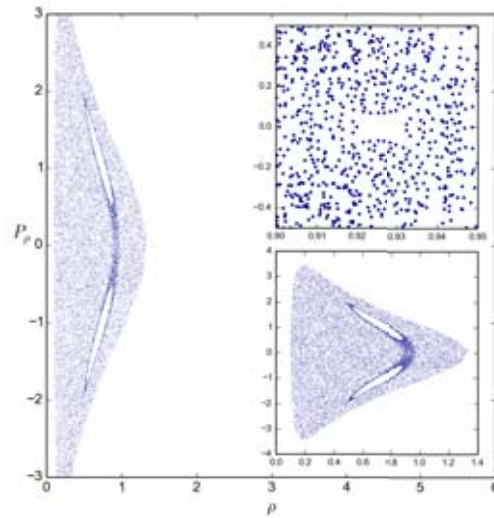
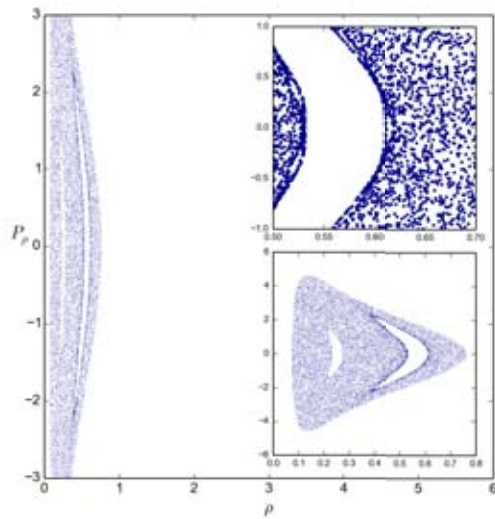
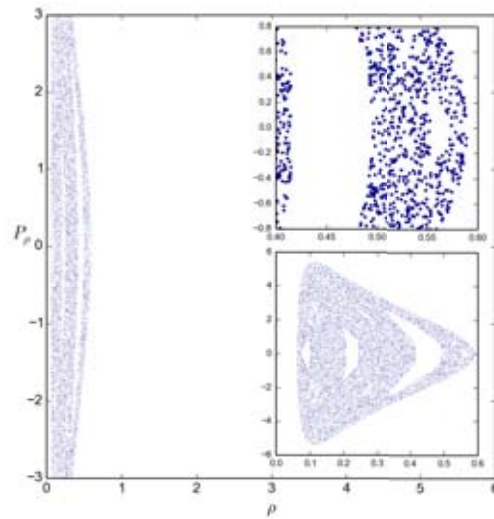
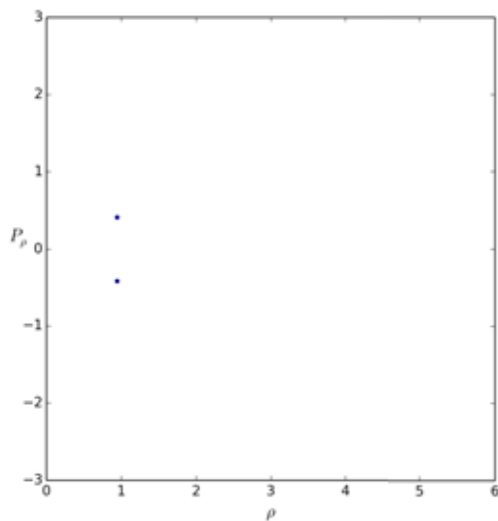
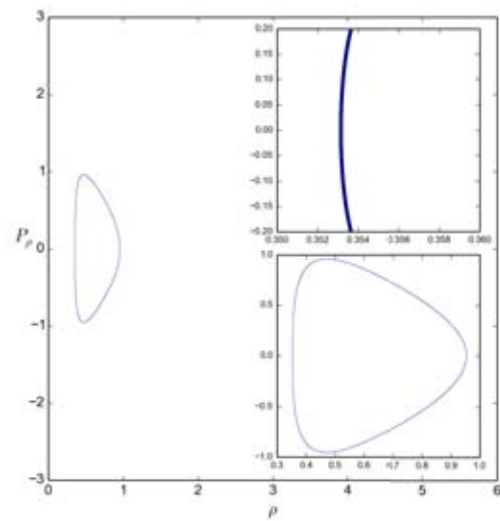
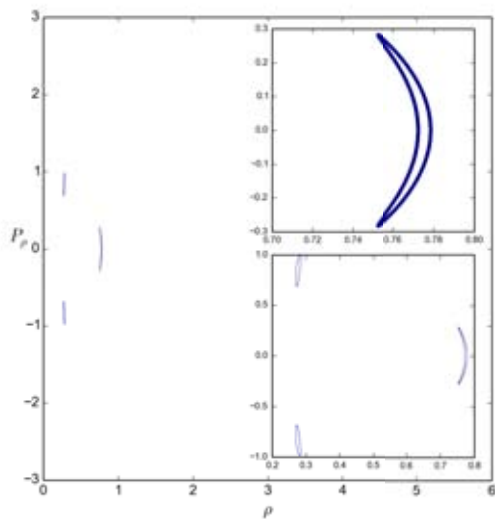
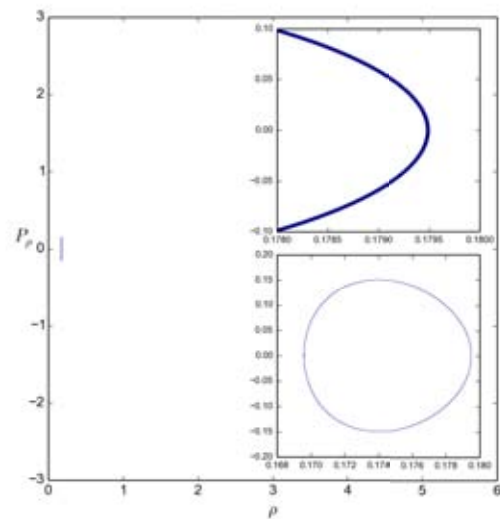
(a) $\epsilon = 2.35$ (b) $\epsilon = 3.00$ (c) $\epsilon = 4.20$ (d) $\epsilon = 5.00$

Figura 5.10: Secciones de Poincaré para $\epsilon = 2.35, 3.00, 4.20$ y 5.00

Secciones de Poincaré en coordenadas cilíndricas para $\alpha = 0.5$.

En la Fig.(5.11a) se muestra un punto en debido a que el sistema es superintegrable, luego este punto se convierte en una curva suave como se ve en la Fig.(5.11b), esta degenera en dos varias curvas suaves Fig.(5.11c) y esta a su vez de vuelve de nueva cuenta una curva suave Fig.(5.11d).

(a) $\epsilon = 1.00$ (b) $\epsilon = 1.50$ (c) $\epsilon = 1.80$ (d) $\epsilon = 2.41$ Figura 5.11: Secciones de Poincaré para $\epsilon = 1.00, 1.50, 1.80$ y 2.41

En la Fig.(5.12a) se observa como la curva degenera en tres curvas suaves, en las Figs.(5.12b, 5.12c y 5.12d), que estas curvas evolucionan a regiones semidensas en las que aumenta el número de regiones sin puntos.

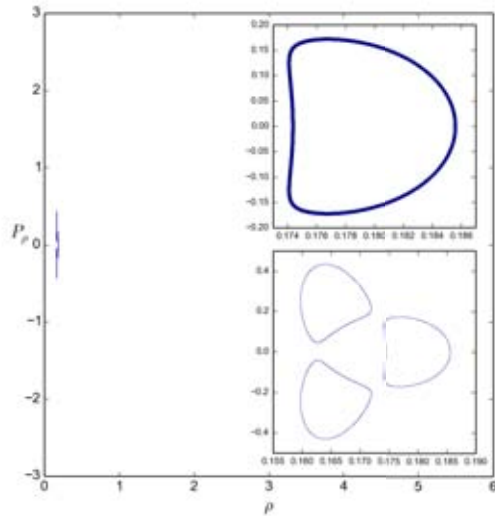
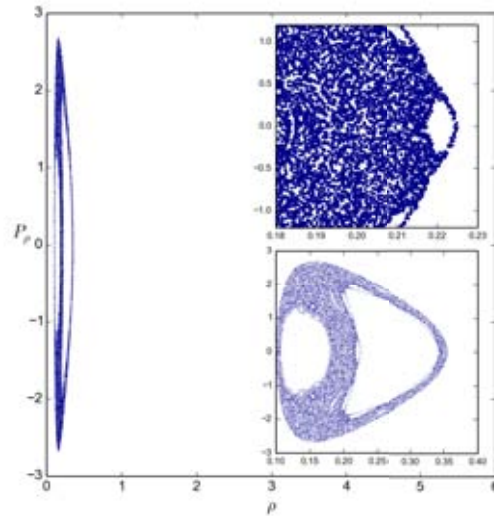
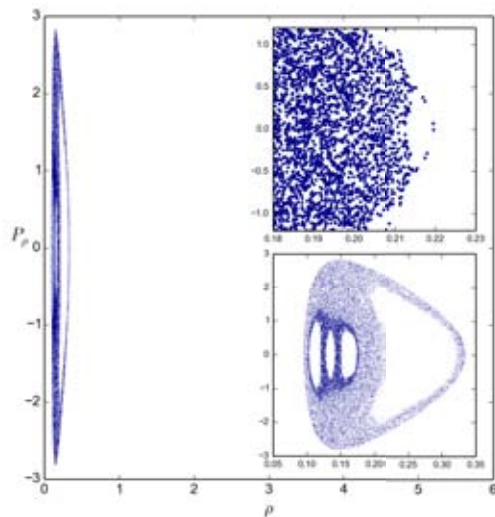
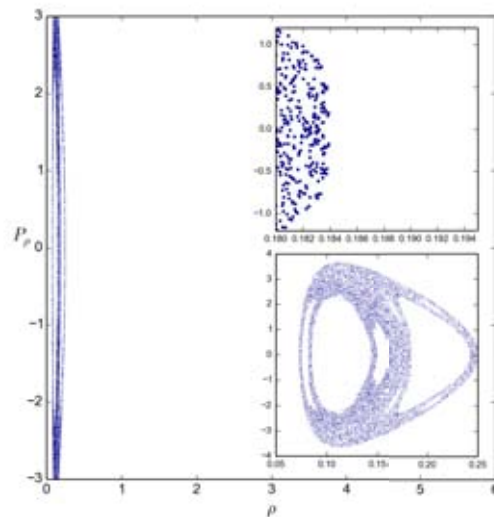
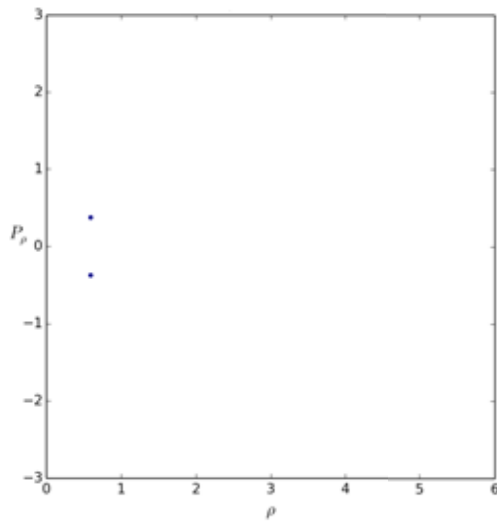
(a) $\epsilon = 2.57$ (b) $\epsilon = 3.60$ (c) $\epsilon = 3.80$ (d) $\epsilon = 5.00$

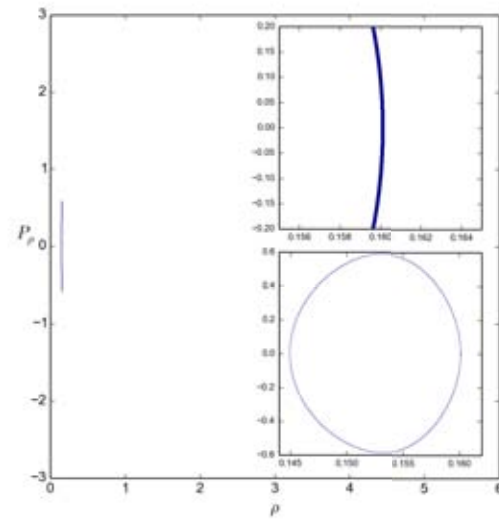
Figura 5.12: Secciones de Poincaré para $\epsilon = 2.57, 3.60, 3.80$ y 5.00

Secciones de Poincaré en coordenadas cilíndricas para $\alpha = 0.75$.

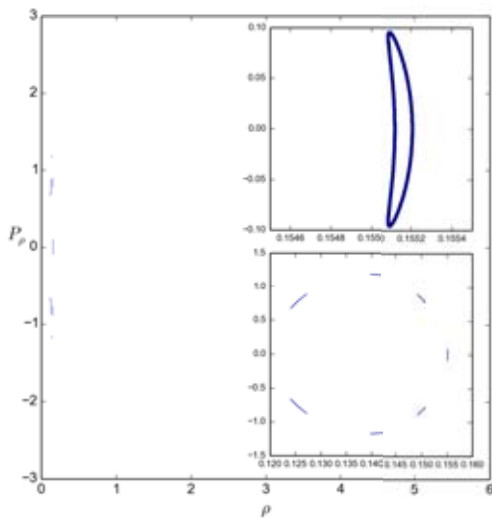
En las Figs.(5.13a, 5.13b, 5.12b y 5.12d) se observa que la sección, es un punto que degenera a una curva suave a su vez degenera en varias curvas suaves y por último estas de nueva cuenta se convierte en una curva suave.



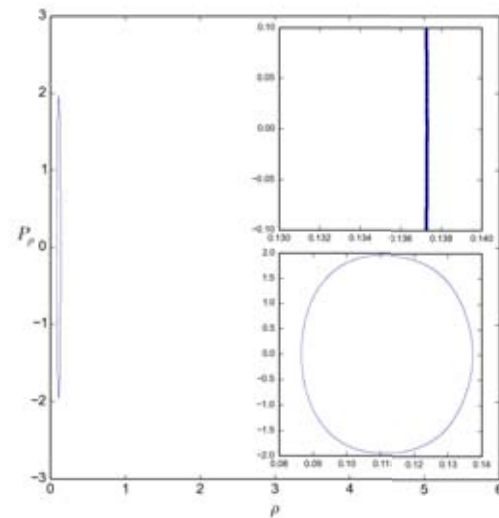
(a) $\epsilon = 1.0$



(b) $\epsilon = 3.0$



(c) $\epsilon = 3.6$



(d) $\epsilon = 5.0$

Figura 5.13: Secciones de Poincaré para $\epsilon = 1.0, 3.0, 3.6$ y 5.0

5.2. Gráficas de las cantidades no conservadas.

A continuación se muestran la gráficas que exhiben la pérdida de integrales de movimiento, con $\alpha = 0.5$. Del lado izquierdo se presenta la proyección en plano (x, y) del momento angular total y del lado derecho la proyección en el mismo plano del vector de Laplace-Runge-Lenz. En las figuras (5.14a) y (5.14b), se observa que el vector de momento angular total y el vector de Laplace-Runge-Lenz se conservan, ya que su proyección es constante.

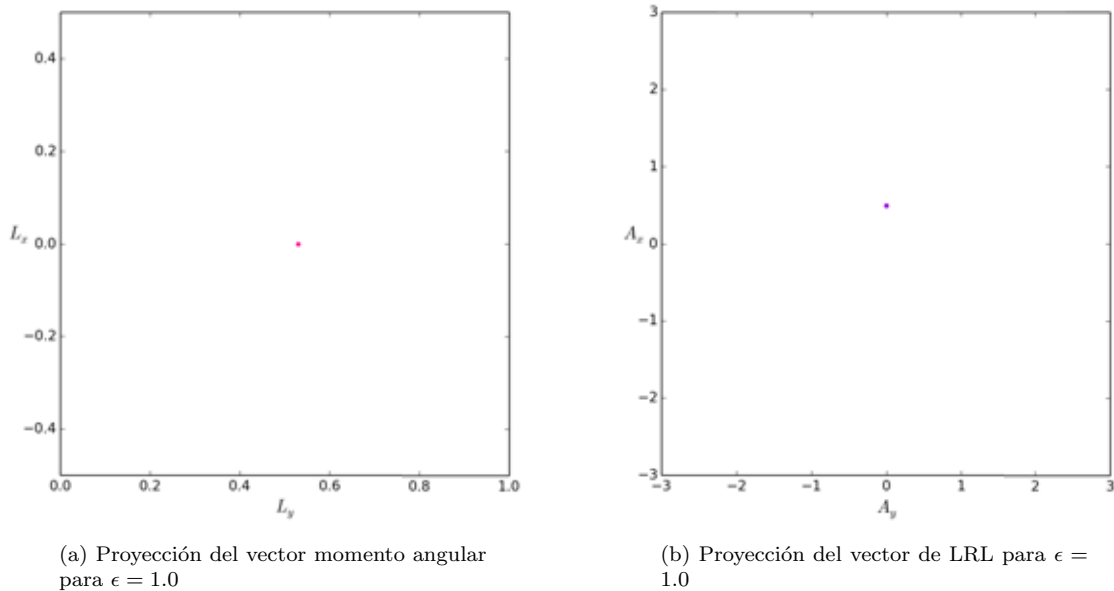
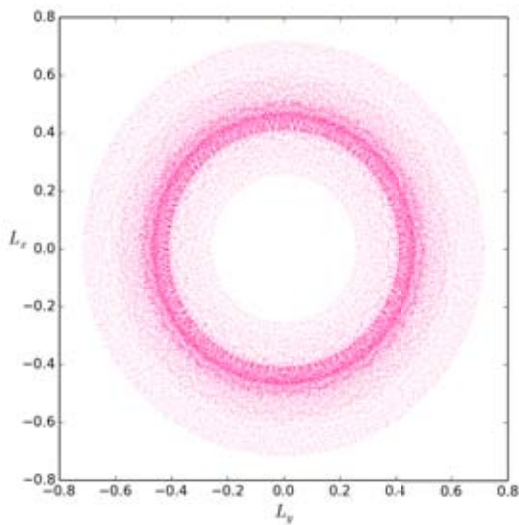
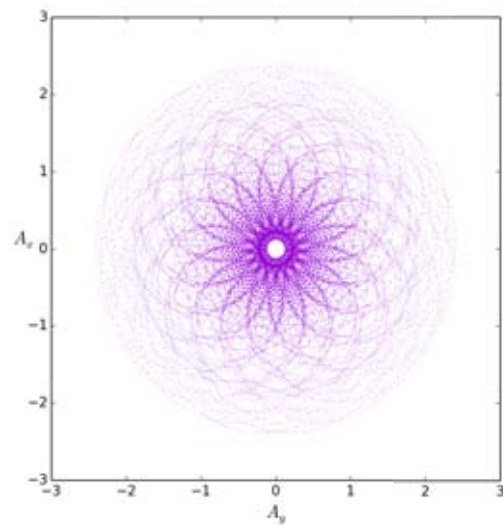


Figura 5.14: Cantidades que se conservan para el caso simétrico

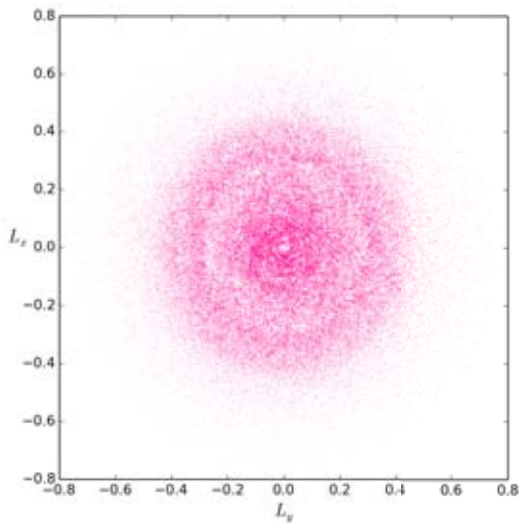
En las Fig.(5.15a) y (5.15b), se ve que tanto el momento angular y el vector de LRL conservan cierta estructura debido a la cuasi periodicidad de PKA, pero en estos casos las proyecciones ya no son constantes debido a que se ha perdido la simetría. En las Figs. , (5.15c) y (5.15d) se observa como se pierde la estructura a causa de no integrabilidad.



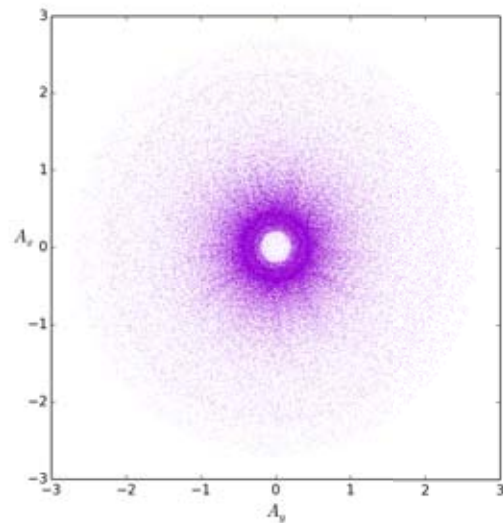
(a) Proyección del vector momento angular para $\epsilon = 1.8$



(b) Proyección del vector de LRL para $\epsilon = 1.8$



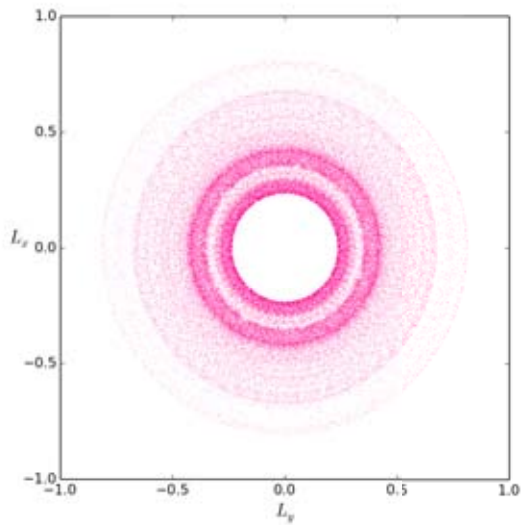
(c) Proyección del vector momento angular para $\epsilon = 1.9$



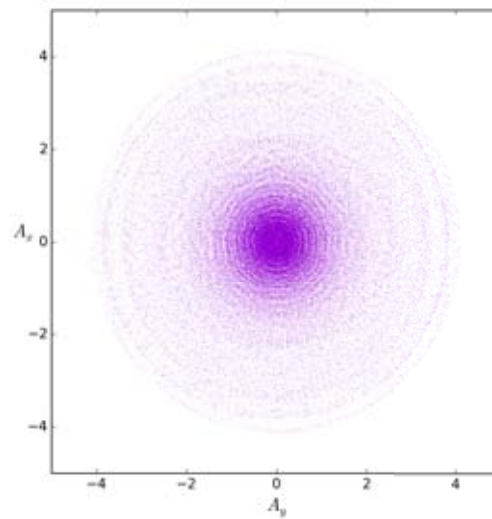
(d) Proyección del vector de LRL para $\epsilon = 1.9$

Figura 5.15: Cantidades que se dejan de conservar para el caso asimétrico

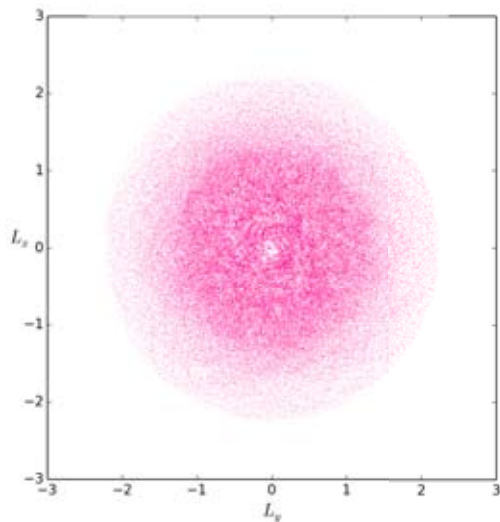
Aquí se observa que cuando la proyección de un vector presenta alguna estructura, la proyección en el otro no tiene porque preservar alguna estructura como se muestra en los pares de Figs. (5.16a) y (5.16b). En gráficas correspondientes a las figuras (5.16c) y (5.16d), se ve que los dos vectores no se conservan y no muestran periodicidad o patrón alguno. En las respectivas de Poincaré para los parámetros mostrados en las figuras, PKA es caótico.



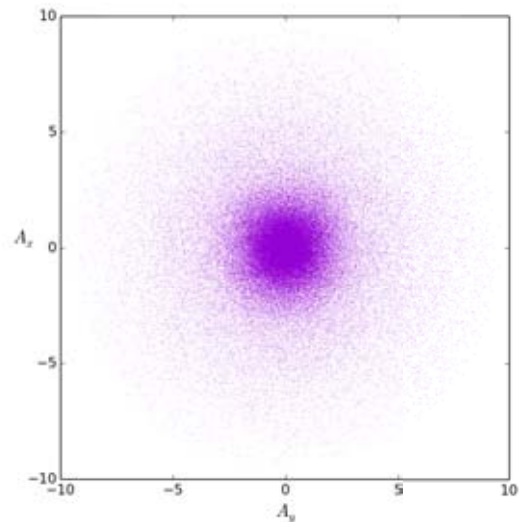
(a) Proyección del vector momento angular para $\epsilon = 2.351$



(b) Proyección del vector de LRL para $\epsilon = 2.351$



(c) Proyección del vector momento angular para $\epsilon = 3.000$



(d) Proyección del vector de LRL para $\epsilon = 3.000$

Figura 5.16: Cantidades que se dejan de conservar para el caso asimétrico

Capítulo 6

Conclusiones

El trabajo que se describe a lo largo de esta tesis fue para intentar comprender el comportamiento de los sistemas Hamiltonianos que pierden integrabilidad; en particular, el que aquí se propone se denomina Problema de Kepler Asimétrico (PKA). A continuación se exponen las conclusiones con base en los resultados obtenidos.

Para comprender lo que sucede en la transición a la no integrabilidad de PKA, se comienza por el caso ya conocido o simétrico (cuando $\epsilon = 1$), ya que es soluble analíticamente. En este caso, el problema exhibe las tres leyes de Kepler, y más aún, presenta cuatro integrales de movimiento: la energía, la proyección en z del momento angular, el momento angular total fig. 5.14a y el vector de Laplace-Runge-Lenz fig. 5.14b, es decir, el sistema es super-integrable. En consecuencia, en las secciones de Poincaré que se muestran en las Figs. 5.1a, 5.3a, 5.5a, 5.9a, 5.11a y 5.13a. Las cuales se hicieron para el plano (p_ρ, ρ) ¹ se observa un solo punto, debido a que la órbita tiene asociado a su movimiento un único periodo. También al analizar el espectro de potencias para la masa m_2 , se observa un pico y sus armónicos, exhibiendo que ambos cuerpos se mueven de forma sincronizada, tal y como se muestran en las Fig. 5.7a.

Las simetrías asociadas al caso simétrico son:

1. Conservación de la energía implica invarianza temporal.
2. Conservación de momento angular total implica invarianza ante rotaciones.
3. Conservación de la proyección del momento angular sobre el eje z quiere decir que la órbita siempre tiene la misma inclinación.
4. Conservación del vector de Laplace-Runge-Lenz proporciona la geometría de la órbita.

En el capítulo 3 se mostró que las cantidades anteriores son independientes ya que están en involución, aunque en apariencia no lo estén. Justamente esta independencia en las constantes de movimiento es lo que proporciona al sistema su carácter de super-integrabilidad.

Sin duda el caso interesante es el asimétrico (cuando $\epsilon \neq 1$), debido a la riqueza que proporciona la falta de simetría en las ecuaciones de movimiento y que se observa a simple vista en las secciones de Poincaré. El punto que se tenía en los mapeos del caso simétrico degenera tres casos:

1. *Curvas suaves.* En éstas se observa que los puntos describen patrones muy parecidos a una o varias curvas suaves en el plano (p_ρ, ρ) , tal como se observa en las Figs. 5.1b, 5.2d, 5.3b, 5.4a, 5.4d, 5.5b, 5.5c, 5.5d, 5.6b, 5.6c, 5.6d, 5.9b, 5.11b, 5.11c, 5.11d, 5.12a, 5.13b, 5.13c y 5.13d, estos casos las frecuencias asociadas

¹También se puede utilizar el plano rp_r que proviene de las coordenadas esféricas.

al sistemas parecen ser inconmensurables, ya que parecen barrer toda la superficie del toro, pero esto no se asegura al menos que se calcule explícitamente el cocientes de las frecuencias y ver si este cociente es racional o irracional. Por otra parte, se observa que en los correspondientes espectros de potencias los cuales se realizaron para la partícula en el eje z tiene un número bien definido de frecuencias. Esto muestra que aún se conserva parte de la simetría y esto evita que PKA sea caótico.

2. *Regiones semidensas.* Para este caso como se observa en las Figs. de 5.1c a 5.2b, 5.3c, 5.3d, 5.4b, 5.4c, 5.6a, de 5.9c a 5.10d, 5.12b, 5.12c y 5.12d. Esto se debe se han perdido la simetría y el toro invariante sobre en que que estaba restringida la dinámica del sistema, se ha roto (uno de sus radio, a dejado de ser constante), y es por eso que los puntos llenan de manera densa ciertas regiones de las secciones, es decir se tienen regiones parcialmente densas. En éstas figuras se muestran estructuras típicas de sistemas caóticos en las que se pueden apreciar la formación de puntos sillas y centros, esto visto desde la perspectiva que proporciona hacer las secciones en el plano (p_ρ, ρ) . Además, en el espectro de potencias se ve que éste comienza a llenarse con frecuencias de intensidad considerable (entre 0.4 y 0.6 de $I(\omega)$)², pero a pesar de ello, no se puede asegurar que el sistema es caótico.
3. *Región totalmente densa.* Cuando la región es totalmente densa como en la Fig. 5.2c, los puntos cubren toda la región correspondiente a la intersección del toro invariante y la sección de Poincaré, hecho que refleja que se han perdido integrales de movimiento. En el espectro de potencias se observa que la gran mayoría de las frecuencias tienen intensidades entre 0.4 y 1.0. Lo anterior refleja que se ha perdido la periodicidad de la trayectoria en el espacio fase. La forma del mapeo y el espectro de potencias nos sugieren que el sistema ya está en un régimen de caos, aunque para asegurar esto es necesario calcular el exponente de Lyapunov.

El comportamiento que se observa en las secciones de Poincaré como función de ϵ para un conjunto de condiciones iniciales a una energía equivalente es el siguiente. Se inicia con un punto, luego éste degenera en una curva, que a su vez degenera en varias curvas o en una región semidensa. Después se convierte en una región totalmente densa. Sin embargo, para algunos valores de ϵ ocurre que se vuelve otra vez una curva suave que eventualmente pasará a ser varias curvas suaves, regiones semidensas y regiones totalmente densas, tal como se muestra en la secuencias correspondientes a las figs. 5.1a a 5.2d. Este proceso se repite varias veces y es análogo a lo que sucede con el mapeo logístico [3], en su transición al caos por medio de duplicación del periodo. Esta última situación no es algo que se esperaba obtener, por lo que en futuras investigaciones vale la pena analizar con mucho más detalle este hecho.

Hay otros comportamientos interesantes para diferentes valores de la energía que se describen a continuación. Para secciones de Poincaré que corresponden a un cuarto del fondo de potencial ($\alpha = \frac{3}{4}$) se observa que en la gran mayoría de las secciones se muestran curvas suaves. Cuando se tiene energía igual a la mitad del fondo del potencial ($\alpha = \frac{1}{2}$) las secciones de Poincaré muestran curvas suaves, regiones semidensas y regiones totalmente densas. En el caso de energías más alejadas del fondo del potencial ($\alpha = \frac{1}{4}$) se observa que la gran mayoría tiene regiones semidensas y totalmente densas. Este comportamiento muestra la sensibilidad del sistema para perder integrales de movimiento en términos de la energía. Si en un sistema dinámico por alguna razón se perdiera una integral de movimiento, alguno de los radios que conforman el toro toro invariante dejaría de ser constante, haciendo que las trayectorias asociadas a este toro entren y salgan de éste. En el problema que se estudia en este trabajo sucede algo análogo a la descripción anterior cuando el sistema deja de ser integrable. Inclusive antes de ello se pueden observar, tal y como se muestra en las figuras correspondientes a curvas suaves y regiones semidensas, que las trayectorias que terminan siendo cuasiperiódicas dependiendo de ϵ y la energía como se muestra en los respectivos espectros de potencias para la partícula en el eje z . A pesar de los resultados obtenidos, no se puede garantizar la existencia de caos para todos los valores de ϵ , ya que el elemento faltante es el exponente de Lyapunov, mismo que cuantifica la distancia entre dos condiciones iniciales muy cercanas. Cuando las trayectorias asociados a estas condiciones divergen exponencialmente una respecto de la otra el exponente de Lyapunov es positivo, y cuando no, las trayectorias permanecen cercanas una de la otra. Este

²Cabe recordar que el espectro de potencias está normalizado.

último elemento no se logró calcular debido, a que se requieren controles numéricos más sofisticados sobre la simulación que garanticen el cálculo de las trayectorias con una precisión mayor y estabilidad.

Parte central del trabajo realizado en esta tesis es la capacidad de hacer las simulaciones y tener control sobre las condiciones iniciales. Sin embargo, éstas tienen un error numérico que impidió calcular el exponente de Lyapunov y hacer simulaciones más largas, ya que se impuso que la diferencia en la energía en cada paso de integración fuese menor que 10^{-5} . Ahora bien, debido a que la propiedad fundamental de PKA es ser Hamiltoniano se pueden hacer muchas mejoras para el cálculo de las trayectorias. Por ello se propone implementar algoritmos de integración más precisos que aprovechen esta propiedad, como es el caso del uso de manipuladores algebraicos y técnicas de diferenciación automática. Estos aspectos los cubre, en un amplio sentido, el *método de integración de Taylor* que se utilizará para continuar con la investigación de este trabajo. Además se tiene la intención implementar el código en paralelo para reducir el tiempo de computo, esto con precisión extendida, con lo se propone migrar todo el código al lenguaje de *Julia* cuya descripción de puede ver es [29].

Sin duda el problema no está concluido y la intención es llevarlo hasta las últimas consecuencias por lo que se debe hacer un análisis más detallado de las condiciones iniciales, calcular el exponente de Lyapunov, determinar la existencia de puntos fijos y el corte de curvas homoclínicas, además de vincular este trabajo con lo que ha realizado alrededor de este tipo de problemas tal como se puede ver en [31–34]. Sin embargo, se ha cumplido con uno de los principales objetivos de este trabajo, que fue el desarrollo de herramientas básicas para el análisis de sistemas Hamiltonianos con varios grados de libertad utilizando herramientas que se aprenden en la licenciatura. También se han sentado las bases sólidas para realizar investigaciones más profundas sobre este problema. Además, se ha mostrado a lo largo de esta tesis la importancia que puede llegar a tener el estudio de la transición al caos de un sistema que bajo ciertas condiciones es superintegrable, ya que esto último permite dar un mejor seguimiento sobre el rompimiento de las simetrías asociadas. Esto permitiría estudiar de una mejor manera el rompimiento de las integrales de movimiento para sistemas con muchos grados de libertad, ya que éstos típicamente pierden todas sus integrales de movimiento, excepto tal vez la energía y no algunas como en el problema que aquí se ha estudiado.

El Problema de Fuerza Central.

En este apéndice se abordará el problema de dos cuerpos, que se consideran puntuales y que se mueven bajo la influencia de una fuerza central, es decir, se estudia la dinámica de un sistema que consiste de dos cuerpos los cuales interactuarán por una fuerza a lo largo de la línea que conecta los centros de masa de ambos. Cabe mencionar que no todos los problemas de fuerza central son integrables en términos de funciones analíticas, pues las fuerzas centrales no necesariamente dependen del inverso del cuadrado de la distancia. Éstas lo pueden hacer decayendo exponencialmente como el potencial de Yukawa. Para el caso de que el potencial es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia, el problema es especialmente importante y es usualmente llamado “Problema de Kepler” PK. Éste se puede resolver completamente debido a que es super-integrable. Además tiene bastantes aplicaciones, las más directas son en la mecánica celeste en el movimiento de los satélites que orbitan los planetas, el movimiento de los planetas alrededor del sol, cometas, estrellas binarias, etc. Otro tipo de aplicaciones resultan muy útiles en mecánica cuántica semiclásica como la interacción de dos núcleos atómicos, la dispersión de partículas α por un núcleo o también la descripción del átomo de hidrógeno.

Si se consideran dos partículas puntuales de masas m_1 y m_2 , se requieren 6 cantidades para describir el movimiento de éstas, es decir los dos vectores posición para ambas partículas \vec{r}_1 y \vec{r}_2 . Con esto PK tiene seis grados de libertad, pero estos se pueden reducir a tres si se aborda PK en el *centro de masa*.

Obsérvese que la Lagrangiana del PK es la siguiente:

$$L = \frac{1}{2}m_1|\dot{\vec{r}}_1|^2 + \frac{1}{2}m_2|\dot{\vec{r}}_2|^2 - U(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|). \quad (\text{A.1})$$

Si esta se reescribe en coordenadas relativas y de centro de masa, este problema de seis grados de libertad se puede reducir a uno de tres, es decir:

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2, \quad \vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}, \quad (\text{A.2})$$

Lo que implica que:

$$\vec{r}_1 = \vec{R} + \frac{m_2}{M}\vec{r}, \quad \vec{r}_2 = \vec{R} - \frac{m_1}{M}\vec{r}. \quad (\text{A.3})$$

Con $M = m_1 + m_2$ y $r = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$, por lo que la lagrangiana en la Ec.(A.1) es:

$$L = \frac{M}{2}\dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2}\mu|\dot{\vec{r}}|^2 - U(r), \quad (\text{A.4})$$

donde μ , es la masa reducida: $\mu = \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}$.

Al calcular la ecuación de movimiento para \vec{R} , de las ecuaciones de Euler-Lagrange se tiene que $\dot{\vec{R}} = 0$, por lo que $\vec{R} = cte$. Este vector es el de centro de masa y resulta constante, por lo que, sin perder generalidad se puede elegir igual a cero. Por lo tanto la lagrangiana es:

$$L = \frac{1}{2}\mu|\dot{\vec{r}}|^2 - U(r). \quad (\text{A.5})$$

Ésta es equivalente al de una partícula en un potencial central, es decir, el problema se redujo a un problema equivalente de una partícula con el cambio de coordenadas dado por:

$$\vec{r}_1 = \frac{m_2}{M}\vec{r}, \quad \vec{r}_2 = -\frac{m_1}{M}\vec{r}. \quad (\text{A.6})$$

Además de la ecuación (A.5) se obtiene que la Hamiltoniana es:

$$H = \frac{|\vec{p}|^2}{2\mu} + U(r). \quad (\text{A.7})$$

Si se restringe el movimiento a un plano en coordenadas polares. La lagrangiana Ec.(A.5) es:

$$L = \frac{1}{2}\mu\left(\dot{r} + r^2\dot{\phi}^2\right) - U(r). \quad (\text{A.8})$$

De la ecuación (A.8) se observa que:

$$\frac{d}{dt}\left(\mu r^2\dot{\phi}\right) = 0. \quad (\text{A.9})$$

Por lo existe una constante de movimiento y esta es $\ell = \mu r^2\dot{\phi}$, donde ℓ la es la magnitud del momento angular. Observese que de la Ec.(A.9) se obtiene el área barrida por el radio vector por unidad de tiempo, ya que la diferencial de área se puede interpretar como el área de un triángulo con base r y altura $r d\theta$, $dA = \frac{1}{2}r(rd\theta)$, de lo que se obtiene

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt}. \quad (\text{A.10})$$

La cual es la segunda ley de Kepler. La ecuación de movimiento para r es

$$m\ddot{r} - \frac{\ell}{mr^3} = f(r). \quad (\text{A.11})$$

donde se utilizó el hecho de que $\ell = \mu r^2\dot{\phi}$ es una integral de movimiento y que $f(r) = -\frac{\partial U}{\partial r}$.

De $\ell = \mu r^2\dot{\phi}$ se puede construir el operador diferencial

$$\frac{d}{dt} = \frac{\ell}{mr^2}\frac{d}{d\theta}, \quad (\text{A.12})$$

con lo que la Ec.(A.11) es de la forma

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{mr^2}\frac{dr}{d\theta}\right) - \frac{\ell}{mr^3} = f(r). \quad (\text{A.13})$$

Con el cambio de variable $u = \frac{1}{r}$ en la ecuación (A.13) se obtiene:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{m}{\ell^2}\frac{d}{du}U\left(\frac{1}{u}\right). \quad (\text{A.14})$$

Para el problema de Kepler la fuerza y el potencial pueden ser escritos como $f = -\frac{k}{r^2}$ y $U = -\frac{k}{r}$. con lo que la solución a la Ec.(A.14) es:

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos(\theta - \theta')} \quad (\text{A.15})$$

con e la excentricidad y esta es $e = \sqrt{1 - \frac{\ell^2}{mka}}$ y $a = -\frac{k}{2E}$. Observese que la Ec. (A.15) es la ecuación de una cónica y como se sabe ésta es función de la excentricidad, la cual a su vez es función de la energía. Los posibles movimiento de la orbita son:

$$\begin{aligned} e > 1, & \quad E > 0, & \quad \text{hipérbola} \\ e = 1, & \quad E = 0, & \quad \text{parábola} \\ e < 1, & \quad E < 0, & \quad \text{elipse} \\ e = 0, & \quad E = -\frac{mk^2}{2\ell^2}, & \quad \text{circunferencia} \end{aligned}$$

Es decir (A.15) es la primera ley de Kepler. Puesto que el problema de Kepler es integrable, el problema se puede resolver mediante la cuadratura de la energía

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{r_0}^r \frac{dr'}{\sqrt{\frac{k}{r'} - \frac{\ell^2}{2mr'^2} + E}} \quad (\text{A.16})$$

Si se expresa a E y ℓ en términos de e , a y k , la ecuación anterior toma la forma:

$$t = -\sqrt{\frac{m}{2k}} \int_{r_0}^r \frac{r' dr'}{\sqrt{r' - \frac{r'^2}{2a} - \frac{a(1-e^2)}{2}}} \quad (\text{A.17})$$

Como $r = a(a - e \cos \psi)$, donde ψ es la anomalía excéntrica ver [35], la ecuación anterior toma la forma:

$$t = \sqrt{\frac{ma^3}{k}} \int_0^{2\pi} (1 - e \cos(\psi)) d\psi \quad (\text{A.18})$$

Al hacer la integral de la Ec.(A.18) en el intervalo de 0 a 2π esta proporciona la siguiente expresión para el periodo,

$$\tau^2 = 4\pi^2 a^3 \frac{m}{k}. \quad (\text{A.19})$$

Y ésta última ecuación es conocida como la tercera ley de Kepler.

Apéndice **B**

Transformada de Legendre.

La *transformada de Legendre* es una herramienta matemática muy usada en física, la cual transforma funciones de un espacio vectorial a funciones en un espacio dual. Esta transformación del espacio está relacionada con la dualidad proyectiva y las coordenadas tangenciales de la geometría algebraica. Además es utilizada en la construcción de espacios de Banach duales en Análisis. El ejemplo más apreciable de este tipo de transformación se estudia en Termodinámica, al cambiar de la representación de cierto potencial termodinámico a la representación de otro potencial termodinámico. Otro ejemplo más apreciable del uso de la transformada de Legendre en física es el describir la dinámica de un sistema mediante la función Hamiltoniana, la cual es el resultado de aplicar dicha transformación a la Lagrangiana del sistema.

Como se sabe una curva o una superficie puede ser representada por un conjunto de puntos, pero también si la curva es lo suficientemente suave se puede representar por un conjunto de planos tangentes y la intersección de dichos planos a un origen de referencia. Esto forma una superficie del doble de dimensión de la inicial. Para exhibir esto, considérese el caso unidimensional. Sea y una función de la variable x de al menos clase C^2 ¹ tal que $y = f(x)$, además se pide que f sea convexa, $f''(x) > 0^2$. La gráfica de f es enteramente descrita por los puntos $(x, f(x))$, pero también esta se puede reproducir mediante la pendiente de la tangente s para cada x . Como existe toda una familia de rectas que cumplen con que la pendiente sea s , se elige la coordenada al origen $x(s)$ de la tangente, es decir ahora la curva esta descrita por sus pendientes y ordenadas al origen, $(s, x(s))$. Con esto la transformada de Legendre de f es una función g de una variable s tal como se muestra en la figura (B.1) en la que se muestra que $g(s)$ es la máxima distancia vertical entre la recta $y = sx$ y $f(x)$, es decir:

$$g(s) = sx - f(x) = G(x, x(s)), \quad (\text{B.1})$$

ya que el punto $x(s)$ es definido por la condición del máximo. Por lo tanto:

$$\frac{\partial G}{\partial x} = s - f'(x) = 0, \quad (\text{B.2})$$

de donde s es justamente la pendiente de $f(x)$, así que

$$s = f'(x) \quad (\text{B.3})$$

y como f es convexa el punto $x = x(s)$, existe es y único. A continuación, en la Fig. (B.1) se muestra la representación geométrica de la Transformada de Legendre.

¹Con segunda derivada continua.

²En caso de no ser así se elige un intervalo abierto en el cual se cumpla dicha condición.

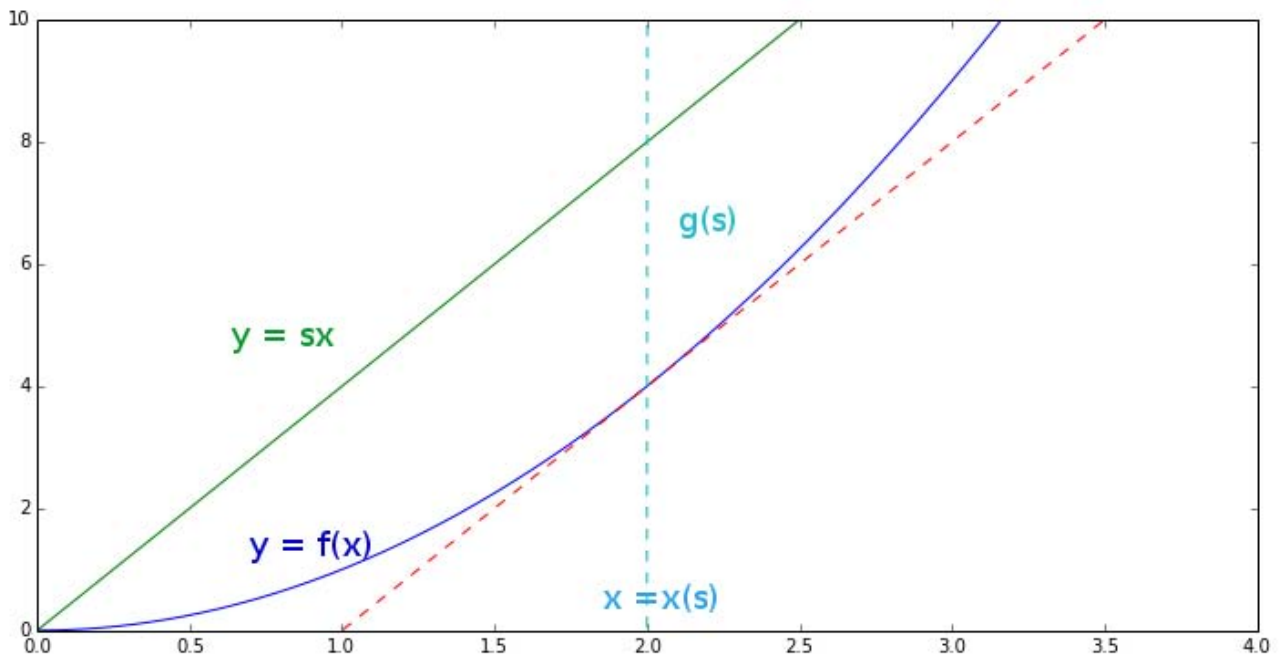


Figura B.1: $g(s)$ es la distancia entre $y = sx$ y la derivada de $y = f(x)$.

Código de simulación.

Aquí se adjunta el código escrito en el lenguaje Python en tres secciones. La primera es la rutina principal la cual ejecuta una librería llamada *Mapeo.lib.py* que realiza secciones de Poincaré en coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas para la coordenada z , esta a su vez ejecuta la librería *lib_PKA.py*. Esta librería contiene la mayoría de las funciones requeridas para el cálculo de la simulación tal como los cambios de coordenadas el cálculo de la transformada de Fourier y demás funciones que se utilizan en la simulación.

C.1. Rutina principal *PKA.py*.

```
#!/usr/bin/env python

# importar librerias
import os
import sys
from numpy import *
from scipy.integrate import *
from pylab import *
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
import shutil
#####
import lib_PKA
import Mapeo_lib
#####

# Definition of global variables.

# epsilon is epsilon = m2/m1
epsilon = 1.1

##### Definition of local variables. #####
##### Initial conditions #####

##### Cartesian Coordinates #####
#print "Condiciones iniciales", ent
while epsilon <= 1.8:
```

```

# print "Valor de epsilon", epsilon
name_dir = "epsilon_%g" %(epsilon)
x = 1.
y = 0.
z = sqrt((epsilon**2) + (((epsilon**2)-1)*x*x))
Px = 0.
Py = sqrt( (epsilon+sqrt((epsilon**2)-1))/sqrt((x*x)+(z*z)) )
Pz = 0.
ent = [ x , y , z , Px , Py , Pz ]

###name_dir = "epsilon_%g" %(epsilon)

files = Mapeo_lib.mapeo(ent,epsilon)

os.makedirs(name_dir,0775)
### os.system("mkdir %s") %(name_dir)
shutil.move(files[0], name_dir)
shutil.move(files[1], name_dir)
shutil.move(files[2], name_dir)
shutil.move(files[3], name_dir)
shutil.move(files[4], name_dir)
shutil.move(files[5], name_dir)
shutil.move(files[6], name_dir)

epsilon = epsilon + 0.05

print "paso en epsilon", epsilon

```

```

#####
#####

```

C.2. Librería *Mapeo_lib.py*

```

#! /usr/bin/env python

# importar librerias
from numpy import *
from scipy.integrate import *
from pylab import *
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D

#####
import lib_PKA

def mapeo(cond_ini,epsilon):
    # Definition of global variables.
    ### print "Valor de epsilon", epsilon

```

```

##### Definition of local variables. #####
##### Initial conditions #####
x = cond_ini[0]
y = cond_ini[1]
z = cond_ini[2]
Px = cond_ini[3]
Py = cond_ini[4]
Pz = cond_ini[5]
##### Cartesian Coordinates #####
ent = [x,y,z,Px,Py,Pz]
###   print "Condiciones iniciales", ent
# Initial energy
E_0 = lib_PKA.energia(ent,epsilon)
###   print 'Energia inicial', E_0

#ent_cyl = lib_PKA.cambio_coord(ent)
# file names
nombre_mapeo_car = "sim_car_%g_%g_%g_%g_%g_%g.txt" %(x,y,z,Px,Py,Pz,epsilon)
nombre_mapeo_cyl = "sim_cyl_%g_%g_%g_%g_%g_%g.txt" %(x,y,z,Px,Py,Pz,epsilon)
nombre_mapeo_sph = "sim_sph_%g_%g_%g_%g_%g_%g.txt" %(x,y,z,Px,Py,Pz,epsilon)
nombre_simulacion = "simulacion_%g_%g_%g_%g_%g_%g.txt" %(x,y,z,Px,Py,Pz,epsilon)
nombre_fft_z = "fft_z_%g_%g_%g_%g_%g_%g.txt" %(x,y,z,Px,Py,Pz,epsilon)
nombre_vec_lrl = "vec_lrl_%g_%g_%g_%g_%g_%g.txt" %(x,y,z,Px,Py,Pz,epsilon)
nombre_vec_L = "vec_L_%g_%g_%g_%g_%g_%g.txt" %(x,y,z,Px,Py,Pz,epsilon)
##### parameters for natural time of system #####

l_vec = lib_PKA.momento_angular(ent)
###   print "El momento angular es:", l_vec
l_up2 = (l_vec[0]*l_vec[0]) + (l_vec[1]*l_vec[1]) + (l_vec[2]*l_vec[2])
###   print "Mondulo del vector momento angular:", sqrt(l_up2)
e = sqrt( abs((2.0*E_0*l_up2) + 1.0) )
###   print "La exentricidad es:", e
a = (l_up2)/(1-e**2)
# a is semi-major axis the e is eccentricity
###   print "El semieje mayor es: ", a

tao = 2*pi*sqrt(a**3)
# tao is the natural time of the system

# Open file.
f = open(nombre_mapeo_car , "w") #Archivo para el mapeo
g = open(nombre_mapeo_cyl , "w") #Archivo para el mapeo en cilindricas
j = open(nombre_mapeo_sph , "w") #Archivo para el mapeo en esfericas
h = open(nombre_simulacion , "w") #Archivo para la simulacion completa
#k = open(nombre_fft_z , "w")
l = open(nombre_vec_lrl , "w") #Archivo para el Vector de Laplace-Runge-Lenz
L_vec = open(nombre_vec_L , "w") #Archivo para ver el momento angular
##### Document write the initial conditions into the files #####
counter = 0

f.write( str(counter) + " " + str(ent[0]) + " " + str(ent[1]) + " " + str(ent[2])
+ " " + str(ent[3]) + " " + str(ent[4]) + " " + str(ent[5]) + "\n" )

```

```

f.close()

dat_cc = lib_PKA.cambio_coord_cyl(ent)
g.write( str(counter) + " " + str(dat_cc[0]) + " " + str(dat_cc[1]) + " "+ str(dat_cc[2])+ " "
+ str(dat_cc[3]) + " " + str(dat_cc[4]) + " " + str(dat_cc[5]) + "\n" )
g.close()

dat_ce = lib_PKA.cambio_coord_sph(ent,epsilon)
j.write( str(counter) + " " + str(dat_ce[0]) + " " + str(dat_ce[1]) + " "+ str(dat_ce[2])+ " "
+ str(dat_ce[3]) + " " + str(dat_ce[4]) + " " + str(dat_ce[5]) + "\n" )
j.close()

#entrada_z=[]
#entrada_z.append(ent[2])
simu_total = []
simu_total.append(array(ent))
h = open(nombre_simulacion , "a")
h.write(str(counter)+ " " + str(ent[0]) + " " + str(ent[1]) + " " + str(ent[2]) +
" " + str(ent[3]) + " " + str(ent[4]) + " " + str(ent[5]) + "\n")
h.close()

dat_rll = lib_PKA.Runge_Lenz_Laplace(ent)
### print "Vector Runge-Lenz-Laplace", dat_rll
l.write(str(counter) + " " + str(dat_rll[0]) + " " + str(dat_rll[1]) + " "+ str(dat_rll[2]) + "\n")
l.close()

dat_am = lib_PKA.momento_angular(ent)
#print "Vetor momento angular", dat_am
L_vec.write(str(counter) + " " + str(dat_am[0]) + " " + str(dat_am[1]) + " "+ str(dat_am[2]) + "\n")
L_vec.close()

mapeo_rho = []
mapeo_Prho = []
mapeo_rho.append(dat_cc[0])
mapeo_Prho.append(dat_cc[3])

# Definition of the range and t
intervalo = tao/20.0
### print 'Tiempo natural ', tao
### print 'Base de tiempo ', intervalo
t = array( [0.0,intervalo] )
# Entrada sobre la que se hace el mapeo
i=2
# Number of roots
m=1
max_raiz_e1 = 100
##### Start Poincare mapping #####

# Energy for mapping
max_var_energia = 1e-8
### print "Variacion de la energia deseada", max_var_energia

```

```

diff_E = 0.0

while (diff_E < max_var_energia and m < max_raiz_e1 ):
    # Integrator
    salida1=odeint(lib_PKA.campo_vec,ent,t,args=(epsilon,),rtol=1e-10,atol=1e-12,
mxstep=int(1e6),Dfun=lib_PKA.jab)
    # Variables
    xini = salida1[0]
    xfin = salida1[1]
    # Save the coordinate "z" for the Fourier of transform.
    counter += 1
    h = open(nombre_simulacion , "a")
    #h.write(str(counter)+ " " + str(xfin[2]) + "\n")
    h.write(str(counter)+ " " + str(xfin[0]) + " " + str(xfin[1]) + " " + str(xfin[2]) +
    " " + str(xfin[3]) + " " + str(xfin[4]) + " " + str(xfin[5]) + "\n")
    h.close()
    # entrada_z.append(xfin[2])
    simu_total.append(xfin)

    l = open(nombre_vec_lrl , "a")
    dat_rll = lib_PKA.Runge_Lenz_Laplace(xfin)
    l.write(str(counter) + " " + str(dat_rll[0]) + " " + str(dat_rll[1]) + " "
+ str(dat_rll[2]) + "\n")
    l.close()

    L_vec = open(nombre_vec_L , "a")
    dat_am = lib_PKA.momento_angular(xfin)
    L_vec.write(str(counter) + " " + str(dat_am[0]) + " " + str(dat_am[1]) + " "
+ str(dat_am[2]) + "\n")
    L_vec.close()

    x_seguir = xfin

    #print xfin
    # Loop "if" to find the change of sign in the variable
    if ( (xini[i])*(xfin[i]) ) < 0:
        # Revisa los puntos
        # print xini, xfin
        raiz = lib_PKA.encasilla(xini,xfin,intervalo,i,epsilon)

        # Open file "raices" for save the data
        f = open(nombre_mapeo_car , "a")
        f.write( str(m) + " " + str(raiz[0]) + " " + str(raiz[1]) + " " + str(raiz[2])+
        " " + str(raiz[3]) + " " + str(raiz[4]) + " " + str(raiz[5]) + "\n")
        f.close()

        # Open file "raicescc" for save the data in coordinate cylindrical
        raizcc = lib_PKA.cambio_coord_cyl(raiz)
        g = open(nombre_mapeo_cyl , "a")
        g.write(str(m)+ " " + str(raizcc[0]) + " " + str(raizcc[1]) + " " + str(raizcc[2]) +
        " " + str(raizcc[3]) + " " + str(raizcc[4]) + " " + str(raizcc[5]) + "\n")
        g.close()

```

```

mapeo_rho.append(raizcc[0])
mapeo_Prho.append(raizcc[3])

# Open file "raicesce" for save the data in coordinate spherical
raizce = lib_PKA.cambio_coord_sph(raiz,epsilon)
j = open(nombre_mapeo_sph , "a")
j.write(str(m)+ " " + str(raizce[0]) + " " + str(raizce[1]) + " " + str(raizce[2])
+ " " + str(raizce[3]) + " " + str(raizce[4]) + " " + str(raizce[5]) + "\n")
j.close()

ent = x_seguir
m = m+1
# Revisa que los puntos
#print xini,xfn
else:
ent=xfn
#print xini, xfn

E_i = lib_PKA.energia(ent,epsilon)
diff_E = abs(E_0 - E_i)
# Imprime a pantalla para ver como va el mapeo
#print m, E_0, E_i, diff_E
# Terminacion del mapeo.
datos = lib_PKA.datos_sim(simu_total)
cuenta_t = array(range(len(datos[0])))
FFT_t_t,FFT_z_t = lib_PKA.rfft_f(cuenta_t,datos[2])
k = open(nombre_fft_z , "w")
for i in xrange(len(FFT_z_t)):
k.write(str(FFT_t_t[i]) + " " + str(FFT_z_t[i]) + "\n")
k.close()
iter = len(cuenta_t)
### print "Numero de iteraciones en el tiempo ", iter
### print "Numero de raices ", m

name_file = [nombre_mapeo_car,nombre_mapeo_cyl,nombre_mapeo_sph,nombre_simulacion,
nombre_fft_z,nombre_vec_lrl,nombre_vec_L]
return array(name_file)
#####

```

C.3. Librería *lib_PKA.py*

```

#! /usr/bin/env python

# importar librerias
import os
import sys
from numpy import *
from scipy.integrate import *
from pylab import *

```

```
#####
##### Functions section. #####
#####

# Definicion de campo vectorial.
def campo_vec(vec,t,epsilon):
r=sqrt( (vec[0]*vec[0]) + (vec[1]*vec[1]) + (vec[2]*vec[2]) )
res = [vec[3], vec[4], vec[5]/epsilon, -(epsilon*vec[0])/(r*r*r), -(epsilon*vec[1])/(r*r*r),
      -(epsilon*vec[2])/(r*r*r)]
return array(res)
#####

# Definition of Jacobian matrix.
def jab(vec,t,epsilon):
r=sqrt( (vec[0])**2 + (vec[1])**2 + (vec[2])**2 )
coef1=-(epsilon)/(r*r*r)
coef2=(3.0*epsilon)/(r*r*r*r*r)
renglon1=[0.0 , 0.0 , 0.0 , 1.0 , 0.0 , 0.0]
renglon2=[0.0 , 0.0 , 0.0 , 0.0 , 1.0 , 0.0]
renglon3=[0.0 , 0.0 , 0.0 , 0.0 , 0.0 , 1.0/epsilon]
renglon4=[coef1+((coef2)*(vec[0]**2)) , ((coef2)*(vec[0]*vec[1])) , ((coef2)*(vec[0]*vec[2])) ,
0.0 , 0.0 , 0.0]
renglon5=[((coef2)*(vec[0]*vec[1])) , (coef1)+((coef2)*(vec[1]**2)) , ((coef2)*(vec[1]*vec[2])) ,
0.0 , 0.0 , 0.0]
renglon6=[((coef2)*(vec[0]*vec[2])) , ((coef2)*(vec[1]*vec[2])) , (coef1)+((coef2)*(vec[2]**2)) ,
0.0 , 0.0 , 0.0]
res=[renglon1,renglon2,renglon3,renglon4,renglon5,renglon6]
return array(res)
#####

# Routine search for mapping zeros.
def encasilla(v1,v2,intervalo,i,epsilon):
n=0
errordeseado=1e-8
error=abs(v2[i])

if error < errordeseado:
raiz = v2[i]
else:
while error > errordeseado:
intervalo = intervalo/2.0
t=array([0,intervalo])
salida=odeint(campo_vec,v1,t,args=(epsilon,)) , rtol=1e-10, atol=1e-12, mxstep=int(1e6) , Dfun=jab)
vmed=salida[1]
if (v1[i])*(vmed[i]) < 0:
v2=vmed
else:
v1=vmed
error=abs(v2[i])
```

```

# Marcador de iteraciones
#n=n+1
#print "Iteracion interna n=",n, error
raiz = vmed
# Raiz encontrada
#print "Esta es la raiz :", raiz
return raiz
#####

# Definition of energy.
def energia(vec,epsilon):
r=sqrt( (vec[0])**2 + (vec[1])**2 + (vec[2])**2 )
kinetic=0.5*( (vec[3])**2 + (vec[4])**2 + ((vec[5])**2)/epsilon )
potencial=-(epsilon)/r
E=kinetic+potencial
return E
#####

# Cylindrical Coordinate Change
def cambio_coord_cyl(xyz):
#Spatial coordinates cylindrical
rho_up2 = (xyz[0])*(xyz[0]) + (xyz[1])*(xyz[1])
rho = sqrt(rho_up2)
if xyz[0] == 0.0 and xyz[1] == 0.0 :
theta = 0.0
if xyz[0] >= 0:
theta = arcsin(xyz[1]/rho)
if xyz[0] < 0:
theta = pi - arcsin(xyz[1]/rho)
z=xyz[2]
#Momentum coordinates cylindrical
prho=( (xyz[0]*xyz[3])+(xyz[1]*xyz[4]) ) / rho
ptheta=(xyz[0]*xyz[4]-xyz[1]*xyz[3])
pz=xyz[5]
rthetaz=[rho,theta,z,prho,ptheta,pz]
return rthetaz
#####

# Spherical Coordinate Change
def cambio_coord_sph(xyz,epsilon):
#Spatial coordinates spherical
r_up2 = xyz[0]*xyz[0] + xyz[1]*xyz[1] + xyz[2]*xyz[2]
r = sqrt(r_up2)
rho_up2 = xyz[0]*xyz[0] + xyz[1]*xyz[1]
rho = sqrt(rho_up2)

if xyz[2] > 0.0 :
theta = arctan(sqrt((xyz[0])*(xyz[0]) + (xyz[1])*(xyz[1]))/xyz[2])
elif xyz[2] == 0:
theta = pi/2.0
else:# xyz[2] < 0:
theta = pi + arctan(sqrt((xyz[0])*(xyz[0]) + (xyz[1])*(xyz[1]))/xyz[2])

```

```

if (xyz[0] > 0.0 and xyz[1] > 0.0) :
phi = arctan(xyz[1]/xyz[0])

elif (xyz[0] > 0.0 and xyz[1] < 0.0) :
phi = 2*pi + arctan(xyz[1]/xyz[0])
elif xyz[0] == 0.0 :
phi = pi*0.5*sing(xyz[1])
else:# xyz[0] < 0.0 :
phi = pi + arctan(xyz[1]/xyz[0])

# Momentum coordinates ### Falta evaluar los momentos #####

r_vec = [xyz[0],xyz[1],xyz[2]]
p_vec = [xyz[3],xyz[4],xyz[5]]
pdotx = dot(p_vec,r_vec)
#

prho = ((pdotx)*(rho_up2*rho_up2 + epsilon*xyz[2]*xyz[2]))/(r_up2) +
((1.0 - epsilon)/
(r*r*r))*( xyz[2]*xyz[2]*(xyz[3]*xyz[0] + xyz[4]*xyz[1]) - (xyz[5]*xyz[2]*rho_up2)/(epsilon) )
ptheta = ( ( xyz[2]*(xyz[3]*xyz[0] + xyz[4]*xyz[1]) )/(rho) - (xyz[5]*rho)/(epsilon) )*
(epsilon*rho_up2* + xyz[2]*xyz[2]) + (1.0 - epsilon)*rho*xyz[2]*pdotx *(1/r_up2)
pphi = xyz[4]*xyz[0] - xyz[3]*xyz[1]

rhophitheta=[rho,phi,theta,prho,pphi,ptheta]
return rhophitheta
#####

# Angular Momentum

def momento_angular(ent):
vec_r = [ ent[0], ent[1] , ent[2] ]
vec_P = [ ent[3], ent[4] , ent[5] ]
L=[ (vec_r[1]*vec_P[2]) - (vec_r[2]*vec_P[1]), (vec_r[2]*vec_P[0]) - (vec_r[0]*vec_P[2]) ,
(vec_r[0]*vec_P[1]) - (vec_r[1]*vec_P[0]) ]
return array(L)
#####
# Angular Momentum z component

def momento_angular_z(ent):
vec_rho = [ ent[0], ent[1] ]
vec_Prho = [ ent[3], ent[4] ]
L_z = (vec_rho[0]*vec_Prho[1]) - (vec_rho[1]*vec_Prho[0])
return L_z
#####

# Runge_Lenz_Laplace

def Runge_Lenz_Laplace(ent):
vec_r = [ ent[0], ent[1] , ent[2] ]

```

```

vec_P = [ ent[3], ent[4] , ent[5] ]
r = sqrt((ent[0]**2) + (ent[1]**2) + (ent[2]**2))
P_up2 = (ent[3]**2) + (ent[4]**2) + (ent[5]**2)
P_dot_r = (vec_P[0])*(vec_r[0]) + (vec_P[1])*(vec_r[1]) + (vec_P[2])*(vec_r[2])

A = [(P_up2*vec_r[0]) - (P_dot_r*vec_P[0]) - (vec_r[0]/r) , (P_up2*vec_r[1]) - (P_dot_r*vec_P[1]) -
(vec_r[1]/r) , (P_up2*vec_r[2]) - (P_dot_r*vec_P[2]) - (vec_r[2]/r)]
return A
#####

# Transformada de Fourier en omega
def rfft_w(x,fdex):
    n = len(fdex)
    #print n
    delta_x = x[1] - x[0]
    omega = linspace(0.0,1.0/delta_x,n/2 + 1)
    omega = omega*pi
    #print len(omega)
    T_fdex = (np.fft.rfft(fdex) )/n
    #print len(T_fdex)
    espectro = abs(T_fdex)
    return omega,espectro
#####

# Transformada de Fourier en frecuencia

def rfft_f(x,fdex):
    n = len(fdex)
    #print n
    delta_x = x[1] - x[0]
    omega = linspace(0.0,1.0/delta_x,n/2 + 1)
    #Tomar en cuenta que omega esta escalado por pi
    frec = omega/2
    #print len(omega)
    T_fdex = (np.fft.rfft(fdex) )/n
    #print len(T_fdex)
    espectro = abs(T_fdex)
    return frec,espectro

#####

# Manejo de datos de la simulacion

def datos_sim(datos):
    simu_total = matrix(datos)
    x_t = []
    for i in xrange(len(simu_total)): x_t.append(simu_total[i,0])
    x_t = array(x_t)
    #
    y_t = []
    for i in xrange(len(simu_total)): y_t.append(simu_total[i,1])
    y_t = array(y_t)

```

```
#
z_t = []
for i in xrange(len(simu_total)): z_t.append(simu_total[i,2])
z_t = array(z_t)
#
Px_t = []
for i in xrange(len(simu_total)): Px_t.append(simu_total[i,3])
Px_t = array(Px_t)
#
Py_t = []
for i in xrange(len(simu_total)): Py_t.append(simu_total[i,4])
Py_t = array(Py_t)
#
Pz_t = []
for i in xrange(len(simu_total)): Pz_t.append(simu_total[i,5])
Pz_t = array(Pz_t)
#
return [x_t,y_t,z_t,Px_t,Py_t,Pz_t]

#####

# Funcion para hacer el mapeo

#####

# Functions section end.
#####
```

Bibliografía

- [1] K. Sitnikov. *The Existence of Oscillatory Motions in the Three-Body Problem*. Soviet Physics Doklady,(1961) 5:64.
- [2] H. Goldstein, C. Poole y J. Safko. *Classical Mechanics*. Addison Wesley, USA 2006.
- [3] J.V. José y E.J. Saletan. *Classical Dynamics A Contemporary Approach*. Cambridge University Press, USA 2006.
- [4] R.P. Pascual. *Notas de Mecánica Clásica*. (por publicar), México D.F.
- [5] I. Newton. The Mathematical Principles of Natural Philosophy, Enciclopedia Británica, Londres.
- [6] A.N. Kolmogorov, The general theory of dynamical systems and classical mechanics. Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Amsterdam, 1954), Vol. 1, pp 315-333, North Holland, Amsterdam, 1957 [en Ruso]. [Reimpreso en: International Mathematical Congress in Amsterdam, 1954 (Plenary Lectures), pages 187-208.
- [7] Lorenz, Edward N. (1963). Deterministic non-periodic flow. Journal of the Atmospheric Sciences 20 (2): 130–141
- [8] Mishchenko, A., Fomenko, A., Generalized Liouville method of integration of Hamiltonian systems, Funct. Anal. Appl. 12 (1978) 113
- [9] J.B. Marion y S. T Thornton. *Classical Dynamics of Particles and Systems*. Thomson Brooks/Cole, USA 2004.
- [10] E. Yépez y M.Y. Yépez. *Mecánica Analítica*. Las prensas de ciencias, México D.F. 2007.
- [11] L.D. Landau y E.M. Lifshitz. *Mecánica Volumen 1 del Curso de Física Teórica*. Reveté, España 1994.
- [12] V.I. Arnold. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Springer, USA 1989.
- [13] M. Tabor. *Chaos and Integrability in Nonlinear Dynamics, An Introduction* . John Wilwe & Sons, USA 1989.
- [14] J. D. Meiss. *Differential Equations Dynamical Systems*. Society for Industrial and Applied Mathematical, USA, 2007.
- [15] J.M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds* . Springer, USA 2000.
- [16] W. E. Boyce y R. C. DiPrima. *Elementary Differential Equations*. Addison Wesley, USA 2008.
- [17] J.D. Meiss. *Simplectic maps, variational principles, and transport*. Reviews of Modern Physics,(1992) 64:795–848.

-
- [18] E. Ott. *Chaos in dynamical systems*. Cambridge University Press, Canadá. 1993
- [19] G. Teschl. *Ordinary Differential Equations and Dynamical Systems*. American Mathematical Society, USA, 2012.
- [20] G. Arfken. *Mathematical methods for physicists*. Academic Press, USA.
- [21] <http://www.python.org>.
- [22] <http://ipython.org>.
- [23] <http://www.odeint.com>.
- [24] <http://scipy.org>.
- [25] <http://numpy.org>.
- [26] <http://matplotlib.org>.
- [27] J.E. Marsden y A.J. Tromba. *Vector Calculus*. W.H. Freeman and Company, New York 2003.
- [28] T. S. Parker y L. O. Chua. *Practical numerical algorithms for chaotic systems*. Springer-Verlag, USA. 1989.
- [29] <http://julialang.org>.
- [30] T. S. Parker y L. O. Chua. *Practical numerical algorithms for chaotic systems*. Springer-Verlag, USA. 1989.
- [31] E. A. Perdios. *The manifolds of families of 3D periodic orbits associated to Sitnikov motions in the restricted three-body problem*. *Celestial Mech Dyn Astr*,(2007) 99:85–104.
- [32] Vladislav V. Sidorenko. *On the circular Sitnikov problem: the alternation of stability and instability in the family of vertical motions*. *Celestial Mech Dyn Astr*,(2011) 109:367–384.
- [33] Lidia Jimenez-Lara y Adolfo Escalona-Buendía. *Symmetries and Bifurcations in the Sitnikov Problem*. *Celestial Mech Dyn Astr*,(2001) 79:97–117.
- [34] S.B. Faruque. *Solution of the Sitnikov Problem. Approximate Analytic Solution of the Sitnikov Problem for Low Primary Eccentricities*. *Celestial Mech Dyn Astr*,(2003) 87:353–369.
- [35] H. Pollard. *Mathematical Introduction to Celestial Mechanics*. Prentice-Hall, USA 1966.
- [36] R. Méndez-Fragoso y P. Porrás-Flores. *El Problema de Kepler Asimétrico*. LVI Congreso Nacional de Física, Centro Cultural Bicentenario de la UASLP, octubre 2013. San Luís Potosí, San Luis Potosí.
-