



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS

POSICIÓN DE PUENTES Y POSICIÓN DELGADA  
PARA NUDOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICA

P R E S E N T A :

LOURDES BERENICE AISPURO ZUÑIGA

TUTORA:

DRA. FABIOLA MANJARREZ GUTIÉRREZ

COTUTOR:

DR. MARIO EUDAVE MUÑOZ

2015





Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



## Agradecimientos.

Realicé este trabajo en las instalaciones del Centro de Investigación en Matemáticas(CIMAT) Guanajuato, en el periodo de febrero-julio de 2014 bajo la dirección de la Dra. Fabiola Manjarrez Gutiérrez a quien agradezco aceptar ser mi guía, ser un ejemplo a seguir, por enseñarme lo que sé sobre nudos y hacerme sentir que podía lograrlo, por tenerme tanta paciencia, por apoyarme y estar cuando la necesito. Agradezco también al Dr. Mario Eudave Muñoz por ser mi asesor interno, por sus comentarios y su apoyo.

Durante la realización de este trabajo conté con el apoyo de CIMAT y el proyecto CB-2012-01/181882 de CONACyT. Agradezco a estas instituciones por respaldarme y confiar en mi, ya que debo a estos la fluidez y desarrollo oportuno de esta tesis.

A mi universidad, la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM) por brindarme la oportunidad de realizar allí mis estudios de licenciatura, así como permitirme un fácil acceso a la cultura y la ciencia.

Tampoco habría logrado esto sin el apoyo incondicional de mi madre, mi familia y amigos. A esos que siempre han estado, están y sé que estarán ahí cuando los necesite.

A todos estos dedico el resultado de mi esfuerzo.



## Índice general

Capítulo 1. Introducción	5
Capítulo 2. Preliminares	9
1. Nociones de Topología	9
2. Variedades	12
3. Categoría PL	13
4. Superficies	17
5. Categoría diferenciable	19
6. Funciones de Morse	21
7. Funciones de Morse sobre superficies orientables	24
8. Teorema de Jordan y Teorema de Alexander	27
9. Nudos	31
Capítulo 3. Posición de puentes y posición delgada	43
1. Número de puentes y posición de puentes.	43
2. Posición delgada y ancho de un nudo.	47
3. Adelgazando el nudo trivial.	54
4. Posición delgada y superficies de Seifert.	59
Capítulo 4. Posición delgada y superficies planas esenciales	61
Capítulo 5. Ejemplos de nudos en posición delgada	69
Bibliografía	73



## Capítulo 1

### Introducción

Un nudo es un objeto matemático al que podemos ver como una cuerda anudada en el espacio. Decimos que dos nudos son equivalentes si podemos deformar uno continuamente y sin romperlo, hasta obtener el otro. El problema de la teoría de nudos es la clasificación de éstos, es decir, dar una lista completa y sin repeticiones de todos los nudos, para esto se han desarrollado invariantes, éstos son propiedades que se preservan para nudos que son equivalentes.

La manera más práctica de pensar en un nudo dado es tomar su proyección en el plano, a lo que formalmente nos referimos como diagrama, ésta es una buena manera de visualizar un nudo ya que además, es posible recuperar, a partir de éste, un nudo equivalente en el espacio. El invariante más antiguo de nudos, sugerido por su diagrama asociado le llamamos número de cruces, este es el mínimo número posible de cruces. Existen listas de nudos basadas en este número, más aún, los nombres de cada nudo en estas listas corresponden a este invariante.

Ahora en vez de tomar la proyección de un nudo en el plano, tomamos la proyección a la recta real; por ejemplo, usamos la función altura estándar  $h$ , tal que al restringirla a  $K$  es una función de Morse. Esto significa que tiene un número finito de puntos críticos no degenerados. La teoría de Morse nos garantiza que en este caso  $h|_K$  sólo tiene máximos y mínimos. Si todos los máximos ocurren antes que todos los mínimos decimos que el nudo está en una posición de puentes y el número de puentes de esa proyección de  $K$  es el número de máximos de  $h|_K$ . Cuando un representante de  $K$  minimiza este número, decimos que está en posición de puentes y este número es el número de puentes de  $K$ .

El número de puentes de un nudo  $K$  en  $S^3$  es un invariante clásico del nudo, fue introducido por Schubert en [10], está bien entendido, por ejemplo, bajo la suma conexas, pues está demostrado que este invariante es esencialmente aditivo. Para una función de Morse arbitraria los máximos y mínimos podrían ocurrir de manera alternada. Para un valor regular  $t$  entre dos valores críticos consecutivos, contamos las intersecciones del nudo con el plano  $h^{-1}(t)$ , si hacemos esto para cada par de valores críticos consecutivos obtenemos una lista ordenada de números, los cuales sumamos y



esta suma resulta ser otro invariante numérico, al que llamamos ancho de la posición del nudo. Cuando un representante del nudo minimiza esta suma, decimos que este está en posición delgada y el ancho de su posición es el ancho del nudo.

El concepto de posición delgada para un nudo fue desarrollado por Gabai en [2]. Se ha probado que es una noción extraordinariamente útil, al grado de jugar un papel clave en la prueba de Gabai de la propiedad R de los nudos, así como en la solución de Gordon-Luecke del problema del complemento del nudo(1989).

En esta tesis nos concentramos principalmente en los resultados de Thompson [11], donde se examinan la relación entre posición de puentes y posición delgada, demostrando que dado un nudo, existen dos posibilidades: su posición delgada coincide con su posición de puentes, o bien, el nudo contiene una superficie plana meridional incompresible propiamente encajada en su complemento. Thompson pregunta si un nudo en posición delgada pero que no está en posición de puentes tiene una superficie de nivel esencial. En [12] Wu da una solución positiva exhibiendo la superficie que cumple tal característica.

Este trabajo está organizado de la siguiente manera:

El capítulo 2 está dedicado a conceptos y resultados básicos. Definimos  $n$ -variedad y las tres principales categorías en las que estudiamos las variedades. También estudiamos funciones de Morse; vemos separadamente el caso particular de funciones de Morse sobre superficies y de manera breve estudiamos las principales propiedades de estas funciones. Analizamos algunos resultados como el teorema de Alexander y el teorema de la curva de Jordan, los que demostramos usando teoría de Morse. Al final de esta sección hablamos de nudos, desde su definición hasta el teorema de Seifert, que nos muestra un algoritmo para encontrar la superficie de Seifert de un nudo arbitrario y el invariante de género de un nudo que de este resultado se deriva.

En el capítulo 3 definimos posición de puentes y posición delgada. Demostramos que si el nudo trivial está en una posición de puentes siempre es posible llevarlo a su posición delgada, de manera que durante isotopía su ancho no aumente. Mostramos un resultado que nos ayuda a calcular el ancho de un nudo a partir de sus niveles gruesos y delgados. Además demostramos otros resultados útiles e interesantes.

En el capítulo 4 desarrollamos los resultados de los artículos de Thompson y Wu. Además examinamos el ancho de la suma conexas de ciertos nudos.

Finalizamos con el capítulo 5, donde damos ejemplos de familias de nudos para las cuales la posición de puentes coincide con la posición delgada. También damos algunos ejemplos de nudos para los que ambas posiciones difieren.



## Capítulo 2

### Preliminares

En este capítulo repasaremos algunos conceptos de topología. Definiremos el concepto de  $n$ -variedad y estableceremos las tres categorías en que se pueden estudiar. Desarrollaremos algunos temas de 2-variedades, 3-variedades y de la teoría de nudos.

#### Notación.

Para cualquier número natural  $n$ , llamaremos el espacio  $n$ -dimensional a  $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n\}$  y el subconjunto  $\{(x_1, \dots, x_n) : x_n \geq 0\}$  de  $\mathbb{R}^n$  lo denotaremos por  $\mathbb{R}_+^n$ . El subconjunto  $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$  donde  $\|x\|$  representa la norma usual de  $x$  en el  $n$ -espacio, es la  $n$ -bola y a  $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$  es la  $n$ -esfera. Notemos que  $\partial B^{n+1} = S^n$ . Nos referiremos a  $B^1 = [0, 1]$  como  $I$ , y a  $B^2$  como 2-disco o simplemente disco.

#### 1. Nociones de Topología

**DEFINICIÓN 2.1.** Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico,  $Y$  un conjunto. Si  $q : X \rightarrow Y$  es una función sobreyectiva. Dotamos a  $Y$  de la topología  $\tau' = \{U \subset Y : q^{-1}(U) \in \tau\}$ . De esta manera, tenemos que  $U \subseteq Y$  es abierto si y sólo si  $q^{-1}(U)$  es abierto en  $X$ . Esta topología es llamada **topología cociente** inducida por  $q$ . A la función  $q$  le llamamos **función cociente**.

Si tenemos una relación de equivalencia  $\sim$  sobre  $X$ , consideramos  $\tilde{X}$ , el conjunto cuyos elementos son las clases de equivalencia de  $X$ . La función proyección natural  $\pi : X \rightarrow \tilde{X}$ , que manda a cada elemento  $x$  de  $X$  a su clase de equivalencia  $[x]$  es una función sobreyectiva. Entonces, el espacio  $\tilde{X}$  dotado con la topología cociente lo llamamos **espacio cociente**.

**TEOREMA 2.2** (Propiedad universal de los cocientes). Sea  $X$  un espacio topológico y  $\sim$  una relación de equivalencia en  $X$ . Sea  $\pi : X \rightarrow \tilde{X}$  la proyección natural y  $f : X \rightarrow Y$  es una función continua tal que si  $x \sim y$  se tiene que  $f(x) = f(y)$

para toda  $x, y \in X$ . Entonces existe una única función continua  $\tilde{f} : \tilde{X} \rightarrow Y$  tal que  $\tilde{f} \circ \pi = f$ .

DEMOSTRACIÓN. Definimos  $\tilde{f} : \tilde{X} \rightarrow Y$  por  $[x] \mapsto f(x)$ . Demostraremos que esta función cumple lo requerido.

- Sean  $x, y$  representantes de la misma clase de equivalencia, esto es,  $[x] = [y]$ , entonces  $\pi(x) = \pi(y)$ , lo que implica que  $f(x) = f(y)$ . Así que  $\tilde{f}([x]) = \tilde{f}([y])$ . Por lo tanto,  $\tilde{f}$  está bien definida.
- Por la definición de  $\tilde{f}$  tenemos que  $\tilde{f} \circ \pi = f$ .
- Supongamos que  $g$  es una función tal que  $g \circ \pi = f$ , entonces  $g([x]) = g(\pi(x)) = f(x) = \tilde{f}([x])$ . Por lo tanto,  $\tilde{f}$  es única.
- Como  $f$  es continua y  $f = \tilde{f} \circ \pi$ , entonces  $\tilde{f}$  es continua por la definición de la topología de  $\tilde{X}$ .

□

Ejemplos de espacios cocientes:

- Sea  $\sim$  la relación de equivalencia en  $I \times I$ , donde  $(0, y) \sim (1, y)$  y  $(x, 0) \sim (x, 1)$  para cada  $0 \leq x, y \leq 1$ . Al espacio  $\widetilde{I \times I}$  lo llamamos **Toro** y lo denotamos por  $T^2$ .
- Sea  $\sim$  la relación en  $I \times I$  definida por  $(0, y) \sim (1, 1 - y)$  para cada  $0 \leq y \leq 1$ . Al espacio  $\widetilde{I \times I}$  lo llamamos **Banda de Möbius**.
- Sea  $\sim$  la relación en  $I \times I$  definida por  $(0, y) \sim (1, 1 - y)$  y  $(x, 0) \sim (x, 1)$  para cada  $0 \leq x, y \leq 1$ . Al espacio  $\widetilde{I \times I}$  lo llamamos **Botella de Klein**.
- Sea  $\sim$  la relación en el disco definida por  $(x, y) \sim (-x, -y)$  para cada  $(x, y) \in S^1$ . Al espacio  $\tilde{B}^2$  lo llamamos **Plano proyectivo** y lo denotamos por  $P^2$ .
- Dados dos espacios topológicos  $X, Y$  y  $A$  un subconjunto cerrado de  $X$ . Sea  $f : A \rightarrow Y$  una función continua. Definimos una relación de equivalencia  $\sim$  sobre la unión disjunta  $X \sqcup Y$  como sigue:  $a \sim f(a)$  para toda  $a \in A$ . El espacio cociente  $\widetilde{X \sqcup Y}$ , se llama **espacio de adjunción** y lo denotamos por  $X \cup_f Y$ .

Ver figura 2.1.

TEOREMA 2.3 (El truco de Alexander). *Sea  $h : \partial B^n \rightarrow \partial B^n$  una función continua. Entonces podemos extender  $h$  a una función continua  $H : B^n \rightarrow B^n$ , tal que  $H|_{\partial B^n} = h$ . Más aún, si  $h$  es homeomorfismo podemos hacer que  $H$  también sea homeomorfismo.*

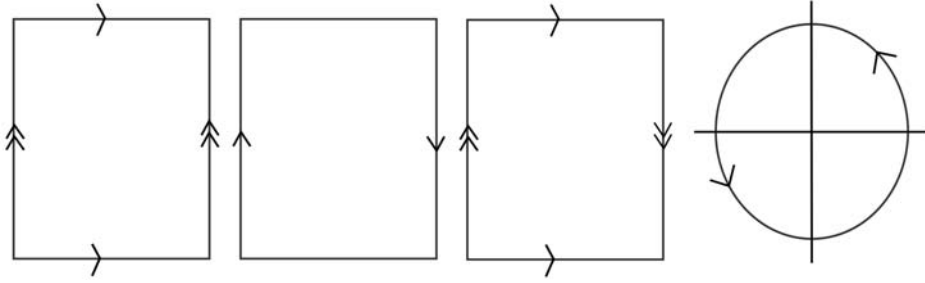


FIGURA 2.1. Ejemplos de Espacios cocientes: el toro, la banda de Möbius, la botella de Klein y el plano proyectivo.

DEMOSTRACIÓN. Sea  $H : B^n \rightarrow B^n$ , definida como

$$H(x) = \begin{cases} \|x\|h(\frac{x}{\|x\|}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Es evidente que  $H$  está bien definida, es continua, y como para todo punto  $x \in \partial B^n$  se tiene que  $\|x\| = 1$ , es inmediato que  $H(x) = h(x)$ .

Ahora, si  $h$  es homeomorfismo, entonces tiene inversa, por lo que podemos definir la inversa de  $H$  como

$$H^{-1}(w) = \begin{cases} \|w\|/h^{-1}(\frac{w}{\|w\|}) & \text{si } w \neq 0 \\ 0 & \text{si } w = 0 \end{cases}$$

Esta función es continua, pues  $h^{-1}$  lo es. Así,  $H$  es homeomorfismo.  $\square$

DEFINICIÓN 2.4. Sea  $\psi : X \rightarrow Y$  una función continua e inyectiva. Decimos que  $\psi$  es un **encaje** si  $\psi : X \rightarrow \psi(X)$  es homeomorfismo, y entonces decimos que  $X$  está **encajado** en  $Y$ . Si  $X, Y$  tienen fronteras tales que  $\psi(X) \cap \partial Y = \psi(\partial X)$  entonces diremos que  $\psi$  es un **encaje propio** y que  $X$  está **propriadamente encajado** en  $Y$ .

DEFINICIÓN 2.5. Dos encajes  $f, g : X \rightarrow Y$  son **isotópicos** si existe una función continua  $H : X \times I \rightarrow Y$  tal que  $H(x, 0) = f(x)$  y  $H(x, 1) = g(x)$  para todo  $x \in X$  y además para cada  $t \in I$  se tiene que la función  $H_t(x) = H(x, t)$  es un encaje. La función  $H$  se llama **isotopía** entre  $f$  y  $g$ .

## 2. Variedades

En este capítulo estudiaremos las variedades con algunas de sus características y las categorías en que estudiamos estos objetos.

**DEFINICIÓN 2.6.** *Un espacio topológico  $M$  es una  $n$ -variedad (o **variedad de dimensión  $n$** ) si cumple con las siguientes propiedades: es un espacio Hausdorff, tiene una base contable, y si cada punto  $x \in M$  tiene una vecindad homeomorfa a  $\mathbb{R}^n$  o a  $\mathbb{R}_+^n$ .*

*A los puntos de la variedad cuya vecindad es homeomorfa a  $\mathbb{R}_+^n$  se les llama **puntos frontera** de  $M$ .*

*El conjunto de todos los puntos frontera de  $M$  se le llama **frontera** de  $M$ , a la que denotamos  $\partial M$ . Este conjunto es una variedad de dimensión  $n - 1$ .*

*El **interior** de  $M$  es el complemento de la frontera en  $M$  y lo denotamos como  $\text{int}M$ .*

*Decimos que una variedad  $M$  es **compacta** si, para cada subcubierta abierta de  $M$ , podemos encontrar una subcubierta abierta finita.*

*Si  $M$  es compacta y  $\partial M = \emptyset$ , decimos que  $M$  es una variedad **cerrada**.*

Dos variedades topológicas  $M, M'$  son equivalentes si existe un homeomorfismo entre ellas.

### Ejemplos:

- (i) 1-variedades:
  - a) El conjunto de los números reales,  $\mathbb{R}$  es una variedad no compacta y no tiene frontera.
  - b) El subespacio  $I \subset \mathbb{R}$  es una variedad compacta y  $\partial I = \{0, 1\}$ .
  - c) El círculo  $S^1$  es una variedad cerrada.
- (ii) 2-variedades:
  - a) El plano real  $\mathbb{R}^2$  es una variedad sin frontera.
  - b) El conjunto  $I \times I$  es una variedad compacta y con frontera  $\partial(I \times I) = \{(I \times \{0\}) \cup (I \times \{1\}) \cup (\{0\} \times I) \cup (\{1\} \times I)\}$ .
  - c) La 2-esfera  $S^2$  es una variedad cerrada.

Observemos que si tomamos  $S^2$  y removemos un número finito de discos ajenos abiertos, el resultado es una 2-variedad compacta y cuya frontera es un número finito de círculos.

(iii) 3-variedades:

- a) El espacio  $\mathbb{R}^3$  es una variedad no compacta y sin frontera.
- b) El espacio  $S^3$  es una variedad cerrada.
- c) La 3-bola es una variedad compacta con frontera  $S^2$ . El toro sólido  $D^2 \times S^1$  es una variedad compacta cuya frontera es  $T^2$ .

Las variedades son estudiadas en tres principales categorías:

- La categoría *topológica* (TOP). En ésta no existe ninguna estructura adicional sobre la variedad, excepto lo que enuncia la definición. Nos referimos a las variedades de esta categoría simplemente como *variedades*.
- La categoría *diferenciable* (DIFF). En esta categoría se estudian las variedades que llamamos *variedades diferenciables*.
- La categoría *PL* (TRIANG). En esta categoría se estudian las variedades que admiten una triangulación. Nos referimos a estas variedades como *variedades triangulables*.

Existen variedades topológicas de dimensión  $n$  que no admiten triangulación o que no son diferenciables.

En el caso de variedades de dimensión 2 y 3 estas tres categorías coinciden. Por ejemplo: cualquier 2-variedad topológica admite una triangulación.

La ventaja de esta equivalencia entre categorías es que podemos demostrar teoremas usando la categoría que mejor se adecúe a las hipótesis del teorema.

### 3. Categoría PL

**DEFINICIÓN 2.7.** Sea  $\{x_0, x_1, \dots, x_k\}$  un subconjunto de  $\mathbb{R}^n$ , con  $n \geq k + 1$ . Diremos que los elementos del conjunto  $\{x_0, x_1, \dots, x_k\}$  están en **posición general** siempre que  $\{x_1 - x_0, x_2 - x_0, \dots, x_k - x_0\}$  sea un conjunto linealmente independiente.

Sea  $\{x_0, x_1, \dots, x_k\} \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto en posición general. Definimos

$$\langle x_0, x_1, \dots, x_k \rangle := \left\{ \sum \lambda_i x_i : \lambda_i \geq 0 \text{ y } \sum \lambda_i = 1 \right\}$$



como el  $k$ -**simplejo** generado por  $\{x_0, x_1, \dots, x_k\}$ . A los puntos  $x_i$  les llamaremos **vértices** del  $k$ -simplejo.

En la figura 2.2 tenemos ejemplos de  $k$ -simplejos para  $k = 0, 1, 2, 3$ .

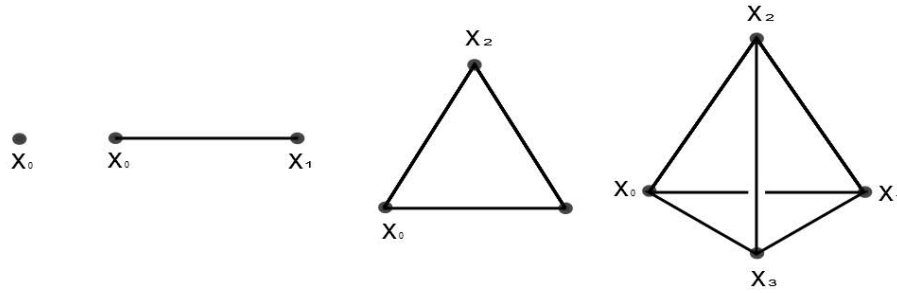


FIGURA 2.2. Un 0-simplejo, un 1-simplejo, un 2-simplejo y un 3-simplejo.

DEFINICIÓN 2.8. Sea  $\sigma = \langle x_0, x_1, \dots, x_k \rangle$  un  $k$ -simplejo en  $\mathbb{R}^n$ , sean  $\gamma \subset \{x_0, x_1, \dots, x_k\}$  y  $\tau = \langle \gamma \rangle$ . Entonces llamamos a  $\tau$  una **cara** de  $\sigma$  de dimensión  $|\gamma| - 1$  y la denotamos por  $\tau \prec \sigma$ .

DEFINICIÓN 2.9. Sea  $K$  un conjunto de simplejos en  $\mathbb{R}^n$ , llamaremos a  $K$  un **complejo simplicial**, cuya dimensión es la máxima dimensión sobre todos los simplejos de  $K$ , siempre que cumpla lo siguiente:

- i) Si  $\sigma \in K$  y  $\tau \prec \sigma$ , entonces  $\tau \in K$ .
- ii) Si  $\tau, \sigma \in K$  y  $\tau \cap \sigma \neq \emptyset$ , entonces  $\tau \cap \sigma \prec \tau$  y  $\tau \cap \sigma \prec \sigma$ .
- iii) Para todo  $\sigma \in K$  existe un conjunto abierto  $U \in \mathbb{R}^n$ , tal que  $\sigma \subset U$  y  $U$  interseca a un número finito de elementos de  $K$ .

DEFINICIÓN 2.10. Sea  $K$  un complejo simplicial. Definimos el conjunto

$$|K| := \bigcup_{\sigma \in K} \sigma$$

como el **poliedro** de  $K$ .

DEFINICIÓN 2.11. Sea  $K$  un complejo de dimensión  $m$  y sea  $r \leq m$ . Definimos

$$K^r := \{\sigma \in K : \dim(\sigma) \leq r\}$$

como el  **$r$ -esqueleto** de  $K$ .

DEFINICIÓN 2.12. Sea  $f : \langle x_0, x_1, \dots, x_r \rangle \rightarrow \langle y_0, y_1, \dots, y_s \rangle$  definida por  $\sum \lambda_i x_i \mapsto \sum \lambda_i f(x_i)$ , entonces llamamos a  $f$  una **función lineal** siempre que  $f(x_i) \in \{y_0, y_1, \dots, y_s\}$  para cada  $0 \leq i \leq r$ .

Notemos que todas las funciones lineales, mandan vértices en vértices.

DEFINICIÓN 2.13. Sean  $K$  y  $L$  complejos simpliciales y  $f : |K| \rightarrow |L|$  continua. Decimos que  $f$  es **simplicial** si para todo simplejo  $\sigma \in K$  se cumple que  $f|\sigma$  es lineal.

DEFINICIÓN 2.14. Sean  $K$  y  $L$  complejos simpliciales. Diremos que  $L$  es una **subdivisión** de  $K$  si se cumple que  $|L| = |K|$  y para todo  $\sigma \in L$  existe  $\tau \in K$  tal que  $\sigma \subset \tau$ .

DEFINICIÓN 2.15. Sea  $f : |K| \rightarrow |L|$  continua, diremos que  $f$  es una **función PL** si existe una subdivisión  $L'$  de  $L$  y una subdivisión  $K'$  de  $K$ , tal que  $f : K' \rightarrow L'$  es simplicial.

Observación: La composición de funciones PL, es una función PL. Diremos que un homeomorfismo es PL, si además de todas sus propiedades es también una función PL con inversa PL.

DEFINICIÓN 2.16. Sea  $M$  una  $n$ -variedad compacta, diremos que  $M$  es **triangulable** si existe un complejo simplicial  $K$  y un homeomorfismo  $\psi : |K| \rightarrow M$ .

Dos variedades triangulables  $M, M'$  son equivalentes si existe un homeomorfismo PL entre ellas.

**Hecho:** Se sabe que todas las variedades compactas de dimensión 1, 2 y 3 son triangulables.

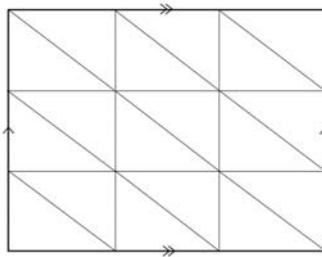


FIGURA 2.3. Una triangulación para el toro.

DEFINICIÓN 2.17. Sea  $M$  una  $n$ -variedad triangulable,  $V$  una  $n$ -subvariedad compacta y  $Y \subset M$  subcomplejo finito. Diremos que  $V$  es una **vecindad regular** de  $Y$  si

- i)  $Y$  está contenida en el interior de  $V$  y
- ii)  $V$  se colapsa a  $Y$ , esto significa que podemos ir borrando en un cierto orden los simplejos de  $V$  hasta llegar a  $Y$ .

DEFINICIÓN 2.18. Sean  $S_1, S_2$  dos 2-variedades propiamente encajadas en una 3-variedad  $M$ . Diremos que  $S_1$  y  $S_2$  están en **posición general** si su intersección consiste en una colección finita de curvas cerradas  $\{\alpha_j\}, 1 \leq j \leq n$ , y una colección finita de arcos  $\{\alpha_j\}, n+1 \leq j \leq m$ , los cuales no contienen vértices de sus respectivas triangulaciones y son tales que para cada  $p \in \alpha_j$  con  $1 \leq j \leq n$  o  $p \in \text{int}(\alpha_j)$  con  $n+1 \leq j \leq m$ , existe una vecindad  $V_p \subset M$  y un homeomorfismo  $\phi_p : V_p \rightarrow B$ , donde  $B$  es una bola en  $\mathbb{R}^3$  con centro en el origen, tal que se cumple:

- i)  $\phi_p(p) = 0$ .
- ii)  $\phi_p(V_p \cap S_1) = P_0 \cap B$ , donde  $P_0$  es el plano  $yz$  en  $\mathbb{R}^3$ .
- iii)  $\phi_p(V_p \cap S_2) = P_1 \cap B$ , donde  $P_1$  es el plano  $xz$  en  $\mathbb{R}^3$ .

$Y$  para cada  $p \in \partial(\alpha_j)$  con  $n+1 \leq j \leq m$ , existe una vecindad  $V_p \subset M$  y un homeomorfismo  $\phi_p : V_p \rightarrow B'$ , donde  $B'$  es una media bola en  $\mathbb{R}_+^3$  con centro en el origen, tal que se cumple:

- i)  $\phi_p(p) = 0$ .
- ii)  $\phi_p(V_p \cap S_1) = P_0 \cap B'$ , donde  $P_0$  es el plano  $yz$  en  $\mathbb{R}^3$ .
- iii)  $\phi_p(V_p \cap S_2) = P_1 \cap B'$ , donde  $P_1$  es el plano  $xz$  en  $\mathbb{R}^3$ .

Con esta definición, garantizamos que dos 2-variedades que se intersectan, lo hacen únicamente en curvas y arcos.

DEFINICIÓN 2.19. Sea  $X$  un conjunto de curvas cerradas disjuntas en una 2-variedad  $F$ . Si  $\lambda \in X$  es una curva que es frontera de un disco  $D \subset F$  tal que  $D \cap X = \partial D = \lambda$ , entonces llamamos a  $\lambda$  una **curva de más adentro**, y a  $D$  un **disco de más adentro**. Sea  $X$  un conjunto de arcos disjuntos propiamente encajados en una superficie  $F$ . Si  $\alpha \in X$  es un arco separante; el cual corta a un disco  $D \subset F$  de tal manera que  $D \cap X = \alpha$  y  $\partial D = \alpha \cup \beta$  donde  $\beta \subset \partial F$ , entonces  $\alpha$  es llamado un **arco de más afuera** y  $D$  un **disco de más afuera**. Ver figura 2.4.

Dadas dos variedades, podemos generar una tercera variedad a partir de éstas.

DEFINICIÓN 2.20. Dadas dos  $n$ -variedades conexas  $M_1$  y  $M_2$ . Sean  $B_i \subset M_i$  dos  $n$ -bolas y  $M'_i = M_i - B_i$ . Sea  $f : \partial B_1 \rightarrow \partial B_2$  un homeomorfismo, el espacio adjunción  $M_1 \cup_f M_2$  es llamado **suma conexa** de  $M_1$  y  $M_2$ , y lo denotamos por  $M_1 \# M_2$ .

Para cualquier  $n$ -variedad  $M$ , tenemos que  $M \# S^n$  es homeomorfo a  $M$ .

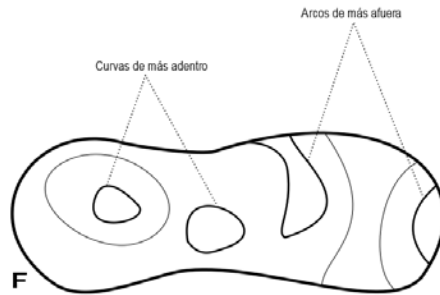


FIGURA 2.4. Una 2-variedad  $F$  con frontera, con una colección de curvas cerradas disjuntas y una colección de arcos propiamente encajados.

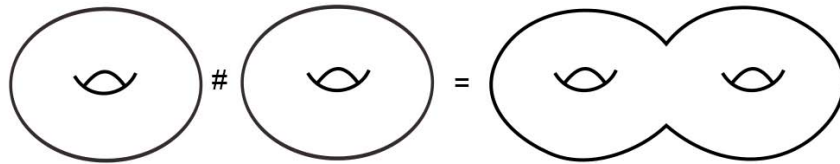


FIGURA 2.5. Suma conexa de dos toros.

#### 4. Superficies

Una **superficie** es una 2-variedad conexa y compacta. Las superficies están clasificadas, es decir, existe una lista completa y sin repeticiones de ellas.

La esfera  $S^2$ , el toro  $T^2$  y el plano proyectivo son fundamentales para la construcción de cualquier superficie.

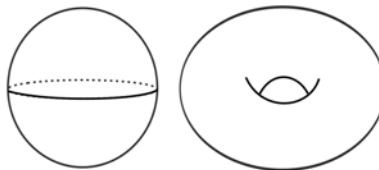


FIGURA 2.6. Ejemplos de superficies: La esfera ( $S^2$ ) y el toro ( $T^2$ ).

TEOREMA 2.21 (Clasificación de superficies). *Toda superficie cerrada es homeomorfa a una de las siguientes:*

- i) *La esfera  $S^2$ ,*
- ii) *una suma conexa de una o más copias de  $T^2$  o*
- iii) *una suma conexa de una o más copias de  $P^2$ .*

DEFINICIÓN 2.22. *A las superficies que cumplen i) o ii) las llamaremos **superficies orientables**, de otra manera diremos que son **superficies no orientables**.*

**Ejemplos:** La botella de Klein es homeomorfa a  $P^2 \# P^2$ . El espacio  $T^2 \# P^2$  es homeomorfo a  $P^2 \# P^2 \# P^2$ .

DEFINICIÓN 2.23. *Sea  $S$  una superficie cerrada orientable. El **género** de  $S$ , denotado por  $g(S)$ , se define como:*

$$g(S) = \begin{cases} 0 & \text{si } S = S^2 \\ n & \text{si } S \text{ es la suma conexa de } n \text{ toros} \end{cases}$$

*El género de una superficie  $S$  no orientable se define de manera análoga como  $g(S) = n$ , si  $S$  es la suma conexa de  $n$  planos proyectivos.*

*Si  $S$  tiene frontera, definimos el género de  $S$  como el género de la superficie  $S'$ , donde  $S'$  es la superficie  $S$  con la frontera tapada con discos.*

Las superficies resultan ser objetos de mucha utilidad en el estudio de las 3-variedades, especialmente aquellas superficies encajadas de manera simple, en el sentido de que no es posible reducirlas. Formalmente se definen como superficies incompresibles.

DEFINICIÓN 2.24. *Si una curva cerrada simple  $\lambda$  encajada en una superficie  $F$  es tal que  $F - \lambda$  no tiene componentes que sean anillos o discos, decimos que  $\lambda$  es un curva **esencial** de  $F$ . Un arco  $\alpha$  propiamente encajado en una superficie  $F$  es **esencial** si no existe un arco  $\beta$  en  $\partial F$  tal que  $\alpha \cup \beta$  es una 1-variedad que es frontera de un disco en  $F$ .*

DEFINICIÓN 2.25. *Una superficie orientable  $F$  propiamente encajada en una 3-variedad  $M$  es **compresible**, si se satisface alguna de las siguientes:*

- i)  *$F$  es una 2-esfera y es frontera de una 3-bola en  $M$ ;*
- ii)  *$F$  es un disco en  $\partial M$ ;*

- iii)  $F$  es un disco propiamente encajado en  $M$  y existe una 3-bola en  $M$  cuya frontera está contenida en  $F \cup \partial M$ ;
- iv)  $F$  no es una 2-esfera ni un disco, y existe un disco  $\Delta \subset M$  tal que  $\Delta \cap F = \partial\Delta$  donde  $\partial\Delta$  es una curva esencial en  $F$ . El disco  $\Delta$  es llamado **disco de compresión**.

Una superficie que no es compresible en  $M$  es llamada **incompresible**.

Si cualquier 2-esfera en  $M$  es compresible, entonces decimos que  $M$  es **irreducible**.

Si una superficie es compresible se puede “simplificar” a través de un proceso llamado compresión:

Sea  $F \subset M$  una superficie compresible, existe un disco de compresión  $\Delta$  tal que  $F \cap \Delta = \partial\Delta$ . Tomamos una vecindad  $V$  de  $\partial\Delta$  en  $F$ . Así, la superficie  $F' = F - V$  tiene dos componentes en la frontera, las cuales tapamos con dos copias del disco  $\Delta$ , para obtener una nueva superficie  $\hat{F}$ . Si la superficie  $\hat{F}$  también es compresible podemos repetir el proceso de compresión hasta obtener una esfera, la cual es compresible o bien podríamos obtener una superficie  $\tilde{F}$  incompresible la cual podría no ser conexa.

## 5. Categoría diferenciable

En esta sección nos enfocaremos en variedades diferenciables, además las consideraremos como variedades sin frontera a menos que se indique lo contrario. Discutiremos la relación entre funciones de Morse y propiedades topológicas de una variedad. Para más detalles se puede consultar [5].

Dada una  $n$ -variedad compacta  $M$  y un punto  $p \in M$ , por definición existe una vecindad  $N \subset M$  de  $p$  homeomorfa a una bola abierta de  $\mathbb{R}^n$ ; esto es, que existe un homeomorfismo  $\phi : N \rightarrow \mathcal{B}$ , donde  $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^n$  es una bola abierta.

**DEFINICIÓN 2.26.** Una **carta** es una vecindad abierta  $N \subset M$  y un homeomorfismo  $\phi_N : N \rightarrow \mathbb{R}^n$ , la denotaremos por  $(N, \phi_N)$ .

Sean  $(B, \phi_B), (C, \phi_C)$  dos cartas en  $M$ . Decimos que son **compatibles** si  $\phi_C \circ \phi_B^{-1}$  es homeomorfismo diferenciable como función entre abiertos de  $\mathbb{R}^n$  a  $\mathbb{R}^n$ .

Un **atlas** de una variedad  $M$  es una colección de cartas tales que cada punto en  $M$  está en alguna carta y cualesquiera dos cartas son compatibles.

Una variedad dotada con un atlas se llama **variedad diferenciable**.

El siguiente teorema lo enunciamos sin demostrarlo.

**TEOREMA 2.27.** *Toda 2-variedad o 3-variedad compacta es homeomorfa a una variedad diferenciable.*

A partir de aquí, todas las variedades a las que nos referiremos serán diferenciables.

**LEMA 2.28.** *Sea  $M$  una variedad compacta,  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  continua. Sean  $(B, \phi_B)$  y  $(C, \phi_C)$  cartas, definimos  $\hat{f} : \phi_B(B) \rightarrow \mathbb{R}$  como  $\hat{f} = f \circ \phi_B^{-1}$  y  $\bar{f} : \phi_C(C) \rightarrow \mathbb{R}$  como  $\bar{f} = f \circ \phi_C^{-1}$ . Sea  $p \in B \cap C$ . Si  $\hat{f}$  tiene  $m$  derivadas en  $\phi_B(p)$ , entonces  $\bar{f}$  tendrá  $m$  derivadas en  $\phi_C(p)$ . Si  $\hat{f}$  es diferenciable entonces  $\bar{f}$  será diferenciable.*

**DEMOSTRACIÓN.** Por definición  $\hat{f} = f \circ \phi_B^{-1}$ , como  $\phi_B$  es uno-a-uno y continua, tenemos que  $f = \hat{f} \circ \phi_B$  por lo que

$$\bar{f} = f \circ \phi_C^{-1} = (\hat{f} \circ \phi_B) \circ \phi_C^{-1} = \hat{f} \circ (\phi_B \circ \phi_C^{-1}).$$

Pero  $(\phi_B \circ \phi_C^{-1})$  es diferenciable. Por lo tanto, si  $\hat{f}$  es diferenciable,  $\bar{f}$  también lo es.  $\square$

**DEFINICIÓN 2.29.** *Sea  $M$  una variedad diferenciable. Una función  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  es **diferenciable** si  $\hat{f}$  es diferenciable para cada carta en el atlas de  $M$ .*

Recordemos que dada una función diferenciable  $\hat{f} : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  y un punto  $p \in \mathbb{R}^n$ , con  $f(p) = x$  el gradiente de  $\hat{f}$  en  $p$  es el vector

$$\nabla_p \hat{f} = \left( \frac{\partial \hat{f}}{\partial x_1}(p), \frac{\partial \hat{f}}{\partial x_2}(p), \dots, \frac{\partial \hat{f}}{\partial x_d}(p) \right).$$

**DEFINICIÓN 2.30.** *Dada una función  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  y  $p \in M$  diremos que  $\nabla_p f = 0$  si  $\nabla_{\phi(p)} \hat{f} = 0$  en alguna carta, y diremos que  $\nabla_p f \neq 0$  en caso contrario.*

**LEMA 2.31.** *Sean  $(B, \phi_B), (C, \phi_C)$  cartas,  $p \in B \cap C$ . Sea  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciable y sean  $\hat{f}, \bar{f}$  las funciones sobre  $\mathbb{R}^n$  provenientes de las cartas  $B$  y  $C$ , respectivamente, con  $x = \phi_B(p)$  y  $x' = \phi_C(p)$ . Entonces  $\nabla_p \hat{f} = 0$  si y sólo si  $\nabla_p \bar{f} = 0$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** Sean  $\hat{f}$  y  $\bar{f}$  como en el lema 2.28, podemos reescribir  $\bar{f} = \hat{f} \circ g$ , donde  $g = \phi_B \circ \phi_C^{-1}$  es una función continua de  $\mathbb{R}^n$  a  $\mathbb{R}^n$ . Por regla de la cadena, tenemos que  $\nabla \bar{f} = \nabla \hat{f} \cdot A$ , donde  $A$  es la matriz de derivadas parciales de  $g$ . Como  $g$

es difeomorfismo tenemos que la matriz  $A$  es invertible, además su kernel es trivial, lo que implica que  $\nabla \bar{f} = \bar{0}$  si y sólo si  $\nabla \hat{f} = \bar{0}$ .  $\square$

DEFINICIÓN 2.32. Sea  $f$  una función continua entre dos variedades diferenciables  $M, M'$ , decimos que  $f$  es **diferenciable en un punto**  $x \in M$  si  $\tilde{f} = \phi_{B'} \circ f \circ \phi_B^{-1}$  es diferenciable en  $\phi_B(x)$ , como una función de  $\mathbb{R}^n$  a  $\mathbb{R}^m$ . Si  $f$  es diferenciable para cada  $x \in M$ , diremos que  $f$  es **diferenciable**.

DEFINICIÓN 2.33. Sean  $M, M'$  dos  $n$ -variedades diferenciables. Un **difeomorfismo**  $f : M \rightarrow M'$  es un homeomorfismo diferenciable, con inversa diferenciable. Decimos también que las variedades  $M$  y  $M'$  son **difeomorfas**.

Dos variedades diferenciables son equivalentes si existe un difeomorfismo entre ellas. Denotaremos esto como  $M \cong M'$ .

## 6. Funciones de Morse

En la sección anterior vimos que dada una  $n$ -variedad diferenciable  $M$  y una función diferenciable  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  podemos hablar de la noción de derivadas de  $f$ . De manera similar al caso de una función con dominio en  $\mathbb{R}^n$ , definiremos puntos críticos de  $M$ .

Consideraremos  $M$  una  $n$ -variedad compacta diferenciable y sea  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable, con derivadas de todos los órdenes. Solemos referirnos a esta propiedad como  $f \in C^\infty$ , o decimos que  $f$  es clase  $C^\infty$ .

DEFINICIÓN 2.34. Diremos que un punto  $p \in M$  es un **punto crítico** de  $f$  si se cumple lo siguiente:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(p) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(p) = \cdots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(p) = 0.$$

Es decir, si se cumple que  $\nabla_p f$  es el vector cero.

Al número  $f(p)$  lo llamamos **valor crítico** de  $f$  y a la subvariedad  $f^{-1}(p)$  le llamamos **nivel crítico** de  $f$ . Si  $f^{-1}(a)$  no contiene ningún punto crítico de  $f$  le llamamos **nivel regular** y decimos que  $a$  es un **valor regular** de  $f$ .

Para cualquier punto crítico  $p$  de una función  $f$  consideremos la siguiente matriz:



$$H_f(p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{(\partial x_1)^2}(p) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(p) \\ \vdots & \frac{\partial^2 f}{(\partial x_i \partial x_j)}(p) & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{(\partial x_n)^2}(p) \end{pmatrix}$$

DEFINICIÓN 2.35. Llamamos a la matriz  $H_f(p)$  el **Hessiano** de la función  $f$ . Si, además, se cumple que  $\det(H_f(p)) \neq 0$  diremos que  $p$  es un punto crítico **no degenerado**.

El Hessiano de  $f$  es una matriz simétrica, ya que  $f \in C^\infty$ .

DEFINICIÓN 2.36. Sea  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  una función sobre una variedad  $M$  y sea  $p \in M$ , decimos que el Hessiano de  $f$  es **singular** en  $p$  si en alguna carta que contenga a  $p$  el determinante del Hessiano es cero.

LEMA 2.37. Si  $\nabla_p f = 0$  en  $p$  y el Hessiano es singular en alguna carta, entonces será singular en cualquier otra carta.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que  $\nabla_p f = 0$  en la carta  $(B, \phi_B)$ . Sea  $(C, \phi_C)$  una carta del atlas, distinta a  $(B, \phi_B)$  y tal que  $p \in C$  y sea  $f$  como en el lema 2.31.

Tenemos que  $H_{\hat{f}}(p) = J^t \cdot H_f(p) \cdot J$ , la prueba de este hecho la podemos encontrar en [5], donde  $J$  es la matriz Jacobiana de cambio de coordenadas. Así que  $H_{\hat{f}}(p) = 0$ , pues  $J$  es una matriz invertible.  $\square$

DEFINICIÓN 2.38. Decimos que una función  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciable es una **función de Morse** si todo punto crítico de  $f$  es un punto crítico no degenerado y todos sus puntos críticos tienen distintos niveles; es decir, que para cada par de puntos críticos  $p, p'$  de  $f$  tales que  $p \neq p'$  se tiene que  $f(p) \neq f(p')$ .

El siguiente teorema es el principal ingrediente de la teoría de Morse.

TEOREMA 2.39 (Teorema de Morse). Sea  $p$  un punto crítico no degenerado de  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ . Entonces existe una vecindad  $N \subset M$  de  $p$  y una función continua  $\phi : N \rightarrow \mathbb{R}^n$  compatible con el atlas, que manda  $p$  al origen, tal que si  $\hat{f} = f \circ \phi^{-1}$ , entonces

$$\hat{f}(x) = \hat{f}(x_1, x_2, \dots, x_n) = -(x_1)^2 - (x_2)^2 - \cdots - (x_k)^2 + (x_{k+1})^2 + \cdots + (x_n)^2 + f(p).$$

La demostración de este teorema puede ser consultada en [5].

DEFINICIÓN 2.40. *Bajo las hipótesis del teorema 2.39. Llamamos al número  $k$  el **índice** del punto crítico no degenerado  $p$ . El índice de  $p$  es un número mayor o igual a cero y menor o igual a  $n$ .*

Dada una función de Morse  $f$  sobre una  $n$ -variedad  $M$  y un valor  $t \in \mathbb{R}$ , denotaremos al conjunto  $\{p \in M : f(p) \leq t\}$  como  $M_t$ .

Algunas propiedades que nos interesan de las funciones de Morse las enunciamos en la siguiente proposición sin demostración.

PROPOSICIÓN 2.41.

- 1) *Sea  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  una función de Morse en una  $n$ -variedad compacta  $M$ . Si  $a \in \mathbb{R}$  es un valor regular de  $f$ , entonces  $f^{-1}(a)$  es una subvariedad cerrada de  $M$  de dimensión  $n - 1$ .*
- 2) *Una función de Morse contiene un número finito de puntos críticos y cada nivel crítico contiene exactamente un punto crítico.*
- 3) *Sean  $a, b \in \mathbb{R}$  valores regulares de  $f$  tales que  $a < b$ . Si no existen valores críticos en  $[a, b]$  entonces  $M_a$  es isotópico a  $M_b$ .*
- 4) *Sean  $a, b \in \mathbb{R}$  valores regulares de  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  función de Morse tales que  $a < b$ , y sea  $N$  la subvariedad  $f^{-1}(a)$ . Si no hay valores críticos en  $[a, b]$  entonces  $f^{-1}([a, b])$  es homeomorfo a  $N \times [a, b]$ .*
- 5) *Sea  $M$  una superficie tal que existe una función de Morse  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  con exactamente dos puntos críticos. Entonces  $M$  es difeomorfa a la esfera  $S^2$ .*

La teoría de Morse relaciona las propiedades analíticas de las funciones de Morse con las propiedades topológicas de las variedades. Para este fin, es necesaria la siguiente definición.

DEFINICIÓN 2.42. *En una  $n$ -variedad  $M$ , una  $k$ -asa, donde  $0 \leq k \leq n$ , es una  $n$ -bola parametrizada como  $B^k \times B^{n-k}$ .*

Sea  $N$  una  $n$ -variedad con frontera. Sean  $H$  una  $k$ -asa y  $\phi : \partial B^k \times B^{n-k} \rightarrow \partial N$  una función continua uno-a-uno. Podemos obtener una nueva  $n$ -variedad  $N'$  tomando el espacio de adjunción  $N \cup_{\phi} H$ . Decimos que  $N'$  es el resultado de agregar una  $k$ -asa a  $N$ . Si  $k = 0$ , entonces  $N'$  es simplemente la unión ajena de  $N$  y la bola cerrada  $H$ .

LEMA 2.43. *Sean  $a, b \in \mathbb{R}$  valores tales que  $a < b$ . Si existe un solo valor crítico en  $[a, b]$  y este nivel contiene un punto crítico de índice  $k$ . Entonces  $M_b$  es isotópico al resultado de agregar una  $k$ -asa a  $M_a$ .*

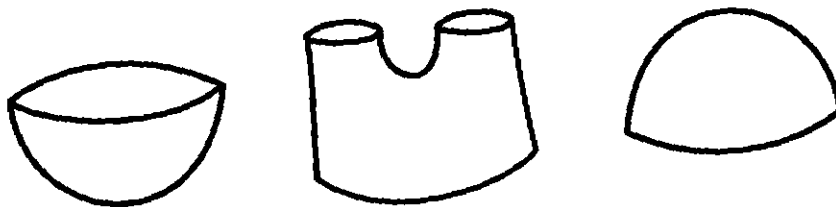


FIGURA 2.7. Localmente los puntos críticos de índice 0, 1 y 2, de izquierda a derecha respectivamente.

No probaremos este lema, pero en la siguiente sección veremos el resultado particular para superficies, lo que nos dará una idea mas clara en el aspecto general.

Cuando tenemos una función de Morse sobre una 1-variedad cerrada como lo es  $S^1$ , tendremos solamente puntos críticos de índice cero y uno, los cuales corresponden a mínimos y máximos. Los puntos críticos forman un conjunto discreto, así entre cada par de valores críticos adyacentes vemos solamente arcos de la variedad. Un punto crítico de índice cero está modelado como  $x^2$ , entonces al llegar al nivel correspondiente un nuevo punto aparece y se descompone en dos puntos conforme nos movemos del nivel crítico hacia arriba. Un punto crítico de índice uno está modelado como  $-x^2$ , entonces al llegar al nivel correspondiente dos puntos se encuentran cuando nos movemos hacia arriba.

## 7. Funciones de Morse sobre superficies orientables

En el caso de dimensión dos, hay tres posibilidades para el índice de un punto crítico, a saber 0, 1 o 2. De acuerdo al teorema de Morse 2.39 estas tres posibilidades están definidas por los polinomios  $x^2 + y^2$ ,  $x^2 - y^2$  y  $-x^2 - y^2$ .

Para visualizar estos puntos consideramos una superficie orientable  $M$  encajada en  $\mathbb{R}^3$  tal que la función altura estándar restringida a  $M$  sea una función de Morse. Tenemos tres tipos de puntos críticos a los que llamamos: mínimo, silla y máximo, si su índice es 0, 1 ó 2 respectivamente. Ver figura 2.7.

Supongamos que  $M$  es una superficie y  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  una función de Morse. Recordemos que  $M_t$  es la superficie dada por los puntos  $p \in S$  tales que su imagen es menor o igual a  $t$ . Denotamos  $L_t$  al conjunto  $L_t = \{p \in S : f(p) = t\}$  y lo llamamos

**curva de nivel.** De esta manera, la subsuperficie  $M_t$  es todo lo que está debajo de  $t$  y la curva  $L_t$  es la frontera de  $M_t$ .

La función  $f$  toma valor máximo  $A$  y valor mínimo  $a$ , por lo que  $M_t = \emptyset$  para  $t < a$  y  $M_t = M$  para  $t > A$ .

Conforme  $t$  crece de  $a$  a  $A$  la superficie  $M_t$  cambia de  $\emptyset$  a  $M$ . La teoría de Morse estudia este cambio de forma de  $M_t$ .

**Hecho:** Por la proposición 2.41-(3), si  $f$  no tiene valores críticos en  $[b, c]$ , entonces  $M_b$  y  $M_c$  son difeomorfos.

Así  $M_t$  permanece sin cambios cuando  $t$  atraviesa valores regulares de  $f$ , por lo que  $M_t$  cambia solamente cuando  $t$  atraviesa valores críticos de  $f$ . Asumiremos que cada punto crítico de  $f$  tiene un valor crítico distinto. Entonces si  $p_0$  es punto crítico de  $f$  con  $f(p_0) = c_0$  existe  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeño tal que el único punto crítico de  $f$  en  $M_{[c_0-\epsilon, c_0+\epsilon]} = \{p \in M : c_0 - \epsilon \leq t \leq c_0 + \epsilon\}$  es  $p_0$ .

Ahora veremos la relación entre  $M_{c_0-\epsilon}$  y  $M_{c_0+\epsilon}$  cuando  $t$  cruza el valor crítico  $c_0$ :

### Cuando el índice del punto crítico es cero.

Escribimos  $f$  localmente alrededor de  $p_0$  en la forma estándar  $f = x^2 + y^2 + c_0$ .

Si  $c_0$  es el valor mínimo de  $f$ , entonces  $M_{c_0-\epsilon} = \emptyset$ , así tendremos que  $M_{c_0+\epsilon} = \{p \in M : f(p) \leq c_0 + \epsilon\} = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq \epsilon\}$  el cual es difeomorfo al 2-disco. Podemos describir el cambio como sigue:  $M_t$  es vacío cuando  $t$  es menor al valor mínimo  $c_0$ , tan pronto como  $t$  cruza  $c_0$ ,  $M_t$  se vuelve difeomorfo al 2-disco.

Si  $c_0$  no es el valor mínimo entonces  $M_{c_0-\epsilon} \neq \emptyset$ , en este caso cuando  $t$  pasa el valor  $c_0$  aparece un disco y  $M_{c_0+\epsilon}$  es difeomorfo a la unión disjunta de  $M_{c_0-\epsilon}$  y el disco.

$$M_{c_0+\epsilon} \cong M_{c_0-\epsilon} \sqcup B^2.$$

Esto corresponde a pegar una 0-asa.

### Cuando el índice del punto crítico es uno.

Cerca de  $p_0$ ,  $f$  tiene la forma estándar  $f = -x^2 + y^2 + c_0$ . Podemos observar a la gráfica alrededor de  $p_0$ , la curva ortogonal correspondiente a  $x = 0$  sube desde  $p_0$  y

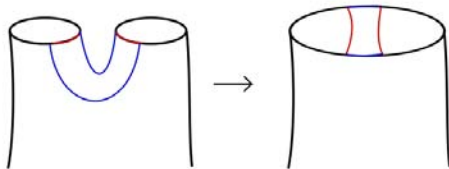


FIGURA 2.8. Pasar por un punto crítico de índice uno.

la curva correspondiente a  $y = 0$  baja desde  $p_0$ , esto equivale a decir que la dirección hacia abajo desde  $p_0$  es 1-dimensional.

Tomando  $M_{c_0-\epsilon}$  cerca de  $p_0$  añadimos una pequeña banda a la curva que baja desde  $p_0$ . Esto se asemeja a un puente conectando las aristas en  $L_{c_0-\epsilon}$ . Esta banda es difeomorfa a un rectángulo  $B^1 \times B^1$  parametrizado, y su intersección con  $M_{c_0-\epsilon}$  corresponde a  $\partial B^1 \times B^1$ . Este rectángulo es una 1-asa unida a  $M_{c_0-\epsilon}$ .

Comparando esta variedad con  $M_{c_0+\epsilon}$ , podemos ver que

$$M_{c_0+\epsilon} \cong M_{c_0-\epsilon} \cup (B^1 \times B^1).$$

Esto es, que el cambio de  $M_t$  cuando  $t$  pasa un punto crítico de índice uno se puede describir como la unión de la variedad con una 1-asa a  $M_{c_0-\epsilon}$ . Ver figura 2.8.

### Cuando el índice del punto crítico es dos.

La función  $f$  alrededor de  $p_0$  tiene la forma estándar  $f = -x^2 - y^2 + c_0$ . Tenemos que

$$M_{c_0-\epsilon} = \{p \in M : f(p) \leq c_0 - \epsilon\} = \{(x, y) : \epsilon \leq x^2 + y^2\}.$$

Entonces  $M_{c_0-\epsilon}$  se ve desde arriba como el exterior de un disco de radio  $\sqrt{\epsilon}$ . Así que para obtener  $M_{c_0+\epsilon}$  hay que tapar  $M_{c_0-\epsilon}$  con un disco a lo largo de su frontera. Esto es como tapar con un tazón invertido, es decir, una 2-asa.

Al agregar una 2-asa a  $M_{c_0-\epsilon}$  eliminamos una componente conexa de  $L_{c_0-\epsilon}$ ; de esta manera  $\partial M_{c_0+\epsilon}$  tiene una componente conexa menos que  $M_{c_0-\epsilon}$ .

Por lo tanto hemos demostrado el siguiente teorema:

**TEOREMA 2.44.** *Si una superficie orientable cerrada  $M$  admite una función de Morse  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ , entonces  $M$  puede ser descrita como la unión de un número finito de 0-asas, 1-asas y 2-asas.*

## 8. Teorema de Jordan y Teorema de Alexander

En esta sección demostraremos el teorema de la curva de Jordan y el teorema de Alexander, usando teoría de Morse.

**TEOREMA 2.45** (Teorema de la curva de Jordan). *Toda 1-esfera  $\lambda$  encajada en  $\mathbb{R}^2$  es frontera de un disco.*

**DEMOSTRACIÓN.** Sea  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  la función altura,  $h(x, y) = y$  y  $\lambda$  una 1-esfera encajada en  $\mathbb{R}^2$ . Podemos suponer que  $h|_{\lambda}$  es una función de Morse.

Sean  $c_1 < c_2 < \dots < c_n$  los valores críticos de  $h|_{\lambda}$  y sean  $t_i$ ,  $0 \leq i \leq n$ , valores regulares de  $h|_{\lambda}$  tales que el intervalo  $[t_i, t_{i+1}]$  contiene un sólo valor crítico de  $h|_{\lambda}$ .

**Afirmación:** Las pre-imágenes  $h^{-1}(t_i)$ ,  $1 \leq i \leq n-1$ , son rectas horizontales que intersectan a  $\lambda$  en un número par de puntos.

Sabemos que  $|h^{-1}(t_0)| = 0$ , ya que sólo tenemos dos tipos de puntos críticos, a saber: máximos o mínimos. El primer punto crítico debe ser un mínimo, así  $|h^{-1}(t_1)| = 2$  y como  $[t_i, t_{i+1}]$  contiene un sólo punto crítico de  $h|_{\lambda}$ , cuya naturaleza sólo tiene dos posibilidades: tenemos que  $|h^{-1}(t_{i+1})| = |h^{-1}(t_i)| + 2$  si  $c_i$  es un mínimo y  $|h^{-1}(t_{i+1})| = |h^{-1}(t_i)| - 2$  si  $c_i$  es un máximo.

Podemos ver a  $h^{-1}([t_i, t_{i+1}])$  como un conjunto finito de un número par de segmentos de línea disjuntos que van de  $\mathbb{R} \times \{t_i\}$  a  $\mathbb{R} \times \{t_{i+1}\}$  unión disjunta con un arco que va de  $\mathbb{R} \times \{t_i\}$  a  $\mathbb{R} \times \{t_i\}$  (si  $c_{i+1}$  corresponde a un máximo) o que va de  $\mathbb{R} \times \{t_{i+1}\}$  a  $\mathbb{R} \times \{t_{i+1}\}$  (si  $c_{i+1}$  corresponde a un mínimo).

Ahora tomamos en  $\mathbb{R}^2$  subconjuntos de la siguiente manera:

Para cada  $t_i$ ,  $1 \leq i \leq n-1$ , tenemos que  $h^{-1}(t_i) \cap \lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2k}\}$  donde  $\lambda_j = (x_j, t_i) \in \mathbb{R}^2$ . Podemos asumir que  $x_j < x_{j+1}$  para toda  $1 \leq j \leq 2k$ . Luego, para cada  $j$  impar, dibujamos una línea en  $\mathbb{R} \times \{t_i\}$  que va de  $x_j$  a  $x_{j+1}$ .

El resultado es un número finito de regiones  $R_i$  las cuales son isotópicas a uno de los cinco modelos en la figura 2.9.



FIGURA 2.9. Los cinco modelos de las regiones posibles al descomponer la curva  $\lambda$ .

La frontera de cada una de estas regiones está compuesta de un número finito (1, 2 ó 3) de arcos contenidos en  $\lambda$ , unión con un número finito de segmentos de recta horizontales (1, 2 ó 3). Cada región es un disco en  $\mathbb{R}^2$ .

Queremos demostrar que la unión de estas regiones es un disco cuya frontera es  $\lambda$ . Procedemos inductivamente:

Unimos de manera que volvemos a obtener la curva  $\lambda$ . Tomamos dos regiones  $R_i$  y  $R_j$  adyacentes, esto es, que sus niveles son adyacentes y que comparten segmentos de línea horizontal. Así que al unir dos de estas regiones estamos pegando dos discos por un solo arco, obteniendo una región conexa homeomorfa a un disco.

Si hacemos este procedimiento desde la región correspondiente a  $[t_0, t_1]$  hasta la región correspondiente a  $[t_{n-1}, t_n]$ , dado que sus niveles críticos corresponden a un mínimo y un máximo, respectivamente, la región resultante es un disco cuya frontera es  $\lambda$ .  $\square$

**TEOREMA 2.46** (Teorema de Shönflies). *Si  $\lambda$  es una 1-esfera en  $\mathbb{R}^2$ , entonces existe un homeomorfismo  $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $\psi(\lambda)$  es el círculo unitario.*

Ahora demostraremos el teorema análogo al anterior, pero en una dimensión más alta. Es importante que notemos que en este caso es necesaria la hipótesis de que el encaje sea diferenciable. Existen ejemplos de esferas topológicas en  $\mathbb{R}^3$  para las cuales el resultado no es cierto; un ejemplo es la esfera cornuda de Alexander, ver [4] o [6].

Para la demostración del siguiente teorema requerimos conocer el siguiente resultado que se deriva de un hecho más general:

LEMA 2.47. *Dada una 3-variedad  $M$  y una bola  $B^2 \subset \partial M$ . Sea  $N$  la variedad obtenida de  $M$  al añadir una bola  $B^3$  vía identificación de la bola  $B^2 \subset \partial B^3$  con la bola  $B^2 \subset \partial M$ . Entonces  $M$  y  $N$  son difeomorfas.*

TEOREMA 2.48 (Teorema de Alexander). *Toda 2-esfera diferenciable encajada en  $\mathbb{R}^3$  es frontera de una 3-bola.*

DEMOSTRACIÓN. Sea  $S \subset \mathbb{R}^3$  una superficie cerrada orientable, podemos asumir que  $h : S \rightarrow \mathbb{R}$ , la función altura estándar dada por la coordenada en  $z$  es función de Morse. Tomamos  $a_1 < a_2 < \dots < a_n$  valores regulares de  $h$ , tales que  $(-\infty, a_1), (a_1, a_2), \dots, (a_n, \infty)$  contienen un sólo valor crítico de  $h$ . Para cada  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $h^{-1}(a_i)$  contiene algún número  $n_i$  de curvas disjuntas, cada una de estas curvas es frontera de un disco en el plano  $P_i$  definido por  $z = a_i$ . Sea  $C$  una curva de más adentro de  $h^{-1}(a_i)$  en  $P_i$ . Entonces existe un disco  $D \subset P_i$  el cual tiene como frontera a  $C$  y no interseca a ninguna otra curva de  $h^{-1}(a_i)$ . Podemos usar  $D$  para hacer cirugía a  $S$ , esto es, para algún  $\varepsilon > 0$  removemos el anillo abierto  $A$ , contenido en  $S$ , el cual consiste de los puntos cercanos a  $C$  entre los planos  $z = a_i + \varepsilon$  y  $z = a_i - \varepsilon$ , para después tapar el par de curvas en la frontera de  $S - A$ , sobre los planos  $z = a_i + \varepsilon$  y  $z = a_i - \varepsilon$ , resultantes de remover  $A$ . El resultado de esta cirugía es una nueva superficie encajada, la cual puede tener una componente más que  $S$ , en el caso de que  $C$  separa a  $S$ .

Este proceso puede ser iterado tomando en cada etapa una curva de más adentro de las restantes en  $h^{-1}(a_i)$  y eligiendo  $\varepsilon$  suficientemente pequeño para que al tapar la superficie con los discos, éstos solamente intersecten en sus fronteras a la subsuperficie del paso anterior. Así,  $S$  se convierte en la unión disjunta de superficies cerradas  $S_j$ , las cuales están compuestas de tapas horizontales, junto con una subsuperficie  $S'_j \subset S$ , la cual, a lo más contiene un punto crítico de  $h$ .

Cada subsuperficie  $S'_j$  es isotópica a uno de los siete modelos de la figura 2.10.

Los puntos críticos de  $h$  sólo pueden ser de índice 0, 1 ó 2. Por la manera en que hemos cortado a  $S$  sólo podemos verlos como uno de los modelos anteriores. Cada uno de éstos es conexo y contiene a lo más tres tapas horizontales, dependiendo del índice del punto crítico que contiene la subsuperficie (en caso de tenerlo). Si  $S_j$  no contiene puntos críticos es claro que es homeomorfo a un cilindro tapado. Si contiene un punto crítico de índice 0 ó 2, entonces es homeomorfo a pegar dos discos por su frontera. Si contiene un punto crítico de índice 1, esto es, tiene un punto silla, entonces está compuesto de tres tapas horizontales, dos inferiores y una superior (o viceversa), las cuales, vistas desde arriba parecen dos círculos, posiblemente anidados, unidos



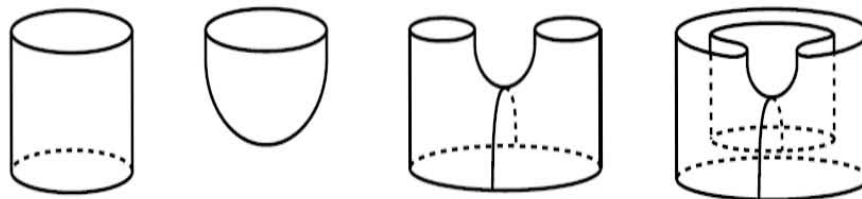


FIGURA 2.10. Los siete modelos de descomposición (cuatro en la figura, los tres últimos los consideramos otro modelo diferente cuando los invertimos) de una superficie [Tomado de Allen Hatcher/ Notes on basic 3-Manifold Topology.]

por una 1-asa. Por consiguiente, cada una de estas subsuperficies acotan una esfera en  $\mathbb{R}^3$ .

Ahora, si asumimos que  $S$  es una esfera, como las curvas simples cerradas en una esfera la separan en dos componentes, cada cirugía separa a la esfera en dos esferas. Invertiendo la secuencia en las cirugías, comenzamos con una colección de esferas  $S_j$ , las cuales son fronteras de bolas. La afirmación inductiva es que cada etapa del proceso invertido de cirugía nos da como resultado una colección de esferas que son fronteras de bolas. Para el paso inductivo, tenemos dos bolas  $S_1, S_2$  cuyas fronteras  $\partial S_1, \partial S_2$ , son resultado de una cirugía. Si dejamos  $\varepsilon$ , de la cirugía, tender a 0, isotopamos  $S_1$  y  $S_2$  de tal manera que  $\partial S_1 \cap \partial S_2$  coincida con el disco horizontal  $D$  de la cirugía. Existen dos casos (salvo cambios en la notación):

- i)  $S_1 \cap S_2 = D$ , con esfera de pre-cirugía denotada  $\partial(S_1 + S_2)$ .
- ii)  $S_2 \subset S_1$ , con esfera de pre-cirugía denotada  $\partial(S_1 - S_2)$ .

Como  $S_2$  es una bola, el lema 2.47 implica que  $S_1$  y  $S_1 \pm S_2$  son difeomorfos. Como  $S_1$  es una bola, también  $S_1 \pm S_2$  lo es, lo que completa el paso inductivo.  $\square$

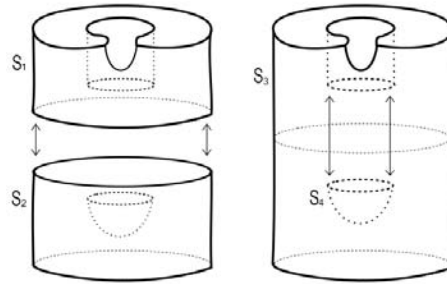


FIGURA 2.11. De lado izquierdo, caso *i*) y al lado derecho caso *ii*).

### 9. Nudos

A partir de esta sección las variedades consideradas serán variedades diferenciables o PL.

A continuación daremos conceptos relacionados con la teoría de nudos. Los nudos podemos considerarlos tanto en  $\mathbb{R}^3$  como en  $S^3$  dependiendo de lo que nos parezca más conveniente. En esta sección pensarlos en cualquiera de los espacios anteriores es equivalente, así que nos referiremos a ellos en el espacio  $\mathbb{R}^3$  y en caso de ser necesario, diremos cuándo se encuentran en  $S^3$ .

DEFINICIÓN 2.49. Un **nudo** en  $\mathbb{R}^3$  es la imagen de un encaje PL de  $S^1$  en  $\mathbb{R}^3$ . Denotaremos a un nudo como  $K$ .

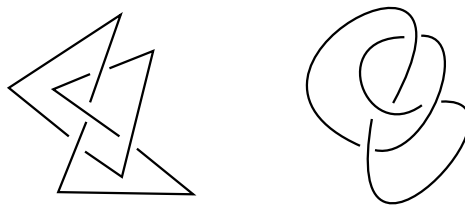


FIGURA 2.12. De lado izquierdo, el nudo  $4_1$  y al lado derecho el mismo nudo suavizado.

Si movemos o estiramos un nudo dado sin romperlo, seguimos observando al mismo nudo que en un principio; así que pensamos en los nudos como clases de equivalencia. Dos nudos están en una misma clase si podemos deformar uno de ellos, sin romperlo, hasta llegar al otro.

Formalizamos esta noción con la siguiente definición:

DEFINICIÓN 2.50. *Supongamos que un triángulo cerrado en  $\mathbb{R}^3$  intersecta a un nudo  $K$  en exactamente uno de sus lados. Entonces podemos reemplazar a  $K$  deslizando una parte de él, a través del triángulo, para obtener un nuevo nudo  $K'$ . Tal movimiento y su inverso es llamado  $\Delta$ -movida. Ver figura 2.13.*

DEFINICIÓN 2.51. *Dos nudos  $K, K'$  son **equivalentes** (o **isotópicos**), si existe una sucesión finita de nudos  $K = K_1, \dots, K_n = K'$  tales que cada par  $K_i, K_{i+1}$  está relacionado por una  $\Delta$ -movida.*

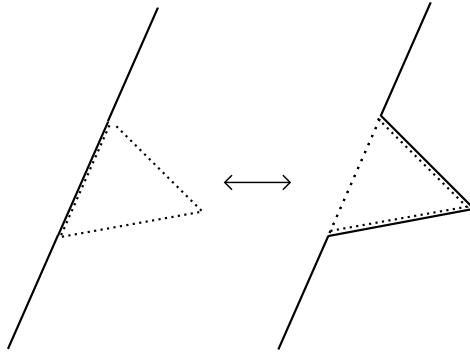


FIGURA 2.13.  $\Delta$ -movida y su inversa.

En la práctica solemos utilizar un dibujo que representa a un nudo. A continuación daremos las definiciones formales.

DEFINICIÓN 2.52. *Sea  $K$  un nudo en  $\mathbb{R}^3$  y sea  $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  la proyección en el plano  $xy$ . La imagen  $\pi(K)$  se llama **proyección** de  $K$ . Decimos que  $\pi(K)$  es **regular** si para todo  $x \in \pi(K)$  se tiene que  $\pi^{-1}(x)$  contiene sólo uno o dos puntos de  $K$  y si  $v \in K$  corresponde a un vértice, entonces  $|\pi^{-1}(v)| = 1$ . Los puntos  $x \in \pi(K)$  tales que  $|\pi^{-1}(x)| = 2$  se llaman **puntos dobles**.*

*Toda proyección que no cumple con las características de una regular, es **irregular**.*

Dada una proyección regular de un nudo  $K$  podemos añadir información a los puntos dobles de  $K$ , considerando que a cada uno le corresponde un punto del nudo con distintas alturas.

DEFINICIÓN 2.53. *Sea  $\pi(K)$  proyección regular de un nudo  $K$ .*

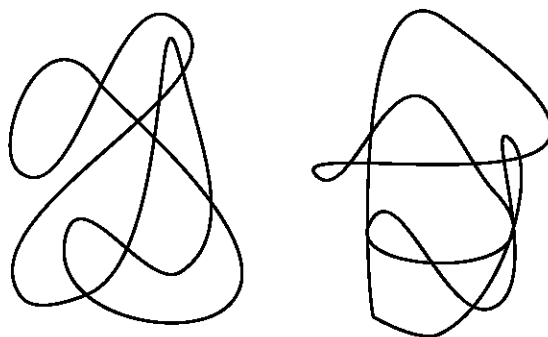


FIGURA 2.14. Una proyección regular y una proyección irregular de un nudo  $K$ .

Sea  $x \in \pi(K)$  un punto doble de esta proyección, tenemos que  $\pi^{-1}(x) = \{x_1, x_2\} \subset K$ . Podemos suponer que  $d(x_1, \mathbb{R}^2) < d(x_2, \mathbb{R}^2)$ . Sea  $\alpha_i$  un arco de  $K$  que es vecindad de  $x_i$ .

Cambiamos  $\pi(\alpha_1)$  en  $\pi(K)$  por un arco roto en  $x$ . Al hacer esto para cada punto doble obtenemos un **diagrama** del nudo  $K$ .

Llamamos a cada punto doble de la proyección un **cruce** del diagrama y decimos que el diagrama tiene **número de cruces**  $n$ , si hay  $n$  de estos puntos en la proyección y lo denotamos como  $c(D)$ .

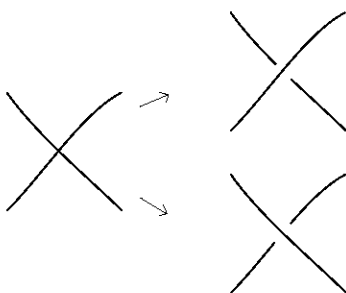


FIGURA 2.15. La proyección local de un punto doble y sus dos posibles diagramas.

En la figura 2.16 están los diagramas de algunos nudos, los cuales tienen número de cruce 0, 3 y 4 respectivamente.

**DEFINICIÓN 2.54.** Sea  $K$  un nudo en  $\mathbb{R}^3$ . Una  $\varepsilon$ -**perturbación** de  $K$  es un nudo  $K'$ , obtenido al mover cada vértice de  $K$  una distancia menor que  $\varepsilon$ , y reconectándolos con aristas rectas de la misma manera que  $K$ .

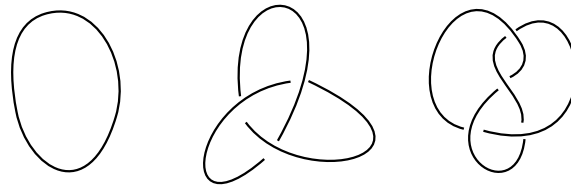


FIGURA 2.16. Ejemplos de diagramas del nudo trivial, nudo trébol y nudo ocho.

Observaciones:

- i) Si elegimos  $\varepsilon$  suficientemente pequeño entonces cualquier  $\varepsilon$ -perturbación de  $K$  será equivalente a  $K$ .
- ii) Si  $K$  tiene una proyección irregular, entonces existen  $\varepsilon$ -perturbaciones de  $K$ , equivalentes a  $K$ , cuyas proyecciones son regulares.
- iii) Si  $K$  tiene una proyección regular, cualquier  $\varepsilon$ -perturbación de  $K$ , suficientemente pequeña, tendrá una proyección regular.

Estos hechos implican el siguiente resultado:

**COROLARIO 2.55.** *Todo nudo tiene un diagrama. Dado un diagrama  $D$ , podemos reconstruir un nudo equivalente al nudo correspondiente a  $D$ .*

Un nudo puede tener más de un diagrama. En primer lugar, esto nos sugiere un invariante para nudos, y por otra parte, nos interesa saber cuándo dos diagramas son equivalentes, para después encontrar una relación entre diagramas equivalentes y los nudos representantes correspondientes.

Definido el número de cruces de un diagrama como el número de puntos dobles, podemos efectuar la siguiente definición:

**DEFINICIÓN 2.56.** *El **número de cruces** de un nudo  $K$ , denotado por  $c(K)$ , es el mínimo número de cruces sobre todos los diagramas posibles para  $K$ .*

*Existe un único nudo cuyo número de cruces es cero. Si  $K$  es tal que  $c(K) = 0$ , lo llamamos **nudo trivial**.*

Por otro lado, existen ciertas movidas de diagramas que nos permitirán definir equivalencia de diagramas:

**DEFINICIÓN 2.57 (Movidas de Reidemeister).** *Una **Movida de Reidemeister** en un diagrama  $D$ , es un reemplazo local por una porción distinta de  $D$ , como en*

la figura 2.17. Diremos que dos diagramas,  $D$  y  $D'$ , son **equivalentes**, si existe una sucesión finita de diagramas  $D = D_0, D_1, \dots, D_n = D'$  tales que para cada  $0 \leq i \leq n - 1$  se cumple que  $D_i$  difiere de  $D_{i+1}$  por una movida de Reidemeister.

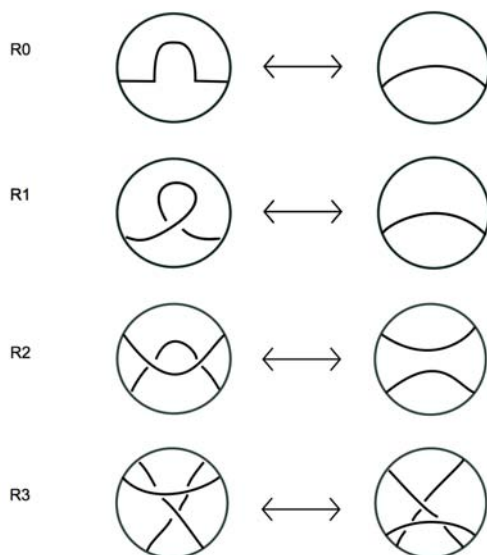


FIGURA 2.17. Movidas de Reidemeister.

El siguiente teorema relaciona equivalencia de nudos con equivalencia de diagramas. Lo probó Reidemeister en el año 1926.

**TEOREMA 2.58 (Reidemeister).** *Dos nudos  $K, K'$  con diagramas  $D, D'$  respectivamente, son equivalentes si y sólo si sus diagramas son equivalentes.*

**DEMOSTRACIÓN.** Supongamos que  $K$  es equivalente a  $K'$ , entonces existe una sucesión  $K = K_0, K_1, \dots, K_n = K'$  donde cada par  $K_i, K_{i+1}$ , con  $0 \leq i \leq n - 1$ , están relacionados por una  $\Delta$ -movida. Supongamos que para todo  $0 \leq i \leq n$  la proyección de  $K_i$  es regular y denotamos  $D_i$  a su diagrama correspondiente. Entonces cada  $D_i$ , ( $1 \leq i \leq n$ ) es obtenido de  $D_{i-1}$  reemplazando una arista recta por los otros dos lados de un triángulo (o viceversa). La proyección de este triángulo podría contener más partes del diagrama del nudo, si esto sucede, subdividimos el triángulo en triángulos más pequeños, de tal manera que cada uno contenga a lo más un sólo cruce o un sólo segmento de arco, como en la figura 2.18. Esto es equivalente a decir que una  $\Delta$ -movida es la composición de  $\Delta$ -movidas.

Por lo tanto, las posibilidades son (ver figura 2.19):

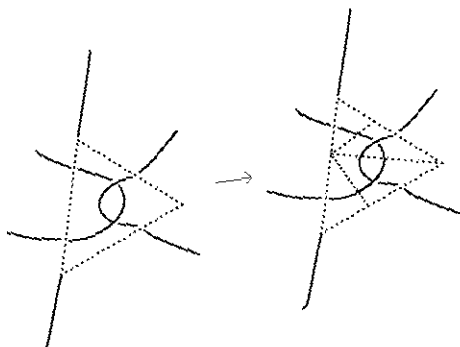


FIGURA 2.18. Una subdivisión de un triángulo de una  $\Delta$ .

- Si el triángulo no contiene otras partes del diagrama, corresponde a  $R_0$ ,
- Si el triángulo contiene un segmento de arco, con uno de sus extremos en un vértice del triángulo, corresponde a  $R_1$ ,
- Si el triángulo contiene un segmento de arco, donde ninguno de sus extremos está en los vértices del triángulo, corresponde a  $R_2$ ,
- Si el triángulo contiene un cruce, corresponde a  $R_3$ .

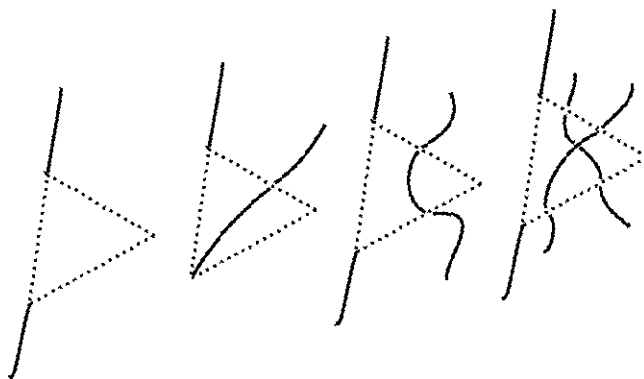
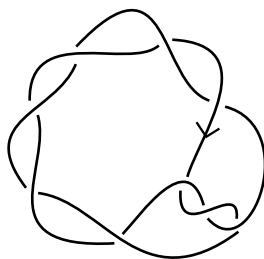


FIGURA 2.19. Las posibilidades correspondientes a  $R_0$ ,  $R_1$ ,  $R_2$  y  $R_3$ .

De acuerdo con lo anterior, si  $D_i, D_{i+1}$  están relacionados por movidas de Reidemeister, entonces  $D, D'$  son equivalentes.

Ahora, para convencernos de que si los diagramas de  $K$  y  $K'$  son equivalentes los nudos correspondientes también lo son, basta convencernos de que cada  $R_i$  en los diagramas, induce una  $\Delta$ -movida en los nudos. Basta observar detenidamente las movidas de Reidemeister (de manera poligonal) y encontrar un triángulo con uno de sus lados sobre un segmento del triángulo tal que al cambiar uno de sus lados por los otros dos nos dé como resultado la movida de Reidemeister que buscamos.  $\square$

**DEFINICIÓN 2.59.** Decimos que un nudo  $K$  está **orientado** si tiene una dirección, es decir, una flecha de circulación.

FIGURA 2.20. El nudo  $9_3$  orientado.

DEFINICIÓN 2.60. *Dados dos nudos orientados  $K_1$  y  $K_2$ , formamos su **suma conexa**, denotada por  $K_1 \# K_2$ , de la siguiente manera: removemos un pequeño arco abierto de cada nudo y unimos los extremos a manera de obtener una sola componente, asegurándonos de que al unirlos el resultado tenga una orientación consistente.*

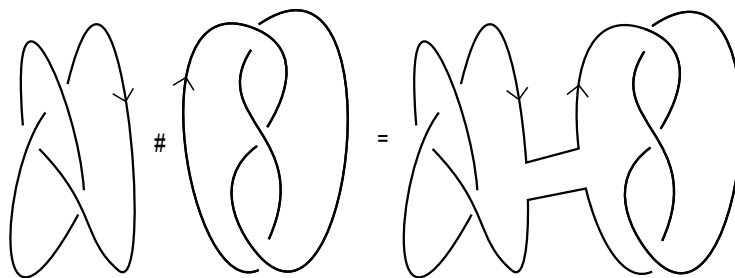


FIGURA 2.21. Suma conexa del nudo trébol con el nudo ocho.

Si los nudos no están orientados debemos elegir entre dos maneras de unirlos, las cuales no siempre nos resultan el mismo nudo.

Observemos que existe una esfera  $\Sigma$  en  $S^3$  tal que  $\Sigma \cap K_1 \# K_2$  consiste en exactamente dos puntos, y además,  $\Sigma$  separa a  $K_1$  de  $K_2$ , es decir,  $S^3 - \Sigma$  es la unión disjunta de dos 3-bolas  $B_1$  y  $B_2$ , donde  $B_i$  contiene un subconjunto de  $K_i$ ,  $i = 1, 2$ .

PROPOSICIÓN 2.61. *Sea  $K$  un nudo en  $\mathbb{R}^3$ . Entonces  $K$  es el nudo trivial si y sólo si es frontera de un disco diferenciable o PL en  $\mathbb{R}^3$ .*

DEMOSTRACIÓN. Si  $K$  es el nudo trivial, entonces tiene un diagrama sobre algún plano  $P$  con número de cruces cero, por el teorema de Schönflies  $D$  es frontera de un disco estándar en  $P$ . Por lo tanto,  $K$  es frontera de un disco.



Si  $K$  es frontera de un disco, entonces existe una secuencia de  $\Delta$ -movidas, usando triángulos contenidos en el disco, que deforman al nudo en un triángulo, así  $K$  tiene un representante cuyo diagrama es un triángulo, por lo tanto  $K$  es el nudo trivial.  $\square$

A continuación veremos que en la teoría de nudos aparecen superficies de manera “natural”.

Sean  $K$  un nudo y  $F$  una superficie en  $\mathbb{R}^3$  con una componente en la frontera tal que  $\partial F = K$ . Decimos que  $K$  es frontera de la superficie  $F$ .

Una manera de construir una superficie para un nudo  $K$ , es tomar un diagrama  $D$  de  $K$  y colorear de blanco y negro las regiones de  $D$ , como en un tablero de ajedrez (de manera que la región no acotada sea de color blanco). Entonces las regiones de color negro, unidas por una banda medio doblada en cada cruce, forma una superficie cuya frontera es  $K$ .

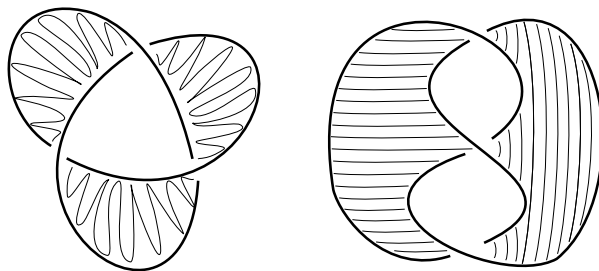


FIGURA 2.22. Una superficie no orientable (izquierda) y una superficie orientable (derecha) para el nudo trébol.

Diferentes diagramas de  $K$  pueden darnos como resultado distintas superficies acotadas por  $K$ , ver figura 2.22.

**DEFINICIÓN 2.62.** Una **superficie de Seifert** para un nudo  $K \subset S^3$  es una superficie orientable y conexa encajada en  $S^3$  cuya frontera es  $K$ .

En 1934 H. Seifert dio un algoritmo explícito para encontrar tal superficie dado un nudo arbitrario.

**TEOREMA 2.63** (El algoritmo de Seifert). *Todo nudo tiene una superficie de Seifert.*

**DEMOSTRACIÓN.** Sea  $K$  un nudo. Elegimos un diagrama  $D$  de  $K$  sobre el plano  $xy$ , al cual le asignamos una orientación. Para cada cruce de  $D$  hacemos un reemplazo

local, de manera que el cruce desaparezca para convertirse ahora en dos segmentos de arcos que no se intersectan y que, además, sean compatibles con la orientación. Ver figura 2.23.

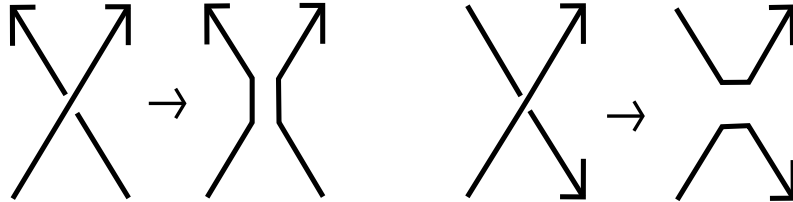


FIGURA 2.23. Reemplazo local en los cruces del diagrama de un nudo para obtener sus círculos de Seifert.

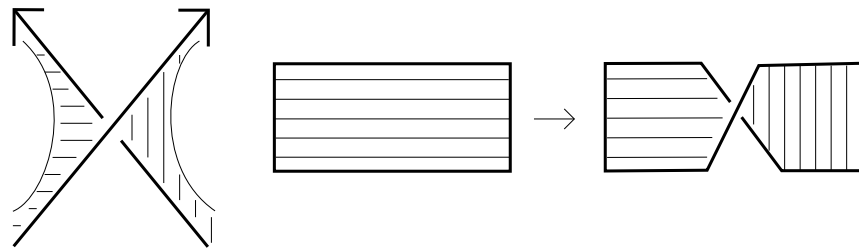


FIGURA 2.24. Banda torcida.

Este proceso nos da como resultado una colección  $\mathcal{C}$  de discos ajenos en el plano, a los que llamamos **círculos de Seifert** del diagrama  $D$ . Los círculos de Seifert de un diagrama pueden estar anidados. Podemos asignarles un índice a cada uno, es decir, si  $\lambda \in \mathcal{C}$ , el índice de  $\lambda$ , denotado como  $h(\lambda)$ , es el número de círculos de Seifert que contienen a  $\lambda$ . Usamos este índice como una función altura.

Ahora construiremos la superficie. Para cada círculo de Seifert  $\lambda$ , tomamos un disco  $\Delta$  sobre el plano  $z = h(\lambda)$ , tal que la proyección de  $\partial\Delta$  sea  $\lambda$ . Esta colección de discos está en el espacio  $\mathbb{R}_+^3$ , y cada disco está colocado de tal manera que cuando los vemos desde arriba, es posible ver cada una de sus fronteras. Los discos heredan la orientación del diagrama. Coloreamos ambos lados de cada uno de los discos: uno blanco si la orientación de su frontera es dextrógira y negro si es levógira. Para completar la superficie debemos añadir una pequeña banda rectangular torcida, figura 2.24, por cada cruce uniendo los círculos de Seifert. Si una banda conecta dos discos que se encuentran en la misma altura, entonces estos deben tener distinto color en su

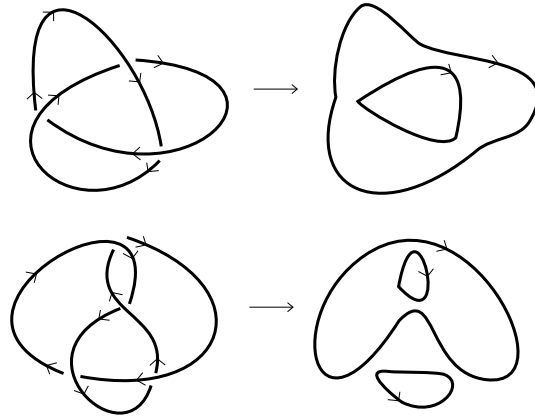


FIGURA 2.25. Ejemplo de la descomposición en círculos de Seifert del nudo trébol(arriba) y del nudo ocho (abajo).

cara superior (tienen distinta orientación), entonces el color se extiende de manera natural a través de la banda que los conecta, debido a que está girada. Cualquier otra banda conectará a discos cuyas alturas difieran en 1. Estos discos tendrán el mismo color en su superficie superior, el giro hace que los colores de la banda coincidan con los colores en las superficies superiores de los discos que estamos conectando. Así el resultado es una superficie orientable.  $\square$

El teorema 2.63 tiene como consecuencia la definición de un útil invariante de nudos:

DEFINICIÓN 2.64. El **género** de un nudo  $K$ , denotado por  $g(K)$ , es el género mínimo sobre cualquier superficie de Seifert para  $K$ .

**Ejemplo:** Por la proposición 2.61, un nudo tiene género cero si y sólo si es el nudo trivial.

Dado un nudo  $K \subset S^3$ , denotaremos por  $\eta(K)$  a una vecindad regular del nudo. Observemos que  $\eta(K)$  es un toro sólido. Dado un nudo  $K \subset S^3$  podemos obtener una variedad compacta.

DEFINICIÓN 2.65. Sea  $K \subset S^3$ , definimos el **exterior** de  $K$  al que denotamos  $E(K)$ , como  $S^3 - \text{int}(\eta(K))$ .

El exterior de un nudo es una 3-variedad compacta, cuya frontera es  $\partial\eta(K)$ .

DEFINICIÓN 2.66. Sea  $K$  un nudo en  $S^3$  con vecindad  $\eta(K)$ . Un **meridiano**  $m$  de  $K$  es una curva simple no separante en  $\partial\eta(K)$  que es frontera de un disco en  $\eta(K)$ . Una **longitud**  $l$  de  $K$  es una curva simple cerrada en  $\partial\eta(K)$  que intersecta a un meridiano en exactamente un punto. Dada una superficie de Seifert  $F$  para  $K$ , consideramos  $F' = F \cap E(K)$ . A la curva  $\partial F'$  contenida en  $\partial\eta(K)$  es una longitud a la que llamamos **longitud preferente**. Ver figura 2.26.

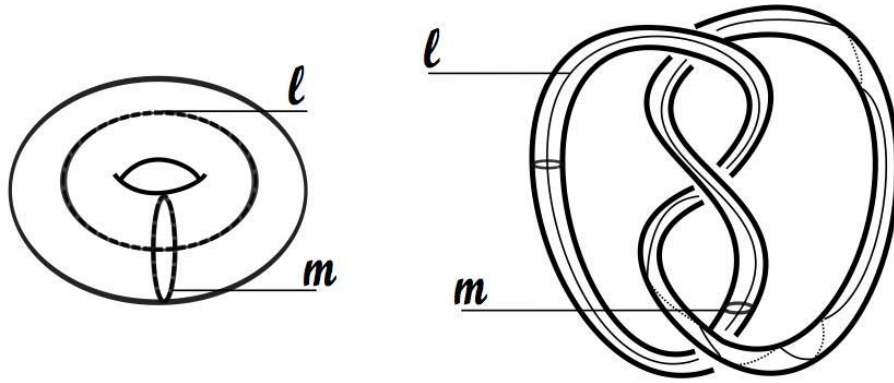


FIGURA 2.26. Una longitud y meridiano del nudo trivial y del nudo ocho.

DEFINICIÓN 2.67. Una superficie  $S \subset E(K)$  es **meridional** si  $\partial S$  consiste de meridianos de  $K$ . Decimos que es **plana** si es homeomorfa a una esfera con agujeros. Una superficie  $S$  meridional plana es **trivial** si es un anillo paralelo a  $\partial\eta(K)$ .



## Posición de puentes y posición delgada

Consideraremos  $S^3 = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ , especificaremos cuando estamos considerando los nudos en  $S^3$  o en  $\mathbb{R}^3$ . Nos referiremos a la función altura estándar como  $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , donde  $h(x, y, z) = z$ . Si además tenemos que para una  $n$ -variedad  $M$ , ( $n = 1, 2$ ), se cumple que  $h|_M$  es una función de Morse, diremos que  $M$  está en *posición general con respecto a  $h$* . Para  $t \in \mathbb{R}$ , denotaremos al plano  $h^{-1}(t)$  como  $P_t$  y lo llamaremos *plano de nivel*. Si nos referimos a un nudo  $K$  en  $S^3$  denotaremos a  $h^{-1}(t) \cup \{\infty\}$  como  $S_t$  y le llamaremos *esfera de nivel*.

El primer invariante de nudos sugerido por el diagrama del nudo es el número de cruces del nudo; éste es el invariante más natural para diferenciar nudos vía sus proyecciones. Dado un nudo  $K$ , es fácil encontrar una cota superior para su número de cruces, tomando un diagrama arbitrario de  $K$ , sin embargo, no hay una manera natural para encontrar el diagrama que minimiza su número de cruces. Por lo que este invariante no es el mejor. Además de que el comportamiento de este invariante bajo la suma conexa no está bien entendido.

### 1. Número de puentes y posición de puentes.

Existe otro invariante llamado *número de puentes del nudo*. Para definirlo empecemos tomando un diagrama del nudo y un punto en él. Recorremos el diagrama hasta regresar al punto de inicio, al pasar por cada cruce anotamos un símbolo  $+$  si cruzamos por encima y un signo  $-$  si hemos cruzado por debajo. Obtenemos una sucesión de un número par de signos, la cual tiene tantos signos positivos como negativos pues al recorrer el nudo pasamos exactamente dos veces por cada cruce. Ver figura 3.1.

**DEFINICIÓN 3.1.** *Sea  $K$  un nudo y  $D$  un diagrama asociado a  $K$ . El **número de puentes del diagrama  $D$** , denotado por  $b(D)$ , es la mitad del número de cambios de signos en la sucesión resultante al recorrer el diagrama. Si el primer signo difiere del último, éste también cuenta como un cambio. El **número de puentes del nudo  $K$** , denotado por  $b(K)$ , se define como:*



críticos. Análogamente para los mínimos. Así,  $P_0$  divide a  $K$  de tal manera que todos los máximos están encima y todos los mínimos están debajo de este plano. Observemos que  $|P_0 \cap K| = 2n$  y hay  $n$  arcos encima de  $P_0$ , los cuales contienen un solo máximo cada uno y hay  $n$  arcos debajo de  $P_0$  los cuales contienen un solo mínimo cada uno.

Para  $\varepsilon$  pequeño, el plano  $P_{t-\varepsilon}$  corta a  $K$  en  $n$  pequeños arcos encima de éste, correspondientes a cada máximo y el plano  $P_{\varepsilon-t}$  corta a  $K$  en  $n$  arcos debajo de éste, correspondientes a cada mínimo. Como no hay niveles críticos en  $[\varepsilon - t, t - \varepsilon]$ , isotopamos los arcos debajo de  $P_0$ , sin mover sus extremos, a arcos ajenos sobre  $P_0$ . Los arcos encima de  $P_0$  los isotopamos, sin mover sus extremos, a arcos en el plano  $P_\varepsilon$ .

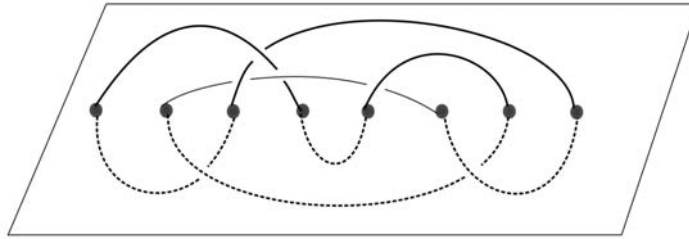


FIGURA 3.2. Un diagrama del nudo  $K$  cuya proyección correspondiente es transversal al plano divisor  $P_0$ .

La proyección de la isotopía resultante al plano  $P_0$ , vista desde arriba, nos da como resultado un diagrama con número de puentes  $n$ .

Por lo tanto  $b(K) \leq n$ . □

En las demostraciones de las proposiciones anteriores, los planos  $P$  y  $P_0$  tienen la propiedad de cortar al nudo de manera que lo separan en máximos y mínimos, por lo que reciben un nombre especial.

**DEFINICIÓN 3.4.** Sea  $K$  un nudo en posición general respecto a  $h$ . Si  $t$  es un valor regular para  $h|K$  tal que todos los valores críticos mayores a  $t$  corresponden a máximos de  $h|K$  y todos los valores menores a  $t$  corresponden a mínimos de  $h|K$ , diremos que  $P_t = h^{-1}(t)$  es un **plano divisor** para  $K$ . Si  $K$  posee un plano divisor, diremos que  $K$  está en **una posición de puentes**.

**DEFINICIÓN 3.5.** Sea  $K \subset \mathbb{R}^3$  en una posición de puentes. El número de puentes del representante, denotado por  $b(K, h)$  es igual al número de máximos de  $h|K$ . El **número de puentes** de  $K$ , denotado por  $b(K)$ , lo definimos por



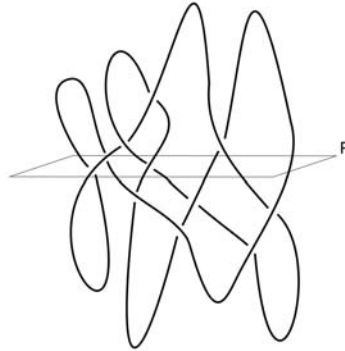


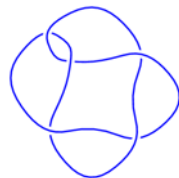
FIGURA 3.3. Un nudo  $K$  en posición de puentes y un plano divisor  $P$  para  $K$ .

$$b(K) = \text{mín}\{b(K', h) : K' \text{ es isotópico a } K\}$$

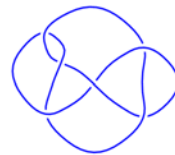
Si  $K$  es un nudo tal que  $b(K) = b(K, h)$ , decimos que  $K$  está en **posición de puentes**.

En [10], Schubert probó que este invariante es esencialmente aditivo, esto es:

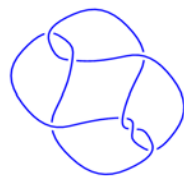
$$b(K_1 \# K_2) = b(K_1) + b(K_2) - 1.$$



5\_2



6\_3



7\_5



8\_14

FIGURA 3.4. Ejemplos de nudos de dos puentes [fuente: [www.indiana.edu/~knotinfo/](http://www.indiana.edu/~knotinfo/)].

**Ejemplos:**

- El número de puentes del nudo trivial es 1.
- En la figura 3.4 tenemos algunos ejemplos de nudos de dos puentes.

**2. Posición delgada y ancho de un nudo.**

Hasta ahora, hemos estudiado  $h|K$  en una posición, a la que llamamos posición de puentes, donde todos los máximos aparecen arriba de todos los mínimos respecto a algún plano. Si isotopamos  $K$  moviendo únicamente sus máximos, pasando uno por encima de otro, sin generar nuevos puntos críticos de  $h|K$ , no cambiamos el número de puentes entre  $K$  y el representante resultante. Pero si queremos pasar un mínimo por encima de un máximo o viceversa, las cosas cambian. Podríamos preguntarnos si los arcos de  $K$ , los cuales contienen a los puntos críticos que queremos mover, están relacionadas de alguna manera, es decir, si sus extremos coinciden, ya sea en un punto, en dos puntos, o simplemente no coinciden. Lo que nos lleva a estudiar otro invariante.

Consideremos un nudo  $K$  en  $\mathbb{R}^3$  en posición general respecto a  $h$ , cuyos puntos críticos están en distintos niveles. Sean  $c_0 < c_1 < \dots < c_n$  los valores críticos de  $h|K$ . Si para cada  $1 \leq i \leq n$  tenemos que  $t_i$  son valores regulares tales que  $c_{i-1} < t_i < c_i$ , entonces  $P_{t_i}$  corta transversalmente a  $K$  en un número par de puntos  $\omega_K(t_i)$ , esto es,  $\omega_K(t_i) = |P_{t_i} \cap K|$ .

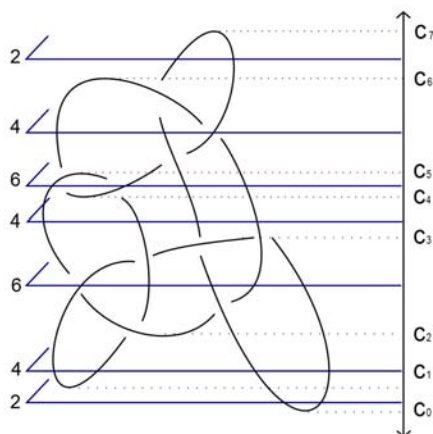


FIGURA 3.5. Nudo  $11a_{43}$  en posición delgada,  $b(11a_{43}) = 4$ ,  $\omega(11a_{43}) = 28$ .

DEFINICIÓN 3.6. Sea  $K$  un nudo, definimos **el ancho** de este representante, denotado por  $\omega(K, h) = \sum_{i=1}^n \omega_K(t_i)$ . El **ancho del nudo**  $K$ , denotado por  $\omega(K)$ , es el mínimo  $\omega(K', h)$  sobre todos los nudos  $K'$  isotópicos a  $K$ . Diremos que  $K$  está en **posición delgada** si  $\omega(K, h) = \omega(K)$ .

Observemos cómo cambia el ancho de  $K$ :

Al tomar un punto crítico de  $h|K$  el nivel crítico correspondiente tiene una vecindad que no contiene otros niveles críticos, así que podemos isotopar  $K$  de tal manera que la altura de este punto crítico suba o baje en esta vecindad sin mover los otros puntos críticos.

Si uno de los niveles críticos adyacentes corresponde a un punto crítico de la misma naturaleza, es decir, si tenemos dos niveles críticos adyacentes correspondientes a máximos (mínimos) locales, es posible isotopar  $K$  intercambiando sus alturas y dejando el resto de los puntos críticos sin cambio. Sea  $\phi$  tal isotopía y  $K' = \phi(K)$ . Observemos que conservan el mismo número de puntos críticos, además los mismos niveles críticos, luego los sumandos de  $\omega(K', h)$  son exactamente los mismos sumandos de  $\omega(K, h)$ . Por lo tanto  $\omega(K, h) = \omega(K', h)$ .

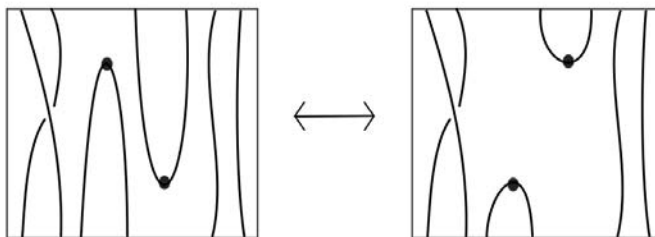


FIGURA 3.6. Pasar un máximo por debajo de un mínimo ó viceversa.

Por otro lado, si es posible intercambiar dos puntos críticos cuya naturaleza es distinta, es decir, intercambiar la altura de un máximo por la de un mínimo adyacentes, en este caso conservamos el mismo número de sumandos, donde todos, salvo uno, permanecen iguales. Por lo que  $\omega(K, h) \neq \omega(K', h)$ . Por ejemplo, si pasamos un mínimo sobre un máximo adyacentes al nivel  $t_i$ , tendremos que  $\omega_K(t_i) = \omega_{K'}(t_i)$  para toda  $i \neq j$  y  $\omega_K(t_j) - 4 = \omega_{K'}(t_j)$ , donde  $j$  es tal que  $t_j$  es el nivel regular entre los niveles de los puntos críticos que estamos intercambiando. Más aún, al hacer esta isotopía pudimos haber eliminado los puntos críticos intercambiados, en este caso  $\omega_{K'}(t)$  tendría menos sumandos que  $\omega_K(t)$ .

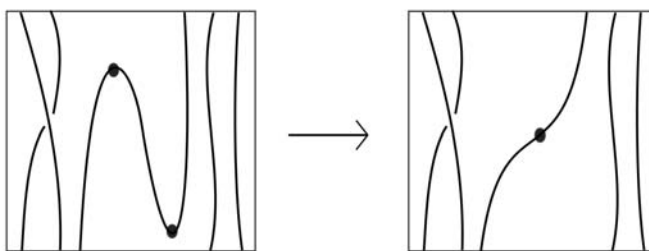


FIGURA 3.7. Cuando los extremos del máximo y el mínimo coinciden en un punto.

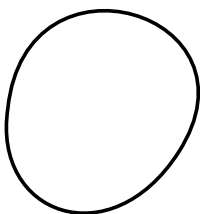


FIGURA 3.8. El nudo trivial en posición delgada.

En la figura 3.8 observemos que la posición delgada del nudo trivial coincide con su posición de puentes y el ancho de este nudo es dos.

**DEFINICIÓN 3.7.** Sea  $K$  un nudo en  $\mathbb{R}^3$  en posición general respecto a  $h$ , y sean  $c_0 < c_1 < \dots < c_n$  los valores críticos de  $h|_K$ . Sea  $t_i$  un valor regular tal que  $c_{i-1} < t_i < c_i$ , donde  $c_{i-1}$  y  $c_i$  corresponden a un máximo y un mínimo de  $h|_K$ , respectivamente. Diremos que  $t_i$  es un **nivel delgado** y que  $P_{t_i}$  es un **plano delgado** para  $K$ . Por otro lado, si  $c_{i-1}$  y  $c_i$  corresponden a un mínimo y a un máximo de  $h|_K$ , respectivamente, diremos que  $t_i$  es un **nivel grueso** y que  $P_{t_i}$  es un **plano grueso** para  $K$ . Ver la figura 3.9.

Obsevaciones: Un nudo  $K$  está en una posición de puentes si y sólo si no tiene niveles delgados. Si  $K$  está en una posición de puentes un plano divisor corresponde a un nivel grueso.

**DEFINICIÓN 3.8.** Sea  $K \subset \mathbb{R}^3$  un nudo,  $P \subset \mathbb{R}^3$  un plano de nivel respecto a  $h$ . Sean  $B_u$  y  $B_l$  las regiones encima y debajo de  $P$  respectivamente. Un **disco superior** con respecto a  $P$ , es un disco  $D \subset \mathbb{R}^3 - \eta(K)$  transversal a  $P$  tal que  $\partial D = \alpha \cup \beta$ , donde  $\beta$  es un arco encajado en  $\partial\eta(K)$ , paralelo a un subarco de  $K$ ,  $\alpha$  es

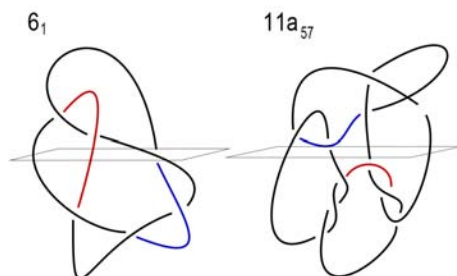


FIGURA 3.9. A la izquierda el nudo  $6_1$  con un plano grueso y a la derecha el nudo  $11a_{57}$  con un plano delgado.

un arco propiamente encajado en  $S = P - \eta(K)$ ,  $\partial\alpha = \partial\beta$  y una pequeña vecindad producto de  $\alpha$  yace en  $B_u$ , ver figura 3.10-B. Un **disco inferior** se define de manera análoga. Notemos que el interior de un disco superior o inferior puede intersectar  $P$  en curvas simples cerradas o en arcos. Una curva de más adentro en  $D \cap P$  corta a un disco, el cual yace completamente encima o debajo de  $P$ . Tal disco es llamado **tapa superior** o **tapa inferior**, respectivamente. Si un disco superior(inferior) tiene la propiedad de que  $\beta$  yace totalmente encima(debajo) de  $P$ , diremos que es un **disco estrictamente superior**(**disco estrictamente inferior**), ver figura 3.10-A. Notemos que los discos estrictos tienen la propiedad de que  $\text{int}(D) \cap P$  no contiene arcos.

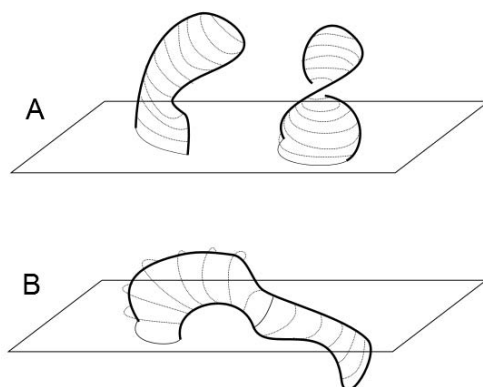


FIGURA 3.10. Dos discos superiores estrictos A) y un disco superior B).

DEFINICIÓN 3.9. Sean  $K \subset \mathbb{R}^3$  un nudo,  $P_{t_0} \subset \mathbb{R}^3$  un plano de nivel respecto a  $h$  y  $B_u, B_l$  las regiones encima y debajo de  $P_{t_0}$ , respectivamente. Supongamos que cada componente de  $K \cap B_u$  tiene exactamente un máximo. Sea  $\Delta$  una colección de discos estrictamente superiores, tales que para cada nivel  $t$  mayor a  $t_0$ , el plano  $P_t$  intersecta

a cada disco superior en a lo más un arco. La colección  $\Delta$  es llamada una familia de **discos descendentes** para  $K \cap B_u$ .

De manera análoga, si para cada componente de  $K \cap B_l$  hay un solo mínimo, podemos definir una familia de **discos ascendentes** para  $K \cap B_l$ .

Siempre que tengamos un plano con la propiedad de que cada arco del nudo encima(debajo) de éste tiene un solo máximo(mínimo), podremos encontrar una familia de discos descendentes(ascendentes) ajenos.

LEMA 3.10. *Supongamos que  $S$  es una esfera de nivel para  $K \subset S^3$  y cada componente de  $K \cap B_u$  tiene un solo máximo. Supongamos que  $\Delta$  es una colección de discos superiores disjuntos contenidos completamente en  $B_u$ . Entonces  $\Delta$  es isotópico relativo a los arcos  $\Delta \cap S$  a una colección completa de discos descendentes. Más aún, esta isotopía no introduce nuevos puntos críticos de  $h|_K$ .*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que  $K_1, K_2, \dots, K_n$  son las componentes de  $K$  en  $B_u$ . Sea  $\Delta = \{D_i\}_{i=1}^n$  una colección de discos superiores ajenos contenidos completamente en  $B_u$  tales que  $D_i$  es el disco superior correspondiente a la componente  $K_i$ . Para cada  $i$  tenemos que  $\partial D_i = \alpha_i \cup \beta_i$ , con  $\alpha_i \subset S$  y  $\beta_i \subset \partial\eta(K)$ . Después de un posible cambio en las alturas de los máximos de  $K$  podemos suponer que existe una colección  $\Delta' = \{D'_i\}_{i=1}^n$  de discos descendentes ajenos correspondientes a  $K_1, \dots, K_n$  tales que  $\partial D'_i = \alpha'_i \cup \beta'_i$ , donde  $\alpha'_i = \alpha_i$  y  $\beta'_i = \beta_i$ . Al intercambiar las alturas de los máximos de  $K$  también isotopamos los discos de la colección  $\Delta$ , pero ahora podemos suponer que  $\text{int}(\Delta) \cap \text{int}(\Delta')$  solo puede ser vacío o tener un número finito de curvas. Reduciremos el número de componentes de  $\text{int}(\Delta) \cap \text{int}(\Delta')$ :

(i) Si  $\text{int}(\Delta) \cap \text{int}(\Delta') = \emptyset$ .

Tomamos  $1 \leq i \leq n$ , como los interiores de los discos  $D_i, D'_i$  son ajenos e  $\text{int}(\Delta) \cap \text{int}(\Delta') = \emptyset$ , tenemos que  $D_i \cup_{\alpha_i \cup \beta_i} D'_i$  es una esfera que es frontera de

una bola en  $E(K)$ , por lo tanto es posible isotopar  $D_i$  a  $D'_i$  usando esta bola.

(ii) Si  $\text{int}(\Delta) \cap \text{int}(\Delta') \neq \emptyset$ .

Entonces existen  $D_i \subset \Delta$  y  $D'_j \subset \Delta'$  par de discos cuyos interiores no son ajenos. Observemos que además estos podrían corresponder a distintas componentes de  $K$ .

Sea  $\gamma \in \text{int}(D_i) \cap \text{int}(D'_j)$  una curva de más adentro para  $D'_j$ , entonces existe un disco  $E' \subset D'_j$  tal que  $\partial E' = \gamma$ , así que el interior de este disco es ajeno a  $D_i$ , además  $\gamma$  es frontera de un subdisco  $E \subset D_i$ . Así,  $E \cup_{\gamma} E'$  es una esfera que es frontera de una bola en  $E(K)$ . Usamos esta bola para isotopar

$D_i$  pasando  $E$  a través de  $E'$  para eliminar  $\gamma$  de la colección de curvas en la intersección  $\text{int}(D_i) \cap \text{int}(D'_j)$ . Repitiendo este proceso de manera iterativa isotopamos  $\Delta$  a una colección de discos superiores estrictos, cuyos interiores no se intersectan con los interiores de los discos en  $\Delta'$ , lo que nos regresa al caso (i).

Por lo tanto podemos llevar  $\Delta$  a una colección completa de discos descendentes con un número finito de isotopías, de tal manera que los arcos  $\alpha_i \subset P$  permanecen fijos y sin introducir puntos críticos durante las isotopías.  $\square$

Al proceso de reducir el número de curvas cerradas en que se intersectan dos superficies, empezando con la curva de más adentro le llamamos: **argumento de la curva de más adentro**.

El siguiente lema nos da una forma más práctica para calcular el ancho de un nudo a partir de sus niveles delgados y gruesos.

**LEMA 3.11.** *Sea  $K \subset \mathbb{R}^3$  en posición general respecto a la función altura estándar  $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  cuyos puntos críticos son  $c_0 < c_1 < \dots < c_n$ , con valores regulares  $t_i$  tales que  $c_{i-1} < t_i < c_i$ . Elegimos los valores  $t_{i_1}, t_{i_2}, \dots, t_{i_k}$  los cuales son niveles gruesos de  $K$  y  $t_{j_1}, t_{j_2}, \dots, t_{j_{k-1}}$  son niveles delgados, entonces tenemos que  $t_{i_l} < t_{j_l} < t_{i_{l+1}}$  para cada  $1 \leq l \leq k-1$ . Si denotamos  $a_l$  a  $\omega(t_{i_l})$  y  $b_l$  a  $\omega(t_{j_l})$  tenemos que*

$$2\omega(K, h) = \sum_{l=1}^k a_l^2 - \sum_{l=1}^{k-1} b_l^2.$$

**DEMOSTRACIÓN.** Sabemos que  $\omega$  está definido por los valores que toma en cada  $t_i$  y que  $\omega(h, K) = \sum_{i=1}^n \omega(t_i)$ ; más aún  $\omega(t_1) = \omega(t_n) = 2$ , y la diferencia entre el ancho de dos valores regulares adyacentes siempre es 2. Por lo que siempre podemos contar  $\omega(h, K)$  de la siguiente manera:

Cada círculo en la figura 3.11 representa un 2, el  $i$ -ésimo renglón del dibujo representa al  $i$ -ésimo nivel y tiene  $\frac{\omega(t_i)}{2}$  círculos donde  $\omega(t_i) = |P_i \cap K|$ . Observemos que la diferencia entre dos renglones adyacentes es un círculo.

Un nivel grueso  $t_{i_l}$  está representado por el renglón  $i_l$  con  $a_l/2$  círculos tales que los niveles superior e inferior adyacentes contienen exactamente  $(a_l/2) - 1$  círculos. Como para cada uno de estos renglones existen arriba y debajo al menos  $a_l - 1$  renglones podemos formar un cuadrado cuya diagonal sea el renglón  $i_l$ . Como en el dibujo, este

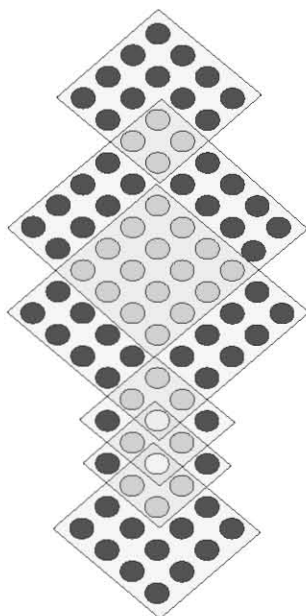


FIGURA 3.11. Representación de las intersecciones en cada nivel.

cuadrado contiene  $a_l^2/4$  círculos. Haciendo esto para cada renglón que representa un nivel grueso, habremos encerrado todos los círculos. Observemos que la intersección de cada par de cuadrados es un nuevo cuadrado cuya diagonal está en un renglón correspondiente a un nivel delgado  $j_l$  que contiene  $b_l/2$  círculos y define un cuadrado el cual encierra  $(b_l^2/4)$  círculos. Por lo que

$$\omega(K, h) = 2 \sum_{l=1}^k \frac{a_l^2}{4} - 2 \sum_{l=1}^{k-1} \frac{b_l^2}{4} = \frac{1}{2} \left( \sum_{l=1}^k a_l^2 - \sum_{l=1}^{k-1} b_l^2 \right).$$

Lo que demuestra el lema. □

En el siguiente lema demostraremos que los planos o esferas delgadas no pueden contener discos superiores(inferiores) estrictos.

**LEMA 3.12.** *Si  $K \subset S^3$  está en posición delgada respecto a  $h$  y  $S$  es una esfera delgada, entonces no hay discos superiores o inferiores estrictos para la superficie plana meridional  $P = S - \text{int}(\eta(K))$ .*



DEMOSTRACIÓN. Supongamos que  $D$  es un disco superior estricto para  $P$ , entonces  $\partial D = \alpha \cup \beta$  donde  $\alpha$  es un arco propiamente encajado en  $P$  y  $\beta$  es paralelo a un arco  $\gamma$  de  $K$ . Entonces, podemos isotopar  $\gamma$  al arco  $\alpha$  usando el disco  $D$ . El punto crítico inmediato superior a  $S$  es un mínimo. Si  $\gamma$  contiene un solo máximo entonces habremos empujado un máximo debajo un mínimo sin introducir nuevos puntos críticos para  $h|K$ . Si  $\gamma$  contiene dos o mas puntos críticos habremos eliminado al menos dos de estos puntos críticos. En cualquiera de los casos reducimos el ancho de  $K$ , lo que contradice la hipótesis de que  $K$  está en posición delgada.

Si ocurre que  $D$  es un disco inferior estricto, el resultado es análogo.

Por lo tanto no hay discos superiores ni inferiores estrictos para  $P$ . □

### 3. Adelgazando el nudo trivial.

A continuación, demostraremos que dado el nudo trivial en una posición de puentes, es posible llevarlo hasta una posición más delgada, sin aumentar el ancho durante cada isotopía.

**PROPOSICIÓN 3.13.** *Supongamos que  $K \subset \mathbb{R}^3$  es el nudo trivial y que está en una posición de puentes respecto a  $h$ . Entonces existe un plano divisor  $P$  para  $K$  tal que un máximo y un mínimo pueden ser simultáneamente isotopados para yacer sobre  $P$ . Durante esta isotopía el ancho permanece sin cambios.*

DEMOSTRACIÓN. Como  $K$  es el nudo trivial es frontera de un disco  $D$ . Isotopamos  $D$  de manera que está en posición general respecto a  $h$ . Podemos hacer que cerca de cada máximo de  $K$ , el disco  $D$  incide en  $K$  desde abajo y cerca de cada mínimo el disco  $D$  incide en  $K$  desde arriba, ver figura 3.12. Para cualquier plano de nivel  $P$  justo abajo (arriba) de un máximo (mínimo) una de las componentes de  $D - P$  es un disco superior(inferior) contenido completamente arriba (abajo) de  $P$ .

Sean  $t_u > t_l$  valores críticos de  $h|K$  tales que  $t_l$  corresponde al punto crítico del mínimo más alto y  $t_u$  al máximo más bajo.

**Afirmación:** Existe un valor  $t \in (t_l, t_u)$  para el cual  $P_t$  admite un disco superior estricto  $D_u$  y un disco inferior estricto  $D_l$  con interiores ajenos.

Sea  $t \in (t_l, t_u)$  un valor genérico, esto es que  $P_t$  es transversal a  $D$ . En particular,  $P_t$  no contiene puntos críticos de  $h|D$ . Consideramos  $\alpha \in D \cap P_t$  un arco de más afuera respecto a  $D$ . Entonces  $\alpha$ , junto con un arco  $\gamma$  de  $\partial D$ , es frontera de un disco

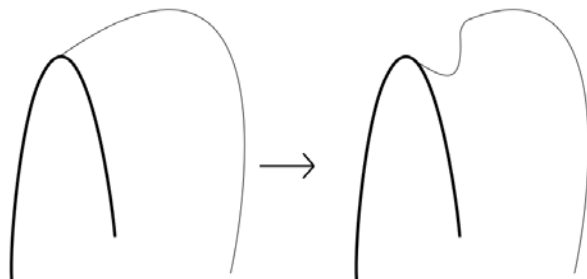


FIGURA 3.12. Una isotopía del disco superior de tal manera que el nuevo disco incide en  $K$  por debajo.

$E \subset D$ , esto es  $\partial E = \alpha \cup \gamma$  y  $\gamma$  está completamente arriba o completamente debajo de  $P_t$ . Así que  $\text{int}E \cap P_t$  no contiene arcos y  $E$  es disco superior o inferior estricto.

Así que tenemos dos posibilidades:

- Existe un valor genérico  $t$  para el cual dos arcos de más afuera de  $P_t \cap D$  respecto a  $D$ , cortan a un disco superior y a un disco inferior con interiores ajenos. En este caso, la afirmación es cierta.
- Si  $t < t_u$  y  $t$  está suficientemente cerca de  $t_u$ , entonces es claro que  $P_t \cap D$  tiene un arco de más afuera en  $D$  que determina un disco superior estricto. Sea  $t_0 = \inf\{t \in (t_l, t_u) \mid D \cap P_t \text{ tiene un arco de más afuera en } D \text{ que determina un disco superior estricto}\}$ . Es claro que  $t_0$  es un punto crítico de  $D$ , pues de lo contrario podríamos encontrar un  $t$  más pequeño con esta propiedad, a menos que  $t_0 = t_l$ , pero si esto pasa estaremos en el caso anterior. Entonces existe un valor crítico  $t_0 \in (t_l, t_u)$  de  $h|D$  cuyo punto crítico correspondiente está en el interior de  $D$ , ya que no puede estar en la frontera de  $D$ . Así que podemos tomar  $\varepsilon$  suficientemente pequeño tal que  $P_{t_0+\varepsilon}$  tiene un arco de más afuera respecto a  $D$  que determina un disco superior estricto, y  $P_{t_0-\varepsilon}$  tiene un arco de más afuera respecto a  $D$  que determina un disco inferior estricto, ya que no puede determinar un disco superior estricto. El plano  $P_{t_0}$  es el que estamos buscando, para ver que cumple lo requerido modificaremos el disco  $D$ . Tomamos dos copias de  $D$  (en lados opuestos), que denotaremos  $D_+$  y  $D_-$ , resultantes de engordar  $D$  de tal manera que las fronteras de  $D_\pm$  sean la frontera de  $D$ , y en el plano  $P_{t_0}$  los arcos de más afuera de  $D_\pm \cap P_{t_0}$  disten  $\varepsilon$  del arco de más afuera de  $D \cap P_{t_0 \pm \varepsilon}$ , respectivamente.

Entonces  $P_{t_0}$  es transversal a  $D_{\pm}$  y las proyecciones de los arcos  $\alpha_{\pm}$  en  $P_{t_0}$  cortan a un disco superior estricto y a un disco inferior estricto respecto a  $D_{\pm}$  respectivamente.

Con lo que la afirmación queda demostrada.

Ahora, llamamos  $P$  al plano  $P_t$ ,  $B_u$  y  $B_l$  a las regiones encima y debajo de  $P$  respectivamente y veremos que  $P$  es el plano divisor que estamos buscando. Si  $\text{int}(D_u)$  e  $\text{int}(D_l)$  son ajenos de  $P$ , por el lema 3.10 podemos isotopar a  $D_u$  a un disco descendente  $D_1$  y a  $D_l$  a un disco ascendente  $D_2$ , para después isotopar  $D_1$  y  $D_2$  a un par de arcos ajenos sobre  $P$ . Durante esta isotopía no cambiamos el ancho de  $K$ .

Veamos el caso en que  $\text{int}(D_u)$  e  $\text{int}(D_l)$  intersectan a  $P$ . Sea  $\gamma$  una curva cerrada en  $(D_u \cup D_l) \cap P$  que sea de más adentro para  $D_u$  o para  $D_l$ , entonces  $\gamma$  es frontera de un disco  $C$ , el cual es una tapa superior o una tapa inferior. Supongamos que  $C$  es una tapa superior.

Sea  $\mathcal{D}$  una colección completa de discos descendentes para  $K \cap B_u$ , los cuales podrían intersectar a  $C$  en una colección finita de curvas cerradas y arcos. Por un argumento de curva de más adentro podemos eliminar las curvas en la intersección. Tomamos un arco en  $C \cap D$ , con  $D \subset \mathcal{D}$ , tal que sea un arco de más afuera en  $C$ . Podemos cortar al disco  $D$  usando el disco de más afuera en  $C$  (a este proceso le llamamos: **un argumento del arco de más afuera**). El resultado es otra colección de discos con menos intersecciones en  $C$ .

Así obtenemos una colección completa de discos superiores  $\Delta$  totalmente contenidos en  $B_u$  y ajenos a  $C$ . Durante este proceso el ancho permanece sin cambio.

La colección  $\Delta$  satisface las hipótesis del lema 3.10, por lo que podemos isotoparle a una colección  $\Delta'$  de discos descendentes relativo a los arcos de  $\Delta \cap P$ , tal que durante esta isotopía no cambiamos el ancho y  $\Delta' \cap C$  solo contiene curvas cerradas. Por un argumento de curva de más adentro podemos isotopar  $C$  a un disco ajeno a  $\Delta'$ . Por lo tanto, tenemos una colección completa de discos descendentes para  $K \cap B_u$  ajenos a  $C$ .

Observemos que dada una tapa inferior, simétricamente podemos encontrar para  $K \cap B_l$  una colección de discos ascendentes ajenos a esta tapa.

Ahora tenemos los siguientes casos:

- i) Existen  $C_u$  tapa superior y  $C_l$  tapa inferior ajenas.

Entonces existe una colección de discos descendentes para  $K \cap B_u$  ajenos a  $C_u$  y una colección de discos ascendentes para  $K \cap B_l$  ajenos a  $C_l$ . Las curvas  $\partial C_u$  y  $\partial C_l$  son frontera de dos discos ajenos  $E_u$  y  $E_l$  en  $P$ . Elegimos una componente  $K_1$  de  $K \cap B_u$  que incida en  $E_u$  y una componente  $K_2$  de  $K \cap B_l$  que incida en  $E_l$ . Existe un disco descendente para  $K_1$  ajeno a  $C_u$ , asimismo, para  $K_2$  existe un disco ascendente ajeno a  $C_l$ . Entonces podemos isotopar  $K_1$  y  $K_2$  a arcos ajenos sobre  $P$ . Durante esta isotopía el ancho no cambia.

ii) Existe una tapa superior/inferior y un disco inferior/superior con interior ajeno a  $P$ .

Como en el caso (i) tomamos una componente  $K_1$  de  $K \cap B_u$  que incida en  $E_u$  y un disco descendente ajeno a  $C_u$ . Luego tomamos el disco ascendente isotópico a  $D_l$  y después isotopamos los arcos correspondientes a  $K$  sobre el plano  $P$ .

iii) Supongamos que  $D_u$  y  $D_l$  tienen interiores que intersectan a  $P$ , pero solo hay tapas inferiores o solo hay tapas superiores.

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que únicamente tenemos tapas inferiores y tomamos  $C_l$  una tapa inferior correspondiente a  $D_u$ . Sea  $\Delta$  una colección de discos descendentes para  $K \cap B_u$ .

Si  $|\Delta \cap D_u| = 0$ , entonces este caso es análogo al caso (ii).

Si  $|\Delta \cap D_u| \neq 0$ . Sea  $\gamma \in \Delta \cap D_u$  una curva cerrada de más adentro para  $D_u$ . Si  $\gamma$  es frontera de un disco que contiene a  $C_l$  entonces podemos reducir el número de intersecciones en  $\Delta \cap D_u$ , o bien, podemos isotopar para obtener una tapa superior, para así tener el caso i). Si  $\gamma$  no es frontera de un disco que contiene a  $C_l$ , entonces isotopamos  $int D_u$  lejos de  $P$  (esto para no alterar la frontera de  $C_l$ ) y así eliminar la intersección. Si  $\gamma$  es un arco, por un argumento del arco de más afuera podemos reducir  $\Delta \cap D_u$ ; de esta manera, siempre podemos asumir que  $\Delta \cap D_u = \emptyset$ .

Nota: si  $K$  no incide en algún disco sobre  $P$  correspondiente a alguna de las tapas que hemos considerado para la isotopía, podemos hacer una isotopía previa que elimina estas tapas. Por esta razón podemos siempre pensar que al tener una tapa inferior o superior, existe al menos una componente de  $K - P$  contenida en ésta.

En todos los casos es posible encontrar una isotopía que lleva la altura de algún máximo y algún mínimo a  $P$ , y durante estas isotopías no cambiamos el ancho. Por ende, hemos probado el resultado.  $\square$

Observemos que en la demostración anterior existen las siguientes posibilidades:

- a) Los extremos del máximo coinciden con los extremos del mínimo, entonces  $K$  ya está en posición delgada.
- b) Los extremos del máximo y el mínimo tienen un punto en común, entonces estos puntos críticos se pueden anular. Ver figura 3.7.
- c) Los extremos del máximo y del mínimo no tienen puntos en común y en este caso podemos empujar el máximo por debajo del mínimo, reduciendo el ancho. Ver figura 3.6.

**COROLARIO 3.14.** *Si el nudo trivial está en una posición de puentes; o bien ya está en posición delgada; o bien lo podemos isotopar a una posición con ancho menor, sin aumentar el ancho durante las isotopías.*

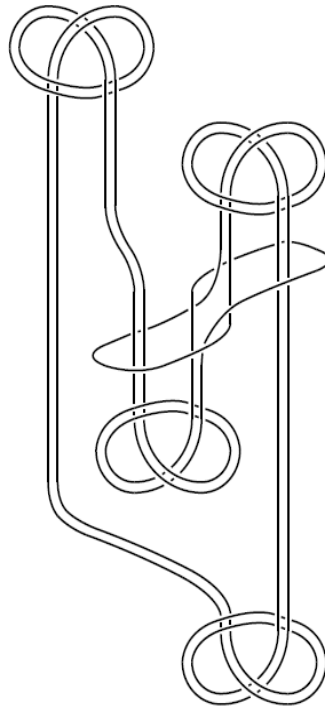


FIGURA 3.13. Ejemplo de Zupan [13], del nudo trivial.

Scharlemann pregunta en [7] si al eliminar la condición de que el nudo trivial esté en posición de puentes, es posible isotoparlo a una posición delgada vía una isotopía que nunca incremente el ancho. Esta pregunta la responde Zupan, en [13], dando un representante del nudo trivial, ver figura 3.13, tal que no es posible llevarlo a su posición delgada sin aumentar el ancho.

#### 4. Posición delgada y superficies de Seifert.

A continuación veremos cómo es la intersección de una superficie de Seifert con niveles delgados y gruesos.

**TEOREMA 3.15.** *Supongamos  $K \subset S^3$  está en posición delgada pero no en posición de puentes, entonces existe al menos un nivel delgado. Si  $F$  es una superficie de Seifert para  $K$ , en posición general respecto a  $h$ , y  $S_r$  es una esfera delgada, entonces cada arco de  $F \cap S_r$  es esencial en  $F$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** Consideremos la variedad compacta  $S^3 - \text{int}(\eta(K))$ . Sea  $P$  la superficie plana  $S_r - \text{int}(\eta(K))$ . Como  $F$  es una superficie de Seifert del nudo, podemos asumir que  $F \cap \partial\eta(K) = \partial F$ , es decir, la frontera de  $F$  en  $S^3 - \text{int}(\eta(K))$ , es una longitud de  $\partial\eta(K)$ . Las componentes de la frontera de  $P$  corresponden a meridianos de  $\partial\eta(K)$ , entonces  $\partial F$  intersecta a cada componente de  $\partial P$  en exactamente un punto. En particular, cada arco de  $F \cap P$  es esencial en  $P$  y como  $P$  es una esfera con un número par de agujeros, los arcos de  $F \cap P$  tienen sus extremos en distintas componentes de  $\partial P$ .

Supongamos que un arco  $\alpha$  en  $F \cap S_r$  es no esencial en  $F$  y que  $\alpha$  es un arco de más afuera para  $F$ . Entonces  $\alpha$  corta un subdisco  $E$  de  $F$  que no contiene otro arco de  $F \cap S_r$ , aunque podría contener curvas. Además  $\partial E = \alpha \cup \beta$ , donde  $\alpha$  está propiamente encajado en  $P$  y  $\beta$  es un subarco de  $\partial F = K$ . Por lo tanto  $E$  es un disco superior o inferior para la esfera delgada  $S_r$ . Lo que contradice el lema 3.12.

Por lo tanto cada arco de  $F \cap S_r$  es esencial en  $F$ . □

**TEOREMA 3.16.** *Supongamos que  $K \subset S^3$  está en posición delgada y  $F$  es una superficie de Seifert para  $K$  en posición general respecto a  $h$ . Supongamos también, que  $S_r$  es una esfera gruesa para  $K$ . Sean  $c_- < r < c_+$  valores críticos de  $h|K$  los cuales son adyacentes a  $r$ , en particular,  $c_+$  es la altura de un máximo y  $c_-$  es la altura de un mínimo. Entonces  $K$  es el nudo trivial o existe un valor  $r'$ , con  $c_- < r' < c_+$  tal que cada arco de  $F \cap S_{r'}$  es esencial en  $F$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** Tomamos  $\varepsilon$  suficientemente pequeño, tal que  $h|F$  no tiene valores críticos entre  $c_+ - \varepsilon$  y  $c_+$ . Sea  $P_+$  la esfera de nivel  $c_+ - \varepsilon$ . Si todas las componentes de  $F \cap S_+$  son esenciales en  $F$  entonces hemos terminado. En caso contrario, existe un arco  $\alpha \in F \cap S_+$  que es no esencial y podemos suponer que es un arco de más afuera con respecto a  $F$ . Entonces  $\alpha$  corta un subdisco  $E$  de  $F$ , tal que  $\partial E = \alpha \cup \beta$ , donde  $\beta$  es un arco paralelo a un subarco de  $K$ . Esto implica que  $\beta$  está completamente

encima o debajo de  $S_+$ . Supongamos primero que  $\beta$  yace debajo de  $S_+$ , entonces  $E$  es un disco inferior.

Sea  $\gamma \subset K - S_+$  la componente del nudo que contiene al máximo correspondiente al nivel  $c_+$ .

- Si los extremos de  $\beta$  coinciden con los extremos de  $\gamma$ . Entonces, el disco  $E$  describe una isotopía de  $\beta$  sobre un arco en  $S_+$ . Después de esta isotopía,  $K$  tendrá un solo máximo y un solo mínimo; así,  $K$  es el nudo trivial.
- Si solo un extremo de  $\beta$  coincide con un extremo de  $\gamma$ . Entonces, el disco  $E$  puede usarse para isotopar  $\beta$  hasta pasar el nivel  $c_+$  cancelando el máximo en  $\gamma$  y uno o mas puntos críticos en  $\beta$ , lo cual reduce el ancho. Esto es una contradicción, ya que  $K$  está en posición delgada.
- Si los extremos de  $\beta$  y  $\gamma$  son ajenos, el disco  $E$  puede ser usado para isotopar  $\beta$  sobre el máximo correspondiente a  $c_+$ , ya que no hay puntos críticos de  $h|F$  entre el nivel de  $S_+$  y  $c_+$ . En este caso, movimos un mínimo por encima de un máximo, reduciendo el ancho de  $K$ . Posiblemente también se cancelan otros puntos críticos de  $\beta$ . Lo cual contradice la hipótesis de que  $K$  está en posición delgada.

Por lo tanto  $\beta$  debe estar encima de  $S_+$ , entonces  $E$  es un disco superior.

De manera similar, sea  $S_-$  una esfera de nivel justo encima del mínimo correspondiente a  $c_-$ . Si los arcos en  $S_- \cap F$  son esenciales en  $F$ , hemos terminado. Si existe un arco en  $S_- \cap F$  que no sea esencial, entonces, éste corta un subdisco  $E$  de  $F$  que es inferior respecto a  $S_-$ .

Supongamos que para toda esfera de nivel entre  $S_+$  y  $S_-$  existe un arco de intersección con  $F$  que es no esencial. Entonces, hay un subdisco de  $F$  el cual es superior o inferior. Por lo tanto, como en la demostración de la afirmación de la proposición 3.13, existe una esfera de nivel  $S$  que corta simultáneamente un disco superior  $E_u$  y un disco inferior  $E_l$  por los arcos  $\alpha_u, \alpha_l \subset F \cap P$ . Si los extremos de  $\alpha_u$  y  $\alpha_l$  coinciden, entonces  $K$  es el nudo trivial. En otro caso, podemos usar  $E_u, E_l$  para isotopar los arcos de  $K$  sobre arcos en  $S$  disminuyendo el ancho de  $K$ , lo cual contradice que  $K$  está en posición delgada.

Así que si  $K$  no es el nudo trivial, entonces existe un nivel  $r'$ ,  $c_- < r' < c_+$  tal que todo arco de  $F \cap S_{r'}$  es esencial en  $F$ .  $\square$

## Posición delgada y superficies planas esenciales

Thompson, en [11], demostró que una condición necesaria para que una posición delgada de un nudo difiera de su posición de puentes, es que el complemento del nudo contenga una esfera agujerada esencial.

**TEOREMA 4.1.** *Si el complemento de un nudo  $K \subset S^3$  no contiene una superficie plana meridional incompresible no trivial, entonces posición delgada y posición de puentes de  $K$  coinciden.*

**DEMOSTRACIÓN.** Supongamos que  $K$  está en posición delgada.

Si no hay esferas delgadas para  $K$  hemos terminado, ya que también está en posición de puentes y además el número de puentes de esta posición es mínima. Si no lo fuera, habría otra posición de puentes cuyo número de puentes sería estrictamente menor, disminuyendo el ancho.

Supongamos que  $P$  es una esfera delgada para  $K$ . Sea  $S = P - \text{int}(\eta(K))$  la superficie plana meridional correspondiente. Si  $S$  es incompresible habremos terminado. Supongamos que  $S$  es compresible. Entonces comprimimos tanto como sea posible hasta obtener  $\tilde{S}$ , una colección de superficies planas meridionales e incompresibles.

Sea  $S'$  una componente de más adentro de  $\tilde{S}$ , esto es, que al pegarle a  $S'$  un número par de discos meridianos se obtiene una esfera que es frontera de una bola cuyo interior es ajeno a  $\tilde{S}$ . Entonces tenemos dos casos:

- i)  $S'$  es superficie plana meridional incompresible no trivial, o
- ii)  $S'$  es un anillo paralelo a  $\eta(K)$ .

Si la superficie  $S'$  satisface (i) entonces hemos terminado.

Si  $S'$  es un anillo paralelo a  $\eta(K)$ , entonces existe un disco  $D$  tal que  $\partial D = \alpha \cup \beta$ , donde  $\alpha$  es un arco esencial propiamente encajado en  $S'$  y  $\beta$  un arco encajado sobre la frontera de  $\eta(K)$  e  $\text{int}(D)$  disjunto de  $\tilde{S}$ .



Ahora invertimos las compresiones sobre  $\tilde{S}$  para reensamblar  $S$ . Es decir, unimos las componentes de  $\tilde{S}$  mediante tubos, los cuales pueden correr unos a través de otros y los cuales podrían intersectar a  $D$ . Sin embargo, estos pueden ser elegidos de tal manera que sean disjuntos de una vecindad de  $\partial D$ . Tenemos que  $D$  persiste como un disco superior o inferior para  $S$ . Lo cual contradice el lema 3.12, y el caso (ii) no puede ocurrir.  $\square$

En otras palabras, hemos demostrado que si para un nudo  $K$  una posición delgada es distinta de una posición de puentes, entonces el exterior de  $K$  contiene una superficie meridional incompresible no trivial.

En la demostración del teorema se construye tal superficie a partir de una superficie de nivel delgada, haciendo compresiones si es necesario.

Después del trabajo de Thompson, Wu demostró, en [12], que una esfera de nivel delgada con ancho mínimo es una superficie meridional incompresible en el exterior del nudo. Veamos este resultado a continuación.

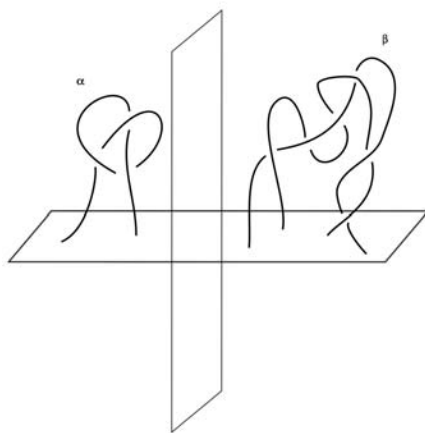
**TEOREMA 4.2.** *Si un nudo  $K \subset S^3$  está en posición delgada pero no en posición de puentes, entonces la superficie de nivel más delgada  $S$  de  $K$  es una superficie esencial en  $E(K)$ .*

Denotaremos  $Z_J = \mathbb{R}^2 \times J$ , donde  $\mathbb{R}^2$  representa el plano  $xy$  y  $J$  es un intervalo contenido en el eje  $z$ . Sean  $Y_- = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \in \mathbb{R}, y \leq 0, z \geq 0\}$  la mitad izquierda y sea  $Y_+ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \in \mathbb{R}, y \geq 0, z \geq 0\}$  la mitad derecha del subespacio  $\mathbb{R}_+^3$ .

**DEMOSTRACIÓN.** Sea  $P$  un plano de nivel más delgado y sea  $S$  la superficie plana correspondiente, esto es  $S = P - \text{int}(\eta(K))$ . Asumimos sin pérdida de generalidad que  $P = P_0$ . Demostraremos que  $S$  es incompresible.

Supongamos que  $S$  es compresible. Sea  $D \subset E(K)$  un disco de compresión para  $S$ , así que  $S \cap D = \partial D$ . Sin pérdida de generalidad podemos asumir que  $D$  está en el subespacio superior de  $P$ . La curva  $\partial D$  es frontera de un disco  $D'$  contenido en  $P$  y  $D \cup D'$  es frontera de una 3-bola  $B$  en  $S^3$ . Sean  $\alpha = K \cap B$  y  $\beta = K \cap (\mathbb{R}_+^3 - B)$ . Si  $\alpha$  o  $\beta$  fueran vacíos, significaría que  $\partial D$  es frontera de un disco en  $S$ , lo cual es imposible ya que  $D$  es disco de compresión para  $S$ .

Una isotopía  $\phi_t$  de  $\mathbb{R}^3$ , es llamada *h-isotopía* si  $\phi_0 = id$  y  $\phi_1$  es continua y conserva nivel sobre  $K$ , esto es,  $h \circ \phi_1 = h$  sobre  $K$ . Notemos que  $\phi_t$  no tiene porqué preservar nivel si  $t \neq 0, 1$  y que  $\phi_1(K)$  tiene el mismo ancho que  $K$ .

FIGURA 4.1. La separación de  $\alpha$  y  $\beta$ .

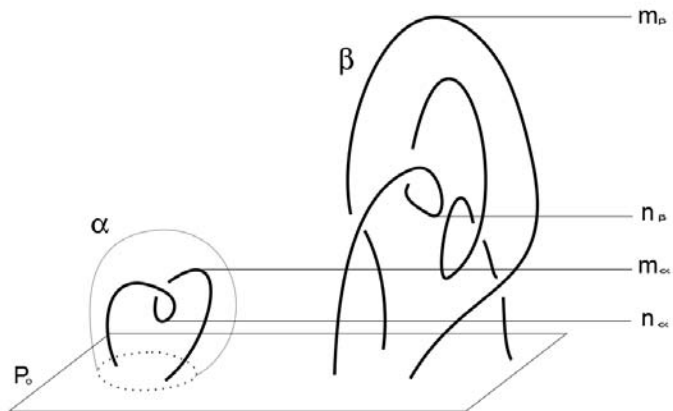
LEMA 4.3. *Salvo  $h$ -isotopía podemos asumir que  $\alpha \subset Y_-$  y  $\beta \subset Y_+$ .*

DEMOSTRACIÓN. Podemos trasladar a todo el nudo  $K$  al lado izquierdo del plano  $xz$  con una isotopía que conserva el nivel. Así que podemos asumir que  $B$  está en  $Y_-$ . Sea  $\varepsilon$  suficientemente pequeño tal que el intervalo  $J = [0, \varepsilon]$  no contiene valores críticos de  $h|_K$ . Podemos suponer que  $K \cap Z_J$  es un conjunto de arcos verticales que van de  $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$  a  $\mathbb{R}^2 \times \{\varepsilon\}$ . Podemos también suponer que  $B \cap Z_J = D' \times J$ . Sea  $f_t$  una isotopía con soporte en  $B$  que encoje a  $\alpha$  dentro de  $D' \times J$ , esto es  $f_0$  es la identidad y  $f_1(\alpha) \subset D' \times J$ . Observemos que  $f_t$  no conserva nivel. Hay una isotopía  $g_t$  de  $f_1(K)$ , que conserva niveles, con soporte el exterior de  $D' \times J$ , la cual mueve a  $\beta$  a  $Y_+$ . Por último, consideramos  $f_{1-t}$ , la isotopía contraria a  $f_t$ . La unión de estas tres isotopías es una  $h$ -isotopía para el nudo  $K$ , que separa a  $\alpha$  de  $\beta$  por el plano  $xz$ .  $\square$

La separación de  $\alpha$  y  $\beta$  por el plano  $xz$ , figura 4.1, nos permite modificar  $\alpha$  mediante una isotopía vertical sin intersectar al resto de  $K$ .

Sea  $\phi_t$  una isotopía de la mitad positiva del eje  $z$ . Entonces  $Id \times \phi_t$  es una isotopía de  $Y_-$ , que se puede extender a una isotopía  $f_t$  de  $\mathbb{R}^3$  con soporte en una pequeña vecindad de  $Y_-$  en  $\mathbb{R}_+^3$  y por lo tanto es la identidad en  $K - \alpha$ . La isotopía  $f_t$  es llamada una isotopía vertical sobre  $Y_-$  determinada por  $\phi_t$ .

Denotemos  $m_\alpha$  al máximo valor de  $h(\alpha)$ . Sea  $n_\alpha$  el primer valor mínimo local de  $\alpha$  contado de arriba a abajo, y  $n_\alpha = 0$  si  $\alpha$  no tiene mínimos locales. Definamos asimismo  $m_\beta$  como el valor máximo de  $h(\beta)$  y  $n_\beta$  el valor mínimo más alto de  $\beta$ , y  $n_\beta = 0$  si  $\beta$  no tiene mínimos locales.

FIGURA 4.2. Existe al menos un mínimo para  $\alpha$  o  $\beta$ .

LEMA 4.4.  $n_\alpha > m_\beta$  o  $n_\beta > m_\alpha$ .

DEMOSTRACIÓN. Como  $P$  es un plano de nivel más delgado, al menos uno de  $\alpha$  o  $\beta$  contienen un mínimo; así que  $n_\alpha$  y  $n_\beta$  no son ambos cero. Suponemos sin pérdida de generalidad que  $n_\alpha < n_\beta$ . Entonces por definición, encima del nivel  $n_\beta$  todos los puntos críticos de  $h|K$  son máximos.

Notemos que si movemos un máximo local de  $\alpha$  debajo de un máximo local justo debajo del nivel de  $n_\beta$ , el ancho de  $K$  no cambia.

Supongamos que  $m_\alpha > n_\beta$ , entonces podemos bajar un máximo local de  $\alpha$  justo debajo del nivel de  $n_\beta$ , pero esto reduce el ancho de  $K$  lo que contradice la minimalidad de  $\omega(K)$ .  $\square$

Por este lema podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $m_\alpha < n_\beta$ , como en la figura 4.2. En particular  $\beta$  debe tener al menos un mínimo, pues se cumple que  $m_\beta > n_\beta > m_\alpha > n_\alpha \geq 0$ , lo que implica que  $n_\beta \neq 0$ .

Sea  $r \in (0, n_\beta)$  tal que  $|P_r \cap \beta|$  es mínimo sobre todos los  $|P_z \cap \beta|$  con  $z \in [0, n_\beta]$  y sea  $[a, b]$  el intervalo maximal de  $[0, \infty)$  tal que contiene a  $r$  y no tiene valores críticos de  $h|\beta$  en su interior. Entonces  $b$  es el nivel de un mínimo local en  $\beta$ , y  $a$  es el nivel de un máximo local en  $\beta$ , o bien, es igual a cero.

Ahora veremos que podemos isotopar  $K$  de manera que reducimos el ancho, o bien que podemos encontrar una esfera más delgada que  $P$ .

Sea  $f_t$  una isotopía vertical con soporte en  $Z_{[a,\infty)}$  tal que empuja hacia abajo a  $\alpha$  a  $\alpha' = f_1(\alpha)$  de tal manera que yace debajo de  $b$ . Sea  $K'$  la presentación obtenida. Como  $f_t$  tiene soporte encima de  $a$ , los puntos críticos debajo de  $a$  y los anchos de los planos correspondientes permanecen sin cambio. Así que solamente necesitamos calcular la suma de los anchos de los planos correspondientes a los puntos críticos de  $K$  y  $K'$  que están encima de  $a$ .

Denotemos por  $P_1, P_2, \dots, P_k$  los planos de nivel correspondientes a los puntos críticos de  $\alpha$  arriba del nivel  $a$ . Sean  $P'_1, P'_2, \dots, P'_k$  los planos de nivel correspondiente a los puntos críticos de  $\alpha'$  arriba del nivel  $a$ . Finalmente,  $R_1, R_2, \dots, R_j$  los planos de nivel correspondientes a los puntos críticos de  $\beta$  arriba del nivel  $a$ . Observemos que  $f_t$  es una isotopía que solo encoje a  $\alpha$  por lo que no elimina ni introduce nuevos puntos críticos de  $h|K$  y deja fijo a  $K - \alpha$ .

Como  $\beta$  no tiene puntos críticos en  $[a, b]$ , tenemos que

$$|R_i \cap K| = |R_i \cap (\alpha \cup \beta)| = |R_i \cap \alpha| + |R_i \cap \beta| \geq |R_i \cap \beta| = |R_i \cap K'|.$$

Por otro lado, como  $m_\alpha < n_\beta$ , por la elección de  $r$  y el hecho de que  $|P_i \cap \alpha| = |P'_i \cap \alpha'|$  tenemos que

$$|P_i \cap K| = |P_i \cap (\alpha \cup \beta)| = |P_i \cap \alpha| + |P_i \cap \beta| \geq |P'_i \cap \alpha'| + |P'_i \cap \beta| = |P'_i \cap (\alpha' \cup \beta)| = |P'_i \cap K'|.$$

Se sigue que  $\omega(K) \geq \omega(K')$ . La igualdad se cumple si y solo si se cumple la igualdad en cada una de las desigualdades.

Como  $P$  es una esfera de nivel más delgada para  $K$ , entonces el plano de nivel justo debajo de  $b$  no puede ser ajeno de  $\alpha$ . Si lo fuera esto implicaría que su ancho sería  $|P_{b-\epsilon} \cap K| = |P_r \cap \beta| \leq |P \cap \beta| < |P \cap (\alpha \cup \beta)| = |P \cap K|$  lo que contradice que  $P$  es una esfera de nivel más delgada. Entonces  $\alpha$  intersecta el plano de nivel  $R_1$  que yace justo arriba del nivel  $b$ . En este caso tenemos que  $|R_1 \cap K| > |R_1 \cap K'|$  y de esta manera  $\omega(K) > \omega(K')$ , lo que contradice la minimalidad de  $\omega(K)$ .

Por lo tanto  $S$  es incompresible. □

Como consecuencia del teorema 4.2 se puede demostrar que la posición delgada de la suma conexa de nudos con la propiedad de que sus exteriores no contengan alguna superficie plana meridional esencial se presenta de manera natural.

**COROLARIO 4.5.** *Sean  $K_1, K_2$  nudos no triviales en  $S^3$  tales que sus exteriores no contienen superficies planas meridionales esenciales. Sea  $K$  un encaje en posición delgada de  $K_1 \# K_2$ . Entonces, existe una esfera de nivel  $S$  en  $S^3$  que interseca a  $K$  en dos puntos, descomponiendo a  $K$  en  $K_1$  y  $K_2$ . En particular,  $\omega(K) = \omega(K_1) + \omega(K_2) - 2$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** Existe  $F$ , una esfera en  $S^3$  que realiza la suma conexa. Entonces  $P = F \cap E(K_1 \# K_2)$  es una superficie plana meridional esencial para  $K$ . Veamos que es la única.

Supongamos que  $P'$  es una superficie plana meridional esencial para  $K$  distinta de  $P$ , notemos que  $P \cap P'$  no puede ser vacío, pues esto implicaría que  $P'$  es superficie esencial para algún  $K_i$ ,  $i = 1, 2$ . Para toda curva  $\alpha \in P \cap P'$ , se cumple que  $\alpha$  es esencial para  $P$  y para  $P'$ , pues de no serlo, por un argumento de la curva de más adentro y porque  $P, P'$  son incompresibles podríamos eliminar esta curva de la intersección. Así,  $P \cap P'$  es una colección de curvas esenciales en  $P$  y  $P'$ . Supongamos que  $|P \cap P'|$  es mínima. Sea  $P_i = P' \cap E(K_i)$ ,  $i = 1, 2$ . Cada componente de la superficie  $P'_i$  es plana meridional en  $E(K_i)$ . Además cada componente de  $P'_i$  es incompresible en  $E(K_i)$ . Veremos que  $P'_i$  solo contiene anillos paralelos a  $\partial E(K_i)$ . Si  $P'_i$  contiene alguna componente que no es un anillo, entonces existe un disco  $D \subset E(K_i)$ , cuya frontera es la unión de dos arcos  $\alpha, \beta$ , donde  $\alpha$  está propiamente encajado en  $P'_i$  y  $\beta$  está propiamente encajado en  $\partial E(K_i)$ . Como  $P'$  es esencial en  $E(K)$ , se tiene que  $\beta$  esta contenido en  $P$  y conecta dos componentes de  $P \cap P'$ . El disco  $D$  sirve para isotopar el arco  $\alpha$  hasta el arco  $\beta$ , isotopamos  $P'$ , para que  $P \cap P'$  sea transversal. De esta manera reducimos una componente de  $|P \cap P'|$ , lo cual es una contradicción, ya que  $|P \cap P'|$  es mínima. Así,  $P'_i$  consiste de exactamente un anillo paralelo a  $\partial E(K_i)$ , para cada  $i = 1, 2$ . Luego  $P'$  es un anillo trivial en  $E(K)$ , contradiciendo el hecho de que era esencial.

Por lo tanto,  $P$  es la única superficie plana meridional esencial para  $E(K_1 \# K_2)$ .

Sea  $K$  un encaje de  $K_1 \# K_2$  en posición delgada.

**Afirmación:**  $K$  no está en posición de puentes.

Sea  $K'$  el nudo que resulta de encajar la suma conexa de  $K_1$  y  $K_2$  de manera que  $K_1$  queda encima de  $K_2$ , donde cada uno está en posición de puentes y unidos por un par de arcos los cuales contienen un mínimo de  $K_1$  y un máximo de  $K_2$ , en la parte izquierda de la figura 4.3 se muestra un ejemplo de la forma en que queremos hacer la suma conexa de dos nudos trébol. Isotopamos, como en la figura 4.3,  $K'$  bajando todos los mínimos de  $K_1$  por debajo de todos los máximos de  $K_2$  y subimos

todos los máximos de  $K_2$  por encima de todos los mínimos de  $K_1$ . Así, obtenemos un nudo  $K''$  equivalente a  $K_1 \# K_2$  que está en posición de puentes, pues sabemos que  $b(K_1 \# K_2) = b(K_1) + b(K_2) - 1$ , que es justo el número de máximos (y mínimos) que tiene  $K''$ .

Ahora, como  $K_i$  está en posición de puentes tiene un solo nivel grueso, el cual tiene ancho igual al doble de su número de puentes. Lo mismo para  $K''$ . Entonces:

$$\omega(K', h) = \omega(K_1) + \omega(K_2) - 2 = \frac{1}{2}[2 \cdot b(K_1)]^2 + \frac{1}{2}[2 \cdot b(K_2)]^2 - 2 = 2[b(K_1)^2 + b(K_2)^2 - 1] \text{ y}$$

$$\omega(K'', h) = \frac{1}{2}[2 \cdot b(K_1 \# K_2)]^2 = 2[b(K_1) + b(K_2) - 1]^2 = 2[b(K_1)^2 + b(K_2)^2 - 1] + 4[b(K_1)b(K_2) - b(K_1) - b(K_2) + 1].$$

Pero para dos números reales  $a, b \geq 2$ , se cumple que  $a \cdot b - a - b + 1 \geq 2b - b - 2 + 1 = b - 1 \geq 1 > 0$ .

Es claro que  $\omega(K') < \omega(K'')$ , por esta razón,  $\omega(K', h) < \omega(K'', h)$  y como  $K$  es la posición delgada para  $K_1 \# K_2$  su ancho es menor estricto que el ancho de  $K''$ , por lo que  $K$  no puede estar en posición de puentes.

Así, el teorema 4.2 implica que si  $Q$  es una esfera más delgada para  $K$ , es tal que  $Q \cap E(K)$  es una superficie plana meridional esencial, pero  $P$  es única, por lo tanto  $K = K'$ .  $\square$

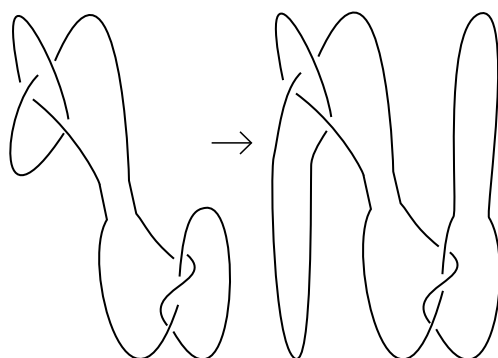


FIGURA 4.3. Figura izquierda: la suma conexas de dos nudos trébol que realiza la posición delgada. Figura derecha: la posición de puentes de la misma suma conexas.

Entonces surge la pregunta: ¿Para todos los nudos  $K_1, K_2$  se cumple que  $\omega(K) = \omega(K_1) + \omega(K_2) - 2$ ?

Es trivial demostrar que  $\omega(K_1) + \omega(K_2) - 2$  es una cota superior para  $\omega(K_1 \# K_2)$ , basta colocarlos en posición delgada uno sobre el otro, como en la figura 4.3.

Se conjeturó que para cualesquiera par de nudos  $K_1, K_2 \in S^3$ , se cumple que  $\omega(K_1 \# K_2) = \omega(K_1) + \omega(K_2) - 2$ , a lo que llamamos aditividad del ancho. Scharlemann y Thompson en [9] dan una familia de nudos  $\{K_i^n\}$  como contraejemplos potenciales, tales que si  $K_1 \in \{K_i^n\}$  y  $K_2$  es un nudo de dos puentes, encuentran encajes de  $K_1 \# K_2$  y  $K_1$  para los cuales

$$\omega(K_1 \# K_2, h) = \omega(K_1, h).$$

Sin embargo no prueban que  $K_1$  esté en posición delgada, por lo tanto conjeturan que  $\omega(K_1, h) = \omega(K_1)$ . De ser cierta esta igualdad, tendríamos entonces que  $\omega(K_1 \# K_2) = \omega(K_1)$ , pues sabemos que  $\omega(K_1 \# K_2, h) \geq \max\{\omega(K_1), \omega(K_2)\}$ , por [8]. Esto implicaría un contraejemplo para la conjetura de la aditividad del ancho.

Blair y Tomova en [1], demuestran que la igualdad  $\omega(K_1 \# K_2, h) = \omega(K_1, h)$ , es cierta.

Lo anterior revela que el comportamiento del ancho de nudos es algo mas complicado que el número de puentes bajo la operación de suma conexa.

## Ejemplos de nudos en posición delgada

En esta sección describiremos la posición delgada para algunas familias de nudos. Los nudos a los que nos referiremos están considerados en  $S^3$ .

DEFINICIÓN 5.1. El **nudo toroidal**  $T_{p,q}$ , donde  $p, q \in \mathbb{Z}$  son primos relativos, es el nudo que está envuelto alrededor del toro sólido  $T$ ,  $p$  veces en dirección longitudinal y  $q$  veces en dirección meridional. Ver la figura 5.1.

Se sabe que  $T_{p,q} = T_{q,p}$  y que  $b(T_{p,q}) = \min\{p, q\}$ . Ver en [6] y [10].

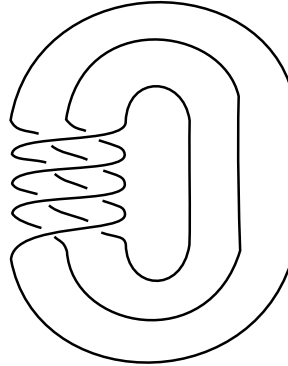


FIGURA 5.1. Nudo toroidal  $T_{4,3}$  en posición de puentes,  $b(T_{4,3}) = 3$ .

DEFINICIÓN 5.2. Un nudo **toroidal con torceduras**, denotado  $T_{p,q,r,s}$ , es el nudo toroidal  $T_{p,q}$  con  $r$  cuerdas adyacentes con  $s$  torceduras. Ver la figura derecha 5.3.

DEFINICIÓN 5.3. Un **cubo con  $n$  asas** es una 3-variedad conexa con frontera una superficie tal que existen  $n$  discos disjuntos propiamente encajados cuyo complemento es una 3-bola.

DEFINICIÓN 5.4. Un **sistema de túneles** para un nudo  $K$  es una colección de arcos disjuntos  $\tau = t_1 \cup t_2 \cup \dots \cup t_n$  encajados en  $E(K)$ , tales que  $E(K) - \eta(\tau)$  es un cubo con  $(n + 1)$  asas.



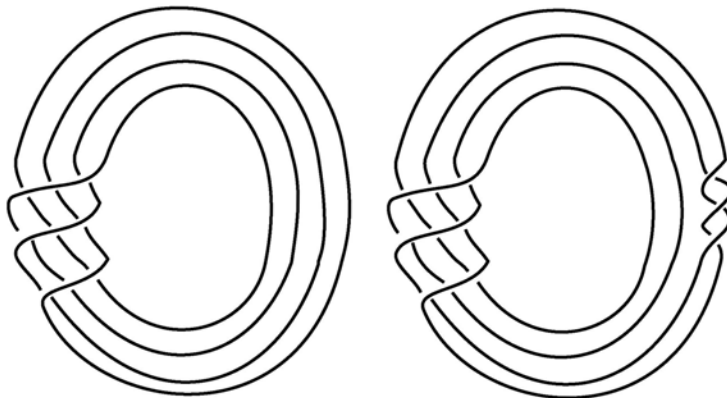


FIGURA 5.2. Nudo toroidal  $T_{4,3}$  y toroidal con torcedura  $T_{4,3,2,3}$ .

El **número de túneles** de  $K$ , denotado por  $\tau(K)$  es el menor número de arcos requeridos en un sistema de túneles para  $K$ .

Los nudos de dos puentes, los nudos toroidales, y los nudos toroidales con torceduras, con  $r = 2, 3$ , son nudos cuyo número de túnel es uno.

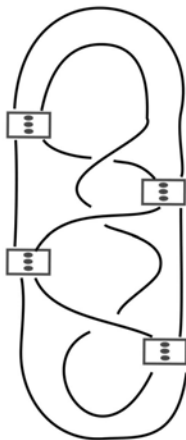


FIGURA 5.3. Forma general de un nudo de dos puentes.

El siguiente resultado es consecuencia de [3].

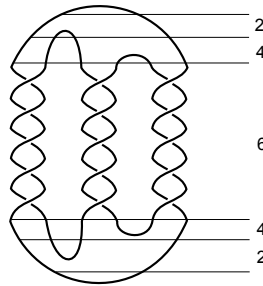
**TEOREMA 5.5.** *Si  $K$  es un nudo cuyo número de túnel es uno. Entonces  $K$  no contiene superficies planas meridionales esenciales.*

El teorema anterior y el teorema 4.1 implican el siguiente resultado:

**COROLARIO 5.6.** *Si  $K$  es un nudo cuyo número de túnel es uno, entonces su posición de puentes coincide con su posición delgada.*

Entonces los nudos de dos puentes, los nudos toroidales y los nudos toroidales con torceduras  $r = 2, 3$ , son nudos cuya posición delgada coincide con su posición de puentes.

Consideremos nudos de tres puentes. En esta familia hay nudos que no son de número de túnel uno, como el nudo en la figura 5.4. Existen nudos de tres puentes que provienen de la suma conexas de dos nudos de dos puentes, entonces el por corolario 4.5, tenemos que en este caso, la posición delgada difiere de la posición de puentes.



**FIGURA 5.4.** Nudo con número de puentes tres y cuyo número de túnel es mayor a uno.

Veremos que para los nudos de tres puentes, que no son suma conexas de dos nudos no triviales, su posición delgada coincide con su posición de puentes. Sea  $K$  tal nudo, si  $K$  está en posición de tres puentes, el ancho de esa posición es 18, así que  $8 < \omega(K) \leq 18$ . Las únicas opciones para  $\omega(K)$  son 10, 12, 14, 16 o 18. El ancho es la suma de los términos  $\omega(t_i)$ , con  $1 \leq i \leq n$ . Tanto  $\omega(t_1)$  como  $\omega(t_n)$  son iguales a 2 y  $\omega(t_2)$  como  $\omega(t_{n-1})$  son iguales a 4. Hasta aquí,  $\omega(K) > 12$ , entonces no puede ser 10 y tampoco puede ser 12. Entonces  $n$  es mayor o igual a 5 y además es impar. Si  $n \geq 7$  entonces el ancho sería mayor a 18. Por lo tanto  $n = 5$ , así que  $\omega(t_3)$  solo puede ser 2 o 6. No puede ser 2, porque esto implicaría que se expresa como suma conexas de dos nudos no triviales. Así el sumando que falta es 6 y el ancho de  $K$  es 18. Por lo tanto una posición de puentes es una posición delgada para  $K$ .

¿Existen nudos que no sean suma conexas de otros nudos, tales que su posición de puentes difiere de su posición delgada?

La respuesta es sí. Algunos ejemplos son los nudos alternantes de once cruces  $11a_{44}$ ,  $11a_{47}$ , ver figura 5.5, y  $11a_{43}$  figura 3.5.

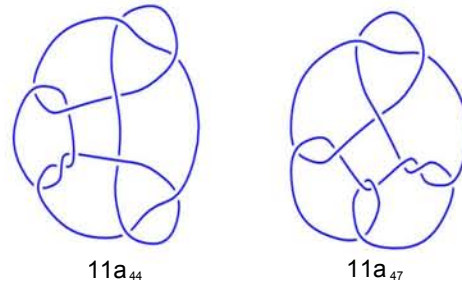


FIGURA 5.5. Nudos en posición delgada [fuente: [www.indiana.edu/~knotinfo/](http://www.indiana.edu/~knotinfo/)].

También existen ejemplos de nudos cuya posición delgada coincide con posición de puentes, y que además su número de túnel es dos. Ver figura 5.6.

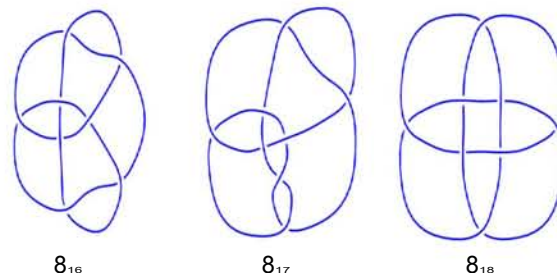


FIGURA 5.6. Nudos tales que su número de puentes es 3, su ancho es 18 y su número de túnel es 2 [fuente: [www.indiana.edu/~knotinfo/](http://www.indiana.edu/~knotinfo/)].

## Bibliografía

- [1] R. Blair y M. Tomova, *Companions of the unknot and width additivity*, Journal of Knot Theory and Its Ramifications, vol. 20 No. 4 (2011), 407-511.
- [2] D. Gabai, *Foliations and the topology of 3-manifolds*, III, J. Differential Geometry 26 (1987).
- [3] C. Gordon y A. Reid, *Tangle decompositions of tunnel number one knots and links* Journal of Knot Theory and Its Ramifications, vol 4, No. 3 (1995), 389-409.
- [4] J. W. Alexander, *An example of a simply connected surface bounding a region which is not simply connected*, Proc. Nat. Acad. Sci. 10 (1924), 8-10.
- [5] Y. Matsumoto, *An introduction to Morse theory*, Translations of Math. Monographs, vol 208, AMS.
- [6] D. Rolfsen, *Knots and Links*, AMS Chelsea Publishing.
- [7] M. Scharlemann, *Thin position in the theory of classical knots*, Handbook of knot theory. Elsevier 2005.
- [8] M. Scharlemann and J. Schultens, *3-Manifolds with planar presentations and the width of satellite knots*, Transactions of the American Mathematical Society, vol. 358, number 9 (2006), 3781-3805.
- [9] M. Scharlemann y A. Thompson *On the additivity of knot width*, Geometry and Topology Monographs, vol. 7 (2004), 135-144.
- [10] H. Schubert, *Über eine Numerische Knoteninvariante*. Math. Z. 61 (1954).
- [11] A. Thompson, *Thin position and bridge number for knots in the 3-sphere*. Topology, vol 36, no. 2 (1997), 505-507.
- [12] Y. Wu, *Thin position and essential planar surfaces*. Proceedings of the American Mathematical Society, Vol. 132, no. 11 (2004), 3417-3421.
- [13] A. Zupan, *Unexpected local maxima in the width complexes for knots*, Alg. Geom. Top. 11 no. 2 (2011), 1097-1106.