



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

CONSIDERACIONES TEÓRICAS PARA EL DISEÑO Y
ANÁLISIS DE LA SUSPENSIÓN PARA EL VEHÍCULO
FSAE 2012

T E S I S:

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

INGENIERO EN MECATRÓNICA

PRESENTA:

GONZALO GUERRERO SALAZAR

DIRECTOR DE TESIS

DR. LEOPOLDO ADRIÁN GONZÁLEZ GONZÁLEZ

MÉXICO D.F. 2015



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

It comes down to trying to expose yourself to the best things that humans have done.

And then try to bring those things in to what you're doing.

-Steve Jobs

Dicen que al proceso de tomar ideas de una sola fuente se denomina copia, pero al tomarlas de muchas diferentes fuentes se denomina *inspiración*. En este documento hay tantas ideas más como las hay de otras personas que han sido mi inspiración. Yo sólo he servido como un medio para comunicarlas.

Gracias a:

Mi familia, especialmente a Rodrigo, mi amigo y rockero de confianza, J. Gonzalo, mi padre y modelo ingenieril, Guadalupe, mi apoyo a lo largo de la vida y mi maestra de filosofía.

Formula SAE por brindarme la oportunidad de vivir los automóviles como siempre quise. Especialmente a Ismael, Samuel, Isaac, Luis R. y Mario V.

La facultad de ingeniería y a la universidad. Mi segunda casa y segunda madre.

Mario, Rodrigo, Arturo y Cristopher por ser los mejores amigos que pudiera pedir.

Juan Manuel, mi hermano por elección, porque un día le dije “esta es tu casa” y jamás lo pude sacar.

Christian, porque no éramos ni estudiantes ni trabajadores, pero sí escaladores.

Renata por su interminable alegría y mucho más.

Rodrigo C., Javier V., Alejandra, Arturo, *die ein wichtiges Teil meines lebens sind.*

Nicolás, Javier A., Javier O., Daniel, Ana. Aún mejor que el conocimiento, la Universidad me dio amigos.

Antonio Zepeda y Mariano García por ayudarnos a hacer realidad UNAM Motorsports. A Juan Ocariz por enseñarnos a pensar como ingenieros. A Billy, el profesor poco ortodoxo que todos necesitamos. A Silvina Hernández por muchas tardes de dedicación. A Leopoldo González por su apoyo constante.

Este trabajo no es mío, sino de todos ustedes.

Prólogo

"He tenido que trabajar mucho con la estructura, con los adjetivos, con los adverbios... Igual me lee un chaval que un hombre mayor... Tenía que resultar comprensible para todos pero quedarme yo también satisfecho".

-Arturo Pérez-Reverte

La educación del hombre debe ser un proceso continuo. Los más básicos inicios de este proceso pueden ser rastreados hasta las primeras palabras que nos dicen nuestros padres. La forma en que hablan y lo que nos muestran, comienzan a formar un juicio, un carácter y las partes más básicas de quienes seremos a lo largo de nuestras vidas.

Más de veinte años después nos encontramos terminando un ciclo educativo que para muchos representa la primera vez en nuestras vidas que elegimos una opción particular, una opción que nos va a encausar directamente a nuestro futuro campo laboral y para muchos de nosotros la gran forma de terminar ese ciclo es con un trabajo que hable de quienes somos como persona y como un futuro profesional: la tesis.

Para muchos, el simple hecho de darle el nombre de "tesis" a ese trabajo final de licenciatura representa el convertir dicho escrito en una especie de hito mítico, un concepto abstracto y de proporciones titánicas que nos consagrará como uno más de los licenciados, o en particular ingenieros, egresados de la máxima casa de estudios de nuestro país. Sin embargo, olvidamos muchas veces que esta tesis no es más que una última muestra a nivel licenciatura de lo que ya somos, del profesional en el que nos hemos convertido a lo largo de al menos cinco años de estudios y que lo único que queda es plasmar en ese retrato nuestro mejor ángulo, pues no habrá iluminación alguna ni retoque posible que pueda valer por aquello que no somos.

Este trabajo pretende ser una historia acerca de un proyecto, desarrollo que es el objetivo primordial del ingeniero mismo, pero también pretende ser una narración de la forma en que la educación superior me ha llevado hasta este punto. Un profesional completo es un profesional comprometido con la sociedad, con lograr cambios tangibles en su modo de pensar, de actuar y de vivir. Y es eso a fin de cuentas lo que prevalece. Las ideas enunciadas a continuación han sido plasmadas en espera de que quien las lea no sólo disfrute del proceso con el cual se ha desarrollado un producto o una posible innovación, sino de cómo es que este tipo de proyectos lleva tras de sí un sueño y una forma de hacer las cosas.

Gonzalo Guerrero S.

CONTENIDO

Justificación	1
Introducción	3
Acerca de Formula SAE	4
UNAM Motorsports.....	4
1. El automóvil.....	5
El automóvil de competencia.....	6
¿Qué hace a un auto de carreras competente?.....	7
¿Cómo se vuelve competente el automóvil?	8
2. Neumático: Comportamiento y modelado	11
Sistema de coordenadas de la rueda	11
Ángulo de deslizamiento	12
Fuerza lateral.....	13
Fuerza longitudinal.....	14
Porcentaje de deslizamiento.....	14
El círculo, o elipse, de tracción	16
Sensibilidad a la carga	17
Efectos del <i>Camber</i>	20
Torque de auto-alineación	21
Efectos de la presión y la temperatura	22
Sumario de fenómenos en el neumático	23
3. Modelos dinámicos del automóvil	24
Abstracción y la navaja de Ockham.....	24
La escalera de abstracción	25
Modelo lineal con dos grados de libertad.....	27
El modelo lineal.....	28
La geometría de una curva: el ángulo de Ackermann.....	29
Automóvil neutral, sub-viraje y sobre-viraje.....	31

Estado permanente	33
Estabilidad direccional	35
Análisis completo del ángulo de deslizamiento	36
Notación en derivadas	36
En resumen	38
Comportamiento al límite	39
Otros modelos.....	39
Modelo de bicicleta no lineal	39
Modelo completo simplificado	40
Modelo total <i>multibody</i>	40
4. Transferencia de peso	41
Transferencia longitudinal de peso.....	42
Transferencia lateral de peso.....	44
5. Suspensión	46
Masa no suspendida y parámetros de rueda.....	48
Sistema de manejo de energía.....	49
¿Suspensión completamente independiente?	50
Acerca de la suspensión como un sistema dinámico.....	51
Características deseadas para el diseño	54
La puntuación en Formula SAE.....	55
Los eventos dinámicos	56
La importancia de cada parámetro	58
¿Cuánto podemos ganar?	60
El papel de la aerodinámica en Formula SAE.....	61
Las características del vehículo	64
Los neumáticos para FSAE	65
El par de ruedas y la sensibilidad a la carga.	69
¿Qué tanto se puede acelerar?.....	72
Diseño del sistema de suspensión	77
Diseño cinemático y estático	78
Diseño cinemático.....	80
WinGeo3.....	82

Sistema de manejo de energía	83
Diseño del <i>bellcrank</i>	92
Una aproximación a la optimización topológica utilizando un método heurístico	93
Diseño CAD.....	94
Material seleccionado para el <i>bellcrank</i>	95
Validación a través de análisis por elementos finitos (<i>FEM</i>).....	95
Manufactura y el reporte de costos.....	98
Sintonización de parámetros	100
Evaluación personal del FSAE 2012 (UM-513)	101
Comentarios finales acerca del sistema de suspensión utilizado en UNAM Motorsports	102
Trabajo a futuro	103
Conclusiones	105
Referencias.....	107
Anexos.....	109
ANEXO1: Tablas de neumáticos.....	111
Anexo 2: Optimización Topológica.....	116
Las soluciones de Mattheck	117

Ilustraciones

Ilustración 1 Patentmotorwagen	6
Ilustración 2 Sistema de coordenadas del automóvil.	9
Ilustración 3 - Los giros del automóvil en su sistema local de referencia.....	10
Ilustración 4– Deslizamiento de la rueda de acuerdo con su sistema de coordenadas	12
Ilustración 5– Fuerza lateral del neumático con respecto al ángulo de deslizamiento	13
Ilustración 6 – Círculo de tracción y proyecciones de fuerza lateral y longitudinal.....	16
Ilustración 7– Varios círculos de tracción y su correspondiente carga vertical	18
Ilustración 8– comportamiento de la fuerza lateral normalizada con respecto a la carga vertical..	19
Ilustración 9- Ángulo de inclinación o Camber.....	20
Ilustración 10- Efectos del aumento de camber en la fuerza lateral para diferentes condiciones de carga normal y ángulo de deslizamiento.	21
Ilustración 11– Comportamiento del torque de auto-alineación con respecto al ángulo de deslizamiento	22
Ilustración 12– la escalera de la abstracción.....	25
Ilustración 13– Modelo lineal “bicicleta”	28
Ilustración 14– el automóvil simplificado y el ángulo de Ackerman.....	30
Ilustración 15– vista lateral del vehículo y parámetros relevantes para la transferencia de peso ..	42
Ilustración 16– vista frontal del vehículo y parámetros relevantes para la transferencia de peso..	44
Ilustración 17 - Automóvil típico con masa suspendida (sprung), elementos de suspensión y masa no suspendida (unsprung).....	46
Ilustración 18 – elementos de una suspensión asimétrica de doble brazo A. Diseño pull-rod para el modelo 2011 de UNAM Motorsports (UM-362).....	47
Ilustración 19– Suspensión doble brazo A actuada con push-rod	50
Ilustración 20 - Suspensión doble brazo A con barra estabilizadora (5)	51
Ilustración 21– Comportamiento no lineal de las puntuaciones de la competencia FSAE.....	58
Ilustración 22– Impacto porcentual de una mejora de 10% en los valores de los parámetros listados	59
Ilustración 23– Automóviles con paquete aerodinámico que presentaron falla durante la competencia.....	63
Ilustración 24– Vehículo ganador de FSAE West 2011, carente de paquete aerodinámico.....	64
Ilustración 25 - Fuerza lateral del A92 14254S en función del ángulo de deslizamiento, con un camber de 0°	66
Ilustración 26- Fuerza lateral del A92 14254S en función del ángulo de deslizamiento, con un ángulo camber de 2°	67
Ilustración 27- Fuerza lateral del A92 14254S en función del ángulo de deslizamiento, con un camber de 3.5°	67

Ilustración 28- Momento de auto-alineación del A92 14254S en función del ángulo de deslizamiento, con un camber de 0°	68
Ilustración 29 - Momento de auto-alineación del A92 14254S en función del ángulo de deslizamiento, con un camber de 2°	68
Ilustración 30- Momento de auto-alineación del A92 14254S en función del ángulo de deslizamiento, con un camber de 3.5°	69
Ilustración 31- El Cal Poly Formula Hybrid 2009 hizo uso de valores extremos de camber en neumáticos delgados para compensar la sensibilidad a la carga	72
Ilustración 32- Fuerza lateral con respecto a la carga vertical del neumático	74
Ilustración 33- Fuerza lateral con respecto a la carga vertical del cada neumático en un eje y del total del eje con respecto a la fracción de transferencia de peso	75
Ilustración 34- Fuerza lateral de un eje con respecto a la transferencia lateral de peso para diferentes situaciones de ángulo de deslizamiento	75
Ilustración 35- Vista de la suspensión sin el chasis	79
Ilustración 36- La suspensión delantera del UM-513 en el entorno de trabajo de WinGeo3	82
Ilustración 37 - Variación del camber con respecto al movimiento vertical de la suspensión	83
Ilustración 38- Variación de la altura del roll center como resultado del movimiento vertical de la suspensión	83
Ilustración 39- Variación de la relación de movimiento como resultado del movimiento vertical de la suspensión	85
Ilustración 40- Compresión del resorte como resultado del movimiento vertical de la suspensión	86
Ilustración 41- Amortiguadores: FOX VAN Shocks (izquierda) y Öhlins TTX25 FSAE (derecha)	91
Ilustración 42- Ejemplo de curvas de amortiguamiento seleccionadas para el inicio de las pruebas del modelo 2012	92
Ilustración 43- El método gráfico de Mattheck sobre el contorno original de la pieza. Se muestran los conos de compresión (amarillo) y los conos de tensión (azul)	94
Ilustración 44 - Proceso de remoción de material	94
Ilustración 45- Distribución del factor de seguridad	97
Ilustración 46- Deflexiones en la pieza	97
Ilustración 47- Maquinado en cortadora waterjet	99
Ilustración 48- Comparación de costos para diferentes métodos de maquinado	99
Ilustración 49 - resultado final del proceso de optimización topológica	100
Ilustración 50- UM-513 antes de participar en Endurance en Lincoln, Nebraska durante 2012 ...	102
Ilustración 51- Sistema de suspensión utilizado en el UM-513. Al fondo miembros del equipo realizando ajustes	103
Ilustración 52- el equipo de UNAM Motorsports en 2012	104
Ilustración 53- Ejemplos de optimización topológica para una barra en diferentes situaciones de carga a través de optimización de funcionales	117
Ilustración 54- Comparación de resultados de Kraftkegelmethode y SKO (última columna)	118

Tablas

Tabla 1– Valores del porcentaje de deslizamiento	15
Tabla 2– Factores de puntuación para cada prueba dinámica	57
Tabla 3– Mejora en las puntuaciones de los eventos dinámicos para un 10% y 20% de mejora en la tracción del vehículo	60
Tabla 4– capacidades de fuera lateral de tracción y aceleración lateral para diferentes pesos de eje	76
Tabla 5– parámetros estáticos de la suspensión	80
Tabla 6- Parámetros cinemáticos de la suspensión	81
Tabla 7– comparativa de amortiguadores FOX VAN Shocks y Öhlins TTX25 FSAE	91

Sección 1

LA TEORÍA

¿Qué es necesario saber para el diseño integral de un automóvil de competencia?

Esta primera sección consiste de conceptos aceptados y generales acerca del diseño automotriz basado en la dinámica de vehículos. Se busca orientar al lector acerca de la relación entre diversos conceptos y su impacto en el contexto del diseño propuesto.

JUSTIFICACIÓN

Los automóviles. No estoy seguro de qué hace que estas obras del diseño sean una pasión tan frecuente entre las personas. Tal vez sea la suma de la estética, la adrenalina y la velocidad, pero lo cierto es que a muchos nos ha conducido de una u otra forma hacia el camino de la ingeniería.

En 2010 ingresé al equipo para la temporada 2011 de UNAM Motorsports cuya meta era muy clara: construir un automóvil de competencia para la categoría FSAE y llevarlo a FSAE West en Fontana California. Ese objetivo se cumplió, junto con muchas metas secundarias de diseño, mas no se logró el resultado esperado en la competencia. En 2012 formé parte de nuevo en el equipo, esta vez desde etapas más tempranas de diseño y encargado de uno de los sistemas esenciales para el buen manejo del auto: suspensión. El desarrollo de este sistema desde sus más tempranas etapas me llevó a realizar labor de investigación en un campo que pronto identifiqué como un área importante y muy poco desarrollada dentro del equipo: la dinámica del vehículo.

UNAM Motorsports tiene muchos objetivos, entre los cuales el más trascendente es el de formar jóvenes ingenieros de primera calidad, experimentados en el desarrollo de proyectos de ingeniería que se cumplan en tiempo, forma y presupuesto.

Sin embargo, en la práctica, el equipo podrá avanzar sólo a través de la constante mejora del producto final de su trabajo: un automóvil de competencia. Es entonces que debemos tener en mente las enseñanzas de grandes figuras de la historia automotriz desde Maurice Olley, uno de los pioneros del área, hasta los autores actuales como Gillespie y Milliken: un auto puede tener los mejores componentes individuales y eso no garantizará que la suma de estas partes sea satisfactoria. El estudio de la dinámica del vehículo nos permitirá entonces comprender el fin último de cada pieza diseñada en el contexto del automóvil, haciendo que los esfuerzos de diseño sean más eficientes.

Es por estas razones que nace la presente propuesta de trabajo de titulación, pues la disciplina de la dinámica de vehículos está fundamentada en todas las ciencias básicas de la ingeniería, pero es a su vez un campo muy particular y definido del conocimiento, que atiende a una importante área de la industria y la tecnología actuales. A lo largo de este documento se buscará que el lector ya familiar con las ciencias básicas, se familiarice ahora con los términos básicos del mundo automotriz, para después ser instruido en la forma en que estas nociones conducen al diseño concreto de un automóvil de competencia para la categoría Formula SAE.

Cabe decir que intentar cubrir con suficiente profundidad todos los aspectos relevantes para el desarrollo de un proyecto automotriz en la escasa longitud de un trabajo de titulación resulta un proyecto en exceso ambicioso. Esto lleva a cuestionarse cuáles deben ser los alcances en extensión y profundidad de un estudio de esta naturaleza, de manera que el lector pueda aprovechar al máximo el contenido. La conclusión particular para el enfoque de este trabajo es que el mismo será enfocado a la presentación de conocimiento en extensión, es decir, abarcando los conceptos básicos indispensables de múltiples áreas interrelacionadas, y no tanto de manera especializada en cualquiera de estos campos, en los cuales podrá profundizar el lector interesado

una vez asimilado el contexto de la dinámica de vehículos y su importancia en el desarrollo de proyectos automotrices.

“In the early decades of the 1900, most of the engineering energy of the automotive industry went into invention and design that would yield faster, more comfortable and more reliable vehicles. The speed capability of motor vehicles climbed quickly in the embryonic industry...With higher speeds the dynamics of vehicles, particularly turning and braking assumed greater importance as an engineering concern.”

-Thomas D. Gillespie

INTRODUCCIÓN

"In automotive design, a straight path is the most awkward path to follow between two points"

-Maurice Olley

El presente trabajo explica el proceso de diseño de una suspensión tipo push rod para un prototipo formula SAE, buscando la mejora del desempeño general del automóvil en las pruebas dinámicas de las competencias de la categoría estudiantil Formula SAE.

Comprender los requerimientos dinámicos de un automóvil en general y de un prototipo Formula SAE en particular, precisa el entendimiento de un vehículo en movimiento y de las características que lo definen para su uso. En este caso quiere decir, que se debe entender al vehículo terrestre de carreras y a sus requerimientos, además del marco de competencia delimitado por el reglamento.

A lo largo de este documento se aplicarán conceptos de ingeniería basados en la mecánica clásica, desde el movimiento plano general, hasta el modelado de sistemas dinámicos, todo con el objetivo de explicar el proceso de diseño en cuestión. Los conceptos que se introduzcan en el texto estarán orientados en específico, a fundamentar, explicar y finalmente evaluar el diseño y construcción de la suspensión utilizada en el prototipo Formula SAE 2012 (ahora denominado UM-513, de acuerdo con la nueva nomenclatura de la escudería), el cual compitió en junio de 2012 en Formula SAE West, realizado en Lincoln, Nebraska.

Se esquematizará en este documento la teoría previa necesaria para la comprensión del diseño y sus motivaciones, para entonces pasar al diseño de parámetros estáticos relativos a los sistemas contenidos en la rueda, parámetros cinemáticos relativos a la acción del mecanismo de doble brazo de la suspensión y parámetros dinámicos relativos al sistema de manejo de energía de la suspensión. Como interesantes agregados se tendrá un breve análisis de los resultados de UNAM Motorsports en su participación a lo largo de ya 5 años de competencia estudiantil, así como de la composición de las puntuaciones de los equipos que compiten en la categoría, buscando identificar las áreas de mayor oportunidad para la ganancia de puntos en futuros años. Además, se presenta una revisión del proceso de diseño por optimización topológica de la pieza denominada *bellcrank*, así como una evaluación de su manufactura en el marco del evento de costo de la competencia, resultados presentados como cartel ganador en la muestra de proyectos de ingeniería en el semestre 2013-2.

La suspensión en cuestión fue concebida en el marco de la filosofía de diseño del equipo UNAM Motorsports para 2012, que perseguía la conclusión de la prueba de resistencia en el evento FSAE West.

Acerca de Formula SAE

Las competencias de lo que hoy se conoce como Formula SAE en América y Formula Student en Europa, comenzaron en los Estados Unidos en 1978 con el nombre de SAE Mini Indy, auspiciadas por la Sociedad de Ingenieros Automotrices (SAE). A partir de ese año, universidades a lo largo de la Unión Americana y posteriormente en todo el mundo han competido con prototipos desarrollados por estudiantes para su participación en diversas pruebas estáticas y dinámicas.

Los autos participantes son prototipos monoplazas de ruedas expuestas, de no menos de 1525mm de distancia entre ejes y propulsados por un motor Otto de cuatro tiempos, con gasolina como combustible. Dentro del reglamento está permitido el uso de paquetes aerodinámicos y sistemas activos, mientras que se prohíbe el prescindir de mecanismos físicos para la dirección, aceleración y frenado (i.e. se prohíbe el uso de *drive-by-wire* y semejantes). Estas cualidades hacen de Formula SAE una categoría de competencia apegada al espíritu del automovilismo, a la vez que se fomenta el ingenio de los estudiantes y ofrece uno de los mejores espectáculos visuales en el ámbito de las competencias estudiantiles.

UNAM Motorsports

En 2009, estudiantes de la Facultad de Ingeniería interesados en el mundo del automovilismo iniciaron con una idea que llevaría al renacimiento de los proyectos automotrices en la Facultad de Ingeniería: diseñar y construir un prototipo para competir en Formula SAE West en Fontana, California. Liderado por el entonces estudiante de ingeniería mecánica Ismael I. Ayala durante casi dos años, se planeó y ejecutó el diseño y construcción del primer prototipo de la escudería (UM-631), que compitió por fin en julio de 2010, completando la máxima prueba de la competencia satisfactoriamente y obteniendo para UNAM Motorsports el reconocimiento como mejor equipo novato. Desde entonces se ha competido año con año con un nuevo prototipo en cada edición de FSAE West, reafirmando el lugar de la escudería no sólo como la número uno en México, sino como la única en el país que ha sido constante en su participación desde su fundación.

1. EL AUTOMÓVIL

“There had been sporadic attempts to make the vehicle ride decently but little had been done... The engineers had made all the parts function excellently, but when put together the whole was seldom satisfactory”

-Maurice Olley

“It seems strange that the automobile industry went on for thirty five years building cars piecemeal this way with no real conception of the complete vehicle....”

-Maurice Olley

Actualmente los automóviles forman parte de la vida cotidiana de casi cualquier persona en el mundo. Desde transporte de carga, pasando por el transporte de pasajeros colectivo y particular, y hasta los automóviles puramente recreativos, las actividades cotidianas dentro de nuestra sociedad están relacionadas de alguna forma con el automóvil.

Desde el punto de vista de la ingeniería, un automóvil es un vehículo terrestre, lo cual a su vez puede definirse como un cuerpo que se desplaza en el espacio, en este caso sobre una superficie rígida a la que se llama vía o camino. Uno de los objetivos principales del ingeniero al diseñar y construir cualquier vehículo consiste en permitir al usuario el controlar estos movimientos de manera tal que el vehículo, en este caso el automóvil, sea capaz de seguir la ruta esperada, prestando las características que del movimiento se desean.

Para este propósito, un vehículo en general requiere de agentes que le permita interactuar con el entorno a través de fuerzas, haciendo posible acelerar, decelerar y virar en cualquiera de las direcciones espaciales deseadas. En el caso de los automóviles el agente que produce la fuerza en cuestión es la rueda a través de su interacción con el pavimento, lo cual quiere decir que son los neumáticos quienes llevarán al automóvil a desplazarse en la dirección y de la manera en que el usuario exige.

Es claro también que si bien los neumáticos son los elementos que interactúan con el medio para mover al vehículo, la magnitud y dirección de la fuerza con que lo hacen es controlada hasta cierto punto por el usuario a través de dos sistemas: uno para su propulsión y uno para su de dirección, ambos siendo independientes el uno del otro. Lo que no es tan evidente para muchos de los usuarios de un automóvil, es que la eficiencia con que esta aceleración y maniobrabilidad pueden manifestarse, depende fuertemente de las características físicas del neumático y del vehículo mismo, pues este al ser sometido a una aceleración frontal, lateral e incluso vertical, reaccionará de forma particular y diferente a la de otro cuerpo con la misma propulsión y sistema de dirección.

El título de primer automóvil es a menudo discutido entre diversos prototipos desarrollados a finales del siglo XIX. Algunos se lo atribuyen generalmente al *Reitwagen*, una motocicleta

desarrollada por Gottlieb Daimler, mientras que hay quienes favorecen al *Patent Motorwagen* de Karl Benz, un vehículo de tres ruedas desarrollado al igual que el de Daimler en la Alemania del año 1885¹. Lo cierto es que independientemente del diseño que se favorezca, aún pasaron algunos años más para que se desarrollara el automóvil de cuatro ruedas que conocemos hoy en día, y unos tantos años más para que adoptara el conocido volante circular, por no mencionar algunas otras características que hoy nos parecen elementales en un automóvil. El hecho es que durante mucho tiempo la industria automotriz desarrolló sus proyectos a través de la mejora de sistemas individuales, colocándolos en donde más conveniente fuera para hacer al auto más rápido y en algunos casos más confortable. Pero este desarrollo de automóviles parte por parte o sistema por sistema probó ser ineficaz, pues cada vez se tenían autos más potentes y estos resultaban ser cada vez más peligrosos, pues eran difíciles de maniobrar y su creciente adopción en ciudades hacía de esta característica de maniobrabilidad una necesidad.

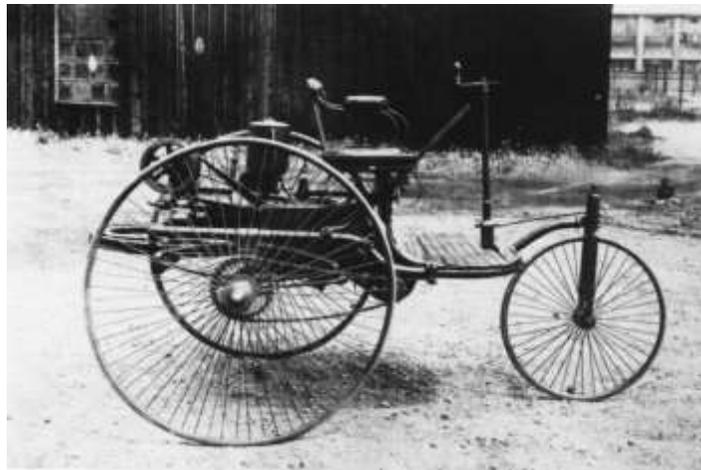


Ilustración 1 Patentmotorwagen

El automóvil de competencia

Se dice que las carreras de automóviles comenzaron desde que se fabricó el segundo automóvil. Sea esto cierto o no, no puede negarse que el deseo del hombre de comparar sus habilidades a las de otros se hizo manifiesto también en los automóviles, los cuales no sólo revolucionaron a la sociedad moderna, sino que proveyeron de un nuevo pasatiempo: el automovilismo.

Inicialmente se comenzaron las competencias de automóviles con exactamente los mismos vehículos que se utilizaban para el transporte habitual y en exactamente los mismos caminos. La diferencia al realizar una carrera de automóviles es que en este caso no es importante la comodidad del conductor, sino la velocidad que pudiera alcanzar con su vehículo para así llegar a la meta antes que el rival. El tiempo probaría que ciertas modificaciones aplicadas a un vehículo particular harían de este vehículo más apto para ganar carreras al hacerlo no sólo más rápido sino más estable. Estas eran las características que el automóvil de carreras debía tener. La verdadera pregunta era entonces ¿Qué modificaciones han de ser estas?

¹ Ambos ingenieros fundaron más tarde la firma Daimler-Benz, actualmente Mercedes-Benz

Resulta complicado hablar de forma muy específica de la apariencia y requerimientos exactos de un automóvil de competencia, pues la variedad de reglamentos y segmentos para los que se desarrollan estos vehículos es muy amplia, desde un *dragster* compitiendo en una pista recta, *Baja 1000* en carreras *off road*, pasando por NASCAR en sus pistas ovas y llegando a los automóviles tipo Fórmula compitiendo en pistas con curvas en ambos sentidos y con gran variedad de radios. Aún incluso dentro de los mismos autos tipo Fórmula, el tiempo ha introducido nuevas tecnologías algunas de las cuales han llegado a nuestros días y otras tantas que han sido vetadas en distintos momentos de la historia.

Lo anterior nos habla de que existen diversos requerimientos específicos para los autos de diversas categorías y épocas, pero hay algo que resulta común a cualquier vehículo de competencia: el automóvil de carreras *debe contar con la mayor capacidad de aceleración posible* en cualquiera de las direcciones en que esta sea necesaria. Esto quiere decir que un automóvil de competencia correctamente conducido nunca será manejado a velocidad constante y por el contrario, se acelerará siempre que la situación lo permita y se frenará (decelerará) en cuanto sea necesario, sólo para acelerar de nuevo en cuanto esto sea posible. Mas esta aceleración no sólo existe en segmentos rectos y hacia el frente del automóvil. La aceleración lateral es un resultado de que el vehículo se desplace en segmentos curvos de la pista y es igualmente importante para mantener al automóvil dentro de su trayectoria.

Lo anterior nos permite entonces definir al automóvil de carreras como aquel vehículo terrestre construido con el sólo propósito de ser más veloz en todo segmento de la pista, lo que se logra haciendo que sea capaz de acelerar al máximo en todo momento y en toda dirección. Un automóvil de carreras no pondera la comodidad ni la durabilidad. El auto de carreras perfecto es aquel que se desintegra después de cruzar la línea de meta en primer lugar.

¿Qué hace a un auto de carreras competente?

Driving a car as fast as possible is all about maintaining the highest possible acceleration level in the appropriate direction

-Peter G. Wright

La frase que abre esta sección resume en unas cuantas palabras la esencia detrás del ganar carreras, tema que fue abordado en la sección anterior. Pero cualquiera que piense un momento en ello, notará que no se puede “agregar” directamente aceleración a un objeto, sino que esta es la consecuencia de una interacción que fue definida en el año de 1687 y es la base de la mecánica clásica.

La segunda ley de Newton nos dice muy claramente que la fuerza es proporcional al cambio de *momentum* en un objeto. Esto más frecuentemente lo vemos expresado, de las siguientes formas:

$$F = m \cdot a$$

$$a = \frac{F}{m}$$

Es la segunda forma de la expresión la que más nos sirve en este caso, pues nos muestra los dos caminos por los que podremos aumentar la aceleración de nuestro vehículo: contar con más fuerza propulsora y disminuir la masa del mismo.

El segundo de estos caminos aplica a cualquier parte a bordo del automóvil y es un principio primordial del diseño automotriz: una pieza para aplicaciones automotrices debe contar con el menor peso que sea posible siempre y cuando esto no le impida cumplir su función durante el tiempo de vida que le sea previsto, mismo que puede ir desde unas cuantas vueltas de una carrera a la carrera completa e incluso a varias competencias de una temporada como es el caso en algunas categorías como la Fórmula 1. La necesidad de disminuir peso ha llevado a muchas soluciones alternativas, algunas de las cuales son mutuamente complementarias, como lo pueden ser la reducción del número de piezas, el uso de materiales ultraligeros y la optimización topológica de componentes.

La aceleración lateral. Su magnitud es proporcional al cuadrado de la velocidad con la que el objeto se desplaza y lo que se busca en el automóvil es que pueda mantenerse estable ante una aceleración cuya magnitud depende del máximo de la fuerza de tracción de la llanta. Entre más cercana al piso se encuentre la masa del automóvil y entre más ancho sea este, será menos susceptible a volcadura y, más importante aún, menos susceptible a transferencia de peso; por lo tanto se podrá alcanzar una mayor aceleración lateral. Las condiciones de pista para un auto Formula, nos permiten que la separación del vehículo y la vía sea mínima, y la anchura del vehículo es determinada por el diseñador a conveniencia, dentro de los parámetros establecidos en el reglamento de competencia.

Considerando que se cuenta con una cantidad pre establecida y limitada de poder en el motor, nuestra tarea será minimizar las fuerzas que actúen contra él (oposición aerodinámica, fricción en los componentes móviles) y cargar con el menor peso posible en el vehículo.

¿Cómo se vuelve competente el automóvil?

“In the early decades of the 1900, most of the engineering energy of the automotive industry went into invention and design that would yield faster, more comfortable and more reliable vehicles. The speed capability of motor vehicles climbed quickly in the embryonic industry...With higher speeds the dynamics of vehicles, particularly turning and braking assumed greater importance as an engineering concern.”

-Thomas D. Gillespie

El automóvil se desplaza en un espacio tridimensional que cuenta con sistemas coordenados de referencia propios. Sin embargo, muchos de los conceptos y movimientos del automóvil son más fáciles de visualizar, entender y utilizar si se considera un sistema de referencia adherido al automóvil y se definen así sus movimientos.

Para este propósito se escoge un sistema coordenado cuyos ejes están orientados en las direcciones: longitudinal, transversal y vertical del auto de acuerdo con la siguiente figura.

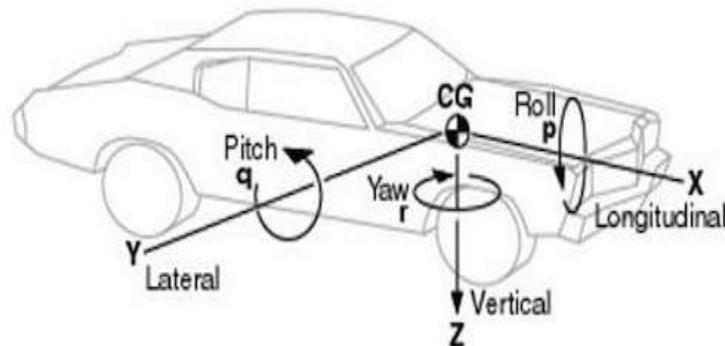


Ilustración 2 Sistema de coordenadas del automóvil.

Este es el sistema de referencia aceptado por la Sociedad de Ingenieros Automotrices (SAE). Como se puede observar, se denomina entonces X a la dirección longitudinal del automóvil, misma que es positiva hacia el frente; Z a la dirección vertical del automóvil, positiva hacia abajo; y finalmente Y a la dirección transversal, que es positiva hacia la derecha del vehículo, de manera que el sistema cartesiano sea diestro, es decir, que los productos vectoriales correspondan a la regla coloquialmente conocida como “de la mano derecha”.

Este no es un sistema único para referirse al automóvil, pues hay quienes prefieren utilizar uno con la orientación del plano YZ tal que sus valores positivos se encuentren hacia arriba y hacia la izquierda. Añadiendo aún mayor complejidad, suelen utilizarse también sistemas de referencia individuales adheridos a cada uno de los neumáticos o a otras partes móviles que así lo ameriten, por lo que se recomienda al ingeniero practicante que se asegure de establecer el sistema de referencia a utilizar antes de comenzar una serie de cálculos. En la práctica se utilizan, para un mismo análisis, múltiples sistemas de referencia y se les relaciona a través de matrices de transformación, con lo que se puede trabajar un problema con el sistema más conveniente y después obtener, con gran facilidad, los resultados en cualquier otro sistema deseado.

Dentro de este sistema de referencia el movimiento de interés principal es aquel que representa un desplazamiento en pista o cualquier otra área geográfica. Este es el movimiento horizontal, generalmente asociado con el plano XY de los sistemas de referencia automotrices. Los

desplazamientos verticales suelen ser consecuencia de la disposición del terreno y si bien no pueden ser ignorados, se les considera accidentales al camino y su análisis no es prioritario en el ámbito de los automóviles de competencia.

Finalmente, para completar los movimientos del cuerpo que vamos a estudiar, en este caso el vehículo, debemos establecer que este puede girar alrededor de los tres ejes de su sistema de referencia local. Cada uno de estos giros tiene una denominación específica, derivadas ellas de términos aeronáuticos, que son: *roll* alrededor del eje longitudinal (X), *pitch* alrededor del eje transversal (Y), *yaw* alrededor del eje vertical (Z).² Estos tres giros son de gran importancia en la comprensión de la dinámica de un vehículo y frecuentemente se les analizará de manera independiente en su correspondiente plano haciendo del análisis del automóvil, como lo es el de muchos cuerpos en el espacio, un análisis en tres planos de un espacio cartesiano.

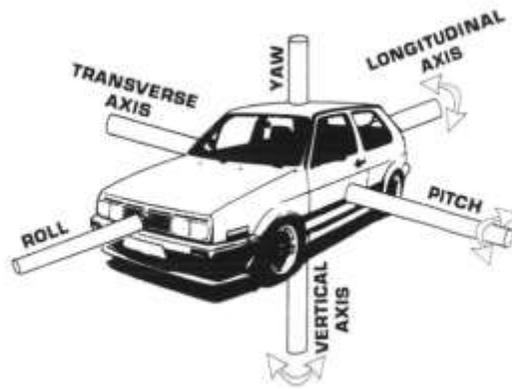


Ilustración 3 - Los giros del automóvil en su sistema local de referencia

Con esto hemos ya descrito de manera básica cómo orientar al vehículo en el espacio y nos preparamos para describirlo. Pero antes de entrar por completo en los modelos dinámicos del automóvil haremos una descripción del elemento motriz más importante del vehículo: el neumático.

² Los nombres en español son: alabeo, cabeceo y guiñada. A lo largo del texto se dará preferencia a la terminología en inglés

2. NEUMÁTICO: COMPORTAMIENTO Y MODELADO

*While I am describing to you how Nature works, you won't understand why Nature works that way.
But you see, nobody understands that.*

-Richard Feynman

Cuando pensamos en potencia y en aceleración en un automóvil nuestra mente viaja inmediatamente hacia el motor, quien es el elemento encargado de suministrar potencia. A fin de cuentas, es el motor aquel que transforma cualquier fuente de energía en movimiento para el automóvil. Pero este razonamiento, si bien correcto en parte, es algo injusto pues el gran responsable de mover al vehículo es otro elemento: el neumático. Podríamos contar con el motor más potente en existencia, la mejor aerodinámica posible, y un piloto como jamás se ha visto; y jamás seríamos competitivos si los neumáticos no son los adecuados.

El neumático es el único elemento directamente involucrado en la propulsión, ya que pone en contacto al vehículo con el camino. Las características de un neumático pueden hacer tanta diferencia como las características de la superficie sobre la cual se está corriendo. Contar con un neumático deficiente será tan perjudicial para la tracción como un camino de tierra suelta o una superficie húmeda.

Como diseñadores automotrices buscamos maximizar las capacidades de aceleración del automóvil y eso implica inevitablemente maximizar las capacidades de los neumáticos. Hacer esto requiere que el diseñador comprenda la naturaleza y el comportamiento del neumático: es un cuerpo sujeto a considerable deformación, que interactúa por fricción y que está lleno de un gas; esto implica que su comportamiento consiste entonces de una combinación de fenómenos no lineales, que dependen cada uno de múltiples variables, y muchas veces estas variables están interrelacionadas también de forma no lineal.

Esto representa, evidentemente, un gran reto para aquel que tenga que trabajar con este elemento, puesto que los modelos que utilicen para describir al neumático pueden encontrarse en cualquier extremo de la escalera de abstracción, y ser entonces: sencillos pero imprecisos; o muy precisos pero en extremo complicados. Lo anterior no quiere decir, sin embargo, que el neumático sea un elemento totalmente incomprensible e impredecible, pero sí nos indica lo importante que es que el diseñador esté siempre atento a las condiciones que lo afectan.

Sistema de coordenadas de la rueda

Tal como en el caso del vehículo completo, resulta conveniente establecer un sistema de referencia para el subsistema de la rueda. Esta necesidad es más apremiante en el caso de las ruedas delanteras, pues su orientación es variable gracias al sistema de dirección.

En las ruedas se escoge como sistema de referencia uno con origen en el centro de la misma, con el eje Y alineado con el eje de rotación y positivo hacia la derecha del vehículo. El plano XZ de este sistema coordenado resulta paralelo a la cara del neumático, estando el eje X orientado hacia el frente del vehículo y el Z hacia abajo.

Ángulo de deslizamiento

Una vez establecido el sistema de referencia, observemos la rotación de la rueda. De manera simple se entiende que la rueda se desplazará “hacia el frente” en la dirección marcada por el eje X del sistema local.

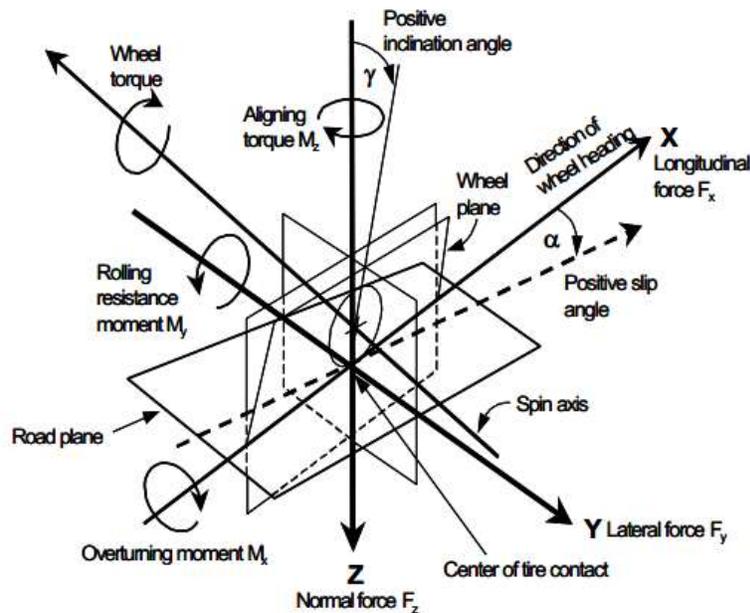


Ilustración 4– Deslizamiento de la rueda de acuerdo con su sistema de coordenadas

Este sería el caso si se tratara de un cuerpo rígido, pero el neumático es un cuerpo deformable, por lo que se espera que esta relación no se cumpla. La observación de la dinámica automotriz demuestra que existe una diferencia entre la orientación de la rueda y la de su vector de velocidad. En la figura 2.01 se ilustra esta situación en el sistema coordinado de la rueda.

Este ángulo se conoce como ángulo de deslizamiento (*slip angle*)³ o slip lateral del neumático y su observación es una de las más importantes y complejas actividades al instrumentar un modelo automotriz, pues es la principal variable de influencia en la fuerza lateral del neumático.

³ en realidad, el neumático no se desliza salvo al límite de la adhesión, pero el nombre ha sido ampliamente aceptado en los círculos de la dinámica automotriz

Fuerza lateral

La fuerza lateral del neumático corresponde a la componente de la fuerza de tracción que está orientada hacia el centro de la curva, sobre el eje Y del sistema coordenado local, y es la fuerza que permite al vehículo seguir su trayectoria.

La variable de mayor influencia en la magnitud de esta componente es el ángulo de deslizamiento. Esto se atribuye generalmente a la deformación del parche de contacto y las características elásticas de la goma del neumático.

El comportamiento de la fuerza lateral del neumático con respecto al ángulo de deslizamiento luce generalmente de la siguiente forma:

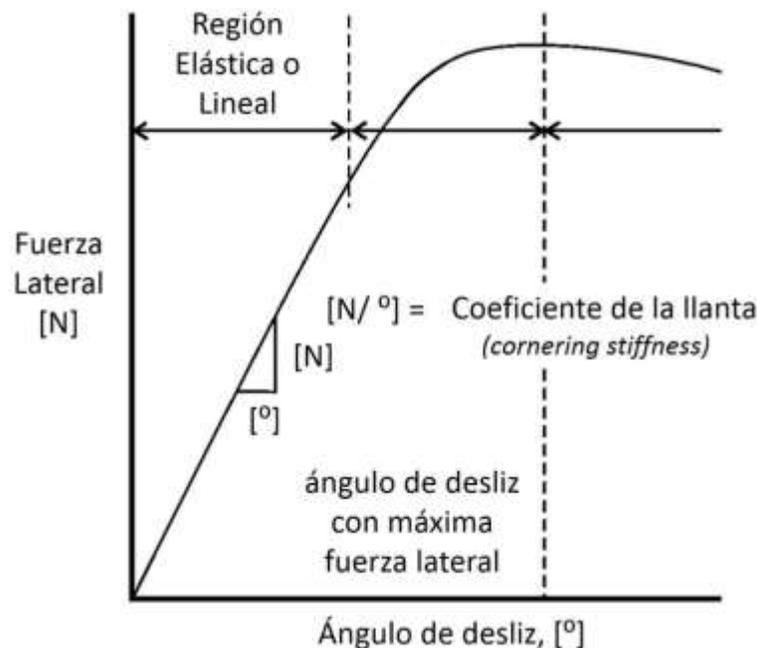


Ilustración 5– Fuerza lateral del neumático con respecto al ángulo de deslizamiento

Se pueden observar 3 zonas en esta gráfica. La primera es la zona de comportamiento elástico, en la cual la fuerza lateral es prácticamente lineal y proporcional al *slip*. La pendiente en esta zona se conoce como la rigidez del neumático (*tire cornering stiffness*) y es utilizada en los modelos matemáticos lineales del neumático. Esta región se extiende desde los 0° hasta valores cercanos a los 10°.

La segunda zona es una zona claramente no lineal, de transición, en la cual se comienzan a manifestar los efectos de fricción entre el neumático y la superficie. Esta zona es de suma importancia para el ingeniero automotriz en el ámbito de competencia, pues en ella se localiza el valor máximo de fuerza que puede generar el neumático. Esto quiere decir también, que es la zona en la que se podrá generar la mayor aceleración lateral y por lo tanto se podrá mantener la máxima velocidad en curvas. Es esta la zona en que deberá de operar el vehículo de competencia,

pero su modelado resulta sumamente complicado debido a su marcada falta de linealidad, por lo que muchas veces se aproxima linealmente utilizando la primera y tercera zona, o se aproxima junto con el resto de la curva utilizando funciones complejas en modelos como el de Pacejka.⁴

La tercera zona está dominada por un comportamiento de fricción y se suele aproximar la fuerza generada como constante. Desafortunadamente esta zona, si bien pudiera parecer predecible, tiene dos desventajas serias: está muy cerca del límite de la adhesión y la fuerza disponible está por debajo del máximo. Esto quiere decir que operar en esta zona, además de no incluir la fuerza máxima disponible, puede provocar la pérdida de control sobre un neumático particular y potencialmente sobre un extremo completo del automóvil.

Fuerza longitudinal

La fuerza longitudinal del neumático es la componente de la fuerza total que se encuentra alineada con el eje X del neumático, es decir, con su sentido de rotación. A partir de esto podemos entender que es la encargada de acelerar o desacelerar al neumático y por lo tanto al vehículo mismo.

Porcentaje de deslizamiento

La variable de mayor influencia en la fuerza longitudinal es el porcentaje de deslizamiento. A causa de la deformabilidad del neumático, existe una diferencia entre la velocidad angular de rotación de distintas zonas del mismo. Dicho de otra forma, existe una diferencia entre la velocidad a la que gira, por ejemplo, el punto que se encuentra en contacto con el rin y la velocidad con la que gira el punto que está en contacto con el piso.

Esta diferencia se expresa en relación con la velocidad del vehículo mismo de acuerdo con la ecuación siguiente y se conoce como *slip ratio* o deslizamiento longitudinal.

$$SR = \frac{\omega \cdot r - v}{v} = \frac{\omega \cdot r}{v} - 1$$

Donde:

SR – *slip ratio*

ω – velocidad angular del neumático

r – radio efectivo del neumático

v – velocidad lineal del vehículo

El radio efectivo del neumático es diferente al radio nominal, es menor y variante a lo largo del tiempo pues este se comprime a causa de las cargas verticales que se le aplican.

⁴ [Pacejka, Hans, tyre modelling].

De acuerdo con la ecuación 3.1 se pueden identificar los siguientes valores para el SR:

Valor del SR	Implicación	Significado
0	La velocidad lineal del neumático es la misma que la del vehículo.	El neumático rueda libremente. Tal es el caso de las ruedas en un eje sin tracción.
>0	La velocidad del neumático es mayor que la del vehículo.	Se está aplicando tracción al neumático. Este se deforma, impulsando al vehículo.
<0	La velocidad del vehículo es mayor que la del neumático.	Se está frenando al neumático. Este se deforma, deteniendo al vehículo
$\rightarrow\infty$	La velocidad del neumático es mucho más alta que la del vehículo.	El neumático está girando libremente. Esta situación se conoce como <i>Wheel spin</i> y se produce cuando hay un exceso de torque proveniente del motor en el neumático.
-1	La velocidad del neumático es nula y la del vehículo no.	El neumático está frenado y desliza sobre el pavimento mientras el vehículo avanza.

Tabla 1– Valores del porcentaje de deslizamiento

Finalmente, hay que tener en cuenta que si bien esta es la definición más comúnmente utilizada y la aceptada por la Sociedad de Ingenieros Automotrices, las definiciones del porcentaje de deslizamiento pueden variar en algunas fuentes de acuerdo con la norma que estas sigan, por lo que es siempre conveniente observar la escala de los datos que se analicen.

La fuerza longitudinal del neumático exhibe un comportamiento similar al de la fuerza lateral, pero la variable de importancia en este caso es el *slip* longitudinal. De igual forma que en el caso de la fuerza lateral, se observan tres zonas: una zona elástica y lineal, una no lineal de transición y una zona de fricción y decaimiento de la fuerza.

En la primera zona también se puede identificar una pendiente, pero su uso en el modelado del automóvil es escaso, puesto que el control del piloto es mucho más indirecto, limitado y poco lineal sobre el *slip* longitudinal de lo que lo es sobre el lateral.

La segunda zona es una vez más de suma importancia pues es donde se encuentra el máximo de fuerza tractiva. Esta zona es estudiada en el desarrollo de sistemas de frenado activo, tales como el ABS, en los cuales se estima continuamente el deslizamiento longitudinal, buscando mantener a la rueda en el valor correspondiente a la máxima fuerza.

En la tercera zona, dominada por efectos de fricción, la fuerza disponible para la tracción decae hasta llegar al valor de *slip* donde el vehículo desliza sobre el piso, con un coeficiente de fricción dinámico, y se pierde el control del mismo. El conocimiento de esta zona es importante, una vez más, para el diseño de sistemas de frenado y de seguridad pasiva y activa, pero no resulta de especial importancia para el alto desempeño del vehículo de carreras.

El círculo, o elipse, de tracción

Se han estudiado ya de forma independiente los dos componentes de la fuerza de tracción del neumático, pero una vez comprendidos los aspectos generales de este comportamiento, debemos retomar la noción de que la fuerza de tracción es una sola.

Pensemos en la capacidad de tracción del neumático como una fuerza con una magnitud máxima acotada y una dirección cualquiera. Las fuerzas longitudinal y lateral son sólo las componentes de esta fuerza en las direcciones correspondientes del neumático (eje X ó eje Y). La fuerza máxima en el sentido lateral se dará cuando la fuerza de tracción esté puramente orientada en esa dirección, tal como sucederá con la fuerza longitudinal.

Esto se suele expresar gráficamente con la herramienta conocida como el círculo de tracción.

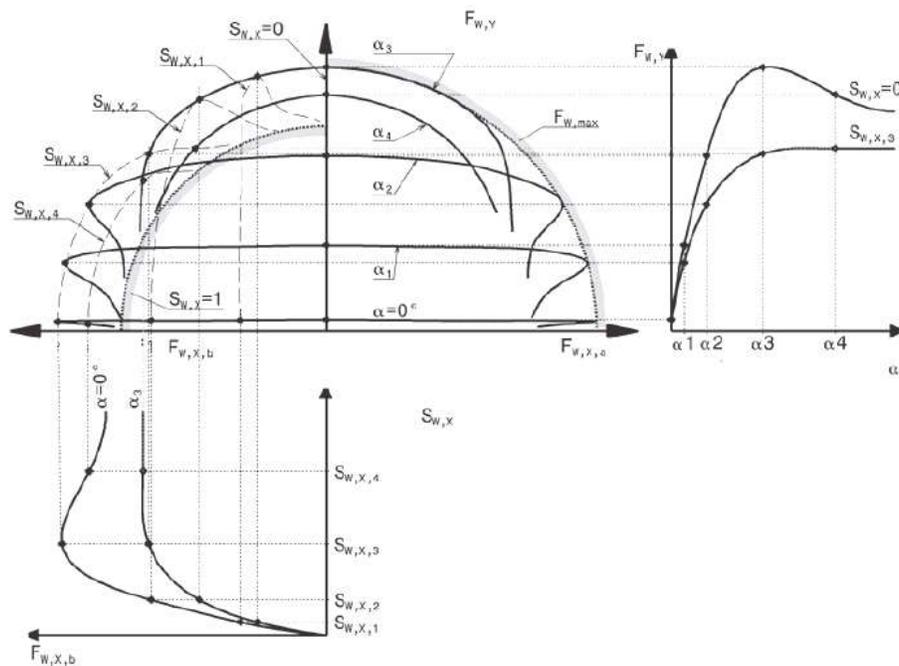


Ilustración 6 – Círculo de tracción y proyecciones de fuerza lateral y longitudinal

El análisis de este círculo revela importantes implicaciones. En primer lugar: que no se puede disponer del máximo de ambas fuerzas simultáneamente. Más aún, no se puede disponer del máximo de cualquiera de ellas sino en ausencia total de la otra. Presionar las capacidades del

neumático más allá de este límite provocará que deslice, haciendo que el piloto pierda el control. Este punto se expandirá más adelante en la sección correspondiente al papel del piloto.

“En la mayoría de las gráficas que explican de forma individual el comportamiento de la fuerza longitudinal y de la fuerza lateral se estudia a cada una en ausencia de la otra. Esto quiere decir que las curvas que caracterizan la fuerza longitudinal se presentan en general en una condición de slip lateral nulo. Por otra parte, al caracterizar la fuerza lateral con respecto al slip lateral, se hace de forma tal que el porcentaje de slip longitudinal sea igual a cero.”

La relación de las fuerzas lateral y longitudinal con respecto al total de la fuerza es, evidentemente:

$$\sqrt{F_x^2 + F_y^2} = F_{Max}$$

Finalmente, la magnitud máxima de la fuerza de tracción del neumático no es igual en todas las direcciones. Se dispone siempre de mayor fuerza en el sentido longitudinal, haciendo que este “círculo” sea más bien alargado, convirtiéndolo efectivamente en una “elipse de tracción”, término técnicamente más correcto pero escasamente usado en la terminología cotidiana.

Sensibilidad a la carga

Otra de las variables que influye considerablemente en el desempeño del neumático es la carga vertical ejercida sobre él. Una vez más podemos atribuir este efecto tanto a la elasticidad del neumático como a su funcionamiento por fricción.

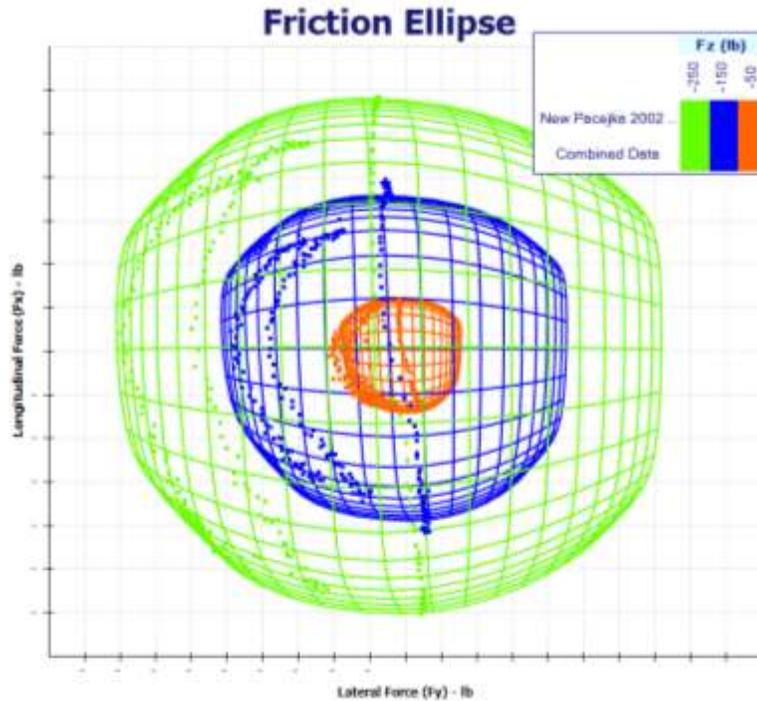


Ilustración 7– Varios círculos de tracción y su correspondiente carga vertical

La correlación entre la magnitud de la carga vertical en el neumático y la fuerza de tracción que este proporciona es directa y monótonamente creciente, lo cual quiere decir que, siempre, a mayor carga vertical, mayor fuerza de tracción disponible. Este principio aplica en todas las direcciones en que el neumático pueda generar fuerza, lo cual visto en términos del círculo de tracción se aprecia como un aumento en el contorno del mismo, tal como se ve en la figura 2.04.

Para analizar la influencia de la carga vertical en la fuerza lateral, pues sabemos que el aumento de una provoca siempre un aumento en la otra, con frecuencia se busca normalizar la fuerza lateral con respecto a la vertical

$$\frac{F_Y}{F_Z} = F_Y'$$

Esta relación entre fuerza vertical y lateral en un modelo de fricción es reminiscente del modelo de fricción seca o fricción de Coulomb en el que existe una proporcionalidad directa y lineal entre la fuerza de fricción entre dos superficies y las fuerzas en una dirección normal a dicha superficie:

$$\frac{F_Y}{F_Z} = \mu$$

$$F_Y = \mu \cdot F_Z$$

El comportamiento típico de esta fuerza lateral normalizada, o coeficiente de fricción, con respecto a la carga vertical se muestra en la figura:

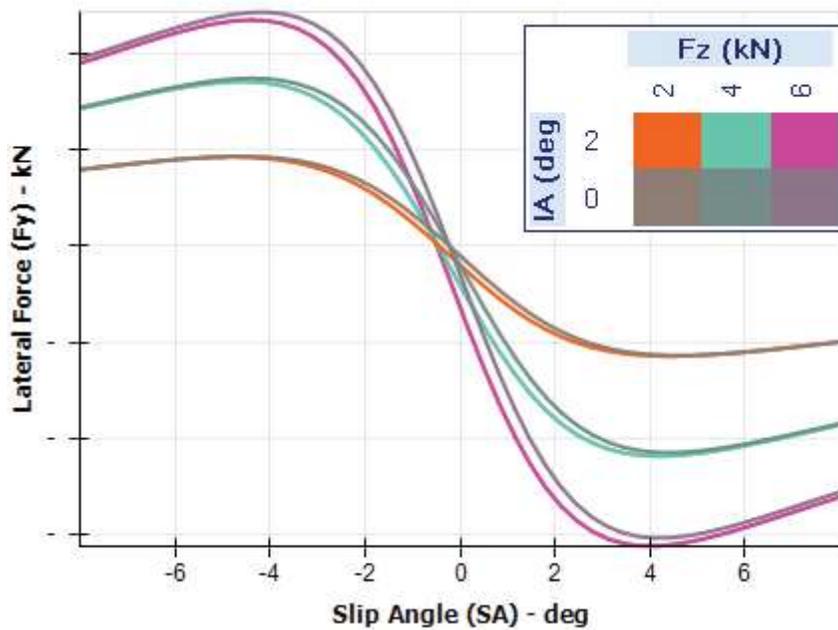


Ilustración 8– comportamiento de la fuerza lateral normalizada con respecto a la carga vertical

Se puede observar que el coeficiente de fricción disminuye conforme aumenta la carga. Este fenómeno se conoce como sensibilidad a la carga del neumático y su conocimiento es fundamental en el análisis del vehículo, pues las cargas verticales ejercidas sobre los neumáticos se encontrarán en constante cambio durante su funcionamiento. La sensibilidad a la carga para un neumático particular depende de la construcción del componente.

Finalmente cabe mencionar que el valor de ángulo de deslizamiento correspondiente al máximo de fuerza lateral incrementará en conjunto con la carga vertical. Esto quiere decir que un neumático con mayor carga dinámica sobre él admitirá un ángulo de deslizamiento mayor antes de abandonar la zona de transición y perder capacidad de aceleración. Esto se puede ver en la tabla 2.02⁵

Carga vertical (lbf.)	Fuerza normalizada máxima (F_y/F_z)	Ángulo de deslizamiento
900	1.10	5.6°
1350	1.08	6.0°
1800	0.97	6.7°

Tabla 2.02 - Efectos de la carga normal en la condición de máxima fuerza lateral

⁵ "Race Car Vehicle Dynamics", figure 2.9:

Efectos del *Camber*

Se denomina ángulo de inclinación a la diferencia entre la orientación de la cara del neumático (paralela a su plano XZ) con respecto a la vertical de un sistema coordenado fijo en la vía. El *camber*, por otra parte, es el ángulo de esta misma cara con respecto al plano XZ del sistema coordenado del vehículo. Estos dos términos se usan intercambiabilmente en el entorno coloquial automotriz, siendo favorecido el uso de *camber*, pero no son estrictamente iguales. Los efectos a continuación descritos corresponden al ángulo de inclinación, pero se hablará del *camber* para acomodarse a la terminología más cotidiana.

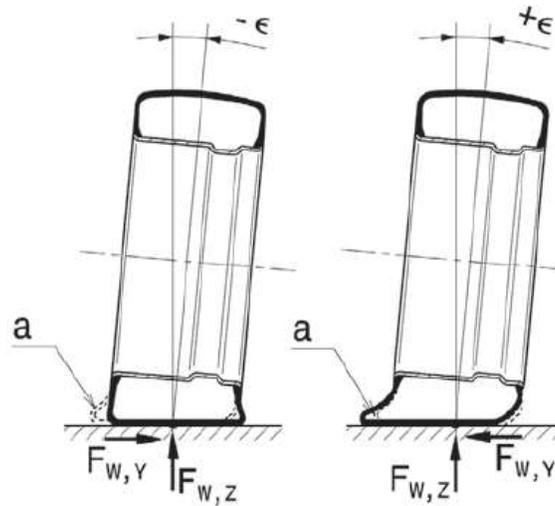


Ilustración 9- Ángulo de inclinación o *Camber*.

El valor del *camber* es positivo cuando la parte superior de la rueda está más lejos del chasis que la parte inferior. Es negativo en el caso opuesto, i.e. La parte superior del neumático delantero izquierdo está inclinada hacia la derecha y la del derecho hacia la izquierda.

El papel de esta inclinación es importante por la misma razón que cualquier otra variable podría serlo para el desempeño del neumático: puede aumentar el valor de la fuerza de tracción.

La variación del *camber* interactúa de diversas formas con las variables que hemos tratado anteriormente. Dado que el plano de rotación del *camber* es el plano YZ se esperaría que sea en estas direcciones en las que más impacto tenga, por lo que empezaremos observando su impacto en la fuerza lateral independientemente de la carga

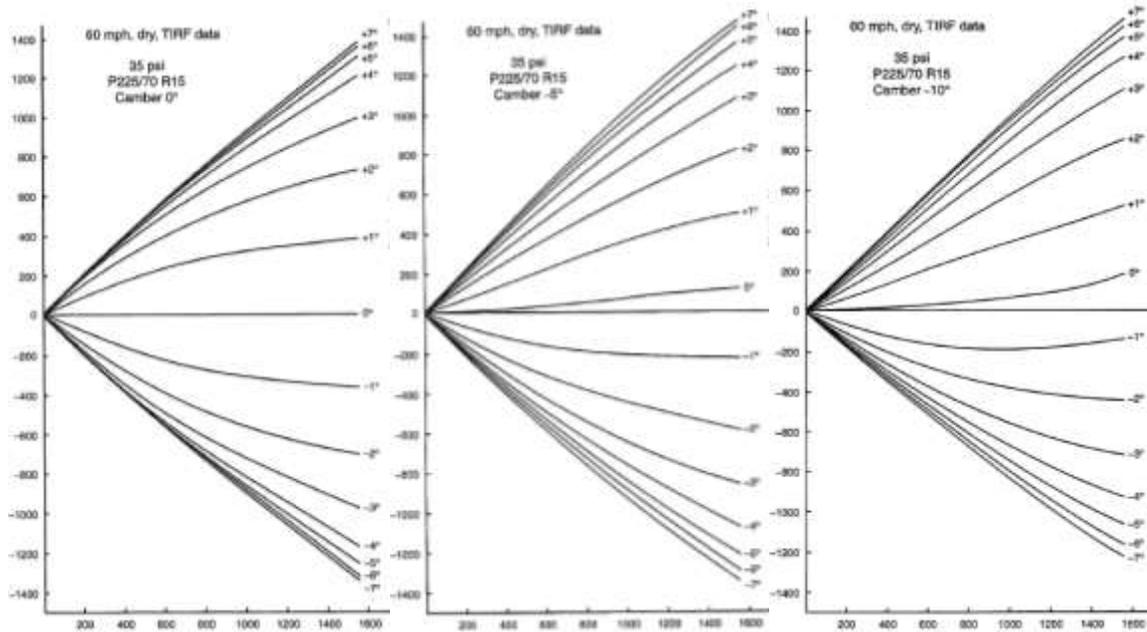


Ilustración 10- Efectos del aumento de camber en la fuera lateral para diferentes condiciones de carga normal y ángulo de deslizamiento.

Torque de auto-alineación

Este es un efecto producido por la forma en que se distribuyen la fuerza de fricción en el parche de contacto, distribución que no es uniforme, por lo que la fuerza resultante no se encuentra en el centro de la superficie de contacto y por lo tanto tampoco directamente por debajo del eje de giro de la dirección (alrededor del eje Z). Esta distancia entre fuerza y eje de rotación provoca la existencia de un momento de rotación que afecta tanto a la rueda como al automóvil en su totalidad.⁶ En la práctica este torque se puede medir para distintas condiciones de carga y de ángulo de deslizamiento.

⁶ www.racer.nl/reference/pacejka.htm "Note that M_z even crosses the horizontal line, which means that once you steer too much, you even get negative feedback, making your wheel want to turn even MORE"

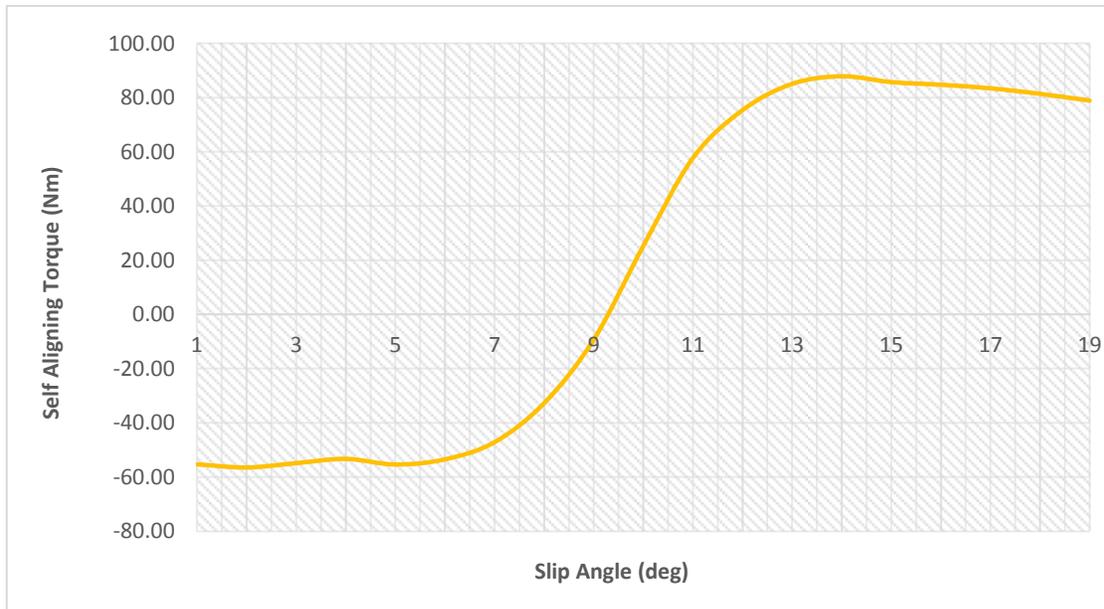


Ilustración 11– Comportamiento del torque de auto-alineación con respecto al ángulo de deslizamiento

El torque de auto alineación, tal como su nombre lo indica, provoca en el neumático una tendencia a alinearse con su vector de velocidad, reduciendo así el ángulo de deslizamiento. Sin embargo debe notarse que para valores extremos de ángulo de deslizamiento el torque de auto alineación disminuye de nuevo e incluso cambia de sentido. Esto significa que al alcanzar el neumático cierto valor de ángulo de deslizamiento, el torque contribuirá a aumentar este ángulo en vez de disminuirlo, girando al neumático hacia el centro de la curva en vez de alinearlo con la velocidad del vehículo.

Efectos de la presión y la temperatura

El neumático, como ese término lo indica, es un componente lleno de aire a presión. Tal como con las anteriores variables, se ha caracterizado el comportamiento del neumático en diferentes situaciones de presión y temperatura, pero se evitará entrar en un análisis detallado puesto que estas variables tienen un comportamiento menos significativo y más errático. Por ello se mencionarán sólo características superficiales del comportamiento:

Temperatura

Mayor temperatura en general mejora la adherencia del neumático, pero a su vez produce mayor desgaste de la pieza. La durabilidad es de vital importancia estratégica en categorías de competencia donde los cambios de neumáticos son limitados por reglamento, tal como lo es en la Formula 1, o por presupuesto, tal como lo podría ser en FSAE.

La distribución de la temperatura en el neumático es irregular y se verá afectada por factores de alineación como el *camber*, *toe* y el radio de scrub. Esto es de principal importancia en los primeros minutos de uso del neumático.

Presión:

La presión es directamente proporcional a la temperatura. A mayor temperatura del neumático, mayor presión.

La presión de inflado está estrechamente relacionada con la compresibilidad del neumático. Esto quiere decir que cuanto mayor sea la presión, menos variará su radio en respuesta a los cambios de carga vertical y menor será la superficie de contacto.

Existe una presión óptima de inflado para cada modelo de neumático. Por encima de esta presión las prestaciones disminuyen lentamente, mientras que por debajo de esta presión disminuyen con rapidez. Debido a la relación entre temperatura y presión en el neumático, en ausencia de un calentador especializado se acostumbra inflar al neumático frío por debajo de su temperatura de operación para evitar un exceso de presión. Sin embargo hay que tener cuidado con esta práctica, pues sub-inflar al neumático es más perjudicial que sobre-inflarlo.

El torque de auto alineación en general disminuye a mayor presión de inflado, por lo que el neumático se vuelve menos responsivo a las condiciones del camino. Esto se debe a la disminución de la superficie de contacto.

Sumario de fenómenos en el neumático

En general, y hasta poco antes del límite, el neumático ofrecerá mayor fuerza lateral de tracción conforme mayor sea el ángulo de deslizamiento.

La fuerza longitudinal de tracción no depende de la velocidad del neumático ni del vehículo, sino de la diferencia entre ambas.

Al acelerar o frenar el automóvil se exige al neumático generar una fuerza longitudinal. Esto provoca una disminución en la fuerza lateral disponible.

La fuerza de tracción del neumático, en cualquier dirección, será mayor conforme mayor sea la carga normal, pero para aumentos constantes de carga los aumentos en la fuerza de tracción son decrecientes.

Aumentar el ángulo de inclinación (*camber*) del neumático también aumenta su tracción lateral, pero disminuye la longitudinal.

3. MODELOS DINÁMICOS DEL AUTOMÓVIL

It can scarcely be denied that the supreme goal of all theories is to make the irreducible basic elements as simple and as few as possible without having to surrender the adequate representation of a single datum of experience

-Albert Einstein

Abstracción y la navaja de Ockham

Hay muchas formas de explicar el comportamiento del mundo a nuestro alrededor. El surgimiento de nuevas explicaciones para los fenómenos del universo y la eventual sustitución de una explicación por otra es un proceso natural en la búsqueda del conocimiento. Pero todas las teorías tienen algo en común. El entendimiento de la naturaleza está basado en encontrar principios que puedan enunciar de forma sencilla procesos que de cualquier otra forma serían demasiado difíciles de entender.

Un paso importante en el desarrollo de cualquier proyecto de ingeniería es poseer este conocimiento acerca del comportamiento del problema al cual el ingeniero va a dar solución. El ingeniero practicante debe ser capaz de realizar la abstracción de la situación y establecer las características de las variables de interés, así como sus relaciones. Una vez que el problema se encuentra en el dominio de lo abstracto, podremos aplicar las técnicas matemáticas disponibles para poder obtener valores a los que después se dará sentido en el mundo real. Básicamente, el ingeniero de diseño debe ser el traductor entre el mundo real y el mundo abstracto.

De estas explicaciones o modelos de la situación, se requiere que cumplan con características diversas de acuerdo con la situación particular en que se las requiera. En general la ciencia tiende a inclinarse por las explicaciones más sencillas para los fenómenos que modela, siempre y cuando la respuesta que se produzca cumpla con la precisión esperada. Este comportamiento resulta instintivo en cualquier individuo formado en el área de las ciencias, y recibe formalmente el nombre de *principio de parsimonia*⁷ o navaja de Ockham, pues este individuo de origen inglés, uno de los primeros en enunciar el principio a finales del siglo XVI “afeitaba las barbas de Platón”, cuyas propuestas acerca del conocimiento de la realidad estaban llenas de entidades espirituales y matemáticas que introducían una complejidad innecesaria a la ciencia.

El principio de parsimonia dice que de todas las explicaciones posibles para un fenómeno, es aquella que requiere menos suposiciones la que tiene más posibilidad de ser correcta. Su uso es, en principio, el de sugerir que para explicar un fenómeno particular se deben tomar en cuenta sólo los factores que tengan influencia directa y no aquellos cuya presencia sólo sirva para obstaculizar una observación

Es labor importantísima de un diseñador el elegir de entre los modelos disponibles de la realidad a aquellos más competentes para explicar cada situación específica. Estos modelos varían entre sí

⁷ Lex parsimoniae: *Non sunt multiplicanda entia sine necessitate* - John Punch

de acuerdo a muchos parámetros, pero todos, siendo modelos, son a fin de cuentas abstracciones matemáticas. A partir de esto, se identifica la existencia de una escala de grises que desciende desde la realidad hasta los más simples modelos. A esta escala la denominamos “escalera de abstracción”.

La escalera de abstracción

Although the practicing engineer moves up and down the ladder, it is important to know one's location on it

-Milliken & Milliken

El nivel de profundidad con que se realice la abstracción de un problema particular puede variar de acuerdo con los requerimientos de la solución particular que se esté buscando, pudiendo esta ser tan complicada o simple como se requiera, dependiendo de su propósito o de los recursos para su realización. El entendimiento que se pueda tener acerca de un sistema se traduce entonces en un modelo abstracto que puede ser cualitativo, cuantitativo o ambos. Los modelos que se generen del sistema tendrán que aumentar su complejidad de acuerdo con la precisión de la respuesta necesaria, pues un sistema físico real suele contener diversas magnitudes cambiantes con el tiempo y en dependencia a una o más variables, cuyos comportamientos pueden no ser lineales y el obtener valores cercanos a la realidad implicará entonces incluir todos estos conceptos. Afortunadamente el ingeniero puede también alcanzar soluciones satisfactorias a muchos de los problemas que enfrenta, a través de modelos simplificados que serán más fáciles de generar, manipular y simular, con la consecuencia negativa de cierta pérdida de precisión.

De todo lo anterior se desprende que para un sistema en particular, diversos modelos pueden ser generados en los que se consideren o ignoren algunas de las características del problema. Conforme más precisión se quiera obtener, mayor ha de ser la precisión del modelo, lo que implica mayor complejidad y por lo tanto mayor costo de procesamiento. Con esto estamos modelando de manera empírica el proceso de modelado mismo, en el que la complejidad del modelo es directamente proporcional a la complejidad del modelo y por lo tanto al costo de solución. Esta conclusión, si bien elemental, es de suma importancia al atacar un problema como lo es el diseño automotriz. Para ilustrar esta situación, frecuentemente se utiliza la llamada “escalera de abstracción” que se ilustra en la figura.



Ilustración 12– la escalera de la abstracción

Como se puede observar, en un extremo está la realidad y en otro la abstracción pura. La labor del ingeniero es encontrar el “peldaño” adecuado para abordar un problema y desplazarse libremente hacia arriba y abajo de esa escala de ser así necesario. En el mundo de la ingeniería se tienen siempre recursos limitados para resolver un problema y entre más se acerque este a la realidad, su complejidad puede volverse casi infinita. Escoger el modelo que ofrezca el mejor compromiso entre precisión y el uso de recursos para resolverlo es una de las labores más importantes en un proyecto de diseño.

El proceso de diseño es iterativo. Se plantea una hipótesis en un marco prudente de diseño, misma que se desarrolla después y se simula en la medida de lo posible. Con los resultados obtenidos, el diseñador obtiene conclusiones valiosas que después se traducirán en cambios al diseño planteado inicialmente. Este ciclo se repetirá tantas veces como sea posible o necesario hasta alcanzar los parámetros deseados. Este esquema será familiar para aquellos versados en el área como un sistema de lazo cerrado con retroalimentación. Los ingenieros del área de control saben que las características de la planta no pueden ser modificadas más allá de ciertos límites, pero el controlador puede ser diseñado y sintonizado a conveniencia, de manera que pueda introducir en la planta los valores más adecuados para que esta llegue a la meta planteada. En este ejemplo es fácil identificar al controlador como el diseñador. Es este el que tomará las decisiones de acuerdo a: las metas de diseño buscadas y los parámetros que pueda obtener como retroalimentación a través de simulaciones.

Puede identificarse al diseñador humano con todas las técnicas existentes para el diseño de controladores. En particular, cuando no se tiene un modelado suficientemente exacto del funcionamiento del problema, el diseñador actuará como un controlador adaptativo o basado en lógica difusa, tomando parámetros inexactos y combinándolos de acuerdo con una lógica personal, de reglas heurísticas, para generar la corrección necesaria.

En el desarrollo de sistemas automotrices, tal como en muchas tareas complejas de diseño, el ingeniero comenzará en un extremo cercano a la completa abstracción, de manera que los parámetros más básicos de la tarea puedan ser determinados de manera aproximada y se pueda comprender el sistema en su generalidad. Esto en esencia se debe a que la capacidad humana de manejar datos y operaciones es limitada, tanto como lo es la capacidad de una computadora de realizar decisiones de diseño. Por ello, se dejan las decisiones de diseño al ingeniero y los cálculos a los programas especializados. Posteriormente se irá recorriendo la escala de abstracción acercando cada vez más el modelo hacia la realidad tanto como las limitaciones del proyecto permitan. En el presente trabajo se tratará de mantener siempre en mente que existen diversos modelos en diferentes niveles de abstracción para cada una de las secciones que en adelante se desarrollen.

Modelo lineal con dos grados de libertad

El automóvil fue concebido para llevarnos de un lugar a otro sobre la superficie de la Tierra. Es entonces totalmente comprensible que la más importante descripción matemática del automóvil sea la enfocada a cómo este se desplaza en la superficie sobre la que rueda, un plano al que hemos asignado las direcciones XY. Lo más importante en este plano es describir, para cada posición en la que se encuentre, la orientación del vehículo y su comportamiento ante las fuerzas que en él actúan.

El modelo más sencillo que nos permite hacer esto es un modelo conocido en el mundo de la dinámica de vehículos como el “modelo de bicicleta” (*bicycle model*). En él se supone que en el vehículo las dos llantas correspondientes a cada eje se encuentran comprimidas en una sola, haciendo que este efectivamente luzca como una bicicleta. Este vehículo simplificado cuenta entonces con sólo dos ruedas, una de las cuales puede cambiar su orientación gracias al sistema de dirección, tal como lo haría en una bicicleta convencional, girando sobre un eje que pasa por su centro en el plano vertical. La masa del vehículo se considera concentrada en el centro de masa. Otros términos más técnicos para este modelo lo denominan modelo de una sola línea.⁸

La cantidad de efectos considerados en este análisis es mínimo y suele estar limitado a: las fuerzas producidas por los neumáticos y efectos inerciales⁹, así como los momentos cinemáticos correspondientes.

El modelo de bicicleta corresponde a la Figura:

⁸ *Single track model, Einspur Modell*

⁹ de acuerdo con el principio de D'Alembert

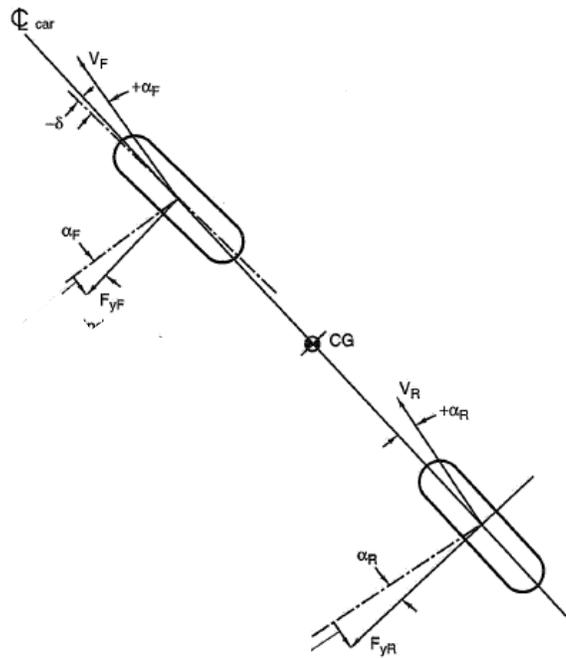


Ilustración 13– Modelo lineal “bicicleta”

Donde:

α - Ángulo de deslizamiento (F para frontal, R para trasero)

β - Ángulo de orientación

δ - Ángulo de dirección

a - Distancia del centro de masa a rueda trasera

b - Distancia del centro de masa a rueda delantera

F_x - Vectores de fuerzas correspondientes a las ruedas (F para frontal, R para trasera)

V_x - Vectores de velocidad

CG - Centro de masa

El modelo lineal

Conociendo la magnitud de las fuerzas que actúan en el vehículo, la geometría del mismo y su masa, podemos hacer un balance competente de fuerzas para nuestra “bicicleta”. Del anterior

capítulo sabemos que la fuerza de fricción que puede generar un neumático es interesante objeto de estudio que se puede ver afectado por numerosas variables.

En este caso particular, sin embargo, empezaremos con un modelo lineal en el que consideraremos una única variable de la cual dependerá la fuerza de fricción: el ángulo de deslizamiento. Además, se utilizará una aproximación lineal para relacionar la geometría de nuestro modelo con el ángulo de deslizamiento, por lo que supondremos que:

$$\sin\theta = \theta; \cos\theta = 1$$

Donde el ángulo θ está expresado en radianes.

Estas aproximaciones son muy frecuentemente utilizadas en la práctica del control para diseñar sistemas lineales, pues constituyen una aproximación con un error de sólo el 1% para ángulos con un valor de hasta 10°

Considerando entonces a la fuerza de fricción sólo como su componente lateral y como linealmente dependiente sólo del ángulo de deslizamiento del neumático (ignorando efectos de *camber*, aceleración longitudinal y sensibilidad a la carga, entre otros) se define la fuerza de acuerdo con la Ecuación:

$$F = C_F \cdot \alpha$$

Donde C_F se denominará rigidez del neumático (*cornering stiffness*). Del capítulo anterior podemos recordar que este comportamiento se aproxima mucho a la realidad para la primera zona de la curva característica de la fuerza lateral con respecto al ángulo de deslizamiento.

Finalmente, del modelo de bicicleta podemos decir que al estar contenido en el plano y tratarse de un cuerpo rígido con dos elementos de fricción acoplados a través del chasis, cuenta solamente con dos grados de libertad, lo cual quiere decir que para una situación cualquiera, se pueden definir arbitrariamente los valores de dos parámetros y esto nos permitirá determinar el resto de los estados de este sistema. Este concepto es útil cuando se busca representar al sistema utilizando un modelo de variables de estado.¹⁰

La geometría de una curva: el ángulo de Ackermann

Cuando el automóvil se desplaza a muy bajas velocidades es posible tratar al neumático como si, de hecho, tuviera un ángulo de deslizamiento nulo, es decir que su vector de velocidad está alineado con su sentido de rotación.

Esto nos permite, conociendo entonces la orientación de ambos neumáticos y la separación entre ellos, determinar de forma puramente geométrica la posición del centro instantáneo de rotación del vehículo. De la misma forma podemos determinar entonces la distancia entre este centro de

¹⁰ [10], [2]

rotación y el vehículo, misma que es, efectivamente, el radio instantáneo de curvatura de la vía por la que transita el automóvil. Este radio se mide con respecto al neumático trasero, pues su orientación no cambia y es de hecho el polo geométrico hacia el que se aproxima el centro de rotación conforme el ángulo de dirección incrementa.

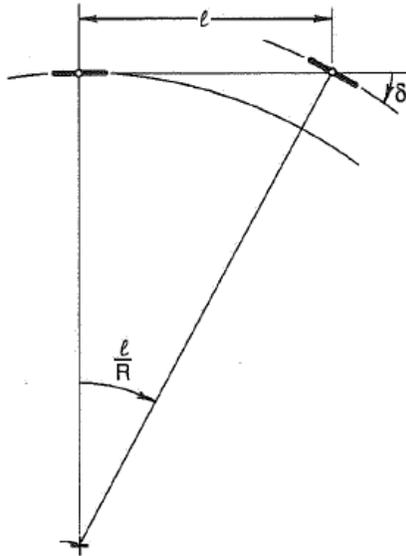


Ilustración 14– el automóvil simplificado y el ángulo de Ackerman

Lo anterior nos permite establecer una relación entre el radio de curvatura y el ángulo de dirección de la siguiente forma:

$$\delta = \tan^{-1} \left(\frac{l}{R} \right)$$

Aproximando linealmente:

$$\delta_{Ack} = \frac{l}{R}$$

Donde:

l – es la distancia entre ejes del vehículo

R – es el radio de curvatura de la vía

δ – es el ángulo de dirección

El ángulo de dirección definido de esta forma se conoce como el “ángulo de Ackermann” y representa la magnitud del ángulo con el que se debe girar la dirección para que el vehículo se desplace en una trayectoria de un radio determinado a velocidades bajas. Complementariamente, también se puede definir el “radio de Ackermann” como el radio de la trayectoria en la que el

automóvil simple se desplazará cuando la dirección esté orientada en un particular ángulo de dirección.

Este ángulo depende tanto del radio de la curva (geometría del camino) como de la distancia entre ejes del automóvil (geometría del vehículo). Cuanto más largo sea el vehículo, mayor deberá ser el ángulo de dirección para un mismo radio de giro. Esto resulta intuitivamente evidente para cualquiera que haya alguna vez maniobrado vehículos de distintos tamaños.

El ángulo de Ackermann constituye una primera aproximación educada para el diseño de un sistema de dirección que cumpla con los requerimientos específicos de un vehículo en una pista. Esta aproximación es incluso utilizada con considerable éxito para los modelos de control de vehículos eléctricos tele- o auto-dirigidos e incluso es una buena aproximación para vehículos de uso urbano. No debemos perder de vista, sin embargo, que una de las suposiciones básicas del principio de Ackermann es que los neumáticos operan con un ángulo de deslizamiento prácticamente nulo y, por lo tanto, con una fuerza lateral también prácticamente nula. Esto será imposible para un automóvil de competencia sujeto a fuertes aceleraciones laterales, por lo que el principio no será aplicable directamente, pero eso no significa que carezca de cierta validez, como se verá en secciones subsecuentes.

Automóvil neutral, sub-viraje y sobre-viraje

En el ambiente de los aficionados al automovilismo existe un gran misticismo alrededor del sub o sobre viraje de los automóviles. Con frecuencia se debate acerca de cuáles son sus características, qué comportamiento se busca para cada aplicación en particular o cuál es la sensación de manejo que ofrecen. Lo cierto es que estas cuestiones pueden ser respondidas con sencillez, pero las implicaciones de cada respuesta son sumamente interesantes e ilustrativas y están directamente relacionadas con el modelo de bicicleta.

Para empezar, definiremos las ecuaciones dinámicas de nuestro modelo. Una vez que la velocidad del vehículo es considerable, cualquier curvatura del camino requerirá que el automóvil desarrolle una aceleración lateral para poder seguir la vía. Esta es, como ya se ha dicho, la tarea de los neumáticos. Supóngase entonces un vehículo que está cursando en una curva de radio constante y a velocidad constante, de manera que las condiciones se puedan considerar invariantes con el tiempo. En esta situación el automóvil experimentará una aceleración longitudinal *nula* y una aceleración lateral *constante*. Esta situación se define como “viraje estático” (*steady cornering*) y es un supuesto importante para el análisis matemático del vehículo que a pesar de representar una abstracción considerable, pues tal situación puede ser muy breve o no existir en la realidad, permite analizar las posibles configuraciones del vehículo.

El siguiente paso en el análisis dinámico del automóvil simplificado será establecer el balance de las fuerzas y momentos que actúan en él. Tenemos entonces las siguientes ecuaciones:

$$\sum F_Y = F_m - (F_f + F_r) = 0$$

$$F_m = m \cdot a = (F_f + F_r)$$

En términos del ángulo de deslizamiento:

$$m \cdot a = C_f \cdot \alpha_f + C_r \cdot \alpha_r$$

Por otra parte, el balance de momentos alrededor del centro de masa será:

$$\sum M = (M_f + M_r) = I_Z \cdot \alpha$$

$$I_Z \cdot \alpha = (F_f \cdot a - F_r \cdot b)$$

En términos del ángulo de deslizamiento:

$$I_Z \cdot \alpha = C_f \cdot \alpha_f \cdot a - C_r \cdot \alpha_r \cdot b$$

Notamos entonces que para ambos casos existen dos contribuciones básicas de fuerza: la fuerza lateral del eje trasero y la fuerza lateral del eje delantero. En el balance de fuerzas ambos actúan en conjunto para acelerar al vehículo hacia el centro de la curva. En la suma de momentos uno actúa en contra del otro para mantener al vehículo en balance.

La magnitud de la fuerza lateral total es la que determina cuál es la máxima velocidad a la cual el vehículo podrá seguir una trayectoria curva, pero en términos del balance del vehículo, es el balance de momentos el que determina sus características de maniobrabilidad. La importancia de la maniobrabilidad se puede enunciar de forma simple: un vehículo que el piloto no puede controlar no será útil para ganar carreras, a pesar de su potencia y ligereza.

El sub o sobre viraje puede resumirse de una forma muy sencilla y que será aplicable a modelos más complejos que el modelo lineal de bicicleta: Dada una misma perturbación, si la magnitud del momento producido por el neumático trasero es mayor, el automóvil es un vehículo subvirante, si el momento producido por el neumático delantero es mayor, el automóvil es un vehículo sobrevirante. Si ambos permanecen en equilibrio a pesar de una perturbación externa el automóvil es un vehículo neutral.

Existe un gran número de enfoques para ilustrar a mayor profundidad esta relación. Cualquiera que sea la interpretación que se quiera asumir, todas son congruentes y han sido detalladas en libros especializados de dinámica automotriz¹¹. Para el presente texto se explicarán principalmente tres enfoques: enfoque en estado permanente, con aceleración lateral variable y enfoque de estabilidad. Estos tres enfoques particulares han sido elegidos pues ofrecen suficiente claridad acerca de las configuraciones para poder resaltar sus ventajas y desventajas en situaciones particulares.

¹¹ [7], [2]

Estado permanente

Anteriormente se ha definido al viraje estático como aquel en el que la aceleración lateral es constante y la aceleración longitudinal es nula. Esto corresponde a un automóvil recorriendo una curva a una velocidad constante. Supóngase ahora que el vehículo ha estado recorriendo dicha curva por suficiente tiempo, de forma que cualquier comportamiento transitorio haya desaparecido. En esta situación, la velocidad angular del vehículo también es constante, por lo que su aceleración angular es nula ($\alpha=0$). De la igualdad de momentos con respecto al centro de masa:

$$0 = (F_f \cdot a - F_r \cdot b)$$

$$F_f \cdot a = F_r \cdot b$$

En términos del ángulo de deslizamiento:

$$C_f \cdot \alpha_f \cdot a = C_r \cdot \alpha_r \cdot b$$

$$\frac{\alpha_f}{\alpha_r} = \frac{C_r \cdot b}{C_f \cdot a}$$

Esto significa que los ángulos de deslizamiento delantero y trasero estarán relacionados entre sí de forma inversamente proporcional a sus correspondientes valores de rigidez y de su separación con respecto al centro de masa.

En la práctica general del automovilismo se pueden utilizar diferentes neumáticos en la parte trasera y delantera del vehículo, haciendo que C_f y C_r sean distintos. Este es el caso, por ejemplo, en vehículos como los de la Formula 1 y otros monoplazas. Dado que estos vehículos cuentan en generalmente con tracción trasera, C_r será mayor. Por otra parte, en casos como el de los vehículos de calle, por ejemplo, se suelen utilizar los mismos neumáticos en la parte trasera y delantera, por lo que, para el vehículo simple y lineal, la rigidez del neumático es igual en ambos casos ($C_f = C_r = C$). Esta suposición es también válida en FSAE y nos permite simplificar el análisis:

$$C \cdot \alpha_f \cdot a = C \cdot \alpha_r \cdot b$$

$$\frac{\alpha_f}{\alpha_r} = \frac{b}{a}; \alpha_f = \alpha_r \frac{b}{a}$$

Esto significa que el valor que tomarán los ángulos de slip en cada rueda de nuestro automóvil/bicicleta dependerá únicamente de la distancia que haya entre el correspondiente eje y el centro de masa del vehículo.

De esta situación pueden derivar tres posibilidades:

Si $a=b$, $\alpha_f = \alpha_r$: el vehículo es neutro. Ambos neumáticos están igualmente desviados de sus correspondientes vectores de velocidad. Esto quiere decir que si se aplica el principio de Ackermann al vehículo neutro, el radio de curvatura será el mismo tomando como referencia los neumáticos y tomando como referencia los vectores de velocidad. De esto podemos concluir que

el ángulo de dirección requerido para que un vehículo neutro recorra un camino con una curvatura particular es exactamente el ángulo de Ackermann.

Si $a < b$, $\alpha_f > \alpha_r$: el vehículo es subvirante. Dado que el neumático delantero debe desviarse más que el neumático trasero del vector de velocidad del vehículo, para recorrer un radio de curvatura cualquiera, se dice que el automóvil vira menos de lo que el ángulo de dirección indicaría según Ackermann, por lo que el automóvil “sub-vira”.

Si $a > b$, $\alpha_f < \alpha_r$: el automóvil es sobrevirante. El caso opuesto al subviraje, el neumático delantero requiere un ángulo de dirección menor al esperado, pues debe desviarse menos del vector de velocidad. Por lo tanto vira más de lo esperado o “sobre-vira”.

Hay que tener siempre en mente que los términos de sobre- y subviraje se refieren al comportamiento esperado del vehículo y no al ángulo de dirección del neumático, i. e. un automóvil subvirante requiere girar más el volante para una misma curva, por lo cual “hay que sobre-virar el volante”; este razonamiento es incorrecto y puede llevar a una peligrosa confusión.

De acuerdo con las condiciones del estado permanente, podemos definir ahora la “actitud” del vehículo (β), que es la diferencia en orientación de la línea central del chasis con respecto al vector de velocidad del centro de masa del vehículo. En el más sencillo de los casos, este ángulo es idéntico al ángulo de deslizamiento del eje trasero, pues este eje está fijo en el vehículo. El hecho mismo de que el vehículo esté orientado en una dirección particular con respecto a su velocidad garantiza ya un ángulo de deslizamiento para ambos neumáticos. La diferencia entre los ángulos requerida para estabilizar al vehículo sobrevirante o subvirante provendrá también de la dirección. Esto quiere decir que el ángulo de dirección está compuesto por una parte geométrica y una parte dinámica:

$$\delta = \delta_{Ack} - (\alpha_F - \alpha_R)$$

De acuerdo con el sistema de referencia establecido por SAE, el ángulo de dirección y el ángulo de deslizamiento se miden en direcciones opuestas, lo cual explica la aparente discrepancia de los signos.

Supóngase ahora que se tiene un vehículo ingresando a una curva, por lo que el automóvil pasa de una trayectoria con radio de curvatura infinito a una con un radio acotado, pasa de una aceleración lateral nula a una con un valor diferente a cero y pasa de tener velocidad angular nula a una velocidad angular de magnitud cualquiera y constante.

Utilizando las ecuaciones [balance de masa, balance de momentos y ángulo de dirección] podemos expresar ambos ángulos de deslizamiento y, por lo tanto, al ángulo de dirección en términos de la aceleración lateral:

$$\alpha_F = \frac{W}{C} \cdot \frac{b}{L} \cdot A_Y$$

$$\alpha_R = \frac{W}{C} \cdot \frac{a}{L} \cdot A_Y$$

$$\delta = \delta_{Ack} + \frac{W}{C} \cdot \frac{(b-a)}{L} \cdot A_Y$$

Una vez más podemos ver los tres casos, para la relación de a con b:

Si $a=b$: el automóvil es neutro. Para un incremento cualquiera en la aceleración lateral, ambos ángulos de deslizamiento incrementan al mismo ritmo. Esto implica, en relación con el ángulo de dirección, algo muy importante; sólo se verá afectado por la geometría de la curva y no por la aceleración lateral. Esto, dado que $a_Y = \frac{v^2}{R}$ quiere decir que para un radio de curvatura determinado, el automóvil neutral requerirá siempre el mismo ángulo de dirección independientemente de la velocidad del vehículo.

Si $a < b$: el vehículo es subvirante. Para un mismo incremento de aceleración lateral el ángulo de deslizamiento del neumático frontal deberá incrementar más que el trasero. Esto significa que al incrementar la aceleración lateral o, para un radio determinado, la velocidad del automóvil, habrá que incrementar también el ángulo de dirección para poder seguir la curva. Este es el comportamiento de los vehículos de calle.

Si $a > b$: el automóvil es sobrevirante. Para un mismo incremento de aceleración lateral el ángulo de deslizamiento del neumático frontal deberá incrementar menos que el trasero. Esto quiere decir que entre mayor sea la aceleración lateral, más se debe disminuir el ángulo de la dirección. Una observación interesante es que esta configuración puede alcanzar una velocidad tal que el término dinámico sea idéntico al geométrico, por lo que el ángulo de dirección necesario para que el automóvil siga la trayectoria sería igual a cero. La velocidad correspondiente a esta aceleración lateral es conocida como velocidad crítica.

En este punto podemos ya establecer una relación entre la maniobrabilidad del vehículo y la velocidad con que transita por una curva. Esto impone, de hecho, un límite a las velocidades con las que el piloto puede seguir exitosamente una curva, limitando entonces sus posibilidades de disminuir los tiempos totales para una pista en particular.

Estabilidad direccional

Finalmente, se analizará al vehículo integralmente como un sistema dinámico. En la gran mayoría de los sistemas dinámicos se puede identificar al menos un punto de equilibrio, lo cual quiere decir que en ese estado el sistema no experimenta movimiento alguno y sus parámetros son constantes. Identificar los estados de equilibrio de un sistema puede ser un trabajo matemático sumamente complejo, dependiendo de la cantidad de elementos dinámicos presentes en el sistema, pero se puede comprender intuitivamente la existencia de dos tipos de equilibrio: equilibrio estable y equilibrio inestable.

Un sistema se encuentra en equilibrio estable cuando, a pesar de perturbaciones externas, el sistema tiende a regresar a ese estado de equilibrio. Pensemos, por ejemplo en un péndulo o en una pelota dentro de un tazón. Incluso, una flecha en vuelo es un sistema estable, pues las veletas

en la parte trasera la alinearán con su dirección de vuelo en caso de que llegara a virar ligeramente.

Un sistema en equilibrio inestable es, por ejemplo, un péndulo invertido: alguien tratando de equilibrar una escoba sobre la palma de su mano, una silla en equilibrio sobre su pata. Cualquier perturbación externa, por mínima que esta sea, hará que el sistema se aleje cada vez más de este estado de equilibrio hasta alcanzar otro estado de equilibrio que sea estable: la escoba o la silla caen al piso. La única forma de mantener un sistema en equilibrio inestable ante una perturbación, es aplicando al sistema acciones correctivas, es decir, control activo. Conocer la mejor forma de llevar un sistema a un estado de equilibrio es la materia de estudio del control automático.

Ahora queda simplemente la tarea de analizar si el automóvil busca, de hecho, un equilibrio estable o inestable.

Análisis completo del ángulo de deslizamiento

La contribución al ángulo de deslizamiento en la rueda puede ser dividida de acuerdo a tres fuentes diferentes: actitud del vehículo, ángulo de dirección, y velocidad lateral como consecuencia de la velocidad angular del vehículo. Anteriormente se han analizado ya las primeras dos, quedando por explicar solamente la tercera.

Considerando que el automóvil se desliza con una velocidad V sobre la pista y gira con una velocidad angular r , la velocidad lineal de cada eje es $v = a \cdot r; b \cdot r$ correspondientemente. Eso quiere decir que el ángulo de deslizamiento correspondiente es $\alpha = \sin \frac{a \cdot r}{V} = \frac{a \cdot r}{V}$; de acuerdo con la aproximación lineal. Entonces los ángulos de deslizamiento totales son:

$$\alpha_F = \beta + \frac{a \cdot r}{V} - \delta$$

$$\alpha_R = \beta - \frac{b \cdot r}{V}$$

Notación en derivadas

De igual forma se pueden entonces separar las contribuciones dinámicas de cada uno de los tres aspectos antes mencionados de acuerdo con los desarrollos siguientes.

Para el caso de las fuerzas:

$$\begin{aligned} Y &= Y_F + Y_R \\ &= C_f \cdot \alpha_f + C_r \cdot \alpha_r \\ &= C_f \cdot \left(\beta + \frac{a \cdot r}{V} - \delta \right) + C_r \cdot \left(\beta - \frac{b \cdot r}{V} \right) \\ &= (C_f + C_r) \cdot \beta + \frac{1}{V} (aC_f - bC_r) \cdot r - C_f \cdot \delta \end{aligned}$$

Lo cual se suele abreviar:

$$Y = Y_{\beta} \cdot \beta + Y_r \cdot r + Y_{\delta} \cdot \delta$$

Para los momentos:

$$\begin{aligned} N &= N_F + N_R \\ &= a \cdot C_f \cdot \alpha_f - b \cdot C_r \cdot \alpha_r \\ &= a \cdot C_f \cdot \left(\beta + \frac{a \cdot r}{V} - \delta \right) - b \cdot C_r \cdot \left(\beta - \frac{b \cdot r}{V} \right) \\ &= (aC_f - bC_r) \cdot \beta + \frac{1}{V} (a^2C_f + b^2C_r) \cdot r - aC_f \cdot \delta \end{aligned}$$

Abreviado:

$$N = N_{\beta} \cdot \beta + N_r \cdot r + N_{\delta} \cdot \delta$$

Los términos Y_x y N_x son conocidos como derivadas puesto que corresponden a las derivadas parciales $Y_x = \frac{\partial Y}{\partial x}$ y $N_x = \frac{\partial N}{\partial x}$. La N y Y sin subíndice en la parte izquierda de la ecuación corresponden a los términos inerciales.

Observamos ahora las derivadas asociadas a cada uno de las contribuciones al ángulo de deslizamiento:

Por ángulo de dirección (δ): Su interpretación es bastante directa. Es la influencia que tiene en la fuerza lateral y en la orientación del vehículo el cambiar el ángulo de dirección.

Por velocidad angular (r): en realidad la velocidad angular siempre va acompañada aquí de la velocidad lineal, por lo que las derivadas relacionadas a la velocidad angular en realidad dependen de la relación entre velocidad angular y lineal $\frac{r}{V}$. Cuanto más rápido se desplace el vehículo en la curva, menor será el valor de estas derivadas.

Por actitud del vehículo (β) = La orientación del vehículo con respecto a la velocidad con la que se desplaza tiene un impacto en la fuerza que pueden ofrecer ambos neumáticos.

Para analizar las tres configuraciones del automóvil, consideraremos una vez más que la rigidez de los neumáticos en ambos ejes es la misma. Esto simplifica las derivadas:

$$Y = Y_{\beta} \cdot \beta + Y_r \cdot r + Y_{\delta} \cdot \delta = 2C \cdot \beta + \frac{1}{V} (a - b)C \cdot r - C \cdot \delta$$

$$N = N_{\beta} \cdot \beta + N_r \cdot r + N_{\delta} \cdot \delta = (a - b)C \cdot \beta + \frac{1}{V} (a^2 + b^2)C \cdot r - aC \cdot \delta$$

La derivada Y_{β} depende únicamente de la rigidez de ambos neumáticos y no de la geometría. Esto significa, como ya se veía desde un principio, que la mayor parte de la fuerza lateral no depende de la geometría del neumático. De igual manera, la contribución de la dirección a la fuerza lateral es únicamente dependiente del neumático. El término Y_r , por otra parte, incluye parámetros

geométricos del automóvil y es similar a N_{β} . Analicemos ahora las tres configuraciones automotrices de acuerdo con sus derivadas:

Automóvil neutral: Y_r ha sido ya mencionado como similar a N_{β} . Estas derivadas son las derivadas de acoplamiento, pues representan la relación entre la fuerza lateral y el movimiento angular. En el automóvil neutral $a=b$ por lo que ambas derivadas son nulas. Esto quiere decir que, en particular, en el automóvil neutral el movimiento angular está desacoplado de las fuerzas y por lo tanto aceleraciones laterales. Esto ya había sido ilustrado de otra forma al decir que el automóvil requiere el mismo ángulo de dirección para una curva, independientemente de la velocidad a la que se desplace. En lo que a N_r corresponde, para una determinada velocidad y una distancia entre ejes preestablecida, su valor es mínimo¹² cuando $a=b$. Esta derivada es siempre positiva y en sentido opuesto a la aceleración angular del vehículo. Es efectivamente un amortiguador del movimiento, disminuyendo la velocidad del mismo hasta estabilizar al vehículo. En un automóvil neutral el amortiguador es mínimo, lo cual significa que el tiempo de respuesta de un automóvil neutral es también el mínimo posible.

Automóvil subvirante: N_{β} es negativo, por lo que se opone a la influencia de la dirección y busca reducir la alteración de su orientación, regresando al automóvil a su posición anterior de equilibrio.

Automóvil sobrevirante: N_{β} es negativo, por lo que se suma a la influencia de la dirección, desestabilizando al vehículo cada vez más hasta perder el control.

En resumen

Automóvil neutral: El automóvil neutral requiere siempre el mismo ángulo de dirección para recorrer el mismo radio de curvatura. Esto significa que el movimiento lateral está desacoplado del angular. Un automóvil neutral conserva su actitud una vez virado, a menos que de nuevo se altere la dirección

Automóvil subvirante: El automóvil subvirante es un sistema inherentemente estable con respecto a su vector de velocidad. Esto quiere decir que ante una perturbación el automóvil adoptará una nueva actitud, pero al retirar esta acción externa, volverá a alinearse con su vector de velocidad. Por esta razón, el automóvil subvirante es más predecible para el conductor y por lo tanto más fácil de controlar.

Automóvil sobrevirante: El automóvil sobrevirante es un sistema inestable. Esto quiere decir que cualquier perturbación en su orientación será amplificada por el automóvil mismo, aumentando su

¹² $a^2 + b^2 = C$ y $a + b = l$

Minimizando C

$da + db = 0$

$\frac{da}{db} = -1$

$2a \frac{da}{db} + 2b = -2a + 2b = 0$

$a = b$

valor hasta que el automóvil pueda alcanzar un equilibrio estable (generalmente manejo en reversa o alto total). Esta tendencia hace del automóvil sobrevirante un sistema más difícil de controlar, pues requiere de control activo para mantenerse en curso, lo que significa que el conductor debe estar modificando constantemente el ángulo del volante.

Comportamiento al límite

Finalmente, el comportamiento del vehículo tal y como se ha descrito anteriormente asume que los neumáticos se encuentran rodando sobre la superficie y no, por el contrario, deslizando sobre ella y como ya sabemos, el neumático que desliza sobre la superficie ejerce una fuerza de tracción mucho menor que el neumático que gira.

Se denomina comportamiento al límite a la forma en que un vehículo se comportará cuando uno de sus ejes pierda tracción y por lo tanto deslice. De acuerdo con todo lo anterior, queda claro que:

Si el extremo delantero del vehículo pierde la tracción, el automóvil se volverá subvirante.

Si el extremo trasero pierde la tracción, el vehículo se vuelve sobrevirante.

Este comportamiento es independiente de cuál sea el comportamiento habitual del vehículo. Es decir, por ejemplo, que un automóvil claramente subvirante en su desempeño habitual se volverá sobrevirante si alguna condición particular hace que su eje trasero llegue al límite y deslice. Es por esto que un automóvil de calle, claramente subvirante, puede también volverse direccionalmente inestable en situaciones críticas, causando así accidentes viales.

Otros modelos

El modelo lineal de bicicleta nos permite entender la maniobrabilidad de un vehículo según las condiciones de manejo, así como la contribución de los ángulos de deslizamiento y la distribución de masa del vehículo a esta maniobrabilidad. El modelo sufre, sin embargo, de inexactitud al no considerar efectos como la transferencia de peso entre neumáticos de un mismo o de diferentes ejes, o la no linealidad en el comportamiento de los componentes del vehículo, principalmente el neumático. Existen otras aproximaciones al modelado del vehículo que complementan los conceptos utilizados en este modelo, añadiendo poco a poco algunas de las complejidades y acercando el modelo algunos peldaños más hacia la realidad. Algunos de los modelos más populares se explican brevemente a continuación.

Modelo de bicicleta no lineal

El modelo no lineal de bicicleta es idéntico en su disposición física al modelo lineal, pero considera un modelo más realista del comportamiento del neumático. Las aproximaciones se han discutido brevemente en la sección correspondiente del neumático y pueden estar basadas en modelos continuos o por secciones. Algunos modelos consideran, además, los efectos de la transferencia lateral de peso, a pesar de ser un modelo de un solo neumático por eje, pues conociendo la geometría del automóvil, se pueden expresar los fenómenos de transferencia de peso en función únicamente de la aceleración lateral, constituyendo una aproximación muy satisfactoria.

Esta opción de modelado es más compleja, pues su resolución requiere de aproximaciones numéricas y no se pueden aplicar los principios del álgebra lineal para la superposición de los efectos de las llantas. Sus ventajas son apreciables cuando se quiere modelar al automóvil en una situación al límite de la adhesión, en la que el automóvil suele cambiar sus características de maniobrabilidad. Este análisis es el que se utiliza para la programación de muchos simuladores de manejo.

Modelo completo simplificado

El modelo completo simplificado considera un automóvil en dos líneas, o dicho de otra forma, un automóvil de cuatro ruedas con transferencia lateral y longitudinal de peso. El modelado se puede realizar con modelos simplificados de llantas que dependen no sólo del ángulo de slip, sino de la carga vertical en el neumático. Se consideran rígidos todos los cuerpos involucrados y no se consideran los efectos de la suspensión.

Modelo total *multibody*

Este modelo es el más complejo de todos lo cual, como ya se ha comentado, proporciona también los resultados más cercanos a la realidad a costa de mayor tiempo y recursos de procesamiento. El enfoque multi-cuerpos en el modelado consiste en definir las características de todos los componentes de un sistema y sus interacciones a través de fuerzas para entonces resolver el comportamiento de los componentes de manera individual y para cada instante de la simulación, repercutiendo cada momento de simulación en los resultados de la siguiente.

4. TRANSFERENCIA DE PESO

En cualquier situación en la que el automóvil se encuentre sometido a una fuerza externa, tal como puede ser el caso de una curva en el camino, al aplicar los frenos o pisar el acelerador, ante un peralte en la vía, una ráfaga de viento o cualquier combinación de estos y otros factores, el automóvil percibirá una aceleración lateral o longitudinal. En el plano horizontal estas fuerzas interactúan para producir efectos de viraje e influyen en la maniobrabilidad del automóvil, pero aun cuando las fuerzas externas existan principalmente en direcciones horizontales, tienen también un efecto en el balance vertical de fuerzas del vehículo. Esto es porque el vehículo es una entidad espacial y no plana, y por más que nuestros análisis busquen separar planos ortogonales en el espacio, estos están acoplados en el mundo real.

En una situación como las antes descritas, las fuerzas aplicadas en distintos puntos del automóvil generan un conjunto de pares o momentos en el vehículo y como reacción a estos pares dinámicos, se observará un cambio en las fuerzas existentes en las superficies de contacto del vehículo con el entorno, para balancear la tendencia del vehículo a girar en cualquiera de las tres direcciones (*pitch*, *roll*, *yaw*).

Ya hemos estudiado el comportamiento de las fuerzas de fricción en el plano horizontal y su impacto en el viraje del vehículo (*yaw*). Ahora nos enfocaremos al estudio de las correspondientes fuerzas verticales en las superficies de contacto de los neumáticos. Estas están relacionadas con la descripción del vehículo en los planos XZ y YZ, así como los movimientos de *pitch* y *roll*, correspondientemente.

Una vez que producido un par que altere el balance del automóvil en una dirección particular, las fuerzas verticales aumentan en un extremo del vehículo y disminuyen en el otro, de manera que se conserve el balance vertical original y se alcance un nuevo balance de momentos.

Este fenómeno se conoce como “transferencia de peso” (*weight transfer*) aunque el término puede resultar engañoso, pues no hay ninguna transferencia de masa y por lo tanto peso, sino un ajuste en el balance de momentos; un término más adecuado podría ser el de “transferencia de carga” (*load transfer*), pero también resulta desafortunadamente ambiguo en español por ser homónimo a un concepto eléctrico (*charge*). Ambos términos se utilizarán intercambiabilmente en este texto.

Para analizar de forma simplificada la transferencia de peso del vehículo, se separa el análisis para cada uno de los planos involucrados y se clasifica la transferencia de peso en dos tipos:

Transferencia longitudinal de peso: Analizada en el plano lateral (XZ) y producida por aceleración, frenado, inclinación longitudinal del camino (*road pitch*) y efectos aerodinámicos.

Transferencia lateral de peso: Analizada en el plano frontal (YZ) y producida por aceleración lateral en curvas, inclinación lateral del camino (*banking*) y efectos aerodinámicos cruzados.

La descripción matemática en ambos casos es prácticamente idéntica y depende una vez más de la posición del centro de masa con respecto a las ruedas. Veamos entonces los casos correspondientes.

Transferencia longitudinal de peso

Siempre que se analiza la transferencia de peso se observa cómo se transfiere carga dinámica de un extremo a otro del vehículo. ¿Cuáles son esos extremos? Para definirlos hay que saber qué clase de transferencia de peso se analiza. Empezamos por el caso de la carga longitudinal y observamos al vehículo desde una perspectiva lateral.

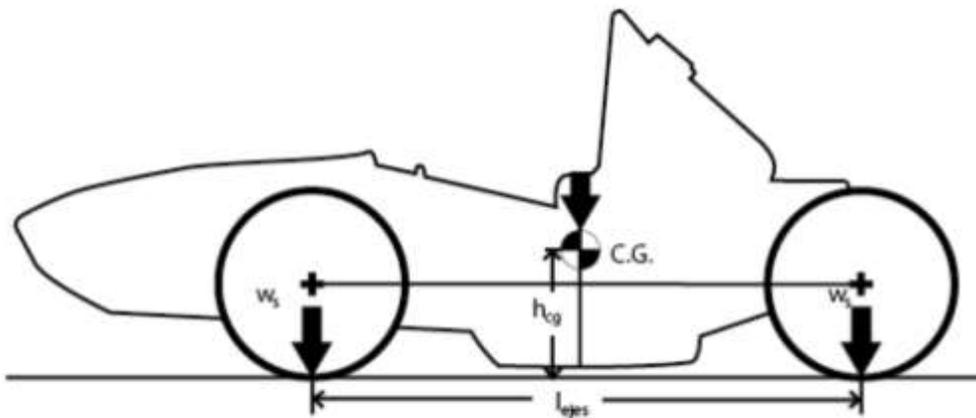


Ilustración 15– vista lateral del vehículo y parámetros relevantes para la transferencia de peso

En esta vista lateral el vehículo bien puede ser la ya conocida “bicicleta” y para el propósito, esto funciona muy bien. En la transferencia longitudinal de peso se considera la carga dinámica transferida de un eje a otro eje. Si decidiéramos abandonar, por fin, la simplificación y considerar dos ruedas por eje, la distribución de ese peso transferido para cada una de las ruedas dependería de otros parámetros geométricos; tema que se detalla más adelante.

Ignorando la naturaleza de las fuerzas originales y resumiéndolas en la respuesta inercial longitudinal ($\sum F_x = m \cdot a_x$) que se produce en el auto, podemos hacer un balance dinámico, en este caso para una situación donde el automóvil decelera y la reacción inercial lo lleva hacia adelante. De acuerdo con el balance de fuerzas verticales:

$$N_F + N_R = W$$

Donde:

$N_{F/R}$ – son las reacciones normales en las superficies de contacto de las ruedas delantera (F) y trasera (R).

W – es el peso del vehículo.

De acuerdo con el balance de momentos alrededor de un punto O justo por debajo del centro de masa y al nivel del piso:

$$m \cdot a_x \cdot h = N_F \cdot a - N_R \cdot b$$

Donde:

a_x - es la magnitud de la aceleración longitudinal de la masa

h – es la altura del centro de masa con respecto al piso

De estas ecuaciones concluimos que la carga en cada neumático está dada por:

$$N_F = W \cdot \left(\frac{b}{a+b} \right) + F_{mX} \cdot \left(\frac{h}{a+b} \right)$$

$$N_R = W \cdot \left(\frac{a}{a+b} \right) - F_{mX} \cdot \left(\frac{h}{a+b} \right)$$

El primer término en el lado derecho de cada ecuación es la carga estática de eje. Esta es la carga vertical que existe en los neumáticos de un extremo del automóvil en ausencia de perturbaciones externas, por ejemplo, cuando el vehículo está en reposo o cuando el vehículo se desplaza a velocidad constante y relativamente baja en un camino llano. La distribución de la carga estática depende de factores geométricos, en este caso la distancia de cada eje al centro de masa.

La segunda parte corresponde a la carga dinámica, la cual es el “peso” transferido de un eje a otro. Se observa que en ambos ejes tiene la misma magnitud, pero en un caso se resta y en otro se suma a la carga estática. La suma y resta dependen de la dirección de la fuerza resultante sobre el vehículo. Con frecuencia se expresa en términos del peso del vehículo y la aceleración que esta provoca, expresada en g's.¹³

$$\Delta N = F_{mX} \frac{h}{L} = m \cdot a_x \frac{h}{L} = W \cdot A_x \frac{h_{CG}}{L}$$

En este caso se ha partido del sistema de referencia SAE, pero se puede elegir cualquier sistema de referencia siempre y cuando sea consistente con la realidad. En términos del mundo real, si un vehículo percibe una aceleración orientada hacia la parte trasera del vehículo, la inercia del mismo provoca un aumento en la carga vertical sobre el eje delantero y una disminución en el eje trasero. Este es el caso, por ejemplo, cuando el vehículo frena. En un caso de aceleración, el eje trasero recibe la carga dinámica y el delantero la pierde.

¹³ $1g = 9.81m/s^2$

Transferencia lateral de peso

Ahora, el análisis de la aceleración lateral puede seguir el mismo camino que el de la aceleración longitudinal.

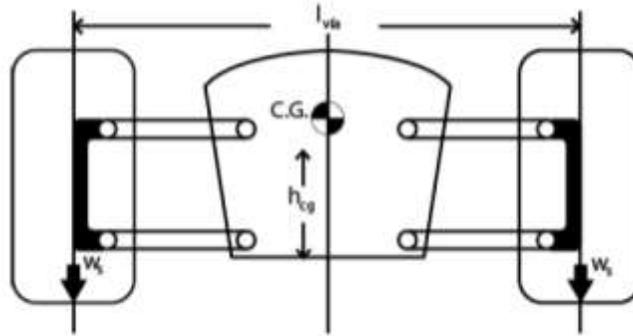


Ilustración 16– vista frontal del vehículo y parámetros relevantes para la transferencia de peso

En este caso se asumirá que el vehículo está perfectamente balanceado en términos laterales y que, por lo tanto, la distancia de ambos extremos al centro de masa es igual y la distribución estática de peso es 50%/50% es decir, la mitad del peso en cada rueda.

$$N_l = \frac{W}{2} + F_Y \cdot \left(\frac{h}{t}\right)$$

$$N_r = \frac{W}{2} - F_Y \cdot \left(\frac{h}{t}\right)$$

Donde:

T – es el ancho de vía del eje que se esté analizando

Tanto en el caso sin perturbaciones como en el caso con perturbaciones laterales la suma vertical de las fuerzas normales a la superficie de contacto es la misma y corresponde a la fracción del peso total que el eje soporta. Al aumentar la carga en un extremo del eje, la misma cantidad de carga se ve disminuida en el otro extremo.

Podemos notar que, dada una aceleración o fuerza externa suficientemente grandes, la pérdida de carga dinámica en uno de los extremos del eje puede ser tan grande como la carga estática original, haciendo que ese extremo pierda la totalidad de su carga, transferida esta al otro extremo que ahora soporta la totalidad del peso del eje. Además de representar una situación de mínima tracción total en el eje, en este momento particular el vehículo se encuentra en un punto crítico y un incremento en la aceleración lateral no alterará más la carga total en el neumático, sino que provocará que el automóvil comience a volcar sobre su costado.

Esta condición se da cuando:

$$N_t = \frac{W}{2} - W \cdot A_Y \cdot \left(\frac{h}{t}\right) = 0$$

$$\frac{W}{2} = W \cdot A_Y \cdot \left(\frac{h}{t}\right)$$

$$A_Y = \frac{t}{2h}$$

Con frecuencia también se estudia la transferencia lateral de peso como porcentaje del peso total del eje (*fraction of load transfered*):

$$FLT = \frac{\Delta N}{W} = A_Y \cdot \left(\frac{h}{t}\right)$$

En estos términos, y considerando que la fracción original de peso en cada extremo del eje es de 0.5, el punto de volcadura se alcanza para una transferencia *FLT* también de 0.5.

5. SUSPENSIÓN

A damper makes a driver

Ya explicada de forma elemental la interacción del automóvil con su entorno a través de los neumáticos y los requerimientos de maniobrabilidad del vehículo, podemos explicar las bases técnicas de la suspensión de un vehículo de competencia.

La tarea primordial de la suspensión es permitir al automóvil tener un contacto óptimo con la vía sobre la que se desplaza. Este contacto óptimo es logrado al permitir un cierto nivel de independencia entre los cuatro neumáticos, los cuales seguirán conectados a través del chasis del automóvil, pero podrán responder a diferentes perturbaciones sin transmitir las al resto del vehículo. Es entonces que resulta preciso dividir al automóvil en dos conjuntos de elementos: la masa suspendida y la masa no suspendida.

Se entiende como masa no suspendida (*unsprung mass*) a todo aquel cuerpo que se encuentre expuesto a las mismas perturbaciones que la rueda, por estar en contacto directo con ella. Particularmente se habla en este caso del neumático mismo, el rin, las flechas y el sistema de frenado.

Como masa suspendida (*sprung mass*) se entiende entonces a todo aquel cuerpo que esté “después” de la suspensión, es decir, que se encuentre conectado a la masa no suspendida a través del sistema de suspensión y por lo tanto soportado por este último. En este apartado se incluyen entonces el chasis, el trabajo de carrocería y todo lo que en ellos esté contenido, desde el piloto y el motor, hasta la instrumentación y los paquetes aerodinámicos.

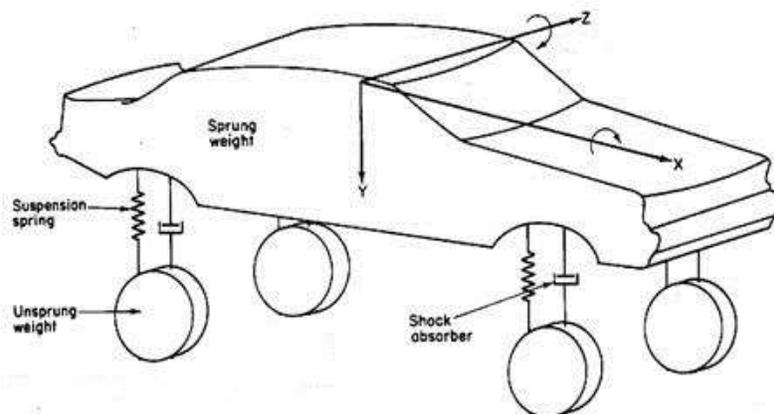


Ilustración 17 - Automóvil típico con masa suspendida (*sprung*), elementos de suspensión y masa no suspendida (*unsprung*)

Desde el comienzo de la implementación de sistemas de suspensión automotrices hasta nuestros días, se han desarrollado muy diversas formas de conectar los diversos elementos de la masa suspendida y no suspendida a través de los elementos de la suspensión. Las variaciones van desde la forma de conectar la rueda con el chasis, hasta la forma de comprimir el resorte y amortiguador en respuesta al movimiento de la rueda. Algo interesante a comentar al respecto es, que como en muchos casos de diseño, no existe una única mejor suspensión para todos los casos y es por ello que muchas configuraciones perduran hasta nuestros días. Para elegir la mejor configuración para un auto deportivo se debe tener en consideración muchos factores: la altura del vehículo, el control que se necesita de la posición de la rueda respecto al chasis, la necesidad de que las perturbaciones induzcan la menor inestabilidad en el vehículo. Dentro de las configuraciones disponibles, la que mejor responde a las necesidades antes mencionadas es la conocida como suspensión en doble brazo A (*double wishbone*), en la mayoría de los casos, de tipo asimétrico.

Se favorece a la suspensión en doble brazo A por los motivos ya sugeridos: en esta arquitectura las ruedas están básicamente al mismo nivel que el chasis y no por debajo de él, por lo que permite a la masa suspendida del automóvil ubicarse lo más cercana al piso posible, produciendo a su vez una amplia distancia entre ruedas (*track*) en un chasis angosto y uniendo masa suspendida y no suspendida a través de componentes muy ligeros, todo esto favorable para la dinámica automotriz. Además, permite un control independiente del desplazamiento de cada neumático. Su única desventaja es la de ocupar mucho espacio difícil de aprovechar entre el chasis y la rueda, lo cual representa un inconveniente en los autos de pasajeros, pero no en un automóvil tipo fórmula.



Ilustración 18 – elementos de una suspensión asimétrica de doble brazo A. Diseño pull-rod para el modelo 2011 de UNAM Motorsports (UM-362)

El término “asimétrico” no se refiere a que el mecanismo de suspensión sea diferente en el lado izquierdo de su contraparte derecha, sino a que los brazos superior e inferior no tienen las mismas dimensiones físicas. Un nombre más acertado podría ser “suspensión de brazos desiguales”, pero

no se encuentra semejante término en la literatura. De hecho, salvo por algunas circunstancias particulares, los diseños de suspensión tienen simetría con respecto al plano XZ del vehículo.

Masa no suspendida y parámetros de rueda

La suspensión se encarga, de controlar los movimientos del automóvil, a fin de optimizar la fuerza de tracción disponible para el manejo. Mucho de este control es sobre la posición que tiene la rueda con respecto al chasis para distintas condiciones de manejo. Asumiendo que se puede saber la posición del chasis mismo con respecto al piso, el conocer la posición del neumático con respecto al chasis permite también conocer su posición con respecto al camino.

Al diseño del sistema de suspensión competen entonces todos los parámetros que puedan afectar la forma en que los desplazamientos del automóvil influyen al neumático y viceversa. Estos parámetros pueden deberse a cosas tan simples como la forma en que están ensamblados los componentes o tan complejas como la trayectoria y velocidad instantánea de desplazamiento relativo entre la masa suspendida y no suspendida. Los primeros parámetros que se deben atender son los llamados parámetros estáticos y cinemáticos.

Se les dice parámetros estáticos a todos aquellos cuyo valor no cambia en ningún momento durante el uso del vehículo. Esto no significa que no puedan ser variados, pero el hacerlo forma parte del proceso inicial de alineación del vehículo y el piloto no tiene influencia sobre ellos.

Los parámetros estáticos son:

Kingpin (SAI) – Es el ángulo entre el eje de dirección y una línea vertical que pasa por el centro del neumático en la vista frontal del automóvil. Su existencia permite una fuerza de auto retorno de la dirección, pero en grandes cantidades hará difícil el manejo.

Caster – Es el ángulo entre el eje de dirección y una línea vertical que pasa por el centro de la rueda en la vista lateral del automóvil. También proporciona un efecto de auto retorno en la dirección.

Caster Trail – Es la distancia a nivel del piso entre el cruce imaginario del eje de dirección y el punto de contacto del neumático. Cuanto más grande sea, mayor es la perturbación que las irregularidades del camino pueden provocar en la dirección.

Caster offset – Es la distancia entre el la línea del eje de dirección y el centro de la rueda en una vista lateral. La incorporación de este parámetro permite reducir el *caster trail* sin tener que reducir el ángulo *caster*, conservando el efecto de auto retorno de la dirección pero reduciendo la sensibilidad de la misma.

Toe – Es el ángulo del eje longitudinal (X) del neumático con respecto al eje longitudinal (también X) del vehículo, medido en el caso de los neumáticos delanteros cuando la dirección está en posición neutral.

Los parámetros cinemáticos son aquellos que dependen de la configuración particular del mecanismo de suspensión pero que sí cambiarán con el movimiento del mecanismo.

Los parámetros cinemáticos son:

Camber - El ángulo entre la cara de la llanta (paralela al plano XZ de su sistema local de referencia) y el plano vertical del vehículo (plano XZ). La magnitud de este parámetro varía como función del movimiento vertical de la suspensión, a menos que se diseñe explícitamente para evitarlo. El *camber* es, como ya se vio, una variable que influye en el comportamiento tanto de fuerzas laterales como longitudinales de la rueda, por lo que sus valores deben ser escogidos con cuidado. En general, un *camber* negativo del orden de un par de grados en posición estática es ideal para las ruedas delanteras pues estas no generan tracción. Para las ruedas traseras, por su parte, se elige un valor cercano al cero en posición estática.

Instant center – un centro instantáneo de rotación es el punto geométrico alrededor del cual, para un instante determinado de tiempo, todos los componentes de un mecanismo, en este caso de suspensión, giran.

Camber gain – la ganancia de *camber* el valor instantáneo de la pendiente de una gráfica de desplazamiento vertical de la rueda con respecto al *camber*. En otras palabras es la medida de cuánto varía el ángulo de la rueda para una variación unitaria de elevación de la misma. Esta ganancia es constante en algunas configuraciones de suspensión, pero en una suspensión en doble brazo A el valor cambiará para cada posición de la suspensión, pues esta es un mecanismo de 4 barras.

Roll axis – el “eje de alabeo” es la línea geométrica alrededor de la cual gira la masa suspendida del vehículo. Está determinada por dos puntos llamados *roll center* o centros de alabeo.

Roll center – en cada extremo del vehículo se puede determinar de acuerdo con la posición de los centros instantáneos de rotación y el punto de contacto de la rueda. Se determina proyectando una línea imaginaria del centro instantáneo de rotación de cada mecanismo al parche de contacto de la rueda correspondiente. En una suspensión con simetría longitudinal (plano XZ) el *roll center* se encuentra justo al centro del vehículo, sobre este plano de simetría, si el vehículo está en posición estática.

Sistema de manejo de energía

La elección del sistema a través del cual se conectará la rueda al chasis no es la única dentro del proceso de diseño de la suspensión. Tanto automóviles deportivos de altas prestaciones con trabajo de carrocería completo, como vehículos de rueda expuesta utilizan suspensión en doble brazo A, mas no todos tienen la misma distribución de componentes en lo que al resortes, amortiguadores y barras estabilizadoras se refiere. Al conjunto de estos elementos se le conoce como “sistema de manejo de energía” y la forma de conectarlos al automóvil requiere de considerable atención por parte del diseñador.

El que las ruedas de un automóvil se encuentren expuestas significa que la resistencia aerodinámica a la que se enfrentará el vehículo estará determinada en parte por los componentes de la rueda que se encuentren expuestos al flujo de aire, a diferencia del caso de automóviles de competencia con *bodywork* o carrocería, como lo son por ejemplo *Le Mans* y NASCAR, en los

cuales el flujo de aire alrededor del vehículo está determinado por las superficies de dicha carrocería. En un vehículo de rueda expuesta, la cantidad de elementos que estén a la vista aumenta la resistencia aerodinámica del vehículo. Además, las posibilidades geométricas resultantes de colocar un sistema de manejo de energía externo son sumamente reducidas. Esto generó que con el paso del tiempo, en el segmento de los autos de competencia de rueda expuesta, se desarrollara el sistema activado por una barra y una palanca o *bellcrank*. La configuración específica de este sistema se distingue en dos tipos: *push-rod* y *pull-rod*, dependiendo de si la barra trabaja a compresión o a tensión.



Ilustración 19– Suspensión doble brazo A actuada con *push-rod*

El sistema *push/pull-rod* permite colocar los resortes y amortiguadores dentro del reducido *bodywork* del vehículo y tener un mejor control en la progresión de la compresión de estos. El diseño fino de este comportamiento se da a través de la modificación de los puntos de apoyo de sus componentes y de las características del *bellcrank*.

¿Suspensión completamente independiente?

Si bien los desarrollos comentados anteriormente fueron orientados al desarrollo de un sistema en el cual cada rueda tuviera un movimiento independiente y su acotado por el diseñador, es cierto también que el sistema puede llevar a la masa suspendida del vehículo a presentar movimientos que pueden ser perjudiciales para la aerodinámica y el confort. Estas perturbaciones están relacionadas con el *roll* del automóvil.

Debido a lo anterior, se ha optado en el diseño de suspensiones por dotar al automóvil de un elemento que interconecte el lado izquierdo y derecho de la suspensión frontal y trasera, conocido comúnmente como barra estabilizadora. Esto puede parecer un retroceso en términos de la independencia de la suspensión, razón por la que la topología en doble brazo A fue diseñada originalmente. El diseñador se encuentra de nuevo ante un conflicto de diseño en el cual se debe llegar a un compromiso entre la eliminación del *roll* y la independencia de las ruedas. Este compromiso se logra dando a la barra estabilizadora una rigidez tal que permita un movimiento diferente de cada extremo de la suspensión, sin permitir a la diferencia ser suficientemente grande para que la masa suspendida desarrolle un *roll* de magnitud perjudicial.

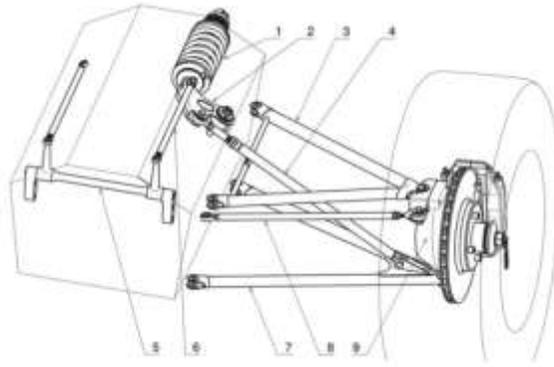


Ilustración 20 - Suspensión doble brazo A con barra estabilizadora (5)

La barra estabilizadora representa una solución sencilla y por lo tanto económica para el problema del control del *roll*, mas no es una solución ideal. Soluciones de mayor sofisticación y eficacia se han encontrado en los sistemas de suspensión activa, presentes en la temporada '92 de la Formula 1 y mismos que fueron prohibidos en la temporada subsecuente por ofrecer ventajas excesivas al piloto. El uso de estos sistemas continúa, sin embargo, en algunos automóviles de altas prestaciones hoy en día.

Acerca de la suspensión como un sistema dinámico

Se ha establecido la noción de que la suspensión es el sistema que maneja las interacciones entre el vehículo y el camino, de forma que estas sean óptimas. Dentro de todo sistema, de una u otra forma, la cantidad de energía y cómo ésta es transferida de un lado a otro es aquello que regirá el comportamiento de sus elementos. Un sistema de suspensión automotriz suele contar de forma básica con tres tipos de componentes: resortes, amortiguadores y la masa de los elementos que a la suspensión se encuentran sujetos. Los primeros dos componentes y su unión en el contexto de la suspensión, y particularmente de sistema de manejo de energía, se conocen como *shock absorber*.

El resorte es un elemento elástico diseñado para tener una relación lineal y de magnitud definida entre su deformación lineal y la fuerza aplicada. Está representado por la ecuación:

$$F_K = K \cdot x$$

El amortiguador es un elemento cuyo funcionamiento está basado en la fricción viscosa que presenta un fluido, impulsado por el movimiento relativo de un cilindro y un émbolo, al atravesar una válvula. Está diseñado para tener una relación lineal entre la fuerza con la que se opone al movimiento y la velocidad relativa entre sus partes. Esto de acuerdo con la ecuación:

$$F_B = B \cdot \dot{x}$$

Si se busca hacer un análisis adecuado del comportamiento transitorio o en estado permanente del sistema de suspensión, ha de realizarse un modelo matemático que incluya los parámetros de

los cuales disponemos. El modelo en cuestión puede ser tan complejo o simple como la situación lo requiera, con las consecuentes ventajas y desventajas en cada caso. Un modelo completo estará plagado de no linealidades y puede resultar en un modelo en ecuaciones diferenciales de orden muy alto. Basta tomar el ejemplo del neumático mismo, cuyo comportamiento es no lineal al hablar de las fuerzas de tracción que ejerce, además de comportarse como un resorte y amortiguador en el movimiento vertical, cuyas constantes responden a la presión de inflado y la temperatura ambiente. Soluciones de alta complejidad resultan entonces imprácticas, pero se pueden obtener resultados satisfactorios considerando, como punto de partida al menos, un sistema masa-resorte-amortiguador (MSD, *mass-spring-damper*) de segundo orden.

Con esto se resumen los aspectos generales de la suspensión y sus parámetros: estáticos, cinemáticos y dinámicos. Un mayor detalle en el análisis del sistema se da en la segunda sección, en la que se considera en conjunto con los conceptos de los anteriores capítulos de esta primera sección.

Sección 2

EL PROCESO DE DISEÑO, CONSTRUCCIÓN Y ANÁLISIS

Un enfoque de diseño integral aplicado a un prototipo de carreras

En esta sección se hablará del diseño con un enfoque filosófico, para llegar a principios aplicables al desarrollo, construcción y análisis de elementos para un prototipo para la categoría FSAE.

CARACTERÍSTICAS DESEADAS PARA EL DISEÑO

“My favourite saying is ‘The trick is...there is no trick’, and that applies especially to FSAE. The laws of physics are immutable, and if something seems to be reacting in a different way to what you expect... you need to better understand the question before trying to answer it”

Pat Clarke

A lo largo de la sección anterior se explicaron diferentes aspectos de gran importancia para el diseño integral de la suspensión, y en general de la dinámica del vehículo de competencia. Recordemos una vez más que desde las dimensiones generales del vehículo hasta los parámetros dinámicos de la suspensión, se busca siempre maximizar la fuerza disponible por parte de las ruedas en toda dirección y minimizar la masa de los componentes, a fin de obtener la máxima aceleración. Finalmente, se tiene también el objetivo de hacer del vehículo lo más maniobrable, predecible y por lo tanto confiable, con la finalidad de que el piloto pueda explotar al máximo su potencial.

Evaluar la dinámica de un automóvil implica determinar y medir una amplia cantidad de parámetros, muchos de ellos estrechamente relacionados y cuya relevancia es difícil de jerarquizar, ya que depende de la situación específica en que se encuentre el automóvil, por lo que no pueden ser optimizados todos a la vez. Este es el caso general en los diseños de ingeniería y engloba el conocido “dilema del diseñador”, pues él debe de encontrar un compromiso adecuado entre parámetros.

En lo concerniente en particular a la suspensión, los valores que pueden modificarse se encuentran distribuidos en dos áreas: parámetros geométricos del mecanismo mismo de suspensión y el mecanismo del sistema de manejo de energía, así como los parámetros de rueda; por otro lado, están los parámetros dinámicos, que refieren al comportamiento de la fuerza respecto a desplazamiento y velocidad angulares y lineales de los resortes y amortiguadores existentes.

De nuevo, en el área de los compromisos de diseño, el hacer que un vehículo sea fácil de controlar muchas veces implica no alcanzar su máximo potencial en alguno o varios aspectos, pero se apuesta de acuerdo a la filosofía del automovilismo a que las carencias del vehículo sean entonces compensadas a través del desempeño del piloto y que la suma de las carencias y aciertos a lo largo de la pista se refleje en una disminución de tiempo total de recorrido.

Los componentes diseñados y adquiridos para el vehículo deben ser coherentes con las metas de diseño planteadas para el vehículo y la suspensión. Se les debe diseñar o adquirir teniendo en mente que sean ajustables, ligeros, que cubran el rango de opciones de un vehículo FSAE en

particular, que aporten una retroalimentación confiable al piloto y que resistan la duración completa de la competencia.

Determinar los lineamientos generales a seguir para el diseño de un vehículo no es una tarea trivial, pero partiendo la teoría con la que ya contamos se pueden hacer consideraciones suficientes para el diseño y análisis de un sistema de suspensión adecuado para UNAM Motorsports que pueda además garantizar un aumento de puntos para el equipo. Y este es un buen momento para hacer explícita una afirmación: el diseño de la suspensión, tal como el de cualquier sistema del vehículo debe estar enfocado a optimizar el manejo de vehículo en su totalidad. No basta con que el sistema funcione bien de manera aislada, incluso si es un gran avance en comparación con otros diseños de la misma área. Si el componente no está diseñado desde un principio con una visión integral del vehículo se corre el riesgo de desperdiciar horas de esfuerzo en mejoras cuyo impacto en la totalidad del vehículo es imperceptible.

La puntuación en Formula SAE

Como en todo texto referente al desarrollo de prototipos para Formula SAE, es necesario proveer de referencia para al menos algunos aspectos de la evaluación de la competencia.

Lo importante es entender que hay dos formas de ganar puntos: manejando el automóvil y sin manejarlo. La segunda implica directamente toda la preparación previa a la competencia, tal como la elaboración de reportes de costo y de la presentación de ventas; incluye también el esfuerzo de diseño en su etapa más pura de elaboración de concepto y las pruebas que se hagan al vehículo antes de someterlo a las condiciones de pista. La primera forma de hacer puntos es, por otra parte, la más importante y la más emocionante.

UNAM Motorsports se ha distinguido por una constante mejora en los eventos estáticos desde su ingreso a la competencia, pero su fortuna en los eventos dinámicos ha sido inconsistente, por decir lo mejor. Y esto es un serio problema. Los eventos dinámicos representan en total un 67%, o dos terceras partes, del puntaje total de la competencia, lo cual significa que un buen desempeño puramente en eventos dinámicos opaca a un desempeño igualmente bueno en eventos estáticos.

Esto no implica que los eventos estáticos y dinámicos no estén relacionados, pues la realidad es totalmente contraria: un prototipo bien diseñado debería desempeñarse bien en las pruebas dinámicas y al revés, un vehículo con buen desempeño tiene detrás de sí un sólido desarrollo de proyecto, pero si esto es cierto ¿por qué habríamos de preocuparnos más por unos u otros eventos? La diferencia está en el enfoque que se adopta al enfrentar al problema.

Enfocarse a los eventos estáticos lleva a enfocarse al proceso de diseño mismo sin tener en cuenta su finalidad última. Esto lleva a diseños aislados que, como ya hemos dicho, pueden recibir una buena evaluación de parte del jurado, pero cuya utilidad en el funcionamiento del vehículo es marginal. Este mismo esfuerzo de diseño bien conducido puede no generar una innovación disruptiva, pero si pudiera hacer al vehículo mejorar un 5% en todos los eventos dinámicos valdría más de la mitad de la puntuación total del evento de diseño (que aporta 75 puntos al primer lugar).

Los eventos dinámicos

Los eventos dinámicos de la competencia son 5:

Acceleration – consiste en un curso totalmente recto de 75 metros en el cual el vehículo parte de reposo y debe alcanzar la máxima velocidad posible.

Skid Pad – consiste de una pista en forma de 8, en la que el vehículo recorrerá dos veces cada circuito y se tomará en cuenta solamente la segunda vuelta de cada uno. Esta prueba está diseñada para evaluar la capacidad de aceleración lateral del vehículo.

Autocross – se trata de una prueba en un circuito con condiciones mixtas de manejo, con rectas y curvas varias, y de media milla de longitud que se recorre dos veces.

Endurance – esta es la prueba más importante del evento y se trata de un circuito, de aproximadamente un kilómetro con condiciones de manejo mixtas, que se debe recorrer hasta sumar 22 km de recorrido.

Fuel Economy – este evento evalúa el consumo de combustible del vehículo una vez terminado el evento de *Endurance*.

Para efectos de esta sección nos enfocaremos sólo en los primeros 4 eventos y no consideraremos el impacto del consumo de combustible, evento que se evalúa con parámetros diferentes y no interesa particularmente a la dinámica del vehículo.

La asignación de puntos para cada equipo en los eventos dinámicos de Formula SAE depende de una sola magnitud: el tiempo.

La forma general de la asignación de puntos es la siguiente¹⁴:

$$Puntuación = P_{Desempeño} \cdot \frac{\left(\frac{T_{Max}}{T_{Equipo}}\right)^n - 1}{\left(\frac{T_{Max}}{T_{Min}}\right)^n - 1} + P_{Compleción}$$

T_{max} – es el tiempo más alto, es decir, el del equipo más lento.

T_{min} – es el tiempo más bajo, es decir, el del equipo más rápido.

T_{equipo} – es el tiempo correspondiente al equipo evaluado.

n – este exponente es igual a 2 para la prueba de Skid Pad y 1 para las demás pruebas dinámicas.

Esto quiere decir que el sólo hecho de terminar el recorrido garantiza al equipo un puntaje de aproximadamente 5% del total de ese evento, aún si se tiene el máximo tiempo. El resto de los puntos se ve afectado, en principio, por el desempeño del peor y mejor equipo, además del tiempo del propio equipo. En la siguiente tabla se muestran los puntajes correspondientes a desempeño y completación para cada prueba:

¹⁴ De acuerdo con la Parte D del reglamento 2014, correspondiente a las regulaciones para eventos dinámicos.

Prueba	P _{Desempeño}	P _{Compleción}	Puntuación máxima
Acceleration	71.5	3.5	75
Skid Pad	47.5	2.5	50
Autocross	142.5	7.5	150
Endurance	250	50	300

Tabla 2– Factores de puntuación para cada prueba dinámica

El sólo hecho de completar *Endurance* representa un 5% del total de puntos de toda la competencia, por lo cual no es de extrañarse que sea uno de los objetivos más importantes de todo equipo, temporada tras temporada, incluyendo a UNAM Motorsports.

Ahora bien, además de recibir puntos por completar el evento, es interesante observar el factor que corresponde a los puntos por desempeño, pues no es directamente proporcional al tiempo del equipo y depende también del tiempo del mejor equipo y de su relación con el tiempo del peor equipo.

Si hacemos algunos cambios de variable, de forma que:

$$T_{Equipo} = T_{Min} + n(T_{Max} - T_{Min})$$

$$T_{Max} = K \cdot T_{Min}$$

La puntuación se convierte en:

$$Puntuación = P_{Desempeño} \cdot \frac{1 - n}{n(K - 1) + 1} + P_{Compleción}$$

Donde, por definición, n puede tomar valores entre 0 y 1. Si el valor de n es 1, el equipo es el peor, su tiempo es el tiempo máximo de la competencia y no obtiene puntos por desempeño. Si el valor de n es 0, el equipo es el mejor evaluado y obtiene puntos totales de desempeño.

Lo interesante es que K , siendo mayor a 1, provoca que el aumento de la puntuación por desempeño con respecto a n no sea lineal. Y cuanto mayor sea esta K , menor es la linealidad del puntaje.

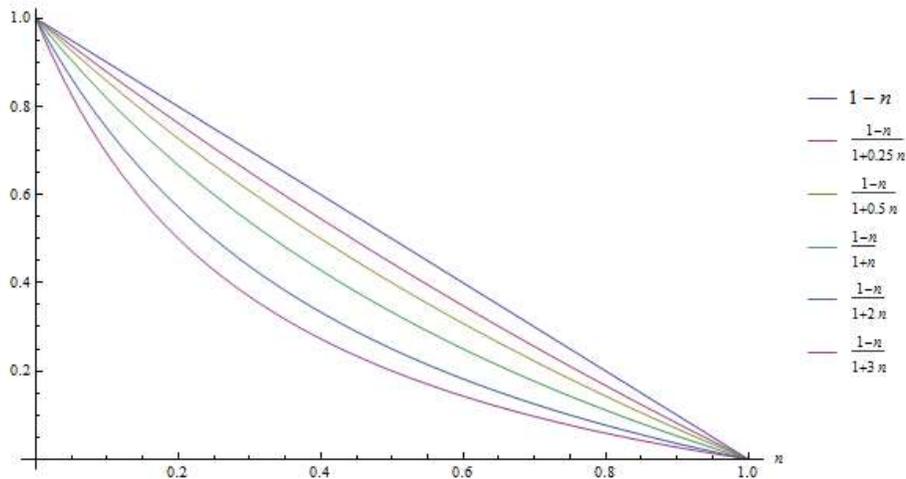


Ilustración 21– Comportamiento no lineal de las puntuaciones de la competencia FSAE

La función es además convexa, lo cual quiere decir que un decremento en n , que significa acercarse al tiempo del mejor equipo, es progresivamente más significativo en puntos. En FSAE se debe haber observado en algún momento que un valor muy grande de K significaría una caída severa en el puntaje de todos los equipos, principalmente aquellos con tiempos “promedio” o alrededor de $0.5n$, por lo que actualmente se encuentra definido en el reglamento un valor para el tiempo máximo en la competencia definido justamente a partir del tiempo mínimo y un valor para K . Todo equipo que haya obtenido un tiempo mayor al máximo reglamentario, recibirá 0 puntos por desempeño.

La importancia de cada parámetro

Los modelos matemáticos de un vehículo que han sido presentados hasta ahora nos ayudan a comprender las relaciones entre distintas variables que interactúan en el vehículo, lo cual es elemental para que el diseñador pueda tomar decisiones hábiles basadas en el razonamiento heurístico. Suposiciones educadas que lo puedan guiar en un proyecto tan complejo como es el diseño de un auto Formula SAE.

La desventaja de estos modelos es que, debido a su nivel de abstracción, es muchas veces difícil estimar el impacto real de una variable aislada en el tiempo total de recorrido de una pista si no se tiene un modelo complejo. En esta situación resultaría útil para el diseñador una guía aproximada de cuánto se puede beneficiar el desempeño total del automóvil con la mejora de un área específica del vehículo.

Una forma de validar la contribución de cada área en el desempeño del automóvil sería comparar los tiempos de competencia de diferentes automóviles variando solamente el desempeño de un área específica, comparando tiempos y evaluando la mejora relativa. Estas pruebas son costosas y requieren de un vehículo terminado para ser realizadas.

Afortunadamente, existen ya fuentes diversas en las que se pueden encontrar resultados de pruebas que nos puedan guiar en el proceso de diseño. En este caso particular se ha tomado la serie de datos obtenida del trabajo de Michael Trzesniowski¹⁵ en forma de la siguiente gráfica:

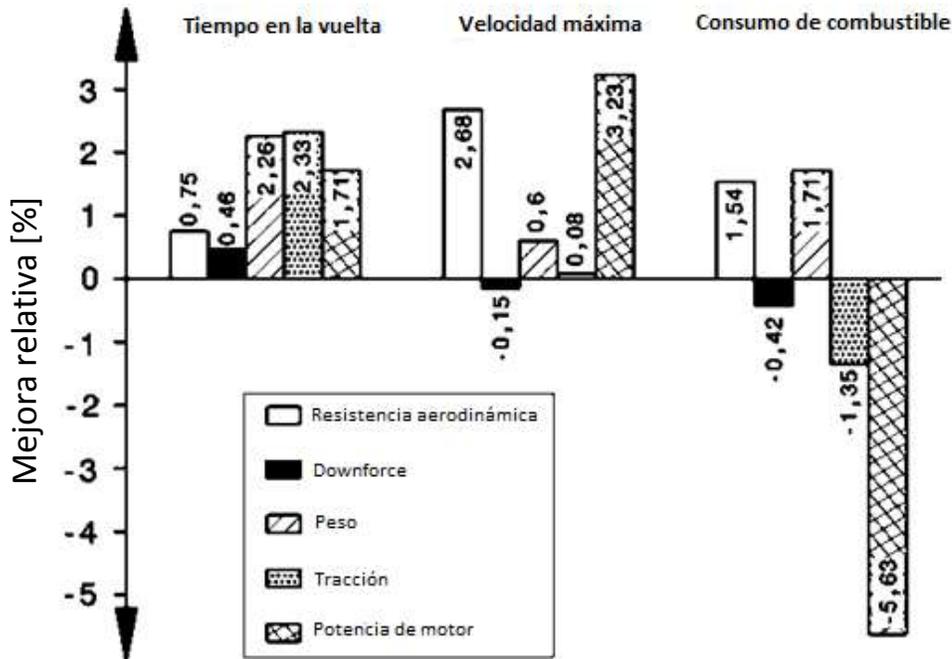


Ilustración 22– Impacto porcentual de una mejora de 10% en los valores de los parámetros listados

Estos datos fueron obtenidos para un automóvil tipo Formula en una pista típica de la categoría con condiciones varias de curvatura y nos proporcionan un indicador de cuánto puede mejorarse el desempeño (o empeorarse) en términos de tiempo total de recorrido, velocidad máxima y consumo de combustible; como consecuencia de una mejora del 10% en los aspectos listados en la parte inferior: resistencia aerodinámica, *downforce*, peso, tracción y potencia de motor. Intuitivamente entendemos que una “mejora” significa disminución en el caso del peso y la resistencia aerodinámica y un aumento en el caso de la tracción, potencia de motor y *downforce*.

Salvo en el caso explícito de la prueba de economía de combustible, las pruebas dinámicas en FSAE tienen como parámetro de evaluación el tiempo de recorrido. Esto implica que, en principio, es este el aspecto más importante a mejorar. De acuerdo con los resultados de Trzesniowski, las áreas de diseño que más pueden mejorar el tiempo de recorrido son, en orden descendente:

Tracción (2.33%)

Peso (2.26%)

Potencia del motor (1.71%)

Resistencia aerodinámica (0.75%)

Downforce (0.46%)

¹⁵ [3]

Intuitivamente podíamos ya suponer que la tracción y el peso son los factores más importantes en la mejora del desempeño automotriz, pero ahora podemos ya dar también un valor aproximado a las mejoras que estos nos pueden traer en términos de tiempo. Así, llegamos de manera más informada a una escala que nos permita priorizar y abordar nuestras mayores áreas de oportunidad como equipo automotriz. En UNAM Motorsports siempre supimos que un vehículo ligero es más rápido que uno idéntico y más pesado, pero hemos descuidado un factor igualmente importante, si no es que aún más poderoso: la tracción.

Esta área poco explorada es la que mayores beneficios nos trae. Se podría decir que es nuestra mejor inversión de diseño y su mejora sólo requiere de un diseño cuidadoso de parámetros geométricos sin ser siquiera necesario introducir nuevas tecnologías o alterar los componentes de tren motriz de los que ya se dispone.

¿Cuánto podemos ganar?

Combinando los resultados proporcionados por Trzesniowski con el análisis de la puntuación en FSAE, podemos estimar cuál sería el efecto de una mejora del 10% en la tracción del automóvil en el puntaje de los eventos dinámicos.

En este caso el análisis estará basado en el puntaje obtenido por el modelo UM-524 que el equipo diseñó para la competencia FSAE West de 2013. Este vehículo compitió en todos los eventos dinámicos, fallando en terminar *Endurance* por lo que para la comparación de este evento se tomará en cuenta el tiempo logrado por el equipo de la sede *Long Beach* de la *California State University*, quienes tuvieron el mínimo puntaje de entre quienes lograron finalizar la carrera.

Evento	Puntaje UM-524	<i>n</i>	Puntaje con tiempo mejorado 2.33%	Puntaje con tiempo mejorado 4.66%
<i>Acceleration</i>	5.2	0.96	8.6	12.0
<i>Skid-Pad</i>	4.7	0.94	8.8	13.0
<i>Autocross</i>	54.5	0.58	63.0	71.5
<i>Endurance*</i>	58.2	0.95	71.3	84.4
Total	122.4	-	151.7	180.9

Tabla 3– Mejora en las puntuaciones de los eventos dinámicos para un 10% y 20% de mejora en la tracción del vehículo

El parámetro *n*, como ya se ha dicho, representa la ubicación del equipo con respecto al tiempo máximo y mínimo de la competencia. Entre más cercano a 1 sea el valor, más cerca está el equipo del tiempo máximo y del menor puntaje. Se ve que en 3 de los eventos dinámicos el equipo se ubica en el decil más bajo de la tabla, mientras que en el de mejor desempeño, que es *Autocross*,

el equipo está en el sexto decil de la tabla, el más alto de la mitad baja que, si bien es mejor situación que en otros eventos, sigue siendo un desempeño por debajo de la media.

En la tabla podemos ver entonces que mejorar menos de un 5% los tiempos en cada evento, partiendo del estado actual del equipo, representaría un aumento de cerca de 60 puntos. Esta reducción en tiempos del 4.6% puede lograrse, al menos en principio, si para una misma potencia y efectos aerodinámicos en el automóvil, se pudiera mejorar la tracción en un 20% o sólo un 10% y un 10% de reducción en la masa total del vehículo.

En lo referente a las capacidades del motor, las restricciones del reglamento en cuanto a volumen de desplazamiento y admisión de aire imponen un límite a la potencia máxima disponible. Trabajar en este componente es una parte importante del desarrollo del vehículo pero se da de forma totalmente independiente al de la dinámica del vehículo. Finalmente están los parámetros referentes a la aerodinámica. Esta área está llena de opciones interesantes para los vehículos de competencia, pero su aplicación está llena de efectos colaterales. A continuación se abordará la visión personal del autor al respecto.

El papel de la aerodinámica en Formula SAE

"It's not what you don't know that gets you into trouble. It's what you know for sure (to be true) that just ain't so"

-Mark Twain

Una diferencia inmediatamente evidente entre muchos de los vehículos registrados en Formula SAE y los vehículos de categorías profesionales es la ausencia de alerones. Es cierto que los elementos aerodinámicos son cada vez más abundantes y relevantes en esta categoría; pero en el gran abanico de posibilidades sigue existiendo un grupo considerable de autos, algunos de ellos entre los primeros lugares de la competencia, que no hacen uso de elementos para añadir carga dinámica ¿Por qué es esto?

Los elementos aerodinámicos en un automóvil existen con dos motivos básicos: disminuir la resistencia del aire al avance del vehículo y generar carga dinámica sobre las ruedas. El gran dilema de la aerodinámica está, como a estas alturas podría esperarse, en que una meta de diseño actúa en contra de la otra. La carga aerodinámica proviene del aire que se desplaza alrededor del vehículo y que ejerce presión sobre él. Reducir la resistencia aerodinámica o arrastre, por otra parte, depende a grandes rasgos de disminuir esta presión que el aire ejerce en el vehículo. Así expresado el problema parece más evidente.

El arrastre aerodinámico hace más difícil el avance del vehículo, requiriéndose más energía para alcanzar una misma velocidad y limitando la velocidad máxima que un automóvil es capaz de alcanzar. Esto lo hace, a todas luces, un efecto indeseable. Más dramático aún es que todo efecto aerodinámico incrementa su magnitud en proporción aproximada al cuadrado de la velocidad con

que el vehículo se desplace, por lo que un vehículo que duplica su velocidad de desplazamiento sufre efectos aerodinámicos cuatro veces mayores.

La carga aerodinámica, por su parte, es carga vertical que se transmite hacia los neumáticos desde el chasis y a través de la suspensión. Los neumáticos aumentan su capacidad de generar tracción conforme mayor sea la carga vertical aplicada en ellos y esto, claramente, permite al automóvil una mayor aceleración longitudinal y lateral. Al ser este un efecto aerodinámico, también incrementa en magnitud de acuerdo con el cuadrado de la velocidad del vehículo.

Los alerones en un vehículo pueden también cumplir la función de dirigir el flujo para reducir el arrastre, pero principalmente son elementos que ofrecen la posibilidad de ganar carga vertical dinámica a cambio de aumentar el arrastre del vehículo. Su aplicación en los automóviles de competencia resulta conveniente puesto que su aportación a la carga vertical es varias veces mayor que su aportación al arrastre¹⁶. La aerodinámica es, además, mucho más significativa cuanto más rápido es el vehículo y los automóviles de competencia suelen desplazarse a velocidades superiores a los 200 km/h. Pero este no es el caso de Formula SAE.

Es cierto, la aerodinámica ha jugado por ya más de dos décadas uno de los papeles centrales en las categorías mayores del automovilismo y, principalmente, en la máxima competencia automotriz: Formula 1. Pero esto no se debe únicamente a las innegables ventajas de la aerodinámica, sino a la estandarización de otros componentes como los neumáticos, y la regulación aplicada a las características del motor y chasis, entre otros. La existencia de estas regulaciones ha hecho de la aerodinámica una de las pocas áreas donde la innovación aún puede sorprender¹⁷ e incluso garantizar el liderazgo de un equipo¹⁸. Pero este no es el caso de Formula SAE.

Formula SAE es una competencia en la que los automóviles se desplazan a bajas velocidades y las altas aceleraciones laterales se deben principalmente a los muy reducidos radios de curvatura de la pista. Se dice muy frecuentemente que la tracción de un vehículo se puede clasificar en dos: tracción mecánica y tracción aerodinámica. La primera, atribuida a la configuración de la suspensión e importante a bajas velocidades y la segunda atribuida, obviamente a la aerodinámica del vehículo e importante sólo a muy altas velocidades. Por otra parte, el reglamento de Formula SAE está orientado a la seguridad de los estudiantes y por lo tanto los restringe de intentar configuraciones exóticas o utilizar materiales deficientes, pero pone pocas restricciones a las configuraciones de los sistemas, por lo que hay una tremenda libertad para probar cambios en todas las áreas del vehículo, disminuyendo la importancia relativa de la aerodinámica.

Finalmente, pero no menos importante por ello, está la serie de problemas que provienen de aumentar la complejidad de cualquier sistema. Aumenta la cantidad de partes en el vehículo y por

¹⁶ Aproximadamente 4 veces mayor en un automóvil de alto desempeño

¹⁷ <http://www.formula1-dictionary.net/wings.html>

¹⁸ http://www.formula1-dictionary.net/flexi_front_wings_rbr.html

lo tanto aumentan las posibilidades de falla. Aumenta también la cantidad de factores que alteran la maniobrabilidad y el desempeño general. Esto se puede ilustrar con casos particulares.

Uno de los elementos aerodinámicos principales de los automóviles de competencia es el piso plano con un difusor en la parte trasera. En esencia, este conjunto de elementos genera carga aerodinámica en la parte frontal gracias a la geometría de entrada del aire hacia la parte baja del vehículo, carga aerodinámica en la parte media del vehículo por el rápido flujo de aire y carga en la parte trasera por la presencia del difusor. A finales de los años 70's comenzó el desarrollo y el uso del difusor propulsado por gases de escape que aumentaba la eficiencia de esta zona del automóvil y en consecuencia la carga dinámica en la parte trasera. Pero los gases de escape no tienen un flujo constante, sino dependiente de la posición del acelerador. Esto implicaba entonces que el automóvil perdería carga dinámica en el eje trasero al levantar el conductor su pie del acelerador. De la técnica correcta de manejo, sabemos que conductor levanta el pie del acelerador cuando entra en la curva para tener la mayor tracción lateral posible en los neumáticos. Esto provocaba que el automóvil con esta clase de difusor perdiera carga ¡cuando el vehículo más la necesita! Provocando un severo sobreviraje del automóvil y la pérdida de control.

Este es uno de los casos en los que el cambio en el balance aerodinámico del vehículo convirtió lo que debía ser un apoyo para el desempeño en un riesgo para la maniobrabilidad.

Formula SAE tampoco está exenta de los riesgos que implica la adición de alerones. En FSAE West 2012 el equipo de la Missouri University of Science & Technology, uno de los equipos norteamericanos más consistentes y con mejor desempeño en las pruebas dinámicas de Formula SAE fue forzado a abandonar la prueba de *Endurance* por una falla en uno de los soportes de su alerón trasero; falla que no comprometía el funcionamiento del automóvil, pero no era permitida por el reglamento. Este abandono privó al equipo, que tenía uno de los más altos puntajes acumulados hasta ese momento, de los 400 puntos que representaba ese evento, privándolo de cualquier posibilidad de obtener un lugar entre los primeros 10.



Ilustración 23– Automóviles con paquete aerodinámico que presentaron falla durante la competencia

En 2011, el equipo ganador de la competencia fue el de la École Technique Supérieur de Montreal, un equipo sin elementos aerodinámicos. En 2013, Rennteam Stuttgart, el mejor equipo de Formula SAE de acuerdo con la clasificación mundial, incorporó a su vehículo, por primera vez desde la creación del equipo en 2006, elementos aerodinámicos y, contrario a su costumbre, no logró conseguir el primer lugar en ninguna de las competencias de ese año.



Ilustración 24– Vehículo ganador de FSAE West 2011, carente de paquete aerodinámico

Lo anterior no significa que la adición de elementos aerodinámicos sea mala. Las tendencias, de hecho, indican todo lo contrario: cada vez más equipos adoptan esta clase de elementos y hoy en día es difícil encontrar un equipo que se encuentre consistentemente en los primeros diez lugares de una competencia y que no cuente con elementos aerodinámicos. Pero todo nuevo sistema toma tiempo en ser implementado con éxito. Sucede en la Formula 1, sucede también en Formula SAE. La mayoría de esos equipos en la parte superior de la pirámide automotriz no sólo tienen alas, sino abundante experiencia y de hecho incorporaron los paquetes aerodinámicos después de muchos años dentro de la competencia. Es ya bastante complejo para un grupo de estudiantes el lidiar con los sistemas básicos para el funcionamiento del automóvil y todo parece indicar que la inclusión de un paquete aerodinámico es un paso importante, pero muy riesgoso y potencialmente contraproducente para equipos jóvenes.

Las características del vehículo

El reglamento vigente para las competencias de Formula SAE establece como mínima distancia entre ejes 1525mm. El ancho de vía no está explícitamente definido y es sólo consecuencia de las limitaciones del chasis, pero se especifica que la diferencia entre el ancho de vía de ambos ejes no sea mayor que el 25% de la distancia mayor.

Las características del UM-513 fueron las siguientes

Peso: 350kg, incluyendo al piloto. Un vehículo en exceso pesado para la categoría, producto de una carrocería excesiva y una masa no suspendida ligeramente sobredimensionada

Distancia entre ejes: 1,6 m. Entre menor sea la distancia entre ejes del vehículo mejor será su maniobrabilidad, por lo que convendría apuntar al mínimo reglamentario. Por razones de empaquetamiento de los sistemas y posición de los brazos de suspensión, esta distancia fue elevada una cantidad casi arbitraria, hasta los 1600 mm, un 5% por encima del mínimo.

Ancho de vía: 1,17 (ó 1.219) delantero, 1.1 trasero

Distribución de peso: 48% delante -52% en la parte trasera. Siendo un vehículo de tracción trasera es natural que la distribución de peso favorezca al eje trasero, pues el motor y el diferencial son los elementos más masivos del vehículo. Afortunadamente, la presencia del piloto y las reducidas dimensiones del vehículo compensan el efecto, haciendo que el vehículo tenga un balance más equitativo y, afortunadamente, casi neutro.

Lateral: 50%-50%. Es muy importante mantener el balance lateral del vehículo para que su comportamiento sea igual para una curva en cualquier sentido. Esto es casi automático si se cuida la simetría del vehículo y se logra un buen empaquetamiento del motor.

Altura del CG: 0.30m. Se busca que el vehículo tenga la menor altura para el centro de gravedad, pero en el estado actual del diseño en el equipo su ubicación exacta resulta casi accidental al final. Mediciones indirectas a través del pesaje del vehículo en una superficie llana y después en una inclinación conocida permiten estimarlo alrededor de los 30cm por encima del nivel del suelo.

Aerodinámica: se decidió evitar la protuberancia de piezas para reducir el arrastre del vehículo. A pesar de los motivos expuestos en contra de esta decisión, se incluyó en el diseño un piso plano que aportara una carga vertical total de 50 kg, sin mayor especificación de la distribución de esa carga aerodinámica.

Los neumáticos para FSAE

Los datos sobre neumáticos son escasos. La complejidad y costos de realizar las pruebas hacen que la información de ellas obtenida sea muy valorada y por lo tanto costosa. Afortunadamente, siendo Formula SAE una categoría estudiantil, existen aún empresas dispuestas a facilitar el acceso a los datos para componentes de esta categoría, aunque son cada vez menos.

Uno de ellos es *Avon Tyres* quien ha hecho disponibles para el público general algunas tablas de valores de sus neumáticos especializados para FSAE. En el caso particular de UNAM Motorsports se utilizan neumáticos para rines de 13x7 pulgadas, haciendo del A92 14254S el neumático adecuado para nuestras necesidades.

Los datos están organizados en forma de tablas con el valor de dos variables: Fuerza lateral expresada en kN, y momento de auto-alineación expresado en N·m. Los valores están tabulados para tres variables diferentes en intervalos discretos:

Ángulo de deslizamiento – entre -9° a 9° con intervalo de 1°

Carga vertical – en valores entre 75kg a 300kg con un intervalo de 75kg

Camber – entre 0° y 3.5° con un intervalo de 0.5°

A continuación se presentan algunos datos de forma gráfica. Las tablas originales se pueden encontrar en el anexo correspondiente.

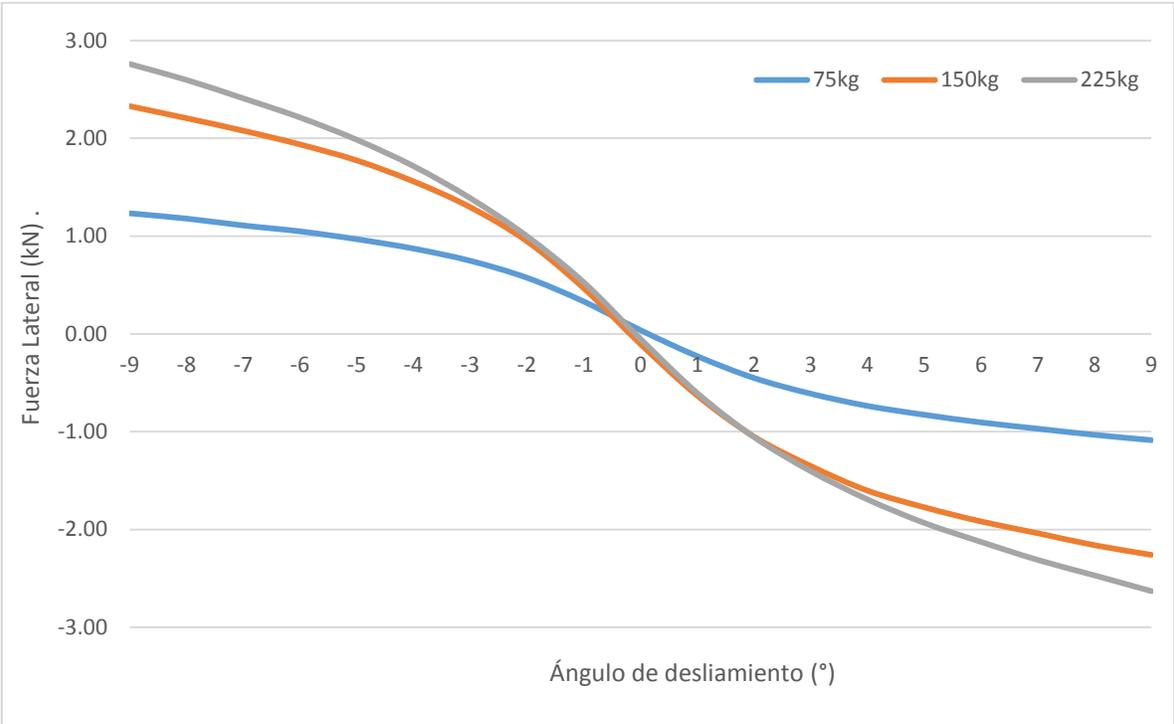


Ilustración 25 - Fuerza lateral del A92 14254S en función del ángulo de deslizamiento, con un camber de 0°

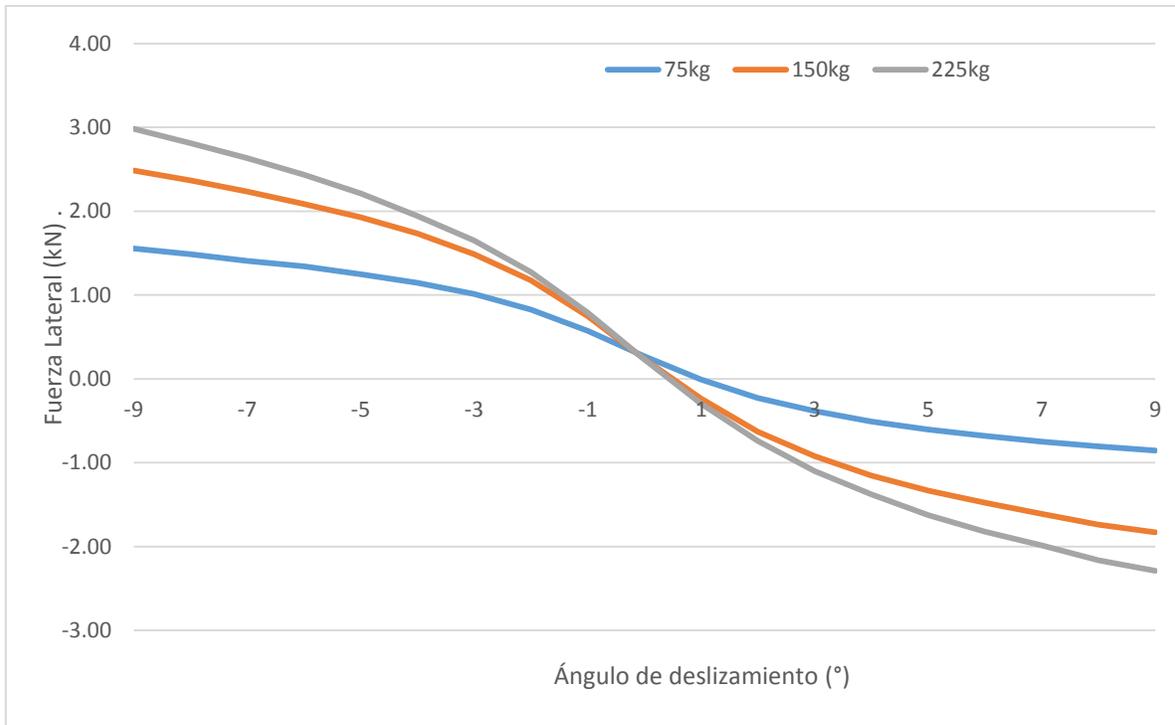


Ilustración 26- Fuerza lateral del A92 14254S en función del ángulo de deslizamiento, con un ángulo camber de 2°

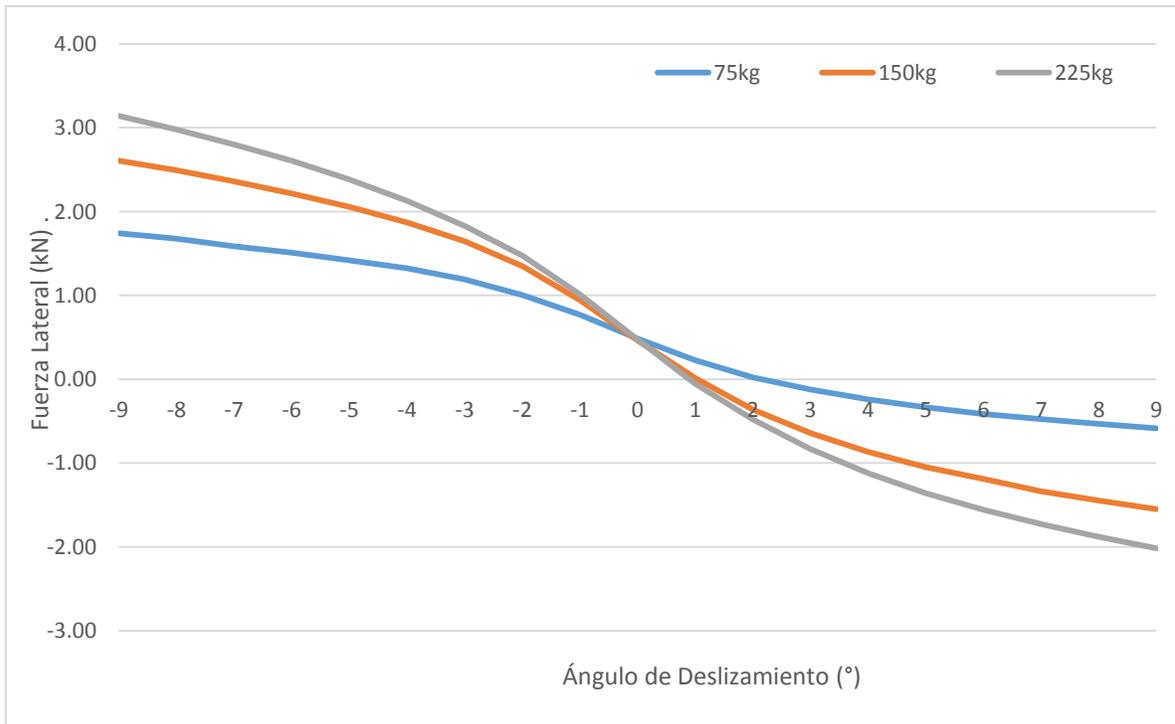


Ilustración 27- Fuerza lateral del A92 14254S en función del ángulo de deslizamiento, con un camber de 3.5°

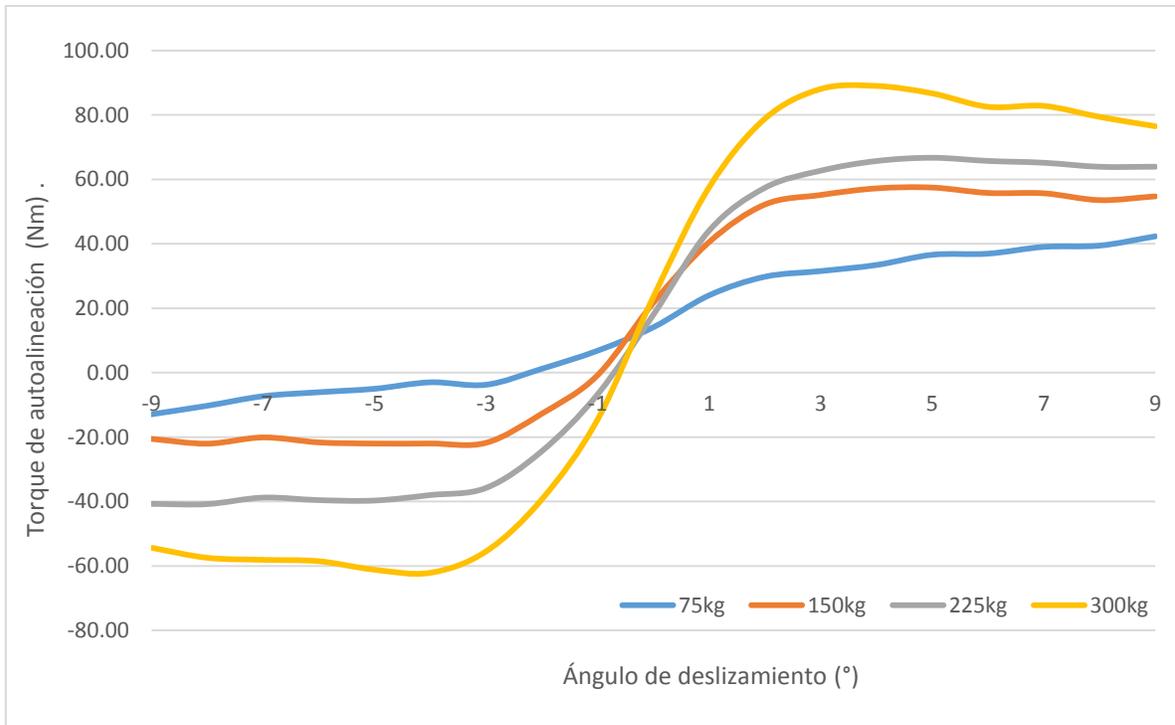


Ilustración 28- Momento de auto-alineación del A92 14254S en función del ángulo de deslizamiento, con un camber de 0°

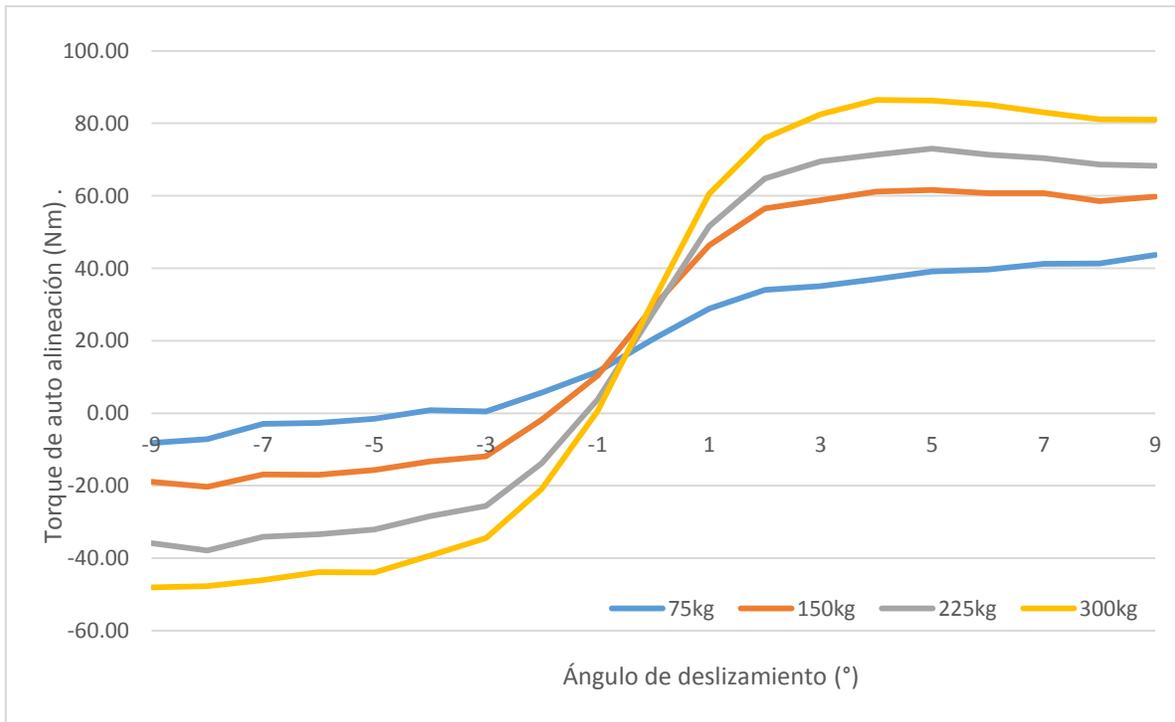


Ilustración 29 - Momento de auto-alineación del A92 14254S en función del ángulo de deslizamiento, con un camber de 2°

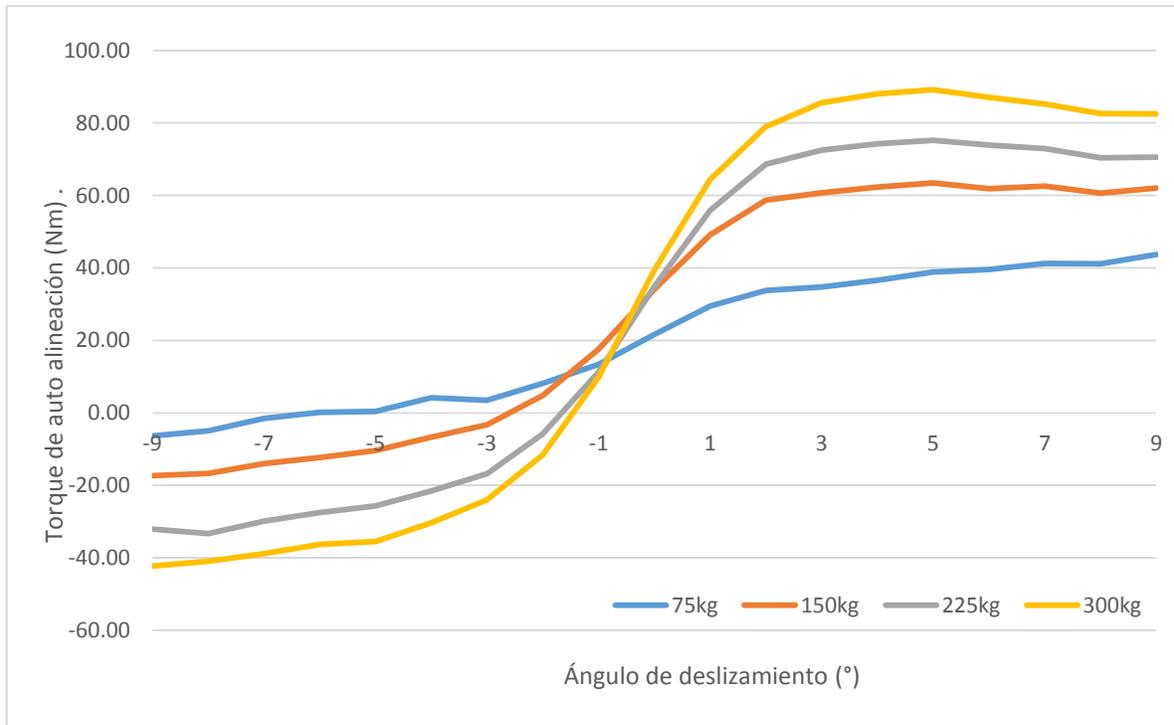


Ilustración 30- Momento de auto-alineación del A92 14254S en función del ángulo de deslizamiento, con un camber de 3.5°

El par de ruedas y la sensibilidad a la carga.

Para continuar observando las características de los neumáticos en el contexto del vehículo y seguir así acercándonos a la realidad subiendo peldaños de la escalera de la abstracción, combinaremos dos efectos hasta ahora tratados de forma independiente: la sensibilidad del neumático a la carga y la transferencia lateral de peso.

A través de la combinación de estos dos fenómenos podemos reducir la fuerza del par de neumáticos de cada eje a una sola fuerza que dependa también de la aceleración lateral y la geometría del vehículo en el espacio. Esto nos permite, eventualmente, describir un vehículo de 4 ruedas utilizando una vez más el modelo de bicicleta para analizar su maniobrabilidad.

Sabemos ya que el fenómeno de transferencia lateral de peso significa que, ante la presencia de una aceleración lateral, las cargas verticales de cada uno de los neumáticos cambiarán, pero la carga vertical total en el eje se conserva. Esto implica que el aumento de carga en un neumático del par es exactamente igual a la disminución de carga en el otro.

Recordemos ahora también el concepto de sensibilidad a la carga: al aumentar la carga vertical en un neumático, aumenta también la tracción que el mismo puede producir. El aumento en la tracción, sin embargo, es monótono pero no lineal y conforme más carga vertical se aplique al neumático, menos significativa es la mejora en la fuerza de fricción producida por el neumático, i. e. Si la carga vertical se aumenta una cantidad x , la tracción aumentará una cantidad y , pero si se

aumenta la carga vertical por un valor $2x$, se espera que el aumento en la tracción sea menor que $2y$.

La interacción de ambos fenómenos tiene un serio impacto en la dinámica automotriz.

En términos matemáticos se puede decir de la curva de fuerza lateral contra carga lateral lo siguiente:

Es monótonamente creciente, lo cual quiere decir que al aumentar la carga vertical siempre aumentará también la fuerza lateral.

La pendiente de la curva, y correspondientemente la primera derivada de una función que describa dicha curva, es siempre positiva, pero disminuye con el aumento de la carga.

Dadas las anteriores características se puede decir entonces que la curva en cuestión corresponde a una función cóncava.

Habiendo llegado a esta conclusión, podemos hacer uso de las propiedades de las funciones cóncavas para observar el comportamiento de la fuerza total en un par de neumáticos, donde una variable independiente u sería la carga vertical y la variable dependiente $v=f(u)$ corresponde a la fuerza de tracción.

Matemáticamente se define a una función cóncava como aquella que cumple la desigualdad:

$$f((1-t)x + (t)y) \geq (1-t)f(x) + (t)f(y)$$

Para $t \in [0,1]$.

Para el caso particular en que $t=0.5$:

$$f(0.5x + 0.5y) \geq 0.5f(x) + 0.5f(y)$$

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \frac{f(x) + f(y)}{2}$$

También, si una función es cóncava y para esta función, $f(0) \geq 0$ (lo cual se cumple en nuestro caso) entonces se dice que la función es sub-aditiva y:

$$f(x) + f(y) \geq f(x+y)$$

Combinando las ecuaciones anteriores:

$$2f\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq f(x) + f(y) \geq f(x+y)$$

En este caso, x y y son las correspondientes cargas verticales en cada uno de los neumáticos en un eje y el valor de la función evaluada para estas cargas corresponde a la fuerza de tracción lateral de cada neumático. Además, la suma de ambas cargas es la carga total de eje, la cual sabemos que permanece constante a pesar de la aceleración lateral. Vemos que, sin importar los valores de las cargas, se cumple que el doble de la función evaluada en un valor promedio de ambas cargas es

siempre mayor que la suma de ambos valores evaluados por separado. Este valor máximo corresponde a una situación en donde ambos neumáticos tienen la misma carga vertical, que es la mitad del peso total soportado por el eje.

Adicionalmente, vemos también que la función evaluada en la suma de ambas cargas es menor que la suma de la función evaluada para cada una de las cargas, de nuevo, cualquiera que sea el valor de estas. Esto equivale a que todo el peso del vehículo haya sido transferido a una sola rueda y es cuando la fuerza de fricción disponible en el par es mínima además de que, dada esa situación, el auto se encuentra en riesgo de volcadura.

Hagamos ahora un ejercicio mental para entender las ecuaciones anteriores. Supongamos que un auto se desplaza en línea recta sobre una pista nivelada (horizontal) y no actúan fuerzas aerodinámicas laterales sobre él, por lo que no percibe aceleración lateral alguna. En un principio, los dos neumáticos tienen la misma carga y en consecuencia, si todos los demás factores son también iguales, también producen la misma fuerza lateral.

Pero en presencia de una aceleración lateral, se produce la transferencia de carga de un neumático a otro. A pesar de variar la carga de ambos neumáticos en la misma cantidad, la sensibilidad a la carga implica que el aumento en la fuerza lateral del neumático que recibe más carga será menor en magnitud que el decremento en la capacidad de producir fuerza lateral del otro neumático. Esto significa que la suma de las fuerzas laterales producidas por ambos neumáticos es menor de lo que lo era antes de la presencia de la aceleración lateral. Si aún más carga se transfiere en el mismo sentido, de nuevo el aumento de tracción en un neumático es menor que la disminución en el otro. Esto significa que cuanto mayor sea la transferencia lateral de peso, menor será la fuerza de tracción lateral que el par de neumáticos puede aportar. Esto sucederá para vueltas en ambos sentidos y el proceso puede continuar conforme la aceleración lateral aumenta, hasta que no haya más carga vertical que transferir y uno de los neumáticos soporta todo el peso del eje, mientras que el otro no percibe carga vertical alguna.

Supongamos ahora un estado cualquiera en que la carga en las dos ruedas de un par es diferente. Esto se puede considerar un estado alterado, y por lo tanto de menor fuerza lateral, de una distribución inicial donde la diferencia de carga vertical entre los neumáticos era menor. Intuitivamente esto nos lleva a concluir que la distribución entre dos neumáticos, de un total de carga cualquiera, que mayor fuerza lateral nos permite obtener es aquel donde no hay diferencia en la carga vertical de ambos neumáticos, es decir, están igualmente cargados. Esta condición, para un auto simétrico, equivale a una situación de aceleración lateral nula.

Una vez más nos encontramos frente a un comportamiento paradójico del vehículo. Conforme más aceleración lateral percibe, y por lo tanto más fuerza lateral requiere, dispone de menor tracción total en cada eje. Si el vehículo quiere ser capaz de seguir la trayectoria supuesta, debe recurrir a variar el otro parámetro que aumenta la fuerza lateral disponible en los neumáticos: debe aumentar su ángulo de deslizamiento.

Esta variación en el ángulo de deslizamiento debe producirse en los cuatro neumáticos para que el automóvil se mantenga en balance direccional y el piloto no pierda el control. Esto significa que la actitud del vehículo debe cambiar y este apuntará hacia afuera de la curva más de lo que debería; un comportamiento propio del vehículo subvirante.

Existen muy particulares situaciones en las que el incremento de carga en el neumático puede de hecho aumentar el coeficiente de fricción del neumático, llevando a una sensibilidad del neumático inversa y neutralizando la pérdida de fuerza lateral en curvas. Milliken¹⁹ menciona en particular que para neumáticos delgados, similares a los de una motocicleta, el *camber* extremo (mayor a 10°) produce este efecto de aumento en el coeficiente de fricción. En 2009 el equipo FSAE de *CalPoly* causó desconcierto en la competencia Formula Hybrid de autos con propulsión alternativa al presentar un *Camber car*. Desconcertante como era ver al vehículo que parecía estar averiado, este pudo haber sido un intento por aprovechar el efecto mencionado por Milliken y así ganar un mayor puntaje; y aunque no existe información suficiente para asegurar que esta fuera la meta del equipo, lo cierto es que el automóvil recibió excelente puntaje en el evento de diseño y tuvo un desempeño más que aceptable en la competencia, probando así la efectividad de un diseño disruptivo.



Ilustración 31- El Cal Poly Formula Hybrid 2009 hizo uso de valores extremos de camber en neumáticos delgados para compensar la sensibilidad a la carga

¿Qué tanto se puede acelerar?

Determinar las verdaderas figuras de aceleración de un vehículo es una tarea que se puede abordar desde varios ángulos, algunos más válidos que otros. Es una tarea, sin embargo, que resulta primordial en el desarrollo del vehículo de competencia pues, como hemos visto, es la aceleración la figura más importante del vehículo.

Se puede estudiar la capacidad de aceleración del vehículo en dos direcciones espaciales del plano y en ambos sentidos: longitudinal hacia el frente y hacia atrás (frenado) y lateral en ambos

¹⁹ [2]

sentidos de viraje. La aceleración longitudinal es importante pues es la que lleva al vehículo a ganar velocidad en la pista, pero aunque la suspensión está involucrada en este aspecto su verdadera especialidad está en otra dirección: la lateral.

En Formula SAE las aceleraciones laterales que el vehículo puede experimentar son sensiblemente menores que aquellas de vehículos en categorías profesionales, pero mayores a las que un usuario cotidiano de vehículos de calle podría alcanzar con su vehículo. Una primera aproximación frecuentemente utilizada por los equipos para el diseño de sus prototipos proviene de un requerimiento del reglamento. Las reglas vigentes en la competencia establecen que los vehículos que competirán en los eventos de SAE International deben superar, sin volcarse, un *Tilt Table* que consiste en colocar el vehículo sobre una superficie inclinada 60°. Esto equivale a una aceleración lateral de:

$$A_y = \tan(60^\circ) = \sqrt{3} = 1.73g$$

De la transferencia lateral de peso, sabemos que el automóvil puede soportar antes de volcar una aceleración lateral de:

$$A_y = \frac{1}{2} \cdot \frac{h_{CG}}{T}$$

Por lo que, al menos en principio, el UM-513 puede soportar una aceleración lateral de hasta 2g antes de que el peso del vehículo sea transferido totalmente a un extremo de sus ejes. Esto lo capacita para superar sin problema alguno el *Tilt Table*, e impone una nueva marca para la posible aceleración lateral máxima del vehículo.

Pero estas figuras de aceleración lateral no serían posibles si los neumáticos con los que cuenta el automóvil no fueran capaces de generar la fuerza lateral necesaria para mantener al vehículo en esa condición. Si eso sucediera, el vehículo perdería tracción antes de volcar y deslizaría lateralmente, perdiendo el control. En el diseño de vehículos para pasajeros se saca provecho de este fenómeno, principalmente en automóviles con centros de masa altos. Por cuestiones de seguridad es siempre preferible que el vehículo de pasajeros deslice e impacte lateral o frontalmente y no que vuelque, y para asegurar esto, se utilizan en camionetas neumáticos especiales con compuestos menos adhesivos.

De vuelta en el análisis del Formula SAE, podemos empezar a hacer suposiciones. Nuestro vehículo tiene una masa de 350 kg, y para acelerarlo lateralmente a 2g, los neumáticos tendrían que generar:

$$F = m \cdot a_y = 350 * 2 * 9.81 = 6.867 \text{ kN}$$

Esta fuerza representa el total de fuerza lateral de los cuatro neumáticos. En un auto en equilibrio direccional, ambos ejes deberían generar la misma fuerza lateral, que en este caso sería de 3.434 kN. Queda entonces averiguar si los neumáticos son capaces de hacerlo.

Sabemos ya que el análisis de la fuerza lateral en un eje tiene que tomar en consideración la transferencia de peso entre los neumáticos debido a la sensibilidad a la carga. También sabemos que cualquiera que sea la condición en que se encuentra el vehículo, la fuerza del neumático aumenta, al menos hasta cierto punto, con el ángulo de deslizamiento.

De los datos disponibles del A92 14254S podemos generar las siguientes curvas de fuerza lateral con respecto a la carga vertical para los valores discretos de ángulo de deslizamiento negativo.

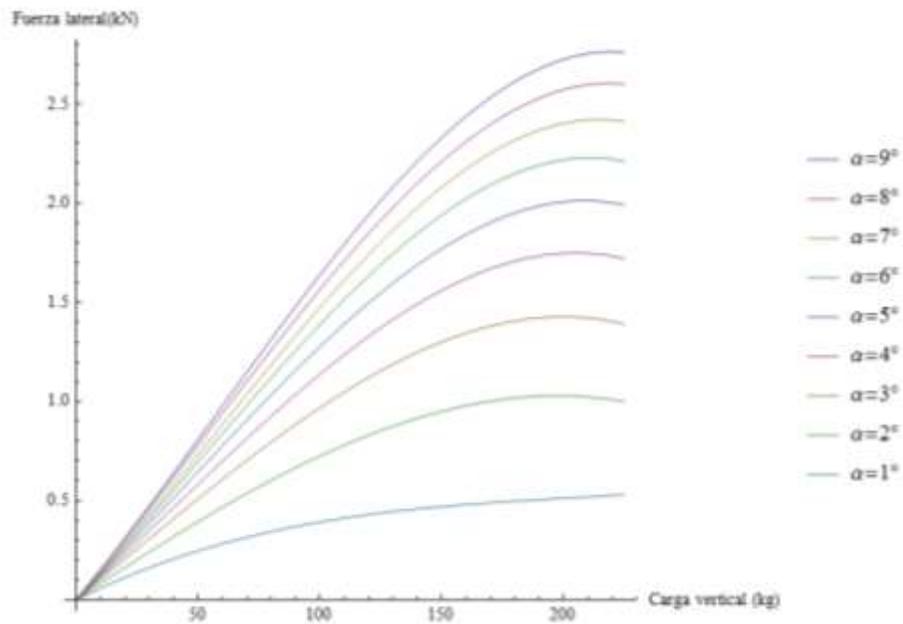


Ilustración 32– Fuerza lateral con respecto a la carga vertical del neumático

En esta figura se observa con claridad la sensibilidad del neumático a la carga. Tomando ahora en consideración este fenómeno, se suman las fuerzas laterales de ambos neumáticos para obtener la fuerza del eje con respecto a la transferencia lateral de peso. Esta, como es de esperarse, es máxima con una nula transferencia de peso y disminuye con la transferencia en cualquiera de los sentidos.

En la siguiente figura se muestra la fuerza total del eje como una suma de los neumáticos izquierdo y derecho:

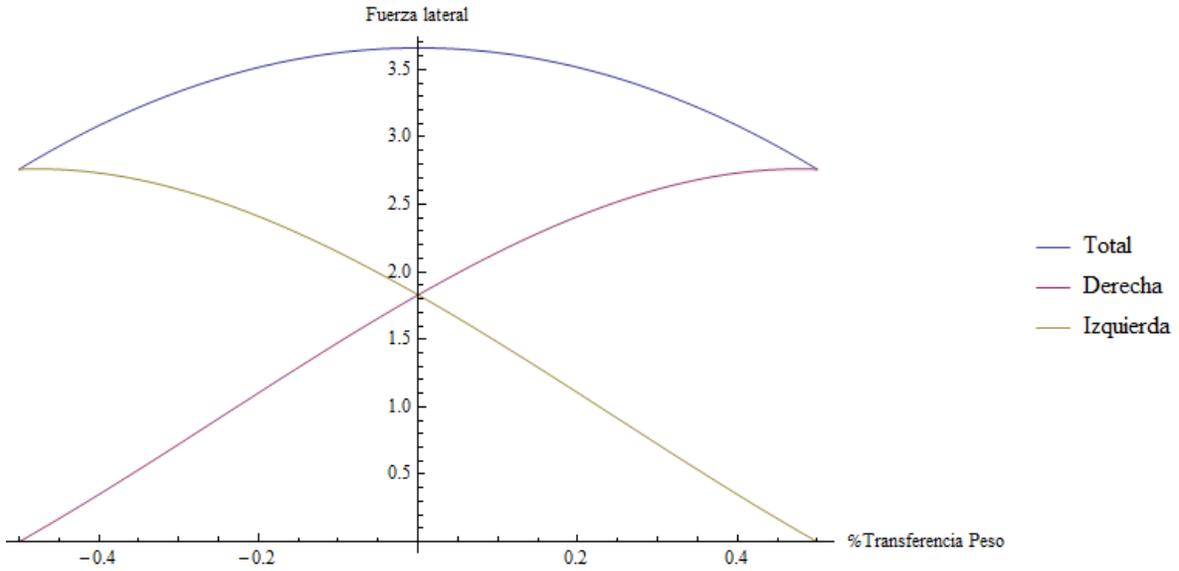


Ilustración 33– Fuerza lateral con respecto a la carga vertical del cada neumático en un eje y del total del eje con respecto a la fracción de transferencia de peso

Para los diferentes ángulos de deslizamiento, las correspondientes curvas son:

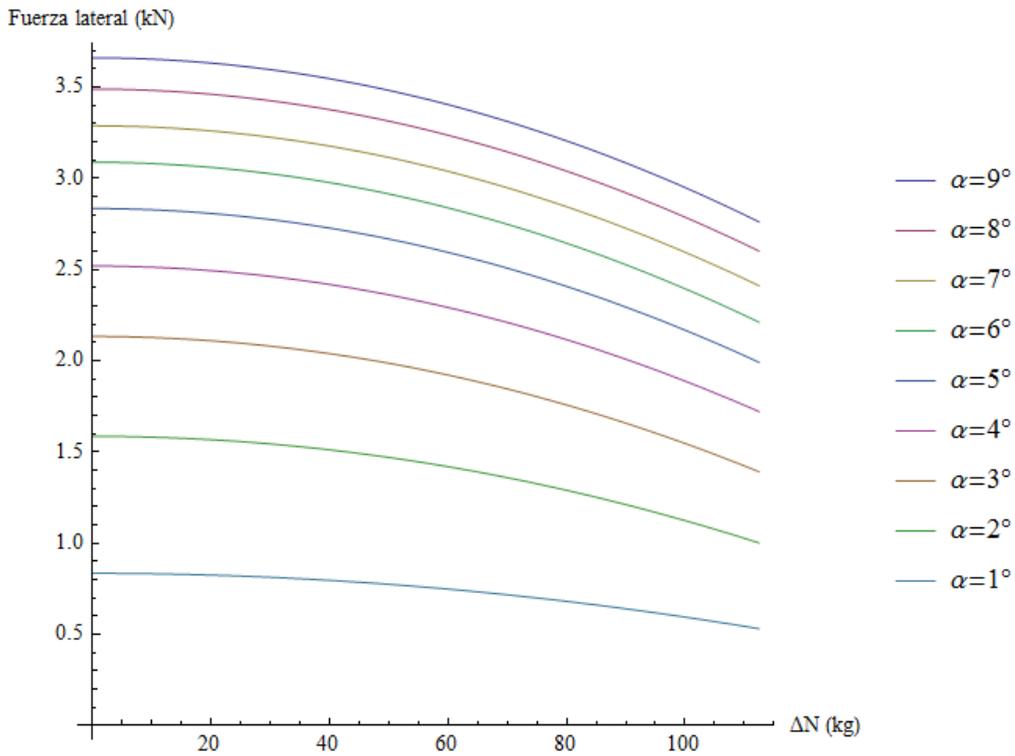


Ilustración 34– Fuerza lateral de un eje con respecto a la transferencia lateral de peso para diferentes situaciones de ángulo de deslizamiento

El último detalle a considerar es que la transferencia misma de peso depende de la aceleración lateral y la aceleración lateral está determinada por la fuerza del neumático. Para esto se tomarán los datos para el neumático orientado con un ángulo de deslizamiento de 9° y un *camber* de 3.5°, pues en estas condiciones el neumático tiene la mejor capacidad de producir fuerza lateral.

Ante la falta de una forma explícita para la relación entre la carga vertical y la fuerza lateral, se debe recurrir a un método numérico para la aproximación sucesiva de la fuerza máxima posible del neumático y su correspondiente aceleración lateral, en este caso se realizó con la ayuda de *Wolfram Mathematica*.

Para un eje con una carga vertical total de 175 kg, el valor de máxima fuerza lateral resulta ser de 3.02 kN. Este valor es menor a los 3.43 kN que hubiéramos necesitado para mantener los 2g de aceleración lateral y nos limita a una aceleración de 1.76g. En este punto la transferencia lateral de peso es de 76.94 kg. Si quisiéramos aumentar la aceleración lateral, ya sea aumentando la velocidad del vehículo o reduciendo la curvatura de la vía, la transferencia de peso sería mayor y la fuerza total del eje disminuiría. La fuerza en el eje no sería capaz de mantener al vehículo en esta nueva condición de aceleración y el vehículo perdería el control.

Finamente, nuestro vehículo no tiene una distribución equitativa de peso entre los dos ejes y el extremo trasero es más pesado con 182 kg, en comparación con los 168 kg del extremo delantero. El mismo procedimiento se puede aplicar a estos dos ejes para obtener la fuerza lateral disponible para la máxima aceleración lateral. Los valores están en la siguiente tabla, junto con los correspondientes a los 175kg de peso.

Peso total en el eje (kg)	Fuerza lateral del eje (kN)	Aceleración lateral (g's)	Transferencia de peso (kg)
168	2.94	1.78	74.81
175	3.02	1.76	76.94
182	2.77	1.74	79.03

Tabla 4– capacidades de fuerza lateral de tracción y aceleración lateral para diferentes pesos de eje

Se observa que, aunque la fuerza lateral total es mayor en el eje con más carga vertical, la aceleración lateral máxima que puede soportar es menor. Esto podría parecer extraño, pero no para quienes conocemos el efecto de la sensibilidad a la carga vertical. Retomando la definición del coeficiente de fricción, o la fuerza lateral normalizada, podemos escribir las siguientes ecuaciones:

$$F_Y = m \cdot a_Y = \mu \cdot F_Z = \mu \cdot m \cdot g$$

$$m \cdot a_Y = \mu \cdot m \cdot g$$

$$\frac{a_y}{g} = A_y = \mu$$

Decreciendo μ con la carga vertical. Esto significa que es, de hecho, la sensibilidad a la carga la que hace que un vehículo más ligero pueda desarrollar aceleraciones laterales más altas. Si no existiera el fenómeno de sensibilidad a la carga, la aceleración lateral del vehículo sería completamente independiente de la masa del vehículo y no tendrían razón alguna los esfuerzos de diseño para reducir la masa de los componentes. En pocas palabras, el neumático tiene todo que ver en el verdadero impacto de reducir la masa de los componentes del automóvil.

Diseño del sistema de suspensión

Las consideraciones teóricas hasta ahora enumeradas siguen el propósito de proveer de un marco de pensamiento para el diseño de cualquier sistema de suspensión pero se han acompañado hasta ahora de ejemplos específicos correspondientes a FSAE. Ahora que hemos llegado al punto último de nuestras consideraciones retomaremos una vez más el ejemplo del vehículo UM-513 diseñado para la competencia FSAE West 2012. La secuencia de ideas que llevan al diseño se buscan hacer lo más generales posibles para no reducir su validez en un proceso cualquiera de diseño y se sugiere que en ningún momento se tomen los parámetros específicos de este diseño como un ejemplo de la mejor alternativa a seguir, sino que se consideren sus pros y contras de acuerdo con lo que el texto comenta.

Denominamos sistema de suspensión al conjunto de 4 mecanismos que tienen como propósito controlar el movimiento de las cuatro ruedas con respecto al resto del vehículo. Podemos clasificar los componentes de estos mecanismos, como ya hemos visto, en dos grupos: partes de los mecanismos en doble brazo A para controlar la posición de la rueda al desplazarse y partes del sistema de manejo de energía para controlar cómo las fuerzas ejercidas sobre el vehículo serán convertidas en este movimiento vertical. En cada rueda hay uno de cada tipo de mecanismo y la suspensión es simétrica lateralmente, lo que quiere decir que en casi cualquier caso, el mecanismo de la rueda izquierda, ya sea trasera o delantera, es idéntico al de su compañera de eje.

El diseño del sistema de suspensión entonces se reduce a determinar los parámetros del mecanismo de doble brazo A para la parte trasera y delantera y después a incorporar en el mecanismo un sistema de manejo de energía coherente con los parámetros seleccionados. Cada extremo del automóvil, es decir, eje delantero o trasero, tiene una serie de requerimientos particulares.

Ambos extremos deben preocuparse en cierta medida por mejorar la tracción lateral del eje y deben hacerlo como labor conjunta para evitar que el automóvil sea muy sub o sobrevirante. Pero en lo particular, en un automóvil de competencia de tracción trasera, la suspensión de dicho extremo tiene que cuidar mucho la capacidad de los neumáticos de producir aceleración longitudinal y no debe preocuparse tanto por las variaciones de ángulo de deslizamiento, pues al carecer de sistema de dirección, no hay mucho que pueda hacer al respecto. Para realizar un buen

diseño de suspensión trasera, sería conveniente contar con datos acerca de la influencia del deslizamiento longitudinal en la fuerza tractiva del neumático, o en otras palabras, información sobre su círculo de tracción.

Adicionalmente, de la teoría sabemos que el impacto del *camber* en la tracción longitudinal es negativo y entonces debemos mantener este parámetro en valores reducidos en los neumáticos traseros, lo cual hace relativamente inútil parte de la información con la que contamos.

Por los motivos mencionados, el presente ejemplo de diseño estará enfocado en la mitad delantera de la suspensión. Hemos dicho muy claramente que el proceso de diseño de suspensión debe realizarse para ambos extremos y no debemos olvidar del todo esa noción, pero este texto está enfocado a comentar las consideraciones teóricas que llevan a los diseños y cómo evaluarlos en diversos aspectos y no tanto en proponer un diseño como definitivo. El lector que se enfrente al diseño de un sistema de suspensión puede aplicar los mismos conceptos y consideraciones al extremo trasero del vehículo y generar así una solución adecuada. Finalmente, ningún diseño es perfecto sin ajustes e incluso la mayor cantidad de consideraciones pueden al final del diseño arrojar resultados inesperados, por lo que al final se proporciona una tabla de datos para la sintonización fina de parámetros, a fin de que cualquier subviraje o sobreviraje pueda ser mitigado con ajustes de pista.

Diseño cinemático y estático

Como ya sabemos, las primeras características geométricas del mecanismo de suspensión están determinadas por los parámetros estáticos o “parámetros de rueda” y por parámetros cinemáticos que tienen que ver con la longitud y orientación de los brazos de suspensión.

Los mecanismos de suspensión son mecanismos en el espacio tridimensional, pero los parámetros de su movimiento suelen ser determinados utilizando sólo la vista frontal. Esto es una consecuencia de eliminar los parámetros conocidos como “*antis*” (*anti-dive*, *anti-squat*). Los *antis* hacen del automóvil un vehículo más agresivo y firme, pero no son características deseables para un auto conducido por un piloto amateur²⁰. Existen textos con una cuidadosa descripción de cómo incorporar los *antis* al diseño para generar los puntos de la suspensión en el espacio, pero este proceso no es aplicable a nuestro particular caso.²¹

El mecanismo de 4 barras de la suspensión se diseña primero en posición estática y, como es de esperarse de tal mecanismo, se tienen 4 nodos o puntos para el diseño. Los primeros dos en ser diseñados corresponden al que será el eje de dirección, las puntas de cada uno de los brazos en A que se une a la rueda.

²⁰ [9]

²¹ [2]



Ilustración 35– Vista de la suspensión sin el chasis

Es en estos dos puntos que se toman en consideración los ya comentados parámetros de rueda. Estos parámetros tienen un impacto considerable en la dirección, pero es importante que sean determinados por el sistema de suspensión, pues influyen en el comportamiento del *camber*. Un análisis extensivo del sistema de dirección no es pertinente en este momento, pero sí atenderemos una discusión particular.

Caster y SAI

En el diseño del vehículo se utilizan dos parámetros de rueda para dar al mecanismo de dirección una capacidad de auto retorno a su alineación original: el *caster* y el *SAI*. Cada uno está definido en un plano diferente, pero al final ambos se refieren al eje de la dirección y su posición con respecto a la vertical. Pero así como comparten un propósito común cada uno tiene ventajas y desventajas en otros aspectos y de nuevo se debe escoger el compromiso más conveniente entre los valores de ambos.

Valores altos de *caster* hacen más difícil el operar la dirección al aumentar el *caster trail*, pero se utilizan porque producen una ganancia deseable de *camber* (hacia valores negativos en un lado y valores positivos en el otro). Por su parte, el *SAI* no produce un endurecimiento adverso de la dirección, pero produce ganancia positiva de *camber* en ambos extremos del eje delantero.

En el caso particular de los automóviles de competencia, a diferencia de los automóviles de calle, se prefiere entonces el *caster*, puesto que el desempeño de los neumáticos tiene una importancia mayor que la comodidad del piloto.

Así se pueden establecer la primera condición: siempre es recomendable un *caster* mayor al *SAI*, con valores típicos de $4^\circ - 8^\circ$ y $0^\circ - 3^\circ$ respectivamente.

Los valores utilizados en el UM- 513 fueron los siguientes:

Parámetro	Valor
<i>Kingpin (SAI)</i>	2.1°
<i>Scrub radius</i>	31.6 mm
<i>Caster</i>	6.6°
<i>Caster trail</i>	21.8 mm

Tabla 5– parámetros estáticos de la suspensión

Restringidos por el empaquetamiento de los componentes y las dimensiones de los rines y masas.

Diseño cinemático

Acotados ya los parámetros correspondientes a la rueda, queda definir los puntos en el chasis. Los puntos en ese extremo del mecanismo terminarán por definir la longitud de cada barra del mecanismo y más importante aún, su longitud relativa. Resultaría complicado empezar a colocar esos puntos si no hubiera alguna indicación de dónde empezar. Conocemos ya los parámetros de diseño cinemático y, una vez más, podemos identificar un conflicto de diseño entre ellos.

Roll center vs. Camber

Para consolidar el diseño geométrico del mecanismo de suspensión se deben tomar en cuenta parámetros que afectarán el desempeño individual de los neumáticos y el desempeño del vehículo en su totalidad. Otro de los conflictos importantes durante el diseño del mecanismo de suspensión es la posición del *roll center* y su estrecha relación con el control de la ganancia de *camber*.

La relación de estos parámetros se origina en que ambos son un producto de la posición a cada instante del centro instantáneo de rotación de cada mitad del mecanismo de suspensión. En particular, la distancia a la que este centro geométrico se encuentra. Cuanto más grande sea la distancia, menor será la variación del *camber* con el desplazamiento vertical:

$$l = \theta \cdot r; \frac{\theta}{l} = \frac{1}{r}$$

Este centro geométrico puede ubicarse a una distancia infinita si el mecanismo de suspensión es de barras paralelas y el *camber* permanece entonces constante para cualquier variación vertical de la suspensión.

De igual manera, esta distancia del centro instantáneo de rotación de cada mitad del mecanismo reducirá la variación en la posición del *roll center* y en el caso de una distancia infinita el *roll center* se encuentra a nivel del piso y justo al centro de la vía, y permanece ahí independientemente del desplazamiento vertical del mecanismo.

Maximizar la distancia de los centros instantáneos de rotación ayuda a mantener un mejor control del *roll center*, lo cual es conveniente pues hace más estable la retroalimentación que el piloto recibe del vehículo, pero reduce nuestras posibilidades de variar el *camber* para ajustar la fuerza lateral del neumático.

¿Qué compromiso de diseño es entonces más conveniente? El control de la posición del *roll center* es absolutamente necesario en vehículos Formula 1 que, como ya sabemos, dan gran importancia al desempeño aerodinámico y minimizan el movimiento del chasis. Pero en un vehículo en el que la tracción no depende de los efectos aerodinámicos, el control de *camber* es más importante y basta con que la posición del *roll center* se mantenga dentro o al menos cerca de los límites físicos del vehículo.

Así podemos establecer una distancia inicial para el centro instantáneo de rotación de la suspensión en posición estática y trabajar el diseño a partir de este punto.

De los datos que conocemos de los neumáticos A92, hemos visto que hasta un valor 3.5° el incremento de *camber* no hace sino beneficiar a la fuerza lateral, por lo que idealmente deseamos poder abarcar todo el rango de valores disponible. Así escogemos un valor estático de 2° que incrementará hasta 3.5° conforme la suspensión se desplace hacia arriba. ¿Por qué no escoger el máximo valor y mantenerlo constante? Haciendo del valor de *camber* un valor incremental con el movimiento lateral del vehículo estamos, al menos en parte, buscando contrarrestar los efectos adversos de la transferencia lateral de peso. Conforme la sensibilidad a la carga reste fuerza lateral al eje, los efectos del *camber* deben restaurarla.

Finalmente, el ancho de vía frontal es establecido dentro de los parámetros iniciales de diseño del vehículo. En el UM-513 se tomaron referencias de la literatura y se estableció una altura deseada para el *roll center*. Así completamos nuestros parámetros cinemáticos.

Parámetro	Valor
<i>Camber</i> estático	2°
Ganancia de <i>camber</i>	1 °/in
<i>Track frontal</i>	1225mm
<i>Roll center height</i> estático	12.1mm

Tabla 6- Parámetros cinemáticos de la suspensión

Y podemos calcular la distancia necesaria para los centros instantáneos.

$$r = \left(\frac{\theta}{l}\right)^{-1} = 57.3 \text{ in} = 1455.31 \text{ mm}$$



Ilustración 37 - Variación del camber con respecto al movimiento vertical de la suspensión

También se puede observar el comportamiento del *roll center* con el movimiento vertical de la suspensión, aunque este parámetro no es de gran importancia para la suspensión de un Formula SAE con un *camber* bien controlado.

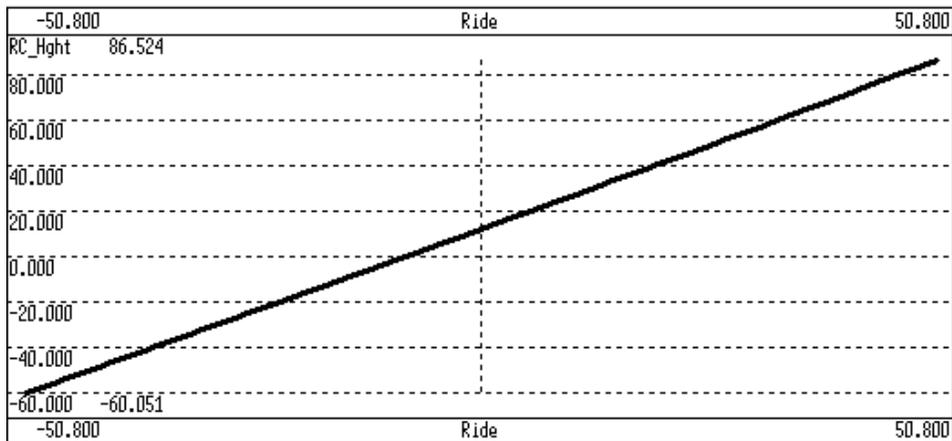


Ilustración 38- Variación de la altura del roll center como resultado del movimiento vertical de la suspensión

Sistema de manejo de energía

Una vez establecida la geometría de la parte del mecanismo que determina las características de movimiento de las ruedas al desplazarse verticalmente, se comienza con el diseño del sistema de manejo de energía. Ambos mecanismos pueden ser diseñados con relativa independencia, pero comparten un brazo del mecanismo de suspensión, ya sea el superior o el inferior, dependiendo de si la configuración es *push* o *pull-rod*

En este caso se trabaja con una suspensión *push-rod* por lo que el brazo compartido es el inferior. Así como en el caso del mecanismo de suspensión de 4 barras, las limitantes en términos de los puntos disponibles para el anclaje del EMS a tierra son establecidas por el chasis, el cual debe cumplir con el reglamento y con las metas de diseño del equipo.

El sistema de manejo de energía puede verse como un mecanismo multi lazo en el cual el *bellcrank* representa el punto de unión entre un mecanismo de 4 barras y un mecanismo de 3 con un elemento compresible. Es el *bellcrank* el que convierte el movimiento asociado a la rueda en el mecanismo de 4 barras en compresión en el resorte, haciendo de esta pieza un elemento muy importante y, de hecho, el elemento mismo que permite la existencia del mecanismo *push-rod*.

Se sabe ya que una de las metas de diseño del auto en términos de su funcionabilidad es la de hacer al auto fácil de maniobrar, lo cual implica que algunos parámetros sean relativamente constantes o al menos predecibles. Los parámetros de interés en este caso son aquellos que afectan la forma en que las fuerzas se transmiten del camino al piloto. Se busca que la orientación del resorte con respecto al chasis tenga la mínima variación posible para evitar vibraciones indeseadas y que las fuerzas transmitidas al auto estén dirigidas de forma tal que no representen un riesgo para el chasis. Finalmente, existe un parámetro cuya relevancia es de importancia considerable, pues es una medida de la magnitud del impacto que una perturbación externa tendrá en la suspensión. Esta es la “relación de movimiento”.

Una vez más se realizan los cálculos correspondientes a la posición de los puntos del mecanismo con ayuda de WinGeo3

Relación de movimiento

La relación de movimiento (*motion ratio*) es aquel cociente entre el desplazamiento vertical de la rueda misma y la compresión del resorte. Su definición matemática varía dependiendo de las fuentes en las cuales se le consulte, pues puede ser definido como el cociente del desplazamiento de la rueda entre el desplazamiento del resorte o la relación inversa. Se entiende que cualquiera que sea la definición, de tener este parámetro el valor de 1 en cualquier momento, querrá decir que ambos desplazamientos involucrados son exactamente iguales en ese punto. Para objetos de este trabajo se toma la primera definición, siendo entonces:

$$MR = \frac{x'}{x_s}$$

Donde:

MR – relación de movimiento

x' – desplazamiento de la rueda

x_s – desplazamiento en el resorte

Ya se ha mencionado que uno de los dos lazos involucrados en el mecanismo *push-rod* es un mecanismo de 4 barras. Se sabe que salvo el caso particular de mecanismos de barras paralelas, la relación entre los desplazamientos de diferentes barras raramente será lineal y mucho menos

constante. Esto, además de la presencia de un segundo lazo en el mecanismo, cuyo elemento es compresible, hace que la relación de movimiento sea un parámetro variante en el tiempo y cuya variación puede resultar considerablemente no lineal de no diseñarse cuidadosamente la geometría del EMS.

Una vez establecidos los puntos de partida para la suspensión y los requerimientos para cada uno de sus elementos, el comportamiento del *motion ratio* fue evaluado con ayuda de WinGeo3, obteniéndose las curvas que muestran su valor a lo largo del recorrido de la suspensión. Alterando algunos puntos del mecanismo se modificó la curva hasta obtener un comportamiento satisfactorio de este parámetro.



Ilustración 39- Variación de la relación de movimiento como resultado del movimiento vertical de la suspensión

Se observa tal como era esperado, que el comportamiento del *motion ratio* no es lineal a lo largo del recorrido de la suspensión. Sin embargo, se ha logrado que a pesar de la no linealidad exhibida, su valor se mantenga alrededor de 1 con variaciones no mayores al 10%, valores recomendados en la literatura y frecuentemente utilizados en diseños para Formula SAE.

Los beneficios de esta mínima variación en el *motion ratio* se pueden observar en el comportamiento de la compresión del resorte con respecto al desplazamiento de la rueda, tal como se muestra en la gráfica.

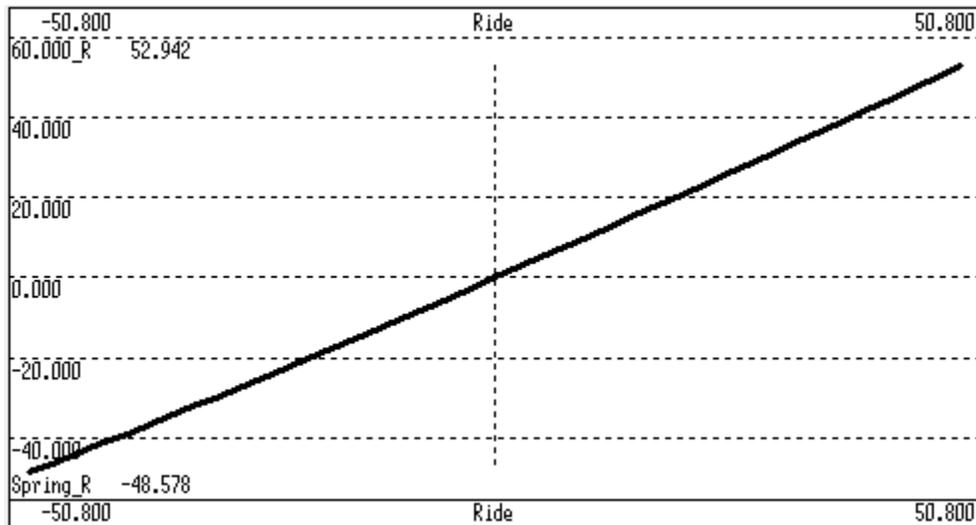


Ilustración 40- Compresión del resorte como resultado del movimiento vertical de la suspensión

Se aprecia que, gracias a la geometría resultante del proceso de diseño, la relación entre estas dos variables es muy cercana al comportamiento lineal y con una pendiente cuyo valor es cercano a 1, y siendo la relación de movimiento, de acuerdo con su definición, el valor inverso de esta pendiente.

La importancia del *motion ratio* va más allá de la relación entre desplazamientos. Considerando que se trata con un resorte lineal dentro del mecanismo, este parámetro no sólo dicta la relación entre los desplazamientos, sino que este desplazamiento será una consecuencia directa de las fuerzas que sean aplicadas al vehículo. Estas fuerzas provienen de la interacción del vehículo con el camino y serán transmitidas al piloto.

El *bellcrank* por sí mismo funciona como una palanca con el fulcro al centro, que para encontrarse en equilibrio dinámico, requiere que la relación entre las fuerzas aplicadas en cada extremo de la pieza sea el inverso de la relación entre la longitud de los brazos de palanca a los cuales dichas fuerzas se aplican.

Este principio extendido a todo el mecanismo, implica que la fuerza misma aplicada en la rueda y la fuerza aplicada en el resorte mismo serán proporcionales de acuerdo a un valor que resulta ser también el *motion ratio*. De acuerdo con lo anterior:

$$MR = \frac{x'}{x_s} = \frac{F_s}{F'}$$

Donde:

F' – Fuerza aplicada en la rueda

F_s – Fuerza “percibida” por el resorte

Lo cual involucra a la relación de movimiento directamente con la dinámica del vehículo. Cabe destacar que una pieza de interés trascendental si bien no único en la determinación de esta relación es el *bellcrank*, pues alterar sus brazos de palanca afectará cómo transmite el *push-rod* la fuerza de la rueda hacia el resorte. De lo anterior se puede decir entonces que:

$$MR = \frac{x'}{x_s} = \frac{F_s}{F'}$$

Donde:

x' : brazo de palanca de “entrada” (aquel ensamblado al *push-rod*)

x_s : brazo de palanca de “salida” (aquel ensamblado al *shock absorber*)

Dinámica de la suspensión

Con anterioridad se ha explicado la naturaleza dinámica del sistema de suspensión y el modelo convencional que se utiliza para asentar los parámetros de diseño. El modelo masa-resorte-amortiguador o MSD es un modelo dinámico de segundo orden que puede estar definido por su frecuencia natural y coeficiente de amortiguamiento. Vale la pena analizar la definición de ambos parámetros a partir de las constantes de resorte, amortiguador y la masa del sistema:

$$\omega = \sqrt{\frac{K'}{m}}$$

Donde:

ω - frecuencia natural en radianes por segundo

K' - Constante de resorte del sistema

m - masa del sistema

$$\zeta = \frac{C}{C_c}$$
$$C_c = 2\sqrt{K'm} = 2\omega m$$

Donde:

ζ - coeficiente de amortiguamiento

C - Constante del amortiguador, relaciona la fuerza que ejerce con la velocidad percibida

C_c - Constante crítica de amortiguamiento. El sistema tiene su respuesta más rápida sin oscilaciones

Como se puede observar, la frecuencia natural no depende de la constante del amortiguador, y es básicamente la raíz cuadrada de la relación entre la masa y la constante del resorte. Esto último es percibido por el usuario como la “dureza” de la suspensión. Es decir, entre mayor sea la frecuencia natural que caracteriza a nuestra suspensión, más dura parecerá esta para el usuario. Una suspensión demasiado suave provocará movimiento excesivo del chasis, mientras que una excesivamente dura impedirá un desplazamiento suficiente del mismo. En la literatura se recomiendan valores desde los 2Hz a 5Hz²² para vehículos deportivos, desde aquellos sin prestaciones aerodinámicas hasta aquellos en los que este último factor es de importancia considerable.

Es importante, sin embargo, considerar que para determinar la frecuencia natural de la suspensión en el vehículo se habla de la constante de resorte del sistema y de la masa del sistema, mismas que no corresponden exactamente a la constante del resorte mismo ni a la masa del vehículo.

Al considerarse la suspensión como sistema MSD se está enfocando el análisis a una de las cuatro esquinas del automóvil. En situaciones ideales, tal como la que se persigue en el prototipo fórmula, esta esquina estará cargada con aproximadamente un cuarto de la masa del sistema. Por otra parte, la constante de resorte K' estará relacionada con la constante del resorte mismo de la siguiente forma.

Si se considera que la ecuación que relaciona la fuerza y el desplazamiento en un resorte es:

$$K_s = \frac{F_s}{x_s}$$

Donde:

K_s : Constante de resorte

F_s : Fuerza aplicada

x_s : Desplazamiento del resorte

Y considerando las relaciones del *motion ratio*:

²² [3]

$$MR = \frac{x'}{x_s} = \frac{F_s}{F'}$$

Planteando entonces la constante de resorte del sistema:

$$K' = \frac{F'}{x'} = \frac{F_s}{x_s MR^2} = \frac{K_s}{MR^2}$$

Donde:

K' : constante de resorte del sistema

F' : fuerza aplicada a la rueda

x' : desplazamiento vertical de la rueda

Se encuentra así la relación entre ambas constantes de resorte, por lo que puede replantearse la frecuencia natural de la siguiente forma:

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K_s}{MR^2 m}}$$

Donde f es la frecuencia expresada en Hz.

Dado que se espera del vehículo una masa predefinida por todos los componentes incluidos en la masa suspendida, los únicos factores que podrán variarse para lograr la frecuencia natural deseada, serán la constante del resorte (pieza a seleccionar) y la relación de movimiento. En el caso del resorte, las piezas disponibles en el mercado cuentan con valores de rigidez pre establecidos, por lo cual no se puede elegir el mismo con completa libertad. En el caso de la relación de movimiento, se puede elegir con mayor libertad el valor exacto del parámetro a través de las dimensiones del *bellcrank*, sin perder de vista la validación de estas dimensiones en el contexto del mecanismo completo.

Debido que el proceso de diseño será iterativo en lo que a la selección de resorte y determinación de frecuencia natural respecta, la ecuación:

$$K' = 4\pi f^2 \cdot m \cdot MR^2$$

Será de suma utilidad.

Finalmente, la ecuación para el coeficiente de amortiguamiento utilizando el valor de la frecuencia en Hz es la siguiente:

$$\zeta = \frac{C}{C_c}$$

$$C_c = 2\sqrt{K'm} = 2\omega m = 4\pi f m$$

En este caso, naturalmente se incluye la constante del amortiguador, último parámetro a determinar para el sistema de manejo de energía. Si bien, en el modelo utilizado se le considera como constante, lo cierto es que este valor es variable, lo cual quiere decir que la característica de fuerza contra velocidad del amortiguador tiene un comportamiento no lineal. Debido al tipo de amortiguador utilizado se pueden considerar dos constantes para la curva, misma que se dividirá entonces en comportamiento de baja y alta velocidad.

El amortiguador

En 2012 se propuso el cambio de los amortiguadores requeridos para el automóvil. En los modelos 2010 y 2011 de UNAM Motorsports se habían utilizado amortiguadores para bicicleta de montaña de la marca FOX, que proporcionaban un servicio eficaz en un tamaño adecuado para el prototipo automotriz. Sin embargo, a pesar de cumplir su tarea, los amortiguadores no eran la opción más adecuada para el desarrollo de una suspensión ajustable y de alto desempeño, puesto que están diseñados para su uso individual y no en conjunto, además de que se desconocían por completo los valores reales de las constantes que caracterizan su desempeño.

La elección para la temporada 2012 y subsecuentes debía considerar la necesidad de ajustar la suspensión y poder realizar cálculos confiables sobre su desempeño. La decisión fue cambiar los amortiguadores por el modelo TTX25 FSAE de la marca Öhlins, amortiguadores con dimensiones muy similares a las de los antes utilizados, pero fabricados explícitamente para su uso en esta categoría automotriz. Se presenta a continuación una tabla comparativa entre ambos modelos:

Característica	FOX VAN Bike Shock	Öhlins TTX25 FSAE MkII
Ajustabilidad Básica	High Speed Rebound	High Speed Rebound Low Speed Rebound High Speed Compression Low Speed Compression
Válvulas internas	No intercambiables	Intercambiables

Precisión de los componentes	Baja (pensados para usarse individualmente)	Alta (pensados para usarse en conjunto)
Puntos de unión	Buje sencillo	Rodamiento esférico
Precarga de resorte	Ajustable	Ajustable
Precio aprox. (USD)	250	400

Tabla 7– comparativa de amortiguadores FOX VAN Shocks y Öhlins TTX25 FSAE



Ilustración 41- Amortiguadores: FOX VAN Shocks (izquierda) y Öhlins TTX25 FSAE (derecha)

Dentro de los componentes de la suspensión, es este el elemento que ofrece más opciones de ajuste y que posee las características más peculiares en cuanto a su comportamiento.

La función básica del amortiguador es la de disipar energía, oponiéndose así a que el sistema masa-resorte oscile más de lo permisible. La fuerza con la que este elemento se opone al movimiento es proporcional a la velocidad relativa entre sus componentes. El estudio de la dinámica automotriz ha demostrado, sin embargo, que como muchos otros parámetros en el automóvil, la fuerza con la que se necesita que el amortiguador se oponga será distinta para diferentes situaciones. En particular, el “rebote” de la suspensión, es decir la extensión de los resortes, es un fenómeno nocivo para el automóvil de competencia, haciéndolo perder tracción momentáneamente, por lo que debe mitigarse más intensamente que la compresión original. Esto se traduce en que la constante del amortiguador debe ser más grande en distensión que en compresión.

Adicionalmente, los amortiguadores para vehículos de competencia permiten distinguir bajas y altas velocidades de compresión y distensión. La razón de esto es que los movimientos producidos por fuerzas laterales y actuando en la totalidad del vehículo (*roll*) se producen en un rango de velocidades diferente a aquel en que se producen los movimientos producidos por las

irregularidades del camino cada rueda de forma individual (*ride*). La magnitud de las fuerzas y el nivel de requerido de amortiguamiento en cada situación también es diferente, buscándose un más firme control del *roll* que del *ride*.

En general, es el amortiguamiento el último parámetro de suspensión al que se hará ajuste fino una vez que el automóvil esté en la pista, por lo que sus valores finales suelen ser reflejo de la retroalimentación del piloto. Existen en la literatura valores iniciales sugeridos para cada una de las cuatro secciones de la curva (*low/high speed rebound, low/high speed compression*) que son calculados tomando como punto de partida el coeficiente de amortiguamiento calculado con el modelo MSD. En UNAM Motorsports se han producido ya documentos que abordan en detalle suficiente el diseño de estos parámetros y la correspondiente elección del resorte y curva particular del amortiguador, utilizando el Öhlins TTX25 FSAE, y con el correspondiente análisis dinámico. Este análisis es importante para el desempeño final del vehículo pero aporta pocas consideraciones teóricas aplicables al resto de los temas aquí tratados.

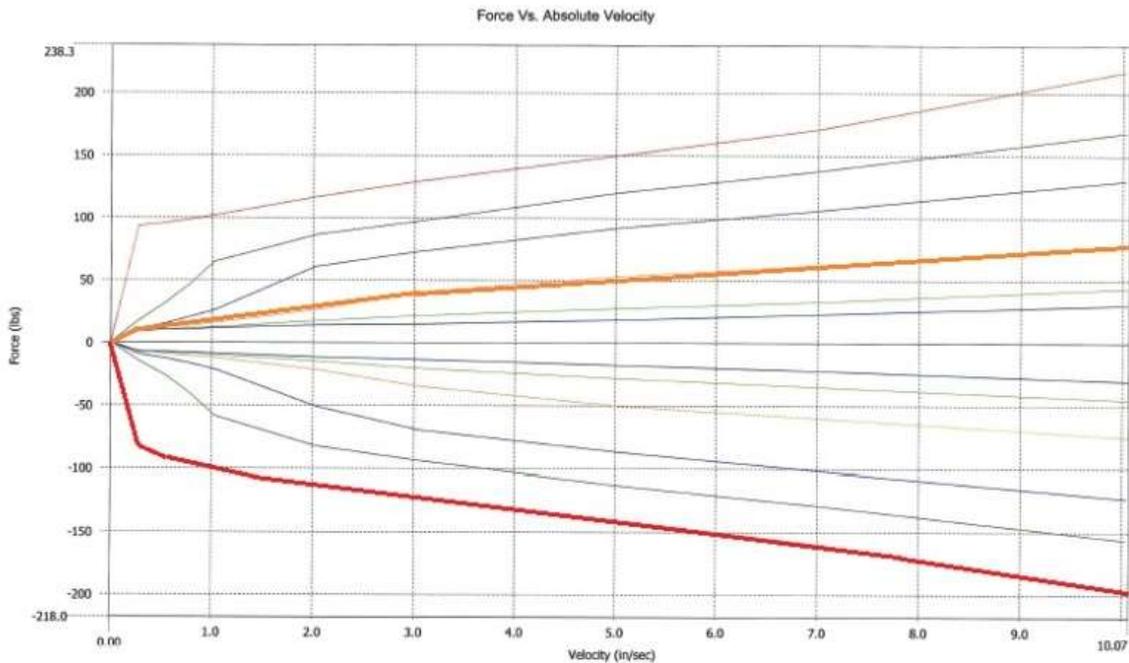


Ilustración 42– Ejemplo de curvas de amortiguamiento seleccionadas para el inicio de las pruebas del modelo 2012

Diseño del *bellcrank*

El diseño de los parámetros de suspensión requiere de una comprensión al menos razonable de los fines últimos de este mecanismo y cómo es que todo los parámetros estarán relacionados, haciendo del proceso de diseño cinemático y dinámico algo no trivial. El diseño físico de los componentes del mecanismo, por otra parte, tiene una exigencia menor y las posibles innovaciones en las piezas pueden aportar poco al vehículo en comparación con la aportación que un buen diseño de los parámetros cinemáticos y dinámicos puede tener.

Aun así, en el diseño de la suspensión 2012 de UNAM Motorsports se presentó un requerimiento particular de diseño que hizo del *bellcrank* una pieza con dimensiones espaciales excesivas y, por lo tanto, con un peso excesivo. Esto hizo necesario encontrar la forma de remover la mayor cantidad de material sin debilitar su estructura. La solución se dio a través de un método gráfico derivado de los estudios del profesor Clauss Mattheck de la universidad de Karlsruhe y en conjunto con el uso de nuevas herramientas de maquinado y materiales ligeros resultó en una reducción importante del peso total de la pieza.

Una aproximación a la optimización topológica utilizando un método heurístico

Las dimensiones de la pieza en cuestión fueron determinadas durante el diseño cinemático del mecanismo para el sistema de manejo de energía de la suspensión. La pieza buscaba aportar al mecanismo puntos de apoyo tales que permitieran la relación de movimiento esperada, que fuera prácticamente constante y de valor cercano a 1.

El diseño del sistema se llevó a cabo una vez más en WinGeo3 y se obtuvieron las siguientes características para el *bellcrank*:

Brazo de entrada, correspondiente a la unión con el *push-rod*: 90mm

Brazo de salida, correspondiente a la unión con el resorte: 111mm

Ángulo entre ambos brazos: 74°

Se consideró un punto de sujeción para una posible barra estabilizadora, descartada al final.

Estos parámetros definían la forma y por lo tanto el volumen máximo de la pieza a optimizar. Una vez definido el contorno de la pieza se planteó el método de conos de fuerza establecido por Clauss Mattheck para determinar en qué áreas se removerá material.

Para este efecto, se debe elegir una situación de carga en la pieza, de manera que se tenga la orientación aproximada de la fuerza aplicada en ella. Las fuerzas aplicadas en el *bellcrank* vienen de elementos lineales, por lo que se puede considerar que la línea de acción de dicha fuerza es la misma de la barra y se puede observar en la configuración del mecanismo de manejo de energía.

Una vez determinada la dirección de las fuerzas aplicadas y de reacción en la pieza, se dibujan líneas apartadas 45° de la línea de acción de cada fuerza y convergentes en el punto de aplicación. Estas líneas serán continuadas más allá del punto de aplicación, generándose entonces cuatro cuadrantes, dos de los cuales corresponden a los llamados conos de compresión y tensión.

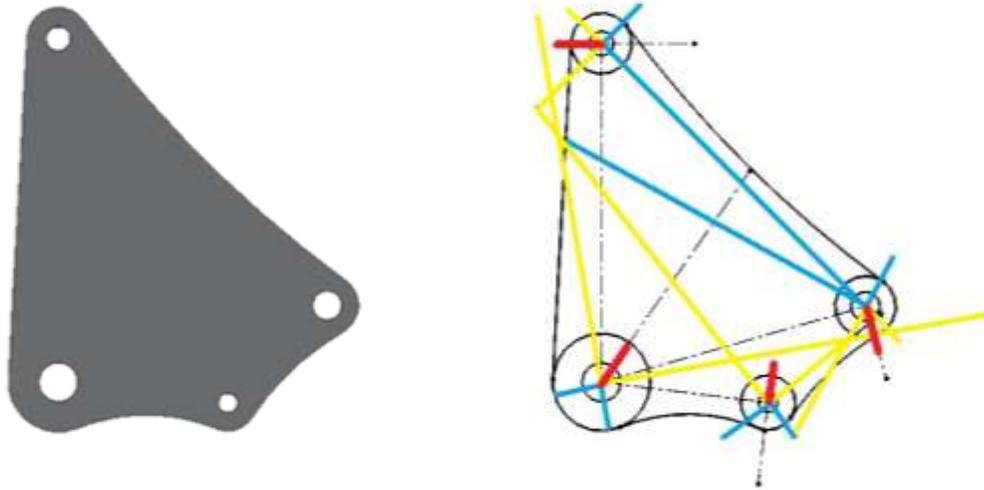


Ilustración 43– El método gráfico de Mattheck sobre el contorno original de la pieza. Se muestran los conos de compresión (amarillo) y los conos de tensión (azul)

Diseño CAD

Las líneas que delimitan los conos de tensión y compresión corresponden a las zonas donde no se deberá remover el material. El ancho de estas zonas y por lo tanto la cantidad de material dependen de la magnitud de la fuerza en cuestión, aspecto en el cual el método de conos de fuerza no tiene ningún impacto, por lo cual debe ser validado posteriormente a través de un estudio de tensión por medio del método de elemento finito.

Si bien, la topología generada con el método de Mattheck debe resultar próxima a lo ideal en términos de resistencia por unidad de peso, falla también al tomar en cuenta algunos requisitos de manufactura y ensamble. En este diseño se tomó también la decisión de mantener el contorno de toda la pieza para darle mayor unidad. A su vez, se unieron dos de las líneas mostradas por el método de Mattheck en un solo elemento central curvo para reducir el número de líneas sin afectar demasiado el método de optimización.



Ilustración 44 - Proceso de remoción de material

Material seleccionado para el *bellcrank*

La optimización topológica nos indicará dónde debe estar presente el material, mas no tiene una opinión directa en cuanto a qué material se recomienda usar. Dado que lo que se busca es el contar con la mejor relación masa-resistencia, se busca entonces un material ligero con la máxima resistencia a la tracción posible. Desde el inicio de UNAM Motorsports, se ha optado por el uso de aleaciones de aluminio, las cuales son fáciles de maquinar y ofrecen un mínimo peso a cambio de una resistencia más que suficiente. Dentro de las aleaciones más utilizadas en la industria por su ligereza y resistencia se encuentran la 6061 y 7075, usadas desde la construcción de marcos ultraligeros para bicicletas de montaña, hasta en la industria aeroespacial.

El aluminio 7075 ofrece una resistencia máxima a la tracción de casi el doble que aquella de la aleación 6061 a cambio de un aumento en densidad de menos del 5%, por lo cual sería la opción ideal. La disponibilidad y precio de esta aleación han sido, desafortunadamente, un factor limitante para el equipo, por lo cual se ha trabajado con aleación 6061 con resultados muy satisfactorios a lo largo de la historia del proyecto.

Es entonces que se ha elegido esta aleación para la manufactura de las piezas de aluminio del prototipo 2012 del equipo. En particular, se trata de una aleación 6061-T6, la cual ha recibido un tratamiento de envejecimiento térmico artificial. Esta aleación de aluminio con Silicio, Magnesio y Cobre como principales agentes aleantes, ofrece un límite elástico de 241 MPa con una densidad de sólo 2.7 g/cm³, además de que su resistencia a la fatiga es destacable para una aleación de aluminio, si bien tampoco muestra un punto de inflexión bien definido en una gráfica S-N con un rango de hasta 500 000 000 ciclos de carga.

Validación a través de análisis por elementos finitos (*FEM*)

La suspensión *push-rod* es un mecanismo multi-lazo. En todo mecanismo, las fuerzas son transmitidas por cada elemento a aquellos que a él están unidos. Además, dado que la posición relativa entre elementos es variante con el tiempo, la dirección y magnitud de estas fuerzas de reacción serán igualmente variantes. Existen métodos que permiten determinar, dada una entrada de fuerza al mecanismo, las reacciones en todos los elementos para un rango determinado del movimiento. Estos métodos requieren, sin embargo, de un trabajo considerable y las ventajas ofrecidas por ellos no justifican su aplicación en el presente trabajo. El camino utilizado en este caso para el planteamiento del análisis de elemento finito, fue el de plantear un escenario crítico (*worst case scenario*), en el cual se analiza qué situación es la que puede traer la carga más severa a la pieza que se va a analizar, razonando que si esta es capaz de soportar la máxima carga, será también capaz de soportar cargas menores. Un requerimiento para que este escenario crítico sea válido, será también, que la dirección de las fuerzas sea constante o de variación mínima. En este caso, las variaciones en la orientación de las fuerzas aplicadas al *bellcrank* cumplen con este criterio, con una variación máxima de 10° de acuerdo con el análisis cinemático de la suspensión, pues el diseño geométrico fue cuidado y orientado a obtener un *motion ratio* poco variante y para lograrlo, los ángulos entre piezas deben variar muy poco; esta variación mínima significa que en

cualquier punto del recorrido de la suspensión, más del 98% de la fuerza estará orientada siempre en la dirección inicial, correspondiente a la posición estática del vehículo, haciendo de este un planteamiento válido para el *FEM*.

Determinar el escenario crítico de la suspensión es relativamente sencillo para condiciones de manejo al límite, es decir, ignorando la posibilidad de falla por un choque. Ya hemos analizado la capacidad máxima de aceleración lateral del vehículo, concluyendo que, al menos para un vehículo con neumáticos de *Avon Tyres*, está apenas por encima del caso supuesto por el *Tilt Table* de la competencia, a $1.78g$ de aceleración, determinado por el límite de tracción del eje trasero. En esta situación de aceleración lateral, el neumático más cargado del eje delantero percibe 157 kg de fuerza vertical, que son transmitidos a la suspensión a través del *push rod* y el *bellcrank*.

Si además el piloto realizara una maniobra de frenado, la transferencia longitudinal de peso aumentaría la carga de este neumático antes de que deslice. De los datos del sistema de frenos, sabemos que las deceleraciones permitidas por las balatas y discos del vehículo son de hasta $2g$. Bajo estas condiciones el *bellcrank* recibe hasta 280 kgf de fuerza. Recordemos que este es un caso hipotético que, de acuerdo con la técnica correcta de manejo, no debería presentarse y de suceder hará que el vehículo pierda el control. No obstante, si el piloto llega a considerar la maniobra necesaria, se espera que todas las piezas del vehículo soporten la maniobra.

Este proceso de carga sería realizado paulatinamente en la suspensión, y no como un impacto repentino, gracias a la correcta selección de resorte y amortiguador, por lo que un estudio cuasi estático como lo es el *FEM* es suficiente. Existen casos en los que, como medida de seguridad, los diseñadores de estas piezas han considerado situaciones en las que el *bellcrank* soporta el peso completo del vehículo, que es en este caso un 25% superior al caso de carga escogido. Esta medida de seguridad es útil para garantizar la supervivencia de la pieza, pero no tiene suficiente sustento teórico, lo que lleva a conclusiones erróneas en términos del verdadero factor de seguridad que la pieza tiene y podría llevar también fácilmente a una pieza sobredimensionada (25% en este caso) haciendo inútil el esfuerzo inicial de optimizarla.

Debe tenerse en cuenta que el método gráfico de Mattheck está basado en las líneas de acción de las fuerzas y no en su dirección o magnitud, por lo que no distingue entre los casos de tensión y compresión. En este caso la fuerza crítica actúa en compresión y será sólo en la simulación por computadora que se podrá observar si la compresión produce flexión indeseada en la pieza optimizada.

Una vez determinados los casos de carga para los análisis de elemento finito, se realizó la simulación con el apoyo de otros miembros del equipo y con ayuda de la paquetería incluida en Solid Works la cual si bien no es una paquetería especializada en el propósito, proporciona datos suficientemente confiables si se utilizan las condiciones de frontera adecuadas. Se obtuvieron los siguientes resultados:

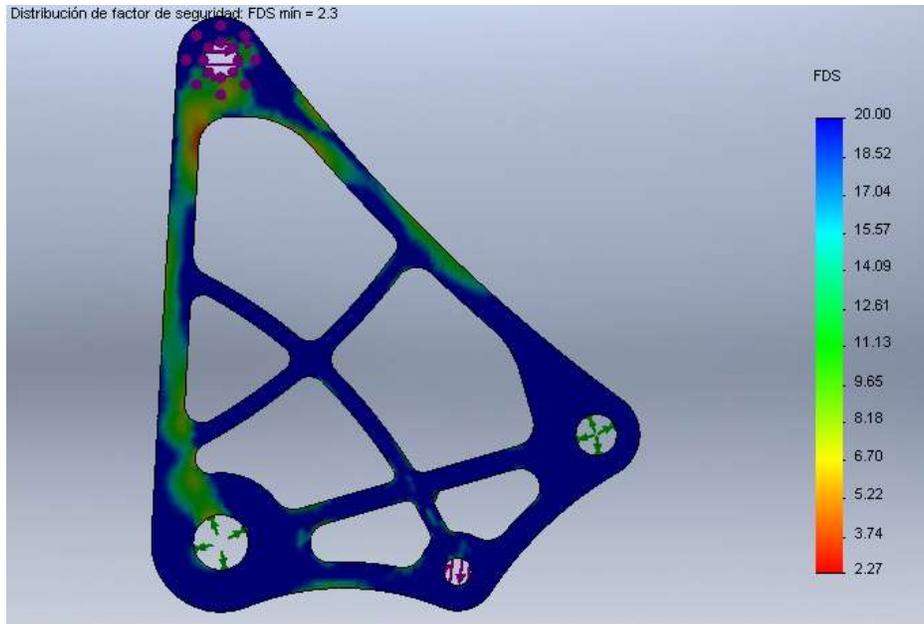


Ilustración 45– Distribución del factor de seguridad

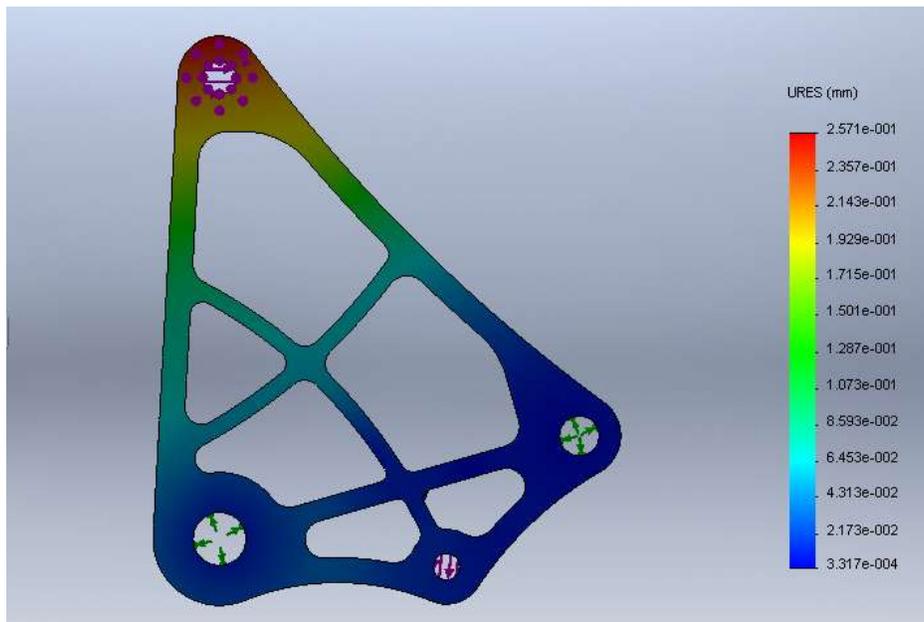


Ilustración 46– Deflexiones en la pieza

En la primera figura se muestra la distribución de los esfuerzos en la pieza en una escala normalizada por el esfuerzo de cedencia del material. Esto proporciona como resultado el “factor de seguridad” de la pieza, que es la cantidad de veces en magnitud del esfuerzo máximo que la pieza puede soportar sin fallar. Se busca que el mínimo factor de seguridad sea de 2, de acuerdo con las consideraciones sugeridas por la literatura como prevención a la falla por fatiga. Un punto importante a observar es la distribución relativamente uniforme del factor de seguridad, lo cual es

producto directo de remover material de forma sistemática con el método heurístico de Mattheck y dejar el material sólo donde es estrictamente necesario.

De los desplazamientos unitarios sólo se puede decir que la máxima deflexión de la pieza en la dirección de interés es de sólo 0.25 mm, lo que representa menos del 1% del recorrido total del resorte y resulta entonces, como sería deseado, despreciable en un posible análisis dinámico de la suspensión.

Manufactura y el reporte de costos

Otro aspecto que se evalúa en las competencias de Formula SAE es el llamado *Cost Event* que consiste en el presupuesto completo de manufactura para el automóvil, el cual según el modelo de negocios supuesto en el reglamento, será fabricado en una cantidad de 10,000 como prototipo recreativo de competencia.

En este reporte, cada pieza tanto manufacturada como comprada y cada ensamble a realizar entre estas piezas debe ser pormenorizado y justificado. La evaluación consiste en 2 partes, la más importante de las cuales es el costo del vehículo completo, y en la cual se otorga al vehículo más barato la máxima calificación base, para después aplicarse las penalizaciones necesarias en caso de que el reporte haya omitido alguna parte del automóvil o algún proceso de ensamble o manufactura correspondientes a dicha parte. Algo que debe considerarse en este caso, es que el costo real del automóvil para el equipo, el costo real de las partes y el costo reportado en este evento pueden diferir significativamente debido a dos factores: la variación en los precios de la materia prima, dependiendo del distribuidor seleccionado y los gastos de envío correspondientes, y en segundo lugar, el hecho de que muchos materiales y procesos son patrocinados a los equipos participantes por la universidad o por empresas privadas.

Para evitar estas discrepancias en los costos, el reporte entregado en la competencia está basado en tablas proporcionadas directamente por SAE International, previo a cada competencia.

UNAM Motorsports ha contado con el apoyo del CCADET UNAM para el maquinado de las diferentes piezas que así lo ameriten, facilitando al equipo el uso de diferentes máquinas con control numérico automatizado. Una de estas máquinas es una cortadora *waterjet* la cual ha sido de gran ayuda para el equipo, pues permite cortar prácticamente cualquier contorno en placas de materiales como aluminio e incluso acero.



Ilustración 47– Maquinado en cortadora waterjet

La posibilidad de cortar un contorno a través de la placa completa, en contraste a remover el material poco a poco en una fresadora, hace de este proceso mucho más rápido y barato, que para piezas con cortes extruidos a través de ellas es muy conveniente. Por otra parte, esta eficacia no sólo se refleja en la capacidad del equipo de remover más material en menos tiempo y tener un avance más rápido dentro del plan de manufactura del automóvil, sino que tiene un impacto en el reporte de costo. En la tabla siguiente se compara el costo estimado del proceso de corte *waterjet* realizado en la pieza contra el costo que tendría de realizarse en una fresa CNC, de acuerdo con las tablas para Formula SAE West 2012 y utilizando datos obtenidos del modelo CAD del *bellcrank* en SolidWorks.

Proceso	Costo unitario (USD)	Cantidad removida	Costo total
Waterjet	\$0.01 /cm	114.96 cm	\$1.15
Fresado	\$0.04/cm ³	464 cm ³	\$18.6

Ilustración 48– Comparación de costos para diferentes métodos de maquinado

Posterior al corte en agua, la pieza aún necesitó algunos cortes a realizarse con un cortador redondo en una fresadora, que se encuentran en otros planos de corte, para cumplir con el diseño realizado, pero el volumen a remover fue mínimo. Este costo adicional más los costos de montaje y desmontaje de la pieza de acuerdo a SAE International no superan los \$2, lo cual hace que la opción de corte con *waterjet* disminuya el costo de maquinado de la pieza a cerca de una sexta parte del costo que tendría de realizarse con otra alternativa.



Ilustración 49 – resultado final del proceso de optimización topológica

Sintonización de parámetros

Una vez que el automóvil se encuentra ya en pista, los esfuerzos de diseño realizados son imposibles ya de cambiar, pero es aún posible realizar ajustes a la suspensión para corregir el comportamiento del vehículo o adaptarlo a una prueba particular. Este ajuste puede que no aporte una mayor capacidad de aceleración lateral a ninguno de los extremos del vehículo, pero si puede corregir su maniobrabilidad.

El principio básico sigue siendo el mismo: aumentar la influencia del eje trasero o disminuir la del delantero reduce el sobreviraje y las acciones contrarias reducen el subviraje. La tabla siguiente enumera ajustes que se pueden realizar y su efecto.

Parámetro a cambiar	Reduce Subviraje	Reduce Sobreviraje
Distribución de peso	Hacia atrás	Hacia el frente
Resortes y amortiguadores delanteros	Más suaves	Más firmes
Resortes y amortiguadores traseros	Más firmes	Más suaves
Barra estabilizadora delantera	Más suave	Más firme
Barra estabilizadora trasera	Más firme	Más suave
Presión del neumático en eje delantero	Más baja	Más alta
Presión del neumático en eje trasero	Más alta	Más baja
Camber en el neumático delantero	Aumentar	Disminuir

Camber en el neumático trasero	Disminuir	Aumentar
Toe de la rueda delantera	Disminuir	Aumentar
Toe de la rueda trasera	Disminuir	Aumentar

Tabla 6.08 – Comparación de costos para diferentes métodos de maquinado

Evaluación personal del FSAE 2012 (UM-513)

El vehículo diseñado para la competencia 2012 de FSAE West fue el tercer vehículo en la historia del equipo y representó una oportunidad para proponer diseños nuevos y empezar una etapa diferente. Mientras que el segundo prototipo representaba la evolución de los conceptos presentados en el primero, el UM-513 incorporaba nuevos componentes en el tren motriz, una nueva posición del piloto, y por lo tanto un muy diferente chasis, además del primer intento de trabajar en la aerodinámica del vehículo. Todo esto integrado bajo la primera carrocería completa que, pintada ahora de blanco, inauguraba la era moderna del equipo.

Pero no todo en el automóvil fue bueno. Quienes participamos en el proceso o lo seguimos de cerca, sabemos que los resultados del vehículo en competencia fueron decepcionantes. Fallas varias en diversos sistemas impidieron al automóvil demostrar su potencial en las pruebas y lo llevaron al final a abandonar la competencia sin completar prueba dinámica alguna. Esto se debe a varias causas: un concepto en exceso ambicioso, una mala administración de las innovaciones, la falta de conocimiento en áreas clave del proyecto y la juventud del equipo en términos de la competencia.

Ya he abordado el punto de la aerodinámica, pero lo tomaré una vez más como ejemplo. En 2012 se pretendía introducir un piso plano con difusor para aumentar la carga aerodinámica en el vehículo. Este componente impuso algunas restricciones de diseño a los encargados del tren motriz, pues el difusor se encuentra en la misma área del vehículo. Además consumió, después de la carrocería misma, la mayor cantidad de horas hombre para su fabricación y al final entregó un desempeño apenas superior al 10% de su diseño original. Aquí está ilustrada la ambición, la falla para administrar y priorizar los sistemas básicos y los innovadores, la falta de experiencia del equipo y, muy importante, su falta de conocimiento del problema general, pues ya hemos visto que la aerodinámica es una excelente ayuda sólo para condiciones de alta velocidad y cuando todo otro medio para aumentar la tracción se ha agotado.

La aerodinámica planeada también afectó a un aspecto normalmente bien vigilado del prototipo: su peso. Tanto el trabajo de carrocería como el piso plano con difusor estaban fabricados con numerosas capas de resina y *kevlar*®, agregando así varios kilos al total del automóvil. Las alteraciones a la masa no suspendida y modificaciones en la parte trasera del vehículo, resultado de problemas de concepto, también contribuyeron al problema del ya pesado automóvil. Sabemos ya que la adición de masa no debía ser un problema para la maniobrabilidad del vehículo en términos de viraje, pero un cambio descontrolado de la distribución de la masa y una falta de

conocimiento suficiente de la suspensión lo llevó a ser un vehículo en exceso subvirante en condiciones normales y sobrevirante al límite, haciéndolo relativamente torpe y peligroso.

Esa es la historia de este prototipo que tuvo entre sus aciertos la adquisición de componentes que podrían usarse en años por venir para desarrollar sistemas más adecuados a la competencia, permitió un paso más en la evolución de componentes ya previamente trabajados y fue el primer vehículo visualmente atractivo, un aspecto que es de gran ayuda con los patrocinadores del equipo, pero falló en su meta última de conseguir puntos, quedando así a la vez como un fracaso en la historia del equipo y como un caso del cual mucho se puede aún aprender



Ilustración 50– UM-513 antes de participar en Endurance en Lincoln, Nebraska durante 2012

Comentarios finales acerca del sistema de suspensión utilizado en UNAM Motorsports

Sería difícil acertar un común denominador en cuanto a la suspensión de UNAM Motorsports a lo largo de su historia. Existen tendencias de diseño en la mayoría de los sistemas que se han adoptado, adaptado, repetido e incluso abandonado claramente, pero identificar esta evolución en el sistema de suspensión es imposible.

Esto tiene explicación. Identificar en la suspensión la importancia o significado de los parámetros es algo sumamente complicado para el ojo inexperto y la mayoría de los diseñadores que hemos pasado por el equipo hemos sido eso justamente: novatos. Fallando al identificar los parámetros relevantes y convenientes hemos fallado también en conservarlos y en eliminar los errores, produciendo cada año diseños nuevos y cambiando radicalmente la filosofía del vehículo sin saberlo.

Ejemplos hay suficientes. En 2010 la suspensión del auto novato era rudimentaria y en exceso rígida, haciendo del auto muy difícil de manejar. En 2011 la suspensión *pull-rod* fue introducida con el interés de probar una configuración con un centro de masa bajo, pero los parámetros dinámicos correspondientes fueron elegidos de nuevo sin información suficiente resultando en una suspensión rígida. En 2012 llegó mi turno de diseñar y la suspensión fue diseñada en su momento sin conocimiento suficiente de la dinámica del auto completo, produciendo así un vehículo con problemas de viraje. Ese mismo año se hizo el primer intento de realizar sintonización de parámetros en pista, pero la efectividad de esos ajustes quedaría aún por ser comprobada al no completar el vehículo las pruebas.



Ilustración 51– Sistema de suspensión utilizado en el UM-513. Al fondo miembros del equipo realizando ajustes

Trabajo a futuro

El trabajo realizado, ha tratado con muy diversos temas relativos al comportamiento de un automóvil y las características que lo hacen ser lo que es. Al entender este funcionamiento y sus pormenores, el ingeniero es entonces capaz de diseñar no sólo sistemas mecánicos que mejoren el desempeño, sino sistemas mecatrónicos que lo hagan de forma activa. Sistemas como los frenos ABS se benefician del entendimiento del deslizamiento longitudinal de un neumático. Del mismo modo, un sistema de estabilidad, tal como el ESP, buscará mantener bajo control al automóvil evitando su sobreviraje. Un sistema de arranque asistido deberá entender la dinámica del

neumático y del vehículo, y una suspensión activa o semi-activa deberán entender a la totalidad los movimientos del automóvil y sus interrelaciones. Estos sistemas y otras tantas ideas pueden ser desarrollados a través del dominio de los conocimientos enunciados en este trabajo.

Actualmente se ha implementado ya en el modelo 2014 de UNAM Motorsports la capacidad de adquirir información por medio de sensores. Queda ahora el incorporar el conocimiento para analizar e interpretar los datos obtenidos, de forma que estos puedan servir para la mejora del vehículo.

Se ha propuesto además una forma de relacionar las mejoras técnicas en el automóvil con un aumento definido en los puntos obtenidos. En un futuro, se propone que se utilicen esos lineamientos para evaluar el desempeño del vehículo área por área en los eventos dinámicos y no sólo en el marco del evento de diseño

Finalmente, la primera sección del presente trabajo se ha desarrollado teniendo en mente que pudiera ser leída por cualquiera como una introducción al estudio de la dinámica del vehículo y del neumático y eventualmente podría a partir de ella desarrollarse un texto de apoyo para los estudiantes que se incorporen UNAM Motorsports en años futuros.



Ilustración 52— el equipo de UNAM Motorsports en 2012

CONCLUSIONES

“When common sense fails (to explain things rationally), uncommon sense must be created.”

-Leonard Suskind

Recuerdo, durante FSAE West 2012, que después de una muy compleja tarde en la que el FSAE UNAM 2012, o UM-513 como se le ha llamado recientemente, apenas logró superar la prueba de frenado, nos encontrábamos en el último día de la competencia reparando y preparando al automóvil para la última prueba: *Endurance*, que constituye el logro más importante de los equipos. A pesar de los contratiempos del día anterior, un buen puntaje en ella podía redimir al equipo. Durante el desarrollo del vehículo se habían utilizado resortes más rígidos de lo originalmente pensado y el vehículo se comportaba de forma extraña. Un par de horas antes del momento de competir, pudimos conseguir resortes más suaves, más suaves incluso que los del diseño original, e impulsivamente decidí colocarlos en vez de los que ya tenía el auto. La fortuna no estuvo del lado del equipo y un error eléctrico dejó al vehículo fuera de la competencia, haciéndonos perder los últimos puntos posibles. Sin embargo, el piloto en turno, Luis Rivero, dijo del ajuste: “El auto se sentía diferente, tardaba más en agarrar la curva, pero la agarraba mejor”.

En ese momento no tuve una explicación suficientemente buena para lo que había sucedido, y siendo honestos, nadie la tenía, pero era un indicador de algo que hasta ahora no había sido asimilado en el equipo: la suspensión, en efecto, es un sistema que puede cambiar sensiblemente el comportamiento del vehículo y cuyos parámetros pueden ajustarse en cualquier momento con relativa facilidad. Mucho tiempo me ha tomado el poder dar una explicación a ese y otros comportamientos interesantes de nuestros vehículos y en el camino se ha reforzado una idea. La idea de que la dinámica del vehículo, y en consecuencia la suspensión, son áreas con un gran potencial para mejorar nuestro diseño y acercarnos gradualmente a los primeros lugares de la categoría.

Para obtener de la suspensión un comportamiento adecuado y en congruencia con el resto de los sistemas que componen al automóvil, se requiere un esfuerzo considerable para lograr un diseño geométrico que cumpla los requisitos del neumático seleccionado, con las características que el piloto desea del vehículo mismo y con el reglamento. Todo esto sin mencionar las restricciones evidentes de tiempo, presupuesto y otras tantas metas como pueden ser el tamaño y rigidez de las piezas involucradas.

Confrontados a una situación tal, se pueden aplicar muy diversas técnicas de diseño, pero lo verdaderamente importante es entender el problema al que nos enfrentamos.

Se han presentado diversos análisis que permitieran no sólo entender la importancia que puede tener el concebir un sistema de suspensión en el contexto del vehículo, sino ilustrar un camino para poder vincular las metas de diseño con metas en términos de puntos de la competencia, ayudando a evaluar posibles proyectos de acuerdo con su verdadero impacto en el desempeño del

equipo en las competencias Formula SAE y no sólo de acuerdo con metas personales del desarrollador de cada sistema.

La motivación principal de este trabajo ha sido siempre el guiar en la comprensión de los conceptos y herramientas particulares de estudio de la dinámica automotriz y su aplicación al desarrollo del proyecto FSAE, pero no se debe perder de vista que este proyecto no se podrá beneficiar de estas nociones, si la comprensión de su importancia no logra permear hasta la Administración del Proyecto, quien ha de comprender la tarea entre manos.

Mientras que el enfoque predominante actualmente en la administración del proyecto esté centrado en los sistemas de los que se compone el vehículo, la concepción del vehículo carecerá de una visión integradora que parta desde los principios elementales de funcionamiento para llegar eventualmente hasta la propuesta de introducción de los más recientes avances tecnológicos en materia automotriz.

Finalmente, podemos decir que: las reglas se estudian dos veces: la primera para apegarse a ellas, la segunda para romperlas. No son pocos los autores que han hablado ya de las diez mil horas de aprendizaje para ser experto en un tema, pero alguien se ha preguntado alguna vez ¿Qué pasa después de ese grado de maestría? Más allá de las diez mil horas llega el momento en que el experto es capaz no sólo de entender las reglas del juego, sino de innovar en su campo de acción y así podrá llegar el momento en que UNAM Motorsports, si se mantiene en un proceso de aprendizaje continuo, pueda ser el nuevo referente en una categoría que reúne a muchos de los mejores estudiantes de universidades alrededor del mundo. Pero todo camino se recorre un paso a la vez.



*The greatest
enemy of
knowledge is not
ignorance, it is the
illusion of
knowledge*

-Stephen Hawking

REFERENCIAS

- [1] T. D. Gillespie, *Fundamentals of Vehicle Dynamics*, Estados Unidos: Society of Automotive Engineers, 1992.
- [2] W. F. Milliken y D. L. Milliken, *Race Car Vehicle Dynamics*, Estados Unidos: SAE International, 2005.
- [3] M. Trezsniewski, *Rennwagentechnik*, República Checa: Vieweg-Tübner, 2008.
- [4] C. Smith, *Tune to win*, Estados Unidos: Aero Publishers Inc., 1978.
- [5] C. Smith, *Engineer to Win*, Estados Unidos: Aero Publishers Inc., 1984.
- [6] H. C. Reuss, *Fahrzeugmechatronik*, Alemania: Universität Stuttgart, 2012.
- [7] H. B. Pacejka, *Tire and Vehicle Dynamics*, Estados Unidos: SAE International, 2002.
- [8] A. Hac, D. Nichols y D. Sygnarowicz, «Estimation of Vehicle Roll Angle and Sideslip for Crash Sensing,» SAE International, Estados Unidos, 2010.
- [9] P. Clarke, «Pat's Technical Introduction for new teams,» *Formula SAE-A Newsletter*, pp. 3-7, 2005.
- [10] M. Abdulrahim, «On the Dynamics of Automobile Handling,» Society of Automotive Engineers, Estados Unidos, 2006.
- [11] Öhlins Shocks, «Dyno Tests TTX25 FSAE,» Suecia.
- [12] C. Mattheck, «Ideal-plastic yield zones and force cones in tree roots,» Karlsruhe Institut für Technologie, Alemania, 2011.
- [13] C. Mattheck, «A MOST SIMPLE GRAPHIC WAY TO REDUCE NOTCH STRESSES BY GROWTH,»

Forschungszentrum Karlsruhe, Alemania, 2005.

- [14] Fahrdynamik Test Allianz, «Fahrdynamik-Testmanöver: Stationäre Kreisfahrt».
- [15] L. V. Fornace, «Weight Reduction Techniques Applied to Formula SAE Vehicle Design,» University of California, San Diego, Estados Unidos, 2006.
- [16] D. A. Muller, «Designing Effective Multimedia for Physics Education,» University of Sydney, Australia, 2008.
- [17] A. Theander, «Design of a Suspension for a Formula Student Race Car,» Royal Institute of Technology, Suecia, 2004.
- [18] G. de Paula, «Formula SAE Suspension Design,» SAE Brasil, Brasil, 2005.

ANEXOS

DATOS E INFORMACIÓN COMPLEMENTARIA

ANEXO1: Tablas de neumáticos Avon Tyres FSTUDENT 1425S4 @21psi

	SAT	CF	SAT	CF	SAT	CF	SAT	CF	SAT	CF	SAT	CF	SAT	CF	SAT	CF
LOAD	75kg		75kg		75kg		75kg		75kg		75kg		75kg		75kg	
CAMBER	0°		0.5°		1.0°		1.5°		2.0°		2.5°		3.0°		3.5°	
-9.0	-12.94	1.23	-12.49	1.33	-11.72	1.41	-10.13	1.49	-8.17	1.56	-6.86	1.63	-6.58	1.69	-6.39	1.74
-8.0	-10.29	1.18	-10.74	1.27	-9.33	1.35	-8.95	1.43	-7.10	1.49	-6.31	1.56	-4.78	1.61	-4.92	1.67
-7.0	-7.33	1.11	-6.62	1.20	-6.03	1.28	-5.15	1.36	-2.90	1.41	-2.80	1.48	-1.37	1.54	-1.48	1.59
-6.0	-6.09	1.05	-6.44	1.12	-5.89	1.21	-3.85	1.27	-2.68	1.34	-1.60	1.40	-0.23	1.45	0.11	1.51
-5.0	-5.02	0.97	-5.44	1.04	-4.79	1.12	-2.35	1.18	-1.57	1.25	-0.16	1.31	0.54	1.37	0.37	1.42
-4.0	-3.01	0.87	-2.98	0.93	-1.76	0.99	0.13	1.08	0.86	1.14	2.53	1.21	3.64	1.27	4.20	1.32
-3.0	-3.76	0.75	-3.29	0.80	-2.77	0.87	-0.92	0.94	0.52	1.01	2.00	1.07	3.30	1.13	3.48	1.19
-2.0	1.19	0.57	1.43	0.61	2.88	0.68	3.77	0.76	5.65	0.83	7.41	0.89	8.00	0.95	8.13	1.01
-1.0	6.80	0.33	7.65	0.36	8.82	0.43	10.43	0.49	11.51	0.57	12.84	0.64	13.39	0.70	13.38	0.77
0.0	14.08	0.04	15.75	0.06	19.42	0.13	21.69	0.19	20.48	0.27	21.43	0.34	21.71	0.41	21.61	0.48
1.0	23.99	-0.23	25.23	-0.21	26.13	-0.15	27.89	-0.08	28.86	-0.01	28.92	0.07	29.31	0.15	29.44	0.23
2.0	29.75	-0.45	30.64	-0.43	31.44	-0.36	32.92	-0.30	34.03	-0.23	34.44	-0.14	34.83	-0.06	33.73	0.02
3.0	31.51	-0.61	32.67	-0.60	33.73	-0.54	34.44	-0.46	35.09	-0.39	35.33	-0.30	35.17	-0.21	34.77	-0.12
4.0	33.40	-0.74	34.35	-0.72	35.00	-0.66	35.68	-0.59	37.01	-0.51	36.78	-0.43	37.09	-0.33	36.61	-0.24
5.0	36.57	-0.83	37.32	-0.82	37.59	-0.76	38.67	-0.69	39.16	-0.61	39.38	-0.52	39.80	-0.43	38.86	-0.34
6.0	36.92	-0.91	37.79	-0.89	38.25	-0.84	38.71	-0.77	39.61	-0.68	39.46	-0.60	39.70	-0.51	39.53	-0.42
7.0	39.02	-0.97	39.84	-0.96	40.47	-0.91	40.40	-0.83	41.26	-0.75	41.27	-0.66	41.21	-0.56	41.21	-0.48
8.0	39.42	-1.03	40.33	-1.03	39.81	-0.97	41.01	-0.89	41.32	-0.80	40.97	-0.72	41.34	-0.62	41.13	-0.53
9.0	42.30	-1.09	43.09	-1.08	43.14	-1.02	43.62	-0.94	43.69	-0.86	43.97	-0.77	44.09	-0.68	43.66	-0.59

SAT = Self-Aligning Torque (Torque de auto alineación)

CF=Cornering Force (Fuera de tracción lateral)

	SAT		CF		SAT		CF		SAT		CF		SAT		CF	
LOAD	150kg															
CAMBER	0°		0.5°		1.0°		1.5°		2.0°		2.5°		3.0°		3.5°	
-9.0	-20.58	2.33	-19.77	2.35	-19.17	2.39	-18.15	2.44	-18.95	2.48	-18.32	2.52	-16.64	2.57	-17.29	2.61
-8.0	-22.06	2.21	-21.52	2.24	-21.44	2.28	-21.60	2.33	-20.30	2.37	-18.48	2.41	-17.80	2.45	-16.69	2.49
-7.0	-20.13	2.08	-20.17	2.10	-19.34	2.15	-18.69	2.19	-16.85	2.23	-16.30	2.28	-14.17	2.32	-13.96	2.36
-6.0	-21.67	1.94	-20.31	1.96	-20.14	2.00	-18.82	2.05	-16.97	2.09	-15.47	2.13	-14.42	2.17	-12.30	2.22
-5.0	-22.03	1.77	-21.04	1.80	-19.58	1.84	-17.29	1.88	-15.66	1.93	-14.42	1.97	-12.77	2.01	-10.36	2.06
-4.0	-22.01	1.56	-20.40	1.58	-17.38	1.64	-15.34	1.68	-13.33	1.73	-10.71	1.78	-7.59	1.83	-6.75	1.87
-3.0	-21.79	1.30	-18.68	1.34	-17.25	1.39	-13.98	1.44	-11.85	1.49	-9.15	1.54	-5.33	1.59	-3.30	1.65
-2.0	-12.75	0.95	-10.22	0.99	-7.63	1.05	-5.29	1.12	-1.83	1.18	0.03	1.24	2.76	1.29	4.82	1.35
-1.0	-0.81	0.47	2.94	0.54	5.75	0.61	7.93	0.67	10.44	0.75	12.41	0.82	15.27	0.88	17.59	0.94
0.0	21.67	-0.10	22.91	-0.01	24.83	0.07	27.24	0.16	29.43	0.23	33.33	0.31	33.42	0.39	34.14	0.46
1.0	40.52	-0.63	41.92	-0.52	43.77	-0.42	45.07	-0.33	46.32	-0.24	47.60	-0.15	48.67	-0.07	49.10	0.01
2.0	52.17	-1.05	53.18	-0.92	54.62	-0.82	55.30	-0.73	56.53	-0.63	57.49	-0.54	58.69	-0.45	58.68	-0.36
3.0	55.14	-1.35	56.00	-1.22	57.17	-1.12	58.49	-1.02	58.80	-0.92	59.61	-0.83	60.46	-0.74	60.69	-0.64
4.0	57.19	-1.60	57.83	-1.46	58.88	-1.34	59.61	-1.25	61.20	-1.16	61.39	-1.06	62.29	-0.96	62.31	-0.87
5.0	57.44	-1.77	59.29	-1.63	60.33	-1.53	60.70	-1.43	61.58	-1.33	63.39	-1.24	62.77	-1.14	63.40	-1.05
6.0	55.77	-1.92	57.68	-1.78	58.80	-1.68	56.69	-1.58	60.68	-1.48	61.48	-1.39	61.76	-1.29	61.88	-1.19
7.0	55.66	-2.04	57.45	-1.92	58.62	-1.81	59.49	-1.72	60.72	-1.61	61.31	-1.52	61.83	-1.43	62.59	-1.34
8.0	53.54	-2.16	55.92	-2.04	57.38	-1.93	57.43	-1.83	58.50	-1.74	59.56	-1.64	59.99	-1.54	60.66	-1.45
9.0	54.71	-2.26	56.93	-2.13	57.75	-2.02	58.83	-1.93	59.79	-1.83	60.65	-1.74	61.35	-1.64	62.04	-1.55

SAT = Self-Aligning Torque (Torque de auto alineación)

CF=Cornering Force (Fuera de tracción lateral)

LOAD	225kg															
CAMBER	0°		0.5°		1.0°		1.5°		2.0°		2.5°		3.0°		3.5°	
-9.0	-40.76	2.76	-40.37	2.80	-39.06	2.86	-36.75	2.92	-35.88	2.98	-36.15	3.03	-34.70	3.09	-32.11	3.14
-8.0	-40.82	2.60	-41.13	2.63	-39.83	2.69	-38.14	2.76	-37.86	2.81	-36.83	2.87	-34.78	2.93	-33.30	2.98
-7.0	-38.80	2.41	-38.82	2.44	-36.16	2.51	-35.62	2.58	-34.10	2.63	-32.70	2.69	-30.99	2.75	-29.84	2.80
-6.0	-39.59	2.21	-38.20	2.25	-37.71	2.31	-35.09	2.37	-33.41	2.44	-31.37	2.49	-29.43	2.55	-27.53	2.61
-5.0	-39.72	1.99	-37.92	2.02	-35.66	2.09	-34.00	2.15	-32.06	2.21	-29.84	2.28	-27.99	2.33	-25.63	2.38
-4.0	-38.01	1.72	-35.50	1.76	-32.94	1.83	-30.29	1.89	-28.37	1.94	-25.75	2.02	-23.81	2.08	-21.57	2.13
-3.0	-35.80	1.39	-32.69	1.44	-30.01	1.51	-27.27	1.58	-25.56	1.65	-22.78	1.71	-19.38	1.76	-16.84	1.83
-2.0	-24.41	1.00	-22.36	1.05	-19.60	1.13	-16.35	1.20	-13.84	1.27	-11.46	1.34	-8.66	1.41	-5.84	1.48
-1.0	-6.77	0.53	-4.20	0.56	-1.63	0.64	1.69	0.72	3.81	0.79	7.06	0.87	9.02	0.94	11.25	1.01
0.0	17.98	-0.05	19.92	-0.01	22.96	0.06	25.98	0.15	27.90	0.23	30.66	0.31	34.78	0.39	34.87	0.47
1.0	44.06	-0.61	45.74	-0.55	48.39	-0.46	49.39	-0.38	51.63	-0.30	53.29	-0.22	55.05	-0.13	55.86	-0.05
2.0	57.37	-1.05	59.48	-1.01	61.30	-0.91	63.43	-0.83	64.80	-0.74	65.98	-0.67	67.60	-0.57	68.60	-0.48
3.0	62.68	-1.40	64.79	-1.36	66.44	-1.26	68.30	-1.18	69.53	-1.10	70.87	-1.01	72.53	-0.92	72.50	-0.83
4.0	65.67	-1.69	67.70	-1.65	68.74	-1.55	70.62	-1.47	71.35	-1.38	73.01	-1.30	74.29	-1.21	74.20	-1.12
5.0	66.69	-1.93	68.77	-1.88	70.45	-1.79	72.10	-1.71	73.03	-1.62	73.84	-1.53	74.68	-1.45	75.17	-1.36
6.0	65.71	-2.13	66.67	-2.09	70.03	-1.99	70.41	-1.91	71.30	-1.82	72.31	-1.74	73.06	-1.65	73.93	-1.56
7.0	65.14	-2.31	66.74	-2.26	68.52	-2.17	69.84	-2.08	70.34	-1.99	72.26	-1.92	72.35	-1.82	72.89	-1.73
8.0	63.89	-2.47	65.52	-2.42	66.72	-2.33	67.48	-2.24	68.61	-2.16	69.51	-2.06	69.82	-1.97	70.33	-1.88

9.0	63.91	-2.63	65.25	-2.57	66.67	-2.47	67.59	-2.39	68.25	-2.29	69.46	-2.20	69.56	-2.11	70.55	-2.02
-----	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

SAT = Self-Aligning Torque (Torque de auto alineación)

CF=Cornering Force (Fuera de tracción lateral)

LOAD	300kg															
CAMBER	0°		0.5°		1.0°		1.5°		2.0°		2.5°		3.0°		3.5°	
-9.0	-54.38	3.69	-55.33	3.53	-53.61	3.49	-50.24	3.49	-48.02	3.50	-45.36	3.52	-44.60	3.55	-42.29	3.58
-8.0	-57.48	3.46	-56.49	3.30	-55.26	3.26	-50.50	3.26	-47.71	3.27	-46.76	3.29	-45.13	3.32	-40.93	3.36
-7.0	-58.12	3.18	-54.90	3.04	-51.44	3.01	-47.09	3.01	-46.01	3.02	-43.59	3.06	-41.14	3.10	-38.86	3.13
-6.0	-58.55	2.89	-53.32	2.75	-49.65	2.74	-46.50	2.74	-43.88	2.78	-41.48	2.81	-38.92	2.85	-36.32	2.89
-5.0	-61.19	2.57	-55.39	2.47	-50.79	2.45	-47.05	2.46	-43.93	2.50	-40.59	2.54	-38.46	2.58	-35.48	2.62
-4.0	-62.15	2.20	-53.49	2.12	-47.77	2.12	-42.87	2.14	-39.28	2.18	-37.27	2.22	-33.75	2.27	-30.36	2.32
-3.0	-55.50	1.74	-47.15	1.70	-41.86	1.71	-38.32	1.75	-34.44	1.80	-30.37	1.85	-27.15	1.91	-24.04	1.96
-2.0	-39.35	1.20	-32.75	1.20	-28.00	1.24	-24.73	1.30	-20.95	1.36	-17.76	1.42	-14.59	1.49	-11.63	1.55
-1.0	-14.58	0.56	-9.30	0.61	-5.30	0.69	-2.48	0.76	0.64	0.83	3.33	0.90	6.13	0.97	9.87	1.04
0.0	23.52	-0.18	25.30	-0.05	26.50	0.04	29.17	0.12	31.10	0.20	33.08	0.27	35.72	0.35	39.43	0.43
1.0	57.53	-0.87	57.70	-0.68	58.20	-0.57	59.31	-0.48	60.57	-0.39	61.64	-0.31	63.15	-0.22	64.40	-0.14
2.0	78.79	-1.45	75.35	-1.21	74.57	-1.08	74.61	-0.99	75.91	-0.89	76.64	-0.80	77.96	-0.71	79.02	-0.62
3.0	88.04	-1.94	85.04	-1.68	83.22	-1.51	82.74	-1.40	82.46	-1.29	83.04	-1.20	84.12	-1.10	85.53	-1.02
4.0	88.98	-2.32	87.85	-2.04	86.59	-1.87	86.58	-1.75	86.47	-1.64	86.69	-1.54	87.59	-1.44	88.00	-1.35
5.0	86.66	-2.63	85.70	-2.35	85.71	-2.17	86.15	-2.05	86.29	-1.94	87.67	-1.84	88.47	-1.73	89.16	-1.64
6.0	82.51	-2.90	84.72	-2.62	84.43	-2.44	84.74	-2.30	85.08	-2.20	85.55	-2.08	86.63	-1.98	87.04	-1.88

7.0	82.78	-3.14	83.41	-2.86	83.47	-2.67	83.15	-2.54	83.02	-2.41	84.06	-2.31	84.30	-2.18	85.19	-2.09
8.0	79.37	-3.35	81.37	-3.09	81.42	-2.90	81.49	-2.74	81.08	-2.61	81.91	-2.50	81.95	-2.39	82.56	-2.29
9.0	76.47	-3.53	78.87	-3.28	80.12	-3.08	81.03	-2.93	80.99	-2.80	81.42	-2.68	81.73	-2.57	82.46	-2.46

SAT = Self-Aligning Torque (Torque de auto alineación)

CF=Cornering Force (Fuera de tracción lateral)

Anexo 2: Optimización Topológica

Este trabajo está motivado por la necesidad de reducir al mínimo el peso de la pieza en cuestión, conservando a su vez la máxima rigidez en ella, de manera que sea capaz de realizar su función sin riesgo de falla. Se pretende conducir al lector a través del trabajo, detallando los motivos que dieron lugar a la forma y tamaño de la pieza en cuestión, todo esto en el contexto del sistema de suspensión completo, justificando adecuadamente el proceso de diseño.

Al diseñar una pieza se debe tomar en consideración su forma por distintas razones. En primer lugar está el hecho de que la mayoría de las piezas deben ser ensambladas a otras para cumplir un propósito, lo cual dicta su forma básica. Sin embargo, una vez cumplida su función básica, puede empezar el trabajo más fino del diseñador, al buscar llevar esa pieza a un nivel superior en el cumplimiento de su propósito. Factores que pueden y deben ser tomados en cuenta son la ergonomía de la pieza, nuestra capacidad para fabricarla y las dificultades que esto acarrea, su estética, su peso y su resistencia. Todos los anteriores factores pueden ser completamente independientes del material mismo de la pieza, en tanto que para un mismo material pueden generarse diversas formas que, cumpliendo todas el propósito de diseño, sean distintas por cualquiera de los motivos enlistados.

El problema de la optimización de topológica (de forma) ha sido entonces planteado como aquel en el que se busca encontrar la mejor forma para algo, de acuerdo a los criterios que sean para él establecidos. Este problema puede ser atacado desde un punto de vista casi empírico y es el caso necesario en áreas como la estética, mas su planteamiento puede verse también realizado a través de la optimización de funciones con planteamiento matemático.

Uno de los casos más frecuentes es aquel en el que se busca la minimización del peso de una pieza, maximizando su resistencia a cargas a las que estará sometida. La aproximación matemática se da entonces a través del cálculo de funcionales, en el cual se planteará una función objetivo a minimizar y se incluyen restricciones para el proceso, tal es el caso de ecuaciones tales como las de Ricatti y el desarrollo del filtro Kalman (en el área de control). Las soluciones a estos problemas planteados suelen ser numéricas y por tanto iterativas y su complejidad requiere que sean realizadas a través de programas computacionales.

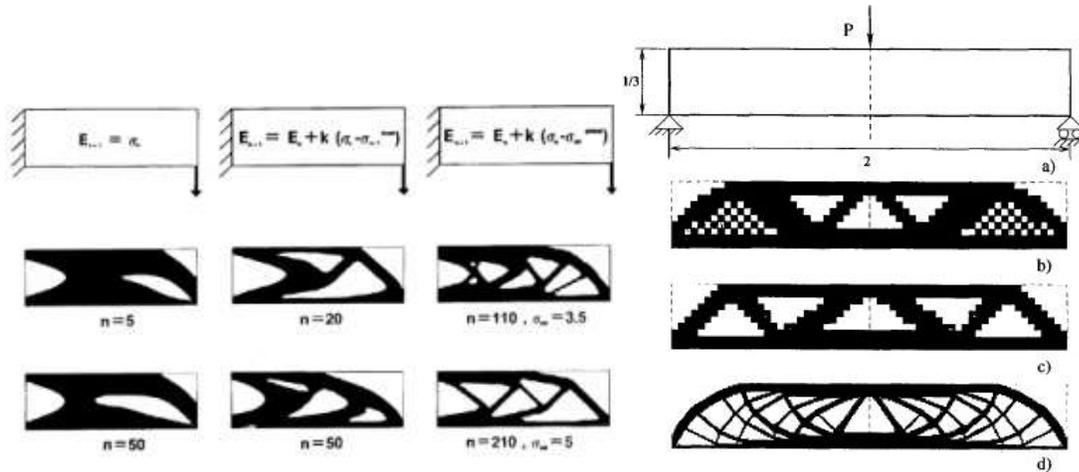


Ilustración 53– Ejemplos de optimización topológica para una barra en diferentes situaciones de carga a través de optimización de funcionales

Las soluciones de Mattheck

Clauss Mattheck es un doctor en física teórica de la universidad de Karlsruhe en Alemania. Durante sus años de estudio, Mattheck se interesó por la forma en que las estructuras naturales se desarrollan, particularmente los troncos de árboles, pues sus formas varían dependiendo de la situación particular en la que se encuentren, pero soportando siempre el peso del resto del ramaje. Todo esto lo llevó a desarrollar diversos métodos para encontrar sentido y poder imitar las estructuras naturales, pues estas son el resultado de incontables iteraciones de diseño evolutivo y exhiben una muy alta optimización topológica.

Mattheck desarrolló en su estancia doctoral en Karlsruhe, dos algoritmos de muy amplio uso en la actualidad: *Computer Aided Optimization* (CAO) y *Soft Kill Option* (SKO). Estos algoritmos están apoyados en el Análisis por elementos finitos (FEM), de forma que su actuación es más dinámica que la optimización por funciones objetivo por sí sola. CAO plantea funciones objetivo en la pieza inicial, considerando las condiciones de carga esperadas para la pieza. Una vez realizada una optimización cuyo alcance es definido en el algoritmo, la pieza será analizada con un algoritmo de FEM, para después ser trabajada por SKO. El proceso llevará a una pieza óptima, hasta el punto donde se haya especificado. Cabe destacar que SKO está basado hasta cierto punto en las observaciones de la naturaleza de Mattheck y es ampliamente aplicado en el campo de la biónica.

Sin embargo, posterior al extenso trabajo realizado en algoritmos de optimización topológica, Mattheck comenzó a identificar patrones que respondían a la ubicación de fuerzas y torques a los que la pieza estaría sometida, sentando las bases de un nuevo método que si bien es sumamente sencillo en su aplicación, no hubiera sido posible sin la observación realizada en experimentos previos. El método es denominado “Método de los conos de fuerza” (*Kraftkegelmethode*) y es un método gráfico para aproximar de manera sencilla la topología óptima de piezas planas o extruidas del plano, haciendo posible obtener estructuras ligeras y resistentes en poco tiempo, ya

sea diseñando la forma directamente a través del método de conos de fuerza o introduciendo esta forma pre trabajada a un algoritmo SKO y CAO, ahorrando muchas horas de cálculos complejos del algoritmo. Es de sumo interés remarcar además, que las formas concebidas a través de una aplicación pura del método de conos y una aplicación pura de los algoritmos de Mattheck, son tremendamente similares, indicando congruencia entre ambos métodos y por lo tanto comprobando de forma indirecta la eficacia del método gráfico.

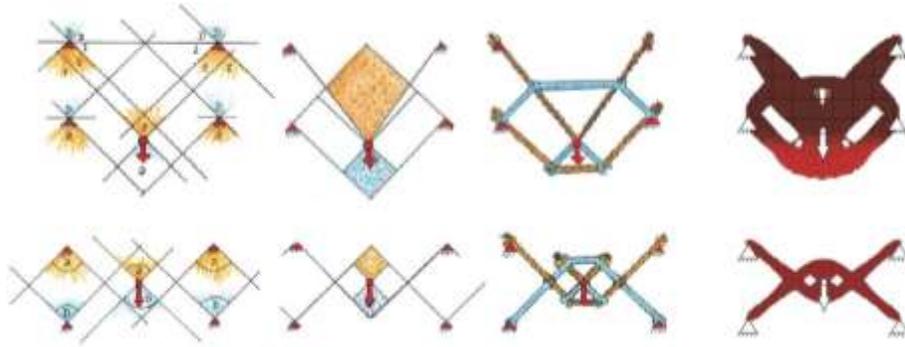


Ilustración 54– Comparación de resultados de Kraftkegelmethode y SKO (última columna)