



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIA E INGENIERÍA DE MATERIALES

INSTITUTO DE INVESTIGACIONES EN MATERIALES

**ESTABILIDAD TERMOCAPILAR  
DE UNA CAPA DE FLUIDO VISCOELÁSTICO SOBRE  
UNA PARED DE ESPESOR FINITO**

TESIS  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
DOCTORA EN CIENCIA E INGENIERÍA DE MATERIALES

*PRESENTA:*

M. EN C. IVONNE JUDITH HERNÁNDEZ HERNÁNDEZ

*TUTOR PRINCIPAL:*

DR. LUIS ANTONIO DÁVALOS OROZCO  
INSTITUTO DE INVESTIGACIONES EN MATERIALES

*MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR*

DR. GERARDO RUIZ CHAVARRÍA  
FACULTAD DE CIENCIAS

DR. LUIS FELIPE DEL CASTILLO  
INSTITUTO DE INVESTIGACIONES EN M.

MÉXICO, D. F. , MAYO 2015



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer a mi familia por su confianza y su apoyo en todo momento, al Dr. Luis A. Dávalos Orozco por su tiempo, dedicación y paciencia al asesorarme en la elaboración de la tesis de doctorado.

A los miembros de mi comité tutor durante el programa de doctorado. A los miembros del jurado por sus comentarios y sugerencias para mejorar la versión final de la tesis.

A mi novio por todo su apoyo, cariño y comprensión. A los amigos que hice durante mi estancia en el posgrado, y a los que me han brindado su amistad por años.

Al personal del servicio de cómputo del Instituto de Investigaciones en Materiales por el apoyo técnico durante la realización de la tesis.

# Contenido

<b>1. INTRODUCCIÓN</b>	<b>5</b>
<b>2. CONVECCIÓN TERMOCAPILAR</b>	<b>11</b>
2.1. Formación de celdas convectivas . . . . .	12
2.2. Estabilidad hidrodinámica lineal . . . . .	13
2.3. El modelo de Maxwell . . . . .	14
<b>3. ESTABILIDAD TERMOCAPILAR DE UNA CAPA DE FLUIDO VISCOELÁSTICO SOBRE UNA PARED DE ESPESOR FINITO</b>	<b>15</b>
3.1. Planteamiento del problema . . . . .	15
3.2. Convección termocapilar: ecuaciones de movimiento y temperatura .	16
3.2.1. Perfil de temperatura . . . . .	18
3.2.2. Ecuaciones de la perturbación . . . . .	20
3.2.3. Condiciones de frontera . . . . .	22
<b>4. ANÁLISIS DE RESULTADOS</b>	<b>25</b>
4.1. Comparación con los resultados de Pearson [5] . . . . .	26
4.2. Convección termocapilar estacionaria . . . . .	28
4.3. Convección termocapilar oscilatoria . . . . .	30
4.4. Competición entre la convección termocapilar estacionaria y oscilatoria: puntos de codimension dos . . . . .	32
<b>5. CONCLUSIONES</b>	<b>45</b>
<b>BIBLIOGRAFÍA</b>	<b>47</b>



# Capítulo 1

## INTRODUCCIÓN

La convección debida a gradientes de tensión superficial, en una capa muy delgada de fluido, es llamada la convección de Marangoni. Marangoni(1865) [1] dio información detallada de los efectos de la variación de la energía potencial en la superficie de un líquido, en particular de los flujos derivados de variaciones en la temperatura y compuestos surfactantes. Bénard (1901) [2] analizó la formación de patrones de celdas convectivas en una capa delgada de líquido calentada por debajo. Hoy en día la convección de Marangoni se considera un fenómeno importante asociado a procesos de materiales modernos. Se han reportado efectos en tecnologías modernas como por ejemplo en la corrosión por sales calientes en las aspas de aeroturbinas, en el secado de pinturas que contienen disolventes, así como en el secado de obleas de silicio usadas en electrónicos; en el procesamiento de materiales, sobre todo de sistemas metálicos, los cuales han sido considerados para demostrar flujos de Marangoni. También se presenta en la complejidad hidrodinámica de los hornos que contienen fundiciones; en la erosión de las paredes de crisoles de cerámica que contienen metales líquidos, en el proceso de cristalización y fundición en condiciones de microgravedad, etc. Por lo tanto existe un interés científico e industrial en este fenómeno.

La estabilidad térmica de una capa de fluido viscoelástico horizontal calentada desde la pared ha sido investigada con frecuencia. Las observaciones experimentales de Bénard descritos en [4] acerca del movimiento de un fluido originado por la convección causaron interés en el estudio de este fenómeno. Pearson [5] encontró que una capa delgada de fluido newtoniano con una superficie libre podría ser desestabilizada como resultado de un gradiente de tensión superficial debido a gradientes de temperatura, a diferencia del fenómeno de convección debido a la flotación. En este caso, el número de Marangoni, representativo del gradiente de tensión superficial debido a la temperatura, es el parámetro que determina la

inestabilidad.

Vidal y Acrivos [6] mostraron que el principio de intercambio de estabildades es válido para el problema de Pearson [5] de igual forma Vrentas y Vrentas [7] hicieron una prueba analítica donde se confirma que el intercambio de estabildades es válido para el estado marginal. Se ha estudiado el fenómeno de Marangoni también cuando la superficie libre presenta deformaciones, Scriven y Sternling [8] investigaron por primera vez este efecto. Takashima [11] consideró la deformación de una superficie libre en el caso de convección estacionaria además Takashima [12] incluyó también la dependencia del tiempo tomando en cuenta los efectos de la gravedad. Dávalos-Orozco [9, 10] hizo el análisis de una superficie libre deformable, para termocapilaridad en el caso estacionario y oscilatorio.

Mctaggart [13] analizó el problema de convección de Marangoni con doble difusibilidad de una superficie libre plana. La convección de Marangoni también ha sido estudiada de acuerdo a las condiciones de frontera del sistema, por ejemplo Christopher y Wang [14] consideraron la influencia que el número de Prandtl tiene sobre la transferencia de calor. Es importante considerar la variación de la temperatura en la viscosidad como lo demostraron Slavtchev and Ouzounov [15] y Kalitzova-Kurteva et al. [16]. En la convección estacionaria [16] y para la convección oscilatoria con superficie libre deformable [17]. El hecho de poder controlar la convección de Marangoni es importante por ejemplo en el caso particular de los procesos de solidificación y poder evitar las fracturas. Este problema fue investigado por Bau [18] y Or et al. [19]. El problema que supone una deformación en la superficie libre y que considera la viscosidad dependiente de la temperatura fue investigado por Kechil y Hashim [20]. Una aplicación para microcanales fue analizada por Pendse y Esmaeeli [21]. Ellos investigaron el flujo de Marangoni en dos fluidos superpuestos cuando una variación de la temperatura periódica se aplica a la pared. Estos autores encontraron que la competencia entre el efecto térmico y el hidrodinámico se refleja en el flujo del fluido cuando se varía el espesor relativo de las capas.

Usualmente en las aplicaciones los líquidos presentan un comportamiento no newtoniano, por ejemplo en las soluciones poliméricas una propiedad importante es la viscoelasticidad (Bird y Hassager [22]). En convección natural los efectos de la viscoelasticidad lineal y no lineal han sido investigados por Martínez-Mardones y colegas [23, 24, 25, 26, 27]. En [24] uno de los objetivos fue encontrar los puntos de codimensión dos entre el caso estacionario y el oscilatorio, para investigar la posibilidad de trayectorias no lineales y ondas estacionarias. Se puede ver una

revisión de este caso en el trabajo de Dávalos-Orozco [28].

La viscoelasticidad en la convección de Marangoni también ha sido considerada por varios autores. Entre ellos Getachew y Rosenblat [29], quienes calcularon los números de Marangoni críticos para la inestabilidad de una capa de fluido viscoelástico de Maxwell calentado desde la pared. Ellos demostraron que la inestabilidad puede aparecer tanto en la convección estacionaria como en la oscilatoria. Además, demostraron que la inestabilidad depende de la elasticidad del líquido y del número de Prandtl. En su problema, el líquido viscoelástico es incompresible con superficie libre plana. Además, cubre una pared rígida perfectamente conductora. También calcularon los puntos de codimensión dos donde las curvas de criticalidad de la convección estacionaria se cruzan con las curvas de criticalidad de la convección oscilatoria. Yang [32] analizó el efecto del espesor y la conductividad de la pared sólida, donde se presenta inestabilidad de Rayleigh-Bénard y de Marangoni, él encontró que una pared altamente conductora tiende a estabilizar el sistema. Siddheshwar et al. [30] investigó la inestabilidad del caso de Marangoni oscilatorio para diferentes fluidos no newtonianos, entre ellos el fluido de Maxwell, incluyendo la variación de la viscosidad con la temperatura, con distintas condiciones de frontera térmicas. El efecto que tiene el espesor en la convección de Marangoni fue investigado por Takashima [31]. La viscosidad dependiente de la temperatura fue investigada por Char y Chen [33] en una capa de líquido sobre una pared con cierto espesor. El caso cuando la superficie libre es deformable lo investigaron Abidin et al. [34] quienes también incluyeron efectos de flotación (Arifin y Bachok [35]) y consideraron el espesor de la pared en la convección termocapilar. La no uniformidad del gradiente de temperatura básico puede tener importantes consecuencias en la inestabilidad. Esto fue considerado por Shivakumara et al. [36] incluyendo un espesor de la pared. La deformabilidad de la superficie libre se supone en una capa que se encuentra sobre una pared con cierto espesor por Gangadharaiah [37].

Los resultados de la convección termocapilar donde se considera el espesor de la pared sobre la que se encuentra el fluido, son más realistas que aquellos donde solo se considera el caso de una pared perfectamente conductora o aislante. Estos efectos del espesor de la pared también fueron investigados en el caso de convección natural de un fluido viscoelástico de Maxwell por Pérez-Reyes y Dávalos-Orozco [38]. Ahí se muestra que para ciertas magnitudes del número de Prandtl se encuentra un punto de codimensión dos bajo el que la convección estacionaria es la



primera inestabilidad para un rango de valores del tiempo de relajación (número de Weissenberg).

En el presente estudio se investiga la estabilidad lineal termocapilar que surge en una capa infinita y delgada de fluido viscoelástico de Maxwell sobre una pared rígida de espesor finito calentado desde abajo. La diferencia con otros trabajos es que ahora se toman en cuenta las conductividades térmicas y los espesores tanto del fluido viscoelástico como de la pared rígida. Dado que las perturbaciones de la temperatura también penetran la pared es importante considerarlo. Aquí, la superficie libre del fluido se supone plana e indeformable. Ya que la estabilidad está sujeta a un gradiente de tensión superficial generado por un gradiente de temperatura, el parámetro de inestabilidad es el número de Marangoni. El valor crítico de este parámetro depende del número de onda (crítico), del tiempo de relajamiento viscoelástico (número de Weissenberg), del número de Prandtl y de los parámetros térmicos de la pared y la superficie libre. Para encontrar el resultado se calculan los números de Marangoni críticos para los casos de convección termocapilar estacionaria y oscilatoria, respectivamente, con la finalidad de determinar cual de ellos es el primer inestable. Esto es, para saber cuál es el que aparece con un gradiente de temperatura más pequeño. Aquí solo se considera el efecto termocapilar sobre el sistema, por lo que no se toma en cuenta el efecto de la flotación en la estabilidad. Esto se debe a que se pueden despreciar las fuerzas de flotación en caso de que la capa de fluido sea muy delgada o se encuentre en condiciones de microgravedad o gravedad cero. Uno de los objetivos es investigar la influencia que tienen las variaciones de las conductividades térmicas y espesores de la delgada capa de líquido viscoelástico y, de la pared rígida sobre el número de Marangoni crítico y en su correspondiente número de onda crítico. Otros parámetros que se consideran son el número de Prandtl y los números de Biot. Los números de Biot de la entrecara de la pared y el fluido; así como, el del fluido y la atmósfera se definen más adelante. Además, como se dijo anteriormente, es de principal interés encontrar las condiciones para las cuales la convección estacionaria u oscilatoria ocurre primero, pues así sabremos en que caso convectivo el gradiente de temperatura es menor. Para ello buscamos los llamados puntos de codimensión dos. Esto es, aquellos puntos donde el número de Marangoni crítico del caso estacionario y del oscilatorio tienen la misma magnitud. Con base en este análisis, es posible determinar con qué variables y para qué magnitudes de los parámetros, utilizados en el problema, uno de ellos será el primer inestable.

En el caso oscilatorio el problema es dependiente del tiempo. Por ello se incluye una frecuencia de oscilación y aparece el parámetro viscoelástico (el tiempo de relajación). En la estabilidad lineal del presente problema, el flujo estacionario siempre se comporta como un fluido newtoniano.

Al incluir los espesores y las conductividades tanto del fluido como de la pared, es posible obtener una mejor aproximación donde no es posible considerar paredes conductoras o aislantes perfectos. Es decir que se obtienen valores del número de Marangoni críticos para otro tipo de materiales que no tengan las condiciones ideales. De esta forma se espera que los resultados sean de interés para los casos más realistas relacionados con los experimentos donde las condiciones de frontera son más generales al tomar en cuenta un valor finito del espesor y conductividad térmica de la pared. Sobre todo cuando la estabilidad de la capa de fluido es relevante para el estudio científico y las aplicaciones industriales.

La tesis está organizada de la siguiente forma. En el próximo capítulo se dan los fundamentos de la convección termocapilar de Marangoni, de la estabilidad lineal y de las propiedades de un fluido de Maxwell. El planteamiento del problema y las ecuaciones de movimiento junto con las condiciones de frontera, son presentados en el capítulo 3. Los resultados numéricos y su análisis se dan en el capítulo 4. Se presentan las conclusiones en el capítulo 5, finalmente se dan las referencias y la nomenclatura usada en la tesis y, un anexo con el artículo que se publicó con los resultados obtenidos.



## Capítulo 2

### CONVECCIÓN TERMOCAPILAR

A la convección de una capa delgada de fluido, sobre una superficie plana calentada uniformemente desde la pared sólida y enfriada desde la superficie libre del fluido por un gas a una temperatura uniforme, se le llama convección de Marangoni térmica. Como es primordial la dependencia de la temperatura en la tensión superficial, también se le llama convección termocapilar. En este caso la convección es el resultado de gradientes de tensión superficial debidos a gradientes de temperatura a través de la capa del fluido.

El primer estudio teórico sobre la convección causada por un gradiente de temperatura fue hecho por Pearson [5]. La motivación para su investigación fue la observación de la aparición de patrones de celdas poligonales en las capas de pintura que impiden tener una capa uniforme. En este caso, la variación de la temperatura en la capa de pintura se puede deber a la evaporación en la superficie libre o a un calentamiento por la pared, pero no por el efecto de flotación ya que la capa es muy delgada.

Para la mayoría de los líquidos la tensión superficial decrece cuando la temperatura se incrementa, así este transporte de líquido caliente resultará en una tensión superficial menor en ese punto. Consecuentemente, a partir de un punto caliente habrá una salida de flujo radial de líquido a lo largo de la superficie. Tal comportamiento resulta en la formación de celdas con una geometría hexagonal o poligonal. Si la capa de líquido es muy delgada a las celdas que se forman se les llama celdas de Bénard [4].

## 2.1. Formación de celdas convectivas

Sobre la formación de celdas convectivas el mejor ejemplo conocido es el acabado martillado de pinturas metálicas, al secarse las capas de pintura con frecuencia se presenta una inestabilidad que conlleva a un flujo de celdas convectivas, resultando de los gradientes de tensión superficial producidos por la evaporación de disolventes.

Las celdas termocapilares se deben a una inestabilidad por un gradiente de tensión superficial ocasionado por gradientes de temperatura. Estos gradientes también son responsables de muchos de los patrones celulares que se observan en las capas de fluidos enfriados por la superficie libre (físicamente equivalente a calentar por la pared). La razón es que también se producen gradientes de temperatura adversos que producen esfuerzos tangenciales que por fricción transmiten movimientos a la masa de fluido. Se ha demostrado que calentar por la superficie libre plana indeformable, o bien, enfriar por la pared mantiene una situación estable y no se verán celdas convectivas.

La tensión superficial de la mayoría de los líquidos es una función lineal de la temperatura y decrece monotónicamente con ella. De la misma forma, para el caso en que se difunda una sustancia tensoactiva, la tensión superficial es una función de la concentración. Así, cuando la superficie libre de una capa de fluido no está a temperatura uniforme o con una concentración relativamente uniforme, se espera que haya un movimiento dentro del fluido. En el caso newtoniano, bajo las condiciones adecuadas, se encuentra que es posible formar un patrón de celdas hexagonales.

Se puede dar una explicación cualitativa de la existencia de movimiento celular estable. Por ejemplo si se considera por un momento el caso de una capa libre plana de líquido homogéneo (cuya tensión superficial depende de la temperatura) y se mantiene enfriándose por la parte de arriba de la superficie libre y calentada desde la pared. Una perturbación infinitesimal en la temperatura de la superficie, generará tracciones sobre ésta por medio de variaciones inducidas en la tensión superficial. La perturbación del fluido caliente debilita la tensión superficial en una pequeña región. Así, el fluido superficial es atraído por esfuerzos tangenciales hacia las zonas frías donde la tensión superficial es más fuerte. A su vez, los esfuerzos tangenciales mueven fluido en el interior de la capa de fluido. La conservación de la masa obliga al líquido a cubrir las regiones donde una partícula de líquido se ha movido. Los movimientos en la superficie se transmiten por medio de la viscosidad

en el interior de las capas del fluido. Sin embargo, la viscosidad también disminuye el movimiento del fluido evitando la formación de celdas. La energía requerida se puede adquirir de la diferencia de temperaturas a través de la capa de fluido. Esta diferencia se genera por el calentamiento uniforme en la pared y el enfriamiento en la superficie libre. Si la energía adquirida es suficientemente grande y se alcanza una diferencia crítica de temperaturas, comenzará la convección debida al gradiente de tensión superficial y se mantendrá de ese modo. Es decir que mientras se imponga un gradiente de temperatura suficientemente grande para que la partícula de fluido venza la fricción viscosa, el flujo se mantendrá haciendo trayectorias cerradas que dan forma a las celdas convectivas.

El tamaño de la celda (longitud de onda) será determinado por los parámetros físicos que caracterizan el fluido en cuestión y por los gradientes de temperatura involucrados.

## **2.2. Estabilidad hidrodinámica lineal**

La estabilidad de un sistema se determina de acuerdo a la reacción que tiene a pequeñas perturbaciones en el estado hidrostático. La perturbación se puede considerar como una superposición de modos. Pueden existir perturbaciones estables, neutralmente estables o inestables. El sistema se considera linealmente estable si la perturbación es pequeña y decrece con el tiempo de forma que el sistema regresa a su estado inicial. Si la amplitud de la perturbación crece en el tiempo de tal modo que el sistema no regresa a su estado inicial, se dice que es inestable. Un estado marginal es uno de estabilidad neutra.

Para encontrar la estabilidad hidrodinámica lineal de un sistema se hace un análisis con la teoría de pequeñas perturbaciones. A partir de un flujo estacionario se linealizan las ecuaciones de movimiento y de calor, junto con sus condiciones de frontera, para perturbaciones muy pequeñas. Se obtienen valores propios de estabilidad marginal, para a partir de ellos, calcular los valores críticos del número de Marangoni que son los que determinan el inicio de la convección termocapilar. El análisis lineal indica que para un cierto número de Marangoni la convección adquiere un movimiento estable. En otras palabras un nuevo estado estacionario reemplaza al estado estable sin movimientos del fluido. A esta propiedad se le llama el principio de intercambio de estabildades.

### 2.3. El modelo de Maxwell

Las propiedades viscosa y elástica de un fluido pueden ser combinadas dentro de una ecuación constitutiva la cual describirá los diferentes efectos elásticos que puede tener. Maxwell desarrolló una teoría para la viscoelasticidad, en la que propuso que fluidos con ambas propiedades de viscosidad y elasticidad podrían ser descritos por la ecuación:

$$\tau_{xy} + \frac{\mu}{G} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial t} = 2\mu e_{xy}, \quad (2.1)$$

donde  $\tau_{xy}$  es el elemento (x,y) del tensor de esfuerzos,  $G$  es el módulo elástico,  $\mu$  es la viscosidad y  $e_{xy}$  es el elemento (x,y) del tensor rapidez corte definido como  $e_{xy} = 1/2(\partial v_y/\partial x + \partial v_x/\partial y)$ , con  $v_x$  y  $v_y$  las componentes  $x$ ,  $y$  del vector velocidad, respectivamente. Cuando el módulo elástico es muy grande o cuando el flujo es estacionario, independiente del tiempo, la ecuación se simplifica al caso de un fluido newtoniano. Esta es una de las expresiones más simples para el tensor de esfuerzos de un fluido que tiene viscosidad y elasticidad. Ciertas generalizaciones de la ecuación constitutiva han sido usadas para demostrar la dinámica de fluidos poliméricos. La ecuación constitutiva del fluido de Maxwell también se puede escribir en forma tensorial, con  $\lambda_T = \mu/G$  como el tiempo de relajamiento, la ecuación en forma lineal es:

$$\boldsymbol{\tau} + \lambda_T \frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial t} = 2\mu \mathbf{e}, \quad (2.2)$$

para los tensores de esfuerzos  $\boldsymbol{\tau}$  y de corte  $\mathbf{e}$ .

## Capítulo 3

### ESTABILIDAD TERMOCAPILAR DE UNA CAPA DE FLUIDO VISCOELÁSTICO SOBRE UNA PARED DE ESPESOR FINITO

#### 3.1. Planteamiento del problema

Se propone ahora un modelo teórico donde se presenta convección termocapilar en una capa delgada de fluido de Maxwell sometido a un gradiente de tensión superficial provocado por un gradiente de temperatura, para investigar su estabilidad hidrodinámica. Se considera una capa horizontal infinita y delgada de un fluido incompresible viscoelástico de espesor  $d_f$  y conductividad térmica  $\chi_f$  sobre una pared rígida con espesor  $d_w$  y conductividad térmica  $\chi_w$ , Fig.(3.1).

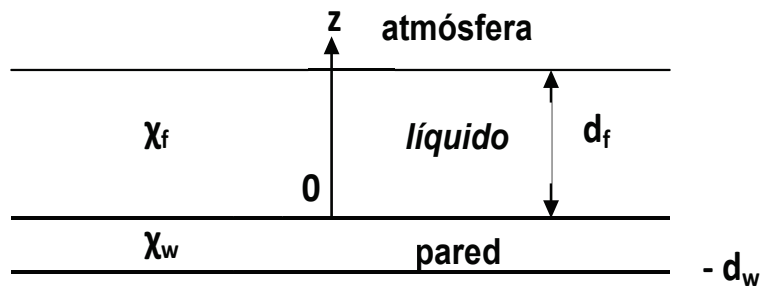


Figura 3.1: Esquema de la capa delgada de líquido viscoelástico con conductividad térmica  $\chi_f$  y espesor  $d_f$  sobre una pared rígida horizontal de conductividad térmica  $\chi_w$  y espesor  $d_w$ .

Se toma un sistema coordenado cartesiano  $(x, y, z)$  con origen en la entrecara del fluido y la pared rígida. El eje  $z$  vertical es perpendicular a la pared. Se considera que la superficie del fluido viscoelástico de Maxwell es libre, plana e indeformable y está en contacto con la atmósfera. Esta capa delgada de fluido se calienta uniformemente por la pared sólida, de tal modo que se tenga el gradiente de temperatura necesario para mantener el flujo del líquido que origina la convección termocapilar debido al gradiente de tensión. Como se mencionó antes una



tensión superficial grande atrae al fluido en la superficie que se encuentra en una zona de tensión superficial pequeña debido a una perturbación en la temperatura. El movimiento en el fluido se puede mantener solo si se logra vencer la fricción debida a la viscosidad. En este sistema de convección termocapilar el número adimensional de Marangoni es el parámetro que contiene los efectos relativos de la tensión superficial respecto a las fuerzas viscosas y de difusión térmica, por lo cual es primordial en la investigación.

El principal objetivo es determinar la estabilidad del sistema propuesto, buscando analítica y numéricamente, los valores críticos del número de Marangoni, del número de onda, en el caso estacionario; así como, la frecuencia de oscilación y el tiempo de relajamiento en el caso de flujo oscilatorio. Además, se considera la variación de estas cantidades en función del cociente de las conductividades y del cociente de espesores del fluido y de la pared. Se espera que el comportamiento de la estabilidad dependa de los cocientes de conductividades y de los espesores; así como, de los números adimensionales de Prandtl y Biot. Por último, se compara el caso de convección oscilatoria con el caso de convección estacionaria para encontrar los puntos de codimensión dos que muestran como compiten los flujos estacionario y oscilatorio por ser los primeros inestables y se determinan las variables de las que depende este resultado, para facilitar los cálculos se representan todos los parámetros como cantidades adimensionales.

### 3.2. Convección termocapilar: ecuaciones de movimiento y temperatura

Una diferencia importante entre el sistema que se propone y aquellos otros donde sólo se considera que la pared es buena conductora o aislante, es que aquí se toman en cuenta la influencia que tienen los espesores y las conductividades térmicas del fluido y la pared. Por esta razón se definen las dos cantidades adimensionales siguientes:

$$\chi = \frac{\chi_f}{\chi_w}, \quad d = \frac{d_w}{d_f}, \quad (3.1)$$

siendo  $\chi$  el cociente de conductividades formado por la conductividad térmica del fluido  $\chi_f$  sobre la de la pared  $\chi_w$ ;  $d$  es el cociente de espesores definido como el espesor de la pared  $d_w$  sobre el del fluido  $d_f$ .

Las ecuaciones lineales que describen el problema de la convección por el calentamiento desde la pared para un fluido de Maxwell viscoelástico en forma dimensional, se dan con base en las ecuaciones de balance de momento, de difusión del calor, de continuidad, de difusión en la pared y de la constitutiva del fluido viscoelástico de Maxwell. Éstas se presentan a continuación:

La ecuación de balance de momento:

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla P + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \quad (3.2)$$

La ecuación de conducción del calor:

$$\frac{d\bar{T}}{dt} = \kappa_T \nabla^2 \bar{T} \quad (3.3)$$

La ecuación de continuidad de un fluido incompresible:

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad (3.4)$$

La ecuación de conducción del calor en la pared:

$$\frac{\partial \bar{T}_w}{\partial t} = \kappa_w \nabla^2 \bar{T}_w \quad (3.5)$$

donde  $d/dt = \partial/\partial t + \vec{V} \cdot \nabla$  es la derivada material, entre los coeficientes adimensionales  $\rho$  es la densidad del fluido,  $\kappa_T$  es la difusividad térmica del fluido y  $\kappa_w$  es la difusividad térmica de la pared, la difusividad térmica se relaciona con la conductividad térmica como:  $\kappa_T = \frac{\chi_T}{\rho_0 c_v}$ , donde  $\rho_0$  es la densidad para una temperatura  $T_0$  y  $c_v$  es el calor específico a volumen constante. Las funciones dimensionales son  $P$  la presión,  $\boldsymbol{\tau}$  es el tensor de esfuerzos viscosos y  $\vec{V} = (u, v, w)$  es el vector velocidad.

El tensor de esfuerzos  $\boldsymbol{\tau}$  satisface la ecuación constitutiva para un fluido de Maxwell:

$$\boldsymbol{\tau} + \lambda_T \frac{\mathcal{D}\boldsymbol{\tau}}{\mathcal{D}t} = 2\mu\mathbf{e}, \quad (3.6)$$

donde  $\mathbf{e}$  es el tensor de rapidez de corte,  $\mathcal{D}/\mathcal{D}t$  es un operador no lineal que puede representar la derivada temporal convectiva superior, convectiva inferior o corrotacional, dependiendo del modelo viscoelástico que se vaya a estudiar. Cuando el estado hidrostático se perturba, todas las derivadas del tiempo de las ecuaciones lineales son similares  $\mathcal{D}/\mathcal{D}t = d/dt = \partial/\partial t$ .

La ecuación de estado de la tensión superficial es:

$$\Gamma = \Gamma_0 + \frac{d\Gamma}{dT}(T - T_0), \quad (3.7)$$

que describe la dependencia del coeficiente de tensión superficial  $\Gamma$  con la temperatura, con  $T_0$  una temperatura de referencia. Así, la tensión superficial decrece monótonicamente como función de la temperatura ya que en la mayoría de los líquidos  $d\Gamma/dT < 0$ .

El estado inicial es el de una capa delgada de fluido en reposo sobre una superficie infinita sometida a un gradiente de temperatura constante perpendicular a la capa definido como  $\beta = dT/dz$ .

Se usa una aproximación modificada de Boussinesq que considera que todas las propiedades del material son constantes, excepto el coeficiente de tensión superficial  $\Gamma$  que depende de la temperatura.

### 3.2.1. Perfil de temperatura

Para obtener el perfil de temperatura, se define el estado hidrostático del sistema ya que es el que se va a perturbar. Para ello se parte de las ecuaciones de conducción de calor Ec. (3.3) y Ec. (3.5). Se supone que el perfil de temperatura en una situación hidrostática permanece constante en el tiempo. Así, la temperatura del fluido y la pared satisfacen una ecuación como:

$$\frac{d^2\bar{T}(\bar{z})}{d\bar{z}^2} = 0, \quad (3.8)$$

donde  $\bar{T}$  es la temperatura adimensional, al resolver dicha ecuación obtenemos las soluciones para el fluido y la pared, respectivamente, las cuales son de la forma:

$$\bar{T}_f(\bar{z}) = A_f\bar{z} + B_f, \quad (3.9)$$

$$\bar{T}_w(\bar{z}) = A_w \bar{z} + B_w, \quad (3.10)$$

donde  $\bar{z}$  es  $z$  dimensional y  $(A_f, B_f, A_w, B_w)$  son constantes.

Las condiciones de frontera que satisfacen las temperaturas son las que se presentan a continuación.

La condición de flujo de calor entre el fluido y la atmósfera es:

$$\chi_f \frac{d\bar{T}_f}{dz} = -q_s(\bar{T}_f - T_0) \quad \bar{z} = d_f \quad (3.11)$$

Aquí,  $T_0$  es la temperatura de la atmósfera adyacente a la capa de fluido. La condición de la temperatura en la entrecara de la pared y la atmósfera es:

$$\bar{T}_w(-d_w) = T_0 + \Delta T \quad \bar{z} = -d_w \quad (3.12)$$

La continuidad de la temperatura y del flujo de calor en la entrecara de la pared y el fluido están dados por:

$$\bar{T}_f(z) = \bar{T}_w(z) \quad \bar{z} = 0 \quad (3.13)$$

$$\chi_w D\bar{T}_w = \chi_f D\bar{T}_f \quad \bar{z} = 0 \quad (3.14)$$

Aplicando las condiciones de frontera anteriores a las expresiones (3.9) y (3.10) se obtienen las soluciones de las constantes que son:

$$A_f = \frac{-q_s \Delta T}{\chi_f + q_s d_f + q_s \chi d_w}, \quad (3.15)$$

$$B_f = B_w = T_0 + \Delta T + \frac{-q_s \chi \Delta T}{\chi_f + q_s d_f + q_s \chi d_w} d_w, \quad (3.16)$$

$$A_w = \frac{-q_s \chi \Delta T}{\chi_f + q_s d_f + q_s \chi d_w}, \quad (3.17)$$

Para adimensionalizar la temperatura se resta  $T_0 + \Delta T$  y después todo se divide entre  $\Delta T Bi_s / (1 + Bi_s + \chi d Bi_s)$ . Aquí  $Bi_s$  está definido como  $\frac{q_s d_f}{\chi_f}$  y representa el número de Biot en la superficie. Para  $z$  adimensional se tiene  $\frac{z}{d_f}$ . Finalmente, las soluciones adimensionales para los perfiles de temperatura principales del fluido y de la pared son:

$$T_f(z) = -z - \chi d, \quad (3.18)$$

$$T_w(z) = -\chi z - \chi d, \quad (3.19)$$

Así, las expresiones para las temperaturas  $T_f$ ,  $T_w$ , quedan en términos de  $z$  adimensional, del cociente de conductividades  $\chi$  y del cociente de espesores  $d$ .

### 3.2.2. Ecuaciones de la perturbación

Ahora se calculan las ecuaciones de perturbación que describen las reacciones del fluido a pequeñas alteraciones de su estado hidrostático. Las perturbaciones se suponen tan pequeñas que se pueden desprestigiar los términos no lineales en las ecuaciones de balance de momento, de calor y en las condiciones de frontera. Para analizar la estabilidad hidrodinámica del estado base, se introducen perturbaciones infinitesimales para la velocidad, presión y temperatura.

$$u = u(x, y, z, t), \quad v = v(x, y, z, t), \quad w = w(x, y, z, t), \quad (3.20)$$

$$P = P_h(z) + p(x, y, z, t), \quad T = T_h + \theta(x, y, z, t), \quad (3.21)$$

Se considera además para la adimensionalización de las variables involucradas las siguientes cantidades:

$$d_f \quad \text{para la longitud,} \quad (3.22)$$

$$\frac{\Delta T Bi_s}{1 + Bi_s + \chi Bi_s d} \quad \text{para la temperatura,} \quad (3.23)$$

$$\frac{\nu}{d_f} \quad \text{para la velocidad,} \quad (3.24)$$

$$\frac{d_f^2}{\nu} \quad \text{para el tiempo,} \quad (3.25)$$

$$\rho\left(\frac{\nu}{d_f}\right)^2 \quad \text{para la presión,} \quad (3.26)$$

donde  $d_f$  es el espesor del fluido,  $Bi_s$  es el número de Biot en la superficie,  $\nu$  es la viscosidad cinemática,  $\rho$  es la densidad,  $\chi$  es el cociente de conductividades y  $d$  es el cociente de espesores.

Para linealizar las ecuaciones primero se sustituyen las perturbaciones infinitesimales en las ecuaciones de balance de momento, de calor y en las condiciones de frontera, se consideran las cantidades adimensionales junto con la aproximación de Boussinesq, finalmente se desprecian los términos de segundo y de mayor orden en las perturbaciones con respecto al estado hidrostático. De tal forma que las ecuaciones de la perturbación en forma lineal y adimensional, que se obtienen son:

$$\frac{1}{Pr} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}' \quad (3.27)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - w = \nabla^2 \theta \quad (3.28)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (3.29)$$

El número de Prandtl es  $Pr = \nu/\kappa$ . Las perturbaciones del tensor de esfuerzos  $\boldsymbol{\tau}'$  y del tensor rapidez de corte  $\mathbf{e}'$  satisfacen:

$$\boldsymbol{\tau}' + \lambda \frac{\partial \boldsymbol{\tau}'}{\partial t} = 2\mathbf{e}', \quad (3.30)$$

Se supone que las perturbaciones en el estado marginal tienen la forma de modos normales representados como

$$\{u, v, w, \theta\} = \{u'(z), v'(z), w'(z), \theta'(z), \theta'_w(z)\} \exp [i(kx + my + \sigma t)], \quad (3.31)$$

Donde  $k$  y  $m$  son los números de onda en la dirección  $x$  y  $y$ , respectivamente. Se define a  $\sigma = \sigma_R - i\sigma_I$ , siendo  $\sigma_R$  la frecuencia de oscilación y  $\sigma_I$  la razón de crecimiento. En el estado marginal  $\sigma_I$  es cero y separa el estado estable del

inestable ya sea con  $\sigma_R \neq 0$  (real) o cero. El llamado intercambio de estabildades corresponde al caso  $\sigma_R = 0$ .

Para obtener un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias acopladas, se aplica el operador  $(1 + \lambda \partial/\partial t)$  en la ecuación de balance momento Ec. (3.27) para introducir el tensor  $\mathbf{e}'$  que se encuentra en la ecuación constitutiva lineal; después, el operador rotacional se aplica dos veces. En el proceso se hace uso de la ecuación de continuidad. Los modos normales son introducidos en todas las ecuaciones:

$$(D^2 - a^2 - i\sigma) \theta'(z) + w'(z) = 0, \quad (3.32)$$

$$(D^2 - a^2) \left( \mu (D^2 - a^2) - \frac{i\sigma}{Pr} \right) w'(z) = 0, \quad (3.33)$$

con  $D = d/dz$  y  $a = \sqrt{k^2 + m^2}$  como la magnitud del número de onda. El parámetro viscoelástico para un fluido de Maxwell está definido como:

$$\mu = 1/(1 + \sigma\lambda), \quad (3.34)$$

con  $\lambda$  el tiempo de relajación adimensional ( número de Weissenberg ). La tensión superficial toma parte en las perturbaciones a través de las condiciones de frontera de los esfuerzos tangenciales en la superficie libre.

### 3.2.3. Condiciones de frontera

Las condiciones de frontera térmicas para las amplitudes de las perturbaciones son: la temperatura en la entrecara de la pared y la atmósfera es constante:

$$\theta'_w = 0 \quad \text{en} \quad z = -d_w \quad (3.35)$$

En la entrecara de la pared y el fluido la continuidad de la temperatura y del flujo de calor están dados por:

$$\theta' = \theta'_w, \quad \chi D\theta' = D\theta'_w \quad \text{en} \quad z = 0 \quad (3.36)$$

Notar que estas dos últimas condiciones se pueden usar para obtener una sola condición que involucra los efectos de la pared de espesor finito y de la capa de fluido.

### Número de Biot en la pared y el número de Marangoni

Se define una cantidad adimensional llamada número de Biot, el cual obtenemos de la siguiente manera. Se considera que la parte exterior de las paredes se encuentran a temperatura constante Ec. (3.35). Entonces la perturbación de la temperatura  $\theta'_w$  debe ser cero en ese lugar ( $z = 0$ ). Además, se considera que en la interfase entre la pared y el fluido, la temperatura y el flujo de calor son continuos Ec. (3.36).

Para obtener el número de Biot en la pared, se tiene una solución general de la ecuación de la perturbación de la temperatura que proviene del laplaciano en tres dimensiones  $d^2\theta/dz^2 - a^2\theta = 0$ . La solución está dada en términos de senos y cosenos hiperbólicos

$$\theta'_w = A_l \cosh(az) + C_l \sinh(az), \quad (3.37)$$

usando la condición de la Ec. (3.35) y despejando el término  $C_l$  se puede sustituir en la solución general Ec. (3.37) para encontrar  $A_l$ , una vez que se tiene la expresión para las constantes  $A_l$  y  $C_l$ , se deriva la solución general y se utiliza la condición de la Ec. (3.36), para obtener una sola expresión de la temperatura del líquido.

$$D\theta' - Bi_w\theta' = 0 \quad \text{en} \quad z = 0. \quad (3.38)$$

El número de Biot, que representa la transferencia de calor en la entrecara de la pared y el fluido, se define como:

$$Bi_w = \frac{q}{\chi \tanh(qd)}, \quad (3.39)$$

donde  $q = \sqrt{a^2 + \sigma}$  queda expresado en términos del número de onda  $a$  y la frecuencia de oscilación  $\sigma$  y  $(\chi, d)$  son los cocientes de conductividades y de espesores.

Finalmente, las condiciones de frontera mecánicas y térmicas se reducen a lo siguiente:

$$w' = Dw' = D\theta' - Bi_w\theta' = 0 \quad \text{en} \quad z = 0, \quad (3.40)$$



$$w' = \mu D^2 w' + a^2 Ma \theta' = D\theta' + Bi_s \theta' = 0 \quad \text{en} \quad z = 1, \quad (3.41)$$

Aquí, el número de Marangoni adimensional está definido como:

$$Ma = \left( \frac{(-\partial\Gamma/\partial T) d_f}{\rho\nu\kappa} \right) \left( \frac{\Delta T Bi_s}{1 + Bi_s + \chi d Bi_s} \right), \quad (3.42)$$

que representa el cociente de las fuerzas debidas a los gradientes de tensión superficial respecto de las fuerzas viscosas  $\eta$  y la difusión térmica  $\kappa$ .

El número de Marangoni es una cantidad adimensional de la diferencia de temperatura aplicada a la capa de fluido. Es el parámetro más importante en la convección térmica de Marangoni. Ese nombre fué introducido al caso térmico por Scriven y Sternling(1964) y por Nield (1964) [39].

Dado que  $-\frac{\partial\Gamma}{\partial T}$  es usualmente positivo,  $\Delta T$  debe ser positivo para que  $Ma > 0$ .  $\Delta T > 0$  significa que el fluido es calentado desde abajo. Para un valor fijo de  $Bi_s$ , corresponde un mínimo valor del número de Marangoni, llamado el número de Marangoni crítico  $Ma_c$ . El principio de la convección de Marangoni ocurrirá espontáneamente en toda la capa infinita de fluido si se alcanza el valor de  $Ma_c$ , es decir si el correspondiente gradiente temperatura crítico vertical se alcanza. Si el número de Biot en la superficie libre es más grande que 0, entonces hay una mayor transferencia de calor de la superficie a la atmósfera y se requiere una mayor diferencia de temperatura vertical, para que ocurra la convección. Los movimientos en la convección son únicos y son característicos del número de onda crítico  $a_c$ .

Se resuelven las Ecs. (3.32) y (3.33), usando las condiciones de frontera Ecs. (3.40) y (3.41), con ayuda del programa Maple. Este es un problema de valores propios para  $Ma$ . Se obtiene como condición de solubilidad una función algebraica en términos de los parámetros del problema. Entonces, el número de Marangoni marginal se calcula al resolver la ecuación trascendental implícita para  $Ma$  de la forma:

$$F(Ma, a, \sigma, \lambda, \chi, d, Pr, Bi_s, Bi_w) = 0. \quad (3.43)$$

# Capítulo 4

## ANÁLISIS DE RESULTADOS

El valor crítico del número de Marangoni se calcula como el mínimo respecto al número de onda de todos los valores marginales.  $Ma_c$  representa la magnitud más pequeña del gradiente de temperatura adimensional necesario para que inicie la convección termocapilar. En este trabajo, como se mencionó anteriormente, la solución para el número de Marangoni marginal en la sección 3.2.3, se obtiene numéricamente con el paquete Maple, este valor de  $Ma_c$  se determina con los parámetros fijos de  $Bi_s = 0, 0.1, 2, 5$ , el número de Biot en la superficie, con  $d = 0.1$  y  $d = 100$ , como los cocientes de espesores definidos al principio. Con ellos se puede calcular el número de Marangoni crítico  $Ma_c$  y su respectivo número de onda crítico  $a_c$  para los casos de convección estacionaria.

En el caso de convección oscilatoria además se fija el tiempo de relajación viscoelástico  $\lambda$  y, el número de Prandtl  $Pr = 2, Pr = 10$ , aparte del número de onda crítico  $a_c$  se calcula también la frecuencia de oscilación crítica  $\sigma_c$  del sistema.

Se usan sólo dos variables del cociente de espesores porque probando con diversos valores se demuestra que, para  $d < 0.1$  y  $d > 100$ , la diferencia con las curvas dadas es despreciable. Aquí se supone que la solución polimérica que forma el fluido viscoelástico de Maxwell tiene un número de Prandtl semejante al del agua. Entonces, los valores propuestos para el número de Prandtl corresponden a una capa de agua con una temperatura entre  $5^\circ$  y  $10^\circ$  Celsius, para  $Pr = 2$  y, una temperatura que está entre  $85^\circ$  y  $90^\circ$  Celsius para  $Pr = 10$ . Con estos valores del número de Prandtl se puede entender el comportamiento termocapilar para un fluido en la convección oscilatoria.

Primero se presentan los resultados de la convección en el modo estacionario, cuando  $\sigma=0$ . Después se investiga la convección en el modo oscilatorio. Ambos resultados se comparan punto a punto para distintos tiempos de relajamiento. De esta comparación se calculan los puntos de codimensión dos que indican los valo-

res de los parámetros para los que los números de Marangoni críticos  $Ma_c$  de la convección estacionaria y oscilatoria son iguales. Estos puntos son útiles para saber qué cambio en las magnitudes de los parámetros se requiere para que la convección estacionaria o la oscilatoria sea la primera en aparecer. En otras palabras, estos puntos dividen las regiones donde prevalecen la convección estacionaria y la convección oscilatoria.

Los resultados se presentan gráficamente de acuerdo a los parámetros  $Ma_c$ ,  $a_c$ ,  $\sigma$ ,  $\lambda$  en función del cociente de conductividades térmicas  $\chi$ . El rango que se establece de  $\chi$  va desde una pared perfectamente conductora, ( $\chi = 0$ ), hasta una pared aislante, ( $\chi = \infty$ ). Además, se grafican los puntos de codimensión dos en función de  $\chi$  para determinar qué modo entre el estacionario y el oscilatorio es el primer inestable en aparecer.

#### 4.1. Comparación con los resultados de Pearson [5]

Para verificar que el algoritmo que se determinó para encontrar el número de Marangoni crítico funciona correctamente, se hizo una comparación en el caso estacionario con las fórmulas de Pearson [5] en dos situaciones límite. Cuando se considera una pared muy buena conductora de calor y la otra cuando se considera una pared muy mala conductora. Al hacer la frecuencia de oscilación cero en el algoritmo establecido, se obtienen los resultados de Pearson [5].

Para el caso de una superficie muy buena conductora, se tiene:

$$Ma = \frac{8a(\operatorname{acosha} + Bi_s \operatorname{senha})(a - \operatorname{senhacosha})}{a^3 \operatorname{cosha} - \operatorname{senh}^3 a}, \quad (4.1)$$

y para una superficie perfectamente aislante:

$$Ma = \frac{8a(\operatorname{asenha} + Bi_s \operatorname{cosha})(a - \operatorname{senhacosha})}{a^3 \operatorname{senha} - a^2 \operatorname{cosha} + 2\operatorname{asenha} - \operatorname{senh}^2 \operatorname{acosha}}, \quad (4.2)$$

los valores críticos del número de Marangoni y del número de onda con un valor de  $Bi_s = 0$  son:  $Ma_c = 79.607$ ,  $a_c = 1.993$ , lo que concuerda para el caso de pared muy buena conductora ( $\chi = 0$ ) y  $Ma_c = 48$ ,  $a_c = 0$ , para el caso de pared perfectamente aislante ( $\chi = \infty$ ). De esta forma se comprueba que en los casos límite el algoritmo en la convección estacionaria tiene una buena aproximación.

Por otro lado, para el caso de convección oscilatoria de un fluido de Maxwell, se hicieron comparaciones numéricas con el trabajo de Getachew [29] en el límite cuando  $Bi_s \rightarrow 0$  del caso conductor ideal ( $\chi = 0$ ), los resultados obtenidos mostraron muy buen acuerdo con los que se presentan en su Tabla 1.

## 4.2. Convección termocapilar estacionaria

El caso estacionario se analiza considerando los espesores de la pared y del fluido, a diferencia del caso de Pearson [5]. Se calculan valores intermedios (respecto a los ideales) de  $\chi$ , pues se espera que sea la región donde se pueda observar la importancia del cociente de espesores  $d$  en el número de Marangoni crítico y su número de onda correspondiente. Para determinar el valor  $Ma_c$  se varía el número de onda para encontrar la magnitud más pequeña de los  $Ma$  marginales y se representa con un punto. Después se cambia el valor de  $\chi$  para calcular un nuevo  $Ma_c$  con el mismo proceso, finalmente se obtiene una curva definida como lo muestran las figuras.

En la Fig. 4.1 se muestra la variación de  $Ma_c$  de flujo estacionario con respecto a  $\chi$ , para distintos números de Biot de la superficie libre ( $Bi_s=0, 0.1, 2, 5$ ) y los cocientes de espesores  $d = 0.1$  y  $d = 100$ . En la gráfica se muestra que  $Ma_c$  sí depende de manera importante de los parámetros  $Bi_s$ ,  $\chi$  y  $d$ , pues su valor varía. Observamos que para  $Bi_s = 5$ ,  $Ma_c$  es mayor que el de  $Bi_s = 0$ , lo que indica que para  $Bi_s = 5$  el sistema es más estable. Además, para  $Bi_s = 5$  la diferencia entre los dos cocientes de espesor es menor que para  $Bi_s = 0$ . Esto indica que la diferencia entre cocientes de espesores disminuye cuando  $Bi_s$  crece. Al acercarse a los valores límite,  $\chi \rightarrow 0$  (conductor perfecto) y  $\chi \rightarrow \infty$  (aislante perfecto) y para cada valor de  $Bi_s$ , la magnitud de  $Ma_c$  tiende a ser constante.

La variación del número de onda crítico con respecto al cociente de conductividades se muestra en la Fig. 4.2 para diferentes valores de  $Bi_s$  y espesores  $d = 0.1$  y  $d = 100$ . Para  $Bi_s = 5$  el número de onda crítico  $a_c$  es mayor que para  $Bi_s = 0$ . Además, se puede observar que en  $Bi_s = 5$  la diferencia entre cocientes de espesores es menor que para  $Bi_s = 0$ . Al igual que para  $Ma_c$ , con el aumento en  $Bi_s$  decrece la diferencia entre los puntos de los dos cocientes de espesores. En los casos límite  $\chi \rightarrow 0$  y  $\chi \rightarrow \infty$  y para cada valor de  $Bi_s$ , las magnitudes de  $a_c$  tienden a ser constantes. Por tanto, la mayor diferencia entre cocientes de espesores se encuentra para  $Bi_s = 0$ , tanto para  $Ma_c$  como para  $a_c$ . Así, el cociente de espesores que tiene menor  $Ma_c$  necesitará un gradiente de temperatura menor para comenzar con la convección termocapilar.

Los valores críticos  $Ma_c$  y  $a_c$  en los casos límite  $\chi \rightarrow 0$  y  $\chi \rightarrow \infty$  se presentan en la Tabla 1 para diferentes valores de  $Bi_s$ . Se puede comprobar que los resultados para los casos límite  $\chi \rightarrow 0$  y  $\chi \rightarrow \infty$  con  $Bi_s = 0$  son iguales a los obtenidos por Pearson [5]. En la última columna se observa que las diferencias entre las

magnitudes de los casos límite se reducen incrementando  $Bi_s$ .

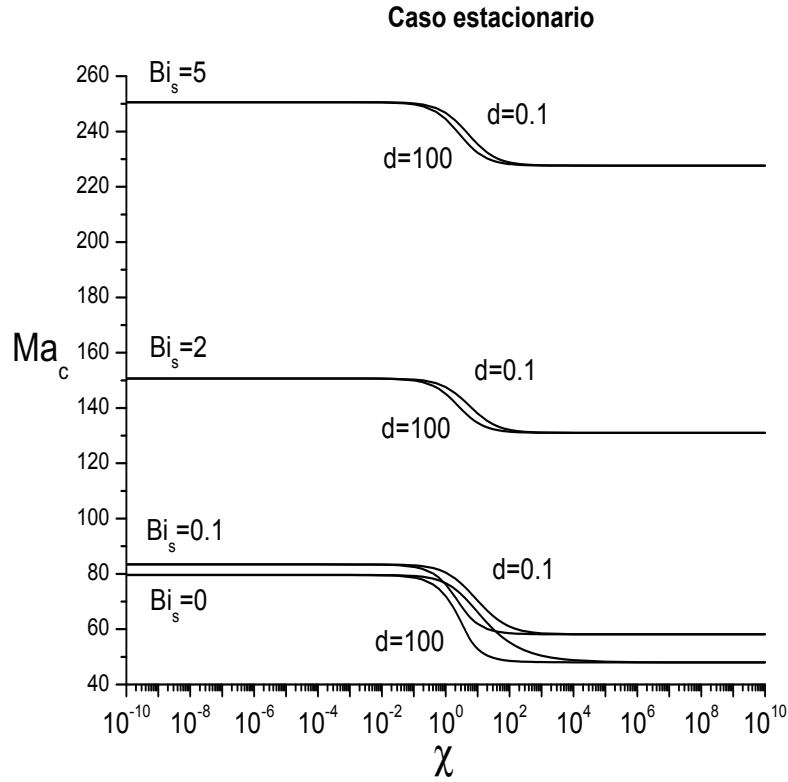


Figura 4.1: Convección estacionaria. Variación del número de Marangoni crítico  $Ma_c$  con respecto a  $\chi$ , para valores  $Bi_s = 0, 0.1, 2, 5$  y espesores  $d = 0.1$  y  $d = 100$ .

<b>TABLA 1</b>						
	$\chi \rightarrow 0$	$\chi \rightarrow 0$	$\chi \rightarrow \infty$	$\chi \rightarrow \infty$	<b>Diferencia entre los límites</b>	
$Bi_s$	$Ma_c$	$a_c$	$Ma_c$	$a_c$	$Ma_c$	$a_c$
0	79.606	1.993	48	0	31.606	1.993
0.1	83.426	2.028	58.150	1.060	25.276	0.968
2	150.678	2.386	131.016	1.984	19.661	0.402
5	250.597	2.598	227.662	2.274	22.935	0.324

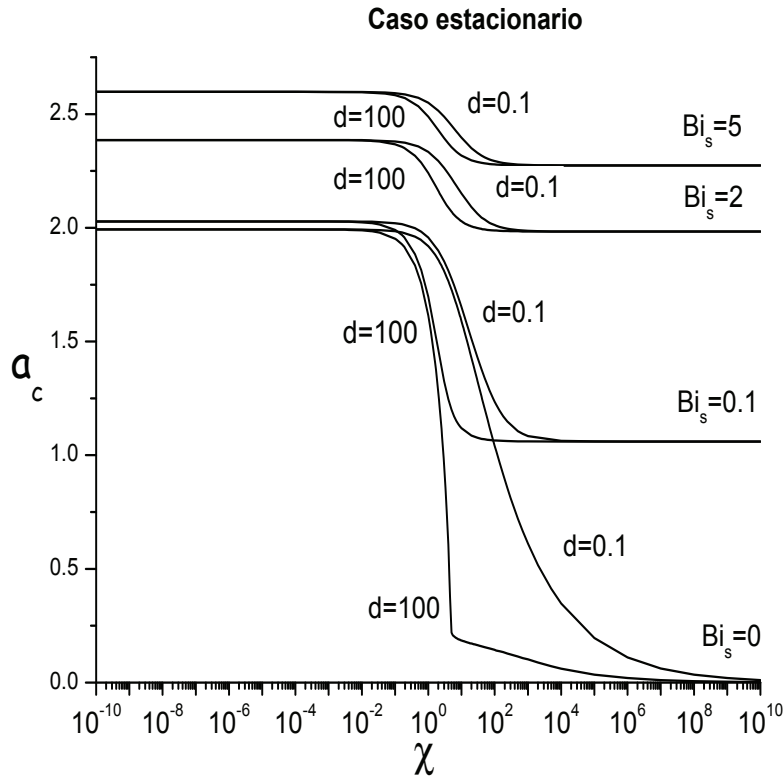


Figura 4.2: Convección estacionaria. Variación del número de onda crítico  $a_c$  con respecto a  $\chi$ , para los valores  $Bi_s = 0, 0.1, 2, 5$  y espesores  $d = 0.1$  y  $d = 100$ .

### 4.3. Convección termocapilar oscilatoria

En la convección termocapilar oscilatoria la dependencia en el tiempo se refleja en la frecuencia de oscilación  $\sigma \neq 0$ , de la cual ahora depende  $Ma$ . Se determina el número de Marangoni crítico para la convección oscilatoria, considerando la misma variedad de parámetros presentada en el caso anterior, más el número de Prandtl  $Pr$  y el tiempo de relajación  $\lambda$  del fluido viscoelástico.

En este caso el número de Marangoni crítico  $Ma_c$  es una variable compleja de los parámetros, debido a la frecuencia de oscilación ( $\sigma$ ) definida con parte real e imaginaria. Así, se busca numéricamente un valor  $\sigma$  para el cual sea cero la parte imaginaria de  $Ma$ . Esto es,  $\sigma$  es la raíz de la parte imaginaria de  $Ma$  para los parámetros dados. Esta  $\sigma$  se sustituye en la parte real de  $Ma$  para obtener el  $Ma$  marginal para el número de onda dado. El valor crítico se calcula variando el número de onda hasta encontrar el mínimo de los marginales de  $Ma$ .

En la Fig. 4.3 se muestra la variación de  $Ma_c$ , con respecto a  $a_c$  de los modos estacionario y oscilatorio, para  $Pr = 2$  y  $Pr = 10$ , diferentes valores de  $Bi_s$  y de  $d$ . El modo estacionario se muestra con el símbolo (st). Es importante hacer

notar que las gráficas de  $Ma_c$  para el caso oscilatorio tienen el mismo rango de valores que el caso estacionario. Cada columna de gráficas corresponde al símbolo utilizado,  $st$ ,  $Pr = 2$  y  $Pr = 10$ . De ahí se puede observar que únicamente en el caso estacionario la diferencia entre los cocientes de espesores es notable para los valores de  $Ma_c$ . Además, se observa en la Fig. 4.3 que tanto  $Ma_c$  como  $a_c$  crecen con  $Bi_s$ . Se puede ver también que  $a_c$  crece con  $Pr$  en convección oscilatoria. En el caso oscilatorio, para cada  $Ma_c$  y  $a_c$  se calculó el tiempo de relajación  $\lambda$  y su correspondiente frecuencia de oscilación.

En la Fig. 4.4 se muestra la variación de  $Ma_c$  con respecto a  $\sigma$ . Se observa que  $Ma_c$  crece conforme crece  $\sigma$ . Así, cuando la frecuencia de oscilación crece es porque el sistema es más estable. Además,  $Bi_s$  y  $Pr$  incrementan los valores de  $Ma_c$  y  $\sigma$ .

En la Fig. 4.5 se muestra la variación de  $Ma_c$  con respecto a  $\lambda$ . Analizando la gráfica, se encuentra que  $Ma_c$  decrece conforme  $\lambda$  se incrementa. Esto implica que el sistema se vuelve más inestable si  $\lambda$  crece. Sin embargo,  $\lambda$  depende de los valores de  $Bi_s$  y  $Pr$ .

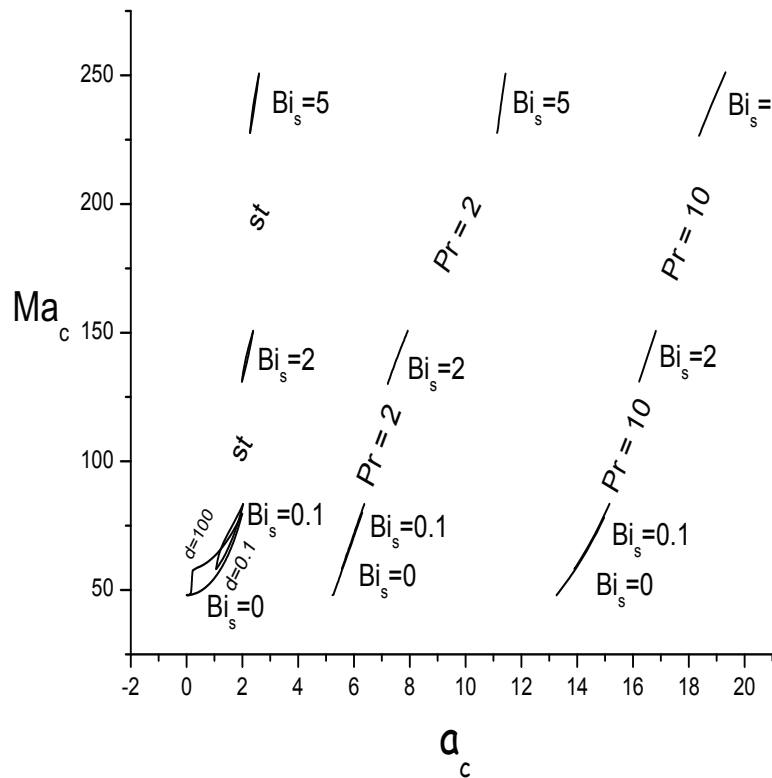


Figura 4.3: Variación de  $Ma_c$  con  $a_c$ , con  $Bi = 0, 0.1, 2, 5$  y  $d = 0.1$  y  $d = 100$ . Para el caso estacionario ( $st$ ) y para el caso oscilatorio con  $Pr = 2$  y  $Pr = 10$ .



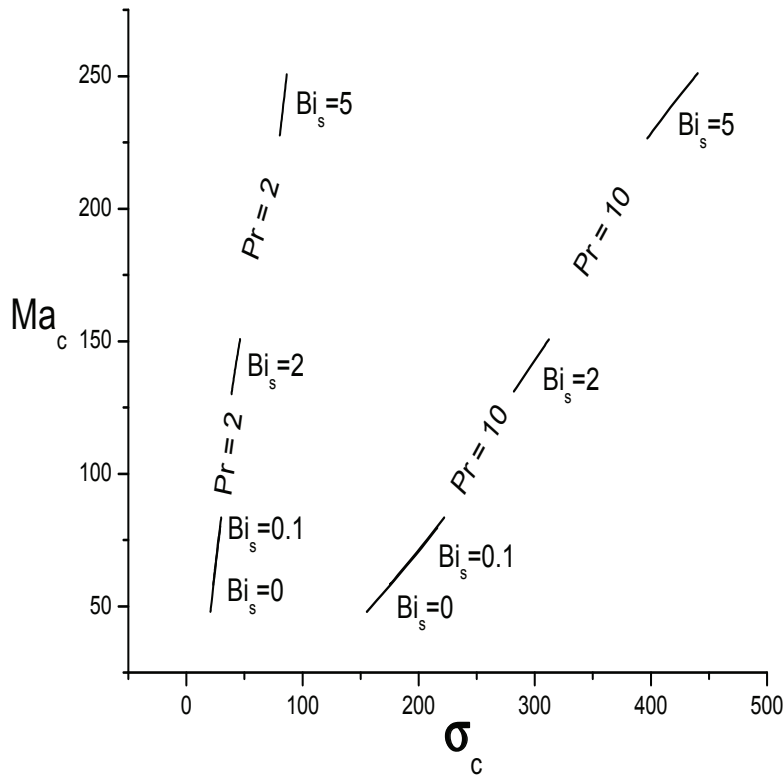


Figura 4.4: Variación de  $Ma_c$  con  $\lambda$ , con  $Bi = 0, 0.1, 2, 5$  y  $d = 0.1$  y  $d = 100$ . Para el caso estacionario (st) y para el caso oscilatorio con  $Pr = 2$  y  $Pr = 10$ .

#### 4.4. Competición entre la convección termocapilar estacionaria y oscilatoria: puntos de codimension dos

Después de analizar los casos de convección termocapilar estacionaria y oscilatoria, se puede ahora hacer una comparación de ambos para mostrar cuál es el primer inestable de acuerdo a un análisis en la variación de los parámetros del problema. Con esto se tiene la posibilidad de calcular los puntos de codimensión dos del número de Marangoni crítico  $Ma_c$  respecto al cociente de conductividades  $\chi$ .

Se consideran los puntos de intersección (puntos de codimensión dos) entre el caso estacionario y el oscilatorio respecto a los  $Ma_c$  en función de  $\chi$  para los espesores  $d = 0.1$  y  $d = 100$ . Esto quiere decir que las curvas se deben cruzar en los mismos valores de  $Ma_c$  y  $\chi$ .

Para ello se grafican los resultados del modo oscilatorio junto con los del modo estacionario, como se puede observar en la Fig 4.6. Ahí se muestra la variación de  $Ma_c$  con respecto a  $\chi$ , para  $Pr = 2$  con  $Bi_s = 0$ . Las líneas curvas corresponden al modo estacionario con espesores  $d = 0.1$  y  $d = 100$ , respectivamente. Las líneas

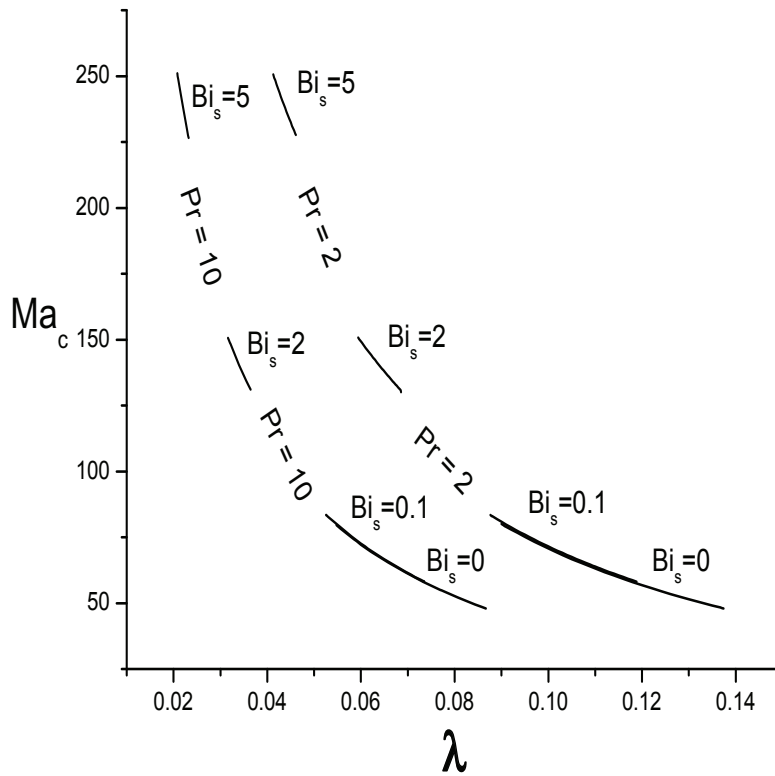


Figura 4.5: Variación de  $Ma_c$  con  $\sigma$ , con  $Bi = 0, 0.1, 2, 5$  y  $d = 0.1$  y  $d = 100$ . Para el caso estacionario (st) y para el caso oscilatorio con  $Pr = 2$  y  $Pr = 10$ .

rectas que las cruzan corresponden al modo oscilatorio. Nótese que no son exactamente rectas, pero su variación en el rango de  $\chi$  es extremadamente pequeña. A cada recta le corresponde un tiempo de relajación distinto  $\lambda$ . Sólo se muestran algunos valores de  $\lambda$  para observar justo el punto donde se cruzan y tener un punto de codimensión dos. Más adelante, se graficarán los puntos de codimensión dos de acuerdo a los diferentes parámetros que intervienen. Para dar la gráfica final, con la curva delineada, de los puntos de codimensión dos, se tiene que variar  $\lambda$  a pasos muy pequeños y no exactamente como se muestra en las figuras. De la misma manera, se presenta la variación de  $Ma_c$  con respecto a  $\chi$ , para  $Pr = 2$  con  $Bi_s = 0.1$  en la Fig. 4.7,  $Bi_s = 2$  en la Fig. 4.8 y  $Bi_s = 5$  en la Fig. 4.9.

Para un valor más grande del número de Prandtl  $Pr = 10$  se dan las siguientes gráficas: Con  $Bi_s = 0$  en la Fig. 4.10,  $Bi_s = 0.1$  en la Fig. 4.11,  $Bi_s = 2$  en la Fig. 4.12 y  $Bi_s = 5$  en la Fig. 4.13.

Del análisis de esas gráficas se tiene que, para los puntos de codimensión dos, un aumento en  $Bi_s$  incrementa el valor de  $Ma_c$ , pero  $Ma_c$  decrece cuando  $\lambda$  crece. Para  $Pr = 2$ , los valores de  $\lambda$  son mayores a los del caso  $Pr = 10$ . Esto significa que la  $\lambda$  de los puntos de codimensión dos crece cuando  $Pr$  disminuye. Si graficamos los

puntos de codimensión dos para  $Ma_c$  vs  $\chi$  se obtienen curvas con la misma forma que el caso estacionario. Por ello, la diferencia entre las curvas de los cocientes de espesores también es importante en el caso de los puntos de codimensión dos.

Para determinar cuál es el primer modo inestable, es necesario observar la intersección para cada tiempo de relajación  $\lambda$  con respecto a  $\chi$ . Se observa el valor de  $Ma_c$  para  $d = 0.1$  y  $d = 100$ , respectivamente.

Se analiza la Fig. 4.6 para  $Pr = 2$  y  $Bi_s = 0$ . Se toma por ejemplo  $\lambda = 0.114$  y observamos que ambos modos de convección tienen  $Ma_c = 60.443$  en el punto de codimensión dos, con un cociente de espesores  $d = 100$  y  $\chi = 3.8$ . Cuando  $\chi > 3.8$  la convección estacionaria es la primera inestable. Para el espesor  $d = 0.1$  con el mismo valor de  $Ma_c = 60.443$  pero  $\chi = 29$ , se tiene el punto de codimensión dos. Cuando  $\chi > 29$  la convección estacionaria es la primera inestable.

Para la misma Fig. 4.6 en los casos extremos donde  $\lambda < 0.0903$ , la convección estacionaria es la primera inestable, mientras que para  $\lambda > 0.0903$  la convección oscilatoria es la primera inestable. En los valores que están fuera del intervalo del modo estacionario es decir en  $\lambda > 0.1374$ , la convección oscilatoria será la primera inestable en todo el intervalo de  $\chi$ .

Se hace un análisis similar para las Figs. 4.7, 4.8, 4.9 con  $Pr=2$  y las Figs. 4.10, 4.11, 4.12, 4.13 con un valor de  $Pr=10$ ; de esa forma se compara la convección estacionaria y oscilatoria y se determina cuál es el primer inestable.

Como ya se mencionó anteriormente, para un valor de  $Ma_c$  corresponde un  $a_c$ . Para puntos de codimensión dos también se tiene un  $\lambda$  y  $\sigma$  correspondientes. La variación del número de onda crítica  $a_c$  como función de  $\chi$  de los puntos de codimensión dos se muestra en la Fig. 4.14 para  $Pr = 2$  y en la Fig. 4.17 para  $Pr = 10$ .

De un análisis general de la Fig. 4.14 y la Fig. 4.17, se encuentra que si  $Bi_s$  se incrementa  $a_c$  crece. Además, se puede observar que  $a_c$  decrece con  $\chi$ . En  $Bi_s = 5$  la diferencia entre los cocientes de espesores es menor que para  $Bi_s = 0$ . En los casos limite  $\chi \rightarrow 0$  (*conductor perfecto*) y  $\chi \rightarrow \infty$  (*aislante perfecto*) los valores del número de onda crítico tienden a ser constantes. Al incrementar el número de Prandtl también crece  $a_c$ . Otra observación que se puede hacer del análisis es que la magnitud del número de onda, correspondiente al punto de codimensión dos, es mayor en el modo oscilatorio que en el estacionario.

Los puntos de codimensión dos con respecto a la variación del tiempo de relajación como función de  $\chi$  se muestran en la Fig. 4.15 para  $Pr = 2$  y en la Fig. 4.18 para  $Pr = 10$ . Al hacer un análisis de las gráficas en las Fig. 4.15 y 4.18, se

encuentra que si  $Bi_s$  decrece,  $\lambda$  crece. Observamos que  $\lambda$  crece conforme  $\chi$  aumenta. Para  $Bi_s = 5$  la diferencia entre el cociente de espesores es menor que para  $Bi_s = 0$ . En los casos límite  $\chi \rightarrow 0$  y  $\chi \rightarrow \infty$  los valores del tiempo de relajación  $\lambda$  tienden a ser constantes. En este caso, al disminuir el número de Prandtl se incrementa el valor de  $\lambda$ .

De acuerdo a los puntos de codimensión dos, la variación de la frecuencia de oscilación como una función de  $\chi$  se muestra en la Fig. 4.16 para  $Pr = 2$  y en la Fig 4.19 para  $Pr = 10$ . Se encuentra en la Fig. 4.16 y la Fig 4.19 que conforme  $Bi_s$  se incrementa,  $\sigma$  crece. Además se observa que  $\lambda$  decrece mientras que  $\chi$  aumenta. Para  $Bi_s = 5$  la diferencia entre las curvas de los cocientes de espesores es menor que en  $Bi_s = 0$ . En los casos límite  $\chi \rightarrow 0$  y  $\chi \rightarrow \infty$  los valores de la frecuencia de oscilación tienden a ser constantes. Al incrementar  $Pr$ ,  $\sigma$  también crece.

$Pr = 2, Bi_s = 0$

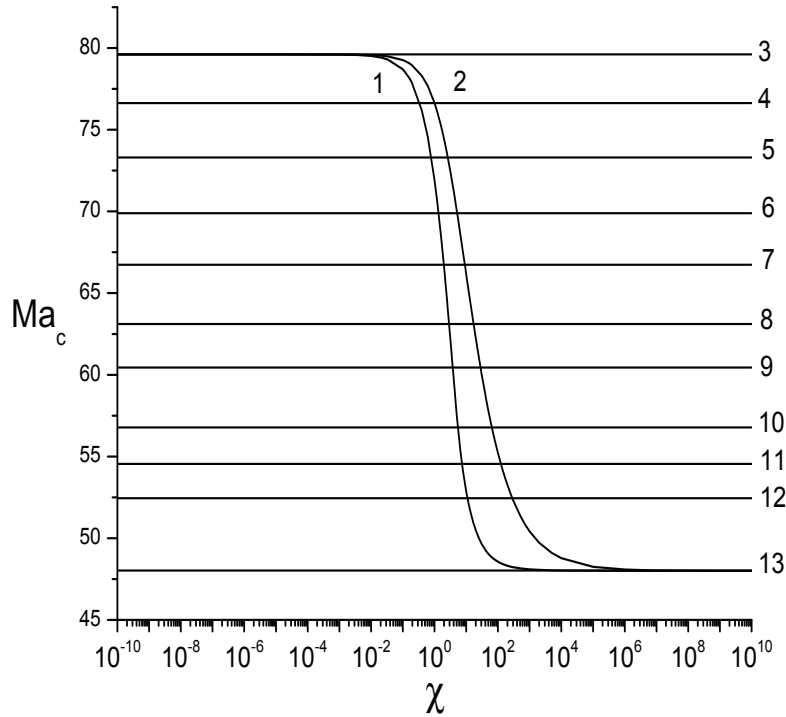


Figura 4.6: Puntos de Codimensión dos.  $Ma_c$  vs  $\chi$ , con  $Pr = 2, Bi_s = 0$ . 1: modo estacionario,  $d = 100$ , 2: modo estacionario,  $d = 0.1$ , 3:  $\lambda = 0.09038$ , 4:  $\lambda = 0.0934$ , 5:  $\lambda = 0.097$ , 6:  $\lambda = 0.101$ , 7:  $\lambda = 0.105$ , 8:  $\lambda = 0.11$ , 9:  $\lambda = 0.114$ , 10:  $\lambda = 0.12$ , 11:  $\lambda = 0.124$ , 12:  $\lambda = 0.128$ , 13:  $\lambda = 0.1374$ .

<b>TABLA 2</b>				
<b>Diferencia entre <math>d = 0.1</math> y 100</b>				
<b>Efecto en <math>\chi = 10</math></b>				
$Bi_s$	0	0.1	2	5
$Ma_c$ st	13.275	8.386	3.397	3.068
$a_c$ st	1.404	0.533	0.122	0.078
<b>Pr = 2</b>				
$\lambda$	0.021	0.011	0.0016	0.0006
$a_c$	0.424	0.265	0.114	0.038
$\sigma_c$	3.402	2.189	1.163	0.797
<b>Pr = 10</b>				
$\lambda$	0.0145	0.0076	0.0008	0.0003
$a_c$	0.789	0.445	0.104	0.114
$\sigma_c$	25.957	15.849	5.202	5.263

$Pr = 2, Bi_s = 0.1$

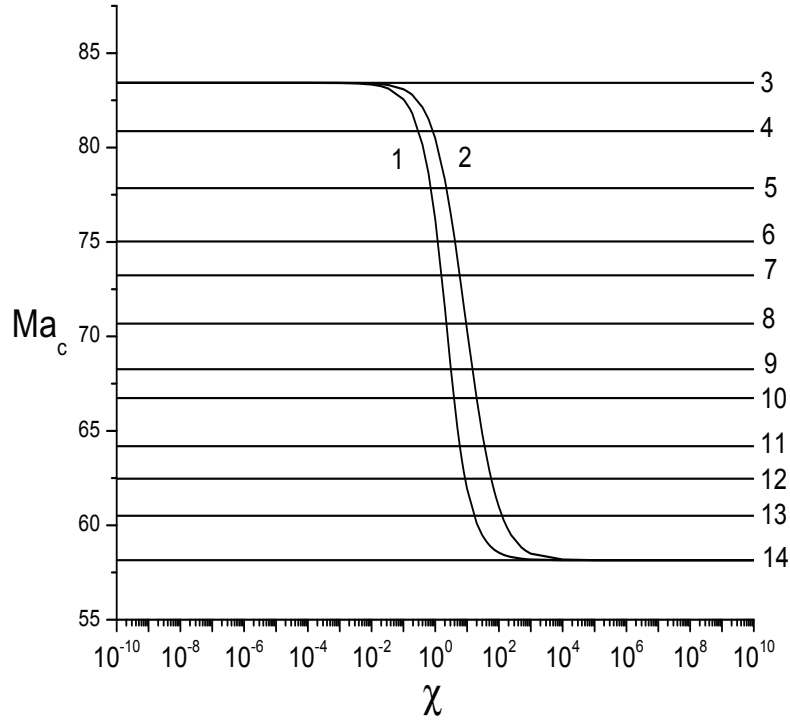


Figura 4.7: Puntos de Codimensión dos.  $Ma_c$  vs  $\chi$ , con  $Pr = 2, Bi_s = 0.1$ . 1: modo estacionario,  $d = 100$ , 2: modo estacionario,  $d = 0.1$ , 3:  $\lambda = 0.0876$ , 4:  $\lambda = 0.09$ , 5:  $\lambda = 0.093$ , 6:  $\lambda = 0.096$ , 7:  $\lambda = 0.098$ , 8:  $\lambda = 0.101$ , 9:  $\lambda = 0.104$ , 10:  $\lambda = 0.106$ , 11:  $\lambda = 0.1095$ , 12:  $\lambda = 0.112$ , 13:  $\lambda = 0.115$ , 14:  $\lambda = 0.11815$ .

Finalmente, se presenta la Tabla 2 donde se compara la diferencia entre un cociente de espesores  $d = 0.1$  y  $d = 100$  para la magnitud de las diferentes variables del problema, fijando  $\chi = 10$ . Este valor de  $\chi$  se usa como representativo de la región donde los valores de  $Ma_c$  tienen la mayor distancia entre curvas de  $d = 0.1$  y  $d = 100$ .

En el caso estacionario (st en la Tabla 2) la mayor diferencia para  $Ma_c$  y  $a_c$  con respecto a  $\chi = 10$  se encuentra cuando  $Bi_s = 0$ . En el modo oscilatorio la mayor diferencia entre cocientes de espesores para  $\lambda$  está en  $Bi_s = 0$  y  $Pr = 2$ . En cambio, la mayor diferencia entre cocientes de espesores para  $\sigma$  y  $a_c$  está dada en  $Bi_s = 0$  y  $Pr = 10$ .

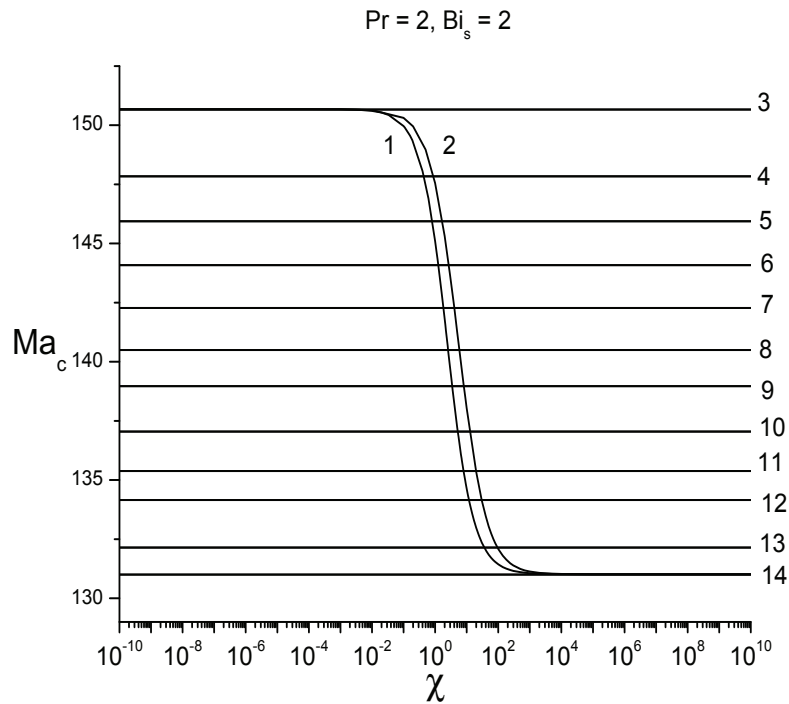


Figura 4.8: Puntos de Codimensión dos.  $Ma_c$  vs  $\chi$ , con  $Pr = 2, Bi_s = 2$ , 1: modo estacionario,  $d = 100$ , 2: modo estacionario,  $d = 0.1$ , 3:  $\lambda = 0.059439$ , 4:  $\lambda = 0.0606$ , 5:  $\lambda = 0.0614$ , 6:  $\lambda = 0.0622$ , 7:  $\lambda = 0.063$ , 8:  $\lambda = 0.0638$ , 9:  $\lambda = 0.0645$ , 10:  $\lambda = 0.0654$ , 11:  $\lambda = 0.0662$ , 12:  $\lambda = 0.0668$ , 13:  $\lambda = 0.0678$ , 14:  $\lambda = 0.06838$ .

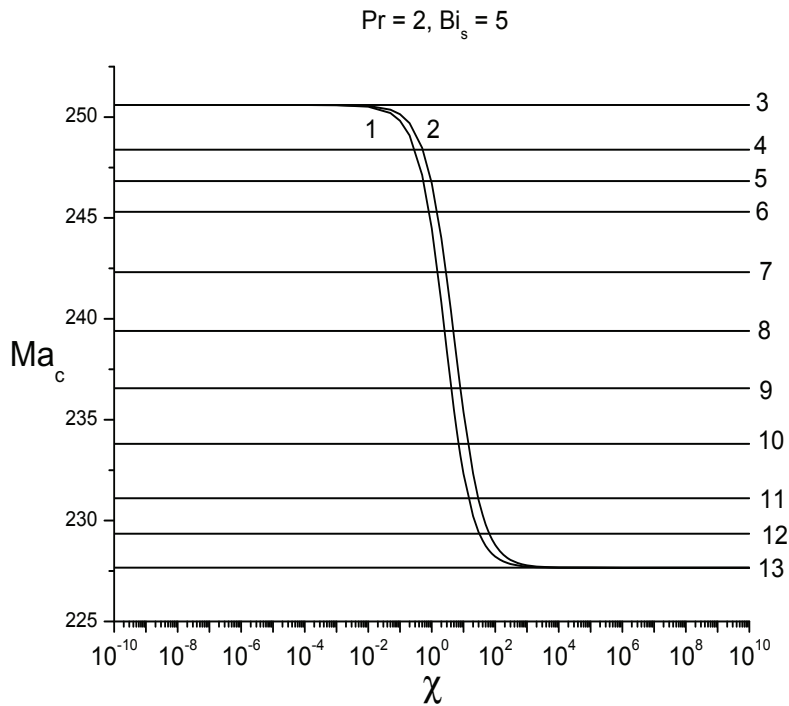


Figura 4.9: Puntos de Codimensión dos.  $Ma_c$  vs  $\chi$ , con  $Pr = 2, Bi_s = 5$ , 1: modo estacionario  $d = 100$ , 2: modo estacionario  $d = 0.1$ , 3:  $\lambda = 0.041278$ , 4:  $\lambda = 0.0417$ , 5:  $\lambda = 0.042$ , 6:  $\lambda = 0.0423$ , 7:  $\lambda = 0.0429$ , 8:  $\lambda = 0.0435$ , 9:  $\lambda = 0.0441$ , 10:  $\lambda = 0.0447$ , 11:  $\lambda = 0.0453$ , 12:  $\lambda = 0.0457$ , 13:  $\lambda = 0.04609$ .

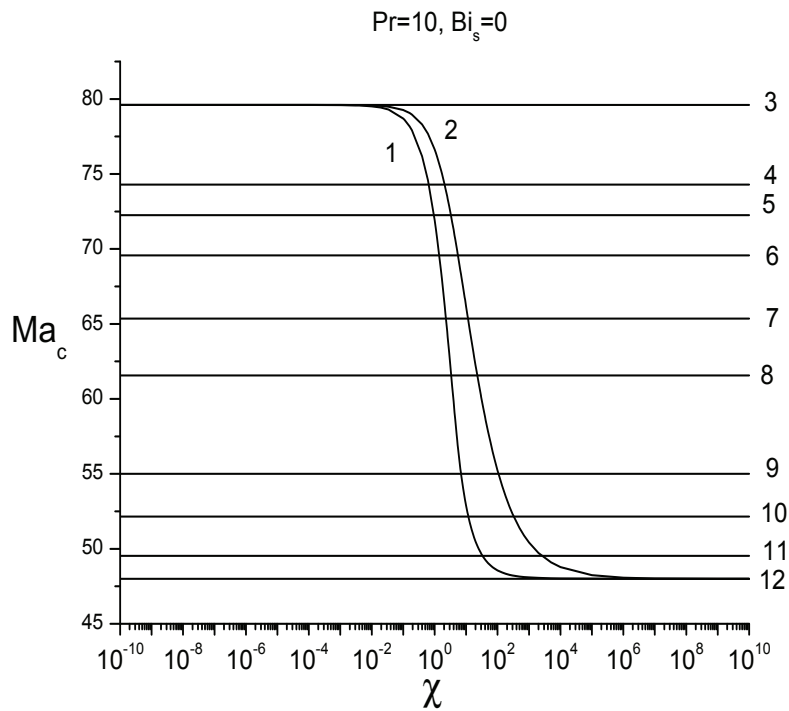


Figura 4.10: Puntos de Codimensión dos.  $Ma_c$  vs  $\chi$ , con  $Pr = 10$ ,  $Bi_s = 0$ , 1: modo estacionario,  $d = 100$ , 2: modo estacionario,  $d = 0.1$ , 3:  $\lambda = 0.05475$ , 4:  $\lambda = 0.05845$ , 5:  $\lambda = 0.06$ , 6:  $\lambda = 0.06215$ , 7:  $\lambda = 0.06585$ , 8:  $\lambda = 0.06955$ , 9:  $\lambda = 0.07695$ , 10:  $\lambda = 0.08065$ , 11:  $\lambda = 0.08435$ , 12:  $\lambda = 0.086667$ .

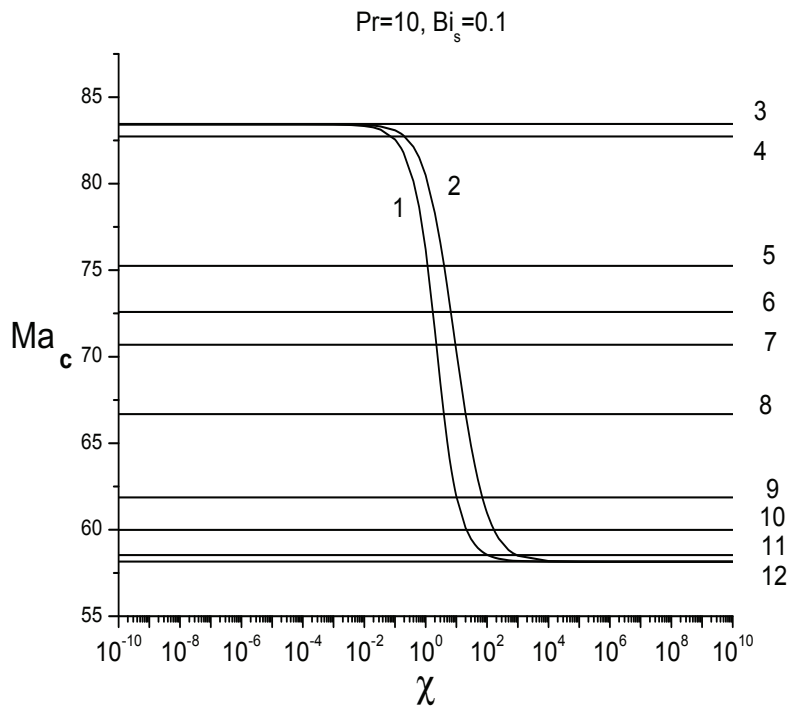


Figura 4.11: Puntos de Codimensión dos.  $Ma_c$  vs  $\chi$ , con  $Pr = 10$ ,  $Bi_s = 0.1$ , 1: modo estacionario,  $d = 100$ , 2: modo estacionario,  $d = 0.1$ , 3:  $\lambda = 0.05256$ , 4:  $\lambda = 0.053$ , 5:  $\lambda = 0.058$ , 6:  $\lambda = 0.06$ , 7:  $\lambda = 0.0615$ , 8:  $\lambda = 0.06492$ , 9:  $\lambda = 0.06954$ , 10:  $\lambda = 0.0715$ , 11:  $\lambda = 0.0731$ , 12:  $\lambda = 0.07353$ .



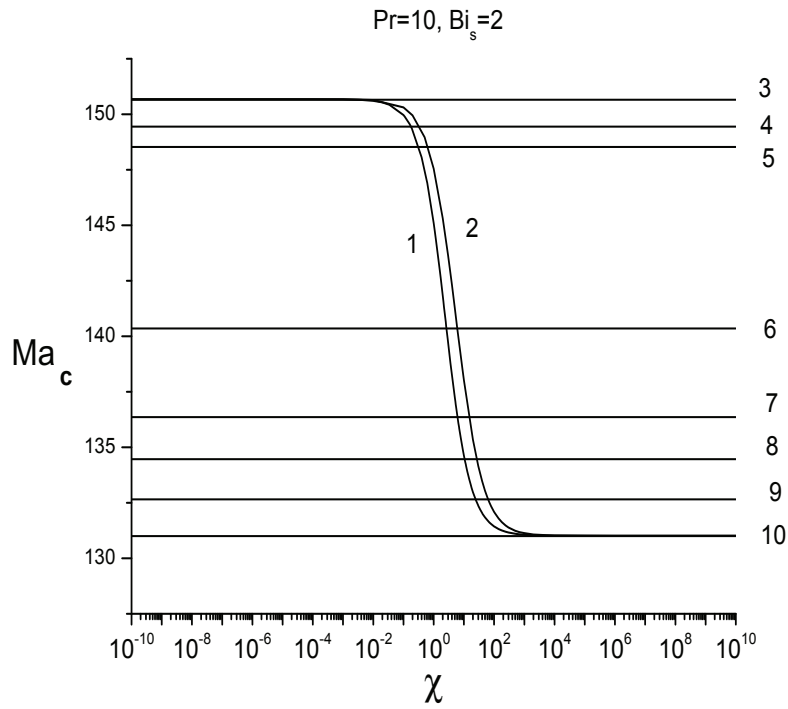


Figura 4.12: Puntos de Codimensión dos.  $Ma_c$  vs  $\chi$ , con  $Pr = 10$ ,  $Bi_s = 2$ , 1: modo estacionario,  $d = 100$ , 2: modo estacionario,  $d = 0.1$ , 3:  $\lambda = 0.03164$ , 4:  $\lambda = 0.0319$ , 5:  $\lambda = 0.0321$ , 6:  $\lambda = 0.034$ , 7:  $\lambda = 0.03501$ , 8:  $\lambda = 0.03551$ , 9:  $\lambda = 0.036$ , 10:  $\lambda = 0.03646$ .

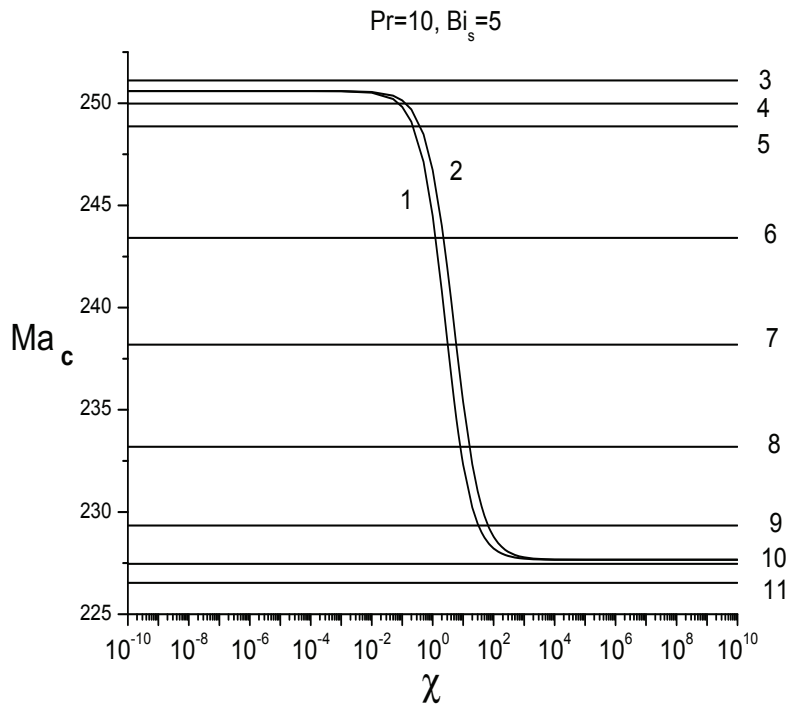


Figura 4.13: Puntos de Codimensión dos.  $Ma_c$  vs  $\chi$ , con  $Pr = 10$ ,  $Bi_s = 5$ , 1: modo estacionario,  $d = 100$ , 2: modo estacionario,  $d = 0.1$ , 3:  $\lambda = 0.0208$ , 4:  $\lambda = 0.0209$ , 5:  $\lambda = 0.021$ , 6:  $\lambda = 0.0215$ , 7:  $\lambda = 0.022$ , 8:  $\lambda = 0.0225$ , 9:  $\lambda = 0.0229$ , 10:  $\lambda = 0.0231$ , 11:  $\lambda = 0.0232$ .

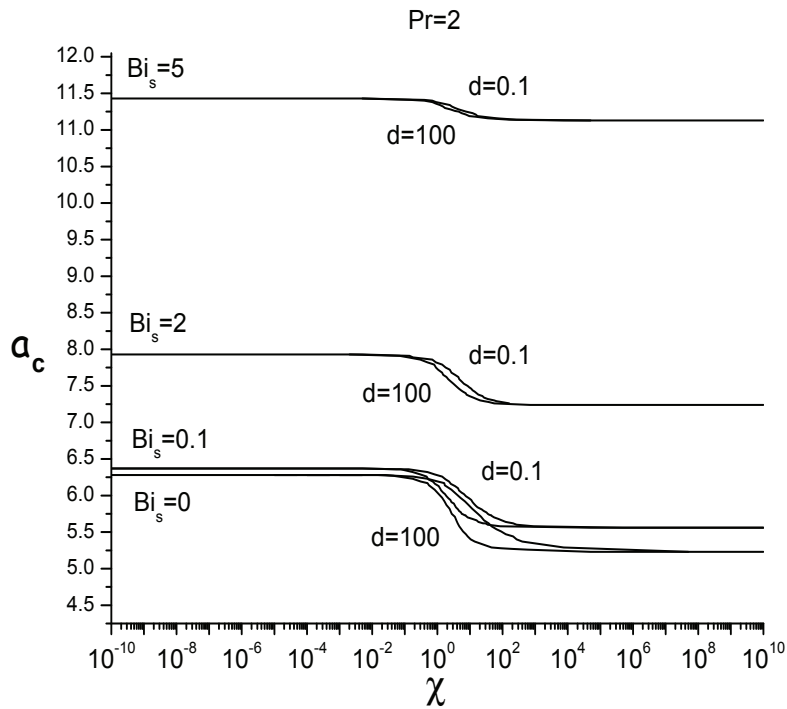


Figura 4.14: Puntos de Codimensión dos.  $a_c$  vs  $\chi$ , con  $Pr = 2$ ,  $Bi_s = 0, 0.1, 2, 5$ , y espesores  $d = 100, d = 0.1$ .

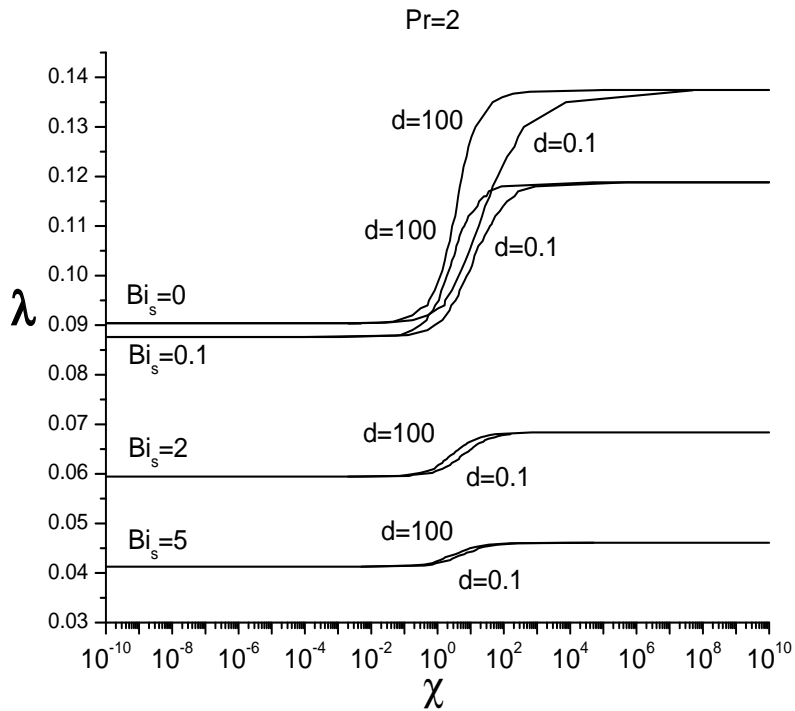


Figura 4.15: Puntos de Codimensión dos.  $\lambda$  vs  $\chi$ , con  $Pr = 2$ ,  $Bi_s = 0, 0.1, 2, 5$ , y espesores  $d = 100, d = 0.1$ .

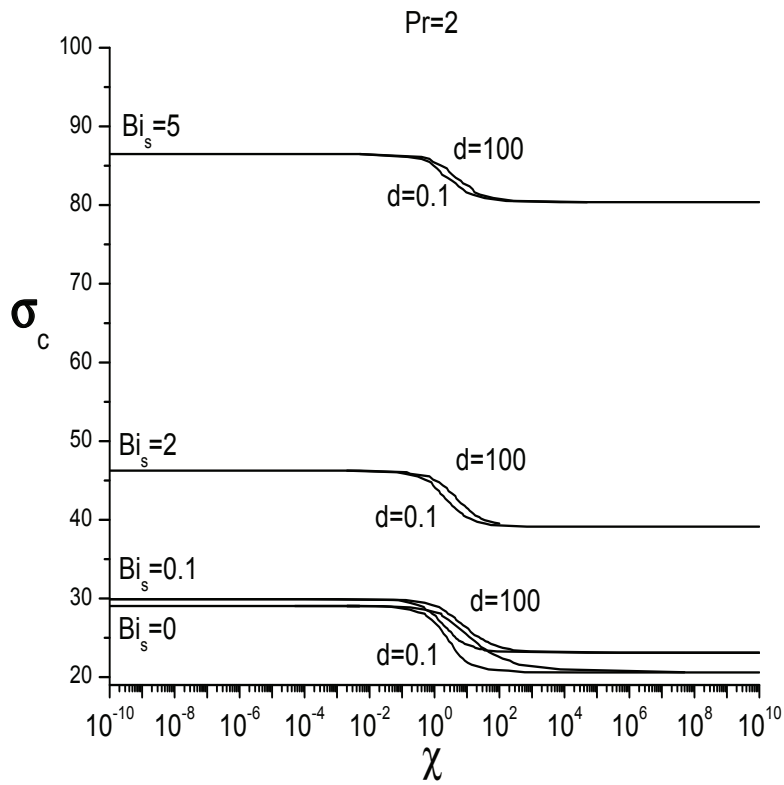


Figura 4.16: Puntos de Codimensión dos.  $\sigma$  vs  $\chi$ , con  $Pr = 2$ ,  $Bi_s = 0, 0.1, 2, 5$ , y  $d = 100, d = 0.1$ .

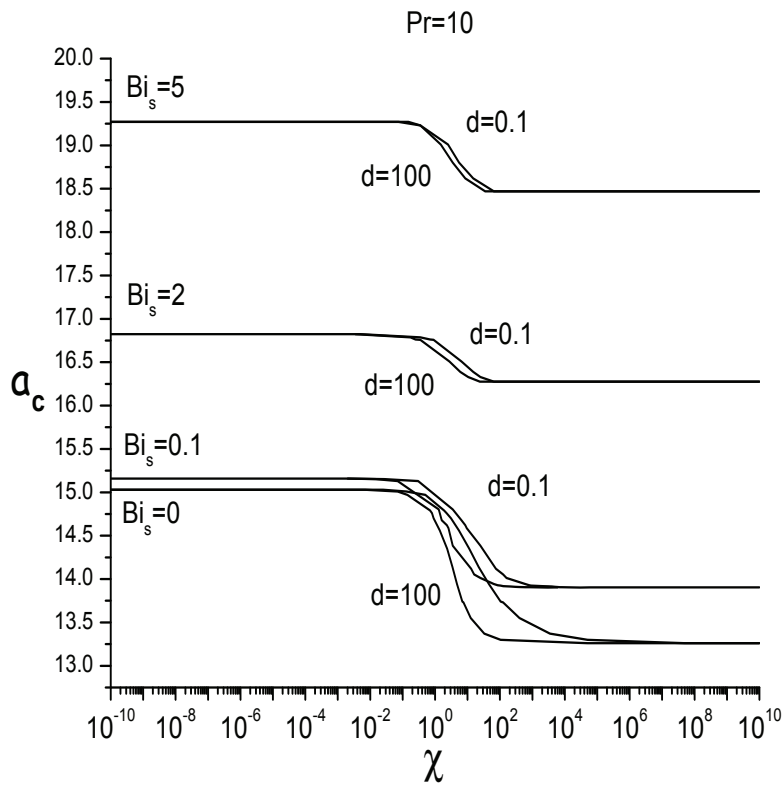


Figura 4.17: Puntos de Codimensión dos.  $a_c$  vs  $\chi$ , con  $Pr = 10$ ,  $Bi_s = 0, 0.1, 2, 5$ , y espesores  $d = 100, d = 0.1$ .

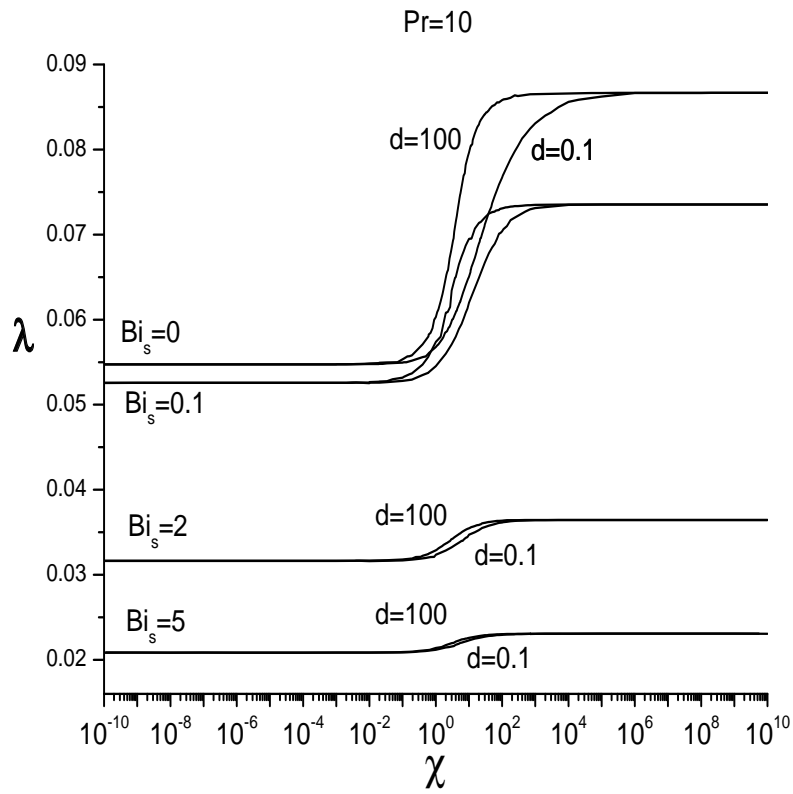


Figura 4.18: Puntos de Codimensión dos.  $\lambda$  vs  $\chi$ , con  $Pr = 10$ ,  $Bi_s = 0, 0.1, 2, 5$ , y espesores  $d = 100, d = 0.1$ .

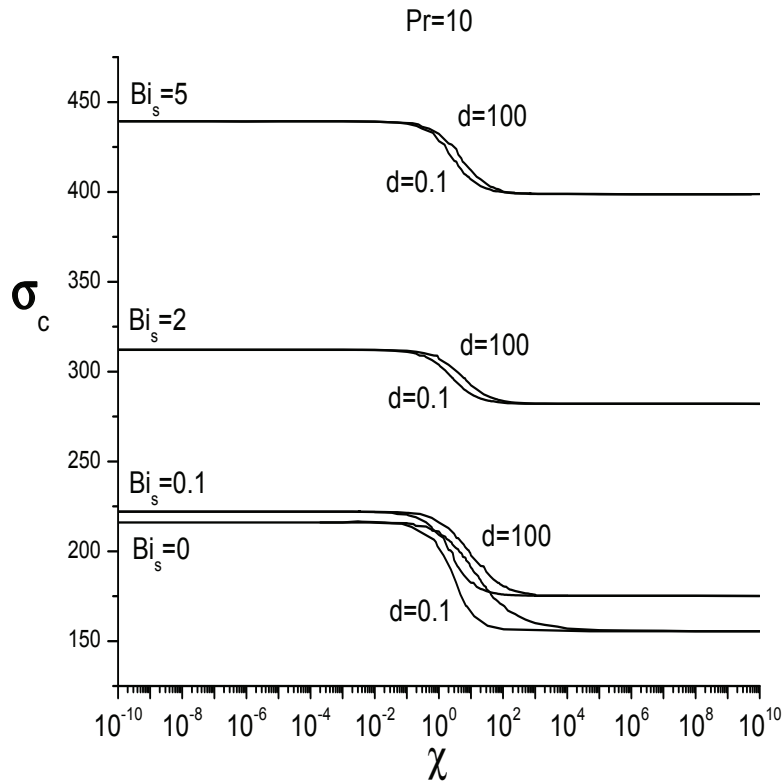


Figura 4.19: Puntos de Codimensión dos.  $\sigma$  vs  $\chi$ , con  $Pr = 10$ ,  $Bi_s = 0, 0.1, 2, 5$ , y espesores  $d = 100, d = 0.1$ .



# Capítulo 5

## CONCLUSIONES

Al analizar la estabilidad termocapilar de un fluido de Maxwell considerando distintos parámetros como son el cociente de conductividades ( $\chi$ ), el cociente de espesores ( $d$ ), el tiempo de relajamiento ( $\lambda$ ), el número de Prandtl ( $Pr$ ) y, los números de Biot en la superficie ( $Bi_s$ ) y en la pared ( $Bi_w$ ), se obtiene que cada parámetro influye de manera importante en la obtención de los números críticos de Marangoni, del número de onda y de la frecuencia de oscilación.

La principal influencia que tienen el cociente de conductividades y el de espesores; de acuerdo al número de Marangoni crítico y al número de onda crítico, se da en los casos de convección termocapilar estacionaria y en la obtención de los puntos de codimensión dos. La diferencia entre los cocientes de espesores es notable sobre todo para magnitudes intermedias del cociente de conductividades. Es decir, para condiciones de frontera que no sean sólo aquéllas de una pared conductora o aislante perfecta, sino más generales; ya que para los casos ideales las magnitudes del número de onda y Marangoni crítico tienden a un valor constante. Los cocientes de conductividad y espesor también son de importancia para saber cuál modo convectivo es el primer inestable, entre el termocapilar estacionario o el oscilatorio. Pues de ellos depende el valor del número de Marangoni crítico.

En el caso de convección termocapilar oscilatoria el parámetro del tiempo de relajación determina el valor del número de Marangoni crítico, del número de onda crítico y de la frecuencia de oscilación crítica. En este caso oscilatorio, la diferencia entre cocientes de espesores es muy pequeña.

La magnitud del número de onda es mayor en el modo oscilatorio que en el estacionario.

Para determinar el primer modo inestable entre la convección estacionaria y oscilatoria, se busca su intersección con los puntos de codimensión dos y se observa que depende principalmente del tiempo de relajación, ya que influye en la

magnitud de  $Ma_c$  y  $a_c$ .

El efecto que tienen los números adimensionales de Biot y de Prandtl sobre el sistema que se investiga, es que en general al incrementarlos el valor del número de Marangoni crítico y del número de onda crítico crecen con respecto a  $\chi$ , esto significa que el sistema es más estable conforme se incrementan el número de Biot en la superficie y el número de Prandtl. Para el caso de convección termocapilar oscilatoria la frecuencia de oscilación también crece considerablemente con estos parámetros. Sin embargo, el tiempo de relajación  $\lambda$  decrece con respecto al cociente de conductividades  $\chi$  al crecer esos parámetros.

Al tomar en cuenta intervalos más amplios del cociente de conductividades, del cociente de espesores y, números de Biot en la superficie ( $Bi_s$ ) diferentes de cero, los resultados teóricos de la presente investigación están más relacionados con condiciones reales experimentales.

# Bibliografía

- [1] C. G. M. Marangoni, Sull'espansione delle gocce di un liquido galleggianti sulla superficie di altro liquido, Tipografia dle Fratelli Fusi, Pavia (1865).
- [2] H. Bénard, Les Tourbillons cellulaires dans une nappe liquide, *Revue Générale des Sciences Pures et Appliquées*, **11** (1901) 1261 - 1271.
- [3] M. G. Velarde, Radyadour Kh. Zeytounian, *Interfacial phenomena and Marangoni effect*, Springer Wien New York, New York, 2002.
- [4] S. Chandrasekhar, *Hydrodynamic and hydromagnetic stability* Dover, New York, 1981.
- [5] J. R. A. Pearson, On convection cells induced by surface tension, *J. Fluid Mech.*, **4** (1958) 489 - 500.
- [6] A. Vidal and A. Acrivos, Nature of the neutral state in surface-tension driven convection *The Physics of Fluids*. **9**, (1966) 615-616.
- [7] J. S. Vrentas, C. M. Vrentas, Exchange of stabilities for surface tension driven convection, *Chemical Engineering Science*. **59**,(2004) 4433 - 4436
- [8] L. E. Scriven and C. V. Sternling, On cellular convection driven by surface-tension gradients: effects of mean surface tension and surface viscosity, *J. Fluid Mech.*, **19** (1964) 321 - 340.
- [9] L. A. Dávalos-Orozco Thermocapillary instability of liquid sheets in motion, *Colloids and Surfaces A* **157** (1999) 223 - 233.
- [10] L. A. Dávalos-Orozco Thermal Marangoni convection of a fluid film coating a deformable membrane, *J. Colloid and Interfaces Sci.* **234** (2001) 106 - 116.
- [11] M. Takashima, Surface tension driven instability in a horizontal liquid layer with a deformable free surface. I. Stationary convection, *J. Phys. Soc. Jpn.* **50** (1981a) 2745 - 2750.



- [12] M. Takashima, Surface tension driven instability in a horizontal liquid layer with a deformable free surface. II. Overstability, *J. Phys. Soc. Jpn.* **50** (1981b) 2751 - 2756.
- [13] C. L. McTaggart, Convection driven by concentration and temperature dependent surface tension, *J. Fluid Mech.*, **134** (1983) 301 - 310.
- [14] D. M. Christopher and B.-X. Wang, Prandtl number effects for Marangoni convection over a flat surface, *Int. J. Therm. Sci.* **40** (2001) 564 - 570.
- [15] S. Slavtchev and V. Ouzounov, Stationary Marangoni instability in a liquid layer with temperature-dependent viscosity in microgravity, *Microgravity Quart.* **4** (1994) 33 - 38.
- [16] P. G. Kalitzova-Kurteva, S. G. Slavtchev and I. A. Kurtev, Stationary Marangoni instability in a liquid layer with temperature-dependent viscosity and deformable free surface, *Microgravity Sci. Technol.* **9** (1996) 257 - 263.
- [17] S. G. Slavtchev, P. G. Kalitzova-Kurteva and I. A. Kurtev, Oscillatory Marangoni instability in a liquid layer with temperature-dependent viscosity and deformable free surface, *Microgravity Sci. Technol.* **11** (1998) 29 - 34.
- [18] H. H. Bau, Control of Marangoni-Bénard convection, *Int. J. Heat Mass Transfer* **42** (1999) 1327 - 1341.
- [19] A. C. Or, R. E. Kelly, L. Cortelezzi and J. L. Speyer, Control of long-wavelength Marangoni-Bénard convection, *J. Fluid Mech.* **387** (1999) 321 - 341.
- [20] S. A. Kechil and I. Hashim, Oscillatory Marangoni convection in variable viscosity fluid layer: The effect of thermal feedback control, *Int. J. Thermal Sci.* **48** (2009) 1102 - 1107.
- [21] B. Pendse and A. Esmaeeli, An analytical solution for thermocapillary-driven convection of superposed fluids at zero Reynolds and Marangoni numbers, *Int. J. Thermal Sci.* **49** (2010) 1147 - 1155.
- [22] R. B. Bird and O. Hassager, *Dynamics of polymeric liquids* vol. 1: Fluid mechanics, 2nd Edition, Wiley-Interscience, New York, 1987.
- [23] J. Martínez-Mardones and C. Pérez-García, Linear instability in viscoelastic fluid convection, *J. Phys.: Condens. Matter* **2** (1990) 1281 - 1290.

- [24] J. Martínez-Mardones, R. Tiemann, D. Walgraef and W. Zeller, Amplitude equations and pattern selection in viscoelastic convection, *Physical Rev. E* **54** (1996) 1478 - 1488.
- [25] J. Martínez-Mardones, R. Tiemann and D. Walgraef Convective and absolute instabilities in viscoelastic fluid convection, *Physica A* **268** (1999) 14 - 23.
- [26] D. Laroze, J. Martínez-Mardones and L. M. Pérez, Amplitude equation for stationary convection in a viscoelastic magnetic fluid, *Int. J. Bifurcation and Chaos* **20** (2010) 235 - 242.
- [27] D. Laroze, L. M. Pérez, J. Bragard, E. G. Cordaro and J. Martínez-Mardones *Magnetohydrodynamics* **47** (2011) 159 - 165.
- [28] L. A. Dávalos-Orozco Viscoelastic natural convection in: J. de Vicente (Ed.), *Viscoelasticity - From theory to biological applications*, Intech, Rijeka, 2012, pp. 3 - 32. (Open access)
- [29] D. Getachew and S. Rosenblat, Thermocapillary instability of a viscoelastic liquid layer, *Acta Mech.* **55** (1985) 137 - 149.
- [30] P. G. Siddheshwar, G. N. Sekhar and G. Jayalatha, Surface tension driven convection in viscoelastic liquids with thermorheological effect, *International Communications in Heat and Mass Transfer* **38** (2011) 468 473.
- [31] M. Takashima, Surface-tension driven convection with boundary slab of finite conductivity, *J. Phys. Soc. Jpn.* **29** (1970) 531 - 531.
- [32] H. Q. Yang, Boundary effect on the Bénard-Marangoni instability, *Int. J. Heat Mass Transfer* **35** (1992) 2413 - 2420.
- [33] M.-I. Char and C.-C. Chen, Influence of viscosity variation on the stationary Bénard-Marangoni instability with a boundary slab of finite conductivity, *Acta Mech.* **135** (1999) 181 - 198.
- [34] N. Z. Abidin, N. M. Arifin and M. S. M. Noorani, Boundary effect in Marangoni convection in a variable viscosity fluid layer, *J. Math. Stat.* **4** (2008) 1 - 8.
- [35] N. M. Arifin and N. Bachok, Boundary effect on the onset of Marangoni convection with internal heat generation, *World Acad. Sci., Eng. and Tech.* **38** (2008) 20 - 23.

- [36] I. S. Shivakumara, S. P. Suma and Y. H. Gangadharaiah, Effect of non-uniform basic temperature gradients on Marangoni convection with a boundary slab of finite conductivity, *Int. J. Eng. Sci. Tech.* **5** (2011) 4151 - 4160.
- [37] Y. H. Gangadharaiah, Onset of surface tension driven convection in a fluid layer with a boundary slab of finite conductivity and deformable free surface, *Int. J. Math Archive* **4** (2013) 311 - 323.
- [38] I. Pérez-Reyez and L. A. Dávalos-Orozco, Effect of thermal conductivity and thickness of the walls in the convection of a viscoelastic Maxwell fluid layer, *Int. J. Heat Mass Transfer* **54** (2011) 5020 - 5029.
- [39] E. L. Koschmieder, *Benard cells and Taylor vortices*, Cambridge University Press, New York, 1993.

## NOMENCLATURA

$a$ : número de onda

$a_c$ : número de onda crítico

$Bi_s$ : número de Biot entre la superficie libre del fluido y la atmosfera

$Bi_w$ : número de Biot entre la pared y el fluido

$d$ :  $d_w/d_f$

$d_f$ : espesor del fluido

$d_w$ : espesor de la pared

$Ma$ : número de Marangoni

$Ma_c$ : número de Marangoni crítico

$P$ : presión

$p$ : presión de perturbación

$Pr$ : número de Prandtl

$q_T$ : rapidez de cambio del flujo de calor con respecto a la temperatura

$Q$ : rapidez de pérdida de calor

$T$ : temperatura

$\bar{T}$ : temperatura en el líquido

$\bar{T}_w$ : temperatura en la pared

$T_h$ : perfil de temperatura

$u$ : perturbación de la velocidad componente en x

$\vec{V}$ : vector de la velocidad del fluido

$v$ : perturbación de la velocidad, componente en y

$w$ : perturbación de la velocidad, componente en z

### Griegas

$\beta$ : gradiente de temperatura

$\Gamma$ : tensión superficial

$\theta$ : perturbación de temperatura

$\kappa$ : difusividad térmica del fluido

$\lambda$ : tiempo de relajación

$\mu$ : viscosidad dinámica

$\nu$ : viscosidad cinemática

$\rho$ : densidad del fluido

$\sigma$ : frecuencia de oscilación

$\boldsymbol{\tau}$ : tensor de esfuerzos

$\chi$ :  $\chi_f/\chi_w$

$\chi_f$ : conductividad térmica del fluido

$\chi_w$ : conductividad térmica de la pared

# Capítulo 6

## ANEXO



# Competition between stationary and oscillatory viscoelastic thermocapillary convection of a film coating a thick wall



I.J. Hernández Hernández, L.A. Dávalos-Orozco\*

*Instituto de Investigaciones en Materiales, Departamento de Polímeros, Universidad Nacional Autónoma de México, Ciudad Universitaria, Circuito Exterior S/N, Delegación Coyoacán, 04510 México D. F., Mexico*

## ARTICLE INFO

### Article history:

Received 22 May 2014

Received in revised form

31 October 2014

Accepted 5 November 2014

Available online

### Keywords:

Thin liquid film

Thermocapillarity

Marangoni convection

Viscoelasticity

Thick wall

Codimension-two points

## ABSTRACT

In this paper new results on linear viscoelastic thermal Marangoni convection are presented. The constitutive equation assumed is that of the Maxwell viscoelastic fluid. The competition between stationary and oscillatory convection is shown by means of plots of codimension-two points where the corresponding critical Marangoni numbers are the same. The variation of these points is investigated in a wide range of magnitudes of the thickness and thermal conductivity of the wall. Also, a discussion is given about the dependence they have on the Biot number of the fluid-atmosphere interface. Besides, it is shown how the range of the viscoelastic relaxation time corresponding to this points is modified by the Prandtl number.

© 2014 Elsevier Masson SAS. All rights reserved.

## 1. Introduction

Thin liquid films stability has important industrial applications. The problem of surface coating is one of them. The finishing of the coating is intimately related with the thermal Marangoni stability. The fractures found after solidification of the layer are strongly related with the Marangoni convection cells. The phenomenon has been investigated for Newtonian fluids since many years ago. Pearson [1] investigates the stationary stability of a thin layer with flat free surface considering different thermal boundary conditions. Scriven and Sternling [2] investigates for the first time the effect of free surface deformability. Takashima [3] considers the stationary free surface deformation of the layer and Takashima [4] includes the time dependence of the problem taking into account for the first time the effects of gravity in both papers. Mctaggart [5] studies the double diffusive problem of Marangoni convection when the free surface is flat. The Marangoni convection is investigated from a boundary layer point of view by Christopher and Wang [6]. Emphasis is put on the influence the Prandtl number has on heat transfer. Two free deformable surfaces can be present as in Ref. [7].

Convection in a layer with a free deformable surface and a deformable membrane is investigated in Ref. [8]. When the temperature gradient across the layer is large it is important to take into account the temperature variation of viscosity as in Slavtchev and Ouzounov [9] and Kalitzova-Kurteva et al. [10] for stationary convection with deformable free surface and in Slavtchev et al. [11] for oscillatory convection and deformable free surface. The control of Marangoni convection is important to avoid fractures in the solidification process as is investigated by Bau [12] and Or et al. [13]. In particular, Kechil and Hashim [14] assume free surface deformation and include viscosity dependence on temperature. An application to microchannels is presented in the paper by Pendse and Esmaeli [15] who investigate the Marangoni flow in two superposed fluids when a spatially periodic temperature is applied to the wall. It is shown that the competition between thermal and hydrodynamic effects is reflected in the flow strength when the relative thickness of the layers is varied.

In applications the liquid usually presents a non Newtonian behavior. One important property is the viscoelasticity of the fluid (see Bird et al. [22]). In natural convection the viscoelastic linear and nonlinear effects have been investigated, for example, by Martínez-Mardones and colleagues [16–20]. In particular, in Ref. [17] one of the goals is to find the codimension-two point between stationary and oscillatory instability to investigate the

\* Corresponding author.

E-mail address: [ldavalos@unam.mx](mailto:ldavalos@unam.mx) (L.A. Dávalos-Orozco).

**Nomenclature**

$a$	wave number
$a_c$	critical wave number
$Bi_s$	free surface-atmosphere Biot number
$Bi_w$	wall Biot number
$d$	$d_w/d_f$
$d_f$	fluid layer thickness
$d_w$	wall thickness
$e$	shear rate tensor
$H_h$	heat transfer coefficient
$Ma$	Marangoni number
$Ma_c$	critical Marangoni number
$\vec{n}$	free surface normal vector
$P$	pressure
$p$	pressure perturbation
$Pr$	Prandtl number
$T$	temperature
$\bar{T}$	liquid temperature
$\bar{T}_w$	wall temperature
$T_h$	temperature profile
$u$	perturbation velocity x-component

$\vec{V}$	fluid velocity vector
$v$	perturbation velocity y-component
$w$	perturbation velocity z-component

*Greek*

$\beta$	temperature gradient
$\Gamma$	surface tension
$\eta$	dynamic viscosity
$\theta$	temperature perturbation
$\kappa$	fluid thermal diffusivity
$\kappa_w$	wall thermal diffusivity
$\lambda$	adimensional relaxation time (Weissenberg number)
$\lambda_T$	relaxation time
$\mu$	viscoelastic parameter
$\nu$	kinematic viscosity
$\rho$	fluid density
$\sigma$	oscillation frequency
$\tau$	shear stress tensor
$\chi$	$\chi_f/\chi_w$
$\chi_f$	fluid thermal conductivity
$\chi_w$	wall thermal conductivity

possibility of nonlinear traveling and stationary waves. For a review of this problem see Dávalos-Orozco [21].

Viscoelasticity have been taken into account in Marangoni convection by a number of authors. Getachew and Rosenblat [23] investigate the problem of a flat free surface assuming a very good conducting wall. Their main concern is to calculate the points where the curves of criticality of stationary convection intersect those of oscillatory viscoelastic convection. These intersections are called codimension-two points (see Ref. [17]). Wilson [24] investigates the instability growth rates of viscoelastic fluids with particular interest on slightly supercritical situations. Siddheshwar et al. [25], for temperature dependent viscosity, explore the oscillatory Marangoni instability of different non Newtonian fluids, in particular, the Maxwell fluid. They also assume a variety of thermal boundary conditions.

From the point of view of the linear equations, the stationary and oscillatory Marangoni convections differ not only by the absence of the time derivative in the stationary problem, but also by the presence of the Prandtl number in the oscillatory case. Physically, in stationary Marangoni convection the fluid particles are able to describe closed trajectories. This is due to the shear flow produced by the thermal perturbations which, from the wall, reach the free surface and modify the temperature dependent surface tension. If hot particles are continuously able to reach the free surface the cellular flow can be sustained heating from the wall. In oscillatory convection, all particles move at once in trajectories due to the shear flow produced by the weakening of surface tension. Nevertheless, they are not able to complete closed trajectories when the fluid has relatively high thermal diffusivity. In non dimensional form this is determined by the Prandtl number, that is, the ratio of the mass diffusivity (kinematic viscosity) over the heat diffusivity. Under these conditions, the fluid particle cools easily and it is not able to reinforce the shear flow by the weakening of surface tension. Consequently, the strong surface tension of the cold regions of the free surface dominate and the surface shear works in the opposite direction making all the particles in the bulk to go backwards to the wall where they are heated again to repeat the same process.

Therefore, depending on the Prandtl number the Marangoni convection may be stationary or oscillatory, as will be shown presently. However, it is well known that the linear Marangoni convection of a Newtonian fluid layer with a flat free surface only can be stationary (see Ref. [26]). If the free surface of a Newtonian fluid layer is allowed to deform, thermocapillary oscillations may appear first [2,4]. However, the case of a viscoelastic fluid layer with a flat free surface is different. The new degrees of freedom of the macromolecules added to the liquid motion by means of the constitutive equations, allow oscillatory Marangoni convection to appear for a smaller temperature gradient than that of the Newtonian fluid for some magnitudes of the Prandtl number and relaxation times [23].

The effect of a thick wall in Marangoni convection is investigated by Takashima [27]. The simultaneous effect of gravity and thermocapillarity is investigated by Yang [28] including a wall with finite thickness. A temperature dependent viscosity is assumed by Char and Chen [29] in a liquid layer on a thick slab. A deformable free surface is assumed by Abidin et al. [30] in the presence of buoyancy effects. The heat generation and properties of a thick wall are considered in thermocapillary convection by Arifin and Bachok [31]. The non uniformity of the basic temperature gradient may have important consequences on the instability. This is taken into account by Shivakumara et al. [32] including a thick slab. The deformability of the free surface is assumed in a layer on a thick wall by Gangadharaiah [33].

The results of thermocapillary convection including a thick slab are more realistic than those of an infinitely good conducting wall. This effect has also been investigated in natural convection of a Maxwell viscoelastic fluid by Pérez-Reyes and Dávalos-Orozco [34]. There it is shown that for certain magnitudes of the Prandtl number a codimension-two point is found where stationary and oscillatory convection compete to be the first unstable one for a range of values of the non dimensional relaxation time (Weissenberg number). An important difference between this paper and ref. [34] for natural convection is that here the results are only focused on the codimension-two points and not on the curves of criticality. However, the curves of criticality have



to be calculated to generate the curves of the codimension-two points.

The goal of the present paper is to calculate the codimension-two points that occur in the Marangoni convection of a Maxwell viscoelastic fluid layer coating a thick wall with finite thermal conductivity. The free surface is considered to be flat but susceptible to thermocapillary shear stresses. The Biot number at the free surface-atmosphere interface is also taken into account. The results of this research are important because in real situations the liquid layers lay on non ideal walls which have finite thickness and thermal conductivity. In particular, the investigations presented in the open literature on viscoelastic films assume from the onset that the wall is made of a very good or a very bad heat conducting material. As will be shown presently, differences in the thickness of the wall may also have important consequences on the critical parameters of the problem. In this aspect, the results presented below are new with respect to those published before. That is, careful calculations are done in a very wide range of magnitudes of the wall Biot number to show that the middle section of this range is very important and must be taken into account when the stability of the layer is the relevant goal in applications. If the stability of real coating problems is based on results of a very good conducting wall, it is possible that the wall finishing will be different from the expected one.

The paper is organized as follows. The equations of motion and boundary conditions are presented in the next section. The numerical results are given in Section 3. The last Section 4 are the conclusions.

## 2. Thermocapillary convection

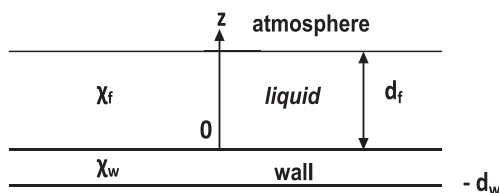
The physical system under investigation consists of a thin layer of viscoelastic incompressible fluid of depth  $d_f$  and thermal conductivity  $\chi_f$  coating a wall of thickness  $d_w$  and thermal conductivity  $\chi_w$ , as seen in Fig. 1. Gravity has been neglected and the system is heated from the outer side of the wall and cooled at the flat free surface in contact with an inviscid atmosphere. Due to the temperature dependent surface tension, the free surface is susceptible to shear stresses leading to Marangoni convection.

An important difference of this system with respect to those with very good or very bad thermal conducting walls is the presence of the ratios of fluid to wall thermal conductivities  $\chi$  and wall to fluid thicknesses  $d$ . They appear in the boundary conditions and are defined as  $\chi = \chi_f/\chi_w$  and  $d = d_w/d_f$ , respectively.

The governing equations for Marangoni convection of a viscoelastic Maxwell fluid layer are the balance of momentum, heat diffusion and continuity equations:

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla P + \nabla \cdot \tau \tag{1}$$

$$\frac{d\bar{T}}{dt} = \kappa \nabla^2 \bar{T} \tag{2}$$



**Fig. 1.** Sketch of the system under research. A viscoelastic liquid layer coating a thick wall of thicknesses  $d_f$  and  $d_w$ , and thermal conductivities  $\chi_f$  and  $\chi_w$ , respectively.

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0 \tag{3}$$

The temperature in the wall satisfies

$$\frac{\partial \bar{T}_w}{\partial t} = \kappa_w \nabla^2 \bar{T}_w \tag{4}$$

where  $d/dt = \partial/\partial t + \vec{V} \cdot \nabla$ . The shear stress tensor  $\tau$  satisfies the constitutive equation for a Maxwell fluid model:

$$\tau + \lambda_T \frac{\mathcal{G}\tau}{\mathcal{G}t} = 2\eta \mathbf{e} \tag{5}$$

where  $\mathbf{e}$  is the shear rate tensor and  $\mathcal{G}/\mathcal{G}t$  is a nonlinear operator which could be one of the upper convected, the lower convected or the corotational time derivatives, depending on the viscoelastic model selected. Note that when the hydrostatic state is perturbed, all the time derivatives of the linear equations are the same as the linear operator  $\mathcal{G}/\mathcal{G}t = d/dt = \partial/\partial t$ .

The boundary conditions are:

$$\vec{V} = 0 \quad \text{at } z = 0 \tag{6}$$

$$\tau \cdot \vec{n} = -\nabla \Gamma \quad \text{at } z = d_f \tag{7}$$

$$\bar{T}_w = T_0 + \Delta T \quad \text{at } z = -d_w \tag{8}$$

$$\bar{T} = \bar{T}_w \quad \text{and} \quad \chi \vec{n} \cdot \nabla \bar{T} = \vec{n} \cdot \nabla \bar{T}_w \quad \text{at } z = 0 \tag{9}$$

$$-\chi_f \vec{n} \cdot \nabla \bar{T} = H_h (\bar{T} - T_0) \quad \text{at } z = d_f \tag{10}$$

where  $\vec{n}$  is a normal vector which in the case of a flat free surface is in the  $z$ -direction and therefore  $\vec{n} \cdot \nabla = \partial/\partial z$ .  $H_h$  is the heat transfer coefficient. The gradient of the surface tension  $\nabla \Gamma = (d\Gamma/dT)\nabla T$  depends on the temperature gradients and has projections on the  $x$  and  $y$ -directions. Notice that  $d\Gamma/dT < 0$  in common fluids.

The nondimensional temperature profiles in hydrostatic conditions are:

$$T(z) = -z - \chi d \tag{11}$$

$$T_w(z) = -\chi z - \chi d \tag{12}$$

for the fluid and the wall, respectively. They were made adimensional subtracting  $T_0 + \Delta T$  from the dimensional temperatures and then dividing by  $\Delta T Bi_s / (1 + Bi_s + \chi d Bi_s)$ . Here, the free surface-atmosphere Biot number is  $Bi_s = H_h d_f / \chi_f$ .

The main flow variables are perturbed from the hydrostatic state using  $\vec{u} = (u(x, y, z, t), v(x, y, z, t), w(x, y, z, t))$ ,  $p(x, y, z, t)$ ,  $\theta(x, y, z, t)$ ,  $\tau'(x, y, z, t)$ , as the velocity, pressure, temperature and shear stress perturbations, respectively. The variables are made non dimensional using  $d_f$  for lengths,  $\Delta T Bi_s / (1 + Bi_s + \chi d Bi_s)$  for temperature,  $v/d_f$  for velocity,  $d_f^2/\kappa$  for time and  $\rho(\kappa/d_f)^2$  for pressure and shear stresses.

The non dimensional linearized equations for the perturbations are:

$$\frac{1}{Pr} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \nabla \cdot \tau' \tag{13}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - w = \nabla^2 \theta \tag{14}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{15}$$

where  $Pr = \nu/\kappa$  is the Prandtl number. The perturbations of the shear stress tensor and shear rate tensor  $\mathbf{e}'$  satisfy:

$$\tau' + \lambda \frac{\partial \tau'}{\partial t} = 2\mathbf{e}' \tag{16}$$

Here, it is assumed that the perturbations are in the marginal state and that they have a normal modes representation in the form:

$$\{u, v, w, \theta\} = \{u'(z), v'(z), w'(z), \theta'(z), \theta'_w(z)\} \exp[i(kx + my + \sigma t)] \tag{17}$$

where  $k$  and  $m$  are wave numbers in the  $x$  and  $y$  directions, respectively, and  $\sigma$  is the frequency of oscillation. In the marginal state the growth rate is zero.

The operator  $1 + \lambda \partial/\partial t$  is applied to the linear momentum equation to introduce  $\mathbf{e}'$  by means of the linear constitutive equation. Then, the rotational operator is applied twice. Finally, the normal modes are introduced in all the equations to obtain:

$$(D^2 - a^2 - i\sigma)\theta'(z) + w'(z) = 0 \tag{18}$$

$$(D^2 - a^2) \left( \mu(D^2 - a^2) - \frac{i\sigma}{Pr} \right) w'(z) = 0 \tag{19}$$

where  $D = d/dz$  and  $a = k^2 + m^2$  is the magnitude of the wave-number. The viscoelastic parameter for the Maxwell fluid is defined as  $\mu = 1/(1 + i\sigma\lambda)$ .

The thermal boundary conditions for the perturbation amplitudes are:

$$\theta'_w = 0 \quad \text{at } z = -d_w \tag{20}$$

$$\theta' = \theta'_w, \quad \chi D\theta' = D\theta'_w \quad \text{at } z = 0 \tag{21}$$

Notice that it is possible to reduce the two temperature boundary conditions at  $z = 0$  into one condition. That is:

$$D\theta' - Bi_w\theta' = 0 \quad \text{at } z = 0 \tag{22}$$

where the Biot number which describes the heat transfer at the wall–fluid interface is defined by  $Bi_w = q/\chi \tanh(qd)$ , with  $q = a^2 + i\sigma$ . The other boundary conditions are

$$w' = Dw' = 0 \quad \text{at } z = 0 \tag{23}$$

$$w' = \mu D^2 w' + a^2 Ma \theta' = D\theta' + Bi_s \theta = 0 \quad \text{at } z = 1 \tag{24}$$

The Marangoni number is defined by

$$Ma = \left( \frac{(-\partial\Gamma/\partial T)d_f}{\rho\nu\kappa} \right) \left( \frac{\Delta T Bi_s}{1 + Bi_s + \chi d Bi_s} \right).$$

The solutions of the set of Eqs. (18) and (19) with the boundary conditions from Eqs. (20)–(24) form an eigenvalue problem for  $Ma$  which depends on all the other parameters of the problem in the general implicit form

$$F(Ma, a, \sigma, \lambda, \chi, d, Pr, Bi_s, Bi_w) = 0. \tag{25}$$

In fact, this is a solvability condition needed to have a solution different from the trivial one for the amplitudes of the perturbation normal modes.

### 3. Numerical results

The solution of  $Ma$  in Eq. (25) is obtained numerically with the Maple package. The Eq. (25) is complex due to the presence of the frequency of oscillation. The marginal  $Ma$  is calculated fixing all the parameters except  $a$  and  $\sigma$ . For a given  $a$  the roots of the complex  $Ma$  are obtained. Then,  $\sigma$  is varied until the imaginary part of the complex  $Ma$  is zero. In this way, the set  $(a, \sigma, Ma)$  becomes a point of the marginal curves. The critical  $Ma_c$  is calculated varying  $a$ , following the same procedure, until the minimum of  $Ma$  is obtained. The corresponding wavenumber and frequency are called critical and written as  $a_c$  and  $\sigma_c$ . The goal is to find the range of the Weissenberg number  $\lambda$  for which stationary and oscillatory convection will compete to be the first unstable one, that is, to find the codimension-two points of the instability. High precision numerical calculations were performed using more digits than those used by default. The default number of digits used by Maple is 10. Nevertheless, more precision is needed due to the large changes the marginal parameters have with a small variation of the Weissenberg number  $\lambda$ . Therefore, to avoid round-off errors, it was decided to increase the number of digits used by Maple. Tests were done first with 15 digits and then with 20 and 25 digits. It was found that 20 digits were good enough to avoid large oscillations in the numerical values of the critical parameters. However, the running time of the program increases considerably as a consequence.

Assuming that the Prandtl number is very near to that of water, two Prandtl numbers are used in the calculations  $Pr = 2$  (water between 85 and 90 °C) and  $Pr = 10$  (water between 5 and 10 °C). The free surface Biot number will have the magnitudes  $Bi_s = 0, 0.1, 2, 5$ . Two magnitudes of  $d = 0.1$  and 100 will be used because no important differences are observed in the ranges  $d < 0.1$  and  $d > 100$ .

The results are plotted in graphs of  $Ma_c$ ,  $a_c$  and  $\sigma_c$  vs.  $\chi$ . The magnitudes of  $\chi$  are inside the range  $10^{-10} \leq \chi \leq 10^{10}$ , that is, from a very good conducting wall to a very bad conducting wall. The curves of codimension-two points are plotted in the ranges where the  $Ma_c$  of stationary and oscillatory Marangoni convection are the same. Thus, the corresponding curves of wavenumbers and frequencies of oscillation are determined. Of particular importance in this paper are the corresponding curves of the Weissenberg number  $\lambda$  vs.  $\chi$ . This is because they show where the increase of  $\lambda$  makes oscillatory convection the first unstable one when crossing the codimension-two curves.

#### 3.1. Stationary Marangoni convection

The critical curves of stationary Marangoni convection are obtained setting from the onset  $\sigma = 0$ . In this way the flow behavior is Newtonian because  $\mu = 1$ . The Prandtl number does not play a role here. The problem includes the effect of  $Bi_s$ ,  $d$  and  $\chi$  inside  $Bi_w$ , in contrast to the work of Pearson [1].

The critical curves are calculated fixing  $Bi_s$  and  $d$ . The results are presented in plots of  $Ma_c$  and  $a_c$  against  $\chi$  as in Fig. 2. According to the definition (see above Eq. (23)),  $Bi_w$  decreases when  $\chi$  increases. Therefore, the wall becomes a bad heat conductor when  $\chi$  is large and a good heat conductor when  $\chi$  is small. As seen in Fig. 2, for stationary Marangoni convection  $Ma_c$  decreases with  $\chi$ . In both limits the magnitudes of  $Ma_c$  and  $a_c$  differ according to the magnitude of  $Bi_s$ . This is illustrated in Table 1. From the table it is clear that an increase of  $\chi$  is destabilizing and that an increase of  $Bi_s$  is stabilizing. These magnitudes are important to determine the limits for the codimension-two points investigated in the following sections.

In Fig. 2 it is shown that the influence of  $d$  is only relevant in the middle range of  $\chi$ . This difference is more important when  $Bi_s \leq 2$ .

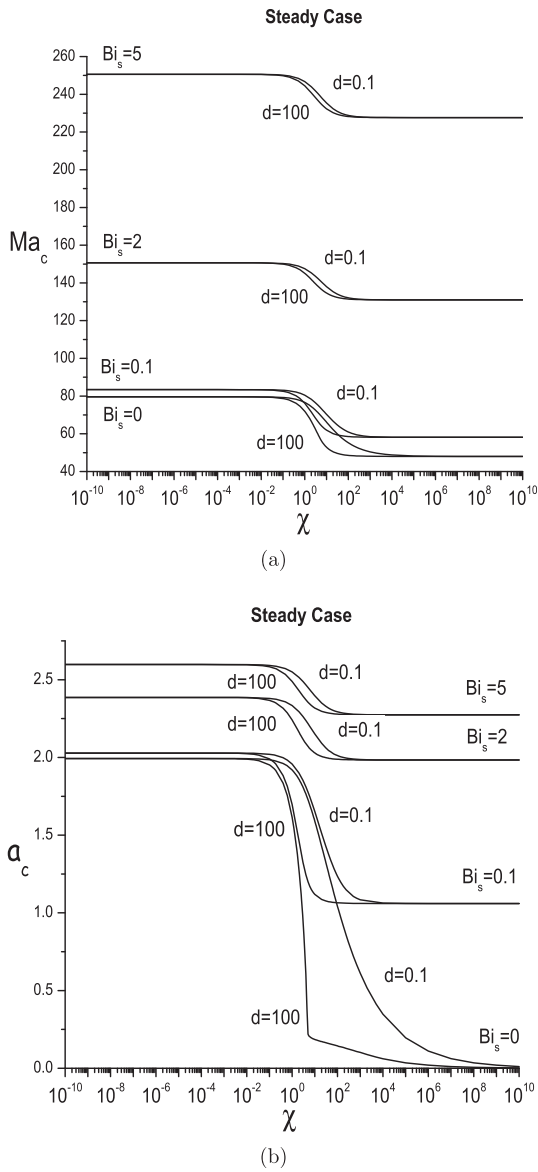


Fig. 2. Steady convection. Variation of a) the critical Marangoni number  $Ma_c$  and b) the critical wave number  $a_c$  with  $\chi$ , for  $Bi_s = 0, 0.1, 2, 5$  and thicknesses  $d = 0.1$  and  $100$ .

There,  $Ma_c$  may show differences up to more or less 15 units (see Fig. 2a). Now, as seen in Fig. 2b, the influence of  $d$  on  $a_c$  is notable for  $Bi_s \leq 2$ . Clearly,  $a_c$  decreases with  $\chi$  until it reaches its smallest magnitude in the limit  $\chi \rightarrow \infty$ . That limit is zero in the particular case of  $Bi_s = 0$ .

It is important to point out that the results shown in Fig. 2 are in agreement with those presented by Takashima [27]. Yet he only calculates curves for  $d$  up to  $d = 10$ . Those curves are inside the

Table 1  
Limit magnitudes of stationary  $Ma_c$  and  $a_c$ .

$Bi_s$	$\chi \rightarrow 0$	$\chi \rightarrow 0$	$\chi \rightarrow \infty$	$\chi \rightarrow \infty$	Differences	Differences
	$Ma_c$	$a_c$	$Ma_c$	$a_c$		
0	79.607	1.993	48	0	31.606	1.993
0.1	83.426	2.028	58.150	1.06	25.276	0.968
2	150.678	2.386	131.016	1.984	19.661	0.402
5	250.597	2.598	227.662	2.274	22.935	0.324

range of our calculations. Notice that the parameter he uses corresponds to the algebraic inverse of  $\chi$  in this paper.

### 3.2. Oscillatory convection

Here it is of interest to calculate the  $Ma_c$  corresponding to viscoelastic oscillatory Marangoni convection. The magnitude of  $Ma_c$  depends on  $\sigma$ ,  $Pr$  and  $\lambda$  and on those parameters of stationary convection. For given  $a$ ,  $\chi$ ,  $Bi_s$ ,  $Pr$  and  $\lambda$ ,  $Ma$  is solved from Eq. (25) using Maple. The Marangoni number is complex  $Ma = Ma_r + iMa_i$  due to the presence of  $\sigma$ , where  $Ma_r$  is the real part and  $Ma_i$  is the imaginary part. The Marangoni number should be real. Thus, it is necessary to calculate the root of  $Ma_i = 0$  with respect  $\sigma$ . This root is the marginal  $\sigma$  which is substituted into  $Ma_r$  to obtain the marginal Marangoni number  $Ma = Ma_r$ . With all the other parameters fixed, a new  $a$  is given to calculate another marginal  $\sigma$  and  $Ma$ . This process is followed until a minimum is found of all the marginal  $Ma$ 's. This minimum is called the critical Marangoni number  $Ma_c$  with its corresponding critical wavenumber  $a_c$  and critical frequency of oscillation  $\sigma_c$ . The other parameters are varied to give all the curves of criticality. Sample curves are found in Fig. 3. Notice

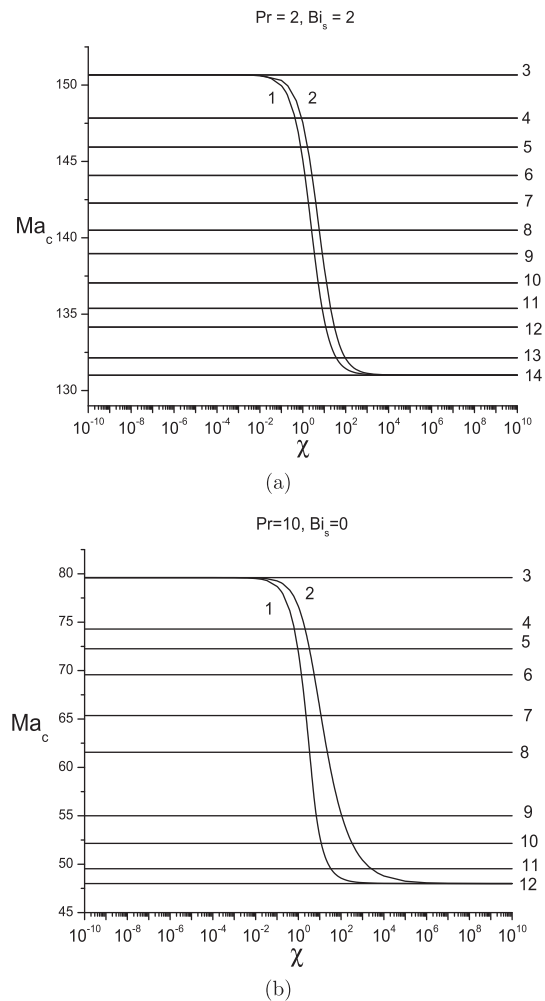


Fig. 3. Codimension-two points calculation with  $Ma_c$  vs  $\chi$  plots. Two samples: 3a)  $Pr = 2$  and  $Bi_s = 2$ . 1: stationary:  $d = 100$ , 2: stationary  $d = 0.1$ . Critical curves for the  $\lambda$ 's: 3: 0.0594, 4: 0.0606, 5: 0.0614, 6: 0.0622, 7: 0.063, 8: 0.0638, 9: 0.0645, 10: 0.0654, 11: 0.0662, 12: 0.0668, 13: 0.0678, 14: 0.0684. 3b)  $Pr = 10$  and  $Bi_s = 0.1$ : stationary  $d = 100$ , 2: stationary  $d = 0.1$ . Critical curves for the  $\lambda$ 's: 3: 0.0548, 4: 0.0585, 5: 0.06, 6: 0.0622, 7: 0.0659, 8: 0.0696, 9: 0.0770, 10: 0.0807, 11: 0.0844, 12: 0.0867.

that for a fixed  $Bi_s$ , the curves of  $Ma_c$  vs  $\chi$  are almost horizontal. That is, the calculated change is only around one hundredth in the range of  $\chi$  used.

This small dependence of  $Ma_c$  of oscillatory convection on  $\chi$  has the influence of the Prandtl number. Calculations for  $Pr = 0.1$  and  $0.5$  have been done too in order to check the numerical results with those of Getachew and Rosenblat [23] and for the sake of comparison with the results of this paper. For  $Pr = 0.5$ ,  $Ma_c$  has variations of a few decimals and for  $Pr = 0.1$  it has variations of a few units. The  $a_c$  and  $\sigma_c$  of both cases only have variations of a few decimals. Therefore, it can be said that for  $0.1 \leq Pr \leq 10$ , the critical  $Ma_c$ ,  $a_c$  and  $\sigma_c$  are almost constant in the range of  $\chi$  investigated and that the wall geometry and thermal boundary conditions have no effect on the oscillatory instability. In this regard, for fixed  $Bi_s$  and  $Pr$ , the variation of  $Ma_c$  of the codimension-two points with respect to  $\chi$  is due to the dependence on  $\lambda$  of the oscillatory  $Ma_c$  and to the dependence on  $\chi$  of the stationary  $Ma_c$ .

Fig. 3a shows results for  $Pr = 2$  and  $Bi_s = 2$ . The curves of criticality decrease with an increase of  $\lambda$ . Thus,  $\lambda$  has a destabilizing effect. In this example, oscillatory convection is the first unstable one in a range of  $\chi$  starting from  $\lambda > 0.0594$ . Only oscillatory convection appears for  $\lambda > 0.0684$ . The example of Fig. 3b shows results for  $Pr = 10$  and  $Bi_s = 0$ . When  $\lambda > 0.0548$  oscillatory convection is the first unstable one in a range of  $\chi$ . Oscillatory convection prevails for all  $\chi$  when  $\lambda > 0.0867$ .

From the results of Fig. 3, it is clear the sensitivity of the convective instability to small variations of the Weissenberg number  $\lambda$ . From  $\lambda = 0.0594$  to  $0.0684$ ,  $Ma_c$  decreases from 150.67 to 131.01, as shown in Fig. 3a (see also Table 1).

It is important to point out that, to determine the codimension-two curves of the instability, a larger number of curves of criticality of oscillatory convection have to be calculated than those shown in Fig. 3a and b. The codimension-two curves are obtained approximating the points of intersection (that is, those corresponding to the same  $Ma_c$ ) between the stationary and oscillatory curves of criticality for the two values of  $d$ , as will be shown in the following subsection.

### 3.3. Codimension-two points

The codimension-two points are presented first for the Weissenberg number  $\lambda$  against  $\chi$ , which is of main importance in this paper. The Prandtl number is fixed as  $Pr = 2$  in Fig. 4. Fig. 4a shows how  $\lambda$  for the codimension-two point increases with  $\chi$  for all the magnitudes of  $Bi_s$ . In particular, that increase is more important for small  $Bi_s$  where notable separations exist between the curves of  $d = 100$  and  $0.1$ .

The physical meaning of the curves in Fig. 4a is that for  $\lambda$ 's larger than those of the codimension-two curves, the first unstable viscoelastic thermocapillary convection is oscillatory. Therefore,

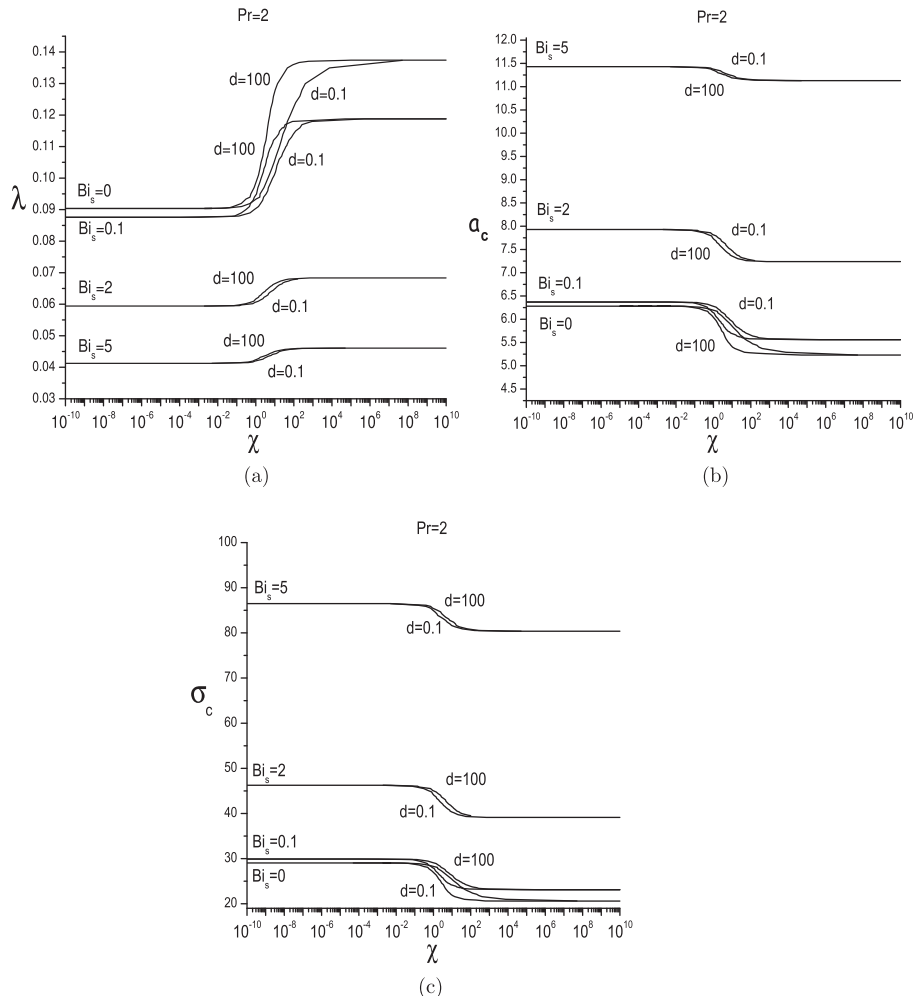


Fig. 4. Codimension-two points.  $\lambda$ ,  $a_c$  and  $\sigma_c$  against  $\chi$ , for  $Pr = 2$  with  $Bi_s = 0, 0.1, 2, 5$ , and  $d = 0.1$  and  $100$ . Notice that the magnitudes of  $a_c$  are different from those of the stationary case in Fig. 2b.

from the  $\lambda$  point of view, it is easier to have oscillatory convection for small  $\chi$ .

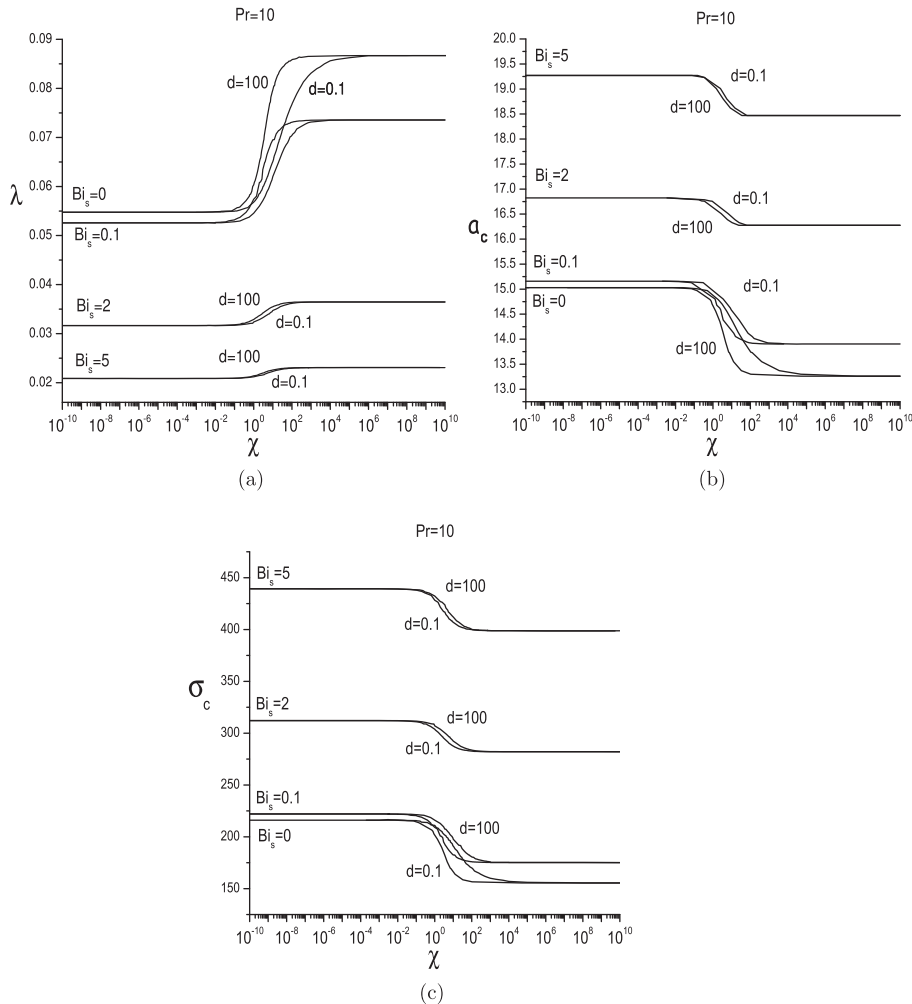
In contrast, the curves of  $a_c$  of oscillatory convection in Fig. 4b of the codimension-two points, show a decrease with respect to  $\chi$ . However, it is shown that in the case of oscillatory convection,  $a_c$  never tends to zero when  $Bi_s \rightarrow 0$  and  $\chi \rightarrow \infty$ , as it occurs in stationary convection in Fig. 2b.

The frequency of oscillation at the codimension-two points follows a similar tendency as the wavenumber, that is, it decreases with  $\chi$ . It is interesting to see that the frequency does not tend to zero when  $Bi_s \rightarrow 0$  and  $\chi \rightarrow \infty$ . This is due to the finite wavenumber found in these two limits and to the important influence viscoelasticity has on thermocapillary convection.

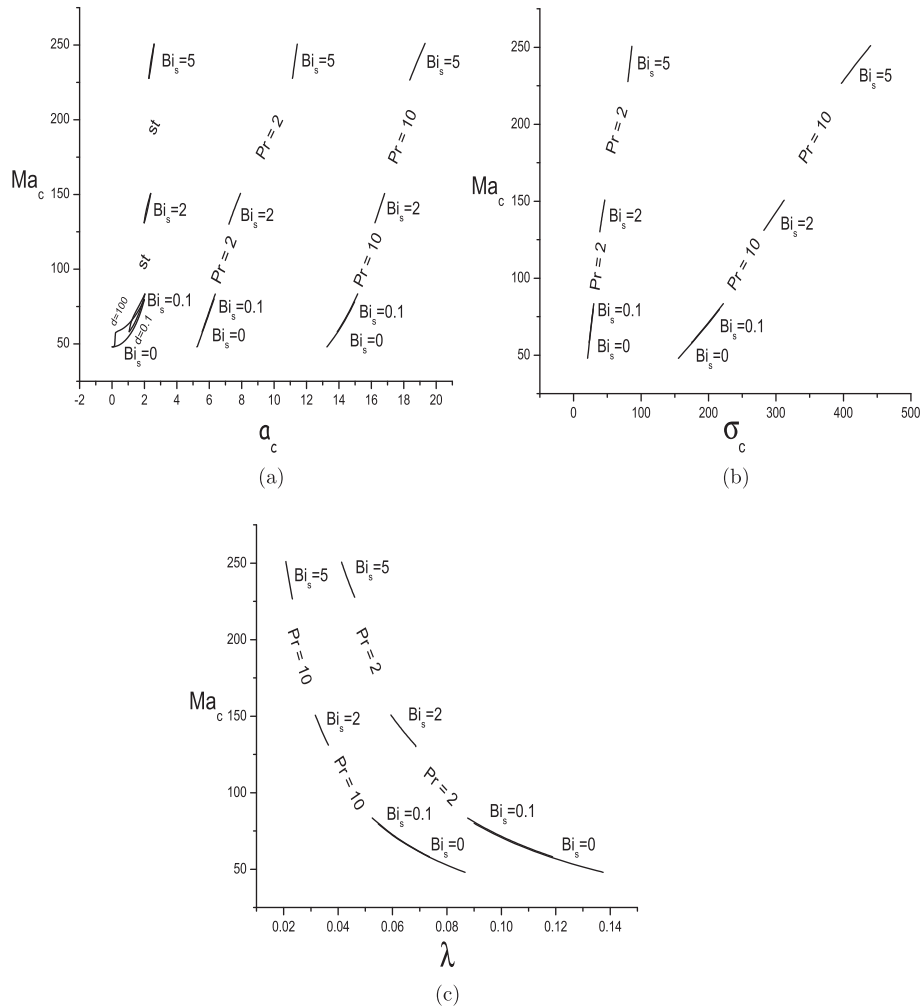
The next Fig. 5 for  $Pr = 10$  shows the relevant role played by the Prandtl number on the codimension-two points. In Fig. 5a it is shown how the magnitudes of  $\lambda$  decrease considerably. However, the behavior with respect to  $\chi$  is similar to that of Fig. 4a. The curves of the wavenumber in Fig. 5b present a different reaction with respect to the change of  $Pr$ . With  $Pr = 10$  their magnitudes increase more than hundred percent in some cases, mainly for small values of  $Bi_s$ . The behavior of the curves of  $a_c$  with respect to  $\chi$  is similar to that of Fig. 4b. The corresponding frequencies of oscillation shown in Fig. 5c increase with  $Pr = 10$  up to seven times the magnitudes of Fig. 4c for small  $Bi_s$ . However, their behavior with respect to  $\chi$  is similar.

The results of Figs. 4 and 5 have been checked with the results of Getachew and Rosenblat [23] (see their Table 1). They correspond to  $\chi = 10^{-10}$  and  $Bi_s = 0$  of the figures. The case of  $Pr = 2$  is corroborated by interpolation using a number of data of each column of their Table 1. Observe that the results of  $Pr = 10$  correspond very well to those of [23]. Besides, the numerical algorithm was checked against all the data of their Table 1. To the authors best knowledge there is no paper published in the open literature with  $Bi_s > 0$ . It is important to point out that it is not possible to compare with the results of Siddheshwar et al. [25] because of the lack of numerical results for the Maxwell fluid and due to the very scarce numerical results for the Oldroyd model (for constant viscosity). They only calculate the case  $Pr = 10$  for an Oldroyd fluid with a Weissenberg number equal to 0.3 and ratio of the retardation and relaxation times equal to 0.33 (very large and far from the Maxwell fluid model).

The results presented above can be seen in a different way. The Marangoni numbers of the codimension-two points are now plotted in Fig 6 against  $a_c$ ,  $\sigma_c$  and  $\lambda$ . The plots are grouped into “columns” which are tagged with the corresponding characteristic of the flow and Prandtl number. If the flow is stationary the “column” is tagged with “st”. When the flow is oscillatory the “column” is tagged with the corresponding Prandtl number, that is,  $Pr = 2$  or  $Pr = 10$ . Notice that only Fig. 6a has three plot “columns”. The



**Fig. 5.** Codimension-two points.  $\lambda$ ,  $a_c$  and  $\sigma_c$  against  $\chi$ , for  $Pr = 10$  with  $Bi_s = 0, 0.1, 2, 5$ , and  $d = 0.1$  and  $100$ . Notice that the magnitudes of  $a_c$  are different from those of the stationary case in Fig. 2b.



**Fig. 6.**  $Ma_c$  against  $a_c$ ,  $\sigma_c$  and  $\lambda$ . For  $Pr = 2, Pr = 10, Bi = 0, 0.1, 2, 5$  and  $d = 0.1$  and  $100$ . When the tags are  $Pr$  the flow is oscillatory and when the tags are  $st$  the flow is stationary. 6a)  $Ma_c$  vs  $a_c$ , 6b)  $Ma_c$  vs  $\sigma_c$  and 6c)  $Ma_c$  vs  $\lambda$ .

reason is that it includes plots of the wavenumbers of stationary convection which, as explained above, are different from those of oscillatory convection. It is noteworthy that the separation of the curves due to  $d = 0.1$  and  $100$  is only clear in the “column” of stationary convection (st) in Fig. 6a when  $Bi_s$  is 0 and 0.1. The reason is that the scale adopted to review the results is not wide enough to show the separation in the other plots.

In this way, Fig. 6 gives us a full panorama of the thermocapillary behavior of the Maxwell viscoelastic fluid. The parameters involved in the problem are shown as a map of its behavior. The magnitude of the parameters are shown just beside the corresponding curve.

$Ma_c$  is plotted against  $a_c$  in Fig. 6a. By definition the range of  $Ma_c$  of the codimension-two points is the same as that of the stationary  $Ma_c$  for a fixed  $Bi_s$  and independent of  $Pr$ . Observe that the Marangoni numbers of the codimension-two points increase with  $Bi_s$  which therefore has a stabilizing effect. The corresponding magnitudes of the wavenumbers increase with  $Pr$ , as shown in the “columns” for  $Pr = 2$  and  $Pr = 10$ .

The frequencies of oscillation in Fig. 6b increase too with  $Pr$ . However, when  $Pr = 10$  the influence of  $Bi_s$  is stronger as seen by the large inclination of the “column”, where  $Ma_c$  and  $\sigma_c$  have a remarkable increase.

The “columns” of the codimension-two points in Fig. 6c are also inclined but in a different direction. This means that  $Ma_c$  of the codimension-two points decreases with an increase of  $\lambda$ . Thus,  $\lambda$  has

a destabilizing effect. It is clear that an increase of  $Bi_s$  stabilizes. Notice that for  $Pr = 10$  smaller magnitudes of  $\lambda$  can destabilize the flow and that the curves of criticality can cross through the codimension-two points in a shorter range of  $\lambda$ .

### 3.4. Importance of $d$

The thicknesses ratio has important influence on the instability. This effect is transmitted to the codimension-two curves, as is apparent in the figures presented above. Yet it is not clear quantitatively how large is the separation between the two curves of  $d = 0.1$  and  $100$  for each of the parameters under investigation such as  $a_c$  for stationary (st) convection,  $a_c$  for oscillatory convection,  $\sigma$  and  $\lambda$ . These parameters have different magnitudes for each  $Bi_s$  used in this paper. It is found that the largest separation of the curves of  $d = 0.1$  and  $100$  is located not exactly but near to  $\chi = 10$ . Therefore, Table 2 is used to present the numerical calculation of the separation of the two curves at  $\chi = 10$ . Four magnitudes of the parameter  $Bi_s = 0, 0.1, 2$  and  $5$  are used which correspond to each column in the table.

It is clear that the separation of the codimension-two curves, for each of the parameters, decreases with the increase of  $Bi_s$ . A slight increase is observed for  $Bi_s = 5$  when  $Pr = 10$ , but it is important to remember that the differences found at  $\chi = 10$  not necessarily are uniform. Observe that  $Pr = 10$  imposes an extra effect on the

**Table 2**  
Difference between  $d = 0.1$  and  $100$ .

Effect at $\chi = 10$				
$Bi_s$	0	0.1	2	5
$Ma_c$ st	13.276	8.386	3.398	3.068
$a_c$ st	1.404	0.533	0.122	0.079
$Pr = 2$				
$\lambda$	0.02150	0.01143	0.00163	0.00068
$a_c$	0.424	0.265	0.114	0.038
$\sigma_c$	3.403	2.189	1.164	0.798
$Pr = 10$				
$\lambda$	0.01454	0.00767	0.00088	0.00031
$a_c$	0.789	0.445	0.104	0.114
$\sigma_c$	25.958	15.849	5.203	5.263

oscillatory case producing large differences of the frequencies of oscillation in comparison with  $Pr = 2$ .

From Table 2 it is possible to conclude that the increase of  $Bi_s$  improves the heat conducting properties at the surface-atmosphere boundary. Consequently, the thicknesses ratio becomes less relevant.

#### 4. Conclusions

The codimension-two points of Marangoni convection in a Maxwell viscoelastic fluid layer have been investigated under the influence of a number of parameters. They are the Weissenberg number  $\lambda$ , the thicknesses ratio  $d$ , the heat conductivities ratio  $\chi$ , the Prandtl number  $Pr$  and the fluid-atmosphere Biot number  $Bi_s$ . All of them have an important effect on the Marangoni instability.

It is found that  $\lambda$  has to grow to reach the codimension-two point when  $\chi$  increases. Physically, this means that when the wall heat conductivity decreases in relation with that of the fluid, the fluid elasticity has to increase in order to allow oscillatory convection to compete to be the first unstable one. Further, when the relative wall thickness increases by means of  $d$ ,  $\lambda$  has to increase even more. On the contrary, when the heat flux through the free surface  $Bi_s$  increases, the  $\lambda$  needed to reach the codimension-two point is smaller. Notice that the ranges of  $\lambda$  are reduced too and that  $Ma_c$  increases considerably stabilizing the system.

It is shown that the increase of heat conductivities ratio decreases the stationary Marangoni number. This makes the competition between stationary and oscillatory convection more difficult. Therefore, it is necessary to increase the Weissenberg number (more elastic fluid) to allow oscillatory convection to be the first unstable one.

It is demonstrated that this effect is modified by the Prandtl number. An increase of  $Pr$  (that is, a decrease of the heat diffusivity of the fluid) decreases the magnitude of  $\lambda$  but, on the contrary, it increases the magnitudes of the wavenumber and the frequency of oscillation corresponding to the codimension-two points.

The separation between the curves of  $d = 0.1$  and  $100$  is important to show the relevance of this parameter on the stability. Geometrically, their meanings are that the thickness of the wall is 10 times smaller and 100 times larger than that of the fluid layer, respectively. Table 2 presents the separation of the curves, for fixed  $\chi = 10$  and for different parameters taking into account that they depend on  $Bi_s$ . It is clear that the separations of  $\lambda$  and the other parameters of the problem decrease with an increase of  $Bi_s$ . Physically, the relative increase of heat flux across the free surface ( $Bi_s$ ) makes ineffective the geometry of the thick wall reflected in the parameter  $d$ .

In comparison with previous papers on viscoelastic Marangoni convection, this work presents results more useful in realistic practical and laboratory conditions. The reason is that the

geometric and physical properties of the wall are taken into account. Notice that the use of the results of ideal wall thermal boundary conditions in applied coating problems may lead to unexpected results. Therefore, from the results of this paper, it is important to consider the relevance of the middle section of the range of  $\chi$  to understand the stability and the codimension-two points expected in applications.

The next step is to calculate the codimension-two points of an Oldroyd fluid where an extra parameter appears. That is, the retardation time.

#### Acknowledgments

The authors would like to thank, Joaquín Morales, Cain González, Raúl Reyes, Alberto López, Ma. Teresa Vázquez and Oralia Jiménez for technical support.

#### References

- [1] J.R.A. Pearson, On convection cells induced by surface tension, *J. Fluid Mech.* 4 (1958) 489–500.
- [2] L.E. Scriven, C.V. Sternling, On cellular convection driven by surface-tension gradients: effects of mean surface tension and surface viscosity, *J. Fluid Mech.* 19 (1964) 321–340.
- [3] M. Takashima, Surface tension driven instability in a horizontal liquid layer with a deformable free surface. I. Stationary convection, *J. Phys. Soc. Jpn.* 50 (1981a) 2745–2750.
- [4] M. Takashima, Surface tension driven instability in a horizontal liquid layer with a deformable free surface. II. Overstability, *J. Phys. Soc. Jpn.* 50 (1981b) 2751–2756.
- [5] C.L. McTaggart, Convection driven by concentration and temperature dependent surface tension, *J. Fluid Mech.* 134 (1983) 301–310.
- [6] D.M. Christopher, B.-X. Wang, Prandtl number effects for Marangoni convection over a flat surface, *Int. J. Therm. Sci.* 40 (2001) 564–570.
- [7] L.A. Dávalos-Orozco, Thermocapillary instability of liquid sheets in motion, *Colloids Surfaces A* 157 (1999) 223–233.
- [8] L.A. Dávalos-Orozco, Thermal Marangoni convection of a fluid film coating a deformable membrane, *J. Colloid Interfaces Sci.* 234 (2001) 106–116.
- [9] S. Slavtchev, V. Ouzounov, Stationary Marangoni instability in a liquid layer with temperature-dependent viscosity in microgravity, *Microgravity Q.* 4 (1994) 33–38.
- [10] P.G. Kalitzova-Kurteva, S.G. Slavtchev, I.A. Kurtev, Stationary Marangoni instability in a liquid layer with temperature-dependent viscosity and deformable free surface, *Microgravity Sci. Technol.* 9 (1996) 257–263.
- [11] S.G. Slavtchev, P.G. Kalitzova-Kurteva, I.A. Kurtev, Oscillatory Marangoni instability in a liquid layer with temperature-dependent viscosity and deformable free surface, *Microgravity Sci. Technol.* 11 (1998) 29–34.
- [12] H.H. Bau, Control of Marangoni-Bénard convection, *Int. J. Heat. Mass Transf.* 42 (1999) 1327–1341.
- [13] A.C. Or R.E. Kelly, L. Cortelezzi, J.L. Speyer, Control of long-wavelength Marangoni-Bénard convection, *J. Fluid Mech.* 387 (1999) 321–341.
- [14] S.A. Kechil, I. Hashim, Oscillatory Marangoni convection in variable viscosity fluid layer: the effect of thermal feedback control, *Int. J. Therm. Sci.* 48 (2009) 1102–1107.
- [15] B. Pendse, A. Esmaeeli, An analytical solution for thermocapillary-driven convection of superposed fluids at zero Reynolds and Marangoni numbers, *Int. J. Therm. Sci.* 49 (2010) 1147–1155.
- [16] J. Martínez-Mardones, C. Pérez-García, Linear instability in viscoelastic fluid convection, *J. Phys. Condens. Matter* 2 (1990) 1281–1290.
- [17] J. Martínez-Mardones, R. Tiemann, D. Walgraef, W. Zeller, Amplitude equations and pattern selection in viscoelastic convection, *Phys. Rev. E* 54 (1996) 1478–1488.
- [18] J. Martínez-Mardones, R. Tiemann, D. Walgraef, Convective and absolute instabilities in viscoelastic fluid convection, *Phys. A* 268 (1999) 14–23.
- [19] D. Laroze, J. Martínez-Mardones, L.M. Pérez, Amplitude equation for stationary convection in a viscoelastic magnetic fluid, *Int. J. Bifurcation Chaos* 20 (2010) 235–242.
- [20] D. Laroze, L.M. Pérez, J. Bragard, E.G. Cordaro, J. Martínez-Mardones, Magneto-hydrodynamics 47 (2011) 159–165.
- [21] L.A. Dávalos-Orozco, Viscoelastic natural convection, in: J. de Vicente (Ed.), *Viscoelasticity – from Theory to Biological Applications*, Intech, Rijeka, 2012, pp. 3–32 (Open access).
- [22] R.B. Bird, R.C. Armstrong, O. Hassager, *Dynamics of Polymeric Liquids Vol. 1: Fluid Mechanics*, second ed., Wiley-Interscience, New York, 1987.
- [23] D. Getachew, S. Rosenblat, Thermocapillary instability of a viscoelastic liquid layer, *Acta Mech.* 55 (1985) 137–149.
- [24] S.R.D. Wilson, Growth rates of the Marangoni instability in a layer of elastic fluid, *Rheol. Acta* 34 (1995) 601–605.

- [25] P.G. Siddheshwar, G.N. Sekhar, G. Jayalatha, Surface tension driven convection in viscoelastic liquids with thermorheological effect, *Int. Commun. Heat Mass Transf.* 38 (2011) 468–473.
- [26] A. Vidal, A. Acrivos, The nature of the neutral state in surface-tension driven convection, *Phys. Fluids* 9 (1966) 615–616.
- [27] M. Takashima, Surface-tension driven convection with boundary slab of finite conductivity, *J. Phys. Soc. Jpn.* 29 (1970), 531–531.
- [28] H.Q. Yang, Boundary effect on the Bénard-Marangoni instability, *Int. J. Heat. Mass Transf.* 35 (1992) 2413–2420.
- [29] M.-I. Char, C.-C. Chen, Influence of viscosity variation on the stationary Bénard-Marangoni instability with a boundary slab of finite conductivity, *Acta Mech.* 135 (1999) 181–198.
- [30] N.Z. Abidin, N.M. Arifin, M.S.M. Noorani, Boundary effect in Marangoni convection in a variable viscosity fluid layer, *J. Math. Stat.* 4 (2008) 1–8.
- [31] N.M. Arifin, N. Bachok, Boundary effect on the onset of Marangoni convection with internal heat generation, *World Acad. Sci., Eng. Tech* 38 (2008) 20–23.
- [32] I.S. Shivakumara, S.P. Suma, Y.H. Gangadharaiah, Effect of non-uniform basic temperature gradients on Marangoni convection with a boundary slab of finite conductivity, *Int. J. Eng. Sci. Tech.* 5 (2011) 4151–4160.
- [33] Y.H. Gangadharaiah, Onset of surface tension driven convection in a fluid layer with a boundary slab of finite conductivity and deformable free surface, *Int. J. Math. Arch.* 4 (2013) 311–323.
- [34] I. Pérez-Reyez, L.A. Dávalos-Orozco, Effect of thermal conductivity and thickness of the walls in the convection of a viscoelastic Maxwell fluid layer, *Int. J. Heat. Mass Transf.* 54 (2011) 5020–5029.