



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**

FACULTAD DE CIENCIAS

**Un modelo de difusión con saltos para
valuar opciones europeas**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

ACTUARIO

P R E S E N T A :

David Ricardo Montalván Hernández



**DIRECTOR DE TESIS:
Dr. Fernando Baltazar Larios
2015.**

Ciudad Universitaria, D. F.



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1.Datos del alumno

Montalván

Hernández

David Ricardo

55 67 98 83

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Actuaría

409066731

2.Datos del tutor

Doctor

Fernando

Baltazar

Larios

3.Datos sinodal 1

Doctor

Pablo

Padilla

Longoria

4.Datos del sinodal 2

Doctor

Mogens

Bladt

Petersen

5.Datos del sinodal 3

M. en C.

Jorge Humberto

Del Castillo

Spindola

6.Datos del sinodal 4

Doctora

María del Rocío Raquel

Elizondo

Camejo

7.Datos del trabajo escrito

Un modelo de difusión con saltos para valorar opciones europeas

114 p.

2015.

UN MODELO DE DIFUSIÓN CON SALTOS
PARA VALUAR OPCIONES EUROPEAS.

David Ricardo Montalván Hernández.

A mi familia y amigos por su apoyo y los momentos (malos o buenos) compartidos.

A mi asesor Fernando Baltazar Larios, por su apoyo y sobre todo su paciencia en el desarrollo de este trabajo.

Juramento hipocrático del modelador (Paul Wilmott y Emanuel Derman)

- *I will remember that I didn't make the world, and it doesn't satisfy my equations.*
- *Though I will use models boldly to estimate value, I will not be overly impressed by mathematics.*
- *I will never sacrifice reality for elegance without explaining why I have done so.*
- *Nor will I give the people who use my model false comfort about its accuracy. Instead, I will make explicit its assumptions and oversights.*
- *I understand that my work may have enormous effects on society and the economy, many of them beyond my comprehension.*

Índice general

1. La mecánica del mercado de opciones	1
1.1. ¿Qué es una opción?	1
1.2. Argot Financiero	2
1.3. Diagramas de payoff	3
1.4. Factores que afectan los precios de las opciones	5
1.5. Paridad Put-Call	10
2. Conceptos básicos	12
2.1. Medidas y espacios de probabilidad	12
2.2. Esperanza condicional	15
2.3. Filtraciones y procesos estocásticos	16
2.3.1. Ejemplos de procesos estocásticos	18
3. Integración estocástica	26
3.1. ¿Por qué el cálculo clásico no es suficiente?	26
3.2. Variación Cuadrada	28
3.3. Integral estocástica con respecto a procesos continuos	34
3.3.1. Integral de Itô para procesos (funciones) simples	34

3.3.2. Integral de Itô para funciones generales	40
3.4. Fórmula de Itô	43
3.4.1. Fórmula de Itô para el movimiento browniano	43
3.4.2. Fórmula de Itô para procesos de Itô	45
3.5. Integral estocástica para procesos discontinuos	50
3.5.1. Difusiones con saltos	50
3.5.2. Variación cuadrada para difusiones con saltos	52
3.5.3. Fórmula de Itô para difusiones con saltos	55
4. Modelo de Black-Scholes (1973)	58
4.1. Resultados independientes del modelo.	58
4.1.1. Valuación neutral al riesgo	61
4.1.1.1. Medidas equivalentes martingalas	61
4.1.1.2. Valuación neutral al riesgo	65
4.2. El modelo de Black-Scholes	67
4.3. Teorema de Girsanov	68
4.3.1. Idea detrás del teorema de Girsanov	69
4.4. Solución del problema de Black-Scholes	73
4.5. Imperfecciones del modelo de Black-Scholes (El supuesto de normalidad)	76
5. Modelo de difusión con saltos (Merton 1976)	81
5.1. Modelo de Merton (1976)	81
5.2. Teorema de Girsanov para difusiones con saltos	84
5.2.1. Cambio de medida para un proceso Poisson	85
5.2.2. Cambio de medida para un proceso Poisson compuesto	88

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	v
5.2.3. Cambio de medida para una difusión con saltos	90
5.3. Solución del modelo de Merton	93
5.4. Comparación del modelo de Merton con el de Black-Scholes .	95
5.4.1. Distribución de los rendimientos	95
5.4.2. Calibración de los modelos	102
5.4.3. Precios.	105
5.5. Imperfecciones en el modelo de Merton	106
5.5.1. Mercados incompletos	107
6. Conclusiones	109
6.1. Posibles extensiones del trabajo	110
A. Implementación del modelo de Black-Scholes en R	111
B. Implementación del modelo de Merton en R .	113
Bibliografía	114

Resumen. En 1973, Fisher Black y Myron Scholes, desarrollaron un modelo con el cual se podía obtener una fórmula para la valuación de opciones europeas. El principal atractivo de este modelo, se debe a que la fórmula obtenida es una fórmula cerrada y no es necesario utilizar herramientas avanzadas (por ejemplo simulación de Montecarlo o transformadas de Fourier) para obtener el precio de las opciones.

Sin embargo, el modelo presenta distintos tipos de imperfecciones, entre ellas, la continuidad en la trayectoria de los precios de las acciones.

Los objetivos de este trabajo son dos, el primero de ellos es presentar el modelo propuesto por Robert C. Merton en el cual la continuidad en la trayectoria de los precios es descartada y compararlo con el modelo de Black-Scholes. La presentación se realizará utilizando el concepto de medida equivalente martingala, a diferencia de como se hizo originalmente a través de la solución de la ecuación diferencial parcial.

El segundo objetivo es la presentación de ambos modelos sin recurrir a conceptos matemáticos demasiado avanzados, ya que se busca realizar una exposición que sea accesible para personas con conocimientos en probabilidad y procesos estocásticos pero que no han tenido un acercamiento a dichos temas desde el punto de vista de la teoría de la medida.

La estructura del trabajo es la siguiente:

En el **capítulo 1**, se presentan los conceptos y resultados básicos para entender el mercado de las opciones.

El **capítulo 2** presenta las herramientas matemáticas necesarias para el desarrollo de los temas.

En el **capítulo 3**, se desarrolla la integral estocástica para procesos continuos y discontinuos (en el tiempo).

El **capítulo 4** incluye los conceptos relacionados a la valuación de activos financieros utilizando el concepto de medida equivalente martingala y a partir de este se desarrolla el modelo de Black-Scholes, presentando en la última sección sus imperfecciones.

El **capítulo 5** desarrolla el modelo de Merton comparándolo con el modelo de Black-Scholes.

Por último en el **capítulo 6** se dan las conclusiones y posibles extensiones de este trabajo.

Capítulo 1

La mecánica del mercado de opciones

En este capítulo se explican los conceptos básicos sobre las opciones, así como el funcionamiento de este mercado y el argot financiero utilizado en la práctica.

Se presentan además los factores que influyen en el precio de estos instrumentos derivados y una técnica gráfica para estudiarlos.

1.1. ¿Qué es una opción?

Supongamos que un inversionista cree que en una fecha futura, T , el precio de un activo (por ejemplo la acción de una compañía), S , se encontrará arriba de cierto nivel K .

A este inversionista le gustaría poder comprar en la fecha T , el activo S a un precio de K unidades monetarias, asegurando así una ganancia de $S - K$. Más aún, si resulta que su pronóstico sobre el precio del activo fue incorrecto y $S < K$, le gustaría no verse en la obligación de comprar el activo al precio K , es decir, al inversionista le gustaría tener el derecho de comprar o no a determinado precio.

La situación anterior describe el caso de una Opción Call.

Definición 1.1. (Opción Call).

Una opción Call (de manera más breve un Call) es un contrato que da el **derecho de comprar** un activo por una cantidad determinada en una fecha específica.

Ahora supongamos que el inversionista cree que el precio de activo disminuirá hasta encontrarse por debajo de un nivel K , en este caso le sería favorable vender dicho activo en K unidades monetarias obteniendo así una ganancia de $K - S$ si $S < K$ y en caso de que su pronóstico falle no verse obligado a vender.

Esta situación describe una opción Put.

Definición 1.2. (Opción Put)

Una opción Put (de manera más breve un Put) es un contrato que da el **derecho de vender** un activo por una cantidad determinada en una fecha específica.

De acuerdo a las definiciones anteriores, en un Call se espera que el precio del activo aumente por lo que buscamos comprarlo a un precio menor del que cotiza en el mercado, mientras que en un Put se espera a que baje por lo que se busca venderlo a un precio mayor del cotizado.

Observación 1.1. En este trabajo únicamente se estudiarán las opciones que sólo tienen una única fecha en que pueden ejercerse, este tipo de opciones son llamadas del tipo Europeo.

1.2. Argot Financiero

En la práctica, en el mercado de opciones se utilizan los siguientes términos para hacer referencia a las características de estos contratos y en este trabajo nos apegaremos a ellos:

- **Prima:** La cantidad que se paga por tener un Call o un Put. Determinar esta cantidad es el tema central de este trabajo.
- **Activo subyacente (subyacente):** El activo sobre el cual depende el valor de la opción. Aquí supondremos que el subyacente es una acción que no paga dividendos y denotaremos con S_t su valor en la fecha t .
- **Precio de ejercicio (Strike):** La cantidad por la cual el subyacente será comprado (en el caso de un Call) o vendido (en el caso de un Put). El strike será denotado con la letra K .
- **Fecha de vencimiento:** Fecha en la cual se puede ejercer la opción, es decir, fecha en la cual se toma la decisión de comprar (Call) o vender (Put) el subyacente por el precio strike. Utilizaremos la letra T para hacer referencia a esta fecha.
- **Payoff:** Es el pago que se recibe en la fecha de vencimiento de la opción. Para un Call el payoff es $\max(S_T - K, 0)$, mientras que para un Put está dado por $\max(K - S_T, 0)$.
- **Posición larga:** Se dice que un inversionista tiene la posición larga en una opción si es quien ha comprado el contrato, es decir, recibe el derecho de comprar o vender a un precio strike en la fecha de vencimiento. Al inicio del contrato, esta posición paga la prima.
- **Posición corta:** Se dice que un inversionista tiene una posición corta en una opción si es quien la suscribe. Al inicio del contrato esta posición recibe la prima y en la fecha de vencimiento podría verse obligado a comprar o vender el subyacente a determinado precio strike, dependiendo de si la posición larga ejerce o no la opción.

1.3. Diagramas de payoff

Existen cuatro tipos de posiciones dentro de las opciones:

1. Call largo (Posición larga en una opción Call).

2. Put largo
3. Call corto
4. Put corto

estas posiciones tienen sus respectivos payoff:

1. $\max(S_T - K, 0)$
2. $\max(K - S_T, 0)$
3. $-\max(S_T - K, 0)$
4. $-\max(K - S_T, 0)$

Una forma de caracterizar los payoff anteriores, es a través de una gráfica que los represente de acuerdo al strike y al precio del subyacente en la fecha de vencimiento, de esta manera podemos representar las cuatro posiciones anteriores con los siguientes diagramas (diagramas de payoff):

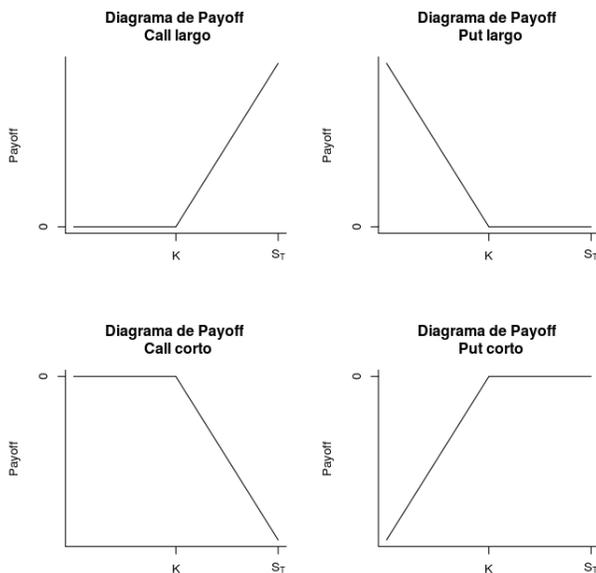


Figura 1.3.1: Diagramas de payoff de las posibles posiciones en una opción.

Observación 1.2. Los diagramas de Payoff pueden ser engañosos ya que no incluyen el costo de la opción, lo que provoca que no sean capaces de indicar a partir de que precio S_T se obtiene una ganancia.

1.4. Factores que afectan los precios de las opciones

Consideraremos a lo siguientes factores como los responsables de los cambios en los precios de las opciones.

1. Precio actual de la acción S_0
2. Precio Strike K
3. Fecha de vencimiento T
4. Volatilidad de la acción σ
5. Tasa libre de riesgo r

Las relaciones entre estos factores y el precio de las opciones, se basan en argumentos de no arbitraje, el cual se define como:

Definición 1.3. (Arbitraje)

Decimos que una estrategia de operación, es un arbitraje, si podemos generar ganancias libres de riesgo.

Vagamente hablando, un arbitraje nos permite iniciar con un portafolio de valor cero (o incluso debiendo dinero) y en un futuro, con este mismo portafolio, obtener ganancias sin correr riesgo alguno.

Por el momento supondremos que no existen oportunidades de arbitraje y más adelante veremos que en los modelos desarrollados en este trabajo, efectivamente no es posible la existencia de dichas estrategias.

- Precio de la acción y precio strike

Recordemos que el payoff de una posición larga en un Call está dado por $\max(S_T - K, 0)$, esta expresión nos indica que el precio de estos instrumentos aumenta si el precio de la acción aumenta (podremos comprar a un precio más barato de lo que ofrece el mercado y para obtener este derecho, tenemos que pagar más) y disminuye si el strike aumenta (la diferencia entre el precio que ofrece el mercado y el precio strike del contrato se hace más pequeña, con lo que nuestras posibles ganancias se ven reducidas, por lo que no tiene sentido pagar un precio elevado por el derecho).

En el caso de un Put, el payoff es $\max(K - S_T, 0)$, si el precio de la acción crece el put perderá valor (la diferencia entre el precio que vendemos y el precio que ofrece el mercado es pequeña por lo que es más difícil hacer una ganancia) mientras que si el precio strike aumenta, el valor de la opción también lo hace (vendemos más caro)

Las siguientes figuras muestran la relación entre el precio de las opciones y el precio del subyacente.



Figura 1.4.1: Relación entre el precio de la acción y el precio de una opción call.



Figura 1.4.2: Relación entre el precio strike y el precio de una opción call.

- **Fecha de vencimiento**

Si la fecha de vencimiento es lejana, entonces se cuenta con un horizonte de tiempo más amplio en el cual el precio de la acción podría superar el precio strike (en el caso de un Call) o caer por debajo de este (en el caso de un Put). En consecuencia a mayor plazo para el vencimiento, mayor el precio de las opciones. La figura (1.4.3) ilustra esta relación.

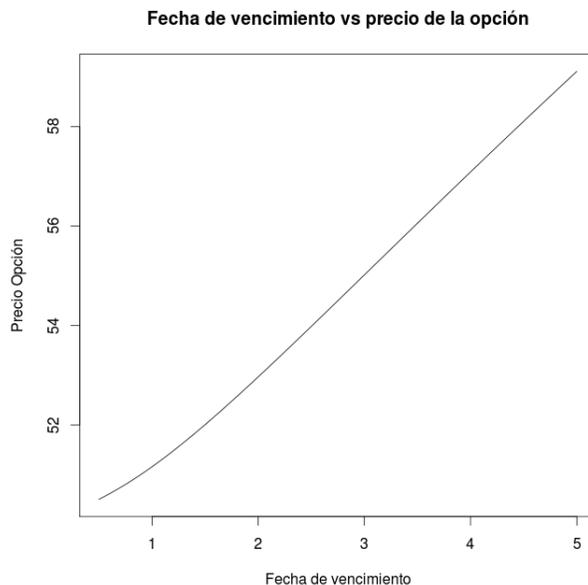


Figura 1.4.3: Relación entre la fecha de vencimiento y el precio de una opción.

- **Volatilidad**

Posiblemente la volatilidad es el factor más importante al momento de valorar una opción, esta variable es una medida de que tanta incertidumbre hay en el precio de la acción.

Los inversionistas con posiciones largas en opciones tienen pérdidas limitadas, lo más que pueden perder es la prima que pagaron por tener la opción, en cambio sus ganancias no se encuentran acotadas (Ver figura (1.3.1)). Por lo tanto un aumento en la volatilidad tiene como consecuencia un aumento en el precio de los Put's y los Call's (el inversionista tiene que pagar más, por el derecho a tener ganancias no acotadas). La figura (1.4.4) ilustra esto.

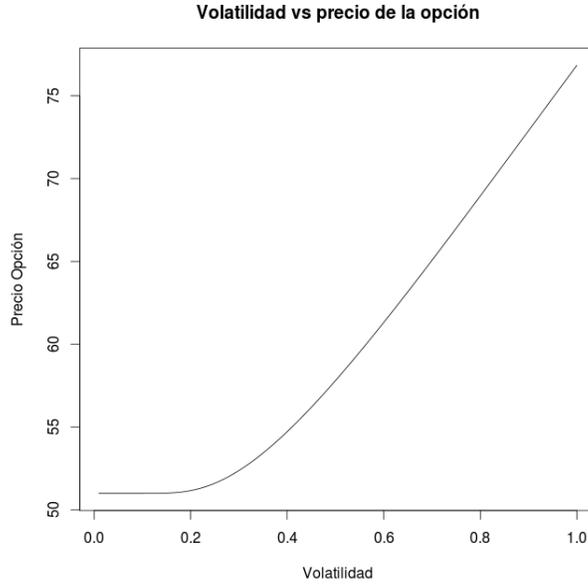


Figura 1.4.4: Relación entre la volatilidad y el precio de una opción

- **Tasa libre de riesgo**

La tasa libre de riesgo, es la tasa de interés que puede ser obtenida, sin asumir riesgo alguno. Usualmente, esta tasa está ligada a bonos gubernamentales.

Debido a que $Precio\ Call < Precio\ acción$ (ver [11]), entonces si la tasa libre de riesgo, r , es alta, un inversionista en lugar de comprar la acción, podría optar por comprar un Call y el resto, $Precio\ acción - Precio\ Call > 0$, podría invertirlo a la tasa r , esto provoca que exista una mayor demanda en Calls y en consecuencia su precio tiende a crecer.

En el caso de Puts, si la tasa r crece, el inversionista con una posición larga en el derivado espera poder vender la acción en un tiempo futuro, por lo que busca ser compensado por el hecho de tener que esperar hasta la fecha de vencimiento para poder obtener dinero (si la opción se ejerce) y no haber invertido en el presente a una tasa r , esta compensación se da con la disminución en el precio del contrato. La figura (1.4.5) ilustra la relación entre la tasa libre de riesgo y el precio de una opción Call.

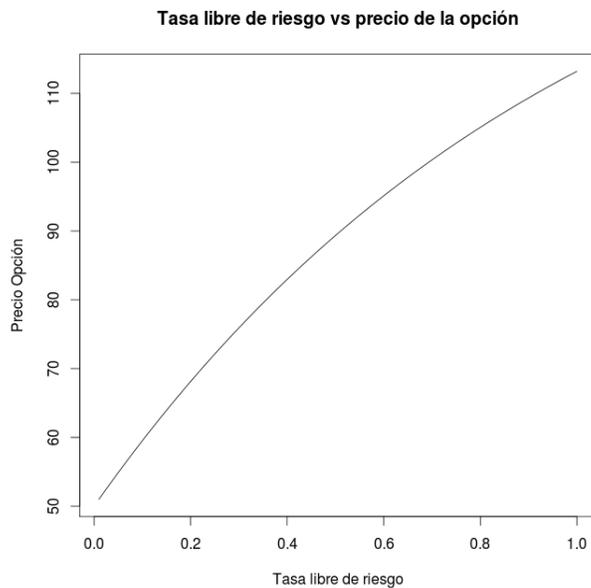


Figura 1.4.5: Relación entre la tasa libre de riesgo y el precio de una opción call.

1.5. Paridad Put-Call

La paridad Put-Call es una relación entre los precios de una opción Call (Europea) y una opción Put (Europea) cuando dichos contratos tienen el mismo precio Strike, la misma fecha de vencimiento y el mismo subyacente.

Utilizando la notación que se introdujo en la sección (1.4) consideremos los siguientes portafolios:

Portafolio 1: Un Call con precio c más una cantidad Ke^{-rT} en efectivo que se invierte a una tasa r .

Portafolio 2: Un Put más una acción.

En la fecha de vencimiento ambos portafolios valen:

$$\max(S_T, K)$$

como ambas opciones son del tipo europeo, sólo tienen una fecha de ejercicio y por lo tanto el valor presente de ambos debe ser el mismo (si esto no se cumpliera, existiría un arbitraje vendiendo en corto el portafolio más caro y comprando el portafolio más barato e invirtiendo la cantidad restante de dinero a la tasa r), esto es:

$$c + Ke^{-rT} = p + S_0 \quad (1.5.1)$$

esta relación es llamada Paridad Put-Call y nos permite encontrar el precio de un Put conociendo el precio de un Call y viceversa.

Gracias a la ecuación(1.5.1), nos es posible concentrarnos únicamente en determinar el precio de Calls ya que el precio de los Puts se obtiene mediante un sencillo despeje.

Capítulo 2

Conceptos básicos

En este capítulo se introducen los conceptos matemáticos para el desarrollo del trabajo.

Se define lo que es un espacio de probabilidad, variables aleatorias, esperanza condicional, filtraciones y procesos estocásticos.

Además, se enuncian algunas propiedades de los procesos estocásticos utilizados en los capítulos posteriores.

2.1. Medidas y espacios de probabilidad

Iniciaremos con la relación entre la teoría de la medida y la probabilidad.

Decimos que la dupla (Ω, \mathcal{F}) es un espacio medible, si Ω es un conjunto no vacío, llamado espacio muestral, y \mathcal{F} es una sigma álgebra de subconjuntos de Ω , es decir:

Definición 2.1. (Sigma álgebra)

Sea Ω un conjunto distinto del vacío, sea \mathcal{F} una colección de conjuntos de Ω . Decimos que \mathcal{F} es una sigma álgebra de subconjuntos de Ω si:

1. El conjunto vacío pertenece a \mathcal{F} , $\emptyset \in \mathcal{F}$.

2. Si $A \in \mathcal{F}$, entonces $A^c \in \mathcal{F}$.
3. Si $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$, entonces $\cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

Cada $A \in \mathcal{F}$ es llamado conjunto medible.

Definición 2.2. (Sigma álgebra generada por un conjunto)

Sea Ω un conjunto no vacío y A un subconjunto (o colección de subconjuntos) de Ω .

La sigma álgebra generada por A , denotada por $\sigma(A)$, es la sigma álgebra más pequeña que contiene a A .

Observación 2.1. Una sigma álgebra importante, es la sigma álgebra de Borel, la cual es la sigma álgebra más pequeña que contiene todos los conjuntos abiertos de \mathbb{R} .

La noción de medida es una generalización de las nociones de longitud, área y volumen.

Si interpretamos a Ω como el conjunto de posibles resultados de un experimento, la sigma álgebra \mathcal{F} contendría toda la información de este experimento. Así pues, necesitamos una forma de medir el “volumen” de la información contenida en \mathcal{F} , es decir, encontrar la probabilidad de un conjunto (evento).

Definición 2.3. (Medida de probabilidad)

Sea Ω un conjunto no vacío, \mathcal{F} una sigma álgebra de subconjuntos de Ω .

Una medida de probabilidad, P , es una función de \mathcal{F} en el intervalo $[0, 1]$ tal que:

1. $P(\Omega) = 1$
2. Si A_1, A_2, \dots es una sucesión de subconjuntos de \mathcal{F} tal que $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$, entonces

$$P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Si P es una medida de probabilidad, llamamos a (Ω, \mathcal{F}, P) un espacio de probabilidad.

Observación 2.2. (Conjuntos P-nulos)

Por 1) y 2) de la definición anterior, concluimos que $P(\emptyset) = 1 - P(\Omega) = 0$. Llamaremos conjuntos P-nulos (de medida cero, con probabilidad cero bajo P) a todos los conjuntos $A \in \mathcal{F}$ tales que $P(A) = 0$.

Supondremos además que todos los conjuntos de medida cero, son elementos de \mathcal{F} ((Ω, \mathcal{F}, P) es completo).

Si un evento $A \in \mathcal{F}$ es tal que $P(A) = 1$, se dirá que el evento A ocurre casi seguramente (c.s)

Definición 2.4. (Variable aleatoria)

Sea (Ω, \mathcal{F}, P) un espacio de probabilidad.

Una variable aleatoria, X , es una función $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, \mathcal{F} -medible, esto es, para todo conjunto boreliano B :

$$X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}$$

Para poder valuar derivados (en particular opciones del tipo europeo) necesitamos el concepto de medidas equivalentes y el teorema de Radon-Nikodým.

Definición 2.5. (Medidas equivalentes)

Sean P y \tilde{P} medidas de probabilidad sobre el mismo espacio medible (Ω, \mathcal{F}) . Decimos que \tilde{P} es absolutamente continua con respecto a P ($\tilde{P} \ll P$), si $P(A) = 0$ implica que $\tilde{P}(A) = 0$.

Decimos que P y \tilde{P} son equivalentes si $\tilde{P} \ll P$ y $P \ll \tilde{P}$.

Teorema 2.1. (Radon-Nikodým)

Sean P y \tilde{P} medidas de probabilidad equivalentes, definidas en (Ω, \mathcal{F}) . Entonces existe una variable aleatoria Z tal que:

1. $P[Z > 0] = 1$

2. $E_P[Z] = 1$
3. $\tilde{P}(A) = \int_A Z dP \forall A \in \mathcal{F}$

en donde E_P , denota la esperanza bajo la medida P .

2.2. Esperanza condicional

El concepto de esperanza condicional nos será de utilidad ya que nos permite definir matemáticamente la idea del valor esperado de una variable aleatoria, dada la información que se tiene hasta cierto momento (por ejemplo, dada la historia del precio de una acción).

Definición 2.6. (Esperanza condicional)

Sea X una variable aleatoria sobre el espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) , tal que $E[|X|] < \infty$ y sea $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ una sigma álgebra.

La esperanza condicional de X dada \mathcal{G} , $E[X|\mathcal{G}]$, se define como una función \mathcal{G} -medible, tal que

$$\int_A X dP = \int_A E[X|\mathcal{G}] dP$$

para todo conjunto $A \in \mathcal{G}$.

Teorema 2.2. (Propiedades de la esperanza condicional)

Sea X una variable aleatoria sobre el espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) , tal que $E[|X|] < \infty$ y sea $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ una sigma álgebra, entonces:

1. $E[X|\{\Omega, \emptyset\}] = E[X]$
2. $E[X|\mathcal{F}] = X$
3. Si $E[Z] < \infty$ y X es \mathcal{G} -medible:

$$E[XZ|\mathcal{G}] = XE[Z|\mathcal{G}]$$

4. Para toda sigma álgebra $\mathcal{G}_0 \subset \mathcal{G}$

$$E [E [X|\mathcal{G}_0] |\mathcal{G}] = E [X|\mathcal{G}_0] = E [E [X|\mathcal{G}] |\mathcal{G}_0]$$

5. $E [E [X|\mathcal{G}]] = E [X]$

6. Si X es independiente de \mathcal{G} , es decir, si es independiente de la función indicadora \mathbb{I}_A para todo $A \in \mathcal{G}$, entonces:

$$E [X|\mathcal{G}] = E [X]$$

7. Si $E [|Z|] < \infty$ y $a, b \in \mathbb{R}$

$$E [aX + bZ|\mathcal{G}] = aE [X|\mathcal{G}] + bE [Z|\mathcal{G}]$$

8. Si $X \leq Z$, entonces $E [X|\mathcal{G}] \leq E [Z|\mathcal{G}]$

Para la demostración, ver [3, 5, 21].

2.3. Filtraciones y procesos estocásticos

Necesitamos tomar en cuenta el hecho de que conforme pasa el tiempo, tenemos más información a nuestra disposición. Para formular de manera precisa esta idea, introducimos el concepto de filtración.

Definición 2.7. (Filtración)

Sea (Ω, \mathcal{F}, P) un espacio de probabilidad. Una filtración $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$, es una familia creciente de sigma álgebras, es decir, si $s \leq t$, entonces $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$.

El subíndice t es interpretado como la variable de tiempo y \mathcal{F}_t representa la información disponible en el momento t , esta información incrementa conforme el tiempo transcurre.

Utilizando una filtración podemos distinguir aquellas cantidades que son conocidas dada la información actual y aquellas que todavía son consideradas aleatorias.

Un evento $A \in \mathcal{F}_t$ es un evento tal que, si se tiene la información de \mathcal{F}_t , es posible decidir si A ocurrió o no.

Observación 2.3. Un espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) equipado con una filtración $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$, es llamado un espacio de probabilidad filtrado. Supondremos que siempre trabajaremos en este tipo de espacios de probabilidad y serán denotados como $(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathbb{F})$ o como $(\Omega, \mathcal{F}, P, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0})$.

Para describir el comportamiento del precio de las acciones conforme el tiempo transcurre, necesitamos una estructura que nos permita modelar en un contexto dinámico el cambio aleatorio que sufren estos precios con el paso del tiempo, a esta estructura le llamaremos proceso estocástico.

Definición 2.8. (Proceso estocástico)

Un proceso estocástico es una familia $X = \{X_t\}_{t \geq 0}$ de variables aleatorias definidas sobre un espacio de probabilidad. El parámetro t es interpretado como una variable de tiempo, así $X_t(\omega)$ representa el estado del proceso en el tiempo t bajo el escenario ω .

Observación 2.4. Utilizaremos las siguientes notaciones para referirnos a un proceso estocástico X , $X = \{X_t\}_{t \geq 0}$, X_t . La notación X_t será clara de acuerdo al contexto y puede referirse tanto al proceso X como a la variable aleatoria X_t .

Como se mencionó anteriormente, una filtración nos permite determinar si un evento ha ocurrido o no, de la misma forma, una filtración nos permitirá determinar si un evento relacionado a un proceso estocástico ha ocurrido o no. Los procesos para los cuales podemos hacer tales afirmaciones son llamados procesos adaptados a la filtración.

Definición 2.9. (Proceso adaptado)

Sean $X = \{X_t\}_{t \geq 0}$ un proceso estocástico y $(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathbb{F})$ un espacio de probabilidad filtrado.

Decimos que X es un proceso adaptado a la filtración \mathbb{F} (\mathbb{F} -adaptado o \mathcal{F}_t -adaptado), si la variable aleatoria X_t es \mathcal{F}_t -medible para toda $t \geq 0$.

Podría darse el caso en que la única información disponible sea aquella formada por los valores del pasado de un proceso estocástico. Esta “historia del proceso” puede ser presentada con un tipo especial de filtración.

Definición 2.10. (Filtración natural)

Sea (Ω, \mathcal{F}, P) un espacio de probabilidad y sea X un proceso estocástico. La filtración natural del proceso X se define como

$$\mathcal{F}_t := \sigma(X_s : 0 \leq s \leq t) \quad 0 \leq t < \infty$$

con $\sigma(X_s : 0 \leq s \leq t)$ la sigma álgebra generada por los conjuntos

$$X_s^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : X_s(\omega) \in B\} \quad 0 \leq s \leq t$$

en donde B es un conjunto de Borel.

Claramente todo proceso estocástico es adaptado a su filtración natural.

2.3.1. Ejemplos de procesos estocásticos

A continuación se presentarán los principales procesos estocásticos utilizados en este trabajo. Supondremos que siempre se trabaja sobre un espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathbb{F})$.

El proceso estocástico de mayor interés para el desarrollo de este trabajo, será la martingala definida como:

Definición 2.11. (Martingala)

Sea X un proceso estocástico, decimos que X es una martingala (respecto a una filtración \mathbb{F} y a una medida de probabilidad P) si:

1. X_t es una variable \mathcal{F}_t - medible, es decir X es \mathbb{F} - adaptado.
2. Para toda $t \geq 0$, tenemos que $E_P [|X_t|] < \infty$
3. Para toda $s \leq t$, tenemos $E_P [X_t | \mathcal{F}_s] = X_s$

Como se verá más adelante, las martingalas jugarán el papel principal al momento de valorar instrumentos derivados.

Definición 2.12. (Movimiento browniano)

Un movimiento browniano respecto a una filtración \mathbb{F} y una medida P ((P, \mathbb{F}) - movimiento browniano), es un proceso estocástico, $\{W_t\}_{t \geq 0}$, tal que:

1. $\{W_t\}_{t \geq 0}$ es adaptado a \mathbb{F}
2. El mapeo $t \mapsto W_t(\omega)$ es continuo (casi seguramente) y no diferenciable.
3. Si $s \leq t$, entonces $W_t - W_s$ es independiente de \mathcal{F}_s (incrementos independientes)
4. Si $s \leq t$, entonces $W_t - W_s$ y $W_{t-s} - W_0$, tiene la misma distribución de probabilidad (incrementos estacionarios)

Si un movimiento browniano es tal que $W_0 = 0$, $E_P [W_t] = 0$, $Var(W_t) = t$ para toda t , decimos que $\{W_t\}_{t \geq 0}$ es un movimiento browniano estándar.

Observación 2.5. Utilizando la definición anterior, puede demostrarse que los incrementos de un movimiento browniano estándar, tienen distribución normal con media cero y varianza $t - s$ ($N(0, t - s)$).

Si no se indica lo contrario, siempre supondremos que se habla de un movimiento browniano de este tipo.

Proposición 2.1. Si $\{W_t\}_{t \geq 0}$ es un movimiento browniano estándar, entonces es una martingala

Demostración. Sólo demostraremos la propiedad 3 de la definición (2.11)

Sea $s \leq t$, utilizando el hecho de que el proceso es adaptado a la filtración, la propiedad de incrementos independientes, las propiedades de la esperanza condicional y que $E[W_t] = 0$ para toda t , obtenemos

$$\begin{aligned} E[W_t | \mathcal{F}_s] &= E[W_t - W_s | \mathcal{F}_s] + E[W_s | \mathcal{F}_s] \\ &= E[W_t - W_s | \mathcal{F}_s] + W_s \\ &= E[W_t - W_s] + W_s \\ &= W_s \end{aligned}$$

La figura (2.3.1) muestra la trayectoria de un movimiento browniano estándar. □

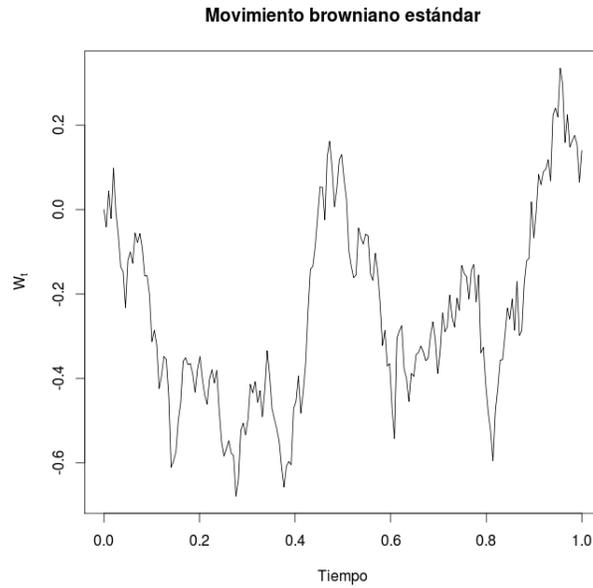


Figura 2.3.1: Movimiento browniano estándar

Definición 2.13. (Proceso Poisson)

Sea $\lambda > 0$, una constante, decimos que el proceso $\{N_t\}_{t \geq 0}$ es un proceso Poisson (respecto a una filtración \mathbb{F} y a una medida de probabilidad P) con intensidad λ , si:

1. $\{N_t\}_{t \geq 0}$ es adaptado a \mathbb{F}
2. $N_0 = 0$ (casi seguramente)
3. Si $s \leq t$, entonces $N_t - N_s$ es independiente de \mathcal{F}_s (incrementos independientes)
4. Si $s \leq t$, entonces $N_t - N_s$ tiene la misma distribución de probabilidad que N_{t-s} (incrementos estacionarios)
5. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{P(N_h = 1)}{h} = \lambda$
6. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{P(N_h \geq 2)}{h} = 0$

Proposición 2.2. Sea $\{N_t\}_{t \geq 0}$ un proceso Poisson con intensidad $\lambda > 0$, entonces

1. La variable N_t tiene distribución Poisson con parámetro λt para toda $t \geq 0$.
2. $N_t - N_s$ tiene distribución Poisson con parámetro $\lambda(t - s)$ para toda $s \leq t$
3. En consecuencia $E[N_t] = \lambda t$ y $E[N_t - N_s] = \lambda(t - s)$

Para la demostración, ver [6].

La figura (2.3.2) muestra la trayectoria de un proceso Poisson.

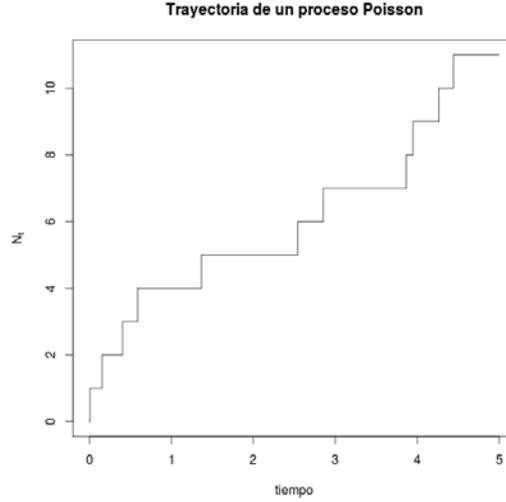


Figura 2.3.2: Proceso Poisson

Definición 2.14. (Proceso Poisson compensado)

Sea $\{N_t\}_{t \geq 0}$ un proceso Poisson con intensidad λ , el proceso Poisson compensado $\{M_t\}_{t \geq 0}$ se define como:

$$M_t = N_t - \lambda t$$

Proposición 2.3. Si $\{M_t\}_{t \geq 0}$, $M_t = N_t - \lambda t$, es un proceso Poisson compensado, entonces es una martingala.

Demostración. Sólo se demostrará la propiedad 3 de la definición (2.11).

Utilizando el hecho de que el proceso Poisson es adaptado a \mathbb{F} (en consecuencia el proceso Poisson compensado también lo es), la propiedad de incrementos independientes del proceso Poisson, así como el hecho de que $E[N_t - N_s] = \lambda(t - s)$, para $s \leq t$, tenemos:

$$\begin{aligned} E[M_t | \mathcal{F}_s] &= E[M_t - M_s | \mathcal{F}_s] + E[M_s | \mathcal{F}_s] \\ &= E[N_t - N_s] - \lambda(t - s) + M_s \\ &= M_s \end{aligned}$$

□

En la figura (2.3.3) se muestra una trayectoria de un proceso Poisson compensado.

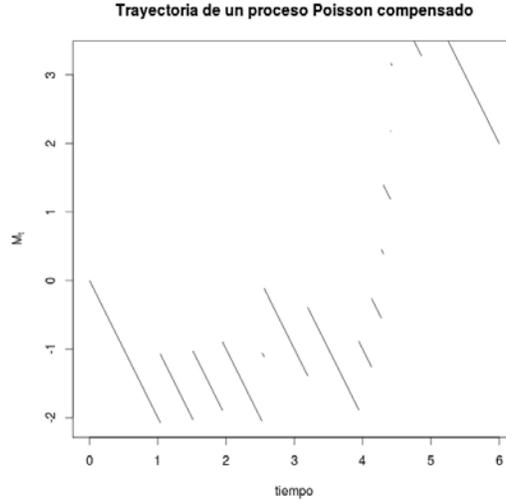


Figura 2.3.3: Proceso Poisson compensado

Definición 2.15. (Proceso Poisson compuesto)

Sea $\{N_t\}_{t \geq 0}$ un proceso Poisson con intensidad λ . Sea Y_1, Y_2, \dots una sucesión de variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas con media $\beta = E[Y] < \infty$ e independientes del proceso Poisson.

El proceso Poisson compuesto se define como:

$$Q_t = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i$$

Proposición 2.4. Sea $\{Q_t\}_{t \geq 0}$ un proceso Poisson compuesto como en la definición (2.15), entonces:

1. $Q_t - Q_s$ es independiente de \mathcal{F}_s para $s \leq t$ (incrementos independientes)

2. $Q_t - Q_s$ tiene la misma distribución que Q_{t-s} (incrementos estacionarios)
3. $E[Q_t] = \beta\lambda t$ para toda $t \geq 0$, $\beta = E[Y]$
4. $Var(Q_t) = \lambda E[Y^2]$

Para la demostración, ver [6].

La figura (2.3.4) muestra una trayectoria de un proceso Poisson compuesto, obsérvese que esta trayectoria es similar a la trayectoria de un proceso Poisson, excepto por el hecho de que los saltos no necesariamente incrementan en una unidad.

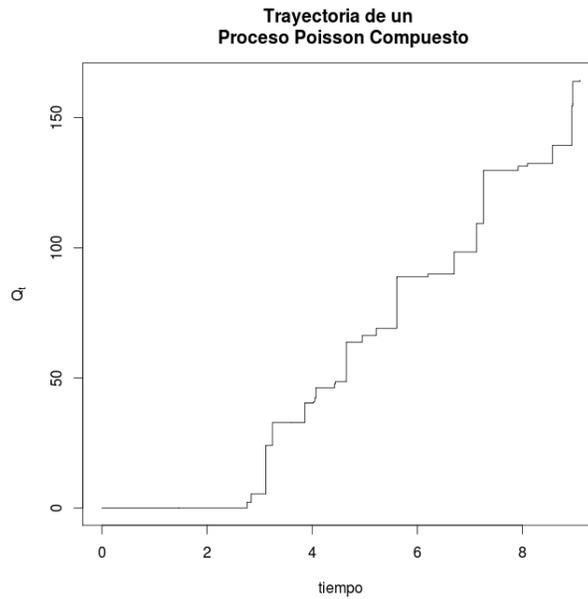


Figura 2.3.4: Proceso Poisson compuesto

Definición 2.16. (Proceso Poisson compuesto compensado)

Sea $\{Q_t\}_{t \geq 0}$ un proceso Poisson compuesto como en la definición (2.15). El

proceso Poisson compuesto compensado está dado por:

$$Z_t = Q_t - \beta\lambda t$$

Proposición 2.5. Si $\{Z_t\}_{t \geq 0}$ es un proceso Poisson compuesto compensado como en la definición (2.16) entonces $\{Z_t\}_{t \geq 0}$ es una martingala.

Demostración. Utilizando las propiedades del proceso Poisson compuesto, obtenemos:

$$\begin{aligned} E[Q_t - \beta\lambda t | \mathcal{F}_s] &= E[Q_t - Q_s | \mathcal{F}_s] + Q_s - \beta\lambda t \\ &= \beta\lambda(t - s) + Q_s - \beta\lambda t \\ &= Q_s - \beta\lambda s \end{aligned}$$

□

La figura (2.3.5) muestra la trayectoria de un proceso Poisson compuesto compensado. La trayectoria es similar a la de un proceso Poisson compensado, excepto por el tamaño de los saltos.

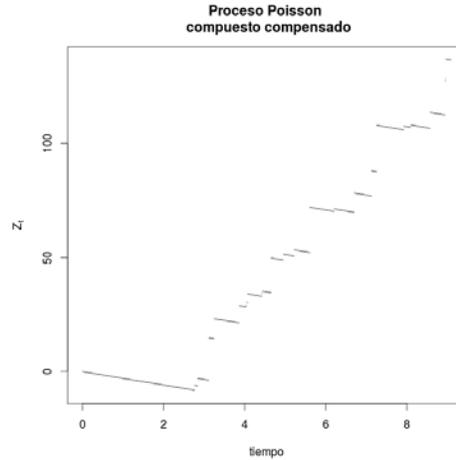


Figura 2.3.5: Proceso Poisson compuesto compensado

Capítulo 3

Integración estocástica

En este capítulo se desarrollan las herramientas principales del cálculo estocástico para procesos continuos y discontinuos (en el tiempo). Se inicia con un ejemplo para señalar las deficiencias del cálculo clásico cuando se trabaja con funciones que involucran el movimiento browniano.

Se introducen los conceptos de variación cuadrada y covariación, conceptos que nos permitirán desarrollar una derivación de la fórmula de Itô, esta fórmula será nuestra principal herramienta durante el desarrollo de este trabajo.

Después, se define la integral estocástica con respecto a un movimiento browniano y de manera general con respecto a un proceso de Itô.

Se finaliza con el desarrollo del cálculo estocástico para procesos que presentan discontinuidades en sus trayectorias.

3.1. ¿Por qué el cálculo clásico no es suficiente?

El siguiente ejemplo, es tomado de [1].

Supongamos que tenemos una función f , de un movimiento browniano $\{W_t\}_{t \geq 0}$. Digamos que f está dada por $f(W_t) = W_t^2$, de acuerdo al cálculo clásico, el diferencial de esta función es: $d(W_t^2) = 2W_t dW_t$ o utilizando integrales

esto es: $W_t^2 = 2 \int_0^t W_s dW_s$. Debido a que el movimiento browniano no es diferenciable con respecto al parámetro del tiempo, necesitamos definir la expresión $2 \int_0^t W_s dW_s$. Siendo un poco ingenuos, podríamos definirla de la siguiente manera:

Consideremos para alguna $n \in \mathbb{N}$, una partición $\left\{0, \frac{t}{n}, \frac{2t}{n}, \dots, t\right\}$ del intervalo $[0, t]$, y aproximemos la integral de la siguiente manera:

$$W_t^2 = 2 \int_0^t W_s dW_s \approx 2 \sum_{i=0}^{n-1} W\left(\frac{it}{n}\right) \left[W\left(\frac{(i+1)t}{n}\right) - W\left(\frac{it}{n}\right) \right].$$

Además recordemos que para el movimiento browniano $E[W_t^2] = \text{Var}[W_t] = t$. Por otra parte utilizando la aproximación anterior y la independencia de los incrementos de W obtenemos:

$$E\left[\sum_{i=0}^{n-1} W\left(\frac{it}{n}\right) \left[W\left(\frac{(i+1)t}{n}\right) - W\left(\frac{it}{n}\right) \right]\right] = \sum_{i=0}^{n-1} E\left[W\left(\frac{it}{n}\right)\right] E\left[W\left(\frac{(i+1)t}{n}\right) - W\left(\frac{it}{n}\right)\right] = 0.$$

Por lo tanto $W_t^2 \neq 2 \int_0^t W_s dW_s$, ya que al menos se esperaría que sus momentos fueran los mismos.

Para darnos una idea de que es lo que ha fallado utilicemos la serie de Taylor de $f(W_t)$, para f lo suficientemente “suave”.

$$df(W_t) = f'(W_t)dW_t + \frac{1}{2}f''(W_t)(dW_t)^2 + \frac{1}{3!}f'''(W_t)(dW_t)^3 + \dots$$

Si aproximamos la integral de $(dW_t)^2$ (sobre el intervalo $[0, t]$ utilizando una partición $\left\{0, \frac{t}{n}, \dots, t\right\}$) de la siguiente manera

$$\int_0^t (dW_t)^2 \approx \sum_{i=1}^n \left(W\left(\frac{it}{n}\right) - W\left(\frac{(i-1)t}{n}\right) \right)^2. \quad (3.1.1)$$

y definimos $Z_{n,i} = \frac{W\left(\frac{it}{n}\right) - W\left(\frac{(i-1)t}{n}\right)}{\sqrt{\frac{t}{n}}}$, entonces para toda $n \in \mathbb{N}$, $Z_{n,i} \sim N(0,1)$ para $i = 1, 2, \dots$

Con las $Z_{n,i}$ podemos escribir (3.1.1) como

$$\int_0^t (dW_t)^2 \approx t \sum_{i=1}^n \frac{Z_{n,i}^2}{n}.$$

Por lo tanto, por la ley de los grandes números (ya que $E[Z_{n,i}^2] = \text{Var}[Z_{n,i}] = 1$) tenemos que $\int_0^t (dW_t)^2 = t$ cuando $n \rightarrow \infty$. Esto último nos indica que, cuando trabajamos con funciones del movimiento browniano, el término de exponente 2 en el desarrollo de la fórmula de Taylor ya no puede ser ignorado. Dicho término está relacionado con el concepto de variación cuadrada, que es el tema de la siguiente sección. Se demostrará también que los términos de orden mayor o igual a 3 en la expansión de Taylor, todavía pueden ser descartados.

3.2. Variación Cuadrada

En esta sección se introducen los conceptos de variación cuadrada y covariación, además se derivan las reglas para trabajar con expresiones de la forma $dt dW_t$, $dt dt$, $dW_t dW_t$.

Definición 3.1. (Variación Cuadrada).

Sea $\Pi = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ una partición del intervalo $[0, T]$, $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$. Denotemos la norma de Π como $\|\Pi\| = \max_{j=0,1,\dots,n-1} (t_{j+1} - t_j)$. La variación cuadrada de una función f hasta el tiempo T se define como:

$$\langle f, f \rangle_T := \lim_{\|\Pi\| \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{n-1} [f(t_{j+1}) - f(t_j)]^2 \quad (3.2.1)$$

Observación 3.1. Los resultados que se presentarán a continuación, son independientes de la partición, ver [22].

Proposición 3.1. Si f es una función con derivada continua, entonces para toda $T > 0$, $\langle f, f \rangle_T = 0$.

Demostración. Sea Π una partición de $[0, T]$. Utilizando el teorema del valor medio tenemos

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n-1} [f(t_{j+1}) - f(t_j)]^2 &= \sum_{j=0}^{n-1} |f'(t_j^*)|(t_{j+1} - t_j)^2 \quad \text{con } t_j^* \in [t_j, t_{j+1}] \\ &\leq \|\Pi\| \sum_{j=0}^{n-1} |f'(t_j^*)|(t_{j+1} - t_j) \end{aligned}$$

tomando el límite cuando $\|\Pi\| \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \langle f, f \rangle_T &\leq \lim_{\|\Pi\| \rightarrow 0} \|\Pi\| \lim_{\|\Pi\| \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{n-1} |f'(t_j^*)|(t_{j+1} - t_j) \\ &= \lim_{\|\Pi\| \rightarrow 0} \|\Pi\| \int_0^T |f'(t)| dt \\ &= 0 \end{aligned}$$

en donde la última igualdad se debe a que $\int_0^T |f'(t)| dt < \infty$ por ser $f'(t)$ continua. \square

Teorema 3.1. (*Variación cuadrada del movimiento browniano*)

Sea $W = \{W_t\}_{t \geq 0}$, un movimiento browniano y sea $T > 0$, entonces $\langle W, W \rangle_T = T$ (casi seguramente).

Demostración. Sea Π una partición de $[0, T]$ y definamos

$$Q_{\Pi} := \sum_{j=0}^{n-1} (W_{t_{j+1}} - W_{t_j})^2.$$

Se demostrará que $E[Q_{\Pi}] = T$ y $\lim_{|\Pi| \rightarrow 0} \text{Var}[Q_{\Pi}] = 0$, es decir, se demuestra convergencia en media cuadrada (ver [21] para entender los detalles técnicos de la convergencia en media cuadrada).

Como W es un movimiento browniano $E[W_{t_{j+1}} - W_{t_j}] = 0$ y por lo tanto $E[(W_{t_{j+1}} - W_{t_j})^2] = \text{Var}[W_{t_{j+1}} - W_{t_j}] = t_{j+1} - t_j$, lo que implica

$$\begin{aligned} E[Q_{\Pi}] &= \sum_{j=0}^{n-1} E[(W_{t_{j+1}} - W_{t_j})^2] \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} t_{j+1} - t_j \\ &= T. \end{aligned}$$

Por otro lado, utilizando el hecho de que $W_{t_{j+1}} - W_{t_j} \sim N(0, t_{j+1} - t_j)$, es posible demostrar que $\text{Var}[(W_{t_{j+1}} - W_{t_j})^2] = 2(t_{j+1} - t_j)^2$ y por la independencia de los incrementos del movimiento browniano, llegamos a

$$\begin{aligned} \text{Var}(Q_{\Pi}) &= \sum_{j=0}^{n-1} \text{Var}[(W_{t_{j+1}} - W_{t_j})^2] \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} 2(t_{j+1} - t_j)^2 \\ &\leq 2|\Pi| \sum_{j=0}^{n-1} (t_{j+1} - t_j) \\ &= 2|\Pi|T \\ &\rightarrow 0 \text{ cuando } |\Pi| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

□

El teorema (3.1) nos dice que el movimiento browniano acumula una variación cuadrada a una tasa de uno por unidad de tiempo. En consecuencia, si $0 \leq T_1 < T_2$, entonces la variación cuadrada acumulada en el intervalo $[T_1, T_2]$ es $\langle W, W \rangle_{[T_1, T_2]} = T_2 - T_1$. Para referirnos al hecho de que $\langle W, W \rangle_T = T$, utilizaremos la siguiente notación diferencial (esta es la primera de las reglas para trabajar con expresiones que involucran diferenciales, posteriormente se verá su gran utilidad).

$$dW_t dW_t := d \langle W, W \rangle_t = dt.$$

Proposición 3.2. Sea $\Pi = \{t_0 = 0, t_1, \dots, t_n = T\}$, $T > 0$, una partición del intervalo $[0, T]$ y sea $W = \{W_t\}_{t \geq 0}$ un movimiento browniano, entonces

$$\sum_{j=0}^{n-1} (W_{t_{j+1}} - W_{t_j})^p \xrightarrow{\|\Pi\| \rightarrow 0} 0 \quad \text{para } p \geq 3, p \in \mathbb{N}$$

Demostración. Se ilustrará el caso en que $p = 3$, los demás casos se tratan de manera similar

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n-1} [W_{t_{j+1}} - W_{t_j}]^3 &\leq \max_{0 \leq k \leq n-1} |W_{t_{k+1}} - W_{t_k}| \sum_{j=0}^{n-1} (W_{t_{j+1}} - W_{t_j})^2 \\ &\rightarrow 0T \text{ cuando } \|\Pi\| \rightarrow 0. \end{aligned}$$

en donde la última expresión se deriva de la continuidad de W y del teorema (3.1). \square

Observación 3.2. La proposición (3.2), en términos de diferenciales puede ser escrita como $(dW_t)^p = 0$ para $p \geq 3$, $p \in \mathbb{N}$

Además de calcular la variación cuadrada de una función, podemos definir la covariación entre dos funciones (procesos) de la siguiente manera.

Definición 3.2. (Covariación)

Sea $\Pi = \{t_0 = 0, t_1, \dots, t_n = T\}$, $T > 0$, una partición del intervalo $[0, T]$ y sean f, g dos funciones (procesos). La covariación entre f y g hasta el tiempo T se define como

$$\langle f, g \rangle_T := \lim_{\|\Pi\| \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{n-1} [f(t_{j+1}) - f(t_j)] [g(t_{j+1}) - g(t_j)].$$

Proposición 3.3. Sea Π una partición del intervalo $[0, T]$ y sea $W = \{W_t\}_{t \geq 0}$ un movimiento browniano, entonces

$$\langle W, t \rangle_T = 0 \quad (3.2.2)$$

$$\langle t, t \rangle_T = 0 \quad (3.2.3)$$

Demostración. Para demostrar (3.2.2) realizaremos un procedimiento semejante a la demostración del teorema (3.1).

Denotemos por $Q_\Pi := \sum_{j=0}^{n-1} (W_{t_{j+1}} - W_{t_j})(t_{j+1} - t_j)$, como $t_{j+1} - t_j$ es determinista $E[(W_{t_{j+1}} - W_{t_j})(t_{j+1} - t_j)] = 0$ y tenemos así $E[Q_\Pi] = 0$. Por otra parte tenemos que

$$\begin{aligned} \text{Var} [(W_{t_{j+1}} - W_{t_j})(t_{j+1} - t_j)] &= (t_{j+1} - t_j)^2 \text{Var} [(W_{t_{j+1}} - W_{t_j})] \\ &= (t_{j+1} - t_j)^3 \\ &\leq \|\Pi\|^2 (t_{j+1} - t_j) \end{aligned}$$

ahora, utilizando la independencia entre los incrementos de W

$$\begin{aligned}
\text{Var}[Q_{\Pi}] &= \sum_{j=0}^{n-1} \text{Var} [(W_{t_{j+1}} - W_{t_j})(t_{j+1} - t_j)] \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} (t_{j+1} - t_j)^3 \\
&\leq \|\Pi\|^2 \sum_{j=0}^{n-1} (t_{j+1} - t_j) \\
&= \|\Pi\|^2 T \\
&\rightarrow 0 \text{ cuando } \|\Pi\| \rightarrow 0.
\end{aligned}$$

Para (3.2.3) tenemos

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{n-1} (t_{j+1} - t_j)^2 &\leq \|\Pi\| \sum_{j=0}^{n-1} (t_{j+1} - t_j) \\
&= \|\Pi\| T \\
&\rightarrow 0 \text{ cuando } \|\Pi\| \rightarrow 0.
\end{aligned}$$

□

Observación 3.3. La proposición (3.3), puede ser escrita en forma diferencial como $dW_t dt = 0$ para (3.2.2) y $dt dt = 0$ para (3.2.3).

Podemos resumir los resultados del teorema (3.1) y la proposición (3.3) en la siguiente tabla:

•	dt	dW_t
dt	0	0
dW_t	0	dt

Cuadro 3.1: Reglas para trabajar con diferenciales.

Las reglas del Cuadro(3.1) nos ayudarán a utilizar la fórmula de Itô, para la cual necesitamos definir la integral estocástica, este es el objetivo de la siguiente sección.

3.3. Integral estocástica con respecto a procesos continuos

En esta sección se dará sentido a la expresión

$$\int_0^T f(t)dW_t.$$

en donde $W = \{W_t\}_{t \geq 0}$ es un \mathbb{F} – movimiento browniano. Impondremos la condición de que el integrando f sea \mathbb{F} – adaptado, esto se debe a que en un contexto financiero, $f(t)$ será la posición que tomamos en un activo al tiempo t y claramente dicha posición sólo depende de la información disponible hasta ese momento.

Impondremos además, la hipótesis de que f es independiente de los incrementos del movimiento browniano.

3.3.1. Integral de Itô para procesos (funciones) simples

Definición 3.3. (Función simple)

Sea $\Pi = \{0 = t_0, t_1, \dots, t_n = T\}$ una partición de $[0, T]$ y supongamos que f está dada por

$$f(\omega, t) = \sum_{i=0}^{n-1} a_{t_i}(\omega) \mathbb{I}(t_i \leq t < t_{i+1}) \quad (3.3.1)$$

con a_{t_i} , \mathcal{F}_{t_i} – medible, $a_{t_0} = a_0$ independiente de $\omega \in \Omega$ (determinista) y $E[a_{t_i}^2] < \infty$. Llamamos a este tipo de funciones, **funciones simples** y definimos su integral con respecto a un movimiento browniano W , como:

$$I(f)_t := \sum_{j=0}^{n-1} f(t_j) [W_{t_{j+1}} - W_{t_j}] + f(t_k) [W_t - W_{t_k}] \text{ para } t_k \leq t \leq t_{k+1}. \quad (3.3.2)$$

Utilizaremos la siguiente notación $I(f)_t := \int_0^t f(u) dW_u$.

Proposición 3.4. *Sea f un proceso simple de la forma (3.3.1), entonces la integral $I(f)_t$ definida en (3.3.2) es una martingala.*

Demostración. Sean $0 \leq s \leq t \leq T$ números dados y sin pérdida de generalidad supongamos que $s \in [t_l, t_{l+1})$ y $t \in [t_k, t_{k+1})$, con $t_{l+1} < t_k$, queremos demostrar que $E[I(f)_t | \mathcal{F}_s] = I(f)_s$.

De la definición de integral estocástica para funciones simples observamos que

$$\begin{aligned} I(f)_t &= \sum_{j=0}^{l-1} f(t_j) [W_{t_{j+1}} - W_{t_j}] + f(t_l) [W_{t_{l+1}} - W_{t_l}] \\ &\quad + \sum_{j=l+1}^{k-1} f(t_j) [W_{t_{j+1}} - W_{t_j}] + f(t_k) [W_t - W_{t_k}] \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

Ahora tomamos la esperanza condicional dado \mathcal{F}_s en cada uno de los cuatro términos de (3.3.3). Para el primer término, utilizamos la \mathcal{F}_s –medibilidad de cada miembro de la suma y que $t_l < s$ obteniendo:

$$E \left[\sum_{j=0}^{l-1} f(t_j) [W_{t_{j+1}} - W_{t_j}] | \mathcal{F}_s \right] = \sum_{j=0}^{l-1} f(t_j) [W_{t_{j+1}} - W_{t_j}].$$

Para el segundo término utilizamos la propiedad de martingala de W , que f es una función \mathbb{F} –adaptada y que $t_l \leq s$

$$\begin{aligned} E [f(t_l)(W_{t_{l+1}} - W_{t_l})|\mathcal{F}_s] &= f(t_l) [E[W_{t_{l+1}}|\mathcal{F}_s] - W_{t_l}] \\ &= f(t_l)(W_s - W_{t_l}). \end{aligned}$$

Para el tercer término, se analiza primero la forma de uno de los sumandos $f(t_j) [W_{t_{j+1}} - W_{t_j}]$, $t_j \geq t_{l+1} > s$. Utilizando condicionamiento iterado (ver propiedad 4 del Teorema (2.2)) y nuevamente la propiedad de martingala de W tenemos que :

$$\begin{aligned} E [f(t_j)[W_{t_{j+1}} - W_{t_j}]|\mathcal{F}_s] &= E [E[f(t_j)(W_{t_{j+1}} - W_{t_j})|\mathcal{F}_{t_j}]|\mathcal{F}_s] \\ &= E [f(t_j)(E[W_{t_{j+1}}|\mathcal{F}_{t_j}] - W_{t_j})|\mathcal{F}_s] \\ &= E [f(t_j)(W_{t_j} - W_{t_j})|\mathcal{F}_s] \\ &= 0. \end{aligned}$$

El cuarto término es tratado de forma similar al tercero:

$$\begin{aligned} E [f(t_k)(W_t - W_{t_k})|\mathcal{F}_s] &= E [E[f(t_k)(W_t - W_{t_k})|\mathcal{F}_{t_k}]|\mathcal{F}_s] \\ &= E [f(t_k)(E[W_t|\mathcal{F}_{t_k}] - W_{t_k})|\mathcal{F}_s] \\ &= E [f(t_k)(W_{t_k} - W_{t_k})|\mathcal{F}_s] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$E [I(f)_t|\mathcal{F}_s] = \sum_{j=0}^{l-1} f(t_j)(W_{t_{j+1}} - W_{t_j}) + f(t_l)(W_s - W_{t_l}) = I(f)_s.$$

□

Teorema 3.2. (*Isometría de Itô*) .

Sea f una función simple como en la definición (3.3), entonces se tiene que:

$$E [I(f)_t^2] = E \left[\int_0^t f^2(u) du \right]. \quad (3.3.4)$$

Demostración. Definamos $D_j := W_{t_{j+1}} - W_{t_j}$, para $j = 0, \dots, k-1$ y $D_k := W_t - W_{t_k}$, con esta notación tenemos $I(f)_t = \sum_{j=0}^k f(t_j) D_j$ y $I^2(f)_t = \sum_{j=0}^k f^2(t_j) D_j^2 + 2 \sum_{0 \leq i < j \leq k} f(t_i) f(t_j) D_i D_j$. Observemos que $f(t_i) f(t_j) D_i$, con $i < j$, es \mathcal{F}_{t_j} -medible y D_j es independiente de \mathcal{F}_{t_j} , por lo tanto

$$\begin{aligned} E[f(t_i) f(t_j) D_i D_j] &= E [E[f(t_i) f(t_j) D_i D_j | \mathcal{F}_{t_j}]] \\ &= E [f(t_i) f(t_j) D_i E[D_j]] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ahora consideremos el término $f^2(t_j) D_j^2$, utilizando la independencia entre D_j^2 y \mathcal{F}_{t_j} se tiene que

$$\begin{aligned} E[f^2(t_j) D_j^2] &= E [E[f^2(t_j) D_j^2 | \mathcal{F}_{t_j}]] \\ &= E [f^2(t_j) E[D_j^2 | \mathcal{F}_{t_j}]] \text{ Ya que } f \text{ es } \mathbb{F}\text{-adaptado} \\ &= E [f^2(t_j)] E[D_j^2]. \end{aligned}$$

Así llegamos a que

$$\begin{aligned} E[I^2(f)_t] &= \sum_{j=0}^k E [f^2(t_j) D_j^2] \\ &= \sum_{j=0}^k E[f^2(t_j)] E[D_j^2] \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} E[f^2(t_j)] (t_{j+1} - t_j) + E[f^2(t_k)] (t - t_k). \end{aligned}$$

y como $f(t_j)$ es una función simple, entonces es constante en el intervalo

$[t_j, t_{j+1})$, de esta manera

$$f^2(t_j)(t_{j+1} - t_j) = \int_{t_j}^{t_{j+1}} f^2(u) du$$

$$f^2(t_k)(t - t_k) = \int_{t_k}^t f^2(u) du$$

en consecuencia

$$\begin{aligned} E[I^2(f)_t] &= E \left[\sum_{j=0}^{k-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} f^2(u) du + \int_{t_k}^t f^2(u) du \right] \\ &= E \left[\int_0^t f^2(u) du \right]. \end{aligned}$$

□

Observación 3.4. La propiedad de martingala de $I(f)_t$, implica $E[I(f)_t] = E[I(f)_0] = 0$, por lo tanto utilizando la isometría de Itô obtenemos

$$\text{Var}[I(f)_t] = E \left[\int_0^t f^2(u) du \right].$$

Finalmente, calcularemos la variación cuadrada de $I(f)$ hasta el tiempo t .

Teorema 3.3. (*Variación cuadrada de $I(f)$*)

Sea f una función simple como en la definición (3.3), la variación cuadrada acumulada hasta el tiempo t por la integral de Itô $I(f)$ es:

$$\langle I(f), I(f) \rangle_t = \int_0^t f^2(u) du.$$

Demostración. Para empezar, calcularemos la variación cuadrada sobre uno de los subintervalos $[t_j, t_{j+1}]$ en el cual f es constante. Para esto, elijamos una partición $\Pi_s = \{s_0, s_1, \dots, s_m\}$ de $[t_j, t_{j+1}]$ y consideremos la variación

cuadrada para esta partición

$$\begin{aligned} Q_{\Pi_s} &:= \sum_{i=0}^{m-1} [(I(f)_{s_{i+1}} - I(f)_{s_i})^2] = \sum_{i=0}^{m-1} [f(t_j)(W_{s_{i+1}} - W_{s_i})]^2 \\ &= f^2(t_j) \sum_{i=0}^{m-1} [W_{s_{i+1}} - W_{s_i}]^2 \end{aligned}$$

en donde la última igualdad resulta del hecho de que f es constante sobre $[t_j, t_{j+1}]$.

Cuando $\|\Pi_s\| \rightarrow 0$, el término $\sum_{i=0}^{m-1} [W_{s_{i+1}} - W_{s_i}]^2$ converge a la variación cuadrada acumulada por el movimiento browniano entre los tiempos t_j y t_{j+1} , la cual es $t_{j+1} - t_j$, por lo tanto

$$\begin{aligned} \lim_{\|\Pi\| \rightarrow 0} f^2(t_j) \sum_{i=0}^{m-1} [W_{s_{i+1}} - W_{s_i}]^2 &= f^2(t_j)(t_{j+1} - t_j) \\ &= \int_{t_j}^{t_{j+1}} f^2(u) du. \end{aligned}$$

en donde se utilizó nuevamente el hecho de que $f(u)$ es constante para $t_j \leq u \leq t_{j+1}$. Utilizando los mismos argumentos, la variación cuadrada acumulada entre los tiempos t_k y t es $\int_{t_k}^t f^2(u) du$. Sumando las partes, obtenemos

$$\langle I(f), I(f) \rangle_t = \int_0^t f^2(u) du.$$

□

Observación 3.5. Utilizando notación diferencial, podemos reescribir el Teorema (3.3) de la siguiente manera:

como

$$dI(f)_t = d \int_0^t f(u) dW_u = f(t) dW_t.$$

entonces

$$d \langle I(f), I(f) \rangle_t := dI(f)_t dI(f)_t = f^2(t) dW_t dW_t$$

y por el Cuadro (3.1) obtenemos que

$$d \langle I(f), I(f) \rangle_t = f^2(t) dt$$

lo que implica

$$\langle I(f), I(f) \rangle_t = \int_0^t f^2(u) du.$$

3.3.2. Integral de Itô para funciones generales

Ahora se definirá la integral $I(f)_t = \int_0^t f(u) dW_u$ para integrandos f , no necesariamente simples, dentro de un horizonte de tiempo finito que será representado por el intervalo $[0, T]$, con $T > 0$. Seguiremos suponiendo que f es adaptado pero ahora requeriremos que

$$E \left[\int_0^T f^2(u) du \right] < \infty. \quad (3.3.5)$$

Para definir $\int_0^T f(t) dW_t$, aproximamos a f utilizando una sucesión $\{f_n\}_{n \geq 0}$ de procesos simples. La aproximación se realiza eligiendo una partición Π de $[0, T]$ y haciendo que el proceso f_n sea igual a $f(t_j)$ para toda $t_j \in \Pi$, manteniéndose constante en el subintervalo $[t_j, t_{j+1})$. Cabe resaltar que f se evalúa en el extremo izquierdo de cada intervalo $[t_j, t_{j+1})$, a diferencia de una integral clásica en la cual el integrando es evaluado en algún $t^* \in [t_j, t_{j+1}]$. Cuando $|\Pi| \rightarrow 0$ esta aproximación se vuelve cada vez mejor (Ver figura (3.3.1)).

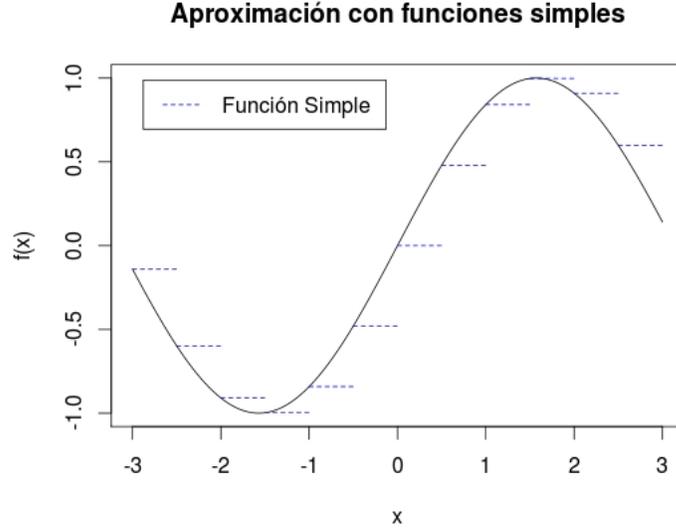


Figura 3.3.1: Aproximación de una función a través de funciones simples.

En general, es posible definir una sucesión $\{f_n\}$ de funciones simples tal que, cuando $n \rightarrow \infty$, las funciones f_n convergen a f en el sentido de media cuadrada (Ver [23])

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \left[\int_0^T |f_n(t) - f(t)|^2 dt \right] = 0. \quad (3.3.6)$$

Definición 3.4. (Integral de Itô)

Sea f una función que cumple la condición (3.3.5) y sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones simples para las cuales (3.3.6) se cumple. Definimos la integral de Itô, $\int_0^t f(u) dW_u$, como

$$\int_0^t f(u) dW_u := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t f_n(u) dW_u \quad \text{para } 0 \leq t \leq T.$$

El siguiente teorema enuncia algunas propiedades básicas de esta integral.

Teorema 3.4. (*Propiedades de la integral de Itô*).

Sea T una constante positiva y $f(t)$, $0 \leq t \leq T$, una función \mathbb{F} -adaptada que satisface la condición (3.3.5). Entonces $I(f)_t = \int_0^t f(u)dW_u$ tiene las siguientes propiedades:

1. (Continuidad). $I(f)_t$ es una función continua del límite superior de integración t .
2. (Adaptatividad). $I(f)_t$ es \mathcal{F}_t -medible para toda t .
3. (Linealidad). Si $I(f)_t = \int_0^t f(u)dW_u$ e $I(g)_t = \int_0^t g(u)dW_u$, entonces

$$\begin{aligned} I(k_1f \pm k_2g)_t &= \int_0^t (k_1f \pm k_2g)(u)dW_u \\ &= k_1 \int_0^t f(u)dW_u \pm k_2 \int_0^t g(u)dW_u \\ &= k_1I(f)_t \pm k_2I(g)_t. \end{aligned}$$

con k_1, k_2 constantes.

4. (Martingala). $I(f)_t$ es una \mathbb{F} -martingala.
5. (Isometría de Itô). $E[I^2(f)_t] = E[\int_0^t f^2(u)du]$.
6. $\langle I(f), I(f) \rangle_t = \int_0^t f^2(u)du$.

Demostración. La demostración se basa en argumentos de aproximación utilizando funciones simples. Ver [23, 17]. \square

Observación 3.6. La condición (3.3.5) no es necesaria para poder definir $I(f)_t$, basta únicamente que el integrando f cumpla

$$P \left[\int_0^T f^2(u)du < \infty \right] = 1. \quad (3.3.7)$$

Observación 3.7. Si (3.3.5) no se cumple pero (3.3.7) si lo hace, entonces $I(f)_t$ ya no es una martingala, es un proceso llamado martingala local. Además, en este caso, la isometría de Itô no es válida. Ver [3, 22, 17, 13].

Observación 3.8. Si no se indica lo contrario, siempre supondremos que (3.3.5) es cierta.

3.4. Fórmula de Itô

3.4.1. Fórmula de Itô para el movimiento browniano

La fórmula de Itô es el análogo a la regla de la cadena en un contexto estocástico. Si W_t fuera diferenciable con respecto a t , entonces tendríamos

$$\frac{df(W_t)}{dt} = f'(W_t)dW_t.$$

desafortunadamente este no es el caso y debido a que el movimiento browniano tiene variación cuadrada distinta de cero, se tiene que agregar un término extra a la expansión de Taylor, lo que nos lleva a

$$df(W_t) = f'(W_t)dW_t + \frac{1}{2}f''(W_t)dt.$$

esta es la fórmula de Itô para funciones del movimiento browniano expresada en forma diferencial. Matemáticamente la expresión que tiene sentido es

$$f(W_t) = f(0) + \int_0^t f'(W_u)dW_u + \frac{1}{2} \int_0^t f''(W_u)du.$$

Teorema 3.5. (*Fórmula de Itô para funciones del movimiento Browniano*).

Sea $f(t, x)$ una función con derivadas parciales f_t, f_x, f_{xx} continuas y sea $W = \{W_t\}_{t \geq 0}$ un movimiento browniano. Entonces para toda $T \geq 0$

$$f(T, W_T) = f(0, W_0) + \int_0^T f_t(t, W_t)dt + \int_0^T f_x(t, W_t)dW_t + \frac{1}{2} \int_0^T f_{xx}(t, W_t)dt \quad (3.4.1)$$

Demostración. Sea $\Pi = \{0 = t_0, t_1, \dots, t_n = T\}$ una partición del intervalo $[0, T]$. Utilizando la expansión de Taylor tenemos:

$$\begin{aligned}
f(t_{j+1}, W_{t_{j+1}}) - f(t_j, W_{t_j}) &= f_t(t_j, W_{t_j})(t_{j+1} - t_j) + f_x(t_j, W_{t_j})(W_{t_{j+1}} - W_{t_j}) \\
&\quad + \frac{1}{2}f_{xx}(t_j, W_{t_j})(W_{t_{j+1}} - W_{t_j})^2 \\
&\quad + f_{tx}(t_j, W_{t_j})(t_{j+1} - t_j)(W_{t_{j+1}} - W_{t_j}) \\
&\quad + \frac{1}{2}f_{tt}(t_j, W_{t_j})(t_{j+1} - t_j)^2 + \text{términos de orden mayor}
\end{aligned}$$

sumando desde $j = 0$ hasta $j = n - 1$

$$\begin{aligned}
f(T, W_T) - f(0, W_0) &= \sum_{j=0}^{n-1} f_t(t_j, W_{t_j})(t_{j+1} - t_j) + \sum_{j=0}^{n-1} f_x(t_j, W_{t_j})(W_{t_{j+1}} - W_{t_j}) \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n-1} f_{xx}(t_j, W_{t_j})(W_{t_{j+1}} - W_{t_j})^2 \\
&\quad + \sum_{j=0}^{n-1} f_{tx}(t_j, W_{t_j})(t_{j+1} - t_j)(W_{t_{j+1}} - W_{t_j}) \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n-1} f_{tt}(t_j, W_{t_j})(t_{j+1} - t_j)^2 + \text{términos de orden mayor}
\end{aligned}$$

Observemos que cuando $\|\Pi\| \rightarrow 0$, el primer término del lado derecho de la expresión anterior tiende a $\int_0^T f_t(t, W_t)dt$, el segundo a $\int_0^T f_x(t, W_t)dW_t$ y utilizando el teorema (3.1), el tercer término converge a $\frac{1}{2} \int_0^T f_{xx}(t, W_t)dt$. Para el cuarto término tenemos:

$$\begin{aligned}
& \lim_{\|\Pi\| \rightarrow 0} \left| \sum_{j=0}^{n-1} f_{tx}(t_j, W_{t_j})(t_{j+1} - t_j)(W_{t_{j+1}} - W_{t_j}) \right| \\
& \leq \lim_{\|\Pi\| \rightarrow 0} \max_{0 \leq k \leq n-1} |W_{t_{k+1}} - W_{t_k}| \lim_{\|\Pi\| \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{n-1} |f_{tx}(t_j, W_{t_j})(t_{j+1} - t_j)| \\
& = 0 \int_0^T |f_{tx}(t, W_t)| dt = 0
\end{aligned}$$

y el quinto término se acota de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
& \lim_{\|\Pi\| \rightarrow 0} \left| \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n-1} f_{tt}(t_j, W_{t_j})(t_{j+1} - t_j)^2 \right| \\
& \leq \frac{1}{2} \lim_{\|\Pi\| \rightarrow 0} \max_{0 \leq k \leq n-1} (t_{k+1} - t_k) \lim_{\|\Pi\| \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{n-1} |f_{tt}(t_j, W_{t_j})(t_{j+1} - t_j)| \\
& = \frac{1}{2} (0) \int_0^T |f_{tt}(t, W_t)| dt = 0.
\end{aligned}$$

los términos de orden mayor se tratan de la misma manera y convergen a cero por la proposición (3.2). \square

3.4.2. Fórmula de Itô para procesos de Itô

Definición 3.5. (Proceso de Itô)

Sea $W = W_t$, $t \geq 0$, un movimiento browniano adaptado a una filtración \mathbb{F} .

Un proceso de Itô es un proceso estocástico de la forma:

$$X_t = X_0 + \int_0^t f(u) dW(u) + \int_0^t g(u) du.$$

en donde:

X_0 es \mathcal{F}_0 -medible.

f y g son procesos adaptados a \mathbb{F} .

$$\mathbb{E} \left[\int_0^t |f(u)|^2 du \right] < \infty \quad \text{Para toda } t \geq 0.$$

$$\mathbb{P} \left[\int_0^t |g(u)| du < \infty \right] = 1 \quad \text{Para toda } t \geq 0.$$

Proposición 3.5. *La variación cuadrada de un proceso de Itô*

$$X_t = X_0 + \int_0^t f(u) dW(u) + \int_0^t g(u) du$$

es

$$\langle X, X \rangle_t = \int_0^t f^2(u) du.$$

Demostración. Se simplificará la notación escribiendo $I(t) = \int_0^t f(u) dW(u)$, $R(t) = \int_0^t g(u) du$.

Sea $\Pi = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ una partición del intervalo $[0, T]$, observemos que:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n-1} [X_{t_{j+1}} - X_{t_j}]^2 &= \sum_{j=0}^{n-1} [I_{t_{j+1}} - I_{t_j}]^2 + \sum_{j=0}^{n-1} [R_{t_{j+1}} - R_{t_j}]^2 \\ &\quad + 2 \sum_{j=0}^{n-1} [I_{t_{j+1}} - I_{t_j}] [R_{t_{j+1}} - R_{t_j}] \end{aligned}$$

Cuando $|\Pi| \rightarrow 0$, el primer término del lado derecho converge a la variación cuadrada de I , $\langle I, I \rangle_t = \int_0^t f^2(u) du$. El segundo término, está acotado superiormente por:

$$\begin{aligned}
& \max_{0 \leq k \leq n-1} |R_{t_{k+1}} - R_{t_k}| \sum_{j=0}^{n-1} |R_{t_{j+1}} - R_{t_j}| \\
= & \max_{0 \leq k \leq n-1} |R_{t_{k+1}} - R_{t_k}| \sum_{j=0}^{n-1} \left| \int_{t_j}^{t_{j+1}} g(u) du \right| \\
\leq & \max_{0 \leq k \leq n-1} |R_{t_{k+1}} - R_{t_k}| \sum_{j=0}^{n-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} |g(u)| du \\
= & \max_{0 \leq k \leq n-1} |R_{t_{k+1}} - R_{t_k}| \int_0^t |g(u)| du.
\end{aligned}$$

y como $R(t)$ es una función continua, se tiene que $\sum_{j=0}^{n-1} [R_{t_{j+1}} - R_{t_j}]^2 \rightarrow 0$, cuando $\|\Pi\| \rightarrow 0$. El valor absoluto del tercer término se encuentra acotado superiormente por

$$\begin{aligned}
& 2 \max_{0 \leq k \leq n-1} |I_{t_{k+1}} - I_{t_k}| \sum_{j=0}^{n-1} |R_{t_{j+1}} - R_{t_j}| \\
\leq & 2 \max_{0 \leq k \leq n-1} |I_{t_{k+1}} - I_{t_k}| \int_0^t |g(u)| du
\end{aligned}$$

y cuando $\|\Pi\| \rightarrow 0$, esto tiende a cero.

Concluimos entonces que

$$\langle X, X \rangle_t = \langle I, I \rangle_t = \int_0^t f^2(u) du.$$

□

La proposición anterior puede ser recordada de manera sencilla si utilizamos la notación diferencial, en esta notación un proceso de Itô se expresa como

$$dX_t = f(t)dW_t + g(t)dt$$

utilizando las reglas del Cuadro (3.1) encontramos que

$$\begin{aligned} dX_t dX_t &= f^2(t) dW_t dW_t + 2f(t)g(t) dW_t dt + g^2(t) dt dt \\ &= f^2(t) dt \end{aligned}$$

Esta igualdad nos dice que el proceso X acumula una variación cuadrada a una tasa de $f^2(t)$ por unidad de tiempo y por lo tanto la variación acumulada hasta el tiempo t es $\langle X, X \rangle_t = \int_0^t f^2(u) du$.

Definición 3.6. (Integral con respecto a un proceso de Itô).

Sea $X_t = X_0 + \int_0^t f(u) dW_u + \int_0^t g(u) du$, un proceso de Itô adaptado a alguna filtración \mathbb{F} y sea $h(t)$, $t \geq 0$, un proceso adaptado a esta misma filtración. Supongamos que:

$$E \left[\int_0^t h^2(u) f^2(u) du \right] < \infty \quad \text{para } t \geq 0.$$

$$P \left[\int_0^t |h(u)g(u)| du < \infty \right] = 1 \quad \text{para } t \geq 0.$$

Definimos la integral de h con respecto a X como:

$$\int_0^t h(u) dX_u = \int_0^t h(u) f(u) dW_u + \int_0^t h(u) g(u) du.$$

Teorema 3.6. (Fórmula de Itô para un proceso de Itô)

Sea $X_t = X_0 + \int_0^t f(u) dW_u + \int_0^t g(u) du$, un proceso de Itô y sea $h(t, x)$ una función con derivadas parciales $h_t(t, x)$, $h_x(t, x)$ y $h_{xx}(t, x)$ bien definidas y continuas. Entonces para toda $T \geq 0$ tenemos que:

$$\begin{aligned}
h(T, X_T) &= h(0, X_0) + \int_0^T h_t(t, X_t)dt + \int_0^T h_x(t, X_t)dX_t \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_0^T h_{xx}(t, X_t)d \langle X, X \rangle_t \\
&= h(0, X_0) + \int_0^T h_t(t, X_t)dt + \int_0^T h_x(t, X_t)f(t)dW_t \\
&\quad + \int_0^T h_x(t, X_t)g(t)dt + \frac{1}{2} \int_0^T h_{xx}(t, X_t)f^2(t)dt.
\end{aligned}$$

En notación diferencial esto es:

$$dh(t, X_t) = h_t(t, X_t)dt + h_x(t, X_t)dX_t + \frac{1}{2}h_{xx}(t, X_t)dX_t dX_t.$$

La fórmula de Itô puede extenderse a funciones de varios procesos de Itô, el siguiente teorema proporciona el caso bidimensional de dicha fórmula.

Teorema 3.7. (*Fórmula de Itô en el caso bidimensional*).

Sea $f(t, x, y)$ una función cuyas derivadas parciales $f_t, f_x, f_y, f_{xx}, f_{xy} = f_{yx}, f_{yy}$; están definidas y son continuas. Sean $\{X_t\}$ y $\{Y_t\}$, con $t \geq 0$, dos procesos de Itô respecto al mismo movimiento browniano. Entonces

$$\begin{aligned}
df(t, X_t, Y_t) &= f_t(t, X_t, Y_t)dt + f_x(t, X_t, Y_t)dX_t + f_y(t, X_t, Y_t)dY_t \\
&\quad + \frac{1}{2}f_{xx}(t, X_t, Y_t)dX_t dX_t + f_{xy}(t, X_t, Y_t)dX_t dY_t \\
&\quad + \frac{1}{2}f_{yy}(t, X_t, Y_t)dY_t dY_t.
\end{aligned}$$

Para la demostración ver [6, 13, 19, 21, 23].

El principal uso del Teorema (3.7) es para obtener la regla para el producto de procesos de Itô, esta regla es el análogo estocástico de la derivada del producto de dos funciones.

Corolario 3.1. (*Producto de dos procesos de Itô*)

Sean $\{X_t\}$ y $\{Y_t\}$ dos procesos de Itô. Entonces

$$d(X_t Y_t) = X_t dY_t + Y_t dX_t + dX_t dY_t$$

Demostración. Utilizando el Teorema (3.7) basta tomar $f(t, x, y) = xy$. \square

Observación 3.9. Observemos que a diferencia del caso determinista, tenemos el término $dX_t dY_t$, esto se debe a que la covariación entre X_t y Y_t no necesariamente es nula.

3.5. Integral estocástica para procesos discontinuos

En esta sección definiremos la integral estocástica respecto a un proceso que presenta discontinuidades (saltos) en sus trayectorias. Sólo se estudiarán los procesos con un número finito de saltos en un intervalo, específicamente, los procesos Poisson y Poisson compuesto.

3.5.1. Difusiones con saltos

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F})$ un espacio de probabilidad con una filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ dada (todos los procesos considerados serán adaptados a esta filtración). Supongamos que tenemos un proceso X de la forma:

$$X_t = X_0 + I_t + R_t + J_t \tag{3.5.1}$$

en donde:

- X_0 es una condición inicial determinista.
- $I_t = \int_0^t f(s) dW_s$ es una integral de Itô.
- $R_t = \int_0^t g(s) ds$ es una integral de Lebesgue con respecto a ds .

- J_t es un proceso de saltos, continuo por la derecha y con límites por la izquierda (cádlág), es decir, $\lim_{s \downarrow t} J_s = J_t$ para toda $t \geq 0$. Denotaremos por $J_{t-} := \lim_{s \uparrow t} J_s$ a su límite por la izquierda. Así, si J tiene un salto en el tiempo t , entonces J_t es el valor de J inmediatamente después del salto y J_{t-} su valor justo antes de este. Supondremos que $J_0 = J_{0-} = 0$ y que J tiene solamente un número finito de saltos en el intervalo $(0, T]$, para toda $T > 0$; además, entre la ocurrencia de saltos, J permanece constante.

A un proceso X con las características anteriores lo llamaremos una **difusión con saltos**.

Observemos que un proceso X como en (3.5.1) se conforma de dos componentes, el componente que modela el comportamiento continuo y el que modela el comportamiento discontinuo. Denotaremos por $X_t^c = X_0 + I_t + R_t$ a la parte continua de X y por

$$\begin{aligned}\Delta X_t &= X_t - X_{t-} \\ &= J_t - J_{t-} \\ &= \Delta J_t.\end{aligned}$$

al tamaño del salto que se presentó en el tiempo t .

Definición 3.7. (Integral respecto a una difusión con saltos)

Sea X una difusión con saltos como en (3.5.1) y sea h un proceso tal que las expresiones $\int_0^t h(s)f(s)dW_s$, $\int_0^t h(s)g(s)ds$ están bien definidas para toda $t > 0$. Definimos la integral estocástica de h con respecto a X como:

$$\int_0^t h(s)dX_s = \int_0^t h(s)f(s)dW_s + \int_0^t h(s)g(s)ds + \sum_{0 < s \leq t} h(s)\Delta J_s.$$

Utilizando notación diferencial podemos expresar lo anterior de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
h(t)dX_t &= h(t)f(t)dW_t + h(t)g(t)dt + h(t)dJ_t \\
&= h(t)dI_t + h(t)dR_t + h(t)dJ_t \\
&= h(t)dX_t^c + h(t)dJ_t.
\end{aligned}$$

Una de las propiedades más importantes que deseamos para las integrales estocásticas, es la propiedad de ser una martingala si el proceso con respecto al cual se integra es una martingala también. Recordemos que en el caso de integrales con respecto al movimiento browniano, si el integrando f era tal que $E \left[\int_0^t f^2(s)ds \right] < \infty$, entonces la integral $\int_0^t f(s)dW_s$ era un martingala. En el caso de integrales con respecto a una difusión con saltos, X , es necesario además, que el integrando sea continuo por la izquierda (de manera más general, pedimos que el integrando sea predecible, es decir, \mathcal{F}_{t-} – medible para toda $t > 0$). Un proceso predecible se puede obtener como el límite de procesos continuos por la izquierda, ver [6]).

Teorema 3.8. *Supongamos que X es una difusión con saltos como en (3.5.1) y que además es una martingala.*

Sea h un proceso continuo por la izquierda tal que

$$E \left[\int_0^t f^2(s)h^2(s)ds \right] < \infty \quad \forall t > 0$$

entonces $\int_0^t h(s)dX_s$ es una martingala.

Para la demostración, ver [19]

Observación 3.10. Supondremos que las condiciones del Teorema (3.8) siempre se cumplen.

3.5.2. Variación cuadrada para difusiones con saltos

Con el fin de desarrollar la fórmula de Itô para funciones de una difusión con saltos, desarrollaremos los conceptos de variación cuadrada y covariación de

manera similar a como se hizo en el caso de procesos continuos.

Teorema 3.9. (*Covariación de dos difusiones con saltos*).

Sean $X_{it} = X_{i0} + I_{it} + R_{it} + J_{it}$, $i = 1, 2$ difusiones con saltos como en (3.5.1), entonces

$$\begin{aligned} \langle X_1, X_2 \rangle_T &= \langle X_1^c, X_2^c \rangle_T + \langle J_1, J_2 \rangle_T \\ &= \int_0^T f_1(s)f_2(s)ds + \sum_{0 \leq s \leq T} \Delta J_{1s} \Delta J_{2s}. \end{aligned}$$

en particular la variación cuadrada está dada por:

$$\langle X_i, X_i \rangle_T = \int_0^T f_i^2(s)ds + \sum_{0 \leq s \leq T} (\Delta J_{is})^2 \quad i = 1, 2.$$

Demostración. Sea $\Pi = \{0 = t_0, t_1, \dots, t_n = T\}$ una partición del intervalo $[0, T]$, tenemos entonces:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^{n-1} (X_{1t_{j+1}} - X_{1t_j}) (X_{2t_{j+1}} - X_{2t_j}) = \\ & \sum_{j=0}^{n-1} (X_{1t_{j+1}}^c - X_{1t_j}^c + J_{1t_{j+1}} - J_{1t_j}) \times (X_{2t_{j+1}}^c - X_{2t_j}^c + J_{2t_{j+1}} - J_{2t_j}) \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} (X_{1t_{j+1}}^c - X_{1t_j}^c) (X_{2t_{j+1}}^c - X_{2t_j}^c) + \sum_{j=0}^{n-1} (X_{1t_{j+1}}^c - X_{1t_j}^c) (J_{2t_{j+1}} - J_{2t_j}) \\ & \quad + \sum_{j=0}^{n-1} (J_{1t_{j+1}} - J_{1t_j}) (X_{2t_{j+1}}^c - X_{2t_j}^c) + \sum_{j=0}^{n-1} (J_{1t_{j+1}} - J_{1t_j}) (J_{2t_{j+1}} - J_{2t_j}). \end{aligned}$$

Analicemos esta expresión cuando $\|\Pi\| \rightarrow 0$.

Sabemos que el primer término de esta expresión converge a $\langle X_1^c, X_2^c \rangle_T = \int_0^T f_1(s)f_2(s)ds$ cuando $\|\Pi\| \rightarrow 0$. Para el segundo y tercer término se tiene:

$$\begin{aligned}
 & \left| \sum_{j=0}^{n-1} \left(X_{1t_{j+1}}^c - X_{1t_j}^c \right) (J_{2t_{j+1}} - J_{2t_j}) \right| \\
 & \leq \max_{0 \leq j \leq n-1} |X_{1t_{j+1}}^c - X_{1t_j}^c| \sum_{j=0}^{n-1} |J_{2t_{j+1}} - J_{2t_j}| \\
 & \leq \max_{0 \leq j \leq n-1} |X_{1t_{j+1}}^c - X_{1t_j}^c| \sum_{0 < s \leq T} |\Delta J_{2s}|.
 \end{aligned}$$

Cuando $\|\Pi\| \rightarrow 0$, $\max_{0 \leq j \leq n-1} |X_{1t_{j+1}}^c - X_{1t_j}^c| \rightarrow 0$ por la continuidad de X_1^c , mientras que $\sum_{0 < s \leq T} |\Delta J_{2s}| < \infty$ ya que J_2 tiene un número finito de saltos en el intervalo $[0, T]$, en consecuencia el segundo y tercer término de la suma anterior convergen a cero.

Para el cuarto término observamos que la única forma en que un sumando no sea cero es si J_1 y J_2 saltan de manera simultanea, denotemos con A_i al conjunto de índices para los cuales los intervalos $(t_j, t_{j+1}]$ contienen un salto de J_i $i = 1, 2$. Tenemos así

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=0}^{n-1} (J_{1t_{j+1}} - J_{1t_j}) (J_{2t_{j+1}} - J_{2t_j}) &= \sum_{j \in A_1 \cap A_2} (J_{1t_{j+1}} - J_{1t_j}) (J_{2t_{j+1}} - J_{2t_j}) \\
 &= \sum_{0 < s \leq T} \Delta J_{1s} \Delta J_{2s} \quad \text{cuando } \|\Pi\| \rightarrow 0.
 \end{aligned}$$

Para demostrar el resultado de la variación cuadrada, basta hacer $X_1 = X_2$. \square

Observación 3.11. El teorema anterior se expresa en forma diferencial como:

$$dX_{1t} dX_{2t} = dX_{1t}^c dX_{2t}^c + dJ_{1t} dJ_{2t}.$$

Además, podemos obtener un cuadro similar al Cuadro (3.1) con las reglas

para trabajar con diferenciales en el caso de difusiones con saltos.

•	dt	dW_t	dJ_t
dt	0	0	0
dW_t	0	dt	0
dJ_t	0	0	$dJ_t dJ_t$

Cuadro 3.2: Reglas para trabajar con diferenciales de difusiones con saltos

De acuerdo al Cuadro (3.2), la covariación entre dos procesos es cero, si uno de ellos es continuo y el otro no presenta término dW , por lo tanto, para obtener una covariación distinta de cero se necesitan dos procesos, ambos con término dW o con saltos simultáneos.

Tenemos así el siguiente corolario.

Corolario 3.2. *La covariación entre un movimiento browniano y un proceso Poisson compensado es cero.*

3.5.3. Fórmula de Itô para difusiones con saltos

Recordemos que si X es una proceso de Itô y f una función con derivadas f' , f'' continuas, entonces:

$$df(X_s) = f'(X_s)dX_s + \frac{1}{2}f''(X_s)dX_s dX_s$$

En el caso en que X es una difusión con saltos, la expresión de arriba es válida únicamente para la parte continua (X^c), por otra parte, si X presenta un salto en el tiempo s , el cambio provocado por este salto debe agregarse a la expresión anterior, es decir:

$$df(X_s) = f'(X_s)dX_s^c + \frac{1}{2}f''(X_s)dX_s^c dX_s^c + [f(X_s) - f(X_{s-})].$$

Tenemos así el siguiente teorema.

Teorema 3.10. (Fórmula de Itô para una difusión con saltos)

Sea X una difusión con saltos y sea f una función con derivadas f' , f'' continuas. Entonces

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) dX_s^c + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) d \langle X^c, X^c \rangle_s + \sum_{0 < s \leq t} [f(X_s) - f(X_{s-})]$$

Demostración. Sean $0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_{n-1} < t$ los tiempos en que X presentó un salto, $\tau_0 = 0$, $\tau_n = t$.

Para $u < v$, $\tau_j < u < v < \tau_{j+1}$, la fórmula de Itô para procesos continuos nos dice que:

$$f(X_v) - f(X_u) = \int_u^v f'(X_s) dX_s^c + \frac{1}{2} \int_u^v f''(X_s) d \langle X^c, X^c \rangle_s$$

si $u \downarrow \tau_j$ (límite por la derecha), $v \uparrow \tau_{j+1}$ (límite por la izquierda) y utilizando la continuidad de X por la derecha, tenemos

$$f(X_{\tau_{j+1}-}) - f(X_{\tau_j}) = \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} f'(X_s) dX_s^c + \frac{1}{2} \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} f''(X_s) d \langle X^c, X^c \rangle_s$$

agregando el efecto del salto en el tiempo τ_{j+1}

$$\begin{aligned} f(X_{\tau_{j+1}}) - f(X_{\tau_j}) &= \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} f'(X_s) dX_s^c + \frac{1}{2} \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} f''(X_s) d \langle X^c, X^c \rangle_s \\ &\quad + f(X_{\tau_{j+1}}) - f(X_{\tau_{j+1}-}) \end{aligned}$$

sumando desde $j = 0$ hasta $j = n - 1$

$$\begin{aligned} f(X_t) - f(X_0) &= \int_0^t f'(X_s) dX_s^c + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) d \langle X^c, X^c \rangle_s \\ &\quad + \sum_{j=0}^{n-1} [f(X_{\tau_{j+1}}) - f(X_{\tau_{j+1}-})] \end{aligned}$$

□

De la misma forma que se demostró el teorema anterior, podemos probar lo siguiente:

Teorema 3.11. (*Fórmula de Itô para dos difusiones con saltos*)

Sean X, Y dos difusiones con saltos y sea $f(t, x, y)$ una función cuyas primeras y segundas derivadas parciales son continuas, entonces

$$\begin{aligned}
 f(t, X_t, Y_t) &= f(0, X_0, Y_0) + \int_0^t f_s(s, X_s, Y_s) ds \\
 &+ \int_0^t f_x(s, X_s, Y_s) dX_s^c + \int_0^t f_y(s, X_s, Y_s) dY_s^c \\
 &+ \frac{1}{2} \int_0^t f_{xx}(s, X_s, Y_s) d\langle X^c, X^c \rangle_s \\
 &+ \int_0^t f_{xy}(s, X_s, Y_s) d\langle X^c, Y^c \rangle_s \\
 &+ \frac{1}{2} \int_0^t f_{yy}(s, X_s, Y_s) d\langle Y^c, Y^c \rangle_s \\
 &+ \sum_{0 < s \leq t} [f(s, X_s, Y_s) - f(s, X_{s-}, Y_{s-})].
 \end{aligned}$$

Para la demostración, ver [6, 19, 21].

Corolario 3.3. (*Regla del producto para difusiones con saltos*)

Sean X, Y dos difusiones con saltos, entonces

$$\begin{aligned}
 X_t Y_t &= X_0 Y_0 + \int_0^t Y_s dX_s^c + \int_0^t X_s dY_s^c + \langle X^c, Y^c \rangle_t \\
 &+ \sum_{0 < s \leq t} [X_s Y_s - X_{s-} Y_{s-}]
 \end{aligned}$$

Demostración. Basta tomar $f(t, x, y) = xy$ en el Teorema (3.11). □

Observación 3.12. El corolario anterior también puede ser expresado de la siguiente manera (Ver [6, 18])

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t Y_{s-} dX_s + \int_0^t X_{s-} dY_s + \langle X, Y \rangle_t$$

Capítulo 4

Modelo de Black-Scholes (1973)

En este capítulo se desarrolla el modelo propuesto por Fischer Black y Myron Scholes (1973), [4], para valorar opciones del tipo europeo sobre acciones que no pagan dividendos. Este desarrollo se hace a través de un enfoque probabilístico a diferencia del enfoque de ecuaciones diferenciales parciales que fue utilizado originalmente.

Se introducen los conceptos de arbitraje, estrategias autofinanciadas y medida equivalente martingala.

El capítulo finaliza presentando las fallas de dicho modelo.

4.1. Resultados independientes del modelo.

Los siguientes resultados no dependen del modelo elegido y en consecuencia son válidos para el modelo que se desarrollará en el siguiente capítulo.

Supongamos que existen $d+1$ activos primarios (sus precios sólo dependen de la oferta y la demanda, es decir, no dependen del precio de algún otro activo) operables (por ejemplo acciones) cuyos precios están dados por los procesos

S_0, \dots, S_d ; cada uno es un proceso cádlág (para profundizar sobre este tipo de procesos ver [6, 3, 19]) adaptado a cierta filtración \mathbb{F} y estrictamente positivo. $S_i(t)$ representa el precio del activo i en el tiempo t . Contamos también con $d + 1$ procesos $\rho_0(t), \dots, \rho_d(t)$ los cuales denotan la cantidad del activo i que tenemos en el portafolio al tiempo t , $\rho_i(t) \in (-\infty, \infty)$, $\forall i, t$. Si $\rho_i < 0$, se interpreta como una posición corta en el activo i (aquella que se financia con un préstamo). Denotaremos por $\rho_t = (\rho_0(t), \dots, \rho_d(t))$ a la estrategia de operación en el tiempo t y por $S_t = (S_0(t), \dots, S_d(t))$ al vector de precios en ese mismo momento.

Definición 4.1. 1) Sea ρ una estrategia de operación y S un vector de precios, el valor del portafolio en el tiempo t con respecto a ρ se define como:

$$V_\rho(t) = \rho_t \bullet S_t = \sum_{i=0}^d \rho_i(t) S_i(t).$$

2) El proceso de ganancias con respecto a ρ está definido por

$$G_\rho(t) = \int_0^t \rho_u \bullet dS_u = \int_0^t \sum_{i=0}^d \rho_i(u) dS_i(u).$$

3) Una estrategia ρ se llama autofinanciada si

$$V_\rho(t) = V_\rho(0) + G_\rho(t) \text{ para toda } t \geq 0.$$

Observación 4.1. La condición de autofinanciamiento implica que todas las ganancias y pérdidas del portafolio se deben únicamente al cambio en los precios de los activos del portafolio, es decir, no hay retiros o inyecciones de fondos. Si se busca cambiar la posición en algún activo, el dinero para realizar este cambio se obtiene por la venta de posiciones en los otros activos. Se supone además que las ρ_i cumplen con las condiciones necesarias para que las integrales estocásticas estén bien definidas.

A menos que se indique lo contrario, las estrategias consideradas en este trabajo serán autofinanciadas.

Nos será conveniente expresar el precio de los activos S_i con respecto a algún otro activo. Este activo de referencia es llamado numéraire, el cual se define de la siguiente forma:

Definición 4.2. (Numéraire).

Un numéraire es un proceso positivo (casi seguramente) para toda $t \geq 0$.

De esta manera, si X es un numéraire, entonces el precio de S_k relativo a X está dado por $S_k^{X_t}(t) = \frac{S_k(t)}{X_t}$.

Supondremos además que el numéraire es un activo que no paga dividendos.

Una propiedad interesante de las estrategias autofinanciadas es que bajo un cambio de numéraire un portafolio autofinanciado permanece autofinanciado.

Teorema 4.1. (Invarianza ante cambio de numéraire)

Sea ρ una estrategia autofinanciada y V_ρ el valor del portafolio respecto a ρ . Si X es un numéraire, entonces $\frac{V_\rho(t)}{X_t}$ permanece autofinanciado.

Demostración. (Omitiremos el subíndice ρ por facilidad de notación).

Como V_t es autofinanciado, tenemos que $dV_t = dG_t = \sum_{i=0}^d \rho_i(t) dS_i(t)$.

Utilizando la regla del producto llegamos a:

$$\begin{aligned} d\left(\frac{V_t}{X_t}\right) &= V_t d\left(\frac{1}{X_t}\right) + \frac{1}{X_t} dV_t + dV_t d\left(\frac{1}{X_t}\right) \\ &= \sum_{i=0}^d \rho_i(t) S_i(t) d\left(\frac{1}{X_t}\right) + \frac{1}{X_t} \sum_{i=0}^d \rho_i(t) dS_i(t) + \sum_{i=0}^d \rho_i(t) dS_i(t) d\left(\frac{1}{X_t}\right) \\ &= \sum_{i=0}^d \rho_i(t) \left[S_i(t) d\left(\frac{1}{X_t}\right) + \frac{1}{X_t} dS_i(t) + dS_i(t) d\left(\frac{1}{X_t}\right) \right] \\ &= \sum_{i=0}^d \rho_i(t) d\left(\frac{S_i(t)}{X_t}\right) \end{aligned}$$

□

En este trabajo utilizaremos al activo S_0 como numéraire, lo dotaremos de una dinámica determinista y le llamaremos la cuenta de ahorro.

Definición 4.3. (Cuenta de ahorro)

Sea $r > 0$ una constante, definimos al activo $S_0(t) = B_t$ como el proceso (determinista) gobernado por la siguiente ecuación diferencial

$$dB_t = rB_t dt, \quad B_0 = 1$$

Es decir $B_t = e^{rt}$, en donde e es la función exponencial.

En la definición de cuenta de ahorro, la constante r es interpretada como la tasa instantánea de crecimiento, esto es, si en $t = 0$ invertimos una unidad monetaria, entonces para el tiempo $t > 0$ esta unidad se acumula a e^{rt} unidades monetarias. Además la tasa $r > 0$, será considerada una tasa libre de riesgo ya que será considerada determinista.

Denotaremos por \tilde{S}_t al vector de precios relativos al numéraire B_t , es decir, $\tilde{S}_t = (1, \tilde{S}_1(t), \dots, \tilde{S}_d(t)) = \left(1, \frac{S_1(t)}{B_t}, \dots, \frac{S_d(t)}{B_t}\right)$, con una interpretación similar para los procesos $\tilde{V}_\rho(t) = \frac{V_\rho(t)}{B_t}$, $\tilde{G}_\rho(t) = \sum_{i=1}^d \int_0^t \rho_i(t) d\tilde{S}_i(t)$.

Observemos que la cantidad $\tilde{S}_i(t) = \frac{S_i(t)}{B_t}$, puede ser interpretada como el valor presente de un activo que en el tiempo $t > 0$ vale $S_i(t)$, de esta manera, B_t^{-1} es un factor de descuento para el tiempo $t > 0$.

4.1.1. Valuación neutral al riesgo

4.1.1.1. Medidas equivalentes martingalas

En un mercado en el que ningún individuo debería de poder hacer ganancias sin tener que correr un riesgo, es necesario el concepto de arbitraje, el cual matemáticamente se define como:

Definición 4.4. (Arbitraje)

Una estrategia autofinanciada ρ es llamada una oportunidad de arbitraje si V_ρ satisface lo siguiente:

$$V_\rho(0) = 0, P[V_\rho(T) \geq 0] = 1 \text{ y } P[V_\rho(T) > 0] > 0$$

En otras palabras, una oportunidad de arbitraje ρ , consiste en iniciar el portafolio con un valor nulo y, con probabilidad 1, en un tiempo futuro seguir con un portafolio con valor igual a cero o bajo ciertos escenarios obtener ganancias, todo esto sin correr ningún riesgo.

Vemos así que las oportunidades de arbitraje representan la posibilidad de hacer ganancias ilimitadas (y libres de riesgo), dichas posibilidades no deberían de estar presentes en el mercado (en la práctica estas oportunidades sí existen pero su existencia es muy corta ya que los participantes del mercado provocan que se llegue a un equilibrio bajo el cual dejan de existir, esto es, la oferta y la demanda se encargan de que dichas estrategias no duren por periodos largos de tiempo).

La principal herramienta para estudiar la existencia de arbitraje es el concepto de medida equivalente martingala.

Definición 4.5. (Medida equivalente martingala)

Decimos que una medida de probabilidad \tilde{P} definida en (Ω, \mathcal{F}) es una medida equivalente martingala relativa al numéraire X si:

1. $\tilde{P} \sim P$ (\tilde{P} es equivalente a P).
2. El proceso de precios relativos respecto al numéraire X es una \tilde{P} -Martingala.

Para el caso del numéraire $B_t = e^{rt}$, tenemos un criterio muy útil para determinar si una medida equivalente a P es una medida martingala, este criterio consiste en comprobar que las tasas de crecimiento (término dt de la ecuación diferencial estocástica) relativas a B_t , coincidan (bajo la medida en consideración) para cada uno de los activos.

Teorema 4.2. Sea $B_t = e^{rt}$ la cuenta de ahorro y sea \tilde{P} una medida equivalente a P . Entonces \tilde{P} es una medida martingala relativa a B_t , si y sólo si $S_i(t)$ tiene la siguiente dinámica bajo \tilde{P} .

$$dS_i(t) = rS_i(t)dt + dM_i(t)$$

en donde M_i es una martingala bajo \tilde{P} .

Demostración. Para simplificar la notación se omite el subíndice i .

\Rightarrow Supongamos que \tilde{P} es una medida equivalente martingala, entonces \tilde{S} es una \tilde{P} -martingala, utilizando la regla para el producto de procesos estocásticos y el hecho de que B_t tiene variación cuadrada igual a cero (sólo tiene término dt), obtenemos

$$\begin{aligned} dS_t &= d(B_t \tilde{S}_t) \\ &= \tilde{S}_t dB_t + B_t d\tilde{S}_t + dB_t d\tilde{S}_t \\ &= rB_t \tilde{S}_t dt + B_t d\tilde{S}_t \text{ ver Cuadro (3.2)} \\ &= rB_t \frac{S_t}{B_t} dt + B_t d\tilde{S}_t \\ &= rS_t dt + B_t d\tilde{S}_t \end{aligned}$$

y como $B_t d\tilde{S}_t$ es una \tilde{P} -martingala obtenemos lo deseado.

\Leftarrow Ahora supongamos que $dS_t = rS_t dt + dM_t$, por hipótesis \tilde{P} es equivalente a P y sólo basta demostrar que \tilde{S}_t es una \tilde{P} martingala.

Nuevamente utilizando la regla para el producto, obtenemos:

$$\begin{aligned} d\tilde{S}_t &= d(e^{-rt} S_t) \\ &= e^{-rt} dS_t + S_t d(e^{-rt}) + de^{-rt} dS_t \\ &= e^{-rt} (rS_t dt + dM_t) + S_t (-re^{-rt} dt) \\ &= e^{-rt} dM_t \end{aligned}$$

por lo tanto $\tilde{S}_t = \tilde{S}_0 + \int_0^t e^{-ru} dM_u$ es una martingala bajo \tilde{P} . \square

Observación 4.2. Debido a que $r > 0$ es interpretada como una tasa libre de riesgo y que bajo \tilde{P} la tasa de crecimiento de los activos S_i es igual a $r > 0$ para toda i , es usual llamar a \tilde{P} una medida neutral al riesgo.

Como consecuencia del Teorema (4.2), tenemos el siguiente corolario.

Corolario 4.1. $(\tilde{V}_\rho(t))$ es una martingala bajo \tilde{P}

Sea \tilde{P} una medida equivalente martingala y ρ una estrategia autofinanciada, entonces el valor del portafolio relativo a B_t es una martingala bajo \tilde{P} .

Demostración. Basta observar que $\tilde{V}_\rho(t) = \frac{V_\rho(t)}{B_t}$ puede ser expresado como

$$\begin{aligned}\tilde{V}_\rho(t) &= \sum_{i=1}^d \rho_i(t) \frac{S_i(t)}{B_t} \\ &= \sum_{i=1}^d \rho_i \tilde{S}_i(t)\end{aligned}$$

Utilizando el Teorema (4.1) concluimos que

$$\tilde{V}_\rho(t) = \tilde{V}_\rho(0) + \int_0^t \sum_{i=1}^d \rho_i(u) d\tilde{S}_i(u).$$

y por lo tanto es una martingala bajo \tilde{P} . \square

Observación 4.3. En la demostración anterior no fue necesario utilizar una forma explícita para el numeráire B_t .

Tenemos ahora lo necesario para establecer la relación entre arbitraje y medidas equivalentes martingala, el siguiente resultado fue demostrado por Harrison y Pliska (Ver [9]) y es uno de los resultados más importantes en las finanzas.

Teorema 4.3. (*Relación entre medida martingala y arbitraje*)

Si en un mercado existe una medida equivalente martingala, entonces no existen oportunidades de arbitraje.

Demostración. Supongamos que existe una medida equivalente martingala \tilde{P} , entonces, por el Corolario (4.1), el proceso \tilde{V}_t es una martingala y en particular $E_{\tilde{P}}[\tilde{V}_t] = E_{\tilde{P}}[\tilde{V}_0]$.

Supongamos que existe un portafolio V tal que $\tilde{V}_0 = 0$, entonces tenemos

$$E_{\tilde{P}}[\tilde{V}_T] = 0 \quad (4.1.1)$$

Si V_T satisface que $P[V_T \geq 0] = 1$, entonces por la equivalencia de \tilde{P} y P tenemos $\tilde{P}[V_T < 0] = 0$ y por la ecuación (4.1.1) se concluye que $\tilde{P}[V_T > 0] = 0$ ya que si esto no se cumple obtendríamos que $\tilde{P}[\tilde{V}_T > 0] > 0$, lo que implicaría que $E_{\tilde{P}}[\tilde{V}_T] > 0$. Nuevamente utilizando la equivalencia entre las medidas, concluimos que $P[V_T > 0] = 0$. Por lo tanto no existen oportunidades de arbitraje. \square

4.1.1.2. Valuación neutral al riesgo

Una vez encontrada la relación entre arbitraje y medidas equivalentes martingala sólo falta encontrar una forma de valuar un producto financiero de tal manera que dicha valuación esté libre de oportunidades de arbitraje. Para lograr esto necesitamos el concepto de replicación el cual se da a continuación.

Definición 4.6. (Producto financiero replicable)

Decimos que un producto financiero X es replicable, si existe al menos una estrategia de operación autofinanciada, tal que:

$$V_\rho(T) = X_T.$$

llamamos a tal estrategia ρ una estrategia de replicación para X .

La Definición (4.6) nos dice que tener el portafolio de replicación o tener el producto financiero es indistinto (en la fecha de vencimiento). Como consecuencia de que no existen arbitrajes, el precio de X , Π_X , debe de ser igual al valor del portafolio V en cualquier tiempo $t \geq 0$.

$$\Pi_X(t) = V_\rho(t).$$

en otras palabras el valor de un producto financiero derivado es igual al costo del portafolio que lo replica.

Teorema 4.4. (*Fórmula de valuación neutral al riesgo*)

Sea \tilde{P} una medida equivalente martingala relativa al numéraire S y sea X un producto financiero (derivado) replicable por una estrategia autofinanciada, entonces el precio libre de arbitraje para X , Π_X , está dado por:

$$\Pi_X(t) = S_t E_{\tilde{P}} \left[\frac{X_T}{S_T} | \mathcal{F}_t \right].$$

en particular para el numeráire $B_t = e^{rt}$ tenemos que:

$$\Pi_X(t) = e^{-(T-t)} E_{\tilde{P}} [X_T | \mathcal{F}_t].$$

Demostración. Ya que X es replicable, existe una estrategia ρ tal que $V_\rho(T) = X_T$ y $\Pi_X(t) = V_\rho(t)$. Por el Corolario (4.1), el proceso \tilde{V}_ρ es una martingala bajo \tilde{P} y por lo tanto:

$$\begin{aligned} \Pi_X(t) &= V_\rho(t) = S_t \tilde{V}_\rho(t) \\ &= S_t E_{\tilde{P}} \left[\tilde{V}_\rho(T) | \mathcal{F}_t \right] \\ &= S_t E_{\tilde{P}} \left[\frac{V_\rho(T)}{S_T} | \mathcal{F}_t \right] \\ &= S_t E_{\tilde{P}} \left[\frac{X_T}{S_T} | \mathcal{F}_t \right]. \end{aligned}$$

□

4.2. El modelo de Black-Scholes

En 1973 Myron S. Scholes y Fisher Black [4] investigaron el problema de encontrar la prima que debería ser pagada por una opción del tipo europeo. En su modelo consideraron un mercado en el cual se cumplen los siguientes supuestos:

- La tasa r es conocida y constante.
- Las opciones son del tipo europeo.
- No existen costos de transacción.

Los activos negociados son:

- La cuenta de ahorro $B_t = e^{rt}$, con $r > 0$ y constante.
- Una acción S , que no paga dividendos, la cual es utilizada como subyacente de la opción.

Se supone además, que el precio de la acción, S_t , sigue la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t). \quad (4.2.1)$$

en donde μ y $\sigma > 0$ son constantes y W es un movimiento browniano.

Los parámetros μ y σ son interpretados como el rendimiento instantáneo esperado y la volatilidad instantánea de la acción respectivamente.

Uno de los principales atractivos de la ecuación (4.2.1) (y por lo tanto del modelo de Black-Scholes) es que tiene una solución en forma analítica.

Proposición 4.1. Sean μ y $\sigma > 0$ constantes, entonces la ecuación diferencial estocástica

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t).$$

tiene la siguiente solución:

$$S_t = S_0 \exp \left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W_t \right].$$

Demostración. Definamos a la función f como:

$$f(t, x) = S_0 \exp \left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma x \right].$$

las derivadas parciales de f son:

$$f_t(t, x) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) f(t, x).$$

$$f_x(t, x) = \sigma f(t, x).$$

$$f_{xx}(t, x) = \sigma^2 f(t, x).$$

y aplicando la fórmula de Itô (Teorema (3.5)) obtenemos:

$$\begin{aligned} f(t, W_t) &= f(0, W_0) + \int_0^t \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) f(s, W_s) ds \\ &\quad + \int_0^t \sigma f(s, W_s) dW_s + \frac{1}{2} \int_0^t \sigma^2 f(s, W_s) ds \\ &= f(0, W_0) + \int_0^t \mu f(s, W_s) ds + \int_0^t \sigma f(s, W_s) ds. \end{aligned}$$

por lo que $df(t, W_t) = f(t, W_t)(\mu dt + \sigma dW_t)$, es decir

$$S_t = f(t, W_t) = S_0 \exp \left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W_t \right]. \quad \square$$

4.3. Teorema de Girsanov

De acuerdo a la fórmula de valuación neutral al riesgo (Teorema (4.4)) si utilizamos la cuenta de ahorro como numéraire y encontramos una medida

equivalente martingala \tilde{P} relativa a este numéraire, entonces el precio de una opción Call del tipo europeo, está dado por:

$$c_t = e^{-r(T-t)} E_{\tilde{P}} [(S_T - K)^+ | \mathcal{F}_t]$$

con $(X)^+ = \text{Máx}(X, 0)$.

Más aún, por el Teorema (4.2), basta encontrar una medida $\tilde{P} \sim P$ tal que, bajo dicha medida, el precio de la acción siga la ecuación diferencial estocástica

$$dS_t = rS_t dt + dM_t.$$

en donde M_t es una \tilde{P} -martingala.

Utilizaremos el teorema de Girsanov para encontrar la medida \tilde{P} adecuada.

4.3.1. Idea detrás del teorema de Girsanov

El modelo de Black-Scholes nos dice que bajo la medida P , S_t sigue la ecuación diferencial estocástica:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t.$$

Observemos que si logramos sustituir el término $\mu S_t dt$ por $r S_t dt$ y encontramos un proceso \tilde{W} tal que $\sigma S_t d\tilde{W}_t$ sea una martingala bajo cierta medida \tilde{P} , entonces podemos aplicar los Teoremas (4.2) y (4.4) y con esto obtener una expresión para el precio de un Call.

Encontremos pues, el proceso \tilde{W} adecuado.

$$\begin{aligned} \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t &= r S_t dt + \sigma S_t d\tilde{W}_t. \\ \Leftrightarrow \mu dt + \sigma dW_t &= r dt + \sigma d\tilde{W}_t. \quad (\text{Por Proposición 4.1 } S_t > 0) \\ \Leftrightarrow d\tilde{W}_t &= \frac{\mu - r}{\sigma} dt + dW_t. \end{aligned}$$

bajo la medida P , \widetilde{W} es un movimiento browniano con coeficiente de arrastre $\frac{\mu - r}{\sigma}$, por lo tanto no es una martingala bajo esta medida.

El teorema de Girsanov nos dice como definir una medida \widetilde{P} , bajo la cual \widetilde{W} es una martingala y con esto poder aplicar el Teorema (4.4).

Antes de demostrar el Teorema de Girsanov, necesitaremos los siguientes resultados.

Definición 4.7. (Proceso de la derivada de Radon-Nikodým)

Sea (Ω, \mathcal{F}, P) un espacio de probabilidad, el proceso de la derivada de Radon-Nikodým, $\{X_t\}_{0 \leq t \leq T}$, está definido por:

$$X_t = E[Y|\mathcal{F}_t].$$

en donde Y es una variable aleatoria tal que $P[Y > 0] = 1$ y $E[Y] = 1$.

Teorema 4.5. (Lévy)

Sea $\{M_t\}_{t \geq 0}$ una martingala con trayectorias continuas tal que $M_0 = 0$ y $< M, M >_t = t$ para toda $t \geq 0$. Entonces $\{M_t\}$ es un movimiento browniano.

Lema 4.1. Sea Z una variable medible y sea $\{X_t\}_{0 \leq t \leq T}$ el proceso de la derivada de Radon-Nikodým, $X_t = E[Y|\mathcal{F}_t]$, $P[Y > 0] = 1$, $E[Y] = 1$.

Si definimos una nueva medida de probabilidad \widetilde{P} como $\widetilde{P}(A) = \int_A Y dP$ para toda $A \in \mathcal{F}$, entonces:

$$\begin{aligned} E_{\widetilde{P}}[Z] &= E_P[Z X_t] \\ E_{\widetilde{P}}[Z|\mathcal{F}_s] &= \frac{1}{X_s} E_P[Z X_t|\mathcal{F}_s] \end{aligned} \quad (4.3.1)$$

Teorema 4.6. (Girsanov)

Sean $\{W_t\}_{0 \leq t \leq T}$ un movimiento browniano sobre un espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) y $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ una filtración para este movimiento browniano.

Sea $\{\Theta_t\}_{0 \leq t \leq T}$ un proceso adaptado a esta filtración y definamos lo siguiente:

$$X_t = \exp \left\{ - \int_0^t \Theta_s dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \Theta_s^2 ds \right\}$$

$$\widetilde{W}_t = W_t + \int_0^t \Theta_s ds$$

$$\widetilde{P}(A) = \int_A X_T dP \quad A \in \mathcal{F}.$$

Supongamos además que:

$$E \left[\int_0^T \Theta_s^2 X_s^2 ds \right] < \infty.$$

Entonces, $E[X_T] = 1$ y bajo \widetilde{P} , \widetilde{W} es un movimiento browniano.

Demostración. El proceso \widetilde{W} inicia en cero, tiene trayectorias continuas y

$$\begin{aligned} d\widetilde{W}_t d\widetilde{W}_t &= (dW_t + \Theta_t dt)^2 \\ &= dt. \end{aligned}$$

es decir $\langle \widetilde{W}, \widetilde{W} \rangle_t = t$.

Ahora definamos el proceso Y como:

$$Y_t = - \int_0^t \Theta_s dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \Theta_s^2 ds.$$

Utilizando la función $f(x) = e^x$ y la fórmula de Itô obtenemos:

$$\begin{aligned} dX_t &= e^{Y_t} \left(-\Theta_t dW_t - \frac{1}{2} \Theta_t^2 dt \right) + \frac{1}{2} e^{Y_t} \Theta_t^2 dt \\ &= -\Theta_t X_t dW_t. \end{aligned}$$

Vemos así que el proceso X es una integral de Itô y como $E \left[\int_0^T \Theta_s^2 X_s^2 ds \right] < \infty$, se sigue que es una martingala bajo P , en particular tenemos que $E[X_T] = E[X_0] = 1$.

Además

$$X_t = E[X_T | \mathcal{F}_t] \quad 0 \leq t \leq T.$$

por lo tanto $\{X_t\}$ es un proceso de la derivada de Radon-Nikodým.

Consideremos el proceso $\{\widetilde{W}_t X_t\}$, la ecuación diferencial estocástica que sigue está dada por:

$$\begin{aligned} d(\widetilde{W}_t X_t) &= \widetilde{W}_t dX_t + X_t d\widetilde{W}_t + d\widetilde{W}_t dX_t \\ &= \left(-\widetilde{W}_t \Theta_t + 1 \right) X_t dW_t. \end{aligned}$$

Por la condición (3.3.5), $\{\widetilde{W}_t X_t\}$ es una martingala bajo P y en consecuencia, utilizando (4.3.1) del Lema (4.1), tenemos que

para $0 \leq s \leq t \leq T$

$$\begin{aligned} E_{\widetilde{P}}[\widetilde{W}_t | \mathcal{F}_t] &= \frac{1}{X_s} E_P[\widetilde{W}_t X_t | \mathcal{F}_s] \\ &= \frac{1}{X_s} \widetilde{W}_s X_s \\ &= \widetilde{W}_s. \end{aligned}$$

es decir, $\{\widetilde{W}_t\}$ es una \widetilde{P} -martingala y por lo tanto por el Teorema (4.5) es un movimiento browniano bajo \widetilde{P} . \square

Corolario 4.2. (Medida equivalente martingala para el modelo de Black-Scholes)

La medida \widetilde{P} definida en el Teorema de Girsanov (4.6) es una medida equivalente martingala para el modelo de Black-Scholes.

Demostración. Ya que $P[X_T > 0] = 1$, se sigue que \widetilde{P} es equivalente a P . (Teorema de Radon-Nikodým)

Si en el teorema de Girsanov, tomamos $\Theta_t = \frac{\mu - r}{\sigma}$, para toda t , entonces $\widetilde{W}_t = W_t + \frac{\mu - r}{\sigma}t$, es un movimiento browniano bajo \widetilde{P} y la ecuación diferencial estocástica del precio de la acción bajo esta medida está dada por:

$$\begin{aligned} dS_t &= \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \\ &= \mu S_t dt + \sigma S_t d\left(\widetilde{W}_t - \frac{\mu - r}{\sigma}t\right) \\ &= r S_t dt + \sigma S_t d\widetilde{W}_t. \end{aligned}$$

Como $\sigma S_t d\widetilde{W}_t$ es una \widetilde{P} -martingala, se sigue del Teorema (4.2) que \widetilde{P} es una medida equivalente martingala. \square

4.4. Solución del problema de Black-Scholes

Utilizando el teorema de Girsanov junto con los supuestos del modelo de Black-Scholes y el teorema (4.4) podemos encontrar una fórmula para calcular el precio de una opción Call europea.

Resulta interesante el hecho de que, bajo los supuestos del modelo, es posible encontrar una solución analítica a este problema, como lo muestra el siguiente teorema:

Teorema 4.7. (*Fórmula de Black-Scholes*)

Sea C una opción Call del tipo europeo con fecha de vencimiento T y subyacente S .

Bajo los supuestos del modelo de Black-Scholes, el precio de la opción en el tiempo t , $0 \leq t \leq T$ está dado por:

$$C_t = S_t N(d_+) - K e^{-r(T-t)} N(d_-).$$

en donde:

N es la función de distribución de una variable aleatoria normal estándar

$$d_+ = \frac{\text{Ln} \left(\frac{S_t}{K} \right) + \left(r + \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (T - t)}{\sigma \sqrt{T - t}}.$$

y

$$d_- = \frac{\text{Ln} \left(\frac{S_t}{K} \right) + \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (T - t)}{\sigma \sqrt{T - t}}.$$

Demostración. Utilizando el teorema de Girsanov y el Teorema (4.4) sabemos que el precio de la opción está dado por

$$C_t = e^{-r(T-t)} E_{\tilde{P}} [(S_T - K)_+ | \mathcal{F}_t].$$

en donde $(S_T - K)_+ = \text{Máx}(S_T - K, 0)$.

Bajo la medida \tilde{P} del teorema de Girsanov, S_T está dado por

$$S_T = S_t \exp \left[\left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (T - t) + \sigma (W_T - W_t) \right].$$

Por lo tanto, utilizando la independencia entre $W_T - W_t$ y \mathcal{F}_t , obtenemos

$$C_t = e^{-r(T-t)} E_{\tilde{P}} [(S_T - K)_+].$$

Además, en términos de distribución, S_T es equivalente a:

$$S_t \exp \left[\left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (T - t) + \sigma \sqrt{T - t} Z \right].$$

en donde $Z \sim N(0, 1)$, tenemos así

$$\begin{aligned} C_t &= e^{-r(T-t)} E_{\tilde{P}} \left[\left(S_t \exp \left\{ \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (T-t) + \sigma \sqrt{T-t} Z \right\} - K \right)_+ \right] \\ &= \frac{e^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \left(S_t \exp \left\{ \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (T-t) + \sigma \sqrt{T-t} x \right\} - K \right)_+ dx. \end{aligned}$$

la integral anterior no es cero, si y sólo si

$$x \geq \frac{\text{Ln} \left(\frac{K}{S_t} \right) - \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}}.$$

y definiendo $h := \frac{\text{Ln} \left(\frac{K}{S_t} \right) - \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}}.$

$$C_t = \frac{e^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi}} \int_h^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \left(S_t \exp \left\{ \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (T-t) + \sigma \sqrt{T-t} x \right\} - K \right) dx.$$

Consideremos primero el término

$$\frac{e^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi}} \int_h^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} K dx.$$

este término es igual a $e^{-r(T-t)} K [1 - N(h)]$, pero utilizando la simetría de la distribución normal, esto puede ser expresado como

$$\begin{aligned} e^{-r(T-t)} K N(-h) &= e^{-r(T-t)} N \left(\frac{\text{Ln} \left(\frac{S_t}{K} \right) + \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}} \right) \\ &= e^{-r(T-t)} K N(d_-). \end{aligned}$$

Para el término

$$\frac{e^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi}} \int_h^\infty e^{-\frac{x^2}{2}} S_t \exp \left\{ \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) (T-t) + \sigma\sqrt{T-t}x \right\} dx.$$

realizamos el cambio de variable $y = x - \sigma\sqrt{T-t}$.

$$\begin{aligned} & \frac{e^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi}} \int_{h-\sigma\sqrt{T-t}}^\infty e^{-\frac{(y+\sigma\sqrt{T-t})^2}{2}} S_t \exp \left\{ \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) (T-t) + \sigma\sqrt{T-t}y + \sigma^2(T-t) \right\} dy \\ &= \frac{e^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi}} \int_{h-\sigma\sqrt{T-t}}^\infty e^{-\frac{y^2}{2}} S_t \exp[r(T-t)] dy. \quad \text{Desarrollando el cuadrado} \\ &= S_t \left[1 - N \left(h - \sigma\sqrt{T-t} \right) \right] \\ &= S_t N \left(\sigma\sqrt{T-t} - h \right) \quad \text{Por simetría de } N \\ &= S_t N \left(\frac{\ln \left(\frac{S_t}{K} \right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2 \right) (T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right). \\ &= S_t N(d_+). \end{aligned}$$

con lo que obtenemos lo deseado. \square

4.5. Imperfecciones del modelo de Black-Scholes (El supuesto de normalidad)

A pesar de ser el modelo más utilizado en la práctica, el modelo de Black-Scholes dista de ser un modelo perfecto (suponiendo que el hablar de un modelo perfecto tiene sentido), entre una de sus imperfecciones se encuentra el supuesto de que la distribución de los rendimientos (logarítmicos) del subyacente es una distribución normal (equivalente a que el precio tiene distribución lognormal), como se muestra a continuación el comportamiento del precio de las acciones dista de cumplir este supuesto.

Utilizando los precios de cierre de la acción de ELEKTRA* (obtenidos de Yahoo Finance), en un periodo que comprende del 12 de Febrero de 2010 al 01 de Enero de 2014, se calcularon los rendimientos logarítmicos normalizados obteniéndose con ellos la estimación de su densidad, además se comparó esta densidad con una densidad normal con media cero y varianza 1, obteniéndose los siguientes resultados:

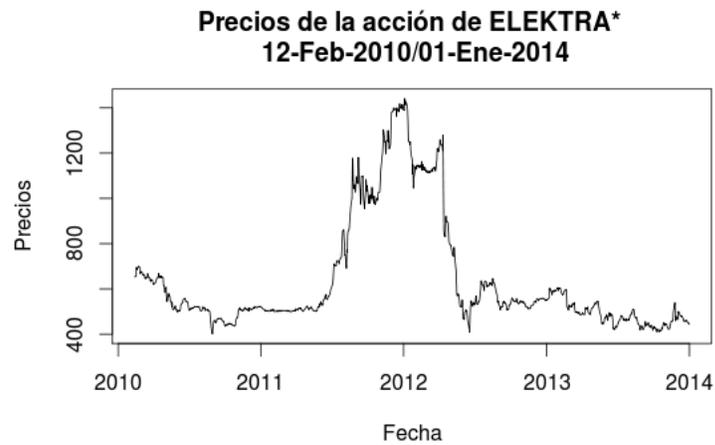


Figura 4.5.1: Precio de la acción de ELEKTRA* 12-Feb-2010/01-Ene-2014

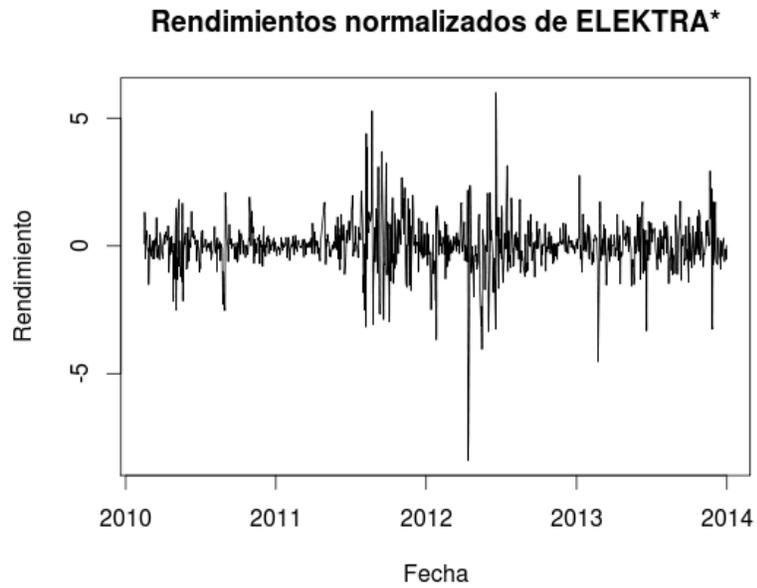


Figura 4.5.2: Rendimientos de ELEKTRA* 12-Feb-2010/01-Ene-2014

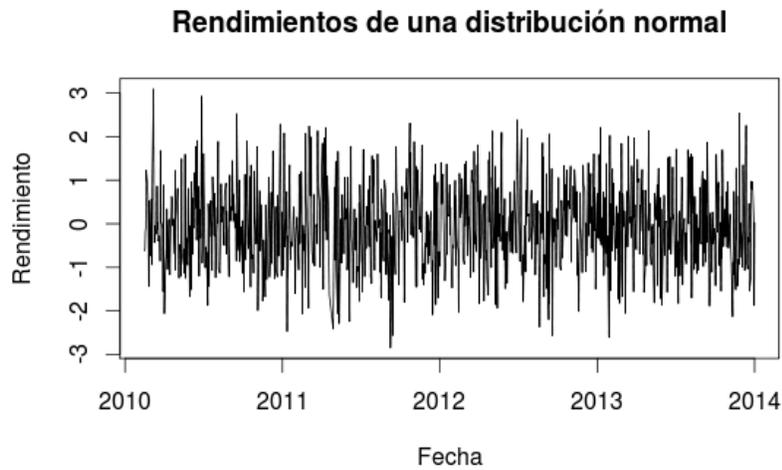


Figura 4.5.3: Rendimientos de una distribución normal

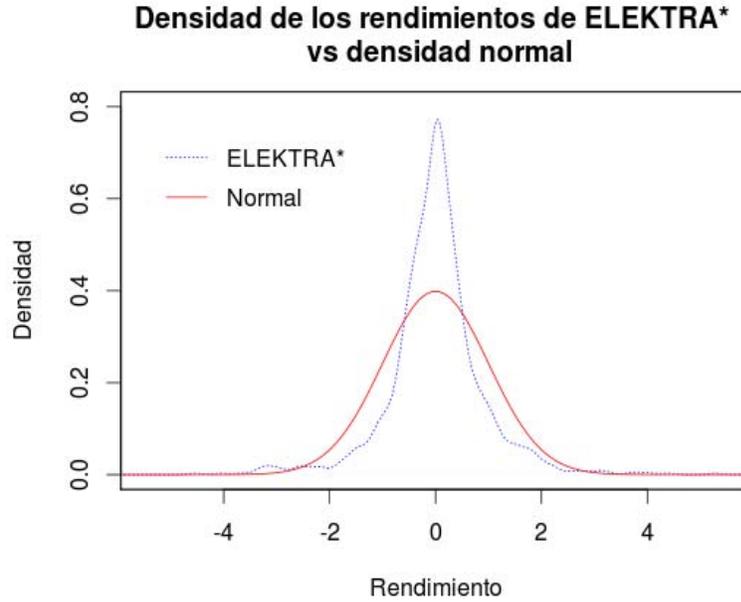


Figura 4.5.4: Densidad rendimientos de ELEKTRA* vs densidad normal

Como se puede observar, la distribución de los rendimientos dista mucho de ser normal, los rendimientos de la acción tienen movimientos más grandes de lo que se esperaría bajo el supuesto de una distribución normal. Bajo esta distribución la probabilidad de que una variable aleatoria normal estándar sea menor a -5 es 0.0000002866516 , pero observando los rendimientos normalizados de ELEKTRA*, notamos que esos eventos ocurren con mayor frecuencia que la esperada, en otras palabras podríamos decir que el precio de la acción “salta” y como consecuencia observamos estos movimientos atípicos.

Para reforzar lo anterior, se realizaron las pruebas de hipótesis de Kolmogorov-Smirnov y Jarque-Bera bajo la hipótesis nula de que los rendimientos provienen de una distribución normal, obteniéndose los p-value $6.082e - 13$ y $2.2e - 16$ respectivamente.

Por otra parte, utilizando el estimador muestral para el sesgo:

$$sesgo = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^3}{\left[\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \right]^{\frac{3}{2}}}.$$

se obtuvo un sesgo para los rendimientos normalizados de ELEKTRA*, igual a -0.7977667 y utilizando el estimador muestral para la curtosis:

$$curtosis = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^4}{\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \right]^2}.$$

se obtuvo una curtosis igual a 15.29663 ; pero se sabe que el sesgo y la curtosis de la distribución normal estándar son 0 y 3 respectivamente.

Todo lo anterior nos indica que los rendimientos logarítmicos no siguen una distribución normal, en consecuencia el modelo de Black-Scholes, no captura adecuadamente el comportamiento de los precios.

En el siguiente capítulo discutiremos un modelo cuyo objetivo es capturar estas características de los precios de las acciones y como consecuencia el supuesto de normalidad quedará descartado.

Capítulo 5

Modelo de difusión con saltos (Merton 1976)

En este capítulo estudiamos un modelo que busca incorporar los saltos en los precios de las acciones a través de una difusión que incorpora un proceso Poisson compuesto.

Se establece el teorema de Girsanov para difusiones con saltos y se encuentra una medida equivalente martingala para poder realizar la valuación de opciones europeas.

Se compara este modelo con el modelo de Black-Scholes y se finaliza exponiendo algunas de sus imperfecciones.

5.1. Modelo de Merton (1976)

Robert C. Merton [15] propone un modelo en el cual el precio de la acción se modela con la composición de dos elementos, un elemento que controla los cambios “normales” en los precios y otro que controla los cambios “anormales”, este último elemento modela el cambio en el precio causado por la llegada de nueva información y será el que provocará los saltos en el mismo.

Matemáticamente, el componente que controla los cambios “normales” es modelado por un movimiento browniano geométrico, mientras que el componente encargado de modelar los cambios “abnormales” es descrito por un proceso Poisson compuesto.

La ecuación diferencial estocástica que describe el modelo es la siguiente:

$$dS_t = (\alpha - \lambda\kappa) S_t dt + \sigma S_t dW_t \quad \text{Si no ocurre un salto en } t.$$

$$dS_t = (\alpha - \lambda\kappa) S_t dt + \sigma S_t dW_t + (Y_t - 1) S_{t-} \quad \text{Si ocurre un salto en } t.$$

Utilizando el hecho de que el tamaño de los saltos de un proceso Poisson es igual a 1 ($dN_t = 1$) podemos reescribir dS_t como:

$$dS_t = (\alpha - \lambda\kappa) S_t dt + \sigma S_t dW_t + (Y_t - 1) S_{t-} dN_t. \quad (5.1.1)$$

en donde:

α = Rendimiento (instantáneo) esperado de la acción.

σ = Volatilidad del precio de la acción cuando no se presentan saltos.

W_t = Movimiento browniano (estándar).

N_t = Proceso Poisson con intensidad λ .

Y_t = Variable aleatoria lognormal (μ, δ^2) , es decir, $Ln(Y_t) \sim N(\mu, \delta^2)$.

El parámetro μ puede interpretarse como el efecto promedio provocado por un salto en los rendimientos logarítmicos y δ la desviación estándar de este efecto.

$$\kappa = E[Y_t - 1].$$

Los procesos W , N , Y se suponen independientes.

El término $(Y_t - 1)$ se obtiene utilizando el siguiente razonamiento.

Supongamos que en el tiempo t se presenta un salto. Si S_{t-} es el precio de la acción antes de que ocurra dicho evento y Y_t es el impacto que tiene sobre el precio, entonces (ignorando la parte continua de S_t) el cambio en el precio

está dado por $dS_t = S_t - S_{t-}$ y el cambio relativo (provocado por este salto) es:

$$\frac{dS_t}{S_{t-}} = \frac{Y_t S_{t-} - S_{t-}}{S_{t-}} = Y_t - 1.$$

Además observemos que

$$\begin{aligned} E \left[\frac{dS_t}{S_{t-}} \right] &= E [(\alpha - \lambda\kappa)dt] + E [\sigma dW_t] + E [(Y_t - 1)dN_t] \\ &= (\alpha - \lambda\kappa)dt + \lambda\kappa dt \\ &= \alpha dt. \end{aligned}$$

El restar el término $\lambda\kappa dt$, podría interpretarse como quitar el efecto esperado provocado por un salto, es decir, eliminar el efecto predecible provocado por este evento, con lo que cada término $Y_t - 1$ contribuiría de una forma totalmente impredecible.

Teorema 5.1. *El proceso*

$$\begin{aligned} S_t &= S_0 \exp \left[\left(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2 - \lambda\kappa \right) t + \sigma W_t \right] \prod_{i=1}^{N_t} Y_i \\ &= S_0 \exp \left[\left(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2 - \lambda\kappa \right) t + \sigma W_t + \sum_{i=1}^{N_t} X_i \right]. \end{aligned}$$

con $X_i = \ln(Y_i)$, es solución de la ecuación (5.1.1).

Demostración. Sea $Q_t = \sum_{i=1}^{N_t} (Y_i - 1)$ un proceso Poisson, observemos que $\Delta Q_t = (Y_t - 1) \Delta N_t$ es válido para toda t y por lo tanto $dQ_t = (Y_t - 1) dN_t$, (ver [21, 18]). utilizando esta igualdad podemos reescribir dS_t de la siguiente forma:

$$dS_t = (\alpha - \lambda\kappa) S_t dt + \sigma S_t dW_t + S_{t-} dQ_t. \quad (5.1.2)$$

Ahora definamos los siguientes procesos $H_t := S_0 \exp \left[\left(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2 - \lambda\kappa \right) t + \sigma W_t \right]$, $J_t := \prod_{i=1}^{N_t} Y_i$.

Si t es el momento del i -ésimo salto, entonces $J_t = J_{t-} Y_i$ y por lo tanto $\Delta J_t = J_t - J_{t-} = J_{t-} (Y_i - 1) = J_{t-} \Delta Q_t$.

Esta última igualdad es válida para toda t , en consecuencia $dJ_t = J_{t-} dQ_t$.

Utilizando la continuidad de H , la fórmula de Itô para el producto de procesos y el hecho que J no tiene parte continua obtenemos:

$$\begin{aligned}
 S_t &= H_t J_t = H_0 J_0 + \int_0^t J_s dH_s + \sum_{0 < s \leq t} [H_s J_s - H_{s-} J_{s-}] \\
 &= S_0 + \int_0^t J_s [(\alpha - \lambda \kappa) H_s ds + \sigma H_s dW_s] + \sum_{0 < s \leq t} H_{s-} (J_s - J_{s-}) \quad \text{Continuidad de H.} \\
 &= S_0 + (\alpha - \lambda \kappa) \int_0^t H_s J_s ds + \sigma \int_0^t H_s J_s dW_s + \int_0^t H_{s-} dJ_s \\
 &= S_0 + (\alpha - \lambda \kappa) \int_0^t H_s J_s ds + \sigma \int_0^t H_s J_s dW_s + \int_0^t H_{s-} J_{s-} dQ_s \\
 &= S_0 + (\alpha - \lambda \kappa) \int_0^t S_s ds + \sigma \int_0^t S_s dW_s + \int_0^t S_{s-} dQ_s.
 \end{aligned}$$

lo que en forma diferencial es:

$$\begin{aligned}
 dS_t &= (\alpha - \lambda \kappa) S_t dt + \sigma S_t dW_t + S_{t-} dQ_t \\
 &= (\alpha - \lambda \kappa) S_t dt + \sigma S_t dW_t + (Y_t - 1) S_{t-} dN_t.
 \end{aligned}$$

□

5.2. Teorema de Girsanov para difusiones con saltos

De la misma forma que se hizo con el modelo de Black-Scholes, necesitamos encontrar una medida equivalente martingala de tal manera que podamos verificar las condiciones del Teorema (4.2) y con esto aplicar la fórmula de valuación neutral al riesgo (4.4). Necesitamos así, extender el teorema de Girsanov para procesos que presentan discontinuidades en sus trayectorias. Esto lo haremos componente por componente, primero encontrando un cam-

bio de medida para el proceso Poisson, después para un proceso Poisson compuesto y por último para una difusión con saltos.

5.2.1. Cambio de medida para un proceso Poisson

Recordemos que para procesos continuos utilizamos el proceso

$Z_t = \exp \left\{ - \int_0^t g(s) dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t g^2(s) ds \right\}$ con el fin de realizar un cambio de medida que sólo afecta al movimiento browniano.

Este proceso satisface la ecuación diferencial estocástica (Ver demostración del Teorema (4.6))

$$dZ_t = Z_t dX_t^c$$

en donde $X_t^c = - \int_0^t g(s) dW_s$.

Para procesos, X , que presentan saltos, la ecuación análoga es

$$dZ_t^X = Z_{t^-}^X dX_t,$$

en este caso, siempre que X presenta un salto, Z^X presenta uno de tamaño

$$\Delta Z_t^X = Z_{t^-}^X \Delta X_t,$$

y por lo tanto

$$Z_t^X = Z_{t^-}^X + \Delta Z_t^X = Z_{t^-}^X (1 + \Delta X_t).$$

Proposición 5.1. *Sea X una difusión con saltos, el proceso Z_t^X definido por*

$$Z_t^X = \exp \left\{ X_t^c - \frac{1}{2} \langle X^c, X^c \rangle_t \right\} \prod_{0 < s \leq t} (1 + \Delta X_s),$$

es la solución de la ecuación diferencial estocástica

$$dZ_t^X = Z_{t^-}^X dX_t,$$

$$Z_0^X = 1,$$

$$Z_t^X = 1 + \int_0^t Z_{s^-}^X dX_s.$$

Demstración. Primero definimos el proceso Y_t como

$$Y_t = \exp \left\{ X_t^c - \frac{1}{2} \langle X^c, X^c \rangle_t \right\}$$

Utilizando la fórmula de Itô para procesos continuos sabemos que

$$\begin{aligned} dY_t &= Y_t dX_t^c \\ &= Y_{t^-} dX_t^c \text{ por la continuidad de } Y. \end{aligned}$$

Después definimos el proceso de saltos

$$K_t = K_{t^-} (1 + \Delta X_t),$$

y por lo tanto

$$\Delta K_t = K_{t^-} \Delta X_t.$$

Además como Y es continuo y K es un proceso de saltos, resulta que $\langle Y, K \rangle_t = 0$ (Ver (3.2)), utilizando esto último y la fórmula de Itô para el producto concluimos

$$\begin{aligned} Z_t^X &= Y_t K_t \\ &= Y_0 + \int_0^t K_{s^-} dY_s + \sum_{0 < s \leq t} Y_{s^-} K_{s^-} \Delta X_s \\ &= 1 + \int_0^t Y_{s^-} K_{s^-} dX_s^c + \sum_{0 < s \leq t} Y_{s^-} K_{s^-} \Delta X_s \text{ Ya que } dY_s = Y_{s^-} dX_s^c \\ &= 1 + \int_0^t Y_{s^-} K_{s^-} dX_s \\ &= 1 + \int_0^t Z_{s^-}^X dX_s. \end{aligned}$$

□

Proposición 5.2. Sean N_t un proceso Poisson con intensidad $\lambda > 0$, $M_t = N_t - \lambda t$ un proceso Poisson compensado y $\tilde{\lambda}$ una constante positiva. Definimos Z_t como

$$Z_t = e^{(\lambda - \tilde{\lambda})t} \left(\frac{\tilde{\lambda}}{\lambda} \right)^{N_t},$$

entonces el proceso Z satisface lo siguiente:

$$dZ_t = \frac{\tilde{\lambda} - \lambda}{\lambda} Z_{t-} dM_t.$$

Z_t es una martingala.

$$E[Z_t] = 1 \forall t \geq 0.$$

Demostración. Definamos $X_t = \frac{\tilde{\lambda} - \lambda}{\lambda} M_t$, este proceso es una martingala con parte continua $X_t^c = (\lambda - \tilde{\lambda})t$ y $J_t = \frac{\tilde{\lambda} - \lambda}{\lambda} N_t$, además $\langle X^c, X^c \rangle_t = 0$.

El tamaño de un salto de X está dado por $\Delta X_t = \frac{\tilde{\lambda} - \lambda}{\lambda}$, así que $1 + \Delta X_t = \frac{\tilde{\lambda}}{\lambda}$, utilizando esto, podemos reescribir Z como:

$$Z_t = \exp \left\{ X_t^c - \frac{1}{2} \langle X^c, X^c \rangle_t \right\} \prod_{0 < s \leq t} (1 + \Delta X_s),$$

y por la Proposición (5.1) Z cumple la ecuación diferencial estocástica

$$Z_t = 1 + \int_0^t Z_{s-} dX_s,$$

equivalente a

$$\begin{aligned} dZ_t &= Z_{t-} dX_t \\ &= \frac{\tilde{\lambda} - \lambda}{\lambda} Z_{t-} dM_t, \end{aligned}$$

ya que X es una martingala y el proceso $Y_s = Z_{s-}$ es continuo por la izquierda, se sigue del Teorema (3.8) que Z es una martingala y en consecuencia $E[Z_0] = E[Z_t] = 1$ \square

Teorema 5.2. (*Cambio de intensidad de un proceso Poisson*)

Con la notación de la proposición (5.2), definamos la medida \tilde{P} como

$$\begin{aligned}\tilde{P}(A) &= \int_A Z_T dP \quad \forall A \in \mathcal{F} \\ &= \int_A e^{(\lambda-\tilde{\lambda})T} \left(\frac{\tilde{\lambda}}{\lambda}\right)^{N_T} dP.\end{aligned}$$

entonces, bajo \tilde{P} , N es un proceso Poisson con intensidad $\tilde{\lambda}$.

Demostración. La demostración se basa en encontrar la función generadora de momentos de N bajo la medida \tilde{P} , ver [6, 18, 21]. \square

5.2.2. Cambio de medida para un proceso Poisson compuesto

Ahora buscamos cambiar tanto la intensidad del proceso Poisson N , así como la distribución del tamaño de los saltos, Y , en un proceso Poisson compuesto $Q_t = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i$.

Denotaremos con Y_1, Y_2, \dots a un conjunto de variables aleatorias idénticamente distribuidas con función de densidad f , N será un proceso Poisson con intensidad λ y $Q_t = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i$ un proceso Poisson; tendremos además una función de densidad \tilde{f} y una constante $\tilde{\lambda} > 0$.

Proposición 5.3. *Utilizando la notación previa, definamos el proceso Z como*

$$Z_t = e^{(\lambda-\tilde{\lambda})t} \prod_{i=1}^{N_t} \frac{\tilde{\lambda}\tilde{f}(Y_i)}{\lambda f(Y_i)},$$

entonces Z es una martingala y $E[Z_t] = 1, \forall t \geq 0$.

Demostración. Definamos el proceso J como

$$J_t = \prod_{i=1}^{N_t} \frac{\tilde{\lambda} \tilde{f}(Y_i)}{\lambda f(Y_i)}.$$

Si t es un tiempo en el que se presenta un salto, tenemos

$$J_t = J_{t-} \frac{\tilde{\lambda} \tilde{f}(Y_{N_t})}{\lambda f(Y_{N_t})} = J_{t-} \frac{\tilde{\lambda} \tilde{f}(\Delta Q_t)}{\lambda f(\Delta Q_t)},$$

y en consecuencia

$$\Delta J_t = \left[\frac{\tilde{\lambda} \tilde{f}(\Delta Q_t)}{\lambda f(\Delta Q_t)} - 1 \right] J_{t-}.$$

Ahora definamos el proceso Poisson compuesto, H , como

$$H_t = \sum_{i=1}^{N_t} \frac{\tilde{\lambda} \tilde{f}(Y_i)}{\lambda f(Y_i)}$$

y observemos que

$$E \left[\frac{\tilde{\lambda} \tilde{f}(Y_i)}{\lambda f(Y_i)} \right] = \frac{\tilde{\lambda}}{\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{f}(y)}{f(y)} f(y) dy = \frac{\tilde{\lambda}}{\lambda},$$

por lo tanto el proceso $H_t - \tilde{\lambda}t$ es una martingala.

Por otro lado, utilizando el hecho de que el tamaño de los saltos de un proceso Poisson es igual a 1 y que $\Delta H_t = \frac{\tilde{\lambda} \tilde{f}(\Delta Q_t)}{\lambda f(\Delta Q_t)}$, podemos reescribir ΔJ_t de la siguiente manera

$$\Delta J_t = J_{t-} \Delta H_t - J_{t-} \Delta N_t,$$

esta ecuación es válida para toda $t \geq 0$, es decir podemos expresarla como

$$dJ_t = J_{t-} dH_t - J_{t-} dN_t.$$

Utilizando el cuadro (3.2) notamos que $\langle J, e^{(\lambda - \tilde{\lambda})} \rangle_{t=0} = 0$ y aplicando la

fórmula de Itô al proceso $Z_t = e^{(\lambda - \tilde{\lambda})t} J_t$ obtenemos:

$$\begin{aligned} Z_t &= Z_0 + \int_0^t e^{(\lambda - \tilde{\lambda})s} J_{s-} (\lambda - \tilde{\lambda}) ds + \int_0^t e^{(\lambda - \tilde{\lambda})s} dJ_s \\ &= 1 + \int_0^t e^{(\lambda - \tilde{\lambda})s} J_{s-} (\lambda - \tilde{\lambda}) ds + \int_0^t e^{(\lambda - \tilde{\lambda})s} J_{s-} dH_s - \int_0^t e^{(\lambda - \tilde{\lambda})s} J_{s-} dN_s \\ &= 1 + \int_0^t Z_{s-} d(H_s - \tilde{\lambda}s) - \int_0^t Z_{s-} d(N_s - \lambda s). \end{aligned}$$

Observemos que los últimos dos términos de la ecuación anterior son martingalas, en consecuencia Z_t es una martingala y como $Z_0 = 1$, se sigue que $E[Z_t] = 1 \forall t \geq 0$. \square

Teorema 5.3. (*Cambio de medida para un proceso Poisson compuesto*)

Utilizando las definiciones de la proposición (5.3), definamos la medida de probabilidad \tilde{P}

$$\begin{aligned} \tilde{P}(A) &= \int_A Z_T dP \\ &= \int_A e^{(\lambda - \tilde{\lambda})T} \prod_{i=1}^{N_T} \frac{\tilde{\lambda} \tilde{f}(Y_i)}{\lambda f(Y_i)} dP. \end{aligned}$$

Entonces, bajo \tilde{P} , el proceso Q_t es un proceso Poisson compuesto con intensidad $\tilde{\lambda} > 0$ y saltos con función de densidad \tilde{f} .

Demostración. La demostración se basa en encontrar la función generadora de momentos de Q_t bajo la medida \tilde{P} , ver [6, 18, 21]. \square

5.2.3. Cambio de medida para una difusión con saltos

Supongamos que tenemos lo siguiente:

- Un movimiento browniano W .

- Un proceso Poisson compuesto $Q_t = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i$ con intensidad $\lambda > 0$ y saltos con función de densidad f .
- W, N, Y, Q son independientes.

Proposición 5.4. Sean $\tilde{\lambda} > 0$ una constante, \tilde{f} una función de densidad y Θ un proceso adaptado a una filtración \mathcal{F} .

Si definimos el proceso Z como $Z_t = H_t G_t$ con

$$H_t = \exp \left\{ - \int_0^t \Theta_u dW_u - \frac{1}{2} \int_0^t \Theta_u^2 du \right\},$$

$$G_t = e^{(\lambda - \tilde{\lambda})t} \prod_{i=1}^{N_t} \frac{\tilde{\lambda} \tilde{f}(Y_i)}{\lambda f(Y_i)},$$

entonces Z es una martingala tal que $E[Z_t] = 1 \forall t \geq 0$.

Demostración. Utilizando el cuadro (3.2), sabemos que $\langle H, G \rangle_t = 0$ y aplicando la fórmula de Itô a Z obtenemos

$$\begin{aligned} Z_t &= Z_0 + \int_0^t H_{s-} dG_s + \int_0^t G_{s-} dH_s \\ &= 1 + \int_0^t H_{s-} dG_s + \int_0^t G_{s-} dH_s, \end{aligned}$$

por las proposiciones (5.2) y (5.3) sabemos que G y H son martingalas, en consecuencia Z también lo es y se sigue que $E[Z_t] = E[Z_0] = 1$. \square

Teorema 5.4. (Teorema de Girsanov para difusiones con saltos)

Utilizando la proposición anterior, definamos la medida de probabilidad \tilde{P} como

$$\begin{aligned} \tilde{P} &= \int_A Z_T dP \\ &= \int_A \exp \left\{ - \int_0^T \Theta_u dW_u - \frac{1}{2} \int_0^T \Theta_u^2 du \right\} e^{(\lambda - \tilde{\lambda})T} \prod_{i=1}^{N_T} \frac{\tilde{\lambda} \tilde{f}(Y_i)}{\lambda f(Y_i)} dP. \end{aligned}$$

Entonces, bajo \tilde{P} , el proceso

$$\tilde{W}_t = W_t + \int_0^t \Theta_s ds,$$

es un movimiento browniano, $Q_t = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i$ es un proceso Poisson compuesto con intensidad $\tilde{\lambda} > 0$ y la función de densidad del tamaño de los saltos es \tilde{f} .

Demostración. Ver [6, 18, 21]. □

Observación 5.1. Si tomamos $\tilde{\lambda} = \lambda$ y $\tilde{f} = f$, nos encontramos nuevamente en el caso del Teorema de Girsanov para el movimiento browniano. Utilizaremos este hecho más adelante con el objeto de obtener una fórmula para valuar opciones del tipo europeo bajo el modelo de Merton.

Corolario 5.1. Si en el Teorema de Girsanov para difusiones con saltos, utilizamos $\Theta_t = \frac{\alpha - r}{\sigma}$, $\tilde{\lambda} = \lambda$ y $\tilde{f} = f$, entonces \tilde{P} es una medida equivalente martingala y bajo dicha medida

$$S_t = S_0 \exp \left[\left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 - \lambda \kappa \right) t + \sigma \tilde{W}_t + \sum_{i=1}^{N_t} X_i \right].$$

Demostración. Utilizando la ecuación (5.1.2) de la demostración de Teorema (5.1) sabemos que

$$dS_t = (\alpha - \lambda \kappa) S_t dt + \sigma S_t dW_t + S_{t-} dQ_t.$$

Como S tiene un número finito de saltos en el intervalo $[0, T]$, $T < \infty$ y dt es la medida de Lebesgue (ver [5] para la definición de esta medida), lo anterior puede ser escrito como

$$\begin{aligned} dS_t &= \alpha S_t dt + \sigma S_t dW_t + S_{t-} d(Q_t - \lambda \kappa t) \\ &= \alpha S_t dt + \sigma S_t d \left(\tilde{W}_t - \frac{\alpha - r}{\sigma} t \right) + S_{t-} d(Q_t - \lambda \kappa t) \\ &= r S_t dt + \sigma S_t d\tilde{W}_t + S_{t-} d(Q_t - \lambda \kappa t). \end{aligned}$$

Observando que los dos últimos términos de esta expresión son martingalas bajo \tilde{P} y utilizando el Teorema (4.2) concluimos que \tilde{P} es una medida equivalente martingala.

Por otra parte, reordenando términos

$$dS_t = (r - \lambda\kappa) S_t dt + \sigma S_t d\tilde{W}_t + S_t dQ_t,$$

y por el Teorema (5.1)

$$S_t = S_0 \exp \left[\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 - \lambda\kappa \right) t + \sigma \tilde{W}_t + \sum_{i=1}^{N_t} X_i \right].$$

□

5.3. Solución del modelo de Merton

Teorema 5.5. *Sea C una opción Call del tipo europeo con fecha de vencimiento T , subyacente S y precio de ejercicio K , sea r la tasa libre de riesgo. Entonces, bajo el modelo de Merton, el precio de la opción en el tiempo $t \leq T$ está dado por:*

$$C_t^{Mer} = \sum_{j \geq 0} \frac{e^{-\lambda\tau} (\lambda\tau)^j}{j!} C_t^{BS}(S_j, \sigma_j),$$

en donde

$$\tau = T - t$$

$$S_j = S_t \exp \left[j\mu + \frac{j\delta^2}{2} - \lambda\kappa\tau \right]$$

$$\sigma_j = \sqrt{\sigma^2 + \frac{j\delta^2}{\tau}}.$$

$C_t^{BS}(S_j, \sigma_j)$ es el precio de una opción Call del tipo europeo bajo el modelo de Black-Scholes, con un valor de S_j para el subyacente y volatilidad de σ_j .

Demostración. Para facilitar la notación se utilizará la función $H(S_T)$ para representar el payoff $(S_T - K)_+$ y todas las esperanzas serán bajo la medida equivalente martingala \tilde{P} del Corolario (5.1).

De acuerdo a la fórmula de valuación neutral al riesgo

$$C_t^{Mer} = e^{-r\tau} E[H(S_T)|\mathcal{F}_t],$$

justo como se realizó en el modelo de Black-Scholes, expresando S_T en términos de S_t y utilizando la independencia de $W_T - W_t$ y $N_T - N_t$ con \mathcal{F}_t , esto es igual a

$$C_t^{Mer} = e^{-r\tau} E[H(S_T)],$$

por el Corolario (5.1) y condicionando sobre el proceso Poisson obtenemos

$$\begin{aligned} C_t^{Mer} &= e^{-r\tau} E \left[H \left(S_t \exp \left\{ \left(r - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda\kappa \right) \tau + \sigma \tilde{W}_\tau + \sum_{i=1}^{N_\tau} X_i \right\} \right) \right] \\ &= e^{-r\tau} \sum_{j \geq 0} \frac{e^{-\lambda\tau} (\lambda\tau)^j}{j!} E \left[H \left(S_t \exp \left\{ \left(r - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda\kappa \right) \tau + \sigma \tilde{W}_\tau + \sum_{i=1}^j X_i \right\} \right) \right]. \end{aligned}$$

La expresión dentro de la función exponencial, tiene distribución normal con media $\left(r - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda\kappa \right) \tau + j\mu$ y varianza $\sigma^2\tau + j\delta^2$, por lo que puede ser reescrita como

$$\left(r - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda\kappa \right) \tau + j\mu + \sqrt{\frac{\sigma^2\tau + j\delta^2}{\tau}} \tilde{W}_\tau,$$

y definiendo Φ como $\Phi = e^{-r\tau} \sum_{j \geq 0} \frac{e^{-\lambda\tau} (\lambda\tau)^j}{j!}$ tenemos

$$C_t^{Mer} = \Phi E \left[H \left(S_t \exp \left\{ \left(r - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda\kappa \right) \tau \right\} + j\mu + \sqrt{\frac{\sigma^2\tau + j\delta^2}{\tau}} \tilde{W}_\tau \right) \right],$$

agregando un cero de la forma $\frac{j\delta^2}{2\tau} - \frac{j\delta^2}{2\tau}$

$$\Phi E \left[H \left(S_t \exp \left\{ \left[r - \frac{1}{2} \left(\sigma^2 + \frac{j\delta^2}{\tau} \right) + \frac{j\delta^2}{2\tau} - \lambda\kappa \right] \tau + j\mu + \sqrt{\sigma^2 + \frac{j\delta^2}{\tau}} \widetilde{W}_\tau \right\} \right) \right],$$

definiendo $\sigma_j^2 = \sigma^2 + \frac{j\delta^2}{\tau}$

$$\begin{aligned} & \Phi E \left[H \left(S_t \exp \left\{ \left(r - \frac{1}{2} \sigma_j^2 + \frac{j\delta^2}{2\tau} - \lambda\kappa \right) \tau + j\mu + \sigma_j \widetilde{W}_\tau \right\} \right) \right] \\ &= \Phi E \left[H \left(S_t \exp \left\{ j\mu + \frac{j\delta^2}{2} - \lambda\kappa\tau \right\} \exp \left\{ \left(r - \frac{1}{2} \sigma_j^2 \right) \tau + \sigma_j \widetilde{W}_\tau \right\} \right) \right] \\ &= e^{-r\tau} \sum_{j \geq 0} \frac{e^{-\lambda\tau} (\lambda\tau)^j}{j!} E \left[H \left(S_j \exp \left\{ \left(r - \frac{1}{2} \sigma_j^2 \right) \tau + \sigma_j \widetilde{W}_\tau \right\} \right) \right], \end{aligned}$$

utilizando la demostración del Teorema(4.7) llegamos a lo deseado. \square

5.4. Comparación del modelo de Merton con el de Black-Scholes

5.4.1. Distribución de los rendimientos

Recordemos que en el modelo de Black-Scholes, el precio de la acción está dado por la ecuación diferencial estocástica

$$S_t = S_0 \exp \left[\left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W_t \right]. \quad (5.4.1)$$

Por otra parte, bajo los supuestos del modelo de Merton, la expresión correspondiente es:

$$S_t = S_0 \exp \left[\left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda\kappa \right) t + \sigma W_t + \sum_{i=1}^{N_t} X_i \right]. \quad (5.4.2)$$

Utilizando la ecuación (5.4.1) podemos deducir la distribución de los rendimientos logarítmicos:

$$\text{Ln} \left(\frac{S_t}{S_0} \right) = \left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W_t,$$

esta última expresión nos indica que, bajo los supuestos del modelo de Black-Scholes, los rendimientos logarítmicos tienen una distribución normal con media $\left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2} \right) t$ y varianza $\sigma^2 t$.

Para obtener la distribución de los rendimientos bajo el modelo de Merton, procedemos de la siguiente manera.

Sea $Z_t = \text{Ln} \left(\frac{S_t}{S_0} \right)$, tenemos

$$P[Z_t \leq z] = P \left[\left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda \kappa \right) t + \sigma W_t + \sum_{i=1}^{N_t} X_i \leq z \right],$$

condicionando sobre N_t

$$P[Z_t \leq z] = \sum_{n=0}^{\infty} P[N_t = n] P \left[\left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda \kappa \right) t + \sigma W_t + \sum_{i=1}^n X_i \leq z | N_t = n \right],$$

observemos que el término

$$\left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda \kappa \right) t + \sigma W_t + \sum_{i=1}^n X_i,$$

tiene una distribución normal con media

$$\left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda \kappa \right) t + n\mu,$$

y varianza

$$\sigma^2 t + n\delta^2,$$

Por lo tanto, $P[Z_t \leq z]$, puede reescribirse como

$$P[Z_t \leq z] = \sum_{n=0}^{\infty} P[N_t = n] F_{N(0,1)}\left(\frac{z-a}{b}\right),$$

en donde

- $F_{N(0,1)}$ es la función de distribución de una variable aleatoria normal con media 0 y varianza 1.
- $a = \left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda\kappa\right)t + n\mu$.
- $b = \sqrt{\sigma^2 t + n\delta^2}$.

Las siguientes imágenes muestran las densidades de los rendimientos para distintos parámetros de μ , λ y δ .

- Para distintos valores de μ

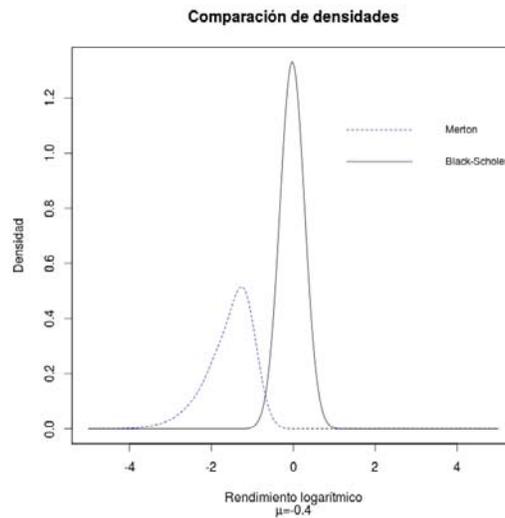


Figura 5.4.1: $t = 1, \alpha = 0.02, \sigma = 0.3, \lambda = 1, \delta = 0.1$

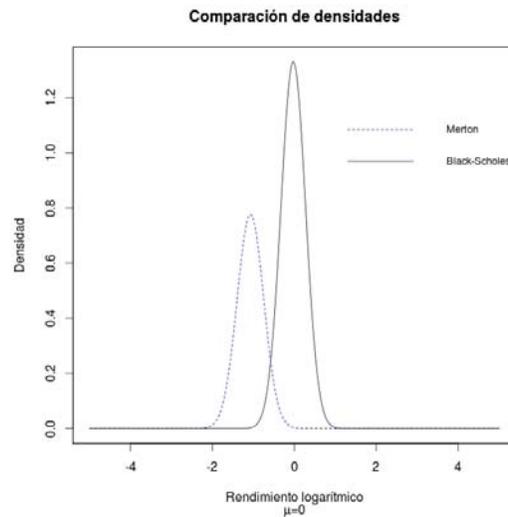


Figura 5.4.2: $t = 1, \alpha = 0.02, \sigma = 0.3, \lambda = 1, \delta = 0.1$

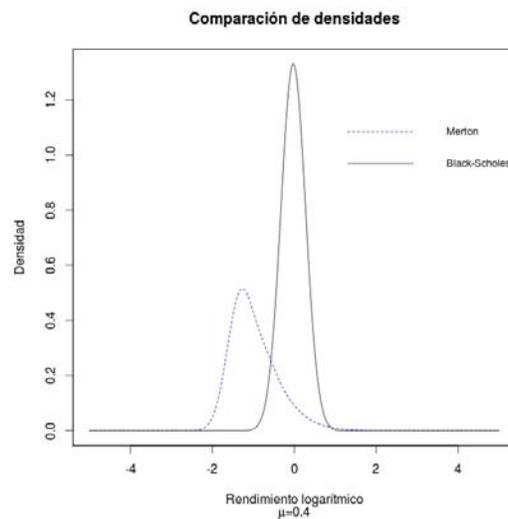


Figura 5.4.3: $t = 1, \alpha = 0.02, \sigma = 0.3, \lambda = 1, \delta = 0.1$

Como podemos observar, en el modelo de Merton, tenemos mayor libertad en cuanto a la distribución de los rendimientos.

El parámetro μ sirve como indicador del sesgo de los rendimientos, si μ es negativo, los saltos provocarán una caída en los precios y en consecuencia, rendimientos negativos. Por el contrario si μ es positivo, los precios mostrarán un crecimiento, provocando rendimientos positivos.

- Para distintos valores de δ

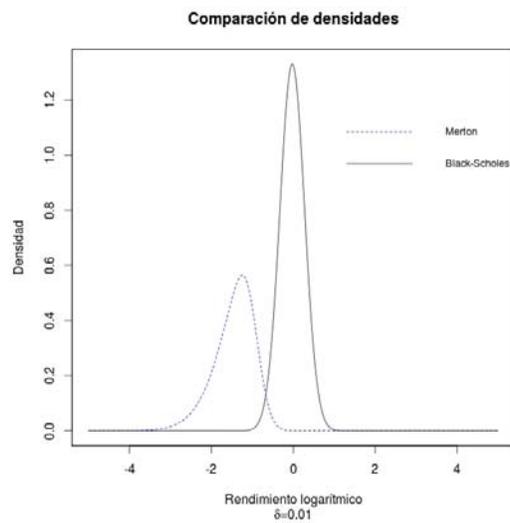


Figura 5.4.4: $t = 1, \alpha = 0.02, \sigma = 0.3, \lambda = 1, \mu = -0.5$

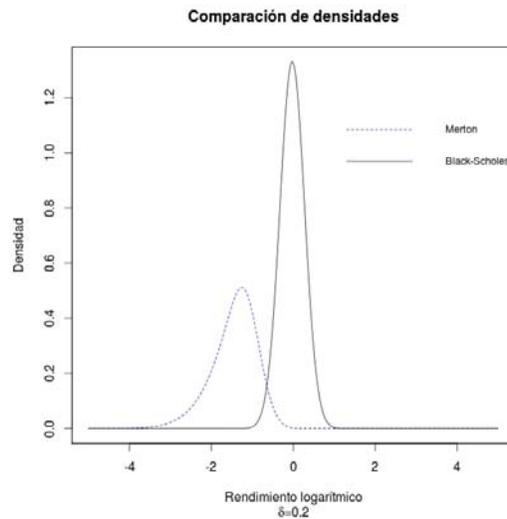


Figura 5.4.5: $t = 1, \alpha = 0.02, \sigma = 0.3, \lambda = 1, \mu = -0.5$

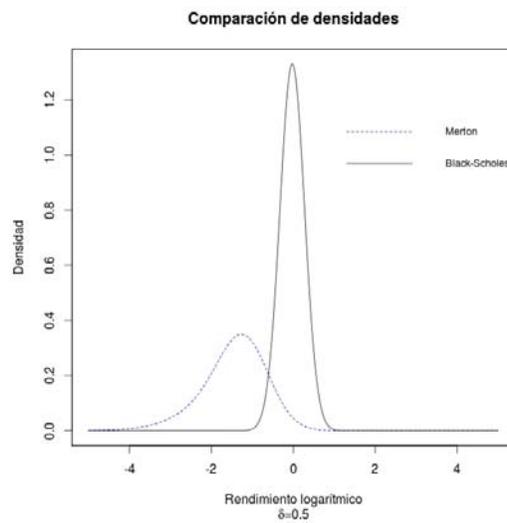


Figura 5.4.6: $t = 1, \alpha = 0.02, \sigma = 0.3, \lambda = 1, \mu = -0.5$

El parámetro δ controla la curtosis de la distribución, es decir que tan plana o “puntiaguda” está. Conforme δ crece, se presenta una gráfica cada vez más

plana y en consecuencia con colas más pesadas.

- Para distintos valores de λ

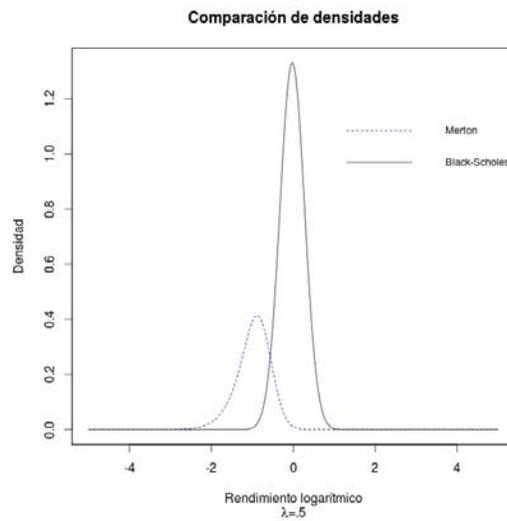


Figura 5.4.7: $t = 1, \alpha = 0.02, \sigma = 0.3, \delta = 0.1, \mu = -0.5$

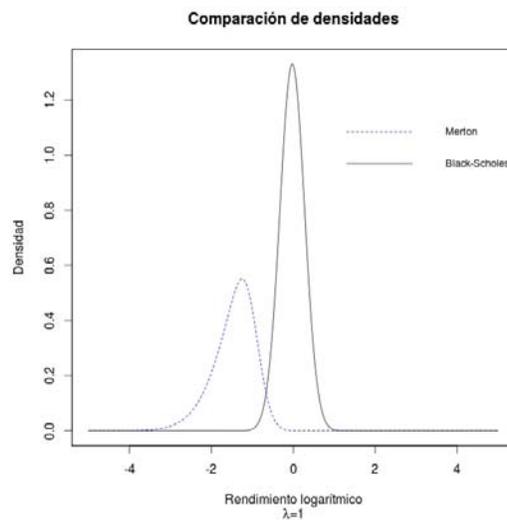


Figura 5.4.8: $t = 1, \alpha = 0.02, \sigma = 0.3, \delta = 0.1, \mu = -0.5$

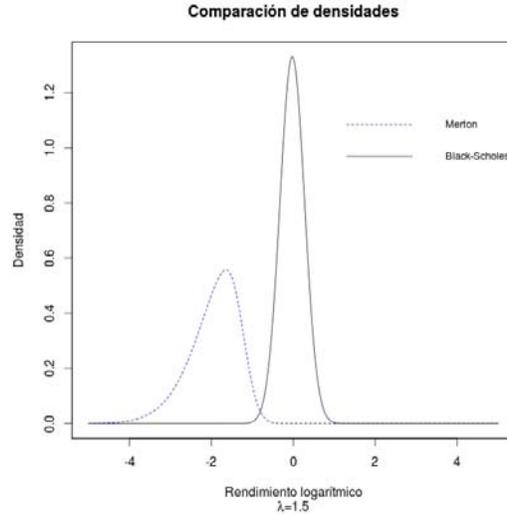


Figura 5.4.9: $t = 1, \alpha = 0.02, \sigma = 0.3, \delta = 0.1, \mu = -0.5$

El parámetro λ , sirve como parámetro de localización, si $\lambda = 0$ (no hay saltos), nos encontramos en el caso particular del modelo de Black-Scholes y la distribución de los rendimientos coincide.

Si $\lambda > 0$ y $\mu < 0$, la distribución se localizará en mayor proporción sobre los rendimientos negativos, mientras que si $\mu > 0$, ésta se localizará sobre los rendimientos positivos.

Además, λ también tiene influencia en las colas de la distribución, entre más grande sea este parámetro más pesadas se vuelven las colas (hay más saltos, es decir, un mayor número de eventos extremos).

5.4.2. Calibración de los modelos

Se realizó la calibración de los modelos de la siguiente manera:

1. El día 3 de Octubre de 2014, se tomaron los precios de opciones Call europeas de la empresa Apple Inc (NASDAQ-APPL), el precio de cierre de la acción en ese día fue de 99.62 USD.

2. Fueron consideradas dos fechas de vencimiento, una de corto plazo (18 de Octubre de 2014) y otra de largo plazo (16 de Enero de 2016)
3. Se filtraron dichos precios de acuerdo a la diferencia entre el precio Bid y el precio Ask (spread), sólo se consideraron aquellas opciones cuyo spread fue menor o igual a 0.5; lo anterior se realizó con la finalidad de sólo considerar instrumentos líquidos.
4. Para cada fecha de vencimiento se tomaron los precios Mid (P_{Mid}) (promedio entre el precio Bid y el Ask)

La tasa libre de riesgo utilizada fue de $r = 1\%$ y el plazo al vencimiento se calculó como

$$\tau = \frac{D_T - D_t}{360},$$

en donde

D_T corresponde al día de la fecha de vencimiento correspondiente.

D_t corresponde al 3 de Octubre de 2014.

Para cada modelo se resolvió el siguiente problema de optimización:

$$\text{mín} \sum \left(\frac{(P_{Mid} - P_{Modelo})^2}{P_{Mid}} \right) \quad (5.4.3)$$

en el caso del modelo de Black-Scholes, sujeto a:

$$\sigma \geq 0$$

en el caso del modelo de Merton, sujeto a: $\delta \geq 0, \sigma \geq 0, \lambda \geq 0$

La suma corre sobre los precios de cada conjunto de datos.

En las siguientes figuras, podemos ver los resultados de la calibración.

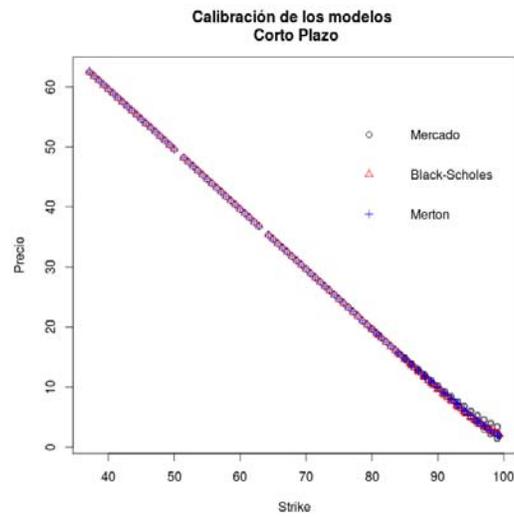


Figura 5.4.10: Calibración de los modelos para el corto plazo. $\sigma_{BS} = 0.23$, $\sigma_{Merton} = 0.16$, $\lambda = 1.28$, $\mu = -0.17$, $\delta = 0.06$

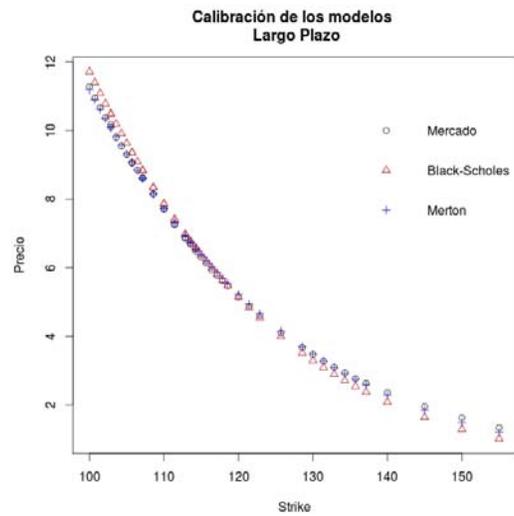


Figura 5.4.11: Calibración de los modelos para el largo plazo. $\sigma_{BS} = 0.23$, $\sigma_{Merton} = 0.25$, $\lambda = 0.16$, $\mu = 0.02$, $\delta = 0.22$

En el Cuadro (5.1), se muestran los errores de la calibración de acuerdo al plazo de las opciones y a la ecuación (5.4.3).

	Merton	Black-Scholes
Corto Plazo	0.00049	0.00064
Largo Plazo	0.005	0.25

Cuadro 5.1: Errores de la calibración

Como podemos observar, para opciones con un vencimiento en el corto plazo, los modelos se desempeñan de manera similar.

En cambio, para opciones con un vencimiento en el largo plazo, el modelo de Merton tiene un mejor desempeño que el modelo de Black-Scholes. Esto es intuitivamente lógico, ya que en un periodo de corto plazo, el mercado no espera la presencia de saltos, mientras que para un periodo de tiempo más amplio, es razonable presenciarlos y el modelo de Merton permite capturar estas expectativas del mercado.

Por otra parte, el modelo de Merton permite un mejor ajuste debido a que tenemos a nuestra disposición cuatro parámetros para realizar la calibración, μ , δ , λ y σ ; mientras que en modelo de Black-Scholes, sólo tenemos un parámetro disponible, σ , lo que vuelve a este último modelo más “rígido”, mientras que el primero es más “flexible”.

5.4.3. Precios.

Recordemos que el precio de una opción es una función creciente de la volatilidad, la cual se mide con la desviación estándar.

En el caso del modelo de Black-Scholes, la volatilidad está dada por:

$$\sigma_{BS}\sqrt{t}.$$

En el modelo de Merton, además de considerar σ_{Merton}^2 , necesitamos considerar la volatilidad generada por el proceso Poisson, lo que nos lleva a una

volatilidad de:

$$\sqrt{(\sigma_{Merton}^2 + \lambda\delta^2 + \lambda\mu^2)t}.$$

Esto implica, que si $\sigma_{BS} = \sigma_{Merton}$, entonces los precios de las opciones bajo el modelo de Merton, siempre serán mayores o iguales a los del modelo de Black-Scholes.

En la siguiente figura, observamos que los precios del modelo de Merton, siempre se encuentran por arriba de aquellos precios obtenidos bajo los supuestos del modelo de Black-Scholes.

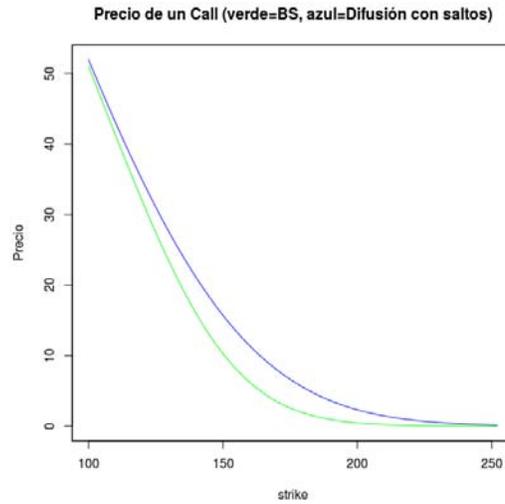


Figura 5.4.12: $S_0 = 150$, $r = 0.01$, $\sigma = 0.16$, $\lambda = 2$, $\mu = -0.141$, $\delta = 0.024$, $\tau = 1$

5.5. Imperfecciones en el modelo de Merton

La principal crítica al modelo de Merton radica en que el cambio de medida sólo afecta al movimiento browniano mientras que se conserva la distribución del proceso Poisson compuesto.

Esto es justificable si suponemos que tenemos un portafolio de activos para los cuales sus movimientos brownianos están correlacionados, pero sus componentes

de saltos son independientes (Merton considera los saltos como eventos propios de cada compañía y no como eventos relacionados con el mercado en general, es decir los saltos son diversificables y es así como justifica la decisión de sólo afectar al movimiento browniano).

Tal hipótesis implicaría que en el caso de portafolios altamente diversificados, por ejemplo los índices accionarios como el Índice de Precios y Cotizaciones (IPC) o el índice Standard and Poors 500, estos portafolios no presentarían saltos. Claramente esto no ocurre en la vida real (basta recordar la caída del índice S&P500 el día lunes 19 de octubre de 1987).

En cuanto a la implementación del modelo, observemos que ya no se cuenta con una forma analítica para calcular los precios de las opciones, si no que ahora dependemos de una serie convergente. Al momento de implementar un código para calcular dichos precios (ver Apéndice (B)), necesitamos un criterio para saber cuantos términos de la serie sumar, este número depende del parámetro λ , entra más grande sea λ , las probabilidades de tener n saltos incrementan y por lo tanto un mayor número de términos tendrán que sumarse.

5.5.1. Mercados incompletos

El modelo de Merton es un caso particular de un mercado incompleto, en estos mercados no todos los riesgos pueden ser eliminados, dicho de otra forma, no todos los derivados pueden ser replicados a través de una estrategia auto financiada. En consecuencia, al derivar la fórmula del Teorema (5.5), el argumento de suponer que existe un portafolio autofinanciado que replica el derivado, es incorrecto. Una interpretación más apropiada para utilizar la fórmula de valuación neutral al riesgo, es que la variable (esperanza condicional) $V_t = E_{\tilde{P}}[H(S_T) | \mathcal{F}_t]$ tiene la propiedad de minimizar la expresión (ver [3, 13, 16])

$$E_{\tilde{P}} \left[\left(e^{-r(T-t)} (H(S_T) - V_t) \right)^2 \right].$$

Es decir, utilizando la fórmula de valuación neutral al riesgo, estamos mini-

mizando el error cuadrático de cobertura.

Por último, en el caso de mercados incompletos, en lugar de tener un único precio libre de arbitraje, ahora contamos con un intervalo de precios libres de arbitraje (ver [7, 6, 2]).

Capítulo 6

Conclusiones

El modelo de Merton fue uno de los primeros modelos que consideró saltos en el precio del subyacente de una opción.

Como se observó, este modelo presenta ciertas mejoras y mayor flexibilidad con respecto al modelo de Black-Scholes. Sin embargo, se tiene que pagar el precio de ya no contar con una fórmula analítica para valorar opciones, lo que provoca que se requiera un mayor cuidado en su implementación computacional.

Además (al menos que se recurra a la calibración del modelo) la estimación de los parámetros λ , δ y μ no es clara.

Por otro lado, el modelo de Merton, presenta un mejor desempeño al momento de calibrarlo a los precios del mercado.

Pero más allá de favorecer a algún modelo y decir que hemos encontrado “uno mejor”, lo que realmente importa es entender las limitaciones y ventajas de cada uno; un modelo es sólo una ayuda para interpretar el mundo real y nunca podrá reflejarlo tal cual es.

Este trabajo nunca ha pretendido descartar el modelo de Black-Scholes y favorecer al de Merton (o viceversa), únicamente se buscó entender las ventajas y desventajas de cada uno, así como exponer estos temas sin la necesidad

de recurrir a herramientas matemáticas avanzadas (por ejemplo, se evitó el formalismo del concepto de martíngala local).

6.1. Posibles extensiones del trabajo

Debido a que el modelo de Merton es un ejemplo de mercado incompleto, este trabajo puede extenderse en investigar la forma de valorar derivados en este tipo de mercados, esto nos llevaría a la introducción de conceptos tales como la superreplicación y a la utilización de funciones de utilidad (ver [7, 2, 3, 20])

Por otra parte, el modelo de Merton puede extenderse para la valuación de opciones exóticas o derivados sobre tasas de interés (con la obtención de una fórmula análoga a la fórmula de Black 76).

Además, como este modelo es un caso particular de un modelo exponencial de Levy, es posible también extender este trabajo hacia el estudio de este tipo de procesos, los cuales también presentan discontinuidades en sus trayectorias pero ya no es necesario que los saltos tengan distribución lognormal o que se presenten un número finito de discontinuidades en un intervalo de tiempo (modelos más apropiados para modelar el llamado high frequency trading).

Apéndice A

Implementación del modelo de Black-Scholes en R

```
1 BSM.CALL=function(K,S0,r,sig,tao,tipo=1,D=0)
2 {
3 #Función para calcular el precio de un Call/Put europeo
4 utilizando la fórmula de Black-Scholes
5 #Parámetros de entrada
6 #K=Precio strike
7 #S0=precio spot del activo subyacente
8 #r=tasa libre de riesgo
9 #sig=volatilidad (anual)
10 #tao=plazo para el vencimiento (años) (T-t)
11 #tipo=Tipo de opción (1=Opción tipo Call, 2=Opción tipo
12 Put). Por default es un Call
13 #D=Dividendo
14 #Salida
15 #Precio de la opción de acuerdo al modelo de Black-
16 Scholes
```

APÉNDICE A. IMPLEMENTACIÓN DEL MODELO DE BLACK-SCHOLES EN R112

```
16
17
18 d1=(log(S0/K)+((r-D)+.5*(sig^2))*(tao))/(sig*sqrt(tao))
19 d2=d1-sig*sqrt(tao)
20     if(tipo[1]==1)
21     {
22     BSM.CALL=S0*exp(-D*tao)*pnorm(d1)-pnorm(d2)*K*exp(-
           r*tao)
23     return(BSM.CALL)
24     }
25     else
26     {
27     BSM.CALL=-1*(S0*exp(-D*tao)*pnorm(-1*d1)-pnorm(-1*
           d2)*K*exp(-r*tao))
28     return(BSM.CALL)
29     }
30 }
```

Apéndice B

Implementación del modelo de Merton en R .

```
1 merton_calleu=function(k,s0,r,sig,lam,mu,delta,tao,tipo
   =1,D=0)
2 {
3 #Función para calcular el precio de un call europeo
   utilizando el modelo de Merton de una difusión con
   saltos
4 #k->precio strike
5 #s0->Precio spot del subyacente
6 #r->tasa libre de riesgo(anual)
7 #sig ->volatilidad de la parte continua(anual)
8 #lam->Intensidad del proceso Poisson.
9 #delta->desviación estandar de la magnitud de los
   saltos(anual)
10 #mu-> Valor promedio (esperanza) de la magnitud de un
   salto(anual)
11 #tao->Plazo para el vencimiento (años)
12 #tipo->Tipo de opción (1 para Call, 2 para Put) Por
   default es Call Europea
```

APÉNDICE B. IMPLEMENTACIÓN DEL MODELO DE MERTON EN R .114

```
13 #D=Dividendo
14 #NOTA:ESTE ARCHIVO DEPENDE DEL ARCHIVO BSMCALL.R
15 source("BSMCALL.R") #Carga el archivo BSMCALL.R
16 precio=0
17 sig2=0
18 limsup=qpois(.999,max(tao*lam))+1 #para calcular el
    límite superior de la suma
19 s=0
20   for(i in 0:limsup)
21   {
22     s=s0*exp(i*mu+.5*i*delta^2-lam*(exp(mu+.5*delta^2)
        -1)*tao)
23     sig2=sqrt(sig^2+i*delta^2/tao)
24     precio=precio+dpois(i,lam*tao)*BSM.CALL(k,s,r,sig2,
        tao,tipo,D)
25   }
26   return(precio)
27 }
```

Bibliografía

- [1] BAXTER, M., AND RENNIE, A. *Financial Calculus An introduction to derivative pricing*. Cambridge University Press, 1996. [3.1](#)
- [2] BELLAMY, N., AND JEANBLANC, M. Incompleteness of markets driven by a mixed diffusion. *Finance and Stochastics. Springer 4* (2000), 209–222. [5.5.1](#), [6.1](#)
- [3] BINGHAM, N., AND KIESEL, R. *Risk-Neutral Valuation*. Springer, 2004. [2.2](#), [3.7](#), [4.1](#), [5.5.1](#), [6.1](#)
- [4] BLACK, F., AND SCHOLES, M. The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy 81* (1973), 637–654. [4](#), [4.2](#)
- [5] CAPINSKI, M., AND KOPP, E. *Measure, Integral and Probability*. Springer Verlag, 2003. [2.2](#), [5.2.3](#)
- [6] CONT, R., AND TANKOV, P. *Financial Modelling with Jump Processes*. Chapman & Hall CRC Financial Mathematics Series, 2004. [2.3.1](#), [2.3.1](#), [3.4.2](#), [3.5.1](#), [3.5.3](#), [3.12](#), [4.1](#), [5.2.1](#), [5.2.2](#), [5.2.3](#), [5.5.1](#)
- [7] ESPEN, B. F. *Option Theory with Stochastic Analysis. An introduction to mathematical finance*. Springer, 2004. [5.5.1](#), [6.1](#)
- [8] GLASSERMAN, P. *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*. Springer Verlag, 2003.

- [9] HARRISON, M., AND PLISKA, S. Martingales and stochastic integrals in theory of continuous trading. *Stochastic Processes and Their Applications* 11 (1981), 215–260. [4.1.1.1](#)
- [10] HAUG, E. *The Complete Guide to Option Pricing Formulas*. McGraw-Hil, 2006.
- [11] HULL, J. *Options, Futures and Other Derivatives*, septima edición ed. Pearson Hall Prentice Hall, 2009. [1.4](#)
- [12] JOSHI, M. *The concepts and practice of mathematical finance*. Cambridge University Press, 2008.
- [13] LAMBERTON, D., AND LAPEYRE, B. *Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance*. Chapman & Hall/CRC, 1996. [3.7](#), [3.4.2](#), [5.5.1](#)
- [14] MATSUDA, K. Introduction to merton jump diffusion model. Lecture notes, Diciembre 2004.
- [15] MERTON, R. Option pricing when underlying stock returns are discontinuous. *Journal of Financial Economics* 3 (1976), 125–144. [5.1](#)
- [16] MIKOSCH, T. *Elementary Stochastic Calculus With Finance in View*. World Scientific, 1999. [5.5.1](#)
- [17] OKSENDAL, B. *Stochastic Differential Equations*. Springer Verlag, 1995. [3.3.2](#), [3.7](#)
- [18] PRIVAULT, N. *Stochastic Finance: An Introduction with Market Examples*. Chapman & Hall/CRC Financial Mathematics Series, Diciembre 2013. [3.12](#), [5.1](#), [5.2.1](#), [5.2.2](#), [5.2.3](#)
- [19] PROTTER, P. E. *Stochastic Integration and Differential Equations*. Springer, 2005. [3.4.2](#), [3.5.1](#), [3.5.3](#), [4.1](#)
- [20] SCHOUTENS, W. *Levy Processes in Finance. Pricing Financial Derivatives*. John Wiley & Sons, Ltd, 2003. [6.1](#)

- [21] SHREVE, S. *Stochastic Calculus For Finance II: Continuous-Time Models*. Springer Finance, 2004. [2.2](#), [3.2](#), [3.4.2](#), [3.5.3](#), [5.1](#), [5.2.1](#), [5.2.2](#), [5.2.3](#)
- [22] SONDERMANN, D. *Introduction to Stochastic Calculus for Finance. A New Didactic Approach*. Springer, 2006. [3.1](#), [3.7](#)
- [23] STEELE, M. *Stochastic Calculus and Financial Applications*. Springer, 2001. [3.3.2](#), [3.3.2](#), [3.4.2](#)
- [24] WILMOTT, P. *Paul Wilmott on Quantitative Finance*. John Wiley & Sons, Ltd, 2006.