



# UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE QUÍMICA

DESARROLLO DE MODELOS MATEMÁTICOS POR  
MÉTODO PERTURBATIVO PARA FLUJO NO  
ISOTÉRMICO DE FLUIDOS NO NEWTONIANOS  
VISCOSOS QUE CUMPLEN CON LA LEY DE LA  
POTENCIA Y EL MODELO DE CROSS  
INCLUYENDO DISIPACIÓN VISCOSA

TESIS  
QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE  
INGENIERA QUÍMICA

PRESENTA  
MARÍA ELENA GRIS CORTÉS



MÉXICO, D.F.

2015



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**JURADO ASIGNADO:**

**PRESIDENTE:** Profesor: Vázquez Islas Manuel

**VOCAL:** Profesor: Herrera Nájera Rafael

**SECRETARIO:** Profesor: Chávez Castellanos Ángel Enrique

**1er. SUPLENTE:** Profesor: López Castillo Néstor Noé

**2do. SUPLENTE:** Profesor: Aguayo Vallejo Juan Pablo

**SITIO DÓNDE SE DESARROLLÓ EL TEMA:**

Universidad Nacional Autónoma de México, Facultad de Química, Departamento de Ingeniería Química

**ASESOR DEL TEMA:**

Dr. Ángel Enrique Chávez Castellanos

**SUSTENTANTE:**

María Elena Gris Cortés

## ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE DE TABLAS Y DIAGRAMAS.....	4
Índice de tablas.....	4
Índice de diagramas.....	4
Índice de gráficos.....	4
RESUMEN .....	6
ABSTRACT .....	7
I. OBJETIVOS .....	8
General.....	8
Específicos.....	8
II. INTRODUCCIÓN .....	9
III. ANTECEDENTES .....	10
Concepto de Viscosidad .....	10
Fluidos newtonianos.....	11
Fluidos no Newtonianos.....	11
Modelos Reológicos de los Fluidos no Newtonianos.....	12
IV. DESARROLLO DE MODELOS.....	15
Fluido Newtoniano.....	16
Ley de la Potencia por Método Perturbativo.....	20
Modelo de Cross por Método Perturbativo.....	26
V. PROPUESTA PARA LA SOLUCIÓN DE LOS MODELOS .....	30
Datos Experimentales .....	30
VI. TRABAJOS PREVIOS .....	35
VII. ANÁLISIS DE RESULTADOS.....	39
VIII. CONCLUSIONES .....	49
IX. TRABAJO FUTURO .....	51
X. REFERENCIAS .....	52
SIMBOLOGÍA.....	53
APÉNDICES.....	55
Apéndice A. Ecuaciones de Ley de la Potencia .....	55
Apéndice B. Ecuaciones del Modelo de Cross .....	63

## ÍNDICE DE TABLAS Y DIAGRAMAS

### Índice de tablas.

Tabla 1. Datos de la velocidad de deformación y viscosidad a diferentes temperaturas.	30
Tabla 2. Tabla comparativa de los resultados obtenidos a distintas temperaturas.	34
Tabla 3. Resumen de las ecuaciones de perfiles de temperatura y velocidad adimensionales para cada uno de los modelos estudiados.	39

### Índice de diagramas.

Diagrama 1. Placas paralelas con área A separadas b distancia una de otra, de las cuales la placa superior se mueve a una velocidad constante (Barnes, Hutton, & F.R.S., 1989)	10
Diagrama 2. Curva general teórica de flujo. (Cross, 1965)	12
Diagrama 3. Comportamiento típico de un fluido que sigue el modelo de Bingham (Bird R. B., 1992).	13
Diagrama 4. Comportamientos de fluidos que siguen el modelo de ley de la potencia. (Welty, Wicks, & Wilson, 2008)	13
Diagrama 5. Placas paralelas infinitas, la placa inferior está estática y la superior se mueve con una velocidad V en dirección positiva en el eje z (Bird R. B., 1963).	15

### Índice de gráficos.

Gráfico 1. Curvas de flujo para una solución acuosa de CMC a 1% p/p a diferentes temperatura (Cross, 1965).	31
Gráfico 2. Gráfica logarítmica de la velocidad de deformación y la viscosidad para una solución acuosa de CMC a 1% p/p a diferentes temperaturas.	31
Gráfico 3. Evaluación de $\eta$ con líneas de tendencia para datos de una solución acuosa de CMC al 1% p/p a diferentes temperaturas (Cross, 1965).	32
Gráfico 4. Evaluación de K y $\eta_0$ con líneas de tendencia para datos de una solución acuosa de CMC al 1% p/p a diferentes temperaturas (Cross, 1965).	33
Gráfico 5. Comparación de resultados en perfil de temperatura para fluido newtoniano (agua) cuando ambas placas se encuentran a la misma temperatura.	35
Gráfico 6. Comparación de resultados en perfil de velocidad para fluido newtoniano (agua) cuando ambas placas se encuentran a la misma temperatura.	36
Gráfico 7. Comparación de resultados en perfil de temperatura para fluido no newtoniano (solución acuosa de CMC) por ley de la potencia, cuando ambas placas se encuentran a la misma temperatura.	37

Gráfico 8. Comparación de resultados en perfil de velocidad para fluido no newtoniano (solución acuosa de CMC) por ley de la potencia, cuando ambas placas se encuentran a la misma temperatura.	37
Gráfico 9. Perfil de temperatura para un fluido newtoniano en un sistema de placas paralelas, que se encuentran a la misma temperatura, variando la velocidad a la que se mueve la placa superior (variación de Br).	43
Gráfico 10. Perfil de velocidad para un fluido newtoniano en un sistema de placas paralelas, que se encuentran a la misma temperatura, variando la velocidad a la que se mueve la placa superior (variación de Br).	43
Gráfico 11. Perfil de temperatura para un fluido newtoniano en un sistema adiabático de placas paralelas, variando la velocidad a la que se mueve la placa superior (variación de Br).	44
Gráfico 12. Perfil de velocidad para un fluido newtoniano en un sistema adiabático de placas paralelas, variando la velocidad a la que se mueve la placa superior (variación de Br).	45
Gráfico 13. Perfil de temperatura para un fluido no newtoniano en un sistema de placas paralelas que se encuentran a la misma temperatura para los modelos de ley de la potencia y Cross con magnitud del número de Brinkman $10^{-6}$ .	46
Gráfico 14. Perfil de velocidad para un fluido no newtoniano en un sistema de placas paralelas que se encuentran a la misma temperatura para los modelos de ley de la potencia y Cross con magnitud del número de Brinkman $10^{-6}$ .	47
Gráfico 15. Perfil de temperatura para un fluido no newtoniano en un sistema de placas paralelas que se encuentran a la misma temperatura para los modelos de ley de la potencia y Cross con magnitud del número de Brinkman $10^{-8}$ .	47
Gráfico 16. Perfil de velocidad para un fluido no newtoniano en un sistema de placas paralelas que se encuentran a la misma temperatura para los modelos de ley de la potencia y Cross con magnitud del número de Brinkman $10^{-8}$ .	48

## **RESUMEN**

El objetivo principal de este proyecto es modelar los perfiles de temperatura y velocidad para fluidos no newtonianos, que cumplen con la ley de la potencia y el modelo de Cross, entre dos placas paralelas infinitas, una de las cuales se mueve con una velocidad tal, que provoca que los efectos de la disipación viscosa sean importantes. Para hacer esto, se considera que las propiedades características de cada fluido como la viscosidad y la conductividad térmica son dependientes de la temperatura.

Para presentar dichos modelos se consideraron dos casos de condiciones de frontera, el primero cuando ambas placas son mantenidas a la misma temperatura y el segundo, en el que la placa inferior se mantiene a la misma temperatura y se considera que el calor en la placa superior es nulo, es decir, la operación es adiabática.

Para facilitar la comprensión del método utilizado, sus ventajas y desventajas, previamente se modelaron los perfiles de temperatura y velocidad para fluidos newtonianos.

Posteriormente se presentan soluciones analíticas para dichos perfiles, con las cuales se encontró que los efectos de la disipación viscosa en el perfil de temperatura son más importantes que en los del perfil de velocidad.

## **ABSTRACT**

The main purpose of this project is to model the temperature and velocity profiles in viscous non-Newtonian fluids, which fits the power-law and Cross models, between two infinite parallel planes, one of which is moving fast enough that viscous dissipation effects are important. It is considered that characteristic properties of each fluid, such as viscosity and thermal conductivity, are temperature dependent.

To present the models, two cases of boundary conditions were taken into consideration, in the first one both plates are maintained at the same temperature, and in the second the lower plate is maintained at a constant temperature while the heat through the upper plate is assumed to be zero, namely, an adiabatic operation.

To make easier the comprehension of the method used, its advantages and disadvantages, the temperature and velocity profiles for Newtonian fluids were modelled to start.

Subsequently, an analytical solution to those profiles are presented, from which it is settled that the viscous dissipation effects in the temperature profile are larger than those in the velocity profile.

## **I. OBJETIVOS**

### **General.**

Obtener modelos matemáticos que consideren los efectos de la disipación viscosa en el estudio del flujo no isotérmico de fluidos no newtonianos viscosos que cumplen con la ley de la potencia y el modelo de Cross en un sistema con geometría de flujo de Couette. Este trabajo está enfocado en el tratamiento de un proceso no isotérmico, de manera que se consideran los balances de cantidad de movimiento y de energía.

### **Específicos.**

En el presente trabajo se pretende:

- Realizar un análisis dimensional de las ecuaciones resultantes del balance de movimiento y energía.
- Utilizar herramientas del cálculo diferencial e integral y los métodos perturbativos para desarrollar dichos modelos.
- Hacer una comparación de los perfiles de velocidad y temperatura obtenidos para los diferentes modelos reológicos analizados.

## **II. INTRODUCCIÓN**

En la actualidad, el uso de materiales y productos más complejos se ha vuelto una actividad común. Por lo que el desarrollo de dichos materiales y de maquinaria que permita procesarlos es considerado una necesidad. En el caso particular de la industria cosmética y del cuidado personal, en los últimos años se han introducido cada vez con mayor impacto distintos tipos de modificadores reológicos que abarcan desde ingredientes naturales como las gomas hasta polímeros complejos, que no sólo son utilizados como agentes espesantes, sino que además se emplean para mejorar la estabilidad, textura, aplicación y sensación residual de los productos. Si bien es cierto que el uso de estos materiales ha venido a revolucionar la industria permitiendo el desarrollo de nuevos productos y presentaciones, también con esto se generan nuevas dificultades, por lo que conocer el comportamiento de los fluidos puede ayudar no sólo a darle un mejor uso a los materiales, sino a tener un mejor control y cuidado de los procesos de fabricación. Por ejemplo, el conocer el comportamiento de una mascarilla o un jabón líquido permitiría saber cuál es la velocidad a la que el producto debe ser fabricado o envasado para facilitar su manipulación, o para evitar el producto modifique sus propiedades o que los activos pierdan su efectividad debido a un aumento de temperatura.

### III. ANTECEDENTES

#### Concepto de Viscosidad

La viscosidad es una propiedad física que indica la medida de la fricción del fluido o de la resistencia a fluir de una sustancia. El concepto de viscosidad lo introdujo Isaac Newton cuando en la publicación "Principia" afirmó que la resistencia que surge de la falta de deslizamiento de las partes del líquido, en igualdad de condiciones, es proporcional a la velocidad con la que las partes del líquido se separan una de la otra (Barnes, Hutton, & F.R.S., 1989); la falta de deslizamiento es lo que hoy en día se conoce como viscosidad. La mejor manera de ejemplificar esto es mediante el siguiente diagrama.

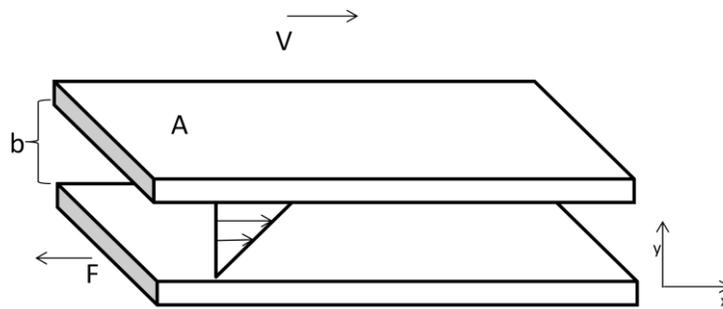


Diagrama 1. Placas paralelas con área A separadas b distancia una de otra, de las cuales la placa superior se mueve a una velocidad constante (Barnes, Hutton, & F.R.S., 1989)

La fuerza por unidad de área necesaria para producir el movimiento es  $F/A$  la cual es proporcional al gradiente de velocidad (velocidad de deformación o velocidad de corte)  $V/b$ . La constante de proporcionalidad es el coeficiente de viscosidad. Matemáticamente el principio sugerido por Newton puede ser expresado de la siguiente manera.

$$\tau_{yx} = -\mu \frac{dV_x}{dy} \quad (I)$$

La viscosidad puede depender de distintas variables como la temperatura, presión, concentración del fluido, velocidad o tiempo de corte. Por ejemplo, la viscosidad de fluidos newtonianos decrece con el incremento de la temperatura, aproximadamente de acuerdo con la relación de Arrhenius; en términos generales mientras mayor sea la viscosidad mayor será la dependencia con la temperatura. El efecto de la presión

sobre la viscosidad tiende a ser ignorado, porque de todos los mencionados anteriormente éste es el que menor impacto tiene, a no ser que el fluido esté diseñado para trabajar bajo condiciones de presión altas.

### **Fluidos newtonianos.**

Cuando un fluido cumple con la ley de Newton se le conoce como newtoniano, esto quiere decir que la viscosidad es un coeficiente que no depende del esfuerzo cortante o de la velocidad de deformación, sino que los relaciona en una proporción simple. El comportamiento newtoniano característico se presenta cuando la viscosidad no depende de la velocidad de deformación de corte y el único esfuerzo generado es el esfuerzo cortante; además la viscosidad es constante con respecto al tiempo que se aplica el corte y el esfuerzo cortante cae a cero en el momento en que el movimiento del fluido para.

### **Fluidos no Newtonianos.**

Todo fluido que no cumple con la ley de Newton y con las características mencionadas anteriormente es considerado un fluido no newtoniano; es decir, los fluidos en los que la viscosidad sí cambia con la velocidad de deformación.

En algunos casos la viscosidad crece al aumentar la velocidad de deformación, lo cual recibe el nombre de comportamiento dilatante. Pero en la mayoría de los casos la viscosidad decrece al aumentar la velocidad de deformación, a lo cual se le conoce como comportamiento pseudoplástico; que al ser el más común, también es el más estudiado.

En los materiales que presentan este último comportamiento se ha podido analizar que la pseudoplasticidad se puede explicar de acuerdo a la formación y ruptura de interacciones entre las moléculas y al desenmarañamiento de éstas. En ausencia de velocidad de deformación, una sustancia se encontraría en un estado de reposo, en el cual la movilidad en las moléculas, causada por la temperatura, produce la

desaparición simultánea y formación de interacciones entre las distintas moléculas, siendo el resultado neto nulo; dichas interacciones son las responsables de la viscosidad del fluido a gradiente de velocidad cero  $\eta_0$ . Pero también puede ocurrir que cuando la velocidad de deformación es muy grande, las interacciones entre las moléculas se pierdan y se pierda la estructura presente, cuando esto sucede se le conoce como viscosidad del fluido a gradiente de velocidad infinita  $\eta_\infty$ .

Así que en estas sustancias, existe una zona en que la velocidad de deformación es tan pequeña que la viscosidad se considera constante; lo mismo ocurre si la velocidad es demasiado grande. Estas zonas son conocidas como las regiones newtonianas altas y bajas respectivamente. Entre estas dos zonas, la viscosidad cambia con respecto a la velocidad de deformación.

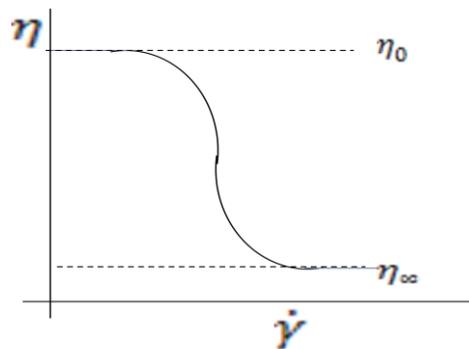


Diagrama 2. Curva general teórica de flujo. (Cross, 1965)

### Modelos Reológicos de los Fluidos no Newtonianos.

Existen gran cantidad de modelos que buscan expresar la relación entre el esfuerzo cortante y la velocidad de deformación o gradiente de velocidades.

*El modelo de Bingham* es un modelo de dos parámetros en el cual el comportamiento que se describe es que la sustancia permanece rígida mientras el esfuerzo cortante sea menor a un valor característico, pasando ese punto el comportamiento del fluido se asemeja al de un fluido newtoniano.

$$\tau_{yx} = \eta \dot{\gamma} + \tau_0 \quad (II)$$

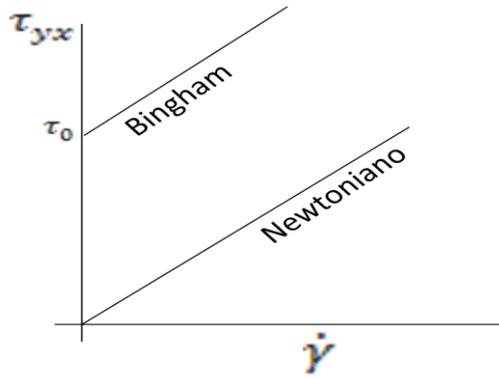


Diagrama 3. Comportamiento típico de un fluido que sigue el modelo de Bingham (Bird R. B., 1992).

El modelo de Ostwald-de Waele mejor conocido como ley de la potencia, es otro modelo de dos parámetros, uno de los cuales ( $n$ ) es una medida del grado de desviación del comportamiento newtoniano. Cuando  $n$  es menor que la unidad se trata de un pseudoplástico, si es mayor de la unidad es dilatante, cuando  $n$  es igual a la unidad, la ley de la potencia se transforma en la ley de Newton de la viscosidad (Bird R. B., 1992).

$$\tau_{yx} = -\eta \left( \frac{dV_x}{dy} \right)^{n-1} \frac{dV_x}{dy} \quad (III)$$

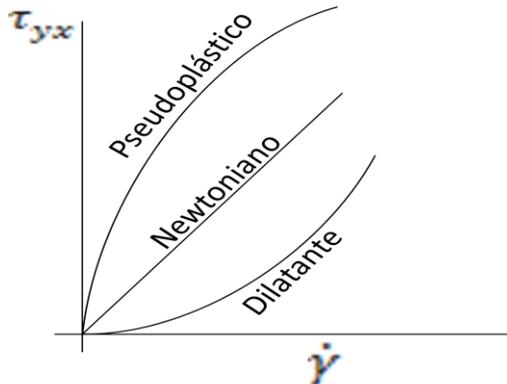


Diagrama 4. Comportamientos de fluidos que siguen el modelo de ley de la potencia. (Welty, Wicks, & Wilson, 2008)

El modelo de Cross es un modelo capaz de predecir toda la curva general del flujo (Diagrama 2) pero que necesita cuatro parámetros. La ecuación es la siguiente:

$$\eta = \eta_0 + \left( \frac{\eta_0 - \eta_\infty}{1 + K\dot{\gamma}^m} \right) \quad (IV)$$

Lo interesante de este modelo es que cuando  $\eta \ll \eta_0$  la ecuación se reduce al modelo de ley de la potencia, que es un caso particular del modelo de Cross.

Para poder construir un modelo como estos es necesario tener en cuenta que el modelo debe ajustarse a los datos experimentales en un amplio rango de velocidad de deformación, debe tener la menor cantidad de constantes independientes, algunas constantes deben poder evaluarse fácilmente con los datos experimentales y todas ellas deben tener un significado físico real.

En el caso específico de éste, las constantes  $\eta_0$ ,  $\eta$  y K fueron determinadas con datos experimentales como se muestra en la sección IV.

## IV. DESARROLLO DE MODELOS

En esta sección se presenta el desarrollo de las ecuaciones de momentum y energía que conforman el modelo propuesto. Dicho modelo se estudió en una geometría sencilla como lo es el flujo de Couette y considerando que tanto la conductividad térmica como la viscosidad son dependientes de la temperatura. El método seguido para el desarrollo de éste es aplicable a todo tipo de fluidos viscosos, newtonianos y no newtonianos, por lo que a continuación se muestran ejemplos para ambos casos. Obsérvese el diagrama 1.

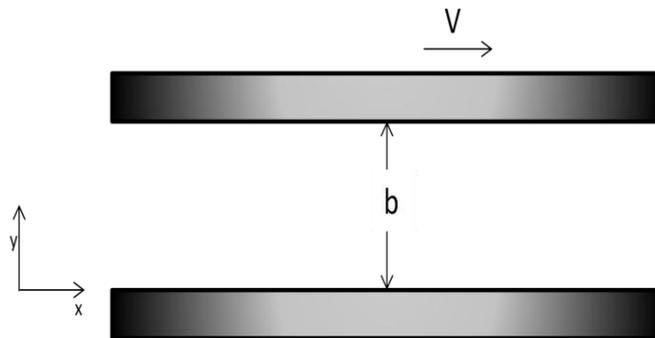


Diagrama 5. Placas paralelas infinitas, la placa inferior está estática y la superior se mueve con una velocidad  $V$  en dirección positiva en el eje  $z$  (Bird, Stewart, & Lightfoot, 2002)

Para la solución de las ecuaciones de momentum y energía se proponen variables adimensionales para la temperatura, la velocidad y la coordenada  $x$ , así como funciones de la dependencia de la conductividad térmica y la viscosidad con la temperatura; mientras que el parámetro perturbativo utilizado será el número de Brinkman (Rice, 1995). Para todos los casos las variables adimensionales serán las siguientes:

### *Variables*

#### 1. Temperatura

$$\theta = \frac{T - T_0}{T_0}$$

## 2. Velocidad

$$\phi = \frac{v_z}{V}$$

## 3. Coordenada

$$\xi = \frac{x}{b}$$

Los análisis que se muestran a continuación se llevaron a cabo en un sistema en el que ambas placas tienen la misma temperatura, sin que esto represente que no pueda llevarse a cabo el mismo procedimiento para otras condiciones de frontera.

### *Condiciones de frontera*

$$x = 0 ; v_z = 0 ; T = T_0$$

$$x = b ; v_z = V ; T = T_0$$

Pero éstas también deben ser adimensionales, así que se reescriben en términos de las variables adimensionales.

$$\xi = 0 ; \phi = 0 ; \theta = 0$$

$$\xi = 1 ; \phi = 1 ; \theta = 0$$

### **Fluido Newtoniano.**

(Bird R. B., 1963)

Las ecuaciones de momentum y energía en estado estacionario son las siguientes:

$$\frac{d}{dx} \left( k \frac{dT}{dx} \right) + \mu \left( \frac{dv_z}{dx} \right)^2 = 0 \quad (1)$$

$$\frac{d}{dx} \left( \mu \frac{dv_z}{dx} \right) = 0 \quad (2)$$

Con las variables adimensionales se reescriben las ecuaciones, que quedan como sigue:

$$\frac{d}{d\xi} \left( \frac{\mu}{\mu_0} \frac{d\phi}{d\xi} \right) = 0 \quad (3)$$

$$\frac{d}{d\xi} \left( \frac{k}{k_0} \frac{d\theta}{d\xi} \right) + Br \frac{\mu}{\mu_0} \left( \frac{d\phi}{d\xi} \right)^2 = 0 \quad (4)$$

*Funciones dependientes de la temperatura*

1. Conductividad térmica

$$\frac{k}{k_0} = 1 + \alpha_1 \theta + \alpha_2 \theta^2 + \dots + \alpha_n \theta^n + \dots \quad (5)$$

2. Inverso de la viscosidad (fluidez)

$$\frac{\mu_0}{\mu} = 1 + \beta_1 \theta + \beta_2 \theta^2 + \dots + \beta_n \theta^n + \dots \quad (6)$$

En la ecuación de energía se encuentra el número adimensional de Brinkman que indica la tendencia de un sistema a mostrar efectos de disipación viscosa. Y está definido como:

$$Br = \frac{\mu_0 V^2}{k_0 T_0}$$

Una vez conocidas las condiciones de frontera, se puede seguir con la solución. Si se integra una vez la ecuación (3) se obtiene la solución:

$$\frac{d\phi}{d\xi} = C_1 \frac{\mu_0}{\mu} \quad (7)$$

Sustituyendo la ecuación (7) en la (6) se llega a la siguiente ecuación:

$$\frac{d}{d\xi} \left( \frac{k}{k_0} \frac{d\theta}{d\xi} \right) + Br \frac{\mu_0}{\mu} C_1^2 = 0 \quad (8)$$

Como puede observarse, en la ecuación (8) están presentes las funciones propuestas, así que se sustituyen (3) y (4) en (8).

$$\frac{d}{d\xi} \left( (1 + \alpha_1\theta + \alpha_2\theta^2 + \dots + \alpha_n\theta^n) \frac{d\theta}{d\xi} \right) + Br(1 + \beta_1\theta + \beta_2\theta^2 + \beta_n\theta^n + \dots) C_1^2 = 0 \quad (9)$$

Esta ecuación se resuelve y con las condiciones de frontera se obtiene una primera solución, una aproximación de orden cero; lo que significa que esta solución no considera los términos que señalan la dependencia de la viscosidad y conductividad térmica con respecto a la temperatura.

$$\theta = \frac{Br}{2} (\xi - \xi^2) \quad (10)$$

Ahora se propone una solución que considere órdenes superiores (Nayfeh, 1973).

$$\theta = \frac{Br}{2} (\xi - \xi^2) (1 + Br\theta_1 + Br^2\theta_2 + \dots + Br^n\theta_n) \quad (11)$$

Siendo  $\theta_i$  independiente de Br. El número de Brinkman se utilizará como parámetro perturbativo.

Posteriormente se sustituye esta solución en la ecuación (9) y se agrupan los términos dependiendo de la potencia a la que se encuentra el parámetro perturbativo (Br), esto para determinar  $\theta_i$ .

$$Br: \quad (\xi - \xi^2) \frac{d^2\theta_1}{d\xi^2} + (2 - 4\xi) - 2\theta_1 = \left( -\frac{1}{2} + 3\xi - 3\xi^2 \right) \alpha_1 + (-\xi + \xi^2) \beta_1 \quad (12)$$

$$\begin{aligned} Br^2: \quad & (\xi - \xi^2) \frac{d^2\theta_2}{d\xi^2} + (2 - 4\xi) \frac{d\theta_2}{d\xi} - 2\theta_2 \\ & = \left( -\frac{1}{2} \alpha_1 \xi^2 + \alpha_1 \xi^3 - \frac{1}{2} \alpha_1 \xi^4 \right) \frac{d^2\theta_1}{d\xi^2} + (-2\alpha_1 \xi + 6\alpha_1 \xi^2 - 4\alpha_1 \xi^3) \frac{d\theta_1}{d\xi} \\ & + (-\beta_1 \xi + \beta_1 \xi^2 - \alpha_1 + 6\alpha_1 \xi - 6\alpha_1 \xi^2) \theta_1 + \left( \frac{5}{4} \alpha_2 - \frac{1}{4} \beta_2 \right) \xi^4 \\ & + \left( -\frac{5}{2} \alpha_2 + \frac{1}{2} \beta_2 \right) \xi^3 + \left( \frac{3}{2} \alpha_2 - \frac{1}{4} \beta_2 \right) \xi^2 + \left( -\frac{1}{4} \alpha_2 \right) \xi \end{aligned} \quad (13)$$

La ecuación (12) es una ecuación diferencial, la cual podría resultar más sencilla o compleja dependiendo del sistema que se esté analizando, es por eso que el método de solución para ésta podría ser diferente, pero la ecuación presente puede ser resuelta mediante el método de coeficientes indeterminados y ya que el término no homogéneo de la ecuación es un polinomio, se plantea la siguiente solución del mismo orden, se calculan sus derivadas y se sustituyen obteniendo las siguientes ecuaciones que sirven para determinar los coeficientes (Bird R. B., 1960):

$$-12A + 3\alpha_1 - \beta_1 = 0 \rightarrow A = \frac{1}{12}(3\alpha_1 - \beta_1)$$

$$6A - 6B - 3\alpha_1 + \beta_1 = 0 \rightarrow B = \frac{1}{12}(-3\alpha_1 + \beta_1)$$

$$2B - 2C + \frac{1}{2}\alpha_1 = 0 \rightarrow C = \frac{1}{12}\beta_1$$

Ahora se tiene la función  $\theta_1$

$$\theta_1 = \frac{1}{12}[(3\alpha_1 - \beta_1)\xi^2 + (-3\alpha_1 + \beta_1)\xi + \beta_1] \quad (14)$$

Sustituyendo la ecuación (14) y sus respectivas derivadas en la ecuación (13) y siguiendo el mismo método que se utilizó para obtener  $\theta_1$ , se tiene a la solución.

$$\begin{aligned} \theta_2 = \frac{1}{720} & [(90\alpha_1^2 - 36\alpha_1\beta_1 + 2\beta_1^2 - 60\alpha_2 + 12\beta_2)\xi^4 \\ & + (-180\alpha_1^2 + 72\alpha_1\beta_1 - 4\beta_1^2 + 120\alpha_2 - 24\beta_2)\xi^3 \\ & + (90\alpha_1^2 - 3\alpha_1\beta_1 - 4\beta_1^2 - 60\alpha_2 + 6\beta_2)\xi^2 + (-33\alpha_1\beta_1 + 6\beta_1^2 + 6\beta_2)\xi \\ & + (-3\alpha_1\beta_1 + 6\beta_1^2 \\ & + 6\beta_2)] \end{aligned} \quad (15)$$

Sustituyendo (14) y (15) en (11) se obtiene el perfil de temperatura para este caso.

$$\begin{aligned} \theta = \frac{Br}{2}(\xi - \xi^2) - \frac{Br^2}{8}\alpha_1(\xi^2 - 2\xi^3 + \xi^4) + \frac{Br^2}{24}\beta_1(\xi - 2\xi^3 + \xi^4) \\ + \frac{Br^3}{24}\left(\frac{3}{2}\alpha_1^2 - \alpha_2\right)(\xi^3 - 3\xi^4 + 3\xi^5 - \xi^6) \\ + \frac{Br^3}{480}\alpha_1\beta_1(-\xi - 10\xi^2 + 10\xi^3 + 25\xi^4 - 36\xi^5 + 12\xi^6) \\ + \frac{Br^3}{240}\beta_2(\xi - 5\xi^4 + 6\xi^5 - 2\xi^6) + \frac{Br^3}{720}\beta_1^2(3\xi - 5\xi^3 + 3\xi^5 - \xi^6) \\ + \dots \end{aligned} \quad (16)$$

Con la solución anterior, es posible calcular el perfil de velocidad utilizando el mismo método que se siguió para obtener el perfil de temperatura. Es importante señalar que este método permite realizar un análisis muy exacto agregando términos en los que el parámetro perturbativo esté elevado a mayores potencias, el usuario puede elegir hasta que aproximación se quiere llegar.

A continuación se presenta nuevamente la ecuación de la velocidad adimensional.

$$\frac{d}{d\xi} \left( \frac{\mu_0}{\mu} \frac{d\phi}{d\xi} \right) = 0 \quad (17)$$

Se sustituye la serie propuesta al inicio.

$$\frac{d}{d\xi} \left( (1 + \beta_1\theta + \beta_2\theta^2 + \dots + \beta_n\theta^n) \frac{d\phi}{d\xi} \right) = 0 \quad (18)$$

Se calcula la aproximación de orden cero.

$$\phi = \xi \quad (19)$$

Ahora se propone la solución que considera los órdenes superiores.

$$\phi = \xi(1 + Br\theta_1 + Br^2\theta_2 + \dots + Br^n\theta_n) \quad (20)$$

Sustituyendo (20) en la ecuación diferencial del perfil de velocidad (18) y considerando sólo los términos de orden dos e inferior se obtiene un sistema de ecuaciones diferenciales similar a los mostrados en las ecuaciones (12) y (13), para el cual se obtiene las dos soluciones con las que es posible plantear la solución general del perfil de velocidad del mismo modo que se hizo con el de temperatura obteniendo lo siguiente:

$$\begin{aligned} \phi = \xi + \frac{Br}{12}\beta_1(\xi - 3\xi^2 + 2\xi^3) + \frac{Br}{240}(\alpha_1\beta_1 - 2\beta_2)(-\xi + 10\xi^3 - 15\xi^4 + 6\xi^5) \\ + \frac{Br}{48}\beta_1^2(-12\xi - \xi^2 + 16\xi^3 - 5\xi^4 + 2\xi^5) \end{aligned} \quad (21)$$

### **Ley de la Potencia por Método Perturbativo.**

(Turian, 1965)

En este modelo, las ecuaciones de momentum y energía cambian ligeramente:

$$\frac{d}{dx} \left( \eta \frac{dv_z}{dx} \right) = 0 \quad (22)$$

$$\frac{d}{dx} \left( k \frac{dT}{dx} \right) + \eta \left( \frac{dv_z}{dx} \right)^2 = 0 \quad (23)$$

El número de Brinkman queda definido de esta manera para esta sección:

$$Br = \frac{\eta_1 V^2}{k_0 T_0}$$

Esas ecuaciones se cambian por las adimensionales que tras ser ordenadas quedan como sigue.

$$\frac{d}{d\xi} \left( \frac{\eta}{\eta_1} \frac{d\phi}{d\xi} \right) = 0 \quad (24)$$

$$\frac{d}{d\xi} \left( \frac{k}{k_0} \frac{d\theta}{d\xi} \right) + Br \frac{\eta}{\eta_1} \left( \frac{d\phi}{d\xi} \right)^2 = 0 \quad (25)$$

Debido al comportamiento que presentan los fluidos sujetos a este modelo no se puede considerar que la función que relaciona la viscosidad con la temperatura sea tan sencilla como en el caso anterior, por lo que se proponen otras funciones.

$$\frac{k}{k_0} = 1 + \alpha_1 \theta + \alpha_2 \theta^2 + \dots + \alpha_n \theta^n \quad (26)$$

$$\frac{d\phi}{d\xi} = c^s (1 + \gamma_1 \theta + \gamma_2 \theta^2 + \dots) \quad (27)$$

$$\frac{d\phi}{d\xi} = c \frac{\eta_1}{\eta} \quad (28)$$

Sustituyendo todas estas funciones auxiliares en la ecuación de energía (25) y arreglándola se llega a la ecuación (29).

$$\frac{d}{d\xi} \left\{ (1 + \alpha_1 \theta + \alpha_2 \theta^2 + \dots) \frac{d\theta}{d\xi} \right\} = -Br (c^{s+1} (1 + \gamma_1 \theta + \gamma_2 \theta^2 + \dots)) \quad (29)$$

Igual que en el caso anterior se propone una solución mediante soluciones parciales.

$$\phi = \phi_0 + Br \phi_1 + Br^2 \phi_2 + \dots \quad (30)$$

$$\theta = Br \theta_1 + Br^2 \theta_2 + Br^3 \theta_3 + \dots \quad (31)$$

$$c = c_0 + Br c_1 + Br^2 c_2 + \dots \quad (32)$$

Por el teorema del binomio y basándose en la ecuación (32) se puede plantear

$$c^{s+1} = c_0^{s+1} + (s+1)c_0^s c_1 Br + \left( (s+1)c_0^s c_2 + \frac{s(s+1)}{2} c_0^{s-1} c_1^2 \right) Br^2 \quad (33)$$

Estas soluciones son sustituidas en la ecuación (29)

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\xi} \left\{ (1 + \alpha_1 \theta + \alpha_2 \theta^2 + \dots) \frac{d\theta}{d\xi} \right\} \\ & = -Br \left( \left( c_0^{s+1} + (s+1)c_0^s c_1 Br \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \left( (s+1)c_0^s c_2 + \frac{s(s+1)}{2} c_0^{s-1} c_1^2 \right) Br^2 \right) (1 + \gamma_1 \theta + \gamma_2 \theta^2 + \dots) \right) \quad (34) \end{aligned}$$

Tras desarrollar todos los productos, se agrupan los términos con respecto a la potencia del parámetro perturbativo; es decir:

$$Br: \frac{d^2 \theta_1}{d\xi^2} = -c_0^{s+1} \quad (35)$$

$$Br^2: \frac{d^2 \theta_2}{d\xi^2} + \alpha_1 \left( \frac{d\theta_1}{d\xi} \right)^2 + \alpha_1 \theta_1 \frac{d^2 \theta_1}{d\xi^2} = -(s+1)c_0^s c_1 - c_0^{s+1} \gamma_1 \theta_1 \quad (36)$$

$$\begin{aligned} Br^3: \quad & \frac{d^2 \theta_3}{d\xi^2} + \alpha_1 \theta_1 \frac{d^2 \theta_2}{d\xi^2} + 2\alpha_1 \frac{d\theta_1}{d\xi} \frac{d\theta_2}{d\xi} + \alpha_1 \theta_2 \frac{d^2 \theta_1}{d\xi^2} + \alpha_2 \theta_1^2 \frac{d^2 \theta_1}{d\xi^2} + 2\alpha_2 \theta_1 \left( \frac{d\theta_1}{d\xi} \right)^2 \\ & = -(s+1)c_0^s c_2 - \frac{(s^2 + s)}{2} c_0^{s-1} c_1^2 - (s+1)c_0^s c_1 \gamma_1 \theta_1 - c_0^{s+1} \gamma_1 \theta_2 \\ & \quad - c_0^{s+1} \gamma_2 \theta_1^2 \quad (37) \end{aligned}$$

Como puede observarse, las ecuaciones resultantes son más sencillas que en el caso anterior y simplemente requiere hacerse la integración; deben ser resueltas de forma sucesiva para poder obtener las siguientes soluciones:

$$\theta_1 = -\frac{c_0^{s+1} \xi^2}{2} + \frac{c_0^{s+1} \xi}{2} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} \theta_2 = & \left( -\frac{3\alpha_1 (c_0^{s+1})^2}{24} + \frac{\gamma_1 (c_0^{s+1})^2}{24} \right) \xi^4 + \left( \frac{3\alpha_1 (c_0^{s+1})^2}{12} - \frac{\gamma_1 (c_0^{s+1})^2}{12} \right) \xi^3 \\ & + \left( -\frac{\alpha_1 (c_0^{s+1})^2}{8} - \frac{(s+1)c_0^s c_1}{2} \right) \xi^2 \\ & + \left( \frac{\gamma_1 (c_0^{s+1})^2}{24} + \frac{(s+1)c_0^s c_1}{2} \right) \xi \quad (39) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\theta_3 = & \left( -\frac{15\alpha_1^2(c_0^{s+1})^3}{240} + \frac{3\alpha_1\gamma_1(c_0^{s+1})^3}{120} + \frac{5\alpha_2(c_0^{s+1})^3}{120} - \frac{\gamma_1^2(c_0^{s+1})^3}{720} - \frac{\gamma_2(c_0^{s+1})^3}{120} \right) \xi^6 \\
& + \left( \frac{15\alpha_1^2(c_0^{s+1})^3}{80} - \frac{3\alpha_1\gamma_1(c_0^{s+1})^3}{40} - \frac{5\alpha_2(c_0^{s+1})^3}{40} + \frac{\gamma_1^2(c_0^{s+1})^3}{240} \right. \\
& \left. + \frac{\gamma_2(c_0^{s+1})^3}{40} \right) \xi^5 \\
& + \left( -\frac{3\alpha_1^2(c_0^{s+1})^3}{16} + \frac{5\alpha_1\gamma_1(c_0^{s+1})^3}{96} - \frac{\alpha_1(s+1)c_0^s c_1 c_0^{s+1}}{4} + \frac{\alpha_2(c_0^{s+1})^3}{8} \right. \\
& \left. + \frac{\gamma_1(s+1)c_0^s c_1 c_0^{s+1}}{12} - \frac{\gamma_2(c_0^{s+1})^3}{48} \right) \xi^4 \\
& + \left( \frac{3\alpha_1^2(c_0^{s+1})^3}{48} + \frac{\alpha_1\gamma_1(c_0^{s+1})^3}{48} + \frac{3\alpha_1(s+1)c_0^s c_1 c_0^{s+1}}{6} - \frac{\alpha_2(c_0^{s+1})^3}{24} \right. \\
& \left. - \frac{\gamma_1(s+1)c_0^s c_1 c_0^{s+1}}{6} - \frac{\gamma_1^2(c_0^{s+1})^3}{144} \right) \xi^3 \\
& + \left( -\frac{\alpha_1\gamma_1(c_0^{s+1})^3}{48} - \frac{\alpha_1(s+1)c_0^s c_1 c_0^{s+1}}{4} - \frac{(s+1)c_0^s c_2}{2} \right. \\
& \left. - \frac{(s^2+s)c_0^{s-1}c_1^2}{4} \right) \xi^2 \\
& + \left( -\frac{\alpha_1\gamma_1(c_0^{s+1})^3}{480} + \frac{\gamma_1^2(c_0^{s+1})^3}{240} + \frac{\gamma_2(c_0^{s+1})^3}{240} + \frac{\gamma_1(s+1)c_0^s c_1 c_0^{s+1}}{12} \right. \\
& \left. + \frac{(s+1)c_0^s c_2}{2} + \frac{(s^2+s)c_0^{s-1}c_1^2}{4} \right) \xi \quad (40)
\end{aligned}$$

Que al ser sustituidas en la ecuación (31) llevan a la solución del perfil de temperatura.

$$\begin{aligned}
\theta = & \frac{1}{2} Br(c_0^{s+1})(\xi - \xi^2) - \frac{1}{24} Br^2 \gamma_1(c_0^{s+1})(-\xi + 2\xi^3 - \xi^4) \\
& - \frac{1}{24} Br^2(s+1)c_0^s c_1(-12\xi + 12\xi^2) - \frac{1}{8} Br^2 \alpha_1(c_0^{s+1})^2(\xi^2 - 2\xi^3 + \xi^4) \\
& + \frac{1}{2880} Br^3 \gamma_1^2(c_0^{s+1})^3(12\xi^2 - 20\xi^3 + 12\xi^5 - 4\xi^6) \\
& + \frac{1}{2880} Br^3 \gamma_1(s+1)c_0^s c_1(c_0^{s+1})(240\xi - 480\xi^3 + 240\xi^4) \\
& + \frac{1}{2880} Br^3(s+1)c_0^s c_2(1440\xi - 1440\xi^2) \\
& + \frac{1}{2880} Br^3(s^2+s)c_1^2(c_0^{s-1})(720\xi - 720\xi^2) \\
& + \frac{1}{480} Br^3 \alpha_1 \gamma_1(c_0^{s+1})^3(-\xi - 10\xi^2 + 10\xi^3 + 25\xi^4 - 36\xi^5 + 12\xi^6) \\
& + \frac{1}{480} Br^3 \alpha_1(s+1)c_0^s c_1(c_0^{s+1})(-120\xi^2 + 240\xi^3 - 120\xi^4) \\
& + \frac{1}{48} Br^3 \alpha_1^2(c_0^{s+1})^3(3\xi^3 - 9\xi^4 + 9\xi^5 - 3\xi^6) \\
& + \frac{1}{48} Br^3 \alpha_2(c_0^{s+1})^3(-2\xi^3 + 6\xi^4 - 6\xi^5 + 2\xi^6) \\
& + \frac{1}{240} Br^3 \gamma_2(c_0^{s+1})^3(-5\xi^4 + 6\xi^5 - 2\xi^6) \quad (41)
\end{aligned}$$

La cual se sustituye en la ecuación (27) para obtener el perfil de velocidad.

$$\begin{aligned}
\phi = & c_0^s \xi + s c_0^{s-1} c_1 Br \xi + \frac{1}{12} Br \gamma_1 c_0^s (c_0^{s+1})(3\xi^2 - 2\xi^3) \\
& + \frac{1}{12} Br^2 \gamma_1 s c_0^{s-1} (c_0^{s+1}) c_1 (3\xi^2 - 2\xi^3) \\
& + \frac{1}{12} Br^2 \gamma_1 (s+1) c_0^{2s} c_1 (3\xi^2 - 2\xi^3) \\
& + \frac{1}{720} Br^2 \gamma_1^2 c_0 (c_0^{s+1})^2 (15\xi^2 - 15\xi^4 + 6\xi^5) \\
& + \frac{1}{240} Br^2 \alpha_1 \gamma_1 c_0^s (c_0^{s+1})^2 (-10\xi^3 + 15\xi^4 - 6\xi^5) \\
& + \frac{1}{12} Br^2 \gamma_2 c_0^s (c_0^{s+1})^2 (10\xi^3 - 15\xi^4 + 6\xi^5) + s c_0^{s-1} c_2 Br^2 \xi \\
& + \frac{(s^2 - s) c_0^{s-2} c_1^2 Br^2}{2} \xi \quad (42)
\end{aligned}$$

Por las condiciones de frontera se sabe que

$$\begin{aligned}
sc_0^{s-1}c_1Br\xi + \frac{1}{12}Br\gamma_1c_0^s(c_0^{s+1})(3\xi^2 - 2\xi^3) + \frac{1}{12}Br^2\gamma_1sc_0^{s-1}(c_0^{s+1})c_1(3\xi^2 - 2\xi^3) \\
+ \frac{1}{12}Br^2\gamma_1(s+1)c_0^{2s}c_1(3\xi^2 - 2\xi^3) \\
+ \frac{1}{720}Br^2\gamma_1^2c_0(c_0^{s+1})^2(15\xi^2 - 15\xi^4 + 6\xi^5) \\
+ \frac{1}{240}Br^2\alpha_1\gamma_1c_0^s(c_0^{s+1})^2(-10\xi^3 + 15\xi^4 - 6\xi^5) \\
+ \frac{1}{12}Br^2\gamma_2c_0^s(c_0^{s+1})^2(10\xi^3 - 15\xi^4 + 6\xi^5) + sc_0^{s-1}c_2Br^2\xi \\
+ \frac{(s^2 - s)c_0^{s-2}c_1^2Br^2}{2}\xi \approx 0 \quad (43)
\end{aligned}$$

De lo cual se puede obtener las siguientes constantes:

$$c_0^n = 1 \quad (44)$$

$$sc_1 = -\frac{1}{12}\gamma_1 \rightarrow c_1 = -\frac{1}{12}\gamma_1n_0 \quad (45)$$

$$sc_2 = \frac{13}{1440}\gamma_1^2 - \frac{1}{96}\gamma_1^2n_0 \rightarrow c_2 = \frac{13}{1440}\gamma_1^2n_0 - \frac{1}{96}\gamma_1^2n_0^2 \quad (46)$$

Las cuales, al ser sustituidas en las ecuaciones de temperatura (41) y velocidad (42) llevan a lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\phi = \xi - \frac{1}{12}Br\gamma_1(\xi - 3\xi^2 + 2\xi^3) \\
+ \frac{1}{720}Br^2\gamma_1^2((-5n_0 + 4)\xi + 15(n_0 - 1)\xi^2 - 10(n_0 - 2)\xi^3 - 15\xi^4 \\
+ 6\xi^5) + \frac{1}{240}Br^2(\alpha_1\gamma_1 - 2\gamma_2)(\xi - 10\xi^3 + 15\xi^4 - 6\xi^5) \quad (47)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\theta = & \frac{1}{2}Br(\xi - \xi^2) - \frac{1}{24}Br^2\gamma_1(n_0\xi - (1 + n_0)\xi^2 + 2\xi^3 - \xi^4) - \frac{1}{8}Br^2\alpha_1(\xi^2 - 2\xi^3 + \xi^4) \\
& + \frac{1}{2880}Br^3\gamma_1^2\left((-15n_0^2 - 17n_0 + 10)\xi - 3(6 + n_0(1 - 5n_0))\xi^2\right. \\
& \left. + 20(1 + 2n_0)\xi^3 - 20(1 + n_0)\xi^4 + 12\xi^5 - 4\xi^6\right) \\
& + \frac{1}{480}Br^3\alpha_1\gamma_1(-\xi + 10n_0\xi^2 - 10(1 + 2n_0)\xi^3 + 5(7 + 2n_0)\xi^4 - 36\xi^5 \\
& + 12\xi^6) + \frac{1}{48}Br^3(3\alpha_1^2 - 2\alpha_2)(-\xi^2 + 3\xi^4 - 3\xi^5 + \xi^6) \\
& + \frac{1}{240}Br^3\gamma_2(\xi - 5\xi^4 + 6\xi^5 - 2\xi^6) \quad (48)
\end{aligned}$$

### Modelo de Cross por Método Perturbativo

La ecuación siguiente es el modelo de Cross, aunque tal vez debiera presentarse antes que el modelo de ley de la potencia, puesto que éste es un caso particular del modelo de Cross, pero se dejó al final por ser el más complejo de todos.

$$\eta = \eta_\infty + \left( \frac{\eta_0 - \eta_\infty}{1 + K\dot{\gamma}^m} \right) \quad (49)$$

$$\eta = \eta_\infty + \left( \frac{\eta_0 - \eta_\infty}{1 + K \left( \frac{dv_z}{dx} \right)^m} \right) \quad (50)$$

Las ecuaciones de momentum y energía en estado estacionario son las mismas que en el caso anterior (22) y (23), en ellas se procede a sustituir el modelo (50)

$$\frac{d}{dx} \left( \eta \frac{dv_z}{dx} \right) = 0 \quad (22)$$

$$\frac{d}{dx} \left( k \frac{dT}{dx} \right) + \eta \left( \frac{dv_z}{dx} \right)^2 = 0 \quad (23)$$

$$\frac{d}{dx} \left\{ \left[ \eta_\infty + \left( \frac{\eta_0 - \eta_\infty}{1 + K \left( \frac{dv_z}{dx} \right)^m} \right) \right] \frac{dv_z}{dx} \right\} = 0 \quad (51)$$

$$\frac{d}{dx} \left( k \frac{dT}{dx} \right) + \left( \eta + \left( \frac{\eta_0 - \eta}{1 + K \left( \frac{dv_z}{dx} \right)^m} \right) \right) \left( \frac{dv_z}{dx} \right)^2 = 0 \quad (52)$$

El parámetro perturbativo vuelve a ser el número de Brinkman

$$Br = \frac{\eta_0 V^2}{k T_0} \quad (53)$$

Con éste y las variables adimensionales se plantea la ecuación adimensional de velocidad.

$$\frac{V \eta_0}{b^2} \frac{d}{d\xi} \left[ \frac{\eta}{\eta_0} + \left( \frac{1 - \frac{\eta}{\eta_0}}{1 + K \left( \frac{V}{b} \frac{d\phi}{d\xi} \right)^m} \right) \right] \frac{d\phi}{d\xi} = 0 \quad (54)$$

Que al ser resuelta arroja las siguientes equivalencias, necesarias para facilitar el planteamiento de la ecuación de energía adimensional

$$\frac{d\phi}{d\xi} = \left( \frac{ab^{m+2}}{V^{m+1}\eta} \right)^{\frac{1}{m+1}} = c \frac{\eta_0}{\eta} \quad (55)$$

A continuación se presenta la ecuación adimensional simplificada para el perfil de temperatura.

$$\frac{d}{d\xi} \frac{k_0}{b} \left( \frac{k}{k_0} \frac{T_0}{b} \frac{d\theta}{d\xi} \right) + \frac{\eta_0 \eta}{\eta_0} \left( \frac{V}{b} \frac{d\phi}{d\xi} \right)^2 = 0 \quad (56)$$

Tal como se presentó la ecuación (55) no considera la disipación viscosa, por lo cual se proponen las siguientes funciones y sustituciones.

$$w = \left( \frac{ab^{m+2}}{V^{m+1}\eta} \right)^{\frac{1}{m+1}} \quad (57)$$

$$\frac{d\phi}{d\xi} = w(1 + \gamma_1 + \gamma_2^2 + \dots + \gamma_n^n) \quad (58)$$

$$\frac{k}{k_0} = 1 + \alpha_1 \theta + \alpha_2 \theta^2 + \dots + \alpha_n \theta^n \quad (59)$$

$$c = c_0 + Br c_1 + Br^2 c_2 + \dots + Br^n c_n \quad (60)$$

Al sustituir (53), (55), (58), (59) y (60) en la ecuación (56) y agrupar términos, se obtiene la ecuación con la que se trabajará.

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi} \left( (1 + \alpha_1\theta + \alpha_2\theta^2 + \dots + \alpha_n\theta^n) \frac{d\theta}{d\xi} \right) \\ + Brw(c_0 + Br c_1 + Br^2 c_2 + \dots + Br^n c_n)(1 + \gamma_1\theta + \gamma_2\theta^2 + \dots + \gamma_n\theta^n) \\ = 0 \quad (61) \end{aligned}$$

A partir de aquí se sigue el mismo procedimiento empleado en el caso anterior, obteniendo las siguientes soluciones:

$$\theta_1 = \frac{wc_0}{2}(\xi - \xi^2) \quad (62)$$

$$\begin{aligned} \theta_2 = \left( \frac{\gamma_1 w^2 c_0^2}{24} - \frac{\alpha_1 w^2 c_0^2}{8} \right) \xi^4 + \left( \frac{\alpha_1 w^2 c_0^2}{4} - \frac{\gamma_1 w^2 c_0^2}{12} \right) \xi^3 + \left( -\frac{\alpha_1 w^2 c_0^2}{8} - \frac{wc_1}{2} \right) \xi^2 \\ + \left( \frac{\gamma_1 w^2 c_0^2}{24} + \frac{wc_1}{2} \right) \xi \quad (63) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta_3 = \left( -\frac{c_0^3 w^3 \alpha_1^2}{16} + \frac{c_0^3 w^3 \gamma_1 \alpha_1}{40} - \frac{c_0^3 w^3 \gamma_1^2}{720} + \frac{\alpha_2 c_0^3 w^3}{24} \right) \xi^6 \\ + \left( \frac{3c_0^3 w^3 \alpha_1^2}{16} - \frac{3c_0^3 w^3 \gamma_1 \alpha_1}{40} + \frac{c_0^3 w^3 \gamma_1^2}{240} - \frac{\alpha_2 c_0^3 w^3}{40} \right) \xi^5 \\ + \left( -\frac{3c_0^3 w^3 \alpha_1^2}{16} - \frac{c_0 c_1 w^2 \alpha_1}{4} + \frac{5c_0^3 w^3 \gamma_1 \alpha_1}{96} + \frac{c_0 c_1 w^2 \gamma_1}{12} + \frac{c_0^3 w^3 \alpha_2}{8} \right) \xi^4 \\ + \left( \frac{c_0^3 w^3 \alpha_1^2}{16} + \frac{c_0 c_1 w^2 \alpha_1}{2} + \frac{c_0^3 w^3 \gamma_1 \alpha_1}{48} - \frac{c_0 c_1 w^2 \gamma_1}{6} - \frac{c_0^3 w^3 \gamma_1^2}{144} \right. \\ \left. - \frac{c_0^3 w^3 \alpha_2}{24} \right) \xi^3 + \left( -\frac{c_0^3 w^3 \gamma_1 \alpha_1}{48} - \frac{c_0 c_1 w^2 \alpha_1}{4} - \frac{c_2 w}{2} \right) \xi^2 \\ + \left( -\frac{c_0^3 w^3 \gamma_1 \alpha_1}{480} + \frac{c_0 c_1 w^2 \gamma_1}{12} + \frac{c_0^3 w^3 \gamma_1^2}{240} + \frac{c_2 w}{2} - \frac{c_0^3 w^3 \alpha_2}{10} \right) \xi \quad (64) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\theta = & Br \frac{w c_0}{2} (-\xi^2 + \xi) + Br^2 \frac{\alpha_1 w^2 c_0^2}{8} (-\xi^4 + 2\xi^3 - \xi^2) + Br^2 \frac{\gamma_1 w^2 c_0^2}{24} (\xi^4 - 2\xi^3 + \xi) \\
& + Br^2 \frac{w c_1}{2} (-\xi^2 + \xi) + Br^3 \frac{c_0^3 w^3 \alpha_1^2}{16} (-\xi^6 + 3\xi^5 - 3\xi^4 + \xi^3) \\
& + Br^3 \frac{c_0^3 w^3 \gamma_1 \alpha_1}{480} (12\xi^6 - 36\xi^5 + 25\xi^4 + 10\xi^3 - 10\xi^2 - \xi) \\
& + Br^3 \frac{c_0 c_1 w^2 \alpha_1}{4} (-\xi^4 + 2\xi^3 - \xi^2) + Br^3 \frac{c_0 c_1 w^2 \gamma_1}{12} (\xi^4 - 2\xi^3 + \xi) \\
& + Br^3 \frac{c_0^3 w^3 \gamma_1^2}{720} (-\xi^6 + 3\xi^5 - 5\xi^3 + 3\xi) + Br^3 \frac{c_2 w}{2} (-\xi^2 + \xi) \\
& + Br^3 \frac{c_0^3 w^3 \alpha_2}{120} (\xi^6 - 3\xi^5 + 15\xi^4 - 5\xi^3 - 8\xi) \quad (65)
\end{aligned}$$

Para después poder resolver el perfil de velocidad sustituyendo (65) en la ecuación (58)

$$\begin{aligned}
\phi = & w\xi + Br \frac{\gamma_1 w^2 c_0}{12} (-2\xi^3 + 3\xi^2) + Br^2 \frac{\alpha_1 \gamma_1 w^3 c_0^2}{240} (-6\xi^5 + 15\xi^4 - 10\xi^3) \\
& + Br^2 \frac{\gamma_1^2 w^3 c_0^2}{240} (2\xi^5 - 5\xi^4 + 5\xi^2) + Br^2 \frac{\gamma_1 w^2 c_1}{12} (-2\xi^3 + 3\xi^2) \\
& + Br^2 \frac{\gamma_2 w^3 c_0^2}{120} (6\xi^5 - 15\xi^4 + 10\xi^3) \quad (66)
\end{aligned}$$

De las condiciones de frontera también se obtiene una relación entre las constantes  $c_0$  y  $c_1$ .

$$\phi(1) = 1 \rightarrow \frac{120(1-w)}{Br^2 w^3} - \frac{10c_1 \gamma_1}{w} = \frac{10c_0 \gamma_1}{Brw} - \frac{\alpha_1 \gamma_1 c_0^2}{2} + \gamma_1^2 c_0^2 + \gamma_1 c_0^2 \quad (67)$$

El procedimiento anterior puede ser empleado para cualesquiera condiciones de frontera, en la sección de análisis de resultados se mostrarán los datos de un proceso adiabático.

## V. PROPUESTA PARA LA SOLUCIÓN DE LOS MODELOS

Si bien es cierto que el método seguido para el desarrollo de los modelos anteriores es aplicable a todo tipo de fluidos viscosos, cabe mencionar, que los gráficos y datos proporcionados para la presentación de las soluciones encontradas son representativos de un fluido en particular, que en este caso es una solución de carboximetilcelulosa (CMC) al 1%.

Con el fin de poder mostrar una representación gráfica es necesario obtener algunas constantes características de cada fluido, por lo cual se llevaron a cabo varias mediciones y cálculos, que se muestran a continuación.

### Datos Experimentales

Tabla 1. Datos de la velocidad de deformación y viscosidad a diferentes temperaturas.

RPM	$\dot{\gamma}$ [ $s^{-1}$ ]	$\eta$ [P] @24°C	$\eta$ [P] @41°C	$\eta$ [P] @55°C	$\eta$ [P] @71°C
1.0	0.105	192	112	40	36
2.5	0.262	139	85	40	30
5.0	0.524	99.2	64.8	32	22.4
10.0	1.047	76	50.8	25.6	18
20.0	2.094	57.8	39.6	20.8	15.2
30.0	3.142	46.9	34	19.2	14
50.0	5.236	35.84	26.24	16.24	12.32
100.0	10.472	23.2	18.04	12.16	9.64

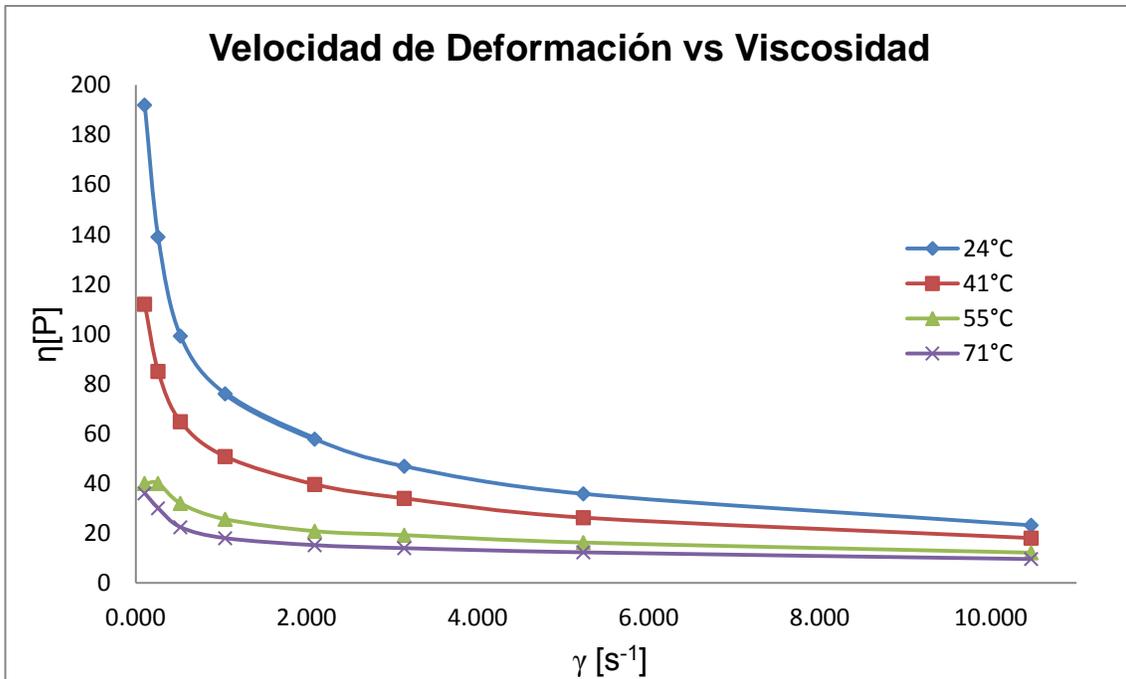


Gráfico 1. Curvas de flujo para una solución acuosa de CMC a 1% p/p a diferentes temperatura (Cross, 1965).

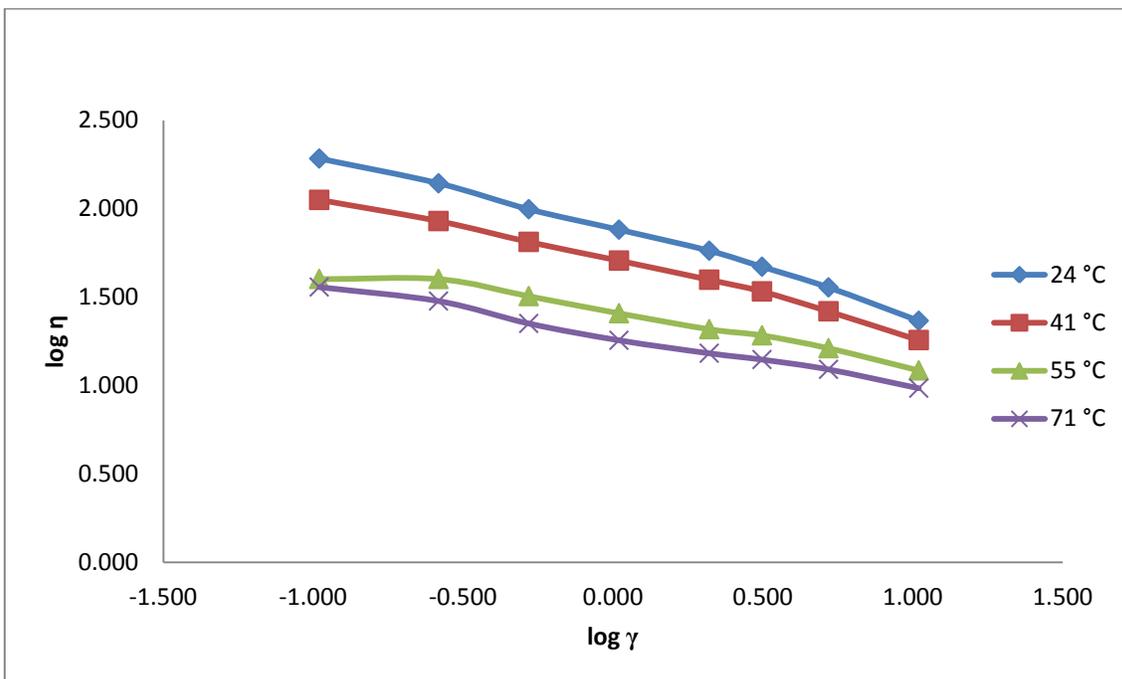


Gráfico 2. Gráfica logarítmica de la velocidad de deformación y la viscosidad para una solución acuosa de CMC a 1% p/p a diferentes temperaturas.

Con el fin de estimar las constantes para el modelo de Cross se llevaron a cabo los siguientes cálculos:

$$\eta = \eta_{\infty} + \left( \frac{\eta_0 - \eta_{\infty}}{1 + K\dot{\gamma}^m} \right) \quad (68)$$

Si K es muy grande tendríamos:

$$\eta \approx \eta_{\infty} + \left( \frac{\eta_0 - \eta_{\infty}}{K\dot{\gamma}^m} \right) \quad (69)$$

$$\eta \approx \left( \frac{\eta_0 - \eta_{\infty}}{K} \right) \dot{\gamma}^{-m} + \eta_{\infty} \quad (70)$$

Aquí puede observarse que si se grafica  $\eta$  vs  $\dot{\gamma}^{-m}$  debería obtenerse una recta de la cual, haciendo una regresión lineal, podría obtenerse el valor de  $\eta_{\infty}$ , pero al desconocer el valor de m no se puede hacer de forma directa. Para esto, se supone que m es un número fraccional, el cual será resultado de una fracción propia de numerador par y denominador impar (Cross, 1965). Se propone que ésta sea  $m = 4/7$

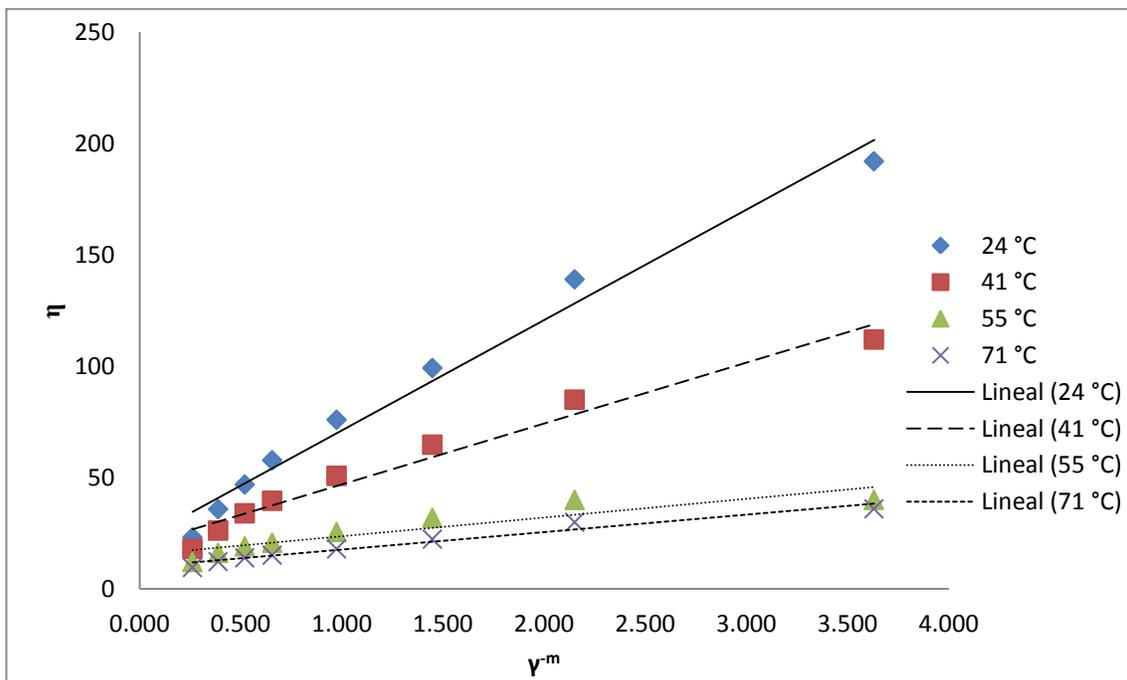


Gráfico 3. Evaluación de  $\eta_{\infty}$  con líneas de tendencia para datos de una solución acuosa de CMC al 1% p/p a diferentes temperaturas (Cross, 1965).

A continuación se puede hacer la regresión lineal y calcular.

$$a_1 = \frac{\eta_0 - \eta}{K} \quad b_1 = \eta$$

Pero si K es muy pequeña

$$\eta = \eta + \left( \frac{\eta_0 - \eta}{1 + K\dot{\gamma}^m} \right) \quad (68)$$

$$\eta(1 + K\dot{\gamma}^m) = \eta_0 \left( 1 + \frac{\eta_\infty}{\eta_0} K\dot{\gamma}^m \right) \rightarrow \frac{\eta_\infty}{\eta_0} K\dot{\gamma}^m \ll 1 \quad (71)$$

$$\eta(1 + K\dot{\gamma}^m) \approx \eta_0 \quad (72)$$

$$\frac{1}{\eta} = \frac{1}{\eta_0} + \frac{K}{\eta_0} \dot{\gamma}^m \quad (73)$$

En este caso, si se grafica  $1/\eta$  vs  $\dot{\gamma}^m$  se podrían calcular K y  $\eta_0$ .

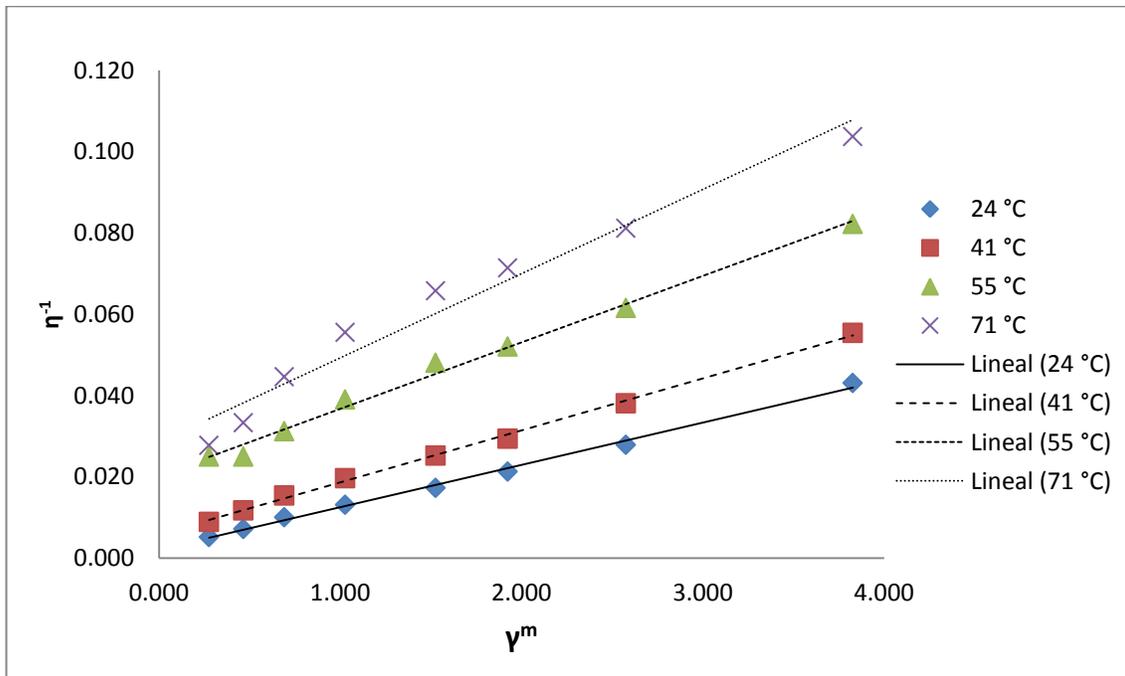


Gráfico 4. Evaluación de K y  $\eta_0$  con líneas de tendencia para datos de una solución acuosa de CMC al 1% p/p a diferentes temperaturas (Cross, 1965).

Y al hacer la regresión lineal se tendría:

$$a_2 = \frac{K}{\eta_0} \quad b_2 = \frac{1}{\eta_0}$$

### Coeficiente de Correlación

$$r = \frac{s(\sum \eta \dot{\gamma}^{-m}) - (\sum \eta)(\sum \dot{\gamma}^{-m})}{\sqrt{[s(\sum \eta^2) - (\sum \eta)^2][s(\sum \dot{\gamma}^{-2m}) - (\sum \dot{\gamma}^{-m})^2]}} \quad (74)$$

### Regresión Lineal

$$a_{1,2} = \frac{s(\sum \eta \dot{\gamma}^{-m}) - (\sum \eta)(\sum \dot{\gamma}^{-m})}{s(\sum \eta^2) - (\sum \eta)^2} \quad (75)$$

$$b_{1,2} = \frac{\sum \dot{\gamma}^{-m}}{s} - a \frac{\sum \eta}{s} \quad (76)$$

Con los datos experimentales y los cálculos obtenidos con la primera suposición del valor de  $m$  se realiza la regresión lineal y se calcula la viscosidad; con esto es posible plantear una función error para obtener el valor de  $m$  por el método iterativo; dicha función será  $\sum(\eta_{cal} - \eta_{exp})^2$ , la cual debe ser lo más próxima a cero. Se obtuvieron los siguientes resultados.

Tabla 2. Tabla comparativa de los resultados obtenidos a distintas temperaturas.

T [°C]	$\eta_0$ [P]	$\eta_\infty$ [P]	K [s]	m	$r_1^2$	$r_2^2$
24	372.669	23.997	3.6431	0.595	0.977	0.997
41	237.963	16.147	3.4973	0.521	0.976	0.997
55	3041.207	4.300	118.2420	0.295	0.924	0.980
71	1619.009	0.000	83.7310	0.288	0.991	0.994

Como puede observarse  $\eta_0$ ,  $\eta$ ,  $m$  y  $K$  también dependen de la temperatura, sin embargo, para hacer más sencillo el modelo, no se consideró así. Así que se elige un conjunto de datos para trabajar el modelo.

## VI. TRABAJOS PREVIOS

Al respecto de este tema existen trabajos previos, como los realizados por R. Byron Bird y Raffi M. Turian (Bird R. B., 1963) (Turian, 1965), dichos artículos fueron base para este trabajo; en ellos se plantea cómo deben considerarse los efectos de la disipación viscosa en un sistema de placas paralelas, una de las cuales se mueve a velocidad tal que los efectos de la disipación viscosa son importantes.

A continuación se muestra una serie de gráficas que resumen los resultados obtenidos en este trabajo en comparación con los de los artículos y el modelo en donde no se considera el efecto de la disipación viscosa.

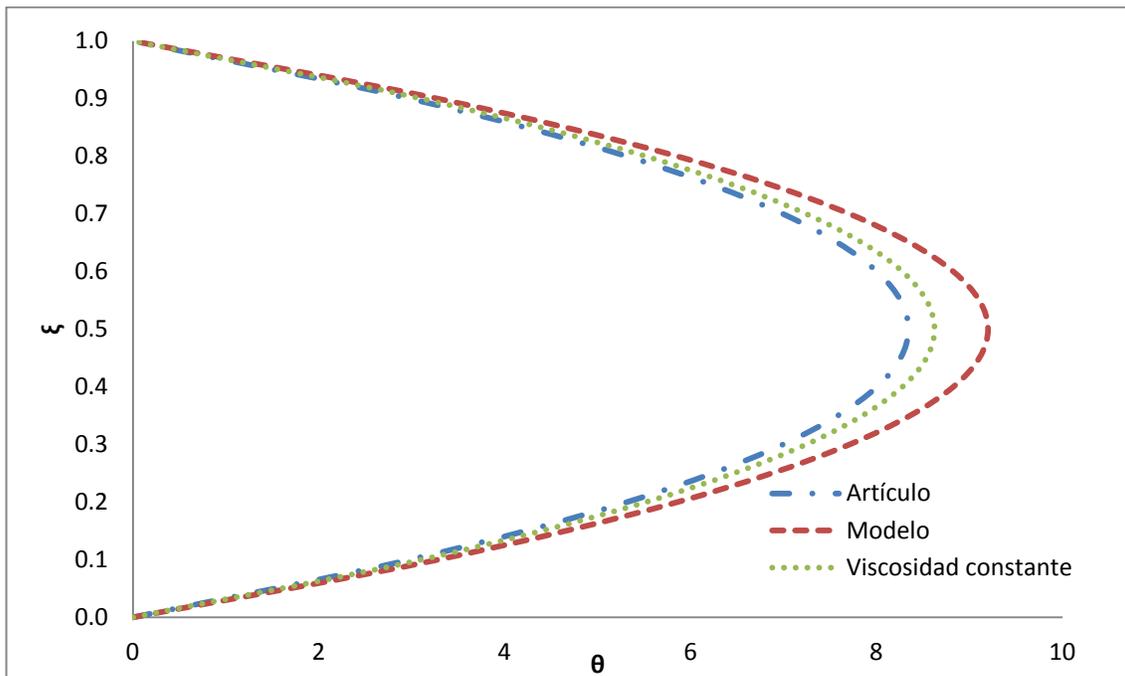


Gráfico 5. Comparación de resultados en perfil de temperatura para fluido newtoniano (agua) cuando ambas placas se encuentran a la misma temperatura.

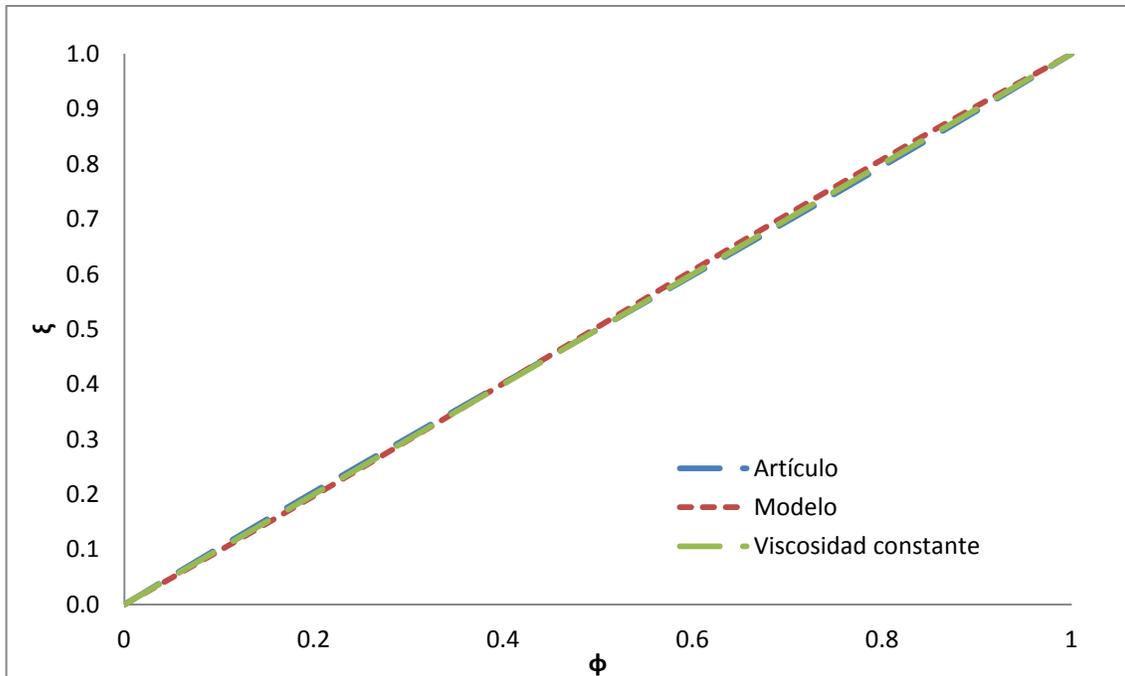


Gráfico 6. Comparación de resultados en perfil de velocidad para fluido newtoniano (agua) cuando ambas placas se encuentran a la misma temperatura.

Como puede observarse en el gráfico 5 las soluciones encontradas para el flujo de Couette son diferentes a las que se muestran en el artículo (Bird R. B., 1963). Dichas soluciones son incorrectas, durante la elaboración de este proyecto se detectaron algunos errores algebraicos en el artículo. Esta diferencia se hace más evidente al hacer mayor la velocidad de desplazamiento de la placa superior.

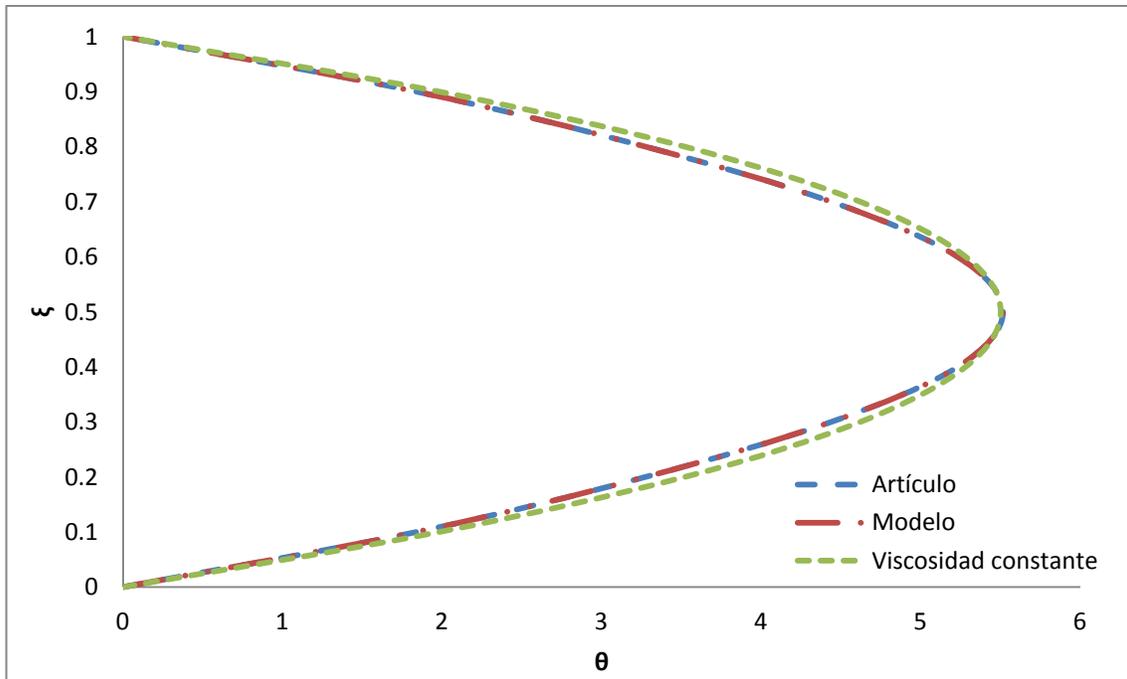


Gráfico 7. Comparación de resultados en perfil de temperatura para fluido no newtoniano (solución acuosa de CMC) por ley de la potencia, cuando ambas placas se encuentran a la misma temperatura.

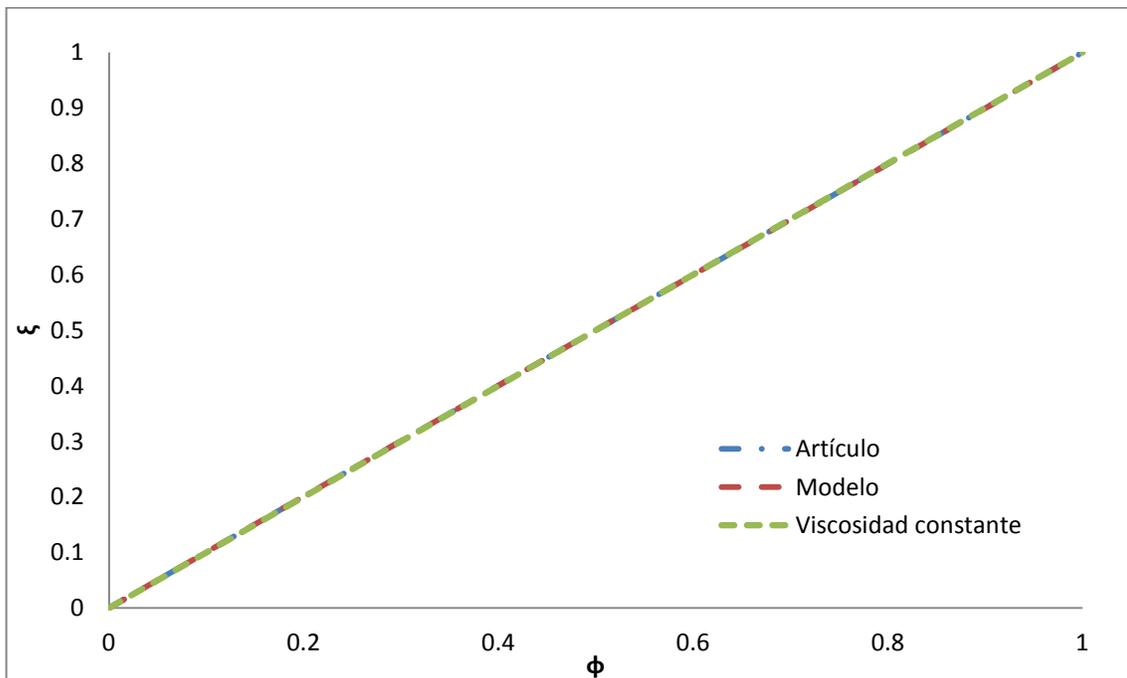


Gráfico 8. Comparación de resultados en perfil de velocidad para fluido no newtoniano (solución acuosa de CMC) por ley de la potencia, cuando ambas placas se encuentran a la misma temperatura.

Lo mismo sucedió al desarrollar el modelo para los fluidos no newtonianos (Turian, 1965), pero en este caso, las variantes en las ecuaciones se presentan en los términos de tercer grado, por lo que la diferencia es mucho menor y por tanto menos apreciable que en el caso de los fluidos newtonianos.

## VII. ANÁLISIS DE RESULTADOS

Tabla 3. Resumen de las ecuaciones de perfiles de temperatura y velocidad adimensionales para cada uno de los modelos estudiados.

Modelo	Ecuaciones
Fluido newtoniano. Placas a la misma temperatura.	$\theta = \frac{Br}{2}(\xi - \xi^2) - \frac{Br^2}{8}\alpha_1(\xi^2 - 2\xi^3 + \xi^4) + \frac{Br^2}{24}\beta_1(\xi - 2\xi^3 + \xi^4)$ $+ \frac{Br^3}{24}\left(\frac{3}{2}\alpha_1^2 - \alpha_2\right)(\xi^3 - 3\xi^4 + 3\xi^5 - \xi^6)$ $+ \frac{Br^3}{480}\alpha_1\beta_1(-\xi - 10\xi^2 + 10\xi^3 + 25\xi^4 - 36\xi^5 + 12\xi^6)$ $+ \frac{Br^3}{240}\beta_2(\xi - 5\xi^4 + 6\xi^5 - 2\xi^6)$ $+ \frac{Br^3}{720}\beta_1^2(3\xi - 5\xi^3 + 3\xi^5 - \xi^6) + \dots$ $\phi = \xi + \frac{Br}{12}\beta_1(\xi - 3\xi^2 + 2\xi^3)$ $+ \frac{Br}{240}(\alpha_1\beta_1 - 2\beta_2)(-\xi + 10\xi^3 - 15\xi^4 + 6\xi^5)$ $+ \frac{Br}{48}\beta_1^2(-12\xi - \xi^2 + 16\xi^3 - 5\xi^4 + 2\xi^5)$
Fluido newtoniano. Adiabático.	$\theta = \frac{Br}{2}(2\xi - \xi^2) - \frac{Br^2}{8}\alpha_1(4\xi^2 - 4\xi^3 + \xi^4) + \frac{Br^2}{24}\beta_1(8\xi - 4\xi^3 + \xi^4)$ $+ \frac{Br^3}{48}(3\alpha_1^2 - 2\alpha_2)(8\xi^3 - 12\xi^4 + 6\xi^5 - \xi^6)$ $+ \frac{Br^3}{120}\alpha_1\beta_1(-8\xi - 40\xi^2 + 20\xi^3 + 25\xi^4 - 18\xi^5 + 3\xi^6)$ $+ \frac{Br^3}{120}\beta_2(16\xi - 10\xi^4 + 6\xi^5 - \xi^6)$ $+ \frac{Br^3}{720}\beta_1^2(96\xi - 40\xi^3 + 6\xi^5 - \xi^6)$ $\phi = \xi + \frac{Br}{6}\beta_1(2\xi - 3\xi^2 + \xi^3) + \frac{Br^2}{24}\beta_1^2(-4\xi - 4\xi^2 + 8\xi^3 - \xi^4 + \xi^5)$ $+ \frac{Br^2}{120}(\alpha_1\beta_1 - 2\beta_2)(-8\xi + 20\xi^3 - 15\xi^4 + 3\xi^5)$

<p>Fluido no newtoniano. Ley de la potencia. Placas a la misma temperatura.</p>	$\theta = \frac{1}{2}Br(\xi - \xi^2) - \frac{1}{24}Br^2\gamma_1(n_0\xi - (n_0 + 1)\xi^2 + 2\xi^3 - \xi^4)$ $- \frac{1}{8}Br^2\alpha_1(\xi^2 - 2\xi^3 + \xi^4)$ $+ \frac{1}{2880}Br^3\gamma_1^2\{(-15n_0^2 - 17n_0 + 10)\xi$ $- 3(6 + n_0(1 - 5n_0))\xi^2 + 20(1 + 2n_0)\xi^3 - 20(1 + n_0)\xi^4$ $+ 12\xi^5 - 4\xi^6\}$ $+ \frac{1}{480}Br^3\alpha_1\gamma_1\{-\xi + 10n_0\xi^2 - 10(1 + 2n_0)\xi^3$ $+ 5(7 + 2n_0)\xi^4 - 36\xi^5 + 12\xi^6\}$ $+ \frac{1}{48}Br^3(3\alpha_1^2 - 2\alpha_2)(-\xi^2 + 3\xi^4 - 3\xi^5 + \xi^6)$ $+ \frac{1}{240}Br^3\gamma_2(\xi - 5\xi^4 + 6\xi^5 - 2\xi^6)$ $\phi = \xi - \frac{1}{12}Br\gamma_1(\xi - 3\xi^2 + 2\xi^3)$ $+ \frac{1}{720}Br^2\gamma_1^2\{(-5n_0 + 4)\xi + 15(n_0 - 1)\xi^2$ $- 10(n_0 - 2)\xi^3 - 15\xi^4 + 6\xi^5\}$ $+ \frac{1}{240}Br^2(\alpha_1\gamma_1 - 2\gamma_2)(\xi - 10\xi^3 + 15\xi^4 - 6\xi^5)$
-----------------------------------------------------------------------------------------	---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

<p>Fluido no newtoniano. Ley de la potencia. Adiabático.</p>	$\theta = \frac{1}{2}Br(\xi - \xi^2) - \frac{1}{24}Br^2\gamma_1(n_0\xi - (1 + n_0)\xi^2 + 2\xi^3 - \xi^4)$ $- \frac{1}{8}Br^2\alpha_1(\xi^2 - 2\xi^3 + \xi^4)$ $+ \frac{1}{2880}Br^3\gamma_1^2((-15n_0^2 - 17n_0 + 10)\xi$ $- 3(6 + n_0(1 - 5n_0))\xi^2 + 20(1 + 2n_0)\xi^3 - 20(1 + n_0)\xi^4$ $+ 12\xi^5 - 4\xi^6)$ $+ \frac{1}{480}Br^3\alpha_1\gamma_1(-\xi + 10n_0\xi^2 - 10(1 + 2n_0)\xi^3$ $+ 5(7 + 2n_0)\xi^4 - 36\xi^5 + 12\xi^6)$ $+ \frac{1}{48}Br^3(3\alpha_1^2 - 2\alpha_2)(-\xi^2 + 3\xi^4 - 3\xi^5 + \xi^6)$ $+ \frac{1}{240}Br^3\gamma_2(\xi - 5\xi^4 + 6\xi^5 - 2\xi^6)$ $\phi = \xi - \frac{1}{12}Br\gamma_1(\xi - 3\xi^2 + 2\xi^3)$ $+ \frac{1}{720}Br^2\gamma_1^2((-5n_0 + 4)\xi + 15(n_0 - 1)\xi^2$ $- 10(n_0 - 2)\xi^3 - 15\xi^4 + 6\xi^5)$ $+ \frac{1}{240}Br^2(\alpha_1\gamma_1 - 2\gamma_2)(\xi - 10\xi^3 + 15\xi^4 - 6\xi^5)$
----------------------------------------------------------------------	---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

<p>Fluido no newtoniano. Modelo de Cross. Placas a la misma temperatura</p>	$\theta = Br \frac{wc_0}{2} (-\xi^2 + \xi) + Br^2 \frac{\alpha_1 w^2 c_0^2}{8} (-\xi^4 + 2\xi^3 - \xi^2)$ $+ Br^2 \frac{\gamma_1 w^2 c_0^2}{24} (\xi^4 - 2\xi^3 + \xi) + Br^2 \frac{wc_1}{2} (-\xi^2 + \xi)$ $+ Br^3 \frac{c_0^3 w^3 \alpha_1^2}{16} (-\xi^6 + 3\xi^5 - 3\xi^4 + \xi^3)$ $+ Br^3 \frac{c_0^3 w^3 \gamma_1 \alpha_1}{480} (12\xi^6 - 36\xi^5 + 25\xi^4 + 10\xi^3 - 10\xi^2$ $- \xi) + Br^3 \frac{c_0 c_1 w^2 \alpha_1}{4} (-\xi^4 + 2\xi^3 - \xi^2)$ $+ Br^3 \frac{c_0 c_1 w^2 \gamma_1}{12} (\xi^4 - 2\xi^3 + \xi)$ $+ Br^3 \frac{c_0^3 w^3 \gamma_1^2}{720} (-\xi^6 + 3\xi^5 - 5\xi^3 + 3\xi)$ $+ Br^3 \frac{c_2 w}{2} (-\xi^2 + \xi)$ $+ Br^3 \frac{c_0^3 w^3 \alpha_2}{120} (\xi^6 - 3\xi^5 + 15\xi^4 - 5\xi^3 - 8\xi)$ $\phi = w\xi + Br \frac{\gamma_1 w^2 c_0}{12} (-2\xi^3 + 3\xi^2)$ $+ Br^2 \frac{\alpha_1 \gamma_1 w^3 c_0^2}{240} (-6\xi^5 + 15\xi^4 - 10\xi^3)$ $+ Br^2 \frac{\gamma_1^2 w^3 c_0^2}{240} (2\xi^5 - 5\xi^4 + 5\xi^2)$ $+ Br^2 \frac{\gamma_1 w^2 c_1}{12} (-2\xi^3 + 3\xi^2)$ $+ Br^2 \frac{\gamma_2 w^3 c_0^2}{120} (6\xi^5 - 15\xi^4 + 10\xi^3)$
-------------------------------------------------------------------------------------	-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Como puede observarse en la tabla anterior, las ecuaciones obtenidas para cada uno de los casos, son parecidas entre sí, esto prueba que el método utilizado, puede ser útil para todo tipo de fluidos viscosos bajo ciertas condiciones. Si bien estos modelos arrojan resultados matemáticamente correctos es importante saber realizar una buena interpretación de lo que se obtiene.

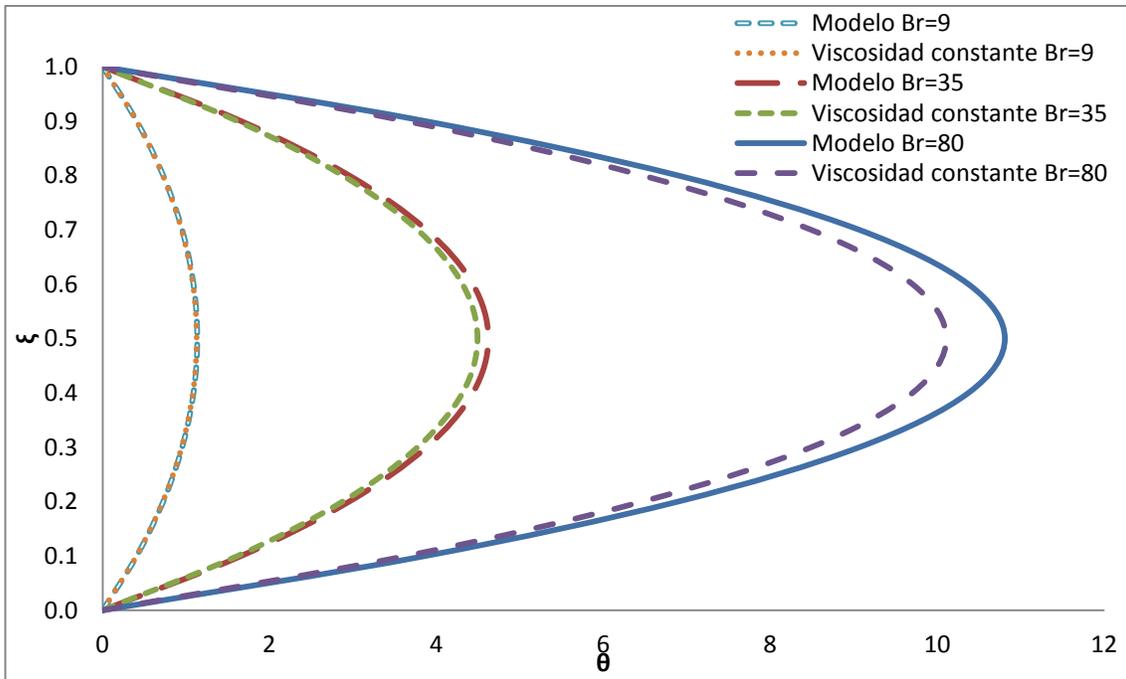


Gráfico 9. Perfil de temperatura para un fluido newtoniano en un sistema de placas paralelas, que se encuentran a la misma temperatura, variando la velocidad a la que se mueve la placa superior (variación de Br).

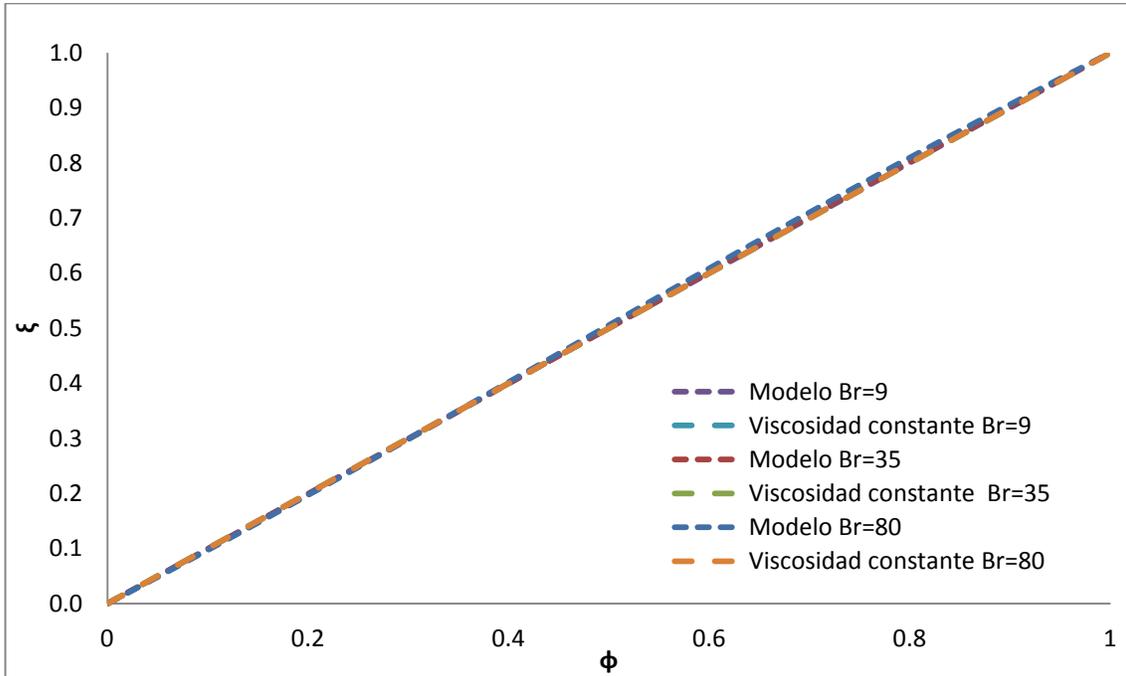


Gráfico 10. Perfil de velocidad para un fluido newtoniano en un sistema de placas paralelas, que se encuentran a la misma temperatura, variando la velocidad a la que se mueve la placa superior (variación de Br).

En el gráfico 9 se muestra cómo, para fluidos newtonianos, el comportamiento del perfil de temperatura sigue un patrón, al aumentar la velocidad con que se mueve la placa superior, cuando crece el número de Brinkman, la temperatura aumenta; también puede verse que cuánto más grande es el número de Brinkman mayor es el efecto de la disipación viscosa. Mientras que en el caso del gráfico 10, el perfil de velocidad sufre cambios tan pequeños que son casi imperceptibles en él.

Cabe mencionar que el método de parámetro perturbativo indica que el parámetro deber ser un número pequeño pero diferente de cero (Van Dyke, 1975); sin embargo, como puede observarse en las gráficas 9, 10, 11 y 12 se utilizó un número de Brinkman mayor, esto fue únicamente con el propósito de mostrar en la misma gráfica los efectos que se generan por el aumento de magnitud del número de Brinkman.

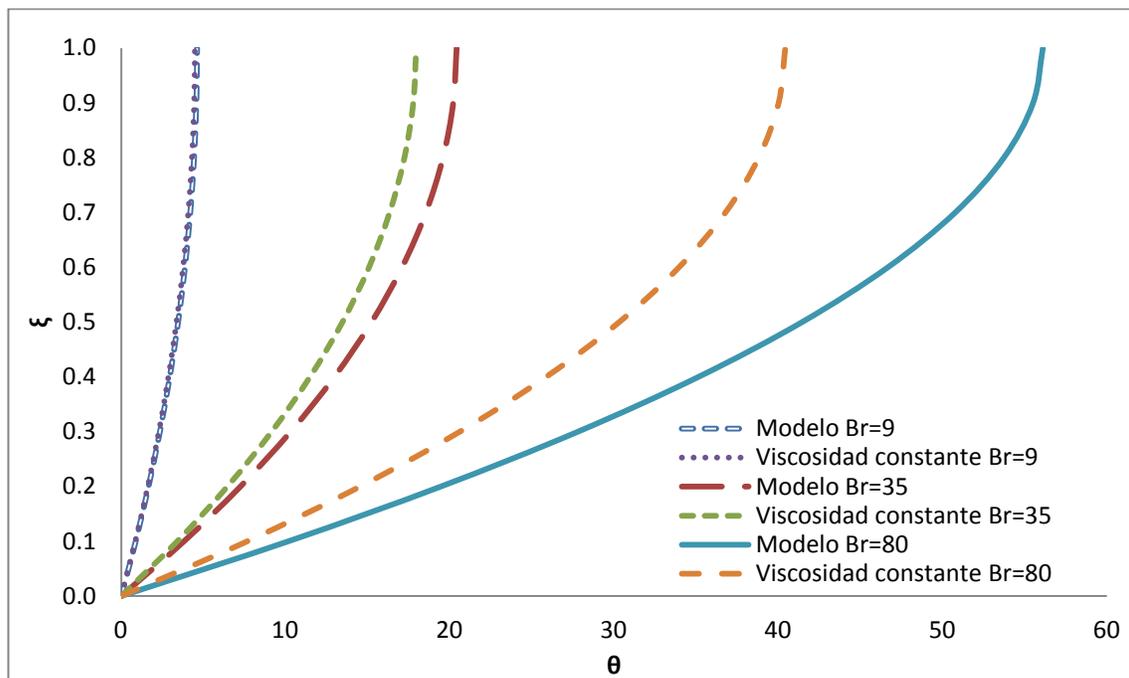


Gráfico 11. Perfil de temperatura para un fluido newtoniano en un sistema adiabático de placas paralelas, variando la velocidad a la que se mueve la placa superior (variación de Br).

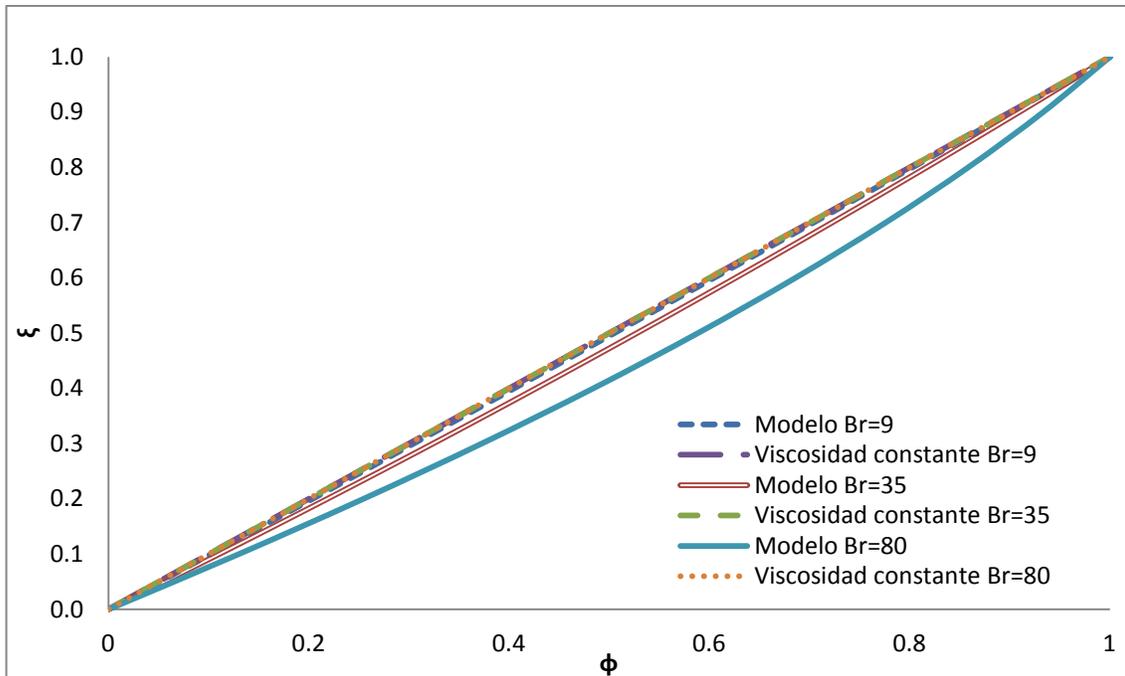


Gráfico 12. Perfil de velocidad para un fluido newtoniano en un sistema adiabático de placas paralelas, variando la velocidad a la que se mueve la placa superior (variación de Br).

En el caso de un sistema adiabático, como el representado en los gráficos 11 y 12 se observa que, al no poder liberar el calor, la temperatura se eleva mucho más que en el primer caso y que los efectos de la temperatura en las propiedades del fluido afectan también, aunque en una proporción mucho más baja, el perfil de velocidad.

Ahora bien, en las gráficas anteriores se nota que si bien existe una relación entre el número de Brinkman y la temperatura del sistema, el cambio no es tan drástico de una velocidad a otra. Esto no ocurre cuando se estudian fluidos no newtonianos, un cambio de velocidad puede alterar drásticamente, no sólo la temperatura del sistema, sino también las propiedades del fluido estudiado. Es por esto que los modelos desarrollados sólo pueden ser resueltos para potencias del número de Brinkman no superiores a  $10^{-2}$  ya que después de este rango, al menos en este sistema en particular, comienza a arrojar soluciones que no reflejan la realidad; y que, aunque la solución matemática es correcta, la representación gráfica muestra datos que no son ciertos.

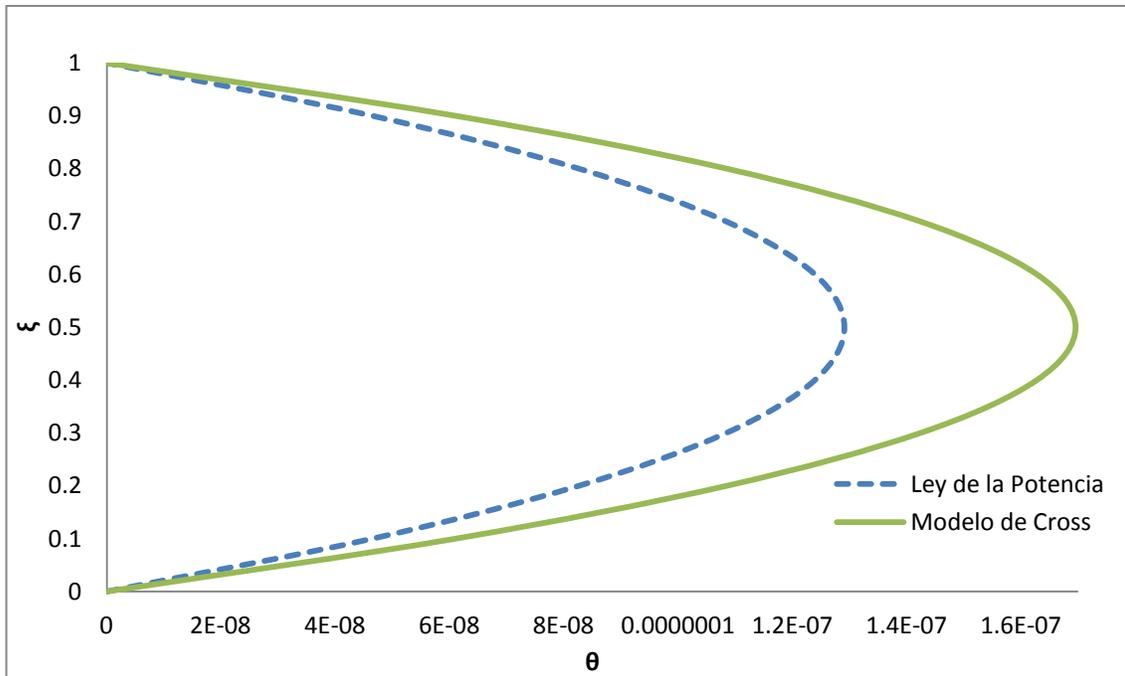


Gráfico 13. Perfil de temperatura para un fluido no newtoniano en un sistema de placas paralelas que se encuentran a la misma temperatura para los modelos de ley de la potencia y Cross con magnitud del número de Brinkman  $10^{-6}$ .

En los gráficos 13 y 15 se muestran los perfiles de temperatura del fluido no newtoniano, aunque para efectos de análisis hubiera resultado conveniente juntar ambos gráficos, las escalas en las que se encuentran, lo impide; sin embargo, se puede notar que la tendencia es la misma que en el caso de los newtonianos.

Aunque pareciera en estos gráficos que la diferencia entre los resultados obtenidos para la ley de la potencia y el modelo de Cross es grande, en realidad esto se debe a la escala en la que están representadas. Los resultados de ley de la potencia, al ser ésta un caso particular del modelo de Cross, se aproximan numéricamente a los obtenidos para el modelo de Cross.

En cuanto a los perfiles de velocidad de los gráficos 14 y 16, puede observarse que también en este caso, los efectos que tiene en ellos es despreciable en comparación con los efectos mostrados en la temperatura.

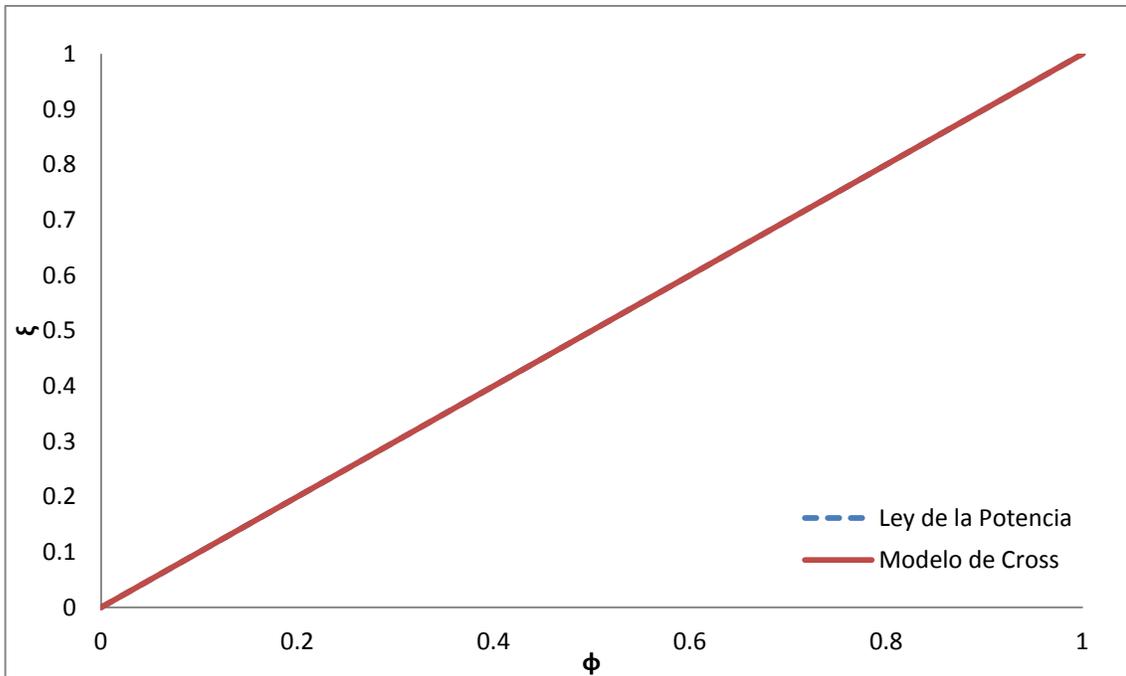


Gráfico 14. Perfil de velocidad para un fluido no newtoniano en un sistema de placas paralelas que se encuentran a la misma temperatura para los modelos de ley de la potencia y Cross con magnitud del número de Brinkman  $10^{-6}$ .

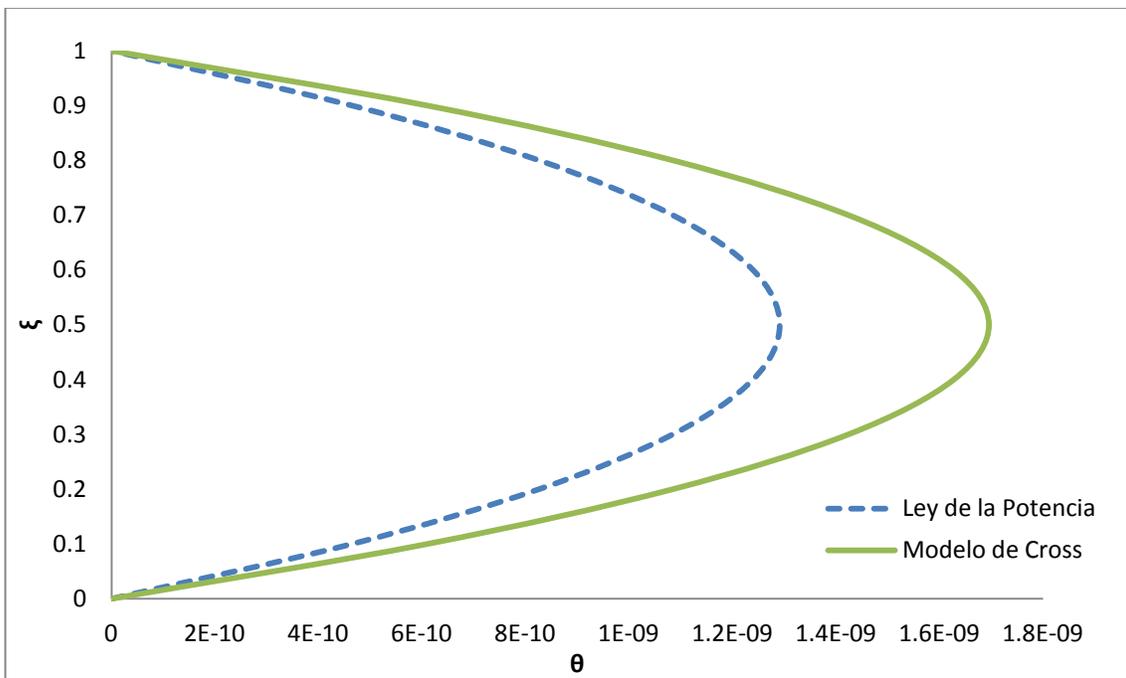


Gráfico 15. Perfil de temperatura para un fluido no newtoniano en un sistema de placas paralelas que se encuentran a la misma temperatura para los modelos de ley de la potencia y Cross con magnitud del número de Brinkman  $10^{-8}$ .

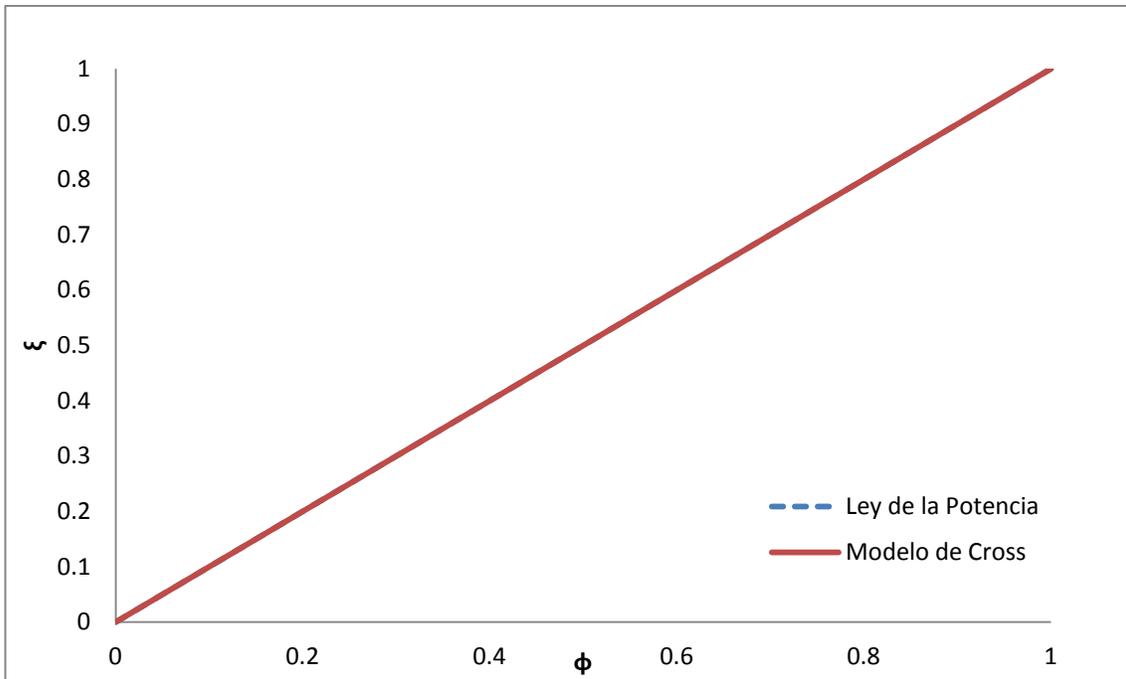


Gráfico 16. Perfil de velocidad para un fluido no newtoniano en un sistema de placas paralelas que se encuentran a la misma temperatura para los modelos de ley de la potencia y Cross con magnitud del número de Brinkman  $10^{-8}$ .

## VIII. CONCLUSIONES

La contribución principal de este trabajo es el desarrollo del modelo de Cross mediante parámetro perturbativo considerando los efectos del cambio de temperatura sobre la viscosidad y conductividad térmica, ya que éste permite describir el comportamiento de los fluidos viscosos en todas las regiones reológicas. Cabe destacar el modelo de Cross porque es capaz de explicar, mediante parámetros con sentido físico, una gran cantidad de comportamientos de los fluidos viscosos obtenidos experimentalmente.

Si bien es cierto que el modelo de Cross requiere de la estimación de más parámetros característicos de cada fluido, también es importante mencionar que con él puede observarse el comportamiento de la viscosidad de un fluido en un rango amplio de velocidad de deformación.

En este trabajo se han logrado desarrollar ecuaciones para los perfiles de temperatura y velocidad considerando la disipación viscosa para distintos modelos. Sin embargo el método perturbativo utilizado tiene inconvenientes, es muy extenso, laborioso y durante su desarrollo es muy fácil cometer errores por la gran cantidad de términos que se manejan; aunque claro está, este puede ser simplificado o extendido dependiendo de hasta qué orden de error se decida llegar. Si bien estas no son soluciones exactas, este método de solución permite darnos cuenta del efecto que tiene la disipación viscosa en este tipo de problemas.

Una de las complicaciones principales de este desarrollo es la cantidad de constantes que deben ser estimada; que además de ser características de cada fluido, los modelos son muy sensibles a ellas por lo que debe tenerse cuidado al momento de estimar estos valores. Para esto, contar con datos experimentales más exactos sería beneficioso para conocer el comportamiento real del fluido en cada punto de un proceso.

En los gráficos de los modelos para fluidos newtonianos y para los no newtonianos, que se encuentran en este trabajo, el efecto de la disipación viscosa es más

significativo en el perfil de temperatura que en el de velocidad; eso ocurre porque al hacer fricción una capa de fluido contra otra se favorece el aumento de temperatura en el sistema.

## **IX. TRABAJO FUTURO**

En etapas futuras de este estudio, se podrían desarrollar las ecuaciones para distintos modelos de fluidos no newtonianos viscosos que describan diferentes comportamientos reológicos en estado estacionario y analizar qué tan sensibles son éstos a las variaciones del parámetro perturbativo.

Las ecuaciones que se presentan en este documento podrían utilizarse para el diseño de equipos especializados para la industria y así volver más eficiente algún proceso de fabricación. También podrían servir para ajustar los procedimientos de fabricación para evitar alteraciones de las propiedades de productos que se fabrican en los equipos que ya existen.

Estas ecuaciones también podrían emplearse para el desarrollo de equipos de medición más exactos, sin embargo, la tecnología que existe actualmente ya considera eliminar los efectos generados por la temperatura sobre la viscosidad mediante sistemas de control de temperatura integrados al equipo. (Viswanath, 2007)

## X. REFERENCIAS

1. Barnes, H. A., Hutton, J. F., & F.R.S., K. W. (1989). *An introduction to rheology*. Amsterdam, The Netherlands: Elsevier.
2. Bird R. B., S. W. (1960). *Transport Phenomena*. New York, U.S.A.: John Wiley & Sons.
3. Bird, R. B. (1963). Viscous heating in the cone-and-plate viscometer-II. *Chemical Engineering Science*, 18, 689-696.
4. Bird, R. B. (1992). *Fenómenos de Transporte*. (F. Mato Vázquez, Trad.) Barcelona: Editorial Reverté.
5. Bird, R. B., Stewart, W. E., & Lightfoot, E. N. (2002). *Transport Phenomena* (2nd ed.). U.S.A.: John Wiley & Sons.
6. Cross, M. M. (1965). Rheology of Non-Newtonian fluids: a new flow equation for pseudoplastic systems. *Journal of colloid science*(20), 417-437.
7. Hershey. (1974). *Transport Analysis*. U.S.A.: Plenum Roseta Editions.
8. Nayfeh, A. H. (1973). *Perturbation Methods*. Virginia: John Wiley & Sons.
9. Rice, R. G. (1995). *Applied Mathematics and Modeling for Chemical Engineers*. U.S.A: John Wiley & Sons.
10. Turian, R. M. (1965). Viscous heating in the cone-and-plate viscometer-III non-Newtonian fluids with temperature-dependent viscosity and thermal conductivity. *Chemical Engineering Science*, 20, 771-781.
11. Van Dyke, M. (1975). *Perturbation Methods in Fluid Mechanics*. California: The Parabolic Press.
12. Viswanath, D. S. (2007). *Viscosity of liquids: theory, estimation, experiment, and data*. Netherlands: Springer.
13. Welty, J. R., Wicks, C. E., & Wilson, R. E. (2008). *Fundamentos de Transferencia de Momento, Calor y Masa* (Segunda ed.). México, México: Limusa Wiley.

## SIMBOLOGÍA

$A$	Área del plato
$a_1, a_2$	Coefficiente de la pendiente de la regresión lineal del modelo de Cross
$b$	Distancia entre platos
$b_1, b_2$	Constante de la regresión lineal del modelo de Cross
$Br$	Número de Brinkman
$c_i$	Coefficientes adimensionales del número de Brinkman en la serie de potencia, relacionados a la viscosidad
$K$	Constante asociada a la ruptura de enlaces
$m$	Parámetro del material
$n$	Exponente de ley de potencia
$r$	Coefficiente de correlación
$s$	Número de datos de la regresión lineal
$T$	Temperatura
$T_0$	Temperatura de referencia
$V$	Velocidad
$x$	Coordenada vertical
$z$	Coordenada horizontal
$\alpha_i$	Coefficientes adimensionales de la serie de potencia de la función de temperatura, relacionados a la conductividad térmica
$\gamma_i$	Coefficientes adimensionales de la serie de potencia de la función de temperatura, relacionados a la viscosidad
$\dot{\gamma}$	Velocidad de deformación
$\eta$	Viscosidad aparente
$\eta_0$	Viscosidad límite a velocidad de deformación cero
$\eta_1$	Viscosidad particular de un fluido
$\eta_\infty$	Viscosidad límite a velocidad de deformación infinita

$\theta$	Función adimensional de temperatura
$\theta_i$	Funciones parciales adimensionales de $\theta$
$\kappa$	Conductividad térmica
$\kappa_0$	Conductividad térmica a la temperatura de referencia
$\xi$	Función adimensional de coordenada
$\phi$	Función adimensional de velocidad
$\phi_i$	Funciones parciales adimensionales de $\phi$
$\tau_0$	Esfuerzo cortante característico de una sustancia
$\tau_{yx}$	Esfuerzo cortante
$v_z$	Velocidad en dirección z

## APÉNDICES.

### Apéndice A. Ecuaciones de Ley de la Potencia

Ecuaciones de movimiento y energía generales:

$$\frac{d}{dx} \left( \eta \frac{dv_z}{dx} \right) = 0 \quad (\text{A-1})$$

$$\frac{d}{dx} \left( k \frac{dT}{dx} \right) + \eta \left( \frac{dv_z}{dx} \right)^2 = 0 \quad (\text{A-2})$$

Análisis dimensional:

Variables:

$$\xi = \frac{x}{b} \quad \phi = \frac{v_z}{V} \quad \theta = \frac{T - T_0}{T_0} \quad Br = \frac{\eta_1 V^2}{k_0 T_0} \quad (\text{A-3})$$

$$\frac{dv_z}{dx} = \frac{dv_z}{d\phi} \cdot \frac{d\phi}{d\xi} \cdot \frac{d\xi}{dx} = V \cdot \frac{d\phi}{d\xi} \cdot \frac{1}{b} = \frac{V}{b} \cdot \frac{d\phi}{d\xi} \quad (\text{A-4})$$

$$dx = b d\xi \quad (\text{A-5})$$

$$\frac{dT}{dx} = \frac{dT}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{d\xi} \cdot \frac{d\xi}{dx} = T_0 \cdot \frac{d\theta}{d\xi} \cdot \frac{1}{b} = \frac{T_0}{b} \cdot \frac{d\theta}{d\xi} \quad (\text{A-6})$$

Sustituyendo (A-4) a (A-6) en (A-1) y (A-2):

$$\frac{d}{d\xi} \left( \frac{\eta}{\eta_1} \frac{d\phi}{d\xi} \right) = 0 \quad (\text{A-7})$$

$$\frac{d}{d\xi} \left( \frac{k}{k_0} \frac{d\theta}{d\xi} \right) + Br \frac{\eta}{\eta_1} \left( \frac{d\phi}{d\xi} \right)^2 = 0 \quad (\text{A-8})$$

Integrando una vez (A-7):

$$\frac{d\phi}{d\xi} = c \frac{\eta_1}{\eta} \quad (\text{A-9})$$

Funciones auxiliares:

$$m = m_0 \exp(-B\theta) \quad \eta = m \left( \frac{V}{b} \right)^{n-1} \left( \frac{d\phi}{d\xi} \right)^{n-1} \quad \eta_1 = m_0 \left( \frac{V}{b} \right)^{n_0-1} \quad s = \frac{1}{n_0} \quad (\text{A-10})$$

$$\begin{aligned} c &= c_0 + c_1 Br + c_2 Br^2 + \dots \\ \frac{\eta}{\eta_1} &= \frac{c_0 + c_1 Br + c_2 Br^2 + \dots}{c^s (1 + \gamma_1 \theta + \gamma_2 \theta^2 + \dots)} \end{aligned} \quad (\text{A-11})$$

$$\frac{k}{k_0} = 1 + \alpha_1\theta + \alpha_2\theta^2 + \dots + \alpha_n\theta^n \quad (\text{A-12})$$

Sustituyendo (A-10) en (A-9) y desarrollando:

$$\frac{d\phi}{d\xi} = c^s(1 + \gamma_1\theta + \gamma_2\theta^2 + \dots) \quad (\text{A-13})$$

Sustituyendo (A-9), (A-12) y (A-13) en (A-8) y desarrollando:

$$\frac{d}{d\xi} \left\{ (1 + \alpha_1\theta + \alpha_2\theta^2 + \dots) \frac{d\theta}{d\xi} \right\} = -Br(c^{s+1}(1 + \gamma_1\theta + \gamma_2\theta^2 + \dots)) \quad (\text{A-14})$$

Se utiliza Br como parámetro perturbativo:

$$\theta = Br\theta_1 + Br^2\theta_2 + Br^3\theta_3 + \dots \quad (\text{A-15})$$

$$\phi = \phi_0 + Br\phi_1 + Br^2\phi_2 + \dots \quad (\text{A-16})$$

$$c = c_0 + Br c_1 + Br^2 c_2 + \dots \quad (\text{A-17})$$

Por el teorema del binomio se desarrolla (A-17):

$$c^{s+1} = c_0^{s+1} + (s+1)c_0^s c_1 Br + \left( (s+1)c_0^s c_2 + \frac{s(s+1)}{2} c_0^{s-1} c_1^2 \right) Br^2 \quad (\text{A-18})$$

Se sustituye (A-17) y (A-15) y sus derivadas en (A-14) y se desarrolla y se agrupan los términos que tienen el parámetro perturbativo elevado a la misma potencia:

$$Br: \quad \frac{d^2\theta_1}{d\xi^2} = -c_0^{s+1} \quad (\text{A-19})$$

Integrando dos veces (A-19):

$$\theta_1 = -\frac{c_0^{s+1}\xi^2}{2} + X_1\xi + X_2 \quad (\text{A-20})$$

Al evaluar (A-20) con las condiciones de frontera:

$$\theta_1(0) = 0 \rightarrow X_2 = 0$$

$$\theta_1(1) = 0 \rightarrow X_1 = \frac{c_0^{s+1}}{2} \quad (\text{A-21})$$

Sustituyendo (B-21) en (B-20):

$$\theta_1 = -\frac{c_0^{s+1}\xi^2}{2} + \frac{c_0^{s+1}\xi}{2} \quad (\text{A-22})$$

$$Br^2: \frac{d^2\theta_2}{d\xi^2} + \alpha_1 \left(\frac{d\theta_1}{d\xi}\right)^2 + \alpha_1\theta_1 \frac{d^2\theta_1}{d\xi^2} = -(s+1)c_0^s c_1 - c_0^{s+1}\gamma_1\theta_1 \quad (A-23)$$

Sustituyendo (A-22) y sus derivadas en (A-23):

$$\frac{d^2\theta_2}{d\xi^2} = \left(-\frac{3\alpha_1(c_0^{s+1})^2}{2} + \frac{\gamma_1(c_0^{s+1})^2}{2}\right)\xi^2 + \left(\frac{3\alpha_1(c_0^{s+1})^2}{2} - \frac{\gamma_1(c_0^{s+1})^2}{2}\right)\xi + \left(-\frac{\alpha_1(c_0^{s+1})^2}{4} - (s+1)c_0^s c_1\right) \quad (A-24)$$

Integrando dos veces (A-24):

$$\theta_2 = \left(-\frac{3\alpha_1(c_0^{s+1})^2}{24} + \frac{\gamma_1(c_0^{s+1})^2}{24}\right)\xi^4 + \left(\frac{3\alpha_1(c_0^{s+1})^2}{12} - \frac{\gamma_1(c_0^{s+1})^2}{12}\right)\xi^3 + \left(-\frac{\alpha_1(c_0^{s+1})^2}{8} - \frac{(s+1)c_0^s c_1}{2}\right)\xi^2 + Y_1\xi + Y_2 \quad (A-25)$$

Al evaluar (A-25) con las condiciones de frontera:

$$\begin{aligned} \theta_2(0) = 0 &\rightarrow Y_2 = 0 \\ \theta_2(1) = 0 &\rightarrow Y_1 = \frac{\gamma_1(c_0^{s+1})^2}{24} + \frac{(s+1)c_0^s c_1}{2} \end{aligned} \quad (A-26)$$

Sustituyendo (A-26) en (A-25):

$$\begin{aligned} \theta_2 = &\left(-\frac{3\alpha_1(c_0^{s+1})^2}{24} + \frac{\gamma_1(c_0^{s+1})^2}{24}\right)\xi^4 + \left(\frac{3\alpha_1(c_0^{s+1})^2}{12} - \frac{\gamma_1(c_0^{s+1})^2}{12}\right)\xi^3 + \left(-\frac{\alpha_1(c_0^{s+1})^2}{8} - \frac{(s+1)c_0^s c_1}{2}\right)\xi^2 \\ &+ \left(\frac{\gamma_1(c_0^{s+1})^2}{24} + \frac{(s+1)c_0^s c_1}{2}\right)\xi \end{aligned} \quad (A-27)$$

$$\begin{aligned} Br^3: \frac{d^2\theta_3}{d\xi^2} + \alpha_1\theta_1 \frac{d^2\theta_2}{d\xi^2} + 2\alpha_1 \frac{d\theta_1}{d\xi} \frac{d\theta_2}{d\xi} + \alpha_1\theta_2 \frac{d^2\theta_1}{d\xi^2} + \alpha_2\theta_1^2 \frac{d^2\theta_1}{d\xi^2} + 2\alpha_2\theta_1 \left(\frac{d\theta_1}{d\xi}\right)^2 \\ = -(s+1)c_0^s c_2 - \frac{(s^2+s)}{2}c_0^{s-1}c_1^2 - (s+1)c_0^s c_1\gamma_1\theta_1 - c_0^{s+1}\gamma_1\theta_2 - c_0^{s+1}\gamma_2\theta_1^2 \end{aligned} \quad (A-28)$$

Sustituyendo (A-22), (A-25) y sus derivadas en (A-28):

(A-29)

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\theta_3}{d\xi^2} = & \left( -\frac{15\alpha_1^2(c_0^{s+1})^3}{8} + \frac{3\alpha_1\gamma_1(c_0^{s+1})^3}{4} + \frac{5\alpha_2(c_0^{s+1})^3}{4} - \frac{\gamma_1^2(c_0^{s+1})^3}{24} - \frac{\gamma_2(c_0^{s+1})^3}{4} \right) \xi^4 \\
& + \left( \frac{15\alpha_1^2(c_0^{s+1})^3}{4} - \frac{3\alpha_1\gamma_1(c_0^{s+1})^3}{2} - \frac{5\alpha_2(c_0^{s+1})^3}{2} + \frac{\gamma_1^2(c_0^{s+1})^3}{12} + \frac{\gamma_2(c_0^{s+1})^3}{2} \right) \xi^3 \\
& + \left( -\frac{9\alpha_1^2(c_0^{s+1})^3}{4} + \frac{5\alpha_1\gamma_1(c_0^{s+1})^3}{8} - 3\alpha_1(s+1)c_0^s c_1 c_0^{s+1} + \frac{3\alpha_2(c_0^{s+1})^3}{2} + \gamma_1(s+1)c_0^s c_1 c_0^{s+1} \right. \\
& \left. - \frac{\gamma_2(c_0^{s+1})^3}{4} \right) \xi^2 \\
& + \left( \frac{3\alpha_1^2(c_0^{s+1})^3}{8} + \frac{\alpha_1\gamma_1(c_0^{s+1})^3}{8} + 3\alpha_1(s+1)c_0^s c_1 c_0^{s+1} - \frac{\alpha_2(c_0^{s+1})^3}{4} - \gamma_1(s+1)c_0^s c_1 c_0^{s+1} \right. \\
& \left. - \frac{\gamma_1^2(c_0^{s+1})^3}{24} \right) \xi + \left( -\frac{\alpha_1\gamma_1(c_0^{s+1})^3}{24} - \frac{\alpha_1(s+1)c_0^s c_1 c_0^{s+1}}{2} - (s+1)c_0^s c_2 - \frac{(s^2+s)}{2}c_0^{s-1}c_1^2 \right)
\end{aligned}$$

Integrando dos veces (A-29):

$$\begin{aligned}
\theta_3 = & \left( -\frac{15\alpha_1^2(c_0^{s+1})^3}{240} + \frac{3\alpha_1\gamma_1(c_0^{s+1})^3}{120} + \frac{5\alpha_2(c_0^{s+1})^3}{120} - \frac{\gamma_1^2(c_0^{s+1})^3}{720} - \frac{\gamma_2(c_0^{s+1})^3}{120} \right) \xi^6 \\
& + \left( \frac{15\alpha_1^2(c_0^{s+1})^3}{80} - \frac{3\alpha_1\gamma_1(c_0^{s+1})^3}{40} - \frac{5\alpha_2(c_0^{s+1})^3}{40} + \frac{\gamma_1^2(c_0^{s+1})^3}{240} + \frac{\gamma_2(c_0^{s+1})^3}{40} \right) \xi^5 \\
& + \left( -\frac{3\alpha_1^2(c_0^{s+1})^3}{16} + \frac{5\alpha_1\gamma_1(c_0^{s+1})^3}{96} - \frac{\alpha_1(s+1)c_0^s c_1 c_0^{s+1}}{4} + \frac{\alpha_2(c_0^{s+1})^3}{8} + \frac{\gamma_1(s+1)c_0^s c_1 c_0^{s+1}}{12} \right. \\
& \left. - \frac{\gamma_2(c_0^{s+1})^3}{48} \right) \xi^4 \\
& + \left( \frac{3\alpha_1^2(c_0^{s+1})^3}{48} + \frac{\alpha_1\gamma_1(c_0^{s+1})^3}{48} + \frac{3\alpha_1(s+1)c_0^s c_1 c_0^{s+1}}{6} - \frac{\alpha_2(c_0^{s+1})^3}{24} - \frac{\gamma_1(s+1)c_0^s c_1 c_0^{s+1}}{6} \right. \\
& \left. - \frac{\gamma_1^2(c_0^{s+1})^3}{144} \right) \xi^3 + \left( -\frac{\alpha_1\gamma_1(c_0^{s+1})^3}{48} - \frac{\alpha_1(s+1)c_0^s c_1 c_0^{s+1}}{4} - \frac{(s+1)c_0^s c_2}{2} - \frac{(s^2+s)c_0^{s-1}c_1^2}{4} \right) \xi^2 \\
& + Z_1\xi + Z_2
\end{aligned} \tag{A-30}$$

Al evaluar (A-30) con las condiciones de frontera:

$$\theta_3(1) = 0 \rightarrow Z_1 = -\frac{\alpha_1\gamma_1(c_0^{s+1})^3}{480} + \frac{\gamma_1^2(c_0^{s+1})^3}{240} + \frac{\gamma_2(c_0^{s+1})^3}{240} + \frac{\gamma_1(s+1)c_0^s c_1 c_0^{s+1}}{12} + \frac{(s+1)c_0^s c_2}{2} + \frac{(s^2+s)c_0^{s-1}c_1^2}{4} \tag{A-31}$$

Sustituyendo (A-31) en (A-30):

$$\begin{aligned}
\theta_3 = & \left( -\frac{15\alpha_1^2(c_0^{s+1})^3}{240} + \frac{3\alpha_1\gamma_1(c_0^{s+1})^3}{120} + \frac{5\alpha_2(c_0^{s+1})^3}{120} - \frac{\gamma_1^2(c_0^{s+1})^3}{720} - \frac{\gamma_2(c_0^{s+1})^3}{120} \right) \xi^6 \\
& + \left( \frac{15\alpha_1^2(c_0^{s+1})^3}{80} - \frac{3\alpha_1\gamma_1(c_0^{s+1})^3}{40} - \frac{5\alpha_2(c_0^{s+1})^3}{40} + \frac{\gamma_1^2(c_0^{s+1})^3}{240} + \frac{\gamma_2(c_0^{s+1})^3}{40} \right) \xi^5 \\
& + \left( -\frac{3\alpha_1^2(c_0^{s+1})^3}{16} + \frac{5\alpha_1\gamma_1(c_0^{s+1})^3}{96} - \frac{\alpha_1(s+1)c_0^s c_1 c_0^{s+1}}{4} + \frac{\alpha_2(c_0^{s+1})^3}{8} + \frac{\gamma_1(s+1)c_0^s c_1 c_0^{s+1}}{12} \right. \\
& \left. - \frac{\gamma_2(c_0^{s+1})^3}{48} \right) \xi^4 \\
& + \left( \frac{3\alpha_1^2(c_0^{s+1})^3}{48} + \frac{\alpha_1\gamma_1(c_0^{s+1})^3}{48} + \frac{3\alpha_1(s+1)c_0^s c_1 c_0^{s+1}}{6} - \frac{\alpha_2(c_0^{s+1})^3}{24} - \frac{\gamma_1(s+1)c_0^s c_1 c_0^{s+1}}{6} \right. \\
& \left. - \frac{\gamma_1^2(c_0^{s+1})^3}{144} \right) \xi^3 + \left( -\frac{\alpha_1\gamma_1(c_0^{s+1})^3}{48} - \frac{\alpha_1(s+1)c_0^s c_1 c_0^{s+1}}{4} - \frac{(s+1)c_0^s c_2}{2} - \frac{(s^2+s)c_0^{s-1}c_1^2}{4} \right) \xi^2 \\
& + \left( -\frac{\alpha_1\gamma_1(c_0^{s+1})^3}{480} + \frac{\gamma_1^2(c_0^{s+1})^3}{240} + \frac{\gamma_2(c_0^{s+1})^3}{240} + \frac{\gamma_1(s+1)c_0^s c_1 c_0^{s+1}}{12} + \frac{(s+1)c_0^s c_2}{2} \right. \\
& \left. + \frac{(s^2+s)c_0^{s-1}c_1^2}{4} \right) \xi
\end{aligned} \tag{A-32}$$

Sustituyendo (A-22), (A-27) y (A-32) en (A-15)

$$\begin{aligned}
\theta = & \frac{1}{2}Br(c_0^{s+1})(\xi - \xi^2) - \frac{1}{24}Br^2\gamma_1(c_0^{s+1})(-\xi + 2\xi^3 - \xi^4) - \frac{1}{24}Br^2(s+1)c_0^s c_1(-12\xi + 12\xi^2) \\
& - \frac{1}{8}Br^2\alpha_1(c_0^{s+1})^2(\xi^2 - 2\xi^3 + \xi^4) + \frac{1}{2880}Br^3\gamma_1^2(c_0^{s+1})^3(12\xi^2 - 20\xi^3 + 12\xi^5 - 4\xi^6) \\
& + \frac{1}{2880}Br^3\gamma_1(s+1)c_0^s c_1(c_0^{s+1})(240\xi - 480\xi^3 + 240\xi^4) + \frac{1}{2880}Br^3(s+1)c_0^s c_2(1440\xi - 1440\xi^2) \\
& + \frac{1}{2880}Br^3(s^2 + s)c_1^2(c_0^{s-1})(720\xi - 720\xi^2) \\
& + \frac{1}{480}Br^3\alpha_1\gamma_1(c_0^{s+1})^3(-\xi - 10\xi^2 + 10\xi^3 + 25\xi^4 - 36\xi^5 + 12\xi^6) \\
& + \frac{1}{480}Br^3\alpha_1(s+1)c_0^s c_1(c_0^{s+1})(-120\xi^2 + 240\xi^3 - 120\xi^4) \\
& + \frac{1}{48}Br^3\alpha_1^2(c_0^{s+1})^3(3\xi^3 - 9\xi^4 + 9\xi^5 - 3\xi^6) + \frac{1}{48}Br^3\alpha_2(c_0^{s+1})^3(-2\xi^3 + 6\xi^4 - 6\xi^5 + 2\xi^6) \\
& + \frac{1}{240}Br^3\gamma_2(c_0^{s+1})^3(-5\xi^4 + 6\xi^5 - 2\xi^6)
\end{aligned} \tag{A-33}$$

Sustituyendo (A-33) en (A-13):

$$\begin{aligned}
\frac{d\phi}{d\xi} = & \left( \frac{1}{24}Br^2\gamma_1^2 c_0^s (c_0^{s+1})^2 - \frac{1}{8}Br^2\alpha_1\gamma_1 c_0^s (c_0^{s+1})^2 + \frac{1}{4}Br^2\gamma_2 c_0^s (c_0^{s+1})^2 \right) \xi^4 \\
& + \left( -\frac{2}{24}Br^2\gamma_1^2 c_0^s (c_0^{s+1})^2 + \frac{2}{8}Br^2\alpha_1\gamma_1 c_0^s (c_0^{s+1})^2 - \frac{2}{4}Br^2\gamma_2 c_0^s (c_0^{s+1})^2 \right) \xi^3 \\
& + \left( -\frac{1}{2}Br\gamma_1 c_0^s (c_0^{s+1}) - \frac{12}{24}Br^2\gamma_1(s+1)c_0^{2s} c_1 - \frac{1}{8}Br^2\alpha_1\gamma_1 c_0^s (c_0^{s+1})^2 - \frac{1}{2}Br^2\gamma_1 s c_0^{s-1} (c_0^{s+1}) c_1 \right. \\
& \left. + \frac{1}{4}Br^2\gamma_2 c_0^s (c_0^{s+1})^2 \right) \xi^2 \\
& + \left( \frac{1}{2}Br\gamma_1 c_0^s (c_0^{s+1}) + \frac{1}{24}Br^2\gamma_1^2 c_0 (c_0^{s+1})^2 + \frac{12}{24}Br^2\gamma_1(s+1)c_0^{2s} c_1 + \frac{1}{2}Br^2\gamma_1 s c_0^{s-1} (c_0^{s+1}) c_1 \right) \xi \\
& + \left( c_0^s + s c_0^{s-1} c_1 Br + s c_0^{s-1} c_2 Br^2 + \frac{(s^2 - s)c_0^{s-2} c_1^2 Br^2}{2} \right)
\end{aligned} \tag{A-34}$$

Integrando (A-34):

$$\begin{aligned}
\phi = & \left( \frac{1}{120} Br^2 \gamma_1^2 c_0 (c_0^{s+1})^2 - \frac{1}{40} Br^2 \alpha_1 \gamma_1 c_0^s (c_0^{s+1})^2 + \frac{1}{20} Br^2 \gamma_2 c_0^s (c_0^{s+1})^2 \right) \xi^5 \\
& + \left( -\frac{1}{48} Br^2 \gamma_1^2 c_0 (c_0^{s+1})^2 + \frac{1}{16} Br^2 \alpha_1 \gamma_1 c_0^s (c_0^{s+1})^2 - \frac{1}{8} Br^2 \gamma_2 c_0^s (c_0^{s+1})^2 \right) \xi^4 \\
& + \left( -\frac{1}{6} Br \gamma_1 c_0^s (c_0^{s+1}) - \frac{1}{6} Br^2 \gamma_1 (s+1) c_0^{2s} c_1 - \frac{1}{24} Br^2 \alpha_1 \gamma_1 c_0^s (c_0^{s+1})^2 - \frac{1}{6} Br^2 \gamma_1 s c_0^{s-1} (c_0^{s+1}) c_1 \right. \\
& \left. + \frac{1}{12} Br^2 \gamma_2 c_0^s (c_0^{s+1})^2 \right) \xi^3 \\
& + \left( \frac{1}{4} Br \gamma_1 c_0^s (c_0^{s+1}) + \frac{1}{48} Br^2 \gamma_1^2 c_0 (c_0^{s+1})^2 + \frac{1}{4} Br^2 \gamma_1 (s+1) c_0^{2s} c_1 + \frac{1}{4} Br^2 \gamma_1 s c_0^{s-1} (c_0^{s+1}) c_1 \right) \xi^2 \\
& + \left( c_0^s + s c_0^{s-1} c_1 Br + s c_0^{s-1} c_2 Br^2 + \frac{(s^2 - s) c_0^{s-2} c_1^2 Br^2}{2} \right) \xi + W_1
\end{aligned} \tag{A-35}$$

Al evaluar (A-35) con las condiciones de frontera:

$$\phi(0) = 0 \rightarrow W_1 = 0 \tag{A-36}$$

Sustituyendo (A-36) en (A-35) y al suponer la solución ideal, se despejan los valores de las constantes restantes, llegando a lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\phi = & \xi + s c_1 Br \xi + \frac{1}{12} Br \gamma_1 (3\xi^2 - 2\xi^3) + \frac{1}{12} Br^2 \gamma_1 s c_1 (3\xi^2 - 2\xi^3) + \frac{1}{12} Br^2 \gamma_1 (s+1) c_1 (3\xi^2 - 2\xi^3) \\
& + \frac{1}{720} Br^2 \gamma_1^2 (15\xi^2 - 15\xi^4 + 6\xi^5) + \frac{1}{240} Br^2 \alpha_1 \gamma_1 (-10\xi^3 + 15\xi^4 - 6\xi^5) \\
& + \frac{1}{12} Br^2 \gamma_2 (10\xi^3 - 15\xi^4 + 6\xi^5) + s c_2 Br^2 \xi + \frac{(s^2 - s) c_1^2 Br^2}{2} \xi
\end{aligned} \tag{A-37}$$

Con la segunda condición de frontera se obtienen los valores de las constantes de la expansión del binomio:

$$\begin{aligned}
c_1 = & -\frac{1}{12} \gamma_1 \frac{1}{s} = -\frac{1}{12} \gamma_1 n_0 \\
c_2 = & \frac{13}{1440} \gamma_1^2 \frac{1}{s} - \frac{1}{96} \gamma_1^2 n_0 \frac{1}{s} = \frac{13}{1440} \gamma_1^2 n_0 + \frac{1}{96} \gamma_1^2 n_0^2
\end{aligned} \tag{A-38}$$

Sustituyendo (A-38) en (A-33):

$$\begin{aligned}
\theta = & \frac{1}{2}Br(\xi - \xi^2) - \frac{1}{24}Br^2\gamma_1(n_0\xi - (n_0 + 1)\xi^2 + 2\xi^3 - \xi^4) - \frac{1}{8}Br^2\alpha_1(\xi^2 - 2\xi^3 + \xi^4) \\
& + \frac{1}{2880}Br^3\gamma_1^2\{(-15n_0^2 - 17n_0 + 10)\xi - 3(6 + n_0(1 - 5n_0))\xi^2 + 20(1 + 2n_0)\xi^3 - 20(1 + n_0)\xi^4 \\
& + 12\xi^5 - 4\xi^6\} + \frac{1}{480}Br^3\alpha_1\gamma_1\{-\xi + 10n_0\xi^2 - 10(1 + 2n_0)\xi^3 + 5(7 + 2n_0)\xi^4 - 36\xi^5 + 12\xi^6\} \\
& + \frac{1}{48}Br^3(3\alpha_1^2 - 2\alpha_2)(-\xi^2 + 3\xi^4 - 3\xi^5 + \xi^6) + \frac{1}{240}Br^3\gamma_2(\xi - 5\xi^4 + 6\xi^5 - 2\xi^6)
\end{aligned} \tag{A-39}$$

Y también en (A-37):

$$\begin{aligned}
\phi = & \xi - \frac{1}{12}Br\gamma_1(\xi - 3\xi^2 + 2\xi^3) + \frac{1}{720}Br^2\gamma_1^2\{(-5n_0 + 4)\xi + 15(n_0 - 1)\xi^2 - 10(n_0 - 2)\xi^3 - 15\xi^4 + 6\xi^5\} \\
& + \frac{1}{240}Br^2(\alpha_1\gamma_1 - 2\gamma_2)(\xi - 10\xi^3 + 15\xi^4 - 6\xi^5)
\end{aligned} \tag{A-40}$$

## Apéndice B. Ecuaciones del Modelo de Cross

El modelo de Cross

$$\eta = \eta_0 + \left( \frac{\eta_0 - \eta}{1 + K\dot{\gamma}^m} \right) \quad (B-1)$$

$$\frac{d}{dx} \tau_{xz} = 0 \quad \frac{d}{dx} \eta \dot{\gamma} = 0 \quad \dot{\gamma} = \frac{dv_z}{dx} \quad (B-2)$$

Sustituyendo (B-2) en (B-1) e integrando:

$$\left[ \eta + \left( \frac{\eta_0 - \eta}{1 + K \left( \frac{dv_z}{dx} \right)^m} \right) \right] \frac{dv_z}{dx} = d \quad (B-3)$$

Al desarrollar el producto de la ecuación (B-3) y agrupar términos :

$$\eta K \left( \frac{dv_z}{dx} \right)^{m+1} - dK \left( \frac{dv_z}{dx} \right)^m + \eta_0 \frac{dv_z}{dx} = d \quad d = a + b + c \quad (B-4)$$

Como d es una constante, puede separarse para resolver (B-4) por partes:

$$\eta K \left( \frac{dv_z}{dx} \right)^{m+1} = a \quad (B-5)$$

$$\ln(\eta K) + (m + 1) \ln \left( \frac{dv_z}{dx} \right) = \ln(a) \quad (B-6)$$

Aplicando las leyes de logaritmos y exponentes en (B-6):

$$\frac{dv_z}{dx} = \left( \frac{a}{\eta K} \right)^{\frac{1}{m+1}} \quad (B-7)$$

Integrando (B-7) y evaluando con las condiciones de frontera:

$$v_z(0) = 0 \quad v_z = \left( \frac{a}{\eta K} \right)^{\frac{1}{m+1}} x \quad (B-8)$$

Ecuaciones de movimiento y energía generales:

$$\frac{d}{dx} \left( \eta \frac{dv_z}{dx} \right) = 0 \quad (B-9)$$

$$\frac{d}{dx} \left( k \frac{dT}{dx} \right) + \eta \left( \frac{dv_z}{dx} \right)^2 = 0 \quad (\text{B-10})$$

Análisis dimensional:

Sustituyendo (B-1) en (B-9)

$$\frac{d}{dx} \left[ \eta + \left( \frac{\eta_0 - \eta}{1 + K \left( \frac{dv_z}{dx} \right)^m} \right) \right] \frac{dv_z}{dx} = 0 \quad (\text{B-11})$$

Variables:

$$\xi = \frac{x}{b} \quad \phi = \frac{v_z}{V} \quad = \frac{T - T_0}{T_0} \quad Br = \frac{\eta_0 V^2}{k T_0} \quad (\text{B-12})$$

$$\frac{dv_z}{dx} = \frac{dv_z}{d\phi} \cdot \frac{d\phi}{d\xi} \cdot \frac{d\xi}{dx} = V \cdot \frac{d\phi}{d\xi} \cdot \frac{1}{b} = \frac{V}{b} \cdot \frac{d\phi}{d\xi} \quad (\text{B-13})$$

$$dx = b d\xi \quad (\text{B-14})$$

$$\frac{dT}{dx} = \frac{dT}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{d\xi} \cdot \frac{d\xi}{dx} = T_0 \cdot \frac{d\theta}{d\xi} \cdot \frac{1}{b} = \frac{T_0}{b} \cdot \frac{d\theta}{d\xi} \quad (\text{B-15})$$

Sustituyendo (B-13) y (B-14) en (B-11) y desarrollando:

$$\frac{V \eta_0}{b^2} \frac{d}{d\xi} \left[ \frac{\eta}{\eta_0} + \left( \frac{1 - \frac{\eta}{\eta_0}}{1 + K \left( \frac{V}{b} \frac{d\phi}{d\xi} \right)^m} \right) \right] \frac{d\phi}{d\xi} = 0 \quad (\text{B-16})$$

Integrando (B-15) una vez y desarrollando:

$$\frac{V^{m+1} \eta}{b^{m+2}} \frac{d\phi^{m+1}}{d\xi} - dK \left( \frac{V}{b} \frac{d\phi}{d\xi} \right)^m + \frac{V \eta_0}{b^2} \frac{d\phi}{d\xi} = d \quad (\text{B-17})$$

Igual que se hizo en (B-5) resolvemos (B-17) en partes:

$$\frac{V^{m+1} \eta}{b^{m+2}} \frac{d\phi^{m+1}}{d\xi} = a \quad (\text{B-18})$$

$$(m + 1) \ln \left( \frac{d\phi}{d\xi} \right) = \ln \left( \frac{ab^{m+2}}{V^{m+1}\eta} \right) \quad (\text{B-19})$$

Aplicando las leyes de logaritmos y exponentes en (B-19):

$$\frac{d\phi}{d\xi} = \left( \frac{ab^{m+2}}{V^{m+1}\eta} \right)^{\frac{1}{m+1}} \quad (\text{B-20})$$

Pero de una forma simplificada esta misma ecuación puede expresarse de la siguiente forma:

$$\frac{d}{d\xi} \frac{\eta}{\eta_0} \frac{d\phi}{d\xi} = 0 \quad (\text{B-21})$$

Integrando (B-21):

$$\frac{d\phi}{d\xi} = c \frac{\eta_0}{\eta} \quad (\text{B-22})$$

Para considerar los efectos de la disipación viscosa en (B-20)

$$\frac{d\phi}{d\xi} = \left( \frac{ab^{m+2}}{V^{m+1}\eta} \right)^{\frac{1}{m+1}} (1 + \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_n) \quad (\text{B-23})$$

Sustituyendo (B-13) a (B-15) en (B-10):

$$\frac{d}{d\xi} \frac{k_0}{b} \left( \frac{k}{k_0} \frac{T_0}{b} \frac{d\theta}{d\xi} \right) + \frac{\eta_0 \eta}{\eta_0} \left( \frac{V}{b} \frac{d\phi}{d\xi} \right)^2 = 0 \quad (\text{B-24})$$

Sustituyendo (B-23) en (B-24) y desarrollando:

$$\frac{d}{d\xi} \left( \frac{k}{k_0} \frac{d\theta}{d\xi} \right) + \frac{V^2 \eta_0}{T_0 k_0} c \left( \frac{ab^{m+2}}{V^{m+1}\eta} \right)^{\frac{1}{m+1}} (1 + \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_n) = 0 \quad (\text{B-25})$$

$$\frac{k}{k_0} = 1 + \alpha_1 \theta + \alpha_2 \theta^2 + \dots + \alpha_n \theta^n \quad c = c_0 + Br c_1 + Br^2 c_2 + \dots + Br^n c_n \quad w = \left( \frac{ab^{m+2}}{V^{m+1}\eta} \right)^{\frac{1}{m+1}} \quad (\text{B-26})$$

Sustituyendo (B-26) en (B-25):

$$\frac{d}{d\xi} \left( (1 + \alpha_1 \theta + \alpha_2 \theta^2 + \dots + \alpha_n \theta^n) \frac{d\theta}{d\xi} \right) + Brw (c_0 + Br c_1 + Br^2 c_2 + \dots + Br^n c_n) (1 + \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_n) = 0 \quad (\text{B-27})$$

Se utiliza Br como parámetro perturbativo

$$\theta = Br \theta_1 + Br^2 \theta_2 + Br^3 \theta_3 \quad (\text{B-28})$$

$$\frac{d\theta}{d\xi} = Br \frac{d\theta_1}{d\xi} + Br^2 \frac{d\theta_2}{d\xi} + Br^3 \frac{d\theta_3}{d\xi} \quad (\text{B-29})$$

$$1 + \alpha_1\theta + \alpha_2\theta^2 = 1 + \alpha_1(Br\theta_1 + Br^2\theta_2 + Br^3\theta_3) + \alpha_2(Br^2\theta_1 + 2Br^3\theta_1\theta_2) \quad (\text{B-30})$$

$$\left( (1 + \alpha_1\theta + \alpha_2\theta^2) \frac{d\theta}{d\xi} \right) = Br \frac{d\theta_1}{d\xi} + Br^2 \frac{d\theta_2}{d\xi} + Br^3 \frac{d\theta_3}{d\xi} + Br^2\alpha_1\theta_1 \frac{d\theta_1}{d\xi} + Br^3\alpha_1\theta_2 \frac{d\theta_1}{d\xi} + Br^3\alpha_1\theta_1 \frac{d\theta_2}{d\xi} + Br^3\alpha_2\theta_1^2 \frac{d\theta_1}{d\xi} \quad (\text{B-31})$$

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\xi} \left( (1 + \alpha_1\theta + \alpha_2\theta^2) \frac{d\theta}{d\xi} \right) \\ &= Br \frac{d^2\theta_1}{d\xi^2} + Br^2 \frac{d^2\theta_2}{d\xi^2} + Br^3 \frac{d^2\theta_3}{d\xi^2} + Br^2\alpha_1 \left( \frac{d\theta_1}{d\xi} \right)^2 + Br^2\alpha_1\theta_1 \frac{d^2\theta_1}{d\xi^2} + 2Br^3\alpha_1 \frac{d\theta_1}{d\xi} \frac{d\theta_2}{d\xi} + Br^3\alpha_1\theta_2 \frac{d^2\theta_1}{d\xi^2} \end{aligned} \quad (\text{B-32})$$

$$+ Br^3\alpha_1\theta_1 \frac{d^2\theta_2}{d\xi^2} + 2Br^3\alpha_2\theta_1 \left( \frac{d\theta_1}{d\xi} \right)^2 + Br^3\alpha_2\theta_1^2 \frac{d^2\theta_1}{d\xi^2}$$

$$Br(1 + \gamma_1 + \gamma_2^2 + \dots + \gamma_n^n) = Br + Br^2\gamma_{1\ 1} + Br^3\gamma_{1\ 2} + Br^3\gamma_{2\ 1}^2 \quad (\text{B-33})$$

$$\begin{aligned} & Br(1 + \gamma_1 + \gamma_2^2 + \dots + \gamma_n^n)w(c_0 + Br c_1 + Br^2 c_2 + \dots + Br^n c_n) \\ &= Brwc_0 + Br^2wc_0\gamma_{1\ 1} + Br^3wc_0\gamma_{1\ 2} + Br^3wc_0\gamma_{2\ 1}^2 + Br^2wc_1 + Br^3wc_1\gamma_{1\ 1} + Br^3wc_2 \end{aligned} \quad (\text{B-34})$$

Al sustituir (B-32) y (B-34) en (B-27)

$$\begin{aligned} & Br \frac{d^2\theta_1}{d\xi^2} + Br^2 \frac{d^2\theta_2}{d\xi^2} + Br^3 \frac{d^2\theta_3}{d\xi^2} + Br^2\alpha_1 \left( \frac{d\theta_1}{d\xi} \right)^2 + Br^2\alpha_1\theta_1 \frac{d^2\theta_1}{d\xi^2} + 2Br^3\alpha_1 \frac{d\theta_1}{d\xi} \frac{d\theta_2}{d\xi} + Br^3\alpha_1\theta_2 \frac{d^2\theta_1}{d\xi^2} + Br^3\alpha_1\theta_1 \frac{d^2\theta_2}{d\xi^2} \\ &+ 2Br^3\alpha_2\theta_1 \left( \frac{d\theta_1}{d\xi} \right)^2 + Br^3\alpha_2\theta_1^2 \frac{d^2\theta_1}{d\xi^2} + Brwc_0 + Br^2wc_0\gamma_{1\ 1} + Br^3wc_0\gamma_{1\ 2} + Br^3wc_0\gamma_{2\ 1}^2 + Br^2wc_1 \\ &+ Br^3wc_1\gamma_{1\ 1} + Br^3wc_2 = 0 \end{aligned} \quad (\text{B-35})$$

Al agrupar términos que tienen el parámetro perturbativo elevado a la misma potencia:

$$Br: \quad \frac{d^2\theta_1}{d\xi^2} = -wc_0 \quad (\text{B-36})$$

Integrando dos veces (B-36):

$$\theta_1 = -\frac{wc_0}{2} \xi^2 + a_{\theta_1} \xi + b_{\theta_1} \quad (\text{B-37})$$

Al evaluar (B-37) con las condiciones de frontera:

$$\begin{aligned}\theta_1(0) &= 0 \rightarrow b_{\theta_1} = 0 \\ \theta_1(1) &= 0 \rightarrow a_{\theta_1} = \frac{wc_0}{2}\end{aligned}\tag{B-38}$$

Sustituyendo (B-38) en (B-37):

$$\theta_1 = \frac{wc_0}{2}(\xi - \xi^2)\tag{B-39}$$

$$Br^2: \quad \frac{d^2\theta_2}{d\xi^2} + \alpha_1 \left(\frac{d\theta_1}{d\xi}\right)^2 + \alpha_1\theta_1 \frac{d^2\theta_1}{d\xi^2} + wc_0\gamma_{1-1} + wc_1 = 0\tag{B-40}$$

Sustituyendo (B-37) y sus derivadas en (B-40):

$$\frac{d^2\theta_2}{d\xi^2} = \left(\frac{\gamma_1 w^2 c_0^2}{2} - \frac{3\alpha_1 w^2 c_0^2}{2}\right)\xi^2 + \left(\frac{3\alpha_1 w^2 c_0^2}{2} - \frac{\gamma_1 w^2 c_0^2}{2}\right)\xi - \frac{\alpha_1 w^2 c_0^2}{4} - wc_1\tag{B-41}$$

Integrando dos veces (B-41):

$$\theta_2 = \left(\frac{\gamma_1 w^2 c_0^2}{24} - \frac{\alpha_1 w^2 c_0^2}{8}\right)\xi^4 + \left(\frac{\alpha_1 w^2 c_0^2}{4} - \frac{\gamma_1 w^2 c_0^2}{12}\right)\xi^3 + \left(-\frac{\alpha_1 w^2 c_0^2}{8} - \frac{wc_1}{2}\right)\xi^2 + a_{\theta_2}\xi + b_{\theta_2}\tag{B-42}$$

Al evaluar (B-42) con las condiciones de frontera:

$$\begin{aligned}\theta_2(0) &= 0 \rightarrow b_{\theta_2} = 0 \\ \theta_2(1) &= 0 \rightarrow a_{\theta_2} = \frac{\gamma_1 w^2 c_0^2}{24} + \frac{wc_1}{2}\end{aligned}\tag{B-43}$$

Sustituyendo (B-43) en (B-42):

$$\theta_2 = \left(\frac{\gamma_1 w^2 c_0^2}{24} - \frac{\alpha_1 w^2 c_0^2}{8}\right)\xi^4 + \left(\frac{\alpha_1 w^2 c_0^2}{4} - \frac{\gamma_1 w^2 c_0^2}{12}\right)\xi^3 + \left(-\frac{\alpha_1 w^2 c_0^2}{8} - \frac{wc_1}{2}\right)\xi^2 + \left(\frac{\gamma_1 w^2 c_0^2}{24} + \frac{wc_1}{2}\right)\xi\tag{B-44}$$

$$\begin{aligned}Br^3: \quad \frac{d^2\theta_3}{d\xi^2} + 2\alpha_1 \frac{d\theta_1}{d\xi} \frac{d\theta_2}{d\xi} + \alpha_1\theta_2 \frac{d^2\theta_1}{d\xi^2} + \alpha_1\theta_1 \frac{d^2\theta_2}{d\xi^2} + 2\alpha_2\theta_1 \left(\frac{d\theta_1}{d\xi}\right)^2 + \alpha_2\theta_1^2 \frac{d^2\theta_1}{d\xi^2} + wc_0\gamma_{1-2} + wc_0\gamma_{2-1}^2 + wc_1\gamma_{1-1} \\ + wc_2\end{aligned}\tag{B-45}$$

Sustituyendo (B-37), (B-44) y sus derivadas en (B-45):

$$\tag{B-46}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\theta_3}{d\xi^2} = & \left( -\frac{15c_0^3w^3\alpha_1^2}{8} + \frac{3c_0^3w^3\gamma_1\alpha_1}{4} - \frac{c_0^3w^3\gamma_1^2}{24} + \frac{5\alpha_2c_0^3w^3}{4} \right) \xi^4 \\
& + \left( \frac{15c_0^3w^3\alpha_1^2}{4} - \frac{3c_0^3w^3\gamma_1\alpha_1}{2} + \frac{c_0^3w^3\gamma_1^2}{12} - \frac{\alpha_2c_0^3w^3}{2} \right) \xi^3 \\
& + \left( -\frac{9c_0^3w^3\alpha_1^2}{4} - 3c_0c_1w^2\alpha_1 + \frac{5c_0^3w^3\gamma_1\alpha_1}{8} + c_0c_1w^2\gamma_1 + \frac{3c_0^3w^3\alpha_2}{2} \right) \xi^2 \\
& + \left( \frac{3c_0^3w^3\alpha_1^2}{8} + 3c_0c_1w^2\alpha_1 + \frac{c_0^3w^3\gamma_1\alpha_1}{8} - c_0c_1w^2\gamma_1 - \frac{c_0^3w^3\gamma_1^2}{24} - \frac{c_0^3w^3\alpha_2}{4} \right) \xi \\
& + \left( -\frac{c_0^3w^3\gamma_1\alpha_1}{24} - \frac{c_0c_1w^2\alpha_1}{2} - c_2w \right)
\end{aligned}$$

Integrando dos veces (B-46)

$$\begin{aligned}
\theta_3 = & \left( -\frac{c_0^3w^3\alpha_1^2}{16} + \frac{c_0^3w^3\gamma_1\alpha_1}{40} - \frac{c_0^3w^3\gamma_1^2}{720} + \frac{\alpha_2c_0^3w^3}{24} \right) \xi^6 + \left( \frac{3c_0^3w^3\alpha_1^2}{16} - \frac{3c_0^3w^3\gamma_1\alpha_1}{40} + \frac{c_0^3w^3\gamma_1^2}{240} - \frac{\alpha_2c_0^3w^3}{40} \right) \xi^5 \\
& + \left( -\frac{3c_0^3w^3\alpha_1^2}{16} - \frac{c_0c_1w^2\alpha_1}{4} + \frac{5c_0^3w^3\gamma_1\alpha_1}{96} + \frac{c_0c_1w^2\gamma_1}{12} + \frac{c_0^3w^3\alpha_2}{8} \right) \xi^4 \\
& + \left( \frac{c_0^3w^3\alpha_1^2}{16} + \frac{c_0c_1w^2\alpha_1}{2} + \frac{c_0^3w^3\gamma_1\alpha_1}{48} - \frac{c_0c_1w^2\gamma_1}{6} - \frac{c_0^3w^3\gamma_1^2}{144} - \frac{c_0^3w^3\alpha_2}{24} \right) \xi^3 \\
& + \left( -\frac{c_0^3w^3\gamma_1\alpha_1}{48} - \frac{c_0c_1w^2\alpha_1}{4} - \frac{c_2w}{2} \right) \xi^2 + a_{\theta_3}\xi + b_{\theta_3}
\end{aligned} \tag{B-47}$$

Al evaluar (B-47) con las condiciones de frontera:

$$\begin{aligned}
\theta_3(0) = 0 & \rightarrow b_{\theta_3} = 0 \\
\theta_3(1) = 0 & \rightarrow a_{\theta_3} = -\frac{c_0^3w^3\gamma_1\alpha_1}{480} + \frac{c_0c_1w^2\gamma_1}{12} + \frac{c_0^3w^3\gamma_1^2}{240} + \frac{c_2w}{2} - \frac{c_0^3w^3\alpha_2}{10}
\end{aligned} \tag{B-48}$$

Sustituyendo (B-48) en (B-47):

$$\begin{aligned}
\theta_3 = & \left( -\frac{c_0^3 w^3 \alpha_1^2}{16} + \frac{c_0^3 w^3 \gamma_1 \alpha_1}{40} - \frac{c_0^3 w^3 \gamma_1^2}{720} + \frac{\alpha_2 c_0^3 w^3}{24} \right) \xi^6 + \left( \frac{3c_0^3 w^3 \alpha_1^2}{16} - \frac{3c_0^3 w^3 \gamma_1 \alpha_1}{40} + \frac{c_0^3 w^3 \gamma_1^2}{240} - \frac{\alpha_2 c_0^3 w^3}{40} \right) \xi^5 \\
& + \left( -\frac{3c_0^3 w^3 \alpha_1^2}{16} - \frac{c_0 c_1 w^2 \alpha_1}{4} + \frac{5c_0^3 w^3 \gamma_1 \alpha_1}{96} + \frac{c_0 c_1 w^2 \gamma_1}{12} + \frac{c_0^3 w^3 \alpha_2}{8} \right) \xi^4 \\
& + \left( \frac{c_0^3 w^3 \alpha_1^2}{16} + \frac{c_0 c_1 w^2 \alpha_1}{2} + \frac{c_0^3 w^3 \gamma_1 \alpha_1}{48} - \frac{c_0 c_1 w^2 \gamma_1}{6} - \frac{c_0^3 w^3 \gamma_1^2}{144} - \frac{c_0^3 w^3 \alpha_2}{24} \right) \xi^3 \\
& + \left( -\frac{c_0^3 w^3 \gamma_1 \alpha_1}{48} - \frac{c_0 c_1 w^2 \alpha_1}{4} - \frac{c_2 w}{2} \right) \xi^2 + \left( -\frac{c_0^3 w^3 \gamma_1 \alpha_1}{480} + \frac{c_0 c_1 w^2 \gamma_1}{12} + \frac{c_0^3 w^3 \gamma_1^2}{240} + \frac{c_2 w}{2} - \frac{c_0^3 w^3 \alpha_2}{10} \right) \xi
\end{aligned} \tag{B-49}$$

Sustituyendo (B-39), (B-44) y (B-49) en (B-28) y desarrollando:

$$\begin{aligned}
\theta = & Br \frac{w c_0}{2} (-\xi^2 + \xi) + Br^2 \frac{\alpha_1 w^2 c_0^2}{8} (-\xi^4 + 2\xi^3 - \xi^2) + Br^2 \frac{\gamma_1 w^2 c_0^2}{24} (\xi^4 - 2\xi^3 + \xi) + Br^2 \frac{w c_1}{2} (-\xi^2 + \xi) \\
& + Br^3 \frac{c_0^3 w^3 \alpha_1^2}{16} (-\xi^6 + 3\xi^5 - 3\xi^4 + \xi^3) + Br^3 \frac{c_0^3 w^3 \gamma_1 \alpha_1}{480} (12\xi^6 - 36\xi^5 + 25\xi^4 + 10\xi^3 - 10\xi^2 - \xi) \\
& + Br^3 \frac{c_0 c_1 w^2 \alpha_1}{4} (-\xi^4 + 2\xi^3 - \xi^2) + Br^3 \frac{c_0 c_1 w^2 \gamma_1}{12} (\xi^4 - 2\xi^3 + \xi) \\
& + Br^3 \frac{c_0^3 w^3 \gamma_1^2}{720} (-\xi^6 + 3\xi^5 - 5\xi^3 + 3\xi) + Br^3 \frac{c_2 w}{2} (-\xi^2 + \xi) \\
& + Br^3 \frac{c_0^3 w^3 \alpha_2}{120} (\xi^6 - 3\xi^5 + 15\xi^4 - 5\xi^3 - 8\xi)
\end{aligned} \tag{B-50}$$

Sustituyendo (B-50) en (B-23):

$$\begin{aligned}
\frac{d\phi}{d\xi} = & w + Br \frac{\gamma_1 w^2 c_0}{2} (-\xi^2 + \xi) + Br^2 \frac{\alpha_1 \gamma_1 w^3 c_0^2}{8} (-\xi^4 + 2\xi^3 - \xi^2) + Br^2 \frac{\gamma_1^2 w^3 c_0^2}{24} (\xi^4 - 2\xi^3 + \xi) \\
& + Br^2 \frac{\gamma_1 w^2 c_1}{2} (-\xi^2 + \xi) + Br^2 \frac{\gamma_2 w^3 c_0^2}{4} (\xi^4 - 2\xi^3 + \xi^2)
\end{aligned} \tag{B-51}$$

Integrando (B-51):

$$\begin{aligned}
\phi = & w\xi + Br \frac{\gamma_1 w^2 c_0}{12} (-2\xi^3 + 3\xi^2) + Br^2 \frac{\alpha_1 \gamma_1 w^3 c_0^2}{240} (-6\xi^5 + 15\xi^4 - 10\xi^3) + Br^2 \frac{\gamma_1^2 w^3 c_0^2}{240} (2\xi^5 - 5\xi^4 + 5\xi^2) \\
& + Br^2 \frac{\gamma_1 w^2 c_1}{12} (-2\xi^3 + 3\xi^2) + Br^2 \frac{\gamma_2 w^3 c_0^2}{120} (6\xi^5 - 15\xi^4 + 10\xi^3) + X
\end{aligned} \tag{B-52}$$

Al evaluar (B-52) con las condiciones de frontera:

$$\phi(0) = 0 \rightarrow X = 0$$

$$\phi(1) = 1 \rightarrow \frac{120(1-w)}{Br^2w^3} - \frac{10c_0\gamma_1}{Brw} - \frac{10c_1\gamma_1}{w} = -\frac{\alpha_1\gamma_1c_0^2}{2} + \gamma_1^2c_0^2 + \gamma_1c_0^2 \quad (\text{B-53})$$

$$\phi = w\xi + Br\frac{\gamma_1w^2c_0}{12}(-2\xi^3 + 3\xi^2) + Br^2\frac{\alpha_1\gamma_1w^3c_0^2}{240}(-6\xi^5 + 15\xi^4 - 10\xi^3) + Br^2\frac{\gamma_1^2w^3c_0^2}{240}(2\xi^5 - 5\xi^4 + 5\xi^2)$$

$$+ Br^2\frac{\gamma_1w^2c_1}{12}(-2\xi^3 + 3\xi^2) + Br^2\frac{\gamma_2w^3c_0^2}{120}(6\xi^5 - 15\xi^4 + 10\xi^3) \quad (\text{B-54})$$