



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

DIVISIÓN DE INGENIERÍA MECÁNICA E INDUSTRIAL

Convección natural y conducción de calor en un sistema
de ánuos esféricos concéntricos

Tesis

que para obtener el título de

Ingeniero Mecánico

presenta

Francisco Javier Lira Rangel

Tutor: Dr. Rubén Ávila Rodríguez

Ciudad Universitaria, abril 2015





Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Dedicatorias

A mis padres Rosalva y Javier por el apoyo a lo largo de mi vida.

A mi hermana Alondra por brindarme tantas alegrías.

A mi novia Claudia quien me apoyó y alentó a continuar.

Agradecimientos

A la Universidad Nacional Autónoma de México por haberme proporcionado una formación integral.

Al Departamento de Termofluidos de la Facultad de Ingeniería por brindar sus instalaciones y equipo de cómputo.

Al Dr. Rubén Ávila Rodríguez por la dirección de ésta tesis.

Investigación realizada gracias al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) de la UNAM IN117314 "Transferencia de calor en un sistema esférico (fluido-sólido) con campo magnético y movimientos de rotación y precesión".
Agradezco a la DGAPA-UNAM la beca recibida.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Motivación	1
1.2. Estado del Arte	2
1.2.1. Simulaciones de convección sin rotación	2
1.2.2. Simulaciones de convección con rotación	4
1.2.3. Dínamos Numéricos	8
1.3. Objetivos	10
2. Modelo Físico	11
2.1. Estructura general de la Tierra	11
2.1.1. Corteza	11
2.1.2. Manto	12
2.1.3. Núcleo	12
2.2. Convección del manto	13
2.2.1. Modelo de capas a 660 kilómetros (Modelo I)	14
2.2.2. Modelo de convección completa del manto (Modelo II)	14
2.2.3. Modelo de convección con rotación a gran escala (Mo- delo III)	14
2.3. Modelo propuesto	16
3. Modelo Matemático	18
3.0.1. Flujo incompresible	18
3.0.2. Convección natural	19
3.1. Ecuación de continuidad	19
3.2. Ecuación de cantidad de movimiento	20
3.3. Ecuación de la energía	22
3.4. Ecuación de difusión de calor	23
3.5. Parámetros adimensionales	23
3.5.1. Número de Rayleigh	23

3.5.2. Número de Prandtl	24
4. Algoritmo Numérico	25
4.1. Método de residuos pesados (ponderados)	25
4.2. Método de Galerkin	27
4.3. Puntos Gauss-Lobatto-Legendre	27
4.4. Cuadratura Gauss-Lobatto-Legendre	28
4.5. Método de la esfera cúbica	28
4.6. Generación de la malla	30
5. Resultados	35
5.1. Difusión en estado transitorio	35
5.2. Validación	39
5.3. Dos ámulos de fluido	42
6. Conclusiones	61
6.1. Conclusiones	61
6.2. Trabajo futuro	62
Apéndices	63
Apéndice A. Ecuación de difusión de calor en estado transitorio	64
Apéndice B. Ecuaciones adimensionales	73
B.1. Ecuación de continuidad	74
B.2. Ecuación de cantidad de movimiento	74
B.3. Ecuación de la energía	76
Apéndice C. Transformación del vector gravedad a coordena- das cartesianas.	77
7. Bibliografía	79

Nomenclatura

α	Difusividad térmica $\left[\frac{\text{m}^2}{\text{s}}\right]$.
β	Expansión volumetrica termal $\left[\frac{1}{\text{K}}\right]$.
τ_{ij}	Tensor de esfuerzos viscosos [Pa].
\vec{g}	Vector gravedad $\left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right]$.
\vec{F}	Vector fuerza [N].
\vec{g}_c	Vector gravedad en coordenadas cartesianas.
\vec{g}_s	Vector gravedad en coordenadas esféricas.
\vec{v}	Vector velocidad $\left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right]$.
$\frac{d()}{dt}$	Derivada material.
$\Delta\rho$	Incremento de densidad.
ΔT	Incremento de temperatura.
\dot{E}	Flujo de energía [W].
\dot{m}	Flujo de masa $\left[\frac{\text{kg}}{\text{s}}\right]$.
\dot{Q}	Flujo de calor [W].
\dot{W}	Flujo de trabajo [W].
η	Relación de aspecto.
η_a	Relación de aspecto en un ánulo.

η_s	Relación de aspecto respecto al sistema.
$\frac{\partial}{\partial t}$	Variación respecto al tiempo.
\int_{SC}	Integral en la superficie de control.
\int_{VC}	Integral en el volumen de control.
μ	Viscosidad dinámica $\left[\frac{\text{kg}}{\text{m s}}\right]$.
∇	Vector nabra.
ν	Viscosidad cinemática $\left[\frac{\text{m}^2}{\text{s}}\right]$.
ρ	Densidad $\left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right]$.
ρ_∞	Densidad del fluido quieto.
A	Área $[\text{m}^2]$.
c_v	Calor específico a volumen constante $\left[\frac{\text{J}}{\text{kg K}}\right]$.
C_g	Constante gravitacional $\left[\frac{\text{m}^{n+1}}{\text{s}^2}\right]$.
dV	Diferencial de volumen $[\text{m}^3]$.
e	Energía total por unidad de masa $\left[\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}\right]$.
f_r	Componente radial del vector gravedad.
k	Conductividad térmica $\left[\frac{\text{W}}{\text{m K}}\right]$.
p	Presión $[\text{Pa}]$.
r_{e_s}	Radio externo de un ánulo en el sistema $[\text{m}]$.
r_e	Radio externo $[\text{m}]$.
r_i	Radio interno $[\text{m}]$.
r_s	Radio total del sistema $[\text{m}]$.
T	Temperatura $[\text{K}]$.
T_∞	Temperatura del fluido quieto.
u	Energía interna por unidad de masa $\left[\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}\right]$.

Capítulo 1

Introducción

1.1. Motivación

El comportamiento de los planetas está estrechamente ligado con los procesos térmicos que tienen lugar en el interior de los mismos. En particular las características térmicas y los materiales internos que se pueden comportar como fluidos son los responsables de la mayor parte de los fenómenos internos y externos que suceden en los planetas.

Por ejemplo, el comportamiento de los fenómenos que ocurren sobre la superficie terrestre son producidos por el calor proveniente del interior de la Tierra, la formación de montañas, la tectónica de placas, la generación de magma, entre otras, se pueden vincular con los procesos de transporte de energía que se llevan a cabo en el interior de la Tierra.

Por otro lado, la dinámica de los fenómenos que se presentan en el interior de la Tierra está asociada a los movimientos de material interno que son causados por la diferencia de temperaturas entre el núcleo y la corteza. A este tipo de movimientos se les conoce como procesos convectivos y son de suma importancia, ya que con ellos se pueden explicar los procesos de deformación de la corteza, tales como la formación de islas y montañas, la actividad volcánica e incluso el campo magnético terrestre.

Por las razones antes mencionadas es evidente la importancia que presenta el conocer y comprender las características del flujo de calor en el interior de los planetas y los patrones de flujo que se presentan en las capas (núcleo externo, océano y atmósfera) de fluido que constituyen nuestro pla-

neta. Estas cuestiones son la motivación del presente trabajo.

En lo que resta del capítulo se describen las líneas de investigación que se han desarrollado en torno a la simulación de la transferencia de calor en el interior de planetas.

1.2. Estado del Arte

En la siguiente sección se abordan algunas de las diferentes investigaciones que se han llevado a cabo para simular la transferencia de calor por convección en el interior de los planetas. Como se muestra más adelante las investigaciones se dividen en tres disciplinas principales; simulaciones sin rotación, simulaciones con rotación y dinámicos numéricos.

1.2.1. Simulaciones de convección sin rotación

Frédéric Deschamps (2010) usa un modelo paramétrico de la convección y reporta los efectos que tiene la relación de aspecto en la transferencia de calor en el interior de un anillo esférico, el cual está sujeto a calentamiento en la frontera interna y un enfriamiento en la frontera externa. Las simulaciones que realizan muestran los patrones de temperatura en el anillo para diferentes números de Rayleigh¹ Ra y razones de aspecto² $\eta = f$ [Deschamps et al., 2010]. Ver figura 1.1.

Para predecir los resultados del experimento GeoFlow en la estación espacial internacional Feudel (2011) lleva a cabo simulaciones para dos esferas concéntricas con un radio exterior dos veces mayor al interno y un campo de fuerza dependiente del radio proporcional a r^{-5} . Los resultados de su trabajo reportan tres patrones estables de flujo para el estado estacionario; axisimétrico, octaédrico y siete celdas. También señala que al incrementar el número de Rayleigh la dinámica se vuelve dependiente del tiempo, [Feudel et al., 2011]. Ver figura 1.2.

¹El número de Rayleigh es una medida del balance entre las fuerzas que impulsan la convección (diferencia de densidad) y las fuerzas que se le oponen (fricción viscosa y la difusión térmica).

²Se define a la relación de aspecto como la razón del radio interno sobre el radio externo $\eta = \frac{r_e}{r_i}$

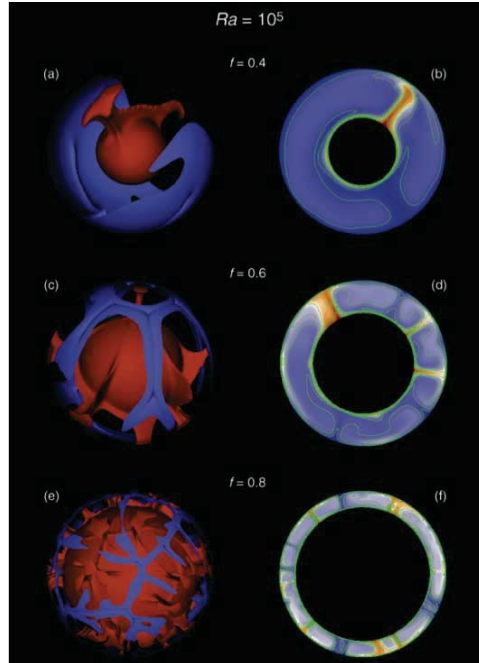


Figura 1.1: Efecto de la relación de radios $f = \frac{r_i}{r_e}$ cuando el número de Rayleigh es $Ra = 10^5$; a) $f = 0.4$, b) $f = 0.6$ y e) $f = 0.8$. La columna izquierda muestra isosuperficies de temperatura adimensional a) Azul: $T = 0.005$, rojo: $T = 0.010$, b) Azul: $T = 0.017$, rojo: $T = 0.55$ y c) Azul: $T = 0.55$, rojo: $T = 0.60$. La columna derecha muestra la distribución de temperatura adimensional en cortes ecuatoriales, [Deschamps et al., 2010].

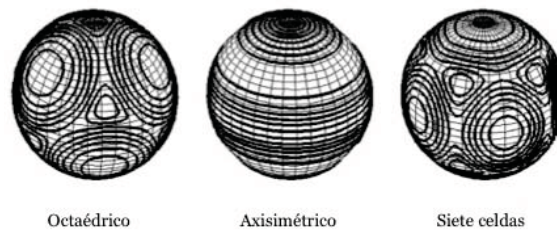


Figura 1.2: Patrones convectivos en el experimento GeoFlow según Feudel, [Feudel et al., 2011].

Posteriormente Frédéric Deschamps (2012) publica un artículo en el que realizaron simulaciones de convección en un anulo esférico con fuentes de calor volumétricas en el interior de las esferas. A diferencia de su artículo anterior, [Deschamps et al., 2010] el flujo de calor es igual a cero en la frontera interior, la temperatura en la frontera exterior es constante e incluye un término fuente homogéneo en el interior. Sus resultados muestran la evolución de la temperatura en el estado de cuasi equilibrio. [Deschamps et al., 2012]. Ver figura 1.3.

En el trabajo publicado por [Avila et al., 2013] se realiza un estudio comparativo de los efectos que tiene la relación de aspecto sobre el número de Rayleigh crítico. Efectúan una serie de simulaciones para dos campos de gravedad radial de la forma r^{-n} , donde la distribución de temperatura es generada por un término fuente o una diferencia de temperaturas impuesta en la esfera exterior e inferior. En el artículo reportan los números de Rayleigh críticos para las diferentes simulaciones [Avila et al., 2013]. Este trabajo se toma como referencia para comparar los números de Rayleigh críticos.

Cabe mencionar que las simulaciones e investigaciones numéricas hasta ahora reportadas en la literatura se han realizado considerando el núcleo externo o el manto exclusivamente. Hasta el momento no se han reportado problemas que combinen el caso de convección - difusión - convección, que en este trabajo de tesis se presenta.

Es importante resaltar que las simulaciones mencionadas se realizan solo en un anulo esférico, donde la diferencia de temperaturas, entre la frontera interna y externa del anulo es invariante en el tiempo por lo que el número de Rayleigh se mantiene constante en toda la simulación. En el presente trabajo al tomar en cuenta más de dos anulos esféricos en donde una de las fronteras presenta una temperatura que varía con el tiempo trae como consecuencia que los números de Rayleigh, en el fluido de la capa interna y en el fluido de la capa externa sean función del tiempo.

1.2.2. Simulaciones de convección con rotación

Para hacer un análisis detallado de la física terrestre y representar a los planetas en un modelo más próximo a la realidad se han hecho simulaciones en las cuales se incorpora la rotación.

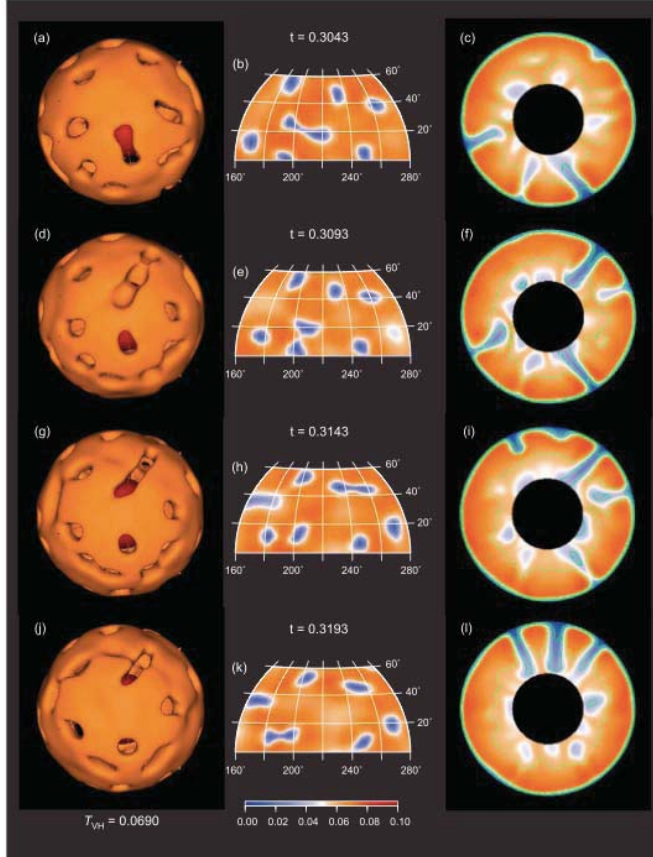


Figura 1.3: Evolución de la temperatura en el tiempo cuando $Ra_{VH} = 1.7 * 10^6$ y relación de radios $f = 0.4$, donde Ra_{VH} es el número de Rayleigh-Roberts definido por $Ra_{VH} = \frac{1+f+f^2}{3} \frac{\beta \rho^2 g H D^5}{\eta k \alpha}$ y H es la razón de calentamiento interno. Columna izquierda: isosuperficies de temperatura adimensional $T = 0.06897$. Columna central: distribución de temperatura en latitud de 10° a 60° y de 160° a 280° en longitud. Columna derecha: cortes polares de la distribución de temperatura. Secuencia durante el cuasi equilibrio. [Deschamps et al., 2012].

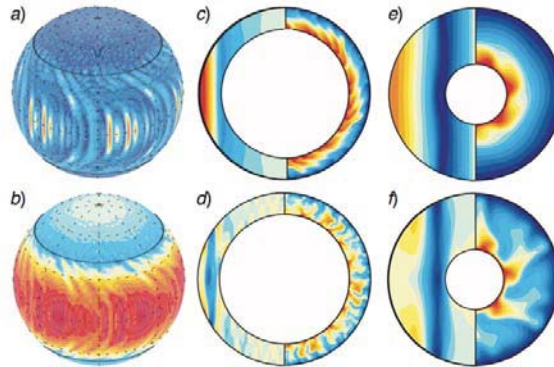


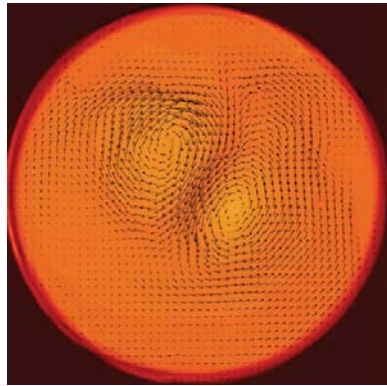
Figura 1.4: Patrones de viento zonal encontrados por Aurnou y Olson, [Aurnou and Olson, 2001].

En un artículo publicado por Aurnou y Olson (2001) simulan la generación de viento zonal³ en esferas concéntricas con rotación donde la gravedad varía linealmente con el radio. El modelo numérico se basa en una convección térmica que depende del tiempo, un fluido tipo Boussinesq que rota con condiciones de frontera de no deslizamiento para un caso y libre de esfuerzo para el segundo. Las simulaciones presentan un comportamiento del viento zonal que se propaga en dirección Este en la región ecuatorial y en dirección Oeste en latitudes mayores. Según Aurnou y Olson (2011) el comportamiento del fluido es semejante a la dinámica de la atmósfera de planetas como Júpiter y Saturno, los cuales tienen flujos con velocidades altas en la región ecuatorial originados por convección profunda [Aurnou and Olson, 2001]. Ver figura 1.4

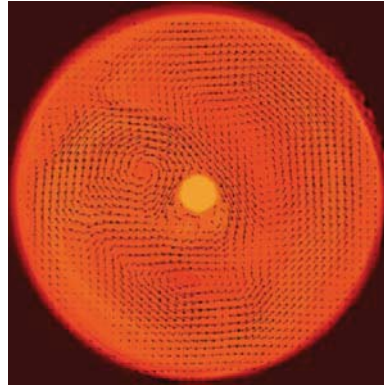
Evonuk y Glatzmaier (2006), [Evonuk and Glatzmaier, 2006], realizan simulaciones en dos dimensiones en el plano ecuatorial, tomando en cuenta flujo incompresible, para mostrar los efectos del tamaño del núcleo en el flujo convectivo en planetas gigantes. Sus resultados muestran que a una velocidad de rotación alta las simulaciones con presencia y ausencia del núcleo son equivalentes, en cambio cuando la velocidad de rotación es baja el patrón de flujo es completamente distinto. Ver figura 1.5.

Se han publicado artículos en los que se estudia el experimento Geo-Flow, el más detallado de ellos es el publicado por Futterer (2007), en el que muestra los patrones de flujo convectivo; estado estacionario y convección

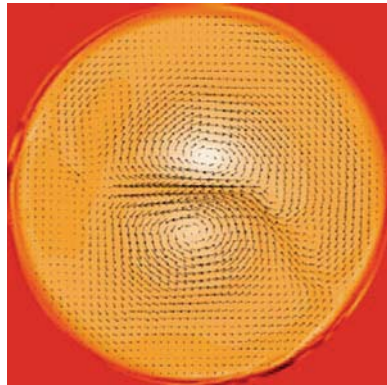
³El viento zonal (ZW) se refiere a la parte axi simétrica de la velocidad azimutal.



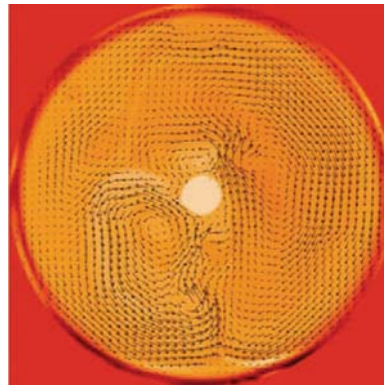
(a) Sin núcleo y rotación baja



(b) Con núcleo y rotación baja



(c) Sin núcleo y rotación alta



(d) Con núcleo y rotación alta

Figura 1.5: Efectos de la rotación en los patrones de flujo convectivo en ausencia (lado izquierdo) y en presencia (lado derecho) de núcleo. [Evonuk and Glatzmaier, 2006]

caótica. Así mismo, muestra los números de Taylor característicos, para cada uno de los patrones, [Futterer et al., 2008].

Moghadam y Rahimi (2009) simulan la transferencia de calor en un sistema en el que la esfera interna presenta una rotación que depende del tiempo y la esfera externa rota a una velocidad constante. Concluyen que flujos resultantes presentan un retardo en la transferencia de calor debido a las velocidades angulares de las dos esferas [Moghadam and Rahimi, 2008].

La última línea de investigación, como se muestra a continuación, se refiere a los dínamos numéricos que estudian el campo magnético que genera el movimiento convectivo del material que conforma al núcleo externo.

1.2.3. Dínamos Numéricos

Se han publicado diversos artículos en los que se recrea numéricamente el efecto dínamo que describe la distribución de velocidades, calor y campo magnético. A continuación se hace un breve repaso de algunos de los artículos publicados.

Heimpel (2005) estudia el efecto que tiene el tamaño del núcleo interno en la formación del campo magnético. En su trabajo muestra los patrones de temperatura, velocidad angular y campo magnético y cómo se relacionan entre sí. Resalta una clara relación entre la cantidad de celdas convectivas y los campos magnéticos auto sostenibles con forma de dipolo, [Heimpel et al., 2005]. Ver figura 1.6.

Simitiev y Busse (2005) analizan la relación que existe entre el número de Prandtl y la estructura que presenta el campo magnético, así como los efectos que tiene el número de Rayleigh sobre las celdas convectivas y en consecuencia el efecto dínamo. En este artículo muestran que los números de Prandtl elevados y próximos a la unidad generan un dínamo comparable al geodínamo terrestre, por otro lado, distingue dos patrones de convección; rollos que se propagan en la dirección azimutal y celdas que se distribuyen en la zona ecuatorial, [Simitiev and Busse, 2005]. Ver figura 1.7.

En las tres líneas de investigación que se describieron los estudios se centran en el núcleo líquido de planetas terrestres o se abordan por separado las distintas capas que conforman a los planetas. En el presente trabajo de

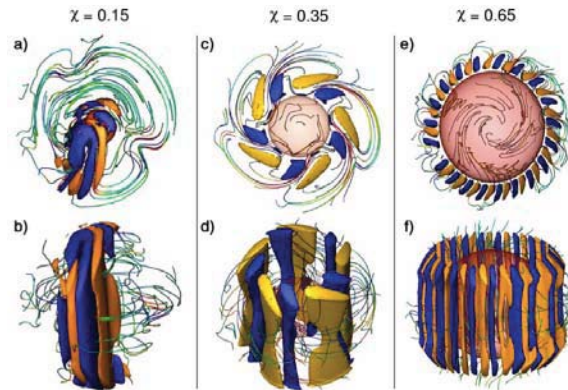


Figura 1.6: Patrones de flujo convectivo, vorticidad y campo magnético analizados por Heimpel. Muestra las isosuperficies de la vorticidad y las líneas de campo magnético para diferentes relaciones de aspecto $\chi = \frac{r_i}{r_o}$. [Heimpel et al., 2005].

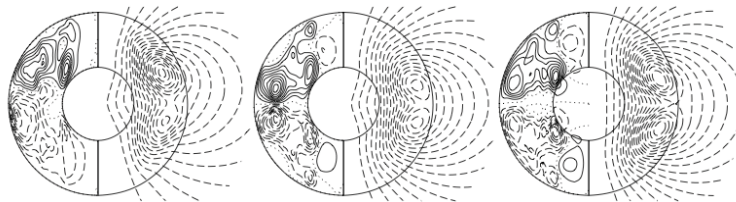


Figura 1.7: Patrones de campo magnético dipolar analizados por Simitiev y Busse. [Simitiev and Busse, 2005].

tesis se estudian, de una forma simplificada, las distintas capas que conforman a los planetas terrestres. En particular se estudian los efectos de la temperatura en fluido confinado en primer y último anillo del sistema.

1.3. Objetivos

- Estudiar la transferencia de calor por difusión en un sistema de esferas concéntricas.
- Estudiar la transferencia de calor por convección en un sistema de esferas concéntricas.
- Comparar, con la literatura disponible actual, los números de Rayleigh críticos tomando en cuenta un campo de gravedad radial de la forma $\frac{1}{r^n}$ cuando $n = 1, 3$).
- Estudiar los patrones convectivos y de temperatura provocados por la gravedad radial.
- Estudiar el comportamiento del fluido confinado entre el núcleo interno y el manto, y el fluido confinado entre la corteza y la capa exterior.

Capítulo 2

Modelo Físico

En la siguiente sección se describe el modelo de capas en el interior de la Tierra y las características principales que presentan, así como el modelo simplificado que se estudia para resolver la transferencia de calor y el flujo convectivo.

En particular para este trabajo se simula la convección en la capa correspondiente al núcleo externo y una capa externa que puede representar la capa oceánica o atmosférica o una sección externa del manto que se puede comportar como un fluido.

2.1. Estructura general de la Tierra

La estructura general de la Tierra consta de tres capas distintas; la corteza, manto y núcleo. Estas capas se subdividen en zonas de acuerdo a sus propiedades físicas. Las propiedades que se utilizan para diferenciar estas regiones se basan en la naturaleza (líquido o sólido) y la resistencia promedio del material.

2.1.1. Corteza

Es la capa externa relativamente delgada y comprende dos tipos: la corteza continental y la corteza oceánica. La corteza oceánica tiene aproximadamente 7 kilómetros de espesor compuesta de rocas ígneas con una densidad promedio de 3.0 gramos por centímetro cúbico. En contraste la corteza continental tiene de 35 a 45 kilómetros de espesor con una densidad promedio

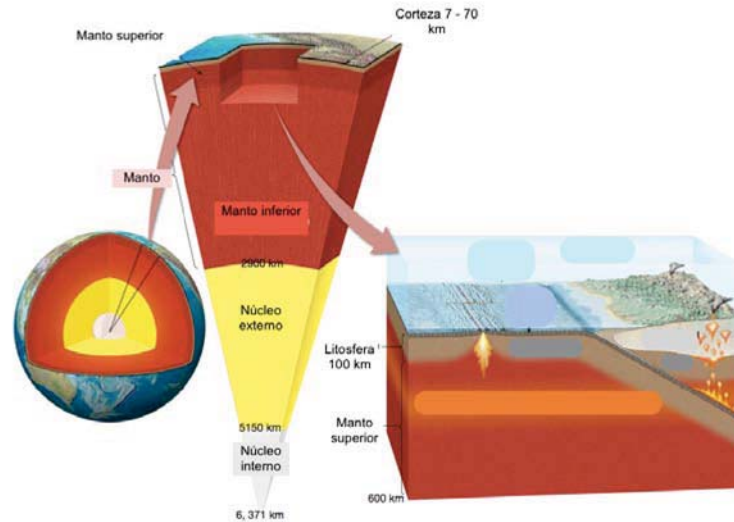


Figura 2.1: Estructura interna de la Tierra

de 2.7 gramos por centímetro cúbico, [Tarbuck et al., 2010].

2.1.2. Manto

El manto representa más del 82 % del volumen de la Tierra, consiste en un anillo esférico de roca sólida que se extiende a una profundidad de 2900 kilómetros y a su vez se divide en dos; el manto superior que comprende la frontera corteza-manto hasta una profundidad de 660 kilómetros, desde los 660 hasta 2900 kilómetros de profundidad se encuentra el manto inferior que a causa del incremento de presión y temperatura es capaz de fluir, [Tarbuck et al., 2010].

2.1.3. Núcleo

La composición del núcleo se describe como una aleación de hierro-níquel con pequeñas cantidades de otros elementos con una densidad aproximada de 11 gramos por centímetro cúbico. Esta dividido en dos regiones; el núcleo externo formado por una capa líquida de 2270 kilómetros de espesor, donde a causa del movimiento del hierro metálico el campo magnético de la Tierra es generado. Finalmente, se encuentra el núcleo interno delimitado por una esfera de 1216 kilómetros de radio, [Tarbuck et al., 2010].

Para poder representar la estructura interna de la tierra en la simulación se requiere de la relación de aspecto¹, de cada una de las capas. La relación de aspecto del sistema se define como la razón del radio externo de un ánulo del sistema entre el radio total del sistema $\eta_s = \frac{r_{es}}{r_s}$. De acuerdo con las características descritas, el cuadro 2.1 presenta las relaciones de aspecto de las capas de la Tierra.

	Núcleo		Manto		Corteza
	Interno	Externo	Interior	Superior	Continental
η_a	0	0.35	0.61	0.90	0.98
η_s	0.19	0.54	0.89	0.98	1

Cuadro 2.1: Relación de aspecto de cada una de las capas de la Tierra.

El ánulo formado por la corteza es muy delgado, lo que dificulta su visualización. Por tal motivo en este trabajo se modifica la relación de aspecto para la corteza y el manto como se muestra en el modelo propuesto.

2.2. Convección del manto

El manto consiste casi en su totalidad de roca sólida, a pesar de ello es suficientemente caliente para presentar características de un flujo convectivo de baja velocidad que es producido por la combinación de tres procesos térmicos:

1. Calentamiento desde la frontera interior (manto-núcleo).
2. Calentamiento en el interior producido por isótopos radioactivos.
3. Enfriamiento desde la superficie exterior del planeta.

En este trabajo se logran la primera y tercera condición imponiendo una temperatura más grande que la temperatura externa para todos los casos. La segunda condición se trata en un caso específico en donde se introduce un

¹La relación de aspecto de un ánulo esférico es la razón del radio interno al radio externo y se define por $\eta_a = \frac{r_i}{r_e}$

término fuente localizado.

Tomando en cuenta los procesos térmicos descritos se presentan tres modelos de convección. Los primeros dos se centran en la convección del manto y omiten el efecto dínamo causante del campo magnético, en contraste el tercer modelo incorpora el efecto dínamo que trata de explicar los patrones del campo magnético.

2.2.1. Modelo de capas a 660 kilómetros (Modelo I)

Este modelo sostiene que existen dos zonas de convección (ver figura 2.2a.), la primera zona se extiende desde la corteza hasta una profundidad de 660 kilómetros, en ella el material interno se mueve a mayor velocidad. La segunda zona de convección la conforma el manto inferior en donde el movimiento es a menor velocidad que en la primera [Tarbuck et al., 2010].

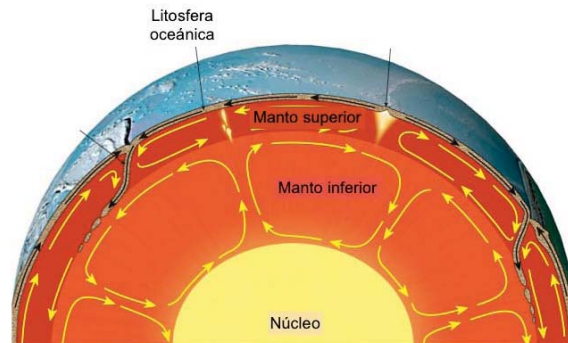
2.2.2. Modelo de convección completa del manto (Modelo II)

El segundo modelo explica que la convección se efectúa en la totalidad del manto [Tarbuck et al., 2010]; el material más frío situado en la frontera exterior se mueve hacia la frontera núcleo-manto, por otro lado el material que se encuentra en la frontera interior asciende a la superficie en forma de plumas mantelicas². El modelo se encuentra ilustrado en la figura 2.2b.

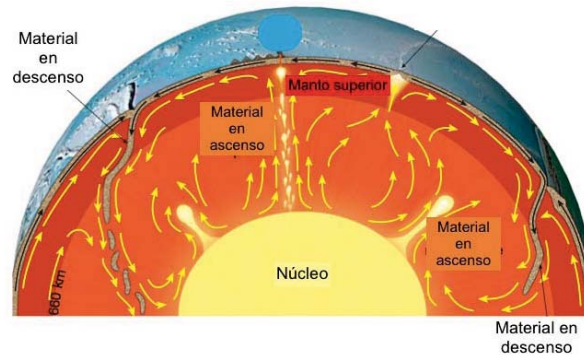
2.2.3. Modelo de convección con rotación a gran escala (Modelo III)

Por ultimo Lister propone un modelo que incluye la rotación, propone que la convección en el interior de la Tierra tiene dos zonas convectivas. La capa exterior (el manto), donde el fluido de baja velocidad se enfría al estar en contacto con la frontera exterior (corteza, atmósfera u océano) y en la frontera interna gana calor al estar en contacto con el núcleo externo. A esta capa le sigue una región líquida comprendida por el núcleo exterior donde a consecuencia de las altas temperaturas el flujo convectivo tiene mayor velocidad. Al sumar la rotación se genera un efecto en las corrientes

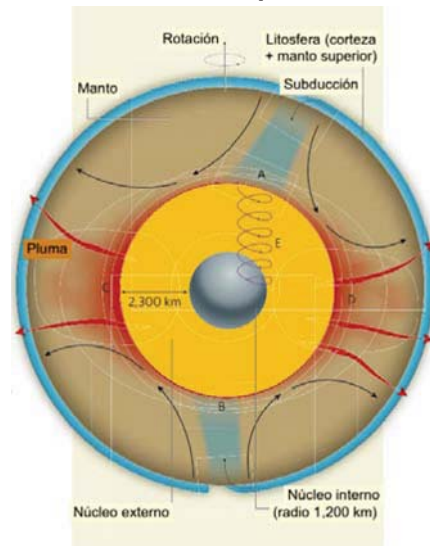
²Las plumas mantelicas son rocas solidas en contacto con el núcleo que disminuyen su densidad debido a la temperatura. Estas rocas fluyen hacia el límite entre el manto y la corteza donde, por la poca presión, se pueden fundir y acumular.



(a) Modelo I descrito por [Tarbuck et al., 2010].



(b) Modelo II descrito por [Tarbuck et al., 2010].



(c) Modelo III descrito por [Lister, 2008].

Figura 2.2: Modelos de Convección en el manto

convectivas del núcleo externo, el cual provoca que el patrón de flujo sean columnas helicoidales alineadas paralelamente al eje de rotación y tangentes al núcleo interno, de tal manera que si el fluido es conductor eléctrico se presenta un campo magnético [Lister, 2008].

Según lo anterior el manto presenta movimiento convectivo que en comparación con el movimiento convectivo del núcleo externo es de menor velocidad, es por ello que en este trabajo de tesis se considera como un sólido la parte correspondiente al manto. Para incluir las características restantes descritas en los tres modelos anteriores en la sección 2.3 se describe el modelo que se estudia en el presente trabajo.

2.3. Modelo propuesto

En este trabajo se plantea reproducir el modelo de capas de los planetas terrestres, en específico la estructura de la Tierra bajo las siguientes consideraciones; se toma en cuenta que los planetas son esferas y cada capa que conforma su estructura es un anulo esférico concéntrico con difusividad térmica α unitaria, las fronteras de los anulos con fluido son rígidas, la fuerza de gravedad está dirigida hacia el centro de las esferas y varía según el radio.

Como muestra la figura 2.3 el modelo consta de seis anulos esféricos con diferentes relaciones de aspecto, que se presentan en el cuadro 2.2. Los anulos formados por los radios r_1-r_2 y r_6-r_7 contienen un fluido y los anulos intermedios se consideran como sólidos conductores.

Ánulo	1	2	3	4	5	6
η_a	0.35	0.9	0.86	0.93	0.94	0.8
η_s	0.54	0.6	0.7	0.75	0.8	1

Cuadro 2.2: Relaciones de aspecto para el modelo propuesto.

Las condiciones de frontera térmicas son las siguientes; la frontera interior del primer anulo esférico y la frontera exterior del último anulo se mantienen a una temperatura constante, la temperatura de la superficie interior T_1 es superior a la temperatura T_2 de la superficie exterior, ver figura 2.3. Para las condiciones de frontera de los fluidos se tiene la condición de no deslizamiento en las superficies internas y externas del anulo interior y

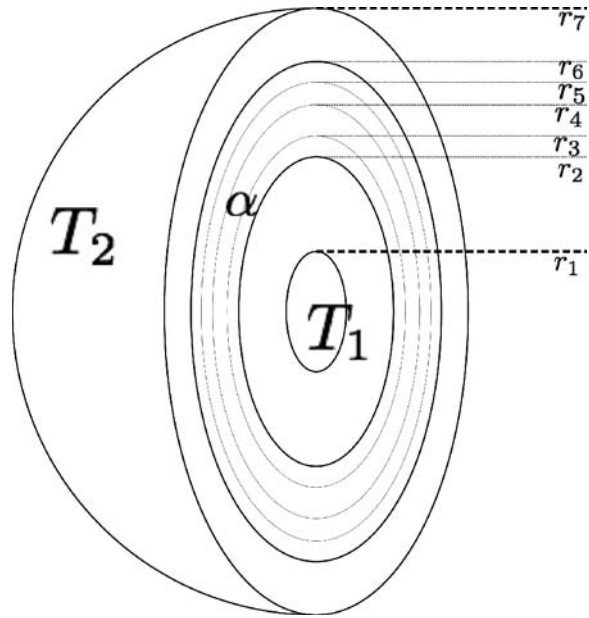


Figura 2.3: Modelo propuesto.

el ánuo exterior.

Capítulo 3

Modelo Matemático

Para todo fenómeno físico existe una ecuación matemática que representa el comportamiento del fenómeno en estudio. En este trabajo se considera un modelo que implica dos capas de fluidos, una confinada en el ánulo esférico interno y la segunda en el ánulo esférico externo, y cuatro capas intermedias en fase sólida. Es por ello que en el siguiente capítulo se presentan las ecuaciones que rigen el comportamiento tanto de la parte sólida como de la parte del fluido.

En las siguientes páginas se presentan las ecuaciones de la dinámica de los fluidos y algunos parámetros adimensionales representativos del modelo físico presentado en el capítulo anterior.

3.0.1. Flujo incompresible

La densidad en un fluido (líquidos y gases) es una función de la temperatura y la presión, por lo que alteraciones en estas dos variables causa que la densidad cambie, dificultando el desarrollo matemático.

Para poder simplificar la solución de las ecuaciones de dinámica de los fluidos se requiere hacer una serie de suposiciones, entre ellas, se asume que el flujo es incompresible. Esto significa que la densidad es constante en todo el fluido sin importar las variaciones de temperatura y presión que se susciten.

En particular, para los líquidos esta consideración es válida ya que la densidad varía muy poco respecto a la temperatura y se requieren de pre-

siones muy altas para que la densidad pueda variar.

Esta consideración se traduce en ecuaciones más sencillas de resolver.

3.0.2. Convección natural

La convección es una forma de transferencia de calor entre un fluido en movimiento y una superficie, en particular la convección natural se presenta cuando el movimiento del fluido es producido por una corriente convectiva que, como en el interior de los planetas, se puede generar cuando un fluido sin movimiento esta sujeto a una fuerza de cuerpo y presenta un gradiente de densidad, que disminuye en la dirección de la fuerza de cuerpo. Cuando se conjuntan estas características se produce una fuerza de flotación que genera un movimiento en el interior del fluido que se conoce como corriente convectiva.

Como se introdujo en el párrafo anterior se requiere de dos características para generar un flujo convectivo: el gradiente de densidad y una fuerza de cuerpo. Para el caso de este trabajo el gradiente de densidad lo genera un gradiente de temperatura (entre la superficie interior y la superficie exterior a menor temperatura) y la fuerza de cuerpo es generada por un campo gravitacional.

Una de las características fundamentales para que se presente un flujo convectivo es que la densidad pueda variar en el interior del fluido, es por ello que para acoplar la convección natural con el flujo incompresible se toma en cuenta la aproximación de *Boussinesq*. La cual considera la variación de la densidad por efecto de la temperatura únicamente en los términos de la fuerza de cuerpo.

3.1. Ecuación de continuidad

La ecuación de continuidad representa el principio de conservación de masa. Este principio describe que la variación de masa en el tiempo es igual a la masa que entra en un sistema menos la masa que sale de dicho sistema.

$$\int_{VC} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \sum_i (\rho_i A_i \vec{v}_i)_s - \sum_i (\rho_i A_i \vec{v}_i)_e = 0 \quad (3.1)$$

que en su forma vectorial se escribe de la siguiente manera:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (3.2)$$

si tomamos en cuenta que el fluido es incompresible, la variación de la densidad respecto al tiempo y la posición es cero, por lo que (3.2) se simplifica a:

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (3.3)$$

3.2. Ecuación de cantidad de movimiento

La ecuación de cantidad de movimiento de un fluido describe que la variación de la cantidad de movimiento $m \cdot \vec{v}$ es igual a la suma de fuerzas que actúan sobre el fluido y en forma integral se escribe:

$$\sum \vec{F} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{VC} \vec{v} \rho dV \right) + \sum_i (\dot{m}_i \vec{v}_i)_s - \sum_i (\dot{m}_i \vec{v}_i)_e \quad (3.4)$$

en forma vectorial:

$$\sum \vec{F} = \int \left[\vec{v} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) \right) + \rho \frac{d\vec{v}}{dt} \right] dV \quad (3.5)$$

El término entre paréntesis es la ecuación de continuidad por lo que el lado derecho de la igualdad se simplifica a $\rho \frac{d\vec{v}}{dt} dV$, donde $\frac{d}{dt}$ es la derivada material definida como $\frac{d(\cdot)}{dt} = \frac{\partial(\cdot)}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla(\cdot)$.

En este trabajo solo se consideran las fuerzas de superficie (viscosas y presión) y las fuerzas de gravedad. Si se toman en cuenta las fuerzas mencionadas la ecuación (3.5) se escribe:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \vec{g} - \nabla p + \nabla \cdot \tau_{ij} \quad (3.6)$$

Adicionalmente, el fluido en estudio es un fluido Newtoniano y la ecuación de cantidad de movimiento se transforma a:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \vec{g} - \nabla p + \mu \nabla^2 \vec{v} \quad (3.7)$$

Para introducir la convección a la ecuación de cantidad de movimiento se tiene que considerar la variación de la densidad respecto a la temperatura en el término gravitacional. Si en la ecuación de cantidad de movimiento se escribe en el término gravitacional la densidad ρ más un incremento $\Delta\rho$:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = (\rho + \Delta\rho) \vec{g} - \nabla p + \mu \nabla^2 \vec{v} \quad (3.8)$$

Para relacionar la variación de la densidad con la temperatura se recurre al coeficiente de expansión volumétrica termal β definido como:

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \approx -\frac{1}{\rho} \frac{\Delta\rho}{\Delta T} = -\frac{1}{\rho} \frac{\rho - \rho_\infty}{T - T_\infty} \quad (3.9)$$

De donde se despeja la variación de la densidad $\Delta\rho = -\beta\rho(T - T_\infty)$ y se sustituye en (3.8). Como resultado se obtiene la ecuación de cantidad de movimiento considerando la convección.

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho [1 - \beta(T - T_\infty)] \vec{g} - \nabla p + \mu \nabla^2 \vec{v} \quad (3.10)$$

En el presente trabajo se simula en coordenadas cartesianas por lo que la fuerza de gravedad para el sistema esférico \vec{g}_s se transforma, mediante la matriz de transformación, a su equivalente en un sistema cartesiano \vec{g}_c , [Dumas, 1991]. Ver apéndice C.

$$\vec{g}_c = \frac{-f_r}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} (x_1, x_2, x_3) \quad (3.11)$$

En este trabajo se toman en cuenta que la componente f_r varía según el radio por lo que se puede escribir como:

$$\vec{g}_c = \frac{-C_g}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{\frac{n+1}{2}}} (x_1, x_2, x_3) \quad (3.12)$$

Donde C_g es una constate gravitacional con unidades $\frac{m^{n+1}}{s^2}$ y n es un número entero.

3.3. Ecuación de la energía

La ecuación de la energía se basa en la primera ley de la termodinámica, la cual postula que la variación de la energía total de un sistema es igual al flujo de calor menos el flujo de trabajo, esto es $\dot{Q} - \dot{W} = \dot{E}$ y en su forma integral:

$$\dot{Q} - \dot{W} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{VC} e \rho dV \right) + \int_{SC} \left(e + \frac{p}{\rho} \right) \rho (\vec{v} \cdot \vec{n}) dA \quad (3.13)$$

que en su forma vectorial se escribe:

$$\rho \frac{de}{dt} + \vec{v} \cdot \nabla p + p \nabla \cdot \vec{v} = \nabla \cdot (k \nabla T) + \nabla \cdot (\vec{v} \cdot \boldsymbol{\tau}_{ij}) \quad (3.14)$$

el trabajo de las fuerzas viscosas es equivalente a $\nabla \cdot (\vec{v} \cdot \boldsymbol{\tau}_{ij}) \equiv \vec{v} \cdot (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}_{ij}) + \Phi$, donde Φ es la función de disipación viscosa. Sustituyendo esta consideración en la ecuación (3.14):

$$\rho \frac{de}{dt} + \vec{v} \cdot \nabla p + p \nabla \cdot \vec{v} = \nabla \cdot (k \nabla T) + \vec{v} \cdot (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}_{ij}) + \Phi \quad (3.15)$$

Al utilizar las fuerzas viscosas de la ecuación de cantidad de movimiento y sustituir la energía total $e = u + \frac{1}{2} \vec{v}_i^2 + g_i x_i$ en la ecuación anterior, tanto la energía cinética como la energía potencial se cancelan y se obtiene:

$$\rho \frac{du}{dt} + p \nabla \cdot \vec{v} = \nabla \cdot (k \nabla T) + \Phi \quad (3.16)$$

Si $du \approx c_v dT$ la ecuación de la energía se convierte en:

$$\rho c_v \frac{dT}{dt} + p \nabla \cdot \vec{v} = \nabla \cdot (k \nabla T) + \Phi \quad (3.17)$$

Para finalizar en este trabajo la disipación de las fuerzas viscosas es despreciable y la densidad es constante, lo que implica que la divergencia de la velocidad es igual a cero $\nabla \cdot \vec{v} = 0$. De igual modo, el calor específico c_v y la conductividad térmica k son constantes y la ecuación (3.17) se simplifica a:

$$\rho c_v \frac{dT}{dt} = k \nabla^2 T \quad (3.18)$$

3.4. Ecuación de difusión de calor

Al ser sólidos, los cuatro ámulos centrales del modelo propuesto no presenta movimiento y la única ecuación que se resuelve es la de la energía. Como la velocidad en la parte sólida es igual a cero, la densidad es constante y la función de disipación viscosa es despreciable la ecuación de la energía se reduce a:

$$\rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} = k \nabla^2 T \quad (3.19)$$

Para el caso de difusión de calor el ánulo esférico interior y exterior no presentan movimiento (velocidad igual a cero) por lo que la única ecuación que se resuelve es la ecuación (3.19). Para fines de comparación la ecuación (3.19) se resuelve de forma analítica en el apéndice A.

3.5. Parámetros adimensionales

Cuando las ecuaciones de la dinámica de los fluidos se transforman a su forma adimensional se encuentran números adimensionales que para el caso del presente trabajo son los siguientes.

3.5.1. Número de Rayleigh

El número de Rayleigh es un indicador muy importante para la transferencia de calor por convección, cuando este parámetro se encuentra por encima de un valor crítico la transferencia de calor por convección domina el fenómeno, en caso contrario la transferencia de calor es dominada por la difusión.

$$Ra = \frac{gL^3\beta\Delta T}{\nu^2} \quad (3.20)$$

donde g es la gravedad, L es una longitud característica, que de ahora en adelante se define como la diferencia entre radio externo y radio interno de los ámulos con fluidos. $L = r_e - r_i$ y ΔT es la diferencia de temperaturas de la superficie interior y la superficie exterior de los ámulos con fluidos $\Delta T = T_{r_i} - T_{r_e}$.

Para poder comparar los resultados de este trabajo con la literatura se utiliza otra definición del número de Rayleigh ¹, Avila et al. [2013]:

$$Ra_p = \frac{\left(\frac{T_{r_i} - T_{r_e}}{\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_e}} \right) d^3 \beta C_g}{\nu \alpha d^n} \quad (3.21)$$

donde C_g es la contante gravitacional, β es la constante de expansión volumétrica termal, d es la diferencia entre radio externo y radio interno de los ámulos con fluidos $d = r_e - r_i$. T_{r_i} es la temperatura de la superficie interior de los ámulos con fluidos, T_{r_e} es la temperatura de la superficie exterior de los ámulos con fluidos y α es la difusividad térmica .

3.5.2. Número de Prandtl

El número de Prandtl es la medida de la efectividad de la difusión de la cantidad de movimiento sobre la difusión de calor que tiene un fluido, esto es:

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha} \quad (3.22)$$

¹Número de Rayleigh definido en la sección 6 del trabajo de Avila et al. [2013] "6. Basic temperature field given by a temperature difference between the internal and external spheres, and $g(r)$ as a known function of r , $n \neq 0$ "

Capítulo 4

Algoritmo Numérico

Las ecuaciones planteadas para este trabajo se resuelven con el método de los elementos espectrales. Este método parte del método de los residuos pesados y se basa en construir la solución de una ecuación diferencial de una serie de aproximaciones locales. Fragmenta un dominio en subdominios (elementos) simples y utiliza interpolaciones para encontrar la solución aproximada.

En general el método de los residuos pesados emplea funciones de expansión como base para una serie truncada de la solución de la ecuación diferencial parcial a resolver. Para asegurar que la solución aproximada satisface la ecuación diferencial se utilizan funciones de prueba para minimizar el residual (residuo) que se forma cuando la solución aproximada es sustituida en la ecuación diferencial parcial. La combinación de las expansiones y las funciones de prueba le da nombre a diferentes métodos.

Una ventaja del método es que permite incrementar el orden de los polinomios de interpolación mientras el número de elementos se mantiene constante. Otro punto importante es que se puede aplicar en geometrias complejas y permite implementar el algoritmo de la esfera cubada para generar una malla computacional esférica.

4.1. Método de residuos pesados (ponderados)

Parte de una ecuación diferencial escrita como:

$$\mathbb{L}(u) = 0 \tag{4.1}$$

y se asume que la solución $u(x, t)$ puede ser representada por su forma aproximada:

$$u^\delta(x, t) = u_0(x, t) + \sum_{i=1}^N u_i(t)\Phi_i(x) \quad (4.2)$$

donde $\Phi_i(x)$ son funciones analíticas de prueba (expansión), $u_i(t)$ son coeficientes indeterminados y $u_0(x, t)$ se selecciona para satisfacer las condiciones iniciales y de frontera. Al sustituir la solución aproximada en la ecuación diferencial se genera un residual (error):

$$\mathbb{L}(u^\delta) = R(u^\delta) \quad (4.3)$$

el objetivo es que el residual (error) sea lo más próximo a cero y se define el producto interno entre dos funciones como

$$(f, g) = \int_{\Omega} f(x)g(x)dx \quad (4.4)$$

Para asegurar que el residual sea cero N debe tender a infinito y se impone la condición del producto interno del residual R respecto a la función de peso $v_j(x)$

$$(v_j(x), R) = 0 \quad j = 1, \dots, N \quad (4.5)$$

El método de los residuos pesados no determina la forma de las funciones de peso a usar, es por ello que dependiendo de la función que se utilice el método cambia de nombre. En el cuadro 4.1 se hace un resumen de algunas de las funciones de peso y el nombre que toma el método.

Función de peso	Tipo de método
$v_j(x) = \delta(x - x_j)$	Colocación
$v_j(x) = \begin{cases} 1 & \text{dentro } \Omega^j \\ 0 & \text{fuera } \Omega^j \end{cases}$	Volumenes finitos
$v_j(x) = \frac{\partial R}{\partial u_j}$	Mínimos cuadrados
$v_j(x) = x^j$	Momentos
$v_j(x) = \Phi_j$	Galerkin
$v_j(x) = \Psi_j (\neq \Phi_j)$	Petrov-Galerkin

Cuadro 4.1: Resumen de métodos según la función de peso.

4.2. Método de Galerkin

Para este trabajo se utiliza el método de Galerkin, también conocido como Bubnov-Galerkin descrito en [Karniadakis and Sherwin, 1999], en el cual las funciones de peso son iguales a las funciones de prueba $v_j = \Phi_j$ y el producto interno del residual respecto a la función de peso es

$$(v_j(x) = \Phi_j(x), R) = \int_{\Omega} \Phi_j(x)R(x)dx = 0 \quad (4.6)$$

Dentro del método existen dos aproximaciones para resolver la ecuación diferencial; 1) dividir el dominio Ω en subdominios elementales Ω_e mientras el orden del polinomio de las funciones de expansión se mantiene constante, también conocido como aproximación tipo h , y 2) aumentar el orden del polinomio de las funciones de expansión en un sólo dominio, conocido como aproximación tipo p . Cuando se combina las dos aproximaciones se dice que es un método de elementos espectrales hp y es el método que se utiliza en el presente trabajo.

Si en cada dominio elemental Ω_e se considera un elemento estándar Ω_{st} en el cual las coordenadas locales tienen rangos de $-1 < \xi_1, \xi_2, \xi_3 < 1$ se pueden expresar las coordenadas globales en términos de las coordenadas locales gracias a la transformación $x = \chi^e(\xi)$. De igual forma se pueden expresar las funciones de expansión globales $\Phi_i(x)$ en términos de las expansiones locales $\phi_p(\xi)$.

Recordando que que la solución aproximada u^δ se expresa en términos de las funciones de expansión globales, también se puede expresar en términos de las expansiones locales del siguiente modo

$$u^\delta(x) = \sum_{i=0}^{N-1} \Phi_i(x)u_i = \sum_{e=1}^{N_{el}} \sum_{p=0}^P \phi_p^e(\xi)u_p^e \quad (4.7)$$

debido que hay más coeficiente de expansiones locales que coeficientes de expansiones globales se utilizan restricciones extra para igualar su número.

4.3. Puntos Gauss-Lobatto-Legendre

En este trabajo las funciones de expansión ϕ_p son el polinomio de Lagrange a través (evaluados) de los ceros del polinomio Gauss-Lobatto-Legendre

lo que resulta en expansiones locales de la forma:

$$\phi_p(\xi) = \frac{(\xi - 1)(\xi + 1)L'_P(\xi)}{P(P + 1)L_P(\xi_P)(\xi - \xi_p)} \quad (4.8)$$

4.4. Cuadratura Gauss-Lobatto-Legendre

Según la restricción del producto punto se tienen que evaluar integrales de la forma $\int_{-1}^1 u(\xi)d\xi$. Esto se logra integrando numéricamente usando la cuadratura Gaussiana que representa al integrando como un polinomio de Lagrange

$$u(\xi) = \sum_{i=0}^{Q-1} u(\xi_i)h_i(\xi) + \varepsilon(u) \quad (4.9)$$

donde Q es el numero de puntos, ξ_i es la abscisa en el intervalo $[-1,1]$, h_i es el polinomio de Lagrange y $\varepsilon(u)$ es el error de aproximación. Si se sustituye en la integral se obtiene la forma general de la cuadratura Gaussiana:

$$\int_{-1}^1 u(\xi)d\xi \approx \sum_{i=0}^{Q-1} w_i u(\xi_i) + R(u) \quad (4.10)$$

En este trabajo se utiliza la cuadratura Gauss-Lobatto-Legendre que define las abscisas y los pesos como

$$\xi_i = \begin{cases} -1 & i = 0 \\ \xi_{i-1, Q-2}^{0,1} & i = 1, \dots, Q - 2 \\ 1 & i = Q - 1 \end{cases} \quad (4.11)$$

$$w_i^{0,0} = \frac{2}{Q(Q - 1)[L_{Q-1}(\xi_i)]^2} \quad i = 0, \dots, Q - 1 \quad (4.12)$$

$$R(u) = 0 \quad \text{si } u(\xi) \in \mathcal{P}_{2Q-3}([-1, 1]) \quad (4.13)$$

4.5. Método de la esfera cúbica

El método de la esfera cúbica esta basado en la descomposición de la esfera en seis regiones idénticas obtenidas proyectando los lados de un cubo circunscrito en una esfera a la superficie de la misma. Con este método cualquier punto que se encuentre en las caras del cubo puede proyectarse a

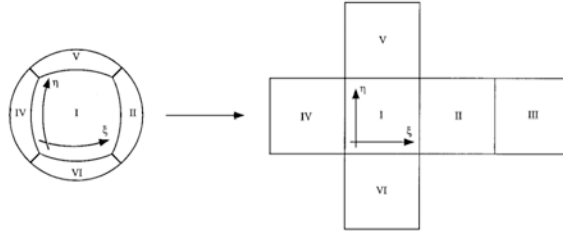


Figura 4.1: Transformación de la esfera cúbica, [Ronchi et al., 1996].

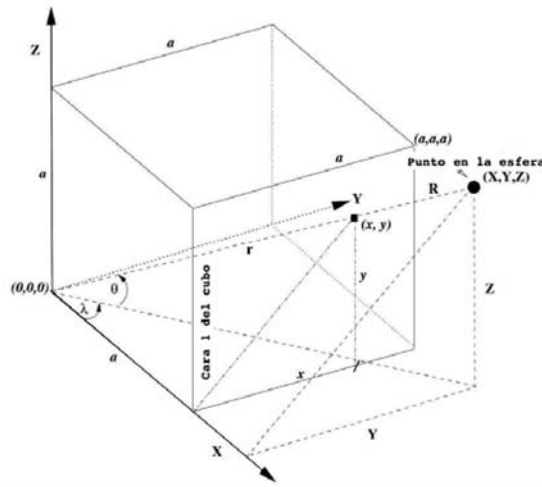


Figura 4.2: Sistema coordenado local (x, y) y absoluto (X, Y, Z) para la cara I, [Nair et al., 2005].

la superficie de la esfera y viceversa,[Ronchi et al., 1996].

Si cada cara del cubo tiene coordenadas locales (x, y) se pueden proyectar a la superficie de la esfera y después obtener las coordenadas en el sistema de referencia absoluto X, Y, Z , que se encuentra en el centro del cubo, mediante las transformaciones del cuadro 4.2, [Nair et al., 2005]:

Para este trabajo la malla computacional es de suma importancia ya que dependiendo del numero de elementos, la cantidad de puntos en cada elemento y la disposición de los puntos en los elementos se puede o no tener resultados confiables de la convección en el método numérico. Por esta razón en este trabajo se asegura que el método numérico cuente con los datos sufi-

Cara	X,Y,Z	x,y
I	$\frac{R}{r}(a, x, y)$	$a \left(\frac{Y}{X}, \frac{Z}{X} \right)$
II	$\frac{R}{r}(-x, a, y)$	$a \left(\frac{-X}{Y}, \frac{Z}{Y} \right)$
III	$\frac{R}{r}(-a, -x, y)$	$a \left(\frac{Y}{X}, \frac{-Z}{X} \right)$
IV	$\frac{R}{r}(x, -a, y)$	$a \left(\frac{-X}{Y}, \frac{-Z}{Y} \right)$
V	$\frac{R}{r}(-y, x, a)$	$a \left(\frac{Y}{Z}, \frac{-X}{Z} \right)$
VI	$\frac{R}{r}(y, x, -a)$	$a \left(\frac{-Y}{Z}, \frac{-X}{Z} \right)$
$R = a\sqrt{3}$ (radio de la esfera)		
$r = \sqrt{a^2 + x^2 + y^2}$		

Cuadro 4.2: Transformaciones entre coordenadas locales y coordenadas absolutas para el método de esfera cúbica.

cientes para resolver las ecuaciones de la transferencia de calor y la dinámica de los fluidos.

4.6. Generación de la malla

Para generar la malla computacional se parte de los ánuos esféricos definidos en el capítulo 2. Se utiliza el radio interno y externo de cada uno de los ánuos para definir una serie de cubos internos, con incrementos equidistantes entre caras. En las caras de estos cubos se define una malla local con incrementos constantes en x, y . Posteriormente se utilizan las transformaciones del cuadro 4.2 para las seis caras de cada uno de los cubos.

Para cada ánuo al conjunto de puntos formado por las proyecciones de cada cara se le denomina de ahora en adelante Macro elemento, figura 4.3 y 4.4.

Una vez conformados los macro elementos se procede a dividir cada uno de ellos en $9 \times 9 \times 3$ elementos locales, 9 elementos en la dirección azimutal, 9 elementos en la dirección polar y 3 elementos en la dirección radial. Por motivos de visualización se presentan las imágenes de una división en $5 \times 5 \times 3$ de un macro elemento en la figura 4.5

Para finalizar en cada elemento local se introducen los puntos Gauss-Lobatto-Legendre con ayuda de la transformación $x = \chi^e(\xi)$, figura 4.6. Se utiliza un polinomio de grado 7 para cada una de las tres direcciones lo que genera un total de 343 puntos por elemento local.

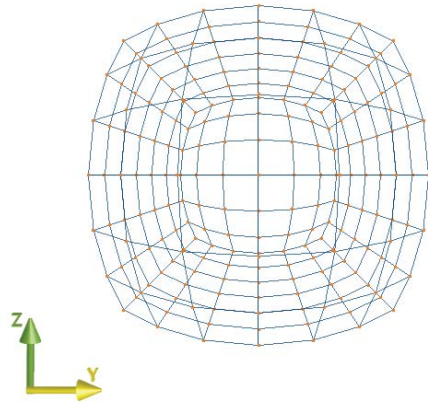


Figura 4.3: Conjunto de puntos formado por la caras I del primer ánulo esférico (Macro elemento)

En resumen la malla computacional consta de 78,732 elementos con 343 puntos cada uno. En la figura 4.7 se muestra el resultado final de la malla.

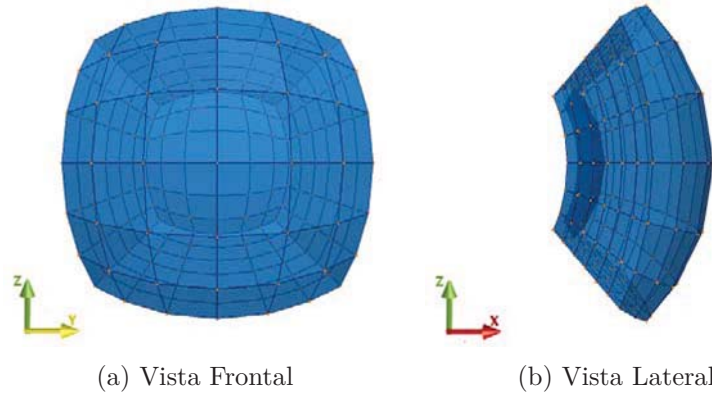


Figura 4.4: Malla del Macro elemento correspondiente a las caras I del primer ánulo.

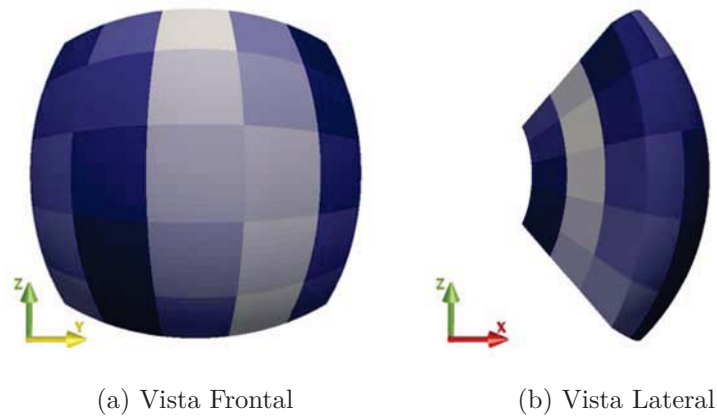
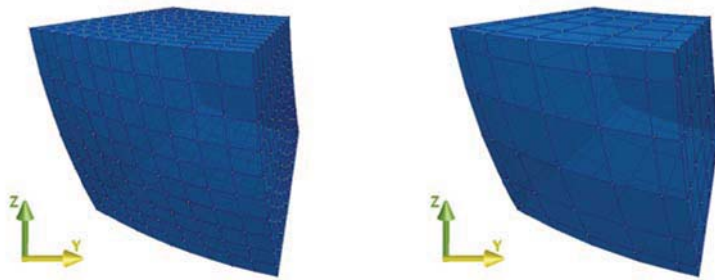


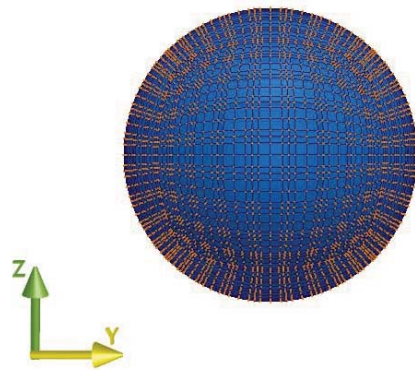
Figura 4.5: Ejemplo de la division del macro elemento correspondiente a las caras I del primer ánulo en 5x5x3 elementos, 5 elementos en la dirección azimutal, 5 elementos en la dirección polar y 3 elementos en la dirección radial.



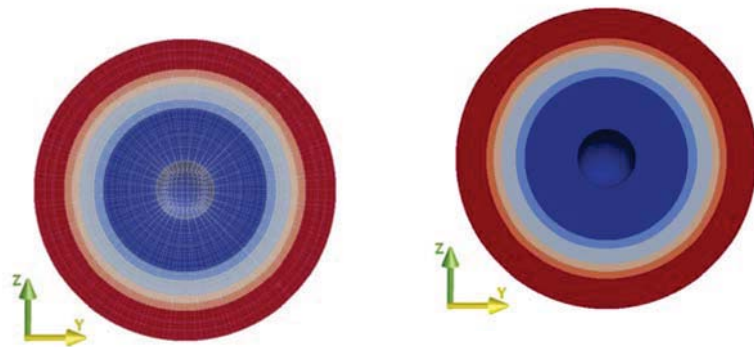
(a) Malla generada con una proyección equidistante

(b) Malla con puntos Gauss-Lobatto-Legendre

Figura 4.6: Mapeo de los puntos Gauss-Lobatto-Legendre en uno de los elementos locales (vista frontal).



(a) Vista frontal malla completa



(b) Corte meridional de la malla

(c) Anulos esféricos en distintos colores.

Figura 4.7: Malla computacional.

Capítulo 5

Resultados

En el presente capítulo se presentan los resultados de difusión y los casos de convección que se analizan en esta tesis. El caso de difusión se compara con la solución analítica que se obtiene en el apéndice A. Para el primer caso de convección se plantea validar la malla y el algoritmo numérico comparando con los resultados disponibles en la literatura, cuando sólo el primer ánulo presenta convección. En los casos restantes se estudian los efectos que tiene la convección del ánulo interno sobre el flujo de calor en el ánulo externo.

En el cuadro 5.1 se presentan los casos que se estudian. Para todas las simulaciones se presentan los patrones de temperatura y para las simulaciones de convección se agregan los patrones convectivos que se generan.

5.1. Difusión en estado transitorio

En esta sección se analiza numéricamente el caso de conducción de calor en estado transitorio y se compara con la solución analítica del apéndice A. Al no presentar convección los ámulos con fluido se comportan como sólidos, lo que convierte al fenómeno en un caso unidimensional.

La descripción de este caso, si se recuerda el modelo propuesto en la sección 2.3, es la siguiente: se imponen para toda la simulación temperaturas constantes en la superficie interior $T(r_1) = T_1$ y en la superficie exterior $T(r_7) = T_2$, donde la temperatura interior es mayor a la temperatura exterior $T_1 > T_2$. En el tiempo igual a cero $t = 0$ la distribución de temperatura

Fenómeno	Caso
Difusión	Conducción en estado transitorio (validación)
	$Ra_i = 7.50E + 3$ (validación)
	$Ra_i = 2.87E + 2$
	$Ra_i = 2.87E + 3$
	$Ra_i = 5.75E + 3$
Convección	$Ra_i = 1.00E + 4$
	$Ra_i = 2.15E + 4$
	$Ra_i = 2.76E + 4$
	$Ra_i = 3.45E + 4$
	$Ra_i = 5.46E + 4$

Cuadro 5.1: Resumen de casos estudiados. Los números de Rayleigh son calculados con la distribución de temperaturas de la conducción estado estacionario.

en el interior de sistema es cero $T(r) = 0 = F(r)$.

Con tales condiciones la ecuación para la conducción de calor en estado transitorio, ver apéndice A, se convierte en:

$$T(r, t) = \frac{r_o(T_o - T_i)}{r_o - r_i} \left(1 - \frac{r_i}{r} \right) + T_i + \frac{2}{r\pi} \sum_{n=1}^N \sin(\lambda_n(r - r_i)) e^{-\alpha\lambda_n^2 t} \left[\frac{r_o T_o (-1)^n - r_i T_i}{n} \right]$$

En la figura 5.1 se muestra la distribución de temperatura para distintos tiempos y para su estado estacionario $t = 0.9s$.

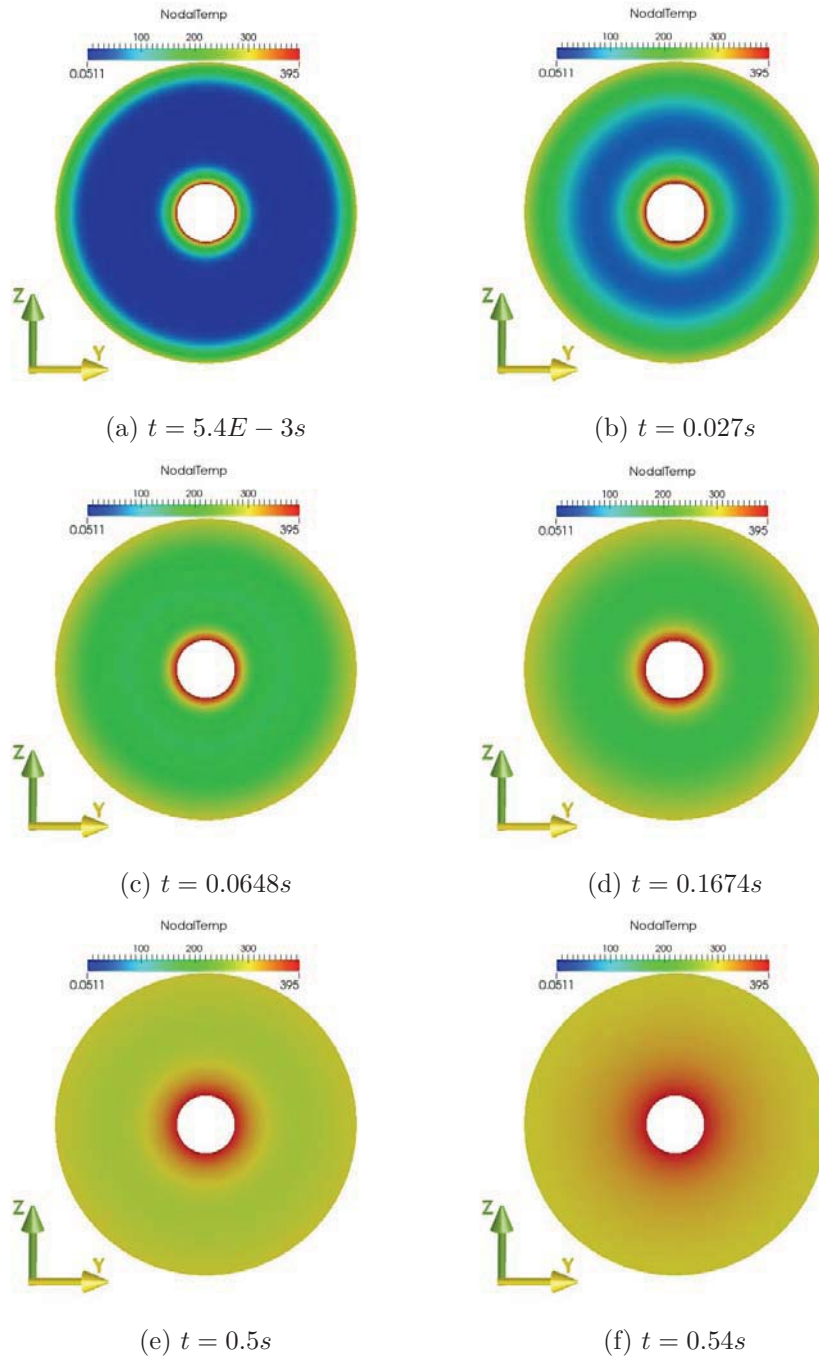


Figura 5.1: Distribución de temperatura en un corte ecuatorial para distintos tiempos

En la figura 5.2 se compara la solución numérica (puntos) con la solución analítica (líneas discontinuas) en distintos tiempos de la simulación.

La solución numérica de cada punto de la malla se compara con la solución analítica con $N = 50$ y se calcula el error. En el cuadro 5.2 se presenta el porcentaje de error máximo para los distintos pasos de tiempo, en ella se puede apreciar que el error disminuye a medida que el sistema se aproxima al estado estacionario.

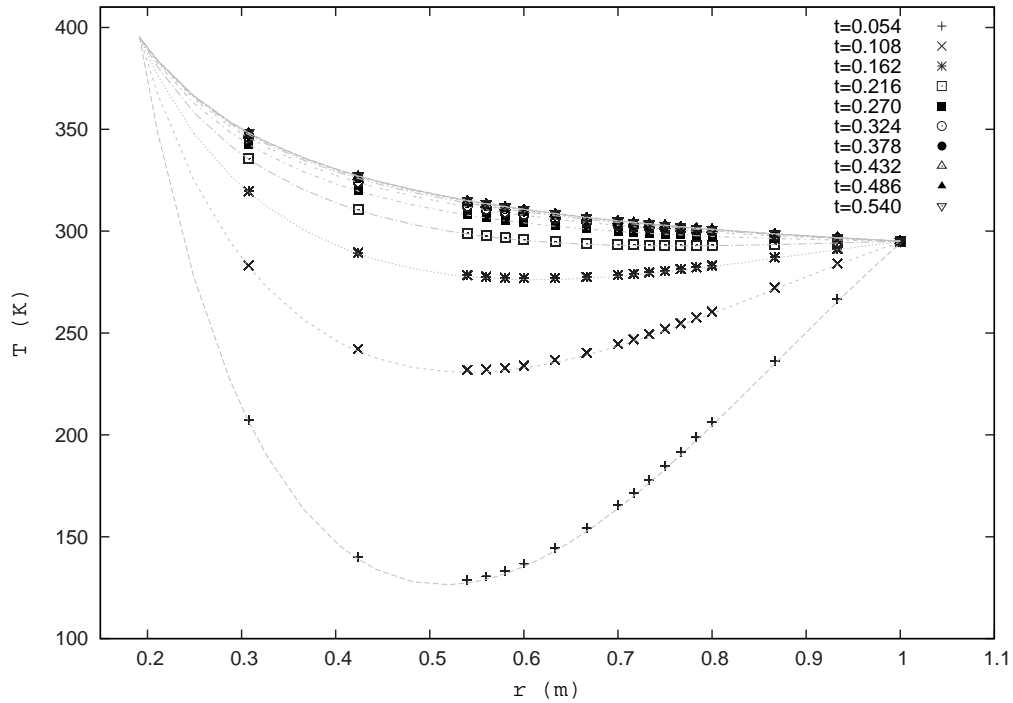


Figura 5.2: Comparación de la solución numérica y la solución analítica en distintos tiempos. Gráfica T vs. r solución numérica en puntos y solución analítica en línea discontinua.

t (s)	$e_{\max}(\%)$
0.054	7.98E-1
0.108	3.35E-1
0.162	1.78E-1
0.270	4.52E-2
0.324	2.16E-2
0.378	9.66E-3
0.432	3.81E-3
0.486	6.97E-4
0.54	1.88E-3

Cuadro 5.2: Tabla de porcentaje de error máximo definido como $e(\%) = \frac{T_{\text{numérica}} - T_{\text{analítica}}}{T_{\text{analítica}}} \times 100$.

5.2. Validación

Para validar el código y la malla numérica generada para el caso de convección se compara con los resultados reportados por [Avila et al., 2013], en donde se tiene un espacio anular de relación de aspecto $\eta = 0.35$, temperaturas fijas en la superficie interior y exterior, y el campo de gravedad que decrece con el radio en función de $\frac{1}{r^3}$.

Para generar las condiciones equivalentes en el modelo propuesto se requiere que sólo el ánulo interno tenga convección y que la temperatura en la superficie exterior del ánulo interno sea constante $T(r_2) = c$. Para lograr la primera condición se elimina la convección para el ánulo externo, como consecuencia el espacio entre r_7 y r_2 se comporta como un sólido. Para la segunda condición se propone utilizar un coeficiente de difusión muy elevado $\alpha_2 = 1E + 5$ en el espacio entre r_7 y r_2 , con esta condición se asegura que la temperatura sea muy aproximada a la temperatura exterior del sistema $T(r_2) \approx T_2$. De nueva cuenta se imponen para toda la simulación temperaturas constantes en la superficie interior $T(r_1) = T_1$ y en la superficie exterior $T(r_7) = T_2$, donde la temperatura interior es mayor a la temperatura exterior $T_1 > T_2$.

Si se recuerda la ecuación de cantidad de movimiento, la condición equivalente para que el campo de gravedad se comporte en función de $\frac{1}{r^3}$, el término de la fuerza de flotación se escribe con $n = 2$:

$$\vec{g}_c = \frac{-C_g}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^{2n+1}}} (x_1, x_2, x_3) = \frac{-C_g}{r^{n+1}} (x_1, x_2, x_3) \quad (5.1)$$

Finalmente, se calculó el número de Rayleigh Ra_p superior al valor crítico para observar el patrón convectivo y las condición inicial es la distribución de temperatura en estado estacionario de la sección anterior.

El efecto de la convección se puede apreciar claramente en los patrones de temperatura figura 5.3. El movimiento del fluido que se encuentra próximo a la superficie interna se calienta y la fuerza de flotación lo conduce de forma ascendente a la superficie externa. Las zonas de ascenso del fluido transportan calor a la superficie y se traduce en un aumento de temperatura en esta zona. Una vez que el fluido caliente llega a la superficie externa, a menor temperatura, es enfriado y la fuerza de flotación lo conduce al centro del sistema, zona de descenso de fluido (menor temperatura).

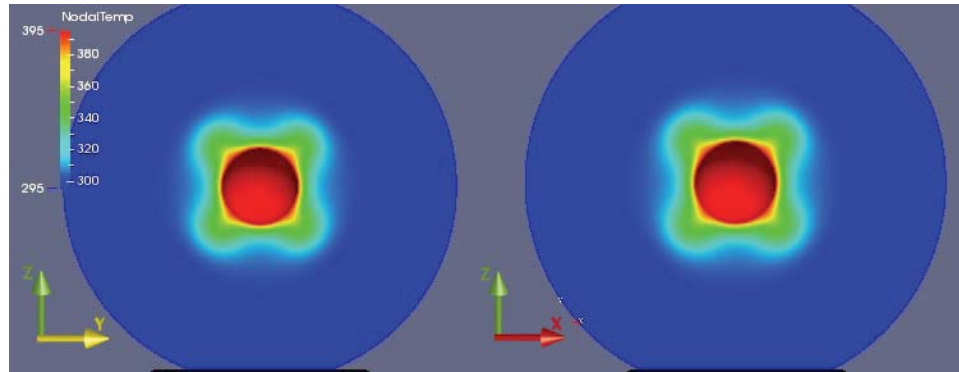


Figura 5.3: Campos de temperatura $Ra_p = 7500$. Del lado izquierdo se muestra un corte meridional mientras que el lado derecho un corte ecuatorial.

Los campos de velocidad y las líneas de flujo, figura 5.4, muestran la simetría en el movimiento del fluido, tanto en el plano ecuatorial como el meridional se presenta el mismo patrón convectivo.

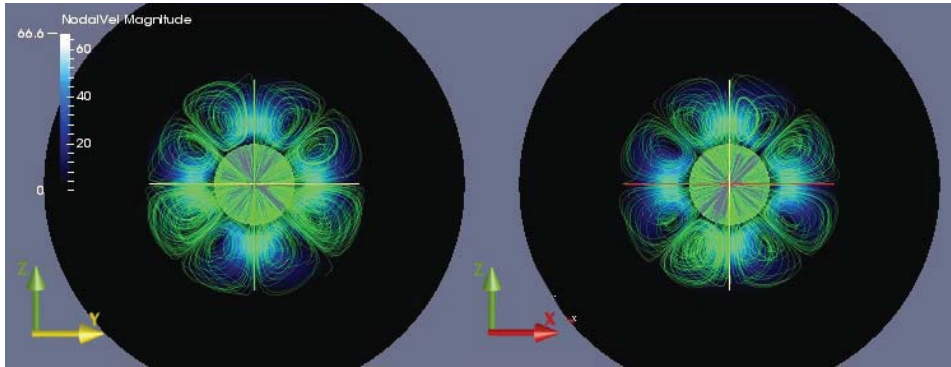


Figura 5.4: Campos de velocidad y líneas de flujo $Ra_p = 7500$. Corte meridional lado izquierdo. Corte ecuatorial lado derecho.

Una forma para visualizar en tres dimensiones los efectos de la convección es una isosuperficie de una temperatura característica o la temperatura promedio del fluido. En la figura 5.5 se presenta la superficie de temperatura promedio de la simulación.

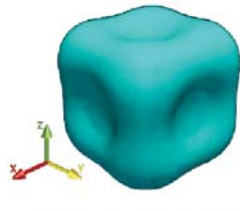


Figura 5.5: Superficie de temperatura promedio $T = 345$ en el caso $Ra_p = 7500$.

Los resultados mostrados coinciden cualitativamente con los publicados por [Avila et al., 2013] y [Futterer et al., 2008], figuras 5.6 y 5.7. Los números de Rayleigh son distintos pero el patrón de convección es muy similar, por lo que se puede decir que la malla y el código funcionan correctamente.

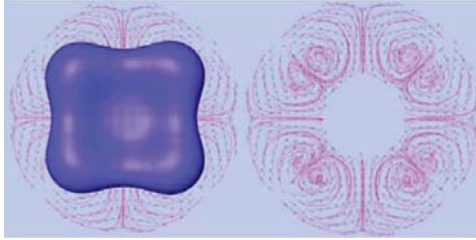


Figura 5.6: Resultados publicados por [Avila et al., 2013]. Lado derecho: campo de velocidades y superficie de temperatura promedio. Lado izquierdo: campo de velocidades y líneas de flujo. Caso $\eta = 0.35$ y $Ra = 6000$.

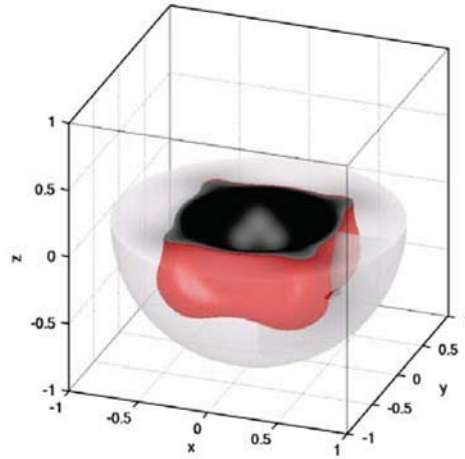


Figura 5.7: Resultados publicados por [Futterer et al., 2008]. Patrón de temperatura, se visualiza una superficie de temperatura arbitraria en color rojo (sólo hemisferio sur) $\eta = 0.5$ y $Ra = 4000$.

5.3. Dos ámulos de fluido

Para continuar el análisis se toman en cuenta el espacio anular interno y externo tienen convección, además todo el sistema tiene una difusión térmica constante α y se imponen para toda la simulación temperaturas constantes en la superficie interior $T(r_1) = T_1$ y en la superficie exterior $T(r_7) = T_2$, donde la temperatura interior es mayor a la temperatura exterior $T_1 > T_2$.

Estas condiciones implican que las temperaturas promedio en la super-

ficie externa del primer anulo $T(r_2) = T_{si}$ y la superficie interna del último $T(r_6) = T_{se}$ pueden variar, lo que se refleja en el número de Rayleigh que al igual que la temperatura no es constante. Para diferenciar los números adimensionales se agrega un subíndice para diferenciar Ra_i y Ra_e .

Es importante mencionar que el estudio de convección - difusión - convección, que este trabajo analiza, no ha sido estudiado previamente. Las publicaciones actuales se limitan al estudio de la convección en un solo espacio anular.

Uno de los objetivos de este trabajo es analizar los efectos que tiene la convección del anulo interno sobre la convección en el anulo externo. Por ello se modifica el campo de gravedad que decrece en función de $\frac{1}{r^1}$, esta modificación permite que los dos números de Rayleigh se encuentren próximos a sus valores críticos usando la misma constante gravitacional C_g , tal y como sucede en el modelo real.

En el cuadro 5.3 se muestra el resumen de los resultados que se analizan a continuación.

Caso	Ra_i	Condición	Ra_e	Condición
1	2.87E+2	Subcrítico	9.40E+1	Subcrítico
2	2.87E+3	Subcrítico	9.40E+2	Subcrítico
3	5.75E+3	Crítico	1.89E+3	Subcrítico
4	1.00E+4	Supercrítico	3.31E+3	Subcrítico
5	2.15E+4	Supercrítico	7.11E+3	Subcrítico
6	2.76E+4	Supercrítico	9.10E+3	Subcrítico
7	3.45E+4	Supercrítico	1.14E+4	Subcrítico
8	5.46E+4	Supercrítico	1.80E+4	Crítico

Cuadro 5.3: Tabla resumen de resultados. Los números de Rayleigh se calculan con las temperaturas del caso de difusión.

Como se mencionó anteriormente la temperatura en las superficies $T(r_2) = T_{si}$ y $T(r_6) = T_{se}$ y los números Ra_i y Ra_e varían en el tiempo como lo muestra la figuras 5.9 a 5.12. Para los casos 1 y 2, figura 5.9, la constante gravitacional que se utiliza provoca que la fuerza de flotación no sea capaz de transportar calor a la superficie y las temperaturas T_{si} y T_{se} permanecen constantes. En los casos restantes, figuras 5.10 a 5.12, se observa que

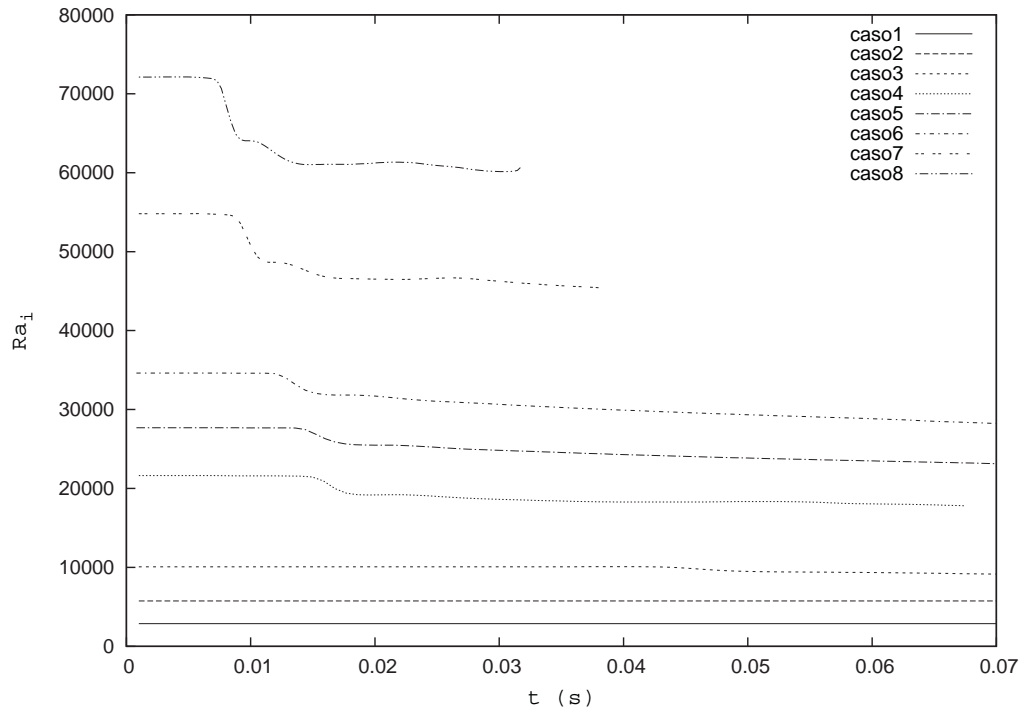
las temperaturas de las superficies T_{si} y T_{se} incrementan de manera considerable. El incremento de la temperatura T_{si} provoca una disminución del número de Rayleigh Ra_i . En cambio el incremento de la temperatura T_{se} provoca un aumento en Ra_e .

Como se describió en el párrafo anterior en cuanto cambia la temperatura de la superficie interna $T(r_2) = T_{si}$ el número de Rayleigh interno Ra_i también cambia. Este comportamiento es más evidente en los casos 3 a 8, figura 5.10 a 5.12. De igual forma cuando la temperatura de la superficie externa $T(r_6) = T_{se}$ aumenta se refleja en la variación del número de Rayleigh externo Ra_e .

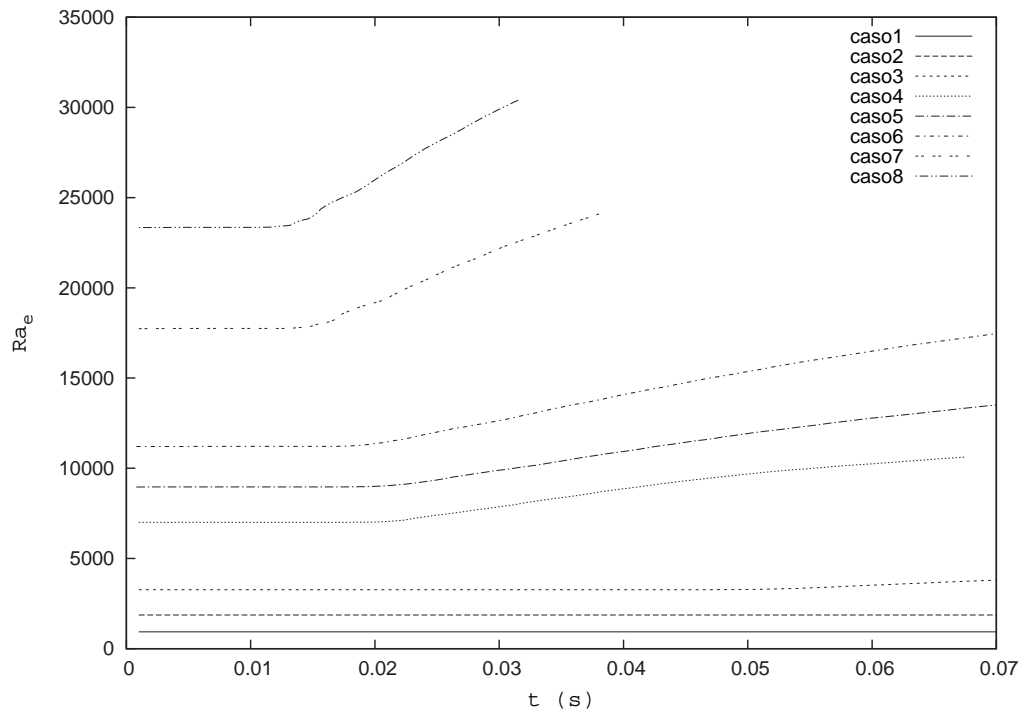
También se puede apreciar el lapso de tiempo que transcurre para que el número de Rayleigh interno cambie es menor al lapso de tiempo requerido para el número de Rayleigh externo. Este comportamiento se explica por el retraso en la transferencia de calor por conducción que se presenta en los anillos sólidos que se localizan en la parte intermedia del modelo.

Si se muestran en una sola gráfica, figura 5.8a, los números de Rayleigh internos Ra_i de todos los casos se aprecia el efecto de la constante gravitacional C_g sobre la convección. A medida que aumenta la constante gravitacional el tiempo de inicio de la convección se acorta. Por otro lado las pendientes que presentan las curvas son mayores, indicando que los patrones de temperatura cambian más rápido.

En la figura 5.8b se presentan los números de Rayleigh externos Ra_e de todos los casos. Nuevamente se aprecia que a medida que la constante gravitacional aumenta el tiempo de inicio para que las pendientes cambien se acorta. El comportamiento del número de Rayleigh externo Ra_e para los casos 3 a 8 sugiere que en el transcurso del tiempo el número de Rayleigh externo puede aumentar hasta llegar al valor crítico e iniciar la convección.

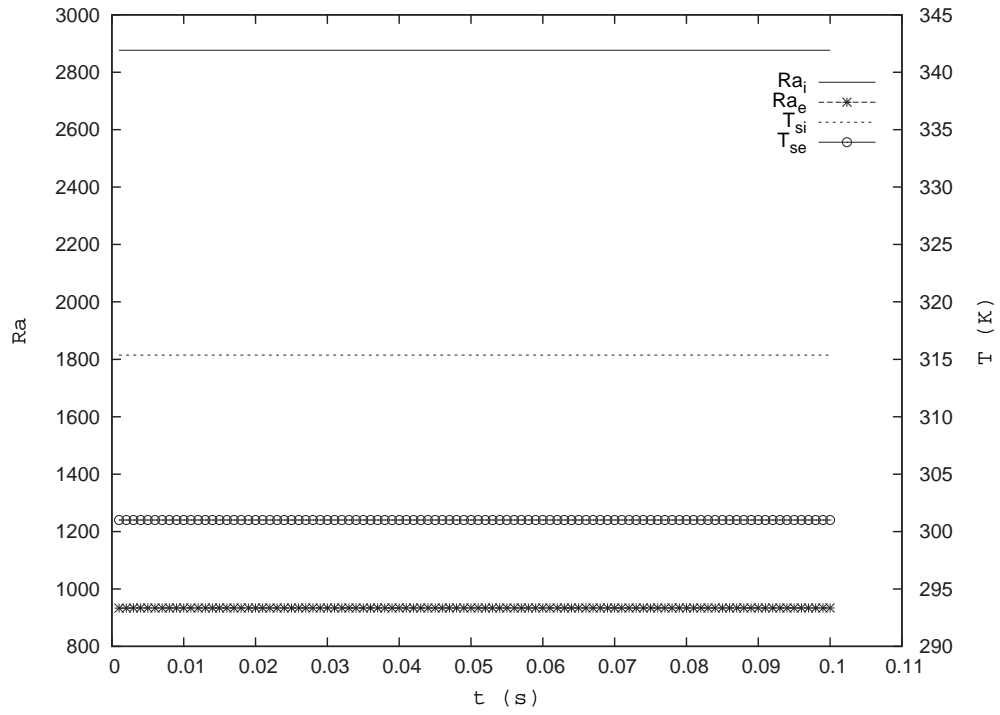


(a) Comparación de números de Rayleigh internos de los 8 casos.

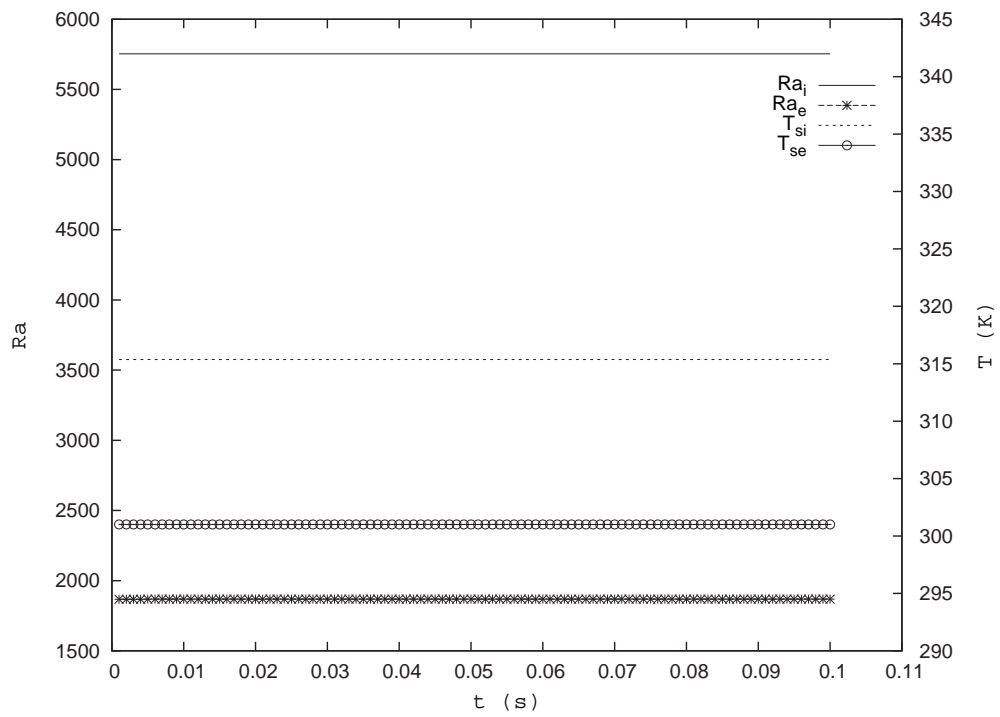


(b) Comparación de números de Rayleigh externos de los 8 casos.

Figura 5.8: Comparación de números de Rayleigh.

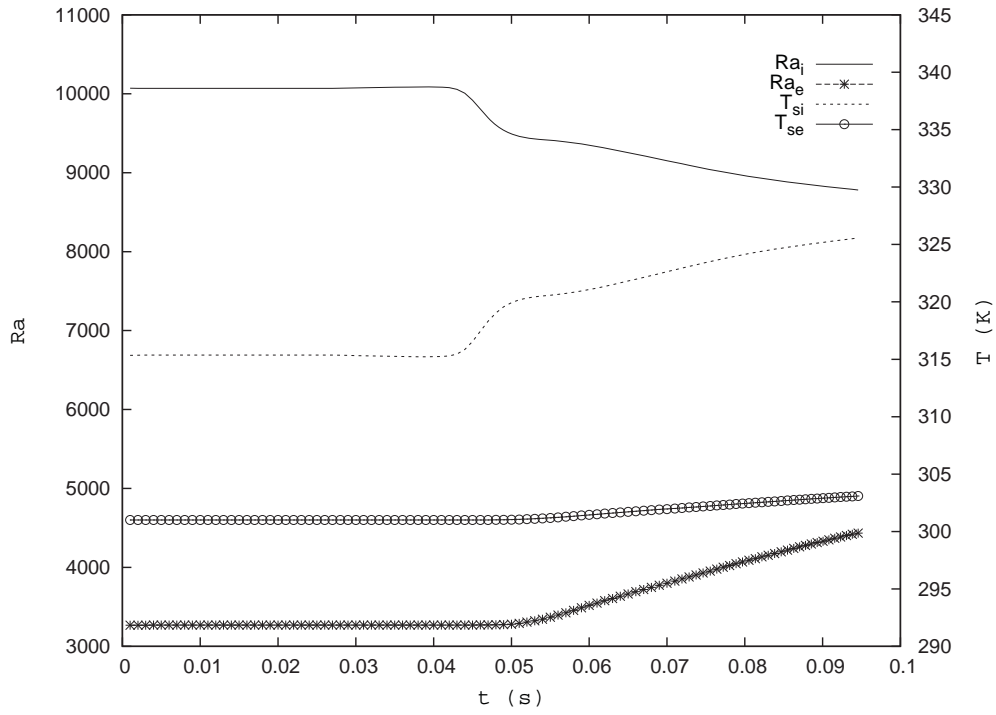


(a) Caso 1

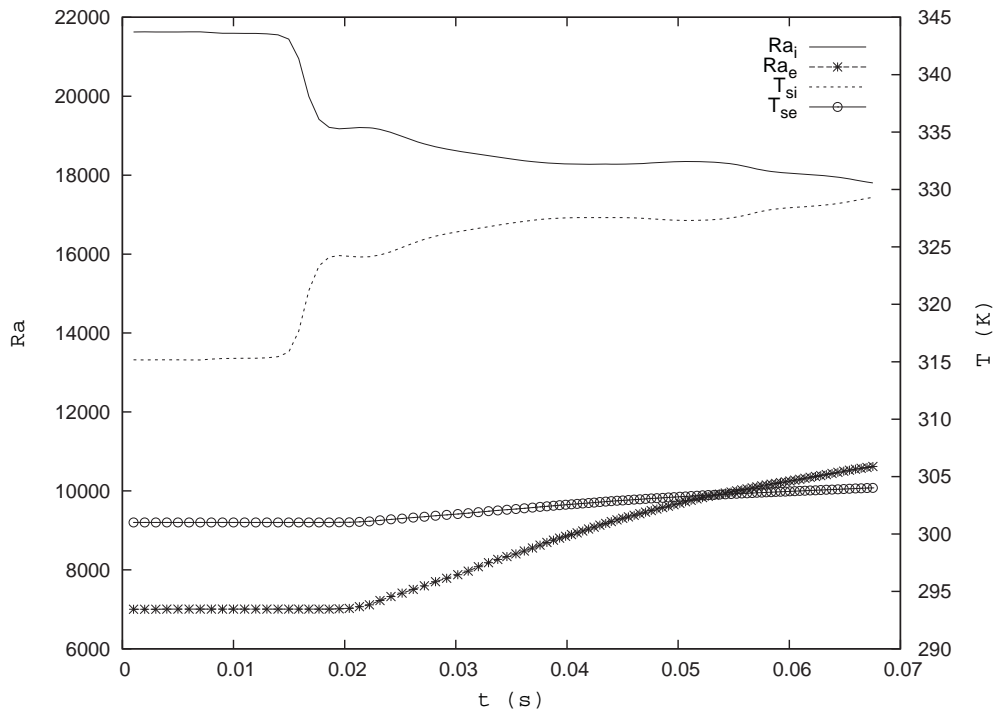


(b) Caso 2

Figura 5.9: Gráficas de Ra vs. t y T vs. t de los casos 1 y 2.

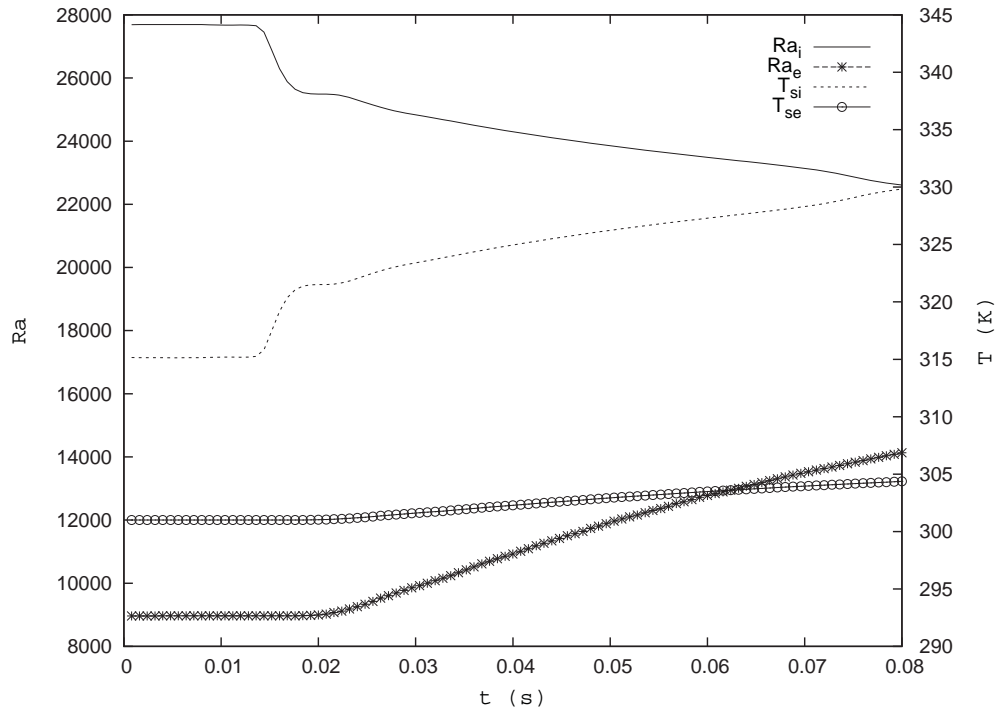


(a) Caso 3

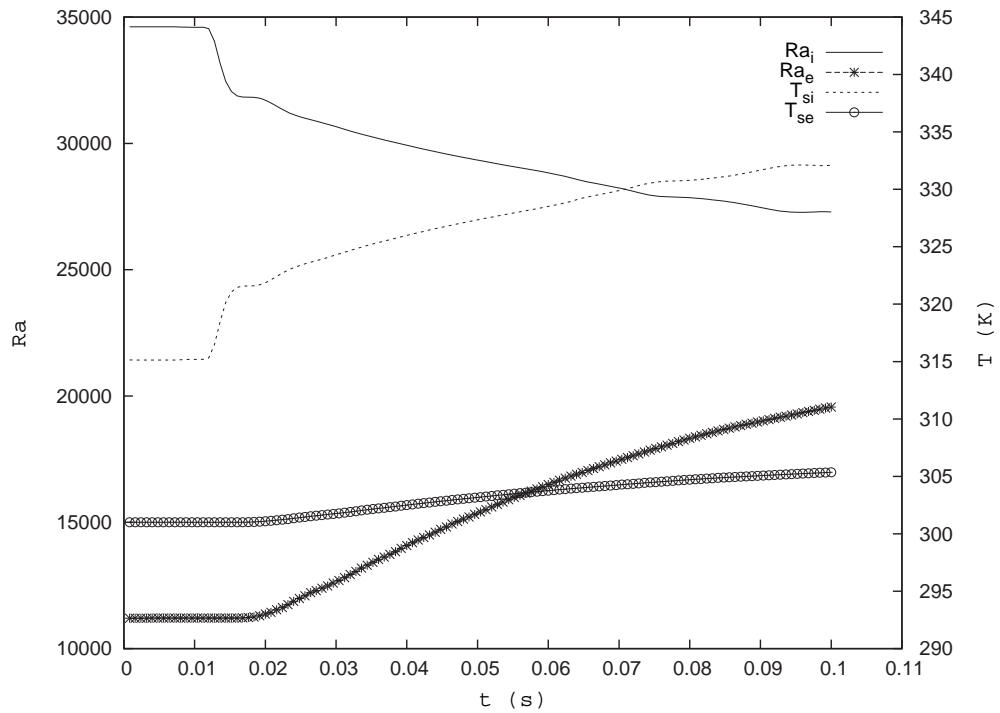


(b) Caso 4

Figura 5.10: Gráficas de Ra vs. t y T vs. t de los casos 3 y 4.

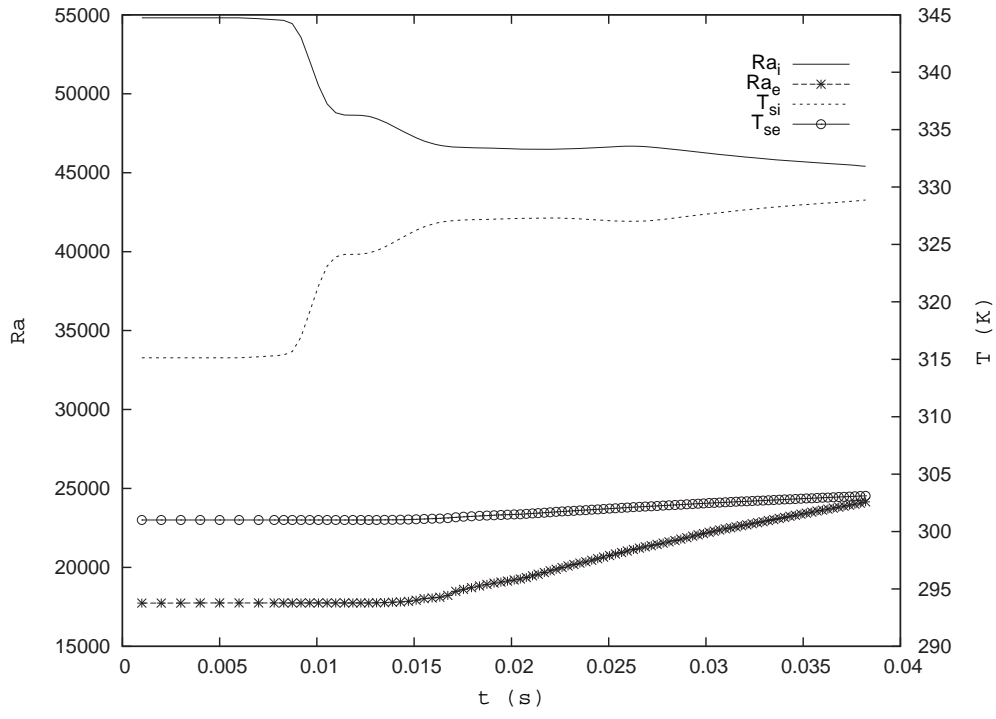


(a) Caso 5

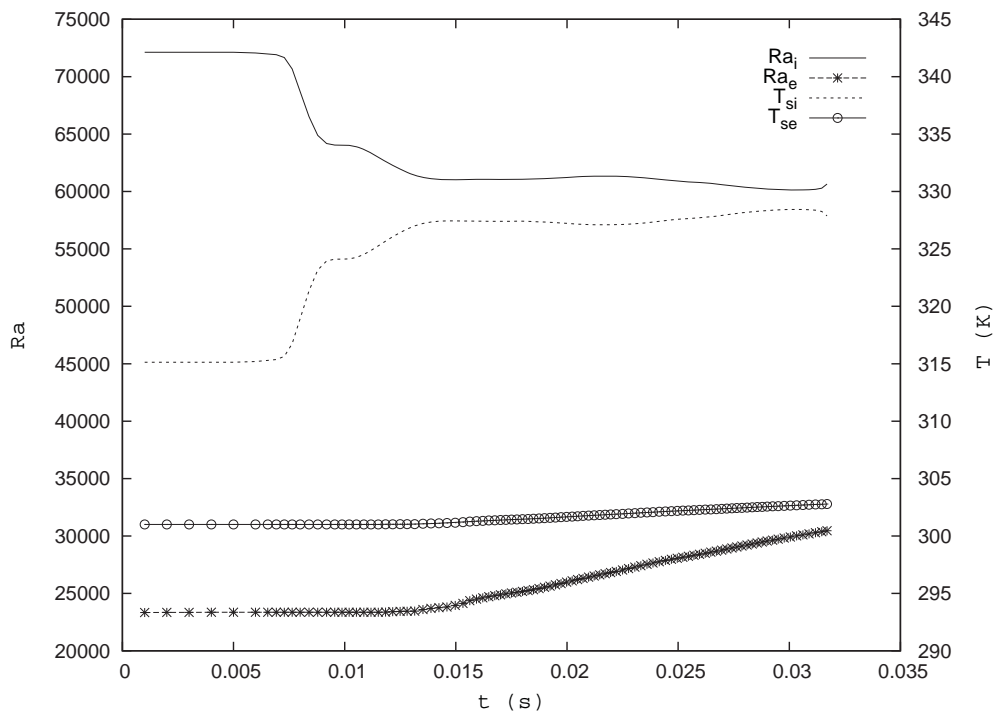


(b) Caso 6

Figura 5.11: Gráficas de Ra vs. t y T vs. t de los casos 5 y 6.



(a) Caso 7



(b) Caso 8

Figura 5.12: Gráficas de Ra vs. t y T vs. t de los casos 7 y 8.

Ahora se analiza la velocidad promedio en el interior del anulo interno V_i y en el interior del anulo externo V_e , figuras 5.13 a 5.16. En los casos 1 y 2, figura 5.13, al principio de la simulación tanto V_i como V_e presentan oscilaciones abruptas, en lo que resta de la simulación las velocidades tienden a un valor fijo que es insuficientes para generar patrones convectivos.

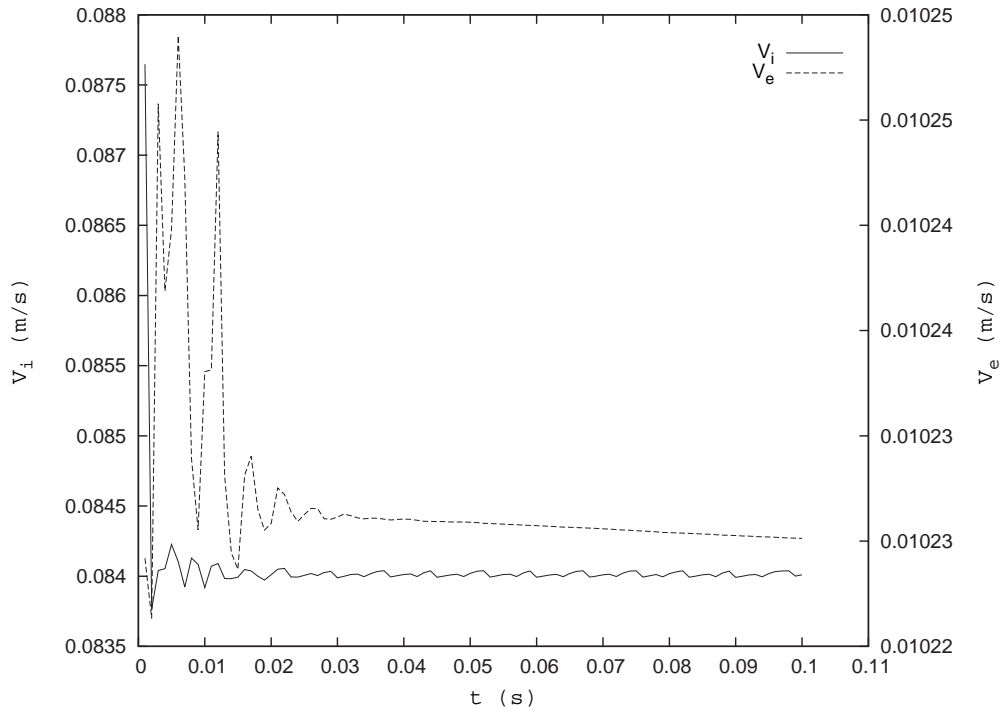
El caso 3, figura 5.14a presenta el inicio de la convección en el anulo interno, en la primera mitad de la simulación V_i permanece en velocidades cercanas a cero y en la segunda mitad incrementa significativamente. En esta ocasión la velocidad V_i es lo suficientemente grande para iniciar el transporte de energía del interior hacia el exterior. En contraste V_e disminuye y se mantiene aproximadamente en cero, con lo cual la convección no es significativa.

En general los casos 4, 7 y 8, figuras 5.14b y 5.16, presentan un comportamiento similar al descrito anteriormente. Por otra parte los casos 5 y 6, figura 5.15 presentan aumentos y disminuciones abruptas en la velocidad V_e y de nueva cuenta no es suficiente para iniciar la convección en el anulo externo.

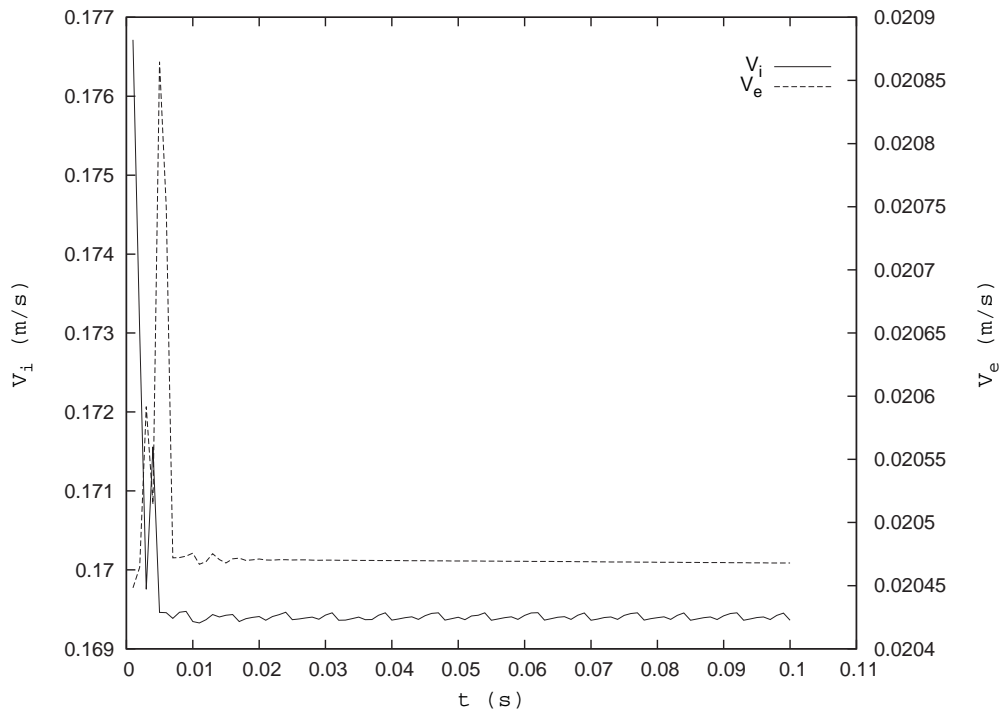
La variación de la velocidad se refleja en el cambio de los patrones convectivos que al principio de las simulaciones tienen un patrón simétrico en el plano meridional y el ecuatorial. A medida que transcurre la simulación presentan patrones variables asimétricos. En todos los casos se presentan un patrón inicial característico que se modifica a lo largo de la simulación. Este cambio es más evidente y abrupto cuando el número de Rayleigh aumenta.

Aunque en los casos que se estudian no se presenta el inicio de la convección en el sector anular exterior, el análisis de los resultados muestra que es necesario que la viscosidad del fluido confinado en el anulo externo sea menor en dos ordenes de magnitud para que coexistan ¹ los dos fenómenos convectivos.

¹El estudio para que los dos fenómenos convectivos coexistan se plantea como trabajo futuro.

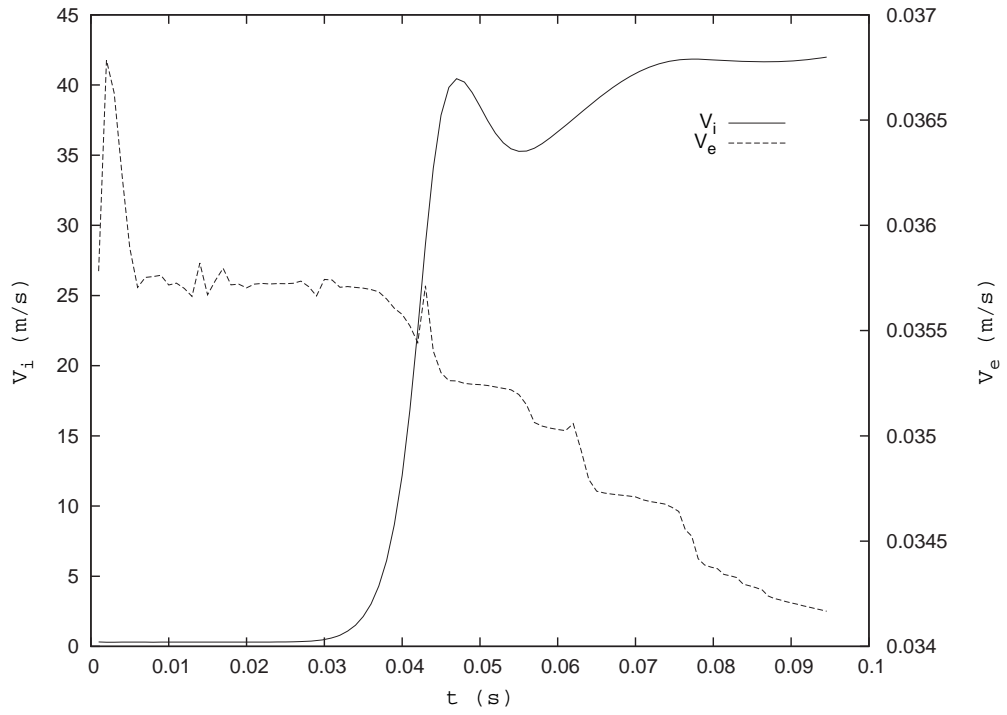


(a) Caso 1

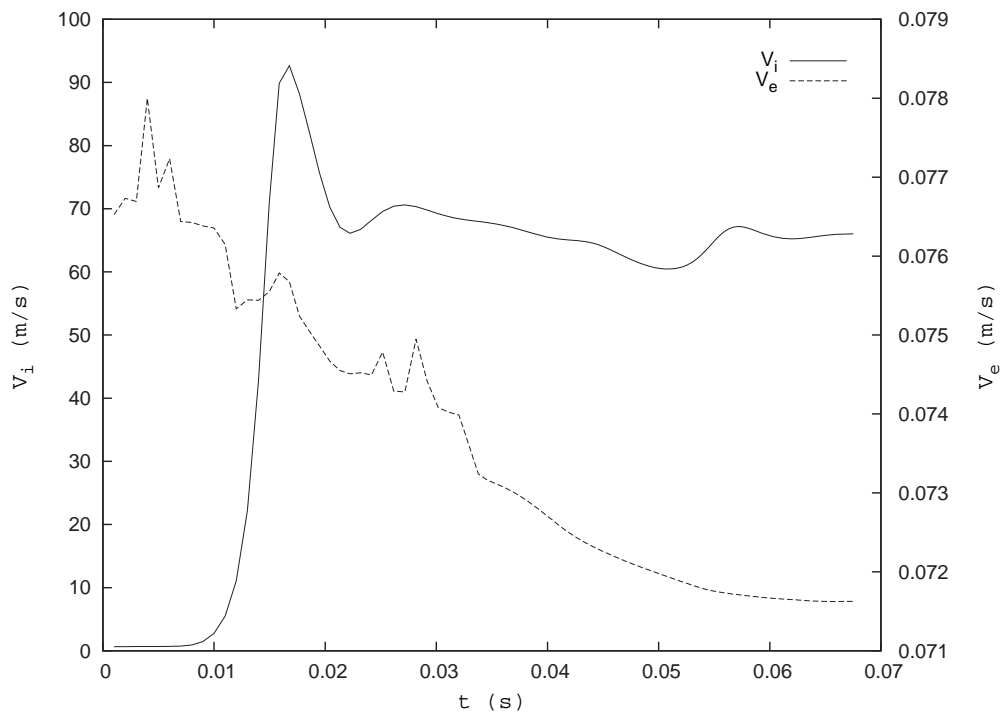


(b) Caso 2

Figura 5.13: Gráficas de velocidad promedio contra tiempo de los casos 1 y 2.

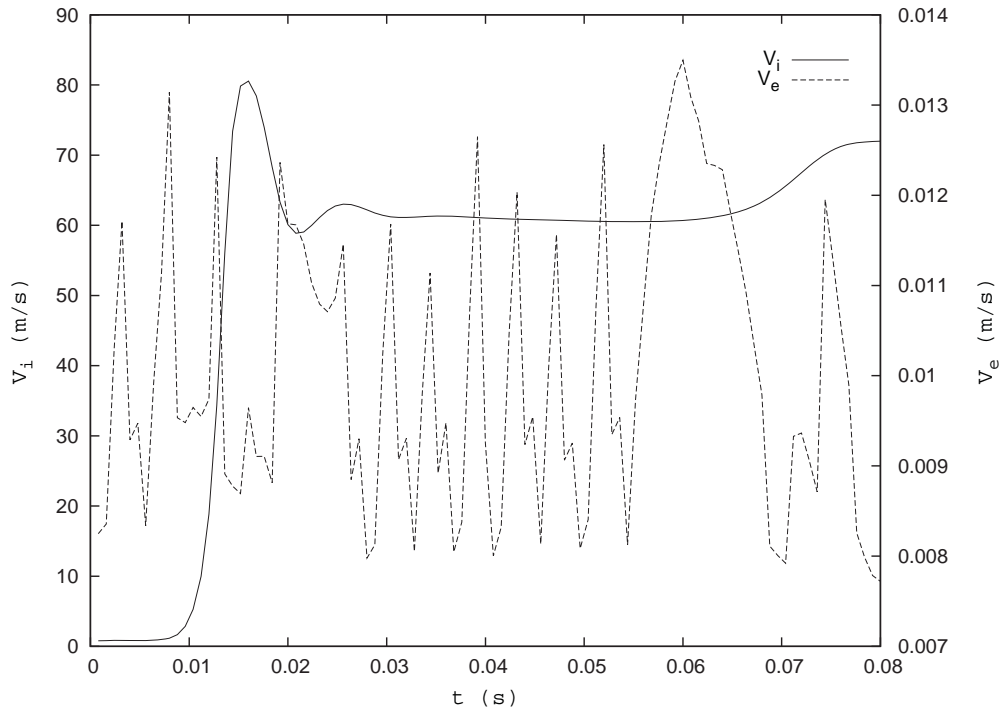


(a) Caso 3

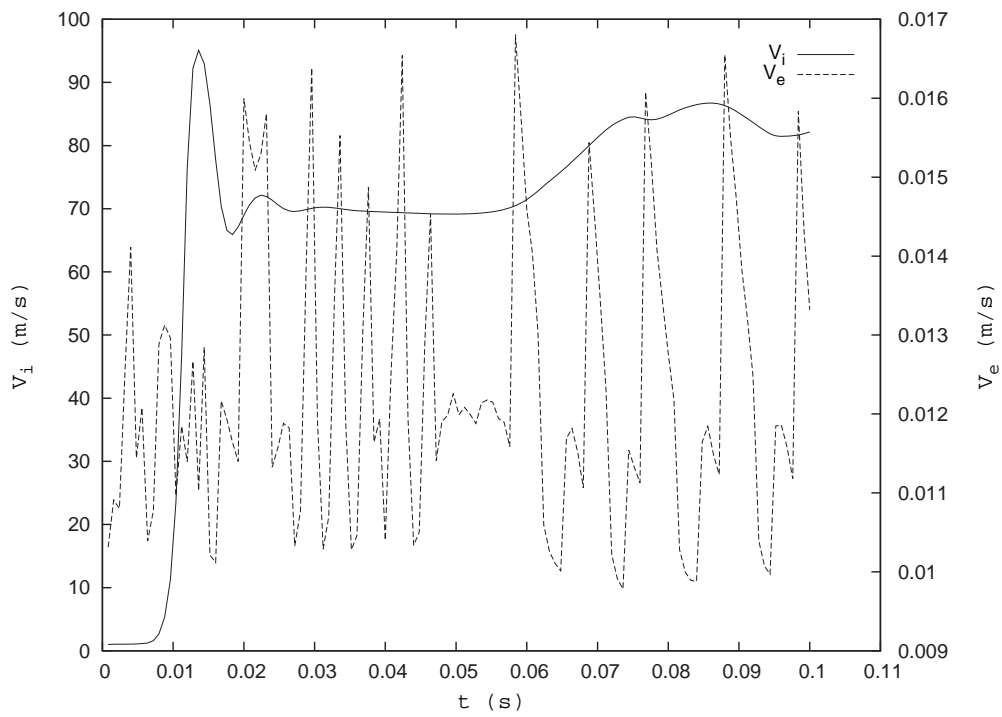


(b) Caso 4

Figura 5.14: Gráficas de velocidad promedio contra tiempo de los casos 3 y 4.

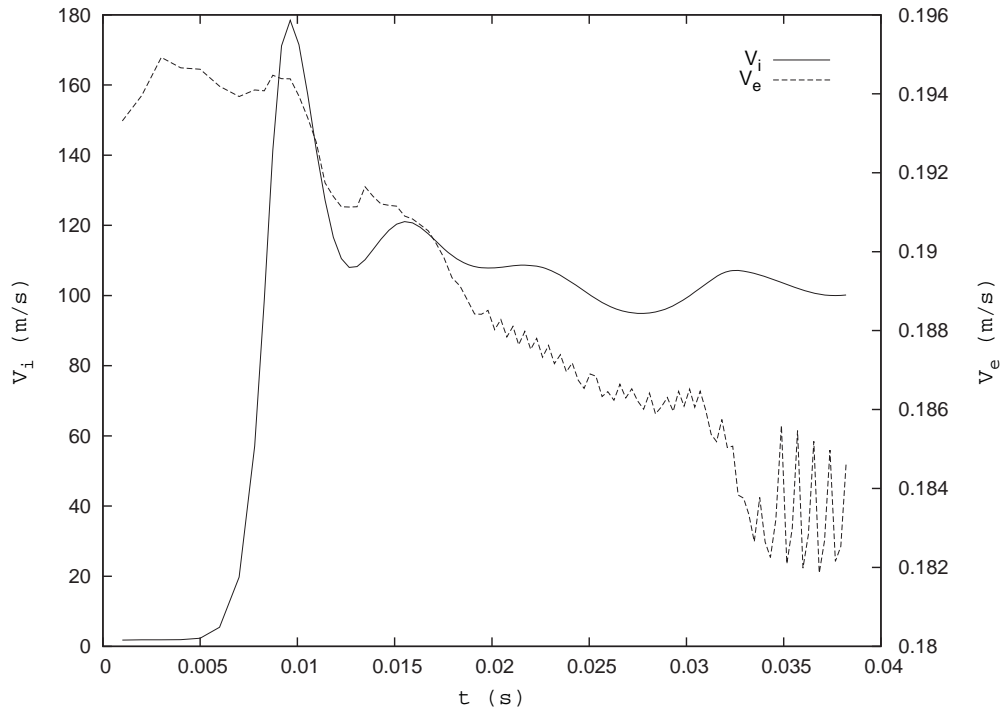


(a) Caso 5

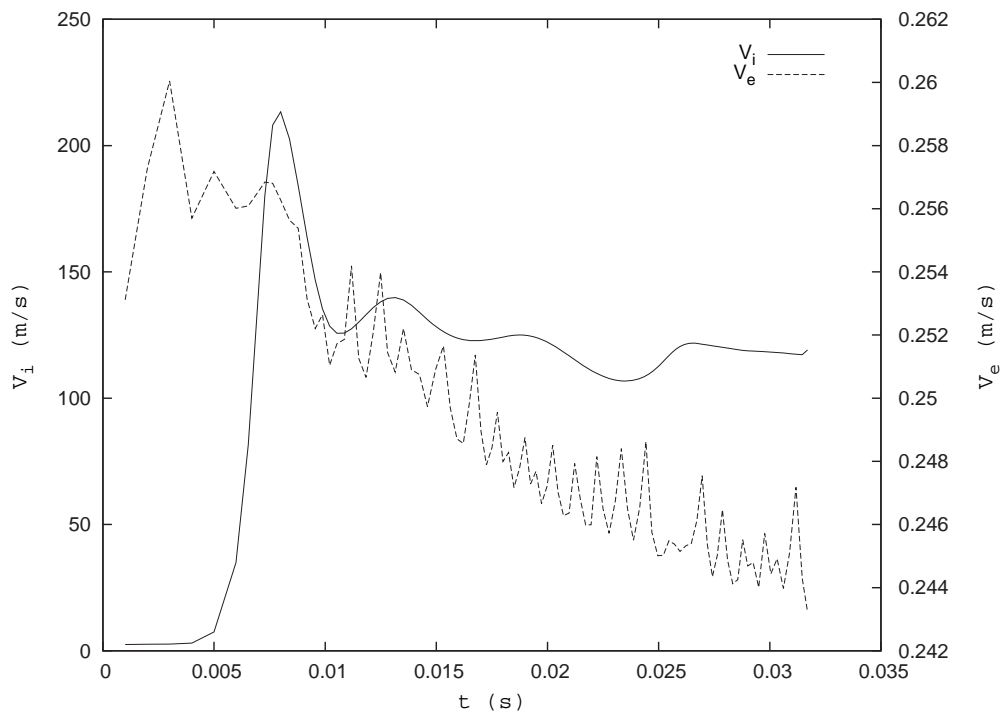


(b) Caso 6

Figura 5.15: Gráficas de velocidad promedio contra tiempo de los casos 5 y 6.



(a) Caso 7



(b) Caso 8

Figura 5.16: Gráficas de velocidad promedio contra tiempo de los casos 7 y 8.

Como se menciona en el análisis de la velocidad promedio, el ánulo externo presenta en todos los casos velocidades bajas, lo que ocasiona que el número de Rayleigh se mantenga en la zona Subcrítica. Es por ello que sólo se muestran las los patrones convectivos del ánulo interno.

A continuación se presentan los patrones convectivos y la distribución de temperatura en el interior del ánulo interno para los casos convectivos. Se observa que el patrón convectivo para los casos 3, 5 y 6 es similar, estos generan una superficie de temperatura promedio que asemeja un octaedro justo en los primeros instantes de la simulación y mientras transcurre la simulación se comporta de manera errática.

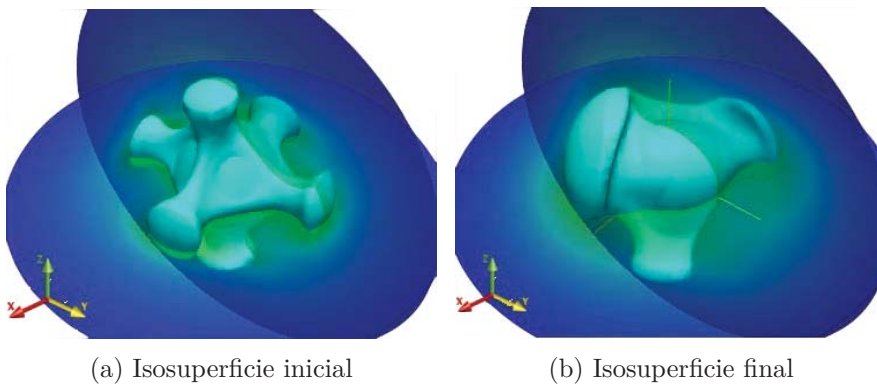


Figura 5.17: Caso 3: Superficies de temperatura promedio

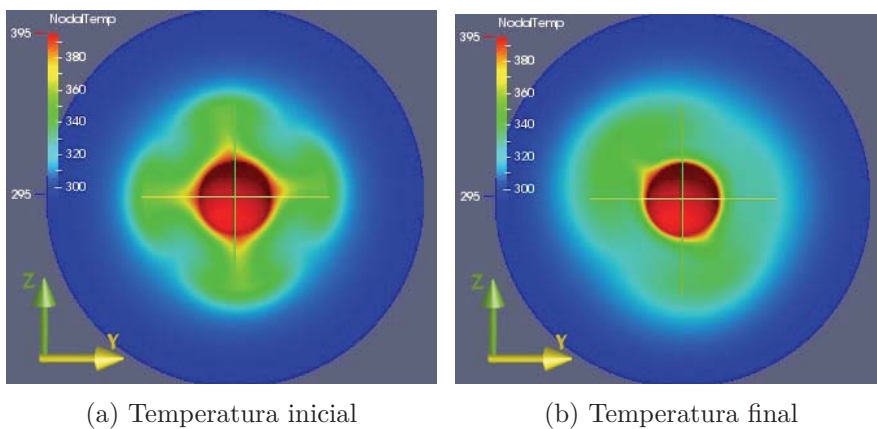


Figura 5.18: Caso 3: Distribución de temperatura plano meridional

En el caso 4 y 7 se nota un comportamiento particular de la superficie de temperatura promedio. El caso 4, figuras 5.19 y 5.20, en los instantes iniciales presenta un cubo con protuberancias en los vértices. El caso 7, figuras 5.25 y 5.26 al inicio de la simulación la isosuperficie de temperatura forma un poliedro de 12 vértices. En ambos casos en el transcurso de la simulación la superficie se perturba y adquiere formas distintas.

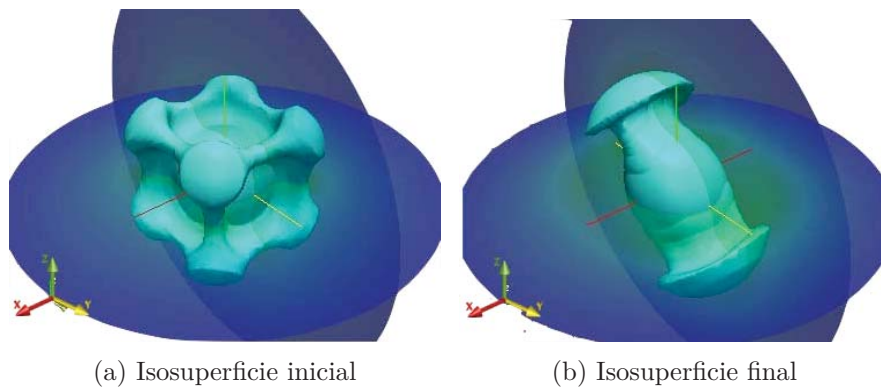


Figura 5.19: Caso 4: Superficies de temperatura promedio

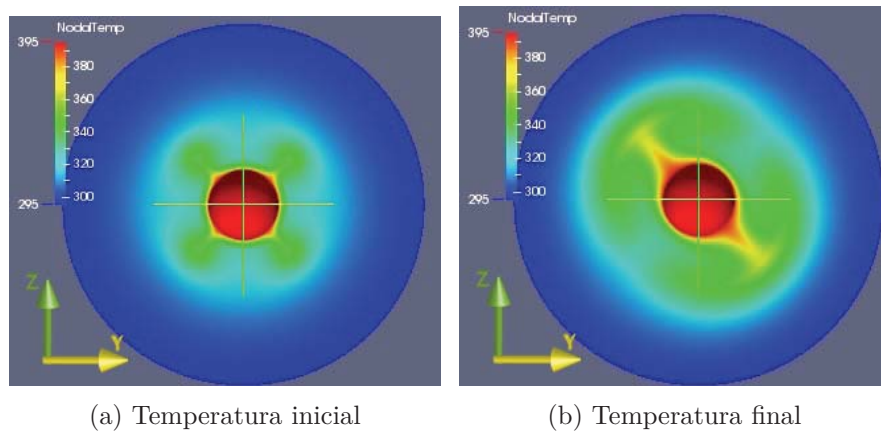
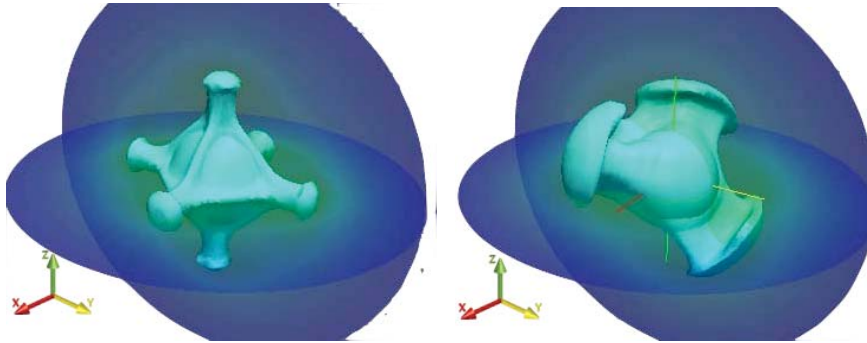


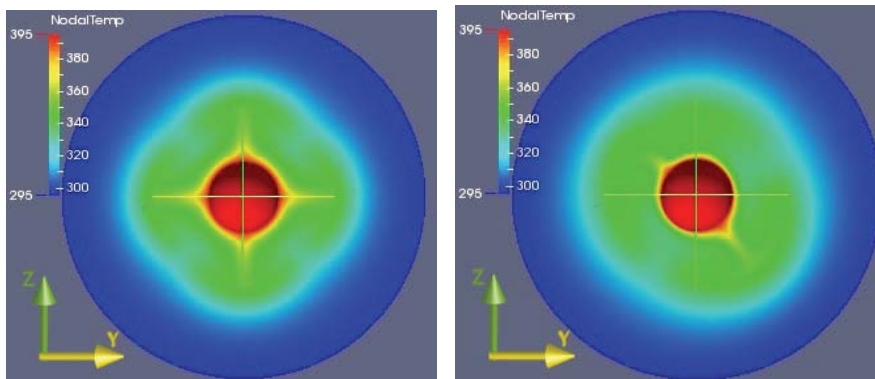
Figura 5.20: Caso 4: Distribución de temperatura plano meridional



(a) Isosuperficie inicial

(b) Isosuperficie final

Figura 5.21: Caso 5: Superficies de temperatura promedio



(a) Temperatura inicial

(b) Temperatura final

Figura 5.22: Caso 5: Distribución de temperatura plano meridional

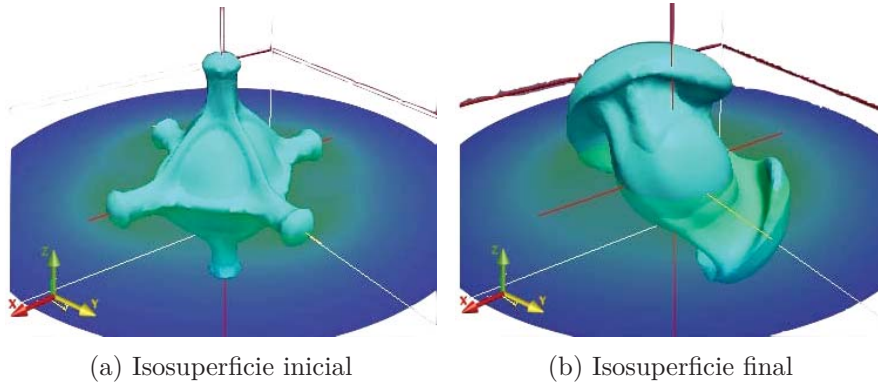


Figura 5.23: Caso 6: Superficies de temperatura promedio

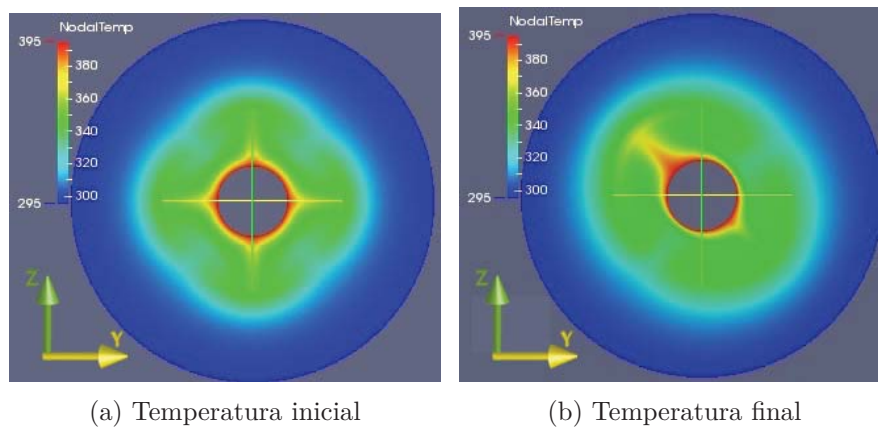


Figura 5.24: Caso 6: Distribución de temperatura plano meridional

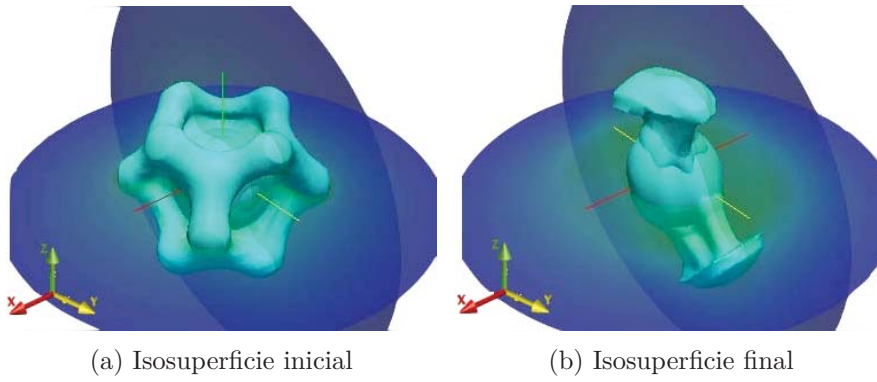


Figura 5.25: Caso 7: Superficies de temperatura promedio

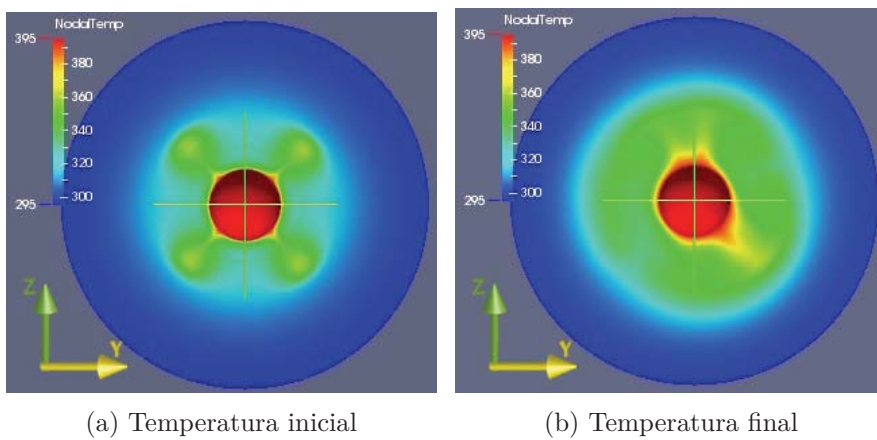


Figura 5.26: Caso 7: Distribución de temperatura plano meridional

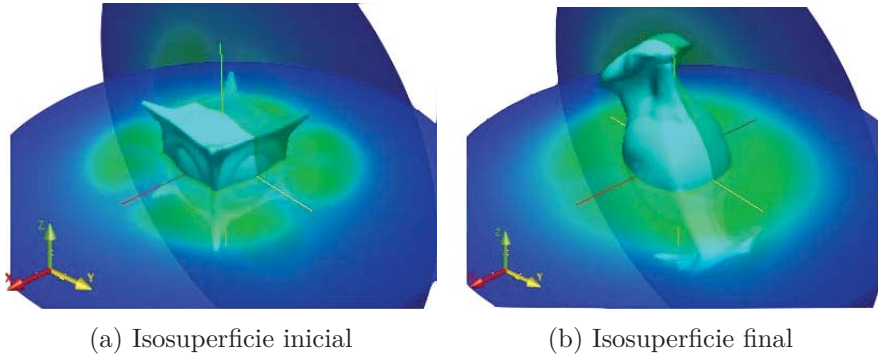


Figura 5.27: Caso 8: Superficies de temperatura promedio

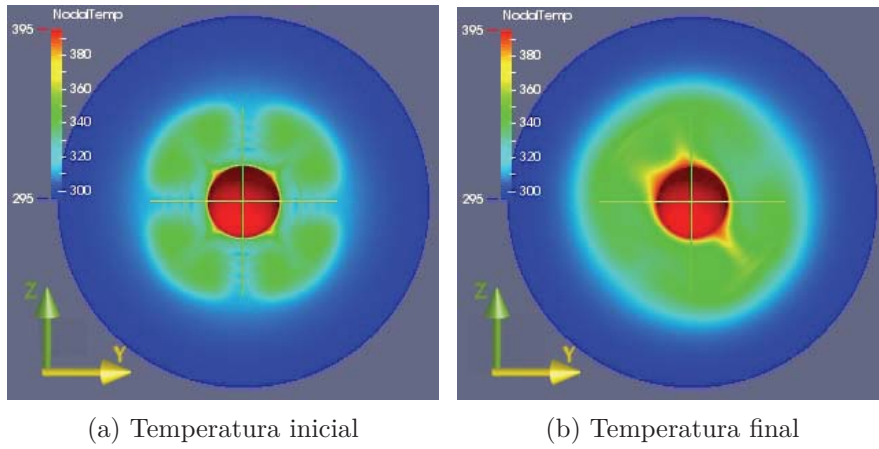


Figura 5.28: Caso 8: Distribución de temperatura plano meridional

Capítulo 6

Conclusiones

6.1. Conclusiones

Se logró estudiar la transferencia de calor por difusión en un sistema de esferas concéntricas y se demuestra que al discretizar el dominio en forma *hp* reduce el error a niveles mínimos. Del mismo modo se validó el método numérico y la malla computacional para el caso de convección $n = 3$ en el ánulo interno. Se observó que el patrón de convección es semejante al reportado en la literatura.

Finalmente se estudió el caso de convección $n = 1$ en dos ánuos concéntricos. Se logró determinar el comportamiento del número de Rayleigh cuando sólo se impone una temperatura en alguna de las superficies del ánulo. También se estudió el comportamiento de la velocidad promedio en el espacio anular y se observó sus efectos sobre la convección.

Se determinó el comportamiento del número de Rayleigh interno y externo del sistema. Se observó que mientras que el número de Rayleigh interno disminuye en el transcurso del tiempo, el número de Rayleigh externo aumenta. También se identificó que existe un retardo en el inicio del incremento del número de Rayleigh externo, debido a la difusividad térmica de los ánuos sólidos que se encuentran en la sección intermedia del sistema.

Se logró identificar los patrones convectivos que se generan cuando se modifica la constante gravitacional. De igual modo se observó que el aumento de la constante gravitacional acorta el intervalo de inicio de la convección en el ánulo interno del sistema.

Se observó que para el sistema con dos ámulos de fluido en ningún caso se llega al estado estacionario en los patrones de flujo, ya que la temperatura en las superficies T_{si} y T_{se} varía considerablemente.

6.2. Trabajo futuro

A pesar de que se logró determinar el comportamiento del número de Rayleigh y de la temperatura en el caso convección - difusión -convección no se logró alcanzar el valor crítico que inicia la convección en el ámulo externo. Por esta razón un punto de oportunidad es estudiar las condiciones que permitan la convección en los dos ámulos con fluido. También es importante incluir la rotación en el estudio para representar mejor el comportamiento de un planeta.

Apéndices

Apéndice A

Ecuación de difusión de calor en estado transitorio

En esta sección se resuelve por superposición la ecuación de difusión de calor para el caso unidimensional en estado transitorio sin generación de calor por términos fuente en coordenadas esféricas.

Como se muestran en la figura 2.3 el sistema esférico consiste en una región anular esférica con una distribución de temperatura inicial $F(r)$, la superficie de la esfera externa de radio r_o se encuentra a una temperatura T_o y la esfera interna de radio r_i a una temperatura T_i . Según estas condiciones no hay variación de la temperatura en la dirección polar $e_{\phi}^{\vec{0}}$ ni en la dirección acimutal $e_{\theta}^{\vec{0}}$ y el término fuente es igual a cero. En consecuencia la ecuación de transferencia de calor en coordenadas esféricas se reduce a:

$$\frac{k}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{k}{r^2 \sin^2 \phi} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} \right) + \frac{k}{r^2 \sin \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\sin \phi \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) + \dot{q}^0 = c_v \rho \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{k}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) = c_v \rho \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{A.2})$$

Para resolver la ecuación A.2 por superposición se toma en cuenta que la función de temperatura es una suma de la temperatura en estado estacionario y la temperatura en estado transitorio, en donde las condiciones de frontera no homogéneas corresponden al estado estacionario y las condicio-

nes de frontera homogéneas, excepto para la distribución de temperatura inicial $F(r)$, al estado transitorio, [Hahn and Ozisik, 2012].

$$T(r, t) = T_{ET}(r, t) + T_{EE}(r)$$

Con las siguientes condiciones de frontera:

$$\begin{aligned} T_{EE}(r_i) &= T_i & T_{ET}(r_i, t) &= 0 \\ T_{EE}(r_o) &= T_o & T_{ET}(r_o, t) &= 0 \end{aligned}$$

y condición inicial:

$$T_{ET}(r, t = 0) = F(r)$$

Para el estado estacionario la variación de la temperatura respecto al tiempo es igual a cero por lo que la temperatura es únicamente función de la posición y la ecuación A.1 se simplifica a:

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dT_{EE}(r)}{dr} \right) = 0 \quad (\text{A.3})$$

La única manera que la variación respecto al radio A.3 sea igual a cero es que el argumento sea una constante C_1 . Y al ordenar los términos:

$$\frac{dT_{EE}(r)}{dr} = \frac{C_1}{r^2}$$

Volviendo a integrar:

$$\begin{aligned} \int dT_{EE}(r) &= \int \frac{C_1}{r^2} dr \\ T_{EE}(r) &= \frac{-C_1}{r} + C_2 \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Al utilizar las condiciones de frontera del sistema:

$$T_{EE}(r_i) = T_i \quad T_i = \frac{-C_1}{r_i} + C_2 \quad (\text{A.5})$$

$$T_{EE}(r_o) = T_o \quad T_o = \frac{-C_1}{r_o} + C_2 \quad (\text{A.6})$$

Resolviendo las ecuaciones A.5 y A.6 para las constantes C_1 y C_2 :

$$C_1 = \frac{r_i r_o (T_o - T_i)}{r_o - r_i}$$

$$C_2 = \frac{r_o (T_o - T_i)}{r_o - r_i} + T_i$$

Al sustituir las dos constantes en la solución general A.4 y reordenar los términos se obtiene la temperatura en estado estacionario :

$$T_{EE}(r) = \frac{r_o (T_o - T_i)}{r_o - r_i} \left(1 - \frac{r_i}{r} \right) + T_i \quad (\text{A.7})$$

Para el estado transitorio se hace el siguiente cambio de variable:

$$U(r, t) = r T_{ET}(r, t) \quad (\text{A.8})$$

y sus derivadas:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U(r, t)}{\partial r} &= r \frac{\partial T_{ET}(r, t)}{\partial r} + T_{ET}(r, t) \frac{\partial r}{\partial r} \\ &= r \frac{\partial T_{ET}(r, t)}{\partial r} + T_{ET}(r, t) \\ \frac{\partial^2 U(r, t)}{\partial r^2} &= r \frac{\partial^2 T_{ET}(r, t)}{\partial r^2} + \frac{\partial T_{ET}(r, t)}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial r} + \frac{\partial T_{ET}(r, t)}{\partial r} \\ &= r \frac{\partial^2 T_{ET}(r, t)}{\partial r^2} + 2 \frac{\partial T_{ET}(r, t)}{\partial r} \\ \frac{\partial U(r, t)}{\partial t} &= r \frac{\partial T_{ET}(r, t)}{\partial t} \end{aligned}$$

que en la ecuación A.2 se traduce en:

$$\frac{\partial^2 U(r, t)}{\partial r^2} = \frac{c_v \rho}{k} \frac{\partial U(r, t)}{\partial t} \quad (\text{A.9})$$

Para resolver por separación de variables la nueva variable $U(r, t)$ se descompone en el producto de dos funciones:

$$U(r, t) = R(r)\Gamma(t)$$

con sus respectivas condiciones de frontera y condición inicial:

$$U(r_i, t) = R(r_i)\Gamma(t) = 0$$

$$U(r_o, t) = R(r_o)\Gamma(t) = 0$$

$$U(r, 0) = R(r)\Gamma(0) = rF(r) - rT_{EE} = G(r)$$

y al sustituir en A.9 se obtiene:

$$\Gamma(t) \frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2} = \frac{1}{\alpha} R(r) \frac{\partial \Gamma(t)}{\partial t}$$

donde $\alpha = \frac{k}{c_v \rho}$ es la difusividad térmica. La ecuación anterior se reordena separando las variables y se iguala a la constante $-\lambda^2$

$$\frac{1}{R(r)} \frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2} = \underbrace{-\lambda^2 = \frac{1}{\alpha \Gamma(t)} \frac{\partial \Gamma(t)}{\partial t}} \quad (\text{A.10})$$

Tomando el lado derecho de la igualdad A.10 para integrarlo se obtiene la función $\Gamma(t)$:

$$\frac{1}{\alpha \Gamma(t)} \frac{\partial \Gamma(t)}{\partial t} = -\lambda^2$$

$$\int \frac{1}{\Gamma(t)} \partial \Gamma(t) = \int -\alpha \lambda^2 \partial t$$

$$\Gamma(t) = C_1 e^{-\alpha \lambda^2 t} \quad (\text{A.11})$$

Ahora se toma el lado izquierdo de la igualdad A.10, se reordena y se obtiene una ecuación diferencial cuya solución puede ser encontrada utilizando su polinomio característico.

$$\frac{1}{R(r)} \frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2} = -\lambda^2$$

$$\frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2} + \lambda^2 R(r) = 0$$

La solución general de la ecuación diferencial anterior es:

$$R(r) = C_2 \sin \lambda r + C_3 \cos(\lambda r) \quad (\text{A.12})$$

Para encontrar las constantes C_1 y C_2 se utiliza la primer condición de frontera de $U(r, t)$:

$$R(r_i) = 0 \quad 0 = C_2 \sin(\lambda r_i) + C_3 \cos(\lambda r_i) \quad (\text{A.13})$$

resolviendo A.13 para la constante C_3 y sustituyendo en A.12:

$$C_3 = -\frac{C_2 \sin(\lambda r_i)}{\cos(\lambda r_i)}$$

$$R(r) = C_2 \sin(\lambda r) - \frac{C_2 \sin(\lambda r_i)}{\cos(\lambda r_i)} \cos(\lambda r)$$

ordenando y usando la identidad de diferencia de ángulos:

$$R(r) = \frac{C_2}{\cos(\lambda r_i)} (\sin(\lambda r) \cos(\lambda r_i) - \sin(\lambda r_i) \cos(\lambda r))$$

$$R(r) = C_4 \sin(\lambda(r - r_i)) \quad (\text{A.14})$$

donde C_4 es el cociente $\frac{C_2}{\cos(\lambda r_i)}$. Para encontrar los valores de λ se utiliza la segunda condición de frontera de $U(r, t)$:

$$R(r_o) = 0 \quad 0 = C_4 \sin(\lambda(r_o - r_i)) \quad (\text{A.15})$$

para asegurar que la igualdad A.15 se cumpla los valores del argumento de $\sin(\lambda(r_o - r_i))$ deben ser múltiplos de π como se muestra a continuación.

$$\lambda(r_o - r_i) = n\pi$$

Como es posible tener más de un valor de λ ahora se nombra con λ_n a sus distintos valores posibles y la función $R(r)$ se define como una suma infinita de todos los valores de λ_n

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{(r_o - r_i)}$$

$$R(r) = \sum_{n=1}^{\infty} C_4 \sin(\lambda_n(r - r_i))$$

Ahora se multiplican las funciones $R(r)$ y $\Gamma(t)$ para encontrar la función $U(r, t)$ y el producto de las constantes C_1 y C_4 se nombra C_n

$$U(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(\lambda_n(r - r_i)) e^{-\alpha \lambda_n^2 t} \quad (\text{A.16})$$

Para encontrar el valor de la constante C_n se utiliza la condición inicial $U(r, 0)$ y se multiplica por el operador $\int_{r=r_i}^{r_o} \sin(\lambda_m(r-r_i)) dr$ en ambos lados de la igualdad

$$U(r, 0) = G(r) \quad G(r) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(\lambda_n(r-r_i))$$

$$\int_{r=r_i}^{r_o} G(r) \sin(\lambda_m(r-r_i)) dr = \int_{r=r_i}^{r_o} \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(\lambda_n(r-r_i)) \sin(\lambda_m(r-r_i)) dr$$

y al usar la propiedad de las funciones ortogonales

$$\int_{x=a}^b w(x) \phi_n(x) \phi_m(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{cuando } n \neq m \\ \int_{x=a}^b w(x) [\phi_n(x)]^2 dx & \text{cuando } n = m \end{cases}$$

en el lado derecho de la igualdad y despejar para C_n

$$C_n = \frac{\int_{r=r_i}^{r_o} G(r) \sin(\lambda_n(r-r_i)) dr}{\int_{r=r_i}^{r_o} \sin^2(\lambda_n(r-r_i)) dr}$$

que se simplifica resolviendo las dos integrales. Realizando la integral del denominador se obtiene:

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{\int_{r=r_i}^{r_o} G(r) \sin(\lambda_n(r-r_i)) dr}{\frac{1}{4\lambda_n} \left[2\lambda_n(r-r_i) - \sin(2\lambda_n(r-r_i)) \right] \Big|_{r=r_i}^{r_o}} \\ C_n &= \frac{\int_{r=r_i}^{r_o} G(r) \sin(\lambda_n(r-r_i)) dr}{\frac{1}{4\lambda_n} \left[\frac{2n\pi(r_o-r_i)}{(r_o-r_i)} - \sin\left(\frac{2n\pi(r_o-r_i)}{(r_o-r_i)}\right) \right]} \\ C_n &= \frac{2}{r_o - r_i} \int_{r=r_i}^{r_o} G(r) \sin(\lambda_n(r-r_i)) dr \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Al sustituir la función $G(r)$ en A.17 se obtienen las integrales A y B

$$C_n = \frac{2}{r_o - r_i} \int_{r=r_i}^{r_o} \underbrace{[rF(r)]}_A - \underbrace{[rT_{EE}]}_B \sin(\lambda_n(r-r_i)) dr \quad (\text{A.18})$$

Como la distribución de temperatura inicial $F(r)$ puede ser una función arbitraria, solo la integral B se resuelve sustituyendo la temperatura en estado estacionario T_{EE}

$$\int_{r=r_i}^{r_o} r \left[\frac{r_o(T_o - T_i)}{r_o - r_i} \left(1 - \frac{r_i}{r} \right) + T_i \right] \sin(\lambda_n(r - r_i)) \, dr$$

ordenando y agrupando los términos comunes

$$\int_{r=r_i}^{r_o} \left[\frac{r_o(T_o - T_i)}{r_o - r_i} (r - r_i) + rT_i \right] \sin(\lambda_n(r - r_i)) \, dr$$

$$\int_{r=r_i}^{r_o} \left[\underbrace{\left(\frac{r_o(T_o - T_i)}{r_o - r_i} + T_i \right)}_{B_1} r - \underbrace{\frac{r_i r_o(T_o - T_i)}{r_o - r_i}}_{B_2} \right] \sin(\lambda_n(r - r_i)) \, dr$$

integrando por partes B_1

$$B_1 = \underbrace{\left[\frac{r_o(T_o - T_i)}{r_o - r_i} + T_i \right]}_C \left(\frac{-r}{\lambda_n} \cos(\lambda_n(r - r_i)) + \frac{1}{\lambda_n^2} \sin(\lambda_n(r - r_i)) \right) \Bigg|_{r=r_i}^{r_o}$$

$$= C \left(\frac{-1}{\lambda_n} \left[r_o \cos\left(\frac{n\pi(r_o - r_i)}{(r_o - r_i)}\right) - r_i \cos\left(\frac{n\pi(r_i - r_i)}{(r_o - r_i)}\right) \right] \right. \\ \left. + \frac{1}{\lambda_n^2} \left[\sin\left(\frac{n\pi(r_o - r_i)}{(r_o - r_i)}\right) - \sin(\lambda_n(r_i - r_i)) \right] \right)$$

$$= C \left(\frac{-1}{\lambda_n} \left[r_o \cos(n\pi) \right] (-1)^n - r_i \right) + \frac{1}{\lambda_n^2} \left[\sin(n\pi) \right]$$

$$= -\frac{1}{\lambda_n} \left[\frac{r_o(T_o - T_i)}{r_o - r_i} + T_i \right] \left(r_o \cos(n\pi) (-1)^n - r_i \right)$$

$$B_1 = \frac{-1}{\lambda_n} \left[\frac{r_o(T_o - T_i)}{r_o - r_i} + T_i \right] (r_o(-1)^n - r_i)$$

Al resolver la integral B_2

$$\begin{aligned}
B_2 &= - \left[\frac{r_i r_o (T_o - T_i)}{\lambda_n (r_o - r_i)} \right] \cos(\lambda_n (r - r_i)) \Big|_{r=r_i}^{r_o} \\
&= - \left[\frac{\cancel{(r_o - r_i)} r_i r_o (T_o - T_i)}{n\pi \cancel{(r_o - r_i)}} \right] \left(\cos \left(\frac{n\pi \cancel{(r_o - r_i)}}{\cancel{(r_o - r_i)}} \right) - \cos(\lambda_n (r_i - r_i)) \right) \\
&= - \left[\frac{r_i r_o (T_o - T_i)}{n\pi} \right] \left(\cos(n\pi) (-1)^n - 1 \right) \\
B_2 &= \left[\frac{-r_i r_o (T_o - T_i)}{n\pi} \right] ((-1)^n - 1)
\end{aligned}$$

Restando B_2 de B_1 y simplificando se obtiene la integral B

$$\begin{aligned}
B_1 - B_2 &= \frac{-(r_o (-1)^n - r_i)}{\lambda_n} \left[\frac{r_o (T_o - T_i)}{r_o - r_i} + T_i \right] - \left[\frac{-r_i r_o (T_o - T_i)}{n\pi} \right] ((-1)^n - 1) \\
&= \frac{-r_o^2 (-1)^n (T_o - T_i) \cancel{(r_o - r_i)} - r_o T_i (-1)^n (r_o - r_i) + r_i r_o (T_o - T_i) \cancel{(r_o - r_i)}}{n\pi \cancel{(r_o - r_i)}} \\
&\quad + \frac{r_i T_i (r_o - r_i)}{n\pi} + \frac{r_i r_o (-1)^n (T_o - T_i)}{n\pi} - \frac{r_i r_o (T_o - T_i)}{n\pi} \\
&= \frac{(r_o - r_i)}{n\pi} \left(r_o (-1)^n (T_i - T_o) + T_i (r_i - r_o (-1)^n) \right) \\
&= \frac{(r_o - r_i)}{n\pi} \left(\cancel{r_o T_i (-1)^n} - r_o T_o (-1)^n + r_i T_i - \cancel{r_o T_i (-1)^n} \right) \\
B_1 - B_2 &= \frac{(r_o - r_i)}{n\pi} \left(r_i T_i - r_o T_o (-1)^n \right) \tag{A.19}
\end{aligned}$$

Ahora se sustituye el resultado de la integral B en A.18

$$C_n = \frac{2}{r_o - r_i} \left[\int_{r=r_i}^{r_o} r F(r) dr - \frac{(r_o - r_i)}{n\pi} \left(r_i T_i - r_o T_o (-1)^n \right) \right] \tag{A.20}$$

Con la constante C_n determinada se sustituye en A.16 y se reorganiza

$$\begin{aligned}
U(r, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{r_o - r_i} \left[\int_{r=r_i}^{r_o} rF(r) dr - \frac{(r_o - r_i)}{n\pi} \left(r_i T_i - r_o T_o (-1)^n \right) \right] \sin(\lambda_n(r - r_i)) e^{-\alpha \lambda_n^2 t} \\
&= \frac{2}{r_o - r_i} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(r_o - r_i)}{n\pi} \left(r_o T_o (-1)^n - r_i T_i \right) \sin(\lambda_n(r - r_i)) e^{-\alpha \lambda_n^2 t} \\
&\quad + \frac{2}{r_o - r_i} \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\lambda_n(r - r_i)) e^{-\alpha \lambda_n^2 t} \int_{r=r_i}^{r_o} rF(r) dr \\
U(r, t) &= \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\lambda_n(r - r_i)) e^{-\alpha \lambda_n^2 t} \left[\frac{r_o T_o (-1)^n - r_i T_i}{n} \right] \\
&\quad + \frac{2}{r_o - r_i} \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\lambda_n(r - r_i)) e^{-\alpha \lambda_n^2 t} \int_{r=r_i}^{r_o} rF(r) dr
\end{aligned}$$

Al dividir $U(r, t)$ entre el radio se obtiene la temperatura en estado transitorio T_{ET} . Finalmente se suman las temperaturas T_{EE} y T_{ET} para obtener la función de la temperatura para el sistema:

$$\begin{aligned}
T(r, t) &= \frac{r_o(T_o - T_i)}{r_o - r_i} \left(1 - \frac{r_i}{r} \right) + T_i + \frac{2}{r\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\lambda_n(r - r_i)) e^{-\alpha \lambda_n^2 t} \left[\frac{r_o T_o (-1)^n - r_i T_i}{n} \right] \\
&\quad + \frac{2}{r(r_o - r_i)} \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\lambda_n(r - r_i)) e^{-\alpha \lambda_n^2 t} \int_{r=r_i}^{r_o} rF(r) dr \quad (\text{A.21})
\end{aligned}$$

Apéndice B

Ecuaciones adimensionales

En la siguiente sección se adimensionalizan las ecuaciones del capítulo 3.

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0$$

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho [1 - \beta (T - T_\infty)] \vec{g} - \nabla p + \mu \nabla^2 \vec{v}$$

$$\rho c_v \frac{dT}{dt} = k \nabla^2 T$$

Se definen los siguientes parámetros adimensionales:

$$\begin{aligned} v_i^* &= \frac{d}{\nu} v_i & x_i^* &= \frac{x_i}{d} \\ t^* &= \frac{\nu}{d^2} t & T^* &= \frac{T - T_\infty}{\Delta T} \end{aligned}$$

donde d es la diferencia de radios en el espacio anular con fluido $d = r_e - r_i$. Al diferenciar las variables dimensionales en términos de los parámetros adimensionales:

$$\begin{aligned} \partial v_i &= \frac{\nu}{d} \partial v_i^* & \partial x_i &= d \partial x_i^* \\ \partial t &= \frac{d^2}{\nu} \partial t^* & \partial T &= \Delta T \partial T^* \end{aligned}$$

B.1. Ecuación de continuidad

Al desarrollar la ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = 0 \quad (\text{B.1})$$

sustituyendo los parámetros adimensionales:

$$\begin{aligned} \frac{\nu}{d^2} \frac{\partial v_1^*}{\partial x_1^*} + \frac{\nu}{d^2} \frac{\partial v_2^*}{\partial x_2^*} + \frac{\nu}{d^2} \frac{\partial v_3^*}{\partial x_3^*} &= 0 \\ \frac{\partial v_1^*}{\partial x_1^*} + \frac{\partial v_2^*}{\partial x_2^*} + \frac{\partial v_3^*}{\partial x_3^*} &= 0 \\ \nabla^* \cdot \vec{v}^* &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

B.2. Ecuación de cantidad de movimiento

Al escribir la ecuación de cantidad de movimiento en sus tres direcciones se tiene:

\vec{i}_1 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_1}{\partial x_3} &= g_1 - \beta (T - T_\infty) g_1 - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_1} \\ &+ \nu \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_3^2} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

\vec{i}_2 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_2}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_2}{\partial x_3} &= g_2 - \beta (T - T_\infty) g_2 - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_2} \\ &+ \nu \left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_3^2} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

\vec{i}_3 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_3}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_3}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_3}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_3}{\partial x_3} &= g_3 - \beta (T - T_\infty) g_3 - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_3} \\ &+ \nu \left(\frac{\partial^2 v_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_3^2} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Al ser la misma ecuación para las tres direcciones se utiliza el subíndice i para simplificar el desarrollo:

\vec{i} :

$$\begin{aligned} \frac{\nu^2}{d^3} \frac{\partial v_i^*}{\partial t^*} + \frac{\nu^2}{d^3} v_i^* \frac{\partial v_1^*}{\partial x_1^*} + \frac{\nu^2}{d^3} v_i^* \frac{\partial v_1^*}{\partial x_2^*} + \frac{\nu^2}{d^3} v_i^* \frac{\partial v_1^*}{\partial x_3^*} &= g_i + \beta \Delta T g_i T^* - \frac{1}{d\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i^*} \\ &+ \nu \left(\frac{\partial^2 v_i^*}{\partial x_1^{*2}} + \frac{\partial^2 v_i^*}{\partial x_2^{*2}} + \frac{\partial^2 v_i^*}{\partial x_3^{*2}} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Sustituyendo los parámetros adimensionales:

$$\begin{aligned} \frac{\nu^2}{d^3} \left(\frac{\partial v_i^*}{\partial t^*} + v_1^* \frac{\partial v_i^*}{\partial x_1^*} + v_2^* \frac{\partial v_i^*}{\partial x_2^*} + v_3^* \frac{\partial v_i^*}{\partial x_3^*} \right) &= g_i - \beta \Delta T g_i T^* - \frac{1}{d\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i^*} \\ &+ \frac{\nu^2}{d^3} \left(\frac{\partial^2 v_i^*}{\partial x_1^{*2}} + \frac{\partial^2 v_i^*}{\partial x_2^{*2}} + \frac{\partial^2 v_i^*}{\partial x_3^{*2}} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Dividiendo entre $\frac{\nu^2}{d^3}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_i^*}{\partial t^*} + v_1^* \frac{\partial v_i^*}{\partial x_1^*} + v_2^* \frac{\partial v_i^*}{\partial x_2^*} + v_3^* \frac{\partial v_i^*}{\partial x_3^*} &= \frac{d^3}{\nu^2} g_i - \frac{d^3 \beta \Delta T g_i T^*}{\nu^2} - \frac{d^2}{\rho \nu^2} \frac{\partial p}{\partial x_i^*} \\ &+ \frac{\partial^2 v_i^*}{\partial x_1^{*2}} + \frac{\partial^2 v_i^*}{\partial x_2^{*2}} + \frac{\partial^2 v_i^*}{\partial x_3^{*2}} \end{aligned}$$

Al sustituir la componente de la gravedad en coordenadas cartesianas

$$g_i = \frac{-C_g}{r^{n+1}} x_i$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_i^*}{\partial t^*} + v_1^* \frac{\partial v_i^*}{\partial x_1^*} + v_2^* \frac{\partial v_i^*}{\partial x_2^*} + v_3^* \frac{\partial v_i^*}{\partial x_3^*} &= \frac{d^3}{\nu^2} g_i + \frac{d^3 \beta \Delta T C_g x_i}{\nu^2 r^{n+1}} T^* - \frac{d^2}{\rho \nu^2} \frac{\partial p}{\partial x_i^*} \\ &+ \frac{\partial^2 v_i^*}{\partial x_1^{*2}} + \frac{\partial^2 v_i^*}{\partial x_2^{*2}} + \frac{\partial^2 v_i^*}{\partial x_3^{*2}} \end{aligned}$$

El coeficiente de la temperatura adimensional es el número de Rayleigh y se escribe:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_i^*}{\partial t^*} + v_1^* \frac{\partial v_i^*}{\partial x_1^*} + v_2^* \frac{\partial v_i^*}{\partial x_2^*} + v_3^* \frac{\partial v_i^*}{\partial x_3^*} &= \frac{d^3}{\nu^2} g_i + Ra_i T^* - \frac{d^2}{\rho \nu^2} \frac{\partial p}{\partial x_i^*} \\ &+ \frac{\partial^2 v_i^*}{\partial x_1^{*2}} + \frac{\partial^2 v_i^*}{\partial x_2^{*2}} + \frac{\partial^2 v_i^*}{\partial x_3^{*2}} \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

En forma vectorial la ecuación de cantidad de movimiento se puede escribir de la siguiente forma:

$$\frac{d\vec{v}^*}{dt} = \frac{d^3}{\nu^2} \vec{g} + Ra T^* - \frac{d^2}{\rho \nu^2} \nabla^* p + \nabla^{*2} \vec{v}^* \quad (\text{B.9})$$

B.3. Ecuación de la energía

Al desarrollar la ecuación de la energía:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v_1 \frac{\partial T}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial T}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial T}{\partial x_3} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_3^2} \right) \quad (\text{B.10})$$

sustituyendo los parámetros adimensionales:

$$\begin{aligned} \frac{\nu \Delta T}{d^2} \left(\frac{\partial T^*}{\partial t^*} + v_1^* \frac{\partial T^*}{\partial x_1^*} + v_2^* \frac{\partial T^*}{\partial x_2^*} + v_3^* \frac{\partial T^*}{\partial x_3^*} \right) &= \\ &= \frac{\alpha \Delta T}{d^2} \left(\frac{\partial^2 T^*}{\partial x_1^{*2}} + \frac{\partial^2 T^*}{\partial x_2^{*2}} + \frac{\partial^2 T^*}{\partial x_3^{*2}} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

dividiendo entre $\frac{\nu \Delta T}{d^2}$ resulta el numero de Prandtl en el lado derecho:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T^*}{\partial t^*} + v_1^* \frac{\partial T^*}{\partial x_1^*} + v_2^* \frac{\partial T^*}{\partial x_2^*} + v_3^* \frac{\partial T^*}{\partial x_3^*} &= \\ &= \frac{\alpha}{\nu} \left(\frac{\partial^2 T^*}{\partial x_1^{*2}} + \frac{\partial^2 T^*}{\partial x_2^{*2}} + \frac{\partial^2 T^*}{\partial x_3^{*2}} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

en su forma compacta se escribe:

$$\frac{dT^*}{dt^*} = \frac{1}{Pr} \nabla^{*2} T^* \quad (\text{B.13})$$

Apéndice C

Transformación del vector gravedad a coordenadas cartesianas.

En este capítulo se transforma a coordenadas cartesianas la fuerza de gravedad para del sistema esférico \vec{g}_s , mediante la matriz de transformación M , a su equivalente en un sistema cartesiano \vec{g}_c , [Dumas, 1991].

$$\vec{g}_c = M\vec{g}_s \quad (C.1)$$

$$\vec{g}_c = \begin{bmatrix} \sin \phi \cos \theta & -r \sin \phi \sin \theta & r \cos \phi \cos \theta \\ \sin \phi \sin \theta & r \sin \phi \cos \theta & r \cos \phi \sin \theta \\ \cos \psi & 0 & -r \sin \psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -f_r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \phi \cos \theta f_r \\ -\sin \phi \sin \theta f_r \\ -\cos \psi f_r \end{bmatrix}$$

Al relacionar las funciones trigonométricas con las coordenadas cartesianas \vec{g}_c resulta de la siguiente forma:

$$\vec{g}_c = \frac{-f_r}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} (x_1, x_2, x_3) \quad (C.2)$$

En este trabajo se toman en cuenta que la componente f_r varía según el radio por lo que se puede escribir como:

$$\vec{g}_c = \frac{-C_g}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{\frac{n+1}{2}}} (x_1, x_2, x_3) \quad (C.3)$$

Donde C_g es una constate gravitacional con unidades $\frac{m^{n+1}}{s^2}$ y n es un número entero.

Si tomamos en cuenta que $(x_1, x_2, x_3)^{\frac{1}{2}}$ es el vector de posición r , se puede escribir de forma compacta:

$$\vec{g}_{\mathbf{c}} = \frac{-C_g}{r^{n+1}} (x_1, x_2, x_3) \quad (\text{C.4})$$

Capítulo 7

Bibliografía

- Aurnou, J. M. and Olson, P. L. (2001). Strong zonal winds from thermal convection in a rotating spherical shell. *Geophysical Research Letters*, 28(13):2557–2559.
- Avila, R., Cabello-González, A., and Ramos, E. (2013). A linear stability analysis of thermal convection in spherical shells with variable radial gravity based on the tau-chebyshev method. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 44(0):495 – 508.
- Deschamps, F., Tackley, P. J., and Nakagawa, T. (2010). Temperature and heat flux scalings for isoviscous thermal convection in spherical geometry. *Geophysical Journal International*, 182(1):137–154.
- Deschamps, F., Yao, C., Tackley, P. J., and Sanchez-Valle, C. (2012). High rayleigh number thermal convection in volumetrically heated spherical shells. *Journal of Geophysical Research: Planets*, 117(E9):n/a–n/a.
- Dumas, G. (1991). *Study of spherical Couette flow via 3-D spectral simulations: large and narrow gap flows*. PhD thesis, California Institute of Technology.
- Evonuk, M. and Glatzmaier, G. A. (2006). A 2d study of the effects of the size of a solid core on the equatorial flow in giant planets. *Icarus*, 181(2):458 – 464.
- Feudel, F., Bergemann, K., Tuckerman, L. S., Egbers, C., Futterer, B., Gellert, M., and Hollerbach, R. (2011). Convection patterns in a spherical fluid shell. *Phys. Rev. E*, 83:046304.

- Futterer, B., Gellert, M., von Larcher, T., and Egbers, C. (2008). Thermal convection in rotating spherical shells: An experimental and numerical approach within geoflow. *Acta Astronautica*, 62(4–5):300 – 307.
- Hahn, D. and Ozisik, N. (2012). *Heat Conduction*. Wiley.
- Heimpel, M., Aurnou, J., Al-Shamali, F., and Perez, N. G. (2005). A numerical study of dynamo action as a function of spherical shell geometry. *Earth and Planetary Science Letters*, 236(1–2):542 – 557.
- Karniadakis, G. and Sherwin, S. (1999). *Spectral/hp Element Methods for CFD*. Numerical mathematics and scientific computation. Oxford University Press.
- Lister, J. (2008). Earth science: Structuring the inner core. *Nature*, 454(7205):701 – 702.
- Moghadam, A. J. and Rahimi, A. B. (2008). A numerical study of flow and heat transfer between two rotating spheres with time-dependent angular velocities. *Journal of Heat Transfer*, 130(7):071703–071703.
- Nair, R. D., Thomas, S. J., and Loft, R. D. (2005). A discontinuous galerkin transport scheme on the cubed sphere. *Monthly Weather Review*, 133:814 – 828.
- Ronchi, C., Iacono, R., and Paolucci, P. (1996). The “cubed sphere”: A new method for the solution of partial differential equations in spherical geometry. *Journal of Computational Physics*, 124(1):93 – 114.
- Simitev, R. and Busse, F. H. (2005). Prandtl number dependence of convection driven dynamos in rotating spherical fluid shells. *Journal of Fluid Mechanics*, 532:365 – 388.
- Tarback, E., Lutgens, F., and Tasa, D. (2010). *Earth Science*. Prentice Hall.