UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

CAMINATAS ALEATORIAS CON TIEMPO CAMBIADO ALEATORIAMENTE

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A:

BRUNO RODRIGO GUTIÉRREZ DE LA PAZ

DIRECTOR DE TESIS:
DRA. MARÍA EMILIA CABALLERO ACOSTA
2015

Ciudad Universitaria, D. F.

1. Datos del alumno.
Gutiérrez
De La Paz
Bruno Rodrigo
57 99 59 71
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
407080832

2. Datos del tutor
Dra
María Emilia
Caballero
Acosta

3. Datos del sinodal 1
Dr
José Luis Ángel
Pérez
Garmendia

4. Datos del sinodal 2
Dr
Juan
Ruiz de Chávez
Somoza

5. Datos del sinodal 3
Mat
Daniel Antonio
Márquez
Vázquez

6. Datos del sinodal 4
M en C
Osvaldo
Angtuncio
Hernández

7. Datos del trabajo escrito
Caminatas aleatorias con tiempo cambiado aleatoriamente
115 p
2015

Para mi amigo Iván†
que amaba las matemáticas.

Agradecimientos

Largo es el camino y muchos los que me ayudaron y levantaron en este andar. Imagino una vereda larga de la que puedo, con nubarrones en la memoria, revivir algunos sucesos sin los cuales este trabajo no exisitiría.

Veo a mamá y papá ayudándome y desvelándose conmigo, platicándome cosas o mirándome con compasión cuando no me salía un problema o una demostración.

Y al final el problema ni era tan complicado ni la demostración tan esencial.

Pero el tiempo compartido y el apoyo que recibí es invaluable.

Hace mucho que no escribo en prosa, mucho menos para agradecer, sin embargo pienso en mis amigos de primer semestre, con quienes viví inigualables aventuras; y ahí está Jhon con su música y su humor y a la noche todos cenando en su casa después de la fiesta, con su abuela que cocina tan rico.

Ahí está Iván quien me inspiró para dedicarme con pasión a las matemáticas, él que estudiaba siempre con una gran sonrisa durante toda la tarde. Él que murió inesperadamente durante el cuarto semestre; y nuestros estudios continuaron y Paul, haciendo equipo conmigo en muchas materias me enseñó que hay grandes amistades en donde se puede trabajar bien y pasarla mejor.

También está Mario, Api, Maik, Jesús, Pato, Rodrigo, Winnie. Sin ellos mi tiempo en la Facultad se hubiera perdido de tanta alegría, de tanto tiempo en compañía, de tanta amistad.

Pienso también en Paco, aquel que en el pasado fue mi aprendiz (si es que algo pude enseñarle) y que ahora venía a explicarme tantas cosas, y acompañarme en el arduo camino de aprender matemáticas. Por él fue que contacté al súper equipo de análisis: Lore, que en palabras de Lalito es "la mejor matemática de mi generación", Lalito, que en palabras mías es el mejor matemático de estas generaciones, y Daniella, también una brillante matemática y con un gran corazón. Todos ellos, el súper equipo de análisis, me brindaron gran apoyo y una amistad bella.

Tuve la oportunidad genuina de conocer y aprender de grandes maestros y maestras: Jefferson King, pasión por el cálculo; María de Luordes Guerrero, pasión por la lógica, mi amigo Pavel Ramos y los conjuntos convexos; Silvestre Cárdenas, que logró con sus increíbles problemas de geometría sentarme por primera vez y durante horas y horas a trazar rectas para resolver un problema.

Muy especialmente también pienso en Ángel Carrillo quien me ayudó y guió en el arduo y apasionante camino del análisis matemático. Él marcó un antes y un después en mi experiencia de percibir las matemáticas. Gracias Ángel, creo que en dos años de cursos nunca te lo expresé, pero muchas gracias por todo el apoyo.

Otros grandes maestros que tuve fueron Ángel Tamariz y Miguel Ángle García (MAGA); Luz Areli y Anita, quienes me enseñaron que un maestro puede ser cercano a los alumnos, por que a los alumnos hay que darles su lugar como personas valiosas que son.

Muy especialmente le agradezco a María Emilia Caballero, mi tutora, profesora y directora de tesis; y es que, desde antes de empezar la carrera, y sin conocerme, me respondió una entrevista con tanta sencillez, alegría y pasión que me convenció de cambiarme de carrera para estudiar matemáticas. Es difícil expresar todo el apoyo que me ha dado; desde cátedras impresionantes de cómo demostrar cosas que parecían muy difíciles, con su forma tan humana de hacer matemáticas; y por preocuparse en cómo ayudarme, en la escuela, en la ayudantía, en la tesis; y por supuesto, en la vida.

No solo mi agradecimiento sino toda mi admiración a todos ellos.

A veces es más difícil agradecer a las personas que más me han apoyado, quizá por que no encuentro las palabras o por que me resisto a escribir cosas demasiado cursis. Una de estas personas es Angie, y la otra mi hermano. Angie, por que a lo largo de 9 años me ha escuchado, apoyado, entendido, acompañado. Por cientos de tazas de café en las que compartimos sueños, aspiraciones y frustraciones, por actuar juntos, por y por y por... por tanto, por todo. Por ayudarme a derretir los hielos de mi corazón y mostrarme que amar es fácil y bello. Te amo Angie.

A Omar, que es tan gracioso, que llena de amigos la casa y hace las fiestas, por toda la vida juntos, por que sin ti no sé que sería de mí.

En este camino también están mis tías Juanita y Carmina, quienes siempre me dieron ánimos de seguir, quienes me apoyaron con consejos y dinero, muchas veces. Gracias Juanita, gracias Carmina.

Muchos son los amigos que se me escapan de las líneas, pero que sin duda estuvieron conmigo de alguna forma y que sin ellos nada de esto exisitiría: Fer, Alfredo, Haza, Daniel; Ruy y Baruch. También mis hermanos de Escuadrón, por conquistar valles y montañas juntos durante noches heladas; y Majo y Xime, por volar juntos en la enredadera de poesias y pensamientos interconectados.

Así es como, después de bastantes años, este camino cual vereda empinada llega a una estación. Hubo momentos en los que los desfiladeros peligrosos casi me tiran a los abismos y ahí estuvieron, para salvarme, las manos de Patricia Aguilar y Carlos de Pedro. Después llegaron mis maestros Tony Karam, Gueshe Lobsang Dawa y Venerable Sherab Choephel, quienes me ayudaron con sus enseñanzas sobre la paciencia, la compasión y el cultivo de un buen corazón.

GRACIAS A TODOS.

Que este trabajo pueda, de manera directa o indirecta, contribuir a crear un mundo mejor.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

1.1. Abreviaturas

c.a.	caminata aleatoria
v.a.	variable aleatoria
i.i.d.	independientes e identicamente distribuidas
LFGN	Ley Fuerte de los Grandes Números
TCL	Teorema Central del Límite

1.2. Introducción

Este trabajo está basado en el artículo *Anscombe's Theorem 60 Years Later* publicado por el Doctor Allan Gut en el año de 2012 (*Gut 2012*). En dicho artículo se estudian la Ley Fuerte de los Grandes Números (LFGN) y el Teorema Central del Límite (TCL) para caminatas aleatorias con tiempos cambiados aleatoriamente.

Los teoremas límite usuales (LFGN y TCL) nos permiten conocer el comportamiento asintóntico que tiene una caminata aleatoria $\{S_n; n \in \mathbb{N}\}$. En la práctica, los ensayos $S_1, S_2, \ldots, S_k$ se registran uno tras otro, evidentemente, dadas las complicaciones prácticas para registrar una cadena infinita de eventos, se registran hasta un número finito k. Este valor, por lo general, está determinado por un suceso, es decir, k es el primer momento de la caminata aleatoria en el que "algo especial ocurre". Para ver algunos ejemplos en los que este tipo de registros se lleva a cabo, véase el Capítulo 5.

Al conjuntar los registros en que “algo especial ocurre” obtenemos un conjunto de índices aleatorios. La caminata aleatoria asociada a este conjunto aleatorio de índices es de la que nos interesa estudiar su comportamiento asintótico.

La teoría que aquí se estudia, tiene aplicaciones directas en la Teoría de Renovación, en la Teoría del Riesgo de Seguros, en las Políticas de Remplazo, Teoría del Conteo y en la Teoría de Colas. Algunos ejemplos de sus aplicaciones pueden verse en el Capítulo 5.

En el Capítulo 1 presentaremos la mayoría de los resultados previos para desarrollar este trabajo. Algunos otros se presentan directamente en el texto.

En el Capítulo 2 se enuncia el Teorema de Anscombe que es pionero en el desarrollo de teoremas límite para caminatas aleatorias con índices cambiados aleatoriamente. Se demuestran también la LFGN y el TCL para las dichas caminatas. Demostrar el TCL para sumas aleatorias será una labor ardua y se requerirá demostrar una cantidad importante de resultados previos. Este Capítulo contiene la parte medular del presente trabajo.

En el Capítulo 3 se estudia el proceso $\tau(t) = min\{n : S_n > t\}$ para obtener una versión de la LFGN y el TCL para dicho proceso $\tau(t)$. También se presenta el método SRW que es una serie de pasos que utilizaremos a partir del Capítulo 3 para demostrar los teoremas límite asociados a caminatas aleatorias con tiempos cambiados aleatoriamente.

El Capítulo 4 demuestra la LFGN y el TCL para caminatas aleatorias bidimensionales. Este Capítulo es de suma relevancia pues en la teoría que en éste se desarrolla descansan todas las aplicaciones presentadas en el Capítulo 5.

En el Capítulo 5 se presentan algunas aplicaciones que puede tener la teoría expuesta en este trabajo. Analizaremos con detalle algunas de estas aplicaciones que caen dentro de la Teoría de Renovación, la Teoría del Riesgo de Seguros, la Teoría de las Políticas de Remplazo y la Teoría del Conteo. Como primera aplicación se presenta un proceso cronomatográfico que consiste en separar sustancias al hacerlas pasar a través de una columna; y tras ver este suceso como un proceso estocástico, se calcula la distribución asintótica normal con la que se aproxima el tiempo necesario que se requiere para que una partícula dada recorra la longitud total de la columna.

En la siguiente aplicación se supone un río con dos niveles, en el primer nivel la partícula avanza longitudinalmente a una velocidad constante mientras que, en el segundo nivel la partícula permanece en reposo. Suponemos que la partícula permanece en la fase móvil un tiempo aleatorio para luego cambiar a la fase de estacionareidad, en la que también permanece un tiempo aleatorio. La partícula alterna así entre un nivel y el otro. Se procede a calcular la aproximación asintótica normal para estimar el tiempo necesario que requiere una partícula para recorrer dentro del río una distancia fija $L > 0$.

La siguiente aplicación muestra un método para determinar la aleatoreidad de una máquina encriptadora que trabaja con n discos que se mueven alternadamente a velocidad constante durante un tiempo t.

En la siguiente aplicación se presenta la política de reemplazo determinada por la edad tal como la propone (*Barlow and Proschan 1965*) en el que un artículo es reemplazado por otro al descomponerse o al transcurrir un tiempo fijo a, lo primero que ocurra. Se procede con calcular diversas distribuciones asintóticas normales asociadas al número de reemplazos que se hacen "por muerte naturalçuando transcurre un tiempo fijo $t > 0$, es decir, el número de reemplazos realizados dentro del intervalo de tiempo $[0, t]$ cuando el artículo se descompone antes que tenga una tiempo a de funcionamiento.

En otra aplicación se analiza un modelo de conteo en el que se registran las llegadas aleatorias de partículas a un contador, pero cuando una partícula arriba al contador, éste se queda inactivo durante un tiempo aleatorio. Después de esto se vuelve a activar y espera a que llegue la siguiente partícula, este periodo de espera se denomina “tiempo muerto”. Luego, se responde a la pregunta ¿Cuánto “tiempo muerto total”transcurre durante el intervalo de tiempo $[0, t]$?

Por último se supone la existencia de una compañía aseguradora con cierto capital $R > 0$ y se calcula la probabilidad de ruina a un tiempo $t > 0$.

1.3. Preliminares

A continuación presentamos la teoría necesaria para desarrollar nuestro trabajo. Todo lo presentado aquí es ampliamente conocido, por lo que la mayoría de los resultados sólo los enunciaremos sin demostrarlos. Empecemos con algunas definiciones.

Definición 1.3.1 (Caminata Aleatoria). *Sea* $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ *una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, definidas sobre un espacio de probabilidad* $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ *y que toman valores en un subconjunto de*

$\mathbb{Z}$ (o en $\mathbb{Z}^d$). La sucesión $\{S_i\}_{i=1}^{\infty}$ definida por

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

es llamada caminata aleatoria.

Definición 1.3.2 (Proceso Estocástico)**.** *Un proceso estocástico es una colección de variables aleatorias $\{X_t : t \in T\}$ parametrizada por un conjunto T, llamado espacio parametral, en donde las variables toman valores en un conjunto S llamado espacio de estados.*

Definición 1.3.3. *Sea X una variable aleatoria con distribución Normal, con media μ y varianza σ^2. Esto lo denotaremos por $X \sim N(\mu, \sigma^2)$*

Ahora veamos algunos resultados que ocuparemos a lo largo de este trabajo.

Teorema 1.3.1 (Desigualdad de Cauchy-Schwartz)**.** *Sean X y Y variables aleatorias tales que $Var(X) < \infty$ y $Var(Y) < \infty$. Entonces*

$$\mathbb{E}(XY) \leq |\mathbb{E}(XY)| \leq \mathbb{E}|XY| \leq \|X\|_2 \|Y\|_2 = \sqrt{\mathbb{E}(X^2) \cdot \mathbb{E}(Y^2)}$$

Teorema 1.3.2 (Lema de Borel-Cantelli)**.** *Sea $\{A_n, n \geq 1\}$ un conjunto arbitrario de eventos, entonces*

i)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < \infty \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 0.$$

ii) Si los eventos $\{A_n, n \geq 1\}$ son independientes entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \infty \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 1.$$

El siguiente es un Teorema relativo a la independencia de variables aleatorias.

Teorema 1.3.3. *Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variables aleatorias y $h_1, h_2, \ldots, h_n$ funciones medibles. Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son independientes, entonces también lo son $h_1(X_1), h_2(X_2), \ldots, h_n(X_n)$.*

Los siguientes son resultados referentes a la esperanza de una variable aleatoria.

Lema 1.3.1. *Sea X una variable aleatoria tal que $\mathbb{E}|X| < \infty$, entonces*

$$|\mathbb{E}(X)| \leq \mathbb{E}|X|$$

Lema 1.3.2. *Sea X una variable aleatoria. Si $\mathbb{E}(X^2) < \infty$, entonces*

$$\mathbb{E}|X| < \infty.$$

Corolario 1.3.1. *Sea X una variable aleatoria, si $\sigma^2 = Var(X) < \infty$, entonces*

$$\mathbb{E}|X| < \infty.$$

Las siguientes son definiciones de los distintos tipos de convergencia que ocuparemos en este trabajo.

Definición 1.3.4 (Convergencia casi segura)**.** *Sean $X_1, X_2, \ldots$ variables aleatorias. Se dice que X_n converge casi seguramente (c.s.) a la variable aleatoria X cuando $n \to \infty$ si y sólo si*

$$\mathbb{P}(\{\omega : X_n(\omega) \to X(\omega) \text{ cuando } n \to \infty\}) = 1$$

La notación empleada para referirnos a esta convergencia es

$$X_n \xrightarrow{c.s.} X \quad \text{cuando} \quad n \to \infty.$$

Definición 1.3.5 (Convergencia en probabilidad)**.** *Sean $X_1, X_2, \ldots$ variables aleatorias. Se dice que X_n converge en probabilidad a la variable aleatoria X cuando $n \to \infty$ si y sólo si para toda $\varepsilon > 0$ se cumple que*

$$\mathbb{P}(\{\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\}) \to 0 \text{ cuando } n \to \infty.$$

La notación empleada para referirnos a esta convergencia es

$$X_n \xrightarrow{P} X \quad \text{cuando} \quad n \to \infty.$$

Para definir el siguiente tipo de convergencia, es necesario introducir previamente otro concepto.

Definición 1.3.6. *Sea X una variable aleatoria y F_X su función de distribución, se denota por $C(F_X)$ al conjunto de continuidad de F_X, es decir*

$$C(F_X) = \{x : F_X(x) \text{ es continua en } x\}.$$

Definición 1.3.7 (Convergencia en distribución)**.** *Sean $X, X_1, X_2, \dots$ variables aleatorias y $F_X, F_{X_1}, F_{X_2}, \dots$ sus respectivas funciones de distribución. Se dice que X_n converge en distribución a la variable aleatoria X cuando $n \to \infty$ si y sólo si*

$$F_{X_n}(x) \to F_X(x) \text{ cuando } n \to \infty, \quad \text{para todo } x \in C(F_X).$$

La notación empleada para referirnos a esta convergencia es

$$X_n \xrightarrow{d} X \quad \text{cuando} \quad n \to \infty.$$

La relación que guardan entre sí estos tres tipos de convergencia podemos verla en el siguiente Lema

Lema 1.3.3. *Sean X y $X_1, X_2, \dots$ variables aleatorias. Cuando $n \to \infty$ se llega a las siguientes implicaciones*

i) $X_n \to X \Longrightarrow X_n \xrightarrow{c.s} X$

ii) $X_n \xrightarrow{c.s} X \Longrightarrow X_n \xrightarrow{P} X$

iii) $X_n \xrightarrow{P} X \Longrightarrow X_n \xrightarrow{d} X$

El siguiente teorema usualmente se conoce como la Ley Fuerte de los Grandes Números (LFGN), pero en este trabajo nos referiremos a este como LFGN de Kolmogorov para distinguirla del resto de las LFGN que desarrollaremos.

Teorema 1.3.4 (Ley Fuerte de los Grandes Números de Kolmogorov)**.** *Sean $X_1, X_2, \dots$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas tales que $\mathbb{E}|X_1| < \infty$ y $\mathbb{E}(X_1) = \mu$. Si $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ entonces*

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{c.s.} \mu.$$

El siguiente teorema también es muy importante en la teoría de probabilidades y piedra angular para el desarrollo de este trabajo. Se le conoce como el Teorema Central del Límite (TCL) o Teorema del Límite Central. Aquí nos referiremos a él con el primero de los nombres mencionados.

Teorema 1.3.5 (Teorema Central del Límite)**.** *Sean $X_1, X_2, \dots$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con $\mathbb{E}(X_1) = \mu < \infty$ y $0 < Var(X_1) = \sigma^2 < \infty$, y además $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. Entonces*

$$\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{d} N(0,1) \quad si \quad n \to \infty.$$

Los siguientes son resultados un poco menos conocidos que los anteriores pero pueden encontrarse, por ejemplo, en *Gut (2005)*.

Teorema 1.3.6 (Desigualdad de Kolmogorov)**.** *Sean $X_1, X_2, ..., X_n$ variables aleatorias independientes con media 0 y supongamos que $VarX_k < \infty$ para toda $k = 1, 2, ...n$, sea $S_k = \sum_{i=1}^{k} X_i$. Entonces para $x > 0$,*

$$\mathbb{P}(\max_{1 \leq k \leq n} |S_k| > x) \leq \frac{\sum_{k=1}^{n} VarX_k}{x^2}$$

En particular, si $X_1, X_2, ..., X_n$ son idénticamente distribuidas, entonces

$$\mathbb{P}(\max_{1 \leq k \leq n} |S_k| > x) \leq \frac{nVarX_1}{x^2}$$

Una consecuencia de esta desigualdad es el siguiente Corolario que a continuación demostramos.

Corolario 1.3.2. *Sean $X_1, X_2, ...X_n$ variables aleatorias idénticamente distribuidas con media 0 y varianza finita, sea $S_k = \sum_{i=1}^{k} X_i$. Si $x > 0$ y $r_1 \leqslant r_2$ son dos números naturales entonces*

$$\mathbb{P}(\max_{r_1 \leq k \leq r_2} |S_k - S_{r_1}| > x) \leq \frac{(r_2 - r_1)VarX_1}{x^2}$$

Demostración. Definamos $S'_k = S_k - S_{r_1} = \sum_{i=r_1+1}^{k} X_i$ y como las $(X_i)_{i \geq 1}$ son idénticamente distribuidas, tenemos que S'_k se distribuye igual que $\sum_{i=1}^{k-r_1} X_i = S_{k-r_1}$. Usando esto y la Desigualdad de Kolmogorov (Teorema 1.3.6) tenemos que

$$\mathbb{P}(\max_{r_1 \leq k \leq r_2} |S'_k| > x) = \mathbb{P}(\max_{1 \leq k \leq r_2 - r_1} |S_k| > x) \leq \frac{(r_2 - r_1)VarX_1}{x^2}.$$

$\square$

Los siguientes dos Lemas son conocidos como Teorema de Cramér o de Slutsky.

Lema 1.3.4. *Sea* $\{X_n\}_{n=1,2,\ldots}$ *y* $\{Y_n\}_{n=1,2,\ldots}$ *sucesiones de variables aleatorias. Supongamos que existe una variable aleatoria* X *y una constante* c *tales que*

$$X_n \xrightarrow{d} X$$
$$Y_n \xrightarrow{p} c$$

entonces

$$X_n + Y_n \xrightarrow{d} X + c.$$

Lema 1.3.5. *Sea* $\{X_n\}_{n=1,2,\ldots}$ *y* $\{Y_n\}_{n=1,2,\ldots}$ *sucesiones de variables aleatorias. Supongamos que existe una variable aleatoria* X *y un número real* c *tales que*

$$X_n \xrightarrow{d} X$$
$$Y_n \xrightarrow{p} c$$

entonces

$$X_n \cdot Y_n \xrightarrow{d} X \cdot c$$

y además si $c \neq 0$*, entonces*

$$X_n/Y_n \xrightarrow{d} X/c.$$

Capítulo 2

Teoremas límite para sumas aleatorias

2.1. Introducción

Hay dos teoremas muy importantes y ampliamente conocidos en Teoría de Probabilidad: la Ley Fuerte de los Grandes Números LFGN (Teorema 1.3.4) y el Teorema Central del Límite TCL (Teorema 1.3.5). En ese sentido, sabemos bien qué es lo que pasa con las sumas parciales de variables aleatorias i.i.d. cuando el subíndice n es un natural cualquiera; pero ¿Qué pasa cuando ese natural es uno elegido de manera aleatoria? ¿Se siguen cumpliendo estos Teoremas Límite?

La respuesta, como podrá imaginar el lector es sí; siempre y cuando la familia de subíndices aleatorios cumpla ciertas condiciones. En este capítulo demostraremos la LFGN y el TCL para sumas aleatorias.

El desarrollo de estos dos teoremas es de suma importancia pues muchas veces nos encontramos situaciones dentro de la teoría de probabilidades que involucra la suma hasta un numero aleatorio. Es de interés particular estudiar el comportamiento asintótico de dicha suma aleatoria.

Como punto de partida comenzaremos este capitulo presentando un Teorema Límite para sumas aleatorias que históricamente sirvió como fuente de inspiración para los teoremas de este capitulo; hablamos del Teorema de Anscombe, el cuál enunciaremos sin demostrarlo.

2.2. El Teorema de Anscombe

El Teorema de Anscombe fue publicado hace relativamente "poco tiempo", en el año de 1952. Su enunciación al comienzo de este trabajo es una forma de dar el crédito a la persona que enunció por primera vez este resultado, pues prácticamente todo lo que desarrollamos en esta tesis es una consecuencia de dicho enunciado.

Hay dos razones por las que omitiremos su demostración, la primera es por que no encontramos una fuente bibliográfica que la presentara (los textos sólo citan la fuente original *Anscombe (1952)*) y encontrar dicha fuente nos fue una labor imposible.

La segunda razón por la que no demostramos el Teorema de Anscombe es por que a lo largo de los teoremas de este capítulo (y de los siguientes) probaremos resultados casi análogos pero con ciertas modificaciones que son específicos para los fines de este trabajo.

Teorema 2.2.1 (Teorema de Anscombe)**.** *Supóngase que $Y_1, Y_2, Y_3, ...$ son variables aleatorias tales que*

$$Y_n \xrightarrow{d} Y \quad \textit{cuando} \;\; n \to \infty$$

y que $\{\tau(t), t \geq 0\}$ es una familia de variables aleatorias positivas con valores en los enteros, tal que, para alguna familia de reales positivos $\{b(t), t \geq 0\}$ donde $b(t) \nearrow \infty$ cuando $t \to \infty$ se cumple que

$$\frac{\tau(t)}{b(t)} \xrightarrow{p} 1 \quad \textit{cuando} \;\; t \to \infty.$$

Finalmente suponga que, para algún $\varepsilon > 0$ dado y para $\eta > 0$ existe $\delta > 0$ y n_0 tal que para toda $n > n_0$,

$$\mathbb{P}\left(\max_{\{k:|k-n|<n\delta\}} |Y_k - Y_n| > \varepsilon \right) < \eta \tag{2.1}$$

entonces

$$Y_{\tau(t)} \xrightarrow{d} Y \quad \textit{cuando} \;\; t \to \infty.$$

A la condición (2.1) se le conoce como "Condición de Anscombe".

Observemos que si tomamos una sucesión de variables aleatorias $X_1, X_2, \ldots$ i.i.d. tal que $\mathbb{E}(X_1) = \mu$ y $Var(X_n) = \sigma^2 < \infty$ y si para cada $n \in \mathbb{N}$ nombramos a la v.a.

$$Y_n = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}$$

Entonces el Teorema Central del Límite (Teorema 1.3.5) nos indica que

$$Y_n \xrightarrow{d} N(0,1)$$

por lo tanto, después de encontrar unos ε, η y δ adecuados y verificar que efectivamente se cumple la Condición de Anscombe (2.1), el Teorema de Anscombe nos diría que

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_{\tau(t)} - \tau(t)\mu}{\sqrt{\tau(t)}\sigma} \xrightarrow{d} N(01)$$

Es decir, tendríamos una versión del TCL para sumas aleatorias.

Lo que aquí demostraremos a diferencia de lo anterior, es una versión del Teorema de Anscombe, en la que se realiza una prueba directa en lugar de verificar la condición (2.1). Dicha versión fue publicada por Réyi en el año de 1957 (*véase Renyi (1957)*) y en este trabajo lo hemos llamado TCL para Sumas Aleatorias pero también podríamos referirnos a él como Teorema de Rényi (Teorema 2.4.1).

2.3. LFGN para Sumas Aleatorias

De acuerdo con Allan Gut, “La base para el modelo probabilístico es la estabilización de frecuencias relativas.” [Gut, 2005] Es decir, siempre que un experimento aleatorio se realiza, los resultados que arroja se van haciendo más y más estables. Precisamente es la LFGN (Teorema 1.3.4) la que nos dice que esto se cumple siempre que tengamos variables aleatorias $X_1, X_2, ...$ i.i.d con media finita μ y que la media aritmética converge casi seguramente a μ. Así que al hablar de la LFGN estamos hablando de una Ley que sustenta los modelos probabilísticos que cumplen las hipótesis correspondientes.

Dada la importancia de la LFGN nos será conveniente contar con una versión de esta Ley para sumas aleatorias. Antes de demostrarla, necesitamos enunciar un par de resultados para asegurar que ciertas propiedades se cumplan sobre sucesiones de variables aleatorias cuando éstas toman índices aleatorios.

Para empezar observemos que si tenemos a las variables aleatorias $Y_1, Y_2, \ldots$ y a una familia de índices aleatorios que divergen a infinito, es de esperarse que $\{Y_i, i \geq 1\}$ y $\{Y_{\tau(t)}, t > 0\}$ se comporten de manera parecida a medida que n y t crecen. Este resultado es precisamente nuestro primer lema.

Lema 2.3.1. *Sea $Y_1, Y_2, \ldots$ una sucesión de variables aleatorias y $\{\tau(t), t \geq 0\}$ una familia de variables aleatorias que toman valores en los enteros positivos. Si*

$$Y_n \xrightarrow{c.s.} Y \quad \text{cuando} \;\; n \to \infty$$

y

$$\tau(t) \xrightarrow{c.s.} +\infty \quad \text{cuando} \;\; t \to \infty,$$

entonces

$$Y_{\tau(t)} \xrightarrow{c.s.} Y \quad \text{si} \;\; t \to \infty.$$

Demostración. Sea $A \subseteq \Omega$ el evento definido de la siguiente manera

$$A = \{\omega : Y_n(\omega) \to Y\}$$

por lo que su complemento queda definido así

$$A^c = \{\omega : Y_n(\omega) \to Y\}^c = \{\omega : Y_n(\omega) \nrightarrow Y\},$$

pero la hipótesis nos dice que

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\omega : Y_n(\omega) \to Y) = 1$$

por lo que

$$\mathbb{P}(A^c) = \mathbb{P}\left(\omega : Y_n \nrightarrow Y\right) = 1 - \mathbb{P}(A) = 0.$$

Por otro lado, si de manera análoga definimos al evento $B \subseteq \Omega$ como

$$B = \{\omega : \tau(t, \omega) \to +\infty\}$$

entonces su complemento queda definido de la siguiente manera

$$B^c = \{\omega : \tau(t, \omega) \nrightarrow +\infty\}$$

y haciendo uso de la hipótesis de que $\tau(t) \xrightarrow{c.s.} +\infty$, lo anterior implica que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B^c) &= \mathbb{P}(\omega : \tau(t, \omega) \nrightarrow \infty) = 1 - \mathbb{P}(B) \\ &= 1 - \mathbb{P}(\omega : \tau(t, \omega) \to +\infty) = 0,\end{aligned}$$

por lo tanto

$$0 \leq \mathbb{P}(A^c \cup B^c) \leq \mathbb{P}(A^c) + \mathbb{P}(B^c) = 0. \tag{2.2}$$

Por último definamos al evento $C \subseteq \Omega$ de la siguiente forma

$$C = \{\omega : Y_{\tau(t,\omega)}(\omega) \to Y\}$$

por lo que

$$C^c = \{\omega : Y_{\tau(t,\omega)}(\omega) \nrightarrow Y\}.$$

Supongamos ahora que existe $\omega \in A \cap B$. Como $\omega \in A$ entonces $Y_n(\omega) \to Y$ cuando $n \to \infty$. Esto implica que para cada $\varepsilon > 0$, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > N_1$ se cumple que

$$|Y_n(\omega) - Y| < \varepsilon$$

pero también $\omega \in B$ entonces $\tau(t,\omega) \to \infty$ cuando $t \to \infty$; por lo que, para $N_1 \in \mathbb{N}$ existe $M \in \mathbb{N}$ tal que para todo $t > M$ se cumple que

$$N_1 < |\tau(t,\omega)| = \tau(t,\omega)$$

entonces, dado que $\omega \in A$ y $\omega \in B$, siempre que $t > M$ se cumplirá que

$$\left|Y_{\tau(t,\omega)}(\omega) - Y\right| < \varepsilon$$

es decir

$$Y_{\tau(t,\omega)}(\omega) \to Y$$

lo que implica que $\omega \in C$.

En otras palabras, lo que demostramos es que

$$A \cap B \subset C$$

pero recordemos que $A \cap B \subset C \Leftrightarrow C^c \subset A^c \cup B^c$. Utilizando esto y (2.2) obtenemos que

$$\mathbb{P}(C^c) \leqslant \mathbb{P}(A^c \cup B^c) = 0$$

es decir,

$$\mathbb{P}(\omega : Y_{\tau(t,\omega)}(\omega) \to Y) = \mathbb{P}(C) = 1 - \mathbb{P}(C^c) = 1.$$

Por lo tanto

$$Y_{\tau(t)} \xrightarrow{c.s.} Y \quad \textit{cuando} \quad t \to \infty$$

de esta forma queda demostrado el lema. $\square$

Es bien sabido que si tenemos dos sucesiones de variables aleatorias, digamos $\{X_n, n \geq 1\}$ y $\{Y_n, n \geq 1\}$ tales que $X_n \xrightarrow{c.s.} X$ y $Y_n \xrightarrow{c.s.} Y$ entonces se tiene que

$$X_n Y_n \xrightarrow{c.s.} XY. \tag{2.3}$$

Lo mismo ocurrirá cuando multipliquemos tiempos aleatorios ponderados $\{\frac{\tau(t)}{t}\}$ por alguna sucesión de variables aleatorias con el tiempo cambiado.

Aunque lo anterior pudiera parecer una consecuencia trivial de (2.3), lo cierto es que cambiar los tiempos de la sucesión hace que los cálculos sean más laboriosos. Aun así, como se puede ver en el siguiente lema, el resultado sigue siendo cierto.

Lema 2.3.2. *Sea $\{\tau(t), t \geq 0\}$ una familia de variables aleatorias que toman valores en los enteros positivos, tal que para alguna $\theta \in (0, \infty)$ se cumple que $\frac{\tau(t)}{t} \xrightarrow{c.s.} \theta$ cuando $t \to \infty$, y si además $\{G_n, n \in \mathbb{N}\}$ es una familia de variables aleatorias tales que $G_{\tau(t)} \xrightarrow{c.s.} \kappa$ cuando $t \to \infty$; entonces*

$$\frac{\tau(t)}{t} G_{\tau(t)} \xrightarrow{c.s.} \theta\kappa$$

Demostración. Primero demostremos para el caso en que $\kappa \neq 0$.

Supongamos pues que $\kappa \neq 0$. Como $\frac{\tau(t)}{t} \xrightarrow{c.s.} \theta$ existe un conjunto $A_1 \subset \Omega$ de probabilidad cero tal que $\frac{\tau(t,\omega)}{t} \to \theta$ si $\omega \in \Omega \setminus A_1$. Tomemos un $\omega \in \Omega \setminus A_1$ arbitrario y un $\varepsilon > 0$. Entonces existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que si $t > N_1$ se cumple que

$$\left| \frac{\tau(t,\omega)}{t} - \theta \right| < \frac{\varepsilon}{2|\kappa|} = \delta. \tag{2.4}$$

Como también $G_{\tau(t)} \xrightarrow{c.s.} \kappa$, existe un conjunto $A_2 \subset \Omega$ de probabilidad cero tal que $G_{\tau(t,\omega)} \to \kappa$ si $\omega \in \Omega \setminus A_2$; entonces para algún $\omega \in \Omega \setminus A_2$ y para $\varepsilon > 0$ existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que si $t > N_2$, se cumple que

$$\left| G_{\tau(t,\omega)} - \kappa \right| < \frac{\varepsilon}{2(\delta + \theta)}.$$

Lo cual es posible por que $\delta > 0$ y $\theta > 0$.

Sea algún $\omega \in \Omega \setminus A_1 \cup A_2$ y consideremos a nuestro $\varepsilon > 0$; entonces existen los naturales N_1 y N_2 que para ese ω en particular cumplen lo que se explicó anteriormente. Sea $N = \max\{N_1, N_2\}$ entonces, si $t > N$ se cumple que

$$\left| \frac{\tau(t,\omega)}{t} G_{\tau(t,\omega)} - \theta\kappa \right| = \left| \frac{\tau(t,\omega)}{t} G_{\tau(t,\omega)} - \frac{\tau(t,\omega)}{t}\kappa + \frac{\tau(t,\omega)}{t}\kappa - \theta\kappa \right|$$

$$\leq \frac{\tau(t,\omega)}{t}\left|G_{\tau(t,\omega)}-\kappa\right| + |\kappa|\left|\frac{\tau(t,\omega)}{t}-\theta\right| < \frac{\tau(t,\omega)}{t}\frac{\varepsilon}{2(\delta+\theta)} + |\kappa|\frac{\varepsilon}{2|\kappa|} \tag{2.5}$$

para poder continuar con las desigualdades observemos que tenemos dos casos.

Caso 1: $\frac{\tau(t,\omega)}{t} \geq \theta$.

En este caso, $0 \leq \frac{\tau(t,\omega)}{t} - \theta = \left|\frac{\tau(t,\omega)}{t} - \theta\right| < \delta$, donde la última desigualdad se da por lo obtenido en (2.4). En resumen tenemos: $\frac{\tau(t,\omega)}{t} < \delta + \theta$, entonces

$$\frac{\tau(t,\omega)}{t}\frac{\varepsilon}{2(\delta+\theta)} < (\delta+\theta)\frac{\varepsilon}{2(\delta+\theta)} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Caso 2: $\frac{\tau(t,\omega)}{t} < \theta$.

En este caso se cumple lo siguiente

$$\frac{\tau(t,\omega)}{t}\frac{\varepsilon}{2(\delta+\theta)} < \theta\frac{\varepsilon}{2(\delta+\theta)} < \theta\frac{\varepsilon}{2\theta} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ahora sí, podemos seguir con las desigualdades que habíamos dejado pendientes en (2.5). Así pues, tenemos que

$$\frac{\tau(t,\omega)}{t}\frac{\varepsilon}{2(\delta+\theta)} + |\kappa|\frac{\varepsilon}{2|\kappa|} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$$\therefore \quad \left|\frac{\tau(t,\omega)}{t}G_{\tau(t,\omega)} - \theta\kappa\right| < \varepsilon.$$

Analicemos el caso que habíamos dejado pendiente. Supongamos ahora que $\kappa = 0$. Para demostrar el Lema basta proceder de manera análoga al caso anterior pero ahora tomando $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ en (2.4) entonces llegamos a que

$$\left|\frac{\tau(t,\omega)}{t}G_{\tau(t,\omega)}\right| = \frac{\tau(t)}{t}\left|G_{\tau(t)}\right| < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Ahora bien, como la ω que escogimos fue arbitraria y esto se cumple para cada $\omega \in \Omega \setminus A_1 \cup A_2$ y $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2) \leq \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) = 0$ entonces

$$\frac{\tau(t)}{t}G_{\tau(t)} \xrightarrow{c.s.} \theta\kappa$$

que es lo que se quería demostrar. $\square$

El primer Teorema de este Capítulo es la Ley Fuerte de los Grandes Números para sumas aleatorias. La herramienta fundamental para demostrarla es, precisamente, la Ley Fuerte de los Grandes Números de Kolmogorov (Teorema 1.3.4) y los lemas anteriores nos ayudarán a hacer la tarea más sencilla.

Teorema 2.3.1 (LFGN para sumas aleatorias)**.** *Sean* $X_1, X_2, ...$ *variables aleatorias i.i.d. con* $\mathbb{E}|X_1| < \infty$ *y* $\mathbb{E}(X_1) = \mu$ *y sea* $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k, n \geq 1$ *y supongamos que* $\{\tau(t), t \geq 0\}$ *es una familia de variables aleatorias con valores en los enteros positivos, es decir* $\tau : [0, \infty) \times \Omega \to \{1, 2, \ldots\}$ *y es tal que* $\tau(t) \xrightarrow{c.s} +\infty$ *cuando* $t \to \infty$. *Entonces se cumplen*

i)

$$\frac{S_{\tau(t)}}{\tau(t)} \xrightarrow{c.s.} \mu \quad \text{cuando} \quad t \to \infty.$$

ii)

$$\frac{X_{\tau(t)}}{\tau(t)} \xrightarrow{c.s.} 0 \quad \text{cuando} \quad t \to \infty.$$

iii) Si además, $\frac{\tau(t)}{t} \xrightarrow{c.s.} \theta$ *cuando* $t \to \infty$ *para alguna* $\theta \in (0, \infty)$, *entonces*

$$\frac{S_{\tau(t)}}{t} \xrightarrow{c.s.} \mu\theta \quad \text{si} \quad t \to \infty.$$

Demostración. (i) Como $X_1, X_2, ...$ son variables aleatorias i.i.d. con $\mathbb{E}|X_1| < \infty$ y $\mathbb{E}(X_1) = \mu$ se cumplen las hipótesis de la Ley Fuerte de Kolmogorov, por lo que

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{c.s.} \mu.$$

Este resultado, junto con la hipótesis de que $\tau(t) \xrightarrow{c.s.} +\infty$ nos permite emplear el Lema 2.3.1, entonces se cumple que

$$\frac{S_{\tau(t)}}{\tau(t)} \xrightarrow{c.s.} \mu \quad \text{cuando} \quad t \to \infty$$

que es lo que se quería demostrar en (i).

(ii) Veamos que:

$$\frac{S_{\tau(t)}}{\tau(t)} = \frac{1}{\tau(t)} \sum_{i=1}^{\tau(t)} X_i = \frac{X_{\tau(t)}}{\tau(t)} + \frac{1}{\tau(t)} \sum_{i=1}^{\tau(t)-1} X_i$$
$$= \frac{X_{\tau(t)}}{\tau(t)} + \frac{\tau(t)-1}{\tau(t)} \left(\frac{1}{\tau(t)-1} \sum_{i=1}^{\tau(t)-1} X_i \right).$$

Por (i) sabemos que $\frac{1}{\tau(t)-1} \sum_{i=1}^{\tau(t)-1} X_i \stackrel{c.s.}{\to} \mu$ si $t \to \infty$ y el factor $\frac{\tau(t)-1}{\tau(t)} \xrightarrow{c.s.} 1$ si $t \to \infty$. También por (i) sabemos que $\frac{S_{\tau(t)}}{\tau(t)} \xrightarrow{c.s.} \mu$ cuando $t \to \infty$ por lo tanto

$$\frac{X_{\tau(t)}}{\tau(t)} \xrightarrow{c.s.} 0 \quad \textit{cuando} \quad t \to \infty,$$

así queda demostrado (ii).

(iii) Observemos que

$$\frac{S_{\tau(t)}}{t} = \frac{S_{\tau(t)}}{\tau(t)} \frac{\tau(t)}{t}$$

considerando la hipótesis adicional sabemos que $\frac{\tau(t)}{t} \xrightarrow{c.s.} \theta$ y por (i) sabemos que $\frac{S_{\tau(t)}}{\tau(t)} \xrightarrow{c.s.} \mu$. Recordemos que la suma finita de variables aleatorias es una variable aleatoria, entonces por Lema 2.3.2 concluimos que

$$\frac{S_{\tau(t)}}{t} = \frac{S_{\tau(t)}}{\tau(t)} \frac{\tau(t)}{t} \xrightarrow{c.s.} \mu\theta.$$

□

El último resultado de este Capítulo es una generalización del Teorema 2.3.1(ii). También existe una generalización para el Teorema 2.3.1(i) y 2.3.1(iii) que no presentaremos en este trabajo; pero puede encontrarse una demostración en *Gut (2009), pag 14*. Como dato para el lector interesado, dicha prueba es semejante a la que ya hicimos en 2.3.1(i) pero en lugar de usar la LFGN de Kolmogorov se utiliza la LFGN de Marcinkiewicz-Zygmund, véase *Gut (2005)*.

Para facilitarnos trabajo al demostrar el Teorema 2.3.2, vamos a apoyarnos en dos resultados previos. El primero es una consecuencia del Lema de Borel-Cantelli (Lema 1.3.2) y el segundo es una desigualdad con respecto a la esperanza de una variable aleatoria.

Lema 2.3.3. *Sean $X_1, X_2, \ldots$ una sucesión de variables aleatorias tales que para todo $\varepsilon > 0$ se cumple que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|X_n| > \varepsilon) < \infty, \tag{2.6}$$

entonces

$$X_n \xrightarrow{c.s.} 0.$$

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$ arbitraria. Debido a que tenemos una sucesión $X_1, X_2, \ldots$ de variables aleatorias que cumplen (2.6) para toda $\varepsilon > 0$ podemos emplear el Lema de Borel-Cantelli (1.3.2.i) para obtener que

$$\mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty}\{|X_n| > \frac{\varepsilon}{2}\}) = 0.$$

De la anterior ecuación se sigue que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty}\{|X_n| > \frac{\varepsilon}{2}\}) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=n}^{\infty}\{|X_n| > \frac{\varepsilon}{2}\}\right) \\
&= 1 - \mathbb{P}\left(\left[\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=n}^{\infty}\{|X_n| > \frac{\varepsilon}{2}\}\right]^c\right) \\
&= 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m=n}^{\infty}\{|X_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}\}\right) \\
&= 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{\forall m \geq n\{|X_m| \leq \frac{\varepsilon}{2}\}\right\}\right) \\
&= 1 - \mathbb{P}\left(\exists n \in \mathbb{N}\left\{\forall m \geq n\{|X_m| \leq \frac{\varepsilon}{2}\}\right\}\right) = 0
\end{aligned}$$

despejando en la última igualdad tenemos que

$$\mathbb{P}\left(\exists n \in \mathbb{N}\left\{\forall m \geq n\{|X_m| \leq \frac{\varepsilon}{2}\}\right\}\right) = 1. \tag{2.7}$$

Para poder concluir debemos observar que

$$\left\{\exists n \in \mathbb{N}\left\{\forall m \geq n\{|X_m| \leq \frac{\varepsilon}{2}\}\right\}\right\} \subset \{\exists n \in \mathbb{N}\{\forall m \geq n\{|X_m| < \varepsilon\}\}\}$$

por lo tanto, utilizando (2.7) obtenemos

$$
\begin{aligned}
1 &= \mathbb{P}\left(\exists n \in \mathbb{N}\left\{\forall m \geq n\{|X_m| \leq \frac{\varepsilon}{2}\}\right\}\right) \\
&\leq \mathbb{P}\left(\exists n \in \mathbb{N}\left\{\forall m \geq n\{|X_m| < \varepsilon\}\right\}\right) \leq 1.
\end{aligned}
$$

es decir,

$$\mathbb{P}(\omega : X_n \to 0) = 1$$

lo que es equivalente a lo que se quería demostrar.

$\square$

Lema 2.3.4. *Sea Y una variable aleatoria tal que $\mathbb{E}(Y) < \infty$, si además $Y \geq 0$ entonces*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(Y \geq n) \leq \mathbb{E}(Y).$$

Demostración. Desarrollando tenemos que

$$\mathbb{E}(Y) = \int_0^{\infty} y \; dP_Y(dy) = \int_0^{\infty} \left(\int_0^y du\right) \; dP_Y(dy)$$

utilizando Fubini

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^{\infty} \left(\int_u^{\infty} dP_Y(dy)\right) \; du = \int_0^{\infty} \mathbb{P}(Y \geq u) \; du \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{k-1}^{k} \mathbb{P}(Y \geq u) \; du
\end{aligned}
$$

la función $\overline{F}(u) = \mathbb{P}(Y \geq u)$ es no creciente, por lo que tomando la suma inferior del intervalo $[k-1, k]$ obtenemos

$$\int_{k-1}^{k} \overline{F}(u) \; du \geq (k - (k-1))\overline{F}(k)$$

es decir

$$\int_{k-1}^{k} \mathbb{P}(Y \geq u) \; du \geq \mathbb{P}(Y \geq k),$$

por lo tanto

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{k-1}^{k} \mathbb{P}(Y \geq u) \; du \geq \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(Y \geq k).$$

Así hemos demostrado que

$$\mathbb{E}(Y) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(Y \geq k).$$

$\square$

Aunque ahora no sea evidente la importancia del siguiente teorema, va a ser esencial en la demostración del TCL para caminatas aleatorias bidimensionales (Teorema 4.4.1).

Teorema 2.3.2. *Sean $X_1, X_2, \ldots$ variables aleatorias i.i.d. con media finita μ y $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k, n \geq 1$ y supongamos que $\{\tau(t), t \geq 0\}$ es una familia de variables aleatorias que toman valores en los enteros positivos, tal que $\tau(t) \xrightarrow{c.s} +\infty$ cuando $t \to \infty$.*

Si además $\mathbb{E}|X_1|^r < \infty$, $r > 0$ entonces

i)

$$\frac{X_{\tau(t)}}{\tau(t)^{1/r}} \xrightarrow{c.s.} 0 \quad \text{cuando} \quad t \to \infty$$

ii) y si también se cumple que $\frac{\tau(t)}{t} \xrightarrow{c.s.} \theta$ cuando $t \to \infty$ para alguna $\theta \in (0, \infty)$, entonces

$$\frac{X_{\tau(t)}}{t^{1/r}} \xrightarrow{c.s.} 0 \quad si \quad t \to \infty.$$

Demostración. (i) Debido a nuestra hipótesis de $\mathbb{E}|X_1|^r < \infty$, $r > 0$ si para cualquier $\varepsilon > 0$ definimos a la variable aleatoria

$$Y = \frac{|X_1|^r}{\varepsilon^r}$$

tenemos que Y es no negativa y debido a la hipótesis de que $\mathbb{E}|X_1|^r < \infty$, además se cumple

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}\left(\frac{|X_1|^r}{\varepsilon^r}\right) = \frac{1}{\varepsilon^r}\mathbb{E}|X_1|^r < \infty.$$

Por lo tanto, empleando el Lema 2.3.4 obtenemos

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(Y \geq k) \leq \mathbb{E}(Y) < \infty$$

pero para cualquier $n \in \mathbb{N}$

$$\{Y \geq n\} = \left\{ \frac{|X_1|^r}{\varepsilon^r} \geq n \right\} = \left\{ \frac{|X_1|}{\varepsilon} \geq n^{1/r} \right\}$$

así que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(\frac{|X_1|}{\varepsilon} \geq k^{1/r} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(Y \geq k) < \infty.$$

Como esto se cumple para cualquier $\varepsilon > 0$, tenemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(|X_1| > \varepsilon n^{1/r}\right) < \infty \quad \textit{para todo } \varepsilon > 0.$$

Debido a que las variables aleatorias $X_1, X_2, X_3, \ldots$ son idénticamente distribuidas, lo anterior es equivalente a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(|X_n| > \varepsilon n^{1/r}\right) < \infty \quad \textit{para todo } \varepsilon > 0$$

usando el Lema 2.3.3 llegamos a que

$$\frac{X_n}{n^{1/r}} \xrightarrow{c.s.} 0.$$

Puesto que por hipótesis $\tau(t) \xrightarrow{c.s} +\infty$ podemos emplear el Lema 2.3.1 y así obtenemos que

$$\frac{X_{\tau(t)}}{\tau(t)^{1/r}} \xrightarrow{c.s.} 0 \quad \textit{si} \quad t \to \infty.$$

(ii) Si $\frac{\tau(t)}{t} \xrightarrow{c.s.} \theta$ para $\theta \in (0, \infty)$, entonces

$$\frac{\tau(t)^{1/r}}{t^{1/r}} \xrightarrow{c.s.} \theta^{1/r}$$

a partir de ésto y con ayuda de (i) y del Lema 2.3.2 concluimos que

$$\frac{X_{\tau(t)}}{t^{1/r}} = \frac{X_{\tau(t)}}{\tau(t)^{1/r}} \frac{\tau(t)^{1/r}}{t^{1/r}} \xrightarrow{c.s.} 0 \cdot \theta^{1/r} = 0.$$

$\square$

2.4. TCL para Sumas Aleatorias

En esta sección demostraremos el TCL para sumas aleatorias. El trabajo para demostrar el Teorema de Rényi o el TCL para sumas aleatorias es mucho más extenso que el Teorema anterior, por lo tanto, vamos a apoyarnos de varios lemas antes de enunciarlo. Empecemos con una definición:

Definición 2.4.1. *Sea $\lceil r \rceil : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida como: El menor entero mayor o igual que r.*

Observemos que de acuerdo con esta definición, para cualquier número real r se cumple que $r \leq \lceil r \rceil < r + 1$. El siguiente lema, tal como dicta la intuición, demuestra que t y $\lceil t \rceil$ crecen igual de rápido cuando $t \to \infty$.

Lema 2.4.1. *Sea $k > 0$ una constante y $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ una función dada por $f(t) = \frac{kt}{\lceil kt \rceil}$ entonces*

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = 1.$$

Demostración. Como ya habíamos visto, para cualquier $r \in \mathbb{R}$ se tiene

$$r \leq \lceil r \rceil < r + 1.$$

Si $r = kt$ para algunos $k > 0$ y $t > 0$ y sacando recíprocos de las desigualdades anteriores llegamos a

$$\frac{1}{kt+1} < \frac{1}{\lceil kt \rceil} \leqslant \frac{1}{kt}.$$

Ahora multiplicando todo por la constante positiva kt obtenemos

$$\frac{kt}{kt+1} < \frac{kt}{\lceil kt \rceil} \leqslant \frac{kt}{kt}$$

sacando el límite de cada cociente cuando $t \to \infty$ tenemos que

$$1 \leqslant \lim_{t \to \infty} \frac{kt}{\lceil kt \rceil} \leqslant 1$$

por lo tanto $\lim_{t \to \infty} \frac{kt}{\lceil kt \rceil} = 1$. □

El siguiente lema formaliza el despeje de un factor cuando una familia de índices ponderada converge en probabilidad a un real positivo. Su demostración es una mera reescritura de la definición de convergencia en probabilidad.

Lema 2.4.2. *Si $t, \theta > 0$ y $\{\tau(t), t \geq 0\}$ una familia de variables aleatorias que toman valores en los enteros positivos, tal que $\frac{\tau(t)}{t} \xrightarrow{P} \theta$ cuando $t \to \infty$, entonces*

$$\frac{\tau(t)}{t\theta} \xrightarrow{P} 1.$$

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$, entonces

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{\tau(t)}{t\theta} - 1\right| > \varepsilon\right) = \lim_{t\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{\tau(t)}{t} - \theta\right| > \varepsilon\theta\right), \tag{2.8}$$

pero $\frac{\tau(t)}{t} \xrightarrow{P} \theta$ y como $\varepsilon\theta > 0$ entonces

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{\tau(t)}{t} - \theta\right| > \varepsilon\theta\right) = 0$$

$$\therefore \quad \frac{\tau(t)}{t\theta} \xrightarrow{P} 1.$$

□

Recordemos que para demostrar la LFGN para sumas aleatorias usamos el Lema 2.3.2 que nos ayudo a multiplicar convergencias casi seguras de tiempos aleatorios ponderados con variables aleatorias con tiempo cambado aleatoriamente. El siguiente lema guarda semejanza con el anterior, pero ahora nuestra familia de índices ponderada converge en probabilidad a un real positivo y se multiplica por una función real positiva acotada en el intervalo $(0, 1]$. Demostraremos que el producto de las convergencias es la convergencia en probabilidad del producto.

Lema 2.4.3. *Sea $\{\tau(t), t \geq 0\}$ una familia de variables aleatorias que toman valores en los enteros positivos, tal que para alguna $\theta \in (0, \infty)$ se cumple que $\frac{\tau(t)}{t} \xrightarrow{p} \theta$ cuando $t \to \infty$, y si además $f : (0, \infty) \to (0, 1]$ es una función tal que para algún $\kappa \in (0, 1]$ se cumple que $f(t) \to \kappa$ cuando $t \to \infty$; entonces*

$$\frac{\tau(t)}{t} f(t) \xrightarrow{p} \theta\kappa \quad \text{si } t \to \infty.$$

Demostración. Para demostrarlo tomamos cualquier $\varepsilon > 0$ luego consideramos el siguiente conjunto con sus respectivas igualdades y contenciones

$$\begin{aligned}
&\left\{\omega : \left|\frac{\tau(t)}{t}(\omega)f(t) - \theta\kappa\right| > \varepsilon\right\} \\
&= \left\{\omega : \left|\frac{\tau(t)}{t}(\omega)f(t) - f(t)\theta + f(t)\theta - \theta\kappa\right| > \varepsilon\right\} \\
&= \left\{\omega : \left|f(t)(\frac{\tau(t)}{t}(\omega) - \theta) + \theta(f(t) - \kappa)\right| > \varepsilon\right\} \\
&\subseteq \left\{\omega : f(t)\left|\frac{\tau(t)}{t}(\omega) - \theta\right| + \theta\left|(f(t) - \kappa)\right| > \varepsilon\right\} \\
&\subseteq \underbrace{\left\{\omega : f(t)\left|\frac{\tau(t)}{t}(\omega) - \theta\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right\}}_{A} \cup \underbrace{\left\{\omega : \theta\left|(f(t) - \kappa)\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right\}}_{B}
\end{aligned}$$

donde la última contención de debe al hecho de que para cuales quiera números reales x y y, si $x + y > \varepsilon \Rightarrow x > \frac{\varepsilon}{2}$ o $y > \frac{\varepsilon}{2}$.

Si $\omega \in A$ entonces $|\frac{\tau(t)}{t}(\omega) - \theta| > \frac{\varepsilon}{2f(t)} \geq \frac{\varepsilon}{2}$ pues $f(t) \in (0, 1]$. Por lo tanto

$$\omega \in A \subseteq \left\{\omega : \left|\frac{\tau(t)}{t}(\omega) - \theta\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right\}$$

y como $\frac{\tau(t)}{t} \xrightarrow{P} \theta$, entonces

$$\mathbb{P}(\left\{\omega : \left|\frac{\tau(t)}{t}(\omega) - \theta\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right\}) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Si $\omega \in B$ entonces $\omega \in \{\omega : |f(t) - \kappa| > \frac{\varepsilon}{2\theta}\}$ y como $f(t) \to \kappa$, entonces

$$\mathbb{P}(\left\{\omega : |f(t) - \kappa| > \frac{\varepsilon}{2\theta}\right\}) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(\left\{\omega : \left|\frac{\tau(t)}{t}(\omega)f(t) - \theta\kappa\right| > \varepsilon\right\}\right) \\
&\quad \leqslant \mathbb{P}\left(\left\{\omega : \left|\frac{\tau(t)}{t}(\omega) - \theta\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right) + \mathbb{P}\left(\left\{\omega : |f(t) - \kappa| > \frac{\varepsilon}{2\theta}\right\})\right) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

Debido a que el $\varepsilon > 0$ fue arbitrario, lo anterior se traduce a

$$\frac{\tau(t)}{t} f(t) \xrightarrow{p} \theta\kappa.$$

$\square$

A este punto, hemos demostrado tres lemas que básicamente los probamos para demostrar con más facilidad el siguiente lema.

Lema 2.4.4. *Sean $t, \theta > 0$ y $\{\tau(t), t \geq 0\}$ una familia de variables aleatorias que toman valores en los enteros positivos, tal que $\frac{\tau(t)}{t} \xrightarrow{P} \theta$ cuando $t \to \infty$, entonces*

$$\frac{\tau(t)}{\lceil t\theta \rceil} \xrightarrow{p} 1.$$

Demostración. Obsérvese que

$$\frac{\tau(t)}{\lceil t\theta \rceil} = \frac{\tau(t)}{\theta t} \frac{\theta t}{\lceil t\theta \rceil}$$

ahora bien, sabemos por hipótesis que $\frac{\tau(t)}{t} \xrightarrow{P} \theta$, y por el Lema 2.4.2 se tiene que

$$\frac{\tau(t)}{t\theta} \xrightarrow{P} 1,$$

por otro lado, el Lema 2.4.1 nos dice que

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\theta t}{\lceil t\theta \rceil} = 1$$

entonces por Lema 2.4.3 concluimos que

$$\frac{\tau(t)}{\lceil t\theta \rceil} \xrightarrow{p} 1.$$

$\square$

Así hemos probado el primer resultado "importante" para la demostración de el TCL para sumas aleatorias. Antes de seguir, necesitamos introducir algunas definiciones.

Definición 2.4.2. *Sean $\theta, t > 0$. Definimos n_0 como el menor entero mayor igual que θt, es decir, de acuerdo con la Definición 2.4.1*

$$n_0 = \lceil t\theta \rceil.$$

Definición 2.4.3. *Sean $\theta, t > 0$ y n_0 como en la Definición 2.4.2. Para cualquier $\varepsilon > 0$ definimos*

$$n_1^\varepsilon = \left\lceil n_0(1 - \frac{\varepsilon^3}{\theta}) \right\rceil + 1.$$

Definición 2.4.4. *Sean n_0 como en la Definición 2.4.2 y $\varepsilon > 0$. Definimos*

$$n_2^\varepsilon = \left\lceil n_0(1 + \frac{\varepsilon^3}{\theta}) \right\rceil.$$

En los siguientes cinco lemas, nos centraremos a probar resultados referentes a las definiciones anteriores, que son, la herramienta fundamental para la demostración del TCL para sumas aleatorias.

Empezamos por ver el orden de cada uno de los n_0, n_1 y n_2 con respecto a los otros.

Lema 2.4.5. *Sean $\varepsilon > 0$, $\theta > 0$ y n_0, n_1^ε y n_2^ε como en las definiciones precedentes. Si $t > \frac{1}{\varepsilon^3}$ entonces*

$$n_1^\varepsilon \leqslant n_o < n_2^\varepsilon.$$

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$ como en la hipótesis. Para relajar la notación omitiremos de n_1^ε y n_2^ε el superíndice.

Observemos que por hipótesis se tiene que $\theta > 0$, entonces $0 < \frac{\varepsilon^3}{\theta}$. Sumando una unidad de ambos lados de la desigualdad anterior obtenemos $1 < 1 + \frac{\varepsilon^3}{\theta}$. De aquí se concluye que

$$n_0 = \lceil t\theta \rceil < \lceil t\theta \rceil (1 + \frac{\varepsilon^3}{\theta}) \leq \left\lceil \lceil t\theta \rceil (1 + \frac{\varepsilon^3}{\theta}) \right\rceil = n_2.$$

En conclusión

$$n_0 < n_2. \tag{2.9}$$

Para demostrar que $n_1 \leq n_0$, primero que nada hay que observar que las hipótesis de $\theta > 0$ y $t > \frac{1}{\varepsilon^3} > 0$ implican que $t\theta > 0$, por lo que

$$n_0 = \lceil t\theta \rceil \geqslant 1.$$

Ahora hay que analizar dos casos.

Caso 1. Supongamos $\frac{\varepsilon^3}{\theta} \in (0,1)$, entonces

$$1 - \frac{\varepsilon^3}{\theta} > 0$$

por lo que

$$\lceil t\theta \rceil (1 - \frac{\varepsilon^3}{\theta}) > 0. \tag{2.10}$$

Además, como $t > \frac{1}{\varepsilon^3}$ entonces

$$t\varepsilon^3 > 1 \Rightarrow t\theta \cdot \frac{\varepsilon^3}{\theta} > 1 \Rightarrow \lceil t\theta \rceil \frac{\varepsilon^3}{\theta} > 1 \Rightarrow -\lceil t\theta \rceil \frac{\varepsilon^3}{\theta} < -1,$$

sumando de ambos lados $\lceil t\theta \rceil$ obtenemos

$$\lceil t\theta \rceil - \lceil t\theta \rceil \frac{\varepsilon^3}{\theta} < \lceil t\theta \rceil - 1. \tag{2.11}$$

Conjuntando los resultados 2.10 y 2.11 conseguimos la siguiente expresión

$$0 < \lceil t\theta \rceil (1 - \frac{\varepsilon^3}{\theta}) = \lceil t\theta \rceil - \frac{\varepsilon^3}{\theta} \lceil t\theta \rceil \leq \lceil t\theta \rceil - 1$$

con lo que

$$\left\lceil \lceil t\theta \rceil (1 - \frac{\varepsilon^3}{\theta}) \right\rceil \leq \lceil \lceil t\theta \rceil - 1 \rceil = \lceil t\theta \rceil - 1.$$

Por lo tanto

$$n_1 = \left\lceil \lceil t\theta \rceil (1 - \frac{\varepsilon^3}{\theta}) \right\rceil + 1 \leq \lceil t\theta \rceil = n_0.$$

Caso 2. Ahora supongamos que $\frac{\varepsilon^3}{\theta} \geq 1$, entonces tenemos que

$$1 - \frac{\varepsilon^3}{\theta} \leq 0$$

lo que implica que

$$\lceil t\theta \rceil (1 - \frac{\varepsilon^3}{\theta}) \leq 0 \Rightarrow \left\lceil \lceil t\theta \rceil (1 - \frac{\varepsilon^3}{\theta}) \right\rceil \leq 0,$$

por lo que

$$n_1 = \left\lceil \lceil t\theta \rceil (1 - \frac{\varepsilon^3}{\theta}) \right\rceil + 1 \leq 1 \leq \lceil t\theta \rceil = n_0$$

donde la última desigualdad se sigue del hecho que $\lceil t\theta \rceil \geqslant 1$. En resumen, obtenemos que

$$n_1 \leq n_0. \tag{2.12}$$

De las ecuaciones (2.9) y (2.12) se concluye la demostración del lema.

$$n_1 \leq n_0 < n_2.$$

□

Tal como lo hicimos en la demostración anterior, para relajar la notación a partir de este punto utilizaremos n_1 y n_2 para referirnos a n_1^ε y n_2^ε respectivamente.

El lema siguiente hace evidente la fuerte dependencia que guardan los números n_0, n_1 y n_2 a los reales positivos ε, θ y t; por lo que no debería sorprendernos la belleza del resultado siguiente.

Lema 2.4.6. *Sean $\varepsilon > 0$, $\theta > 0$ y $t > \frac{1}{\varepsilon^3}$. Sean n_0, n_1 y n_2 como en las definiciones precedentes, entonces*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{n_2 - n_1}{\varepsilon^2 n_0} = \frac{2\varepsilon}{\theta}.$$

Demostración. De acuerdo con las definiciones 2.4.2, 2.4.3 y 2.4.4 tenemos la siguiente igualdad

$$\frac{n_2 - n_1}{\varepsilon^2 n_0} = \frac{\left\lceil \lceil t\theta \rceil (1 + \frac{\varepsilon^3}{\theta}) \right\rceil - \left\lceil \lceil t\theta \rceil (1 - \frac{\varepsilon^3}{\theta}) \right\rceil}{\varepsilon^2 \lceil t\theta \rceil} - \frac{1}{\varepsilon^2 \lceil t\theta \rceil}.$$

Veamos cómo se comporta el primer sumando cuando $t \to \infty$. Tenemos que

$$\frac{\lceil t\theta \rceil (1 + \frac{\varepsilon^3}{\theta})}{\varepsilon^2 \lceil t\theta \rceil} \leq \frac{\left\lceil \lceil t\theta \rceil (1 + \frac{\varepsilon^3}{\theta}) \right\rceil}{\varepsilon^2 \lceil t\theta \rceil} \leq \frac{\lceil t\theta \rceil (1 + \frac{\varepsilon^3}{\theta}) + 1}{\varepsilon^2 \lceil t\theta \rceil}$$

se sigue que

$$\frac{(1 + \frac{\varepsilon^3}{\theta})}{\varepsilon^2} \leq \frac{\left\lceil \lceil t\theta \rceil (1 + \frac{\varepsilon^3}{\theta}) \right\rceil}{\varepsilon^2 \lceil t\theta \rceil} \leq \frac{(1 + \frac{\varepsilon^3}{\theta})}{\varepsilon^2} + \frac{1}{\varepsilon^2 \lceil t\theta \rceil},$$

haciendo tender t a infinito

$$\frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{\varepsilon}{\theta} \leq \lim_{t\to\infty} \frac{\left\lceil \lceil t\theta \rceil (1 + \frac{\varepsilon^3}{\theta}) \right\rceil}{\varepsilon^2 \lceil t\theta \rceil} \leq \frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{\varepsilon}{\theta}$$

$$\therefore \quad \lim_{t\to\infty} \frac{\left\lceil \lceil t\theta \rceil (1+\frac{\varepsilon^3}{\theta}) \right\rceil}{\varepsilon^2 \lceil t\theta \rceil} = \frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{\varepsilon}{\theta}.$$

Análogamente

$$\frac{\lceil t\theta \rceil (1-\frac{\varepsilon^3}{\theta})}{\varepsilon^2 \lceil t\theta \rceil} \leq \frac{\left\lceil \lceil t\theta \rceil (1-\frac{\varepsilon^3}{\theta}) \right\rceil}{\varepsilon^2 \lceil t\theta \rceil} \leq \frac{\lceil t\theta \rceil (1-\frac{\varepsilon^3}{\theta})+1}{\varepsilon^2 \lceil t\theta \rceil}$$

y cuando t tiende a infinito

$$\frac{1}{\varepsilon^2} - \frac{\varepsilon}{\theta} \leq \lim_{t\to\infty} \frac{\left\lceil \lceil t\theta \rceil (1-\frac{\varepsilon^3}{\theta}) \right\rceil}{\varepsilon^2 \lceil t\theta \rceil} \leq \frac{1}{\varepsilon^2} - \frac{\varepsilon}{\theta}$$

$$\therefore \quad \lim_{t\to\infty} \frac{\left\lceil \lceil t\theta \rceil (1-\frac{\varepsilon^3}{\theta}) \right\rceil}{\varepsilon^2 \lceil t\theta \rceil} = \frac{1}{\varepsilon^2} - \frac{\varepsilon}{\theta}$$

por lo tanto

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\lceil n_0(1+\frac{\varepsilon^3}{\theta}) \rceil - \lceil n_0(1-\frac{\varepsilon^3}{\theta}) \rceil}{\varepsilon^2 n_0} = \frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{\varepsilon}{\theta} - \frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{\varepsilon}{\theta} = \frac{2\varepsilon}{\theta}.$$

Y como

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{\varepsilon^2 \lceil t\theta \rceil} = 0$$

Entonces

$$\lim_{t\to\infty} \frac{n_2 - n_1}{\varepsilon^2 n_0} = \frac{2\varepsilon}{\theta} + 0.$$

□

El siguiente lema nos provee de cotas para n_1. Como n_1 depende de ε, θ y t, las cotas también dependerán de estos reales. De hecho, para evitar que n_1 sea menor o igual a cero, nos limitaremos a el caso en que $0 < \varepsilon < \theta^{\frac{1}{3}}$.

Lema 2.4.7. *Sean $\theta > 0$, $0 < \varepsilon < \theta^{\frac{1}{3}}$ y $t > \frac{1}{\varepsilon^3}$. Sean n_0, n_1 y n_2 como en las definiciones precedentes, entonces*

$$0 < n_1 - t\theta(1 - \frac{\varepsilon^3}{\theta}) < 3.$$

Demostración. De acuerdo con las hipótesis supongamos $0 < \varepsilon < \theta^{\frac{1}{3}}$, entonces se tiene que

$$\varepsilon^3 < \theta \;\Rightarrow\; \frac{\varepsilon^3}{\theta} < 1 \;\Rightarrow\; 0 < 1 - \frac{\varepsilon^3}{\theta}.$$

A partir de ésto, se llega a las siguientes conclusiones:

I. $t\theta \leq \lceil t\theta \rceil \Rightarrow t\theta(1-\frac{\varepsilon^3}{\theta}) \leq \lceil t\theta \rceil (1-\frac{\varepsilon^3}{\theta}) \leq \left\lceil \lceil t\theta \rceil (1-\frac{\varepsilon^3}{\theta}) \right\rceil = n_1 - 1 < n_1$, por lo tanto

$$t\theta(1-\frac{\varepsilon^3}{\theta}) < n_1 \quad\Rightarrow\quad 0 < n_1 - t\theta(1-\frac{\varepsilon^3}{\theta}).$$

Así demostramos la primer desigualdad del Lema.

II. Para demostrar la segunda, haremos uso de los siguientes incisos

II.i. $\lceil t\theta \rceil (1-\frac{\varepsilon^3}{\theta}) - \theta t(1-\frac{\varepsilon^3}{\theta}) = (1-\frac{\varepsilon^3}{\theta})(\lceil t\theta \rceil - \theta t) \leq (1-\frac{\varepsilon^3}{\theta}) < 1.$

II.ii. $\left\lceil \lceil t\theta \rceil (1-\frac{\varepsilon^3}{\theta}) \right\rceil - \theta t(1-\frac{\varepsilon^3}{\theta}) < 1 + 1 = 2.$

II.iii. $\left\lceil \lceil t\theta \rceil (1-\frac{\varepsilon^3}{\theta}) \right\rceil + 1 - \theta t(1-\frac{\varepsilon^3}{\theta}) < 2 + 1 = 3.$

Conjuntando las desigualdades obtenidas en I y en II.iii. tenemos

$$0 < n_1 - t\theta(1-\frac{\varepsilon^3}{\theta}) < 3$$

con lo que queda demostrado el Lema. □

En el lema anterior, pedir la restricción de que $0 < \varepsilon < \theta^{\frac{1}{3}}$ es suficiente para nosotros pues nos interesan los casos en que ε es pequeño. De hecho, un tratamiento similar al que se desarrolló en el Lema nos lleva a la conclusión de que si $\varepsilon \geq \theta^{\frac{1}{3}}$ entonces $(1-\frac{\varepsilon^3}{\theta})+2 < n_1 - t\theta(1-\frac{\varepsilon^3}{\theta}) < 1$, donde evidentemente $1-\frac{\varepsilon^3}{\theta}$ es un número negativo tan grande como nuestra ε grande lo permita. Pero ese caso es innecesario para nuestros fines.

Con ayuda del Lema 2.4.7, en el lema siguiente encontramos una cota más elegante para n_1.

Lema 2.4.8. *Sean $\theta > 0$, $0 < \varepsilon < \theta^{\frac{1}{3}}$ y $t > \frac{6}{\varepsilon^3}$. Sean n_0 y n_1 como en las definiciones precedentes y $\alpha = \frac{\varepsilon^3}{2}$, entonces*

$$n_1 < t(\theta - \alpha).$$

Demostración. Tomemos como punto de partida nuestra hipótesis sobre t.

$$\frac{6}{\varepsilon^3} < t$$

lo que es equivalente a

$$\frac{3 \cdot 2}{\varepsilon^3} = \frac{3}{\frac{\varepsilon^3}{2}} = \frac{3}{\varepsilon^3 - \frac{\varepsilon^3}{2}} = \frac{3}{\varepsilon^3 - \alpha} < t,$$

como $0 < \varepsilon^3/2 = \varepsilon^3 - \alpha$, entonces

$$3 < t(\varepsilon^3 - \alpha).$$

Sumando $t\theta$ de ambos lados, y haciendo un poco de cálculos

$$\begin{aligned} t\theta + 3 &< t\theta + t(\varepsilon^3 - \alpha) \\ t\theta - t\varepsilon^3 + 3 &< t\theta - \alpha t \\ t\theta(1 - \frac{\varepsilon^3}{\theta}) + 3 &< t(\theta - \alpha). \end{aligned}$$

Como por hipótesis $t > \frac{6}{\varepsilon^3}$ entonces $t > \frac{1}{\varepsilon^3}$. Así tenemos las hipótesis del Lema 2.4.7, por lo tanto $0 < n_1 - t\theta(1 - \frac{\varepsilon^3}{\theta}) < 3$. Sumando esta desigualdad a nuestro resultado anterior:

$$n_1 - t\theta(1 - \frac{\varepsilon^3}{\theta}) + t\theta(1 - \frac{\varepsilon^3}{\theta}) + 3 < 3 + t(\theta - \alpha)$$

$$\therefore \quad n_1 < t(\theta - \alpha)$$

que es lo que se quería demostrar.

□

El siguiente lema es importante por que relaciona nuestra familia aleatoria de indices con las n_1 y n_2 que hemos venido trabajando. De hecho lo que dice es que si t es muy grande, con probabilidad cercana a 1, nuestra $\tau(t)$ caerá dentro del intervalo (n_1, n_2).

Lema 2.4.9. *Supongamos que $\{\tau(t), t \geq 0\}$ es una familia de variables aleatorias que toman valores en los enteros positivos, tal que para algún $\theta > 0$ se tiene que*

$$\frac{\tau(t)}{t} \xrightarrow{P} \theta \quad si \quad t \to \infty.$$

Además sean algún ε tal que $0 < \varepsilon < \theta^{\frac{1}{3}}$, $t > \frac{6}{\varepsilon^3}$ y n_0, n_1 y n_2 como en las definiciones precedentes, entonces

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}(\tau(t) \notin [n_1, n_2]) = 0.$$

Demostración. Demostrar que $\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}(\tau(t) \notin [n_1, n_2]) = 0$ es equivalente a demostrar

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}(\tau(t) < n_1) + \lim_{t\to\infty} \mathbb{P}(\tau(t) > n_2) = 0$$

es decir

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}\left(\tau(t) < \left\lceil \lceil t\theta \rceil (1 - \frac{\varepsilon^3}{\theta}) \right\rceil + 1\right) + \lim_{t\to\infty} \mathbb{P}\left(\tau(t) > \left\lceil \lceil t\theta \rceil (1 + \frac{\varepsilon^3}{\theta}) \right\rceil\right) = 0.$$

Como la función de probabilidad es no negativa, lo único que tenemos que demostrar es que cada límite es igual a cero cuando $t \to \infty$.

Para esto primero observemos que por hipótesis $\frac{\tau(t)}{t} \xrightarrow{P} \theta$, entonces para todo $\alpha > 0$ se cumple que

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{\tau(t)}{t} - \theta\right| > \alpha\right) = \lim_{t\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{\tau(t) - t\theta}{t} > \alpha\right) + \lim_{t\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{\tau(t) - t\theta}{t} < -\alpha\right) = 0.$$

Y como la función de probabilidad es no negativa, entonces

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{\tau(t) - t\theta}{t} > \alpha\right) = 0 \tag{2.13}$$

y también

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{\tau(t) - t\theta}{t} < -\alpha\right) = 0. \tag{2.14}$$

Así las cosas, procedemos a demostrar lo siguiente:

Afirmación 1: $\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}(\tau(t) < n_1) = 0$.

Sea $\alpha = \frac{\varepsilon^3}{2}$. Observemos que se cumplen las hipótesis del Lema 2.4.8, entonces tenemos que

$$n_1 < t(\theta - \alpha)$$

por lo que se cumple

$$\{\tau(t) < n_1\} \subseteq \{\tau(t) < t(\theta - \alpha)\}$$

entonces

$$\limsup_{t\to\infty} \mathbb{P}(\tau(t) < n_1) \leq \limsup_{t\to\infty} \mathbb{P}\left(\tau(t) < t(\theta - \alpha)\right)$$

$$= \limsup_{t\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{\tau(t)}{t} - \theta < -\alpha\right) = \limsup_{t\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{\tau(t) - t\theta}{t} < -\alpha\right).$$

Debido al resultado obtenido en (2.14) sabemos que el límite existe y es igual a cero, entonces

$$\limsup_{t\to\infty} \mathbb{P}(\tau(t) < n_1) \leq 0$$

y como la función de probabilidad es no negativa concluimos que

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}(\tau(t) < n_1) = 0.$$

Afirmación 2: $\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}(\tau(t) > n_2) = 0.$

Nuevamente tomamos $\alpha = \frac{\varepsilon^3}{2}$, entonces

$$\mathbb{P}\left(\frac{\tau(t) - t}{t} > \alpha\right) = \mathbb{P}\left(\frac{\tau(t) - t}{t} > \frac{\varepsilon^3}{2}\right) = \mathbb{P}\left(\tau(t) > t(1 + \frac{\varepsilon^3}{2})\right)$$

y por (2.13) sabemos que

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}\left(\tau(t) > t(1 + \frac{\varepsilon^3}{2})\right) = 0. \tag{2.15}$$

Por otro lado tenemos que

$$t(1 + \frac{\varepsilon^3}{2}) \leq [t](1 + \frac{\varepsilon^3}{2}) \leq \left[[t](1 + \frac{\varepsilon^3}{2})\right] = n_2$$

entonces

$$\{\tau(t) > n_2\} \subseteq \{\tau(t) > t(1 + \frac{\varepsilon^3}{2})\}$$

entonces

$$\limsup_{t\to\infty} \mathbb{P}(\tau(t) > n_2) \leq \limsup_{t\to\infty} \mathbb{P}\left(\tau(t) > t(1 + \frac{\varepsilon^3}{2})\right) = 0$$

donde la última igualdad nos la da el resultado (2.15). De nueva cuenta, como la función de probabilidades es no negativa concluimos que

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}(\tau(t) > n_2) = 0.$$

Conjuntando los resultados de las Afirmaciones 1 y 2, se demuestra el lema.

$\square$

Dejemos un poco de lado el trabajo con los n_1, n_2 y n_0, para demostrar la siguiente implicación que nos será útil hacia el final de la prueba del Lema 2.4.11.

Lema 2.4.10. *Sea $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias, sea $\theta > 0$. Si para cualquier $\varepsilon > 0$ se cumple que*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(|Y_n| > \varepsilon\right) < 2\frac{\varepsilon}{\theta} \tag{2.16}$$

entonces

$$Y_n \xrightarrow{P} 0.$$

Demostración. Sea un $\delta > 0$ cualquiera. Vamos a demostrar que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(|Y_n| > \varepsilon\right) < \delta$$

para lo cuál hay que analizar dos casos.

Caso 1. Supongamos $\delta \geq 2\frac{\varepsilon}{\theta}$.

Se sigue que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(|Y_n| > \varepsilon\right) < 2\frac{\varepsilon}{\theta} \leq \delta.$$

Caso 2. Supongamos $\delta < 2\frac{\varepsilon}{\theta}$.

Tenemos que $\delta < 2\frac{\varepsilon}{\theta} \quad \Rightarrow \quad \frac{\delta\theta}{2} < \varepsilon$, entonces

$$\{|Y_n| > \varepsilon\} \subseteq \left\{|Y_n| > \frac{\delta\theta}{2}\right\}$$

por lo tanto,

$$\mathbb{P}\left(|Y_n| > \varepsilon\right) \leq \mathbb{P}\left(|Y_n| > \frac{\delta\theta}{2}\right)$$

sacando límites de ambos lados y utilizando la hipótesis (2.16) para δ, obtenemos

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(|Y_n| > \varepsilon\right) \leq \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(|Y_n| > \frac{\delta\theta}{2}\right) < \frac{2}{\theta}\frac{\delta\theta}{2} = \delta$$

y como esto se cumple para cualquier $\delta > 0$ se concluye que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(|Y_n| > \varepsilon\right) = 0.$$

Como la hipótesis del Lema plantea que esto se cumple para cualquier $\varepsilon > 0$ lo que tenemos es equivalente a

$$Y_n \xrightarrow{P} 0.$$

$\square$

Prácticamente todo el trabajo que hemos venido desarrollando a partir de que definimos los n_1, n_2 y n_3 e incluso el Lema 2.4.10 ha sido para poder demostrar el siguiente resultado. Así que podemos alegrarnos de tener las herramientas necesarias para abordar el próximo lema.

Lema 2.4.11. *Sean $\theta, t > 0$, n_0 como en la definición 2.4.2 y sean $X_1, X_2, ...$ una sucesión de variables aleatorias i.i.d. con media 0 y varianza $\sigma^2 = 1$. Sea $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k,\ n \geq 1$ y supongamos que $\{\tau(t), t \geq 0\}$ es una familia de variables aleatorias que toman valores en los enteros positivos, tal que*

$$\frac{\tau(t)}{t} \xrightarrow{P} \theta \quad si \quad t \to \infty$$

entonces

$$\frac{S_{\tau(t)} - S_{n_0}}{\sqrt{n_0}} \xrightarrow{P} 0 \quad cuando \quad t \to \infty. \tag{2.17}$$

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$.

El Lema 2.4.5 nos asegura que para toda $t > \frac{1}{\varepsilon^3}$ se cumple $n_1^\varepsilon \leqslant n_0 < n_2^\varepsilon$. En esta demostración queremos ver como se comporta el cociente (2.17) cuando t es grande, entonces podemos considerar únicamente el caso en que $t > \frac{6}{\varepsilon^3} > \frac{1}{\varepsilon^3}$. Así las cosas, tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_{\tau(t)} - S_{n_0}}{\sqrt{n_0}}\right| > \varepsilon\right) =& \mathbb{P}\left(\left|S_{\tau(t)} - S_{n_0}\right| > \varepsilon\sqrt{n_0}\right) \\
=& \mathbb{P}(\{\left|S_{\tau(t)} - S_{n_0}\right| > \varepsilon\sqrt{n_0}\} \cap \{\tau(t) \in [n_1, n_2]\}) \\
&+ \mathbb{P}(\{\left|S_{\tau(t)} - S_{n_0}\right| > \varepsilon\sqrt{n_0}\} \cap \{\tau(t) \notin [n_1, n_2]\}) \\
\leq& \mathbb{P}(\{\left|S_{\tau(t)} - S_{n_0}\right| > \varepsilon\sqrt{n_0}\} \cap \{\tau(t) \in [n_1, n_0]\}) \\
&+ \mathbb{P}(\{\left|S_{\tau(t)} - S_{n_0}\right| > \varepsilon\sqrt{n_0}\} \cap \{\tau(t) \in [n_0, n_2]\}) \\
&+ \mathbb{P}(\tau(t) \notin [n_1, n_2]\}) \ldots (i).
\end{aligned}$$

Ahora bien, sea $\omega \in \{\left|S_{\tau(t)} - S_{n_0}\right| > \varepsilon\sqrt{n_0}\} \cap \{\tau(t) \in [n_1, n_0]\}$, entonces

$$\max_{n_1 \leq k \leq n_0} |S_k(\omega) - S_{n_0}(\omega)| \geq \left|S_{\tau(t,\omega)}(\omega) - S_{n_0}(\omega)\right| > \varepsilon\sqrt{n_0}$$

por lo tanto:

$$\{\left|S_{\tau(t)} - S_{n_0}\right| > \varepsilon\sqrt{n_0}\} \cap \{\tau(t) \in [n_1, n_0]\} \subseteq \{\max_{n_1 \leq k \leq n_0} |S_k - S_{n_0}| > \varepsilon\sqrt{n_0}\}.$$

Análogamente tenemos que

$$\{\left|S_{\tau(t)} - S_{n_0}\right| > \varepsilon\sqrt{n_0}\} \cap \{\tau(t) \in [n_0, n_2]\} \subseteq \{\max_{n_0 \leq k \leq n_2} |S_k - S_{n_0}| > \varepsilon\sqrt{n_0}\}$$

así podemos acotar por arriba a (i), es decir

$$\begin{aligned}(i)\ldots \leq &\mathbb{P}(\max_{n_1 \leq k \leq n_0} |S_k - S_{n_0}| > \varepsilon\sqrt{n_0}) + \mathbb{P}(\max_{n_0 \leq k \leq n_2} |S_k - S_{n_0}| > \varepsilon\sqrt{n_0}) \\ &+ \mathbb{P}(\tau(t) \notin [n_1, n_2])\ldots(ii).\end{aligned}$$

Para seguir acotando, haremos uso del corolario de la Desiguladad de Kolmogorov (Corolario 1.3.2). Observemos que se cumplen las hipótesis, es decir, $X_1, X_2, ...X_n$ son variables aleatorias i.i.d. con media 0 y varianza positiva y finita, de hecho, el supuesto de este lema nos dice que $\sigma^2 = 1$. Con esto en mente, tenemos que

$$\begin{aligned}(ii)\ldots \leq &\frac{n_0 - n_1}{\varepsilon^2 n_0} + \frac{n_2 - n_0}{\varepsilon^2 n_0} + \mathbb{P}(\tau(t) \notin [n_1, n_2]) \\ = &\frac{n_2 - n_1}{\varepsilon^2 n_0} + \mathbb{P}(\tau(t) \notin [n_1, n_2]) \qquad (2.18)\end{aligned}$$

es decir, reescribiendo la primer y ultima desigualdad hemos obtenido

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_{\tau(t)} - S_{n_0}}{\sqrt{n_0}}\right| > \varepsilon\right) \leq \frac{n_2 - n_1}{\varepsilon^2 n_0} + \mathbb{P}(\tau(t) \notin [n_1, n_2]).$$

Ahora veamos cómo se comporta el resultado (2.18) cuando $t \to \infty$. Por un lado, de acuerdo con el el Lema 2.4.6 se tiene que

$$\lim_{t \to \infty} \frac{n_2 - n_1}{\varepsilon^2 n_0} = \frac{2\varepsilon}{\theta}$$

y por otro lado, por el Lema 2.4.9 afirma

$$\lim_{t \to \infty} \mathbb{P}(\tau(t) \notin [n_1, n_2]) = 0$$

por lo tanto

$$\lim_{t \to \infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_{\tau(t)} - S_{n_0}}{\sqrt{n_0}}\right| > \varepsilon\right) \leq \lim_{t \to \infty} \frac{n_2 - n_1}{\varepsilon^2 n_0} + \mathbb{P}(\tau(t) \notin [n_1, n_2]) = \frac{2\varepsilon}{\theta}.$$

Haciendo $Y_{\tau(t)} = \dfrac{S_{\tau(t)} - S_{n_0}}{\sqrt{n_0}}$ y aplicando el Lema 2.4.10 concluimos que

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_{\tau(t)} - S_{n_0}}{\sqrt{n_0}}\right| > \varepsilon\right) = 0.$$

Que es lo que queríamos demostrar. $\square$

Antes de enunciar y demostrar el TCL para caminatas aleatorias, demostraremos un sencillo corolario del TCL usual.

Corolario 2.4.1. *Sean $t, \theta > 0$. Sea n_0 como en la definición 2.4.2 y sean $X_1, X_2, ..., X_n$ variables aleatorias idénticamente distribuidas con media* 0 *y varianza finita. Sea $S_k = \sum_{i=1}^{k} X_i$, entonces*

$$\frac{S_{n_0}}{\sqrt{n_0}} \xrightarrow{d} N(0,1).$$

Demostración. Como se cumplen las hipótesis del Teorema Central del Límite (Teorema 1.3.5) se tiene que $\frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} N(0,1)$. Luego, observemos que

$$\{\lceil \theta t \rceil\}_{t>0} = \mathbb{N}$$

por lo tanto tenemos que

$$\frac{S_{n_0}}{\sqrt{n_0}} \xrightarrow{d} N(0,1).$$

$\square$

Ahora sí, llegó el momento de enunciar y demostrar el TCL para sumas aleatorias o Teorema de Rényi. Gracias al trabajo que hemos hecho antes, su demostración se reduce a unas cuantas lineas.

Teorema 2.4.1 (TCL para sumas aleatorias)**.** *Sean $X_1, X_2, ...$ variables aleatorias i.i.d. con media* 0 *y varianza σ^2 finita y positiva. Sea $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, $n \geq 1$ y supongamos que $\{\tau(t), t \geq 0\}$ es una familia de variables aleatorias que toman valores en los enteros positivos, tal que*

$$\frac{\tau(t)}{t} \xrightarrow{p} \theta \quad (0 < \theta < \infty) \quad si \quad t \to \infty, \tag{2.19}$$

entonces

i)

$$\frac{S_{\tau(t)}}{\sigma\sqrt{\tau(t)}} \xrightarrow{d} N(0,1) \quad si \quad t \to \infty$$

ii) y también

$$\frac{S_{\tau(t)}}{\sigma\sqrt{\theta t}} \xrightarrow{d} N(0,1) \quad si \quad t \to \infty$$

Demostración. *(i)* Para empezar, como $0 < \sigma^2 = Var(X)$ entonces si definimos $Y = \frac{X}{\sigma}$ tenemos que $Var(Y) = Var(\frac{X}{\sigma}) = 1$ por lo tanto, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\sigma^2 = 1$.

Sea $n_0 = \lceil \theta t \rceil$ el menor entero mayor igual que θt, entonces

$$\frac{S_{\tau(t)}}{\sqrt{\tau(t)}} = \left(\frac{S_{n_0}}{\sqrt{n_0}} + \frac{S_{\tau(t)} - S_{n_0}}{\sqrt{n_0}} \right) \sqrt{\frac{n_0}{\tau(t)}}. \tag{2.20}$$

Necesitamos los siguientes resultados:

a) $\frac{S_{n_0}}{\sqrt{n_0}} \xrightarrow{d} N(0,1)$.

Este resultado lo tenemos gracias al Corolario 2.4.1.

b) $\dfrac{S_{\tau(t)} - S_{n_0}}{\sqrt{n_0}} \xrightarrow{p} 0$.

Este resultado lo sabemos por el Lema 2.4.11

c) $\dfrac{\tau(t)}{n_0} \xrightarrow{p} 1$.

Obsérvese que

$$\frac{\tau(t)}{n_0} = \frac{\tau(t)}{[\theta t]}$$

y el Lema 2.4.4 nos da el resultado deseado.

Usando la información de a) y b) y lo que nos proporciona el Lema de Slutsky (Lema 1.3.4) sabemos que

$$\frac{S_{n_0}}{\sqrt{n_0}} + \frac{S_{\tau(t)} - S_{n_0}}{\sqrt{n_0}} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

y usando c) y el segundo Lema de Slutsky (Lema 1.3.5) concluimos que

$$\left(\frac{S_{n_0}}{\sqrt{n_0}} + \frac{S_{\tau(t)} - S_{n_0}}{\sqrt{n_0}}\right)\sqrt{\frac{n_0}{\tau(t)}} \xrightarrow{d} N(0,1).$$

Así queda demostrado el inciso *i)*.

(ii) Para demostrar el inciso *ii*) consideramos la siguiente ecuación

$$\frac{S_{\tau(t)}}{\sqrt{\theta t}} = \left(\frac{S_{n_0}}{\sqrt{n_0}} + \frac{S_{\tau(t)} - S_{n_0}}{\sqrt{n_0}}\right)\sqrt{\frac{n_0}{\theta t}}$$

ahora, si llegamos a que $\frac{\theta t}{n_0} \xrightarrow{p} 1$ podemos proceder de manera análoga a como hicimos en *i)* para concluir que $\frac{S_{\tau(t)}}{\sigma\sqrt{\theta t}} \xrightarrow{d} N(0,1) \;\; si \;\; t \to \infty$. Pero eso es inmediato por que gracias al Lema 2.4.1 sabemos que

$$\frac{\theta t}{n_0} = \frac{\theta t}{\lceil \theta t \rceil} \to 1 \;\; si \; t \to \infty$$

y de acuerdo con el Lema 1.3.3, la convergencia puntual implica convergencia en probabilidad, por lo que obtenemos el resultado deseado. Así este teorema queda demostrado. ☐

Capítulo 3

Teoría de Renovación para caminatas aleatorias

3.1. Introducción

En este capítulo estudiaremos el comportamiento asintótico del proceso del *primer tiempo de arribo* asociado a una caminata aleatoria S_n. Para explicar esto con mayor claridad, presentamos las siguientes definiciones.

Definición 3.1.1 (Proceso de Renovación)**.** *Un proceso de renovación es una sucesión infinita de variables aleatorias $T_1, T_2, \ldots$ que son no negativas, independientes e idénticamente distribuidas.*

Definición 3.1.2 (Proceso de Conteo de Renovación)**.** *Dado un proceso de renovación $\{T_1, T_2, \ldots\}$ se definen los tiempos reales de renovación como $S_0 = 0$ y $S_n = \sum_{i=1}^{n} T_i$ para $n \geq 1$. El proceso de conteo de renovación es*

$$N(t) = \text{máx}\{n : S_n \leq t\} \quad \textit{para cada } t \geq 0. \tag{3.1}$$

Observemos que $N(t)$ cuenta el numero de eventos ocurridos durante el intervalo de tiempo $[0, t]$.

El ejemplo clásico que ilustra a un *proceso de renovación* es el siguiente: supóngase que se tiene una colección numerable de focos, donde el i-ésimo foco tiene un tiempo de vida aleatorio $X_i \geq 0$, con $i = 1, 2, \ldots$. Supongamos también que los tiempos $\{X_i : i \in \mathbb{N}\}$ son i.i.d. Ahora imagínese que se prende el primero de los focos y en el instante que se descompone, inmediatamente es reemplazado por el segundo. Cuando éste se descompone inmediatamente es reemplazado por el tercero, continuando de esta manera por de cada uno de los focos restantes. En este ejemplo $N(t)$ es el número de focos que se han reemplazado en el intervalo de tiempo $[0, t]$.

Ahora veamos la siguiente definición

Definición 3.1.3 (Primer tiempo de arribo). *Sean $X_1, X_2, \ldots$ variables aleatorias i.i.d, $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ y $S = \{S_n : n \in \mathbb{N}\}$ la caminata aleatoria . Definimos $\tau(t)$ como el primer tiempo de arribo asociado a S, de la siguiente manera*

$$\tau(t) = \text{mín}\{n : \ S_n > t\} \quad \textit{para } t > 0.$$

Donde mín $\emptyset = \infty$

Observemos que hay notables diferencias entre las definiciones 3.1.2 y 3.1.3. La primer diferencia es que si $\{X_1, X_2, \ldots\}$ es un proceso de renovación entonces $X_k \geq 0$ para toda $k \geq 1$. Por lo que se cumple

$$N(t) + 1 = \tau(t).$$

Para una demostración rigurosa de esto véase la explicación referente a (5.50) en la Sección 5.9.

Por otro lado, si las variables aleatorias $\{X_1, X_2, \ldots\}$ son i.i.d. pero sin que necesariamente sean un proceso de renovación, entonces podría ocurrir que $X_k < 0$ para alguna $k \in \mathbb{N}$. En este sentido, sería extraño hablar del $\text{máx}\{n : S_n \leq t\}$, puesto que la sucesión $X_1, X_2, \ldots$ es infinita, no podríamos saber con certeza cuando será el natural n más grande tal que $S_n \leq t$.

En cambio tiene más sentido hablar de la primera vez que la caminata aleatoria rebasa t. Este proceso es al que llamamos $\tau(t)$.

Aunque aquí estudiaremos el comportamiento asintótico del proceso de primer tiempo de arribo cuando las variables X_k pueden tomar valores negativos, nos restringiremos a el caso en que $\mathbb{E}(X_k)$ es positiva. Dicho esto, la siguiente definición nos será de gran utilidad.

Definición 3.1.4. *Sea $x \in \mathbb{R}$, definimos $x^+ = \text{máx}\{x, 0\}$ y $x^- = -\,\text{mín}\{x, 0\}$.*

3.2. Lema del Sandwich

En esta sección, como su nombre lo indica nos enfocaremos en un Lema cuya enunciación y demostración es relativamente sencilla, sin embargo decidimos asignarle una sección propia debido a su importancia en la demostración de los teoremas límite que se enunciarán a partir de este punto.

De hecho, el Lema del Sandwich junto con algún Teorema Limite válido para sumas aleatorias (por ejemplo el Teorema 2.4.1) forman una herramienta fundamental para demostrar teoremas límite referente a sumas aleatorias. A este conjunto de pasos ordenados se les conoce como *el método SRW*. (Véase la Sección 3.4).

El siguiente lema es consecuencia de la forma en que definimos el *primer tiempo de arribo* (def. 3.1.3)

Lema 3.2.1 (Lema del Sandwich)**.** *Sean $X_1, X_2, \dots$ variables aleatorias i.i.d con media μ tal que $0 < \mu < \infty$, $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, y $\tau(t)$ el primer tiempo de arribo asociado a S, es decir $\tau(t) = \min\{n : \ S_n > t\}$, para $t > 0$; entonces*

$$t < S_{\tau(t)} \leq t + X_{\tau(t)} = t + X^+_{\tau(t)}.$$

Demostración. Por definición de $\tau(t)$ sabemos que $t < S_{\tau(t)}$. Para demostrar la segunda desigualdad hay que observar que también por definición de $\tau(t)$ sabemos que $S_{\tau(t)}$ es la primera vez que el proceso es mayor que t, entonces en $\tau(t) - 1$ el proceso no ha rebasado t, es decir

$$S_{\tau(t)-1} \leq t$$

por lo tanto

$$S_{\tau(t)} = \big(X_1 + X_2 + ... + X_{\tau(t)-1}\big) + X_{\tau(t)} = S_{\tau(t)-1} + X_{\tau(t)} \leq t + X_{\tau(t)}.$$

Ahora observemos que $X_{\tau(t)}$ es necesariamente positivo pues de lo contrario tendríamos que $S_{\tau(t)-1} > t$ lo cuál es una contradicción a la definición de $\tau(t)$.

Por lo tanto $X^+_{\tau(t)} = X_{\tau(t)}$ con lo que se demuestra la última igualdad que nos exige este Lema. $\square$

3.3. LFGN para el primer tiempo de arribo

Así como en el Capítulo 2 demostramos la LFGN para sumas aletorias, aquí demostraremos la LFGN para el primer tiempo de arribo. Para hacerlo utilizaremos fuertemente el Teorema 2.3.1 por lo que necesitamos la hipótesis de que $\tau(t) \xrightarrow{c.s} \infty$. Hace falta añadir una hipótesis a las que ya teníamos desde el Lema 3.2.1, la hipótesis adicional es suponer que $\mathbb{E}|X_1| < \infty$.

Lema 3.3.1. *Sean $X_1, X_2, \ldots$ variables aleatorias i.i.d. con media μ tal que $0 < \mu < \infty$, $\mathbb{E}|X_1| < \infty$, $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, y $\tau(t) = \text{mín}\{n : \ S_n > t\}$, para $t > 0$; entonces*

$$\tau(t) \xrightarrow{c.s.} \infty$$

Demostración. Como se cumplen las hipótesis de la LFGN (Teorema 1.3.4) entonces

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{c.s.} \mu \text{ cuando } n \to \infty.$$

Como $\mu \in (0, \infty)$ y como para toda $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $n > 0$, y puesto que $n \to \infty$, se concluye que

$$S_n \xrightarrow{c.s.} \infty.$$

Por lo tanto, existe un conjunto $A \subset \Omega$ tal que $\mathbb{P}(A) = 0$ y cumple que

$$S_n(\omega) \to \infty \ \text{ si } \omega \in \Omega \setminus A \tag{3.2}$$

Con esto en mente, primero demostremos que si $\omega \in \Omega \setminus A$ entonces $\tau(t, \omega)$ es no decreciente.

Sea $\omega \in \Omega \setminus A$ y $r < s$ tales que $r, s \in [0, \infty)$. Debido a (3.2) existen $R, S \in \mathbb{N}$ tales que para toda $n > R$ y para toda $m > S$ se cumple que

$$S_n(\omega) > r \quad \text{y} \quad S_m(\omega) > s \tag{3.3}$$

Para los naturales n y m escogidos en (3.3) se tiene que

$$\begin{aligned} \tau(r, \omega) &= \text{mín}\{k : \ S_k(\omega) > r\} \leq n, \quad \text{y} \\ \tau(s, \omega) &= \text{mín}\{k : \ S_k(\omega) > s\} \leq m \end{aligned}$$

Lo anterior nos da cotas superiores para $\tau(r, \omega)$ y $\tau(s, \omega)$ cuando $r, s \in [0, \infty)$ son números fijos, es decir $\tau(r, \omega), \tau(s, \omega) < \infty$, entonces

$$r < s < S_{\tau(s,\omega)} < \infty$$

por lo que

$$r < S_{\tau(s,\omega)}$$

lo que implica que $\tau(r, \omega) \leq \tau(s, \omega)$, ya que $\tau(r, \omega)$ es el natural más pequeño tal que $r < S_{\tau(r)}$. De esta manera queda demostrado que para toda $\omega \in \Omega \setminus A$, $\tau(t, \omega)$ es no decreciente.

Ahora demostraremos que $\tau(t, \omega)$ es no acotada si $\omega \in \Omega \setminus A$. Para esto, supongamos que existe $M \in \mathbb{N}$ tal que para todo $t \in \mathbb{R}$ se cumple que $\tau(t, \omega) \leq M$. Sea $\omega \in \Omega \setminus A$, como $\tau(t, \omega)$ toma valores en los enteros positivos lo que en realidad sabemos es que

$$\tau(t, \omega) \in \{1, 2, 3, \ldots, M\} \text{ para toda } t \in \mathbb{R}. \tag{3.4}$$

Sea $S_\Delta(\omega) = max\{S_1(\omega), S_2(\omega), \ldots, S_M(\omega)\}$, entonces de acuerdo con (3.2) tenemos que para cualquier número real $t \geq 0$ existe un natural N tal que para todo $n > N$ se cumple que $S_n(\omega) > t$, entonces

$$1 \leq \tau(t, \omega) \leq N + 1 < \infty,$$

y de acuerdo con (3.4) es tal que

$$t < S_{\tau(t,\omega)}(\omega) \leq S_\Delta(\omega)$$

pero t puede ser tan grande como se quiera, y para que $S_\Delta(\omega)$ sea cota superior de cualquier número real, necesariamente se requiere que $S_\Delta(\omega) = \infty$, pero eso es una contradicción, ya que Δ es un número finito menor o igual a M por lo que $S_\Delta(\omega)$ es una suma finita de variables aleatorias reales $X_1(\omega), X_2(\omega), \ldots X_\Delta(\omega)$ con lo que necesariamente $S_\Delta(\omega) < \infty$.

Como llegamos a una contradicción a partir de suponer que existía una cota para $\tau(t, \omega)$, concluimos que la función es no acotada superiormente.

Ahora bien, $\tau(t)$ es no decreciente y no acotada superiormente siempre que $\omega \in \Omega \setminus A$, por lo tanto

$$\tau(t) \xrightarrow{c.s.} \infty.$$

□

Necesitamos una herramienta más antes de demostrar la LFGN para el primer tiempo de arribo y es un resultado básico de Análisis Matemático, por lo cuál lo enunciamos sin demostrar.

Proposición 3.3.1. *Sean $\{a_n\}_{n\geq 1}$ y $\{a_n\}_{n\geq 1}$ dos series reales, entonces se cumple*

$$\limsup(a_n + b_n) \leq \limsup(a_n) + \limsup(b_n)$$

y también

$$\liminf(a_n) + \liminf(b_n) \leq \liminf(a_n + b_n).$$

El Teorema siguiente es la LFGN para el primer tiempo de arribo. Recordemos que en la LFGN de Kolmogorov nos dice que $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{c.s.} \mu$. Sin embargo, en el Teorema 3.3.1 no tenemos una suma de variables aleatorias S_n sino que en su lugar tenemos la función $\tau(t)$ entendida como en la definición 3.1.3, es decir $\tau(t) = min\{n : \ S_n > t\}$ la cuál sí involucra a una suma de variables aleatorias. Por lo tanto el Teorema siguiente es, en efecto, un Teorema *transitorio* de la LFGN aplicado a la función *primer tiempo de arribo.*

Teorema 3.3.1 (LFGN para el primer tiempo de arribo)**.** *Sean $X_1, X_2, \ldots$ variables aleatorias i.i.d. con media μ, tal que $0 < \mu < \infty$ y $\mathbb{E}|X_1| < \infty$. Además sea $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ y $\tau(t)$ el primer tiempo de arribo asociado a S, entonces*

$$\frac{\tau(t)}{t} \xrightarrow{c.s.} \frac{1}{\mu} \quad \textit{cuando } t \to \infty.$$

Demostración. Por un lado tenemos la hipótesis de que $X_1, X_2, ...$ son v.a. i.i.d. con $\mu < \infty$ y $\mathbb{E}|X_1| < \infty$; por otro lado, gracias al Lema 3.3.1 se tiene que $\tau(t) \xrightarrow{c.s.} \infty$ con lo que completamos todas las hipótesis del Teorema 2.3.1, por lo tanto

$$\frac{S_{\tau(t)}}{\tau(t)} \xrightarrow{c.s.} \mu \quad y \quad \frac{X_{\tau(t)}}{\tau(t)} \xrightarrow{c.s.} 0 \ \textit{ cuando } t \to \infty. \tag{3.5}$$

Esto nos dice que existe un conjunto $A \subset \Omega$ de probabilidad cero, tal que las convergencias anteriores se dan para toda $\omega \in \Omega \setminus A$.

Dejando un poco de lado ese resultado, con las hipótesis que tenemos podemos usar el Lema del Sandwich (Lema 3.2.1) obteniendo así

$$t < S_{\tau(t)} \leq t + X_{\tau(t)}$$

al dividir las desigualdades anteriores entre el numero positivo $\tau(t)$ tenemos

$$\frac{t}{\tau(t)} < \frac{S_{\tau(t)}}{\tau(t)} \leq \frac{t}{\tau(t)} + \frac{X_{\tau(t)}}{\tau(t)}. \tag{3.6}$$

Ahora bien, para cualquier $\omega \in \Omega \setminus A$ se tiene lo siguiente:

1. En la primera desigualdad de la ecuación (3.6) sacando límite superior de ambos lados y usando (3.5) tenemos

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{t}{\tau(t,\omega)} \leq \limsup_{t\to\infty} \frac{S_{\tau(t,\omega)}}{\tau(t,\omega)} = \mu. \tag{3.7}$$

2. Utilizando la segunda parte de la desigualdad (3.6) tenemos

$$\frac{S_{\tau(t,\omega)}}{\tau(t,\omega)} - \frac{X_{\tau(t,\omega)}}{\tau(t,\omega)} \leq \frac{t}{\tau(t,\omega)}$$

sacando límite inferior a ambos lados de la desigualdad y de acuerdo a la Proposición 3.3.1 tenemos

$$\begin{aligned} \liminf_{t\to\infty}\left(\frac{S_{\tau(t,\omega)}}{\tau(t,\omega)}\right) + \liminf_{t\to\infty}\left(-\frac{X_{\tau(t,\omega)}}{\tau(t,\omega)}\right) &\leq \liminf_{t\to\infty}\left(\frac{S_{\tau(t,\omega)}}{\tau(t,\omega)} - \frac{X_{\tau(t,\omega)}}{\tau(t,\omega)}\right) \\ &\leq \liminf_{t\to\infty}\left(\frac{t}{\tau(t,\omega)}\right) \qquad (3.8) \end{aligned}$$

Por propiedades de límite inferior y por la ecuación (3.5) sabemos que

$$\liminf_{t\to\infty}\left(-\frac{X_{\tau(t,\omega)}}{\tau(t,\omega)}\right) = -\limsup_{t\to\infty}\left(\frac{X_{\tau(t,\omega)}}{\tau(t,\omega)}\right) = 0,$$

y también por (3.5) sabemos que $\liminf_{t\to\infty}\left(\frac{S_{\tau(t,\omega)}}{\tau(t,\omega)}\right) = \mu$. Por lo tanto de las desigualdades (3.8) nos queda

$$\mu \leq \liminf_{t\to\infty} \frac{t}{\tau(t,\omega)}. \qquad (3.9)$$

Conjuntando los resultados obtenidos en (3.7) y (3.9) tenemos

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{t}{\tau(t,\omega)} \leq \mu \leq \liminf_{t\to\infty} \frac{t}{\tau(t,\omega)}$$

por lo tanto, para cada $\omega \in \Omega \setminus A$ se cumple que

$$\frac{\tau(t,\omega)}{t} \to \frac{1}{\mu}$$

como $P(A) = 0$, concluimos

$$\frac{\tau(t)}{t} \xrightarrow{c.s.} \frac{1}{\mu}.$$

□

3.4. El método SRW

El *método SRW* es una serie ordenada de pasos que utilizaremos a partir de este capítulo para demostrar los teoremas límite de sumas aleatorias. Es decir, utilizando este método es como demostraremos el TCL para el primer tiempo de arribo (Teorema 3.5.1) y los teoremas límite para caminatas aleatorias bidimensionales (Teoremas 4.3.1 y 4.4.1). Este método también se utilizó para demostrar el Teorema 3.3.1.

El nombre de *método SRW* se adopta por las siglas de la frase en inglés *Stopped Random Walks method*. Esta frase podría traducirse como "Método para las Caminatas Aleatorias con Tiempo Cambiado Aleatoriamente" por lo que posiblemente también podríamos referirnos a él como *método CATICA*.

El método *SRW* consiste en aplicar los siguientes pasos:

a) Un Teorema Límite ordinario, como la LFGN o el TCL

b) Un Teorema transitorio que nos diga que el resultado del teorema límite ordinario es también válido para sumas aleatorias como el Teorema 2.3.1 o el Teorema de Anscombe.

c) Una desigualdad del sandwich, es típico el uso del Lema 3.2.1.

El lector podrá darse cuenta que, en efecto, estos fueron los pasos que seguimos para demostrar el Teorema 3.3.1.

3.5. TCL para el primer tiempo de arribo

Tal como en el Capitulo anterior, probar el TCL es más laborioso que probar la LFGN. Por lo que tendremos que demostrar varios resultados antes de aventurarnos a demostrar el TCL para el primer tiempo de arribo.

Para esa prueba también utilizaremos el método *SRW* que iremos desarrollando a través de los lemas. Empecemos con una proposición que nos será útil para demostrar el lema subsecuente.

Proposición 3.5.1. *Sean $X_1, X_2, \ldots$ variables aleatorias i.i.d. entonces $X_1^2, X_2^2, \ldots$ son variables aleatorias i.i.d.*

Demostración. Como la función $h : (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ dada por $h(x) = x^2$ es medible entonces para cualquier $n \in \mathbb{N}$ y para el subconjunto de variables aleatorias $\{X_{i_1}, X_{i_2}, \ldots, X_{i_n}\} \subset \{X_1, X_2, \ldots\}$ se tiene que, por el Teorema 1.3.3 las v.a.'s $h(X_{i_1}), h(X_{i_2}), \ldots, h(X_{i_n})$ son independientes, y como esto se cumple para cualquier subconjunto finito de variables en $X_1^2, X_2^2, \ldots$, se sigue que la colección completa es independiente.

Así mismo, las variables son idénticamente distribuidas X_i^2. $\square$

Lema 3.5.1. *Sean $X_1, X_2, \ldots$ variables aleatorias i.i.d. con media μ, tal que $0 < \mu < \infty$ y sea $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ y $\tau(t)$ el primer tiempo de arribo asociado a S; y si además $0 < VarX = \sigma^2 < \infty$, entonces*

$$\frac{X_{\tau(t)}}{\sqrt{\sigma^2 \tau(t)}} \xrightarrow{p} 0$$

Demostración. Debido a la Proposición anterior (Proposición 3.5.1) y a que las v.a.'s $X_1, X_2, \ldots$ son i.i.d. entonces $X_1^2, X_2^2, \ldots$ también son i.i.d. Además por el Lema 3.3.1 sabemos que $\tau(t) \xrightarrow{c.s.} \infty$.

Por otro lado, como $\sigma^2 < \infty$ y $0 < \mu < \infty$ se cumple que

$$\mathbb{E}|X_i^2| = \mathbb{E}(X_i^2) = Var(X_i) + \mathbb{E}^2(X_i) = \sigma^2 + \mu^2 < \infty$$

entonces por el Teorema 2.3.2.i obtenemos

$$\frac{X_{\tau(t)}}{\sqrt{\tau(t)}} \xrightarrow{c.s.} 0$$

Como $0 < \sigma < \infty$ entonces

$$\frac{X_{\tau(t)}}{\sigma\sqrt{\tau(t)}} \xrightarrow{c.s.} 0.$$

De acuerdo con el Lema 1.3.3 $.ii$ se concluye que la convergencia en *probabilidad* que nos pide este lema es una consecuencia de la convergencia *casi segura* que ya hemos obtenido. $\square$

El siguiente Lema nos presenta un TCL para sumas aleatorias para el caso en que $\tau(t)$ es el primer tiempo de arribo asociado a S y sin necesidad de que $\mu = 0$ como se pedía en el Teorema 2.4.1.

Lema 3.5.2. *Sean $X_1, X_2, \ldots$ variables aleatorias i.i.d. con media μ, tal que $0 < \mu < \infty$ y sea $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ y $\tau(t)$ el primer tiempo de arribo asociado a S; y si además $0 < VarX_1 = \sigma^2 < \infty$, entonces*

$$\frac{S_{\tau(t)} - \tau(t)\mu}{\sigma\sqrt{\tau(t)}} \xrightarrow{d} N(0,1) \quad si \quad t \to \infty.$$

Demostración. Sea $Y_i = X_i - \mu$ y $S'_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$. Queremos aplicar el TCL para sumas aleatorias (Teorema 2.4.1) a la sucesión $Y_1, Y_2, \ldots$ con tiempo de paro dado por $\tau(t) = \text{mín}\{n : \ S_n > t\}$. Veamos que se cumplen las hipótesis necesarias.

Primero que nada, veamos que $\mathbb{E}(Y_i) = 0$, lo cual es inmediato porque

$$\mathbb{E}(Y_i) = \mathbb{E}(X_i - \mu) = \mathbb{E}(X_i) - \mu = 0.$$

Ahora veamos que $0 < Var(Y_i) < \infty$. Pero esto también es casi inmediato dado que

$$0 < Var(Y_i) = Var\,(X_i - \mu) = \sigma^2 < \infty.$$

Ahora bien, como las v.a. $X_1, X_2, \ldots$ son i.i.d. entonces también lo son las v.a. $Y_1, Y_2, \ldots$

Por otro lado, debido a que $0 < \sigma^2 < \infty$ entonces por el Corolario 1.3.1 se obtiene que $\mathbb{E}|X_1| < \infty$, por lo que podemos usar el Teorema 3.3.1, con lo que obtenemos, $\frac{\tau(t)}{t} \xrightarrow{c.s.} \frac{1}{\mu} \in (0, \infty)$. Utilizando el Lema 1.3.3.*ii* obtenemos la convergencia en *probabilidad* pues es una consecuencia de la convergencia *casi segura* que ya tenemos. Es decir, obtenemos que

$$\frac{\tau(t)}{t} \xrightarrow{P} \frac{1}{\mu} \in (0, \infty)$$

Con estos resultados, ya podemos emplear el Teorema 2.4.1. Obtenemos

$$\frac{S'_{\tau(t)}}{\sigma\sqrt{\tau(t)}} \xrightarrow{d} N(0,1) \ \ si \ \ t \to \infty,$$

es decir

$$\frac{\sum_{i=1}^{\tau(t)} (X_i - \mu)}{\sigma\sqrt{\tau(t)}} = \frac{S_{\tau(t)} - \tau(t)\mu}{\sigma\sqrt{\tau(t)}} \xrightarrow{d} N(0,1) \ \ si \ \ t \to \infty.$$

□

Lema 3.5.3. *Sean $X_1, X_2, \ldots$ variables aleatorias i.i.d. con media μ, tal que $0 < \mu < \infty$ y sea $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ y $\tau(t)$ el primer tiempo de arribo asociado a S; y si además $0 < Var X_1 = \sigma^2 < \infty$, entonces*

$$\frac{t - \mu\tau(t)}{\sqrt{\sigma^2\tau(t)}} \xrightarrow{d} N(0,1) \quad si \ \ t \to \infty.$$

Demostración. Sea $t > 0$. Por el Lema del Sandwich (Lema 3.2.1) se obtiene

$$t < S_{\tau(t)} \leq t + X_{\tau(t)}$$

restamos $\mu\tau(t)$ de cada lado de las desigualdades anteriores, y como $\sqrt{\sigma^2\tau(t)} > 0$ podemos dividir entre este factor sin que se alteren las desigualdades anteriores, entonces nos queda

$$\frac{t - \mu\tau(t)}{\sqrt{\sigma^2\tau(t)}} < \frac{S_{\tau(t)} - \mu\tau(t)}{\sqrt{\sigma^2\tau(t)}} \leq \frac{t - \mu\tau(t)}{\sqrt{\sigma^2\tau(t)}} + \frac{X_{\tau(t)}}{\sqrt{\sigma^2\tau(t)}}. \tag{3.10}$$

Trabajemos con la primera desigualdad. Observemos que para toda $x \in \mathbb{R}$ y para toda $\omega \in \Omega$ se cumple

$$\left\{ \frac{S_{\tau(t)} - \mu\tau(t)}{\sqrt{\sigma^2\tau(t)}} \leq x \right\} \subset \left\{ \frac{t - \mu\tau(t)}{\sqrt{\sigma^2\tau(t)}} \leq x \right\}$$

por lo tanto si calculamos la probabilidad de ambos conjuntos tenemos

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_{\tau(t)} - \mu\tau(t)}{\sqrt{\sigma^2\tau(t)}} \leq x \right) \leq \mathbb{P}\left(\frac{t - \mu\tau(t)}{\sqrt{\sigma^2\tau(t)}} \leq x \right)$$

lo que es equivalente a

$$\mathrm{F}_{\frac{S_{\tau(t)} - \mu\tau(t)}{\sqrt{\sigma^2\tau(t)}}}(x) \leq \mathrm{F}_{\frac{t - \mu\tau(t)}{\sqrt{\sigma^2\tau(t)}}}(x).$$

Ahora, por el Lema 3.5.2 sabemos que $\lim\limits_{t\to\infty} \mathrm{F}_{\frac{S_{\tau(t)} - \mu\tau(t)}{\sqrt{\sigma^2\tau(t)}}}(x) = \mathrm{F}_Z(x)$ siempre que $x \in \mathrm{C}(\mathrm{F}_Z)$[1] y donde Z es una variable aleatoria con distribución $N(0,1)$. Como la distribución Normal es continua en $\mathbb{R}$ se obtiene que $\mathrm{C}(\mathrm{F}_Z) = \mathbb{R}$. Así pues, sacando límite inferior de la desigualdad anterior llegamos a que

$$\mathrm{F}_Z(x) = \liminf_{t\to\infty} \mathrm{F}_{\frac{S_{\tau(t)} - \mu\tau(t)}{\sqrt{\sigma^2\tau(t)}}}(x) \leq \liminf_{t\to\infty} \mathrm{F}_{\frac{t - \mu\tau(t)}{\sqrt{\sigma^2\tau(t)}}}(x). \tag{3.11}$$

Regresemos a la Ecuación (3.10). Para simplificar la notación sea

$$Z_t = \frac{S_{\tau(t)} - \mu\tau(t)}{\sqrt{\sigma^2\tau(t)}}, \quad W_t = \frac{t - \mu\tau(t)}{\sqrt{\sigma^2\tau(t)}} \;\; y \;\; Y_t = \frac{X_{\tau(t)}}{\sqrt{\sigma^2\tau(t)}}$$

[1] $\mathrm{C}(\mathrm{F}_Z)$ son los puntos donde la función F_Z es continua. Recordemos que las funciones de distribución tienen a lo más una cantidad numerable de puntos de discontinuidad. Véase la Definición 1.3.6

Ahora nuestro objetivo es acotar por arriba el límite superior de $F_{W(t)}$, para esto, de la segunda desigualdad de la Ecuación (3.10) al sustituir por los valores arriba explicados llegamos a que

$$Z_t \leq W_t + Y_t$$

con un tratamiento análogo al que hicimos con el caso anterior llegamos a que

$$F_{W_t+Y_t} \leq F_{Z_t}. \tag{3.12}$$

Ahora, sea $\varepsilon > 0$ entonces

$$F_{W_t}(x-\varepsilon) = \mathbb{P}\left(\{W_t \leq x-\varepsilon\} \cap \{|Y_t| \leq \varepsilon\}\right) + \mathbb{P}\left(\{W_t \leq x-\varepsilon\} \cap \{|Y_t| > \varepsilon\}\right).$$

Observemos que

$$\{W_t \leq x-\varepsilon\} \cap \{|Y_t| \leq \varepsilon\} = \{W_t \leq x-\varepsilon\} \cap \{-\varepsilon \leq -Y_t \leq \varepsilon\}$$

$$\subset \{W_t \leq x-Y_t\} \cap \{-\varepsilon \leq -Y_t \leq \varepsilon\} = \{W_t + Y_t \leq x\} \cap \{|Y_t| \leq \varepsilon\}$$

por lo que podemos concluir

$$\begin{aligned} &F_{W_t}(x-\varepsilon) \\ &\quad \leq \mathbb{P}\{W_t + Y_t \leq x\} \cap \{|Y_t| \leq \varepsilon\} + \mathbb{P}\left(\{W_t \leq x-\varepsilon\} \cap \{|Y_t| > \varepsilon\}\right) \\ &\quad \leq \mathbb{P}\{W_t + Y_t \leq x\} + \mathbb{P}\left(|Y_t| > \varepsilon\right) \end{aligned}$$

es decir,

$$F_{W_t}(x-\varepsilon) \leq \mathrm{F}_{W_t+Y_t}(x) + \mathbb{P}\left(|Y_t| > \varepsilon\right).$$

Ahora, sacando límite superior de ambos lados y de acuerdo con la Proposición 3.3.1, obtenemos

$$\begin{aligned} \limsup_{t\to\infty} \mathrm{F}_{W_t}(x-\varepsilon) &\leq \limsup_{t\to\infty} \left[\mathrm{F}_{W_t+Y_t}(x) + \mathbb{P}\left(|Y_t| > \varepsilon\right)\right] \\ &\leq \limsup_{t\to\infty} \left[\mathrm{F}_{W_t+Y_t}(x)\right] + \limsup_{t\to\infty} \left[\mathbb{P}\left(|Y_t| > \varepsilon\right)\right] \end{aligned} \tag{3.13}$$

pero de acuerdo con el Lema 3.5.1 sabemos que

$$Y_t = \frac{X_{\tau(t)}}{\sqrt{\sigma^2 \tau(t)}} \xrightarrow{p} 0$$

por lo que, para nuestro $\varepsilon > 0$ se cumple que $\lim\limits_{t\to\infty} \mathbb{P}\left(|Y_t| > \varepsilon\right) = 0$, entonces de la desigualdad (3.13) obtenemos

$$\limsup_{t\to\infty} \mathrm{F}_{W_t}(x-\varepsilon) \leq \limsup_{t\to\infty} \mathrm{F}_{W_t+Y_t}(x). \tag{3.14}$$

Sacando límite superior a la desigualdad (3.12) y conjuntando con la desigualdad (3.14) obtenemos

$$\limsup_{t\to\infty} \mathrm{F}_{W_t}(x-\varepsilon) \leq \limsup_{t\to\infty} \mathrm{F}_{W_t+Y_t}(x) \leq \limsup_{t\to\infty} F_{Z_t}(x),$$

recordemos que $x \in \mathbb{R} = \mathrm{C}(\mathrm{F}_Z)$, entonces (por Lema 3.5.2) $\mathrm{F}_{Z_t}(x) \to \mathrm{F}_Z(x)$. Por lo tanto

$$\limsup_{t\to\infty} \mathrm{F}_{W_t}(x-\varepsilon) \leq \ F_Z(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

y como esto se cumple para toda $\varepsilon > 0$ entonces se sigue que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\limsup_{t\to\infty} \mathrm{F}_{W_t}(x-\varepsilon)\right] = \limsup_{t\to\infty} \mathrm{F}_{W_t}(x) \leq \mathrm{F}_Z(x). \tag{3.15}$$

Finalmente, conjuntando los resultados (3.11) y (3.15) llegamos a

$$\limsup_{t\to\infty} \mathrm{F}_{W_t}(x) \leq \ F_Z(x) \leq \liminf_{t\to\infty} \mathrm{F}_{W_t}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

con lo que se concluye lo siguiente

$$\mathrm{F}_{W_t}(x) \to \mathrm{F}_Z(x) \quad \textit{cuando} \ \ t\to\infty \quad y \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

es decir

$$\frac{t-\mu\tau(t)}{\sqrt{\sigma^2\tau(t)}} \xrightarrow{d} N(0,1) \quad si \ \ t\to\infty.$$

□

Ha llegado la hora de demostrar el TCL para el primer tiempo de arribo, y gracias al trabajo que hemos hecho, podremos lograrlo en unos cuantos pasos.

Teorema 3.5.1 (TCL para el primer tiempo de arribo)**.** *Sean* $X_1, X_2, \ldots$ *variables aleatorias i.i.d. con media* μ*, tal que* $0 < \mu < \infty$ *y sea* $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ *y* $\tau(t)$ *el primer tiempo de arribo asociado a* S*; y si además* $0 < VarX_1 = \sigma^2 < \infty$*, entonces*

$$\frac{\tau(t) - \frac{t}{\mu}}{\sqrt{\frac{\sigma^2 t}{\mu^3}}} \xrightarrow{d} N(0,1) \quad si \quad t \to \infty.$$

Demostración. Debido a que $0 < \sigma^2 < \infty$, sabemos por el Corolario 1.3.1 que $\mathbb{E}|X_1| < \infty$. Con este resultado, tenemos las hipótesis para utilizar el Teorema 3.3.1. Así pues, obtenemos

$$\frac{\tau(t)}{t} \xrightarrow{c.s.} \frac{1}{\mu} \ \text{ si } t \to \infty.$$

Sea $A \subset \Omega$ el conjunto de probabilidad cero tal que $\frac{\tau(t,\omega)}{t} \to \frac{1}{\mu}$ si $\omega \in \Omega \setminus A$ y sea cualquier $\varepsilon > 0$. Como por hipótesis $0 < \mu < \infty$, se tiene que $\frac{\varepsilon}{\mu} > 0$, entonces para cada $\omega \in \Omega \setminus A$ existe $T \in \mathbb{N}$ tal que si $t > T$ entonces

$$\left| \frac{\tau(t)}{t} - \frac{1}{\mu} \right| < \frac{\varepsilon}{\mu}$$

multiplicando toda la desigualdad por $\mu > 0$

$$\left| \frac{\tau(t)}{t}\mu - 1 \right| < \varepsilon$$

como esto se cumple para todo $\varepsilon > 0$ y para cada $\omega \in \Omega \setminus A$, se concluye que

$$\frac{\tau(t)}{t}\mu \xrightarrow{c.s.} 1.$$

Por propiedades de los limites, como $\frac{\tau(t)}{t}\mu > 0$ también obtenemos del resultado anterior que $\sqrt{\frac{\tau(t)}{t}\mu} \xrightarrow{c.s.} 1$, pero como la convergencia *casi segura* implica la convergencia *en probabilidad* (Lema 1.3.3 *ii)*), de lo anterior se sigue que

$$\sqrt{\frac{\tau(t)}{t}\mu} \xrightarrow{P} 1. \tag{3.16}$$

Por otro lado, el Lema 3.5.3 y la simetría de la Normal implican que

$$\frac{\mu\tau(t)-t}{\sqrt{\sigma^2\tau(t)}} \xrightarrow{d} N(0,1) \quad si \;\; t\to\infty,$$

aplicando un poco de álgebra y dado que $\mu > 0$

$$\begin{aligned}\frac{\mu\tau(t)-t}{\sqrt{\sigma^2\tau(t)}} &= \frac{\tau(t)-\frac{t}{\mu}}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{\mu^2}\tau(t)}} = \frac{\tau(t)-\frac{t}{\mu}}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{\mu^2}\frac{t}{\mu}}}\frac{\sqrt{\frac{t}{\mu}}}{\sqrt{\tau(t)}} \\ &= \frac{\tau(t)-\frac{t}{\mu}}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{\mu^2}\frac{t}{\mu}}}\sqrt{\frac{t}{\mu\tau(t)}} \xrightarrow{d} N(0,1) \quad si \;\; t\to\infty.\end{aligned}$$

Ahora, debido a la ecuación (3.16) y al segundo lema de Slutsky (Lema 1.3.5) se llega a que

$$\left(\frac{\tau(t)-\frac{t}{\mu}}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{\mu^2}\frac{t}{\mu}}}\sqrt{\frac{t}{\mu\tau(t)}}\right)\left(\sqrt{\frac{\tau(t)}{t}\mu}\right) \xrightarrow{d} N(0,1)$$

es decir,

$$\frac{\tau(t)-\frac{t}{\mu}}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{\mu^3}t}} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

con este resultado concluimos la demostración. $\square$

Capítulo 4

Caminatas aleatorias bidimensionales con tiempo cambiado aleatoriamente

4.1. Introducción

La importancia de un TCL para caminatas aleatorias bidimensionales es grandísima. Para darnos un atisbo de su impacto en múltiples ramas de la probabilidad basta con mirar el Capítulo 5 en donde se exponen algunas de las aplicaciones que tiene el TCL para c.a. bidimensionales (Teorema 4.4.1). Las aplicaciones de este Teorema tienen impacto, por ejemplo, en la Teoría de Renovación, en la Teoría del Riesgo de Seguros, en las Políticas de Remplazo y en la Teoría de Colas.

Por tal motivo, este Capítulo es la parte medular de nuestro trabajo. De hecho es en el TCL para c.a. bidimensionales (Teorema 4.4.1) donde convergen todos los teoremas que hemos desarrollado y que desarrollaremos en esta tesis.

Dicho lo anterior, podemos comenzar familiarizándonos con las siguientes hipótesis, que son con las que trabajaremos a lo largo de todo el Capítulo.

Sea $\{(U_n, V_n), n \geq 1\}$ una caminata aleatoria de dos dimensiones con incrementos i.i.d. (X_k, Y_k), $k \geq 1$ tal que $0 < \mu_2 = \mathbb{E}(Y) < \infty$ y $\mu_1 = \mathbb{E}(X) < \infty$.

Observemos que *nada se asume sobre la independencia entre las variables X_k y Y_k*, esta hipótesis es esencial en muchas aplicaciones como se verá más adelante, (véase, por ejemplo la Sección 5.5) .

El proceso que en este capítulo nos interesa analizar es la caminata aleatoria

$$\{U_{\tau(t)}, t \geq 0\}$$

donde $\tau(t)$ es el primer tiempo de arribo asociado a V.

4.2. Teoría de Renovación para caminatas aleatorias bidimensionales

En esta sección comprobaremos que todo lo que hasta ahora sabemos de Teoría de Renovación para caminatas aleatorias lo podemos aplicar al proceso del primer tiempo de arribo $\{\tau(t),\ t \geq 0\}$ asociado a V, cuando tenemos una caminata aleatoria de dos dimensiones $\{(U_n, V_n), n \geq 1\}$ con incrementos i.i.d. $(X_k, Y_k),\ k \geq 1$.

Primero definamos el proceso del primer tiempo de arribo asociado a una caminata aleatoria bidimensional.

Definición 4.2.1. *Sea $\mathfrak{F}_n = \sigma\{(X_k, Y_k) : k \leq n\}$ para $n \geq 1$, y $V_n = \sum_{i=1}^n Y_k$ definimos el proceso del primer tiempo de arribo asociado a V como*

$$\tau(t) = \min\{n : V_n > t\}, \quad t \geq 0.$$

Antes de proseguir, observemos que con la definición anterior, y debido a que $0 < \mu_2 < \infty$ tenemos casi todas las hipótesis para que $\tau(t)$ cumpla los teoremas del Capítulo 3. Dado que $Y_1, Y_2, \ldots$ son idénticamente distribuidas y $V_n = \sum_{i=1}^n Y_i$; prácticamente lo único que nos faltaría saber es que $Y_1, Y_2, \ldots$ son independientes. El siguiente Lema nos proporciona dicho resultado.

Lema 4.2.1. *Sea $\{(U_n, V_n), n \geq 1\}$ una caminata aleatoria de dos dimensiones con incrementos i.i.d. $(X_k, Y_k),\ k \geq 1$, entonces si $j \neq k$ se cumple que Y_j y Y_k son independientes, y también X_j y X_k son independientes.*

Más aún, los incrementos $X_1, X_2, \ldots$ son independientes, así como también lo son los incrementos $Y_1, Y_2, \ldots$.

Demostración. Sean $j \neq k$. Sabemos que si los vectores aleatorios (X_j, Y_j) y (X_k, Y_k) son independientes, entonces para cualesquiera par de borelianos $A, B \subset \mathbb{R}^2$ se tiene que

$$\mathbb{P}((X_j, Y_j) \in A, (X_k, Y_k) \in B) = \mathbb{P}\left((X_j, Y_j) \in A\right) \mathbb{P}((X_k, Y_k) \in B).$$

Sean A_1 y B_1 cualesquiera dos borelianos de $\mathbb{R}$. Entonces definimos a los borelianos de $\mathbb{R}^2$ A y B de la siguiente manera: $A = \mathbb{R} \times A_1$ y $B = \mathbb{R} \times B_1$. En consecuencia, tenemos las siguientes igualdades

$$\mathbb{P}(Y_j \in A_1, Y_k \in B_1) = \mathbb{P}((X_j, Y_j) \in A, (X_k, Y_k) \in B)$$

$$= \mathbb{P}((X_j, Y_j) \in A)\mathbb{P}((X_k, Y_k) \in B) = \mathbb{P}(Y_j \in A_1)\mathbb{P}(Y_k \in B_1).$$

Como esto se cumple para cualesquiera borelianos A_1 y B_1 de $\mathbb{R}$ se concluye que Y_j y Y_k son independientes. De manera análoga se demuestra que X_j y X_k son independientes.

Observemos que con el mismo método empleado anteriormente, se puede demostrar la independencia de cualquier subconjunto finito de incrementos; de este modo, obtenemos que los incrementos $X_1, X_2, \ldots$ son independientes, de manera análoga se cumple que $Y_1, Y_2, \ldots$ son independientes. □

Con el resultado anterior tenemos todas las hipótesis necesarias para que $\tau(t) = \text{mín}\{n : V_n > t\}$ cumpla el Lema del Sandwich (Lema 3.2.1), la LFGN para el primer tiempo de arribo (Teorema 3.3.1) y si además $0 < VarY_1 < \infty$ entonces también se cumple el TCL para el primer tiempo de arribo (Teorema 3.5.1). Para formalizar ésto, tenemos el siguiente Lema.

Lema 4.2.2. *Sea $\{(U_n, V_n), n \geq 1\}$ una caminata aleatoria de dos dimensiones con incrementos i.i.d. (X_k, Y_k), $k \geq 1$ tal que $0 < \mu_2 = \mathbb{E}(Y) < \infty$ y $\tau(t) = \text{mín}\{n : V_n > t\}$, $t > 0$; entonces se cumplen*

i) Lema del Sándwich para V_n

$$t < V_{\tau(t)} \leq t + Y_{\tau(t)} = t + Y_\tau(t)^+.$$

ii) Si además se tiene que $\mathbb{E}|Y_1| < \infty$ entonces se cumple

$$\tau(t) \xrightarrow{c.s.} \infty$$

iii) Si además se tiene que $\mathbb{E}|Y_1| < \infty$ entonces se cumple la LFGN para el primer tiempo de arribo asociado a V

$$\frac{\tau(t)}{t} \xrightarrow{c.s.} \frac{1}{\mu_2} \quad \textit{cuando } t \to \infty.$$

iv) Si además $0 < \sigma_2^2 = VarY_1 < \infty$, entonces se cumple el TCL para el primer tiempo de arribo asociado a V.

$$\frac{\tau(t) - \frac{t}{\mu_2}}{\sqrt{\frac{\sigma_2^2 t}{\mu_2^3}}} \xrightarrow{d} N(0,1) \quad si \quad t \to \infty.$$

Demostración. *(i)* . El Lema 4.2.1 nos permite saber que las variables aleatorias $Y_1, Y_2, \ldots$ son i.i.d. y como por hipótesis tenemos que $0 < \mu_2 = \mathbb{E}(Y) < \infty$ y $\tau(t) = \text{mín}\{n : V_n > t\}$, entonces se cumple el Lema del Sandwich (Lema 3.2.1) para la familia $\{Y_k, k \geq 1\}$ y $V_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ con tiempo de paro $\tau(t)$.

(ii) Por lo explicado en el inciso anterior junto con la hipótesis de que $\mathbb{E}|Y_1| < \infty$, entonces se cumple el Lema 3.3.1, con lo que se llega al resultado.

(iii) Puesto que tenemos las mismas hipótesis que en el inciso anterior, se cumple el Teorema 3.3.1.

(iv) Debido a que $0 < \sigma_2^2 = VarY < \infty$ y a que tenemos que $Y_1, Y_2, \ldots$ son i.i.d., $0 < \mu_2 = \mathbb{E}(Y) < \infty$, $V_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ y $\tau(t) = \text{mín}\{n : V_n > t\}$, entonces, por TCL para el primer tiempo de arribo (Teorema 3.5.1) aplicado a $\tau(t)$ obtenemos el resultado deseado. □

4.3. LFGN para Caminatas Aleatorias Bidimensionales

Como ya se dijo, lo que nos interesa analizar es la caminata aleatoria unidimensional

$$\{U_{\tau(t)}, t \geq 0\}$$

pero cuando $\tau(t)$ es el primer tiempo de arribo asociado a V.

Ahora procederemos a demostrar la LFGN para el proceso $\{U_{\tau(t)}, t \geq 0\}$.

Teorema 4.3.1 (LFGN para c.a. bidimensionales.)**.** *Sea $\{(U_n, V_n), n \geq 1\}$ una caminata aleatoria de dos dimensiones con incrementos i.i.d. (X_k, Y_k), $k \geq 1$ tal que $0 < \mu_2 = \mathbb{E}(Y) < \infty$, $\mu_1 = \mathbb{E}(X) < \infty$, $\mathbb{E}|X| < \infty$ y $\mathbb{E}|Y| < \infty$. Sea $\tau(t)$ el proceso del primer tiempo de arribo asociado a V, entonces*

$$\frac{U_{\tau(t)}}{t} \xrightarrow{c.s.} \frac{\mu_1}{\mu_2} \quad cuando \quad t \to \infty.$$

Demostración. Por el Lema 4.2.2 *ii)* y *iii)* se cumple

$$\tau(t) \xrightarrow{c.s.} \infty \tag{4.1}$$
$$\frac{\tau(t)}{t} \xrightarrow{c.s.} \frac{1}{\mu_2}. \tag{4.2}$$

Recordemos que el Lema 4.2.1 nos asegura que las variables aleatorias $X_1, X_2, \ldots$ son i.i.d. Utilizando esto, las hipótesis de que $\mu_1 = \mathbb{E}(X) < \infty$ y $\mathbb{E}|X| < \infty$ y los resultados (4.1) y (4.2) podemos emplear la LFGN para Sumas Aleatorias (Teorema 2.3.1 *(iii)*) a la caminata aleatoria $U_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ y al conjunto aleatorio de indices $\tau(t)$, obteniendo así

$$\frac{U_{\tau(t)}}{t} \xrightarrow{c.s.} \frac{\mu_1}{\mu_2} \tag{4.3}$$

con lo que se concluye la prueba. □

4.4. TCL para caminatas aleatorias bidimensionales

En esta sección demostraremos el TCL para caminatas aleatorias bidimensionales; es decir, cuando el proceso $\{U_{\tau(t)}, t \geq 0\}$ de una caminata aleatoria $\{(U_k, V_k), k \geq 1\}$ es condicionado por el índice aleatorio $\tau(t) = \min\{n : V_n > t\}$. Para demostrarlo, nuevamente utilizaremos el *método SRW*.

Lema 4.4.1. *Sea $\{(U_n, V_n), n \geq 1\}$ una caminata aleatoria de dos dimensiones con incrementos i.i.d. (X_k, Y_k), $k \geq 1$ tal que $0 < \mu_2 = \mathbb{E}(Y) < \infty$ y $\mu_1 = \mathbb{E}(X) < \infty$. Sea $\tau(t)$ el proceso del primer tiempo de arribo asociado a V y también supongamos que $\sigma_1^2 = VarX < \infty$, $0 < \sigma_2^2 = VarY < \infty$ y que*

$$\gamma^2 = Var(\mu_2 X - \mu_1 Y) > 0.$$

Si $S_n = \mu_2 U_n - \mu_1 V_n$, entonces

$$\frac{S_{\tau(t)}}{\gamma\sqrt{\frac{1}{\mu_2}t}} \xrightarrow{d} N(0,1) \quad si \quad t \to \infty.$$

Demostración. Si definimos a la función $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ con regla de correspondencia $h(x, y) = \mu_1 x + \mu_2 y$ entonces h es una función Borel medible, y como por hipótesis $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \ldots$ es una familia bidimensional de variables aleatorias independientes entonces el Teorema 1.3.3 nos indica que $h(X_1, Y_1), h(X_2, Y_2), \ldots$ también es una familia de v.a. independientes. Adicionalmente, son idénticamente distribuidas, es decir los incrementos

$$\mu_2 X_1 - \mu_1 Y_1, \mu_2 X_2 - \mu_1 Y_2, \ldots \quad \textit{son i.i.d.} \tag{4.4}$$

Entonces construimos para cada $n \geq 1$ la caminata aleatoria $S_n = \mu_2 U_n - \mu_1 V_n$. Así nuestra caminata aleatoria tiene incrementos $\mu_2 X_k - \mu_1 Y_k$ i.i.d. Sea $k \geq 1$ un natural cualquiera, se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\mu_2 X_k - \mu_1 Y_k) &= \mathbb{E}(\mu_2 X_k) - \mathbb{E}(\mu_1 Y_k) = \mu_2 \mathbb{E}(X_k) - \mu_1 \mathbb{E}(Y_k) \\ &= \mu_2 \mu_1 - \mu_1 \mu_2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

es decir

$$\mathbb{E}(\mu_2 X_k - \mu_1 Y_k) = 0. \tag{4.5}$$

Por otro lado, como $\sigma_1^2, \sigma_2^2 < \infty$ entonces por la desigualdad de Cauchy-Schwartz (Teorema 1.3.1) se cumple que

$$\mathbb{E}(XY) \leq \sqrt{\mathbb{E}(X^2) \cdot \mathbb{E}(Y^2)}. \tag{4.6}$$

Adicionalmente recordemos que como $0 \leq X^2$, entonces $0 \leq \mathbb{E}(X^2)$; y también recordemos que $\mathbb{E}(X^2) = \sigma^2 + \mathbb{E}(X)^2$. Debido a que ambos sumandos son finitos, entonces $\mathbb{E}(X^2) < \infty$. Por lo tanto

$$0 \leq \mathbb{E}(X^2) < \infty \tag{4.7}$$

análogamente

$$0 \leq \mathbb{E}(Y^2) < \infty \tag{4.8}$$

por lo tanto de (4.6) se sigue que

$$\mathbb{E}(XY) < \infty. \tag{4.9}$$

Por otro lado tenemos que

$$\begin{aligned}Var(\mu_2 X_k - \mu_1 Y_k) =& \mathbb{E}\left[(\mu_2 X_k - \mu_1 Y_k)^2\right] - \mathbb{E}^2(\mu_2 X_k - \mu_1 Y_k)\\ =&\mathbb{E}(\mu_2^2 X_k^2 + \mu_1^2 Y_k^2 - 2\mu_2\mu_1 X_k Y_k) - [\mu_2\mathbb{E}(X_k) - \mu_1\mathbb{E}(Y_k)]^2\\ =&\mu_2^2\mathbb{E}(X_k^2) + \mu_1^2\mathbb{E}(Y_k^2) - 2\mu_2\mu_1\mathbb{E}(X_k Y_k) - \mu_2^2\mu_1^2 - \mu_1^2\mu_2^2\\ &+ 2\mu_1^2\mu_2^2\\ =&\mu_2^2\mathbb{E}(X_k^2) + \mu_1^2\mathbb{E}(Y_k^2) - 2\mu_2\mu_1\mathbb{E}(X_k Y_k)\end{aligned}$$

puesto que $\mu_1, \mu_2 < \infty$ y por (4.7), (4.8) y (4.9) todos los sumandos anteriores son finitos, por lo tanto concluimos que

$$\gamma^2 = Var(\mu_2 X_k - \mu_1 Y_k) < \infty,$$

pero por hipótesis también sabemos que

$$\gamma^2 = Var(\mu_2 X_k - \mu_1 Y_k) > 0$$

por lo tanto

$$0 < \gamma^2 = Var(\mu_2 X_k - \mu_1 Y_k) < \infty. \tag{4.10}$$

Por último, debido a que $0 < \sigma_2^2 < \infty$, el Lema 1.3.1 nos asegura que $\mathbb{E}|Y_1| < \infty$. Esto junto con las hipótesis que ya tenemos en este Teorema nos permite emplear el Lema 4.2.2(iii), el cuál nos indica que

$$\frac{\tau(t)}{t} \xrightarrow{c.s.} \frac{1}{\mu_2} \text{ si } t \to \infty.$$

De la anterior convergencia, utilizando el Lema 1.3.3.*ii* podemos concluir que

$$\frac{\tau(t)}{t} \xrightarrow{P} \frac{1}{\mu_2} \text{ si } t \to \infty \tag{4.11}$$

donde evidentemente $\frac{1}{\mu_2} \in (0, \infty)$.

Ahora bien, (4.5), (4.10), (4.4) y (4.11) en su conjunto forman las hipótesis del Teorema 2.4.1.*ii* que podemos emplear a la caminata aleatoria $S_n = \sum_{k=1}^n \mu_2 X_k - \mu_1 Y_k$; por lo que obtenemos la siguiente convergencia

$$\frac{S_{\tau(t)}}{\gamma\sqrt{\frac{1}{\mu_2}t}} \xrightarrow{d} N(0,1) \text{ si } t \to \infty$$

lo que concluye la prueba. $\square$

Ahora demostremos un lema más.

Lema 4.4.2. *Sea* $\{V_n, n \geq 1\}$ *una caminata aleatoria con incrementos i.i.d.* $Y_1, Y_2, \ldots$ *tal que* $0 < \mu_2 = \mathbb{E}(Y_1) < \infty$ *y* $0 < \sigma_2^2 = VarY_1 < \infty$*. También supongamos que* $\tau(t)$ *es el proceso del primer tiempo de arribo asociado a* V*, entonces*

$$\frac{V_{\tau(t)} - t}{\sqrt{t}} \xrightarrow{c.s.} 0.$$

Demostración. Debido a que $0 < \mu_2 < \infty$, se cumple

$$\mathbb{E}|Y|^2 = \mathbb{E}(Y^2) = \sigma_2^2 + \mu_2^2 < \infty. \tag{4.12}$$

Además, debido a que $0 < \sigma_2^2 < \infty$ el Corolario 1.3.1 nos asegura que $\mathbb{E}|Y_1| < \infty$, con esto podemos emplear el Lema 4.2.2.*ii* y .*iii*, para obtener

$$\tau(t) \xrightarrow{c.s.} \infty. \tag{4.13}$$

$$\frac{\tau(t)}{t} \xrightarrow{c.s.} \frac{1}{\mu_2} \tag{4.14}$$

Las hipótesis de este lema junto con los resultados (4.12), (4.13) y (4.14) nos permiten emplear el Teorema 2.3.2.*ii*, obteniendo así

$$\frac{Y_{\tau(t)}}{\sqrt{t}} \xrightarrow{c.s} 0. \tag{4.15}$$

Por otro lado, gracias al Lema 4.2.2.*i*, sabemos que $\tau(t) = \min\{n : V_n > t\}$ cumple el Lema del Sandwich (Lema 3.2.1), por lo tanto

$$t < V_{\tau(t)} \leq t + Y_{\tau(t)}.$$

Si $t > 0$ lo anterior nos implica que

$$0 < \frac{V_{\tau(t)} - t}{\sqrt{t}} \leq \frac{Y_{\tau(t)}}{\sqrt{t}}. \tag{4.16}$$

En (4.15) existe un conjunto $A \subset \Omega$ donde $\mathbb{P}(A) = 0$ y tal que para toda $\omega \in \Omega \setminus A$ se cumple que

$$\frac{Y_{\tau(t,\omega)}(\omega)}{\sqrt{t}} \to 0. \tag{4.17}$$

Escogemos una $\omega \in \Omega \setminus A$, entonces en la ecuación (4.16) tendríamos

$$0 < \frac{V_{\tau(t,\omega)}(\omega) - t}{\sqrt{t}} \leq \frac{Y_{\tau(t,\omega)}(\omega)}{\sqrt{t}}.$$

Al sacar límite cuando t tiende a infinito, de (4.17) se sigue

$$0 \leq \lim_{t\to\infty} \frac{V_{\tau(t,\omega)}(\omega) - t}{\sqrt{t}} \leq \lim_{t\to\infty} \frac{Y_{\tau(t,\omega)}(\omega)}{\sqrt{t}} = 0.$$

Como esto ocurre para toda ω fuera de un conjunto del conjunto A que tiene probabilidad cero, concluimos que

$$\frac{V_{\tau(t)} - t}{\sqrt{t}} \xrightarrow{c.s.} 0.$$

□

Por último, el resultado más fuerte de este trabajo.

Teorema 4.4.1 (TCL para c.a. bidimensionales). *Sea* $\{(U_n, V_n), n \geq 1\}$ *una caminata aleatoria de dos dimensiones con incrementos i.i.d.* $(X_k, Y_k),\ k \geq 1$ *tal que* $0 < \mu_2 = \mathbb{E}(Y) < \infty$ *y* $\mu_1 = \mathbb{E}(X) < \infty$*. Sea* $\tau(t)$ *el proceso del primer tiempo de arribo asociado a* V *y también supongamos que* $\sigma_1^2 = VarX < \infty$, $0 < \sigma_2^2 = VarY < \infty$*, además*

$$\gamma^2 = Var(\mu_2 X - \mu_1 Y) > 0,$$

entonces

$$\frac{U_{\tau(t)} - \frac{\mu_1}{\mu_2}t}{\gamma\mu_2^{-3/2}\sqrt{t}} \xrightarrow{d} N(0,1) \quad \textit{cuando} \quad t \to \infty$$

Demostración. Si para cada $n \geq 1$ construimos la caminata aleatoria $S_n = \mu_2 U_n - \mu_1 V_n$, donde $U_n = \sum_{k=1}^n X_k$ y $V_n = \sum_{k=1}^n Y_k$, entonces el Lema 4.4.1 nos indica que

$$\frac{S_{\tau(t)}}{\gamma\sqrt{\frac{1}{\mu_2}t}} \xrightarrow{d} N(0,1) \quad \textit{si} \quad t \to \infty$$

pero $S_n = \mu_2 U_n - \mu_1 V_n$, entonces tenemos

$$\begin{aligned}\frac{S_{\tau(t)}}{\gamma\sqrt{\frac{1}{\mu_2}t}} &= \frac{\mu_2 U_{\tau(t)} - \mu_1 V_{\tau(t)}}{\gamma\sqrt{\frac{t}{\mu_2}}}\\ &= \frac{\mu_2 U_{\tau(t)} - t\mu_1}{\gamma\sqrt{\frac{t}{\mu_2}}} - \frac{\mu_1 V_{\tau(t)} - t\mu_1}{\gamma\sqrt{\frac{t}{\mu_2}}} \xrightarrow{d} N(0,1).\end{aligned}$$

Reescribiendo la última igualdad haciendo un poco de álgebra obtenemos

$$\frac{U_{\tau(t)} - t\frac{\mu_1}{\mu_2}}{\gamma\left(\frac{1}{\mu_2}\sqrt{\frac{t}{\mu_2}}\right)} - \frac{\mu_1\sqrt{\mu_2}}{\gamma}\left(\frac{V_{\tau(t)} - t}{\sqrt{t}}\right) \xrightarrow{d} N(0,1) \tag{4.18}$$

pero el Lema 4.4.2 nos dice que

$$\frac{V_{\tau(t)} - t}{\sqrt{t}} \xrightarrow{c.s.} 0$$

por lo que

$$\frac{\mu_1\sqrt{\mu_2}}{\gamma}\left(\frac{V_{\tau(t)} - t}{\sqrt{t}}\right) \xrightarrow{c.s} 0.$$

De lo anterior, con ayuda del Lema 1.3.3.ii obtenemos que

$$\frac{\mu_1\sqrt{\mu_2}}{\gamma}\left(\frac{V_{\tau(t)} - t}{\sqrt{t}}\right) \xrightarrow{P} 0. \tag{4.19}$$

De acuerdo con (4.18), (4.19) y el Lema de Slutsky (Lema 1.3.4) podemos asegurar que

$$\begin{aligned}&\frac{U_{\tau(t)} - t\frac{\mu_1}{\mu_2}}{\gamma\left(\frac{1}{\mu_2}\sqrt{\frac{t}{\mu_2}}\right)} - \frac{\mu_1\sqrt{\mu_2}}{\gamma}\left(\frac{V_{\tau(t)} - t}{\sqrt{t}}\right)\\ &\qquad + \frac{\mu_1\sqrt{\mu_2}}{\gamma}\left(\frac{V_{\tau(t)} - t}{\sqrt{t}}\right)\\ &= \frac{U_{\tau(t)} - t\frac{\mu_1}{\mu_2}}{\gamma\left(\frac{1}{\mu_2}\sqrt{\frac{t}{\mu_2}}\right)} \xrightarrow{d} N(0,1).\end{aligned}$$

Lo que concluye la prueba.

$\square$

Capítulo 5

Algunas aplicaciones

En este capítulo vamos a explorar algunas de las aplicaciones que tiene la teoría que hemos desarrollado a lo largo de este trabajo. El resultado más fuerte que hasta ahora logramos fue el obtenido en el Teorema 4.4.1, por lo que las aplicaciones que aquí mencionaremos, tienen su base en el sustento teórico que nos proporciona dicho resultado.

Las aplicaciones que tiene el Teorema 4.4.1 pueden ser muchas, aquí sólo mencionaremos unas cuantas. Otras aplicaciones adicionales a las aquí explicadas pueden encontrarse en *Gut (2009)*.

5.1. Cromatografía

La cromatografía es una técnica para separar sustancias que se encuentran mezcladas. Consiste en pasar la mezcla que queremos separar (fase móvil) a través de una sustancia que se encuentra inmóvil (fase estacionaria) a lo largo de una columna. En este proceso se dan repetidos procesos de sorción y desorción de la fase móvil a lo largo de la fase estacionaria. Como cada componente de la mezcla tiene un comportamiento distinto ante la fase estacionaria, sus procesos de sorción y desorción son distintos. Por lo que cada componente llega al final de la columna a diferente tiempo. De este modo, los componentes de la mezcla quedan separados.

5.1.1. El proceso estocástico cromatográfico

Para entender la cromatografía como un proceso estocástico, vemos al proceso cromatográfico como un proceso repetido de sorción-desorción, en donde el tiempo en que una partícula pasa en un estado, primero sorción (o fase móvil) es independiente del tiempo que pasa en el estado de desorción (o fase estacionaria). Análogamente el tiempo que la partícula permanece en la fase móvil (estacionaria) es independiente una de otra. Se empieza contando el tiempo al inicio de la fase móvil.

Con esto en mente, nombramos a las siguientes variables aleatorias

- X_k: tiempo durante el cual la molécula avanza por k-ésima vez, es decir, el tiempo en que la molécula permanece en la k-ésima fase móvil, para $k = 1, 2, 3, \ldots$.
- $\{X_k, k \geq 1\}$, es la familia de variables aleatorias que representa el tiempo en que la molécula permanece en la fase móvil.
- Y_k: tiempo durante el cual la molécula permanece en reposo por k-ésima vez, es decir, el tiempo que la molécula permanece en la k-ésima fase estacionaria, para $k = 1, 2, 3, \ldots$.
- $\{Y_k, k \geq 1\}$, es la familia de variables aleatorias que representa el tiempo en que la molécula permanece en la fase estacionaria.

Podemos suponer que los tiempos en que la partícula pasa en cada fase móvil (estacionaria) son independientes, es decir las familias

$$\{X_n\} \text{ son i.i.d.} \quad \text{y} \quad \{Y_n\} \text{ son i.i.d.} \tag{5.1}$$

También vamos a suponer que los tiempos de sorción y desorción son independientes, por lo que se cumple

$$X_k \perp Y_k \quad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{5.2}$$

Observemos también que este modelo sólo admite variables aleatorias positivas, es decir

$$X_k, Y_k > 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{5.3}$$

Sea

$$T_n = (X_1 + Y_1) + (X_2 + Y_2) + \cdots + (X_n + Y_n) \tag{5.4}$$

Observemos que al tiempo T_n el proceso ha tenido n periodos de avance y n periodos de estacionareidad, es decir, T_n es el tiempo total transcurrido hasta la n-ésima etapa de estabilidad (contando también el tiempo en que la molécula permanece en las n etapas previas de movilidad).

Como se dijo anteriormente, los tiempos $(X_1 + Y_1), (X_2 + Y_2), \ldots$ son independientes. Sea

$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n \tag{5.5}$$

S_n es el tiempo transcurrido durante n visitas de la molécula a la fase móvil.

Supongamos ahora que la velocidad longitudinal de la partícula en la fase móvil es una constante v, entonces

$$v \cdot S_n = v(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) \tag{5.6}$$

es la distancia longitudinal recorrida por la molécula cuando viaja por un tiempo T_n.

Ahora definamos al proceso del primer tiempo de arribo asociado a T:

$$\tau(t) = \text{mín}\{n : T_n > t\} \tag{5.7}$$

$\tau(t)$ representa el número de visitas que hace la molécula a cada ciclo de fases móvil-estacionaria cuando ha transcurrido el tiempo t.

La siguiente recta representa una posible muestra de la distribución de T_n.

En la gráfica anterior podemos ver que $\tau(t_1) = 1$, $\tau(t_2) = 2$ y $\tau(t_3) = 4$.

Ahora bien, si definimos

$$W_k = vX_k \tag{5.8}$$

$$Z_k = X_k + Y_k \tag{5.9}$$

Entonces de acuerdo con el Teorema 1.3.3 las familias $\{W_k, k \geq 1\}$ y $\{Z_k, k \geq 1\}$ son, cada una, i.i.d. Por lo que si definimos

$$U_n = \sum_{k=1}^{n} W_k = \sum_{k=1}^{n} vX_k = v \cdot S_n \tag{5.10}$$

$$V_n = \sum_{k=1}^{n} Z_k = \sum_{k=1}^{n} X_k + Y_k = T_n \tag{5.11}$$

entonces (U_n, V_n) es una caminata aleatoria bidimensional con incrementos i.i.d. (W_k, Z_k). Si además suponemos que $0 < \mu_z = \mathbb{E}(Z) < \infty$, $\mu_w = \mathbb{E}(W_1) < \infty$, $\sigma_w^2 = VarW_1 < \infty$, $\sigma_z^2 = VarZ_1 < \infty$ y

$$\gamma^2 = Var(\mu_z W_1 - \mu_w Z_1) > 0$$

y puesto que (5.7) nos indica que

$$\tau(t) = \text{mín}\{n : T_n > t\} = \text{mín}\{n : V_n > t\}.$$

A partir de ésto, por el TLC para c.a. bidimensionales (Teorema 4.4.1) se tiene que

$$\frac{v \cdot S_{\tau(t)} - \frac{\mu_w}{\mu_z} t}{\gamma \mu_z^{-3/2} \sqrt{t}} \xrightarrow{d} N(0,1) \quad \text{cuando} \quad t \to \infty. \tag{5.12}$$

Esto es una aproximación a la distribución Normal estándar de $v \cdot S_{\tau(t)}$, es decir, de la distancia longitudinal recorrida por la molécula cuando viaja por un tiempo T_n.

5.1.2. Aproximación a la distancia real

El resultado que logramos en (5.12) es una aproximación de la distancia longitudinal recorrida por la molécula cuando viaja por un tiempo T_n. En la práctica, conocer la distancia que recorre la molécula en el tiempo aleatorio T_n no nos es de mucha utilidad. Nosotros quisiéramos un resultado similar pero cuando la molécula ha viajado por un tiempo arbitrario $t > 0$.

Hay muchas ventajas para preferir trabajar con t que con T_n. Por ejemplo, t puede ser escogido a nuestro antojo en cualquier punto del intervalo $(0, \infty)$ y T_n al ser una caminata aleatoria, salta aleatoriamente sobre la recta. Por ejemplo, en la siguiente gráfica T_n presenta valores dados, mientras que t puede ser cualquier punto:

Con esto en mente, consideramos a la función $\alpha(t) : [0, \infty) \to [0, \infty)$ definida de la siguiente manera

$$\alpha(t) := \text{el tiempo total en que la molécula permanece en la fase móvil durante el intervalo } [0, t].$$

Si pudiéramos demostrar que $\alpha(t)$ y $S\tau(t)$ se encuentran muy cerca para valores grandes de t, entonces cuando $t > 0$ sea lo suficientemente grande, tendríamos que

$$S_{\tau(t)} :\approx \text{el tiempo en que la molécula permanece en la fase móvil durante el intervalo } [0,t].$$

Por lo tanto tendríamos

$$v \cdot S_{\tau(t)} :\approx \text{la distancia que la molécula recorre durante el intervalo } [0,t].$$

Para lograr un resultado que nos permita validar dichas aproximaciones, hay que probar la siguiente proposición.

Proposición 5.1.1. *Para cualquier* $t \in [0, \infty)$ *se cumple que*

$$0 \leq S\tau(t) - \alpha(t) \leq T_{\tau(t)} - t. \tag{5.13}$$

Demostración. Sea $t \in [0, \infty)$. Por definición $\tau(t) = \text{mín}\{n : T_n > t\}$, por lo que si $T_{\tau(t)-1} > t$, tendríamos que

$$\tau(t) \leq \tau(t) - 1$$

lo cual es una clara contradicción. De lo anterior se sigue que

$$T_{\tau(t)-1} \leq t < T_{\tau(t)}$$

por lo cual tenemos 3 casos que analizar.

Caso 1

$$T_{\tau(t)-1} + X_{\tau(t)} \leq t < T_{\tau(t)}. \tag{5.14}$$

La representación gráfica de (5.14) la podemos apreciar a continuación;

entonces se tiene que

$$\alpha(t) = S_{\tau(t)}$$

y de (5.14) se sigue que

$$0 < T_{\tau(t)} - t$$

por lo tanto

$$0 = S_{\tau(t)} - \alpha(t) \leq T_{\tau(t)} - t.$$

Caso 2

$$t = T_{\tau(t)-1} < T_{\tau(t)}. \tag{5.15}$$

La representación gráfica de (5.15) puede apreciarse en la siguiente recta.

En este caso se tiene que

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= S_{\tau(t)-1} = S_{\tau(t)} - X_{\tau(t)} \\ \Rightarrow \quad S_{\tau(t)} - \alpha(t) &= X_{\tau(t)}. \end{aligned} \tag{5.16}$$

Gracias a (5.3) sabemos que

$$X_{\tau(t)} \geq 0 \quad y \quad Y_{\tau(t)} \geq 0, \tag{5.17}$$

luego, como se cumple (5.15) y (5.17), entonces

$$T_{\tau(t)} - t = T_{\tau(t)} - T_{\tau(t)-1} = X_{\tau(t)} + Y_{\tau(t)} \geq X_{\tau(t)} \geq 0.$$

Usando (5.16) se concluye que

$$0 \leq S_{\tau(t)} - \alpha(t) \leq T_{\tau(t)} - t. \tag{5.18}$$

Caso 3

$$T_{\tau(t)-1} < t < T_{\tau(t)-1} + X_{\tau(t)}.$$

Lo anterior podemos verlo en la siguiente gráfica.

En este caso existe un real θ tal que $0 < \theta \leq 1$ con la propiedad de que

$$t = T_{\tau(t)-1} + \theta X_{\tau(t)} \tag{5.19}$$

$$\Rightarrow \quad \alpha(t) = S_{\tau(t)-1} + \theta X_{\tau(t)} \tag{5.20}$$

entonces

$$\begin{aligned} T_{\tau(t)} - t =& T_{\tau(t)} - (T_{\tau(t)-1} + \theta X_{\tau(t)}) \\ =& (T_{\tau(t)-1} + X_{\tau(t)} + Y_{\tau(t)}) - (T_{\tau(t)-1} + \theta X_{\tau(t)}) \\ =& Y_{\tau(t)} + X_{\tau(t)} - \theta X_{\tau(t)} \\ &\geq X_{\tau(t)} - \theta X_{\tau(t)} \\ =& (S_{\tau(t)-1} + X_{\tau(t)}) - (S_{\tau(t)-1} + \theta X_{\tau(t)}) \\ =& S_{\tau(t)} - \alpha(t) \\ =& S_{\tau(t)-1} + X_{\tau(t)} - \alpha(t) \\ &\geq S_{\tau(t)-1} + \theta X_{\tau(t)} - \alpha(t) = 0 \end{aligned}$$

donde la última igualdad se debe a (5.20). Por lo tanto

$$0 \leq S_{\tau(t)} - \alpha(t) \leq T_{\tau(t)} - t$$

Y así queda demostrada la proposición.

$\square$

Con base en nuestro anterior resultado, si $t > 0$ de la Proposición 5.1.1 se llega a que

$$0 \leq \frac{S_{\tau(t)} - \alpha(t)}{\sqrt{t}} \leq \frac{T_{\tau(t)} - t}{\sqrt{t}} \tag{5.21}$$

De acuerdo con (5.9) sabemos que $Z_1 = X_1 + Y_1, Z_2 = X_2 + Y_2, \ldots$ son v.a. i.i.d. y por (5.11) y (5.4) $V_n = \sum_{k=1}^{n} Z_k = \sum_{k=1}^{n} X_k + Y_k = T_n$. Como supusimos $0 < \mu_z < \infty$, $\sigma_z^2 < \infty$ y por (5.7) $\tau(t) = \text{mín}\{n : T_n > t\} = \text{mín}\{n : V_n > t\}$, entonces el Lema 4.4.2 afirma que

$$\frac{T_{\tau(t)} - t}{\sqrt{t}} \xrightarrow{c.s.} 0. \tag{5.22}$$

Conjuntando los resultados de (5.21) y (5.22) se concluye que

$$\frac{S_{\tau(t)} - \alpha(t)}{\sqrt{t}} \xrightarrow{c.s.} 0,$$

lo cual, utilizando el Lema 1.3.3.*ii* nos permite obtener

$$\frac{S_{\tau(t)} - \alpha(t)}{\sqrt{t}} \xrightarrow{P} 0, \tag{5.23}$$

multiplicando por la constante $-v/\gamma\mu_z^{-3/2}$ obtenemos

$$\frac{v \cdot \alpha(t) - v \cdot S_{\tau(t)}}{\gamma\mu_z^{-3/2}\sqrt{t}} \xrightarrow{p} 0. \tag{5.24}$$

Utilizando (5.12), (5.24) y el lema de Slutsky (Lema 1.3.4) obtenemos

$$\frac{v \cdot S_{\tau(t)} - \frac{\mu_w}{\mu_z}t}{\gamma\mu_z^{-3/2}\sqrt{t}} + \frac{v \cdot \alpha(t) - v \cdot S_{\tau(t)}}{\gamma\mu_z^{-3/2}\sqrt{t}}$$

$$= \frac{v \cdot \alpha(t) - \frac{\mu_w}{\mu_z}t}{\gamma\mu_z^{-3/2}\sqrt{t}} \xrightarrow{d} N(0,1) \quad \textit{cuando} \;\; t \to \infty. \tag{5.25}$$

Lo que obtenemos en (5.25) es una aproximación a la distribución Normal estándar de $v \cdot \alpha(t)$, que precisamente es la distancia exacta que recorre la partícula en el intervalo de tiempo $[0, t]$.

5.1.3. Distribución exponencial de las fases

La distribución exponencial se utiliza para medir el tiempo que transcurre entre dos sucesos, por lo tanto, tal como hemos descrito el proceso estocástico cromatográfico en 5.1.1, las distribuciones que mejor se adaptan al comportamiento de las familias de variables aleatorias $\{X_k, k \geq 1\}$ i.i.d. y $\{Y_k, k \geq 1\}$ i.i.d. son las distribuciones exponenciales. Supongamos entonces que

$$X_1 \sim exp(\mu) \qquad Y_1 \sim exp(\lambda)$$

para algunos $\mu, \lambda > 0$. Para simplificar la notación, sean X y Y v.a. tales que

$$X \sim exp(\mu) \qquad Y \sim exp(\lambda)$$

Observemos también que, por (5.2)

$$X \perp Y$$

por lo que

$$Cov(X, Y) = 0,$$

y de (5.8) y (5.9) tenemos que

$$\begin{aligned} 0 < \mu_z = \mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(X+Y) &= \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\lambda} \\ &= \frac{\mu + \lambda}{\mu\lambda} < \infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 < \mu_w = \mathbb{E}(W) &= \mathbb{E}(v \cdot X) \\ &= \frac{v}{\mu} < \infty \end{aligned}$$

y también tenemos que

$$\begin{aligned}
Var(Z) =& Var(X+Y) = Var(X) + Var(y) + \\
&+ 2Cov(X,Y) = \frac{1}{\mu^2} + \frac{1}{\lambda^2} \\
=& \frac{\mu^2+\lambda^2}{\mu^2\lambda^2} < \infty.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Var(W) =& Var(v \cdot X) \\
=& \frac{v^2}{\mu^2} < \infty.
\end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}
Cov(\mu_z W, \mu_w Z) &= \mu_z\mu_w Cov(W,Z) = \mu_z\mu_w Cov(v\cdot X, X+Y) \\
&= v\mu_z\mu_w Cov(X, X+Y) = v\mu_z\mu_w(Cov(X,X) + Cov(X,Y)) \\
&= v\mu_z\mu_w Var(X) = v \cdot \frac{\mu+\lambda}{\mu\lambda} \cdot \frac{v}{\mu} \cdot \frac{1}{\mu^2} \\
&= \frac{v^2(\mu+\lambda)}{\mu^4\lambda}
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}
\gamma^2 &= Var(\mu_z W - \mu_w Z) = \mu_z^2 Var(W) + \mu_w^2 Var(Z) - 2Cov(\mu_z W, \mu_w Z) \\
&= \frac{(\mu+\lambda)^2}{\mu^2\lambda^2} \cdot \frac{v^2}{\mu^2} + \frac{v^2}{\mu^2} \cdot \frac{\mu^2+\lambda^2}{\mu^2\lambda^2} - 2\frac{v^2(\mu+\lambda)}{\mu^4\lambda} \\
&= \frac{v^2(\mu+\lambda)^2}{\mu^4\lambda^2} + \frac{v^2(\mu^2+\lambda^2)}{\mu^4\lambda^2} - 2\frac{v^2(\mu+\lambda)}{\mu^4\lambda} \\
&= \frac{v^2\mu^2 + 2v^2\mu\lambda + v^2\lambda^2 + v^2\mu^2 + v^2\lambda^2 - 2v^2\mu\lambda - 2v^2\lambda^2}{\mu^4\lambda^2} \\
&= \frac{2v^2}{\mu^2\lambda^2} > 0,
\end{aligned}$$

entonces tenemos todas las hipótesis para (5.25), por lo que

$$\frac{v\cdot\alpha(t) - \frac{v\lambda t}{\lambda+\mu}}{\sqrt{\frac{2v^2\mu\lambda t}{(\mu+\lambda)^3}}} \xrightarrow{d} N(0,1) \quad \textit{cuando} \;\; t \to \infty \tag{5.26}$$

es decir, tenemos que la distancia que recorre la molécula en un tiempo t converge en distribución a una normal con media $\frac{v\lambda t}{\lambda+\mu}$ y varianza $\frac{2v^2\mu\lambda t}{(\mu+\lambda)^3}$.

5.1.4. Tiempo necesario para recorrer la distancia L

Hasta ahora lo que hemos hecho nos sirve para conocer la distancia que recorre la partícula dentro de la columna cuando ha pasado un intervalo de tiempo $[0, t]$. Sin embargo es natural preguntarse ¿Cuánto tiempo debe pasar para que la partícula recorra toda la columna?.

Para responder esta pregunta, desarrollaremos una fórmula que nos permita conocer el tiempo requerido para que la molécula recorra una distancia $L > 0$. En particular, L puede ser igual a la longitud de la columna.

De acuerdo con (5.6)

$$v \cdot S_n = v(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$$

es la distancia longitudinal recorrida por la molécula cuando transcurre un tiempo T_n. Por lo que tiene sentido definir

$$V(L) = \min\{n : v \cdot S_n > L\} \tag{5.27}$$

que representa el número de visitas que hace la molécula a la fase móvil para recorrer una distancia fija $L > 0$.

Por ejemplo, sean $0 < L_1 < L_2$ dos distancias distintas y $v \cdot S_1, v \cdot S_2, \ldots$ las v.a. definidas en (5.6) tal como se muestran en la gráfica siguiente

entonces tendríamos que $V(L_1) = 2$ y $V(L_2) = 4$.

De acuerdo con (5.27) tenemos que

$$T_{V(L)} = (X_1 + Y_1) + (X_2 + Y_2) + \cdots + (X_{V(L)} + Y_{V(L)})$$

Al tiempo $T_{V(L)}$ el proceso ha tenido $V(L)$ periodos de avance y $V(L)$ periodos de estacionareidad, pero precisamente $V(L)$ periodos de avance es el mínimo número de periodos que se requiere para recorrer la distancia $L > 0$. Por lo tanto

$$T_{V(L)} \quad \text{es el tiempo mínimo que la molécula necesita para recorrer la distancia } L.$$

Observemos que tenemos una caminata aleatoria bidimensional (T_n, vS_n). Debido a que las familias de v.a. $\{X_k, k \geq 1\}$ y $\{Y_k, k \geq 1\}$ son i.i.d., el Teorema 1.3.3 y a que $h_1(x, y) = x + y$, $h_2(x) = vx$ son funciones borel-medibles, entonces los incrementos dados por $(X_k + Y_k, vX_k)$ son i.i.d.

Utilizando la notación de (5.8), (5.9), (5.10) y (5.11) lo que tenemos es una caminata aleatoria bidimensional (V_n, U_n) con incrementos i.i.d. (Z_k, W_k).

Si nuevamente suponemos que las distribuciones de X_k, Y_k son independientes y exponenciales con parámetros μ, λ respectivamente, entonces por los resultados de la subsección 5.1.3 sabemos que

$$\mu_z = \frac{\mu + \lambda}{\mu\lambda}$$
$$\mu_w = \frac{v}{\mu} < \infty$$

$$Var(Z) = \frac{\mu^2 + \lambda^2}{\mu^2\lambda^2}$$
$$Var(W) = \frac{v^2}{\mu^2} < \infty$$

$$\begin{aligned} Var(\mu_w Z - \mu_z W) &= Var(\mu_z W - \mu_w Z) = \gamma^2 \\ &= \frac{2v^2}{\mu^2\lambda^2} \end{aligned}$$

De este modo, tenemos las hipótesis necesarias para el TCL para caminatas aleatorias bidimensionales (Teorema 4.4.1), el cual afirma que

$$\frac{T_{V(L)} - \frac{(\mu+\lambda)L}{v\lambda}}{\sqrt{\frac{2\mu L}{\lambda^2 v}}} \xrightarrow{d} N(0,1) \quad \textit{cuando} \;\; L \to \infty. \tag{5.28}$$

Esto es, el tiempo en que la molécula recorre la distancia L converge en distribución a una normal con media $\frac{(\mu+\lambda)L}{v\lambda}$ y varianza $\frac{2\mu L}{\lambda^2 v}$.

5.2. Movimiento del agua en un río

En los ríos, hay capas de agua que se agrupan por niveles, en donde cada una corre a velocidades distintas. Incluso puede haber una capa en donde el agua se queda estancada, es decir, que mantiene una velocidad nula.

En este modelo supondremos que a lo largo de todo el río hay dos niveles, el superior que avanza a una velocidad constante v (fase móvil) y el nivel inferior en donde el agua se queda estancada (fase estacionaria). También debemos de suponer que una determinada partícula se mueve de manera aleatoria entre las dos fases, permaneciendo en cada una de estas un tiempo aleatorio y positivo.

Con esto obtenemos que el tiempo en que una partícula permanece en cada fase es aleatorio, independiente y positivo. Las variables aleatorias que se ajustan a este modelo son, nuevamente, exponenciales.

Lo que obtenemos es una situación análoga a lo tratado en el proceso cromatográfico, por lo que si definimos

- $\{X_k, k \geq 1\}$, el tiempo en que la molécula permanece en la fase móvil.
- $\{Y_k, k \geq 1\}$, el tiempo en que la molécula permanece en la fase estacionaria.

Donde $\{X_k, k \geq 1\}$ y $\{Y_k, k \geq 1\}$ son dos familias de variables aleatorias i.i.d. con las siguientes distribuciones

$$X_k \sim exp(\mu) \ \text{ y } \ Y_k \sim exp(\lambda).$$

para algunas $\mu, \lambda > 0$.

Ya hemos dicho que la fase móvil tiene una velocidad constante $v > 0$. Definimos, análogo a la sección anterior a

$$\alpha(t) := \begin{array}{l} \text{el tiempo en que la molécula permanece en la fase} \\ \text{móvil durante el intervalo de tiempo } [0,t], \end{array}$$

entonces utilizando la notación de la Sección 5.1 y dado que se cumplen las hipótesis del Teorema 4.4.1, podemos emplear la fórmula obtenida en (5.26), con lo que se tiene

$$\frac{v \cdot \alpha(t) - \frac{v\lambda t}{\lambda+\mu}}{\sqrt{\frac{2v^2\mu\lambda t}{(\mu+\lambda)^3}}} \xrightarrow{d} N(0,1) \quad \textit{cuando} \ \ t \to \infty$$

es decir, la distancia que recorre la molécula a lo largo del río en un tiempo t converge en distribución a una normal con media $\frac{v\lambda t}{\lambda+\mu}$ y varianza $\frac{2v^2\mu\lambda t}{(\mu+\lambda)^3}$.

Así mismo, de acuerdo con (5.28) sabemos que

$$\frac{T_{V(L)} - \frac{(\mu+\lambda)L}{v\lambda}}{\sqrt{\frac{2\mu L}{\lambda^2 v}}} \xrightarrow{d} N(0,1) \quad \textit{cuando} \ \ L \to \infty$$

esto nos dice que el tiempo en que la molécula recorre la distancia longitudinal $L > 0$ a lo largo del río, converge en distribución a una normal con media $\frac{(\mu+\lambda)L}{v\lambda}$ y varianza $\frac{2\mu L}{\lambda^2 v}$. Aquí la distancia $L > 0$, bien podría ser la distancia que recorre el río para unir dos lagos.

Un estudio más detallado del movimiento de un río visto como proceso estocástico puede encontrarse en *Kaijser (1917)*.

5.3. Proceso de Renovación Alternativo

Podemos hacer una generalización de los dos procesos anteriores. Observemos que, en ambos casos, tenemos una caminata aleatoria bidimensional con incrementos $\{(X_k, Y_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ i.i.d, donde cada una de las dos familias de variables aleatorias $\{X_k, k \geq 1\}$ y $\{Y_k, k \geq 1\}$ son i.i.d. Ambas familias son definidas positivas, con esperanza finita y para cada $k \in \mathbb{N}$ se cumple que X_k y Y_k son independientes.

Lo que tenemos es un proceso estocástico con dos fases, digamos *fase 1* representado por la familia $\{X_k, k \geq 1\}$ y *fase 2* representado por la familia $\{Y_k, k \geq 1\}$. Cada tiempo aleatorio X_k, el proceso transita de la *fase 1* a la *fase 2* y cada tiempo aleatorio Y_k el proceso transita de la *fase 2* a la *fase 1*. Los tiempos aleatorios de transición ocurren de acuerdo a la siguiente secuencia:

$$X_1, X_1 + Y_1, X_1 + Y_1 + X_2, X_1 + Y_1 + X_2 + Y_2, \ldots \tag{5.29}$$

Este proceso es usualmente llamado *proceso de renovación alternativo*.

5.3.1. $\alpha(t)$ para el Proceso de Renovación

Lo que nos interesa saber es el tiempo en que el proceso permanece en alguna de las dos fases durante el intervalo de tiempo $[0, t]$. Siguiendo la notación que hasta ahora hemos utilizado, representamos por

$$\alpha(t) := \text{el tiempo en que el proceso permanece en la } \textit{fase 1} \\ \text{durante el intervalo de tiempo } [0, t].$$

. Definimos de acuerdo con (5.9), (5.11), (5.7), (5.4) y (5.5)

$$Z_k = X_k + Y_k$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$$

$$V_n = \sum_{k=1}^{n} Z_k = \sum_{k=1}^{n} X_k + Y_k = T_n$$

$$\tau(t) = \text{mín}\{n : T_n > t\} = \text{mín}\{n : V_n > t\} \;\; \text{si } t > 0.$$

Debido a que

$$0 < \mu_x = \mathbb{E}(X_1) < \infty,\; 0 < \mu_y = \mathbb{E}(Y_1) < \infty$$
$$0 < \sigma_x^2 = Var(X_1) < \infty,\; 0 < \sigma_y^2 = Var(Y_1) < \infty$$

entonces tenemos que

$$\begin{aligned} 0 < \mu_z = \mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(X+Y) = \\ = \mu_x + \mu_y < \infty \end{aligned}$$

y también

$$\begin{aligned} \sigma_z^2 = Var(Z) =& Var(X+Y) = Var(X) + Var(y) + \\ &+ 2Cov(X,Y) = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 < \infty. \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} Cov(\mu_z X, \mu_x Z) &= \mu_z \mu_x Cov(X,Z) = (\mu_x + \mu_y)\mu_x Cov(X, X+Y) \\ &= (\mu_x + \mu_y)\mu_x (Cov(X,X) + Cov(X,Y)) \\ &= (\mu_x + \mu_y)\mu_x \sigma_x^2 \end{aligned}$$

por lo que

$$\begin{aligned} \gamma_1^2 &= Var(\mu_z X - \mu_x Z) = \mu_z^2 Var(X) + \mu_x^2 Var(Z) - 2Cov(\mu_z X, \mu_x Z) \\ &= (\mu_x + \mu_y)^2 \sigma_x^2 + \mu_x^2(\sigma_x^2 + \sigma_y^2) - 2(\mu_x + \mu_y)\mu_x \sigma_x^2 \\ &= \mu_y^2 \sigma_x^2 + \mu_x^2 \sigma_y^2 > 0. \end{aligned}$$

Observemos que lo que se tiene es una c.a. bidimensional (S_n, V_n) con incrementos i.i.d. (X_k, Z_k). Puesto que se cumplen las hipótesis del TCL para c.a. bidimensionales (Teorema 4.4.1) entonces

$$\frac{S_{\tau(t)} - \frac{\mu_x}{\mu_z}t}{\gamma_1 \mu_z^{-\frac{3}{2}}\sqrt{t}} \xrightarrow{d} N(0,1) \quad \textit{cuando} \;\; t \to \infty. \tag{5.30}$$

Debido a lo expuesto en la subsección 5.1.2 se cumple la Proposición 5.1.1 y en consecuencia se llega a (5.23), es decir

$$\frac{S_{\tau(t)} - \alpha(t)}{\sqrt{t}} \xrightarrow{P} 0,$$

Multiplicando ambos lados por la constante $-1/\gamma_1 \mu_z^{-3/2}$,

$$\frac{\alpha(t) - S_{\tau(t)}}{\gamma_1 \mu_z^{-3/2}\sqrt{t}} \xrightarrow{P} 0$$

Sumando nuestro anterior resultado con (5.30) y utilizando el Lema de Slutsky (Lema 1.3.4) obtenemos

$$\frac{\alpha_{\tau(t)} - \frac{\mu_x}{\mu_z}t}{\gamma_1 \mu_z^{-3/2}\sqrt{t}} \quad = \quad \frac{\alpha_{\tau(t)} - \frac{\mu_x}{\mu_x+\mu_y}t}{\sqrt{\frac{(\mu_y^2\sigma_x^2+\mu_x^2\sigma_y^2)t}{(\mu_x+\mu_y)^3}}} \xrightarrow{d} N(0,1) \quad \textit{cuando} \;\; t \to \infty. \tag{5.31}$$

La ecuación (5.31) representa el tiempo en que el proceso permanece en la *fase 1* o dentro de la familia $\{X_k, k \geq 1\}$ durante el intervalo $[0,t]$.

Para saber el tiempo en que el proceso permanece en la *fase 2*, hay que definir

$$\begin{aligned} \beta(t) := & \text{ el tiempo en que el proceso permanece en la } \textit{fase 2} \\ & \text{ o dentro de la familia } \{Y_k, k \geq 1\}. \end{aligned}$$

Para conocer $\beta(t)$ basta darnos cuenta de que $\beta(t) = t - \alpha(t)$. Por lo que si queremos conocer $\beta(t)$ cuando t es grande, basta aproximar el valor de $\alpha(t)$ utilizando (5.31) y luego hacer la resta correspondiente.

5.3.2. $T_{N(t)}$ y $T_{M(t)}$

Así como lo hicimos en los procesos para modelar la cromatografía y el movimiento del agua en el río; ahora lo que nos interesa conocer es el tiempo que se necesita para que el proceso de renovación alternativo pase un tiempo fijo t en alguna de las dos fases.

Supongamos primero que queremos conocer el tiempo que se requiere para permanecer en la *fase 1* (el estado X_k) durante un tiempo fijo t.

Utilizaremos la misma notación que se empleó en la sección 5.1. Tenemos

$$Z_k = X_k + Y_k$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$$

$$V_n = \sum_{k=1}^{n} Z_k = \sum_{k=1}^{n} X_k + Y_k = T_n.$$

Ahora definamos

$$N(t) = \text{mín}\{n : S_n > t\}. \tag{5.32}$$

De este modo

$T_{N(t)}$ representa el tiempo que necesita correr el proceso para estar durante un tiempo t en la *fase 1*.

Observemos que tenemos una caminata aleatoria bidimensional (T_n, S_n) con incrementos i.i.d. dados por $(X_k + Y_k, X_k) = (Z_k, X_k)$.

Debido a los resultados obtenidos en 5.3.1 sabemos que

$$0 < \mu_x < \infty,\ 0 < \mu_y < \infty$$

$$0 < \sigma_x^2 < \infty,\ 0 < \sigma_y^2 < \infty$$

implican que

$$0 < \mu_z = \mu_x + \mu_y < \infty$$

$$Var(Z) = \sigma_x^2 + \sigma_y^2$$

$$\begin{aligned}
\gamma_1^2 &= Var(\mu_z X - \mu_x Z) = \gamma^2 \\
&= Var(\mu_x Z - \mu_z X) \\
&= \mu_y^2 \sigma_x^2 + \mu_x^2 \sigma_y^2 > 0.
\end{aligned}$$

Como tenemos todas las hipótesis para el TCL para la c.a. bidimensional (T_n, S_n) (Teorema 4.4.1) obtenemos

$$\frac{T_{N(t)} - \frac{\mu_x+\mu_y}{\mu_x}t}{\sqrt{\frac{(\mu_y^2\sigma_x^2+\mu_x^2\sigma_y^2)t}{\mu_x^3}}} \xrightarrow{d} N(0,1) \quad \text{cuando} \quad t \to \infty \tag{5.33}$$

El resultado anterior nos dice la distribución asintótica normal del tiempo que se necesita correr el proceso para estar durante un tiempo $t > 0$ en la *fase 1*.

Por otro lado, si definimos

$T_{M(t)}$ como el tiempo que necesitamos correr el proceso para estar durante un tiempo t en la *fase 2*.

De manera análoga a lo que ya hicimos, definamos

$$Z_k = X_k + Y_k$$

$$R_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k$$

$$V_n = \sum_{k=1}^{n} z_k = \sum_{k=1}^{n} X_k + Y_k = T_n.$$

$$M(t) = \text{mín}\{n : R_n > t\}$$

$$\gamma_2^2 = Var(\mu_y Z - \mu_z Y).$$

Lo que tenemos es una c.a. bidimensional (T_n, R_n) con incrementos i.i.d. (Z_n, Y_n). Procediendo de manera análoga se comprueba que cumple las hipótesis para el TCL para c.a. bidimensionales (Teorema 4.4.1) con lo que se concluye que la distribución asintótica normal de $T_{M(t)}$ está dada por

$$\frac{T_{M(t) - \frac{\mu_z}{\mu_y}t}}{\gamma_2 {\mu_y}^{-3/2}\sqrt{t}} = \frac{T_{M(t)} - \frac{\mu_x+\mu_y}{\mu_y}t}{\sqrt{\frac{(\mu_y^2\sigma_x^2+\mu_x^2\sigma_y^2)t}{\mu_y^3}}} \xrightarrow{d} N(0,1) \quad \text{cuando} \quad t \to \infty. \tag{5.34}$$

5.3.3. Tiempo para recorrer una distancia L

Cuando analizábamos los procesos cromatográficos y del movimiento de agua en un río, no nos interesaba realmente calcular el tiempo que se necesitaba correr los procesos para estar un tiempo t en las fases móviles. Lo que nos interesaba era saber cuánto tiempo había que dejar los procesos para recorrer una distancia fija L.

Si lo que tenemos es un proceso alternativo de renovación, tal que en la *fase 1* se avanza a una velocidad constante $v > 0$ y en la *fase 2* permanece detenido, análogo a lo que se ha definido en (5.8), (5.9), (5.10), (5.11), (5.4) y (5.5)

$$W_k = v \cdot X_k$$

$$Z_k = X_k + Y_k$$

$$U_n = \sum_{k=1}^{n} v \cdot X_k = v \cdot S_n$$

$$V_n = \sum_{k=1}^{n} z_k = \sum_{k=1}^{n} X_k + Y_k = T_n.$$

Puesto que $U_n = v \cdot S_n = v \cdot (X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$ es la distancia longitudinal recorrida por una partícula cuando transcurre un tiempo T_n (o V_n) en el procesode renovación alternativo, entonces tiene sentido definir

$$V(L) = \text{mín}\{n : v \cdot S_n > L\} = \text{mín}\{n : U_n > L\} \quad \text{si } L > 0. \tag{5.35}$$

Obtenemos así, una caminata aleatoria bidimensional (V_n, U_n) con incrementos i.i.d. (Z_k, W_k). Como ya se ha visto en las subsecciones anteriores se tiene

$$0 < \mu_w = v \cdot \mu_x < \infty \quad 0 < \mu_z = \mu_x + \mu_y < \infty$$

$$0 < \sigma_w^2 = v^2 \sigma_x^2 < \infty \quad 0 < \sigma_z^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 < \infty$$

$$\begin{aligned} Cov(\mu_z W, \mu_w Z) =& v \mu_z \mu_w \sigma_x^2 \\ =& v^2 \mu_x^2 \sigma_x^2 + v^2 \mu_y \mu_x \sigma_x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma^2 &= Var(\mu_w Z - \mu_z W) = \mu_z^2 \sigma_w^2 + \mu_w^2 \sigma_z^2 - 2Cov(\mu_z W, \mu_w Z) \\ &= \mu_y^2 \sigma_x^2 v^2 + v^2 \mu_x^2 \sigma_y^2 > 0. \end{aligned}$$

Como se cumplen las hipótesis para el TCL para c.a. bidimensionales (Teorema 4.4.1), al usarlo obtenemos

$$\frac{T_{V(L)} - \frac{\mu_z}{\mu_w} L}{\gamma \mu_w^{-3/2} \sqrt{L}} \quad = \quad \frac{T_{V(L)} - \frac{(\mu_x + \mu_y)L}{v \mu_x}}{\sqrt{\frac{(\mu_y^2 \sigma_x^2 + \mu_x^2 \sigma_y^2)L}{v \mu_x^3}}} \xrightarrow{d} N(0,1) \quad \textit{cuando} \;\; t \to \infty \tag{5.36}$$

Donde (5.36) representa la distribución asintótica normal de $T_{V(L)}$, es decir, del tiempo que debe dejarse correr el proceso para alcanzar la distancia $L > 0$.

Otra forma de llegar a (5.36) es considerar que para la distancia $L > 0$ existe un tiempo $t > 0$ tal que $L = vt$. De acuerdo con (5.32) tenemos

$$V(L) = \text{mín}\{n : vS_n > L = vt\} = \text{mín}\{n : S_n > t\} = N(t)$$

por lo que se cumple (5.33). Sustituyendo $t = \frac{L}{v}$ obtenemos

$$\frac{T_{N(t)} - \frac{\mu_x+\mu_y}{\mu_x}t}{\sqrt{\frac{(\mu_y^2\sigma_x^2+\mu_x^2\sigma_y^2)t}{\mu_x^3}}} = \frac{T_{V(L)} - \frac{(\mu_x+\mu_y)L}{v\mu_x}}{\sqrt{\frac{(\mu_y^2\sigma_x^2+\mu_x^2\sigma_y^2)L}{v\mu_x^3}}} \xrightarrow{d} N(0,1) \quad \textit{cuando} \quad t \to \infty \tag{5.37}$$

donde se llega a lo mismo que en (5.36).

5.4. Máquina encriptadora

Las máquinas encriptadoras usualmente tienen un número determinado de rodillos. Cuando uno quiere encriptar un mensaje, lo que se hace es mover los rodillos de manera aleatoria, escribir el mensaje y la máquina nos dará como resultado un mensaje encriptado. La parte fundamental de este mecanismo es el movimiento aleatorio de los rodillos.

Para automatizar una máquina encriptadora, lo que debemos hacer es lograr que los rodillos se muevan de manera aleatoria; así que buscamos un mecanismo que haga lo siguiente:

Hacemos girar el primer rodillo a una velocidad constante $v > 0$ durante un tiempo aleatorio. Este tiempo lo puede proporcionar un generador electrónico aleatorio (*noise generator*). Cuando el primer rodillo se detiene empieza a girar el segundo rodillo durante otro tiempo aleatorio e independiente del primero con la misma velocidad v. Se prosigue así hasta llegar al ultimo rodillo. Cuando el último rodillo se detiene, empieza a girar nuevamente el primer rodillo. Este proceso ocurre durante un intervalo de tiempo fijo $[0, t]$.

Al finalizar el intervalo de tiempo $[0, t]$ al menos un rodillo habrá girado y es posible que el o los rodillos que giren habrán cambiado de posición. Para saber qué tan aleatorio fue este cambio, nos gustaría saber su esperanza y varianza.

Para calcular lo anterior, supongamos que tenemos una máquina con d rodillos. Para cada $1 \leq i \leq d$ y $k \in \mathbb{N}$ definamos las variables aleatorias

$$X_k^{(i)}\text{: la duración de la } k\text{-ésima rotación del rodillo } i.$$

Definamos también para cada $k \in \mathbb{N}$

$$Z_k = X_k^{(1)} + X_k^{(2)} + \cdots + X_k^{(d)}$$

que representa el tiempo que se requiere para mover todos los rodillos en la k-ésima rotación.

Si definimos la v.a.

$$Y_k^{(i)} = Z_k - X_k^{(i)}$$

$Y_k^{(i)}$ representa el tiempo que se requiere para mover una vez todos los rodillos excepto el i-ésimo.

Para este modelo suponemos que las familias $\{X_k^{(i)} : k \geq 1\}$ son i.i.d. para cada $i = 1, 2, \ldots, d$ puesto que el tiempo en que un rodillo está en movimiento es i.i.d. al tiempo en que otro rodillo está en movimiento; además el tiempo en que un rodillo está en reposo es i.i.d. al tiempo en que el otro rodillo está en reposo.

Además que se cumple

$$0 < \mathbb{E}(X_1^{(i)}) < \infty \;\; y \;\; 0 < Var(X_1^{(i)}) < \infty.$$

Con lo anterior, debido a que la suma finita de funciones medibles es medible, entonces el Teorema 1.3.3 nos asegura que $\{Y_k^{(i)}\}$ es una familia de v.a. i.i.d. y además que para toda $k \in \mathbb{N}$

$$Y_k^{(i)} \perp X_k^{(i)}$$

por lo que si definimos

$$\mu_{x,i} = \mathbb{E}(X_1^{(i)}), \quad \sigma_{x,i}^2 = Var(X_1^i)$$

y también

$$\mu_{y,i} = \mathbb{E}(Y_1^{(i)}) = \mu_{x,1} + \mu_{x,i} + \cdots + \mu_{x,i-1} + \mu_{x,i+1} + \cdots + \mu_{x,d}$$

como suponemos independencia entre familias tenemos también que

$$\sigma_{y,i}^2 = Var(Y_1^i) = \sigma_{x,1}^2 + \sigma_{x,2}^2 + \cdots + \sigma_{x,i-1}^2 + \sigma_{x,i+1}^2 + \cdots + \sigma_{x,d}^2$$

y como claramente se cumple que

$$0 < Y_k^{(i)} < \infty \;\; y \;\; 0 < \sigma_{y,i}^2 < \infty$$

Observemos que tenemos un proceso de renovación alternativo tal como se describió en la Subsección 5.3, donde

$X_k^{(i)}$ representa la *fase 1*
$Y_k^{(i)}$ representa la *fase 2*

entonces se cumple (5.31), es decir

$$\frac{\alpha(t,i)-\frac{\mu_{x,i}}{\mu_{x,i}+\mu_{y,i}}t}{\sqrt{\frac{(\mu_{y,i}^2\sigma_{x,i}^2+\mu_{x,i}^2\sigma_{y,i}^2)t}{(\mu_{x,i}+\mu_{y,i})^3}}}\xrightarrow{d} N(0,1) \quad cuando \;\; t\to\infty. \tag{5.38}$$

En donde $\alpha(t,i)$ representa el tiempo en que ha estado en movimiento el i-ésimo rodillo durante el intervalo de tiempo $[0,t]$, por lo que (5.38) describe su distribución asintótica normal.

Si queremos conocer la distancia longitudinal $L>0$ que ha recorrido el rodillo en el intervalo de tiempo $[0,t]$, basta con obtener $L=v\cdot\alpha(t,i)$ en donde $v>0$ es la velocidad longitudinal constante en que se mueven los rodillos.

Debido a que tenemos un proceso de renovación alternativo, se cumple (5.37), por lo que

$$\frac{T_{V(L)}^{(i)}-\frac{(\mu_{x,i}+\mu_{y,i})L}{v\mu_{x,i}}}{\sqrt{\frac{(\mu_{y,i}^2\sigma_{x,i}^2+\mu_{x,i}^2\sigma_{y,i}^2)L}{v\mu_{x,i}^3}}}\xrightarrow{d} N(0,1) \quad cuando \;\; L\to\infty \tag{5.39}$$

donde $T_{V(L)}^{(i)}$ representa el tiempo que se debe dejar encendido el generador para que el i-ésimo rodillo avance una distancia L. Obsérvese que si $n\in\mathbb{N}$ y $D>0$ es la longitud de la circunferencia de cada uno de los rodillos, entonces un rodillo estará en la misma posición al recorrer las distancias L_1 y L_1+nD.

5.5. Política de Reemplazo determinada por la edad

Imaginemos que tenemos cierto artículo con un tiempo de vida aleatorio. Cuando el artículo se descompone, inmediatamente es reemplazado por uno nuevo. La compañía dueña del artículo tiene una política de reemplazo al tiempo $a>0$ (o cuando el articulo cumple una edad a), es decir, el artículo es reemplazado al pasar un tiempo a de su instalación o cuando éste se descomponga, lo primero que suceda.

Para ilustrar este proceso, podemos pensar en un foco y una cierta compañía. El foco es reemplazado cada 6 meses o al momento de descomponerse, lo que ocurra primero. El reemplazo ocurre de manera instantánea y a partir de ese momento se le da nuevamente un lapso de 6 meses para reemplazarlo o hasta que se descomponga el nuevo foco. Este proceso continúa sin detenerse. A esta proceso, Barlow y Proschan lo denominan política de reemplazo determinada por la edad. Véase *Barlow and Proschan (1965)*.

En el contexto de este proceso es de interés preguntarnos ¿Cuántas unidades serán reemplazadas por fallo dentro del intervalo de tiempo $[0, t]$? Por "fallo" nos referimos a las unidades que se descomponen antes de cumplir un tiempo a de vida; donde a es un tiempo fijo previamente establecido.

Podemos responder la pregunta anterior con la teoría que ya hemos desarrollado en este trabajo. Para eso, definamos las siguientes variables aleatorias:

$$X_k : \text{El tiempo de vida del } k\text{-ésimo artículo.}$$

Asumimos ahora, que la familia de variables aleatorias $\{X_k, k \geq 1\}$ es independiente e idénticamente distribuida. Luego, definamos

$$W_k = \min\{X_k, a\} \quad \text{y} \quad U_k = \sum_{i=1}^{k} W_i.$$

Sea

$$\tau(t) = \min\{n : U_n > t\},$$

observemos que $\tau(t)$ es igual al número de reemplazos hechos en el intervalo $[0, t]$. Un ejemplo para ilustrar este hecho es la siguiente recta.

En este ejemplo tenemos que $\tau(t_1) = 2$ y $\tau(t_2) = 4$. Observemos que efectivamente, al tiempo t_1 se han hecho 2 reemplazos y puesto que suponemos que el reemplazo es instantáneo, al tiempo t_2 se han realizado 4 reemplazos. Observemos también, que los reemplazos se cuentan desde el primer artículo que ponemos al tiempo $t = 0$.

Ahora definamos

$$Z_k = I_{\{X_k < a\}} = \begin{cases} 1 & \text{si } X_k < a \\ 0 & \text{si } X_k \geq a \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{si } X_k = W_k \\ 0 & \text{si } a = W_k \end{cases}$$

y

$$V_k = \sum_{i=1}^{k} Z_k$$

por lo que

$$V_{\tau(t)} = Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_{\tau(t)}$$

es igual al número de reemplazos hechos por fallo de los artículos en el intervalo de tiempo $[0, t]$.

Construimos la caminata aleatoria bidimensional (V_n, U_n) con incrementos i.i.d. (Z_k, W_k). Observemos que en este ejemplo Z_k y W_k no son independientes. Queremos aplicar el TCL para c.a. bidimensionales (Teo 4.4.1) por lo que nos falta ver como se comportan las esperanzas y varianzas de W_k y Z_k.

Sea F la función de distribución del tiempo de vida de los artículos. Calculando,

$$\begin{aligned}\mu_w &= \mathbb{E}(W_k) = \mathbb{E}(\min\{X_k, a\}) \\ &= \int_0^a x dF(x) \ + a(1 - F(a))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_w^2 &= Var(W_k) = \mathbb{E}(W_k^2) - \mathbb{E}^2(W_k) \\ &= \int_0^a x^2 dF(x) \ + a^2(1 - F(a)) - \mu_w^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu_z &= \mathbb{E}(Z_k) = \mathbb{E}(I_{\{X_k \le a\}}) = \mathbb{P}(X_k \le a) = \int_0^a dF(x) \\ &= F(a).\end{aligned}$$

Observemos que

$$Z_k^2 = I^2_{\{X_k \le a\}} = \begin{cases} 1^2 & \text{si } X_k \le a \\ 0 & \text{si } X_k > a \end{cases} = Z_k$$

por lo que

$$\begin{aligned}\sigma_z^2 &= Var(Z_k) = \mathbb{E}(Z^2) - \mathbb{E}^2(Z) = \mathbb{E}(Z) - \mathbb{E}^2(Z) \\ &= F(a) - F^2(a) = F(a)(1 - F(a)).\end{aligned}$$

Ahora veamos que

$$W_k Z_k = W_k I_{\{X_k \leq a\}} = \begin{cases} W_k & \text{si } X_k \leq a \\ 0 & \text{si } X_k > a \end{cases} = \begin{cases} X_k & \text{si } X_k \leq a \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

por lo tanto

$$\mathbb{E}(W_k Z_k) = \int_0^a x dF(x)$$

y entonces

$$\begin{aligned} Cov(W_k, Z_k) = \mathbb{E}(W_k Z_k) - \mathbb{E}(W_k)\mathbb{E}(Z_k) &= \int_0^a x dF(x) - \left(\int_0^a x dF(x) \ + a(1 - F(a)) \right) F(a) \\ &= \int_0^a x dF(x) - F(a) \int_0^a x dF(x) - aF(a) + aF^2(a) \\ &= \int_0^a x dF(x)(1 - F(a)) - aF(a)(1 - F(a)) \\ &= (1 - F(a)) \left(\int_0^a x dF(x) - aF(a) \right) \end{aligned}$$

por lo que

$$
\begin{aligned}
\gamma^2 =& Var(\mu_z W_k - \mu_w Z_k) = \mu_z^2\sigma_w^2 + \mu_w^2\sigma_z^2 - 2\mu_z\mu_w Cov(W_k, Z_k) \\
=& \mu_z^2\sigma_w^2 + \mu_w^2\sigma_z^2 - 2\mu_z\mu_w(1-F(a))\left(\int_0^a xdF(x) - aF(a)\right) \\
=& F^2(a)\int_0^a x^2 dF(x) + F^2(a)a^2(1-F(a)) \\
& - F^2(a)\left[\left(\int_0^a xdF(x)\right)^2 + 2a(1-F(a))\int_0^a xdF(x) + a^2(1-F(a))^2\right] \\
& + \left[\left(\int_0^a xdF(x)\right)^2 + 2a(1-F(a))\int_0^a xdF(x) + a^2(1-F(a))^2\right] F(a)(1-F(a)) \\
& - 2F(a)\left[\int_0^a xdF(x) \ + a(1-F(a))\right](1-F(a))\left(\int_0^a xdF(x)\right) \\
& + 2F^2(a)\left[\int_0^a xdF(x) \ + a(1-F(a))\right] a(1-F(a)) \\
=& F^2(a)\int_0^a x^2 dF(x) + F^2(a)a^2(1-F(a)) \\
& + \left(\int_0^a xdF(x)\right)^2 \left(-F^2(a) + F(a)(1-F(a) - 2F(a)(1-F(a))\right) \\
=& F^2(a)\int_0^a x^2 dF(x) + F^2(a)a^2(1-F(a)) - F(a)\left(\int_0^a xdF(x)\right)^2.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, si suponemos que $0 < \mu_w < \infty,\ \mu_z < \infty,\ \sigma_z^2 < \infty,\ \sigma_w < \infty$ y $\gamma^2 > 0$, entonces el TLC para c.a. aleatorias bidimensionales (Teorema 4.4.1) nos asegura que

$$
\frac{V_{\tau(t)} - \frac{\mu_z}{\mu_w}t}{\sqrt{\frac{\gamma^2 t}{\mu_w^3}}} \xrightarrow{d} N(0,1) \quad \textit{cuando} \ \ t \to \infty, \tag{5.40}
$$

es decir,

$$
\frac{V_{\tau(t)} - \frac{F(a)}{\int_0^a xdF(x) \ + a(1-F(a))}t}{\sqrt{\frac{\left[F^2(a)\int_0^a x^2 dF(x) + F^2(a)a^2(1-F(a)) - F(a)\left(\int_0^a xdF(x)\right)^2\right]t}{\left(\int_0^a xdF(x) \ + a(1-F(a))\right)^3}}} \xrightarrow{d} N(0,1).
$$

De este modo obtenemos el comportamiento asintótico normal de $V_{\tau(t)}$. Recordemos que $V_{\tau(t)}$ es igual al número de reemplazos hechos por fallo de los artículos en el intervalo de tiempo $[0, t]$.

5.5.1. Distribución exponencial del tiempo de vida

En esta subsección analizaremos lo que ocurre para el caso particular en que los tiempos de vida de los artículos tienen una distribución exponencial con parámetro $\lambda > 0$. Es decir, para cada $k \in \mathbb{N}$

$$X_k \sim exp(\lambda),$$

entonces se tiene que

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \ x > 0$$

y haciendo los cálculos respectivos tenemos que

$$\begin{aligned}
\mu_w =& \int_0^a xf(x)dx \ + a(1 - F(a)) = \int_0^a x\lambda e^{-\lambda x} dx + ae^{-\lambda a} \\
=& \left(-ae^{-\lambda a} + \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda a}\right) + ae^{-\lambda a} \\
=& \frac{1}{\lambda}(1 - e^{-\lambda a})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_w^2 =& \int_0^a x^2 f(x)dx \ + a^2(1 - F(a)) - \mu_w^2 = \Bigg(-a^2e^{-\lambda a} - 2a\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda a} \\
& -2\frac{1}{\lambda^2}e^{-\lambda a} + 2\frac{1}{\lambda^2}\Bigg) + ae^{-\lambda a} - \left(\frac{1}{\lambda^2} - 2\frac{1}{\lambda^2}e^{-\lambda a} + \frac{1}{\lambda^2}e^{-2\lambda a}\right) \\
=& \frac{1}{\lambda^2}(1 - e^{-2\lambda a}) - 2a\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda a}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu_z =& F(a) = 1 - e^{-\lambda a} \\
\sigma_z^2 =& F(a)(1 - F(a)) = (1 - e^{-\lambda a})e^{-\lambda a}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
Cov(W_k, Z_k) &= (1 - F(a)) \left(\int_0^a xf(x)dx - aF(a) \right) \\
&= e^{-\lambda a} \left[\left(-ae^{-\lambda a} + \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda a} \right) - a(1 - e^{-\lambda a}) \right] \\
&= \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda a}(1 - e^{-\lambda a}) - ae^{-\lambda a}.
\end{aligned}
$$

Por lo que

$$
\begin{aligned}
\gamma^2 =& \mu_z^2 \sigma_w^2 + \mu_w^2 \sigma_z^2 - 2\mu_z \mu_w Cov(W_k, Z_k) \\
=& \left(1 - e^{-\lambda a}\right)^2 \left(\frac{1}{\lambda^2}(1 - e^{-2\lambda a}) - 2a\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda a} \right) \\
& + \frac{1}{\lambda^2}(1 - e^{-\lambda a})^2 (1 - e^{-\lambda a}) e^{-\lambda a} \\
& - 2(1 - e^{-\lambda a}) \left(\frac{1}{\lambda}(1 - e^{-\lambda a}) \right) \left(\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda a}(1 - e^{-\lambda a}) - ae^{-\lambda a} \right) \\
=& (1 - e^{-\lambda a})^2 \left[\frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} e^{-2\lambda a} - 2a\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda a} + \frac{1}{\lambda^2} e^{-\lambda a} - \frac{1}{\lambda^2} e^{-2\lambda a} \right. \\
& \left. -2\frac{1}{\lambda^2} e^{-\lambda a} + 2\frac{1}{\lambda^2} e^{-2\lambda a} + 2a\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda a} \right] \\
=& (1 - e^{-\lambda a})^2 \left(\frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} e^{-\lambda a} \right) \\
=& \frac{1}{\lambda^2}(1 - e^{-\lambda a})^3.
\end{aligned}
$$

De acuerdo con (5.40) tenemos que el número de reemplazos hechos por fallo de los artículos en el intervalo de tiempo $[0, t]$ que representamos por $V_{\tau(t)}$ tiene la siguiente distribución asintótica normal

$$
\frac{V_{\tau(t)} - \frac{(1-e^{-\lambda a})}{\left(\frac{1}{\lambda}(1-e^{-\lambda a})\right)} t}{\sqrt{\frac{\left(\frac{1}{\lambda^2}(1-e^{-\lambda a})^3\right) t}{\left(\frac{1}{\lambda}(1-e^{-\lambda a})\right)^3}}} \xrightarrow{d} N(0,1) \quad cuando \ \ t \to \infty.
$$

Simplificando

$$
\frac{V_{\tau(t)} - \lambda t}{\sqrt{\lambda t}} \xrightarrow{d} N(0,1) \quad cuando \ \ t \to \infty. \tag{5.41}
$$

Un hecho importante en (5.41) es que ambos parámetros de la distribución asitótica normal son λt, esto nos indica que el número de reemplazos por fallo no dependen de a. Así pues, el numero de reemplazos hechos antes de un tiempo $a > 0$ no de pende de cuán grande o pequeño sea a, por lo que ningún a es adecuada para reemplazar los artículos. Dicho esto, lo mejor en este caso es reemplazar los objetos sólo hasta el momento en que fallen, de lo contrario podríamos reemplazar un artículo al que le queda un largo tiempo de vida. Esto se debe a que los artículos que tienen un tiempo de vida con distribución exponencial no envejecen.

5.6. Política de Reemplazo considerando el costo

En esta sección seguiremos estudiando las Políticas de Reemplazo basadas en la edad. De acuerdo con lo estudiado en la sección anterior (5.5), sería natural para cualquier inversionista preguntar sobre el costo a pagar por los reemplazos dentro del intervalo de tiempo $[0, t]$. Esta pregunta es una que también podemos responder usando el TCL para c.a. bidimensionales.

Sean

$$c_1 : \quad \text{El costo del reemplazo cuando falla el componente.} \tag{5.42}$$

$$c_2 : \quad \text{El costo del reemplazo cuando el componente no falla.} \tag{5.43}$$

De acuerdo con *Barlow and Proschan (1965)*, Capítulo 4; se debe cumplir que

$$c_1 > c_2 \tag{5.44}$$

lo cual es bastante lógico, pues si se tuviera lo opuesto ($c_1 \leq c_2$) entonces ninguna compañía reemplazaría el equipo antes de que éste se descomponga.

Acorde con la notación de la Sección anterior, tenemos

$$X_k : \text{El tiempo de vida del } k\text{-ésimo artículo.}$$

$$W_k = \min\{X_k, a\} \quad \text{y} \quad U_k = \sum_{i=1}^{k} W_i$$

$$\tau(t) = \min\{n : U_n > t\}.$$

Definamos

$$Z_k = c_1 I_{\{X_k \le a\}} + c_2 I_{\{X_k > a\}} = \begin{cases} c_1 & \text{si } X_k \le a \\ c_2 & \text{si } X_k > a \end{cases}$$

De esta manera la v.a. Z_k arroja el costo del k-ésimo reemplazo. Luego definamos

$$V_k = \sum_{i=1}^{k} Z_k$$

con lo que

$$V_{\tau(t)} = Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_{\tau(t)}$$

es igual al costo total del reemplazo de los artículos en el intervalo de tiempo $[0, t]$.

Sea F la función de distribución del tiempo de vida de los artículos. De la Sección anterior, sabemos

$$\mu_w = \mathbb{E}(W_k) = \int_0^a x dF(x) \ + a(1 - F(a))$$

$$\sigma_w^2 = Var(W_k) = \int_0^a x^2 dF(x) \ + a^2(1 - F(a)) - \mu_w^2.$$

Nos resta calcular lo siguiente

$$\begin{aligned} \mu_z = \mathbb{E}(Z_k) &= \mathbb{E}(c_1 I_{\{X_k \le a\}} + c_2 I_{\{X_k > a\}}) = c_1 \mathbb{P}(X_k \le a) + c_2 \mathbb{P}(X_k > a) = \\ &= c_1 F(a) + c_2(1 - F(a)) \end{aligned}$$

observemos que

$$Z_k^2 = \begin{cases} c_1^2 & \text{si } X_k \le a \\ c_2^2 & \text{si } X_k > a \end{cases}$$

por lo que

$$\begin{aligned} \sigma_z^2 =& Var(Z_k) = \mathbb{E}(Z^2) - \mathbb{E}^2(Z) = \\ =& c_1^2 F(a) + c_2^2(1 - F(a)) - (c_1 F(a) + c_2(1 - F(a)))^2 \\ =& c_1^2 F(a) + c_2^2(1 - F(a)) - c_1^2 F^2(a) - 2c_1 c_2 F(a)(1 - F(a)) - c_2^2(1 - F(a))^2 \\ =& c_1^2 F(a)(1 - F(a)) + c_2^2(1 - F(a))F(a) - 2c_1 c_2 F(a)(1 - F(a)) \\ =& F(a)(1 - F(a))(c_1 - c_2)^2. \end{aligned}$$

Ahora observemos que

$$W_kZ_k = \begin{cases} c_1W_k & \text{si } X_k \leq a \\ c_2W_k & \text{si } X_k > a \end{cases} = \begin{cases} c_1X_k & \text{si } X_k \leq a \\ c_2a & \text{si } X_k > a \end{cases}$$

por lo tanto

$$\mathbb{E}(W_kZ_k) = c_1\int_0^a xdF(x) \quad + c_2a(1 - F(a)),$$

entonces

$$\begin{aligned} Cov(W_k, Z_k) =& \mathbb{E}(W_kZ_k) - \mathbb{E}(W_k)\mathbb{E}(Z_k) = \left(c_1\int_0^a xdF(x) \quad + c_2a(1 - F(a))\right) \\ & - \left(\int_0^a xdF(x) \ + a(1 - F(a))\right)[c_1F(a) + c_2(1 - F(a))] \\ =& a(1 - F(a))(-c_1F(a) - c_2(1 - F(a)) + c_2) \\ & + \int_0^a xdF(x)\ [c_1 - c_1F(a) - c_2(1 - F(a))] \\ =& aF(a)(1 - F(a))(c_2 - c_1) + \int_0^a xdF(x)\ (1 - F(a))(c_1 - c_2) \\ =& (1 - F(a))(c_1 - c_2)\left(\int_0^a xdF(x) - aF(a)\right). \end{aligned}$$

Con estos datos, ya es viable calcular

$$\begin{aligned} \gamma^2 =& Var(\mu_zW_k - \mu_wZ_k) \\ =& \mu_z^2\sigma_w^2 + \mu_w^2\sigma_z^2 - 2\mu_z\mu_wCov(W_k, Z_k) \end{aligned}$$

Si se cumple que $0 < \mu_w < \infty,\ \mu_z < \infty,\ \sigma_z^2 < \infty,\ \sigma_w < \infty$ y $\gamma^2 > 0$ entonces por el TLC para c.a. aleatorias bidimensionales (Teorema 4.4.1) se tiene que

$$\frac{V_{\tau(t)} - \frac{\mu_z}{\mu_w}t}{\sqrt{\frac{\gamma^2t}{\mu_w^3}}} \xrightarrow{d} N(0,1) \quad \textit{cuando} \ \ t \to \infty. \tag{5.45}$$

Esto nos dice el comportamiento asintótico normal de $V_{\tau(t)}$, donde $V_{\tau(t)}$ es el costo total de los reemplazos hechos en el intervalo de tiempo $[0, t]$.

Observemos que si en (5.44) tomamos $c_1 = c_2 = 1$ entonces $V_{\tau(t)}$ es igual al número de artículos reemplazados en el intervalo de tiempo $[0, t]$.

5.7. Política de Reemplazo aleatorio

Otra propuesta de política de reemplazo presentadas en *Barlow and Proschan (1965)*, Capítulo 3; consiste en hacer reemplazos programados en tiempos aleatorios; es decir, el artículo se reemplaza al instante en que falla o en un tiempo aleatorio previamente establecido, lo primero que suceda.

De acuerdo con lo expuesto por Barlow y Proschan, en ocasiones es impráctico o imposible en un momento estricto en el tiempo, reemplazar un artefacto . Podemos pensar, por ejemplo, en un mecanismo que tiene un ciclo de trabajo aleatorio. Sería impráctico reemplazarlo en el momento en que se encuentra a la mitad del ciclo. En estos casos, la política que se utilizaría para hacer remplazos sería una aleatoria en la que se tome ventaja del tiempo adecuado para hacer el reemplazo, por ejemplo, al principio o al final de un ciclo.

Podemos estudiar esto de una forma muy parecida a lo que hicimos en las dos secciones anteriores de políticas de reemplazo. Consideramos las siguientes familias independientes de variables aleatorias i.i.d.

X_k : Tiempo de vida del k-ésimo artìculo.

Y_k : Tiempo planeado para efectuar el reemplazo del k-ésimo artículo.

A partir de ésto, se define

$$W_k = \min\{X_k, Y_k\}, \qquad U_n = \sum_{i=1}^{n} W_i$$
$$\tau(t) = \min\{n : U_n > t\}$$

de este modo $\tau(t)$ es igual al número de reemplazos hechos en el intervalo $[0, t]$.

Ahora definamos

$$Z_k = I_{X_k < Y_k} = \begin{cases} 1 & \text{si } X_k < Y_k \\ 0 & \text{si } X_k \geq Y_k \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{si } X_k = W_k \\ 0 & \text{si } Y_k = W_k \end{cases}$$
$$V_n = \sum_{i=1}^{n} Z_i.$$

De esta forma $V_{\tau(t)}$ es igual al número de reemplazos hechos por falla del artículo en $[0, t]$. Nuevamente si se cumple que $0 < \mu_w < \infty$, $\mu_z < \infty$, $\sigma_z^2 < \infty$, $\sigma_w < \infty$ y $\gamma^2 > 0$, entonces tendríamos (5.45) que nos indica el comportamiento asintótico normal de $V_{\tau(t)}$.

5.8. Modelos de Conteo

Supongamos que tenemos un contador que registra las llegadas de determinadas partículas. Cuando una partícula llega, el contador tarda un tiempo aleatorio en registrarlo. Si alguna otra partícula arriba en ese momento, el contador no lo registra y no afecta en nada al proceso.

Definamos las siguientes variables aleatorias:

$$\begin{aligned} W_k &: \text{tiempo que tarda el k-ésimo registro.} \\ U_n &= \sum_{i=1}^{n} W_i. \\ Z_k &: \text{tiempo que tarda en llegar la k-ésima partícula} \\ &\quad\ \text{o el k-ésimo tiempo muerto.} \\ V_n &= \sum_{i=1}^{n} Z_i. \end{aligned}$$

Para ilustrar este proceso puede verse la siguiente gráfica:

Hay algunas observaciones que hay que hacer evidentes:

- La familia $\{W_k, k \geq 1\}$ es i.i.d.
- La familia $\{Z_k, k \geq 1\}$ es i.i.d.
- Suponemos que los incrementos bidimensionales $\{(W_k, Z_k)\}$ son i.i.d.
- Suponemos que W_k y Z_j son independientes para toda $k \geq 1$ y $j \geq 1$.

Con estos datos, concluimos que se tiene un Proceso de Renovación Alternativo (*véase* Sección 5.3) donde la *fase 1* corresponde a la familia $\{Z_k, k \geq 1\}$ y la *fase 2* corresponde a la familia $\{W_k, k \geq 1\}$.

De acuerdo a la notación de la Sección 5.3 tenemos que

$$\begin{aligned} \alpha_{\tau(t)} &: \text{es el tiempo en que el proceso permanece en la } \textit{fase 1} \text{ o dentro} \\ &\quad \text{de la familia } \{Z_k, k \geq 1\} \text{ durante el intervalo } [0, t]. \end{aligned}$$

En otras palabras, $\alpha_{\tau(t)}$ es igual al tiempo muerto total dentro del intervalo $[0, t]$.

Para determinar el comportamiento asintótico normal de $\alpha_{\tau(t)}$ basta usar la fórmula (5.31). Obtenemos

$$\frac{\alpha_{\tau(t)} - \frac{\mu_z}{\mu_z+\mu_w}t}{\sqrt{\frac{(\mu_w^2\sigma_z^2+\mu_z^2\sigma_w^2)t}{(\mu_z+\mu_w)^3}}} \xrightarrow{d} N(0,1) \quad cuando \;\; t \to \infty. \tag{5.46}$$

Del mismo modo y de acuerdo a lo visto en 5.3.2, si definimos

$T_{N(t)}$: el tiempo que necesita correr el proceso para estar durante un tiempo t en la $fase$ 1.

Obtenemos que $T_{N(t)}$ es el tiempo que se requiere para tener un total de tiempo muerto t. Por (5.33) se tiene

$$\frac{T_{N(t)} - \frac{\mu_z+\mu_w}{\mu_z}t}{\sqrt{\frac{(\mu_w^2\sigma_z^2+\mu_z^2\sigma_w^2)t}{\mu_z^3}}} \xrightarrow{d} N(0,1) \quad cuando \;\; t \to \infty. \tag{5.47}$$

Gut (2009) en *4.3.8* define otro modelo de conteo al que llama *modelo de conteo tipo II*, así mismo esboza una manera de obtener una distribución asintótica normal para el número de registros hechos por las partículas en el intervalo de tiempo $[0, t]$.

5.9. Teoría del Riesgo en Seguros

Supongamos que hay una compañía de seguros con las siguientes características:

- Los tiempos entre reclamos son positivos e i.i.d. (estos son tiempos de un proceso de renovación). A esta familia de variables aleatorias podemos designarla como

  $$\{W_k : k \geq 1\}$$

  entonces

  $$U_n = \sum_{k=1}^{n} W_k$$

  es el tiempo transcurrido hasta el n-ésimo reclamo.

- Los montos de cada reclamo son positivos e i.i.d. A esta familia de v.a. la denotaremos como
$$\{Z_k : k \geq 1\}$$
entonces
$$V_n = \sum_{k=1}^{n} Z_k$$
es el monto acumulado al pagar cada uno de los n reclamos.

- Supongamos también que la compañía recibe primas de sus asegurados a una tasa constante β.

- El capital inicial de la compañía de seguros es u. Esta cantidad es conocida como la *Reserva* de la compañía. Esta *Reserva* cambia con el tiempo de acuerdo con lo que la aseguradora recibe o tiene que pagar, así, la reserva al tiempo t es la función $R(t)$. Debido a la ya explicado sabemos que
$$R(0) = u.$$

Sea
$$M(t) = \text{máx}\{n : U_n \leq t\}. \tag{5.48}$$
Así $M(t)$ es el número de reclamos en el intervalo de tiempo $[0, t]$. Por lo que

$V_{M(t)}$: total del monto pagado en los reclamos durante el intervalo de tiempo $[0, t]$,

de este modo podemos saber que la *Reserva* al tiempo t está dada por
$$R(t) = u + \beta t - V_{M(t)}. \tag{5.49}$$

De acuerdo con la definición 3.1.3 sabemos que
$$\tau(t) = \text{mín}\{n : \ U_n > t\}.$$
Como $W_k > 0$ para todo $k \geq 1$, entonces de (5.48) se tiene que
$$M(t) + 1 = \tau(t). \tag{5.50}$$

En efecto, para probar (5.50) observemos que debido a que $W_k > 0$ para toda $K \geq 1$ entonces los incrementos de U_n son siempre positivos para cualquier $n \geq 1$, por lo que dada la sucesión $\{U_n\}_{n\geq 0}$ se tiene que $0 = U_0 < U_1 < U_2 < \ldots$.

De esta forma si $M(t) = k$ para alguna $k = 0, 1, 2, \ldots$, entonces $t \in [U_k, U_{k+1})$, es decir

$$U_k \leq t < U_{k+1}$$

por lo que $\tau(t) = k+1$. Con lo que la afirmación(5.50) es correcta. De (5.50) se concluye lo siguiente

$$V_{\tau(t)} = V_{M(t)+1} = V_{M(t)} + Z_{\tau(t)}. \tag{5.51}$$

Definiendo $\mu_z = \mathbb{E}(Z_k), \mu_w = \mathbb{E}(W_k), \sigma_z^2 = Var(Z_k), \sigma_w^2 = Var(W_k)$ y $\gamma^2 = Var(\mu_z W_k - \mu_w Z_k)$ si las variables μ_w, γ^2 y t son todas distintas de cero, de acuerdo con (5.51) obtenemos que

$$\frac{V_{\tau(t)} - \frac{\mu_z}{\mu_w}t}{\sqrt{\frac{\gamma^2}{\mu_w^3}t}} = \frac{V_{M(t)} + Z_{\tau(t)} - \frac{\mu_z}{\mu_w}t}{\sqrt{\frac{\gamma^2}{\mu_w^3}t}} = \frac{V_{M(t)} - \frac{\mu_z}{\mu_w}t}{\sqrt{\frac{\gamma^2}{\mu_w^3}t}} + \frac{Z_{\tau(t)}}{\sqrt{\frac{\gamma^2}{\mu_w^3}t}}$$

$$= \frac{V_{M(t)} - \frac{\mu_z}{\mu_w}t}{\sqrt{\frac{\gamma^2}{\mu_w^3}t}} + \sqrt{\frac{\mu_w^3}{\gamma^2}}\frac{Z_{\tau(t)}}{t^{\frac{1}{2}}}$$

por lo que

$$\frac{V_{M(t)} - \frac{\mu_z}{\mu_w}t}{\sqrt{\frac{\gamma^2}{\mu_w^3}t}} = \frac{V_{\tau(t)} - \frac{\mu_z}{\mu_w}t}{\sqrt{\frac{\gamma^2}{\mu_w^3}t}} - \sqrt{\frac{\mu_w^3}{\gamma^2}}\frac{Z_{\tau(t)}}{t^{\frac{1}{2}}}. \tag{5.52}$$

Si además $0 < \mu_w < \infty$, $\mu_z < \infty$, $\sigma_z^2 < \infty$, $\sigma_w^2 < \infty$ y $\gamma^2 > 0$, entonces el Teorema (4.4.1) nos asegura que

$$\frac{V_{\tau(t)} - \frac{\mu_z}{\mu_w}t}{\sqrt{\frac{\gamma^2}{\mu_w^3}t}} \xrightarrow{d} N(0,1) \quad \text{cuando} \;\; t \to \infty. \tag{5.53}$$

Por otro lado (4.15) garantiza que

$$\sqrt{\frac{\mu_w^3}{\gamma^2}}\frac{Z_{\tau(t)}}{\sqrt{t}} \xrightarrow{c.s} 0 \tag{5.54}$$

y por el Lema de Slutsky (Lema 1.3.4) junto con (5.53), (5.54) y el Teorema 1.3.3.*ii*, de (5.52) se llega a que

$$\frac{V_{M(t)} - \frac{\mu_z}{\mu_w}t}{\sqrt{\frac{\gamma^2}{\mu_w^3}t}} \xrightarrow{d} N(0,1) \quad \text{cuando} \quad t \to \infty. \tag{5.55}$$

Con base en el anterior resultado y utilizando la función *Reserva* vista en (5.49) obtenemos

$$\frac{-R(t) + u + \left(\beta - \frac{\mu_z}{\mu_w}\right)t}{\sqrt{\frac{\gamma^2}{\mu_w^3}t}} \xrightarrow{d} N(0,1) \quad \text{cuando} \quad t \to \infty. \tag{5.56}$$

Utilizando la simetría de la Normal, concluimos que

$$\frac{R(t) - u - \left(\beta - \frac{\mu_z}{\mu_w}\right)t}{\sqrt{\frac{\gamma^2}{\mu_w^3}t}} \xrightarrow{d} N(0,1) \quad \text{cuando} \quad t \to \infty \tag{5.57}$$

en donde (5.57) nos indica el comportamiento de $R(t)$, es decir, la *Reserva* al tiempo t y la probabilidad de ruina.

Bibliografía

1. Anscombe, F.J. (1952). Large-Sample Theory of Sequential Estimation, *Proceeding of Cambridge Philosophical Soociety* 48: 600-607.

2. Barlow, R.E. y Proschan, F. (1965). *Mathematical Theory of Reliability*, Jhon Wiley, New York.

3. Caballero, M.E. (2008). *Cadenas de Markov: Un enfoque elemental*, segunda edición, México: Sociedad Matemática Mexicana.

4. Gut (2005). *Probability: A Graduate Course*, New York: Springer.

5. Gut (2009). *Stopped Random Walks*, segunda edición, New York: Springer.

6. Gut, A. (2012). Anscombe's Theorem 60 Years Later, *Sequential Analysis* 31: 368-369.

7. Gut, A. y Jasson, S. (1983). The Limiting Behaviour of Certain Stopped Sums and Some Applications, *Scandinavian Journal of Statistics* 10: 281-292.

8. Kaijser, T. (1971). A Stochastic Model Describing the Water Motion in a River. *Nordic Hydrology* II: 243-265.

9. Réyi, A. (1957). On the Asymptotic Distribution of the Sum of a Random Number of Independent Random Variables. *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* 8: 193-199.

10. Rincón, L. (2012). *Introducción a los Procesos Estocásticos*, México: UNAM, Facultad de Ciencias.