



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE  
MÉXICO  
FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES  
ZARAGOZA**

---

---

**FLUJO LAMINAR PULSÁTIL DE UN FLUIDO  
VISCOELÁSTICO EN UN CAPILAR**

**TESIS**

**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE INGENIERO QUÍMICO**

**PRESENTA:**

**GONZÁLEZ PERALTA HAIDE**

**DIRECTOR DE TESIS**

**DR. EDTSON EMILIO HERRERA VALENCIA**

**COASESOR DE TESIS**

**DR. FAUSTO CALDERAS GARCIA**

**MÉXICO D.F. ABRIL DEL 2015**





Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

FACULTAD DE ESTUDIOS  
SUPERIORES "ZARAGOZA"

DIRECCIÓN

**JEFE DE LA UNIDAD DE ADMINISTRACIÓN  
ESCOLAR  
PRESENTE.**

Comunico a usted que al alumno(a) González Peralta Haide con número de cuenta 410072396 de la carrera Ingeniería Química, se le ha fijado el día 17 del mes de abril de 2015 a las 11:00 horas para presentar su examen profesional, que tendrá lugar en la sala de exámenes profesionales del Campus II de esta Facultad, con el siguiente jurado:

|            |                                     |
|------------|-------------------------------------|
| PRESIDENTE | I.Q. RAUL RAMÓN MORA HERNÁNDEZ      |
| VOCAL      | DR. EDTSON EMILIO HERRERA VALENCIA  |
| SECRETARIO | M. en C. MARIANO PÉREZ CAMACHO      |
| SUPLENTE   | I.Q. ALEJANDRO JUVENAL GUZMÁN GÓMEZ |
| SUPLENTE   | DR. FAUSTO CALDERAS GARCÍA          |

*Rm*  
\_\_\_\_\_  
Edison E. Herrera Valencia  
*Mariano Pérez Camacho*  
\_\_\_\_\_  
*[Firma]*  
\_\_\_\_\_

El título de la tesis que se presenta es: Flujo laminar pulsátil de un fluido viscoelástico en un capilar.

Opción de Titulación: Tesis profesional

ATENTAMENTE  
"POR MI RAZA HABLARÁ EL ESPÍRITU"  
México, D. F. a 17 de marzo de 2015.

~~DR. VÍCTOR MANUEL MENDOZA NUÑEZ~~

~~DIRECTOR~~

~~ZARAGOZA~~

~~DIRECCION~~

RECIBÍ:

OFICINA DE EXÁMENES PROFESIONALES  
Y DE GRADO

Vo.Bo.

*Dominga Ortiz Bautista*  
I.Q. DOMINGA ORTIZ BAUTISTA  
JEFA DE LA CARRERA DE I.Q.

## **AGRADECIMIENTOS**

- **Carrera de Ingeniería Química, Facultad de Estudios Superiores Zaragoza, Universidad Nacional Autónoma de México.**
- **Dr. Fausto Calderas García por el intercambio de ideas y de opiniones y la asesoría constante en este trabajo.**
- **Dr. Mariano Pérez Camacho por las sugerencias a este trabajo, el intercambio de opiniones y su experiencia en el área experimental.**
- **Al Ing. Raúl Ramón Mora Hernández por los comentarios y sugerencias para que este trabajo tenga una aplicación tecnológica.**
- **Al Ing. Juvenal Guzmán Gómez por los comentarios y sugerencias en este proyecto de Licenciatura.**
- **Investigación realizada gracias al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) de la UNAM <<IN115615>> << Fenómenos de transporte y reología de fluidos complejos aplicados a sistemas biológicos >>. Agradezco a la DGAPA-UNAM la beca recibida.**

## ÍNDICE GENERAL.

|  |     |
|--|-----|
| <b>NOMENCLATURA.</b> .....   | IX  |
| <b>GLOSARIO.</b> .....   | XII |
| <b>RESUMEN.</b> .....  | XV  |
| <b>ABSTRACT.</b> .....   | XVI |
| <b>CAPÍTULO I</b> .....  | 1   |
| <b>INTRODUCCIÓN</b> .....  | 1   |
| <b>1.1 Fluidos en medios porosos.</b> .....  | 2   |
| <b>1.2 Medio Poroso.</b> .....   | 4   |
| <b>1.3 Permeabilidad intrínseca.</b> .....   | 5   |
| <b>1.4 Transporte en medios porosos.</b> .....   | 6   |
| <b>1.5 Hemorreología: Sangre Humana.</b> .....   | 8   |
| <b>1.5.1 La reología considera dos tipos de fluidos: newtonianos y no newtonianos</b><br>..... | 10  |
| <b>1.5.2 Las propiedades del flujo de la sangre dependen de varios factores.</b> .....         | 10  |
| <b>1.5.3 Como se estudia la sangre en un reómetro.</b> .....                                   | 10  |
| <b>CAPÍTULO II</b> .....   | 13  |
| <b>ANTECEDENTES</b> .....  | 13  |
| <b>2.1 Ley de Darcy para un fluido newtoniano.</b> .....                                       | 14  |
| <b>2.2 Modelos no-newtonianos para la descripción del flujo en el medio poroso.</b> ....       | 16  |
| <b>2.3 Ley de Darcy para un fluido no newtoniano (ley de potencia).</b> .....                  | 17  |
| <b>2.4 Ley de Darcy para un fluido viscoelástico (Modelo de Maxwell).</b> .....                | 18  |
| <b>2.5 Ley de Darcy efectos difusivos.</b> .....   | 20  |
| <b>2.6 Resumen de los principales puntos estudiados en este capítulo.</b> .....                | 20  |
| <b>CAPÍTULO III</b> .....  | 23  |
| <b>OBJETIVOS E HIPOTESIS</b> .....   | 23  |
| <b>3.1 Objetivos.</b> .....  | 24  |
| <b>3.1.1 Objetivo General.</b> .....   | 24  |
| <b>3.1.2 Objetivos particulares.</b> .....   | 24  |
| <b>3.2 Hipótesis.</b> .....  | 24  |
| <b>CAPÍTULO IV</b> .....   | 25  |



|  |    |
|--|----|
| <b>MARCO TEÓRICO</b> .....   | 25 |
| <b>4.1 Fenómenos de Transporte.</b> .....                                | 26 |
| 4.1.1 La ecuación de transporte de cantidad de movimiento. ....          | 27 |
| 4.1.2 La ecuación de transporte de energía.....                          | 27 |
| 4.1.3 Ecuación de transporte de masa. ....                               | 28 |
| <b>4.2 Reología.</b> .....   | 28 |
| 4.2.1 Tensor de Deformación.....   | 29 |
| 4.2.2 Tensor gradiente de velocidad y su transpuesta. ....               | 29 |
| 4.2.3 El tensor rapidez de deformación.....                              | 30 |
| 4.2.4 El tensor de Vorticidad. ....                                      | 31 |
| 4.2.5 Tensor de esfuerzos.....   | 31 |
| <b>4.3 Tipos de Fluido.</b> .....  | 32 |
| 4.3.1 Fluido newtoniano. ....  | 32 |
| 4.3.2 Fluidos no newtonianos.....  | 32 |
| <b>4.4 Ecuaciones Constitutivas.</b> .....                               | 33 |
| 4.4.1 Ecuaciones constitutivas de viscoelasticidad lineal.....           | 33 |
| <b>4.5 Modelo de Maxwell.</b> .....                                      | 34 |
| 4.5.1 Modelo de Jeffreys. ....   | 35 |
| <b>4.6 Síntesis de los modelos expuestos en esta sección.</b> .....      | 37 |
| <b>4.7 Pruebas de flujo.</b> .....                                       | 38 |
| 4.7.1 Flujo cortante en estado estacionario.....                         | 38 |
| 4.7.2 Funciones materiales del modelo de Maxwell.....                    | 40 |
| 4.7.3 Modelo de Jeffreys.....  | 41 |
| 4.7.4 Flujo oscilatorio a bajas frecuencias.....                         | 42 |
| 4.7.5 Modelo de Maxwell.....   | 42 |
| 4.7.6 Modelo de Jeffreys.....  | 44 |
| <b>CAPÍTULO V</b> .....  | 46 |
| <b>SISTEMA FÍSICO</b> .....  | 46 |
| <b>5.1 Planteamiento del problema de flujo pulsátil sanguíneo.</b> ..... | 47 |
| 5.1.1 Campo vectorial de velocidades.....                                | 48 |
| 5.1.2 Tensores gradiente de velocidad.....                               | 48 |



|  |           |
|--|-----------|
| 5.1.3 Tensor rapidez de deformación.....   | 49        |
| 5.1.4 Tensor de esfuerzos.....   | 49        |
| 5.1.5 Ecuación de continuidad. ....  | 49        |
| 5.1.6 Ecuación de movimiento.....  | 50        |
| 5.2 Ecuaciones constitutivas. ....   | 50        |
| 5.2.1 Modelo de Newton. ....   | 50        |
| 5.2.2 Modelo viscoelástico de Maxwell. ....  | 50        |
| 5.2.3 Modelo viscoelástico de Jeffreys. ....   | 51        |
| 5.3 Condiciones de Frontera.....   | 51        |
| <b>CAPÍTULO VI</b> .....   | <b>53</b> |
| <b>MODELADO TEÓRICO</b> .....  | <b>53</b> |
| 6.1 Permeabilidad en un medio poroso. ....   | 54        |
| 6.2 Modelo de Newton.....  | 54        |
| 6.2.1 Cálculo para el perfil de velocidades.....   | 54        |
| 6.2.2 Cálculo para flujo volumétrico. ....   | 55        |
| 6.2.3 Cálculo de la ecuación de Darcy.....   | 56        |
| 6.2.4 Permeabilidad Intrínseca newtoniana .....  | 56        |
| 6.3 Modelo de Maxwell.....   | 56        |
| 6.3.1 Flujo volumétrico. ....  | 57        |
| 6.3.2 Calculo de la ecuación de Darcy.....   | 57        |
| 6.3.3 Calculo de la permeabilidad dinámica de Maxwell. ....  | 57        |
| 6.4 Modelo de Jeffreys.....  | 59        |
| 6.4.1 Calculo de la permeabilidad dinámica de Jeffreys. ....   | 60        |
| 6.5 Resumen de los resultados más importantes de los resultados más importantes de esta sección..... | 62        |
| 6.6 Flujo pulsátil. ....   | 63        |
| 6.6.1 Modelo de Jeffreys.....  | 63        |
| 6.6.2 Flujo volumétrico transitorio.....   | 65        |



|   |    |
|---|----|
| <b>CAPÍTULO VII</b> .....   | 67 |
| <b>SIMULACION Y ANALISIS DE RESULTADOS</b> .....  | 67 |
| <b>7.1 Variables adimensionales.</b> .....  | 68 |
| <b>7.2 Numero adimensional.</b> .....   | 68 |
| <b>7.3 Ecuaciones adimensionales.</b> .....   | 69 |
| <b>7.4 Permeabilidad intrínseca newtoniana.</b> .....                                   | 70 |
| <b>7.5 Permeabilidad compleja del modelo de Maxwell.</b> .....                          | 72 |
| <b>7.5.1 Permeabilidad Real.</b> .....  | 72 |
| <b>7.5.2 Permeabilidad Imaginaria.</b> .....  | 73 |
| <b>7.6 Permeabilidad dinámica del módelo de Jeffreys.</b> .....                         | 74 |
| <b>7.6.1 Parte Imaginaria de la permeabilidad compleja del modelo de Jeffreys.</b> .... | 74 |
| <b>7.6.2 Parte real de la permeabilidad real del modelo de Jeffreys.</b> .....          | 77 |
| <b>7.7 Flujo volumétrico transitorio del modelo de Jeffreys.</b> .....                  | 78 |
| <b>7.7.1 Flujo volumétrico real adimensional.</b> .....                                 | 78 |
| <b>7.7.3 Flujo volumétrico real transitorio del modelo de Jeffreys.</b> .....           | 80 |
| <b>7.7.4 Flujo volumétrico imaginario transitorio del modelo de Jeffreys.</b> .....     | 82 |
| <b>7.8 Aplicación a un fluido biológico con estructura transitoria, sangre humana..</b> | 83 |
| <b>CAPÍTULO VIII</b> .....  | 87 |
| <b>CONCLUSIONES</b> .....   | 87 |
| <b>CAPÍTULO IX</b> .....  | 90 |
| <b>TRABAJO A FUTURO</b> .....   | 90 |
| <b>BIBLIOGRAFÍA</b> .....   | 92 |



## INDICE DE TABLAS.

|  |    |
|--|----|
| Tabla 1. Modelos más representativos en la descripción del medio poroso. ....  | 15 |
| Tabla 2. Modelos más representativos en la descripción del medio poroso. ....  | 17 |
| Tabla 3. Ilustra las variables dinámicas involucradas en las ecuaciones básicas de transporte de cantidad de movimiento, energía y masa respectivamente..... | 26 |
| Tabla 4. Resumen de las permeabilidades intrínsecas y dinámicas para los modelos de: (i) Newton, (ii) Maxwell y (iii) Jeffreys. ....                         | 63 |

## INDICE DE FIGURAS.

|   |    |
|---|----|
| Figura 1. Esquema de un medio poroso.....   | 4  |
| Figura 2. Función viscosidad vs rapidez de deformación para un individuo sin colesterol. La curva teórica (roja) fue obtenida con el modelo de Cross. Los datos reométricos fueron obtenidos mediante un reómetro de cono y plato. El Reograma muestra dos zonas a viscosidad constante y una zona intermedia tipo ley de potencia..... | 12 |
| Figura 3. Organización del trabajo desarrollo en la tesis.....  | 22 |
| Figura 4. Se ilustra el Modelo de Maxwell en término de un pistón y un resorte el pistón describe la parte viscosa (disipativa) y el resorte la parte elástica (recuperación).....  | 34 |
| Figura 5. Muestra un elemento acoplado en serie de un solvente (contribución viscosa) y un polímero, el cual se puede describir en término de un modelo de Maxwell y un solvente (polímero). ....   | 37 |
| Figura 6. Ilustra el flujo cortante simple en un sistema de placas paralelas. El fluido es cortado y se produce un flujo homogéneo, es decir, un sistema en donde, las variables dinámicas del sistema dependen de la posición).....  | 38 |
| Figura 7. En el flujo oscilatorio la muestra es colocada en un sistema de placas paralelas y la placa superior se le aplica una perturbación oscilatoria de tal manera que describe un movimiento oscilatorio en el cual, se estudia la respuesta mecánica del sistema, es decir, la contribución elástica y la viscosa.....            | 42 |
| Figura 8. Ilustra un capilar de radio $r = a$ y longitud $z = L$ en donde el fluido fluye debido a un gradiente de presión pulsátil. Del lado derecho, se observa un punto material en coordenadas cilíndricas.....   | 47 |
| Figura 9. Permeabilidad intrínseca vs porosidad en función del radio del poro.....  | 71 |
| Figura 10. Se ilustra la permeabilidad real normalizadas vs Frecuencia adimensional del modelo viscoelástico de Maxwell. En este caso, el tiempo de retardo es cero, i.e. $\lambda_J = 0$ . ....  | 72 |
| Figura 11. Se ilustra la permeabilidad imaginaria normalizadas vs Frecuencia adimensional del modelo viscoelástico de Maxwell. En este caso, el tiempo de retardo es cero, i.e. $\lambda_J = 0$ . ....  | 73 |



Figura 12. Se ilustra la permeabilidad adimensional imaginaria vs la frecuencia adimensional a diferentes valores numéricos del tiempo de retardo de Jeffrey. .... 74

Figura 13. Se ilustra la permeabilidad adimensional real vs la frecuencia adimensional a diferentes valores numéricos del tiempo de retardo de Jeffrey. .... 77

Figura 14. Se ilustra el Flujo volumétrico real adimensional como función del tiempo adimensional para diferentes valores del numero adimensional  $\lambda_J^*$ . .... 78

Figura 15. Se ilustra el flujo adimensional imaginario vs Tiempo adimensional a diferentes valores del tiempo adimensional..... 80

Figura 16. Ilustra la parte real de flujo transitorio complejo adimensional vs tiempo adimensional como función de la frecuencia adimensional. .... 81

Figura 17. Se ilustra el Flujo adimensional real e imaginario vs Tiempo adimensional a diferentes valores del tiempo adimensional. .... 82

Figura 18. Se ilustra la permeabilidad real como función de la frecuencia adimensional en función del tiempo adimensional  $\lambda_J^*$  . .... 83

Figura 19. Se ilustra la permeabilidad imaginaria como función de la frecuencia adimensional en función del tiempo adimensional  $\lambda_J^*$  ..... 84

Figura 20. Se ilustra el comportamiento del flujo volumétrico real transitorio vs el tiempo adimensional. .... 86

## **NOMENCLATURA.**

### **Vectores y tensores**

|              |   |
|--------------|---|
| $\sigma$     | Tensor de esfuerzos viscoso [Pa]                |
| $D$          | Tensor rapidez de deformación [1/s]             |
| $\nabla V$   | Tensor gradiente de velocidad [1/s]             |
| $\nabla V^T$ | Tensor gradiente de velocidad transpuesto [1/s] |
| $V$          | Vector de velocidad [m/s]                       |
| $g$          | Vector de aceleración de la gravedad [1/s]      |

### **Operadores Matemáticos**

|  |   |
|--|---|
| $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k$ | Operador Nabla [1/m]                          |
| $\frac{\partial}{\partial x^i}$  | Derivada parcial de la coordenada $x^i$ [1/m] |
| $\nabla \cdot$   | Operador divergencia [1/m]                    |
| $\pi$  | Constante Pi [1]                              |
| $\mathcal{F}$  | Transformada de Fourier                       |

### **Variables dimensionales**

|       |  |
|-------|--|
| $a$   | Radio del capilar [m]                          |
| $L$   | Longitud del capilar [m]                       |
| $V_z$ | Componente axial del vector de velocidad [m/s] |
| $r$   | Coordenada radial adimensional [m]             |
| $t$   | Tiempo [s]                                     |
| $Q$   | Flujo volumétrico [m <sup>3</sup> /s]          |
| $G_0$ | Modulo de Elástico [Pa]                        |
| $K$   | Permeabilidad dinámica [m <sup>2</sup> ]       |

|         |   |
|---------|---|
| $K^*$   | Permeabilidad dinámica reducida [ $m^2$ ]               |
| $K_R^*$ | Parte real de la permeabilidad reducida [ $m^2$ ]       |
| $K_I^*$ | Parte imaginaria de la permeabilidad reducida [ $m^2$ ] |
| $K_N$   | Permeabilidad Newtoniana [ $m^2$ ]                      |
| $q$     | Flujo volumétrico en un medio poroso [ $m^3/s$ ]        |
| $G'$    | Modulo de almacenamiento de Maxwell                     |
| $G''$   | Modulo de pérdida de Maxwell                            |

**Variables adimensionales.**

|               |                                    |
|---------------|------------------------------------|
| $\tau$        | Esfuerzo cortante adimensional [1] |
| $\varepsilon$ | Porosidad [1]                      |

**Letras Griegas**

|                     |   |
|---------------------|---|
| $\alpha$            | Exponente del modelo de Ellis [1]                               |
| $\dot{\gamma}_{rz}$ | Rapidez de deformación rz [1/s]                                 |
| $\Phi_0$            | Fluidez a baja rapidez de deformación [1/Pa s]                  |
| $\Phi_1$            | Fluidez a moderada rapidez de deformación [1/Pas <sup>n</sup> ] |
| $\lambda_0$         | Tiempo de relajación de Maxwell [s]                             |
| $\lambda_J$         | Tiempo de retardo de Jeffrey [s]                                |
| $\omega$            | Frecuencia angular [rad/s]                                      |
| $\rho$              | Densidad [rad/s]  |
| $\sigma_{rz}$       | Componente rz del esfuerzo cortante [Pa]                        |
| $\sigma_w$          | Esfuerzo en la pared [Pa]                                       |



|          |   |
|----------|---|
| $\eta_0$ | Viscosidad a bajo corte [Pa s]              |
| $\eta_s$ | Viscosidad del solvente [Pa s]              |
| $\eta_p$ | Viscosidad del polímero [Pa s]              |
| $\eta'$  | Parte real de la Viscosidad compleja [Pa s] |
| $\eta''$ | Viscosidad compleja [Pa s]                  |

## GLOSARIO.

|                                     |  |
|-------------------------------------|--|
| <b>Deformación:</b>                 | Cambio de posición con respecto a otra.  |
| <b>Ecuación constitutiva:</b>       | Ecuación que relaciona las variables dinámicas en un sistema (Rapidez de deformación, Esfuerzo, Deformación) |
| <b>Ecuación de continuidad:</b>     | Ecuación diferencial parcial que representa la conservación de materia en un sistema físico.                 |
| <b>Ecuación de movimiento:</b>      | Segunda ley newton aplicada aun medio continuo.  |
| <b>Estado estacionario:</b>         | Estado en el que ninguna propiedad dinámica del sistema depende del tiempo.                                  |
| <b>Esfuerzo en la pared:</b>        | Esfuerzo evaluado en la pared.   |
| <b>Fluido:</b>                      | Es aquel que al aplicarle un esfuerzo cortante sufre una deformación continua e irreversiblemente.           |
| <b>Fluido adelgazante al corte:</b> | Fluido que decrece su viscosidad por efecto de un aumento en la rapidez de deformación.                      |
| <b>Fluido biológico:</b>            | Son las diferentes excreciones y secreciones que provienen del organismo.                                    |
| <b>Fluido incompresible:</b>        | Fluido que tiene una densidad constante.   |
| <b>Fluido newtoniano:</b>           | Fluido con viscosidad constante e independiente de la rapidez de deformación.                                |
| <b>Fluido no-newtoniano:</b>        | La viscosidad es una función de la rapidez de deformación.   |
| <b>Fluido engrosante al corte:</b>  | Fluido que aumenta su viscosidad por efecto de un aumento en la rapidez de deformación.                      |
| <b>Fluido viscoelástico:</b>        | Es aquel fluido que tiene una contribución viscosa y otra elástica.  |
| <b>Flujo homogéneo:</b>             | Es el flujo en la cual las propiedades del sistema no dependen de la posición.                               |

|                                |   |
|--------------------------------|---|
| <b>Flujo oscilante:</b>        | Es el flujo que se origina cuando un plato oscila a una función periódica.  |
| <b>Flujo pulsátil:</b>         | Flujo asociado a un gradiente de presión pulsátil representado por una función matemática estocástica.  |
| <b>Flujo volumétrico:</b>      | Volumen por unidad de tiempo.   |
| <b>Frecuencia Angular:</b>     | Se refiere a la frecuencia del movimiento circular expresada en proporción del cambio de ángulo.  |
| <b>Función estocástica:</b>    | Función probabilística que evoluciona en el tiempo.   |
| <b>Medio poroso:</b>           | Es un medio (volumen) en donde coexisten orificios de forma irregular interconectados.  |
| <b>Modelo de Maxwell:</b>      | Ecuación constitutiva que describe el estado viscoelástico de un sistema en el régimen de rapidez de deformación bajas (viscoelasticidad lineal). |
| <b>Modelo de Jeffrey:</b>      | Ecuación geológica viscoelástico lineal que acopla un solvente con un polímero.   |
| <b>Permeabilidad:</b>          | Medida de la resistencia a fluir en un medio poroso.  |
| <b>Permeabilidad dinámica:</b> | Es una medida de la resistencia en el espacio de las frecuencias.   |
| <b>Porosidad:</b>              | Es la medida de espacios vacíos en un volumen total.  |
| <b>Rapidez de deformación:</b> | Rapidez con la que se deforma un fluido.  |
| <b>Sangre:</b>                 | Fluido biológico que presenta dos fases y que es viscoelástico.   |
| <b>Tensor de Esfuerzo:</b>     | Es una matriz simétrica de nueve elementos (3x3) en el cual se describe el estado de las fuerzas en un elemento de control.                       |



|                                    |  |
|------------------------------------|--|
| <b>Tiempo de relajación:</b>       | Es el tiempo que tarda el sistema en alcanzar un estado de equilibrio después de un periodo.                     |
| <b>Tiempo de retardo:</b>          | Es el tiempo en el que tarda el material en llegar al equilibrio debido a la aplicación de un esfuerzo cortante. |
| <b>Velocidad promedio:</b>         | Es la velocidad axial promediada a través del área de flujo.   |
| <b>Viscosidad:</b>                 | Es una medida de la resistencia a fluir de un sistema.   |
| <b>Viscoelasticidad lineal:</b>    | Es la región a bajas deformaciones, en donde el fluido presenta repuestas viscosas y elásticas.                  |
| <b>Viscoelasticidad no-lineal:</b> | Es la región a bajas deformaciones, en donde el fluido presenta repuestas viscosas y elásticas.                  |



## RESUMEN.

En este trabajo se analiza un líquido no newtoniano con estructura transitoria que fluye a través de una tubería de radio  $R = a$  y longitud  $z = L$ . El proceso es isotérmico y el líquido es incompresible. El líquido fluye debido a un gradiente de presión pulsátil. A partir de éste, se calcula el flujo volumétrico perturbado y se compara con el correspondiente sin perturbación. Para caracterizar el líquido complejo con estructura transitoria se utiliza el modelo de Maxwell, el cual consiste en una combinación del modelo newtoniano con el modelo del sólido de Hook. Suponiendo que los efectos inerciales no son despreciables, flujo homogéneo y líquido incompresible, se obtienen expresiones analíticas para la velocidad axial, flujo volumétrico, velocidad promedio y permeabilidad dinámica. Finalmente, se utilizan datos reométricos de sangre con el fin de cuantificar las predicciones del modelo viscoelástico de Maxwell y Jeffreys, en el sistema de flujo a gradiente de presión pulsátil.

**Palabras claves:** Flujo pulsátil, líquido no newtoniano, Modelo de Maxwell, Modelo de Jeffreys, Permeabilidad dinámica.

## ABSTRACT.

In this paper a non-Newtonian fluid is analyzed with transient structure flowing through a pipe radius  $R = a$  and  $z = L$  length. The process is isothermal and incompressible fluid. The liquid flows due to pulsatile pressure gradient. From this, the disturbed volumetric flow is calculated and compared to the corresponding undisturbed. To characterize the complex liquid with transient structure Maxwell model, which consists of a combination of Newtonian model with Hook solid model is used. Assuming that inertial effects are not negligible, incompressible and homogeneous liquid flow, analytical expressions for the axial velocity, volume flow rate and dynamic average permeability are obtained. Finally, blood rheometric data are used to quantify the viscoelastic model prediction in pulsatile pressure gradient using a Jeffreys constitutive equation.

**Keywords:** Pulsating Flow, non-Newtonian liquid, Maxwell Model, Jeffreys Model, Dynamic Flow, Permeability.

# **CAPÍTULO I**

## **INTRODUCCIÓN**

## 1.1 Fluidos en medios porosos.

La descripción de flujo de fluidos en medios porosos tiene una gran aplicación en áreas de la explotación petrolera, el transporte de agua en mantos acuíferos y en los campos geotérmicos, transporte de bio-fluidos en membranas, fluidos electroreológico y en reactores químicos, entre otras ramas de la ciencias naturales (Cuevas & Del Rio 2001, Del Rio & Castrejón-Pita 2003, Del Rio 1993, Del Rio et al. 1998; Herrera-Valencia & Rey 2014). Por otra parte, su estudio es una parte fundamental de la mecánica de fluidos, termodinámica irreversible y en particular de la reología de fluidos complejos (Sochi 2010; Garcia-Colin & Rodríguez 1991, Barnes et al. 1989, Bird et al. 1987, Bird et al. 2002; Currie 1974). En este contexto una de las aplicaciones más importantes de los medios porosos, es el concepto de permeabilidad la cual, se define como la resistencia que presenta un medio por el que pasa un fluido (Del Rio & Castrejón Pita 1987; Del Rio et al. 1998). Este concepto ha sido muy explotado en reología de la sangre para describir el flujo pulsátil a través de una vena (Herrera et al 2009, 2010; Moreno et al. 2015, 2013). Por otra parte, el uso de boquillas oscilantes ha mejorado las condiciones de procesos de materia prima en los extrusores, los cuales se estudian en ciencia de polímeros (Herrera et al. 2009, 2010).

Para aclarar las propiedades de estos interesantes fluidos, empecemos presentando las ecuaciones de balance que describen la conservación de la masa y del momento:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0 \quad (1)$$

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} \right) = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{g} \quad (2)$$

Donde  $\rho$  es la densidad de masa del fluido,  $\mathbf{V}$  el campo de velocidades,  $p$  es la presión y  $\boldsymbol{\sigma}$  es el tensor de esfuerzos viscosos (Bird et al. 2002; Withaker 1976; Bird et al. 1974) La Ec. (1) es la llamada ecuación de continuidad que representa la conservación de masa. La Ec. (2) es la ecuación de balance de cantidad de movimiento. Desde la perspectiva matemática para que este conjunto de ecuaciones sea un problema cerrado hacen falta las condiciones iniciales y de frontera (del Rio & Castrejón 2003). Desde el punto de vista físico, estas ecuaciones requieren información adicional, una ecuación de estado entre la presión y la densidad y otra relación entre el tensor de esfuerzos y el gradiente de velocidades

para se pueda considerarse un sistema cerrado (del Rio & Castrejón 2003). Precisamente, las ecuaciones constitutivas y de estado especifican el tipo de fluido que se pretende describir. Estas relaciones hacen la distinción entre un gas, un fluido incompresible y viscoelástico (Whitaker 1976a,b, 1967, 1987).

El agua, es el más común de los fluidos, es un buen ejemplo de un fluido newtoniano incompresible. (Barnes et al. 1989; Bird et al. 1987; Bird et al. 2002; García-Colín & Rodríguez 1991).

La aproximación de fluido incompresible no es una restricción muy severa, dado que para la mayoría de los líquidos como el agua es del orden de  $\Delta\rho/\rho \sim 10^{-5}$  para cambios de presión del orden de atmosferas (Del Rio & Castrejón, 2003) y por lo tanto, la suposición de incompresibilidad es una aproximación razonable (Barnes et al. 1989; Bird et al. 1987; Bird et al. 2002; García-Colín & Rodríguez 1991). La clasificación de fluidos newtoniano tiene que ver con la ecuación constitutiva que relaciona el tensor de esfuerzos con el gradiente de velocidades en una forma lineal (bajas deformaciones) y en otra no lineal (altas deformaciones). Para el caso de fluidos newtonianos podemos escribir (Barnes et al. 1989; Bird et al. 1987; Bird et al. 2002; García-Colín & Rodríguez 1991).

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu\mathbf{D} \quad (3)$$

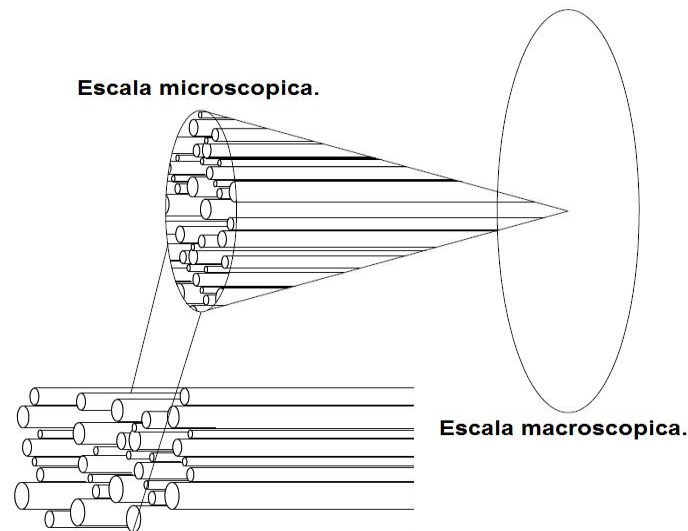
Donde  $\mu$  es una propiedad material conocida como viscosidad la cual, se puede interpretar como una medida de la resistencia a fluir de un medio (Barnes et al. 1989; Bird et al. 1987; Bird et al. 2002; García-Colín & Rodríguez 1991). Como se puede apreciar, con esta ecuación se tiene un conjunto de ecuaciones para dos incógnitas,  $p$  y  $\mathbf{V}$  que dadas las, condiciones iniciales y de frontera puede resolverse. Sin embargo, en este trabajo, estamos interesados en ilustrar que pasa en los fluidos que interviene en la explotación petrolera, en los reactores químicos y los bio-fluidos que presentan características que los hacen ser llamados no newtonianos (Barnes et al. 1989; Bird et al. 1987; Bird et al. 2002; García-Colín & Rodríguez 1991).

La característica fundamental de los fluidos no-newtonianos es que la ecuación constitutiva ya no es lineal (Barnes et al. 1989; Bird et al. 1987; Bird et al. 2002; García-Colín & Rodríguez 1991; Del Rio & Castrejón 2003). Algunos de estos fluidos los podemos encontrar en sitios comunes. Por ejemplo, la miel; que al parar de verterla observamos un comportamiento inercial al ver que continua fluyendo por unos instantes más. En algunos procesos químicos industriales los fluidos tienen

propiedades diferentes a las del agua y muchas veces son llamados fluidos complejos o exóticos (Del Rio & Castrejón 2003, García-Colín & Rodríguez, 1991; (Barnes et al. 1989; Bird et al. 1987; Bird et al. 2002; García-Colín & Rodríguez 1991; Del Rio & Castrejón 2003). Los fluidos no newtonianos muestran muchas propiedades diferentes entre ellas la elasticidad. Los fluidos viscoelásticos se caracterizan por ser fluidos que presentan comportamiento disipativo como la viscosidad y una propiedad de restitución ante los esfuerzos (la elasticidad antes mencionada). (Del Rio & Castrejón, 2003; Bird et al. 2002).

## 1.2 Medio Poroso.

Hasta aquí, hemos descrito a los fluidos, pero debemos definir un medio poroso como un cuerpo sólido con hoyos interconectados (poros) (Del Rio & Castrejón 2003; Whitaker 1976a, b, 1967, 1987). Estos poros pueden ser espacios extremadamente pequeños, intersticios moleculares, y otros muy grandes, cavernas (Del Rio & Castrejón 2003). Como se comprende con esta definición se abarca desde membranas muy poco permeables hasta la corteza terrestre en escalas muy diferentes, Fig.1.



**Figura 1. Esquema de un medio poroso.**

Para muchos autores, la idea de poro se tomara como el espacio intermedio entre los dos extremos señalados, de tal forma que los espacios sean grandes desde el punto de vista macroscópico, pero pequeños para las escalas del sistema (Del Rio & Castrejón 2003; Ochoa-Tapia et al. 1993; Ochoa-Tapia1995; Whitaker 1976a,b, 1967, 1987). También se abordara el transporte de fluidos en medios porosos y por lo tanto este medio debe ser atravesado por un fluido; de esta forma se requiere que podamos encontrar espacios huecos en el material que esta interconectados del medio poroso. Es obvio que el estudio de flujo de materia solo consideran los poros efectivos y lo espacios aislados no juegan papel alguno en el transporte de masa (López de Haro et al. 1997). El medio poroso puede ser caracterizado por varias propiedades geométricas, como son la porosidad  $\varepsilon$  definida como la fracción de espacio vacío con respecto al volumen total, en nuestro caso será el espacio interconectado. Es común que en la literatura se use el termino diámetro promedio de poro, pero esto solo tendría sentido estrictamente si los huecos tuvieran forma cilíndrica o esférica (Del Rio & Castrejón 2003; Ochoa-Tapia et al. 1993; Ochoa-Tapia1995; Whitaker 1976a, b, 1967, 1987; López de Haro et al. 1997).

### **1.3 Permeabilidad intrínseca.**

**La permeabilidad es el término asociado a la conductividad del medio poroso con respecto al fluido y nos indica que tan fácilmente fluye un fluido a través de un medio poroso** (Del Rio 1993; Del Rio & Castrejón 2003; Del Rio et al. 1998; Ochoa-Tapia et al. 1993; Ochoa-Tapia1995; Whitaker 1976a, b, 1967, 1987). Se acostumbra definir el Darcy como la unidad de medición de la permeabilidad y su equivalencia en de 9.87 cm., i.e. 1 Darcy = 9.87 cm. Existen muchas formas de modelar un medio poroso, por ejemplo considérese un sólido al que se le barrena en múltiples lugares conservando los ejes de barrenos paralelos, esto sería un manojo de tubos (Del Rio 1993; Del Rio & Castrejón 2003; Del Rio et al. 1998; Ochoa-Tapia et al. 1993; Ochoa-Tapia1995; Whitaker 1976a,b, 1967, 1987), **esta aproximación es la más simple de todas y se conoce como la teoría del poro promedio.** Otra forma de modelar seria considerar un sistema como un cumulo de esferas solidas fijadas azarosamente distribuidas (Del Rio 1993; Del Rio & Castrejón 2003; Del Rio et al. 1998). Se ha encontrado que algunos medios porosos muestran características de autosimilaridad y por ello también se han tratado de modelar a los medios porosos como fractales (**Turcio et al. 2014**). Como se observa, describir la microestructura de un medio poroso un tema abierto y lleno de posibilidades (Del Rio 1993; Del Rio & Castrejón 2003; Del Rio et al. 1998; Ochoa-Tapia et al. 1993; Ochoa-Tapia1995; Whitaker 1976a, b, 1967, 1987).

#### 1.4 Transporte en medios porosos.

La descripción del transporte en medios porosos presenta dificultades que radican tanto en la compleja estructura del medio poroso como en las propiedades físicas de los fluidos (Del Rio 1993; Del Rio & Castrejón 2003; Del Rio et al. 1998; Ochoa-Tapia et al. 1993; Ochoa-Tapia 1995; Whitaker 1976a, b, 1967, 1987). Esta complejidad del transporte en medios porosos se presenta claramente al describir el conjunto de ecuaciones de balance y ecuaciones constitutivas, consideradas para modelar el flujo en medios porosos. Antes de comenzar y para centrar nuestra atención en la permeabilidad debemos hacer una aproximación y suponer que el transporte de energía no es importante en el sistema (Del Rio 1993; Del Rio & Castrejón 2003; Del Rio et al. 1998; Ochoa-Tapia et al. 1993; Ochoa-Tapia 1995; Whitaker 1976a, b, 1967, 1987).

Entonces, bajo una situación isotérmica, para describir el flujo a través de un medio poroso se requiere en principio resolver el problema dado por las Ecs. (1) y (2) que deben resolverse bajo las condiciones de frontera que generalmente se toman como la condición de no deslizamiento en la frontera (Barnes et al. 1989; Bird et al. 1987, 2002; Del Rio et al. 1993; Del Rio et al & Castrejón-Pita 2003; Del Rio et al. 2003; García-Colín & Rodríguez 1991).

$$\mathbf{V} = \mathbf{0} \text{ en } \Omega \quad (4)$$

Donde  $\Omega$  es la superficie del sólido. Evidentemente el desorden de la superficie introduce una complejidad adicional a la no linealidad de la Ec. (2). Por supuesto, también se requiere la condición inicial en todo el campo de velocidades para la solución del problema, esto es otro reto mayor (Barnes et al. 1989; Bird et al. 1987, 2002; Del Rio et al. 1993; Del Rio et al & Castrejón-Pita 2003; Del Rio et al. 2003; García-Colín & Rodríguez 1991).

Por otro lado, como ya mencionamos, el sistema de Ecs. (1) y (2) no es un sistema cerrado, es necesario introducir dos ecuaciones más que especifiquen el tipo de fluido de trabajo.



La primera de las ecuaciones de estado entre la presión y la densidad, la segunda se refiere a la ecuación constitutiva para el tensor de esfuerzos viscosos; pero estas podrán ser escogidas entre las Ecs. (3) o (4). Como ya mencionamos, es la selección de esta última ecuación donde centraremos las diferencias entre los fluidos newtonianos y no newtonianos que se estudian en este proyecto de licenciatura (del Rio 2003; Bird et al. 2002; Whitaker 1986). Por lo tanto, bajo la hipótesis de incompresibilidad, el sistema de ecuaciones (1) y (2) se transforma en

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (5)$$

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} \right) = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (6)$$

Estas son las ecuaciones diferenciales parciales no-lineales que tenemos que resolver en la intrincada geometría de la Fig.1. Para resolver estas ecuaciones en un medio poroso, generalmente se utilizan modelos muy simples o se define nuevas variables promedio (Barnes et al. 1989; Bird et al. 1987, 2002; Del Rio et al. 1993; Del Rio et al & Castrejón-Pita 2003; Del Rio et al. 2003; García-Colín & Rodríguez 1991). En este proyecto de licenciatura se tomara como base las siguientes restricciones para modelar el flujo de fluidos newtonianos en un medio poroso. Las principales restricciones son descritas a continuación:

- A) Para describir el sistema poroso se construyen un manojo de capilares con el mismo radio, es decir, no existe variación en el tamaño del poro, por lo que nuestro sistema se puede describir por la teoría del poro promedio.
- B) Para caracterizar nuestro fluido utilizamos cuatro ecuaciones constitutivas viscosas. La primera de ellas es la de Newton la cual presenta la relación más sencilla entre la rapidez de deformación y el tensor de esfuerzos. La segunda, tercera y cuarta son los modelos no newtonianos de Ostwald (ley de potencia), Modelo de Ellis (Combina el newtoniano y el modelo de ley de potencia) y finalmente el modelo de Reinner-Phillipoff el cual, es un modelo que describe toda la zona de viscosidad.
- C) Para describir la cinemática del fluido en el medio poroso, utilizamos una ecuación de Darcy Generalizada la cual relaciona la velocidad superficial de flujo volumétrico con la permeabilidad intrínseca, la viscosidad aparente y la fuerza motriz asociada con el gradiente de presión.

- D) Un hecho importante en este trabajo, es que la permeabilidad intrínseca es una propiedad del sistema, i.e., es una condición geométrica y tiene que ver con un problema de tipo geométrico de los planos que forma la estructura porosa. Este hecho implica que la permeabilidad es función de la porosidad, diámetro del poro, tortuosidad etc.
- E) Las irregularidades de los poros, i.e, la distribución del tamaño del poro son descartados en el presente trabajo debido a que su complejidad matemática aumenta debido a las variaciones del radio en el poro lo cual induce transiciones de flujo cortante a flujo extensional.
- F) Los mecanismos de transferencia de energía y de masa no son tomados en cuenta, debido a que la complejidad de nuestro sistema aumenta porque hay que acoplar en la ecuación de momento, la de energía y masa.

Finalmente, en esta tesis abordamos de una forma simple la descripción del flujo de cuatro fluidos, uno newtoniano y tres no-newtonianos a través de un medio poroso. Con este análisis capturaremos las características esenciales de los flujos de interés tecnológicos y discutimos la relevancia de contar con aproximaciones analíticas a la compleja problemática real. En el capítulo II abordamos los antecedentes más importantes del flujo en medios porosos, ecuaciones empíricas más importantes en la descripción del medio poroso y ecuaciones reológicas más utilizadas en la caracterización reológica de los fluidos que interviene en estos sistemas.

### **1.5 Hemorreología: Sangre Humana.**

La reología es la ciencia que estudia la respuesta de los fluidos complejos en término de dos parámetros principales: el esfuerzo y deformación (flujo). La sangre humana es un fluido de reología muy compleja, porque la viscosidad de la sangre no es proporcional al esfuerzo aplicado, es decir, es un fluido no newtoniano que cuenta con características adelgazantes al corte (cuanto mayor sea el esfuerzo aplicado menor es su viscosidad). Esto se debe en parte a la formación de estructuras transitorias (que se destruyen por el flujo) de muy corta duración, cuyo tamaño e intensidad dependen de la concentración de colesterol total, ente otros factores.

El estudio de la sangre presenta un reto mundialmente, ya que el primer paso se concentra en la caracterización de la misma y el segundo al efecto de diferentes patologías, entre las cuales se pueden citar: (i) la hiperglucemia asociada con la diabetes tipo I, y II, que se han declarado como epidemia nacional, (ii) hipercolesteremia asociada con el colesterol alto que afecta las arterias y que provocan los infartos al miocardio, (iii) el cáncer que es un desequilibrio en la producción de glóbulos blancos y (iv) todo tipo de enfermedades de transmisión sexual.

La sangre humana es un fluido con gran cantidad de funciones dentro del cuerpo humano, entre ellas la entrega de oxígeno y la remoción de dióxido de carbono de tejidos distales, y el transporte de nutrientes y metabolitos. Los trastornos metabólicos en la actualidad son problemas que dañan a los seres humanos cada vez con mayor frecuencia: estos se atribuyen a un sin número de factores de estrés, medio ambiente, alimentación y genéticos, como la hipercolesterolemia familiar. De los múltiples trastornos metabólicos presentes en un ser humano, la hipercolesterolemia (altas concentraciones de colesterol en sangre  $> 200$  mg/ dL) tiene grandes repercusiones en la fisiología cardiovascular. La sangre es un fluido con dos fases perfectamente diferenciadas: una suspensión de células (eritrocitos y leucocitos) que llamaremos fase dispersa en un medio líquido, como el plasma (agua, sales, proteínas y metabolitos), que llamaremos fase continua. La viscosidad de la sangre depende directamente de la relación entre la cantidad de células y el contenido de proteínas y metabolitos en el plasma. El colesterol total junto con los triglicéridos son las sustancias que más afectan la reología de la sangre humana. La sangre con concentraciones aumentadas de colesterol total presenta características bioquímicas y mecánicas diferentes de las de la sangre con concentraciones normales; la diferencia de viscosidad entre ambas es del orden de 10 veces. La sangre con alto contenido de colesterol tiende a formar estructuras transitorias más complejas y difíciles de desagregar, además de que el carácter adelgazante al corte de este fluido aumenta.

Los niveles elevados de colesterol total pueden desencadenar problemas como aterosclerosis, angina de pecho, infartos accidentes isquémicos causados por la oclusión de la luz de las arterias, lo que priva de oxígeno y nutrientes a los tejidos.

### **1.5.1 La reología considera dos tipos de fluidos: newtonianos y no newtonianos**

En la reología generalmente se considera dos tipos de fluidos: los newtonianos, cuya viscosidad no depende del esfuerzo aplicado o de la velocidad de flujo, ejemplos de estos fluidos son: líquidos de bajo peso molecular (moléculas pequeñas) como el agua, los aceites o la miel de abeja. Curiosamente, los fluidos no newtonianos son los que más abundan en la naturaleza y en la industria. Estos fluidos tienden a modificar su estructura con el flujo y por lo tanto, su viscosidad. Un ejemplo muy común es la pasta de dientes que usamos todos los días; mientras no le apliquemos un esfuerzo, la viscosidad de la pasta es extremadamente alta y no fluye hasta que le aplicamos un esfuerzo lo suficientemente grande como para modificar su estructura y deformarla (flujo). Otros ejemplos de estos fluidos son las pinturas, el chocolate, la mayoría de los fluidos corporales, mayonesa, cátsup, secreciones de insectos entre otros.

### **1.5.2 Las propiedades del flujo de la sangre dependen de varios factores.**

La sangre es un fluido con reología muy compleja, cuyas propiedades de flujo resultan afectadas por la orientación y deformabilidad de las células sanguíneas. Las propiedades de agregación transitoria de las células sanguíneas, en este caso los glóbulos rojos y las plaquetas, obedecen a una teoría que sostiene que las macromoléculas, como el colesterol promueven la agregación transitoria de los eritrocitos, ya que se interponen entre unas células y otra y generan puentes entre sus membranas para reducir la interacción electrostática natural entre dos células.

### **1.5.3 Como se estudia la sangre en un reómetro.**

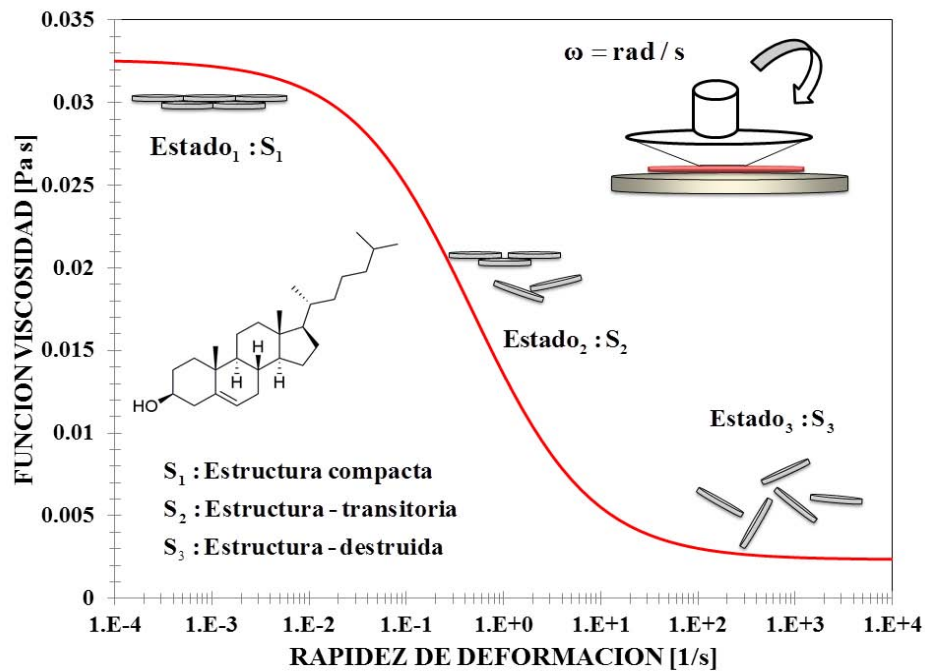
La sangre, como cualquier otro fluido, puede estudiarse mediante técnicas reométricas. La sangre humana para su estudio se debe de obtener de voluntarios sanos, sin coagulopatía en curso, mediante la aplicación de un torniquete a la altura del musculo bíceps que genera turgencia para realzar las venas cefálicas y basilica. Se procede a realizar una punción y extraer sangre (5 mL a aproximadamente) en un tubo adicionado con EDTA para evitar la coagulación de la sangre durante el ensayo. Los ensayos efectuados se hacen en situaciones de flujo controlado como el denominado flujo de corte simple en estado estacionario, en el que el fluido se coloca entre un disco y un cono (con un ángulo pequeño cercano a un grado) del mismo diámetro, el cono gira a una velocidad angular controlada y se determina la viscosidad a diferentes velocidades de giro. La temperatura controlada durante la prueba y se trata de mantenerla en condiciones similares a las de una persona sana (Temperatura cercana a los 37 grados Celsius).

El equipo que controla la temperatura, la velocidad de giro del cono y mide el torque generado se denomina reómetro. En este caso se utiliza un equipo de la marca TA Instruments modelo AR-G2, con geometría de cono y platos a una temperatura de 37 C.

#### **1.5.4 Por qué la sangre humana se comporta como un fluido no newtoniano**

Un fluido newtoniano como el agua es un sistema homogéneo de una sola fase, no tiene partículas en suspensión que puedan interactuar, además de que su estructura química es simple por ser una molécula pequeña compuesta solo por un átomo de oxígeno unido a dos átomos de hidrógeno. Por esta razón el agua en estado líquido tendrá la misma viscosidad independientemente de la rapidez con la que se deforme. La sangre, por otro lado, es un sistema que está formado por una fase dispersa (plasma), que en esencia es un fluido newtoniano, pero tiene partículas en suspensión (fase dispersa) que interactúan entre sí con el plasma. Esta fase dispersa está compuesta de células cuyas membranas tienen una carga eléctrica negativa y sustancias como el colesterol. Esto da lugar a un sistema complejo cuya respuesta reológica es muy variada dependiendo del sistema de flujo y las condiciones en las que se estudie. La figura 2 muestra una curva teórica y experimental para una muestra de sangre humana con alto contenido de colesterol. En el reograma se observa que las curvas presentan adelgazamiento al corte, es decir a mayor velocidad de corte la viscosidad disminuye. A bajas deformaciones de corte, la sangre muestra conglomerados de partículas y todas las estructuras están orientadas al azar (fase dispersa) y por lo tanto mayor resistencia al flujo. En la segunda etapa a esfuerzos moderados, los constituyentes de la sangre (eritrocitos, fase dispersa) se orientan más en la dirección de flujo, lo que da origen a estructuras que cada vez se oponen menos al flujo y por lo tanto la viscosidad disminuye. Estas estructuras no son estables pues al dejar de fluir, el sistema recobra su estructura original y la viscosidad se eleva. Dentro del cuerpo humano, la sangre está sometida a rapidez de deformación del orden de 1-100 s<sup>-1</sup> que corresponde a la parte central del reograma teórico.

Las propiedades de agregación de las células sanguíneas en este caso los glóbulos rojos, obedecen a una teoría muy simple la cual sostiene que las macromoléculas (colesterol, por ejemplo) promueven la agregación de los eritrocitos ya que se interponen entre una célula y otra generando puentes entre sus membranas lo cual reduce la interacción electroestática natural entre dos células.



**Figura 2. Función viscosidad vs rapidez de deformación para un individuo sin colesterol. La curva teórica (roja) fue obtenida con el modelo de Cross. Los datos reométricos fueron obtenidos mediante un reómetro de cono y plato. El Reograma muestra dos zonas a viscosidad constante y una zona intermedia tipo ley de potencia.**

# CAPÍTULO II

## ANTECEDENTES

## 2.1 Ley de Darcy para un fluido newtoniano.

El estudio de la mecánica de fluidos (newtonianos y no newtonianos) en medios porosos, es uno de los temas más fascinantes y atractivos para la gente que hace investigación en fenómenos de transporte y reología de todo el mundo. La descripción del transporte de cantidad de movimiento en el medio poroso es bastante complejo, debido a la distribución azarosa de los poros en el medio, la irregularidad del diámetro del poro y la tortuosidad (Bird et al. 1987, 2002; Del Rio et al. 1993; Del Rio et al & Castrejón-Pita 2003; Del Rio et al. 2003). Debido a esto, se han implementado diferentes aproximaciones de tipo analítico, con el fin de describir la dinámica en estos sistemas. Uno de los primeros intentos en la descripción del flujo en medios porosos, es el modelo de Darcy (Sochi 2010; Bird et al. 1987, 2002; Del Rio et al. 1993; Del Rio et al & Castrejón-Pita 2003; Del Rio et al. 2003). Esta ecuación empírica se basa en la suposición del poro promedio, i.e. supone que todos los poros tienen el mismo diámetro y que el sistema puede ser descrito por un manojito de capilares. La ecuación de Darcy se representa como:

$$V_0 = \frac{k}{\mu} (-\nabla_z p) \quad (7)$$

La Ec. (7) describe la velocidad promedio superficial  $V_0$  en función de la permeabilidad  $k$  la cual, es una medida de la resistencia que presenta el medio poroso al paso de un fluido, la viscosidad  $\mu$  que representa la resistencia del fluido a ser deformado mediante un esfuerzo cortante y el gradiente de presión  $\nabla_z p$  que en este caso, es la fuerza motriz que genera la deformación en el fluido. La Ec. (7) representa el primer intento de describir el flujo en un medio poroso y en particular, para un fluido newtoniano, la permeabilidad  $k$  toma la siguiente forma analítica:

$$k(\varepsilon, a) = \frac{\varepsilon a^2}{8} \quad (8)$$

La permeabilidad intrínseca  $k$  solo depende de la porosidad y del cuadrado del radio del tubo y de un factor numérico que resulta de la integral de superficie en el flujo volumétrico. Evidentemente, se ha tratado de obtener ecuaciones empíricas que describan la permeabilidad intrínseca que es una medida de la capacidad que tiene el sistema (fluido), de ser deformado en un medio poroso (Bird et al. 1987, 2002; Del Rio et al. 1993; Del Rio et al & Castrejón-Pita 2003; Del Rio et al. 2003; García-Colín & Rodríguez 1991). En la tabla 1 se presenta un resumen de los modelos más utilizados en la investigación de fluido en medios porosos. Los modelos más empleados en la literatura son los de: (i) Darcy, (ii) Blake-Kozeny-Carman y (iii) Ergun.



| <b>Modelo</b>              | <b>Ecuación</b>  |
|----------------------------|--|
| <b>Darcy</b>               | $\frac{\Delta p}{L} = \mu \frac{V_0}{K}$   |
| <b>Blake-Kozeny-Carman</b> | $\frac{\Delta p}{L} = \frac{72C\mu V_0 (1-\varepsilon)^2}{D_p^2 \varepsilon^3}$  |
| <b>Ergun</b>               | $\frac{\Delta p}{L} = \frac{150\mu V_0 (1-\varepsilon)^2}{D_p^2 \varepsilon^3} + \frac{1.75\rho V_0 (1-\varepsilon)}{D_p \varepsilon^3}$ |

**Tabla 1. Modelos más representativos en la descripción del medio poroso.**

**a) Modelo de Darcy.**

El modelo de Darcy como se explicó, es un modelo que puede ser deducido suponiendo la teoría promedio del capilar, es decir, que todos los poros son aproximados por medio de un capilar de radio constante. Este puede ser deducido a partir de las ecuaciones Navier-Stokes de la mecánica clásica, despreciando la inercia del material y suponiendo estado estacionario (Sochi 2010; Barnes et al. 1989; Bird et al. 1987, 2002; Del Rio et al. 1993; Del Rio et al & Castrejón-Pita 2003; Del Rio et al. 2003; García-Colín & Rodríguez 1991). Es importante, comentar que el modelo de Darcy solo es válido para flujo isotérmico, estado estacionario y solo toma en cuenta los mecanismos viscosos. El modelo de Darcy ha sido extendido para tomar en cuenta efectos complejos como los observados en fluidos no newtonianos en situaciones de varias fases termodinámicas. Varias generalizaciones del modelo de Darcy han sido deducidas incluyendo efectos no lineales como la inercia y la elasticidad respectivamente (Sochi et al. 2010; Shenoy 1993; Schowalter 1978).

**b) Modelo Blake-Kozeny-Carman (BKC).**

El modelo empírico de Blake-Kozeny-Carman es uno de los más importantes y populares en la dinámica del medio continuo, para describir el flujo a través de los medios porosos. Este modelo empírico incorpora la porosidad del medio  $\varepsilon$ , el diámetro del poro  $D_p$  y la tortuosidad del medio  $C$ , i.e. el camino libre que siguen los elementos materiales en el medio poroso. Por último, el modelo de BKC ha sido aplicado en flujo laminar a través de columnas empacadas a números de Reynolds

pequeños, en donde los efectos cinéticos debido a la tortuosidad del fluido en la cama empacada son despreciables. Extensiones empíricas de este modelo para describir la transición de flujo laminar a turbulento ha sido reportado en la literatura especializada concerniente al tema.

### **c) Modelo de Ergun.**

El modelo de Ergun contiene dos contribuciones principales. La primera de ellas asociada a los mecanismos viscosos y diámetro del poro, el segundo toma en cuenta los mecanismos inerciales a través de la densidad del medio. Es importante comentar que estos modelos son empíricos y la gran mayoría de estos sistemas relacionan la fuerza motriz con las propiedades materiales del medio como son: (i) La viscosidad, (ii) La inercia, (iii) El tamaño de partícula y (iv) La tortuosidad del medio. Otra hipótesis importante, en estas propuestas es la de flujo laminar, i.e., que el número de Reynolds es menor a 200, i.e.  $Re < 2100$ . Por otra parte si, el número de Reynolds aumenta se tendría que modificar las aproximaciones de flujo debido a que los mecanismos inerciales juegan un papel preponderante en la descripción del flujo turbulento. (Sochi 2010; Bird et al. 1987, 2002).

## **2.2 Modelos no-newtonianos para la descripción del flujo en el medio poroso.**

Como se explicó en el capítulo 1, los fluidos newtonianos muestran un relación lineal entre el tensor rapidez de deformación y tensor de esfuerzos. Cuando los sistemas de complejos de estudio presentan una relación no lineal, se necesita introducir ecuaciones empíricas o fenomenológicas que describan con un grado mayor de exactitud el flujo y la reología de estos sistemas. Cuando la viscosidad del fluido presenta una dependencia con la rapidez de deformación, puede ser representada por medio de una función llamada función viscosidad. Si el fluido presenta componentes viscosas y elásticas, este puede ser estudiado incorporando la dinámica de Hook en las ecuaciones constitutivas. Los modelos viscoelásticos pueden ser estudiados en el régimen de viscoelasticidad lineal (bajas deformaciones) y en el régimen de viscoelasticidad no lineal (altas deformaciones). En la tabla 2 se muestran alguno de los modelos no newtonianos más empleados en la literatura especializada en fenómenos de transporte y reología.

| Modelos                               | Modelo Reológico   | Función Viscosidad  |
|---------------------------------------|--|---|
| <b>Ley de Potencia</b>                | $\sigma = 2\eta(\Pi_D) \mathbf{D}$   | $\eta(\Pi_D) = m \left( \sqrt[2]{\mathbf{D}:\mathbf{D}} \right)^{n-1}$  |
| <b>Ellis</b>                          | $\sigma = 2\eta(\Pi_D) \mathbf{D}$   | $\eta(\Pi_\sigma) = \frac{\eta_0}{1 + \left( \frac{ \sigma }{\sigma_{1/2}} \right)^{a-1}}$  |
| <b>Reinner Phillipoff</b>             | $\sigma = 2\eta(\Pi_D) \mathbf{D}$   | $\eta(\Pi_\sigma) = \frac{1}{\varphi_\infty + \frac{\varphi_0 - \varphi_\infty}{1 + \left( \frac{ \sigma }{\sigma_s} \right)^2}}$ |
| <b>Carreau</b>                        | $\sigma = 2\eta(\Pi_D) \mathbf{D}$   | $\eta(\Pi_D) = \eta_\infty + \frac{\eta_0 - \eta_\infty}{\left[ 1 + (\lambda  \Pi_D )^2 \right]^{(1-n)/2}}$                       |
| <b>Hershel-Bulkley</b>                | $\sigma = 2\eta(\Pi_D) \mathbf{D}$   | $\eta(\Pi_D) = \frac{\eta_\infty}{\Pi_D} + m(\Pi_D)^{n-1}$  |
| <b>Maxwell</b>                        | $\sigma + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t} \sigma = 2\eta_0 \mathbf{D}$   | $\eta = \frac{\eta_0}{1 + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t}}$   |
| <b>Jeffreys</b>                       | $\sigma + \lambda_M \frac{\partial}{\partial t} \sigma = 2 \left( 1 + \lambda_J \frac{\partial}{\partial t} \right) \eta_0 \mathbf{D}$ | $\eta = \eta_0 \frac{1 + \lambda_J \frac{\partial}{\partial t}}{1 + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t}}$                       |
| <b>Convectiva Superior de Maxwell</b> | $\sigma + \lambda_M \overset{\vee}{\sigma} = 2\eta_0 \mathbf{D}$   | En corte es la misma que el fluido Newtoniano   |
| <b>Oldroyd-B</b>                      | $\sigma + \lambda_M \overset{\vee}{\sigma} = 2\eta_0 \left( \mathbf{D} + \lambda_J \overset{\vee}{\mathbf{D}} \right)$                 | En corte es la misma que el fluido Newtoniano   |

**Tabla 2. Modelos más representativos en la descripción del medio poroso.**

### 2.3 Ley de Darcy para un fluido no newtoniano (ley de potencia).

El modelo de Darcy ha sido modificado para tomar en cuenta los efectos adelgazantes, engrozantes al corte debido a las características no newtonianos de sistemas complejos (Sochi 2010; Bird et al. 1987, 2002; Del Rio et al. 1993; Del Rio et al. & Castrejón-Pita 2003; Del Rio et al. 2003). La diferencia del modelo de Darcy de un fluido newtoniano y uno no newtoniano radica en la viscosidad aparente  $\mu_{ap}$ .

Por ejemplo, para un fluido no-newtoniano tipo ley de potencia el modelo de Darcy toma la forma general:

$$V_0 = \frac{\varepsilon \langle V \rangle}{A} = \frac{k}{\mu_{NN}} (-\nabla_z p) \quad (9)$$

En donde la viscosidad aparente toma la forma para un fluido tipo ley de potencia tiene la siguiente representación:

$$\mu_{app} = m \left( \frac{\langle V \rangle}{D} \right)^{n-1} \quad (10a)$$

En la Ec. (10)  $\langle V \rangle$  es la velocidad promedio del sistema y D es la longitud característica del sistema, m y n son los parámetros del modelo de ley de potencia. Es importante, notar que el cociente  $\langle V \rangle / D$  es la rapidez de deformación característica del modelo de ley de potencia. La velocidad promedio para el modelo de ley de potencia:

$$\langle V \rangle = \frac{a^{\alpha+1}}{\alpha+3} \left( -\frac{1}{2m} \nabla_z p \right)^\alpha \quad (10b)$$

Cuando  $n = 1$  se obtiene el modelo de Darcy para el fluido newtoniano.

#### **2.4 Ley de Darcy para un fluido viscoelástico (Modelo de Maxwell).**

El modelo generalizado de Darcy ha sido utilizado para la descripción de fluidos viscoelásticos empleados en la descripción del flujo pulsátil sanguíneo y de sistemas micelares en medios porosos (Sochi 2010; Bird et al. 1987, 2002; Del Rio et al. 1993; Del Rio et al & Castrejón-Pita 2003; Del Rio et al. 2003). El modelo generalizado de Darcy para un fluido viscoelástico toma la forma:

$$V_0 = \frac{\varepsilon \langle V \rangle}{A} = \frac{k}{\mu_{M-I}} (-\nabla_z p) \quad (11a)$$

En donde la permeabilidad dinámica puede ser descrita de la siguiente manera:

$$\mu_{M-I} = \frac{\rho(i\omega) a^2 / 8}{1 - 2 \frac{J_1(\beta a) / \beta a}{J_0(\beta a)}} \quad (11b)$$

Nótese que la viscosidad (Ec.11b) es una combinación de propiedades materiales que incluyen la densidad del líquido, la frecuencia en el espacio de Fourier y de un parámetro beta  $\beta$ , el cual se puede interpretar como el inverso de una longitud característica. Para un fluido de Maxwell, i.e. el parámetro beta  $\beta$  se define en la siguiente forma:

$$\beta^2 = - \frac{\rho(i\omega)}{\eta_0 / (1 + \lambda_0(i\omega))} \quad (12)$$

Y en el caso de un fluido newtoniano, i.e. cuando el tiempo de relajación de Maxwell tiende a cero  $\lambda_0 = 0$ , la Ec. (12) se simplifica a:

$$\beta^2 = - \frac{\rho(i\omega)}{\eta_0} \quad (13)$$

Nótese que la función viscosidad que se está manejando corresponde al modelo de Maxwell, y esta puede ser generalizada a cualquier fluido viscoelástico lineal en el régimen de bajas deformaciones (Bird et al. 1987, 2002; Del Rio et al. 1993; Del Rio et al. & Castrejón-Pita 2003; Del Rio et al. 2003). Nótese que al incluir la inercia en el sistema, la permeabilidad intrínseca depende de la frecuencia, de la inercia del fluido y de un cociente de dos funciones de Bessel las cuales pueden inducir un fenómeno de tipo resonante en las curvas de permeabilidad compleja.

## 2.5 Ley de Darcy efectos difusivos.

En la que  $\varepsilon$  es la porosidad ( es decir la relación entre el volumen de huecos y el volumen total)  $k$  es la permeabilidad del medio poroso. La velocidad  $V_0$  que interviene en estas ecuaciones es la velocidad superficial (velocidad volumétrica de flujo a través de la unidad de área de la sección del solido más el fluido) promediada en una pequeña región del espacio (pequeña con respecto a las dimensiones macroscópicas del sistema de flujo pero grande con respecto al tamaño con respecto al tamaño del poro). Brinkman (1947) ha sugerido la siguiente modificación empírica de la ley de Darcy.

$$0 = -\nabla p - \frac{\mu}{k} \mathbf{V}_0 + \mu \nabla^2 \mathbf{V}_0 + \rho \mathbf{g} \quad (14)$$

El termino  $\mu \nabla^2 \mathbf{V}_0$  se introduce para tener en cuenta la distorsión de los perfiles de velocidad en las aproximaciones de las paredes.

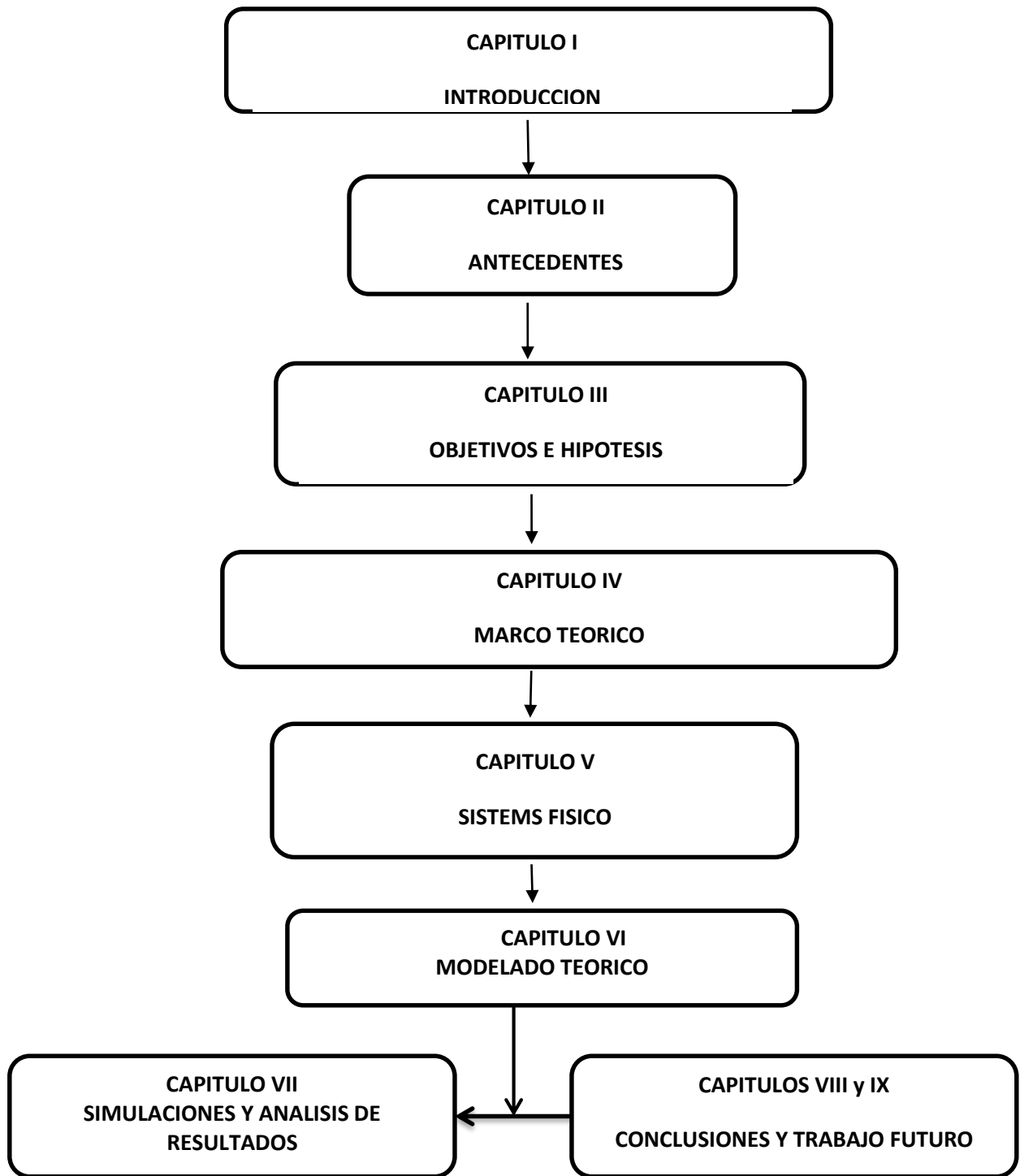
## 2.6 Resumen de los principales puntos estudiados en este capítulo.

En este capítulo, se ha discutido alguno de las ecuaciones más empleadas en la generalización del flujo en un medio poroso. La primera aproximación es considerar un manojito de tubos y suponer que la permeabilidad intrínseca puede ser modelada con alguna de las ecuaciones empíricas de la Tabla 1. Por otra parte, si el fluido es no newtoniano, puede ser caracterizado por medio de las ecuaciones constitutivas reológicas de la Tabla 2. En el régimen de viscoelasticidad lineal se puede usar la misma técnica (Del Rio et al. (2003)) para llevar al sistema del espacio temporal al de las frecuencias con el fin de deducir una expresión para la permeabilidad compleja (Ver problema 3 y 4 de la ref. Bird et al. 2002). EL trabajo de Del Rio et al. (20013) puede ser extendido para cualquier otro modelo viscoelástico (Jeffreys, Burgers, Maxwell Generalizado, etc) con y sin efectos de inercia incluidos. Hasta este momento, existen varias preguntas que deben ser contestadas las cuales son formuladas a continuación:

- ✓ La permeabilidad estática o dinámica depende solamente de las propiedades del poro, es decir es independiente del fluido. En este caso, se puede separar el problema en utilizar las ecuaciones empíricas de la Tabla 1 y modelar el fluido con alguna de las ecuaciones constitutivas de la Tabla 2.

- ✓ El efecto de las propiedades del fluido debe influir en la permeabilidad dinámicas combinado con la fuerza motriz, i.e. no solamente las propiedades del poro y geométricas sino las materiales del fluido y el gradiente de presión.
- ✓ Por último la porosidad puede ser considerada como un problema de tipo geométrico y el tamaño del poro puede variar dependiendo de las características fisicoquímicas del mismo, por lo que se necesitan combinar datos geofísicos con reométricos con el fin de caracterizar las propiedades materiales del sistema.

Por otro lado y debido a las aplicaciones científicas y tecnológicas actuales y potenciales de los líquidos no-newtonianos, así como la ausencia de resultados analíticos simples que permitan contrastar las predicciones numéricas y las observaciones experimentales, se justifica plenamente la originalidad de la investigación, contenida en el presente proyecto de tesis de licenciatura. Para este efecto, la distribución y el contenido del material de la presente tesis se muestra en la Fig.3, posterior a eso, se plantea el objetivo general, los objetivos particulares y la hipótesis de trabajo.



**Figura 3. Organización del trabajo desarrollo en la tesis.**



# CAPÍTULO III

## OBJETIVOS E HIPOTESIS

### **3.1 Objetivos.**

En esta sección se presentan el objetivo general, los objetivos particulares y la hipótesis de trabajo de esta investigación.

#### **3.1.1 Objetivo General.**

El objetivo esencial del presente trabajo es contribuir al entendimiento la permeabilidad de fluidos no Newtonianos en un medio poroso mediante diferentes ecuaciones constitutivas como lo son: (i) Newtoniano, (ii) Maxwell y (III) Modelo de Jeffrey

#### **3.1.2 Objetivos particulares.**

- ✓ Obtener expresiones analíticas para el perfil de velocidades, flujo volumétrico,
- ✓ Obtener de los cálculos del flujo volumétrico una expresión análoga a la ley de Darcy, y calcular la permeabilidad intrínseca.
- ✓ Utilizar datos reométricos de la literatura con el fin de obtener la permeabilidad intrínseca de un sistema complejo que se rompe y destruye bajo flujo.

### **3.2 Hipótesis.**

El medio poroso, puede ser descrito adecuadamente por medio de un conjunto de capilares finitos de radio  $a$  y de longitud  $l$ , la reología y el flujo del fluido viscoelástico es caracterizado por las ecuaciones constitutivas de los modelos; Newtoniano, Maxwell y Jeffreys asumiendo estado dinámico.

# **CAPÍTULO IV**

## **MARCO TEÓRICO**

#### 4.1 Fenómenos de Transporte.

Los Fenómenos de Transporte, se define como la rama de la Ingeniería Química que estudia los mecanismos de transporte en momento, energía y masa. Los fenómenos de transporte pueden ser estudiados a nivel macroscópico, microscópico y molecular (Bird et. al. 1987, 2002). La ecuación diferencial básica de transporte puede ser descrita en término de la derivada material  $D/Dt$  (Bird et. al. 2002; Bird et. al. 1987):

$$\frac{DX}{Dt} = \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \right) \mathbf{X} = -\nabla \cdot \mathbf{Y} + \mathbf{f} \quad (15)$$

| Mecanismo de Transporte                                | X                 | Y   | f                     |
|--|-------------------|---|-----------------------|
| <b>Momento</b><br>Newton                               | $\rho \mathbf{V}$ | $\Phi = \rho \mathbf{v} \mathbf{v} + \mathbf{T} = \rho \mathbf{v} \mathbf{v} - p \mathbf{I} + \sigma$ | $\rho \mathbf{g}$     |
| <b>Energía</b><br>Termodinámica Irreversible           | $U = \rho C_p T$  | $\mathbf{q} = -k \nabla T$  | $\sigma : \mathbf{D}$ |
| <b>Masa</b><br>Conservación de los moles en un sistema | $C_A$             | $\mathbf{N}_A = -c \mathbf{D}_{AB} \nabla x_A + x_A (\mathbf{N}_A + \mathbf{N}_B)$                    | $R_A$                 |
| <b>Continuidad</b><br>Conservación de la masa          | $\rho$            | $\rho \mathbf{V}$   | 0                     |

**Tabla 3.** Ilustra las variables dinámicas involucradas en las ecuaciones básicas de transporte de cantidad de movimiento, energía y masa respectivamente.

El primer término de la Ec. (15), representa la derivada material de la propiedad X, la cual es igual a los cambios espaciales del flux a través de la divergencia del flux Y y por último la fuente (Bird et. al. 2002; Bird et. al. 1987 ).

#### **4.1.1 La ecuación de transporte de cantidad de movimiento.**

La ecuación de momento, se basa principalmente en la segunda ley de newton del movimiento en un medio continuo, la cual puede ser escrita de la siguiente manera (Bird et. al. 2002; Bird et. al. 1987):

$$\rho \frac{DV}{Dt} = \rho \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \right) \mathbf{V} = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{g} \quad (16)$$

En la Ec. (16)  $\rho$  es la densidad del líquido,  $\mathbf{V}$  es el vector de velocidad,  $p$  es el gradiente de presión,  $\boldsymbol{\sigma}$  es el tensor de esfuerzos viscoso, y  $\mathbf{g}$  es el vector aceleración de la gravedad, que en el campo terrestre es constante. Si el fluido que describe la relación del tensor de esfuerzos con la rapidez de deformación es lineal, la Ec. (16) se transforma en la Ec. de Navier-Stokes para los fluidos newtonianos (Bird et. al 1987, 2002):

$$\rho \frac{DV}{Dt} = \rho \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \right) \mathbf{V} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{V} + \rho \mathbf{g} \quad (17)$$

La Ec. (17) es base para el cálculo de la porosidad y del flujo en un medio poroso.

#### **4.1.2 La ecuación de transporte de energía.**

La ecuación de energía  $U = \rho C_p T + \text{const.}$ , se puede interpretar como una extensión de la primera ley de la termodinámica a un sistema irreversible, en donde el tiempo si es una variable importante, ya que desde el punto de vista clásico, no es tomada en cuenta. Se tiene lo siguiente (Bird et. al 1987, 2002):

$$\frac{D}{Dt} U = \rho C_p \frac{DT}{Dt} = \rho C_p \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \right) T = -\nabla \cdot \mathbf{q} + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} = k \nabla^2 T + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} \quad (18)$$

La Ec. (18) describe la evolución temporal y espacial de la temperatura como función como una consecuencia del flux de energía, y del trabajo irreversible realizado por un agente externo sobre los mecanismos viscosos (Bird et. al 1987, 2002). La Ec. (18) es punto de partida en los cálculos del perfil de temperatura asociado a los procesos moleculares y los disipativos respectivamente.

#### **4.1.3 Ecuación de transporte de masa.**

La Ecuación que describe los cambios espaciales y temporales del flujo molar puede ser descrita a través de la siguiente expresión:

$$\frac{DC_A}{Dt} = \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \right) C_A = cD_{AB} \nabla^2 x_A - \nabla x_A \cdot (\mathbf{N}_A + \mathbf{N}_B) - x_A \nabla \cdot (\mathbf{N}_A + \mathbf{N}_B) + R_A \quad (19)$$

La Ec. (19) describe los cambios temporales y espaciales de la concentración de la especie A por efecto de los mecanismos difusivos y de las contribuciones de los cambios espaciales a través del movimiento global del fluido. Cuando el movimiento global del fluido se desprecia, es decir, los cambios espaciales en el movimiento global del fluido son despreciables y solamente los mecanismos difusivos y el término de generación es obtenido, se tiene lo siguiente (Bird et. al 1987, 2002):

$$\frac{DC_A}{Dt} = \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \right) C_A = D_{AB} \nabla^2 (cx_A) - k_n C_A^n = D_{AB} \nabla^2 C_A - k_n C_A^n \quad (20)$$

La Ec. (20) describe los cambios espaciales y temporales de la concentración como función de los mecanismos difusivos y de reacción química respectivamente.

#### **4.2 Reología.**

La reología, es decir la ciencia del flujo y la deformación, estudia las propiedades mecánicas de los gases, líquidos, plásticos, sustancias asfálticas, materiales cristalinos y otros. Por lo tanto, el campo de la reología se extiende, desde la mecánica de fluidos newtonianos por una parte, hasta la elasticidad de Hooke por otra parte (Bird et. al 1987, 2002). La reología es la disciplina científica que se dedica al estudio de la deformación y flujo de la materia (Bird et. al 1987, 2002). Su objetivo está restringido a la observación del comportamiento de materiales sometidos a deformaciones muy sencillas, desarrollando posteriormente un modelo matemático que permita obtener las propiedades reológicas del material.

Un sistema es capaz de fluir debido a las fuerzas de cohesión en sus moléculas y suele deformarse continuamente cuando se somete a un esfuerzo cortante (Bird et. al 1987, 2002). En su forma más simple, la viscosidad  $\mu$  es una propiedad de transporte, que se puede interpretar como la resistencia que ofrecen los fluidos a ser deformados cuando son sometidos a un esfuerzo (Bird et. al 1987, 2002).

#### 4.2.1 Tensor de Deformación.

El tensor de deformación es un tensor de segundo orden, el cual nos describe la deformación relativa de un medio continuo con respecto a una variable. El tensor de deformación, es adimensional debido a que  $[u_i] = L; [x_i] = L$ . Matemáticamente, se puede representar de la siguiente manera (Bird et. al 1987, 2002):

$$\nabla \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial x} \\ \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial y} \\ \frac{\partial u_x}{\partial z} & \frac{\partial u_y}{\partial z} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (21)$$

Nótese, que el tensor de deformación carece de unidades por ser el cociente de dos longitudes características.

#### 4.2.2 Tensor gradiente de velocidad y su transpuesta.

Al tomar la derivada temporal del tensor de deformación, obtenemos el tensor gradiente de velocidad, el cual se puede expresar de la siguiente manera (Bird et. al 1987, 2002):

$$\nabla \mathbf{V} = \frac{d}{dt} (\nabla \mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial x} \\ \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial y} \\ \frac{\partial u_x}{\partial z} & \frac{\partial u_y}{\partial z} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (22)$$

A diferencia del tensor de deformación, el tensor gradiente tiene unidades de inverso del tiempo.

#### 4.2.3 El tensor rapidez de deformación.

El tensor gradiente de velocidad físicamente, nos da información acerca de la evolución de la deformación en el medio continuo, y sus unidades son de inverso de tiempo. El tensor gradiente de velocidad  $\nabla \mathbf{V}$  puede ser descompuesto en una parte simétrica  $\mathbf{D} = (\nabla \mathbf{V})_s$  y anti simétrica  $\mathbf{W} = (\nabla \mathbf{V})_A$  llamados tensor rapidez de deformación y tensor de vorticidad (Bird et. al 1987, 2002):

$$\nabla \mathbf{V} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{V} + \nabla \mathbf{V}^T) + \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{V} - \nabla \mathbf{V}^T) = \mathbf{D} + \mathbf{W} \quad (23)$$

En coordenadas cartesianas (x, y, z), el tensor rapidez de deformación puede ser descrito matemáticamente en la siguiente forma matricial (Bird et. al 1987, 2002):

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{V} + (\nabla \mathbf{V})^T) = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_x}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_y}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial y}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_z}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial z}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x}\right) & \frac{\partial V_y}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_z}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial z}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_x}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_y}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial y}\right) & \frac{\partial V_z}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (24)$$

Es importante notar, que el tensor rapidez de deformación es un tensor de segundo orden simétrico, esto implica que su transpuesta es igual al tensor, i.e.  $\mathbf{D} = \mathbf{D}^T$ . Físicamente, esta matriz simétrica nos da información acerca de la rapidez con la que es deformado el sistema (Bird et. al 1987, 2002).



#### 4.2.4 El tensor de Vorticidad.

El tensor de Vorticidad nos da información acerca de las rotaciones de los elementos materiales en el sistema (Bird et. al 1987, 2002):

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{V} - (\nabla\mathbf{V})^T) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_z}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial z}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_x}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial x}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_y}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial y}\right) & 0 \end{pmatrix} \quad (25)$$

Es importante notar, que el tensor de Vorticidad, es un tensor de segundo orden simétrico, es decir,  $\mathbf{W} = -\mathbf{W}^T$ . Físicamente nos da información acerca de las rotaciones de los elementos materiales en el medio continuo (Bird et. al 1987, 2002).

#### 4.2.5 Tensor de esfuerzos.

El tensor de esfuerzos, es un tensor de segundo orden, el cual se puede describir como una matriz de 3 x 3 formada por nueve elementos. Los elementos a fuera de la diagonal principal son llamados esfuerzos cortantes, mientras que los elementos en la diagonal principal son llamados esfuerzos normales (Bird et. al 1987, 2002). Nótese, que los esfuerzos cortantes deforman continua e irreversiblemente el material, por lo que el sistema fluye. Mientras que los elementos en la diagonal principal modifican la forma geométrica del elemento de control, pero no su volumen. La representación del tensor de esfuerzos se puede expresar como:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (26)$$

Matemáticamente, es importante destacar que el tensor de esfuerzos es simétrico, es decir los elementos fuera de la diagonal principal, son iguales.

### 4.3 Tipos de Fluido.

En esta sección, se presentan algunas de las ecuaciones constitutivas más utilizadas en Fenómenos de Transporte y Reología de fluidos complejos. En Mecánica del medio continuo, una ecuación constitutiva describe la relación entre las variables dinámicas en el sistema, en particular el esfuerzo y la deformación, i.e.  $\sigma = f(\varepsilon)$ .

#### 4.3.1 Fluido newtoniano.

Los newtonianos son fluidos en los que el deslizamiento relativo de los elementos de fluido al circular uno sobre otro es proporcional al esfuerzo cortante sobre el fluido. Todos los gases, agua líquida y líquidos de moléculas sencillas (amoníaco, alcohol, benceno, petróleo, cloroformo, butano, etc.) son newtonianos. Las pastas, emulsiones, fluidos biológicos, polímeros, suspensiones de sólidos y otras mezclas son probablemente no newtonianos. Un fluido newtoniano se caracteriza por cumplir la Ley de Newton, es decir, que existe una relación lineal entre el esfuerzo cortante y la velocidad de deformación. La viscosidad de un fluido newtoniano no depende del tiempo de aplicación de esfuerzo, aunque sí puede depender tanto de la temperatura como de la presión a la que se encuentre. En esta ecuación tan simple, el esfuerzo cortante y la rapidez de deformación, siguen una relación lineal, y la ecuación básica de este sistema, se define como:

$$\sigma = 2\mu\mathbf{D} = \mu\left(\nabla\mathbf{V} + (\nabla\mathbf{V})^T\right) \quad (27)$$

La constante de proporcionalidad se denomina viscosidad newtoniana  $\mu$  y se mide en Pa s (en SI). En la Ec. (27), el tensor de esfuerzo cortante,  $\sigma$  tiene unidades de Pa y el tensor rapidez de deformación  $\mathbf{D}$  tiene inverso de segundo respectivamente (1/s). Por definición, todos aquellos fluidos que no siguen la Ec. (27) son newtonianos.

#### 4.3.2 Fluidos no newtonianos.

Las suspensiones densas, lodos, emulsiones, soluciones de polímeros de cadena larga, fluidos biológicos, alimentos líquidos, pinturas, suspensiones de arcillas y mezclas de hormigón son, en general, no-newtonianos. La relación entre esfuerzo cortante y la velocidad de deformación para fluidos no newtonianos no es lineal. Estados fluidos a su vez se diferencian en dependientes e independientes del tiempo.

Desde el punto de vista tecnológico e industrial, los fluidos no-newtonianos, son aquellos que presentan propiedades tecnológicas y científicas más interesantes. La definición más simple de un fluido newtoniano, es aquella en donde la rapidez de deformación, no muestra una relación lineal entre el esfuerzo y la rapidez de deformación. En este punto, la viscosidad no es constante y depende de la rapidez con la que se deforme, temperatura, presión, composición, pH y la rapidez con la que se deforma (Bird et. al 1987, 2002).

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\eta(\Pi_D)\mathbf{D} = \eta(\Pi_D)(\nabla\mathbf{V} + (\nabla\mathbf{V})^T) \quad (28)$$

En la Ec. (28)  $\eta(\Pi_D)$  es la función viscosidad generalizada, la cual depende del segundo invariante del tensor de rapidez de deformación, de la siguiente forma:

$$\Pi_D = \sqrt{2(\mathbf{D}:\mathbf{D})} \quad (29)$$

#### 4.4 Ecuaciones Constitutivas.

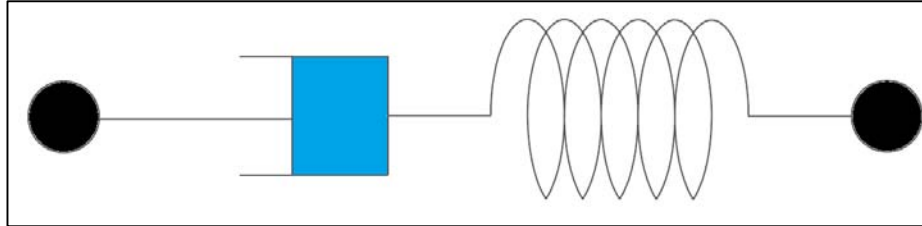
##### 4.4.1 Ecuaciones constitutivas de viscoelásticidad lineal.

La viscoelásticidad es un tipo de comportamiento reológico que presentan ciertos materiales que exhiben tantas propiedades viscosas con propiedades elásticas cuando se deforman. Un material viscoelástico lineal general es un material para el cual existe una relación lineal entre la tensión sus derivadas y la deformación y sus derivadas, el caso unidimensional la relación más general posible de un material viscoelástico lineal es (Bird et. al 1987, 2002):

$$\boldsymbol{\sigma} + A^{(1)} \frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{\sigma} + \dots + A^{(n1)} \frac{\partial^{(n1)}}{\partial t^{(n1)}} \boldsymbol{\sigma} = B^{(0)} \boldsymbol{\varepsilon} + B^{(1)} \frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{\varepsilon} + \dots + B^{(n2)} \frac{\partial^{(n2)}}{\partial t^{(n2)}} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (30)$$

Existen diversos modelos constitutivos para materiales viscoelásticos lineales. Esos modelos incluyen el modelo de Maxwell, el modelo de Kelvin-Voight y el modelo del solido viscoelástico lineal estándar que combina los dos modelos anteriores.

Todos estos modelos descomponen la tensión y deformación en dos sumandos, uno que representa los efectos elásticos y otro que representan los efectos viscosos, siendo estos modelos, interpretables en términos de muelles y amortiguadores. Cada uno de estos modelos difiere en la disposición de los muelles y amortiguadores.



**Figura 4. Se ilustra el Modelo de Maxwell en término de un pistón y un resorte el pistón describe la parte viscosa (disipativa) y el resorte la parte elástica (recuperación).**

#### 4.5 Modelo de Maxwell.

El modelo de Maxwell (Fig. 4) se puede describir como la suma de una contribución viscosa y otra elástica que está asociada con la recuperación:

$$\gamma = \gamma_{\text{Newton}} + \gamma_{\text{Hook}} \quad (31)$$

Derivando la deformación total, se tiene lo siguiente:

$$\dot{\gamma} = \dot{\gamma}_{\text{Newton}} + \dot{\gamma}_{\text{Hook}} \quad (32)$$

La contribución de Newton y de Hook se sustituye en la expresión anterior:

$$\dot{\gamma} = \dot{\gamma}_{\text{Newton}} + \dot{\gamma}_{\text{Hook}} = \frac{\sigma}{\eta_0} + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\sigma}{G_0} \right) = \frac{\sigma}{\eta_0} + \frac{1}{G_0} \frac{\partial}{\partial t} \sigma \quad (33)$$

Multiplicando la Ec. (33) por la viscosidad, se obtiene la siguiente expresión:

$$\eta_0 \dot{\gamma} = \sigma + \frac{\eta_0}{G_0} \frac{\partial}{\partial t} \sigma = \left( 1 + \frac{\eta_0}{G_0} \frac{\partial}{\partial t} \right) \sigma \quad (34)$$

Si se define el tiempo de relajación de Maxwell, como  $\lambda_0 = \eta_0 / G_0$  por lo que la expresión anterior toma la forma:

$$\left(1 + \frac{\eta_0}{G_0} \frac{\partial}{\partial t}\right) \boldsymbol{\sigma} = \eta_0 \dot{\boldsymbol{\gamma}} \quad (36)$$

Finalmente, si el tensor que describe la evolución de la deformación  $\dot{\boldsymbol{\gamma}}$  se expresa en términos del tensor rapidez de deformación, i.e.  $\dot{\boldsymbol{\gamma}} = 2\mathbf{D}$ , por lo que se tiene lo siguiente:

$$\boldsymbol{\sigma} + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{\sigma} = \left(1 + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t}\right) \boldsymbol{\sigma} = 2\eta_0 \mathbf{D} \quad (36)$$

El modelo de Maxwell predice que la tensión decaerá exponencialmente con el tiempo en un polímero sometido a deformación constante, lo cual se ajusta bastante bien a lo observado experimentalmente para muchos polímeros. Sin embargo, una limitación importante es que no predice el comportamiento de flujo lento (creep) de muchos polímeros ya que en este caso predice un aumento lineal de la deformación con el tiempo si la tensión es constante, sin embargo la mayor parte de los polímeros muestran una tasa de deformación decreciente con el tiempo. Las principales aplicaciones de este modelo son la modelización de los polímeros termoplásticos cerca de su temperatura de fusión, la de hormigón fresco y la de numerosos metales cerca de su punto de fusión.

#### 4.5.1 Modelo de Jeffreys.

El segundo modelo de Jeffreys puede considerarse como la suma de un esfuerzo asociado al solvente y otro al polímero, i.e.

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_s + \boldsymbol{\sigma}_p = 2\eta_s \mathbf{D} + \frac{2\eta_p \mathbf{D}}{1 + \lambda_p \frac{\partial}{\partial t}} \quad (37)$$

Si se define el siguiente operador temporal  $O(t)$  asociado al Modelo de Maxwell

$$O(t) \triangleq 1 + \lambda_p \frac{\partial}{\partial t} \quad (38)$$

Aplicando el operador temporal (Ec. 38) en la Ec. (37), se obtiene la siguiente:

$$\left(1 + \lambda_p \frac{\partial}{\partial t}\right) \boldsymbol{\sigma} = \left(1 + \lambda_p \frac{\partial}{\partial t}\right) 2\eta_s \mathbf{D} + 2\eta_p \mathbf{D} \quad (39)$$

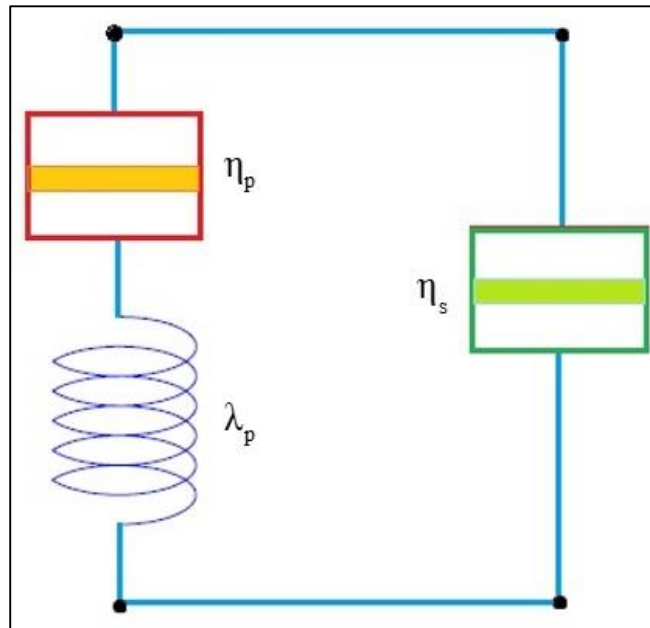
Desarrollando la Ec. (39) y factorizando, se obtiene la siguiente expresión:

$$\left(1 + \lambda_p \frac{\partial}{\partial t}\right) \boldsymbol{\sigma} = 2(\eta_s + \eta_p) \left(1 + \left(\frac{\eta_s}{\eta_s + \eta_p}\right) \lambda_p \frac{\partial}{\partial t}\right) \mathbf{D} \quad (40)$$

Finalmente se tiene la siguiente expresión:

$$\boxed{\left(1 + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t}\right) \boldsymbol{\sigma} = 2\eta_0 \left(1 + \lambda_j \frac{\partial}{\partial t}\right) \mathbf{D}} \quad (41)$$

Este modelo contiene tres propiedades materiales las cuales son dos tiempos característicos y una viscosidad a bajo corte  $\{\eta_0, \lambda_p, \lambda_{jp}\}$ . La Ec. (42) es frecuentemente utilizada en la descripción de polímeros de peso molecular bajo. Esta ecuación constitutiva se reduce al modelo newtoniano cuando el tiempo de Maxwell y Jeffrey tiende a cero, i.e.  $\{\lambda_p = \lambda_{jp} = 0\}$ , al modelo de Maxwell cuando  $\{\lambda_{jp} = 0\}$ , al modelo de Hook cuando el frente de velocidades es homogéneo, es decir, a baja rapidez de deformación, i.e.  $\dot{\gamma}_{rz} \cong 0$ .



**Figura 5. Muestra un elemento acoplado en serie de un solvente (contribución viscosa) y un polímero, el cual se puede describir en término de un modelo de Maxwell y un solvente (polímero).**

#### **4.6 Síntesis de los modelos expuestos en esta sección.**

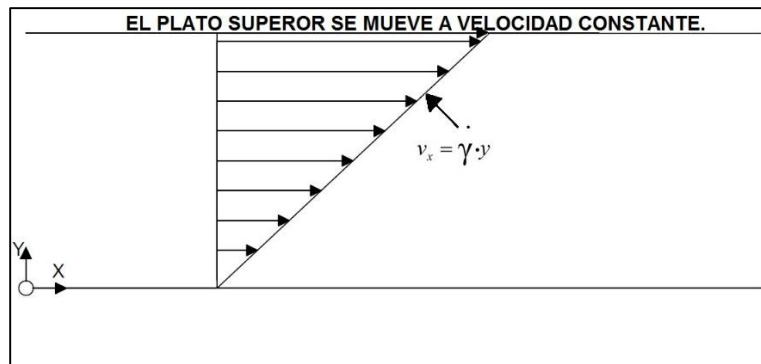
Finalmente, los modelos discutidos en esta sección, nos permite establecer, las diferencias de los modelos inelásticos no-newtonianos más comunes de la literatura. En general las soluciones de bajo peso molecular como el agua, acetona, algunos líquidos inmiscibles. Por otra parte, los fluidos no newtonianos presentan un reto en la descripción de sistemas complejos. La aplicación de estos fluidos, se presenta en diferentes situaciones físicas, como por ejemplo: La ciencia y la ingeniería de nuevos materiales como son: (i) fibras sintéticas (utilizadas en la industria espacial), (ii) polímeros (plásticos), (iii) polímeros asociativos (utilizados como agentes estabilizantes en la industria de las pinturas base agua), (iv) cristales líquidos (utilizados por sus propiedades ópticas en pantallas de cristales líquidos, fibras sintéticas, y reconstrucción de tejido óseo en bioingeniería), (v) Fluidos biológicos, los cuales representan un reto para los ingenieros modernos. En este contexto, los fluidos biológicos involucran conocimientos multidisciplinarios, como la física, química, biología, matemáticas e ingeniería.

Ejemplo de estos fluidos son los secretan los insectos, la formación de la seda de la araña y diferentes gusanos, los fluidos corporales, y la sangre con diferentes patologías que representan una pandemia en la actualidad por el estilo de vida sedentaria en el que se vive actualmente.

#### 4.7 Pruebas de flujo.

##### 4.7.1 Flujo cortante en estado estacionario.

En esta prueba, la muestra es deformada por medio de un esfuerzo cortante el cual se puede representar por medio de dos placas paralelas en las cuales se aplica una fuerza en dirección del flujo de tal manera que la transferencia de momento se da en la componente ortogonal a la velocidad como se muestra en Fig. 6.



**Figura 6. Ilustra el flujo cortante simple en un sistema de placas paralelas. El fluido es cortado y se produce un flujo homogéneo, es decir, un sistema en donde, las variables dinámicas del sistema dependen de la posición).**

El flujo cortante simple se genera cuando las fuerzas que actúan en el sistema, quedan fuera de la diagonal principal de la matriz asociada al tensor de esfuerzos:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & 0 & \sigma_{xz} \\ 0 & \sigma_{yy} & 0 \\ \sigma_{zx} & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix}; \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_z}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial z} \right) \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_x}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (42 \quad a,$$

b)



Sustituyendo las matrices del tensor de esfuerzos y rapidez de deformación en el modelo de Maxwell, se tiene lo siguiente:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & 0 & \sigma_{xz} \\ 0 & \sigma_{yy} & 0 \\ \sigma_{zx} & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix} + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & 0 & \sigma_{xz} \\ 0 & \sigma_{yy} & 0 \\ \sigma_{zx} & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = 2\eta_0 \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_z}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial z} \right) \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_x}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (43)$$

Desacoplando el sistema de matrices descrito por la Ec. (43)

$$\left( 1 + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t} \right) \sigma_{xz} = \eta_0 \dot{\gamma}_{xz} \quad (44a)$$

$$\left( 1 + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t} \right) (\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) = \left( 1 + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t} \right) N_1 = 0 \quad (44b)$$

$$\left( 1 + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t} \right) (\sigma_{yy} - \sigma_{zz}) = \left( 1 + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t} \right) N_2 = 0 \quad (45)$$

En estado estacionario, este modelo se reduce al newtoniano, i.e.

$$\sigma_{xz} = \eta_0 \dot{\gamma}_{xz} \quad (46)$$

$$N_1 = 0$$

$$N_2 = 0$$

#### 4.7.2 Funciones materiales del modelo de Maxwell.

Las funciones materiales, se pueden calcular a través de las Ecuaciones (45,46), por lo que se tiene lo siguiente:

a) Función viscosidad.

$$\eta \left( \dot{\gamma}_{xz} \right) = \frac{\dot{\sigma}_{xz}}{\dot{\gamma}_{xz}} = \eta_0 \quad (47)$$

b) Primera diferencia de esfuerzos normales.

$$\Psi_1 = \frac{\dot{\sigma}_{xx} - \dot{\sigma}_{yy}}{\dot{\gamma}_{xz}} = 0 \quad (48)$$

c) Segunda diferencia de esfuerzos normales.

$$\Psi_2 = \frac{\dot{\sigma}_{yy} - \dot{\sigma}_{zz}}{\dot{\gamma}_{xz}} = 0 \quad (49)$$

Por lo tanto, el modelo de Maxwell en un flujo cortante simple en estado estacionario coincide con el modelo de Newton de los fluidos viscosos y la primera y segunda diferencia de esfuerzos normales son cero, lo que implica que no hay respuesta elástica en el régimen de viscoelasticidad lineal.

### 4.7.3 Modelo de Jeffreys

Procediendo de la misma manera que el modelo de Maxwell, la componente xz del modelo Jeffreys está dado por la siguiente ecuación diferencial parcial:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & 0 & \sigma_{xz} \\ 0 & \sigma_{yy} & 0 \\ \sigma_{zx} & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix} + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & 0 & \sigma_{xz} \\ 0 & \sigma_{yy} & 0 \\ \sigma_{zx} & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = 2\eta_0 \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_z}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial z} \right) \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_x}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) & 0 & 0 \end{pmatrix} + 2\eta_0 \lambda_J \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_z}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial z} \right) \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_x}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (50)$$

Desacoplando el sistema de matrices descrito por la Ec. (50)

$$\left( 1 + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t} \right) \sigma_{xz} = \eta_0 \left( 1 + \lambda_J \frac{\partial}{\partial t} \right) \dot{\gamma}_{xz} \quad (50a)$$

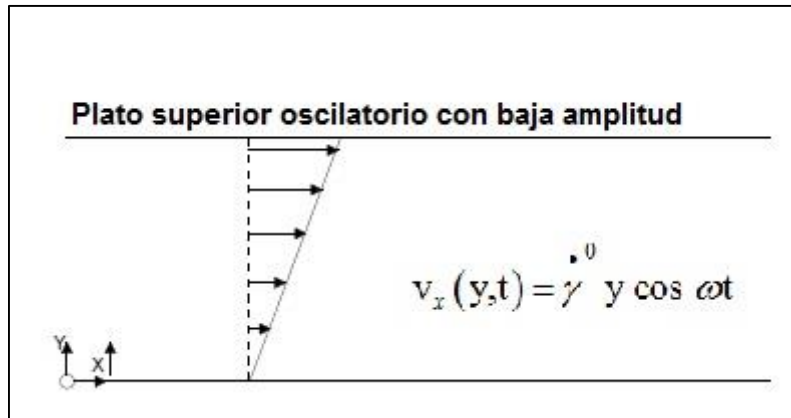
$$\left( 1 + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t} \right) (\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) = \left( 1 + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t} \right) N_1 = 0 \quad (50b)$$

$$\left( 1 + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t} \right) (\sigma_{yy} - \sigma_{zz}) = \left( 1 + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t} \right) N_2 = 0 \quad (50c)$$

En estado estacionario, este modelo se reduce al modelo de Maxwell y al newtoniano. Por otra parte las funciones materiales: (i) Función viscosidad, (ii) Primer coeficiente de esfuerzos normales, (iii) Segundo coeficiente de esfuerzos normales respectivamente, son iguales a las Ecs. (47-49), por lo que no es necesario describirlas de nuevo.

#### 4.7.4 Flujo oscilatorio a bajas frecuencias.

En esta prueba se coloca la muestra entre dos placas y la placa superior se pone a oscilar a bajas frecuencias, i.e. en el régimen de viscoelasticidad lineal.



**Figura 7.** En el flujo oscilatorio la muestra es colocada en un sistema de placas paralelas y la placa superior se le aplica una perturbación oscilatoria de tal manera que describe un movimiento oscilatorio en el cual, se estudia la respuesta mecánica del sistema, es decir, la contribución elástica y la viscosa.

#### 4.7.5 Modelo de Maxwell.

En flujo oscilatorio se estudia la respuesta mecánica del material por lo que el modelo de Maxwell toma la siguiente forma en el espacio de Fourier de las frecuencias:

$$(1 + \lambda_0 \cdot i\omega) \sigma_{rz}(\omega) = \eta_0 \dot{\gamma}(\omega) \quad (51)$$

dividiendo el esfuerzo y la rapidez de deformación, se obtiene la viscosidad compleja:

$$\eta(i\omega) = \frac{\sigma(i\omega)}{\dot{\gamma}(i\omega)} = \frac{\eta_0}{1 + \lambda_0 i\omega} \quad (52)$$

La viscosidad compleja  $\eta(i\omega)$  se puede desacoplar en una parte real y otra imaginaria por lo que, se tiene lo siguiente:

$$\eta(i\omega) = \eta'(\omega) - i\eta''(\omega) = \eta_0 \frac{1}{1+i\lambda_0\omega} \cdot \frac{1-i\lambda_0\omega}{1-i\lambda_0\omega} = G_0\lambda_0 \left\{ \frac{1}{1+\lambda_0^2\omega^2} - i \frac{\lambda_0\omega}{1+\lambda_0^2\omega^2} \right\} \quad (53)$$

Separando la parte real y la imaginaria de la Ec. (52), se tiene la siguiente expresión para la viscosidad real e imaginaria respectivamente:

$$\eta'(\omega) = \frac{G_0\lambda_0}{1+(\lambda_0\omega)^2} \quad (54)$$

Y la parte imaginaria toma la forma:

$$\eta''(\omega) = \frac{\eta_0\lambda_0\omega}{1+(\lambda_0\omega)^2} \quad (55)$$

y recordando que los módulos y viscosidades complejas están dados por las siguientes expresiones:  $G''(\omega) = \omega\eta'(\omega)$  y  $G'(\omega) = \omega\eta''(\omega)$ . Por último, igualando las ecuaciones obtenemos:

$$G'(\omega) = G_0 \frac{\lambda_0^2\omega^2}{1+(\lambda_0\omega)^2} \quad (56)$$

Y la parte imaginaria toma la forma:

$$G''(\omega) = G_0 \frac{\lambda_0\omega}{1+(\lambda_0\omega)^2} \quad (57)$$

Las Ecs. (56, 57) son las expresiones analíticas para los módulos de almacenamiento y pérdida del modelo de Maxwell respectivamente. Estas expresiones describen las propiedades viscoelásticas del material a través de la variación de la frecuencia. Un hecho importante, es cuando se igualan las dos expresiones:  $\omega_{\text{cruce}} = 1/\lambda_0$ , se obtiene el tiempo de relajación de Maxwell, por lo que en el caso más simple, el sistema de flujo oscilatorio, permite calcular una de las propiedades materiales del sistema, conocida como tiempo de relajación de Maxwell. Obsérvese, que cuando la frecuencia aumenta, la Ec. (56) tiene a un valor constante, por lo que se tiene lo siguiente:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} G'(\omega) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} G_0 \frac{\lambda_0^2 \omega^2}{1 + (\lambda_0 \omega)^2} = G_0 \quad (58)$$

Los casos particulares de las Ecs. (56, 57) nos permiten calcular los parámetros materiales del sistema ( $\eta_0$ ,  $\lambda_0$ ,  $G_0$ ) respectivamente. En el siguiente ejemplo, se modela el flujo oscilatorio del modelo de Jeffreys.

#### 4.7.6 Modelo de Jeffreys.

Aplicando el formalismo de Fourier en la Ec. (58) se obtiene la siguiente expresión para la función viscosidad:

$$(1 + \lambda_0 \cdot i\omega) \sigma_{rz}(\omega) = \eta_0 (1 + \lambda_J \cdot i\omega) \dot{\gamma}(\omega) \quad (59)$$

La función viscosidad compleja toma la forma:

$$\eta(i\omega) = \frac{\sigma(i\omega)}{\dot{\gamma}(i\omega)} = \frac{\eta_0 (1 + \lambda_J i\omega)}{1 + \lambda_0 i\omega} \quad (60)$$

Multiplicando por el complejo conjugado del denominador de la Ec. (60), se tiene lo siguiente:

$$\eta(i\omega) = \eta'(\omega) - i\eta''(\omega) = \eta_0 \frac{1 + i\lambda_J \omega}{1 + i\lambda_0 \omega} \cdot \frac{1 - i\lambda_0 \omega}{1 - i\lambda_0 \omega} = G_0 \lambda_0 \left\{ \frac{1 + \lambda_J \lambda_0 \omega^2}{1 + \lambda_0^2 \omega^2} - i \frac{(\lambda_0 - \lambda_J) \omega}{1 + \lambda_0^2 \omega^2} \right\} \quad (61)$$

la parte real se puede expresar como:

$$\eta'(\omega) = G_0 \lambda_0 \frac{1 + \lambda_0 \lambda_1}{1 + \lambda_0^2 \omega^2} \omega^2 \quad (62)$$

y la imaginaria respectivamente, toma la forma:

$$\eta''(\omega) = G_0 \lambda_0 \frac{\lambda_0 - \lambda_1}{1 + \lambda_0^2 \omega^2} \omega \quad (63)$$

Igualando ambos miembros de la ecuación y recordando que los módulos y viscosidades complejas están dados por las siguientes expresiones:  $G''(\omega) = \omega \eta'(\omega)$  y  $G'(\omega) = \omega \eta''(\omega)$ . Los módulos complejos de pérdida y almacenamiento, toman la forma:

$$G'(\omega) = \omega \eta_0 \frac{\lambda_0^2 \omega^2}{1 + (\lambda_0 \omega)^2} \quad (64)$$

y

$$G''(\omega) = \eta_0 \frac{(\lambda_0 - \lambda_1)}{1 + (\lambda_0 \omega)^2} \omega^2 \quad (65)$$

Las Ecs. (63, 64) describen las propiedades viscoelásticas del material a través de la variación de la frecuencia. En particular, los modelos de Maxwell y de Jeffreys son punto de partida en los cálculos de la permeabilidad dinámica que se calculara en los siguientes capítulos.



# **CAPÍTULO V**

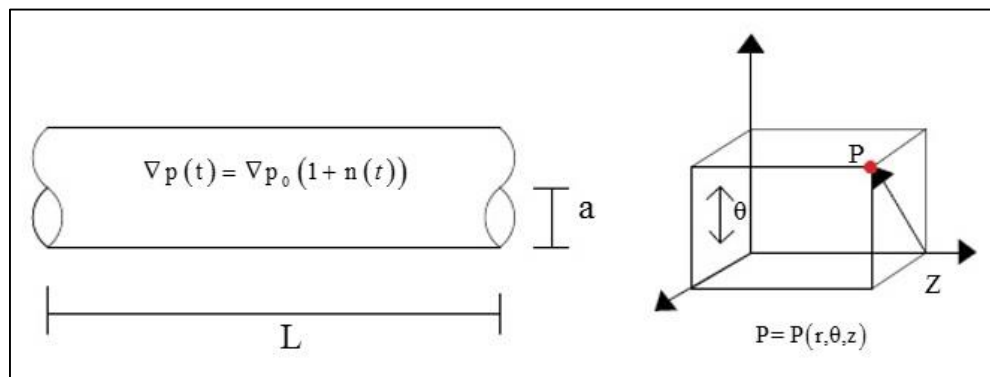
## **SISTEMA FÍSICO**



En este capítulo se modela el flujo pulsátil en un capilar para un líquido newtoniano (viscosidad constante) y para un líquido no newtoniano (modelo de maxwell). En los dos casos, se deducen el perfil de velocidades, flujo volumétrico, y la permeabilidad dinámica. Por último, estos resultados nos permitirán predecir la permeabilidad dinámica utilizando datos reométricos de un fluido biológico.

### 5.1 Planteamiento del problema de flujo pulsátil sanguíneo.

El sistema físico que se analiza en esta sección se describe a continuación. Un líquido con estructura transitoria, fluye en la dirección axial en un cilindro de radio  $r = a$  y longitud  $z = L$  bajo la acción de un gradiente de presión pulsátil.



**Figura 8. Ilustra un capilar de radio  $r = a$  y longitud  $z = L$  en donde el fluido fluye debido a un gradiente de presión pulsátil. Del lado derecho, se observa un punto material en coordenadas cilíndricas.**

Las condiciones de proceso son mencionadas a continuación:

- El proceso es isotérmico (Temperatura constante).
- Sistema de coordenadas cilíndrico  $(r, \theta, z)$ .
- Fluido Incompresible:  $\frac{D}{Dt} \ln \rho = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{V} = 0$
- Simetriza angular  $\frac{\partial}{\partial \theta} \{ \} = 0$
- El origen de coordenadas es colocado en el centro del capilar (El eje axial se coloca en la dirección del flujo).
- Efectos gravitacionales despreciables, i.e. el vector gravedad en cero:  $g = 0$ .
- Los efectos inerciales son despreciables, es decir la derivada material del vector velocidad es cero, i.e.  $\rho D\mathbf{V}/Da = 0$ . Físicamente, significa que los mecanismos inerciales son despreciables con respecto a los viscosos.

- h) El gradiente de presión es diferente de cero y puede ser representado mediante la siguiente expresión matemática:

$$\nabla_z p(t) = \begin{cases} \nabla_z p_0 \\ \nabla_z p \text{Exp}(i\omega t) \end{cases}$$

La reología y el flujo del líquido no newtoniano es caracterizado por tres modelos constitutivos llamados:

- (i) Newtoniano.
- (ii) Viscoelástico lineal: Maxwell.
- (iii) Viscoelástico no-lineal: Jeffrey.

Un hecho importante, es que los modelos fueron seleccionados debido a su sencillez matemática y que predicen resultados analíticos para el perfil de velocidades, flujo volumétrico y permeabilidad dinámica.

### 5.1.1 Campo vectorial de velocidades.

El vector de velocidad, tensores de gradiente de velocidad, transpuesta del gradiente de velocidad y de tensor de esfuerzos viscoso. Matemáticamente, se expresan de la siguiente manera:

$$\mathbf{V} = [V_r, V_\theta, V_z] = [0, 0, V_z(r, t)] \quad (66)$$

### 5.1.2 Tensores gradiente de velocidad.

El tensor gradiente de velocidad, transpuesta de tensor gradiente de velocidad y tensor de esfuerzo viscosos toman la forma:

$$\nabla \mathbf{V} = \frac{\partial V_z(r, t)}{\partial r} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (67)$$

### 5.1.3 Tensor rapidez de deformación.

El tensor rapidez de deformación para un flujo cortante, toma la forma:

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{V} + (\nabla\mathbf{V})^T) = \frac{\partial V_z(r,t)}{\partial r} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (68)$$

### 5.1.4 Tensor de esfuerzos.

El tensor de esfuerzos para un flujo cortante simple y que corresponde al problema que se está analizando, puede ser descrito como:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{rr} & 0 & \sigma_{rz} \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ \sigma_{rz} & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (69)$$

En la Ec. (69),  $\{\sigma_{rz} = \sigma_{rz}\}$  son los esfuerzos cortantes y  $\{\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{zz}\}$  son los esfuerzos normales asociados con la elasticidad del fluido.

### 5.1.5 Ecuación de continuidad.

La ecuación de continuidad para un fluido incompresible (densidad constante) y suponiendo el campo de velocidades descrito en (47), toma la forma:

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \underbrace{\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rV_r)}_0 + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0 \quad (70)$$

La Ec. (70) implica que la componente z del vector velocidad no depende de la variable axial z, i.e. no es función de z, y utilizando la hipótesis de simétrica cilíndrica, la componente z del vector velocidad, solo depende de la coordenada radial r, i.e.,  $V_z = V_z(r,t)$ .

### 5.1.6 Ecuación de movimiento.

A partir de las hipótesis planteadas, la componente z de la ecuación de movimiento, puede ser expresada en la siguiente forma:

$$\nabla p = \nabla \cdot \sigma \quad (71)$$

La Ec. (71) representa un balance de fuerzas entre el gradiente de presión y la divergencia del tensor de esfuerzos. En particular para este problema, la Ec. (49) toma la forma:

$$\nabla_z p = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \sigma_{rz}) \quad (72)$$

La Ec. (72) es la simplificación de la ecuación de movimiento en coordenadas cilíndricas, suponiendo simetría cilíndrica e invariancia axial, es decir, no hay variaciones del esfuerzo con respecto al ángulo y la longitud axial.

### 5.2 Ecuaciones constitutivas.

#### 5.2.1 Modelo de Newton.

El modelo más sencillo que describe el tensor de esfuerzos con el tensor rapidez de deformación es el modelo de Newton el cual contiene una propiedad material llamada viscosidad y que puede ser representado mediante la siguiente expresión matemática:

$$\sigma_{rz} = \eta_0 \dot{\gamma}_{rz} = \eta_0 \frac{dV_z}{dr} \quad (73)$$

En la Ec. (73)  $\eta_0$  es la viscosidad cortante [Pas].

#### 5.2.2 Modelo viscoelástico de Maxwell.

El siguiente modelo a analizar es el modelo viscoelástico de Maxwell que se puede interpretar como la suma de un elemento disipativo y de un elemento que almacena la energía. Matemáticamente, se expresa de la siguiente forma tensorial.

$$\left(1 + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t}\right) \sigma_{rz} = \eta_0 \dot{\gamma}_{rz} = \eta_0 \frac{dV_z}{dr} \quad (74)$$

En la Ec. (74)  $\lambda_0 = \eta_0 / G_0$  es conocido como el tiempo de relajación de Maxwell (físicamente este tiempo está asociado a los procesos elásticos del material) y  $\eta_0$  que es la viscosidad a corte bajo. Dos límites podemos deducir del modelo de Maxwell, cuando el tiempo de relajación tiende a cero recuperamos el líquido Newtoniano y cuando  $\lambda_0$  tiende a infinito tenemos un sólido de Hookeano.

### 5.2.3 Modelo viscoelástico de Jeffreys.

El modelo de Jeffreys, es un modelo viscoelástico que acopla el modelo newtoniano (solvente) con el modelo de Maxwell (polímero). Suponiendo que el esfuerzo total en el sistema es la suma del esfuerzo del solvente, más el esfuerzo del polímero:

$$\left(1 + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t}\right) \sigma_{rz} = \eta_0 \left(1 + \lambda_J \frac{\partial}{\partial t}\right) \dot{\gamma}_{rz} = \eta_0 \left(1 + \lambda_J \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{dV_z}{dr} \quad (75)$$

Este modelo contiene tres propiedades materiales las cuales son dos tiempos característicos y una viscosidad a bajo corte  $\{\eta_0, \lambda_0, \lambda_J\}$ . La Ec. (75) es frecuentemente utilizada en la descripción de polímeros de peso molecular bajo. Esta ecuación constitutiva se reduce al modelo newtoniano cuando el tiempo de Maxwell y Jeffrey tiende a cero, i.e.  $\{\lambda_0 = \lambda_J = 0\}$ .

### 5.3 Condiciones de Frontera.

Las condiciones de frontera para resolver el problema de la permeabilidad se describen a continuación:

$$\text{C.F.} \begin{cases} \text{a) } V_z(r,t) = 0 \text{ en } r = a \\ \text{b) } \left. \frac{dV_z(r,t)}{dr} \right|_{r=0} = 0 \end{cases} \quad (76)$$

La primera condición obedece a la condición de no deslizamiento en la pared, i.e., en la pared el fluido lleva la velocidad del sólido, si el sólido no se mueve con respecto a un sistema de referencia inercial, la velocidad del fluido es cero. Por otra parte, la segunda condición está relacionada con la axi-simetría del flujo.



En el siguiente capítulo, se utilizarán las ecuaciones desarrolladas en este capítulo con el fin de deducir los perfiles de velocidad, flujo volumétrico y permeabilidad estática y dinámica de los fluidos antes expuestos.

# CAPÍTULO VI

## MODELADO TEÓRICO

En este capítulo se obtiene las expresiones analíticas para el perfil de velocidades, velocidad promedio, flujo volumétrico, permeabilidad dinámica en un fluido viscoelástico (sangre humana) a partir de las ecuaciones generales planteadas en el capítulo anterior.

## **6.1 Permeabilidad en un medio poroso.**

En esta sección utilizaremos el flujo de Poiseuille para definir un modelo simple para la permeabilidad. Supongamos que tenemos un medio poroso completamente lleno con un fluido newtoniano incompresible de viscosidad  $\mu$  y cuyos poros tienen un radio promedio  $a$  esto es conocido como un medio poroso saturado. Como ya mencionamos, se modelara el medio poroso como un manojito de pequeños tubos capilares construyendo una red con una porosidad  $\varepsilon$ . Al tener un manojito de tubos, podremos calcular el flujo en un tubo y luego multiplicar el resultado por el número de tubos para obtener el flujo total que pasa a través del medio poroso, por esta razón es esta sección analizaremos el caso del flujo a través de un tubo obteniendo la bien conocida solución analítica debida a Hagen-Poiseuille y con este resultado introducir el concepto de permeabilidad y facilitar la discusión posterior.

## **6.2 Modelo de Newton.**

### **6.2.1 Cálculo para el perfil de velocidades.**

Partiendo de la ecuación de movimiento, en estado estacionario y despreciando los mecanismos inerciales, se tiene el siguiente balance de fuerzas entre el gradiente de presión y la divergencia del tensor de esfuerzos:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma_{rz}) = \nabla_z p \quad (77)$$

Al integrar, la Ec. (77) con respecto a  $r$  se tiene lo siguiente:

$$\sigma_{rz} = \frac{1}{2} (\nabla_z p) r + \frac{C_1}{r} \quad (78)$$

Como el esfuerzo debe de permanecer acotado, se tiene lo siguiente:

$$\sigma_{rz} = \frac{1}{2} (\nabla_z p) r \quad (79)$$



para un fluido Newtoniano, el esfuerzo es una relación lineal con la rapidez de deformación del sistema, por lo que se tiene lo siguiente:

$$\eta_0 \frac{dV_z(r)}{dr} = \sigma_{rz} = \frac{1}{2}(\nabla_z p)r \quad (80)$$

Integrando la Ec. (80) con respecto a R y tomando en cuenta los efectos de no deslizamiento en la pared, se tiene el siguiente resultado, en el sistema:

$$V_z(r) = \frac{1}{4\eta_0}(\nabla_z p)r^2 + C_2 \quad (81)$$

Integrando la Ec. (81) y aplicando la condición de no deslizamiento en la pared, se obtiene el siguiente perfil de velocidades:

$$V_z(r) = \frac{a^2}{4\eta_0}(-\nabla_z p) \left[ 1 - \left( \frac{r}{a} \right)^2 \right] \quad (82)$$

La Ec. (82) representa el perfil de velocidades para un fluido newtoniano. Nótese, que es directamente proporcional al gradiente de presión e inversamente proporcional a la viscosidad cortante.

### 6.2.2 Cálculo para flujo volumétrico.

Para obtener el flujo volumétrico se integra la Ec. (82) con respecto al área de sección transversal,

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^a V_z(r) r dr d\theta = \frac{1}{4\eta_0}(-\nabla_z p) \int_0^{2\pi} \int_0^a \left[ 1 - \left( \frac{r}{a} \right)^2 \right] r dr d\theta \quad (83)$$

Haciendo el siguiente cambio de variable  $z = r/a$ ; se obtiene la Ec. de Hagen y Poiseuille

$$Q = \frac{\pi a^4}{8\eta_0}(-\nabla_z p) \quad (84)$$

La Ec. de Hagen y Poiseuille relaciona el flujo volumétrico con el gradiente de presión, la cuarta potencia del radio del capilar y la viscosidad del medio.

### 6.2.3 Cálculo de la ecuación de Darcy.

La Ec. (84) obtenida se conoce en la literatura como la ecuación de Hagen y Poiseuille el cual fue deducido para estudiar el flujo sanguíneo en capilares. Esta ecuación es válida en el régimen laminar, gradiente de presión constante y fluido incompresible. Multiplicando la Ec. (84) por la porosidad del sistema:

$$V_0 = \varepsilon \langle V \rangle = \varepsilon \frac{Q}{\pi a^2} = -\frac{\varepsilon a^2 / 8}{\eta_0} \nabla_z p = -\frac{K(\varepsilon, a)}{\eta_0} \nabla_z p \quad (85)$$

### 6.2.4 Permeabilidad Intrínseca newtoniana

Por lo tanto la permeabilidad en el sistema está definida por la siguiente expresión:

$$K(\varepsilon, a) = \frac{\varepsilon a^2}{8} \quad (86)$$

Para un fluido newtoniano, la permeabilidad solo depende de la porosidad del material y de la cuarta potencia del radio del poro promedio.

### 6.3 Modelo de Maxwell.

El modelo de Maxwell se puede describir como la suma de una contribución viscosa y otra elástica que está asociada con la recuperación. Este modelo viscoelástico es el más simple, y contiene dos propiedades materiales. La primera de estas propiedades materiales, es el tiempo de relajación de Maxwell, y la segunda es la viscosidad cortante. Cuando el tiempo de relajación es cero, el modelo se reduce al caso viscoso (modelo de Newton).

### 6.3.1 Flujo volumétrico.

Aplicando el operador e integrando:

$$\left(1 + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t}\right) \left(-\pi \int_0^a \sigma_{rz} r^2 dr\right) = \eta_0 \left(-\pi \int_0^a \dot{\gamma}_{rz} r^2 dr\right) = \eta_0 Q(t) \quad (87)$$

De la Ec. (87), el flujo volumétrico toma la forma:

$$Q(t) = -\frac{1}{\eta_0} \left(1 + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t}\right) \left(\pi \int_0^a \sigma_{rz} r dr\right) \quad (88)$$

Suponiendo de nuevo que los efectos inerciales y gravitacionales son despreciables, se obtiene la siguiente ecuación que relaciona el flujo volumétrico y el gradiente de presión:

$$Q(t) = -\frac{\pi a^4}{8\eta_0} \left(1 + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t}\right) \nabla_z p(t) \quad (89)$$

### 6.3.2 Calculo de la ecuación de Darcy.

Suponiendo que los efectos inerciales y gravitacionales son despreciables, se tiene lo siguiente:

$$V_0 = \varepsilon \langle V \rangle = \varepsilon \frac{Q(t)}{\pi a^2} = -\frac{1}{\eta_0} \varepsilon \frac{a^2}{8} \left(1 + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t}\right) \nabla_z p \quad (90)$$

### 6.3.3 Calculo de la permeabilidad dinámica de Maxwell.

Finalmente la permeabilidad dinámica tiene la forma:

$$OK(t) = \frac{\varepsilon a^2}{8} \left(1 + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t}\right) \quad (91)$$

Aplicando el operador de Fourier en la Ec. (91), se obtiene la permeabilidad dinámica en el espacio de las frecuencias:

$$K(\omega) = \frac{\varepsilon a^2}{8} (1 + \lambda_0(i\omega)) \quad (92)$$

Descomponiendo la permeabilidad compleja de la Ec (92), se tiene las siguientes expresiones:

$$K(\omega) = \varepsilon \frac{a^2}{8} (1 + \lambda_0(i\omega)) \quad (93)$$

La Ec. (93) se descompone en una contribución real y en otra imaginaria, por lo que:

$$K^*(\omega) = K_R(\omega) + i K_I(\omega) \quad (94)$$

Finalmente, las permeabilidades real e imaginaria toman la siguiente forma:

$$K_R(\varepsilon, a) = \left( \varepsilon \frac{a^2}{8} \right) = K_N \quad (95)$$

$$K_I(\varepsilon, a, \lambda_0, \omega) = \left( \varepsilon \frac{a^2}{8} \right) (\lambda_0 \omega) = K_N (\lambda_0 \omega) \quad (96)$$

Si se define la permeabilidad reducida como el cociente entre la permeabilidad real y compleja entre la newtoniana, se obtienen las siguientes expresiones adimensionales para el modelo de Maxwell:

$$\text{Modelo de Maxwell: } \begin{cases} K_R^* = \frac{K_R(\varepsilon, a)}{K_N} = 1 \\ K_I^* = \frac{K_I(\varepsilon, a, \lambda_0, \omega)}{K_N} = \lambda_0 \omega \end{cases} \quad (97)$$

Es importante resaltar, que la Ec. (97) representa el número de veces que es mayor la permeabilidad real e imaginaria que la newtoniana.

#### 6.4 Modelo de Jeffreys.

El modelo de Jeffreys puede considerarse como la suma de un esfuerzo asociado al solvente y otro al polímero, y fue explicado a detalle en el capítulo anterior. Este modelo contiene tres propiedades materiales: (i) Tiempo de Maxwell o tiempo de relajación del sistema, (ii) Tiempo de Jeffreys o tiempo de retardo y la viscosidad cortante. La componente rz del modelo de Maxwell tiene la forma:

$$\left(1 + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t}\right) \sigma_{rz} = \eta_0 \left(1 + \lambda_J \frac{\partial}{\partial t}\right) \dot{\gamma}_{rz} \quad (98)$$

Aplicando el operador e integrando la Ec. (110):

$$\left(1 + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t}\right) \left(-\pi \int_0^a \sigma_{rz} r dr\right) = \eta_0 \left(1 + \lambda_J \frac{\partial}{\partial t}\right) \left(-\pi \int_0^a \dot{\gamma}_{rz} r^2 dr\right) = \eta_0 \left(1 + \lambda_J \frac{\partial}{\partial t}\right) Q(t) \quad (99)$$

Finalmente de la Ec. (99), se tiene el siguiente resultado:

$$\left(1 + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t}\right) \left(-\pi \int_0^a \sigma_{rz} r dr\right) = \eta_0 \left(1 + \lambda_J \frac{\partial}{\partial t}\right) Q(t) \quad (100)$$

De la Ec. (100) se despeja Q (t)

$$Q(t) = -\frac{1}{\eta_0} \frac{1 + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t}}{1 + \lambda_J \frac{\partial}{\partial t}} \left(\pi \int_0^a \sigma_{rz} r dr\right) \quad (101)$$

Suponiendo de nuevo que los efectos inerciales y gravitacionales son despreciables, se obtiene la siguiente ecuación que relaciona el flujo volumétrico y el gradiente de presión:

$$\left(1 + \lambda_J \frac{\partial}{\partial t}\right) Q(t) = -\frac{\pi a^4}{8\eta_0} \left(1 + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t}\right) \nabla_z p(t) \quad (102)$$

#### 6.4.1 Calculo de la permeabilidad dinámica de Jeffreys.

Suponiendo que los efectos inerciales y gravitacionales son despreciables, se tiene lo siguiente:

$$V_0 = \varepsilon \langle V \rangle = \frac{\varepsilon Q(t)}{\pi a^2} = -\frac{1}{\eta_0} \frac{\varepsilon a^2}{8} \frac{1 + \lambda_0}{1 + \lambda_J} \frac{\partial}{\partial t} \nabla_z p \quad (103)$$

Finalmente la permeabilidad dinámica en el espacio de las frecuencias tiene la forma:

$$OK(t) = \frac{\varepsilon a^2}{8} \frac{1 + \lambda_0}{1 + \lambda_J} \frac{\partial}{\partial t} \quad (104)$$

Aplicando el operador de Fourier, se obtiene la permeabilidad dinámica en el espacio de las frecuencias:

$$K(\omega) = \varepsilon \frac{a^2}{8} \frac{1 + \lambda_0(i\omega)}{1 + \lambda_J(i\omega)} \quad (105)$$

Multiplicando la Ec. (105) por el complejo conjugado

$$K(\omega) = \varepsilon \frac{a^2}{8} \cdot \frac{1 + \lambda_0(i\omega)}{1 + \lambda_J(i\omega)} \cdot \frac{1 - \lambda_J(i\omega)}{1 - \lambda_J(i\omega)} = \varepsilon \frac{a^2}{8} \cdot \left( \frac{1 + \lambda_0 \lambda_J \omega^2}{1 + (\lambda_J \omega)^2} + i \frac{(\lambda_0 - \lambda_J) \omega}{1 + (\lambda_J \omega)^2} \right) \quad (106)$$

Descomponiendo la permeabilidad compleja de la Ec. (106), se tiene las siguientes expresiones:

$$K^*(\omega) = K_R(\omega) + iK_I(\omega) = \left( \varepsilon \frac{a^2}{8} \right) \frac{1 + \lambda_0 \lambda_J \omega^2}{1 + (\lambda_J \omega)^2} + i \left( \varepsilon \frac{a^2}{8} \right) \frac{(\lambda_0 - \lambda_J) \omega}{1 + (\lambda_J \omega)^2} \quad (107)$$

Finalmente, las permeabilidades de la Ec. (107) toman la forma:

$$K_R(\varepsilon, a, \lambda_0, \lambda_J; \omega) = \left( \varepsilon \frac{a^2}{8} \right) \frac{1 + \lambda_0 \lambda_J \omega^2}{1 + (\lambda_J \omega)^2} = K_N \frac{1 + \lambda_0 \lambda_J \omega^2}{1 + (\lambda_J \omega)^2} \quad (108)$$

$$K_I(\varepsilon, a, \lambda_0, \lambda_J; \omega) = \left( \varepsilon \frac{a^2}{8} \right) \frac{(\lambda_0 - \lambda_J) \omega}{1 + (\lambda_J \omega)^2} = K_N \frac{(\lambda_0 - \lambda_J) \omega}{1 + (\lambda_J \omega)^2} \quad (109)$$

En término de una permeabilidad reducida las Ecs. (108, 109):

$$\text{Modelo de Jeffreys: } \begin{cases} K_R^* = \frac{K_R(\varepsilon, a, \lambda_0, \lambda_J; \omega)}{K_N} = \frac{1 + \lambda_0 \lambda_J \omega^2}{1 + (\lambda_J \omega)^2} \\ K_I^* = \frac{K_I(\varepsilon, a, \lambda_0, \lambda_J; \omega)}{K_N} = \frac{\lambda_0 - \lambda_J}{1 + (\lambda_J \omega)^2} \omega \end{cases} \quad (110)$$

La parte real de la permeabilidad compleja, muestra un comportamiento monótono creciente a frecuencias bajas y a moderadas y altas un comportamiento asintótico. Por otra parte, la parte imaginaria, de la permeabilidad compleja describe un comportamiento resonante de varios órdenes de magnitud mayor que el real. Nótese, que la permeabilidad imaginaria, presenta una intersección en la siguiente frecuencia:

$$\lambda_0 \lambda_J \omega^2 - (\lambda_0 - \lambda_J) \omega + 1 = 0 \quad (111)$$

Las soluciones de esta ecuación cuadrática queda de la siguiente forma:

$$\omega_c^\pm = \frac{-(\lambda_0 - \lambda_J) \pm \sqrt{(\lambda_0 - \lambda_J)^2 - 4\lambda_0 \lambda_J}}{2\lambda_0 \lambda_J} \quad (112)$$

La Ec. (112) representan los valores de la frecuencia en donde la permeabilidad real e imaginaria son iguales, las cuales dependen de los valores de los tiempos de relajación y de retardo respectivamente. Finalmente, en la tabla 4, se hace un resumen de las principales contribuciones de esta investigación.

## **6.5 Resumen de los resultados más importantes de los resultados más importantes de esta sección.**

En esta sección se hace un resumen y previo análisis de los resultados más importantes de esta sección. La permeabilidad intrínseca se define como una medida de la resistencia de un sistema a fluir por un medio. A partir de la teoría del poro promedio, se obtienen expresiones analíticas de la ley de Darcy, permeabilidad intrínseca y dinámica en el sistema considerado aquí. Con base en la literatura, la permeabilidad intrínseca se puede obtener mediante el cálculo del fluido newtoniano, i.e. su valor queda determinado por la porosidad del medio y el cuadrado del radio del poro. Por otra parte, la viscosidad aparente en los fluidos no newtonianos se ve afectada por las propiedades materiales de la ecuación constitutiva que se analice. La expresión general de la ecuación de Darcy se define a continuación:

$$V_0 = \frac{K}{\eta_{app}} (-\nabla_z p) \quad (113)$$

En la siguiente tala se presenta un resumen de los resultados de este trabajo.



| Fluido            | Permeabilidad<br>Intrínseca       | Viscosidad<br>Aparente   | Permeabilidad<br>Dinámica   |
|-------------------|-----------------------------------|--|---|
| <b>Newtoniano</b> | $K_N = \varepsilon \frac{a^2}{8}$ | $\eta_{\text{eff}} = \eta_0$   |   |
| <b>Maxwell</b>    | $K_N = \varepsilon \frac{a^2}{8}$ | $\eta'(\omega) = \frac{G_0 \lambda_0}{1 + (\lambda_0 \omega)^2}$ $\eta''(\omega) = \frac{\eta_0 \lambda_0 \omega}{1 + (\lambda_0 \omega)^2}$   | $K_R(\varepsilon, a) = \left( \varepsilon \frac{a^2}{8} \right) = K_N$ $K_I(\varepsilon, a, \lambda_0, \omega) = K_N(\lambda_0 \omega)$                   |
| <b>Jeffreys</b>   | $K_N = \varepsilon \frac{a^2}{8}$ | $\eta'(\omega) = G_0 \lambda_0 \frac{1 + \lambda_0 \lambda_J}{1 + \lambda_0^2 \omega^2} \omega^2$ $\eta''(\omega) = G_0 \lambda_0 \frac{\lambda_0 - \lambda_J}{1 + \lambda_0^2 \omega^2} \omega$ | $K_R = K_N \frac{1 + \lambda_0 \lambda_J \omega^2}{1 + (\lambda_J \omega)^2}$ $K_I = K_N \frac{(\lambda_0 - \lambda_J) \omega}{1 + (\lambda_J \omega)^2}$ |

**Tabla 4. Resumen de las permeabilidades intrínsecas y dinámicas para los modelos de: (i) Newton, (ii) Maxwell y (iii) Jeffreys.**

## 6.6 Flujo pulsátil.

### 6.6.1 Modelo de Jeffreys.

En esta sección, se analiza el flujo pulsátil del modelo de Jeffreys desarrollado en la presente tesis de Licenciatura. El modelo de Jeffreys para un flujo cortante simple, está dado por la siguiente expresión analítica:

$$\left(1 + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t}\right) \sigma_{rz} = \eta_0 \left(1 + \lambda_J \frac{\partial}{\partial t}\right) \dot{\gamma}_{rz} \quad (114)$$

Calculando el flujo volumétrico, se tiene la siguiente expresión:

$$\frac{1}{\eta_0} \left(1 + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t}\right) \left(-\pi \int_0^a \sigma_{rz} r^2 dr\right) = \left(1 + \lambda_J \frac{\partial}{\partial t}\right) Q(t) \quad (115)$$

Si suponemos que los mecanismos inerciales y gravitacionales son despreciables y que el fluido se deforma continua e irreversiblemente debido a un gradiente de presión, el balance de momento toma la siguiente forma:

$$\left(1 + \lambda_J \frac{\partial}{\partial t}\right) Q(t) = -\frac{1}{\eta_0} \left(1 + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t}\right) \pi \frac{a^4}{8} \nabla_z p(t) \quad (116)$$

Para estudiar el flujo pulsátil del sistema, se proponen las siguientes soluciones para el flujo volumétrico y el gradiente de presión pulsátil:

$$\begin{aligned} Q(t) &= Q_0 e^{i\omega t} \\ \nabla_z p(t) &= -\nabla_z p_0 e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (117)$$

Sustituyendo en la expresión general, se tiene lo siguiente:

$$Q_0 = \pi \frac{a^4}{8} \frac{-\nabla_z p_0}{\eta_0} \cdot \frac{1 + \lambda_0(i\omega)}{1 + \lambda_J(i\omega)} \cdot \frac{1 - \lambda_J(i\omega)}{1 - \lambda_J(i\omega)} \quad (118)$$

Multiplicando por el complejo conjugado,

$$Q_0 = \pi \frac{a^4}{8} \frac{-\nabla_z p_0}{\eta_0} \cdot \frac{1 + \lambda_0 \lambda_J \omega^2 + i(\lambda_0 - \lambda_J)\omega}{1 + (\lambda_J \omega)^2} \quad (119)$$

Separando el flujo volumétrico en su parte real y compleja respectivamente:

$$Q_0(\omega) = Q_0^R(\omega) + iQ_0^I(\omega) = \pi \frac{a^4}{8} \frac{b_0}{\eta_0} \cdot \left( \frac{1 + \lambda_0 \lambda_J \omega^2}{1 + (\lambda_J \omega)^2} + i \frac{(\lambda_0 - \lambda_J)\omega}{1 + (\lambda_J \omega)^2} \right) \quad (120)$$

Igualando la parte real e imaginaria de la expresión anterior:

$$\text{Flujos:} \begin{cases} Q_0^R(\omega) = \pi \frac{a^4}{8} \frac{b_0}{\eta_0} \cdot \left( \frac{1 + \lambda_0 \lambda_J \omega^2}{1 + (\lambda_J \omega)^2} \right) \\ Q_0^I(\omega) = \pi \frac{a^4}{8} \frac{b_0}{\eta_0} \cdot \left( \frac{(\lambda_0 - \lambda_J)\omega}{1 + (\lambda_J \omega)^2} \right) \end{cases} \quad (121 \text{ a, b})$$

Si definimos el flujo volumétrico reducido para las partes real e imaginaria respectivamente:

$$Q_0^{R*}(\omega) = \frac{Q_0^R(\omega)}{Q_N} = \frac{1 + \lambda_0 \lambda_J \omega^2}{1 + (\lambda_J \omega)^2}$$

$$Q_0^{I*}(\omega) = \frac{Q_0^I(\omega)}{Q_N} = \frac{(\lambda_0 - \lambda_J) \omega}{1 + (\lambda_J \omega)^2}$$
(122 a,b)

En donde  $Q_N$  es el flujo de Poiseuille a gradiente de presión constante, dado por la siguiente relación:

$$Q_N = \pi \frac{a^4}{8 \eta_0} b_0 = \pi \frac{a^4}{8 \eta_0} (-\nabla_z p)$$
(123)

Los módulos reducidos tienen varios límites asintóticos a baja y altos valores en la frecuencia angular:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} Q_0^{R*}(\omega) = 1$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} Q_0^{I*}(\omega) \approx (\lambda_0 - \lambda_J) \omega$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} Q_0^{R*}(\omega) = \frac{\lambda_0}{\lambda_J}$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} Q_0^{I*}(\omega) \approx \frac{\lambda_0 - \lambda_J}{\lambda_J^2} \frac{1}{\omega}$$
(124 a-d)

### 6.6.2 Flujo volumétrico transitorio.

A partir de los módulos de flujo volumétrico, se pueden obtener las expresiones analíticas para el flujo volumétrico, por lo que se si utiliza el flujo complejo (Ec. 117). El flujo pulsátil transitorio, puede ser obtenido a partir de su definición:

$$Q(t) = Q_R(t) + iQ_I(t) = Q_0 \cdot e^{i\omega t} = (Q_0^R(\omega) + iQ_0^I(\omega)) e^{i\omega t}$$
(125)

recordando que la fórmula de Moivre de los numero complejos es:

$$e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i \operatorname{sen}(\omega t)$$
(126)

Introduciendo la Ec. (126) en la Ec. (125), se obtiene la componente real e imaginaria del flujo pulsátil transitorio:

$$\text{Módulos:} \begin{cases} Q^R(t;\omega) = Q_0^R(\omega) \cos(\omega t) - Q_0^I(\omega) \sin(\omega t) \\ Q^I(t;\omega) = Q_0^I(\omega) \cos(\omega t) + Q_0^R(\omega) \sin(\omega t) \end{cases} \quad (127 \text{ a,b})$$

Finalmente, combinando los módulos del flujo oscilatorio

$$Q^R(t;\omega) = \pi \frac{a^4 b_0}{8 \eta_0} \cdot \left( \frac{1 + \lambda_0 \lambda_J \omega^2}{1 + (\lambda_J \omega)^2} \right) \cos(\omega t) - \pi \frac{a^4 b_0}{8 \eta_0} \cdot \left( \frac{(\lambda_0 - \lambda_J) \omega}{1 + (\lambda_J \omega)^2} \right) \sin(\omega t) \quad (128 \text{ a})$$

$$Q^I(t;\omega) = \pi \frac{a^4 b_0}{8 \eta_0} \cdot \left( \frac{(\lambda_0 - \lambda_J) \omega}{1 + (\lambda_J \omega)^2} \right) \cos(\omega t) + \pi \frac{a^4 b_0}{8 \eta_0} \cdot \left( \frac{1 + \lambda_0 \lambda_J \omega^2}{1 + (\lambda_J \omega)^2} \right) \sin(\omega t) \quad (129 \text{ b})$$

Las componentes real e imaginaria de los flujos volumétricos, pueden ser expresadas como una combinación lineal del seno y coseno respectivamente.

Nótese, que los máximos y mínimos de la Ec. (128 a, b) están determinados por los tiempos de Maxwell (Relajación) y de Jeffreys (Retardo). Finalmente las expresiones más importantes desarrolladas en esta sección, son las expresiones para los módulos (Ec.122 a, b) y para la descripción del flujo oscilatorio, las Ecs. (128 a, b).

# CAPÍTULO VII

## SIMULACION Y ANALISIS DE RESULTADOS

En este capítulo se presentan las simulaciones de las ecuaciones principales de este trabajo.

- (a) Permeabilidad dinamica Real del modelo de Maxwell.
- (b) Permeabilidad dinamica imaginaria del modelo de Maxwell.
- (c) Permeabilidad dinamica Real del modelo de Jeffreys.
- (d) Permeabilidad dinamica Imaginaria del modelo de Jeffreys.
- (e) Flujo volumétrico real del modelo de Jeffreys.
- (f) Flujo volumétrico imaginario del modelo de Jeffreys.

### 7.1 Variables adimensionales.

Para simplificar las simulaciones, se utilizan las siguientes variables adimensionales respectivamente:

$$K_N^* = \frac{K_R}{K_N}; K_I^* = \frac{K_I}{K_N}; \lambda^* = \frac{\lambda_J}{\lambda_0}; \omega^* = \lambda_0 \omega; t^* = \frac{t}{\lambda_0}; Q_0^{R*}(\omega^*) = \frac{Q_0^R(\omega)}{\pi \frac{a^4 b_0}{8 \eta_0}}; Q_0^{I*}(\omega^*) = \frac{Q_0^I(\omega)}{\pi \frac{a^4 b_0}{8 \eta_0}}$$

Notese que las permeabilidades se han hecho adimensional con la permeabilidad del fluido newtoniano, i.e.  $K_N = a^2 \varepsilon / 8$ , el tiempo y la frecuencia se hacen adimensional con el tiempo de relajación de Maxwell y los modulos asociados al flujo volumétrico se hacen adimensionales con la ecuacion de Poiseuille.

### 7.2 Numero adimensional.

Al sustituir el conjunto de variables adimensionales en las ecuaciones, se obtiene los correspondientes grupos adimensionales que caracterizan el sistema. En este caso, el sistema de flujo es gobernado por un solo numero el cual, es el cociente de dos tiempos caracteristicos.

$$\lambda^* = \frac{\lambda_J}{\lambda_0} = \frac{\lambda_0}{\lambda_0} \frac{\eta_s}{\eta_s + \eta_p} \cong \frac{\eta_s}{\eta_p} \leq 1 \quad (130)$$

Este cociente de tiempos caracteristicos, depende básicamente de la razón de las viscosidades del solvente y del polímero respectivamente. Es importante hacer notar, que en el máximo, el tiempo adimensional  $\lambda^*$  es igual a la unidad, lo que implica que la viscosidad del solvente es del orden de la del polímero.

### 7.3 Ecuaciones adimensionales.

Sustituyendo las variables adimensionales en las expresiones para las permeabilidades, módulos de los flujos volumétricos y flujos transitorios, se obtienen las siguientes expresiones analíticas adimensionales:

$$\text{Permeabilidad Newtoniano: } \begin{cases} K = a^2 \varepsilon / 8 \\ K^* = 1 \end{cases} \quad (131 \text{ a,b})$$

$$\text{Permeabilidades adimensionales Maxwell: } \begin{cases} K_R^* = 1 \\ K_I^* = \omega^* \end{cases} \quad (132 \text{ a,b})$$

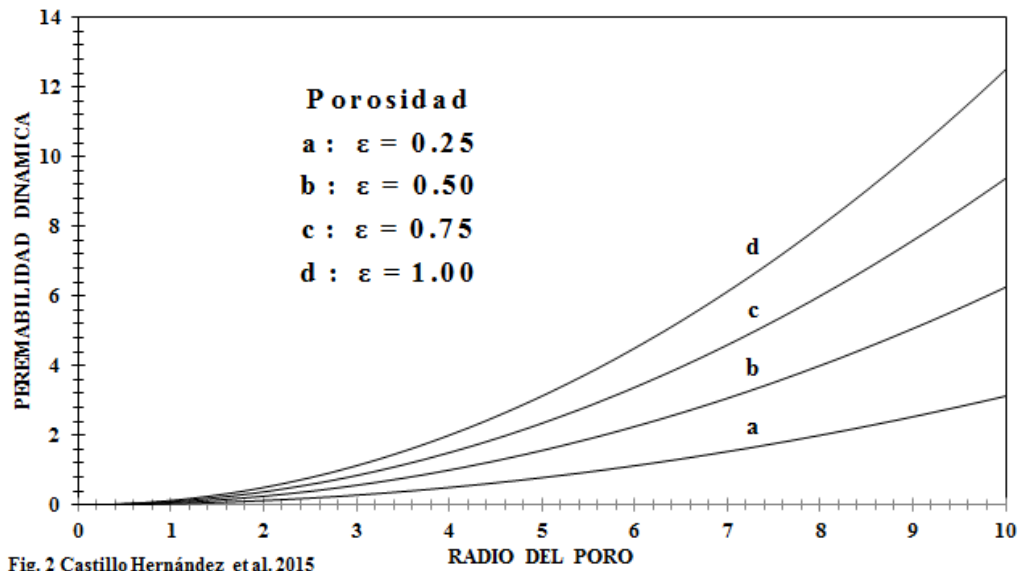
$$\text{Permeabilidades adimensionales Jeffreys: } \begin{cases} K_R^* = \frac{1 + \lambda^* \omega^{*2}}{1 + (\lambda^* \omega^*)^2} \\ K_I^* = \frac{(1 - \lambda^*) \omega^*}{1 + (\lambda^* \omega^*)^2} \end{cases} \quad (133 \text{ a,b})$$

$$\text{Flujos volumétricos adimensionales Jeffreys: } \begin{cases} Q_0^{R*}(\omega^*) = \frac{1 + \lambda^* \omega^{*2}}{1 + (\lambda^* \omega^*)^2} = K_R^* \\ Q_0^{I*}(\omega^*) = \frac{(1 - \lambda^*) \omega^*}{1 + (\lambda^* \omega^*)^2} = K_I^* \end{cases} \quad (134 \text{ a,b})$$

$$\text{Flujos volumétricos transitorios: } \begin{cases} Q^{R*}(t^*; \omega^*) = \left( \frac{1 + \lambda^* \omega^{*2}}{1 + (\lambda^* \omega^*)^2} \right) \cos(\omega^* t^*) - \left( \frac{(1 - \lambda^*) \omega^*}{1 + (\lambda^* \omega^*)^2} \right) \text{sen}(\omega^* t^*) \\ \quad = K_R^* \cos(\omega^* t^*) - K_I^* \text{sen}(\omega^* t^*) \\ Q^{I*}(t^*; \omega^*) = \left( \frac{(1 - \lambda^*) \omega^*}{1 + (\lambda^* \omega^*)^2} \right) \cos(\omega^* t^*) + \left( \frac{1 + \lambda^* \omega^{*2}}{1 + (\lambda^* \omega^*)^2} \right) \text{sen}(\omega^* t^*) \\ \quad = K_I^* \cos(\omega^* t^*) + K_R^* \text{sen}(\omega^* t^*) \end{cases} \quad (135 \text{ a,b})$$

Notese que las ecuaciones adimensionales depende del tiempo de la permeabilidad dinamica real o imaginaria respectivamente. Las ecuaciones adimensionales definidas anteriormente, son punto de partida en las simulaciones que a continuación se presentan.

#### 7.4 Permeabilidad intrínseca newtoniana.

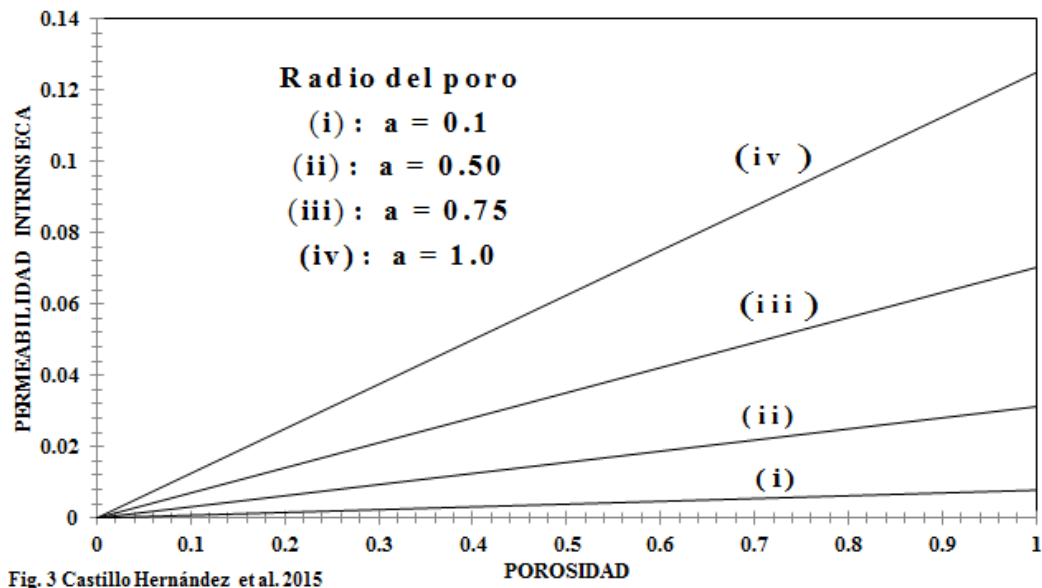


**Figura 8. Permeabilidad intrínseca vs radio del poro en función de la porosidad del medio.**

La Fig. 8 ilustra el efecto de la permeabilidad como función de la porosidad del medio la cual, es una función del número de huecos en el sistema. Es claro que para este modelo tan sencillo, la permeabilidad muestra un comportamiento monótono creciente en todo el intervalo del radio de poro. Las gráficas se desfasan hacia estados de menor a mayor permeabilidad por efecto de la porosidad. Nótese que un material que tiene un mismo radio de poro puede ser más permeable que otro dependiendo de la porosidad del material.



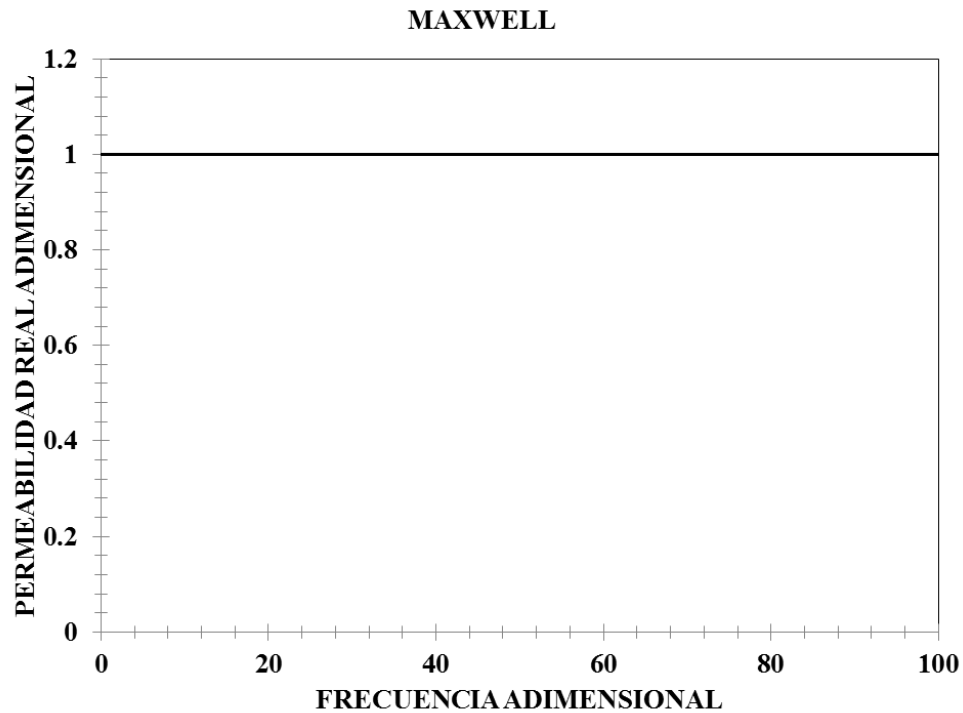
La Fig.9 ilustra el comportamiento de la permeabilidad intrínseca vs porosidad en función del tamaño del radio de poro. Como en la Fig.8 se observa un comportamiento lineal con diferente pendiente dependiendo del tamaño del poro. Es claro que un material con mayor tamaño de poro contribuye a una mayor permeabilidad que otro de menor radio. Sin embargo, en la mayoría de los materiales que existen en la naturaleza el tamaño del poro varía considerablemente, por lo que se tendría una distribución en el tamaño del poro. Por otra parte, la tortuosidad que es un efecto de la trayectoria que siguen las partículas en el medio poroso no es tomada en cuenta en estos cálculos, por lo que es un punto importante a considerar en futuras investigaciones.



**Figura 9. Permeabilidad intrínseca vs porosidad en función del radio del poro.**

## 7.5 Permeabilidad compleja del modelo de Maxwell.

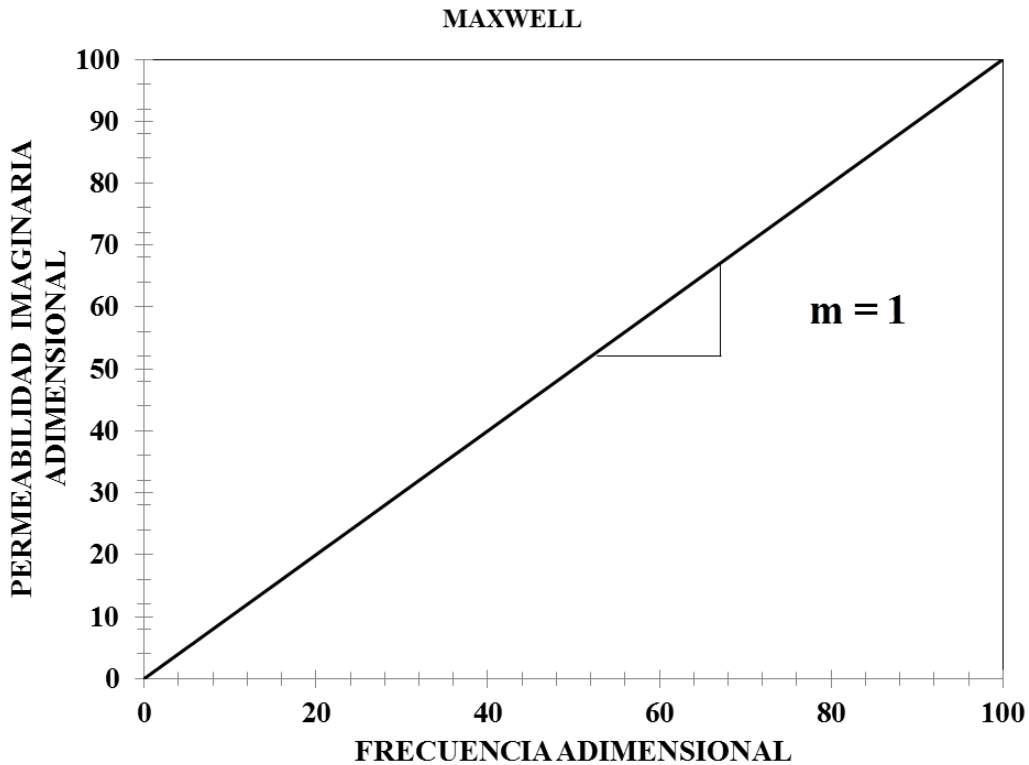
### 7.5.1 Permeabilidad Real.



**Figura 10.** Se ilustra la permeabilidad real normalizadas vs Frecuencia adimensional del modelo viscoelastico de Maxwell. En este caso, el tiempo de retardo es cero, i.e.  $\lambda_J = 0$ .

La Fig. 10 muestra el comportamiento de la parte real de la permeabilidad en el modelo de Maxwell. Notese que la permeabilidad es normalizada con la del newtoniano, i.e.  $K = a^2\varepsilon/8$ . Se observa que la parte real es independiente de la frecuencia en todo el intervalo. Físicamente, significa que la permeabilidad dinámica no cambia por efecto de la frecuencia.

### 7.5.2 Permeabilidad Imaginaria.

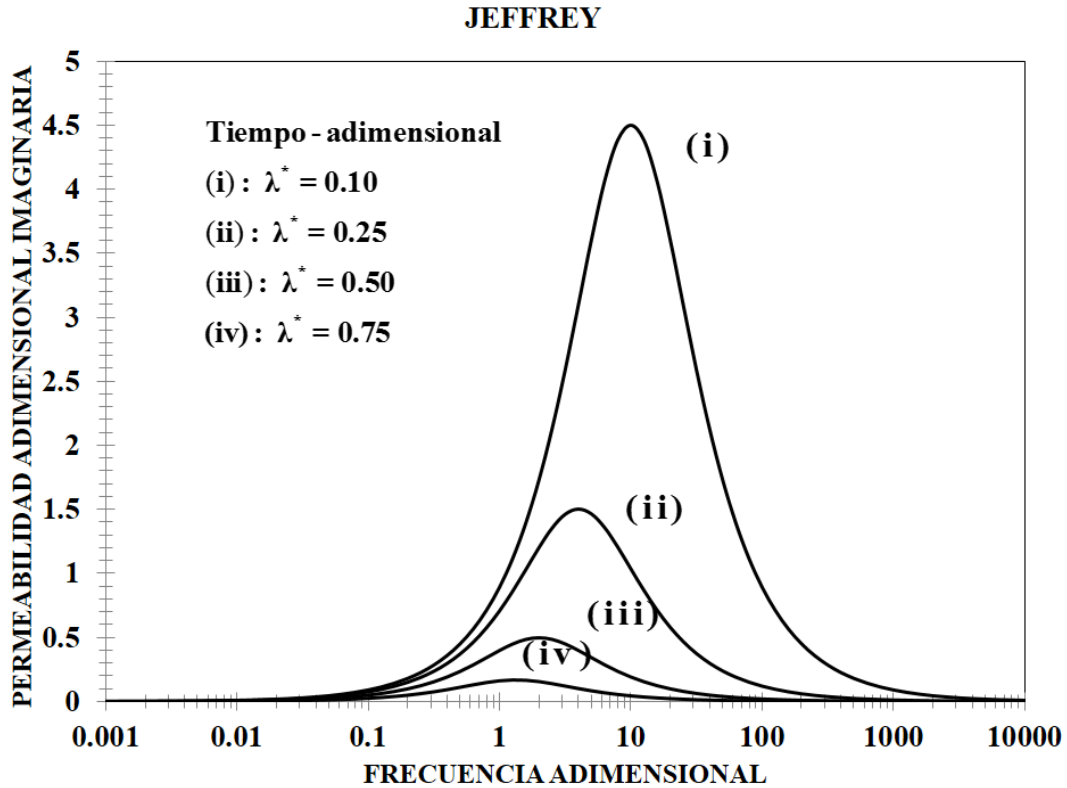


**Figura 11. Se ilustra la permeabilidad imaginaria normalizadas vs Frecuencia adimensional del modelo viscoelastico de Maxwell. En este caso, el tiempo de retardo es cero, i.e.  $\lambda_J = 0$ .**

Como en la Fig, 10, la Fig.11 describe la permeabilidad imaginaria normalizada como función de la frecuencia adimensional para el modelo de Maxwell. Es claro que el comportamiento del sistema es lineal en todo el intervalo de simulación. Como se vera en las siguientes simulaciones, el efecto del tiempo de retardo, permite al sistema obtener las curvas resonantes, las cuales están relacionadas con la energía en el sistema.

## 7.6 Permeabilidad dinámica del móldelo de Jeffreys.

### 7.6.1 Parte Imaginaria de la permeabilidad compleja del modelo de Jeffreys.



**Figura 12.** Se ilustra la permeabilidad adimensional imaginaria vs la frecuencia adimensional a diferentes valores numéricos del tiempo de retardo de Jeffrey.

En la Fig. 12, se observa va la componente imagianria de la permeabilidad compleja para el modelo de Jeffreys, como función del tiempo adimensional  $\lambda^* = 0$ . Es claro que el comportamiento es muy diferente al modelo de Maxwell.

Matemáticamente, las curvas muestran el clásico comportamiento resonante descrito en diferentes modelos físicos asociados con sistemas oscilantes en donde se analiza los efectos oscilatorios y pulsátiles (Del Rio et al. 1988). A frecuencias bajas, el sistema muestra un comportamiento lineal en el intervalo de [0.001, 0.1]. A un cierto valor crítico de frecuencia adimensional el sistema experimenta un comportamiento monótono creciente hasta un valor máximo el cual está determinado por un acoplamiento entre las propiedades materiales del sistema. Si tomamos la derivada de la permeabilidad compleja con respecto a la frecuencia angular, y se iguala a cero, se obtiene la frecuencia crítica para la cual se da el máximo:

$$\frac{dK_1^*}{d\omega^*} = \frac{(1-\lambda^*)\omega^*}{1+(\lambda^*\omega^*)^2} = \frac{(1+(\lambda^*\omega^*)^2)(1-\lambda^*) - 2(1-\lambda^*)(\lambda^*\omega^*)^2}{(1+(\lambda^*\omega^*)^2)^2} = 0 \quad (136)$$

Al resolver para la frecuencia adimensional se obtiene la siguiente relación:

$$\omega^* = \frac{1}{\lambda^*} \quad (137)$$

Esto implica que la frecuencia crítica para obtener el máximo de las curvas resonantes depende de la razón del tiempo de retardo (Jeffreys) y el tiempo de Maxwell (relajación). Es importante resaltar, que este tiempo adimensional, se puede interpretar como un cociente de viscosidades asociadas al solvente y al polímero respectivamente. Sustituyendo, el valor de la frecuencia adimensional en la permeabilidad imaginaria, se tiene lo siguiente:

$$(K_1^*)_{\max} = \frac{1}{2} \left( \frac{1-\lambda^*}{\lambda^*} \right) \quad (138)$$

El máximo valor de las curvas resonantes, esta determinado exclusivamente por el tiempo adimensional  $\lambda^*$ . Por ejemplo para un valor de  $\lambda^* = 0.10$ , el valor numérico del máximo de la permeabilidad imaginaria es:  $(K_1^*)_{\max} = \frac{1}{2} \left( \frac{1-0.1}{0.1} \right) = 4.5$



Por otra parte, a una frecuencia mayor a la frecuencia adimensional crítica, el comportamiento del sistema es monótono decreciente hasta un valor cercano a cero. Físicamente, significa que el sistema en la parte imaginaria presenta la mayor energía disipada asociado con los efectos resonantes en el material. En contraste con la parte real en donde se muestra un comportamiento monótono creciente seguido de una meseta a moderados y altos valores de la frecuencia angular. Es decir, nótese que los efectos resonantes en la máxima permeabilidad se obtienen a valores bajos de la frecuencia angular y que la parte imaginaria es de varios ordenes de magnitud que la parte real. Finalmente se observa que la parte imaginaria asociada a la permeabilidad presenta una mayor resistencia al paso del fluido en el medio.

7.6.2 Parte real de la permeabilidad real del modelo de Jeffreys.

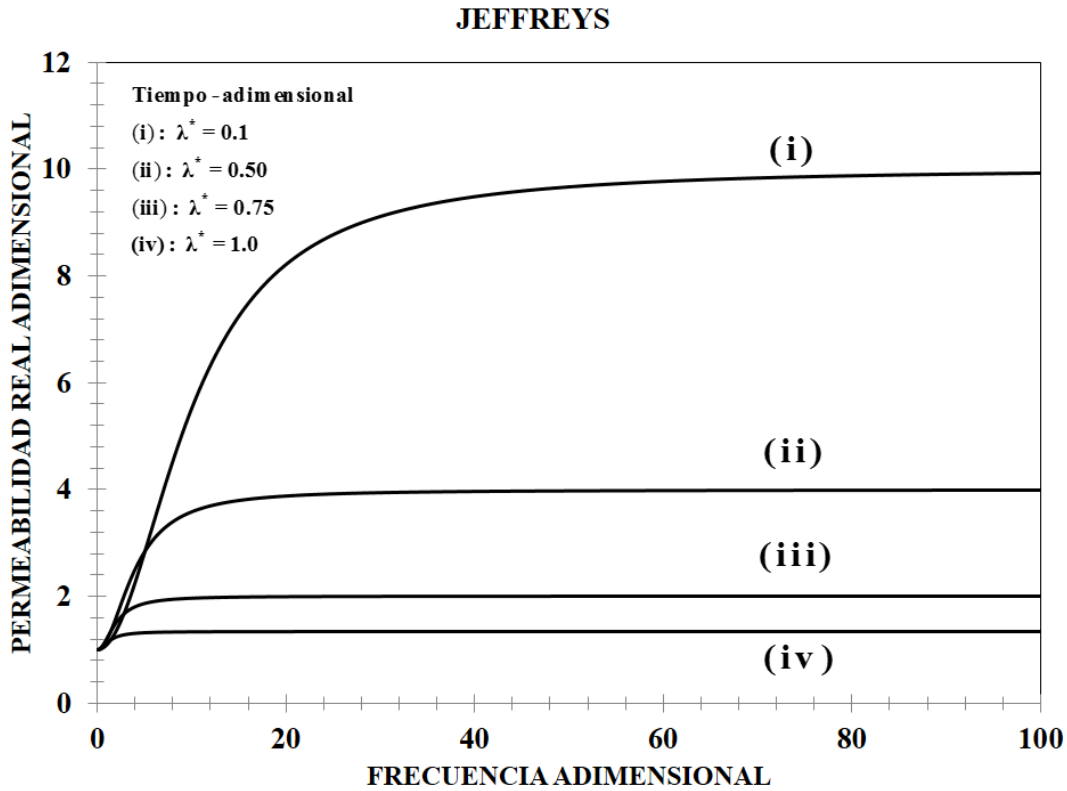


Figura 13. Se ilustra la permeabilidad adimensional real vs la frecuencia adimensional a diferentes valores numéricos del tiempo de retardo de Jeffrey.

La Fig. 13 ilustra la permeabilidad real vs frecuencia adimensional en función del tiempo adimensional  $\lambda \omega^* = 0$ . Matemáticamente, las curvas muestran un comportamiento monótono creciente en un intervalo de  $[0, 10]$  en la frecuencia adimensional. Para un valor crítico de la frecuencia adimensional, se observa que el sistema muestra un comportamiento asintótico, en donde el valor de esta zona, es independiente de la frecuencia angular adimensional.

$$\lim_{\omega^* \rightarrow \infty} K_R^* = \lim_{\omega^* \rightarrow \infty} \frac{1 + \lambda^* \omega^{*2}}{1 + (\lambda^* \omega^*)^2} = \frac{1}{\lambda^*} \quad (139)$$

El valor de la asíntota esta determinado por el inverso del tiempo adimensional  $\lambda_J^*$ , el cual se puede interpretar como una rapidez de deformación característica. Físicamente, significa que a valores de frecuencia bajos, la parte real de la función permeabilidad compleja es lineal presentándose en este intervalo una mayor resistencia al flujo. Por otra parte, para valores de frecuencia angulares mayores que la frecuencia angular crítica, se presenta una zona en donde la permeabilidad real es independiente de la frecuencia. Nótese, que el valor numérico máximo en la permeabilidad real es mucho mayor que en la parte disipativa asociada con la función imaginaria de la permeabilidad dinámica.

## 7.7 Flujo volumétrico transitorio del modelo de Jeffreys.

### 7.7.1 Flujo volumétrico real adimensional.

En las Figs. (14, 15) se simulan la parte real e imaginaria del flujo volumétrico para el modelo de Jeffreys respectivamente.

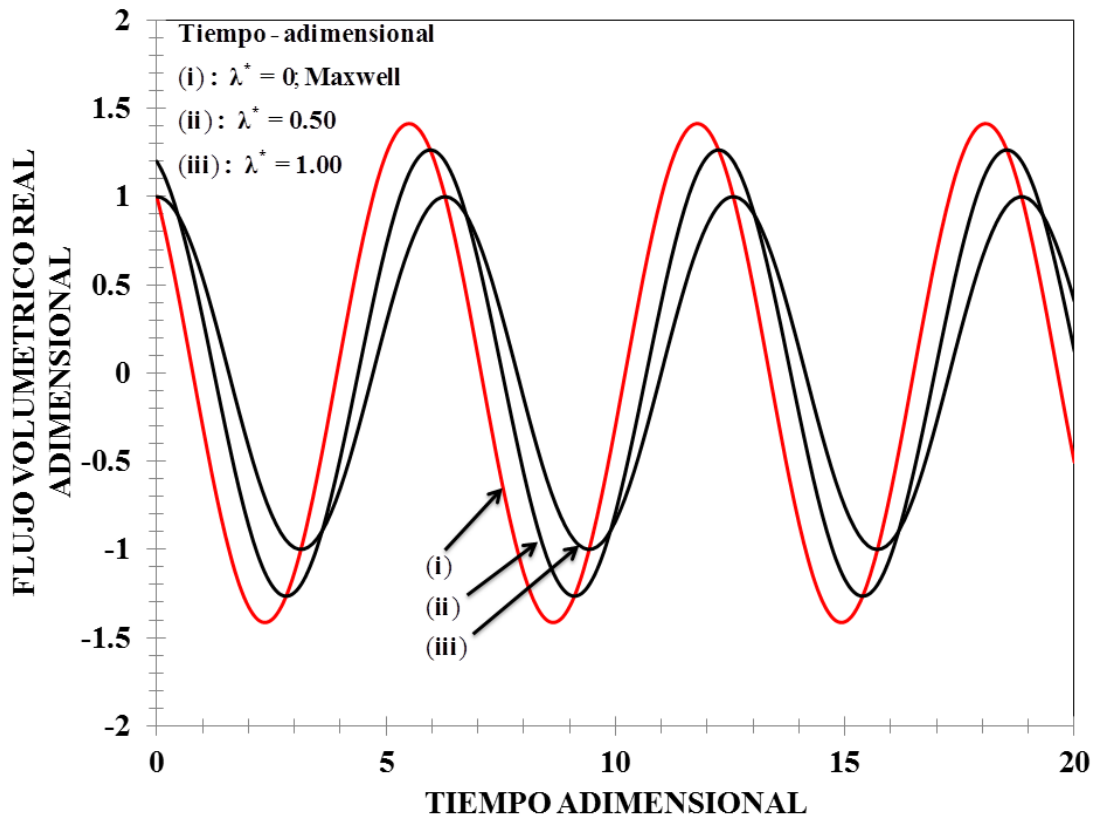


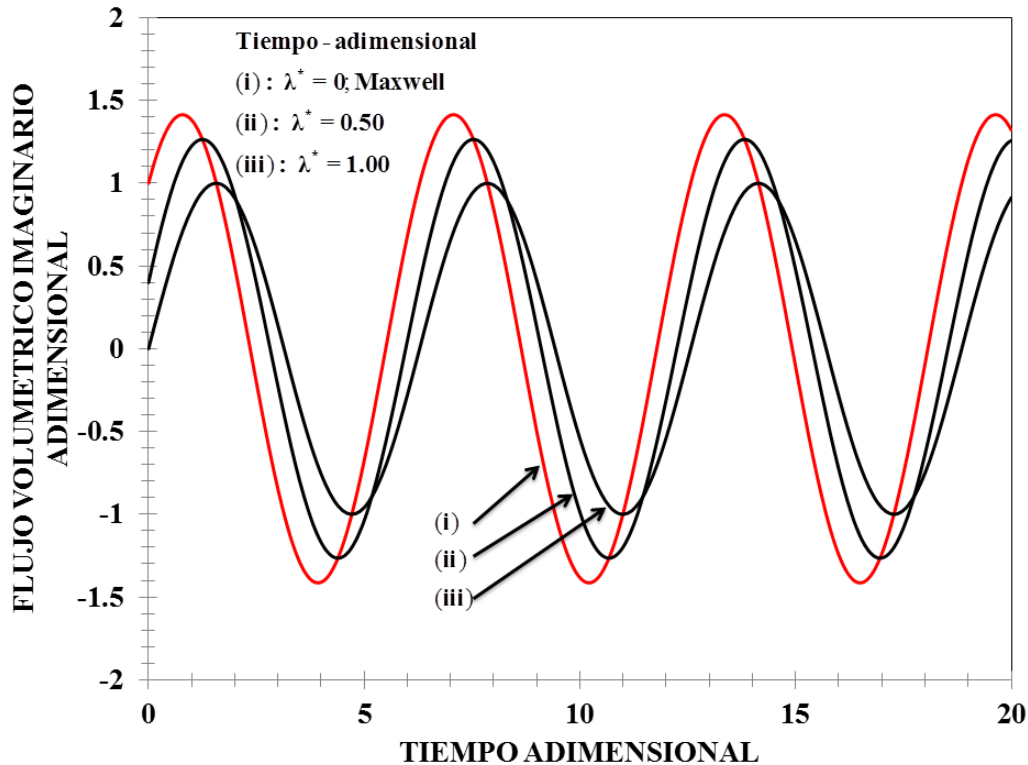
Figura 14. Se ilustra el Flujo volumétrico real adimensional como función del tiempo adimensional para diferentes valores del numero adiemnsional  $\lambda_J^*$ .





En la Fig. 14 se observa la parte real del flujo volumétrico como función del tiempo adimensional para diferentes valores  $\lambda_J^*$ . En todos los casos, se observa el comportamiento oscilatorio del flujo volumétrico real, en donde la amplitud de las curvas oscilatorias está determinada por las permeabilidades real e imaginaria respectivamente. Notese, que el efecto del tiempo adimensional  $\lambda_J^*$  es el de desfasar el máximo de las curvas hacia valores de tiempo adimensional mayores. Por otra parte, el tiempo  $\lambda_J^*$  está asociada a un cociente de viscosidades entre el solvente y el polímero por lo que los máximos y los mínimos están determinados por los mecanismos de relajación y de retardo respectivamente.

### 7.7.2 Flujo volumétrico imaginario adimensional



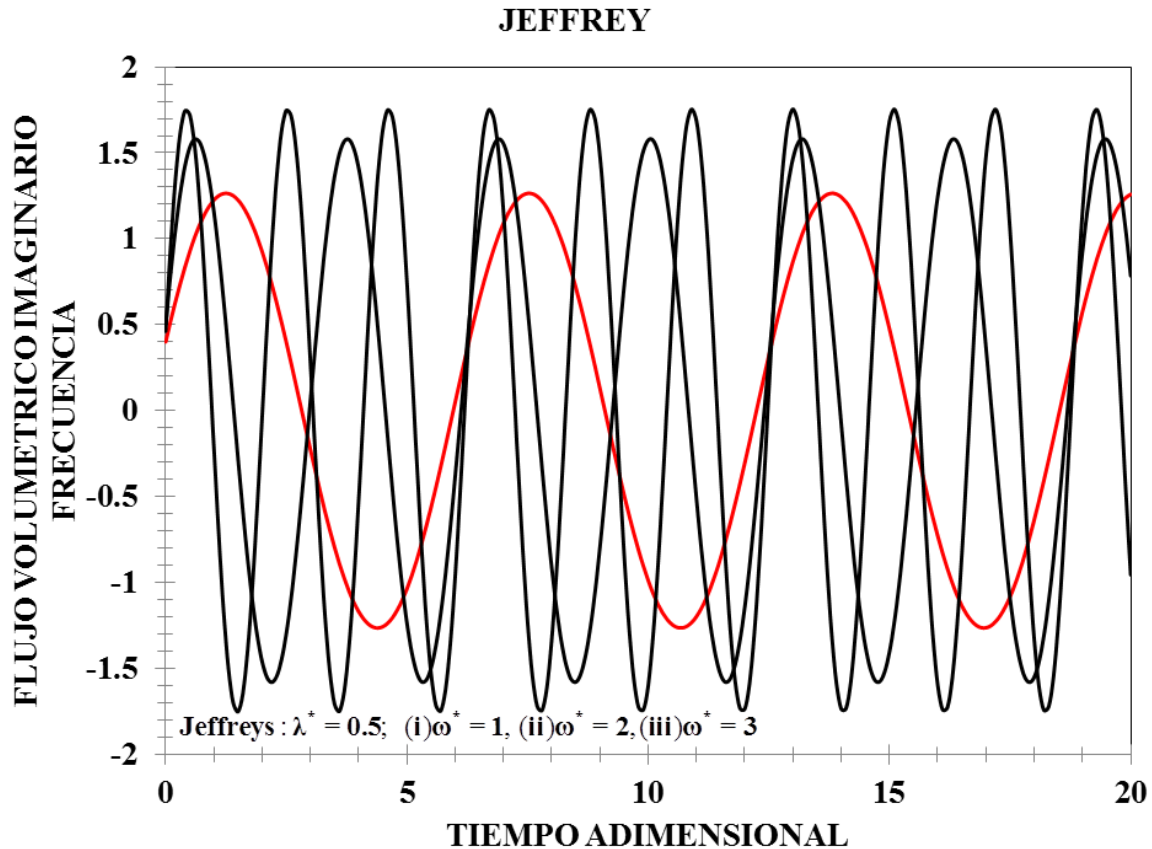
**Figura 15.** Se ilustra el flujo adimensional imaginario vs Tiempo adimensional a diferentes valores del tiempo adimensional.

En la Fig.15 se simula la parte imaginaria del flujo volumetrico como función del tiempo adimensional  $\lambda^*$ . Básicamente la interpretación de las curvas es la misma sin embargo, la parte imaginaria esta desfasada de la parte y las permeabilidades real y compleja modifican los máximos y mínimos de las curvas.

### 7.7.3 Flujo volumétrico real transitorio del modelo de Jeffreys.

La Fig.16 muestra el comportamiento del flujo volumétrico real adimensional como función del tiempo adimensional para diferentes valores de la frecuencia adimensional. Es importante resaltar, que en este trabajo solamente se esta interesado en la parte real del flujo volumétrico, por lo que no será necesario el análisis de la parte imaginaria. En la Fig. 16, la línea de rojo muestra el modelo de Maxwell en el caso de que la frecuencia adimensional tenga un valor de (i)  $\omega^* = 1$ .

Los otros valores de frecuencia adimensional utilizados son: (ii)  $\omega^* = 2$  y (iii)  $\omega^* = 3$  respectivamente. Como en las Figs. (13 y 14), se observa el comportamiento oscilatorio del sistema, sin embargo, al aumentar la frecuencia el valor de los máximos y mínimos en el flujo oscilatorio aumentan debido al efecto que ocasionan las permeabilidades real y imaginaria respectivamente.



**Figura 16. Ilustra la parte real de flujo transitorio complejo adimensional vs tiempo adimensional como función de la frecuencia adimensional.**

#### 7.7.4 Flujo volumétrico imaginario transitorio del modelo de Jeffreys.

En la Fig. 17 se simula el flujo adimensional complejo del modelo de Jeffreys como función del tiempo, a diferentes frecuencias adimensionales respectivamente. Como en la Fig. 17, la línea de rojo describe el modelo de Maxwell (i). Los parámetros empleados en la simulación son los siguientes: (i)  $\lambda^* = 0.9$ ,  $\omega = 1$ ; (ii)  $\lambda^* = 0.9$ ,  $\omega = 2$ ;  $\lambda^* = 0.9$ ,  $\omega = 3$ . Como en la Fig. (16) se observa el comportamiento oscilatorio con el tiempo adimensional, en donde los máximos y mínimos están determinados por las propiedades viscoelásticas del material, inducidos por los mecanismos de relajación y de retardo de la ecuación constitutiva de Jeffreys.

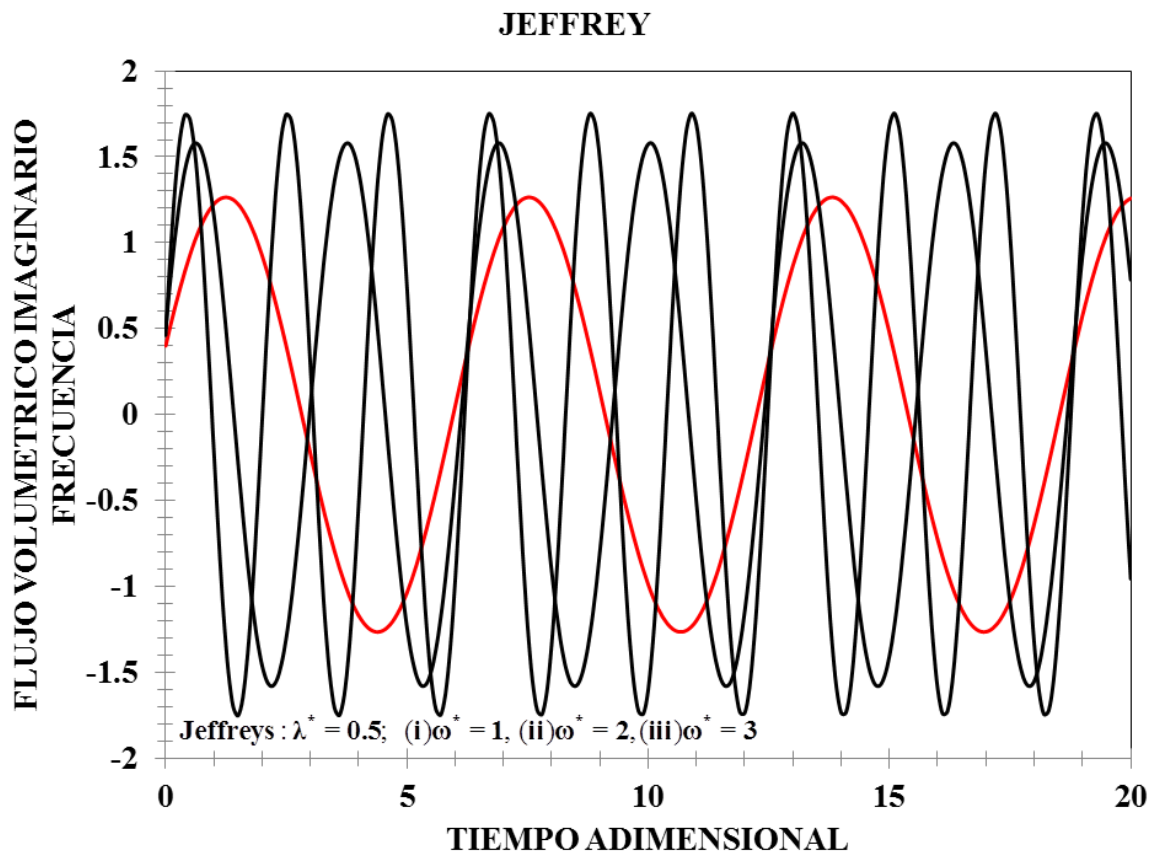


Figura 17. Se ilustra el Flujo adimensional real e imaginario vs Tiempo adimensional a diferentes valores del tiempo adimensional.

### 7.8 Aplicación a un fluido biológico con estructura transitoria, sangre humana.

En esta sección aplicaremos los conocimientos adquiridos en este trabajo en la descripción del flujo pulsátil sanguíneo del sistema humano. Usaremos las formulas obtenidas en este capítulo para predecir nuestro sistema. Los parámetros físicos de la sangre son: (i) viscosidad entre 5 y 20 cp., una densidad de 1.05 g/cm<sup>3</sup>, el tiempo de relajación y de retardo de la sangre fresca es de 1s y 0.1s respectivamente. Para la geometría, podemos seleccionar un intervalo de radios de nuestra arterias entre 0.20 y 0.35 cm esta elección puede parecer ingenua pero solo servirá para ilustrar el orden de magnitud de las respuestas del sistema. Aquí debemos recordar que la frecuencia cardiaca para los humanos esta entre 1 y 3 Hz. Este resultado nos indica que el corazón humano bombea la sangre a una frecuencia cardiaca de 10 Hz, mientras que una ballena azul puede tener una frecuencia cardiaca de 0.5 Hz. Con estos datos, se ilustra la posibilidad de un bombeo eficiente de fluidos viscoelásticos es un tópico que debe ser investigado con más detalle.

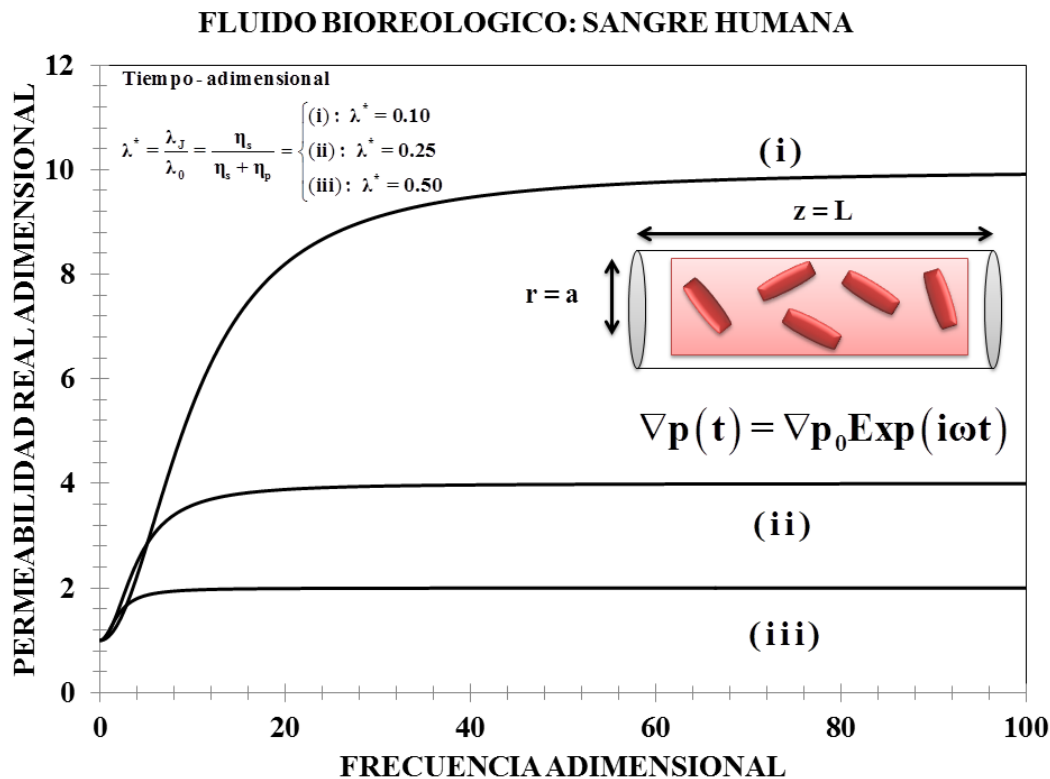


Figura 18. Se ilustra la permeabilidad real como función de la frecuencia adimensional en función del tiempo adimensional  $\lambda_j^*$ .

La Fig.18 presenta los resultados numericos de la permeabilidad dinámica real adimensional, como función del tiempo adimensional  $\lambda^*$  utilizando los datos reométricos de la literatura en bioreología. Es claro que las tres simulaciones presentan dos tipos de comportamientos. A frecuencias adimensionales bajas, se observa un comportamiento lineal entre la permeabilidad real y la frecuencia. A un cierto valor crítico de la frecuencia, se obtiene un comportamiento asintótico, en donde el sistema es independiente de la frecuencia. Nótese que el valor de la asíntota, esta determinado por el inverso del tiempo adimensional es decir,  $\lim_{\omega \rightarrow \infty} K_R^* = 1/\lambda^* = \dot{\gamma}^*$ . Esto implica que el valor numérico de la permeabilidad esta determinado por una rapidez de deformacion característica asociada con el inverso del tiempo adimensional, el cual es un cociente de viscosidades o fluidez.

**FLUIDO BIOREOLOGICO: SANGRE HUMANA**

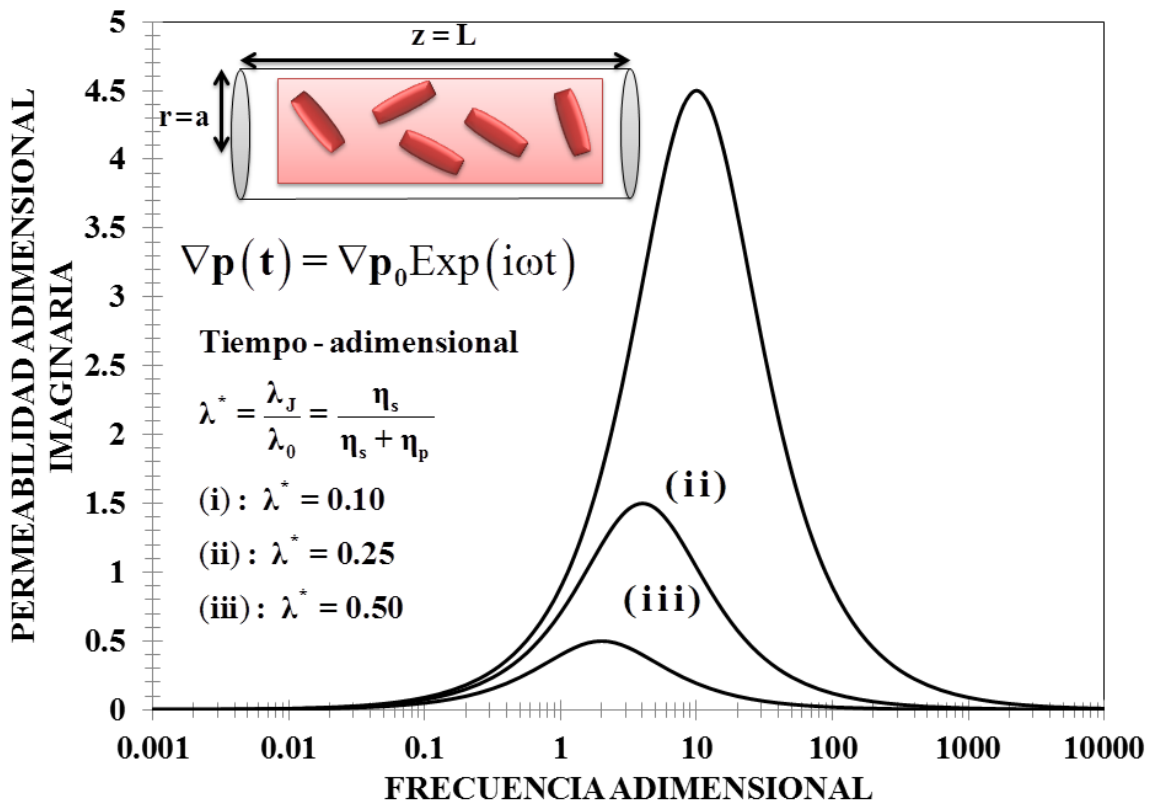
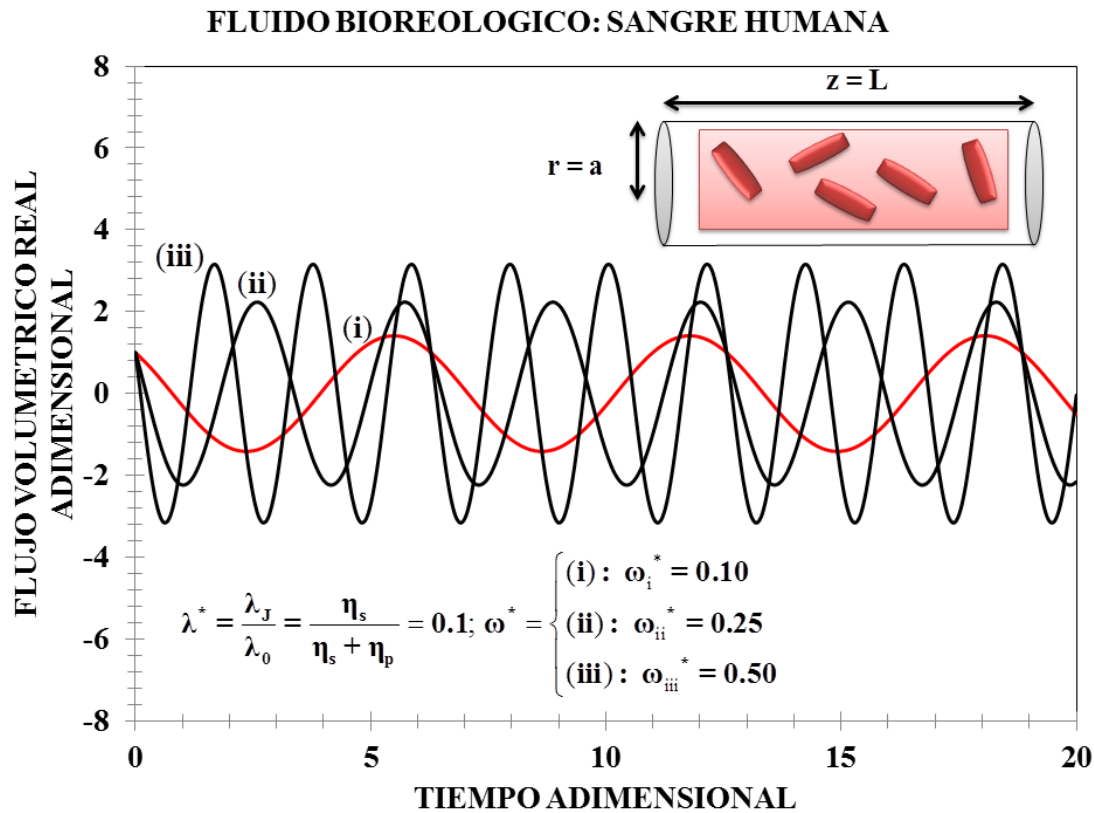


Figura 19. Se ilustra la permeabilidad imaginaria como función de la frecuencia adimensional en función del tiempo adimensional  $\lambda_j^*$ .

A partir de los datos reométricos provenientes de la literatura, se obtuvieron las curvas resonantes de la Fig. 19. En los tres casos, se observan las curvas resonantes para el modelo viscoelástico de Jeffreys. A frecuencias bajas, se observan un comportamiento lineal creciente en el intervalo  $[10^{-3}, 10^{-1}]$ , a partir de un valor mayor de  $10^{-1}$  se observa un comportamiento monótono creciente hasta un valor máximo. Es importante recalcar que el máximo, está determinado por las propiedades viscoelásticas del material a través de los mecanismos de relajación y de retardo del sistema y finalmente, a valores numéricos elevados de frecuencia, la permeabilidad dinámica imaginaria tiende a cero respectivamente. Nótese que cuando el tiempo adimensional es el menor de los tres utilizados, la permeabilidad dinámica es la mayor, lo que implica que la relación entre el solvente y el polímero es muy importante en la descripción del flujo. En este tipo de problemas, el solvente es caracterizado por el plasma en el sistema y el polímero por los hemátocitos, por lo que la razón entre sus viscosidades determina el valor numérico del máximo de las curvas resonantes de la permeabilidad imaginaria.



**Figura 20. Se ilustra el comportamiento del flujo volumétrico real transitorio vs el tiempo adimensional.**

En la Fig.20 se simula el efecto del flujo volumétrico real como función del tiempo adimensional, para diferentes valores de la frecuencia adimensional. En todos los casos se observa una respuesta oscilatoria en donde los máximos y mínimos de la respuesta mecánica-oscilatoria están determinados por un acoplamiento entre las propiedades viscoelásticas del material, por lo que los efectos solvente (plasma) y polímero (heritrocitos) juegan un papel preponderante en el flujo volumétrico pulsátil. Finalmente el efecto de la frecuencia adimensional es la aumentar el número de ciclos en el mismo intervalo experimental de computación.



# **CAPÍTULO VIII**

## **CONCLUSIONES**

En este trabajo se analizó un fluido viscoelástico con estructura transitoria que fluye a través de una tubería de radio  $r = a$  y longitud  $z = L$ . El sistema, se deforma continua e irreversiblemente debido a un gradiente de presión pulsátil. Para simular la permeabilidad con la frecuencia del flujo pulsátil se utiliza el modelo de Jeffrey, el cual acopla el modelo newtoniano (solvente) con el modelo de Maxwell (polímero). Asumiendo que los mecanismos inerciales y gravitacionales son despreciables, flujo homogéneo (las variables dinámicas del sistema no dependen de la posición) y líquido incompresible (densidad constante), se obtienen expresiones analíticas para el flujo volumétrico, esfuerzo en la pared y la permeabilidad compleja. Para probar nuestro modelo, utilizamos un fluido biológico con estructuras transitorias (sangre humana) con el fin de visualizar el efecto de los parámetros materiales asociados al modelo de Jeffrey. La ecuación diferencial parcial lineal, que describe el cambio temporal del flujo volumétrico como función del gradiente de presión, se resuelve mediante la teoría de la transformada de Fourier. La función permeabilidad compleja puede ser separada en dos contribuciones respectivamente. La parte real real esta asociada a los procesos de almacenamiento, mientras que la imaginaria a los disipativos respectivamente.

Las conclusiones principales sobre la permeabilidad se enlistan a continuación:

#### **Maxwell.**

- a) La parte real de la permeabilidad compleja muestra un comportamiento constante, es decir, que la permeabilidad es independiente de la frecuencia angular (Newtoniana).
- b) La parte imaginaria de la permeabilidad en el modelo de Maxwell muestra una dependencia lineal con la frecuencia en donde la pendiente de línea recta coincide con el tiempo viscoelástico de Maxwell el cual físicamente está asociado al tiempo que tarda el sistema en alcanzar el equilibrio.

#### **Jeffrey.**

- c) La parte real de la función permeabilidad compleja tiene un comportamiento lineal a bajos valores de la frecuencia angular, lo que implica que la resistencia a fluir por el medio poroso va aumentando. Sin embargo, a un cierto valor crítico de frecuencia el comportamiento asintótico en donde el valor numérico de la permeabilidad real es independiente de la frecuencia.



- d) La parte imaginaria de la permeabilidad compleja del modelo de Jeffrey muestra un comportamiento monótono creciente a bajos valores de frecuencia, esto quiere decir que la resistencia a fluir incrementa llegando a un valor crítico, en donde se obtiene el máximo asociado con las curvas resonantes.
- e) El máximo está determinado por un acoplamiento en las propiedades viscoelásticas (viscosidad, tiempo de relación y el tiempo de retardo). A valores moderados y altos, la permeabilidad muestra un comportamiento monótono decreciente.
- f) Con datos reométricos de sangre obtenidos en la literatura se generaron las curvas resonantes de la parte real e imaginaria.
- g) Los resultados obtenidos en este trabajo, concuerdan con los resultados teóricos, la permeabilidad real muestra un comportamiento monótono creciente seguido de una tendencia asíntota, la parte imaginaria despliega las curvas resonantes asociadas a la disipación viscosa.

Nótese dos hechos importantes, que la parte imaginaria es varios de órdenes de magnitud mayor que la real y que las curvas resonantes están determinadas con el solvente.

# CAPÍTULO IX

## TRABAJO A FUTURO

Se presentan algunas de las aplicaciones de flujo pulsátil y puedan ser viables a diferentes ramas de las ciencias:

- Una continuación de este trabajo, sería en la extensión de fluidos viscoelástico no lineales, es decir, que se aplique a altas rapidezces de deformación. Un ejemplo de este tipo de ecuaciones constitutivas que describen este régimen es la ecuación reológica de Tanner.
- Comprobar las predicciones teóricas de este modelo utilizando datos provenientes de experimentos reologicos en estado estacionario y no estacionario. (Pruebas de corte en donde se destruye el material, pruebas de flujo oscilatorio en donde se analiza la respuesta mecánica)
- Aplicar estos conocimientos a otro tipo de sistemas complejos como son: Sistemas biológicos que presente las propiedades visco-elásticas del material.
- Emplear este modelo en la industria alimenticia para saber el comportamiento los componentes viscosos y elásticos de este tipo de fluidos.
- Este trabajo se puede aplicar a fluidos micelares utilizados en la extracción terciaria de petróleo. Este tipo de fluidos se inyectan en los yacimientos de petróleo y debido a los gradientes de presión elevados, la roca se fractura y se puede recuperar mayores cantidades de crudo. La solución micelar consiste en una mezcla de tensoactivo, alcohol, salmuera y crudo. Los reactivos químicos empleados, sus concentraciones en los procesos de inyección y los tamaños de los mismos, dependerán de las propiedades de los fluidos y del medio poroso de la formación, así como de las consideraciones económicas correspondientes. Dada la situación actual en el mercado de precio del petróleo, la recuperación mejorada por métodos químicos se constituye una de las principales vías para aumentar el factor de recobro en los yacimientos.
- Implementando esta investigación en la Facultad de Estudios Superiores Zaragoza en asignaturas como Fenómenos de Transporte, Transferencia de Masa, Flujo de Fluidos, Matemáticas, Laboratorio y Taller de Proyectos entre otras. Ampliando estos conocimientos y llevarlos a la parte computacional y experimental.

# BIBLIOGRAFÍA

Barnes, H.A., Hutton, J.F., & Walters, K. 1989 An introduction to rheology, Amsterdam: Elsevier.

Bird, R.B., Armstrong, R.C. & Hassager, O. 1987 Dynamics of polymeric liquids, vol. 1. New York: John Wiley & Sons.

Bird, R.B., Stewart E. & Lighfoot E.N. 2002 Transport Phenomena, Second Edition. John Wiley and Sons, Inc.

Brinkman, H.C. 1947 On the permeability of media consisting of closely packed porous particles, Appl. Sci. Research, A1. 27-334, 81-86

Calderas, F., Sánchez-Solis, A., Maciel, A. & Manero, O. 2009 The transient flow of the PETPEN-Montmorillonite clay Nanocomposite, Macromol Symp. MACROMEX 283-284 354-360.

Cuevas, S & Del Rio, J.A. 2001 Dynamical permeability of electrically conducting fluids under magnetic fields in a annular ducts. Phys. Rev. E. 64, 016313/1-7.

Currie, I.G, 1974 Fundamental Mechanics of Fluids, McGraw-Hill Press.

Del Rio J.A 1993 Contribuciones teóricas al estudio de los fenómenos de transporte en medios porosos. Ciencia 44, 527-544.

Del Rio J.A & Castrejón-Pita J.R. 1987 Modelo simple para la permeabilidad dinámica de fluidos viscoelásticos. Revista Mexicana de Física. 49 (1) 74-85.

Del Rio J.A., De Haro, M.L. & Castrejón-Pita J.R. 1998 Enhancement in the dynamic response of a viscoelastic fluid flowing in a tube. Phys. Rev. E. 58 (5) 6323.

Garcia-Colin, L.S. & Rodríguez, R.F. 1991 Fluidos exóticos, Trillas.

Greenkorn R.A. 1984 Flow Phenomena in Porous Media: Fundamental and Applications in Petroleum, Water and Food Production. Marcel Dekker, New-York

Herrera-Valencia E.E. & Rey, A.D. 2014 Actuation of flexoelectric membranes in viscoelastic fluids with applications to outer hair cells. Phil. Trans. R. Soc. A. 372: 20130369/1-28.

Herrera, E.E., Calderas, F., Chavez, A.E., Manero, O. & Mena, B. 2009 Effect of random longitudinal vibrations pipe on the Poiseuille flow of a complex liquid. Rheol. Acta 48 779-800.

Herrera, E.E., Calderas, F., Chavez, A.E. & Manero, O. 2010 Study on the pulsating flow of worm-like micellar solution. J. Non-Newtonian Fluid Mech. 165 174-183.

Lopez de Haro, M., Del Rio J.A. & Whitaker, S. 1996 Flow of Maxwell fluids in Porous Media. Transp. Porous Media 25, 167-192.

Kim J.H., Ochoa J.A., Whitaker, S. 1987 Diffusion in anisotropic porous media.

Transport in porous media 2 (4), 327-356.

Middleman, S. Fundamentals of polymer Processing, McGraw-Hill.

Moreno L. Calderas, F. Sánchez-Olivares, G, Medina-Torres, L., Sánchez-Solis, A & Manero, O. 2013 La sangre humana desde el punto de vista de la reología. Materiales Avanzados. 20, 33-37.

Moreno L. Calderas, F. Sánchez-Olivares, G, Medina-Torres, L., Sánchez-Solis, A & Manero, O. 2015 Effect of cholesterol and triglycerides levels on the rheological behaviour of the human blood. Korea-Australia rheology journal

Ochoa-Tapia, J.A, Del Rio J.A. & Whitaker S (1993). Bulk and surface diffusion in porous media: An application on the surface-averaging theorem. Chem. Eng, Sci, 48, 11, 2061-2082.

Ochoa-Tapia, J.A, 1995. El método del promedio volumétrico para el estudio de difusión en sistemas de varias componentes. Rev. Mex. Fis. 41 451-470.

Quintard, M. & Whitaker, S. 1997, Transport In ordered and disordered porous media: volume-averaged equations, closure problems, and comparison with experiment. Transport in porous media 14(2), 179-206.

Quintard, M. & Whitaker, S. 1997, Two-medium treatment of heat transfer in porous media: numerical results for effective properties. Advances in Water resources 20 (2), 77-94.



Quintard, M. & Whitaker, S. 1997 Convection, dispersion, and interfacial transport of contaminants: Homogeneous porous media. *Advances in Water Resources* 17(4), 221-239.

Wood BD, Quintard M & Withaker S. 2002 Calculation of effective difussivities for biofilms and tissues. *Biotechnology and bioengineering* 77 (5), 495-516.

Quintanilla, R & Rajagopal, K.R. 2006 On Burgers fluids. *Math.Meth. Appl. Sci.* 29 2133-2147.

Rey, A.D. 2007 Capillary models for liquid crystal fibers, membranes, films, and drops. *Soft Matter* 2 1349-1368.

Rey, A.D. 2010 Liquid crystals models of biological materials and processes. *Soft Matter* 6 3402-3429.

Rey, A.D. & Herrera-Valencia, E.E. 2012a Rheological theory and simulations of surfactant nematic liquid crystals, in *Self-Assembled Supramolecular Architectures: Lyotropic Liquid Crystals*. New Jersey, USA: John Wiley & Sons Inc. Hoboken. (eds N. Garti, P. Somasundaran and R. Mezzenga).

Rey, A.D. & Herrera-Valencia, E.E. 2012b Liquid crystal models of biological materials and silk spinning. *Biopolymers* 97 374-396.

Rey, A.D. Mojdeh Golmohammadi & Herrera-Valencia, E.E. 2011 A model for mesophase wetting thresholds of sheets, fibers and fiber bundles. *Soft Matter* 5002-5009.

M. Nimomiya, F. Fujii, M. Niwa, K. Sakamoto, and H. Kanai, *Biorheology* 25 (1988) 319.

Kozicki W, Tiu C. A unified model for non-Newtonian flow in packed beds and porous media. *Rheol Acta* 1988; 27 (1): 31-38

Chhabra RP, Comiti J, Machac I. Flow of non-Newtonian flow in packed beds and porous media. *Rheol. Acta* 1988; 27 (1): 31-8.

Schowalter WR. *Mechanics of non-Newtonian fluids*. Pergamon Press Inc.; 1978.



Shenoy AV. Darcy-Forcheimer natural, forced and mixed convection heat transfer in non-newtonian power-law fluid-saturated porous media. *Transport Porous Media* 1993; 11 (3): 219-241.

Thruston, S. 1976 The effects of frequency of oscillatory flow the impedance of rigid, blood filled tubes, *Biorheology* 13, 191-199.

Whitaker, S. 1966 The equations of motion in porous media. *Chemical Engineering Science* 21 (3), 291-300

Whitaker, S. 1966 Simultaneous heat, mas and momentum transport in porous media: a theory of drying. *Advances in heat transfer* 13, 119-203.

Whitaker, S. 1967 Diffusion and dispersion in porous media. *AIChE* 13 (3), 420-427.

Whitaker, S. 1987 Flow in porous media I: a theoretical derivation of the Darcy's Law. *Transp. Porous Media.* 1, 3-55.