Universidad Nacional Autónoma de México
Y
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo
Instituto de Física y Matemática

Posgrado Conjunto en Ciencias Matemáticas UNAM-UMSNH

Álgebras de Weyl y Problema de Bernstein

TESIS

Que para optar por el grado de Maestro en Ciencias Matemáticas
Presenta:

Víctor Rufino Becerril Somera
mathvick06@gmail.com

Director: Doctor en Matemáticas Roberto Martínez Villa
Centro de Ciencias Matemáticas
mvilla@matmor.unam.mx

Morelia, Michoacán - Agosto de 2014.

Resumen

Buscando generalizar los resultados de [11] y [12] en esta tesis iniciamos el estudio de álgebras más generales que las G-álgebras y las G-álgebras homogéneas, esto nos lleva a estudiar la dimensión de Gelfand-Kirillov, optamos por presentar esta dimensión en la generalidad de Krause-Lenagan en [3] teniendo en cuenta la posibilidad de aplicarla mas tarde al estudio de álgebras no noetherianas. Estudiamos también las propiedades básicas de las álgebras casi conmutativas, es decir álgebras filtradas cuyo anillo graduado asociado es conmutativo, estas álgebras se caracterizan por ser cocientes del álgebra envolvente de un álgebra de Lie de dimensión finita. También abordamos las álgebras de Weyl, con la lectura del texto de Coutinho [13], y estudiamos nociones fundamentales como la categoría de módulos holonómicos. Intentamos ilustrar la fuerza y la belleza de esta teoría con una aplicación al análisis, para ello hemos elegido el problema planteado por Gelfand en el Congreso Internacional de Matemáticas que tuvo lugar en Amsterdam en 1963. El problema mencionado pertenece al análisis funcional y utiliza en particular la teoría de distribuciones, así que incluimos esta tesis con resultados básicos de esta parte del análisis. El trabajo culmina con la demostración dada por Bernstein en [6].

Palabras clave: G-Álgebras Homogéneas, Dimensión de Gelfand-Kirillov, Álgebras de Weyl, Distribuciones, Problema de Bernstein.

Abstract

Looking for generalize the results of [11] and [12] in this thesis began the study of more general algebras that G-algebras and homogeneous G-algebras, this leads us to study the Gelfand-Kirillov dimension, we opted this dimension present in most of Krause-Lenagan in [3] taking into account the possibility of applying it later to study not noetherianas algebras. We also study the basic properties of almost commutative algebras, ie filtered algebras whose associated graded ring is commutative, these algebras are characterized as the quotient of the enveloping algebra of a Lie algebra of finite dimension. We also address Weyl algebras, reading the text of Coutinho [13], and study key concepts such as the category of holonomic modules. We try to illustrate the power and beauty of this theory with an application to the analysis, we have chosen the problem proposed by Gelfand in the International Congress of Mathematics which took place in Amsterdam in 1963 The above problem belongs to the functional analysis and used in particular the theory of distributions, so we included this thesis with basic results of this part of the analysis. The work culminates with the demonstration given by Bernstein in [6].

Keywords: Homogeneous G-algebras, Gelfand-Kirillov Dimension, Weyl Algebras, Distributions, Bernstein's Problem.

Introducción

Dado un anillo conmutativo R se le puede asociar a este un objeto geométrico Spec$R$ (espectro máximo de R), el conjunto de ideales primos (máximos) de R y dotar a Spec$R$ con la topología de Zariski, a un ideal I de R le corresponde la variedad $\mathfrak{D}(I)$ (un cerrado en la topología de Zariski) de todos los ideales primos (máximos) que contienen a I. Obtenemos de esta manera una generalización de la geometría algebraica afín. A $\mathfrak{D}(I)$ le asociamos su dimensión de Krull (la máxima longitud en de las cadenas de ideales primos que contienen a I). En caso de que R sea un anillo graduado positivamente (como el anillo de polinomios), consideramos el espectro primo, de ideales primos graduados (homogéneos) de R y obtenemos de esta manera el análogo a la geometría proyectiva. Tenemos también el proceso de localización, en particular la localización en un ideal primo, lo cual corresponde a fijarse en las propiedades de la variedad en un punto, por ejemplo si es suave, o el tipo de singularidad que tiene en ese punto. El ser suave corresponde con la propiedad de que el localizado sea un anillo regular, dependiendo del tipo de anillo puede tener una singularidad tipo Gorenstein o Cohen Macaulay.

Tomemos tres familias importantes de anillos conmutativos: regulares, Gorenstein y Cohen Macaulay, cada uno de ellos tiene asociada su dimensión de Krull. Los anillos regulares de dimensión uno corresponden con las curvas suaves.

Los anillos regulares se caracterizan por tener dimensión global finita y los Gorenstein son aquellos en los que el anillo tiene dimensión inyectiva finita.

Se han hecho muchos esfuerzos por aplicar ideas similares a anillos no conmutativos, es decir; se ha intentado fundamentar una geometría álgebraica no conmutativa, en la que a un anillo no conmutativo se le asocie un objeto geométrico, una dimensión que corresponda a la dimensión de Krull y un proceso de localización, en este esquema los anillos graduados corresponderían con la geometría proyectiva. La tesis de Gabriel [10] puso los simientes de esta teoría.

La teoría de anillos clásicos ha buscado seguir un programa análogo al de la teoría de anillos conmutativos: estudiar anillos primos, el anillo total de cocientes, el proceso de localización, una teoría de la dimensión que generalice la de Krull etc.

También hubo intentos de considerar análogos no conmutativos al de los anillos regulares, Gorenstein y Cohen Maculay. Auslander introdujo una noción que hoy se conoce como regular de Auslander, siendo las álgebras de Weyl un ejemplo importante de un anillo no conmutativo regular en el sentído de Auslander.

La geometría no conmutativa ha tenido un nuevo impulso a partir del reciente interés en los grupos cuánticos (ver Mannin, [15]). Una versión es la de Alain Connes [1] en la que se busca estudiar los objetos no conmutativos que surgen de la física y otra es la de

Michael Artin que intenta hacer un programa paralelo al de la geometría conmutativa por ejemplo clasificando las curvas no conmutativas, empezando por las suaves. Con este fin Artin y Schelter introducen las nociones de regular y Gorenstein que son más simples de trabajar que las dadas por Auslander. En cuanto a la dimensión, ellos utilizan la dimensión de Gelfand-Kirillov, así curvas no conmutativas suaves serían anillos regulares de Artin Schelter de dimensión de Krull uno.
Levandosky ha considerado la familia de las G-álgebras o álgebras con una base de Gröebner, esta familia incluye las álgebras de Weyl y el álgebra envolvente de una álgebra de Lie de dimensión finita, en los artículos [11], [12] se consideran versiones homogéneas de estas álgebras y se demuestra que ellas son regulares de Artin-Schelter.
Buscando generalizar los resultados de [11], [12] en esta tesis iniciamos el estudio de álgebras más generales que las G-álgebras y las G-álgebras homogéneas, esto nos lleva a estudiar la dimensión de Gelfand-Kirillov y la familia de las álgebras casi conmutativas, para ello seguimos el libro de Krause y Lenagan. Optamos por presentar esta dimensión en la generalidad que ellos consideran teniendo en cuenta la posibilidad de aplicarla mas tarde al estudio de álgebras no noetherianas. Estudiamos también las propiedades básicas de las álgebras casi conmutativas, es decir álgebras filtradas cuyo anillo graduado asociado es conmutativo, estas álgebras se caracterizan por ser cocientes del álgebra envolvente de una álgebra de Lie de dimensión finita.
Un segundo objetivo de la tesis es el estudio de las álgebras de Weyl, el cual iniciamos con la lectura del texto de Coutinho, y estudiar nociones fundamentales como la categoría de módulos holonómicos. Intentamos ilustrar la fuerza y la belleza de esta teoría con una aplicación al análisis, para ello hemos elegido el problema planteado por Gelfand en el Congreso Internacional de Matemáticas que tuvo lugar en Amsterdam en 1963: Consideremos un polinomio

$$f(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n],$$

y sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ la región donde f es no negativa en el interior y cero en la frontera. Para cualquier número complejo $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$ con $\Re(\lambda) > 0$ se puede definir una función continua $f_\Omega(\lambda) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ mediante

$$f_\Omega(\lambda)(\mathfrak{a}) = \begin{cases} f(\mathfrak{a})^\lambda = e^{\lambda \log f(\mathfrak{a})} & \text{si } f(\mathfrak{a}) > 0, \\ \\ 0 & \text{si } f(\mathfrak{a}) \leq 0 \end{cases}$$

ya que $z^c = e^{c \log(z)}$ está bien definido para todo $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$. De esto se sigue que para cualquier complejo λ con $\Re(\lambda) > 0$, la función $f_\Omega(\lambda)$ es localmente integrable y considerada como distribución mediante

$$\langle f_\Omega(\lambda), g\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(\eta)^\lambda g(\eta)\, d\eta \text{ con } g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

En estas condiciones la función

$$f_\Omega : \lambda \mapsto f_\Omega(\lambda) \text{ de } \mathbb{C}_+ = \{\lambda \in \mathbb{C} : \Re(\lambda) > 0\} \text{ a } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$$

es una función analítica pues la derivada compleja de $\langle f_\Omega(\lambda), g\rangle$ para $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ está dada por

$$\int_{\mathbb{R}^n} \log(f(\eta)) f(\eta)^\lambda g(\eta)\, d\eta.$$

Consideramos el caso en que $\Re(\lambda) < 0$ y sea $a_0 \in \partial\Omega$, entonces si tomamos $\{a_j\}_{j=1}^\infty$ con $a_j \in \Omega$ tal que $a_j \to a_0$, tenemos

$$|f(\mathfrak{a}_\mathfrak{j})^\lambda| = \frac{1}{e^{-\lambda_1 \log(f(\mathfrak{a}_\mathfrak{j}))}} \to +\infty \text{ cuando } \mathfrak{a}_\mathfrak{j} \to \mathfrak{a}_0.$$

El objetivo es continuar analíticamente la distribución definida por f_Ω como una función analítica de λ a todo el plano complejo.
El problema mencionado pertenece al análisis funcional y utiliza en particular la teoría de distribuciones asi que incluimos en esta tesis resultados básicos de esta parte del análisis. Nuestro trabajo culmina con la demostración dada por Bernstein en 1972 para ello utilizamos el esquema de demostración propuesto en los textos de Coutinho y Krause-Lenagan y completamos los detalles.

Índice general

Capítulo 1

Crecimiento de Álgebras

En este capítulo definimos la dimensión de Gelfand-Kirillov y vemos que no depende de la elección del espacio generador, para ello definimos una relación de equivalencia sobre el conjunto de funciones $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. También introducimos los conceptos de álgebras y módulos graduados y filtrados así como la graduación asociada a una filtración dada, y definimos el importante concepto de filtración estándar la cual será de gran utilidad en el ultimo capítulo. Finalmente damos al álgebra graduada asociada $\mathrm{gr}_{\mathrm{gr}(\mathcal{A})}(A)$ una condición que nos garantice que la dimensión de Gelfand-Kirillov sobre los A-módulos sea exacta.

Sea k un campo. Una k-álgebra A (con elemento unitario 1) generada por $\{a_1, \ldots, a_m\}$ tiene el *subespacio generador* V de dimensión finita, es decir; el k-espacio vectorial generado por $a_1, \ldots, a_m$ donde cada elemento de A es una k-combinación lineal de monomios formados con elementos $a_1, \ldots, a_m$. Así, si $V^0 = k$, y para $n \geq 1$, V^n denota el subespacio generado por los monomios en $a_1, \ldots, a_m$ de longitud n, entonces

$$A = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n, \text{ donde } A_n := k + V + V^2 + \cdots + V^n.$$

Observemos que si A es de dimensión finita como espacio vectorial, entonces $A = A_n$ para algún n, y la función $d_V(n) = \dim_k(A_n)$ se vuelve una función constante. En general esta función es una función monótona creciente y sus propiedades pueden ser usadas para distinguir entre varias k-algebras.

Observemos también que la función d_V misma es muy especifica, pues esta depende de la elección del subespacio generador V. La dependencia puede ser removida introduciendo una relación de equivalencia conveniente. Esto lo hacemos en la siguiente definición.

Definición 1.1. *Tomemos Φ como el conjunto de las funciones $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ las cuales son eventualmente monótonas crecientes y valuadas positivamente, esto es, para las cuales existe $n_0 = n_0(f) \in \mathbb{N}$, tal que*

$$f(n) \in \mathbb{R}^+ \text{ y } f(n+1) \geq f(n) \text{ para todo } n \geq n_0.$$

Para $f, g \in \Phi$ definimos $f \leq^* g$ si y sólo si, existen $c, m \in \mathbb{N}$ tales que

$$f(n) \leq cg(mn) \text{ para casi todo } n \in \mathbb{N},$$

y $f \sim g$ si y sólo si $f \leq^* g$ y $g \leq^* f$. Para $f \in \Phi$ la clase de equivalencia $\mathcal{G}(f) \in \Phi/\sim$ es llamada el ***crecimiento*** *de f. Denotamos al orden parcial sobre el conjunto $\Phi/\sim$ inducido por $\leq^*$ como $\leq$.*

Observación 1.2. *Si f y g son funciones polinomiales, entonces claramente f y g tienen el mismo crecimiento si y sólo si $\deg(f) = \deg(g)$. Para un número real $\gamma \geq 0$ denotamos al crecimiento de la función $p_\gamma : n \mapsto n^\gamma$ por $\mathcal{P}_\gamma$.*

Lema 1.3. *Sea A una k-algebra finitamente generada con subespacios generadores V y W. Si $d_V(n)$ y $d_W(n)$ denotan las dimensiones de $\sum_{i=0}^n V^i$ y $\sum_{i=0}^n W^i$, respectivamente, entonces $\mathcal{G}(d_V) = \mathcal{G}(d_W)$.*

Demostración. Como

$$A = \bigcup_{n=0}^{\infty}(V^0 + \cdots + V^n) = \bigcup_{n=0}^{\infty}(W^0 + \cdots + W^n),$$

existen enteros positivos s y t tales que

$$W \subseteq \sum_{i=0}^{s} V^i \text{ y } V \subseteq \sum_{j=0}^{s} W^j.$$

Así $d_W(n) \leq d_V(sn)$ y $d_V(n) \leq d_W(tn)$, de aquí $d_V \sim d_W$. □

Ejemplo 1.4. *Sea $A = k\langle x, y\rangle$ el álgebra libre en dos generadores. Entonces el subespacio $V = kx + ky$ es un espacio generador para A, y la función que describe el crecimiento del álgebra está dada por*

$$d_V(n) = \dim_k(\sum_{i=0}^{n} V^i) = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$$

La mayoria de las álgebras consideradas en este trabajo tienen un crecimiento polinomial, es decir la función de crecimiento $d_V(n)$ es un polinomio. Para determinar algunas de las propiedades de estos polinomios el siguiente lema nos será útil, en el usamos la siguiente:

NOTACIÓN.

$$\binom{x}{d} = \frac{x(x-1)(x-2)\cdots(x-d+1)}{d!}.$$

Lema 1.5. *Sea $\mathbb{Q}$ el campo de los números racionales*

a) Si $0 \neq f \in \mathbb{Q}[x]$ es un polinomio de grado d, entonces existen números racionales $a_0, \ldots, a_d$ tales que

$$f(n) = a_d\binom{n}{d} + a_{d-1}\binom{n}{d-1} + \cdots + a_1\binom{n}{1} + a_0$$

para todo número natural n.

b) Las siguientes propiedades de la función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ son equivalentes.

i) Existen $a_0, \ldots, a_d \in \mathbb{Q}$ y un entero $m \geq 0$ tal que para todo $n \geq m$

$$f(n) = a_d\binom{n}{d} + a_{d-1}\binom{n}{d-1} + \cdots + a_1\binom{n}{1} + a_0$$

.

ii) Existen $a_0, \ldots, a_d \in \mathbb{Q}$ y un entero $m \geq 0$ tal que para todo $n \geq m$

$$f(n+1) - f(n) = a_{d-1}\binom{n}{d-1} + \cdots + a_2\binom{n}{1} + a_1$$

c) Si $f(n)$ es expresado como en a) y si $f(n) \in \mathbb{Z}$ para todo n suficientemente grande, entonces $a_i \in \mathbb{Z}$ para $i \in \{0, 1, \ldots, d\}$.

d) Si $f(n)$ es expresado como en a) y si $f(n) \in \mathbb{Z}$ y $f(n+1) - f(n) \geq 0$ para todo n suficientemente grande, entonces a_d es un entero positivo.

Demostración. a) Es evidente para $d = 0$; de modo que asumamos que se cumple para $d - 1 \geq 0$. Como $\binom{x}{d}$ es un polinomio de grado d con coeficiente lider $1/d!$, y como $f(x) = b_d x^d + \dots$, se sigue que $f(x) - d!b_d\binom{x}{d}$ es un polinomio de grado $d-1$. Así

$$f(x) - d!b_d\binom{x}{d} = a_{d-1}\binom{n}{d-1} + \cdots + a_1\binom{n}{1} + a_0,\ a_i \in \mathbb{Q},$$

por la hipótesis de inducción, la afirmación se sigue definiendo $a_d = d!b_d$

b) La conocida identidad combinatoria $\binom{n+1}{j} - \binom{n}{j} = \binom{n}{j-1}$ para todo $0 < j < n$ muestra que i) implica ii).

Para el reciproco, asumamos que $f(n+1) - f(n)$ tiene la forma establecida para todo $n \geq m$ (observemos que $\binom{n}{d} = 0$ si $n < d$). Definamos

$$g(n) = a_d\binom{n}{d} + a_{d-1}\binom{n}{d-1} + \cdots + a_1\binom{n}{1} + a_0$$

donde a_0 es elegido de tal modo que $g(m) = f(m)$. Ahora

$$f(n+1) - f(n) = g(n+1) - g(n) \text{ para todo } n \geq m,$$

de modo que $f(n) = g(n)$ para todo $n \geq m$, como se pedia.

c) Sea $n_0 > d$ tal que $f(n) \in \mathbb{Z}$ para todo $n \geq n_0$. La afirmación es inmediata si $d = 0$; así que asumamos que es cierta para $d - 1 \geq 0$. Como

$$g(n) = f(n+1) - f(n) = a_d\binom{n}{d-1} + \cdots + a_1\binom{n}{0} \in \mathbb{Z} \text{ para todo } n \geq n_0,$$

los enteros $a_1, \dots, a_d$ son enteros por inducción. Como $f(n)$ y todos los coeficientes binomiales son enteros, a_0 también lo es.

d) La prueba es com en c). Si $d = 0$ entonces a_0 es positivo. Supongamos que para $d - 1 \geq 0$, como

$$g(n) = f(n+1) - f(n) = a_d\binom{n}{d-1} + \cdots + a_1\binom{n}{0} \in \mathbb{Z} \text{ para todo } n \geq n_0,$$

entonces $g(n) \in \mathbb{N}$ y $g(n+1) - g(n) = f(n+2) - f(n+1) - f(n+1) + f(n) > 0$ para todo n suficientemente grande, y como $deg(g) = d-1$ tenemos que a_d es positivo. $\square$

No podemos esperar que otros coeficientes además de a_d sean enteros positivos, para esto la función $f(x) = \binom{x}{1} - 1$ provee un contra ejemplo sencillo.

Ejemplo 1.6. *Consideremos el álgebra conmutativa de polinomios $A = k[x_1, \ldots, x_d]$. El espacio vectorial $V = kx_1 + \cdots + kx_d$ es un subespacio generador para A y podemos verificar que*

$$\dim(V^n) = \binom{n+d-1}{d-1}$$

el cual es un polinomio en n de grado $d-1$. Como $\dim(V^{n+1}) = d_V(n+1) - d_V(n)$, tenemos de la parte b) del lema anterior que d_V es un polinomio en n de grado d; de modo que $\mathcal{G}(A) = \mathcal{P}_d$. De hecho las partes c) y d) del lema muestran que los coeficientes de d_V son enteros y que que el coeficiente líder es positivo.

1.1. Dimensión de Gelfand-Kirillov de Álgebras

Para nuestros propósitos habremos de estudiar un concepto llamado superdimensión, este útil concepto es el del límite superior

$$\limsup \log f(n)/\log n,$$

en lo que sigue vamos a usar la notación $\log_n f(n)$ en lugar de $\log f(n)/\log n$.

Lema 1.7. *Sean $f, g \in \Phi$. Entonces*

(a)

$$\begin{aligned} \limsup \log_n f(n) &= \inf\{\rho \in \mathbb{R} | f(n) \le n^\rho \text{ para casi todo } n\} \\ &= \inf\{\rho \in \mathbb{R} | \mathcal{G}(f) \le \mathcal{P}_\rho\}. \end{aligned}$$

(b) Si $\mathcal{G}(f) = \mathcal{G}(g)$, entonces $\limsup \log_n f(n) = \limsup \log_n g(n)$.

Demostración. (a) Denotemos por r, s y t los tres números desplegados y listados en el mismo orden. Si alguno de ellos es infinito, entonces también lo son los otros, pues $f(n) \le n^\rho$ si y sólo si $\log f(n) \le \rho \log(n)$ lo cual sucede si y sólo si $\log f(n)/\log(n) \le \rho$. Si $f(n) \le n^\rho$ para casi todo n, entonces $\mathcal{G}(f) \le \mathcal{P}_\rho$, de aquí

$$\{\rho \in \mathbb{R} | f(n) \le n^\rho \text{ para casi todo } n\} \subseteq \{\rho \in \mathbb{R} | \mathcal{G}(f) \le \mathcal{P}_\rho\},$$

por lo tanto $t \le s$.
Ahora dado $\epsilon > 0$ tenemos que $\log_n f(n) \le r + \epsilon$ para casi todo n, o equivalentemente $f(n) \le n^{r+\epsilon}$, de donde $s \le \{r + \epsilon | \epsilon > 0\} = r$, y así $s \le r$. Falta probar que $r \le t$, así que asumamos que $r > t$ y definamos $\epsilon = \frac{r-t}{3}$. Entonces $\mathcal{G}(f) \le \mathcal{P}_{t+\epsilon}$ y de aquí

$f(n) \leq (mn)^{t+\epsilon}$ para algún número natural m y para casi todo n. Si n es elegido suficientemente grande de modo tal que satisfaga $m^{t+\epsilon} \leq n^{\epsilon}$, entonces $f(n) \leq n^{t+\epsilon}$ para casi todo n, contradiciendo el hecho de que una cantidad infinita de numeros $\log_n f(n)$ son mayores que

$$\operatorname{lím\,sup} \log_n f(n) - \epsilon = r - \epsilon = r + \frac{t-r}{3} = t + \frac{2}{3}r - \frac{2}{3}t = t + 2\epsilon.$$

(b) Es inmediato de (a). $\square$

Definición 1.8. *La **dimensión de Gelfand-Kirillov** de una k álgebra A es*

$$\mathrm{GKdim}(A) = \sup_V \operatorname{lím\,sup} \log_n d_V(n),$$

donde el supremo es tomado sobre todos los subespacios V de dimensión finita de A.

Observación 1.9. *Fue mostrado en el Lema 1.3 que para una k-álgebra finitamente generada B con subespacio generador V de dimensión finita, el crecimiento de B es independiente de la elección particular de V. Así*

$$\mathrm{GKdim}(B) = \operatorname{lím\,sup} \log_n d_V(n)$$

en este caso. Como todo subespacio de dimensión finita de una k-álgebra A general (no necesariamente finitamente generada) puede ser visto como el subespacio generador de una subalgebra B de A finitamente generada, la definición de la dimensión de Gelfand-Kirillov de A puede ser reescrita como

$$\mathrm{GKdim}(A) = \sup_B \{\mathrm{GKdim}(B) | B \subseteq A, \text{ con } B \text{ finitamente generado}\}.$$

Lema 1.10. *Si B es una subalgebra o es imagen homomorfa de una k-álgebra A, entonces* $\mathrm{GKdim}(B) \leq \mathrm{GKdim}(A)$.

Demostración. Para subalgebras la afirmación es consecuencia inmediata de la definición de la dimensión de Gelfand-Kirillov. Para un espacio cociente $\bar{A}$ de A notemos que cualquier conjunto de representantes para los elementos base de un subespacio $\bar{V}$ de $\bar{A}$ de dimensión finita, forma una base para un subespacio V de A de dimensión finita, que satisface $\dim(\bar{V}^n) \leq \dim(V^n)$ para todo número natural n. $\square$

Proposición 1.11. *Si A_1 y A_2 son k-álgebras, entonces*

$$\mathrm{GKdim}(A_1 \oplus A_2) = \operatorname{máx}\{\mathrm{GKdim}(A_1), \mathrm{GKdim}(A_2)\}.$$

Demostración. Del Lema 1.10 es claro que

$$\gamma := \{\text{GKdim}(A_1), \text{GKdim}(A_2)\} \leq \text{GKdim}(A_1 \oplus A_2),$$

y esta desigualdad se cumple incluso si $\gamma = \infty$. Supongamos entonces que γ es finito, sea W un subespacio de dimensión finita de $A_1 \oplus A_2$, y sean U y V la proyección canónica de W_1 a A_1 y A_2, respectivamente. Entonces

$$W \subseteq U \oplus V, \text{ y } W^n \subseteq (U \oplus V)^n = U^n \oplus V^n.$$

Dado cualquier número natural $\epsilon > 0$, se sigue del Lema 1.5 que

$$d_U(n) \leq n^{\gamma + \frac{\epsilon}{2}} \text{ y } d_V(n) \leq n^{\gamma + \frac{\epsilon}{2}}$$

para casi todo n. Como $n^{\frac{\epsilon}{2}} > 2$ para n suficientemente grande,

$$d_W(n) \leq d_U(n) + d_V(n) \leq 2n^{\gamma + \frac{\epsilon}{2}} < n^{\frac{\epsilon}{2}} n^{\gamma + \frac{\epsilon}{2}} = n^{\gamma + \epsilon}$$

para casi todo n. Así $\text{lím sup} \log_n d_W(n) \leq \gamma$ por el Lema 1.10, y de aquí

$$\text{GKdim}(A_1 \oplus A_2) = \sup_W \text{lím sup} \log_n d_W(n) \leq \gamma.$$

lo cual termina la prueba. □

Con el fin de hacer menos árido el contenido de este trabajo damos un par de ejemplos de álgebras no conmutativas con dimensión de Gelfand-Kirillov no cero.

Ejemplo 1.12. *El álgebra de Weyl $A_n = A_n(k)$ es el anillo de polinomios en $2n$ variables $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ con coeficientes en k sujeto a las relaciones*

$$x_i x_j = x_j x_i, \ y_i y_j = y_j y_i, \text{ y } x_i y_j - y_j x_i = \delta_{ij},$$

donde δ_{ij} es la delta de Kronecker. Por conveniencia definimos $A_0 = k$. Esta álgebra posee una base de Poincaré-Birkhoff, es decir una base ordenada en la cual los elementos de A_n se escriben de modo uńico, a saber $B = \{x^\alpha y^\beta : \alpha, \beta \in \mathbb{N}\}$ y donde $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$ para $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.
Se puede demostrar además que $\text{GKdim}(A_n) = 2n$, lo cual es muy útil en relación con los modulos sobre A_n como podremos ver en la parte final de este trabajo.

Ejemplo 1.13. *Consideremos un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de dimensión finita y de base $X_1, \ldots, X_m$. Se define al álgebra envolvente $U(\mathfrak{g})$ del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ como el álgebra libre en generadores $X_1, \ldots, X_m$ módulo las relaciones*

$$X_iX_j - X_jX_i - [X_i, X_j],$$

puede mostrarse en este caso que $\mathrm{GKdim}(U(\mathfrak{g})) = \dim_k \mathfrak{g}$. *Como en el ejemplo anterior es un resultado conocido que $U(\mathfrak{g})$ posee una base de Poincaré-Birkhoff (vea [8], capítulo 2).*

Si A es una k-álgebra finitamente generada con subespacio generador V que contiene al 1, y M es un A-módulo derecho finitamente generado con espacio vectorial F de dimensión finita que genera a M como un A-módulo, entonces

$$M = \bigcup_{n=0}^{\infty} FV^n.$$

Al igual que como en el Lema 1.1 se puede verificar que el crecimiento $\mathcal{G}(d_{V,F})$ de la función $d_{V,F}(n) = \dim_k(FV^n)$ no depende de la elección particular de los espacios V y F; por lo tanto se define a $\mathcal{G}(M) := \mathcal{G}(d_{V,F})$ como el **crecimiento del módulo** M, definimos también

$$\mathrm{GKdim}(M) = \limsup \log_n d_{V,F}(n).$$

Adicionalmente podemos definir la dimensión de Gelfand-Kirillov cuando M no es un módulo finitamente generado sobre el álgebra A como sigue.

Definición 1.14. *Sea A una k-álgebra, y sea M un A-módulo derecho. La* ***dimensión de Gelfand-Kirillov*** *de M esta dada por*

$$\mathrm{GKdim}(M) = \sup_{V,F} \limsup \log_n \dim_k(FV^n),$$

donde el supremo es tomado sobre todos los espacios V de A de dimensión finita que contienen al 1 y todos los subespacios F de M. Alternativamente,

$$\mathrm{GKdim}(M_A) = \sup_{B,N} \mathrm{GKdim}(N_B),$$

donde el supremo es tomado sobre todas las subalgebras B de A finitamente generadas y todos los B-submódulos N de M finitamente generados .

Es claro de la definición que GKdim(A), la dimensión de Gelfand-Kirillov de A como una k-álgebra, y $\mathrm{GKdim}(A_A)$, la dimensión de Gelfand-Kirillov de A como un A-módulo derecho, coinciden.

Definición 1.15. *Sea A una k-álgebra. La dimensión de Gelfand-Kirillov es* ***exacta*** *para A-módulos derechos si*

$$\mathrm{GKdim}(M) = \max\{\mathrm{GKdim}(L), \mathrm{GKdim}(N)\}$$

para cualquier sucesión exacta corta $0 \to L \to M \to N \to 0$ de A-módulos derechos.

1.2. Álgebras y Módulos Graduados y Filtrados

Frecuentemente las álgebras son dotadas con una filtración natural y puede ser obtenida alguna información pasando al álgebra graduada asociada y entonces trasladar los resultados de regreso al álgebra original. Esto es particularmente útil si el álgebra es filtrada por subespacios tales que el álgebra graduada asociada es conmutativa.
A pesar de que graduaciones sobre grupos generales han sido estudiadas (ver Van Ostaeyen [2]), nos concentraremos en graduaciones exclusivamente con los grupos $\mathbb{Z}$ o $\mathbb{N}$. Adicionalmente nos restringiremos a las graduaciones por subespacios de dimensión finita.

Definición 1.16. *Una* ***graduación*** *$\mathcal{A} = \{A_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ de la k-álgebra A es una sucesión de k-subespacios A_i de A tal que*

$$A = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} A_i \ \ y\ A_i \cdot A_j \subseteq A_{i+j} \text{ para todo } i, j \in \mathbb{Z}.$$

Un álgebra con graduación $\mathcal{A}$ es llamada **$\mathcal{A}$-graduada** o simplemente **graduada**; esta es **finitamente graduada** si cada una de las componentes A_i son de dimensión finita. Los elementos de A_n son llamados elementos homogéneos de grado n. La componente A_0 es una subalgebra de A que contiene al 1_A y por tanto al campo base k.

Ejemplo 1.17. *Consideremos el álgebra libre en generadores $x_1, \ldots, x_n$ entonces la familia*

$$A_i = \{\sum_j c_j X_j^i : X_j^i \text{ es una palabra de longitud } i \text{ en } x_1, \ldots, x_n\}$$

es una graduación de $k\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$.

Ejemplo 1.18. *Sea $\mathcal{Q}$ una gráfica finita orientada, con conjunto de puntos $\mathcal{Q}_0$ y conjunto de flechas $\mathcal{Q}_1$, construimos el anillo denotado por $k\mathcal{Q}$ como sigue:*

$$k\mathcal{Q} = \{\sum_{i=1}^{n} c_i\gamma_i : c_1, \dots, c_n \in k \text{ y } \gamma_1, \dots, \gamma_n \text{ son caminos orientados de } \mathcal{Q}\}$$

podemos ver inmediatamente que $k\mathcal{Q}$ es un k-espacio vectorial, démosle ahora un producto $k\mathcal{Q} \times k\mathcal{Q} \to k\mathcal{Q}$ mediante definir

$$(\gamma, \gamma') \mapsto \begin{cases} \gamma\gamma' & \text{si el fin de } \gamma' \\ & \text{es el inicio de } \gamma \\ & \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

y extendiendo

$$(\sum_i c_i\gamma_i, \sum_j c_j\gamma_j) \mapsto \sum_{i,j} c_i c_j \gamma_i \gamma_j,$$

veamos que esta álgebra tiene identidad definida por

$$\sum_{i \in \mathcal{Q}_0} \tau_i,$$

donde τ_i es el camino trivial. Ahora podemos ver claramente que $k\mathcal{Q}$ es una álgebra graduada por longitud de caminos.

Definición 1.19. *Sea A una k-álgebra graduada con graduación $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$, un módulo derecho M es* ***$\mathcal{A}$-graduado*** *o simplemente* ***graduado*** *si existen subespacios M_i tales que*

$$M = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} M_i \text{ y } M_i A_j \subseteq M_{i+j} \text{ para todo } i, j \in \mathbb{Z}.$$

Si cada M_i es de dimensión finita, entonces M se dice ser ***finitamente graduado****. Los elementos de M_n son llamados* ***homogéneos de grado*** *n.*

Sean A una k álgebra finitamente graduada y $M = \bigoplus_{\mathbb{Z}} M_i$ un A-módulo derecho finitamente graduado. Definimos

$$\begin{aligned} A(n) = \bigoplus_{i=-n}^{n} A_i, \quad d_A(n) &= \dim_k A(n), \text{ y} \\ M(n) = \bigoplus_{i=-n}^{n} M_i, \quad d_M(n) &= \dim_k M(n) \end{aligned}$$

Lema 1.20. *Sea A una k-álgebra finitamente graduada, y sea M un A-módulo derecho finitamente graduado. Entonces*

(a) Si V es un subespacio de dimensión finita que contiene al 1 y E es un subespacio de M de dimensión finita, entonces $\mathcal{G}(d_{V,E}) \leq \mathcal{G}(d_M)$, y de aquí $\operatorname{GKdim}(M) \leq \limsup \log_n d_M(n)$.

(b) Si A es finitamente generada como álgebra y M_A es finitamente generado, entonces $\mathcal{G}(M) = \mathcal{G}(d_M)$ y de aquí $\operatorname{GKdim}(M) = \limsup \log_n d_M(n)$

Demostración. (a) Como V y E son de dimensión finita, existe un número natural p tal que $V \subseteq A(p)$ y $E \subseteq M(p)$. De aquí

$$EV^n \subseteq EA(pn) \subseteq M(pn + p) \subseteq M(2pn)$$

para cualquier entero $n \geq 1$. Por lo tanto, $d_{V,E}(n) \leq d_M(2pn)$, y se sigue la afirmación.
(b) Para un entero positivo p suficientemente grande, el espacio vectorial $V = A(p)$ genera a A y contiene al 1, y $E = M(p)$ genera a M como un A-módulo. Por el inciso (a) solo hace falta mostrar que $M(n) \subseteq EV^n$ para todo número natural $n > 0$, y para esto es suficiente mostrar que $M_{-n} + M_n \subseteq EV^n$. Empezaremos por mostrar que $M_n \subseteq EV^n$. Como los subespacios EV^m, $m \in \{0, 1, \dots\}$, proveen una filtración exhaustiva de M, $M_n \subseteq EV^r$ para algún entero positivo r. Cada elemento $0 \neq x \in M_n$ es por lo tanto una suma de monomios no cero $v_0 v_1 \cdots v_s$ con elementos homogéneos

$$v_0 \in E,\ v_i \in V,\ i \in \{1, \dots, s\} \text{ donde } s \leq r.$$

Asumimos que cada monomio tal ha sido acortado tanto como es posible; esto es, asumimos que

$$v_0 v_1 \notin E = M(p) \text{ y } v_i v_{i+1} \notin V = A(p) \text{ para } i \geq 1,$$

o equivalentemente que $|\deg(v_i v_{i+1})| > p$ para $i > 0$. Como $x \in M_n$

$$\deg(v_0 v_1 \cdots v_s) = \deg(v_0) + \deg(v_1) + \cdots + \deg(v_s) = n > 0,$$

al menos uno de los elementos v_i debe tener grado positivo. Asumamos que $\deg(v_i) > 0$, y que aun $\deg(v_{i+1}) \leq 0$ para algún i. Entonces

$$|\deg(v_i v_{i+1})| \leq \max\{|\deg(v_i)|, |\deg(v_{i+1})|\} \leq p, \text{ por definición de } V \text{ y } E,$$

lo cual es una contradicción (si $i = s$ podemos considerar $v_{s-1} v_s$ en este caso). Así todos los v_i tienen grado positivo, de modo que se sigue que $n \geq s + 1$, y por lo tanto $v_0 v_1 \cdots v_s \in EV^n$, y de aquí $M_n \subseteq EV^n$. Un argumento simétrico nos proporciona $M_{-n} \subseteq EV^n$. □

Definición 1.21. *Una $\mathbb{Z}$-**filtración** de la k-álgebra A es una sucesión de k-subespacios*

$$\cdots \subseteq A_{i-1} \subseteq A_i \subseteq A_{i+1} \subseteq \cdots, \; i \in \mathbb{Z},$$

tal que

$$1 \in A_0, \; A_i \cdot A_j \subseteq A_{i+j} \text{ para todo } i, j \in \mathbb{Z}, \quad y \; A = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} A_i.$$

*La filtración es llamada **finita** si cada A_i es de dimensión finita, y es llamada **discreta** si $A_i = 0$ para todo $i < n_0$, para algún entero $n_0 \leq 0$. El espacio vectorial*

$$\mathrm{gr}(A) = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} A_i / A_{i-1},$$

equipado con una multiplicación derivada de la regla

$$[x + A_{i-1}] \cdot [y + A_{j-1}] = [xy + A_{i+j-1}]$$

*es llamada el **álgebra graduada asociada**.*

Observemos que si el álgebra graduada asociada de una k-álgebra filtrada discreta A es finitamente generada, entonces A misma es finitamente generada.

Ejemplo 1.22. *Vamos a considerar un par de filtraciones para el álgebra de Weyl A_n (Ejemplo 1.12), la primera es conocida como la **filtración de orden**. Consideremos los conjuntos $C_r = \{\sum_\alpha f_\alpha y^\alpha\}$ con $|\alpha| \leq r$ y $f_\alpha \in k[x_1, \ldots x_n]$. Podemos ver claramente que*

$$C_r \subseteq C_{r+1} \text{ para todo } r \in \mathbb{N}$$

que $A_n = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} C_r$ y $C_i C_j \subseteq C_{r+j}$ se sigue de la relación $x_i y_j - y_j x_i = \delta_{ij}$.
*La segunda es conocida como la **filtración de Bernstein**. Consideremos $B_r = \{\sum c_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta\}$ con $|\alpha| + |\beta| \leq r$, nuevamente es claro que*

$$B_r \subseteq B_{r+1} \text{ para todo } r \in \mathbb{N}$$

mientras que nuevamente de la relación $x_i y_j - y_j x_i = \delta_{ij}$ (para mayor detalle vea el capítulo 7 sec. 2 de [13] o el capítulo 3 de este trabajo) se sigue que $A_n = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_r$ y que $B_i B_j \subseteq B_{i+j}$.

Es posible construir una filtración para el Ejemplo 1.13 de modo similar a como se construyo la filtración de Bernstein del ejemplo anterior a partir de la base de Poincaré-Birkhoff para esta, que como se puede ver fue fundamental. Queda señalar que aunque la filtración de orden y la de Bernstein del ejemplo anterior son parecidas, son en realidad distintas, puesto que la filtración de orden tiene en grado cero al anillo de polinomios $k[x_1, \ldots, x_n]$ mientras que la de Bernstein solo tiene al campo en grado cero.

Veamos adicionalmente que toda álgebra graduada es filtrada. Supongamos que $A = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} A_i$ es un álgebra graduada. Consideremos los espacios vectoriales $F_k = \bigoplus_{i\leq k} A_i$. Claramente $F_k \subseteq F_{k+1}$ y la unión es A, como

$$F_k F_m = \bigoplus_{i+j\leq k+m} A_i A_j,$$

y $A_i A_j \subseteq A_{i+j}$, tenemos $F_k F_m \subseteq F_{k+m}$. De este modo F_k es una filtración de A.

Definición 1.23. *Sea A una k-álgebra filtrada por subespacios A_i, $i \in \mathbb{Z}$, y sea M un A-módulo derecho. Una **filtración** de M es una sucesión de subespacios*

$$\cdots \subseteq M_{i-1} \subseteq M_i \subseteq M_{i+1} \subseteq \cdots, \ i \in \mathbb{Z},$$

tal que

$$M_i A_j \subseteq M_{i+j} \text{ para todo } i, j \in \mathbb{Z} \text{ y } M = \bigcup_{i\in\mathbb{Z}} M_i.$$

*La filtración es **finita** si cada uno de los espacios vectoriales M_i son de dimensión finita y es **discreto** si $M_i = 0$ para todo $i \leq n_0$, y para algún entero n_0. El k-espacio vectorial*

$$\mathrm{gr}(M) = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} M_i/M_{i-1},$$

con una estructura de $\mathrm{gr}(A)$-módulo derivada de la regla

$$[m + M_{i-1}] \cdot [a + A_{j-1}] = [ma + M_{i+j-1}],$$

*es llamado el **módulo graduado asociado** $\mathrm{gr}(M)_{\mathrm{gr}(A)}$.*

Nuevamente observemos que si el módulo graduado asociado de un módulo discretamente filtrado es finitamente generado, entonces el módulo original es también finitamente generado.

Lema 1.24. *Sea A una k-álgebra finitamente generada con una filtración $\{A_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$, y sea M un A-módulo derecho filtrado con filtración $\{M_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$. Entonces*

$$\mathrm{GKdim}(\mathrm{gr}(M)_{\mathrm{gr}(A)}) \leq \mathrm{GKdim}(M_A).$$

Demostración. Sea W un subespacio de dimensión finita de $\mathrm{gr}(A)$ que contiene al 1, y sea F un subespacio de dimensión finita de $\mathrm{gr}(M)$. Entonces existe un espacio de dimensión finita V de A que contiene al 1 y un subespacio de dimensión finita E de M tales que $W \subseteq \mathrm{gr}(V)$ y $F \subseteq \mathrm{gr}(E)$. Entonces

$$FW^n \subseteq \mathrm{gr}(E)\mathrm{gr}(V)^n \subseteq \mathrm{gr}(E)\mathrm{gr}(V^n) \subseteq \mathrm{gr}(EV^n).$$

Como

$$\begin{aligned} \mathrm{gr}(EV^n) &= \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}}((EV^n \cap M_i) + M_{i-1})/M_{i-1} \\ &\cong \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}}(EV^n \cap M_i)/(EV^n \cap M_{i-1}) \cong EV^n, \end{aligned}$$

y como $\dim_k(EV^n) < \infty$, se sigue que $\dim_k(FW^n) \leq \dim_k(EV^n)$ para todos los enteros no negativos n, luego el resultado se sigue de la definición de la dimensión de Gelfand-Kirillov. □

Proposición 1.25. *Sea A una k-álgebra con filtración finita $\{A_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ tal que $\mathrm{gr}(A)$ es finitamente generado, y sea M un A-módulo con una filtración finita discreta $\mathcal{M} = \{M_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ tal que $\mathrm{gr}(M)_{\mathrm{gr}(A)}$ es finitamente generado. Si $d_{\mathcal{M}}(n) := \dim_k M_n$ para $n \in \mathbb{N}$, entonces*

$$\mathcal{G}(gr(M)) = \mathcal{G}(M) = \mathcal{G}(d_{\mathcal{M}}) = \mathcal{G}(d_{\mathrm{gr}(M)}),$$

y de aquí en particular

$$\mathrm{GKdim}(\mathrm{gr}(M)_{\mathrm{gr}(A)}) = \mathrm{GKdim}(M_A) = \limsup \log_n d_{\mathcal{M}}(n).$$

Demostración. Por hipótesis existe un numero natural q tal que $M_i = 0$ para todo $i < -q$. Así

$$\mathrm{gr}(M)(n) = \bigoplus_{i=-n}^{n} M_i/M_{i-1} \cong M_n,$$

como k-módulos, para todo número natural $n \geq q$, impicando que $d_{\mathcal{M}} \sim d_{\mathrm{gr}(M)}$, y consecuentemente que $\mathcal{G}(\mathrm{gr}(M)) = \mathcal{G}(d_{\mathrm{gr}(M)})$. Por el Lema 1.20 (b) tenemos que $\mathcal{G}(\mathrm{gr}(M)) = \mathcal{G}(d_{\mathrm{gr}(M)})$. Se sigue de la hipótesis que A es un álgebra finitamente generada y que M es un A-módulo derecho finitamente generado. Sea V un subespacio generador de dimensión finita para A que contiene al 1, y sea E un subespacio de dimensión finita que genera a M como A-módulo derecho. Existe un número natural p tal que $V \subseteq A_p$ y $E \subseteq M_p$. Así

$$EV^n \subseteq M_p A_p^n \subseteq M_p A_{np} \subseteq M_{2pn} \text{ para todo } n \geq 1,$$

de modo que

$$d_{V,E}(n) \leq d_{\mathcal{M}}(2pn); \text{ de aquí } \mathcal{G}(M) \leq \mathcal{G}(d_{\mathcal{M}}).$$

y de la prueba del Lema 1.24, se sigue que $\mathcal{G}(\mathrm{gr}(M)) \leq \mathcal{G}(M)$, pues

$$\mathcal{G}(\mathrm{gr}(M)) \leq \mathcal{G}(M) \leq \mathcal{G}(d_{\mathcal{M}}) = \mathcal{G}(d_{\mathrm{gr}(M)}) = \mathcal{G}(\mathrm{gr}(M)).$$

Poniendo todo esto junto se sigue la afirmación. □

Lema 1.26. *Sea A una k-álgebra con una filtración $\{A_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$, y sea M un A-módulo derecho fintamente generado, $M = EA$, donde E es un subespacio de dimensión finita de M. Entonces $\mathrm{gr}(M)_{\mathrm{gr}(A)}$, el módulo graduado asociado con la filtración $\{EA_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$, es finitamente generado.*

Demostración. Sea $x + EA_{i-1} \in EA_i/EA_{i-1}$ un elemento homogéneo de $\mathrm{gr}(M)$. Si los elementos $e_1, \dots, e_n$ constituyen una base para el espacio vectorial $E \subset EA_0$, entonces $x = \sum_{j=1}^{n} e_j a_{i,j}$ con $a_{i_j} \in A_i$. De aquí

$$x + EA_{i-1} = \sum_{j=1}^{n} (e_j + EA_{-1})(a_{i_j} + A_{i-1}),$$

mostrando que los elementos $e_j + EA_{-1}$, $1 \leq j \leq r$, generan a $\mathrm{gr}(M)$ como un $\mathrm{gr}(A)$-módulo. □

Definición 1.27. *Sea A una k-álgebra con filtración $\{A_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$, y sea M un A-módulo derecho finitamente generado, $M = EA$, para un subespacio de dimensión finita E de M. La filtración $\{EA_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ es una **filtración estándar** de M.*

Como en la Proposición 1.25, el comportamiento del crecimiento de dos filtraciones finitas discretas con módulos graduados asociados finitamente generados es esencialmente el mismo para cualquier A-módulo, mientras que A sea finitamente filtrado y $\mathrm{gr}(A)$ sea finitamente generado. De hecho, dos filtraciones del A-módulo derecho M están siempre cercanamente relacionadas, y ellas son **equivalentes** en el siguiente sentido.

Definición 1.28. *Sea $\mathcal{M} = \{N_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ y $\mathcal{N} = \{N_i\}_{i\in Z}$ dos filtraciones del A-módulo derecho M, donde A es una k-álgebra filtrada. Entonces $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ son* ***equivalentes*** *si existe un número natural n tal que*

$$N_i \subseteq M_{i+n} \text{ y } M_i \subseteq N_{i+n} \text{ para todo } i \in \mathbb{Z}.$$

El siguiente bien conocido resultado es explícito.

Proposición 1.29. *Sea $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ una filtración finita y discreta de la k-álgebra A, y sean $\mathcal{M} = \{M_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ y $\mathcal{N} = \{N_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ dos filtraciones finitas y discretas del A-móduo derecho M. Si $\mathrm{gr}_{\mathcal{M}}(M)_{\mathrm{gr}(A)}$ es finitamente generado, entonces existe un número natural n tal que $M_i \subseteq N_{i+n}$ para todo $i \in \mathbb{Z}$.*

Demostración. Como todas las filtraciones asumidas son discretas, existe un natural q tal que

$$A_s = 0 \text{ y } N_s = M_s = 0 \text{ para todos los enteros } s < -q.$$

Como $\mathrm{gr}_{\mathcal{M}}(M)_{\mathrm{gr}(A)}$ es finitamente generado, existe un entero $r \geq q$ tal que

$$\mathrm{gr}_{\mathcal{M}}(M)(r) = \bigoplus_{j=-q}^{r} M_j/M_{j-1}$$

es un subespacio generador de dimensión finita. Como M_r es de dimensión finita, existe un número natural n tal que $M_r \subseteq N_{n-q}$. Así, si $-q \leq i \leq r$, entonces $n - q \leq n + i$ y consecuentemente

$$M_i \subseteq M_r \subseteq N_{n-q} \subseteq N_{n+i}.$$

Ahora para el mismo r fijo, sea $i > r$ y asumamos que $M_j \subseteq N_{j+n}$ se cumple para $j < i$. Como $\mathrm{gr}_{\mathcal{M}}(M)(r)$ genera a $\mathrm{gr}_{\mathcal{M}}(M)$ como un $\mathrm{gr}(A)$-móduo derecho, tenemos que

$$M_i/M_{i-1} = \sum_{j=-q}^{r} (M_j/M_{j-1})(A_{i-j}/A_{i-j-1}),$$

y de aquí que

$$M_i = \sum_{j=-q}^{r} M_j A_{i-j} + M_{i-1} \subseteq \sum_{j=-q}^{r} N_{j+n} A_{i-j} + N_{i-1+n} \subseteq N_{i+n}.$$

E inductivamente tenemos el resultado. □

Corolario 1.30. *Sea A una k-álgebra filtrada finita discreta, y sea M un A-módulo derecho. Entonces dos filtraciones finitas discretas de M son equivalentes siempre que sus módulos graduados asociados sean* $\mathrm{gr}(A)$*-módulos derechos finitamente generados.*

En particular se sigue del precedente corolario y del Lema 1.26 que cualquier filtración del tipo de arriba, de un A-módulo finitamente generado es equivalente a la filtración estándar. En conexión con esto presentamos un útil resultado que necesitaremos después.

Lema 1.31. *Sea $A = \oplus_{i=0}^{\infty} A_i$ una k-álgebra, generada como un álgebra por A_1, y sea $M = \oplus_{i=0}^{\infty} M_i$ un A-módulo derecho graduado con un sistema de generadores homogéneos $\{m_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ que satisface que $\deg(m_\lambda) \leq n_0$ para algún número natural n_0. Entonces*

$$M_{n+j} = M_n A_j \text{ para todo } n \geq n_0 \text{ y todo } 0 \leq j \in \mathbb{Z}.$$

Demostración. Sean $n \geq n_0$, y $m \in M_{n+1}$. Entonces $m = \sum_{\lambda \in \Lambda_0} m_\lambda a_\lambda$ para un subconjunto finito Λ_0 de Λ, y los elementos $a_\lambda \in A$ pueden ser asumidos como homogéneos de grado $n + 1 - \deg(m_\lambda)$. Como el álgebra A es generada por A_1 y como $\deg(a_\lambda) > 0$ (pues $\deg(m_\lambda) \leq n_0 \leq n$) para cada $\lambda \in \Lambda_0$, cada a_λ es suma de términos de la forma $b'b$ con $b \in A_1$ y otro elemento $b' \in A$ que es homogéneo de grado $n - \deg(m_\lambda)$. Así $m \in M_n A_1$, de donde $M_{n+1} = M_n A_1$, y de esto se sigue la afirmación por inducción. □

Teorema 1.32 (Tauvel)**.** *Sea $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ una filtración finita discreta de la k-álgebra A, tal que la álgebra graduada asociada $\mathrm{gr}_{\mathcal{A}}(A)$ es finitamente generada y noetheriana derecha. Entonces*

$$\mathrm{GKdim}(M) = \mathrm{máx}\{\mathrm{GKdim}(N), \mathrm{GKdim}(P)\}$$

para toda sucesión exacta $0 \to N \to M \to P \to 0$ de A-módulos derechos finitamente generados.

Demostración. Como M_A es finitamente generado, $M = EA$ para algún subespacio de dimensión finita E. Sea $\mathcal{M} = \{EA_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ la resultante filtración estándar. Por el Lema 1.26 el módulo graduado asociado $\mathrm{gr}(A)$ es finitamente generado y de aquí noetheriano pues $\mathrm{gr}(A)$ es noetheriano por hipótesis. Las filtraciones inducidas

$$\mathcal{N} = \{M_i \cap N\}_{i \in \mathbb{Z}} \text{ y } \mathcal{P} = \{(M_i + N)/N\}_{i \in \mathbb{Z}}$$

nos da la sucesión exacta

$$0 \to \mathrm{gr}_{\mathcal{N}}(N) \to \mathrm{gr}_{\mathcal{M}}(M) \to \mathrm{gr}_{\mathcal{P}}(P) \to 0$$

de $\mathrm{gr}(A)$-módulos. Como $\mathrm{gr}_{\mathcal{M}}(M)$ es noetheriano, ambos $\mathrm{gr}_{\mathcal{N}}(N)$ y $\mathrm{gr}_{\mathcal{P}}(P)$ son finitamente generados. Notemos que todas las filtraciones son finitas y que

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{M}}(n) = \dim_k(M_n) &= \dim_k(M_n \cap N) + \dim_k((M_n + N)/N) \\ &= d_{\mathcal{N}}(n) + d_{\mathcal{P}}(n) \end{aligned}$$

para cualquier número natural n. Se sigue del Lema 1.7(y de la prueba de la Proposición 1.11) que

$$\limsup \log_n d_{\mathcal{M}}(n) = \max\{\limsup \log_n d_{\mathcal{N}}(n), \limsup \log_n d_{\mathcal{P}}(n)\}.$$

Ahora la Proposición 1.25 nos da

$$\begin{aligned} \mathrm{GKdim}(M_A) &= \mathrm{GKdim}(\mathrm{gr}_{\mathcal{M}}(M)_{\mathrm{gr}(A)}) = \limsup \log_n d_{\mathcal{M}}(n) \\ &= \max\{\limsup \log_n d_{\mathcal{N}}(n), \limsup \log_n d_{\mathcal{P}}(n)\} \\ &= \max\{\mathrm{GKdim}(\mathrm{gr}_{\mathcal{N}}(N)_{\mathrm{gr}(A)}), \mathrm{GKdim}(\mathrm{gr}_{\mathcal{P}}(P)_{\mathrm{gr}(A)})\} \\ &= \max\{\mathrm{GKdim}(N_A), \mathrm{GKdim}(P_A)\}. \end{aligned}$$

□

Capítulo 2

Álgebras Casi Conmutativas

Habiendo desarrollado en el capítulo anterior algunas propiedades generales de la dimensión de Gelfand-Kirillov ahora nos dirigimos al estudio de una clase especial de álgebras llamadas casi conmutativas. Estas son aquellas que tienen una filtración tal que el álgebra graduada asociada resulta conmutativa. Definimos el número de Bernstein $e(M)$ de un módulo M a partir del polinomio de Hilbert-Samuel y hacemos ver que una vez fijada la filtración para A este no depende de la filtración elegida para M. Es importante adelantar que cuando A es casi conmutativa y M es finitamente generada sobre A, el número $e(M)$ acota la longitud de las cadenas de submodulos propios de M.

Definición 2.1. *Una k-álgebra A es **casi conmutativa** si existe una filtración*

$$A_0 \subseteq A_1 \subseteq \cdots \subseteq A_i \subseteq \cdots \subseteq \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i = A$$

tal que

(i) $A_0 = k$.

(ii) A_1 *es de dimensión finita y* $A_i = A_1^i$ *para todo* $i \geq 1$.

(iii) El álgebra graduada asociada

$$\mathrm{gr}(A) = \bigoplus_{i=0}^{\infty} A_i/A_{i-1}$$

es conmutativa.

Proposición 2.2. *Sea A una k-álgebra la cual es casi conmutativa con respecto a la filtración $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i=0}^{\infty}$. Entonces $\mathrm{gr}_{\mathcal{A}}(A)$ es un álgebra conmutativa finitamente generada noetheriana.*

Demostración. Como un álgebra $\mathrm{gr}(A)$ es generada por A_1/A_0, y cada A_i/A_{i-1} es finitamente generado por las palabras de longitud i, existe un morfismo de k-álgebras graduadas del álgebra simétrica $S = S(A_1/A_0)$ sobre $\mathrm{gr}(A)$. La afirmación de que $\mathrm{gr}(A)$ es noetheriano se sigue del Teorema de la Base de Hilbert pues S es noetheriano. □

En el siguiente capítulo consideraremos al álgebra de Weyl como un ejemplo de álgebra casi conmutativa, más ahora mismo damos un resultado que nos caracteriza a estas álgebras.

Teorema 2.3. *Una k-álgebra A es casi conmutativa si y sólo si esta es imagen homomorfa del álgebra envolvente universal de un álgebra de Lie de dimensión finita sobre el campo k.*

Demostración. Supongamos que A es casi conmutativa con respecto a la filtración $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, con $A_0 = k$ y A_1 un subespacio generador de dimensión finita para A y que el álgebra graduada asociada $\mathrm{gr}(A)$ es conmutativa. Sean x, y elementos de A_1. Entonces

$$\begin{aligned} 0 &= [x + A_0] \cdot [y + A_0] - [y + A_0] \cdot [x + A_0] \\ &= [(xy - yx) + A_1] \in A_2/A_1, \end{aligned}$$

es decir $xy - yx \in A_1$. Así el espacio vectorial de dimensión finita es dotado con una estructura natural de álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. De la propiedad universal del la envolvente $U(\mathfrak{g})$ y del hecho que A es generado por $A_1 = \mathfrak{g}$ obtenemos que el encaje canónico de $\mathfrak{g}$ en A puede extenderse a un único morfismo de k-álgebras de $U(\mathfrak{g})$ en A.
De manera recíproca supongamos que existe un morfismo de k-álgebras ϕ del álgebra envolvente universal $U(\mathfrak{g})$ de un álgebra de Lie de dimensión finita $\mathfrak{g}$ en A. Si U_n, $n = 0, 1, \dots,$ denotan el n-ésimo subespacio de filtración usual de $U(\mathfrak{g})$, entonces los subespacios $A_n := \phi(U_n)$ dan una filtración discreta de A. Observemos que

$$A_0 = \phi(U_0) = \phi(k) = k$$

y $A_1 = \phi(U_1)$ es un subespacio generador de dimensión finita para A pues U_1 es uno para $U(\mathfrak{g})$. Para cada n la función ϕ induce un morfismo de k-módulos de U_n/U_{n-1} en

A_n/A_{n-1}, y estos morfismos combinados dan un morfismo suprayectivo de k-módulos graduados

$$\mathrm{gr}(\phi) : \mathrm{gr}(U(\mathfrak{g})) \to \mathrm{gr}(A).$$

Por el teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt (vea Dixmier [8], capítulo 2), $\mathrm{gr}(U(\mathfrak{g}))$ es isomorfo al álgebra simétrica sobre el espacio vectorial $\mathfrak{g}$, por lo que el resultado se puede seguir si es posible demostrar que $\mathrm{gr}(\phi)$ es un morfismo de anillos. Para esto sea

$$\overline{u} = [u + U_{m-1}] \text{ y } \overline{v} = [v + U_{n-1}]$$

elementos homogéneos no cero de $\mathrm{gr}(U(\mathfrak{g}))$ de grados m y n respectivamente. Entonces

$$\overline{u} \cdot \overline{v} = [uv + U_{m+n-1}],$$

y tenemos que

$$\begin{aligned} \mathrm{gr}(\phi)(\overline{u} \cdot \overline{v}) &= [\phi(uv) + A_{m+n-1}] \\ &= [\phi(u)\phi(v) + A_{m+n-1}] \\ &= [\phi(u) + A_{m-1}] \cdot [\phi(v) + A_{n-1}] \\ &= \mathrm{gr}(\phi)(\overline{u}) \cdot \mathrm{gr}(\phi)(\overline{v}), \end{aligned}$$

lo cual termina con la prueba. □

Sea A una k-álgebra la cual es casi conmutativa con respecto a la filtración $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, y sea M el A-módulo derecho con filtración finita $\mathcal{M} = \{M_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ tal que el módulo graduado asociado $\mathrm{gr}_{\mathcal{M}}(M)$ es finitamente generado. Para valores suficientemente grandes de n, la función

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{M}}(n) &= \dim_k M_n \\ &= \dim_k (M_0 \oplus M_1/M_0 \oplus \cdots \oplus M_n/M_{n-1}) \\ &= d_{\mathrm{gr}_{\mathcal{M}}(M)}(n) \end{aligned}$$

es un polinomio en n con coeficientes racionales, llamado el *polinomio de Hilbert-Samuel* de M (con respecto a las filtraciones $\mathcal{A}$ y $\mathcal{M}$). Si $d_{\mathcal{M}}(n)$ es escrito (Lema 1.5) como

$$d_{\mathcal{M}}(n) = a_d \binom{n}{d} + a_{d-1} \binom{n}{d-1} + \cdots + a_1 \binom{n}{1} + a_0$$

entonces $e(M) = e_{\mathcal{A},\mathcal{M}}(M) := a_d$ es llamado el **número de Bernstein** de M.
Se sigue de la Proposición 1.25 que $\mathrm{GKdim}(M_A)$ es el grado de $d_{\mathcal{M}}$. De modo que, mientras el aspecto del polinomio $d_{\mathcal{M}}(n)$ puede depender de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{M}$, *el grado del*

polinomio de Hilbert-Samuel de M no depende de las filtraciones elegidas para A y M, siempre que sean como las especificadas en la Proposición 1.25. Notemos que el número de Bernstein también puede ser obtenido como

$$(\text{coeficiente lider de } d_{\mathcal{M}}(n)) \cdot (\text{GKdim}(M))!$$

Dadas dos filtraciones $\mathcal{M} = \{M_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ y $\mathcal{N} = \{N_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de M tales que los módulos $\text{gr}_{\mathcal{M}}(M)$ y $\text{gr}_{\mathcal{N}}(M)$ son finitamente generados, entonces $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ son equivalentes por el Corolario 1.30. Así existe un número natural q tal que

$$N_n \subseteq M_{n+q} \text{ y } M_n \subseteq N_{n+q} \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Si $e_{\mathcal{M}}(M)$ y $e_{\mathcal{N}}(M)$ son los respectivos números de Bernstein, entonces para valores suficientemente grandes de n tenemos que

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{N}}(n) &= e_{\mathcal{N}}(M)\binom{n}{d} + (\text{términos de grado} < d) \\ &= \frac{e_{\mathcal{N}}(M)}{d!}n^d + (\text{términos de grado} < d) \\ &\leq d_{\mathcal{M}}(n+q) = e_{\mathcal{M}}(n)\binom{n+q}{d} + (\text{términos de grado} < d) \\ &= \frac{e_{\mathcal{M}}(M)}{d!}n^d + (\text{términos de grado} < d), \end{aligned}$$

y de esto obtenemos que $e_{\mathcal{N}}(M) \leq e_{\mathcal{M}}(M)$. Un argumento simétrico nos proporciona la desigualdad opuesta, de modo que $e_{\mathcal{N}}(M) = e_{\mathcal{M}}(M)$. Así *el número de Bernstein **no depende** de la filtración particular elegida para M.* Consecuentemente, deberemos denotar el número de Bernstein simplemente por $e(M)$. Aunque se debe hacer referencia a la filtración de A.

Sea A una k-álgebra casi conmutativa, y sea

$$0 \to L \to M \xrightarrow{\phi} N \to 0$$

una sucesión exacta corta de A-módulos finitamente generados. Sabemos del Teorema de Tauvel (Teorema 1.32) que

$$\text{GKdim}(M) = \text{máx}\{\text{GKdim}(L), \text{GKdim}(N)\},$$

pero la prueba del teorema muestra que se puede decir mas. Si $\mathcal{M} = \{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una filtración estándar de M o de hecho cualquier filtración para la cual el módulo graduado asociado es finitamente generado, y si

$$\mathcal{L} = \{L \cap M_n\}_{n\in\mathcal{N}} \text{ y } \mathcal{N} = \{\phi(M_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$$

son las filtraciones inducidas de L y N respectivamente, entonces

$$d_{\mathcal{M}}(n) = d_{\mathcal{L}}(n) + d_{\mathcal{N}}(n) \text{ para todo } n$$

según la prueba del Teorema 1.32 (Tauvel). Como $d_{\mathcal{M}}$, $d_{\mathcal{L}}$, $d_{\mathcal{N}}$ son polinomios en n, la exactitud de la dimensión de Gelfand-Kirillov para A-módulos finitamente generados se sigue fácilmente, y la parte (c) del siguiente teorema se cumple también. Sin embargo, la filtración $\mathcal{L}$ inducida sobre L por la filtración estándar $\mathcal{M}$ sobre M no es necesariamente una filtración estándar.

Teorema 2.4. *Sea A una k-álgebra casi conmutativa, y*

$$0 \to L \to M \xrightarrow{\phi} N \to 0$$

una sucesión exacta corta de A-módulos derechos finitamente generados. Entonces

(a) Existen filtraciones estándar $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ de L, M y N respectivamente, tales que $d_{\mathcal{M}}(n) = d_{\mathcal{L}}(n) + d_{\mathcal{N}}(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(b) $\mathrm{GKdim}(M) = \mathrm{máx}\{\mathrm{GKdim}(L), \mathrm{GKdim}(N)\}$.

(c) Una de las siguientes relaciones se cumple

$$\mathrm{GKdim}(L) < \mathrm{GKdim}(M) = \mathrm{GKdim}(N),\ e(M) = e(N).$$
$$\mathrm{GKdim}(N) < \mathrm{GKdim}(M) = \mathrm{GKdim}(L),\ e(M) = e(L).$$
$$\mathrm{GKdim}(L) = \mathrm{GKdim}(M) = \mathrm{GKdim}(N),\ e(M) = e(L) + e(N).$$

Demostración. Como las funciones $d_{\mathcal{L}}$, $d_{\mathcal{M}}$, y $d_{\mathcal{N}}$ son polinomios en n para valores suficientemente grandes de n, es claro que (b) y (c) se siguen de (a). Sea $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ la filtración de A con respecto a la cual es A es casi conmutativa, sea E un subespacio generador de dimensión finita de M, y definamos

$$M_n := EA_n,\ L_n := L \cap M_n \text{ y } N_n := \phi(M_n) = \phi(E)A_n$$

Aunque $\mathcal{M} = \{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\mathcal{N} = \{N_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ son filtraciones estándar para M y N respectivamente, $\mathcal{L} = \{L_n\}_{n\in N}$, no es en general una filtración estándar para L. Procedemos a construir una nueva filtración estándar para M tal que ambas filtraciones inducidas sean también estándar, lo cual concluirá el argumento. Notemos que para cada n tenemos la sucesión exacta

$$0 \to L_n \to M_n \to N_n \to 0$$

de k-módulos; de modo que obtenemos la sucesión exacta

$$0 \to \mathrm{gr}_{\mathcal{L}}(L) \to \mathrm{gr}_{\mathcal{M}}(M) \to \mathrm{gr}_{\mathcal{N}}(N) \to 0$$

de $\mathrm{gr}(A)$-módulos derechos graduados. Como $\mathrm{gr}(A)$ es un anillo noetheriano, y como $\mathrm{gr}_{\mathcal{M}}(M)$ es un $\mathrm{gr}(A)$-módulo finitamente generado, por el Lema 1.26, $\mathrm{gr}_{\mathcal{M}}(M)$ es noetheriano; por lo tanto $\mathrm{gr}_{\mathcal{L}}(L)$ es finitamente generado por digamos

$$L_0 \oplus L_1/L_0 \oplus \cdots \oplus L_m/L_{m-1}.$$

Entonces

$$L_n/L_{n-1} = (L_m/L_{m-1}) \cdot (A_{n-m}/A_{n.m-1}) \text{ para todo } n \geq m,$$

por el Lema 1.31; de esto

$$L_n = L_m A_{n-m} + L_{n-1},$$

y consecuentemente

$$L_n = L_m A_{n-m} \text{ para } n \geq m,$$

inductivamente. Notemos que L_m es un espacio generador de dimensión finta para L. Ahora elegimos nuevas filtraciones para M, N, y L mediante definir

$$M_0^* = M_m,\ N_0^* = \phi(M_m) = \phi(M_0^*),\ L_0^* = L_m,$$

y para $n \geq 1$,

$$M_n^* = M_0^* A_n = M_{n+m},$$

$$N_n^* = N_0^* A_n = \phi(M_n^*),$$

$$L_n^* = L_0^* A_n = L_m A_n = L_{m+n} = L \cap M_{m+n} = L \cap M_n^* .$$

Estas son filtraciones estándar, y las filtraciones de L y N son inducidas por la nueva filtración para M. $\square$

Corolario 2.5. *Sea A una k-álgebra casi conmutativa, y sea M un A-módulo finitamente generado con* $\mathrm{GKdim}(M) = d$ *y número de Bernstein $e(M)$. Sea*

$$M = M_0 \supset M_1 \supset \cdots \supset M_i \supset M_{i+1} \supset \cdots \supset M_n$$

una cadena estrictamente descendente de submodulos con

$$\mathrm{GKdim}(M_i/M_{i+1}) = d \text{ para } 0 \leq i \leq n-1.$$

Entonces

(a) $e(M/M_i) = \sum_{j=0}^{i-1} e(M_j/M_{j+1})$.

(b) $n \leq e(M)$.

Demostración. (a) Obtenemos el resultado de la tercera parte del inciso (c) del Teorema 2.2 e inducción sobre i.
(b) Por el Lema 1.5 (d) el número de Bernstein de un módulo no cero es un entero positivo, de modo que

$$e(M_j/M_{j+1}) \geq 1 \text{ para } j \in \{0, \ldots, n-1\}.$$

Así que

$$n \leq \sum_{j=0}^{n-1} = e(M/M_n) \leq e(M)$$

por la parte (a) y Teorema 2.2 (c). □

Capítulo 3

Álgebras de Weyl

En este capítulo generamos la herramienta necesaria para aplicarla al problema propuesto por Bernstein en el congreso de Amsterdam en 1963. Empezamos por definir el álgebra de Weyl A_n, vemos que posee una base de Poncaré-Birkhoff y usamos este hecho para probar que A_n es casi conmutativa. Damos a conocer una cota inferior de la dimensión de Gelfand-Kirillov para los A_n-módulos y definimos como holonómicos a aquellos módulos que alcanzan la cota inferior. Adicionalmente vemos que forman una categoría abeliana. Construimos también un módulo holonómico que es esencial en la prueba del problema planteado por Bernstein.

A traves de este capítulo k denotara un campo de característica cero y $k[X]$ el anillo de polinomios $k[x_1, \ldots, x_n]$ en n indeterminadas conmutativas sobre k. El anillo $k[X]$ es un espacio vectorial de dimensión infinita sobre k. Su álgebra de operadores lineales es denotada por $\mathrm{End}_k(k[X])$. Recordemos que las operaciones de álgebra en el anillo de endomorfismos son la adición y la composición de operadores.

Una clase muy importante de álgebra casí conmutativa es el **álgebra de Weyl** $A_n = A_n(k)$, esta será definida como una subalgebra de $\mathrm{End}_k(k[X])$.
Sean $\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n$ operadores de $k[X]$ los cuales son definidos sobre un polinomio $f \in k[X]$ por la formula $\hat{x}_i(f) = x_i \cdot f$. Similarmente, $\partial_1, \ldots, \partial_n$ son los operadores definidos por $\partial_i(f) = \partial f / \partial x_i$. Estos son operadores lineales de $k[X]$. La n-ésima **álgebra de Weyl** A_n es la k-subalgebra de $\mathrm{End}_k(k[X])$ generada por los operadores $\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n$ y $\partial_1, \ldots, \partial_n$. Por conveniencia escribimos $A_0 = k$.
Notemos que para $n \geq m$, la acción de los operadores de A_m sobre $k[X]$ es bien definida. Así A_m es una subalgebra de A_n de modo natural.

De acuerdo con nuestra definición, los elementos de A_n son combinaciones lineales sobre k de monomios en los generadores $\hat{x}_1, \ldots \hat{x}_n$, $\partial_1, \ldots, \partial_n$. Sin embargo debemos ser cuidadosos cuando representemos los elementos de A_n porque esta álgebra no es conmutativa. Esto es rápidamente verificado como sigue. Consideremos el operador $\partial_i \cdot \hat{x}_i$ y apliquemoslo al polinomio $f \in k[X]$. Usando la regla para diferenciación de un producto, tenemos $\partial_i \cdot \hat{x}_i(f) = x_i \partial f/\partial x_i + f$. En otras palabras

$$\partial_i \cdot \hat{x}_i = \hat{x}_i \cdot \partial_i + 1$$

donde 1 es el operador identidad. Es mejor reescribir esto usando conmutadores. Si $P, Q \in A_n$ su **conmutador** es el operador $[P, Q] = P \cdot Q - Q \cdot P$. Así la expresión de arriba se convierte en $[\partial_i, \hat{x}_i] = 1$. Similares cálculos muestran que

$$[\partial_i, \hat{x}_j] = \delta_{i,j} \cdot 1 \;\text{ y }\; [\partial_i, \partial_j] = [\hat{x}_i, \hat{x}_j] = 0, \tag{3.1}$$

donde $1 \leq i, j \leq n$ y $\delta_{i,j}$ es la delta de Kronecker: esta es igual a 1 si $i = j$ y cero en otro caso. Mas aun notemos que esta álgebra que acabamos de definir es isomorfa al álgebra definida por generadores y relaciones del Ejemplo 1.12.
Una observación final. Hemos denotado al operador *multiplicación por* x_i por el símbolo $\hat{x}_i$. De ahora en adelante, deberemos seguir la convención estándar y escribir x_i para ambas, la variable y el operador correspondiente. Esto nos dará una notación menos cargada, los resultados a través de este capítulo fueron tomados en su mayoría de [13].

3.1. Forma Canónica

En esta sección construimos para el álgebra de Weyl una base como k-espacio vectorial. Esta base es conocida como base de Poincaré-Birkhoff-Witt. Si un elemento de A_n es escrito como una combinación lineal de esta base entonces decimos que este está en su **forma canónica**. Por supuesto, para comparar dos elementos en su forma canónica es suficiente comprar los coeficientes de sus combinaciones lineales.
Es fácil describir la base de P.B.W (para abreviar Poincaré-Birkhoff-Witt) si usamos notación en multi-índice. Un **multi-indice** α es un elemento de $\mathbb{N}^n$; digamos $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Ahora x^α significa el monomio $x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$. El **grado** de este monomio es la **longitud** $|\alpha|$ del multi-índice α, a saber $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$. Notemos que el par (α, β) de multi-índices en $\mathbb{N}^n$ es en si mismo, un multi-índice en $\mathbb{N}^{2n}$, de modo que toma sentido hablar de su longitud. Definimos el factorial de un multi-índice $\beta \in \mathbb{N}^n$ como $\beta! = \beta_1! \cdots \beta_n!$. Empezamos este capítulo con un ingenioso lema.

Lema 3.1. *Sean $\sigma, \beta \in \mathbb{N}^n$ y supongamos que $|\sigma| \leq |\beta|$. Entonces $\delta^\beta(x^\sigma) = \beta!$ si $\alpha = \beta$, y cero en otro caso.*

Demostración. Vamos a analizar $\partial_i^{\beta_i}(x_i^{\alpha_i})$ pues el resto de los términos conmutan (funcionan como constantes), así observemos que

$$\partial_i^{\beta_i}(x_i^{\alpha_i}) = \partial_i^{\beta_{i-1}}(\frac{\partial x_i^{\alpha_i}}{\partial x_i}) = \alpha_i \partial^{\beta_i}(x_i^{\alpha_i - 1}),$$

vamos obteniendo $\alpha_i(\alpha_i - 1)\cdots$, de modo que sucede lo siguiente

- si $\beta_i > \alpha_i$ para algún i entonces $\delta^\beta(x^\sigma)$ es cero,
- si $\beta_i \leq \alpha_i$ tenemos

  $$\alpha_i(\alpha_i - 1)(\alpha_i - 2)\cdots(\alpha_i - \beta_i + 1)x^{\alpha_i - \beta_i}$$

  y entonces

  $$\partial_1^{\beta_1}\partial_2^{\beta_2}\cdots\partial_n^{\beta_n}(x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}) = 0 \text{ si algún } \beta_i > \alpha_i$$

en resumen si $\partial^\beta(x^\alpha) \neq 0$ entonces $\alpha_i \geq \beta_i$ para todo i, de donde $|\alpha| \geq |\beta|$ y de la hipótesis obtenemos $|\alpha| = |\beta|$, y de aquí que $\alpha = \beta$. □

La siguiente proposición nos proporciona la base de P.B.W.

Proposición 3.2. *El conjunto $B = \{x^\alpha \delta^\beta : \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n\}$ es una base de A_n como un espacio vectorial sobre k.*

Demostración. Veamos que los elementos de B generan el álgebra de Weyl como espacio vectorial. Consideremos un monomio en los generadores de A_n. Usando las relaciones de (3.1), se puede ver que si $f \in k[X]$ entonces $\partial_i \cdot f - f \cdot \partial_i = \partial f / \partial x_i$. Que nos permite llevar todas las potencias de las x's del lado izquierdo de las ∂'s. Mediante hacer esto, el monomio termina escrito como una combinación lineal de los elementos de B.
Ahora la unicidad. Consideremos una combinación lineal finita de elementos de B, digamos $D = \sum c_{\alpha\beta} x^\alpha \partial^\beta$. Debemos mostrar que si algún $c_{\alpha\beta}$ es no cero, entonces $D \neq 0$. Pero D es operador lineal de $k[X]$. De aqui $D \neq 0$ si y sólo si existe un polinomio f para el cual $D(f) \neq 0$. Construimos un polinomio tal.
Sea σ un multi-índice, el cual satisface que $c_{\alpha\beta} \neq 0$, para algún índice α, pero que $c_{\alpha\beta} = 0$ para todos los índices β tales $|\beta| \leq |\sigma|$. Ahora del Lema 3.1

$$D(x^\sigma) = \sum c_{\alpha\beta} x^\alpha \partial^\beta(x^\sigma) = \sigma! \sum_\alpha c_{\alpha\sigma} x^\alpha.$$

Este es no cero porque al menos uno de los coeficientes $c_{\alpha\sigma}$ es no cero por la elección de σ. Así $f = x^\sigma$ es el polinomio que funciona. $\square$

Es tiempo de introducir del grado de un operador. Sea $D \in A_n$, el **grado** de D es la mas grande longitud de los milti-índices $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^n$ para el cual $x^\alpha \partial^\beta$ aparece con coeficiente no cero en la forma canónica de D. Este es denotado por $\deg(D)$. Como con el grado de un polinomio, usamos la convención de que el polinomio cero tiene grado $-\infty$. Un ejemplo será útil: el grado de $2x_1\partial_2 + x_1x_2^3\partial_1\partial_2$ es 6.
Si $D, D' \in A_n$ están escritos en su forma canónica, entonces también lo está $D + D'$, y uno puede concluir que $\deg(D + D') \leq \max\{\deg(D), deg(D')\}$. Notemos que si $\deg(D) \neq \deg(D')$ entonces tenemos la igualdad en la fórmula de arriba. La fórmula $\deg(DD') = \deg(D) + \deg(D')$ también se cumple, pero la prueba es más difícil, porque A_n es no conmutativo. De ahora en adelante denotamos por e_i el multi-índice cuyas entradas son todas cero, excepto la i-ésima entrada, la cual es 1.

Teorema 3.3. *El grado satisface las siguientes propiedades; para $D, D' \in A_n$*

(1) $\deg(D + D') \leq \max\{\deg(D), \deg(D')\}$.

(2) $\deg(DD') = \deg(D) + \deg(D')$.

(3) $\deg[D, D'] \leq \deg(D) + \deg(D') - 2$.

Demostración. El inciso (1) ha sido probado. Probamos (2) y (3) al mismo tiempo por inducción sobre $\deg(D)+\deg(D')$. Si alguno $\deg(D)$ o $\deg(D')$ es cero entonces el resultado se cumple. Supongamos que $\deg(D), \deg(D') \geq 1$ y que (2) y (3) se cumplen siempre que $\deg(D)+\deg(D') < r$. Elijamos $D, D' \in A_n$ tal que $\deg(D)+\deg(D') = r$. De (1) vemos que es suficiente probar (2) y (3) para cuando D y D' son monomios. Supongamos primero que $D = \partial^\beta$ y $D' = x^\alpha$ con $|\alpha| + |\beta| = r$. Si $\beta_i \neq 0$, entonces

$$[\partial^\beta, x^\alpha] = \partial_i[\partial^{\beta-e_i}, x^\alpha] + [\partial_i, x^\alpha]\partial^{\beta-e_i}.$$

Por inducción tenemos que

$$\deg([\partial^{\beta-e_i}, x^\alpha]) \leq |\alpha| + |\beta| - 3$$

y que $\deg([\partial_i, x^\alpha]) \leq |\alpha| - 1$. De aquí podemos usar la hipótesis de inducción otra vez para concluir que $\deg(\partial_i[\partial^{\beta-e_i}, x^\alpha])$ y $\deg([\partial_i, x^\alpha]\partial^{\beta-e_i})$ son $\leq |\alpha| + |\beta| - 2$. Por lo tanto $\deg([\partial^\beta, x^\alpha]) \leq |\alpha| + |\beta| - 2$. Pero

$$\partial^\beta x^\alpha = [\partial^\beta, x^\alpha] + x^\alpha \partial^\beta.$$

Como $\deg(x^\alpha\partial^\beta) = |\alpha| + |\beta|$ y $\deg([\partial^\beta, x^\alpha]) \leq |\alpha| + |\beta| - 2$, concluimos que

$$\deg(\partial^\beta x^\alpha) = \deg(x^\alpha\partial^\beta) = |\alpha| + |\beta|.$$

Ahora sean $D = x^\sigma\partial^\beta$ y $D' = x^\alpha\partial^\eta$. Si $|\alpha| = |\beta| = 0$ el resultado es como lo anterior. Supongamos que no es el caso. Hemos visto que $\partial^\beta x^\alpha = x^\alpha\partial^\beta + P$, donde $P = [\partial^\beta, x^\alpha]$ tiene grado $\leq |\alpha| + |\beta| - 2$. Entonces

$$DD' = (x^\sigma\partial^\beta)(x^\alpha\partial^\eta) = x^\sigma(\partial^\beta x^\alpha)\partial^\eta = x^{\sigma+\alpha}\partial^{\beta+\eta} + x^\sigma P\partial^\eta.$$

Por la hipótesis de inducción $\deg(x^\sigma P\partial^\eta) \leq \deg(D) + \deg(D') - 2$. Por lo que

$$\deg(DD') = \deg(x^{\sigma+\alpha}\partial^{\beta+\eta}) = \deg(D) + \deg(D').$$

Estos cálculos muestran que

$$DD' = x^{\sigma+\alpha}\partial^{\beta+\eta} + Q_1,$$

donde $\deg(Q_1) \leq \deg(D) + \deg(D') - 2$. Similarmente, tenemos que

$$D'D = x^{\sigma+\alpha}\partial^{\beta+\eta} + Q_2,$$

donde $\deg(Q_2) \leq \deg(D) + \deg(D') - 2$. De aquí $[D, D'] = Q_1 - Q_2$, y de este modo

$$\deg([D, D']) \leq \deg(D) + \deg(D') - 2,$$

lo cual concluye la inducción. $\square$

3.2. Desigualdad de Bernstein

Con el fin de usar la herramienta desarrollada en los anteriores capítulos, damos una filtración particular para A_n, esta es conocida como la **filtración de Bernstein**. Esta usa el grado de un operador en A_n. Denotamos por B_r al conjunto de operadores de A_n de grado $\leq r$. Estos son espacios vectoriales de A_n. Es claro de la Proposición 3.2 que

$$1 \in k = B_0 \subseteq B_1 \subseteq B_2 \subseteq \cdots$$

también es claro gracias a la Proposición 3.2 que $A_n = \cup_{i\in\mathbb{N}} B_i$, mientras que

$$B_i \cdot B_j \subseteq B_{i+j} \text{ para todo } i, j \in \mathbb{N},$$

nos lo proporciona el Teorema 3.3 (2).

Ahora podemos abordar el álgebra graduada $S_n := \mathrm{gr}(A_n)$, asociada a la filtración de Bernstein $\mathcal{B} = \{B_i\}_{i\in\mathbb{N}}$.

Teorema 3.4. *El álgebra graduada S_n es conmutativa y de aquí A_n es un álgebra casi conmutativa.*

Demostración. Para $i = 1, \ldots, n$, sean $y_i = \bar{x}_i$ y $y_{i+n} = \bar{\partial}_i$, haremos la prueba en dos pasos.

(1) S_n es generada por $y_1, \ldots, y_{2n}$ como una k-álgebra.
Es suficiente probar esto para los elementos homogéneos de S_n. Pero un elemento homogéneo de S_n es de la forma $\bar{d} = [d + B_{r-1}]$, para algún elemento $d \in A_n$ de grado r. Ahora d es combinación lineal de monomios $x^\alpha \partial^\beta$ con $|\alpha| + |\beta| \leq r$. Si $|\alpha| + |\beta| = r$, entonces

$$\overline{x^\alpha \partial^\beta} = [x^\alpha \partial^\beta + B_{r-1}] = (y_1^{\alpha_1} \cdots y_n^{\alpha_n})(y_{n+1}^{\beta_1} \cdots y_{2n}^{\beta_n}).$$

Así $\bar{d}$ es combinación lineal de monomios en $y_1, \ldots, y_{2n}$ de grado r, como queriamos probar.

(2) S_n es un anillo conmutativo.
Como S_n es generado por $y_1, \ldots, y_{2n}$ solo necesitamos mostrar que estos elementos conmutan en S_n. Para $i \in \{1, \ldots, n\}$ tenemos que $y_i y_{i+n} = \overline{x_i \partial_i} = [x_i \partial_i + B_1]$ y $y_{i+n} y_i = \overline{\partial_i x_i} = [\partial_i x_i + B_1]$. Como $\partial_i x_i = x_i \partial_i + 1$, tenemos que

$$\overline{\partial_i x_i} = \overline{x_i \partial_i}.$$

Así $y_i y_{i+n} = y_{i+n} y_i$. También podemos ver que y_i conmuta con y_j cuando $i \neq i + n$, pues los correspondientes elementos en A_n conmutan. $\square$

De hecho se puede probar que S_n es isomorfo al anillo de polinomios sobre k en $2n$ variables. Los dos pasos en la prueba del anterior teorema nos permiten definir un morfismo de anillos suprayectivo

$$\phi : k[z_1, \ldots, z_{2n}] \to S_n \text{ por la regla } z_i \mapsto y_i,$$

como los y's tienen grado 1 en S_n, ϕ es un morfismo graduado de k-álgebras y envía base en base en cada grado, de donde obtenemos la inyectividad.

Sea M el A_n-módulo A_n. Vamos a calcular el polinomio de Hilbert $d_{\mathcal{B}}$ para la filtración de Bernstein $\mathcal{B}$ de A_n, así debemos determinar la dimensión de B_r. Por la Proposición 3.2 los monomios $x^\alpha \partial^\beta$ con $|\alpha| + |\beta| \leq r$ forman una base para B_r como k-espacio vectorial. De modo que es suficiente contar los elementos de esta base. Para hacer esto debemos contar las soluciones no negativas de la ecuación

$$\alpha_1 + \cdots + \alpha_n + \beta_1 \cdots + \beta_n \leq r.$$

El cual como un ejercicio en combinatoria puede verse que existen

$$\binom{2n+r}{2n}$$

soluciones tales. De aquí,

$$d_{\mathcal{B}}(t) = \binom{2n+t}{2n},$$

como polinomio en t tiene grado $2n$ y coeficiente líder $1/(2n)!$. Por lo tanto

$$\text{GKdim}(A_n) = 2n \text{ y } e_{\mathcal{B}}(A_n) = 1$$

.

Observación 3.5. *Sea M un A_n-módulo no cero, si M es generado por $u_1, \ldots, u_s$ entonces la filtración Γ de M definida por $\Gamma_n = \sum_{i=1}^{s} B_n u_i$ es una filtración estándar como en la Definición 1.27.*

Lema 3.6. *Sea M un A_n módulo finitamente generado con filtración Γ con respecto a $\mathcal{B}$. Supongamos que $\Gamma_0 \neq 0$. La k-transformación lineal*

$$\phi : B_i \to \text{Hom}_k(\Gamma_i, \Gamma_{2i})$$

la cual envía $a \in B_i$ a la transformación lineal $\phi_a(u) = au$ es inyectiva.

Demostración. La afirmación del lema es equivalente a que $a\Gamma_i \neq 0$ siempre que $0 \neq a \in B_i$. Probamos esto por inducción sobre i. Si $i = 0$, entonces $B_0 = k$ y la condición se convierte en $\Gamma_0 \neq 0$. Lo cual es cierto por hipótesis.
Supongamos que si $0 \neq b \in B_{i-1}$ entonces $b\Gamma_{i-1} \neq 0$. Sea a un elemento no cero de B_i. Si $a\Gamma_i = 0$, entonces $a \notin k$. Por el inciso (3) del Teorema 3.3 $[a, \partial_i]$ es un elemento no cero de B_{i-1}. Como $a\Gamma_i = 0$, concluimos que

$$[a, \partial_i]\Gamma_{i-1} \subseteq a\partial_i\Gamma_{i-1}.$$

Pero $\partial_i\Gamma_{i-1} \subseteq \Gamma_i$, de aqui $[a, \partial_i]\Gamma_{i-1} = 0$, lo cual contradice la hipótesis de inducción. □

El siguiente teorema proporciona una cota inferior para la dimensión de Gelfand-Kirillov de los A_n-módulos.

Teorema 3.7 (Desigualdad de Bernstein)**.** *Si M es un A_n-módulo finitamente generado no cero , entonces* $\text{GKdim}(M) \geq n$*.*

Demostración. Elijamos un conjunto de generadores para M y sea Γ la filtración estándar obtenida por dar a cada uno de estos generadores el grado cero como en la Observación 3.5. Entonces $\Gamma_0 \neq 0$. Sea $d_\Gamma(t)$ el correspondiente polinomio de Hilbert. Por el Lema 3.6, B_i puede ser encajado en $\mathrm{Hom}_k(\Gamma_i, \Gamma_{2i})$. En

$$\dim_k B_i \leq \dim_k(\mathrm{Hom}_k(\Gamma_i, \Gamma_{2i})).$$

Pero $\mathrm{Hom}_k(\Gamma_i, \Gamma_{2i})$ tiene dimensión $\dim_k \Gamma_i \cdot \dim_k \Gamma_{2i}$. Por lo que para i suficientemente grande tenemos que $\dim_k B_i \leq d_\Gamma(i) d_\Gamma(2i)$.
Por otro lado, $\dim_k B_i = \binom{i+2n}{2n}$ es un polinomio en i de grado $2n$. Por lo tanto, como polinomio en i, $d_\Gamma(i) d_\Gamma(2i)$ debe tener grado $\geq 2n$. Pero el grado de $d_\Gamma(i) d_\Gamma(2i)$ es $2\mathrm{GKdim}(M)$. Así $\mathrm{GKdim}(M) \geq n$. □

Un A_n-módulo finitamente generado es **holonómico** si este es cero o si tiene dimensión de Gelfand-Kirillov n. Por el teorema anterior esta es la mínima dimensión posible de un A_n-módulo no cero. Hasta este punto sabemos que $k[x_1, \ldots, x_n]$ es holonómico, también sabemos que A_n mismo no es holonómico ya que tiene dimensión $2n$. Veamos que se puede decir mas de esta clase de módulos sobre A_n. Del teorema anterior, Lema 1.10 y Proposición 1.11 se sigue que;

1) Submodulos y cocientes de A_n-módulos holonómicos son holonómicos,

2) Sumas finitas de A_n-módulos holonómicos son holonómicos.

es decir, los módulos holonómicos forman una categoría abeliana. Del hecho que A_n es un álgebra casi conmutativa de la Proposición 2.2 y del siguiente lema obtenemos que estos módulos son noetherianos, mientras que el Corolario 2.5 nos dice que también son artinianos. De todo esto la categoría abeliana de módulos holonómicos es una categoría de longitud finita y en consecuencia Krull-Schmidt, esto es; todo objeto se escribe en forma única como una suma de inescindibles. Uno de los objetivos en la teoría de módulos sobre A_n es conocer a los módulos irreducibles y mas en general a los inescindibles. Aunque esto en general no se sabe se tienen algunos métodos para construir familias de módulos holonómicos (vea [13] capítulo 10).

Lema 3.8. *Sea M un A_n-módulo no cero y consideremos la filtración estándar $\{V^n\}_{i\in\mathbb{N}}$ de A_n, donde V es el subespacio generado por $\{1, x_1 \ldots x_n, y_1, \ldots, y_n\}$ el cual es un subespacio generador. Suponga que existen $c > 0, e \in \mathbb{Z}$ y una filtración*

$$M_0 \subseteq M_1 \subseteq \cdots \subseteq M_r \subseteq M_{r+1} \subseteq \cdots \subseteq M \text{ con } M_r V^s \subseteq M_{r+s},$$

tal que

$$\dim_k(M_r) \leq e \cdot \binom{r}{n} + c \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \binom{r}{i}$$

para todo r. Entonces M como un A_n-módulo tiene longitud finita acotada por e.

Demostración. Sea N cualquier A_n-submodulo finitamente generado de M, y sea N_0 un subespacio generador de dimensión finita para N. Definamos $N_r = N_0V^r$. Existe un entero m talque $N_0 \subseteq M_m$; de modo que

$$N_r \subseteq M_mV^r \subseteq M_{m+r} \text{ para cada } r \geq 0.$$

de aqui y de la conocida identidad $\binom{n+1}{j} = \binom{n}{j-1} + \binom{n}{j}$ obtenemos

$$\begin{aligned} \dim_k(N_r) \leq \dim_k(M_{m+r}) &\leq e \cdot \binom{r+m}{n} + c \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \binom{r+m}{i} \\ &\leq e \cdot \binom{r}{n} + b \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \binom{r}{i} \end{aligned}$$

para algún entero positivo b. Así GKdim$(N) \leq n$ y $e(N) \leq e$. Por el Corolario 2.5 cualquier cadena de submodulos de N tiene a lo mas e factores de dimensión de Gelfand-Kirillov n. Como la dimensión de Gelfand-Kirillov de cualquier A_n-módulo no cero es al menos n por el Teorema 3.7 se sigue que N tiene longitud finita acotada por e. Ahora N es un submodulo finitamente generado arbitrario de M; de modo que M debe tener longitud finita que no excede a e. $\square$

Observemos que este teorema no asume que M es finitamente generado, de hecho podemos ver que M es un A_n-módulo de dimensión n cuyo numero de Bernstein no excede a e, y mas aun M es finitamente generado.

La importancia del lema anterior radica principalmente en la construcción de un módulo holonómico particular, ya que en la demostración del teorema de Bernstein (en el capítulo 4 de este trabajo) haremos uso de que este módulo holonómico es de longitud finita. Construimos este módulo a continuación. Sea $k(X) = k(x_1, \ldots, x_n)$ el campo de funciones racionales. Podemos extender la acción de A_n sobre el anillo de polinomios $k[X]$ al campo de funciones racionales. Las x_i's continúan actuando por multiplicación. La acción de ∂_i sobre la función racional f/g es definida por la regla de diferenciación de cocientes, a saber

$$\partial_i(f/g) = (\partial(f)g - f\partial_i(g))/g^2.$$

Cálculos de rutina nos llevan a ser que esta acción satisface las propiedades requeridas. Supongamos que un polinomio p es elegido en $k[X]$. Sea $k[X, p^{-1}]$ el conjunto de funciones racionales de la forma f/p^r, donde f es un polinomio. Notemos que la derivada parcial de f/p^r tiene denominador p^{2r}. De aquí estas funciones racionales son preservadas por diferenciación parcial y por multiplicación polinomial. En otras palabras, $k[X, p^{-1}]$ es un A_n-submodulo de $k(X)$. Empezamos con un polinomio $p \in k[X]$. Sea s una nueva variable y $k(s)$ extensión trascendental simple de k. Vamos a construir un modulo de dimensión n sobre el anillo $A_n(k(s))$, donde $k(s)$ es el campo de funciones racionales sobre s. El generador de este módulo será denotado por p^s. Este es un *símbolo formal*, sobre el cual actúa ∂_j por

$$\partial_j \cdot p^s = sp^{-1}\partial p/\partial x_j \cdot p^s.$$

Se sigue de la fórmula que $A_n(k(s))p^s$ es un $A_n(k(s))$-submodulo de $k(s)[X, p^{-1}]p^s$. Ahora definimos un automorfismo τ de $k(s)[X, p^{-1}]p^s$ por la fórmula

$$\tau(s^i p^s) = (s+1)^i p \cdot p^s.$$

Notemos que este es $A_n(k)$-lineal, pero no $A_n(k(s))$-lineal, más aún tiene inversa $\varphi(s^i p^s) = (s-1)^i p^{-1} \cdot p^s$. Cambiaremos nuestra notación haciendo $F = p^s$. Así la acción de $A_n(k(s))$ sobre $k(s)[X, p^{-1}]F$ se puede escribir para $a \in k(s)[X, p^{-1}]$ como

$$\partial_i(aF) = \frac{\partial a}{\partial x_i}F + sa\frac{\partial p}{\partial x_i}p^{-1}F,$$

mientras que $\varphi(s^i F) = (s-1)^i p^{-1} F$.

Lema 3.9. *El $A_n(k(s))$-módulo $M = k(s)[X, p^{-1}]F$ tiene longitud finita.*

Demostración. Esto es establecido por mostrar que M tiene una filtración del tipo del Lema 3.8. Supongamos que $\deg(p) = d$ como polinomio en $x_1, \ldots, x_n$, y para cada $r \geq 0$, definamos

$$\Gamma_r = \{gp^{-r}F : g \in k[X] \text{ con } \deg(g) \leq (d+1)r\}.$$

Veamos que $\Gamma = \{\Gamma_r\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una filtración para M compatible con la filtración estándar de $A_n(k(s))$. Supongamos que $\deg(g) \leq (d+1)r$. Como

$$gp^{-r} = (gp)p^{-(r+1)} \text{ y } \deg(gp) \leq (d+1)r + d < (d+1)(r+1),$$

se sigue que $\Gamma_r \subseteq \Gamma_{r+1}$. La multiplicación por x_i incrementa el grado de g en 1, así

$$x_i(gp^{-r}F) = x_i gpp^{-(r+1)}F \in \Gamma_{r+1}.$$

Sea $gp^{-r}F \in \Gamma_r$, de modo que $\deg(g) \leq (d+1)r$, y consideremos

$$\begin{aligned}
\partial_i(gp^{-r}F) &= \frac{\partial(gp^{-r})}{\partial x_i}F + sgp^{-r}\frac{\partial p}{\partial x_i}p^{-1}F \\
&= (\frac{\partial g}{\partial x_i}p^{-r} - rgp^{-r-1}\frac{\partial p}{\partial x_i})F + sg\frac{\partial p}{\partial x_i}p^{-r-1}F \\
&= (\frac{\partial g}{\partial x_i}p + (s-r)g\frac{\partial p}{\partial x_i})p^{-r-1}F.
\end{aligned}$$

El grado de la expresión en el parentesis es menor o igual que $(d+1)(r+1)$, y así

$$\partial_i(gp^{-r}F) \in \Gamma_{r+1}.$$

Si $gp^{-r}F$ es un elemento arbitrario de M con $\deg(g) = l$, entonces

$$gp^{-r}F = (gp^l)p^{-r-l}F \in \Gamma_{r+l}; \text{ de modo que } M = \cup_{r=0}^{\infty}\Gamma_r.$$

Ahora, $\dim_k(\Gamma_r)$ no puede exceder al número de monomios en $x_1, \ldots, x_n$ de grado a lo mas $(d+1)r$, que es

$$\dim_k(\Gamma_r) \leq \binom{(d+1)r+n}{n} \leq (d+1)^n \cdot \binom{r}{n} + c\sum_{i=0}^{n-1}\binom{r}{i},$$

para algún entero positivo c. Así M tiene dimensión n y longitud finita, gracias al Lema 3.8. $\square$

El siguiente corolario es el eje crucial en la demostración del teorema de Bernstein ya que nos permite relacionar ideas de la teoría de distribuciones con la herramienta que hemos generado hasta ahora.

Corolario 3.10. *Sea* $p \in k[X]$. *Existe un polinomio* $B(s) \in k[s]$ *y un operador diferencial* $D(s)$ *en el anillo de polinomios* $A_n(k)[s]$ *tal que*

$$B(s)p^{-1}F = D(s)F$$

Demostración. El $A_n(k(s))$-módulo $k(s)[X, p^{-1}]F$ es de dimensión n y de longitud finita por el Lema anterior. Como $A_n(k(s))F$ es submodulo de $k(s)[X, p^{-1}]F$ este tambien es de dimensión n y de longitud finita. Así la sucesión descendente

$$A_n(k(s))F \supseteq A_n(k(s))pF \supseteq A_n(k(s))p^2F \supseteq \dots$$

debe estabilizarse. Esto significa que existe $r > 0$ tal que

$$p^rF \in A_n(k(s))p^{r+1}F.$$

Aplicando φ^{r+1} a ambos lados de la expresión obtenemos

$$p^{-1}F \in A_n(k(s))F.$$

Ahora, multiplicando por los denominadores concluimos que existe un polinomio $B(s) \in k[s]$ tal que $B(s)p^{-1}F \in A_n(k)[s]F$, que es justo lo que queríamos probar. □

Capítulo 4

Distribuciones y el Problema de Bernstein

Para beneficio del lector damos un breve panorama sobre la teoría de distribuciones esperando que esto pueda clarificar mejor las ideas usadas en el planteamiento del problema de Bernstein. Los primeros enunciados son para la existencia de las funciones de prueba, abordamos la convolución como un recurso para probar una bien conocida propiedad de las distribuciones definidas por medio de integrales, para luego abordar de lleno este importante concepto del análisis funcional, y llegar mejor preparados al problema de Bernstein. Donde hacemos uso de resultados clave desarrollados en los capítulos anteriores.

La teoría de distribuciones libera al calculo diferencial de algunas dificultades que surgen por la existencia de funciones que no son diferenciables. Lo que se hace es extenderlas a una clase de objetos (llamados *distribuciones* o *funciones generalizadas*, para los siguientes resultados ver [9]) la cual es mucho mas grande que la clase de funciones diferenciables a los cuales el calculo aplica en su forma original.
Para un subconjunto abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ denotaremos por $C^n(\Omega)$ al espacio de las funciones continuas n-veces diferenciables complejo valuadas en Ω, con n un entero no negativo, definimos

$$C^\infty(\Omega) = \bigcap_{n=0}^{\infty} C^n(\Omega)$$

Definición 4.1. *Si $u \in C(\Omega)$ entonces el soporte de u, denotado* supp u *es la cerradura en Ω del conjunto $\{x \in \Omega : u(x) \neq 0\}$, esto es* supp u *es el subconjunto cerrado mas pequeño de Ω tal que $u = 0$ en $\Omega \setminus$* supp u.

Definición 4.2. *Denotemos por $C_0^n(\Omega)$ al espacio de todas las $u \in C^n(\Omega)$ con soporte compacto. Los elementos de $C_0^\infty(\Omega)$ son llamados* ***funciones de prueba****.*

Lema 4.3. *Existe una función no negativa $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ con $\phi(0) > 0$.*

Demostración. Sea

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{si} \quad x > 0 \\ \\ 0, & \text{si} \quad x \leq 0. \end{cases}$$

veamos que $f \in C^1(\mathbb{R})$ pues en cero tenemos

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{e^{-1/h}}{h} \text{ y } he^{1/h} \to \infty \text{ cuando } h \to 0.$$

Por inducción tenemos

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} P_n(\frac{1}{x})e^{-1/x} & \text{si} \quad x > 0 \\ \\ 0, & \text{si} \quad x \leq 0. \end{cases}$$

para algun polinomio P_n. Esto es claro cuando $x \neq 0$, nuevamente veamos que sucede en el origen

$$\frac{f^{(n)}(h) - f^{(n)}(0)}{h} = \frac{1}{h} P_n(\frac{1}{h})e^{-1/h} \to 0, \text{ cuando } h \to 0$$

así obtenemos $f \in C^\infty(\mathbb{R})$. De aquí

$$\phi(x) = f(1 - |x|^2), \text{ con } |x|^2 = \sum_{j=1}^{n} x_j^2,$$

tiene las propiedades requeridas. □

Ahora mediante cambiar los escalares obtenemos una función no negativa

$$\varphi(x) = \phi((x - x_0)/\delta)$$

positiva en x_0 y con soporte la bola de radio δ alrededor de x_0.

Teorema 4.4. *Si $f, g \in C(\Omega)$ y*

$$\int f\phi \, dx = \int g\phi \, dx, \text{ para todo } \phi \in C_0^\infty(\Omega)$$

entonces $f = g$.

Demostración. Si $h = f - g$, tenemos

$$\int h\phi \, dx = 0, \text{ para todo } \phi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Tomando partes real e imaginaria hallamos que h puede ser asumida como real valuada a condición que ϕ se tomada como real valuada. Si $h(x_0) \neq 0$, entonces podemos tomar $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ no negativa con $\varphi(x_0) \neq 0$ y soporte tan cercano a x_0 que $h\varphi$ tenga un signo constante, de donde su integral no es cero lo cual resulta una contradicción. De aquí $h = 0$ idénticamente. □

4.1. Convolución

Si u y v están en $C(\mathbb{R}^n)$ y alguna de las dos tiene soporte compacto, es decir, segun la Definición 4.2 está en C_0, entonces la convolución $u * v$ es la función continua definida por

$$u * v(x) = \int u(x-y)v(y) \, dy \text{ con } x \in \mathbb{R}^n,$$

notemos que si tomamos a $x - y$ como nueva variable de integración obtenemos $u * v = v * u$. Por otro lado si $u \in C^1$ y $v \in C^0$, con alguna de las dos de soporte compacto, podemos derivar bajo el signo de la integral a $u * v$,

$$\partial_i(u * v) = (\partial_i u) * v, \text{ para todo } i \in \{1, \ldots, n\},$$

y entonces $u * v \in C^1$.
Por la conmutatividad de $u * v$ podemos derivar sobre el factor v en caso de que $v \in C^1$. Si $u \in C^j$ y $v \in C^l$ se sigue que $u * v \in C^{j+l}$ y que

$$\partial^{\alpha+\beta}(u * v) = (\partial^\alpha u) * (\partial^\beta v) \text{ si } |\alpha| \leq j, \ |\beta| \leq l.$$

Elijamos ahora una función $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ con $\int \phi = 1$ y $\phi \geq 0$. Para $\delta > 0$, definimos

$$\phi_\delta(x) = \delta^{-n}\phi(x/\delta).$$

Entonces $\phi_\delta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ y $\int \phi_\delta = 1$. El conjunto $\{\phi_\delta : \delta > 0\}$ es llamado una **identidad aproximada**. Bajo estas condiciones estamos preparados para probar un útil lema.

Lema 4.5. *Si $f \in C_0$, entonces $f * \phi_\delta \to f$, cuando $\delta \to 0$, de manera uniforme.*

Demostración. Dado que $f \in C_0$ para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta_1 >$ suficientemente pequeña tal que

$$|f(x-y) - f(x)| \leq \epsilon \text{ para } |y| \leq \delta_1 R.$$

Tomemos R de modo que supp $\phi \subseteq \{x : |x| \leq R\}$. Como para todo $\delta > 0$ se cumple $f(x) \int \phi_\delta(y)dy = f(x) \cdot 1$, obtenemos

$$\begin{aligned} |f * \phi_\delta(x) - f(x)| &= |\int_{|y|\leq \delta R} (f(x-y) - f(x))\phi_\delta(y)\, dy| \\ &\leq \int_{|y|\leq \delta R} |(f(x-y) - f(x)|\phi_\delta(y)\, dy \\ &\leq \epsilon \int_{\mathbb{R}^n} \phi_\delta(y)dy = \epsilon, \text{ para } \delta \leq \delta_1 \end{aligned}$$

De donde se sigue el resultado. □

Definición 4.6. *Decimos que una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ es localmente integrable si $f \in L^1(K)$ para cada conjunto compacto $K \subseteq \mathbb{R}^n$.*

Un resultado más general del mismo tipo pero menos elemental que el Teorema 4.4 es el siguiente

Teorema 4.7. *Si f, g son funciones localmente integrables en Ω y*

$$\int f\phi\, dx = \int g\phi\, dx, \text{ para todo } \phi \in C_0^\infty(\Omega),$$

entonces $f = g$, casi en todas partes en Ω.

Para esto necesitamos antes el siguiente lema.

Lema 4.8. *Si $f \in L^p$, para $1 \leq p < +\infty$, entonces $f * \phi_\delta \to f$ en L^p (en particular existe una subsucesión $\{\delta_n\}$ que tiende a cero, tal que la convolución $f * \phi_{\delta_n}$ converge a f casi en todas partes).*

Demostración. Usaremos la Desigualdad de Jensen (vea [14] pagina 61), a saber; si γ es una función convexa sobre E, cumple que

$$\gamma(\int_D \lambda(t)\chi(t)\, dt) \leq \int_D \lambda(t)\gamma(\chi(t))\, dt,$$

donde $\chi(D) \subseteq E$ y

$$\int_D \lambda(t)\, dt = 1.$$

Para lo que sigue; la primera desigualdad es como en el Teorema 4.4, la segunda por Jensen y la ultima es un cambio de variable $y = \delta t$ para $\phi_\delta(y) = \delta^{-1}\phi(y/\delta)$

$$\begin{aligned} |f * \phi_\delta(x) - f(x)|^p &\leq [\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)|\phi_\delta(y)dy]^p \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)|^p \phi_\delta(y)\, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-\delta t) - f(x)|^p \phi(t)\, dt. \end{aligned}$$

De lo anterior, usando Teorema de Fubini y la notación $f^{\delta t}(x) = f(x - \delta t)$, tenemos

$$\|f * \phi_\delta - f\|_p^p \leq \int \|f^{\delta t} - f\|_p^p \phi(t)\, dt \to 0,$$

que el limite es cero se sigue de la convergencia dominada y de que la traslación es continua en L^p.
Esto también se sigue del hecho que C_0 es denso en L^p, $1 \leq p < +\infty$:
Si $g \in C_0$, entonces

$$\|g^\delta - g\|_p^p = \int_K |g(x-\delta) - g(x)|\, dx \to 0,\ \delta \to 0$$

por convergencia dominada. Ahora, aproximamos $f \in L^p$ con $g \in C_0$, es decir $\|f - g\|_p < \epsilon$. La desigualdad de Minkowski, implica

$$\|f^\delta - f\|_p \leq \|f^\delta - g^\delta\|_p + \|g^\delta - g\|_p + \|g - f\|_p \leq 2\epsilon + \|g^\delta - g\|_p \leq 3\epsilon,$$

si δ es suficientemente pequeño. □

Demostración. (Del Teorema 4.7). Definamos $h = f - g$ y asumamos que $\int h\phi = 0$ para todo $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$. Podemos escribir

$$\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n \text{ con compactos } K_1 \subseteq K_2 \subseteq \cdots \subseteq K_i \subseteq \ldots$$

y podemos tomar $\psi_n(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ tal que $\psi_n(x) = 1$ para todo $x \in K_n$, entonces $h\psi_n \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y

$$h\psi_n * \phi_\delta(x) = \int_{\mathbb{R}^n} h(y)\psi_n(y)\phi_\delta(x-y)\, dy$$

es igual a cero pues $y \mapsto \psi_n(y)\phi_\delta(x-y)$ está en $C_0^\infty(\Omega)$. Pero $h\psi_n * \phi_\delta \to h\psi_n$ en L^1 según el Lema 4.8. Así $h = 0$ c.t.p. en K_n, y por lo tanto en Ω. □

4.2. Distribuciones

Definición 4.9. *Una distribución u en Ω es un funcional lineal sobre $C_0^\infty(\Omega)$, tal que para todo compacto $K \subseteq \Omega$ existen constantes C y l tales que*

$$|u(\phi)| \leq C \sum_{|\alpha|\leq l} \|\partial^\alpha \phi\|_\infty \tag{4.1}$$

para todo $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ con $\operatorname{supp} \phi \subseteq K$.

Denotamos las distribuciones sobre Ω por $\mathcal{D}'(\Omega)$. Si el mismo l puede ser usado para todo K, decimos que u tiene orden $\leq l$. Estas distribuciones son denotadas $\mathcal{D}'_l(\Omega)$. El mas pequeño l que puede ser usado es llamado el orden de la distribución. $\mathcal{D}'_F = \cup_l \mathcal{D}'_l$ son la distribuciones de orden finito.
Que u es un funcional lineal sobre $C_0^\infty(\Omega)$ significa por supuesto que u es una función de $C_0^\infty(\Omega)$ a $\mathbb{C}$ tal

$$u(a\phi + b\psi) = au(\phi) + bu(\psi) \text{ con } a, b \in \mathbb{C} \text{ y } \phi, \psi \in C_0^\infty(\Omega).$$

La razón para la notación tradicional $\mathcal{D}'(\Omega)$ es porque Laurent Schwartz uso la notación $\mathcal{D}(\Omega)$ en lugar de $C_0^\infty(\Omega)$, en lo que sigue usaremos esta notación tradicional.

Definición 4.10. *$\varphi_j \to 0$ en $\mathcal{D}(\Omega)$ si y sólo si, para todo j,* $\operatorname{supp} \varphi_j$ *está contenido en un compacto fijo $K \subseteq \Omega$ y $\|\partial^\alpha \varphi_j\|_\infty \to 0$, cuando $j \to \infty$, para todo α.*

Teorema 4.11. *Un funcional lineal u sobre $\mathcal{D}(\Omega)$ es una distribución si y sólo si $u(\varphi_j) \to 0$ cuando $\varphi_j \to 0$ en $\mathcal{D}(\Omega)$.*

Demostración. $\Rightarrow$) Se sigue del hecho que para todo compacto K existen constantes C y l tales que

$$|u(\phi)| \leq C \sum_{|\alpha|\leq l} \|\partial^\alpha \phi\|_\infty$$

para todo $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ con $\operatorname{supp} \phi \subseteq K$.
$\Leftarrow$) Por contrapositiva, supongamos que la condición 4.1 no se cumple. Vamos a probar que $u(\varphi_j) \not\to 0$, aunque $\varphi_j \to 0$ en $\mathcal{D}(\Omega)$. Que 4.1 no se cumple implica que existe un compacto K y para $C = l = j$ una función $\varphi_j \in D(\Omega)$ con $\operatorname{supp} \varphi_j \subseteq K$, tal que

$$|u(\varphi_j)| > j \sum_{|\alpha|\leq j} \|\partial^\alpha \varphi_j\|_\infty,$$

como esta condición no cambia si φ_j es multiplicado por un factor constante, no hay restricción en asumir que $u(\varphi_j) = 1$. Por lo que obtenemos $\|\partial^\alpha \varphi_j\|_\infty \leq \frac{1}{j}$, si $|\alpha| \leq j$. Así $\varphi_j \to 0$ en $\mathcal{D}(\Omega)$ a pesar que $u(\varphi_j)$ no converge a cero. $\square$

Ejemplo 4.12. *Supongamos que f es una función localmente integrable en $\mathbb{R}^n$. Entonces la función*

$$u_f : \varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)\, dx$$

define una distribución de orden cero.
Para ver esto, primero notemos que u_f está bien definida pues φ tiene soporte compacto (está en $\mathcal{D}(\Omega)$). Además:

$$\begin{aligned} |u_f(\varphi)| &= |\int f(x)\varphi(x)\, dx| \\ &\leq \int_K |f(x)\varphi(x)|\, dx, \quad \textit{con } K = \operatorname{supp} \varphi, \\ &\leq \|\varphi\|_\infty \int_K |f(x)|\, dx. \end{aligned}$$

De aquí, y por la Definición 4.9 $u_f \in \mathcal{D}'_0$.

De este ejemplo y por el Teorema 4.7 podemos ver que las funciones que definen la misma distribución están en la misma clase de equivalencia. Podemos identificar también medidas arbitrarias con distribuciones de orden cero.

Teorema 4.13. *Una distribución $u \in \mathcal{D}'_l(\Omega)$ puede ser únicamente extendida a un funcional lineal sobre $C_0^l(\Omega)$ tal que para todo conjunto compacto $K \subseteq \Omega$ esxiste una constante C tal que*

$$|u(\varphi)| \leq C \sum_{|\alpha| \leq l} \|\partial^\alpha \varphi\|_\infty, \tag{4.2}$$

para todo $\varphi \in C_0^l(\Omega)$ con soporte en K.

Demostración. Sea φ una función fija en $C_0^l(\Omega)$. Sea $\{\Phi_\delta\} \subseteq C_0^\infty$ una identidad aproximada y hagamos $\varphi_n = \varphi * \Phi_{\frac{1}{n}}$, entonces para $n \gg 0$, todos los φ_n tienen soporte en un compacto fijo $K \subseteq \Omega$ y si $|\alpha| \leq l$, entonces

$$\|\partial^\alpha(\varphi - \varphi_n)\|_\infty = \|\partial^\alpha \varphi - (\partial^\alpha \varphi) * \Phi_{\frac{1}{n}}\|_\infty \to 0, \text{ cuando } n \to \infty.$$

De aquí, si u tiene una extensión que satisface 4.2, entonces $u(\varphi) = \lim_{n\to\infty} u(\varphi_n)$. Esto prueba la unicidad de la extensión y hace natural definir

$$u(\varphi) = \lim_{n\to\infty} u(\varphi_n).$$

El limite existe pues $u(\varphi_n)$ es una sucesión de Cauchy:

$$|u(\varphi_n) - u(\varphi_m)| = |u(\varphi_n - \varphi_m)| \leq C \sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha(\varphi_n - \varphi_m)\|_\infty \to 0$$

cuando $n, m \to 0$. Ahora si aplicamos 4.1 a φ_n y tomamos límite cuando $n \to \infty$ concluimos que 4.1 es valido para todo $\varphi \in C_0^l$ con soporte en el interior de K. $\square$

Como funcional lineal de $C_0^0(\Omega)$ puede ser identificado con una medida sobre Ω (esto es consecuencia del Teorema de Representación de Riesz-Markov como puede verse en la pagina 40 de [14]), hemos identificado a $\mathcal{D}_0'(\Omega)$ con el espacio de medidas en Ω. Por ultimo si una función integrable f es primero identificada con la medida fdx como se acostumbra en teoría de integración, y fdx es entonces identificada con una distribución, el resultado será por supuesto el mismo que si identificamos a f con una distribución directamente, de todo esto obtenemos el siguiente:

Corolario 4.14. *Medidas y distribuciones de orden 0 coinciden.*

Terminamos esta sección con un par de definiciones que nos serán de utilidad en el teorema principal, pero antes damos las nociones en las que estas se inspiran.
Si u es una función continua tal que $\partial_i u$ está definida en todos lados y es continua, obtenemos de la fórmula de integración por partes

$$\int (\partial_i u)\phi \, dx = -\int u \partial_i \phi \, dx, \text{ para todo } \phi \in C_0^\infty(\Omega),$$

de modo similar, si f es una función continua entonces

$$\int (fu)\phi \, dx = \int u(f\phi) \, dx, \text{ para todo } \phi \in C_0^\infty(\Omega)$$

donde $f\phi$ es otra función de prueba si $f \in C^\infty(\Omega)$. La siguiente definición es por lo tanto una extensión adecuada de lo anterior.

Definición 4.15. *Si $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ definimos*

$$(\partial_i u)(\phi) = -u(\partial_i \phi), \quad \phi \in C_0^\infty(\Omega), \tag{4.3}$$

y si $f \in C^\infty(\Omega)$ definimos

$$(fu)(\phi) = u(f\phi) \quad \phi \in C_0^\infty(\Omega), \tag{4.4}$$

Observemos de la Definición 4.9 que (4.3) y (4.4) definen distribuciones $\partial_i u$ y fu.

4.3. Problema de Bernstein

En lo que sigue ocuparemos la notación $\langle f, g\rangle$ para la imagen de $g \in \mathcal{D}(\Omega)$ bajo la distribución $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Dado un conjunto abierto $\Lambda \subseteq \mathbb{C}$, decimos que una función $\alpha : \Lambda \to \mathcal{D}'(\Omega)$ es **analítica** si

$$\lambda \to \langle \alpha(\lambda), g\rangle$$

es analítica sobre Λ para cada $g \in \mathcal{D}(\Omega)$.
Consideremos un polinomio

$$f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n],$$

y sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ la región donde f es no negativa en el interior y cero en la frontera. Para cualquier número complejo $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$ con $\Re(\lambda) > 0$ se puede definir una función continua $f_\Omega(\lambda) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ mediante

$$f_\Omega(\lambda)(\mathfrak{a}) = \begin{cases} f(\mathfrak{a})^\lambda = e^{\lambda \log f(\mathfrak{a})} & \text{si } f(\mathfrak{a}) > 0, \\ \\ 0 & \text{si } f(\mathfrak{a}) \leq 0 \end{cases}$$

$z^c = e^{c \log(z)}$ está bien definido pues $z = f(\mathfrak{a}) > 0$ y así $\log(z)$ es el logaritmo natural. De esto se sigue que para cualquier complejo λ con $\Re(\lambda) > 0$, la función $f_\Omega(\lambda)$ es localmente integrable y considerada como distribución (gracias al Ejemplo 4.12) mediante

$$\langle f_\Omega(\lambda), g\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f_\Omega(\lambda)(\mathfrak{a}) g(\mathfrak{a})\, d\mathfrak{a} \text{ con } g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

En estas condiciones la función

$$f_\Omega : \lambda \to f_\Omega(\lambda) \text{ de } \mathbb{C}_+ = \{\lambda \in \mathbb{C} : \Re(\lambda) > 0\} \text{ a } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$$

es una función analítica, la derivada compleja de $\langle f_\Omega(\lambda)\rangle$ para $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ está dada por

$$\int_{\mathbb{R}^n} \log(f(\mathfrak{a})) f_\Omega(\lambda)(\mathfrak{a}) g(\mathfrak{a})\, d\mathfrak{a}.$$

Consideramos el caso en que $\Re(\lambda) < 0$ y sea $a_0 \in \partial\Omega$, entonces si tomamos $\{a_j\}_{j=1}^\infty$ con $a_j \in \Omega$ tal que $a_j \to a_0$, tenemos

$$|f(\mathfrak{a}_\mathfrak{j})^\lambda| = \frac{1}{e^{-\lambda_1 \log(f(\mathfrak{a}_\mathfrak{j}))}} \to +\infty \text{ cuando } \mathfrak{a}_\mathfrak{j} \to \mathfrak{a}_0.$$

El objetivo es continuar analíticamente la distribución definida por f_Ω como una función analítica (distribución-valuada) de λ a todo el plano complejo. En una publicación de 1963 en el Amsterdam Congress [7], I.M Gelfand perfecciono esta cuestión pidiendo adicionalmente que uno muestre que los polos están sobre un número finito de progresiones aritméticas.
En 1972, Bernstein produjo una hermosa demostración cuyo resultado depende solo de la teoría de módulos sobre el álgebra de Weyl A_n. Preparamos aquí una versión de esta prueba. Para ello haremos uso de los resultados previos de distribuciones.

Antes de iniciar haremos algunos comentarios que creemos importantes y que forman parte de la estrategia en la prueba.
Primeramente usamos que cierto conjunto de funciones $\mathcal{S}$ es un módulo sobre el álgebra $A_n(\mathbb{C}[\omega])$ la cual no es el álgebra de Weyl $A_n(\mathbb{C}(\omega))$ puesto que esta se ha definido sobre un campo. Aunque es muy parecida a esta, el hecho esencial es que $A_n(\mathbb{C}[\omega])$ es un subanillo de $A_n(\mathbb{C}(\omega))$ con generadores $x_1, \ldots, x_n, \partial_1, \ldots, \partial_n$ sobre el anillo de polinomios $\mathbb{C}[\omega]$. La razón de usar este anillo es porque el Corolario 3.10 nos permite trabajar a este nivel mas sencillo.
Luego del hecho que podemos escribir el producto de la función f^{-1} por la distribución $f_\Omega(\lambda)$ como la distribución $f_\Omega(\lambda-1)$ vemos que extender f_Ω de $\mathbb{C}_0$ a $\mathbb{C}_{-1}$ es equivalente a extender a $f^{-1}f_\Omega(\lambda)$ de $\mathbb{C}_1$ a $\mathbb{C}_0$, para lograr esto explotamos que existe una relación entre los módulos $\mathbb{C}[X, f^{-1}, \omega]f^{-r}F$ y $\mathbb{C}[X, f^{-1}, \omega] \cdot f_\Omega$ por medio de sus generadores y a través de un morfismo ϕ de $A_n(\mathbb{C}[\omega])$-módulos.
Finalmente en este punto es fundamental la fórmula

$$B(s) \cdot (f^{-1}F) = D(s) \cdot F,$$

que provee el Corolario 3.10, puesto que $B(s) \in \mathbb{C}[s]$ y $D(s) \in A_n(\mathbb{C})[s]$, más claramente este resultado nos permite relacionar la expresión

$$f^{-1}f_\Omega(\lambda) = f_\Omega(\lambda - 1,)$$

propia de la definición de $f_\Omega(\lambda)$ como distribución con la acción de $A_n(\mathbb{C}[\omega])$ sobre la función f_Ω y por medio del morfismo ϕ.

Teorema 4.16 (Bernstein)**.** *La función f_Ω se extiende como una función meromorfa de λ al plano complejo entero, con polos yaciendo sobre una cantidad finita de progresiones aritméticas $\{\lambda_i - m : m = 0, 1, 2, \ldots\}$.*

Demostración. Sea r el entero no negativo que provee el Corolario 3.10, también definamos [1] $\omega = s - r$ y $G = f^{-r}F$. Sea N el $A_n(\mathbb{C}[\omega])$-submodulo $\mathbb{C}[X, f^{-1}, \omega]G$ de

[1]con s como en el Lema 3.9 y f el polinomio elegido para el símbolo formal $F = f^s$

$M = \mathbb{C}(\omega)[X, f^{-1}]F$ (este ultimo es módulo sobre $A_n(\mathbb{C}[\omega])$ por restricción). Observemos que

$$\begin{aligned}
\partial_i \cdot G = \partial_i(f^{-r}F) &= \frac{\partial(f^{-r})}{\partial x_i}F + sf^{-r}\frac{\partial f}{\partial x_i}f^{-1}F \\
&= -rf^{-r-1}\frac{\partial f}{\partial x_i}F + sf^{-1}\frac{\partial f}{\partial x_i}f^{-r}F \\
&= (s-r)f^{-1}\frac{\partial f}{\partial x_i}f^{-r}F \\
&= (s-r)f^{-1}\frac{\partial f}{\partial x_i}G \\
&= \omega\frac{\partial f}{\partial x_i}f^{-1}G,
\end{aligned}$$

de modo que ω y G se comportan como los s y F del Lema 3.2 respectivamente. Para cualquier número real t consideremos el semi-plano derecho

$$\mathbb{C}_t = \{\lambda \in \mathbb{C} : \Re(\lambda) > t\}.$$

Sea

$$\mathcal{S} = \{\theta | \theta : \mathbb{C}_t \to \mathcal{D}' \text{ para algún } t \in \mathbb{R},\ \theta \text{ analítica}\}$$

y consideremos dos elementos de $\mathcal{S}$ como iguales si ellos coinciden en algún semi-plano. Entonces $\mathcal{S}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$, y ahora hacemos a $\mathcal{S}$ un $A_n(\mathbb{C}[\omega])$-módulo mediante definir las siguientes acciones:

$(\omega \cdot \theta)(\lambda) = \lambda\theta(\lambda)$,	λ en el dominio de θ;
$(\partial_i \cdot \theta) = \dfrac{\partial}{\partial x_i}\theta(\lambda)$,	la derivada parcial de la distribución $\theta(\lambda)$;
$(x_i \cdot \theta)(\lambda) = x_i\theta(\lambda)$,	el producto de la distribución $\theta(\lambda)$ y la función $h(x_i, \ldots, x_n) = x_i$.

Previamente hemos definido a f_Ω, como función en $\mathcal{S}$ por

$$\langle f_\Omega(\lambda), g\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f_\Omega(\lambda)(\mathfrak{a})g\, d\eta, \quad \lambda \in \mathbb{C}_0,\ g \in \mathcal{D}$$

con dominio en $\mathbb{C}_0$, y ahora usamos este símbolo para denotar todas las restricciones de f_Ω a los semi-planos $\mathbb{C}_t$, $t \geq 0$. Para $f_\Omega \in \mathcal{S}$ con dominio $\mathbb{C}_t$ definimos $f^{-1}f_\Omega$ con dominio $\mathbb{C}_{t+1}$ por

$$(f^{-1}f_{\Omega})(\lambda) = f_{\Omega}(\lambda - 1).$$

esto es motivado por el hecho que

$$\int_{\mathbb{R}^n} f^{-1}f_{\Omega}(\lambda)g\; d\mathfrak{a} = \int_{\mathbb{R}^n} f_{\Omega}(\lambda-1)g\; d\mathfrak{a} = \langle f_{\Omega}(\lambda-1), g\rangle$$

para todo $\lambda \in \mathbb{C}_t$, $t \geq 0$, y cualquier función de prueba $g \in \mathcal{D}$.
Según la definición de derivada de una distribución, vemos que para $\lambda \in \mathbb{C}_s$, $s \geq 1$, esta se escribe como

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f_{\Omega}(\lambda) = \lambda \frac{\partial f}{\partial x_i} f_{\Omega}(\lambda - 1).$$

El objetivo es extender el dominio de f_{Ω} de $\mathbb{C}_0$ a $\mathbb{C}_{-1}$, y vamos a lograr esto mediante extender el dominio de $f^{-1}f_{\Omega}$ de $\mathbb{C}_1$ a $\mathbb{C}_0$, aunque la extensión no permanecerá en $\mathcal{S}$, pues esta puede tener polos.
Veamos que existe un morfismo de módulos

$$\phi : N = \mathbb{C}[X, f^{-1}, \omega]G \to \mathbb{C}[X, f^{-1}, \omega] \cdot f_{\Omega} \subseteq \mathcal{S}$$

dado por

$$\phi(c(\eta, f^{-1}, \omega)G)(\lambda) = c(\eta, f^{-1}, \lambda) f_{\Omega}(\lambda),$$

lo anterior está bien definido ya que $\mathcal{S}$ es un $A_n(\mathbb{C}[\omega])$-módulo. Observemos que $\phi(\partial_i \cdot G) = \partial_i \cdot \phi(G)$:

$$\begin{aligned}
\phi(\partial_i \cdot G)(\lambda) &= \phi(\omega \frac{\partial f}{\partial x_i} f^{-1} G)(\lambda) \\
&= \lambda \frac{\partial f}{\partial x_i} f^{-1} f_{\Omega}(\lambda) \\
&= \lambda \frac{\partial f}{\partial x_i} f_{\Omega}(\lambda - 1) \quad \lambda \in \mathbb{C}_1 \\
&= \frac{\partial}{\partial x_i} f_{\Omega}(\lambda) \quad \lambda \in \mathbb{C}_1 \\
&= (\partial_i f_{\Omega})(\lambda) \quad \lambda \in \mathbb{C}_1 \\
&= (\partial_i \phi(G))(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}_1.
\end{aligned}$$

Sean $B(\omega) \in \mathbb{C}[\omega]$ y $D(\omega) \in A_n(\mathbb{C})[\omega]$ como en el Corolario 3.10. Entonces

$$B(\omega) \cdot (f^{-1}G) = D(\omega) \cdot G$$

de modo que

$$\begin{aligned}
B(\lambda)f_\Omega(\lambda-1) &= B(\lambda)(f^{-1}f_\Omega)(\lambda)\\
&= \phi(B(\omega)f^{-1}G)(\lambda)\\
&= \phi(D(\omega)\cdot G)(\lambda)\\
&= D(\lambda)f_\Omega(\lambda).
\end{aligned}$$

Así

$$\langle B(\lambda)f_\Omega(\lambda-1), g\rangle = \langle D(\lambda)f_\Omega(\lambda), g\rangle = \langle f_\Omega(\lambda), D^\# g\rangle$$

se cumple para todo $\lambda \in \mathbb{C}_1$ y para todo $g \in \mathcal{D}$, donde $D^\#$ denota el operador diferencial adjunto del operador diferencial $D(\lambda)$[2]. El lado derecho es definido sobre $\mathbb{C}_0$ y nos da una función analítica para cada $g \in \mathcal{D}$; de modo que f_Ω puede ser extendida a $\mathbb{C}_{-1}$ mediante hacer

$$\langle f_\Omega(\lambda-1), g\rangle = \frac{1}{B(\lambda)}\langle f_\Omega(\lambda), D^\# g\rangle.$$

Iterando el proceso mostramos que f_Ω puede ser extendida al plano complejo entero, con polos en $\lambda_i - m$, $m \in \{0,1,2,\dots\}$, donde $B(\lambda_i)=0$. □

[2]esto es posible de la definición de derivada parcial de una distribución, Definición 4.15.

Bibliografía

[1] A. Connes, *Nonconmutative Geometry*, Academic Press Inc., 1994.

[2] C. Nastasescu, F. Van Oystaeyen, *Methods of Graded Rings*, Lecture Notes in Mathematics, Springer 2004.

[3] G. R. Krause, T. H. Lenagan *Growth of Algebras and Gelfand-Kirillov Dimension*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 22, AMS, 2000.

[4] H. Hironaka, *Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero, I, II*, Ann. of Math. 79 (1964), 109-203, 205-326.

[5] I. N. Bernstein and S. I. Gelfand, *Meromorphy of the function* P^λ (Russian), Fun. An. and Applications 3 (1969), no. 1, 84-85.

[6] I. N. Bernstein, *Analytic continuation of generalized functions with respect to a parameter*, (Russian), Fun. An. and Applications 6 (1972) no. 4, 26-40.

[7] I.M. Gelfand, *Some aspects of functional analysis and algebra*, Proc. International Congress Math. (Amsterdam), 1954, pp 253-276.

[8] J. Dixmier, *Enveloping algebras*, North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York-Oxford, 1977, North-Holland Mathematical Library, Vol. 14, Traslated from the French.

[9] L. Hörmander, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators I*, 2nd ed. Springer, Berlin, 1990.

[10] P. Gabriel, *Des catégories abéliennes*, Bull. Soc. Math. France 90 (1962), 323-448. MR 0232821(38 # 1144).

[11] R. Martinez-Villa, J. Mondragon, *On the homogeneized Weyl algebra*, Preprint, arXiv:1210.8207v1[math.RA] 31 Oct 2012.

[12] R. Martinez-Villa, J. Mondragon, *Skew group algebras, invariants and Weyl algebras*, Preprint, arXiv:1211.0981v1 [math.RA] 5 Nov 2012.

[13] S. C. Coutinho *A Primer of Algebraic D-modules*, London Mathematical Society Student Texts 33, Cambridge University Press, 1995.

[14] W. Rudin. *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill Book, New York 1970.

[15] Y.I. Mannin, *Quantum groups and non-commutative geometry*, CRM, Montreal 1988.