



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**



FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES ZARAGOZA

DISIPACIÓN VISCOSA EN FLUJO OSCILANTE:

MODELO NO-NEWTONIANO DE ELLIS

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

INGENIERO QUÍMICO

PRESENTA:

LUIS ANGEL CASTILLO CRUZ

DIRECTOR DE TESIS:

DR. EDTSON EMILIO HERRERA VALENCIA

COASESOR DE TESIS:

DR. MARIANO PÉREZ CAMACHO

MÉXICO D.F. ABRIL 2015



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

FACULTAD DE ESTUDIOS
SUPERIORES "ZARAGOZA"

DIRECCIÓN

JEFE DE LA UNIDAD DE ADMINISTRACIÓN
ESCOLAR
PRESENTE.

Comunico a usted que al alumno(a) Castillo Cruz Luis Angel con número de cuenta 410042627 de la carrera Ingeniería Química, se le ha fijado el día 10 del mes de abril de 2015 a las 13:00 horas para presentar su examen profesional, que tendrá lugar en la sala de exámenes profesionales del Campus II de esta Facultad, con el siguiente jurado:

PRESIDENTE	I.Q. RAUL RAMÓN MORA HERNÁNDEZ
VOCAL	DR. EDTSON EMILIO HERRERA VALENCIA
SECRETARIO	M. en C. MARIANO PÉREZ CAMACHO
SUPLENTE	I.Q. ALEJANDRO JUVENAL GUZMÁN GÓMEZ
SUPLENTE	I.Q. CONSUELO MATÍAS GARDUÑO

Ramón
Edtson E. Herrera Valencia
Mariano Pérez Camacho
Alejandro Juvenal Guzmán Gómez
Consuelo Matías Garduño

El título de la tesis que se presenta es: **Disipación viscosa en flujo oscilante: Modelo no-newtoniano de Ellis.**

Opción de Titulación: Tesis profesional

ATENTAMENTE
"POR MI RAZA HABLARÁ EL ESPÍRITU"
México, D.F. a 20 de marzo de 2015.

DR. VÍCTOR MANUEL MENDOZA NUÑEZ
DIRECTOR

ZARAGOZA
DIRECCION

RECIBÍ
OFICINA DE EXÁMENES PROFESIONALES
Y DE GRADO

Va. Bn. *Dominga Ortiz Bautista*
I.Q. DOMINGA ORTIZ BAUTISTA
JEFA DE LA CARRERA DE I.Q.

AGRADECIMIENTOS

- A la Carrera de Ingeniería Química, de la Facultad de Estudios Superiores Zaragoza, Universidad Nacional Autónoma de México.
- Al Dr. Fausto calderas por los comentarios y sugerencias en la parte de reometría y el análisis de este trabajo.
- Al M. en C. Mariano Pérez Camacho por sus valiosas aportaciones, comentarios y sugerencias para la comparación y discusión de los datos experimentales.
- A mi asesor el Dr. Edtson Emilio Herrera Valencia, por el tiempo dedicado para lograr este proyecto, gracias por su vasto conocimiento y experiencia, por enseñarme cosas más allá de lo académico, gracias por esos momentos de reflexión y animo que me ayudaron a ampliar mi visión profesional, así como de la vida.
- A la I.Q. Consuelo Matías Garduño por sus valiosas aportaciones y comentarios en la parte de aplicación.
- Al I.Q. Raúl Ramón Mora Hernández por sus valiosas aportaciones y comentarios.
- Al I.Q. Alejandro Juvenal Guzmán Gómez por sus valiosas aportaciones y comentarios.
- Finalmente agradezco a todas aquellas personas que me apoyaron a lo largo de mi crecimiento personal y profesional y que de alguna manera ayudaron en la culminación de este trabajo muchas gracias.
- Investigación realizada gracias al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) de la UNAM << IN115615 >> << Fenómenos de Transporte y Reología de Fluidos Complejos aplicados a Sistemas Biológicos >>. Agradezco a la DGAPA-UNAM la beca recibida.



DEDICATORIAS

A dios por darme la familia y amigos que me acompañan en mi vida y que son parte fundamental de lo que soy hoy en día.

*A mi madre **Hortensia Cruz Monter**: por ser la persona que más admiro en esta vida, por enseñarme que todo se logra a base de trabajo y sacrificio, por demostrarme como seguir adelante por más dura que sea la prueba, por su amor incondicional desde el inicio y por todo el sacrificio que ha hecho por mí y solo le pido a Dios que me alcance la vida y me dé tiempo para regresarle aunque sea tan solo un poco de lo mucho que me ha dado. **TE AMO MAMÁ.***

*A mi padre **Juan Castillo Popoca**: que hoy me acompaña en espíritu pero que desde donde esta sé que comparte este logro conmigo, gracias por ser un excelente papá por enseñarme en el tiempo que estuvimos juntos como llegar hacer un hombre de éxito, gracias por dejarme una herencia invaluable que son mi mamá y mis hermanos, solo me resta decirte que te amo y que seguiré adelante hasta el día que volvamos a vernos y que nunca te olvidare porque en la pared cuelga tu fotografía y tu recuerdo me acompaña a todas horas en el día sé que estas volando alto y que nos cuidas desde el cielo.*

*A mi hermano **Juan Castillo Cruz**: por estar siempre a mi lado, por ser ese amigo de 24 hrs con quien podía jugar en cualquier momento, por preocuparse por darme lo mejor y por ser un gran ejemplo de superación, porque eres quien me ha enseñado como ser un hombre de bien, por mostrarme el camino que debo seguir, yo sé que te toco un papel más difícil entre los hermanos pero por esa gran dedicación y empeño eres mi ejemplo y mi modelo a seguir.*

*A mi hermana **Ivonne Castillo Cruz**: por su gran cariño y alegría que me ha dado siempre que me siento desanimado o triste, por ser una linda hermana que siempre busca que haya una sonrisa en mi rostro, por enseñarme que nunca hay que rendirse hasta lograr el éxito.*

*A **Stephany López Moreno**: por su amistad, cariño y su incondicional amor, por estar siempre que la necesite apoyándome en todo, por darme aliento cuando decaía para no dejarme vencer, por ser una alegría en mi vida y una razón más para ser una mejor persona cada día. Te dedico este logro por ser mi compañera de clase, mi amiga y hoy en día por ser una linda novia. Con una mano en el corazón quiero decirte que cada vez que crezco como persona es porque tú trasciendes en mi **te amo.***

*A **Carlos Alberto Zúñiga Cruz**: por su apoyo incondicional que me ha dado siempre, por ser un excelente primo, por ser un gran ejemplo en la familia y por motivarme a concluir todos mis logros.*

*A cada uno de mis amigos: que hice durante este duro camino en la universidad, pero en especial a: **Haide, Nohemí, Enrique y Ricardo** por ser con quienes compartí la mayoría de horas de clase, trabajo, tareas y exámenes, gracias por su apoyo y amistad que hizo posible que lograra cumplir está meta.*

APORTACIÓN AL CONOCIMIENTO

Este trabajo versa en la descripción del flujo vibrátil en un capilar en donde por efecto de la fuerza macroscópica se induce un aumento en la temperatura de bulto. Las principales aportaciones al conocimiento de esta investigación, se resumen a continuación:

- a) Estudio del efecto del flujo oscilante en fluidos no-newtonianos en un sistema cilíndrico, acoplando la transferencia de momento y de energía.
- b) El fluido no-newtoniano fue caracterizado mediante la ecuación reológica de Ellis. Este modelo acopla el modelo de Newton con el de Ostwald (Ley de potencia).
- c) Los efectos de transferencia de energía fueron modelados despreciando los efectos temporales y convectivos de la ecuación de transporte de energía.
- d) Los mecanismos de energía se deben a la conducción y disipación viscosa por efecto de la fuerza macroscópica.
- e) El sistema de ecuaciones diferenciales acopladas se resolvieron mediante un método perturbativo el cual supone como hipótesis que la velocidad axial en el tubo se puede descomponer en un valor promedio y una fluctuación alrededor del promedio.
- f) Se obtuvieron expresiones analíticas para perfil de velocidad, flujo volumétrico, perfil de temperatura, aumento en el flujo y número de Nusselt.
- g) Se propuso un conjunto de variables adimensionales las cuales permitieron acotar el sistema y facilitar el análisis computacional a través de números adimensionales.
- h) Todas las variables dinámicas dependen del número de Reynolds y de la frecuencia de oscilación en la perturbación.
- i) El aumento del flujo y la temperatura dependen de las propiedades no newtonianas del líquido complejo, de las propiedades de transporte de energía y de la frecuencia asociada con la perturbación.

Para concluir los objetivos planteados en este trabajo se reforzaron los conocimientos matemáticos en general así como de ecuaciones diferenciales, fenómenos de transporte, adimensionamiento de ecuaciones, modelado de procesos, conocimiento de conceptos básicos de reología, fluidos complejos, polímeros y uso de software matemático.



ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE DE FIGURAS	X
ÍNDICE DE TABLAS	XIII
NOMENCLATURA	XIV
GLOSARIO	XVII
RESUMEN	XIX
ABSTRACT.....	XX
CAPÍTULO I	1
INTRODUCCIÓN	1
1.1 Fluidos viscosos en la industria.....	2
1.2 Flujos pulsátiles y oscilantes.....	3
1.3 Modelos constitutivos reológicos.....	4
1.5 Disipación viscosa.....	5
1.6 Aplicaciones.....	7
1.6.1 Extracción de petróleo terciaria.....	7
1.6.2 Extrusión de polímeros y nanocompuestos con boquillas oscilantes.....	7
1.6.3 Sistemas Biológicos.....	8
1.7 Motivación y distribución del material	9
CAPÍTULO II	12
OBJETIVOS E HIPÓTESIS.....	12
2.1 Objetivos	13
2.1.1 Objetivo general	13
2.1.2 Objetivos particulares.....	13
2.2 Hipótesis del trabajo.....	13
CAPÍTULO III.....	14
MARCO TEÓRICO	14
3.1 Reología.....	15
3.2 Tensor de deformación.....	15
3.3 Tensor gradiente de velocidad y su traspuesta.....	16
3.4 El tensor rapidez de deformación.....	16
3.5 El tensor de vorticidad.....	17



3.6 Segundo invariante del tensor rapidez de deformación.....	18
3.7 Tensor de esfuerzos.....	18
3.8 Fluidos newtonianos.....	19
3.9 Fluidos no newtonianos.....	19
3.10 Ecuaciones constitutivas.....	20
3.11 Métodos reométricos.....	23
3.12 Polímeros.....	25
3.12.1 Clasificación de polímeros.....	26
3.12.1.1 De acuerdo a su origen: Naturales, Semisintéticos y Sintéticos.....	26
3.12.1.2 De acuerdo a su composición química de la cadena principal.....	26
3.12.1.3 De acuerdo a su estructura.....	27
3.12.1.4 De acuerdo a su comportamiento frente al calor.....	28
3.12.2 Procesamiento de polímeros.....	28
3.13 Polietileno de baja densidad.....	28
3.13.1 Descripción de las propiedades del LPDE.....	29
3.13.2 Aplicaciones.....	30
3.13.3 Ventajas y Desventajas.....	30
3.14 Extrusión.....	30
3.15 Resumen de los conceptos teóricos y aplicaciones.....	31
CAPÍTULO IV.....	33
PLANTEAMIENTO FÍSICO DEL PROBLEMA.....	33
4.1 Planteamiento del problema.....	34
4.2 Modelado.....	35
4.2.1 Ecuación de momento y conservación de masa.....	35
4.2.2. Función estocástica.....	37
4.2.3 Ecuación constitutiva de Ellis.....	38
4.2.4 Aumento de flujo y fracción de potencia.....	38
4.2.5 Ecuación de transferencia de energía.....	39
4.2.5.1 Trabajo irreversible en contra de las fuerzas viscosas.....	39
4.2.5.2 Ley de Fourier.....	39
4.3 Resumen de las ecuaciones obtenidas.....	41



CAPÍTULO V	42
MODELADO TEÓRICO	42
5.1 Cálculo de la velocidad axial vibrátil.....	43
5.2 Cálculo del flujo volumétrico a gradiente de presión constante modificado por los mecanismos inerciales.....	45
5.3 Cálculo del flujo volumétrico promediado	46
5.4 Cálculo del aumento en el flujo volumétrico	47
5.5 Cálculo de la fracción de potencia	48
5.6 Disipación viscosa.....	49
5.6.1 Cálculo del perfil de temperatura	49
5.6.2 Cálculo de la temperatura promedio espacial.....	50
5.6.3 Cálculo de la temperatura promedio temporal	52
5.6.4 Número de Nusselt	53
5.7 Repaso de las principales ecuaciones obtenidas en este capítulo.	53
5.7.1 Velocidad axial.....	54
5.7.2 Flujo volumétrico vibrátil.....	55
5.7.3 Eficiencia del flujo volumétrico	56
5.8 Transporte de Energía	57
5.8.1 Perfil de temperatura general.....	57
5.8.2 Número de Nusselt	58
CAPÍTULO VI	59
SIMULACIONES COMPUTACIONALES	59
6.1 Variables adimensionales.....	60
6.2 Ecuaciones adimensionales.....	62
6.3 Números adimensionales	63
6.4 Perfil de velocidad.....	64
6.5 Flujo volumétrico	67
6.6 Aumento en el flujo volumétrico	69
6.7 Perfil de temperatura adimensional.....	73
6.8 Perfil de temperatura promedio adimensional modificada por mecanismos inerciales	75
6.9 Número de Nusselt adimensional.....	78



6.10 Aplicación a dinámica de polímeros (LDPE)	81
6.10.1 Perfil de velocidad	81
6.10.2 Flujo volumétrico	84
6.10.3 Aumento en el flujo volumétrico	87
6.10.4 Perfil de temperatura	88
6.10.5 Perfil de temperatura promedio	91
6.10.6 Número de Nusselt	93
CAPÍTULO VII	95
ANÁLISIS DE RESULTADOS	95
7.1 Sistema de estudio	96
CAPÍTULO VIII	100
CONCLUSIONES	100
8.1 Descripción física del problema	101
8.2 Flujo y Reología	101
8.3 Aumento en el flujo y fracción de potencia	101
8.4 Balance energético	102
8.5 Propiedades materiales y de proceso	102
8.6 Cálculo experimental de las propiedades materiales	103
CAPÍTULO IX	104
TRABAJO FUTURO	104
9.1 Efectos convectivos y transitorios en la temperatura	106
9.2 Métodos matemáticos y computacionales	107
9.3 Sistemas y Reometría	107
REFERENCIAS	108



ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. Representación de un extrusor con boquillas oscilantes.	8
Figura 2. Representación esquemática de un polímero formado por la unión de monómeros.	25
Figura 3. Cuadro representativo de las diferentes clasificaciones de polímeros.	27
Figura 4. Polimerización de etileno.	29
Figura 5. Representación de un polímero extruido en un extrusor simple.	31
Figura 6. Representación del flujo oscilante de un líquido con estructura transitoria.	34
Figura 7. Representación esquemática del flujo entrando a un dado oscilante con un perfil de velocidad desarrollado, a una temperatura promedio T_0 y sometida a una oscilación en la pared con temperatura constante T_0	34
Figura 8. Velocidad axial adimensional vs la coordenada radial adimensional, como función del esfuerzo en la pared.	64
Figura 9. Velocidad axial adimensional vs la coordenada radial adimensional para diferentes valores del parámetro alfa en función de los mecanismos adelgazantes al corte.	65
Figura 10. Velocidad axial adimensional vs la coordenada radial adimensional para diferentes valores del esfuerzo en la pared.	66
Figura 11. Flujo volumétrico adimensional vs esfuerzo adimensional en la pared en función de los mecanismos adelgazantes al corte. La gráfica insertada ilustra el comportamiento newtoniano ($\alpha = 1$).	67
Figura 12. Flujo volumétrico adimensional vs esfuerzo adimensional en la pared en función de los mecanismos adelgazantes al corte del modelo de Ellis. La gráfica insertada ilustra el comportamiento newtoniano ($\alpha=1$).	68
Figura 13. Aumento en flujo volumétrico vibrátil vs esfuerzo en la pared en función de los mecanismos adelgazantes al corte.	69
Figura 14. Aumento en el flujo volumétrico vibrátil vs esfuerzo en la pared en función de los mecanismos adelgazantes al corte.	70
Figura 15. Aumento en el flujo volumétrico vibrátil vs esfuerzo en la pared en función de la amplitud de fuerza macroscópica.	71

Figura 16. Aumento en flujo volumétrico vibrátil vs esfuerzo en la pared en función de los mecanismos adelgazantes al corte.	72
Figura 17. Perfil de temperatura adimensional vs coordenada radial adimensional en función de los mecanismos adelgazantes al corte.....	73
Figura 18. Perfil de temperatura promedio adimensional vs esfuerzo adimensional en la pared en función de los mecanismos adelgazantes al corte.	74
Figura 19. Perfil de temperatura promedio adimensional vs esfuerzo adimensional en la pared en función de los mecanismos adelgazantes al corte.	75
Figura 20. Perfil de temperatura promedio adimensional vs esfuerzo adimensional en la pared en función de los mecanismos viscosos e inerciales a través del número de Reynolds.	76
Figura 21. Perfil de temperatura promedio adimensional vs esfuerzo adimensional en la pared en función de la frecuencia.	77
Figura 22. Número de Nusselt adimensional vs el esfuerzo adimensional en la pared, en función de los mecanismos adelgazantes al corte.....	78
Figura 23. Número de Nusselt adimensional vs el esfuerzo adimensional en la pared, en función de los mecanismos viscosos e inerciales a través de la frecuencia.....	78
Figura 24. Número de Nusselt adimensional vs el esfuerzo adimensional en la pared, en función de los mecanismos viscosos e inerciales a través de la amplitud.	79
Figura 25. Perfil de velocidad axial adimensional vs coordenada radial adimensional como función de esfuerzo en la pared.	81
Figura 26. Perfil de velocidad axial adimensional vs coordenada radial adimensional, con la contribución de la fuerza macroscópica y los efectos inerciales, en función del esfuerzo en la pared.....	82
Figura 27. Perfil de velocidad axial adimensional vs coordenada radial adimensional con la contribución de la fuerza macroscópica y los efectos inerciales, en función de la frecuencia.....	82
Figura 28. Perfil de velocidad axial adimensional vs coordenada radial adimensional, con la contribución de la fuerza macroscópica y los efectos inerciales, en función del número de Reynolds.....	83



Figura 29. Flujo volumétrico vs esfuerzo en la pared con las contribuciones de la fuerza macroscópica y los efectos inerciales en función de la frecuencia. La gráfica insertada ilustra el flujo volumétrico sin la fuerza macroscópica y sin los mecanismos inerciales.....84

Figura 30. Flujo volumétrico vs esfuerzo en la pared con las contribuciones de la fuerza macroscópica y los efectos inerciales en función de la amplitud del sistema. La gráfica insertada ilustra el flujo volumétrico sin perturbación.85

Figura 31. Flujo volumétrico vs esfuerzo en la pared con las contribuciones de la fuerza macroscópica y los efectos inerciales en función del número de Reynolds. La gráfica insertada ilustra el flujo volumétrico sin perturbación.85

Figura 32. Aumento en flujo vibrátil vs esfuerzo en la pared en función del parámetro “M” el cual está asociado con la amplitud del sistema.87

Figura 33. Aumento en flujo vibrátil vs esfuerzo en la pared en función del parámetro “M”, el cual está asociado con la amplitud del sistema.87

Figura 34. Perfil de temperatura adimensional vs coordenada radial adimensional.88

Figura 35. Perfil de temperatura adimensional vs coordenada radial adimensional con las contribuciones de la fuerza macroscópica y los efectos inerciales.89

Figura 36. Perfil de temperatura adimensional vs coordenada radial adimensional con la contribución de la fuerza macroscópica y los efectos inerciales en función de la amplitud “M”.89

Figura 37. Perfil de temperatura adimensional vs coordenada radial adimensional con las contribuciones de la fuerza macroscópica y los efectos inerciales en función de la frecuencia (ω).90

Figura 38. Perfil de temperatura promedio adimensional vs coordenada radial adimensional con las contribuciones de la fuerza macroscópica y los efectos inerciales en función de la frecuencia. La gráfica insertada muestra el perfil de temperatura promedio sin perturbación.91

Figura 39. Perfil de temperatura promedio adimensional vs coordenada radial adimensional con las contribuciones de la fuerza macroscópica y los efectos inerciales en función de los mecanismos viscosos e inerciales a través del número de Reynolds.91



Figura 40. Perfil de temperatura promedio adimensional vs coordenada radial adimensional con las contribuciones de la fuerza macroscópica y los efectos inerciales en función de la amplitud “M”	92
Figura 41. Número de Nusselt adimensional vs el esfuerzo en la pared, en función de los mecanismos viscosos e inerciales a través de la amplitud. La gráfica insertada ilustra el número de Nusselt sin el efecto de la perturbación.	93
Figura 42. Número de Nusselt adimensional vs el esfuerzo en la pared, en función de los mecanismos viscosos e inerciales a través de la frecuencia. La gráfica insertada ilustra el número de Nusselt sin el efecto de la perturbación.	93

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1. Ecuaciones básicas	41
Tabla 2. Variables dimensionales y adimensionales.	60
Tabla 3. Variables características.	61



NOMENCLATURA

Vectores y tensores

σ	Tensor de esfuerzos viscoso [Pa]
D	Tensor rapidez de deformación [1/s]
$\nabla \mathbf{V}$	Tensor gradiente de velocidad [1/s]
$\nabla \mathbf{V}^T$	Tensor gradiente de velocidad transpuesto [1/s]
\mathbf{V}	Vector de velocidad [m/s]
\mathbf{g}	Vector de aceleración de la gravedad [1/s]

Operadores Matemáticos

$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}$	Operador Nabla [1/m]
$\frac{\partial}{\partial x^i}$	Derivada parcial de la coordenada x^i [1/m]
$D/Dt = \partial/\partial t + \mathbf{V} \cdot \nabla$	Derivada material [1/s]
$\nabla \cdot$	Operador divergencia [1/m]
$\langle \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T dt$	Operador promedio [1]
π	Constante Pi [1]

VARIABLES DIMENSIONALES

a	Radio del capilar [m]
E (%)	Fracción de energía consumida [1]
I (%)	Aumento en el flujo volumétrico [1]
L	Longitud del capilar [m]
V_z	Componente axial del vector de velocidad [m/s]
T	Período [s]
r	Coordenada radial adimensional [m]



t	Tiempo [s]
t_{car}	Tiempo característico [s]
Q	Flujo volumétrico [m^3/s]
$n(t)$	Función estocástica [1]
Variables adimensionales	
Q^* estacionario [1]	Flujo volumétrico adimensional en estado no estacionario [1]
Q_0^* [1]	Flujo volumétrico adimensional en estado estacionario [1]
V_z^*	Velocidad axial adimensional [1]
t^*	Tiempo adimensional [1]
τ	Esfuerzo cortante adimensional [1]
ω^*	Frecuencia angular adimensional [1]
Letras Griegas	
α	Exponente del modelo de Ley de potencia [1]
$\dot{\gamma}_{rz}$	Rapidez de deformación rz [1/s]
ν_0	Fluidez a baja rapidez de deformación [1/Pa s]
ν_1	Fluidez a moderada rapidez de deformación [1/Pa s ⁿ]
λ_0	Tiempo de relajación de Maxwell [s]
ω	Frecuencia [rad/s]
ρ	Densidad [Kg/m^3]
σ_{rz}	Componente rz del esfuerzo cortante [Pa]
σ_w	Esfuerzo en la pared [Pa]

GLOSARIO

Aumento en el flujo:	Porcentaje de aumento del flujo oscilante con respecto a un gradiente de presión constante.
Deformación:	Cambio relativo de la posición con respecto a otra en un medio continuo.
Ecuación constitutiva:	Ecuación que relaciona las variables dinámicas en un sistema (Esfuerzo y Deformación)
Ecuación de continuidad:	Ecuación diferencial parcial que representa la conservación de materia en un sistema físico.
Ecuación de movimiento:	Segunda ley de Newton aplicada a un medio continuo.
Estado estacionario:	Estado en el que ninguna propiedad dinámica del sistema depende del tiempo.
Fluido incompresible:	Fluido que tiene una densidad constante.
Fluido newtoniano:	Fluido con viscosidad constante e independiente de la rapidez de deformación.
Fluido no-newtoniano:	La viscosidad es una función de la rapidez de deformación.
Fluido adelgazante al corte:	Fluido que decrece su viscosidad por efecto de un aumento en la rapidez de deformación.
Fluido engrosante al corte:	Fluido que aumenta su viscosidad por efecto de un aumento en la rapidez de deformación.
Flujo pulsátil:	Flujo asociado a un gradiente de presión pulsátil representado por una función matemática estocástica.
Flujo vibrátil:	Flujo asociado a una perturbación oscilatoria en la pared, el cual puede ser representado por una función matemática de tipo estocástico (aleatorio).
Flujo volumétrico:	Volumen por unidad de tiempo.
Fracción de potencia:	Consumo de energía asociado a la perturbación pulsátil.
Función estocástica:	Función probabilística que evoluciona en el tiempo.



Modelo de Cross:	Modelo reológico de cuatro parámetros materiales que describe la viscosidad en función de la rapidez de deformación y que describe las dos zona a baja y alta rapidez deformación y la zona intermedia asociada a la ley de potencia.
Modelo de Ellis:	Ecuación constitutiva no newtoniana que contiene como caso particular el modelo newtoniano y el modelo de ley de potencia.
Rapidez de deformación:	Rapidez con la que se deforma un fluido.

RESUMEN

En este trabajo se estudia la transferencia de momento y energía en una tubería de radio $r = a$ y longitud $z = L$. En la pared del sistema, no se cumple la condición de adherencia y se impone una velocidad la cual depende de una función estocástica que describe el movimiento vibrátil de la pared. Para describir la reología y el flujo del sistema, el líquido no-newtoniano es caracterizado con un modelo no newtoniano tipo Ellis, el cual acopla el modelo newtoniano con el modelo ley de potencia. Suponiendo estado no-estacionario en la ecuación de momento, simetría cilíndrica, flujo unidireccional, fluido incompresible, efectos gravitacionales despreciables, y que los mecanismos de transferencia de energía son gobernados por el transporte molecular y la disipación viscosa. Para resolver el conjunto de ecuaciones diferenciales parciales acopladas, se propone un conjunto de variables con el fin de acotar el espacio de simulación y que aparezcan grupos adimensionales que permitan cuantificar los mecanismos globales en el sistema. A partir de las ecuaciones adimensionales expresiones analíticas para: (i) El perfil de velocidades axial, (ii) Flujo volumétrico, (iii) Aumento del flujo volumétrico, (iv) Fracción de potencia, (v) Perfil de temperaturas, (vi) Temperatura promedio y (vii) Numero de Nusselt en función de la fuerza motriz asociada al gradiente de presión y las propiedades no newtonianas, energía y de la fuerza macroscópica relacionada con la perturbación en la pared. Finalmente, se utilizan datos de un polímero comercial y se predicen las simulaciones correspondientes

Palabras claves: Flujo vibrátil, función estocástica, transporte de momento, transporte de energía, modelo de Ellis, porcentaje de aumento, disipación viscosa, número de Nusselt.



ABSTRACT

In this work, the rectilinear flow of a non-Newtonian liquid in an oscillating pipe with radius $r = a$ and axial length L is analyzed. The momentum and energy equations are solved and analytical expressions for the velocity and temperature fields are found. The nature of the velocity and temperature profiles is explored for a range of parameters. In general, it can be concluded that the temperature rise within the fluid increases with the speed of oscillation as the value of the Ellis power parameters increases. An effective heat transfer coefficient is calculated and plotted as a function of the normalized oscillation speed. The cases of a Newtonian, shear thinning and shear-thickening fluid are analyzed. Finally, velocity, temperature rise, flow enhancement and heat transfer coefficients are predicted using rheometric data from the literature.

Key words: Pulsatile flow, Ellis model, Flow enhancement, Viscous Dissipation



CAPÍTULO I

INTRODUCCIÓN



1.1 Fluidos viscosos en la industria

La mayoría de los estudios teóricos que envuelven el flujo de fluidos viscosos asumen un estado isotérmico; sin embargo, en práctica, muchos flujos están alejados de esta situación (Herrera-Velarde & Mena 2000; Herrera-Velarde et al. 2001, 2003). La combinación de altas viscosidades y elevados gradientes de velocidad resultan en un incremento significativo de la temperatura de bulbo del sistema lo que induce disipación viscosa en el sistema, es decir, que parte de la energía generada por efecto del rozamiento de las capas de fluido se disipa en forma de calor, por lo que el proceso es irreversible (Herrera-Velarde & Mena 2000; Herrera-Velarde et al. 2001, 2003).

En un contexto más general la disipación viscosa se puede interpretar como el trabajo irreversible en contra de las fuerzas viscosas y por lo tanto, es una energía que se pierde en forma de calor. (Bird et al. 1977; Pérez-Camacho et al. 2015 JNNFM).

Por una parte, existen sistemas biológicos en donde la disipación viscosa juega un papel preponderante en la descripción del flujo y la reología (Abou-Dakka et al. 2012). Las células ciliadas externas son las encargadas de amplificar el sonido que llega al oído interno (Abou-Dakka et al. 2012; Herrera-Valencia & Rey 2014)

Por otra parte, el estudio de la disipación viscosa en procesos poliméricos como la extrusión ha sido investigada con el uso de boquillas oscilantes, con lo cual se logra un aumento en la temperatura de bulbo del sistema con el fin de obtener una mayor procesabilidad de los fluidos poliméricos (Manero & Mena 1977; Casulli et al. 1990; Herrera et al. 2009, 2010; Herrera-Velarde & Mena 2001; Herrera-Velarde et al. 2009, 2010; Manero & Mena 1977; Manero et al. 1978).

En este mismo contexto, los sistemas oscilatorios se aplican a los fluidos complejos en pruebas de flujo oscilatorio a bajas frecuencias (Bird et al. 1977), con el fin de obtener información acerca de la respuesta mecánica del sistema (Calderas et al. 2009), más específicamente, para caracterizar las respuestas elásticas y viscosas a través de las propiedades materiales del sistema como son los tiempos de relajación y módulos elásticos (Bird et al 1977).

Sistemas diferentes han sido objeto de este estudio, por ejemplo la poliacrilamida que es un polímero de alto peso molecular, con componentes elásticas, (Barnes et al 1969, 1971). En este contexto, el polietileno de baja densidad ha sido empleado en los sistemas de extrusión con boquillas oscilantes las cuales aumentan la temperatura del sistema por efecto de la disipación viscosa aumentando la capacidad de procesamiento del material extruido (Herrera-Velarde & Mena 2000; Herrera-Velarde et al. 2001, 2002, Casulli et al 1990).

1.2 Flujos pulsátiles y oscilantes

El flujo pulsátil es uno de los sistemas más estudiados en la literatura concerniente a las áreas de fenómenos de transporte, reología y en ciencia de polímeros (Bird et al. 1977; Barnes 1969 1971). Actualmente, existen en la literatura de la mecánica del medio continuo dos grandes clasificaciones en fluidos oscilantes. El primero de estos, es el flujo a gradiente de presión pulsátil y el segundo es el perturbación oscilatoria en la pared a gradiente de presión constante (Herrera et al. 2009, 2010; Phan-Thien & Dudek 1982a,b; Phan-Thien 1978; Phan-Thien & Fang 1996). La investigación de flujos pulsátiles y oscilantes ha tenido gran relevancia en muchas ramas de la ciencia (Andrade de Lima & Rey 2005, 2006; Barnes et al. 1971). Por ejemplo, en Bio-reología, el estudio de la sangre en las venas es importante en la creación de anticoagulantes que permitan evitar ataques cardíacos (Owens 2006; Moyers-Gonzalez et al. 2009; Moyers-Gonzalez et al. 2008a-c). En este caso, el corazón, actúa como bomba peristáltica mandando pulsos al sistema lo que permite que el flujo volumétrico aumente y se consuma menos energía (Del Rio et al. 1998). En este punto el concepto de permeabilidad dinámica en medios porosos juega un papel muy importante en la descripción del flujo volumétrico pulsátil (Del Rio et al. 1998; Bird et al. 1977).

Del Rio et al. (1988) demostraron que para un fluido viscoelástico con mecanismos inerciales, la permeabilidad dinámica es una función compleja la cual, puede ser dividida en una parte real y otra imaginaria, las cuales dependen del número de Deborah y de la frecuencia en el espacio de Fourier. Del Rio (1988) demostró que la permeabilidad imaginaria, presenta efectos resonantes inducidos por un cociente de funciones de Bessel, las cuales están relacionadas al máximo gasto volumétrico.



1.3 Modelos constitutivos reológicos

El estudio de los sistemas de flujo pulsátil y vibrátil ha sido investigado a profundidad con diferentes ecuaciones constitutivas, las cuales describen la naturaleza viscosa, elástica y viscoelástica del material (Barnes et al. 1969, 1971; Bird et al. 1977; Del Rio et al. 1988; de Andrade Lima & Rey 2005, 2006; Herrera-Valencia 2009, 2010; Manero & Mena 1977; Manero et al. 1978; Mena et al. 1979; Phan-Thien & Dudek 1982; Phan-Thien 1978; Phan-Thien & Fang 1996; Sundstrom & Kaufman 1977). Ejemplos de estas ecuaciones constitutivas son: (i) Newton, (ii) Ostwald, (iii) Ellis, (iv) Maxwell, (v) Jeffreys, (vi) Oldroyd B, (vi) Giesekus, (vii) Bautista-Manero-Puig entre otras (Bird et al. 1977; Herrera et al. 2009, 2010). Algunos modelos han sido propuestos para investigar fluidos bio-reológicos como por ejemplo la sangre humana (Moyers Gonzlaez et al. 2009, 2008a-c; Moyers-Gonzalez & Owens 2010; Owens 2006). Todas estas ecuaciones reproducen en cierta medida el comportamiento complejo lineal y no lineal de estos materiales complejos (Ostwald 1925; Bird et al. 1977; Herrera et al. 2009, 2010). Estos modelos constitutivos han sido empleados con el fin de caracterizar la reología y el flujo de estos sistemas complejos los cuales, han sido acoplados con las ecuaciones de transferencia de energía y masa respectivamente.

1.4 Métodos analíticos y numéricos y paquetes computacionales

En las últimas décadas, pocos problemas se han podido resolver con métodos analíticos y ecuaciones constitutivas newtonianas y no-newtonianas respectivamente (Bird et al 1977). La mayoría de los resultados analíticos, asumen estado estacionario y que los procesos convectivos de transferencia de energía por convección es despreciable (Bird et al. 1977). En este punto, los métodos analíticos basados en teoría de perturbaciones y ecuaciones diferenciales parciales lineales, utilizando transformada de Laplace o Fourier y variable compleja con el fin de obtener los perfiles de temperatura y el flux de calor respectivamente (Bird et al. 1997)

Por otra parte, en el régimen no lineal, se han recurrido a los métodos numéricos basados en: (i) Diferencias finitas, (ii) Galerkin, (iii) Elemento Finito y (iv) Métodos

variacionales (De Andrade Lima y Rey 2005, 2006). Por último, los paquetes comerciales que involucran programas computacionales basados en métodos variacionales y elemento finito son punto de partida en la descripción física de estos sistemas (COMSOL MULTIPHYSICS; FLOW, CFD, etc).

1.5 Disipación viscosa

La mayoría de estudios que envuelven el flujo de un líquido viscoso en un cilindro, asumen la condición de que el proceso es isotérmico, con el fin de simplificar las expresiones analíticas y numéricas del problema (Herrera-Velarde & Mena et al. 2000; Herrera-Velarde et al. 2001, 2003). Sin embargo, en la práctica muchos de estos fluidos esto no ocurre (Casulli et al. 1990). La combinación de gradientes de velocidad elevados y fluidos muy viscosos promueven disipación en estos sistemas (Herrera-Velarde & Mena et al. 2000; Herrera-Velarde et al. 2001, 2003). Este efecto es utilizado en extrusión de polímeros en donde el incremento en la temperatura es utilizada para fundir los materiales.

El proceso de transferencia de energía ha sido estudiado extensivamente para el caso de fluidos newtonianos. Greatz (1883) analizo el problema clásico de convección forzada en un tubo utilizando distintas condiciones de frontera. En este problema, el considero que la transferencia de calor en la dirección axial de la geometría cilíndrica puede despreciarse (Greatz 1883; Bird et al. 1977).

Por una parte, Yin & Bau (1996) resolvió analíticamente el mismo problema que Greatz (1883) tomando en consideración la transferencia de energía en el sistema (fluido) y en la geometría. Sus resultados demostraron que la conducción de calor axial, juega un papel importante en transferencia de energía. En contraste, mucho menos trabajo se han desarrollado en el campo de la transferencia de calor en fluidos no-newtonianos (Herrera-Velarde & Mena 2000; Herrera-Velarde et al. 2001; 2003, Bird et al.1977). Por otra parte, Herrera Velarde et al. (2001, 2002) y Herrera-Velarde & Mena (2000) de mostraron que las propiedades no-newtonianas pueden cambiar drásticamente los mecanismo de transferencia de energía involucrados en los sistemas de estudio. El acoplamiento entre las ecuaciones de movimiento y la de energía puede hacerse suponiendo que las propiedades materiales del sistema son independientes de la temperatura, por lo que los casos generales en donde las



propiedades si dependen de la temperatura resultan en desarrollos analíticos y numéricos mucho más complejos (Herrera-Velarde & Mena 2000; Herrera-Velarde et al. 2001; 2003, Bird et al.1977).

El flujo polímeros y soluciones poliméricas en sistemas oscilantes ha sido estudiado extensivamente en condiciones isotérmicas por Mena et al. (1979). En estos sistemas, se impone una oscilación longitudinal en la pared del cilindro que contiene un líquido viscoelástico (Mena et al. 1979; Manero & Mena 1977; Manero et al. 1978). Los resultados de Mena et al. (1979) demostraron que los perfiles de velocidad y presión cambian drásticamente debido a la fuerza macroscópica y propiedades materiales del sistema. Ellos demostraron que las oscilaciones impuestas en el sistema, alteran las propiedades mecánicas y causa que la presión a lo largo del dado decrezca.

Recientemente Herrera-Velarde et al. (2001, 2003); Herrera-Velarde & Mena (2002) estudiaron analíticamente la disipación viscosa de un fluido viscoelástico en el régimen de bajas deformaciones en flujo vibrátil. Los resultados obtenidos muestran que el aumento en la temperatura es función de las propiedades materiales del sistema y la fuerza macroscópica debido a la oscilación exterior. El régimen viscoso no lineal fue caracterizado por un modelo tipo ley de potencia (Ostwald 1925).

Sin embargo los estudios de fluidos no newtonianos (polímeros) utilizados en sistemas de extrusión y extrusión con boquillas oscilantes, no toman en cuenta la contribución del solvente y solo modelan la del líquido complejo. Esto no es del todo correcto, porque la contribución del solvente juega un papel importante en muchos sistemas físicos y en especial en la ciencia de lubricación (Bird et al. 1977).

1.6 Aplicaciones

1.6.1 Extracción de petróleo terciaria

En recuperación de petróleo, un agente tensoactivo es inyectado en los yacimientos de petróleo con el fin de fracturar las rocas, y recuperar más crudo para su refinación y uso en la industria petroquímica. Por una parte, este trabajo se puede aplicar a fluidos micelares utilizados en la extracción terciaria de petróleo. Este tipo de fluidos se inyectan en los yacimientos de petróleo y debido a los gradientes de presión elevados y viscosidades extensionales, la roca se fractura y se puede recuperar mayores cantidades de crudo (Herrera et al. 2009, 2010). La solución micelar consiste en una mezcla de surfactante, alcohol, salmuera y crudo (Herrera et al. 2009, 2010). Esto simula el lavado de grasa con detergente ya que se logra desprender del crudo del medio poroso de la formación, para luego ser desplazado con agua (Herrera et al. 2009; 2010). Los reactivos químicos empleados, sus concentraciones en los procesos de inyección y los tamaños de los mismos, dependerán de las propiedades de los fluidos y del medio poroso de la formación, así como de las consideraciones económicas correspondientes (Del Rio et al. 1998). Dada la situación actual en el mercado de precio del petróleo, la recuperación adicional de petróleo con otros métodos alternativos, constituye una de las principales vías para aumentar el factor de recobro en los yacimientos (Herrera et al. 2009; 2010).

1.6.2 Extrusión de polímeros y nanocompuestos con boquillas oscilantes

Ejemplos de este tipo de flujos se pueden encontrar en ciencia de polímeros en el campo de extrusión de plásticos. La modificación de boquillas tradicionales por boquillas oscilantes incrementa la temperatura de bulto del sistema y puede ser utilizada en las propiedades mecánicas de estos sistemas. La teoría de boquillas oscilantes se puede aplicar a procesamiento, ciencia y nano ciencia de polímeros con el fin de calcular la disipación viscosa en la modificación de las boquillas que sirve para los extrusores y aumentar las capacidades mecánicas y de procesabilidad sería otra alternativa útil para el procesamiento de nuevos materiales (Herrera et al. 2009; 2010; Casulli et al. 1990; Manero & Mena 1978; Mena et al. 1979). Debido a la creciente crisis de petróleo en México, la extracción de crudo en los yacimientos petroleros es de suma importancia en nuestro presente y

futuro. En este campo, los líquidos complejos (sistemas micelares) han sido utilizados en la recuperación de petróleo. La extracción de cantidades adicionales de petróleo puede ser inducida (al ser inyectados) mediante fracturas hidráulicas en la formación de rocas. Recientemente, agentes tensoactivos catiónicos han sido escogidos para los procesos de fractura de rocas en yacimientos de petróleo porque, pueden mejorar las extracciones de cantidades adicionales de petróleo en comparación con los líquidos poliméricos (Schramm LL y Kutay SM 2000).

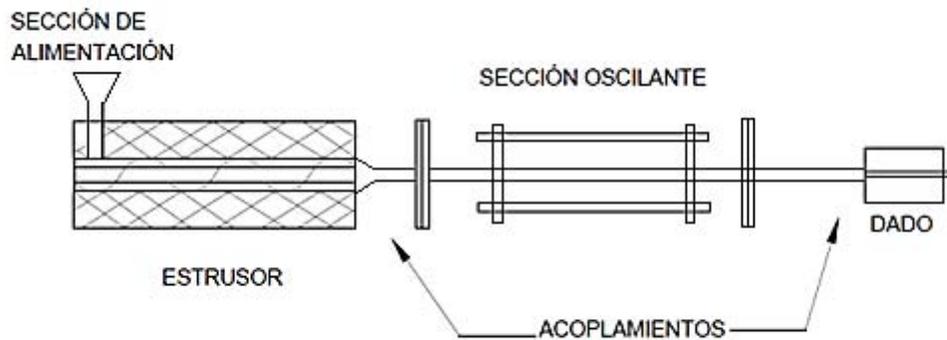


Figura 1. Representación de un extrusor con boquillas oscilantes.

1.6.3 Sistemas Biológicos

En Bio-reología un ejemplo clase es el sistema cardíaco que puede ser visualizado como un válvula pulsátil biológica (Anad & Rajagopal 2004; Del Rio et al. 1998; Moyers-Gonzalez et al. 2008a-c). El estudio mediante simulaciones computacionales, utilizando ecuaciones constitutivas han sido ampliamente reconocida (Del Rio et al. 1998; Rey & Herrera-Valencia 2012). Otra impactante manifestación biológica del flujo pulsátil es la que se presenta en la seda producida por las arañas. Este increíble proceso has sido estudiado ampliamente por los científicos de todo el mundo (Rey & Herrera-Valencia 2012). El procesos de la formación de la seda de la araña consiste en un líquido viscoelástico que está conformado por 9 proteínas, después de esto, el líquido se transforma en un cristal líquido nemático, es decir una sustancia que presenta fases entre el sólido y el líquido y que bajo



fuerzas externas se orientan las partículas materiales (Rey & Herrera-Valencia 2012). El tercer paso es un gel y por último se deshidrata la sustancia y se obtiene un hilo biológico capaz de superar al polímero sintético más resistente creado por el hombre (Kevlar). Una de las desventajas del Kevlar es que su síntesis se lleva a cabo a temperaturas cercanas a los 450 °C y como solvente ácido sulfúrico, por lo tanto es altamente contaminante (Rey & Herrera-Valencia 2012). Las células ciliadas se encuentran en el oído interno del sistema auditivo del cuerpo humano. Las células ciliadas se encargan de amplificar el sonido proveniente del oído externo y medio respectivamente, por lo que son conocidas como los motores biológicos del sistema auditivo humano, su funcionamiento depende de la capacidad que tienen estos organismos de cambiar su curvatura por efecto de los procesos electrofisiológicos, i.e. los campos eléctricos producidos por el cuerpo humano (Abou-Dakka et al. 2012; Herrera-Valencia & Rey 2014). La rapidez con la que cambian su curvatura las células ciliadas externas, en contacto con los canales iónicos ricos en electrolitos, inducen disipación viscosa, la cual es utilizada por estos mecanismos biológicos para amplificar el sonido (Abou-Dakka et al. 2012; Herrera-Valencia & Rey 2014).

1.7 Motivación y distribución del material

En este capítulo se ha presentado una breve introducción a los flujos pulsátiles vibrátiles y su aplicación a fluidos complejos que se estructuran bajo flujo. Se discutieron algunas de las aplicaciones más representativas, en las áreas de recuperación de petróleo, extrusión de polímeros, súper-fibras y membranas flexo-eléctricas tipo cristal líquido. Para representar el flujo pulsátil o vibrátil se han utilizados diferentes aproximaciones incluyendo ecuaciones constitutivas reológicas viscosas, viscoelásticas en los regímenes lineal y no lineal respectivamente. La mayoría de las aplicaciones importantes en la industria combina fluidos muy viscosos con elevados gradientes de velocidad.

La fricción entre las capas del fluido induce una degradación mecánica, es decir parte de la energía mecánica se degrada en calor, por lo que es una energía que se degrada.

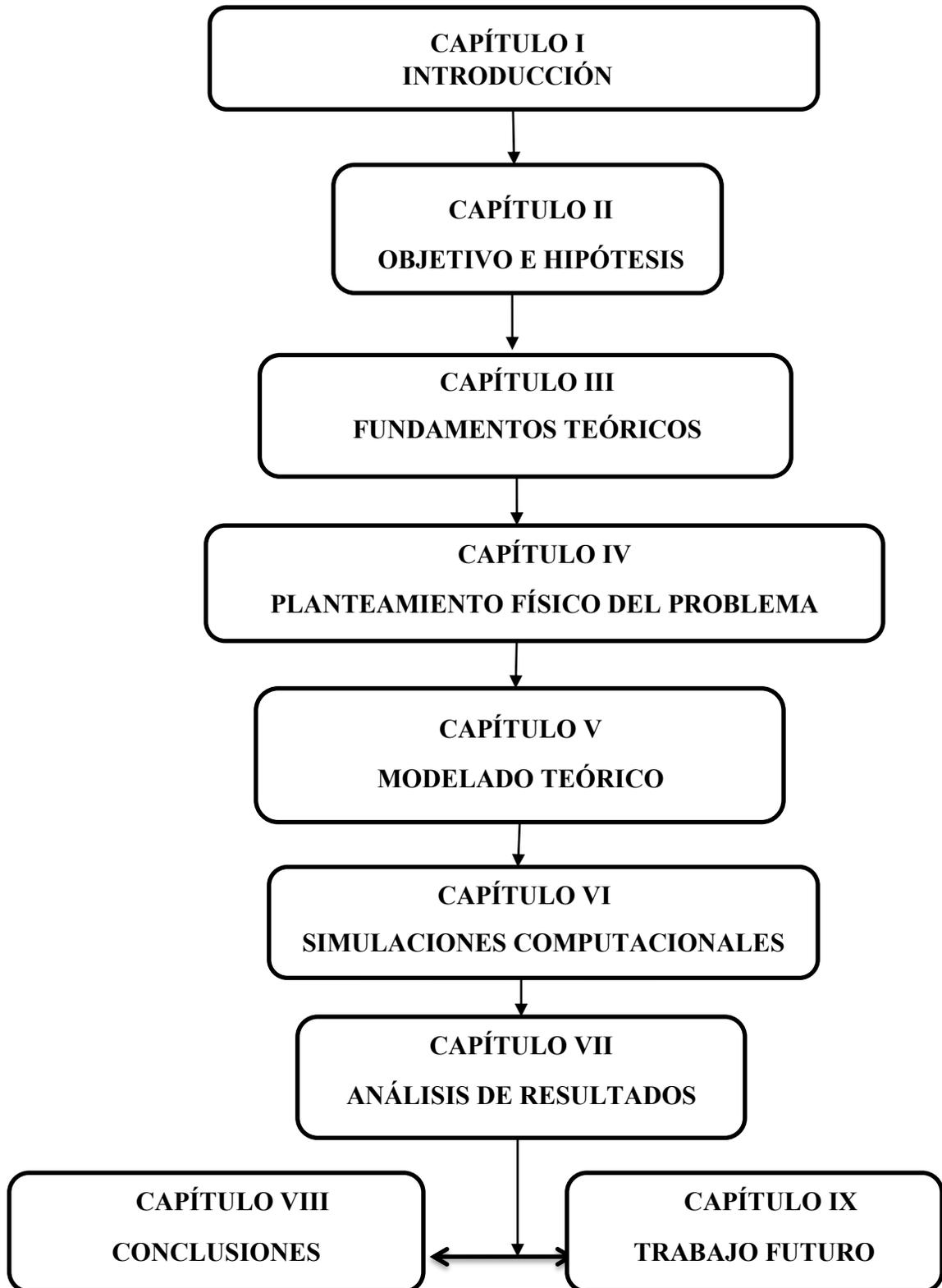
Sin embargo, esta energía puede ser utilizada para aumentar el procesamiento de polímeros líquidos mediante boquillas oscilantes o por sistemas biológicos que los



utilizan para amplificar el sonido o crear estructuras mecánicamente más resistentes que las que ha creado el hombre. En vista de su potencial aplicación en la industria petroquímica, super-fibras, reo-medicina, ciencia de polímeros, los sistemas de flujo vibrátil, pulsátil o combinación de ellas aplicados a líquidos complejos como son: (i) poliméricos, (ii) cristales líquidos, (iii) sistemas micelares etc., se han convertido en punto de partida de varios grupos de investigación en el mundo.

Por una parte, existen pocos trabajos que se han dedicado a acoplar el transporte de cantidad de movimiento, con el transporte de energía en fluidos no newtonianos. Por otra parte, la mayoría de las soluciones complejas ocupadas en la industria contienen contribuciones del solvente y del polímero y no solamente del polímero, en la mayoría de los casos, la primera se desprecia y solo se describe el flujo y la reología del polímero.

Precisamente, esta es la razón de esta propuesta de tesis de licenciatura, el estudio de líquidos no-newtonianos en flujo vibrátil y su aplicación a sistemas complejos. Por las razones antes expuestas, la originalidad de esta propuesta de radica en el estudio de la disipación viscosa en fluidos oscilantes no newtonianos separando la contribución del solvente y del polímero con una ecuación constitutiva reológica simple que desacopla la contribución del solvente y del polímero. El material de este trabajo, está distribuida en el siguiente esquema.



Organización del trabajo desarrollado en la tesis.



CAPÍTULO II

OBJETIVOS E HIPÓTESIS

2.1 Objetivos

Debido a las aplicaciones científicas y tecnológicas actuales y potenciales de los líquidos no-newtonianos, así como la ausencia de resultados analíticos simples en flujo pulsátil y oscilante que permitan contrastar las predicciones analíticas y numéricas con las observaciones experimentales, se justifica plenamente la originalidad de la investigación, contenida en el presente proyecto de licenciatura. A continuación, se presentan los objetivos generales y particulares.

2.1.1 Objetivo general

Describir el flujo oscilatorio y disipación viscosa de un fluido no newtoniano.

2.1.2 Objetivos particulares

- Acoplar las ecuaciones de movimiento y energía con una ecuación reológica que contiene como casos particulares el modelo newtoniano y el de ley potencia. El modelo no-newtoniano con el que se caracteriza el sistema, es la ecuación constitutiva de Ellis.
- Proponer un conjunto de variables adimensionales con el fin de obtener los grupos adimensionales que describen la física del sistema y nos permitan analizar casos asintóticos.
- Calcular los perfiles de velocidad, flujo volumétrico y temperatura.
- Obtener expresiones del aumento en el flujo, potencia consumida y número de Nusselt, en función de los parámetros adimensionales.
- Utilizar las predicciones teóricas para describir un fluido no newtoniano con datos provenientes de la literatura.

2.2 Hipótesis del trabajo

Si se incorpora una perturbación oscilatoria en la pared entonces se tendrá un efecto considerable en el aumento de flujo volumétrico y la temperatura como consecuencia de las propiedades no-newtonianas del sistema, las cuales son de vital importancia en la transferencia de energía.



CAPÍTULO III

MARCO TEÓRICO

3.1 Reología

La reología, es decir la ciencia del flujo y la deformación, estudia las propiedades mecánicas de los gases, líquidos, plásticos, sustancias asfálticas, materiales cristalinos y otros. Por lo tanto, el campo de la reología se extiende, desde la mecánica de fluidos newtonianos por una parte, hasta la elasticidad de Hooke (Bird et al. 1977). Por otra parte, la reología es la disciplina científica que se dedica al estudio de la deformación y flujo de la materia (Bird et al. 1977). Su objetivo está restringido a la observación del comportamiento de materiales sometidos a deformaciones muy sencillas, desarrollando posteriormente un modelo matemático que permita obtener las propiedades reológicas del material (Bird et al. 1977).

Un fluido es capaz de fluir debido a las fuerzas de cohesión en sus moléculas y suele deformarse continuamente cuando se somete a un esfuerzo cortante. La viscosidad μ es una propiedad de transporte, ya que cuantifica la conductividad de cantidad de movimiento a través de un medio conductivo o fluido. Se interpreta como la resistencia que ofrecen los fluidos a ser deformados cuando son sometidos a un esfuerzo (Bird et al. 1977).

3.2 Tensor de deformación.

El tensor de deformación es un tensor de segundo orden, el cual nos describe la deformación relativa de un medio continuo con respecto a una variable (Bird et al. 1977). El tensor de deformación, es adimensional debido a que $[u_i] = L; [x_i] = L$. Matemáticamente, se puede representar de la siguiente manera:

$$\nabla \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial x} \\ \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial y} \\ \frac{\partial u_x}{\partial z} & \frac{\partial u_y}{\partial z} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (1)$$



Es decir, el tensor rapidez de deformación es una matriz 3×3 , la cual describe el estado de deformación del material. Al tomar la derivada temporal de la Ec. (1) se obtiene el tensor gradiente de velocidad, el cual se describe en el siguiente punto.

3.3 Tensor gradiente de velocidad y su traspuesta.

Al tomar la derivada temporal del tensor de deformación, obtenemos el tensor gradiente de velocidad, el cual se puede expresar de la siguiente manera:

$$\nabla \mathbf{V} = \frac{d}{dt}(\nabla \mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial x} \\ \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial y} \\ \frac{\partial u_x}{\partial z} & \frac{\partial u_y}{\partial z} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (2)$$

El tensor gradiente de velocidad describe físicamente la variación de la velocidad punto por punto en el espacio (Herrera et al. 2009, 2010).

3.4 El tensor rapidez de deformación.

El tensor gradiente de velocidad físicamente, nos da información acerca de la evolución de la deformación en el medio continuo, y sus unidades son de inverso de tiempo. El tensor gradiente de velocidad $\nabla \mathbf{V}$ puede ser descompuesto en una parte simétrica $\mathbf{D} = (\nabla \mathbf{V})_S$ y anti simétrica $\mathbf{W} = (\nabla \mathbf{V})_A$ llamados tensor rapidez de deformación y tensor de vorticidad respectivamente (Bird et al. 2009, 2010).

$$\nabla \mathbf{V} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{V} + \nabla \mathbf{V}^T) + \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{V} - \nabla \mathbf{V}^T) = \mathbf{D} + \mathbf{W} \quad (3)$$

El tensor rapidez de deformación puede ser descrito matemáticamente en la siguiente forma:

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{V} + (\nabla\mathbf{V})^T) = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_x}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_y}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial y}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_z}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial z}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x}\right) & \frac{\partial V_y}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_z}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial z}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_x}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_y}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial y}\right) & \frac{\partial V_z}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (4)$$

Es importante notar, que el tensor de rapidez de deformación es un tensor de segundo orden simétrico, i.e., $\mathbf{D} = \mathbf{D}^T$. Físicamente nos da información acerca de la rapidez con que es deformado el sistema (Bird et al. 1977).

3.5 El tensor de vorticidad.

El tensor de vorticidad nos da información acerca de las rotaciones de los elementos materiales en el sistema:

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{V} - (\nabla\mathbf{V})^T) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_z}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial z}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_x}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial x}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_y}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial y}\right) & 0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

Es importante notar, que el tensor de vorticidad, es un tensor de segundo orden simétrico, es decir, $\mathbf{W} = -\mathbf{W}^T$. Físicamente nos da información acerca de las rotaciones de los elementos materiales en el medio continuo (Bird et al. 1977).



3.6 Segundo invariante del tensor rapidez de deformación.

El segundo invariante del tensor rapidez de deformación se obtiene tomando el doble producto punto entre los tensores rapidez de deformación. La expresión en coordenadas cartesianas toma la forma:

$$\begin{aligned} (\mathbb{II}_D)^2 = 2(\mathbf{D}:\mathbf{D}) = & \left(\frac{\partial V_x}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V_y}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V_z}{\partial z}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial V_y}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial y}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial V_z}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial z}\right)^2 \\ & + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial V_z}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial z}\right)^2 \end{aligned} \quad (6)$$

Es importante destacar que el segundo invariante del tensor rapidez de deformación nos da información física del tipo de flujo en el sistema y sus unidades son inverso de tiempo al cuadrado (Bird et al. 1977).

3.7 Tensor de esfuerzos.

El tensor de esfuerzos, es un tensor de segundo orden, el cual se puede describir como una matriz de 3 x 3 formada por nueve elementos. Los elementos a fuera de la diagonal principal son llamados esfuerzos cortantes, mientras que los elementos en la diagonal principal son llamados esfuerzo normales. Nótese, que los esfuerzos cortantes deforman continua e irreversiblemente el material, por lo que el sistema fluye. Mientras que los elementos en la diagonal principal modifican la forma geométrica del elemento de control, pero no su volumen. La representación del tensor de esfuerzos se puede expresar como:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (7)$$

Matemáticamente, es importante destacar que el tensor de esfuerzos es simétrico, es decir los elementos fuera de la diagonal principal, son iguales (Bird et al. 1977).

3.8 Fluidos newtonianos.

Los newtonianos son fluidos en los que el deslizamiento relativo de los volúmenes de control al circular uno sobre otro es proporcional al esfuerzo cortante sobre el fluido. Todos los gases, agua líquida y líquidos de moléculas sencillas (amoníaco, alcohol, benceno, petróleo, cloroformo, butano, etc.) son newtonianos. Las pastas, emulsiones, fluidos biológicos, polímeros, suspensiones de sólidos y otras mezclas son probablemente no newtonianos. Un fluido newtoniano se caracteriza por cumplir la Ley de Newton, es decir, que existe una relación lineal entre el esfuerzo cortante y la velocidad de deformación. La viscosidad de un fluido newtoniano no depende del tiempo de aplicación de esfuerzo, aunque sí puede depender tanto de la temperatura como de la presión a la que se encuentre (Bird et al. 1977). En esta ecuación tan simple, el esfuerzo cortante y la rapidez de deformación, siguen una relación lineal, y la ecuación básica de este sistema, se define como:

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu\mathbf{D} \quad (8)$$

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{V} + (\nabla\mathbf{V})^T) \quad (9)$$

La constante de proporcionalidad se denomina viscosidad newtoniana μ y se mide en Pa s (en SI). En la Ec. (8), el tensor de esfuerzo cortante, $\boldsymbol{\sigma}$ tiene unidades de Pa y el tensor rapidez de deformación \mathbf{D} (parte simétrica del tensor gradiente de velocidad) tiene inverso de segundo respectivamente. Por definición, todos aquellos fluidos que siguen las Ecs. (8, 9) son newtonianos (Bird et al. 1977).

3.9 Fluidos no newtonianos.

Las suspensiones densas, lodos, emulsiones, soluciones de polímeros de cadena larga, fluidos biológicos, alimentos líquidos, pinturas, suspensiones de arcillas y mezclas de hormigón son en general, no newtonianos. La relación entre esfuerzo cortante y la velocidad de deformación para fluidos no newtonianos, no es lineal. Estos fluidos a su vez se diferencian en dependientes e independientes del tiempo. Desde el punto de vista tecnológico e industrial, los fluidos no-newtonianos, son



aquellos que presentan aplicaciones tecnológicas y científicas más interesantes. La definición más simple y sencilla de un fluido no newtoniano, es aquella en donde la rapidez de deformación, no muestra una relación lineal entre el esfuerzo y la rapidez de deformación. En este punto la viscosidad no es constante y depende de la rapidez con la que se deforme, temperatura, presión y pH (Bird et al. 1977).

3.10 Ecuaciones constitutivas

En esta sección, se presentan algunas de las ecuaciones constitutivas más utilizadas en fenómenos de transporte y reología de fluidos complejos. La ecuación más simple es el modelo newtoniano, ya fue explicada en la parte de fluidos newtonianos (Bird et al. 1977). Algunos de los modelos no newtonianos más utilizados en la literatura especializada en el tema son:

3.10.1 Modelo de Ostwald de Waele (Ley de potencia)

El modelo más sencillo después del modelo newtoniano, es el de la ley de Potencia o de Ostwald de Waele (Ostwald 1925; Bird et al. 1977) el cual, tiene la siguiente representación matemática:

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\eta(\text{II}_D)\mathbf{D} = 2m\left(\sqrt{2(\mathbf{D}:\mathbf{D})}\right)^{n-1}\mathbf{D} = 2m(\text{II}_D)^{(n-1)/2}\mathbf{D} \quad (10)$$

En donde II_D es el segundo invariante del tensor rapidez de deformación, el cual se obtiene tomando el doble producto punto del tensor rapidez de deformación y posterior a eso, su raíz cuadrada. Este modelo contiene dos parámetros de ajuste m y n . El parámetro m es conocido como el índice de consistencia y n es exponente asociado al comportamiento no newtoniano del fluido. Debido a que n determina precisamente el modo en que se desarrolla el flujo, si $n < 1$ el fluido se denomina pseudoplástico (Adelgazante al corte), estos fluidos fluyen más fácilmente aumentados la velocidad de deformación. Por el contrario, cuando $n > 1$ la resistencia a fluir aumenta con un incremento en la velocidad de corte, y el fluido se denomina dilatante (engrosante al corte). Una limitación importante de la ley de la potencia es que es aplicable a un rango limitado de velocidades de corte. Además el valor de m

depende del valor numérico de n , con lo cual valores de m de distintos fluidos no son comparables (Ostwald 1925).

3.10.2 Modelo de Ellis

El modelo de Ellis, contiene tres propiedades materiales las cuales describen una primera zona newtoniana a baja rapidez de deformación y una zona intermedia relacionada con el modelo de ley potencia. Este modelo puede ser deducido mediante una combinación del modelo newtoniano y el de ley de potencia respectivamente, suponiendo que la rapidez de deformación es aditiva. La ecuación constitutiva de Ellis, contiene tres parámetros ajustables denotados por: $\{\varphi_0, \varphi_1, \alpha\}$ los cuales están relacionados con la fluidez a cortes bajos y moderados y el inverso del índice del modelo de ley de potencia (Bird et al. 1977). Este modelo admite soluciones analíticas en flujo cortante simple en diferentes situaciones de flujo para el perfil de velocidades, flujo volumétrico, función viscosidad, rapidez de deformación, etc.

$$2\mathbf{D} = v_0 \boldsymbol{\sigma} + v_1 |\boldsymbol{\sigma}|^{n-1} \boldsymbol{\sigma} \quad (11)$$

3.10.3 Modelo de Carreau

El siguiente modelo, fue propuesto por Carreau para describir toda la curva reológica, es decir a baja, moderada y alta rapidez de deformación respectivamente. Esta ecuación constitutiva, contiene cuatro parámetros ajustables: (i) viscosidad a corte bajo, (ii) viscosidad a alto corte, (iii) un tiempo asociado a la fluidez del material y (vi) un índice que caracteriza el engrosamiento o adelgazamiento al corte del fluido $\{\eta_0, \eta_\infty, \lambda, n\}$ respectivamente (Bird et al. 1977). La expresión matemática que describe el modelo de Carreau es la siguiente:

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\eta(\Pi_{\mathbf{D}}) \mathbf{D}$$

$$\eta(\Pi_{\mathbf{D}}) = \eta_\infty + \frac{\eta_0 - \eta_\infty}{\left\{1 + \left(\lambda \sqrt{2(\mathbf{D} : \mathbf{D})}\right)^2\right\}^{(n-1)/2}} \quad (12)$$



3.10.4 Modelo de Reiner-Phillipoff

El modelo de Reiner-Phillipoff es un modelo inelástico que contiene tres parámetros de ajuste asociados a las propiedades no-newtonianas del sistema (Bird et al. 1977). Esta ecuación constitutiva, contiene cuatro parámetros ajustables: (i) viscosidad a corte bajo, (ii) viscosidad a alto corte, (iii) un tiempo asociado a la fluidez del material y (iv) un índice que caracteriza el engrosamiento o adelgazamiento al corte del fluido respectivamente $\{\eta_0, \eta_\infty, \sigma_s\}$. La expresión matemática que describe el modelo de Reiner-Phillipoff es la siguiente:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= 2\eta(\Pi_D) \mathbf{D} \\ \eta(|\boldsymbol{\sigma}|) &= \eta_0 + \frac{\eta_0 - \eta_\infty}{1 + \left(\frac{|\boldsymbol{\sigma}|}{\sigma_s}\right)^2} \\ |\boldsymbol{\sigma}| &= \sqrt{\frac{1}{2}(\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\sigma})} \end{aligned} \quad (13)$$

En la Ec. (13) $||$ es el valor absoluto del tensor de esfuerzos. Es importante notar que la función viscosidad no depende de la rapidez de deformación, si no del segundo invariante del tensor de esfuerzos (Bird et al. 1977).

3.10.5 Fluido de Bingham

Estos fluidos presentan un comportamiento sólido mientras que el esfuerzo de corte no supere un esfuerzo conocido como de cedencia σ_0 . Por otra parte, una vez superado ese valor puede adoptar un comportamiento newtoniano (Plástico de Bingham). El modelo matemático que describe el plástico de Bingham, se presenta a continuación:

Plástico de Bingham

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{\sigma}| \geq |\boldsymbol{\sigma}_0| &\Rightarrow \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_0 + 2\eta_0 \mathbf{D} \\ |\boldsymbol{\sigma}| \leq |\boldsymbol{\sigma}_0| &\Rightarrow \mathbf{D} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (14)$$

En la Ec. (14) η_0 es la viscosidad newtoniana en el sistema (Bird et al. 1977)

3.11 Métodos reométricos.

Los tres métodos reométricos más utilizados para la medición de las propiedades de los fluidos complejos son: el de cilindros concéntricos, discos paralelos, cono-plato y de capilar. La viscosidad y las funciones lineales viscoelásticas del material pueden ser determinadas en cualquier de los tres reómetros a geometría de cilindros concéntricos, se hace la prueba al fluido que está entre los dos cilindros concéntricos con un radio interior y exterior diferente, se aplica un torque para hacer rotar los cilindros generando un rango de rotación relativa entre el cilindro interior y exterior (Calderas et al. 2009). Para la obtención de medidas cuantitativas de las propiedades del material, se asume que el fluido es simétrico al eje y puramente circunferencial con efectos finales insignificantes. En el sistema de discos paralelos, la medición del torque aplicado y el rango de rotación son usados para obtener las propiedades de los materiales (Bird et al. 1977). La geometría de cono y plato es utilizado para determinar el coeficiente de corte normal de algunos fluidos. La medición del torque aplicado y el rango de rotación son usados para obtener las propiedades de los materiales, asumiendo que los efectos de inercia son insignificantes y la superficie libre es esférica. En el sistema capilar, los fluidos a prueba caen por gravedad, compresión de gas o gracias a un pistón, frecuentemente son utilizados para medir la viscosidad lineal y las propiedades viscoelásticas de los líquidos.

3.11.1 Flujo cortante simple

El flujo cortante simple se genera cuando una fuerza se aplica en dirección del flujo, por lo que el tensor de esfuerzos solo tiene elementos fuera de la diagonal principal por lo que se puede describir en la forma siguiente (Bird et al. 1977):

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & 0 & \sigma_{xz} \\ 0 & \sigma_{yy} & 0 \\ \sigma_{zx} & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (15)$$



Los tensores gradiente de velocidad y su transpuesta se definen como:

$$\nabla \mathbf{V} = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_x}{\partial x} & \frac{\partial V_y}{\partial x} & \frac{\partial V_z}{\partial x} \\ \frac{\partial V_x}{\partial y} & \frac{\partial V_y}{\partial y} & \frac{\partial V_z}{\partial y} \\ \frac{\partial V_x}{\partial z} & \frac{\partial V_y}{\partial z} & \frac{\partial V_z}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial V_z}{\partial x} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (16)$$

La transpuesta del tensor gradiente de velocidad está dado por:

$$(\nabla \mathbf{V})^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_x}{\partial x} & \frac{\partial V_x}{\partial y} & \frac{\partial V_x}{\partial z} \\ \frac{\partial V_y}{\partial x} & \frac{\partial V_y}{\partial y} & \frac{\partial V_y}{\partial z} \\ \frac{\partial V_z}{\partial x} & \frac{\partial V_z}{\partial y} & \frac{\partial V_z}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial V_z}{\partial x} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (17)$$

Por lo tanto el tensor rapidez de deformación toma la forma:

$$2\mathbf{D} = \nabla \mathbf{V} + (\nabla \mathbf{V})^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_x}{\partial x} & \frac{\partial V_y}{\partial x} & \frac{\partial V_z}{\partial x} \\ \frac{\partial V_x}{\partial y} & \frac{\partial V_y}{\partial y} & \frac{\partial V_z}{\partial y} \\ \frac{\partial V_x}{\partial z} & \frac{\partial V_y}{\partial z} & \frac{\partial V_z}{\partial z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial V_x}{\partial x} & \frac{\partial V_x}{\partial y} & \frac{\partial V_x}{\partial z} \\ \frac{\partial V_y}{\partial x} & \frac{\partial V_y}{\partial y} & \frac{\partial V_y}{\partial z} \\ \frac{\partial V_z}{\partial x} & \frac{\partial V_z}{\partial y} & \frac{\partial V_z}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial V_z}{\partial x} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial V_x}{\partial z} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (18)$$

El tensor rapidez de deformación, nos da información acerca de la deformación del material. Finalmente, la Ec. constitutiva de Newton toma la siguiente forma matricial.

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & 0 & \sigma_{xz} \\ 0 & \sigma_{yy} & 0 \\ \sigma_{zx} & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial V_x}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial x} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (19)$$

3.11.2 Funciones materiales

Desacoplando las matrices se obtienen las relaciones entre las entradas del tensor de esfuerzos y el tensor rapidez de deformación:

$$\begin{aligned}\sigma_{xz} = \sigma_{zx} &= \mu \frac{\partial Vz}{\partial x} \\ N_1 = \sigma_{xx} - \sigma_{yy} &= 0 \\ N_2 = \sigma_{yy} - \sigma_{zz} &= 0\end{aligned}\tag{20}$$

La primera y segunda diferencia de esfuerzos normales siempre es cero para un fluido newtoniano, por lo que solo tiene sentido hablar de ellas en el régimen viscoelástico no-lineal (Bird et al. 1977).

3.12 Polímeros

Esencialmente, un polímero es una sustancia cuyas moléculas forman cadenas muy largas por la unión de muchas moléculas más pequeñas llamadas monómeros. La palabra “polímero” significa “muchas unidades”. Los polímeros tienen ciertas características y difieren uno del otro, por la naturaleza química y física de sus unidades repetitivas en las cadenas. Existen polímeros naturales que son importantes porque constituyen la clave de algunas de las características especiales de los materiales poliméricos. Por ejemplo la celulosa es un polímero que elaboran las plantas donde las largas cadenas moleculares se acomodan linealmente para formar el esqueleto del vegetal, con lo que se da resistencia mecánica lineal combinada con flexibilidad lateral. Esto permite a la planta aumentar su altura y ceder sin romperse a las fuerzas laterales (Bird et al. 1977).

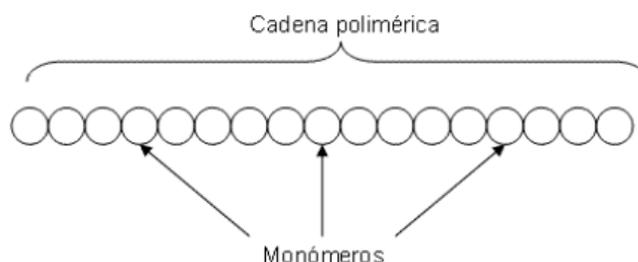


Figura 2. Representación esquemática de un polímero formado por la unión de monómeros.



3.12.1 Clasificación de polímeros.

Los polímeros pueden clasificarse de diferentes maneras, y a su vez esas clasificaciones pueden subdividirse en otras. Por lo cual partiremos de lo más básico a lo más complejo:

3.12.1.1 De acuerdo a su origen: Naturales, Semisintéticos y Sintéticos.

- (i) **Polímeros naturales:** Son todos aquellos que provienen de los seres vivos, y por lo tanto, se pueden encontrar una gran diversidad de ellos dentro de la naturaleza. Las proteínas, los polisacáridos, los ácidos nucleicos son todos polímeros naturales que cumplen funciones vitales en los organismos y por lo tanto se llaman biopolímeros. Otros ejemplos son la seda, el caucho, el algodón, la madera (celulosa), la quitina, etc.
- (ii) **Polímeros semisintéticos:** Son todos aquellos obtenidos por la transformación química de los polímeros naturales, sin que se destruya su naturaleza macromolecular. Ejemplo: la seda artificial obtenida de la celulosa, caucho vulcanizado, etc.
- (iii) **Polímeros sintéticos:** Son todos aquellos que se obtienen por síntesis ya sea en una industria o en un laboratorio y están conformados a base de monómeros naturales. Ejemplo: el vidrio, la porcelana, el nailon, los adhesivos, poliestireno, policloruro de vinilo, polietileno, etc.

3.12.1.2 De acuerdo a su composición química de la cadena principal

Homopolímeros: Son macromoléculas formadas por la repetición de unidades monómeras idénticas, es decir no contienen heteroátomos. Dentro de este grupo de polímeros, se distinguen cinco familias principales: las poliolefinas, los poliestirenos, los insaturados (polienos), los polivinilos y los poliácridicos. La celulosa y el caucho son homopolímeros naturales. El polietileno y el PVC son homopolímeros sintéticos.

Copolímeros: Esta constituidos por dos o más monómeros diferentes. La seda es un copolímero natural y la baquelita, uno sintético. Los copolímeros más comunes están

formados por dos monómeros diferentes que pueden formar cuatro combinaciones distintas. Si los monómeros se agrupan en forma azarosa, el polímero se llama *copolímero al azar*. Si se ubican de manera alterna, se obtiene un *copolímero alternado*. Si se agrupan en bloque, por ejemplo, dos monómeros de un tipo y tres del otro, en forma alternada, se forma un *copolímero en bloque*. Si se parte de una cadena lineal formada por un monómero y se agregan ramificaciones de otro monómero, se obtiene un *copolímero injertado*.

3.12.1.3 De acuerdo a su estructura

Los monómeros al unirse pueden dar diferentes formas de polímeros, los que influyen en sus propiedades, por ejemplo, el material blando y el moldeable tienen una forma lineal con cadenas unidas por interacciones (fuerzas) débiles, mientras que un polímero rígido y frágil tiene una estructura ramificada.

Polímeros lineales: Se forman cuando el monómero que lo origina tiene dos puntos de “ataque” (unión), de modo que la polimerización ocurre en una sola dirección, pero en ambos sentidos.

Polímeros ramificados: Se forman debido a que, a diferencia del lineal, estos tienen tres o más puntos de “ataque”, de tal forma que la polimerización ocurre en forma tridimensional, en las tres direcciones del espacio.

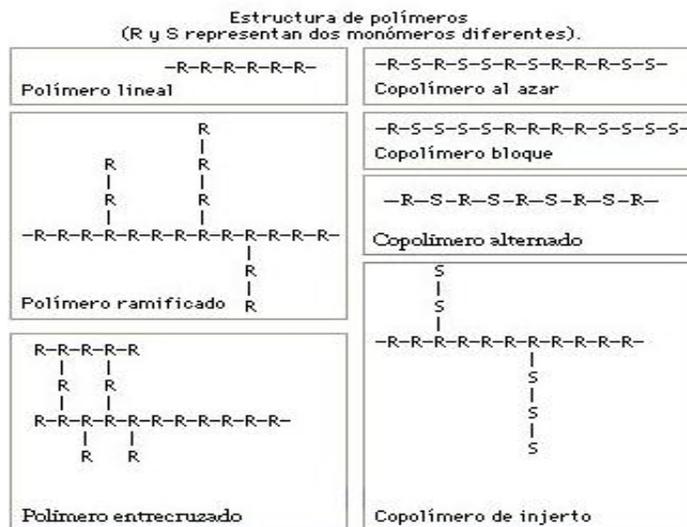


Figura 3. Cuadro representativo de las diferentes clasificaciones de polímeros.



3.12.1.4 De acuerdo a su comportamiento frente al calor.

Termoplásticos: Son materiales rígidos a temperatura ambiente, pero se vuelven blandos y moldeables al elevar la temperatura, por lo que se pueden fundir y moldear varias veces, sin que por ello cambie sus propiedades, esto los hace reciclables. Son termoplásticos debido a que sus cadenas, sean lineales o ramificadas, no están unidas, o sea, presentan entre sus cadenas “fuerzas” intermoleculares, que se debilitan con un aumento en la temperatura, provocándose el reblandecimiento. Están presentes en el poliestireno, el polietileno; la seda, la lana, el algodón (fibras naturales), el poliéster y la poliamida (fibras sintéticas).

Termoestables: Son materiales rígidos, frágiles y con cierta resistencia térmica. Una vez que son moldeados no se pueden volver a cambiar en la que a forma respecta, porque no se ablandan cuando se calientan, volviéndolos esto no reciclables. Son termoestables porque sus cadenas están interconectadas por medio de ramificaciones que son más cortas que las cadenas principales. La energía calórica es la principal responsable del entrecruzamiento que da una forma permanente a este tipo de plásticos y es por esto que no pueden volver a procesarse. Los encontramos en la baquelita, el PVC y el plexiglás.

3.12.2 Procesamiento de polímeros

Las moléculas de polímero son largas y forman cadenas que dan lugar a su morfología especial. Las propiedades que se observan y utilizan de estos materiales, aunque son de origen químico, provienen de su forma característica. Estas propiedades controlan el comportamiento durante el proceso de fabricación y en la calidad de los polímeros.

3. 13 Polietileno de baja densidad

El polietileno de baja densidad (*low density polyethylene*),. El LDPE se hace comúnmente por polimerización de etileno a alta presión para formar moléculas de polietileno. El (LDPE) es un polímero termoplástico de cadena larga altamente ramificado con una densidad de $57.1 - 57.7 \text{ lb/pe}^3$ (0.915 a 0.925 g/cm^3) y peso molecular de hasta $4 \times 10^6 \text{ g/mol}$.

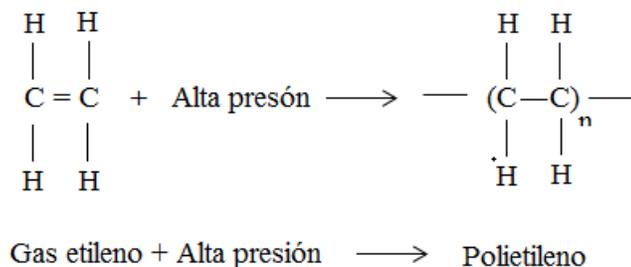


Figura 4. Polimerización de etileno.

3.13.1 Descripción de las propiedades del LPDE

Las propiedades térmicas del LDPE incluyen un intervalo de fusión con una temperatura de fusión máxima de 223-234 °F (106 a 112°C). Su temperatura de fusión relativa baja y su amplio intervalo de fusión caracterizan al LDPE como una resina que permite operaciones de termosellado rápidas. La temperatura de transición vítrea Tg del LDPE está muy por debajo de la temperatura ambiente, explicando así la naturaleza flexible y blanda del polímero. La combinación de fases cristalinas y amorfas en el LDPE hace difícil la determinación de la Tg. Sin embargo puede decirse que hay transiciones moleculares significativas en el LDPE a aproximadamente -4 y -193°F (-20 y -125°C).

Las propiedades mecánicas del LDPE como la resistencia a la fusión y la capacidad de estiramiento son afectadas por el peso molecular y la distribución pesos moleculares. La resistencia a la fusión es una indicación de que tan bien puede sostenerse el polímero fundido y la capacidad de estiramiento es una medida de que tal delgado puede extenderse el polímero fundido antes de que se rompa. La resistencia a la fusión se incrementa al aumentar el peso molecular y ampliar la distribución de pesos moleculares, mientras que la capacidad de estiramiento incrementa al bajar el peso molecular y estrechar la distribución de pesos moleculares. Las propiedades mecánicas en la fase sólida del LDPE son afectadas en su mayor parte por el peso molecular y un poco por la distribución de pesos moleculares. El índice de fusión y la densidad a menudo tiene efectos opuestos sobre las propiedades, requiriendo compromisos en la selección de la resina.



3.13.2 Aplicaciones

Las aplicaciones de las películas de LDPE incluyen las bolsas para pan, el plástico estirable para envoltura, las bolsas para emparedados y bolsas para prendas de vestir. Los sustratos recubiertos por extrusión con LDPE se usan en cartones para leche y muchas aplicaciones en el empaqueo de alimentos. Los recipientes de LDPE moldeados por soplado se emplean para envasar leche y productos químicos. Los artículos moldeados por inyecciones incluyen enseres domésticos, tapas para latas, juguetes y cubetas. Otros usos importantes del LDPE incluyen el forrado de cables y alambres, el soporte de alfombras y la esponja para salvavidas o el empaque de cojines.

3.13.3 Ventajas y Desventajas

El LDPE tiene un buen balance de propiedades mecánicas y ópticas con fácil procesabilidad y bajo costo. Puede fabricarse mediante muchos métodos diferentes para una amplia gama de aplicaciones, lo cual lo convierte en uno de los plásticos de mayor producción en el mundo. Por comparación, otros polímeros pueden sobresalir en una propiedad específica más pueden estar restringidos a aplicaciones especiales por su costo, limitaciones de procesamiento o deficiencias en propiedades específicas. EL LDPE puede no ser adecuado en aplicaciones que requieren una rigidez extrema, buenas propiedades aislantes, una notable resistencia a la tensión o una alta resistencia a la temperatura.

3.14 Extrusión

El proceso de extrusión es la acción de forzar, por medio de presión, al pasar a través de un “dado” o “boquilla” un plástico o material fundido. El procedimiento se ha utilizado durante muchos años para metales, como el aluminio, que fluye plásticamente cuando se someten a una presión de deformación. En el procedimiento original para someter los polímeros a extrusión, se utilizaron máquinas similares impulsadas por un ariete o empujador mecánico (Herrera-Vealrde et al. 2001, 2003). En el proceso moderno se usan tornillos para hacer fluir el polímero en estado fundido o gomoso a lo largo de la camisa de la máquina. El tipo de máquina que se utiliza más es la de tornillo simple. También se utilizan los extrusores de tornillos gemelos cuando se necesita una mezcla o

transporte mejores. El aparato está constituido principalmente por un tornillo de Arquímedes que se ajusta con presión dentro de la camisa cilíndrica, apenas con el espacio suficiente para rotar. El polímero sólido se alimenta en un extremo y en el otro sale el material sometido a extrusión ya perfilado. Dentro de la máquina el polímero se funde y homogeneiza (Bird et al. 1977).

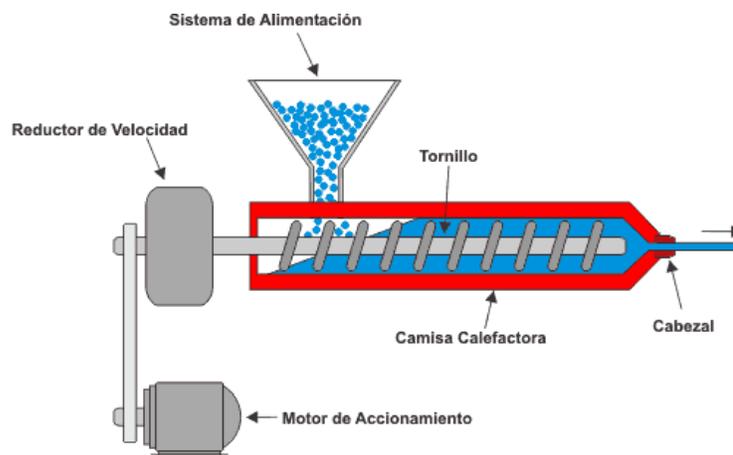


Figura 5. Representación de un polímero extruido en un extrusor simple.

3.15 Resumen de los conceptos teóricos y aplicaciones

Finalmente, los modelos discutidos en esta sección, nos permite establecer, las diferencias de los modelos inelásticos no-newtonianos más comunes de la literatura. En general las soluciones de bajo peso molecular como el agua, acetona, algunos líquidos inmiscibles. Por otra parte, Los fluidos no-newtonianos presentan un reto en la descripción de sistemas complejos. La aplicación de estos fluidos, se presenta en diferentes situaciones físicas, como por ejemplo: La ciencia y la ingeniería de nuevos materiales como son: (i) fibras sintéticas (utilizadas en la industria espacial), (ii) polímeros (plásticos), (iii) polímeros asociativos (utilizados como agentes estabilizantes en la industria de las pinturas base agua), (iv) cristales líquidos (utilizados por sus propiedades ópticas en pantallas de cristales líquidos, fibras sintéticas, y reconstrucción de tejido óseo en bioingeniería), (v) Fluidos biológicos, los cuales representan un reto para los ingenieros modernos (Rey & Herrera-Valencia 20012).



En el capítulo IV, modelaremos el flujo oscilante en un cilindro de radio $r = a$ y longitud $z = L$, por el cual fluye un líquido no newtoniano, caracterizado por una ecuación tipo Ellis. Este modelo acopla el newtoniano y el modelo de ley de potencia. La elección de este modelo, fue debido a su simplicidad en comparación con otros mucho más complejos, además todas las propiedades materiales pueden ser calculadas mediante experimentos reológicos.



CAPÍTULO IV

PLANTEAMIENTO FÍSICO DEL PROBLEMA

4.1 Planteamiento del problema

En este capítulo se plantea el sistema físico de este trabajo de licenciatura. El sistema físico que se analiza en esta sección se describe a continuación. Un líquido con estructura transitoria, fluye en la dirección axial en un cilindro de radio $r=a$ y longitud $z=L$ bajo la acción de un gradiente de presión que oscila de acuerdo con una función estocástica estacionaria que satisface las relaciones de Wiener-Khintchine (i.e., su valor promedio es cero y su función de correlación es invariante ante una traslación en el tiempo). El proceso es isotérmico y en estado no estacionario, el sistema de coordenadas es cilíndrico (r,Θ,z) y el origen de coordenadas es colocado en el centro del tubo. Los efectos debido a la aceleración de la gravedad se desprecian es decir, $g = 0$ y el estado reológico del fluido puede ser descrito por el modelo de Ellis.

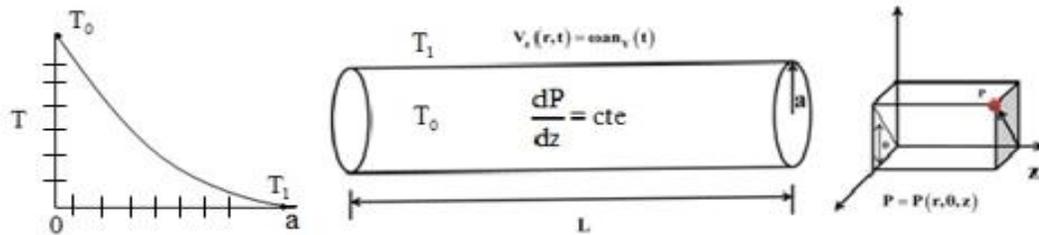


Figura 6. Representación del flujo oscilante de un líquido con estructura transitoria.

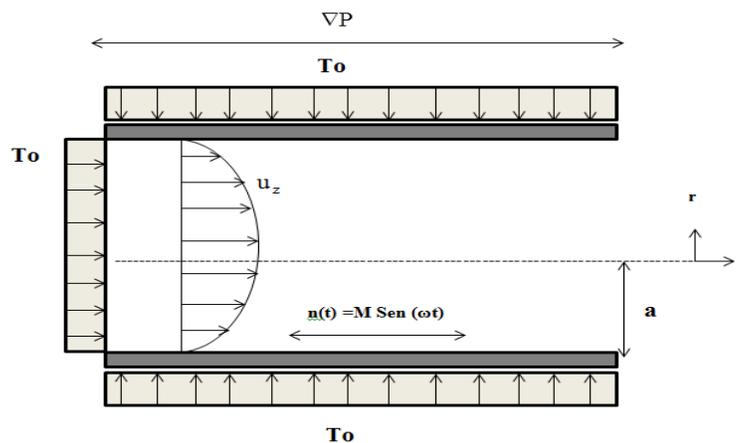


Figura 7. Representación esquemática del flujo entrando a un dado oscilante con un perfil de velocidad desarrollado, a una temperatura promedio T_0 y sometida a una oscilación en la pared con temperatura constante T_0 .

4.2 Modelado

4.2.1 Ecuación de momento y conservación de masa

Para modelar este problema, suponemos que el sistema se encuentra en estado no-estacionario, es decir la velocidad axial es función del tiempo y de la posición radial, el sistema fluye por un gradiente de presión pulsátil y oscilatoria en la pared.

(i) Vector de Velocidad

El vector velocidad solo tiene una componente axial, la cual depende de la posición y el tiempo respectivamente. Matemáticamente se expresa de la siguiente manera:

$$\mathbf{V} = [V_r, V_\theta, V_z] = [0, 0, V_z(r, t)] \quad (21)$$

(ii) Tensor gradiente de velocidad y su transpuesta

El tensor gradiente de velocidad, para un flujo cortante simple, provocado por un gradiente de presión constante y una fuerza macroscópica externa, toma la siguiente forma:

$$\nabla \mathbf{V} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial V_z(r, t)}{\partial r} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{\partial V_z(r, t)}{\partial r} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (22)$$

Al calcularla transpuesta del tensor gradiente de velocidad, se tiene lo siguiente:

$$(\nabla \mathbf{V})^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial V_z(r, t)}{\partial r} & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{\partial V_z(r, t)}{\partial r} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (23)$$

(iii) Tensor rapidez de deformación



$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{V} + (\nabla\mathbf{V})^T) = \frac{1}{2} \frac{\partial V_z(r,t)}{\partial r} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (24)$$

(iv) Tensor de esfuerzos

Finalmente, la matriz simétrica asociada al tensor de esfuerzos para un flujo cortante, toma la forma:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{rr} & 0 & \sigma_{rz} \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ \sigma_{rz} & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (25)$$

El fluido es incompresible, por lo que la densidad no es función de la posición ni del tiempo. Los efectos gravitatorios son despreciables, i.e. $g = 0$. Una manera de modelar el flujo pulsátil, se logra introduciendo una fluctuación en el gradiente de presión y el término inercial de la ecuación de movimiento por lo que, se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales acopladas:

(v) Componente z de la ecuaciones movimiento

$$\rho \frac{\partial V_z}{\partial t} = -\nabla p + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r\sigma_{rz}) \quad (26)$$

(vi) Ecuación de continuidad

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rV_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}(V_\theta) + \frac{\partial}{\partial z}(V_z) = \frac{\partial}{\partial z}(V_z) = 0 \quad (27)$$

(vii) Condiciones de frontera

Las condiciones de frontera para el flujo vibrátil tiene la siguiente forma:

$$\text{C.F.} \begin{cases} V_z(r = a, t) = \omega a n(t) \\ \left. \frac{\partial V_z(r, t)}{\partial r} \right|_{r=0} = 0 \end{cases} \quad (28a,b)$$

4.2.2. Función estocástica

En las condiciones de frontera Ec. (28a) $n(t)$ es una función estocástica que describe la variación en el tiempo de la velocidad axial en la frontera. Representa la forma matemática de la perturbación en la frontera que permite que el sistema oscile. Para simplificar el problema, el promedio de la función $n(t)$ es cero, i.e. $\langle n(t) \rangle = 0$; en donde el promedio está definido como:

$$\langle n(t) \rangle = \frac{\int_0^T n(t) dt}{\int_0^T dt} = \frac{1}{T} \int_0^T n(t) dt = \frac{1}{2\pi/\omega} \frac{\int_0^{2\pi/\omega} n(t) dt}{\int_0^{2\pi/\omega} dt} \quad (29)$$

En la Ec. (29) T es el periodo de las oscilaciones y ω es la frecuencia de las oscilaciones. La función estocástica más simple, para representar el ruido en el sistema se define mediante la siguiente función trigonométrica:

$$n(t) = M \text{Sen}(\omega t) \quad (30)$$

Si se toma el promedio de la función estocástica Ec. (30), se tiene lo siguiente:

$$\langle n(t) \rangle = \langle M \text{Sen}(\omega t) \rangle = 0 \quad (31)$$

Al tomar el promedio del cuadrado o el cuadrado de la derivada, obtenemos lo siguiente:

$$\langle n^2(t) \rangle = M^2 \langle \text{Sen}^2(\omega t) \rangle = M^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} M^2 \quad (32)$$

El promedio del cuadrado de la derivada temporal de la función estocástica $n(t)$, también es diferente de cero, i.e.

$$\left\langle \dot{n}^2(t) \right\rangle = M^2 \langle \omega^2 \text{Cos}^2(\omega t) \rangle = \frac{1}{2} M^2 \omega^2 \quad (33)$$



4.2.3 Ecuación constitutiva de Ellis

La componente rz de la Ecuación constitutiva de Ellis toma la forma:

$$\dot{\gamma}_{rz} = \nu_0 \sigma_{rz} + \nu_1 (\sigma_{rz})^\alpha \quad (34)$$

En la Ec. (34) σ_{rz} es la componente rz del tensor de esfuerzos y $\dot{\gamma}_{rz}$ es la rapidez de deformación del sistema. En la Ec. (34) ν_0 es la fluidez a baja rapidez de deformación, ν_1 es la fluidez a moderada rapidez de deformación, la cual está relacionada con el modelo de ley de potencia y finalmente α es un exponente del modelo de Ellis. La Ec. (34) reproduce la primera zona newtoniana y la zona de transición del modelo de ley de potencia.

4.2.4 Aumento de flujo y fracción de potencia

El aumento en el flujo debido a las perturbaciones puede ser calculado a través de las ecuaciones definidas en (1a), que en su forma integral toma la forma:

$$I(\%) = 100 \frac{\langle Q(t) \rangle - Q_0}{Q_0} = 100 \frac{\int_0^a \langle V_z(r,t) \rangle r dr - \int_0^a V_z(r) r dr}{\int_0^a V_z(r) r dr} = 100 \frac{\int_0^a \langle \dot{\gamma}(r,t) \rangle r^2 dr - \int_0^a \dot{\gamma}_0(r) r^2 dr}{\int_0^a \dot{\gamma}_0(r) r^2 dr} \quad (35)$$

En la Ec. (35) se utilizó la condición de frontera $V_z(r=a, t) = \omega a n(t)$. La potencia en el sistema puede ser escrita de la siguiente manera:

$$E(\%) = 100 \frac{\langle E(t) \rangle - E_0}{E_0} = 100 \frac{\langle Q(t) \nabla p \rangle - Q_0 \nabla p}{Q_0 \nabla p} = 100 \frac{\langle Q(t) \rangle - Q_0}{Q_0} \quad (36)$$

En las Ecs. (35,36) $Q(t)$ es el flujo volumétrico transitorio debido a la perturbación macroscópica en la pared del sistema, y Q_0 al flujo volumétrico sin perturbar. Nótese, que el cálculo del aumento en el flujo volumétrico y la fracción de potencia son las mismas por lo que no es necesario simular los cálculos de la potencia consumida.

4.2.5 Ecuación de transferencia de energía

4.2.5.1 Trabajo irreversible en contra de las fuerzas viscosas.

Ecuación de balance de energía describe la evolución temporal y los cambios espaciales de la temperatura debido a los procesos moleculares de conducción de calor y la fricción interna del fluido (disipación viscosa):

$$\frac{DU}{Dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \right) U = -\nabla \cdot \mathbf{q} + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} \quad (37)$$

Si la energía interna del fluido se expresa en término de cantidades medibles, es decir:

$$U = \rho C_p T + \text{cte} \quad (38)$$

Al sustituir la Ec. (38) en la Ec. (37) se tiene lo siguiente:

$$\rho C_p \frac{DT}{Dt} = \rho C_p \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \right) T = -\nabla \cdot \mathbf{q} + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} \quad (39)$$

4.2.5.2 Ley de Fourier

La ecuación que relaciona el flux de calor con la temperatura se conoce como ley de Fourier. Esta, ecuación vectorial se describe a continuación:

$$\mathbf{q} = -\mathbf{k} \nabla T \quad (40)$$

En la Ec. (40) k es la conductividad térmica del material, \mathbf{q} es el vector de flux de calor y T es la temperatura local del fluido. Combinando las Ecs. (39, 40) se tiene la siguiente ecuación diferencial parcial que describe el cambio espacial y temporal de la temperatura local en función de la posición y la posición respectivamente:



$$\rho C_p \frac{DT}{Dt} = k \nabla^2 T - \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} = k \nabla^2 T - \eta(\Pi_D)(\mathbf{D} : \mathbf{D}) \quad (41)$$

La Ec. (41) es la ecuación de transporte de energía para un fluido no newtoniano. Nótese, que en la Ec. (41) η es la función viscosidad la cual depende del segundo invariante del tensor rapidez de deformación o del tensor de esfuerzos. Despreciando los cambios temporales y convectivos de la temperatura se tiene la siguiente expresión para el balance de energía:

$$0 = k \nabla^2 T + \eta(\Pi_D)(\mathbf{D} : \mathbf{D}) \quad (42)$$

En particular, suponiendo que los cambios axiales de la temperatura son despreciables y suponiendo simetría cilíndrica, se tiene la siguiente expresión para el balance energético:

$$0 = k \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \eta(\Pi_\sigma) \left(\dot{\gamma}_{rz} \right)^2 \quad (43)$$

4.3 Resumen de las ecuaciones obtenidas

En este capítulo se describió físicamente el problema de transporte de cantidad de movimiento, reológica acopladas con la ecuación de transporte de energía. Las ecuaciones básicas son las siguientes:

Tabla 1. Ecuaciones básicas.

Ecuación	Expresión Analítica
A: Momento Ec. (26)	$\rho \frac{\partial V_z(r,t)}{\partial t} = -\nabla_z p + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma_{rz})$
B: Reológica Ec. (34)	$\frac{\partial V_z(r,t)}{\partial r} = v_0 \sigma_{rz} + v_1 (\sigma_{rz})^a$
C: Energía Ec. (43)	$0 = k \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \eta (\Pi \sigma) \left(\frac{\partial V_z(r,t)}{\partial r} \right)^2$
D: Condición de frontera de deslizamiento Ec. 28a	$V_z(r = a, t) = \omega a n(t)$
E: Condición de frontera dos Ec. 28b	$\left. \frac{\partial V_z(r,t)}{\partial r} \right _{r=0} = 0$

Las Ecs. (A-C) junto con las condiciones de frontera (D,E) son las más importantes de esta sección, y punto de partida en los cálculos del perfil de velocidades, velocidad promedio, flujo volumétrico, aumento, fracción de potencia perfil de temperaturas, temperatura promedio, disipación viscosa y numero de Nusselt.



CAPÍTULO V

MODELADO TEÓRICO

En este capítulo se presentan los desarrollos principales a partir de las ecuaciones deducidas en el capítulo anterior.

5.1 Cálculo de la velocidad axial vibrátil

A partir de las ecuaciones generales de masa y momento se tiene la siguiente componente:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\sigma_{rz}) = \rho \frac{\partial V_z}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial z} \quad (44)$$

Excepto para el fluido newtoniano, la Ec. (44) no tiene una representación analítica por lo que se hace la siguiente suposición para el campo de velocidades:

$$V_z(r,t) = V_z(r) + V_z(t) = V(r) + (\omega a) n(t) \quad (45)$$

Al sustituir la Ec. (45) en la Ec. (44), se tiene la siguiente expresión:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\sigma_{rz}) = \frac{\partial p}{\partial z} + \rho \omega a \dot{n}(t) \quad (46)$$

Al integrar la Ec. (46) con respecto a la coordenada radial r , y suponiendo que la componente rz del esfuerzo debe de permanecer finito, se tiene lo siguiente:

$$\sigma_{rz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial p}{\partial z} + \rho \omega a \dot{n}(t) \right) r \quad (47)$$

La Ec. (47) representa el esfuerzo cortante modificado por los mecanismos inerciales. Es importante resaltar que la simplificación matemática propuesta en la Ec. (45) solo es válida a números de Reynolds bajos, i.e. cuando los mecanismos inerciales son despreciables en comparación con los viscosos.

$$\frac{dV_z(r,t)}{dr} = v_0 \left(\frac{1}{2} \left(\frac{dp}{dz} + \rho \omega a \dot{n}(t) \right) r \right) + v_1 \left(\frac{1}{2} \left(\frac{dp}{dz} + \rho \omega a \dot{n}(t) \right) r \right)^\alpha \quad (48)$$



Integrando se obtiene la solución general:

$$V_z(r,t) = \frac{v_0}{2} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{dp}{dz} + \rho \omega a \dot{n}(t) \right) \right) r^2 + \frac{v_1}{\alpha+1} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{dp}{dz} + \rho \omega a \dot{n}(t) \right) \right)^\alpha r^{\alpha+1} + C(t) \quad (49)$$

Aplicando la condición de frontera asociada a la fuerza macroscópica en la pared

$$V_z(r=a) = (\omega a) n(t) \quad (50)$$

Sustituyendo la Ec. (50) en la Ec. (49), se tiene lo siguiente:

$$(\omega a) n(t) = \frac{v_0}{2} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{dp}{dz} + \rho \omega a \dot{n}(t) \right) \right) a^2 + \frac{v_1}{\alpha+1} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{dp}{dz} + \rho \omega a \dot{n}(t) \right) \right)^\alpha a^{\alpha+1} + C(t) \quad (51)$$

De la Ec. (51), se despeja la constante C(t) y se tiene lo siguiente:

$$C(t) = (\omega a) n(t) - \frac{v_0}{2} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{dp}{dz} + \rho \omega a \dot{n}(t) \right) \right] a^2 - \frac{v_1}{\alpha+1} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{dp}{dz} + \rho \omega a \dot{n}(t) \right) \right]^\alpha a^{\alpha+1} \quad (52)$$

Sustituyendo el valor de la constante C(t) en la solución general de la ecuación diferencial (Ec. 49), se tiene lo siguiente:

$$V_z(r,t) = \omega a n(t) - \frac{v_0 a^2}{2} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{dp}{dz} + \rho \omega a \dot{n}(t) \right) \right) \left(1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right) - \frac{v_1 a^{\alpha+1}}{\alpha+1} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{dp}{dz} + \rho \omega a \dot{n}(t) \right) \right)^\alpha \left(1 - \left(\frac{r}{a} \right)^{\alpha+1} \right) \quad (53)$$

Finalmente, se obtiene el perfil de velocidad para el flujo vibrátil:

$$V_z(r,t) = \omega a n(t) - \frac{v_0 a^2}{2} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{dp}{dz} + \rho \omega a \dot{n}(t) \right) \right) \left(1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right) - \frac{v_1 a^{\alpha+1}}{\alpha+1} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{dp}{dz} + \rho \omega a \dot{n}(t) \right) \right)^\alpha \left(1 - \left(\frac{r}{a} \right)^{\alpha+1} \right) \quad (54)$$

5.2 Cálculo del flujo volumétrico a gradiente de presión constante modificado por los mecanismos inerciales

En esta sección se describe el desarrollo matemático del flujo volumétrico en función de los parámetros materiales y de la perturbación en la pared.

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^a Vz(r)rdrd\theta \quad (55)$$

Integrando con respecto al ángulo resulta:

$$Q = 2\pi \int_0^a Vz(r)rdr \quad (56)$$

Multiplicando y dividiendo la coordenada radial r del a Ec. (56) por la longitud característica $r = a$, y definiendo el siguiente cambio de variable:

$$\begin{aligned} u &= \frac{r}{a}; \quad du = \frac{dr}{a} \\ r &\rightarrow a; \quad u \rightarrow 1 \\ r &\rightarrow 0; \quad u \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (57)$$

El flujo volumétrico definido en la Ec. (56) queda definido en término de la nueva variable como:

$$Q = 2\pi a^2 \int_0^1 Vz(u)udu \quad (58)$$

Al sustituir el perfil de velocidades (Ec. 54) en la Ec. (58) se tiene el siguiente resultado:

$$Q = 2\pi a^2 \left\{ \int_0^1 \left(\omega a \dot{n}(t) \right) u du - \frac{v_0 a^2}{2} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{dp}{dz} + \rho \omega a \dot{n}(t) \right) \right) \int_0^1 (1-u^2) u du \right. \\ \left. - \frac{v_0 a^{\alpha+1}}{\alpha+1} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{dp}{dz} + \rho \omega a \dot{n}(t) \right) \right)^\alpha \int_0^1 (1-u^{\alpha+1}) u du \right\} \quad (59)$$

Integrando y simplificando se obtiene la siguiente expresión de flujo volumétrico con el gradiente de presión modificado por los mecanismos inerciales:



$$Q(t) = \pi a^2 \omega a n(t) + \frac{v_0 \pi a^4}{4} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{dp}{dz} + \rho \omega a \dot{n}(t) \right) \right) + \frac{v_1 \pi a^{\alpha+3}}{\alpha+3} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{dp}{dz} + \rho \omega a \dot{n}(t) \right) \right)^\alpha \quad (60)$$

La Ec. (60) puede ser escrita en términos del esfuerzo en la pared, i.e.,

$$Q(t) = \pi a^2 \omega a n(t) + \frac{v_0 \pi a^3}{4} \sigma_w \left(1 - \frac{\frac{1}{2} \rho \omega a^2 \dot{n}(t)}{\sigma_w} \right) + \frac{v_1 \pi a^3}{\alpha+3} \sigma_w \left(1 - \frac{\frac{1}{2} \rho \omega a^2 \dot{n}(t)}{\sigma_w} \right)^\alpha \quad (61)$$

En la Ec. (61) se ha definido el esfuerzo en la pared:

$$\sigma_w = -\sigma_{rz}|_{r=a} = -\frac{1}{2} \frac{dp}{dz} a = \frac{1}{2} \left(\frac{P_0 - P_L}{L} \right) a \quad (62)$$

En el caso de que no exista la fuerza macroscópica en la frontera, es decir los mecanismos inerciales son despreciables, se tiene la siguiente expresión para el flujo volumétrico:

$$Q(t) = \pi a^2 \omega a n(t) + \frac{v_0 \pi a^3}{4} \sigma_w + \frac{v_1 \pi a^3}{\alpha+3} \sigma_w \quad (63)$$

5.3 Cálculo del flujo volumétrico promediado

Desarrollando la Ec. (61) mediante el teorema del binomio, se tiene lo siguiente:

$$Q(t) = \pi a^2 \omega a n(t) + \frac{v_0 \pi a^3}{4} \sigma_w \left(1 - (\sigma_w)^{-1} \left(\frac{1}{2} \rho \omega a \dot{n}(t) \right) \right) + \frac{v_1 \pi a^3}{\alpha+3} \sigma_w^\alpha \left(1 - \alpha (\sigma_w)^{-1} \left(\frac{1}{2} \rho \omega a \dot{n}(t) \right) + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} (\sigma_w)^{-2} \left(\frac{1}{2} \rho \omega a \dot{n}(t) \right)^2 + \dots \right) \quad (64)$$

Promediando la Ec. (64), utilizando las propiedades de la función estocástica definida en la sección anterior:

$$\langle Q(t) \rangle = \frac{v_0 \pi a^3}{4} \sigma_w + \frac{v_1 \pi a^3}{\alpha+3} \sigma_w^\alpha \left(1 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} (\sigma_w)^{-2} \left(\frac{1}{2} \rho \omega a \right)^2 \left\langle \left(\dot{n}(t) \right)^2 \right\rangle + \dots \right) \quad (65)$$

La Ec. (65) implica que al tomar el promedio temporal en el flujo volumétrico y al tomar el promedio, se obtiene una contribución extra debido a las propiedades no newtonianas e inerciales en el sistema. La Ec. (65) puede ser escrita de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \langle Q(t) \rangle &= \frac{v_0 \pi a^3}{4} \sigma_w + \frac{v_1 \pi a^3}{\alpha+3} \sigma_w^\alpha + \frac{v_1 \pi a^3}{\alpha+3} \left(\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} (\sigma_w)^{\alpha-2} \left(\frac{1}{2} \rho \omega a \right)^2 \left\langle \left(\dot{n}(t) \right)^2 \right\rangle \right) \\ &= Q_0 + \underbrace{\frac{v_1 \pi a^3}{\alpha+3} \left(\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} (\sigma_w)^{\alpha-2} \left(\frac{1}{2} \rho \omega a \right)^2 \left\langle \left(\dot{n}(t) \right)^2 \right\rangle \right)}_{\text{Efectos-No newtonianos}} \end{aligned} \quad (66)$$

La Ec. (66) describe que el promedio en el flujo volumétrico transitorio, puede ser visualizado como el flujo en estado estacionario más una contribución debido a los mecanismos inerciales y no newtonianos en el sistema.

5.4 Cálculo del aumento en el flujo volumétrico

A partir del cálculo del flujo volumétrico promedio y a gradiente de presión constante se obtiene el aumento en el flujo, en función de las propiedades materiales del sistema y cuya ecuación está definida a continuación.

$$I(\%) = 100 \frac{\langle Q(t) \rangle - Q_0}{Q_0} \quad (67)$$

Sustituyendo la Ec. (66) en la Ec. (67), se tiene lo siguiente:

$$I(\%) = 100 \frac{\langle Q(t) \rangle - Q_0}{Q_0} = 100 \frac{\frac{v_1 \pi a^3}{\alpha+3} \left(\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} (\sigma_w)^{\alpha-2} \left(\frac{1}{2} \rho \omega a \right)^2 \left\langle \left(\dot{n}(t) \right)^2 \right\rangle \right)}{\frac{v_0 \pi a^3}{4} \sigma_w + \frac{v_1 \pi a^3}{\alpha+3} \sigma_w^\alpha} \quad (68)$$



Simplificando la Ec. (68) se tiene lo siguiente:

$$I(\%) = \frac{25}{2} (\rho\omega a)^2 \alpha(\alpha-1) \frac{\frac{v_1}{\alpha+3} (\sigma_w)^{\alpha-2}}{\frac{v_0}{4} \sigma_w + \frac{v_1}{\alpha+3} \sigma_w^\alpha} \left\langle \left(\dot{n}(t) \right)^2 \right\rangle \quad (69)$$

Eliminando y simplificando obtenemos:

$$I(\%) = \frac{25}{4} (\rho\omega a)^2 M^2 \omega^2 (\sigma_w)^{-2} \frac{\frac{v_1}{\alpha+3} (\sigma_w)^{\alpha-1}}{\frac{v_0}{4} + \frac{v_1}{\alpha+3} (\sigma_w)^{\alpha-1}} \quad (70)$$

5.5 Cálculo de la fracción de potencia

La fracción de trabajo por unidad de tiempo por unidad de longitud, puede ser calculada a través de la siguiente expresión para el flujo, por lo que se tiene:

$$E(\%) = 100 \frac{\langle E(t) \rangle - E_0}{E_0} = 100 \frac{\langle Q(t) \nabla p \rangle - Q_0 \nabla p}{Q_0 \nabla p} \quad (71)$$

Como el gradiente de presión es constante, la fracción de energía es equivalente al cálculo del aumento de flujo por la perturbación externa, i.e.

$$E(\%) = 100 \left(\frac{\langle Q(t) \rangle - Q_0}{Q_0} \right) \quad (72)$$

Por lo que:

$$E(\%) = I(\%) = \frac{25}{4} (\rho\omega a)^2 M^2 \omega^2 (\sigma_w)^{-2} \frac{\frac{v_1}{\alpha+3} (\sigma_w)^{\alpha-1}}{\frac{v_0}{4} + \frac{v_1}{\alpha+3} (\sigma_w)^{\alpha-1}} \quad (73)$$

La Ec. (73) muestra que en el flujo vibrátil el aumento es igual a la fracción de potencia consumida debida a la fuerza macroscópica.

5.6 Disipación viscosa

5.6.1 Cálculo del perfil de temperatura

A partir de la ecuación de energía, ecuación de Fourier y despreciando las contribuciones de tipo convectivo en la ecuación de energía y suponiendo estado estacionario, la ecuación de energía se simplifica a:

$$0 = k \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \sigma_{rz} \dot{\gamma}_{rz} \quad (74)$$

De la ecuación de Ellis, se tiene que la rapidez de deformación toma la forma:

$$\dot{\gamma}_{rz} = v_0 \sigma_{rz} + v_1 (\sigma_{rz})^\alpha \quad (75)$$

La componente rz del tensor de esfuerzos está dada por la siguiente relación:

$$\sigma_{rz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial p}{\partial z} + \rho \omega a \dot{n}(t) \right) r \quad (76)$$

Sustituyendo la Ec. (76) en la Ec. (75) y finalmente en la Ec. (74) obtenemos la siguiente ecuación diferencial de variables separables:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T(r,t)}{\partial r} \right) = - \frac{v_0}{k} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial p}{\partial z} + \rho \omega a \dot{n}(t) \right) \right)^2 r^3 - \frac{v_1}{k} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial p}{\partial z} + \rho \omega a \dot{n}(t) \right) \right)^{\alpha+1} r^{\alpha+2} \quad (77)$$

Resolviendo la Ec. (77) por el método de separación de variables:

$$T(r,t) = - \frac{v_0}{16k} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial p}{\partial z} + \rho \omega a \dot{n}(t) \right) \right)^2 r^4 - \frac{v_1 r^{\alpha+3}}{k(\alpha+3)^2} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial p}{\partial z} + \rho \omega a \dot{n}(t) \right) \right)^{\alpha+1} + C_1(t) \ln r + C_2(t) \quad (78)$$

La Ec. (78) contiene dos constantes dependientes del tiempo, por lo que se necesitan dos condiciones de frontera: (i) La primera condición está relacionada con la asimetría del perfil de temperaturas, o que la temperatura debe de permanecer acotada en todo el intervalo de la coordenada radial r. La segunda (ii) es el valor puntual que toma la temperatura en la superficie del cilindro.



$$\text{Condiciones de frontera: } \begin{cases} r = 0; T(r,t) = \text{finito} \\ r = a; T(r,t) = 0 \end{cases} \quad (79a,b)$$

Evaluando condiciones a la frontera y encontrando el valor de $C_1(t)$ y $C_2(t)$ se tiene que el término $C_1 \ln r$ se elimina debido a que su valor tiende al infinito, por lo tanto, solo se obtiene el valor de C_2 .

$$C_2 = \frac{v_0 a^4}{16k} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial p}{\partial z} + \rho \omega a \dot{n}(t) \right) \right]^2 + \frac{v_1 a^{\alpha+3}}{k(\alpha+3)^2} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial p}{\partial z} + \rho \omega a \dot{n}(t) \right) \right]^{\alpha+1} + T_0 \quad (80)$$

Sustituyendo el valor de la constante C_2 (Ec. 80) en la solución general (Ec. 78), se tiene lo siguiente:

$$T(r) - T_0 = \frac{v_0 a^4}{16k} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial p}{\partial z} + \rho \omega a \dot{n}(t) \right) \right)^2 \left(1 - \left(\frac{r}{a} \right)^4 \right) + \frac{v_1 a^{\alpha+3}}{k(\alpha+3)^2} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial p}{\partial z} + \rho \omega a \dot{n}(t) \right) \right)^{\alpha+1} \left(1 - \left(\frac{r}{a} \right)^{\alpha+3} \right) \quad (81)$$

La Ec. (81) representa el perfil de temperaturas del sistema con disipación viscosa. Nótese que la Ec. (81) contiene la contribución newtoniana y la no newtoniana del modelo de Ellis.

$$T(r) - T_0 = \frac{v_0 a^2}{16k} (-\sigma_w)^2 \left(1 - \frac{\frac{1}{2} \rho (\omega a) a \dot{n}(t)}{\sigma_w} \right)^2 \left(1 - \left(\frac{r}{a} \right)^4 \right) + \frac{v_1 a^2}{k(\alpha+3)^2} (-\sigma_w)^{\alpha+1} \left(1 - \frac{\frac{1}{2} \rho (\omega a) a \dot{n}(t)}{\sigma_w} \right)^{\alpha+1} \left(1 - \left(\frac{r}{a} \right)^{\alpha+3} \right)$$

5.6.2 Cálculo de la temperatura promedio espacial

La temperatura promedio se calcula evaluando las contribuciones de la temperatura en un área promedio, por lo que se tiene la siguiente ecuación:

$$\langle T(r) - T_0 \rangle = \frac{\int_0^a \int_0^{2\pi} (T(r) - T_0) r dr d\theta}{\int_0^a \int_0^{2\pi} r dr d\theta} \quad (82)$$

De la misma manera que en perfil de velocidades, La Ec. (82) se puede resolver más fácilmente proponiendo el siguiente cambio de variable: $u = r/a$, por lo que integrando con respecto a la variable angular θ , se tiene lo siguiente:

$$\langle T(u) - T_0 \rangle = \frac{\int_0^1 (T(u) - T_0) u du}{\int_0^1 u du} = 2 \int_0^1 (T(u) - T_0) u du \quad (83)$$

Sustituyendo la Ec. (60) e integrando respecto a “u”:

$$\langle T(r,t) - T_0 \rangle = \frac{v_0 a^4}{16k} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial p}{\partial z} + \rho \omega a \dot{n}(t) \right) \right)^2 \int_0^1 (1-u^4) u du + \frac{v_0 a^{\alpha+3}}{k (\alpha+3)^2} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial p}{\partial z} + \rho \omega a \dot{n}(t) \right) \right)^{\alpha+1} \int_0^1 (1-u^{\alpha+3}) u du \quad (84)$$

Finalmente se obtiene el perfil de temperatura promedio:

$$\langle T(r,t) - T_0 \rangle = \frac{v_0 a^4}{24k} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial p}{\partial z} + \rho \omega a \dot{n}(t) \right) \right)^2 + \frac{v_0 a^{\alpha+3}}{(\alpha+3)(\alpha+5)k} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial p}{\partial z} + \rho \omega a \dot{n}(t) \right) \right)^{\alpha+1} \quad (85)$$

La Ec. (85) puede ser expresada en términos del esfuerzo en la pared, por lo que:

$$\langle T(r,t) - T_0 \rangle = \frac{v_0 a^2}{24k} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial z} a \right)^2 \left(1 + \frac{\frac{1}{2} \rho (\omega a) a \dot{n}(t)}{\frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial z} a} \right)^2 + \frac{v_0 a^{\alpha+3}}{(\alpha+3)(\alpha+5)k} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial z} a \right)^{\alpha+1} \left(1 + \frac{\frac{1}{2} \rho (\omega a) a \dot{n}(t)}{\frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial z} a} \right)^{\alpha+1} \quad (86)$$

La temperatura promedio puede ser expresada en términos del esfuerzo en la pared

$$\langle T(r,t) - T_0 \rangle = \frac{v_0 a^2}{24k} (-\sigma_w)^2 \left(1 - \frac{\frac{1}{2} \rho (\omega a) a \dot{n}(t)}{\sigma_w} \right)^2 + \frac{v_0 a^{\alpha+3}}{(\alpha+3)(\alpha+5)k} (-\sigma_w)^{\alpha+1} \left(1 - \frac{\frac{1}{2} \rho (\omega a) a \dot{n}(t)}{\sigma_w} \right)^{\alpha+1} \quad (87)$$



5.6.3 Cálculo de la temperatura promedio temporal

Para calcular la temperatura promedio temporal, se parte de la Ec. (85) es decir, se expande la expresión en forma de una serie binomial y después de eso se obtiene el promedio por lo que:

$$\langle T(r,t) - T_0 \rangle = \frac{v_0 a^2}{24k} (-\sigma_w)^2 \left(1 - \frac{\frac{1}{2} \rho(\omega a) a \dot{n}(t)}{\sigma_w} \right)^2 + \frac{v_1 a^{\alpha+3}}{(\alpha+3)(\alpha+5)k} (-\sigma_w)^{\alpha+1} \left(1 - \frac{\frac{1}{2} \rho(\omega a) a \dot{n}(t)}{\sigma_w} \right)^{\alpha+1} \quad (88)$$

Si desarrollamos la Ec. (86) anterior utilizando el teorema del binomio, obtenemos lo siguiente:

$$\langle T(r,t) - T_0 \rangle = \frac{v_0 a^2}{24k} (-\sigma_w)^2 \left(1 - \frac{\rho \omega a^2 \dot{n}(t)}{\sigma_w} + \left(\frac{\frac{1}{2} \rho \omega a^2 \dot{n}(t)}{\sigma_w} \right)^2 \right) + \frac{v_1 a^{\alpha+3}}{(\alpha+3)(\alpha+5)k} (-\sigma_w)^{\alpha+1} \left(1 - (\alpha+1) \frac{\frac{1}{2} \rho \omega a^2 \dot{n}(t)}{\sigma_w} + \alpha(\alpha+1) \left(\frac{\frac{1}{2} \rho \omega a^2 \dot{n}(t)}{\sigma_w} \right)^2 + \dots \right) \quad (89)$$

Tomando el promedio de la Ec. (88) se tiene lo siguiente:

$$\overline{\langle T(r,t) - T_0 \rangle} = \frac{v_0 a^2}{24k} (-\sigma_w)^2 \left(1 + \left(\frac{\frac{1}{2} \rho \omega a^2}{\sigma_w} \right)^2 \left\langle \left(\dot{n}(t) \right)^2 \right\rangle \right) + \frac{v_1 a^{\alpha+3}}{(\alpha+3)(\alpha+5)k} (-\sigma_w)^{\alpha+1} \left(1 + \alpha(\alpha+1) \left(\frac{\frac{1}{2} \rho \omega a^2}{\sigma_w} \right)^2 \left\langle \left(\dot{n}(t) \right)^2 \right\rangle \right) \quad (90)$$

5.6.4 Número de Nusselt

El número de Nusselt se define como el cociente de dos mecanismos convectivos y de conducción

$$\text{Nu} = \frac{ah}{k} = \frac{a \left(-\frac{\partial T}{\partial r} \right)_{r=a}}{\langle T - T_0 \rangle} \quad (91)$$

El número de Nusselt relaciona los procesos convectivos en el sistema con los de transporte molecular asociados a la conducción, por lo que se tiene lo siguiente:

$$\text{Nu} = \frac{\frac{v_0}{4} \left(1 + \left(\frac{\frac{1}{2} \rho \omega a^2}{\sigma_w} \right)^2 \left\langle \left(\dot{n}(t) \right)^2 \right\rangle \right) + \frac{v_1}{(\alpha+3)} (-\sigma_w)^{\alpha-1} \left(1 + \alpha(\alpha+1) \left(\frac{\frac{1}{2} \rho \omega a^2}{\sigma_w} \right)^2 \left\langle \left(\dot{n}(t) \right)^2 \right\rangle \right)}{\frac{v_0}{24} \left(1 + \left(\frac{\frac{1}{2} \rho \omega a^2}{\sigma_w} \right)^2 \left\langle \left(\dot{n}(t) \right)^2 \right\rangle \right) + \frac{v_1 a^{\alpha-1}}{(\alpha+3)(\alpha+5)} (-\sigma_w)^{\alpha-1} \left(1 + \alpha(\alpha+1) \left(\frac{\frac{1}{2} \rho \omega a^2}{\sigma_w} \right)^2 \left\langle \left(\dot{n}(t) \right)^2 \right\rangle \right)} \quad (92)$$

El número de Nusselt nos da información acerca de la importancia de los mecanismos convectivos y de transporte molecular en el sistema. Nótese que para un fluido no newtoniano depende de las propiedades materiales del medio así como de la fuerza motriz asociada con el gradiente de presión y de la perturbación estocástica. En la siguiente sección, damos un valor a la función estocástica $n(t)$ y presentamos las ecuaciones más importantes de la presente investigación.

5.7 Repaso de las principales ecuaciones obtenidas en este capítulo.

En esta sección se presentan los resultados principales obtenidos en este análisis. Suponiendo que la función estocástica $n(t)$ es representada por una función trigonométrica, i.e. $n(t) = M \text{Sin}(\omega t)$. Las ecuaciones analíticas particulares son presentadas a continuación:



5.7.1 Velocidad axial

La velocidad axial representada por la ecuación anterior nos da el perfil de velocidades en función de tres contribuciones: (a) la fuerza macroscópica, (b) el fluido newtoniano, (c) el fluido de ley de potencia, y (d) de los efectos inerciales.

a) Modelo de Ellis:

$$V_z(r,t,v_0,v_1,\alpha,M,\rho) = \underbrace{\omega a M \text{Sen}(\omega t)}_{(a)} - \underbrace{\frac{v_0 a^2}{2} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{dp}{dz} + \overbrace{\rho \omega a (\omega M \text{Cos}(\omega t))}^{\text{Inercia}} \right) \right]}_{(b)} \left[1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right] - \underbrace{\frac{v_1 a^{\alpha+1}}{\alpha+1} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{dp}{dz} + \overbrace{\rho \omega a (\omega M \text{Cos}(\omega t))}^{\text{Inercia}} \right) \right]^\alpha}_{(c)} \left[1 - \left(\frac{r}{a} \right)^{\alpha+1} \right]$$

Nótese que la ecuación general contiene los siguientes casos particulares:

b) Newtoniano:

$$\lim_{v_1 \rightarrow 0} V_z(r,t) = \underbrace{\omega a M \text{Sen}(\omega t)}_{(a)} + \underbrace{\frac{v_0 a^2}{2} \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{dp}{dz} + \overbrace{\rho \omega a (\omega M \text{Cos}(\omega t))}^{\text{Inercia}} \right) \right]}_{(b)} \left[1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right]$$

c) Ley de potencia:

$$\lim_{v_0 \rightarrow \infty} V_z(r,t) = \underbrace{\omega a M \text{Sen}(\omega t)}_{(a)} + \underbrace{\frac{v_1 a^{\alpha+1}}{\alpha+1} \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{dp}{dz} + \overbrace{\rho \omega a (\omega M \text{Cos}(\omega t))}^{\text{Inercia}} \right) \right]^\alpha}_{(c)} \left[1 - \left(\frac{r}{a} \right)^{\alpha+1} \right]$$

Por otra parte, la manera de modificar el perfil de velocidades es a través de las propiedades no newtonianas del líquido y la fuerza macroscópica en el sistema $\{\rho, M, v_0, v_1, \alpha\}$

5.7.2 Flujo volumétrico vibrátil

$$Q(t, v_0, v_1, \alpha, M, \rho) = \underbrace{\pi a^2 \omega a M \text{Sen}(\omega t)}_{\text{Fuerza-Macroscopica}} + \underbrace{\frac{v_0 \pi a^4}{4} \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{dp}{dz} + \rho \omega a (\omega M \text{Cos}(\omega t)) \right) \right]}_{\text{Newtoniano}} + \underbrace{\frac{v_1 \pi a^{\alpha+3}}{\alpha+3} \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{dp}{dz} + \rho \omega a (\omega M \text{Cos}(\omega t)) \right) \right]^\alpha}_{\text{Ley-de-Potencia}} \quad \text{Ellis}$$

El flujo volumétrico puede ser separado en tres contribuciones principales. La primera de ellas está asociada a la fuerza macroscópica que se impone al sistema (cilindro) a través de una función matemática (estocástica). La segunda contribución está asociada con el fluido Newtoniano, es decir, a baja rapidez de deformación. Por último la tercera contribución está relacionada a las propiedades no Newtonianas del sistema, a través del modelo de ley de potencia. Nótese que el gradiente de presión esta modificado por una contribución asociada con la inercia la cual depende de la función estocástica debido a la fuerza macroscópica. Al igual que el perfil de velocidades el flujo volumétrico depende de las propiedades materiales del líquido geométricas del sistema y la amplitud del mecanismo vibrátil.

Casos particulares:

a) Flujo volumétrico promediado

$$\langle Q(t) \rangle = \frac{v_0 \pi a^4}{4} \left(-\frac{1}{2} \frac{dp}{dz} \right) + \frac{v_1 \pi a^{\alpha+3}}{\alpha+3} \left\{ \left(-\frac{1}{2} \frac{dp}{dz} \right)^\alpha + (\alpha-1) \alpha \left(-\frac{1}{2} \frac{dp}{dz} \right)^{\alpha-2} \left(-\frac{1}{2} \rho \omega a \right)^2 \left\langle \frac{1}{2} \omega^2 M^2 \right\rangle \right\}$$

b) Ley de potencia-inercia

$$Q(t) = \underbrace{\pi a^2 \omega a M \text{Sen}(\omega t)}_{\text{Fuerza-Macroscopica}} + \frac{v_1 \pi a^{\alpha+3}}{\alpha+3} \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{dp}{dz} + \rho \omega a (\omega M \text{Cos}(\omega t)) \right) \right]^\alpha$$



c) Ley de potencia-sin inercia

$$Q(t) = \underbrace{\pi a^2 \omega a M \text{Sen}(\omega t)}_{\text{Fuerza-Macroscopica}} + \frac{v_1 \pi a^{\alpha+3}}{\alpha+3} \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{dp}{dz} \right) \right]^\alpha$$

d) Newtoniano-Inercia

$$Q(t) = \underbrace{\pi a^2 \omega a M \text{Sen}(\omega t)}_{\text{Fuerza-Macroscopica}} + \frac{v_0 \pi a^4}{4} \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{dp}{dz} + \rho \omega a (\omega M \text{Cos}(\omega t)) \right) \right]$$

e) Newtoniano-Sin inercia

$$Q(t) = \underbrace{\pi a^2 \omega a M \text{Sen}(\omega t)}_{\text{Fuerza-Macroscopica}} + \frac{v_0 \pi a^4}{4} \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{dp}{dz} \right) \right]$$

f) Flujo volumétrico a gradiente de presión constante

$$Q = \frac{v_0 \pi a^4}{4} \left(-\frac{1}{2} \frac{dp}{dz} \right)$$

5.7.3 Eficiencia del flujo volumétrico

Con el fin de comparar los efectos de la fuerza macroscópica sobre el flujo volumétrico, calculamos el aumento en el flujo volumétrico que no es otra cosa que cuantas veces es mayor el flujo volumétrico con la perturbación que aquel a gradiente de presión constante. Nótese que los efectos inerciales son directamente proporcionales al aumento de flujo y dependen de la frecuencia, amplitud de la fuerza macroscópica.

$$I(\%) = \frac{100}{4} (\rho \omega a)^2 (\alpha - 1) \alpha \frac{\frac{v_1}{\alpha+3} (\sigma_w)^{\alpha-2}}{\frac{v_0}{4} \sigma_w + \frac{v_1}{\alpha+3} (\sigma_w)^\alpha} \left(\frac{1}{2} M^2 \omega^2 \right)$$

Casos particulares:

a) Newtoniano

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1} I(\%) = \frac{100}{4} (\rho \omega a)^2 (\alpha - 1) \alpha \frac{\frac{v_1}{\alpha + 3} (\sigma_w)^{\alpha - 2}}{\frac{v_0}{4} \sigma_w + \frac{v_1}{\alpha + 3} (\sigma_w)^\alpha} \left(\frac{1}{2} M^2 \omega^2 \right) \rightarrow 0$$

b) Comportamiento asintótico a valores grandes del esfuerzo en la pared.

$$\lim_{\sigma_w \rightarrow \infty} I(\%) \rightarrow \frac{100}{4} (\rho \omega a)^2 (\alpha - 1) \alpha \left(\frac{1}{2} M^2 \omega^2 \right) (\sigma_w)^{-2}$$

Es importante resaltar que cuando α es del orden de uno, la eficiencia del flujo volumétrico es tiende a cero (Newtoniano). Por otra parte, a esfuerzos en la pared elevados, el comportamiento asintótico es monofónico decreciente equivalente al de una hipérbola equilátera.

5.8 Transporte de Energía

5.8.1 Perfil de temperatura general

$$T(r, t, a, \rho, v_0, v_1, \alpha, k, M) - T_0 = \underbrace{\frac{1}{k} \frac{v_0 a^4}{16} \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\partial p}{\partial z} + \rho \omega a (\omega M \cos(\omega t)) \right) \right)^2 \left(1 - \left(\frac{r}{a} \right)^4 \right)}_{\text{Newtoniano}} + \underbrace{\frac{1}{k} \frac{v_1 a^{\alpha+3}}{(\alpha+3)^2} \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\partial p}{\partial z} + \rho \omega a (\omega M \cos(\omega t)) \right) \right)^{\alpha+1} \left(1 - \left(\frac{r}{a} \right)^{\alpha+3} \right)}_{\text{Ley-de-potencia}} \quad \text{Ellis}$$

Casos particulares:

a) Temperatura promedio

$$\langle T(r) - T_0 \rangle = \frac{a^2 v_0}{24k} \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\partial p}{\partial z} + \rho \omega a (\omega M \cos(\omega t)) \right) \right) a^2 - \frac{v_1 a^2}{k(\alpha+3)(\alpha+5)} \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\partial p}{\partial z} + \rho \omega a (\omega M \cos(\omega t)) \right) \right) a^{\alpha+1}$$



b) Perfil de temperatura: Ley de potencia-Inercia

$$T(r, t, a, \rho, v_1, \alpha, k, M, \omega) - T_0 = \frac{1}{k} \frac{v_1 a^{\alpha+3}}{(\alpha+3)^2} \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\partial p}{\partial z} + \rho \omega a (\omega M \cos(\omega t)) \right) \right)^{\alpha+1} \left(1 - \left(\frac{r}{a} \right)^{\alpha+3} \right)$$

c) Perfil de temperatura: Ley de potencia-Sin inercia

$$T(r, t, a, \rho, v_1, \alpha, k, M, \omega) - T_0 = \frac{1}{k} \frac{v_1 a^{\alpha+3}}{(\alpha+3)^2} \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right) \right)^{\alpha+1} \left(1 - \left(\frac{r}{a} \right)^{\alpha+3} \right)$$

d) Perfil de temperatura: Newtoniano-Inercia.

$$T(r, t, a, \rho, v_0, k, M, \omega) - T_0 = \frac{1}{k} \frac{v_0 a^4}{16} \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\partial p}{\partial z} + \rho \omega a (\omega M \cos(\omega t)) \right) \right)^2 \left(1 - \left(\frac{r}{a} \right)^4 \right)$$

e) Perfil de temperatura: Newtoniano-Inercia.

$$T(r, t, a, v_0, k) - T_0 = \frac{1}{k} \frac{v_0 a^4}{16} \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right) \right)^2 \left(1 - \left(\frac{r}{a} \right)^4 \right)$$

5.8.2 Número de Nusselt

$$Nu = \frac{\frac{v_0}{4} \left(1 + \frac{1}{2} \omega^2 M^2 \left(\frac{\frac{1}{2} \rho \omega a^2}{\sigma_w} \right)^2 \right) + \frac{v_1}{(\alpha+3)} (-\sigma_w)^{\alpha-1} \left(1 + \alpha(\alpha+1) \left(\frac{\frac{1}{2} \rho \omega a^2}{\sigma_w} \right)^2 \frac{1}{2} \omega^2 M^2 \right)}{\frac{v_0}{24} \left(1 + \left(\frac{\frac{1}{2} \rho \omega a^2}{\sigma_w} \right)^2 \frac{1}{2} \omega^2 M^2 \right) + \frac{v_1 a^{\alpha-1}}{(\alpha+3)(\alpha+5)} (-\sigma_w)^{\alpha-1} \left(1 + \alpha(\alpha+1) \left(\frac{\frac{1}{2} \rho \omega a^2}{\sigma_w} \right)^2 \frac{1}{2} \omega^2 M^2 \right)}$$



CAPÍTULO VI

SIMULACIONES COMPUTACIONALES



6.1 Variables adimensionales

En esta sección, se presentan las variables adimensionales que nos facilitaran las simulaciones y la descripción de los mecanismos que domina el sistema a través de los grupos adimensionales. En la siguiente tabla se presentan las variables características más importantes del presenta análisis: Las variables escaladas son: (i) LA coordenada radial, (ii) EL esfuerzo cortante, (iii) La variable temporal t, (iv) La temperatura, (v) la velocidad axial, (vi) el flujo volumétrico y (vii) la frecuencia de las oscilaciones

Tabla 2. Variables dimensionales y adimensionales.

	Variable dimensional	Variable Característica	Variable adimensional
Coordenada radial [m]	r	$rc = a$	$r^* = \frac{r}{rc}$
Esfuerzo cortante rz [Pa]	σ_{rz}	$\sigma_c = \alpha \sqrt{\frac{v_0}{v_1}}$	$\sigma_w^* = \frac{\sigma_w}{\sigma_c}$
Variable temporal [s]	t	$tc = 1/v_0\sigma_c$	$t^* = \frac{t}{tc}$
Temperatura local del fluido [C]	$T(r,t) - T_0$	$T_c = \frac{v_1 a^2 \sigma_c^{\alpha+1}}{k}$	$T^*(r^*, t^*) - T_0^* = \frac{T(r,t) - T_0}{T_c}$
Velocidad axial [m/s]	$V_z(r,t)$	$V_c = a v_0 \sigma_c$	$V_z^* = \frac{V_z}{V_c}$
Flujo volumétrico [m ³ /s]	Q	$Q_c = a^3 v_0 \sigma_c$	$Q^* = \frac{Q}{Q_c}$
Frecuencia angular [rad/s]	ω	$\omega_c = (1/tc) = v_0 \sigma_c$	$\omega^* = \frac{\omega}{\omega_c}$

Es importante destacar que la variable característica radial es el radio del tubo, el esfuerzo característico combina la fluidez a bajo y moderado corte respectivamente. El tiempo característico es el producto de la fluidez a bajo corte y el esfuerzo característico. La temperatura adimensional, es una combinación de parámetros que incluyen las propiedades no newtonianas del moldeo de Ellis y las del transporte molecular del sistema. La velocidad axial característica del sistema es el producto del radio del tubo con el tiempo característico asociado a las propiedades no newtonianas. El flujo volumétrico involucra el cubo del radio del capilar multiplicado por la frecuencia característica. Finalmente, la frecuencia se hace adimensional con el inversor el tiempo característico.

En la siguiente tabla se presentan las unidades de las variables características involucradas:

Tabla 3. Variables características.

Nombre	Variable característica	Nombre	Unidades (MKS)
Variable geométrica	a	Radio del capilar	m
Propiedad reológica del fluido	φ_0	Fluidez a corte bajo	1/Pa s
Propiedad reológica del material	φ_1	Fluidez generalizada ó a intermedios cortes	1/Pa s ⁿ
Propiedad reológica del material	α	Fluidez generalizada ó a intermedios cortes	1/Pas ⁿ
Propiedad de Transporte de Energía del material	k	Conductividad térmica del material	J/s K m



Es importante destacar que el conjunto de variables adimensionales, nos permiten:

- Escalar las variables
- Simplifican las simulaciones computacionales
- Aparecen grupos adimensionales que engloban los mecanismos más importantes en el sistema.

A continuación se presentan las ecuaciones adimensionales, que son punto de partida en los cálculos posteriores.

6.2 Ecuaciones adimensionales

- Ecuación de velocidad adimensional:

$$Vz^*(r^*, t^*) = M\omega^* \text{Sen}(\omega^* t^*) + \frac{1}{2} \left[\sigma_w^* + \frac{1}{2} M \text{Re} \omega^* \text{Cos}(\omega^* t^*) \right] (1-r^{*2}) + \frac{1}{(\alpha+1)} \left(\sigma_w^* + \frac{1}{2} M \text{Re} \omega^* \text{Cos}(\omega^* t^*) \right)^\alpha (1-r^{*\alpha+1})$$

- Flujo volumétrico adimensional

$$Q^*(t^*) = M\omega^* \text{Sen}(\omega^* t^*) + \frac{1}{4} \left(\sigma_w^* + \frac{1}{2} M \text{Re} (\omega^* \text{Cos}(\omega^* t^*)) \right) + \frac{1}{(\alpha+3)} \left(\sigma_w^* + \frac{1}{2} M \text{Re} (\omega^* \text{Cos}(\omega^* t^*)) \right)^\alpha$$

- Flujo volumétrico promedio adimensional:

$$\overline{Q^*(t^*)} = \frac{1}{4} \sigma_w^* + \frac{1}{(\alpha+3)} \left\{ (\sigma_w^*)^\alpha + \frac{1}{4} M^2 \alpha (\alpha-1) (\omega^* \text{Re})^2 (\sigma_w^*)^{\alpha-2} \right\}$$

- Aumento en el flujo volumétrico:

$$I(\%) = \frac{25}{2} M^2 \alpha (\alpha-1) (\omega^* \text{Re})^2 (\sigma_w^*)^{-2} \frac{\frac{4}{\alpha+3} (\sigma_w^*)^{\alpha-1}}{1 + \frac{4}{\alpha+3} (\sigma_w^*)^{\alpha-1}}$$

e) Fracción de potencia utilizada en el flujo vibrátil:

$$E(\%) = \frac{25}{2} M^2 \alpha (\alpha - 1) (\omega^* \text{Re})^2 (\sigma_w^*)^{-2} \frac{\frac{4}{\alpha + 3} (\sigma_w^*)^{\alpha - 1}}{1 + \frac{4}{\alpha + 3} (\sigma_w^*)^{\alpha - 1}}$$

f) Perfil de temperatura con perturbación adimensional:

$$T^*(r^*) - T_0^* = \frac{1}{16} \left(\sigma_w^* + \frac{1}{2} \text{Re}(\omega^* M \cos(\omega^* t^*)) \right)^2 (1 - (r^*)^4) + \frac{1}{(\alpha + 3)^2} \left(\sigma_w^* + \frac{1}{2} \text{Re}(\omega^* M \cos(\omega^* t^*)) \right)^{\alpha + 1} (1 - (r^*)^{\alpha + 3})$$

g) Temperatura promedio espacial adimensional:

$$\langle T^*(r^*) - T_0^* \rangle = \frac{1}{24} \left(\sigma_w^* + \frac{1}{2} \text{Re}(\omega^* M \cos(\omega^* t^*)) \right)^2 + \frac{1}{(\alpha + 3)(\alpha + 5)} \left(\sigma_w^* + \frac{1}{2} \text{Re}(\omega^* M \cos(\omega^* t^*)) \right)^{\alpha + 1}$$

h) Temperatura promedio temporal adimensional:

$$\overline{\langle T^*(r^*) - T_0^* \rangle} = \frac{1}{24} \left(\sigma_w^{*2} + \frac{1}{8} \text{Re}^2 \omega^{*2} M^2 \right) + \frac{1}{(\alpha + 3)(\alpha + 5)} \left(\sigma_w^{*\alpha + 1} + \frac{\alpha(\alpha + 1)}{2} \frac{1}{8} \text{Re}^2 \omega^{*2} M^2 \sigma_w^{*\alpha - 1} \right)$$

i) Número de Nusselt

$$\text{Nu} = \frac{\frac{1}{4} \left(\sigma_w^{*2} + \frac{1}{8} \text{Re}^2 \omega^{*2} M^2 \right) + \frac{1}{(\alpha + 3)} \left(\sigma_w^{*\alpha + 1} + \frac{\alpha(\alpha + 1)}{16} \text{Re}^2 \omega^{*2} M^2 \sigma_w^{*\alpha - 1} \right)}{\frac{1}{24} \left(\sigma_w^{*2} + \frac{1}{8} \text{Re}^2 \omega^{*2} M^2 \right) + \frac{1}{(\alpha + 3)(\alpha + 5)} \left(\sigma_w^{*\alpha + 1} + \frac{\alpha(\alpha + 1)}{16} \text{Re}^2 \omega^{*2} M^2 \sigma_w^{*\alpha - 1} \right)}$$

6.3 Números adimensionales

Al introducir las variables adimensionales en las ecuaciones desacopladas se obtienen dos números adimensionales los cuales describen los mecanismos globales en el sistema. El número adimensional que caracteriza a este sistema de flujo vibrátil es el número adimensional del Reynolds Re .



$$Re = \frac{\rho(\omega a)a}{\eta_0} = \frac{\text{Mecanismos-inerciales}}{\text{Mecanismos-viscosos}} \Rightarrow \begin{cases} Re \gg 1; \text{ Fuerzas inerciales} \gg \text{ Fuerzas viscosas} \\ Re = 1; \text{ Fuerzas inerciales} = \text{ Fuerzas viscosas} \\ Re \ll 1; \text{ Fuerzas inerciales} \ll \text{ Fuerzas viscosas} \end{cases}$$

El número de Reynolds nos da información acerca del tipo de flujo que se está analizando:

$$Re = \frac{\rho(\omega a)a}{\eta_0} \Rightarrow \begin{cases} Re \ll 2100; & \text{Flujo laminar} \\ 2100 \ll Re \ll 10000; & \text{Flujo transitorio} \\ Re \gg 10000; & \text{Flujo turbulento} \end{cases}$$

Es importante destacar, que se ha definido la velocidad característica del sistema como $V = \omega a$; y el radio del capilar como la longitud característica respectivamente.

6.4 Perfil de velocidad

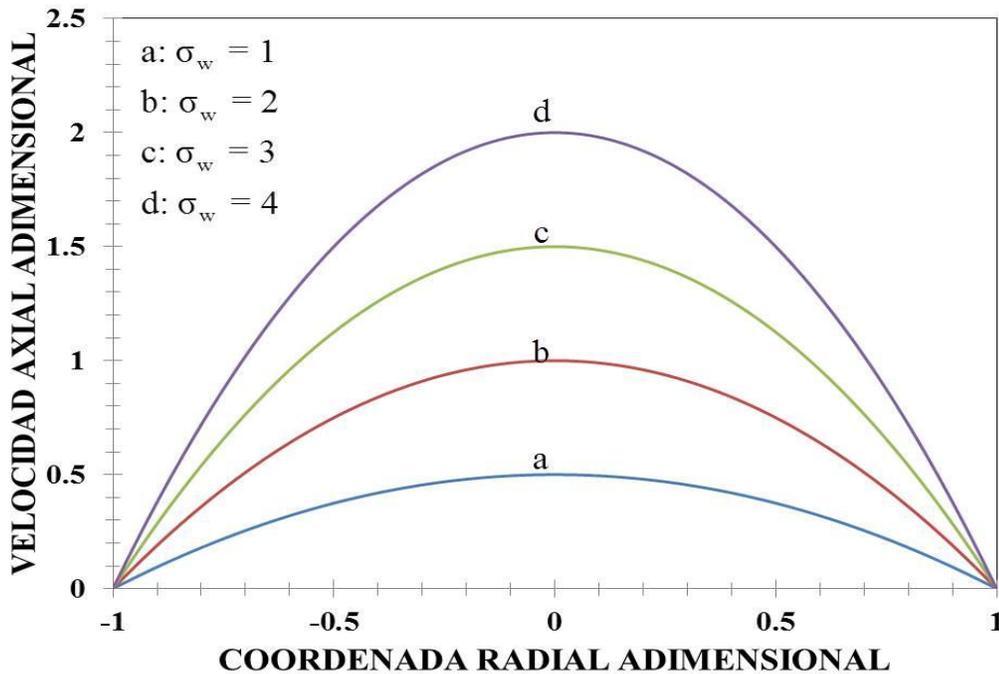


Figura 8. Velocidad axial adimensional vs la coordenada radial adimensional, como función del esfuerzo en la pared.

La Fig. 8, muestra el clásico comportamiento parabólico, es decir en la pared la velocidad es mínima debido a la condición de no-deslizamiento. Por otra parte, en el centro del tubo, se observa la máxima velocidad, la cual está completamente determinada por el cuadrado del esfuerzo en la pared. Nótese que el efecto del esfuerzo en la pared modifica el valor máximo en las curvas.

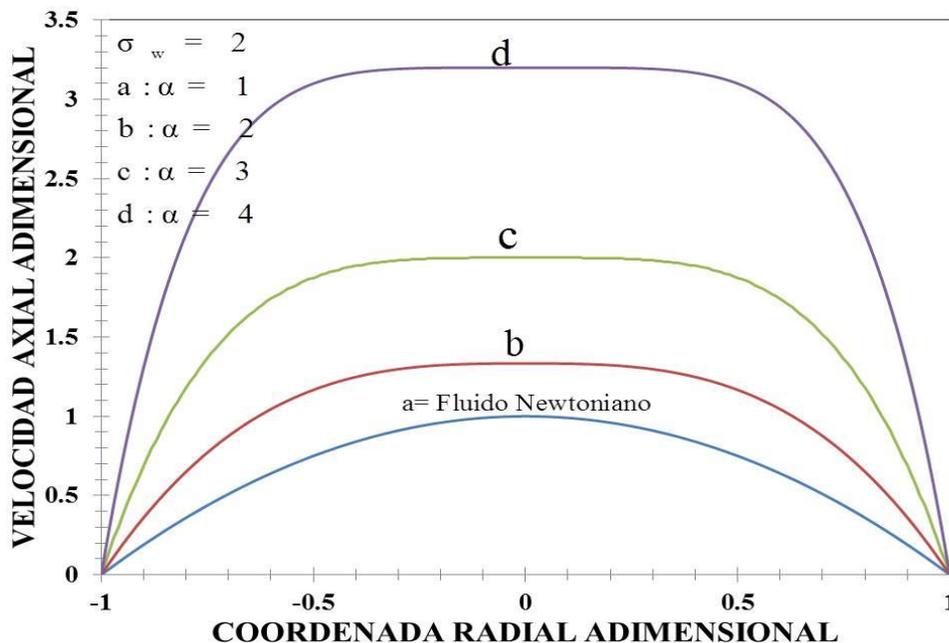


Figura 9. Velocidad axial adimensional vs la coordenada radial adimensional para diferentes valores del parámetro alfa en función de los mecanismos adelgazantes al corte.

La Fig. 9 muestra el clásico comportamiento parabólico solo en la curva “a”, es decir en la pared la velocidad es mínima debido a la condición de no-deslizamiento. Por otra parte, cuando el parámetro alfa aumenta la velocidad se incrementa por efecto de las propiedades adelgazantes al corte. Por otra parte, cuando los mecanismos adelgazantes dominan el sistema, se comienzan a formar frentes homogéneos de velocidad, es decir, que la velocidad es constante en un determinado intervalo. Dos puntos importantes pueden destacarse de esta simulación (i) La mayor velocidad se obtiene con el líquido más adelgazante (ii) Al mantener un valor constante de esfuerzo en la pared y variar el parámetro alfa llega un punto en donde los elementos materiales que conforma el sistema presentan la misma velocidad (la velocidad relativa de las partículas es la misma).

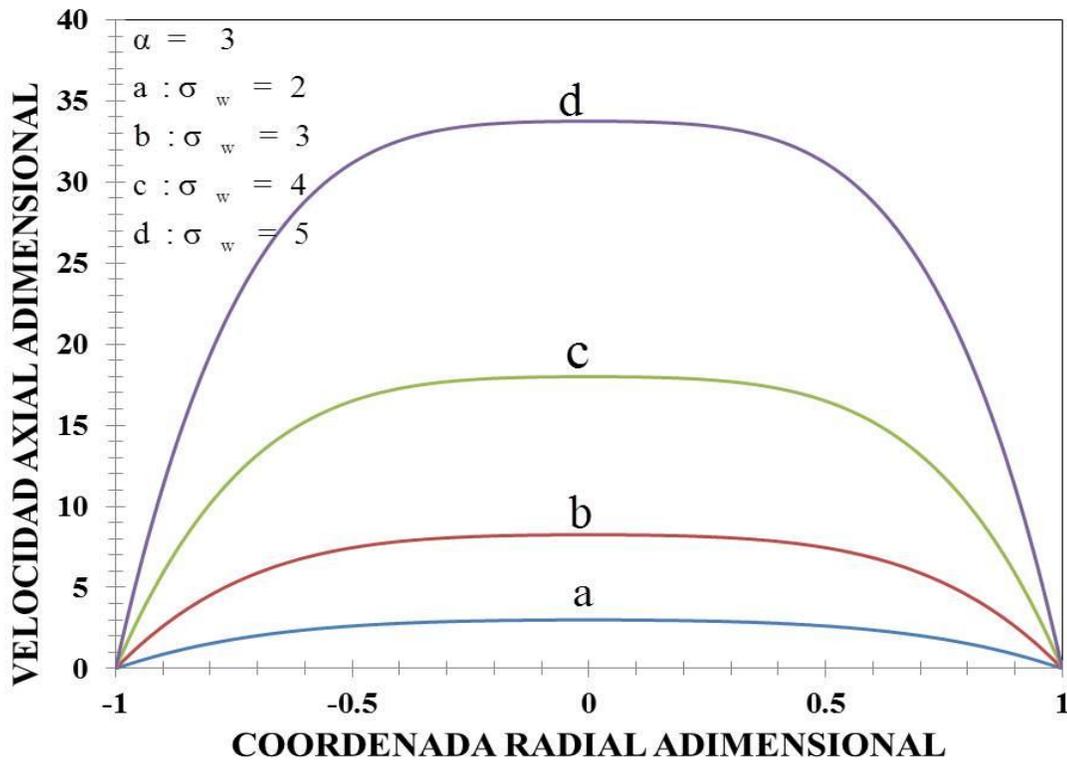


Figura 10. Velocidad axial adimensional vs la coordenada radial adimensional para diferentes valores del esfuerzo en la pared.

La Fig.10, muestra en el sistema un incremento de la velocidad hasta formar frentes homogéneos para cada uno de las curvas, es decir, que la velocidad es constante en un determinado intervalo. Nótese que el efecto del esfuerzo en la pared modifica la velocidad del sistema. Dos puntos importantes pueden destacarse de esta simulación (i) La mayor velocidad se obtiene con un mayor esfuerzo en la pared sobre el líquido (ii) Al mantener un valor constante el parámetro alfa y variar el esfuerzo en la pared llega un punto en donde los elementos materiales que conforman el sistema presentan la misma velocidad (la velocidad relativa de las partículas es la misma).

6.5 Flujo volumétrico

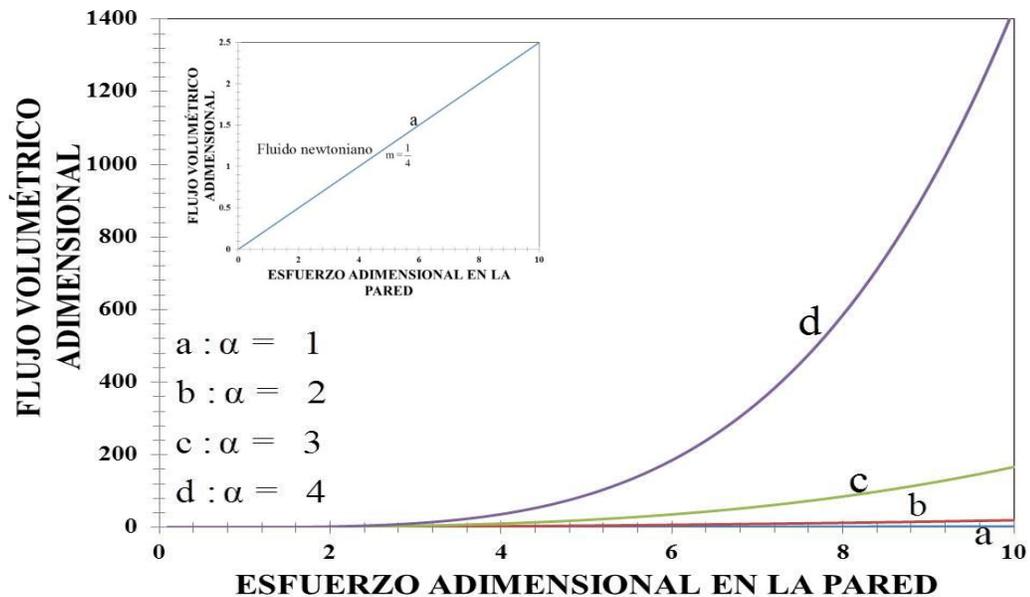


Figura 11. Flujo volumétrico adimensional vs esfuerzo adimensional en la pared en función de los mecanismos adelgazantes al corte. La gráfica insertada ilustra el comportamiento newtoniano ($\alpha = 1$).

En la Fig.11, se observa que el flujo volumétrico es mínimo a valores moderados de esfuerzo en la pared, sin embargo aún cierto valor crítico de esfuerzo, el flujo volumétrico es lineal con el esfuerzo en la pared. Por otra parte, cuando los efectos adelgazantes aumentan en el sistema, se observa un comportamiento exponencial lo que implica que los mecanismos adelgazantes juegan un papel importante en el flujo volumétrico.

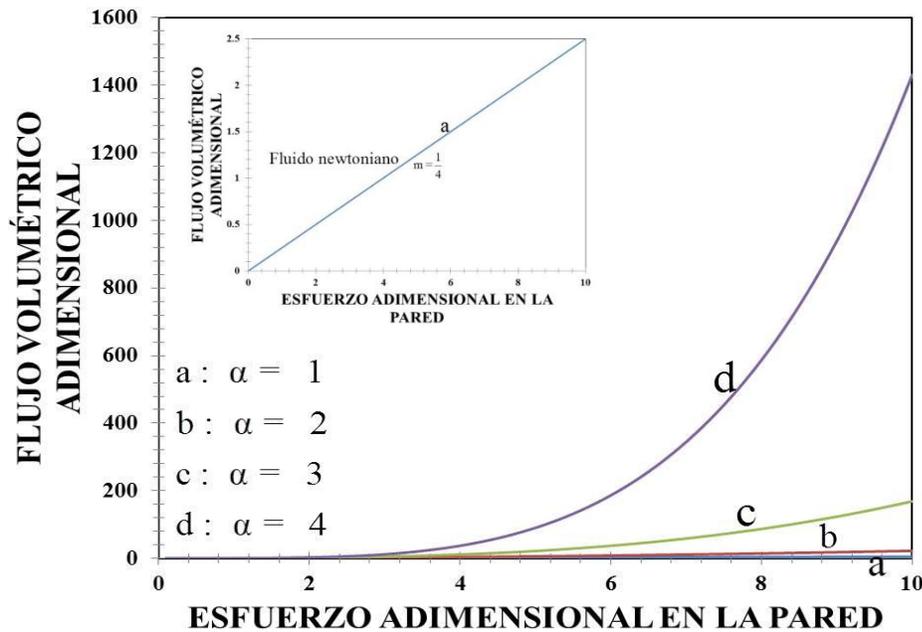


Figura 12. Flujo volumétrico adimensional vs esfuerzo adimensional en la pared en función de los mecanismos adelgazantes al corte del modelo de Ellis. La gráfica insertada ilustra el comportamiento newtoniano ($\alpha=1$).

En la Fig.12, se observa que el flujo volumétrico es mínimo a valores moderados de esfuerzo en la pared, sin embargo aún cierto valor crítico de esfuerzo, el flujo volumétrico es lineal con el esfuerzo en la pared. Por otra parte, cuando los efectos adelgazantes aumentan en el sistema, se observa un comportamiento exponencial lo que implica que los mecanismos adelgazantes juegan un papel importante en el aumento en el flujo volumétrico.

6.6 Aumento en el flujo volumétrico

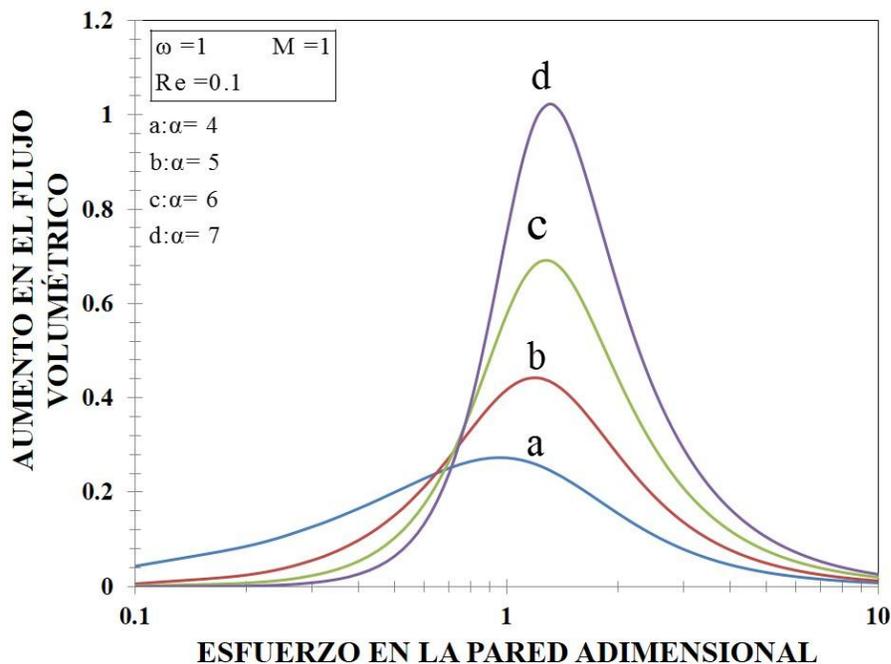


Figura 13. Aumento en flujo volumétrico vibrátil vs esfuerzo en la pared en función de los mecanismos adelgazantes al corte.

En la Fig.13 se ilustra el aumento en el flujo volumétrico vs esfuerzo en la pared en función del índice alfa del modelo de Ellis, el cual está asociado a las propiedades engrosantes o adelgazantes del sistema. Los otros parámetros empleados se muestran en la tabla 2. En todos los casos el sistema, muestra el clásico comportamiento resonante registrado en la literatura especializada en el tema. Nótese que a bajos valores del esfuerzo en la pared, el sistema presenta un comportamiento monótono creciente hasta un máximo el cual está determinado por un acoplamiento entre las propiedades inerciales, no Newtonianas y la fuerza macroscópica de nuestro sistema. Por otra parte, a un cierto valor crítico de esfuerzo en la pared el sistema presenta un comportamiento monótono decreciente hasta llegar a un valor mínimo. Dos puntos importantes se pueden destacar de esta simulación: (i) El mayor aumento se obtiene con el líquido más adelgazante, y (ii) El efecto resonante se presenta a valores bajos y moderados de esfuerzo en la pared.

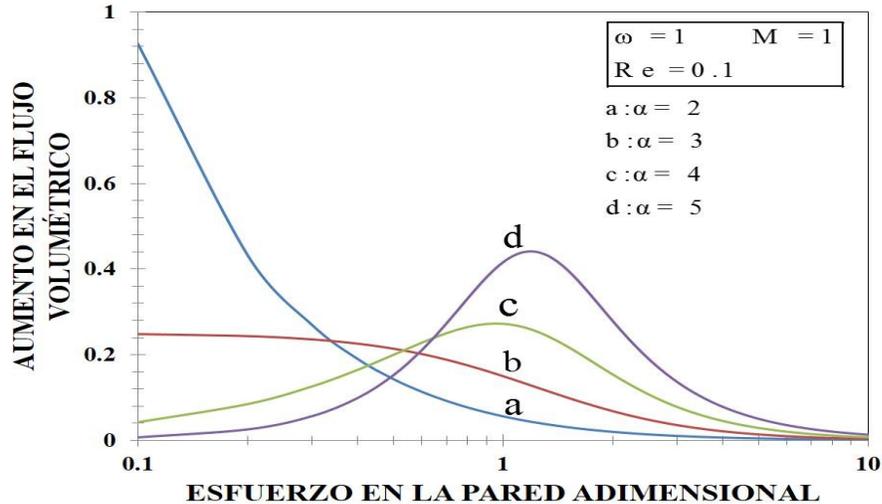


Figura 14. Aumento en el flujo volumétrico vibrátil vs esfuerzo en la pared en función de los mecanismos adelgazantes al corte.

En la Fig. 14 se ilustra el aumento en el flujo volumétrico vs esfuerzo en la pared en función del α del modelo de Ellis. Los otros parámetros empleados se muestran en la tabla 2. En los casos “c” y “d” del sistema, muestra el clásico comportamiento resonante citado en la literatura, mientras que en los casos “a” y “b” no se observa este comportamiento, y solo se tiene en los casos a y b un comportamiento monótono decreciente. Es importante notar que a partir de $\alpha > 3$ se observa el efecto resonante. En la simulación c, el máximo aumento en el flujo volumétrico es 0.3 mientras que $\alpha=5$ el aumento es aproximadamente 0.45 lo que implica que una unidad de aumento en el adelgazamiento implica un porcentaje de aumento de 0.1 unidades lo que es igual a un 50% del flujo. Nótese que a bajos valores del esfuerzo en la pared, el sistema presenta un comportamiento monótono creciente hasta el máximo el cual está determinado por un acoplamiento entre las propiedades inerciales, no Newtonianas y la fuerza macroscópica de nuestro sistema. Por otra parte, a un cierto valor crítico de esfuerzo en la pared el sistema presenta un comportamiento monótono decreciente hasta llegar a un valor mínimo. Tres puntos importantes pueden destacarse de esta simulación: (i) El mayor aumento se obtiene con el líquido más adelgazante, (ii) El efecto resonante se presenta a valores bajos y moderados de esfuerzo en la pared y (iii) A valores muy bajos del índice alfa el comportamiento resonante no es notable.

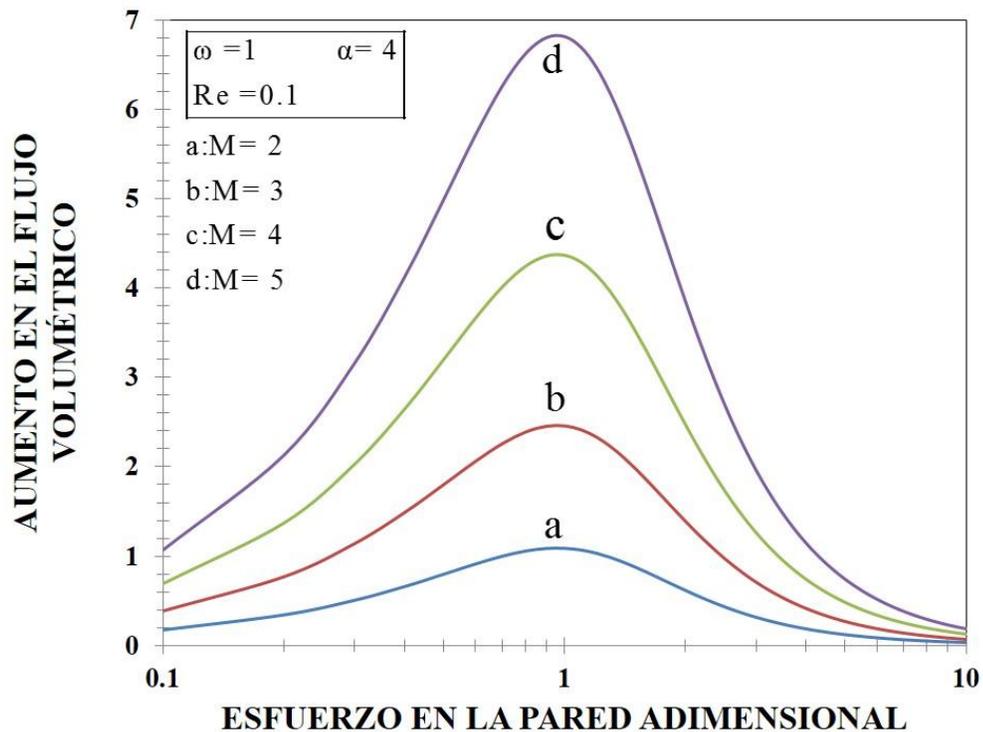


Figura 15. Aumento en el flujo volumétrico vibrátil vs esfuerzo en la pared en función de la amplitud de fuerza macroscópica.

En la Fig. 15 se ilustra el aumento en el flujo volumétrico vs esfuerzo en la pared en función del parámetro “M”, el cual está asociado a la amplitud del sistema. Los otros parámetros empleados se muestran en la tabla 2.

En todos los casos el sistema, muestra el clásico comportamiento resonante registrado en la literatura especializada en el tema. Nótese que a bajos valores del esfuerzo en la pared, el sistema presenta un comportamiento monótono creciente hasta un máximo el cual está determinado por el acoplamiento entre las propiedades inerciales, no Newtonianas y la fuerza macroscópica de nuestro sistema. Por otra parte, a un cierto valor crítico de esfuerzo en la pared el sistema presenta un comportamiento monótono decreciente hasta llegar a un valor mínimo. Dos puntos importantes se pueden destacar de esta simulación: (i) El mayor aumento se obtiene con el valor de amplitud más grande, (ii) El afecto resonante se presenta a valores bajos y moderados de esfuerzo en la pared.

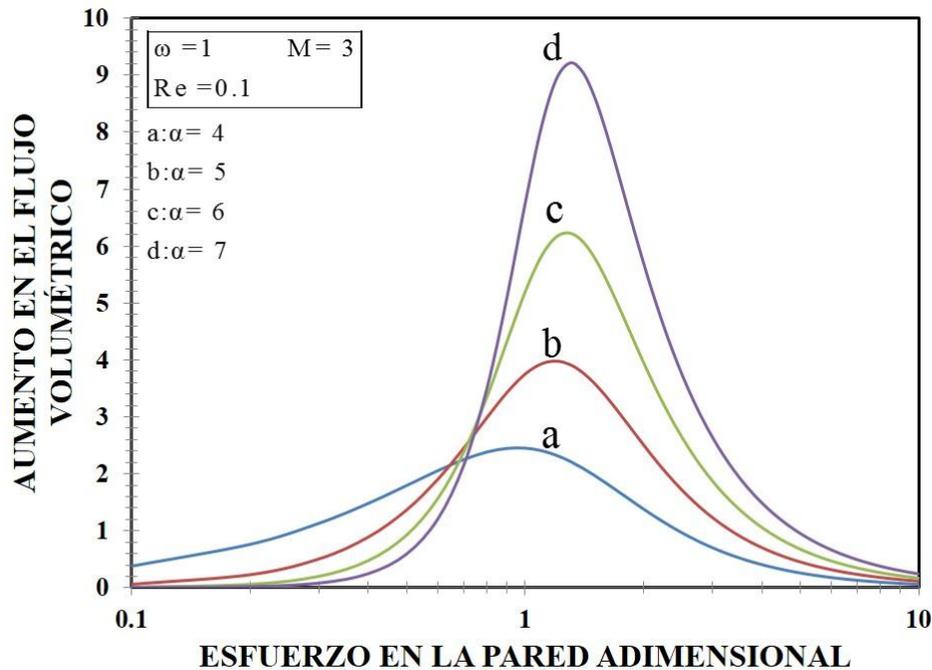


Figura 16. Aumento en flujo volumétrico vibrátil vs esfuerzo en la pared en función de los mecanismos adelgazantes al corte.

En la Fig.16 se ilustra el aumento en el flujo volumétrico vs esfuerzo en la pared en función del índice alfa del modelo de Ellis, el cual está asociado a las propiedades engrosantes o adelgazantes del sistema. Los otros parámetros empleados se muestran en la figura tabla 2. En todos los casos el sistema, muestra el clásico comportamiento resonante registrado en la literatura especializada en el tema. Nótese que a bajos valores del esfuerzo en la pared, el sistema presenta un comportamiento monótono creciente hasta un máximo el cual está determinado por un acoplamiento entre las propiedades inerciales, no Newtonianas y la fuerza macroscópica de nuestro sistema. Por otra parte, a un cierto valor crítico de esfuerzo en la pared el sistema presenta un comportamiento monótono decreciente hasta llegar a un valor mínimo. Tres puntos importantes se pueden destacar de esta simulación: (i) El mayor aumento se obtiene con el líquido más adelgazante, y (ii) El efecto resonante se presenta a valores bajos y moderados de esfuerzo en la pared. (iii) Mientras mayor sea la amplitud y el adelgazamiento al corte se obtendrá un mayor aumento en el flujo.

6.7 Perfil de temperatura adimensional

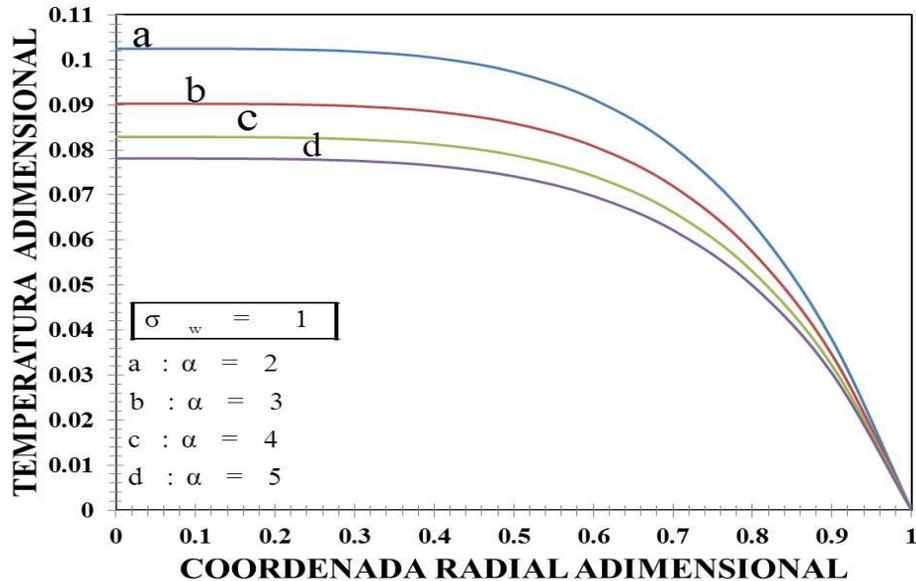


Figura 17. Perfil de temperatura adimensional vs coordenada radial adimensional en función de los mecanismos adelgazantes al corte.

En la Fig. 17 se ilustra el perfil de temperatura adimensional vs la coordenada radial adimensional para diferentes valores del parámetro α en función de los mecanismos adelgazantes al corte.

En la Fig.17 la máxima temperatura se obtiene en $r = 0$ cuyo valor está dado por: (ecuación en $r=0$) Nótese que la temperatura máxima es la suma de la temperatura newtoniana y la temperatura no newtoniana (tipo ley de potencia). Por otra parte, en el intervalo de $[0-0.5]$ la temperatura muestra un comportamiento constante sin embargo, a un cierto valor crítico de la coordenada radial adimensional la temperatura decrece monótonamente hasta un valor de 0. Es importante resaltar que el efecto de los mecanismos adelgazantes es el de desfasar la curva de temperatura hacia valores mayores de temperatura.

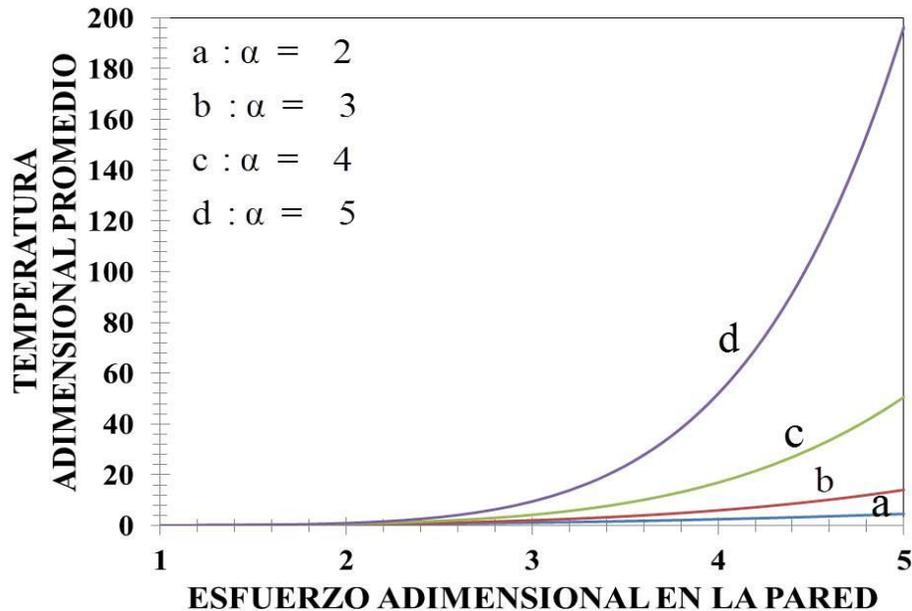


Figura 18. Perfil de temperatura promedio adimensional vs esfuerzo adimensional en la pared en función de los mecanismos adelgazantes al corte.

En la Fig.18 se ilustra el perfil de temperatura promedio adimensional vs el esfuerzo en la pared para diferentes valores del parámetro α en función de los mecanismos adelgazantes al corte.

En la Fig.18 la máxima temperatura se obtiene en $\alpha = 5$. Nótese que la temperatura máxima es la suma de la temperatura newtoniana y la temperatura no newtoniana (tipo ley de potencia). Por otra parte, en el intervalo de [1-2.2] la temperatura muestra un comportamiento constante sin embargo, a un cierto valor de esfuerzo en la pared la temperatura tiene un comportamiento monótono creciente. Es importante resaltar que el efecto de los mecanismos adelgazantes es el de desfasar la curva de temperatura hacia valores mayores de temperatura. Dos puntos importantes se pueden destacar de esta simulación: (i) El mayor aumento en la temperatura se obtiene con el líquido más adelgazante, y (ii) El comportamiento constante del sistema de obtiene a valores bajos y moderados de esfuerzo en la pared.

6.8 Perfil de temperatura promedio adimensional modificada por mecanismos inerciales

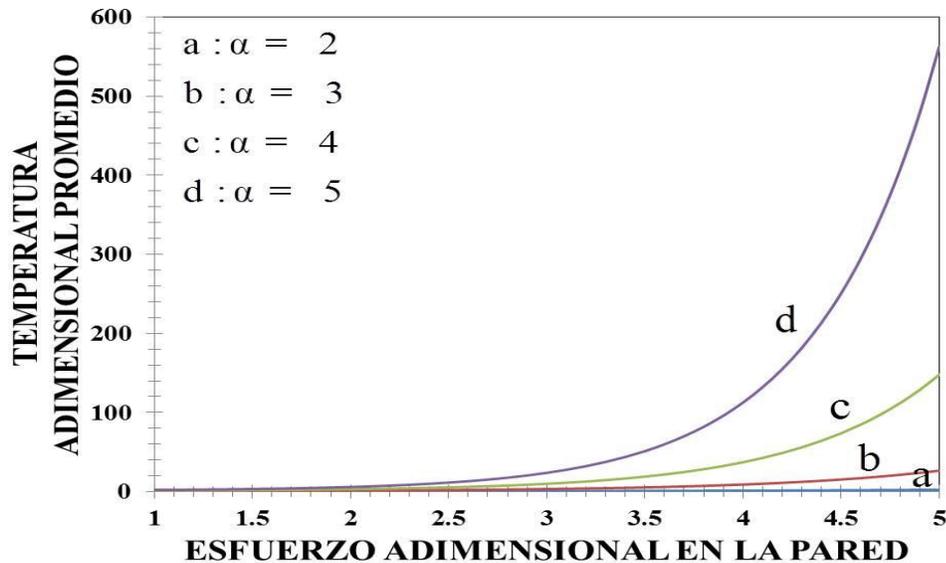


Figura 19. Perfil de temperatura promedio adimensional vs esfuerzo adimensional en la pared en función de los mecanismos adelgazantes al corte.

En la Fig.19 la máxima temperatura se obtiene en $\alpha = 5$. Nótese que la temperatura máxima es la suma de la temperatura newtoniana y la temperatura no newtoniana (tipo ley de potencia). Por otra parte, en el intervalo de 1-2.2 la temperatura muestra un comportamiento constante sin embargo, a un cierto valor de esfuerzo en la pared la temperatura tiene un comportamiento monótono creciente. Es importante resaltar que el efecto de los mecanismos adelgazantes es el de desfasar la curva de temperatura hacia valores mayores de temperatura. Tres puntos importantes se pueden destacar de esta simulación: (i) El mayor aumento en la temperatura se obtiene con el líquido más adelgazante, (ii) El comportamiento constante del sistema se obtiene a valores bajos y moderados de esfuerzo en la pared y (iii) Con la contribución de la perturbación aplicada al fluido se obtiene un incremento notable en la temperatura a comparación del fluido sin perturbación.

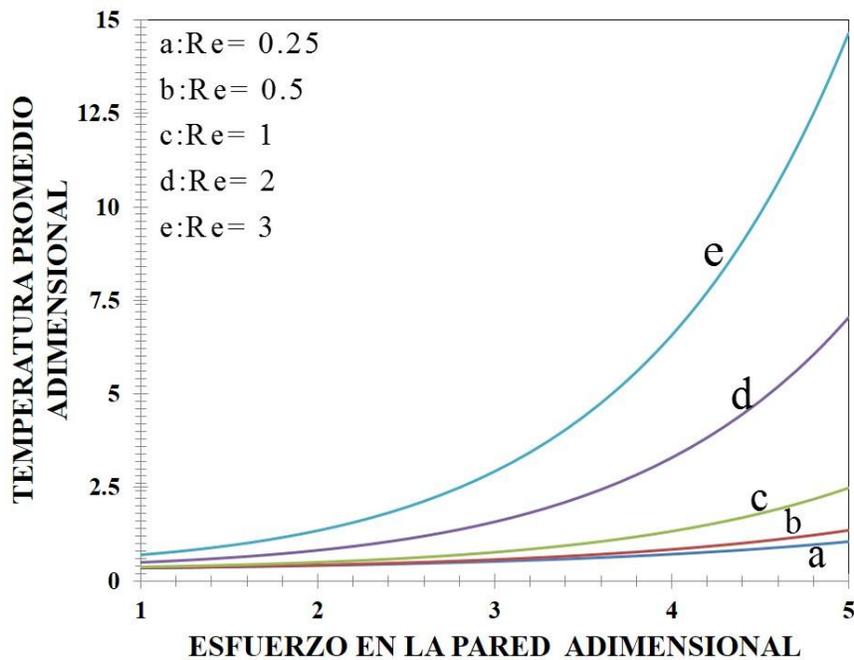


Figura 20. Perfil de temperatura promedio adimensional vs esfuerzo adimensional en la pared en función de los mecanismos viscosos e inerciales a través del número de Reynolds.

En la Fig.20 la máxima temperatura se obtiene con un valor del número de Reynolds igual a 3. Nótese que la temperatura máxima es la suma de la temperatura newtoniana y la temperatura no newtoniana (tipo ley de potencia). Por otra parte, en el intervalo de [0-0.4] la temperatura muestra un comportamiento constante sin embargo, a un cierto valor de esfuerzo en la pared la temperatura tiene un comportamiento monótono creciente. Es importante resaltar que el efecto de los mecanismos adelgazantes es el de desfasar la curva de temperatura hacia valores mayores de temperatura. Tres puntos importantes se pueden destacar de esta simulación: (i) El mayor aumento en la temperatura se obtiene con el líquido más adelgazante, (ii) El comportamiento constante del sistema se obtiene a valores bajos y moderados de esfuerzo en la pared y (iii) Con la contribución de la perturbación aplicada al fluido se obtiene un incremento notable en la temperatura a comparación del fluido sin perturbación.

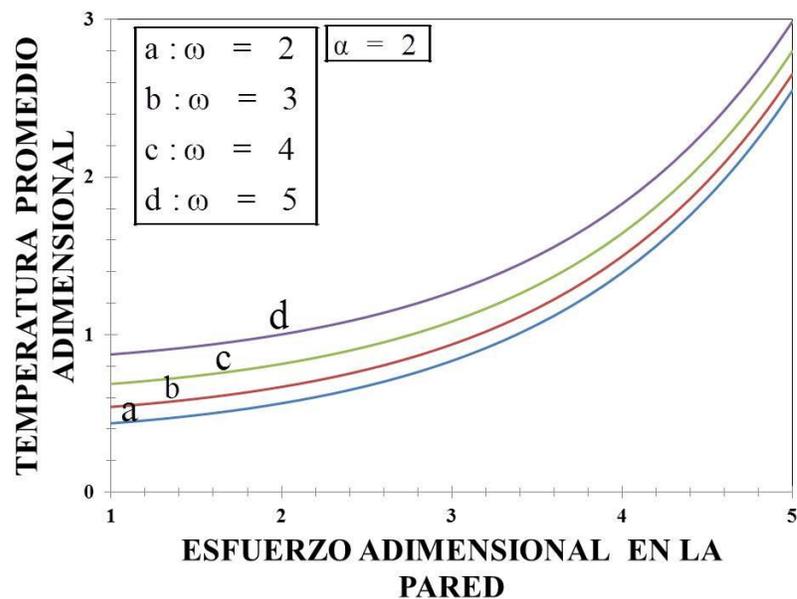


Figura 21. Perfil de temperatura promedio adimensional vs esfuerzo adimensional en la pared en función de la frecuencia.

En la Fig.21 se muestra que la máxima temperatura se obtiene con un valor de frecuencia de 5. Nótese que la temperatura máxima es la suma de la temperatura newtoniana y la temperatura no newtoniana (tipo ley de potencia). Por otra parte, en el intervalo de [1-1.8] la temperatura muestra un comportamiento constante sin embargo, a un cierto valor de esfuerzo en la pared la temperatura tiene un comportamiento monótono creciente. Es importante resaltar que el efecto de los mecanismos adelgazantes es el de desfazar la curva de temperatura hacia valores mayores de temperatura. Tres puntos importantes se pueden destacar de esta simulación: (i) El mayor aumento en la temperatura se obtiene con la mayor frecuencia, (ii) El comportamiento constante del sistema se obtiene a valores bajos y moderados de esfuerzo en la pared y (iii) Con la contribución de la perturbación aplicada al fluido se obtiene un incremento notable en la temperatura a comparación del fluido sin perturbación. .



6.9 Número de Nusselt adimensional

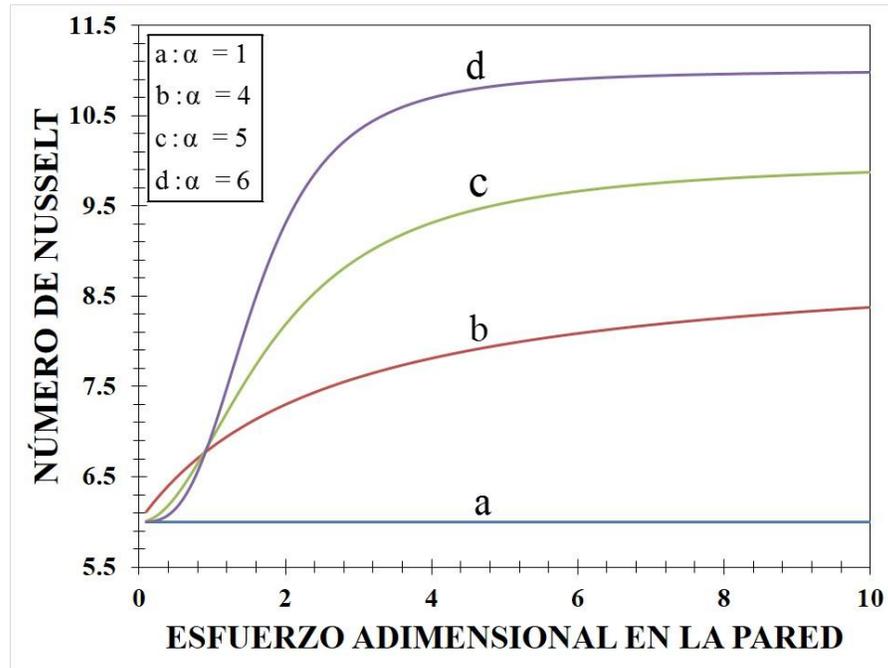


Figura 22. Número de Nusselt adimensional vs el esfuerzo adimensional en la pared, en función de los mecanismos adelgazantes al corte.

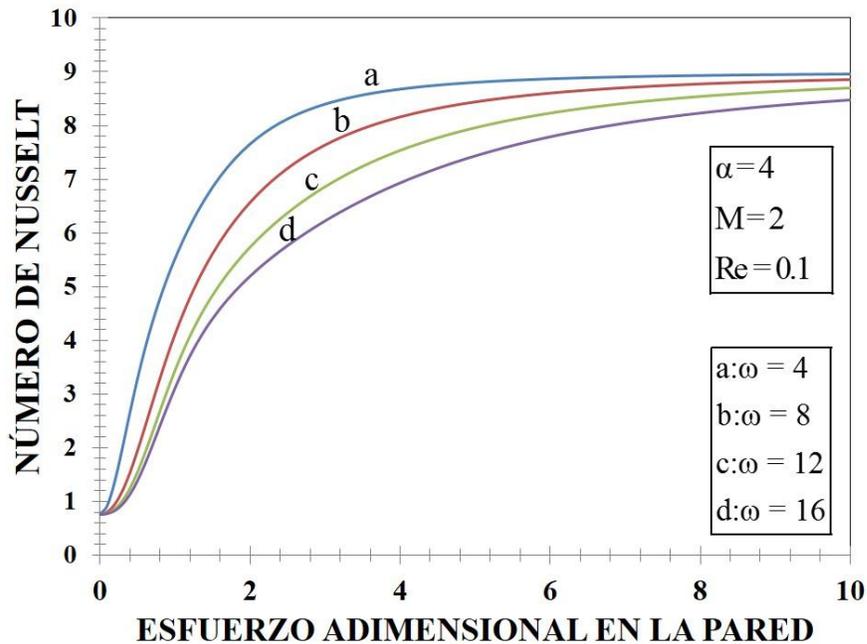


Figura 23. Número de Nusselt adimensional vs el esfuerzo adimensional en la pared, en función de los mecanismos viscosos e inerciales a través de la frecuencia.

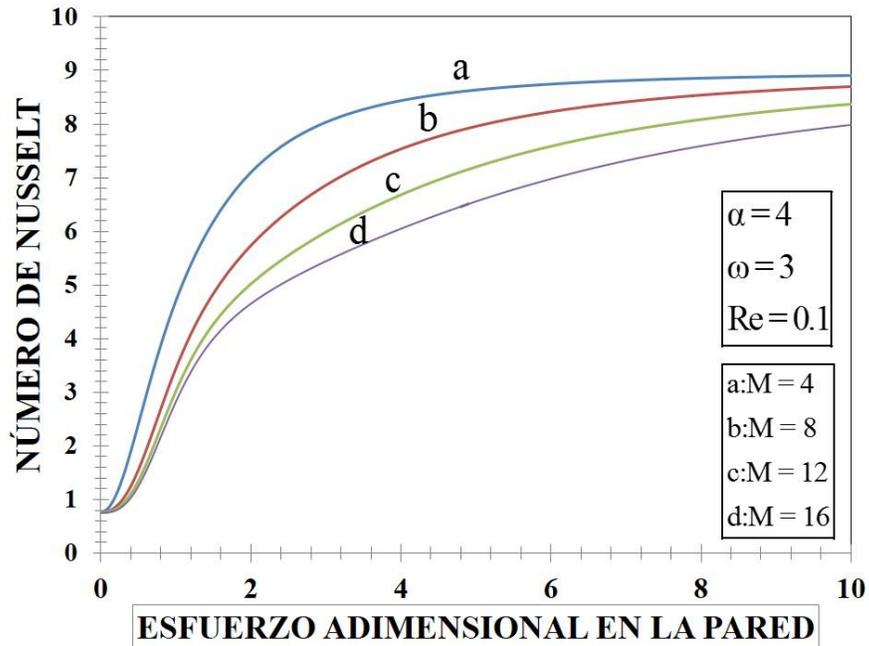


Figura 24. Número de Nusselt adimensional vs el esfuerzo adimensional en la pared, en función de los mecanismos viscosos e inerciales a través de la amplitud.

La Fig. 22 muestra el Número de Nusselt vs esfuerzo adimensional en la pared en función de las propiedades adelgazantes (a), frecuencia adimensional (b) y (c) la amplitud de la perturbación asociada a la fuerza macroscópica. Los parámetros utilizados en la simulación se encuentran en la tabla 2.

Matemáticamente, en todos los casos, el comportamiento es monótono creciente y a un esfuerzo crítico el sistema presenta una meseta en donde el número de Nusselt es independiente del esfuerzo en la pared. Nótese que en el caso newtoniano, la relación es constante en toda la ventana de simulación.

Físicamente el número de Nusselt relaciona dos mecanismos de transporte de energía. El primero de ellos asociado a los procesos convectivos y el segundo a los conductivos que a su vez cuantifican el transporte de energía molecular.

$$Nu = \frac{ah}{k} = \frac{\text{Convectivos}}{\text{Conduccion}}$$



a) Efectos no newtonianos (adelgazantes al corte)

En la Fig. 22 el número de Nusselt aumenta, i.e., el número de Nusselt es mayor que uno, conforme el fluido se vuelve más adelgazante, lo que implica que la conducción es dominada por los efectos convectivos a través de las propiedades no-newtonianas del modelo de Ellis.

b) Efecto de la frecuencia adimensional

En la Fig. 23 el número de Nusselt decrece conforme la frecuencia adimensional de la fuerza macroscópica aumenta. A diferencia de la Fig. 22, la Fig. 23 muestra un comportamiento opuesto en donde los mecanismos de transporte por conducción dominan a la convección. Aquí, el número está afectado por la contribución de la fuerza macroscópica y los efectos inerciales en función de la frecuencia.

c) Efecto de la amplitud de la fuerza macroscópica

Por ultimo en la Fig. 24 se observa un comportamiento similar al de la Fig. 23 en donde el número de Nusselt decrece conforme la amplitud de la perturbación macroscópica aumenta. i.e. la manera de modificar los mecanismos asociados con la transferencia y energía es a través de las propiedades materiales del fluido de Ellis y de la frecuencia y amplitud en el sistema. Nótese que la única posibilidad de obtener un aumento en el número de Nusselt es por medio de las propiedades no-newtonianas del sistema.

6.10 Aplicación a dinámica de polímeros (LDPE)

En esta sección se presenta la aplicación del modelo matemático desarrollado en el presente trabajo. Para probar las bondades de nuestro modelo se utiliza polietileno de baja densidad (LDPE) el cual, polímero que presenta las siguientes características fisicoquímicas.

Para poder realizar los siguientes experimentos computacionales fue necesario, calcular las propiedades materiales del sistema como son: $(\varphi_0, \varphi_1, \alpha)$, a partir de datos obtenidos de la literatura y el ajuste de los datos experimentales utilizando la ecuación constitutiva de Ellis.

6.10.1 Perfil de velocidad

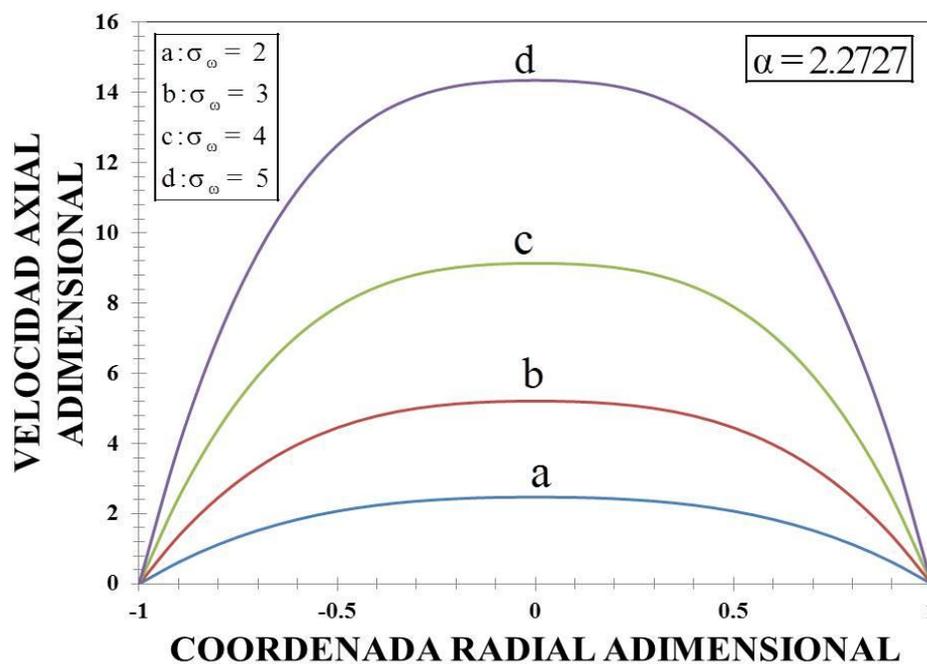


Figura 25. Perfil de velocidad axial adimensional vs coordenada radial adimensional como función de esfuerzo en la pared.

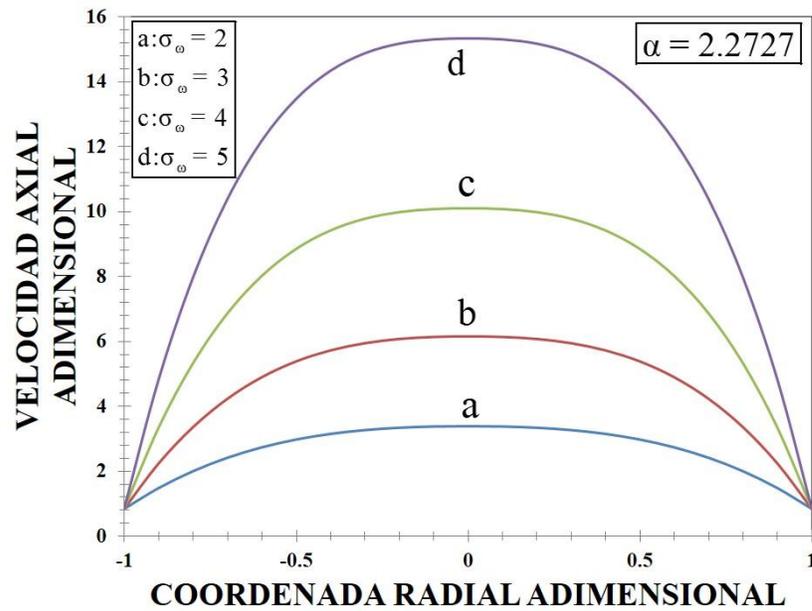


Figura 26. Perfil de velocidad axial adimensional vs coordenada radial adimensional, con la contribución de la fuerza macroscópica y los efectos inerciales, en función del esfuerzo en la pared.

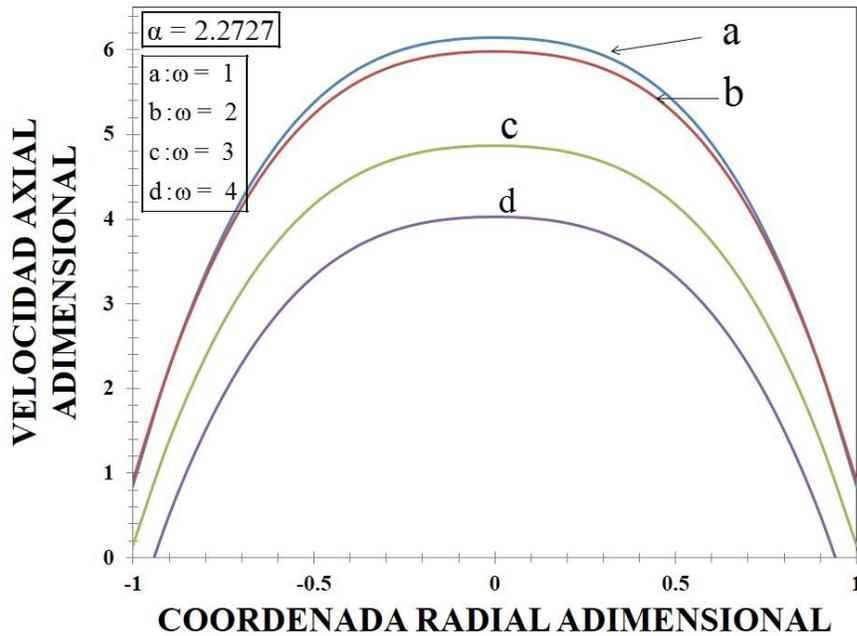


Figura 27. Perfil de velocidad axial adimensional vs coordenada radial adimensional con la contribución de la fuerza macroscópica y los efectos inerciales, en función de la frecuencia.

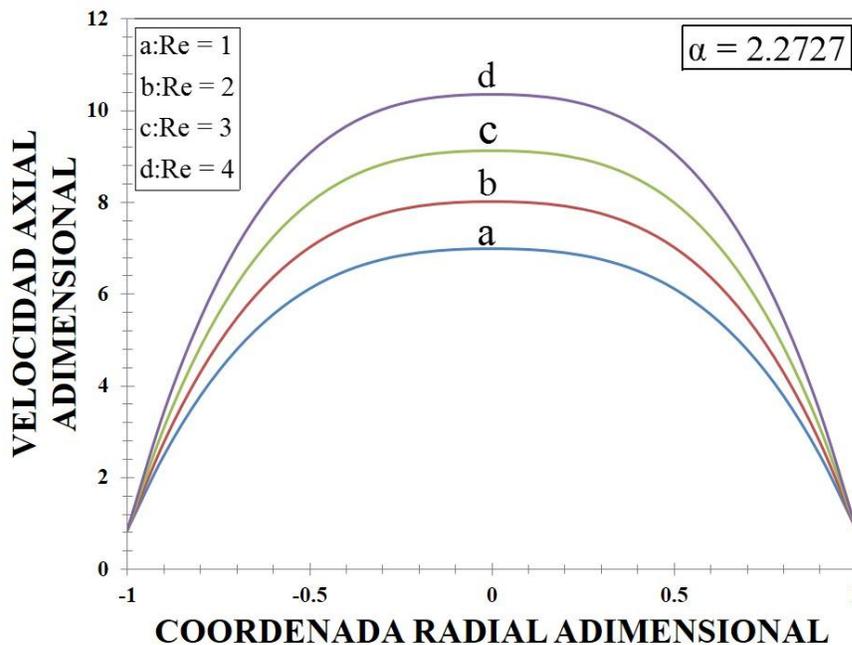


Figura 28. Perfil de velocidad axial adimensional vs coordenada radial adimensional, con la contribución de la fuerza macroscópica y los efectos inerciales, en función del número de Reynolds.

La Fig. 25 muestra el clásico comportamiento parabólico en el perfil de velocidad para el (LDPE) empleando el parámetro $\alpha=2.2727$ con el cual, se forman frentes homogéneos de velocidad, es decir, que la velocidad es constante en un determinado intervalo. Por otra parte, se observa que a medida que se incrementa el esfuerzo en la pared se alcanza mayores velocidades en este caso, se alcanzó un valor máximo en el perfil de velocidad de 14 unidades. En contraste, cuando se toman en cuenta todos los mecanismos (oscilatorio en la pared) el perfil de velocidades es muy parecido al de la Fig. 25, sin embargo el valor numérico de la velocidad máxima se incrementa considerablemente, lo que infiere que esto puede ser un factor que influya en la disipación viscosa, debido a que al incrementar la velocidad, se presenta mayor fricción entre las capas internas del fluido, lo que promueve que la energía se pierda de forma irreversible.

La Fig. 26 en la cual el perfil de velocidad tiene contribuciones como son la fuerza macroscópica y los efectos inerciales, podemos observar que tiene el mismo comportamiento que la Fig. 25 pero en este caso, dichas contribuciones logran un incremento considerable en el perfil de velocidad llegando aproximadamente a 15.5



unidades. Nótese, que las contribuciones aplicadas a este sistema, son de gran importancia ya que se logra incrementar los perfiles de velocidad.

Ahora al comparar la Fig. 22 con las Fig. 24 y Fig. 25 se puede notar que en el caso de la Fig. 24 que ilustra el perfil de velocidad con la contribución de la fuerza macroscópica y los efectos inerciales a diferentes frecuencias, las curvas se desfasan y forman frentes homogéneos. Nótese que la frecuencia modifica el perfil de velocidad de manera inversa ya que al incrementar la frecuencia se obtienen cada vez perfiles de velocidades más bajos.

La Fig. 28 ilustra el perfil de velocidad a diferentes valores del número de Reynolds, en la cual se puede notar que se alcanzan mayores intervalos en el perfil de velocidad al incrementar el número de Reynolds.

6.10.2 Flujo volumétrico

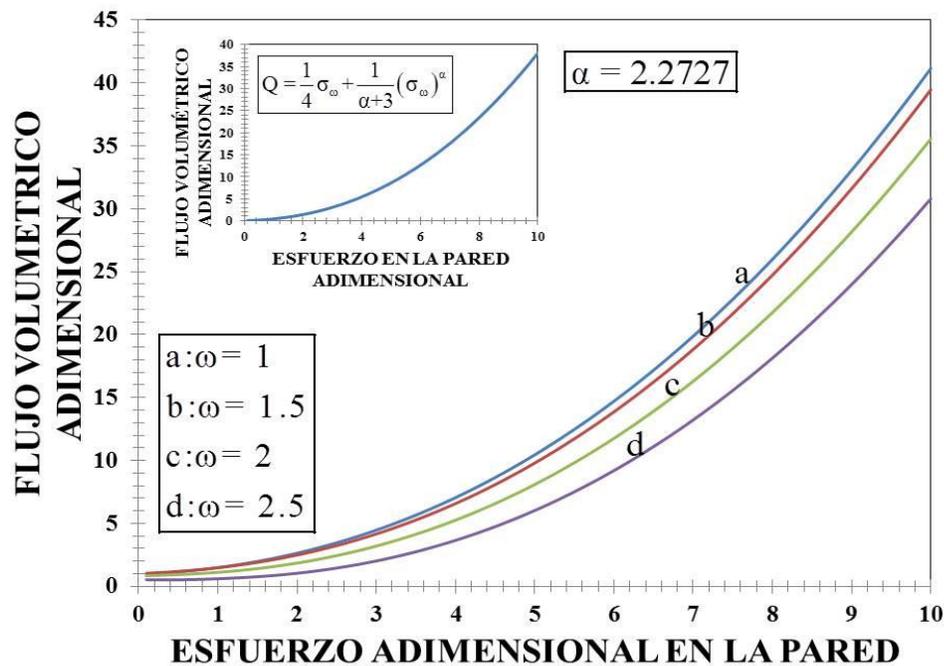


Figura 29. Flujo volumétrico vs esfuerzo en la pared con las contribuciones de la fuerza macroscópica y los efectos inerciales en función de la frecuencia. La gráfica insertada ilustra el flujo volumétrico sin la fuerza macroscópica y sin los mecanismos inerciales.

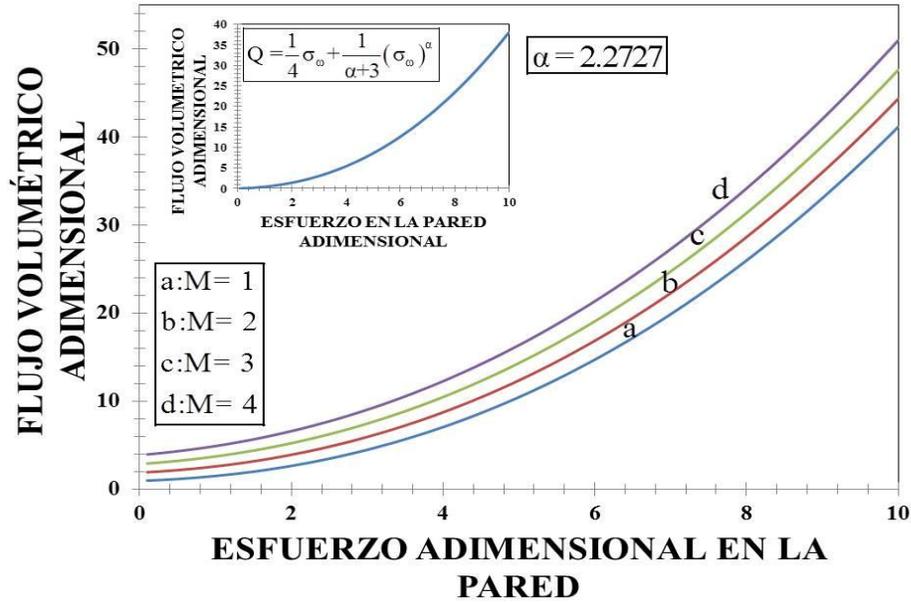


Figura 30. Flujo volumétrico vs esfuerzo en la pared con las contribuciones de la fuerza macroscópica y los efectos inerciales en función de la amplitud del sistema. La gráfica insertada ilustra el flujo volumétrico sin perturbación.

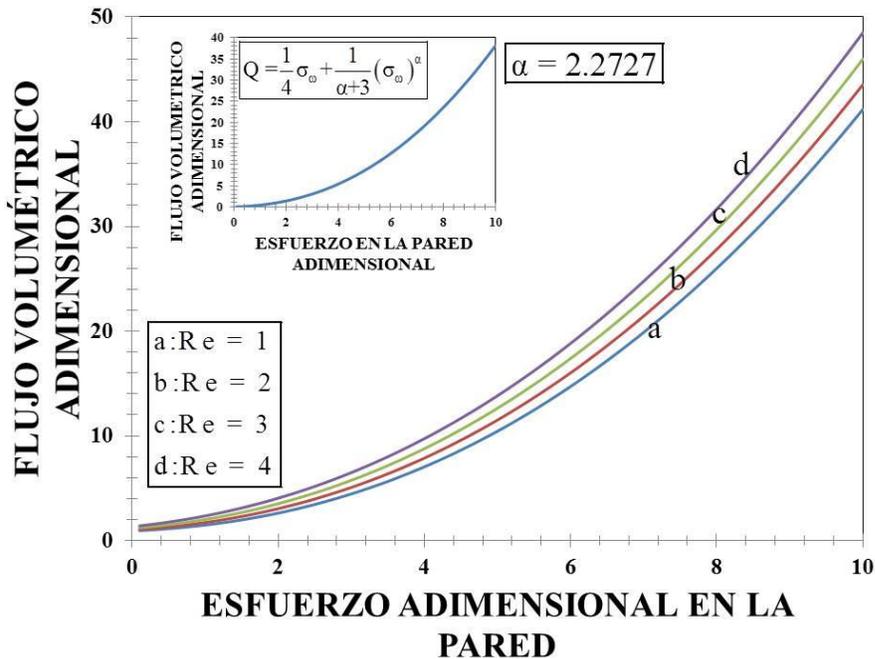


Figura 31. Flujo volumétrico vs esfuerzo en la pared con las contribuciones de la fuerza macroscópica y los efectos inerciales en función del número de Reynolds. La gráfica insertada ilustra el flujo volumétrico sin perturbación.



En la Fig. 29, se observa el flujo volumétrico afectado por la fuerza macroscópica y los efectos inerciales y empleando un parámetro ($\alpha=2.2727$), se observa que el flujo volumétrico es mínimo a valores moderados de esfuerzo en la pared, sin embargo a valores arriba de 2 el sistema tiene un comportamiento exponencial. Nótese que conforme se aumenta la frecuencia el flujo volumétrico es menor lo cual quiere decir que el aumento de la frecuencia en el sistema tiene efectos inversos en el sistema, mientras que en la Fig. 30, se ilustra el mismo sistema pero en función del parámetro “M” el cual está asociada a la amplitud del sistema y se observa que tiene un comportamiento creciente y que a medida que se incrementa la amplitud se alcanzan intervalos más altos en el flujo volumétrico al igual que en la Fig. 31, en donde se ilustra el sistema en función del número de Reynolds y que el comportamiento es similar a los sistemas anteriores y que a medida que se incrementa el número de Reynolds el flujo volumétrico aumenta. Nótese, que el inserto en estas tres figuras ilustra el flujo volumétrico sin la aportación de la fuerza macroscópica y los efectos inerciales, Tres puntos importantes pueden destacarse de este análisis y comparación entre estas simulaciones: (i) Los mayores rangos de flujo volumétrico se obtienen con el valor de amplitud más alto y el mayor valor del número de Reynolds, (ii) La frecuencia implica un resultado inverso en el flujo volumétrico ya que el mayor flujo se encontró con el valor más bajo de frecuencia, (iii) La aportación de la fuerza macroscópica y los efectos inerciales dieron como resultado valor más altos en el flujo volumétrico del sistema a comparación de cuando dichas aportaciones son nulas.

6.10.3 Aumento en el flujo volumétrico

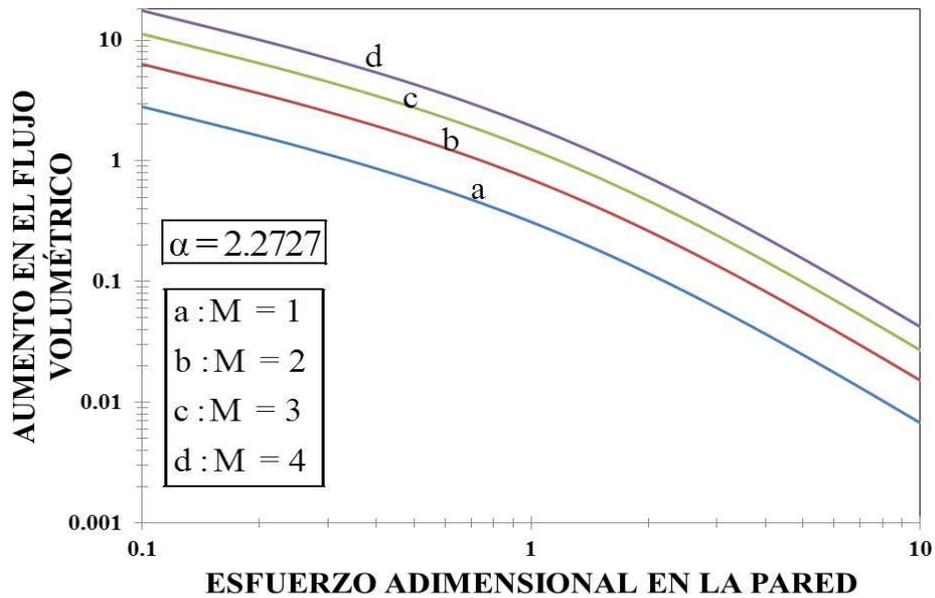


Figura 32. Aumento en flujo vibrátil vs esfuerzo en la pared en función del parámetro “M” el cual está asociado con la amplitud del sistema.

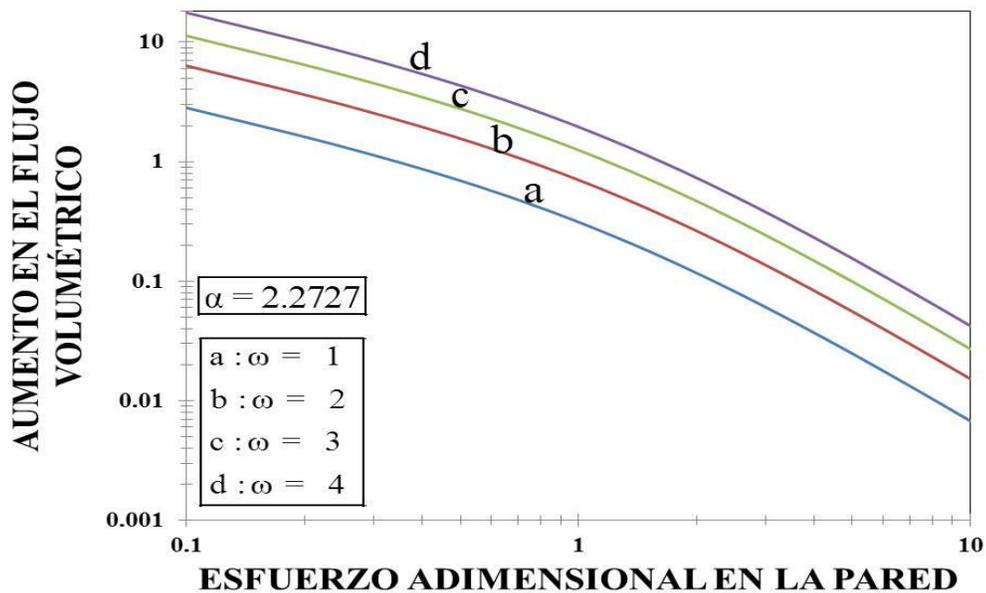


Figura 33. Aumento en flujo vibrátil vs esfuerzo en la pared en función del parámetro “M”, el cual está asociado con la amplitud del sistema.



En la Fig. 32 se ilustra el aumento en flujo en función del parámetro “M” el cual, está asociado con la amplitud del sistema, y empleando un parámetro $\alpha=2.2727$, el aumento en el flujo volumétrico presenta un comportamiento monótono decreciente a medida que el esfuerzo adimensional en la pared incrementa. Nótese, que se obtienen los mayores aumentos a esfuerzos en la pared bajos, mientras que a moderados el sistema decrece rápidamente en un 90% de su valor original. Es importante notar que en la Fig. 33 el efecto de la amplitud sobre el aumento en el flujo, es el de desfasar las curvas de estados de menor a mayor aumento en el flujo volumétrico. Esta gráfica confirma que se pueden obtener aumentos en el flujo volumétrico debido a la perturbación por un agente externo macroscópico que se aplica sobre el capilar. Finalmente las predicciones teóricas y los datos reométricos predicen que el polietileno de baja densidad tiene aumentos considerables en el flujo.

6.10.4 Perfil de temperatura

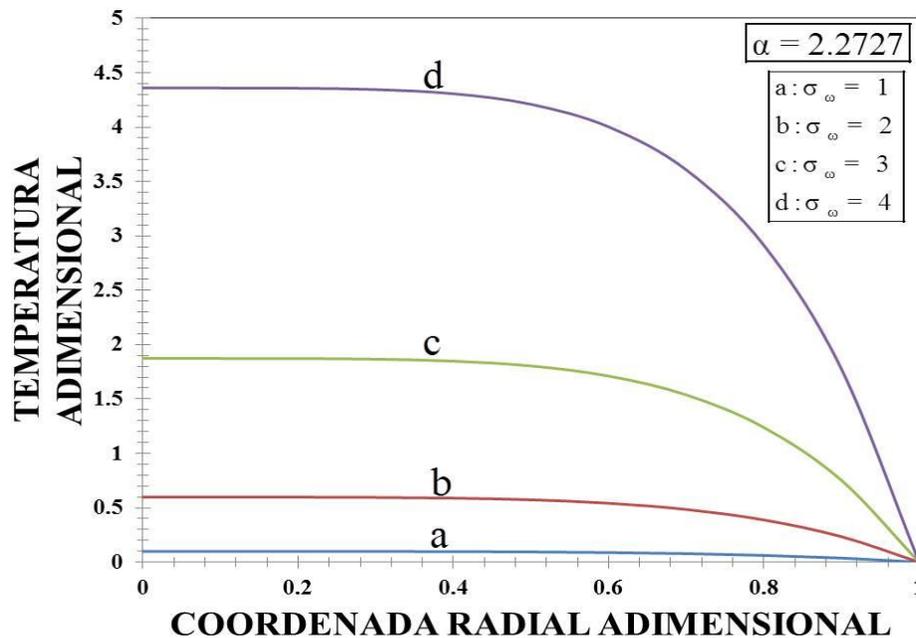


Figura 34. Perfil de temperatura adimensional vs coordenada radial adimensional.

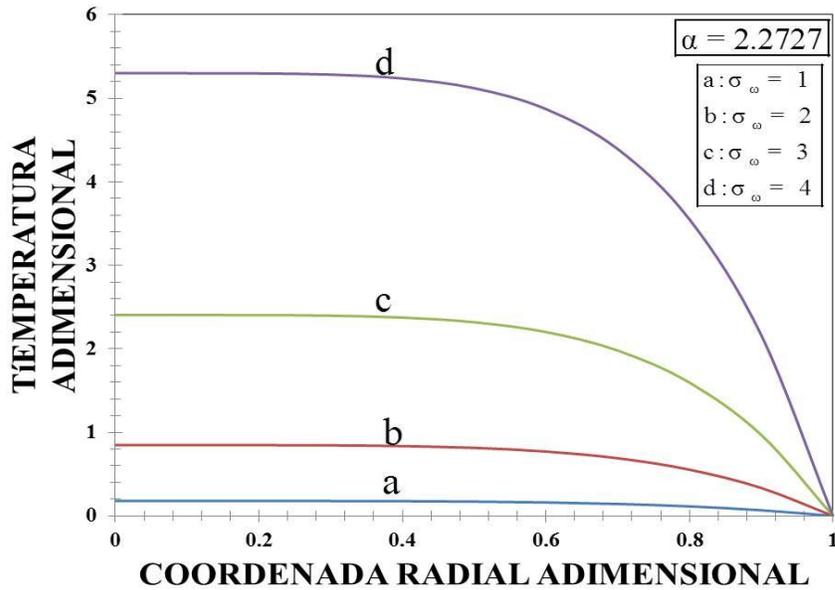


Figura 35. Perfil de temperatura adimensional vs coordenada radial adimensional con las contribuciones de la fuerza macroscópica y los efectos inerciales.

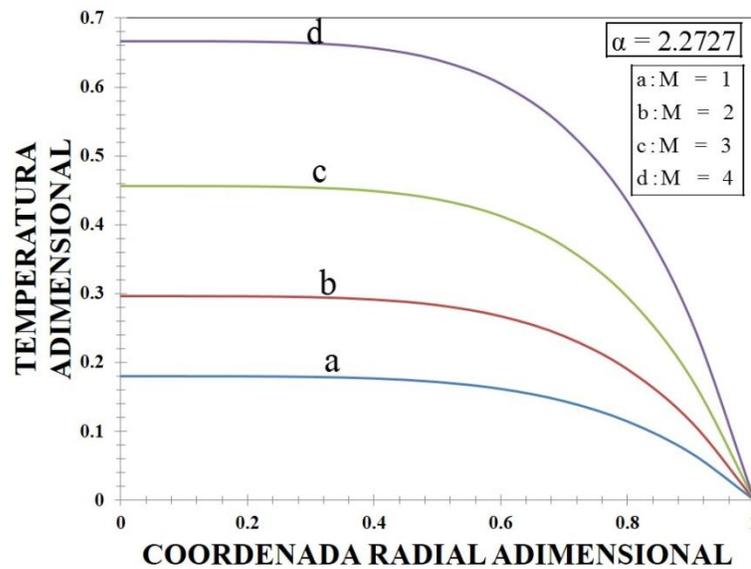


Figura 36. Perfil de temperatura adimensional vs coordenada radial adimensional con la contribución de la fuerza macroscópica y los efectos inerciales en función de la amplitud “M”.

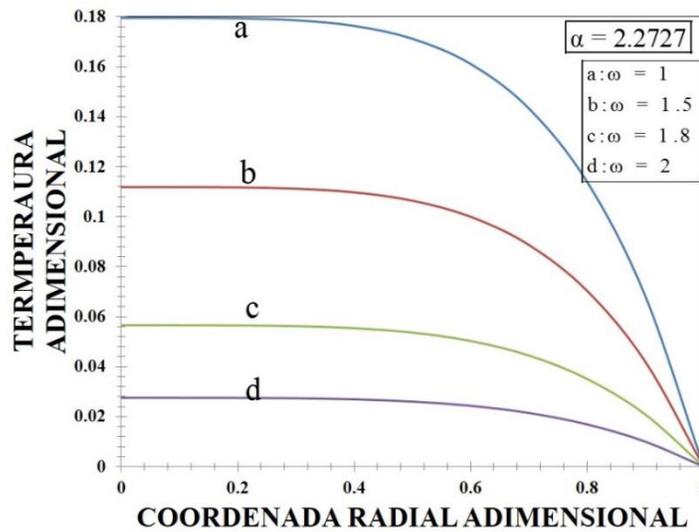


Figura 37. Perfil de temperatura adimensional vs coordenada radial adimensional con las contribuciones de la fuerza macroscópica y los efectos inerciales en función de la frecuencia (ω).

La Fig. 34 ilustra el perfil de temperatura adimensional vs la coordenada radial adimensional para diferentes valores de esfuerzo en la pared, con lo cual se observa un perfil de temperatura homogéneo en el intervalo de [0-0.4] , alcanzando un máximo valor de [4.2], sin embargo a cierto valor crítico de la coordenada radial adimensional, la temperatura decrece monótonamente. El perfil de temperatura muestra el comportamiento esperado de acuerdo a las simulaciones teóricas antes realizadas. La Fig. 35 ilustra el perfil de temperatura adimensional con las contribuciones de la fuerza macroscópica y los efectos inerciales vs la coordenada radial adimensional, en la cual se observa el mismo comportamiento que la Fig. 35. Nótese, que al aplicar las contribuciones ya mencionadas se obtiene un incremento en los perfiles de velocidad, ahora obteniendo un valor máximo de [5.3]. Es decir, el efecto de la perturbación incrementa la temperatura de bulbo del sistema en un 10 % aproximadamente.

La Fig. 36 se observa que a medida que la amplitud en el sistema aumenta el perfil de temperatura alcanza valores mayores, en contraste con la Fig. 37, en donde el efecto de la frecuencia provoca una disminución en el perfil de temperaturas. Estos resultados están de acuerdo con las predicciones teóricas del capítulo anterior en donde la frecuencia tiene un efecto negativo.

6.10.5 Perfil de temperatura promedio

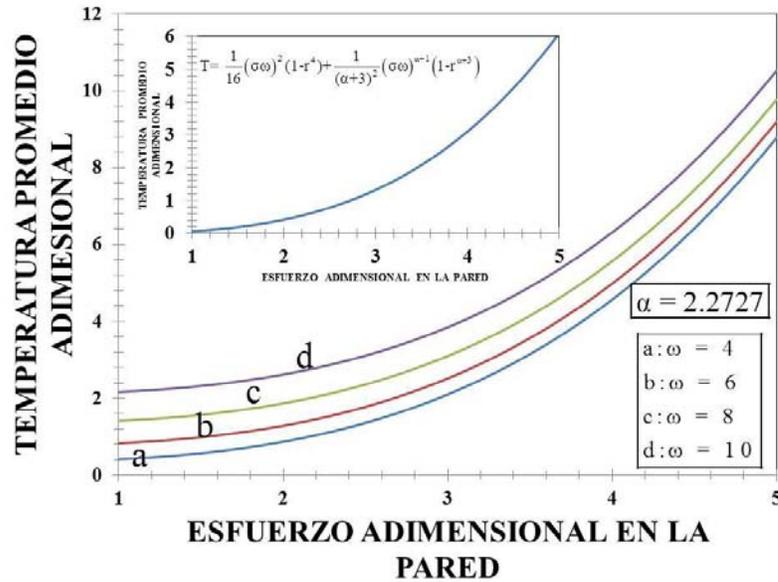


Figura 38. Perfil de temperatura promedio adimensional vs coordenada radial adimensional con las contribuciones de la fuerza macroscópica y los efectos inerciales en función de la frecuencia. La gráfica insertada muestra el perfil de temperatura promedio sin perturbación.

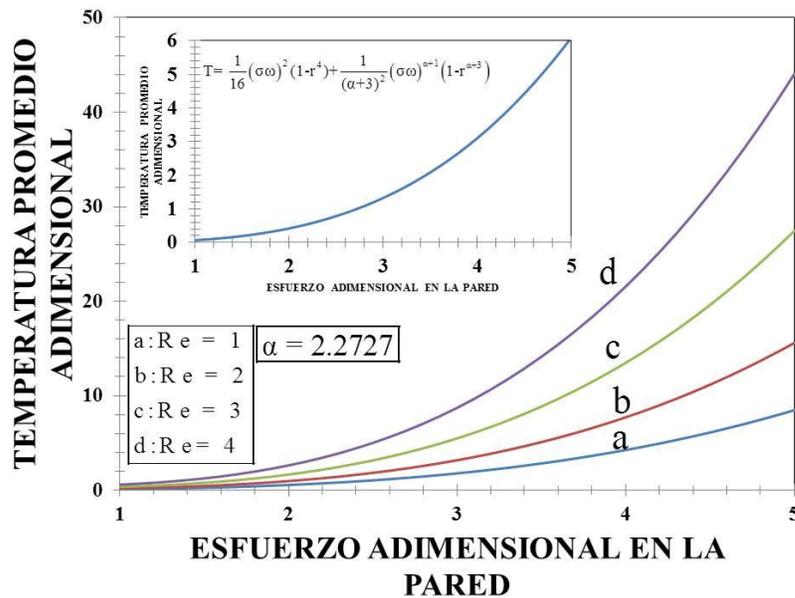


Figura 39. Perfil de temperatura promedio adimensional vs coordenada radial adimensional con las contribuciones de la fuerza macroscópica y los efectos inerciales en función de los mecanismos viscosos e inerciales a través del número de Reynolds.

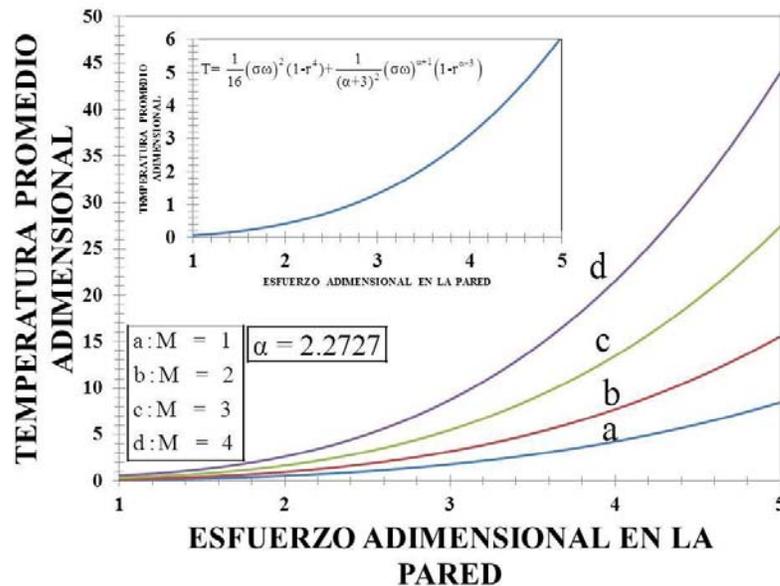


Figura 40. Perfil de temperatura promedio adimensional vs coordenada radial adimensional con las contribuciones de la fuerza macroscópica y los efectos inerciales en función de la amplitud “M”.

La Fig. 38. Ilustra que el sistema tiene un comportamiento monótono creciente en función del esfuerzo en la pared. Nótese, que el efecto de la frecuencia adimensional es el de desfasar la curva a mayores valores de temperatura adimensional promedio.

En la Figs. 39 y 40 se ilustran la temperatura promedio en función del número de Reynolds y la amplitud de la fuerza macroscópica. En ambos casos, se observa un comportamiento monótono creciente, es decir, que la temperatura aumenta conforme el esfuerzo en la pared lo hace. Nótese, que el efecto del número de Reynolds y la amplitud sobre el sistema, es desfasar las curvas ha estados de mayor temperatura. Por otra parte las curvas satisfacen nuestras predicciones numéricas del capítulo anterior, es decir la temperatura y el esfuerzo en la pared describen una función monótona creciente en todo el intervalo experimental. Nótese, que el inserto en cada figura ilustra el perfil de temperatura promedio sin los efectos de la perturbación, con lo cual se observa que el efecto de: (i) La frecuencia, (ii) La amplitud y (iii) Los mecanismos inerciales a través del número de Reynolds son de vital importancia en la temperatura de bulto del sistema, y esto es un factor importante en la procesabilidad del (LDPE).

6.10.6 Número de Nusselt

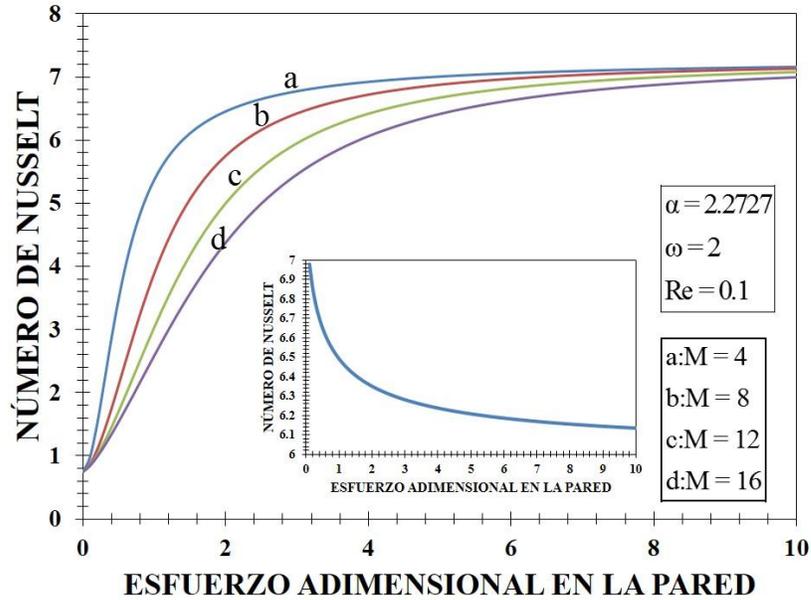


Figura 41. Número de Nusselt adimensional vs el esfuerzo en la pared, en función de los mecanismos viscosos e inerciales a través de la amplitud. La gráfica insertada ilustra el número de Nusselt sin el efecto de la perturbación.

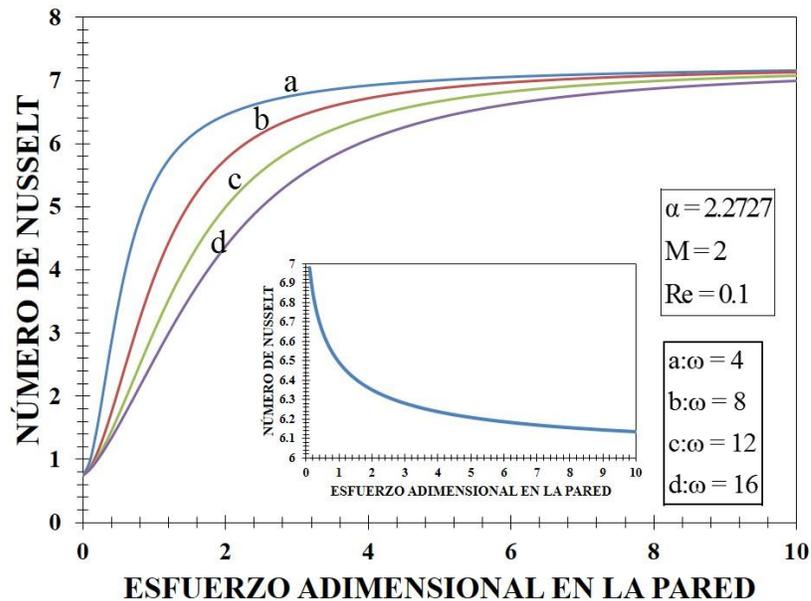


Figura 42. Número de Nusselt adimensional vs el esfuerzo en la pared, en función de los mecanismos viscosos e inerciales a través de la frecuencia. La gráfica insertada ilustra el número de Nusselt sin el efecto de la perturbación.



La Fig. 41 muestra el Número de Nusselt vs esfuerzo adimensional en la pared en función de: (a) la amplitud y (b) frecuencia adimensional de la perturbación asociada a la fuerza macroscópica.

Matemáticamente, en todos los casos, el comportamiento es monótono creciente y a un esfuerzo crítico el sistema presenta una meseta en donde el número de Nusselt es independiente del esfuerzo en la pared.

Físicamente el número de Nusselt relaciona dos mecanismos de transporte de energía. El primero de ellos asociado a los procesos convectivos y el segundo a los conductivos que a su vez cuantifican el transporte de energía molecular.

$$Nu = \frac{ah}{k} = \frac{\text{Convectivos}}{\text{Conduccion}}$$

a) Efecto de la frecuencia adimensional

Por ultimo en la Fig. 41 se observa que el número de Nusselt decrece conforme la amplitud de la perturbación macroscópica aumentó. i.e. la manera de modificar los mecanismos asociados con la transferencia y energía es a través de las propiedades materiales del fluido de Ellis y de la frecuencia y amplitud en el sistema. Nótese que la única posibilidad de obtener un aumento en el número de Nusselt es por medio de las propiedades no-newtonianas del sistema.

b) Efecto de la amplitud de la fuerza macroscópica

En la Fig. (42) el número de Nusselt decrece conforme la frecuencia adimensional de la fuerza macroscópica aumenta. Aquí, el número está afectado por la contribución de la fuerza macroscópica y los efectos inerciales en función de la frecuencia.



CAPÍTULO VII

ANÁLISIS DE RESULTADOS



7.1 Sistema de estudio

En este trabajo se analizó un líquido no-newtoniano con estructura transitoria que fluye a través de una tubería de radio $r = a$ y longitud $z = L$. El sistema se deforma continua e irreversiblemente debido a un gradiente de presión constante y una fuerza macroscópica impuesta en la pared del sistema. Para simular el flujo vibrátil, se introduce una perturbación (función estocástica) en la pared del cilindro y el fluido no-newtoniano es caracterizado por la ecuación reológica de Ellis, la cual consiste en una combinación del modelo de Newton y el de Ostwald. Asumiendo que los mecanismos gravitacionales son despreciables, flujo homogéneo y líquido incompresible, se obtienen expresiones analíticas para: (i) perfil de velocidades, (ii) velocidad promedio, (iii) flujo volumétrico, (iv) aumento en el flujo volumétrico, (v) fracción de potencia utilizada debido a la perturbación oscilatoria en la pared, (vi) perfil de temperaturas, (vii) temperatura promedio y (viii) número de Nusselt. Con el fin de simplificar, las simulaciones un conjunto de variables adimensionales son propuestas, con el fin de acotar las variables dinámicas, geométricas e introducir grupos adimensionales característicos, los cuales describan los mecanismos globales del sistema de estudio. A continuación se presentan un análisis de los resultados obtenidos mediante la simulación de este sistema de flujo

(i) Perfil de velocidad axial

En el caso más sencillo (Newtoniano) el perfil de velocidades muestra el clásico comportamiento parabólico ($\alpha=1$) sin embargo, cuando el líquido es adelgazante al corte, i.e. el sistema presenta estados de mayor a menor viscosidad por efecto del flujo (rapidez de deformación), los perfiles de velocidad cambian drásticamente a mayores velocidades debido a esto. Por una parte, cuando se toman en cuenta todos los mecanismos (oscilatorio en la pared) el perfil de velocidades es muy parecido al del sistema sin perturbación, sin embargo el valor numérico de la velocidad máxima se incrementa considerablemente, lo que infiere que esto puede ser un factor que influya en la disipación viscosa, debido a que al incrementar la velocidad, se presenta mayor fricción entre las capas internas del fluido, lo que promueve que la energía se pierda de forma irreversible. Al analizar el efecto de la frecuencia en el sistema se observa que modifica el perfil de velocidad de manera inversa

ya que al incrementar la frecuencia se obtiene cada vez perfiles de velocidades más bajos, mientras que cuando el sistema depende del número de Reynolds, se puede notar que se alcanzan mayores intervalos en el perfil de velocidad al incrementar los mecanismo inerciales, i.e. $Re \gg 1$.

(ii) Flujo volumétrico

En el modelo newtoniano el flujo volumétrico muestra un crecimiento exponencial con un valor de ($\alpha=1$), que implica que los mecanismos adelgazantes juegan un papel importante en el flujo volumétrico. Por otra parte, cuando se incorpora la fuerza macroscópica y los mecanismos inerciales, el flujo volumétrico aumenta considerablemente. De esta misma el papel que juega la amplitud es de aumentar drásticamente el flujo volumétrico lo que infiere un aumento notable con respecto a aquel a gradiente de presión constate. De una manera similar, cuando los mecanismos inerciales aumentan por efecto del número de Reynolds el flujo volumétrico aumenta. Por último, el efecto de la frecuencia sobre el sistema es en forma monótona decreciente, afectado por la fuerza macroscópica y los efectos inerciales en función del parámetro “M” el cual está asociada a la amplitud del sistema tiene un comportamiento creciente y a medida que se incrementa la amplitud se alcanzan intervalos más altos en el flujo volumétrico, a su vez el sistema en función del número de Reynolds es similar al sistema anterior y a medida que se incrementa el número de Reynolds el flujo volumétrico aumenta, en la relación a la frecuencia el sistema tiene un comportamiento exponencial. Nótese que conforme se aumenta la frecuencia el flujo volumétrico es menor lo cual quiere decir que el aumento de la frecuencia en el sistema tiene efectos inversos en el sistema. Tres puntos importantes pueden destacarse de este análisis y comparación entre estas simulaciones: (i) Los mayores aumentos de flujo volumétrico se obtienen con los valores más grandes de amplitud y del número de Reynolds, (ii) En este sistema, la frecuencia implica un resultad inverso en el flujo volumétrico, ya que el mayor flujo se encontró con el valor más bajo de frecuencia, (iii) La aportación de la fuerza macroscópica y los efectos inerciales contribuyen a aumentos considerables en el flujo volumétrico del sistema a comparación de aquellos correspondientes a gradiente de presión constante sin movimiento oscilatorio en la pared.



(iii) Aumento en el flujo volumétrico

En el sistema general, se muestra el clásico comportamiento resonante registrado en la literatura especializada en el tema. El mayor aumento se obtiene con el líquido más adelgazante, y el efecto resonante se presenta a valores bajos y moderados de esfuerzo en la pared. Por otra parte en el sistema particular utilizando datos reométricos de un polímero de baja densidad el aumento en flujo en función del parámetro “M” el cual, está asociado con la amplitud del sistema, y empleando un parámetro $\alpha=2.2727$, presenta un comportamiento monótono decreciente a medida que el esfuerzo adimensional en la pared incrementa. Nótese, que a esfuerzos en la pared bajos se obtienen los mayores aumentos, mientras que a moderados el sistema decrece rápidamente en un 90% de su valor original. El efecto de la amplitud sobre el aumento es el de desfasar las curvas de estados de menor a mayor aumento en el flujo volumétrico. Esta gráfica confirma que se pueden obtener aumentos en el flujo volumétrico debido a la perturbación por un agente externo macroscópico que se aplica sobre el capilar. Finalmente, los resultados teóricos y los datos reométricos predicen que el polietileno de baja densidad predice aumentos en el flujo por efecto del flujo oscilatorio.

(iv) Perfil de temperaturas

En el perfil de temperatura newtoniana se alcanza un máximo valor, sin embargo a cierto valor crítico de la coordenada radial adimensional, la temperatura decrece monótonamente. El perfil de temperatura muestra el comportamiento esperado de acuerdo a las simulaciones teóricas antes realizadas. El perfil de temperatura adimensional con las contribuciones de la fuerza macroscópica y los efectos inerciales se observa el mismo comportamiento. Nótese, que al aplicar las contribuciones ya mencionadas se obtiene un incremento en los perfiles de velocidad, es decir, el efecto de la perturbación incrementa la temperatura de bulbo del sistema en un 10 % aproximadamente.

En cuanto al sistema en función del parámetro “M” el cual está relacionado a la amplitud del sistema el perfil de temperatura adimensional se observa que a medida que la amplitud aumenta, el perfil de temperatura alcanza valores mayores, en contraste cuando el sistema está en función de la frecuencia provoca una disminución en el perfil de

temperaturas. Estos resultados están de acuerdo con las predicciones teóricas de un capítulo anterior en donde la frecuencia tiene un efecto negativo.

(v) **Temperatura promedio**

El perfil de temperatura promedio muestra un crecimiento exponencial ($\alpha=1$) sin embargo, cuando el líquido es adelgazante al corte, i.e. el sistema presenta estados de mayor a menor viscosidad por efecto del flujo (rapidez de deformación), los perfiles de temperatura cambian drásticamente a mayores niveles. Por una parte, cuando se toman en cuenta todos los mecanismos (oscilatorio en la pared) el perfil de temperatura es muy parecido al del sistema sin perturbación, sin embargo el valor numérico de la temperatura máxima se incrementa considerablemente. El efecto de la perturbación para el (LDPE) muestra en todos los casos un comportamiento monótono creciente en función del esfuerzo en la pared. Nótese, que el efecto de la frecuencia adimensional es el de desfazar la curva a mayores valores de temperatura adimensional promedio. La temperatura promedio en función del número de Reynolds y la amplitud asociada a la fuerza macroscópica muestra que, en ambos casos se observa un comportamiento monótono creciente, es decir, que la temperatura aumenta conforme el esfuerzo en la pared lo hace. Nótese, que el efecto del número de Reynolds y la amplitud sobre el sistema, es desfazar las curvas ha estados de mayor temperatura. Por otra parte las curvas satisfacen nuestras predicciones numéricas del capítulo anterior, es decir la temperatura y el esfuerzo en la pared describen una función monótona creciente en todo el intervalo experimental. En la siguiente sección, se presentan las perspectivas futuras, así como las líneas de investigación para continuar este trabajo con sistemas complejos. (Fluidos viscoelásticos, sistemas micelares, polímeros, etc.)



CAPÍTULO VIII

CONCLUSIONES

8.1 Descripción física del problema

En este trabajo se estudia la transferencia de momento y energía de fluidos no newtonianos en flujo vibrátil. La geometría analizada es un capilar de radio $R = a$ y longitud $z = L$. La reología y el flujo son caracterizados con el modelo de Ellis, el cual consiste en una generalización de las ecuaciones constitutivas del modelo Newtoniano (viscosidad constante) y del modelo de ley de potencia (viscosidad no constante). Suponiendo que la velocidad axial puede ser descompuesta en una contribución en estado estacionario y otra en estado no estacionario debido a la fuerza macroscópica que se aplica en la dirección de flujo, se obtuvieron expresiones analíticas para las siguientes variables dinámicas y térmicas del sistema: (i) la velocidad axial, (ii) velocidad promedio, (iii) flujo volumétrico, (iv) aumento de flujo, (v) fracción de potencia asociada al consumo de energía, (vi) perfil de temperaturas, (vii) temperatura promedio y (viii) número de Nusselt que relaciona los mecanismos convectivos con los de transporte molecular debido a la conducción.

8.2 Flujo y Reología

La velocidad axial puede descomponer en tres contribuciones: (i) La primera de ellas está asociada a la velocidad en la frontera por efecto de la fuerza macroscópica, (ii) La segunda está asociada a los mecanismos newtonianos modificados por la inercia la cual depende de la rapidez o de la evolución de nuestra función estocástica (rapidez), (iii) La tercera asociada a los fenómenos no newtonianos (no lineales) del modelo de ley de potencia, este modelo está asociado con las propiedades adelgazantes y engrosantes del líquido no newtoniano. Obsérvese que tanto la contribución newtoniana y no newtoniana están modificadas por los mecanismos inerciales.

8.3 Aumento en el flujo y fracción de potencia

Para ver el efecto de la fuerza microscópica sobre el flujo volumétrico calculamos la eficiencia que consiste en promediar la ecuación transitoria de flujo volumétrico y compararla con aquella a gradiente de presión constante, los resultados muestran que la eficiencia es una función creciente del esfuerzo en la pared, la amplitud de la fuerza



microscópica y del exponente α el cual está relacionado con las propiedades adelgazantes y engrosantes al corte del líquido. En este punto, el fluido newtoniano no representa ningún cambio debido a que su aumento es cero, lo que implica que el mecanismo principal para el aumento del flujo es el adelgazamiento al corte y la amplitud y los mecanismos inerciales solo modifican la forma de las curvas de aumento en el flujo.

8.4 Balance energético

A partir del balance de energía y suponiendo que los cambios temporales y convectivos son despreciables se obtuvieron expresiones cerradas (analíticas) para: (i) Perfil de temperaturas, (ii) Temperatura promedio, (iii) Disipación viscosa (trabajo irreversible), (iiii) Número de Nusselt (mecanismos convectivos vs mecanismos conductivos).

El perfil de temperatura puede descomponerse al igual que la velocidad en dos contribuciones. La primera de ellas asociada a los mecanismos Newtonianos inerciales y la segunda asociada a los mecanismos no Newtonianos inerciales (Ley de potencia). Nótese que el espacio material descrito por la velocidad y el flujo volumétrico aumento debido a la conductividad térmica la cual está asociada al transporte molecular de energía (conducción). Es importante señalar que el efecto acoplado de la inercia y de las propiedades no newtonianas del sistema incrementa la temperatura de bulto. Por otra parte los mecanismos no lineales afectan los transportes convectivos y de conducción los cuales se ven reflejados a partir del número de Nusselt.

8.5 Propiedades materiales y de proceso

En este trabajo de investigación, las variables de proceso y materiales importantes y que modifican la transferencia de momento y de energía las cuales, son claves en la física de polímeros en particular son mencionadas a continuación:

a) Propiedades materiales y de flujo

Las propiedades materiales importantes en el flujo y la reología son: (i) La fluidez a corte bajo ϕ_0 , (ii) La fluidez a cortes moderados ϕ_1 y (iii) el exponente del modelo de Ellis α .

b) Propiedad material térmica

La propiedad material asociada al transporte de energía molecular en este trabajo, es la conductividad térmica, i.e. k , la cual es una medida de la transferencia de energía por efecto de la conducción térmica del material.

c) Variables de proceso: Fuerza macroscópica

Por otra parte, las variables de proceso asociada a la fuerza macroscópica son: (i) La amplitud de la perturbación de la fuerza macroscópica M y (ii) la frecuencia de las oscilaciones ω las cuales dependen en particular del sistema físico que utilice para generar el movimiento en la frontera (pared). **La manera de modificar estas propiedades materiales es cambiando el grado de acidez del fluido (pH), el peso molecular de sistema (g/mol) o la concentración (wt.%) respectivamente.**

8.6 Cálculo experimental de las propiedades materiales

Experimentalmente las propiedades materiales del sistema pueden ser calculadas mediante experimentos reológicos en estado estacionario y no estacionario respectivamente. La fluidez a corte bajo ϕ_0 puede ser medida experimentalmente en una prueba de flujo en estado estacionario. El valor de la meseta a cortes bajos puede ser medido experimentalmente y nos da información física acerca del valor de la viscosidad η_0 y el inverso de esta cantidad, nos daría la fluidez a bajos cortes, i.e. $\eta_0 = 1/\phi_0$. El valor de la fluidez a cortes moderados $\phi_1 = 1/m^\alpha$, se calcula mediante un ajuste numérico en la zona de transición tipo ley de potencia, de la misma manera que el exponente α . La conductividad térmica k , puede ser calculada en experimentos térmicos de transferencia de energía por conducción y su valor está determinado por el siguiente cociente: $k = (\Delta Q h) / (A \Delta T \Delta t)$.



CAPÍTULO IX

TRABAJO FUTURO

En esta investigación se estudia la transferencia de momento y energía en una tubería de radio $r = a$ y longitud $z = L$. En la pared del sistema, no se cumple la condición de adherencia y se impone una velocidad la cual depende de una función estocástica que describe el movimiento vibrátil de la pared. Para describir la reología y el flujo del sistema, el líquido no-newtoniano es caracterizado con un modelo no newtoniano tipo Ellis, el cual acopla el newtoniano con el modelo ley de potencia. Suponiendo estado no-estacionario en la ecuación de momento, simetría cilíndrica, flujo unidireccional, fluido incompresible, efectos gravitacionales despreciables, y que los mecanismos de transferencia de energía son gobernados por el transporte molecular y la disipación viscosa. Para resolver el conjunto de ecuaciones diferenciales parciales acopladas, se propone un conjunto de variables con el fin de acotar el espacio de simulación y que aparezcan grupos adimensionales que permitan cuantificar los mecanismos globales en el sistema. A partir de las ecuaciones adimensionales expresiones analíticas para: (i) El perfil de velocidades axial, (ii) Flujo volumétrico, (iii) Aumento del flujo volumétrico, (iv) Fracción de potencia, (v) Perfil de temperaturas, (vi) Temperatura promedio y (vii) Numero de Nusselt en función de la fuerza motriz asociada al gradiente de presión y las propiedades no newtonianas, energía y de la fuerza macroscópica relacionada con la perturbación en la pared. Finalmente, se utilizan datos de un polímero comercial y se predicen las simulaciones correspondientes.

Las líneas de investigación, naturales de este trabajo son las siguientes:

a) **Modelos viscoelásticos lineales**

Otra de las incorporaciones naturales de este trabajo, son los efectos elásticos a través de los tiempos de relajación de Maxwell, Jeffreys, Burgers y Maxwell Generalizado. Estos modelos reológicos podrían incorporar información acerca de la memoria de los materiales en el sistema de flujo. Un ejemplo de estos modelos, es la ecuación reológica constitutiva de Jeffreys, la cual contiene tres parámetros materiales: (i) un tiempo viscoelástico de Maxwell, (ii) un tiempo viscoelástico de Jeffreys y (iii) una viscosidad a bajo corte.

$$\left(1 + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t}\right) \boldsymbol{\sigma} = 2\eta_0 \left(1 + \lambda_j \frac{\partial}{\partial t}\right) \mathbf{D}$$



El modelo de Jeffreys es una combinación de los esfuerzos asociados al solvente y al sistema complejo (polímero) respectivamente (Bird et al. 1987, 2002). Otro modelo de orden superior, que nos permite caracterizar al material es el modelo de Burgers de segundo orden, el cual se describe a continuación:

$$\left(1 + \lambda_M \frac{\partial}{\partial t} + \beta \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \boldsymbol{\sigma} = 2\eta_0 \left(1 + \lambda_J \frac{\partial}{\partial t}\right) \mathbf{D}$$

Esta ecuación constitutiva es de segundo orden en la derivada y podría arrojar información útil a través de los parámetros materiales asociados al sistema $\{\lambda_M, \lambda_J, \beta, \eta_0\}$.

b) Modelos viscoelásticos no lineales

Por otra parte, fenómenos más complejos están relacionados con el régimen de viscoelasticidad no lineal a través de ecuaciones constitutivas no lineales que describan la naturaleza compleja de estos sistemas. En este punto se pueden utilizar modelos como son: (i) Tanner, (ii) White-Metzner, (iii) Oldroyd-B, (iv) Giesekus entre otros (Bird et al. 1987, 2002). Las Ecuaciones constitutivas mencionadas tiene la siguiente estructura matemática:

$$\boldsymbol{\sigma} + \frac{\eta(\Pi_D)}{G_0} \left\{ \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \boldsymbol{\sigma} - \underbrace{(\nabla \mathbf{V}^T \cdot \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \mathbf{V})}_{\text{Terminos-nolineales}} \right\} = 2\eta(\Pi_D) \mathbf{D}$$

En la ecuación no lineal, ∇ es el operador convectivo superior de Maxwell el cual, cuantifica los efectos no lineales en el sistema debido a los cambios de la viscosidad por efecto de la rapidez de deformación en el sistema de flujo. Por otra parte los efectos elásticos se pueden

9.1 Efectos convectivos y transitorios en la temperatura

Por otra parte, se pueden incorporar los efectos convectivos y transitorios de la ecuación de transporte de energía, en este caso, el conjunto de ecuaciones acopladas que resultan de nuestras nuevas hipótesis son las siguientes:

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} V_z(r,t) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma_{rz}) \quad ; \quad \frac{\partial V_z(r,t)}{\partial r} = v_0 \sigma_{rz} + v_1 (\sigma_{rz})^\alpha$$

$$\rho C_p \left(\frac{\partial}{\partial t} + V_z(r,t) \frac{\partial}{\partial r} \right) T = k \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \sigma_{rz} \frac{\partial V_z(r,t)}{\partial r}$$

En este punto, se incorporan estos mecanismos (convectivos y transitorios) a través de la derivada material DT/Dt de la ecuación de transporte de energía. Esta derivada describe los cambios de la temperatura temporalmente y con el espacio en la dirección de la velocidad.

9.2 Métodos matemáticos y computacionales

Para resolver el conjunto de ecuaciones diferenciales parciales no lineales acopladas: (i) momento, (ii) energía y (iii) constitutiva, pueden ser empleados diferentes técnicas matemáticas como son: (i) Teoría de perturbaciones, (ii) Métodos numéricos basados en diferencias finitas y elemento finito. Por otra parte, para visualizar los patrones de flujo en el sistema, se puede utilizar paquetes comerciales tipo COMSOL-MULTIPHYSICS, CFD, etc, los cuales se basan en discretizar el espacio en donde se describe el sistema físico, por medio de mallas las cuales describen el espacio en el que se resuelven las ecuaciones dinámicas del sistema.

9.3 Sistemas y Reometría

Otro punto importante en este trabajo es el concerniente a reometría en un viscosímetro de platos concéntricos y por medio de pruebas de compresión calcular los parámetros materiales que describen el flujo y la reología de estos materiales. Aquí, se puede caracterizar diferentes tipos de fluidos complejos como son: (i) Sistemas Micelares, (ii) Polímeros, (iii) Polímeros Asociativos, (iv) fibras naturales o sintéticas, (v) Cristales Líquidos entre otros.

Finalmente, este tema de tesis motiva el estudio de sistemas complejos los cuales, son punto de partida en la busca del modelado de materiales nuevos, basados en mimetizar a los creados por la naturaleza. La presente investigación representa un paso en la búsqueda constante de modelos simples que nos permitan dilucidar cómo funcionan estos sistemas y se entienda su uso en la formulación de nuevos materiales aplicados a la industria de procesamiento de polímeros.



REFERENCIAS



- M. Abou-Dakka, M., Herrera-Valencia, E.E. & A.D. Rey, A.D., *J Non-Newton. Fluid Mech.* 185-186 (2012) 1.
- Anand, M. & Rajagopal, K. R., *Int. J. Cardio. Med. Sci.*, 4 (2004) 59.
- De Andrade Lima, L.R.P. & Rey, A.D., *Chem. Eng. Sci.*, 60 (2005) 6622.
- De Andrade Lima, L.R.P. & Rey, A.D., *J. Non-Newton. Fluid Mech.*, 135 (2006) 32.
- Barnes, H.A., Townsend, P. & Walters, K., *Rheol. Acta*, 10 (1971) 517.
- Barnes, H.A., Townsend, P. & Walters, K., *Nature*, 224 (1969) 585.
- Bird, R.B., R.C. Armstrong, R.C. & Hassager, O., *Dynamics of Polymeric Liquids, Vol. 1: Fluid Mechanics*, John Wiley & Sons, New York, (1977).
- Calderas, F., Sánchez-Solís, A. & Manero, O., *Macromol Symp.*, 283-284 (2009) 354.
- Casulli, J.R., Clermont, Von Ziegler, A. & Mena, B., *Polym. Eng. Sci.*, 30 (1990) 1551.
- Davies, J.M., Bhumiratana, S. & Bird, R.B., *J. Non-Newton. Fluid Mech.*, 3 (1978) 237.
- Del Rio, J.A., López de Haro, M. & Whitaker, S., *Phys. Rev. E*, 50 (1998) 6323.
- Rey, A.D. & E.E. Herrera-Valencia, E.E., *Biopolymers J.*, 97 (2012) 374.
- Greatz, L., *Ann. Phys. Chem.*, 18 (1883) 79.
- Etemad, S.G. & Mujumdar, H., *Int. J. Heat Mass Trans.*, 38 (1995) 2225.
- Herrera, E.E., Calderas, F., Chávez, A.E., & Manero, O., *J Non-Newton. Fluid Mech.*, 165 (2010) 174.
- Herrera, E.E., Calderas, F., Chávez, A.E., Manero, O., & Mena, B., *Rheol. Acta*, 48 (2009) 779.
- Herrera-Valencia E.E & Rey, A.D., *Phil. Trans. R.Soc. A* 372 (2014) 20130369.
- Herrera-Velarde, J.R., Zenit, R. & Mena, B., *Rev. Fis. Mex. Fis.*, 47 (2001) 351.
- Herrera-Velarde, J.R., Zenit, R. & Mena, B., *J. Non-Newton. Fluid Mech.* 109 (2003) 157.
- Herrera-Velarde J.R. & Mena, B., *Rev. Mex. Fis.*, 46 (2000) 1551.
- Lin, J. Y., Wei, G., Tan, H., Phan-Thien, N. & Khoo, B.C., *J. Non-Newton. Fluid Mech.*, 212 (2014) 13.
- Manero, O. & Mena, B., *Rheol. Acta*, 17 (1977) 573.
- Manero, O., Valenzuela, R. & Mena, B., *Rheol. Acta*, 17 (1978) 693.



- Pérez-Camacho, C., López-Aguilar, J.E., Calderas, F., Manero, O. & Webster, M.F. J. Non Newton. Fluid Mech., 5 (2015) 1-12.
- Mena, B., Manero, O. & Binding, D.M., J. Non Newton. Fluid Mech., 5 (1979) 427.
- Morton-Jones, D. H., Procesamiento de plásticos, Editorial Limusa, S.A de C.V, 95 (1993) 13.
- Moyers-Gonzalez, M.A. & R.G. Owens, R.G., Biorheology, 47 (2010) 39.
- Moyers-Gonzalez, M.A., Owens, R.G. & Fang, J., J Non-Newton. Fluid Mech., 613 (2009) 45.
- Moyers-Gonzalez, M.A., Owens, R.G. & Fang, J., J. Fluid Mech., 617 (2008a) 327.
- Moyers-Gonzalez, M.A., Owens, R.G. & Fang, J., J Non-Newton. Fluid Mech., 155 (2008b) 146.
- Moyers-Gonzalez, M.A., Owens, R.G. & Fang, J., J. Fluid Mech., 155 (2008c) 161.
- Ostwald, W., Kolloid-Z, 36 (1925) 99.
- Owens, R.G., J. Non-Newton. Fluid Mech., 140 (2006) 57.
- Phan-Thien N. & Dudek, J., J. Non-Newton. Fluid Mech., 11 (1982) 147.
- Phan-Thien,N., J. Non-Newton. Fluid Mech., 4 (1978) 167.
- Phan-Thien, N. & Fang, Z., J. Rheol., 40 (1996) 521.
- Phan-Thien, N., & Dudek, J., Nature, 296 (1982) 843.
- Sundstrom, D.W. & Kaufman, A., Ind. Eng. Chem. Process. Des. Develop. 16 (1977) 13.
- Yin, X. & Bau, H.H., J. Heat Trans., 118 (1996) 79.