



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS  
Y DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

NUDOS QUE ADMITEN UNA INFINIDAD DE SUPERFICIES ESENCIALES  
CERRADAS

TESIS  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
DOCTOR EN CIENCIAS

PRESENTA:

ERIK LÓPEZ GARCÍA

DIRECTOR

DR. MAX NEUMANN COTO  
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR

DR. JOSÉ LUIS CISNEROS MOLINA  
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS

DR. MARIO EUDAVE MUÑOZ  
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS

MÉXICO, D. F. 19 DE MARZO DE 2015



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## AGRADECIMIENTOS

Aprovecho este espacio para agradecer a aquellas personas e instituciones que de algún modo participaron en mis estudios de doctorado. En particular agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por la beca que me permitió el financiamiento de mis estudios, al Instituto de Matemáticas por proporcionarme un sitio propicio para la adquisición de conocimientos matemáticos.

Agradezco a mi tutor, el Dr. Max Neumann Coto su consejo y guía.

Agradezco a mi esposa Onelia, a mis hijas Amy y Geraldine, por su gran paciencia y fuerza que me dieron.

Por último y no menos importante, a la Vida, por dejarme jugar el más grande juego “Las Matemáticas”.



## Índice general

Capítulo 1. ANTECEDENTES	5
1.1. SUPERFICIES INCOMPRESIBLES	5
1.2. SUPERFICIES EN COMPLEMENTOS DE NUDOS	7
1.3. ALGUNOS TIPOS DE NUDOS	9
Capítulo 2. NUDOS CON UN NÚMERO FINITO DE SUPERFICIES ESENCIALES CERRADAS	17
2.1. SUPERFICIES RAMIFICADAS	17
2.2. UNA CANTIDAD FINITA DE PENDIENTES EN $\partial E(K)$	24
2.3. NUDOS QUE ADMITEN EXACTAMENTE $N$ SUPERFICIES ESENCIALES CERRADAS	27
Capítulo 3. NUDOS CON UNA INFINIDAD DE SUPERFICIES ESENCIALES CERRADAS	37
3.1. TEOREMA PRINCIPAL	37
3.2. COROLARIOS	46
APENDICE	59
Bibliografía	63



## ANTECEDENTES

En este capítulo se recuerdan algunas definiciones básicas y se exponen los resultados conocidos sobre la existencia de superficies esenciales cerradas en exteriores de nudos. Dos referencias generales a nudos y 3-variedades, son el libro D. Rolfsen [9] y C. Adams [1].

### 1.1. SUPERFICIES INCOMPRESIBLES

Una idea clave para estudiar 3-variedades es considerar superficies encajadas de manera esencial.

**DEFINICIÓN.** Una superficie  $S$  (distinta de una esfera o un disco) propiamente encajada en una 3-variedad  $M$  es *incompresible* si cada curva en  $S$  que bordea un disco en  $M$ , es el borde de un disco en  $S$ . De lo contrario, si existe una curva en  $S$  que bordea un disco  $D$  en  $M$  pero no bordea un disco en  $S$ , la superficie es *compresible* y  $D$  es un *disco de compresión* para  $S$ .

**EJEMPLO.** Una superficie de género  $n \geq 2$  propiamente encajada de manera estándar en  $\mathbb{R}^3$ , tiene un número infinito de discos de compresión.

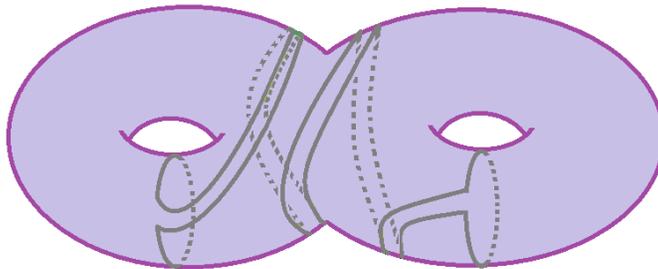


FIGURA 1.1.1

Esta definición es topológica, veamos una equivalencia algebraica.

**TEOREMA. [9]** *Sea  $F$  una superficie con  $\pi_1(F)$  distinto de 0, encajada de manera bilateral en una 3-variedad  $M$ , entonces  $F$  es incompresible si y solo si  $\iota_* : \pi_1(F) \rightarrow \pi_1(M)$  es inyectivo.*

En  $\mathbb{R}^3$  o  $S^3$  tenemos el siguiente resultado.

**COROLARIO. [9]** *Toda superficie cerrada encajada en  $\mathbb{R}^3$  es compresible.*

**EJEMPLO.** Cada toro encajado en  $S^3$  es compresible y por lo tanto es frontera de un toro sólido en al menos un lado.

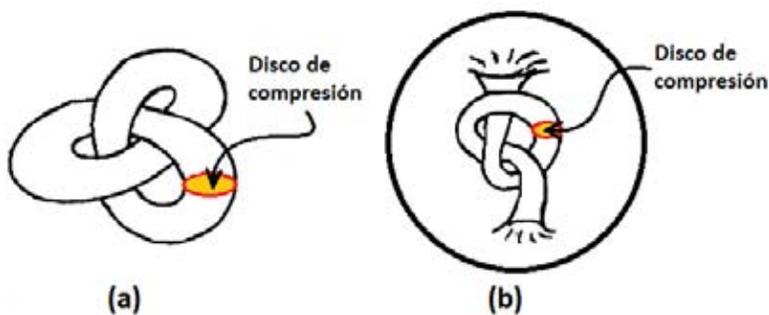


FIGURA 1.1.2. (a) Toro sólido interior (b) Toro sólido exterior

DEFINICIÓN. Una superficie  $S$  propiamente encajada en  $M$  es *frontera incompresible* si para cada disco  $D$  en  $M$  tal que  $\partial D = \alpha \cup \beta$  con  $\alpha \subset S$  y  $\beta \subset \partial M$  (ver Figura 1.1.3(a)), existe otro disco  $D'$  en  $S$  con  $\partial D = \alpha \cup \beta'$  con  $\beta' \subset \partial S$  (ver Figura 1.1.3(b)). De otro modo, decimos que  $S$  es *frontera compresible* ( $\partial$ -*compresible*) y que  $D$  es un *disco de compresión a la frontera*.

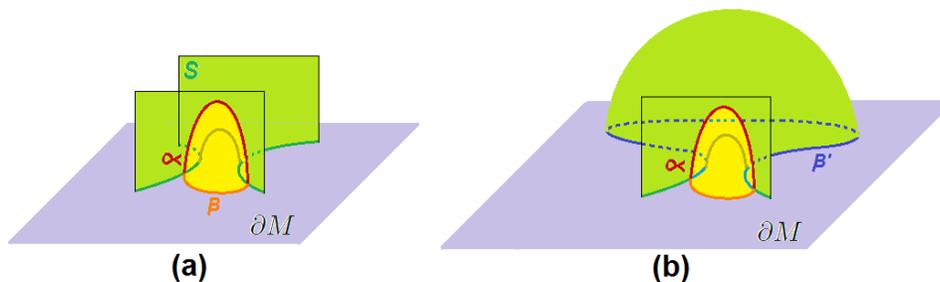


FIGURA 1.1.3

EJEMPLO. Todas las superficies incompresibles en un cubo con asas son frontera compresibles.

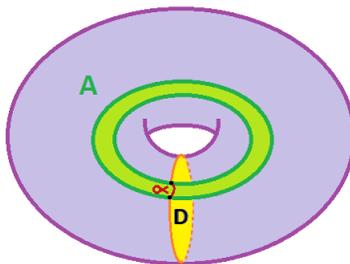


FIGURA 1.1.4

### 1.2. SUPERFICIES EN COMPLEMENTOS DE NUDOS

Un nudo en  $S^3$  es un círculo encajado en  $S^3$ . El nudo más sencillo es el nudo trivial, es decir la circunferencia estándar  $S^1$  (el conjunto de puntos  $\{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ ). Sea  $K$  un nudo en  $S^3$ , usaremos  $N(K)$  para denotar una vecindad regular de  $K$  y  $E(K)$  para denotar el *exterior del nudo*  $S^3 - N(K)$ . El *toro periférico* de  $K$ , es la frontera de  $N(K)$  y un anillo periférico, es un anillo no trivial contenido en el toro periférico.

**TEOREMA. [9]** *Un nudo  $K$  en  $S^3$  no es trivial si y solo si el toro periférico es incompresible en  $S^3 - K$ .*

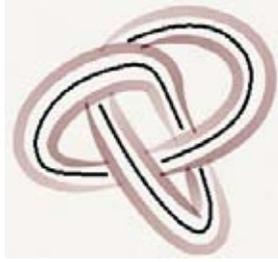


FIGURA 1.2.1. Toro periférico del nudo trébol

**EJEMPLO.** El toro de la Figura 1.2.2 es incompresible en  $S^3 - K$  y no es el toro periférico.

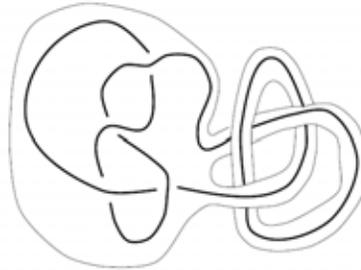


FIGURA 1.2.2

**DEFINICIÓN.** Una superficie  $S$  propiamente encajada en el exterior de  $K$  es *meridionalmente compresible* si existe un disco  $D$  en  $S^3$  tal que  $\partial D = S \cap D$  y  $D$  cruza a  $K$  en un punto, y no existe un disco  $D'$  en  $S^3$  con  $\partial D' = \partial D$  y  $D' \cap E(K) \subset S$ ; a  $D$  le llamamos *disco de compresión meridional*. De lo contrario decimos que  $S$  es *meridionalmente incompresible*.

**EJEMPLO.** En la Figura 1.2.3(a) se observa un toro meridionalmente compresible y en (b) un toro meridionalmente incompresible.

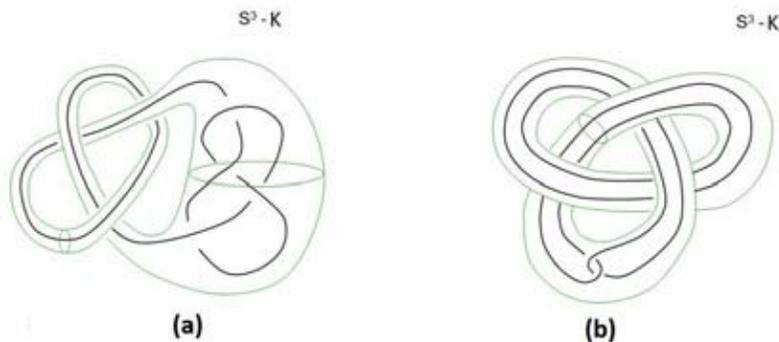


FIGURA 1.2.3

Si  $S$  es incompresible en  $S^3 - K$  y hacemos una operación compresión meridiana (indicada en la Figura 1.2.4), entonces la nueva superficie  $S'$  es también incompresible. La operación inversa puede que no se valga, es decir si  $S'$  es incompresible en  $S^3 - K$  a la mejor  $S$  resulta compresible.

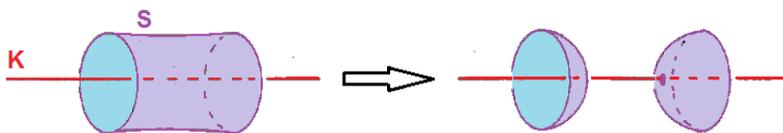


FIGURA 1.2.4

DEFINICIÓN. Sea  $K$  un nudo en  $S^3$  y  $F$  una superficie propiamente encajada en el exterior de  $K$ , decimos que  $F$  es *esencial* si es incompresible en  $S^3 - K$  y no es el toro periférico o un anillo periférico. La Figura 1.2.5 muestra un toro esencial.

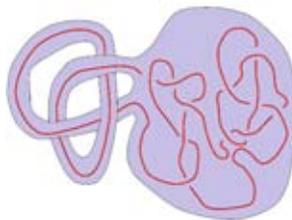


FIGURA 1.2.5

Diremos que  $K$  admite  $n$  superficies esenciales, si existen  $n$  superficies esenciales no isotópicas en  $S^3 - K$ .

DEFINICIÓN. Sea  $K$  un nudo en  $S^3$  y  $F$  una superficie con frontera propiamente encajada en el exterior de  $K$ , decimos que  $F$  es *meridional* si su frontera consiste de meridianos de  $K$  (ver Figura 1.2.6(a)). Si a cada componente de la frontera de  $F$  le pegamos un disco meridional, obtenemos una superficie cerrada  $\bar{F}$  en  $S^3$  que interseca transversalmente al nudo  $K$  (ver Figura 1.2.6(b)).

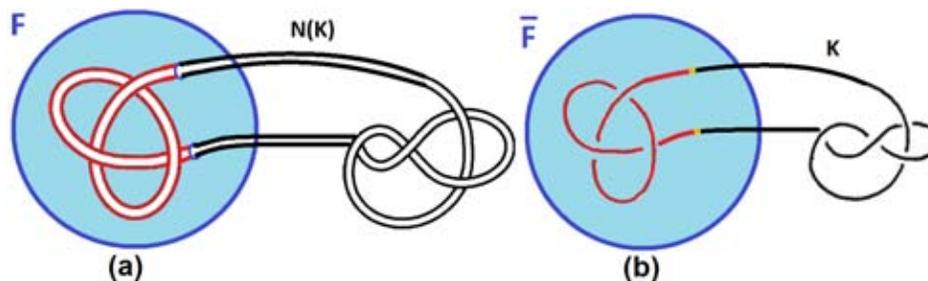


FIGURA 1.2.6

### 1.3. ALGUNOS TIPOS DE NUDOS

Recordemos que un nudo  $K$  en  $S^3$  se dice *toroidal*, si  $K$  puede construirse sobre la superficie de un toro estándar ( $S^1 \times S^1$ ). En [11] M. Tsau demuestra que los nudos toroidales no admiten superficies esenciales cerradas.

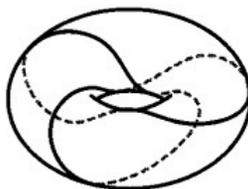


FIGURA 1.3.1. Nudo trebol en un toro.

Un nudo  $K$  en  $S^3$  es de  $n$  puentes si  $K$  es isotópico a una curva con  $n$  máximos y  $n$  mínimos, pero no con menos. Allen Hatcher y W. Thurston en el artículo [5], demuestran que los nudos de 2 puentes no admiten superficies esenciales cerradas.

FIGURA 1.3.2. Nudo  $4_1$  de dos Puentes

Un nudo  $K$  en  $S^3$  se dice *primo* si no puede expresarse como suma conexa de nudos no triviales.

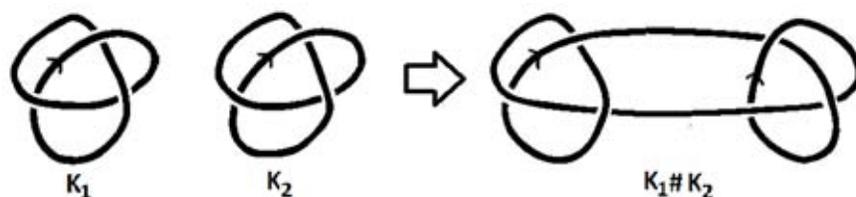


FIGURA 1.3.3. Suma conexas

DEFINICIÓN. Sea  $K_1$  un nudo no trivial en  $S^3$ ,  $V$  es una vecindad regular de  $K_1$  y  $K_2$  es un nudo en un toro sólido  $V' = D^2 \times S^1$  tal que  $K_2$  no está contenido en una 3-bola de  $V'$ . Un *satélite* del nudo  $K_1$ , es un nudo que es la imagen  $K = \varphi(K_2) \subset V$  de un homeomorfismo  $\varphi : V' \rightarrow V$ . El nudo  $K_1$  se conoce como *nudo compañero*,  $\partial V$  como *toro compañero* y  $K_2$  *nudo patrón* de  $K$ .

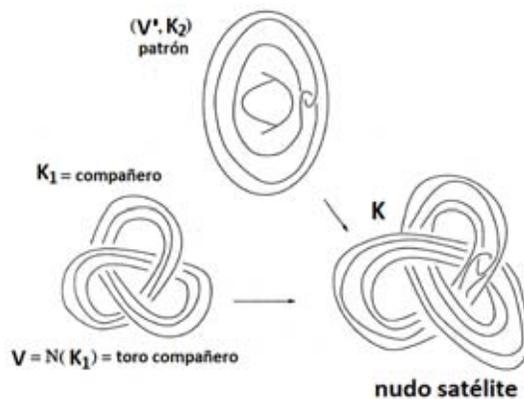


FIGURA 1.3.4. Nudo satélite

Un *cable* de un nudo  $K \subset S^3$ , es un nudo satélite de  $K$  que tiene como nudo patrón a un nudo toroidal. Se fija el nudo toroidal al decir el cable  $(p, q)$  de  $K$ .

OBSERVACIÓN. Un nudo  $K$  en  $S^3$  es un satélite si y solo si  $K$  admite un toro esencial (es decir, si existe en  $S^3 - K$  un toro incompresible distinto al toro periférico).



FIGURA 1.3.5. Nudo cable del trebol

Un nudo  $K$  en  $S^3$  se dice *pequeño*, si no admite superficies esenciales cerradas. Ejemplos de nudos pequeños son los nudos toroidales.

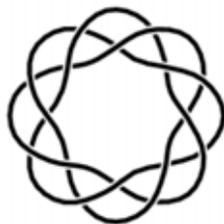


FIGURA 1.3.6. Nudo Toroidal

Sean  $K_1, K_2, \dots, K_n$  nudos en  $S^3$ , a los toros en  $S^3 - (K_1 \# K_2 \# \dots \# K_n)$  que contienen  $m$  nudos con  $1 \leq m \leq n - 1$  y siguen paralelos a los restantes, les llamaremos *toros que comen y siguen* (véase la Figura 1.3.7).



FIGURA 1.3.7. Toro que come dos nudos y sigue

J. Schultens en el lema 14 del artículo [10], nos da una propiedad de los nudos pequeños.

**LEMA. [10]** Sean  $K_1, K_2, \dots, K_n$  nudos pequeños en  $S^3$  y  $F$  una superficie esencial separante en  $E(K_1 \# \dots \# K_n)$ . Entonces, salvo isotopía,  $F$  es un toro que come y sigue.

**EJEMPLO.** La suma de dos nudos pequeños solo admite dos superficies esenciales cerradas.

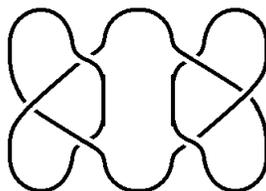


FIGURA 1.3.8. Nudo  $3_1 \# 3_1$

Sea  $D$  la proyección de un nudo  $K$ . Si al recorrer el diagrama  $D$  pasamos por los puntos de cruce, por arriba y por abajo de manera alternada, decimos que el *diagrama es alternante*. Un nudo que posea al menos un diagrama alternante es llamado *nudo alternante*. Véase la Figura 1.3.9.

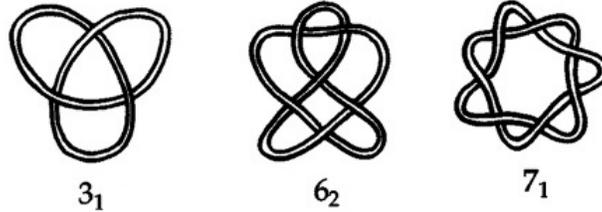


FIGURA 1.3.9. Nudos Alternantes

W. Menasco en el artículo [7], prueba el resultado conocido como el lema del meridiano.

**LEMA. [7]** *Sea  $K$  un nudo en  $S^3$  primo, alternante y  $F \subset S^3 - K$  una superficie cerrada incompresible, entonces  $F$  es meridionalmente compresible.*

El Teorema 3 del mismo artículo, nos dice como son las superficies meridionales incompresibles con dos, cuatro y seis fronteras de un nudo alternante.

**TEOREMA. [7]** *Sea  $K$  un nudo primo, alternante en  $S^3$  y  $F \subset S^3 - K$  una superficie meridional con  $n$  fronteras la cual es incompresible, meridionalmente incompresible. Entonces, (i) si  $n = 2$ ,  $F$  es un anillo periférico y (ii) si  $n = 4$  ó  $6$ ,  $F$  tiene género cero.*

Sea  $B$  una 3-bola y  $T = t_1 \cup t_2$  un par de arcos propiamente encajados en  $B$ . Llamamos al par  $(B, T)$  un *ovillo de 2-cuerdas*. Denotaremos por  $E(T)$  al espacio  $B - N(\overset{\circ}{T})$ .



FIGURA 1.3.10. Ovillo de dos cuerdas

Decimos que dos ovillos  $(B, T)$ ,  $(B, T')$  son *iguales*, si existe un homeomorfismo  $h : B \rightarrow B$  tal que  $h(b) = b$  para todo  $b \in \partial B$  y  $h(T) = T'$ .

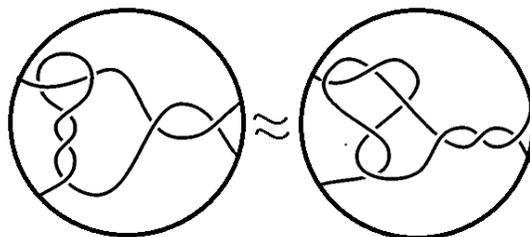


FIGURA 1.3.11. Ovillos Iguales

Se dice que un ovillo  $(B, T)$  es *trivial* si es igual al ovillo trivial (véase la Figura 1.3.12).



FIGURA 1.3.12. Ovillo trivial

Decimos que dos ovillos  $(B, T), (B, T')$  son *equivalentes*, si existe un homeomorfismo  $h : B \rightarrow B$  tal que  $h(T) = T'$ . Un *ovillo racional* es un ovillo equivalente a un ovillo trivial, se puede demostrar que existe una biyección entre los ovillos racionales y  $\mathbb{Q} \cup \infty$ , donde el ovillo trivial es el  $\infty$ .

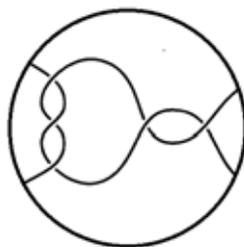


FIGURA 1.3.13. Ovillo Racional

Decimos que un ovillo  $(B, T)$  es *esencial*, si la esfera agujerada  $\partial B - N(T)$  es incompresible en  $E(T)$ .



FIGURA 1.3.14. Ovillo esencial

Un ovillo  $(B, T)$  se dice *atoroidal*, si  $E(T)$  no contiene toros esenciales.



FIGURA 1.3.15. (a) Ovillo atoroidal (b) Ovillo con un toro esencial

Un nudo  $K$  en  $S^3$  tiene una *descomposición en ovillos* de 2 cuerdas, si la pareja  $(S^3, K)$  se puede expresar como la unión de dos ovillos  $(B, T)$  y  $(B', T')$  con  $S^3 = B \cup B'$ ,  $K = T \cup T'$ . Una descomposición en ovillos es esencial si ambos ovillos son esenciales. Un nudo  $K$  admite una descomposición de ovillos esenciales si y solo si el exterior de  $K$  contiene una esfera meridional, esencial con 4 fronteras.

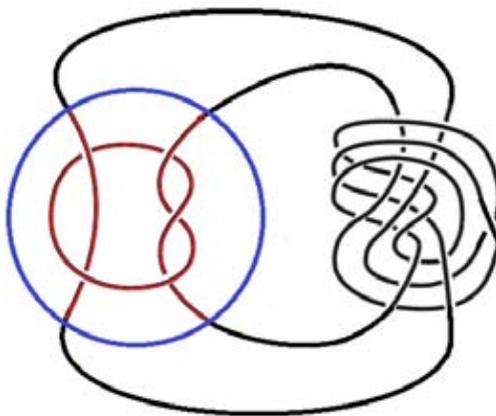


FIGURA 1.3.16. Nudo con descomposición de ovillos de 2 cuerdas

Y. Wu en el lema 2.2 del artículo [12], nos da una propiedad de ovillos de dos cuerdas.

**LEMA. [12]** *Sea  $(B;T)$  un ovillo de dos cuerdas  $t_1$  y  $t_2$ , no trivial, atoroidal y  $m_i$  es un meridiano de la cuerda  $t_i$  en  $\partial E(T)$  con  $i = 1, 2$ . Entonces al menos uno de los toros agujerados  $\partial E(T) - m_i$  es incompresible.*

**EJEMPLO.** El ovillo de dos cuerdas de la Figura 1.3.17(a) admite el toro agujerado incompresible de la Figura 1.3.17(b).

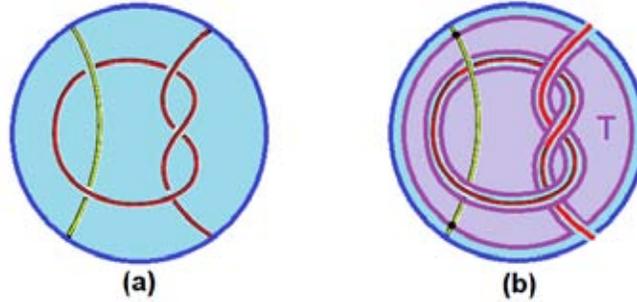


FIGURA 1.3.17

Recordamos que un *nudo de Montesinos*  $K = K(\frac{p_1}{q_1}, \dots, \frac{p_m}{q_m})$ , es un nudo que se obtiene combinando ovillos racionales  $\frac{p_i}{q_i}$  con  $(p_i, q_i) = 1$  para todo  $i = 1, \dots, m$  colocados como en la Figura 1.3.18.

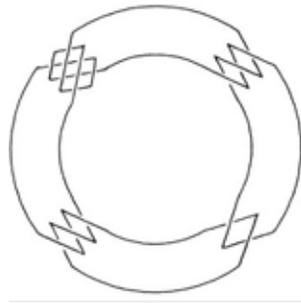


FIGURA 1.3.18. Nudo de Montesino  $K(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3})$

U. Oertel en el artículo [8], nos dice cuáles nudos de Montesinos admiten una infinidad de superficies esenciales cerradas.

**TEOREMA. [8]** *Sea  $K = (\frac{P_1}{q_1}, \dots, \frac{P_m}{q_m})$  un nudo de Montesinos en  $S^3$ , entonces:*

- (i) *Si  $m < 4$ ,  $K$  no admite superficies esenciales cerradas.*
- (ii) *Si  $m \geq 4$  y  $q_i \geq 3 \forall i$ ,  $K$  admite una infinidad de superficies esenciales cerradas.*

Un nudo  $K$  en  $S^3$  tiene una *proyección como  $2n - plat$* , si posee un diagrama como se muestra en la Figura 1.3.19, donde cada caja consiste de dos cuerdas verticales con  $l$  medios giros a mano izquierda y  $n$  es el número de cajas en los renglones pares.

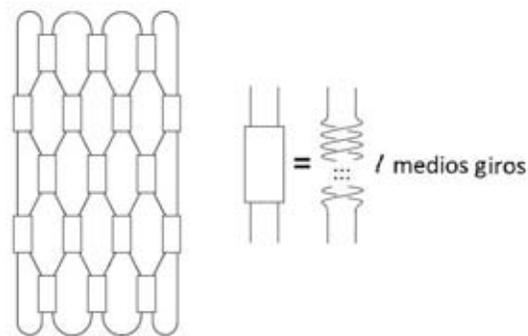


FIGURA 1.3.19

Y. Wu en el artículo [13], nos dice que los nudos que tienen una proyección como  $2n - plat$  suficientemente complicada admiten una superficie esencial cerrada.

**TEOREMA. [13]** *Sea  $K$  un nudo en  $S^3$  con una proyección como  $2n - plat$  tal que  $n \geq 3$ ,  $a_{ij} \neq 0$  (donde  $a_{ij}$  es la caja del  $i$ -ésimo renglón y  $j$ -ésima columna) para  $j \neq 1, n$  y  $|a_{ij}| \geq 3$  para  $i$  impar y  $j = 0$  o  $n - 1$ , entonces  $K$  admite una superficie esencial cerrada.*

## NUDOS CON UN NÚMERO FINITO DE SUPERFICIES ESENCIALES CERRADAS

En este capítulo se introducen las superficies ramificadas definidas por Floyd y U. Oertel en [3] y se exponen resultados importantes que usaremos más adelante para demostrar el Teorema principal. También se expone el resultado de A. Hatcher en [4] que dada una 3-variedad cuya frontera es un toro, existe una cantidad finita de pendientes en el toro realizadas por curvas frontera de superficies incompresibles y frontera incompresibles. Este resultado se utiliza para demostrar la existencia de una familia de nudos que admiten exactamente  $n$  superficies esenciales cerradas.

### 2.1. SUPERFICIES RAMIFICADAS

**DEFINICIÓN.** Una *vecindad regular fibrada de una superficie ramificada* en una 3-variedad  $M$  es una subvariedad compacta de codimensión cero  $N \subset M$  foliada por intervalos (fibras), localmente isomorfo al modelo foliado por arcos verticales como se muestra en la Figura 2.1.1(a). Una *superficie ramificada*  $B$ , es el espacio cociente de  $N$  obtenido al identificar las fibras (intervalos) en puntos, como se muestra en la Figura 2.1.1(b).



FIGURA 2.1.1. (a)  $N$  vecindad fibrada (b)  $B$  superficie ramificada

La *frontera* de  $B$  es  $B \cap \partial M$  y los *puntos de ramificación* se definen como los  $b$  en  $B$  que no tienen una vecindad homeomorfa a  $\mathbb{R}^2$  o  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\}$ . A  $\partial N - \partial M$  la partiremos en dos superficies, la *frontera horizontal*  $\partial_h N$  que es la parte transversal a las fibras y la *frontera vertical*  $\partial_v N$ , que es la contenida en la unión de fibras. Una superficie  $S \subset M$  se dice *llevada por una superficie ramificada*  $B$ , si  $S$  es isotópica a una superficie dentro de  $\overset{\circ}{N}$  que interseca las fibras transversalmente. Decimos que  $S$  es llevada por  $B$  con *pesos positivos*, si  $S$  interseca a cada fibra de  $N$ .

EJEMPLO. Sea  $M = S_g \times S^1$ , donde  $S^1$  es el círculo unitario en el plano complejo y  $S_g = S_g \times 1$  es una superficie orientable, cerrada de género  $g \geq 1$ . Sea  $\alpha \subset S_g$  es una curva cerrada simple, no separante y  $U \subset S_g$  una vecindad regular de  $\alpha$  con componentes frontera  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$ . Dado  $n \in \mathbb{N}$  construiremos una superficie  $S \subset M$  como sigue. Sea  $W = S_g - \overset{\circ}{U}$ ,  $V = \bigcup_{i=1, \dots, n} W \times e^{2\pi i/n}$ .  $S$  es obtenido desde  $V$  al añadir  $n$  anillos en  $U \times S^1$ , de modo que el  $i$ -ésimo anillo  $A_i \subset U \times e^{[2\pi i/n, 2\pi(i+1)/n]}$  con  $\partial A_i = (\alpha_1 \times e^{2\pi i/n}) \cup (\alpha_2 \times e^{2\pi(i+1)/n})$ .  $S$  tiene género  $n(g-1) + 1$  y  $S$  es una superficie incompresible en  $M$ . Por medio de esta construcción producimos una familia infinita de superficies incompresibles en  $M$ , todas estas superficies son llevadas por una sola superficie ramificada  $B$ .  $B$  es la unión de  $S_g$  y un anillo  $A \subset U \times S^1$  donde los puntos de ramificación de  $B$  son  $\alpha_1 \cup \alpha_2$ .  $S$  es llevado por  $B$  con peso  $n$  en  $S_g - U$ , peso  $n-1$  en  $\overset{\circ}{U}$  y peso 1 en  $\overset{\circ}{A}$ , véase la Figura 2.1.2.

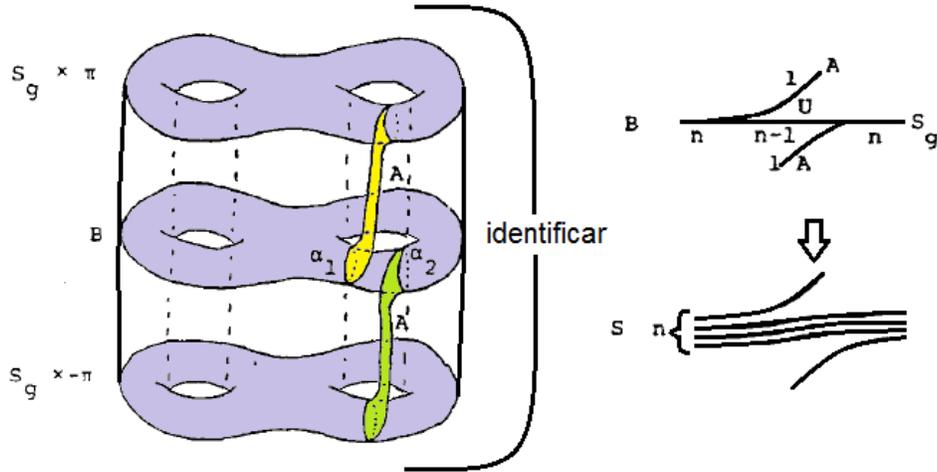


FIGURA 2.1.2

Sea  $B$  una superficie ramificada en una 3-variedad  $M$  y  $N$  una vecindad regular fibrada de  $B$ . Un *monógono*, es un disco  $D \subset M - \overset{\circ}{N}$  con  $\partial D = D \cap N$ ,  $\partial D = \alpha \cup \beta$  donde  $\alpha$  es una fibra de  $\partial_v N$  y  $\beta \subset \partial_h N$ . Un *disco de contacto*, es un disco  $D \subset N$  tal que  $D$  es transversal a las fibras y  $\partial D \subset \partial_v N$ . Un *semi-disco de contacto*, es un disco  $D \subset N$  que es transversal a las fibras con  $\partial D = \alpha \cup \beta$ ,  $\alpha$  y  $\beta$  arcos tales que  $\overset{\circ}{\alpha} \subset \partial_v N$ ,  $\beta \subset \partial M$  y  $\alpha \cap \beta = S^0$ . Observe algunos discos en la Figura 2.1.3.

DEFINICIÓN. Sea  $B$  una superficie ramificada en una 3-variedad  $M$  y  $N$  una vecindad regular fibrada de  $B$ . Decimos que  $B$  es *incompresible* si satisface las siguientes tres condiciones:

- (i) No existen discos de contacto o semi-discos de contacto en  $N$ .
- (ii) Cada componente de  $\partial_h N$  es incompresible y  $\partial$ -incompresible en  $M - \overset{\circ}{N}$ .
- (iii) No existen monógonos en  $M - \overset{\circ}{N}$ .

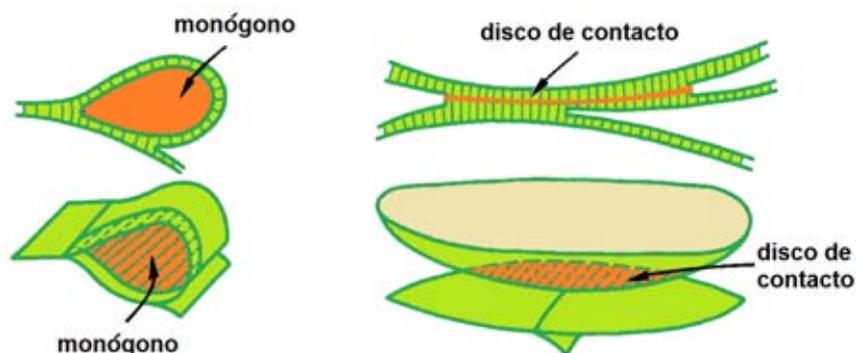


FIGURA 2.1.3

**TEOREMA. [3]** *Sea  $M$  una 3-variedad compacta, irreducible, orientable con frontera incompresible que contiene una superficie orientable incompresible y  $B \subset M$  una superficie ramificada. Si  $B$  es incompresible, entonces cada superficie llevada por  $B$  con pesos positivos es incompresible y  $\partial$ -incompresible.*

**DEMOSTRACIÓN.** Sea  $N'$  una vecindad regular fibrada de  $B$  y  $F$  una superficie llevada por  $B$  con pesos positivos. Para probar que  $F$  es incompresible, es suficiente mostrar que  $S = \partial N(F)$  (la frontera de una vecindad regular de  $F$ ) es incompresible. Dado que  $S$  es llevada por  $B$ , existe una isotopía de  $S$  de manera que  $S \subset \overset{\circ}{N}'$  y  $S$  es transversal a las fibras de  $N'$ .

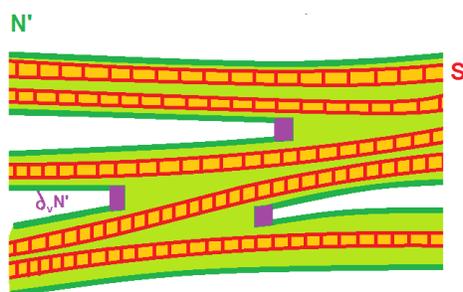


FIGURA 2.1.4

$S$  interseca a cada fibra al menos dos veces, existe una isotopía de  $S$  en  $N'$  tal que  $S \subset \overset{\circ}{N}'$  y  $\partial_h N' \subset S$  (empujando  $S \subset N'$  a  $\partial_h N'$ , véase la Figura 2.1.5). Notemos que  $N' - S$  es un haz de intervalos  $L$ , con fibras procedentes de las fibras de  $N'$ .

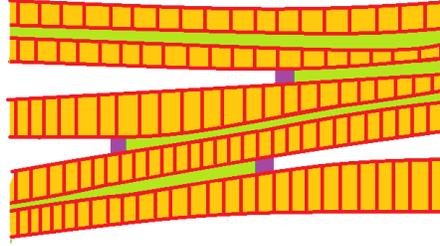


FIGURA 2.1.5

Si el núcleo de un anillo  $A$  de  $\partial_v N'$  es frontera de un disco  $D$  en  $M - \overset{\circ}{N}$ , entonces por la condición (ii) de incompresibilidad las dos fronteras de  $A$  son fronteras de discos  $D_0$  y  $D_1$  en  $\partial_h N'$ . La esfera  $D_0 \cup A \cup D_1$  es frontera de una 3-bola en  $M$  (en el lado que contiene a  $D$  por (i)). Así, extendemos  $N'$  y el haz de intervalos  $L$  a la 3-bola. Similarmente, si existe un disco  $D$  con  $\partial D = \alpha \cup \beta$ , donde  $\beta \subset \partial M$  y  $\alpha$  es el núcleo (transversal a las fibras) de un rectángulo  $R \subset \partial_v N'$ , entonces extendemos  $N'$  y el haz de intervalos  $L$  a las componentes de  $M - N'$  que contienen a  $D$  (se usa la  $\partial$ -incompresibilidad de  $\partial_h N'$ , la incompresibilidad de  $\partial M$  y la irreducibilidad de  $M$ ). Denotamos la extensión de  $N'$  por  $N$ , las condiciones (i)-(iii) se cumplen para  $N$ .

Supongamos que  $S$  no es incompresible y sea  $D$  el disco de compresión para  $S$  (se sigue de (i) y (ii) que ninguna componente de  $S$  es  $S^2$  o una frontera paralela  $D^2$ ). Después de una isotopía en  $D$  para que sea transversal a  $\partial_v N$ , podemos asumir que  $D \cap \partial_v N$  consiste de arcos o curvas simples cerradas, véase la Figura 2.1.6.

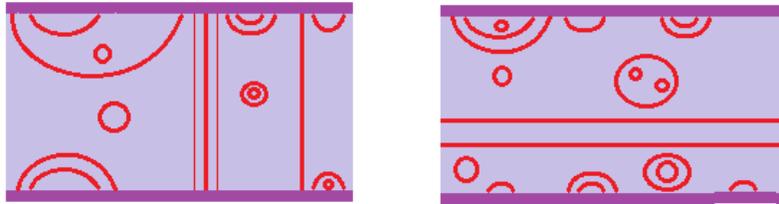


FIGURA 2.1.6

Supongamos que  $\gamma$  es una curva círculo de más adentro en  $D \cap \partial_h N$ , frontera de un disco  $E$  en  $D$ .  $\gamma$  no puede ser isotópico al núcleo de un anillo de  $\partial_v N$ ; de lo contrario,  $E \subset M - \overset{\circ}{N}$  (contradiciendo la construcción de  $N$  desde  $N'$ ) o  $E \subset N$  (contradiciendo (i)). Por lo tanto,  $\gamma$  bordea un disco en  $\partial_v N$  y podemos aplicar una isotopía en  $D$  para eliminar  $\gamma$  de  $D \cap \partial_v N$ . Eliminamos todos los círculos de  $D \cap \partial_v N$  de esta forma. Supongamos que  $\gamma$  es un arco de  $D \cap \partial_v N$ , el más cercano a la frontera de  $D$ , éste bordea un disco  $E$  en  $D$ . Hay dos casos,  $\gamma$  es isotópico a una fibra de  $\partial_v N$  o es isotópico a un arco en  $S$ .  $\gamma$  no puede ser isotópico a una fibra de  $\partial_v N$ , dado que  $E \subset M - \overset{\circ}{N}$  (contradiciendo (iii)) o  $E \subset N$  (esto no puede ocurrir

dado que el pullback del haz de intervalos  $L$  en  $\partial E$  sería no trivial). Si  $\gamma$  no es el más cercano a la frontera de  $\partial_v N$ , reemplazamos éste por un arco de  $D \cap \partial_v N$  que sea el más cercano a la frontera de  $\partial_v N$ . Cuando  $\gamma$  es movido para  $S$ , uno de los dos discos obtenidos al cortar  $D$  a lo largo de  $\gamma$  es un disco de compresión, el cual intersecta  $\partial_v N$  en menos arcos. Reemplazamos a  $D$  por este disco.

Cuando todos los arcos de  $D \cap \partial_v N$  han sido eliminados, obtenemos un disco de compresión  $D$  el cual no intersecta a  $\partial_v N$ . Si  $D \subset M - \overset{\circ}{N}$ , entonces  $D$  es un disco de compresión para  $\partial_h N$  (contrario a (ii)).  $D$  no puede estar contenido en  $N$ , pues de lo contrario  $D$  puede ser un disco de compresión para  $S \cap \partial L$  en el haz de intervalos  $L$ . Esto completa la demostración de incompresibilidad.

Queda por demostrar que  $S$  es  $\partial$ -incompresible. Notamos que  $d(B)$  (el doble de  $B$ ) es una superficie ramificada en  $d(M)$  (el doble de  $M$ ), la cual satisface la hipótesis del Teorema. El argumento anterior implica que  $d(S)$  (el doble de  $S$ ) es una superficie incompresible en  $d(M)$  y por lo tanto  $S \subset M$  es  $\partial$ -incompresible.  $\square$

Cada 3-variedad compacta  $M$  admite una descomposición de asas que puede obtenerse a partir de una triangulación.

$$M = \left( \bigcup_{j=1}^r H_j^0 \right) \cup \left( \bigcup_{j=1}^k H_j^1 \right) \cup \left( \bigcup_{j=1}^l H_j^2 \right) \cup \left( \bigcup_{j=1}^m H_j^3 \right)$$

donde cada  $H_j^n$  es una  $n$ -asa y

$$\partial M = \left( \bigcup_{j=1}^r H_j^0 \cap \partial M \right) \cup \left( \bigcup_{j=1}^k H_j^1 \cap \partial M \right) \cup \left( \bigcup_{j=1}^l H_j^2 \cap \partial M \right).$$

Una superficie  $S$  propiamente encajada en  $M$  está en forma normal si cumple las siguientes condiciones:

- (1)  $S$  no intersecta a las 3-asas.
- (2)  $\partial S$  no intersecta a las 2-asas de  $\partial M$ .
- (3)  $S$  intersecta cada  $i$ -asa  $H_j^i$  ( $i=0, 1, 2$ ) en una colección de discos disjuntos cuyas fronteras son homotópicamente no triviales en

$$\partial H_j^i - \left[ \left( \bigcup_{j=1}^m H_j^3 \right) \cup \left( \bigcup_{j=1}^l H_j^2 \cap \partial M \right) \right]$$

y los discos de  $S \cap \partial H_j^1$  son isotópicos a productos  $I \times \alpha$  (donde  $\alpha$  es arco de  $D^2$ ) en la estructura producto  $H_j^1 = I \times D^2$  de  $H_j^1$ , véase la Figura 2.1.7.

- (4)  $\partial S$  intersecta cada  $H_j^i \cap \partial M$  ( $i = 0, 1$ ) en arcos no triviales.
- (5)  $S$  intersecta las 0-asas y 1-asas de la descomposición de asas inducida de  $\partial H_j^i - \partial M$  en arcos no triviales disjuntos de las 2-asas  $\partial H_j^i - \partial M$ .
- (6) Cada círculo de  $S \cap \partial H_j^0$  intersecta a  $\partial M$  o alguna 2-asa  $H_k^2$  en a lo más un arco.

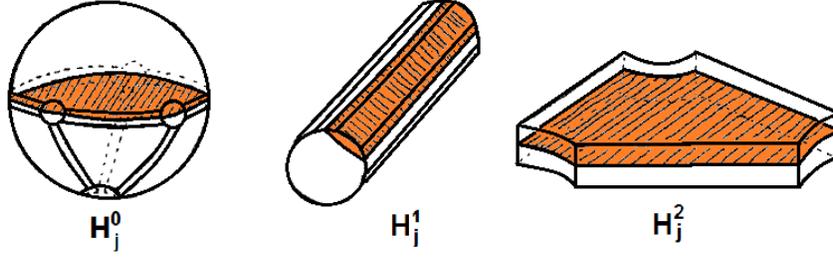


FIGURA 2.1.7

Dos discos de  $S \cap H_j^i$  son del *mismo tipo* si sus fronteras son isotópicas en

$$\partial H_j^i - \left[ \left( \bigcup_{n=1}^m H_n^3 \right) \cup \left( \bigcup_{n=1}^l H_n^2 \cap \partial M \right) \right];$$

así existe un número finito de posibles tipos de discos en  $H_j^i$ .

Definimos la complejidad  $\gamma(S)$  de una forma normal de  $S$ , como el número total de discos en los cuales  $S$  interseca a las 2-*asas*.

**LEMA. [3]** *Sea  $M$  una 3-variedad con frontera incompresible y  $S \subset M$  una superficie orientable, incompresible y  $\partial$ -incompresible. Entonces existe una superficie ramificada incompresible  $B_S \subset M$  la cual lleva a  $S$  con pesos positivos.*

**DEMOSTRACIÓN.** Fijamos una descomposición de asas para  $M$  y pongamos a  $S$  en una forma normal con complejidad mínima sobre todas las formas normales de  $S$ . Sea  $F = \partial N(S)$  donde  $N(S) \approx S \times I$  es una vecindad regular de  $S$ .  $F$  es dos copias de  $S$  y podemos decir que  $F$  está en forma normal de complejidad mínima, con el doble de cantidad de tipos de discos que  $S$ .

Construiremos una vecindad regular fibrada  $\hat{N}_S$  de una superficie ramificada como sigue. Dados dos discos adyacentes  $E_0$  y  $E_1$  de  $F \cap H_j^i$  ( $i = 0, 1, 2$ ) del mismo tipo-disco, la 3-bola que existe entre ellos en  $H_j^i$  puede estar dada como una estructura producto  $E \times I$  con  $E \times 0 = E_0$ ,  $E \times 1 = E_1$  y  $\partial E \times I \subset \partial H_j^i$ . Podemos elegir estas estructuras producto consistentemente, de manera que dos adyacentes  $E \times I$  se intersectan en una unión de fibras de cualquiera de las dos estructuras producto. Si la 3-bola está contenida en  $N(S)$ , podemos asumir que las fibras son las fibras de la estructura producto de  $N(S)$ . Sea  $\hat{N}_S$  la unión de estas bolas fibradas sobre todos los pares de tipos-discos adyacentes, claramente  $\hat{N}_S$  satisface  $\partial_h \hat{N}_S \subset F$ . Sea  $\hat{B}_S$  la superficie ramificada de  $\hat{N}_S$ .

Si existe algún disco de contacto para  $\hat{B}_S$ , entonces existe un disco de contacto  $G$  en  $F$  (es decir,  $\partial G \subset \partial_v \hat{N}_S$  donde tiene una vecindad  $U$  de  $\partial G$  en  $G$  tal que  $(U - \partial G) \subset \text{int}(\hat{N}_S)$ ).  $G$  tiene complejidad mínima sobre todos los discos  $E$  en forma normal con  $\partial E = \partial G$ .  $G$  llega a ser un disco de contacto en  $\hat{B}_S$  si  $\partial G$  es empujado al  $\text{int}(\partial_v \hat{N}_S)$ . Después de una isotopía en  $F$  a lo largo de las fibras en  $\hat{N}_S$  tal que  $F \subset \text{int}(\hat{N}_S)$ , empujamos  $G$  a un disco de contacto para  $\hat{B}_S$ , entonces eliminamos todas las fibras de  $\hat{N}_S - F$  las cuales intersectan a  $G$ . Este proceso elimina un disco de contacto para  $\hat{B}_S$  y el resultado es una superficie ramificada que lleva a  $S$  con pesos positivos. Eliminamos todos los discos de contacto de la misma forma. Si existe algún semi-disco de contacto se elimina con el disco de contacto doble respectivo;

así eliminamos todos los semi-discos de contacto. Luego eliminamos algunas fibras de  $\hat{N}_S - F$  para que los puntos de ramificación sean genéricos. Denotaremos la superficie ramificada por  $B_S$  y la vecindad regular fibrada por  $N_S$ .

Probaremos que  $B_S$  es incompresible.

Las condiciones (i) y (ii) de incompresibilidad se siguen directamente de la construcción de  $B_S$ . Veamos que  $B_S$  satisface la condición (iii), supongamos que  $D \subset M - \overset{\circ}{N}$  es un monógono, es decir,  $\partial D = D \cap N = \alpha \cup \beta$  donde  $\beta \subset \partial_h N_S$  y  $\alpha \subset \partial_v N_S$  es una fibra. Existen dos casos, dependiendo si la componente  $A$  de  $\partial_v N_S$  que contiene  $\alpha$  es un anillo o un rectángulo.

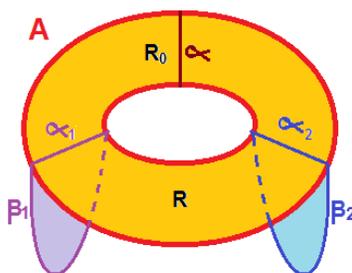


FIGURA 2.1.8

Supongamos que  $A$  es un anillo. Sean  $D_1$  y  $D_2$  dos copias paralelas del monógono  $D$  en lados opuestos de  $D$  con  $\partial D_i = \alpha_i \cup \beta_i$ . Los arcos  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  dividen a  $A$  en dos rectángulos  $R$  y  $R_0$ , donde  $R_0$  contiene  $\alpha$ , véase la Figura 2.1.8. Entonces  $E = R \cup D_1 \cup D_2$  es un disco con  $E \cap F = \partial E$ . Dado que  $F$  es incompresible existe un disco  $E' \subset F$  con  $\partial E' = \partial E$ . El disco  $E'$  no contiene  $\beta$ , de lo contrario existiría un disco de contacto con frontera en  $A$ . La 2-esfera  $E \cup E'$  es frontera de una bola  $C$ , dado que  $M$  es irreducible, luego  $C$  no contiene a  $D$ , pues de lo contrario una componente de  $F$  estaría contenida en la 3-bola. Véase la Figura 2.1.9.

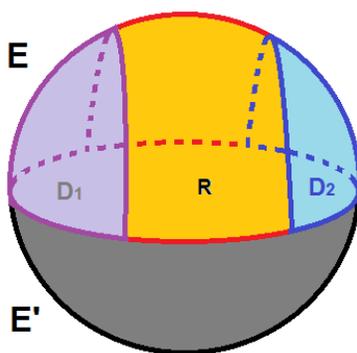


FIGURA 2.1.9

Por una isotopía movemos  $D_1 \subset \partial C$  hacia  $D_2 \subset \partial C$  e identificamos  $D_1$  y  $D_2$ , así obtenemos un toro sólido  $T$  con  $\partial T = A \cup A'$  donde  $A'$  es un anillo en  $F$ . Aplicando una isotopía de  $A' \subset F$  hacia  $A$ , reducimos el número de intersecciones de  $F$  con

las 2-asas, así tenemos una forma normal con complejidad más pequeña, lo cual es una contradicción. La demostración es similar si  $A$  es un rectángulo.  $\square$

**COROLARIO. [3]** *Sea  $M$  una 3-variedad compacta, orientable, irreducible con frontera incompresible tal que contiene una superficie orientable, incompresible. Entonces existe un número finito de superficies ramificadas  $B_1, \dots, B_n$  tal que (a) cada superficie llevada con pesos positivos por uno de los  $B_i$ 's es incompresible,  $\partial$ -incompresible y (b) cada superficie orientable, incompresible,  $\partial$ -incompresible en  $M$  es isotópica a una superficie llevada por uno de los  $B_i$ 's con pesos positivos.*

**DEMOSTRACIÓN.** Dada cualquier  $S \subset M$  superficie incompresible, orientable y  $\partial$ -incompresible, podemos construir por el lema anterior una superficie ramificada incompresible  $B_S \subset M$  la cual lleva a  $S$  con pesos positivos. Por el Teorema anterior, cada superficie llevada por  $S$  con pesos positivos es incompresible y  $\partial$ -incompresible.

Probaremos que existe un número finito de  $B_i$ 's.

Al construir  $\hat{B}_S$  desde  $S$ , cada tipo de disco se produce como máximo una vez en  $\hat{B}_S$  y además  $\hat{B}_S$  está completamente determinado por los tipos de discos. Dado que existen solo un numero finito de tipos de discos, entonces existen solo un numero finito de posibilidades para  $\hat{B}_S$  y  $\hat{N}_S$ .  $N_S$  se obtiene de  $\hat{N}_S$  mediante el corte de discos (y semi-discos) de contacto de complejidad mínima. En cada componente de  $\partial_v \hat{N}_S$  cuyo núcleo es frontera de un disco (semi-disco) de contacto, solo existe un número finito de discos (semi-discos) de contacto que tienen complejidad mínima. Por lo tanto, existe solo un número finito de posibilidades para  $B_S$ .  $\square$

### 2.2. UNA CANTIDAD FINITA DE PENDIENTES EN $\partial E(K)$

Sea  $M$  una 3-variedad compacta, orientable cuya frontera  $\partial M$  consiste de un solo toro  $T$ . Una *pendiente* en  $T$  es una clase de isotopía de curvas esenciales cerradas, simples, no orientadas en  $T$ . Existe una biyección entre el conjunto de pendientes y  $\mathbb{Q} \cup \frac{1}{0}$ .

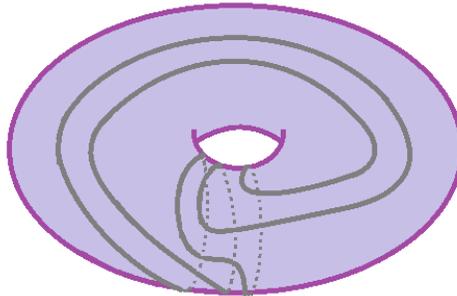


FIGURA 2.2.1. Pendiente  $\frac{-3}{2}$

A. Hatcher en el artículo [4] utilizó las superficies ramificadas para demostrar el siguiente Teorema.

TEOREMA. [4] *Sea  $M$  una 3-variedad compacta, orientable cuya frontera consiste de un toro  $T$ , entonces existe una cantidad finita de pendientes realizadas por curvas frontera de superficies incompresibles,  $\partial$ -incompresibles de  $M$ .*

Para la demostración del Teorema se ocupan los siguientes lemas.

LEMA. [4] *Sea  $M$  una 3-variedad, compacta, orientable cuya frontera consiste de  $n$ -toros  $T_1, \dots, T_n$  y  $B \subset M$  una superficie ramificada incompresible. Entonces existe una orientación  $w$  de  $\partial B$  tal que para cada superficie  $S$  llevada por  $B$  con pesos positivos, los círculos  $\partial S \cap T_i$  con las orientaciones inducidas por  $w$ , son homólogos en  $T_i$ .*

DEMOSTRACIÓN. Elegimos una superficie  $S$  llevada por  $B$  con pesos positivos. Podemos construir una vecindad regular fibrada  $N(\partial S)$  de  $\partial S$  en  $\partial M$ , a partir de una vecindad regular fibrada  $N(\partial B)$  de  $\partial B$  en  $\partial M$  al eliminar ciertos anillos y rectángulos fibrados. Invirtiendo este proceso, podemos construir  $N(\partial B)$  a partir  $N(\partial S)$  al pegar anillos y rectángulos fibrados.

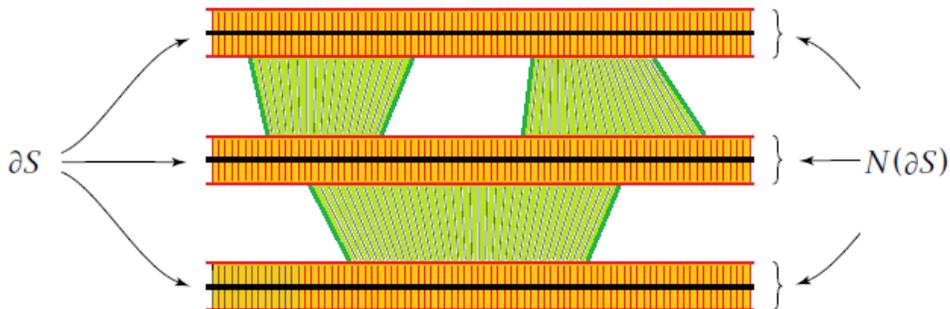


FIGURA 2.2.2

Ninguna fibra de un rectángulo pegado puede unir una componente de  $N(\partial S)$  consigo misma. Esto implica en particular que todas las regiones complementarias de  $N(\partial B)$  en cada  $T_i$  son rectángulos o anillos. Si elegimos orientaciones paralelas para todos los círculos de  $\partial S \cap T_i$ , esto determina una orientación  $w_i$  para  $\partial B \cap T_i$  la cual induce la orientación de  $\partial S \cap T_i$ . Una orientación para  $T_i$ , nos da una orientación para todas las fibras de  $N(\partial B \cap T_i)$ .

Podemos elegir una curva simple cerrada, orientada  $\gamma_i$  en  $T_i$  que intersecta a  $N(\partial B \cap T_i)$  en una unión de fibras, tales que la orientación de  $\gamma_i$  concuerda con la orientación de las fibras. Para ello, iniciamos con cualquier fibra de  $N(\partial B \cap T_i)$ , continuando a través de un anillo o rectángulo complementario a otra fibra de  $N(\partial B \cap T_i)$  en el lado opuesto de este anillo o rectángulo y así sucesivamente. Eventualmente la

curva construida debe acercarse o bien venir arbitrariamente y cerrarse, en cuyo caso podemos reelegir una parte de la curva en uno de los anillos o rectángulos complementarios y acercarlo.

La declaración del lema ahora se sigue de la existencia de  $\gamma_i$ , dado que en una superficie arbitraria  $S$  llevada por  $B$ , si orientamos  $\partial S \cap T_i$  via  $w_i$ , entonces todos los puntos de  $\gamma_i \cap (\partial S \cap T_i)$  tienen número de intersección con el mismo signo.  $\square$

LEMA. [4] *Sea  $M$  una 3-variedad compacta, orientable cuya frontera consiste de  $n$ -toros  $T_1, T_2, \dots, T_n$  y  $B \subset M$  una superficie ramificada incompresible. Si  $S_1$  y  $S_2$  son superficies llevadas por  $B$  con fronteras orientadas como en el lema anterior, entonces el número de intersección algebraica  $\partial S_1 \cdot \partial S_2$  calculada al usar una orientación de  $\partial M$  como la frontera de  $M$ , es cero.*

DEMOSTRACIÓN. Sea  $N(B)$  una vecindad regular fibrada de  $B$ . Perturbamos  $S_1$  y  $S_2$  ligeramente para ser transversales y todavía transversales a las fibras de  $N(B)$ . Existen dos posibles configuraciones para las orientaciones de  $\partial S_1$  y  $\partial S_2$  en los extremos de un arco  $\alpha$  de  $S_1 \cap S_2$ , véase la Figura 2.2.3, donde las fibras de  $N(B)$  son verticales:

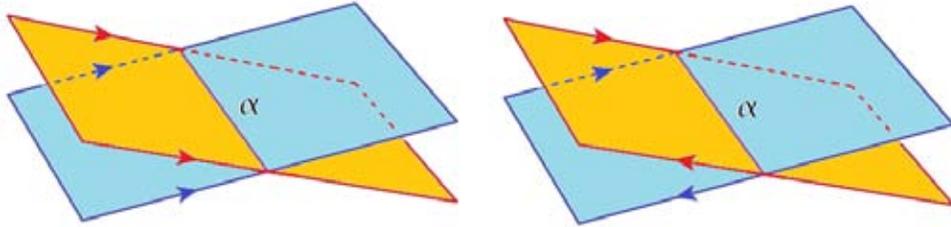


FIGURA 2.2.3

En ambos casos el número de intersección  $\pm 1$  en los dos extremos de  $\alpha$  tiene signo opuesto. Por lo tanto todos los puntos de  $\partial S_1 \cap \partial S_2$  se cancelan algebraicamente en pares.  $\square$

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA [4]. Por la sección anterior, sabemos que existe un número finito de superficies ramificadas  $B_1, \dots, B_n \subset M$ , donde cada superficie incompresible,  $\partial$ -incompresible de  $M$  es llevada por alguna de ellas. Por el lema anterior, para cualesquiera dos superficies incompresibles,  $\partial$ -incompresibles  $S_1$  y  $S_2$  llevadas por  $B_i$ , los círculos  $\partial S_1 \cap T$  y  $\partial S_2 \cap T$  tienen la misma pendiente. Entonces, para cada  $B_i$  existe una única pendiente realizada por las superficies incompresibles,  $\partial$ -incompresibles que lleva; por lo tanto existe solo un número finito de este tipo de pendientes en  $T$ .  $\square$

**2.3. NUDOS QUE ADMITEN EXACTAMENTE  $N$  SUPERFICIES ESENCIALES CERRADAS**

DEFINICIÓN. Sea  $K \subset S^3$  un nudo satélite y  $V$  un toro sólido compañero de  $K$ . El *nudo torcido*  $K_m$  con  $m \in \mathbb{N}$ , es el nudo que se obtiene cortando a  $V$  y volviéndolo a pegar después de darle  $m$  giros completos. A esta operación del toro sólido compañero le llamamos *torcedura*, véase la Figura 2.3.1.

OBSERVACIONES. (i)  $V - K_m$  es homeomorfo  $V - K$ , así existe una biyección entre las superficies incompresibles en ambos espacios. (ii) Si  $K$  es un nudo satélite tal que algún meridiano del toro sólido compañero interseca al nudo en solo un punto, entonces cualquier nudo torcido de  $K$  es el mismo  $K$ .

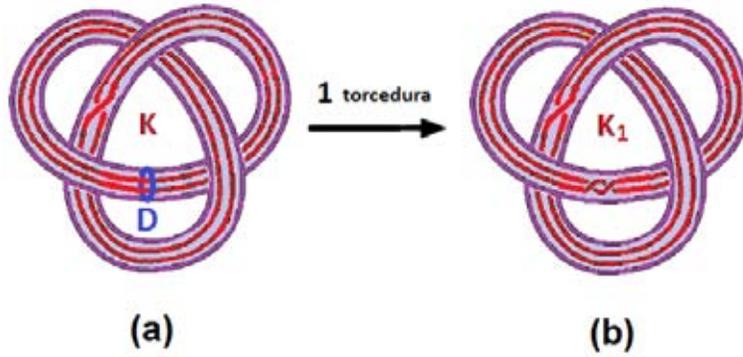


FIGURA 2.3.1. (a)  $K$  nudo cable del trébol (b)  $K_1$  nudo torcido de  $K$

LEMA 2.1. Sea  $V$  un toro sólido, entonces al aplicar  $m$  torceduras a  $V$  una pendiente  $C$  de  $\partial V$  distinta  $\frac{1}{0}$  cambia a la pendiente  $C + m$ .

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que la pendiente  $C$  es igual a  $\frac{p}{q}$ , donde  $p$  es el mínimo número de veces que una longitud de  $\partial V$  puede intersectar a  $C$  y  $q$  es el mínimo número de veces que un meridiano de  $\partial V$  puede intersectar a  $C$  con  $|q| \geq 1$  (porque  $C$  es distinta del meridiano). En un meridiano que intersecta  $q$ -veces a  $C$ , aplicamos  $m$ -torceduras, así  $C$  cambia a la pendiente  $C'$  la cual gira  $m$  veces más en dirección del meridiano con las  $q$  intersecciones. Por lo tanto, en el toro torcido,  $p + mq$  es el mínimo número de veces que una longitud puede intersectar a  $C'$  y  $q$  se conserva como el mínimo número de veces que un meridiano puede intersectar a  $C'$ ; así la pendiente  $C'$  es  $\frac{p+mq}{q}$  que es igual a  $\frac{p}{q} + m$ .

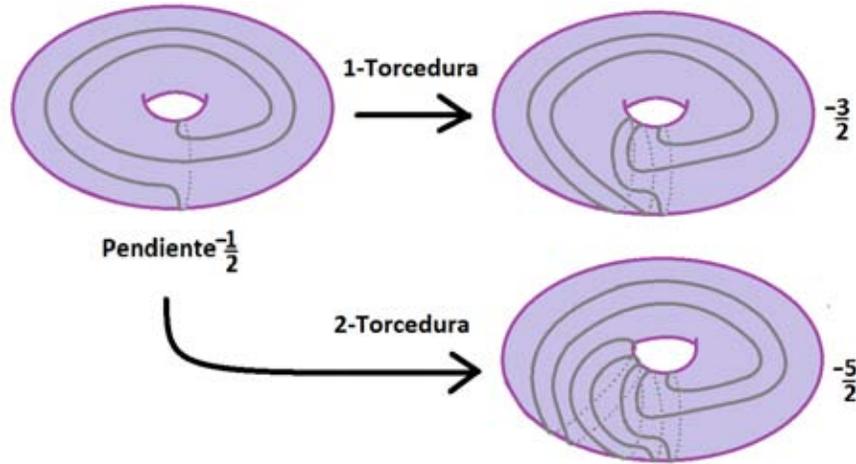


FIGURA 2.3.2

□

LEMA 2.2. *Sea  $M$  una 3-variedad irreducible, orientable,  $T \subset M$  un toro incompresible y  $F \subset M$  una superficie incompresible cerrada, orientable. Entonces existe una isotopía de  $F$  tal que en la variedad obtenida cortando  $M$  por  $T$ , las componentes de  $F - T$ , son incompresibles y  $\partial$ -incompresibles.*

DEMOSTRACIÓN. Sean  $M_1, M_2$  las componentes que quedan al cortar  $M$  por  $T$ . Por una isotopía en  $F$ , podemos suponer que las intersecciones  $F \cap M_i$  (con  $i = 1, 2$ ) son transversales y que son el mínimo número de intersecciones.

Probaremos que las componentes de  $M_i \cap F$  son incompresibles en  $M_i$ .

Supongamos que existe un disco de compresión  $D$  en alguna componente. Por ser  $F$  incompresible,  $D$  bordea un disco en  $F$ , entonces podemos quitar la curva de intersección  $\partial D$  lo cual es una contradicción (porque el número de curvas en  $F \cap \partial M_i$  es mínimo).

Probaremos que  $F \cap \partial M_i$  es una colección de curvas cerradas, esenciales en  $F$  y  $\partial M_i$ .

Supongamos que existen curvas triviales en  $F \cap \partial M_i$ , de estas curvas tomamos una de más adentro, denotada por  $C_1$ . La curva  $C_1$  es trivial en  $F$  si y solo si  $C_1$  es trivial en  $\partial M_i$ , pues de lo contrario  $T$  o  $F$  sería compresible. De esta manera,  $C_1$  bordea discos en  $F$  y en  $\partial M_i$ , como  $M$  es una variedad irreducible, los discos bordean una bola. Entonces, por una isotopía en  $F$  eliminamos esta curva  $C_1$  de  $\partial M_i$ , lo cual es una contradicción (porque el número de curvas en  $F \cap \partial M_i$  es mínimo).

Probaremos que por una isotopía podemos hacer que las componentes  $M_i \cap F$  sean  $\partial$ -incompresibles en  $M_i$ .

Supongamos que existe una componente  $F_1$  en  $M_i \cap F$  la cual es  $\partial$ -compresible y sea  $D \subset M_i$  el disco  $\partial$ -compresión (donde  $\partial D \cap F_1 = \alpha$  es un arco con  $\partial \alpha = \{x_1, x_2\}$  y  $\beta = (\partial D - \alpha) \subset \partial M_i$ ). Tenemos dos casos:

Caso (i). Si  $x_1$  pertenece a una pendiente  $P_1$  y  $x_2$  a una pendiente  $P_2$  con  $P_1 \neq P_2$ ; como las pendientes son de la misma superficie  $F_1$ , entonces  $P_1$  y  $P_2$  son paralelas. Por una isotopía en  $F$ , podemos empujar a  $F$  hasta quitar el disco  $D$  y las dos

pendientes se transforman en una curva trivial de  $\partial M_i$  (véase la Figura 2.3.3). Lo cual es una contradicción, porque el número de curvas en  $F \cap \partial M_i$  es mínimo.

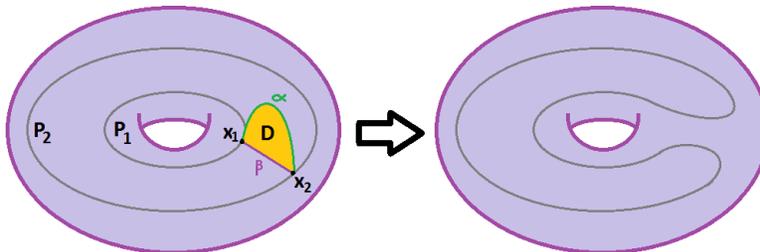


FIGURA 2.3.3

Caso (ii) Si  $x_1$  y  $x_2$  pertenecen a una pendiente  $P$ , estos puntos dividen a  $P$  en dos arcos  $A_1$  y  $A_2$ . De aquí tenemos dos subcasos: 1) Si una de las curvas  $A_1 \cup \beta$  o  $A_2 \cup \beta$  es borde de un disco  $D'$  en  $\partial M_i$ , supongamos que es  $A_1 \cup \beta$  (el otro caso es análogo). Entonces existe un disco  $D'' = D \cup D' \subset M_i$  con  $\partial D'' = (\alpha \cup A_1) \subset F_1$ . Por ser  $F$  incompresible,  $\partial D''$  bordea un disco  $D'''$  en  $F$ . El disco  $D'''$  está contenido en  $M_i$ , pues de lo contrario la intersección de  $D'''$  con  $\partial M_i$  serian curvas cerradas esenciales en  $F$ , lo cual es una contradicción. Por lo tanto,  $D'''$  está en  $F_1$ , así  $D$  no es un disco  $\partial$ -compresión lo cual es una contradicción (obsérvese la Figura 2.3.4).

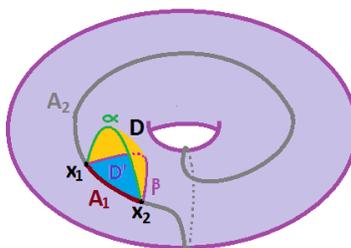


FIGURA 2.3.4

2) Si las curvas  $A_1 \cup \beta$  y  $A_2 \cup \beta$  son no triviales en  $\partial M_i$ , ver Figura 2.3.5. Por ser  $F$  orientable, también  $F_1$  es orientable e induce una orientación en la pendiente, ver Figura 2.3.6(a).

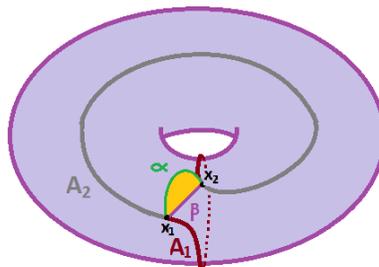


FIGURA 2.3.5

Como  $A_1 \cup \beta$  y  $A_2 \cup \beta$  son no triviales, entonces la dirección de la orientación que pasa en los extremos de  $\alpha$  es la misma (véase la Figura 2.3.6(a)), pero es imposible que el arco  $\alpha$  una la pendiente consigo misma de esa manera. Porque si consideramos una vecindad de  $\alpha$  en  $F_1$ , la dirección de la orientación inducida en los extremos de  $\alpha$  no es la misma (véase la Figura 2.3.6(b)), contradicción.

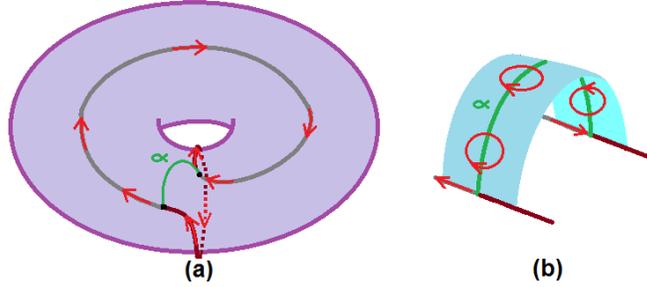


FIGURA 2.3.6

□

**LEMA 2.3. (Lema de Hatcher Generalizado)** Sea  $M$  una 3-variedad irreducible, compacta, orientable y  $T$  un toro en  $\partial M$ . Entonces existe una cantidad finita de pendientes en  $T$ , realizadas por curvas fronteras de superficies orientables, incompresibles,  $\partial$ -incompresibles en  $M$  que solamente intersectan a  $\partial M$  en  $T$ .

**DEMOSTRACIÓN.** Sea  $F_1$  una superficie orientable, incompresible,  $\partial$ -incompresible en  $M$  tal que  $(F_1 \cap \partial M) \subset T$ . Por el lema de la sección 2.1, existe una superficie ramificada  $B_1$  propiamente encajada en  $M$  con  $N$  una vecindad regular fibrada, tal que  $F_1$  es isotópica a una superficie llevada por  $B_1$  con pesos positivos. Dado que  $F_1$  intersecta a cada fibra de  $N$ , podemos mover  $B_1$  tal que  $(B_1 \cap \partial M) \subset T$ . Sea  $F_2$  una superficie orientable llevada por  $B_1$  con pesos positivos, por los lemas de la sección 2.2, las pendientes de las curvas fronteras de  $F_1$  con  $T$  son las mismas pendientes con las curvas fronteras de  $F_2$ . Por el corolario de la sección 2.1, tenemos un número finito de superficies ramificadas  $B_i$ 's tales que  $(B_i \cap \partial M) \subset T$ . Por lo tanto, existe una cantidad finita de pendientes en  $T$  realizadas por curvas fronteras de superficies orientables, incompresibles,  $\partial$ -incompresibles que solo intersectan  $\partial M$  en  $T$ . □

**PROPOSICIÓN 2.1.** Sea  $K$  un nudo satélite en  $S^3$  y  $T$  la frontera del toro sólido compañero de  $K$ . Entonces existe  $n$  tal que para todo  $m \geq n$  las superficies esenciales cerradas en el exterior del nudo torcido  $K_m$  de  $K$  que intersectan a  $T$  en pendientes distintas al meridiano, son isotópicas a superficies que no intersectan a  $T$ .

**DEMOSTRACIÓN.** Sea  $F$  una superficie esencial cerrada en el exterior de un nudo torcido  $K'$ , por el lema 2.2 existe una isotopía en  $F$  tal que al cortar  $F$  con el toro compañero de  $K'$  las piezas que quedan en ambos lados son incompresibles y  $\partial$ -incompresibles. Al aplicar el lema 2.3 en el exterior e interior del toro compañero de  $K$ , existe una cantidad finita de pendientes  $\{P_1, P_2, \dots, P_l\}$  y  $\{P'_1, P'_2, \dots, P'_l\}$  respectivamente, realizadas por curvas fronteras de superficies incompresibles,  $\partial$ -incompresibles.

Sea  $n = 2 \lceil \max(|P_i|, |P'_j|) \rceil + 1$  para todo  $i, j$  con  $i \in \{1, \dots, l\}$  y  $j \in \{1, \dots, l'\}$ , entonces los nudos torcidos  $K_m$  de  $K$  con  $m \geq n$  tienen pendientes  $\{P_1, P_2, \dots, P_l\}$  en su exterior del toro compañero y  $\{P'_1 + m, P'_2 + m, \dots, P'_l + m\}$  en el interior del toro compañero (esto se sigue del lema 2.1, dado que las pendientes no son meridianos). Dado que  $\frac{m}{2} > P_i$  y  $\frac{m}{2} > -P'_j$  para todo  $i, j$ , entonces se cumple que  $P'_j + m > P_i$  para todo  $i, j$ , así las pendientes del exterior del toro compañero son distintas a las pendientes del interior, por lo tanto no se pueden pegar superficies en ambos lados del toro y construir superficies esenciales cerradas.  $\square$

LEMA 2.4. *Sea  $K$  un nudo cable  $(p, q)$  de un nudo en  $S^3$ ,  $V$  el toro sólido compañero y  $F \subset S^3 - K$  una superficie esencial cerrada. Si  $F_1$  es una componente en  $F \cap (V - K)$ , entonces existe una isotopía de  $F_1$  tal que  $F_1 \cap \partial V$  es vacío o una colección de curvas de pendiente  $\frac{p}{q}$ .*

DEMOSTRACIÓN. Por el lema 2.2,  $F$  es isotópica a una superficie tal que al cortar por  $\partial V$  las piezas que quedan en ambos lados son incompresibles y  $\partial$ -incompresibles. Así  $F_1$  es incompresible y  $\partial$ -incompresible. Representaremos por  $K_1$  el nudo toroidal  $(p, q)$  contenido en  $V$ , el nudo  $K_1$  también se puede construir sobre  $\partial V$  y lo denotaremos por  $K'_1$ , así existe un anillo  $A$  en  $V$  cuyas fronteras son  $K_1$  y  $K'_1$ ; véase la Figura 2.3.7.

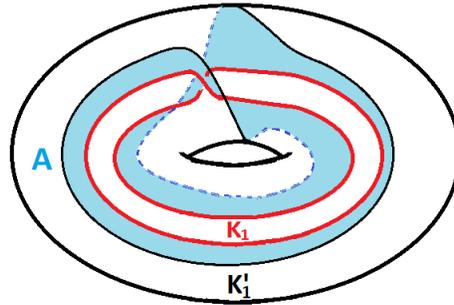


FIGURA 2.3.7

Las intersecciones de  $F_1$  con el anillo  $A$  son curvas triviales, arcos en la frontera  $K'_1$  o curvas paralelas a  $K_1 = (p, q)$ , véase la Figura 2.3.8.

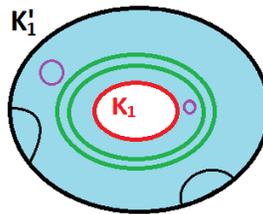


FIGURA 2.3.8

De las curvas triviales del anillo  $A$ , tomamos una curva de más adentro que bordea un disco en  $A$ , por ser  $F_1$  incompresible esta curva también bordea un disco en  $F_1$ ,

entonces por una isotopía en  $F_1$  quitamos la curva trivial de  $A$  (véase la Figura 2.3.9). Así sucesivamente quitamos todas las curvas triviales en  $A$ .

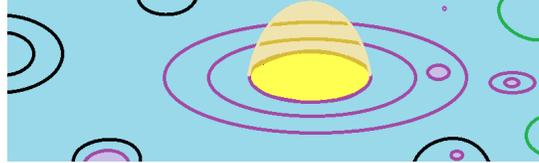


FIGURA 2.3.9

De los arcos de  $A \cap F_1$ , tomamos un arco de más afuera, este arco junto con arco de  $\partial A$  bordea un disco  $D'$  (véase a Figura 2.3.10). Como  $F_1$  es  $\partial$ -incompresible, el disco  $D'$  no es de  $\partial$ -compresión, es decir existe un disco  $D''$  con  $\partial D'' = \alpha \cup \beta$  donde  $\alpha \subset \partial D'$  y  $\beta \subset (F \cap \partial V)$ . De la unión de  $D'$  y  $D''$  tenemos un disco  $D'''$  en el toro sólido compañero  $V$  (dado que  $D'$  y  $D''$  no intersectan al nudo  $K$ ). Entonces, por la incompresibilidad de  $\partial V$ ,  $\partial D'''$  es borde de un disco en  $\partial V$ . Por una isotopía en  $F_1$  quitamos el arco de  $A$  (véase la Figura 2.3.10). Así sucesivamente quitamos todos los arcos en  $A$ , por lo tanto  $F_1 \cap \partial V = \emptyset$  o son pendientes paralelas a  $(p, q)$ .

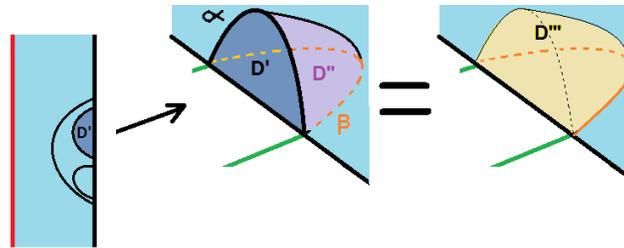


FIGURA 2.3.10

□

LEMA 2.5. *Sea  $K \subset S^3$  un nudo cable  $(p, 2)$  y  $V$  el toro sólido compañero, entonces la única superficie esencial cerrada en el interior de  $V$  es un toro paralelo a  $\partial V$ .*

DEMOSTRACIÓN. Cortamos al toro sólido  $V$  por un disco meridiano  $D$ . Como  $K$  es de la forma  $(p, 2)$ , obtenemos un cilindro  $D - \{x_1, x_2\} \times I$ , que también lo podemos ver como un ovillo trivial de dos cuerdas (véase la Figura 2.3.11). Existe un disco de compresión  $D'$  en el cilindro que separa ambas cuerdas triviales (como se observa en la Figura 2.3.11), tal que cuando identificamos las tapas del cilindro también identificamos los extremos del cuadrado, quedándose una banda de Möbius. Entonces la intersección de esta banda con el disco meridiano es solo un arco  $A$ .

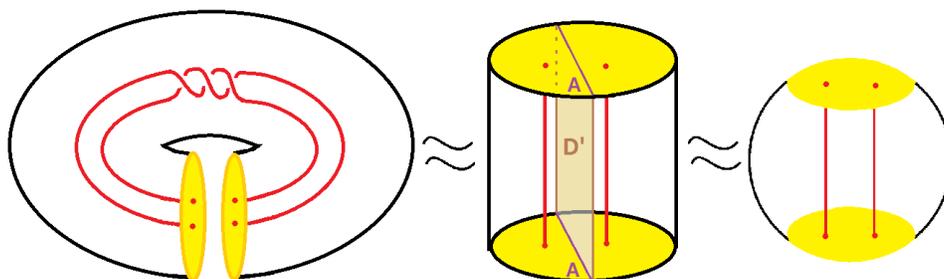


FIGURA 2.3.11

Sea  $F$  una superficie esencial cerrada, conexa en  $\mathring{V} - K$ . La superficie  $F$  no puede estar en el interior del ovillo pues un ovillo trivial no contiene superficies esenciales cerradas, entonces la superficie  $F$  intersecta las tapas del cilindro. Por una isotopía hacemos que la superficie  $F$  intersecte a las tapas del cilindro en curvas esenciales, indicadas en la Figura 2.3.12(a). También, por una isotopía en  $F$  minimizamos el número de intersecciones de las curvas con el arco  $A$ , véase la Figura 2.3.12(b). Observe que las curvas de tipo  $C_2$  no intersectan al arco  $A$ , pero las curvas de tipo  $C_1$  intersectan en 2 puntos al arco  $A$ .

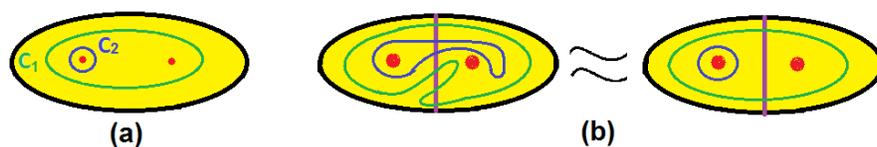


FIGURA 2.3.12

La superficie  $F$  puede intersectar al disco  $D'$  en curvas o arcos, indicadas en la Figura 2.3.13(a). Por una isotopía en  $F$  podemos eliminar las curvas. Para eliminar los arcos cuyos extremos están en la misma tapa, tomamos un arco de más afuera en  $D'$  de modo que junto con un arco en  $A$  borde un disco  $D''$  en  $D'$ . Entonces por una isotopía de  $F$ , podemos empujar a  $F$  en la dirección del disco  $D''$  para eliminar el arco de intersección de  $D'$  (así las curvas en la tapa del cilindro se transforman en curvas de tipo  $C_2$  o triviales, donde estas últimas las podemos eliminar de la tapa). Véase la figura 2.3.13(b). De esta manera, los arcos cuyos extremos están en distintas tapas son las intersecciones que nos quedan en  $D'$ , a estos arcos los llamaremos arcos verticales.

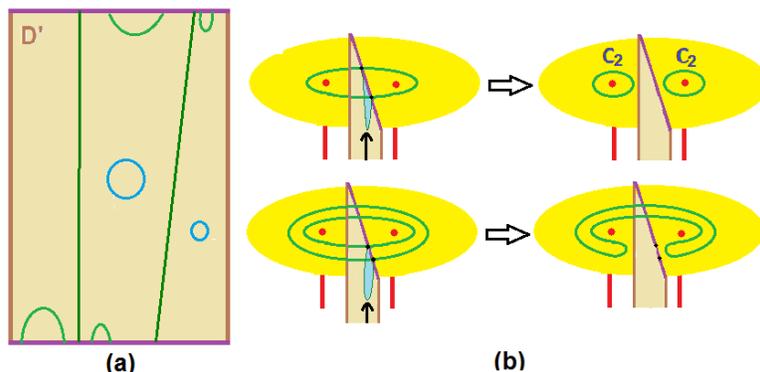


FIGURA 2.3.13

Paso I. Si existen curvas de tipo  $C_1$ , los arcos verticales unen curvas de tipo  $C_1$  en ambas tapas del cilindro que en la variedad original  $V - K$  están identificadas (ver la Figura 2.3.14(a)). Tomemos una curva  $C_1$  en la tapa de arriba de más afuera, la intersección de  $C_1$  con  $A$ , son puntos, los cuales son extremos de arcos verticales en  $D'$  que dividen a  $C_1$  en dos arcos  $C'_1$  y  $C''_1$  (obsérvese la Figura 2.3.14(b)). Al unir cada arco  $C'_1$  de cada tapa del cilindro con sus arcos verticales, forman una curva cerrada en  $F$  la cual bordea un disco en el ovillo, entonces por la incomprensibilidad de  $F$ , también bordea un disco  $D_1$  en  $F$ . Hacemos lo mismo con el arco  $C''_1$  en cada tapa del cilindro, nuevamente tenemos un disco  $D_2$  en  $F$ , obsérvese la Figura 2.3.14(c). Ahora,  $D_1 \cup D_2$  forma un anillo y al identificar las tapas del cilindro para obtener la variedad original  $V - K$ ,  $F$  por ser conexo es un toro paralelo al toro compañero.

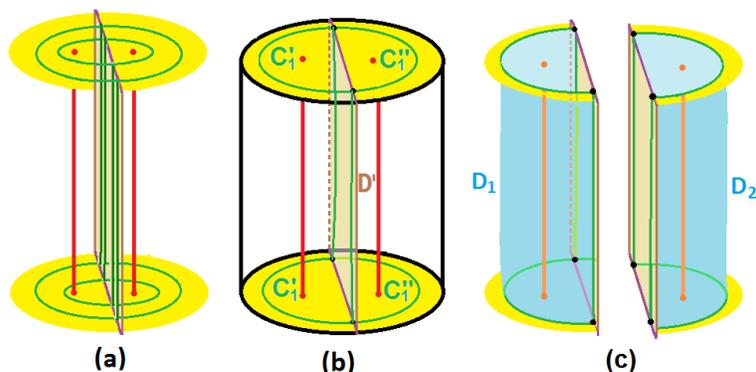


FIGURA 2.3.14

Paso II. Si existen curvas de tipo  $C_2$ , no existen curvas de tipo  $C_1$  (porque suponemos que la superficie  $F$  es conexa), así podemos suponer que las piezas que nos quedan al cortar  $F$  por  $D$  no intersectan a  $D'$  (véase la Figura 2.3.15(a)). Como  $D'$  divide al cilindro en dos componentes, las piezas de las curvas  $C_2$  están contenidas en

alguna de estas componentes. Cada componente es un ovrillo trivial, entonces las únicas superficies que pueden ser las piezas son anillos (véase la Figura 2.3.15(b)). Ahora, al identificar las tapas del cilindro para obtener la variedad original  $V - K$  tenemos que  $F$  es el toro periférico.

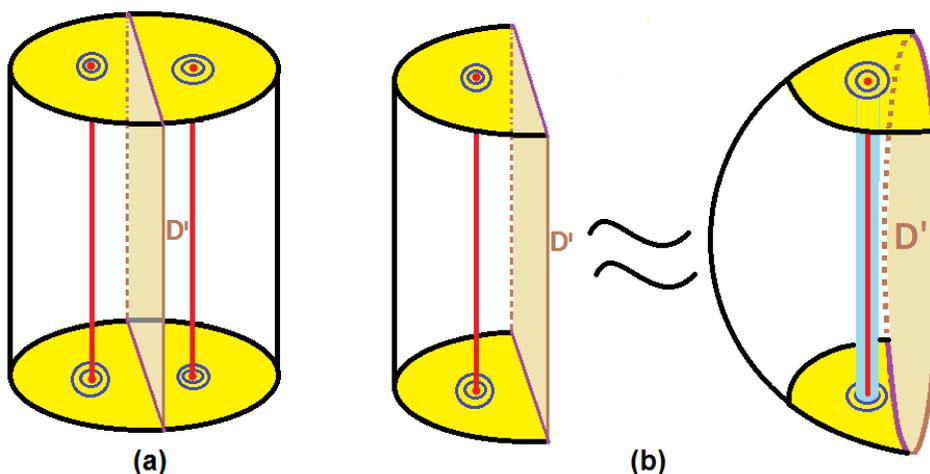


FIGURA 2.3.15

□

**PROPOSICIÓN 2.2.** *Sea  $K$  un nudo en  $S^3$  que admite exactamente  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  superficies esenciales cerradas, entonces existen una infinidad de cables de  $K$  que admiten exactamente  $n + 1$  superficies esenciales cerradas.*

**DEMOSTRACIÓN.** Considerar los cables  $(p, 2)$  de  $K$ , todos son nudos torcidos de un cable  $K'$ . Por el lema 2.4 y la Proposición 2.1, existe  $l \in \mathbb{N}$  tal que las superficies esenciales cerradas en el exterior de un nudo torcido  $K_m$  de  $K'$  con  $m > l$  son isotópicas a superficies que no intersectan al toro compañero de  $K_m$ . Por el lema 2.5, la única superficie esencial cerrada en el interior del toro sólido compañero de  $K_m$  es un toro paralelo al toro compañero. Como el nudo  $K$  admite solo  $n$  superficies esenciales cerradas, entonces el exterior del toro compañero de  $K_m$  admite  $n$  superficies esenciales cerradas y un toro paralelo al toro compañero. Por lo tanto los nudos  $K_m$  admiten exactamente  $n + 1$  superficies esenciales cerradas. □

**COROLARIO 2.1.** *Sea  $K$  un nudo pequeño en  $S^3$ , entonces para cada  $n \in \mathbb{N}$  existe un cable iterado de  $K$  que admite exactamente  $n$  superficies esenciales cerradas.*

**DEMOSTRACIÓN.** Por la Proposición 2.2 existe un cable  $K_1$  de  $K$  que admite solo una superficie esencial cerrada, luego por la misma Proposición existe un cable  $K_2$  de  $K_1$  que admite solo dos superficies esenciales cerradas (véase la Figura 2.3.16). Así sucesivamente, para el nudo  $K_{n-1}$  existe un cable  $K_n$  que admite solo  $n$  superficies esenciales cerradas.

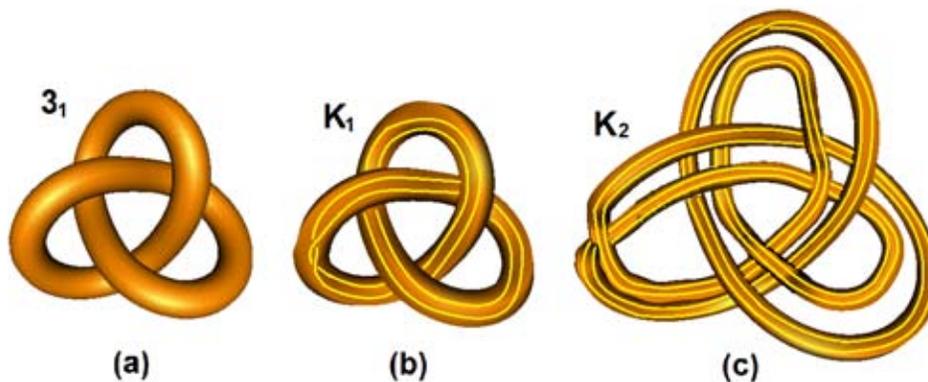


FIGURA 2.3.16. (a) Nudo  $3_1$ , (b)  $K_1$  cable de  $3_1$ , (c)  $K_2$  cable de  $K_1$

□

La siguiente tabla muestra el número de superficies esenciales cerradas de algunos nudos que hemos vistos.

TIPO DE NUDO	$n = \text{No. de Superficies Esenciales Cerradas}$
Toroidales	$n = 0$
2-Puentes	$n = 0$
Montesinos $l \leq 3$	$n = 0$
Ciertos cables iterados de Nudos Pequeños	$n \in \mathbb{N}$
Montesinos $l \geq 4$ con $q_i \geq 3 \forall i$	$n = \infty$

CUADRO 1

## NUDOS CON UNA INFINIDAD DE SUPERFICIES ESENCIALES CERRADAS

Los primeros ejemplos de nudos que admiten una infinidad de superficies esenciales cerradas fueron hallados por H. Lyon [6], quien demostró que existen nudos fibrados con esta propiedad. Posteriormente, U. Oertel [8] demostró que casi todos los nudos de Montesinos de longitud mayor que 3 admiten una infinidad de superficies esenciales cerradas. M. Eudave y M. Neumann [2] tienen ejemplos de nudos 3-puentes que admiten una infinidad de superficies esenciales cerradas las cuales son meridionalmente incompresibles.

### 3.1. TEOREMA PRINCIPAL

En este capítulo probaremos que en muchos casos es posible construir una infinidad de superficies esenciales cerradas a partir de una o dos superficies meridionales, esenciales; lo que generaliza las construcciones anteriores (párrafo anterior) y da como Corolario la existencia de una infinidad de superficies esenciales cerradas para varias familias de nudos.

DEFINICIÓN. Sea  $K$  un nudo en  $S^3$  que admite dos superficies meridionales, disjuntas  $F_1$  y  $F_2$  tales que  $F_1$  tiene un disco de compresión meridional  $D$ . A partir de  $D$  etiquetamos con enteros las intersecciones de  $\overline{F_1} \cup \overline{F_2}$  con  $K$  de acuerdo a sus posiciones a lo largo de  $K$ , la mitad de estos con signos positivos y la otra mitad con signos negativos. Se dice que  $D$  es *centrado* respecto a  $F_2$  si para cada  $n$  los puntos de intersección etiquetados por  $n$  y  $-n$  pertenecen a la misma superficie, de lo contrario  $D$  se llama *no centrado*.

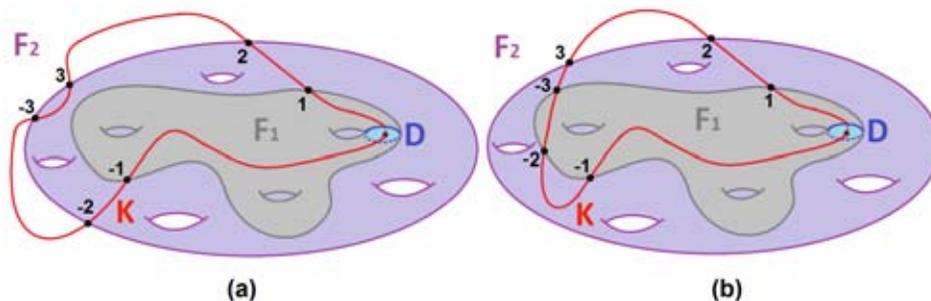


FIGURA 3.1.1. (a) Centrado (b) No centrado

DEFINICIONES. Sea  $K$  un nudo en  $S^3$  y  $F$  una superficie meridional, posiblemente disconexa en el exterior de  $K$ . Un *tubo* es un anillo contenido en una vecindad regular de  $K$  que conecta un par de componentes de la frontera de  $F$ . Observe un tubo en la Figura 3.1.2(a).

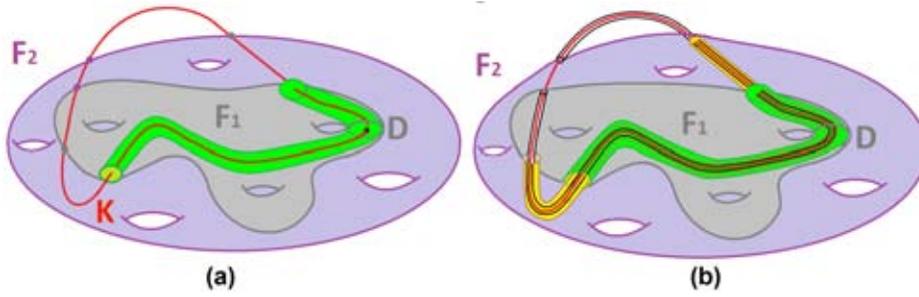


FIGURA 3.1.2

Si  $F$  tiene un disco de compresión meridional  $D$ , el *entubado concéntrico* de  $F$  alrededor de  $D$  se obtiene al añadir a  $F$  tubos concéntricos, cada uno pegado a un par de curvas frontera adyacentes en  $F$  llevado en direcciones opuestas de  $D$ . Después de poner el primer tubo empujas la superficie hacia fuera de  $N(K)$  y así sucesivamente. De esta manera conseguimos una superficie cerrada  $\hat{F}$ . El entubado concéntrico alrededor de  $D$  en la Figura 3.1.1(b) está en la Figura 3.1.2(b).

EJEMPLO. Veamos un entubado concéntrico de una superficie  $F$  disconexa que consta de 2 componentes.

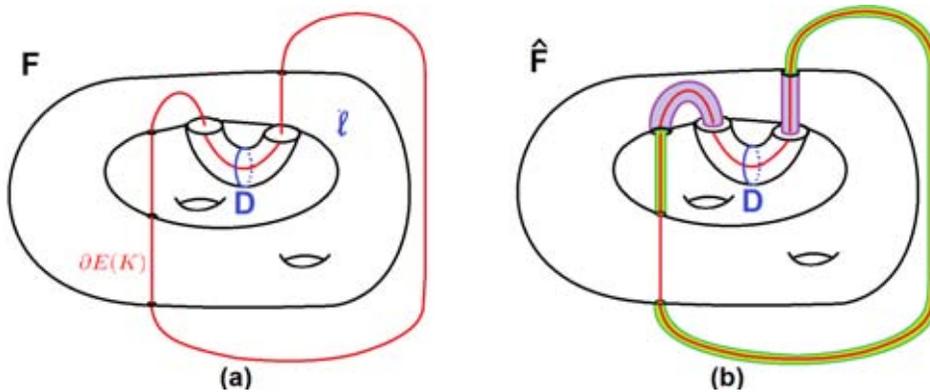


FIGURE 3.1.3. (a) Superficie  $F$  (b) Entubado concéntrico  $\hat{F}$

EJEMPLO. Veamos un entubado concéntrico con tres superficies: Dos copias de una superficie  $F_1$  y una superficie  $F_2$ .

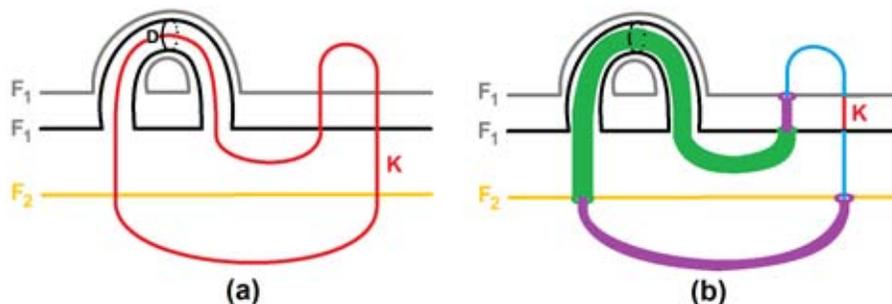


FIGURA 3.1.4. (a) Superficies  $F_1$  y  $F_2$  (b) Entubado concéntrico

DEFINICIÓN. Sea  $K$  un nudo en  $S^3$  y  $F$  una superficie meridional, posiblemente disconexa en el exterior de  $K$  tal que tiene un disco de compresión meridional  $D$ . Representamos al nudo  $K$  con un ovalo, a la intersección de  $K$  con  $D$  con un punto negro y las intersecciones de  $K$  con las componentes de  $\bar{F}$  con puntos de distinto color con cierto orden. A este diagrama le llamamos *diagrama de intersecciones* de  $K$  con  $F$  en  $D$ . Véase el diagrama de intersecciones correspondiente a la Figura 3.1.4 (a) en la siguiente Figura.

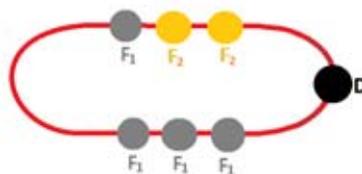


FIGURA 3.1.5

EJEMPLO. Veamos un nudo que admite dos superficies meridionales y el diagrama de intersecciones correspondiente.

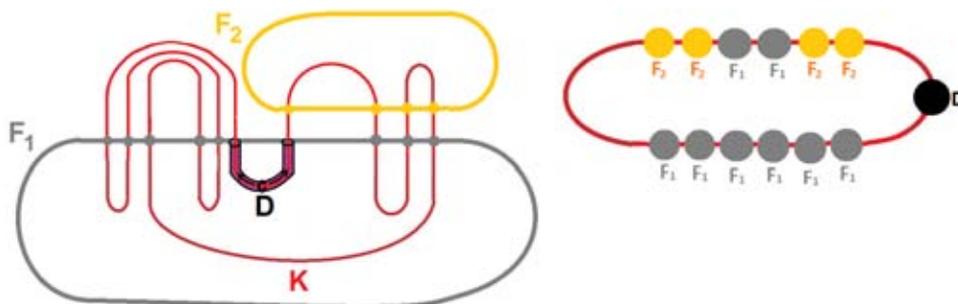


FIGURA 3.1.6

PROPOSICIÓN 3.1. *Sea  $K$  un nudo en  $S^3$  que admite dos superficies meridionales, esenciales, separantes, disjuntas  $F_1$  y  $F_2$ . Supongamos que  $F_1$  tiene un disco de compresión meridional no centrado  $D$  respecto a  $F_2$ . Si  $S$  es la unión disjunta de  $F_2$  con  $n$  copias de  $F_1$ , entonces el entubado concéntrico de  $S$  alrededor de  $D$  es una superficie conexa con  $\chi(\hat{S}) = n\chi(F_1) + \chi(F_2)$ .*

DEMOSTRACIÓN. Dado que  $D$  no es centrado, etiquetamos los puntos de intersección de  $\bar{F}_1 \cup \bar{F}_2$  con  $K$  como  $C_{-k}, \dots, C_{-2}, C_{-1}, C_1, C_2, \dots, C_k$  de acuerdo a su posición desde  $D$ . Así, existe una  $m$  tal que los puntos de intersección  $C_m \in F_1$  y  $C_{-m} \in F_2$  corresponden a diferentes superficies y los puntos con etiquetas  $C_i$  y  $C_{-i}$  para  $i < m$ , corresponden a la misma superficie. Ver la Figura 3.1.7(a).

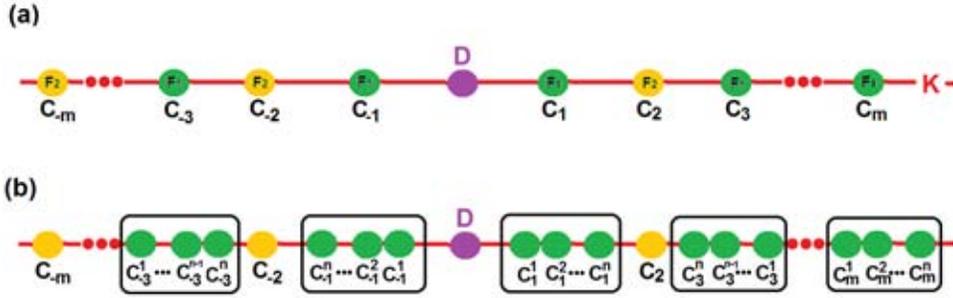


FIGURE 3.1.7.

Cuando tomamos  $n$  copias  $F_1^1, F_1^2, F_1^3, \dots, F_1^n$  de  $F_1$  conseguimos  $n$  copias  $C_i^1, C_i^2, \dots, C_i^n$  de cada punto de intersección  $C_i$  de  $F_1$ . Ver la Figura 3.1.7(b).

En el entubado concéntrico  $\hat{S}$  de  $S = nF_1 \cup F_2$  alrededor de  $D$ , las fronteras de los tubos coincidirán con curvas frontera de  $S$  a la misma distancia de  $D$ . Para  $i < m$ , existe un tubo que conecta  $C_i$  con  $C_{-i}$  cuando  $C_i, C_{-i} \in F_2$  y si  $C_i, C_{-i} \in F_1$ , entonces conectas con un tubo  $C_i^j$  con  $C_{-i}^j$  en  $F_1^j$ . La primera copia de  $C_m$  de  $F_1$  (la cual podemos asumir que es  $C_m^1$ ) coincide con  $C_{-m}$  de  $F_2$ .  $C_m^1$  es seguido por  $C_m^2, \dots, C_m^n$ . Por el lado de  $D$ ,  $C_{-m}$  es seguido por  $p - 1 \geq 0$  puntos en  $F_2$  y luego por  $n$  copias del punto  $C_{-m-p}$  en  $F_1$ . Dado que  $F_1$  es separante, estas copias necesariamente aparecen en el orden  $C_{-m-p}^1, C_{-m-p}^2, \dots, C_{-m-p}^n$ .

Tenemos los siguientes dos casos.

a) Si  $p \geq n$ , entonces las  $n$  copias de  $F_1$  están conectadas a  $F_2$  (por el entubado concéntrico), así  $\hat{S}$  es conexa, véase la Figura 3.1.8.

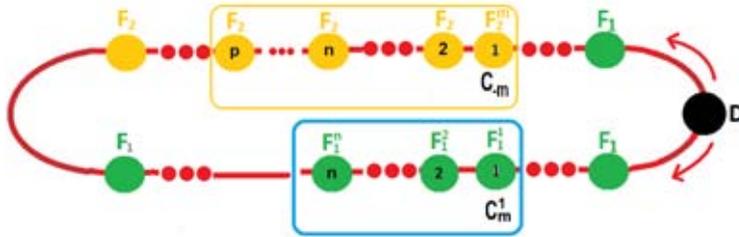


FIGURA 3.1.8

b) Si  $p < n$ . Con el símbolo  $\sim$  indicaremos que dos superficies están conectadas por algún tubo.

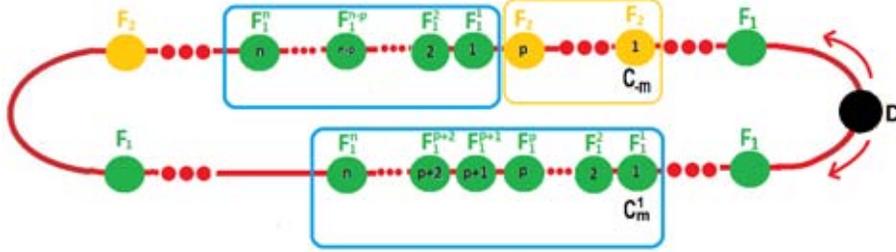


FIGURA 3.1.9

Debido al entubado concéntrico  $F_1^i \sim F_2$  para  $1 \leq i \leq p$ , después se conectan las siguientes superficies  $F_1^{p+1} \sim F_1^1, F_1^{p+2} \sim F_1^2, \dots, F_1^n \sim F_1^{n-p}$ , es decir  $F_1^j \sim F_1^{j-p}$  con  $p < j \leq n$ .

Para  $j$  existen  $q, r \in \mathbb{Z}$  tales que  $j = pq + r$  con  $0 \leq r < p$ , entonces

$$F_1^j = F_1^{pq+r} \sim F_1^{p(q-1)+r} \sim \dots \sim F_1^{p+r}.$$

Si  $r \neq 0$  tenemos que  $F_1^{p+r} \sim F_1^r$  y como  $1 \leq r < p$ , entonces  $F_1^j \sim F_2$ ; si  $r = 0$  entonces  $F_1^j \sim F_1^p \sim F_2$ . Así siempre existe una trayectoria entre las superficies, por lo tanto  $\hat{S}$  es conexa.

Probaremos que  $\chi(\hat{S}) = n\chi(F_1) + \chi(F_2)$ .

Veamos la siguiente formula

$$\chi(A \cup B) = \chi(A) + \chi(B) - \chi(A \cap B)$$

Como la característica de Euler de cada tubo es cero y la intersección de cada tubo con la superficie es una curva cerrada donde su característica es cero, entonces para calcular  $\chi(S)$  basta encontrar la característica de Euler de las  $n$  copias de  $F_1$  y de  $F_2$ , es decir

$$\begin{aligned} \chi(\hat{S}) &= \chi(F_1 \cup \dots \cup F_1 \cup F_2) \\ &= n\chi(F_1) + \chi(F_2). \end{aligned}$$

□

Observemos que si  $S$  es cualquier superficie propiamente encajada en  $E(K)$  y  $\tau$  es un tubo en  $\partial E(K)$  que conecta dos curvas adyacentes en  $\partial S$  (ver la Figura 3.1.10(a)), entonces tenemos un entubado concéntrico  $\hat{S}$  alrededor del centro de  $\tau$  (ver la Figura 3.1.10(b)). Denotemos por  $\tau'$  al tubo más largo del entubado concéntrico  $\hat{S}$ .

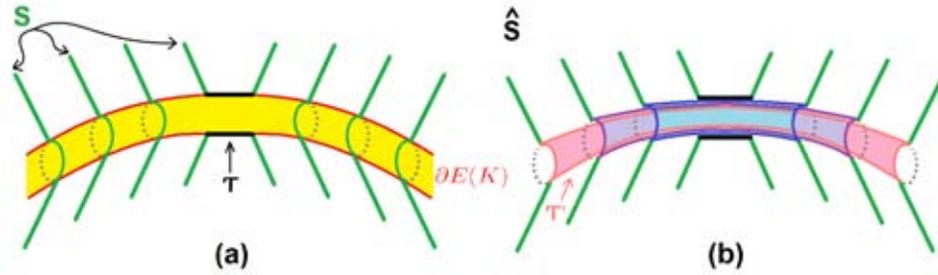


FIGURE 3.1.10.

Asumiremos que  $\hat{S}$  es conexo, de lo contrario cada componente conexa es obtenida por un entubado concéntrico en algunas componentes de  $S$ .  $\hat{S}$  es llevada con pesos positivos por una superficie ramificada  $R$  de la Figura 3.1.11 (a). Sea  $N$  una vecindad regular fibrada de  $R$ , ver la Figura 3.1.11(b).

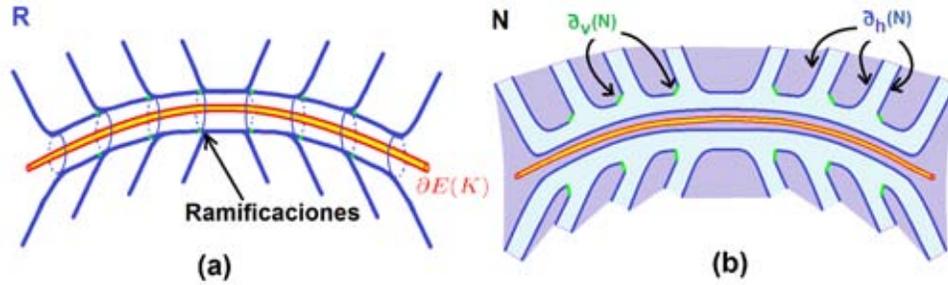


FIGURE 3.1.11.

Las ramificaciones de  $R$  están entre el toro  $\partial E(K)$  y los dobleces, excepto en los dobleces de las fronteras de  $\tau'$  (el tubo más largo de  $\hat{S}$ ) donde no hay ramificación (véase la Figura 3.1.12). En una vecindad regular fibrada  $N$  de  $R$ ,  $N$  no toca a la frontera de  $E(K)$  y las componentes de la frontera vertical ( $\partial_v N$ ) son anillos.

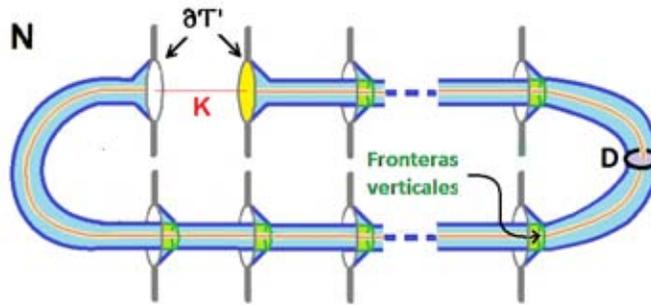


FIGURA 3.1.12.  $N$  de  $R$

EJEMPLO. La superficie ramificada del entubado concéntrico 3.1.4 (b), viene dado en la Figura 3.1.13.

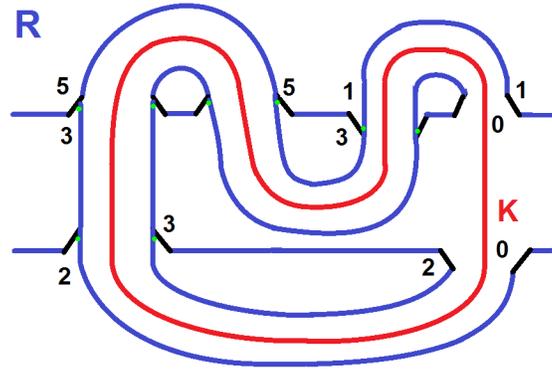


FIGURA 3.1.13

Si  $S = F_1 \cup F_2$ , entonces  $S$  separa el exterior de  $K$  en 3 componentes conexas, por lo tanto el complemento de  $N$  tiene 3 componentes, donde una vecindad regular del nudo está pegada a una de las componentes. Las fronteras de  $N$  se obtienen pegando copias paralelas de  $F_1$  y  $F_2$  con anillos de  $\partial E(K)$ , donde además se tiene un anillo periférico que está pegado a una de las fronteras de  $N$ .

EJEMPLO. La siguiente Figura es una vecindad fibrada  $N$  de  $R$  correspondiente a la Figura 3.1.13.

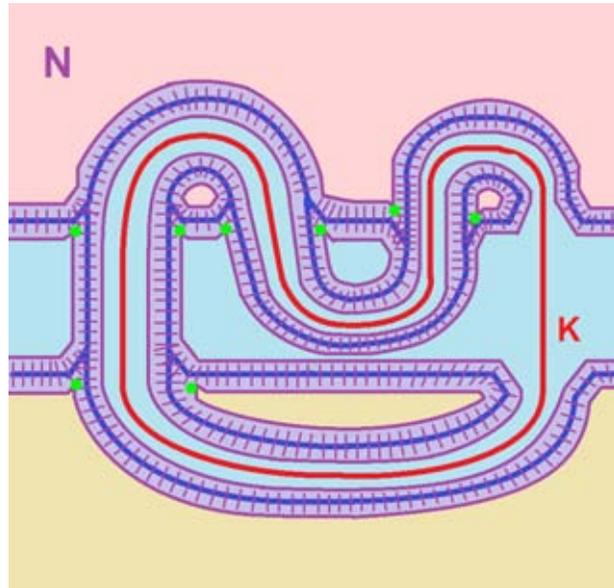


FIGURA 3.1.14

La frontera horizontal ( $\partial_h N$ ) consiste de copias de  $F_1$ ,  $F_2$  y un anillo periférico pegado a alguna o algunas de las copias (formando el tubo más largo del entubado  $\tau'$ ).  $\partial_h N$  tiene 4 componentes conexas si  $\tau'$  está pegado a una copia de  $F_i$  con  $i \in \{1, 2\}$  y tiene 3 componentes conexas si  $\tau'$  está pegado a una copia de  $F_1$  y  $F_2$ .

EJEMPLO. Veamos las componentes horizontales de  $N$  correspondiente a la Figura 3.1.14.

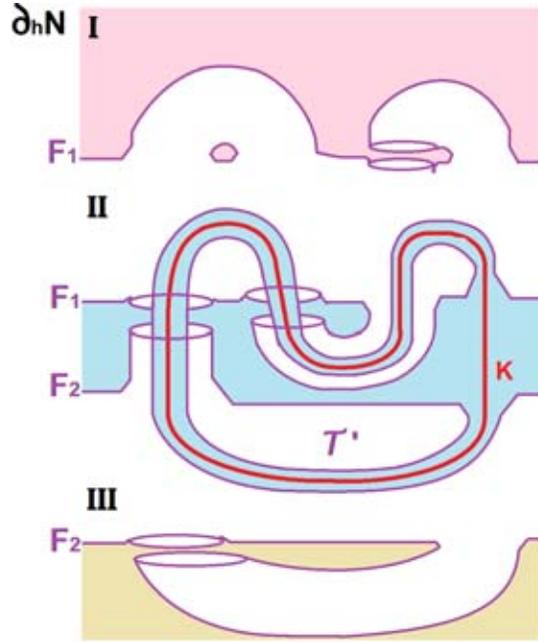


FIGURA 3.1.15

**PROPOSICIÓN 3.2.** Sea  $K$  un nudo en  $S^3$ ,  $F$  una superficie meridional, separante, propiamente encajada (posiblemente desconexa) en  $E(K)$  y  $\tau$  un tubo en  $\partial E(K)$  que conecta dos curvas adyacentes en  $\partial F$ . Si  $F \cup \tau$  es esencial en  $E(K)$  entonces el entubado concéntrico  $\hat{F}$  en  $\tau$  es esencial en  $E(K)$ .

**DEMOSTRACIÓN.** Asumiremos que  $\hat{F}$  es conexo, de lo contrario cada componente conexa es obtenida por un entubado concéntrico en alguna componente de  $F$ . El tubo  $\tau$  es el tubo más corto del entubado concéntrico  $\hat{F}$ , y denotaremos por  $\tau'$  el tubo más largo.  $\hat{F}$  es llevada con pesos positivos por una superficie ramificada  $R$ , ver la Figura 3.1.11(a). Sea  $N$  es una vecindad regular fibrada de  $R$ , ver la Figura 3.1.11(b).

Se usarán los siguientes lemas que vienen demostrados en el apéndice.

**LEMA A.** Sea  $M$  una 3-variedad con frontera,  $D$  un disco de compresión para una componente  $F$  de  $\partial M$  que no sea un toro y  $C \subset F$  una curva que cruza a  $D$  en un punto. Entonces, existe un disco de compresión de  $F$  ajeno a  $D \cup C$ .

**LEMA B.** Sea  $M$  una 3-variedad, compacta con frontera y  $T$  una colección de arcos ajenos propiamente encajados en  $M$  tales que  $\partial M - T$  es incompresible en  $M - T$ .

Si  $M'$  se obtiene de  $M$  al añadir una 1-asa  $D^2 \times I$  de manera que  $\{0\} \times \{-1\}$  y  $\{0\} \times \{1\}$  coincidan con 2 extremos de arcos de  $T$  y sea  $T' = T \cup \{0\} \times I$ . Entonces  $\partial M' - T'$  es incompresible en  $M' - T'$ .

Para demostrar que  $\hat{F}$  es esencial en  $E(K)$  solo necesitamos mostrar que  $R$  es una superficie ramificada incompresible.

(1)  $\partial_h N$  es incompresible en  $E(K) - \overset{\circ}{N}$ . El tubo  $\tau'$  tiene un disco de compresión meridional  $D$  donde  $D \cap K = p$ .

$E(K) - \overset{\circ}{N}$  es homeomorfo a  $E(K) - N(F) \cup (D - p \times [0, 1])$  donde  $D - p \times [0, 1]$  es añadida tal que  $\partial(D \times [0, 1]) = \tau'$ . Ver Figura 3.1.11(b).  $\partial_h N$  consiste de 2 copias paralelas de  $F$ , unidas por 2 tubos paralelos a  $\tau$  y  $\tau'$  (por conveniencia llamaremos estos tubos  $\tau$  y  $\tau'$ ), es decir  $\partial_h N = F' \cup F'' \cup \tau \cup \tau'$ . Como  $F$  es separante,  $\tau$  y  $\tau'$  son añadidos a una copia de  $F$  (no necesariamente la misma copia). Supongamos que  $\tau$  y  $\tau'$  son añadidos a  $F'$ , los otros casos son análogos.

Por hipótesis  $F' \cup \tau$  y  $F''$  son incompresibles en  $S^3 - K$ , entonces  $F' \cup \tau$  y  $F''$  son incompresibles en  $E(K) - \overset{\circ}{N}$ . La prueba de que  $F' \cup \tau \cup \tau'$  es incompresible en  $E(K) - N(F) \cup (D - p \times [0, 1])$  se sigue del lema B.

Así  $\partial_h N = F' \cup \tau \cup \tau' \cup F''$  es incompresible en  $E(K) - \overset{\circ}{N}$ .

(2) No existen discos de contacto:

Cada componente de  $\partial_v N$  es un anillo paralelo de  $\partial E(K)$ , así cualquier curva  $l \subset \partial_v N$  transversal a las fibras es isotópica a una curva frontera de  $F$  y esta no es frontera de un disco en  $E(K)$ .

(3) No existen discos monógonos en  $E(K) - \overset{\circ}{N}$ :

Supongamos que existe un disco monógono, es decir un disco  $D_1$  en  $E(K) - \overset{\circ}{N}$  con  $\partial D_1 = \alpha \cup \beta$  donde  $\alpha \subset \partial_v N$  es una fibra y  $\beta \subset \partial_h N$ . La fibra  $\alpha$  está contenida en un anillo periférico  $A$  de  $\partial E(K)$ , así  $\partial D_1 \subset (C \cup A)$  donde  $C$  es una componente de  $\partial_h N$ . Si  $C \cup A$  es distinto de un toro, entonces por el lema A existe un disco de compresión  $D^*$  en  $C \cup A$  ajeno a  $D_1 \cup l$  con  $l$  un meridiano de  $A$ . Por una isotopía en  $D^*$  tenemos que  $D^* \cap A = \emptyset$ , entonces  $D^*$  es un disco de compresión para  $C$  lo cual es una contradicción. Si  $C \cup A$  es un toro, como  $D_1$  es un disco de compresión para el toro, entonces  $C \cup A$  bordea un toro sólido. Dado que  $D_1$  es un monógono, sabemos que  $\partial D_1$  atraviesa  $C$  y  $A$  una sola vez, entonces el anillo  $C$  es paralelo a  $A$ . Así,  $C$  no es esencial lo cual es una contradicción.  $\square$

El resultado principal del capítulo es el siguiente Teorema.

**TEOREMA 3.1.** *Sea  $K$  un nudo en  $S^3$  que admite dos superficies meridionales, esenciales, separantes, disjuntas  $F_1$  y  $F_2$ . Supongamos que  $F_1$  tiene un disco de compresión meridional no centrado  $D$  respecto a  $F_2$ , entonces  $K$  admite una infinidad de superficies esenciales cerradas.*

**DEMOSTRACIÓN.** Sea  $F$  la superficie dada por  $n$  copias de  $F_1$  y  $F_2$ , es decir  $F = nF_1 \cup F_2$ . El entubado concéntrico  $\hat{F}$  alrededor de  $D$  es una superficie cerrada y al añadir copias de  $F_1$  a  $F$ , el género de  $\hat{F}$  se incrementa (por la Proposición 3.1). De esta manera, tenemos una infinidad de superficies de superficies cerradas de diferente género. Veamos si la superficie  $\hat{F}$  es esencial: Sea  $F_0$  la superficie obtenida al cortar  $F_1$  por  $D$  y pegando dos copias de  $D$  (ver Figura 3.1.16(a) y (b)). Así  $F_0$

es incompresible en  $S^3 - K$  y  $F_1$  es isotópica a  $F_0 \cup \tau$  donde  $\tau$  es un tubo centrado en  $D$  (ver Figura 3.1.16(c)).

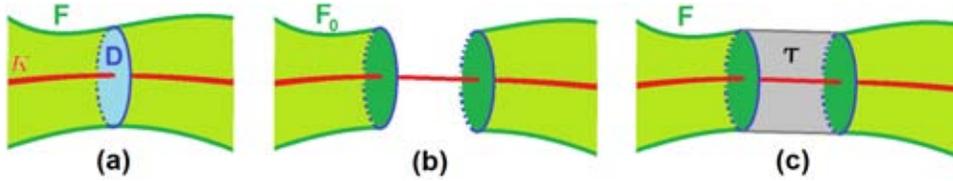


FIGURE 3.1.16.

Por ser  $F$  isotópico a  $(n-1)F_1 \cup F_2 \cup F_0 \cup \tau$  y además esencial en  $S^3 - K$ , entonces por la Proposición 3.2  $\hat{F}$  es esencial en  $S^3 - K$ .  $\square$

### 3.2. COROLARIOS

**COROLARIO 3.1.** *Sea  $K$  un nudo no satélite en  $S^3$  que admite una esfera meridional, esencial con 4 componentes frontera, entonces  $K$  admite una infinidad de superficies esenciales cerradas.*

**DEMOSTRACIÓN.**  $S$  corta a  $K$  en dos ovillos esenciales de 2 cuerdas  $(B, T)$  con  $T = \{t_1, t_2\}$  y  $(B', T')$  con  $T' = \{t'_1, t'_2\}$ . Dado que  $K$  no es satélite, entonces los ovillos  $(B, T)$  y  $(B', T')$  son atoroidales (porque si el ovillo contiene un toro incompresible  $T$  no paralelo a la frontera, como  $S$  es esencial, entonces  $T$  es esencial en  $S^3 - K$  contradicción). Sea  $m_i$  un meridiano de la cuerda  $t_i$  en  $\partial E(T)$  con  $i = 1, 2$  y  $m'_{i'}$  un meridiano de la cuerda  $t'_{i'}$  en  $\partial E(T')$  con  $i' = 1, 2$ .

Por el lema 2.2 de Y.Wu [12], sabemos que los toros agujerados  $\partial E(T) - m_i$  y  $\partial E(T') - m'_{i'}$  son incompresibles para algún meridiano  $m_i$  y  $m'_{i'}$ . Así, tenemos una superficie meridional, esencial en cada lado de  $S$ :  $\partial E(T) - m_i$  y  $\partial E(T') - m'_{i'}$ , donde cada uno tiene un disco de compresión meridional no centrado respecto al otro (porque  $S$  tiene 4 componentes frontera y los tubos están en diferente lado). El resto se sigue del Teorema 3.1.  $\square$

**OBSERVACIÓN.** La hipótesis que el nudo no sea satélite es necesaria. Un contraejemplo viene dado por cables del nudo  $4_1 \# 4_1$ ; veamos cuales.

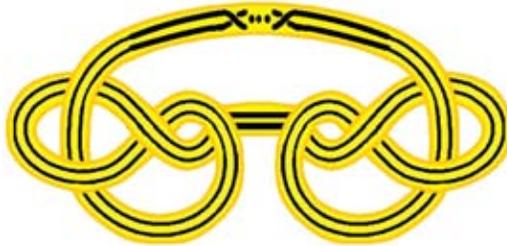


FIGURA 3.2.1

Por J. Schultens en [10], el nudo  $4_1\#4_1$  admite solo dos superficies esenciales cerradas (los toros que comen y siguen).

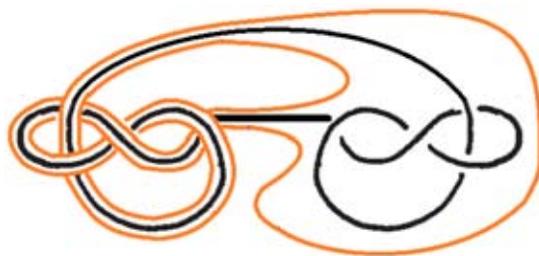


FIGURA 3.2.2. Toro esencial del nudo  $4_1\#4_1$

Por la Proposición 2.2, existe una familia de cables  $(p, 2)$  del nudo  $4_1\#4_1$  que admite solo tres superficies esenciales cerradas. Estos cables son los contraejemplos, dado que admiten una esfera meridional esencial con 4 componentes frontera mostrada en la Figura 3.2.3.

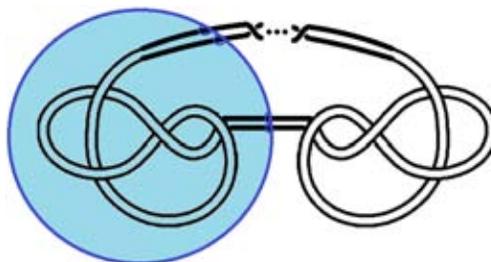


FIGURA 3.2.3

**EJEMPLO 3.1.** El nudo  $8_{16}$  es el primer nudo en las tablas (ver Rolfsen [9]) que admite una infinidad de superficies esenciales cerradas, todos los nudos anteriores a él en la tabla de nudos son de 2-puentes o de Montesinos de longitud tres. La prueba es inmediata, porque el nudo  $8_{16}$  es no satélite (por W. Menasco [7]) y admite una esfera meridional esencial  $S$  con 4 componentes frontera mostrada en la Figura 3.2.4.

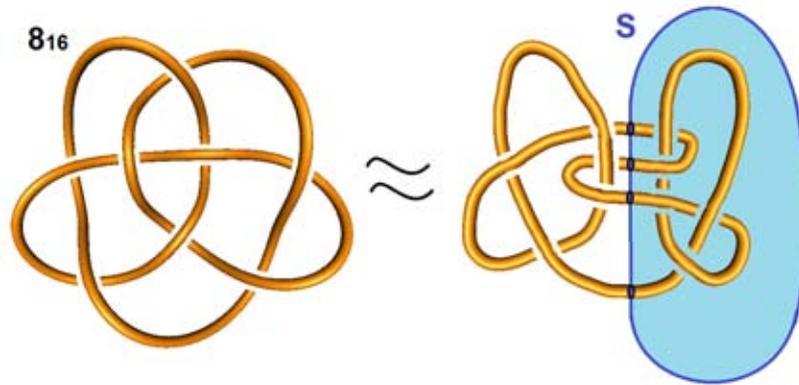


FIGURA 3.2.4

$S$  es incompresible en  $S^3 - 8_{16}$ , porque cada lado de  $S$  es homeomorfo al ovillo de dos cuerdas de la Figura 3.2.5, donde el ovillo es esencial por Oertel [8].

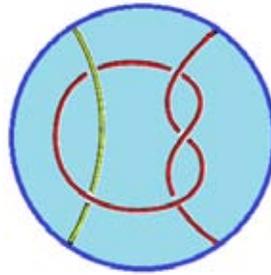


FIGURA 3.2.5

**EJEMPLO 3.2.** Si  $K = K(\frac{p_1}{q_1}, \dots, \frac{p_n}{q_n})$  es un nudo de Montesinos con  $n \geq 4$ , entonces  $K$  admite una infinidad de superficies esenciales cerradas. La prueba es sencilla, porque  $K$  es no satélite y admite una esfera meridional esencial con 4 componentes frontera (es la esfera que encierra al menos dos ovillos en cada lado, ver U. Oertel [8]). Se mejora el resultado de Oertel en [8], pues el supone que  $q_i$  sea mayor o igual a 3, y nosotros que  $q_i$  sea mayor o igual a 2. En la Figura 3.2.6 tenemos un nudo de Montesinos con  $n = 4$ .

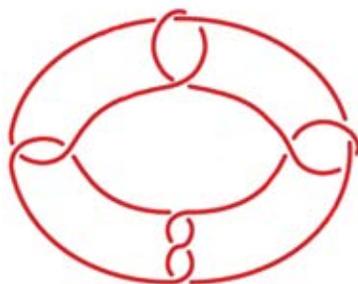


FIGURA 3.2.6

LEMA 3.1. Sea  $(B, T)$  un ovrillo esencial y le ariadimos una cuerda  $t$  que no pueda separarse de las cuerdas  $T$ , entonces el ovrillo  $(B, T \cup t)$  es esencial.

DEMOSTRACI3N. Supongamos que existe un disco de compresi3n  $D$  en la esfera agujerada  $\partial B - N(T \cup t)$ , la frontera de  $D$  no es una curva esencial en  $\partial B - N(T)$  (pues de lo contrario  $D$  ser3a un disco de compresi3n para  $(B, T)$ ). Entonces  $\partial D$  es una curva trivial en  $\partial B - N(T)$ , as3  $D$  ser3a un disco que separa a  $t$  de las  $T$  cuerdas, lo cual es una contradicci3n.  $\square$

EJEMPLO 3.3. El nudo  $K$  en  $S^3$  de la Figura 3.2.7(a) admite una infinidad de superficies esenciales cerradas, veamos la prueba.

$K$  admite una esfera meridional  $S$  con 6 componentes frontera, v3ase la Figura 3.2.7(b). A partir de  $S$  construimos dos toros meridionales disjuntos:  $T_1$  con dos componentes frontera y  $T_2$  con 4 componentes frontera, v3ase la Figura 3.2.7(c). Observe que  $T_2$  tiene un disco de compresi3n meridional no centrado  $D^2$ . Para demostrar que  $K$  admite una infinidad de superficies esenciales cerradas, solo hay que probar que  $T_1$  y  $T_2$  son incompresibles en  $S^3 - K$  porque el resto se sigue del Teorema 3.1.

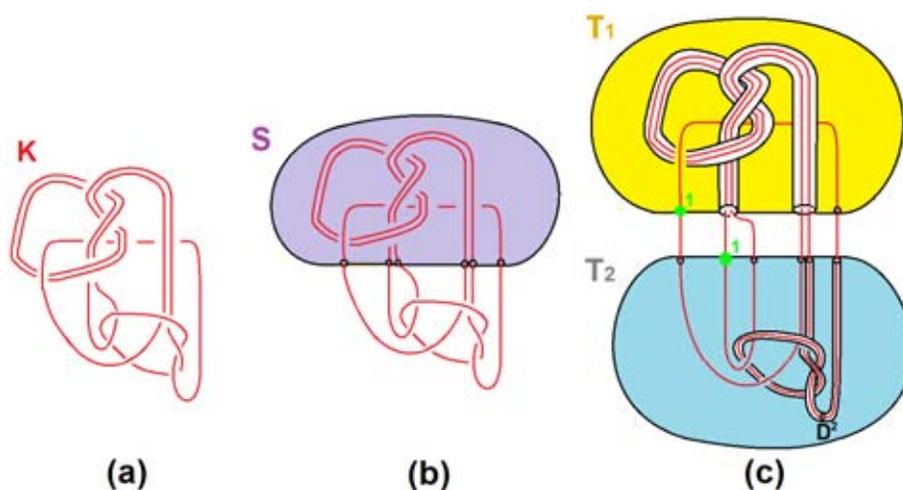


FIGURA 3.2.7

El lema 3.1 implica que la esfera  $S$  es esencial en  $S^3 - K$ , ya que cada uno de los lados de la esfera es homeomorfo al ovrillo de la Figura 3.2.5 al añadirle una cuerda paralela y esencial. Para la incompresibilidad de  $T_1$  y  $T_2$ , basta probar la incompresibilidad del lado interior de los toros (las regiones sombreadas), porque de la misma forma en cómo se demostró el lema B se ve que el lado exterior de los toros es incompresible.

Probaremos que  $T_1$  es incompresible del lado interior.

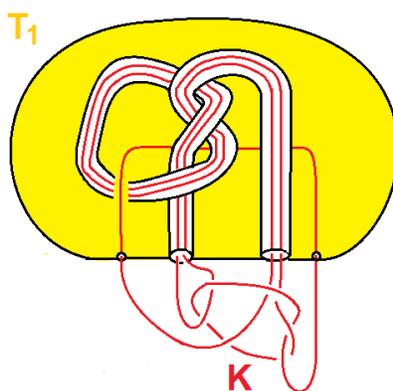


FIGURA 3.2.8

Si al ovrillo de la Figura 3.2.5 le añadimos un tubo paralelo a la cuerda no trivial (véase la Figura 3.2.9), tenemos como frontera un toro  $T$  incompresible con dos agujeros.

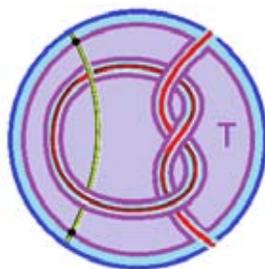


FIGURA 3.2.9

El lado interior de  $T_1$  es homeomorfo a la componente del toro  $T$  en el ovrillo.  $T$  es incompresible, entonces  $T_1$  es incompresible del lado interior.

Probaremos que  $T_2$  es incompresible del lado interior.

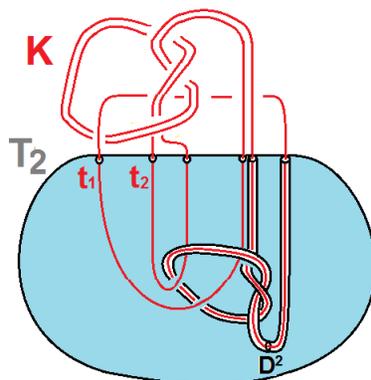


FIGURA 3.2.10

Sea  $D$  un disco de compresión del lado interior de  $T_2$  y  $t_1, t_2$  las cuerdas del lado interior de  $T_2$ . Como las cuerdas  $t_1$  y  $t_2$  son paralelas, existen arcos  $A_1, A_2 \subset T_2$  tales que  $A_1 \cup t_1 \cup A_2 \cup t_2$  son frontera de un rectángulo  $R$  del lado interior de  $T_2$ . Si  $D \cap R \neq \emptyset$ , entonces las intersecciones en  $D$  y  $R$  son arcos y curvas como lo muestra la Figura 3.2.11(a) y (b) respectivamente.

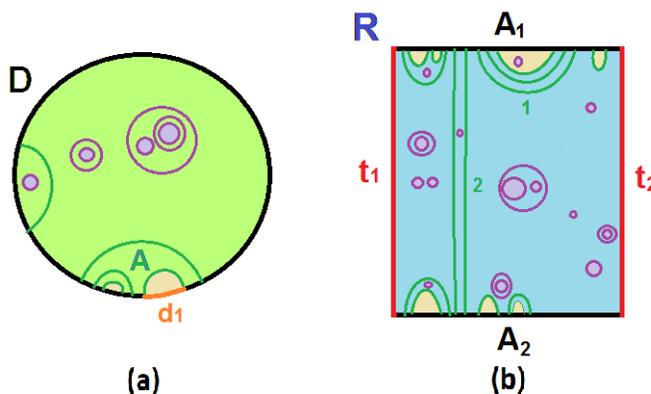


FIGURA 3.2.11

Las curvas cerradas en  $D$  son curvas cerradas en  $R$ . Tomo una curva de más adentro en  $D$  que bordea un disco, también bordea un disco en  $R$  y por una isotopía elimino la intersección en  $R$ . Así sucesivamente elimino todas las curvas cerradas de  $R$ . De los arcos en  $D$ , tomo un arco  $A$  de más afuera para  $D$ . El arco  $A$  divide a  $\partial D$  en dos segmentos, sea  $d_1$  el segmento que no cruza ningún arco, entonces  $A \cup d_1$  bordea un disco en  $D$ .

Los arcos en  $D$  son arcos en  $R$ , pero hay dos tipos de arcos en  $R$ . Si el arco  $A$  en  $R$  va y regresa a un mismo lado  $l \subset \partial R$ , tenemos un segmento  $\beta \subset l$  tal que  $A \cup \beta$  es borde de un disco en  $R$ , véase la Figura 3.2.12. Dado que  $A \cup d_1$  y  $A \cup \beta$  bordean discos, entonces la curva  $d_1 \cup \beta$  contenida en  $T_2$  bordea un disco del lado interior de  $T_2$ , pero también bordea un disco en  $T_2$  (pues de lo contrario sería un disco de

compresión para el toro  $T$  de la Figura 3.2.9) y por una isotopía podemos eliminar el arco  $A$  en  $R$ .

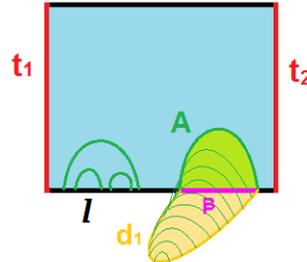


FIGURA 3.2.12

Si el arco  $A$  en  $R$  es un arco vertical, entonces divide a los arcos  $A_1$  y  $A_2$  en dos subarcos, sean  $\gamma_1, \gamma_2$  los subarcos de  $A_1$  y  $A_2$  que llegan a  $t_1$ ; la unión  $t_1 \cup \gamma_1 \cup A \cup \gamma_2$  bordea un disco en  $R$  (véase la Figura 3.2.13). El arco  $(\gamma_1 \cup d_1 \cup \gamma_2) - t_1$  está contenido en  $T_2$  y sabemos que  $A \cup d_1$  y  $(t_1 \cup \gamma_1 \cup A \cup \gamma_2)$  bordean discos, entonces la curva  $(t_1 \cup \gamma_1 \cup d_1 \cup \gamma_2)$  bordea un disco, así  $t_1$  puede separarse de las demás cuerdas lo cual es una contradicción. Por lo tanto no existen tales intersecciones de  $D$  con  $R$ , así  $D \cap R = \emptyset$ .

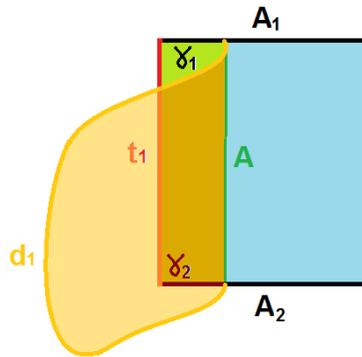


FIGURA 3.2.13

Si  $D \cap R = \emptyset$ , entonces  $D$  es un disco de compresión para el mismo  $T_2$  formado por una sola cuerda, es decir para  $T$  (el toro de la Figura 3.2.9), lo cual es una contradicción.

**COROLARIO 3.2.** *Sea  $K$  un nudo primo, alternante en  $S^3$  que admite una superficie esencial cerrada de género 2, entonces  $K$  admite una infinidad de superficies esenciales cerradas.*

**DEMOSTRACIÓN.** Dado que  $K$  es un nudo primo, alternante, entonces por W. Menasco [7] es no satélite. Sea  $F$  la superficie cerrada, esencial de género 2 en el exterior de  $K$ . Por el lema del meridiano de W. Menasco [7],  $F$  contiene un disco de compresión meridional  $D_1$  tal que al comprimir meridionalmente obtenemos

una superficie meridional, esencial  $F^\circ$  de género 1 con 2 componentes fronteras. Por el Teorema 3 de W. Menasco [7], la superficie  $F^\circ$  no puede ser meridionalmente incompresible pues  $F^\circ$  sería un anillo. De esta forma  $F^\circ$  contiene un disco de compresión meridional  $D_2$ . Así, al comprimir meridionalmente  $F$  por  $D_1$  y  $D_2$  nos queda una esfera meridional, esencial con 4 componentes frontera, el resto se sigue del Corolario 3.1.  $\square$

DEFINICIÓN. Sea  $K$  un nudo en  $S^3$  y  $F \subset E(K)$  una superficie meridional con dos discos de compresión meridional  $D_1$  y  $D_2$ . Decimos que  $D_1$  y  $D_2$  son *equidistantes*, si los arcos de  $K$  que van de  $D_1$  a  $D_2$ , tienen el mismo número de intersecciones con la superficie  $\bar{F}$ , obsérvese la Figura 3.2.14.

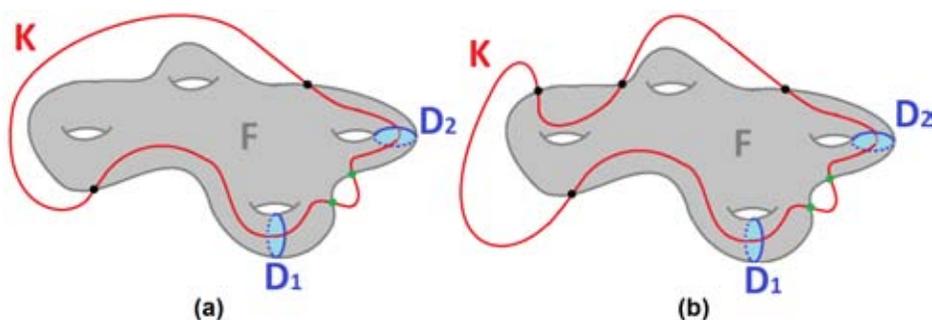


FIGURA 3.2.14. (a) Equidistantes (b) No equidistantes

COROLARIO 3.3. *Sea  $K$  un nudo en  $S^3$  que admite una superficie meridional, esencial, separante con dos discos de compresión meridional no equidistantes, entonces  $K$  admite una infinidad de superficies esenciales cerradas.*

DEMOSTRACIÓN. Sean  $F$  la superficie meridional, esencial y  $D_1, D_2$  discos de compresión meridional no equidistantes. Comprimiendo meridionalmente  $F$  por  $D_1$  conseguimos una superficie esencial, meridional  $F^\circ$  con nuevas fronteras  $h^+$  y  $h^-$ . El diagrama de intersecciones de  $K$  con  $F$  y  $F^\circ$  en  $D_2$  es algo como el ejemplo de la Figura 3.2.15.

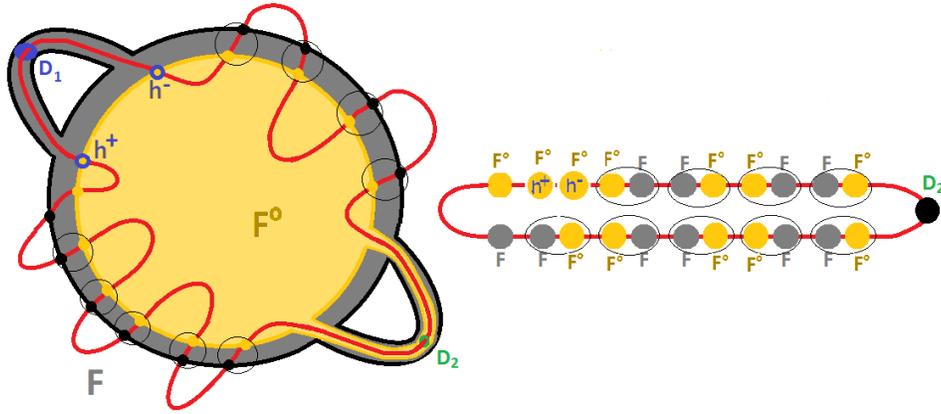


FIGURA 3.2.15

Probaremos que  $D_2$  de  $F^\circ$  no es centrado respecto a  $F$ . A partir de  $D_2$  etiquetamos con enteros las intersecciones de  $\overline{F} \cup \overline{F}^\circ$  con  $K$  de acuerdo a sus posiciones a lo largo de  $K$ , con la mitad de estos con signos positivos y la otra mitad con signos negativos. Como  $D_1$  y  $D_2$  son no equidistantes, entonces a las intersecciones de  $\overline{F}^\circ$  con las correspondientes a  $h^+$  y  $h^-$  las etiquetamos con  $m$  y  $m + 1$ . Por ser  $F$  y  $F^\circ$  casi paralelos, las intersecciones con etiquetas  $i$  y  $-i$  para  $i < m$  les corresponde la misma superficie. A las etiquetas  $-m$  y  $-(m + 1)$  corresponden a intersecciones de  $F^\circ$  y  $F$ , así el disco  $D_2$  de  $F^\circ$  no es centrado respecto a  $F$ .

El resto se sigue del Teorema 3.1.  $\square$

**COROLARIO 3.4.** *Sea  $K$  un nudo en  $S^3$  que admite una superficie esencial, separante con tres discos de compresión meridional, entonces  $K$  admite una infinidad de superficies esenciales cerradas.*

**DEMOSTRACIÓN.** Sean  $F$  la superficie esencial y  $D_1, D_2, D_3$  discos de compresión meridional, véase la Figura 3.2.16.

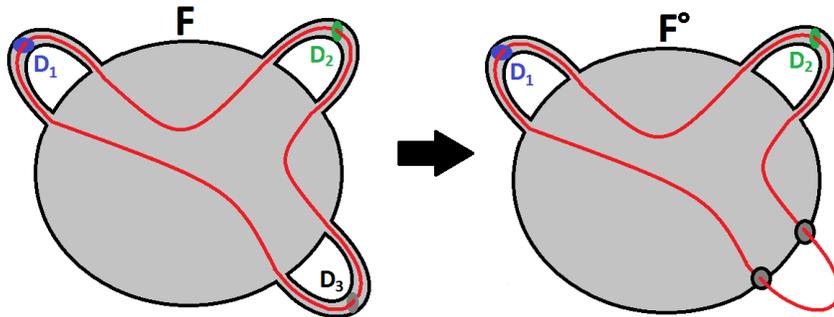


FIGURA 3.2.16

Tenemos los siguientes casos:

- 1) Si  $D_1$  y  $D_2$  no son equidistantes, entonces  $F$  tiene frontera no vacía. Así  $F$  es meridional, el resto se sigue del Corolario 3.3.
- 2) Si  $D_1$  y  $D_2$  son equidistantes, el número de intersecciones de  $\bar{F}$  con los arcos de  $K$  que van de  $D_1$  a  $D_2$  son iguales. Al comprimir meridionalmente por  $D_3$  conseguimos una superficie meridional, esencial  $F^\circ$  con discos de compresión meridional  $D_1$  y  $D_2$ . Ahora, con  $F^\circ$  uno de los arcos de  $D_1$  a  $D_2$  tiene dos intersecciones más, entonces  $D_1$  y  $D_2$  no son equidistantes en  $F^\circ$ ; el resto se sigue del Corolario 3.3.  $\square$

EJEMPLO 3.4. El artículo de Wu [13], nos da una familia de nudos con proyecciones  $2n - plat$  suficientemente complicadas tales que admiten una superficie esencial cerrada con al menos 3 discos de compresión meridional. Ocupando el Corolario 3.4, estos nudos admiten una infinidad de superficies esenciales cerradas.

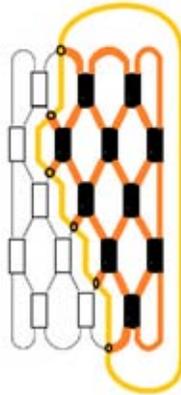


FIGURA 3.2.17

Se sabe que dado un nudo satélite  $K$  en  $S^3$  con nudo compañero  $K_1$ , tal que  $K_1$  admite una superficie esencial  $F$ , entonces  $F$  es esencial en el exterior de  $K$ .

COROLARIO 3.5. *Sea  $K_1$  un nudo en  $S^3$  que admite una superficie meridional, esencial, separante con un disco de compresión meridional y  $K_2$  un nudo no trivial, entonces  $K_1 \# K_2$  admite una infinidad de superficies esenciales cerradas.*

DEMOSTRACIÓN. Sean  $F$  la superficie meridional, esencial en el exterior de  $K_1$  y  $D$  un disco de compresión meridional. A partir de  $D$  recorremos el nudo  $K_1$  en una dirección y añadimos una esfera  $S$  en  $K_1$  antes que  $K_1$  intersekte a  $\bar{F}$  por primera vez, tal que  $S \cap \bar{F} = \emptyset$ . Dentro de esa esfera hacemos la suma con  $K_2$ , véase la Figura 3.2.18.

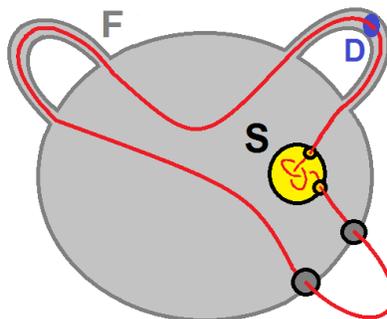


FIGURA 3.2.18

$F$  es esencial en el exterior de  $K_1 \# K_2$  y por construcción  $D$  es no centrado respecto a  $S$ , el resto se sigue del Teorema 3.1.  $\square$

**EJEMPLO 3.5.** Sea  $K_1$  el nudo de la Figura 3.2.19. La suma conexa de  $K_1$  con el nudo trébol, admite una infinidad de superficies esenciales cerradas. La demostración se sigue del Corolario 3.5 al construir una superficie esencial en  $S^3 - K_1$  que contiene un disco de compresión meridional. Vamos a construir la superficie.

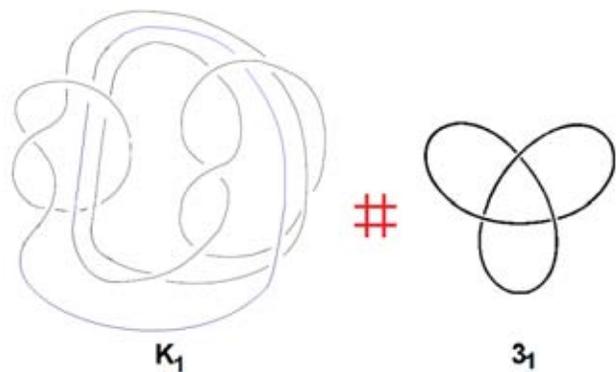


FIGURA 3.2.19

El nudo  $K_1$  admite una esfera meridional  $S$  con 6 fronteras vista en la Figura 3.2.20(a).  $S$  es esencial en  $S^3 - K_1$ , ya que cada uno de los lados de la esfera se obtienen del ovillo de la Figura 3.2.5 al añadirle una cuerda paralela a la trivial y es esencial por el lema 3.1.

A partir de  $S$  construimos el toro  $T$  con cuatro componentes frontera como se observa en la Figura 3.2.20(b),  $T$  tiene un disco de compresión meridional  $D$ . El toro  $T$  es incompresible en  $S^3 - K_1$ , esto se sigue de la misma forma en cómo se demostró la incompresibilidad del toro de la Figura 3.2.10 del ejemplo 3.3.

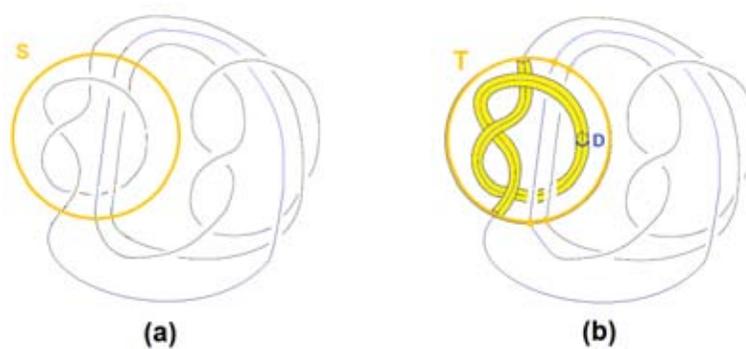


FIGURA 3.2.20

Como  $T$  es un toro meridional, incompresible en  $S^3 - K_1$  con un disco de compresión meridional  $D$ , entonces por el Corolario 3.5 el nudo  $K_1 \# 3_1$  admite una infinidad de superficies esenciales cerradas.

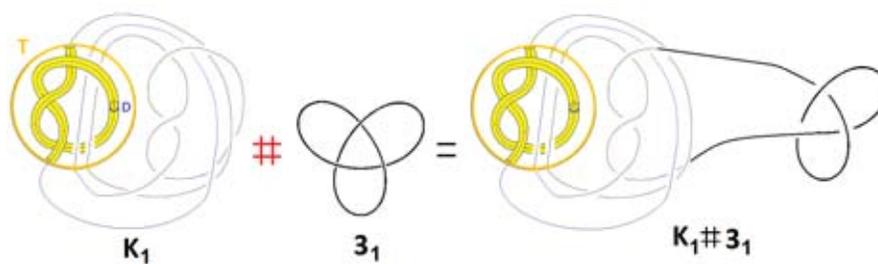


FIGURA 3.2.21



## APENDICE

**LEMA A.** *Sea  $M$  una 3-variedad con frontera,  $D$  un disco de compresión para una componente  $F$  de  $\partial M$  que no sea un toro y  $C \subset F$  una curva que cruza a  $D$  en un punto. Entonces, existe un disco de compresión de  $F$  ajeno a  $D \cup C$ .*

DEMOSTRACIÓN. Por hipótesis  $\partial D \cap C$  es un punto, entonces tenemos una vecindad  $N(D \cup C) \subset M$  que es un toro sólido y  $N(D \cup C) \cap F$  es un toro  $T$  con una frontera (es decir un cilindro unión una banda). Por el toro sólido  $N(D \cup C)$  tenemos que la frontera de  $T$  es borde de un disco  $D^*$ , donde por construcción  $D^* \cap F = \partial D^*$  y además es ajeno a  $D \cup C$ .

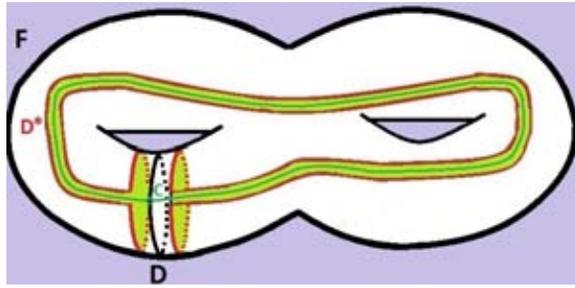


FIGURA 3.2.22

Probaremos que  $\partial D^*$  no bordea un disco en  $F$ .

Supongamos que  $\partial D^*$  bordea un disco en  $F$ , entonces divide a  $F$  en dos componentes  $C_1$  y  $C_2$ . Como  $\partial D^*$  es la frontera del toro  $T$  en  $F$ , podemos suponer que  $T$  es  $C_1$  y así  $C_2$  es el disco que bordea  $\partial D^*$  en  $F$ , contradicción porque  $F$  no es un toro. Por lo tanto  $D^*$  es un disco de compresión.  $\square$

**LEMA B.** *Sea  $M$  una 3-variedad, compacta con frontera y  $T$  una colección de arcos ajenos propiamente encajados en  $M$  tales que  $\partial M - T$  es incompresible en  $M - T$ . Si  $M'$  se obtiene de  $M$  al añadir una 1-asa  $D^2 \times I$  de manera que  $\{0\} \times \{-1\}$  y  $\{0\} \times \{1\}$  coincidan con 2 extremos de arcos de  $T$  y sea  $T' = T \cup \{0\} \times I$ . Entonces  $\partial M' - T'$  es incompresible en  $M' - T'$ .*

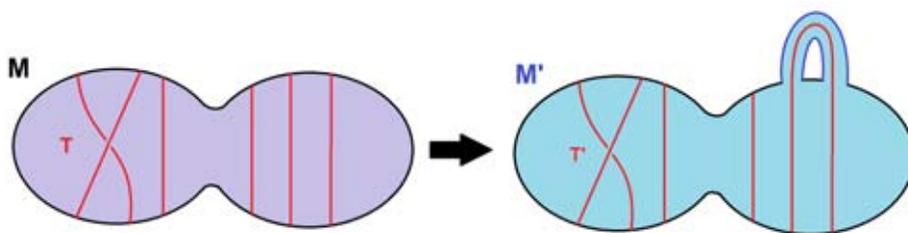


FIGURA 3.2.23

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que existe un disco de compresión  $D$  en  $\partial M' - T'$ . Si  $\partial D \cap \{\partial D^2 \times I\} = \emptyset$  entonces  $D$  es un disco de compresión para  $\partial M - T$ , lo cual es una contradicción.

Si  $\partial D \cap \{\partial D^2 \times I\} \neq \emptyset$ , las intersecciones son arcos y curvas en el disco  $D$  o en las tapas  $(D^2 - \{0\}) \times \pm 1$ , como se observa en la Figura 3.2.24(a) y (b) respectivamente.

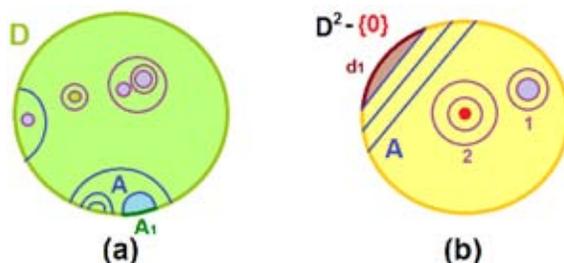


FIGURA 3.2.24

Tenemos los siguientes casos:

Caso 1. De las curvas cerradas en  $D$ , tomo una curva de más adentro  $C$  que bordea un disco;  $C$  es una curva cerrada en una tapa  $D^2 - \{0\}$  pero tiene dos opciones. Si  $C$  bordea un disco en  $D^2 - \{0\}$ , entonces por una isotopía puedo quitar esa intersección de la tapa, pero si  $C$  es un meridiano de un arco en  $T'$ , entonces no puede bordear un disco lo cual es una contradicción.

Caso 2. Los arcos de intersección en  $D$  son también arcos en las tapas  $D^2 - \{0\}$ , tomo el arco  $A$  más cercano a la frontera en  $D$ , este divide a  $\partial D$  en dos arcos, sea  $A_1$  el arco de  $\partial D$  que no cruza otro arco (véase la Figura 3.2.24). También el arco  $A$  divide a  $\partial D^2$  en dos arcos, sea  $d_1$  el arco cuya unión con  $A$  bordea un disco en la tapa  $D^2 - \{0\}$ .

Si  $\overset{\circ}{A}_1 \cap \{\partial D^2 \times I\} \neq \emptyset$ , como  $A_1$  intersecciona una sola tapa, entonces solo puede ser un arco de tipo  $A'_1$  o  $A''_1$  que se encuentran en la Figura 3.2.25(a). El arco  $A'_1$  no es, dado que  $A \cup A'_1$  forma un meridiano de un arco en  $T'$  y no puede bordear un disco, de esta manera  $A_1$  es  $A''_1$ . Luego  $A \cup A''_1$ ,  $A \cup d_1$  y  $A''_1 \cup d_1$  bordean discos y por una isotopía podemos eliminar el arco  $A$  de la tapa.

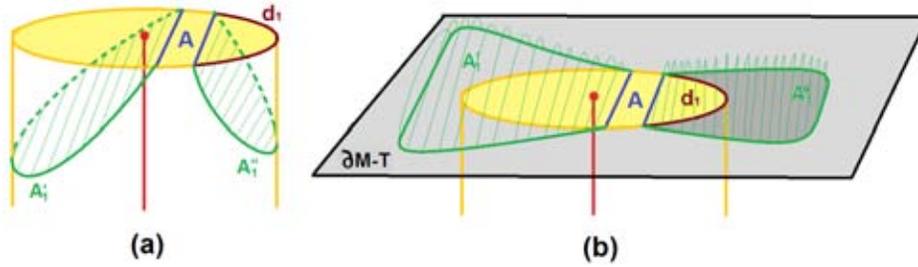


FIGURA 3.2.25

Si  $\overset{\circ}{A}_1 \cap (\partial D^2 \times I) = \emptyset$ , como  $A_1$  intersecta una sola tapa, entonces solo puede ser un arco de tipo  $A_1'$  o  $A_1''$  que se encuentran en la Figura 3.2.25(b). El arco  $A_1'$  no es, dado que  $A \cup A_1'$  es un meridiano de un arco en  $T'$ , así  $A_1$  es  $A_1''$ . Los arcos  $A \cup d_1$  y  $A \cup A_1''$  bordean discos, de esta manera la curva  $A_1'' \cup d_1$  contenida en  $\partial M - T$  es borde de un disco en  $M' - T'$ ; luego  $A_1'' \cup d_1$  es borde de un disco en  $\partial M - T$  (pues de lo contrario sería un disco de compresión en  $\partial M - T$ ). Como  $A \cup d_1$ ,  $A \cup A_1''$  y  $A_1'' \cup d_1$  bordean discos, por una isotopía podemos eliminar el arco  $A$  de la tapa. Así sucesivamente, eliminamos las intersecciones de las tapas y nos queda que  $D$  es un disco de compresión para  $\{\partial M - T\}$  o  $(D^2 - \{0\}) \times I$ , lo cual es una contradicción porque ambos son incompresibles.  $\square$



## Bibliografía

- [1] C. Adams, “The Knot Book: An Elementary Introduction to the Mathematical Theory of Knots”, American Mathematical Soc., 1994.
- [2] M. Eudave y M. Neumann, “Acyindrical surfaces in 3-manifolds and knot complements”, Bol. Soc. Mat. Mexicana (3) 10, Special Issue (2004) 147-169.
- [3] W. Floyd y U. Oertel, “Incompressible surfaces via branched surfaces”, Pacific J. Math. Volume 117, Number 2 (1985), 353-370.
- [4] A. Hatcher, “On the Boundary Curves of Incompressible Surfaces”, Pac. J. Math., Vol. 99, No. 2 (1982), 373-377.
- [5] A. Hatcher y W. Thurston, “Incompressible surfaces in 2-bridge knot complements”, Invent. Math. 79 (1985) 225-246.
- [6] H. Lyon, “Incompressible surfaces in knot spaces”, Trans. Amer. Math. Soc. 157 (1971) 53-62.
- [7] W. Menasco, “Closed incompressible surfaces in alternating knot and link complements”, Topology 23 (1984) 37-44.
- [8] U. Oertel, “Closed incompressible surfaces in complements of star links”, Pacific J. Math. 111 (1984) 209-230.
- [9] D. Rolfsen, “Knots and links”, AMS Chelsea Publishing, American Mathematical Society.
- [10] J. Schultens, “Additivity of tunnel number for small knots”, Math. Helv. 75 (2000) 353-367.
- [11] M. Tsau, “Incompressible surfaces in the knot manifolds of torus knots”, Topology 33 (1994) 197-201.
- [12] Y.-Q. Wu, “Dehn Surgery On Arborescent Knots”, J. Differ. Geom., 43 (1996), 171-197.
- [13] Y.-Q. Wu, “Incompressible surfaces in link complements”, Proc. Amer. Math. Soc. 129 (2001) 3417-3423.