UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA.

SEUDOÁLGEBRAS NORMALES DE LA SEUDOMÓNADA $(-)^E$

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA:
ENRIQUE RUIZ HERNÁNDEZ

DIRECTOR DE TESIS: FRANCISCO MARMOLEJO RIVAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS

MÉXICO, D. F. 26 DE ENERO DE 2015.

Seudoálgebras normales de la seudomónada $(-)^E$

Enrique Ruiz Hernández
Instituto de Matemáticas
Universidad Nacional Autónoma de México

Índice general

Imagen

La ciencia adolescente

Corría por unas calles que crecían a través de todo el espacio frente a mí. Las personas corrían hacia todos lados, alarmadas, gritando, tropezando; algunas morían en la estampida, con la boca sumamente abierta, en un grito ahogado, con una garganta roja, enrojecida por unos vasos sanguíneos congestionadísimos que, en ocasiones, estallaban en borbotones escarlata.

Entre todo ese caos visual, corporal y humano, logré divisar un adolescente (o una) que permanecía quieto (o quieta), de pie, y asombrosamente intacto. Balbuceaba palabras que yo deseaba adivinar (por qué era intocable); quizá había un secreto científico en sus palabras, un secreto que mantenía el orden, la tensión, la cohesión, el determinismo (en su sentido más amplio).

Miré sus manos, que prestidigitaban; sin embargo, no eran las manos de un mago; eran las manos de un ilusionista (un escéptico, por supuesto), un ateo.

Sin darme cuenta, comencé a fijarme, atrancarme en mi cuerpo, perdía caoticidad: ganaba fijeza: calma pero no certidumbre... Calma pero no certidumbre... Calma

Introducción

En [1993], Korostenski y Tholen querían demostrar que los sistemas de factorización ortogonal sobre una catgoría A y las seudoálgebras normales sobre A de la seudomónada $(-)^{\mathbf{2}} : \mathbf{Cat} \to \mathbf{Cat}$ son equivalentes; en dicho artículo, sólo consiguieron demostrar que los sistemas de factorización ortogonal y los sistemas de factorización de Eilenberg-Moore son equivalentes. Rosebrugh y Wood lograron demostrar la primera equivalencia en [2002].

En contraste con lo que ocurre en **Con** (es decir, si consideramos un conjunto X y la mónada $(-)^X : \mathbf{Con} \to \mathbf{Con}$, no es tan difícil caracterizar las álgebras de $(-)^X$), es de llamar la atención que, a pesar de que la categoría **2** sea tan simple, las seudoálgebras normales de la seudomónada $(-)^{\mathbf{2}} : \mathbf{Cat} \to \mathbf{Cat}$ (que es una mónada 2) no tengan una caracterización sencilla. Esto nos motivó a preguntarnos por las caracterizaciones de las seudoálgebras de otras mónadas 2 que resultan de elevar a alguna categoría sencilla. Nos planteamos considerar la categoría que consiste de un solo objeto, la identidad y un morfismo idempotente (categoría que estamos denotando en la tesis como E), con el fin de caracterizar sus seudoálgebras normales. No se logró el cometido, pero sí se obtuvieron muchos resultados interesantes análogos a los relacionados con sistemas de factorización, además de un ejemplo prometedor (por lo menos a mí me lo parece), el de la sección 6.4.

El trabajo aparece de la siguiente manera. En los capítulos 1, 2 y 3 se tratan los preliminares para presentar el problema. En el capítulo 1 se tratan introductoriamente las categorías 2, los seudofuntores, las transformaciones y las modificaciones; este capítulo es un fragmento de la sección §4.1 de Makkai y Paré [1989]. En el capítulo 2 se tratan las seudomónadas sin iteraciones y las seudomónadas, las cuales son mónadas 2 cuando las condiciones de coherencia de la unidad y la multiplicación son triviales, como en el caso de $(-)^{\mathbf{2}}$ y $(-)^E$; de hecho, como en el caso de elevar a cualquier categoría (pequeña) C, pues toda categoría C tiene estructura de comonoide al considerar el único funtor $C \to \mathbf{1}$ a la categoría con un solo objeto y una sola flecha (la counidad) y la diagonal $\delta_C : C \to C \times C$ (la comultiplicación). En el capítulo 2 también se mencionan los resultados de Marmolejo y Wood [2013] que afirman la equivalencia entre seudomónadas y seudomónadas sin iteraciones. La única demostración en este capítulo es la de la reducción en el número de condiciones de coherencia a las que está sujeta una seudomónada sin iteraciones; quien arbitró el artículo Marmolejo y Wood [2013] hizo la observación de que tal reducción era posible; sin embargo, es en este trabajo donde esa demostración aparece impresa por primera vez. En el capítulo 3 se tratan las seudoálgebras de una seudomónada y las de una seudomónada sin iteraciones, y se menciona la biequivalencia entre ambas categorías 2, la cual se demuestra en Marmolejo y Wood [2013]; la única demostración que aparece en este capítulo es básicamente la misma que la de 2 de la Proposición 8.1 de Marmolejo [1997].

En el capítulo 4 se obtienen condiciones necesarias para las seudoálgebras de $(-)^E$, funtor 2 considerado tanto como seudomónada sin iteraciones como como seudomónada; por supuesto, tales condiciones se infieren con el objetivo de caracterizar las seudoálgebras normales de $(-)^E$. Las condiciones necesarias para una seudoálgebra de $(-)^E$ se obtienen de dos maneras: (1) haciendo uso de los resultados de Marmolejo y Wood [2013]; en particular, los de su sección 7; y (2) infiriendo resultados análogos a los de Grandis y Tholen [2006], Garner [2007], Rosický y Tholen [2002], Rosebrugh y Wood [2002] y Korostenski y Tholen [1993]. La idea de que quizá se podía conseguir una caracterización por este camino surgió del Teorema 3.2 de Grandis y Tholen [2006]:

> Todo sistema de factorización ortogonal $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ sobre una categoría K es equivalente a un sistema de factorización débil natural (L, R) sobre K para el cual L y R son idempotentes. En este caso, las categorías K_L y K^R de coálgebras de la comónada L y de álgebras de la mónada R, respectivamente, son equivalentes a $\mathcal{E}_F$ y a $\mathcal{M}_F$, consideradas como subcategorías plenas correflexiva y reflexiva de $K^{\mathbf{2}}$, respectivamente, con F el sistema de factorización de Eilenberg-Moore correspondiente al sistema de factorización ortogonal $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$.

El capítulo 5 trata sobre unas posibles álgebras laxa y colaxa canónicas de $(-)^E$ y sobre la relación de estas álgebras con ciertos isomorfismos naturales.

En el capítulo 6 se dan ejemplos de seudoálgebras normales de $(-)^E$. En la sección 6.2 se demuestra que a toda categoría C cuyos idempotentes se escinden se le puede dar una estructura de seudoálgebra normal para $(-)^E$; que una generalización de este resultado a categorías tamizadas A podía dar seudoálgebras normales de $(-)^A$ se le ocurrió a Omar Antolín. En la sección 6.3 se trata el funtor $\bar{e} : \mathbf{2} \to E$, el cual escoge al idempotente de E; este funtor induce un funtor 2 de las seudoálgebras de $(-)^{\mathbf{2}}$ a las seudoálgebras de $(-)^E$. Así que $\bar{e}$ se convierte en una fuente de muchos ejemplos para seudoálgebras de $(-)^E$, ya que hay muchos ejemplos de sistemas de factorización ortogonal: consúltese, por ejemplo, el CatLab de André Joyal. Nosotros sólo mencionamos dos de esos ejemplos. Finalmente, en la sección 6.4 se trata un ejemplo mínimo no estricto; quedará más o menos claro, una vez visto el ejemplo, que de este se pueden extraer más ejemplos.

Capítulo 1

Categorías 2

Definición 1.1. Una categoría 2 (o una 2-categoría) A consiste de

(i) un conjunto de objetos (no necesariamente pequeño) $\mathrm{Ob}(A)$;

(ii) una categoría $A(a,b)$ para cada par de objetos $a,b \in \mathrm{Ob}(A)$ (a los objetos de $A(a,b)$ se los llamará flechas —morfismos, flechas 1, 1-flechas, celdas 1 o 1-celdas— de A con dominio a y codominio b; escribiremos $f : a \to b$ para indicar que f es un objeto de $A(a,b)$; a las flechas de la categoría $A(a,b)$ se las llamará celdas 2 —o 2-celdas—, y si $f, g \in A(a,b)$, escribiremos $\alpha : f \Rightarrow g$ o $\alpha : f \to g$ para indicar que α es una celda 2 con dominio f y codominio g; la composición (vertical) en $A(a,b)$ la denotaremos con $\cdot$, de manera que la composición de $\alpha : f \Rightarrow g$ y $\beta : g \Rightarrow h$ la denotaremos $\beta \cdot \alpha$; la identidad sobre f la denotaremos 1_f);

(iii) un objeto de $A(a,a)$, la flecha identidad $1_a : a \to a$, para cada objeto $a \in \mathrm{Ob}(A)$;

(iv) un funtor de composición

$$\circ_{a,b,c} : A(a,b) \times A(b,c) \to A(a,c)$$

para cada tripleta de objetos $a,b,c \in \mathrm{Ob}(A)$.

Y se cumple que,

(v) dada $\begin{tikzcd} a \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & b \end{tikzcd}$, se tiene que $f1_a = f$, $\alpha 1_a = \alpha$, $1_b f = f$, $1_b \alpha = \alpha$;

(vi) el diagrama de funtores

$$\begin{tikzcd}
A(a,b)\times A(b,c)\times A(c,d) \arrow[r, "\circ_{a,b,c}\times 1_{A(c,d)}"] \arrow[d, "1_{A(a,b)}\times\circ_{b,c,d}"'] & A(a,c)\times A(c,d) \arrow[d, "\circ_{a,c,d}"] \\
A(a,b)\times A(b,d) \arrow[r, "\circ_{a,b,d}"'] & A(a,d)
\end{tikzcd} \tag{1.1}$$

conmuta para toda cuarteta de objetos $a, b, c, d \in \mathrm{Ob}(A)$.

Denotaremos la composición (horizontal) de celdas 1 y celdas 2 con el infijo $\circ$, o simplemente mediante la yuxtaposición; es decir, $gf = g \circ f = \circ_{a,b,c}(f, g)$ y $\beta\alpha = \beta \circ \alpha = \circ_{a,b,c}(\alpha, \beta)$.

Observación 1.2. El efecto de $\circ_{a,b,c}$ está dado por la composición

$$f : a \to b, g : b \to c \qquad \mapsto \qquad gf : a \to c$$

de celdas 1 y por las siguientes composiciones de celdas 1 y celdas 2:

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & b \arrow[r, "h"] & c & \mapsto & a \arrow[r, bend left, "hf"] \arrow[r, bend right, "hg"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow h\alpha"] & c
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "f"] & b \arrow[r, bend left, "h"] \arrow[r, bend right, "i"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\beta"] & c & \mapsto & a \arrow[r, bend left, "hf"] \arrow[r, bend right, "if"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\beta f"] & c
\end{tikzcd},$$

donde $h\alpha = \circ_{a,b,c}(\alpha, 1_h)$ y $\beta f = \circ_{a,b,c}(1_f, \beta)$. Es decir, dadas las celdas 2

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & b \arrow[r, bend left, "h"] \arrow[r, bend right, "i"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\beta"] & c
\end{tikzcd},$$

se tiene que

$$\begin{aligned}
\circ_{a,b,c}(\alpha, \beta) &= \circ_{a,b,c}(\alpha, 1_h) \cdot \circ_{a,b,c}(1_g, \beta) \\
&= \circ_{a,b,c}(1_f, \beta) \cdot \circ_{a,b,c}(\alpha, 1_i)
\end{aligned}$$

(ver Proposición II.3.1 de Mac Lane [1998]); o sea, el diagrama

$$\begin{tikzcd}
hf \arrow[r, "h\alpha"] \arrow[d, "\beta f"'] & hg \arrow[d, "\beta g"] \\
if \arrow[r, "i\alpha"'] & ig
\end{tikzcd} \tag{1.2}$$

conmuta en la categoría $A(a,c)$: la composición horizontal $\beta \circ \alpha$ es la diagonal común

$$(\beta g) \cdot (h\alpha) = (i\alpha) \cdot (\beta f)$$

del diagrama anterior.

Nos referiremos a ejemplos del diagrama conmutativo (1.2) como casos de naturalidad interna, más específicamente, de naturalidad de β: en el caso de la categoría 2 **CAT**, la conmutatividad de (1.2) es una consecuencia de la naturalidad de la transformación natural β.

Observación 1.3. La funtorialidad de $\circ_{a,b,c} : A(a,b) \times A(b,c) \to A(a,c)$ queda expresada por la ley de intercambio (ver §II.5 de Mac Lane [1998]). Dadas celdas 2

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, bend left=50, "f"] \arrow[r, "g" description] \arrow[r, bend right=50, "h"'] \arrow[r, phantom, shift left=2.5ex, "\Downarrow\alpha"] \arrow[r, phantom, shift right=2.5ex, "\Downarrow\beta"] & b \arrow[r, bend left=50, "i"] \arrow[r, "j" description] \arrow[r, bend right=50, "k"'] \arrow[r, phantom, shift left=2.5ex, "\Downarrow\gamma"] \arrow[r, phantom, shift right=2.5ex, "\Downarrow\delta"] & c\,,
\end{tikzcd}$$

se tiene que

$$(\delta\beta) \cdot (\gamma\alpha) = (\delta \cdot \gamma)(\beta \cdot \alpha), \tag{1.3}$$

y de aquí tenemos que

$$i(\beta \cdot \alpha) = (i\beta) \cdot (i\alpha), \quad (\delta \cdot \gamma)f = (\delta f) \cdot (\gamma f),$$

pues $1_i \cdot 1_i = 1_i$, y similarmente para 1_f.

De (1.3), también obtenemos

$$i1_f = 1_{if} = 1_i f.$$

Observación 1.4. La condición de asociatividad de la composición horizontal queda expresada por el diagrama (1.1) y es, por la Observación 1.2, equivalente a lo siguente: dadas celdas 2 como en

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & b \arrow[r, bend left, "h"] \arrow[r, bend right, "i"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\beta"] & c \arrow[r, bend left, "j"] \arrow[r, bend right, "k"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\gamma"] & d\,,
\end{tikzcd}$$

se tiene que

$$j(h\alpha) = (jh)\alpha, \quad j(\beta f) = (j\beta)f, \quad (\gamma h)f = \gamma(hf).$$

Definición 1.5. Sean A y B categorías 2 . Un seudofuntor (u homomorfismo) $\Phi : A \to B$ consiste de

(i) una función sobre objetos $\mathrm{Ob}(A) \to \mathrm{Ob}(B)$ (que también denotaremos Φ);

(ii) un funtor
$$\Phi_{a,b} : A(a,b) \to B(\Phi a, \Phi b)$$
para cada par de objetos $a, b \in \mathrm{Ob}(A)$ (y escribiremos Φf para $\Phi_{a,b} f$ y $\Phi\alpha$ para $\Phi_{a,b}\alpha$, así que para la celda 2
$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & b \end{tikzcd},$$
se tiene
$$\begin{tikzcd} \Phi a \arrow[r, bend left, "\Phi f"] \arrow[r, bend right, "\Phi g"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \Phi\alpha"] & \Phi b \end{tikzcd},$$
y la funtorialidad de $\Phi_{a,b}$ queda expresada por las identidades
$$\Phi 1_f = 1_{\Phi f}, \quad \Phi(\beta \cdot \alpha) = \Phi\beta \cdot \Phi\alpha);$$

(iii) un isomorfismo $\Phi_a : 1_{\Phi a} \xrightarrow{\cong} \Phi 1_a$ para cada objeto $a \in \mathrm{Ob}(A)$;

(iv) un isomorfismo de funtores
$$\begin{tikzcd} A(a,b) \times A(b,c) \arrow[r, "\circ_{a,b,c}"] \arrow[d, "\Phi_{a,b} \times \Phi_{b,c}"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\Phi_{a,b,c}}{\Rightarrow}"] & A(a,c) \arrow[d, "\Phi_{a,c}"] \\ B(\Phi a, \Phi b) \times B(\Phi b, \Phi c) \arrow[r, "\circ_{\Phi a, \Phi b, \Phi c}"'] & B(\Phi a, \Phi c) \end{tikzcd}$$
(dadas las celdas 1 $f : a \to b$ y $g : b \to c$, escribiremos $\Phi^{f,g}$ para $\Phi_{a,b,c}(f,g)$, así que $\Phi^{f,g} : (\Phi g)(\Phi f) \xrightarrow{\cong} \Phi(gf)$; si los isomorfismos $\Phi^{f,g}$ son todos identidades, diremos que Φ es un funtor 2 o un 2-funtor); es decir, dadas dos celdas 2
$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & b \arrow[r, bend left, "h"] \arrow[r, bend right, "k"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\beta"] & c \end{tikzcd},$$

el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
\Phi h \Phi f \arrow[r, "\Phi^{f,h}"] \arrow[d, "\Phi\beta\Phi\alpha"'] & \Phi(hf) \arrow[d, "\Phi(\beta\alpha)"] \\
\Phi k \Phi g \arrow[r, "\Phi^{g,k}"'] & \Phi(kg)
\end{tikzcd} . \tag{1.4}$$

Y se cumple que,

(v) si $f : a \to b$ en A, entonces

$$\begin{tikzcd}
\Phi a \arrow[r, bend left, "1_{\Phi a}"] \arrow[r, bend right, "\Phi 1_a"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\Phi_a"] & \Phi a \arrow[r, bend left, "\Phi f \Phi 1_a"] \arrow[r, bend right, "\Phi f"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\Phi^{1_a,f}"] & \Phi b
\end{tikzcd} = 1_{\Phi f \Phi 1_a}$$

y

$$\begin{tikzcd}
\Phi a \arrow[r, bend left, "\Phi 1_b \Phi f"] \arrow[r, bend right, "\Phi f"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\Phi^{f,1_b}"] & \Phi b \arrow[r, bend left, "1_{\Phi b}"] \arrow[r, bend right, "\Phi 1_b"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\Phi_b"] & \Phi b
\end{tikzcd} = 1_{\Phi 1_b \Phi f};$$

(vi) dadas $a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c \xrightarrow{h} d$ en A,

$$\begin{tikzcd}
& \Phi b \arrow[r, "\Phi g"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\Phi^{f,g}"] & \Phi c \arrow[dr, "\Phi h"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\Phi^{gf,h}"] & \\
\Phi a \arrow[ur, "\Phi f"] \arrow[urr, "\phi(gf)"'] \arrow[rrr, "\Phi(hgf)"'] & & & \Phi d
\end{tikzcd} = \begin{tikzcd}
& \Phi b \arrow[r, "\Phi g"] \arrow[drr, "\Phi(hg)"'] \arrow[d, phantom, "\Phi^{f,hg}\Downarrow"] & \Phi c \arrow[dr, "\Phi h"] \arrow[d, phantom, "\Swarrow\Phi^{g,h}"] & \\
\Phi a \arrow[ur, "\Phi f"] \arrow[rrr, "\Phi(hgf)"'] & & & \Phi d
\end{tikzcd} .$$

Observación 1.6. Las igualdades en (v) de la definición anterior son equivalentes a la conmutatividad de los siguientes diagramas, respectivamente:

$$\begin{tikzcd}
\Phi f \Phi 1_a \arrow[rr, "\Phi^{1_a,f}"] \arrow[dr, "1"'] & & (\Phi f) 1_{\Phi a} \arrow[dl, "\Phi f \Phi_a"] \\
& \Phi f \Phi 1_a &
\end{tikzcd}$$

y

$$\begin{tikzcd}
\Phi 1_b \Phi f \arrow[rr, "\Phi^{f,1_b}"] \arrow[dr, "1"'] & & 1_{\Phi b}(\Phi f) \arrow[dl, "\Phi_b \Phi f"] \\
& \Phi 1_b \Phi f &
\end{tikzcd} .$$

La igualdad en (vi) es equivalente a la conmutatividad del siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} \Phi h \Phi g \Phi f \arrow[r, "\Phi h \Phi^{f,g}"] \arrow[d, "\Phi^{g,h}\Phi f"'] & \Phi h \Phi(gf) \arrow[d, "\Phi^{gf,h}"] \\ \Phi(hg)\Phi f \arrow[r, "\Phi^{f,hg}"'] & \Phi(hgf) \end{tikzcd} \tag{1.5}$$

Definición 1.7. Si $A \xrightarrow{\Phi} B \xrightarrow{\Psi} C$ son seudofuntores de categorías 2, definimos su composición $\Psi\Phi : A \to C$ como sigue: para

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & b \arrow[r, "h"] & c \end{tikzcd},$$

hacemos

$$\begin{aligned} (\Psi\Phi)a &= \Psi(\Phi a), \\ (\Psi\Phi)f &= \Psi(\Phi f), \\ (\Psi\Phi)\alpha &= \Psi(\Phi\alpha). \end{aligned}$$

Y $(\Psi\Phi)_a = \Psi\Phi_a \cdot \Psi_{\Phi a}$; es decir, $(\Psi\Phi)_a$ es

$$\begin{tikzcd} \Psi\Phi a \arrow[r, bend left=60, "1_{\Psi\Phi a}"] \arrow[r, "\Psi 1_{\Phi a}" description] \arrow[r, bend right=60, "\Psi\Phi 1_a"'] & \Psi\Phi a \end{tikzcd} \quad \Downarrow\Psi_{\Phi a},\ \Downarrow\Psi\Phi_a,$$

y $(\Psi\Phi)^{f,h} = \Psi\Phi^{f,h} \cdot \Psi^{\Phi f,\Phi h}$; o sea, $(\Psi\Phi)^{f,h}$ es

$$\begin{tikzcd} \Psi\Phi a \arrow[r, bend left=40, "(\Psi\Phi h)(\Psi\Phi f)"] \arrow[r, "\Psi(\Phi h \Phi f)" description] \arrow[r, bend right=40, "\Psi\Phi(hf)"'] & \Psi\Phi c \end{tikzcd} \quad \Downarrow\Psi^{\Phi f,\Phi h},\ \Downarrow\Psi\Phi^{f,h}.$$

Es fácil ver que tal composición es asociativa.

Definición 1.8. Sean A y B categorías 2 y $\Phi, \Psi : A \to B$ seudofuntores. Una transformación $t : \Phi \to \Psi$ consiste de

(i) una celda 1 $t_a : \Phi a \to \Psi a$ para cada objeto $a \in \mathrm{Ob}(A)$;

(ii) una celda 2

$$\begin{tikzcd} \Phi a \arrow[r, "t_a"] \arrow[d, "\Phi f"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\Leftarrow}{t_f}"] & \Psi a \arrow[d, "\Psi f"] \\ \Phi b \arrow[r, "t_b"'] & \Psi b \end{tikzcd}$$

para cada celda 1 $f : a \to b$ en A.

Y cumple que

(iii)

$$\begin{tikzcd} \Phi a \arrow[rr, "t_a"] \arrow[d, bend right=50, "\Phi g"'] \arrow[d, bend left=50, "\Phi f"] \arrow[d, phantom, "\overset{\Leftarrow}{\Phi\alpha}"] \arrow[drr, phantom, "\overset{\Leftarrow}{t_f}"] & & \Psi a \arrow[d, "\Psi f"] \\ \Phi b \arrow[rr, "t_b"'] & & \Psi b \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} \Phi a \arrow[rr, "t_a"] \arrow[d, "\Phi g"'] \arrow[drr, phantom, "\overset{\Leftarrow}{t_g}"] & & \Psi a \arrow[d, bend right=50, "\Psi g"'] \arrow[d, bend left=50, "\Psi f"] \arrow[d, phantom, "\overset{\Leftarrow}{\Psi\alpha}"] \\ \Phi b \arrow[rr, "t_b"'] & & \Psi b \end{tikzcd}$$

para toda celda 2 $\begin{tikzcd} a \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & b \end{tikzcd}$;

(iv)

$$\begin{tikzcd} \Phi a \arrow[r, "t_a"] \arrow[dr, "\Phi f"] \arrow[dd, "\Phi(gf)"'] & \Psi a \arrow[dr, "\Psi f"] \arrow[d, phantom, "\overset{\Leftarrow}{t_f}"] & \\ \overset{\Leftarrow}{\Phi^{f,g}} & \Phi b \arrow[r, "t_b"] \arrow[dl, "\Phi g"] \arrow[d, phantom, "\overset{\Leftarrow}{t_g}"] & \Psi b \arrow[dl, "\Psi g"] \\ \Phi c \arrow[r, "t_c"'] & \Psi c & \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} \Phi a \arrow[r, "t_a"] \arrow[dd, "\Phi(gf)"'] \arrow[ddr, phantom, "\overset{\Leftarrow}{t_{gf}}"] & \Psi a \arrow[dd, "\Psi(gf)"'] \arrow[dr, "\Psi f"] & \\ & \overset{\Leftarrow}{\Psi^{f,g}} & \Psi b \arrow[dl, "\Psi g"] \\ \Phi c \arrow[r, "t_c"'] & \Psi c & \end{tikzcd}$$

para cualesquiera celdas 1 $a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c$;

(v)

$$\begin{tikzcd} \Phi a \arrow[rr, "t_a"] \arrow[d, "\Phi 1_a"'] \arrow[drr, phantom, "\overset{\Leftarrow}{t_{1_a}}"] & & \Psi a \arrow[d, bend right=50, "\Psi 1_a"'] \arrow[d, bend left=50, "1_{\Psi a}"] \arrow[d, phantom, "\overset{\Leftarrow}{\Psi_a}"] \\ \Phi a \arrow[rr, "t_a"'] & & \Psi a \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} \Phi a \arrow[d, bend right=50, "\Phi 1_a"'] \arrow[d, bend left=50, "1_{\Phi a}"] \arrow[d, phantom, "\overset{\Leftarrow}{\Phi_a}"] & & \\ \Phi a \arrow[rr, "t_a"'] & & \Psi a \end{tikzcd}$$

para todo $a \in \mathrm{Ob}(A)$.

Se dice que la transformación t es fuerte si t_f es un isomorfismo y estricta si es una identidad para toda celda 1 $a \xrightarrow{f} b$. Si es estricta también se dice que es natural 2.

Definición 1.9. Sean A y B categorías 2, $\Phi, \Psi : A \to B$ seudofuntores y $t, u : \Phi \to \Psi$ transformaciones. Una modificación $\mu : t \to u$ consiste de

(i) una familia $\langle \mu_a \rangle_{a \in \mathrm{Ob}(A)}$ de celdas 2 $\mu_a : t_a \to u_a$ tal que

(ii)
$$
\begin{tikzcd}
\Phi a \arrow[r, bend left, "t_a"{name=U}] \arrow[r, bend right, "u_a"'{name=D}] \arrow[d, "\Phi f"'] \arrow[Rightarrow, from=U, to=D, "\mu_a"] & \Psi a \arrow[d, "\Psi f"] \\
\Phi b \arrow[r, "u_b"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow u_f"] & \Psi b
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\Phi a \arrow[r, "t_a"] \arrow[d, "\Phi f"'] & \Psi a \arrow[d, "\Psi f"] \\
\Phi b \arrow[r, bend left, "t_b"{name=U}] \arrow[r, bend right, "u_b"'{name=D}] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow t_f"] \arrow[Rightarrow, from=U, to=D, "\mu_b"] & \Psi b
\end{tikzcd}
$$

para toda celda 1 $f : a \to b$.

Definición 1.10. Sean A y B categorías 2. Definimos entonces $\mathrm{Hom}(A, B)$ como la categoría 2 cuyos objetos son los seudofuntores $A \to B$, cuyas celdas 1 son las transformaciones entre estos seudofuntores y cuyas celdas 2 son las modificaciones entre estas transformaciones.

Definimos la composición entre transformaciones en $\mathrm{Hom}(A, B)$ como sigue: sean $\Phi, \Psi, \Theta : A \to B$ seudofuntores y $\Phi \xrightarrow{t} \Psi \xrightarrow{u} \Theta$ transformaciones. Entonces, dado $a \in \mathrm{Ob}(A)$, definimos

$$(ut)_a := u_a t_a$$

y, dada $f : a \to b$,

$$(ut)_f := (u_b t_f) \cdot (u_f t_a).$$

Definimos la composición vertical y horizontal entre modificaciones. Sean μ y ν modificaciones en la siguiente configuración:

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[rrr, bend left, "\Phi"] \arrow[rrr, bend right, "\Psi"'] & t \Downarrow \arrow[r, "\mu"] & \Downarrow u \arrow[r, "\nu"] & \Downarrow v \;\; B
\end{tikzcd}
.
$$

Definimos su composición vertical como $(\nu \cdot \mu)_a = \nu_a \cdot \mu_a$. Sean μ y ν modificaciones en la siguiente configuración:

$$\begin{tikzcd}
 & t \Downarrow \arrow[r, "\mu"] & \Downarrow u & \\
A \arrow[rrr, bend left=60, "\Phi"] \arrow[rrr, "\Psi"] \arrow[rrr, bend right=60, "\Theta"'] & & & B . \\
 & v \Downarrow \arrow[r, "\nu"] & \Downarrow w &
\end{tikzcd}$$

Definimos su composición horizontal como $(\nu\mu)_a = \nu_a\mu_a$, y $(\nu t)_a = \nu_a t_a$.

Definición 1.11. Sean A, B, C categorías 2 y $A \xrightarrow{\Phi} B \xrightarrow{\Psi} C$ seudofuntores. Se tienen los siguientes seudofuntores.

(i)

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}(\Phi, C) : \mathrm{Hom}(B, C) &\to \mathrm{Hom}(A, C) \\
\Theta &\mapsto \Theta\Phi \\
t : \Theta \to \Theta' &\mapsto t\Phi \\
\mu : t \to u &\mapsto \mu\Phi,
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
(t\Phi)_a &= t_{\Phi a} \\
(t\Phi)_f &= t_{\Phi f}
\end{aligned}$$

y

$$(\mu\Phi)_a = \mu_{\Phi a};$$

todos los isomorfismos $\mathrm{Hom}(\Phi, C)_\Theta$ y $\mathrm{Hom}(\Phi, C)^{t,u}$ son identidades, así que $\mathrm{Hom}(\Phi, C)$ es un funtor 2.

(ii)

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}(A, \Psi) : \mathrm{Hom}(A, B) &\to \mathrm{Hom}(A, C) \\
\Theta &\mapsto \Psi\Theta \\
t : \Theta \to \Theta' &\mapsto \Psi t \\
\mu : t \to u &\mapsto \Psi\mu,
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}(\Psi t)_a &= \Psi t_a\\ (\Psi t)_f &= (\Psi^{\Theta f, t_b})^{-1} \cdot \Psi t_f \cdot \Psi^{t_a, \Theta' f},\end{aligned}$$

es decir, $(\Psi t)_f$ es la composición

$$\begin{tikzcd} \Psi\Theta a \arrow[rr, bend left=60, "\Psi\Theta' f \Psi t_a"] \arrow[rr, bend left=15, "\Psi(\Theta' f t_a)"] \arrow[rr, bend right=15, "\Psi(t_b \Theta f)"'] \arrow[rr, bend right=60, "\Psi\Theta f \Psi t_b"'] \arrow[rr, phantom, shift left=6, "\Downarrow \Psi^{t_a,\Theta' f}"] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow \Psi t_f"] \arrow[rr, phantom, shift right=6, "\Downarrow (\Psi^{\Theta f, t_b})^{-1}"] & & \Psi\Theta' b \end{tikzcd},$$

y

$$(\Psi\mu)_a = \Psi\mu_a;$$

todos los isomorfismos $\mathrm{Hom}(A,\Psi)_\Theta$ son identidades y los isomorfismos $\mathrm{Hom}(A,\Psi)^{t,u} : \Psi u \cdot \Psi t \to \Psi(u\cdot t)$ (que son modificaciones en este caso) están definidos como

$$(\mathrm{Hom}(A,\Psi)^{t,u})_a = \Psi^{t_a, u_a}.$$

Observación 1.12. En efecto, $\Psi\mu$ es una celda 2 $\Psi t \Rightarrow \Psi u : \Psi\Theta \to \Psi\Theta'$ en $\mathrm{Hom}(A,C)$, es decir, una modificación $\Psi t \to \Psi u : \Psi\Theta \Rightarrow \Psi\Theta' : A \to C$. Por (1.4),

$$\Psi^{u_a,\Theta' f} \cdot \Psi\Theta' f \Psi\mu_a = \Psi(\Theta' f \mu_a) \cdot \Psi^{t_a,\Theta' f} \tag{1.6}$$

y, por definición de μ,

$$\Psi u_f \cdot \Psi(\Theta' f \mu_a) = \Psi(\mu_b \Theta f) \cdot \Psi t_f. \tag{1.7}$$

Así que de (1.6) y (1.7), se tiene que

$$\begin{aligned}(\Psi^{\Theta f,u_b})^{-1} \cdot \Psi u_f \cdot \Psi^{u_a,\Theta' f} \cdot \Psi\Theta' f \Psi\mu_a &= (\Psi^{\Theta f,u_b})^{-1} \cdot \Psi u_f \cdot \Psi(\Theta' f\mu_a) \cdot \Psi^{t_a,\Theta' f}\\ &= (\Psi^{\Theta f,u_b})^{-1} \cdot \Psi(\mu_b \Theta f) \cdot \Psi t_f \cdot \Psi^{t_a,\Theta' f}\\ &= \Psi\mu_b \Psi\Theta f \cdot (\Psi^{\Theta f,t_b})^{-1} \cdot \Psi t_f \cdot \Psi^{t_a,\Theta' f}.\end{aligned}$$

Definición 1.13. Sea A una categoría 2. Una equivalencia (f, g, α, β) en A es un par de celdas 1

$$a \underset{f}{\overset{g}{\rightleftarrows}} b$$

con isomorfismos $\alpha : 1_b \xrightarrow{\cong} gf$, $\beta : fg \xrightarrow{\cong} 1_a$, y en este caso decimos que a y b son equivalentes, denotándolo como $a \simeq b$.

Observación 1.14. Es fácil ver que todo seudofuntor $\Phi : A \to X$ preserva equivalencias; en efecto, dado un seudofuntor $\Phi : A \to X$ y (f, g, α, β) una equivalencia en A, obtenemos en X la equivalencia

$$(\Phi f, \Phi g, (\Phi^{f,g})^{-1}\Phi\alpha\Phi_b, \Phi_a^{-1}\Phi\beta\Phi^{g,f}).$$

En particular, el funtor 2 representable $A(a, -) : A \to \mathbf{CAT}$ preserva equivalencias, así que la composición con una equivalencia produce una equivalencia de homocategorías.

Definición 1.15. Una biequivalencia (Φ, Ψ, h, e) de categorías 2 consiste de un par de seudofuntores

$$A \underset{\Psi}{\overset{\Phi}{\rightleftarrows}} B$$

y equivalencias $h : 1_B \xrightarrow{\simeq} \Phi\Psi$, $e : \Psi\Phi \xrightarrow{\simeq} 1_A$ en las respectivas categorías 2 $\mathrm{Hom}(B, B)$ y $\mathrm{Hom}(A, A)$.

Capítulo 2

Seudomónadas y seudomónadas sin iteraciones

Definición 2.1. Una seudomónada D sobre una categoría 2 A es una sexteta $(D, d, m, \beta, \eta, \mu)$ donde $D : A \to A$ es un seudofuntor, $d : 1_A \to D$ y $m : D^2 \to D$ son transformaciones fuertes y $\beta : mdD \to 1_D$, $\eta : 1_D \to mDd$ y $\mu : m(Dm) \to m(mD)$ son modificaciones tales que para todo $a \in A$

$$\begin{tikzcd}
D^4a \arrow[rr, "D^2ma"] \arrow[d, "mD^2a"'] \arrow[dr, "DmDa"] & & D^3a \arrow[dr, "Dma"] \arrow[d, phantom, "\overset{\Leftarrow}{D\mu a}"] & & & D^4a \arrow[rr, "D^2ma"] \arrow[d, "mD^2a"'] & \arrow[d, phantom, "\overset{\Leftarrow}{m^{-1}_{ma}}"] & D^3a \arrow[d, "mDa"'] \arrow[dr, "Dma"] & \\
D^3a \arrow[dr, "mDa"'] & D^3a \arrow[l, phantom, "\overset{\Leftarrow}{\mu Da}"] \arrow[rr, "Dma"'] \arrow[d, "mDa"] & \arrow[d, phantom, "\overset{\Leftarrow}{\mu a}"] & D^2a \arrow[d, "ma"] & = & D^3a \arrow[rr, "Dma"'] \arrow[dr, "mDa"'] & \arrow[d, phantom, "\overset{\Leftarrow}{\mu a}"] & D^2a \arrow[dr, "ma"'] & D^2a \arrow[l, phantom, "\overset{\Leftarrow}{\mu a}"] \arrow[d, "ma"] \\
& D^2a \arrow[rr, "ma"'] & & Da & & & D^2a \arrow[rr, "ma"'] & & Da
\end{tikzcd} \tag{2.1}$$

y

$$\begin{tikzcd}
& & D^2a \arrow[dr, "ma"] & & & & D^3a \arrow[dr, "Dma"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow D\beta a"] & & \\
D^2a \arrow[r, "DdDa"] & D^3a \arrow[ur, "Dma"] \arrow[dr, "mDa"'] & \Downarrow \mu a & Da & = & D^2a \arrow[ur, "DdDa"] \arrow[rr, "1_{D^2a}"'] \arrow[dr, "DdDa"'] & \arrow[d, phantom, "\Downarrow D\eta a"] & D^2a \arrow[r, "ma"] & Da\,. \\
& & D^2a \arrow[ur, "ma"'] & & & & D^3a \arrow[ur, "mDa"'] & &
\end{tikzcd} \tag{2.2}$$

Si d, m son estrictas y β, η, μ identidades, diremos que (D, d, m) es una mónada 2 (o una 2-mónada).

Ejemplo 2.2. Hay un ejemplo clásico elemental (o toda una clase de ejemplos elementales) de seudomónada. Tenemos que toda categoría pequeña $C \in$ **Cat** tiene estructura de comonoide con counidad el único funtor $!_C : C \to \mathbf{1}$ de C a la categoría con un solo objeto y una sola flecha, y con comultiplicación el funtor diagonal $\delta_C : C \to C \times C$; es decir, los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, equal] \arrow[d, "\lambda"'] & C \arrow[r, equal] \arrow[d, "\delta_C"] & C \arrow[d, "\varrho"] \\ \mathbf{1} \times C & C \times C \arrow[l, "!_C \times 1"] \arrow[r, "1 \times !_C"'] & C \times \mathbf{1} \end{tikzcd} \tag{2.3}$$

y

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\delta_C"] \arrow[d, "\delta_C"'] & C \times C \arrow[d, "\delta_C \times 1"] \\ C \times C \arrow[r, "1 \times \delta_C"'] & C \times C \times C \cdot \end{tikzcd} \tag{2.4}$$

Del diagrama (2.4), tenemos que

$$\begin{tikzcd} (((-)^C)^C)^C \arrow[r, "(-)^C(-)^{\delta_C}"] \arrow[d, "(-)^{\delta_C}(-)^C"'] & ((-)^C)^C \arrow[d, "(-)^{\delta_C}"] \\ ((-)^C)^C \arrow[r, "(-)^{\delta_C}"'] & (-)^C \end{tikzcd}$$

conmuta. Del diagrama (2.3),

$$\begin{tikzcd} (-)^C \arrow[r, "(-)^C(-)^{!_C}"] \arrow[dr, "1_{(-)^C}"'] & ((-)^C)^C \arrow[d, "(-)^{\delta_C}"] & (-)^C \arrow[l, "(-)^{!_C}(-)^C"'] \arrow[dl, "1_{(-)^C}"] \\ & (-)^C & \end{tikzcd}$$

conmuta. Además, $(-)^{\delta_C}$ y $(-)^{!_C}$ son transformaciones naturales 2. Que $(-)^{\delta_C}$ y $(-)^{!_C}$ sean transformaciones naturales 2 se sigue del hecho de que **Cat** es cerrada cartesiana; más precisamente, de que tiene exponenciales; es decir, se tiene un isomorfismo

$$\mathbf{Cat}(A \times B, D) \overset{\wp^{-1}}{\cong} \mathbf{Cat}(A, D^B) \,,$$

natural en A y en D. En particular, como los φ_D^{-1} son funtores para cada $D \in \mathbf{Cat}$, dada una transformación natural $\gamma : H \Rightarrow H' : A \to D^B$ y un funtor $G : D \to D'$,

$$G \circ \widehat{H} = \widehat{G^B \circ H} \quad \text{y} \quad G \circ \widehat{\gamma} = \widehat{G^B \circ \gamma}.$$

De la primera igualdad se seguiría la naturalidad de $(-)^{\delta_C}$ y $(-)^{!_C}$ y de la segunda, la naturalidad 2 de $(-)^{\delta_C}$ y $(-)^{!_C}$.

Por lo tanto, $((-)^C, (-)^{!_C}, (-)^{\delta_C})$ es una mónada 2.

Definición 2.3. Una seudomónada sin iteraciones D sobre una categoría 2 A consiste de

(i) una función sobre objetos $\mathrm{Ob}(A) \to \mathrm{Ob}(A)$,

(ii) una celda 1 $da : a \to Da$ para todo $a \in A$,

(iii) un funtor $(-)^{\mathbb{D}} : A(a, Db) \to A(Da, Db)$ para todo par de objetos $a, b \in A$,

(iv) una celda 2 invertible $\mathbb{D}_a : 1_{Da} \to da^{\mathbb{D}}$ para todo $a \in A$,

(v) una celda 2 invertible

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "da"] \arrow[dr, "f"'] & Da \arrow[d, "f^{\mathbb{D}}"] \arrow[dl, phantom, "\swArrow \mathbb{D}_f"] \\ & Db \end{tikzcd}$$

para todo morfismo $f : a \to Db$,

(vi) una celda 2 invertible

$$\begin{tikzcd} Da \arrow[r, "f^{\mathbb{D}}"] \arrow[dr, bend right, "(h^{\mathbb{D}} f)^{\mathbb{D}}"'] & Db \arrow[d, "h^{\mathbb{D}}"] \arrow[dl, phantom, "\swArrow \mathbb{D}_{f,h}"] \\ & Dc \end{tikzcd}$$

para todo $f : a \to Db$ y $h : b \to Dc$.

Y cumple las siguientes condiciones de coherencia:

(i) para todo $a \in A$

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "da"] \arrow[dr, "da"'] \arrow[r, phantom, shift right=4ex, "\Swarrow \mathbb{D}_{da}"] & Da \arrow[d, bend right, "da^{\mathbb{D}}"'] \arrow[d, bend left, "1_{Da}"] \arrow[d, phantom, "\Leftarrow \mathbb{D}_a"] \\ & Da \end{tikzcd} = 1_{da}, \tag{2.5}$$

(ii) para todo $f : a \to Db$

$$\begin{tikzcd} & Da \arrow[dr, "f^{\mathbb{D}}"] \arrow[d, phantom, "\mathbb{D}_{da,f} \Swarrow"] & \\ Da \arrow[ur, bend left=50, "1_{Da}"] \arrow[ur, bend right=20, "da^{\mathbb{D}}"'] \arrow[u, phantom, "\Downarrow \mathbb{D}_a"] \arrow[rr, "(f^{\mathbb{D}} da)^{\mathbb{D}}"'] \arrow[rr, bend right=40, "f^{\mathbb{D}}"'] \arrow[rr, phantom, shift right=3ex, "\Downarrow (\mathbb{D}_f)^{\mathbb{D}}"] & & Db \end{tikzcd} = 1_{f^{\mathbb{D}}}, \tag{2.6}$$

(iii) para todo $f : a \to Db$

$$\begin{tikzcd} & Db \arrow[dr, bend left, "1_{Db}"] \arrow[dr, bend right, "db^{\mathbb{D}}"'] \arrow[dr, phantom, "\Swarrow \mathbb{D}_b"] \arrow[d, phantom, "\Swarrow \mathbb{D}_{f,db}"] & \\ Da \arrow[ur, "f^{\mathbb{D}}"] \arrow[rr, "(db^{\mathbb{D}} f)^{\mathbb{D}}"'] & & Db \end{tikzcd} = (\mathbb{D}_b f)^{\mathbb{D}}, \tag{2.7}$$

(iv) para toda celda 2 $\varphi : f \to g : a \to Db$

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "da"] \arrow[dr, "g"'] \arrow[r, phantom, shift right=3ex, "\Swarrow \mathbb{D}_g"] & Da \arrow[d, bend right, "g^{\mathbb{D}}"'] \arrow[d, bend left, "f^{\mathbb{D}}"] \arrow[d, phantom, "\Leftarrow \varphi^{\mathbb{D}}"] \\ & Db \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} a \arrow[r, "da"] \arrow[dr, bend left=15, "f"] \arrow[dr, bend right=25, "g"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow \varphi"] & Da \arrow[d, "f^{\mathbb{D}}"] \arrow[d, phantom, shift right=3ex, "\Swarrow \mathbb{D}_f"] \\ & Db, \end{tikzcd} \tag{2.8}$$

(v) para todo $f : a \to Db, h : b \to Dc$

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "da"] \arrow[dr, "f"'] \arrow[r, phantom, shift right=3ex, "\Swarrow \mathbb{D}_f"] & Da \arrow[d, "f^{\mathbb{D}}"] \\ & Db \arrow[d, "h^{\mathbb{D}}"] \\ & Dc \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} a \arrow[r, "da"] \arrow[ddr, bend right, "h^{\mathbb{D}} f"'] \arrow[ddr, phantom, "\Leftarrow \mathbb{D}_{h^{\mathbb{D}} f}"] & Da \arrow[dd, "(h^{\mathbb{D}} f)^{\mathbb{D}}"'] \arrow[dr, "f^{\mathbb{D}}"] \arrow[d, phantom, shift left=3ex, "\Leftarrow \mathbb{D}_{f,h}"] & \\ & & Db, \arrow[dl, "h^{\mathbb{D}}"] \\ & Dc & \end{tikzcd} \tag{2.9}$$

(vi) para toda $\varphi : f \to g : a \to Db$ y toda $h : b \to Dc$

$$\begin{tikzcd}
& Db \arrow[dr, "h^{\mathbb{D}}"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\mathbb{D}_{g,h}"] & \\
Da \arrow[ur, bend left=50, "f^{\mathbb{D}}"] \arrow[ur, bend right, "g^{\mathbb{D}}"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow\varphi^{\mathbb{D}}"] \arrow[rr, "(h^{\mathbb{D}}g)^{\mathbb{D}}"'] & & Dc
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
& Db \arrow[dr, "h^{\mathbb{D}}"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\mathbb{D}_{f,h}"] & \\
Da \arrow[ur, "f^{\mathbb{D}}"] \arrow[rr, bend left=15, "(h^{\mathbb{D}}f)^{\mathbb{D}}"] \arrow[rr, bend right=15, "(h^{\mathbb{D}}g)^{\mathbb{D}}"'] \arrow[rr, phantom, "(h^{\mathbb{D}}\varphi)^{\mathbb{D}}\Downarrow"] & & Dc
\end{tikzcd}
\tag{2.10}$$

(vii) para todo $f : a \to Db$ y toda $\psi : h \to k : b \to Dc$

$$\begin{tikzcd}
& Db \arrow[dr, bend left=50, "h^{\mathbb{D}}"] \arrow[dr, bend right, "k^{\mathbb{D}}"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\psi^{\mathbb{D}}"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\mathbb{D}_{f,k}"] & \\
Da \arrow[ur, "f^{\mathbb{D}}"] \arrow[rr, bend right=15, "(k^{\mathbb{D}}f)^{\mathbb{D}}"'] & & Dc
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
& Db \arrow[dr, "h^{\mathbb{D}}"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\mathbb{D}_{f,h}"] & \\
Da \arrow[ur, "f^{\mathbb{D}}"] \arrow[rr, bend left=15, "(h^{\mathbb{D}}f)^{\mathbb{D}}"] \arrow[rr, bend right=15, "(k^{\mathbb{D}}f)^{\mathbb{D}}"'] \arrow[rr, phantom, "(\psi^{\mathbb{D}}f)^{\mathbb{D}}\Downarrow"] & & Dc
\end{tikzcd}
\tag{2.11}$$

(viii) para todo $f : a \to Db, h : b \to Dc$ y $j : c \to De$

$$\begin{tikzcd}
& Db \arrow[r, "h^{\mathbb{D}}"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\mathbb{D}_{f,h}"] & Dc \arrow[dr, "j^{\mathbb{D}}"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\mathbb{D}_{h^{\mathbb{D}}f,j}"] & \\
Da \arrow[ur, "f^{\mathbb{D}}"] \arrow[urr, bend right=15, "(h^{\mathbb{D}}f)^{\mathbb{D}}"'] \arrow[rrr, "(j^{\mathbb{D}}h^{\mathbb{D}}f)^{\mathbb{D}}"'] \arrow[rrr, bend right=50, "((j^{\mathbb{D}}h)^{\mathbb{D}}f)^{\mathbb{D}}"'] \arrow[rrr, phantom, bend right=25, "\Downarrow(\mathbb{D}_{h,j}f)^{\mathbb{D}}"] & & & De
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
& Db \arrow[r, "h^{\mathbb{D}}"] \arrow[drr, bend right=15, "(j^{\mathbb{D}}h)^{\mathbb{D}}"'] \arrow[d, phantom, "\mathbb{D}_{f,j^{\mathbb{D}}h}\Downarrow"] & Dc \arrow[dr, "j^{\mathbb{D}}"] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\mathbb{D}_{h,j}"'] & \\
Da \arrow[ur, bend left, "f^{\mathbb{D}}"] \arrow[rrr, "((j^{\mathbb{D}}h)^{\mathbb{D}}f)^{\mathbb{D}}"'] & & & De
\end{tikzcd}
\tag{2.12}$$

Proposición 2.4. *Las ocho condiciones de coherencia en la definición anterior se pueden reducir a sólo cinco.*

Demostración. Las condiciones (2.6), (2.8), (2.10) y (2.12) implican (2.9).

En efecto, considérese el pegamiento

$$
\begin{tikzcd}[column sep=large]
 & & Da \arrow[dr, "f^{\mathbb{D}}"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\mathbb{D}_{f,g}"] & & \\
 & Da \arrow[ur, bend left, "1_{Da}"] \arrow[ur, "da^{\mathbb{D}}"'] \arrow[u, phantom, "\mathbb{D}_a\Downarrow"] \arrow[rr, "(f^{\mathbb{D}}da)^{\mathbb{D}}"'] \arrow[drrr, "(g^{\mathbb{D}}f^{\mathbb{D}}da)^{\mathbb{D}}"'] \arrow[drrr, bend right, "((g^{\mathbb{D}}f)^{\mathbb{D}}da)^{\mathbb{D}}"'] \arrow[drrr, phantom, bend right=15, "\Swarrow(\mathbb{D}_{f,g}da)^{\mathbb{D}}"] & & Db \arrow[dr, "g^{\mathbb{D}}"] \arrow[d, phantom, "\Swarrow\mathbb{D}_{f^{\mathbb{D}}da,g}"] & \\
a \arrow[ur, "da"] \arrow[drr, "da"'] \arrow[rr, phantom, "\mathbb{D}_{(g^{\mathbb{D}}f)da}\Downarrow"] & & & & Dc \\
 & & Da \arrow[urr, "(g^{\mathbb{D}}f)^{\mathbb{D}}"] \arrow[dr, "f^{\mathbb{D}}"'] \arrow[r, phantom, "\mathbb{D}_{f,g}^{-1}\Downarrow"] & & \\
 & & & Db \arrow[uur, "g^{\mathbb{D}}"'] &
\end{tikzcd}
.
$$

Entonces, aplícase (2.6) al pegamiento de $\mathbb{D}_a$ y de $\mathbb{D}_{f,g}$ para obtener

$$
\begin{tikzcd}[column sep=large]
 & Da \arrow[rr, bend left, "f^{\mathbb{D}}"] \arrow[rr, phantom, bend left=20, "\Downarrow(\mathbb{D}_f^{-1})^{\mathbb{D}}"] \arrow[rr, "(f^{\mathbb{D}}da)^{\mathbb{D}}"'] \arrow[drrr, "(g^{\mathbb{D}}f^{\mathbb{D}}da)^{\mathbb{D}}"'] \arrow[drrr, bend right, "((g^{\mathbb{D}}f)^{\mathbb{D}}da)^{\mathbb{D}}"'] \arrow[drrr, phantom, bend right=15, "\Swarrow(\mathbb{D}_{f,g}da)^{\mathbb{D}}"] & & Db \arrow[dr, "g^{\mathbb{D}}"] \arrow[d, phantom, "\Swarrow\mathbb{D}_{f^{\mathbb{D}}da,g}"] & \\
a \arrow[ur, "da"] \arrow[drr, "da"'] \arrow[rr, phantom, "\mathbb{D}_{(g^{\mathbb{D}}f)da}\Downarrow"] & & & & Dc \\
 & & Da \arrow[urr, "(g^{\mathbb{D}}f)^{\mathbb{D}}"] \arrow[dr, "f^{\mathbb{D}}"'] \arrow[r, phantom, "\mathbb{D}_{f,g}^{-1}\Downarrow"] & & \\
 & & & Db \arrow[uur, "g^{\mathbb{D}}"'] &
\end{tikzcd}
.
$$

Ahora úsese (2.8) en el pegamiento de $(\mathbb{D}_{f,g}da)^{\mathbb{D}}$, $\mathbb{D}_{g^{\mathbb{D}}fda}$ y $\mathbb{D}_{f,g}^{-1}$ para obtener

$$
\begin{tikzcd}[column sep=large]
 & Da \arrow[rr, bend left, "f^{\mathbb{D}}"] \arrow[rr, phantom, bend left=20, "\Downarrow(\mathbb{D}_f^{-1})^{\mathbb{D}}"] \arrow[rr, "(f^{\mathbb{D}}da)^{\mathbb{D}}"'] \arrow[drrr, "(g^{\mathbb{D}}f^{\mathbb{D}}da)^{\mathbb{D}}"'] \arrow[d, phantom, "\mathbb{D}_{g^{\mathbb{D}}f^{\mathbb{D}}da}\Downarrow"] & & Db \arrow[dr, "g^{\mathbb{D}}"] \arrow[d, phantom, "\Swarrow\mathbb{D}_{f^{\mathbb{D}}da,g}"] & \\
a \arrow[ur, "da"] \arrow[rr, "da"'] & & Da \arrow[r, "f^{\mathbb{D}}"'] & Db \arrow[r, "g^{\mathbb{D}}"'] & Dc
\end{tikzcd}
.
$$

Luego úsese (2.10) en el pegamiento de $(\mathbb{D}_f^{-1})^{\mathbb{D}}$ y $\mathbb{D}_{f^{\mathbb{D}}da,g}$ para obtener

$$\begin{tikzcd}
& Da \arrow[rr, "f^{\mathbb{D}}"] \arrow[drrr, bend left=10, "(g^{\mathbb{D}}f)^{\mathbb{D}}"'] \arrow[drrr, bend right=10, "(g^{\mathbb{D}}f^{\mathbb{D}}da)^{\mathbb{D}}"'] \arrow[d, phantom, "\Downarrow \mathbb{D}_{g^{\mathbb{D}}f^{\mathbb{D}}da}"'] \arrow[drr, phantom, "\Downarrow (g^{\mathbb{D}}\mathbb{D}_f^{-1})^{\mathbb{D}}"] & & Db \arrow[dr, "g^{\mathbb{D}}"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow \mathbb{D}_{f,g}"] & \\
a \arrow[ur, "da"] \arrow[r, "da"'] & Da \arrow[r, "f^{\mathbb{D}}"'] & Db \arrow[rr, "g^{\mathbb{D}}"'] & & Dc
\end{tikzcd}.$$

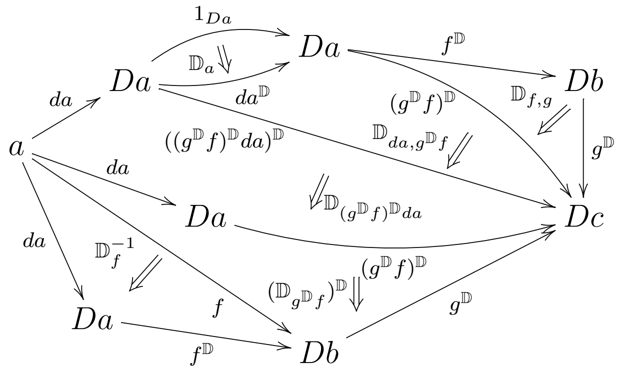
Volvemos a usar (2.8), ahora en el pegamiento de $(g^{\mathbb{D}}\mathbb{D}_f^{-1})$ y $\mathbb{D}_{g^{\mathbb{D}}f^{\mathbb{D}}da}$ y obtenemos

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "da"] \arrow[d, "da"'] \arrow[dr, "f"] \arrow[d, phantom, shift left=6, "\Swarrow \mathbb{D}_f^{-1}"] & Da \arrow[r, "f^{\mathbb{D}}"] \arrow[drr, "(g^{\mathbb{D}}f)^{\mathbb{D}}"'] \arrow[d, phantom, "\Swarrow \mathbb{D}_{g^{\mathbb{D}}f}"] & Db \arrow[dr, "g^{\mathbb{D}}"] \arrow[d, phantom, "\Swarrow \mathbb{D}_{f,g}"] & \\
Da \arrow[r, "f^{\mathbb{D}}"'] & Db \arrow[rr, "g^{\mathbb{D}}"'] & & Dc
\end{tikzcd}$$

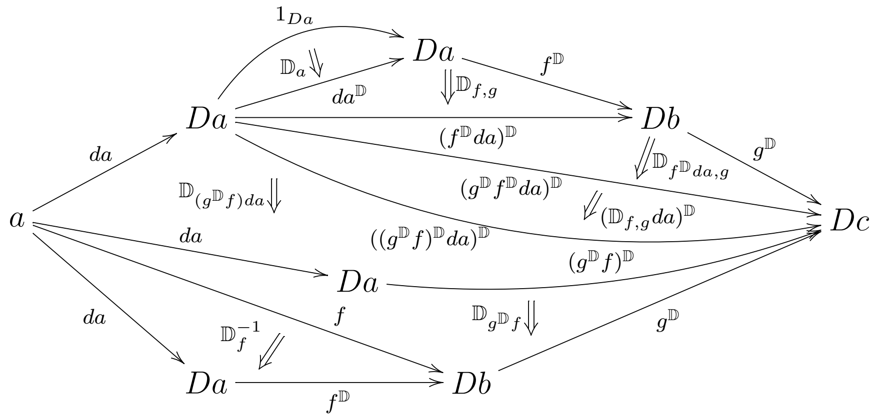
Ahora usamos (2.8) para remplazar la celda 2 $\mathbb{D}_{g^{\mathbb{D}}f}$ como sigue:

$$\begin{tikzcd}
& & Da \arrow[rr, "f^{\mathbb{D}}"] \arrow[ddrrr, bend left=15, "(g^{\mathbb{D}}f)^{\mathbb{D}}"] \arrow[ddrrr, bend right=15, "((g^{\mathbb{D}}f)^{\mathbb{D}}da)^{\mathbb{D}}"'] \arrow[ddrr, phantom, "\Swarrow (\mathbb{D}^{-1}_{g^{\mathbb{D}}f})^{\mathbb{D}}"] & & Db \arrow[ddr, "g^{\mathbb{D}}"] \arrow[dd, phantom, "\Swarrow \mathbb{D}_{f,g}"'] & \\
a \arrow[urr, "da"] \arrow[dr, "da"] \arrow[ddr, "da"'] \arrow[dddrr, "f"] & & & & & \\
& & Da \arrow[rrr, bend right=15, "(g^{\mathbb{D}}f)^{\mathbb{D}}"'] \arrow[urr, phantom, "\Swarrow \mathbb{D}_{(g^{\mathbb{D}}f)^{\mathbb{D}}da}"] & & & Dc \\
& Da \arrow[drr, "f^{\mathbb{D}}"'] \arrow[u, phantom, "\Swarrow \mathbb{D}_f^{-1}"] & & & & \\
& & & Db \arrow[uurr, "g^{\mathbb{D}}"'] \arrow[u, phantom, "(\mathbb{D}_{g^{\mathbb{D}}f})^{\mathbb{D}} \Downarrow"] & &
\end{tikzcd}$$

Entonces usamos (2.6) para remplazar $(\mathbb{D}^{-1}_{g^{\mathbb{D}}f})^{\mathbb{D}}$ y obtenemos



Finalmente usamos (2.12) en el pegamiento de $\mathbb{D}_{f,g}$ y $\mathbb{D}_{da,g^{\mathbb{D}}f}$ para obtener



Cuando comparamos el pegamiento con el que empezamos con este último, vemos que podemos cancelar, en ambos, las cinco celdas 2 superiores; luego, obtenemos una condición equivalente a (2.9).

Ahora mostraremos que la condición (2.5) es superflua. Notemos que el pegamiento de la izquierda es igual a

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "da"] \arrow[dr, bend right, "da"'] \arrow[dr, phantom, near start, "\overset{\mathbb{D}_{da}}{\Downarrow}"] & Da \arrow[d, bend right, "da^{\mathbb{D}}"'] \arrow[d, bend left, "1_{Da}"] \arrow[d, phantom, "\overset{\mathbb{D}_a}{\Leftarrow}"] \\
& Da \arrow[d, "da^{\mathbb{D}}" description] \arrow[d, bend right=70, "1_{Da}"'] \arrow[d, bend left=70, "1_{Da}"] \arrow[d, phantom, shift right=4ex, "\overset{\mathbb{D}_a^{-1}}{\Leftarrow}"] \arrow[d, phantom, shift left=4ex, "\overset{\mathbb{D}_a}{\Leftarrow}"] \\
& Da
\end{tikzcd}
$$

Aquí usamos (2.6) sobre la composición $\mathbb{D}_a da^{\mathbb{D}}$ y vemos que el pegamiento anterior es igual a

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "da"] \arrow[dr, bend right, "da"'] \arrow[dr, phantom, near start, "\overset{\mathbb{D}_{da}}{\Downarrow}"] & Da \arrow[d, "da^{\mathbb{D}}"] \arrow[dd, bend left=30, "(da^{\mathbb{D}}da)^{\mathbb{D}}"'] \arrow[dd, bend left=60, "da^{\mathbb{D}}"'] \arrow[dd, bend left=90, "1_{Da}"] \arrow[dd, phantom, shift left=9ex, "\overset{(\mathbb{D}_{da}^{-1})^{\mathbb{D}}}{\Leftarrow}"] \arrow[dd, phantom, shift left=14ex, "\overset{\mathbb{D}_a}{\Leftarrow}"] \\
& Da \arrow[d, "da^{\mathbb{D}}"'] \arrow[d, bend right=70, "1_{Da}"'] \arrow[d, phantom, shift right=3ex, "\overset{\mathbb{D}_a^{-1}}{\Leftarrow}"] \arrow[d, phantom, shift left=4ex, "\overset{\mathbb{D}_{da,da}^{-1}}{\Leftarrow}"] \\
& Da
\end{tikzcd}
$$

Entonces usamos (2.9) en el pegamiento de $\mathbb{D}_{da}$ y $\mathbb{D}_{da,da}^{-1}$ para obtener

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "da"] \arrow[dr, "da"'] & Da \arrow[dd, bend left=30, "(da^{\mathbb{D}}da)^{\mathbb{D}}"'] \arrow[dd, bend left=60, "da^{\mathbb{D}}"'] \arrow[dd, bend left=90, "1_{Da}"] \arrow[dd, phantom, shift left=9ex, "\overset{(\mathbb{D}_{da}^{-1})^{\mathbb{D}}}{\Leftarrow}"] \arrow[dd, phantom, shift left=14ex, "\overset{\mathbb{D}_a}{\Leftarrow}"] \\
& Da \arrow[d, "da^{\mathbb{D}}"'] \arrow[d, bend right=70, "1_{Da}"'] \arrow[d, phantom, shift right=3ex, "\overset{\mathbb{D}_a^{-1}}{\Leftarrow}"] \arrow[d, phantom, shift left=4ex, "\overset{\mathbb{D}_{da^{\mathbb{D}}da}}{\Leftarrow}"] \\
& Da
\end{tikzcd}
$$

Nótese que la condición (2.8) nos dice en particular que el pegamiento de $\mathbb{D}_{da^{\mathbb{D}}da}$ y $(\mathbb{D}_{da}^{-1})^{\mathbb{D}}$ es la identidad de $da^{\mathbb{D}}da$. Luego, el pegamiento original es la identidad de da. Así que (2.5) es consecuencia de (2.6), (2.8) y (2.9).

Afirmamos que (2.7) se sigue de (2.6), (2.10), (2.11) y (2.12). En efecto, (2.7) es la identidad de $f^{\mathbb{D}}$, igual a

$$
\begin{tikzcd}
 & Db \arrow[dr, "db^{\mathbb{D}}"'] \arrow[dr, bend left=40, "1_{Db}"] \arrow[dr, phantom, bend left=20, "(\mathbb{D}^{-1}_{da})^{\mathbb{D}} \swarrow"] \arrow[d, phantom, "\mathbb{D}_{f,db}\Downarrow"] & \\
Da \arrow[ur, "f^{\mathbb{D}}"] \arrow[rr, "(db^{\mathbb{D}}f)^{\mathbb{D}}"'] \arrow[rr, bend right=40, "f^{\mathbb{D}}"'] \arrow[rr, phantom, bend right=20, "(\mathbb{D}_b^{-1}f)^{\mathbb{D}}\Downarrow"] & & Db
\end{tikzcd}
$$

y este último pegamiento claramente es igual a

$$
\begin{tikzcd}
 & Db \arrow[dr, "db^{\mathbb{D}}"'] \arrow[dr, bend left=40, "1_{Db}"] \arrow[dr, phantom, bend left=20, "\mathbb{D}_b \swarrow"] \arrow[d, phantom, "\mathbb{D}_{f,db}\Downarrow"] & & \\
Da \arrow[ur, "f^{\mathbb{D}}"] \arrow[rr, "(db^{\mathbb{D}}f)^{\mathbb{D}}"'] \arrow[rr, bend right=40, "f^{\mathbb{D}}"'] \arrow[rr, phantom, bend right=20, "(\mathbb{D}_b^{-1}f)^{\mathbb{D}}\Downarrow"] & & Db \arrow[r, "db^{\mathbb{D}}"'] \arrow[r, bend left=50, "1_{Db}"] \arrow[r, bend right=50, "1_{Db}"'] \arrow[r, phantom, bend left=25, "\mathbb{D}_b\Downarrow"] \arrow[r, phantom, bend right=25, "\Downarrow\mathbb{D}_b^{-1}"] & Db
\end{tikzcd}
$$

Entonces usamos (2.6) en $db^{\mathbb{D}}\mathbb{D}_b$ y obtenemos

$$
\begin{tikzcd}
 & Db \arrow[dr, "db^{\mathbb{D}}"] \arrow[d, phantom, "\mathbb{D}_{f,db}\Downarrow"] \arrow[drr, "(db^{\mathbb{D}}db)^{\mathbb{D}}"] \arrow[drr, bend left=30, "db^{\mathbb{D}}"] \arrow[drr, bend left=60, "1_{Db}"] \arrow[drr, phantom, bend left=45, "\mathbb{D}_b \swarrow"] \arrow[drr, phantom, bend left=15, "(\mathbb{D}^{-1}_{db})^{\mathbb{D}} \swarrow"] & & \\
Da \arrow[ur, "f^{\mathbb{D}}"] \arrow[rr, "(db^{\mathbb{D}}f)^{\mathbb{D}}"'] \arrow[rr, bend right=40, "f^{\mathbb{D}}"'] \arrow[rr, phantom, bend right=20, "(\mathbb{D}_b^{-1}f)^{\mathbb{D}}\Downarrow"] & & Db \arrow[r, "db^{\mathbb{D}}"'] \arrow[r, bend right=50, "1_{Db}"'] \arrow[r, phantom, bend right=25, "\Downarrow\mathbb{D}_b^{-1}"] \arrow[u, phantom, "\mathbb{D}^{-1}_{db,db} \swarrow"] & Db
\end{tikzcd}
$$

Ahora usamos (2.12) en el pegamiento de $\mathbb{D}_{f,db}$ y $\mathbb{D}^{-1}_{db,db}$ para obtener

$$\begin{tikzcd}[column sep=large, row sep=large]
 & Db \arrow[rrd, bend left=60, "1_{Db}"] \arrow[rrd, bend left=30, "db^{\mathbb{D}}"] \arrow[rrd, "(db^{\mathbb{D}}db)^{\mathbb{D}}"'] \arrow[rrd, phantom, bend left=45, "\Downarrow \mathbb{D}_b"] \arrow[rrd, phantom, bend left=15, "\Downarrow (\mathbb{D}^{-1}_{db})^{\mathbb{D}}"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow \mathbb{D}_{db^{\mathbb{D}}db,f}"] & & \\
Da \arrow[ru, "f^{\mathbb{D}}"] \arrow[rrr, bend left=15, "((db^{\mathbb{D}}db)^{\mathbb{D}}f)^{\mathbb{D}}"] \arrow[rrr, bend right=10, "(db^{\mathbb{D}}db^{\mathbb{D}}f)^{\mathbb{D}}"] \arrow[rrr, phantom, "\Downarrow (\mathbb{D}^{-1}_{db,db}f)^{\mathbb{D}}"] \arrow[rrd, "(db^{\mathbb{D}}f)^{\mathbb{D}}"] \arrow[rrd, bend right=40, "f^{\mathbb{D}}"'] \arrow[rrd, phantom, bend right=20, "(\mathbb{D}^{-1}_b f)^{\mathbb{D}} \Downarrow"] & & & Db \\
 & & Db \arrow[ru, "db^{\mathbb{D}}"] \arrow[ru, bend right=40, "1_{Db}"'] \arrow[ru, phantom, bend right=20, "\Downarrow \mathbb{D}^{-1}_b"] \arrow[u, phantom, "\mathbb{D}^{-1}_{db^{\mathbb{D}}f,db} \Downarrow"] &
\end{tikzcd}$$

Ahora usamos (2.11) en el pegamiento de $\mathbb{D}_{db^{\mathbb{D}}db,f}$ y $(\mathbb{D}^{-1}_{db})^{\mathbb{D}}$ y obtenemos

$$\begin{tikzcd}[column sep=large, row sep=large]
 & Db \arrow[rrd, bend left=60, "1_{Db}"] \arrow[rrd, bend left=30, "db^{\mathbb{D}}"] \arrow[rrd, phantom, bend left=45, "\Downarrow \mathbb{D}_b"] \arrow[rrd, phantom, "\Downarrow \mathbb{D}_{f,db}"] & & \\
Da \arrow[ru, "f^{\mathbb{D}}"] \arrow[rrr, bend left=40, "(db^{\mathbb{D}}f)^{\mathbb{D}}"] \arrow[rrr, phantom, bend left=28, "((\mathbb{D}^{-1}_{db})^{\mathbb{D}}f)^{\mathbb{D}} \Downarrow"] \arrow[rrr, bend left=15, "((db^{\mathbb{D}}db)^{\mathbb{D}}f)^{\mathbb{D}}"] \arrow[rrr, bend right=10, "(db^{\mathbb{D}}db^{\mathbb{D}}f)^{\mathbb{D}}"] \arrow[rrr, phantom, "\Downarrow (\mathbb{D}^{-1}_{db,db}f)^{\mathbb{D}}"] \arrow[rrd, "(db^{\mathbb{D}}f)^{\mathbb{D}}"] \arrow[rrd, bend right=40, "f^{\mathbb{D}}"'] \arrow[rrd, phantom, bend right=20, "(\mathbb{D}^{-1}_b f)^{\mathbb{D}} \Downarrow"] & & & Db \\
 & & Db \arrow[ru, "db^{\mathbb{D}}"] \arrow[ru, bend right=40, "1_{Db}"'] \arrow[ru, phantom, bend right=20, "\Downarrow \mathbb{D}^{-1}_b"] \arrow[u, phantom, "\mathbb{D}^{-1}_{db^{\mathbb{D}}f,db} \Downarrow"] &
\end{tikzcd}$$

Tenemos que (2.6) implica que $\mathbb{D}^{-1}_{db,db}(\mathbb{D}^{-1}_{db})^{\mathbb{D}}$ es igual a $db^{\mathbb{D}}\mathbb{D}_b$; de aquí,

$$\begin{tikzcd}
& Db \arrow[drr, bend left=40, "1_{Db}"] \arrow[drr, "db^{\mathbb{D}}"'] \arrow[rr, phantom, "\mathbb{D}_b \swarrow"] & & \\
Da \arrow[ur, "f^{\mathbb{D}}"] \arrow[rrr, bend left=15, "(db^{\mathbb{D}}f)^{\mathbb{D}}"] \arrow[rrr, "(db^{\mathbb{D}}db^{\mathbb{D}}f)^{\mathbb{D}}"'] \arrow[drr, "(db^{\mathbb{D}}f)^{\mathbb{D}}"'] \arrow[drr, bend right=40, "f^{\mathbb{D}}"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow(db^{\mathbb{D}}\mathbb{D}_b f)^{\mathbb{D}}"] \arrow[dr, phantom, "(\mathbb{D}_b^{-1}f)^{\mathbb{D}}\Downarrow"] & \arrow[rr, phantom, "\swarrow \mathbb{D}_{f,db}"] & \arrow[d, phantom, "\mathbb{D}^{-1}_{db^{\mathbb{D}}f,db}\Downarrow"] & Db \\
& & Db \arrow[ur, "db^{\mathbb{D}}"] \arrow[ur, bend right=40, "1_{Db}"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow \mathbb{D}_b^{-1}"] &
\end{tikzcd}$$

Finalmente aplicamos (2.10) al pegamiento de $(\mathbb{D}_b^{-1}f)^{\mathbb{D}}$ y $\mathbb{D}_{db^{\mathbb{D}}f,db}$ y todo se cancela, así que obtenemos la identidad de $f^{\mathbb{D}}$. $\square$

Proposición 2.5. *Dada una seudomónada sin iteraciones D sobre una categoría 2 A, se puede inducir un seudofuntor $D' : A \to A$ como sigue: se define D' sobre objetos como lo está D sobre objetos. Dados dos objetos $a, b \in \mathrm{Ob}(A)$, se define $D'_{a,b}$ como la composición*

$$A(a,b) \xrightarrow{db\circ -} A(a,Db) \xrightarrow{(-)^{\mathbb{D}}} A(Da,Db)\ .$$

Para todo $a \in \mathrm{Ob}(A)$, se define $D'_a := \mathbb{D}_a$. Para $f : a \to b$ y $h : b \to c$, se define $D'^{f,h} : D'hD'f \to D'(hf)$ como $(\mathbb{D}_{dch}f)^{\mathbb{D}} \cdot \mathbb{D}_{dbf,dch}$.

Proposición 2.6. *Dada una seudomónada sin iteraciones D, la familia de celdas 1 $\langle da : a \to Da\rangle_{a\in A}$ se puede extender a una transformación fuerte $d : 1_A \to D'$, donde D' es el seudofuntor inducido en la proposición anterior: dado $f : a \to b$, se define $d_f := \mathbb{D}_{dbf}$,*

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "da"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\swarrow d_f"] & Da \arrow[d, "(dbf)^{\mathbb{D}} = D'f"] \\
b \arrow[r, "db"'] & Db\ .
\end{tikzcd}$$

Proposición 2.7. *Dada una seudomónada sin iteraciones D, se puede definir una transformación fuerte $m : D'^2 \to D'$: dado $a \in A$, se define*

$ma := (1_{Da})^{\mathbb{D}}$ y, dada $f : a \to b$, se define m_f como

$$
\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
D'^2a \arrow[r, "(1_{Da})^{\mathbb{D}}"] \arrow[d, "D'^2 f"'] \arrow[dr, bend left=20, "(D'f)^{\mathbb{D}}"] \arrow[dr, bend right=20, "((1_{Db})^{\mathbb{D}} dDbD'f)^{\mathbb{D}}"'] \arrow[dr, phantom, "\Swarrow (\mathbb{D}^{-1}_{1_{Db}} D'f)^{\mathbb{D}}"] & D'a \arrow[d, "D'f"] \arrow[dl, phantom, "\Swarrow \mathbb{D}_{1_{Da},dbf}", near start] \\
D'^2b \arrow[r, "(1_{Db})^{\mathbb{D}}"'] \arrow[ur, phantom, "\Swarrow \mathbb{D}^{-1}_{dDbD'f,1_{Db}}", near end] & D'b .
\end{tikzcd}
$$

Proposición 2.8. *Dada una seudomónada sin iteraciones D, se puede definir el siguiente par de modificaciones: dado $a \in A$, se define $\beta a := \mathbb{D}_{1_{Da}}$ y ηa como*

$$
\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=large]
D'a \arrow[rr, bend left=50, "1_{Da}"] \arrow[rr, bend left=10, "da^{\mathbb{D}}"{name=U}] \arrow[rr, bend right=10, "(madDada)^{\mathbb{D}}"'{name=L}] \arrow[dr, bend right, "D'da"'] \arrow[rr, phantom, bend left=30, "\Downarrow D'_a"] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow (\mathbb{D}^{-1}_{1_{Da}} da)^{\mathbb{D}}"] & & D'a . \\
& D'^2a \arrow[ur, bend right, "ma"'] \arrow[u, phantom, "\Downarrow \mathbb{D}^{-1}_{dDada,1_{Da}}"] &
\end{tikzcd}
$$

Es decir, se tienen las modificaciones $\beta : mdD' \to 1_{D'}$ y $\eta : 1_{D'} \to mD'd$.

Proposición 2.9. *Dada una seudomónada sin iteraciones D, se puede definir una modificación $\mu : m(D'm) \to m(mD')$ como sigue: dado $a \in A$, definamos μa como*

$$
\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
D'^3a \arrow[r, "D'ma"] \arrow[d, "mD'a"'] \arrow[dr, bend left=20, "(madDama)^{\mathbb{D}}"] \arrow[dr, bend right=20, "ma^{\mathbb{D}}"'] \arrow[dr, phantom, "\Swarrow (\mathbb{D}_{1_{Da}} ma)^{\mathbb{D}}"] & D'^2a \arrow[d, "ma"] \arrow[dl, phantom, "\Swarrow \mathbb{D}_{dDama,1_{Da}}", near start] \\
D'^2a \arrow[r, "ma"'] \arrow[ur, phantom, "\Swarrow \mathbb{D}^{-1}_{1_{D^2a},1_{Dba}}", near end] & D'a .
\end{tikzcd}
$$

Teorema 2.10. *Toda seudomónada sin iteraciones D induce una seudomónada $(D', d, m, \beta, \eta, \mu)$, donde $D', d, m, \beta, \eta, \mu$ son el seudofuntor, las transformaciones fuertes y las modifiaciones de las proposiciones anteriores, respectivamente.*

Teorema 2.11. *Si $(U, u, n\beta, \eta, \mu)$ es una seudomónada sobre una categoría 2 A con $U1_a = 1_{Ua}$ para todo $a \in A$, entonces U induce una seudomónada sin iteraciones D de la siguiente manera. Sean $a, b \in \mathrm{Ob}(A)$; defínase $Da := Ua$, $da := ua$, $(-)^{\mathbb{D}}$ como la composición*

$$A(a, Ub) \xrightarrow{U} A(Ua, U^2b) \xrightarrow{nb_\star} A(Ua, Ub) \ ,$$

$\mathbb{D}_a := \eta a : 1_{Ua} \to nUda$. Sean $f : a \to Ub$ y $h : b \to Uc$ en A; defínase $\mathbb{D}_f$ como el pegamiento

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "ua"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\not\Downarrow u_f"] & Ua \arrow[d, "Uf"] \\
Ub \arrow[r, "uUb"] \arrow[dr, "1_{Ub}"'] & U^2b \arrow[d, "nb"] \arrow[dl, phantom, "\not\Downarrow \beta b"] \\
 & Ub
\end{tikzcd}$$

y $\mathbb{D}_{f,h}$ como el pegamiento

$$\begin{tikzcd}
Ua \arrow[r, "Uf"] & U^2a \arrow[r, "nb"] \arrow[d, "U^2h"'] \arrow[dr, phantom, "\not\Downarrow n_h"] & Ub \arrow[d, "Uh"] \\
 & U^3c \arrow[r, "nUc"'] \arrow[d, "Unc"'] \arrow[dr, phantom, "\not\Downarrow \mu^{-1}c"] & U^2c \arrow[d, "nc"] \\
 & U^2c \arrow[r, "nc"'] & Uc \ .
\end{tikzcd}$$

Capítulo 3

Seudoálgebras

Definición 3.1. Sea $(D, d, m, \beta, \eta, \mu)$ una seudomónada sobre una categoría 2 A. Un álgebra laxa de D es una cuarteta (a, h, ψ, α) donde $a \in \mathrm{Ob}(A)$, $h : Da \to a$ es una celda 1 de A, ψ y α son celdas 2 de A

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "da"] \arrow[dr, "1_a"'] & Da \arrow[d, "h"] \arrow[dl, phantom, "\Leftarrow\psi"] \\
& a
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
D^2a \arrow[r, "Dh"] \arrow[d, "ma"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\Leftarrow}{\alpha}"] & Da \arrow[d, "h"] \\
Da \arrow[r, "h"'] & a
\end{tikzcd}
$$

y tal que satisface las siguientes condiciones de coherencia:

$$
\begin{tikzcd}
D^3a \arrow[rr, "D^2h"] \arrow[d, "mDa"'] \arrow[dr, "Dma"] & & D^2a \arrow[dr, "Dh"] \arrow[d, phantom, "\overset{\Leftarrow}{D\alpha}"] & \\
D^2a \arrow[dr, "ma"'] \arrow[r, phantom, "\underset{\mu a}{\Leftarrow}"] & D^2a \arrow[rr, "Dh"'] \arrow[d, "ma"] & \arrow[d, phantom, "\overset{\Leftarrow}{\alpha}"] & Da \arrow[d, "h"] \\
& Da \arrow[rr, "h"'] & & a
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
D^3a \arrow[rr, "D^2h"] \arrow[d, "mDa"'] \arrow[drr, phantom, "\overset{\Leftarrow}{m_h^{-1}}"] & & D^2a \arrow[d, "ma"'] \arrow[dr, "Dh"] & \\
D^2a \arrow[rr, "Dh"'] \arrow[dr, "ma"'] & \arrow[d, phantom, "\overset{\Leftarrow}{\alpha}"] & Da \arrow[dr, "h"'] \arrow[r, phantom, "\underset{\alpha}{\Leftarrow}"] & Da \arrow[d, "h"] \\
& Da \arrow[rr, "h"'] & & a
\end{tikzcd}
, \tag{3.1}
$$

$$
\begin{tikzcd}
& & Da \arrow[dr, "h"] & \\
Da \arrow[r, "Dda"] & D^2a \arrow[ur, "Dh"] \arrow[dr, "ma"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow\alpha"] & & a \\
& & Da \arrow[ur, "h"'] &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
& D^2a \arrow[dr, "Dh"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow D\psi"] & & \\
Da \arrow[ur, "Dda"] \arrow[rr, "1_{Da}"'] \arrow[dr, "Dda"'] & \arrow[d, phantom, "\Downarrow\eta a"] & Da \arrow[r, "h"] & a \\
& D^2a \arrow[ur, "ma"'] & &
\end{tikzcd}
\tag{3.2}
$$

y

$$
\begin{tikzcd}
Da \arrow[r, "dDa"] \arrow[dr, "1_{Da}"'] & D^2a \arrow[r, "Dh"] \arrow[d, "ma"] \arrow[dl, phantom, "\Swarrow\beta a"] & Da \arrow[d, "h"] \\
& Da \arrow[r, "h"'] \arrow[ur, phantom, "\Leftarrow\alpha"] & a
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
Da \arrow[r, "dDa"] \arrow[d, "h"'] & D^2a \arrow[d, "Dh"] \arrow[dl, phantom, "\Leftarrow d_h"] \\
a \arrow[r, "da"'] \arrow[dr, "1_a"'] & Da \arrow[d, "h"] \arrow[dl, phantom, "\Swarrow\psi"] \\
& a
\end{tikzcd}
\tag{3.3}
$$

Un álgebra colaxa de D es una cuarteta (a, h, ζ, γ) donde $a \in \mathrm{Ob}(A)$, $h : Da \to a$ es una celda 1 de A, ζ y γ son celdas 2 de A, y tal que satisface las condiciones de coherencia anteriores, salvo que la dirección de las celdas 2 en los diagramas es en sentido opuesto.

Una seudoálgebra de D es un álgebra laxa (a, h, ψ, α) de D tal que ψ y α son invertibles. Una seudoálgebra normal de D es una seudoálgebra de D en la cual ψ es una identidad.

Proposición 3.2. *Sean $(D, d, m, \beta, \eta, \mu)$ una seudomónada sobre una categoría 2 A y (a, h, ψ, α) una cuarteta como en un álgebra laxa de D. Si ψ y α son invertibles y satisfacen* (3.1) *y* (3.2)*, entonces satisfacen* (3.3).

Demostración. Consideremos el siguiente pegamiento:

$$
\begin{tikzcd}
& D^2a \arrow[r, "Dh"] \arrow[dr, "ma"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\beta a"] & Da \arrow[dr, "h"] \arrow[d, phantom, "\Leftarrow\chi"] & & \\
Da \arrow[ur, "dDa"] \arrow[rr, "1"'] \arrow[d, "dDa"'] & {} & Da \arrow[r, "h"'] & a \arrow[d, "da"] & \\
D^2a \arrow[rr, "1"] \arrow[dr, "DdDa"'] & {} \arrow[u, phantom, "\Leftarrow d_h^{-1}"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\eta Da"] & D^2a \arrow[r, "Dh"] \arrow[dr, "ma"'] & Da \arrow[dr, "h"] \arrow[d, phantom, "\Leftarrow\chi"] & \\
& D^3a \arrow[ur, "mDa"'] & & Da \arrow[r, "h"'] & a
\end{tikzcd}
$$

Hágase la siguiente sustitución:

$$
\begin{tikzcd}
 & D^2a \arrow[r, "Dh"] \arrow[dr, "ma"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\beta a"] & Da \arrow[dr, "h"] \arrow[d, phantom, "\Lleftarrow \chi"] & \\
Da \arrow[ur, "dDa"] \arrow[rr, "1"'] \arrow[d, "dDa"'] & & Da \arrow[r, "h"'] \arrow[d, phantom, "\Lleftarrow d_h^{-1}"] & a \arrow[d, "da"] \\
D^2a \arrow[rr, "1"] & & D^2a \arrow[r, "Dh"] & Da
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
 & D^2a \arrow[r, "Dh"] \arrow[d, "dD^2a"] \arrow[dl, phantom, "\Lleftarrow d_{dDa}^{-1}"] & Da \arrow[d, "dDa"] \arrow[dr, "h"] \arrow[dl, phantom, "\Lleftarrow d_{Dh}^{-1}"] & \\
Da \arrow[ur, "dDa"] \arrow[d, "dDa"'] & D^3a \arrow[r, "D^2h"] \arrow[dr, "Dma"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow D\beta a"] & D^2a \arrow[dr, "Dh"] \arrow[d, phantom, "\Lleftarrow D\chi"] \arrow[r, phantom, "\Lleftarrow d_h^{-1}"] & a \arrow[d, "da"] \\
D^2a \arrow[ur, "DdDa"] \arrow[rr, "1"'] & & D^2a \arrow[r, "Dh"'] & Da
\end{tikzcd}
$$

usando que $d_{h\circ Dh\circ dDa}^{-1}$ es igual al pegamiento de d_{dDa}^{-1}, d_{Dh}^{-1} y d_h^{-1}. Hágase entonces la sustitución (2.2). Luego, la siguiente:

$$
\begin{tikzcd}
Da \arrow[r, "dDa"] \arrow[d, "dDa"'] \arrow[dr, phantom, "\Lleftarrow d_{dDa}^{-1}"] & D^2a \arrow[r, "Dh"] \arrow[d, "dD^2a"] \arrow[dr, phantom, "\Lleftarrow d_{Dh}^{-1}"] & Da \arrow[d, "dDa"] \\
D^2a \arrow[r, "DdDa"'] & D^3a \arrow[r, "D^2h"'] & D^2a
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
 & & D^2a \arrow[drr, "Dh"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow d_h"] & & \\
Da \arrow[urr, "dDa"] \arrow[rr, "h"] \arrow[d, "dDa"'] \arrow[drr, phantom, "\Lleftarrow d_h^{-1}"] & & a \arrow[rr, "da"] \arrow[d, "da"] \arrow[drr, phantom, "\Lleftarrow d_{da}^{-1}"] & & Da \arrow[d, "dDa"] \\
D^2a \arrow[rr, "Dh"'] \arrow[drr, "DdDa"'] & & Da \arrow[rr, "Dda"'] \arrow[d, phantom, "\Downarrow Dd_h^{-1}"] & & D^2a \\
 & & D^3a \arrow[urr, "D^2h"'] & &
\end{tikzcd}
.
$$

Ahora hágase la sustitución

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "da"] \arrow[d, "da"'] \arrow[dr, phantom, "\Lleftarrow d_{da}^{-1}"] & Da \arrow[r, "h"] \arrow[d, "dDa"] \arrow[dr, phantom, "\Lleftarrow d_h^{-1}"] & a \arrow[d, "da"] \\
Da \arrow[r, "Dda"'] & D^2a \arrow[r, "Dh"'] & Da
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
 & Da \arrow[dr, "h"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\psi"] & \\
a \arrow[ur, "da"] \arrow[rr, "1"'] \arrow[d, "da"'] & & a \arrow[d, "da"] \\
Da \arrow[rr, "1"] \arrow[dr, "Dda"'] & {} \arrow[d, phantom, "\Downarrow D\psi^{-1}"] & Da \\
 & D^2a \arrow[ur, "Dh"'] &
\end{tikzcd}
.
$$

Como consecuencia de (3.2), se tiene que el pegamiento de $D\psi^{-1}$ y χ es $h\circ\eta a$. Por otro lado, el pegamiento de ηa, Dd_h^{-1} y m_h^{-1} es $Dh\circ\eta Da$. Finalmente, se obtiene el siguiente pegamiento:

$$
\begin{tikzcd}
 & D^2a \arrow[r, "Dh"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow d_h"] & Da \arrow[dr, "h"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\psi"] & & \\
Da \arrow[ur, "dDa"] \arrow[r, "h"'] \arrow[d, "dDa"'] & a \arrow[ur, "da"'] \arrow[rr, "1"'] \arrow[dr, phantom, "\Leftarrow d_h^{-1}"] & & a \arrow[d, "da"] & \\
D^2a \arrow[rr, "1"] \arrow[dr, "DdDa"'] & \arrow[d, phantom, "\Downarrow\eta Da"] & D^2a \arrow[r, "Dh"] \arrow[dr, "ma"'] & Da \arrow[dr, "h"] \arrow[d, phantom, "\Leftarrow\chi"] & \\
 & D^3a \arrow[ur, "mDa"'] & & Da \arrow[r, "h"'] & a
\end{tikzcd} ;
$$

así que, como d_h^{-1}, ηDa y χ son invertibles, se obtiene (3.3) (considerar el diagrama con el que se inició). $\square$

Nota 3.3. Dada una seudomónada $(D, d, m, \beta, \eta, \mu)$, por la proposición anterior, una seudoálgebra de $(D, d, m, \beta, \eta, \mu)$ se suele definir como una cuarteta (a, h, ψ, χ), con ψ y χ celdas 2 invertibles, tal que satisface (3.1) y (3.2).

Definición 3.4. Sea $(D, d, m, \beta, \eta, \mu)$ una seudomónada sobre la categoría 2 A y sean $(a, h, \psi, \alpha), (b, k, \varphi, \gamma)$ seudoálgebras de D. Una celda 1

$$(f, \varrho) : (a, h, \psi, \alpha) \to (b, k, \varphi, \gamma)$$

es un par (f, ϱ) donde $f : a \to b$ es una celda 1 en A y

$$
\begin{tikzcd}
Da \arrow[r, "Df"] \arrow[d, "h"'] \arrow[dr, phantom, "\Leftarrow\varrho"] & Db \arrow[d, "k"] \\
a \arrow[r, "f"'] & b
\end{tikzcd}
$$

es una celda 2 invertible en A tal que satisface las siguientes dos condiciones:

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "da"] \arrow[dr, "1_a"'] & Da \arrow[r, "Df"] \arrow[d, "h"] \arrow[dl, phantom, "\Downarrow\psi"] \arrow[dr, phantom, "\Leftarrow\varrho"] & Db \arrow[d, "k"] \\
 & a \arrow[r, "f"'] & b
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "da"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\Leftarrow d_f"] & Da \arrow[d, "Df"] \\
b \arrow[r, "db"] \arrow[dr, "1_b"'] & Db \arrow[d, "k"] \arrow[dl, phantom, "\Downarrow\varphi"] \\
 & b
\end{tikzcd}
\tag{3.4}
$$

y

$$
\begin{tikzcd}
D^2a \arrow[rr, "D^2f"] \arrow[d, "ma"'] \arrow[dr, "Dh"] & & D^2b \arrow[dr, "Dk"] \arrow[d, phantom, "\overset{\Leftarrow}{D\varrho}"] & \\
Da \arrow[r, phantom, "\underset{\alpha}{\Leftarrow}"] \arrow[dr, "h"'] & Da \arrow[rr, "Df"'] \arrow[d, "h"] & \arrow[d, phantom, "\overset{\Leftarrow}{\varrho}"] & Db \arrow[d, "k"] \\
& a \arrow[rr, "f"'] & & b
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
D^2a \arrow[rr, "D^2f"] \arrow[d, "ma"'] & \arrow[d, phantom, "\overset{\Leftarrow}{m_f^{-1}}"] & D^2b \arrow[d, "mb"'] \arrow[dr, "Dk"] & \\
Da \arrow[rr, "Df"'] \arrow[dr, "h"'] & \arrow[d, phantom, "\overset{\Leftarrow}{\varrho}"] & Db \arrow[r, phantom, "\underset{\gamma}{\Leftarrow}"] \arrow[dr, "k"'] & Db \arrow[d, "k"] \\
& a \arrow[rr, "f"'] & & b.
\end{tikzcd}
\tag{3.5}
$$

Dadas dos celdas 1 $(f, \varrho), (f', \varrho') : (a, h, \psi, \alpha) \to (b, k, \varphi, \gamma)$, una celda 2

$$\xi : (f, \varrho) \Rightarrow (f', \varrho')$$

es una celda 2 $\xi : f \Rightarrow f'$ en A tal que

$$
\begin{tikzcd}
Da \arrow[r, "Df"] \arrow[d, "h"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\varrho"] & Db \arrow[d, "k"] \\
a \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "f'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\xi"] & b
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
Da \arrow[r, bend left, "Df"] \arrow[r, bend right, "Df'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow D\xi"] \arrow[d, "h"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\varrho'"] & Db \arrow[d, "k"] \\
a \arrow[r, "f'"'] & b.
\end{tikzcd}
\tag{3.6}
$$

Las seudoálgebras de D, las celdas 1 y celdas 2 anteriores forman una categoría 2, la cual denotaremos como D-Alg.

Definición 3.5. Sea D una seudomónada sin iteraciones sobre la categoría 2 A. Una seudoálgebra de D consiste de

(i) un objeto a de A,

(ii) un funtor $(-)^{\mathfrak{a}} : A(x, a) \to A(Dx, a)$ para todo $x \in A$,

(iii) una celda 2 invertible

$$
\begin{tikzcd}
x \arrow[r, "dx"] \arrow[dr, "h"'] & Dx \arrow[d, "h^{\mathfrak{a}}"] \arrow[dl, phantom, "\Downarrow\mathfrak{a}_h"] \\
& a
\end{tikzcd}
$$

para toda $h : x \to a$,

(iv) una celda 2 invertible

$$\begin{tikzcd} & Dx \arrow[dr, "h^{\mathfrak{a}}"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\mathfrak{a}_{g,h}"] & \\ Dy \arrow[ur, "g^{\mathbb{D}}"] \arrow[rr, "(h^{\mathfrak{a}}g)^{\mathfrak{a}}"'] & {} & a \end{tikzcd}$$

para toda $h : x \to a$ y toda $g : y \to Dx$.

Y se cumplen las siguientes condiciones de coherencia:

(i) para cada $\varphi : h \to k : x \to a$

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "dx"] \arrow[dr, "k"'] \arrow[dr, phantom, bend left=20, "\Leftarrow\mathfrak{a}_k"] & Dx \arrow[d, bend right=40, "k^{\mathfrak{a}}"'] \arrow[d, bend left=40, "h^{\mathfrak{a}}"] \arrow[d, phantom, "\overset{\Leftarrow}{\varphi^{\mathfrak{a}}}"] \\ & a \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} x \arrow[r, "dx"] \arrow[dr, bend left=15, "h"] \arrow[dr, bend right=30, "k"'] \arrow[dr, phantom, "\Leftarrow\varphi"] & Dx \arrow[d, "h^{\mathfrak{a}}"] \arrow[dl, phantom, "\Leftarrow\mathfrak{a}_h"] \\ & a \end{tikzcd}, \tag{3.7}$$

(ii) para cada $h : x \to a$

$$\begin{tikzcd} & Dx \arrow[dr, "h^{\mathfrak{a}}"] \arrow[d, phantom, "\Leftarrow\mathfrak{a}_{dx,h}"] & \\ Dx \arrow[ur, bend left=50, "1_{Dx}"] \arrow[ur, bend right=20, "dx^{\mathbb{D}}"'] \arrow[ur, phantom, "\Leftarrow\mathbb{D}_x"] \arrow[rr, "(h^{\mathfrak{a}}dx)^{\mathfrak{a}}"'] \arrow[rr, bend right=40, "h^{\mathfrak{a}}"'] \arrow[rr, phantom, bend right=20, "\Downarrow(\mathfrak{a}_h)^{\mathfrak{a}}"] & {} & a \end{tikzcd} = 1_{h^{\mathfrak{a}}}, \tag{3.8}$$

(iii) para toda $h : x \to a$ y toda $g : y \to Dx$

$$\begin{tikzcd} y \arrow[r, "dy"] \arrow[dr, "g"'] \arrow[dr, phantom, bend left=20, "\Leftarrow\mathbb{D}_g"] & Dy \arrow[d, "g^{\mathbb{D}}"] \\ & Dx \arrow[d, "h^{\mathfrak{a}}"] \\ & a \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} y \arrow[r, "dy"] \arrow[ddr, bend right=20, "h^{\mathfrak{a}}g"'] \arrow[ddr, phantom, bend left=10, "\Leftarrow\mathfrak{a}_{h^{\mathfrak{a}}g}"] & Dy \arrow[dr, "g^{\mathbb{D}}"] \arrow[dd, "(h^{\mathfrak{a}}g)^{\mathfrak{a}}"'] \arrow[dd, phantom, shift left=6, "\Leftarrow\mathfrak{a}_{g,h}"] & \\ & & Dx, \arrow[dl, "h^{\mathfrak{a}}"] \\ & a & \end{tikzcd} \tag{3.9}$$

(iv) para toda $h : x \to a$ y toda $\psi : f \to g : y \to Dx$

$$\begin{tikzcd} & Dx \arrow[dr, "h^{\mathfrak{a}}"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\mathfrak{a}_{g,h}"] & \\ Dy \arrow[ur, bend left=50, "f^{\mathbb{D}}"] \arrow[ur, bend right=20, "g^{\mathbb{D}}"'] \arrow[ur, phantom, "\Leftarrow\psi^{\mathbb{D}}"] \arrow[rr, "(h^{\mathfrak{a}}g)^{\mathfrak{a}}"'] & {} & a \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} & Dx \arrow[dr, "h^{\mathfrak{a}}"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\mathfrak{a}_{g,h}"] & \\ Dy \arrow[ur, "f^{\mathbb{D}}"] \arrow[rr, bend left=10, "(h^{\mathfrak{a}}f)^{\mathfrak{a}}"] \arrow[rr, bend right=10, "(h^{\mathfrak{a}}g)^{\mathfrak{a}}"'] \arrow[rr, phantom, "(h^{\mathfrak{a}}\psi)^{\mathfrak{a}}\Downarrow"] & {} & a \end{tikzcd}, \tag{3.10}$$

(v) para toda $\varphi : h \to k : x \to a$ y toda $g : y \to Dx$

$$\begin{tikzcd}
 & Dx \arrow[dr, bend left, "h^{\mathfrak{a}}"] \arrow[dr, bend right, "k^{\mathfrak{a}}"'] \arrow[dr, phantom, "\Swarrow \varphi^{\mathfrak{a}}"] & \\
Dy \arrow[ur, "g^{\mathbb{D}}"] \arrow[rr, bend right, "(k^{\mathfrak{a}} g)^{\mathfrak{a}}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \mathfrak{a}_{g,k}"] & & a
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
 & Dx \arrow[dr, "h^{\mathfrak{a}}"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow \mathfrak{a}_{g,h}"] & \\
Dy \arrow[ur, "g^{\mathbb{D}}"] \arrow[rr, bend left=10, "(h^{\mathfrak{a}} g)^{\mathfrak{a}}"] \arrow[rr, bend right, "(k^{\mathfrak{a}} g)^{\mathfrak{a}}"'] \arrow[rr, phantom, "(\varphi^{\mathfrak{a}} g)^{\mathfrak{a}} \Downarrow"] & & a
\end{tikzcd} ,
\tag{3.11}$$

(vi) para toda $h : x \to a, g : y \to Dx$ y $j : z \to Dy$

$$\begin{tikzcd}
 & Dy \arrow[r, "g^{\mathbb{D}}"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow \mathbb{D}_{j,g}"] & Dx \arrow[dr, "h^{\mathfrak{a}}"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow \mathfrak{a}_{g^{\mathbb{D}} j,h}"] & \\
Dz \arrow[ur, "j^{\mathbb{D}}"] \arrow[urr, "(g^{\mathbb{D}} j)^{\mathbb{D}}"'] \arrow[rrr, "(h^{\mathfrak{a}} g^{\mathbb{D}} j)^{\mathfrak{a}}"'] \arrow[rrr, bend right=50, "((h^{\mathfrak{a}} g)^{\mathfrak{a}} j)^{\mathfrak{a}}"'] \arrow[rrr, phantom, bend right=25, "\Downarrow (\mathfrak{a}_{g,h} j)^{\mathfrak{a}}"] & & & a
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
 & Dy \arrow[r, "g^{\mathbb{D}}"] \arrow[drr, "(h^{\mathfrak{a}} g)^{\mathfrak{a}}"'] & Dx \arrow[dr, "h^{\mathfrak{a}}"] \arrow[d, phantom, "\Swarrow \mathfrak{a}_{g,h}"] & \\
Dz \arrow[ur, bend left, "j^{\mathbb{D}}"] \arrow[rrr, "((h^{\mathfrak{a}} g)^{\mathfrak{a}} j)^{\mathfrak{a}}"'] \arrow[r, phantom, "\mathfrak{a}_{j,h^{\mathfrak{a}} g} \Downarrow"] & & & a
\end{tikzcd} .
\tag{3.12}$$

Dadas dos seudoálgebras $(a, (-)^{\mathfrak{a}})$ y $(b, (-)^{\mathfrak{b}})$ para D (para facilitar la escritura se ha omitido el resto de la estructura de las seudoálgebras), una celda 1 de seudoálgebras $f : (a, (-)^{\mathfrak{a}}) \to (b, (-)^{\mathfrak{b}})$ consiste de una celda 1 $f : a \to b$ en A y una celda 2 invertible para toda $h : x \to a$

$$\begin{tikzcd}
Dx \arrow[d, "h^{\mathfrak{a}}"'] \arrow[dr, "(fh)^{\mathfrak{b}}"] \arrow[dr, phantom, "\Swarrow f[h]"'] & \\
a \arrow[r, "f"'] & b
\end{tikzcd}$$

sujetas a las condiciones de coherencia siguientes:

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[r, "dx"] \arrow[dr, "h"'] \arrow[dr, phantom, "\Swarrow \mathfrak{a}_h"] & Dx \arrow[d, "h^{\mathfrak{a}}"'] \arrow[dr, "(fh)^{\mathfrak{b}}"] \arrow[dr, phantom, "\Swarrow f[h]"'] & \\
 & a \arrow[r, "f"'] & b
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
x \arrow[r, "dx"] \arrow[d, "h"'] \arrow[dr, phantom, "\Swarrow \mathfrak{b}_{fh}"] & Dx \arrow[d, "(fh)^{\mathfrak{b}}"] \\
a \arrow[r, "f"'] & b
\end{tikzcd} ,
\tag{3.13}$$

para toda $g : y \to Dx$

$$
\begin{tikzcd}
Dy \arrow[r, "g^{\mathbb{D}}"] \arrow[dr, "(h^{\mathfrak{a}}g)^{\mathfrak{a}}"'] & Dx \arrow[d, "h^{\mathfrak{a}}"'] \arrow[dr, "(fh)^{\mathfrak{b}}"] \arrow[dl, phantom, "\Downarrow\mathfrak{a}_{g,h}"] & \\
& a \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow f[h]"] & b
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
Dy \arrow[r, "g^{\mathbb{D}}"] \arrow[d, "(h^{\mathfrak{a}}g)^{\mathfrak{a}}"'] \arrow[dr, bend left, "((fh)^{\mathfrak{b}}g)^{\mathfrak{b}}"] \arrow[dr, bend right, "(fh^{\mathfrak{a}}g)^{\mathfrak{b}}"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow (f[h]g)^{\mathfrak{b}}"] & Dx \arrow[d, "(fh)^{\mathfrak{b}}"] \arrow[d, phantom, "\Leftarrow\mathfrak{b}_{g,fh}"'] \\
a \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, phantom, "\Leftarrow f[h^{\mathfrak{a}}g]"] & b
\end{tikzcd}
, \tag{3.14}
$$

para toda $\varkappa : h \to k : x \to a$

$$
\begin{tikzcd}
Dx \arrow[d, bend right, "k^{\mathfrak{a}}"'] \arrow[d, bend left, "h^{\mathfrak{a}}"] \arrow[d, phantom, "\Leftarrow\varkappa^{\mathfrak{a}}"] \arrow[dr, "(fh)^{\mathfrak{a}}"] & \\
a \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow f[h]"] & b
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
Dx \arrow[d, "k^{\mathfrak{a}}"'] \arrow[dr, "(fk)^{\mathfrak{b}}"'] \arrow[dr, bend left, "(fh)^{\mathfrak{b}}"] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow(f\varkappa)^{\mathfrak{b}}"] & \\
a \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow f[k]"] & b
\end{tikzcd}
\tag{3.15}
$$

Dadas dos celdas 1 $f : (a, (-)^{\mathfrak{a}}) \to (b, (-)^{\mathfrak{b}}), f' : (b, (-)^{\mathfrak{b}}) \to (c, (-)^{\mathfrak{c}})$, su composición está dada por la composición usual $f'f$ en A, y para toda $h : x \to a$ la celda 2

$$
(f'f)[h] \quad = \quad
\begin{tikzcd}
& Dx \arrow[dl, "h^{\mathfrak{a}}"'] \arrow[d, "(fh)^{\mathfrak{b}}"] \arrow[dr, "(f'fh)^{\mathfrak{c}}"] & \\
a \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, phantom, "\Leftarrow f[h]"] & b \arrow[r, "f'"'] \arrow[ur, phantom, "\Leftarrow f'[fh]"] & c
\end{tikzcd}
.
$$

Es directo mostrar que la composición $f'f$ satisface (3.13), (3.14), (3.15).

Dadas dos celdas 1 $f, g : (a, (-)^{\mathfrak{a}}) \to (b, (-)^{\mathfrak{b}})$, una celda 2 $\alpha : f \Rightarrow g$ es una celda 2 $\alpha : f \Rightarrow g$ en A tal que para toda $h : x \to a$

$$
\begin{tikzcd}
Dx \arrow[d, "h^{\mathfrak{a}}"'] \arrow[dr, "(gh)^{\mathfrak{b}}"'] \arrow[dr, bend left, "(fh)^{\mathfrak{b}}"] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow(\alpha h)^{\mathfrak{b}}"] & \\
a \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow g[h]"] & b
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
Dx \arrow[d, "h^{\mathfrak{a}}"'] \arrow[dr, "(fh)^{\mathfrak{b}}"] & \\
a \arrow[r, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"', shift right] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow f[h]"] & b
\end{tikzcd}
\tag{3.16}
$$

La composición de estas celdas 2 es como la de las celdas 2 en A.

Tenemos entonces la categoría 2 de seudoálgebras de la seudomónada sin iteraciones D, denotada $\widehat{Alg}$-D. Para todo objeto $a \in \widehat{Alg}$-D, la identidad de a es la identidad usual $1_a : a \to a$ de a en A junto con la celda 2 identidad

$$\begin{tikzcd}
Dx \arrow[d, "h^{\mathfrak{a}}"'] \arrow[dr, "h^{\mathfrak{a}}"] \arrow[dr, phantom, shift right=3, "\Swarrow 1_a[h]"] & \\
a \arrow[r, "1_a"'] & a
\end{tikzcd}$$

sobre $h^{\mathfrak{a}}$ para toda $h : x \to a$ en A.

Proposición 3.6. *Las seis condiciones de coherencia para una seudoálgebra de una seudomónada sin iteraciones se pueden reducir a cinco.*

Demostración. La condición (3.9) es superflua: la demostración de que lo sea es básicamente una copia de la demostración de que (2.9) lo sea. □

Teorema 3.7. *Sea D una seudomónada sin iteraciones sobre una categoría 2 A y sea D' la seudomónada inducida a partir de D. Las categorías 2 D'-Alg y $\widehat{Alg}$-D son biequivalentes.*

Capítulo 4

Condiciones necesarias para las seudoálgebras de $(-)^E$

Nota 4.1. En este capítulo, como ya se mencionó en la Introducción, obtendremos algunas condiciones que satisface toda seudoálgebra normal del funtor 2 $(-)^E$.

En los preliminares obtendremos cómo se comporta $(-)^E$ al considerarlo como seudomónada sin iteraciones; en eso consiste la Definición 4.9. En las Observaciones 4.3, 4.4 y 4.5 se obtienen funtores como los de la sección 7 de Marmolejo y Wood [2013]: ahí se buscaron funtores $\mathbf{2} \to C^{\mathbf{2}}$ que fueran pertinentes para caracterizar las seudoálgebras normales de $(-)^{\mathbf{2}}$; dos de ellos fueron $H_1 : \mathbf{2} \to \mathbf{2}^{\mathbf{2}}$ con $H_1(0 \leq 1) := (0,0) \leq (0,1)$ y $H_2 : \mathbf{2} \to \mathbf{2}^{\mathbf{2}}$ con $H_2(0 \leq 1) := (0,1) \leq (1,1)$. De nuestros funtores de las observaciones mencionadas y de la estructura de seudoálgebra para la seudomónada sin iteraciones $(-)^E$, obtendremos uno de los resultados que consideramos más relevantes: la Proposición 4.10.

Lo siguiente que haremos es considerar a $(-)^E$ como seudomónada; de hecho, como mónada 2, y entonces obtener resultados análogos a los de sistemas de factorización, basándanos en Grandis y Tholen [2006], Garner [2007], Rosický y Tholen [2002], Rosebrugh y Wood [2002] y Korostenski y Tholen [1993], y teniendo como objetivo un teorema análogo al Teorema 3.2 de Grandis y Tholen [2006]:

> Todo sistema de factorización ortogonal $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ sobre una categoría K es equivalente a un sistema de factorización débil natural (L, R) sobre K para el cual L y R son idempotentes. En este caso,

las categorías K_L y K^R de coálgebras de la comónada L y de álgebras de la mónada R, respectivamente, son equivalentes a $\mathcal{E}_F$ y a $\mathcal{M}_F$, consideradas como subcategorías plenas correflexiva y reflexiva de $K^{\mathbf{2}}$, respectivamente, con F el sistema de factorización de Eilenberg-Moore correspondiente al sistema de factorización ortogonal $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$,

con el fin de obtener un par de clases de morfismos como ocurre en los sistemas de factorización ortogonal (véase la Definición 6.23 de sistema de factorización ortogonal). Por cierto, notemos que el primer isomorfismo del Corolario 4.25 también aparece como resultado en la Proposición 4.10.

4.1. Preliminares

Definición 4.2. Sea E el monoide con exactamente dos elementos: la identidad y uno idempotente; equivalentemente, la categoría con un solo objeto $\bullet$ y exactamente dos morfismos: la identidad y uno idempotente, que denotaremos e.

Observación 4.3. La categoría E^E la podemos representar por el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} 11 \arrow[loop left, "e"] \arrow[rr, bend left, "\epsilon_e"] & & 1e \arrow[ll, bend left, "\eta_e"] \arrow[loop right, "e_e"] \end{tikzcd}$$

más las identidades 1_{11} y 1_{1e}, donde 11 es el funtor constante $E \to E$ que manda todo a la identidad $\bullet \xrightarrow{1} \bullet$, $1e$ es el funtor $1_E : E \to E$, y e, ϵ_e, η_e, e_e son transformaciones naturales, las cuales podemos representar, respectivamente, mediante los siguientes diagramas conmutativos:

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, "e"] \arrow[d, "1"'] \arrow[dr, phantom, "e"] & \bullet \arrow[d, "1"] \\ \bullet \arrow[r, "e"'] & \bullet \end{tikzcd}, \quad \begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, "e"] \arrow[d, "1"'] \arrow[dr, phantom, "\epsilon_e"] & \bullet \arrow[d, "e"] \\ \bullet \arrow[r, "e"'] & \bullet \end{tikzcd}, \quad \begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, "e"] \arrow[d, "e"'] \arrow[dr, phantom, "\eta_e"] & \bullet \arrow[d, "1"] \\ \bullet \arrow[r, "e"'] & \bullet \end{tikzcd}, \quad \begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, "e"] \arrow[d, "e"'] \arrow[dr, phantom, "e_e"] & \bullet \arrow[d, "e"] \\ \bullet \arrow[r, "e"'] & \bullet \end{tikzcd}.$$

Notemos que la envolvente de Karoubi de E, denotada $\mathrm{K}(E)$, está contenida en E^E, pero no es subcategoría de E^E, y $\mathrm{K}(E)$ es $E^E \setminus \{1_{1e}\}$.

Observación 4.4. Hay exactamente cuatro funtores $E \to E^E$: dE, G, C_{11}, C_{1e}, donde

$$\begin{aligned} dE : E &\to E^E \\ \bullet &\mapsto 11 \\ e &\mapsto e, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G : E &\to E^E \\ \bullet &\mapsto 1e \\ e &\mapsto e_e, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{11} : E &\to E^E \\ \bullet &\mapsto 11 \\ e &\mapsto 1_{11}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{1e} : E &\to E^E \\ \bullet &\mapsto 1e \\ e &\mapsto 1_{1e}. \end{aligned}$$

Observación 4.5. Hay exactamente cuatro funtores $E^E \to E$. En efecto, si $F : E^E \to E$ es funtor, entonces $F_0 : \mathrm{Ob}(E^E) \to \mathrm{Ob}(E)$ ya queda determinado y también $F_1 : \mathrm{Fl}(E^E) \to \mathrm{Fl}(E)$ sobre las identidades, así que F queda complemente determinado por $\{e, \eta_e, \epsilon_e, e_e\}$ y por las ecuaciones $\epsilon_e \eta_e = e_e$, $\eta_e \epsilon_e = e$.

Se tiene que $Fe_e = e$ o $Fe_e = 1$. Si $Fe_e = 1$, entonces $F\epsilon_e = F\eta_e = Fe = 1$. Similarmente si $Fe = 1$.

Tenemos que $Fe_e = e$ si y sólo si $Fe = e$. Para este caso hay exactamente tres posibilidades: $F\eta_e = F\epsilon_e$ o $F\eta_e = 1$ y $F\epsilon_e = e$ o $F\eta_e = e$ y $F\epsilon_e = 1$.

Definición 4.6. Sea $A \in \mathbf{Cat}$; definimos entonces

$$\begin{aligned} dA : A &\to A^E \\ a &\mapsto 1_a && \text{(el funtor } \Delta a : E \to A) \\ h : a \to b &\mapsto h : 1_a \to 1_b && (\Delta h). \end{aligned}$$

Es decir, estamos considerando a A^E como la categoría cuyos objetos son los idempotentes de A y cuyos morfismos son los $h : a \to b$ tales que

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & a \arrow[d, "h"] \\ b \arrow[r, "g"'] & b \end{tikzcd}$$

conmuta, donde f y g son idempotentes de A.

Sea $qA : A^E \to A$ el funtor definido como sigue:

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & a \arrow[d, "h"] & a \arrow[d, "h"] \\ b \arrow[r, "g"'] & b \arrow[r, phantom, "\mapsto" near start, shift left=4ex] & b \end{tikzcd} .$$

Nota 4.7. Para evitar la confusión de $f : a \to a$ con $f : 1_a \to 1_a$, un morfismo $h : f \to g$ lo denotaremos, de ahora en adelante, ya sea como (f, h, g) o como $\vec{h} : f \to g$.

Observación 4.8. Consideremos los funtores dA y qA, y denotémoslos, por el momento, simplemente como d y q. Tenemos una transformación natural $1_{A^E} \Rightarrow dq$; a saber, η_f definida como

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f"'] & a \arrow[d, "1_a"] \\ a \arrow[r, "f"'] & a, \end{tikzcd}$$

y también una transformación natural $dq \Rightarrow 1_{A^E}$; a saber, ϵ_f definida como

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"] \arrow[d, "1_a"'] & a \arrow[d, "f"] \\ a \arrow[r, "f"'] & a. \end{tikzcd}$$

Notemos que d y q no son adjuntos el uno del otro.

Definición 4.9. Consideremos la función $(-)^E : \mathbf{Cat}_0 \to \mathbf{Cat}_0$ (sobre los objetos) y definamos entonces la siguiente seudomónada sin iteraciones $(-)^E : \mathbf{Cat} \to \mathbf{Cat}$.

Ya tenemos (i) de la Definición 2.3.

Hagamos (ii): para cada $A \in \mathbf{Cat}$, tenemos el funtor $dA : A \to A^E$.

Hagamos (iii): para cada par $A, B \in \mathbf{Cat}$, definamos

$$(-)^{\mathbb{E}} : \mathbf{Cat}(A, B^E) \to \mathbf{Cat}(A^E, B^E)$$

como sigue: dado $f \in A^E$, definimos $F^{\mathbb{E}}(f)$ como

$$qBFa \xrightarrow{Fa} qBFa \xrightarrow{qBFf} qBFa\ .$$

$F^{\mathbb{E}}(f)$ es en efecto un idempotente de B. Como F es funtor $A \to B^E$,

$$(qBFf)Fa = Fa(qBFf).$$

De donde,

$$\begin{aligned}(qBFf)Fa(qBFf) &= (qBFf)(qBFf)FaFa \\ &= (qBFf)Fa \quad (F : A \to B^E \text{ es funtor}).\end{aligned}$$

Y dado $g : f \to f'$ en A^E, $F^{\mathbb{E}}(g) := qBFg$:

$$\begin{tikzcd} qBFa \arrow[r, "qBFg"] \arrow[d, "Fa"'] & qBFa' \arrow[d, "Fa'"] \\ qBFa \arrow[d, "qBFf"'] & qBFa' \arrow[d, "qBFf'"] \\ qBFa \arrow[r, "qBFg"'] & qBFa'. \end{tikzcd}$$

Es claro que $F^{\mathbb{E}}$ es funtor; más aún,

$$F^{\mathbb{E}} = m_B F^E, \tag{4.1}$$

donde $m_B : (B^E)^E \to B^E$ es la multiplicación en B de la 2-mónada $(-)^E$ (véase la Observación 4.21).

Ahora, sean $\varphi : F \Rightarrow G : A \to B^E$ y $f : a \to a \in A^E$. Entonces, definimos $\varphi^{\mathbb{E}}(f) := qB\varphi a$:

$$\begin{tikzcd} qBFa \arrow[r, "qB\varphi a"] \arrow[d, "Fa"'] & qBGa \arrow[d, "Ga"] \\ qBFa \arrow[d, "qBFf"'] & qBGa \arrow[d, "qBGf"] \\ qBFa \arrow[r, "qB\varphi a"'] & qBGa. \end{tikzcd}$$

Y dado $g : f \to f'$ en A^E,

$$\begin{tikzcd}
F^{\mathbb{E}}f \arrow[r, "\varphi^{\mathbb{E}}f"] \arrow[d, "F^{\mathbb{E}}g"'] & G^{\mathbb{E}}f \arrow[d, "G^{\mathbb{E}}g"] \\
F^{\mathbb{E}}f' \arrow[r, "\varphi^{\mathbb{E}}f'"'] & G^{\mathbb{E}}f'
\end{tikzcd}$$

conmuta, porque el cubo asociado conmuta. De hecho, $\varphi^{\mathbb{E}} = m_B \varphi^E$.

Es claro entonces que $(-)^{\mathbb{E}}$ es funtor $\mathbf{Cat}(A, B^E) \to \mathbf{Cat}(A^E, B^E)$.

Afirmamos que $dA^{\mathbb{E}} = 1_{A^E}$. En efecto,

$$dA^{\mathbb{E}} = m_A (dA)^E = 1_{A^E}.$$

Ahora, dado $F : A \to B^E$, tenemos que $F^{\mathbb{E}} \circ dA = F$, lo cual se sigue de la definición de $F^{\mathbb{E}}$. También es fácil ver que si $F : A \to B^E$ y $G : C \to A^E$ en $\mathbf{Cat}$, entonces $G^{\mathbb{E}} \circ F^{\mathbb{E}} = (G^{\mathbb{E}} \circ F)^{\mathbb{E}}$. De aquí, $\mathbb{E}_A = 1$, $\mathbb{E}_F = 1$ y $\mathbb{E}_{F,G} = 1$, así que tenemos (iv), (v) y (vi), y las condiciones de coherencia para la seudomónada sin iteraciones $(-)^E$ que acabamos de definir son triviales.

4.2. Seudoálgebras de la seudomónada sin iteraciones $(-)^E$

Proposición 4.10. *Si $(A, (-)^{\mathfrak{A}})$ es una seudoálgebra para $(-)^E$ entonces todo idempotente $f : a \to a$ de A se factoriza como*

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "r_f"'] \arrow[rr, bend left, "f"] & \ulcorner f \urcorner^{\mathfrak{A}} 1e \arrow[r, "i_f"'] & a ,
\end{tikzcd}$$

$r_f i_f$ es idempotente y $r_{r_f i_f} \cong r_f i_f \cong i_{r_f i_f}$ en $A^{\mathbf{2}}$, donde $\ulcorner f \urcorner$ es el nombre de f, el funtor $E \to A$ que induce f. Además, los dos isomorfismos anteriores son de la forma

$$\begin{tikzcd}
\ulcorner f \urcorner^{\mathfrak{A}} 1e \arrow[r, "r_f i_f"] \arrow[d, equal] & \ulcorner f \urcorner^{\mathfrak{A}} 1e \arrow[r, "r_f i_f"] \arrow[d, "v_{r_f i_f}", "\wr"'] & \ulcorner f \urcorner^{\mathfrak{A}} 1e \arrow[d, equal] \\
\ulcorner f \urcorner^{\mathfrak{A}} 1e \arrow[r, "r_{r_f i_f}"'] & \ulcorner r_f i_f \urcorner^{\mathfrak{A}} 1e \arrow[r, "i_{r_f i_f}"'] & \ulcorner f \urcorner^{\mathfrak{A}} 1e \, .
\end{tikzcd} \tag{4.2}$$

Demostración. Consideremos una seudoálgebra $(A, (-)^{\mathfrak{A}})$ para $(-)^E$, y notemos que cualquier idempotente $f : a \to a$ en A induce un funtor $\ulcorner f \urcorner : E \to A$, así que se tiene el isomorfismo natural

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "dE"] \arrow[dr, "\ulcorner f \urcorner"'] & E^E \arrow[d, "\ulcorner f \urcorner^{\mathfrak{A}}"] \arrow[dl, phantom, "\Leftarrow \mathfrak{A}_{\ulcorner f \urcorner}"] \\
 & A
\end{tikzcd} ;$$

de aquí,

$$\begin{tikzcd}
\ulcorner f \urcorner^{\mathfrak{A}} 11 \arrow[d, "\ulcorner f \urcorner^{\mathfrak{A}} e"'] \\
\ulcorner f \urcorner^{\mathfrak{A}} 11
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\ulcorner f \urcorner^{\mathfrak{A}} dE(\bullet) \arrow[r, "\mathfrak{A}_{\ulcorner f \urcorner} \bullet"] \arrow[d, "\ulcorner f \urcorner^{\mathfrak{A}} dE(e)"'] & \ulcorner f \urcorner \bullet \arrow[d, "\ulcorner f \urcorner e"] \\
\ulcorner f \urcorner^{\mathfrak{A}} dE(\bullet) \arrow[r, "\mathfrak{A}_{\ulcorner f \urcorner} \bullet"'] & \ulcorner f \urcorner \bullet
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
a \arrow[d, "f"] \\
a
\end{tikzcd}$$

conmuta; luego,

$$\begin{tikzcd}
\ulcorner f \urcorner^{\mathfrak{A}} 11 \arrow[r, "\ulcorner f \urcorner^{\mathfrak{A}} \epsilon_e"] \arrow[rr, bend left, "\ulcorner f \urcorner^{\mathfrak{A}} e"] \arrow[d, "\mathfrak{A}_{\ulcorner f \urcorner} \bullet"'] & \ulcorner f \urcorner^{\mathfrak{A}} 1e \arrow[r, "\ulcorner f \urcorner^{\mathfrak{A}} \eta_e"] \arrow[dr, dashed, "i_f"'] & \ulcorner f \urcorner^{\mathfrak{A}} 11 \arrow[d, "\mathfrak{A}_{\ulcorner f \urcorner} \bullet"] \\
a \arrow[rr, "f"'] \arrow[ur, dashed, "r_f"] & & a
\end{tikzcd}$$

conmuta, con

$$r_f := \ulcorner f \urcorner^{\mathfrak{A}} \epsilon_e \circ \mathfrak{A}_{\ulcorner f \urcorner} \bullet^{-1},$$
$$i_f := \mathfrak{A}_{\ulcorner f \urcorner} \bullet \circ \ulcorner f \urcorner^{\mathfrak{A}} \eta_e.$$

De aquí,

$$r_f i_f = \ulcorner f \urcorner^{\mathfrak{A}} \epsilon_e \ulcorner f \urcorner^{\mathfrak{A}} \eta_e = \ulcorner f \urcorner^{\mathfrak{A}} e_e,$$

que es idempotente.

Ahora, veamos que $r_{r_f i_f} \cong r_f i_f \cong i_{r_f i_f}$. Notemos que

$$\ulcorner r_f i_f \urcorner = \ulcorner \ulcorner f \urcorner^{\mathfrak{A}} e_e \urcorner = \ulcorner f \urcorner^{\mathfrak{A}} G$$

y que

$$G^{\mathbb{E}}(11) = 1e, \quad G^{\mathbb{E}}(1e) = 1e;$$
$$G^{\mathbb{E}}(\epsilon_e) = G^{\mathbb{E}}(\eta_e) = G^{\mathbb{E}}(e) = G^{\mathbb{E}}(e_e) = e_e.$$

Consideremos las siguientes celdas 2 invertibles:

$$
\begin{tikzcd}
& E^E \arrow[dr, "\ulcorner f\urcorner^{\mathfrak{A}}"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\mathfrak{A}_{G,\ulcorner f\urcorner}"] & \\
E^E \arrow[ur, "G^{\mathbb{E}}"] \arrow[rr, "(\ulcorner f\urcorner^{\mathfrak{A}}G)^{\mathfrak{A}}"'] & {} & A
\end{tikzcd}
\tag{4.3}
$$

y

$$
\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "dE"] \arrow[dr, "\ulcorner f\urcorner^{\mathfrak{A}}G"'] \arrow[r, phantom, shift right=3ex, "\swarrow\mathfrak{A}_{\ulcorner f\urcorner^{\mathfrak{A}}G}"] & E^E \arrow[d, "(\ulcorner f\urcorner^{\mathfrak{A}}G)^{\mathfrak{A}}"] \\
& A \, .
\end{tikzcd}
\tag{4.4}
$$

De (4.4), se tiene que

$$
\begin{tikzcd}
(\ulcorner f\urcorner^{\mathfrak{A}}G)^{\mathfrak{A}}dE(\bullet) \arrow[r, "(\ulcorner f\urcorner^{\mathfrak{A}}G)^{\mathfrak{A}}dE(e)"] \arrow[d, "\mathfrak{A}_{\ulcorner f\urcorner^{\mathfrak{A}}G}\bullet"'] & (\ulcorner f\urcorner^{\mathfrak{A}}G)^{\mathfrak{A}}dE(\bullet) \arrow[d, "\mathfrak{A}_{\ulcorner f\urcorner^{\mathfrak{A}}G}\bullet"] \\
\ulcorner f\urcorner^{\mathfrak{A}}G(\bullet) \arrow[r, "\ulcorner f\urcorner^{\mathfrak{A}}G(e)"'] & \ulcorner f\urcorner^{\mathfrak{A}}G(\bullet)
\end{tikzcd}
$$

conmuta; es decir,

$$
\begin{tikzcd}
(\ulcorner f\urcorner^{\mathfrak{A}}G)^{\mathfrak{A}}11 \arrow[r, "(\ulcorner f\urcorner^{\mathfrak{A}}G)^{\mathfrak{A}}e"] \arrow[d, "\mathfrak{A}_{\ulcorner f\urcorner^{\mathfrak{A}}G}\bullet"'] & (\ulcorner f\urcorner^{\mathfrak{A}}G)^{\mathfrak{A}}11 \arrow[d, "\mathfrak{A}_{\ulcorner f\urcorner^{\mathfrak{A}}G}\bullet"] \\
\ulcorner f\urcorner^{\mathfrak{A}}1e \arrow[r, "\ulcorner f\urcorner^{\mathfrak{A}}e_e"'] & \ulcorner f\urcorner^{\mathfrak{A}}1e
\end{tikzcd}
\tag{4.5}
$$

conmuta. De (4.3) y la conmutatividad de (4.5),

$$
\begin{tikzcd}
\ulcorner f\urcorner^{\mathfrak{A}}G^{\mathbb{E}}(11) \arrow[r, "\ulcorner f\urcorner^{\mathfrak{A}}G^{\mathbb{E}}(\epsilon_e)", "\ulcorner f\urcorner^{\mathfrak{A}}e_e"'] \arrow[d, "\mathfrak{A}_{G,\ulcorner f\urcorner}(11)"'] & \ulcorner f\urcorner^{\mathfrak{A}}G^{\mathbb{E}}(1e) \arrow[r, "\ulcorner f\urcorner^{\mathfrak{A}}G^{\mathbb{E}}(\eta_e)", "\ulcorner f\urcorner^{\mathfrak{A}}e_e"'] \arrow[d, "\mathfrak{A}_{G,\ulcorner f\urcorner}(1e)"'] & \ulcorner f\urcorner^{\mathfrak{A}}G^{\mathbb{E}}(11) \arrow[d, "\mathfrak{A}_{G,\ulcorner f\urcorner}(11)"] \\
(\ulcorner f\urcorner^{\mathfrak{A}}G)^{\mathfrak{A}}11 \arrow[r, "(\ulcorner f\urcorner^{\mathfrak{A}}G)^{\mathfrak{A}}\epsilon_e"] \arrow[d, "\mathfrak{A}_{\ulcorner f\urcorner^{\mathfrak{A}}G}\bullet"'] & (\ulcorner f\urcorner^{\mathfrak{A}}G)^{\mathfrak{A}}1e \arrow[r, "(\ulcorner f\urcorner^{\mathfrak{A}}G)^{\mathfrak{A}}\eta_e"] \arrow[dr, dashed, "i_{r_f i_f}"'] & (\ulcorner f\urcorner^{\mathfrak{A}}G)^{\mathfrak{A}}11 \arrow[d, "\mathfrak{A}_{\ulcorner f\urcorner^{\mathfrak{A}}G}\bullet"] \\
\ulcorner f\urcorner^{\mathfrak{A}}1e \arrow[ur, dashed, "r_{r_f i_f}"'] \arrow[rr, "r_f i_f", "\ulcorner f\urcorner^{\mathfrak{A}}e_e"'] & & \ulcorner f\urcorner^{\mathfrak{A}}1e
\end{tikzcd}
$$

conmuta. Además, por (3.9),

$$1_{\ulcorner f\urcorner^{\mathfrak{A}}G} \quad = \quad \begin{tikzcd} E \arrow[r, "dE"] \arrow[ddr, "\ulcorner f\urcorner^{\mathfrak{A}}G"'] \arrow[dr, phantom, "\mathfrak{A}_{\ulcorner f\urcorner^{\mathfrak{A}}G}\Swarrow"] & E^E \arrow[dd, "(\ulcorner f\urcorner^{\mathfrak{A}}G)^{\mathfrak{A}}" description] \arrow[dr, "G^{\mathbb{E}}"] \arrow[d, phantom, "\mathfrak{A}_{G,\ulcorner f\urcorner}\Leftarrow" right] & \\ & {} & E^E; \arrow[dl, "\ulcorner f\urcorner^{\mathfrak{A}}"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

es decir,

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_{\ulcorner f\urcorner^{\mathfrak{A}}G}(\bullet)\mathfrak{A}_{G,\ulcorner f\urcorner}dE(\bullet) &= \mathfrak{A}_{\ulcorner f\urcorner^{\mathfrak{A}}G}(\bullet)\mathfrak{A}_{G,\ulcorner f\urcorner}(11) \\ &= 1_{\ulcorner f\urcorner^{\mathfrak{A}}G(\bullet)} \\ &= 1_{\ulcorner f\urcorner^{\mathfrak{A}}1e}. \end{aligned}$$

$\square$

Proposición 4.11. *Sea $(A, (-)^{\mathfrak{A}})$ una seudoálgebra para $(-)^E$. Entonces, si $f : a \to a, g : b \to b$ son idempontentes de A y $h : a \to b$ es un morfismo en A tal que*

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f"'] & b \arrow[d, "g"] \\ a \arrow[r, "h"'] & b \end{tikzcd}$$

conmuta, entonces

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "r_f"] \arrow[d, "h"'] & \ulcorner f\urcorner^{\mathfrak{A}}1e \arrow[r, "i_f"] \arrow[d, "\ulcorner h\urcorner^{\mathfrak{A}}1e"] & a \arrow[d, "h"] \\ b \arrow[r, "r_g"'] & \ulcorner g\urcorner^{\mathfrak{A}}1e \arrow[r, "i_g"'] & b \end{tikzcd}$$

conmuta; más aún, la asignación $\ulcorner -\urcorner^{\mathfrak{A}}1e : \mathbf{Idm}(A) \to A$ es funtorial, donde $\mathbf{Idm}(A)$ es la categoría isomorfa a A^E cuyos objetos son los idempotentes de A y los morfismos son los morfismos $h : a \to b$ en A tales que $gh = hf$, donde $g : b \to b$ y $f : a \to a$ son idempotentes. Además, $\ulcorner h\urcorner^{\mathfrak{A}}1e : r_f i_f \to r_g i_g$ en $\mathbf{Idm}(A)$ y $\ulcorner h\urcorner^{\mathfrak{A}}G : \ulcorner r_f i_f\urcorner \to \ulcorner r_g i_g\urcorner$ en A^E.

Demostración. Sea $h : f \to g$ morfismo en $\mathbf{Idm}(A)$. Así que h induce una transformación natural $\ulcorner h\urcorner : \ulcorner f\urcorner \Rightarrow \ulcorner g\urcorner : E \to A$; de donde, se tiene la transformación natural $\ulcorner h\urcorner^{\mathfrak{A}} : \ulcorner f\urcorner^{\mathfrak{A}} \Rightarrow \ulcorner g\urcorner^{\mathfrak{A}} : E^E \to A$. Se satisface (3.7) para $(A, (-)^{\mathfrak{A}})$; es decir,

$$
\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "dE"] \arrow[dr, "\ulcorner g\urcorner"'] \arrow[r, phantom, shift right=3, "\Swarrow\mathfrak{A}_{\ulcorner g\urcorner}"] & E^E \arrow[d, bend right, "\ulcorner g\urcorner^{\mathfrak{A}}"'] \arrow[d, bend left, "\ulcorner f\urcorner^{\mathfrak{A}}"] \arrow[d, phantom, "\Leftarrow\ulcorner h\urcorner^{\mathfrak{A}}"] \\
& A
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "dE"] \arrow[dr, bend left, "\ulcorner f\urcorner"] \arrow[dr, bend right, "\ulcorner g\urcorner"'] \arrow[dr, phantom, "\Swarrow\ulcorner h\urcorner"] \arrow[r, phantom, shift right=3, "\Downarrow\mathfrak{A}_{\ulcorner f\urcorner}"] & E^E \arrow[d, "\ulcorner f\urcorner^{\mathfrak{A}}"] \\
& A
\end{tikzcd};
$$

de aquí,

$$
\begin{aligned}
\ulcorner h\urcorner \bullet \mathfrak{A}_{\ulcorner f\urcorner}\bullet &= \mathfrak{A}_{\ulcorner g\urcorner} \bullet \ulcorner h\urcorner^{\mathfrak{A}} dE(\bullet) \\
h \circ \mathfrak{A}_{\ulcorner f\urcorner}\bullet &= \mathfrak{A}_{\ulcorner g\urcorner} \bullet \circ \ulcorner h\urcorner^{\mathfrak{A}} 11;
\end{aligned}
$$

de donde,

$$
h = \mathfrak{A}_{\ulcorner g\urcorner} \bullet \circ \ulcorner h\urcorner^{\mathfrak{A}} 11 \circ \mathfrak{A}_{\ulcorner f\urcorner} \bullet^{-1} . \tag{4.6}
$$

Consideremos

$$
\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "dE"] & E^E \arrow[r, bend left, "\ulcorner f\urcorner^{\mathfrak{A}}"] \arrow[r, bend right, "\ulcorner g\urcorner^{\mathfrak{A}}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\ulcorner h\urcorner^{\mathfrak{A}}"] & A
\end{tikzcd};
$$

tenemos entonces el siguiente diagrama conmutativo:

$$
\begin{tikzcd}
\ulcorner f\urcorner^{\mathfrak{A}} dE(\bullet) \arrow[r, "\ulcorner f\urcorner^{\mathfrak{A}} dE(e)"] \arrow[d, "\ulcorner h\urcorner^{\mathfrak{A}} dE(\bullet)"'] & \ulcorner f\urcorner^{\mathfrak{A}} dE(\bullet) \arrow[d, "\ulcorner h\urcorner^{\mathfrak{A}} dE(\bullet)"] \\
\ulcorner g\urcorner^{\mathfrak{A}} dE(\bullet) \arrow[r, "\ulcorner g\urcorner^{\mathfrak{A}} dE(e)"] & \ulcorner g\urcorner^{\mathfrak{A}} dE(\bullet)
\end{tikzcd};
$$

de aquí,

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[d, "\mathfrak{A}_{\ulcorner f\urcorner}\bullet^{-1}"'] \arrow[dr, "r_f"] & & a \arrow[d, "\mathfrak{A}_{\ulcorner f\urcorner}\bullet^{-1}"] \\
\ulcorner f\urcorner^{\mathfrak{A}} 11 \arrow[r, "\ulcorner f\urcorner^{\mathfrak{A}} \epsilon_e"] \arrow[d, "\ulcorner h\urcorner^{\mathfrak{A}} 11"'] & \ulcorner f\urcorner^{\mathfrak{A}} 1e \arrow[r, "\ulcorner f\urcorner^{\mathfrak{A}} \eta_e"] \arrow[d, "\ulcorner h\urcorner^{\mathfrak{A}} 1e"'] \arrow[ur, "i_f"] & \ulcorner f\urcorner^{\mathfrak{A}} 11 \arrow[d, "\ulcorner h\urcorner^{\mathfrak{A}} 11"] \\
\ulcorner g\urcorner^{\mathfrak{A}} 11 \arrow[r, "\ulcorner g\urcorner^{\mathfrak{A}} \epsilon_e"] \arrow[d, "\mathfrak{A}_{\ulcorner g\urcorner}\bullet"'] & \ulcorner g\urcorner^{\mathfrak{A}} 1e \arrow[r, "\ulcorner g\urcorner^{\mathfrak{A}} \eta_e"] \arrow[dr, "i_g"'] & \ulcorner g\urcorner^{\mathfrak{A}} 11 \arrow[d, "\mathfrak{A}_{\ulcorner g\urcorner}\bullet"] \\
b \arrow[ur, "r_g"'] & & b
\end{tikzcd}
$$

conmuta; luego, de la conmutatividad de este y (4.6),

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "r_f"] \arrow[d, "h"'] & \ulcorner f \urcorner^{\mathfrak{A}} 1e \arrow[r, "i_f"] \arrow[d, "\ulcorner h \urcorner^{\mathfrak{A}} 1e"] & a \arrow[d, "h"] \\
b \arrow[r, "r_g"'] & \ulcorner g \urcorner^{\mathfrak{A}} 1e \arrow[r, "i_g"'] & b
\end{tikzcd}
$$

conmuta. De aquí, al transponer los cuadrados del diagrama anterior, se obtiene que

$$\ulcorner h \urcorner^{\mathfrak{A}} 1e : r_f i_f \to r_g i_g$$

en $\mathbf{Idm}(A)$. Por otra parte, es claro que

$$\ulcorner f \urcorner^{\mathfrak{A}} G \xRightarrow{\ulcorner h \urcorner^{\mathfrak{A}} G} \ulcorner g \urcorner^{\mathfrak{A}} G \quad = \quad \ulcorner r_f i_f \urcorner \xRightarrow{\ulcorner h \urcorner^{\mathfrak{A}} G} \ulcorner r_g i_g \urcorner \ .$$

Ahora, claramente $\ulcorner - \urcorner : \mathbf{Idm}(A) \to A^E$ es un funtor iso. Por otro lado, $(-)^{\mathfrak{A}} : A^E \to A^{(E^E)}$ es funtor por definición. De aquí,

$$\mathbf{Idm}(A) \xrightarrow{\ulcorner - \urcorner} A^E \xrightarrow{(-)^{\mathfrak{A}}} A^{(E^E)}$$

es funtor. Luego, $\ulcorner 1_f \urcorner^{\mathfrak{A}} = 1_{\ulcorner f \urcorner^{\mathfrak{A}}}$ y $\ulcorner h'h \urcorner^{\mathfrak{A}} = \ulcorner h' \urcorner^{\mathfrak{A}} \ulcorner h \urcorner^{\mathfrak{A}}$. De aquí, por definición de unidad de un funtor y la composición de transformaciones naturales, $\ulcorner 1_f \urcorner^{\mathfrak{A}} 1e = 1_{\ulcorner f \urcorner^{\mathfrak{A}} 1e}$ y $\ulcorner h'h \urcorner^{\mathfrak{A}} 1e = \ulcorner h' \urcorner^{\mathfrak{A}} 1e \ulcorner h \urcorner^{\mathfrak{A}} 1e$. Luego,

$$\ulcorner - \urcorner^{\mathfrak{A}} 1e : \mathbf{Idm}(A) \to A$$

es funtor.

Notemos que $1_f = (f, 1_a, f)$, así que $\ulcorner (f, 1_a, f) \urcorner^{\mathfrak{A}} 1e = 1_{\ulcorner f \urcorner^{\mathfrak{A}} 1e}$ cuando 1_a es considerada como flecha en A^E (en realidad en $\mathbf{Idm}(A)$); 1_a también es objeto en A^E. $\square$

4.3. Seudoálgebras normales de la mónada 2 $(-)^E$ y sistemas de factorización de idempotentes

Definición 4.12. Un sistema de factorización débil de idempotentes para una categoría A es un funtor $F : A^E \to A$ tal que $FdA = 1_A$. Sistema de factorizacón débil de idempotentes lo abreviaremos SFDI.

Definición 4.13. Una factorización funtorial de idempotentes (F, λ, ρ) sobre una categoría A está dada por un funtor $F : A^E \to A$ y una factorización de $\kappa : q \Rightarrow q : A^E \to A$ (la transformación natural canónica con componentes $\kappa_f = f : qf \to qf$)

$$\kappa = \; q \overset{\lambda}{\Longrightarrow} F \overset{\rho}{\Longrightarrow} q$$

tal que $\lambda \cdot \rho : F \Rightarrow F$ es idempotente.

Definición 4.14. Un endofuntor S sobre una categoría A es (co)puntuado si está provisto de una transformación natural ϑ desde (hacia) el funtor identidad 1_A

$$\vartheta : 1_A \Rightarrow S.$$

Además, si $\vartheta S = S\vartheta$, se dice que S está bien (co)puntuado.

Proposición 4.15. *Si (F, λ, ρ) es una factorización funtorial de idempotentes sobre una categoría A, entonces (F, λ, ρ) determina un endofuntor $Z : A^E \to A^E$ puntuado (Z, Λ) y copuntuado (Z, Φ), con $Zf = \lambda_f \rho_f$ y $\Lambda_f : f \to Zf$ y $\Phi_f : Zf \to f$ dadas como*

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "\lambda_f"] \arrow[d, "f"'] & Ff \arrow[r, "\rho_f"] \arrow[d, "Zf"] & a \arrow[d, "f"] \\ a \arrow[r, "\lambda_f"'] & Ff \arrow[r, "\rho_f"'] & a. \end{tikzcd} \tag{4.7}$$

Demostración. Dado el morfismo (f, h, g) en A^E, defínase

$$Z(f, h, g) := (Zf, F(f, h, g), Zg).$$

Ahora, de la naturalidad de ρ y λ, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} Ff \arrow[r, "\rho_f"'] \arrow[rr, bend left, "Zf"] \arrow[d, "{F(f,h,g)}"'] & a \arrow[r, "\lambda_f"'] \arrow[d, "h"] & Ff \arrow[d, "{F(f,h,g)}"] \\ Fg \arrow[r, "\rho_g"] \arrow[rr, bend right, "Zg"'] & b \arrow[r, "\lambda_g"] & Fg. \end{tikzcd}$$

La funtorialidad de Z se sigue de la funtorialidad de F.

Por otro lado, (4.7) conmuta, porque $f = \rho_f \lambda_f$. Ahora, veamos que

$$\begin{tikzcd}
f \arrow[r, "\Lambda_f"] \arrow[d, "(f,h,g)"'] & Zf \arrow[d, "Z(f,h,g)"] \\
g \arrow[r, "\Lambda_g"'] & Zg
\end{tikzcd}$$

conmuta. Sea (f, h, g) en A^E; entonces,

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f"'] & b \arrow[r, "\lambda_g"] \arrow[d, "g"] & Fg \arrow[d, "\lambda_g\rho_g"] \\
a \arrow[r, "h"'] & b \arrow[r, "\lambda_g"'] & Fg
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "\lambda_f"] \arrow[d, "f"'] & Ff \arrow[r, "F(f,h,g)"] \arrow[d, "\lambda_f\rho_f"] & Fg \arrow[d, "\lambda_g\rho_g"] \\
a \arrow[r, "\lambda_f"'] & Ff \arrow[r, "F(f,h,g)"'] & Fg.
\end{tikzcd}$$

Luego, Λ es natural; similarmente, Φ. □

Nota 4.16. El cubo (morfismo en $(A^E)^E$)

$$\begin{tikzcd}
f \arrow[r, "(f,h,f')"] \arrow[d, "(f,g,f)"'] & f' \arrow[d, "(f',g',f')"] \\
f \arrow[r, "(f,h,f')"'] & f'
\end{tikzcd} ,$$

para mayor brevedad, se denotará como (f, g, h, g', f').

Definición 4.17. Dado $A \in \mathbf{Cat}$, definamos $G_A : A^E \to (A^E)^E$ como

$$A^E \xrightarrow{G_A} (A^E)^E$$

$$\begin{tikzcd}
f \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "(f,h,g)"'] & f_f \arrow[d, "(f,f,h,g,g)"] \\
g \arrow[r, mapsto] & g_g
\end{tikzcd} ,$$

donde $f_f := (f, f, f)$.

Proposición 4.18. *Si $F : A^E \to A$ es un SFDI, entonces F induce una factorización funtorial (F, r, i) de idempotentes, donde*

$$r_f := F\epsilon_f, \quad i_f := F\eta_f.$$

Además, el diagrama

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "r_f"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "r_f"] & Ff \arrow[r, "i_f"] \arrow[d, "Zf"] \arrow[dr, "i_f"] & a \arrow[d, "f"] \\
a \arrow[r, "r_f"'] & Ff \arrow[r, "i_f"'] & a.
\end{tikzcd} \tag{4.8}$$

conmuta (es decir, $r_f : f \to r_f i_f$ e $i_f : r_f i_f \to f$ en $\mathrm{K}(A)$*, la envolvente de Karoubi de A), y $Z = F^E G_A$.*

Demostración. Como $FdA = 1_A$, se tiene que

$$f = F(1_a, f, 1_a) = F\eta_f F\epsilon_f = i_f r_f.$$

Ahora, sea (f, h, g) un morfismo en A^E. Se tiene que

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "f"] \arrow[d, "1"'] \arrow[dr, phantom, "\epsilon_f"] & a \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f"'] & b \arrow[d, "g"] \\
a \arrow[r, "f"'] & a \arrow[r, "h"'] & b
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "h"] \arrow[d, "1"'] & b \arrow[r, "g"] \arrow[d, "1"'] \arrow[dr, phantom, "\epsilon_g"] & b \arrow[d, "g"] \\
a \arrow[r, "h"'] & b \arrow[r, "g"'] & b
\end{tikzcd}$$

y

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\eta_f"] & a \arrow[r, "h"] \arrow[d, "1"'] & b \arrow[d, "1"] \\
a \arrow[r, "f"'] & a \arrow[r, "h"'] & b
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f"'] & b \arrow[r, "g"] \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, phantom, "\eta_g"] & b \arrow[d, "1"] \\
a \arrow[r, "h"'] & b \arrow[r, "g"'] & b
\end{tikzcd}.$$

De aquí,

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "r_f"'] \arrow[ddd, "h"'] & & a \arrow[ddd, "h"] \\
& Ff \arrow[ur, "i_f"'] \arrow[d, "F(f,h,g)"] & \\
& Fg \arrow[dr, "i_g"] & \\
b \arrow[ur, "r_g"] \arrow[rr, "g"'] & & b
\end{tikzcd} \tag{4.9}$$

conmuta.

Ahora, que $r_f : f \to r_f i_f$ e $i_f : r_f i_f \to f$ estén en la envolvente de Karoubi se sigue de que

$$\epsilon_f(1_a, f, 1_a) = \epsilon_f = f_f \epsilon_f$$

y

$$(1_a, f, 1_a)\eta_f = \eta_f = \eta_f f_f.$$

Por otro lado, por la Proposición 4.15, ya se tenía que $r_f i_f = Zf = F^E G_A f$ fuera puntuado (Z, Λ) con $\Lambda_f = (f, r_f, Zf)$ y copuntuado (Z, Φ) con $\Phi_f = (Zf, i_f, f)$. $\square$

Observación 4.19. Si $F : A^E \to A$ es un SFDI, entonces

$$q\Lambda = \lambda = r, \qquad q\Phi = \rho = i, \qquad qZ = F.$$

Observación 4.20. Si $F : A^E \to A$ es funtor, entonces $(F^E)^E G_{A^E} = G_A F^E$.

Observación 4.21. El funtor 2 $(-)^E : \mathbf{Cat} \to \mathbf{Cat}$ es una 2-mónada, con unidad $A \overset{dA}{\to} A^E$ para todo $A \in \mathbf{Cat}$ y multiplicación $m_A : (A^E)^E \to A^E$ definida como sigue:

$$\begin{tikzcd} (A^E)^E \arrow[r, "m_A"] & A^E \\ (f, g, f) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "{(f,g,h,g',f')}"'] & gf \arrow[d, "{(gf,h,g'f')}"'] & = & fg \\ (f', g', f') \arrow[r, mapsto] & g'f' & = & f'g' \end{tikzcd};$$

es decir, para toda $A \in \mathbf{Cat}$

$$\begin{tikzcd} ((A^E)^E)^E \arrow[r, "(m_A)^E"] \arrow[d, "m_{A^E}"'] & (A^E)^E \arrow[d, "m_A"] \\ (A^E)^E \arrow[r, "m_A"'] & A^E \end{tikzcd}$$

y

$$\begin{tikzcd} A^E \arrow[r, "dA^E"] \arrow[dr, "1"'] & (A^E)^E \arrow[d, "m_A"] & A^E \arrow[l, "(dA)^E"'] \arrow[dl, "1"] \\ & A^E & \end{tikzcd}$$

conmutan, donde $m : ((-)^E)^E \to (-)^E$ y $d : 1_{\mathbf{Cat}} \to (-)^E$ son transformaciones naturales 2.

Proposición 4.22. *Sea $A \in \mathbf{Cat}$. Existen transformaciones naturales entre G_A y dA^E, y G_A y $(dA)^E$ tales que conforman un rombo conmutativo:*

$$
\begin{tikzcd}
 & dA^E \arrow[dr] & \\
G_A \arrow[ur] \arrow[dr] & & G_A \\
 & (dA)^E \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
.
$$

Demostración. Sea $f : a \to a \in A^E$. Definamos las transformaciones naturales deseadas como sigue.

$$
G_A(f) \xrightarrow{\eta_{\vec{f}}} dA^E(f) \xrightarrow{\epsilon_{\vec{f}}} G_A(f) :
$$

$$
\begin{tikzcd}
f \arrow[r, "\vec{f}"] \arrow[d, "\vec{f}"'] & f \arrow[r, "\vec{f}"] \arrow[d, "\vec{1_a}"] & f \arrow[d, "\vec{f}"] \\
f \arrow[r, "\vec{f}"'] & f \arrow[r, "\vec{f}"'] & f
\end{tikzcd}
$$

y

$$
G_A(f) \xrightarrow{\vec{\eta_f}} (dA)^E(f) \xrightarrow{\vec{\epsilon_f}} G_A(f) :
$$

$$
\begin{tikzcd}
f \arrow[r, "\eta_f"] \arrow[d, "\vec{f}"'] & 1_a \arrow[r, "\epsilon_f"] \arrow[d, "\vec{f}"] & f \arrow[d, "\vec{f}"] \\
f \arrow[r, "\eta_f"'] & 1_a \arrow[r, "\epsilon_f"'] & f
\end{tikzcd}
.
$$

Es claro que son naturales en f. Además,

$$
\begin{tikzcd}
 & dA^E(f) \arrow[dr, "\eta_{\vec{f}}"] & \\
G_A(f) \arrow[ur, "\eta_{\vec{f}}"] \arrow[dr, "\vec{\eta_f}"'] & & G_A(f) \\
 & (dA)^E(f) \arrow[ur, "\vec{\epsilon_f}"'] &
\end{tikzcd}
\tag{4.10}
$$

conmuta. $\square$

Observación 4.23. Sea $F : A^E \to A$ un SFDI. Consideremos las transformaciones naturales anteriores

$$(dA)^E \xrightarrow{\vec{\epsilon}} G_A \xrightarrow{\vec{\eta}} (dA)^E\ .$$

Se tiene que

$$F^E\vec{\epsilon} = \Lambda \qquad \text{y} \qquad F^E\vec{\eta} = \Phi.$$

Proposición 4.24. *Sea $\alpha : FF^E \Rightarrow Fm_A$ una transformación natural donde $F : A^E \to A$ es un SFDI. Entonces, dado $f \in A^E$, obtenemos las ecuaciones siguientes:*

$$r_f i_f \circ \alpha G_A(f) = \alpha dA^E(f) \circ i_{r_f i_f}, \tag{4.11}$$

$$r_f i_f \circ \alpha dA^E(f) = \alpha G_A(f) \circ r_{r_f i_f}, \tag{4.12}$$

$$r_f i_f \circ \alpha G_A(f) = \alpha (dA)^E(f) \circ F(r_f i_f, i_f, f), \tag{4.13}$$

$$r_f i_f \circ \alpha (dA)^E(f) = \alpha G_A(f) \circ F(f, r_f, r_f i_f). \tag{4.14}$$

Demostración. Consideremos el rombo (4.10). Apliquémosle F^E y m_A; obtenemos entonces los siguientes diagramas conmutativos:

$$\begin{tikzcd}
& 1_{Ff} \arrow[dr, "\epsilon_{r_f i_f}"] & \\
r_f i_f \arrow[ur, "\eta_{r_f i_f}"] \arrow[dr, "\vec{i_f}"'] & & r_f i_f \\
& f \arrow[ur, "\vec{r_f}"'] &
\end{tikzcd} \tag{4.15}$$

y

$$\begin{tikzcd}
& f \arrow[dr, "\vec{f}"] & \\
f \arrow[ur, "\vec{f}"] \arrow[dr, "\vec{f}"'] & & f \\
& f \arrow[ur, "\vec{f}"'] &
\end{tikzcd} \tag{4.16}$$

;

así que, aplicando F a ambos, obtenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & Ff \arrow[dr, "r_{r_f i_f}"] \arrow[drrr, "\alpha dA^E(f)"] & & & & \\
F(r_f i_f) \arrow[ur, "i_{r_f i_f}"] \arrow[dr, "F(\vec{i_f})"'] \arrow[drrr, "\alpha G_A(f)"] & & F(r_f i_f) \arrow[drrr, "\alpha G_A(f)"'] & & Ff \arrow[dr, "r_f i_f"] & \\
 & Ff \arrow[ur, "F(\vec{r_f})"'] \arrow[drrr, "\alpha(dA)^E(f)"'] & & Ff \arrow[ur, "r_f i_f"] \arrow[dr, "r_f i_f"] & & Ff \\
 & & & & Ff \arrow[ur, "r_f i_f"'] &
\end{tikzcd} ;$$

de donde,

$$\begin{aligned}
r_f i_f \circ \alpha G_A(f) &= \alpha dA^E(f) \circ i_{r_f i_f}, \\
r_f i_f \circ \alpha dA^E(f) &= \alpha G_A(f) \circ r_{r_f i_f}, \\
r_f i_f \circ \alpha G_A(f) &= \alpha (dA)^E(f) \circ F(r_f i_f, i_f, f), \\
r_f i_f \circ \alpha (dA)^E(f) &= \alpha G_A(f) \circ F(f, r_f, r_f i_f).
\end{aligned}$$

□

Corolario 4.25. *Sea $\alpha : FF^E \Rightarrow Fm_A$ una transformación natural donde $F : A^E \to A$ es un SFDI. Si α es un isomorfismo, entonces*

$$r_{r_f i_f} \cong r_f i_f \cong i_{r_f i_f}$$

y

$$F(f, r_f, r_f i_f) \cong r_f i_f \cong F(r_f i_f, i_f, f)$$

en $A^{\mathbf{2}}$.

Corolario 4.26. *Sea $\alpha : FF^E \Rightarrow Fm_A$ un isomorfismo natural donde $F : A^E \to A$ es un SFDI. Si $\alpha dA^E = 1$ y $\alpha(dA)^E = 1$, entonces*

$$r_{r_f i_f} = F(f, r_f, r_f i_f) \quad y \quad i_{r_f i_f} = F(r_f i_f, i_f, f).$$

En otras palabras, si $\alpha : FF^E \Rightarrow Fm_A$ es una seudoálgebra normal de $(-)^E$, entonces se tienen las igualdades anteriores.

Corolario 4.27. *Sea $\alpha : FF^E \Rightarrow Fm_A$ un isomorfismo natrual donde $F : A^E \to A$ es un SDFI. Si $\alpha dA^E = 1$ y $\alpha(dA)^E = 1$, entonces*

$$q\Lambda Z = F\Lambda \qquad y \qquad q\Phi Z = F\Phi; \tag{4.17}$$

es decir, si $\alpha : FF^E \Rightarrow Fm_A$ es una seudoálgebra normal de $(-)^E$, entonces se tienen las igualdades anteriores.

Proposición 4.28. *Sea $\alpha : FF^E \Rightarrow Fm_A$ un isomorfismo natrual donde $F : A^E \to A$ es un SDFI. Si $\alpha dA^E = 1$ y $\alpha(dA)^E = 1$, entonces*

$$\Lambda Z = Z\Lambda \qquad y \qquad \Phi Z = Z\Phi;$$

es decir, Z está bien puntuado (Z, Λ) y bien copuntuado (Z, Φ). En otras palabras, si $\alpha : FF^E \Rightarrow Fm_A$ es una seudoálgebra normal de $(-)^E$, entonces $Z = F^E G_A$ está bien puntuado y bien copuntuado.

Demostración. Sea $f \in A^E$. Tenemos que Λ_f es

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "\lambda_f"] \arrow[d, "f"'] & Ff \arrow[d, "Zf"] \\ a \arrow[r, "\lambda_f"'] & Ff. \end{tikzcd} \tag{4.18}$$

Ahora, consideremos la composición

$$\begin{tikzcd} A^E \arrow[r, "Z"] & A^E \arrow[r, bend left, "1"{name=U}] \arrow[r, bend right, "Z"'{name=D}] \arrow[phantom, from=U, to=D, "\Downarrow\Lambda"] & A^E . \end{tikzcd}$$

Tenemos entonces que ΛZf es

$$\begin{tikzcd} Ff \arrow[r, "\lambda_{Zf}", "r_{r_f i_f}"'] \arrow[d, "Zf"'] & FZf \arrow[d, "ZZf"] \\ Ff \arrow[r, "r_{r_f i_f}", "\lambda_{Zf}"'] & FZf \end{tikzcd}$$

y $Z\Lambda_f$ es

$$\begin{tikzcd} Ff \arrow[r, "F(f,\lambda_f,Zf)"] \arrow[d, "Zf"'] & FZf \arrow[d, "ZZf"] \\ Ff \arrow[r, "F(f,\lambda_f,Zf)"'] & FZf. \end{tikzcd}$$

Como $r_{r_f i_f} = F(f, \lambda_f, Zf)$, $\Lambda Z = Z\Lambda$.

Similarmente, $\Phi Z = Z\Phi$. $\square$

Definición 4.29. Sea $\Gamma : 1_{A^E} \Rightarrow 1_{A^E}$ la transformación natural dada por Γ_f igual a

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f"'] & a \arrow[d, "f"] \\ a \arrow[r, "f"'] & a. \end{tikzcd}$$

Su naturalidad se sigue de que

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f"'] & a \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f"] & b \arrow[d, "g"] \\ a \arrow[r, "f"'] & a \arrow[r, "h"'] & b \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} a \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f"'] & b \arrow[r, "g"] \arrow[d, "g"] & b \arrow[d, "g"] \\ a \arrow[r, "h"'] & b \arrow[r, "g"'] & b \end{tikzcd}$$

para un morfismo (f, h, g) en A^E. De hecho, $\epsilon \cdot \eta = \Gamma$.

Proposición 4.30. *Si $\alpha : FF^E \Rightarrow Fm_A$ una seudoálgebra normal de $(-)^E$, entonces $(Z, \Lambda, \Phi Z)$ y $(Z, \Phi, \Lambda Z)$, con $Z = F^E G_A$, son tales que los siguientes diagramas conmutan:*

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "\Lambda Z"] \arrow[dr, "\Gamma Z"'] & ZZ \arrow[d, "\Phi Z"] \\ & Z, \end{tikzcd} \tag{4.19}$$

$$\begin{tikzcd} ZZZ \arrow[r, "Z\Phi Z"] \arrow[d, "\Phi ZZ"'] & ZZ \arrow[d, "\Phi Z"] \\ ZZ \arrow[r, "\Phi Z"'] & Z \end{tikzcd} \tag{4.20}$$

y

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "\Gamma Z"'] \arrow[d, "\Lambda Z"] \\ Z & ZZ, \arrow[l, "\Phi Z"] \end{tikzcd} \tag{4.21}$$

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "\Lambda Z"] \arrow[d, "\Lambda Z"'] & ZZ \arrow[d, "Z\Lambda Z"] \\ ZZ \arrow[r, "\Lambda ZZ"'] & ZZZ \end{tikzcd} \tag{4.22}$$

Demostración. Es claro que

$$\Phi \cdot \Lambda = \Gamma.$$

Nótese que (4.19) es igual a (4.21). $\square$

Nota 4.31. Por el momento llamemos a $(Z, \Lambda, \Phi Z)$ la *mónada karoubiana* (o la mónada Γ) de Z y a $(Z, \Phi, \Lambda Z)$ la *comónada karoubiana* (o comónada Γ) de Z.

Observación 4.32. Sea $\alpha : FF^E \Rightarrow Fm_A$ seudoálgebra normal de $(-)^E$; entonces, se tiene que

$$q\Gamma = \kappa, \qquad \rho Z \cdot \lambda Z = \lambda \cdot \rho, \qquad \Gamma Z = Z\Gamma.$$

Definición 4.33. Dada la mónada karoubiana de Z, definamos la categoría $Alg(Z, \Lambda, \Phi Z)$ como la categoría cuyos objetos son los pares (g, k) donde $g \in A^E$ y (Zg, k, g) es un morfismo en A^E tales que los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{tikzcd} g \arrow[r, "\Lambda_g"] \arrow[dr, "\Gamma_g"'] & Zg \arrow[d, "{(Zg,k,g)}"] & ZZg \arrow[r, "{Z(Zg,k,g)}"] \arrow[d, "\Phi Zg"] & Zg \arrow[d, "{(Zg,k,g)}"] \\ & g & Zg \arrow[r, "{(Zg,k,g)}"'] & g, \end{tikzcd} \tag{4.23}$$

y cuyas flechas $(g, t, g') : (g, k) \to (g', k')$ son los morfismos (g, t, g') en A^E tales que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} Zg \arrow[r, "{Z(g,t,g')}"] \arrow[d, "{(Zg,k,g)}"'] & Zg' \arrow[d, "{(Zg',k',g')}"] \\ g \arrow[r, "{(g,t,g')}"'] & g'. \end{tikzcd} \tag{4.24}$$

Similarmente, definamos la categoría $CoAlg(Z, \Phi, \Lambda Z)$ como la categoría cuyos objetos son los pares (f, j) donde $f \in A^E$ y (f, j, Zf) es un morfismo en A^E tales que los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{tikzcd} & f \arrow[dl, "\Gamma_f"'] \arrow[d, "{(f,j,Zf)}"] & f \arrow[r, "{(f,j,Zf)}"] \arrow[d, "{(f,j,Zf)}"] & Zf \arrow[d, "\Lambda Zf"] \\ f & Zf \arrow[l, "\Phi_f"] & Zf \arrow[r, "{Z(f,j,Zf)}"'] & ZZf, \end{tikzcd} \tag{4.25}$$

y cuyas flechas $(f,s,f'):(f,j)\to(f',j')$ son los morfismos (f,s,f') en A^E tales que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} f \arrow[r, "{(f,s,f')}"] \arrow[d, "{(f,j,Zf)}"'] & f' \arrow[d, "{(f',j',Zf')}"] \\ Zf \arrow[r, "{Z(f,s,f')}"'] & Zf'. \end{tikzcd} \tag{4.26}$$

Observación 4.34. Dado $(g,k)\in Alg(Z,\Lambda,\Phi Z)$, obtenemos las ecuaciones siguientes:

$$kr_g = g \qquad \text{(la “unidad” en (4.23))} \tag{4.27}$$
$$gk = kr_g i_g \qquad \text{((Zg,k,g) es morfismo en A^E)} \tag{4.28}$$
$$kF(Zg,k,g) = ki_{r_f i_f} \qquad \text{(la asociativiad en (4.23))} \tag{4.29}$$
$$gk = i_g \qquad \text{((4.27), (4.28) y $gi_g = i_g$).} \tag{4.30}$$

Dado $(f,j)\in CoAlg(Z,\Phi,\Lambda Z)$, obtenemos las ecuaciones siguientes:

$$i_f j = f \qquad \text{(la “unidad” en (4.25))} \tag{4.31}$$
$$jf = r_f i_f j \qquad \text{((f,j,Zf) es morfismo en A^E)} \tag{4.32}$$
$$r_{r_f i_f} j = F(f,j,Zf)j \qquad \text{(la asociatividad en (4.25))} \tag{4.33}$$
$$jf = r_f \qquad \text{((4.31), (4.32) y $r_f f = r_f$).} \tag{4.34}$$

Proposición 4.35. *Sea $F: A^E\to A$ un SFDI. Sean*

$$\mathcal{L}_F := \{(f,j) \mid f\in A^E \ y \ (f,j,Zf) \text{ es un morfismo en } A^E \text{ tal que } i_f j = f\}$$

y

$$\mathcal{R}_F := \{(g,k) \mid g\in A^E \ y \ (Zg,k,g) \text{ es un morfismo en } A^E \text{ tal que } kr_g = g\}$$

(nótese que $(f,r_f)\in\mathcal{L}_F$ y $(f,i_f)\in\mathcal{R}_F$). Sean (f,s,g) y (g,p,f) morfismos

en A^E tales que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
f \arrow[r, "{(f,s,g)}"'] \arrow[d, "j"'] \arrow[rr, bend left, "{(f,f,f)}"] & g \arrow[r, "{(g,p,f)}"'] \arrow[d, "k"] & f \arrow[d, "j"] \\
Zf \arrow[r, "{Z(f,s,g)}"] \arrow[rr, bend right, "{Z(f,f,f)}"'] & Zg \arrow[r, "{Z(g,p,f)}"] & Zf.
\end{tikzcd}$$

Si $(g,k) \in \mathcal{L}_F$ entonces $(f,j) \in \mathcal{L}_F$. Similarmente, si (f,s,g) y (g,p,f) son tales que

$$\begin{tikzcd}
Zf \arrow[r, "{Z(f,s,g)}"'] \arrow[d, "j"'] \arrow[rr, bend left, "{Z(f,f,f)}"] & Zg \arrow[r, "{Z(g,p,f)}"'] \arrow[d, "k"] & Zf \arrow[d, "j"] \\
f \arrow[r, "{(f,s,g)}"] \arrow[rr, bend right, "{(f,f,f)}"'] & g \arrow[r, "{(g,p,f)}"] & f
\end{tikzcd}$$

conmuta y $(g,k) \in \mathcal{R}_F$ entonces $(f,j) \in \mathcal{R}_F$.

Demostración. Como (f, j, Zf) es morfismo en A^E, se tiene que $r_f i_f j = jf$. Veamos que $i_f j = f$.

$$\begin{aligned}
i_f j &= i_f r_f i_f j \\
&= i_f j f \\
&= i_f j p s \\
&= i_f F(g,p,f) k s \\
&= p i_g k s \\
&= p g s \\
&= p i_g r_g s \\
&= p i_g F(f,s,g) r_f \\
&= i_f F(g,p,f) F(f,s,g) r_f \\
&= i_f F(f,f,f) r_f \\
&= i_f r_f i_f r_f \\
&= f f \\
&= f.
\end{aligned}$$

De manera similar se demuestra la segunda afirmación. □

Proposición 4.36. *Si $\alpha : FF^E \Rightarrow Fm_A$ es seudoálgebra normal de $(-)^E$, entonces todo $f \in A^E$ se factoriza como*

$$\begin{tikzcd} & Ff \arrow[dr, "i_f"] & \\ a \arrow[ur, "r_f"] \arrow[rr, "f"'] & & a \end{tikzcd}$$

con $(f, r_f) \in CoAlg(Z, \Phi, \Lambda Z)$ y $(f, i_f) \in Alg(Z, \Lambda, \Phi Z)$.

Demostración. Como α es seudoálgebra normal,

$$r_{r_f i_f} = F(f, r_f, Zf) \qquad \text{y} \qquad i_{r_f i_f} = F(Zf, i_f, f);$$

de la primera igualdad, el diagrama de la derecha conmuta; la conmutatividad del de la izquierda es evidente:

$$\begin{tikzcd} & f \arrow[dl, "\Gamma_f"'] \arrow[d, "{(f,r_f,Zf)}"] \\ f & Zf \arrow[l, "{(Zf,i_f,f)}"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} f \arrow[r, "{(f,r_f,Zf)}"] \arrow[d, "{(f,r_f,Zf)}"'] & Zf \arrow[d, "\Lambda Zf"', "r_{r_f i_f}"] \\ Zf \arrow[r, "{Z(f,r_f,Zf)}", "{F(f,r_f,Zf)}"'] & ZZf. \end{tikzcd}$$

De manera similar, se tiene que $(f, i_f) \in Alg(Z, \Lambda, \Phi Z)$. $\square$

Definición 4.37. Dados los supuestos anteriores, tenemos funtores

$$U : CoAlg(Z, \Phi, \Lambda Z) \to A^E \qquad \text{y} \qquad T : A^E \to CoAlg(Z, \Phi, \Lambda Z),$$

donde U es el funtor olvidadizo y T es

$$A^E \xrightarrow{T} CoAlg(Z, \Phi, \Lambda Z)$$

$$\begin{tikzcd} f \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "{(f,h,g)}"'] & (f, r_f) \arrow[d, "{(f,h,g)}"] \\ g \arrow[r, mapsto] & (g, r_g). \end{tikzcd}$$

T está bien definido, pues

$$\begin{tikzcd} f \arrow[r, "{(f,h,g)}"] \arrow[d, "{(f,r_f,Zf)}"'] & g \arrow[d, "{(g,r_g,Zg)}"] \\ Zf \arrow[r, "{Z(f,h,g)}"'] & Zg \end{tikzcd}$$

conmuta, ya que

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "h"] \arrow[d, "r_f"'] & b \arrow[d, "r_g"] \\
Ff \arrow[r, "F(f,h,g)"'] & Fg
\end{tikzcd}$$

conmuta.

También tenemos transformaciones naturales

$$\xi : 1_{CoAlg} \Rightarrow TU \qquad \text{y} \qquad \zeta : TU \Rightarrow 1_{CoAlg},$$

con $\xi_{(f,j)} = (f, f, f)$ y $\zeta_{(f,j)} = (f, f, f)$. Ahora, $\xi_{(f,j)}$ está bien definida, ya que

$$\begin{tikzcd}
f \arrow[r, "(f,f,f)"] \arrow[d, "(f,j,Zf)"'] & f \arrow[d, "(f,r_f,Zf)"] \\
Zf \arrow[r, "Z(f,f,f)"'] & Zf
\end{tikzcd}$$

conmuta, porque

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "f"] \arrow[d, "j"'] & a \arrow[d, "r_f"] \\
Ff \arrow[r, "r_f i_f", "F(f,f,f)"'] & Ff
\end{tikzcd}$$

conmuta (ver (4.32) y (4.34)). Es claro que ξ es natural. También $\zeta_{(f,j)}$ está bien definida, ya que

$$\begin{tikzcd}
f \arrow[r, "(f,f,f)"] \arrow[d, "(f,r_f,Zf)"'] & f \arrow[d, "(f,j,Zf)"] \\
Zf \arrow[r, "Z(f,f,f)"'] & Zf
\end{tikzcd}$$

conmuta, porque

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "f"] \arrow[d, "r_f"'] & a \arrow[d, "j"] \\
Ff \arrow[r, "r_f i_f", "F(f,f,f)"'] & Ff
\end{tikzcd}$$

conmuta (por (4.34) y porque $Zfr_f = r_f$). Es claro que ζ es natural. De paso, notemos que $UT = 1_{A^E}$.

Similarmente, tenemos funtores

$$V : Alg(Z, \Lambda, \Phi Z) \to A^E \qquad \text{y} \qquad S : A^E \to Alg(Z, \Lambda, \Phi Z),$$

donde V es el funtor olvidadizo y S es

$$\begin{tikzcd} A^E \arrow[r, "S"] & Alg(Z, \Lambda, \Phi Z) \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} f \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "{(f,h,g)}"'] & (f, i_f) \arrow[d, "{(f,h,g)}"] \\ g \arrow[r, mapsto] & (g, i_g), \end{tikzcd}$$

y transformaciones naturales

$$\mu : 1_{Alg} \Rightarrow SV \qquad \text{y} \qquad \nu : SV \Rightarrow 1_{Alg},$$

con $\mu_{(g,k)} = (g, g, g)$ y $\nu_{(g,k)} = (g, g, g)$. Notemos que $VS = 1_{A^E}$.

Proposición 4.38. *Sea $\alpha : FF^E \Rightarrow Fm_A$ seudoálgebra normal de $(-)^E$. Entonces, $\Psi = 1_{ZZ}$ y $\Psi = \Gamma ZZ$ son entrelazamientos (leyes distributivas mixtas) de $(Z, \Lambda, \Phi Z)$ sobre $(Z, \Phi, \Lambda Z)$.*

Demostración. Queremos mostrar que los diagramas

$$\begin{tikzcd} ZZZ \arrow[rr, "\Phi ZZ"] \arrow[d, "Z\Psi"'] & & ZZ \arrow[d, "\Psi"] \\ ZZZ \arrow[r, "\Psi Z"'] & ZZZ \arrow[r, "Z\Phi Z"'] & ZZ \end{tikzcd} \tag{4.35}$$

$$\begin{tikzcd} ZZ \arrow[r, "Z\Lambda Z"] \arrow[d, "\Psi"'] & ZZZ \arrow[r, "\Psi Z"] & ZZZ \arrow[d, "Z\Psi"] \\ ZZ \arrow[rr, "\Lambda ZZ"'] & & ZZZ \end{tikzcd} \tag{4.36}$$

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "\Lambda Z"] \arrow[dr, "Z\Lambda"'] & ZZ \arrow[d, "\Psi"] \\ & ZZ \end{tikzcd} \tag{4.37}$$

$$\begin{tikzcd} ZZ \arrow[r, "Z\Phi"] \arrow[d, "\Psi"'] & Z \\ ZZ \arrow[ur, "\Phi Z"'] & \end{tikzcd} \tag{4.38}$$

conmutan. Es claro que para $\Psi = 1_{ZZ}$ los diagramas conmutan.

Ahora, de la Observación 4.32, $\Gamma Z = Z\Gamma$. Por otro lado, $\Lambda_f \circ \Gamma_f$ es

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"'] \arrow[rr, bend left, "r_f"] \arrow[d, "f"'] & a \arrow[r, "r_f"'] \arrow[d, "f"] & Ff \arrow[d, "Zf"] \\ a \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "r_f"'] & a \arrow[r, "r_f"] & Ff, \end{tikzcd}$$

así que $\Lambda \cdot \Gamma = \Lambda$. Dualmente, $\Gamma \cdot \Phi = \Phi$.

Y $\Gamma_{Zf} \circ \Lambda_f$ es

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "r_f"'] \arrow[rr, bend left, "r_f"] \arrow[d, "f"'] & Ff \arrow[r, "Zf"'] \arrow[d, "Zf"] & Ff \arrow[d, "Zf"] \\ a \arrow[r, "r_f"] \arrow[rr, bend right, "r_f"'] & Ff \arrow[r, "Zf"] & Ff, \end{tikzcd}$$

así que $\Gamma Z \cdot \Lambda = \Lambda$. Dualmente, $\Phi \cdot \Gamma Z = \Phi$. Luego, (4.35), (4.36), (4.37) y (4.38) conmutan para $\Psi = \Gamma ZZ$. $\square$

Capítulo 5

Álgebras laxas de $(-)^E$

Nota 5.1. Como ya dijimos en la Introducción, este capítulo trata sobre unas posibles álgebras laxa y colaxa canónicas de $(-)^E$ y sobre la relación de estas álgebras con ciertos isomorfismos naturales. Aparecieron al tratar de encontrar condiciones suficientes para que una transformación natural $\alpha : FF^E \Rightarrow Fm_A$ fuera una seudoálgebra de $(-)^E$.

Observación 5.2. Cuando consideramos a $(-)^E$ como seudomónada, resulta que $(-)^E$ es de hecho una 2-mónada, como ya vimos en el Ejemplo 2.2; es decir, las condiciones de coherencia de la Definición 2.1 se trivializan: los diagramas

$$\begin{tikzcd}
(((-)^E)^E)^E \arrow[r, "m^E"] \arrow[d, "m_{(-)^E}"'] & ((-)^E)^E \arrow[d, "m"] \\
((-)^E)^E \arrow[r, "m"'] & (-)^E
\end{tikzcd}$$

y

$$\begin{tikzcd}
(-)^E \arrow[r, "d^E"] \arrow[dr, "1_{(-)^E}"'] & ((-)^E)^E \arrow[d, "m"] & (-)^E \arrow[l, "d_{(-)^E}"'] \arrow[dl, "1_{(-)^E}"] \\
 & (-)^E &
\end{tikzcd}$$

conmutan, donde $m = (-)^{\delta_E}$ y $d = (-)^{!_E}$.

Observación 5.3. Como $(-)^E : \mathbf{Cat} \to \mathbf{Cat}$ es una mónada 2, si $\alpha : FF^E \to Fm_A$ es una transformación natural, entonces para que (A, F, α)

sea álgebra laxa normal de $(-)^E$, ha de satisfacer

$$
\begin{tikzcd}
((A^E)^E)^E \arrow[r, "(F^E)^E"] \arrow[d, "(m_A)^E"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\Leftarrow}{\alpha^E}"] & (A^E)^E \arrow[d, "F^E"] \\
(A^E)^E \arrow[r, "F^E"'] \arrow[d, "m_A"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\Leftarrow}{\alpha}"] & A^E \arrow[d, "F"] \\
A^E \arrow[r, "F"'] & A
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
((A^E)^E)^E \arrow[r, "(F^E)^E"] \arrow[d, "m_{A^E}"'] & (A^E)^E \arrow[d, "m_A"] \arrow[dr, "F^E"] & \\
(A^E)^E \arrow[r, "F^E"] \arrow[dr, "m_A"'] & A^E \arrow[r, phantom, "\overset{\Leftarrow}{\alpha}"] \arrow[d, phantom, "\overset{\Leftarrow}{\alpha}"] \arrow[dr, "F"] & A^E \arrow[d, "F"] \\
& A^E \arrow[r, "F"'] & A
\end{tikzcd}
\quad , \tag{5.1}
$$

$$
\begin{tikzcd}
& & A^E \arrow[dr, "F"] & \\
A^E \arrow[r, "(dA)^E"] & (A^E)^E \arrow[ur, "F^E"] \arrow[dr, "m_A"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow\alpha"] & & A \\
& & A^E \arrow[ur, "F"'] &
\end{tikzcd}
= 1_F \tag{5.2}
$$

y

$$
\begin{tikzcd}
& & A^E \arrow[dr, "F"] & \\
A^E \arrow[r, "dA^E"] & (A^E)^E \arrow[ur, "F^E"] \arrow[dr, "m_A"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow\alpha"] & & A \\
& & A^E \arrow[ur, "F"'] &
\end{tikzcd}
= 1_F \; . \tag{5.3}
$$

Nótese que la celda 2 del cuadrado del lado derecho de (5.1) es una identidad, porque, en este caso, m es una transformación estricta, es decir, natural 2.

Lema 5.4. *Sea $F : A^E \to A$ con $A \in$ **Cat** un SFDI. Si f, g son idempotentes de A que conmutan entre sí, entonces los siguientes diagramas conmutan:*

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "r_{gf}"] \arrow[d, "r_f"'] & F(gf) \arrow[r, "i_{gf}"] \arrow[d, "{F(gf, r_f, F(f,g,f))}"] & a \arrow[d, "r_f"] \\
Ff \arrow[r, "r_{F(f,g,f)}"'] & FF(f,g,f) \arrow[r, "i_{F(f,g,f)}"'] & Ff
\end{tikzcd}
\tag{5.4}
$$

y

$$\begin{tikzcd}
Ff \arrow[r, "r_{F(f,g,f)}"] \arrow[d, "i_f"'] & FF(f,g,f) \arrow[r, "i_{F(f,g,f)}"] \arrow[d, "F(F(f,g,f){,}i_f{,}gf)"] & Ff \arrow[d, "i_f"] \\
a \arrow[r, "r_{gf}"'] & F(gf) \arrow[r, "i_{gf}"'] & a
\end{tikzcd} \quad . \tag{5.5}$$

Demostración. Como f y g conmutan entre sí, se tiene el morfismo (f, g, f) en A^E. Luego, de (4.9), se obtienen en A^E los morfismos $(g, r_f, F(f, g, f))$ y $(F(f, g, f), i_f, g)$:

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "g"] \arrow[d, "r_f"'] & a \arrow[d, "r_f"] \\
Ff \arrow[r, "F(f,g,f)"] \arrow[d, "i_f"'] & Ff \arrow[d, "i_f"] \\
a \arrow[r, "g"'] & a
\end{tikzcd} \quad ;$$

de donde, por (4.8),

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "gf"] \arrow[d, "f"] \arrow[dd, bend right=60, "r_f"'] & a \arrow[d, "f"'] \arrow[dd, bend left=60, "r_f"] \\
a \arrow[r, "g"] \arrow[d, "r_f"] & a \arrow[d, "r_f"'] \\
Ff \arrow[r, "F(f,g,f)"] & Ff
\end{tikzcd}$$

y

$$\begin{tikzcd}
Ff \arrow[r, "F(f,g,f)"] \arrow[d, "i_f"] \arrow[dd, bend right=60, "i_f"'] & Ff \arrow[d, "i_f"'] \arrow[dd, bend left=60, "i_f"] \\
a \arrow[r, "g"'] \arrow[d, "f"] & a \arrow[d, "f"'] \\
a \arrow[r, "gf"'] & a
\end{tikzcd}$$

conmutan. Luego, de (4.9), obtenemos (5.4) y (5.5). $\square$

Teorema 5.5. *Sea $F : A^E \to A$ con $A \in$ **Cat** un SFDI. Defínase, para todo $(f, g, f) \in (A^E)^E$,*

$$\alpha_{(f,g,f)} := F(F(f, g, f), i_f, gf) : FF(f, g, f) \to F(gf).$$

Entonces, $\alpha : FF^E \Rightarrow Fm_A : (A^E)^E \to A$ es una transformación natural que satisface (5.1) *y* (5.2).

Demostración. Sea $(f,g,f) \in (A^E)^E$; es decir, $f,g : a \to a$ son idempotentes de A que conmutan entre sí. Tenemos entonces que

$$F(f,g,f) : Ff \to Ff \in A^E,$$

así que en efecto $\alpha_{(f,g,f)} : FF^E(f,g,f) \to Fm_A(f,g,f)$. Veamos entonces que α es natural. Sea (f,g,h,g',f') un morfimo en $(A^E)^E$:

$$\begin{tikzcd}
f \arrow[r, "{(f,h,f')}"] \arrow[d, "{(f,g,f)}"'] & f' \arrow[d, "{(f',g',f')}"] \\
f \arrow[r, "{(f,h,f')}"'] & f' .
\end{tikzcd}$$

Si aplicamos F^E y m_A al diagrama anterior obtenemos:

$$\begin{tikzcd}
Ff \arrow[r, "{F(f,h,f')}"] \arrow[d, "{F(f,g,f)}"'] & Ff' \arrow[d, "{F(f',g',f')}"] \\
Ff \arrow[r, "{F(f,h,f')}"'] & Ff'
\end{tikzcd}$$

y

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "h"] \arrow[d, "gf"'] & a' \arrow[d, "g'f'"] \\
a \arrow[r, "h"'] & a' .
\end{tikzcd}$$

Si aplicamos F a los diagramas anteriores, obtenemos:

$$FF(f,g,f) \xrightarrow{F(F(f,g,f),F(f,h,f'),F(f',g',f'))} FF(f',g',f')$$

y

$$F(gf) \xrightarrow{F(gf,h,g'f')} F(g'f').$$

Llamémosle k a $F(F(f,g,f),F(f,h,f'),F(f',g',f'))$. Así que queremos ver que

$$\begin{tikzcd}
FF(f,g,f) \arrow[r, "{F(F(f,g,f),i_f,gf)}"] \arrow[d, "k"'] & F(gf) \arrow[d, "{F(gf,h,g'f')}"] \\
FF(f',g'f') \arrow[r, "{F(F(f',g',f'),i_{f'},g'f')}"'] & F(g'f')
\end{tikzcd} \tag{5.6}$$

conmuta.

Tenemos que

$$\begin{tikzcd} Ff \arrow[r, "i_f"] \arrow[d, "{F(f,g,f)}"'] & a \arrow[r, "h"] \arrow[d, "gf"] & a' \arrow[d, "g'f'"] \\ Ff \arrow[r, "i_f"'] & a \arrow[r, "h"'] & a' \end{tikzcd} \quad = \quad \begin{tikzcd} Ff \arrow[r, "{F(f,h,f')}"] \arrow[d, "{F(f,g,f)}"'] & Ff' \arrow[r, "i_{f'}"] \arrow[d, "{F(f',g',f')}"'] & a' \arrow[d, "g'f'"] \\ Ff \arrow[r, "{F(f,h,f')}"'] & Ff' \arrow[r, "i_{f'}"'] & a' \end{tikzcd}$$

por (4.9). De aquí, (5.6) conmuta. Luego, α es natural.

Ahora veamos que (A, F, α) satisface (5.1) y (5.2). Sea $f \in A^E$ y consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} & & A^E \arrow[dr, "F"] & \\ A^E \arrow[r, "(dA)^E"] & (A^E)^E \arrow[ur, "F^E"] \arrow[dr, "m_A"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow\alpha"] & & A \\ & & A^E \arrow[ur, "F"'] & \end{tikzcd} .$$

Tenemos que $(dA)^E(f) = (1_a, f, 1_a)$. Así que

$$\begin{aligned} \alpha_{(1_a,f,1_a)} &= F(F(1_a, f, 1_a), i_{1_a}, f) \\ &= F(f, 1_a, f) & (FdA = 1_A) \\ &= 1_{Ff}. \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{tikzcd} & & A^E \arrow[dr, "F"] & \\ A^E \arrow[r, "(dA)^E"] & (A^E)^E \arrow[ur, "F^E"] \arrow[dr, "m_A"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow\alpha"] & & A \\ & & A^E \arrow[ur, "F"'] & \end{tikzcd} = 1_F .$$

Finalmente veamos que

$$
\begin{tikzcd}
((A^E)^E)^E \arrow[r, "(F^E)^E"] \arrow[d, "(m_A)^E"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\Leftarrow}{\alpha^E}"] & (A^E)^E \arrow[d, "F^E"] \\
(A^E)^E \arrow[r, "F^E"'] \arrow[d, "m_A"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\Leftarrow}{\alpha}"] & A^E \arrow[d, "F"] \\
A^E \arrow[r, "F"'] & A
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
((A^E)^E)^E \arrow[r, "(F^E)^E"] \arrow[d, "m_{A^E}"'] & (A^E)^E \arrow[d, "m_A"] \arrow[dr, "F^E"] & \\
(A^E)^E \arrow[r, "F^E"] \arrow[dr, "m_A"'] & A^E \arrow[r, phantom, "\overset{\Leftarrow}{\alpha}"] \arrow[dr, "F"] \arrow[d, phantom, "\overset{\Leftarrow}{\alpha}"] & A^E \arrow[d, "F"] \\
& A^E \arrow[r, "F"'] & A
\end{tikzcd}
\;;
$$

es decir, que

$$\alpha(m_A)^E \cdot F\alpha^E = \alpha m_{A^E} \cdot \alpha(F^E)^E.$$

Sea $(f, g, h, g, f) \in ((A^E)^E)^E$; es decir, $f, g, h : a \to a$ conmutan entre sí. (En general, si $\varphi : F \Rightarrow G : B \to A$ es transformación natural, es fácil ver que $\varphi^E : F^E \Rightarrow G^E : B^E \to A^E$ en $f : a \to a \in B^E$ está dada como

$$\varphi^E(f) = (Ff, \varphi a, Gf)).$$

Si aplicamos $(F^E)^E$ y $(m_A)^E$ a (f, g, h, g, f), o sea, a

$$
\begin{tikzcd}
f \arrow[r, "{(f,h,f)}"] \arrow[d, "{(f,g,f)}"'] & f \arrow[d, "{(f,g,f)}"] \\
f \arrow[r, "{(f,h,f)}"'] & f
\end{tikzcd}
\;,
$$

obtenemos

$$
\begin{tikzcd}
Ff \arrow[r, "{F(f,h,f)}"] \arrow[d, "{F(f,g,f)}"'] & Ff \arrow[d, "{F(f,g,f)}"] \\
Ff \arrow[r, "{F(f,h,f)}"'] & Ff
\end{tikzcd}
$$

y

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "h"] \arrow[d, "gf"'] & a \arrow[d, "gf"] \\
a \arrow[r, "h"'] & a
\end{tikzcd}
\;.
$$

Si aplicamos F^E a los dos diagramas anteriores, obtenemos

$$F(F(f, g, f), F(f, h, f), F(f, g, f)) =: k$$

y

$$F(gf,h,gf).$$

Así que $\alpha^E(f,g,h,g,f) = (k, \alpha_{(f,g,f)}, F(gf,h,gf))$:

$$\begin{tikzcd}
FF(f,g,f) \arrow[r, "\alpha_{(f,g,f)}"] \arrow[d, "k"'] \arrow[dr, phantom, "\alpha^E(f,g,h,g,f)"] & F(gf) \arrow[d, "F(gf,h,gf)"] \\
FF(f,g,f) \arrow[r, "\alpha_{(f,g,f)}"'] & F(gf).
\end{tikzcd}$$

Más explícitamente,

$$\alpha^E(f,g,h,g,f) = (k, F(F(f,g,f), i_f, gf), F(gf,h,gf)).$$

Así que

$$\begin{aligned} F\alpha^E(f,g,h,g,f) &= F(k, F(F(f,g,f), i_f, gf), F(gf,h,gf)) \\ &: Fk \to FF(gf,h,gf). \end{aligned}$$

Ahora, $(m_A)^E(f,g,h,g,f) = (gf,h,gf)$ y

$$\alpha_{(gf,h,gf)} = F(F(gf,h,gf), i_{gf}, hgf) : FF(gf,h,gf) \to F(hgf).$$

Por otro lado,

$$(F^E)^E(f,g,h,g,f) = (F(f,g,f), F(f,h,f), F(f,g,f))$$

y

$$\begin{aligned} \alpha_{(F(f,g,f),F(f,h,f),F(f,g,f))} &= F(k, i_{F(f,g,f)}, F(f,h,f)F(f,g,f)) \\ &= F(k, i_{F(f,g,f)}, F(f,hg,f)) \\ &: Fk \to FF(f,hg,f). \end{aligned}$$

Ahora, $m_{A^E}(f,g,h,g,f) = (f,hg,f)$; así que

$$\begin{aligned} \alpha_{(f,hg,f)} &= F(F(f,hg,f), i_f, hgf) \\ &: FF(f,hg,f) \to F(hgf). \end{aligned}$$

Entonces, lo que queremos mostrar es que

$$\begin{tikzcd}
Fk \arrow[r, "{F(k,F(F(f,g,f),i_f,gf),F(gf,h,gf))}"] \arrow[d, "{F(k,i_{F(f,g,f)},F(f,hg,f))}"'] & FF(gf,h,gf) \arrow[d, "{F(F(gf,h,gf),i_{gf},hgf)}"] \\
FF(f,hg,f) \arrow[r, "{F(F(f,hg,f),i_f,hgf)}"'] & F(hgf)
\end{tikzcd} \tag{5.7}$$

conmuta. Afirmamos que

$$\begin{tikzcd}
k \arrow[r, "{(k,F(F(f,g,f),i_f,gf),F(gf,h,gf))}"] \arrow[d, "{(k,i_{F(f,g,f)},F(f,hg,f))}"'] & F(gf,h,gf) \arrow[d, "{(F(gf,h,gf),i_{gf},hgf)}"] \\
F(f,hg,f) \arrow[r, "{(F(f,hg,f),i_f,hgf)}"'] & hgf
\end{tikzcd}$$

conmuta. En efecto, tenemos que

$$\begin{tikzcd}
FF(f,g,f) \arrow[r, "F(F(f,g,f),i_f,gf)"] \arrow[d, "k"'] & F(gf) \arrow[r, "i_{gf}"] \arrow[d, "F(gf,h,gf)"] & a \arrow[d, "hgf"] \\
FF(f,g,f) \arrow[r, "F(F(f,g,f),i_f,gf)"'] & F(gf) \arrow[r, "i_{gf}"'] & a
\end{tikzcd}$$

$$\|$$

$$\begin{tikzcd}
FF(f,g,f) \arrow[r, "i_{F(f,g,f)}"] \arrow[d, "k"'] & Ff \arrow[r, "i_f"] \arrow[d, "F(f,hg,f)"] & a \arrow[d, "hgf"] \\
FF(f,g,f) \arrow[r, "i_{F(f,g,f)}"'] & Ff \arrow[r, "i_f"'] & a
\end{tikzcd}$$

por el Lema 5.4. Luego, (5.7) conmuta. □

Teorema 5.6. *Sea $F : A^E \to A$ con $A \in$ **Cat** un SFDI. Defínase, para todo $(f, g, f) \in (A^E)^E$,*

$$\beta_{(f,g,f)} := F(gf, r_f, F(f, g, f)) : F(gf) \to FF(f, g, f).$$

Entonces, $\beta : Fm_A \Rightarrow FF^E : (A^E)^E \to A$ es una transformación natural que satisface los duales de (5.1) *y* (5.2).

Nota 5.7. Denotaremos a la α y la β de los teoremas anteriores como α_F y β_F.

Corolario 5.8. *Sea $F : A^E \to A$ un SFDI. Si $F(1_{Ff}, i_f, f) = 1_{Ff}$ para todo $f \in A^E$, entonces α_F es un álgebra laxa normal de $(-)^E$. Si $F(f, r_f, 1_{Ff}) = 1_{Ff}$ para todo $f \in A^E$, entonces β_F es un álgebra colaxa normal de $(-)^E$.*

Lema 5.9. *Sea $F : A^E \to A$ funtor con $A \in$ **Cat**. Defínase para todo $(f, g, f) \in (A^E)^E$*

$$\gamma_{(f,g,f)} := F(gf, f, gf) : F(gf) \to F(gf).$$

Entonces, γ es una transformación natural $Fm_A \Rightarrow Fm_A$.

Demostración. Sea (f,g,h,g',f') un morfismo en $(A^E)^E$, así que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} f \arrow[r, "{(f,h,f')}"] \arrow[d, "{(f,g,f)}"'] & f' \arrow[d, "{(f',g',f')}"] \\ f \arrow[r, "{(f,h,f')}"'] & f' \end{tikzcd}.$$

De aquí,

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "h"] \arrow[d, "gf"'] & a \arrow[d, "g'f'"] \\ a \arrow[r, "h"'] & a \end{tikzcd}$$

conmuta. Luego,

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"] \arrow[d, "gf"'] & a \arrow[r, "h"] \arrow[d, "gf"] & a \arrow[d, "g'f'"] \\ a \arrow[r, "f"'] & a \arrow[r, "h"'] & a \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} a \arrow[r, "h"] \arrow[d, "gf"'] & a \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'f'"] & a \arrow[d, "g'f'"] \\ a \arrow[r, "h"'] & a \arrow[r, "f'"'] & a \end{tikzcd}.$$

De aquí,

$$\begin{tikzcd} F(gf) \arrow[r, "{F(gf,f,gf)}"] \arrow[d, "{F(gf,h,g'f')}"'] & F(gf) \arrow[d, "{F(gf,h,g'f')}"] \\ F(g'f') \arrow[r, "{F(g'f',f',g'f')}"'] & F(g'f') \end{tikzcd}$$

conmuta. Luego, γ es transformación natural $Fm_A \Rightarrow Fm_A$. $\square$

Proposición 5.10. *Sea $F : A^E \to A$ un SFDI. Entonces, para toda transformación natural $\xi : FF^E \Rightarrow Fm_A$ tal que $\xi(dA)^E = 1_F$ los siguientes diagramas conmutan:*

$$\begin{tikzcd} FF^E \arrow[r, "\xi"] \arrow[dr, "\alpha_F"'] & Fm_A \arrow[d, "\gamma"] \\ & Fm_A \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Fm_A \arrow[d, "\beta_F"'] \arrow[dr, "\gamma"] & \\ FF^E \arrow[r, "\xi"'] & Fm_A \end{tikzcd}.$$

Demostración. Sea $\xi : FF^E \Rightarrow Fm_A$ una transformación natural tal que $\xi(dA)^E = 1_F$ y sea $(f,g,f) \in (A^E)^E$.

Tenemos que

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & a \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f"'] & a \arrow[d, "1"] \\ a \arrow[r, "g"'] & a \arrow[r, "f"'] & a \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f"'] & a \arrow[r, "gf"] \arrow[d, "1"'] & a \arrow[d, "1"] \\ a \arrow[r, "f"'] & a \arrow[r, "gf"'] & a \end{tikzcd};$$

es decir, tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} f \arrow[r, "\eta_f", "(f,f,1_a)"'] \arrow[d, "(f,g,f)"'] & 1_a \arrow[d, "(1_a,gf,1_a)"] \\ f \arrow[r, "(f,f,1_a)", "\eta_f"'] & 1_a \end{tikzcd} .$$

Aplicamos ξ al diagrama anterior y obtenemos

$$\begin{tikzcd} FF(f,g,f) \arrow[r, "\xi_{(f,g,f)}"] \arrow[d, "F(F(f,g,f)\text{,}i_f\text{,}gf)"'] & F(gf) \arrow[d, "F(gf\text{,}f\text{,}gf)"] \\ F(gf) \arrow[r, "\xi(dA)^E(gf)"'] & F(gf) \end{tikzcd} ,$$

y

$$\alpha_F(f,g,f) = F(F(f,g,f), i_f, gf), \qquad \xi(dA)^E(gf) = 1_{F(gf)}.$$

Similarmente, tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} 1_a \arrow[r, "\epsilon_f", "(1_a,f,f)"'] \arrow[d, "(1,gf,1_a)"'] & f \arrow[d, "(f,g,f)"] \\ 1_a \arrow[r, "(1_a,f,f)", "\epsilon_f"'] & f \end{tikzcd} ;$$

si aplicamos ξ a este diagrama, obtenemos

$$\begin{tikzcd} F(gf) \arrow[r, "\xi(dA)^E(gf)"] \arrow[d, "F(gf\text{,}r_f\text{,}F(f\text{,}g\text{,}f))"'] & F(gf) \arrow[d, "F(gf\text{,}f\text{,}gf)"] \\ FF(f,g,f) \arrow[r, "\xi_{(f,g,f)}"'] & F(gf) \end{tikzcd} .$$

Así que tenemos lo deseado. $\square$

Observación 5.11. Notemos que si $g = f$ y ξ en la proposición anterior es un isomorfismo natural, obtenemos el segundo isomorfismo del Corolario 4.25.

Lema 5.12. *Sea $F : A^E \to A$ funtor con $A \in$ **Cat**. Defínase para todo $(f, g, f) \in (A^E)^E$*

$$\gamma'_{(f,g,f)} := F(gf, g, gf) : F(gf) \to F(gf).$$

Entonces, γ' es una transformación natural $Fm_A \Rightarrow Fm_A$.

Demostración. Es similar a la demostración del lema anterior. □

Proposición 5.13. *Sea $F : A^E \to A$ un SFDI. Entonces, para toda transformación natural $\zeta : FF^E \Rightarrow Fm_A$ tal que $\zeta dA^E = 1_F$ los siguientes diagramas conmutan:*

$$\begin{tikzcd} FF^E \arrow[r, "\zeta"] \arrow[dr, "\alpha'_F"'] & Fm_A \arrow[d, "\gamma'"] \\ & Fm_A \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Fm_A \arrow[d, "\beta'_F"'] \arrow[dr, "\gamma'"] & \\ FF^E \arrow[r, "\zeta"'] & Fm_A \end{tikzcd},$$

donde

$$\alpha'_F(f, g, f) = F(F(f, g, f), F\alpha_{fg}, 1_{F(gf)})$$

y

$$\beta'_F(f, g, f) = F(1_{F(gf)}, F\beta_{fg}, F(f, g, f))$$

con α_{fg} y β_{fg} los diagramas

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & a \arrow[d, "gf"] \\ a \arrow[r, "g"'] & a \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} a \arrow[r, "g"] \arrow[d, "gf"'] & a \arrow[d, "f"] \\ a \arrow[r, "g"'] & a \end{tikzcd},$$

respectivamente.

Demostración. Dado $(f, g, f) \in (A^E)^E$, se tiene

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & a \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & a \arrow[d, "gf"] \\ a \arrow[r, "g"'] & a \arrow[r, "g"'] & a \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} a \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & a \arrow[r, "1"] \arrow[d, "gf"'] & a \arrow[d, "gf"] \\ a \arrow[r, "g"'] & a \arrow[r, "1"'] & a \end{tikzcd},$$

así que

$$\begin{tikzcd} f \arrow[r, "\alpha_{fg}"] \arrow[d, "(f,g,f)"'] & gf \arrow[d, "1_{gf}"] \\ f \arrow[r, "\alpha_{fg}"'] & gf \end{tikzcd}$$

conmuta. Entonces, se aplica ζ al diagrama anterior. □

Observación 5.14. Notemos que si $g = f$ y ζ en la proposición anterior es un isomorfismo natural, obtenemos el primer isomorfismo del Corolario 4.25.

Capítulo 6

Ejemplos

Nota 6.1. En este capítulo damos varios ejemplos de seudoálgebras normales de la seudomónada $(-)^E$ con el fin de comprender mejor la estructura de dichas seudoálgebras.

En la sección 2, hacemos una generalización del hecho de que si una categoría pequeña C tiene E-colímites, entonces a C se le puede dar una estructura de seudoálgebra normal de $(-)^E$. Es decir, E es una categoría tamizada porque es una categoría filtrada (véase el Teorema 1 de la sección IX.2 de Mac Lane [1998]), y la generalización nos dice que si A es una categoría tamizada, entonces si C tiene A-colímites, a C se la puede dotar de una estructura de seudoálgebra normal de la mónada $(-)^A$; así que se escriben y demuestran todos los resultados necesarios para llegar a tal generalización.

En la sección 3, se considera el funtor $\mathbf{2} \xrightarrow{\bar{e}} E$, que manda $0 \leq 1$ a e, ya que este funtor induce un funtor 2 que va de las seudoálgebras de $(-)^{\mathbf{2}}$ a las seudoálgebras de $(-)^E$. Así que, como ya se conocen muchos ejemplos de sistemas de factorización ortogonal, tal funtor 2 nos da muchos ejemplos de seudoálgebras normales de $(-)^E$. Recordemos que en Korostenski y Tholen [1993] se demuestra que los sistemas de factorización ortogonal y los sistemas de factorización de Eilenberg-Moore son equivalentes y que en Rosebrugh y Wood [2002] se demuestra que los sistemas de factorización de Eilenberg-Moore y las seudoálgebras normales de $(-)^{\mathbf{2}}$ son equivalentes.

En la sección 4, damos un ejemplo en que la cadena de factorizaciones sucesivas de idempotentes sucesivos obtenida al factorizar f luego $r_f i_f$ luego $r_{r_f i_f} i_{r_f i_f}$ luego $r_{r_{r_f i_f} i_{r_f i_f}} i_{r_{r_f i_f} i_{r_f i_f}}$, etc. fuera infinita. Además, queríamos que fuera una categoría lo más simple posible, nuevamente, con el fin de entender mejor el comportamiento de las seudoálgebras normales de $(-)^E$.

6.1. Álgebras libres

Observación 6.2. Las álgebras libres de $(-)^E$ son $(A^E, m_A : (A^E)^E \to A^E)$ para $A \in \mathbf{Cat}$, y son seudoálgebras estrictas, es decir, los diagramas

$$\begin{tikzcd} A^E \arrow[r, "dA^E"] \arrow[dr, "1_{A^E}"'] & (A^E)^E \arrow[d, "m_A"] \\ & A^E \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} ((A^E)^E)^E \arrow[r, "(m_A)^E"] \arrow[d, "m_{A^E}"'] & (A^E)^E \arrow[d, "m_A"] \\ (A^E)^E \arrow[r, "m_A"'] & A^E \end{tikzcd}$$

conmutan. De aquí, $\alpha : m_A(m_A)^E \Rightarrow m_A m_{A^E}$ es una identidad; de donde, $\alpha_{(f,g,f)} = 1$ para todo $(f,g,f) \in (A^E)^E$.

6.2. Categorías tamizadas y escisión

Proposición 6.3. *Si la categoría pequeña J es coproducto $\coprod_k J_k$ de las categorías J_k con $k \in K$ y K un conjunto pequeño, y $F : J \to C$ es un funtor, entonces*

$$\mathrm{Colim} F \cong \coprod_k \mathrm{Colim} F_k,$$

si los colímites de la derecha existen, donde $F_k = FI_k$ e $I_k : J_k \to \coprod_k J_k$ son las inyecciones para todo $k \in K$.

Dualmente, $\mathrm{Lim} F \cong \prod_k \mathrm{Lim} F_k$.

Demostración. Nótese que no sólo toda colección de funtores $J_k \xrightarrow{F_k} C$ determina un funtor $F : J \to C$ (y viceversa), sino que también toda colección de transformaciones naturales

$$\begin{tikzcd} J_k \arrow[r, bend left, "F_k"] \arrow[r, bend right, "G_k"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\tau_k"] & C \end{tikzcd}$$

determina una transformación natural

$$\begin{tikzcd} J \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\tau"] & {} \end{tikzcd}$$

(y viceversa).

También notemos que si $t : c \to d$ es un morfismo en C entonces

$$\begin{tikzcd} J_k \arrow[r, "I_k"] & J \arrow[r, bend left, "\Delta c"] \arrow[r, bend right, "\Delta d"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\Delta t"] & C \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} J_k \arrow[r, bend left, "\Delta c"] \arrow[r, bend right, "\Delta d"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\Delta t"] & C \end{tikzcd}$$

para todo $k \in K$.

Ahora, consideremos el cono colímite

$$F \xrightarrow{\mu} \Delta\mathrm{Colim}F$$

y también los conos colímites

$$F_k \xrightarrow{\mu_k} \Delta\mathrm{Colim}F_k \ .$$

Tenemos entonces que $\mu I_k : F_k \Rightarrow \Delta\mathrm{Colim}F$ es un cocono para todo k:

$$\begin{tikzcd} J_k \arrow[r, "I_k"] & J \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "\Delta\mathrm{Colim}F"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\mu"] & C \end{tikzcd} ;$$

así que, por la propiedad universal de μ_k, para todo $k \in K$ existe un único $j_k : \mathrm{Colim}F_k \to \mathrm{Colim}F$ en C tal que

$$\begin{tikzcd} F_k \arrow[r, "\mu_k"] \arrow[dr, "\mu I_k"'] & \Delta\mathrm{Colim}F_k \arrow[d, dashed, "\Delta j_k"] \\ & \Delta\mathrm{Colim}F \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathrm{Colim}F_k \arrow[d, "j_k"] \\ \mathrm{Colim}F \end{tikzcd}$$

conmuta. Veamos que los $j_k : \mathrm{Colim}F_k \to \mathrm{Colim}F$ tienen la propiedad universal del coproducto. Sean entonces $f_k : \mathrm{Colim}F_k \to c$ flechas en C. Para todo k definamos $\psi_k : F_k \Rightarrow \Delta c$ como la composición

$$\begin{tikzcd} F_k \arrow[r, "\mu_k"] \arrow[dr, "\psi_k"'] & \Delta\mathrm{Colim}F_k \arrow[d, "\Delta f_k"] \\ & \Delta c. \end{tikzcd}$$

Así que tenemos el cocono $\psi := [\psi_k] : F \Rightarrow \Delta c$. Luego, por la propiedad universal de μ, existe un único $t : \mathrm{Colim}F \to c$ en C tal que

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "\mu"] \arrow[dr, "\psi"'] & \Delta\mathrm{Colim}F \arrow[d, dashed, "\Delta t"] \\ & \Delta c \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathrm{Colim}F \arrow[d, "t"] \\ c \end{tikzcd}$$

conmuta. Por otro lado, se tienen las siguientes igualdades horizontales y verticales:

$$
\begin{tikzcd}
J_k \arrow[r, "I_k"] & J \arrow[r, bend left, "F"{name=A}] \arrow[r, bend right, "\Delta c"'{name=B}] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\psi"] & C
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}[column sep=huge]
J_k \arrow[r, "I_k"] & J \arrow[r, bend left=60, "F"] \arrow[r, "\Delta\mathrm{Colim}F" description] \arrow[r, bend right=60, "\Delta c"'] \arrow[r, phantom, bend left=30, "\Downarrow\mu"] \arrow[r, phantom, bend right=30, "\Downarrow\Delta t"] & C
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
J_k \arrow[r, bend left, "F_k"] \arrow[r, bend right, "\Delta c"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\psi_k"] & C
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}[column sep=huge]
J_k \arrow[r, bend left=60, "F_k"] \arrow[r, "\Delta\mathrm{Colim}F" description] \arrow[r, bend right=60, "\Delta c"'] \arrow[r, phantom, bend left=30, "\Downarrow\mu I_k"] \arrow[r, phantom, bend right=30, "\Downarrow\Delta t"] & C
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}[column sep=huge]
J_k \arrow[r, bend left=60, "F_k"] \arrow[r, "\Delta\mathrm{Colim}F_k" description] \arrow[r, bend right=60, "\Delta c"'] \arrow[r, phantom, bend left=30, "\Downarrow\mu_k"] \arrow[r, phantom, bend right=30, "\Downarrow\Delta f_k"] & C
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}[column sep=huge]
J_k \arrow[r, bend left=70, "F_k"] \arrow[r, bend left=15, "\Delta\mathrm{Colim}F_k" description] \arrow[r, bend right=15, "\Delta\mathrm{Colim}F" description] \arrow[r, bend right=70, "\Delta c"'] \arrow[r, phantom, bend left=45, "\Downarrow\mu_k"] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\Delta j_k"] \arrow[r, phantom, bend right=45, "\Downarrow\Delta t"] & C
\end{tikzcd}
$$

Por lo tanto, por la propiedad universal de los μ_k,

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Colim}F_k \arrow[r, "j_k"] \arrow[dr, "f_k"'] & \mathrm{Colim}F \arrow[d, "t"] \\
& c
\end{tikzcd}
$$

conmuta para todo $k \in K$, y t es único. Luego, $\mathrm{Colim}F \cong \coprod_k \mathrm{Colim}F_k$.

Dualmente, $\mathrm{Lim}F \cong \prod_k \mathrm{Lim}F_k$, si los límites de la derecha existen. $\square$

Proposición 6.4. *Sea C una categoría. Si la categoría pequeña J es conexa, entonces*

$$\mathrm{Colim}\Delta c = c, \quad \mathrm{Lim}\Delta c = c$$

para todo $c \in C$, donde $\Delta c : J \to C$ es el funtor constante.

Demostración. Sean $i \xrightarrow{u} j \xleftarrow{v} k$ flechas en J, y sea $\tau : \Delta c \Rightarrow \Delta d$ transformación natural con $c, d \in C$. De la conmutatividad de

$$\begin{tikzcd}
\Delta c(i) \arrow[r, "\tau_i"] \arrow[d, "\Delta c(u)"'] & \Delta d(i) \arrow[d, "\Delta d(u)"] \\
\Delta c(j) \arrow[r, "\tau_j"] \arrow[d, "\Delta c(v)"'] & \Delta d(j) \arrow[d, "\Delta d(v)"] \\
\Delta c(k) \arrow[r, "\tau_k"'] & \Delta d(k),
\end{tikzcd}$$

se tiene que $\tau_i = \tau_j = \tau_k$. De aquí, puesto que J es conexa, $\tau_i = \tau_j$ para todo $i \in J$ para j fijo objeto de J. Sea $h := \tau_j : c \to d$. Así que $\tau = \Delta h$. Luego, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
\Delta c \arrow[r, "1"] \arrow[dr, "\tau"'] & \Delta c \arrow[d, "\Delta h"] \\
& \Delta d.
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto, $\mathrm{Colim}\Delta c = c$.

Dualmente, $\mathrm{Lim}\Delta c = c$. □

Corolario 6.5. *El colímite de un funtor constante $J \to C$ con valor c es el coproducto de k copias de c, donde k es el número de componentes conexas de J.*

Corolario 6.6. *Una categoría pequeña A es conexa si y sólo si el funtor constante $A \to$ **Con** de valor 1 tiene colímite 1.*

Nota 6.7. En la definición de categoría conexa se pide que esta sea no vacía. Podríamos tomar como referente la discusión de por qué el espacio vacío no ha de considerarse conexo, para no considerar la categoría vacía como conexa.

Considerar al espacio vacío como conexo es análago a considerar al 1 como primo. La definición que dice que un espacio es conexo si no se puede partir en dos subconjuntos abiertos no vacíos disjuntos, es análoga a la definición de que un número natural p es primo si cualquiera de sus divisores es 1 o p, definición según la cual el 1 es primo. Una mejor definición de primo sería la siguiente: se dice que un número natural p es primo si tiene exactamente dos divisores, él mismo y 1; con esta definición, se excluye al 1 como primo, pues el 1 tiene exactamente un divisor. Análogamente, podemos decir que un espacio es conexo si tiene exactamente una componente conexa. Con esta definición el espacio vacío no es conexo, pues este tiene exactamente cero componentes: una componente de un espacio X es una clase de equivalencia de puntos de X bajo alguna relación de equivalencia; ahora, sobre el conjunto vacío, hay una sola relación de equivalencia, la relación vacía, la cual tiene cero clases de equivalencia.

Si el espacio vacío fuera conexo, la descomposición única en componentes conexas fallaría: $X \cup Y = \emptyset \cup X \cup Y = \cdots$. Esto es análago a la falla en la unicidad de la factorización por primos que se tendría si se considerara al 1 como primo.

Por último, desde un punto de vista categórico, un espacio X es conexo si el funtor $\hom(X, -)$ preserva coproductos. Como $\hom(\emptyset, -)$ es constante en el punto, $\hom(\emptyset, -)$ no preserva coproductos.

Proposición 6.8. *Sea $F : P \times J \to X$ un bifuntor con X completa y cocompleta y P y J pequeñas. Entonces, existe un mapeo canónico*

$$s : \mathrm{Colim}_p \mathrm{Lim}_j F(p, j) \to \mathrm{Lim}_j \mathrm{Colim}_p F(p, j), \tag{6.1}$$

y se construye como en el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
F(q,k) \arrow[d, "\mu_{q,k}"'] & \mathrm{Lim}_j F(q,j) \arrow[l, "\nu_{q,k}"'] \arrow[r, "\alpha_q"] \arrow[d, dashed, "t_q"] & \mathrm{Colim}_p \mathrm{Lim}_j F(p,j) \arrow[d, dashed, "s"] \\
\mathrm{Colim}_p F(p,k) & \mathrm{Lim}_j \mathrm{Colim}_p F(p,j) \arrow[l, "\beta_k"] \arrow[r, phantom, "="] & \mathrm{Lim}_j \mathrm{Colim}_p F(p,j)
\end{tikzcd}$$

Demostración. Se tiene que $F(q, -) : J \to X$ tiene límite; es decir, para cada $q \in P$ existe $\mathrm{Lim}_j F(q, j)$ con cono

$$F(q,k) \xleftarrow{\nu_{q,k}} \mathrm{Lim}_j F(q,j) \, .$$

Es claro que se tiene un funtor $\mathrm{Lim}_j F(-, j) : P \to X$, por la propiedad universal de los conos $\nu_{q,-} : \mathrm{Lim}_j F(q, j) \to F(q, -)$; así que, como X es cocompleta, $\mathrm{Lim}_j F(-, j)$ tiene cono colímite

$$\mathrm{Lim}_j F(q,j) \xrightarrow{\alpha_q} \mathrm{Colim}_p \mathrm{Lim}_j F(p,j) \, .$$

Dualmente, para cada $k \in J$ se tiene el cono colímite

$$F(q,k) \xrightarrow{\mu_{q,k}} \mathrm{Colim}_p F(p,k)\ ,$$

y por la propiedad universal de los coconos $\mu_{-,k} : F(-,k) \to \mathrm{Colim}_p F(p,k)$, un funtor $\mathrm{Colim}_p F(p,-) : J \to X$. Entonces, como X es completa, este funtor tiene cono límite

$$\mathrm{Colim}_p F(p,k) \xleftarrow{\beta_k} \mathrm{Lim}_j \mathrm{Colim}_p F(p,j)\ .$$

Se tiene que $\mu_{q,k}\nu_{q,k} : \mathrm{Lim}_j F(q,j) \to \mathrm{Colim}_p F(p,k)$ es un cono para todo $q \in P$:

$$\mathrm{Lim}_j F(q,j) \xrightarrow{\mu_{q,-}\nu_{q,-}} \mathrm{Colim}_p F(p,-)\ .$$

De aquí, existe un único morfismo $t_q : \mathrm{Lim}_j F(q,j) \to \mathrm{Lim}_j \mathrm{Colim}_p F(p,j)$ para todo $q \in P$ tal que

$$\begin{tikzcd}
F(q,k) \arrow[d, "\mu_{q,k}"'] & \mathrm{Lim}_j F(q,j) \arrow[l, "\nu_{q,k}"'] \arrow[d, dashed, "t_q"] \\
\mathrm{Colim}_p F(p,k) & \mathrm{Lim}_j \mathrm{Colim}_p F(p,j) \arrow[l, "\beta_k"]
\end{tikzcd}$$

conmuta. Por otro lado, el siguiente diagrama conmuta para $v : p \to q$ en P:

$$\begin{tikzcd}
F(p,k) \arrow[d, "F(v,k)"] \arrow[dd, bend right=60, "\mu_{p,k}"'] & \mathrm{Lim}_j F(p,j) \arrow[l, "\nu_{p,k}"'] \arrow[d, "\mathrm{Lim}_j F(v,j)"'] \arrow[dd, bend left=60, "t_p"] \\
F(q,k) \arrow[d, "\mu_{q,k}"] & \mathrm{Lim}_j F(q,j) \arrow[l, "\nu_{q,k}"] \arrow[d, "t_q"'] \\
\mathrm{Colim}_p F(p,k) & \mathrm{Lim}_j \mathrm{Colim}_p F(p,j). \arrow[l, "\beta_k"]
\end{tikzcd}$$

Así que $t : \mathrm{Lim}_j F(-,j) \Rightarrow \mathrm{Lim}_j \mathrm{Colim}_p F(p,j)$ es un cocono; de donde, por la propiedad universal de $\alpha : \mathrm{Lim}_j F(-,j) \Rightarrow \mathrm{Colim}_p \mathrm{Lim}_j F(p,j)$, existe un único $s : \mathrm{Colim}_p \mathrm{Lim}_j F(p,j) \to \mathrm{Lim}_j \mathrm{Colim}_p F(p,j)$ que hace conmutar

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Lim}_j F(q,j) \arrow[r, "\alpha_q"] \arrow[dr, "t_q"'] & \mathrm{Colim}_p \mathrm{Lim}_j F(p,j) \arrow[d, dashed, "s"] \\
& \mathrm{Lim}_j \mathrm{Colim}_p F(p,j)
\end{tikzcd}$$

para todo $q \in P$. $\square$

Definición 6.9. Una categoría pequeña A se dice que es tamizada si productos finitos en **Con** conmutan con colímites sobre A. Explícitamente, A es tamizada si y sólo si dado un diagrama

$$D : A \times J \to \mathbf{Con},$$

donde J es una categoría discreta finita, el mapeo canónico (6.1)

$$s : \mathrm{Colim}_a \left(\prod_j D(a,j) \right) \to \prod_j (\mathrm{Colim}_a D(a,j)) \tag{6.2}$$

es un isomorfismo.

Un diagrama tamizado es un diagrama con dominio tamizado. A los colímites de diagramas tamizados se los llama colímites tamizados.

Observación 6.10. El mapeo canónico s es un isomorfismo para toda categoría discreta finita J si y sólo si s es un isomorfismo cuando $J = \emptyset$ o cuando J es un conjunto con dos elementos. Esto último significa que para todo par de diagramas $F, F' : A \to \mathbf{Con}$, el colímite del diagrama

$$F \times F' : A \to \mathbf{Con}, \quad a \mapsto Fa \times F'a$$

es canónicamente isomorfo a $\mathrm{Colim}F \times \mathrm{Colim}F'$. Considérese el bifuntor $D : A \times \{1,2\} \to \mathbf{Con}$ definido como $D(f,i) := F_i f$ para toda $f : a \to b$ en A, donde $F_1 := F$ y $F_2 := F'$.

Observación 6.11. Dado un funtor $F : J \to \mathbf{Con}$, el $\mathrm{Colim}F$ se construye a partir de la relación S sobre $\coprod_j F_j$, donde

$$S = \{((x,j),(Fux,k)) \in \coprod_n F_n \times \coprod_n F_n \mid u : j \to k \text{ en } J\};$$

es decir, $(x,j)S(x',k)$ si y sólo si existe $u : j \to k$ en J tal que $Fu(x) = x'$; diagramáticamente:

$$\begin{tikzcd} \overset{x}{F_j} \arrow[rr, "\overset{\mapsto}{Fu}"] \arrow[dr, "i_j"'] & & \overset{x'}{F_k} \arrow[dl, "i_k"] \\ & \coprod_n F_n & \end{tikzcd} \quad ;$$

así que la mínima relación de equivalencia $R(S)$ que contiene a S nos da que, dados $(x, j), (x', k) \in \coprod_n F_n$,

$$(x, j)R(S)(x', k)$$

si y sólo si existe un zigzag de flechas en J

$$\begin{tikzcd} j_0 \arrow[r, "u_0"] & j_1 & j_2 \arrow[l, "u_1"'] \arrow[r, "u_2"] & j_3 & \cdots \arrow[l, "u_3"'] \arrow[r, "u_{r-1}"] & j_r \end{tikzcd} ,$$

con $j_0 = j$ y $j_r = k$, y existen $x_t \in F_{j_t}$ para $t = 1, \ldots, r-1$ tales que

$$\begin{tikzcd}
\overset{x}{F_j} \arrow[r, "\overset{\mapsto}{Fu_0}"] \arrow[drr, "i_j"'] & \overset{x_1}{F_{j_1}} \arrow[dr, "i_{j_1}"] & \overset{x_2}{F_{j_2}} \arrow[l, "\overset{\mapsfrom}{Fu_1}"'] \arrow[r, "\overset{\mapsto}{Fu_2}"] \arrow[d, "i_{j_2}"] & \overset{x_3}{F_{j_3}} \arrow[dl, "i_{j_3}"] & \cdots \arrow[l, "\overset{\mapsfrom}{Fu_3}"'] \arrow[r, "\overset{\mapsto}{Fu_{r-1}}"] & \overset{x'}{F_k} \arrow[dlll, "i_k"] \\
& & \coprod_n F_n & & &
\end{tikzcd} .$$

Observación 6.12. Dada una categoría pequeña J y un funtor $F : J' \to J$, se tiene que

$$\mathrm{Colim} J(j, F-) = \mathsf{C}(j \downarrow F),$$

donde $\mathsf{C}(j \downarrow F)$ es el conjunto de las componentes conexas de $(j \downarrow F)$. En efecto, tenemos que $(u, k) \sim (u', k')$ si y sólo si existe un zigzag de flechas

$$\begin{tikzcd} k_0 \arrow[r, "v_0"] & k_1 & k_2 \arrow[l, "v_1"'] \arrow[r, "v_2"] & k_3 & \cdots \arrow[l, "v_3"'] \arrow[r, "v_{r-1}"] & k_r \end{tikzcd}$$

en J', con $k_0 = k$ y $k_r = k$, y $(u_i, k_i) \in (j \downarrow F)$ para $i = 1, \ldots, r-1$ tales que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
& & j \arrow[dll, "u"'] \arrow[dl, "u_1"] \arrow[d, "u_2"] \arrow[dr, "u_3"] \arrow[drrr, "u'"] & & & \\
Fk \arrow[r, "Fv_0"'] & Fk_1 & Fk_2 \arrow[l, "Fv_1"] \arrow[r, "Fv_2"'] & Fk_3 & \cdots \arrow[l, "Fv_3"] \arrow[r, "Fv_{r-1}"'] & Fk'
\end{tikzcd}$$

conmuta, donde $\sim = R(S)$ de la observación anterior.

Observación 6.13. Para $F : A' \to A$ y $D : A \to C$, existe un mapeo canónico

$$h : \mathrm{Colim} DF \to \mathrm{Colim} D \tag{6.3}$$

cuando ambos colímites existen. En efecto, sean $\mu : DF \Rightarrow \mathrm{Colim}DF : A' \to C$ y $\gamma : D \Rightarrow \mathrm{Colim}D : A \to C$ conos colímites. Notemos que dado $\Delta d : A \to C$, se tiene

$$A' \xrightarrow{F} A \xrightarrow{\Delta d} C \quad = \quad A' \xrightarrow{\Delta d} C\ .$$

Así que $\gamma F : DF \Rightarrow \mathrm{Colim}D$ es un cocono. De aquí, existe una única flecha $h : \mathrm{Colim}DF \to \mathrm{Colim}D$ tal que

$$\begin{tikzcd} DF \arrow[r, "\mu"] \arrow[dr, "\gamma F"'] & \mathrm{Colim}DF \arrow[d, dashed, "h"] \\ & \mathrm{Colim}D \end{tikzcd}$$

conmuta.

Definición 6.14. Un funtor $F : A' \to A$ se dice que es final si para todo diagrama $D : A \to C$ tal que $\mathrm{Colim}DF$ existe en C, existe $\mathrm{Colim}D$ y el morfismo canónico $h : \mathrm{Colim}DF \to \mathrm{Colim}D$ (6.3) es un isomorfismo.

Teorema 6.15. *Las siguientes condiciones sobre un funtor $F : A' \to A$ son equivalentes:*

(i) *F es final;*
(ii) *F satisface la condición de finalidad con respecto a todos los funtores representables $D = A(a, -)$;*
(iii) *para todo objeto a de A la categoría coma $(a \downarrow F)$ es conexa.*

Demostración. La implicación $(i) \Rightarrow (ii)$ es trivial.

La implicación $(ii) \Rightarrow (iii)$ es cierta. En efecto, $(a \downarrow A)$ es conexa, ya que tiene objeto inicial 1_a, así que $\mathrm{Colim}A(a, -) = 1$ por la Observación 6.12; de aquí, como $h : \mathrm{Colim}A(a, F-) \to \mathrm{Colim}A(a, -)$ es iso, se tiene $\mathrm{Colim}A(a, F-) = 1$, y por la Observación 6.12, $(a \downarrow F)$ es conexa.

Finalmente veamos que $(iii) \Rightarrow (i)$. Dado un cono colímite $\mu : DF \Rightarrow \mathrm{Colim}DF$, construimos flechas $\tau_a : Da \to \mathrm{Colim}DF$ como la composición

$$Da \xrightarrow{Df} DFa' \xrightarrow{\mu_{a'}} \mathrm{Colim}DF$$

para alguna flecha $f : a \to Fa' \in A(a \downarrow F)$. Como $A(a \downarrow F)$ es conexa y μ es cono, si escogemos otra $f' : a \to Fa''$, existe un zigzag de flechas

$$a_0 \xrightarrow[g_0]{} a_1 \xleftarrow[g_1]{} a_2 \xrightarrow[g_2]{} a_3 \xleftarrow[g_3]{} \cdots \xrightarrow[g_{r-1}]{} a_r$$

en A', con $a_0 = a'$ y $a_r = a''$, y existen $(f_i, a_i) \in (a \downarrow F)$ para $i = 1, \ldots, r-1$ tales que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & & a \arrow[dll, swap, "f"] \arrow[dl, "f_1"] \arrow[d, "f_2"] \arrow[dr, "f_3"] \arrow[drrr, "f'"] & & & \\
Fa' \arrow[r, swap, "Fg_0"] & Fa_1 & Fa_2 \arrow[l, swap, "Fg_1"] \arrow[r, swap, "Fg_2"] & Fa_3 & \cdots \arrow[l, swap, "Fg_3"] \arrow[r, swap, "Fg_{r-1}"] & Fa''
\end{tikzcd}$$

conmuta; por lo tanto, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
 & & Da \arrow[dll, swap, "Df"] \arrow[dl, "Df_1"] \arrow[d, "Df_2"] \arrow[dr, "Df_3"] \arrow[drrr, "Df'"] & & & \\
DFa' \arrow[r, swap, "DFg_0"] \arrow[drr, swap, "\mu_{a'}"] & DFa_1 \arrow[dr, "\mu_{a_1}"] & DFa_2 \arrow[l, swap, "DFg_1"] \arrow[r, swap, "DFg_2"] \arrow[d, "\mu_{a_2}"] & DFa_3 \arrow[dl, "\mu_{a_3}"] & \cdots \arrow[l, swap, "DFg_3"] \arrow[r, swap, "DFg_{r-1}"] & DFa'' \arrow[dlll, "\mu_{a''}"] \\
 & & \mathrm{Colim} DF & & &
\end{tikzcd}$$

de donde, la definición de τ_a no depende de la elección de f y a'. Afirmamos que τ es un cocono: sean $h : a \to b, u : a \to Fb', u' : b \to Fb''$ en A y

$$\begin{tikzcd}
 & & a \arrow[dll, swap, "u"] \arrow[dl, "u_1"] \arrow[d, "u_2"] \arrow[dr, "u_3"] \arrow[drrr, "u' \circ h"] & & & \\
Fb' \arrow[r, swap, "Fv_0"] & Fb_1 & Fb_2 \arrow[l, swap, "Fv_1"] \arrow[r, swap, "Fv_2"] & Fb_3 & \cdots \arrow[l, swap, "Fv_3"] \arrow[r, swap, "Fv_{s-1}"] & Fb''
\end{tikzcd}$$

un zigzag en $(a \downarrow F)$ (el cual se tiene por la conexidad de $(a \downarrow F)$); el siguiente diagrama es conmutativo:

$$
\begin{tikzcd}
Da \arrow[r, "Du"] \arrow[dr, "Du_1"] \arrow[ddr, "Du_2"] \arrow[dddr, "Du_3"] \arrow[dddddr, "Du_{s-1}"] \arrow[ddddd, "Dh"'] & DFb' \arrow[d, "DFv_0"] \arrow[ddr, "\mu_{b'}"] & \\
& DFb_1 \arrow[dr, "\mu_{b_1}"] & \\
& DFb_2 \arrow[u, "DFv_1"'] \arrow[d, "DFv_2"] \arrow[r, "\mu_{b_2}"] & \mathrm{Colim}DF \\
& DFb_3 \arrow[ur, "\mu_{b_3}"] & \\
& \vdots \arrow[u, "DFv_3"'] \arrow[d, "DFv_{s-1}"] & \\
Db \arrow[r, "Du'"'] & DFb'' \arrow[uuur, "\mu_{b''}"'] &
\end{tikzcd}
.
$$

Ahora veamos que $\tau : D \Rightarrow \mathrm{Colim}DF$ es universal. Sea $\lambda : D \Rightarrow c$ otro cocono. De aquí, $\lambda F : DF \Rightarrow c$ es cocono. Luego, por la propiedad universal de μ, existe una única $t : \mathrm{Colim}DF \to c$ tal que

$$
\begin{tikzcd}
DFa' \arrow[r, "\mu_{a'}"] \arrow[dr, "\lambda Fa'"'] & \mathrm{Colim}DF \arrow[d, "t"] \\
& c
\end{tikzcd}
$$

conmuta para todo $a' \in A'$. De aquí,

$$
\begin{tikzcd}
Da \arrow[r, "Df"] \arrow[dr, "\lambda a"'] & DFa' \arrow[r, "\mu_{a'}"] \arrow[d, "\lambda Fa'"] & \mathrm{Colim}DF \arrow[dl, "t"] \\
& c &
\end{tikzcd}
$$

conmuta. Por lo tanto, $t\tau = \lambda$. $\square$

Observación 6.16. La finalidad del funtor diagonal $\delta_A : A \to A \times A$ significa que, para todo par de objetos $a, b \in A$, la categoría coma $((a, b) \downarrow \delta_A)$ de copalmos desde a, b es conexa; es decir,

(i) existe un copalmo $a \longrightarrow x \longleftarrow b$;
(ii) todo par de copalmos desde a, b está conectado por un zigzag de copalmos.

Por lo tanto, el enunciado "A es no vacía y δ_A es final" es equivalente al enunciado "A es conexa y el funtor diagonal δ_A es final".

Teorema 6.17. *Una categoría pequeña A es tamizada si y sólo si es no vacía y el funtor diagonal $\delta_A : A \to A \times A$ es final.*

Demostración. Demostraremos que A es tamizada si y sólo si A es conexa y δ_A es final. Más precisamente, demostraremos que

(i) A es conexa si y sólo si el mapeo canónico s (6.2) es iso cuando J es vacía y
(ii) δ_A es final si y sólo si s es iso cuando J es un conjunto de dos elementos.

Demostremos (i). Supóngase que J es vacía. De aquí, el codominio de s es 1. Por otro lado, el dominio de s es 1 si y sólo A es conexa, ya que $\prod_j D(a, j) = 1$ es el funtor $\Delta 1 : A \to \mathbf{Con}$, y por el Corolario 6.6, se obtiene lo deseado.

Demostremos (ii). Supóngase que $J = 2$. Sean $F, F' : A \to \mathbf{Con}$ dos diagramas. Considérese el funtor $F * F' : A \times A \to \mathbf{Con}$ definido como $F * F'(a, a') := Fa \times F'a'$. Tenemos que

$$\begin{aligned}\mathrm{Colim}_{(a,a')} F * F'(a, a') &\cong \mathrm{Colim}_a(\mathrm{Colim}_{a'} F * F'(a, a')) \\ &= \mathrm{Colim}_a(\mathrm{Colim}_{a'}(Fa \times F'a')).\end{aligned}$$

Y como para todo $X \in \mathbf{Con}$ los funtores $X \times -, - \times X : \mathbf{Con} \to \mathbf{Con}$ preservan colímites (pues tienen adjunto derecho),

$$\begin{aligned}\mathrm{Colim}_a(\mathrm{Colim}_{a'}(Fa \times F'a')) &\cong \mathrm{Colim}_a(Fa \times \mathrm{Colim}_{a'} F'a') \\ &\cong \mathrm{Colim}_a Fa \times \mathrm{Colim}_{a'} F'a \\ &= \mathrm{Colim} F \times \mathrm{Colim} F'.\end{aligned}$$

Así que tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Colim} F \times F' \arrow[r, "s"] \arrow[d, phantom, "\shortparallel"] & \mathrm{Colim} F \times \mathrm{Colim} F' \arrow[d, phantom, "\cong"] \\
\mathrm{Colim}((F * F') \circ \delta_A) \arrow[r, "h"'] & \mathrm{Colim} F * F'
\end{tikzcd}$$

Si δ_A es final, entonces h es iso y, por lo tanto, s también.

Recíprocamente, supóngase que s es iso. Dados dos objetos $a, a' \in A$, el funtor representable $A \times A((a, a'), -)$ no es otra cosa que el funtor $F * F'$ con $F = A(a, -)$ y $F' = A(a', -)$. Así que si s es iso, el diagrama anterior muestra que δ_A satisface la condición de finalidad con respecto a todos los funtores representables; luego, por el Teorema 6.15, δ_A es final. $\square$

Teorema 6.18. *Sean C una categoría y A una categoría tamizada. Si C tiene A-colímites entonces el funtor* $\mathrm{Colim} : C^A \to C$ *induce una seudoálgebra normal de la mónada 2 $(-)^A$.*

Demostración. En general, dada una categoría pequeña B, la estructura de comonoide $(B,\ B \xrightarrow{!_B} 1\ ,\ B \xrightarrow{\delta_B} B \times B\ )$ de B determina una mónada 2 sobre **Cat**; a saber, $((-)^B, (-)^{!_B}, (-)^{\delta_B})$. Notemos que, dada $C \in \mathbf{Cat}$, $m_C : (C^B)^B \to C^B$ está dada como

$$m_C(F) = \widehat{F} \circ \delta_B,$$

donde $\widehat{F}$ es la transpuesta de $F : B \to C^B$.

Ahora, consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} (C^A)^A \arrow[r, "\mathrm{Colim}^A"] \arrow[d, "m_C"'] & C^A \arrow[d, "\mathrm{Colim}"] \\ C^A \arrow[r, "\mathrm{Colim}"'] & C. \end{tikzcd}$$

Sea $F \in (C^A)^A$; entonces, el trayecto izquierda-abajo en el diagrama nos da $\mathrm{Colim}(\widehat{F} \circ \delta_A)$ y el trayecto arriba-derecha nos da $\mathrm{Colim}(\mathrm{Colim} \circ F)$. Como A es tamizada, δ_A es final, así que

$$\mathrm{Colim}(\widehat{F} \circ \delta_A) \overset{h_F}{\cong} \mathrm{Colim}\widehat{F}.$$

Por otro lado, $\mathrm{Colim}(\mathrm{Colim} \circ F) = \mathrm{Colim}_a \mathrm{Colim}_{a'} \widehat{F}(a, a')$, y siempre se tiene el isomorfismo

$$\mathrm{Colim}_a \mathrm{Colim}_{a'} \widehat{F}(a, a') \overset{t_F}{\cong} \mathrm{Colim}\widehat{F}.$$

Sea $\chi_F := h_F^{-1} t_F$. Afirmamos que $\chi : \mathrm{Colim}\mathrm{Colim}^A \Rightarrow \mathrm{Colim} m_C$ es transformación natural. En efecto, consideremos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
& \mathrm{Colim}_a \mathrm{Colim}_{a'} \widehat{H}(a,a') \arrow[d, "t_H"] \arrow[dd, bend left, "\chi_H"] \\
\widehat{H}\delta_A \arrow[ur, "\alpha^{\widehat{H}}\delta_A"] \arrow[r, "\gamma^{\widehat{H}}\delta_A"] \arrow[dr, "\mu^{\widehat{H}\delta_A}"'] & \mathrm{Colim}\widehat{H} \arrow[d, "h_H^{-1}"] \\
& \mathrm{Colim}(\widehat{H}\delta_A),
\end{tikzcd} \tag{6.4}$$

donde

$$\begin{aligned}
&\mu^{\widehat{H}\delta_A} : \widehat{H}\delta_A \Rightarrow \mathrm{Colim}(\widehat{H}\delta_A) : A \to C, \\
&\gamma^{\widehat{H}} : \widehat{H} \Rightarrow \mathrm{Colim}\widehat{H} : A \times A \to C, \\
&\alpha^{\widehat{H}} : \widehat{H} \Rightarrow \mathrm{Colim}_a \mathrm{Colim}_{a'} \widehat{H}(a,a') : A \times A \to C
\end{aligned}$$

son conos colímites. Como $h_H^{-1} t_H$ es iso, $\alpha^{\widehat{H}}\delta_A$ es cono colímite. Los siguientes diagramas conmutan para $\varphi : F \Rightarrow G$ morfismo en $(C^A)^A$:

$$\begin{tikzcd}
& \mathrm{Colim}_a \mathrm{Colim}_{a'} \widehat{F}(a,a') \arrow[d, "\mathrm{Colim}_a \mathrm{Colim}_{a'} \widehat{\varphi}(a,a')"] \\
\widehat{F}\delta_A \arrow[ur, "\alpha^{\widehat{F}}\delta_A"] \arrow[d, "\widehat{\varphi}\delta_A"'] & \mathrm{Colim}_a \mathrm{Colim}_{a'} \widehat{G}(a,a') \arrow[d, "t_G"] \\
\widehat{G}\delta_A \arrow[ur, "\alpha^{\widehat{G}}\delta_A"] \arrow[r, "\gamma^{\widehat{G}}\delta_A"] \arrow[dr, "\mu^{\widehat{G}\delta_A}"'] & \mathrm{Colim}\widehat{G} \arrow[d, "h_G^{-1}"] \\
& \mathrm{Colim}(\widehat{G}\delta_A)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Colim}_a \mathrm{Colim}_{a'} \widehat{F}(a,a') \arrow[d, "t_F"] \\
\widehat{F}\delta_A \arrow[ur, "\alpha^{\widehat{F}}\delta_A"] \arrow[r, "\gamma^{\widehat{F}}\delta_A"] \arrow[dr, "\mu^{\widehat{F}\delta_A}"'] \arrow[d, "\widehat{\varphi}\delta_A"'] & \mathrm{Colim}\widehat{F} \arrow[d, "h_F^{-1}"] \\
\widehat{G}\delta_A \arrow[dr, "\mu^{\widehat{G}\delta_A}"'] & \mathrm{Colim}(\widehat{F}\delta_A) \arrow[d, "\mathrm{Colim}(\widehat{\varphi}\delta_A)"] \\
 & \mathrm{Colim}(\widehat{G}\delta_A).
\end{tikzcd}$$

Luego, de la universalidad de $\alpha^{\widehat{F}}\delta_A$, las flechas verticales de ambos diagramas son iguales.

Veamos que $(C, \mathrm{Colim}, \chi)$ es seudoálgebra normal de $(-)^A$; es decir, que se verifican las igualdades (5.1) y (5.2) de la Observación 5.3 para nuestra categoría tamizada A arbitraria. Por la Observación 6.16 y la Proposición 6.4,

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "dC"] \arrow[dr, "1_C"'] & C^A \arrow[d, "\mathrm{Colim}"] \\
 & C
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Veamos que

$$\begin{tikzcd}
 & & C^A \arrow[dr, "\mathrm{Colim}"] & & \\
C^A \arrow[r, "(dC)^A"] & (C^A)^A \arrow[ur, "\mathrm{Colim}^A"] \arrow[dr, "m_C"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow\chi"] & & C & = 1_{\mathrm{Colim}}\,. \\
 & & C^A \arrow[ur, "\mathrm{Colim}"'] & &
\end{tikzcd}$$

Sea $F \in C^A$ y $a \in A$. Tenemos que

$$dC \circ F(a) = dC(Fa) = \Delta Fa;$$

de aquí,

$$\mathrm{Colim}_b\, dC \circ F(a)(b) = \mathrm{Colim}_b\, \Delta Fa(b) = Fa;$$

de donde,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Colim}_a \mathrm{Colim}_b\, \widehat{dC \circ F}(a,b) &= \mathrm{Colim}_a \mathrm{Colim}_b\, dC \circ F(a)(b) \\
&= \mathrm{Colim}_a\, Fa \\
&= \mathrm{Colim} F.
\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$(\widehat{dC \circ F} \circ \delta_A)a = \Delta Fa(a) = Fa;$$

de aquí,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Colim}_a\, m_C(dC \circ F) &= \mathrm{Colim}_a\, \widehat{dC \circ F} \circ \delta_A(a) \\
&= \mathrm{Colim}_a Fa \\
&= \mathrm{Colim} F.
\end{aligned}$$

Ahora, $\chi(dC)^A(F) = \chi_{dC \circ F}$. De lo anterior y de considerar el diagrama (6.4) para $H = dC \circ F$, se tiene $\chi(dC)^C = 1_{\mathrm{Colim}}$.

Finalmente veamos que

$$\begin{tikzcd}
((C^A)^A)^A \arrow[r, "(\mathrm{Colim}^A)^A"] \arrow[d, "(m_C)^A"'] \arrow[dr, phantom, "\Leftarrow \chi^A"] & (C^A)^A \arrow[d, "\mathrm{Colim}^A"] \\
(C^A)^A \arrow[r, "\mathrm{Colim}^A"'] \arrow[d, "m_C"'] \arrow[dr, phantom, "\Leftarrow \chi"] & C^A \arrow[d, "\mathrm{Colim}"] \\
C^A \arrow[r, "\mathrm{Colim}"'] & C
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
((C^A)^A)^A \arrow[rr, "(\mathrm{Colim}^A)^A"] \arrow[d, "m_{C^A}"'] & & (C^A)^A \arrow[d, "m_C"] \arrow[dr, "\mathrm{Colim}^A"] & \\
(C^A)^A \arrow[rr, "\mathrm{Colim}^A"] \arrow[drr, "m_C"'] & & C^A \arrow[r, phantom, "\Leftarrow \chi"] \arrow[dr, "\mathrm{Colim}"] \arrow[d, phantom, "\Leftarrow \chi"] & C^A \arrow[d, "\mathrm{Colim}"] \\
& & C^A \arrow[r, "\mathrm{Colim}"'] & C
\end{tikzcd};$$

es decir, que

$$\chi(m_C)^A \cdot \mathrm{Colim}\chi^A = \chi m_{C^A} \cdot \chi(\mathrm{Colim}^A)^A. \tag{6.5}$$

Como el isomorfismo

$$\mathbf{Cat}(A \times B, C) \cong \mathbf{Cat}(A, C^B)$$

es natural, dados funtores $G : C \to D$ y $H : A \to C^B$, se tiene que

$$\widehat{G^B \circ H} = G \circ \widehat{H}. \tag{6.6}$$

También, como C tiene A-colímites, $dC = \Delta = \Delta_C : C \to C^A$ tiene a Colim como adjunto izquierdo: Colim $\dashv \Delta$; así que Colim preserva colímites.

Sea $F \in ((C^A)^A)^A$. Como C^A también tiene A-colímites, tenemos un diagrama de colímites como el (6.4) para $H = F$ pero uno donde los colímites están en C^A en lugar de C. Como Colim preserva colímites, si aplicamos Colim a ese diagrama, obtenemos nuevamente un diagrama de conos colímites con base el funtor $\mathrm{Colim} \circ \widehat{F} \circ \delta_A$ y donde la flecha vertical es $\mathrm{Colim}(\chi \circ F) = \mathrm{Colim}((\chi^A)_F)$; llamemos a tal diagrama (♣). Por (6.6),

$$\widehat{\mathrm{Colim}^A} \circ F = \mathrm{Colim} \circ \widehat{F},$$

y de aquí,

$$\widehat{\mathrm{Colim}^A} \circ F \circ \delta_A = \mathrm{Colim} \circ \widehat{F} \circ \delta_A.$$

Por otro lado, tenemos un diagrama de colímites (♠) como el (6.4) para $H = \mathrm{Colim}^A \circ F$, con base el funtor $\widehat{\mathrm{Colim}^A} \circ F \circ \delta_A$ y flecha vertical $\chi_{\mathrm{Colim}^A \circ F} = \chi(\mathrm{Colim}^A)^A(F)$. Así que como (♣) y (♠) tienen el mismo funtor base y los coconos son conos colímites,

$$\mathrm{Colim}((\chi^A)_F) = \mathrm{Colim}(\chi \circ F) = \chi_{\mathrm{Colim}^A \circ F} = \chi(\mathrm{Colim}^A)^A(F). \tag{6.7}$$

Finalmente, es fácil ver que

$$\widehat{m_C \circ F} \circ \delta_A = \widehat{\widehat{F} \circ \delta_A} \circ \delta_A.$$

Así que

$$\chi(m_C)^A(F) = \chi_{m_C \circ F} = \chi_{\widehat{F} \circ \delta_A} = \chi m_{C^A}(F), \tag{6.8}$$

pues $\chi_{m_C \circ F}$ y $\chi_{\widehat{F} \circ \delta_A}$ son la flecha vertical de un diagrama como el (6.4) para $H = m_C \circ F$ y $H = \widehat{F} \circ \delta_A$, resp., y base $\widehat{m_C \circ F} \circ \delta_A = \widehat{\widehat{F} \circ \delta_A} \circ \delta_A$.

Luego, de (6.7) y (6.8), se tiene (6.5). □

Observación 6.19. Sea C una categoría. Dado un idempotente $f : a \to a$ en C (o el funtor $\ulcorner f \urcorner : E \to C$), un cocono $g : \ulcorner f \urcorner \Rightarrow c$ es lo mismo que una flecha $g : a \to c$ tal que $gf = g$.

Que C tenga E-colímites significa que para todo idempotente $f : a \to a$ en C existe $\mu_f : a \to \mathrm{Colim}\ulcorner f \urcorner$ tal que $\mu_f f = \mu_f$ y para todo $g : a \to c$ con $gf = g$, existe un único t tal que $g = t\mu_f$.

Proposición 6.20. *Si C es una categoría en la que los idempotentes se escinden, entonces C tiene E-colímites.*

Demostración. Sea C una categoría en la que los idempotentes se escinden; es decir, para todo idempotente $f : a \to a$ en C existen morfismos r_f, i_f tales que $f = i_f r_f$ y $r_f i_f = 1$.

Sea $f : a \to a$ un idempotente. El candidato obvio para el cono colímite es r_f; afirmamos que lo es. En efecto, sea $g : a \to c$ tal que $gf = g$. Tenemos que $g = tr_f$ para $t := gi_f$, y si t' es una flecha tal que $g = t'r_f$ entonces $t' = gi_f$. □

Corolario 6.21. *Si C es una categoría en la que se escinden los idempotentes, entonces a C se le puede dar una estructura de seudoálgebra normal para $(-)^E$.*

6.3. El funtor 2 de las seudoálgebras de $(-)^{\mathbf{2}}$ a las seudoálgebras de $(-)^E$

Proposición 6.22. *El funtor $\mathbf{2} \xrightarrow{\bar{e}} E$, el nombre del morfismo e en E, induce un morfismo de mónadas 2, a saber, $(-)^{\bar{e}} : (-)^E \Rightarrow (-)^{\mathbf{2}}$, y este, a su vez, induce un funtor 2 SAlg$(\bar{e})$: SAlg$(\mathbf{2}) \to$ SAlg(E) (para simplificar la notación, en lugar de escribir $(-)^E$-Alg, en este capítulo escribiremos SAlg(E)). Será claro que también induce un funtor 2 SAlgN$(\bar{e})$: SAlgN$(\mathbf{2}) \to$ SAlgN(E), de las seudoálgebras normales de $(-)^{\mathbf{2}}$ a las seudoálgebras normales de $(-)^E$.*

Demostración. Tenemos que $\bar{e} : \mathbf{2} \to E$ es morfismo de comonoides: los diagramas

$$\begin{tikzcd} \mathbf{2} \arrow[r, "!_{\mathbf{2}}"] \arrow[dr, "\bar{e}"'] & \mathbf{1} \\ & E \arrow[u, "!_E"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathbf{2} \arrow[r, "\bar{e}"] \arrow[d, "\delta_{\mathbf{2}}"'] & E \arrow[d, "\delta_E"] \\ \mathbf{2}\times\mathbf{2} \arrow[r, "\bar{e}\times\bar{e}"'] & E\times E \end{tikzcd} \tag{6.9}$$

conmutan. Notemos que el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathbf{2}\times\mathbf{2} \arrow[r, "\bar{e}\times\mathbf{2}"] \arrow[d, "\mathbf{2}\times\bar{e}"'] \arrow[dr, "\bar{e}\times\bar{e}"] & E\times\mathbf{2} \arrow[d, "E\times\bar{e}"] \\ \mathbf{2}\times E \arrow[r, "\bar{e}\times E"'] & E\times E \end{tikzcd} \tag{6.10}$$

conmuta. Denotemos como $((-)^E, d, m)$ a la mónada 2 $((-)^E, (-)^{!_E}, (-)^{\delta_E})$ y como $((-)^{\mathbf{2}}, d', m')$ a la mónada 2 $((-)^{\mathbf{2}}, (-)^{!_{\mathbf{2}}}, (-)^{\delta_{\mathbf{2}}})$. Entonces, de (6.9) y (6.10), los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{tikzcd} 1_{\mathbf{Cat}} \arrow[r, "d"] \arrow[dr, "d'"'] & (-)^E \arrow[d, "(-)^{\bar{e}}"] \\ & (-)^{\mathbf{2}} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (-)^E(-)^E \arrow[rr, "(-)^{\bar{e}}(-)^{\bar{e}}"] \arrow[d, "m"'] & & (-)^{\mathbf{2}}(-)^{\mathbf{2}} \arrow[d, "m'"] \\ (-)^E \arrow[rr, "(-)^{\bar{e}}"'] & & (-)^{\mathbf{2}}. \end{tikzcd}$$

Luego, $(-)^{\bar{e}}$ es morfismo de mónadas 2.

Ahora, sean $(H, \varrho) : (A, F, \psi, \alpha) \to (A', F', \psi', \alpha')$ una celda 1 y $\xi : (H, \varrho) \Rightarrow (H', \varrho')$ una celda 2 en $SAlg(\mathbf{2})$. Consideremos los siguientes diagramas:

$$\begin{tikzcd} & A^E \arrow[d, "A^{\bar{e}}"] \\ A \arrow[ur, "dA"] \arrow[r, "d'A"] \arrow[dr, "1_A"'] \arrow[dr, phantom, shift left=3, "\Swarrow\psi"] & A^{\mathbf{2}} \arrow[d, "F"] \\ & A \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (A^E)^E \arrow[r, "(A^{\bar{e}})^E"] \arrow[dd, "m_A"'] & (A^{\mathbf{2}})^E \arrow[r, "F^E"] \arrow[d, "(A^{\mathbf{2}})^{\bar{e}}"'] & A^E \arrow[d, "A^{\bar{e}}"] \\ & (A^{\mathbf{2}})^{\mathbf{2}} \arrow[r, "F^{\mathbf{2}}"] \arrow[d, "m'_A"'] \arrow[dr, phantom, "\Leftarrow \alpha"] & A^{\mathbf{2}} \arrow[d, "F"] \\ A^E \arrow[r, "A^{\bar{e}}"'] & A^{\mathbf{2}} \arrow[r, "F"'] & A \end{tikzcd}$$

y

$$\begin{tikzcd} A^E \arrow[r, "H^E"] \arrow[d, "A^{\bar{e}}"'] & A'^E \arrow[d, "A'^{\bar{e}}"] \\ A^{\mathbf{2}} \arrow[r, "H^{\mathbf{2}}"] \arrow[d, "F"'] \arrow[dr, phantom, "\Leftarrow \varrho"] & A'^{\mathbf{2}} \arrow[d, "F'"] \\ A \arrow[r, "H"'] & A'. \end{tikzcd}$$

Definamos $SAlg(\bar{e}) : SAlg(\mathbf{2}) \to SAlg(E)$ como sigue:

$$SAlg(\mathbf{2}) \xrightarrow{SAlg(\bar{e})} SAlg(E)$$

$$
\begin{tikzcd}
(A,F,\psi,\alpha) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, bend right=40, "{(H',\varrho')}"'] \arrow[d, bend left=40, "{(H,\varrho)}"] \arrow[d, phantom, "\overset{\Leftarrow}{\xi}"] & (A, FA^{\bar{e}}, \psi, \alpha(A^{\mathbf{2}})^{\bar{e}}(A^{\bar{e}})^{E}) \arrow[d, bend right=40, "{(H',\varrho' A^{\bar{e}})}"'] \arrow[d, bend left=40, "{(H,\varrho A^{\bar{e}})}"] \arrow[d, phantom, "\overset{\Leftarrow}{\xi}"] \\
(A',F',\psi',\alpha') \arrow[r, mapsto] & (A', FA'^{\bar{e}}, \psi', \alpha'(A'^{\mathbf{2}})^{\bar{e}}(A'^{\bar{e}})^{E}).
\end{tikzcd}
$$

Veamos que en efecto $(A, FA^{\bar{e}}, \psi, \alpha(A^{\mathbf{2}})^{\bar{e}}(A^{\bar{e}})^{E}) \in SAlg(E)$; es decir, que

$$
\begin{tikzcd}
 & & A^E \arrow[dr, "FA^{\bar{e}}"] & \\
A^E \arrow[r, "(dA)^E"] & (A^E)^E \arrow[ur, "(FA^{\bar{e}})^E"] \arrow[dr, "m_A"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow\vartheta"] & & A \\
 & & A^E \arrow[ur, "FA^{\bar{e}}"'] &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
 & (A^E)^E \arrow[dr, "(FA^{\bar{e}})"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\psi^E"] & & \\
A^E \arrow[ur, "(dA)^E"] \arrow[rr, "1_{A^E}"'] & {} & A^E \arrow[r, "FA^{\bar{e}}"] & A
\end{tikzcd}
\tag{6.11}
$$

(veáse (3.2)) y que se cumple (5.1) para $(A, FA^{\bar{e}}, \psi, \vartheta)$, donde

$$\vartheta := \alpha(A^{\mathbf{2}})^{\bar{e}}(A^{\bar{e}})^{E}.$$

Se tiene (6.11); en efecto,

$$
\begin{aligned}
\vartheta(dA)^E &= \alpha(A^{\mathbf{2}})^{\bar{e}}(A^{\bar{e}})^{E}(dA)^E \\
&= \alpha(A^{\mathbf{2}})^{\bar{e}}(d'A)^E && ((-)^{\bar{e}} \text{ es morfismo de mónadas } 2) \\
&= \alpha(d'A)^{\mathbf{2}}A^{\bar{e}} && (\text{naturalidad de } (-)^{\bar{e}}) \\
&= F\psi^{\mathbf{2}}A^{\bar{e}} && ((A,F,\psi,\alpha) \in SAlg(\mathbf{2})) \\
&= FA^{\bar{e}}\psi^E && (\text{naturalidad 2 de } (-)^{\bar{e}}).
\end{aligned}
$$

Se tiene (5.1); en efecto,

$$
\begin{aligned}
&\vartheta m_{A^E} \cdot \vartheta((FA^{\bar{e}})^E)^E \\
=&\alpha(A^{\mathbf{2}})^{\bar{e}}(A^{\bar{e}})^E m_{A^E} \cdot \ldots \\
=&\alpha(A^{\mathbf{2}})^{\bar{e}} m_{A^{\mathbf{2}}}((A^{\bar{e}})^E)^E \cdot \ldots && \text{(naturalidad de } m) \\
=&\alpha m'_{A^{\mathbf{2}}}((A^{\mathbf{2}})^{\mathbf{2}})^{\bar{e}}((A^{\mathbf{2}})^{\bar{e}})^E((A^{\bar{e}})^E)^E \cdot \ldots && ((-)^{\bar{e}} \text{ es morfismo de móna-} \\
& && \text{das 2)} \\
=&\ldots \cdot \alpha(A^{\mathbf{2}})^{\bar{e}}(A^{\bar{e}})^E((FA^{\bar{e}})^E)^E \\
=&\ldots \cdot \alpha(A^{\mathbf{2}})^{\bar{e}}(A^{\bar{e}})^E((F^E)^E((A^{\bar{e}})^E)^E \\
=&\ldots \cdot \alpha(A^{\mathbf{2}})^{\bar{e}}(F^{\mathbf{2}})^E((A^{\mathbf{2}})^{\bar{e}})^E((A^{\bar{e}})^E)^E && \text{(naturalidad de } (-)^{\bar{e}}) \\
=&\ldots \cdot \alpha(F^{\mathbf{2}})^{\mathbf{2}}((A^{\mathbf{2}})^{\mathbf{2}})^{\bar{e}}((A^{\mathbf{2}})^{\bar{e}})^E((A^{\bar{e}})^E)^E && \text{(naturalidad de } (-)^{\bar{e}}) \\
=&(\alpha m'_{A^{\mathbf{2}}} \cdot \alpha(F^{\mathbf{2}})^{\mathbf{2}})((A^{\mathbf{2}})^{\mathbf{2}})^{\bar{e}}((A^{\mathbf{2}})^{\bar{e}})^E((A^{\bar{e}})^E)^E \\
=&(\alpha(m'_A)^{\mathbf{2}} \cdot F\alpha^{\mathbf{2}})((A^{\mathbf{2}})^{\mathbf{2}})^{\bar{e}}((A^{\mathbf{2}})^{\bar{e}})^E((A^{\bar{e}})^E)^E && ((A,F,\psi,\alpha) \in SAlg(\mathbf{2})) \\
=&\alpha(m'_A)^{\mathbf{2}}((A^{\mathbf{2}})^{\mathbf{2}})^{\bar{e}}((A^{\mathbf{2}})^{\bar{e}})^E((A^{\bar{e}})^E)^E \cdot \ldots \\
=&\alpha(A^{\mathbf{2}})^{\bar{e}}(m'_A)^E((A^{\mathbf{2}})^{\bar{e}})^E((A^{\bar{e}})^E)^E \cdot \ldots && \text{(naturalidad de } (-)^{\bar{e}}) \\
=&\alpha(A^{\mathbf{2}})^{\bar{e}}(A^{\bar{e}})^E(m_A)^E \cdot \ldots && ((-)^{\bar{e}} \text{ es morfismo de móna-} \\
& && \text{das 2)} \\
=&\vartheta(m_A)^E \cdot F\alpha^{\mathbf{2}}((A^{\mathbf{2}})^{\mathbf{2}})^{\bar{e}}((A^{\mathbf{2}})^{\bar{e}})^E((A^{\bar{e}})^E)^E \\
=&\vartheta(m_A)^E \cdot FA^{\bar{e}}\alpha^E((A^{\mathbf{2}})^{\bar{e}})^E((A^{\bar{e}})^E)^E && \text{(naturalidad 2 de } (-)^{\bar{e}}) \\
=&\vartheta(m_A)^E \cdot FA^{\bar{e}}\vartheta^E.
\end{aligned}
$$

Ahora veamos que $(H, \varrho A^{\bar{e}})$ es morfismo en $SAlg(E)$. Sea $\varkappa := \varrho A^{\bar{e}}$. Se cumple (3.4) para $(H, \varkappa)$; es decir, que

$$\psi \cdot \varkappa dA = \psi' H.$$

En efecto, tenemos entonces

$$
\begin{aligned}
\psi \cdot \varkappa dA &= \psi \cdot \varrho A^{\bar{e}} dA \\
&= \psi \cdot \varrho d' A && ((-)^{\bar{e}} \text{ es morfismo de mónadas 2)} \\
&= \psi' H && ((H, \varrho) \text{ es celda 1 en } SAlg(\mathbf{2})).
\end{aligned}
$$

Se cumple (3.5) para $(H, \varkappa)$; es decir, que

$$H\vartheta \cdot \varkappa(FA^{\bar{e}})^E \cdot (F'A'^{\bar{e}})\varkappa^E = \varkappa m_A \cdot \vartheta'(H^E)^E.$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
& H\vartheta\cdot\varkappa(FA^{\bar e})^E\cdot(F'A'^{\bar e})\varkappa^E \\
=& H\alpha(A^{\mathbf{2}})^{\bar e}(A^{\bar e})^E\cdot\varrho A^{\bar e}(FA^{\bar e})^E\cdot F'A'^{\bar e}(\varrho A^{\bar e})^E \\
=& H\alpha(A^{\mathbf{2}})^{\bar e}(A^{\bar e})^E\cdot\varrho A^{\bar e}F^E(A^{\bar e})^E\cdot F'A'^{\bar e}\varrho^E(A^{\bar e})^E \\
=& (H\alpha(A^{\mathbf{2}})^{\bar e}\cdot\varrho A^{\bar e}F^E\cdot F'A'^{\bar e}\varrho^E)(A^{\bar e})^E \\
=& (H\alpha(A^{\mathbf{2}})^{\bar e}\cdot\varrho F^{\mathbf{2}}(A^{\mathbf{2}})^{\bar e}\cdot F'\varrho^{\mathbf{2}}(A^{\mathbf{2}})^{\bar e})(A^{\bar e})^E && \text{(naturalidad 2 de } (-)^{\bar e}\text{)} \\
=& (H\alpha\cdot\varrho F^{\mathbf{2}}\cdot F'\varrho^{\mathbf{2}})(A^{\mathbf{2}})^{\bar e}(A^{\bar e})^E \\
=& (\varrho m'_A\cdot\alpha'(H^{\mathbf{2}})^{\mathbf{2}})(A^{\mathbf{2}})^{\bar e}(A^{\bar e})^E && \text{((}H,\varrho\text{) celda 1 en } SAlg(\mathbf{2})\text{)} \\
=& \varrho m'_A(A^{\mathbf{2}})^{\bar e}(A^{\bar e})^E\cdot\alpha'(H^{\mathbf{2}})^{\mathbf{2}}(A^{\mathbf{2}})^{\bar e}(A^{\bar e})^E \\
=& \varrho A^{\bar e}m_A\cdot\alpha'(H^{\mathbf{2}})^{\mathbf{2}}(A^{\mathbf{2}})^{\bar e}(A^{\bar e})^E && \text{((}-)^{\bar e}\text{ es morfismo de mó-} \\
& && \text{nadas 2)} \\
=& \varkappa m_A\cdot\alpha'(A'^{\mathbf{2}})^{\bar e}(H^{\mathbf{2}})^E(A^{\bar e})^E && \text{(naturalidad de } (-)^{\bar e}\text{)} \\
=& \varkappa m_A\cdot\alpha'(A'^{\mathbf{2}})^{\bar e}(H^{\mathbf{2}}A^{\bar e})^E \\
=& \varkappa m_A\cdot\alpha'(A'^{\mathbf{2}})^{\bar e}(A'^{\bar e}H^E)^E && \text{(naturalidad de } (-)^{\bar e}\text{)} \\
=& \varkappa m_A\cdot\alpha'(A'^{\mathbf{2}})^{\bar e}(A'^{\bar e})^E(H^E)^E \\
=& \varkappa m_A\cdot\vartheta'(H^E)^E.
\end{aligned}$$

Ahora, dada una celda 2 $\xi:(H,\varrho)\Rightarrow(H',\varrho')$ en $SAlg(\mathbf{2})$, se tiene que

$$\begin{tikzcd}
A^E \arrow[r, "H^E"] \arrow[d, "A^{\bar e}"'] & A'^E \arrow[d, "A'^{\bar e}"] \\
A^{\mathbf{2}} \arrow[r, "H^{\mathbf{2}}"] \arrow[d, "F"'] & A'^{\mathbf{2}} \arrow[d, "F'"] \arrow[dl, phantom, "\swarrow\varrho"] \\
A \arrow[r, bend left, "H"] \arrow[r, bend right, "H'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\xi"] & A'
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
A^E \arrow[r, bend left, "H^E"] \arrow[r, bend right, "H'^E"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\xi^E"] \arrow[d, "A^{\bar e}"'] & A'^E \arrow[d, "A'^{\bar e}"] \\
A^{\mathbf{2}} \arrow[r, "H'^{\mathbf{2}}"] \arrow[d, "F"'] & A'^{\mathbf{2}} \arrow[d, "F'"] \arrow[dl, phantom, "\swarrow\varrho'"] \\
A \arrow[r, "H'"'] & A'
\end{tikzcd}$$

porque $(-)^{\bar e}$ es natural 2 y ξ es una celda 2 en $SAlg(\mathbf{2})$ (véase (3.6)).

Ahora que ya sabemos que $SAlg(\bar e)$ está bien definido, veamos finalmente que es en efecto un funtor 2. Ya se tiene (i) de la Definición 1.5. Claramente,

$$SAlg(\bar e)(1_{(H,\varrho)})=1_{(H,\varrho A^{\bar e})}$$

y

$$SAlg(\bar{e})(\zeta \cdot \xi) = SAlg(\bar{e})(\zeta) \cdot SAlg(\bar{e})(\xi)$$

dadas dos celdas 2

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, bend left=60, "{(H,\varrho)}"] \arrow[r, "{(H'\varrho')}"] \arrow[r, bend right=60, "{(H'',\varrho'')}"'] \arrow[r, phantom, shift left=3ex, "\Downarrow\xi"] \arrow[r, phantom, shift right=3ex, "\Downarrow\zeta"] & A'
\end{tikzcd} ;$$

así que se tiene (ii) de la Definición 1.5. Como $(-)^{\mathbf{2}}$ es funtor 2,

$$1_{(A,F,\psi,\alpha)} = (1_A, 1_F).$$

De aquí,

$$\begin{aligned}
SAlg(\bar{e})(1_{(A,F,\psi,\alpha)}) &= (1_A, 1_F A^{\bar{e}}) \\
&= (1_A, 1_{FA^{\bar{e}}}) \\
&= 1_{(A,FA^{\bar{e}},\psi,\alpha(A^{\mathbf{2}})^{\bar{e}}(A^{\bar{e}})^E)};
\end{aligned}$$

así que tenemos (iii) de la misma definición, y el isomorfismo es una identidad. Sean

$$(A,F,\psi,\alpha) \xrightarrow{(H,\varrho)} (A',F',\psi',\alpha') \xrightarrow{(H',\varrho')} (A'',F'',\psi'',\alpha'')$$

celdas 1 en $SAlg(\mathbf{2})$. Entonces,

$$\begin{aligned}
SAlg(\bar{e})((H',\varrho')(H,\varrho)) &= SAlg(\bar{e})(H'H, H'\varrho \cdot \varrho' H^{\mathbf{2}}) \\
&= (H'H, (H'\varrho \cdot \varrho' H^{\mathbf{2}})A^{\bar{e}}) \\
&= (H'H, H'\varrho A^{\bar{e}} \cdot \varrho' H^{\mathbf{2}} A^{\bar{e}}) \\
&= (H'H, H'\varrho A^{\bar{e}} \cdot \varrho' A'^{\bar{e}} H^{E}) \\
&= (H', \varrho' A'^{\bar{e}})(H, \varrho A^{\bar{e}}) \\
&= SAlg(\bar{e})(H',\varrho') SAlg(\bar{e})(H,\varrho);
\end{aligned}$$

así que se tiene (iv) de la misma definición, y el isomorfismo es una identidad. Luego, $SAlg(\bar{e})$ es un funtor 2. $\square$

Definición 6.23. Un sistema de factorización ortogonal sobre una categoría A es un par de clases de morfismos $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ de A tal que

(i) todo morfismo f en A se factoriza como

$$\begin{tikzcd} & \bullet \arrow[dr, "m_f"] & \\ a \arrow[ur, "e_f"] \arrow[rr, "f"'] & & b \end{tikzcd}$$

con $e_f \in \mathcal{E}$ y $m_f \in \mathcal{M}$;

(ii) $\mathcal{E}$ y $\mathcal{M}$ son cerradas bajo composición con isomorfismos, $\mathcal{E}$ por la izquierda y $\mathcal{M}$ por la derecha;

(iii) se cumple la propiedad del llenado diagonal para todo diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "u"] \arrow[d, "e"'] & c \arrow[d, "m"] \\ b \arrow[r, "v"'] & d \end{tikzcd} \tag{6.12}$$

con $e \in \mathcal{E}$ y $m \in \mathcal{M}$; es decir, para todo diagrama conmutativo (6.12) con $e \in \mathcal{E}$ y $m \in \mathcal{M}$, existe un único $t : b \to c$ en A tal que

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "u"] \arrow[d, "e"'] & c \arrow[d, "m"] \\ b \arrow[r, "v"'] \arrow[ur, dashed, "t"] & d \end{tikzcd}$$

conmuta.

Definición 6.24. Un sistema de factorización de Eilenberg-Moore sobre una categoría A es un funtor $F : A^{\mathbf{2}} \to A$ tal que $Fd'A = 1_A$, donde

$$d'A : A \longrightarrow A^{\mathbf{2}}$$

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "f"'] & 1_a \arrow[d, "(f,f)"] \\ b \arrow[r, mapsto] & 1_b \end{tikzcd}$$

(es decir, $d'A$ es la evaluación en A de $d' : 1_{\mathbf{CAT}} \Rightarrow (-)^{\mathbf{2}}$, la unidad de la mónada 2 $((-)^{\mathbf{2}}, d', m')$), y tal que para todo morfismo f en A

$$e_f := F\left(\begin{tikzcd} a \arrow[r, "1"] \arrow[d, "1"'] & a \arrow[d, "f"] \\ a \arrow[r, "f"'] & b \end{tikzcd}\right) \in \mathcal{E}_F := \{h \mid m_h \text{ es iso}\}$$

y

$$m_f := F\left(\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f"'] & b \arrow[d, "1"] \\ b \arrow[r, "1"'] & b \end{tikzcd}\right) \in \mathcal{M}_F := \{h \mid e_h \text{ es iso}\}.$$

Notemos que, como

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"] \arrow[d, "1"'] & b \arrow[d, "1"] \\ a \arrow[r, "f"'] & b \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} a \arrow[r, "1"] \arrow[d, "1"'] & a \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f"] & b \arrow[d, "1"] \\ a \arrow[r, "f"'] & b \arrow[r, "1"'] & b \end{tikzcd}$$

y $Fd'A = 1_A$, entonces $f = m_f e_f$.

Teorema 6.25. *Dada una categoría A, el par $(\mathcal{E}_F, \mathcal{M}_F)$ de un sistema de factorización de Eilenberg-Moore F sobre A es un sistema de factorización ortogonal y un sistema de factorización ortogonal $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ sobre A induce un sistema de factorización de Eilenberg-Moore F', a través de la propiedad del llenado diagonal:*

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "u"] \arrow[d, "e_f"'] & c \arrow[r, "e_g"] & F'g \arrow[d, "m_g"] \\ F'f \arrow[r, "m_f"'] \arrow[urr, dashed, "F'(u,v)"] & b \arrow[r, "v"'] & d \end{tikzcd} .$$

Teorema 6.26. *Para un funtor $F : A^{\mathbf{2}} \to A$ con $Fd'A = 1_A$, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *F admite necesariamente una (única) estructura de seudoálgebra normal $\alpha : FF^{\mathbf{2}} \Rightarrow Fm'_A$;*
(ii) *hay un isomorfismo $\gamma : FF^{\mathbf{2}} \Rightarrow Fm'_A$;*
(iii) *todas las m_{e_f} y e_{m_f} son isomorfismos.*

Corolario 6.27. *Todo sistema de factorización de Eilenberg-Moore F sobre una categoría A es equivalente a una seudoálgebra normal (A, F, α) de $(-)^{\mathbf{2}}$ y toda seudoálgebra normal (A, F', α') de $(-)^{\mathbf{2}}$ es equivalente a un sistema de factorización de Eilenberg-Moore (a saber, F') sobre A.*

Nota 6.28. Sea $F : A^{\mathbf{2}} \to A$ funtor con $Fd'A = 1_A$ y $s := (f, u, v, g) \in (A^{\mathbf{2}})^{\mathbf{2}}$, diagramáticamente,

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] & c \arrow[d, "g"] \\
b \arrow[r, "v"'] & d
\end{tikzcd} .$$

Para el siguiente teorema se utilizarán las flechas

$$F(e_f, F(u, 1_d)) \qquad \text{y} \qquad F(F(1_a, v), m_g)),$$

las cuales se calculan a partir del diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
1_a \arrow[r, "{(1_a,f)}"] \arrow[d, "{(1_a,vf)}"'] & f \arrow[r, "{(1_a,v)}"] \arrow[d, "{(u,v)}"] & vf \arrow[d, "{(vf,1_d)}"] \\
vf \arrow[r, "{(u,1_d)}"'] & g \arrow[r, "{(g,1_d)}"'] & 1_d
\end{tikzcd} : \tag{6.13}$$

se aplica F al diagrama anterior para obtener

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "e_f"] \arrow[d, "e_{vf}"'] & Ff \arrow[r, "{F(1_a,v)}"] \arrow[d, "{F(u,v)}"] & Fvf \arrow[d, "m_{vf}"] \\
Fvf \arrow[r, "{F(u,1_d)}"'] & Fg \arrow[r, "m_g"'] & d
\end{tikzcd}$$

y de aquí se obtiene

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "e_f"] \arrow[d, "e_{e_{vf}}"'] & Ff \arrow[r, "{F(1_a,v)}"] \arrow[d, "e_{F(u,v)}"] & Fvf \arrow[d, "e_{m_{vf}}"] \\
Fe_{vf} \arrow[r, "{F(e_f,F(u,1_d))}"] \arrow[d, "m_{e_{vf}}"'] & FF(u,v) \arrow[r, "{F(F(1_a,v),m_g)}"] \arrow[d, "m_{F(u,v)}"] & Fm_{vf} \arrow[d, "m_{m_{vf}}"] \\
Fvf \arrow[r, "{F(u,1_d)}"'] & Fg \arrow[r, "m_g"'] & d
\end{tikzcd} .$$

Teorema 6.29. *Si $\alpha : FF^{\mathbf{2}} \Rightarrow Fm'_A$ es seudoálgebra normal de $(-)^{\mathbf{2}}$, entonces, dado $(f, u, v, g) \in (A^{\mathbf{2}})^{\mathbf{2}}$ como en*

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] & c \arrow[d, "g"] \\
b \arrow[r, "v"'] & d
\end{tikzcd} ,$$

se tiene que

$$F(e_f, F(u, 1_d)) \qquad y \qquad F(F(1_a, v), m_g))$$

son isomorfismos y

$$\begin{aligned}\alpha_{(f,u,v,g)} &= m_{e_{vf}} \circ (F(e_f, F(u, 1_d)))^{-1} \qquad (6.14)\\ &= e^{-1}_{m_{vf}} \circ F(F(1_a, v), m_g). \qquad (6.15)\end{aligned}$$

Observación 6.30. La categoría $E^{\mathbf{2}}$ la podemos representar como

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[loop left, "e_1"] \arrow[rr, bend left=60, "\lambda_e"] \arrow[rr, bend left=20, "\epsilon_e"] & & e \arrow[ll, bend left=20, "\eta_e"] \arrow[ll, bend left=60, "\varrho_e"] \arrow[loop right, "e_e"] \arrow[loop right, looseness=6, "\alpha_e"] \arrow[loop right, looseness=12, "\beta_e"] \end{tikzcd} \qquad (6.16)$$

donde $\lambda_e, \alpha_e, \beta_e, \varrho_e$ están dadas como

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, "1"] \arrow[d, "1"'] \arrow[dr, phantom, "\lambda_e"] & \bullet \arrow[d, "e"] \\ \bullet \arrow[r, "e"'] & \bullet \end{tikzcd}, \quad \begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, "1"] \arrow[d, "e"'] \arrow[dr, phantom, "\alpha_e"] & \bullet \arrow[d, "e"] \\ \bullet \arrow[r, "e"'] & \bullet \end{tikzcd}, \quad \begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, "e"] \arrow[d, "e"'] \arrow[dr, phantom, "\beta_e"] & \bullet \arrow[d, "e"] \\ \bullet \arrow[r, "1"'] & \bullet \end{tikzcd}, \quad \begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, "e"] \arrow[d, "e"'] \arrow[dr, phantom, "\varrho_e"] & \bullet \arrow[d, "1"] \\ \bullet \arrow[r, "1"'] & \bullet \end{tikzcd}.$$

Queda claro cómo están dadas las demás flechas. En el diagrama no aparecen las identidades.

Ahora, sea A una categoría arbitraria y sea $\alpha : FF^{\mathbf{2}} \Rightarrow Fm'_A$ una seudoálgebra normal de $(-)^{\mathbf{2}}$. Para $s = (f, f, f, f)$ de la Nota 6.28, el diagrama (6.13) es

$$\begin{tikzcd} 1_a \arrow[r, "\lambda_f"] \arrow[d, "\lambda_f"'] & f \arrow[r, "\alpha_f"] \arrow[d, "{(f,f)}"] & f \arrow[d, "\varrho_f"] \\ f \arrow[r, "\beta_f"'] & f \arrow[r, "\varrho_f"'] & 1_a \end{tikzcd},$$

y obtenemos

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "e_f"] \arrow[d, "e_{e_f}"'] & Ff \arrow[r, "F\alpha_f"] \arrow[d, "e_{F(f,f)}"] & Ff \arrow[d, "e_{m_f}"] \\
Fe_f \arrow[r, "F(e_f,F\beta_f)"] \arrow[d, "m_{e_f}"'] & FF(f,f) \arrow[r, "F(F\alpha_f,m_f)"] \arrow[d, "m_{F(f,f)}"] & Fm_f \arrow[d, "m_{m_f}"] \\
Ff \arrow[r, "F\beta_f"'] & Ff \arrow[r, "m_f"'] & a
\end{tikzcd} ;$$

de aquí,

$$\alpha_{(f,f,f,f)} = m_{e_f} \circ F(e_f, F\beta_f)^{-1}.$$

Ejemplo 6.31. Sobre **Con**, consideremos el sistema de factorización ortogonal $(Epi, Mono)$.

Dada una función f en **Con**, e_f en $(Epi, Mono)$ es la correstricción de f a su imagen y m_f es simplemente la inclusión. Así que dado s como en la Nota 6.28,

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "e_f"'] & W \arrow[d, "e_g"] \\
Imf \arrow[r, "F(u,v)", "v|_{Imf}"'] \arrow[d, hook, "m_f"'] & Img \arrow[d, hook, "m_g"] \\
Y \arrow[r, "v"'] & Z
\end{tikzcd} ;$$

es decir, el sistema de factorización de Eilenberg-Moore correspondiente a $(Epi, Mono)$ queda definido como

$$F : \mathbf{Con^2} \longrightarrow \mathbf{Con}$$

$$\begin{tikzcd}
f \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "{(u,v)}"'] & Imf \arrow[d, "v|_{Imf}"] \\
g \arrow[r, mapsto] & Img
\end{tikzcd} .$$

De aquí, dado $f : X \to X$ idempotente en **Con**, es claro que $m_{e_f} = 1_{Imf}$. Ahora, como $\beta_f = (f, f, 1_X, f)$,

$$F\beta_f = 1_X|_{Imf} = 1_{Imf};$$

de donde, $F(e_f, F\beta_f) = 1_{Imf}$. Luego, para f idempotente en **Con**

$$\alpha_{(f,f,f,f)} = 1.$$

Notemos que en $(Epi, Mono)$ los idempotentes se escinden.

Ejemplo 6.32. Consideremos la categoría **AnC** de los anillos conmutativos con unidad.

Diremos que un morfismo $f : A \to B$ en **AnC** *invierte* a un elemento $a \in A$ si fa es invertible en B, y que f es *conservativo* si todo elemento $a \in A$ que es invertido por f es invertible en A.

Sea $A \in$ **AnC**. Para todo subconjunto $S \subseteq A$ con $0 \notin S$, existe un anillo conmutativo con unidad $S^{-1}A$ junto con un homomorfismo de anillos $l : A \to S^{-1}A$ que invierte universalmente todo elemento de S; es decir, para todo homomorfismo de anillos $f : A \to B$ que invierte todo elemento de S, existe un único homomorfismo de anillos $f' : S^{-1}A \to B$ tal que

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "l"] \arrow[dr, "f"'] & S^{-1}A \arrow[d, dashed, "f'"] \\ & B \end{tikzcd}$$

conmuta. Simplemente considérese la localización de A con respecto al monoide generado por S con la multiplicación en A.

Todo morfismo $f : A \to B$ en **AnC** admite una factorización canónica

$$\begin{tikzcd} & S_f^{-1}A \arrow[dr, "m_f"] & \\ A \arrow[ur, "e_f"] \arrow[rr, "f"'] & & B \end{tikzcd},$$

donde $S_f := \{a \in A \mid fa \in B^*\}$, e_f es la localización de A con respecto a S_f y m_f es el único morfismo de anillos que hace conmutar el diagrama anterior; explícitamente, dado $a/s \in S_f^{-1}A$,

$$m_f\left(\frac{a}{s}\right) = fa(fs)^{-1}.$$

Se tiene que (*Localización*, *Conservativo*) es un sistema de factorización ortogonal sobre **AnC**.

Calculemos el sistema de factorización de Eilenberg-Moore correspondiente a $(Localización, Conservativo)$. Dado el cuadrado conmutativo de morfismos en **AnC**

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] & C \arrow[d, "g"] \\ B \arrow[r, "v"'] & D \end{tikzcd} ,$$

definamos $S^{-1}(f,u,v,g) : S_f^{-1}A \to S_g^{-1}C$ como

$$S^{-1}(f,u,v,g)\left(\frac{a}{s}\right) := \frac{ua}{us}.$$

Entonces, el diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "u"] \arrow[d, "e_f"'] & & C \arrow[d, "e_g"] \\ S_f^{-1}A \arrow[rr, "S^{-1}(u,v)"] \arrow[d, "m_f"'] & & S_g^{-1}C \arrow[d, "m_g"] \\ B \arrow[rr, "v"'] & & D \end{tikzcd}$$

conmuta:

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & ua \arrow[d, mapsto] \\ \frac{a}{1} \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & \frac{ua}{u1} \arrow[d, mapsto] \\ fa \arrow[r, mapsto] & vfa = gua \end{tikzcd} .$$

Sea $f : A \to A$ idempotente en **AnC** y consideremos el morfismo $e_f m_f : S_f^{-1}A \to S_f^{-1}A$, el cual está dado por

$$e_f m_f \left(\frac{a}{s}\right) = \frac{fa}{fs}.$$

De aquí, es claro que $e_f m_f$ es idempotente (y no es la identidad).

Consideremos a $m_{e_f} : S_{e_f}^{-1}A \to S_f^{-1}A$. Sea $a \in S_{e_f}$; entonces, existen $b \in A$ y $s \in S_f$ tales que

$$\frac{a}{1} \cdot \frac{b}{s} = 1;$$

de aquí, existe $t \in S_f$ tal que $t(ab-s)=0$; es decir, $t(ab) \in S_f$. Como $t \in S_f$, ab también; de donde, $fafb \in A^*$. Luego, como A es conmutativo, $fa \in A^*$; así que $a \in S_f$. Recíprocamente, si $a \in S_f$, $a \in S_{e_f}$. Por lo tanto, $m_{e_f} = 1$.

Como en la definición de $S^{-1}(f,u,v,g)$ sólo tiene relevancia el morfismo u, no es necesario que calculemos $S^{-1}\beta_f$ para calcular $S^{-1}(e_f, S^{-1}\beta_f)$. Tenemos que $S^{-1}(e_f, S^{-1}\beta_f)$ está dado como

$$\begin{aligned} S^{-1}(e_f, S^{-1}\beta_f) : S_f^{-1}A &\to S_{F(f,f)}^{-1}(S_f^{-1}A) \\ \frac{a}{s} &\mapsto \frac{a/1}{s/1}, \end{aligned}$$

y es fácil ver que $S_{F(f,f)} = (S_f^{-1}A)^*$. Se tiene que $\alpha_{(f,f,f,f)} \neq 1$.

6.4. Un ejemplo mínimo no estricto

Ejemplo 6.33. Consideremos en **Con** el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} \{0,1\} \arrow[loop above, "const\ 0"] \arrow[r, bend left] & \{2,3\} \arrow[l, bend left] \arrow[r, bend left] & \{4,5\} \arrow[l, bend left] \arrow[r, bend left] & \cdots \arrow[l, bend left] \end{tikzcd}, \tag{6.17}$$

donde las flechas de arriba son isomorfismos y las flechas de abajo sus inversas (podemos pensar, por ejemplo, en que las flechas de arriba mandan el elemento de la derecha al elemento de la derecha y el de la izquierda al de la izquierda, resp., en el conjunto subsiguiente en la sucesión). Tal situación la podemos representar, en general, por el diagrama

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[loop above, "e_0"] \arrow[r, bend left, "f_1"] & 1 \arrow[l, bend left, "f_1^{-1}"] \arrow[r, bend left, "f_2"] & 2 \arrow[l, bend left, "f_2^{-1}"] \arrow[r, bend left, "f_3"] & 3 \arrow[l, bend left, "f_3^{-1}"] \arrow[r, bend left, "f_4"] & \cdots \arrow[l, bend left, "f_4^{-1}"] \end{tikzcd},$$

donde e_0 es idempotente y $f_1e_0 \neq f_1$. Consideremos la subcategoría A de **Con** generada por el diagrama (6.17). Defínase

$$e_i := f_i f_{i-1} \cdots f_2 f_1 e_0 f_1^{-1} f_2^{-1} \cdots f_{i-1}^{-1} f_i^{-1}$$

para $i = 1, 2, 3, \ldots$; es decir, tenemos

$$e_{i+1} = f_{i+1} e_i f_{i+1}^{-1}$$

para todo $i = 0, 1, 2, \ldots$, obteniéndose el diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[loop above, "e_0"] \arrow[r, bend left, "f_1"] & 1 \arrow[loop above, "e_1"] \arrow[l, bend left, "f_1^{-1}"] \arrow[r, bend left, "f_2"] & 2 \arrow[loop above, "e_2"] \arrow[l, bend left, "f_2^{-1}"] \arrow[r, bend left, "f_3"] & 3 \arrow[loop above, "e_3"] \arrow[l, bend left, "f_3^{-1}"] \arrow[r, bend left, "f_4"] & \cdots . \arrow[l, bend left, "f_4^{-1}"]
\end{tikzcd} \tag{6.18}$$

Por supuesto, hay otros morfismos en A; sin embargo, por el momento sólo consideremos los morfismos idempotentes e_i. Afirmamos que son todos los idempotentes en A y que $e_i \neq 1$ para todo $i = 0, 1, 2, \ldots$

Demostremos la segunda afirmación. Para $i = 0$, tenemos que $f_1 e_0 \neq f_1$, así que $e_1 \neq 1$. Por hipótesis de inducción, supongamos que $f_{i+1} e_i \neq f_{i+1}$ para todo $0 \leq i \leq n$. De aquí, $e_i \neq 1$ para todo $i = 1, \ldots, n+1$. Tenemos que $f_{n+2} e_{n+1} \neq f_{n+2}$; en caso contrario, tendríamos que $e_{n+1} = 1$. Luego, también tenemos que $e_{n+2} \neq 1$.

Demostremos la primera afirmación. Dado un objeto i de A, se puede partir a la izquierda (salvo para $i = 0$) o a la derecha. Si se parte a la izquierda (así que en este caso $i \neq 0$), podemos comenzar con f_i^{-1} o con $f_i^{-1} e_i$, y volver con $f_i f_i^{-1} = 1$ o $f_i f_i^{-1} e_i = e_i$ o $f_i e_{i-1} f_i^{-1} = e_i$ o

$$f_i e_{i-1} f_i^{-1} e_i = e_i e_i = e_i,$$

etc. En general, si continuamos el recorrido a la izquierda y volvemos, obtenemos

$$\upsilon_i f_i \upsilon_{i-1} f_{i-1} \cdots f_{i-j} \upsilon_{i-j-1} f_{i-j}^{-1} \cdots f_{i-1}^{-1} \upsilon_{i-1} f_i^{-1} \upsilon_i,$$

donde $\upsilon_k \in \{e_k, 1_k\}$ para $k = i, i-1, \ldots, i-j-1$. De aquí, como

$$f_{i-j} \upsilon_{i-j-1} f_{i-j}^{-1} = \upsilon_{i-j},$$

obtenemos

$$\upsilon_i f_i \upsilon_{i-1} f_{i-1} \cdots f_{i-j+1} \upsilon_{i-j} \upsilon_{i-j} \upsilon_{i-j} f_{i-j+1}^{-1} \cdots f_{i-1}^{-1} \upsilon_{i-1} f_i^{-1} \upsilon_i,$$

y así sucesivamente, hasta que finalmente obtenemos υ_i, que es 1_i o e_i. De manera similar, si partimos a la derecha desde i y volvemos a i, obtenemos 1_i o e_i.

La categoría A es

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[loop above, "e_0"] \arrow[r, "f_1"] \arrow[r, bend left=50, "g_1"] & 1 \arrow[loop above, "e_1"] \arrow[l, "f_1^{-1}"] \arrow[l, bend left=50, "g_1'"] \arrow[r, "f_2"] \arrow[r, bend left=50, "g_2"] & 2 \arrow[loop above, "e_2"] \arrow[l, "f_2^{-1}"] \arrow[l, bend left=50, "g_2'"] \arrow[r, "f_3"] \arrow[r, bend left=50, "g_3"] & 3 \arrow[loop above, "e_3"] \arrow[l, "f_3^{-1}"] \arrow[l, bend left=50, "g_3'"] \arrow[r, "f_4"] \arrow[r, bend left=50, "g_4"] & \cdots, \arrow[l, "f_4^{-1}"] \arrow[l, bend left=50, "g_4'"]
\end{tikzcd} \tag{6.19}$$

donde

$$g_{i+1} := f_{i+1}e_i : i \to i+1 \quad \text{y} \quad g'_{i+1} := e_i f_{i+1}^{-1} : i+1 \to i$$

para $i = 0, 1, 2, \ldots$ Notemos que los morfismos

$$e_i f_i = g_i \quad \text{y} \quad f_i^{-1} e_i = g'_i$$

para $i = 1, 2, \ldots$ Ahora, definamos $F : A^E \to A$. Básicamente, A^E lo podemos representar como

$$\begin{tikzcd}
e_0 \arrow[loop above, "e_{0_{e_0}}"] \arrow[r, bend left, "\varphi_1"] \arrow[d, bend left, "\eta_{e_0}"] & e_1 \arrow[loop above, "e_{1_{e_1}}"] \arrow[l, bend left, "\varphi_1^{-1}"] \arrow[r, bend left, "\varphi_2"] \arrow[d, bend left, "\eta_{e_1}"] & e_2 \arrow[loop above, "e_{2_{e_2}}"] \arrow[l, bend left, "\varphi_2^{-1}"] \arrow[r, bend left, "\varphi_3"] \arrow[d, bend left, "\eta_{e_2}"] & e_3 \arrow[loop above, "e_{3_{e_3}}"] \arrow[l, bend left, "\varphi_3^{-1}"] \arrow[r, bend left, "\varphi_4"] \arrow[d, bend left, "\eta_{e_3}"] & \cdots \arrow[l, bend left, "\varphi_4^{-1}"] \\
0 \arrow[loop below, "e_{0_1}"] \arrow[u, bend left, "\epsilon_{e_0}"] \arrow[r, bend left, "f_1"] & 1 \arrow[loop below, "e_{1_1}"] \arrow[u, bend left, "\epsilon_{e_1}"] \arrow[l, bend left, "f_1^{-1}"] \arrow[r, bend left, "f_2"] & 2 \arrow[loop below, "e_{2_1}"] \arrow[u, bend left, "\epsilon_{e_2}"] \arrow[l, bend left, "f_2^{-1}"] \arrow[r, bend left, "f_3"] & 3 \arrow[loop below, "e_{3_1}"] \arrow[u, bend left, "\epsilon_{e_3}"] \arrow[l, bend left, "f_3^{-1}"] \arrow[r, bend left, "f_4"] & \cdots \arrow[l, bend left, "f_4^{-1}"]
\end{tikzcd}$$

(en el diagrama faltan los morfismos

$$f_{i+1}e_{i_1} : i \to i+1 \quad \text{y} \quad e_{i_1} f_{i+1}^{-1} : i+1 \to i$$

para $i = 0, 1, 2, \ldots$, a los cuales también los podemos llamar g_i y g'_i, respectivamente). Definamos

$$F(\epsilon_{e_i}) := g_{i+1}, \quad F(\eta_{e_i}) := g'_{i+1}, \quad F(f_i) := f_i, \quad F(1_i) := 1_i$$

y

$$F(\varphi_{i+1}) := f_{i+2}, \quad F(\varphi_{i+1}^{-1}) := f_{i+2}^{-1},$$

donde $\varphi_{i+1} := (e_i, f_{i+1}, e_{i+1})$ y $\varphi_{i+1}^{-1} := (e_{i+1}, f_{i+1}^{-1}, e_i)$. El mapeo F lo podemos extender sobre las demás flechas de manera que sea funtor. En efecto, la categoría A^E es generada por las flechas $\epsilon_{e_i}, \eta_{e_i}, \varphi_{i+1}, \varphi_{i+1}^{-1}, f_{i+1}, 1_i$ para $i = 0, 1, 2, \ldots$ Tenemos que

$$F(e_{i_1}) = e_i, \quad F(g_{i+1}) = g_{i+1}, \quad F(f_{i+1}^{-1}) = f_{i+1}^{-1}, \quad F(e_{i_{1_{e_{i_1}}}}) = e_{i+1}$$

y $F(e_i) = i+1$ para $i = 0, 1, 2, \ldots$ Claramente, $FdA = 1_A$.

Ahora definamos $\alpha : FF^E \Rightarrow Fm_A$ seudoálgebra normal de $(-)^E$. Como los únicos idempotentes de A son los e_i para $i = 0, 1, 2, \ldots$, los únicos pares de idempotentes de A que conmutan entre sí son

$$(e_i, e_i, e_i), (e_i, 1_i, e_i), (1_i, e_i, 1_i), (1_i, 1_i, 1_i) \in (A^E)^E \tag{6.20}$$

para $i = 0, 1, 2, \ldots$; así que sólo necesitamos definir a α sobre estos pares. Definimos

$$\alpha_{(e_i,1_i,e_i)} := 1_{i+1} =: \alpha_{(1_i,e_i,1_i)}, \quad \alpha_{(1_i,1_i,1_i)} := 1_i$$

y

$$\alpha_{(e_i,e_i,e_i)} := f_{i+2}^{-1} : i+2 \to i+1$$

para $i = 0, 1, 2, \ldots$ La colección de flechas α conforman un isomorfismo natural $FF^E \Rightarrow Fm_A$. En efecto, consideremos todas las flechas en $(A^E)^E$ entre los pares de idempotentes (6.20). Tenemos entonces

$$\begin{tikzcd} e_i \arrow[r, "{(e_i,1_i,e_i)}"] \arrow[d, "{(e_i,e_i,e_i)}"'] & e_i \arrow[d, "{(e_i,e_i,e_i)}"] \\ e_i \arrow[r, "{(e_i,1_i,e_i)}"'] & e_i \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} e_i \arrow[r, "{(e_i,e_i,e_i)}"] \arrow[d, "{(e_i,e_i,e_i)}"'] & e_i \arrow[d, "{(e_i,e_i,e_i)}"] \\ e_i \arrow[r, "{(e_i,e_i,e_i)}"'] & e_i \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} e_i \arrow[r, "{(e_i,e_i,e_i)}"] \arrow[d, "{(e_i,e_i,e_i)}"'] & e_i \arrow[d, "{(e_i,1_i,e_i)}"] \\ e_i \arrow[r, "{(e_i,e_i,e_i)}"'] & e_i \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} e_i \arrow[r, "{(e_i,e_i,e_i)}"] \arrow[d, "{(e_i,1_i,e_i)}"'] & e_i \arrow[d, "{(e_i,e_i,e_i)}"] \\ e_i \arrow[r, "{(e_i,e_i,e_i)}"'] & e_i \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} e_i \arrow[r, "{(e_i,e_i,1_i)}"] \arrow[d, "{(e_i,e_i,e_i)}"'] & 1_i \arrow[d, "{(1_i,e_i,1_i)}"] \\ e_i \arrow[r, "{(e_i,e_i,1_i)}"'] & 1_i \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} 1_i \arrow[r, "{(1_i,e_i,e_i)}"] \arrow[d, "{(1_i,e_i,1_i)}"'] & e_i \arrow[d, "{(e_i,e_i,e_i)}"] \\ 1_i \arrow[r, "{(1_i,e_i,e_i)}"'] & e_i \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} e_i \arrow[r, "{(e_i,e_i,1_i)}"] \arrow[d, "{(e_i,e_i,e_i)}"'] & 1_i \arrow[d, "{(1_i,1_i,1_i)}"] \\ e_i \arrow[r, "{(e_i,e_i,1_i)}"'] & 1_i \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} 1_i \arrow[r, "{(1_i,e_i,e_i)}"] \arrow[d, "{(1_i,1_i,1_i)}"'] & e_i \arrow[d, "{(e_i,e_i,e_i)}"] \\ 1_i \arrow[r, "{(1_i,e_i,e_i)}"'] & e_i \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} e_i \arrow[r, "{(e_i,1_i,e_i)}"] \arrow[d, "{(e_i,1_i,e_i)}"'] & e_i \arrow[d, "{(e_i,1_i,e_i)}"] \\ e_i \arrow[r, "{(e_i,1_i,e_i)}"'] & e_i \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} e_i \arrow[r, "{(e_i,e_i,e_i)}"] \arrow[d, "{(e_i,1_i,e_i)}"'] & e_i \arrow[d, "{(e_i,1_i,e_i)}"] \\ e_i \arrow[r, "{(e_i,e_i,e_i)}"'] & e_i \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} e_i \arrow[r, "{(e_i,e_i,1_i)}"] \arrow[d, "{(e_i,1_i,e_i)}"'] & 1_i \arrow[d, "{(1_i,e_i,1_i)}"] \\ e_i \arrow[r, "{(e_i,e_i,1_i)}"'] & 1_i \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} 1_i \arrow[r, "{(1_i,e_i,e_i)}"] \arrow[d, "{(1_i,e_i,1_i)}"'] & e_i \arrow[d, "{(e_i,1_i,e_i)}"] \\ 1_i \arrow[r, "{(1_i,e_i,e_i)}"'] & e_i \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} e_i \arrow[r, "{(e_i,e_i,1_i)}"] \arrow[d, "{(e_i,1_i,e_i)}"'] & 1_i \arrow[d, "{(1_i,1_i,1_i)}"] \\ e_i \arrow[r, "{(e_i,e_i,1_i)}"'] & 1_i \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} 1_i \arrow[r, "{(1_i,e_i,e_i)}"] \arrow[d, "{(1_i,1_i,1_i)}"'] & e_i \arrow[d, "{(e_i,1_i,e_i)}"] \\ 1_i \arrow[r, "{(1_i,e_i,e_i)}"'] & e_i \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} 1_i \arrow[r, "{(1_i,1_i,1_i)}"] \arrow[d, "{(1_i,e_i,1_i)}"'] & 1_i \arrow[d, "{(1_i,e_i,1_i)}"] \\ 1_i \arrow[r, "{(1_i,1_i,1_i)}"'] & 1_i \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} 1_i \arrow[r, "{(1_i,e_i,1_i)}"] \arrow[d, "{(1_i,e_i,1_i)}"'] & 1_i \arrow[d, "{(1_i,e_i,1_i)}"] \\ 1_i \arrow[r, "{(1_i,e_i,1_i)}"'] & 1_i \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} 1_i \arrow[r, "{(1_i,e_i,1_i)}"] \arrow[d, "{(1_i,e_i,1_i)}"'] & 1_i \arrow[d, "{(1_i,1_i,1_i)}"] \\ 1_i \arrow[r, "{(1_i,e_i,1_i)}"'] & 1_i \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} 1_i \arrow[r, "{(1_i,e_i,1_i)}"] \arrow[d, "{(1_i,1_i,1_i)}"'] & 1_i \arrow[d, "{(1_i,e_i,1_i)}"] \\ 1_i \arrow[r, "{(1_i,e_i,1_i)}"'] & 1_i \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} 1_i \arrow[r, "{(1_i,1_i,1_i)}"] \arrow[d, "{(1_i,1_i,1_i)}"'] & 1_i \arrow[d, "{(1_i,1_i,1_i)}"] \\ 1_i \arrow[r, "{(1_i,1_i,1_i)}"'] & 1_i \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} 1_i \arrow[r, "{(1_i,e_i,1_i)}"] \arrow[d, "{(1_i,1_i,1_i)}"'] & 1_i \arrow[d, "{(1_i,1_i,1_i)}"] \\ 1_i \arrow[r, "{(1_i,e_i,1_i)}"'] & 1_i \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} e_i \arrow[r, "{(e_i,f_{i+1},e_{i+1})}"] \arrow[d, "{(e_i,e_i,e_i)}"'] & e_{i+1} \arrow[d, "{(e_{i+1},e_{i+1},e_{i+1})}"] \\ e_i \arrow[r, "{(e_i,f_{i+1},e_{i+1})}"'] & e_{i+1} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} e_i \arrow[r, "{(e_i,g_{i+1},e_{i+1})}"] \arrow[d, "{(e_i,e_i,e_i)}"'] & e_{i+1} \arrow[d, "{(e_{i+1},e_{i+1},e_{i+1})}"] \\ e_i \arrow[r, "{(e_i,g_{i+1},e_{i+1})}"'] & e_{i+1} \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} e_{i+1} \arrow[r, "{(e_{i+1},f_{i+1}^{-1},e_i)}"] \arrow[d, "{(e_{i+1},e_{i+1},e_{i+1})}"'] & e_i \arrow[d, "{(e_i,e_i,e_i)}"] \\ e_{i+1} \arrow[r, "{(e_{i+1},f_{i+1}^{-1},e_i)}"'] & e_i \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} e_{i+1} \arrow[r, "{(e_{i+1},g'_{i+1},e_i)}"] \arrow[d, "{(e_{i+1},e_{i+1},e_{i+1})}"'] & e_i \arrow[d, "{(e_i,e_i,e_i)}"] \\ e_{i+1} \arrow[r, "{(e_{i+1},g'_{i+1},e_i)}"'] & e_i \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} e_i \arrow[r, "{(e_i,g_{i+1},e_{i+1})}"] \arrow[d, "{(e_i,e_i,e_i)}"'] & e_{i+1} \arrow[d, "{(e_{i+1},1_{i+1},e_{i+1})}"] \\ e_i \arrow[r, "{(e_i,g_{i+1},e_{i+1})}"'] & e_{i+1} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} e_{i+1} \arrow[r, "{(e_{i+1},g'_{i+1},e_i)}"] \arrow[d, "{(e_{i+1},1_{i+1},e_{i+1})}"'] & e_i \arrow[d, "{(e_i,e_i,e_i)}"] \\ e_{i+1} \arrow[r, "{(e_{i+1},g'_{i+1},e_i)}"'] & e_i \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} e_i \arrow[r, "{(e_i,g_{i+1},1_{i+1})}"] \arrow[d, "{(e_i,e_i,e_i)}"'] & 1_{i+1} \arrow[d, "{(1_{i+1},e_{i+1},1_{i+1})}"] \\ e_i \arrow[r, "{(e_i,g_{i+1},1_{i+1})}"'] & 1_{i+1} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} 1_{i+1} \arrow[r, "{(1_{i+1},g'_{i+1},e_i)}"] \arrow[d, "{(1_{i+1},e_{i+1},1_{i+1})}"'] & e_i \arrow[d, "{(e_i,e_i,e_i)}"] \\ 1_{i+1} \arrow[r, "{(1_{i+1},g'_{i+1},e_i)}"'] & e_i \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} e_i \arrow[r, "{(e_i,g_{i+1},1_{i+1})}"] \arrow[d, "{(e_i,e_i,e_i)}"'] & 1_{i+1} \arrow[d, "{(1_{i+1},1_{i+1},1_{i+1})}"] \\ e_i \arrow[r, "{(e_i,g_{i+1},1_{i+1})}"'] & 1_{i+1} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} 1_{i+1} \arrow[r, "{(1_{i+1},g'_{i+1},e_i)}"] \arrow[d, "{(1_{i+1},1_{i+1},1_{i+1})}"'] & e_i \arrow[d, "{(e_i,e_i,e_i)}"] \\ 1_{i+1} \arrow[r, "{(1_{i+1},g'_{i+1},e_i)}"'] & e_i \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} e_i \arrow[r, "{(e_i,f_{i+1},e_{i+1})}"] \arrow[d, "{(e_i,1_i,e_i)}"'] & e_{i+1} \arrow[d, "{(e_{i+1},1_{i+1},e_{i+1})}"] \\ e_i \arrow[r, "{(e_i,f_{i+1},e_{i+1})}"'] & e_{i+1} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} e_i \arrow[r, "{(e_i,g_{i+1},e_i)}"] \arrow[d, "{(e_i,1_i,e_i)}"'] & e_{i+1} \arrow[d, "{(e_{i+1},1_{i+1},e_{i+1})}"] \\ e_i \arrow[r, "{(e_i,g_{i+1},e_{i+1})}"'] & e_{i+1} \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} e_{i+1} \arrow[r, "{(e_{i+1},f^{-1}_{i+1},e_i)}"] \arrow[d, "{(e_{i+1},1_{i+1},e_{i+1})}"'] & e_i \arrow[d, "{(e_i,1_i,e_i)}"] \\ e_{i+1} \arrow[r, "{(e_{i+1},f^{-1}_{i+1},e_i)}"'] & e_i \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} e_{i+1} \arrow[r, "{(e_{i+1},g'_{i+1},e_i)}"] \arrow[d, "{(e_{i+1},1_{i+1},e_{i+1})}"'] & e_i \arrow[d, "{(e_i,1_i,e_i)}"] \\ e_{i+1} \arrow[r, "{(e_{i+1},g'_{i+1},e_i)}"'] & e_i \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} e_i \arrow[r, "{(e_i,g_{i+1},1_{i+1})}"] \arrow[d, "{(e_i,1_i,e_i)}"'] & 1_{i+1} \arrow[d, "{(1_{i+1},e_{i+1},1_{i+1})}"] \\ e_i \arrow[r, "{(e_i,g_{i+1},1_{i+1})}"'] & 1_{i+1} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} 1_{i+1} \arrow[r, "{(1_{i+1},g'_{i+1},e_i)}"] \arrow[d, "{(1_{i+1},e_{i+1},1_{i+1})}"'] & e_i \arrow[d, "{(e_i,1_i,e_i)}"] \\ 1_{i+1} \arrow[r, "{(1_{i+1},g'_{i+1},e_i)}"'] & e_i \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} e_i \arrow[r, "{(e_i,g_{i+1},1_{i+1})}"] \arrow[d, "{(e_i,1_i,e_i)}"'] & 1_{i+1} \arrow[d, "{(1_{i+1},1_{i+1},1_{i+1})}"] \\ e_i \arrow[r, "{(e_i,g_{i+1},1_{i+1})}"'] & 1_{i+1} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} 1_{i+1} \arrow[r, "{(1_{i+1},g'_{i+1},e_i)}"] \arrow[d, "{(1_{i+1},1_{i+1},1_{i+1})}"'] & e_i \arrow[d, "{(e_i,1_i,e_i)}"] \\ 1_{i+1} \arrow[r, "{(1_{i+1},g'_{i+1},e_i)}"'] & e_i \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} 1_i \arrow[r, "{(1_i,f_{i+1},1_{i+1})}"] \arrow[d, "{(1_i,e_i,1_i)}"'] & 1_{i+1} \arrow[d, "{(1_{i+1},e_{i+1},1_{i+1})}"] \\ 1_i \arrow[r, "{(1_i,f_{i+1},1_{i+1})}"'] & 1_{i+1} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} 1_i \arrow[r, "{(1_i,g_{i+1},1_{i+1})}"] \arrow[d, "{(1_i,e_i,1_i)}"'] & 1_{i+1} \arrow[d, "{(1_{i+1},e_{i+1},1_{i+1})}"] \\ 1_i \arrow[r, "{(1_i,g_{i+1},1_{i+1})}"'] & 1_{i+1} \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} 1_{i+1} \arrow[r, "{(1_{i+1},f^{-1}_{i+1},1_i)}"] \arrow[d, "{(1_{i+1},e_{i+1},1_{i+1})}"'] & 1_i \arrow[d, "{(1_i,e_i,1_i)}"] \\ 1_{i+1} \arrow[r, "{(1_{i+1},f^{-1}_{i+1},1_i)}"'] & 1_i \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} 1_{i+1} \arrow[r, "{(1_{i+1},g'_{i+1},1_i)}"] \arrow[d, "{(1_{i+1},e_{i+1},1_{i+1})}"'] & 1_i \arrow[d, "{(1_i,e_i,1_i)}"] \\ 1_{i+1} \arrow[r, "{(1_{i+1},g'_{i+1},1_i)}"'] & 1_i \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} 1_i \arrow[r, "{(1_i,g_{i+1},1_{i+1})}"] \arrow[d, "{(1_i,e_i,1_i)}"'] & 1_{i+1} \arrow[d, "{(1_{i+1},1_{i+1},1_{i+1})}"] \\ 1_i \arrow[r, "{(1_i,g_{i+1},1_{i+1})}"'] & 1_{i+1} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} 1_{i+1} \arrow[r, "{(1_{i+1},g'_{i+1},1_i)}"] \arrow[d, "{(1_{i+1},1_{i+1},1_{i+1})}"'] & 1_i \arrow[d, "{(1_i,e_i,1_i)}"] \\ 1_{i+1} \arrow[r, "{(1_{i+1},g'_{i+1},1_i)}"'] & 1_i \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} 1_i \arrow[r, "{(1_i,f_{i+1},1_{i+1})}"] \arrow[d, "{(1_i,1_i,1_i)}"'] & 1_{i+1} \arrow[d, "{(1_{i+1},1_{i+1},1_{i+1})}"] \\ 1_i \arrow[r, "{(1_i,f_{i+1},1_{i+1})}"'] & 1_{i+1} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} 1_i \arrow[r, "{(1_i,g_{i+1},1_{i+1})}"] \arrow[d, "{(1_i,1_i,1_i)}"'] & 1_{i+1} \arrow[d, "{(1_{i+1},1_{i+1},1_{i+1})}"] \\ 1_i \arrow[r, "{(1_i,g_{i+1},1_{i+1})}"'] & 1_{i+1} \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} 1_{i+1} \arrow[r, "{(1_{i+1},f^{-1}_{i+1},1_i)}"] \arrow[d, "{(1_{i+1},1_{i+1},1_{i+1})}"'] & 1_i \arrow[d, "{(1_i,1_i,1_i)}"] \\ 1_{i+1} \arrow[r, "{(1_{i+1},f^{-1}_{i+1},1_i)}"'] & 1_i \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} 1_{i+1} \arrow[r, "{(1_{i+1},g'_{i+1},1_i)}"] \arrow[d, "{(1_{i+1},1_{i+1},1_{i+1})}"'] & 1_i \arrow[d, "{(1_i,1_i,1_i)}"] \\ 1_{i+1} \arrow[r, "{(1_{i+1},g'_{i+1},1_i)}"'] & 1_i \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} e_i \arrow[r, "{(e_i,g_{i+1},e_{i+1})}"] \arrow[d, "{(e_i,1_i,e_i)}"'] & e_{i+1} \arrow[d, "{(e_{i+1},e_{i+1},e_{i+1})}"] \\ e_i \arrow[r, "{(e_i,g_{i+1},e_{i+1})}"'] & e_{i+1} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} e_{i+1} \arrow[r, "{(e_{i+1},g'_{i+1},e_i)}"] \arrow[d, "{(e_{i+1},e_{i+1},e_{i+1})}"'] & e_i \arrow[d, "{(e_i,1_i,e_i)}"] \\ e_{i+1} \arrow[r, "{(e_{i+1},g'_{i+1},e_i)}"'] & e_i \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} 1_i \arrow[r, "{(1_i,g_{i+1},e_{i+1})}"] \arrow[d, "{(1_i,e_i,1_i)}"'] & e_{i+1} \arrow[d, "{(e_{i+1},e_{i+1},e_{i+1})}"] \\ 1_i \arrow[r, "{(1_i,g_{i+1},e_{i+1})}"'] & e_{i+1} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} e_{i+1} \arrow[r, "{(e_{i+1},g'_{i+1},1_i)}"] \arrow[d, "{(e_{i+1},e_{i+1},e_{i+1})}"'] & 1_i \arrow[d, "{(1_i,e_i,1_i)}"] \\ e_{i+1} \arrow[r, "{(e_{i+1},g'_{i+1},1_i)}"'] & 1_i \end{tikzcd}$$

$$
\begin{tikzcd}
1_i \arrow[r, "{(1_i,g_{i+1},e_{i+1})}"] \arrow[d, "{(1_i,e_i,1_i)}"'] & e_{i+1} \arrow[d, "{(e_{i+1},1_{i+1},e_{i+1})}"] & & e_{i+1} \arrow[r, "{(e_{i+1},g'_{i+1},1_i)}"] \arrow[d, "{(e_{i+1},1_{i+1},e_{i+1})}"'] & 1_i \arrow[d, "{(1_i,e_i,1_i)}"] \\
1_i \arrow[r, "{(1_i,g_{i+1},e_{i+1})}"'] & e_{i+1} & & e_{i+1} \arrow[r, "{(e_{i+1},g'_{i+1},1_i)}"'] & 1_i
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
1_i \arrow[r, "{(1_i,g_{i+1},e_{i+1})}"] \arrow[d, "{(1_i,1_i,1_i)}"'] & e_{i+1} \arrow[d, "{(e_{i+1},e_{i+1},e_{i+1})}"] & & e_{i+1} \arrow[r, "{(e_{i+1},g'_{i+1},1_i)}"] \arrow[d, "{(e_{i+1},e_{i+1},e_{i+1})}"'] & 1_i \arrow[d, "{(1_i,1_i,1_i)}"] \\
1_i \arrow[r, "{(1_i,g_{i+1},e_{i+1})}"'] & e_{i+1} & & e_{i+1} \arrow[r, "{(e_{i+1},g'_{i+1},1_i)}"'] & 1_i
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
1_i \arrow[r, "{(1_i,g_{i+1},e_{i+1})}"] \arrow[d, "{(1_i,1_i,1_i)}"'] & e_{i+1} \arrow[d, "{(e_{i+1},1_{i+1},e_{i+1})}"] & & e_{i+1} \arrow[r, "{(e_{i+1},g'_{i+1},1_i)}"] \arrow[d, "{(e_{i+1},1_{i+1},e_{i+1})}"'] & 1_i \arrow[d, "{(1_i,1_i,1_i)}"] \\
1_i \arrow[r, "{(1_i,g_{i+1},e_{i+1})}"'] & e_{i+1} & & e_{i+1} \arrow[r, "{(e_{i+1},g'_{i+1},1_i)}"'] & 1_i
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
1_i \arrow[r, "{(1_i,g_{i+1},1_{i+1})}"] \arrow[d, "{(1_i,1_i,1_i)}"'] & 1_{i+1} \arrow[d, "{(1_{i+1},e_{i+1},1_{i+1})}"] & & 1_{i+1} \arrow[r, "{(1_{i+1},g'_{i+1},1_i)}"] \arrow[d, "{(1_{i+1},e_{i+1},1_{i+1})}"'] & 1_i \arrow[d, "{(1_i,1_i,1_i)}"] \\
1_i \arrow[r, "{(1_i,g_{i+1},1_{i+1})}"'] & 1_{i+1} & & 1_{i+1} \arrow[r, "{(1_{i+1},g'_{i+1},1_i)}"'] & 1_i
\end{tikzcd}
.
$$

Antes de seguir, recordemos que

$$
F(e_i,e_i,e_i)=e_{i+1}, \quad F(e_i,1_i,e_i)=1_{i+1}, \quad F(1_i,e_i,1_i)=e_i,
$$

$$
F(1_i,e_i,e_i)=g_{i+1}, \quad F(e_i,e_i,1_i)=g'_{i+1}, \quad F(1_i,1_i,1_i)=1_i.
$$

Por otro lado, notemos que

$$
\begin{tikzcd}
i+1 \arrow[r, "g'_{i+1}"] \arrow[d, "e_{i+1}"'] & i \arrow[d, "e_i"] \\
i+1 \arrow[r, "g'_{i+1}"'] & i
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
i+1 \arrow[r, "e_{i+1}"] \arrow[d, "e_{i+1}"] & i+1 \arrow[r, "f_{i+1}^{-1}"] \arrow[d, "1_{i+1}"] & i \arrow[r, "e_i"] \arrow[d, "1_i"] & i \arrow[d, "e_i"] \\
i+1 \arrow[r, "e_{i+1}"'] & i+1 \arrow[r, "f_{i+1}^{-1}"'] & i \arrow[r, "e_i"'] & i
\end{tikzcd}
,
$$

$$
\begin{tikzcd}
i \arrow[r, "g_{i+1}"] \arrow[d, "e_i"'] & i+1 \arrow[d, "e_{i+1}"'] \\
i \arrow[r, "g_{i+1}"'] & i+1
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
i \arrow[r, "e_i"] \arrow[d, "e_i"'] & i \arrow[r, "f_{i+1}"] \arrow[d, "1_i"] & i+1 \arrow[r, "e_{i+1}"] \arrow[d, "1_{i+1}"] & i+1 \arrow[d, "e_{i+1}"] \\
i \arrow[r, "e_i"'] & i \arrow[r, "f_{i+1}"'] & i+1 \arrow[r, "e_{i+1}"'] & i+1
\end{tikzcd}
,
$$

$$\begin{tikzcd} i+1 \arrow[r, "g'_{i+1}"] \arrow[d, "e_{i+1}"'] & i \arrow[d, "1_i"] \\ i+1 \arrow[r, "g'_{i+1}"'] & i \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} i+1 \arrow[r, "e_{i+1}"] \arrow[d, "e_{i+1}"] & i+1 \arrow[r, "f_{i+1}^{-1}"] \arrow[d, "1_{i+1}"] & i \arrow[d, "1_i"] \\ i+1 \arrow[r, "e_{i+1}"'] & i+1 \arrow[r, "f_{i+1}^{-1}"'] & i \end{tikzcd} \quad ,$$

$$\begin{tikzcd} i \arrow[r, "g_{i+1}"] \arrow[d, "1_i"'] & i+1 \arrow[d, "e_{i+1}"'] \\ i \arrow[r, "g_{i+1}"'] & i+1 \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} i \arrow[r, "f_{i+1}"] \arrow[d, "1_i"] & i+1 \arrow[r, "e_{i+1}"] \arrow[d, "1_{i+1}"] & i+1 \arrow[d, "e_{i+1}"] \\ i \arrow[r, "f_{i+1}"'] & i+1 \arrow[r, "e_{i+1}"'] & i+1 \end{tikzcd} \quad ,$$

$$\begin{tikzcd} i+1 \arrow[r, "g'_{i+1}"] \arrow[d, "1_{i+1}"'] & i \arrow[d, "e_i"] \\ i+1 \arrow[r, "g'_{i+1}"'] & i \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} i+1 \arrow[r, "f_{i+1}^{-1}"] \arrow[d, "1_{i+1}"] & i \arrow[r, "e_i"] \arrow[d, "1_i"] & i \arrow[d, "e_i"] \\ i+1 \arrow[r, "f_{i+1}^{-1}"'] & i \arrow[r, "e_i"'] & i \end{tikzcd} \quad ,$$

$$\begin{tikzcd} i \arrow[r, "g_{i+1}"] \arrow[d, "e_i"'] & i+1 \arrow[d, "1_{i+1}"'] \\ i \arrow[r, "g_{i+1}"'] & i+1 \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} i \arrow[r, "e_i"] \arrow[d, "e_i"'] & i \arrow[r, "f_{i+1}"] \arrow[d, "1_i"] & i+1 \arrow[d, "1_{i+1}"] \\ i \arrow[r, "e_i"'] & i \arrow[r, "f_{i+1}"'] & i+1 \end{tikzcd} \quad ;$$

de aquí,

$$\begin{aligned} F(e_{i+1}, g'_{i+1}, e_i) &= g'_{i+2}, & F(e_i, g_{i+1}, e_{i+1}) &= g_{i+2}, \\ F(e_{i+1}, g'_{i+1}, 1_i) &= g'_{i+1} f_{i+2}^{-1}, & F(1_i, g_{i+1}, e_{i+1}) &= f_{i+2} g_{i+1}, \\ F(1_{i+1}, g'_{i+1}, e_i) &= e_{i+1}, & F(e_i, g_{i+1}, 1_{i+1}) &= e_{i+1}, \\ F(e_i, f_{i+2} g_{i+1}, e_{i+2}) &= f_{i+3} g_{i+2}, & F(e_{i+2}, g'_{i+1} f_{i+2}^{-1}, e_i) &= g'_{i+2} f_{i+3}^{-1}, \\ F(e_i, f_{i+2} g_{i+1}, 1_{i+2}) &= g_{i+2}, & F(1_{i+2}, g'_{i+1} f_{i+2}^{-1}, e_i) &= g'_{i+2}, \\ F(1_i, f_{i+2} g_{i+1}, e_{i+2}) &= f_{i+3} f_{i+2} g_{i+1}, & F(e_{i+2}, g'_{i+1} f_{i+2}^{-1}, 1_i) &= g'_{i+1} f_{i+2}^{-1} f_{i+3}^{-1}. \end{aligned}$$

Considerando todas las flechas entre los pares de idempotentes (6.20) y los α para cada caso, se tienen los siguientes diagramas conmutativos, los cuales corresponden a cada flecha, respectivamente, en la lista anterior:

$$\begin{tikzcd} i+2 \arrow[r, "f_{i+2}^{-1}"] \arrow[d, "1_{i+2}"'] & i+1 \arrow[d, "1_{i+1}"] \\ i+2 \arrow[r, "f_{i+2}^{-1}"'] & i+1 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} i+2 \arrow[r, "f_{i+2}^{-1}"] \arrow[d, "e_{i+2}"'] & i+1 \arrow[d, "e_{i+1}"] \\ i+2 \arrow[r, "f_{i+2}^{-1}"'] & i+1 \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} i+2 \arrow[r, "f_{i+2}^{-1}"] \arrow[d, "g'_{i+2}"'] & i+1 \arrow[d, "e_{i+1}"] \\ i+1 \arrow[r, "1_{i+1}"'] & i+1 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} i+1 \arrow[r, "1_{i+1}"] \arrow[d, "g_{i+2}"'] & i+1 \arrow[d, "e_{i+1}"] \\ i+2 \arrow[r, "f_{i+2}^{-1}"'] & i+1 \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} i+2 \arrow[r, "f_{i+2}^{-1}"] \arrow[d, "g'_{i+2}"'] & i+1 \arrow[d, "e_{i+1}"] \\ i+1 \arrow[r, "1_{i+1}"'] & i+1 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} i+1 \arrow[r, "1_{i+1}"] \arrow[d, "g_{i+2}"'] & i+1 \arrow[d, "e_{i+1}"] \\ i+2 \arrow[r, "f_{i+2}^{-1}"'] & i+1 \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} i+2 \arrow[r, "f_{i+2}^{-1}"] \arrow[d, "g'_{i+1}f_{i+2}^{-1}"'] & i+1 \arrow[d, "g'_{i+1}"] \\ i \arrow[r, "1_i"'] & i \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} i \arrow[r, "1_i"] \arrow[d, "f_{i+2}g_{i+1}"'] & i \arrow[d, "g_{i+1}"] \\ i+2 \arrow[r, "f_{i+2}^{-1}"'] & i+1 \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} i+1 \arrow[r, "1_{i+1}"] \arrow[d, "1_{i+1}"'] & i+1 \arrow[d, "1_{i+1}"] \\ i+1 \arrow[r, "1_{i+1}"'] & i+1 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} i+1 \arrow[r, "1_{i+1}"] \arrow[d, "e_{i+1}"'] & i+1 \arrow[d, "e_{i+1}"] \\ i+1 \arrow[r, "1_{i+1}"'] & i+1 \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} i+1 \arrow[r, "1_{i+1}"] \arrow[d, "e_{i+1}"'] & i+1 \arrow[d, "e_{i+1}"] \\ i+1 \arrow[r, "1_{i+1}"'] & i+1 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} i+1 \arrow[r, "1_{i+1}"] \arrow[d, "e_{i+1}"'] & i+1 \arrow[d, "e_{i+1}"] \\ i+1 \arrow[r, "1_{i+1}"'] & i+1 \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} i+1 \arrow[r, "1_{i+1}"] \arrow[d, "g'_{i+1}"'] & i+1 \arrow[d, "g'_{i+1}"] \\ i \arrow[r, "1_i"'] & i \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} i \arrow[r, "1_i"] \arrow[d, "g_{i+1}"'] & i \arrow[d, "g_{i+1}"] \\ i+1 \arrow[r, "1_{i+1}"'] & i+1 \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} i+1 \arrow[r, "1_{i+1}"] \arrow[d, "1_{i+1}"'] & i+1 \arrow[d, "1_{i+1}"] \\ i+1 \arrow[r, "1_{i+1}"'] & i+1 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} i+1 \arrow[r, "1_{i+1}"] \arrow[d, "e_{i+1}"'] & i+1 \arrow[d, "e_{i+1}"] \\ i+1 \arrow[r, "1_{i+1}"'] & i+1 \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} i+1 \arrow[r, "1_{i+1}"] \arrow[d, "g'_{i+1}"'] & i+1 \arrow[d, "g'_{i+1}"] \\ i \arrow[r, "1_i"'] & i \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} i \arrow[r, "1_i"] \arrow[d, "g_{i+1}"'] & i \arrow[d, "g_{i+1}"] \\ i+1 \arrow[r, "1_{i+1}"'] & i+1 \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} i \arrow[r, "1_i"] \arrow[d, "1_i"'] & i \arrow[d, "1_i"] \\ i \arrow[r, "1_i"'] & i \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} i \arrow[r, "1_i"] \arrow[d, "e_i"'] & i \arrow[d, "e_i"] \\ i \arrow[r, "1_i"'] & i \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} i+2 \arrow[r, "f_{i+2}^{-1}"] \arrow[d, "f_{i+3}"'] & i+1 \arrow[d, "f_{i+2}"] \\ i+3 \arrow[r, "f_{i+3}^{-1}"'] & i+2 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} i+2 \arrow[r, "f_{i+2}^{-1}"] \arrow[d, "g_{i+3}"'] & i+1 \arrow[d, "g_{i+2}"] \\ i+3 \arrow[r, "f_{i+3}^{-1}"'] & i+2 \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} i+3 \arrow[r, "f_{i+3}^{-1}"] \arrow[d, "f_{i+3}^{-1}"'] & i+2 \arrow[d, "f_{i+2}^{-1}"] \\ i+2 \arrow[r, "f_{i+2}^{-1}"'] & i+1 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} i+3 \arrow[r, "f_{i+3}^{-1}"] \arrow[d, "g'_{i+3}"'] & i+2 \arrow[d, "g'_{i+2}"] \\ i+2 \arrow[r, "f_{i+2}^{-1}"'] & i+1 \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} i+2 \arrow[r, "f_{i+2}^{-1}"] \arrow[d, "e_{i+2}"'] & i+1 \arrow[d, "g_{i+2}"] \\ i+2 \arrow[r, "1_{i+2}"'] & i+2 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} i+2 \arrow[r, "1_{i+2}"] \arrow[d, "e_{i+2}"'] & i+2 \arrow[d, "g'_{i+2}"] \\ i+2 \arrow[r, "f_{i+2}^{-1}"'] & i+1 \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} i+2 \arrow[r, "f_{i+2}^{-1}"] \arrow[d, "e_{i+2}"'] & i+1 \arrow[d, "g_{i+2}"] \\ i+2 \arrow[r, "1_{i+2}"'] & i+2 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} i+2 \arrow[r, "1_{i+2}"] \arrow[d, "e_{i+2}"'] & i+2 \arrow[d, "g'_{i+2}"] \\ i+2 \arrow[r, "f_{i+2}^{-1}"'] & i+1 \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} i+2 \arrow[r, "f_{i+2}^{-1}"] \arrow[d, "g'_{i+2}"'] & i+1 \arrow[d, "e_{i+1}"] \\ i+1 \arrow[r, "1_{i+1}"'] & i+1 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} i+1 \arrow[r, "1_{i+1}"] \arrow[d, "g_{i+2}"'] & i+1 \arrow[d, "e_{i+1}"] \\ i+2 \arrow[r, "f_{i+2}^{-1}"'] & i+1 \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} i+1 \arrow[r, "1_{i+1}"] \arrow[d, "f_{i+2}"'] & i+1 \arrow[d, "f_{i+2}"] \\ i+2 \arrow[r, "1_{i+2}"'] & i+2 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} i+1 \arrow[r, "1_{i+1}"] \arrow[d, "g_{i+2}"'] & i+1 \arrow[d, "g_{i+2}"] \\ i+2 \arrow[r, "1_{i+2}"'] & i+2 \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} i+2 \arrow[r, "1_{i+2}"] \arrow[d, "f^{-1}_{i+2}"'] & i+2 \arrow[d, "f^{-1}_{i+2}"] \\ i+1 \arrow[r, "1_{i+1}"'] & i+1 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} i+2 \arrow[r, "1_{i+2}"] \arrow[d, "g'_{i+2}"'] & i+2 \arrow[d, "g'_{i+2}"] \\ i+1 \arrow[r, "1_{i+1}"'] & i+1 \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} i+1 \arrow[r, "1_{i+1}"] \arrow[d, "g_{i+2}"'] & i+1 \arrow[d, "g_{i+2}"] \\ i+2 \arrow[r, "1_{i+2}"'] & i+2 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} i+2 \arrow[r, "1_{i+2}"] \arrow[d, "g'_{i+2}"'] & i+2 \arrow[d, "g'_{i+2}"] \\ i+1 \arrow[r, "1_{i+1}"'] & i+1 \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} i+1 \arrow[r, "1_{i+1}"] \arrow[d, "e_{i+1}"'] & i+1 \arrow[d, "e_{i+1}"] \\ i+1 \arrow[r, "1_{i+1}"'] & i+1 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} i+1 \arrow[r, "1_{i+1}"] \arrow[d, "e_{i+1}"'] & i+1 \arrow[d, "e_{i+1}"] \\ i+1 \arrow[r, "1_{i+1}"'] & i+1 \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} i+1 \arrow[r, "1_{i+1}"] \arrow[d, "f_{i+2}"'] & i+1 \arrow[d, "f_{i+2}"] \\ i+2 \arrow[r, "1_{i+2}"'] & i+2 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} i+1 \arrow[r, "1_{i+1}"] \arrow[d, "g_{i+2}"'] & i+1 \arrow[d, "g_{i+2}"] \\ i+2 \arrow[r, "1_{i+2}"'] & i+2 \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} i+2 \arrow[r, "1_{i+2}"] \arrow[d, "f^{-1}_{i+2}"'] & i+2 \arrow[d, "f^{-1}_{i+2}"] \\ i+1 \arrow[r, "1_{i+1}"'] & i+1 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} i+2 \arrow[r, "1_{i+2}"] \arrow[d, "g'_{i+2}"'] & i+2 \arrow[d, "g'_{i+2}"] \\ i+1 \arrow[r, "1_{i+1}"'] & i+1 \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} i+1 \arrow[r, "1_{i+1}"] \arrow[d, "e_{i+1}"'] & i+1 \arrow[d, "e_{i+1}"] \\ i+1 \arrow[r, "1_{i+1}"'] & i+1 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} i+1 \arrow[r, "1_{i+1}"] \arrow[d, "e_{i+1}"'] & i+1 \arrow[d, "e_{i+1}"] \\ i+1 \arrow[r, "1_{i+1}"'] & i+1 \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} i \arrow[r, "1_{i}"] \arrow[d, "f_{i+1}"'] & i \arrow[d, "f_{i+1}"] \\ i+1 \arrow[r, "1_{i+1}"'] & i+1 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} i \arrow[r, "1_{i}"] \arrow[d, "g_{i+1}"'] & i \arrow[d, "g_{i+1}"] \\ i+1 \arrow[r, "1_{i+1}"'] & i+1 \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} i+1 \arrow[r, "1_{i+1}"] \arrow[d, "f_{i+1}^{-1}"'] & i+1 \arrow[d, "f_{i+1}^{-1}"] \\ i \arrow[r, "1_i"'] & i \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} i+1 \arrow[r, "1_{i+1}"] \arrow[d, "g'_{i+1}"'] & i+1 \arrow[d, "g'_{i+1}"] \\ i \arrow[r, "1_i"'] & i \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} i+1 \arrow[r, "1_{i+1}"] \arrow[d, "f_{i+3}g_{i+2}"'] & i+1 \arrow[d, "g_{i+2}"] \\ i+3 \arrow[r, "f_{i+3}^{-1}"'] & i+2 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} i+3 \arrow[r, "f_{i+3}^{-1}"] \arrow[d, "g'_{i+2}f_{i+3}^{-1}"'] & i+2 \arrow[d, "g'_{i+2}"] \\ i+1 \arrow[r, "1_{i+1}"'] & i+1 \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} i+1 \arrow[r, "1_{i+1}"] \arrow[d, "f_{i+3}g_{i+2}"'] & i+1 \arrow[d, "g_{i+2}"] \\ i+3 \arrow[r, "f_{i+3}^{-1}"'] & i+2 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} i+3 \arrow[r, "f_{i+3}^{-1}"] \arrow[d, "g'_{i+2}f_{i+3}^{-1}"'] & i+2 \arrow[d, "g'_{i+2}"] \\ i+1 \arrow[r, "1_{i+1}"'] & i+1 \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} i+1 \arrow[r, "1_{i+1}"] \arrow[d, "g_{i+2}"'] & i+1 \arrow[d, "g_{i+2}"] \\ i+2 \arrow[r, "1_{i+2}"'] & i+2 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} i+2 \arrow[r, "1_{i+2}"] \arrow[d, "g'_{i+2}"'] & i+2 \arrow[d, "g'_{i+2}"] \\ i+1 \arrow[r, "1_{i+1}"'] & i+1 \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} i \arrow[r, "1_i"] \arrow[d, "f_{i+3}f_{i+2}g_{i+1}"'] & i \arrow[d, "f_{i+2}g_{i+1}"] \\ i+3 \arrow[r, "f_{i+3}^{-1}"'] & i+2 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} i+3 \arrow[r, "f_{i+3}^{-1}"] \arrow[d, "g'_{i+1}f_{i+2}^{-1}f_{i+3}^{-1}"'] & i+2 \arrow[d, "g'_{i+1}f_{i+2}^{-1}"] \\ i \arrow[r, "1_i"'] & i \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} i \arrow[r, "1_i"] \arrow[d, "f_{i+2}g_{i+1}"'] & i \arrow[d, "f_{i+2}g_{i+1}"] \\ i+2 \arrow[r, "1_{i+2}"'] & i+2 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} i+2 \arrow[r, "1_{i+2}"] \arrow[d, "g'_{i+1}f_{i+2}^{-1}"'] & i+2 \arrow[d, "g'_{i+1}f_{i+2}^{-1}"] \\ i \arrow[r, "1_i"'] & i \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} i \arrow[r, "1_i"] \arrow[d, "f_{i+2}g_{i+1}"'] & i \arrow[d, "f_{i+2}g_{i+1}"] \\ i+2 \arrow[r, "1_{i+2}"'] & i+2 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} i+2 \arrow[r, "1_{i+2}"] \arrow[d, "g'_{i+1}f_{i+2}^{-1}"'] & i+2 \arrow[d, "g'_{i+1}f_{i+2}^{-1}"] \\ i \arrow[r, "1_i"'] & i \end{tikzcd} .$$

Veamos ahora que α es en efecto seudoálgebra normal, así que consideremos tripletas de idempotentes en A que conmuten entre sí; es decir, los objetos en $((A^E)^E)^E$, que son

$$(e_i, e_i, e_i, e_i, e_i), (e_i, e_i, 1_i, e_i, e_i), (e_i, 1_i, e_i, 1_i, e_i), (e_i, 1_i, 1_i, 1_i, e_i),$$

$$(1_i, e_i, e_i, e_i, 1_i), (1_i, e_i, 1_i, e_i, 1_i), (1_i, 1_i, e_i, 1_i, 1_i), (1_i, 1_i, 1_i, 1_i, 1_i).$$

Es claro que α es normal (véase (5.2) y (5.3)), porque así se definió. Sólo falta ver que se verifica (5.1); es decir, que se tiene

$$\alpha(m_A)^E \cdot F\alpha^E = \alpha m_{A^E} \cdot \alpha(F^E)^E$$

para los objetos de $((A^E)^E)^E$ anteriores. Simplemente evaluemos en α uno por uno. (Antes de seguir, notemos que, en general,

$$\alpha^E(f, g, h, g, f) = (FF^E(f, g, h, g, f), \alpha(f, g, f), Fm_A(f, g, h, g, f)),$$

que

$$m_{A^E}(f, g, h, g, f) = (f, gh, f)$$

y que

$$(m_A)^E(f, g, h, g, f) = (gf, h, gf)\ ).$$

Entonces, primero:

$$\begin{aligned}
\alpha(F^E)^E(e_i, e_i, e_i, e_i, e_i) &= \alpha(e_{i+1}, e_{i+1}, e_{i+1}) \\
&= f_{i+3}^{-1} \\
\alpha m_{A\ E}(e_i, e_i, e_i, e_i, e_i) &= \alpha(e_i, e_i, e_i) \\
&= f_{i+2}^{-1} \\
F\alpha^E(e_i, e_i, e_i, e_i, e_i) &= F(e_{i+2}, f_{i+2}^{-1}, e_{i+1}) \\
&= f_{i+3}^{-1} \\
\alpha m_{A^E}(e_i, e_i, e_i, e_i, e_i) &= \alpha(e_i, e_i, e_i) \\
&= f_{i+2}^{-1};
\end{aligned}$$

segundo:

$$\begin{aligned}
\alpha(F^E)^E(e_i, e_i, 1_i, e_i, e_i) &= \alpha(e_{i+1}, 1_{i+1}, e_{i+1}) \\
&= 1_{i+2} \\
\alpha m_{A^E}(e_i, e_i, 1_i, e_i, e_i) &= \alpha(e_i, e_i, e_i) \\
&= f_{i+2}^{-1} \\
F\alpha^E(e_i, e_i, 1_i, e_i, e_i) &= F(1_{i+2}, f_{i+2}^{-1}, 1_{i+1}) \\
&= f_{i+2}^{-1} \\
\alpha(m_A)^E(e_i, e_i, 1_i, e_i, e_i) &= \alpha(e_i, 1_i, e_i) \\
&= 1_{i+1};
\end{aligned}$$

tercero:

$$\begin{aligned}
\alpha(F^E)^E(e_i, 1_i, e_i, 1_i, e_i) &= \alpha(1_{i+1}, e_{i+1}, 1_{i+1}) \\
&= 1_{i+2} \\
\alpha m_{A^E}(e_i, 1_i, e_i, 1_i, e_i) &= \alpha(e_i, e_i, e_i) \\
&= f_{i+2}^{-1} \\
F\alpha^E(e_i, 1_i, e_i, 1_i, e_i) &= F(e_{i+1}, 1_{i+1}, e_{i+1}) \\
&= 1_{i+2} \\
\alpha(m_A)^E(e_i, 1_i, e_i, 1_i, e_i) &= \alpha(e_i, e_i, e_i) \\
&= f_{i+2}^{-1};
\end{aligned}$$

cuarto:

$$\begin{aligned}
\alpha(F^E)^E(e_i, 1_i, 1_i, 1_i, e_i) &= \alpha(1_{i+1}, 1_{i+1}, 1_{i+1}) \\
&= 1_{i+1} \\
\alpha m_{A^E}(e_i, 1_i, 1_i, 1_i, e_i) &= \alpha(e_i, 1_i, e_i) \\
&= 1_{i+1} \\
F\alpha^E(e_i, 1_i, 1_i, 1_i, e_i) &= F(1_{i+1}, 1_{i+1}, 1_{i+1}) \\
&= 1_{i+1} \\
\alpha(m_A)^E(e_i, 1_i, 1_i, 1_i, e_i) &= \alpha(e_i, 1_i, e_i) \\
&= 1_{i+1};
\end{aligned}$$

quinto:

$$\begin{aligned}
\alpha(F^E)^E(1_i, e_i, e_i, e_i, 1_i) &= \alpha(e_i, e_i, e_i)\\
&= f_{i+2}^{-1}\\
\alpha m_{A^E}(1_i, e_i, e_i, e_i, 1_i) &= \alpha(1_i, e_i, 1_i)\\
&= 1_{i+1}\\
F\alpha^E(1_i, e_i, e_i, e_i, 1_i) &= F(e_{i+1}, 1_{i+1}, e_{i+1})\\
&= 1_{i+2}\\
\alpha(m_A)^E(1_i, e_i, e_i, e_i, 1_i) &= \alpha(e_i, e_i, e_i)\\
&= f_{i+2}^{-1};
\end{aligned}$$

sexto:

$$\begin{aligned}
\alpha(F^E)^E(1_i, e_i, 1_i, e_i, 1_i) &= \alpha(e_i, 1_i, e_i)\\
&= 1_{i+1}\\
\alpha m_{A^E}(1_i, e_i, 1_i, e_i, 1_i) &= \alpha(1_i, e_i, 1_i)\\
&= 1_{i+1}\\
F\alpha^E(1_i, e_i, 1_i, e_i, 1_i) &= F(1_{i+1}, 1_{i+1}, 1_{i+1})\\
&= 1_{i+1}\\
\alpha(m_A)^E(1_i, e_i, 1_i, e_i, 1_i) &= \alpha(e_i, 1_i, e_i)\\
&= 1_{i+1};
\end{aligned}$$

séptimo:

$$\begin{aligned}
\alpha(F^E)^E(1_i, 1_i, e_i, 1_i, 1_i) &= \alpha(1_i, e_i, 1_i)\\
&= 1_{i+1}\\
\alpha m_{A^E}(1_i, 1_i, e_i, 1_i, 1_i) &= \alpha(1_i, e_i, 1_i)\\
&= 1_{i+1}\\
F\alpha^E(1_i, 1_i, e_i, 1_i, 1_i) &= F(e_i, 1_i, e_i)\\
&= 1_{i+1}\\
\alpha(m_A)^E(1_i, 1_i, e_i, 1_i, 1_i) &= \alpha(1_i, e_i, 1_i)\\
&= 1_{i+1};
\end{aligned}$$

octavo:

$$
\begin{aligned}
\alpha(F^E)^E(1_i,1_i,1_i,1_i,1_i) &= \alpha(1_i,1_i,1_i)\\
&= 1_i\\
\alpha m_{A^E}(1_i,1_i,1_i,1_i,1_i) &= \alpha(1_i,1_i,1_i)\\
&= 1_i\\
F\alpha^E(1_i,1_i,1_i,1_i,1_i) &= F(1_i,1_i,1_i)\\
&= 1_i\\
\alpha(m_A)^E(1_i,1_i,1_i,1_i,1_i) &= \alpha(1_i,1_i,1_i)\\
&= 1_i.
\end{aligned}
$$

Conclusiones

Las conclusiones serán presentadas, en una primera parte, de manera comparativa, al considerar los resultados que se pretendían emular: (1) los resultados de Marmolejo y Wood [2013] y (2) los de Korostenski y Tholen [1993], los de Rosebrugh y Wood [2002], los de Rosický y Tholen [2002], los de Grandis y Tholen [2006] y los de Garner [2007], más o menos en ese orden; y en una segunda parte, en una conjetura a partir del ejemplo mínimo no estricto del capítulo 6.

En Marmolejo y Wood [2013], en su sección 7, se buscaron funtores $\mathbf{2} \to C^{\mathbf{2}}$ que fueran pertinentes para caracterizar las seudoálgebras normales de $(-)^{\mathbf{2}}$; dos de ellos fueron $H_1 : \mathbf{2} \to \mathbf{2}^{\mathbf{2}}$ con $H_1(0 \leq 1) := (0,0) \leq (0,1)$ y $H_2 : \mathbf{2} \to \mathbf{2}^{\mathbf{2}}$ con $H_2(0 \leq 1) := (0,1) \leq (1,1)$, y tenemos que en $\mathbf{2}^{\mathbf{2}}$

$$(0,1) \leq (1,1) \circ (0,0) \leq (0,1) = (0,0) \leq (1,1).$$

Estos funtores eran relevantes por la equivalencia entre los sistemas de factorización ortogonal sobre una categoría $A \in \mathbf{Cat}$ y los sistemas de factorización de Eilenberg-Moore sobre A; en estos últimos, los morfismos m_{e_f} y e_{m_f} son isomorfismos para todo $f \in A^{\mathbf{2}}$ (véase Marmolejo y Wood [2013, pp. 400–401]).

Se buscaron, igualmente, en el caso de E, funtores $E \to C^E$ que pudieran ser relevantes para caracterizar las seudoálgebras normales de $(-)^E$; en particular, funtores $E \to E^E$. Los únicos relevantes fueron dE y G. A diferencia de en el caso de $\mathbf{2}$, en el cual ya se conocía una equivalencia entre las seudoálgebras normales sobre una categoría $A \in \mathbf{Cat}$ de $(-)^{\mathbf{2}}$ y otra estructura sobre A; a saber, una en que son fundamentales dos clases de morfismos con ciertas propiedades (véanse las Definiciones 6.23 y 6.24); en el caso de E, no se tenía algo que pudiera servir (como dos clases de morfismos) para guiarse en la búsqueda de tales funtores $E \to C^E$ pertinentes. Así que se buscó otra manera de encontrar una caracterización: se buscó en Rosebrugh y Wood

[2002]; en Korostenski y Tholen [1993], quizá también se podía encontrar algo útil.

En Korostenski y Tholen [1993], aparecen dos pares de adjunciones que parecen importantes. El primer par es

$$d_0 \dashv u \dashv d_1,$$

donde $d_0 : \mathbf{1} \to \mathbf{2}$ es el funtor que manda su único objeto al 0, $d_1 : \mathbf{1} \to \mathbf{2}$ el que manda su único objeto al 1 y $u : \mathbf{2} \to \mathbf{1}$ es el único funtor que existe de $\mathbf{2}$ a $\mathbf{1}$. Este par induce las adjunciones

$$\mathrm{cod}_A \dashv d'A \dashv \mathrm{dom}_A,$$

donde $\mathrm{cod}_A = A^{d_1}$, $d'A = A^u$ y $\mathrm{dom}_A = A^{d_0}$; es decir, $A^{d_1} \dashv A^u \dashv A^{d_0}$.

En el caso de E, no existe ninguna adjunción entre los funtores $E \to \mathbf{1}$ y $\mathbf{1} \to E$, pues $\mathrm{Card}(\mathbf{1}(*,*)) = \mathbf{1}$ y $\mathrm{Card}(E(\bullet,\bullet)) = \mathbf{2}$ (también considérese la Observación 4.8). Sin embargo, la pérdida de tales adjunciones no tienen ninguna relevancia; de hecho, el par $d_0 \dashv u \dashv d_1$ tampoco la tiene en el caso de $\mathbf{2}$, o por lo menos no la tiene a la hora de demostrar la equivalencia entre los sistemas de factorización de Eilenberg-Moore sobre una catetgoría A y las seudoálgebras normales sobre A de $(-)^{\mathbf{2}}$.

El segundo par que aparece es el siguiente. El funtor diagonal $\delta_{\mathbf{2}} : \mathbf{2} \to \mathbf{2} \times \mathbf{2}$ tiene adjunto izquierdo

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{2} \times \mathbf{2} & \xrightarrow{j} & \mathbf{2} \\ (i,k) & \longmapsto & i \vee k \end{array}$$

y derecho

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{2} \times \mathbf{2} & \xrightarrow{t} & \mathbf{2} \\ (i,k) & \longmapsto & i \wedge k; \end{array}$$

este par induce las adjunciones $A^t \dashv A^{\delta_{\mathbf{2}}} \dashv A^j$, donde A^t hace lo siguiente:

$$\begin{tikzcd} A^{\mathbf{2}} \arrow[r, "A^t"] & (A^{\mathbf{2}})^{\mathbf{2}} \\ f \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "{(f,u,v,g)}"'] & (1_a, 1_a, f, f) \arrow[d, "{(1_a,1_a,f,f,u,u,u,v,1_c,1_c,g,g)}"] \\ g \arrow[r, mapsto] & (1_c, 1_c, g, g); \end{tikzcd}$$

diagramáticamente, $(1_a, 1_a, f, f, u, u, u, v, 1_c, 1_c, g, g)$ es el cubo

$$\begin{tikzcd}
1_a \arrow[r, "{(1_a,u,u,1_c)}"] \arrow[d, "{(1_a,1_a,f,f)}"'] & 1_c \arrow[d, "{(1_c,1_c,g,g)}"] \\
f \arrow[r, "{(f,u,v,g)}"'] & g;
\end{tikzcd}$$

A^j hace lo siguiente:

$$\begin{tikzcd}
A^{\mathbf{2}} \arrow[r, "A^j"] & (A^{\mathbf{2}})^{\mathbf{2}} \\
f \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "{(f,u,v,g)}"'] & (f, f, 1_b, 1_b) \arrow[d, "{(f,f,1_b,1_b,u,v,v,v,g,g,1_d,1_d)}"] \\
g \arrow[r, mapsto] & (g, g, 1_d, 1_d);
\end{tikzcd}$$

diagramáticamente, $(f, f, 1_b, 1_b, u, v, v, v, g, g, 1_d, 1_d)$ es el cubo

$$\begin{tikzcd}
f \arrow[r, "{(f,u,v,g)}"] \arrow[d, "{(f,f,1_b,1_b)}"'] & g \arrow[d, "{(g,g,1_d,1_d)}"] \\
1_b \arrow[r, "{(1_b,v,v,1_d)}"'] & 1_d,
\end{tikzcd}$$

y $A^{\delta_{\mathbf{2}}} = m'_A : (A^{\mathbf{2}})^{\mathbf{2}} \to A^{\mathbf{2}}$ (en Rosebrugh y Wood [2002, p. 138], A^t es su R_A y A^j su L_A para $\mathcal{K} = A$). Las adjunciones $A^t \dashv m'_A \dashv A^j$ son fundamentales para obtener el Teorema 6.26, el cual da la equivalencia entre las seudoálgebras normales sobre A de $(-)^{\mathbf{2}}$ y los sistemas de factorización de Eilenberg-Moore sobre A.

En el caso de E, el equivalente sería que se tuvieran las adjunciones $G_A \dashv m_A \dashv G_A$ (δ_E no tiene ni adjunto izquierdo ni derecho, porque

$$\mathrm{Card}(E(\bullet, \bullet)) = \mathbf{2} \quad \text{y} \quad \mathrm{Card}(E \times E((\bullet, \bullet), (\bullet, \bullet))) = \mathbf{4});$$

no se tienen. Por otro lado, sí se pudo obtener un rombo análogo (véase la

Proposición 4.22) al de Rosebrugh y Wood [2002, p. 138]

$$\begin{tikzcd}
 & d'A^{\mathbf{2}} \arrow[dr] & \\
A^t \arrow[ur] \arrow[dr] & & A^j \\
 & (d'A)^{\mathbf{2}} \arrow[ur] &
\end{tikzcd},$$

el cual también resulta fundamental para la demostración de la equivalencia entre las seudoálgebras normales sobre A de $(-)^{\mathbf{2}}$ y los sistemas de factorización de Eilenberg-Moore sobre A, pues este rombo proporciona una fórmula para m_{e_f} y e_{m_f} (véase Rosebrugh y Wood [2002, p. 141], Lema 2.8); sin embargo, el rombo en el caso de E no derivó en una ecuación que nos diera una fórmula para $i_{r_f i_f}$ y $r_{r_f i_f}$ (que son los equivalentes de m_{e_f} y e_{m_f} en el de caso de $\mathbf{2}$, respectivamente); no obstante, nos dio un poco más de información que la que nos dio la Proposición 4.10. (Algo que tampoco ayudó fue que al evaluar $Fm_A : (A^E)^E \to A^E$ en el rombo para el caso de E, esto no daba identidades sino $F(f, f, f) = r_f i_f$).

Siguiendo en esta línea de los sistemas de factorización, se encontró el Teorema 3.2 de Grandis y Tholen [2006], el cual ya mencionamos en la introducción. Este teorema nos hizo pensar que quizá podíamos encontrar un par de clases de morfismos que nos diera condiciones suficientes para obtener una seudoálgebra normal sobre una categoría $A \in \mathbf{Cat}$ de $(-)^E$; de ahí, nuestra Proposición 4.36 y todos los resultados anteriores a esta proposición en la sección 4.3 (véanse Rosický y Tholen [2002] y Grandis y Tholen [2006]), salvo los relacionados con el rombo ya mencionado. Sin embargo, a diferencia de lo que se tiene en el caso de $\mathbf{2}$, en que, dada una flecha $f : a \to b$ en A, e_f y m_f aparecen acompañados de una estructura de coálgebra y álgebra, respectivamente (véanse el Corolario 2.7 y el Teorema 3.2 de Grandis y Tholen [2006]); en el caso de E, no son los factores de $f \in A^E$ los que aparecen acompañados de una estructura de coálgebra y álgebra, sino es f mismo el que tiene una estructura de coálgebra y álgebra; lo que no permite que podamos obtener un par de clases de morfismos en A para una suficiencia a partir de un sistema de factorización para idempotentes de A, y no sólo eso, sino que, además, T no es adjunto izquierdo de U, ni S lo es de V en la Definición 4.37, si tenemos en mente el Teorema 3.2 de Grandis y Tholen [2006]. Quizá esto era de esperarse si pensamos que los factores de f no tienen por qué ser objetos de A^E, como sí ocurre en el caso de $\mathbf{2}$. A mí no me parecía tan claro.

Para terminar con toda esa línea de sistemas de factorización, obtuvimos unos resultados sobre leyes distributivas mixtas como los mencionados en Garner [2007] (véase la parte sobre sistemas de factorización débil natural, ahí *natural weak factorization systems*).

A pesar de que se pierde estructura en el caso de E, todos los resultados anteriores muestran que sigue habiendo bastante estructura que se puede obtener de una seudoálgebra normal de $(-)^E$.

Una vez explotado todo con lo que se contaba para sistemas de factorización, nos propusimos analizar lo que ocurría en los ejemplos; así que la idea era obtener el mayor número de ejemplos posible. Se empezó con los triviales, es decir, con las álgebras libres y los idempotentes escindibles, y los llamamos triviales porque los isomorfismos de la Proposición 4.10 y los primeros del Corolario 4.25 son identidades, ya que la cadena de factorizaciones sucesivas de idempotentes sucesivos obtenida al factorizar f luego $r_f i_f$ luego $r_{r_f i_f} i_{r_f i_f}$ luego $r_{r_{r_f i_f} i_{r_f i_f}} i_{r_{r_f i_f} i_{r_f i_f}}$, etc. no tiene más de dos eslabones. Sin embargo, se querían encontrar ejemplos no triviales, para tener una idea más clara y más general de la estructura de una seudoálgebra normal de $(-)^E$. Creo que el ejemplo en el que podemos encontrar tal claridad y generalidad es en el ejemplo mínimo no estricto de la sección 6.4. Analizando ese ejemplo, pudimos ver que proviene de una seudoálgebra normal de $(-)^{\mathbf{2}}$; de hecho, después de ver que se pueden obtener más ejemplos del tipo del ejemplo de la sección 6.4 al considerar diagramas finitos de ese tipo o uno que se extienda no sólo infinitamente a la derecha sino también a la izquierda y que, sin mucho temor a equivocarnos, provienen también de seudoálgebras normales de $(-)^{\mathbf{2}}$, conjeturamos que esos ejemplos son seudoálgebras prototípicas de las seudoálgebras más generales, como los n-simplejos ordenados son prototípicos de los conjuntos simpliciales. No obstante, por cuestiones de espacio y tiempo, el estudio de ese ejemplo queda pendiente para un trabajo posterior, junto con una demostración detallada de la afirmación de toda seudoálgebra normal de $(-)^E$ del tipo del ejemplo 6.4 proviene de una seudoálgebra normal de $(-)^{\mathbf{2}}$.

Los resultados del capítulo 5 surgieron al tratar de encontrar condiciones suficientes para obtener una seudoálgebra de $(-)^E$ al considerar a $(-)^E$ como seudomónada sin iteraciones, y luego de preguntarnos cómo se relacionaban α_F y β_F con cualquier seudoálgebra normal sobre $A \in \mathbf{Cat}$ de $(-)^E$. La siguiente proposición es parte de ese querer encontrar condiciones suficientes para obtener una seudoálgebra de $(-)^E$ al considerar a $(-)^E$ como seudomónada sin iteraciones.

Proposición 6.34. *Sea* $F : A^E \to A$ *con* $A \in \mathbf{Cat}$ *un SFDI. Para toda* $B \in \mathbf{Cat}$, *el funtor* $F \circ (-)^E =: (-)^{\mathfrak{A}} : \mathbf{Cat}(B, A) \to \mathbf{Cat}(B^E, A)$ *es tal que si* (f, h, g) *es un morfismo en* B^E *y* $\varphi : H \Rightarrow H' : B \to A$ *una transformación natural, entonces*

$$\begin{tikzcd}
Ha \arrow[rr, "Hf"] \arrow[dr, "r_{Hf}"] \arrow[dddd, "Hh"'] & & Ha \arrow[dddd, "Hh"] \\
& H^{\mathfrak{A}}(f) \arrow[ur, "i_{Hf}"] \arrow[dd, "H^{\mathfrak{A}}(f,h,g)"'] & \\
& & \\
& H^{\mathfrak{A}}(g) \arrow[dr, "i_{Hg}"] & \\
Hb \arrow[ur, "r_{Hg}"] \arrow[rr, "Hg"'] & & Hb
\end{tikzcd} \tag{6.21}$$

y

$$\begin{tikzcd}
Ha \arrow[rr, "Hf"] \arrow[dr, "r_{Hf}"] \arrow[dddd, "\varphi a"'] & & Ha \arrow[dddd, "\varphi a"] \\
& H^{\mathfrak{A}}(f) \arrow[ur, "i_{Hf}"] \arrow[dd, "\varphi^{\mathfrak{A}}(f)"'] & \\
& & \\
& H'^{\mathfrak{A}}(f) \arrow[dr, "i_{H'f}"] & \\
H'a \arrow[ur, "r_{H'f}"] \arrow[rr, "H'f"'] & & H'a
\end{tikzcd} \tag{6.22}$$

conmutan.

Demostración. Sea (f, h, g) un morfismo en B^E y $\varphi : H \Rightarrow H' : B \to A$ una transformación natural. Entonces, (Hf, Hh, Hg) y $(Hf, \varphi a, H'f)$ son morfismos en A^E. Por otro lado,

$$H^{\mathfrak{A}}(f, h, g) = F(Hf, Hh, Hg)$$

y

$$\varphi^{\mathfrak{A}}(f) = F(Hf, \varphi a, H'f).$$

Luego, de (4.9), (6.21) y (6.22) conmutan.

La funtorialidad de $H^{\mathfrak{A}}$ se sigue de la funtorialidad de F y H:

$$H^{\mathfrak{A}}(f, 1_a, f) = F(Hf, 1_{Ha}, Hf) = 1_{FHf} = 1_{H^{\mathfrak{A}}(f)}$$

y

$$\begin{aligned} H^{\mathfrak{A}}(f', h', f'')H^{\mathfrak{A}}(f, h, f') &= F(Hf', Hh', Hf'')F(Hf, Hh, Hf') \\ &= F(Hf, Hh'h, Hf'') \\ &= H^{\mathfrak{A}}(f, h'h, f''). \end{aligned}$$

La naturalidad de $\varphi^{\mathfrak{A}}$ se sigue de la naturalidad de φ y la funtorialidad de F:

$$\begin{tikzcd} Ha \arrow[r, "Hh"] \arrow[d, "Hf"'] & Hb \arrow[r, "\varphi b"] \arrow[d, "Hg"] & H'b \arrow[d, "H'g"] \\ Ha \arrow[r, "Hh"'] & Hb \arrow[r, "\varphi b"'] & H'b \end{tikzcd} \quad = \quad \begin{tikzcd} Ha \arrow[r, "\varphi a"] \arrow[d, "Hf"'] & H'a \arrow[r, "H'h"] \arrow[d, "H'f"] & H'b \arrow[d, "H'g"] \\ Ha \arrow[r, "\varphi a"'] & H'a \arrow[r, "H'h"'] & H'b. \end{tikzcd}$$

$\square$

Bibliografía

Adámek, J., Rosický, J., Vitale, E. M. [2011]: *Algebraic theories: a categorical introduction to general algebra*, Cambridge Tracts in Mathematics **184**, Cambridge University Press, U. K., 2011.

Garner, R. [2007]: *The theory of glueing things on*, Presentation at Category Theory 2007, Carvoeiro, 2007–06–20.

Grandis, M., Tholen, W. [2006]: Natural weak factorization systems, *Archivum Mathematicum* **42**, 397–408 (2006).

Korostenski, M., Tholen, W. [1993]: Factorization systems as Eilenberg-Moore algebras, *J. Pure and Applied Algebra* **85**, 57–72 (1993).

Mac Lane, S. [1998]: *Categories for the working mathematician*, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1998.

Makkai, M., Paré, R. [1989]: *Accessible categories: the foundations of categorical model theory*, Contemporary Mathematics, 1989.

Marmolejo, F. [1997]: Doctrines whose structure forms a fully faithful adjoint string, *Theory and Applications of Categories* **3, No. 2**, 22–42 (1997).

Marmolejo, F., Wood, R. J. [2013]: No-iteration pseudomonads, *Theory and Applications of Categories* **28, No. 14**, 371–402 (2013).

Rosebrugh, R., Wood, R. J. [2002]: Coherence for factorization algebras, *Theory and Applications of Categories* **10, No. 6**, 134–147 (2002).

Rosický, J., Tholen, W. [2002]: Lax factorization algebras, *J. Pure and Applied Algebra* **175**, 355–382 (2002).