



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y
DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA.

SOBRE LA ESTRUCTURA DE LAS VARIEDADES CON CURVATURA DE RICCI
NO NEGATIVA

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA:
JAIME SANTOS RODRÍGUEZ

DIRECTOR DE LA TESIS
DR. ÓSCAR A. PALMAS VELASCO
FACULTAD DE CIENCIAS, UNAM

MÉXICO, D. F. 3 DE FEBRERO DE 2015.



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Índice general

Introducción	5
1. Preliminares	9
1.1. Distancia riemanniana y completez	9
1.2. El conjunto de puntos de corte	21
1.3. Rayos y líneas	28
2. El teorema de Cheeger-Gromoll	31
2.1. El laplaciano en el sentido débil	31
2.2. Funciones de Busemann	38
2.3. El teorema de escisión	41
3. Lazos a infinito	45
3.1. Lazos a infinito	45
3.2. Teoremas de la línea y de la cubierta doble	47
3.3. El teorema del alma	55
4. Consecuencias topológicas	61
A. Cubrientes y el grupo fundamental	67
A.1. Cubrientes	67
A.2. El grupo fundamental	70
Bibliografía	75

Introducción

En geometría riemanniana es natural preguntarse cómo afecta la curvatura a la topología de una variedad. Por ejemplo, en el caso de superficies tenemos el teorema de Gauss-Bonnet que relaciona la curvatura gaussiana con la característica de Euler. Un primer problema al que nos enfrentamos es que el tensor de curvatura es demasiado complicado pues en contadas ocasiones resulta práctico el calcularlo explícitamente. Así que resulta más fácil considerar cotas sobre la curvatura. Para la curvatura seccional no negativa tenemos resultados como el teorema de escisión de Toponogov [11] y el teorema del alma de Cheeger y Gromoll [15], [13]. El teorema de Toponogov nos dice que si M tiene curvatura seccional no negativa y contiene una línea (una geodésica $\ell : \mathbb{R} \rightarrow M$ tal que es minimizante en todo \mathbb{R}), entonces M es isométrica al producto riemanniano $N \times \mathbb{R}$. El teorema del alma asegura que toda variedad M con curvatura seccional no negativa tiene una subvariedad S compacta, totalmente geodésica y totalmente convexa tal que M es el haz normal sobre S . A dicha subvariedad le llamaremos el alma de M . Este resultado reduce el estudio de variedades con curvatura seccional no negativa al caso en que M es compacta.

También podemos tomar una cota más laxa, digamos curvatura de Ricci no negativa y ver cuáles son los resultados que pueden extenderse. En este contexto Cheeger y Gromoll prueban un teorema de escisión que generaliza al obtenido por Toponogov [14]. Por otro lado, el teorema del alma no se puede extender al caso de curvatura de Ricci no negativa, como muestran los contraejemplos construidos por Gromoll y Meyer en [17], así como Nabonand [8].

En esta tesis trabajaremos con variedades completas, no compactas y con curvatura de Ricci no negativa. Nuestro principal interés será el estudio de

propiedades globales de estas variedades y la extensión del teorema del alma a una clase de variedades con curvatura de Ricci no negativa. La estructura de este trabajo es la siguiente. En el capítulo 1 recordamos que el concepto de longitud de una curva en una variedad riemanniana nos permite ver de manera natural a una variedad M como un espacio métrico (M, d) . Por el teorema de Hopf-Rinow tenemos además una lista de equivalencias que relacionan la estructura diferenciable con la distancia. Además discutimos qué es lo que sucede cuando la función distancia deja de ser diferenciable.

En el capítulo 2 desarrollamos una de las herramientas básicas y más importantes en el estudio de variedades con curvatura de Ricci no negativa: La fórmula de Bochner (véase la ecuación (2.7)). Esta fórmula relaciona al laplaciano con la curvatura de Ricci de la variedad. Dado un punto fijo $p \in (M, d)$, definimos $r(x) = d(p, x)$ y en una vecindad perforada de p donde la distancia sea diferenciable estimaremos el laplaciano de r . Este resultado se conoce como el teorema de comparación del laplaciano (véase (2.6)) y nos será útil más adelante.

Estos resultados son de carácter local y en general no pueden ser extendidos a un contexto global con técnicas usuales pues la función d puede perder su diferenciabilidad fuera de una vecindad de p . Así, resulta necesario introducir herramienta nueva que nos permita trabajar globalmente. En este trabajo usamos funciones soporte y con ellas definimos el laplaciano en sentido débil. Con esto es posible extender el teorema de comparación del laplaciano a un resultado global cuando no necesariamente tenemos la diferenciabilidad de d .

Una vez desarrollada esta herramienta probamos un resultado clásico en geometría de comparación de curvatura de Ricci no negativa: el teorema de escisión de Cheeger-Gromoll (teorema 2.14, ver [14]). Este teorema será fundamental en capítulos posteriores y dice lo siguiente: Si M es completa, con curvatura de Ricci no negativa y hay una línea ℓ en M , entonces M es isométrica al producto riemanniano $N^{n-k} \times \mathbb{R}^k$ donde N ya no tiene líneas.

En el capítulo 3 comenzamos a trabajar con el artículo de Sormani [10] que tiene los conceptos y resultados principales de esta tesis. Primero definimos la propiedad de los lazos a infinito para variedades no compactas. Intuitivamente M cumple la propiedad a lo largo de un rayo basado en p (una geodésica minimizante $\gamma : [0, \infty) \rightarrow M$ con $\gamma(0) = p$) si dado un lazo

basado en p podemos deslizarlo hacia infinito a lo largo del rayo. Más formalmente decimos que M tiene la propiedad de los lazos a infinito a lo largo de un rayo $\gamma : [0, \infty) \rightarrow M$ si dados cualquier lazo C basado en $\gamma(0)$ y $K \subset M$ compacto, entonces existe un lazo $\tilde{C} \subset M - K$ basado en $\gamma(r)$ para alguna $r > 0$ tal que \tilde{C} es homotópico a C a lo largo de γ .

Usamos el teorema de escisión y las propiedades del cubriente universal \tilde{M} para probar que toda variedad no compacta con curvatura de Ricci positiva cumple la propiedad de los lazos a infinito. Conviene mencionar que las variedades construidas por Nabonnand [8], Gromoll y Meyer [17] tienen curvatura de Ricci positiva y por tanto cumplen la propiedad de los lazos a infinito.

El teorema principal de la tesis es una extensión del teorema del alma de Cheeger y Gromoll [15]. Probamos que si M es no compacta, con curvatura de Ricci no negativa y no cumple la propiedad de los lazos a infinito a lo largo de ningún rayo entonces M es isométrica al haz normal sobre un alma de M , es decir, sobre una subvariedad compacta y totalmente geodésica.

Finalmente en el capítulo 4 obtenemos resultados topológicos locales acerca del grupo fundamental de una variedad con curvatura de Ricci no negativa que aparecen en [10]. Estos resultados son extensiones parciales de teoremas obtenidos por Frankel [3], Lawson [5] y Schoen-Yau [16]. Usaremos únicamente los resultados obtenidos en el capítulo 3 para dar pruebas mucho más sencillas que las expuestas por Frankel, Lawson, Schoen y Yau.

Capítulo 1

Preliminares

En este primer capítulo enunciaremos los resultados fundamentales que usaremos a lo largo de este trabajo. M denotará una variedad riemanniana, conexa y de dimensión n . La métrica riemanniana de M se denotará por \langle , \rangle y su conexión riemanniana por ∇ .

Para cada punto $p \in M$, T_pM denotará al espacio tangente a M en p , mientras que TM será el haz tangente a M . Denotaremos por R al tensor de curvatura de M , definido por

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z.$$

Finalmente, usaremos las notaciones ∇f , Δf y $\text{Hess } f$ para el gradiente, el laplaciano y el hessiano de una función diferenciable definida en una variedad M . Para más detalles, ver por ejemplo [9].

A grandes rasgos lo que haremos será definir, para una variedad riemanniana M , una distancia d_M . Entonces M tendrá dos estructuras: una geométrica dada por la métrica riemanniana usual y la otra como espacio métrico. Afortunadamente estas estructuras se relacionan de manera que podremos pasar de una a otra según sea conveniente.

Posteriormente describiremos los inconvenientes que surgen al trabajar con esta estructura métrica, uno de ellos será que d_M no es diferenciable en todo M .

1.1. Distancia riemanniana y completez

Consideremos una curva suave por pedazos $\alpha : [a, b] \rightarrow M$. Con ayuda de la métrica riemanniana \langle , \rangle podemos hablar de la longitud de α :

$$\mathcal{L}(\alpha) := \int_a^b |\alpha'(t)| dt = \int_a^b \sqrt{\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle} dt.$$

Si p, q son dos puntos en M , podemos unirlos mediante curvas suaves por pedazos sin ninguna dificultad. Es claro de la definición que la función $t \mapsto |\alpha'(t)|$ es integrable y como $|\alpha'(t)| \geq 0$ se sigue que la longitud es no negativa. Al conjunto de curvas suaves por pedazos que unen p con q lo denotaremos por Ω_p^q . De este modo, \mathcal{L} es un funcional sobre Ω_p^q , llamado el **funcional de longitud**.

Una curva $\alpha : [a, b] \rightarrow M$ está parametrizada por longitud de arco si $\mathcal{L}(\alpha|_{[a, t]}) = t - a$ para toda $t \in [a, b]$. Esto es equivalente a que $|\alpha'(t)| = 1$ para toda $t \in [a, b]$ donde α sea diferenciable. Notemos también que la longitud de una curva es invariante bajo reparametrizaciones.

Proposición 1.1. Sean $p, q \in M$ definimos la función $d_M : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ como:

$$d_M(p, q) := \inf \{ \mathcal{L}(\alpha) \mid \alpha \in \Omega_p^q \}.$$

Entonces d_M es una distancia en M y por tanto (M, d_M) es un espacio métrico.

Demostración. Claramente tenemos que $d_M(p, q) = d_M(q, p)$. Para la desigualdad del triángulo consideremos $p, q, r \in M$. Sea $\epsilon > 0$, entonces existen curvas $\sigma_1 \in \Omega_p^q$ y $\sigma_2 \in \Omega_q^r$ tales que $\mathcal{L}(\sigma_1) < d_M(p, q) + \epsilon/2$ y $\mathcal{L}(\sigma_2) < d_M(q, r) + \epsilon/2$. Recordemos que la curva $\gamma := \sigma_1 \cup \sigma_2 \in \Omega_p^r$ y $\mathcal{L}(\gamma) = \mathcal{L}(\sigma_1) + \mathcal{L}(\sigma_2)$. Entonces

$$d_M(p, r) \leq \mathcal{L}(\gamma) = \mathcal{L}(\sigma_1) + \mathcal{L}(\sigma_2) < d_M(p, q) + d_M(q, r) + \epsilon.$$

Por lo cual si tomamos el límite cuando $\epsilon \rightarrow 0$ obtenemos el resultado.

Lo único que nos falta probar es que si $p \neq q$ entonces $d_M(p, q) > 0$. Sea $p \in M$ y (φ, U) una carta coordenada. Consideramos $r > 0$ tal que $\overline{\varphi^{-1}(B_r(\varphi(p)))} \subset U$.

Luego por compacidad de $\overline{\varphi^{-1}(B_r(\varphi(p)))}$ existe $\lambda > 0$ tal que para todo campo ξ definido allí tenemos que $\xi = \sum_{j=1}^n \xi^j \frac{\partial}{\partial x^j}$ y $|\xi| \geq \lambda \sqrt{\sum_{j=1}^n (\xi^j)^2}$.

Así que en $\varphi^{-1}(B_r(\varphi(p)))$ las longitudes riemannianas están acotadas por abajo de manera uniforme. Entonces si $q \in \varphi^{-1}(B_r(\varphi(p)))$ se sigue que

$$d_M(p, q) \geq \lambda |\phi(p) - \phi(q)| > 0.$$

Para $q \in M - \varphi^{-1}(B_r(\varphi(p)))$ es entonces claro que $d_M(p, q) \geq \lambda r$. \square

En el caso de que $\alpha \in \Omega_p^q$ realice la distancia entre p y q , es decir, si $\mathcal{L}(\alpha) = d_M(p, q)$, diremos que α es un **segmento**. Antes de aventurarnos a describir cuáles son las curvas que realizan la distancia vale la pena observar que los segmentos pueden no existir.

Ejemplo 1.2. Consideremos $M := \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ con la métrica usual que hereda de \mathbb{R}^2 . Ahora si consideramos $p = (-1, 0)$, $q = (1, 0)$ entonces tenemos que $d_M(p, q) = 2$ pero toda curva suave por pedazos en \mathbb{R}^2 entre p y q que tenga esta longitud necesariamente pasa por $(0, 0)$. Por lo tanto no hay ninguna curva en M que realice la distancia entre estos dos puntos.

Si $v \in T_p M$, existe una única geodésica con dominio maximal γ_v y condiciones iniciales $\gamma(0)$ y $\gamma'(0) = v$. Sea $[0, \ell_v)$ la parte no negativa del intervalo maximal en el que está definida γ_v . Notamos que $\gamma_{\alpha v}(t) = \gamma_v(\alpha t)$ para $\alpha > 0$ y $t < \ell_{\alpha v}$. En particular tenemos que $\ell_{\alpha v} = \alpha^{-1} \ell_v$.

Sea O_p el conjunto de los vectores v tales que $1 < \ell_v$, así $\gamma_v(t)$ está definida en $[0, 1]$. Definimos la **exponencial** en p , $exp_p : O_p \rightarrow M$, como

$$exp_p(v) = \gamma_v(1).$$

Podemos combinar las distintas funciones exp_p y formar $exp : \bigcup O_p \rightarrow M$ donde $exp|_{O_p} = exp_p$. Tenemos que $O = \bigcup O_p$ es abierto en TM y exp es suave. Veamos algunas propiedades de esta función.

Proposición 1.3. Si $p \in M$, entonces

1. $dexp_p : T_0(T_p M) \rightarrow T_p M$ es no singular en el origen de $T_p M$ Por lo tanto exp_p es un difeomorfismo local.
2. Definimos $Exp : O \rightarrow M \times M$ como $Exp(v) = (\pi(v), exp_{\pi(v)}(v))$, donde $\pi(v)$ es el punto base de v . Entonces para cada $p \in M$ y su vector cero $0_p \in T_p M$,

$$dExp : T_{p, 0_p}(TM) \rightarrow T_{(p, p)}(M \times M)$$

es no singular. Por lo tanto Exp es un difeomorfismo de una vecindad de la sección cero de TM en un abierto de la diagonal en $M \times M$.

Demostración. Ambos enunciados se siguen del teorema de la función inversa después de hacer algunas observaciones. Sea $I_0 : T_p M \rightarrow T_0 T_p M$ el isomorfismo canónico, es decir, $I_0(v) := \frac{d}{dt}(tv)|_{t=0}$. Ahora recordemos que si $v \in O_p$, tenemos que $\gamma_v(t) = \gamma_{tv}(1)$ para toda $t \in [0, 1]$. Entonces

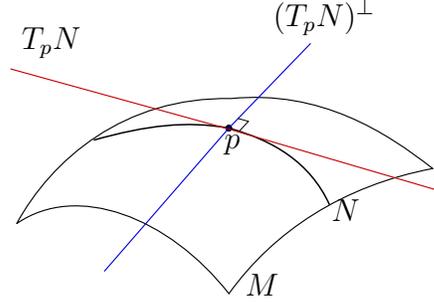
$$\begin{aligned} dexp_p(I_0(v)) &= \frac{d}{dt}exp_p(tv)|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}\gamma_{tv}(1)|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}\gamma_v(t)|_{t=0} \\ &= \gamma'_v(0) \\ &= v. \end{aligned}$$

Es decir, la composición $dexp_p \circ I_0 : T_p M \rightarrow T_p M$ es la identidad. Esto muestra que $dexp_p$ es no singular. Por el teorema de la función inversa tenemos la segunda afirmación de 1. Ahora, el espacio tangente $T_{(p,p)}(M \times M)$ es isomorfo a $T_p M \times T_p M$. De manera natural el espacio tangente $T_{(p,0_p)}(TM)$ es identificado con $T_p M \times T_{0_p}(T_p M) \simeq T_p M \times T_p M$. Sabemos que Exp manda a (p, v) en $(p, exp_p(v))$. Notamos que al variar p tenemos la identidad en la primera coordenada, pero no sabemos qué obtenemos en la segunda. Si fijamos p y variamos v en $T_p M$, entonces la primera coordenada queda fija mientras que en la segunda tenemos $exp_p(v)$. Con esto podemos darnos una idea de cómo es la diferencial $dExp|_{p,0_p}$. Si la consideramos como una función lineal $T_p M \times T_p M \rightarrow T_p M \times T_p M$, entonces es la identidad del primer factor en el primer factor, idénticamente 0 del segundo en el primero y la identidad del segundo en el segundo. Entonces es de la forma

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ * & I \end{bmatrix}$$

la cual es claramente no singular. Ahora, por el teorema de la función inversa tenemos que Exp es un difeomorfismo entre vecindades de $(p, 0_p) \in TM$ en vecindades de $(p, p) \in M \times M$. Como Exp manda a la sección cero de TM de manera difeomorfa a la diagonal de $M \times M$ y la sección cero es una subvariedad encajada de manera propia en TM , tenemos que estos difeomorfismos locales se pueden unir para dar un difeomorfismo entre una vecindad de la sección cero en TM y una vecindad de la diagonal en $M \times M$. \square

Sea N una subvariedad encajada en M . El haz normal de N en M es el haz vectorial sobre N que consiste de los complementos ortogonales de $T_p N \subset T_p M$:



$$TN^\perp = \{(p, v) \in TM : p \in N, v \in (T_p N)^\perp\}.$$

Hecho esto podemos considerar al espacio tangente de N en p como un subespacio vectorial del espacio tangente a M en p , y escribirlo de la siguiente manera:

$$T_p M = T_p N \oplus (T_p N)^\perp.$$

Además tenemos que el haz tangente TM es la suma de Whitney de los haces tangente y normal TN , TN^\perp . Con respecto a esta descomposición tenemos las proyecciones:

$$\begin{aligned} (\)^T &: TM|_N \rightarrow TN \\ (\)^\perp &: TM|_N \rightarrow TN^\perp, \end{aligned}$$

llamadas **tangencial** y **normal** respectivamente.

Si ∇ denota la conexión de Levi-Civita de M y X, Y son campos vectoriales en M , tenemos

$$\nabla_X Y = (\nabla_X Y)^T + (\nabla_X Y)^\perp.$$

De la unicidad de la conexión obtenemos que $(\nabla)^T$ es la conexión de Levi-Civita de N . La denotaremos por $\bar{\nabla}$.

Definición 1.4 (Exponencial normal). *Definimos la exponencial normal exp^\perp al restringir exp a $O \cap TN^\perp$ con lo cual $exp^\perp : O \cap TN^\perp \rightarrow M$.*

De manera similar a como trabajamos con exp podemos mostrar que $dexp^\perp$ es no singular en 0_p , $p \in N$. Con esto obtenemos un abierto U de la sección cero de TN^\perp en el que exp^\perp es un difeomorfismo en su imagen. A $exp^\perp(U)$ le llamaremos **vecindad tubular** de N en M .

Teorema 1.5. *Sea $p \in M$ y $\epsilon > 0$ tal que $exp_p : B_\epsilon(0) \rightarrow U \subset M$ es un difeomorfismo en su imagen. Entonces $U = B_\epsilon(p)$ y para cada $v \in B_\epsilon(0)$, la geodésica $\gamma_v : [0, 1] \rightarrow M$ definida como*

$$\gamma_v(t) = exp_p(tv)$$

es el único segmento de p a $exp_p(v)$.

Demostración. En $U = exp_p(B_\epsilon(0))$ tenemos la función distancia $r(x) := |exp_p^{-1}(x)|$. Luego en $B_\epsilon(0)$ las curvas integrales de $\partial_r := \nabla r$ son segmentos de línea $\gamma(s) = s \frac{v}{|v|}$ con velocidad unitaria. Las curvas integrales de ∂r en U son entonces geodésicas unitarias $\gamma(s) = exp\left(s \frac{v}{|v|}\right)$.

Por el lema de Gauss tenemos que r es una función distancia en U . Esto muestra que de entre las curvas que unen p con $q = exp_p(x)$ en $U - p$, la geodésica de p a q es la de menor longitud. Además dicha geodésica tiene longitud estrictamente menor a ϵ , en particular esto nos dice que $U \subset B_\epsilon(p)$. Para ver que esta geodésica es un segmento en M basta mostrar que toda curva que deja U tiene longitud mayor que ϵ . Supongamos que $\gamma : [0, b] \rightarrow M$ de p a q es una curva que deja U .

Sea $t_0 \in (0, b)$ tal que es el primer valor del parámetro para el cual $\gamma(t_0) \notin U$. Entonces $\gamma|_{(a, t_0)}$ está completamente contenida en $U - p$ y es más corta que la curva original. Ahora

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\gamma|_{(0, t_0)}) &= \int_a^{t_0} |\gamma'(t)| dt \\ &= \int_0^{t_0} |\nabla r| |\gamma'(t)| dt \\ &\geq \int_0^{t_0} dr(\gamma') dt \\ &= r(\gamma(t_0)) - r(\gamma(0)) \\ &= \epsilon, \end{aligned}$$

pues los valores de r convergen a ϵ cuando nos aproximamos a ∂U . Por lo tanto γ no es un segmento de p a q .

Finalmente tenemos que mostrar que $B_\epsilon(p) = U$. Si $q \in B_\epsilon(p)$ entonces hay una curva desde p con longitud menor estrictamente que ϵ . El argumento anterior muestra que esta curva está contenida completamente en U . Por lo tanto $B_\epsilon(p) \subset U$. \square

Otro detalle que necesitamos discutir es el hecho de que ahora hay dos maneras de ver a M , una como variedad y la otra como espacio métrico. Naturalmente, una duda que surge es qué pasa con las topologías que induce cada estructura. El siguiente resultado nos dice que no hay nada de qué preocuparse.

Teorema 1.6. *La topología inducida por d_M coincide con la topología de variedad.*

Demostración. Sea $p \in M$, por el teorema (1.5) tenemos que para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeña la bola métrica $B_\epsilon(p)$ es abierta en M con la topología de variedad. Por lo tanto las bases de las topologías coinciden y por lo tanto son equivalentes. \square

Lo siguiente que haremos será estudiar el comportamiento de los puntos críticos del funcional de longitud

$$\mathcal{L}(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt, \quad \gamma \in \Omega_p^q.$$

De esta manera podremos decir qué tipo de curvas son las que minimizan la distancia.

De hecho, veremos que es más fácil trabajar con el **funcional de energía**

$$\mathcal{E}(\gamma) = \frac{1}{2} \int_a^b |\gamma'(t)|^2 dt, \quad \gamma \in \Omega_p^q.$$

Lo primero que tenemos que ver es que los puntos críticos de ambos funcionales son los mismos. Consideramos sólo curvas parametrizadas por longitud de arco.

Proposición 1.7. *Si $\gamma \in \Omega_p^q$ es una curva con velocidad constante que minimiza $\mathcal{L} : \Omega_p^q \rightarrow [0, \infty)$, entonces γ también minimiza $\mathcal{E} : \Omega_p^q \rightarrow [0, \infty)$. Inversamente si $\gamma \in \Omega_p^q$ minimiza \mathcal{E} entonces también minimiza \mathcal{L} .*

Demostración. Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz tenemos que:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\gamma) &= \int_0^1 |\gamma'(t)| dt \\ &\leq \sqrt{\int_0^1 |\gamma'|^2 dt} \sqrt{\int_0^1 1^2 dt} \\ &= \sqrt{\int_0^1 |\gamma'|^2 dt} \\ &= \sqrt{2\mathcal{E}(\gamma)},\end{aligned}$$

donde la igualdad se da si y sólo si $|\gamma'| = c$, para alguna constante c , es decir, γ tiene velocidad constante.

Sea $\sigma \in \Omega_p^q$ una curva con velocidad constante que minimiza al funcional de longitud \mathcal{L} y $\gamma \in \Omega_p^q$. Entonces tenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(\sigma) &= \frac{1}{2} (\mathcal{L}(\sigma))^2 \\ &\leq \frac{1}{2} (\mathcal{L}(\gamma))^2 \\ &\leq \mathcal{E}(\gamma).\end{aligned}$$

Así que σ también minimiza \mathcal{E} . Inversamente si $\sigma \in \Omega_p^q$ mínimo de \mathcal{E} y $\gamma \in \Omega_p^q$. Podemos suponer que γ está parametrizada de tal forma que tiene velocidad constante. Luego

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\gamma) &\leq \sqrt{2\mathcal{E}(\sigma)} \\ &\leq \sqrt{2\mathcal{E}(\gamma)} \\ &= \mathcal{L}(\gamma).\end{aligned}$$

Por lo tanto tenemos que los mínimos de ambos funcionales coinciden. \square

Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ una curva. Una **variación** de γ es una familia de curvas $\tilde{\gamma} : (-\epsilon, \epsilon) \times [a, b] \rightarrow M$ tal que $\tilde{\gamma}(0, t) = \gamma(t)$ para toda $t \in [a, b]$.

Diremos que la variación es suave por pedazos si es continua y podemos tomar una partición $a = a_0 < a_1 < \dots < a_i < \dots < a_m = b$ tal que en el intervalo $[a_i, a_{i+1}]$ tenemos que

$$\bar{\gamma} : (-\epsilon, \epsilon) \times [a_i, a_{i+1}] \rightarrow M$$

es suave.

Entonces las curvas $t \mapsto \gamma_s(t) = \bar{\gamma}(s, t)$ son suaves por pedazos, mientras que las curvas $s \mapsto \bar{\gamma}(s, t)$ son suaves.

Luego $\frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial t}$ está bien definido en cada intervalo $[a_i, a_{i+1}]$. En los extremos a_i existen los límites laterales

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial t^+} \right|_{(s, a_i)} &= \left. \frac{\partial \bar{\gamma}|_{[a_i, a_{i+1}]}}{\partial t} \right|_{(s, a_i)}, \\ \left. \frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial t^-} \right|_{(s, a_i)} &= \left. \frac{\partial \bar{\gamma}|_{[a_{i-1}, a_i]}}{\partial t} \right|_{(s, a_i)} \end{aligned}$$

El **campo variacional** se define como $\frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial s}$. Es suave en cada $(-\epsilon, \epsilon) \times [a_i, a_{i+1}]$ y continuo en $(-\epsilon, \epsilon) \times [a, b]$.

El caso en que $a = 0$, $b = 1$, $\bar{\gamma}(s, 0) = p$ y $\bar{\gamma}(s, 1) = q$ nos interesa pues en este caso todas las curvas $\gamma_s \in \Omega_p^q$. A esta variación le llamaremos **propia**.

Lema 1.8 (Primera variación de la energía). Sea $\hat{\gamma} : (-\epsilon, \epsilon) \times [a, b] \rightarrow M$ una variación suave por pedazos, entonces

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{E}(\gamma)_s}{ds} &= - \int_a^b \left\langle \frac{\partial^2 \hat{\gamma}}{\partial t^2}, \frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial s} \right\rangle dt + \left\langle \frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial t^-}, \frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial s} \right\rangle \Big|_{(s, b)} - \left\langle \frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial t^+}, \frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial s} \right\rangle \Big|_{(s, a)} \\ &\quad + \sum_{i=1}^{m-1} \left\langle \frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial t^-} - \frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial t^+}, \frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial s} \right\rangle \Big|_{(s, a_i)} \end{aligned}$$

Demostración. Primero notemos que basta probar el resultado para variaciones suaves pues toda variación que sea suave por pedazos la podemos subdividir en partes en las que sea suave.

$$\mathcal{E}(\gamma_s) = \int_a^b \left| \frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial t} \right|^2 dt = \sum_{i=0}^{m-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} \left| \frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial t} \right|^2 dt.$$

Para una variación suave $\hat{\gamma} : (-\epsilon, \epsilon) \times [a, b] \rightarrow M$ tenemos:

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathcal{E}(\gamma_s)}{ds} &= \frac{d}{ds} \frac{1}{2} \int_a^b \left\langle \frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial t}, \frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial t} \right\rangle dt \\
&= \frac{1}{2} \int_a^b \frac{\partial}{\partial s} \left\langle \frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial t}, \frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial t} \right\rangle dt \\
&= \int_a^b \left\langle \frac{\partial^2 \hat{\gamma}}{\partial s \partial t}, \frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial t} \right\rangle dt \\
&= \int_a^b \left\langle \frac{\partial^2 \hat{\gamma}}{\partial t \partial s}, \frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial t} \right\rangle dt \\
&= \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} \left\langle \frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial s}, \frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial t} \right\rangle dt - \int_a^b \left\langle \frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial s}, \frac{\partial^2 \hat{\gamma}}{\partial t^2} \right\rangle dt \\
&= \left\langle \frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial s}, \frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial t} \right\rangle \Big|_a^b - \int_a^b \left\langle \frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial s}, \frac{\partial^2 \hat{\gamma}}{\partial t^2} \right\rangle dt \\
&= - \int_a^b \left\langle \frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial s}, \frac{\partial^2 \hat{\gamma}}{\partial t^2} \right\rangle dt + \left\langle \frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial s}, \frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial t} \right\rangle \Big|_{(s,b)} - \left\langle \frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial s}, \frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial t} \right\rangle \Big|_{(s,a)}.
\end{aligned}$$

Y se sigue el resultado. \square

Ahora calculemos los mínimos locales del funcional de energía.

Teorema 1.9. *Si $\gamma \in \Omega_p^q$ es un mínimo local de $\mathcal{E} : \Omega_p^q \rightarrow [0, \infty)$ entonces γ es una geodésica.*

Demostración. Sea $\gamma \in \Omega_p^q$ mínimo local del funcional $\mathcal{E} : \Omega_p^q \rightarrow [0, \infty)$, luego para toda variación propia de γ tenemos que

$$\frac{d\mathcal{E}(\gamma_s)}{ds} = 0.$$

Encontraremos una variación adecuada: Si $V(t) \in T_{\gamma(t)}M$, es decir, es un campo vectorial a lo largo de γ entonces hay una variación tal que $V(t) = \frac{\partial \gamma}{\partial s} \Big|_{(0,t)}$. Esta variación la podemos obtener al tomar las curvas variacionales $s \mapsto \gamma(s, t)$ como geodésicas con $V(t) = \frac{\partial \gamma}{\partial s} \Big|_{(0,t)}$. Si además $V(a) = 0$ y $V(b) = 0$ la variación es propia.

Usamos este campo variacional y notamos que la fórmula de primera variación (1.8) en $s = 0$ solamente depende de γ y de V .

$$\begin{aligned}
\left. \frac{d\mathcal{E}(\gamma_s)}{ds} \right|_{s=0} &= - \int_a^b \langle \gamma'', V \rangle dt + \left\langle \frac{d\gamma}{dt^-}(b), V(b) \right\rangle - \left\langle \frac{d\gamma}{dt^+}(a), V(a) \right\rangle \\
&+ \sum_{i=1}^{m-1} \left\langle \frac{d\gamma}{dt^-}(a_i) - \frac{d\gamma}{dt^+}(a_i), V(a_i) \right\rangle \\
&= - \int_a^b \langle \gamma'', V \rangle dt + \sum_{i=1}^{m-1} \left\langle \frac{d\gamma}{dt^-}(a_i) - \frac{d\gamma}{dt^+}(a_i), V(a_i) \right\rangle
\end{aligned}$$

Especificamos V aún más, tomamos $V(t) = \lambda(t)\gamma''(t)$, donde $\lambda(a_i) = 0$ en los puntos en los que γ no es suave, pedimos además que $\lambda(a) = \lambda(b) = 0$. Finalmente asumimos que $\lambda(t) > 0$ en el resto de su dominio. Así

$$\begin{aligned}
0 &= \left. \frac{d\mathcal{E}(\gamma_s)}{ds} \right|_{s=0} \\
&= - \int_a^b \langle \gamma'', \lambda(t)\gamma'' \rangle dt \\
&= - \int_a^b \lambda(t) |\gamma''|^2 dt.
\end{aligned}$$

Al ser $\lambda(t) > 0$ en los puntos en los que γ'' está definida tenemos que allí $\gamma'' = 0$. Entonces γ es una geodésica por pedazos. Ahora tomemos otro campo variacional W tal que

$$\begin{aligned}
W(a_i) &= \frac{d\gamma}{dt^-}(a_i) - \frac{d\gamma}{dt^+}(a_i), \\
W(a) &= W(b) = 0
\end{aligned}$$

y arbitrario en el resto del dominio de γ , entonces obtenemos

$$\begin{aligned}
0 &= \left. \frac{d\mathcal{E}(\gamma_s)}{ds} \right|_{s=0} \\
&= \sum_{i=1}^{m-1} \left\langle \frac{d\gamma}{dt^-}(a_i) - \frac{d\gamma}{dt^+}(a_i), W(a_i) \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{m-1} \left| \frac{d\gamma}{dt^-}(a_i) - \frac{d\gamma}{dt^+}(a_i) \right|^2.
\end{aligned}$$

Entonces

$$\frac{d\gamma}{dt^-}(a_i) = \frac{d\gamma}{dt^+}(a_i),$$

entonces γ es suave y por lo tanto es una geodésica. \square

Corolario 1.10. *Todo segmento suave por pedazos es una geodésica.*

Demostración. Sea $\gamma \in \Omega_p^q$ un segmento suave por pedazos. Por el teorema (1.7) tenemos que γ también es un mínimo del funcional de energía. Ahora en la prueba del teorema (1.9) probamos que todo mínimo debe ser una geodésica suave. Por lo tanto todo los segmentos son geodésicas. \square

Teorema 1.11 (Hopf-Rinow). *Son equivalentes:*

1. $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es geodésicamente completa en todo punto, es decir, todas las geodésicas están definidas para todo valor del parámetro.
2. $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es geodésicamente completa en p .
3. $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ cumple la propiedad de Heine-Borel.
4. (M, d_M) es completa como espacio métrico.

Demostración. La prueba de este teorema puede consultarse, por ejemplo, en [9]. \square

Corolario 1.12. *Si $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es completa entonces cualesquiera dos puntos en M pueden unirse mediante un segmento.*

Demostración. Sean $p, q \in M$, $\exp_p : T_p M \rightarrow M$. Sea $r := d_M(p, q)$. Basta mostrar que $\exp_p(\overline{B_r(0)}) = \overline{B_r(p)}$. Definimos $I := \{r : \exp_p(\overline{B_r(0)}) = \overline{B_r(p)}\}$, notamos que I es cerrado.

Sea $\{r_i\}_{i=1}^\infty \subset I$ sucesión que converge a r , elegimos para cada i $q_i \in \overline{B_{r_i}(p)}$ con $q_i \rightarrow q$ cuando $i \rightarrow \infty$. Luego existen $v_i \in \overline{B_{r_i}(0)}$ tales que $q_i = \exp_p(v_i)$. Entonces existe una subsucesión de $\{v_i\}_{i=1}^\infty$ que converge a un $v \in \overline{B_r(p)}$.

Por la continuidad de \exp_p tenemos que $\exp_p(v) = q$ y que $\gamma(t) := \exp_p(tv)$ es la geodésica que buscábamos. \square

1.2. El conjunto de puntos de corte

Definición 1.13 (Campo de Jacobi). Sea $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ una geodésica. Un campo vectorial J a lo largo de γ es un campo de Jacobi si satisface:

$$J''(t) + R(\gamma'(t), J(t))\gamma'(t) = 0$$

para todo $t \in [0, 1]$

Mostraremos que, esencialmente, hay una única forma de construir campos de Jacobi a lo largo de γ con $J(0) = 0$.

Proposición 1.14. Sea $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ geodésica y J un campo de Jacobi a lo largo de γ con $J(0) = 0$. Tomemos $\frac{dJ}{dt}(0) = w$ y $\gamma'(0) = v$. Consideremos a w como un vector en $T_v(T_{\gamma(0)}M)$ y construyamos una curva $v(s)$ en $T_{\gamma(0)}M$ con $v(0) = v$, $v'(0) = w$. Sea $h(t, s) = \exp_p(tv(s))$, $p = \gamma(0)$ y definamos un campo \bar{J} como $\bar{J}(t) = \frac{\partial h}{\partial s}(t, 0)$. Entonces \bar{J} es un campo de Jacobi a lo largo de γ y $\bar{J} = J$ en $[0, 1]$.

Demostración. Para $s = 0$, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial h}{\partial s} &= \frac{\partial}{\partial t} ((\text{dexp}_p)_{tv}(tw)) = \frac{\partial}{\partial t} (t(\text{dexp}_p)_{tv}(w)) \\ &= (\text{dexp}_p)_{tv}(w) + t \frac{\partial}{\partial t} ((\text{dexp}_p)_{tv}(w)). \end{aligned}$$

Por lo tanto para $t = 0$,

$$\frac{\partial \bar{J}}{\partial t}(0) = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial h}{\partial s}(0, 0) = (\text{dexp}_p)_0(w) = w.$$

Como $J(0) = \bar{J}(0) = 0$ y $\frac{\partial J}{\partial t}(0) = \frac{\partial \bar{J}}{\partial t}(0) = w$. Por lo tanto tenemos que $J = \bar{J}$. \square

Definición 1.15 (Punto conjugado). Sea $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ una geodésica. Se dice que el punto $\gamma(t_0)$ es conjugado de $\gamma(0)$ a lo largo de γ , $t_0 \in [0, 1]$, si existe un campo de Jacobi J a lo largo de γ , que no sea idénticamente cero, con $J(0) = 0 = J(t_0)$. El número máximo de campos linealmente independientes con esta propiedad es llamado la multiplicidad del punto conjugado $\gamma(t_0)$.

Observemos que es inmediato de la definición anterior que si p es conjugado de q entonces q es conjugado de p .

Proposición 1.16. *Sea $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ una geodésica y sea $p = \gamma(0)$. El punto $q = \gamma(t_0)$, $t_0 \in [0, 1]$ es conjugado de p a lo largo de γ si y sólo si $v_0 = t_0\gamma'(0)$ es un punto crítico de \exp_p . Además la multiplicidad de q como punto conjugado de p es igual a la dimensión del núcleo de $(d\exp_p)_{v_0}$.*

Demostración. El punto $q = \gamma(t_0)$ es un punto conjugado de p a lo largo de γ si y sólo si existe un campo de Jacobi J a lo largo de γ con $J(0) = J(t_0) = 0$. Definimos $v = \gamma'(0)$ y $w = J'(0)$. Por la proposición (1.14) tenemos que $J(t) := (d\exp_p)_{t_0v}(tw)$, $T \in [0, 1]$, es un campo de Jacobi. Observamos además que J es distinto de cero si y sólo si $w \neq 0$. Por lo tanto, $q = \gamma(t_0)$ es conjugado de p si y sólo si

$$0 = J(t_0) = (d\exp_p)_{t_0v}(t_0w), \quad w \neq 0,$$

es decir, si t_0v es un punto crítico de \exp_p .

La multiplicidad de q es igual al número de campos de Jacobi linealmente independientes J_1, \dots, J_k que son cero en 0 y en t_0 . Es claro que estos campos son linealmente independientes si y sólo si $J'_1(0), J'_2(0), \dots, J'_k(0)$ son vectores linealmente independientes en T_pM . Por lo tanto la multiplicidad de q es igual a la dimensión del núcleo de $(d\exp_p)_{t_0v}$. \square

Proposición 1.17. *Sea $p \in M$, definimos la función $r(x) := d_M(p, x)$. Entonces r es suave en una vecindad perforada de p y las curvas integrales de ∇r son geodésicas.*

Demostración. Sea U una vecindad de p en la que \exp_p es difeomorfismo. Luego si $q \in U - \{p\}$, $q = \exp_p(v)$ para algún $v \in T_pM$ y $\gamma(t) := \exp_p(tv)$ es la curva que realiza la distancia entre p y q .

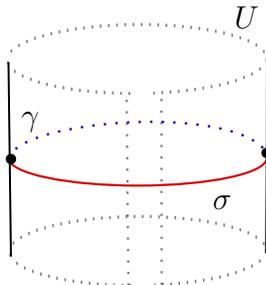
Por lo tanto $r(x) = |\exp_p^{-1}(x)|$ y esta función es suave en $U - \{p\}$. Ahora si $\partial_r := \nabla r$ tenemos que $\langle \partial_r, \partial_r \rangle = 1$, y por lo tanto sus curvas integrales son geodésicas. \square

Si M es completa las geodésicas se pueden extender a todo \mathbb{R} , pero cuando dejamos la comodidad de U pueden ocurrir fenómenos como el siguiente:

Ejemplo 1.18. *Sea $M = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$, consideremos el abierto $U := (\mathbb{S}^1 - \{e^{i0}\}) \times \mathbb{R}$. Sea $p = (e^{i\frac{\pi}{2}}, r_0)$, consideremos la función distancia $r(x) = d_M(p, x)$ luego si $q = (e^{i\theta}, r_0) \in U$ tenemos que $r(q) = |\theta - \frac{\pi}{2}|$ con $\theta \in (0, 2\pi)$.*

Si $\gamma : I \rightarrow M$, $\gamma(0) = (e^{i\frac{\pi}{2}}, r_0)$, $|\gamma'| = 1$ es una curva integral de ∇r , sabemos que para un intervalo lo suficientemente pequeño γ es segmento.

Si la longitud del intervalo I es igual a π entonces γ deja de ser el único segmento entre sus extremos, pues la geodésica σ también es un segmento. Sin embargo, notamos que σ pasa por el punto (e^{i0}, r_0) .



Para enunciar adecuadamente los resultados que ocuparemos será necesario describir con más detalle el subconjunto de M en el que $r(x)$ es suave. Comencemos definiendo el conjunto:

$$\text{seg}(p) := \{v \in T_p M \mid \exp_p(tv) : [0, 1] \rightarrow M \text{ es segmento}\} \quad (1.1)$$

Una consecuencia inmediata del teorema de Hopf-Rinow (1.11) es que $M = \exp_p(\text{seg}(p))$. Además, es claro que $\text{seg}(p)$ es un dominio cerrado y estrellado en $T_p M$. Denotemos por

$$\text{seg}^0(p) = \{sv : s \in [0, 1), v \in \text{seg}(p)\}.$$

Necesitamos probar que este conjunto es abierto. Empecemos por el siguiente resultado:

Proposición 1.19. *Si $x \in \exp_p(\text{seg}^0(p))$, entonces hay un único segmento que lo une con p . En particular \exp_p es inyectiva en $\text{seg}^0(p)$. Definimos $U_p = \exp_p(\text{seg}^0(p))$.*

Demostración. Notamos que hay un segmento $\sigma : [0, 1) \rightarrow M$ con $\sigma(0) = p, \sigma(t_0) = x, t_0 < 1$. Ahora, si $\hat{\sigma} : [0, t_0] \rightarrow M$ es otro segmento de p a x , construimos la siguiente curva

$$\gamma(s) = \begin{cases} \hat{\sigma}(s) & 0 \leq s \leq t_0 \\ \sigma(s) & t_0 \leq s \leq 1 \end{cases}$$

Esta curva no es suave, pero esto no es posible. □

Lema 1.20. $exp_p : seg^0(p) \rightarrow U_p$ es no singular para todo punto de su dominio.

Demostración. Si exp_p es singular en algún punto podemos encontrar v tal que exp_p es singular en v y no singular en los puntos tv , $t \in [0, 1)$. Afirmamos que $v \notin seg^0(p)$. Como $\gamma(t) = exp_p(tv)$ es un encaje en $[0, 1]$ podemos encontrar vecindades U alrededor $[0, 1)v \subset T_pM$ y V alrededor de $\gamma([0, 1)) \subset M$ tales que $exp_p : U \rightarrow V$ es un difeomorfismo. Notamos que $v \notin U$ y $\gamma(1) \notin V$. Si tomamos un vector tangente $w \in T_vT_pM$, podemos extenderlo a un campo de Jacobi J en T_pM tal que $[\partial_r, J] = 0$. Después empujamos este campo mediante exp_p a un campo vectorial, que también llamaremos J . Este campo conmuta con ∂_r en V . Si $dexp_p|_v w = 0$, entonces

$$\lim_{t \rightarrow 1} J|_{exp_p(tv)} = \lim_{t \rightarrow 1} dexp_p(J)|_{exp_p(tv)} = 0.$$

El hecho de que

$$\lim_{t \rightarrow 1} \langle J, J \rangle|_{exp_p(tv)} \searrow 0,$$

implica que debe haber una sucesión $t_n \rightarrow 1$ tal que

$$\frac{\partial_r \langle J, J \rangle}{\langle J, J \rangle} \Big|_{exp_p(t_n v)} \rightarrow -\infty \quad n \rightarrow \infty.$$

Ahora por definición de hessiano tenemos

$$\partial_r \langle J, J \rangle = 2 \text{Hess } r(J, J)$$

y concluimos que $\text{Hess } r$ satisface

$$\frac{\text{Hess } r(J, J)}{\langle J, J \rangle} \Big|_{exp_p(t_n v)} \rightarrow -\infty \quad n \rightarrow \infty.$$

Si suponemos que $v \in seg^0(p)$, entonces $\gamma(t) = exp_p(tv)$ es un segmento en un intervalo $[0, 1 + \epsilon]$ para $\epsilon > 0$. Tomemos ϵ suficientemente pequeña como para que $\tilde{r}(x) := d_M(w, \gamma(1 + \epsilon))$ sea suave en la bola $B_{2\epsilon}(\gamma(1 + \epsilon))$. Entonces consideremos la función $e(x) = r(x) + \tilde{r}(x)$. Por la desigualdad del triángulo sabemos que $e(x) \geq 1 + \epsilon = d_M(p, \gamma(1 + \epsilon))$.

De hecho, $e(x) = 1 + \epsilon$ siempre que $x = \gamma(t)$, $t \in [0, 1 + \epsilon]$. Entonces e tiene un mínimo absoluto a lo largo de $\gamma(t)$ y por lo tanto tiene hessiano no negativo. Por otro lado,

$$\frac{\text{Hess } e(J, J)}{\langle J, J \rangle} \Big|_{\text{exp}_p(t_n v)} = \frac{\text{Hess } r(J, J)}{\langle J, J \rangle} \Big|_{\text{exp}_p(t_n v)} + \frac{\text{Hess } \tilde{r}(J, J)}{\langle J, J \rangle} \Big|_{\text{exp}_p(t_n v)} \rightarrow -\infty,$$

cuando $n \rightarrow \infty$ pues $\text{Hess } \tilde{r}$ está acotado en una vecindad de $\gamma(1)$ y el término que involucra $\text{Hess } r$ converge a $-\infty$ cuando $n \rightarrow \infty$. \square

Proposición 1.21. $\text{seg}^0(p)$ es abierto.

Demostración. Sea $v \in \text{seg}^0(p)$ fijo, luego existe una vecindad V alrededor de v en la que exp_p es un difeomorfismo en su imagen. Si $\{v_i\}_{i=1}^\infty \subset V$ es una sucesión que converge a $v \in V$ sabemos que $D\text{exp}_p$ es no singular en v_i . Supongamos ahora que $w_i \in \text{seg}(p)$ satisface

$$\text{exp}_p(v_i) = \text{exp}_p(w_i).$$

En el caso de que w_i tenga un punto de acumulación $w \neq v$, tenemos que $v \notin \text{seg}^0(p)$. Entonces $w_i \rightarrow v$, y así $w_i \in V$ para i suficientemente grande. Como exp_p es un difeomorfismo en V esto implica que $v_i = w_i$. Entonces $v^i \in \text{seg}^0(p)$. \square

Teorema 1.22. Si $v \in \text{seg}(p) - \text{seg}^0(p)$ entonces

1. $\exists w \in \text{seg}(p)$, $w \neq v$ tal que $\text{exp}_p(v) = \text{exp}_p(w)$, ó
2. $d\text{exp}_p$ es singular en v .

Demostración. Sea $\gamma(t) = \text{exp}_p(tv)$. Para $t > 1$ tomamos segmentos:

$$\begin{aligned} \sigma_t(s) &: [0, 1] \rightarrow M, \\ \sigma_t(0) &= p, \\ \sigma_t(1) &= \gamma(t). \end{aligned}$$

Como estamos suponiendo que γ no es un segmento para $t > 1$ tenemos que $\sigma'_t(0)$ nunca es proporcional a $\gamma'(0)$. Tomamos una sucesión $\{t_n\}_{n=1}^\infty$ tal que $t_n \rightarrow 1$ cuando $n \rightarrow \infty$ y $\sigma'_{t_n}(0) \rightarrow w \in T_p M$. Entonces

$$\mathcal{L}(\sigma_{t_n}) = |\sigma'_{t_n}(0)| \rightarrow \mathcal{L}(\gamma|_{[0,1]}) = |\gamma'(0)|,$$

con lo cual $|w| = |\gamma'(0)|$. Ahora esto nos dice que $w \neq \gamma'(0)$ ó $w = \gamma'(0)$. En el primer caso tenemos que w no puede ser un múltiplo positivo de $\gamma'(0)$ pues $|w| = |\gamma'(0)|$. Entonces w cumple (1).

Para el otro caso tenemos que mostrar que $dexp_p$ es singular en v . Procedamos por contradicción, supongamos que $dexp_p$ no es singular en v . Entonces exp_p debe ser un encaje cerca de v . Luego

$$\begin{aligned}\sigma'_{t_n}(0) &\rightarrow v = \gamma'(0), \\ exp_p(\sigma'_{t_n}(0)) &= exp_p(t_n \gamma'(0)).\end{aligned}$$

Con lo cual $\sigma'_{t_n}(0) = t_n v$, y entonces γ debe ser un segmento en un intervalo $[0, t_n]$, $t_n > 1$. Pero esto es una contradicción. \square

A $C_p := seg(p) - seg^0(p)$ se le llama el **conjunto de corte** de p . Definimos el **radio de inyectividad en p** , denotado por $inj(p)$, como

$$inj(p) = \sup\{ \epsilon > 0 \mid exp_p : B_0(\epsilon) \rightarrow B_p(\epsilon) \text{ es un difeomorfismo} \}.$$

Podemos caracterizar al radio de inyectividad de la siguiente manera.

Proposición 1.23. *Supongamos que $u \in C_p$ y $|u| = inj(p)$. Entonces*

1. *Existe un único vector w , distinto de u , tal que $exp_p(u) = exp_p(w)$, caracterizado por*

$$\left. \frac{d}{dt} exp_p(tu) \right|_{t=1} = - \left. \frac{d}{dt} exp_p(tw) \right|_{t=1}, \quad \text{o bien}$$

2. *$x = exp_p(u)$ es un valor crítico de $exp_p : seg(p) \rightarrow M$.*

Demostración. Supongamos que x es un valor regular de $exp_p : seg(p) \rightarrow M$ y que $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 1] \rightarrow M$ son segmentos de p a $x = exp_p(v)$. Si $\gamma'_1(1) \neq \gamma'_2(1)$, entonces podemos encontrar $w \in T_x M$ tal que $\langle w, \gamma'_1(1) \rangle, \langle w, \gamma'_2(1) \rangle < 0$, es decir w forma un ángulo mayor a $\pi/2$ con $\gamma'_1(1)$ y $\gamma'_2(1)$.

Ahora tomamos $c(s)$ con $c'(0) = w$. Como $dexp_p$ no es singular en $\gamma'_i(0)$ existen curvas únicas $v_i(s) \in T_p M$ con $v_i(0) = \gamma'_i(0)$ y $dexp_p(v_i(s)) = c(s)$. Pero entonces las curvas $t \mapsto exp_p(tv_i(s))$ tienen longitud

$$\begin{aligned}|v_i| &= d_M(p, c(s)) \\ &< d_M(p, x) \\ &= |v|.\end{aligned}$$

Esto implica que \exp_p no es biyectiva en $\text{seg}^0(p)$ lo cual es una contradicción. \square

Lema 1.24. *Sea $p \in M$, entonces la función $r(x) := d_M(p, x)$ es suave en $M - \{\exp_p(C_p) \cup \{p\}\}$.*

Demostración. Primero recordemos que $\exp_p(\text{seg}(p)) = M$, luego por el lema (1.20) tenemos que \exp_p es difeomorfismo en $\text{seg}^0(p)$. Luego tenemos que $\exp_p(\text{seg}^0(p)) = M - \{\exp_p(C_p)\}$. Entonces tenemos que $r(x) = |\exp_p^{-1}(x)|$ en $M - \{\exp_p(C_p)\}$. Por lo tanto $r(x)$ es suave en $M - \{\exp_p(C_p) \cup \{p\}\}$. \square

Ahora veamos qué podemos hacer con una función distancia. Unimos p con x mediante un segmento γ parametrizado de tal forma que $\gamma(0) = p$ y $\gamma(r) = x$. Definimos $N := \gamma'(r)$ y tomamos una base ortonormal e_2, \dots, e_n del espacio tangente a $\partial B_p(r)$, es decir, tangente a la esfera geodésica de radio r en x . Extendemos $\{N = e_1, e_2, \dots, e_n\}$ a un marco en una vecindad de x . Entonces para $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^2 ,

$$\Delta f = \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{e_i} \nabla f, e_i \rangle = \sum_{i=1}^n (e_i(e_i f) - (\nabla_{e_i} e_i) f).$$

Observemos que

$$\nabla_{e_i} e_i = \langle \nabla_{e_i} e_i, N \rangle N + (\nabla_{e_i} e_i)^T = \langle \nabla_{e_i} e_i, N \rangle N + (\bar{\nabla}_{e_i} e_i)$$

con $\bar{\nabla}$ la conexión en $\partial B_p(r)$. Notamos que $N = \frac{\partial}{\partial r} := \nabla r$; entonces

$$\begin{aligned} \Delta f &= N(Nf) - (\nabla_N N) f + \sum_{i=2}^n (e_i(e_i f) - (\nabla_{e_i} e_i) f) \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \sum_{i=2}^n (e_i(e_i f) - (\bar{\nabla}_{e_i} e_i) f) - \sum_{i=2}^n (\langle \nabla_{e_i} e_i, N \rangle N) f \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \bar{\Delta} f + H \frac{\partial f}{\partial r}, \end{aligned}$$

donde $\bar{\Delta}$ es el laplaciano y $H = -\sum_{i=2}^n (\langle \nabla_{e_i} e_i, N \rangle N)$ es la curvatura media de la esfera geodésica respectivamente.

Observamos que si estamos en el dominio en el que r es suave entonces $\langle \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r} \rangle = 1 = \frac{\partial r}{\partial r}$, $\frac{\partial^2 r}{\partial r^2} = \frac{\partial}{\partial r} \langle \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r} \rangle = 0$ y $e_i(e_i r) - (\bar{\nabla}_{e_i} e_i) r = e_i \langle e_i, \frac{\partial}{\partial r} \rangle - \langle \bar{\nabla}_{e_i} e_i, \frac{\partial}{\partial r} \rangle = 0$ para toda $i \geq 2$. Por lo tanto

$$\Delta r = H. \quad (1.2)$$

A las coordenadas que acabamos de usar se les conoce como **coordenadas polares geodésicas**.

1.3. Rayos y líneas

Veamos que en una variedad M completa y no compacta podemos construir geodésicas que sean minimizantes en intervalos más interesantes. Estas geodésicas y algunas hipótesis posteriores sobre la curvatura nos darán información acerca de la estructura global de M .

Definición 1.25 (Rayo). *Sea $p \in M$, diremos que una geodésica $\gamma : [0, \infty) \rightarrow M$ es un rayo basado en p si para todo $[a, b] \subset [0, \infty)$ la restricción a ese intervalo $\sigma|_{[a, b]}$ es un segmento.*

Proposición 1.26. *Sea $p \in M$ entonces existe un rayo basado en p .*

Demostración. Fijemos un punto $p \in M$ y tomemos una sucesión de puntos $\{q_i\}_{i=1}^{\infty} \subset M$ tal que $d_M(p, q_i) \rightarrow \infty$ cuando $i \rightarrow \infty$. Esta sucesión existe pues M no puede estar acotada.

Como M es completa existen segmentos σ_i tales que $d_M(p, q_i) = \mathcal{L}(\sigma_i)$. De hecho $\sigma_i(t) = \exp_p(tv_i)$, donde $v_i \in T_p M$ y $|v_i| = 1$. Entonces $\{v_i\}_{i=1}^{\infty} \subset B_1(0) \subset T_p M$. Como $B_1(0)$ es compacto existe una subsucesión que converge a $v \in B_1(0)$. Definimos entonces la geodésica $\sigma(t) = \exp_p(tv)$. Como σ_i converge puntualmente y d_M es continua,

$$d_M(\sigma(t), \sigma(s)) = \lim_{i \rightarrow \infty} d_M(\sigma_i(t), \sigma_i(s)) = |t - s|,$$

para todo $t, s \in [0, \infty)$. Por lo tanto el segmento $\sigma : [0, \infty) \rightarrow M$ es un rayo. \square

Ejemplo 1.27. *Para el paraboloides $P := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z = x^2 + y^2\}$ los rayos que emanan del vértice son las geodésicas radiales, es decir, las parábolas restringidas al intervalo $[0, \infty)$.*

Tomemos ahora un rayo γ y fijemos un punto $q \notin \gamma([0, \infty))$. Sea $\{q_i\}_{i=1}^{\infty}$ sucesión de puntos en $\gamma([0, \infty))$ tal que $d_M(q, q_i) \rightarrow \infty$. Construimos con esta sucesión un rayo σ basado en q al que llamaremos **asíntota al rayo** γ . No es difícil convencerse de que las asíntotas no son únicas, pues tenemos que dependen de la sucesión elegida.

Definición 1.28. Una variedad riemanniana completa M es **conexa en infinito** si para todo compacto K existe un compacto C más grande tal que cualesquiera dos puntos en $M - C$ pueden unirse mediante una curva en $M - K$. Si M no es conexa en infinito diremos que es **disconexa en infinito**.

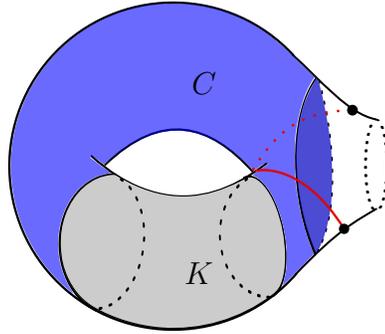


Figura 1.1: Variedad conexa en infinito

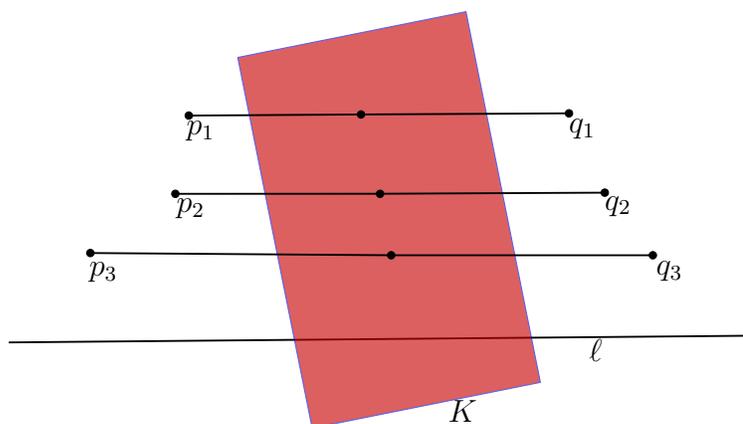
Definición 1.29 (Línea). Una geodésica $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$ es una línea si para todo intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ la restricción $\gamma|_{[a, b]}$ es un segmento.

Proposición 1.30. Sea M una variedad riemanniana disconexa en infinito, entonces M tiene líneas.

Demostración. Sea M disconexa en infinito, así que existen un compacto $K \subset M$ y sucesiones $\{p_i\}_{i=1}^{\infty}$, $\{q_i\}_{i=1}^{\infty}$ tales que $p_i \rightarrow \infty$, $q_i \rightarrow \infty$ y toda curva que una p_i con q_i necesariamente pasa por K .

Unimos estos puntos mediante segmentos $\gamma_i : [-a_i, b_i] \rightarrow M$ de tal forma que $a_i \rightarrow \infty$, $b_i \rightarrow \infty$, y $\gamma_i'(0) \in K$, entonces tenemos una subsucesión que converge a una línea ℓ . \square

Ejemplo 1.31. Sea $M = N \times \mathbb{R}$, donde N es una variedad compacta. Si M es completa, entonces forzosamente tiene líneas pues es disconexa en infinito.



Ejemplo 1.32. En el ejemplo (1.27) vimos que los rayos son las geodésicas radiales que emanan del vértice. Notamos que el paraboloides no puede tener líneas pues si consideramos una parábola completa

$$\gamma(t) = (t \cos(\theta_0), t \sin(\theta_0), t^2),$$

al tomar los puntos

$$(a \cos(\theta_0), a \sin(\theta_0), a^2) \text{ y } (-a \cos(\theta_0), -a \sin(\theta_0), a^2), \quad a \neq 0,$$

tenemos que $\mathcal{L}(\gamma) > a^2\pi = \mathcal{L}(\sigma)$, donde $\sigma(t) := (a \cos(t + \theta_0), a \sin(t + \theta_0), a^2)$, $t \in [0, \pi]$ es el segmento que los une.

Capítulo 2

El teorema de Cheeger-Gromoll

En este capítulo veremos qué clase de resultados, de carácter global, podemos obtener que involucren a la función distancia más allá de donde ésta es suave. Probaremos el teorema de escisión de Cheeger y Gromoll el cual será usado frecuentemente a lo largo de este trabajo.

2.1. El laplaciano en el sentido débil

Como hicimos notar en el capítulo anterior, no siempre podremos trabajar con funciones suaves si queremos obtener resultados globales. En esta sección veremos una forma de trabajar con funciones a lo más continuas.

Lema 2.1. Sean $f, g : M \rightarrow \mathbb{R}$ funciones de clase C^2 tales que $f(p) = h(p)$ para algún $p \in M$ y $f(x) \geq h(x)$ para todo x cercano a p . Entonces

1. $\nabla f(p) = \nabla h(p)$
2. $\text{Hess}(f)(p) \geq \text{Hess}(h)(p)$
3. $\Delta f(p) \geq \Delta h(p)$

Demostración. Para $v \in T_p M$, sea $\gamma_v : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ la geodésica tal que $\gamma_v(0) = p$ y $\gamma'_v(0) = v$. Ahora si consideramos $f \circ \gamma$ y $h \circ \gamma$, entonces $df_p(\gamma'_v(0)) = dh_p(\gamma'_v(0))$ y $\langle \text{Hess}(f)(\gamma'_v(0)), \gamma'_v(0) \rangle \geq \langle \text{Hess}(h)(\gamma'_v(0)), \gamma'_v(0) \rangle$. \square

Proposición 2.2. Sea $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ función de clase C^2 ; entonces $\Delta f(p) \leq a$, $a \in \mathbb{R}$ si y sólo si para toda $\epsilon > 0$ existe $f_\epsilon(x)$ definida en una vecindad U de p tal que

1. $f_\epsilon(p) = f(p)$
2. $f_\epsilon(p) \geq f(x), \forall x \in U$
3. $\Delta f_\epsilon(p) \leq a + \epsilon$

Demostración. La necesidad es clara tomando $f_\epsilon(x) = f(x)$. Para la suficiencia tomemos $\epsilon > 0$ y $f_\epsilon : U \rightarrow \mathbb{R}$ tal que cumple las propiedades 1) – 3). Hacemos uso del lema 2.1 y obtenemos $\Delta f(p) \leq \Delta f_\epsilon(p) \leq a + \epsilon$. Por lo tanto $\Delta f(p) \leq a + \epsilon$, hacemos tender ϵ a cero y se sigue el resultado. \square

A las funciones f_ϵ definidas en la proposición anterior se les llama **funciones soporte por arriba**. Mediante una proposición análoga para $\Delta f(p) \geq a$ podemos definir funciones soporte por abajo si pedimos que en una vecindad U de p se cumplan para todo $\epsilon > 0$:

1. $f_\epsilon(p) = f(p)$
2. $f_\epsilon(p) \leq f(x), \forall x \in U$
3. $a - \epsilon \leq \Delta f_\epsilon(p)$

Definición 2.3. Sean $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ continua y $a \in \mathbb{R}$. Decimos que $\Delta f(p) \leq a$ ($\Delta f(p) \geq a$) en el sentido débil si existen funciones soporte por arriba (abajo) que satisfacen las condiciones de la proposición anterior.

Teorema 2.4 (Principio fuerte del máximo). Si $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ es continua y $\Delta f \geq 0$ en el sentido débil en todo M entonces f es constante en una vecindad de cada máximo local. En particular f tiene un máximo global si y sólo si f es constante.

Demostración. Supongamos que $\Delta f > 0$ en todo M . Afirmamos que entonces f no puede tener máximos. Si f tuviera un máximo local en $p \in M$, entonces existen funciones soporte f_ϵ tales que

1. $f_\epsilon(p) = f(p)$
2. $f_\epsilon(x) \leq f(x)$ para todo x en una vecindad de p .
3. $\Delta f_\epsilon(p) > 0$.

Observamos que 1) y 2) implican que f debe tener un máximo local en p . Entonces $\text{Hess } f_\epsilon(p) \leq 0$, lo cual contradice 3).

Ahora supongamos que $\Delta f \geq 0$ y sea $p \in M$ un máximo local de f . Si $r < \text{inj}(p)$ tenemos una función

$$f : B_r(p) \rightarrow \mathbb{R}$$

tal que $\Delta f \geq 0$ y p es un máximo. Supongamos que f no es constante. Entonces existe, posiblemente para un radio más pequeño, $x \in S_r(p) := \{x \in M \mid d_M(p, x) = r\}$ tal que $f(x) \neq f(p)$. Definimos $V := \{x \in S_r(p) \mid f(x) = f(p)\}$.

Buscamos una función $h(x) := e^{\alpha\phi(x)} - 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$, tal que

$$\begin{aligned} h(x) &< 0 & x \in V \\ h(p) &= 0 \\ \Delta h(x) &> 0 & x \in \text{cl}(B_r(p)). \end{aligned}$$

Sea $U \subset S_r(p)$ disco tal que $V \subset U$. Entonces ϕ debe cumplir

$$\begin{aligned} \phi(p) &= 0 \\ \phi(x) &< 0 & x \in U \\ \nabla\phi(x) &\neq 0 & x \in \text{cl}(B_r(p)) \end{aligned}$$

En un sistema coordenado adecuado (x^1, \dots, x^n) podemos suponer que U está en el semiplano $x^1 < 0$ y tomamos $\phi = x^1$. Ahora calculamos Δh , sean $X, Y \in \Gamma(TM)$.

$$\begin{aligned} \text{Hess}(h)(X, Y) &= \langle \nabla_X \nabla (e^{\alpha\phi} - 1), Y \rangle \\ &= \alpha \langle X(e^{\alpha\phi}) \nabla\phi + e^{\alpha\phi} \nabla_X \nabla\phi, Y \rangle \\ &= \alpha^2 e^{\alpha\phi} \langle \nabla\phi, X \rangle \langle \nabla\phi, Y \rangle + \alpha e^{\alpha\phi} \text{Hess}(\phi)(X, Y) \end{aligned}$$

Por lo tanto $\Delta h = \alpha^2 e^{\alpha\phi} |\nabla\phi|^2 + \alpha e^{\alpha\phi} \Delta\phi$. Así que podemos tomar α suficientemente grande para que $\Delta h > 0$ en $\text{cl}(B_r(p))$. Hecho esto definimos $\hat{f} := f + \delta h$, donde $\delta > 0$ es lo suficientemente pequeña como para que

$$\hat{f}(p) = f(p) > \max\{\hat{f}(x) \mid x \in \partial B_r(p)\}.$$

Sea f_ϵ función soporte para f en $q \in B_r(p)$. Entonces $f_\epsilon + \delta h$ es una función soporte para \hat{f} en q . Luego $\Delta(f_\epsilon + \delta h)(p) \geq -\epsilon + \delta \Delta h(p)$. Por lo tanto $\Delta \hat{f} > 0$. Pero esto contradice al argumento hecho al principio de esta prueba y entonces se tiene que f es constante. \square

Teorema 2.5 (Regularidad). *Si $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ es continua y $\Delta f \equiv 0$ en el sentido débil entonces f es de clase C^∞ .*

Demostración. Fijemos $p \in M$ y $\Omega \subset M$ una vecindad precompacta de p contenida en el dominio de una carta coordenada. Supongamos además que $\partial\Omega$ es suave. Entonces el problema de Dirichlet

$$\begin{aligned}\Delta u &= 0 \\ u|_{\partial\Omega} &= f|_{\partial\Omega},\end{aligned}$$

tiene solución [2]; además la solución u es suave en el interior de Ω . Consideremos las funciones $f - u$ y $u - f$. Si ambas son no positivas es claro entonces que $u = f$ y habremos terminado. Supongamos sin pérdida de generalidad que $f - u$ es positiva en algún lugar de Ω . Como $cl(\Omega)$ es compacto entonces $f - u$ alcanza un máximo, por el principio fuerte del máximo tenemos entonces que $f - u$ es constante, pero esto sólo es posible si $f - u \equiv 0$. \square

Lema 2.6 (Calabi). *Para $p \in M$ sea $r(x) = d_M(x, p)$. Si $Ric(M) \geq 0$ entonces*

$$\Delta r(x) \leq \frac{n-1}{r(x)}$$

para toda $x \in M$.

Demostración. Primero trabajemos en $M \setminus (C_p \cup \{p\})$. En coordenadas polares geodésicas tenemos que $\Delta r = H$. Sea $N = e_1, e_2, \dots, e_n \in T_p M$ base ortonormal, la extendemos a un marco ortonormal a lo largo de N .

Entonces $\nabla_N e_i = 0$, $\langle \nabla_N \nabla_{e_i} N, e_i \rangle = N \langle \nabla_{e_i} N, e_i \rangle$ y $\nabla_{e_i} \nabla_N N = 0$.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow Ric(N, N) &= \sum_{i=2}^n \langle R(e_i, N)N, e_i \rangle \\
&= \sum_{i=2}^n \langle \nabla_{e_i} \nabla_N N - \nabla_N \nabla_{e_i} N - \nabla_{[e_i, N]} N, e_i \rangle \\
&= - \sum_{i=2}^n N \langle \nabla_{e_i} N, e_i \rangle - \sum_{i=2}^n \langle \nabla_{[e_i, N]} N, e_i \rangle
\end{aligned}$$

Pero

$$\begin{aligned}
\sum_{i=2}^n \langle \nabla_{e_i} N, e_i \rangle &= \sum_{i=2}^n e_i \langle N, e_i \rangle - \langle N, \nabla_{e_i} e_i \rangle \\
&= - \sum_{i=2}^n \langle N, \nabla_{e_i} e_i \rangle = H.
\end{aligned}$$

Además $\nabla_{e_i} N = \sum_{j=2}^n \langle \nabla_{e_i} N, e_j \rangle e_j + \langle \nabla_{e_i} N, N \rangle N$, pero $2 \langle \nabla_{e_i} N, N \rangle = e_i \langle N, N \rangle = 0$. Así tenemos $\nabla_{e_i} N = \sum_{j=2}^n \langle \nabla_{e_i} N, e_j \rangle e_j$

Entonces

$$\sum_{i=2}^n \langle \nabla_{[e_i, N]} N, e_i \rangle = \sum_{i=2}^n \sum_{j=2}^n \langle \nabla_{e_i} N, e_j \rangle \langle \nabla_{e_j} N, e_i \rangle = \| \text{Hess}(r) \|^2,$$

donde $\|A\|^2 = tr(AA^t)$.

Por lo tanto

$$Ric(N, N) = -H' - \| \text{Hess}(r) \|^2. \quad (2.1)$$

Tenemos que $\| \text{Hess}(r) \|^2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \dots + \lambda_n^2$, donde $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ son los valores propios de $\text{Hess}(r)$. Como

$$\begin{aligned}
\text{Hess}(r)(N, N) &= \text{Hess}(r) \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r} \right) \\
&= \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial r}} \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r} \right\rangle \\
&= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} \left\langle \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r} \right\rangle = 0,
\end{aligned}$$

podemos suponer que el valor propio $\lambda_1 = 0$. Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz tenemos

$$\|\text{Hess}(r)\|^2 = \lambda_2^2 + \dots + \lambda_n^2 \geq \frac{(\lambda_2 + \dots + \lambda_n)^2}{n-1} = \frac{H^2}{n-1}.$$

De la ecuación 2.1 y de que $\text{Ric}(M) \geq 0$.

$$H' \leq \frac{-H^2}{n-1} \Rightarrow \int \frac{H'}{H^2} dr \leq \int \frac{-1}{n-1} dr.$$

Por lo tanto

$$\Delta r \leq \frac{n-1}{r}.$$

Ahora sea $q \in C_p \cup \{p\}$, $\sigma : [0, l] \rightarrow M$ segmento tal que $\sigma(0) = p$ y $\sigma(l) = q$, supongamos que para todo $t \in [0, \infty)$ $\sigma|_{[0, t]}$ es el único segmento entre sus extremos. Definimos para $\epsilon > 0$, $r_\epsilon(x) = \epsilon + d_M(\sigma(\epsilon), x)$. Afirmamos que r_ϵ son funciones soporte por arriba en q para $r(x)$. Demostremos que son de clase C^∞ . Sea $\epsilon > 0$, y procedamos por contradicción, entonces pueden ocurrir dos cosas:

1. Hay dos segmentos que unen $\sigma(\epsilon)$ con q ó
2. q es punto crítico de $\exp_{\sigma(\epsilon)} : \text{seg}(\sigma(\epsilon)) \rightarrow M$.

Supongamos 1, entonces $\tilde{\sigma}$ es un segmento que une $\sigma(\epsilon)$ con q . Entonces la curva $\sigma|_0^\epsilon + \tilde{\sigma}$ no es suave y realiza la distancia entre p y q , lo cual sabemos que no es posible.

Para 2 tomamos $w \in T_q \text{seg}(\sigma(\epsilon))$ tal que $(\exp_{\sigma(\epsilon)})_* w = 0$. Consideramos la curva $s \mapsto sw + \sigma'(\epsilon)$, luego $\frac{d}{ds} \exp_{\sigma(\epsilon)}(sw + \sigma'(\epsilon))|_{s=0} = 0$.

Ahora tomamos $(s, t) \mapsto \exp_{\sigma(\epsilon)}(t(sw + \sigma'(\epsilon)))$ y definimos

$$J(t) = \frac{d}{ds} \exp_{\sigma(\epsilon)}(t(sw + \sigma'(\epsilon)))|_{s=0} \quad (2.2)$$

Es claro que $J(0) = J(1) = 0$ y $J'(0) = w$. Luego notamos que J se obtiene a partir de una variación por geodésicas y por lo tanto es de Jacobi. Además tenemos que $J'(1) \neq 0$ pues de lo contrario tendríamos que $J \equiv 0$ y eso no es posible por la definición de w .

Con ayuda del campo J podemos definir

$$K(t) = \frac{d}{ds} \exp_q((1-t)(sJ'(1) + \sigma'(l)))|_{s=0},$$

el cual también es de Jacobi y se anula en los extremos. Esto implica que \exp_q es crítica en $\sigma(\epsilon)$, pero esto no es posible pues $p \in C_q$. Por lo tanto r_ϵ es suave.

Ahora sólo resta checar la cota del laplaciano. Por la desigualdad del triángulo $r(x) = d_M(x, p) \leq \epsilon + d_M(\sigma(\epsilon), x) = r_\epsilon(x)$. Entonces

$$\Delta r_\epsilon(q) \leq \frac{n-1}{r_\epsilon(q) - \epsilon} = \frac{n-1}{r(q) - \epsilon} \leq \frac{n-1}{r(q)} + \epsilon \frac{2(n-1)}{r^2(q)}.$$

Tomando ϵ suficientemente pequeña tenemos que

$$\Delta r_\epsilon(q) \leq \frac{n-1}{r(q)} + \epsilon.$$

Con lo que el resultado es claro. \square

Teorema 2.7 (Bochner). *Sea M^n completa, $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^∞ . Entonces*

$$\frac{1}{2} \Delta |\nabla f|^2 = \|\text{Hess } f\|^2 + \langle \nabla f, \nabla(\Delta f) \rangle + \text{Ric}(\nabla f, \nabla f).$$

Demostración. Sea $p \in M$, consideremos un marco ortonormal e_1, \dots, e_n tal que $\nabla_{e_i} e_j|_p = 0$. Entonces evaluando en p y desarrollando

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \Delta |\nabla f|^2 &= \frac{1}{2} \Delta \langle \nabla f, \nabla f \rangle = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n e_i e_i \langle \nabla f, \nabla f \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n e_i \text{Hess}(f)(e_i, \nabla f) = \sum_{i=1}^n e_i \text{Hess}(f)(\nabla f, e_i) \\ &= \sum_{i=1}^n e_i \langle \nabla_{\nabla f}(\nabla f), e_i \rangle = \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{e_i} \nabla_{\nabla f}(\nabla f), e_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \langle R(e_i, \nabla f) \nabla f, e_i \rangle + \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{\nabla f} \nabla_{e_i} \nabla f, e_i \rangle \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{[e_i, \nabla f]} \nabla f, e_i \rangle. \end{aligned}$$

El primer término de la suma es $Ric(\nabla f, \nabla f)$, el segundo es

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{\nabla f} \nabla_{e_i} \nabla f, e_i \rangle &= \sum_{i=1}^n (\nabla f) \langle \nabla_{e_i} \nabla f, e_i \rangle - \langle \nabla_{e_i} \nabla f, \nabla_{\nabla f} e_i \rangle \\ &= (\nabla f) \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{e_i} \nabla f, e_i \rangle \\ &= (\nabla f)(\Delta f) = \langle \nabla f, \nabla(\Delta f) \rangle. \end{aligned}$$

Finalmente el tercer término

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{[e_i, \nabla f]} \nabla f, e_i \rangle &= \sum_{i=1}^n \text{Hess}(f)([e_i, \nabla f], e_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \text{Hess}(f)(\nabla_{e_i} \nabla f - \nabla_{\nabla f} e_i, e_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \text{Hess}(f)(\nabla_{e_i} \nabla f, e_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \text{Hess}(f)(e_i, \nabla_{e_i} \nabla f) = \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{e_i} \nabla f, \nabla_{e_i} \nabla f \rangle \\ &= \|\text{Hess}(f)\|^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto se sigue el resultado. \square

2.2. Funciones de Busemann

En el capítulo 1 definimos los rayos y los construimos en el caso de que M sea completa y no compacta. En esta sección le asociaremos a cada rayo γ una función que podremos interpretar como la función distancia desde $\gamma(\infty)$. Además estas funciones nos darán más información acerca de las geodésicas que son paralelas a rayos (o a líneas). Con esto tendremos una idea de su comportamiento global, el cual se reflejará en el teorema de escisión de Cheeger-Gromoll al final de este capítulo.

Lema 2.8. *Sea $\gamma : [0, \infty) \rightarrow M$ un rayo, definimos $b_t^\gamma(x) := t - d_M(x, \gamma(t))$, $x \in M$. Entonces*

1. $|b_t^\gamma(x)| \leq d_M(x, \gamma(0))$.
2. Para $x \in M$ fijo b_t^γ es no decreciente en t .
3. $|b_t^\gamma(x) - b_t^\gamma(y)| \leq d_M(x, y)$.

Demostración

1.

$$\begin{aligned} |b_t^\gamma(x)| &= |t - d_M(x, \gamma(t))| \\ &= |d_M(\gamma(0), \gamma(t)) - d_M(x, \gamma(t))| \leq d_M(x, \gamma(0)). \end{aligned}$$

2. Supongamos $s < t$, entonces

$$\begin{aligned} b_s^\gamma(x) - b_t^\gamma(x) &= (s - t) - d_M(x, \gamma(s)) + d_M(x, \gamma(t)) \\ &= d_M(x, \gamma(t)) - d_M(x, \gamma(s)) - d_M(\gamma(s), \gamma(t)) \leq 0. \end{aligned}$$

3. $|b_t^\gamma(x) - b_t^\gamma(y)| = |t - d_M(x, \gamma(t)) - t + d_M(y, \gamma(t))| \leq d_M(x, y). \square$

Gracias al lema anterior podemos asociarle a un rayo γ la función de Busemann definida a continuación.

Definición 2.9. Sea M variedad riemanniana y $\gamma : [0, \infty) \rightarrow M$ un rayo. Definimos la función de Busemann b_γ asociada a γ como

$$b_\gamma(x) := \lim_{R \rightarrow \infty} R - d_M(x, \gamma(R)).$$

Observemos que si b_γ es la función de Busemann asociada a un rayo γ , entonces para todo $t \in [0, \infty)$ $b_\gamma(\gamma(t)) = t$. Así podemos interpretar a b_γ como una función distancia.

Además tenemos que b_γ es una función 1-Lipschitz, sean $x, y \in M$. Por el lema anterior tenemos que $|b_R^\gamma(x) - b_R^\gamma(y)| \leq d_M(x, y)$, luego

$$|b_\gamma(x) - b_\gamma(y)| = \lim_{R \rightarrow \infty} |b_R^\gamma(x) - b_R^\gamma(y)| \leq d_M(x, y).$$

Ejemplo 2.10. En \mathbb{R}^k los rayos son de la forma $y(t) = ty'(0) + y_0$ entonces usando que $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t}(t + \|x - y(t)\|) = 1$ tenemos que

$$\begin{aligned} b_y(x) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t}(t^2 - \langle x - y(t), x - y(t) \rangle) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t}(t^2 - (\langle x - y(0), x - y(0) \rangle \\ &\quad - 2t\langle y'(0), x - y(0) \rangle + t^2\langle y'(0), y'(0) \rangle)) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \langle y'(0), x - y(0) \rangle - \frac{1}{2t}\langle x - y(0), x - y(0) \rangle \\ &= \langle y'(0), x - y(0) \rangle. \end{aligned}$$

Ejemplo 2.11. Si $M^n = N^{n-k} \times \mathbb{R}^k$ y $\gamma(t) = (x_0, ty'(0) + y_0)$ es un rayo en M entonces de manera análoga al ejemplo anterior tenemos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t}(t + d_M((z, w), \gamma(t))) = 1,$$

con lo cual

$$\begin{aligned} b_\gamma(z, w) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t}(t^2 - d_M^2((z, w), \gamma(t))) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t}(t^2 - d_N^2(z, x_0) - d_{\mathbb{R}^k}^2(w, ty'(0) + y_0)) \\ &= b_y(w). \end{aligned}$$

Lema 2.12. Si M tiene $\text{Ric}(M) \geq 0$ y γ es un rayo entonces $\Delta b_\gamma \geq 0$ en el sentido débil.

Demostración. Para $p \in M$ construiremos una función soporte de b_γ en p . Sea $\tilde{\gamma}$ rayo asintótico en p . Afirmamos que $b_{\tilde{\gamma}}(x) + b_\gamma(p)$ es una función soporte, es inmediato que $b_{\tilde{\gamma}}(p) + b_\gamma(p) = b_\gamma(p)$. Como $\tilde{\gamma}$ es un rayo $d_M(\tilde{\gamma})(t, -)$ es suave en p , por lo que sigue siéndolo en una vecindad.

$$\begin{aligned} b_{\tilde{\gamma}}(x) &= \lim_{R \rightarrow \infty} R - d_M(x, \tilde{\gamma}(R)) \\ &\leq \lim_{R \rightarrow \infty} R - d_M(x, \gamma(s)) + d_M(\tilde{\gamma}(R), \gamma(s)) \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} R + s - d_M(x, \gamma(s)) - s + d_M(\tilde{\gamma}(R), \gamma(s)) \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} R + b_s^\gamma(x) - b_s^\gamma(\tilde{\gamma}(R)). \end{aligned}$$

Haciendo $s \rightarrow \infty$

$$b_{\tilde{\gamma}}(x) \leq \lim_{R \rightarrow \infty} (R + b_{\gamma}(x) - b_{\gamma}(\tilde{\gamma}(R))).$$

Luego si σ_i son los segmentos usados para construir $\tilde{\gamma}$,

$$\begin{aligned} b_{\gamma}(p) &= \lim_{i \rightarrow \infty} t_i - d_M(p, \gamma(t_i)) \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} t_i - d_M(p, \sigma_i(R)) - d_M(\sigma_i(R), \gamma(t_i)) \\ &= -d_M(p, \tilde{\gamma}(R)) + \lim_{i \rightarrow \infty} t_i - d_M(\sigma_i(R), \gamma(t_i)) \\ &= -d_M(p, \tilde{\gamma}(R)) + b_{\gamma}(\tilde{\gamma}(R)) \\ &= -R + b_{\gamma}(\tilde{\gamma}(R)). \end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned} b_{\tilde{\gamma}}(x) + b_{\gamma}(p) &\leq \lim_{R \rightarrow \infty} R + b_{\gamma}(x) - b_{\gamma}(\tilde{\gamma}(R)) - R + b_{\gamma}(\tilde{\gamma}(R)) \\ &= b_{\gamma}(x). \end{aligned}$$

De manera análoga $b_t^{\tilde{\gamma}}(x) + b_{\gamma}(p)$ es una función soporte para b_{γ} en p . Finalmente,

$$\Delta \left(b_t^{\tilde{\gamma}}(x) + b_{\gamma}(p) \right) = \Delta (t - d_M(x, \tilde{\gamma}(t))) = -\Delta d_M(x, \tilde{\gamma}(t)) \geq -\frac{n-1}{d_M(x, \tilde{\gamma}(t))}.$$

Luego como $\lim_{t \rightarrow \infty} -\frac{n-1}{d_M(x, \tilde{\gamma}(t))} = 0$, entonces dado $\epsilon > 0$

$$\Delta \left(b_t^{\tilde{\gamma}}(x) + b_{\gamma}(p) \right) \geq 0 - \epsilon,$$

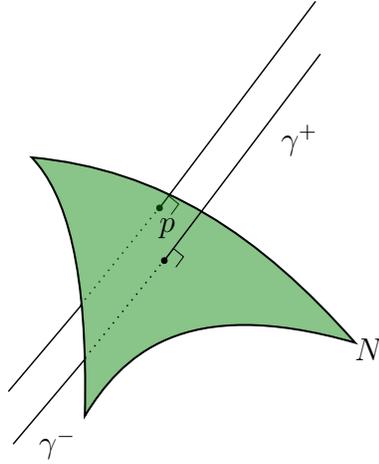
lo cual concluye la demostración. \square

2.3. El teorema de escisión

Para probar el teorema principal de esta sección necesitaremos de algunos lemas que nos den información de cómo se comporta la función de Busemann asociada a una línea.

Lema 2.13. *Sea M una variedad con $\text{Ric}(M) \geq 0$ y γ una línea en M . Luego γ define dos rayos γ^+ y γ^- . Sean b^+ y b^- las funciones de Busemann correspondientes. Entonces*

1. $b^+ + b^- \equiv 0$ en M .
2. b^+ y b^- son de clase C^∞ .
3. Dado $p \in M$ existe una única línea que pasa por p y es perpendicular a $N := \{x \in M \mid b^+(x) = 0\}$. Además dicha línea consiste de rayos asintóticos.



Demostración. 1. Sea $x \in M$.

$$\begin{aligned}
 b^+(x) + b^-(x) &= \lim_{R \rightarrow \infty} R - d_M(x, \gamma^+(R)) + \lim_{R \rightarrow \infty} R - d_M(x, \gamma^-(R)) \\
 &= \lim_{R \rightarrow \infty} 2R - d_M(x, \gamma^+(R)) - d_M(x, \gamma^-(R)) \\
 &\leq 2R - d_M(\gamma^+(R), \gamma^-(R)) = 0.
 \end{aligned}$$

Además como $b^+(\gamma(0)) + b^-(\gamma(0)) = 0$, se tiene que 0 es un máximo global. Por el lema (2.12) $\Delta(b^+ + b^-) \geq 0$. Por el principio del máximo (2.4) $b^+ + b^- \equiv 0$.

2. Observamos que $b^+ = -b^-$ y entonces

$$0 \leq \Delta b^+ = -\Delta b^- \leq 0.$$

$\Rightarrow \Delta b^+ = \Delta b^- = 0$. Por regularidad (2.5) son de clase C^∞ .

3. Sea $p \in M$ luego en p consideramos los rayos asintóticos $\tilde{\gamma}^+$ y $\tilde{\gamma}^-$. Veamos primero que $\tilde{\gamma}^+ \cup \tilde{\gamma}^-$ forman una línea. Para todo R ,

$$\begin{aligned} d_M(\tilde{\gamma}^+(s), \tilde{\gamma}^-(t)) &\geq |d_M(\tilde{\gamma}^-(t), \gamma^+(R)) - d_M(\tilde{\gamma}^+(s), \gamma^+(R))| \\ &= | (R - d_M(\tilde{\gamma}^+(s), \gamma^+(R))) \\ &\quad - (R - d_M(\tilde{\gamma}^-(t), \gamma^+(R))) | \end{aligned}$$

Al tomar el límite cuando $R \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} d_M(\tilde{\gamma}^+(s), \tilde{\gamma}^-(t)) &\geq |b^+(\tilde{\gamma}^+(s)) - b^+(\tilde{\gamma}^-(t))| \\ &= |b^+(\tilde{\gamma}^+(s)) + b^-(\tilde{\gamma}^-(t))| \\ &\geq |b^+(\tilde{\gamma}^+(s)) + b^+(p) + b^-(\tilde{\gamma}^-(t)) - b^-(p)| = |s + t|. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\tilde{\gamma}^+ \cup \tilde{\gamma}^-$ forman una línea.

Como $\tilde{b}^+(x) + b^+(p) \leq b^+(x) \Rightarrow -(\tilde{b}^+(x) + b^+(p)) \geq -b^+(x)$, pero $\tilde{b}^+ = -\tilde{b}^-$ y $b^+ = -b^-$. Entonces $\tilde{b}^-(x) + b^-(p) \geq b^-(x)$, por otro lado ya teníamos que $\tilde{b}^-(x) + b^-(p) \leq b^-(x)$.

$$\tilde{b}^-(x) + b^-(p) = b^-(x).$$

Por lo tanto los conjuntos de nivel de b^+ son los mismos que los de \tilde{b}^+ .

Por 2 tenemos que b^+ es de clase C^∞ , la fórmula de Bochner (2.1) nos dice

$$\frac{1}{2}\Delta|\nabla b^+|^2 = \|\text{Hess } b^+\|^2 + \langle \nabla b^+, \nabla(\Delta b^+) \rangle + \text{Ric}(\nabla b^+, \nabla b^+)$$

Recordemos que b^+ es 1-Lipschitz, por lo tanto $|\nabla b^+|^2 \leq 1$. Entonces $\|\text{Hess } b^+\|^2 = 0$.

$$\Rightarrow \langle \nabla_{e_i} \nabla b^+, e_j \rangle = 0 \Rightarrow \nabla b^+ \text{ es paralelo.} \quad (2.3)$$

Entonces $|\nabla b^+|$ es constante, luego $b^+(\gamma(t)) = d_M(\gamma(0), \gamma(t))$. Por lo tanto $|\nabla b^+|^2 = 1$. Así tenemos que N es una hipersuperficie y las líneas definidas anteriormente son perpendiculares a ésta. \square

Teorema 2.14 (Cheeger-Gromoll [14]). *Sea M^n completa, no compacta y con $\text{Ric}(M) \geq 0$. Entonces M es isométrica al producto riemanniano $N^{n-k} \times \mathbb{R}^k$, donde N^{n-k} no tiene líneas y \mathbb{R}^k tiene la métrica usual.*

Demostración. El teorema se sigue por inducción sobre el número de líneas en M . Sea $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$ línea, por los resultados anteriores tenemos que b^+ es suave y $N := (b^+)^{-1}(0)$ es una hipersuperficie. Notamos que $\text{Hess}(b^+) = II$ es la segunda forma fundamental de N , como $\|\text{Hess}(b^+)\|^2 = 0$ se tiene que N es totalmente geodésica.

Definimos $\varphi : N \times \mathbb{R} \rightarrow M$ como $\varphi(p, t) = \exp_p(t\gamma'_p(0))$, donde γ_p es la línea que pasa por p y es perpendicular a N . Por existencia y unicidad de γ_p , φ es biyectiva, como \exp_p es difeomorfismo local se sigue que φ es difeomorfismo.

Veamos ahora que φ es isometría. Recordemos que por la ecuación (2.3) tenemos que ∇b^+ es paralelo así que si $X \in \Gamma(TN)$ tal que $[X, \nabla b^+] = 0$,

$$R(\nabla b^+, X)\nabla b^+ = \nabla_{\nabla b^+}\nabla_X\nabla b^+ - \nabla_X\nabla_{\nabla b^+}\nabla b^+ = 0.$$

Sea $J(t) = \varphi_*(X) = \frac{d}{ds}(\varphi(c(s)))|_{s=t}$, donde $c : (t - \epsilon, t + \epsilon) \rightarrow N$ es una geodésica tal que $c'(t) = X$. Notamos que $J(t)$ se obtiene a partir de una variación por geodésicas, por lo tanto es de Jacobi con $J'' = 0$ y $J \perp \nabla b^+$. Entonces J es constante y $|\varphi_*(X)| = |X|$. Por lo tanto φ es isometría. \square

Capítulo 3

Lazos a infinito

En este capítulo definiremos la propiedad de los lazos a infinito la cual nos ayudará a describir de manera más fácil a las variedades no compactas con curvatura de Ricci no negativa.

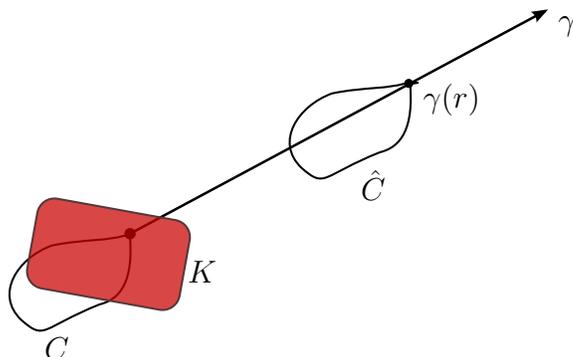
3.1. Lazos a infinito

Definición 3.1. *Dados un rayo γ y un lazo $C : [0, L] \rightarrow M$ basados en $\gamma(0)$ decimos que un lazo $\hat{C} : [0, L] \rightarrow M$ es homotópico a C a lo largo de γ si existe $r > 0$ con $\hat{C}(0) = \hat{C}(L) = \gamma(r)$ tal que el lazo construido al unir γ de $\gamma(0)$ a $\gamma(r)$ con \hat{C} para después regresar por γ de $\gamma(r)$ a $\gamma(0)$ es homotópico a C .*

Definición 3.2. *Un elemento $g \in \pi_1(M, \gamma(0))$ tiene la propiedad de los lazos (geodésicos) a infinito a lo largo de γ si dado cualquier compacto $K \subset M$ existe un lazo (geodésico) \hat{C} contenido en $M \setminus K$ el cual es homotópico a lo largo de γ a un lazo (geodésico) C con $[C] = g$.*

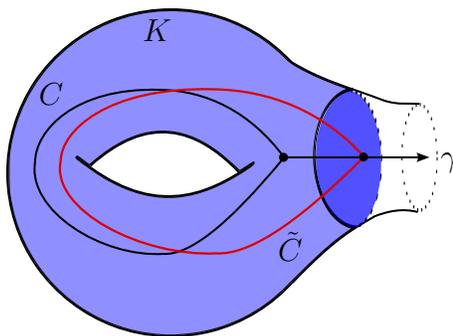
Intuitivamente M cumple la propiedad de los lazos a infinito a lo largo de un rayo basado en p si dado un lazo basado en p podemos deslizarlo hacia infinito a lo largo del rayo.

Ejemplo 3.3. *Si $M := N \times \mathbb{R}^k$ y consideramos el rayo $\gamma(t) := (x_0, ty'_0 + y_0)$, entonces para cualquier lazo $C(t) = (x(t), y(t))$ tenemos la propiedad de los lazos a infinito a lo largo de γ . Sea $K \subset M$ compacto, como M es completa existe $r > 0$ tal que $K \subset B_{x_0}(r)$. Tomamos $s > r$ y el lazo $\tilde{C}(t) := (x(t), y(t) + s)$ es homotópico a C a lo largo de γ .*

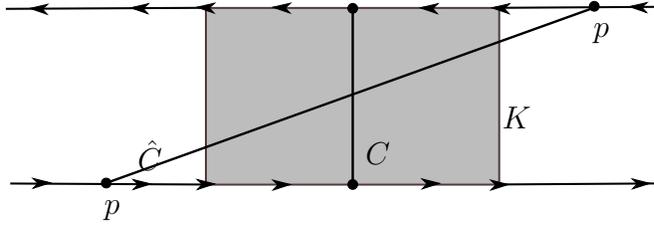


Definición 3.4. M tiene la propiedad de los lazos (geodésicos) a infinito si dado cualquier rayo γ y cualquier $g \in \pi_1(M, \gamma(0))$, g tiene la propiedad de los lazos (geodésicos) a infinito a lo largo de γ .

Ejemplo 3.5. Consideremos $M := T^2 - \text{cl}(D^2)$, el toro menos un disco cerrado, con una métrica que lo haga completo. Sea γ un rayo basado en $\gamma(0)$ y $g \in \pi_1(M, \gamma(0))$ no contraíble. Entonces g no cumple la propiedad de los lazos a infinito a lo largo de γ pues si tomamos K compacto tal que $K \approx T^2 - \text{int}(D^2)$ y C un lazo que representa a g tenemos que todo lazo \tilde{C} que sea homotópico a C a lo largo de γ forzosamente interseca a K .



Ejemplo 3.6. La banda de Möbius $\mathbb{M} := \mathbb{R} \times [0, 1] / \sim$ tampoco cumple la propiedad de los lazos a infinito pues si tomamos el rayo $\gamma(t) = (t, [0])$, el lazo $C(t) = (0, t)$ basado en $\gamma(0)$ y el compacto $K = [-1, 1] \times [0, 1] / \sim$, entonces cualquier lazo \tilde{C} que sea homotópico a lo largo de γ a C necesariamente interseca a K .



3.2. Teoremas de la línea y de la cubierta doble

Para los siguientes resultados usaremos el **cubriente universal riemanniano** de una variedad M . Lo denotaremos por $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$. La ventaja de trabajar en él es que hereda las propiedades del espacio base tales como completéz y cotas de curvatura. Además tenemos que $\pi_1(\tilde{M}) = \{e\}$ y que el grupo de transformaciones de cubierta Γ es isomorfo a $\pi_1(M)$.

Teorema 3.7 (Teorema de la línea). *Si M es una variedad completa no compacta que no satisface la propiedad de los lazos geodésicos a infinito entonces hay una línea en su cubriente universal.*

Demostración. Sea $\gamma : [0, \infty) \rightarrow M$ un rayo, $x_0 := \gamma(0)$, y $g \in \pi_1(M, x_0)$ tal que g no satisface la propiedad de los lazos geodésicos a infinito. Tomamos un lazo geodésico $C : [0, L] \rightarrow M$ basado en x_0 tal que $[C] = g$.

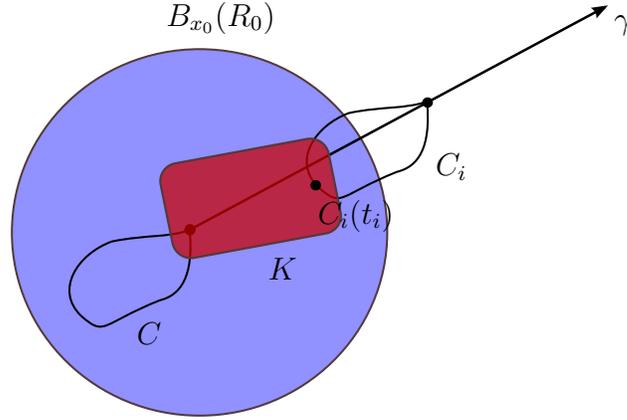
Luego existe un compacto $K \subset M$ para el cual ningún lazo geodésico contenido en $M \setminus K$ es homotópico a C a lo largo de γ . Al ser M completa existe $R_0 > 0$ tal que $K \cup C \subset B_{x_0}(R_0)$. Observamos que para toda $r > R_0$, cualquier lazo geodésico basado en $\gamma(r)$ que sea homotópico a C a lo largo de γ debe intersectar a K .

Sea $\{r_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ con $r_i > R_0$ y $\lim_{i \rightarrow \infty} r_i = \infty$.

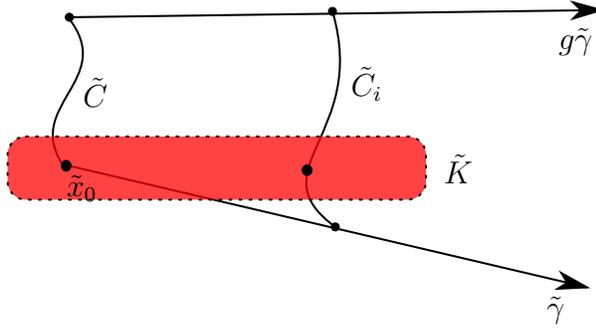
En $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$, la cubierta universal de M , tomamos \tilde{C} el levantamiento de C con extremos \tilde{x}_0 y $g\tilde{x}_0$. Hacemos notar que g debe ser distinto de la identidad. Ahora consideramos los levantamientos $\tilde{\gamma}$ y $g\tilde{\gamma}$ del rayo γ que parten de \tilde{x}_0 y $g\tilde{x}_0$ respectivamente.

Al ser M completa su cubriente universal hereda esta propiedad y podemos así tomar para cada $i \in \mathbb{N}$ la geodésica mínima \tilde{C}_i que una $\tilde{\gamma}(r_i)$ con $g\tilde{\gamma}(r_i)$. Entonces $C_i := \pi(\tilde{C}_i)$ es homotópico a lo largo de γ a C .

Por lo tanto, por la observación hecha al principio de esta prueba, existe t_i tal que $C_i(t_i) \in K$. Definimos $\mathcal{L}_i := \mathcal{L}(\tilde{C}_i) = \mathcal{L}(C_i) = d_{\tilde{M}}(\tilde{\gamma}(r_i), g\tilde{\gamma}(r_i))$.



En \tilde{M} tomamos el levantamiento de K a un dominio fundamental, lo denotaremos por \tilde{K} y pediremos además que $\tilde{x}_0 \in \tilde{K}$. Afirmamos que \tilde{K} es precompacto. Sea $\{p_i\}_{i=1}^\infty \subset \tilde{K}$ luego $\{\pi(p_i)\}_{i=1}^\infty \subset K$, como K es compacto existe una subsucesión que converge a un $p \in K$ el cual levantamos a $cl(\tilde{K})$.



Como la acción de $\pi_1(M, x_0)$ es transitiva tenemos que para toda $i \in \mathbb{N}$ existe $g_i \in \pi_1(M, x_0)$ tal que $g_i \tilde{C}_i(t_i) \in \tilde{K}$. Hecho esto notamos que

$$t_i = d_{\tilde{M}}(\tilde{\gamma}(r_i), \tilde{C}_i(t_i)) \geq d_M(\gamma(r_i), C_i(t_i)) \geq d_M(\gamma(r_i), K) \geq r_i - R_0$$

lo que implica que

$$t_i - (r_i - R_0) \geq 0.$$

Además,

$$\mathcal{L}_i - t_i = d_{\tilde{M}}(g\tilde{\gamma}(r_i), \tilde{C}_i(t_i)) \geq d_M(\gamma(r_i), C_i(t_i)) \geq r_i - R_0$$

lo que implica

$$\mathcal{L}_i \geq t_i + (r_i - R_0). \quad (3.1)$$

De lo anterior se sigue que $[t_i - (r_i - R_0), t_i + (r_i - R_0)] \subset [0, \mathcal{L}_i]$. Por lo tanto $g_i \tilde{C}_i : [t_i - (r_i - R_0), t_i + (r_i - R_0)] \rightarrow \tilde{M}$ es un segmento.

Entonces $\{g_i \tilde{C}_i\}_{i=1}^\infty$ es una sucesión de segmentos tales que $r_i \rightarrow \infty$, y $\{g_i \tilde{C}_i(t_i)\}_{i=1}^\infty \subset cl(\tilde{K})$. Por lo cual convergen a una geodésica $\gamma_\infty(t) := \exp_{\gamma_\infty(0)}(t\gamma'_\infty(0))$. Además tenemos que $g_i \tilde{C}_i(t_i) \rightarrow \gamma_\infty(0)$ cuando $i \rightarrow \infty$ y $g_i \tilde{C}'_i(t_i) \rightarrow \gamma'_\infty(0)$ tal que $|\gamma'_\infty(0)| = 1$.

Por lo tanto la geodésica $\gamma_\infty(t)$ es una línea pues cada $g_i \tilde{C}_i(t) = \exp_{g_i \tilde{C}_i(t_i)}(tg_{i*} \tilde{C}'_i(t_i))$ y $\exp : T\tilde{M} \rightarrow \tilde{M}$ es suave, entonces

$$d_{\tilde{M}}(\gamma_\infty(t), \gamma_\infty(s)) = \lim_{i \rightarrow \infty} d_{\tilde{M}}(g_i \tilde{C}_i(t), g_i \tilde{C}_i(s)) = |t - s|.$$

para todo $s, t \in \mathbb{R}$. □

Aunque no será necesaria inmediatamente, vale la pena hacer una observación acerca de las curvas $\tilde{C}_i : [0, \mathcal{L}_i] \rightarrow \tilde{M}$ definidas en el teorema anterior y la sucesión $\{r_i\}_{i=1}^\infty \subset \mathbb{R}$. Por (3.1) tenemos que $\mathcal{L}_i = \mathcal{L}_i - t_i + t_i \geq 2(r_i - R_0)$. Además

$$\begin{aligned} d_{\tilde{M}}(\tilde{\gamma}(r_i), g\tilde{\gamma}(r_i)) &= \mathcal{L}_i \leq d_{\tilde{M}}(\tilde{\gamma}(0), g\tilde{\gamma}(r_i)) \\ &\leq d_{\tilde{M}}(\tilde{\gamma}(r_i), \tilde{\gamma}(0)) + d_{\tilde{M}}(\tilde{\gamma}(0), g\tilde{\gamma}(0)) \\ &\quad + d_{\tilde{M}}(g\tilde{\gamma}(0), g\tilde{\gamma}(r_i)) \\ &= 2r_i + d_{\tilde{M}}(\tilde{\gamma}(0), g\tilde{\gamma}(0)). \end{aligned}$$

Entonces

$$\frac{2(r_i - R_0)}{r_i} \leq \frac{\mathcal{L}_i}{r_i} \leq \frac{2r_i}{r_i} + \frac{d_{\tilde{M}}(\tilde{\gamma}(0), g\tilde{\gamma}(0))}{r_i}.$$

Tomamos el límite cuando $i \rightarrow \infty$ y obtenemos

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{L}_i}{r_i} = 2. \quad (3.2)$$

Teorema 3.8. *Si M es completa no compacta con $\text{Ric}(M) \geq 0$ y tal que existe $y \in M$ con $\text{Ric}(y) > 0$ entonces M tiene la propiedad de los lazos geodésicos a infinito.*

Demostración. Supongamos que M no cumple la propiedad de los lazos geodésicos a infinito. Por el teorema anterior (3.7) tenemos que su cubriente universal \tilde{M} tiene una línea, como M tiene curvatura de Ricci no negativa y $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$ es localmente una isometría se sigue que \tilde{M} también tiene curvatura de Ricci no negativa. De igual manera \tilde{M} es completa.

Por el teorema de Cheeger-Gromoll (2.14) \tilde{M} es isométrica a un producto riemanniano $\tilde{N}^{n-k} \times \mathbb{R}^k$. Luego la conexión de Levi-Civita de \tilde{M} es $\nabla^{\tilde{M}} = \nabla^{\tilde{N}} + D$, de donde es claro que $R^{\tilde{M}}|_{\Gamma(T\tilde{N})} = R^{\tilde{N}}$ y $Ric^{\tilde{M}}|_{\Gamma(T\tilde{N})} = Ric^{\tilde{N}}$.

Consideremos $\pi^{-1}(y) \in \tilde{M}$ y cualquier campo vectorial $\partial_t \in \Gamma(T\tilde{M})$ en una dirección euclidiana, entonces $Ric^{\tilde{M}}(\pi^{-1}(y))(\partial_t, \partial_t) = 0$. Pero esto es una contradicción pues por hipótesis $Ric(y) > 0$. \square

Proposición 3.9. *Sea M variedad no compacta, completa con $Ric(M) \geq 0$ y supongamos que existe un elemento $g \in \pi_1(M)$ que no satisface la propiedad de los lazos geodésicos a infinito a lo largo de un rayo γ , entonces la cubierta universal \tilde{M} es isométrica a un producto riemanniano $N^{n-k} \times \mathbb{R}^k$. Además el levantamiento de γ al cubriente es:*

$$\tilde{\gamma}(t) = (x_0, y(t)) \quad (3.3)$$

y

$$g_*(\tilde{\gamma}'(t)) = -\tilde{\gamma}'(t). \quad (3.4)$$

Demostración. Sea $g \in \pi_1(M)$ para el cual el rayo γ no cumple la propiedad de los lazos geodésicos a infinito. Por el teorema de la línea (3.7) el levantamiento de γ a \tilde{M} , denotado por $\tilde{\gamma}$, es una línea. Por el teorema de Cheeger-Gromoll (2.14) $\tilde{M} \approx \tilde{N}^{n-k} \times \mathbb{R}^k$. Sean $\tilde{C}_i : [0, \mathcal{L}_i] \rightarrow \tilde{M}$ segmentos con extremos $\tilde{\gamma}(r_i)$, $g\tilde{\gamma}(r_i)$ y $\mathcal{L}_i := \mathcal{L}(\tilde{C})$ como los que usamos en la prueba del teorema de la línea. Por la observación (3.2) sabemos que sus longitudes crecen como $2r_i$.

Sean $x_i(t) := \text{proy}_{\tilde{N}}(\tilde{C}_i(t))$ y $y_i(t) := \text{proy}_{\mathbb{R}^k}(\tilde{C}_i(t))$ las proyecciones en los factores de \tilde{M} . Como \tilde{C}_i son segmentos entonces x_i y y_i también lo son en sus respectivos espacios. Notemos que puede suceder que alguna de las proyecciones sea una curva constante.

Puesto que $y_i(t)$ es segmento en \mathbb{R}^k podemos escribirlo como

$$y_i(t) = y_i'(t_i)(t - t_i) + y_i(t_i), \quad (3.5)$$

donde tomamos $t_i \in (0, \mathcal{L}_i)$ como en el teorema de la línea. Notemos que las geodésicas están parametrizadas proporcionalmente a la longitud de arco

así que $|x'_i(t)| = |x'_i(t_i)|$ y $|y'_i(t)| = |y'_i(t_i)|$. Como \tilde{C}_i son segmentos que están parametrizados por longitud de arco,

$$|x'_i(t_i)|^2 + |y'_i(t_i)|^2 = |\tilde{C}'_i(t_i)|^2 = 1. \quad (3.6)$$

De manera análoga al teorema de la línea sabemos que para todo i existe $g_i \in \pi_1(M, x_0)$ tal que $g_i \tilde{C}_i(t_i) \in \tilde{K}$, donde \tilde{K} es el levantamiento de un compacto K a un dominio fundamental. Además la línea es $\gamma_\infty(t) = \exp_{\gamma_\infty(0)}(t\gamma'_\infty(0))$.

Definimos $x_\infty(t) := \text{proy}_{\tilde{N}}(\gamma_\infty(t))$ y $y_\infty(t) := \text{proy}_{\mathbb{R}^k}(\gamma_\infty(t))$, las cuales deben ser líneas o alguna de ellas es constante. Por el teorema de escisión de Cheeger-Gromoll \tilde{N} ya no tiene líneas lo cual implica que x_∞ debe ser constante. Entonces $|y'_\infty(0)| = |\gamma'_\infty(0)| = 1$.

Luego cada $g_i \in \Gamma$, es una isometría con lo cual $\text{proy}_{\tilde{N}}(g_i)$ es una isometría. Por lo tanto

$$\lim_{i \rightarrow \infty} |x'_i(t_i)| = \lim_{i \rightarrow \infty} |g_{i*} x'_i(t_i)| = 0 = |x'_\infty(0)| \quad (3.7)$$

y

$$\lim_{i \rightarrow \infty} |y'_i(t_i)| = \lim_{i \rightarrow \infty} |g_{i*} y'_i(t_i)| = 1 = |y'_\infty(0)|. \quad (3.8)$$

Sea $\tilde{\gamma}$ el levantamiento del rayo γ . Definimos $x(t) = \text{proy}_{\tilde{N}}(\tilde{\gamma})$, $y(t) = \text{proy}_{\mathbb{R}^k}(\tilde{\gamma})$. Es claro que x_i y y_i son segmentos con extremos $x(r_i)$, $gx(r_i)$; $y_i(r_i)$, $gy(r_i)$ respectivamente. Así obtenemos

$$d_{\mathbb{R}^k}(y(r_i), gy(r_i)) = \mathcal{L}(\text{proy}_{\mathbb{R}^k}(\tilde{C}_i)) = \mathcal{L}_i |y'_i(t_i)|.$$

Esto implica que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{d_{\mathbb{R}^k}(y(r_i), gy(r_i))}{\mathcal{L}_i} = 1. \quad (3.9)$$

Como $y(t)$ es segmento en \mathbb{R}^k tenemos que $y(t) = ty'(0) + y(0)$. Puesto que g actúa por isometrías, $gy(t)$ es un segmento, más aún $gy(t) = g_* y'(t)t + gy(0)$. Por tanto,

$$\begin{aligned} \frac{d_{\mathbb{R}^k}(y(r_i), gy(r_i))}{\mathcal{L}_i} &= \frac{|y'(0)r_i + y(0) - g_* y'(0)r_i - gy(0)|}{\mathcal{L}_i} \\ &\leq \frac{|y'(0) - g_* y'(0)|r_i + |y(0) + gy(0)|}{\mathcal{L}_i} \end{aligned}$$

Notamos que $|y'(0) - g_*y'(0)| \leq |y'(0)| + |g_*y'(0)| \leq 2$, con lo cual por (3.9) y (3.2),

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{|y'(0)r_i + y(0) - g_*y'(0)r_i - gy(0)|}{\mathcal{L}_i} = 1 \quad (3.10)$$

Gracias a esto tenemos que $|y'(0) - g_*y'(0)| \neq 0$, entonces $y'(0) \neq 0$ y $\tilde{\gamma}$ tiene una componente en la dirección euclidiana. Además $|y'(0) - g_*y'(0)| = 2$ y $|y'(0)| = 1$.

Por lo tanto $\tilde{\gamma}(t) = (x_0, y(t))$.

Finalmente para $g \in \pi_1(M, x_0)$ que no cumple la propiedad de los lazos geodésicos a infinito

$$2 = |y'(0) - g_*y'(0)| = |y'(0)| + |g_*(0)| = 2,$$

lo cual implica que son colineales y como $|y'(0) - g_*y'(0)| \neq 0$. Entonces $g_*\tilde{\gamma}'(0) = -\tilde{\gamma}'(0)$. \square

Corolario 3.10. *Si M es completa, no compacta con $\text{Ric}(M) \geq 0$ y $g \in \pi_1(M)$, entonces g o g^2 tienen la propiedad de los lazos geodésicos a infinito.*

Demostración. Sea γ rayo con levantamiento $\tilde{\gamma}$. Supongamos que g y g^2 no cumplen la propiedad de los lazos geodésicos a infinito. Por la proposición anterior tenemos que

$$g_*(\tilde{\gamma}'(t)) = -\tilde{\gamma}'(t) = g_*^2(\tilde{\gamma}'(t)).$$

Por otro lado $g_*(\tilde{\gamma}'(t)) = -\tilde{\gamma}'(t) \Rightarrow g_*^2(\tilde{\gamma}'(t)) = g_*(-\tilde{\gamma}'(t)) \Rightarrow \tilde{\gamma}'(t) = -\tilde{\gamma}'(t)$. Lo cual es una contradicción. \square

Lema 3.11. *Si $\tilde{\gamma}$ es el levantamiento a \tilde{M} de un rayo γ entonces para toda transformación de cubierta g tenemos*

$$b_{\tilde{\gamma}}(g\tilde{\gamma}(a)) \leq a, \quad a \in [0, \infty). \quad (3.11)$$

Demostración. Observemos que $\tilde{\gamma}$ es un rayo en \tilde{M} , de modo que está bien definida la función de Busemann $b_{\tilde{\gamma}}$. Sea $x \in \tilde{M}$, luego para toda $g \in \Gamma$ y $R \in [0, \infty)$ tenemos que $d_{\tilde{M}}(gx, \tilde{\gamma}(R)) \geq d_M(\pi(x), \gamma(R))$. Restamos R de cada lado de la desigualdad

$$d_{\tilde{M}}(gx, \tilde{\gamma}(R)) - R \geq d_M(\pi(x), \gamma(R)) - R.$$

Tomamos el límite cuando $R \rightarrow \infty$.

$$-b_{\tilde{\gamma}}(gx) \geq -b_{\gamma}(\pi(x)).$$

El resultado se sigue al tomar $x = \tilde{\gamma}(a)$, $a \in [0, \infty)$. \square

Teorema 3.12 (Teorema de la doble cubierta). *Sea M completa, no compacta, $\text{Ric}(M) \geq 0$. Supongamos que existe un elemento $g \in \pi_1(M)$ que no cumple la propiedad de los lazos a infinito a lo largo de un rayo γ . Entonces todo elemento $h \in \pi_1(M, \gamma(0))$ satisface*

$$h_*(\tilde{\gamma}'(t)) = \pm \tilde{\gamma}'(t). \quad (3.12)$$

Además M tiene una cubierta doble que levanta γ a una línea.

Demostración. Sea \tilde{M} la cubierta universal de M . Podemos aplicar la proposición (3.9) para obtener que γ se levanta a $\tilde{\gamma}$ en la dirección euclidiana y además $g_*\tilde{\gamma}'(0) = -\tilde{\gamma}'(0)$. Como el rayo $\tilde{\gamma} : [0, \infty) \rightarrow \tilde{M}$ yace completamente en la dirección euclidiana podemos extenderlo a una línea.

Luego si $\gamma = \pi \circ \tilde{\gamma}$ es una línea tenemos que M cumple las condiciones del teorema de Cheeger-Gromoll y por lo tanto $M \approx N^{n-l} \times \mathbb{R}^l$. Entonces M tendría que cumplir la propiedad de los lazos geodésicos a infinito. Esto contradice nuestras hipótesis y por lo tanto concluimos que $\tilde{\gamma}$ no se proyecta a una línea.

Supongamos que existe $h \in \pi_1(M)$ tal que

$$h_*(\tilde{\gamma}'(0)) \neq -\tilde{\gamma}'(0), \quad h_*(\tilde{\gamma}'(0)) \neq \tilde{\gamma}'(0).$$

Luego h cumple la propiedad de los lazos geodésicos a infinito, es decir, para todo $R > 0$ existe $r > R$ tal que el segmento η de longitud ℓ con extremos $\tilde{\gamma}(r)$, $h\tilde{\gamma}(r)$ satisface

$$\pi(\eta([0, \ell])) \cap B_{\gamma(0)}(R) = \emptyset. \quad (3.13)$$

Como h es una isometría entonces $h_* \in O(n)$ lo cual implica que

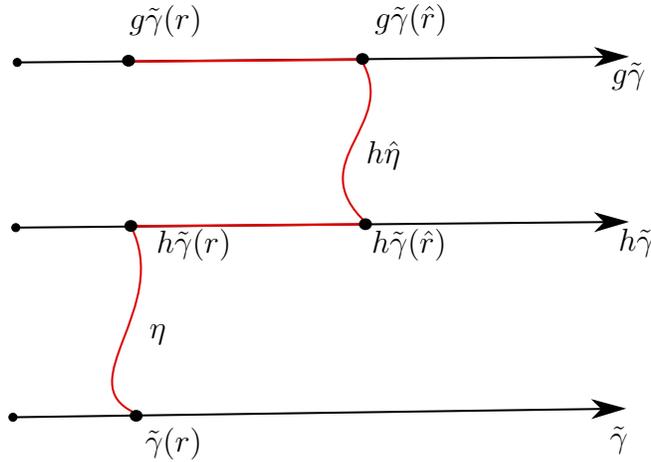
$$(h^{-1}g)_*\tilde{\gamma}'(0) = h_*^{-1}(-\tilde{\gamma}'(0)) = -h_*^{-1}(\tilde{\gamma}'(0)) \neq -\tilde{\gamma}'(0).$$

Por lo tanto $h^{-1}g$ cumple la propiedad de los lazos geodésicos a infinito. Entonces existe $\hat{r} > R$ tal que el segmento $\hat{\eta}$ de longitud $\hat{\ell}$ con extremos $\tilde{\gamma}(\hat{r})$ y $h^{-1}g\tilde{\gamma}(\hat{r})$ satisface

$$\pi \left(\hat{\eta}([0, \hat{\ell}]) \right) \cap B_{\gamma(0)}(R) = \emptyset. \quad (3.14)$$

Notamos que h está en el grupo de transformaciones de cubierta y por lo tanto $h\hat{\eta}$ es un segmento con extremos $h\tilde{\gamma}(r)$ y $g\tilde{\gamma}(r)$. Afirmamos que el conjunto $\pi \left(h\hat{\eta}([0, \hat{\ell}]) \right) \cap B_{\gamma(0)}(R)$ es vacío. Supongamos que p_0 pertenece allí, entonces $\pi(h^{-1}\pi^{-1}(p_0))$ está en el conjunto del lado izquierdo de (3.14) lo cual es una contradicción.

Consideremos una curva $\tilde{s} : [0, \ell + \hat{\ell} + 2|r - \hat{r}|] \rightarrow \tilde{M}$ con extremos $\tilde{\gamma}(r)$ y $g\tilde{\gamma}(r)$. Esta curva \tilde{s} se construye de la siguiente forma: Primero recorre η de $\tilde{\gamma}(r)$ a $h\tilde{\gamma}(r)$, entonces sigue a lo largo de $h\tilde{\gamma}$ desde $h\tilde{\gamma}(r)$ hasta $h\tilde{\gamma}(\hat{r})$. Posteriormente continúa a lo largo de $h\hat{\eta}$ empezando por $h\tilde{\gamma}(\hat{r})$ hasta llegar a $g\tilde{\gamma}(\hat{r})$. Finalmente en $g\tilde{\gamma}$ va de $g\tilde{\gamma}(\hat{r})$ a $g\tilde{\gamma}(r)$.



Entonces la curva $s(t) := \pi(\tilde{s}(t))$ no interseca a $B_{\gamma(0)}(R)$ y es homotópica a cualquier lazo basado en $\gamma(0)$ que representa a g . Esto es una contradicción y por lo tanto se sigue (3.12).

Ahora sólo falta construir la cubierta doble. Para esto definimos:

$$H := \{h \in \pi_1(M, \gamma(0)) \mid h_*(\tilde{\gamma}'(0)) = \tilde{\gamma}'(0)\}.$$

Observamos que H es un subgrupo normal de $\pi_1(M, \gamma(0))$ que además cumple $\pi_1(M, \gamma(0))/H = \{[e], [g]\}$. Por lo tanto existe una cubierta doble $\hat{M} := \tilde{M}/H$ de M . Sea $\pi_H : M \rightarrow \hat{M}$ la identificación. Probaremos que $\pi_H(\tilde{\gamma})$ es una línea.

Supongamos que existe $s > 0$ tal que $d_{\tilde{M}}(\pi_H(\tilde{\gamma})(-s), \pi_H(\tilde{\gamma})(s)) < 2s$. Entonces existe $\bar{h} \in H$ tal que $d_{\tilde{M}}(\bar{h}\tilde{\gamma}(-s), \tilde{\gamma}(s)) < 2s$. Definimos $(\bar{x}, \bar{y}) := \bar{h}\tilde{\gamma}(0)$. Por el lema (3.11) tenemos que

$$b_{\tilde{\gamma}}((\bar{x}, \bar{y})) \leq b_{\tilde{\gamma}}(\tilde{\gamma}(0)). \quad (3.15)$$

Recordemos que $\tilde{M} \approx \tilde{N} \times \mathbb{R}^k$ y $\tilde{\gamma}$ yace en una direcci3n euclidiana, es decir, $\tilde{\gamma}(t) := (x(0), y(t)) = (x(0), y'(0)t + y(0))$.

Cuando definimos funciones de Busemann asociadas a un rayo pudimos observar en los ejemplos (2.10) y (2.11) que $b_{\tilde{\gamma}}(\bar{x}, \bar{y}) = b_{\tilde{\gamma}}(x(0), \bar{y})$. Luego para $v \in \mathbb{R}^k$

$$b_{\tilde{\gamma}}((x(0), y(0) + v)) = b_{\tilde{\gamma}}((x(0), y(0))) + \langle v, y'(0) \rangle_{\mathbb{R}^k}.$$

Tomamos $v := \bar{y} - y(0)$ y aplicamos (3.15) para obtener

$$\begin{aligned} \langle \bar{y} - y(0), y'(0) \rangle_{\mathbb{R}^k} &= b_{\tilde{\gamma}}((x(0), \bar{y})) - b_{\tilde{\gamma}}((x(0), y(0))) \\ &= b_{\tilde{\gamma}}((\bar{x}, \bar{y})) - b_{\tilde{\gamma}}((x(0), y(0))) \leq 0. \end{aligned}$$

Como $\bar{h} \in H$, $\bar{h}_* \tilde{\gamma}'(0) = \tilde{\gamma}'(0)$ con lo cual $\bar{h}\tilde{\gamma}(t) = (\bar{x}, y'(0)t + \bar{y})$. Entonces,

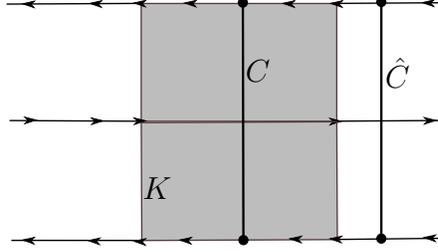
$$\begin{aligned} d_{\tilde{M}}(\bar{h}(\tilde{\gamma})(-s), \tilde{\gamma}(s))^2 &\geq d_{\mathbb{R}^k}(y'(0)(-s) + \bar{y}, y'(0) + y(0))^2 \\ &= |-2sy'(0) + \bar{y} - y(0)|^2 \\ &= \langle -2sy'(0) + \bar{y} - y(0), -2sy'(0) + \bar{y} - y(0) \rangle_{\mathbb{R}^k} \\ &= 4s^2|y'(0)|^2 - 4s\langle \bar{y} - y(0), y'(0) \rangle_{\mathbb{R}^k} + |\bar{y} - y(0)|^2 \\ &\geq 4s^2|y'(0)|^2, \end{aligned}$$

lo cual es una contradicci3n y por lo tanto se sigue que $\pi_H(\tilde{\gamma})$ es una l3nea. \square

Ejemplo 3.13. *En el ejemplo (3.6) vimos que la banda de M3bius \mathbb{M} no cumple la propiedad de los lazos a infinito. El teorema anterior nos dice que entonces existe una cubierta doble que levanta al rayo a una l3nea. Esta cubierta es el cilindro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ como se muestra en la siguiente figura:*

3.3. El teorema del alma

En esta secci3n probamos el resultado principal de la tesis, una extensi3n del teorema del alma de Cheeger-Gromoll [15] a una clase de variedades con curvatura de Ricci no negativa.



Teorema 3.14 (Teorema del alma). *Si M es completa, no compacta con $\text{Ric}(M) \geq 0$ y existe un elemento $g \in \pi_1(M)$ que no tiene la propiedad de los lazos a infinito a lo largo de un rayo γ . Entonces la función de Busemann b_γ asociada al rayo tiene un mínimo*

$$-s_\gamma = \min_{x \in M} b_\gamma(x),$$

y M es un haz normal plano sobre $b_\gamma^{-1}(-s_\gamma)$.

Si $g \in \pi_1(M)$ no satisface la propiedad de los lazos geodésicos a infinito a lo largo de cualquier rayo γ , entonces M es un haz normal plano sobre un alma compacta y totalmente geodésica S con

$$S := \bigcap_{\gamma} (b_\gamma^{-1}(-s_\gamma)).$$

Demostración. Sean γ un rayo y $g \in \pi_1(M, \gamma(0))$ que no cumple la propiedad de los lazos a infinito a lo largo de γ . Observamos que puede suceder que para $s > 0$ $\gamma : [-s, \infty) \rightarrow M$ siga siendo un rayo. Sea $s_\gamma \geq 0$ tal que para toda $s > s_\gamma$ $\gamma : [-s, \infty) \rightarrow M$ deja de ser un rayo.

Recordemos que por el teorema de la línea (3.7) el levantamiento de γ debe ser una línea, por el teorema de escisión de Cheeger-Gromoll (2.14) tenemos además que $\tilde{M} \approx N^{n-k} \times \mathbb{R}^k$, donde N^{n-k} no tiene líneas. La proposición (3.9) nos dice que $\tilde{\gamma}(t) = (x_0, y(t))$. Tenemos entonces que

$$b_{\tilde{\gamma}}^{-1}(-s_\gamma) = N^{n-k} \times b_y^{-1}(-s_\gamma) \subset \tilde{M} \quad (3.16)$$

Observamos que $b_y^{-1}(-s_\gamma) \subset \mathbb{R}^k$ es un hiperplano, entonces $b_{\tilde{\gamma}}^{-1}(-s_\gamma) \subset \tilde{M}$ es una hipersuperficie.

Afirmamos que para todo $h \in \pi_1(M, \gamma(0))$ manda a $b_{\tilde{\gamma}}^{-1}(-s_\gamma)$ en sí mismo. Por el teorema de la doble cubierta (3.12) sabemos que para todo

$h \in \pi_1(M, \gamma(0))$ $h_*(\tilde{\gamma}'(t)) = \pm \tilde{\gamma}'(t)$. Sea $(z, w) \in \tilde{M}$.

$$\begin{aligned} b_{\tilde{\gamma}}((z, w)) &= b_y(w) = \langle w - y(0), y'(0) \rangle \\ &= \langle w - y(-s_\gamma), y'(0) \rangle + \langle y(-s_\gamma) - y(0), y'(0) \rangle \\ &= \langle w - y(-s_\gamma), y'(0) \rangle - s_\gamma. \end{aligned}$$

Notamos que entonces $(z, w) \in b_{\tilde{\gamma}}^{-1}(-s_\gamma)$ si y sólo si $\langle w - y(-s_\gamma), y'(0) \rangle = 0$.

Supongamos que $(z_0, w_0) \in b_{\tilde{\gamma}}^{-1}(-s_\gamma)$, sea $h \in \pi_1(M, \gamma(0))$. Entonces

$$\begin{aligned} b_{\tilde{\gamma}}(h(z_0, w_0)) &= b_{\tilde{\gamma}}(hz_0, hw_0) \\ &= \langle hw_0 - y(-s_\gamma), y'(0) \rangle - s_\gamma \\ &= \pm \langle w_0 - h^{-1}y(-s_\gamma), y'(0) \rangle - s_\gamma \end{aligned}$$

Lo cual implica que $\langle w_0, y'(0) \rangle = \langle h^{-1}y(-s_\gamma), y'(0) \rangle$. Afirmamos que $h(z_0, w_0)$ pertenece a $b_{\tilde{\gamma}}^{-1}(-s_\gamma)$ si y sólo si $\langle h^{-1}y(-s_\gamma) - y(-s_\gamma), y'(0) \rangle = 0$.

Para probar la necesidad de la afirmación anterior tomamos $\langle w_0, y'(0) \rangle = \langle h^{-1}y(-s_\gamma), y'(0) \rangle$, luego como $b_{\tilde{\gamma}}((z_0, w_0)) = \langle w_0 - y(-s_\gamma), y'(0) \rangle - s_\gamma = -s_\gamma$ tenemos $0 = \langle w_0 - y(-s_\gamma), y'(0) \rangle = \langle h^{-1}y(-s_\gamma) - y(-s_\gamma), y'(0) \rangle$.

Supongamos que $\langle h^{-1}y(-s_\gamma) - y(-s_\gamma), y'(0) \rangle = 0$. Esto implica que

$$\langle h^{-1}y(-s_\gamma), y'(0) \rangle = \langle y(-s_\gamma), y'(0) \rangle.$$

Sabemos que $(z_0, w_0) \in b_{\tilde{\gamma}}^{-1}(-s_\gamma) \Rightarrow \langle w_0 - y(-s_\gamma), y'(0) \rangle = 0$.

Luego $\langle w_0, y'(0) \rangle = \langle y(-s_\gamma), y'(0) \rangle = \langle h^{-1}y(-s_\gamma), y'(0) \rangle$ Entonces $\langle w_0 - h^{-1}y(-s_\gamma), y'(0) \rangle = 0$, por lo tanto $b_{\tilde{\gamma}}(h(z_0, w_0)) = -s_\gamma$.

Así que basta mostrar que $h(\tilde{\gamma}(-s_\gamma)) \in b_{\tilde{\gamma}}^{-1}(-s_\gamma)$. Por el lema (3.11), como $\tilde{\gamma}$ es el levantamiento de un rayo se sigue que $b_{\tilde{\gamma}}(h(\tilde{\gamma}(-s_\gamma))) \leq -s_\gamma$. Por lo tanto $h(\tilde{\gamma}(-s_\gamma)) \in b_{\tilde{\gamma}}^{-1}((-\infty, -s_\gamma])$.

Por la definición de s_γ tenemos que existen sucesiones $\{s_i\}_{i=1}^\infty, \{r_i\}_{i=1}^\infty \subset \mathbb{R}$ tales que $s_i \rightarrow s_\gamma, r_i \rightarrow \infty, r_i + s_i > d_M(\gamma(-s_i), \gamma(r_i))$ y $r_i + s_i \geq d_{\tilde{M}}(h\tilde{\gamma})(-s_i), \tilde{\gamma}(r_i))$. Entonces

$$\begin{aligned} s_\gamma &= \lim_{i \rightarrow \infty} s_i \geq \lim_{i \rightarrow \infty} d_{\tilde{M}}(h\tilde{\gamma}(-s_i), \tilde{\gamma}(r_i)) - r_i \\ &= - \lim_{i \rightarrow \infty} r_i - d_{\tilde{M}}(h\tilde{\gamma}(-s_i), \tilde{\gamma}(r_i)) \\ &= - \lim_{i \rightarrow \infty} r_i - d_{\tilde{M}}(h\tilde{\gamma}(-s_\gamma), \tilde{\gamma}(r_i)) \\ &= -b_{\tilde{\gamma}}(h\tilde{\gamma}(-s_\gamma)). \end{aligned}$$

Por lo tanto $h(\tilde{\gamma}(-s_\gamma)) \in b_{\tilde{\gamma}}^{-1}([-s_\gamma, \infty))$ y la afirmación queda demostrada.

Como $b_y^{-1}(-s_\gamma)$ es un hiperplano ortogonal a $y'(0)$ tenemos que \tilde{M} es un haz normal plano sobre $b_{\tilde{\gamma}}^{-1}(-s_\gamma)$. Luego el grupo de transformaciones de cubierta Γ deja invariante a $b_{\tilde{\gamma}}^{-1}(-s_\gamma)$, además $M \approx \tilde{M}/\Gamma$. Por lo tanto M es un haz normal plano sobre $\pi(b_{\tilde{\gamma}}^{-1}(-s_\gamma))$.

Para la segunda parte del teorema, tenemos que g cumple $g_*\tilde{\gamma}'(0) = -\tilde{\gamma}'(0)$. y $g\tilde{\gamma}(-s_\gamma) = (gx_0, s_\gamma y'(0) + gy(0))$. Como $g\tilde{\gamma}(-s_\gamma) \in b_{\tilde{\gamma}}^{-1}(-s_\gamma)$

$$\langle g^{-1}y(-s_\gamma), y'(0) \rangle = \langle y(-s_\gamma), y'(0) \rangle = \langle gy(-s_\gamma), y'(0) \rangle.$$

Sea $\tilde{p} = (z, w) \in \tilde{M}$, entonces $b_{\tilde{\gamma}}(\tilde{p}) = \langle w - y(-s_\gamma), y'(0) \rangle$ y

$$\begin{aligned} b_{g\tilde{\gamma}}(\tilde{p}) &= -\langle w - gy(0), y'(0) \rangle \\ &= -\langle w - gy(0) + gy(-s_\gamma) - gy(-s_\gamma), y'(0) \rangle \\ &= -\langle w - gy(-s_\gamma), y'(0) \rangle - \langle -gy(0) + gy(-s_\gamma), y'(0) \rangle \\ &= -\langle w - gy(-s_\gamma), y'(0) \rangle - \langle s_\gamma y'(0), y'(0) \rangle \\ &= -\langle w - gy(-s_\gamma), y'(0) \rangle - s_\gamma \\ &= -\langle w - y(-s_\gamma), y'(0) \rangle - s_\gamma \end{aligned}$$

Por lo tanto $b_{\tilde{\gamma}}(\tilde{p}) + b_{g\tilde{\gamma}}(\tilde{p}) = -2s_\gamma$. Ahora si $p = \pi(\tilde{p})$

$$\begin{aligned} b_\gamma(p) &= \lim_{r \rightarrow \infty} r - d_M(p, \gamma(r)) \\ &\geq \lim_{r \rightarrow \infty} r - \min\{d_{\tilde{M}}(\tilde{p}, \tilde{\gamma}(r), d_{\tilde{M}}(g\tilde{p}, \tilde{\gamma}(r)))\} \\ &\geq \max\{b_{\tilde{\gamma}}(\tilde{p}), b_{g\tilde{\gamma}}(\tilde{p})\} \geq -s_\gamma. \end{aligned}$$

Por lo tanto $-s_\gamma = \min_{p \in M} b_\gamma(p)$.

Para la última parte del teorema supongamos que existe un elemento $g \in \pi_1(M, x_0)$ tal que para todo rayo γ basado en x_0 g no tiene la propiedad de los lazos a infinito. Entonces para cada rayo \tilde{M} es un haz normal plano sobre la hipersuperficie totalmente geodésica $b_{\tilde{\gamma}}^{-1}(-s_\gamma)$ correspondiente. Recordemos que $b_{\tilde{\gamma}}^{-1}(-s_\gamma) = N^{n-k} \times b_y^{-1}(-s_\gamma)$ por lo que $\bigcap_\gamma b_{\tilde{\gamma}}^{-1}(-s_\gamma)$ es una variedad totalmente geodésica. Luego como $y(t)$ es normal a $b_y^{-1}(-s_\gamma)$ tenemos que

$$\tilde{M} = \left(\bigcap_\gamma b_{\tilde{\gamma}}^{-1}(-s_\gamma) \right) \times \mathbb{R}^l,$$

donde $l = \dim(\text{span}\{y'(0)|_\gamma\})$ es un rayo basado en x_0 . Como $\pi_1(M, x_0)$ deja invariante a todos los $b_\gamma^{-1}(-s_\gamma)$ entonces deja invariante a $\bigcap_\gamma b_\gamma^{-1}(-s_\gamma)$.

Por lo tanto M es un haz normal plano sobre un alma $S := \bigcap_\gamma b_\gamma^{-1}(-s_\gamma)$ totalmente geodésica. Además S debe ser compacta pues en caso contrario existe un rayo $\sigma \subset S$. Esto implica que $\sigma \subset b_\sigma^{-1}(-s_\sigma)$. Lo cual es una contradicción. \square

El alma construida en el teorema anterior coincide con la de Cheeger-Gromoll para el caso de curvatura seccional no negativa. También notamos que gracias al teorema (3.8) las variedades construidas por Gromoll-Meyer [17] y Shen-Sormani [12] cumplen la propiedad de los lazos a infinito.

Notamos además que puede darse el caso de que una variedad M cumpla la propiedad de los lazos a infinito y tenga un alma S . Consideremos por ejemplo el paraboloides (1.27) y el cilindro (3.13), las almas son $(0, 0, 0)$ y \mathbb{S}^1 respectivamente.

Capítulo 4

Consecuencias topológicas

En este capítulo obtenemos resultados topológicos locales acerca del grupo fundamental de una variedad con curvatura de Ricci no negativa. Estos resultados son extensiones parciales de teoremas obtenidos por Frankel [3], Lawson [5] y Schoen-Yau [16]. Usaremos la teoría desarrollada en el capítulo 3 en lugar de utilizar funciones armónicas y método de segunda variación de longitud de Synge que aparecen en los artículos mencionados.

Teorema 4.1. *Si M tiene la propiedad de los lazos a infinito, $K \subset M$ es un compacto y y_0 es un punto en una componente no acotada $U \subset M - K$, entonces la inclusión*

$$i_*\pi_1(U, y_0) \rightarrow \pi_1(M, y_0)$$

es sobreyectiva.

Demostración. Como $U \subset M$ no es acotada existen $R_0 \in \mathbb{R}$ y γ rayo basado en y_0 tales que $\gamma(r) \in U$ para toda $r \geq R_0$. Dado $g \in \pi_1(M, y_0)$, como M cumple la propiedad de los lazos a infinito existe \bar{C} lazo en $M - K$ homotópico a lo largo de γ a un representante C de g . Al ser U conexo tenemos que $\bar{C} \subset U$.

Podemos unir, mediante una curva σ , a y_0 con un punto en γ que esté en U . De esta forma obtenemos un lazo $\eta \subset U$ basado en y_0 . Esto implica que $[\eta] \in \pi_1(U, y_0)$ y $i_*([\eta]) = g$. \square

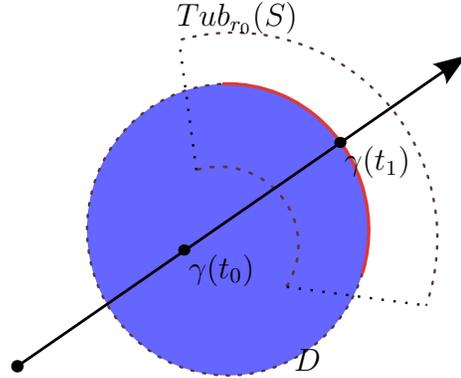
Lema 4.2 (Munkres [7]). *Sean $W = X \cup Y$ donde X y Y son abiertos tales que $X \cap Y = A \cup B$ con A y B son abiertos disjuntos. Si existen dos curvas que unen $a \in A$ con $b \in B$ una contenida en X y la otra en Y entonces $\pi_1(W, a) \neq \{e\}$.*

Teorema 4.3. *Supongamos que M cumple la propiedad de los lazos a infinito a lo largo de un rayo γ . Sea $D \subset M$ una región precompacta con frontera suave que contiene a un punto $\gamma(t_0)$, sea S una componente conexa de ∂D que contiene un punto $\gamma(t_1)$ donde $t_1 > t_0$. Entonces la inclusión*

$$i_* : \pi_1(S, \gamma(t_1)) \rightarrow \pi_1(\text{cl}(D), \gamma(t_1))$$

es sobreyectiva.

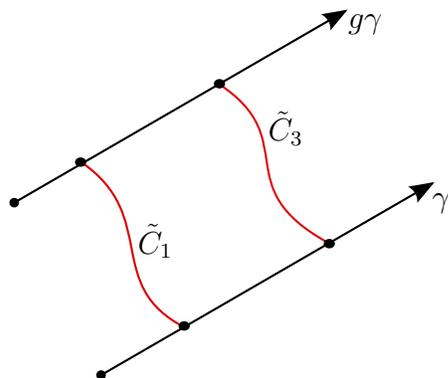
Demostración. Primero observemos que S es suave, cerrada y acotada. Por la propiedad de Heine-Borel es además compacta, por lo tanto existe $r_0 := \min\{\text{inj}(x) | x \in S\}$. Podemos considerar entonces la vecindad tubular de S la cual denotaremos por $\text{Tub}_{r_0}(S)$, notamos que esta vecindad es homotópica a S .



Sean $U := D \cup \text{Tub}_{r_0}(S)$ y $V := (M - D) \cup \text{Tub}_{r_0}(S)$, luego $U \cap V = \text{Tub}_{r_0}(S)$. Observemos que U y $\text{cl}(D)$ son homotópicas. Probaremos que $i_* : \pi_1(\text{Tub}_{r_0}(S), \gamma(t_1)) \rightarrow \pi_1(U, \gamma(t_1))$ es sobreyectiva.

Sea $t_2 := \sup\{t | \gamma(t) \in D\}$, el cual existe pues D es acotado. Sea $C_1 \subset U$ un lazo basado en $\gamma(t_1)$ no contraíble. Podemos tomar $C_1 \cup \gamma([t_1, t_2])$ y es claro que este lazo es homotópico a C_1 .

Por la propiedad de los lazos a infinito y como $\text{cl}(D)$ es compacto existe $C_3 \subset M - \text{cl}(D)$ lazo basado en $\gamma(t_3)$ homotópico a C_1 a lo largo de $\gamma([t_2, t_3])$. Consideremos $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$ el cubriente universal de M . Definimos $\tilde{U} := \pi^{-1}(U)$ y $\tilde{V} := \pi^{-1}(V)$. Sean $\tilde{\gamma}$ el levantamiento de γ y g transformación cubriente tal que $g = [C_1]$.



Sean \tilde{C}_1 y \tilde{C}_3 los levantamientos que van de $\tilde{\gamma}(t_2)$ a $g\tilde{\gamma}(t_2)$ y $\tilde{\gamma}(t_3)$ a $g\tilde{\gamma}(t_3)$ respectivamente. Luego consideremos la homotopía $H : [0, 1] \times [t_2, t_3] \rightarrow \tilde{M}$ tal que $H(0, t) = \tilde{\gamma}(t)$, $H(1, t) = g\tilde{\gamma}(t)$, $H(s, t_2) = \tilde{C}_1(s)$, y $H(s, t_3) = \tilde{C}_3(s)$. Notamos que puede resultar necesario reparametrizar \tilde{C}_1 y \tilde{C}_3 . Luego tenemos que $H^{-1}(\tilde{U})$ y $H^{-1}(\tilde{V})$ son abiertos relativos de $[0, 1] \times [t_2, t_3]$ que además cumplen $H^{-1}(\tilde{U} \cup \tilde{V}) = [0, 1] \times [t_2, t_3]$.

Buscamos una curva $(s(r), t(r)) \subset H^{-1}(\tilde{U} \cap \tilde{V})$ tal que $(s(0), t(0)) = (0, t_2)$ y $(s(1), t(1)) = (1, t_2)$. Entonces la curva definida como $C_2(r) := \pi(H(s(r), t(r))) \subset U \cap V$ es homotópica a C_1 , basada en $\gamma(t_2)$ y con ello ya habremos probado el resultado.

Usaremos el lema (4.2). Tomamos $W := [0, 1] \times [t_2, t_3]$, $X = H^{-1}(\tilde{U})$ y $Y := H^{-1}(\tilde{V})$. Sea A una componente conexa de $X \cap Y$ que contiene a $a := (0, t_2)$ y B la componente que contiene a $b = (1, t_2)$. Afirmamos que $A = B$.

Supongamos que $A \neq B$. Entonces $A \cap B = \emptyset$, de lo contrario podríamos unir a con b lo cual implica que $A = B$. Es claro que la curva $(s, t_2) \subset X$. Recordemos que $t_2 < t_1$, por lo que la curva que recorre los otros tres lados del cuadrado está en Y . Por el lema tenemos entonces que $\pi_{W,a} \neq \{e\}$. Pero esto es una contradicción y por lo tanto podemos construir la curva C_2 . \square

Corolario 4.4. *Sea M que cumple la propiedad de los lazos a infinito. Si ∂D es simplemente conexa entonces $\pi_1(D)$ es trivial.*

Demostración. Sea γ un rayo tal que $\gamma(t_0) \in D$ y para $t_1 > t_0$ $\gamma(t_1) \in \partial D$. Por el teorema anterior tenemos que $\pi_1(\text{cl}(D), \gamma(t_1)) = \{e\}$. Como $D \subset \text{cl}(D)$ el resultado es inmediato. \square

Corolario 4.5. *Si M tiene $\text{Ric}(M) \geq 0$ y ∂D es simplemente conexa entonces $\pi_1(D)$ sólo contiene elementos de orden 2.*

Demostración. Por el corolario (3.10) tenemos que dado $g \in \pi_1(D)$ g o g^2 cumplen con la propiedad de los lazos geodésicos a infinito. Luego para un rayo γ tal que $\gamma(t_0) \in D$ y para $t_1 > t_0$ $\gamma(t_1) \in \partial D$ consideremos $i_* : \pi_1(\partial D, \gamma(t_1)) \rightarrow \pi_1(cl(D), \gamma(t_1))$.

Como ∂D es simplemente conexo entonces $\pi_1(\partial D, \gamma(t_1)) = \{e\}$, en el teorema (4.3) mostramos que entonces $g = i_*(e)$ o $g^2 = i_*(e)$. Por lo tanto $\pi_1(cl(D), \gamma(t_1))$ solamente tiene elementos de orden 2. \square

Teorema 4.6. *Sea M completa, no compacta con $Ric(M) \geq 0$. Sea $D \subset M$ precompacto, ∂D suave, γ rayo tal que $\gamma(0) \in D$ y S una componente conexa de ∂D con $\gamma(t_1) \in S$. Entonces la imagen de*

$$i_* : \pi_1(S, \gamma(t_1)) \rightarrow \pi_1(cl(D), \gamma(t_1)),$$

denotada por N es tal que $\pi_1(cl(D), \gamma(t_1))/N$ tiene a lo más dos elementos.

De hecho, contiene un elemento salvo que M se escinda o sea un haz normal sobre un alma totalmente geodésica.

Demostración. Si M cumple la propiedad de los lazos a infinito, por el teorema (4.3) tenemos que $N = \pi_1(cl(D), \gamma(t_1))$. Por lo tanto tenemos que $\pi_1(cl(D), \gamma(t_1))/N = \{e\}$.

Supongamos que M no cumple la propiedad de los lazos a infinito, por el teorema de la doble cubierta (3.12), $\pi : \bar{M} \rightarrow M$ se escinda a lo largo de el levantamiento $\tilde{\gamma}$ del rayo γ , de donde se sigue que \bar{M} cumple la propiedad de los lazos a infinito.

Ahora, si $\pi^{-1}(cl(D))$ es desconexa entonces esto nos dice que $cl(D) \subset U$, con U vecindad cubierta parejamente. Por lo tanto $cl(D)$ es homeomorfa a alguna de las componentes conexas de su levantamiento. Denotémosla por $\overline{cl(D)}$. Tenemos el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(\bar{S}, \tilde{\gamma}(t_1)) & \xrightarrow{j_*} & \pi_1(\overline{cl(D)}, \tilde{\gamma}(t_1)) \\ \pi_* \downarrow & & \pi_* \downarrow \\ \pi_1(S, \gamma(t_1)) & \xrightarrow{i_*} & \pi_1(cl(D), \gamma(t_1)) \end{array} \quad (4.1)$$

Por el teorema (4.3) sabemos que j_* es sobreyectiva, como las flechas verticales son inducidas por homeomorfismos entonces son isomorfismos de grupos. Por lo tanto i_* es sobreyectiva.

Supongamos ahora que $\pi^{-1}(cl(D))$ es conexa, entonces

$$\pi|_{\pi^{-1}(cl(D))} : \pi^{-1}(cl(D)) \rightarrow cl(D)$$

es un cubriente doble. Luego el índice de este subgrupo

$$[\pi_1(cl(D), \gamma(t_1)) : \pi_*(\pi_1(\pi^{-1}(cl(D)), \tilde{\gamma}(t_1)))] = 2.$$

Por lo tanto existe un elemento $g \in \pi_1(cl(D), \gamma(t_1))$ para el cual todo representante se levanta a una curva que no es cerrada. Probaremos que en este caso el cociente $\pi_1(cl(D), \gamma(t_1))/N$ tiene dos elementos. Para ello basta mostrar que para todo $h \in \pi_1(cl(D), \gamma(t_1))$ existe $\hat{h} \in \pi_1(S, \gamma(t_1))$ tal que $i_*(\hat{h}) = h$ ó $i_*(\hat{h}) = gh$. Tenemos un diagrama conmutativo similar al anterior

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(\pi^{-1}(S), \tilde{\gamma}(t_1)) & \xrightarrow{j_*} & \pi_1(\pi^{-1}(cl(D)), \tilde{\gamma}(t_1)) \\ \pi_* \downarrow & & \pi_* \downarrow \\ \pi_1(S, \gamma(t_1)) & \xrightarrow{i_*} & \pi_1(cl(D), \gamma(t_1)) \end{array} \quad (4.2)$$

Notemos que como $\pi^{-1}(cl(D))$ es un cubriente entonces el homomorfismo inducido es inyectivo pero al ser un cubriente doble no puede ser sobreyectivo.

Sea $h \in \pi_1(cl(D), \gamma(t_1))$, sí $h \in \pi_*(\pi_1(\pi^{-1}(cl(D)), \tilde{\gamma}(t_1)))$ entonces cualquier lazo C basado en $\gamma(t_1)$ tal que $[C] = h$ se levanta a un lazo basado en $\tilde{\gamma}(t_1)$. Por otro lado, sí $h \notin \pi_*(\pi_1(\pi^{-1}(cl(D)), \tilde{\gamma}(t_1)))$ entonces los representantes de gh si tienen levantamientos a lazos basados en $\tilde{\gamma}(t_1)$. Denotemos por \tilde{C} al levantamiento correspondiente a cada caso.

Como la cubierta doble cumple la propiedad de los lazos a infinito, por el teorema (4.3) existe $\tilde{h} \in \pi_1(\pi^{-1}(S), \tilde{\gamma}(t_1))$ tal que $[\tilde{C}] = j_*(\tilde{h})$. Definimos $\bar{h} := \pi_*(\tilde{h})$, con lo cual $\bar{h} \in \pi_1(S, \gamma(t_1))$ y por lo tanto $i_*(\bar{h})[\pi \circ \tilde{C}] = h$ ó gh . \square

Apéndice A

Cubrientes y el grupo fundamental

En este apéndice reunimos las herramientas de cubrientes riemannianos y del grupo fundamental que usamos en la segunda mitad de este trabajo.

A.1. Cubrientes

Definición A.1. Sean M, \tilde{M} son variedades topológicas conexas, decimos que una función continua $\psi : \tilde{M} \rightarrow M$ es un cubriente si todo $p \in M$ tiene un abierto conexo $U \subset M$ tal que ψ manda a cada componente conexas de $\psi^{-1}(U)$ de manera homeomorfa en U .

Sea $\psi : \tilde{M} \rightarrow M$ un cubriente y p un punto en M . Sea $\omega : [0, 1] \rightarrow M$ una curva continua tal que $\omega(0) = p$, entonces para cada $\tilde{p} \in \psi^{-1}(p)$ existe un único levantamiento $\tilde{\omega} : [0, 1] \rightarrow \tilde{M}$ continuo tal que $\tilde{\omega}(0) = \tilde{p}$ y $\psi \circ \tilde{\omega} = \omega$. A esta propiedad le llamamos **levantamiento de curvas**.

Proposición A.2. Sean $\psi_1 : \tilde{M}_1 \rightarrow M$ y $\psi_2 : \tilde{M}_2 \rightarrow M$ son cubrientes. Si $\varphi : \tilde{M}_2 \rightarrow \tilde{M}_1$ es sobreyectiva y $\psi_1 \circ \varphi = \psi_2$. Entonces φ también es un cubriente.

Demostración. Sean $\tilde{p} \in \tilde{M}_1$ y $p = \psi_1(\tilde{p})$. Como ψ_1, ψ_2 son cubrientes, entonces hay un abierto conexo U de p en el que ambas son homeomorfismos. En particular $\psi_1^{-1}(U) = \bigcup_{j \in J} \tilde{U}_j$ y $\psi_1|_{\tilde{U}_j} : \tilde{U}_j \rightarrow U$ es un homeomorfismo. Sea $\tilde{U} := \tilde{U}_{j_0}$ tal que $\tilde{p} \in \tilde{U}_{j_0}$. Para ψ_2 tenemos además que

$\psi_2^{-1}(U) = \bigcup_{i \in I} \tilde{U}'_i$. Para cada $j \in J$ definimos $J'_j := \{i \in I : \varphi(\tilde{U}'_i) \subset \tilde{U}_j\}$. Entonces $J'_j \neq \emptyset$ pues cada \tilde{U}'_i es conexo y φ es sobreyectiva. Por lo tanto tenemos que $\varphi^{-1}(\tilde{U}_j) = \bigcup_{i \in J'_j} \tilde{U}'_i$ y en particular $\varphi^{-1}(\tilde{U}) = \bigcup_{i \in J'_0} \tilde{U}'_i$. Como para cada $i \in J'_j$ el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \tilde{U}'_i & \xrightarrow{\varphi|_{\tilde{U}'_i}} & \tilde{U}_j \\ & \searrow \phi_2|_{\tilde{U}'_i} & \swarrow \phi_1|_{\tilde{U}_j} \\ & U & \end{array}$$

para toda j y como $\phi_1|_{\tilde{U}_j}, \phi_2|_{\tilde{U}'_i}$ son homeomorfismos, tenemos que $\varphi|_{\tilde{U}'_i} : \tilde{U}'_i \rightarrow \tilde{U}_j$ es un homeomorfismo. Por lo tanto φ es un cubriente. \square

Definición A.3. Si \tilde{M}, M son variedades diferenciables conexas, entonces $\psi : \tilde{M} \rightarrow M$ es un cubriente diferenciable si ψ es un cubriente y ψ es una función diferenciable de rango máximo en todo \tilde{M} .

Si \tilde{M}, M son variedades riemannianas conexas entonces $\psi : \tilde{M} \rightarrow M$ es un cubriente riemanniano si ψ es diferenciable e isometría local de \tilde{M} en M .

Proposición A.4. Si $\psi : \tilde{M} \rightarrow M$ es un cubriente riemanniano entonces M es completa si y sólo si \tilde{M} es completa.

Demostración. Si \tilde{M} es completa, sea $\gamma : I \rightarrow M$ geodésica en M con dominio maximal I tal que $0 \in I$. Sean $\tilde{p} \in \tilde{M}, \tilde{\xi} \in T_{\tilde{p}}\tilde{M}$ tales que $\psi(\tilde{p}) = \gamma(0), d_{\tilde{p}}\psi\tilde{\xi} = \gamma'(0)$. Entonces $\psi(\tilde{\gamma}_{\tilde{\xi}}(t)) = \gamma(t)$ para todo $t \in I$, donde $\tilde{\gamma}_{\tilde{\xi}}$ es la geodésica con condiciones iniciales $\tilde{\gamma}_{\tilde{\xi}}(0) = \tilde{p}$ y $\tilde{\gamma}'_{\tilde{\xi}}(0) = \tilde{\xi}$.

Pero $\tilde{\gamma}$ está definida para todo valor del parámetro, entonces $I = \mathbb{R}$ y por lo tanto M es completa.

Supongamos ahora que M es completa y $\tilde{\gamma} : \tilde{I} \rightarrow \tilde{M}$ es geodésica con \tilde{I} intervalo maximal. Entonces $\gamma(t) := \psi(\tilde{\gamma}(t))$ es una geodésica en M . Como M es completa podemos extender a γ y por la unicidad del levantamiento tenemos que $\tilde{\gamma}$ está definida para todo $t \in \mathbb{R}$. \square

Lema A.5 (Myers, Steenrod). Sea M una variedad riemanniana y $\phi : M \rightarrow M$ una función sobreyectiva (no necesariamente continua) tal que $d_M(\phi(p), \phi(q)) = d_M(p, q)$ para toda $p, q \in M$. Entonces ϕ es una isometría, es decir, ϕ es un difeomorfismo que preserva la métrica riemanniana.

Demostración. Supongamos que $\phi(p) = \phi(q)$ entonces $0 = d_M(\phi(p), \phi(q)) = d_M(p, q)$ así que $p = q$. Es claro que para toda $r > 0$ $\phi(B_r(p)) = B_r(\phi(p))$. Por lo tanto ϕ es un homeomorfismo.

Sea $p \in M$ y $B_r(p)$ tal que para toda $q \in B_r(p)$ existe una única geodésica con extremos p y q . Sea γ un punto en esta bola y γ la geodésica que lo une con p . Entonces para toda $t \in I$.

$$d_M(p, q) = d_M(p, \gamma(t)) + d_M(\gamma(t), q).$$

Luego tenemos

$$d_M(\phi(p), \phi(q)) = d_M(\phi(p), \phi(\gamma(t))) + d_M(\phi(\gamma(t)), \phi(q)).$$

Por lo tanto $\phi \circ \gamma$ es una geodésica y ϕ manda geodésicas en geodésicas.

Fijamos $U \subset T_p M$ y $V \subset T_q M$ vecindades que contengan al origen y tales que la exponencial las manda de manera difeomorfa en $B_r(p)$ y $B_r(q)$ respectivamente. Ahora podemos definir una función $\tilde{\phi} : U \rightarrow V$, si $u \in U$ sea γ_u con $\gamma_u'(0) = u$ así que $\tilde{\phi}(u) := (\phi \circ \gamma_u)'(0)$. De hecho podemos extender esta función a $\phi : T_p M \rightarrow T_q M$.

Como γ_u tiene velocidad constante $|u| = |(\phi \circ \gamma_u)'(0)|$ entonces $\tilde{\phi}$ preserva la norma y además $\tilde{\phi}(0) = 0$. Veremos ahora que $\tilde{\phi}$ es una isometría. Sean $\xi, \eta \in T_p M$, γ_ξ, γ_η geodésicas basadas en p . Tomamos $\tilde{\xi} := \tilde{\phi}(\xi)$, $\tilde{\eta} := \tilde{\phi}(\eta)$ con geodésicas $\gamma_{\tilde{\xi}}$ y $\gamma_{\tilde{\eta}}$. Entonces $d_M(\gamma_\xi(t), \gamma_\eta(t)) = d_M(\gamma_{\tilde{\xi}}(t), \gamma_{\tilde{\eta}}(t))$ para todo t . Así

$$1 = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{d_M(\exp_p(t\xi), \exp_p(t\eta))}{t|\xi - \eta|} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{d_M(\exp_p(t\tilde{\xi}), \exp_p(t\tilde{\eta}))}{t|\tilde{\xi} - \tilde{\eta}|} = \frac{|\tilde{\xi} - \tilde{\eta}|}{|\xi - \eta|}.$$

Como $T_p M$ y $T_q M$ son espacios vectoriales normados entonces $\tilde{\phi}$ es lineal. Entonces ϕ es suave y $v \in T_p M$ $|v| = |d_p \phi(v)|$. Por la identidad de polarización tenemos que se preserva el producto interior. \square

Definición A.6. Sea M una variedad topológica, Γ un grupo de homeomorfismos de M . Diremos que Γ actúa de manera propia y discontinua en M si dado $p \in M$ existe una vecindad U de p tal que la colección de conjuntos abiertos $\{\varphi(U) : \varphi \in \Gamma\}$ son disjuntos dos a dos.

En particular tenemos que si $\varphi \neq id_M$ entonces $\varphi(p) \neq p$ para todo $p \in M$. Por lo tanto la acción es libre en M .

Definición A.7. Sea $\psi : \tilde{M} \rightarrow M$ cubriente. Decimos que un homeomorfismo $\varphi : \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}$ es una transformación de cubierta si $\psi \circ \varphi = \psi$. El conjunto de transformaciones de cubierta forma un grupo bajo la composición. Este grupo actúa de manera propia y discontinua en \tilde{M} .

Ahora, dado M y Γ que actúa de manera propia y discontinua en M , consideremos M/Γ el espacio de órbitas de Γ . Entonces si $\pi : M \rightarrow M/\Gamma$ es la proyección, le damos a M/Γ la topología cociente. Se sigue que π es un cubriente con grupo de transformaciones de cubierta Γ .

Supongamos Γ actúa de manera propia y discontinua en una variedad diferenciable M . Si cada $\varphi \in \Gamma$ es un difeomorfismo, entonces M/Γ tiene una estructura natural de variedad diferenciable y $\pi : M \rightarrow M/\Gamma$ es un cubriente diferenciable. Más aun, el grupo $\Gamma_* = \{\varphi_* : TM \rightarrow TM\}$ actúa de manera propia y discontinua en TM y TM/Γ_* es difeomorfo a $T(M/\Gamma)$.

Si además M es una variedad riemanniana y Γ es un grupo de isometrías de M , entonces M/Γ tiene una métrica riemanniana natural y π es un cubriente riemanniano.

A.2. El grupo fundamental

Definición A.8. Sea M una variedad topológica. Dos curvas continuas $\omega_0 : [a, b] \rightarrow M$, $\omega_1 : [a, b] \rightarrow M$ con los mismos extremos son homotópicas si existe una función continua $H : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow M$ tal que:

- $H(t, 0) = \omega_0(t)$, para todo $t \in [a, b]$
- $H(t, 1) = \omega_1(t)$, para todo $t \in [a, b]$
- $H(a, s) = \omega_0(a) = \omega_1(a)$, $H(b, s) = \omega_0(b) = \omega_1(b)$, para todo $s \in [0, 1]$.

Observamos que la relación “ser homotópico a” es de equivalencia. Podemos además definir una estructura de grupo como sigue: si $\omega, \gamma : [0, 1] \rightarrow M$ son dos curvas que satisfacen $\omega(1) = \gamma(0)$ su producto $\omega \cup \gamma$ se define como:

$$\omega \cup \gamma = \begin{cases} \omega(2t) & 0 \leq t \leq 1/2 \\ \gamma(2t - 1) & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

La multiplicación puede definirse en las clases de homotopía.

Definición A.9 (Grupo fundamental). Sea $p \in M$, sea $\pi_1(M, p)$ el conjunto de clases de homotopía de lazos basados en p . Si equipamos a este conjunto con la multiplicación definida anteriormente entonces resulta ser un grupo. Le llamaremos grupo fundamental de M basado en p .

Definición A.10. Diremos que una variedad M es simplemente conexa si su grupo fundamental contiene un solo elemento.

Lema A.11 (Levantamiento de homotopías). Sea $\psi : \tilde{M} \rightarrow M$ cubriente. Dada una homotopía $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow M$ con $p = H(0, s)$ para todo $s \in [0, 1]$ y $\tilde{p} \in \psi^{-1}(p)$ entonces existe una única $\tilde{H} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \tilde{M}$ tal que $\tilde{p} = \tilde{H}(0, s)$ para todo $s \in [0, 1]$, y $\psi \circ \tilde{H} = H$. En particular $\tilde{H}(1, 0) = \tilde{H}(1, s)$ para todo $s \in [0, 1]$.

Demostración. Como $[0, 1]$ es compacto entonces podemos tomar una partición $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ tal que la imagen de $Q_{ij} := [t_{i-1}, t_i] \times [t_{j-1}, t_j]$ bajo H está contenida en un abierto U_{ij} en el que ψ es un homeomorfismo.

Denotamos por $\tilde{U}_{ij} := \psi^{-1}(U_{ij})$ y definimos $\tilde{H}_{ij} : Q_{ij} \rightarrow \tilde{M}$ como $\tilde{H}_{ij}(t, s) := \psi^{-1}H(t, s)$. Veamos ahora cómo elegir los \tilde{U}_{ij} .

Fijamos $\tilde{p} \in \psi^{-1}(p)$ y tomamos \tilde{U}_{11} como la única preimagen de U_{11} que contiene a \tilde{p} . Entonces $\tilde{H}(0, 0) = \tilde{p}$. Ahora como $\tilde{H}_{11}(Q_{11} \cap Q_{21})$ está sobre U_{21} , existe una única preimagen \tilde{U}_{21} que contiene a $\tilde{H}_{11}(Q_{11} \cap Q_{21})$. Así tenemos que \tilde{H}_{11} y \tilde{H}_{21} coinciden en $Q_{11} \cap Q_{21}$.

Procedemos de manera análoga en U_{31}, \dots, U_{n1} para obtener \tilde{H} en $Q_{11} \cup \dots \cup Q_{n1}$, es decir, tenemos definida la homotopía en la primera fila.

Ahora elegimos \tilde{U}_{12} en la preimagen de $\tilde{H}_{11}(Q_{12} \cap Q_{22})$. Para el siguiente paso tenemos dos opciones para \tilde{U}_{22} , la que contiene a $\tilde{H}_{12}(Q_{12} \cap Q_{22})$ o la que contiene a $\tilde{H}(Q_{21} \cap Q_{22})$. Sin embargo, no hay problema pues las dos preimágenes contienen al punto $\tilde{H}_{12}(t_1, t_1) = \tilde{H}_{21}(t_1, t_1)$ y por lo tanto coinciden.

Luego tenemos que $\tilde{H}_{12} = \tilde{H}_{22}$ y $\tilde{H}_{21} = \tilde{H}_{22}$ en la intersección de sus dominios. Procedemos de manera similar para el resto de las filas y con esto tenemos definida \tilde{H} . \square

Fijemos $p \in M$ y denotemos por Ω_p al conjunto de todas las curvas continuas que emanan de p .

$$\Omega_p := \{\omega : [0, 1] \rightarrow M : \omega \in C^0, \omega(0) = p\}$$

En este conjunto tomamos la relación de equivalencia dada por la homotopía de dos curvas que empiezan en p , y tomamos $M_0 := \Omega_p / \sim$, el espacio de las clases de homotopía. Como las curvas homotópicas tienen los mismos extremos entonces obtenemos una proyección natural $\Psi : M_0 \rightarrow M$. Luego podemos darle a M_0 con una topología tal que resulta ser simplemente conexo y Ψ es un cubriente. A esta Ψ le llamaremos **cubriente universal** de M .

Proposición A.12. *Sea $\Psi : M_0 \rightarrow M$ el cubriente universal. Entonces dado cualquier cubriente $\psi : \tilde{M} \rightarrow M$ existe un cubriente $\psi_0 : M_0 \rightarrow \tilde{M}$ tal que $\Psi = \psi \circ \psi_0$. Si \tilde{M} es simplemente conexo entonces ψ_0 es un homeomorfismo.*

Demostración. Sea $\tilde{p} \in \psi^{-1}(p)$, para $\omega \in \Omega_p$ tomamos $\omega \mapsto \tilde{\omega}(1) \in \tilde{M}$, donde $\tilde{\omega}$ es el único levantamiento de ω basado en \tilde{p} . Por el lema del levantamiento de homotopías (A.11) esta función está definida en la clase de homotopías de ω . Entonces podemos extender la función a $\psi_0 : M_0 \rightarrow \tilde{M}$. Es claro que $\Psi = \psi \circ \psi_0$. Ahora si $\tilde{q} \in \tilde{M}$, y $q := \psi(\tilde{q})$, podemos unirlo a p mediante una curva continua σ . Luego levantamos esta curva a su clase de equivalencia bajo homotopías. De esta forma tenemos que ψ_0 es sobreyectiva, por la proposición (A.2) se sigue que ψ_0 es un cubriente.

Ahora si además \tilde{M} es simplemente conexo, podemos ver que ψ_0 es además inyectiva. Entonces ψ_0^{-1} es un cubriente y con ello ψ_0 resulta ser un homeomorfismo. \square

El cubriente universal y el grupo fundamental están relacionados mediante el siguiente resultado.

Teorema A.13. *Sea $\psi : \tilde{M} \rightarrow M$ cubriente universal, fijemos $p \in M$. Sea Γ el grupo de transformaciones de cubierta, entonces Γ es isomorfo a $\pi_1(M, p)$.*

Demostración. Sea $\gamma \in \Gamma$, luego todas las curvas que unen \tilde{p} con $\gamma(\tilde{p})$ son homotópicas pues $\pi_1(\tilde{M})$ es trivial. Por lo tanto son proyectadas a un sólo elemento bien definido de $\pi_1(M, p)$. La función es claramente un homomorfismo.

Si $\alpha \in \pi_1(M, p)$ tomamos $\tilde{q} \in \tilde{M}$. Entonces \tilde{q} está determinado por una clase de homotopías ξ en M que unen p con $q := \psi(\tilde{q})$. Definimos $\varphi_\alpha(\tilde{q})$ como el punto en \tilde{M} que corresponde a la clase de homotopía de $\omega \cup \xi$ de curvas que unen p con q , donde ω es un representante de α . \square

Definición A.14 (Dominio fundamental). Sea $\psi : \tilde{M} \rightarrow M$ cubriente con grupo de transformaciones de cubierta Γ . Diremos que $\Omega \subset \tilde{M}$ es un dominio fundamental del cubriente si

$$\begin{aligned}\gamma(\Omega) \cap \Omega &= \emptyset, \quad \text{para todo } \gamma \in \Gamma \\ \psi(\text{cl}(\Omega)) &= M.\end{aligned}$$

Si además Γ actúa de manera transitiva en las fibras $\psi^{-1}(p)$ para cada $p \in M$, entonces $\psi(\text{cl}(\Omega)) = M$ es equivalente a

$$\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(\text{cl}(\Omega)) = \tilde{M}.$$

Cuando tenemos un cubriente riemanniano $\psi : \tilde{M} \rightarrow M$ y M es completa, podemos construir un dominio fundamental de la siguiente manera:

Sean $p \in M$ y $\tilde{p} \in \psi^{-1}(p)$, luego $D_p := M - C_p$ es el dominio más grande en el que exp_p es un difeomorfismo. Además tenemos que $d_p\psi : T_{\tilde{p}}\tilde{M} \rightarrow T_pM$ es una isometría lineal, definimos $\Omega := \text{exp}_{\tilde{p}}(d_p\psi^{-1}\text{exp}_p^{-1}(D_p))$

Veamos que Ω es un dominio fundamental. Primero notamos que para todo $\tilde{\xi} \in T_{\tilde{p}}\tilde{M}$, $\text{exp}_p(d_p\psi(\tilde{\xi})) = \psi(\text{exp}_p\tilde{\xi})$. Entonces

$$\begin{aligned}\psi(\Omega) &= \psi(\text{exp}_{\tilde{p}}(d_p\psi^{-1}\text{exp}_p^{-1}(D_p))) \\ &= \text{exp}_p(d_p\psi(d_p\psi^{-1}(\text{exp}_p^{-1}(D_p)))) \\ &= \text{exp}_p(\text{exp}_p^{-1}(D_p)) = D_p.\end{aligned}$$

Por lo tanto $\overline{\psi(\Omega)} = \text{cl}(\Omega) = \psi(\text{cl}(\Omega))$ y $\psi(\text{cl}(\Omega)) = M$.

Sea $\tilde{q} \in \Omega$, luego $\tilde{q} = \text{exp}_{\tilde{p}}(d_p\psi^{-1}\text{exp}_p^{-1}(a))$, para algún $a \in D_p$. Si $\gamma \in \Gamma$ y $\gamma \neq id$. Supongamos que $\gamma(\tilde{q}) \in \Omega$, entonces $\gamma(\tilde{q}) = \text{exp}_{\tilde{p}}(d_p\psi^{-1}\text{exp}_p^{-1}(b))$. y como γ es de cubierta $\psi \circ \gamma = \psi$.

Pero esto implica que $\gamma(\tilde{q}) = \tilde{q}$, lo cual es una contradicción pues γ no es la identidad. Por lo tanto Ω es un dominio fundamental.

Bibliografía

- [1] Isaac Chavel. *Riemannian Geometry: A Modern Introduction*. Cambridge University Press, 2006.
- [2] Lawrence Evans. *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society, 2010.
- [3] Theodore Frankel. On the fundamental group of a compact minimal submanifold. *Annals of Mathematics*, 83(1):68–73, 1966.
- [4] Allen Hatcher. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, 2001.
- [5] H. Blaine Lawson Jr. The unknottedness of minimal embeddings. *Inventiones mathematicae*, 11(3):183–187, 1970.
- [6] Peter Li. *Geometric Analysis*. Cambridge University Press, 2012.
- [7] James Munkres. *Topology*. Pearson, 2000.
- [8] Philippe Nabonnand. Sur les variétés riemanniennes complètes à courbure de Ricci positive. *C. R. Acad. Sci. Paris Sr.*, A(10):A591–A593, 1980.
- [9] Peter Petersen. *Riemannian Geometry*. Springer, 2006.
- [10] Christina Sormani. On loops representing elements of the fundamental group of a complete manifold with nonnegative Ricci curvature. *Indiana University Journal of Mathematics*, 50(4):1867–1883, 2001.
- [11] Victor Andreevich Toponogov. Riemannian spaces containing lines. *American Mathematical Society*, 2(37):287–290, 1964.

- [12] Zhongmin Shen y Christina Sormani. The topology of open manifolds of nonnegative Ricci curvature. *Communications in Mathematical Analysis Conf. 01*, 1(1):20–34, 2008.
- [13] Jeff Cheeger y David Ebin. *Comparison Theorems in Riemannian Geometry*. AMS Chelsea Publishing, 1975.
- [14] Jeff Cheeger y Detlef Gromoll. The splitting theorem for manifolds of nonnegative Ricci curvature. *Journal of Differential Geometry*, 6(1):119–128, 1971.
- [15] Jeff Cheeger y Detlef Gromoll. On the structure of complete manifolds of nonnegative curvature. *Annals of Mathematics*, 96(3):413–443, 1972.
- [16] Richard Schoen y Shing Tung Yau. Harmonic maps and the topology of stable hypersurfaces and manifolds with nonnegative Ricci curvature. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 51(1):333–341, 1976.
- [17] Detlef Gromoll y Wolfgang T. Meyer. Examples of complete manifolds with positive Ricci curvature. *Journal of Differential Geometry*, 21(2):195–211, 1985.