UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

SUPERSIMETRÍA Y MODELO DE ESPÍN EXTENDIDO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

FÍSICO

P R E S E N T A:

GUSTAVO AMILCAR SALDAÑA MONCADA

DIRECTOR DE TESIS:
Dr. JAIME BESPROSVANY FRIDZON

2015

Ciudad Universitaria, D. F.

1. Datos del Alumno	1. Datos del Alumno
Apellido paterno	Saldaña
Apellido materno	Moncada
Nombre(s)	Gustavo Amilcar
Teléfono	26523538
Universidad Nacional Autónoma de México	Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias	Facultad de Ciencias
Carrera	Física
Número de cuenta	306236064
2. Datos del tutor	2. Datos del tutor
Grado	Dr.
Nombre(s)	Jaime
Apellido paterno	Besprosvany
Apellido materno	Fridzon
3. Datos del sinodal 1	3. Datos del sinodal 1
Grado	Dr.
Nombre(s)	José David
Apellido paterno	Vergara
Apellido materno	Oliver
4. Datos del sinodal 2	4. Datos del sinodal 2
Grado	Dra.
Nombre(s)	Myriam
Apellido paterno	Mondragón
Apellido materno	Ceballos
5. Datos del sinodal 3	5. Datos del sinodal 3
Grado	Dr.
Nombre(s)	Genaro
Apellido paterno	Toledo
Apellido materno	Sánchez
6. Datos del sinodal 4	6. Datos del sinodal 4
Grado	Dra.
Nombre(s)	Gabriela
Apellido paterno	Murguía
Apellido materno	Romero
7. Datos del trabajo escrito	7. Datos del trabajo escrito
Título	Supersimetría y Modelo de Espín Extendido
Número de páginas	87
Año	2015

Agradecimientos

Quisiera dar las gracias a todos los que hicieron posible esta tesis. A mis profesores de la licenciatura que me enseñaron mi camino en la Física; a mi asesor, el Dr. Jaime Besprosvany por dejarme colaborar con él y tenerme paciencia en el trabajo mientras realizaba mis estudios de Matemáticas, y a mis sinodales por haberme prestado su tiempo y ofrecerme sus comentarios sobre el trabajo.

También quisiera agradecer a todos mis amigos por haberme brindado su apoyo desde el momento que los conocí, especialmente a mis amigos de la infancia: Edith, Saúl, Luis, Adrián etc.; a los de la Preparatoria 5: Omar, Garfias, Emmanuel, Tania, Monse, Víctor, Edgar, Miguel, etc. y a mis amigos de la Facultad de Ciencias: Pedro, Omar, Javitt, Benja, Alan, Balboa, Ernesto, Oscar, etc. Sin ustedes, no hubiera podido realizar esto.

Quisiera agradecer a toda mi familia por su apoyo incondicional en todo momento. A mis sobrinos porque se siempre están ahí conmigo; a cuñados por todo su apoyo; a mi hermana Maricela, a mi papá y a mis hermanos, David y Tycho, porque fueron mi ejemplo a seguir, la meta a superar. A mi Anita, gracias por mostrarme otro camino, por tu comprensión, por tu amor, por el tiempo que pasamos juntos, gracias por todo; este es el primer paso. A mi hermana Dulce, no solo eres mi hermana, eres mi segunda mamá, siempre nos apoyaste de todas las maneras posibles, sin importar nada más, haces más dulce mi vida.

Por último y no menos importante, a mi mamá. Jamás podré pagarte todo lo que hiciste por mí, lo arriesgaste todo por nosotros y lo volverías a hacer, peleaste tú sola contra el mundo y ¿sabes qué? GANASTE. Este es el primero de muchos logros que son gracias a que de ti aprendí a darlo todo por tus sueños, a nunca rendirse aunque las cosas parezcan imposibles. Estoy muy orgulloso de ser tu hijo y poder llamarte “mamá”; simple y sencillamente, sin ti nada de esto sería posible. GRACIAS MAMÁ.

Resumen

El Modelo Estándar es una teoría que describe las relaciones entre tres de las cuatro interacciones fundamentales conocidas (por medio de bosones de norma) y las partículas elementales que componen toda la materia (por medio de fermiones). La Supersimetría es una hipótesis que propone una simetría entre bosones de norma y fermiones. El Modelo de Espín Extendido sugiere extender el espacio de espín asociando las dimensiones extras a simetrías escalares (que se asocian a las interacciones fundamentales) describiendo simultáneamente bosones y fermiones. Este trabajo muestra por primera vez cómo incorporar las ideas del Modelo de Espín Extendido en el caso más sencillo no trivial de Supersimetría, obteniendo estados supersimétricos con contenido de $SU(2)$ y así indicar un posible camino para la generalización de la Supersimetría y el Modelo Estándar.

Para ello, en el Capítulo 2 se hará una revisión de los conceptos matemáticos necesarios para la comprensión y manejo de la Supersimetría. En el Capítulo 3, se estudiarán las ecuaciones de Klein-Gordon y de Dirac, desde el marco teórico de la Mecánica Cuántica Relativista y de la Teoría Cuántica de Campos; asimismo, se revisarán los fundamentos necesarios de la interacción electrodébil (parte del Modelo Estándar). En el Capítulo 4 se realizará una revisión general del álgebra de la Supersimetría en la representación $N = 1$ considerando el Modelo de Wess-Zumino. Posteriormente, se obtendrán estados supersimétricos masivos y no-masivos en esta representación. En el Capítulo 5 se presenta una introducción al Modelo de Espín Extendido mostrando sus bases con un ejemplo especifico de un espacio $5-$dimensional, así como la construcción de Lagrangianos en la teoría. Para finalizar, en el Capítulo 6 se incorporarán las ideas del Modelo de Espín Extendido en estados supersimétricos masivos y no-masivos, generando así al grupo escalar $SU(2)$ y clasificando los estados. El Capítulo 7 está dedicado a la discusión y conclusiones del presente trabajo.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

A principios del siglo XX la manera de percibir el universo cambió drásticamente con el surgimiento de la Mecánica Cuántica y de la Relatividad General. La Mecánica Cuántica describe procesos a escalas microscópicas, como la dinámica molecular o la estructura de los quarks dentro de los protones y neutrones, mientras que la Relatividad General, nacida de la teoría de la Relatividad Especial, describe procesos a escalas astronómicas, como el sistema solar o estrellas cientos de veces más grandes que el Sol. Ambas teorías están probadas experimentalmente con un alto grado de exactitud, por ejemplo, con el valor de la razón giromagnética del electrón o a través de las lentes gravitacionales.

Al generalizar la ecuación de Schrödinger[1] para ser consistente con la Relatividad Especial, se obtiene la ecuación de Klein-Gordon (véase Sección 3.1); dicha ecuación fue propuesta por el mismo Schrödinger. Con este cambio, se rompe la degeneración en los niveles 2s y 2p que se presenta en los sistemas hidrogenoides de la teoría de Schrödinger. Sin embargo, la descripción obtenida con la ecuación de Klein-Gordon no resulta muy consistente con el experimento [7].

Al incorporar el espín[2] del electrón de manera natural en una teoría cuántica consistente con la Relatividad Especial, se obtiene la ecuación de Dirac, la cual describe partículas con espín $\frac{1}{2}$ y resuelve algunos problemas que se presentan con la ecuación de Klein-Gordon. Por ejemplo, predice correctamente el espectro del átomo de hidrógeno y permite una interpretación que explica la existencia de estados con energía negativa[3], aunque esto último, es solo para partículas de espín $\frac{1}{2}$ [7].

A pesar del éxito de la ecuación de Dirac, ésta por sí sola no es una formulación completa de una teoría cuántica relativista, ya que la fórmula relativista de la energía

$$E = mc^2,$$

deja claro que se pueden crear partículas aportando energía al sistema y viceversa. Una teoría cuántica relativista completa necesariamente tiene que ser una teoría de muchas partículas.

[1] La ecuación base de la Mecánica Cuántica No-Relativista [7].

[2] El espín es la primera propiedad cuántica descubierta que no tiene contraparte clásica y se asocia a un momento magnético intrínseco de las partículas cuánticas. Si las partículas tienen espín entero (0,1,2...) se les conoce como bosones (o antibosones) y satisfacen la estadística de Bose-Einstein. Si las partículas tienen espín semi-entero ($\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$...) se les conoce como fermiones (o antifermiones) y satisfacen la estadística de Fermi-Dirac [7].

[3] Incorporando la idea del mar de Dirac [7].

La Mecánica Cuántica integra la dualidad onda-partícula para la descripción de fenómenos microscópicos. Aplicando esto a campos (partículas y radiación incluidas), surge la Teoría Cuántica de Campos. En este marco, se hace uso de una cuantización adicional de las ecuaciones cuánticas relativistas en el formalismo de la Teoría de Campos (por lo que un sistema de un número infinito de partículas es equivalente a un campo). Se observa que es una generalización de sistemas cuánticos con un número finito de grados de libertad a un número infinito de grados de libertad. Bajo este marco, las inconsistencias teóricas y experimentales de las ecuaciones cuánticas relativistas son resueltas.

El Modelo Estándar es una teoría de norma (como la electromagnética) que se formula mediante la Teoría Cuántica de Campos. Consiste de fermiones elementales, los cuales componen la materia y de bosones de norma, asociados a grupos de simetrías de norma, con los cuales es posible describir tres de las cuatro interacciones fundamentales de la naturaleza: la electrodébil[4] y la fuerte [13]. El Modelo Estándar es una de las teorías más exitosas y a la vez de las más enigmáticas al ser una teoría fenomenológica; no se sabe el origen del grupo de simetrías $SU(3) \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ que representa a las tres fuerzas fundamentales del modelo [6], [17]; también hace falta una razón más fundamental para la existencia del bosón de Higgs que da masa a las partículas. Este desconocimiento se traduce en la relativa gran cantidad de parámetros que requiere el modelo, del orden de veinte, como la masa y la carga de las partículas. Por la naturaleza del Modelo Estándar, se comprende que éste por sí solo nunca podrá proveer alguna explicación sobre estas incógnitas y que, por lo tanto, es necesario investigar más allá del modelo.

Por otro lado, la última interacción fundamental, la gravedad, es descrita exitosamente por la Relatividad General, aunque en este marco, la gravedad es considerada una consecuencia de la curvatura del espacio-tiempo debido a la presencia de energía [8]. Tener una teoría con la que se pueda describir las cuatro interacciones fundamentales conocidas es una de los retos de la física teórica hoy en día[5].

Una idea de unificación prometedora es la Supersimetría (SUSY por sus siglas en inglés), la cual postula la idea de una simetría entre bosones y fermiones asignándole a cada partícula un “supercompañero”: a cada fermión se le asigna un bosón llamado “sfermión”, con los mismos números cuánticos del fermión y a cada bosón de norma se le asigna un fermión llamado “gaugino”, con los mismos números cuánticos del bosón.

A altas energías, las constantes de acoplamiento de las interacciones del Modelo Estándar tienden a un mismo valor. Sin embargo, usando SUSY se logra un mejor acoplamiento [6]. SUSY también da una buena explicación de la ruptura de la simetría electrodébil, además de ofrecer candidatos para la composición de la materia obscura (los supercompañeros). Debido a que SUSY es una buena hipótesis, uno de los objetivos presentes del Gran Colisionador de Hadrones (LHC por sus siglas en inglés) es la posible comprobación experimental de SUSY al observar a las partículas supercompañeras. De ser cierta SUSY, tiene que ser una simetría rota que solo a altas energías se cumple [1], [26], [31].

Otra idea de unificación es la de Kaluza-Klein; propone dimensiones espaciales adicionales más allá de $3+1$, las cuales se asocian con simetrías de norma [6]. El Modelo de Espín Extendido simula la idea de Kaluza-Klein, al asociar elementos de espín en dimensiones adicionales a grados de libertad “escalares”, en vez de asociarlos a las dimensiones espaciales [4], [5]. Aplicar este marco teórico al Modelo Estándar pone, al igual que las Teorías de Gran Unificación, restricciones en el grupo de simetría $SU(3) \times SU(2)_L \times U(1)_Y$,

[4]Descripción conjunta de la hipercarga y la interacción débil (véase Seccion 3.3.2).

[5]Las teorías de Gran Unificación pretenden describir las interacciones del Modelo Estándar con un solo grupo de simetría, mientras que las Teorías del “Todo” pretenden incorporar las cuatro interacciones fundamentales [6].

así como a las representaciones y los valores de las constantes de acoplamiento.

En este trabajo se agregan las ideas del Modelo de Espín Extendido a SUSY y con ello se obtienen estados supersimétricos con simetría escalar $SU(2)$. En ref. [23] se encuentran ideas parecidas a las de este texto.

Capítulo 2

Conceptos Matemáticos

En este capítulo se introducirá la nomenclatura y conceptos matemáticos básicos en el desarrollo del trabajo. Para ello, se dará por hecho que el lector tiene conocimientos de Álgebra Lineal, Mecánica Cuántica y Relatividad Especial.

2.1. Grupos de Lie

2.1.1. Preliminares

Definición 2.1 *Un grupo es un conjunto no-vacío G que bajo una operación binaria*[1] $*$ *se satisface:*

1. *Cerradura:* $\forall\ a, b \in G,\ a{*}b \in G$.
2. *Asociatividad:* $\forall\ a, b, c \in G,\ a * (b * c) = (a * b) * c$.
3. *Neutro*[2]*:* $\exists\ e \in G$ *tal que* $\forall\ a \in G,\ a * e = e * a = a$.
4. *Inverso:* $\forall\ a \in G,\ \exists\ a^{-1} \in G$ *tal que* $a * a^{-1} = e$.

Si además se cumple

5. *Conmutatividad:* $\forall\ a, b \in G,\ a * b = b * a$.

se dice que el grupo G es un grupo abeliano.

Ejemplo 2.1 *Si $\mathbb{Z}$ es el conjunto de los números enteros, entonces $(\mathbb{Z}, +)$ es un grupo abeliano.*

Ejemplo 2.2 *Sea $\mathbb{K}$ un campo y V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial tal que dim(V)=n [10]. Considere el conjunto $GL(V) := \{\, m : V \to V \mid m$ es un isomorfismo*[3] *de espacios vectoriales$\}$. La dupla $(GL(V), \circ)$ (donde $\circ$ es la composición de funciones) forma un grupo. Como $GL(V) \cong GL(n, \mathbb{K}) := \{M \in M_{n\times n}(\mathbb{K}) \mid M$ es*

[1] Una operación binaria en un conjunto G es una función $* : G \times G \to G$.

[2] Al elemento e también se le conoce como elemento identidad I.

[3] Un morfismo entre dos conjuntos, es una asignación que preserva la estructura algebraica de los conjuntos; en este caso, preserva la estructura de espacio vectorial, i.e. es una funcion lineal. Un isomorfimos entre dos conjuntos es un morfismo biyectivo.

una matriz invertible} [10], [18], entonces $(GL(n,\mathbb{K}),\cdot)$ *también es un grupo, donde el símbolo* $\cdot$ *denota la multiplicación de matrices*[4].

Definición 2.2 *Sea* G *un grupo y sea* $A\subseteq G$. A *es un subgrupo de* G *(y se denota* $A\leq G$*) si* A *es un grupo bajo la operación binaria de* G.

Definición 2.3 *Un grupo* G *actúa en un conjunto* X *por la izquierda si* $\exists\ \Psi : G\times X\to X$ *función, que satisface*

1. $\forall\ x\in X$, $\Psi(e,x)=x$, *donde* e *es el elemento neutro de* G
2. $\forall\ x\in X$ *y* $\forall\ a,\ b\in G$, $\Psi(a,\Psi(b,x))=\Psi(a*b,x)$.

Un grupo G *actúa en un conjunto* X *por la derecha si* $\exists\ \Phi : X\times G\to X$ *función, que satisface*

1. $\forall\ x\in X$, $\Phi(x,e)=x$.
2. $\forall\ x\in X$ *y* $\forall\ a,\ b\in G$, $\Phi(\Phi(x,a),b)=\Phi(x,a*b)$.

Definición 2.4 *Sean* U, V *y* W $\mathbb{K}$*-espacios vectoriales. Una función* $b : U\times V\to W$ *es bilineal o 2-multilineal, si restringida a cada coordenada es una función lineal, i.e.* $\forall\ \lambda\in\mathbb{R}$, $\forall\ u,u_1,u_2\in U$ *y* $\forall\ v,v_2,v_3\in V$, *se cumple*

1. $b(\lambda u_1+u_2,v)=\lambda b(u_1,v)+b(u_2,v)$
2. $b(u,\lambda v_1+v_2)=\lambda b(u,v_1)+b(u,v_2)$

La definición anterior se puede generalizar para un número finito de espacios vectoriales:

Definición 2.5 *Sean* V_1, V_2,...,V_k *y* W $\mathbb{K}$*-espacios vectoriales. Una función* $f : V_1\times V_2\times ...\times V_k\to W$ *es k-multilineal si restringida a cada coordenada, es una función lineal.*

Definición 2.6 *Sea* V *un* $\mathbb{R}$*-espacio vectorial. Se dice que* T^k *es un k-tensor covariante en un* $\mathbb{R}$*-espacio vectorial* V, *(*$T^k\in\overbrace{V\otimes V\otimes...\otimes V}^{k-veces}:=\otimes^k(V)$, *donde* $\otimes$ *indica el producto tensorial [18]) si es una función k-multilineal de* V *a* $\mathbb{R}$, *i.e.* $T^k:\overbrace{V\times V\times...\times V}^{k-veces}\to\mathbb{R}$.

Se dice que T_k *es un k-tensor contravariante (*$T_k\in\overbrace{V^*\otimes V^*\otimes...\otimes V^*}^{k-veces}:=\otimes^k(V^*)$*) en el espacio dual de* V, V^* *[18], si es una función k-multilineal de* V^* *a* $\mathbb{R}$, *i.e.* $T_k:\overbrace{V^*\times V^*\times...\times V^*}^{k-veces}\to\mathbb{R}$ *[18], [22].*

Definición 2.7 *Sean* U, V *y* W $\mathbb{C}$*-espacios vectoriales. Una función* $h : U\times V\to W$ *es sesquilineal si* $\forall\ \alpha,\beta\in\mathbb{C}$, $\forall\ u,u_1,u_2\in U$ *y* $\forall\ v,v_1,v_2\in U$, *se satisface*

1. $h(\alpha u_1+\beta u_2,v)=\alpha^*h(u_1,v)+\beta^*h(u_2,v)$.
2. $h(u,\alpha v_1+\beta v_2)=\alpha h(u,v_1)+\beta h(u_2)$.

[4] En el resto del trabajo, solo se considerarán espacios vectoriales sobre el campo $\mathbb{R}$ o sobre el campo $\mathbb{C}$ [18] y para la multiplicación de matrices se omitará el símbolo "$\cdot$". En el resto del capítulo, solo se considerarán espacios vectoriales de dimensión finita.

Donde α^* es el conjugado de α.

Definición 2.8 *Sean V y W $\mathbb{R}$-espacios vectoriales. Si $b : V \times V \to W$ es bilineal, tal que $\forall\ u \in V$, $b(u, v) = 0$ implica que v=0, entonces b es no-degenerada. Si b es bilineal tal que $\forall\ u, v \in V$, $b(u, v) = \pm b(v, u)$, entonces b es simétrica (con signo $+$) o antisimétrica (con signo $-$).*

Observación 1: Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y considere $Bil(V) := \{b : V \times V \to \mathbb{R} \mid b \text{ es bilineal}\}$. Es fácil ver que si $\dim(V)=n$ sobre $\mathbb{R}$, entonces $Bil(V) \cong M_{n\times n}(\mathbb{R})$ [18]. El grupo $GL(V)$ (véase ejemplo 2.2), define una acción derecha[5] sobre $Bil(V)$ dada por

$$\begin{aligned} Bil(V) \times GL(V) &\to Bil(V) \\ (b(u, v), \quad m) &\mapsto b \circ m(u, v) = b(m(u), m(v)). \end{aligned}$$

Observación 2: Sea V un $\mathbb{C}$-espacio vectorial y considere $Sesq(V) := \{h : V \times V \to \mathbb{C} \mid h \text{ es sesquilineal}\}$. Es fácil mostrar que si $\dim(V) = n$ sobre $\mathbb{C}$, entonces $Sesq(V) \cong M_{n\times n}(\mathbb{C})$. $GL(V)$ define una acción derecha sobre $Sesq(V)$ análoga a la que define sobre $Bil(V)$ en el caso real.

Observación 3: Si V es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial, entonces, debido a los isomorfismos de $GL(V)$ y de $Bil(V)$ del ejemplo 2.2 y de la observación 1, la acción de $GL(V)$ sobre $Bil(V)$ induce una acción de $GL(n, \mathbb{R})$ sobre $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ dada por[6]

$$\begin{aligned} M_{n\times n}(\mathbb{R}) \times GL(n, \mathbb{R}) &\to M_{n\times n}(\mathbb{R}) \\ (B \quad , \quad M) &\mapsto M^t BM, \end{aligned}$$

donde M^t indica la matriz transpuesta de M. Si V es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial, entonces, debido a los isomorfismos de $GL(V)$ y de $Sesq(V)$ del ejemplo 2.2 y de la observación 2, la acción de $GL(V)$ sobre $Sesq(V)$ induce una acción de $GL(n, \mathbb{C})$ sobre $M_{n\times n}(\mathbb{C})$ dada por

$$\begin{aligned} M_{n\times n}(\mathbb{C}) \times GL(n, \mathbb{C}) &\to M_{n\times n}(\mathbb{C}) \\ (H \quad , \quad M) &\mapsto M^{*t} HM, \end{aligned}$$

donde M^{*t} indica la matriz transpuesta conjugada de M. En el resto del trabajo, para denotar a esta matriz se usará $M^\dagger$.

Definición 2.9 *Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial (o un $\mathbb{C}$-espacio vectorial). Una geometría ortogonal (unitaria) en V es una función $b \in Bil(V)$ ($h \in Sesq(V)$) simétrica y no-degenerada. Una geometría simpléctica en V es una función $b \in Bil(V)$ ($h \in Sesq(V)$) antisimétrica y no-degenerada (véase definición 2.8). A la matriz B (H), asociada a la geometría b (h), se le llama métrica del espacio V. Para el resto del trabajo se supondrá que esta matriz está calculada en la base canónica de V [10], [18].*

Una geometría de un espacio vectorial V es una generalización de un producto interior [18], ya que no se pide que sea positiva definida. Por lo anterior, un espacio vectorial con una geometría posee propiedades semejantes a las de un espacio con un producto interior. En la física, se suele trabajar con este tipo de espacios vectoriales, pues a las "medidas" de los vectores bajo una geometría, se les asocia una cantidad física o una probabilidad[7].

[5] Véase Apéndice A, proposición 1.

[6] Veáse Apéndice A, proposición 2.

[7] Para asociarle una probabilidad, además de ser una geometría, b tiene que ser positiva definida, i.e. un producto interior.

2.1.2. Grupos de Lie

Definición 2.10 *Sea b (h) una geometría de V. Al conjunto de funciones de GL(V) que bajo la acción de la observación 1, dejan invariante b (h), se denota por G_b (G_h) y se le conoce como grupo de isotropía o grupo de Lie asociado a la geometría b (h), i.e.* $G_b := \{m \in GL(V) \mid b(u,v) = b(m(u), m(v))\}$.

Definición 2.11 *Por la observación 3, la definición 2.10 en términos de matrices, se traduce en el grupo matricial de Lie. Si b es la geometría de V (ortogonal o simpléctica) y B es su matriz asociada, entonces* $G_B := \{M \in GL(n,\mathbb{R}) \mid B = M^t BM\}$ *es el grupo matricial de Lie asociado a B. Si h es la geometría de V (ortogonal o simpléctica) y H es su matriz asociada, entonces* $G_H := \{M \in GL(n,\mathbb{C}) \mid H = M^\dagger HM\}$ *es el grupo matricial de Lie asociado a H.*

En el resto del texto, al grupo matricial de Lie, simplemente se le llamará grupo de Lie. La forma más general de definir un grupo de Lie es mediante la topología diferencial. Con esta definición se demuestra que $GL(n,\mathbb{K})$ es un grupo de Lie para cualquier n, así como cualquier subgrupo (véase definición 2.2) de un grupo de Lie[8] [16], [22] . A continuación se darán ejemplos de otros grupos de Lie que se utilizarán durante el desarrollo del trabajo.

Ejemplo 2.3 *Sea* $J=\begin{pmatrix} 0 & -I_{n\times n} \\ I_{n\times n} & 0 \end{pmatrix}$ *una métrica de un $\mathbb{R}$-espacio vectorial V tal que dim(V)=2n. El grupo de Lie asociado a J se define como* $Sp(n,\mathbb{R}) := \{M \in GL(2n,\mathbb{R}) \mid J = M^t JM\}$ *y se le conoce como grupo simpléctico de V. Si J es la métrica de un $\mathbb{C}$-espacio vectorial V, entonces, el grupo simpléctico es* $Sp(n,\mathbb{C}) := \{M \in GL(2n,\mathbb{C}) \mid J = M^\dagger JM\}$.

Si n=1, se satisface $Sp(1,\mathbb{R}) = SL(2,\mathbb{R}) := \{M \in GL(2,\mathbb{R}) \mid det(M) = 1\}$, *análogo el caso complejo. Al grupo $SL(2,\mathbb{R})$ ($SL(2,\mathbb{C})$) se le conoce como grupo especial lineal real (complejo).*

Nota: En general, el grupo especial lineal es $SL(n,\mathbb{K}){:=}\{M \in GL(n,\mathbb{K}) \mid det(M) = 1\}$. $SL(n,\mathbb{K})$ también es grupo de Lie ya que es subgrupo de $GL(n,\mathbb{K})$, y es de dimensión $n^2 - 1$ sobre $\mathbb{K}$.

Ejemplo 2.4 *Sea B=I (la matriz identidad) una métrica de un $\mathbb{R}$-espacio vectorial V tal que dim(V)=n. El grupo de Lie asociado a B se define como* $O(n) := \{M \in GL(n,\mathbb{R}) \mid M^t M = I\}{=}\{M \in GL(n,\mathbb{R}) \mid det(M) = \pm 1\}$ *y se le conoce como grupo ortogonal de V.*

Considere el conjunto $SO(n) := \{M \in O(n) \mid det(M) = 1\}$. *$SO(n)$ es un subgrupo de $O(n)$, por lo que también es grupo de Lie y se le conoce como grupo especial ortogonal de V.*

Ejemplo 2.5 *Sea B=I una métrica de un $\mathbb{C}$-espacio vectorial V tal que dim(V)=n. El grupo de Lie asociado a B se define como* $U(n) := \{M \in GL(n,\mathbb{C}) \mid M^\dagger M = I\}$ *y se le conoce como grupo unitario de V.*

Considere el conjunto $SU(n) := \{M \in U(n) \mid det(M) = 1\}$. *$SU(n)$ es un subgrupo de $U(n)$, por lo que también es un grupo de Lie y se le conoce como grupo especial unitario de V.*

El hecho de que $M_{n\times m}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{nm}$, nos da una noción más intuitiva al definir propiedades topológicas sobre las matrices debido a las propiedades de distancia en $\mathbb{R}^{nm}$ (lo mismo en el caso de $\mathbb{C}$).

Definición 2.12 *Un grupo de Lie G es compacto si*

[8] Salvo los hechos mencionados anteriormente, para los propósitos de este trabajo, no es necesario considerar la definición general de grupo Lie.

1. $\forall \{X_n\} \in G$, $\{X_n\} \overset{n\to\infty}{\to} X \in G$.

2. $\forall X \in G$, $\exists c$ *constante tal que* $|X_{ij}| \leq c$ *donde* X_{ij} *es el escalar correspondiente en el i-ésimo renglón y en la j-ésima columna de* X.

Definición 2.13 *Un grupo de Lie G es disconexo si $\exists$ W, V conjuntos abiertos, ajenos y no-vacíos de G, tales que $G{=}W \cup V$. Si G no es disconexo, se dice que G es conexo.*

Se sigue de la definición anterior que si G es disconexo, entonces puede descomponerse en componentes conexas de forma única.

Definición 2.14 *Un grupo de Lie G es simplemente conexo si $\forall$ $\sigma(t)$ $(t \in [0,1])$ trayectoria cerrada en G, está se puede transformar por homotopía[9] a un elemento en G.*

Ejemplo 2.6 *$SU(n)$ y $SO(3)$ son compactos pero $SL(n,\mathbb{C})$ no lo es. $SU(n)$, $SL(n,\mathbb{C})$ son simplemente conexos. $SO(3)$ es conexo, pero no es simplemente conexo [11].*

2.2. Álgebras de Lie y superálgebras de Lie

2.2.1. Álgebras de Lie

Definición 2.15 *Un álgebra asociativa A sobre un campo $\mathbb{K}$ es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial equipado con una función bilineal $\mu : A \times A \to A$ que satisface*

1. $\forall$ $u, v, w \in A$ $\mu(\mu(u,v), w) = \mu(u, \mu(v,w))$.

2. $\exists$ $1_A \in A$ *tal que* $\forall$ $a \in A$ $\mu(1_A, a) = a = \mu(a, 1_A)$.

Ejemplo 2.7 *Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, entonces $(M_{n\times n}(\mathbb{K}), \cdot)$ con $\cdot$ la multiplicación de matrices, es un álgebra asociativa.*

Definición 2.16 *Un álgebra de Lie es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial $\hat{g}$, con una función bilineal antisimétrica $[*,*] : \hat{g} \times \hat{g} \to \hat{g}$ llamada corchete de Lie. Este satisface: $[x,[y,z]] + [z,[x,y]] + [y,[z,x]] = 0$, $\forall$ $x, y, z \in \hat{g}$. A esta propiedad se le conoce como identidad de Jacobi.*

Ejemplo 2.8 *Sea A un álgebra asociativa. Ésta define un álgebra de Lie donde el corchete de Lie es $[x,y] = \mu(x,y) - \mu(y,x)$ $\forall$ $x, y \in A$ (conmutador)*

Dada una matriz x, se define $\exp(x) = e^x = I + x + \frac{x}{2} + \cdots = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$.

Definición 2.17 *Para un grupo de Lie[10] G_B (véase defición 2.11), se tiene el álgebra de Lie asociada, dada por $\hat{g}_B := \{x \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) \mid e^{sx} \in G_B, \forall\ s \in \mathbb{R}\}$ y para un grupo de Lie[11] G_H, se tiene $\hat{g}_H := \{x \in M_{n\times n}(\mathbb{C}) \mid e^{sx} \in G_B, \forall\ s \in \mathbb{R}\}$.*

[9] Dos funciones continuas $f, g : X \to$ Y son homotópicas si $\exists$ $H : X\times$ [0,1]$\to$ Y tal que:

1. $H(x, 0) = g(x)$.
2. $H(x, 1) = f(x)$.

[10] Cualquier grupo de Lie tiene asociado un álgebra de Lie [16], [22].

[11] Esta no es la forma más general de definir el álgebra de Lie asociada a un grupo de Lie [11]. Sin embargo, para los propósitos de este trabajo, esta definición es suficiente.

Observación 4: En la definición 2.17, el corchete de Lie está dado por $[x, y] = xy - yx$. Casi en todos los casos, cualquier elemento de un grupo de Lie G se puede ver como e^{sx} para algún $x \in \hat{g}$ (los elementos del álgebra de Lie generan elementos del grupo de Lie mediante la función exponencial exp). Además, dado $e^{sx} \in G$, se tiene $\frac{d}{ds}\big|_{s=0} (e^{sx}) = x \in \hat{g}$, por lo que

$$\hat{g} \overset{\exp}{\to} G$$

$$G \overset{\frac{d}{ds}\big|_{s=0}}{\to} \hat{g}.$$

La función exp y los elementos de $\hat{g}$ cumplen

1. e^0=I.
2. Sea $x \in \hat{g}_B$, $\forall\ a,\ b \in \mathbb{C}$ se cumple $e^{(a+b)x} = e^{ax}e^{bx}$.
3. $\forall\ x, y \in \hat{g}_B$ tal que $[x, y] = 0$, entonces $e^{x+y} = e^x e^y$.
4. $\forall\ x, y \in \hat{g}_B$ tal que $[x, y] \neq 0$, entonces $e^{xy} = \lim_{n\to\infty} (e^{\frac{x}{n}} e^{\frac{y}{n}})^n$.
5. $\forall\ x \in \hat{g}_B$ $\det(e^x)=e^{tr(x)}$ donde $tr(x)$ indica la traza de x.
6. $\forall\ x \in \hat{g}_B$ $|(e^x)_{ij}| \leq e^{|x_{ij}|}$.
7. $\forall\ x, y \in \hat{g}_B$ $e^{y^{-1}xy}=y^{-1}e^x y$.
8. $\forall\ x \in \hat{g}_B$. $(e^x)^\dagger=e^{x^\dagger}$.

Ejemplo 2.9 *Dado el grupo de Lie $GL(n, \mathbb{K})$ del ejemplo 2.2, su álgebra de Lie asociada es* $gl(n, \mathbb{K}) := \{x \in M_{n\times n}(\mathbb{K}) \mid e^{sx} \in GL(n, \mathbb{K}), \forall\ s \in \mathbb{K}\}$.

Ejemplo 2.10 *Dado el grupo de Lie $SL(n, \mathbb{K})$ del ejemplo 2.3, su álgebra de Lie asociada es* $sl(n, \mathbb{K}) := \{x \in gl(n, \mathbb{K}) \mid tr(x) = 0\}$.

Ejemplo 2.11 *Dados los grupos de Lie $O(n)$ y $SO(n)$ del ejemplo 2.4, sus álgebras de Lie asociadas se denotan por $o(n)$ y $so(n)$ respectivamente, y se satisface $o(n) = so(n) := \{x \in gl(n, \mathbb{R}) \mid x^t = -x\}$. Cabe destacar que existen elementos $X \in O(n)$ tales que $X \neq e^{sx}$, $\forall\ x \in o(n)$.*

Ejemplo 2.12 *Dados los grupos de Lie $U(n)$ y $SU(n)$ del ejemplo 2.5, sus álgebras de Lie asociadas se denotan por $u(n)$ y $su(n)$ respectivamente, y se definen como $u(n) := \{x \in gl(n, \mathbb{C}) \mid x^\dagger = -x\}$ y $su(n) := \{x \in gl(n, \mathbb{C}) \mid x^\dagger = -x$ y $tr(x) = 0\}$.*

2.2.2. Superálgebras de Lie

Definición 2.18 *Un $\mathbb{K}-$espacio vectorial graduado sobre un grupo abeliano G, es un espacio vectorial que admite la estructura: $V = \oplus_{n\in G} V_n$ ($\oplus$ denota la suma directa exterior [18]), donde V_n son $\mathbb{K}-$espacios vectoriales. Los elementos del subespacio V_n se llaman homogéneos de grado $n \in G$. Se define la función "grado" como*[12]

[12] $\amalg$ denota la unión ajena de conjuntos.

$$|\cdot| : (\amalg_{n\in G} V_n) - \{0\} \to G$$
$$v \to n \;\; si \;\; v \in V_n.$$

Para que esta función este bien definida, se necesita que los elementos de $\mathbb{K}$ *tengan grado 0 y si* $k \in \mathbb{K}$, $v \in V$, *entonces* $|k \cdot v| = |k| + |v| = |v|$.

Si $G = \mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$, *entonces se dice que* V *es un* $\mathbb{K}-$*superespacio vectorial. A los elementos de* V_0, V_1 *y* $V_0 \amalg V_1$, *se les llama "par", "impar" y "puro" respectivamente.*

Definición 2.19 *Un álgebra asociativa* A *(sobre un campo* $\mathbb{K}$*) graduada sobre un grupo abeliano* G *es un* $\mathbb{K}$*-espacio vectorial graduado sobre* G *en el que cada sumando es un álgebra asociativa. También se tiene una aplicación* $\mu : A \times A \to A$ *bilineal, asociativa con un elemento identidad* $1_A \in A$, *como en la definición 2.15., que además satisface*

$$\mu(A_\alpha, A_\beta) \subseteq A_{\alpha+\beta} \;\; \forall \alpha, \beta \in G.$$

Definición 2.20 *Considere el caso* $G = \mathbb{Z}_2$, *entonces* $A = A_0 \oplus A_1$ *es un álgebra* $\mathbb{Z}_2$*-graduada. La aplicación grado está dada por*

$$|a| = \begin{cases} 0, & si\ a \in A_0 \\ 1, & si\ a \in A_1, \end{cases}$$

y se cumple $|\mu(a, b)| = |a| + |b|$ *(mod 2). Toda álgebra* $\mathbb{Z}_2$*-graduada define una superálgebra de Lie mediante el superconmutador:*

$$[a, b\} = \mu(a, b) - (-1)^{|a||b|}\mu(b, a) \;\; \forall\ a, b \in A.$$

donde a, b son elementos "puros". Como $\forall\ a, b \in A$ *se tiene que* $a = a_0 \oplus a_1$ *y* $b = b_0 \oplus b_1$, *entonces por linealidad*

$$[a, b\} = [a_0, b_0] + [a_0, b_1] + [a_1, b_0] + \{a_1, b_1\}.$$

con $\{x, y\} = \mu(x, y) + \mu(y, x) \;\forall\ x, y \in A$ *(anticonmutador). Se sigue de la construcción*

$$[A_0, A_0] \subseteq A_0; \qquad [A_1, A_0] \subseteq A_1; \qquad \{A_1, A_1\} \subseteq A_0, \qquad \forall\ a, b \in A.$$

El superconmutador satisface:

$$(-1)^{|a||c|}[a, [b, c\}\} + (-1)^{|b||a|}[b, [c, a\}\} + (-1)^{|c||b|}[c, [a, b\}\} = 0 \;\; \forall\ a, b, c \in A.$$

A esta propiedad se le conoce como súper identidad de Jacobi.

Nota: A_0 es un álgebra de Lie (véase definición 2.16). No cualquier álgebra de Lie puede extenderse a una superálgebra de Lie.

Ejemplo 2.13 *Sea* $V = V_0 \oplus V_1 =$ *un* $\mathbb{K}-$*superespacio vectorial. Una transformación lineal* $t : V \to V$ *es homogénea de grado*[13] p *(*$p \in \mathbb{Z}_2$*), si* $t(V_n) \subseteq V_{n+p}$, $\forall\ n \in \mathbb{Z}_2$ *(*$t \in End_{\mathbb{K}}(V)$ *[18]). Se observa que el conjunto* $End_{\mathbb{K}}(V)$ *tiene estructura de superálgebra de Lie*[14] *con*

[13] Si t es de grado 0, una función "par". (en este contexto, no tiene nada que ver con que $t(v) = t(-v)$) entonces t es un endomorfismo de $\mathbb{K}-$superespacios vectoriales.

[14] Donde la operación μ es la composición de funciones.

$$End_{\mathbb{K}}(V) = End^0_{\mathbb{K}}(V) \oplus End^1_{\mathbb{K}}(V),$$

donde

$$End^0_{\mathbb{K}}(V) = \{t \in End_{\mathbb{K}}(V) \mid t(V_n) \subseteq V_n\}$$

y

$$End^1_{\mathbb{K}}(V) = \{t \in End_{\mathbb{K}}(V) \mid t(V_n) \subseteq V_{(n+1)\ mod\, 2}\}.$$

Como caso particular, sea $\mathbb{C}^{1|1} = \mathbb{C} \oplus \Pi\mathbb{C}$ *donde* $\Pi\mathbb{C} \cong \mathbb{C}$. *La única diferencia entre ambos espacios es que* $\mathbb{C}^{1|1}_0 = \mathbb{C}$ *y* $\mathbb{C}^{1|1}_1 = \Pi\mathbb{C}$. *Como* $\mathbb{C}^{1|1} \cong \mathbb{C}^2$, *entonces* $End_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{1|1}) \cong M_{2\times 2}(\mathbb{C})$. *Para* $T \in M_{2\times 2}(\mathbb{C})$ *(isomorfa alguna transformación* t*), se tiene*

$$T = \begin{pmatrix} T_{00} & T_{01} \\ T_{10} & T_{11} \end{pmatrix},$$

por lo que

$$T(z) = \begin{pmatrix} T_{00} & T_{01} \\ T_{10} & T_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{00}z_0 + T_{01}z_1 \\ T_{10}z_0 + T_{11}z_1 \end{pmatrix}.$$

Dado que $T_{00}z_0 + T_{01}z_1$ *y* $T_{10}z_0 + T_{11}z_1$ *deben tener grado* 0 *y* 1 *respectivamente, entonces, para que* T *sea par, se debe cumplir:* $|T_{00}| = |T_{11}| = 0$ *y* $|T_{01}| = |T_{01}| = 1$*; pero los elementos de la matriz* T *están sobre* $\mathbb{C}$*, por lo que son de grado 0. De esta manera se tiene*

$$End^0_{\mathbb{K}}(\mathbb{C}^{1|1}) \cong \{T \in End_{\mathbb{K}}(\mathbb{C}^{1|1}) \mid T = \begin{pmatrix} T_{00} & 0 \\ 0 & T_{11} \end{pmatrix}\}.$$

Un análisis similar muestra que

$$End^1_{\mathbb{K}}(\mathbb{C}^{1|1}) \cong \{T \in End_{\mathbb{K}}(\mathbb{C}^{1|1}) \mid T = \begin{pmatrix} 0 & T_{01} \\ T_{10} & 0 \end{pmatrix}\}.$$

2.3. Representaciones

Definición 2.21 *Una representación real (compleja)* Π *de un grupo de Lie* G_B *(*G_H*) es un morfismo de grupos*[15] *continuo a* $GL(n,\mathbb{R})$ *(*$GL,(n,\mathbb{C})$*), i.e.*

$$\Pi : G_B \to GL(n,\mathbb{R}),$$

tal que

$$\Pi(XY) = \Pi(X)\Pi(Y) \quad \forall\, X, Y \in G_B.$$

Observación 5: *Una representación convierte cualquier elemento del grupo* G_B *(*G_H*) en un operador en* $GL(n,\mathbb{R})$ *(*$GL(n,\mathbb{C})$*).*

[15] Un morfimo de grupos es una función que preserva la estructura de grupos, i.e. preserva la operación binaria de los grupos.

Definición 2.22 *Una representación real (compleja) π de un álgebra de Lie $\hat{g}_B$, es un morfismo de álgebras, lineal*[16] *y biyectivo a $gl(n,\mathbb{R})$ ($gl(n,\mathbb{C})$), i.e.*

$$\pi : \hat{g}_B \to gl(n,\mathbb{R}),$$

tal que

$$\pi([x,y]) = [\pi(x),\pi(y)] \quad \forall\, x,y \in \hat{g}_B.$$

Nota: El espacio de las representaciones del grupo de Lie y de su álgebra de Lie es el mismo.

Definición 2.23 *Una representación de un conjunto X en un conjunto Y es irreducible, si los únicos subespacios invariantes, son {0} y X mismo; de lo contrario, se le llama representación reducible [16].*

Definición 2.24 *Sea V un $\mathbb{C}$-espacio vectorial. Una representación $\Pi : G_H \to GL(n,\mathbb{C})$ es unitaria si las matrices que la representan son unitarias, i.e. $\Pi(X)^{\dagger} = \Pi(X)^{-1} \;\; \forall\, X \in G_H$.*

Definición 2.25 *Sea V un $\mathbb{C}$-espacio vectorial. Una representación $\pi : \hat{g}_H \to gl(n,\mathbb{C})$ es hermitiana si las matrices que la representan son hermitianas, i.e. $\pi(x)^{\dagger} = \pi(x) \quad \forall\, x \in \hat{g}_H$.*

A continuación se darán ejemplos de las representaciones finitas más usadas en la física.

Ejemplo 2.14 *Representación trivial: Esta representación actúa en un espacio 1-dimensional cuyos elementos son llamados escalares con respecto a G. Esta representación está definida como*

$$\Pi : G \to GL(n,\mathbb{K}), \;\; con \;\; \Pi(X) = I \qquad \forall\, X \in G$$

y

$$\pi : \hat{g} \to gl(n,\mathbb{K}), \;\; con \;\; \pi(g_\mu) = 0 \;\; \forall\, g_\mu \in \hat{g} \;\; (produce\ escalares).$$

Ejemplo 2.15 *Representación estándar o fundamental: En esta representación, los generadores de $\hat{g}$*[17] *actúan en un espacio cuya dimensión es la más pequeña no-trivial posible. Los elementos sobre los que actúan los operadores de esta representación son llamados vectores con respecto a G. Esta representación está definida por el mapeo de inclusión*

$$\Pi : G \to Gl(n,\mathbb{K}) \;\; con \;\; \Pi(X) = X \qquad \forall\, X \in G$$

y

$$\pi : \hat{g} \to gl(n,\mathbb{K}) \; con \; \pi(g_\mu) = (g_\mu)^{\sigma}{}_{\rho} \quad \forall\, g_\mu \in \hat{g}.$$

Ejemplo 2.16 *Representación adjunta: Esta representación actúa en un espacio de dimensión igual al número de generadores de $\hat{g}$. Los elementos que pertenecen a este espacio están en la representación adjunta. Para obtener esta representación, considere la siguiente función*

$$Ad : G \to GL(n,\mathbb{K})$$
$$X \mapsto Ad_X \qquad \forall\, X \in G,$$

[16] Está completamente determinada por una base de $\hat{g}_B$ ($\hat{g}_H$).

[17] Por la observación 4 a los miembros de la base de un álgebra $\hat{g}$ se les llama generadores.

donde Ad_X es un operador dado por

$$\begin{aligned} Ad_X : G &\to GL(n, \mathbb{K}) \\ A &\mapsto XAX^{-1} \qquad \forall\, A \in G, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} ad : \hat{g} &\to gl(n, \mathbb{K}) \\ g_\mu &\mapsto ad_{g_\mu} \qquad \forall\, g_\mu \in \hat{g}, \end{aligned}$$

donde ad_{g_μ} es el operador dado por

$$\begin{aligned} ad_{g_\mu} : \hat{g} &\to gl(n, \mathbb{K}) \\ g_\nu &\mapsto ([g_\mu, g_\nu])^\sigma{}_\rho \;\; \forall\, g_\mu \in \hat{g}. \end{aligned}$$

Nota: *Se escribe $[g_\mu, g_\nu] = i f_{\mu\nu}{}^\lambda g_\lambda$. A las constantes $f_{\mu\nu}{}^\lambda$ se conoce como constantes de estructura. Usando la identidad de Jacobi, se aprecia que la identificación $g_\mu \to (g_\mu)_\rho{}^\sigma = f_{\mu\rho}{}^\sigma$ satisface $([g_\mu, g_\nu])_\rho{}^\sigma = f_{\mu\nu}{}^\lambda (g_\lambda)_\rho{}^\sigma$ i.e., satisfacen la misma álgebra. Por lo anterior, a la identificación $g_\mu \to (g_\mu)_\rho{}^\sigma = f_{\mu\rho}{}^\sigma$ es a la que en la física se le conoce como representación adjunta [11].*

Sea G un grupo de Lie y $\hat{g}$ su respectiva álgebra de Lie. Si se tiene una representación de G en $GL(n, \mathbb{K})$, $G \stackrel{\Pi}{\to} GL(n, \mathbb{K})$, entonces es posible asegurar que existe una única representación de $\hat{g}$ en $gl(n, \mathbb{K})$, $\hat{g} \stackrel{\pi}{\to} gl(n, \mathbb{K})$, tal que se cumpla

$$\begin{array}{c} G \stackrel{\Pi}{\to} GL(n, \mathbb{K}) \\ \exp \uparrow \qquad \uparrow \exp \\ \hat{g} \stackrel{\pi}{\to} gl(n, \mathbb{K}). \end{array}$$

Si el grupo G es simplemente conexo, entonces es posible asegurar que dada una representación entre álgebras de Lie $\hat{g}$ y $gl(n, \mathbb{K})$, hay una única representación entre los grupos de Lie G y $GL(n, \mathbb{K})$ [11].

Si G no es simplemente conexo, entonces se construye el grupo espinorial de G ($espín(G)$) o cubierta universal de G [11] (hay un morfismo entre G y $espín(G)$ pero la diferencia es que $espín(G)$ es un grupo simplemente conexo), tal que si $\widetilde{\hat{g}}$ es el álgebra de Lie de $espín(G)$, entonces $\widetilde{\hat{g}}$ y $\hat{g}$ son isomorfos[18], y se satisface

$$\begin{array}{c} espín(G) \stackrel{\widetilde{\Pi}}{\to} GL(n, \mathbb{K}) \\ \exp \uparrow \qquad \uparrow \exp \\ \widetilde{\hat{g}} \stackrel{\widetilde{\pi}}{\to} gl(n, \mathbb{K}), \end{array}$$

donde $\widetilde{\Pi}$ y $\widetilde{\pi}$ son representaciones.

A las representaciones de $espín(G)$ que no son representaciones de G, se les conocen como representaciones espinoriales de G o representaciones de espín y los elementos del espacio vectorial en el que

[18] Un isomorfimos de álgebras de Lie es un isomorfismo lineal que preserva las constantes de estructura.

actúan los operadores de estas representaciones, se les llaman espinores[19]. Todos los tipos de espinores ψ satisfacen que bajo una rotación R de 2π

$$R\psi \to -\psi, \tag{2.1}$$

a diferencia de los vectores de $\mathbb{R}^n$ [29].

A continuación, se revisarán cinco grupos de Lie no-abelianos (y sus respectivas álgebras de Lie) esenciales para el desarrollo del trabajo.

2.3.1. $SO(3)$ y $SU(2)$

Las definiciones de $SU(2)$ y su respectiva álgebra se dieron en el ejemplo 2.5 y en el ejemplo 2.12. $SO(3)$ (véase ejemplo 2.4) es el grupo de rotaciones en $\mathbb{R}^3$ [27]. La estructura de álgebra de Lie de $so(3)$, (véase el ejemplo 2.11) se puede obtener con los operadores diferenciales hermitianos de momento angular[20] , $\hat{L}^{ab} = i(x^a\partial^b - x^b\partial^a)=-\hat{L}^{ba}$, $a, b = 1, 2, 3$ (por lo que solo se necesitan 3 para generar el álgebra $so(3)$ y a $SO(3)$), que satisfacen

$$[\hat{L}^{ij}, \hat{L}^{kl}] = i\delta^{jk}\hat{L}^{il} - i\delta^{ik}\hat{L}^{jl} - i\delta^{jl}\hat{L}^{ik} + i\delta^{il}\hat{L}^{jk}. \tag{2.2}$$

El operador de momento angular es

$$\hat{\mathbf{L}} = (\hat{L}^{23}, \hat{L}^{31}, \hat{L}^{21}). \tag{2.3}$$

Por otro lado, considere $\hat{L}^i = \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}\hat{L}^{jk}$, donde ϵ^{ijk} es el tensor de Levi-Civita. Se cumple

$$[\hat{L}^i, \hat{L}^j] = i\epsilon^{ijk}\hat{L}^k. \tag{2.4}$$

Con esta notación, el operador de momento angular es

$$\hat{\mathbf{L}} = (\hat{L}^1, \hat{L}^2, \hat{L}^3), \tag{2.5}$$

y mediante el mapeo exponencial

$$R := \exp(-i\omega^i\hat{L}^i) \in SO(3), \tag{2.6}$$

se obtiene una rotación en un ángulo $|\omega|$ alrededor del eje definido por $\hat{\omega}$.

La representación trivial de $so(3)$ es $\hat{L}^{ij}$=0; por lo anterior, cualquier rotación R está representada por la identidad. Como la representación trivial es igual para todos los grupos de Lie, en el resto del texto ya no se realizará su construcción.

En la representación fundamental de $so(3)$, cada generador $\hat{L}^{ij}$ está dado por una matriz de 3×3, $(\hat{L}^{ij})^{ab}$, la cual opera sobre vectores de 3 dimensiones. Estas matrices están dadas como

$$(\hat{L}^{ij})^{ab} = i(\delta^{ja}\delta^{ib} - \delta^{ia}\delta^{jb}). \tag{2.7}$$

[19] Más adelante se revisará con detalle esta representación.

[20] En el desarrollo de este trabajo se considera $\hbar = 1$, donde $\hbar$ es la constante de Plank.

En esta representación, al tomar el mapeo exponencial, éste actúa sobre vectores de 3 dimensiones, i.e. $\exp(-\frac{i}{2}\omega^{ij}L^{ij})^{ab}V^a$, donde $\omega^{ij}{=}\epsilon^{ijk}\omega^k$ (véase ec. 2.6). Para $so(3)$, la representación adjunta es equivalente a la representación fundamental, i.e. la representación adjunta consiste en efectuar el cambio de base[21] $(\hat{L}^j)^{ab} = -i\epsilon^{jab}$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ impar, hay una representación de $so(3)$ que actúa en un espacio vectorial dimensión n sobre $\mathbb{R}$. Sin embargo esto no da una completa descripción de las partículas cuánticas en todos los casos. Como $SO(3)$ no es un grupo simplemente conexo, se recure al grupo espín de $SO(3)$[22]. Considere

$$SU(2) \xrightarrow{f} SO(3)$$
$$A \mapsto G \ \ donde \ \ G(X) = AXA^{\dagger}.$$

Es fácil ver que f es una función suprayectiva aunque no es inyectiva[23] (es 2 a 1 ya que $f(A) = f(-A)$). Como[24] $su(2) \cong so(3)$, entonces $espín(SO(3)) = SU(2)$ [11].

Tomando $n = 2s + 1$ se obtiene que para cada valor semi-entero o entero del número s, hay una representación de $su(2)$ hermitiana (con una representación unitaria de $SU(2)$) que opera sobre un espacio vectorial de dimensión n sobre $\mathbb{C}$. El número s se asocia con el valor del espín de las partículas [7].

Para $s = \frac{1}{2}$ se tiene la representación fundamental de $su(2)$ (hermitiana e irreducible, que opera sobre un espacio vectorial de dimensión 2 sobre $\mathbb{C}$) y se le conoce como representación de espín $\frac{1}{2}$. Dicha representación proporciona una correcta descripción de partículas no-relativistas con momento angular total $\frac{1}{2}$, i.e.[25] con espín $\frac{1}{2}$. La base de esta representación son las matrices de Pauli[26], las cuales satisfacen

$$[\sigma^i, \sigma^j] = 2i\epsilon^{ijk}\sigma^k, \tag{2.8}$$

o si se toma $\hat{S}^i = \frac{1}{2}\sigma^i$, se obtiene

$$[\hat{S}^i, \hat{S}^j] = i\epsilon^{ijk}\hat{S}^k. \tag{2.9}$$

Así, el operador de espín total[27] es

$$\hat{\mathbf{S}} = (\hat{S}^1, \hat{S}^2, \hat{S}^3). \tag{2.10}$$

Los elementos del espacio vectorial en el que actúa el operador $\hat{\mathbf{S}}$ son espinores [7]. Para $s = 1$ se tiene la representación adjunta de $su(2)$; que describe correctamente partículas no-relativistas de momento angular total[28] 1, y así sucesivamente para cualquier valor de s [7].

[21] Véase ec. 2.4.

[22] En Mecánica Cuántica esto se hace cuando se considera la contribución del espín de las partículas en el momento angular total, $\hat{\mathbf{M}} = \hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{S}}$ donde $\hat{\mathbf{S}}$ es el operador de espín [7].

[23] Tomando $\mathbb{Z}_2 \cong \{-1, 1\}$ (como grupo multiplicativo), entonces $SU(2)/\mathbb{Z}_2 \cong SO(3)$ (isomorfismo de grupos).

[24] Las constantes de estructura son las mismas, por lo el morfismo que manda la base en la base es un isomorfismo de álgebras de Lie.

[25] Forzosamente el momento angular orbital tiene que ser 0 [7].

[26] Véase Apéndice B.

[27] También llamado operador de espín $\frac{1}{2}$ [7].

[28] Esta representación describe partículas de espín 1 siempre y cuando el momento angular orbital sea 0 [7].

2.3.2. $SO_0(1,3)$ y $SL(2,\mathbb{C})$

Uno de los principios en los que se basa la teoría de la Relatividad Especial [8] es considerar al tiempo y al espacio partes de un solo ente 4-dimensional llamado espacio-tiempo[29] y usar la métrica de Minkowski (como la definición 2.9)

$$\eta := diag(1,-1,-1,-1), \tag{2.11}$$

donde la primera coordenada está asociada a la coordenada temporal.

Se observa que las isometrías más generales de $\mathbb{R}^4$ en $\mathbb{R}^4$ que dejan invariante la métrica de Minkowski son

$$f(x^\mu) = \widehat{x}^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu. \tag{2.12}$$

La matriz Λ ($\Lambda = [(\Lambda)^\mu{}_\nu]$ $\mu,\nu = 0,1,2,3$) es una transformación de $\mathbb{R}^4$ que tiene que satisfacer

$$\Lambda^t \eta \Lambda = \eta. \tag{2.13}$$

Por lo anterior, las matrices Λ forman un grupo de Lie asociado a la métrica de Minkowski η (véase definición. 2.11). A este grupo se le llama grupo de Lorentz o grupo $O(1,3)$ y consta de 4 componentes ajenas ($O(1,3)$ es disconexo, véase definición 2.13) entre sí caracterizadas por

$$det(\Lambda) = \pm 1 \;\; y \;\; sgn(\Lambda^0{}_0) = \pm 1, \tag{2.14}$$

donde $sgn(x)$ indica el signo de x.

En la ec. 2.12, a^μ es una traslación en la coordenada μ. Las traslaciones a junto con $O(1,3)$ forman un grupo de Lie llamado grupo de Poincaré [9], el cual se revisará en la siguiente sección.

Como se puede deducir de la definición 2.2, solo la componente que posee al elemento identidad es un subgrupo[30]; a este se le conoce como $SO_0(1,3)$, y consta de elementos con $det(\Lambda) = 1$ (proporciona una paridad fija) y $sgn(\Lambda^0{}_0)$=1 (conserva el flujo del tiempo). Como $SO_0(1,3)$ no es compacto [9], se puede demostrar que no tiene representaciones de dimensiones finitas unitarias.[31]

La estructura de álgebra de Lie de $so_0(1,3)$ se obtiene de los operadores diferenciales $\hat{L}^{\mu\nu} = i(x^\mu\partial^\nu - x^\nu\partial^\mu) = -\hat{L}^{\nu\mu}$ para $\mu,\nu = 0,1,2,3$. Estos operadores satisfacen [9], [16]

$$[\hat{L}^{\rho\sigma}, \hat{L}^{\nu\mu}] = i\eta^{\rho\mu}\hat{L}^{\sigma\nu} - i\eta^{\rho\nu}\hat{L}^{\sigma\mu} + i\eta^{\sigma\nu}\hat{L}^{\rho\mu} - i\eta^{\sigma\mu}\hat{L}^{\rho\nu}. \tag{2.15}$$

Si la ecuación anterior se restringe a los índices espaciales, entonces se obtiene la ec. 2.2, por lo que se concluye que $SO(3) \subset SO_0(1,3)$. Debido a esto, $SO_0(1,3)$ no es un grupo simplemente conexo.

El operador de momento angular es

$$\hat{\mathbf{L}} = (\hat{L}^{23}, \hat{L}^{31}, \hat{L}^{21}), \tag{2.16}$$

[29] En el desarrollo de este trabajo se considera c=1, donde c es la velocidad de la luz en el vacío.

[30] Es posible demostrar que las demás componentes de $O(1,3)$ se generan con inversiones temporales T y cambios de paridad P multiplicados con elementos de $SO_0(1,3)$ [9].

[31] Existen generadores del álgebra que no son hermitianos.

mientras que el operador de rotaciones totales que involucran el eje temporal (transformaciones de Lorentz propiamente dichas, que también son llamadas "boosts" o "empujones") está dado por

$$\hat{\mathbf{K}} = (\hat{L}^{01}, \hat{L}^{02}, \hat{L}^{03}). \tag{2.17}$$

Nota: Para representaciones de dimensiones finitas, los boosts no son operadores hermitianos.

Bajo el mapeo exponencial se obtiene

$$\Lambda := \exp(-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\hat{L}^{\mu\nu}) \in SO_0(1,3), \tag{2.18}$$

donde $\omega_{\mu\nu}$ es un tensor antisimétrico constante.

En la representación fundamental, cada generador $\hat{L}^{\mu\nu}$ está dado por una matriz de 4×4 $(\hat{L}^{\mu\nu})_\rho^{\ \sigma}$ y operan sobre vectores de 4 dimensiones. Las correspondientes matrices están dadas como

$$(\hat{L}^{\mu\nu})^\sigma_{\ \rho} = i(\eta^{\mu\sigma}\delta^\nu_{\ \rho} - \eta^{\nu\sigma}\delta^\mu_{\ \rho}). \tag{2.19}$$

En esta representación, al tomar el mapeo exponencial, éste actúa sobre vectores de 4 dimensiones, i.e. $\Lambda^\sigma_{\ \rho}V^\rho$, donde $\Lambda^\sigma_{\ \rho} = \exp(-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}L^{\mu\nu})^\sigma_{\ \rho}$, es la matriz de una transformación de Lorentz usal.

Hay 6 generadores de $so_0(1,3)$ ya que $\hat{L}^i = \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}\hat{L}^{jk}$ para $i,j,k = 1,2,3$ y también se tiene $\hat{K}^i = \hat{L}^{0i}$. De esta manera, la ec. 2.15 se escribe como [19]

$$[\hat{L}^i, \hat{L}^j] = i\epsilon^{ijk}\hat{L}^k; \tag{2.20}$$

$$[\hat{K}^i, \hat{K}^j] = -i\epsilon^{ijk}\hat{J}^k; \tag{2.21}$$

$$[\hat{L}^i, \hat{K}^j] = i\epsilon^{ijk}\hat{K}^k. \tag{2.22}$$

En un abuso de notación, las 3 ecuaciones anteriores se pueden escribir como $[\hat{L}^a, \hat{L}^b] = if^{ab}_{\ \ c}\hat{L}^c$ para $a,b,c = 1,2,...,6$ (se consideró $\hat{L}^a{=}\hat{K}^a$ para $a = 4,5,6$). Por lo anterior, la representación adjunta está compuesta de matrices de 6×6 definidas como $(\hat{L}^a)^b_{\ c} = -if^{ab}_{\ \ c}$ (véase ejemplo 2.16).

$SO_0(1,3)$ no proporciona una completa descripción de las partículas relativistas en todos los casos. Al igual que en el caso no-relativista (Sección 2.3.1) hay que recurrir al grupo *espín*$(SO_0(1,3))$. En la sección anterior se observó que *espín*$(SO(3)) = SU(2)$; un análisis similar muestra que $sl(2,\mathbb{C}) \cong so_0(1,3)$ y *espín*$(SO_0(1,3)) = SL(2,\mathbb{C})$ (véase ejemplo 2.3 y 2.10).

Espinores de Dirac

Para construir las representaciones de $sl(2,\mathbb{C})$ se usa un conjunto de matrices que forman un álgebra asociativa (véase definición 2.15 y ejemplo 2.7) llamada álgebra de Clifford de dimensión 4, C_4, o álgebra de Dirac [16], [25]. Ésta está definida por la relación

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2I\eta^{\mu\nu}, \tag{2.23}$$

donde $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$. I es la matriz identidad (de la misma dimensión que γ^μ), que a partir de este momento se omitirá al escribir la ec. 2.23. A las matrices γ^μ se les llaman matrices de Dirac.

Considere $\sigma^\mu := (I, \bar{\sigma})$, $\bar{\sigma}^\mu := (I, -\bar{\sigma})$ donde $\bar{\sigma} = (\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3)$ son las matrices de Pauli. Con lo anterior, las matrices de Dirac escritas en la representación de Weyl[32] son

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.24}$$

Se define

$$\hat{S}^{\mu\nu} := \frac{i}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] = \frac{i}{4} \begin{pmatrix} \sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu - \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu & 0 \\ 0 & \bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu - \bar{\sigma}^\nu \sigma^\mu \end{pmatrix}. \tag{2.25}$$

Es fácil verificar

$$[\hat{S}^{\mu\nu}, \gamma^\rho] = i(\gamma^\mu \eta^{\nu\rho} - \gamma^\nu \eta^{\rho\mu}), \tag{2.26}$$

por lo que

$$[\hat{S}^{\rho\sigma}, \hat{S}^{\nu\mu}] = i\eta^{\rho\mu}\hat{S}^{\sigma\nu} - i\eta^{\rho\nu}\hat{S}^{\sigma\mu} + i\eta^{\sigma\nu}\hat{S}^{\rho\mu} - i\eta^{\sigma\mu}\hat{S}^{\rho\nu}. \tag{2.27}$$

De la ecuación anterior se observa que $\hat{S}^{\nu\mu} \in so_0(1,3)$ (pues satisface las condiciones del álgebra $sl(2,\mathbb{C}) \cong so_0(1,3)$) y de esta forma, se tiene una representación espinorial de $so_0(1,3)$.

El operador de espín total es

$$\hat{\mathbf{S}} = (\hat{S}^{23}, \hat{S}^{31}, \hat{S}^{12}) = \frac{i}{2}(\gamma^2\gamma^3, \gamma^3\gamma^1, \gamma^1\gamma^2), \tag{2.28}$$

mientras que el operador de boost total de "espín" es

$$\hat{\mathbf{K}} = (\hat{S}^{01}, \hat{S}^{02}, \hat{S}^{03}) = \frac{i}{2}(\gamma^0\gamma^1, \gamma^0\gamma^2, \gamma^0\gamma^3). \tag{2.29}$$

Mediante el mapeo exponencial, se obtiene

$$S(\Lambda) := \exp(-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\hat{S}^{\mu\nu}) \in SL(2,\mathbb{C}). \tag{2.30}$$

El espacio vectorial en el que actúa la representación dada por la ec. 2.25 es de dimensión 4 sobre $\mathbb{C}$ y a sus elementos se les llaman espinores de Dirac. Los espinores de Dirac se transforman con el operador $S(\Lambda)$

$$\psi(x) \to S(\Lambda)\psi(\Lambda^{-1}x). \tag{2.31}$$

donde Λ está definida en la ec. 2.18. Como las matrices de Dirac satisfacen

$$(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0 = \gamma_\mu, \tag{2.32}$$

entonces, se cumple

[32]Las matrices de Dirac son una generalización de las matrices de Pauli ya que estas cumplen $\{\sigma^\mu, \bar{\sigma}^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}$. En este trabajo solo se trabajara con la representación de Weyl de las matrices de Dirac. En el Apéndice B se muestran otras representaciones de las matrices de Dirac.

$$(\hat{S}^{\mu\nu})^{\dagger} = -\frac{i}{4}[(\gamma^{\mu})^{\dagger}, (\gamma^{\nu})^{\dagger}] = -\gamma^0 \hat{S}^{\mu\nu}\gamma^0 = \hat{S}_{\mu\nu}. \tag{2.33}$$

De la ec. 2.33 se obtiene $S(\Lambda)^{\dagger} = \gamma^0 S(\Lambda)^{-1}\gamma^0$. Con ayuda de lo anterior, es posible definir el espinor adjunto de Dirac

$$\bar{\psi} := \psi^{\dagger}\gamma^0; \qquad \bar{\psi}(x) \to \bar{\psi}(\Lambda^{-1}x)S(\Lambda)^{-1}, \tag{2.34}$$

Se define

$$\gamma^5 := i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3. \tag{2.35}$$

Esta matriz cumple

1. $(\gamma^5)^2 = I$ (por lo que sus eigenvalores son ± 1).
2. $\{\gamma^5, \gamma^{\mu}\}$=0 $\quad \mu = 0, 1, 2, 3$.
3. $[\gamma^5, S^{\mu\nu}] = 0 \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3$.

Se establecen los operadores de proyección:

$$P^{\pm} := \frac{1}{2}(I \pm \gamma^5), \tag{2.36}$$

que satisfacen $(P^{\pm})^2 = P^{\pm}$ y $P^+P^- = 0$.

Espinores de Weyl y de Majorana

Es posible demostrar que $sl(2, \mathbb{C})$ es isomorfa a dos álgebras $su(2)$ que conmutan entre sí: $sl(2, \mathbb{C}) \cong su(2) \oplus su(2)^*$ [9]. Por lo anterior, las representaciones de $sl(2, \mathbb{C})$ están clasificadas por dos números semi-enteros o enteros (uno por cada $su(2)$, véase Sección 2.3.1).

Sea $M \in SL(2, \mathbb{C})$. La representación fundamental de M es conocida como representación espinorial $(0, \frac{1}{2})$. El espacio vectorial en el que esta representación actúa es de dimensión 2 sobre $\mathbb{C}$ y a sus elementos se les conoce como espinores izquierdos χ_{α} ($\alpha = 0, 1$). Por otro lado, la representación fundamental de M^* es conocida como representación espinorial $(\frac{1}{2}, 0)$ o como representación fundamental conjugada[33]. El espacio vectorial en el que esta representación actúa es de dimensión 2 sobre $\mathbb{C}$ y a sus elementos se les conoce como espinores derechos $\bar{\chi}_{\dot{\alpha}}$ ($\dot{\alpha} = 0, 1$). Nótese que $\chi^{\dagger}_{\alpha} = \bar{\chi}_{\dot{\alpha}}$. Las partículas descritas por la representación $(0, \frac{1}{2})$ ($(\frac{1}{2}, 0)$), son partículas relativistas de espín $\frac{1}{2}$ llamadas partículas izquierdas (derechas). A los espinores derechos e izquierdos también se les llama espinores de Weyl o espinores quirales. Con los operadores de proyección de la ec. 2.36, se obtienen los espinores de Weyl a partir de un espinor de Dirac[34] ψ

$$\begin{pmatrix} \chi_{\alpha} \\ 0 \end{pmatrix} = \psi_L = P^-\psi; \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{\xi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} = \psi_R = P^+\psi, \tag{2.37}$$

[33] La represntación espinorial presentada en la ec. 2.25, es la representación $(1/2, 0) \oplus (0, 1/2)$ [9], [19]; por lo tanto, es una representación reducible. Esta representación describe correctamente en un marco relativista, partículas con espín $\frac{1}{2}$.

[34] Esto solo es posible en la representación de Weyl de las matrices de Dirac.

donde ψ_L (ψ_R) es el espinor izquierdo (derecho[35]).

Para subir y bajar indices espinoriales (ec. 2.37), i.e. pasar de la representación fundamental (conjugada) a la representación contravariante (conjugada) y viceversa, no se usa el tensor métrico η, sino se usan los tensores [26]

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \epsilon^{\alpha\beta} = \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.38}$$

pues son tensores invariantes en $SL(2,\mathbb{C})$, con $\alpha, \dot{\alpha}, \beta, \dot{\beta} = 0, 1$. Por lo tanto,

$$\chi_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta}\chi^\beta; \quad \chi^\alpha = \epsilon^{\alpha\beta}\chi_\beta; \quad \bar{\xi}^{\dot{\alpha}} = \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{\xi}_{\dot{\beta}}; \quad \bar{\xi}_{\dot{\alpha}} = \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{\xi}^{\dot{\beta}}. \tag{2.39}$$

En particular $\xi\chi := \xi^\alpha\chi_\alpha = \xi^\alpha\epsilon_{\alpha\beta}\chi^\beta = -\chi^\beta\epsilon_{\alpha\beta}\xi^\alpha = \chi^\beta\epsilon_{\beta\alpha}\xi^\alpha = \chi^\beta\xi_\beta = \chi\xi$.

Por el último término de la ec. 2.25, los generadores de $sl(2,\mathbb{C})$ en los espacios de χ_α y $\bar{\xi}^{\dot{\alpha}}$ se definen [26]

$$(\sigma^{\mu\nu})_\alpha^{\ \beta} := \frac{i}{4}(\sigma^\mu_{\alpha\dot{\gamma}}\bar{\sigma}^{\nu\dot{\gamma}\beta} - \sigma^\nu_{\alpha\dot{\gamma}}\bar{\sigma}^{\mu\dot{\gamma}\beta}); \quad (\bar{\sigma}^{\mu\nu})^{\dot{\alpha}}_{\ \dot{\beta}} := \frac{i}{4}(\bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\gamma}\sigma^\nu_{\gamma\dot{\beta}} - \bar{\sigma}^{\nu\dot{\alpha}\gamma}\sigma^\mu_{\gamma\dot{\beta}}). \tag{2.40}$$

Hay que notar que, por ejemplo, el generador en la tercera dirección espacial es $S^{12} = S_{12} = \sigma^{12} = \bar{\sigma}^{12} = \frac{\sigma^3}{2}$ como se esperaba. χ_α y $\bar{\xi}^{\dot{\alpha}}$ tienen la regla de transformación de Lorentz:

$$\chi_\alpha \to \exp(-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu})_\alpha^{\ \beta}\chi_\beta; \quad \bar{\xi}^{\dot{\alpha}} \to \exp(-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\bar{\sigma}^{\mu\nu})^{\dot{\alpha}}_{\ \dot{\beta}}\bar{\xi}^{\dot{\beta}}. \tag{2.41}$$

Se define la matriz de conjugación de carga C en esta representación (representación de Weyl) [26] como

$$C = \begin{pmatrix} -\epsilon_{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & -\epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \end{pmatrix}. \tag{2.42}$$

La matriz C satisface

$$C^t = C^\dagger = C^{-1} = -C. \tag{2.43}$$

Por la ec. 2.39, la matriz C se usa para conjugar al espinor de Dirac[36]

$$\psi_b = \psi^a C_{ab}. \tag{2.44}$$

El espinor de carga conjugada se define como

$$\psi^C = C\bar{\psi}^t; \quad \bar{\psi}^C = \psi^{C\dagger}\gamma^0. \tag{2.45}$$

A partir de un espinor de Dirac, se puede definir otro tipo de espinor ψ_M conocido como espinor de Majorana, dado por la condición

[35]El subíndice L (R) en el espinor izquierdo (derecho) es por la palabra "left" ("right"), que en ingles significa izquierda (derecha).

[36]Se considero $\psi_a = \begin{pmatrix} \chi_\alpha \\ \bar{\xi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}$ y $\psi^a = \begin{pmatrix} \chi^\alpha \\ \bar{\xi}_{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}$.

$$\psi_M^C = \psi_M. \tag{2.46}$$

Por lo anterior, un espinor de Majorana se construye a partir de un espinor izquierdo χ_α (análogamente para un espinor derecho)

$$\psi_M = \begin{pmatrix} \chi_\alpha \\ \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}. \tag{2.47}$$

Nótese que un espinor de Dirac ψ se escribe como combinación lineal de dos espinores de Majorana ψ_{M1} ψ_{M2}

$$\psi = i\psi_{M1} + \psi_{M2}; \qquad \psi_{M1} = \frac{1}{2i}(\psi - \psi^C); \qquad \psi_{M2} = \frac{1}{2}(\psi + \psi^C). \tag{2.48}$$

Clasificación de los elementos del álgebra de Dirac

De la ec. 2.31 y del segundo término de la ec. 2.34, se sigue

$$\bar{\psi}(x)\psi(x) \to \bar{\psi}(\Lambda^{-1}x)\psi(\Lambda^{-1}x). \tag{2.49}$$

Por lo anterior, $\bar{\psi}\psi$ se transforma como escalar, con respecto a $SL(2,\mathbb{C})$ (o con respecto a $SO_0(1,3)$) [8].

De las ecs. 2.19, 2.26 y 2.30, se obtiene [29]

$$S(\Lambda)^{-1}\gamma^\mu S(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\nu \gamma^\nu \quad \mu = 0,1,2,3, \tag{2.50}$$

por lo que

$$\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x) \to \Lambda^\mu{}_\nu \bar{\psi}(\Lambda^{-1}x)\gamma^\nu\psi(\Lambda^{-1}x). \tag{2.51}$$

Debido a la ec. 2.51, $\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)$ se transforma como un vector con respecto a $SO_0(1,3)$ [8]. Del resultado anterior, se sigue

$$\bar{\psi}(x)\hat{S}^{\mu\nu}\psi(x) \to \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma \bar{\psi}(\Lambda^{-1}x)\hat{S}^{\rho\sigma}\psi(\Lambda^{-1}x). \tag{2.52}$$

Por lo tanto, $\bar{\psi}(x)\hat{S}^{\mu\nu}\psi(x)$ se transforma como un tensor[37] [8] bajo $SO_0(1,3)$.

Bajo transformaciones de cambios de paridad[38], los espinores de Dirac se transforman como [29]

$$P\psi(\mathbf{x},t) \to \gamma^0\psi(-\mathbf{x},t). \tag{2.53}$$

Por lo tanto bajo transformaciones de paridad P, las ecuaciones 2.49, 2.51 y 2.52 se siguen satisfaciendo[39] [29], [25]. Debido a lo anterior $\bar{\psi}\psi$, $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ y $\bar{\psi}\hat{S}^{\mu\nu}\psi$ se transforman como un escalar, un vector y un tensor respectivamente bajo el grupo Lorentz.

Por otro lado, $\bar{\psi}\gamma^5\psi$ y $\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\psi$ se transforman como un pseudo-escalar y como un pseudo-vector respectivamente bajo el grupo de Lorentz. En efecto[40]

[37] Forma matricial de la definición 2.6.
[38] Transformaciones que pertenecen al grupo de Lorentz, pero no a $SO_0(1,3)$.
[39] También para inversiones temporales T (que pertenecen al grupo de Lorentz pero no a $SO_0(1,3)$) [25].
[40] $\bar{\psi}\gamma^5\psi$ y $\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\psi$ se transforman como escalar y como vector respectivamente bajo $SO_0(1,3)$, .

$$[P\bar{\psi}\gamma^5\psi](\mathbf{x},t) \to -[\bar{\psi}\gamma^5\psi](-\mathbf{x},t). \tag{2.54}$$

$$[P\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\psi](\mathbf{x},t) \to \begin{cases} -[\bar{\psi}\gamma^5\gamma^0\psi](-\mathbf{x},t) & \mu = 0. \\ [\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\psi](-\mathbf{x},t) & \mu = 1,2,3. \end{cases} \tag{2.55}$$

De esta manera, se hace la clasificación:

Elemento	Propiedad	No. de elementos
$\bar{\psi}\psi$	escalar	1
$\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$	vector	4
$\bar{\psi}\hat{S}^{\mu\nu}\psi$	tensor	6
$\bar{\psi}\gamma^5\psi$	pseudo-escalar	4
$\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\psi$	pseudo-vector	1

2.3.3. El grupo de Poincaré

En la sección anterior, se vio que el conjunto de isometrías de la métrica de Minkowski forman el grupo de Poincaré $P(1,3)$. Se observa que el vector $x \in \mathbb{R}^4$, frente a dos transformaciones de Poincaré es

$$x \to \Lambda_1 x + a_1 \to \Lambda_2(\Lambda_1 x + a_1) + a_2 = \Lambda_2\Lambda_1 x + (\Lambda_2 a_1 + a_2), \tag{2.56}$$

donde $\Lambda_i \in O(1,3)$ y $a_i \in \mathbb{R}^4$ (es una traslación en $\mathbb{R}^4$) para $i = 1,2$. Se sigue

$$P(1,3) \cong \{\begin{pmatrix} \Lambda & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid \Lambda \in O(1,3),\ a \in \mathbb{R}^4\}, \tag{2.57}$$

cuya álgebra de lie es

$$p(1,3) \cong \{\begin{pmatrix} \Lambda & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid \Lambda \in so_0(1,3),\ a \in \mathbb{R}^4\}. \tag{2.58}$$

Se definen los generadores de su álgebra de Lie asociada $p(1,3)$

$$\hat{M}^{\mu\nu} := \begin{pmatrix} \hat{J}^{\mu\nu} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \hat{P}^\sigma := \begin{pmatrix} 0 & ie^\sigma \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.59}$$

donde $\hat{J}^{\mu\nu}$ son los generadores de $so_0(1,3)$ (ecs. 2.15 y 2.27) y $\hat{P}^\sigma$ genera una traslación en la coordenada σ con $(e^\sigma)^\rho = \delta^{\sigma\rho}$. Se sigue que los generadores satisfacen

$$[\hat{M}^{\rho\sigma}, \hat{M}^{\nu\mu}] = i\eta^{\rho\mu}\hat{M}^{\sigma\nu} - i\eta^{\rho\nu}\hat{M}^{\sigma\mu} + i\eta^{\sigma\nu}\hat{M}^{\rho\mu} - i\eta^{\sigma\mu}\hat{M}^{\rho\nu}; \tag{2.60}$$

$$[\hat{P}^\sigma, \hat{P}^\rho] = 0; \tag{2.61}$$

$$[\hat{M}^{\mu\nu}, \hat{P}^\sigma] = i\eta^{\nu\sigma}\hat{P}^\mu - i\eta^{\mu\sigma}\hat{P}^\nu. \tag{2.62}$$

En una teoría cuántica relativista, debe de haber invariancia bajo las transformaciones del grupo de Poincaré sobre el espacio de Hilbert de los vectores de estado del sistema físico además de pedir la unitariedad de las representaciones típica de una teoría cuántica[41]. En este marco, el operador $\hat{P}_\sigma$ genera una traslación en términos del operador diferencial $-i\partial_\sigma$. El generador de traslaciones temporales se identifica con el Hamiltoniano del sistema, i.e. $\hat{P}_0 = \hat{H}$, mientras que el resto de las componentes son las componentes del operador de momento, i.e. $\hat{\mathbf{P}} = (\hat{P}_1, \hat{P}_2, \hat{P}_3)$. Los eingenvalores de operadores hermitianos que conmutan con $\hat{P}_0$ son cantidades conservadas en la teoría cuántica (los operadores pueden ser diagonalizados simultáneamente), por lo que el momento lineal ($\hat{\mathbf{P}}$) y el momento angular ($\hat{\mathbf{M}}$, véase ec. 2.16) son cantidades conservadas.

Se define el vector de Pauli-Lubanski (o vector de polarización)

$$\hat{W}_\mu := \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\hat{M}^{\nu\rho}\hat{P}^\sigma. \tag{2.63}$$

donde $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ es un tensor completamente antisimétrico. Los operadores Casimir son operadores que conmutan con todos los generadores del álgebra. Para el caso del grupo de Poincaré los operadores Casimir son $\hat{W}^\mu\hat{W}_\mu$ y $\hat{P}^\mu\hat{P}_\mu$. Estos operadores son hermitianos y satisfacen $\hat{W}^\mu\hat{P}_\mu = 0$. Las números cuánticos asociados a estos operadores son $m^2 s(s+1)$ y m^2, respectivamente, y corresponden a cantidades conservadas, donde m es la masa y s es el espín de la partícula. Con los operadores Casimir se pueden clasificar las 3 representaciones irreducibles unitarias del grupo de Poincaré que tienen sentido físico: la representación trivial (corresponde al estado vacío) y las representaciones masiva y no-masiva (corresponde a partículas con masa y a partículas sin masa respectivamente) [9], [17]. Lo anterior indica que las partículas se pueden caracterizar en términos de su masa y su espín.

[41] En el marco de la Mecánica Cuántica Relativista [30], las corrientes conservadas no se pueden asociar a densidades de probabilidad (como en el marco de la Mecánica Cuántica [7]), pues no es positiva definida. Dicho problema se resuelve en Teoría Cuántica de Campos [17], [25].

Capítulo 3

Teoría Cuántica de Campos

En este capítulo se hará una introducción a la Teoría Cuántica de Campos; específicamente, se cuantizarán los campos de Klein-Gordon y de Dirac; asimismo, se revisarán los conceptos básicos de la interacción electrodébil. Gran parte de este capítulo está basado en las refs. [6], [15], [13], [25] y [29].

3.1. Ecuación de Klein-Gordon

3.1.1. Introducción

La ecuación de Schrödinger es la base de la Mecánica Cuántica, e implica una dualidad-onda partícula[1]. Esta ecuación es [7]

$$(-\frac{1}{2m}\boldsymbol{\nabla}^2 + V)\phi = i\partial_t\phi. \tag{3.1}$$

La ecuación anterior se obtiene a partir de la expresión de la energía $E = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V$, sustituyendo $E \to i\partial_t$ y $\mathbf{p} \to -i\boldsymbol{\nabla}$. Para obtener una ecuación consistente con la Relatividad Especial en el caso de partícula libre ($V = 0$), basta usar la correspondiente expresión para la energía $E^2 = |\mathbf{p}|^2 + m^2$, sustituyendo $E^2 \to -\partial_{t^2}$ y $\mathbf{p}^2 \to -\boldsymbol{\nabla}^2$, con lo que se obtiene

$$(\partial^\mu\partial_\mu - m^2)\phi = 0 \;\; \mu = 0, 1, 2, 3. \tag{3.2}$$

La ecuación anterior es conocida como la ecuación de Klein-Gordon para partícula libre [7], [30]. Las soluciones de dicha ecuación son $\phi_\pm = A_\pm e^{\mp ip\cdot x}$.

En el marco de la Teoría Clásica de Campos, la ec. 3.2 es la ecuación de movimiento del campo escalar real de Klein-Gordon ϕ y se puede obtener a partir de variar la acción $S_{KG} = \displaystyle\int d^4x\, \mathcal{L}_{\mathcal{KG}}$, donde $\mathcal{L}_{\mathcal{KG}}$ es la densidad Lagrangiana (simplemente se le llamará Lagrangiano) [25]

$$\mathcal{L}_{\mathcal{KG}} = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \frac{1}{2}(\boldsymbol{\nabla}\phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 = \frac{1}{2}(\partial^\mu\phi\,\partial_\mu\phi - m^2\phi^2). \tag{3.3}$$

[1]En este marco, a las variables dinámicas se les asocian operadores. A partir de este momento, no se utilizará $\hat{O}$ para denotar a un operador, se usará O.

3.1.2. Cuantización del campo de Klein-Gordon real

En el marco teórico anterior, la ec. 3.2 es una ecuación de campo clásica (como las ecuaciones de Maxwell). Si se quiere cuantizar el campo escalar ϕ, se deben imponer reglas de cuantización similares a las de la mecánica cuántica tradicional [7]. Haciendo esta analogía, se tiene

$$[\phi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{y})] = i\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}); \qquad [\phi(\mathbf{x}), \phi(\mathbf{y})] = [\pi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{y})] = 0, \tag{3.4}$$

donde $\pi(\mathbf{x}) := \frac{\partial \mathcal{L}_{\mathcal{KG}}}{\partial \dot{\phi}(\mathbf{x})}$ es la densidad de momento conjugado asociada a $\phi(\mathbf{x})$ (simplemente se le llamará momento conjugado). Hay que notar que $\pi(\mathbf{x}) = \dot{\phi}(\mathbf{x})$ y que en la ecuación anterior, ϕ y π están evaluados en el mismo tiempo t. En este contexto, el operador Hamiltoniano o simplemente Hamiltoniano, está dado por [25].

$$H = \int d^3x\, [\pi(\mathbf{x})\dot{\phi}(\mathbf{x}) - \mathcal{L}_{\mathcal{KG}}] = \int d^3x\, \{\frac{1}{2}\pi^2(\mathbf{x}) + \frac{1}{2}[\boldsymbol{\nabla}\phi(\mathbf{x})]^2 + \frac{1}{2}m^2\phi(\mathbf{x})^2\}. \tag{3.5}$$

Para encontrar el espectro del Hamiltoniano, se transforma el campo de Klein-Gordon en el espacio de Fourier

$$\phi(\mathbf{p}, t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \phi(\mathbf{x}, t), \tag{3.6}$$

y la ecuación de Klein-Gordon se convierte en

$$[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + (|\mathbf{p}|^2 + m^2)]\phi(\mathbf{p}, t) = 0. \tag{3.7}$$

Como

$$E_{\mathbf{p}} = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2}, \tag{3.8}$$

entonces, la ec. 3.7 tiene la forma de la ecuación de un oscilador armónico de energía $E_{\mathbf{p}}$; para cada valor de $\mathbf{p}$ hay una energía $E_{\mathbf{p}}$, por lo que se puede decir que hay un "contínuo" de osciladores (un gas de osciladores que no interactúan entre sí). Para un solo oscilador, el Hamiltoniano tiene la forma

$$H_0 = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}E^2\phi^2. \tag{3.9}$$

Es posible definir operadores de creación y aniquilación [25]

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2E}}(a + a^\dagger); \quad p = -i\sqrt{\frac{E}{2}}(a - a^\dagger); \tag{3.10}$$

se observa

$$[a, a^\dagger] = 1. \tag{3.11}$$

El Hamiltoniano de la ec. 3.9 se puede escribir

$$H_0 = E(a^\dagger a + \frac{1}{2}); \tag{3.12}$$

por lo anterior,

$$[H_0, a^\dagger] = Ea^\dagger; \qquad [H_0, a] = -Ea. \tag{3.13}$$

Se define el vacío tal que $a|0\rangle = 0$ y es un eingenestado de H_0 con eigenvalor $\frac{1}{2}E$. Se generan estados de n cuantos con

$$|n\rangle = \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle. \tag{3.14}$$

Estos estados son eigenestados del Hamiltoniano con eigenvalores $(n + \frac{1}{2})E$. Cada modo normal de vibración en el espacio de Fourier es tratado como un oscilador independiente, con sus propios operadores de creación y aniquilación.

En analogía con la ec. 3.10, se define

$$\phi(0, \mathbf{x}) = \int d^3\widehat{p}\ (a_\mathbf{p} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} + a_\mathbf{p}^\dagger e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}); \tag{3.15}$$

$$\pi(0, \mathbf{x}) = -i \int d^3\widehat{p}\ (a_\mathbf{p} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} - a_\mathbf{p}^\dagger e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}). \tag{3.16}$$

donde

$$d^3\widehat{p} = \frac{d^3p}{(2\pi)^3\, 2E_\mathbf{p}}. \tag{3.17}$$

Como ϕ es un campo escalar real, i.e. $\phi^\dagger(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x})$, entonces $\phi^*(\mathbf{p}) = \phi(-\mathbf{p})$, por lo que las ecs. 3.15 y 3.16 se pueden escribir

$$\phi(0, \mathbf{x}) = \int d^3\widehat{p}\ [e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}(a_\mathbf{p} + a_{-\mathbf{p}}^\dagger)]; \tag{3.18}$$

$$\pi(0, \mathbf{x}) = -i \int d^3\widehat{p}\ [e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}[(a_\mathbf{p} - a_{-\mathbf{p}}^\dagger)]. \tag{3.19}$$

Para cualquier tiempo t, las dos últimas ecuaciones tienen la forma (sucesión infinita de osciladores armónicos desacoplados)

$$\phi(t, \mathbf{x}) = \int d^3\widehat{p}\ [e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}(a_\mathbf{p} e^{-iE_\mathbf{p}\cdot t} + a_{-\mathbf{p}}^\dagger e^{iE_\mathbf{p}\cdot t})]; \tag{3.20}$$

$$\pi(t, \mathbf{x}) = -i \int d^3\widehat{p}\ [e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}(a_\mathbf{p} e^{-iE_\mathbf{p}\cdot t} - a_{-\mathbf{p}}^\dagger e^{iE_\mathbf{p}\cdot t})]. \tag{3.21}$$

La ec. 3.11 se transforma en

$$[a_\mathbf{p}, a_\mathbf{q}^\dagger] = (2\pi)^3\, 2E_\mathbf{p}\, \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}), \tag{3.22}$$

y se verifica la ec. 3.4. Siguiendo la ec. 3.5, el Hamiltoniano es

$$H = \int d^3\widehat{p}\ [E_\mathbf{p}(a_\mathbf{p}^\dagger a_\mathbf{p} + \frac{1}{2}[a_\mathbf{p}, a_\mathbf{p}^\dagger])]. \tag{3.23}$$

El segundo término de la ecuación anterior corresponde a energía infinita y se le conoce como energía del punto 0, pero estrictamente hablando solo es posible medir diferencias de energías, por lo que este término es irrelevante y simplemente se resta [25]. Como era de esperarse, de la ecuación anterior se verifica

$$[H, a_{\mathbf{p}}^{\dagger}] = E_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}^{\dagger}; \quad [H, a_{\mathbf{p}}] = -E_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}. \tag{3.24}$$

Se definen las transformaciones infinitesimales de traslación y rotación

$$\delta_{\tau} := -\tau_{\mu} P^{\mu} = -i\tau_{\mu}\partial^{\mu}; \quad \delta_{\lambda} := -\frac{1}{2}\lambda_{\mu\nu}M^{\mu\nu} = -\frac{i}{2}\lambda_{\mu\nu}(x^{\mu}\partial^{\nu} - x^{\nu}\partial^{\mu}), \tag{3.25}$$

donde τ_{μ} es un parámetro escalar infinitesimal y $\lambda_{\mu\nu}$ es un tensor antisimétrico infinitesimal. Si las trasformaciones de la ecuación anterior actúan sobre el Lagrangiano de Klein-Gordon (véase ec. 3.3), se obtiene

$$\delta_{\tau}(\mathcal{L}_{\mathcal{KG}}) = \partial_{\mu}(-\tau_{\mu}\mathcal{L}_{\mathcal{KG}}); \quad \delta_{\lambda}(\mathcal{L}_{\mathcal{KG}}) = \partial_{\mu}(-\eta^{\mu\sigma}\lambda_{\sigma\rho}x^{\rho}\mathcal{L}_{\mathcal{KG}}). \tag{3.26}$$

Lo anterior indica, que el grupo de Poincaré (sección 2.3.3) es el grupo de simetrías espacio-temporales del Lagrangiano de Klein-Gordon[2]. El teorema de Noether [17] asegura la existencia de cantidades conservadas asociadas a estas trasformaciones. Los operadores de estas cantidades satisfacen las reglas de conmutación de las ecs. 2.60, 2.61 y 2.62, haciendo la identificación $P^0 = H$. Por lo tanto, los números cuánticos asociados a estos operadores se conservan y son la energía, el momento lineal y el momento angular total. Cabe destacar que el segundo término de las ecs. 3.25 y 3.26, muestra que la contribución del espín al momento angular total de las partículas del campo Klein-Gordon es nula, i.e. el espín de éstas es 0. La identificación $P^0 = H$ y la ec. 2.61 permiten diagonalizar al mismo tiempo al Hamiltoniano y al operador $\mathbf{P} = (P^1, P^2, P^3)$, por lo que eigenestados de H también pueden serlo de $\mathbf{P}$ (con eigenvalores $\mathbf{p}$).

Se define el vacío $|0\rangle = |0, 0, 0...\rangle$ tal que $a_{\mathbf{p}}|0\rangle = 0$ y $\langle 0|0\rangle = 1$ (todos los osciladores están en su estado base). Por lo anterior (hasta una corrección infinita) $H|0\rangle = 0$; de esta manera, la energía del estado base es 0. En general

$$|\mathbf{p_1}\mathbf{p_2}\cdots\mathbf{p_n}\cdots\rangle = a_{\mathbf{p_1}}^{\dagger}a_{\mathbf{p_2}}^{\dagger}\cdots a_{\mathbf{p_n}}^{\dagger}\cdots|0\rangle, \tag{3.27}$$

y

$$\langle\mathbf{p_1}\mathbf{p_2}\cdots\mathbf{p_n}\cdots|\mathbf{q_1}\mathbf{q_2}\cdots\mathbf{q_n}\cdots\rangle = (2\pi)^3\, 2E_{\mathbf{p_1}}\,\delta^{(3)}(\mathbf{p_1}-\mathbf{q_1})\cdot(2\pi)^3\, 2E_{\mathbf{p_2}}\,\delta^{(3)}(\mathbf{p_2}-\mathbf{q_2})\cdots 2E_{\mathbf{p_n}}\,\delta^{(3)}(\mathbf{p_n}-\mathbf{q_n})\cdots \tag{3.28}$$

La ec. 3.28 implica que los operadores de creación $a_{\mathbf{p_1}}^{\dagger}a_{\mathbf{p_2}}^{\dagger}\cdots$ actuando sobre el vacío producen un eigenestado del Hamiltoniano con energía $E = E_{\mathbf{p_1}} + E_{\mathbf{p_2}} + \cdots$ y momento $\mathbf{P} = \mathbf{p_1} + \mathbf{p_2} + \cdots$. Hay que destacar que se obtiene el mismo estado de $a_{\mathbf{p_1}}^{\dagger}a_{\mathbf{p_2}}^{\dagger}\cdots|0\rangle$ que de $a_{\mathbf{p_2}}^{\dagger}a_{\mathbf{p_1}}^{\dagger}\cdots|0\rangle$ (ya que $a_{\mathbf{p_1}}^{\dagger}$ y $a_{\mathbf{p_2}}^{\dagger}$ conmutan); por lo tanto, al intercambiar dos partículas se obtiene el mismo estado y además, un valor de $\mathbf{p}$ puede contener un número arbitrario de partículas. Con lo anterior se concluye que las partículas del campo de Klein-Gordon satisfacen la estadística de Bose-Einstein; las partículas creadas bajo este marco son bosones.

Considere la ec. 3.20, donde el campo $\phi(\mathbf{x}, t)$ es tratado como un operador. En este marco

$$\phi(t, \mathbf{x})|0\rangle = \int d^3\widehat{p}\ e^{-(i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}+E_{\mathbf{p}}\cdot t)}|p\rangle; \tag{3.29}$$

de la ecuación anterior se aprecia que $\phi(\mathbf{x}, t)$ es el operador (creado a partir de soluciones del campo de Klein-Gordon) de posición, el cual genera un bosón en $\mathbf{x}$ al tiempo t [25].

[2]Pues las transformaciones del grupo de Poincaré dejan invariante el Lagrangiano de Klein-Gordon.

3.1.3. Campo de Klein-Gordon complejo

Considere el Lagrangiano de dos campos reales de Klein-Gordon ϕ_1 y ϕ_2 con la misma masa

$$\mathcal{L}_{\mathcal{KG}} = \frac{1}{2}[\partial^\mu \phi_1 \, \partial_\mu \phi_1 - m^2 \phi_1^2 + \partial^\mu \phi_2 \, \partial_\mu \phi - m^2 \phi_2^2]. \tag{3.30}$$

El Lagrangiano anterior es invariante bajo rotaciones de los campos (ϕ_1, ϕ_2)

$$\begin{pmatrix} \phi_1' \\ \phi_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos(\alpha) & -sen(\alpha) \\ sen(\alpha) & cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}. \tag{3.31}$$

El teorema de Noether [17] asegura la existencia de una corriente conservada. Por lo anterior conviene escribir $\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2)$ ya que una rotación es multiplicar por una fase en el plano complejo, entonces la ec. 3.30 se convierte en

$$\mathcal{L}_{\mathcal{KG}} = \partial_\mu \phi^\dagger \, \partial^\mu \phi - m^2 |\phi|^2. \tag{3.32}$$

Al Lagrangiano anterior se le conoce como Lagrangiano del campo escalar complejo de Klein-Gordon. Las reglas de conmutación de ϕ_1 y ϕ_2 (ec. 3.4) muestran que al mismo tiempo t

$$[\phi(\mathbf{x}), \dot{\phi}^\dagger(\mathbf{y})] = i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}); \quad [\phi(\mathbf{x}), \phi(\mathbf{y})] = [\dot{\phi}(\mathbf{x}), \dot{\phi}^\dagger(\mathbf{y})] = [\phi(\mathbf{x}), \phi^\dagger(\mathbf{y})] = [\phi(\mathbf{x}), \dot{\phi}(\mathbf{y})] = 0, \tag{3.33}$$

lo que es consistente con el hecho de tratar a ϕ y a ϕ^* como variables independientes. Haciendo un desarrollo en el espacio de Fourier se obtiene

$$\phi(t, \mathbf{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \, 2E_\mathbf{p}} \; e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}[(a_\mathbf{p} e^{-iE_\mathbf{p}\cdot t} + b^\dagger_{-\mathbf{p}} e^{iE_\mathbf{p}\cdot t})]; \tag{3.34}$$

$$\phi^\dagger(t, \mathbf{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \, 2E_\mathbf{p}} \; e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}[(a^\dagger_\mathbf{p} e^{iE_\mathbf{p}\cdot t} + b_{-\mathbf{p}} e^{-iE_\mathbf{p}\cdot t})], \tag{3.35}$$

donde

$$a_\mathbf{p} = \frac{1}{\sqrt{2}}[a_{1\mathbf{p}} + i a_{2\mathbf{p}}]; \quad b^\dagger_\mathbf{p} = \frac{1}{\sqrt{2}}[a^\dagger_{1\mathbf{p}} + i a^\dagger_{2\mathbf{p}}], \tag{3.36}$$

que satisfacen

$$[a_\mathbf{p}, a^\dagger_\mathbf{q}] = (2\pi)^3 E_\mathbf{p} \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}); \quad [b_\mathbf{p}, b^\dagger_\mathbf{q}] = (2\pi)^3 E_\mathbf{p} \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}), \tag{3.37}$$

y cualquier otra combinación entre $a_\mathbf{p}$ y $b_\mathbf{p}$ es 0. El Lagrangiano del campo complejo de Klein-Gordon también es invariante ente transformaciones del grupo de Poincaré (ecs. 3.25 y 3.26). Salvo una constante infinita,

$$P^\mu = (H, \mathbf{P}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \, 2E_\mathbf{p}} \; p^\mu [a^\dagger_\mathbf{p} a_\mathbf{p} + b^\dagger_\mathbf{p} b_\mathbf{p}], \tag{3.38}$$

con lo que se obtiene

$$[P^\mu, a^\dagger_\mathbf{p}] = p^\mu a^\dagger_\mathbf{p}; \quad [P^\mu, b^\dagger_\mathbf{p}] = p^\mu b^\dagger_\mathbf{p}. \tag{3.39}$$

Además, el Lagrangiano del campo complejo de Klein-Gordon es invariante bajo transformaciones de $U(1)$ (véase definición 2.5), $\phi \to e^{i\alpha}\phi$, donde α es un parámetro constante[3]. La corriente conservada que asegura el teorema de Noether es [17]

$$j^\mu = i[\phi^\dagger(\partial^\mu\phi) - (\partial^\mu\phi^\dagger)\phi] \tag{3.40}$$

asociada a ésta, la carga conservada es

$$Q = \int d^3x j^0 = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3\, 2E_{\mathbf{p}}}\; [a^\dagger_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{p}} - b^\dagger_{\mathbf{p}}b_{\mathbf{p}}], \tag{3.41}$$

de donde se obtiene

$$[Q, a^\dagger_{\mathbf{p}}] = a^\dagger_{\mathbf{p}}; \qquad [Q, b^\dagger_{\mathbf{p}}] = -b^\dagger_{\mathbf{p}}; \tag{3.42}$$

Se define el vacío $|0\rangle$ tal que $a_{\mathbf{p}}|0\rangle = b_{\mathbf{p}}|0\rangle = 0$. Por las ecs. 3.39 y 3.42

$$P^\mu a^\dagger_{\mathbf{p}}|0\rangle = p^\mu a^\dagger_{\mathbf{p}}|0\rangle; \qquad Q a^\dagger_{\mathbf{p}}|0\rangle = a^\dagger_{\mathbf{p}}|0\rangle; \tag{3.43}$$

$$P^\mu b^\dagger_{\mathbf{p}}|0\rangle = p^\mu b^\dagger_{\mathbf{p}}|0\rangle; \qquad Q b^\dagger_{\mathbf{p}}|0\rangle = -b^\dagger_{\mathbf{p}}|0\rangle. \tag{3.44}$$

De las 2 ecuaciones anteriores se aprecia que los operadores $a^\dagger_{\mathbf{p}}$ y $b^\dagger_{\mathbf{p}}$ son operadores de creación ($a_{\mathbf{p}}$ y $a_{\mathbf{p}}$ son operadores de aniquilación); $a^\dagger_{\mathbf{p}}$ crea un estado con cuadrimomento p^μ y carga 1, mientras que $b^\dagger_{\mathbf{p}}$ crea un estado con cuadrimomento p^μ y carga -1. El coeficiente de la solución de energía positiva de un campo escalar complejo ϕ se convierte, al cuantizar el campo, en el operador destrucción de un bosón de espín 0 (carga positiva); mientras que el coeficiente de la solución de energía negativa se convierte en el operador creación de su antipartícula (mismos números cuánticos, carga contraria, en este caso, se le llama antibosón). Para el campo $\phi^\dagger$ ocurre lo contrario, pues se intercambian los roles de partícula y antipartícula. Si el campo es real, $a^\dagger_{\mathbf{p}} = b^\dagger_{\mathbf{p}}$ (sección anterior), entonces se crean y destruyen partículas que son propia antipartícula[4].

3.2. Ecuación de Dirac

3.2.1. Introducción

Para encontrar una ecuación cuántica compatible con la Relatividad Especial para una partícula libre con espín $\frac{1}{2}$, se propone heurísticamente una relación lineal entre H y el operador $\mathbf{p}$ de la forma $H = \alpha^i \cdot p_i + \beta m$; con la cual se obtiene la ecuación de Dirac [7]

$$i\partial_t\psi = H\psi = (\alpha^i p_i + \beta m)\psi = (-i\alpha^i\partial_i + \beta m)\psi. \tag{3.45}$$

La ecuación anterior debe ser consistente con la expresión $E^2 = |\mathbf{p}|^2 + m^2$, por lo que

$$\{\alpha^i, \alpha^j\} = 2\delta^{ij}; \qquad \{\alpha^\mu, \beta\} = 0; \qquad \beta^2 = 1. \tag{3.46}$$

[3] El generador de simetría $e^{i\alpha}$ es la identidad. $U(1)$ es el grupo de simetría global de norma del Lagrangiano del campo complejo de Klein-Gordon. En la Sección 3.3 se revisara con más detalle los grupos de simetría de norma.

[4] Fue mucho después que las predicciones hechas por la ecuación de Klein-Gordon (campo real y campo complejo) se comprobaron experimentalmente. Por ejemplo, el bosón de Higgs es descrito por un campo real de Klein-Gordon, mientras que los piones cargados π^+ y π^- (partícula y antipartícula) se pueden describir con campo complejo de Klein-Gordon (en este caso, la carga eléctrica es la carga conservada Q).

Como H debe ser un operador hermitiano, también se debe cumplir

$$(\alpha^i)^\dagger = \alpha^i; \qquad \beta^\dagger = \beta. \tag{3.47}$$

De estas propiedades se sigue que α y β satisfacen [7]

1. $tr(\alpha) = tr(\beta) = 0$.
2. Sus eigenvalores son $\pm = 1$.
3. Su dimensión es par y mayor que 2.

Por las propiedades anteriores, se propone $\gamma^0 = \beta$ y $\gamma^i = \beta\alpha^i$, donde γ^μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) son las matrices de Dirac definidas en la ec. 2.23. De esta manera, se obtiene la forma covariante de la ecuación de Dirac

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - mI)\psi = 0, \tag{3.48}$$

donde I es la matriz identidad de 4×4 y a partir de este momento, al escribir la ecuación de Dirac se omitirá[5]. Debido a que las matrices de Dirac γ^μ actúan sobre ψ, éste debe ser un espinor de Dirac (véase ec. 2.31). La ecuación adjunta de Dirac es

$$\bar{\psi}(i\gamma^\mu \overleftarrow{\partial}_\mu + m) = 0, \tag{3.49}$$

donde $\bar{\psi}$ está dado por la ec. 2.34. Se cumple

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu + m)(i\gamma^\nu\partial_\nu - m)\psi = -(\gamma^\mu\gamma^\nu\partial_\mu\partial_\nu + m^2)\psi = (\partial^\mu\partial_\mu - m^2)\psi = 0. \tag{3.50}$$

Si en la ec. 3.48 se pide $m = 0$ se obtiene la ecuación de Weyl

$$i\gamma\partial_\mu\psi = 0, \tag{3.51}$$

que se descompone en términos de $\psi_{L,R}$ (véase ec. 2.37) como

$$i\gamma^\mu\partial_\mu\psi_L = i\bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\beta}\partial_\mu\chi_\beta = 0; \qquad i\gamma^\mu\partial_\mu\psi_R = i\sigma^\mu_{\alpha\dot{\beta}}\partial_\mu\bar{\xi}^{\dot{\beta}} = 0, \tag{3.52}$$

3.2.2. Soluciones de la ecuación de Dirac

Debido a la ecuación 3.50, si un espinor de Dirac satisface la ecuación de Dirac entonces satisface la de Klein-Gordon como se esperaba; por lo tanto, las soluciones de la ecuación de Dirac para partícula libre se pueden escribir como combinación de ondas planas [29].

$$\psi_+ = A_+ u^r(\mathbf{p})e^{-ip\cdot x}; \qquad \psi_- = A_- v^r(\mathbf{p})e^{ip\cdot x}, \tag{3.53}$$

donde $A_\pm$ son constantes de normalización. Para un mismo valor de $\mathbf{p}$, hay cuatro soluciones linealmente independientes; el espinor $u^r(\mathbf{p})$ corresponde a soluciones con energía positiva $E_\mathbf{p} = \sqrt{p^2+m^2}$, mientras que el espinor $v^r(\mathbf{p})$ corresponde a soluciones con energía negativa $E_{-\mathbf{p}} = -\sqrt{p^2+m^2}$. Las dos soluciones para energías positivas (negativas) incluyen dos direcciones diferentes de espín ($r = 1, 2$). Al sustituir las soluciones para energías positivas de la ec. 3.53 (primer término) en la ecuación de Dirac, se obtiene

[5]La ec. 3.48 está bien definida, ya que γ^μ y ∂_μ son vectores (véase ec. 2.50). Por lo tanto $\gamma^\mu\partial_\mu$ es un escalar, al igual que m.

$$(\gamma^\mu p_\mu - m)u^r(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} -m & p_\mu\sigma^\mu \\ p_\mu\bar{\sigma}^\mu & -m \end{pmatrix} u^r(\mathbf{p}) = 0. \quad (3.54)$$

Para $u^1(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \end{pmatrix}$, la ecuación anterior puede ser escrita como

$$(p_\mu \cdot \sigma^\mu)u_2^1 = mu_1^1 \quad y \quad (p_\mu \cdot \bar{\sigma}^\mu)u_1^1 = mu_2^1. \quad (3.55)$$

Cualquiera de las dos ecuaciones anteriores implica la otra. Si se propone $u_1^1 = (p_\mu \cdot \sigma^\mu)\xi'$, para cualquier espinor ξ' que satisfaga ${\xi'}^\dagger\xi' = 1$ y considerando

$$(p_\mu \cdot \sigma^\mu)(p_\nu \cdot \bar{\sigma}^\nu) = p_0^2 - p_i p_j \sigma^i \sigma^j = p_0^2 - p_i p_j \delta^{ij} = p_\mu p^\mu = m^2, \quad (3.56)$$

entonces, el segundo término de la ec. 3.55 se convierte en $u_2^1 = m\xi'$. Por lo tanto, la solución de la ec. 3.54 para $u^1(\mathbf{p})$ (análogamente para $u^2(\mathbf{p})$) es

$$u^1(\mathbf{p}) = A_+ \begin{pmatrix} (p_\mu \cdot \sigma^\mu)\xi' \\ m\xi' \end{pmatrix}, \quad (3.57)$$

donde A_+ está definido en la ec. 3.53. Si se pide $A_+ = \frac{1}{2}m$ y $\xi' = \sqrt{p_\mu \cdot \bar{\sigma}^\mu}\xi$ para un espinor ξ que satisfaga $\xi^\dagger\xi = 1$ entonces, $u_1^1 = (p_\mu \cdot \sigma^\mu)(\sqrt{p_\nu \cdot \bar{\sigma}^\nu})\xi = m\sqrt{p_\mu \cdot \sigma^\mu}\xi$, por lo que, en general, las dos soluciones de la ec. 3.54 son

$$u^r(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \sqrt{p_\mu \cdot \sigma^\mu}\xi^r \\ \sqrt{p_\mu \cdot \bar{\sigma}^\mu}\xi^r \end{pmatrix}. \quad (3.58)$$

Como $\bar{u}(\mathbf{p}) = u^\dagger(\mathbf{p})\gamma^0$, entonces se satisface

$$u^{r\dagger}(\mathbf{p})u^s(\mathbf{p}) = 2E_{\mathbf{p}}\delta^{rs} \quad y \quad \bar{u}^r(\mathbf{p})u^s(\mathbf{p}) = 2m\delta^{rs}. \quad (3.59)$$

Al sustituir la solución para energías negativas de la ec. 3.53 (segundo término) en la ecuación de Dirac, se obtiene

$$(\gamma^\mu p_\mu + m)v^r(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} m & p_\mu\sigma^\mu \\ p_\mu\bar{\sigma}^\mu & m \end{pmatrix} v^r(\mathbf{p}) = 0. \quad (3.60)$$

La ecuación anterior se resuelve de manera análoga a la ec. 3.54 (el caso para energías positivas), por lo que las dos soluciones de la ecuación anterior son

$$v^r(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \sqrt{p_\mu \cdot \sigma^\mu}\eta^r \\ -\sqrt{p_\mu \cdot \bar{\sigma}^\mu}\eta^r \end{pmatrix}, \quad (3.61)$$

para cualquier espinor η que satisfaga $\eta^\dagger\eta = 1$. Como $\bar{v}(\mathbf{p}) = v^\dagger(\mathbf{p})\gamma^0$, entonces se satisface:

$$v^{r\dagger}(\mathbf{p})v^s(\mathbf{p}) = 2E_{\mathbf{p}}\delta^{rs} \quad y \quad \bar{v}^r(\mathbf{p})v^s(\mathbf{p}) = -2m\delta^{rs}. \quad (3.62)$$

Entre las soluciones de energía positiva y las de energía negativa se cumple

$$\bar{u}^r(\mathbf{p})v^s(\mathbf{p}) = \bar{v}^r(\mathbf{p})u^s(\mathbf{p}) = 0. \quad (3.63)$$

Estas soluciones son válidas para espinores ξ^r y η^r arbitrarios [29]. Como se mencionó antes, las componentes de éstos definen la dirección del espín. Por ejemplo, si se pide ξ^r como eigenestado de la matriz de Pauli σ^3 (la matriz de Pauli asociada a la tercera dirección espacial, véase Apéndice B), la solución para energías positivas de la ecuación de Dirac ($\psi_+ = u^r e^{-ip\cdot x}$) representa a una partícula de espín $\frac{1}{2}$ hacia arriba (o hacia abajo) a lo largo de la la tercera dirección espacial.

Considere una partícula de momento $p^\mu = (E, 0, 0, p)$ y espín $\frac{1}{2}$ hacia arriba a lo largo de la tercera dirección espacial. Esto equivale a pedir, $\xi^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (no es necesario que sea ξ^1); por lo tanto

$$u^1(\mathbf{p}) = \left.\begin{pmatrix} \sqrt{p_\mu \cdot \sigma^\mu}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \sqrt{p_\mu \cdot \bar{\sigma}^\mu}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}\right|_{p^\mu=(E,0,0,p)} = \begin{pmatrix} \sqrt{E-p^3}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \sqrt{E+p^3}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}. \tag{3.64}$$

Para una partícula sin masa, i.e., $E = p$, la ecuación anterior se transforma en

$$u^1(p) = \sqrt{2E}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{3.65}$$

Análogamente para una partícula con energía positiva sin masa con espín $\frac{1}{2}$ hacia abajo en la tercera dirección espacial[6] [29]

$$u^2(p) = \sqrt{2E}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{3.66}$$

Se define el operador de helicidad como la proyección del espín a lo largo de la dirección del momento, esto es

$$\mathbf{S}\cdot\mathbf{p} = \frac{i}{2}\epsilon_{ijk}p^i S^{jk} = \frac{1}{2}p_i\begin{pmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{pmatrix}, \tag{3.67}$$

donde S^{ij} está definido en la ec. 2.25. Los espinores de Weyl definidos en la ec. 2.37 sin masa[7], corresponden respectivamente a espinores como los mostrados en las ecs. 3.65 y 3.66. El espinor de la ec. 3.65 (espinor derecho con energía positiva sin masa), es eigenestado del operador de helicidad con eigenvalor $\lambda = \frac{1}{2}$. El espinor de la ec. 3.66 (espinor izquierdos con energía positiva sin masa), es eigenestado del operador de helicidad con eigenvalor $\lambda = -\frac{1}{2}$. Se hace un tratamiento equivalente para las partículas de energía negativa[8].

Como se mencionó en el capítulo pasado, la representación espinorial mostrada en la ec. 2.25 es reducible en el grupo de Lorentz (por los espinores de Weyl). Sin embargo, resulta ser irreducible en el grupo de Poincaré para partículas masivas. Solo en el caso no-masivo la representación es reducible aun en el grupo de Poincaré [17].

[6] Equivale a pedir $\xi^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

[7] i.e. que satisfacen la ec. 3.51.

[8] De aquí el nombre de espinores derechos e izquierdos que reciben los espinores de Weyl.

3.2.3. Cuantización del campo de Dirac

En el contexto de la Teoría Clásica de Campos, la ecuación de Dirac y su adjunta (véanse las ecs. 3.48 y 3.49) son las ecuaciones de movimiento de los campos (clásicos) ψ y $\bar{\psi}$, los cuales, se consideran independientes. Este hecho surge de la variación de la acción S, dado el Lagrangiano $\mathcal{L}_{\mathcal{D}}$

$$\mathcal{L}_{\mathcal{D}} = \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x). \tag{3.68}$$

Haciendo una variación con respecto a $\bar{\psi}(x)$ se obtiene la ecuación de Dirac y haciendo una variación con respecto a $\psi(x)$ se obtiene la ecuación adjunta de Dirac [17]. El Lagrangiano para obtener la ecuación de Weyl es

$$\mathcal{L}_{\mathcal{W}} = i\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x), \tag{3.69}$$

que se descompone como (véase ec. 2.37)

$$\mathcal{L}_{\mathcal{W}} = i(\bar{\psi}_L\gamma^\mu\partial_\mu\psi_L + \bar{\psi}_R\gamma^\mu\partial_\mu\psi_R) = i(\bar{\chi}_{\dot{\alpha}}\bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\beta}\partial_\mu\chi_\beta + \xi^\alpha\sigma^\mu_{\alpha\dot{\beta}}\partial_\mu\bar{\xi}^{\dot{\beta}}). \tag{3.70}$$

Para cuantizar el campo de Dirac, se imponen las reglas (evaluando al tiempo t)

$$\{\psi_a(\mathbf{x}), \psi_b^\dagger(\mathbf{y})\} = \delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\delta_{ab}; \qquad \{\psi_a(\mathbf{x}), \psi_b(\mathbf{y})\} = \{\psi_a^\dagger(\mathbf{x}), \psi_b^\dagger(\mathbf{y})\} = 0, \tag{3.71}$$

pues el momento conjugado asociado a $\psi(\mathbf{x})$ es $\pi(\mathbf{x}) := \frac{\partial\mathcal{L}_{\mathcal{D}}}{\partial\dot{\psi}(\mathbf{x})} = i\psi^\dagger(\mathbf{x})$. Debido a lo anterior, el operador Hamiltoniano es

$$H = \int d^3x[\pi(x)\dot{\psi}(x) - \mathcal{L}_{\mathcal{D}}] = \int d^3x\ \bar{\psi}(x)(-i\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\nabla} + m)\psi = \int d^3x\ \psi^\dagger[-i\gamma^0\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\nabla} + m\gamma^0]\psi, \tag{3.72}$$

donde $\boldsymbol{\gamma}$=$(\gamma^1, \gamma^2, \gamma^3)$. Se reconoce el Hamiltoniano mostrado en la ec. 3.45.

En analogía con el campo de Klein-Gordon, para encontrar el espectro del Hamiltoniano (véase ec. 3.72), se recurre a la expresión para el campo libre de Dirac en el espacio de Fourier [15]

$$\psi(t,\mathbf{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{m}{E_{\mathbf{p}}}\sum_s(a^s_{\mathbf{p}}u^s(\mathbf{p})e^{-ip\cdot x} + b^{s\dagger}_{\mathbf{p}}v^s(\mathbf{p})e^{ip\cdot x}); \tag{3.73}$$

$$\bar{\psi}(t,\mathbf{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{m}{E_{\mathbf{p}}}\sum_s(b^s_{\mathbf{p}}\bar{v}^s(\mathbf{p})e^{-ip\cdot x} + a^{s\dagger}_{\mathbf{p}}\bar{u}^s(\mathbf{p})e^{ip\cdot x}). \tag{3.74}$$

donde

$$\{b^r_{\mathbf{p}}, b^{s\dagger}_{\mathbf{q}}\} = \{a^r_{\mathbf{p}}, a^{s\dagger}_{\mathbf{q}}\} = (2\pi)^3\frac{E_{\mathbf{p}}}{m}\delta^3(\mathbf{p}-\mathbf{q})\delta^{rs}, \tag{3.75}$$

y todos los demás anticonmutadores son 0. De las tres últimas ecuaciones y usando las ecs. 3.59 y 3.62, el Hamiltoniano de la ec. 3.72, salvo una constante infinita (como en el caso del Hamiltoniano de Klein-Gordon), se puede escribir [15]

$$H = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{m}{E_{\mathbf{p}}}\sum_s E_{\mathbf{p}}(a^{s\dagger}_{\mathbf{p}}a^s_{\mathbf{p}} + b^{s\dagger}_{\mathbf{p}}b^s_{\mathbf{p}}). \tag{3.76}$$

Es fácil ver que se satisface

$$[H, a_{\mathbf{p}}^{s\dagger}] = E_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}^{s\dagger}; \quad [H, b_{\mathbf{p}}^{s\dagger}] = E_{\mathbf{p}} b_{\mathbf{p}}^{s\dagger}. \tag{3.77}$$

Se define el vacío como el estado $|0\rangle = |0,0,0...\rangle$, tal que $a_{\mathbf{p}}^{s}|0\rangle = 0$ y $b_{\mathbf{p}}^{s}|0\rangle = 0$; entonces se cumple

$$H|0\rangle = 0; \quad H a_{\mathbf{p}}^{s\dagger}|0\rangle = E_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}^{s\dagger}|0\rangle; \quad H b_{\mathbf{p}}^{s\dagger}|0\rangle = E_{\mathbf{p}} b_{\mathbf{p}}^{s\dagger}|0\rangle. \tag{3.78}$$

Debido a la regla de anticonmutación (véase ec. 3.75) de los operadores de creación y aniquilación $a_{\mathbf{p}}^{s\dagger}$ y $b_{\mathbf{p}}^{s\dagger}$, se verifica que estos también satisfacen

$$a_{\mathbf{p}}^{s\dagger} a_{\mathbf{q}}^{s\dagger}|0\rangle = -a_{\mathbf{q}}^{s\dagger} a_{\mathbf{p}}^{s\dagger}|0\rangle; \quad b_{\mathbf{p}}^{s\dagger} b_{\mathbf{q}}^{s\dagger}|0\rangle = -b_{\mathbf{q}}^{s\dagger} b_{\mathbf{p}}^{s\dagger}|0\rangle; \quad {b^{s\dagger}}^2_{\mathbf{p}}|0\rangle = {a^{s\dagger}}^2_{\mathbf{p}}|0\rangle = 0; \tag{3.79}$$

por lo anterior, al intercambiar dos partículas hay un cambio de signo en los estados. Se concluye que las partículas del campo de Dirac satisfacen la estadística de Fermi-Dirac.

Se define la transformación infinitesimal de rotación con un tensor antisimétrico infinitesimal $\lambda_{\mu\nu}$

$$\delta_\lambda := -\frac{1}{2}\lambda_{\mu\nu} M^{\mu\nu} = -\frac{i}{2}\lambda_{\mu\nu}[(x^\mu \partial^\nu - x^\nu \partial^\mu) + S^{\mu\nu}] \tag{3.80}$$

donde $S^{\mu\nu}$ está definido en la ec. 2.25. Si la trasformación anterior y la transformación de traslación infinitesimal (definida en el primer término de la ec 3.25) actúan sobre el Lagrangiano de Dirac (ec. 3.68), se obtiene

$$\delta_\tau(\mathcal{L}_{\mathcal{D}}) = \partial_\mu(-\tau_\mu \mathcal{L}_{\mathcal{D}}); \quad \delta_\lambda(\mathcal{L}_{\mathcal{D}}) = \partial_\mu(-\eta^{\mu\sigma}\lambda_{\sigma\rho} x^\rho \mathcal{L}_{\mathcal{D}}). \tag{3.81}$$

Debido a la ecuación anterior (al igual que en el campo de Klein-Gordon), el grupo de Poincaré (Sección 2.3.3) es el grupo de simetrías espacio-temporales del Lagrangiano de Dirac[9]. El teorema de Noether [17] asegura la existencia de cantidades conservadas asociadas a estas transformaciones. Los eigenestados de H pueden ser elegidos como eigenestados de $\mathbf{P}$ con eigenvalores $\mathbf{p}$, i.e.

$$\mathbf{P} {a^{s\dagger}}_{\mathbf{p}}|0\rangle = \mathbf{p} {a^{s\dagger}}_{\mathbf{p}}|0\rangle; \quad \mathbf{P} {b^{s\dagger}}_{\mathbf{p}}|0\rangle = \mathbf{p} {b^{s\dagger}}_{\mathbf{p}}|0\rangle. \tag{3.82}$$

Por las ecs. 3.78 y 3.82, los operadores $a_{\mathbf{p}}^{s\dagger}$ y $b_{\mathbf{p}}^{s\dagger}$ son operadores de creación; estos operadores crean partículas con energía $E_{\mathbf{p}}$ y momento $\mathbf{p}$ [15].

Por otro lado, el operador de momento angular total se define como [25]

$$\mathbf{M} = \int d^3x \;\; \psi^\dagger(\mathbf{x} \times (-i\nabla) + \mathbf{S})\psi, \tag{3.83}$$

donde $\mathbf{S}$ es el operador de espín definido en la ec. 2.28. Considerando el caso en el que la contribución del momento angular orbital al momento angular total es 0, para una partícula asociada con $a_0^{s\dagger}|0\rangle$ se tiene [25]

$$M_z a_0^{s\dagger}|0\rangle = \frac{1}{2m}\sum_r (u^{r\dagger}(0)\frac{\hat{S}^{12}}{2}u^s(0)) a_0^{r\dagger}|0\rangle = \sum_r (\xi^{r\dagger}\frac{\sigma^3}{2}\xi^s) a_0^{r\dagger}|0\rangle, \tag{3.84}$$

[9]Pues las transformaciones del grupo de Poincaré dejan invariante el Lagrangiano de Dirac.

donde ξ^r es la componente r del espinor asociado a $u^r(0)$ (véase ec. 3.58) y σ^3 es la matriz de Pauli asociada a la tercera dirección espacial. Si se elige a ξ^r como un eigenestado de σ^3 entonces, para $\xi^s = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ el estado $a_0^{s\dagger}|0\rangle$ es eigenestado de M_z con eigenvalor $\frac{1}{2}$ y para $\xi^s = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ el estado $a_0^{s\dagger}|0\rangle$ también es eigenestado de M_z con eigenvalor $-\frac{1}{2}$. El mismo resultado se obtiene para una partícula en reposo dada por $b_0^{s\dagger}|0\rangle$. De lo anterior se puede concluir que como se esperaba, las partículas del campo Dirac tienen espín $\frac{1}{2}$.

En el capítulo pasado se observó que $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ se transforma como un vector del grupo de Lorentz (véase ec. 2.51). Por otro lado $\partial_\mu(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) = im\bar{\psi}\psi - im\bar{\psi}\psi = 0$. Debido a esto, se define la densidad de corriente como[10]

$$j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi. \tag{3.85}$$

Como $\rho = j^0 = \bar{\psi}\gamma^0\psi = \psi^\dagger\psi$, entonces la carga conservada asociada a esta densidad de corriente es

$$Q = \int d^3x \ \psi(x)^\dagger\psi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{m}{E_{\mathbf{p}}}\sum_s (a_{\mathbf{p}}^{s\dagger}a_{\mathbf{p}}^s - b_{\mathbf{p}}^{s\dagger}b_{\mathbf{p}}^s). \tag{3.86}$$

La última igualdad es cierta salvo una constante infinita. Se verifica

$$Qa^{s\dagger}{}_{\mathbf{p}}|0\rangle = a^{s\dagger}{}_{\mathbf{p}}|0\rangle; \qquad Qb^{s\dagger}{}_{\mathbf{p}}|0\rangle = -b^{s\dagger}{}_{\mathbf{p}}|0\rangle \tag{3.87}$$

Por lo anterior, el operador $a_{\mathbf{p}}^{s\dagger}$ crea una partícula con carga 1 y el operador $b_{\mathbf{p}}^{s\dagger}$ crea una partícula con carga -1 (en la siguiente sección se verá que esta carga se asocia a la carga eléctrica en unidades de e).

Los estados definidos como $|\mathbf{p}s\rangle = a_{\mathbf{p}}^{s\dagger}|0\rangle$ (que tienen carga 1 y espín $\frac{1}{2}$) corresponden a fermiones, mientras que los estados definidos como $|\mathbf{p}s\rangle = b_{\mathbf{p}}^{s\dagger}|0\rangle$ (que tienen carga -1 y espín $\frac{1}{2}$) corresponden a antifermiones[11].

Debido a las ecs. 3.59 y 3.62, los estados $|\mathbf{p}s\rangle$ satisfacen

$$\langle\mathbf{p}r|\mathbf{q}s\rangle = 2E_p(2\pi)^3\delta^{rs}\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}). \tag{3.88}$$

Considere las ecs. 3.73 y 3.74 en las que los campos ψ y $\bar{\psi}$ son tratados como operadores. En este marco $\psi_\alpha(x)|0\rangle$ y $\bar{\psi}_\alpha(x)|0\rangle$ son operadores de posición que crean a un antifermión y a un fermión en la posición $\mathbf{x}$ al tiempo t, respectivamente [25].

Existen otros tipos de transformaciones que son simetrías del Lagrangiano de Dirac: inversión temporal (T), paridad (P) y conjugación de carga C. Como se mencionó en el capítulo anterior, las simetrías T y P involucran a las demás componentes del grupo $O(3,1)$; mientras la simetría C, utiliza a la matriz definida en la ec. 2.43). A la combinación de estas 3 simetrías se le llama simetría CPT. Para el desarrollo de este texto, no es necesaria la revisión de la simetría CPT; sin embargo es importante mencionarla, pues existe un teorema general de teoría de campos que afirma que todo sistema es invariante bajo transformaciones

[10] Esta densidad de corriente está asociada a una invariancia bajo transformaciones del grupo $U(1)$ (véase 2.5), $\psi \to e^{i\theta}\psi$, en el Lagrangiano de Dirac (como en el campo complejo de Klein-Gordon).

[11] Fue en 1931 que Carl D. Anderson observó experimentalmente a las antipartículas (observo al positrón, la antipartícula del electrón) usando una cámara de niebla, lo que confirmó las predicciones hechas por la ecuación de Dirac.

CPT, i.e. la simetría CPT se conserva y hasta la fecha, no se han encontrado pruebas experimentales de que un sistema la viole. Para la explicación del tema véanse las refs. [17], [25].

3.3. Introducción a la Teoría Electrodébil

En esta sección se muestra una introducción al Modelo Estándar revisando solo 2 de las 3 interacciones fundamentales que describe el modelo. Para una revisión más detallada véanse las refs. [6], [17]

3.3.1. Electrodinámica Cuántica

En la Teoría Electromagnética [17], se define el cuadrivector de potencial $A_\mu = (\phi, \mathbf{A})$ donde ϕ y $\mathbf{A}$ son el potencial eléctrico y el potencial magnético vectorial respectivamente, i.e.

$$\mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{A} - \boldsymbol{\nabla}\phi; \qquad \mathbf{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}. \tag{3.89}$$

Se cumple $\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} = 0$ y $\nabla \times \nabla\phi = 0$[12]. Las ecuaciones de Maxwell se pueden derivar del Lagrangiano

$$\mathcal{L}_{\mathcal{EM}} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - j^\mu A_\mu, \tag{3.90}$$

donde $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ es el tensor electromagnético y $j^\mu = (\rho, \mathbf{j})$ es el cuadrivector de corriente eléctrica. El primer término del Lagrangiano anterior representa el término de campo libre (el término cuadrático en las "velocidades" $\partial_\nu A_\mu$), mientras que el segundo término es el asociado con las interacciones con el campo y las densidades de carga y corriente[13].

Clásicamente, el cuadrivector A_μ está asociado al campo electromagnético; en el contexto de la Teoría Cuántica de Campos, al cuantizar A_μ se definen partículas[14] de espín 1 a las que se les llama fotones. Los fotones son los cuantos o bosones del campo electromagnético y son los responsables de transmitir la interacción [17], [29].

La ec. 3.89 especifica la forma de A_μ excepto para cualquier función escalar χ, se puede escribir

$$A_\mu(x) \to A_\mu(x) - \partial_\mu \chi(x), \tag{3.91}$$

y el Lagrangiano de la ec. 3.90 resulta invariante. A este tipo de transformación se le conoce como transformación local de norma.

Los cambios de fase en las funciones de onda en la teoría cuántica son esenciales para determinar las diferencias de fase entre dos partículas coherentes; sin embargo, la fase absoluta de la función de onda es arbitraria y no es posible medirla. Para un campo de Dirac y su adjunto (ecs. 3.73 y 3.74) se tienen las transformaciones locales de norma del grupo $U(1)$ (véase ejemplo 2.5)

$$\psi \to e^{i\alpha(x)}\psi; \qquad \bar{\psi} \to e^{-i\alpha(x)}\bar{\psi}, \tag{3.92}$$

[12] Estas propiedades dan lugar a dos ecuaciones de Maxwell.

[13] Las ecuaciones de Maxwell se obtienen mediante la ecuación $\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu$, que se genera a partir de la variación del Lagrangiano con respecto a cada componente de $\partial_\nu A_\mu$ y A_μ, [29].

[14] Como en el caso de los campos de Klein-Gordon y Dirac, donde se obtienen partículas de espín 0 y espín $\frac{1}{2}$

donde $\alpha(x)$ es un parámetro real de fase. Es claro que las transformaciones anteriores son unitarias (preservan la norma al cuadrado de ψ).

Si en la ec. 3.91 se pide $\chi(x) = \frac{1}{e}\alpha(x)$, donde e es la carga del electrón; y se considera

$$D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu(x), \tag{3.93}$$

entonces[15] el Lagrangiano

$$\mathcal{L}_{\mathcal{QED}} = \bar{\psi}(i\gamma_\mu D_\mu - m)\psi - ej^\mu A_\mu - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}, \tag{3.94}$$

es invariante bajo estas transformaciones; por lo anterior, $U(1)$ es el grupo de simetría local de norma[16] de $\mathcal{L}_{\mathcal{QED}}$. La invariancia de norma que cumple el cuadrivector de potencial A_μ (véase ec. 3.91), es necesaria para compensar fase de ψ [6], [17], [29]. El teorema de Noether [17], asegura la existencia de una cantidad conservada asociada a $U(1)$. La carga eléctrica Q es el número cuántico asociado [17], [29]. En el Lagrangiano anterior, j^μ es la densidad de corriente de Dirac (véase ec. 3.85).

Si se hace variar $\mathcal{L}_{\mathcal{QED}}$ con respecto a $\bar{\psi}$ se obtiene la ecuación $i\gamma^\mu\partial_\mu - m\psi = e\gamma_\mu A^\mu\psi$, que es precisamente la ecuación de Dirac (ec. 3.48) igualada al término de interacción con el campo electromagnético. Por otro lado, si se hace variar $\mathcal{L}_{\mathcal{QED}}$ con respecto a A_μ, se obtiene la ecuación $\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu$. Por lo anterior, $\mathcal{L}_{\mathcal{QED}}$ es el Lagrangiano de la Electrodinámica Cuántica[17] para fermiones con carga eléctrica de espín $\frac{1}{2}$ y un campo electromagnético [6], [17], [29].

La Electrodinámica Cuántica (QED por sus siglas en inglés) es la teoría cuántica de las interacciones entre partículas cargadas eléctricamente. De $\mathcal{L}_{\mathcal{QED}}$ se obtienen las reglas de Feynman para las interacciones entre estas partículas [17], [29].

3.3.2. Teoría Electrodébil

Se puede agrupar a las partículas (descritas por campos) que sienten la interacción nuclear débil (o simplemente interacción débil) en estados de un multiplete con propiedades similares a las del espín, llamado isospín débil. Debido a que la interacción débil solo actúa en partículas izquierdas, estas se encuentran en una representación diferente a las partículas derechas[18]. Por ejemplo, e_L y v_{eL} (electrón y neutrino electrónico izquierdos, véase ec. 2.37) ocupan un doblete (multiplete de dos partículas) de isospín débil. Por otro lado, e_R (electrón derecho) ocupa un singulete (multiplete con una sola partícula).

$$\begin{pmatrix} v_e \\ e \end{pmatrix}_L ; \quad e_R. \tag{3.95}$$

Existen más multipletes de isospín débil con las mismas propiedades (con el mismo "sabor" [12]), que los mostrados en la ecuación anterior. Estos son ocupados por el muón, el tau y sus respectivos neutrinos.

[15] Al operador D_μ se le conoce como "derivada covariante". Se la da este nombre ya que D_μ es covariante bajo transformaciones locales de norma [17].

[16] Pues las transformaciones de $U(1)$ dejan invariante $\mathcal{L}_{\mathcal{QED}}$.

[17] Es por esta razón que la carga conservada de la ec. 3.86, es la carga eléctrica en unidades de una carga q, que se identifica con la carga del electrón e (pues los electrones son fermiones con espín $\frac{1}{2}$) y la densidad de corriente de Dirac de la ec. 3.85, se interpreta como densidad de corriente eléctrica en unidades de e.

[18] Para antifermiones es al revés, los dobletes están compuestos de partículas derechas mientras que los singuletes son de partículas izquierdas, por lo que se viola la simetría C al involucrar ferminiones izquierdos pero no antifermiones izquierdos.

Se define el operador de isospín débil

$$\bar{\tau} = (\tau^1, \tau^2, \tau^3) = (\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3), \tag{3.96}$$

donde σ^i son las matrices de Pauli[19] (véase Apéndice B). Las partículas acomodadas como en la ec. 3.95 son eigenestados[20] del operador de τ^3.

Se viola la simetría P y C (paridad y carga, [12]) por asignar a las partículas izquierdas una representación diferente a las partículas derechas (véase ec. 3.95). Además, hay una violación de la simetría CP en decaimiento neutral K. De no ser por los 3 sabores de los fermiones (como en este caso), no habría violación de la simetría [12].

El grupo de simetría local de norma de la interacción electrodébil[21] es $SU(2)_L \times U(1)_Y$ (el subíndice L en $SU(2)$ es para hacer énfasis en que la interacción débil solo actúa sobre fermiones izquierdos, mientras que el subíndice Y es porque al generador Y de $U(1)_Y$ se le llama "Hipercarga"[22]). En efecto, considere los multipletes de isospín sin masa $\psi_1 = \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix}_L$, $\psi_2 = \chi_{1R}$ y $\psi_3 = \chi_{2R}$. El Lagrangiano de Weyl (ec. 3.70) para estos campos es

$$\mathcal{L} = i \sum_{j=1}^{3} \bar{\psi}_j \gamma^\mu \partial_\mu \psi_j. \tag{3.97}$$

Las transformaciones locales de norma del grupo $SU(2)_L \times U(1)$ son

$$\psi_1 \to \exp(i\alpha^k(x)T_k + i\beta(x)\frac{Y_1}{2})\psi_1, \tag{3.98}$$

$$\psi_2 \to \exp(i\beta(x)\frac{Y_2}{2})\psi_2; \tag{3.99}$$

$$\psi_3 \to \exp(i\beta(x)\frac{Y_3}{2})\psi_3; \tag{3.100}$$

donde $T_k = \frac{1}{2}\tau^k$ con τ^k las matrices de isospín débil (véase ec. 3.96) y Y_i son las cargas de $U(1)_Y$. $\alpha^k(x)$ son parámetros de fases en las tres direcciones ortogonales del espacio de isospín. Por otro lado, $\beta(x)$ es un parámetro real de fase (como en la ec. 3.92). En analogía con QED, considere[23]

$$D_\mu \psi_1 = [\partial_\mu + igT_k W_\mu^k(x) + ig'\frac{Y_1}{2}B_\mu(x)]\psi_1, \tag{3.101}$$

$$D_\mu \psi_2 = [\partial_\mu + ig'\frac{Y_2}{2}B_\mu(x)]\psi_2, \tag{3.102}$$

[19] Se usa la letra τ para denotar al isospín débil y que no haya confusión con el espín, ya que físicamente son cantidades diferentes. El isospín débil es una cantidad asociada a la interacción débil mientras que el espín es parte del momento angular total (cantidad conservada bajo rotaciones).

[20] La representación fundamental actúa sobre los dobletes, mientras que la representación trivial opera sobre los singuletes.

[21] Descripción conjunta de la interacción débil y la electromagnética, que solo es posible a altas energías [12], [17].

[22] Más adelante se muestra la relación entre la "hipercarga" y la carga eléctrica. La interacción electromagnética está contenida en el grupo $SU(2)_L \times U(1)_Y$.

[23] Donde el operador D_μ es la derivada covariente para estas transformaciones.

$$D_\mu\psi_3 = [\partial_\mu + ig'\frac{Y_3}{2}B_\mu(x)]\psi_3, \tag{3.103}$$

para las correspondientes constantes de acoplamiento g y g' [17]. Los 3 campos vectoriales W_μ^k (uno por cada dirección de isospín débil), son campos de norma (los análogos de A_μ para la interacción débil) asociados a $SU(2)_L$ y el campo vectorial de norma B_μ está asociado a $U(1)_Y$ (justo como a A_μ en la interacción electromagnética); y

$$T_kW_\mu^k \to U_L(x)T_kW_\mu^k(x)U_L^\dagger + \frac{i}{2}[\partial_\mu U_L(x)]U_L^\dagger(x); \tag{3.104}$$

$$B_\mu \to B_\mu - \frac{1}{g'}\partial_\mu\beta(x), \tag{3.105}$$

donde $U_L(x) = \exp(i\alpha^k(x)T_k)$, entonces el Lagrangiano

$$\mathcal{L}_{\mathcal{ED}} = i\sum_{j=1}^{3}\bar{\psi}_j\gamma^\mu D_\mu\psi_j - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} - \frac{1}{4}W_{\mu\nu}^iW_i^{\mu\nu}, \tag{3.106}$$

por construcción, es invariante bajo transformaciones locales de norma[24] de $SU(2)_L \times U(1)_Y$, donde $B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$ y $W_{\mu\nu}^i = \partial_\mu W_\nu^i - \partial_\nu W_\mu^i + g\epsilon_{ijk}W_k^jW_\nu^k$; ϵ_{ijk} es el tensor de Levi-Civita[25]. Los últimos 2 términos del Lagrangiano anterior corresponden a los términos de campo libre[26] de la interacción electrodébil, el análogo al último término en $\mathcal{L}_{\mathcal{QED}}$ (véase ec. 3.94). Así, $\mathcal{L}_{\mathcal{ED}}$ es el Lagrangiano de la Teoría Electrodébil. De este Lagrangiano, se pueden derivar las reglas de Feynman para la interacción de fermiones sin masa con espín $\frac{1}{2}$ y un campo electrodébil sin masa [12], [17].

Para obtener una correcta descripción de la interacción electrodébil, la hipercarga Y_1 de la ec. 3.98 se relaciona con los eigenestados de la tercera dirección de isospín débil τ^3 y la carga eléctrica Q de las partículas mediante la ecuación[27] [13]

$$Q = \frac{Y_1}{2} + \tau^3, \tag{3.107}$$

mientras que $\frac{Y_2}{2} = \frac{Y_3}{2} = Q$. Para la correcta descripción del fenómeno a bajas energías, hay que incluir términos de masa, pero esto no es compatible con la formulación anterior, ya que las partículas izquierdas y derechas se mezclarían erróneamente, implicando una ruptura explícita de la simetría. Para incluir la masa de las partículas, hay que anexar una partícula escalar al Lagrangiano. De esta manera se rompe espontáneamente la simetría

$$SU(2)_L \times U(1)_Y \to U(1), \tag{3.108}$$

y permite la existencia de términos de masa de fermiones y bosones de norma[28], mediante el mecanismo

[24] El teorema de Noether [17] asegura la existencia de cantidades conservadas asociadas a las transformaciones del grupo $SU(2)_L \times U(1)_Y$. El isospín débil, la carga eléctrica y la hipercarga son los números cuánticos asociados a estas transformaciones.

[25] El tensor $B_{\mu\nu}$ es invariante bajo transformaciones de $SU(2)_L \times U(1)_Y$ y el tensor $T_iW_{\mu\nu}^i$ es covariante bajo transformaciones de $SU(2)_L \times U(1)_Y$, por lo que el Lagrangiano de la ec. 3.106 resulta ser invariante bajo la simetría de norma $SU(2)_L \times U(1)_Y$ [13].

[26] Debido a que $SU(2)_L \times U(1)_Y$ es un grupo no-abeliano (véase definición 2.1), estos términos de campo libre dan lugar a auto interacciones entre los bosones de norma [13].

[27] Una razón intuitiva de por qué la hipercarga débil se relaciona con eigenvalores de τ^3 es que los miembros de un multiplete de isospín son eigenestados de τ^3 cuyos valores de carga eléctrica difieren en una unidad de carga.

[28] Se sabe que los bosones de norma de la interacción débil poseen masa, mientras el fotón es no-masivo.

de Higgs [13], [17]. Con esto, los campos W_μ^3 y B_μ se combinan entre sí para resurgir como el campo de fotones A_μ (campo electromagnético) y el campo vectorial masivo eléctricamente neutro Z_μ, mediante las ecuaciones [17]

$$A_\mu = \frac{-g' W_\mu^3 + g B_\mu}{\sqrt{g'^2 + g^2}}; \qquad Z_\mu = \frac{g W_\mu^3 + g' B_\mu}{\sqrt{g'^2 + g^2}}, \tag{3.109}$$

donde g y g' son las constantes de acoplamiento. Por otro lado, se definen los campos vectoriales masivos con carga eléctrica

$$W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu^1 \mp i W_\mu^2). \tag{3.110}$$

Los campos de las últimas dos ecuaciones forman una base que describe correctamente las interacciones después del rompimiento de la simetría [13], [17];

Capítulo 4

Supersimetría

En este capítulo se hará una introducción a la teoría de la Supersimetría haciendo uso de la Teoría Cuántica de Campos del capítulo anterior. Se hará énfasis en la representación para $N = 1$.

4.1. Introducción

El teorema de Coleman-Mandula [14] afirma que cualquier grupo de simetría de la matriz de dispersión S (Teoría Cuántica de Campos, véase [15], [17]), tiene que ser el producto directo del grupo de Poincaré (Sección 2.3.3) con un grupo interno de simetría de norma[1] G. Como consecuencia del teorema, se satisface

$$[P_\mu, T_\alpha] = [M_{\mu\nu}, T_\alpha] = 0, \tag{4.1}$$

donde P_μ, $M_{\mu\nu}$ son los generadores del grupo de Poincaré (véase ec. 2.59) y T_α es generador de G. Este teorema implica que es imposible mezclar los generadores del grupo de Poincaré con los generadores de G de manera no trivial[2].

La Supersimetría (SUSY por sus siglas en inglés) es una teoría que amplía el marco de las simetrías internas más el espacio-tiempo, proponiendo una simetría entre bosones y fermiones. Por ejemplo, al bosón W_μ^+ se le asigna un supercompañero "wino", que es un fermión con los mismos números cuánticos (claramente a excepción del espín); al electrón (fermión) se le asigna un supercompañero "selectrón", que es un bosón con los mismos números cuánticos.

Los generadores Q de SUSY son operadores de creación y aniquilación que cumplen

$$Q|fermión\rangle = |bosón\rangle; \qquad Q|bosón\rangle = |fermión\rangle. \tag{4.2}$$

Los generadores Q crean bosones a partir de fermiones y viceversa. Sea $U_{2\pi}$ una rotación en un ángulo de 2π (pertenece al grupo de Poincaré); entonces, satisface (véase ec. 2.1)

$$U_{2\pi}|bosón\rangle = |bosón\rangle; \qquad U_{2\pi}|fermión\rangle = -|fermión\rangle. \tag{4.3}$$

Combinando este resultado con la ec. 4.2 se obtiene

[1] Como $U(1)$ o $SU(2)_L \times U(1)_Y$.

[2] Los generadores T_α son escalares con respecto al grupo de Poincaré. Por esta razón a G también se le dice grupo de simetría escalar o simplemente grupo escalar.

$$U_{2\pi}Q|bosón\rangle = -|fermión\rangle; \qquad U_{2\pi}Q|fermión\rangle = |bosón\rangle. \tag{4.4}$$

Como $U_{2\pi}^{-1}U_{2\pi} = I$, entonces el primer término de la ecuación anterior es

$$(U_{2\pi}QU_{2\pi}^{-1})|bosón\rangle = -|fermión\rangle = -Q|bosón\rangle. \tag{4.5}$$

Se sigue

$$(U_{2\pi}QU_{2\pi}^{-1}) = -Q. \tag{4.6}$$

La ecuación anterior afirma que Q es un operador espinorial, por lo que satisface relaciones de anticonmutación. Al agregar los generadores de SUSY al álgebra $p(1,3) \oplus g$, donde g es el álgebra de Lie de G (véase ec. 4.1), éstos crean una superálgebra de Lie (Sección 2.2.2) donde los generadores de SUSY pertenecen a la parte "impar" de la superálgebra (pues obedecen relaciones de anticonmutación) mientras que la parte "par" está constituida por $p(1,3) \oplus g$ [26], [31]. Debido a lo anterior, SUSY evita el teorema de Coleman-Mandula.

Cabe destacar que $\{Q, Q^\dagger\}$ es hermitiano $\{Q, Q^\dagger\}^\dagger = \{Q, Q^\dagger\}$ y sus eigenvalores son positivos, pues para un estado arbitrario $|\xi\rangle$ se tiene

$$\langle\xi|\{Q, Q^\dagger\}|\xi\rangle = \langle\xi|QQ^\dagger|\xi\rangle + \langle\xi|Q^\dagger Q|\xi\rangle = \|Q|\xi\rangle\|^2 + \|Q^\dagger|\xi\rangle\|^2 \geq 0. \tag{4.7}$$

La igualdad de la ecuación anterior se cumple si y solo si $Q = 0$.

4.2. Superálgebra de SUSY para $N = 1$ y el Modelo de Wess-Zumino

¿Cuáles son las representaciones de SUSY? es una pregunta cuya respuesta depende del número de generadores Q que tenga el modelo de SUSY. A la teoría con solo un generador de SUSY se le asigna la representación $N = 1$ y dará, por ejemplo, para un fotón, un fotino sin carga, masa 0, de espín $\frac{1}{2}$ y que es su propia antipartícula [26].

Para presentar las relaciones de la superálgebra de Lie formada por los generadores de SUSY y $p(1,3)$ para $N = 1$, considere el Lagrangiano de Wess-Zumino no-masivo sin interacción[3]

$$\mathcal{L}_{\mathcal{WZ}} = \partial_\mu\phi^\dagger\,\partial^\mu\phi - i\bar{\psi}_{\dot{\alpha}}\bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\alpha}\partial_\mu\psi_\alpha. \tag{4.8}$$

donde ϕ es un campo escalar complejo (Sección 3.1.3.) y ψ es un campo espinorial izquierdo de Weyl[4] (ec. 3.70), todos sin masa. Claramente, el campo ϕ satisfacen la ecuación de Klein-Gordon (ec. 3.2 sin el término de masa) y el campo ψ satisface la ecuación de Weyl (ec. 3.52).

Si la transformación de traslación infinitesimal, definida en el primer término de la ec. 3.25, actúa sobre cualquiera de los campos $\Phi = \phi, \psi$, se obtiene

$$\delta_\tau\Phi = -\tau_\mu P^\mu\Phi = -i\tau_\mu\partial^\mu\Phi. \tag{4.9}$$

[3]Este Lagrangiano no representa ningún sistema físico, pero sirve de ejemplo para otros modelos supersimétricos [6].

[4]El signo negativo en el Lagrangiano de ψ no altera los resultados mostrados en el capítulo anterior.

Se define la transformación infinitesimal de rotación con un tensor antisimétrico infinitesimal, $\lambda_{\mu\nu}$

$$\delta_\lambda := -\frac{1}{4}\lambda_{\mu\nu}M^{\mu\nu}, \tag{4.10}$$

por lo que aplicada sobre ϕ, se tiene (véase ec. 3.25)

$$\delta_\lambda\phi = \frac{1}{2}\lambda_{\mu\nu}M^{\mu\nu}\phi = -\frac{i}{2}\lambda_{\mu\nu}(x^\mu\partial^\nu - x^\nu\partial^\mu)\phi, \tag{4.11}$$

y aplicada al campo ψ (véase ec. 3.80)

$$\delta_\lambda\psi = \frac{1}{2}\lambda_{\mu\nu}M^{\mu\nu}\psi = -\frac{i}{2}\lambda_{\mu\nu}[(x^\mu\partial^\nu - x^\nu\partial^\mu)\psi + S^{\mu\nu}]\psi. \tag{4.12}$$

Las ecuaciones 3.26 y 3.81 muestran que, al igual que en el campo de Klein-Gordon y de Dirac, el grupo de Poincaré es el grupo de simetrías espacio-temporales del Lagrangiano de Wess-Zummino[5]. Las ecs 2.60, 2.61 y 2.62 muestran las relaciones de $p(1,3)$ haciendo la identificación $P^0 = H$. Si el Lagrangiano de Wess-Zummino presenta SUSY, $p(1,3) \oplus g$ debe ser la parte "par" de la superálgebra de Lie[6].

Para obtener la parte "impar", considere un espinor infinitesimal constante izquierdo de Weyl ε, con él, se define la transformación infinitesimal de SUSY

$$\delta_\varepsilon\phi = \sqrt{2}\,\varepsilon^\alpha\psi_\alpha = \sqrt{2}\,\varepsilon\psi, \qquad \delta_\varepsilon\phi^\dagger = \sqrt{2}\,\bar{\varepsilon}\bar{\psi}; \tag{4.13}$$

$$\delta_\varepsilon\psi = i\sqrt{2}\,\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\varepsilon}^{\dot{\alpha}}\partial_\mu\phi, \qquad \delta_\varepsilon\bar{\psi} = -i\sqrt{2}\,\varepsilon^\alpha\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_\mu\phi. \tag{4.14}$$

Hay que destacar que en la primera transformación, $\varepsilon\psi$ es un escalar, por lo que se está creando un campo bosónico formado a partir de un "apantallamiento" de 2 campos fermiónicos[7]; la segunda transformación crea un campo fermiónico formado a partir de un campo bosónico. Nótese que $[\phi] = [masa]$ (véase ec. 3.32); mientras que $[\psi] = [masa]^{\frac{3}{2}}$ (véase ec. 3.70) debido a que[8] $[\mathcal{L}] = [masa]^4$. Por lo tanto $[\varepsilon] = [masa]^{-\frac{1}{2}}$.Al aplicar la ec. 4.13 en el primer término de la ec. 4.8 se obtiene

$$\delta_\varepsilon(\partial_\mu\phi^\dagger\,\partial^\mu\phi) = \partial_\mu(\delta_\varepsilon\phi^\dagger)\partial^\mu\phi + \partial_\mu\phi^\dagger\partial^\mu(\delta_\varepsilon\phi) = \sqrt{2}\,(\bar{\varepsilon}\partial_\mu\bar{\psi}\,\partial^\mu\phi + \varepsilon\partial_\mu\psi\,\partial^\mu\phi^\dagger). \tag{4.15}$$

Por otro lado, al aplicar la ec. 4.14 en en el segundo término de la ec. 4.8 se tiene

$$\delta_\varepsilon(-i\bar{\psi}_{\dot{\alpha}}\bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\alpha}\partial_\mu\psi_\alpha) = -i(\delta_\varepsilon\bar{\psi})\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi - i\bar{\psi}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu(\delta_\varepsilon\psi) = \sqrt{2}\,(-\varepsilon\sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi\,\partial_\nu\phi^\dagger + \bar{\psi}\bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu\bar{\varepsilon}\,\partial_\mu\partial_\nu\phi); \tag{4.16}$$

por lo tanto, para la acción $S_{WZ} = \displaystyle\int d^4x\,\mathcal{L}_{\mathcal{WZ}}$ resulta

$$\delta_\varepsilon(S_{WZ}) = \sqrt{2}\int d^4x\;(\bar{\varepsilon}\partial_\mu\bar{\psi}\partial^\mu\phi + \varepsilon\partial_\mu\psi\partial\mu\phi^\dagger - \varepsilon\sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi\,\partial_\nu\phi^\dagger + \bar{\psi}\bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu\bar{\varepsilon}\,\partial_\mu\partial_\nu\phi). \tag{4.17}$$

Considerando que los límites de integración son extremos (generalmente un mínimo), entonces, integrando por partes se obtiene

[5]Pues las transformaciones del grupo de Poincaré dejan invariante el Lagrangiano de Wess-Zummino.

[6]Más adelante se observará que para esta representación $g = u(1)_R$

[7]Tipo pares de Cooper en la teoría BSC de la superconductividad [3]

[8]La acción $S = \displaystyle\int d^4x\,\mathcal{L}$ es adimensional para cualquier Lagrangiano $\mathcal{L}$ ($[S] = [\hbar] = [c] = 1$; $[masa] = [distancia]^{-1}$).

$$\delta_\varepsilon(S_{WZ}) = \sqrt{2}\int d^4x\,(-\varepsilon\psi\partial_\mu\partial^\mu\phi^\dagger - \bar{\varepsilon}\bar{\psi}\partial_\mu\partial^\mu\phi + \varepsilon\sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu\psi\partial_\mu\partial_\nu\phi^\dagger + \bar{\psi}\bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu\bar{\varepsilon}\,\partial_\mu\partial_\nu\phi). \tag{4.18}$$

Como $\bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu\bar{\varepsilon}\partial_\mu\partial_\nu\phi = \frac{1}{2}(\{\bar{\sigma}^\mu,\sigma^\nu\} + [\bar{\sigma}^\nu,\sigma^\mu])\bar{\varepsilon}\partial_\mu\partial_\nu\phi = \frac{1}{2}\{\bar{\sigma}^\mu,\sigma^\nu\}\bar{\varepsilon}\partial_\mu\partial_\nu\phi = \bar{\varepsilon}\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\phi = \bar{\varepsilon}\partial_\mu\partial^\mu\phi$ (y similarmente para $\sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu\psi\partial_\mu\partial_\nu\phi^\dagger$), entonces

$$\delta_\varepsilon(S_{WZ}) = \sqrt{2}\int d^4x\,(-\varepsilon\psi\partial_\mu\partial^\mu\phi^\dagger - \bar{\varepsilon}\bar{\psi}\partial_\mu\partial^\mu\phi + \varepsilon\psi\partial_\mu\partial^\mu\phi^\dagger + \bar{\varepsilon}\bar{\psi}\partial_\mu\partial^\mu\phi) = 0. \tag{4.19}$$

La ecuación anterior indica que $\mathcal{L}_{\mathcal{WZ}}$, además de las simetrías de Poincaré, satisface SUSY. El multiplete está dado por los campos $\Phi = (\phi,\psi)$ y se le denomina "supermultiplete[9] quiral" [1], [31].

Para dos trasformaciones de SUSY δ_{ε_1}, δ_{ε_2} se tiene

$$[\delta_{\varepsilon_1},\delta_{\varepsilon_2}]\phi = 2i(\varepsilon_2\sigma^\mu\bar{\varepsilon}_1 - \varepsilon_1\sigma^\mu\bar{\varepsilon}_2)\partial_\mu\phi = -2(\varepsilon_2\sigma^\mu\bar{\varepsilon}_1 - \varepsilon_1\sigma^\mu\bar{\varepsilon}_2)P_\mu\phi. \tag{4.20}$$

Por otro lado, para el campo ψ [1]

$$[\delta_{\varepsilon_1},\delta_{\varepsilon_2}]\psi = -2(\varepsilon_2\sigma^\mu\bar{\varepsilon}_1 - \varepsilon_1\sigma^\mu\bar{\varepsilon}_2)P_\mu\psi - i(\varepsilon_2\sigma_\nu\bar{\varepsilon}_1 - \varepsilon_1\sigma_\nu\bar{\varepsilon}_2)\sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi. \tag{4.21}$$

Para obtener una relación igual a la ec. 4.20 se tiene que usar la ecuación de movimiento de ψ, $i\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi = 0$ (haciendo al último término de la ec. 4.21 igual a 0). De esta manera, el álgebra se cierra para todos los campos (i.e. la superálgebra de Lie es un conjunto cerrado) [1]. Por lo anterior, esta teoría está "en la capa de masa"[10]. Más adelante se verá que introduciendo campos auxiliares se puede cerrar el álgebra sin usar la ecuación de movimiento, haciendo que la teoría esté "fuera de la capa de masa"[11].

Debido a que $\mathcal{L}_{\mathcal{WZ}}$ satisface SUSY, por el teorema de Noether [17] existe una corriente conservada, que en este caso es la "supercorriente" $J_{\mu a}$, [20]

$$J^\mu_\alpha = (\sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu\psi)_\alpha\partial_\nu\phi^\dagger; \qquad \bar{J}^\mu_{\dot{\alpha}} = (\bar{\psi}\bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu)_{\dot{\alpha}}\partial_\nu\phi. \tag{4.22}$$

La supercorriente y su adjunto tienen ecuaciones de conservación separadas [20]

$$\partial_\mu\,J^\mu_\alpha = 0; \qquad \partial_\mu\,\bar{J}^\mu_{\dot{\alpha}} = 0. \tag{4.23}$$

Asociado a J^μ_α y a $\bar{J}^\mu_{\dot{\alpha}}$ se construyen las cargas conservadas, i.e., los generadores de SUSY

$$Q_\alpha = \int d^3x\;J^0_\alpha; \qquad \bar{Q}_\alpha = \int d^3x\;\bar{J}^0_{\dot{\alpha}}. \tag{4.24}$$

Por la ec. 4.22, se aprecia que Q_α es un operador de espín $\frac{1}{2}$ izquierdo de Weyl. Con las ecs. 3.4 y 3.71 se verifica [20]

$$i[\varepsilon Q + \bar{\varepsilon}\bar{Q},\Phi] = \delta_\varepsilon\Phi \tag{4.25}$$

para $\Phi = \phi,\psi$. Con la ec. 4.26 se obtiene

[9] Un supermultiplete es un conjunto de estados de diferente espín relacionados de manera cerrada por medio de transformaciones de supersimetría. A esté se le denomina quiral ya que el valor más alto del espín de las partículas es $\frac{1}{2}$.

[10] i.e., todas las partículas satisfacen ecs. clásicas de movimiento libres y con ello, la relación $E^2 - p^2 = m^2$.

[11] i.e., no todas las partículas satisfacen la condición $E^2 - p^2 = m^2$, por ejemplo, al tomar dos estados en la capa de masa fermiónicos, el cuadrimomento de la resultante partícula no necesariamente está en la capa de masa.

$$[[\varepsilon_1 Q+\bar{\varepsilon}_1\bar{Q},\varepsilon_2 Q+\bar{\varepsilon}_2\bar{Q}],\Phi]=[\varepsilon_1 Q+\bar{\varepsilon}_1\bar{Q},[\varepsilon_2 Q+\bar{\varepsilon}_2\bar{Q},\Phi]]-[\varepsilon_2 Q+\bar{\varepsilon}_2\bar{Q},[\varepsilon_1 Q+\bar{\varepsilon}_1\bar{Q},\Phi]]=[\delta_{\varepsilon_1},\delta_{\varepsilon_2}]\Phi; \quad (4.26)$$

por lo que $[[\varepsilon_1 Q+\bar{\varepsilon}_1\bar{Q},\varepsilon_2 Q+\bar{\varepsilon}_2\bar{Q}],\Phi]=-2(\varepsilon_2\sigma^\mu\bar{\varepsilon}_1-\varepsilon_1\sigma^\mu\bar{\varepsilon}_2)P_\mu\Phi$. Por otro lado, se satisface $[P_\mu,\Phi]=-i\partial_\mu\Phi=P_\mu\Phi$ [20]. Con lo anterior, se tiene

$$[[\varepsilon_1 Q+\bar{\varepsilon}_1\bar{Q},\varepsilon_2 Q+\bar{\varepsilon}_2\bar{Q}],\Phi]=-2(\varepsilon_2\sigma^\mu\bar{\varepsilon}_1-\varepsilon_1\sigma^\mu\bar{\varepsilon}_2)[P_\mu,\Phi]. \quad (4.27)$$

Se sigue $-2(\varepsilon_2\sigma^\mu\bar{\varepsilon}_1-\varepsilon_1\sigma^\mu\bar{\varepsilon}_2)P_\mu=[\varepsilon_1 Q+\bar{\varepsilon}_1\bar{Q},\varepsilon_2 Q+\bar{\varepsilon}_2\bar{Q}]$. Desarrollando ambos términos, se obtiene $2\varepsilon_1^\alpha\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\varepsilon}_2^{\dot{\alpha}}P_\mu-2\varepsilon_2^\alpha\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\varepsilon}_1^{\dot{\alpha}}P_\mu=\varepsilon_1^\alpha\{Q_\alpha,\bar{Q}_{\dot{\alpha}}\}\bar{\varepsilon}_2^{\dot{\alpha}}-\varepsilon_2^\alpha\{Q_\alpha,\bar{Q}_{\dot{\alpha}}\}\bar{\varepsilon}_1^{\dot{\alpha}}\bar{Q}$. Por la igualdad anterior, se concluye

$$\{Q_\alpha,\bar{Q}_{\dot{\alpha}}\}=2\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}P_\mu. \quad (4.28)$$

La ecuación anterior muestra las relaciones de anticonmutación de los generadores Q. Como Q es un operador espinorial, para esta representación se satisface [26]

$$\{Q_\alpha,Q_\beta\}=0. \quad (4.29)$$

Las ecs. 4.28 y 4.29 muestran las relaciones que satisface la parte “impar” de la superálgebra de Lie.

Para obtener la parte “pura”, hay que considerar que Q_α es un espinor izquierdo; por lo tanto, bajo una transformación de Lorentz[12] (véase ec. 2.41), Q_α se transforma como

$$Q_\alpha\to Q'_\alpha=\exp(-\frac{i}{2}\lambda_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu})_\alpha^{\ \beta}Q_\beta\approx Q_\alpha-\frac{i}{2}(\lambda_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu})_\alpha^{\ \beta}Q_\beta; \quad (4.30)$$

por otro lado, Q_α también es un operador, por lo que

$$Q_\alpha\to Q'_\alpha=\exp(-\frac{i}{2}\lambda_{\mu\nu}M^{\mu\nu})Q_\alpha\exp(-\frac{i}{2}\lambda_{\mu\nu}M^{\mu\nu})^\dagger\approx Q_\alpha-\frac{i}{2}\lambda_{\mu\nu}(M^{\mu\nu}Q_\alpha-Q_\alpha M^{\mu\nu})+O(\lambda^2). \quad (4.31)$$

Comparando las ecs. 4.30 y 4.31, a primer orden de $\lambda_{\mu\nu}$, se obtiene

$$[M^{\mu\nu},Q_\alpha]=(\sigma^{\mu\nu})_\alpha^{\ \beta}Q_\beta. \quad (4.32)$$

Tomando el complejo conjugado de Q_α

$$[M^{\mu\nu},\bar{Q}_{\dot{\alpha}}]=-\bar{Q}_{\dot{\beta}}(\bar{\sigma}^{\mu\nu})^{\dot{\beta}}_{\ \dot{\alpha}}. \quad (4.33)$$

Si para una constante compleja c, se considera $[Q_\alpha,P^\mu]=c\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{Q}^{\dot{\alpha}}$ y[13] $[\bar{Q}^{\dot{\alpha}},P^\mu]=c^*\bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\beta}Q_\beta$ (que son las formas lineales más generales de escribir los conmutadores con los índices μ y a libres), entonces, usando la súper identidad de Jacobi (definición 2.20)[14]

$$0=[P^\mu,[P^\nu,Q_\alpha]]+[P^\nu,[Q_\alpha,P^\mu]]+[Q_\alpha,[P^\mu,P^\nu]]=|c|^2(\sigma^\nu_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\beta}-\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\sigma}^{\nu\dot{\alpha}\beta})Q_\beta. \quad (4.34)$$

[12] Para un tensor antisimétrico infinitesimal $\lambda_{\mu\nu}$.

[13] Tomando el adjunto $(Q_\alpha)^\dagger=\bar{Q}_{\dot{\alpha}}$ y $(\sigma^\mu\bar{Q})^\dagger_\alpha=(Q\sigma^\mu)_{\dot{\alpha}}$.

[14] En la superálgebra de Lie, $P^\mu=P^\mu\oplus 0$ y $Q_\alpha=0\oplus Q_\alpha$, por lo que la súper identidad de Jacobi se reduce a la identidad de Jacobi (Sección 2.2.2, definición 2.16) [26].

Pero por la ec. 2.40, $-4i(\sigma^{\nu\mu})_\alpha^{\ \beta} = \sigma^\nu_{\alpha\dot\alpha}\bar\sigma^{\mu\dot\alpha\beta} - \sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}\bar\sigma^{\nu\dot\alpha\beta}$, que en general es distinto de 0, por lo que $c = 0$; entonces

$$[Q_\alpha, P^\mu] = [\bar Q^{\dot\alpha}, P^\mu] = 0. \tag{4.35}$$

La ecuación anterior muestra que todos los estados de un mismo superpultiplete tienen la misma energía y momento. Las ecs 4.32, 4.33 y 4.35 muestran las relaciones que satisface la parte "pura" de la superálgebra de Lie.

Los generadores de SUSY tienen un grupo de simetría interna llamada simetría R, dada por el grupo[15] $U(1)_R$ (véase ejemplo 2.5). Usando las transformaciones de este grupo $e^{i\alpha(x)R}$, donde $\alpha(x)$ es un parámetro real, y mediante un proceso similar al realizado para obtener las ecs. 4.32 y 4.32, se encuentra

$$[R, Q_\alpha] = Q_\alpha \tag{4.36}$$

$$[R, \bar Q_{\dot\alpha}] = -\bar Q_{\dot\alpha} \tag{4.37}$$

Para fermiones que están fuera de la capa de masa, no necesariamente se satisface la ecuación de movimiento $\gamma^\mu\partial_\mu\psi = 0$, por lo que el álgebra no se cierra (véase ec. 4.21). En la capa de masa, el campo espinorial ψ tiene dos grados de libertad reales, que coinciden con los dos estados de espín. Sin embargo, fuera de la capa de masa, tiene cuatro grados de libertad reales[16], mientras que el campo ϕ sigue teniendo dos. Para compensar los dos grados de libertad extra de ψ y que se tenga el mismo número de grados de libertad fermiónicos y bosónicos, considere la introducción de un campo escalar complejo extra f, llamado campo auxiliar, cuyo Lagrangiano es ($[f] = [masa]^2$)

$$\mathcal{L}_f = ff^\dagger = |f|^2. \tag{4.38}$$

El Lagrangiano anterior implica que las ecuación de movimiento de f es

$$f = f^\dagger = 0. \tag{4.39}$$

Por lo anterior, el campo f no tiene estados en la capa de masa y no juega ningún papel en la dinámica de los campos físicos. Bajo una transformación infinitesimal de SUSY, los campos auxiliares se transforman como

$$\delta_\varepsilon f = -i\sqrt{2}\,\partial_\mu\psi^\alpha\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}\bar\varepsilon^{\dot\alpha}; \qquad \delta_\varepsilon f^\dagger = i\sqrt{2}\,\varepsilon^\alpha\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}\partial_\mu\bar\psi^{\dot\alpha}. \tag{4.40}$$

Con esto, la ec. 4.14 cambia a

$$\delta_\varepsilon\psi = i\sqrt{2}\,\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}\bar\varepsilon^{\dot\alpha}\partial_\mu\phi + \sqrt{2}\,\varepsilon_\alpha f; \qquad \delta_\varepsilon\bar\psi = -i\sqrt{2}\,\varepsilon^\alpha\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}\partial_\mu\phi + \sqrt{2}\,\bar\varepsilon_{\dot\alpha}f^\dagger, \tag{4.41}$$

y el Lagrangiano de Wess-Zumino (ec. 4.8) cambia a

$$\mathcal{L}_{\mathcal{WZ}} = \partial_\mu\phi^\dagger\,\partial^\mu\phi - i\bar\psi_{\dot\alpha}\bar\sigma^{\mu\dot\alpha\alpha}\partial_\mu\psi_\alpha + |f|^2. \tag{4.42}$$

El nuevo Lagrangiano de Wess-Zumino también es invariante bajo transformaciones infinitesimales del grupo de Poincaré (ecs 4.9 y 4.10) y de SUSY (ecs 4.13, 4.40 y 4.41) [1], [31]. El nuevo supermultiplete

[15] La razón del subíndice R por convención.

[16] Yendo a la capa de masa se eliminan la mitad de los grados de libertad de ψ ya que el Lagrangiano es lineal en derivadas temporales, de modo que el momento canónico se puede expresar en términos de las variables del espacio de configuración sin derivadas temporales y no son coordenadas del espacio fase.

quiral fuera de la capa de masa está dado por los campos $\Phi = (\phi, \psi, f)$ mientras que en la capa de masa es $\Phi = (\phi, \psi)$ (véase ec. 4.39). Con las ecs 4.40 y 4.41, el último término de la ec. 4.21 se elimina (sin la necesidad de recurrir a la ecuación de movimiento de ψ) y cierra la superálgebra de Lie [1], [20], haciendo que la teoría sea válida también fuera de la capa de masa. Por otro lado, la forma de la supercorriente (ec. 4.29) no cambia con la incorporación de f y la ec. 4.32 se hace válida para f [1] [20]. Además

$$[\delta_{\varepsilon_1}, \delta_{\varepsilon_2}]f = -2(\varepsilon_2\sigma^\mu\bar{\varepsilon}_1 - \varepsilon_1\sigma^\mu\bar{\varepsilon}_2)P_\mu f, \tag{4.43}$$

justo como se requiere para que la ec. 4.28 no se altere y todas las relaciones de la superálgebra de Lie presentadas se sigan satisfaciendo.

Si al Lagrangiano de Wess-Zumino se le agrega el término de masa

$$\mathcal{L}_m = m(-\phi f - \phi^\dagger f^\dagger + \frac{1}{2}\psi^2 + \frac{1}{2}\bar{\psi}^2), \tag{4.44}$$

entonces, al usar la ecuación de movimiento

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{\mathcal{WZ}}}{\partial f} = f^\dagger - m\phi = 0, \tag{4.45}$$

se obtiene

$$f^\dagger = m\phi, \qquad f = m\phi^\dagger. \tag{4.46}$$

Las ecuaciones anteriores son puramente algebraicas, por lo que la dinámica del sistema no cambia si se sustituye $f = m\phi^\dagger$ en el Lagrangiano de Wess-Zumino, con lo que

$$\mathcal{L}_{\mathcal{WZ}} = \partial_\mu\phi^\dagger\,\partial^\mu\phi - m|\phi|^2 - i\bar{\psi}_{\dot{\alpha}}\bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\alpha}\partial_\mu\psi_\alpha + \frac{m}{2}(\psi^2 + \bar{\psi}^2). \tag{4.47}$$

Por lo anterior, las ecuaciones de movimiento de los campos ϕ y ψ son como en las ecs. 3.2 y 3.48. La superálgebra tampoco cambia, por lo que las ecs 4.28, 4.29, 4.32, 4.33 y 4.35 se siguen satisfaciendo [1]. La ecuación anterior muestra que la masa de todos los campos es la misma, lo que concuerda con la ec. 4.35.

4.3. Representaciones de los estados de una partícula para $N = 1$

En esta sección se presentarán los estados de una partícula descrita por el Lagrangiano de Wess-Zumino en la capa de masa, para los casos masivo y no masivo. Como se mencionó en la Sección 2.3.3, los estados de las partículas se pueden caracterizar por medio de la masa y su espín[17].

4.3.1. Caso no-masivo

Considere el caso de partículas sin masa moviéndose a través de la tercera dirección espacial[18], i.e. $P_\mu = (E, 0, 0, E)$. En este marco, se denotará a las partículas por medio de los estados $|\lambda\rangle$, según la helicidad λ. En este caso

[17] La introducción de la superálgebra de Lie provoca que el vector de Pauli-Lubanski (véase ec. 2.63) ya no sea un Casimir pero genera un nuevo Casimir. Para el caso no-masivo ambos Casimirs son 0. Para el caso masivo, el nuevo Casimir coincide con el espín [26].

[18] Como se vio en la sección 3.2.2, dada una partícula de espín s, la proyección de éste sobre la tercera dirección espacial coincide con el valor de la helicidad, esto es, $\lambda = \pm\frac{1}{2}$.

$$\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} = 2(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}} P_\mu = 2E(\sigma^0 + \sigma^3)_{\alpha\dot{\beta}} = 4E \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{\alpha\dot{\beta}}. \tag{4.48}$$

De la ecuación anterior se deduce que

$$\{Q_1, \bar{Q}_{\dot{1}}\} = 4E; \quad \{Q_2, \bar{Q}_{\dot{2}}\} = 0. \tag{4.49}$$

Por la ec. 4.7 se sigue también $Q_2 = \bar{Q}_{\dot{2}} = 0$. Con los generadores Q_1 y $\bar{Q}_{\dot{1}}$, se pueden definir los operadores de creación y aniquilación

$$a^\dagger := \frac{Q_1}{\sqrt{2E}}, \quad a := \frac{\bar{Q}_{\dot{1}}}{\sqrt{2E}}, \tag{4.50}$$

que satisfacen

$$\{a^\dagger, a\} = 1, \quad \{a^\dagger, a^\dagger\} = \{a, a\} = 0. \tag{4.51}$$

Por lo anterior, el Hamiltoniano del sistema es

$$H = E\{a^\dagger, a\}. \tag{4.52}$$

De la ec. 4.32 se observa que cuando la contribución del momento angular orbital al momento angular total es 0, se tiene $[M^z, Q_1] = [M^{12}, Q_1] = \frac{1}{2}Q_1$, por lo que

$$M^z a^\dagger|\lambda\rangle = (a^\dagger M^z + [M^z, a^\dagger])|\lambda\rangle = (\lambda + \frac{1}{2})a^\dagger|\lambda\rangle. \tag{4.53}$$

La ecuación anterior afirma que la helicidad del estado $a^\dagger|\lambda\rangle$ es $\lambda + \frac{1}{2}$. Un tratamiento análogo con el operador de aniquilación a confirma que la helicidad del estado $a|\lambda\rangle$ es $\lambda - \frac{1}{2}$. Juntando estos resultados con la ec. 4.51, se observa

$$a^\dagger|\lambda\rangle = |\lambda + \frac{1}{2}\rangle, \quad a|\lambda\rangle = |\lambda - \frac{1}{2}\rangle, \quad (a^\dagger)^2|\lambda\rangle = 0|\lambda\rangle = 0. \tag{4.54}$$

Definimos el vacío $|\Omega\rangle$ como el estado de mínima helicidad λ_0, i.e. $a|\Omega\rangle = 0$. Por la ec. 4.54, a partir de $|\Omega\rangle$, solo se puede construir un estado. De esta manera, se tiene el superdoblete

$$|\Omega\rangle = |\lambda_0\rangle, \quad a^\dagger|\Omega\rangle = |\lambda_0 + \frac{1}{2}\rangle. \tag{4.55}$$

En general, lo anterior viola la invariancia CPT[19] [26]. Para el caso $\lambda_0 = 0$, se agrega[20] otro superdoblete con helicidad $\lambda_0 = -\frac{1}{2}$ [26]. Los dos superdobletes que se construyen se presentan en el cuadro 4.1 (todos con la misma energía E).

[19] En general, los compañeros bajo cambios de paridad no están en el modelo.

[20] Pedir que la helicidad del estado $|\Omega\rangle$ sea 0 nos restringe a la representación quiral de SUSY para $N = 1$ [26].

$\lambda_0 = 0$	$\lambda_0 = -\frac{1}{2}$
$\vert 0\rangle$	$\vert -\frac{1}{2}\rangle$
$\vert\frac{1}{2}\rangle$	$\vert 0\rangle$

Cuadro 4.1: Dobletes de SUSY en $N = 1$ para el caso no-masivo con helicidad del vacío $\lambda_0 = 0, -\frac{1}{2}$.

4.3.2. Caso masivo

Considere el caso de partículas en reposo, esto es $P_\mu = (E, 0, 0, 0)$; entonces

$$\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} = 2(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}} P_\mu = 2E(\sigma^0)_{\alpha\dot{\beta}} = 2E \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{\alpha\dot{\beta}}. \tag{4.56}$$

De la ecuación anterior se deduce que

$$\{Q_1, \bar{Q}_{\dot{1}}\} = 2E; \qquad \{Q_2, \bar{Q}_{\dot{2}}\} = 2E. \tag{4.57}$$

Con Q_α y $Q_{\dot{\alpha}}$, se pueden definir los operadores de creación y aniquilación

$$a^\dagger_{1,2} := \frac{Q_{1,2}}{\sqrt{2E}}; \qquad a_{1,2} := \frac{\bar{Q}_{\dot{1},\dot{2}}}{\sqrt{2E}}, \tag{4.58}$$

que satisfacen

$$\{a_p, a^\dagger_q\} = \delta_{pq}, \qquad \{a^\dagger_p, a^\dagger_q\} = \{a_p, a_q\} = 0. \tag{4.59}$$

Por lo anterior, el Hamiltoniano[21] del sistema es

$$H = \frac{E}{2}(\{a_1, a^\dagger_1\} + \{a_2, a^\dagger_2\}). \tag{4.60}$$

Un tratamiento análogo al caso sin masa muestra que

$$a^\dagger_1|s_3\rangle = |s_3 + \frac{1}{2}\rangle; \qquad a_1|s_3\rangle = |s_3 - \frac{1}{2}\rangle; \qquad a^\dagger_1 a^\dagger_1|s_3\rangle = 0. \tag{4.61}$$

$$a^\dagger_2|s_3\rangle = |s_3 - \frac{1}{2}\rangle; \qquad a_2|s_3\rangle = |s_3 + \frac{1}{2}\rangle; \qquad a^\dagger_2 a^\dagger_2|s_3\rangle = 0, \tag{4.62}$$

donde s_3 es la componente del espín s de las partículas en la tercera dirección espacial. Al igual que en el caso sin masa, se define el vacío, $|\Omega\rangle$ como el estado de espín mínimo[22] s_0, i.e., el estado aniquilado por los operadores a_1, a_2 ($a_i|\Omega\rangle = 0$ para $i = 1, 2$). Considere el caso[23] $s_0 = 0$, por lo que $|\Omega\rangle = |0\rangle$. Se define el estado $|\Omega'\rangle$ como el estado "aniquilado" por los operadores $a^\dagger_1$ y $a^\dagger_2$ respectivamente, i.e. $a^\dagger_i|\Omega'\rangle = 0$ para $i = 1, 2$, por lo que el espín de este estado también es 0. Debido a la ec. 4.59

$$|\Omega'\rangle := a^\dagger_2 a^\dagger_1|\Omega\rangle = -a^\dagger_1 a^\dagger_2|\Omega\rangle. \tag{4.63}$$

[21]Hay que destacar que por la ecuación 4.7, tanto el Hamiltoniano de la ec. 4.52 como el de la ec. 4.60 son positivos definidos.

[22]Con sus dos posibles valores para la tercera dirección espacial.

[23]Igual que en el caso sin masa, pedir que el espín del estado $|\Omega\rangle$ sea 0 nos restringe a la representación quiral de SUSY para $N = 1$ [26] (ver la próxima sección).

Por las ecs. 4.61, 4.62 y 4.63, a partir de $|\Omega\rangle$ se construye el supercuadruplete presentado en el cuadro 4.2 (todos con la misma energía E).

$s_0 = 0$
$\vert\Omega\rangle$
$\vert\frac{1}{2}\rangle$
$\vert-\frac{1}{2}\rangle$
$\vert\Omega'\rangle$

Cuadro 4.2: Cuadruplete de SUSY en $N = 1$ para el caso masivo con espín del vacío $s_0 = 0$.

En la Sección 2.3.2 se mencionó que Q_a y $\bar{Q}_{\dot{a}}$ pertenecen a representaciones diferentes[24]. De hecho, bajo transformaciones P de cambios de Paridad, Q_a y $\bar{Q}_{\dot{a}}$ se transforman entre sí [26] y se satisface

$$PQ_aP^{-1} = \eta(\sigma^0)_{a\dot{b}}\bar{Q}^{\dot{b}}, \tag{4.64}$$

$$P\bar{Q}^{\dot{a}}P^{-1} = \eta(\bar{\sigma}^0)^{\dot{a}b}Q_b. \tag{4.65}$$

Para una constante η que satisface $|\eta|^2 = 1$. Por la ecuación anterior, bajo transformaciones P de cambios de paridad, $|\Omega\rangle$ ahora es aniquilado por $a_i^\dagger$ mientras que $|\Omega'\rangle$ es aniquilado ahora por a_i, i.e. los estados $|\Omega\rangle$ y $|\Omega'\rangle$ se transforman entre sí.

Para construir un vacío con paridad definida basta considerar

$$|\pm\rangle = |\Omega\rangle \pm |\Omega'\rangle, \qquad P|\pm\rangle = \pm|\pm\rangle. \tag{4.66}$$

Por esto, el estado $|+\rangle$ es un escalar mientras que el estado $|-\rangle$ es un pseudo-escalar.

Una característica distintiva de SUSY es que el número de bosones y de fermiones en un supermultiplete siempre es el mismo (como se puede observar en los cuadros 4.1 y 4.2). En efecto, sea n_B y n_F el número de bosones y de fermiones respectivamente, en un supermultiplete. Se define el operador de número fermiónico $(-)^F$ tal que

$$(-)^F|bos\acute{o}n\rangle = |bos\acute{o}n\rangle; \qquad (-)^F|fermi\acute{o}n\rangle = -|fermi\acute{o}n\rangle. \tag{4.67}$$

Considere

$$(-)^F Q_\alpha|fermi\acute{o}n\rangle = (-)^F|bos\acute{o}n\rangle = |bos\acute{o}n\rangle = Q_\alpha|fermi\acute{o}n\rangle = -Q_\alpha(-)^F|fermi\acute{o}n\rangle, \tag{4.68}$$

por lo que

$$\{(-)^F, Q_\alpha\} = 0. \tag{4.69}$$

Por otra parte

[24] $Q_a \in (\frac{1}{2}, 0)$ y $\bar{Q}_{\dot{a}} \in (0, \frac{1}{2})$.

$$\mathrm{tr}[(-)^F\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\}] = \mathrm{tr}[(-)^F Q_\alpha \bar{Q}_{\dot{\beta}} + (-)^F Q_\alpha \bar{Q}_{\dot{\beta}}] = \mathrm{tr}[-Q_\alpha(-)^F \bar{Q}_{\dot{\beta}} + Q_\alpha(-)^F \bar{Q}_{\dot{\beta}}] = 0. \tag{4.70}$$

Usando[25] la ec. 4.28 se obtiene

$$\mathrm{tr}[(-)^F\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\}] = \mathrm{tr}[(-)^F 2(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}}\, P_\mu] = 2(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}}\, p_\mu\, \mathrm{tr}[(-)^F]. \tag{4.71}$$

En la última igualdad de la ecuación anterior se reemplazó P_μ por sus eigenvalores de un estado específico p_μ. Se sigue

$$\begin{aligned} 0 = tr\{(-)^F\} &= \sum_{bosón} \langle bosón|(-)^F|bosón\rangle + \sum_{fermión} \langle fermión|(-)^F|fermión\rangle \\ &= \sum_{bosón} \langle bosón|bosón\rangle - \sum_{fermión} \langle fermión|fermión\rangle = n_B - n_F. \end{aligned} \tag{4.72}$$

Extiste una formulación más natural y elegante, muy eficiente de SUSY para describir modelos supersimétricos interactuantes con simetrías de norma. En este marco, se modela la ruptura de la supersimetría y teorías supersimétricas apegadas al Modelo Estándar [1], [20], [26], [31]; esta formulación se hace en términos de supercampos sobre el superespacio de Minkowski. En el Apéndice C, se hace una introducción a este marco teórico para el modelo de Wess-Zumino, sin pretender ser muy rigurosos en la teoría matemática ya que es muy extensa y se desvía de los propósitos del presente trabajo. Si se desea conocer más de la teoría matemática se pueden revisar las refs. [2] y [28].

[25] La ec. 4.28 solo es válida para SUSY con $N = 1$; sin embargo, el enunciado es válido para cualquier representación de SUSY.

Capítulo 5

EL Modelo de Espín Extendido

La teoría de la relatividad afirma que vivimos en un espacio 4 dimensional, con una dimensión asociada al tiempo y 3 dimensiones espaciales. Sin embargo puede ser que el espacio $4-$dimensional que apreciamos solo sea una proyección (por nuestra limitación a apreciar más dimensiones) de un espacio $d-$dimensional ($d > 4$).

Teóricamente hablando hay motivos para considerar un universo $d-$dimensional con $d > 4$. Kaluza propuso un esquema de unificación del elctromagnétismo con la gravedad, usando la teoría de la Relatividad General [8] en un espacio pentadimensional (la primera coordenada asociada al tiempo y las otras 4 asociadas al espacio) curvo vacío y apoyándose de algunas hipótesis extras [24]. Posteriormente Klein agregó nociones de la Mécanica Cuántica a la teoría de Kaluza y con ello obtuvo una estimación del valor de la carga del electrón (el valor de la cuantización de la carga); aunque no logró proporcionar una estimación correcta de la masa del electrón [24]. Los resultados y la metodología usada en el modelo de ía de Kaluza-Klein proporcionaron un nuevo camino de investigación en la formulación de teorías que intentan extender el Modelo Estándar, como la Supergravedad y la Teoría de Cuerdas. En el Apéndice D se da una breve descripción de la teoría de Kaluza-Klein, así como las hipótesis básicas de algunos intentos de extensión del Modelo Estándar.

El espín es una propiedad física que se manifiesta en las partículas. Por otro lado, las simetrías de norma del Modelo Estándar definen cantidades que son escalares con respecto al grupo de Lorentz; el hecho que los fermiones conocidos en la naturaleza están en la representación fundamental del grupo de Lorentz y de los grupos de norma, y los bosones de norma están la representación adjunta de Lorentz y los grupos escalares, sugiere una descripción común. El Modelo de Espín Extendido [4], [5], es conceptualmente similar a la idea de Kaluza-Klein ya que considera dimensiones extras que se asocian a las simetrías escalares, con la diferencia de que los elementos de espín igualmente se consideran en las dimensiones extras (sin descartar la parte espacial). Cabe señalar que es menos ambiciosa pues no incluye efectos gravitacionales. Una característica del modelo es que el efecto de las dimensiones espaciales adicionales está congelado.

Al agregar grados de libertad en el espacio de espín se sigue conservando la invariancia de Lorentz y se pueden describir los grados de libertad escalares del Modelo Estándar de manera conjunta (como los estados de la interacción electrodébil), obteniendo restricciones distintas según las dimensiones del espacio de espín [4], [5].

5.1. Introducción

Supóngase, heurísticamente, que se satisface la ecuación de Dirac[1]

$$\gamma_0(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\Psi = 0, \tag{5.1}$$

con Ψ una matriz (que presenta posibles estados de fermiones y bosones libres). Bajo una transformación unitaria, el operador de Dirac se transforma como: $(i\gamma^\mu\partial_\mu - m) \rightarrow U(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)U^{-1}$, lo cual induce una transformación por la izquierda (lhs, por sus siglas en inglés): $\Psi \rightarrow U\Psi U^{-1}$. Además, se postula que Ψ también se transforma por la derecha (rhs, por sus siglas en inglés): $\Psi \rightarrow U^{-1}\Psi U$ (nótese que $\Psi^\dagger$ se transforma igual). Lo anterior es consistente con que $\Psi^\dagger$ satisfaga la ec. conjugada de Dirac

$$\Psi^\dagger\gamma_0(i\gamma^\mu\overleftarrow{\partial}_\mu + m) = 0. \tag{5.2}$$

En el caso de $(3+1)-$dimensiones, U es una matriz de 4×4 que contiene las simetrías asociadas a los generadores del grupo de Poincaré (véase Sección 2.3.3).

Ψ puede ser entendida con una construcción del producto tensorial de estados $|\omega\rangle$, $\langle\omega'|$ (que tienen una interpretación espinorial o no), mediante la expansión $\sum_{i,j} a_{ij}|\omega_i\rangle\langle\omega'_j|$ en el espacio de configuración. Los generadores de Poincaré con componentes espinoriales (o escalares) actuando como U en cada lado de Ψ, clasifican las soluciones en este espacio.

Si A y B son soluciones, entonces la matriz $C = AB$ define un álgebra cuyos elementos pueden ser o no ser soluciones. El producto interior de A y B está definido como

$$\langle A|B\rangle = \mathrm{tr}(A^\dagger B). \tag{5.3}$$

Si se toman soluciones de ondas planas

$$\Psi^{(+)}_{pi}(x) = u_i(p)e^{-ip\cdot x} \qquad \Psi^{(-)}_{pi}(x) = v_i(p)e^{ip\cdot x}, \tag{5.4}$$

donde p^μ es el cuadrivector de momento ($p_0 = E$) y u_i, v_i son matrices, entonces al aplicar la ec. 5.4 a la ec. 5.1, se define el Hamiltoneano $H_{lhs} = \gamma_0(\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\gamma} + m)$ y la proyección del vector de Pauli-Lubanski $W_\mu = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}M^{\nu\rho}\partial^\sigma$, sobre el cuadrivector $n_p = (1/m)(|\mathbf{p}|, E\hat{\mathbf{p}})$, $\frac{1}{m}W\cdot n_p = \mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{p}}$ (el operador de helicidad, véase ec. 3.67) [4], [15].

$\Psi^{(+)}_{pi}(x)$ es clasificado por el operador de energía-momento [25] correspondiente del operador de Dirac conjugado (véase ec 5.2) como una solución de energía negativa[2]. Para tener una carecterización consistente se debe suponer que $\langle\omega_j|$ representa un hueco en el mar de Dirac[3] Esta interpretación va en conjunto con los operadores actuando por la derecha (rhs) de Ψ, así como en $\Psi^\dagger$. El complejo conjugado

[1] El término γ_0 que aparece es para volver hermitiano al operador de Dirac ($i\gamma^\mu\partial_\mu - m$). No resta generalidad a los resultados ya mostrados.

[2] En el marco de la Mecánica Cuántica Relativista.

[3] Se conoce como mar de Dirac a la idea de que todos los niveles de energía negativa están ocupados por electrones, de tal manera que los electrones no pueden caer a tales estados debido al principio de exclusión de Pauli [7]. Cuando se exita uno de los electrones del mar de Dirac hasta hacerlo pasar a un estado de energía positiva, aparece simultáneamente este electrón y un hueco en el mar. Este hueco es una falta de carga negativa, por lo que se observa como carga efectiva positiva; de manera similar, la falta de energía negativa se observa como energía positiva (el hueco se identifica con un positrón). El mar de Dirac se introdujo para evitar que las partículas de energía positiva espontáneamente hagan transiciones a estados de energía cada vez más negativos. En el marco de la Teoría Cuántica de Campos, la noción del mar de Dirac resulta obsoleta pues se trata de manera simétrica a la materia y a la antimateria (véase Sección 3.2).

de $\Psi_{pi}^{(-)}(x)$ tiene la misma dependencia exponencial que $\Psi_{pi}^{(+)}(x)$, por lo que es interpretado como una solución de energía positiva.

Para mostrar una primera descripción generalizada de bosones y fermiones hay que considerar

$$i(I - \gamma_5)\gamma_0 \partial_\mu \gamma^\mu \Psi = 0, \tag{5.5}$$

y usar el operador $\frac{1}{2}(I - \gamma_5)M_{\mu\nu}$ en el vector de Pauli-Lubanski W_μ.

5.1.1. Soluciones bosónicas

Las soluciones bosónicas de la ec. 5.5 se presentan en el cuadro 5.1. Se consideraron soluciones como en la ec. 5.4 y se supuso que $\mathbf{p}$ solo tiene componente en la tercera dimensión espacial. Todas las soluciones están normalizadas de acuerdo con el producto interior fijado en la ec. 5.3, i.e. $\mathrm{tr}(u_i^\dagger(p)u_i(p)) = 1$. Se usó $\widetilde{p}^\mu = p_\mu$.

Soluciones bosónicas	$\frac{1}{2}(I-\gamma_5)\gamma_0\gamma^3$	$\frac{i}{4}(I-\gamma_5)\gamma_1\gamma_2$	$[\frac{1}{2}(I-\gamma_5)H/p_0]$	$[\frac{1}{2}(I-\gamma_5)\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{p}}]$
$u_{-1}(p) = \frac{1}{4}(I-\gamma_5)\gamma_0(\gamma_1 - i\gamma_2)$	1	$-\frac{1}{2}$	2	-1
$u_{-1}(\widetilde{p}) = \frac{1}{4}(I-\gamma_5)\gamma_0(\gamma_1 - i\gamma_2)$	-1	$\frac{1}{2}$	2	-1
$u_0(p) = \frac{1}{4}(I-\gamma_5)\gamma_0(\gamma_0 - \gamma_3)$	1	$-\frac{1}{2}$	0	0
$u_0(\widetilde{p}) = \frac{1}{4}(I-\gamma_5)\gamma_0(\gamma_0 + \gamma_3)$	-1	$\frac{1}{2}$	0	0

Cuadro 5.1: Soluciones bosónicas no-masivas.

En la segunda y en la tercera columna se presentan los eigenvalores de los operadores de la forma $Ou_i = \lambda u_i$. Por otro lado, en la cuarta y en la quinta columna se presentan los eigenvalores de la energía y la helicidad de la forma

$$[O, u_i] = \lambda u_i, \tag{5.6}$$

(la segunda y la tercera columna sirven para calcular estos valores) consistentemente con la interpretación de agujero en el mar de Dirac.

Hay que destacar que la medición de $u_{-1}(p)H$, indica que $u_{-i}(p)_{rhs}$ es una partícula fuera de la capa de masa aunque da el valor esperado en la interpretación de hueco. Se aprecia que $u_{-1}(p)$ y $u_{-1}(\widetilde{p})$ son partículas en la capa de masa con un valor de helicidad igual a -1 sobre $\hat{z}$ y sobre $-\hat{z}$ respectivamente; mientras que $u_0(p)$ y $u_0(\widetilde{p})$ son partículas fuera de la capa de masa. Para este caso de partículas no-masivas, las soluciones de energía negativa vienen dadas por el segundo término de la ec. 5.4, donde $v_i(p) = u_i(p)$.

5.1.2. Soluciones fermiónicas

Las soluciones fermiónicas de la ec. 5.5 se presentan en el cuadro 5.2. La aplicación del operador $\frac{1}{2}(I - \gamma_5)M_{\mu\nu}$ a soluciones de la forma $(I \pm \gamma_5)\boldsymbol{\gamma}$ deja uno de los lados ($|w\rangle$ o $\langle w|$) transformándose de manera trivial, por lo que estados con espín $\frac{1}{2}$ estarán en la representación $(\frac{1}{2},0)$ o $(0,\frac{1}{2})$ de $sl(2,\mathbb{C})$, según corresponda.

Al usar el operador $(I-\gamma_5)M_{\mu\nu}$ para clasificar las soluciones espinoriales, el álgebra de las transformaciones que deja invariante la ec. 5.5 tiene un grupo $GL(2,\mathbb{C})$ adicional, con 8 componentes generadas por $\frac{1}{2}(1+\gamma_5)$ y por $f_{\mu\nu}=-\frac{i}{2}(1+\gamma_5)S_{\mu\nu}$. Como $SU(2)\times U(1)$ es subgrupo de $GL(2,\mathbb{C})$ esto implica la adición de 2 números cuánticos con los que se pueden clasificar las soluciones de la ec. 5.5. Tomando en cuenta que esta simetría no actúa en las soluciones vectoriales y los números cuánticos de los fermiones conocidos en la naturaleza, sé asocian estos operadores con los operadores de sabor y de espín $\frac{1}{2}$ respectivamente. Se usó f_{30} para la clasificación de las soluciones mostradas en el cuadro 5.2. Cabe mencionar que los operadores de la segunda y tercera columna del cuadro 5.2. actúan trivialmente por la derecha de las soluciones (por lo que no es necesario usar el conmutador para mostrar el eigenvalor de la energía y de la helicidad), al mismo tiempo, el operador f_{30} actúa trivialmente por la izquierda sobre las soluciones.

Soluciones espinoriales izquierdas	$\frac{1}{2}(I-\gamma_5)\gamma_0\gamma^3$	$\frac{i}{4}(I-\gamma_5)\gamma_1\gamma_2$	$[f_{30}]$
$\omega_{-1/2}(p)=\frac{1}{4}(I-\gamma_5)(\gamma_0+\gamma_3)$	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\omega_{-1/2}(\widetilde{p})=\frac{1}{4}(I-\gamma_5)(\gamma_1+i\gamma_2)$	-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\hat{\omega}_{-1/2}(p)=\frac{1}{4}(I-\gamma_5)(\gamma_1-i\gamma_2)$	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\hat{\omega}_{-1/2}(\widetilde{p})=\frac{1}{4}(I-\gamma_5)(\gamma_0-\gamma_3)$	-1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$

Cuadro 5.2: Soluciones espinoriales izquierdas no-masivas.

5.2. Espacio (5+1)-dimensional

Si se extiende la dimensión del álgebra de Clifford C_4 (álgebra de Dirac) a C_N, $\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\}=2\eta^{\mu\nu}$ $\mu,\nu=0,...N-1$ suponiendo que N es par, se puede usar esta álgebra para clasificar las simetrías de U y las soluciones de Ψ. Todas las representaciones están asociadas a matrices de $2^{N/2}\times 2^{N/2}$.

Como se vio en la Sección 2.3.2, los generadores del grupo de Lorentz son: $S^{\mu\nu}=\frac{i}{4}[\gamma^\mu,\gamma^\mu]$, para $\mu,\nu=0,1,2,3$ (como en el caso de $(3+1)-$dimensiones) pero U puede contener también posibles simetrías asociadas a los generadores γ^ϑ para $\vartheta=5,...N$, las cuales[4] son escalares con respecto al grupo de Poincaré, pues conmutan con los generadores de este grupo. Por otro lado, $\widetilde{\gamma}^5=i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ se mantiene como pseudo-escalar de Lorentz (véase Sección 2.3.2) y se satisface $[\widetilde{\gamma}^5,\gamma^\vartheta]=0$. Por lo anterior, se puede clasificar el álgebra de las simetrías asociadas a γ^ϑ como: $\mathcal{S}_{N-4}=\mathcal{S}_{(N-4)R}\otimes\mathcal{S}_{(N-4)L}$ donde $\mathcal{S}_{(N-4)R}=\frac{1}{2}(I+\widetilde{\gamma}^5)U(2^{(N-4)/2})$ y $\mathcal{S}_{(N-4)L}=\frac{1}{2}(I-\widetilde{\gamma}^5)U(2^{(N-4)/2})$, con $C_N=C_4\otimes C_{N-4}$.

Los estados Ψ, se pueden clasificar de manera semejante en estados bosónicos y fermiónicos mediante los operadores de proyección $\mathcal{P}_P,\mathcal{P}_S\in\mathcal{S}_{N-4}$ con $[\mathcal{P}_P,\mathcal{P}_S]=0$; $\mathcal{P}_P$ actúa sobre los generadores de Lorentz

$$\mathcal{P}_P M_{\mu\nu}; \tag{5.7}$$

[4]Que los nuevos índices vallan de 5 a N y no de 4 a $N-1$ es por convención.

mientras que $\mathcal{P}_S$ actúa sobre los operadores de simetría $\mathcal{S}_{N-4}$

$$S'_{N-4} = \mathcal{P}_S S_{N-4}, \tag{5.8}$$

dejando a los generadores de grupos escalares como $\hat{I}_\vartheta = \mathcal{P}_S \hat{I}_\vartheta$ [4].

Como caso especial, considere el caso $(5+1)-$dimensional, i.e.

$$\{\gamma^\varrho, \gamma^\varkappa\} = 2\eta^{\varrho\varkappa}, \tag{5.9}$$

donde $\varrho, \varkappa = 0, 1, 2, 3, 5, 6$. Para $\varrho, \varkappa = 0, 1, 2, 3$ se obtienen los generadores de Lorentz $S^{\mu\nu}$ (véase ec. 2.25); mientras que con los operadores γ^5, γ^6 y $\gamma^5\gamma^6$ se puede formar una base (son generadores) del álgebra $su(2)$ (véase Sección 2.3.1). Se satisface

$$[S^{\mu\nu}, \gamma^\vartheta] = 0, \tag{5.10}$$

para $\vartheta = 5, 6$, por lo que γ^5, γ^6 y $\gamma^5\gamma^6$ son escalares con respecto a $SO_0(1,3)$. El único operador de proyección que se puede construir con estos operadores describiendo fermiones y bosones y permitiendo un grupo de simetría no-abeliano es [4]

$$\mathcal{P}_S = \mathcal{P}_P = L = \frac{3}{4} - \frac{i}{4}(I + \widetilde{\gamma}^5)\gamma^5\gamma^6 - \frac{1}{4}\widetilde{\gamma}^5, \tag{5.11}$$

donde L se asocia al número leptónico [4]. La ecuación

$$iL\gamma_0\partial_\mu\gamma^\mu\Psi = 0, \tag{5.12}$$

es invariante bajo el operador de la ec. 5.7 y permite la simetría de sabor definida previamente.

Los generadores de simetría resultantes y el espectro de las partículas soluciones de la ecuación anterior se ajustan mejor a la teoría electrodébil (Sección 3.3), i.e., el espacio de simetría de la proyección con $\mathcal{P}_P$, incluye al grupo $SU(2)_L \times U(1)_Y$ con sus generadores [4]

$$I_1 = \frac{i}{2}(I - \widetilde{\gamma}^5)\gamma^5, \tag{5.13}$$

$$I_2 = -\frac{i}{2}(I - \widetilde{\gamma}^5)\gamma^6, \tag{5.14}$$

$$I_3 = -\frac{i}{2}(I - \widetilde{\gamma}^5)\gamma^5\gamma^6, \tag{5.15}$$

$$Y = -1 + \frac{i}{2}(I + \widetilde{\gamma}^5)\gamma^5\gamma^6, \tag{5.16}$$

donde los generadores I_i para $i = 1, 2, 3$, contienen el operador de proyección $\frac{1}{2}(I - \widetilde{\gamma}^5)$; dicho término asegura que la interacción solo sea para partículas izquierdas. Con este conjunto de operadores, se pueden clasificar los estados fermiónicos y bosónicos de Ψ en distintos multipletes de interacción electrodébil [5], como se muestra en el cuadro 5.3. Los eigenvalores se presentan según la ec. 5.6. Al igual que en la sección anterior, el momento de las partículas se escogen solo con componente en la tercera dimensión espacial $\pm\hat{z}$, con la proyección dada por L. La tercera y cuarta columna muestra el valor de la tercera dirección de isospín débil y de la hipercarga; mientras que la carga, se presenta en la quinta columna mediante la relación de la ec. 3.107. La séptima y octava columna muestran el valor de la helicidad y de la quiralidad respectivamente.

Multilpletes	Soluciones	$[I_3]$	$[Y]$	$[Q]$	$[L]$	$[\frac{i}{2}L\gamma^1\gamma^2]$	$[L\widetilde{\gamma}_5]$
Doblete fermionico	$\frac{1}{8}(I-\widetilde{\gamma}_5)(\gamma^0+\gamma^3)(\gamma^5-i\gamma^6)$	$\frac{1}{2}$	-1	0	1	$\frac{1}{2}$	-1
	$\frac{1}{8}(I-\widetilde{\gamma}_5)(\gamma^0+\gamma^3)(I+i\gamma^5\gamma^6)$	$-\frac{1}{2}$	-1	-1	1	$\frac{1}{2}$	-1
Singulete fermionico	$\frac{1}{8}(I+\widetilde{\gamma}_5)\gamma^0(\gamma^0+\gamma^3)(\gamma^5-i\gamma^6)$	0	-2	-1	1	$\frac{1}{2}$	1
Doblete escalar	$\frac{1}{4\sqrt{2}}(I-\widetilde{\gamma}_5)\gamma^0(I-i\gamma^5\gamma^6)$	$\frac{1}{2}$	1	1	0	0	-2
	$\frac{1}{4\sqrt{2}}(I-\widetilde{\gamma}_5)\gamma^0(\gamma^5+i\gamma^6)$	$-\frac{1}{2}$	1	0	0	0	-2
Triplete vectorial	$\frac{1}{4}(I-\widetilde{\gamma}_5)\gamma^0(\gamma^1+i\gamma^2)(\gamma^5-i\gamma^6)$	1	0	1	0	1	0
	$\frac{1}{2\sqrt{2}}(I-\widetilde{\gamma}_5)\gamma^0(\gamma^1+i\gamma^2)\gamma^5\gamma^6$	0	0	0	0	1	0
	$\frac{1}{4}(I-\widetilde{\gamma}_5)\gamma^0(\gamma^1+i\gamma^2)(\gamma^5+i\gamma^6)$	-1	0	-1	0	1	0

Cuadro 5.3: Soluciones espinoriales y bosónicas no-masivas en $(5+1)-$dimensiones.

Hasta ahora se ha formulado el modelo en el contexto de la ecuación de Dirac, pero el modelo es independiente de la ecuación de movimiento. De hecho, se puede estudiar los arreglos de campos y simetrías asociadas a una matriz en el espacio de espín extendido [4].

5.3. Construcción de campos y formulación Lagrangiana

En presencia de interacciones, los campos libres permiten expresiones más generales de los campos bosónicos y fermiónicos, manteniendo sus propiedades de transformación. Un campo vectorial está dado por

$$A_\mu^\vartheta(x)\gamma_0\gamma_\mu\hat{I}_\vartheta, \tag{5.17}$$

donde γ_0,$\gamma_\mu \in C_4$ y $\hat{I}_\vartheta \in S'_{N-1}$, como en la ec. 5.8. Por otro lado, el campo escalar está dado por

$$\phi^\vartheta(x)\gamma_0 M_\vartheta^S; \tag{5.18}$$

mientras que para el campo fermiónico se tiene

$$\psi_\alpha^\vartheta(x)L^\alpha P_F M_\vartheta^F, \tag{5.19}$$

donde M_k^S $M_k^F \in S_{N-4}$, y son componentes escalares y fermiónicas respectivamente. L^α representa una componente espinorial, por ejemplo $L^1 = (\gamma_1 + i\gamma_2)$. P_F es un operador de proyección, por ejemplo $P_F = \frac{1}{2}(I-\widetilde{\gamma}_5)$, como se usó en el cuadro 5.3 [5].

Los campos en el espacio de espín extendido se pueden usar para construir una formulación lagrangiana de la teoría. Un término de interacción bosón-fermión resulta de la adición del término vectorial de la ec. 5.17 en el Lagrangiano fermiónico libre

$$\frac{1}{N_f}\mathrm{tr}\Psi^\dagger\{[i\partial_\mu I + gA^\vartheta_\mu(x)\hat{I}_\vartheta]\gamma_0\gamma^\mu - M\gamma_0\}\Psi P_f \tag{5.20}$$

donde Ψ en este caso, representa un campo de partículas de espín $\frac{1}{2}$, g es una constante de acoplamiento, N_f contiene los términos de normalización e I es el operador identidad de la misma dimensión que a partir de este momento, se omitirá en la ecuación [5]. El operador P_f es introducido para evitar la cancelación de elementos fermiónicos no-diagonalizables; por ejemplo, si se elige

$$P_f = \frac{1}{\sqrt{2}}(\widetilde{\gamma}^5 - \gamma^0\gamma^1) \tag{5.21}$$

se observa que se cumple $[P_f, L] = [P_f, (I-\gamma_5)L] = 0$, lo que proporciona una correcta combinación no trivial del par fermiónico $\Psi_a P_f \Psi_b^\dagger$ (donde Ψ_a y Ψ_b pueden ser el doblete o el singlete fermiónico del cuadro 5.3.) [4]

La ec. 5.20 es invariante bajo transformaciones de Lorentz[5] siempre que el campo vectorial se transforme como

$$A^\vartheta_\mu(x)\hat{I}_\vartheta \to \Lambda_\mu{}^\nu A^\vartheta_\nu(x)\hat{I}_\vartheta, \tag{5.22}$$

donde Λ es una transformación de Lorentz ($x^\mu \to \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$). La ec. 5.20 también es invariante de norma[6] bajo la condición

$$A^\vartheta_\mu(x)\hat{I}_\vartheta \to UA^\vartheta_\nu(x)\hat{I}_\vartheta U^\dagger - \frac{i}{g}(\partial_\mu U)U^\dagger. \tag{5.23}$$

La traza en la ec. 5.20 se puede expresar en términos de los estados [4]

$$(\Psi^\varsigma_\beta)^\dagger\{[i\partial_\mu I_{\varsigma\upsilon} + gA^\vartheta_\mu(x)(\hat{I}_\vartheta)_{\varsigma\upsilon}](\gamma_0\gamma^\mu)_{\beta\alpha} - MI_{\varsigma\upsilon}(\gamma_0)_{\beta\alpha}\}\psi^\upsilon_\alpha(x). \tag{5.24}$$

Por lo anterior, el cuadro 5.3. lleva a la contribución fermiónica de la teoría electrodébil, derivado heurísticamente en las referencias [4], [5]

$$\bar{\Psi}_l[i\partial_\mu + \frac{1}{2}g\tau^\vartheta W^\vartheta_\mu(x) - \frac{1}{2}g'B_\mu(x)]\gamma^\mu\Psi_l + \bar{\psi}_r[i\partial_\mu - g'B_\mu(x)]\gamma^\mu\psi_r, \tag{5.25}$$

el cual contiene un doblete de $SU(2)$ Ψ_l con hipercarga $Y_l = -1$, un singlete ψ_r con hipercarga $Y = -2$ y los correspondientes bosones de norma junto con las constantes de estructura (véase Sección 3.3.2)

Por otro lado, un término de interacción invariante de Lorentz entre un campo escalar y uno vectorial está dado por [5]

$$\frac{1}{N_B}\mathrm{tr}\Psi^\dagger[i\partial_\nu + gA^\varsigma_\nu(x)\hat{I}_\varsigma]\gamma^\nu\gamma^\mu[i\partial_\mu + gA^\vartheta_\mu(x)\hat{I}_\vartheta]\Psi \tag{5.26}$$

Es posible hacer un tratamiento análogo con la ec. 5.20 en la ec. 5.25 [5]. El término de masa resultante del mecanismo de Higgs [6] [13], es identificado con el operador de masa en el espacio de espín extendido,

[5] Con transformaciones de la forma $U = \exp(-\frac{i}{2}\mathcal{P}_P\omega^{\mu\nu}S_{\mu\nu})$, donde $\mathcal{P}_P$ es el operador de proyección de la ec. 5.7.

[6] Con transformaciones de la forma $U = \exp[-i\hat{I}_\vartheta\alpha_\vartheta(x)]$, donde $\alpha_\vartheta(x)$ son funciones arbitrarias.

dando una conexión con el Modelo Estándar [5].

Considere

$$[i\partial_\nu + gA_\nu^\varsigma(x)\hat{I}_\varsigma][i\partial_\mu + gA_\mu^\vartheta(x)\hat{I}_\vartheta]\frac{i}{2}[\gamma^\nu, \gamma^\mu] = F_{\mu\nu}^\vartheta \hat{I}_\vartheta \frac{i}{2}[\gamma^\nu, \gamma^\mu], \tag{5.27}$$

donde $F_{\mu\nu}^\vartheta = \partial_\mu A_\nu^\vartheta - \partial_\nu A_\mu^\vartheta + gf^{\vartheta\varsigma\upsilon}A_\nu^\vartheta A_\mu^\upsilon$ y $f^{\vartheta\varsigma\upsilon}$ son las constantes de estructura del grupo $[\hat{I}_\vartheta, \hat{I}_\varsigma] = if^{\vartheta\varsigma\upsilon}\hat{I}_\upsilon$ (véase ejemplo 2.16). Con la expresión

$$\frac{1}{N_A}\mathrm{tr}F_{\mu\nu}^\vartheta \hat{I}_\vartheta \frac{i}{2}[\gamma^\nu, \gamma^\mu] F_{\rho\sigma}^\varsigma \hat{I}_\varsigma \frac{i}{2}[\gamma^\rho, \gamma^\sigma], \tag{5.28}$$

se obtiene el término de campo libre $-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^\vartheta F^{\mu\nu\ \vartheta}$ [5].

Las partículas del Modelo Estándar ocupan las representaciones fundamental y adjunta de los grupos de Lorentz y escalares, sugiriendo una estructura compuesta o de multiplete [6]. Una importante razón para considerar esta extensión y seguir trabajando en el Modelo de Espín Extendido es que como se aprecia, este modelo proporciona una manera natural de mezclar partículas en sus diferentes representaciones, no las escoge como en las Teorías de Gran Unificación (GUT's por sus siglas en inglés) [6]. Las interacciones completas del Modelo Estándar son fielmente descritas en el caso $(9+1)-$dimensional, incluyendo también fermiones de interacción [5]. Con las simetrías de Poincaré y las de norma del Modelo Estándar en la formulación lagrangiana del modelo, se pueden aplicar condiciones de renormalización y de cuantización, lo que lleva a una Teoría Cuántica de Campos [5].

Capítulo 6

Supersimetría y El Modelo de Espín Extendido

SUSY y el Modelo de Espín Extendido tienen en común la descripción generalizada de bosones y fermiones bajo un mismo conjunto de operadores. Esto sugiere una conexión más estrecha entre estos dos modelos.

En este capítulo se muestra por primera vez cómo incorporar la idea del Modelo de Espín Extendido en las representaciones de SUSY. Para ello se usarán las representaciones mostradas en la Sección 4.3, con lo cual, se construyen estados supersimétricos con simetría escalar $SU(2)$, indicando también el camino para próximas investigaciones.

6.1. Caso masivo

Considere los operadores a_i y $a_i^\dagger$ con $i = 1, 2$ presentados en la ec. 4.59; con ellos, se definen los siguientes operadores

$$\Gamma^0 := a_1 + a_1^\dagger; \qquad \Gamma^1 := a_2^\dagger - a_2; \qquad \Gamma^2 := i(a_2 + a_2^\dagger); \qquad \Gamma^3 := a_1^\dagger - a_1. \tag{6.1}$$

Las relaciones inversas son

$$a_1 = \frac{1}{2}(\Gamma^0 - \Gamma^3); \qquad a_1^\dagger = \frac{1}{2}(\Gamma^0 + \Gamma^3) \qquad a_2 = -\frac{1}{2}(\Gamma^1 + i\Gamma^2); \qquad a_2^\dagger = \frac{1}{2}(\Gamma^1 - i\Gamma^2). \tag{6.2}$$

Con los operadores Γ^μ donde $\mu = 0, 1, 2, 3$, el Hamiltoniano de la ec. 4.60 es

$$H = \frac{E}{4}(\{\Gamma^0, \Gamma^0\} - \{\Gamma^2, \Gamma^2\}). \tag{6.3}$$

Con las propiedades que satisfacen a_i y $a_i^\dagger$, se puede verificar que para μ,ν=0,1,2,3, los operadores definidos en la ec. 6.1 satisfacen el álgebra de Clifford de dimensión 4, C_4 (véase ec. 2.23), i.e.

$$\{\Gamma^\mu, \Gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}. \tag{6.4}$$

Con la relación anterior, se pueden definir los operadores

$$\Theta^{\mu\nu} := \frac{i}{4}[\Gamma^\mu, \Gamma^\nu]. \tag{6.5}$$

Estos operadores satisfacen el álgebra de Lorentz (véase ec. 2.15), por lo que forman una representación espinorial de $SO_0(1,3)$ con propiedades similares a las representación de la ec. 2.25.

En analogía, se define el operador

$$\widetilde{\Gamma}^5 := i\Gamma^0\Gamma^1\Gamma^2\Gamma^3, \tag{6.6}$$

que satisface

$$\{\widetilde{\Gamma}^5, \Gamma^\mu\} = 0; \qquad [\widetilde{\Gamma}^5, \Theta^{\mu\nu}] = 0. \tag{6.7}$$

$\widetilde{\Gamma}^5$ satisface propiedades idénticas a las de γ^5 (véase ec 2.35) en el caso de la representación espinorial, por lo que es un pseudo-escalar (véase ec 2.54). También se pueden definir los operadores de proyección

$$\widetilde{P}^\pm := \frac{1}{2}(I \pm \widetilde{\Gamma}^5). \tag{6.8}$$

Estos operadores de proyección satisfacen $(\widetilde{P}^\pm)^2 = \widetilde{P}^\pm$ y $\widetilde{P}^+\widetilde{P}^- = 0$, por lo que son los análogos de los operadores de proyección mostrados en la ec. 2.36. Para el cuadruplete de SUSY mostrado en el cuadro 4.2, se verifica

$$\widetilde{\Gamma}^5|\Omega\rangle = |\Omega\rangle; \qquad \widetilde{\Gamma}^5|\frac{1}{2}\rangle = -|\frac{1}{2}\rangle; \qquad \widetilde{\Gamma}^5|-\frac{1}{2}\rangle = -|-\frac{1}{2}\rangle; \qquad \widetilde{\Gamma}^5|\Omega'\rangle = |\Omega'\rangle, \tag{6.9}$$

y para los operadores de proyección

$$\widetilde{P}^+|\Omega\rangle = |\Omega\rangle; \qquad \widetilde{P}^+|\frac{1}{2}\rangle = 0|\frac{1}{2}\rangle; \qquad \widetilde{P}^+|-\frac{1}{2}\rangle = 0|-\frac{1}{2}\rangle; \qquad \widetilde{P}^+|\Omega'\rangle = |\Omega'\rangle; \tag{6.10}$$

$$\widetilde{P}^-|\Omega\rangle = 0|\Omega\rangle; \qquad \widetilde{P}^-|\frac{1}{2}\rangle = |\frac{1}{2}\rangle \qquad \widetilde{P}^-|-\frac{1}{2}\rangle = |-\frac{1}{2}\rangle; \qquad \widetilde{P}^-|\Omega'\rangle = 0|\Omega'\rangle. \tag{6.11}$$

Por lo anterior, en términos de $\widetilde{P}^\pm$, los estados $|\Omega\rangle$ y $|\Omega'\rangle$ representan partículas derechas, mientras que los estados $|\frac{1}{2}\rangle$ y $|-\frac{1}{2}\rangle$ representan partículas izquierdas (véase ec. 2.37).

Para esta representación de $SO_0(1,3)$, el operador de espín es

$$\mathbf{S} = \widetilde{P}^-(\Theta^{23}, \Theta^{31}, \Theta^{12}) = \frac{i}{2}\widetilde{P}^-(\Gamma^2\Gamma^3, \Gamma^3\Gamma^1, \Gamma^1\Gamma^2), \tag{6.12}$$

mientras que el boost total es

$$\mathbf{K} = \widetilde{P}^-(\Theta^{01}, \Theta^{02}, \Theta^{03}) = \frac{i}{2}\widetilde{P}^-(\Gamma^0\Gamma^1, \Gamma^0\Gamma^2, \Gamma^0\Gamma^3). \tag{6.13}$$

Por lo anterior, $S^3 = \frac{i}{2}\widetilde{P}^-\Gamma^1\Gamma^2$ proporciona el espín de los estados del cuadrupelete de SUSY.

Considere un espacio $(5+1)-$dimensional de operadores Γ^ϱ, donde $\varrho = 0, 1, 2, 3, 5, 6$ (los primeros 4 corresponden a los mostrados en la ec. 6.1) de tal forma que[1]

[1] Estos operadores satisfacen el álgebra de Clifford de dimensión 5+1, C_6. Nótese que este nuevo operador Γ^5 en principio, puede ser distinto al operador $\widetilde{\Gamma}^5$ definido en la ec. 6.6

$$\{\Gamma^{\varrho}, \Gamma^{\varkappa}\} = 2\eta^{\varrho\varkappa}; \tag{6.14}$$

para $\varrho, \varkappa = 0, 1, 2, 3, 5, 6$. Cabe mencionar que los operadores Γ^5 y Γ^6 no se consideran como combinación lineal de los operadores de creación y aniquilación de la ec. 4.59. Al igual que en la sección 5.2, los operadores Γ^5, Γ^6 y $\Gamma^5\Gamma^6$ pueden formar una base de $su(2)$. También se satisfacen

$$[\Gamma^{\vartheta}, \widetilde{\Gamma}^5] = [\Gamma^{\vartheta}, \widetilde{P}^{\pm}] = 0, \qquad [\Gamma^{\vartheta}, \Theta^{\mu\nu}] = 0, \tag{6.15}$$

donde $\vartheta = 4, 5$ y los operadores $\Theta^{\mu\nu}$ son los mostrados en la ec. 6.5. De la ecuación anterior, se sigue que Γ^5, Γ^6 y $\Gamma^5\Gamma^6$ son escalares con respecto a $SO_0(1,3)$, por lo que todas las propiedades previamente presentadas de los operadores Γ^{μ} ($\mu = 0, 1, 2, 3$) se preservan. Por la relaciones de conmutación de estos operadores (son base de $su(2)$), solo uno puede ser usado para clasificar estados como parte del álgebra de operadores que conmutan entre sí. Para mantener la convención y sin pérdida de generalidad, se elige a $\frac{i}{2}\Gamma^5\Gamma^6$. Es fácil notar

$$[\frac{i}{2}\Gamma^5\Gamma^6, a_i^{\dagger}] = [\frac{i}{2}\Gamma^5\Gamma^6, a_i] = 0, \tag{6.16}$$

para i=1,2. Se definen

$$\Gamma^{\pm} := \frac{i}{\sqrt{2}}(\Gamma^5 \pm i\Gamma^6), \tag{6.17}$$

y cumplen

$$[\frac{i}{2}\Gamma^5\Gamma^6, \Gamma^{\pm}] = \pm\Gamma^{\pm}. \tag{6.18}$$

Además

$$[S^3, \Gamma^{\pm}] = 0\,\Gamma^{\pm}; \quad [S^3, a_1^{\dagger}\Gamma^{\pm}] = \frac{1}{2}a_1^{\dagger}\Gamma^{\pm}; \quad [S^3, a_2^{\dagger}\Gamma^{\pm}] = -\frac{1}{2}a_2^{\dagger}\Gamma^{\pm}; \quad [S^3, a_2^{\dagger}a_1^{\dagger}\Gamma^{\pm}] = 0\,a_2^{\dagger}a_1^{\dagger}.\Gamma^{\pm}. \tag{6.19}$$

Con los resultados anteriores se pueden clasificar los estados del cuadruplete de SUSY y los estados que se generan al extender la dimensión del álgebra, a partir del vacío $|\Omega\rangle$. Esta clasificación se muestra en el cuadro 6.1

6.2. Caso no-masivo

Para el caso no-masivo se puede hacer un tratamiento análogo (pero con una reducción en el álgebra) considerando ahora a los operadores mostrados en la ec. 4.50; con ellos se define

$$\Gamma^1 := a + a^{\dagger} \quad , \quad \Gamma^2 := i(a - a^{\dagger}) \quad , \quad \Gamma^3 := -i\Gamma^1\Gamma^2. \tag{6.20}$$

Las relaciones inversas son

$$a = \frac{1}{2}(\Gamma^1 - i\Gamma^2); \qquad a^{\dagger} = \frac{1}{2}(\Gamma^1 + i\Gamma^2). \tag{6.21}$$

Los operadores Γ^i satisfacen

$$\{\Gamma^i, \Gamma^j\} = 2\delta^{ij}, \tag{6.22}$$

Estado	S^3	$\widetilde{P}^+$	$\widetilde{P}^-$	$\frac{i}{2}\Gamma^5\Gamma^6$
I	0	1	0	0
$a_1^\dagger$	$\frac{1}{2}$	0	1	0
$a_2^\dagger$	$-\frac{1}{2}$	0	1	0
$a_2^\dagger a_1^\dagger$	0	1	0	0
Γ^+	0	1	0	1
$a_1^\dagger\Gamma^+$	$\frac{1}{2}$	0	1	1
$a_2^\dagger\Gamma^+$	$-\frac{1}{2}$	0	1	1
$a_2^\dagger a_1^\dagger\Gamma^+$	0	1	0	1
Γ^-	0	1	0	-1
$a_1^\dagger\Gamma^-$	$\frac{1}{2}$	0	1	-1
$a_2^\dagger\Gamma^-$	$-\frac{1}{2}$	0	1	-1
$a_2^\dagger a_1^\dagger\Gamma^-$	0	1	0	-1

Cuadro 6.1: Clasificación de estados bajo los operadores Γ para el caso masivo.

para $i, j = 1, 2, 3$. Se observa que $(\Gamma^i)^2{=}I$ (por lo que sus eigenvalores son ± 1). Además, se cumple

$$[\Gamma^i, \Gamma^j] = 2i\epsilon^{ijk}\Gamma^k, \tag{6.23}$$

por lo que los operadores Γ^i forman una base (son generadores) del álgebra $su(2)$ (Sección 2.3.1). Como $su(2) \otimes \mathbb{C} \cong su(2) \oplus su(2)^* \cong sl(2, \mathbb{C})$, entonces basta tomar la complexificación del $su(2)$ dado por Γ^i para obtener una representación espinorial de $SO_0(1, 3)$. Los operadores

$$\frac{1}{2}\Gamma^k; \qquad -\frac{i}{2}\Gamma^k, \tag{6.24}$$

satisfacen relaciones de conmutación como las mostradas en las ecs. 2.20, 2.21 y 2.22, por lo que proporcionan una representación espinorial de $SO_0(1, 3)$. Considerando $\Gamma^{ij} := \epsilon^{ijk}(\frac{1}{2}\Gamma_k)$ y $\Gamma^{0i} := -\frac{i}{2}\Gamma^i$, donde $\Gamma^{00} = 0$, se observa que esta representación tiene propiedades similares presentada en la ec. 2.40, i.e., se tiene la representación fundamental y la conjugada de $sl(2, \mathbb{C})$.

Para el primer doblete de SUSY presentado en el cuadro 4.1 ($\lambda_0 = 0$), los operadores de proyección son

$$P^+ := |\frac{1}{2}\rangle\langle\frac{1}{2}|; \qquad P^- := |0\rangle\langle 0|; \tag{6.25}$$

mientras que para el segundo doblete ($\lambda_0 = -\frac{1}{2}$) son

$$P^+ := |0\rangle\langle 0|; \quad P^- := |-\frac{1}{2}\rangle\langle -\frac{1}{2}|. \tag{6.26}$$

Por lo anterior, el operador de espín para el primer doblete es

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2}P^+(\Gamma^1, \Gamma^2, \Gamma^3); \tag{6.27}$$

mientras que para el segundo doblete es

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2}P^-(\Gamma^1, \Gamma^2, \Gamma^3). \tag{6.28}$$

Por lo tanto, S^3 proporciona el espín (helicidad) de los estados de los dobletes de SUSY.

Considere un espacio $(4+1)-$dimensional de operadores Γ^ι, donde $\iota = 1,2,3,5,6$ (los primeros 3 corresponden a los mostrados en la ec. 6.20) de tal forma que

$$\{\Gamma^\iota, \Gamma^\kappa\} = 2\delta^{\iota\kappa}, \tag{6.29}$$

para $\iota, \kappa = 1,2,3,5,6$. Al igual que en el caso masivo, los operadores Γ^5 y Γ^6 no se consideran como combinación lineal de los operadores de creación y aniquilación de la ec. 4.50, mientras que Γ^5, Γ^6 y $\Gamma^5\Gamma^6$ también pueden formar una base de $su(2)$ y son escalares con respecto a $SO_0(1,3)$ ya que cumplen

$$[\hat{\Gamma}^f, \Gamma^i] = 0. \tag{6.30}$$

Se definen

$$\hat{\Gamma}^\pm := \frac{i}{\sqrt{2}}(\Gamma^5 \pm i\Gamma^6). \tag{6.31}$$

Estos operadores poseen propiedades similares a $\Gamma^\pm$ del caso masivo. De manera análoga al caso masivo, se pueden clasificar los estados de los dobletes de SUSY y los estados que se generan al extender la dimensión del álgebra. Esta clasificación se muestra en el cuadro 6.2

$\lambda_0 = 0$			$\lambda_0 = -\frac{1}{2}$		
Estado	S^3	$\frac{i}{2}\Gamma^5\Gamma^6$	Estado	S^3	$\frac{i}{2}\Gamma^5\Gamma^6$
I	0	0	I	$-\frac{1}{2}$	0
$a^\dagger$	$\frac{1}{2}$	0	$a^\dagger$	0	0
$\hat{\Gamma}^+$	0	1	$\hat{\Gamma}^+$	$-\frac{1}{2}$	1
$a^\dagger\hat{\Gamma}^+$	$\frac{1}{2}$	1	$a^\dagger\hat{\Gamma}^+$	0	1
$\hat{\Gamma}^-$	0	-1	$\hat{\Gamma}^-$	$-\frac{1}{2}$	-1
$a^\dagger\hat{\Gamma}^-$	$\frac{1}{2}$	-1	$a^\dagger\hat{\Gamma}^-$	0	-1

Cuadro 6.2: Clasificación de estados bajo los operadores Γ para el caso no-masivo.

Capítulo 7

Discusión y conclusiones

Durante el desarrollo de este trabajo se presentaron los temas que forman la base para mostrar por primera vez cómo incorporar las ideas del Modelo de Espín Extendido en el caso más sencillo no trivial de SUSY, partiendo desde la teoría de grupos, álgebras y superálgebras de Lie (Secciones 2.1 y 2.2, respectivamente), desde un punto de vista algebraico (mencionando, cuando fue necesario, el carácter geométrico), siguiendo con la teoría de representaciones, detallando en los grupos más usados en la física (Sección 2.3), continuando con una introducción a las ecuaciones de Klein-Gordon y Dirac, desde el punto de vista de la Teoría Cuántica de Campos (secciones 3.1 y 3.2, respectivamente) y terminando con una breve presentación del sector electrodébil del Modelo Estándar (Sección 3.3). Como las restricciones en el espacio de matrices en el Modelo de Espín Extendido proporcionan información sobre las interacciones fundamentales y las representaciones de bosones y fermiones simultáneamente (Sección 5.1), vale la pena investigar si esta información se puede obtener en SUSY (ya que ésta proporciona un marco más natural para la descripción conjunta de bosones y fermiones), todo con el objetivo de generalizar el Modelo Estándar al tratar de explicar el origen de las interacciones fundamentales.

El Modelo de Espín Extendido predice propiedades del Modelo Estándar al extender el álgebra C_4 (el álgebra de Clifford de dimensión 4, véase ec. 2.23), a una dimensión N, C_N ($N > 4$ par), reproduciendo propiedades de Lorentz (usando los primeros 4 operadores de C_N) y de grupos de simetría escalar (con los siguientes $N-4$ operadores de C_N) de las partículas (Sección 5.2). Por lo anterior, para incorporar las ideas del Modelo de Espín Extendido en el marco del trabajo de esta tesis, hay que suponer un álgebra C_4 que reproduzca todas las propiedades de las partículas, extender su dimensión de manera consistente y estudiar sus propiedades.

Para la construcción del álgebra C_4 deseada en una teoría supersimétrica, se empezó por considerar los estados de una partícula descrita por el Lagrangiano de Wess-Zummino (Sección 4.3). Usando los generadores de SUSY resultantes en el caso masivo (Sección 4.3.2.), se definieron los operadores Γ de la ec. 6.1, los cuales se integran en C_4 (véase ec. 6.4), y con ello, se construyó una representación de $SO_0(1,3)$ (véase ec. 6.5), rescatando las propiedades de Lorentz de los generadores de SUSY. Debido a que los estados del cuadruplete de SUSY (véase cuadro 4.2) tienen una quiralidad (derecha o izquierda) definida con respecto a esta representación, que se hereda de usar espinores de Weyl, el operador de espín contiene al operador de proyección $\widetilde{P}^-$ (véase ec. 6.10).

Para el caso no-masivo (Sección 4.3.1.), al definir los operadores Γ de la ec. 6.23, fue posible generar una representación de $SO_0(1,3)$ complexificando el álgebra que se obtiene (véase ec. 6.27). Al igual que en el caso masivo, la quiralidad definida de los estados de los dos dobletes de SUSY (véase cuadro 4.1) se aprecia en la forma del operador de espín. Para el primer doblete de SUSY ($\lambda_0 = 0$) el operador de espín contiene al operador de proyección $\widetilde{P}^+$ (véase ec. 6.30); para el segundo doblete ($\lambda_0 = -\frac{1}{2}$), el operador de espín contiene al operador de proyección $\widetilde{P}^-$ (véase ec. 6.31). Lo anterior se debe a que el segundo doblete se introdujo para conservar la simetría CPT, i.e., el primer doblete se transforma en el segundo doblete bajo un cambio de paridad.

El siguiente paso fue extender la dimensión del álgebra de los operadores Γ a una de dimensión $5+1$. Para el caso masivo, al hacer esta extensión se obtuvo al grupo escalar $SU(2)$ (véase ec. 6.16). La clasificación de los estados del cuadruplete de SUSY y de los nuevos estados generados se presenta en el cuadro 6.1. Se aprecia que los estados se encuentran en la representación adjunta del grupo escalar $SU(2)$.

Para el caso no-masivo, al igual que en el caso masivo, al hacer esta extensión se obtuvo un nuevo grupo escalar $SU(2)$ (véase ec. 6.34). La clasificación de los estados de los dobletes de SUSY y de los nuevos estados generados se presenta en el cuadro 6.2. Se observa que los estados se encuentran también en la representación adjunta del nuevo grupo $SU(2)$.

El próximo objetivo en la investigación es aumentar la dimensión del espacio de los operadores Γ a $7+1$. Con esto, aumenta el número de operadores, por lo cual aumentará el número de estados, y posiblemente, se encuentren nuevos operadores de proyección y con ellos, se podrá construir estados que estén en la representación fundamental del grupo escalar $SU(2)$. También se espera que con este cambio de la dimensión, surjan nuevos grupos de simetrías relevantes para clasificar los estados (como en el Modelo de Espín Extendido [4], [5]).

Una posible interpretación física del Modelo de Espín Extendido es la de una teoría extendida de Kaluza-Klein (véase Apéndice D), que mantiene a las dimensiones adicionales congeladas. Otra es que el espacio de matrices considerado, que aumenta de dimensión mediante el producto directo de espinores, y describe tanto a estados en un espacio de Hilbert como a operadores de simetría, implica que los grados de libertad discretos se construyen a partir de los más elementales [5]. En el caso de supersimetría que se trabajó en esta tesis, los operadores de simetría más allá de 4 dimensiones se pueden interpretar como pertenecientes a una supersimetría más amplia que se rompe, como lo indican las relaciones de anticonmutación del álgebra de Clifford. Estas interpretaciones no son esenciales, sino solo la consistencia con el espacio tetradimensional, aunque por sí mismas, representan una dirección interesante de investigación futura.

Otro objetivo importante es traducir el modelo anterior en términos de un Lagrangiano interactivo supersimétrico en el superespacio de Minkowski (véase Apéndice C). Para una formulación interactiva y Lagrangiana del Modelo de Espín Extendido (Sección 5.1.3), se parte del análisis individual de campos vectorial, escalar y fermiónico construidos a partir de la clasificación de los multipletes en el espacio extendido y después se construyen Lagrangianos con interacción y simetría de norma para los campos escalar y fermiónico y un término Lagrangiano de campo libre para el campo vectorial, agregando cuando fue necesario operadores de proyección extras [5]. Cabe mencionar que lo anterior se formuló para campos no-masivos, los elementos de masa que conservan las simetrías son no triviales. Por otro lado, dado que el superespacio es un marco más natural para SUSY (véase Apéndice C), el Lagrangiano de Wess-Zumino solo consta de combinaciones algebraicas de un supercampo quiral Φ, integradas sobre la parte "impar" del superespacio (véase Apéndice C). Incorporar interacciones y simetría de norma al Lagrangiano es agregar términos proporcionales a Φ^3 y a la norma de Wess-Zumino [1], [20], [26], [31]. Por lo anterior, para obtener un Lagrangiano que reproduzca los estados del multiplete obtenido en un espacio de dimensión $7+1$ de operadores Γ, hay que utilizar éstos para construir un supercampo quiral y un supercampo vectorial con las propiedades necesarias, usando como guía la forma que llevó del formalismo Lagrangiano al Modelo de Espín Extendido. Se hace énfasis que en el caso masivo, hay que considerar los mecanismos de ruptura espontánea de SUSY, como la ruptura tipo F (o el modelo de O' Raifeartaigh) o la ruptura tipo D (o el modelo de Fayet-Iliopoulus), pues con esto se generan los elementos de masa [1], [20], [31].

Al comparar los multipletes del cuadro 6.1 y 6.2 (caso masivo con el no-masivo) se observa que la cantidad de operadores Γ proveen propiedades correctas al modelo, al dar representaciones congruentes, por lo que también se pretende trabajar con una representación de SUSY para $N > 1$; al extender el álgebra se planea encontrar al grupo escalar $SU(3) \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ (el grupo del Modelo Estándar [6], [17]) de tal forma que las partículas del modelo se clasifiquen de forma adecuada en las diferentes representaciones de ese grupo. Finalmente, en un futuro se piensa aplicar el modelo a otras teorías que usen SUSY como: Supergravedad o Cuerdas [6], [17].

Apéndices

Apéndice A. Acciones de grupos

Proposición 1 Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial. Considere los conjuntos $GL(V)$ y $Bil(V)$ definidos en el ejemplo 2.2 y en la Observación 1. La función $\Phi : Bil(V) \times GL(V) \to Bil(V)$ definida como $\Phi(b(u,v), m) = b(m(u), m(v))$, es una acción derecha (véase definición 2.3) de $GL(V)$ sobre $Bil(V)$, donde $u, v \in V$, $b \in Bil(V)$ y $m \in GL(V)$.

Demostración: Sean $u, v \in V$ y $b, m, n \in Bil(V)$. Nótese que la función Φ está bien definida ya que todo elemento de $GL(V)$ es un isomorfismo de espacios vectoriales. Como el elemento neutro del grupo $GL(V)$ es la función identidad defina por $id(v) = v$, $\forall\ v \in V$, entonces $\Phi(b(u,v), id) = b(id(u), id(v)) = b(u,v)$. Por otro lado

$$\Phi(\Phi(b(u,v), m), n) = \Phi(b(m(u), m(v)), n) = b(n(m(u)), n(m(v))) = b((n \circ m)(u), (n \circ m)(v)),$$

donde $\circ$ indica la composición de funciones (que es la operación binaria en $GL(V)$). Por lo tanto, Φ es una acción derecha de $GL(V)$ sobre $Bil(V)$ $\blacksquare$

Si V es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial, entonces la acción de $GL(V)$ sobre $Sesq(V)$ es análoga a la anterior.

Proposición 2 Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión n. Como $Bil(V) \cong M_{n\times n}(\mathbb{R})$ [18], entonces la función Φ de la Proposición 1 induce una acción derecha $\widetilde{\Phi} : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \times GL_n(\mathbb{R}) \to M_{n\times n}(\mathbb{R})$ definida como $\widetilde{\Phi}(B, M) = M^t BM$, donde $B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, $M \in GL_n(\mathbb{R})$ y M^t denota a la matriz transpuesta de M.

Demostración: Sea $\{e_i\}_{i=1}^n$ la base canónica de V [10], [18]. Para cada función $b \in Bil(v)$ existe una única matriz $B \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ (y viceversa) tal que si B_{ij} es el escalar correspondiente en el i-esimo renglón, en la j-esima columna de la matriz B, entonces $B_{ij} = b(e_i, e_j)$. Por lo anterior, para todo $v, u \in V$, se satisface $b(u,v) = u^t Bv$ [18], donde u^t es el vector transpuesto de u. Si M es la matriz asociada a la función $m \in GL(V)$, entonces, se cumple

$$\Phi(b(u,v), m) = b(m(u), m(v)) = m(u)^t Bm(v) = u^t M^t BMv.$$

Como Φ es una acción derecha, entonces, $\widetilde{\Phi}$ definida como $\widetilde{\Phi}(B, M) = M^t BM$ también es una acción derecha. $\blacksquare$

Si V es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial, entonces la acción de $GL_n(\mathbb{C})$ sobre $M_{n\times n}(\mathbb{C})$ es análoga a la anterior, considerando que en las funciones sesquilineales, un escalar en la primera coordenada "sale" como conjugado (véase definición 2.7).

Apéndice B. Matrices de Pauli y de Dirac

Las matrices de Pauli forman una base de $su(2)$ (Sección 2.3.1). Éstas son

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

y mediante el mapeo exponencial de la Observación 4, generan a $SU(2)$.

Las matrices de Dirac en la representación de Dirac son

$$\gamma_D^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}; \quad \gamma_D^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix},$$

para $i = 1, 2, 3$, donde I es la matriz identidad de dimensión 2. La representación de Weyl (véase ec. 3.31) y la de Dirac tienen una relación de similitud:

$$\gamma_W = X^{-1}\gamma_D X; \quad X = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} I & I \\ -I & I \end{pmatrix},$$

donde γ_W es una matriz de Dirac en la represntacion de Weyl. Por otro lado, las matrices de Dirac en la representación de Majorana son

$$\gamma_M^0 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^2 \\ \sigma^2 & 0 \end{pmatrix}; \quad \gamma_M^1 = \begin{pmatrix} i\sigma^3 & 0 \\ 0 & i\sigma^3 \end{pmatrix}; \quad \gamma_M^2 = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^2 \\ \sigma^2 & 0 \end{pmatrix}; \quad \gamma_M^3 = \begin{pmatrix} -i\sigma^1 & 0 \\ 0 & -i\sigma^1 \end{pmatrix}.$$

Entre la representación de Dirac y la de Majorana también hay una relación de similitud:

$$\gamma_D = Y^{-1}\gamma_M Y; \quad Y = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} I & \sigma^2 \\ \sigma^2 & -I \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, la relación de similitud entre la representación de Weyl y la de Majorana es:

$$\gamma_W = Z^{-1}\gamma_M Z; \quad Z = XY = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sigma^2 + I & \sigma^2 - I \\ \sigma^2 - I & -(\sigma^2 + I) \end{pmatrix}.$$

Apéndice C. SUSY en el superespacio

El Superespacio de Minkowski. Diferenciación, integración y el supercampo escalar

Se definen las "variables de Grassmann" como una colección variables que anticomnutan entre sí. Por lo anterior, comúnmente se asocian las variables de Grassmann con los espinores.

El espacio de Minkowski[1], denotado por $\mathcal{M}_{1,3}$, se puede escribir como un cociente de grupos

$$\mathcal{M}_{1,3} = \frac{P(1,3)}{SO(1,3)}, \tag{C.1}$$

donde $P(1,3)$ es el grupo de Poincaré y $SO(1,3)$ es el grupo de Lorentz (véase Sección 2.3.). Esto indica que cada elemento (clase de equivalencia [18]) del grupo cociente es un punto en $M_{1,3}$. Por lo anterior, cualquier punto en $M_{1,3}$ se puede obtener al aplicar una transformación (específicamente una traslación) de $P(1,3)$ al origen.

Como se muestra en la ec. 4.25, con las variables de Grassmann (espinores) se puede rescribir el álgebra de SUSY en términos de conmutadores[2] y con ello, tener un álgebra de Lie entre los generadores de SUSY y los de Poincaré. Exponenciando los elementos de esta álgebra, se obtienen elementos del supergrupo de Poincaré ($\overline{Osp(4|1)}$). Los elementos se expresan como

$$G = \exp(-\mathrm{i}\mathrm{a}^{\mu}\mathrm{P}_{\mu} - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega^{\mu\nu}\mathrm{M}_{\mu\nu} + \mathrm{i}\varepsilon^{\alpha}\mathrm{Q}_{\alpha} + \mathrm{i}\bar{\varepsilon}_{\dot{\alpha}}\mathrm{Q}^{\dot{\alpha}}). \tag{C.2}$$

donde $a^{\mu}, \omega^{\mu\nu}, \varepsilon^{\alpha}, \bar{\varepsilon}_{\dot{\alpha}}$ son parámetros vectorial, tensorial y espinorial, respectivamente. Por lo tanto, en analogía con la ec. C.1, se define el Superespacio de Minkowski como

$$\mathcal{M}_{4|1} = \frac{\overline{Osp(4|1))}}{SO(1,3)}. \tag{C.3}$$

Al igual que en el espacio de Minkowski, cualquier punto en $M_{4|1}$ se puede obtener al aplicar una transformación (específicamente una supertraslación $\exp[-\mathrm{i}\mathrm{a}^{\mu}\mathrm{P}_{\mu} + \mathrm{i}\varepsilon^{\alpha}\mathrm{Q}_{\alpha} + \mathrm{i}\bar{\varepsilon}_{\dot{\alpha}}\mathrm{Q}^{\dot{\alpha}}]$) de $\overline{Osp(4|1))}$ al origen. $M_{4|1}$ consta de cuatro coordenadas que anticonmutan (coordenadas fermiónicas), y las del espacio-tiempo (coordenadas bosónicas, que conmutan), i.e., los puntos en este espacio están etiquetados por las coordenadas

$$x^{\mu}, \theta^{\alpha}, \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}, \tag{C.4}$$

donde θ^{α} y $\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}$ son espinores de dos componentes que anticonmutan. Estas coordenadas satisfacen

$$\begin{aligned} \theta^{\alpha}\theta^{\beta} = -\theta^{\beta}\theta^{\alpha}, &\quad \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\bar{\theta}_{\dot{\beta}} = -\bar{\theta}_{\dot{\beta}}\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}; \\ x^{\mu}\theta^{\alpha} = \theta^{\alpha}x^{\mu}, &\quad x^{\mu}\bar{\theta}_{\dot{\alpha}} = \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}x^{\mu}, \end{aligned}$$

por lo que el superespacio de Minkowski es un superespacio vectorial[3] (véase definición 2.18).

Sea η una variable de Grassmann sin índices espinoriales. Como $\eta^k = 0$ para $k = 2, 3, ...$, entonces una función analítica en términos de la variable η se expresa en serie de potencias como

$$f(\eta) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \eta^k = f_0 + f_1 \eta, \tag{C.5}$$

[1] $\mathbb{R}$ con la métrica de Minkowski, véase ec 11.

[2] Aunque en el caso de la ec. 4.25, las variables de Grassmann dadas por ε_i $(i = 1, 2)$ y sus conjugadas, solo son parámetros infinitesimales constantes de las transformaciones de SUSY.

[3] Las coordenadas $x^{\mu}, \theta^{\alpha}, \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}$ proporcionan una estructura "súper" i.e., con coordenadas "pares ", "impares" y "puras".

donde f_0 y f_1 son dos funciones que dependen de otras variables, pero no de η. De la ecuación anterior se sigue $\frac{df}{d\eta} = f_1$. Si η' es otra variable que anticonmuta con η, entonces se cumple

$$\frac{d(\eta\eta')}{d\eta} = -\frac{d(\eta'\eta)}{d\eta} = -\eta'. \tag{C.6}$$

Para la integral, se define

$$\int d\eta := 0; \qquad \int d\eta\ \eta := 1, \tag{C.7}$$

y se impone la linealidad. Con esto se obtiene

$$\int d\eta\ f(\eta) = \int d\eta\ (f_0 + f_1\eta) = f_1 = \frac{df}{d\eta}. \tag{C.8}$$

De la ec. C.7 se sigue la invariancia bajo traslaciones y la fórmula de integración por partes (primer y segundo término respectivamente)

$$\int d\eta\ f(\eta + \eta') = \int d\eta\ f(\eta); \qquad \int d\eta\ \frac{df(\eta)}{d\eta} = 0. \tag{C.9}$$

Por el segundo término de la ec. C.7, la función delta de Dirac tiene la propiedad

$$\delta(\eta - \eta') = \eta - \eta'. \tag{C.10}$$

Sean $\theta^\alpha, \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}$ espinores. Como se vio en la Sección 2.3.2, $\theta\theta := \theta^\alpha\theta_\alpha$ y $\bar{\theta}\bar{\theta} := \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}$; entonces $\theta^\alpha\theta^\beta = -\frac{1}{2}\epsilon^{\alpha\beta}\theta\theta$ y $\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\beta}} = \frac{1}{2}\epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{\theta}\bar{\theta}$. Además

$$\frac{\partial\theta^\beta}{\partial\theta^\alpha} = \delta^\beta_\alpha; \qquad \frac{\partial\bar{\theta}^{\dot{\beta}}}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} = \delta^{\dot{\beta}}_{\dot{\alpha}}; \qquad \frac{\partial\bar{\theta}^{\dot{\beta}}}{\partial\theta^\alpha} = 0; \qquad \frac{\partial\theta^\beta}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} = 0. \tag{C.11}$$

Con lo anterior, se obtiene

$$\int d\theta^1 \int d\theta^2\ \theta^2\theta^1 = \frac{1}{2}\int d\theta^1 \int d\theta^2\ \theta\theta = 1. \tag{C.12}$$

La ecuación anterior justifica

$$\frac{1}{2}\int d\theta^1 \int d\theta^2 := \int d^2\theta; \qquad \int d^2\theta\ \theta\theta = 1; \qquad \int d^2\theta \int d^2\bar{\theta}\ (\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta}) = 1. \tag{C.13}$$

En términos del tensor ϵ

$$d^2\theta = -\frac{1}{4}d\theta^\alpha d\theta^\beta\epsilon_{\alpha\beta}; \qquad d^2\bar{\theta} = \frac{1}{4}d\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}d\bar{\theta}^{\dot{\beta}}\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}; \tag{C.14}$$

de donde se identifica

$$\int d^2\theta = \frac{1}{4}\epsilon^{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}\frac{\partial}{\partial\theta^\beta}; \qquad \int d^2\bar{\theta} = -\frac{1}{4}\epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}}\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\beta}}}. \tag{C.15}$$

Se define un supercampo escalar como una función escalar $S(x^\mu, \theta_\alpha, \bar{\theta}_{\dot{\alpha}})$ en el superespacio de Minkowski (véase ec. C.3). La expresión más general de un supercampo escalar es [26], [31]

$$S(x^\mu,\theta,\bar\theta)=\phi(x)+\theta\psi(x)+\bar\theta\bar\chi(x)+\theta\theta M(x)+\bar\theta\bar\theta N(x)+(\theta\sigma^\mu\bar\theta)V_\mu(x)+(\theta\theta)\bar\theta\bar\lambda(x)+(\bar\theta\bar\theta)\theta\rho(x)+(\bar\theta\bar\theta)(\theta\theta)D(x). \tag{C.16}$$

Este campo podría conmutar o anticonmutar o podría llevar índices vectoriales o espinoriales. Por simplicidad, supongamos que es un campo que conmuta y no lleva ningún otro índice. Las componentes de la forma más general de un supercampo escalar son 8 campos bosónicos complejos (ϕ, M, N, V_μ y D) y 4 campos fermiónicos de dos componentes[4] ($\psi, \bar\chi, \bar\lambda$ y ρ). El supercampo escalar satisface

$$\int d^2\theta\ S(x^\mu,\theta,\bar\theta)=M(x)+\bar\theta\bar\lambda(x)+\bar\theta\bar\theta D(x); \tag{C.17}$$
$$\int d^2\bar\theta\ S(x^\mu,\theta,\bar\theta)=N(x)+\theta\rho(x)+\theta\theta D(x);$$
$$\int d^2\theta\ d^2\bar\theta\ S(x^\mu,\theta,\bar\theta)=D(x).$$

De las ecs. C.10 y C.13 se obtiene $\delta^2(\theta-\theta')=(\theta-\theta')(\theta-\theta')$ y $\delta^2(\bar\theta-\bar\theta')=(\bar\theta-\bar\theta')(\bar\theta-\bar\theta')$, lo que implica

$$\int d^2\theta\ \delta^2(\theta)S(x^\mu,\theta,\bar\theta)=S(x^\mu,0,\bar\theta)=\phi(x)+\bar\theta\bar\chi(x)+\bar\theta\bar\theta N(x); \tag{C.18}$$
$$\int d^2\bar\theta\ \delta^2(\bar\theta)S(x^\mu,\theta,\bar\theta)=S(x^\mu,\theta,0)=\phi(x)+\theta\psi(x)+\theta\theta M(x);$$
$$\int d^2\theta\ d^2\bar\theta\ \delta^2(\theta)\delta^2(\bar\theta)S(x^\mu,\theta,\bar\theta)=S(x^\mu,0,0)=\phi(x).$$

$S(x^\mu,\theta,\bar\theta)$ como operador se transforma bajo la parte "impar" del supergrupo de Poincaré como

$$S(x^\mu,\theta,\bar\theta)\to\exp[i(\varepsilon Q+\bar\varepsilon\bar Q)]S(x^\mu,\theta,\bar\theta)\exp[i(\varepsilon Q+\bar\varepsilon\bar Q)]^\dagger; \tag{C.19}$$

mientras que como vector en un espacio de Hilbert

$$S(x^\mu,\theta,\bar\theta)\to\exp[i(\varepsilon\mathcal{Q}+\bar\varepsilon\bar{\mathcal{Q}})]S(x^\mu,\theta,\bar\theta) \tag{C.20}$$

donde ε es un parámetro espinorial como en la Sección 4.2. y $\mathcal{Q}$ es una representación de los generadores de SUSY Q_α que actúa en las variables θ, $\bar\theta$. Comparando las últimas dos ecuaciones a primer orden se obtiene

$$i[\varepsilon Q+\bar\varepsilon\bar Q,S]=i(\varepsilon\mathcal{Q}+\bar\varepsilon\bar{\mathcal{Q}})S=\delta_\epsilon S; \tag{C.21}$$

que concuerda con la ec. 4.26. Se sigue

$$\mathcal{Q}_\alpha=-i\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}-\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}\bar\theta^{\dot\alpha}\partial_\mu,\qquad \bar{\mathcal{Q}}_{\dot\alpha}=i\frac{\partial}{\partial\bar\theta^{\dot\alpha}}+\theta^\alpha\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}\partial_\mu. \tag{C.22}$$

Si S_1 y S_2 son dos supercampos, entonces S_1S_2 también es un supercampo. En efecto

[4] Todos los campos son funciones complejas, dando un total de 8 grados de libertad complejos por cada parte

$$\delta_\varepsilon(S_1S_2) = i[\varepsilon Q + \bar{\varepsilon}\bar{Q}, S_1S_2] = i[\varepsilon Q + \bar{\varepsilon}\bar{Q}, S_1]S_2 + iS_1[\varepsilon Q + \bar{\varepsilon}\bar{Q}, S_2] = i(\varepsilon \mathcal{Q} + \bar{\varepsilon}\bar{\mathcal{Q}})S_1S_2. \tag{C.23}$$

De manera análoga, cualquier combinación lineal de supercampos, también es supercampo; lo mismo que $\partial_\mu S$. La derivada covariante en este espacio se define como

$$\mathcal{D}_\alpha := \frac{1}{\partial\theta^\alpha} + i\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\partial_\mu, \qquad \bar{\mathcal{D}}_{\dot{\alpha}} := -\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} - i\theta^\alpha\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_\mu; \tag{C.24}$$

la cual satisface

$$\{\mathcal{D}_\alpha, \mathcal{Q}_\beta\} = \{\mathcal{D}_\alpha, \bar{\mathcal{Q}}_{\dot{\beta}}\} = \{\bar{D}_{\dot{\alpha}}, \mathcal{Q}_\beta\} = \{\bar{\mathcal{D}}_{\dot{\alpha}}, \bar{\mathcal{Q}}_{\dot{\beta}}\} = 0; \tag{C.25}$$

y

$$\{\mathcal{D}_\alpha, \bar{\mathcal{D}}_{\dot{\beta}}\} = -2i\sigma^\mu_{\alpha\dot{\beta}}\partial_\mu, \qquad \{\mathcal{D}_\alpha, \mathcal{D}_\beta\} = \{\bar{\mathcal{D}}_{\dot{\alpha}}, \bar{\mathcal{D}}_{\dot{\beta}}\} = 0. \tag{C.26}$$

Con las relaciones anteriores se obtiene

$$[D_\alpha, \varepsilon\mathcal{Q} + \bar{\varepsilon}\bar{\mathcal{Q}}] = 0; \tag{C.27}$$

de donde se sigue que $D_\alpha S$ es supercampo.

Una de las utilidades de este formalismo es que dado un supercampo escalar $S(x,\theta,\bar{\theta})$, el coeficiente del término $\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}$, el campo D, transforma como una derivada total frente a transformaciones supersimétricas [26], lo cual, es la clave para construir Lagrangianos supersimétricos. $S(x,\theta,\bar{\theta})$ no es una representación irreducible de SUSY[5]. Por lo anterior, para escribir las representaciones irreducibles de SUSY, basta con imponer restricciones en el supercampo S.

Supercampo quiral

Se define el supercampo quiral Φ por medio de la restricción

$$\bar{\mathcal{D}}_{\dot{\alpha}}\Phi = 0. \tag{C.28}$$

Por otro lado, un supercampo Λ es antiquiral si satisface la restricción

$$\mathcal{D}_\alpha\bar{\Lambda} = 0. \tag{C.29}$$

Hay que señalar que, si Φ es un supercampo quiral, entonces $\bar{\Phi}$ es un supercampo antiquiral. Para cualquier función holomórfica[6] f, se tiene que $f(\Phi)$ es un suepercampo quiral, siempre que Φ lo sea [1], [26].

El supercampo quiral Φ reproduce las propiedades del supermultiplete quiral estudiado en las dos secciones anteriores de este Capítulo. En efecto; sea

$$y^\mu = x^\mu + i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}. \tag{C.30}$$

Si $\Phi = \Phi(y^\mu, \theta, \bar{\theta})$, entonces

[5] $S(x,\theta,\bar{\theta})$ es una representación reducible ya que $S = cte$ es supercampo.

[6] Una función holomórfica es una función definida en un abierto de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$ que es complejo-diferenciable en cada punto, i.e. infinitamente diferenciable en cada punto y está asociada a una serie de Taylor.

$$\bar{\mathcal{D}}_{\dot\alpha}\Phi = -\frac{\partial\Phi}{\partial\bar\theta^{\dot\alpha}} - \frac{\partial\Phi}{\partial y^\mu}\frac{\partial y^\mu}{\partial\bar\theta^{\dot\alpha}} - i\theta^\beta(\sigma^\mu)_{\beta\dot\alpha}\partial_\mu\Phi = -\frac{\partial\Phi}{\partial\bar\theta^{\dot\alpha}} - \partial_\mu\Phi(-i\theta\sigma^\mu)_{\dot\alpha} - i\theta^\beta(\sigma^\mu)_{\beta\dot\alpha}\partial_\mu\Phi = -\frac{\partial\Phi}{\partial\bar\theta^{\dot\alpha}} = 0. \quad \text{(C.31)}$$

Por lo tanto, si se desea que Φ sea un supercampo quiral, Φ no debe depender de la variable $\bar\theta$, i.e. $\Phi = \Phi(y^\mu, \theta)$. Comparando este resultado con la ec. C.16 se obtiene

$$\Phi(y^\mu, \theta) = \phi(y^\mu) + \sqrt{2}\theta\psi(y^\mu) + \theta\theta f(y^\mu). \quad \text{(C.32)}$$

Reexpresando Φ en términos de x^μ, se obtiene [1]

$$\Phi(x^\mu, \theta^\alpha\bar\theta^\alpha) = \phi(x) + \sqrt{2}\theta\psi(x) + \theta\theta f(x) + i\theta\sigma^\mu\bar\theta\partial_\mu\phi(x) - \frac{i\theta\theta}{\sqrt{2}}\partial_\mu\psi(x)\sigma^\mu\bar\theta - \frac{1}{4}(\theta\theta)(\bar\theta\bar\theta)\partial_\mu\partial^\mu\phi(x). \quad \text{(C.33)}$$

Al aplicar la transformación de la ec. C.21 sobre Φ, se obtienen las ecs. 4.13, 4.40 y 4.41 [26], [31]. El operador adjunto de Φ está dado por

$$\bar\Phi(x^\mu, \theta^\alpha\bar\theta^\alpha) = \phi^\dagger(x) + \sqrt{2}\bar\theta\bar\psi(x) + \bar\theta\bar\theta f^\dagger(x) - i\theta\sigma^\mu\bar\theta\partial_\mu\phi^\dagger(x) + \frac{i\bar\theta\bar\theta}{\sqrt{2}}\theta\sigma^\mu\partial_\mu\bar\psi(x) - \frac{1}{4}(\theta\theta)(\bar\theta\bar\theta)\partial_\mu\partial^\mu\phi^\dagger(x). \quad \text{(C.34)}$$

Para un supercampo quiral Φ, se tiene que $\Phi\bar\Phi$ también es un supercampo[7] (ec. C.23); entonces, el coeficiente de $(\theta\theta)(\bar\theta\bar\theta)$ es

$$\begin{aligned}
\Phi\bar\Phi|_D = {} & (\theta\theta)(\bar\theta\bar\theta)[-\frac{1}{4}\phi^\dagger\partial^\mu\partial_\mu\phi - \frac{1}{4}\,\phi\,\partial^\mu\partial_\mu\phi^\dagger + |f|^2] + (\theta\sigma^\mu\bar\theta)(\theta\sigma^\mu\bar\theta)\,\partial_\nu\phi\,\partial_\mu\phi^\dagger \qquad \text{(C.35)}\\
& - i\bar\theta\bar\psi(\theta\theta)\partial_\mu\psi\sigma^\mu\bar\theta + i(\bar\theta\bar\theta)(\theta\sigma^\mu\partial_\mu\bar\psi)(\theta\psi)\\
= {} & (\theta\theta)(\bar\theta\bar\theta)[-\frac{1}{4}\phi^\dagger\partial^\mu\partial_\mu\phi - \frac{1}{4}\,\phi\,\partial^\mu\partial_\mu\phi^\dagger + |f|^2] + \frac{1}{2}(\theta\theta)(\bar\theta\bar\theta)\,\partial^\mu\phi\,\partial_\mu\phi^\dagger\\
& + i\bar\theta^{\dot\alpha}\bar\psi_{\dot\alpha}(\theta\theta)\,\partial_\mu\psi^\beta\sigma^\mu_{\beta\dot\beta}\bar\theta^{\dot\beta} + i(\bar\theta\bar\theta)\theta^\alpha\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}\,\partial_\mu\bar\psi^{\dot\alpha}\theta^\beta\psi_\beta\\
= {} & (\theta\theta)(\bar\theta\bar\theta)[-\frac{1}{4}\phi^\dagger\partial^\mu\partial_\mu\phi - \frac{1}{4}\,\phi\,\partial^\mu\partial_\mu\phi^\dagger + |f|^2] + \frac{1}{2}(\theta\theta)(\bar\theta\bar\theta)\,\partial^\mu\phi\,\partial_\mu\phi^\dagger\\
& + \frac{i}{2}\epsilon^{\dot\alpha\dot\beta}(\bar\theta\bar\theta)\bar\psi_{\dot\alpha}(\theta\theta)\,\partial_\mu\psi^\beta\sigma^\mu_{\beta\dot\beta} + \frac{i}{2}(\bar\theta\bar\theta)(\theta\theta)\epsilon^{\alpha\beta}\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}\partial_\mu\bar\psi^{\dot\alpha}\psi_\beta\\
= {} & (\theta\theta)(\bar\theta\bar\theta)[-\frac{1}{4}\phi^\dagger\partial^\mu\partial_\mu\phi - \frac{1}{4}\,\phi\,\partial^\mu\partial_\mu\phi^\dagger + |f|^2 + \frac{1}{2}\,\partial^\mu\phi\,\partial_\mu\phi^\dagger + \frac{i}{2}\,\partial_\mu\psi\sigma^\mu\bar\psi - \frac{i}{2}\psi\sigma^\mu\partial_\mu\bar\psi]
\end{aligned}$$

De manera análoga se obtiene

$$\frac{1}{2}m\Phi^2|_D = (\theta\theta)m[\phi f - \frac{1}{2}(\psi\psi)]. \quad \text{(C.36)}$$

Con las ecs. C.18, C.35, C.36 e integrando por partes en d^4x (donde sus límites de integración son extremos), se obtiene que

$$\int d^4x\,[\int d^2\theta\, d^2\bar\theta\,\Phi\bar\Phi - \int d^2\theta\,\frac{1}{2}m\Phi^2 - \int d^2\bar\theta\,\frac{1}{2}m\bar\Phi^2] = \int d^4x\,\mathcal{L}_{\mathcal{WZ}}, \quad \text{(C.37)}$$

[7] El producto no necesariamente es un supercampo quiral o antiquiral.

donde $\mathcal{L}_{\mathcal{WZ}}$ es el Lagrangiano de Wess-Zumino (véase ec. 4.47); por lo anterior,

$$\mathcal{L}_{\mathcal{WZ}} = \int d^2\theta\, d^2\bar{\theta}\, \Phi\bar{\Phi} - \int d^2\theta\, \frac{1}{2} m\Phi^2 - \int d^2\bar{\theta}\, \frac{1}{2} m\bar{\Phi}^2, \tag{C.38}$$

con lo cual, se obtiene la teoría desarrollada en la Sección 4.2 en el formalismo de supercampos[8], donde el supergrupo de Poincaré es el grupo de simetrías superespacio-temporales de $\mathcal{L}_{WZ}$ [26], [31].

El supercampo vectorial y las interacciones de norma

De manera similar al supercampo escalar (ec. C.16), la forma más general de un supercampo vectorial $V(x,\theta,\bar{\theta})$ $(V(x,\theta,\bar{\theta}) = V^\dagger(x,\theta,\bar{\theta}))$ es

$$\begin{aligned} V(x,\theta,\bar{\theta}) = C(x) + i\theta\chi(x) - i\bar{\theta}\bar{\chi}(x) + \frac{i}{2}\theta\theta[M(x) + iN(x)] - \frac{i}{2}\bar{\theta}\bar{\theta}[M(x) - iN(x)] \\ +\theta\sigma^\mu\bar{\theta}V_\mu(x) + i\theta\theta\bar{\theta}[-i\bar{\lambda}(x) + \frac{i}{2}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\chi(x)] \\ -i\bar{\theta}\bar{\theta}\theta[i\lambda(x) - \frac{i}{2}\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\chi}(x)] + \frac{1}{2}(\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta})[D(x) - \frac{1}{2}\partial_\mu\partial^\mu C]. \end{aligned} \tag{C.39}$$

Las componentes de la forma más general de un supercampo vectorial son 8 campos bosónicos complejos (C, M, N, D, V_μ) y 2 campos fermiónicos de 4 componentes complejas $(\chi_\alpha,\ \lambda_\alpha)$

Si Φ es un supercampo escalar, entonces $V = i(\Phi - \Phi^\dagger)$ es un supercampo vectorial, cuyas componentes son

$$\begin{aligned} C &= i(\phi - \phi^\dagger); \\ \chi &= \sqrt{2}\psi; \\ \frac{1}{2}(M + iN) &= f; \\ V_\mu &= -\partial_\mu(\phi + \phi^\dagger); \\ D &= \lambda = 0. \end{aligned} \tag{C.40}$$

La versión supersimétrica de una transformación de norma en este espacio para el supercampo vectorial está dada por

$$V \to V + \frac{i}{2}(\Phi - \Phi^\dagger), \tag{C.41}$$

la cual, induce una transformación de norma sobre V_μ, como en la ec. 3.91

$$V_\mu \to V_\mu + \partial_\mu[\mathrm{Re}(\phi)] := V_\mu + \partial_\mu\alpha. \tag{C.42}$$

Con lo anterior, es posible elegir las componentes de un supercampo escalar Ψ de tal manera que $C = \chi = M = N = 0$. Esta restricción define la norma de Wess-Zumino

[8] El término $-\int d^2\theta\, \frac{1}{2} m\Phi^2 - \int d^2\bar{\theta}\, \frac{1}{2} m\bar{\Phi}^2$ es parte de un término más general conocido como superpotencial [26], [1], pero su presentación escapa de los propósitos de este trabajo.

$$V_{WZ}(x,\theta,\bar{\theta}) = (\theta\sigma^{\mu}\bar{\theta})V_{\mu}(x) + (\theta\theta)\bar{\theta}\bar{\lambda}(x) + (\bar{\theta}\bar{\theta})\theta\lambda(x) + \frac{1}{2}(\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta})D(x). \tag{C.43}$$

Sus potencias están dadas por

$$V_{WZ}^2 = \frac{1}{2}\theta^2\bar{\theta}^2 V_{\mu}V^{\mu}; \qquad V_{WZ}^{2+n} = 0, \quad n \in \mathbb{N} \tag{C.44}$$

Las componentes V_{μ} de V_{WZ} están asociadas con los campos de norma (véase Sección 3.3), mientras que $\lambda, \bar{\lambda}$ están asociadas con los campos gauginos. El campo $D(x)$ es un campo auxiliar. Cabe destacar que V_{WZ} no es invariante bajo transformaciones de supersimetría por sí solo, pero esto se puede compensar al agregar más campos, como por ejemplo, al escribir un Lagraniano. Que las potencias del suepercampo vectorial se anulen es de gran importancia cuando se acoplan los campos de norma con la materia. El supercampo vectorial se utiliza para desarrollar las teorías de norma supersimétrica, por ejemplo, en la Electrodinámica Cuántica Supersimétrica (SQED por sus siglas en inglés) [1], [26], [31].

Apéndice D. La teoría de Kaluza-Klein y algunos intentos de extensión del Modelo Estándar

Considere las ecuaciones de Einstein [8] en 5 dimensiones, con un tensor de energía-momento en 4 dimensiones $T_{\mu\nu}$ (las restantes entradas del tensor son 0), que son [24]:

$$\hat{G}_{AB} = 0 \quad o \quad \hat{R}_{AB} = 0, \tag{D.1}$$

donde $\hat{g}_{AB}$, $\hat{G}_{AB} = \hat{R}_{AB} - \hat{R}\hat{g}_{AB}/2$, $\hat{R}_{AB}$ y $\hat{R}$, son la métrica (definición 2.9), el tensor de Einstein, de Ricci y el escalar de Ricci, respectivamente, en este espacio pentadimensional ($A, B = 0, 1, 2, 3, 4$) [24]. La ausencia de fuentes de materia en la ecuación anterior describe a un universo con más de 4 dimensiones vacío. El tensor de Ricci y los símbolos de Christoffel [8] están definidos en términos de la métrica al igual que en el caso 4-dimensional

$$\hat{R}_{AC} = \partial_C\hat{\Gamma}^C_{AB} - \partial_B\hat{\Gamma}^C_{AC} + \hat{\Gamma}^C_{AB}\hat{\Gamma}^D_{CD} - \hat{\Gamma}^C_{AD}\hat{\Gamma}^D_{BC}; \qquad \hat{\Gamma}^C_{AB} = \frac{1}{2}\hat{g}^{CD}(\partial_A\hat{g}_{DB} + \partial_B\hat{g}_{DA} - \partial_D\hat{g}_{AB}). \tag{D.2}$$

Para $A, B, C, D = 0, 1, 2, 3$ se tiene la teoría de la Relatividad General en 4 dimensiones. Por lo anterior, todo depende de la elección de la métrica $\hat{g}_{AB}$. Considere un espacio 5-dimensional con una métrica dada por

$$\hat{g} = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu} + \kappa^2\phi^2 A_{\mu}A_{\nu} & \kappa\phi^2 A_{\mu} \\ \kappa\phi^2 A_{\mu} & \phi^2 \end{pmatrix} \tag{D.3}$$

donde $g_{\mu\nu}$ es una métrica del espacio-tiempo curvo [8], κ es una constante, ϕ es un campo escalar y A_{μ} es el cuadrivector de potencial electromagnético (véase Sección 3.3). Si se supone la condición cilíndrica

$$\frac{\partial\hat{g}_{AB}}{\partial x^4} = 0, \tag{D.4}$$

entonces, de la ec. D.1 se obtiene [24]

$$G_{\mu\nu} = \frac{\kappa^2\phi^2}{2}T^{EM}_{\mu\nu} - \frac{1}{\phi}[\boldsymbol{\nabla}_{\mu}(\partial_{\nu}\phi) - g_{\mu\nu}\partial_{\rho}\partial^{\rho}\phi] \tag{D.5}$$

$$\nabla^\mu F_{\mu\nu} = -3\frac{\partial^\mu \phi}{\phi} F_{\mu\nu} \tag{D.6}$$

$$\partial_\rho \partial^\rho \phi = \frac{\kappa^2 \phi^3}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \tag{D.7}$$

donde $G_{\mu\nu}$ y $F_{\mu\nu}$ es el tensor de Einstein (cuadridmensional [8]) y el tensor electromagnético (véase Sección 3.3.1), respectivamente, y $\nabla^\mu = g^{\mu\nu}\nabla_\nu = g^{\mu\nu}[\partial_\nu + \hat{\Gamma}^\sigma_{\rho\nu}]$. Por otro lado $T^{EM}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma}/4 - F^\rho_\mu F_{\nu\rho}$ es el tensor de energía-momento electromagnético.

Si el campo escalar ϕ es una constante a través de todo el espacio-tiempo, entonces las ecs. D.4 y D.5 son

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G \phi^2 T^{EM}_{\mu\nu}; \qquad \nabla^\mu F_{\mu\nu} = 0, \tag{D.8}$$

respectivamente, donde G es la constante de gravitación y se definió $\kappa = 4\sqrt{\pi G}$. Este es el resultado original obtenido por Kaluza, quien eligió $\phi = 1$. Cabe destacar que la condición $\phi = constante$ solo es consistente con la ec. 5.6 cuando $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = 0$.

Por otro lado, Klein mostró que este resultado podía ser obtenido a partir de la física cuántica [6]. El modelo de Kaluza surgió durante la tremenda emoción que rodeaba al nacimiento de la teoría cuántica, por lo que Klein tuvo la idea de explicar la no-dependencia de las cantidades físicas de la quinta dimensión, considerando a ésta muy pequeña. Se supuso que la quinta coordenada tenía que ser espacial con una topología circular (S^1) a una escala muy pequeña. Bajo este marco, cualquier cantidad se vuelve periódica con respecto a la quinta coordenada, i.e., $f(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4) = f(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 + 2\pi r)$, donde r es el parámetro de la escala del "radio" de la quinta dimensión.

Considere la expansión de los campos en series de Fourier

$$g_{\mu\nu}(x_\mu, x_4) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} g^{(n)}_{\mu\nu}(x_\mu) e^{inx_4/r}; \quad A_\mu(x_\mu, x_4) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} A^{(n)}_\mu(x_\mu) e^{inx_4/r}; \quad \phi(x_\mu, x_4) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \phi^{(n)}(x_\mu) e^{inx_4/r} \tag{D.9}$$

donde el superíndice (n) indica el n-ésimo modo de Fourier. La teoría cuántica señala que el momento en la dirección de x_4 es de orden de $|n|/r$. Si r es suficientemente pequeña, solo el estado $n = 0$ está presente en la física de bajas energías (i.e. $E << 1/r$); por lo tanto, todos los estados observables se vuelven independientes de x^4, dando una teoría efectiva cuadridimensional, como se requiere. Usualmente se toma el valor de r del orden de la longitud de Planck, i.e., $r \approx 1.6 \times 10^{-35}$m.

Agregando un campo escalar $\hat{\psi}(x^0, x^1, x^2, x^3, x^4)$ al modelo y considerando su expansión en series de Fourier como en la ec. D.9, se observa que la carga asociada a este campo es [24]

$$q_n = \frac{n\sqrt{16\pi G}}{r\sqrt{\phi}}. \tag{D.10}$$

Si la carga del primer modo de Fourier, q_1, se identifica con el valor de la carga del electrón y se toma $r\sqrt{\phi} \approx 1{,}6 \times 10^{-35}$m, se obtiene un valor aproximado para la constante de estructura finita α [24]. Una teoría que prediga el valor de $r\sqrt{\phi}$ podría determinar un cálculo preciso de la carga del electrón (hecho que escapa del Modelo Estándar).

Por otro lado, la masa de los modos de Fourier del campo $\hat{\psi}$ está dada por [24]

$$m_n = \frac{|n|}{r\sqrt{\phi}}. \tag{D.11}$$

Si se supone $r\sqrt{\phi} \approx 1{,}6 \times 10^{-35}$m, entonces la masa del electrón (m_1) tiene un valor aproximado de 10^{-39} GeV, en vez de 5×10^{-4} GeV. Esta discrepancia en la masa del electrón fue el motivo por lo que la teoría de Kaluza-Klein fue abandonada por mucho tiempo.

Sin embargo, los resultados obtenidos de la teoría de Kaluza-Klein (posible explicación de los parámetros libres en el Modelo Estándar y unificación de las fuerzas fundamentales), así como su método de compactificación, en el marco de la teoría cuántica de campos dieron "pie de partida" para la Supergravedad, la Teoría de Cuerdas y la Teoría M [6].

La Supergravedad es una teoría de campos que combina SUSY con Relatividad General, i.e., SUSY en un espacio-tiempo curvo $d-$dimensional ($d > 4$). Si en un Lagrangiano supersimétrico (como el de Wess-Zumino, véase Sección 4.2) los parámetros de las transformaciones de SUSY dependen de las coordenadas ($\varepsilon = \varepsilon(x)$) i.e., la supersimetría es una simetría local, se inducen campos que restablecen la invariancia. Estos campos se relacionan con el cuanto del campo gravitatorio, llamado gravitón, cuyo es espín es 2 y su supercompañero el gravitino con espín $\frac{3}{2}$, intentando así, dar una descripción cuántica de la gravedad [6]. Esta teoría rápidamente se generalizó a más dimensiones compactificadas como en el caso de la teoría de Kaluza-Klein, para intentar unificar las cuatro fuerzas fundamentales. Sin embargo, hasta la fecha persisten varios problemas, como la divergencia de algunos procesos de dispersión [6].

La hipótesis esencial de la Teoría de Cuerdas es que distintas vibraciones de cuerdas iguales muy pequeñas se manifiestan a escalas mayores que el tamaño de las cuerdas como distintas partículas elementales; se asocia un grado de libertad adicional a la descripción puntual, que corresponde a la cuerda. Las propiedades de las partículas, como masa, carga y espín, están determinadas por las vibraciones de las cuerdas. Uno de los primeros resultados de esta teoría es la producción de gravitones mediante las vibraciones de las cuerdas, por lo que la Teoría de Cuerdas se convirtió rápidamente en una teoría candidata para unificar las cuatro fuerzas elementales de la naturaleza. Poco después se encontró que, para que todas las componentes cuánticas de la Teoría de Cuerdas fueran congruentes, se necesita SUSY y seis dimensiones espaciales adicionales, o en algunos casos veintidós [6] [17].

Para justificar el hecho de que cotidianamente solo se observan cuatro dimensiones, la Teoría de Cuerdas hace uso de compactificaciones para obtener una teoría efectiva cuadridimensional. Sin embargo, los distintos tipos de cuerdas posibles no pueden integrarse en una sola Teoría de Cuerdas. Por lo anterior, esta teoría se divide en cinco tipos, las cuales se llaman Teoría I, IIA, IIB, Heterótica-O y Heterótica-E, cada una con sus propias ecuaciones de movimiento [6] [17].

Más tarde se descubrió que estas 5 versiones de la Teoría de Cuerdas eran parte de una teoría más fundamental llamada teoría M. En caso de comprobarse que esta teoría describe correctamente el comportamiento del universo, ésta permitiría, entre otras cosas, describir las cuatro fuerzas fundamentales como una sola; sin embargo, actualmente aún no se sabe bien cómo conectarla con el Modelo Estándar [21].

Bibliografía

[1] Argurio R., *Introduction to Supersymmetry PHYS-F-417*; Université Libre de Bruxelles, Bélgica, Bruseles, 2011, PHYS-F-417.

[2] Bartocci, C., Bruzzo, U. y Hernández-Ruipérez D., *The Geometry of Supermanifolds*; Kluwer Academic Publishers, Holanda, Dordrecht, 1991.

[3] Barden J., Cooper L. y Schrieffer J., *Theory of Superconductivity*; Physical Review, vol 108, Issue 5, pp 1175-1204, 1957.

[4] Besprosvany J., *Electroweakly Interacting Scalar and Gauge Bosons, and Leptons, from Field Equations on Spin (5+1)-Dimensional Space*; International Journal of Modern Physics A, vol. 20, No. 1, pp 77-93, 2005.

[5] Besprosvany J. y Romero R., *Representation of Quantum Field Theory in a Extended Spin Space and Fermion Mass Hierarchy*, International Journal of Modern Physics A, vol 29, No. 291450144, 17 páginas, 2014, arXiv:1408.4066.

[6] Collins P., Martin A. y Squires E., *Particle Physics and Cosmology*; John Wiley and Sons. E.U.A., Nueva York, 1989.

[7] de la Peña L., *Introducción a la Mécanica Cuántica*; Ediciones Científicas Universitarias, México, México D.F., 2006.

[8] Dirac P., *General Theory of Gravity*; John Wiley and Sons, E.U.A., Nueva York, 1975.

[9] Falomir H., *Curso de Teoría Cuántica de Campos. Notas sobre los grupos de Lorentz y de Poincaré*; Facultad de Ciencias Exactas-UNLP, Argentina, Buenos Aires, 2008 (notas en Internet).

[10] Friedberg S., Insel A. J. y Spence L.E., *Álgebra Lineal*; Publicaciones Cultural S.A., México, México D.F., 1996.

[11] Gilmore R., *Lie Groups, Lie Algebras, and Some of Their Applications*; John Wiley and Sons, E.U.A., Nueva York, 1974.

[12] Griffiths D., *Introduction to Elementary Particles*; Wiley-VCH, E.U.A., Portland, 2008.

[13] Illana J. I., *El Modelo Estándar y su Fenomenología. Parte 1: La Teoría Electrodébil y Herramientas de Cálculo*; Universidad de Granada, España, Granada, 2012 (notas en Internet).

[14] Iorio A., *From the Coleman-Mandula Theorem to Supersymmetry Yang-Mills Theories*; Italia, Salerno, 2003 (notas en Internet).

[15] Itzykson C., Zuber J-B., *Quantum Field Theory*; McGraw-Hill. E.U.A., Nueva York, 2005.

[16] Jancsa P. y Farinati M., *Grupos y Álgebras de Lie*; Universidad Nacional de Córdoba, Argentina, Córdoba, 2010 (notas en Internet).

[17] Kaku M., *Quantum Field Theory, A Modern Introduction*; Oxford University Press. E.U.A., Nueva York, 1993.

[18] Lluis-Puebla E., *Álgebra Lineal, Álgebra Multilineal y K-Teoría Algebraica Clásica*; Publicaciones electronicas de la Sociedad Matemática Mexicana, México, México D.F., 2008.

[19] Maciejko J., *Representations of Lorentz and Poincaré Grups*; Stanford University, E.U.A., Palo Alto (notas en Internet).

[20] Martin S., *A Supersymmetry Primer*; University of Illinois, E.U.A., Illinois, 2011, arXiv:hep-ph/9709356v6.

[21] Miao Li., *Introduction to M Theory*; University of Chicago, E.U.A., Chicago, 1998, arXiv:hep-th/9811019.

[22] Montesdeoca A., *Apuntes de Introducción a las Variedades Diferenciables*; Universidad de La Laguna, España, Tenerife, 1997 (notas en Internet).

[23] Ne'eman Y., Sternberg S. y Fairlie D., *Superconnections for Electroweak* $su(2|1)$ *and Extensions, and the Mass of the Higgs*; Physics Reports 406, pp 303-377, 2005.

[24] Overduin J. M. y Wesson P. S. *Kaluza-Klein Gravity*; Physics Reports 283, pp 303-380, 1997.

[25] Peskin M.E. y Schroeder D. V., *An Introduction to Quantum Field Theory*; Perseus Books, E.U.A., Massachusetts, 1995.

[26] Quevedo F., Krippendorf S. y Schlotterer O., *Cambridge Lectures on Supersymmetry and Extra Dimensions*; University of Cambridge, Inglaterra, Cambridge, 2010, arXiv:1011.1491v1.

[27] Ramirez-Galarza A., *Geometría Analítica. Una Introducción a la Geometría*; Prensa de Ciencias U.N.A.M. Facultad de Ciencias, México, México D.F., 2006.

[28] Rogers, A., *Supermanifolds: Theory and Applications*; World Scientific Publishing, E.U.A., Nueva Jersey, 1998.

[29] Tong D., *Lectures on Quantum Field Theory*; University of Cambridge, Inglaterra, Cambridge, 2007 (notas en Internet).

[30] Wachter A., *Relativistic Quantum Mechanics (Theoretical and Mathematical Physics)*; Springer, Holanda, 2010.

[31] Zoubos K., *An Introduction to Supersymmetry*; University of Pretoria, Sudáfrica, Pretoria, 2012 (notas en Internet).