



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS

OSCILACIÓN DE NEUTRINOS EN EL MEDIO  
DE SUPERNOVA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Físico

PRESENTA:

Roberto López Bahena

TUTOR:

Dr. Sarira Sahu



Ciudad Universitaria, México D. F. 2015



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

*A mi madre*

# Agradecimientos

*Quiero comenzar agradecer al Dr. Sarira Sahu por su tiempo y por introducirme en el mundo de los neutrinos. No se puede hacer nada sin el apoyo incondicional de los padres, gracias mamá, y sin el cariño de los hermanos, gracias hermana. Por último a mis amigos y amigas por hacer de este infierno llamado “redacción de tesis” algo más agradable.*

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Breve historia del neutrino</b>	<b>3</b>
2.1. Historia de la oscilación del neutrino . . . . .	5
<b>3. Neutrinos en el modelo estándar</b>	<b>8</b>
3.1. No conservación de la paridad . . . . .	11
<b>4. Teoría de la oscilación del neutrino</b>	<b>14</b>
4.1. Oscilación en vacío . . . . .	15
4.2. Oscilación en vacío con dos sabores . . . . .	16
4.3. Violación CP y T . . . . .	17
4.4. Oscilación en vacío con tres sabores . . . . .	18
4.5. Oscilación en materia del neutrino . . . . .	20
4.5.1. Evolución de los estados del neutrino en materia . . . . .	20
4.5.2. Caso de densidad constante . . . . .	23
4.5.3. Caso de densidad variable . . . . .	24
<b>5. Neutrinos en supernovas</b>	<b>27</b>
5.1. Estudio cualitativo del colapso en supernova . . . . .	27
5.2. Producción de neutrinos en supernovas . . . . .	29
5.2.1. Evolución estelar y colapso del núcleo estelar . . . . .	29
5.2.2. Enfriamiento por neutrinos . . . . .	31
5.2.3. Neutrinos térmicos . . . . .	32
<b>6. Procesos de Markov</b>	<b>34</b>
6.1. Teoría de Markov para neutrinos en supernovas . . . . .	38



# La Oscilación de Neutrinos en el Medio de Supernova

por

Roberto López Bahena

## Resumen

En esta tesis se introducen los procesos de Markov en el estudio de los neutrinos, cuando su camino libre medio es mucho menor que el tamaño del núcleo estelar por lo que están atrapados en una esfera, llamada esfera de neutrinos. También se considera que las fuentes de neutrinos se han agotado, por lo que los neutrinos sólo deben estar cambiando de un sabor a otro, que dentro del contexto de la teoría de Markov ésto es conocido como problema de las transiciones.

# Capítulo 1

## Introducción

Las respuestas a los problemas en las anomalías de los neutrinos solares, atmosféricos y de reactores establecieron dos hechos importantes; que las diferencias de masas cuadradas en los neutrinos son diferentes de cero y la oscilación del neutrino en tres sabores (o generaciones):  $\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$ . También es conocido que la oscilación del neutrino se ve realizada en presencia de materia, en especial en materia con una alta densidad tal como las que se alcanzan en el colapso de una estrella, y este efecto de realce en la oscilación es conocido como el mecanismo MSW (Mikheyev-Smirnov-Wolfenstein)[4]. Pero, a diferencia de los neutrinos solares y atmosféricos sólo hemos visto pocos eventos (25 neutrinos en 12 seg.) de neutrinos provenientes de explosiones supernovas (SN). Hasta ahora sólo se han detectado neutrinos (principalmente de  $\bar{\nu}_e$ ) de la explosión supernova 1987 (SN1987A), en un rango entre (5-40) MeV de energía, a unos 50 kilopársec (kpc) o 150 000 años luz de la tierra por los detectores subterráneos; el detector Kamiokande II (KII) en Japón y el detector Irvine-Michigan-Brookhaven (IMB) en USA, que dieron crédito a muchas de las expectativas teóricas acerca de las secuelas del colapso del núcleo estelar de hierro de una estrella masiva, además de dar información valiosa sobre la máxima masa posible del neutrino del electrón. La SN 1987A fue uno de los eventos astrofísicos más importantes del siglo pasado, ya que estableció una nueva rama en la astronomía; la astronomía de neutrinos no solares. Con los detectores terrestres actuales esperamos observar neutrinos de futuras explosiones SN a distancia galácticas de la tierra.

Esta tesis principalmente estudia los procesos de Markov de los neutrinos cuando su camino libre medio es mucho menor que el tamaño del núcleo estelar por lo que están atrapados en una esfera, llamada esfera de neutrinos, también se considera que las fuentes de neutrinos se han agotado por lo que los neutrinos sólo deben de estar cambiando de un sabor a otro, que dentro del contexto de la teoría de Markov esto es conocido como el problema de transiciones.

---

La tesis tiene la siguiente estructura:

Capítulo 2 es sobre la historia del neutrino y su oscilación es brevemente presentada antes de adentrarnos en la teoría física del neutrino. En el capítulo 3 damos el actual panorama físico del neutrino en el modelo estándar. Capítulo 4 introduce la teoría de oscilación de neutrinos en detalle, tomando en cuenta la oscilación en vacío de dos y tres sabores (o generaciones) del neutrino. Consideraremos también la oscilación en materia pero sólo de dos sabores. Mientras que el capítulo 5 damos una breve descripción del mecanismo de colapso del núcleo estelar en la supernova, también tratamos la emisión y atrapamiento de neutrinos en el colapso estelar. El capítulo 6, es sobre los procesos de Markov y su aplicación al problema de las transiciones de neutrinos de un sabor a otro. Por último, el capítulo 7 son las conclusiones.

## Capítulo 2

# Breve historia del neutrino

La idea del neutrino surgió el 4 de diciembre de 1930, cuando Pauli propuso la existencia del “neutrón” como inicialmente lo había llamado, una nueva partícula de espín  $1/2$ , con masa pequeña y sin carga eléctrica, en una carta a sus colegas que asistían a una conferencia sobre un tema que estaba causando un gran desafío entre los físicos: el fenómeno de la desintegración radioactiva. En las primeras décadas del siglo XX la física atómica había hecho grandes avances en el entendimiento de los constituyentes del universo. Los científicos creían que todos los átomos consistían de tan sólo dos clases de partículas cargadas eléctricamente. Los protones (con carga positiva) en el núcleo atómico, rodeado por una nube de electrones [25] (con carga negativa) este fue el modelo de Rutherford [22]. Pero, extrañamente algunos núcleos son inestables o se desintegran. En ese tiempo el fenómeno de desintegración radioactiva eran un gran desafío. Cuando el núcleo se desintegra libera energía, frecuentemente expulsando un electrón. Era la energía de este electrón el problema [6], ésta no parecía ser suficiente, lo que violaría el principio de conservación de energía. Toda la energía del núcleo perdida cuando este se desintegra debería haber sido tomada por el electrón, no había otro lugar para que fuera. Pero, parecía que el electrón no llevaba tanta energía como debía. De hecho lo que ellos observaron fue que en diferentes desintegraciones, siempre con el mismo núcleo inicial, y siempre con el mismo núcleo final, el electrón tenía diferentes cantidades de energía. Frecuentemente no con toda la energía con la que fue liberado. La energía de algún modo estaba desapareciendo. Pero, energía desapareciendo simplemente no era aceptable para Pauli. La energía tenía que ir algún lugar. Como Pauli mismo declaró en su carta, esta fue una medida desesperada para salvar el principio de conservación de la energía. La idea de Pauli fue que debía haber una partícula involucrada en la desintegración radioactiva. El propuso en adición a todas las partículas que eran conocidas en ese tiempo, que habría otra que sería emitida en la desintegración radioactiva junto con el electrón, el neutrino tenía que ser una partícula de espín  $1/2$ , por conservación del momento angular intrínseco.

En los años siguientes, el neutrino fue parte fundamental de la teoría de desintegración  $\beta$  presentada por Fermi [10] [9]. La teoría de desintegración  $\beta$  de Fermi, la cual involucra la descomposición de un neutrón en un protón, un electrón y un antineutrino (ver Figura 2-1).

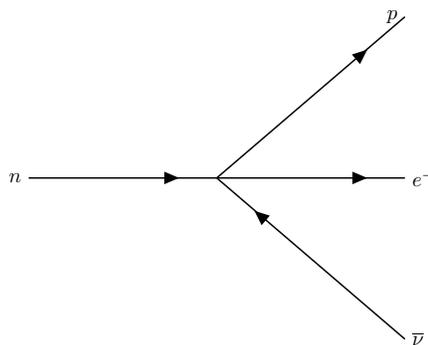


Figura 2-1: Teoría de Fermi de la desintegración  $\beta$  que permite a un neutrón decaer en un protón, un electrón, y un antineutrino.

El modelo para el núcleo ahora consistía de protones, neutrones y la desintegración  $\beta$  fue descrita como si uno de los neutrones se descompusiera en un protón el cual permanece adentro del núcleo mientras que el electrón y el antineutrino escapaban, por lo tanto haciendo a la desintegración  $\beta$  una desintegración de tres cuerpos con un espectro continuo de energía. Si Pauli había resuelto un problema el había creado otro; como detectar neutrinos. El sabía que a diferencia de todas las otras partículas atómicas conocidas los neutrinos no tendrían carga eléctrica. Esto los haría invisibles a todos los instrumentos, ya que son capaces de viajar a través de la materia solida casi sin perturbarla.

Pero, entonces algo ocurrió que cambio a la física y al mundo. El poder de una bomba nuclear viene de una cadena de desintegraciones radioactivas. Si Pauli estaba en lo cierto entonces junto con la explosión debe haber un intenso pulso de neutrinos. En los años 50 Fred Reines era un investigador que trabajaba en la desmantelamiento nuclear de Estados Unidos. Reines [21] se dio cuenta que el programa de armas era un perfecto lugar para la caza del neutrino. Reines notó que si la reacción en cadena en una bomba producía neutrinos también se producirían en un reactor nuclear. Con una fuente tan intensa de neutrinos de aproximadamente  $10^{23}$  neutrinos por segundo, quizás Reines y sus colegas podrían finalmente capturar al neutrino. Ellos llamaron a tal empresa “El Proyecto Poltergeist”. Pero, ellos enfrentaban todavía el problema fundamental. La falta de carga eléctrica del neutrino, haciéndolo invisible. Pero, cuando interaccionan ya no son invisibles. A pesar de la pequeña sección transversal de los neutrinos, Pontecorvo quién [19] fue el primero en sugerir en 1946 que los neutrinos podrían ser detectados usando un proceso

beta.



Donde un neutrino golpea a un núcleo de cloro cambiándolo a un núcleo de argón, transformando un neutrón en un protón mientras emite un electrón. Mientras que en el experimento de Reines era un proceso beta inverso; entre uno de los antineutrinos ( $\bar{\nu}_e$ ) producidos en el reactor nuclear con uno de los protones en los núcleos atómicos del detector, la señal sería un doble pulso de energía distintivo. Uno de la partícula emitida, y el otro del núcleo transformado. Lo que ellos buscaron fue un pulso seguido de otro pulso dentro de un periodo específico de tiempo, lo que los resaltaría del fondo de ruido en un osciloscopio, ver [20]. El 14 de junio de 1956, Reines y sus colegas anunciaron la detección del antineutrino ( $\bar{\nu}_e$ ). Ellos enviaron un telegrama a Pauli informándole de este descubrimiento. Pauli estaba en lo cierto, la naturaleza necesitaba al neutrino. De hecho, los científicos pronto se dieron cuenta que todos lo necesitábamos. Cada elemento vital para la vida, como el carbón y el oxígeno fueron fabricados en una cadena de reacciones nucleares que sería imposible sin los neutrinos. Ellos son un ingrediente esencial del universo. Sin ellos ni siquiera las estrellas brillarían. La existencia de un segundo tipo de neutrino, el neutrino del muón  $\nu_\mu$ , fue confirmado por el Laboratorio Nacional Brookhaven en 1962 [8]. Cuando un tercer leptón con carga, el tauón  $\tau^-$ , fue descubierto en 1975, fue natural suponer que habría un neutrino asociado a este. Sin embargo, no fue hasta el 2000 que el  $\nu_\tau$  fue detectado por el equipo DONUT [7], completando la familia de fermiones en el modelo estándar de física de partículas.

## 2.1. Historia de la oscilación del neutrino

Si los neutrinos están involucrados en el proceso de brillo de las estrellas estos eran de interés. El deseo de saber como es que las estrellas brillan, fue lo que unió a un joven astrofísico, John Bahcall y a un físico experimental, Ray Davis. Ellos creían que los neutrinos les permitiría ver dentro de una estrella. Adentro del núcleo de cada estrella un proceso llamado fusión nuclear produce una enorme cantidad de energía; o al menos esta era la teoría, la fusión nuclear no únicamente produciría energía, haciendo brillar al Sol, sino también produciría neutrinos, un montón de ellos. Mirando la superficie del Sol no se aprende acerca de los detalles que ocurren en su interior. Los neutrinos son como mensajeros cósmicos, ellos viajan directo desde el núcleo del Sol a la Tierra. Encontrar a los neutrinos sería tener una prueba de que la fusión nuclear era realmente la fuente de energía del Sol. Así que Davis le pidió a Bahcall calcular exactamente cuantos neutrinos produce el Sol. Esto significaba crear el primer modelo matemático de las reacciones de fusión que ocurren adentro del núcleo del Sol. La respuesta fue cien millones de neutrinos solares atravesarían una área del tamaño de una uña por segundo cada día del año [3]. En 1964 Davis se embarcó en uno de los más difíciles experimentos de la historia de la ciencia, contar los neutrinos

que vienen del Sol. Esto significó construir un laboratorio subterráneo en el interior de una mina en Dakota del sur, para protegerse de la radiación de fondo del espacio. El corazón del experimento era la trampa para neutrinos. Seiscientas toneladas de un fluido que es comúnmente utilizado en la limpieza, tetracloroetileno ( $C_2Cl_4$ ) [3]. El tipo de argón ( $^{37}_{18}Ar$ ) producido en la interacción de un neutrino ( $\nu_e$ ) con un átomo de  $^{37}_{17}Cl$  sería radiactivo. Davis pensó que podrían usar la radioactividad de los átomos de argón para revelar a los neutrinos. Así que contando los átomos de argón, Ray estaría contando indirectamente a los neutrinos. Pero, fue aquí que la inmensa dificultad del problema apareció. Trillones de neutrinos ( $10^{11}$ ) fueron directo al tanque cada segundo. Pero, estos interactúan tan poco frecuente que Bahcall calculó que sólo diez átomos de argón serían producidos por semana. Encontrarlos sería una tarea imposible. Sin embargo, cada semana Davis bombearía helio a través del fluido para remover a los átomos de argón que se habían acumulado. Pero, cuando los resultados comenzaron a surgir fue inmediatamente claro que algo estaba mal. John Bahcall había calculado diez átomos de argón por semana. Pero, Ray Davis únicamente había obtenido tres. La mayoría de los neutrinos estaban perdidos. En los años ochentas Davis continuo mejorando su detector, y año tras año los resultados eran los mismos. El únicamente pudo contar sólo un tercio de los neutrinos que Bahcall predecía. El llegó a estar seguro de que nada estaba mal con su detector. Pero, si Davis estaba en lo cierto con respecto al número de neutrinos que venían del sol entonces, parecía que algo debía estar mal con la predicción de Bahcall. Pero, nadie podía ver en que estaba mal la teoría de Bahcall o encontrar una falla en el experimento de Davis.

En Kamioka, Japón, tenían otro experimento. Pero, este al comienzo no fue diseñado para ver neutrinos. En 1983 los japoneses comenzaron a interesarse en la desintegración del protón. Para ésto construyeron un experimento llamado Kamiokande, en la profundidad de una montaña para protegerlo de la radiación del espacio. Pero, la montaña no podía protegerlos de los neutrinos que afectaban al experimento. Por lo que comenzaron a interesarse en los neutrinos. El detector Kamiokande II también detectó un déficit de neutrinos solares al igual que Bahcall y Davis [14]. Así que la anomalía del neutrino solar obtuvo una gran relevancia que llegó a ser el misterio más grande en física de partículas. Los físicos tuvieron que regresar a la base, sabían que había tres diferente tipos de neutrinos. Pero, ninguno de los experimentos podía detectar a los tres sabores (o generaciones). Esto sugería que el experimento de Davis sólo detecta un tercio de lo que Bahcall predecía, y hay tres tipos de sabores de neutrinos; así que quizás estos dos números estén conectados de alguna manera. Por ese tiempo también existía una propuesta teórica que estaba tomando notoriedad, en la que los neutrinos estarían cambiando continuamente de un tipo de sabor a otro mientras viajan a través del espacio. Esto es llamado la oscilación del neutrino, como primero sugirió Pontecorvo en 1957 [18]. Sería esto la razón de la deficiencia en los neutrinos detectados,

es lo que se preguntaba los científicos, pero la teoría tenía un problema ya que requería que el neutrino tuviera masa, contrario a lo que se tiene en el modelo estándar. Decididos a resolver el problema de la anomalía construyeron el detector Super Kamiokande capaz de no sólo detectar neutrinos del muón y del electrón, sino que era capaz de dar la dirección en la que venían los neutrinos.

Los neutrinos también son producidos en toda la atmósfera que rodea a la Tierra cuando rayos cósmicos del espacio colisionan con las moléculas del aire. Los neutrinos no sólo son producidos por encima de nuestras cabezas sino también a 13000 kilómetros por debajo de nuestros pies. Ya que la tierra es esencialmente transparente a neutrinos el detector Super Kamiokande debería haber detectado igual número de neutrinos viniendo en todas las direcciones. Pero, eso no fue lo que ocurrió. Lo que observaron fue que los neutrinos que venían debajo eran cerca de la mitad de los que venían de arriba. La diferencia sólo podía ser el tiempo que les toma a los neutrinos atmosféricos alcanzar al detector. Pero, eso implica que los neutrinos tienen masa, esto fue un gran descubrimiento, los neutrinos tienen masa por lo que oscilan [24].

Una clara respuesta al problema de la deficiencia de neutrinos vino de los datos registrados por el detector Sudbury Neutrino Observatory (SNO) en Canadá. Ya que, es sensible a los tres sabores de neutrinos. Estos datos fueron definitivos para que Ray Davis ganara el premio Nobel de física en el 2002 por su experimento, y que el cálculo hecho por John Bahcall se tomará como correcto.

Hoy en día tenemos evidencia de las oscilaciones de neutrinos provenientes de experimentos con neutrinos solares, atmosféricos, de aceleradores y de reactores nucleares. De hecho en el 2012 los experimentos: Daya Bay, Double Chooz y Reno en oscilación de neutrinos de reactores nucleares a un kilómetro aproximadamente de distancia del reactor, confirmaron que uno de los parámetros de oscilación es ( $\theta_{13} \neq 0$ ). Actualmente experimentos: T2K, Super-K estudian la oscilación de haces de neutrinos producidos en aceleradores de partículas, ya que estos ofrecen un mayor control sobre los neutrinos que están siendo estudiados. Mientras que experimentos: Icecub, ANTARES se enfocan en la detección de neutrinos provenientes de regiones muy distantes del espacio. Como veremos en el siguiente capítulo el modelo estándar no considera la oscilación del neutrino.

## Capítulo 3

# Neutrinos en el modelo estándar

El modelo estándar identifica doce bloques constructores de la materia (ver tabla 3-1), seis quarks y seis leptones (y sus respectivas antipartículas) cada uno tiene un espín intrínseco de  $1/2$ . Los quarks son los bloques constructores con carga eléctrica fraccional e interaccionan principalmente a través de la fuerza fuerte, también llamada fuerza de color, como con la fuerza débil y la gravitacional. La fuerza fuerte une a los quarks para formar al protón, al neutrón i.e., todos los núcleos y a todos los otros hadrones (partículas que interaccionan fuertemente). Los leptones con carga son los bloques constructores que interactúan a través de la otras tres fuerzas (débil, electromagnética, y gravitacional) pero nunca a través de la fuerza fuerte. Como resultado, los leptones nunca están confinados adentro del núcleo por la fuerza fuerte. Los leptones incluyen al electrón, y a sus versiones más pesadas; al muón y al tauón, y a sus tres compañeros neutros; neutrino del electrón, neutrino del muón y al neutrino del tauón. Ya que, los neutrinos no tienen carga eléctrica, los neutrinos interaccionan con la materia únicamente a través de la fuerza débil y la gravitacional. Recordando que la fuerza débil crea neutrinos a través de la desintegración beta. En este particular proceso de desintegración débil, un neutrón, libre o en un núcleo, se transforma en un protón y dos leptones son creados: un electrón (o partícula “beta”) y un antineutrino del electrón. Generalmente, la fuerza débil es la fuerza de la transmutación, capaz de transformar un tipo, o “sabor” de quark en otro, o un sabor (o generación) de leptón en otro. Es también la fuerza más débil entre las fuerzas conocidas, es cerca de cien millones de veces más débil que la fuerza electromagnética a baja energía, lo que significa que esta actúa cien millones de veces más lentamente. Por ejemplo, partículas inestables se desintegran por medio de la fuerza débil en un tiempo del orden de  $10^{-8}$  segundos, mientras que el tiempo característico para desintegraciones electromagnéticas es de  $10^{-16}$  segundos y de  $10^{-23}$  para desintegraciones fuertes.

	Primera Familia	Segunda Familia	Tercera Familia
Quarks	<p><b>Up (u)</b></p> <p>Carga eléctrica = <math>+2/3</math>. Protones tienen dos quarks up, neutrones un quark up.</p> <p>Masa <math>\approx 3MeV/c^2</math>.</p>	<p><b>Charm (c)</b></p> <p>Carga eléctrica = <math>+2/3</math>. Es más pesado que u.</p> <p>Masa <math>\approx 1,500MeV/c^2</math>.</p>	<p><b>Top (t)</b></p> <p>Carga eléctrica = <math>+2/3</math>. Es más pesado que t.</p> <p>Masa <math>\approx 175,000MeV/c^2</math>.</p>
	<p><b>Down (d)</b></p> <p>Carga eléctrica = <math>-1/3</math>. Protones tienen un quark down, neutrones dos quark down.</p> <p>Masa <math>\approx 6MeV/c^2</math>.</p>	<p><b>Strange (s)</b></p> <p>Carga eléctrica = <math>-1/3</math>. Es más pesado que d.</p> <p>Masa <math>\approx 170MeV/c^2</math>.</p>	<p><b>Bottom (b)</b></p> <p>Carga eléctrica = <math>-1/3</math>. Es más pesado que s.</p> <p>Masa <math>\approx 4,500MeV/c^2</math>.</p>
Leptones	<p><b>Electrón (e)</b></p> <p>Carga eléctrica = <math>-1</math>. Es responsable de las reacciones químicas y eléctricas.</p> <p>Masa <math>\approx 0.511MeV/c^2</math>.</p>	<p><b>Muón (<math>\mu</math>)</b></p> <p>Carga eléctrica = <math>-1</math>. Es más pesado que e.</p> <p>Masa <math>\approx 105MeV/c^2</math>.</p>	<p><b>Tauón (<math>\tau</math>)</b></p> <p>Carga eléctrica = <math>-1</math>. Es más pesado que <math>\mu</math>.</p> <p>Masa <math>\approx 1,782MeV/c^2</math>.</p>
	<p><b>Neutrino del electrón (<math>\nu_e</math>)</b></p> <p>Carga eléctrica = 0. Es apareado con el electrón por la fuerza débil.</p> <p>Masa = 0 (<i>asumida</i>).</p>	<p><b>Neutrino del muón (<math>\nu_\mu</math>)</b></p> <p>Carga eléctrica = 0. Es apareado con el muon por la fuerza débil.</p> <p>Masa = 0 (<i>asumida</i>).</p>	<p><b>Neutrino del tauón (<math>\nu_\tau</math>)</b></p> <p>Carga eléctrica = 0. Es apareado con el tauón por la fuerza débil.</p> <p>Masa = 0 (<i>asumida</i>).</p>
Antipartículas	<p>Antiup <math>\bar{u}</math></p> <p>Antidown <math>\bar{d}</math></p> <p>Positrón <math>e^+</math></p> <p>Antineutrino del electrón <math>\bar{\nu}_e</math></p>	<p>Anticharm <math>\bar{c}</math></p> <p>Antistrange <math>\bar{s}</math></p> <p>Antimuón <math>\mu^+</math></p> <p>Antineutrino del muón <math>\bar{\nu}_\mu</math></p>	<p>Antitop <math>\bar{t}</math></p> <p>Antibottom <math>\bar{b}</math></p> <p>Antitauón <math>\tau^+</math></p> <p>Antineutrino del tauón <math>\bar{\nu}_\tau</math></p>

Tabla 3-1: Bloques constructores de la materia en el modelo estándar

Es precisamente esta falta de interacción que hace al neutrino tan elusivo. Pero no únicamente la fuerza débil crea neutrinos, frecuentemente por medio de la desintegración beta, sino también interviene en los únicos procesos en los que se pueden absorberlos. Esta conexión entre el neutrino y la fuerza débil hace que sea difícil separar sus propiedades de cada uno. De hecho, la teoría en la que el neutrino no tiene masa y es de mano izquierda (y el antineutrino de mano derecha) fue inventada para explicar porque la fuerza débil, viola la simetría conocida como paridad, o simetría espejo. Si la fuerza débil conserva la paridad, cualquier proceso débil y su imagen espejo serían igualmente probables. En vez, en 1956, C. S. Wu y su equipo observaron una asimetría en la desintegración beta del cobalto-60 (ver sección siguiente). La asimetría sugería que todos los antineutrinos emitidos en la desintegración beta tenían helicidad derecha (ver sección siguiente), esto es, estaban girando en sentido de las manecillas de reloj alrededor de su dirección de movimiento. Pero en un universo con simetría de paridad, un igual número de antineutrinos deberían haber estado girando en sentido contrario a las manecillas del reloj. El hecho,

---

de que únicamente la helicidad derecha fue observada fue un ejemplo de violación de paridad “máxima”. Los resultados del experimento en cobalto fueron formalizados en la teoría de las dos componentes sin masa del neutrino, de acuerdo a la cual el neutrino es una partícula sin masa (ver 3.1), el antineutrino es siempre de helicidad derecha y el neutrino es siempre de helicidad izquierda. Pero la fuerza débil fue pronto reconocida a violar la paridad al máximo. Ya que, esta actúa sobre estados de helicidad izquierda únicamente, sin importar si estos tiene masa o no. En otras palabras, la helicidad izquierda es una propiedad intrínseca de la fuerza débil y no necesariamente del neutrino, Por lo tanto en principio, el neutrino podría tener una masa pequeña. No obstante, la teoría original del neutrino sin masa y de helicidad izquierda fue incluida en el modelo estándar, principalmente porque no había evidencia de lo contrario (ver capítulo 1). La conjetura del neutrino sin masa, tiene consecuencias en el modelo estándar. Esto implica que el número de familia leptónica es conservado. Cada una de las familias del leptón consiste de un par de leptones. El electrón y su neutrino constituye la familia del electrón; el muón y su neutrino la familia del muón; y el tauón y su neutrino la familia del tauón (ver tabla 3-1). Cada una de las familias del leptón es parte de una familia mucho más grande que también incluye a los quarks y a sus respectivas antipartículas de los leptones y quarks. La conservación del número de familia leptónica significa preservar estrictamente las fronteras entre las familias del electrón, del muón y del tauón. Por ejemplo, el muón y el neutrino del muón pueden transmutar cada uno en otro por medio de la fuerza débil (lo que no cambia el número de familia leptónica), pero el muón no puede descomponerse directamente en un electrón, En vez, un miembro de la familia del muón (el neutrino del muón) debe también producirse durante la descomposición del muón (conservando así el número de familia leptónica). Similarmente un tauón no puede descomponerse directamente en un muón o un electrón a menos que un neutrino del tauón sea también producido. Finalmente, la conservación del número de familia leptónica significa que un neutrino del electrón no puede ser cambiado en otro neutrino de otra familia, o viceversa. El modelo estándar se ha mantenido firme conforme se han incrementado la precisión de las pruebas. Sin embargo, recientes evidencias (oscilación de neutrinos) están cambiando esta imagen.

### 3.1. No conservación de la paridad

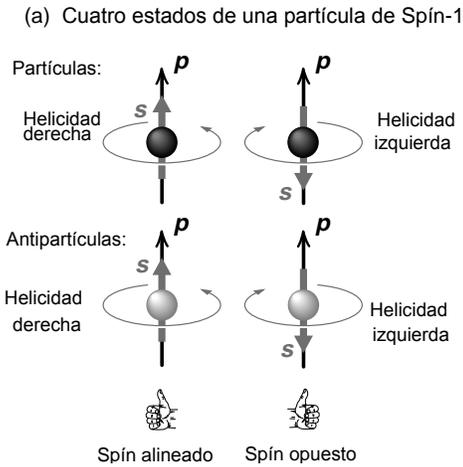


Figura 3-1.

(b) Reflexión de una Partícula Helicidad-Derecha

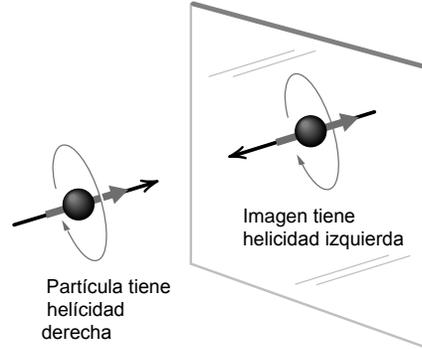


Figura 3-2.

Hasta este momento hemos considerado la helicidad y la quiralidad como iguales. Ya que, para partículas sin masa, estas son idénticas y cercanamente equivalentes para partículas que viajan con velocidad cercana a la luz. Pero, para partículas con masa estas son diferentes. Ya que, las partículas pueden surgir en estados con helicidad derecha o izquierda y con quiralidad derecha o izquierda. La helicidad puede ser medida directamente, pero su valor depende del marco sobre el cual es vista (ver siguiente sección). En contraste la quiralidad es una cantidad invariante relativista, pero no es una constante de movimiento para una partícula libre, y no puede ser medida directamente.

La helicidad de una partícula relaciona su espín intrínseco con su dirección de movimiento. Todos los quarks y leptones, incluyendo al neutrino, tienen  $1/2$  de la unidad del momento angular intrínseco  $s$ , o espín (medido en unidades de  $\hbar$ ). El espín está cuantizado, y para partículas de espín  $1/2$ , este tiene dos valores relativos a cualquier eje de cuantización seleccionado, el cual elegimos llamar el eje- $z$ . El espín es frecuentemente representado por un pseudovector que apunta hacia arriba ( $s_z = 1/2$ ) o hacia abajo ( $s_z = -1/2$ ) a lo largo del eje de cuantización, dependiendo si la partícula gira en sentido de las manecillas del reloj o contrario a las manecillas del reloj alrededor de este eje, cuando es vista desde abajo. La helicidad usa la dirección de movimiento, o el momento  $\mathbf{p}$ , como eje de cuantización, donde la helicidad es definida como  $\lambda = \mathbf{s} \cdot \mathbf{p} / |\mathbf{p}| = \pm 1/2$ .

Como es mostrado en la Figura 3-1, las partículas de espín  $1/2$  usualmente tienen cuatro independientes estados; partícula con helicidad derecha o izquierda y antipartícula con helicidad derecha o izquierda. Una partícula tiene helicidad derecha ( $\lambda = 1/2$ ) si su espín y momento señalan en la misma dirección. Esta tiene helicidad izquierda ( $\lambda = -1/2$ ) si su espín y momento señalan en direcciones opuestas. La imagen espejo de una partícula de helicidad derecha es una partícula de helicidad izquierda, como se

muestra en la Figura 3-2. (Note que, siendo un pseudovector,  $\mathbf{s}$  no cambia de dirección bajo inversiones de coordenadas espaciales. Como el momento angular total  $\mathbf{J}$  y el momento angular orbital  $\mathbf{l}$ ). Hasta 1950, fue tomado como base que las leyes físicas eran invariantes bajo una reflexión de espejo o una inversión de coordenadas (también llamado inversión de paridad). Si la paridad fuera conservada, una partícula de espín 1/2 existiría en ambos estados: helicidad derecha y izquierda.

Pero en Junio de 1956, dos físicos, C. N. Yang y T. D. Lee, sugirieron que la fuerza débil puede violar la conservación de paridad, y esbozaron dos experimentos que podían probar su hipótesis. Seis meses después, C. S. Wu reporto los resultados de uno de tales experimentos. Wu alineo los espines de los núcleos de Cobalto-60 junto al campo magnético y midió las direcciones de los electrones emitidos por los núcleos en la desintegración beta:



(c) Máxima violación de paridad en experimento Cobalto

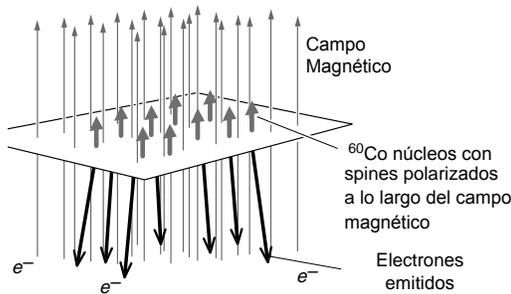


Figura 3-3.

(d) Explicación del experimento Cobalto-60

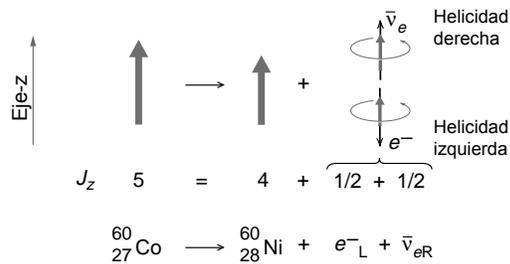


Figura 3-4.

Los electrones eran casi siempre emitidos en dirección opuesta a los espines de los núcleos, como se muestra en la Figura 3-3. Si la paridad fuera conservada, no debería haber correlación entre los espines y el momento de los electrones emitidos en la desintegración. Una correlación entre el espín y el momento es medida por el valor promedio del producto punto  $\mathbf{s} \cdot \mathbf{p}$ , el cual cambia de signo bajo una inversión de paridad y por lo tanto debe ser cero si la paridad es conservada en un proceso. La perfecta correlación entre los espines y los momentos de los electrones en el experimento de cobalto fue un ejemplo de violación de paridad **máximal**.

Para explicar la violación de paridad, Lee y Yang asumieron que el antineutrino era siempre emitido con helicidad derecha. Como se muestra en la Figura 3-4, la desintegración reduce el espín nuclear por una unidad, por conservación del espín, el espín del electrón y el espín del antineutrino ( $1/2 + 1/2 = 1$ ) suman la reducción en el espín del núcleo inicial. Si el antineutrino siempre tiene helicidad derecha (momento alineado con el espín), el electrón tendrá que ser emitido con helicidad izquierda (momento opuesto al espín) y en dirección opuesta al espín del núcleo, lo cual es justamente lo que fue observado en el

experimento Cobalto-60. Yang y Lee formalizaron esta interpretación en la teoría de las dos componentes del neutrino (1957), la cual postula que el neutrino viene únicamente en dos formas, partícula de helicidad izquierda ( $\lambda = -1/2$ ) y antipartícula de helicidad derecha ( $\lambda = 1/2$ ). Pero una helicidad definida tiene profundas consecuencias.

Tener helicidad izquierda en todos los sistemas de coordenadas que se mueven con velocidad relativa constante, como es requerido por la relatividad especial el neutrino debe estar viajando a la velocidad de la luz. De otra manera, uno podría imaginar observar la partícula desde un sistema que se este moviendo más rápido que el neutrino, cuando uno adelanta a la partícula, el momento del neutrino parecería ser invertido, mientras que su dirección de espín permanecería sin cambiar. El neutrino entonces parecería tener helicidad derecha. Así que, la helicidad permanece independiente del marco de referencia únicamente si el neutrino se mueve a la velocidad de la luz. Pero entonces el neutrino debe ser una partícula sin masa. La helicidad entonces llega hacer idéntica a la cantidad invariante relativista conocida como “quiralidad”, así que el neutrino es una partícula de quiralidad izquierda sin masa. Esto fue al menos lo que se creía antes de los experimentos en neutrinos solares y atmosféricos, los cuales sugieren que los neutrinos del muón pueden cambiar periódicamente en neutrinos del electrón, y viceversa, cuando viajan a través de una distancia. Como se muestra en los últimos capítulos, esta oscilación de un sabor a otro puede ocurrir únicamente si los diferentes tipos de neutrinos tienen diferentes masas, así que las mediciones de oscilación es una prueba de que los neutrinos tienen diferentes masas por lo que no tiene una definida helicidad. La masa no cero de los neutrinos y la oscilación entre las generaciones (o sabores) sería paralelo a las propiedades y comportamientos vistos entre los quarks y por lo tanto, apunta hacia una mayor simetría entre quarks y leptones de la que ahora existe en el modelo estándar [12].

## Capítulo 4

# Teoría de la oscilación del neutrino

En general, si los neutrinos tienen diferencias entre sus masas y sus eigenestados de sabor son diferentes de los eigenestados de masa entonces oscilarán. Esto significa que si un neutrino es producido en una reacción de un leptón con carga de una generación (o sabor) dada (dado), éste puede después ser detectado en una reacción de un leptón con carga pero de otra generación, i.e., la generación a la cual el neutrino pertenece ha cambiado durante su propagación desde el punto de producción al punto de detección. Un ejemplo de un proceso que involucre a la oscilación del neutrino es dado en la Fig. 4-1.

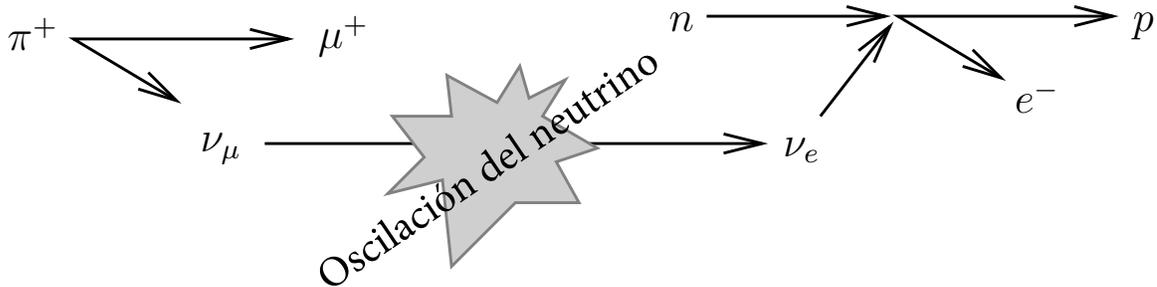


Figura 4-1: Un ejemplo de un proceso de oscilación del neutrino: Un neutrino del muon  $\nu_\mu$  es producido junto con un muon  $\mu^+$  en la descomposición de un pión  $\pi^+$ . Cuando éste se propaga desde el punto de producción al punto de detección cambia a un neutrino del electrón  $\nu_e$ , el cual produce un electrón en el detector.

La oscilación del neutrino es la prueba más sensible de las diferencias de masas cuadradas en los neutrinos. Los experimentos en neutrinos solares y de supernovas son capaces de buscar diferencias de masas cuadradas en los neutrinos desde  $10^{-5}$  eV incluso más pequeñas. Normalmente en experimentos de oscilación del neutrino, los neutrinos son producidos en interacciones débiles y por lo tanto, los neutrinos son eigenestados de sabor:  $\nu_e$ ,  $\nu_\mu$ ,  $\nu_\tau$ . La matriz de masa del neutrino en esta base de sabor es en

general no diagonal. Sin embargo, los eigenestados de masa:  $\nu_1, \nu_2, \nu_3$ , forman una base en la cual la matriz de masa es diagonal y los eigenestados se propagan en el tiempo [16]. Por lo que, los eigenestados son en general diferentes de los eigenestados de sabor. En este capítulo introducimos los principios en la oscilación del neutrino. Primero discutimos la oscilación en vacío de dos y tres sabores. Después tratamos las interacciones entre la materia y los neutrinos en medios de densidad constante y variable.

## 4.1. Oscilación en vacío

Los eigenestados de sabor  $\nu_\alpha$  ( $\alpha = e, \mu, \tau$ ) pueden ser expresados como combinación lineal (mezcla) de los eigenestados de masa  $\nu_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) por medio de la transformación unitaria<sup>1</sup>.

$$|\nu_\alpha\rangle = u_{\alpha i} |\nu_i\rangle. \quad (4-1)$$

Donde la suma es sobre el índice repetido y  $u_{\alpha i}$  denota el elemento  $\alpha i$  de la matriz unitaria  $\mathbf{u}$ . La relación para antineutrinos es exactamente la misma pero con el complejo conjugado de los elementos de la matriz de mezcla  $|\bar{\nu}_\alpha\rangle = u_{\alpha i}^* |\bar{\nu}_i\rangle$ . La evolución en el tiempo del eigenestado de sabor viene de la evolución en el tiempo de los eigenestados de masa. En unidades naturales ( $\hbar=c=1$ ), tenemos que

$$|\nu_\alpha\rangle = u_{\alpha i} |\nu_i\rangle e^{-iE_i t}. \quad (4-2)$$

La amplitud de probabilidad de encontrar un neutrino de sabor inicial  $|\nu_\alpha\rangle$  en el estado de sabor  $|\nu_\beta\rangle$  en el tiempo  $t$  es

$$\langle \nu_\beta | \nu_\alpha \rangle = \langle \nu_j | u_{j\beta}^\dagger e^{-iE_j t} u_{\alpha i} |\nu_i\rangle \quad (4-3)$$

$$= e^{-iE_i t} u_{\alpha i} u_{\beta i}^*. \quad (4-4)$$

Por lo tanto, la probabilidad de que un  $\nu_\beta$  sea encontrado en un  $\nu_\alpha$  inicial después de un tiempo  $t$  es

$$P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta} = |\langle \nu_\beta | \nu_\alpha \rangle|^2 \quad (4-5)$$

$$= \sum_{i,j} u_{\beta i} u_{\alpha i}^* u_{\beta j}^* u_{\alpha j} e^{-i(E_i - E_j)t} \quad (4-6)$$

$$= \sum_{i,j} |u_{\beta i} u_{\alpha i}^* u_{\beta j}^* u_{\alpha j}| \cos((E_i - E_j)t - \phi_{\beta\alpha ij}), \quad (4-7)$$

---

<sup>1</sup>Una matriz  $M$  es unitaria si  $MM^\dagger = I$

donde  $\phi_{\beta\alpha ij} = \arg(u_{\beta i} u_{\alpha i}^* u_{\beta j}^* u_{\alpha j})$ . Ahora para la mayoría de los casos prácticos de la oscilación del neutrino involucran neutrinos ultrarelativistas ( $pc \gg mc^2$ ), podemos usar la aproximación  $E_i \approx |\mathbf{p}| + \frac{m_i^2}{2|\mathbf{p}|} \approx E + \frac{m_i^2}{2E}$ . Y por lo que,  $E_i - E_j = \frac{m_i^2 - m_j^2}{2E} = \frac{\Delta_{ij}^2}{2E}$ . Donde  $E$ , es la energía total de la partícula (o mezcla).

Para este caso  $x \equiv t$ , por lo tanto

$$P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(t) \rightarrow P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(x) \quad (4-8)$$

$$= \sum_{i,j} |u_{\beta i} u_{\alpha i}^* u_{\beta j}^* u_{\alpha j}| \cos\left(\frac{2\pi x}{L_{ij}} - \phi_{\beta\alpha ij}\right). \quad (4-9)$$

Donde,  $L_{ij}$  es definida como longitud de oscilación [16]  $L_{ij} = \frac{4\pi E}{m_i^2 - m_j^2} = \frac{4\pi E}{\Delta_{ij}^2}$ .

## 4.2. Oscilación en vacío con dos sabores

Consideremos la situación de oscilación entre dos sabores de neutrinos  $|\nu_e\rangle$  y  $|\nu_\mu\rangle$ . Sean  $|\nu_1\rangle$ ,  $|\nu_2\rangle$  eigenestados de masa con energías  $E_1$  y  $E_2$  respectivamente. La matriz de transformación  $u$  entre los eigenestados de masa y de sabor toma la forma

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Ya que,  $u$  es ahora una matriz real unitaria y por lo tanto, la probabilidad de conversión es,

$$P_{\nu_e \rightarrow \nu_\mu}(x) = \sin^2 2\theta \sin^2\left(\frac{\Delta_{21}^2 x}{4E}\right) = \sin^2 2\theta \sin^2\left(\frac{\pi x}{L_{21}}\right). \quad (4-10)$$

La expresión de arriba muestra el comportamiento oscilatorio en  $\frac{x}{E}$ , explicando por que usamos el término oscilación del neutrino. Además la amplitud  $\sin^2 2\theta$  contiene la constante del ángulo de mezcla y únicamente ángulos de mezcla distintos de cero dan lugar a una mezcla exitosa. El otro término oscilatorio  $\sin^2\left(\frac{\Delta_{21}^2 x}{4E}\right)$  muestra la importancia de la diferencia de masas cuadradas sea no cero en las oscilaciones del neutrino. Por lo que, la existencia de la oscilación del neutrino significa la existencia de que al menos una masa del neutrino es no cero. Así como, la mezcla de los neutrinos. Uno puede ver algunos de los casos límites de la Ec. 4-10 que involucran al término longitud de oscilación  $L_{21}$  para entender su importancia:

- (I) Si  $x \ll L_{21}$  entonces no hay oscilación.
- (II) Si  $x$  es un múltiplo entero de  $L_{21}$ ,  $P_{\nu_e \rightarrow \nu_\mu} = 0$  i.e.  $P_{\nu_e \rightarrow \nu_e} = 1$

(III) Si  $x$  es distinto de un múltiplo entero de  $L_{21}$  entonces la oscilación toma lugar.

(IV) Si  $x \gg L_{21}$  entonces la probabilidad de transición oscila muy rápido, resultando en la probabilidad media en el detector,  $\langle P_{\nu_e \rightarrow \nu_\mu} \rangle = \frac{1}{2} \sin^2 2\theta$ .

### 4.3. Violación CP y T

Como discutimos al comienzo, en la oscilación de dos sabores, tenemos T-Invariancia i.e.,  $P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta} = P_{\nu_\beta \rightarrow \nu_\alpha}$  como una consecuencia directa de que la probabilidad total es uno (de manera que, también tenemos CP-Invariancia i.e.,  $P_{\bar{\nu}_\alpha \rightarrow \bar{\nu}_\beta} = P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}$  si asumimos la CPT-Invariancia, i.e.,  $P_{\bar{\nu}_\alpha \rightarrow \bar{\nu}_\beta} = P_{\nu_\beta \rightarrow \nu_\alpha}$ ), esto ya no es verdad en el caso de la oscilación de tres sabores como veremos adelante. Las condiciones de probabilidad total igual a uno para tres sabores son dadas por

$$P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_e} + P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\mu} + P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\tau} = P_{\nu_e \rightarrow \nu_\alpha} + P_{\nu_\mu \rightarrow \nu_\alpha} + P_{\nu_\tau \rightarrow \nu_\alpha} = 1, \quad (4-11)$$

donde  $\alpha \in \{e, \mu, \tau\}$ . Si definimos las T-Asimetrías como

$$\Delta P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta} = P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta} - P_{\nu_\beta \rightarrow \nu_\alpha}, \quad (4-12)$$

entonces es aparente que

$$\sum_{\beta} \Delta P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta} = \sum_{\beta} (P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta} - P_{\nu_\beta \rightarrow \nu_\alpha}) = 1 - 1 = 0. \quad (4-13)$$

Ya que,  $\Delta P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta} = -\Delta P_{\nu_\beta \rightarrow \nu_\alpha}$ . Así que, únicamente existen tres T-Asimetrías que podrían ser independientes. El número de condiciones en la Ec. (4-13) parecería ser tres, una para cada una de las  $\alpha$ . Sin embargo, debido a la antisimetría de  $\Delta P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}$ , la Ec. (4-13) únicamente constituye dos condiciones independientes de  $\Delta P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}$ . Ya que, tenemos tres diferente T-Asimetrías sobre las cuales imponemos dos condiciones, existirán únicamente una asimetría independiente después de haber tomado en cuentas las condiciones [26] i.e.,

$$\Delta P_{\nu_e \rightarrow \nu_\mu} = -\Delta P_{\nu_e \rightarrow \nu_\tau} = \Delta P_{\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau} = -\Delta P_{\nu_\mu \rightarrow \nu_e} = \Delta P_{\nu_\tau \rightarrow \nu_e} = -\Delta P_{\nu_\tau \rightarrow \nu_\mu}. \quad (4-14)$$

De la parametrización estándar de la matriz de mezcla del leptón, tenemos

$$\Delta P_{\nu_e \rightarrow \nu_\mu} = 4J \left( \sin \left( \frac{\Delta m_{21}^2}{2E} L \right) + \sin \left( \frac{\Delta_{13}^2}{2E} L \right) \right), \quad (4-15)$$

donde  $J$  es el invariante de Jarlskong [13]. En el caso general de oscilaciones entre  $n$  sabores de neutrinos, es fácil mostrar que el mismo argumento que el de arriba conduce a  $n(n-2)(n-1)/2$  CP-Asimetrías independientes, i.e., el mismo número que el número de violación de CP de las fases de Dirac en la matriz de mezcla leptónica. La violación de las simetrías CP y T en la oscilación del neutrino en vacío primero fueron discutidas por Cabibbo [5], donde también se discute el hecho de que las fases de Majorana no influyen en las probabilidades de oscilación.

#### 4.4. Oscilación en vacío con tres sabores

En esta sección discutiremos muy brevemente acerca de la oscilación en vacío entre tres sabores. Para el simple caso de conservación CP, uno puede deducir la probabilidad de que un  $|\nu_\beta\rangle$  sea encontrado a una distancia  $x$  si inicialmente partió como un  $|\nu_\alpha\rangle$  [16].

$$P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(x) = \sum_{i=j} u_{\beta i}^2 u_{\alpha i}^2 + 2 \sum_{i>j} u_{\beta i} u_{\alpha i} u_{\beta j} u_{\alpha j} \cos\left(\frac{\Delta_{ij}^2 x}{2E}\right) \quad (4-16)$$

$$= \left(\sum_i u_{\beta i} u_{\alpha i}\right)^2 - 4 \sum_{i>j} u_{\beta i} u_{\alpha i} u_{\beta j} u_{\alpha j} \sin^2\left(\frac{\Delta_{ij}^2 x}{4E}\right). \quad (4-17)$$

La cual es equivalente a la Ec.(4-19) pero esta vez abrimos la suma. Si uno asume que

$$\frac{\Delta_{21}^2 x}{2E} \ll 1,$$

i.e.,  $m_1 \sim m_2$  y  $\Delta_{32}^2 \approx \Delta_{31}^2 \gg \Delta_{21}^2$ .

$$P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(x) = \delta_{\alpha\beta} - 4u_{\alpha 3}u_{\beta 3}(\delta_{\alpha\beta} - u_{\alpha 3}u_{\beta 3}) \sin^2\left(\frac{\Delta_{32}^2 x}{4E}\right). \quad (4-18)$$

Ahora la matriz de mezcla para 3 sabores (o generaciones) con violación CP es

$$u = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & -s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ s_{12}c_{23} + c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & -s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}s_{23} + s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix} \quad (4-19)$$

Aquí  $c_{ij} = \cos\theta_{ij}$  y  $s_{ij} = \sin\theta_{ij}$  y  $\delta$  es la fase CP. Si uno ignora la violación CP i.e., la fase CP  $\delta = 0$  o  $\pi$  la probabilidad de sobrevivir de  $\nu_e$  es

$$P_{\nu_e \rightarrow \nu_e}(x) = 1 - \sin^2 2\theta_{13} \sin^2\left(\frac{\Delta_{32}^2 x}{4E}\right). \quad (4-20)$$

Esto coincide con la probabilidad de sobrevivir en el caso de dos sabores si asumimos que las diferencias de masas cuadradas es tal que  $\Delta_{31}^2 \approx \Delta_{32}^2$  y el ángulo de mezcla es  $\theta_{13}$ . Considerando el otro caso límite:

$$\frac{\Delta_{31}^2}{2E}x \approx \frac{\Delta_{32}^2}{2E}x \gg 1.$$

En este caso las oscilaciones debido a  $\Delta_{31}^2$  y  $\Delta_{32}^2$  son muy rápidas y conducirán a un efecto promedio.

Parámetro de Oscilación	Mejor Ajuste $\pm 1\sigma$
$\Delta m_{21}^2$	$7.65^{+0.23}_{-0.20}$
$ \Delta m_{31}^2 $	$2.40^{+0.11}_{-0.12}$
$\sin^2 \theta_{12}$	$0.304^{+0.022}_{-0.016}$
$\sin^2 \theta_{23}$	$0.500^{+0.07}_{-0.06}$
$\sin^2 \theta_{13}$	$0.010^{+0.016}_{-0.011}$

Tabla 4-1: Valores actuales de los mejores ajustes a los parámetros de oscilación de tres sabores de neutrinos con errores de  $1\sigma$ . Estos ajustes son obtenidos de un análisis global de los experimentos con reactores (KamLAND y CHOOZ) y aceleradores (K2K y MINOS). Las diferencias en los cuadrados de las masas son dadas en unidades de  $10^{-5}eV^2$  y  $10^{-3}eV^2$  respectivamente.

Entonces la probabilidad de sobrevivir llega a ser

$$P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(x) = \delta_{\alpha\beta} - 2u_{\alpha 3}u_{\beta 3}(\delta_{\alpha\beta} - u_{\alpha 3}u_{\beta 3}) - 4u_{\alpha 1}u_{\beta 1}u_{\alpha 2}u_{\beta 2} \sin^2 \left( \frac{\Delta_{21}^2 x}{4E} \right). \quad (4-21)$$

De aquí la probabilidad de sobrevivir para  $\nu_e$  es:

$$P_{\nu_e \rightarrow \nu_e} = \cos^4 \theta_{13} \left( 1 - \sin^2 2\theta_{12} \sin^2 \left( \frac{\Delta_{21}^2 x}{4E} \right) \right) + \sin^4 \theta_{13}. \quad (4-22)$$

De nuevo asumiendo  $\theta_{13}$  conducirá a los mismos resultados que en el caso de dos sabores i.e.

$$P_{\nu_e \rightarrow \nu_e}(x) \rightarrow 1 - \sin^2 \theta_{12} \sin^2 \left( \frac{\Delta_{21}^2 x}{4E} \right). \quad (4-23)$$

Resumiendo tenemos cinco parámetros de oscilación para un análisis de tres sabores sin violación CP: Estos parámetros son las dos diferencias de masas cuadradas y los tres ángulos de mezcla. Fuera de eso únicamente cuatro están más o menos bien determinados. Los parámetros en neutrinos atmosféricos ( $\Delta_{31}^2, \theta_{23}$ ) y solares ( $\Delta_{21}^2, \theta_{12}$ ) son conocidos de los experimentos de oscilación, mientras que el signo de  $\Delta_{31}^2$  permanece desconocido. Los mejores ajustes actuales en los límites de los parámetros son dados en

la tabla 4-1. Sin embargo, de los experimentos solares sabemos que la diferencia en el cuadrado de las masas ( $\Delta_{21}^2 = \Delta_{sol}^2$ ), es positiva, mientras que el signo de ( $\Delta_{31}^2$  o  $\Delta_{atm}^2$ ), es todavía desconocido. Este signo determina lo que es llamado la jerarquía de masa, ( $\Delta_{31}^2 = |\Delta_{31}^2|$ ) corresponde a la jerarquía normal, y ( $\Delta_{31}^2 = -|\Delta_{31}^2|$ ) a la jerarquía invertida.

## 4.5. Oscilación en materia del neutrino

La oscilación de los neutrinos en materia es significativamente diferente de la oscilación en vacío. La mayoría de los efectos de la materia más importantes en las oscilaciones del neutrino es el aumento de la resonancia en la probabilidad de oscilación; el efecto Mikheyev-Smirnov-Wolfenstein (MSW) [15] [27]. La probabilidad de conversión del neutrino en vacío puede ir hasta un máximo de  $\sin^2 2\theta$ , y para ángulos de mezcla pequeños está siempre pequeño. La materia puede aumentar la mezcla del neutrino y la probabilidad puede estar cerca de 1. Incluso, cuando el ángulo de mezcla es muy pequeño. Las oscilaciones del neutrino en una supernova y en un ambiente solar son fuertemente afectadas por la materia. Los neutrinos pueden ser absorbidos y dispersados por los constituyentes de la materia y por lo tanto, su energía y momento puede cambiar. Pero las probabilidades de estos procesos son típicamente muy pequeñas. Ya que, son proporcionales al cuadrado de la constante de Fermi  $G_F$ . Los neutrinos pueden también experimentar dispersiones elásticas i.e., su momento permanece igual. Este proceso es coherente y crea un potencial medio ( $V$ ) para neutrinos, y este potencial ( $V$ ) es proporcional a las densidades de número de los dispersores. Los potenciales son del orden de  $G_F$ . Así que, son bastantes pequeños, pero si los comparamos con las diferencias de energías cinéticas de los neutrinos  $\Delta_{ij}^2/2E$  son comparables o incluso más grandes y pueden afectar a la oscilación del neutrino [16].

### 4.5.1. Evolución de los estados del neutrino en materia

Todos los tres sabores  $\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$  ( $\nu_x$  en la figura: Interacción  $Z^0$ ) de los neutrinos pueden interactuar con electrones, protones y neutrones ( $f$  en la figura: Interacción  $Z^0$ ) de la materia a través de la corriente neutra (NC) mediada por el boson  $Z^0$ , mientras que el  $\nu_e$  puede tener interacciones de corriente cargada (CC) con los  $e^-$  del medio (ya que, en un medio normal no hay  $\mu$ , ni  $\tau$ ) y estas son mediadas por el intercambio de  $W^\pm$  ver los diagramas de Feynman de abajo [16].



Consideremos la interacción CC. A baja energía el Hamiltoniano efectivo es

$$H_{CC} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} (\bar{e}\gamma_\mu(1 - \gamma_5)\nu_e) (\bar{\nu}_e\gamma^\mu(1 - \gamma_5)e), \quad (4-24)$$

$$= \frac{G_F}{\sqrt{2}} (\bar{e}\gamma_\mu(1 - \gamma_5)e) (\bar{\nu}_e\gamma^\mu(1 - \gamma_5)\nu_e) \text{ [Por la transformación Fierz]}. \quad (4-25)$$

Para obtener el potencial inducido de materia del  $\nu_e$ , fijamos las variables asociadas con  $\nu_e$  e integramos sobre las variables que corresponden a los electrones. Por lo tanto,

$$H_{eff}(\nu_e) = \langle H_{CC} \rangle_{electrón} = \bar{\nu}_e V_e \nu_e.$$

$$\begin{aligned} \langle \bar{e}\gamma_0 e \rangle &= \langle e^+ e \rangle = N_e, & \langle \bar{e}\gamma e \rangle &= \langle V_e \rangle, \\ \langle \bar{e}\gamma_0\gamma_5 e \rangle &= \left\langle \frac{\vec{\sigma}_e \cdot \vec{p}_e}{E} \right\rangle, & \langle \bar{e}\gamma\gamma_5 e \rangle &= \langle \sigma_e \rangle, \end{aligned}$$

Donde,  $N_e$  es la densidad de número de electrones. Para un medio no polarizado de momento total cero donde únicamente el primer término de las expresiones de arriba sobrevive. Por lo que obtenemos,

$$(V_e)_{CC} = V_{CC} = \sqrt{2}G_F N_e.$$

Similarmente para la contribución NC,  $V_{NC}$  los potenciales inducidos a los neutrinos por la materia, pueden también ser encontrados. Cuando las interacciones NC son independientes del sabor del neutrino, estas tiene la misma contribución para los tres sabores. Para un medio eléctricamente neutro las densidades de número de protones y electrones son las mismas, de aquí que la contribución a  $V_{NC}$  se cancela. La contribución debido a las dispersiones NC de los neutrinos da  $(V_a)_{NC} = -G_F N_n / \sqrt{2}$  donde,  $N_n$  es la densidad de número de neutrones. Todo junto tenemos,  $V_e = \sqrt{2}G_F (N_e - \frac{N_n}{2})$ ,  $V_\mu = V_\tau = \sqrt{2}G_F (-\frac{N_n}{2})$ . En caso de antineutrinos,  $V_a \rightarrow -V_a$ . Para la evolución de un sistema de neutrinos oscilantes en materia tenemos que regresar a la base de sabor. Ya que, el potencial efectivo de los neutrinos es diagonal en

esta base. Consideremos el caso de dos sabores  $\nu_e$  y  $\nu_\mu$ ,

$$\begin{aligned} |\nu_\alpha\rangle &= u_{\alpha i} |\nu_i\rangle \quad [\alpha = e, \mu], \\ u &= \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

En ausencia de materia la ecuación de evolución en la base de masas es

$$i \frac{d}{dt} |\nu_j\rangle = H |\nu_j\rangle \quad [j = 1, 2]. \quad (4-26)$$

H es diagonal en esta base

$$\begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix}. \quad (4-27)$$

Para la base de sabor la ecuación de evolución es,

$$i \frac{d}{dt} |\nu_\alpha(t)\rangle = \tilde{H} |\nu_\alpha(t)\rangle. \quad (4-28)$$

Expandiendo los eigenestados de sabor en término de los eigenestados de masa,

$$i \frac{d}{dt} |\nu_\alpha(t)\rangle = i \frac{d}{dt} u_{\alpha i} |\nu_i\rangle = i u_{\alpha i} \frac{d}{dt} |\nu_i\rangle = u_{\alpha i} H |\nu_i\rangle = u_{\alpha i} H u^\dagger |\nu_\alpha(t)\rangle, \quad (4-29)$$

$$i \frac{d}{dt} |\nu_\alpha(t)\rangle = u H u^\dagger |\nu_\alpha(t)\rangle.$$

Comparando,

$$\tilde{H} = u H u^\dagger. \quad (4-30)$$

Para neutrinos relativistas

$$E_i \approx p + \frac{m_i^2}{2E}.$$

Donde E es la energía total de la partícula (o mezcla). Por lo tanto,

$$H = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{m_1^2}{2E} & 0 \\ 0 & \frac{m_2^2}{2E} \end{pmatrix}. \quad (4-31)$$

Así que, la ecuación de evolución es

$$i \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} |\nu_e(t)\rangle \\ |\nu_\mu(t)\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left( p + \frac{m_1^2 + m_2^2}{2E} \right) - \frac{\Delta_{21}^2}{4E} \cos 2\theta & \frac{\Delta_{21}^2}{4E} \sin 2\theta \\ \frac{\Delta_{21}^2}{4E} \sin 2\theta & \left( p + \frac{m_1^2 + m_2^2}{2E} \right) - \frac{\Delta_{21}^2}{4E} \cos 2\theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} |\nu_e(t)\rangle \\ |\nu_\mu(t)\rangle \end{pmatrix}.$$

Ya que, los términos dentro de los primeros paréntesis en los elementos de la diagonal modifican únicamente la fase común, y debido a que las oscilaciones del neutrino dependen de las diferencias de fases, este término no tienen efecto en la evolución. Por lo tanto, la ecuación de evolución en vacío en la base de sabor es

$$i \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} |\nu_e(t)\rangle \\ |\nu_\mu(t)\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\Delta_{21}^2}{4E} \cos 2\theta & \frac{\Delta_{21}^2}{4E} \sin 2\theta \\ \frac{\Delta_{21}^2}{4E} \sin 2\theta & \frac{\Delta_{21}^2}{4E} \cos 2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\nu_e(t)\rangle \\ |\nu_\mu(t)\rangle \end{pmatrix}.$$

Mientras que la materia influye en la ecuación de evolución cuando hay electrones libres en la materia (y no hay muones libres) uno tiene que adherir  $V_e$  a los primeros elementos de la diagonal del Hamiltoniano efectivo  $\tilde{H}$  en la ecuación de arriba.

$$i \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} |\nu_e(t)\rangle \\ |\nu_\mu(t)\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\Delta_{21}^2}{4E} \cos 2\theta + \sqrt{2}G_F N_e & \frac{\Delta_{21}^2}{4E} \sin 2\theta \\ \frac{\Delta_{21}^2}{4E} \sin 2\theta & \frac{\Delta_{21}^2}{4E} \cos 2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\nu_e(t)\rangle \\ |\nu_\mu(t)\rangle \end{pmatrix}.$$

La ecuación de evolución depende de  $N_e$ , la cual puede depender de las coordenadas y del tiempo. Consideraremos dos casos uno con  $N_e$  constante y el otro con  $N_e$  variable con la distancia [16].

### 4.5.2. Caso de densidad constante

Aquí tenemos que  $N_e$  es constante. La diagonalización del Hamiltoniano efectivo da los siguientes eigenestados  $(\nu_A, \nu_B)$  en materia.

$$\begin{aligned} \nu_A &= \nu_e \cos \phi + \nu_\mu \sin \phi, \\ \nu_B &= -\nu_e \sin \phi + \nu_\mu \cos \phi, \end{aligned}$$

donde, el ángulo de mezcla  $\phi$  es dado por

$$\tan 2\phi = \frac{2\tilde{H}_{12}}{\tilde{H}_{22} - \tilde{H}_{11}} = \frac{(\Delta_{21}^2/2E) \sin 2\theta}{(\Delta_{21}^2/2E) \cos 2\theta - \sqrt{2}G_F N_e}. \quad (4-32)$$

Este  $\phi$  es diferente del ángulo de mezcla de vacío  $\theta$ ,  $\nu_A$  y  $\nu_B$  no coinciden con los eigenestados  $\nu_1$  y  $\nu_2$ . La diferencia en los eigenvalores de energía de  $\nu$  en materia es

$$E_A - E_B = \sqrt{\left(\frac{\Delta_{21}^2}{2E} \cos 2\theta - \sqrt{2}G_F N_e\right)^2 + \left(\frac{\Delta_{21}^2}{2E}\right)^2} \sin^2 2\theta. \quad (4-33)$$

Por lo tanto, la probabilidad de conversión

$$P_{\nu_e \rightarrow \nu_\mu}(x) = \sin^2 2\phi \sin^2 \left( \pi \frac{x}{L_{mat}} \right), \quad (4-34)$$

donde,

$$L_{mat} = \frac{2\pi}{E_A - E_B} = \frac{2\pi}{\sqrt{\left(\frac{\Delta_{21}^2}{2E} \cos 2\theta - \sqrt{2}G_F N_e\right)^2 + \left(\frac{\Delta_{21}^2}{2E}\right) \sin^2 2\theta}}. \quad (4-35)$$

En el límite  $N_e \sim 0$ , podemos recuperar la probabilidad de oscilación en vacío. Cuando entonces,  $\phi \sim \theta$  y  $L_{mat} \sim L_{osc}$ . De la formula del ángulo de mezcla uno puede obtener

$$\sin^2 2\phi = \frac{\frac{\Delta_{21}^2}{2E} \sin^2 2\theta}{(E_A - E_B)^2}. \quad (4-36)$$

Así que, esta tiene una forma de resonancia típica, con valor máximo  $\sin^2 2\phi = 1$  obtenido para

$$N_e = \frac{\frac{\Delta_{21}^2}{2E} \cos 2\theta}{2\sqrt{2}G_F E}. \quad (4-37)$$

Esto es llamado condición de resonancia MSW y en esta condición la mezcla en materia es máxima en  $\phi = 45^\circ$  e independiente del ángulo de mezcla en vacío  $\theta$ . Así que, incluso para  $\theta$  muy pequeños (ángulo de mezcla en vacío) uno puede incrementar la resonancia de oscilación del neutrino. De nuevo la resonancia necesita,

$$\Delta_{21}^2 \cos 2\theta > 0, \quad (4-38)$$

i.e.,  $(m_2^2 - m_1^2)(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) > 0$ . Por lo tanto, la resonancia MSW de oscilación del neutrino requiere

(I) Si  $m_2 > m_1$  uno necesita que  $\cos^2 \theta > \sin^2 \theta$ .

(II) Si  $m_2 < m_1$  entonces  $\cos^2 \theta < \sin^2 \theta$ .

Si uno elige la convención de  $\cos 2\theta > 0$  entonces  $\Delta_{21}^2 > 0$ . Para antineutrinos uno tiene  $\Delta_{21}^2 < 0$ . Así que, para un signo dado en  $\Delta_{21}^2$  la materia no influye en la resonancias en ambos en  $\nu$  y  $\bar{\nu}$  [16].

### 4.5.3. Caso de densidad variable

Frecuentemente en situaciones realistas un haz de neutrinos no monocromáticos se propaga en un medio de densidad variable. Entonces para una diferencia de masas cuadradas en el correcto orden de magnitud, el neutrino encontrará una densidad de materia para la cual la resonancia es posible. Si el haz de neutrinos es monocromático, incluso entonces la resonancia ocurre. Así que, la condición de resonancia MSW no involucra ningún cambio fino. En la oscilación en materia con densidad no uniforme, la ecuación de evolución algunas veces permite una solución analítica y en otras ocasiones tiene que ser resuelta numéricamente. Sin embargo, existe un caso particularmente importante en el cual se puede dar una solución analítica aproximada. Este es el caso en donde la densidad varía lentamente (adiabáticamente).

Consideremos el nacimiento de  $\nu_e$  en materia con densidad más allá de la resonancia MSW, y asumimos que la densidad de materia está decreciendo monótonamente. Del ángulo de mezcla dado por la Ec.(4.5.2) tenemos

$$\tan 2\phi = \frac{(\Delta_{21}^2/2E) \sin 2\theta}{(\Delta_{21}^2/2E) \cos 2\theta - \sqrt{2}G_F N_e},$$

Así que, de esta ecuación se sigue que:

- (I) El ángulo de mezcla inicial ( $\phi_i$ ) en materia en un punto de producción  $\phi \approx 90^\circ$  i.e., la mezcla es fuertemente suprimida por la materia.
- (II) Cuando los neutrinos se mueven hacia densidades pequeñas la mezcla se incrementa y llega a ser máxima en el punto de resonancia ( $R$ ). Así que, la mezcla en la resonancia ( $\phi_R$ ) =  $45^\circ$ .
- (III) En densidades pequeñas el ángulo de mezcla final ( $\phi_f$ ) de nuevo decrece i.e., ( $\phi_f = \theta$ ) (ángulo de mezcla en vacío) cuando  $N_e \ll N_{e(MSW)}$ .

De

$$\begin{pmatrix} \nu_A \\ \nu_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \end{pmatrix},$$

Uno puede decir, que en el punto de producción ( $\phi \approx 90^\circ$ )  $\nu_e$  casi coincide con  $\nu_B$ . Si la densidad de materia cambia lo suficientemente lento (adiabáticamente) a lo largo del camino del neutrino, el sistema neutrino tiene suficientemente tiempo para ajustarse a sí mismo a las condiciones de cambio externo. En este la transiciones entre  $\nu_A$  y  $\nu_B$  son completamente suprimidas, mientras que la composición de sabor de los eigenestados de materia cambian cuando el neutrino se propaga en la materia. Ya que, el ángulo de mezcla  $\phi$  que determina esta composición es función de la densidad de materia. En el punto final de la evolución del neutrino  $\phi \approx \theta$  entonces los eigenestados  $\nu_B$  en este punto tienen componentes del  $\nu_e$  originalmente producido con peso  $\sin^2 \theta$  y la componente de  $\nu_\mu$  con peso  $\cos^2 \theta$  i.e., la probabilidad de transición es

$$P(\nu_e \rightarrow \nu_\mu) = \cos^2 \theta, \quad (4-39)$$

i.e., en el caso de un ángulo pequeño de mezcla en vacío, uno puede tener casi una completa conversión adiabática de  $\nu_e$  a  $\nu_\mu$ . La Figura 4-2 ilustra los niveles de energía de  $\nu_A$  y  $\nu_B$  junto con las ausencias de mezcla (i.e.,  $\nu_e$  y  $\nu_\mu$ ) como función de la densidad de número del electrón. En el caso de ausencia de mezcla los niveles de energía se cruzan en el punto de resonancia MSW. Sin embargo, cuando la mezcla desaparece los niveles se repelan unos a otros y los niveles resultantes evitan cruzarse. Para pequeñas probabilidades de transición entre dos eigenestados de materia, los neutrinos los cuales son producidos como  $\nu_e$  en densidades altas también se propagan hacia densidades pequeñas [16].



## Capítulo 5

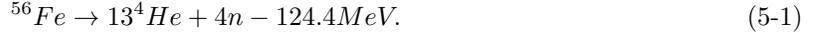
# Neutrinos en supernovas

Para estrellas masivas, el proceso final en la evolución de una estrella es una gigantesca explosión conocida como supernova, dando como resultado que el núcleo estelar llegue a ser una estrella de neutrones o un agujero negro, mientras que el manto explota y los elementos que la componen son arrojados al espacio interestelar. El aspecto de la supernova que nos concierne es la emisión y atrapamiento de neutrinos durante la explosión de supernova. Como veremos, durante la supernova, casi el 99% de la energía es liberada en forma de neutrinos, con únicamente del 1 – 2% de la energía liberada como luminosidad. La supernova 1987 (SN1987A), la cual fue observada en Febrero de 1987 y fue bastante bien estudiada, no únicamente confirmó las teorías existentes sobre supernovas sino también nos planteó desafíos en la física de neutrinos. Es el propósito de este capítulo discutir estos temas.

### 5.1. Estudio cualitativo del colapso en supernova

Mientras las estrellas evolucionan, estas obtienen energía por medio de las combustiones nucleares. Comenzando con la combustión del hidrógeno a helio, el helio al ser más pesado se establece en el núcleo estelar. La duración de este proceso depende de la masa de la estrella; el proceso dura más para estrellas menos masivas y es más corto para estrellas más masivas. Al final del periodo de combustión del hidrógeno, un periodo de contracción gravitacional calienta al núcleo y comienza la fase de combustión de helio a carbón. El carbón siendo más pesado se establecerá en el núcleo estelar con el helio y el hidrógeno alrededor de este. El proceso de contracción y calentamiento se repite y hacia el final de la fase de combustión del helio cuando el carbón comenzará su combustión a neón. Un proceso similar entonces conduce al neón a oxígeno, y el oxígeno a silicio. Si una estrella es más masiva que 5 – 10 masas solares, la combustión del silicio puede comenzar a los  $T \approx 3.4 \times 10^9 K$  dando origen al hierro.

Cuando el núcleo estelar de hierro crece, la masa del núcleo estelar excederá la masa de Chandrasekhar<sup>1</sup> ( $1.4M_{\odot}$ ), a la cual la presión de electrones degenerados de Fermi fallará en soportar el empuje gravitacional y el núcleo estelar comenzará a contraerse y a calentarse. Sin embargo, el hierro es de los núcleos más estables, su combustión no puede conducir a ningún otro núcleo más pesado. En vez, el hierro se fotodesintegrará como sigue:



La fotodesintegración absorbe energía y acelera el colapso aun más. En este tiempo la temperatura es lo suficientemente alta para que los electrones sean absorbidos por los protones para resultar en neutrones y en neutrinos. La absorción del electrón conduce a una mayor pérdida de presión, de nuevo incrementando el ritmo del colapso. Esto incrementa la densidad del núcleo estelar y la temperatura, hasta que el colapso es de repente detenido por la repulsión nuclear, resultando en una especie de rebote. En este proceso de rebote, por medio de un mecanismo no completamente entendido, la envoltura de la estrella explota causando el resplandor que es visto. En el proceso del colapso, el núcleo estelar es cerca de 1.4 a 2 masas solares, que forma una estrella de neutrones (o un agujero negro, si la masa es más grande). El resto de la masa de la estrella es expulsada en el espacio intergaláctico. Cuando el núcleo estelar colapsa, este es sometido a una mayor fuerza gravitacional, así que este libera la energía extra. La energía que se libera  $\Delta E$  es dada por

$$\Delta E = \left( -\frac{G_N M^2}{R} \right)_{estrella} - \left( -\frac{G_N M^2}{R} \right)_{estrella\ de\ neutrones}. \quad (5-2)$$

Note que el  $R_{estrella}$  es de  $10^{10}cm$  de veces, mientras que una estrella de neutrones (NS) tiene un radio de únicamente de unos pocos kilómetros. Por lo tanto, incluso pensando que la  $M_{estrella}$  es más grande que la  $M_{NS}$ , el  $\Delta E^2$  es dominado por el segundo termino y tenemos que:

$$\Delta E = 5.2 \times 10^{53} \text{erg} \cdot \left( \frac{10km}{R_{NS}} \right) \left( \frac{M_{NS}}{1.4M_{\odot}} \right)^2. \quad (5-3)$$

Si la energía de enlace nuclear es cerca de  $3.2\text{MeV}$  por nucleón y el número de núcleos por unidad de masa es  $6 \times 10^{23}$ , entonces la energía total de fotodesintegración es  $M_{NS} \times 6 \times 10^{23} \times 3.2\text{MeV} \approx (6M_{NS}/1.4M_{\odot}) \times 10^{51} \text{erg}$ . La energía cinética en la explosión es

$$\frac{1}{2} M v^2 = 2.5 \times 10^{51} \text{erg} \cdot \left( \frac{M}{10M_{\odot}} \right) \left( \frac{v}{5000km/s} \right)^2, \quad (5-4)$$

en unidades (erg), la cual es muy pequeña incluso bajo las suposiciones extremas en la masa y la velocidad. La energía óptica es aproximadamente menor de ( $\leq 10^{49} \text{erg}$ ). Por lo tanto, es claro que la energía de

<sup>1</sup>La máxima masa que puede soportar una estrella sin colapsar

<sup>2</sup>Donde  $M_{\odot}$  es la masa del Sol.

enlace gravitacional liberada debe ser tomada por los neutrinos (cerca del 99%) [16].

## 5.2. Producción de neutrinos en supernovas

Los neutrinos del núcleo estelar colapsado tienen algunas características únicas, estos llevan información desde la profundidad del núcleo estelar de la SN y mientras emergen interactúan con el manto exterior. Estos neutrinos llevan en su espectro información clave no únicamente acerca del colapso de supernova sino también acerca de las propiedades del neutrino. Que aun no se pueden explorar en el laboratorio. Ahora discutiremos los diferentes estados del colapso del núcleo estelar en SN y la producción de neutrinos [2] [1].

### 5.2.1. Evolución estelar y colapso del núcleo estelar

Una estrella durante su evolución se mantiene en equilibrio por dos fuerzas opuestas. Una es la fuerza gravitacional que trata de colapsar a la estrella y la otra es la presión térmica que trata de expandirla. La estrella atraviesa por una serie de reacciones de combustión nuclear como es descrito abajo.

Al comienzo el hidrógeno en la estrella es transformado en helio a través de reacciones nucleares de fusión, el proceso es exotérmico, i.e., el exceso de masa es convertido en energía. La atracción gravitacional la cual trata de colapsar a la estrella es contrarrestado por la presión de radiación que proviene de las reacciones de fusión. Esta combustión de hidrógeno continua hasta que el hidrógeno en el núcleo estelar se agota. Esto es seguido por una contracción del núcleo estelar la cual calienta el núcleo y a sus capas que lo rodean. Cuando el núcleo llega a ser suficiente caliente los siguientes estados de reacciones de fusión son iniciados secuencialmente, i.e.,  $He$  se fusiona en  $C$ ,  $C$  en  $Ne$ , etc,  $O$  en finalmente  $Si$ . La combustión de silicio conduce a un núcleo estelar de átomos de  ${}_{26}^{56}Fe$  el cual tiene máxima energía de enlace por nucleón y no hay más fusión. Debido a estos estados de combustión la estrella adquiere una estructura de distintas capas de:  $Si$ ,  $S$ ,  $O$ ,  $C$ ,  $He$  conforme se avanza en el radio de la estrella y finalizando con una capa de hidrógeno que envuelve a la estrella. Para estrellas grandes esta estructura de capas se mantiene, mientras que para estrellas del tamaño del Sol se detiene en el estado de combustión de  $He$  mientras que para estrellas más pequeñas esto se detiene con la fusión del hidrógeno. Únicamente las estrellas masivas ( $> 8M_{\odot}$ ) continua hasta la combustión del  $Si$ . Si la masa del núcleo estelar es más del límite de masa de Chandrasekhar ( $M_{Ch}$ ), entonces la presión de electrones degenerados no pueden compensar la presión gravitacional y la estrella colapsa después de alcanzar la fase de producción de hierro en el núcleo estelar. El colapso es iniciado por las reacciones de fotodesintegración y por perder a los neutrinos producidos en la captura del electrón, los cuales ambos reducen la presión de soporte (ver Figura 5-1 panel: “Initial Phase of Collapse”).

Con el colapso del núcleo estelar la densidad se incrementa con el tiempo. Cuando la densidad alcanza el valor de  $10^{11} \text{ gm/cm}^3$ . En densidades tan altas aun los neutrinos que interactúan débilmente consiguen ser dispersados varias veces. Eventualmente estos neutrinos escapan pero el proceso tiene una escala de tiempo mayor que la escala de tiempo del colapso. El atrapamiento de los neutrinos significa efectivamente que la energía no puede salir del núcleo estelar (ver Figura 5-1 panel: “Neutrino Trapping”).

Para un simple modelo uno puede definir una esfera de neutrinos con radio ( $R_\nu$ ) y los neutrinos escapan libremente desde la superficie de la esfera de neutrinos. Más precisamente la esfera de neutrinos es definida a tener una superficie donde la profundidad óptica de los neutrinos es la unidad. Pero ya que los neutrinos no emergen radialmente, la profundidad óptica es considerada a ser  $2/3$  en vez de 1. Este atrapamiento de neutrinos es importante para la evolución restante de la estrella. Después del atrapamiento la mayoría de los neutrinos generados a través de la captura del electrón permanecen en la estrella y por lo tanto, el número de leptones por barion ( $Y_l$ ) en este estado no cambia. Ahora en la parte interior del núcleo estelar el colapso es homogéneo con la velocidad de caída siendo proporcional a la distancia del centro de la estrella. Por lo que, el núcleo estelar interno colapsa subsónicamente y existe un tamaño del radio para el cual la velocidad llega a ser supersónica, en el punto al cual la velocidad es igual a la velocidad del sonido es llamado punto sónico (ver Figura 5-1 panel: “Bounce and Shock Formation”). Por lo que, núcleo estelar interior se desacopla del núcleo estelar superior y colapsa homogéneamente como un todo. Este colapso homogéneo del núcleo estelar continua hasta que la densidad llega a ser alrededor de  $8 \times 10^{14} \text{ g m}^{-3}$ , la cual es aproximadamente 3 veces la densidad nuclear. El colapso se detiene alrededor de esta densidad cuando los núcleos atómicos compactados en el núcleo estelar sienten la repulsión de la fuerza nuclear a una corta distancia. En consecuencia el núcleo estelar interno endurece, lo que conduce a un rebote del núcleo interno, enviando una onda de sonido propagándose exteriormente a través de la materia que está cayendo en el núcleo estelar. Esta onda no consigue ir muy lejos cuando el material cayendo desde el núcleo estelar superior actúa en contra de esta. Por lo que, los materiales que caen tienden acumularse en el punto sónico, dando un aumento a la discontinuidad de la densidad, presión y velocidad. Esto es conocido como onda de choque. Esta onda de choque adquiere más energía con el tiempo y comienza a viajar hacia a fuera del núcleo de hierro.

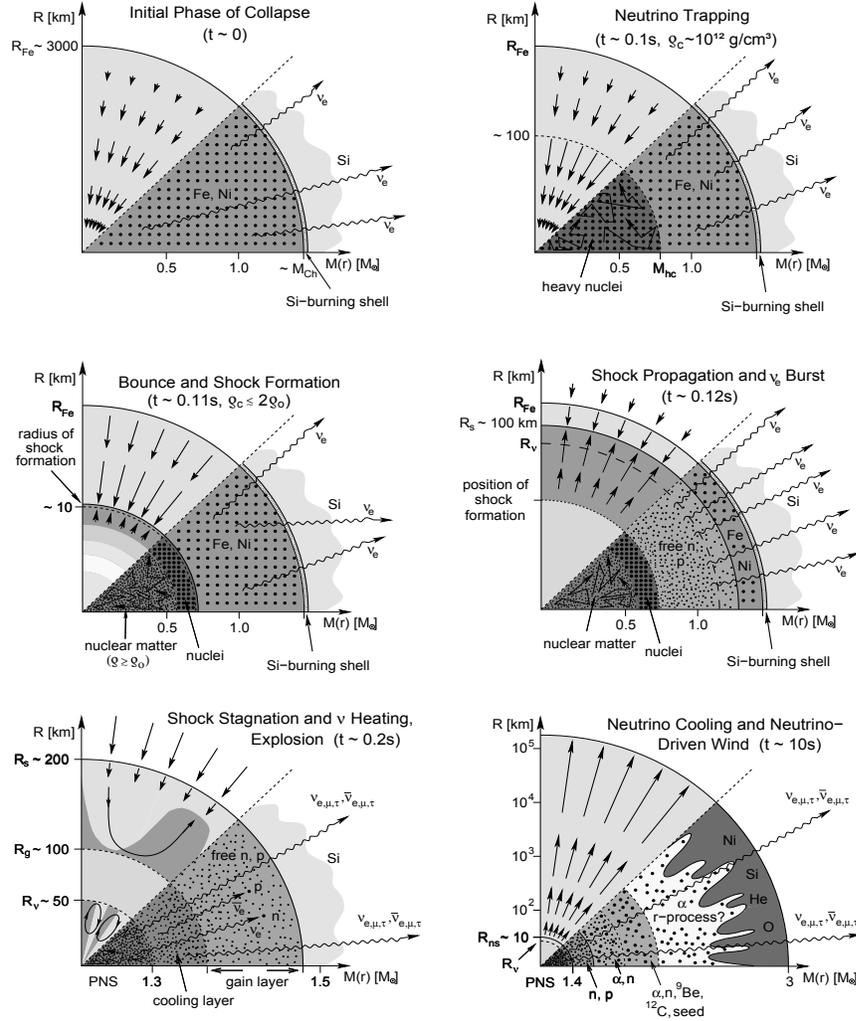
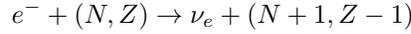
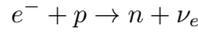


Figura 5-1: Representación esquemática de los diferentes estados de evolución de la supernova. Los paneles muestran los estados desde el comienzo de la explosión supernova hasta la fase de enfriamiento por neutrinos. La mitad superior de los paneles muestran las condiciones dinámicas, donde las flechas representan los vectores de velocidad del medio. La mitad inferior indica la composición del núcleo de la estrella junto con los procesos nuclear y débiles. El eje-X denota la masa en unidades de masa solar ( $M_{\odot}$ ).  $M_{Ch}$  y  $M_{hc}$  significan masa de Chandrasekhar y masa del colapso subsonico respectivamente. El eje vertical indica los correspondientes radios, con  $R_{Fe}$ ,  $R_s$ ,  $R_g$ ,  $R_{ns}$  y  $R_{\nu}$  siendo el radio del núcleo de hierro, radio de choque, radio de ganancia, radio de la estrella de neutrones y radio de la esfera de neutrinos, respectivamente. La Proto-estrella de Neutrones (PNS) tiene máxima densidad ( $\rho$ ) por encima de la densidad de saturación de la materia nuclear ( $\rho_0$ ) [11].

### 5.2.2. Enfriamiento por neutrinos

La onda propagándose hacia el exterior en su camino va disociando a los núcleos en nucleones libres. Los protones que se obtienen debido a esta disociación son candidatos perfectos para la captura del electrón.

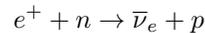
La sección transversal de la captura del electrón sobre protones libres es mucho más grande que sobre núcleos. Por lo tanto, uno puede esperar la creación de un enorme número de neutrinos del electrón en la parte de la estrella afectada por la onda.



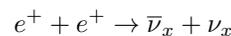
Estos neutrinos están normalmente atrapados dentro de la esfera de neutrinos como neutrinos de neutronización debido a la enorme densidad del medio. Sin embargo ahora algunos de los neutrinos pueden escapar libremente cuando la onda de choque disocia a los núcleos de hierro en la esfera de neutrinos liberando algo de presión. Este repentina emisión de neutrinos es conocida como estallido de neutronización y conduce a un aumento de corto tiempo en la luminosidad. Esto también es conocido como el pronto estallido de los neutrinos cuando la escala de tiempo o duración de este pico es cerca de 10 *ms*. La onda de choque se detiene a unos pocos cientos de kilómetros del centro del núcleo estelar cuando tanto la disociación de los núcleos de hierro y la emisión de neutrinos toman energía del choque (ver Figura 5-1 panel: “Shock Propagation and  $\nu_e$  Burst”). La reactivación de esta onda de choque es todavía un problema que se discute.

### 5.2.3. Neutrinos térmicos

En el centro de la onda de choque en expansión radica una Proto-estrella de Neutrones (PNS). Al final de la explosión de SN la PNS se forma un estrella de neutrones o agujero negro. La PNS tiene una parte más fría por debajo del inicio del radio de choque mientras que arriba de este radio de choque la región afectada es más caliente y menos densa comparada con la parte interior. Los electrones en el manto caliente de la PNS son no degenerados y los positrones térmicos relativista pueden también ser creados (ver Figura 5-1 panel: “Shock Stagnation and  $\nu$  Heating, Explosion”). La presencia de positrones es realmente importante ya que estos pueden aumentar los neutrinos por medio de las interacciones



y reacciones.



Note que contrario al estallido de neutronización los neutrinos y antineutrinos pueden ser producidos en todos los tres sabores denotados por un subíndice *x*. La emisión de estos neutrinos térmicos eventualmente

---

enfían el manto. Mientras tanto el núcleo estelar externo incrementa su masa por encima de la PNS. Los neutrinos térmicos se llevan la energía térmica que se obtuvo de la energía gravitacional liberada en el proceso. Este estado es más grande comparado a la fase del estallido de neutronización y dura entre 10ms y 1s. De manera que el aumento y neutronización/deleptonización da un incremento al enfriamiento de las regiones exteriores. Después de la fase de aumento cuando la explosión comienza, la luminosidad cae exponencialmente. Esta caída es una característica básica de la formación de una estrella de neutrones y de su enfriamiento (ver Figura 5-1 panel: “Neutrino Cooling and Neutrino-Driven Wind”).

## Capítulo 6

# Procesos de Markov

En este capítulo discutimos los procesos de Markov y su aplicación a un modelo basado en un estado idealizado del colapso donde las fuentes de neutrinos se han agotado y la densidad es muy alta de tal manera que el camino libre medio de los neutrinos es más pequeño que el radio del núcleo estelar. Por lo que, están atrapados. Primero comenzaremos dando la definición de un proceso de Markov, para después pasar a sus propiedades y a la demostración de algunas de sus propiedades. Por último a su aplicación.

### Definición

En ciertas situaciones, en física tratamos con estados que evolucionan de manera:

$$X_{\text{estado siguiente}} = f(X_{\text{estado anterior}}).$$

Mientras que un proceso de Markov describe la evolución de un sistema. Pero, en presencia de ruido haciendo que sea aleatorio i.e., ya no es posible predecir de manera exacta cual va ser el siguiente estado. (Muy similar a mecánica cuántica).

$$X_{\text{estado siguiente}} = f(X_{\text{estado anterior}}, \text{ruido}).$$

Aquí el estado del sistema tiene que incluir cualquier información actual que sea relevante para determinar la posible transición que va a tener el futuro. Como un ejemplo determinista consideremos una pelota moviéndose en el espacio todo lo que necesitamos conocer es su posición y velocidad actual para predecir su trayectoria un segundo después. Por lo que, su posición y velocidad definen su estado. En procesos de Markov el estado actual es aleatorio así que vamos a considerarlo como una variable aleatoria.  $X_n$  es el

estado en el que termina el sistema después de  $n$  transiciones,  $n$  segundos<sup>1</sup> después de que el sistema fue puesto en marcha. Así que, el sistema fue puesto en marcha en algún tiempo inicial  $t = 0$  y después de  $n$  transiciones se mueve hasta el estado  $X_n$ . Un proceso de Markov puede tratar tanto con un número finito de estados, como con un espacio continuo de estados que van ocurriendo de manera aleatoria uno tras otro, y con ciertas probabilidades de transición. Donde las probabilidades de transición significan probabilidades condicionales i.e., la probabilidad de que el siguiente estado sea  $i$  dado que actualmente es el estado  $j$ . Lo que hace a un proceso ser un proceso de Markov es la suposición; **sólo importa el estado actual en el que el sistema está, para predecir el posible estado siguiente sin importar que camino siguió**. Matemáticamente se expresa como:

$$\begin{aligned} P_{i \rightarrow j} &= P(X_n = j | X_{n-1} = i), \\ &= P(X_n = j | X_{n-1}, X_{n-2}, \dots, X_0). \end{aligned}$$

Un proceso de Markov ésta bien descrito si:

- (I) Identificamos los diferentes estados del sistema ( $X_n$ ).
- (II) Especificamos todas las posibles transiciones entre los estados.
- (III) Damos las probabilidades de transición.

Una vez que se tienen todas estas piezas de información podemos comenzar hacer predicciones probabilísticas del siguiente tipo: Si el proceso inicio en un estado y dejamos que evolucione un tiempo  $n$ . ¿En qué estado va estar después de ese tiempo?. Ya que, el proceso es aleatorio no hay manera de conocer exactamente donde va estar. Pero podamos dar la probabilidad de que éste en ese estado después de un tiempo  $n$ .

En los procesos de Markov algunas veces aparecen matrices<sup>2</sup> cuadradas con la siguientes características

$$\begin{aligned} A_{ij} &\geq 0 \quad \forall i, j, \\ \sum_{i=1}^n A_{ij} &= 1 \quad \forall j. \end{aligned}$$

Donde a partir de estas características se pueden deducir las siguientes propiedades:

- (a)  $\lambda_1 = 1$  es un eigenvalor.
- (b) El eigenvector  $\mathbf{x}_1$  correspondiente a  $\lambda_1 = 1$  es no-negativo.

---

<sup>1</sup>Aquí el tiempo es discreto

<sup>2</sup>Llamadas matrices de Markov

- (c) Los otros eigenvalores satisfacen que  $|\lambda_i| \leq 1$ .
- (d)  $A$  es una matriz diagonalizable.
- (e)  $A^k$  es una matriz de Markov  $\forall k \in N$ .
- (f) El producto  $A^k u_0$  es un múltiplo del eigenvector  $\mathbf{x}_1$  correspondiente al eigenvalor  $\lambda_1 = 1$  el cual es el estado estable de probabilidades.

Demostraremos las propiedades (a),(e) y (f), las cuales son las mas importantes para el desarrollo de este capitulo [23].

**Demostración de (a).**

Sea  $A$  una matriz de Markov por demostrar que  $\lambda_1 = 1$  es un eigenvalor i.e.,  $|A - 1I| = 0$ .

$$\begin{aligned}
|A - 1I| &= \begin{vmatrix} A_{11} - 1 & A_{12} & \cdots & A_{1j} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} - 1 & \cdots & A_{2j} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots & \vdots \\ A_{i1} & \cdots & \cdots & A_{ij} - 1 & \cdots & A_{in} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & A_{nn} - 1 \end{vmatrix}, \\
&= \begin{vmatrix} (\sum_{i=1}^n A_{i1}) - 1 & (\sum_{i=1}^n A_{i2}) - 1 & \cdots & (\sum_{i=1}^n A_{ij}) - 1 & \cdots & (\sum_{i=1}^n A_{in}) - 1 \\ A_{21} & A_{22} - 1 & \cdots & A_{2j} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots & \vdots \\ A_{i1} & \cdots & \cdots & A_{ij} - 1 & \cdots & A_{in} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & A_{nn} - 1 \end{vmatrix}, \\
&= \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ A_{21} & A_{22} - 1 & \cdots & A_{2j} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots & \vdots \\ A_{i1} & \cdots & \cdots & A_{ij} - 1 & \cdots & \cdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & A_{nn} - 1 \end{vmatrix}, \\
&= 0.
\end{aligned}$$

La segunda igualdad es debido a que el determinante de una matriz no cambia si a uno de sus renglones le sumamos un múltiplo cualquiera de sus otros renglones. La tercera igualdad es por la definición de

una matriz de Markov y la ultimo igualdad es por que el determinante de una matriz con un renglón de ceros es cero.

**Demostración de (e).**

Sea  $A$  una matriz de Markov por demostrar que  $|\lambda_i| \leq 1$ .

La demostración es por contradicción supongamos que existe un  $\lambda_j$  tal que  $|\lambda_j| > 1$ . Por lo que,  $\lambda_j > 1$  o  $\lambda_j < -1$ . Sea  $\lambda_j > 1$  y usando el hecho de que  $A$  es diagonalizable ( $A = S \wedge S^{-1}$ )<sup>3</sup> tenemos:

$$\begin{aligned} A^k &= \overbrace{S \wedge S^{-1}}^A \underbrace{S \wedge S^{-1}}_A \cdots \overbrace{S \wedge S^{-1}}^A, \\ &= S \wedge^K S^{-1}. \end{aligned}$$

Donde  $\wedge^K$  es una matriz diagonal con elementos en la diagonal de la forma  $\lambda_j^k$ . Si  $\lambda_j > 1$  entonces  $\lambda_j^k \gg 1$ . Si  $k$  es lo suficiente grande. Así que,  $A^k$  tiene una columna con un elemento en ella que es infinito. Pero, por la propiedad (e) la suma de la columna que contiene este término debe sumar 1. Por lo que, llegamos a una contradicción.

**Demostración de (f).**

Sea  $A$  una matriz de Markov por demostrar que si  $u_k = A^k u_0 \Rightarrow u_{k \rightarrow \infty} = c_1 \mathbf{x}_1$ .

Ya que,  $A$  es una matriz diagonalizable los eigenvectores forman una base para el espacio de dimensión  $n$ . Por lo que:

$$\begin{aligned} u_0 &= c_1 \mathbf{x}_1 + \cdots + c_n \mathbf{x}_n, \\ u_k &= A^k u_0, \\ &= A^k c_1 \mathbf{x}_1 + \cdots + c_n \mathbf{x}_n, \\ &= c_1 A^k \mathbf{x}_1 + \cdots + c_n A^k \mathbf{x}_n, \\ &= A^k c_1 \lambda_1^k \mathbf{x}_1 + \cdots + c_n \lambda_n^k \mathbf{x}_n. \end{aligned}$$

Si  $k \rightarrow \infty$  entonces, tenemos por la propiedad (e):

$$u_{\text{estado de probabilidades estable}} = c_1 \mathbf{x}_1. \quad (6-1)$$

Lo que se quería demostrar.

<sup>3</sup>Donde  $S$  es la matriz formada con los eigenvectores como columnas de la matriz y  $\wedge$  es una matriz diagonal donde los elementos de la diagonal son los eigenvalores

## 6.1. Teoría de Markov para neutrinos en supernovas

Consideremos el problema en el que las fuentes de neutrinos se han agotado y que la estrella alcanza una densidad<sup>4</sup> de  $\rho_{trap} \approx 10^{12} g/cm^{-3}$ . Donde la energía total que los neutrinos atrapados podrían tomar de la estrella después de salir es

$$E_{cap} \approx 1.6 \times 10^{45} J. \quad (6-2)$$

Esta energía es llevada lejos de la estrella por esta primera ráfaga de neutrinos ver [17]. Si los neutrinos escaparan libremente, la duración de esta ráfaga sería comparable con la escala de tiempo de milisegundos con la caída libre del núcleo estelar. Sin embargo, muchos de los neutrinos interactúan con la densa materia formada por el colapso de núcleo estelar. En efecto, cálculos teóricos indican que el camino libre medio del neutrino ( $\lambda_{trap}$ ) llega a ser comparable con el tamaño del núcleo estelar cuando el radio del núcleo estelar es de unos pocos kilómetros y la densidad es de  $10^{14} kg m^{-3}$ . Debido a esto, la mayoría de los neutrinos estarán atrapados por unos pocos segundos antes de que se difundan fuera del núcleo estelar colapsado. Es fácil estimar la posible energía del neutrino del electrón formado en la captura del electrón. Primero, notemos que un núcleo estelar de hierro con una masa igual a la masa de Chandrasekhar contiene cerca de  $10^{57}$  electrones los cuales podrían producir  $10^{57}$  neutrinos del electrón. Por lo que, la energía del neutrino del electrón ( $E_{trap}$ ) es de aproximadamente (ver [17])

$$(E_{cap} \approx 1.6 \times 10^{45} J) / 10^{57} = 10 MeV. \quad (6-3)$$

En resumen no hay fuentes de neutrinos y no pueden escapar, debido a esto los neutrinos sólo van estar teniendo transiciones de un sabor a otro. Podemos usar la teoría de Markov para determinar las probabilidades de los sabores después de  $n$  transiciones (sólo consideraremos dos sabores). Comenzamos tomando uno de los neutrinos que está atrapado, aquí el sistema es el neutrino y sus estados son los sabores  $\nu_e$  y  $\nu_\mu$ . Por lo que, primero consideremos que el sistema comienza en el estado  $\nu_e$  y lo dejamos

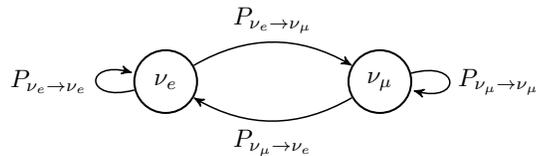


Figura 6-1: Proceso de Markov para un sólo neutrino

evolucionar un tiempo  $n$ . Denotamos la probabilidad de comenzar en el estado  $\nu_e$  y terminar en el estado  $\nu_e$ . Después de un tiempo  $n$  por  $P_{\nu_e \rightarrow \nu_e}(n)$ , esto puede ocurrir de dos maneras; una en la que en el

<sup>4</sup>ver Capitulo 5

tiempo  $n-1$  se encuentre en el estado  $\nu_\mu$  y después desde este estado pase al estado  $\nu_e$  por medio de otra transición. La otra manera es que en tiempo  $n-1$  se encuentre en el estado  $\nu_e$  y después regrese al estado  $\nu_e$  por medio de otra transición. Por lo tanto:

$$P_{\nu_e \rightarrow \nu_e}(n) = P_{\nu_e \rightarrow \nu_e}(n-1)P_{\nu_e \rightarrow \nu_e} + P_{\nu_e \rightarrow \nu_\mu}(n-1)P_{\nu_\mu \rightarrow \nu_e}. \quad (6-4)$$

Mientras que si termina en el estado  $\nu_\mu$  después de un tiempo  $n$  tenemos:

$$P_{\nu_e \rightarrow \nu_\mu}(n) = P_{\nu_e \rightarrow \nu_e}(n-1)P_{\nu_e \rightarrow \nu_\mu} + P_{\nu_e \rightarrow \nu_\mu}(n-1)P_{\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu}. \quad (6-5)$$

Estas dos ecuaciones recursivas se pueden expresar en forma matricial como sigue  $\forall n \in \mathbf{N}$ :

$$\begin{pmatrix} P_{\nu_e \rightarrow \nu_e}(n) \\ P_{\nu_e \rightarrow \nu_\mu}(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{\nu_e \rightarrow \nu_e} & P_{\nu_\mu \rightarrow \nu_e} \\ P_{\nu_e \rightarrow \nu_\mu} & P_{\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{\nu_e \rightarrow \nu_e}(n-1) \\ P_{\nu_e \rightarrow \nu_\mu}(n-1) \end{pmatrix}. \quad (6-6)$$

Denotando  $A$  por

$$A = \begin{pmatrix} P_{\nu_e \rightarrow \nu_e} & P_{\nu_\mu \rightarrow \nu_e} \\ P_{\nu_e \rightarrow \nu_\mu} & P_{\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu} \end{pmatrix}. \quad (6-7)$$

Y  $u_n$  por

$$u_n = \begin{pmatrix} P_{\nu_e \rightarrow \nu_e}(n) \\ P_{\nu_e \rightarrow \nu_\mu}(n) \end{pmatrix} \quad (6-8)$$

Entonces, la ecuación 6-4 toma la forma  $\forall n \in \mathbf{N}$

$$\mathbf{u}_n = A\mathbf{u}_{n-1}. \quad (6-9)$$

Para  $n = 1, \dots, k$  tenemos:

$$\mathbf{u}_1 = A\mathbf{u}_0, \quad (6-10)$$

$$\mathbf{u}_2 = A\mathbf{u}_1 = A^2\mathbf{u}_0, \quad (6-11)$$

$$\vdots, \quad (6-12)$$

$$\mathbf{u}_k = A^k\mathbf{u}_0. \quad (6-13)$$

De la teoría de oscilación del neutrino en materia con densidad constante (ver Capítulo 4) de dos sabores

sabemos que:

$$P_{\nu_e \rightarrow \nu_\mu} = \sin^2 2\phi \sin^2 \left( \pi \frac{\lambda_{trap}}{L_{mat}} \right), \quad (6-14)$$

$$L_{mat} = \frac{2\pi}{\sqrt{\left( \frac{\Delta_{21}^2}{2E_{trap}} \cos 2\theta - \sqrt{2} G_F N_e \right)^2 + \left( \frac{\Delta_{21}^2}{2E} \right) \sin^2 2\theta}}. \quad (6-15)$$

$$P_{\nu_e \rightarrow \nu_\mu} = P_{\nu_\mu \rightarrow \nu_e} \quad (6-16)$$

$$2\phi = \tan^{-1} \left( \frac{(\Delta_{21}^2/2E_{trap}) \sin 2\theta}{(\Delta_{21}^2/2E_{trap}) \cos 2\theta - \sqrt{2} G_F N_e} \right). \quad (6-17)$$

Si consideramos  $\lambda_{trap} \approx 1 \text{ km}$  junto con la ecuación 6-14. Donde  $\phi$  es el ángulo en materia con densidad constante y la Tabla 4-1 (Capítulo 4), tenemos que  $P_{\nu_e \rightarrow \nu_\mu} \approx .75$ .

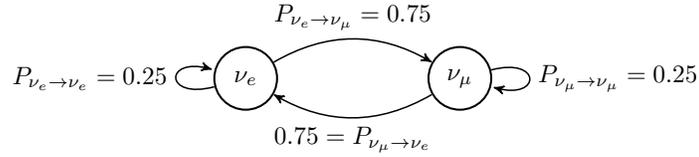


Figura 6-2: Proceso de Markov para un sólo neutrino

Por lo tanto, la Eq. 6-5 se transforma en:

$$A = \begin{pmatrix} 0.25 & 0.75 \\ 0.75 & 0.25 \end{pmatrix}.$$

La matriz  $A$  es una matriz de Markov. Ya que, cada una de sus columnas suman 1 y sus entradas son positivas, porque son probabilidades. De las propiedades de una matriz de Markov en específico de la propiedad (a), sabemos que, uno de sus eigenvalores es  $\lambda_1 = 1$ , y el otro eigenvalor lo obtenemos de la ecuación característica. Por lo que,  $\lambda_2 = -0.5$ . Y sus eigenvectores son, respectivamente

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 0.707107 \\ 0.707107 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Estos eigenvectores forman una base. Por lo tanto, el estado inicial expresado en esta base es

$$\mathbf{u}_0 = \begin{pmatrix} P_{\nu_e \rightarrow \nu_e}(0) \\ P_{\nu_e \rightarrow \nu_\mu}(0) \end{pmatrix}, \quad (6-18)$$

$$\mathbf{u}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (6-19)$$

$$\therefore \mathbf{u}_0 = c_1 \begin{pmatrix} 0.707107 \\ 0.707107 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Con  $c_1 = 1/1.4$ ,  $c_2 = -0.5$ . Por la propiedad (f) sabemos que el estado estable es:

$$u_{\text{estado estable}} = c_1 \mathbf{x}_1, \quad (6-20)$$

$$u_{\text{estado estable}} = 1/1.4 \begin{pmatrix} 0.707107 \\ 0.707107 \end{pmatrix}, \quad (6-21)$$

$$u_{\text{estado estable}} = \begin{pmatrix} 0.505 \\ 0.505 \end{pmatrix}. \quad (6-22)$$

Por lo tanto, después de un tiempo es igualmente probable encontrar un neutrino del electrón que encontrar un neutrino del muón en la esfera de neutrinos, si inicialmente era un neutrino del electrón. Una pregunta que quizás nos venga la mente es, ¿por que después de un tiempo es igualmente probable encontrar un neutrino del electrón que un neutrino del muón?

Para responder esto consideremos el caso de violación de T-Invariante i.e.,  $P_{\nu_e \rightarrow \nu_\mu} \neq P_{\nu_\mu \rightarrow \nu_e}$ . En este caso podríamos tener el siguiente proceso de Markov:

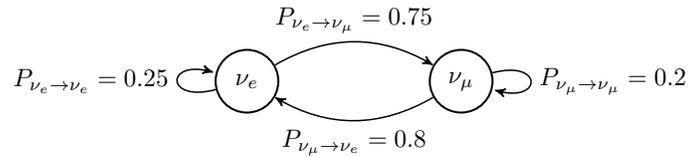


Figura 6-3: Proceso de Markov con violación T-Invariante

Comparando gráficamente los dos procesos de Markov con violación y sin violación T-Invariante tenemos:

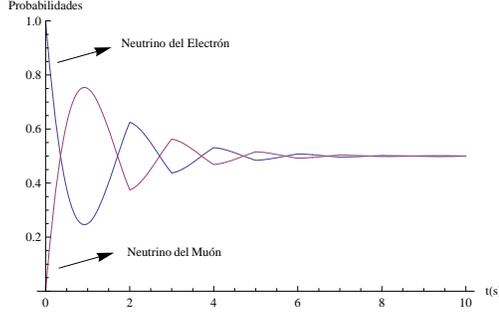


Figura: Proceso de Markov con T-Invariante

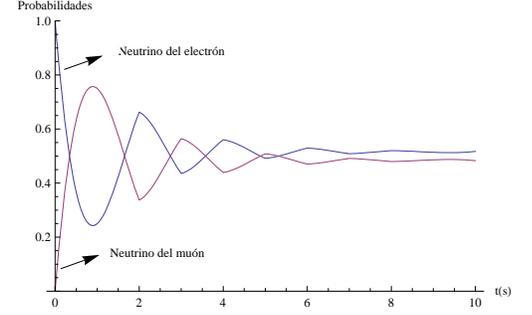


Figura: Proceso de Markov con violación T-Invariante

Donde claramente se nota que los dos procesos converjan al mismo valor es consecuencia directa de la T-Invariante. Ahora hagamos lo mismo. Pero, considerando que el sistema parte del estado  $\nu_\mu$ . Denotando la probabilidad de comenzar en el estado  $\nu_\mu$  y terminar en el estado  $\nu_\mu$  después de un tiempo  $n$  por  $P_{\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu}(n)$ , esto puede ocurrir de dos maneras; una en la que en el tiempo  $n-1$  se encuentre en el estado  $\nu_e$ , y después desde este estado pase al estado  $\nu_\mu$  por medio de otra transición. La otra manera es que en tiempo  $n-1$  se encuentre en el estado  $\nu_\mu$  y después regrese al estado  $\nu_\mu$  por medio de otra transición. Por lo tanto:

$$P_{\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu}(n) = P_{\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu}(n-1)P_{\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu} + P_{\nu_\mu \rightarrow \nu_e}(n-1)P_{\nu_e \rightarrow \nu_\mu}. \quad (6-23)$$

Mientras que si termina en el estado  $\nu_e$  después de un tiempo  $n$  tenemos:

$$P_{\nu_\mu \rightarrow \nu_e}(n) = P_{\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu}(n-1)P_{\nu_\mu \rightarrow \nu_e} + P_{\nu_\mu \rightarrow \nu_e}(n-1)P_{\nu_e \rightarrow \nu_e}. \quad (6-24)$$

Análogamente estas dos ecuaciones se pueden expresar en forma matricial como sigue  $\forall n \in \mathbf{N}$ :

$$\begin{pmatrix} P_{\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu}(n) \\ P_{\nu_\mu \rightarrow \nu_e}(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu} & P_{\nu_e \rightarrow \nu_\mu} \\ P_{\nu_\mu \rightarrow \nu_e} & P_{\nu_e \rightarrow \nu_e} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu}(n-1) \\ P_{\nu_\mu \rightarrow \nu_e}(n-1) \end{pmatrix}. \quad (6-25)$$

Definiendo  $B$  como:

$$B = \begin{pmatrix} P_{\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu} & P_{\nu_e \rightarrow \nu_\mu} \\ P_{\nu_\mu \rightarrow \nu_e} & P_{\nu_e \rightarrow \nu_e} \end{pmatrix}. \quad (6-26)$$

De la Fig. 6-3 tenemos que

$$B = \begin{pmatrix} 0.25 & 0.75 \\ 0.75 & 0.25 \end{pmatrix}. \quad (6-27)$$

Por lo que,  $A = B$  de aquí vemos que no importa de donde partió el sistema, es igualmente probable encontrar un neutrino del electrón que un neutrino del muón después de un tiempo.

Ya que, tenemos sus probabilidades consideremos su comportamiento global i.e., la densidad de número. Consideramos que inicialmente todos los neutrinos son neutrinos del electrón (ya que, eventualmente no importará como inicie el sistema). En la etapa de atrapamiento tenemos una densidad de número de neutrinos del electrón de  $\approx 10^{57} m^{-3}$ , usando la relación  $u_{k+1} = A^k u_0$ , donde ahora  $u_0$  es

$$u_0 = \begin{pmatrix} 10^{57} m^{-3} \text{ neutrinos del electrón} \\ 0 m^{-3} \text{ neutrinos del muón} \end{pmatrix}. \quad (6-28)$$

Gráficamente obtenemos lo siguiente:

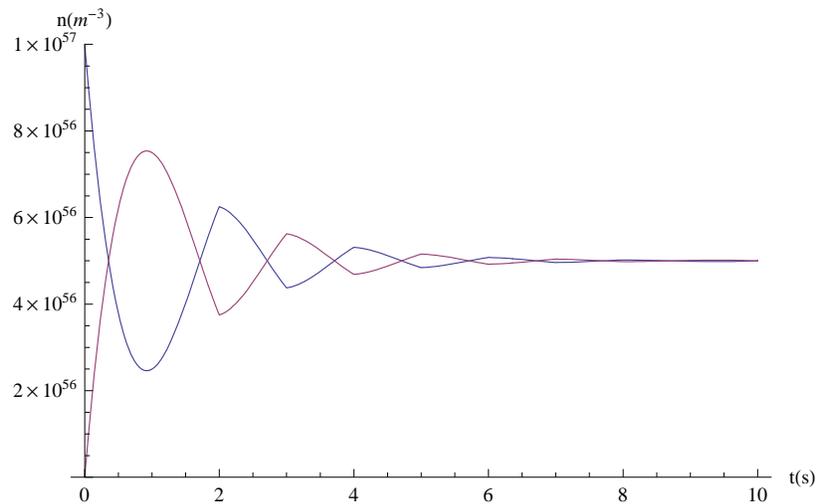


Figura 6-4:  $n_e, n_\mu$  vs  $t$ .

---

Como muestra la gráfica (6-4), el número de neutrinos del electrón comienza a disminuir cuando el tiempo avanza, éstos se mueven hacia los neutrinos del muón, pero manteniendo constante el número de neutrinos, éstos sólo se mueven de un sabor hacia otro llegando a un punto al cual dejan de cambiar; tanto la densidad de número de los neutrinos del electrón como la de los neutrinos del muón.

## Capítulo 7

# Conclusión

Nuestro conocimiento en explosiones de supernovas ha crecido enormemente en los últimos años debido a la SN 1987A, ya que vino a confirmar que las supernovas del tipo II son realmente fenómenos en la fase última de una estrella masiva, y que la energía liberada en este evento es tomada en su mayoría por los neutrinos. También la detección de neutrinos tiene que ser considerado como un evento particularmente notable. En cuanto a los datos que se observaron son en específicos de la SN 1987A, para tener una validez general más supernovas de esta clase deben mostrar estos mismos resultados. La supernova SN 1987A inicio una fuerte actividad experimental en el campo de los detectores de neutrinos (Superkamiokande, Sudbury Neutrino Observatory (SNO)).

El objetivo de esta tesis fue dar una pequeña introducción a los procesos de Markov, y mostrar la importancia de los neutrinos que como vimos están involucrados en muchos procesos de transcendencia para la vida de una estrella. Utilizamos como ejemplo a los neutrinos atrapados en el colapso de una estrella masiva, para introducir a los procesos de Markov. De esto vimos que las probabilidades sean T-Invariante es fundamental para que ambos procesos converjan al mismo valor, ver (figuras proceso de Markov con T-Invariante). Además vimos que no importa en que sabor inicien estos neutrino, ver (ecuaciones 6-5 y 6-26). Al comienzo pasan poco tiempo en su sabor (ver Fig. 6-2). Pero, conforme el tiempo avance éstos pasan más tiempo en su sabor haciendo más difícil su transición. Globalmente significa que las densidades de los neutrinos del electrón y neutrinos del muón se estabilizan (ver Fig. 6-3).

# Bibliografía

- [1] L. Dessart C. D. A. Burrows, E. Livne and J. Murphy. *Astrophys. J.* 655, 416., (2007).
- [2] L. Dessart C. Ott and J. Murphy A. Burrows, E. Livne. *Astrophys. J.* 640, 878., (2006).
- [3] J. N. Bahcall and R. K. Ulrich. Solar models, neutrino experiments and helioseismology. *Rev. Mod. Phys.*, 297:(1988), 60.
- [4] John N Bahcall. *Neutrino astrophysics*. Cambridge University Press, 1989.
- [5] N. Cabibbo. Time reversal violation in neutrino oscillation. *Phys. Rev. Lett.*, 333:(1978)., B72.
- [6] J. Chadwick. Distribution in intensity in the magnetic spectrum of the beta rays of radium. *Verh. Deutsch Phys. Ges.*, 1914:383, 16.
- [7] DONUT collaboration. K. Kodama et al. *Observation of tau-neutrino interactions*, 2001:218, hep-ex/0012035, B504.
- [8] G. Danby et al. Observation of high-energy neutrino reactions and the existence of two kinds of neutrinos. *Phys. Rev. Lett.*, 1962:36, 9.
- [9] E. Fermi. Tentativo di una teoria dei raggi beta. *Nuovo Cimento*, 1934:1, 11.
- [10] E. Fermi. An attempt of theory of beta radiation. 1. *Z. Phys.*, 1934:161, 88.
- [11] A. Marek G. Martinez-Pinedo H. T. Janka, K. Langanke and B. Muller. Rept. *Phys.*, 38:(2007) [arXiv:astro-ph/0612072]., 442.
- [12] Marc Herant, Stirling A Colgate, Willy Benz, and Chris Fryer. Neutrinos and supernovae. *Los Alamos Science*, 25:64-79, 1997.
- [13] C. Jarlskog. Commutator of the quark mass matrices in the standard electroweak model and a measure of maximal CP violation. *Phys. Rev. Lett.*, 1039:(1985)., 55.

- 
- [14] K. S. Hirata et al. Kamiokande-II collaboration. Observation of b solar neutrinos in the kamiokande-ii detector. *Phys. Rev. Lett.*, 1989:16, 63.
- [15] S. P. Mikheyev and A. Y. Smirnov. Resonant amplification of neutrino oscillations in matter and solar neutrino spectroscopy. *Nuovo*, 17, 1986:S, C9.
- [16] Rabindra Nath Mohapatra and Palash B Pal. *Massive neutrinos in physics and astrophysics*, volume 3. World Scientific, 2004.
- [17] Anthony C Phillips. *The physics of stars*. John Wiley & Sons, 2013.
- [18] B. Pontecorvo. Mesonium and antimesonium. *Sov. Phys. JETP*, 1957:426, 6.
- [19] B. Pontecorvo. Inverse betha process. *Chalk River Report PD-205*, November 1946, (unpublished).
- [20] F. Reines and C. L. Cowan. The neutrino. *Nature*, 1956:446, 178.
- [21] F. Reines and C. L. Cowan. Detection of the free neutrino. *Phys. Rev.*, 92:830, 1953.
- [22] E. Rhutherford. Collisions of alpha particles with light atoms. iv. an anomalous effect in nitrogen. *Phil. Mag.*, 1919:581, 37.
- [23] Gilbert Strang. Introduction to linear algebra. *Cambridge Publication*, 2003.
- [24] Y. Funkuda Super-Kamiokande collaboration. Evidence for oscillation of atmospheric neutrinos. *Phys. Rev. Lett.*, (1998) hep-ex/9807003:1562, 81.
- [25] J. J. Thompson. Cathode rays. *Phil. Mag.*, 1897:293, 44.
- [26] K. Whisnant V. D. Barger and R. J. N. Phillips. Cp violation in three neutrino oscillations. *Phys. Rev. Lett.*, 2084:(1980)., 45.
- [27] L. Wolfenstein. Neutrino ooscillation in matter. *Phys. Rev.*, 1978:2369, D17.