UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES ARAGÓN

ANALISIS ESTRUCTURAL DE VIGAS CON CARGAS POLINÓMICAS, ARMÓNICAS, LOGARÍTMICAS Y EXPONENCIALES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

INGENIERO CIVIL

PRESENTA:

YURITZI HERNÁNDEZ TENORIO

ASESOR: PASCUAL GARCÍA CUEVAS

México, 2015

DEDICATORIAS

A MIS PADRES:

Por darme la oportunidad de tener una carrera y no escatimar en gastos para que lo lograra, además de confiar en mí.

A KAREN LIZBETH HERNÁNDEZ TENORIO:

Por su apoyo y experiencia que en ocasiones me hicieron más fácil la comprensión de algunos temas o conceptos y por motivarme a continuar con esta carrera.

AL ING. MARCOS MOLINA ELVIRA:

Un profesor incomparable, quien siempre ha demostrado tener tiempo, paciencia y dedicación para explicarle a cada uno de sus alumnos y que además me ha apoyado en cuestiones personales e impulsarme a ser mejor cada día.

AL ING. PASCUAL GARCÍA CUEVAS:

Quien me brindó su apoyo para llevar a cabo esta tesis además de darme la confianza de preguntar temas fuera de clase e inclusive de otra área.

AL ING. RICARDO HERAS CRUZ:

Sin duda alguna uno de los mejores profesores de esta institución quien con mucho respeto siempre estuvo dispuesto a atender mis dudas referentes a las materias que el imparte, así como del área de Geotecnia.

AL ING. GABRIEL RUIZ GONZALES:

Quien a pesar de no formar parte de mis sinodales, a lo largo de la carrera me brindó su apoyo dentro y fuera de la institución, siempre hasta llegar al punto del pleno entendimiento y además por ser uno más de los profesores que hacen que la carrera de ingeniería civil de la FES Aragón sea mejor.

ÍNDICE

1. INTRODUCCIÓN

PESO: Cualquier par de partículas a cuerpos tienen una fuerza de atracción mutua actuando entre ellas. En el caso de una partícula ubicada en o cerca de la superficie de la tierra, la única fuerza gravitacional que posee una magnitud medible es aquella entre la tierra y la partícula. En consecuencia está es la única fuerza llamada "peso" que será objeto de estudio en la mecánica.

Por lo tanto podemos expresarla como:

$$w = m.g$$

Donde:

$w = peso$

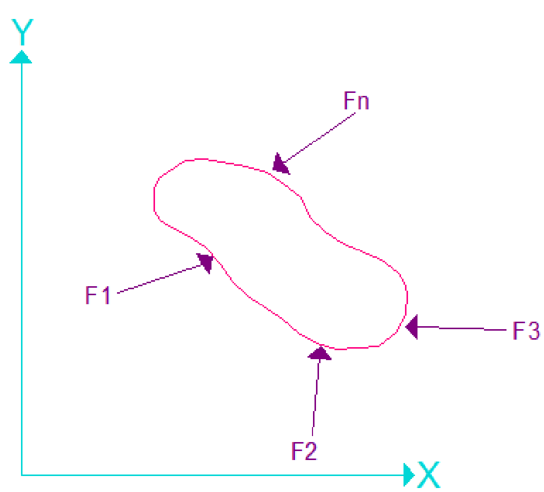
$m = masa$

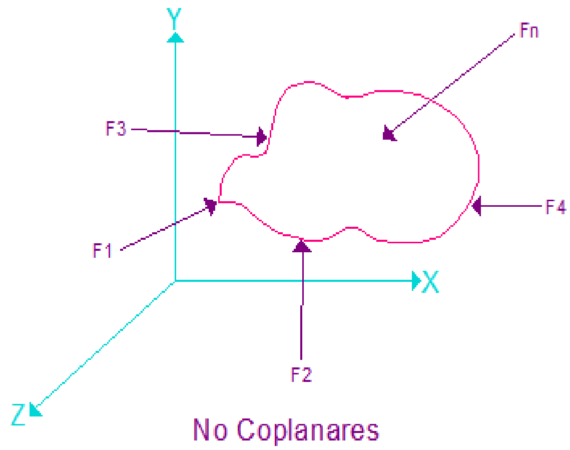
$g = gravedad = 9.81\ m/s^2$

FUERZA: En general la fuerza es considerada como un "tirón" o "jalón" ejercida por un cuerpo sobre otro.

SISTEMA DE FUERZAS: Dentro de un sistema de fuerzas que actúa sobre un cuerpo pueden presentarse dos clases:

- Coplanares
- No coplanares
- Paralelas





No Coplanares

FUERZAS EXTERNAS E INTERNAS: Se dice que un cuerpo está sometido a una “fuerza externa” si esta ejercida por un cuerpo diferente. Cuando una partícula cualquiera de un cuerpo está sometida a una fuerza por otra parte del mismo cuerpo, está sometida a una “fuerza interna” así por ejemplo: suponga que el cuerpo es usted cuando está de pie, el piso es otro cuerpo que ofrece cierta resistencia igual al peso suyo.

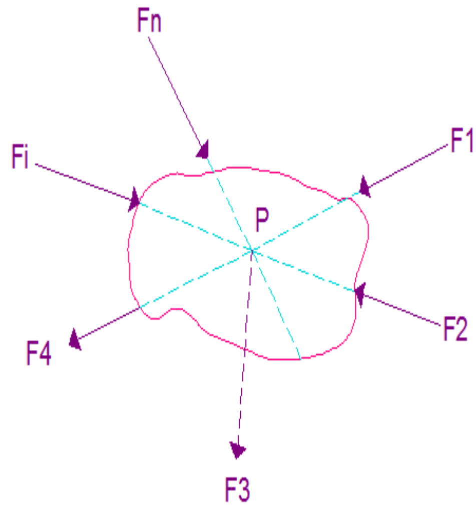
FUERZAS COPLANARES: Se denomina sistema de fuerzas coplanares a aquel conjunto o sistema de fuerzas que actúan en el plano x, y, estas pueden ser descompuestas en sus componentes Fx y Fy respectivamente.

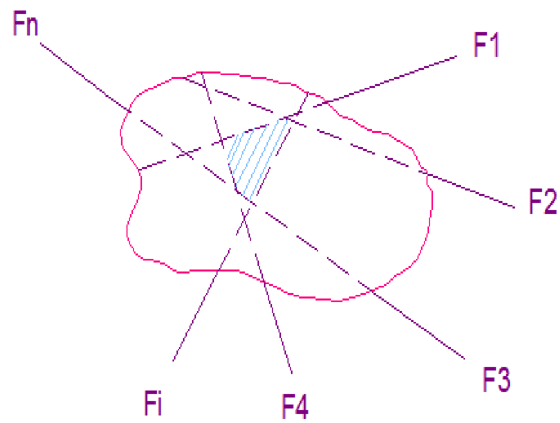
FUERZAS NO COPLANARES: se denomina sistema de fuerzas no coplanares al conjunto de fuerzas que actúan en el espacio (tridimensional) estos pueden ser descompuestos en las componentes fx, fy y fz respectivamente.

A su vez las fuerzas coplanarias se clasifican en:

Fuerzas coplanarias:

- concurrentes
- no concurrentes

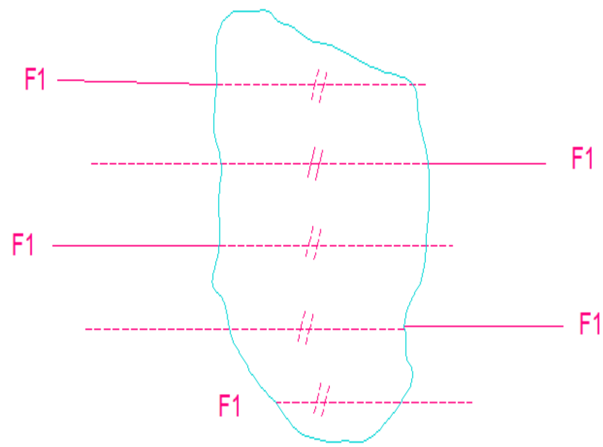




Se denominan fuerzas concurrentes coplanarias a todo sistema, cuyas líneas de acción se cortan en un punto.

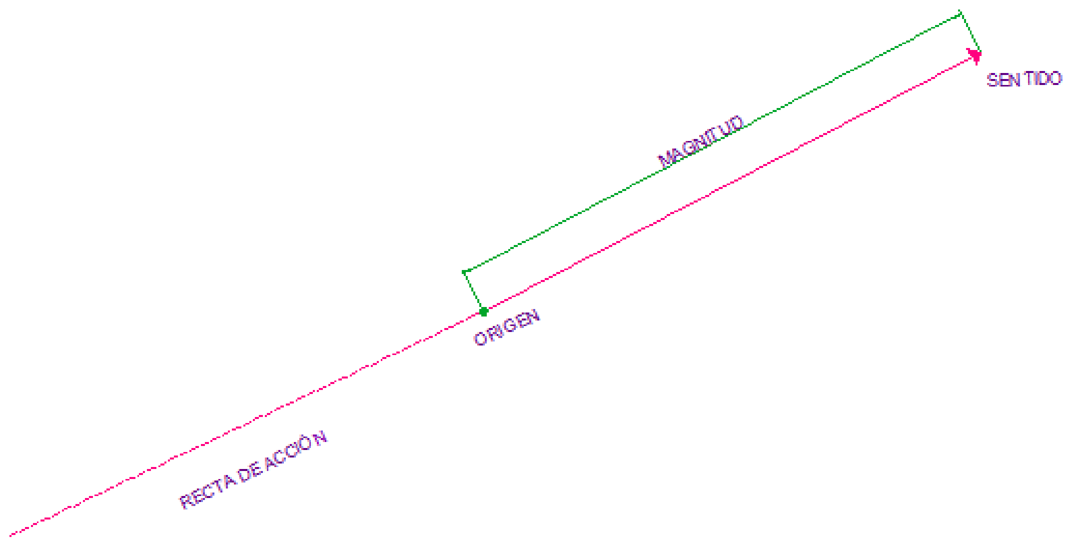
Mientas que se denominan fuerzas no concurrentes coplanarias al sistema de líneas de acción no se cortan en un punto, sino, en un are determinada.

FUERZAS COPLANARIAS PARALELAS: Como caso particular de las fuerzas paralelas cuyas rectas de acción se cortan en el infinito.



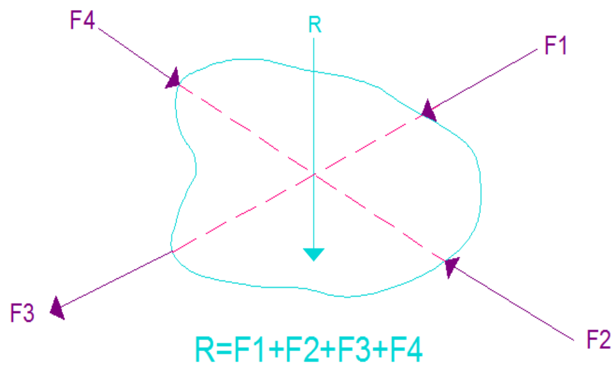
Sistemas de fuerzas coplanarias en paralelo (No se intersectan)

PARTES DE UNA FUERZA: Una fuerza en general está definida mediante las siguientes nominaciones:

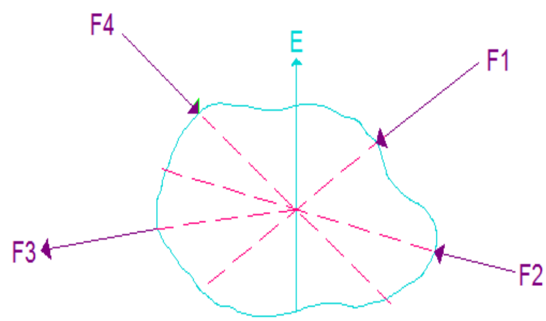


A) recta de acción: es la recta imaginaria a través de la cual puede deslizarse la fuerza.
B) Origen: es el punto de acción, punto el cual actúa la fuerza.
C) Sentido: Indica la dirección de la fuerza.
D) Magnitud: es la cantidad del vector fuerza que actúa sobre algún cuerpo.

RESULTANTE DE UN SISTEMA DE FUERZAS: La resultante de un sistema de fuerzas es la única fuerza R que reemplaza a todo un sistema.



EQUILIBRARTE DE UN SISTEMA DE FUERZAS: Es otra fuerza representada por la letra E con sentido contrario a la resultante y de igual magnitud, actúa sobre la misma recta de acción que la resultante.



Para encontrar la resultante de un sistema de fuerzas existen varios métodos.

MÉTODO GRAFICO:

- Paralelogramo de fuerzas
- Triangulo de fuerzas

MÉTODO ANALÍTICO:

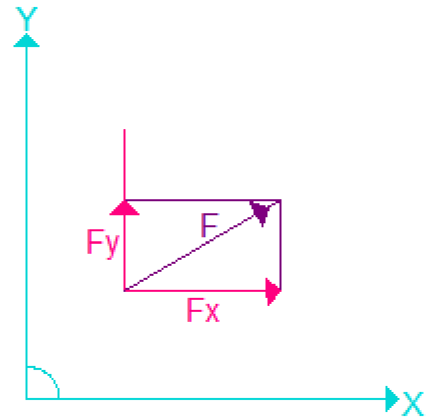
- Mediante descomposición
- De fuerzas bajo un sistema
- De ejes cartesianos

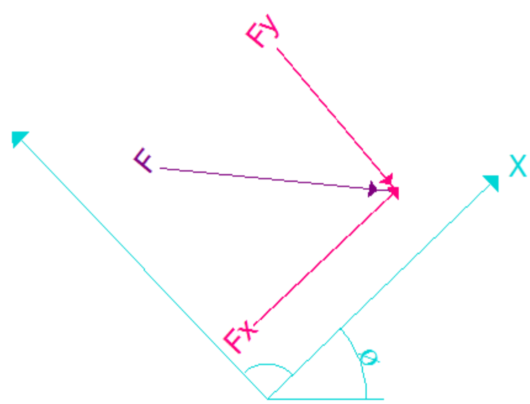
DESCOMPOSICIÓN DE FUERZAS: muy a menudo en la estática (mecánica) es necesario descomponer en2 direccione dadas.

1. DESCOMPOSICIÓN ES SUS COORDENADAS RECTANGULARES: como en una estructura plana la línea de acción de todas las fuerzas están en un

plano, cada una de estas fuerzas es posible descomponer en dos dimensiones rectangulares.

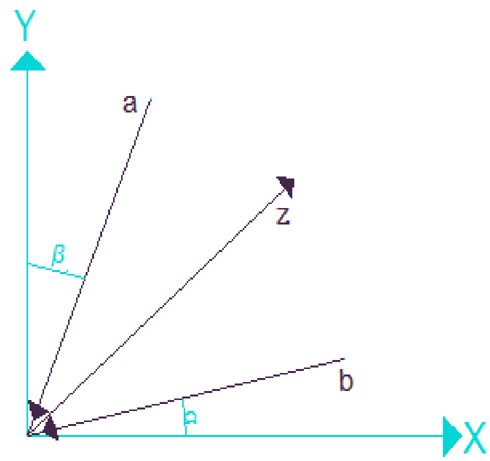
Fx y Fy con respecto a los ejes cartesianos e inclusive puede tomar cualquier dirección:



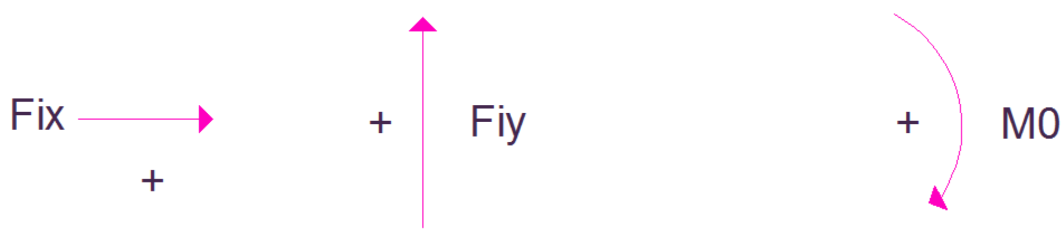


Donde Fx y Fy, se llaman componentes rectangulares ocartesianos además es conveniente elegir los ejes cartesianos,una horizontal yotra vertical de tal manera que forma un angulo recto en el origen.

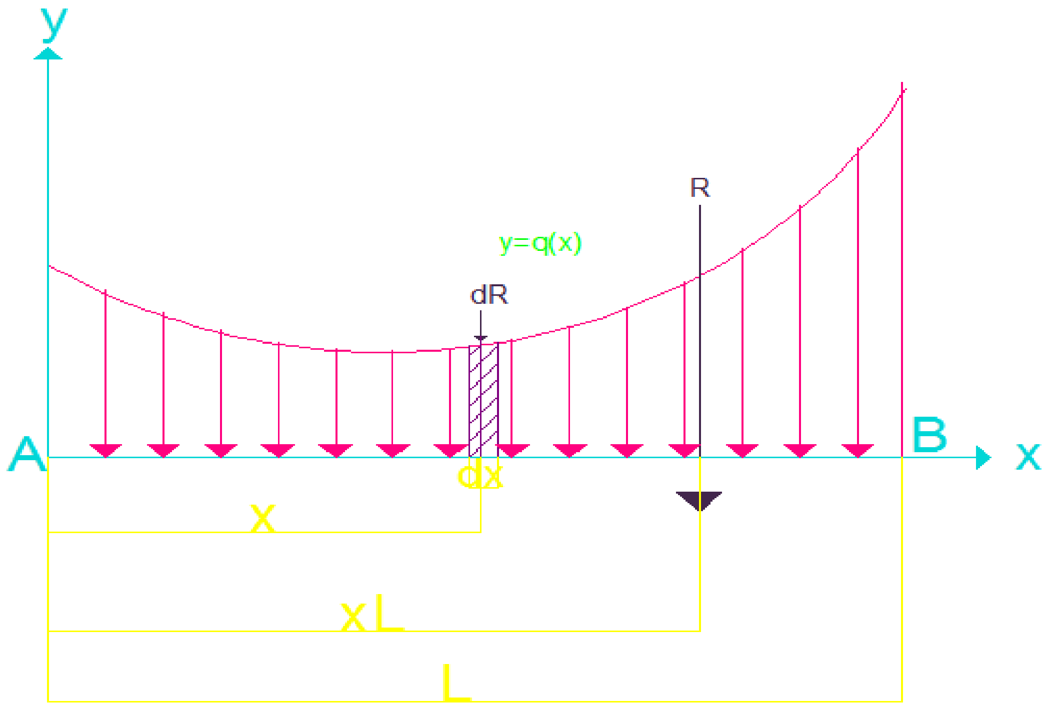
2. DESCOMPOSICIPON EN DOS DIMENSIONES DADAS: En algunas ocasiones es necesario despomponer no en susu componentes rectangulares, sino con base a otra dirección dada.



CONVENCIÓNDE SIGNOS: De acuerdo a la conveniencia se adopta el siguiente convenio de signos.



FUERZAS DE INTENSIDAD VARIABLE: En la mayoria de los casos aplicados a una estructura, se presentan en fuerzas de intensidad variable, tales como peso propio, presión de un liquido, empuje de tierra, etc por lo tanto.

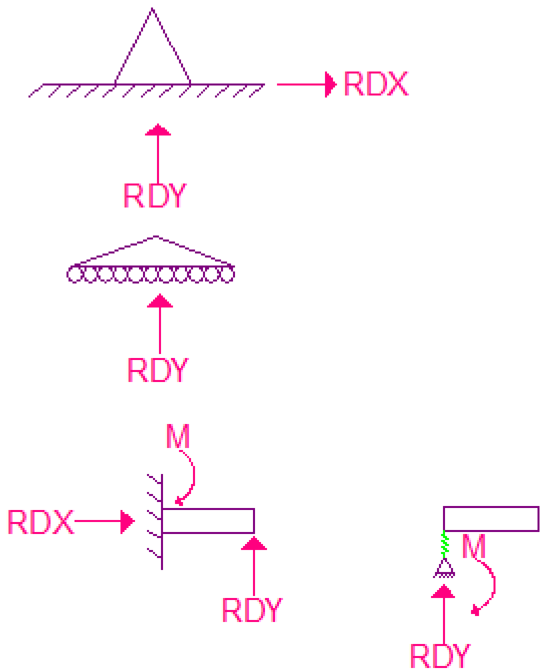


ELEMENTOS DE SUJECIÓN DE UNA ESTRUCTURA:

APOYOS: La mayoria de las estructuras para tener estabilidad deben estar sistentados por elementos llamados “apoyos”.

TIPOS DE APOYOS:

Para que una estructura permanezca estable, tememos varios tipos de ejecución (apoyos).



CARACTERISTICA PRINCIPAL:

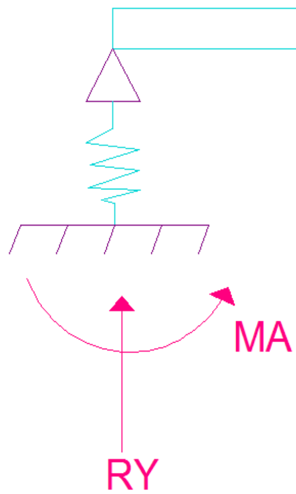
APOYO FIJO ARTICULADO: acepta reacciones Rx y Ry siempre perpendicular y paralela alplano.

APOYO MOVIL ARTICULADO: acepta reacciones Ry, normales al plano de apoyo.

APOYO DE BIELA: para movimientos pequeños se comporta como apoyo movil y para grandes esfuerzos produce momentos de giro.

APOYO EMPOTRADO: produce tres tipos de reacciones Rx, Ry y M.

APOYO SEMIEMPOTRADO: o tambien conocido como apoyo de voiven, acepta Ry y M.



APOYO ELASTICO: acepta reacciones Ry y M, para grandes esfuerzos pueden existir Rx.

EQUILIBRIO DE UN CUERPO RIGIDO: En esta parte se mostrara que para que exista el equilibrio serequiereo a su vez, de un equilibrio defuerza a fin de evitar que alcuerpo rigido experimente un movimiento de traslación con movimiento acepelaro, y de un “equilibrio demomento”, para impedir que el cuerpo gire.

Muchos tipos de problemas en ingenieria involucran cargas dimetricas y pueden ser resueltas proyectadas sobre un plano unico todas lasfuerzas que actuan sobre un cuerpo.

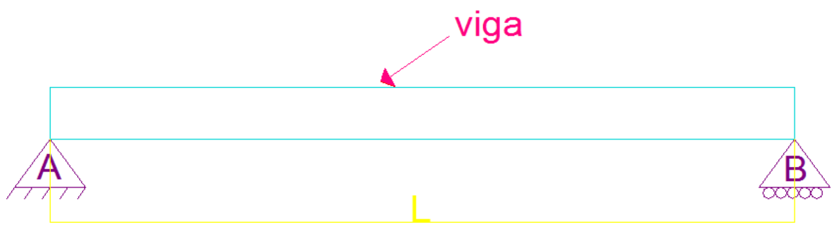
CONDICIONES PARA EL EQUILIBRIO DE UN CUERPO RIGIDO: Para que una particula se encuentra en equilibrio si esta permanece en reposo o se mueve con velocidad constante.

Para que esto suceda es suficiente y necesario que la fuerza resultante que actúa sobre la partícula sea igual a cero.

O sea que la sumatoria de fuerzas en X, sumatoria de fuerzas en Y y sumatoria y suma de momentos sea igual a cero.

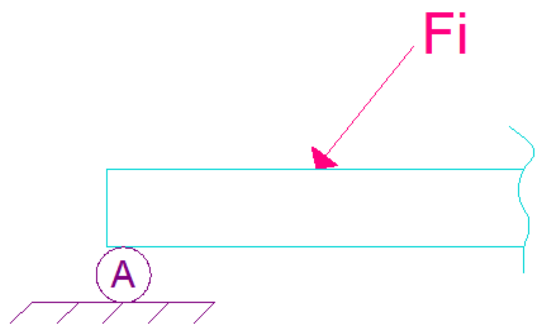
Y si en cualquiera de las ecuaciones mencionadas anteriormente existe algún incremento deberá sumársele como tal.

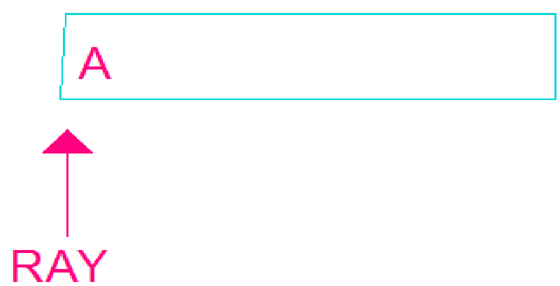
DIAGRAMAS DE CUERPO LIBRE: La aplicación correcta de las ecuaciones de equilibrio requiere una especificación completa de todas las fuerzas externas conocidas y desconocidas que actúan sobre el cuerpo rígido o también conocido como estructura. La mejor manera de describir tales fuerzas es dibujando un diagrama de cuerpo libre de aquel. Este diagrama es un bosquejo de la forma del cuerpo que lo representa, aislado o libre.

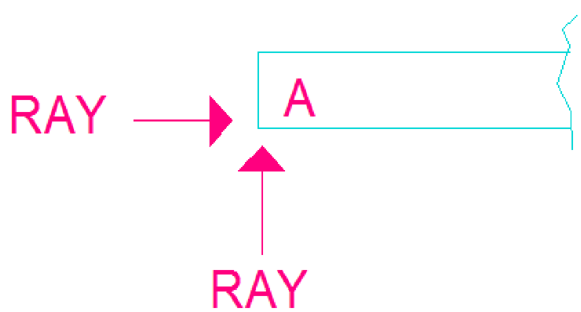


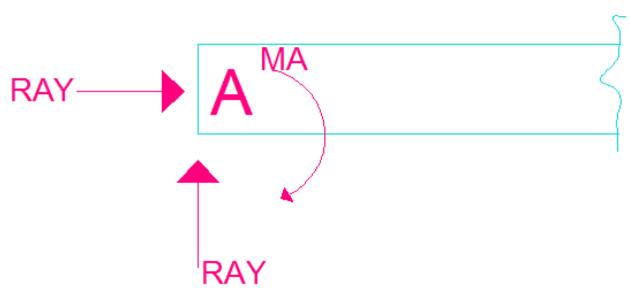
ESTRUCTURA REAL

REACCIONES EN LOS APOYOS: Se retiran los apoyos o sustentaciones en una estructura, consideramos primero los diferentes tipos de reacciones que ocurren en los apoyos o puntos de soporte entre cuerpos sujetos a este sistema de fuerzas coplanares. Como una regla general, si un apoyo evita la traslación de un cuerpo en una dirección dada, entonces se desarrolla una fuerza sobre el cuerpo en esa dirección. De la misma forma, si se evita el giro, se ejerce un momento "par" sobre todo el cuerpo.


Fi
A


A
RAY


RAY
A
RAY


RAY
A
MA
RAY

Puede trasladarse horizontalmente pero ofrece resistencia en el sentido vertical; además giro en A.

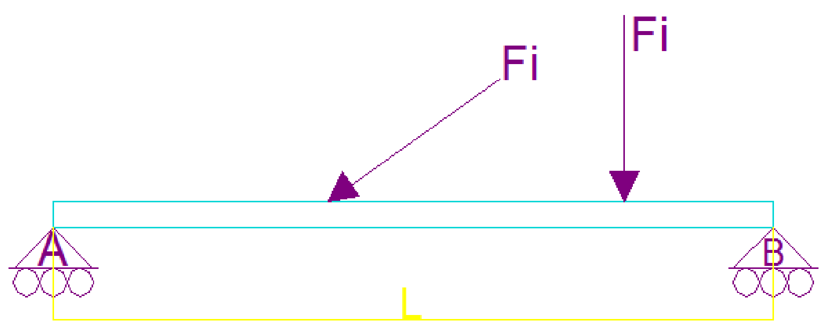
No puede trasladarse horizontal ni verticalmente, pero puede girar alrededor de A.

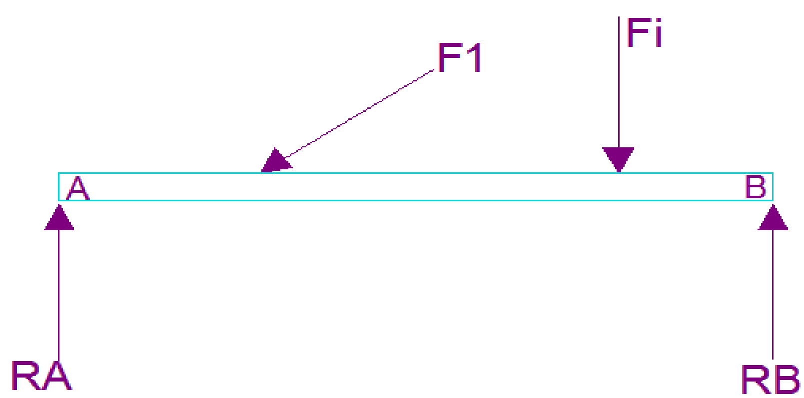
No puede trasladarse horizontal ni verticalmente, el giro está restringido.

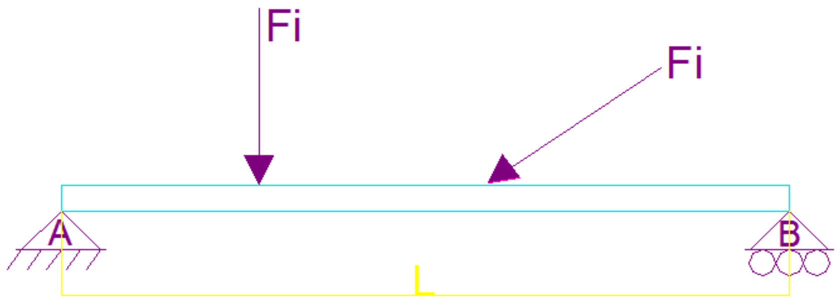
Nota: las reacciones siempre son normales al plano de apoyo, o en su caso paralelo al plano de apoyo.

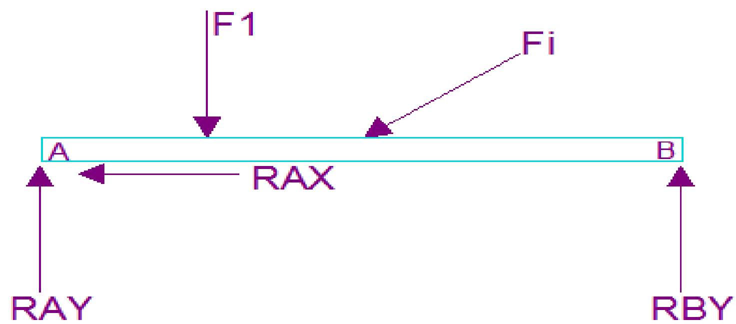
CLASIFICACIÓN DE ESTRUCTURAS

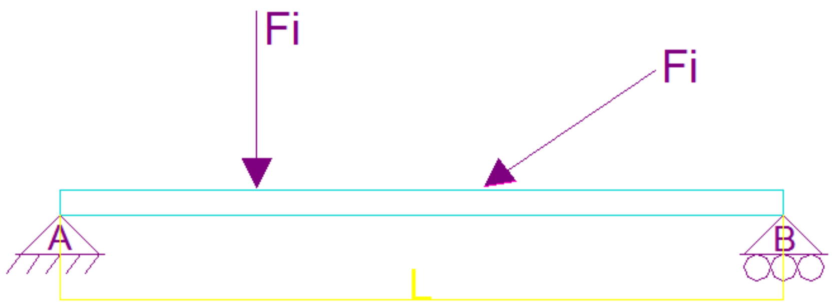
SEGÚN EL GRADO ESTÁTICO: Si se tiene por ejemplo las siguientes estructuras.

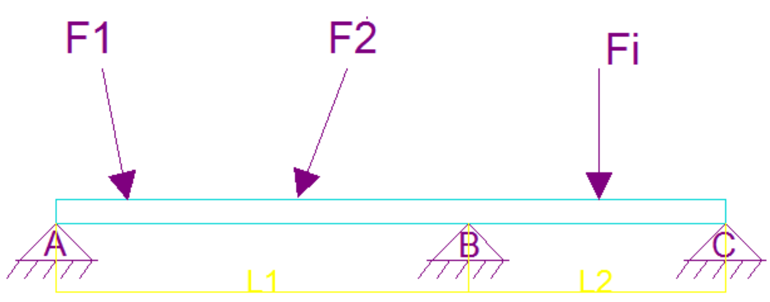


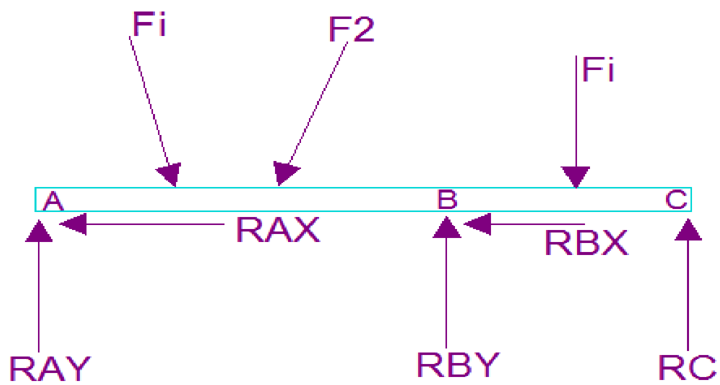



Fi
Fi
A
B
L


F1
Fi
A
B
RAX
RAY
RBY


Fi
Fi
A
B
L


F1
F2
Fi
A
B
C
L1
L2

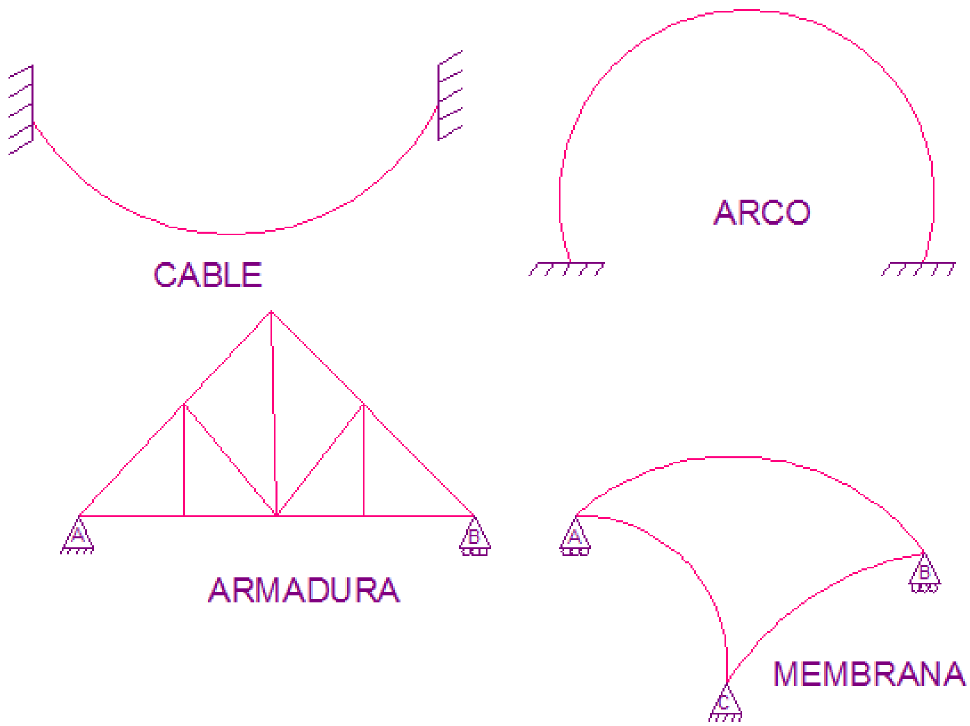


Si aplicamos las ecuaciones fundamentales de la estática, o sea:

$$\Sigma Fx = 0 \qquad \Sigma fy = 0 \qquad \Sigma M = 0$$

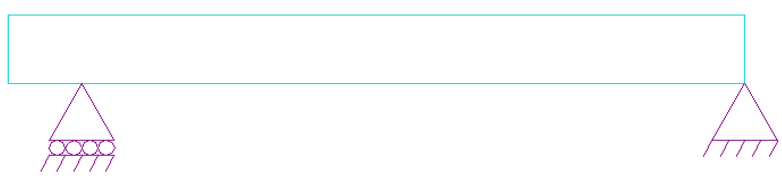
FORMAS ESTRUCTURALES

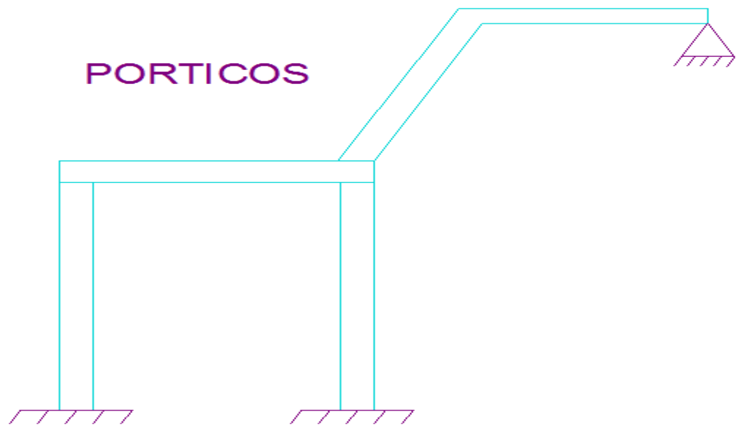
FORMAS CON TENSIONES UNIFORMES: Son aquellas en las que la tensión es uniforme en toda la profundidad del elemento, o el espesor de un panel, como por ejemplo; cables, arcos, elementos de cercha, membranas, laminas, etc.

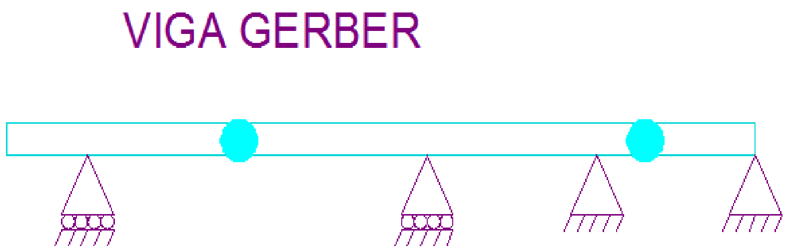


SEGÚN SU GEOMETRÍA: A su vez las estructuras pueden clasificarse, según su eje estructural rectilíneas, curvilíneas o mixtas.

VIGA



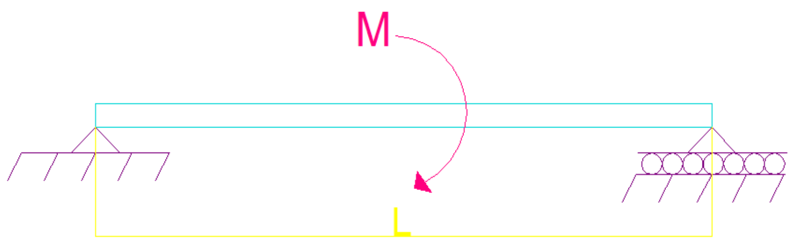




CARGAS

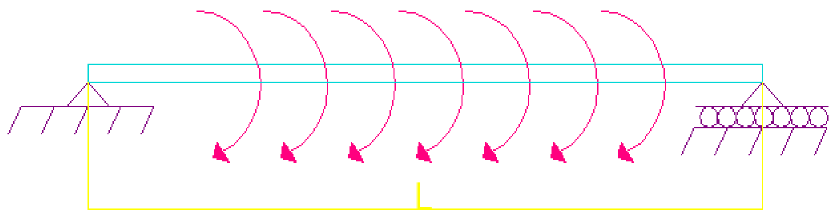
A) **FIJAS:** La carga fija, que actúa sobre una estructura consta del peso propio de la estructura y de todas las demás cargas semimoviles, constantes, en magnitud y asignadas permanentemente, por ejemplo una simple viga de hormigón armada.

SOBRECARGAS: a diferencia de las cargas fijas, que permanecen invariables tanto en magnitud como en posición, las sobre cargas varían en su desplazamiento, a veces es conveniente clasificar las sobre cargas en móviles: las cargas móviles son las que pueden cambiarse de una posición a otro en una estructura, tales como el contenido de un edificio de almacén; generalmente se aplica gradualmente y sin impacto, mientras que las móviles son las que se mueven por su propia energía, estas se aplican generalmente en forma rápida, por lo tanto ejercen un efecto de fuerza llamada impacto.



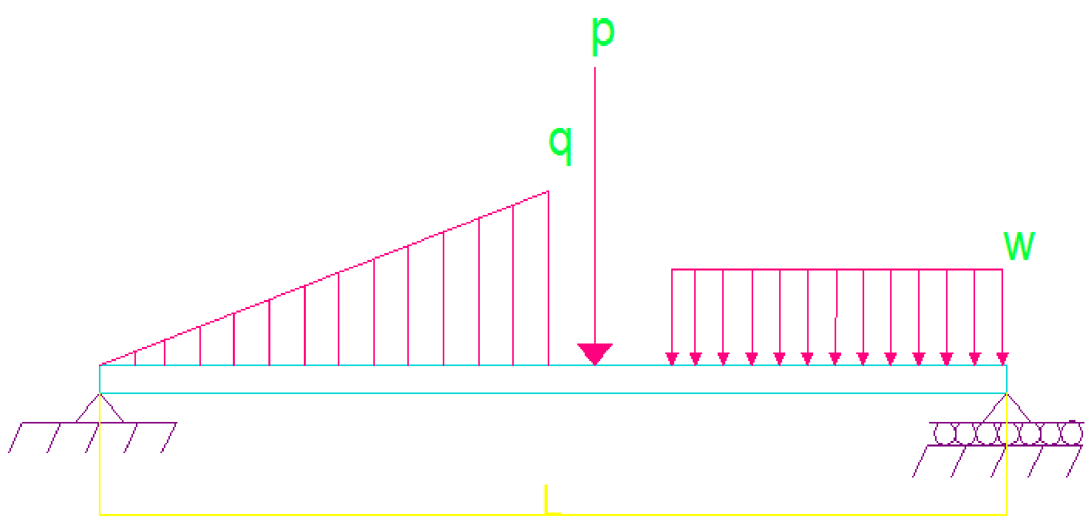
Notación: Se puede denotar por M.

Unidades: carga par única o carga momento kg.m,tn.m, KN.m, etc.



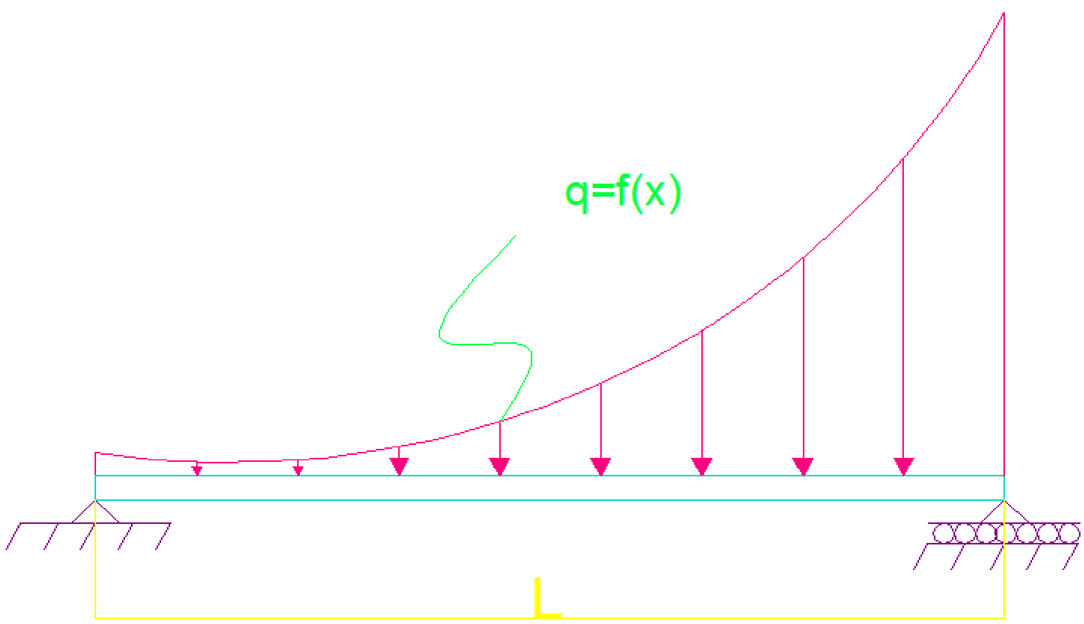
Notación:

Unidades: carga par uniformemente distribuida kg.m/m, tn.m/m, KN.m/m.

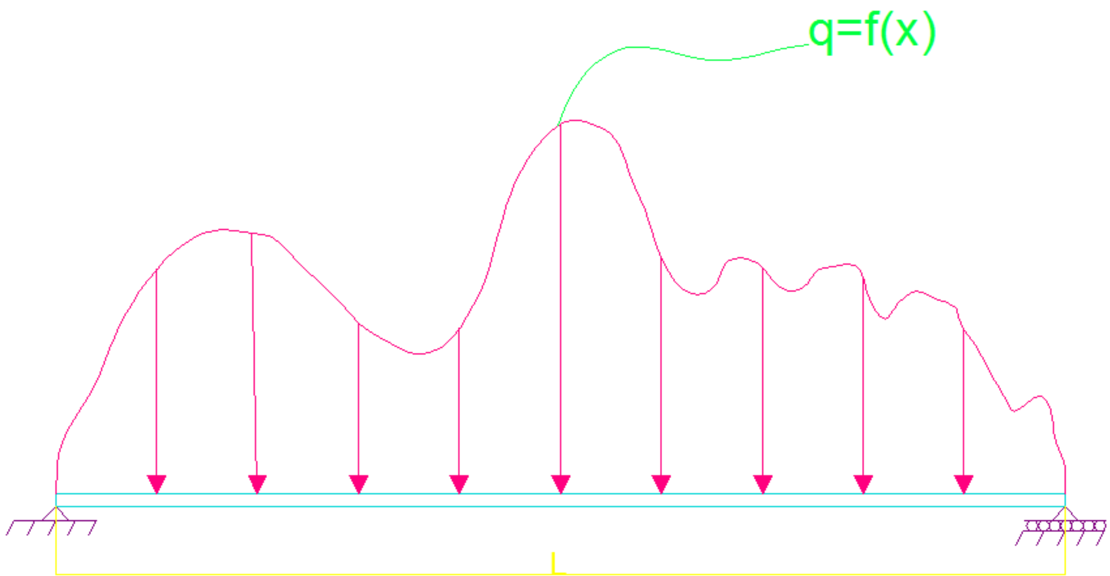


Notación: su notación es combinada.

Unidades: cargas combinadas sus unidades según las cargas.



Notación: Unidades: carga variable según f(x), sus unidades P, q, w en la ordenada máxima.



Notación: q= f(x)

Unidades: cargas variables combinadas según f(x) sus unidades variables.

DEMOSTRACIÓN DE LA SUMA DE FUERZAS Y MOMENTOS

a) La suma de las fuerzas externas que actúan en un cuerpo es igual a cero.

Demostración. La segunda ley de Newton afirma que la fuerza actuante en un cuerpo es proporcional a la aceleración que experimenta. Esto se escribe como:

$$\vec{F} = m\vec{a} \qquad (1)$$

Además:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \qquad (2)$$

Por lo tanto, sustituyendo (2) en (1):

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \qquad (3)$$

El cual expresa que la constante de proporcionalidad m es constante; sin embargo, para el caso más general, m es variable con el tiempo, y (3) se expresa como:

$$\vec{F} = \frac{dm\vec{v}}{dt} \qquad (4)$$

La tercera Ley de Newton dice que a toda acción hay una reacción de la misma magnitud y sentido contrario. Tomando 2 partículas cualesquiera dentro de un medio continuo, la fuerza que ejerce una partícula en la otra, según la afirmación anterior es:

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji} \qquad (5)$$

(5) es equivalente a:

$$\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji} = 0 \qquad (6)$$

Ahora se tienen las condiciones para probar que la suma de fuerzas externas debe ser cero. Primero se comprueba que la fuerza que una partícula ejerce sobre sí misma es nula. Para ello, hacemos $i = j$ (puesto que es la misma partícula) en (6):

$$\vec{F}_{ii} + \vec{F}_{ii} = 0$$

$$2\vec{F}_{ii} = 0$$

$$\therefore \vec{F}_{ii} = 0 \qquad (7)$$

A continuación consideramos las fuerzas $\vec{F}_{ij}$ que ejerce la partícula i sobre todas las k partículas del medio y una fuerza externa $\vec{F}_i^{\,e}$ aplicada también en la partícula i. La fuerza resultante será:

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{\,e} + \sum_{j=1}^{k} \vec{F}_{ij} \qquad (8)$$

Usando (8) en (4) y tomando en cuenta que $\vec{v} = \vec{0}$:

$$\vec{F}_i^{\,e} + \sum_{j=1}^{k} \vec{F}_{ij} = 0 \qquad (9)$$

Con (9) se comprueba que la resultante de fuerzas internas y externas en una partícula es cero. Sin embargo, no demuestra que la suma de fuerzas externas sea nula. Para comprobar esta afirmación se suma (9) sobre todas las partículas k del medio:

$$\begin{array}{ll} i = 1: & \vec{F}_1^{\,e} + \vec{F}_{11} + \vec{F}_{12} + \cdots + \vec{F}_{1n} = 0 \\ i = 2: & \vec{F}_2^{\,e} + \vec{F}_{21} + \vec{F}_{22} + \cdots + \vec{F}_{2n} = 0 \\ & \vdots \\ i = n: & \vec{F}_n^{\,e} + \vec{F}_{n1} + \vec{F}_{n2} + \cdots + \vec{F}_{nn} = 0 \\ \hline & \sum_{i=1}^{k} \vec{F}_i^{\,e} + \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} \vec{F}_{ij} = 0 \end{array} \qquad (10)$$

Por último, recordando (6) y (7):

$$\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} \vec{F}_{ij} = 0 \qquad (11)$$

Sustituyendo este resultado en (10):

$$\sum_{i=1}^{k} \vec{F}_i^{\,e} = 0 \qquad (12)$$

Es decir, la suma de fuerzas externas debe anularse.

b) La suma de los momentos que producen las fuerzas externas actuantes en un cuerpo es igual a cero.

Demostración. Consideramos un punto O, el cual se ubica arbitrariamente. De este punto se puede formar el radio vector $\vec{r}_i$ el cual va del punto O a la partícula i. El momento se obtiene a partir de la fuerza resultante en tal partícula (ecuación (8)). Por la tanto el momento resultante es:

$$\vec{M}_i = \vec{r}_i \times \left[\vec{F}_i^{\ e} + \sum_{j=1}^{k} \left(\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji} \right) \right] \qquad (13)$$

El segundo término en la suma aparece al agregar la fuerza actuante de las demás j partículas sobre la i; es necesario hacer esto ya que el momento debe ser el resultante de todas las fuerzas en la partícula. Considerando la segunda ley de Newton con $\vec{v} = \vec{0}$, para la partícula i únicamente:

$$\vec{r}_i \times \left[\vec{F}_i^{\ e} + \sum_{j=1}^{k} \left(\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji} \right) \right] = 0 \qquad (14)$$

Como antes, se usa (14) en todas las k partículas y se procede de forma similar:

$$\begin{array}{ll}
i = 1: & \vec{r}_1 \times \vec{F}_1^{\ e} + \vec{r}_1 \times \vec{F}_{11} + \vec{r}_1 \times \left(\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} \right) + \cdots + \vec{r}_1 \times \left(\vec{F}_{1n} + \vec{F}_{n1} \right) = 0 \\
i = 2: & \vec{r}_2 \times \vec{F}_2^{\ e} + \vec{r}_2 \times \left(\vec{F}_{21} + \vec{F}_{12} \right) + \vec{r}_2 \times \vec{F}_{22} + \cdots + \vec{r}_2 \times \left(\vec{F}_{2n} + \vec{F}_{n2} \right) = 0 \\
 & \vdots \\
i = n: & \vec{r}_n \times \vec{F}_n^{\ e} + \vec{r}_n \times \left(\vec{F}_{n1} + \vec{F}_{1n} \right) + \vec{r}_n \times \left(\vec{F}_{n2} + \vec{F}_{2n} \right) + \cdots + \vec{r}_n \times \vec{F}_{nn} = 0 \\
\hline
 & \sum_{i=1}^{k} \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{\ e} + \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} \vec{r}_i \times \left(\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji} \right) = 0
\end{array} \qquad (15)$$

En (15) usamos (6) y (7), entonces:

$$\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} \vec{r}_i \times \left(\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji} \right) = 0 \qquad (16)$$

Finalmente, con (16) la ecuación (15) se reduce a:

$$\sum_{i=1}^{k} \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{\ e} = 0 \qquad (17)$$

Esto nos muestra que la suma de momentos debido a las fuerzas externas debe ser nula. Las ecuaciones (12) y (17) son las conocidas ecuaciones de equilibrio de la estática.

2. OBJETIVO

Realizar el análisis detallado de cada una de las vigas, con la intención de facilitar la comprensión de las formas raras de cargas que podemos encontrar en proyectos contemporáneos a los alumnos y próximos ingenieros civiles.

3. ANÁLISIS ESTRUCTURAL DE VIGAS CON CARGAS POLINÓMICAS

1.-De la siguiente estructura figura No. 1, calcular las reacciones de los apoyos, obtener la ecuación de la fuerza cortante, momento y fuerza axial y trazar los diagramas correspondientes.

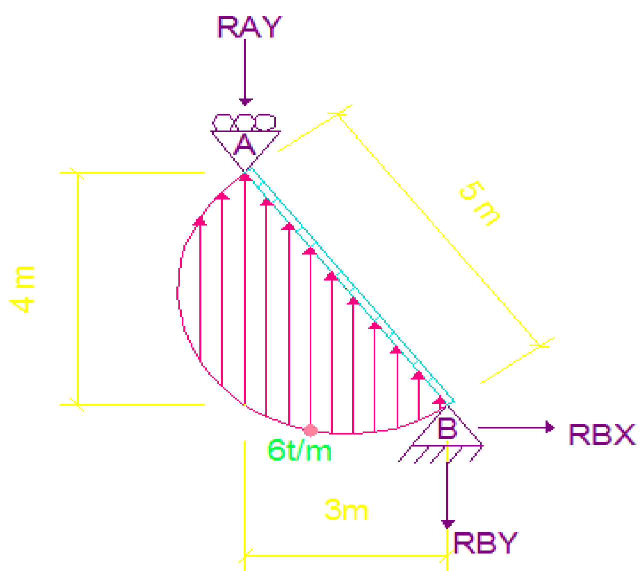


Figura No.1

Calcular la distancia de la viga:

$$5\,m - 3\,m$$

$$x - 1m$$

Por lo tanto obtenemos que la distancia inclinada de la viga es:

$$x = 5(1)/3 = \frac{5}{3}\,m$$

Sabemos que la carga de la viga no se encuentra uniformemente repartida en toda la viga, ni tampoco está concentrada en un solo punto, por lo que es necesario calcular la carga total para hacer el correspondiente análisis de la misma, tomando en cuenta las distancias conocidas, así como la carga inicial, final y del punto máximo de dicha curva.

$$x' = 0\,m \qquad y' = 0\,T/m$$

$$x' = 5/3\,m \qquad y' = 6\,T/m$$

$$x' = 5\,m \qquad y' = 0\,T/m$$

Utilizando la formula general de segundo grado que define el grado de la carga curva podremos conocer la carga de la misma:

$$y = ax^2 + bx + c$$

Sustituyendo el valor de cada distancia y valor de carga en la formula anterior:

$$a(0)^2 + b(0) + c = 0 \ldots 1$$

$$a\left(\frac{5}{3}\right)^2 + b\left(\frac{5}{3}\right) + c = 6 \ldots 2$$

$$a(5)^2 + b(5) + c = 0 \ldots 3$$

Obtenemos un sistema de tres por tres, es decir tres ecuaciones y tres incógnitas.

Existen distintos métodos de resolución de dicho sistema y en este caso elegí el método de Gauss Jordán:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{25}{9} & \frac{5}{3} & 1 & 0 \\ 25 & 5 & 1 & 0 \end{pmatrix} R1 - R3 \begin{pmatrix} 25 & 5 & 1 & 0 \\ \frac{25}{9} & \frac{5}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} R1\ (1/25) \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{25} & 0 \\ \frac{25}{9} & \frac{5}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} R1\ \left(-\frac{5}{9}\right)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{25} & 0 \\ 0 & \frac{10}{9} & \frac{8}{9} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} R2\left(\frac{9}{10}\right) \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{25} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} R2\left(-\frac{1}{5}\right) + R1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{25} & -\frac{27}{25} \\ 0 & 1 & \frac{4}{5} & \frac{27}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R3\left(-\frac{4}{5}\right) + R2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -27/2 \\ 0 & 1 & 0 & 27/5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La solución de este sistema es:

a= -27/25

b= 27/5

c= 0

Ahora bien, recordando la ecuación general de segundo grado, procedemos a sustituir los valores de las incógnitas en la misma:

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$y = -\frac{27}{25}x^2 + \frac{27}{5}x + 0$$

VIGA EQUIVALENTE

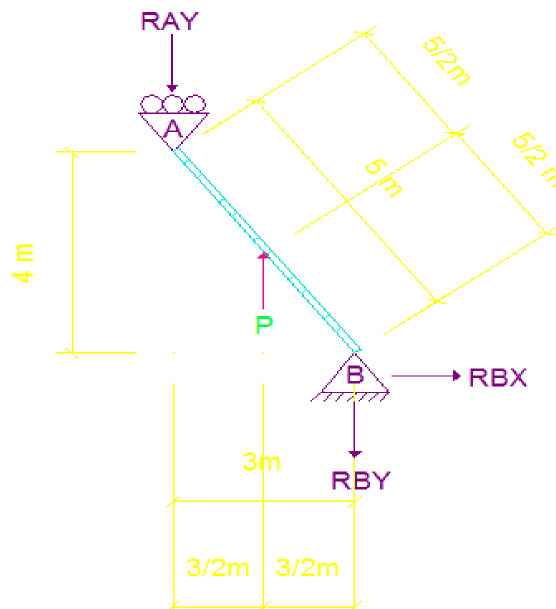


Figura 1.1

La viga equivalente la utilizamos para poder conocer el valor de la carga real pero representada por medio de una carga puntual con la incógnita P, haciendo uso de la ecuación obtenida anteriormente y mediante una integral definida de 0 metros a 5 metros (distancia de la viga en el eje inclinado).

$$P = \int_0^5 \left(-\frac{27}{25}x^2 + \frac{27}{5}x\right)dx$$

$$P = -\frac{9}{25}x^3 \Big|_0^5 + \frac{27}{10}x^2 \Big|_0^5 = \frac{45}{5}\ ton$$

Calculando la distancia a la que se encuentra la carga P en el eje x:

$5 - 3$

$\frac{5}{2} - x$

$5x = \frac{5}{2}(3)$

$x = \frac{3}{2}\ m$

Haciendo uso de la fórmula de centroide para conocer la distancia a la que se encuentra dicha carga supuesta pero en el eje inclinado.

$$\bar{x} = \frac{\int_{L_1}^{L_2} \bar{x} dA}{\int_{L_1}^{L_2} dA}$$

$$\bar{x} = \frac{\int_0^5 x\left(-\frac{27}{25}\ x^2 + \frac{27}{5}x\right) dx}{\int_0^5 \left(-\frac{27}{25}\ x^2 + \frac{27}{5}x\right) dx}$$

$$\bar{x} = \frac{\int_0^5 x\left(-\frac{27}{25}\ x^3 + \frac{27}{5}x^2\right) dx}{\int_0^5 \left(-\frac{27}{25}\ x^2 + \frac{27}{5}x\right) dx}$$

$$\bar{x} = \frac{-\frac{27}{4(25)}x^4 \Big|_0^5 + \frac{27}{3}(5)x^3 \Big|_0^5}{-\frac{27}{3(25)}x^3\ \Big|_0^5 \frac{27}{2(5)}\ x^2\ \Big|_0^5}$$

$$\bar{x} = \frac{-\frac{27}{4(25)}(5^4 - 0^4) \Big|_0^5 + 27/3(5)(5^3 - 0^3) \Big|_0^5}{-\frac{27}{3(25)}(5^3 - 0^3)\ \Big|_0^5 \frac{27}{2(5)}\ (5^2 - 0^2)\ \Big|_0^5}$$

$$\bar{x} = \frac{\frac{225}{4}}{\frac{45}{2}} = \frac{5}{2}\ m$$

Ya conocidas las distancias reales a las que se encuentra dicha carga continuamos con el cálculo de las reacciones de la viga real:

$$-3RAy + \frac{3}{2}\left(\frac{45}{2}\right) = 0$$

$$RAy = \frac{45}{4}$$

Se puede apreciar en el diagrama que ahora solo tenemos como incógnita la reacción en el apoyo "B" y en la dirección "y", por lo que podemos hacer sumatoria de fuerzas en dicho eje.

$$\Sigma Fy = 0$$

$$-\frac{45}{4} + \frac{45}{2} - RBy = 0$$

$$\frac{45}{4} - RBy = 0$$

$$RBy = \frac{45}{4}\ ton$$

En cuanto a las incógnitas faltantes podremos deducir que en el eje "x" no lo que resulta de la siguiente manera:

$$\Sigma Fx = 0$$

$$RBx = 0$$

Representación gráfica de las fuerzas actuantes:

$$-\frac{27}{2}\left(\frac{5}{2}\right) + 3RBY = 0$$

$$RBY = \frac{45}{4} ton$$

$$\Sigma FY = 0$$

$$-RAY + \frac{45}{2} - \frac{45}{4} = 0$$

$$RAY = \frac{45}{4}\ ton$$

$$\Sigma FX = 0$$

$$RBX = 0$$

Procedemos a hacer cortes de la viga original No. 1 para obtener la fórmula de cada tramo y posteriormente poder definir la fuerza axial, cortante y momento en cualquier tramo de la viga.

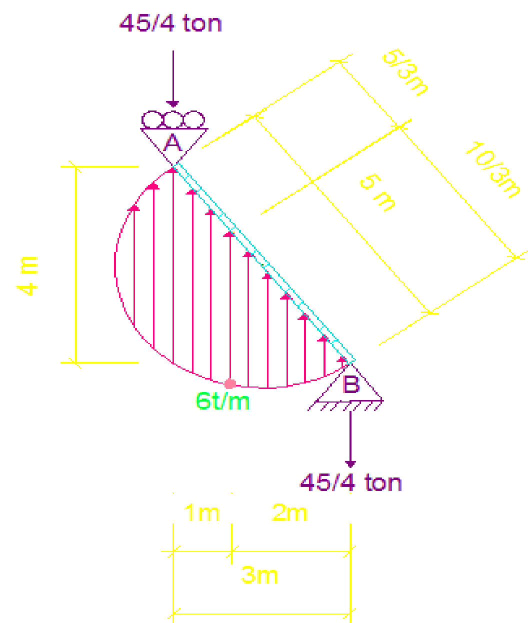


Figura No. 1.2

Primer y único tramo:

$0\,m \leq x \geq 5\,m$

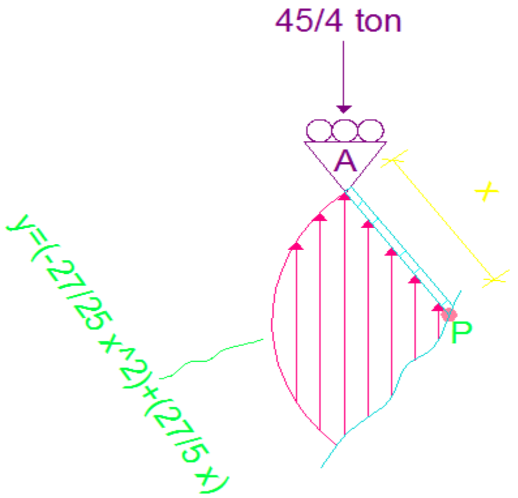


Figura No.1.3

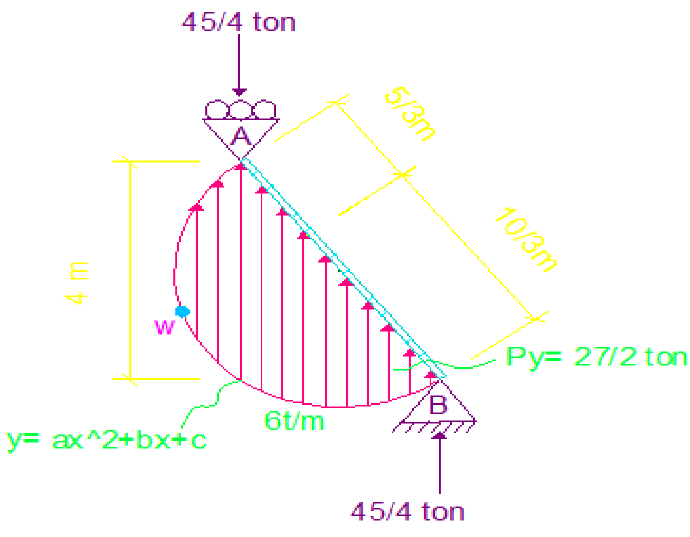


Figura No. 1.4

$x = 0 \quad y = 0$

$x = \frac{5}{3} \quad y = w$

$x = 5 \quad y = 0$

$a(0)^2 + b(0) + c = 0 \ldots 1$

$a\left(\frac{5}{3}\right)^2 + b\left(\frac{5}{3}\right) + c = w \ldots 2$

$a(5)^2 + b(5) + c = 0 \ldots 3$

$*\, w$ Representa la carga de la curva

Despejando de la ecuación 1

$a(0)^2 + b(0) + c = 0$

$c = 0$

$\frac{25}{9}a + \frac{5}{3}b = w$

$$a = \frac{9}{25}\left(w - \frac{5}{3}b\right)$$

$$a = \frac{9}{25}w - \frac{3}{5}b$$

Sustituyendo en ecuación 2

$$25\left(\frac{9}{25}w - \frac{3}{5}b\right) + 5b = 0$$

$9w - 15b + 5b = 0$

$9w - 10b = 0$

$-10b = -9w$

$$b = \frac{9}{10}w$$

$$a = \frac{9}{25}w - \frac{3}{5}\left(\frac{9}{10}w\right) = -\frac{9}{10}w$$

$$a = -\frac{9}{10}w$$

$$y = -\frac{9}{50}wx^2 + \frac{9}{10}wx$$

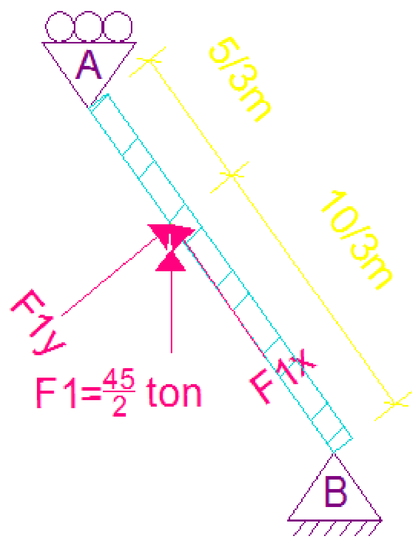


Figura No.1.5

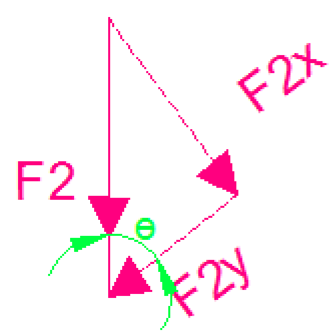


Figura No.1.6

VIGA EQUIVALENTE

Recodemos que fue necesaria la suposición de una carga puntual en una viga virtual anterior, dicha carga estaba en el eje "y", lo cual indica que no estaba directamente transmitida en la posición que la carga curva en la viga real, por lo que es necesario hacer una descomposición de dicha carga en los ejes correspondientes.

$$F_1y = Fcos\text{ɵ} = \frac{45}{2}\cos\left(tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)\right) = \frac{27}{2}\ ton$$

$$F_1x = Fsen\text{ɵ} = \frac{45}{2}\text{sen}\left(tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)\right) = 18\ ton$$

$$F = \sqrt{F_{1y} + F_1x^2} = \sqrt{\left(\frac{27}{2}\right)^2 + 18^2} = \frac{45}{2}\ ton$$

A sabiendas de esto, lo que prosigue es calcular el area (carga) en cada dirección:

$$A = \int_0^5 \left(-\frac{9}{50}wx^2 + \frac{9}{10}wx\right)dx = \frac{27}{2}$$

$$A = -\frac{3}{50}wx^3\Big|_0^5 + \frac{9}{20}wx^2\Big|_0^5 = \frac{27}{2}$$

$$A = \frac{15}{4}w = \frac{27}{2}$$

$$wy = \frac{27}{2}\left(\frac{4}{15}\right) = \frac{18}{5}ton/m$$

$$A = \int_0^5 \left(-\frac{9}{50}wx^2 + \frac{9}{!0}wx\right)dx = 18$$

$$A = \frac{15}{4}w = 18$$

$$wx = \frac{24}{5}ton/m$$

Procedemos a transmitir las cargas en sus direcciones correspondientes en la viga No. 1.

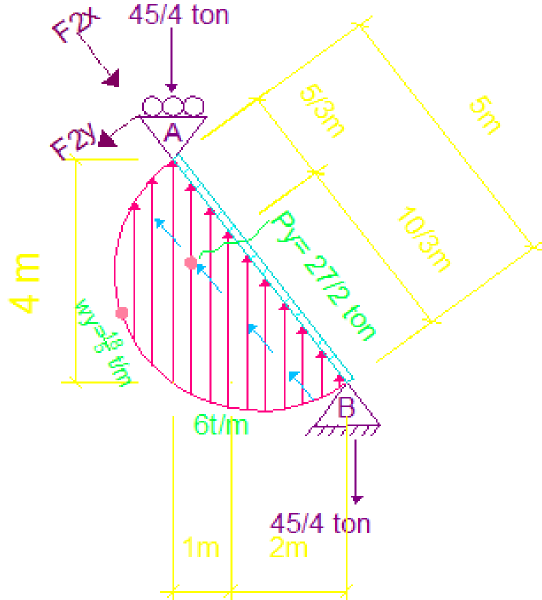


Figura No. 1.7

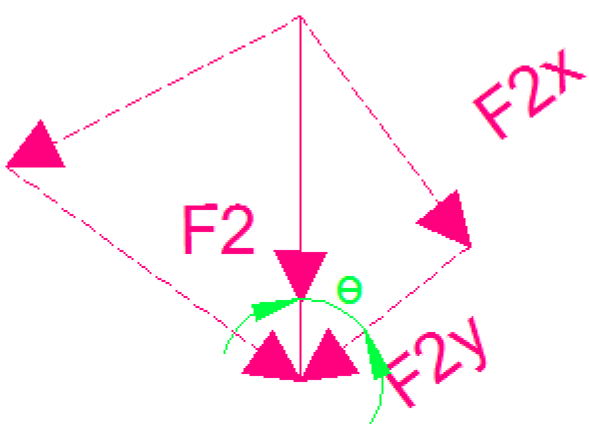


Figura No. 1.8

$$F_2 = \frac{45}{4} ton$$

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)$

$F_{2y} = F_2 \cos\theta = \frac{45}{4} \cos(\tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)) = \frac{27}{4} ton$

$F_{2X} = F_2\, sen\,\theta = \frac{45}{4} sen\,(\tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)) = 9\, ton$

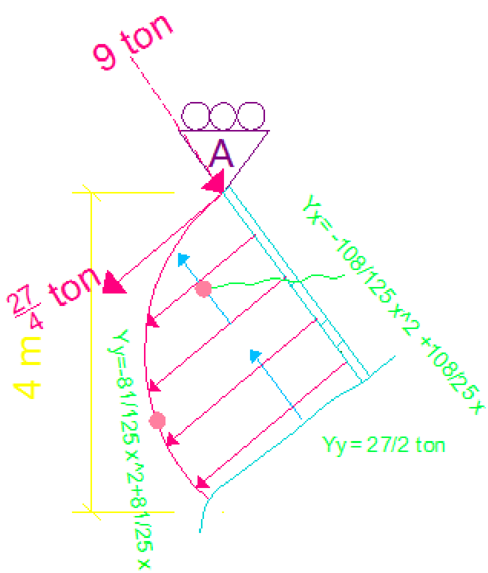


Figura No. 1.7

Se sabe que la carga de la viga en función de su peso w esta representado por la siguiente ecuación y con las fuerzas anteriores podemos hacer el corte de toda la viga:

$y = -\frac{9}{50} wx^2 + \frac{9}{10} wx$

$wy = \frac{18}{5} ton/m$

$wx = \frac{24}{5} ton/m$

$\Sigma MP = 0$

VIGA EQUIVALENTE

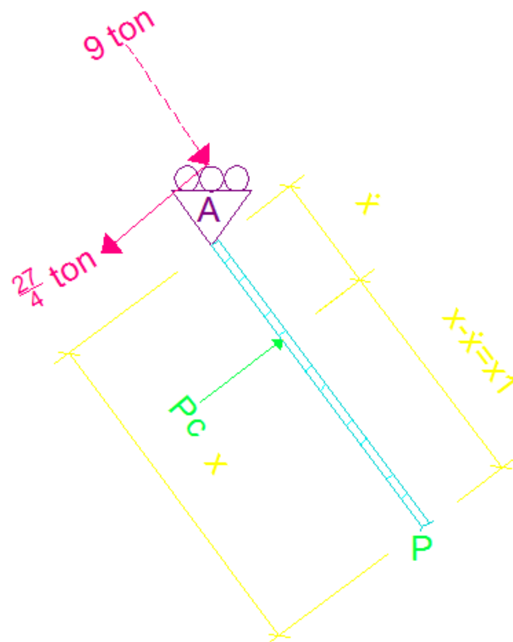


Figura No.1.8

Calculando carga:

$$\bar{x} = \frac{\int_0^x x\left(-\frac{81}{125}x^2 + \frac{81}{25}x\right)dx}{\int_0^x \left(-\frac{81}{125}x^2 + \frac{81}{125}x\right)dx}$$

$$\bar{x} = \frac{-\frac{81}{500}x^4 + \frac{27}{25}x^3}{-\frac{27}{125}x^3 + \frac{81}{50}x^2}$$

$$x_1 = x - \frac{-\frac{81}{500}\,x^4 + \frac{27}{2}x^3}{-\frac{27}{125}x^3 + \frac{81}{50}x^2}$$

$$Pc = -\frac{27}{125}x^3 + \frac{81}{50}x^2$$

Por ultimo hacemos un análisis con las cargas reales en las direcciones reales y así obtener una ecuación de momento, axial y cortante que nos permitirá conocer el comportamiento de esta viga inclinada de 5 m a cualquier distancia en el intervalo de 0 a 5 metros.

$$M(x) = -\frac{27}{4}x + \left(-\frac{27}{125}x^3 + \frac{81}{50}x^2\right)\left(x - \frac{-\frac{81}{500}x^4 + \frac{27}{25}x^3}{-\frac{27}{12}x^3 + \frac{81}{50}x^2}\right)$$

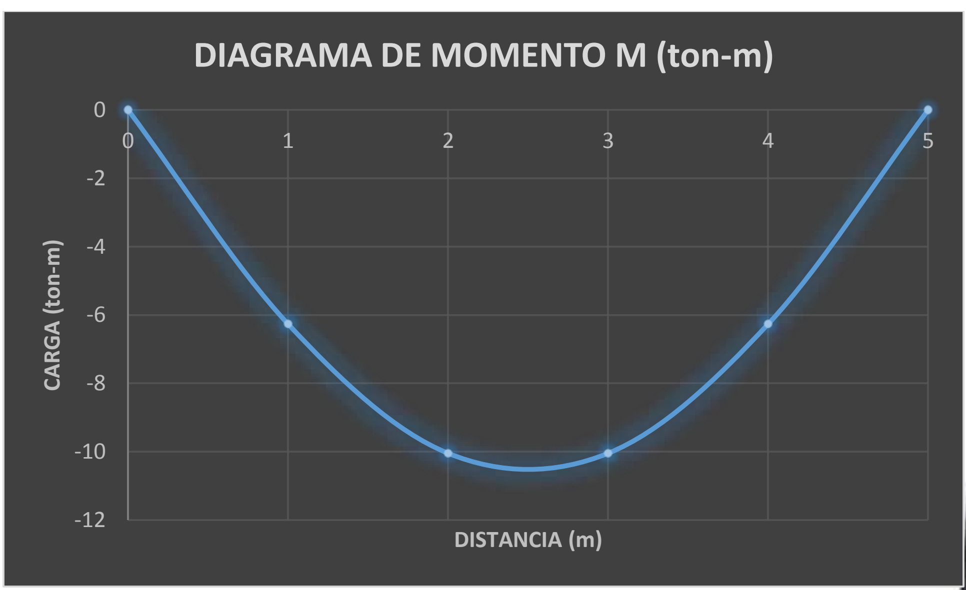
$$M(x) = -\frac{27}{4}x + \left(-\frac{27}{125}x^4 + \frac{81}{50}x^3 + \frac{81}{500}x^4 - \frac{27}{25}x^3\right)$$

$$M(x) = -\frac{27}{500}x^4 + \frac{27}{50}x^3 - \frac{27}{4}x$$

$$M(0m) = 0\,ton - m$$

$$M(5m) = 0\,ton - m$$

DISTANCIA (m)	CARGA (ton-m)
0	0
1	-6.264
2	-10.044
3	-10.044
4	-6.264
5	0

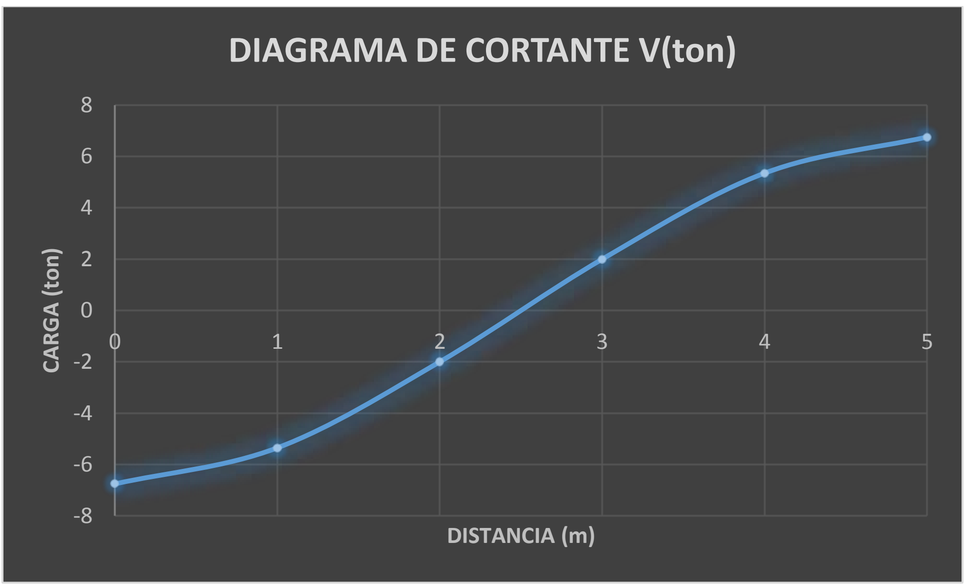


$$V(x) = \frac{dMx}{dx} = -\frac{27}{125}x^3 + \frac{81}{50}x^2 - \frac{27}{4}$$

$$V(0m) = -\frac{27}{4}ton$$

$$V(5m) = \frac{27}{4}ton$$

DISTANCIA (m)	CARGA (ton)
0	-6.75
1	-5.346
2	-1.998
3	1.998
4	5.346
5	6.75



$$V(x) = 0$$

$$-\frac{27}{125}x^3 + \frac{81}{50}x^2 - \frac{27}{4} = 0$$

$0m \leq x \geq 5m$

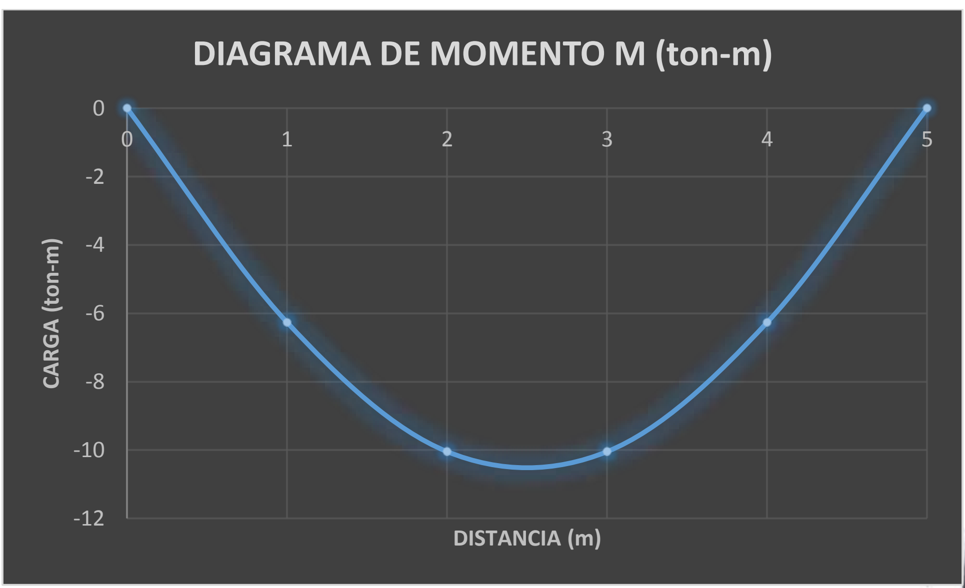
$$x_1 = \frac{5 - 5\sqrt{3}}{2} = -1.83\ m$$

$$x_1 = \frac{5 + 5\sqrt{3}}{2} = 6.83\ m$$

$$x_3 = \frac{5}{2} m$$

$$M_{(X)} = -\frac{27}{500}(x)^4 + \frac{27}{50}(x)^3 - \frac{27}{4}(x)$$

DISTANCIA (m)	CARGA (ton-m)
0	0
1	-6.264
2	-10.044
3	-10.044
4	-6.264
5	0



$$Mmax\left(\frac{5}{2}\right)=-\frac{27}{500}\left(\frac{5}{2}\right)^{4}+\frac{27}{50}\left(\frac{5}{2}\right)^{3}-\frac{27}{4}\left(\frac{5}{2}\right)=-\frac{675}{64}ton-m$$

FUERZA AXIAL FUERZAS "X"

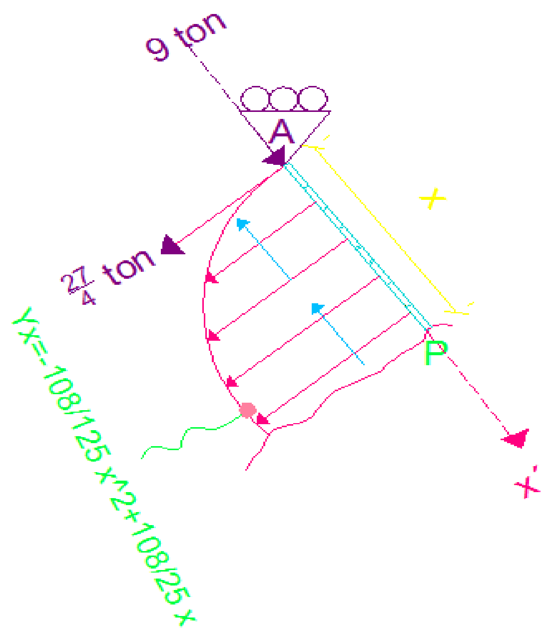


Figura No.1.9

$$\Sigma Fx=0$$

$$Nx=-9+\int_{0}^{x}\left(-\frac{108}{125}x^{2}+\frac{108}{25}x\right)dx$$

$$N(x)=-9-\frac{36}{125}x^{3}+\frac{54}{25}x^{2}$$

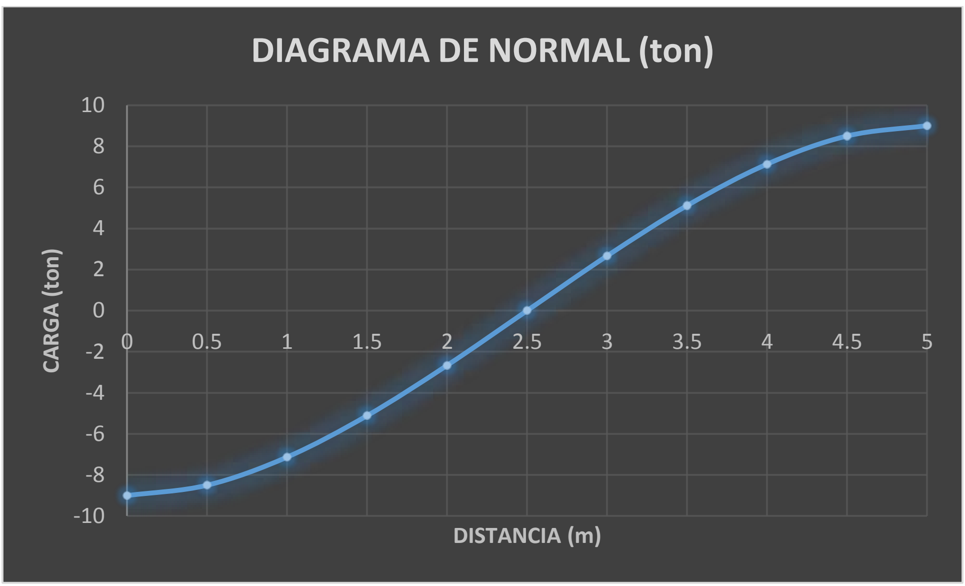
$$N(0m)=-9\ ton(C)$$

$$N(5m)=9Ton(T)$$

$$N=0$$

$$-9-\frac{36}{125}x^{3}-\frac{54}{25}x^{2}=0$$

DISTANCIA (m)	CARGA (ton)
0	-9
0.5	-8.496
1	-7.128
1.5	-5.112
2	-2.664
2.5	0
3	2.664
3.5	5.112
4	7.128
4.5	8.496
5	9



$0\,m \leq x \geq 5\,m$

$$x_1 = \frac{5 - 5\sqrt{3}}{2} m = -1.83\,m$$

$$x_2 = \frac{5 + 5\sqrt{3}}{2} m = 6.83\,m$$

$$x_3 = \frac{5}{2} m$$

2.-De la siguiente estructura figura No. 2, calcular las reacciones de los apoyos, obtener la ecuación de la fuerza cortante, momento y fuerza axial y trazar los diagramas correspondientes.

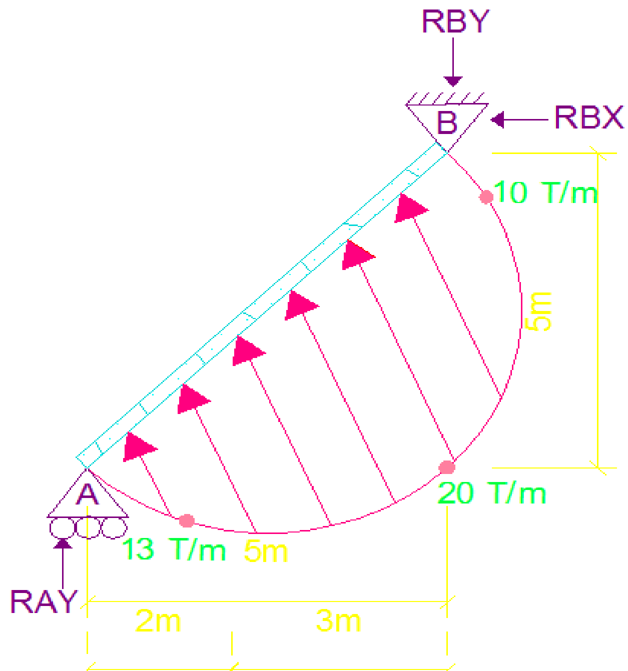


Figura No. 2

Buscando la distancia inclinada de la viga isostática:

$c = 5\sqrt{2}$

$5\sqrt{2} - 5$

$x - 2$

$x = 2\sqrt{2}$

$c = \sqrt{5^2 + 5^\wedge} = 5\sqrt{2} = 7.071067812\ m$

Tomando en cuenta las cargas en T/m a las distancias correspondientes:

$x = 0 \quad y = 13\ T/m$

$x = 2\sqrt{2} \quad y = 20\ T/m$

$x = 5\sqrt{2} \quad y = 10\ T/m$

Sustituyendo en ecuación general de tercer grado que define la curva dada:

$$y = ax^3 + bx^2 + c$$

$$y = \frac{-187\sqrt{2}}{1200}x^3 + \frac{899}{600}x^2 + 13$$

$$a(2\sqrt{2})^3 + b(2\sqrt{2})^2 + 13 = 20$$

$$a(5\sqrt{2})^3 + b(5\sqrt{2})^2 + 13 = 10$$

$$(16\sqrt{2})a + 8b = 7 \dots 1$$

$$(250\sqrt{2})a + 50b = -3 \dots 2$$

Resolviendo mediante sustitución:

$$a = \frac{7}{16\sqrt{2}} - \frac{8}{16\sqrt{2}}b = \frac{(7\sqrt{2})}{32} - \frac{\sqrt{2}}{4}b$$

$$250\sqrt{2}\left(\frac{7\sqrt{2}}{32} - \frac{\sqrt{2}}{4}b\right) + 50b = -3$$

$$\frac{875}{8} - 125b + 50b = -3$$

Despejando b nos queda de la siguiente forma:

$$b = \frac{899}{600}$$

Posteriormente procedemos a sustituir en el valor de a

$$a = \frac{7\sqrt{2}}{32} - \frac{\sqrt{2}}{4}b = \frac{-187\sqrt{2}}{1200}$$

$$\frac{\left(-187\sqrt{2}(625)(4)\right)}{1200(4)} = \frac{\left(-4675\sqrt{2}(125)\right)}{48} = \frac{899(2)\sqrt{2}(125)}{600(3)} = \frac{4415\sqrt{2}}{36}$$

Calculando carga:

$$\bar{x} = \frac{\frac{11575}{24}}{\frac{13315\sqrt{2}}{144}} = \frac{144(11575)}{24(13315\sqrt{2})} = \frac{13890}{2663(\sqrt{2})}\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) = \frac{13890\sqrt{2}}{5326} = \frac{6945}{2663}\sqrt{2}$$

$$\bar{x} = \frac{\int_0^{5\sqrt{2}} x\left(\frac{-187}{1200}x^3 + \frac{899}{600}x^2 + 13\right)\, dx}{\int_0^{5\sqrt{2}}\left(\frac{-187\sqrt{2}}{1200}x^3 + \frac{899}{600}x^2 + 13\right) dx}$$

Desarrollando las integrales correspondientes:

$$\bar{x} = \frac{\left.\frac{-187\sqrt{2}}{1200(5)}x^5 + \frac{899}{600(4)}x^4 + \frac{13}{2}x^2\right|_0^{5\sqrt{2}}}{\left.\frac{-187\sqrt{2}}{1200(4)}x^4 + \frac{899}{600(3)}x^3 + \frac{13}{2}x\right|_0^{5\sqrt{2}}} = -\frac{4675}{6}$$

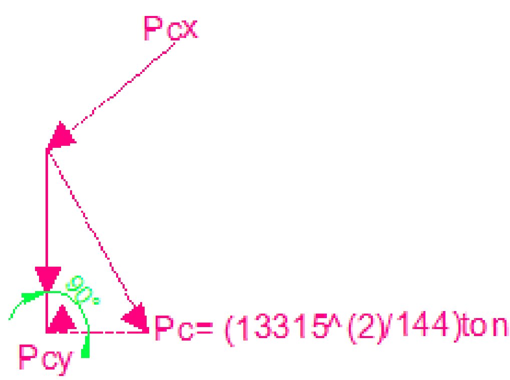


Figura No. 2.1

Calculando carga en la dirección correspondiente:

$$Pcy = Pc\cos\theta = \frac{13315\sqrt{2}}{144}\cos(45°) = \frac{13315}{144}\ ton$$

$$Pcx = Pc\,\mathrm{sen}\,\theta = \frac{13315\sqrt{2}}{144} sen(45°) = \frac{13315}{144}\ ton$$

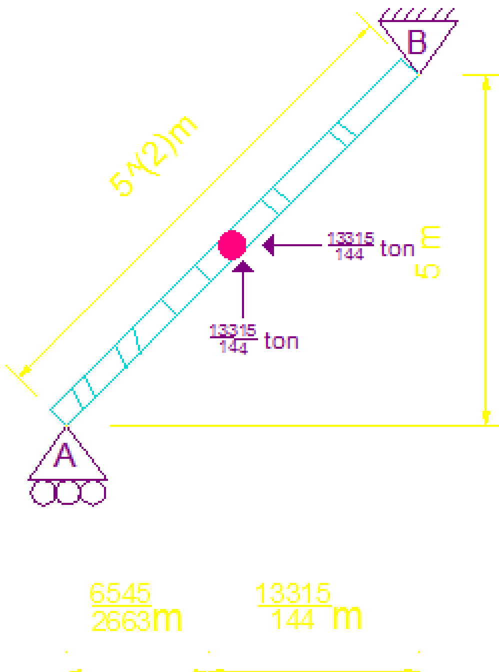


Figura No. 2.2

Calculando distancia inclinada:

$5\sqrt{2}-5$

$\dfrac{6945\sqrt{2}}{2663}-x$

$x=\dfrac{6945}{2663}$

3.-De la siguiente estructura figura No. 3, calcular las reacciones de los apoyos, obtener la ecuación de la fuerza cortante, momento y fuerza axial y trazar los diagramas correspondientes.

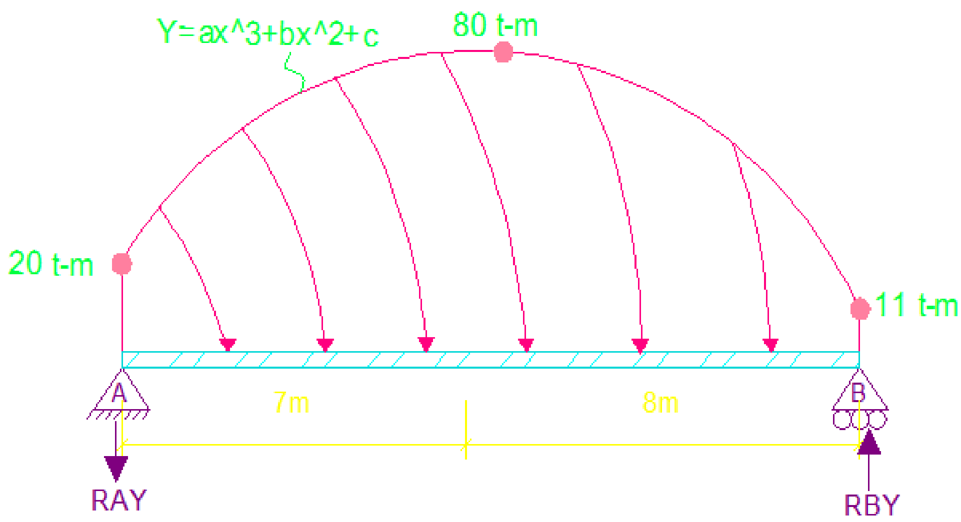


Figura No. 3

$x = 0\,m \quad y = 20\,T - m$

$x = 7\,m \quad y = 80\,T - m$

$x = 18\,m \quad y = 11\,T - m$

Sustituimos los valores anteriores en la ecuación de tercer grado para poder calcular los valores reales de las incógnitas que nos den como resultado las cargas adecuadas:

$a(0)^3 + b(0)^2 + c = 20 \ldots 1$

$a(7)^3 + b(7)^2 + c = 80 \ldots 2$

$a(18)^3 + b(18)^2 + c = 11 \ldots 3$

Haciendo uso de la ecuación No. 1

$a(0)^3 + b(0)^2 + c = 20$

Obtenemos que el valor de la incógnita "c" es el siguiente:

$\therefore c = 20$

Tomando en cuenta el valor anterior, proseguimos a despejar la variable a de la ecuación 2.

$$343a + 49b + 20 = 80$$

$$a = \frac{80 - 20 - 49b}{343} = \frac{60 - 49b}{343}$$

Por ultimo en la ecuación 3 sustituimos los valores obtenidos para cada variable para conseguir el valor de b.

$$\frac{60 - 49b}{343}(18)^3 + b(18)^2 + 20 = 11$$

$$\left(\frac{60}{343} - \frac{b}{7}\right)(18)^3 + 324b + 20 = 11$$

$$1020.174927 - \left(\frac{5832}{7}b\right) + 324b + 20 = 11$$

$$\left(-\frac{3564}{7}b\right) = 11 - 1040.174927$$

$$b = \frac{11 - 1040.174927}{-3564} = 2.021387343$$

$$b = 2.021387343$$

$$a = \frac{60 - 49(2.021387343)}{343} = -0.1138425067$$

$$a == -0.1138425067$$

$$c = 20$$

Sustituyendo en formula general

$$y = -0.1138425067x^3 + 2.021387343x^2 + 20$$

$$y = -\frac{2209}{19404}x^3 + 2.021387343x^2 + 20$$

Buscando el valor del momento total que genera la carga de esa curva con momentos generadores:

$$M_T = \int_0^{18} \left(-\frac{2209}{19404}x^3 + 2.021387343x^2 + 20\right) dx$$

Desarrollando la ecuación de momento de dicha curva:

$M_T = 1301.893582\ t - m$

Buscando las reacciones:

$\Sigma MA = 0$

$1301.893582 - 18RBY = 0$

$RBY = 72.32742122\ ton$

$\Sigma FY = 0$

$RAY + 72.32742122 = 0$

$RAY = -72.32742122\ ton$

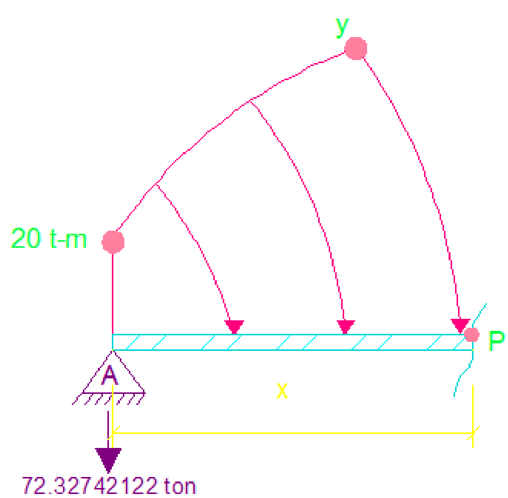


Figura No. 3.1

$$A = M_T = \int_0^{x_1} \left(-\frac{2209}{19404}x^3 + 2.021387343x^2 + 20\right) dx$$

$$M_T = \int_0^{x_1} \left(-\frac{2209}{77616}x_1^4 + \frac{2.021387343}{3}x_1^3 + 20x_1\right) dx$$

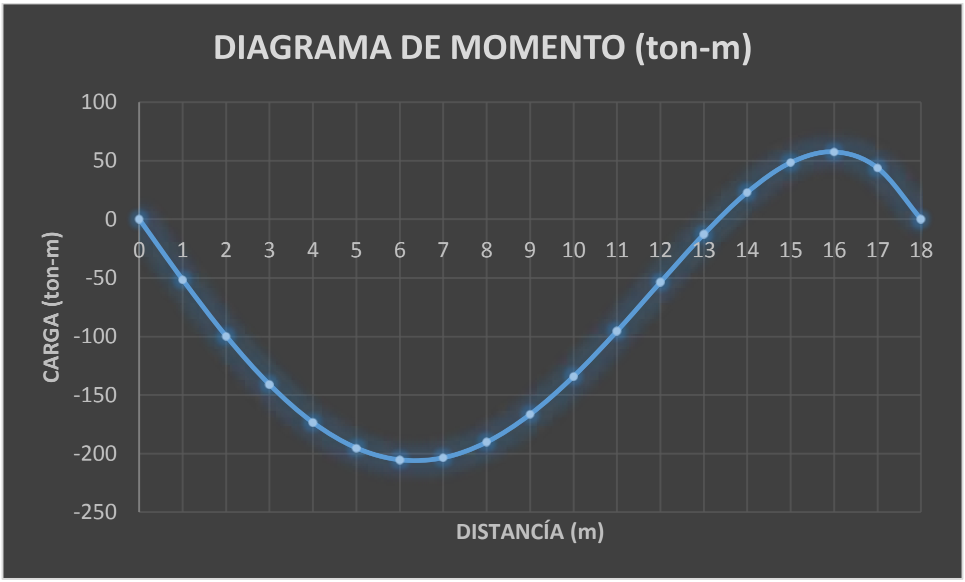
$$M(x, x_1) = -72.32742122x - \frac{2209}{77616}x_1^4 + \frac{2.021387343}{3}x_1^3 + 20x_1$$

$M(0,0) = 0\ t - m$

$M(18,18) = 0\ t - m$

Graficamos momento que nos servirá para observar el comportamiento de la viga a cualquier distancia que se encuentre entre 0 y 18 metros.

DISTANCIA (m)	CARGA (ton-m)
0	0
1	-51.68208607
2	-99.71984622
3	-141.0950883
4	-173.4726753
5	-195.2005251
6	-205.3096108
7	-203.5139603
8	-190.2106567
9	-166.4798382
10	-134.0846979
11	-95.47148406
12	-53.7694998
13	-12.79110347
14	22.96829164
15	48.33021716
16	57.43314969
17	43.7325108
18	0.000667006



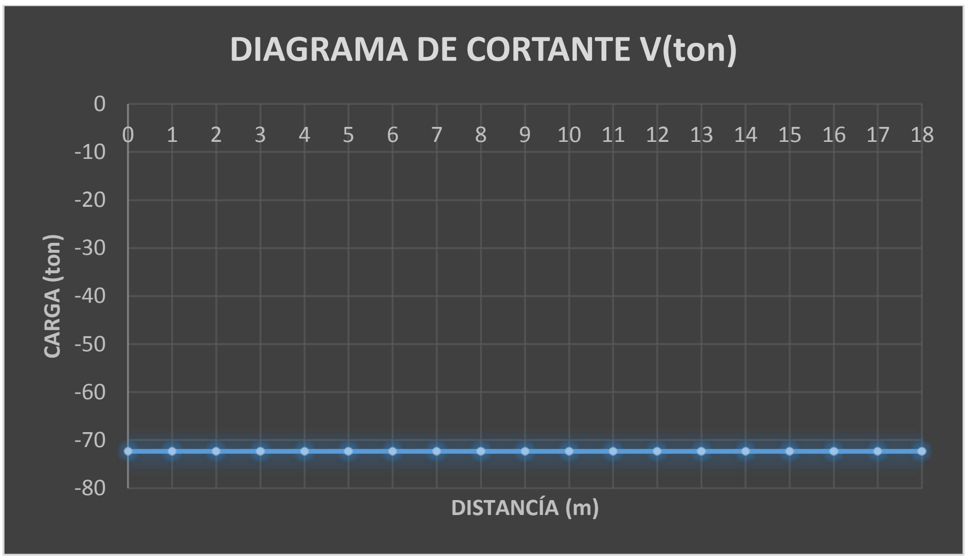
$$V(x,x_1) = \frac{dM(x,x_1)}{dx} = -72.32742122$$

$$V(0,0) = -72.33\ ton$$

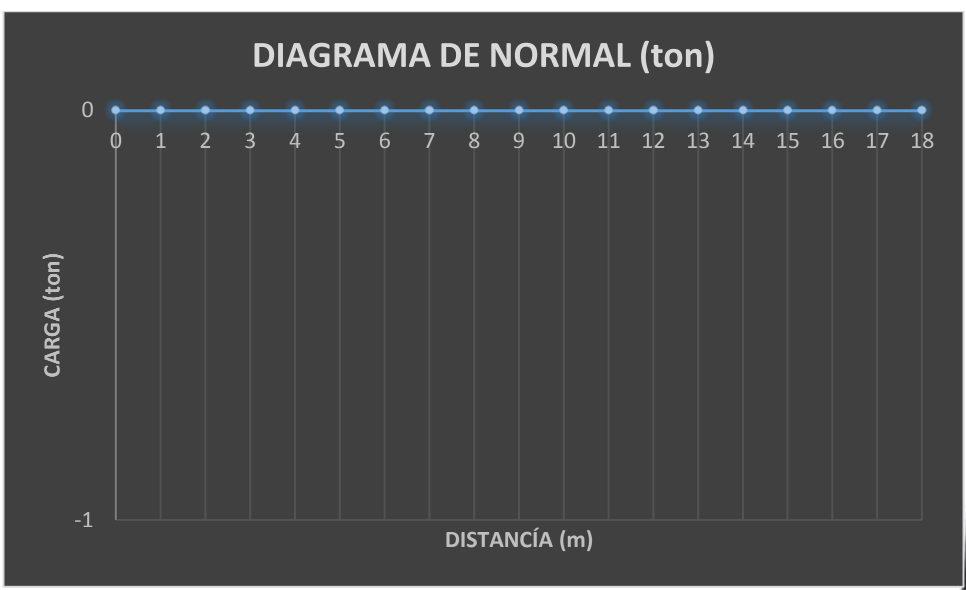
$$V(18,18) = -72.33\ t - m$$

DISTANCIA (m)	CARGA (ton)
0	-72.32742122
1	-72.32742122
2	-72.32742122
3	-72.32742122
4	-72.32742122
5	-72.32742122
6	-72.32742122
7	-72.32742122
8	-72.32742122
9	-72.32742122
10	-72.32742122
11	-72.32742122
12	-72.32742122
13	-72.32742122
14	-72.32742122

15	-72.32742122
16	-72.32742122
17	-72.32742122
18	-72.32742122



Podemos concluir que no tenemos cargas ni fuerzas horizontales por lo tanto la fuerza axial es igual a cero:



4.-De la siguiente estructura figura No. 8, calcular las reacciones de los apoyos, obtener la ecuación de la fuerza cortante, momento y fuerza axial y trazar los diagramas correspondientes.

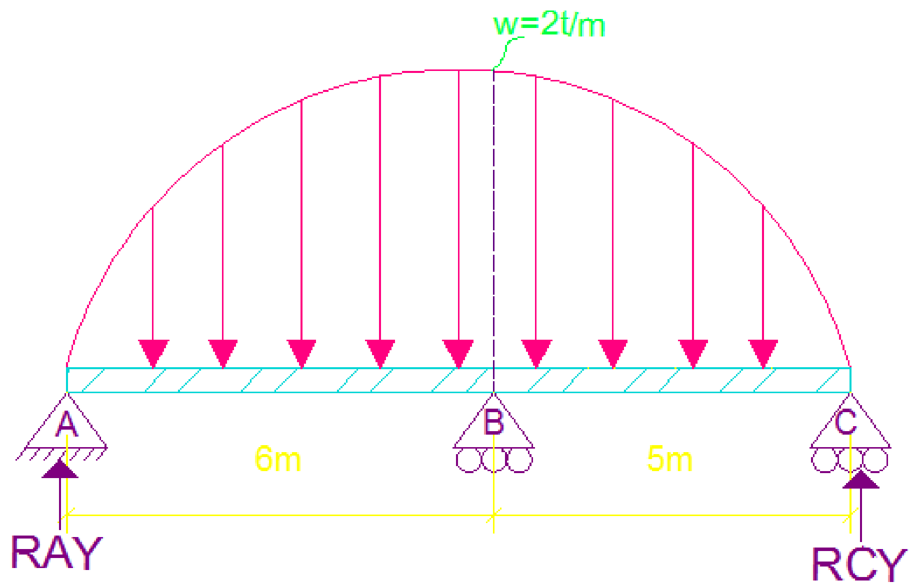


Figura No.4

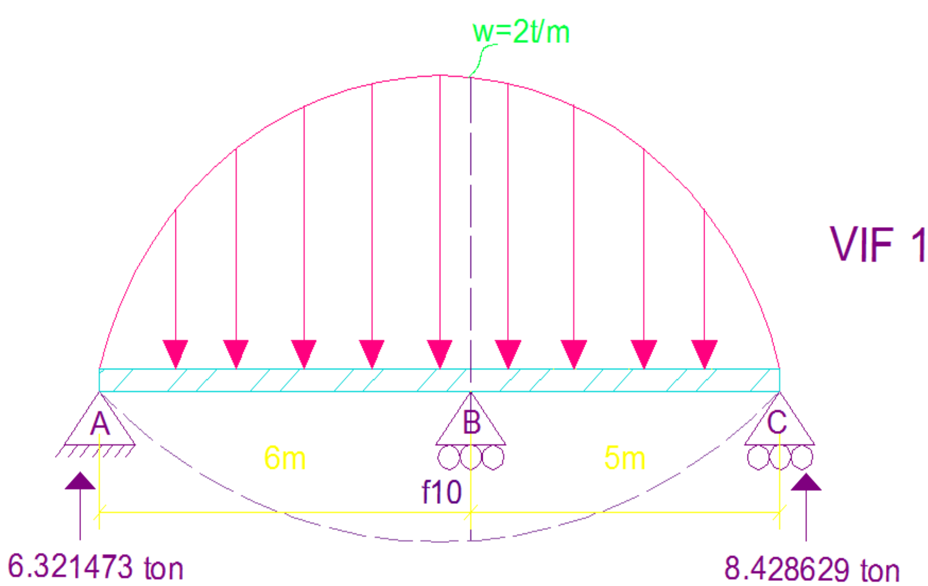


Figura No.4.1

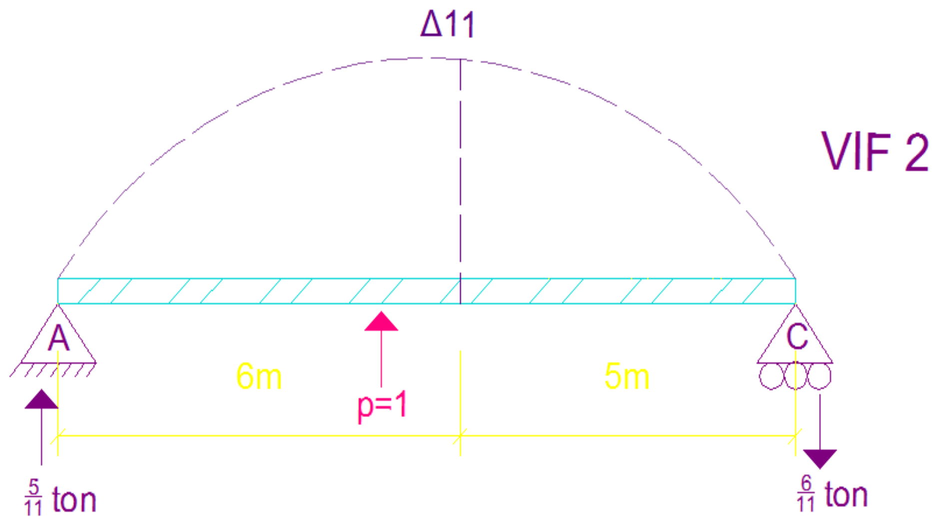


Figura No.4.2

VIGA ISOSTÁTICA FICTICIA No. 1

Si: $y = ax^5 + bx$

X=0 Y= (0)

X=6 Y=2

X=11 Y=0

$a(6)^5 + b(6) = 2$

$a(11)^5 + b(11) = 0$

Resolviendo las ecuaciones anteriores nos resulta:

$7776a + 6b = 2 \ldots 1$

$16101a + 11b = 0 \ldots 2$

$a = -\frac{11}{161051}$

$7776\left[\frac{-11}{161051}b\right] + 6b = 2$

$$-\frac{85536}{161051}b + 6b = 2$$

$$\frac{880770}{161051}b = 2$$

$$5.4689b = 2$$

$$b = \frac{322102}{8800770}$$
$$b = 0.3657$$
$$a = -\frac{11}{16101}(0.3657)$$
$$a = -\frac{1}{40035}$$
Sustituyendo los valores de las variables:
$$-\frac{85536}{161051} + \frac{6(16101)}{161051} = \frac{880770}{161051}$$

$$b = \frac{161051}{440385}$$
$$a = -\frac{11}{161051}\left[\frac{161051}{440385}\right]$$
$$a = -\frac{11}{440385}$$
$$y = -\frac{11}{440385}\ x^5 + \frac{161051}{440385}\ x$$

$$\bar{x} = \frac{\int_0^{11}\left(-\frac{11}{440385}\ x^6 + \frac{161051}{440385}\ x^2\right)dx}{\int_0^{11}\left(-\frac{11}{440385}\ x^5 + \frac{161051}{440385}\ x\right)dx}$$

$$\bar{x} = \frac{-\frac{11}{3082695}\ x^5 + \frac{161051}{1321155}\ \ x^3\Big]_0^{11}}{-\frac{11}{2642310}\ x^6 + \frac{161051}{880770}x^2\Big]_0^{11}}$$

$$\bar{x} = \frac{92.714927}{14.750102} = 6.28714\ m$$

$\Sigma MA = 0$

$14.750102(6.285714) - 11RBy = 0$

$RBy = 8.428629\ ton$

$\Sigma Fy = 0$

$RAy - 14.750102 + 8.428629 = 0$

$RAy = 6.321473\ ton$

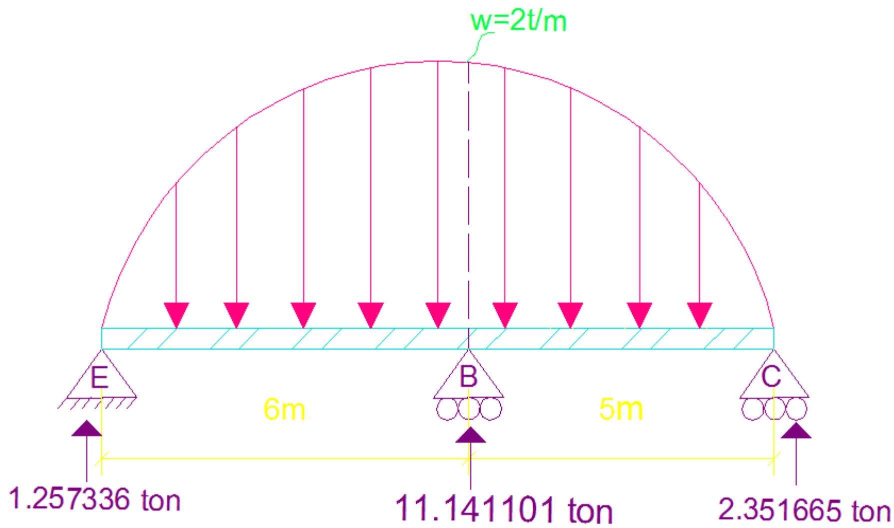


Figura No.4.4

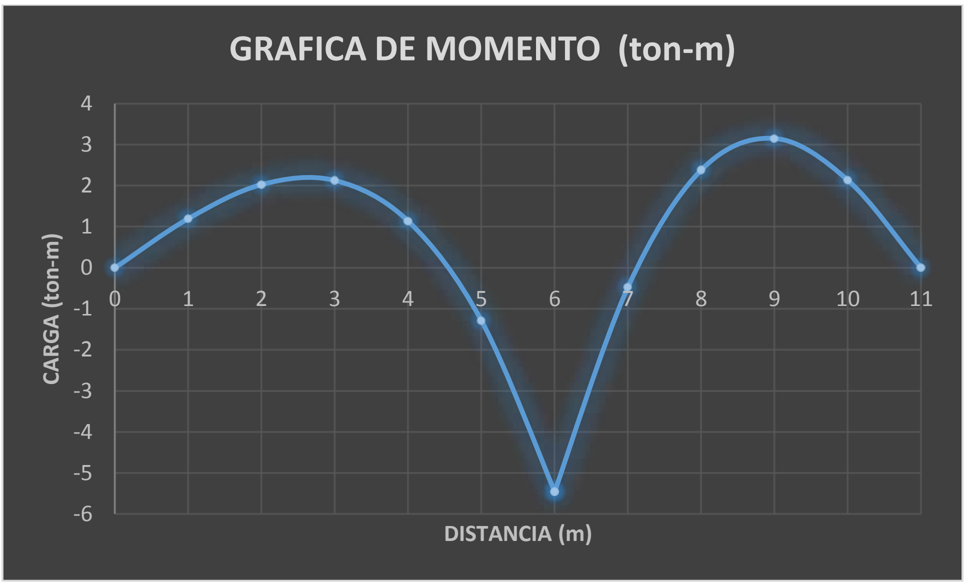
$$M(x) = 6.321473\,x - \left(-\frac{11}{2642310}\,x^6 + \frac{161051}{880770}x^2\right)\left[x - \frac{-\frac{11}{3082695}x^7 + \frac{161051}{1321155}x^3}{\frac{11}{2642310}x^6 + \frac{161051}{880770}x^2}\right]$$

$$M(x) = 6.321473\,x - \left(-\frac{11}{2642310}\,x^7 + \frac{161051}{880770}x^3 + \frac{11}{3082695}\,x^7 - \frac{161051}{1321155}\,x^3\right)$$

$$M(x) = 6.321473\,x + \frac{1}{1681470}\,x^7 - 0.060951\,x^3$$

DISTANCIA (m)	CARGA (ton-m)
0	0
1	1.196386595
2	2.027148124
3	2.127658648
4	1.138287855
5	-1.285607678
6	-5.454701101

6	-5.454701101
7	-0.473621387
8	2.38170345
9	3.151293405
10	2.134941172
11	0.001116852



VIGA ISOSTÁTICA FICTICIA No. 2

$\Sigma MA = 0$

$-1(6) - 11\,RBy = 0$

$RBy = -\frac{6}{11}\ ton \downarrow$

$\Sigma Fx = 0$

$$RAy + 1 - \frac{6}{11} = 0$$

$$RAy = -\frac{5}{11}\ ton$$

$0\,m \leq x \geq 6\,m$

$m_1 = -\frac{5}{11}x$

$6\,m \leq x \geq 11\,m$

$m_2 = -\frac{5}{11}x + 1(x-6)$

$m_2 = \frac{6}{11}x - 6$

$f_{10} = \frac{1}{EI}\int_0^6 \left[\frac{1}{1681470}\,x^7 - 0.060951\,x^3 + 6.321473\,x\right]\left[-\frac{5}{11}x\right]dx\ + \frac{1}{EI}\int_6^{11}\left[\frac{1}{1681470}\,x^7 - 0.06091\,x^3 + 6.321473x\right]\left[\frac{6}{11}x - 6\right]\Big)\,dx$

$f_{10} = -\frac{1641.100451}{EI} - \frac{139.747769}{EI}$

$f_{10} = -\frac{303.848220}{EI}$

$\Delta_{11} = \frac{1}{EI}\int_0^6 \left(-\frac{5}{11}x\right)\left(-\frac{5}{11}x\right)dx + \frac{1}{EI}\int_6^{11}\left(\frac{6}{11}\,x - 6\right)\left(\frac{6}{11}x - 6\right)dx$

$\Delta_{11} = \frac{150}{121EI} + \frac{100}{121EI} = \frac{150}{11EI}$

$\Delta_{11} = \frac{1800}{121EI} + \frac{1500}{121EI} = \frac{300}{11EI}$

$f_{11} + \Delta_{11}R_2 = 0$

$-303.848220 + 300R_2 = 0$

$R_2 = 11.141101\ ton$

$M_{(2)} = 1.257336\,x + 11.141101(x-6) + \frac{1}{1681470}x - 0.06095\,x^3$

$5m \leq x \leq 11m$

Si $x = 5$

$M_{(5)} = 0$

Si $x = 11\,m$

$M_{(11)} = 0$

$0m \leq x \leq 5\,m$

$$M_{(1)} = 1.257336\,x + \frac{1}{1681470}x^7 - 0.06095\,x^3$$

$$M_1 = \frac{1}{1681470}x^7 - 0.06095\,x^3 + 1.257336\,x$$

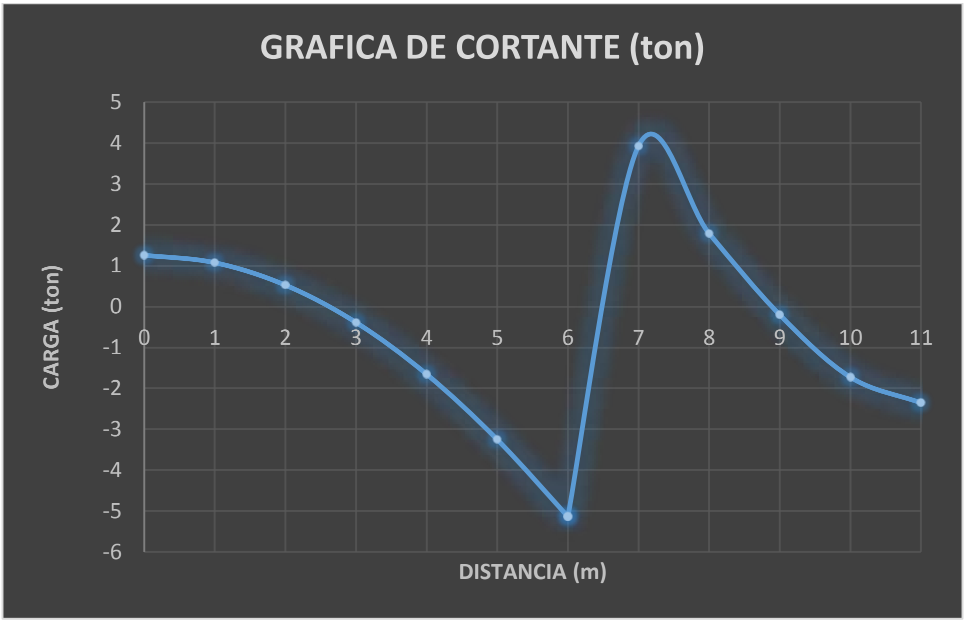
$$dv_1 = \frac{1}{240210}\,x^6 - 0.18285\,x^2 + 1.257336$$

$$M_2 = \frac{1}{1681470}\,x^7 - 0.06095\,x^3 + 12.398437\,x - 66.846606$$

$$dv_2 = \frac{1}{240210}x^6 - 0.18285\,x^2 + 12.398437$$

Sabemos que la derivada de las ecuaciones de momento nos da como resultado las ecuaciones de cortante de la viga en cuestión y ahora que ya se han calculado procedemos a graficar las mismas:

DISTANCIA (m)	CARGA (ton)
0	1.257336
1	1.074490163
2	0.526202434
3	-0.385279155
4	-1.651212254
5	-3.24886675
6	-5.131033951
6	-5.131033951
7	3.928562613
8	1.787348769
9	-0.200011351
10	-1.723538979
11	-2.351362003



$\Sigma MA = 0$

$14.750102(6.285714) - 11.141101(6) - 11RCy = 0$
$RCy = 2.351665\ ton$
$RAy - 14.750102 + 11.141101 + 2.31665 = 0$
$RAy = 1.257336\ ton$

Si $dv_1 = 0$
$\frac{1}{240210}x^6 - 0.18285\,x^2 + 1.257336 = 0$

$x^2 = m$
$x^6 = (x^2)^3 = m^3 \quad \therefore x^6 = m^3$

$\frac{1}{240210}m^3 - 0.18285\,m + 1.257336 = 0$
$m_2 = -212.933782$
$m_3 = 206.050031$
$m_1 = 212.933782\,i$

$m_2 = -212.933782\, i$
$m_3 = 14.354443$
$m_4 = -14.354443$
$m_5 = 2.623690$
$m_6 = -2.623690$

Si $d_{12} = 0$

$$\frac{1}{240210}\, x^6 - 0.18285\, x^5 + 12.398437 = 0$$

$x^2 = m$
$x^6 = m^3$

$$\frac{1}{240210}\, x^3 - 0.18285\, m + 12.398437 = 0$$

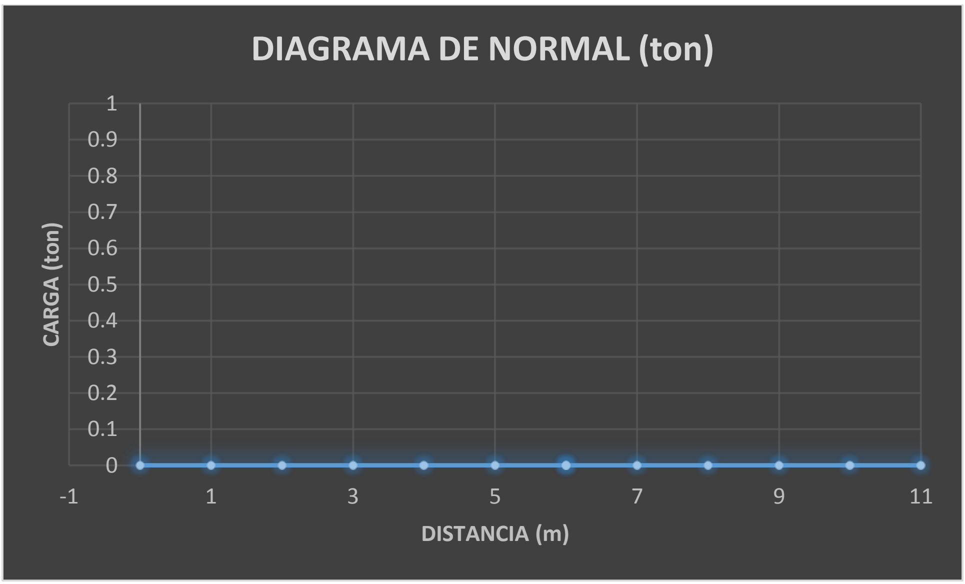
$m_1 = -237.606195$
$m_2 = 158.550685$
$m_3 = 79.05509$

$x_1 = 237.606195\, i$
$x_2 = -\ 237.606195\, i$
$x_3 = 12.591691$
$x_4 = -12.591691$
$x_5 = 8.891293$
$x_5 = -8.891293$

Al término del análisis de esta viga podemos concluir que no existe fuerzas en el eje horizontal por lo que las fuerzas axiales serán igual a cero tal como se muestra en la gráfica representativa:

DISTANCIA (m)	CARGA (ton)
0	0
1	0
2	0
3	0

4	0
5	0
6	0
6	0
7	0
8	0
9	0
10	0
11	0



5.-De la siguiente estructura figura No. 5, calcular las reacciones de los apoyos, obtener la ecuación de la fuerza cortante, momento y fuerza axial y trazar los diagramas correspondientes.

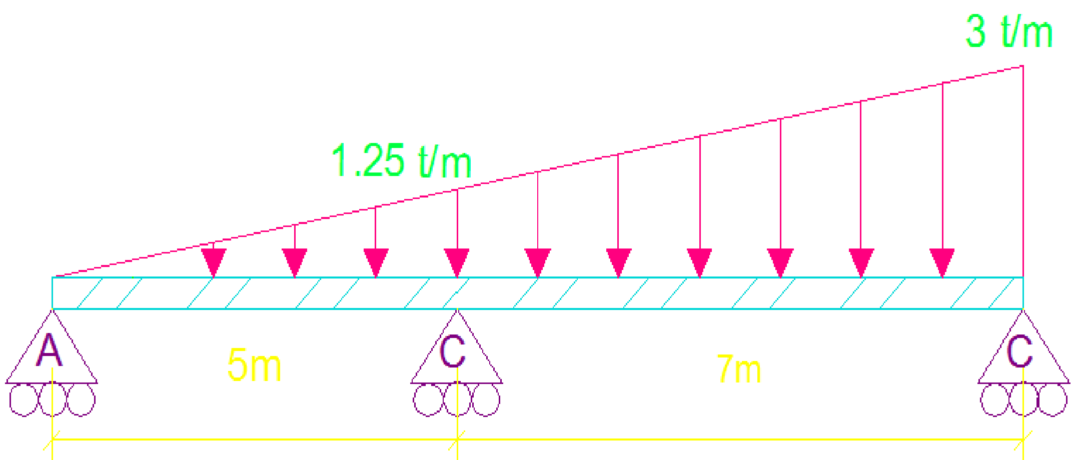


Figura No.5

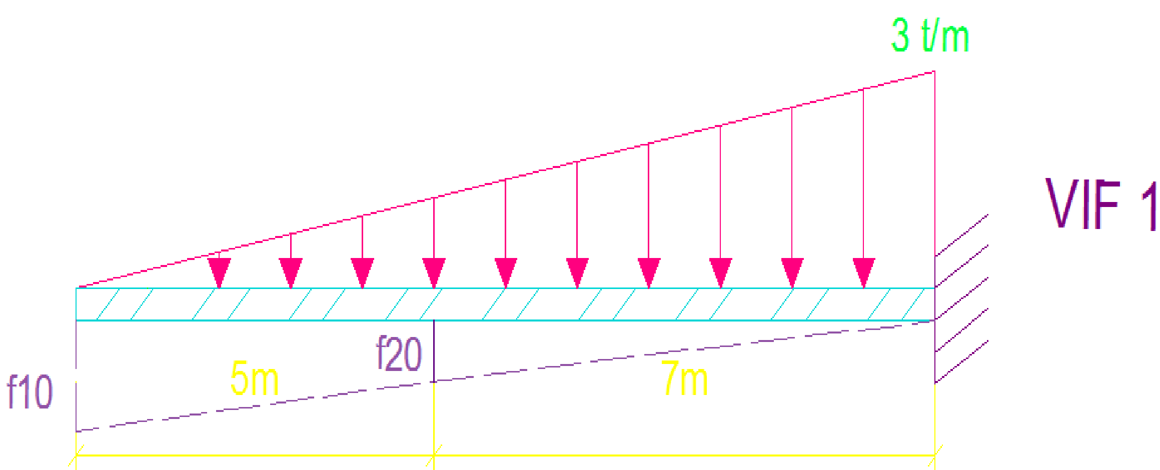


Figura No.5.1

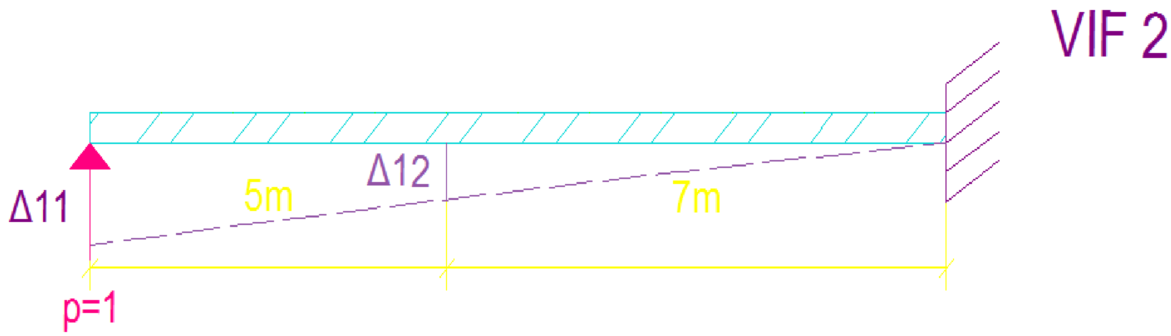


Figura No.5.2

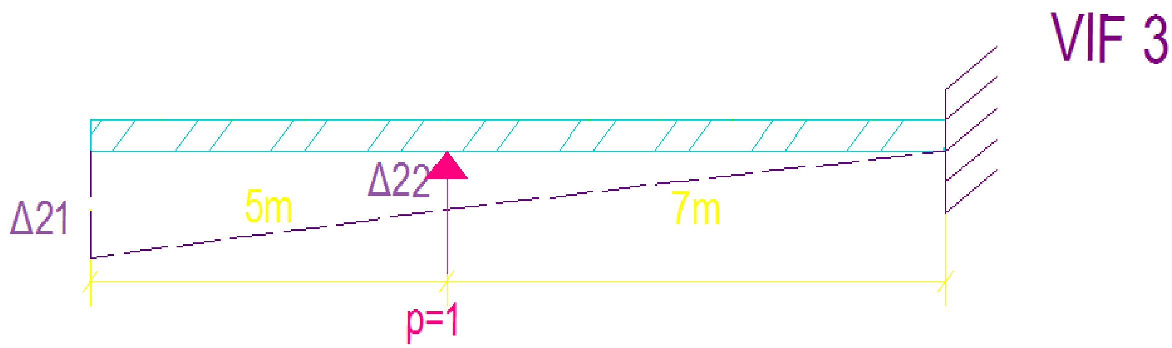


Figura No.5.3

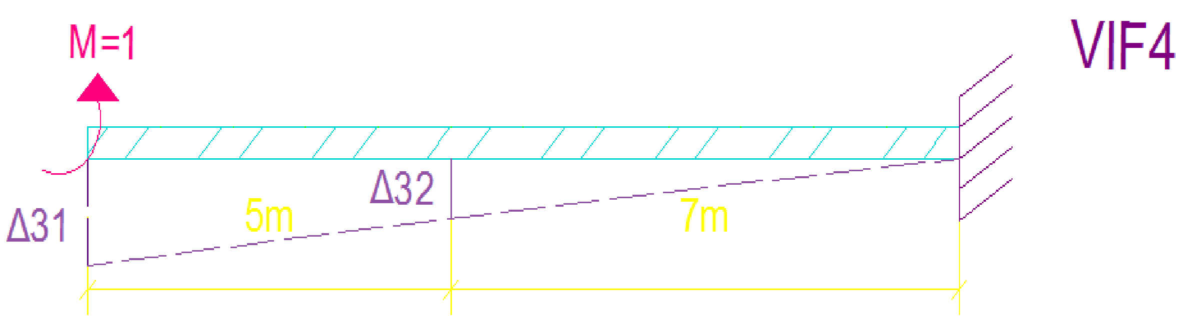


Figura No.5.4

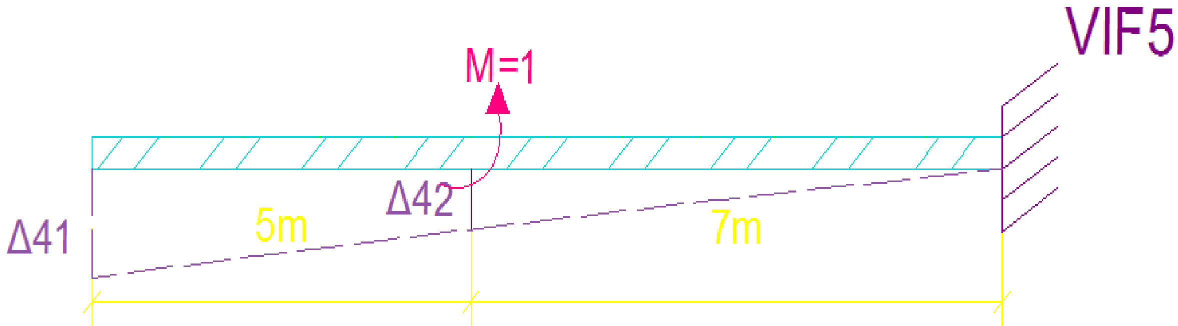


Figura No.5.5

VIGA ISOSTÁTICA FICTICIA No. 1

$w - x \qquad 12w = 3x$

$3 - 12 \qquad w = \frac{1}{4}x$

$0\,m \leq x \leq 12\,m$

$$M_1 = \frac{-(x)\left(\frac{1}{4}x\right)}{2}\left(\frac{x}{3}\right) = -\frac{1}{24}x^3$$

VIGA ISOSTÁTICA FICTICIA No. 2

$0\,m \leq x \leq 12\,m$

$m_2 = x$

VIGA ISOSTÁTICA FICTICIA No. 3

$0\,m \leq x \leq 5\,m$

$m_3 = 0$

$5\,m \leq x \leq 12\,m$

$m_4 = x - 5$

VIGA ISOSTÁTICA FICTICIA No. 4

$0\,m \leq x \leq 12\,m$

$m_5 = -1$

VIGA ISOSTÁTICA FICTICIA No. 5

$0\,m \leq x \leq 5\,m$

$m_6 = 0$

$5\,m \leq x \leq 12\,m$

$m_7 = -1$

$f_{10} = -\frac{10368}{5\,EI} \qquad\qquad \emptyset_{10} = \frac{216}{EI}$

$f_{20} = \frac{-1000.110417}{EI}$ $\emptyset_{20} = \frac{20111}{96\ EI}$

$\Delta_{11} = \frac{576}{EI}$ $\theta_{11} = -\frac{72}{EI}$

$\Delta_{12} = \frac{1421}{6EI}$ $\theta_{12} = -\frac{119}{2EI}$

$\Delta_{21} = \frac{1421}{6EI}$ $\theta_{21} = -\frac{49}{2EI}$

$\Delta_{22} = \frac{343}{3EI}$ $\theta_{22} = -\frac{49}{2EI}$

$\Delta_{31} = -\frac{72}{EI}$ $\theta_{22} = \frac{12}{EI}$

$\Delta_{32} = -\frac{49}{2EI}$ $\theta_{32} = \frac{7}{EI}$

$\Delta_{41} = -\frac{119}{2EI}$ $\theta_{41} = \frac{7}{EI}$

$\Delta_{42} = -\frac{49}{2EI}$ $\theta_{42} = \frac{7}{EI}$

$$-\frac{10368}{5} + 576R_1 + \frac{1421}{6}R_2 - 72\,M_1 - \frac{119}{2}M_2 = 0$$

$$-1000.110417 + \frac{1421}{6}R_1 + \frac{343}{3}R_2 - \frac{49}{2}\,M_1 - \frac{49}{2}M_2 = 0$$

$$216 - 72R_1 - \frac{49}{2}R_2 + 12M_1 + 7M_2 = 0$$

$$\frac{20111}{96} - \frac{119}{2}R_1 - \frac{49}{2}R_2 + 7M_1 + 7M_2 = 0$$

$R_1 = 0.93749968\ ton = 0.94\ ton$

$R_2 = 8.4\ ton = 8.40\ ton$

$M_1 = 1.04166686667\ t - m$

$M_2 = 6.3999999608163\ t - m$

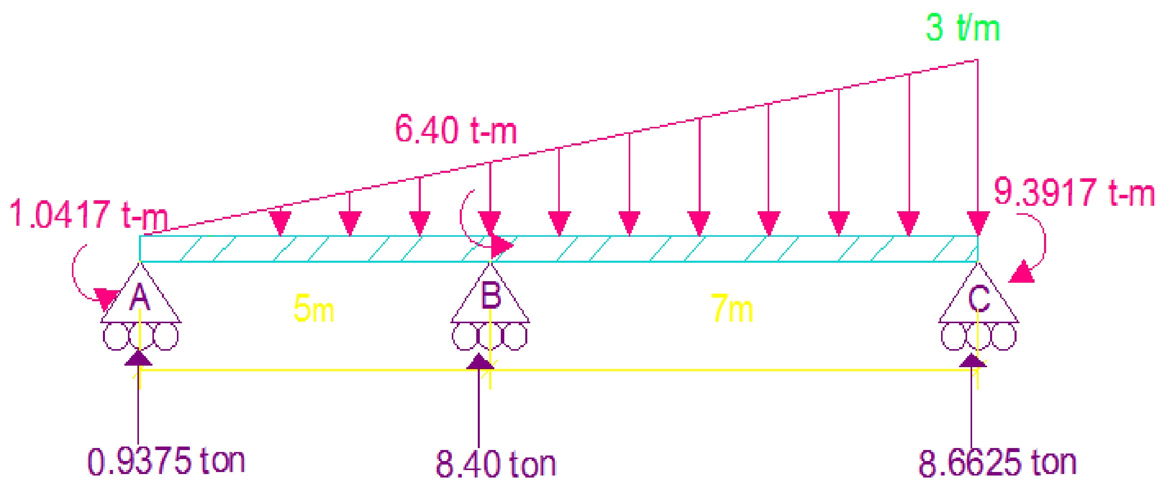


Figura No.5.6

$\Sigma Fy = 0$

$0.9375 + 8.40 - \frac{3(12)}{2} + R_3 = 0$

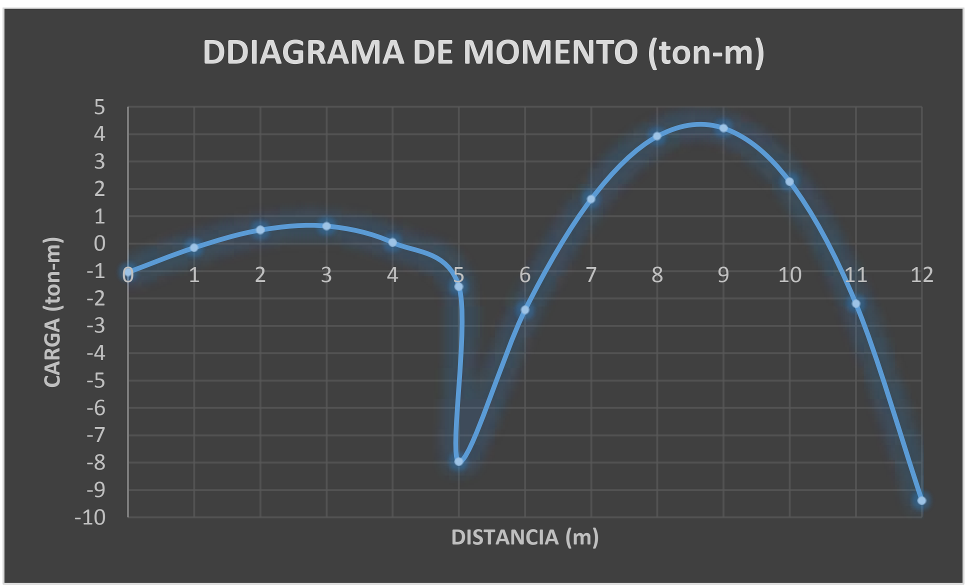
$R_3 = 8.6625\ ton$

$\Sigma MA = 0$

$$-1.0417 + \frac{3(12)}{2}\left(\frac{2}{3}(12)\right) - 6.40 - 8.40(5) - 8.6625(12) + M_3 = 0$$

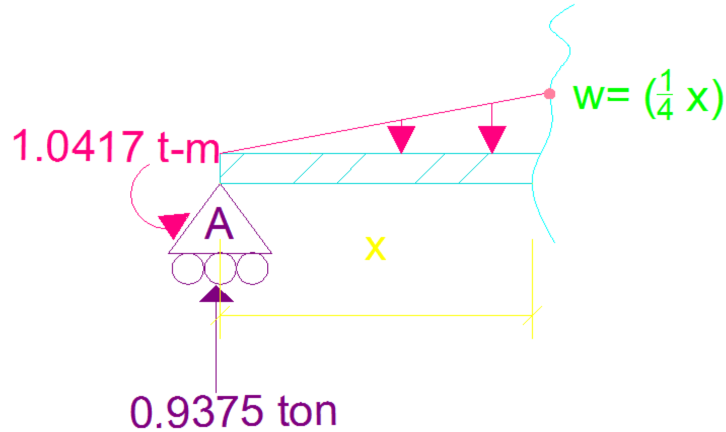
$M_3 = 9.3917 t - m$

DISTANCIA (m)	CARGA (ton-m)
0	-1.0417
1	-0.145866667
2	0.499966667
3	0.6458
4	0.041633333
5	-1.562533333
5	-7.962533333
6	-2.4167
7	1.629133333
8	3.924966667
9	4.2208
10	2.266633333
11	-2.187533333
12	-9.3917



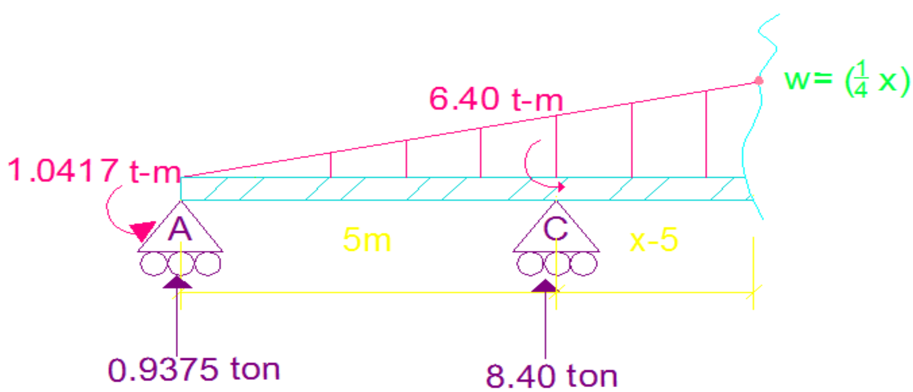
$$V_1 = 0.9375 - \left(\frac{\left(\frac{1}{4}x\right)(x)}{2}\right)$$

$$V_1 = -\frac{1}{8}\,x^2 + 0.9375$$



$$V_2 = 0.9375 + 8.40 - \frac{1}{8}x^2$$

$$V_2 = -\frac{1}{8}x^2 + 9.3375$$

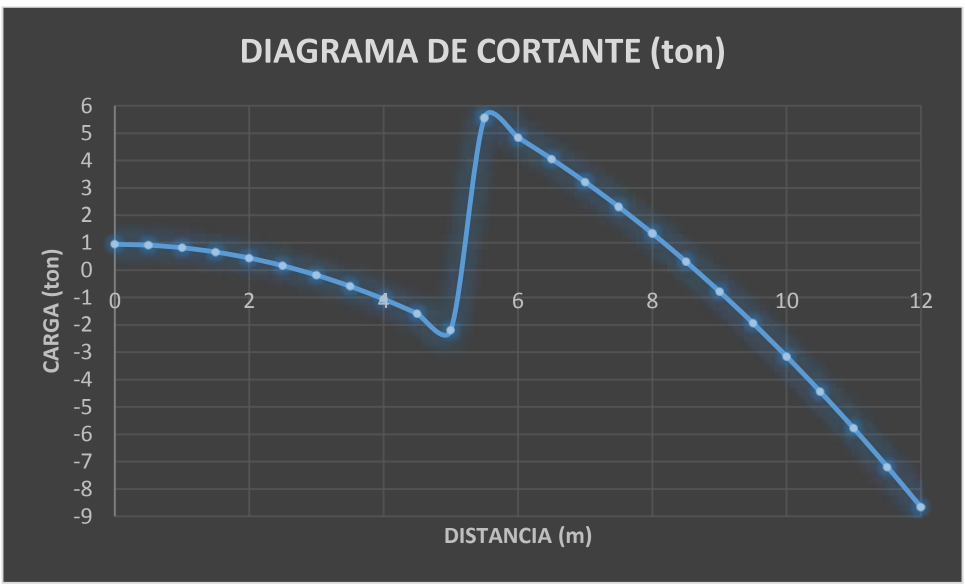


VIGA ISOSTÁTICA FICTICIA No. 1

Cortante:

DISTANCIA (m)	CARGA (ton)
0	0.9375
1	0.8125
2	0.4375
3	-0.1875

4	-1.0625
5	-2.1875
5	6.2125
6	4.8375
7	3.2125
8	1.3375
9	-0.7875
10	-3.1625
11	-5.7875
12	-8.6625



$0\ m \leq x \leq 2.5\ m$

$N_1 = 0$

$2.5\ m \leq x \leq 8.5\ m$

$N_2 = 3(Tensión)$

$8.5\ m \leq x \leq 12\ m$
$N_2 = 5(Compresión)$

VIGA ISOSTÁTICA FICTICIA No. 2

$0\,m \leq x \leq 12\,m$

$N_4 = 1(Tensión)$

VIGA ISOSTÁTICA FICTICIA No. 3

$0\,m \leq x \leq 5\,m$

$N_5 = 0$

$5\,m \leq x \leq 12\,m$

$N_6 = 1\ (Tensión)$

$$\Delta x_1 = \left(\frac{(0)(1)(2.5)}{AE}\right) + \left(\frac{(3)(1)(6)}{AE}\right) + \left(\frac{(5)(-1)(3.5)}{AE}\right)$$

$$\Delta x_1 = \frac{1}{2AE}$$

$$\Delta x_2 = \left(\frac{(0)(0)(2.5)}{AE}\right) + \left(\frac{(3)(0)(2.5)}{AE}\right) + \left(\frac{((3)(1)(3.5))}{AE}\right) + \left(\frac{(-5)(1)(3.5)}{AE}\right)$$

$$\Delta x_2 = -\frac{7}{AE}$$

$$\Delta x_3 = \left(\frac{(1)(1)(12)}{AE}\right) = \frac{12}{AE}$$

$$\Delta x_4 = \left(\frac{(1)(0)(5)}{AE}\right) + \left(\frac{(1)(1)(7)}{AE}\right) = \frac{7}{AE}$$

$$\Delta x_5 = \left(\frac{(0)(1)(5)}{AE}\right) + \left(\frac{(1)(1)(7)}{AE}\right) = \frac{7}{AE}$$

$$\Delta x_5 = \left(\frac{(0)(1)(5)}{AE}\right) + \left(\frac{(1)(1)(7)}{AE}\right) = \frac{7}{AE}$$

$$\Delta x_6 = \left(\frac{(1)(1)(7)}{AE}\right) = \frac{7}{AE}$$

$$\Delta x_1 + \Delta x_3 VAx + \Delta x_5 VBx = 0$$

$$\Delta x_2 + \Delta x_4 VAx + \Delta x_6 VBx = 0$$

$$\frac{1}{2} + 12\,VAx + 7VBx = 0$$

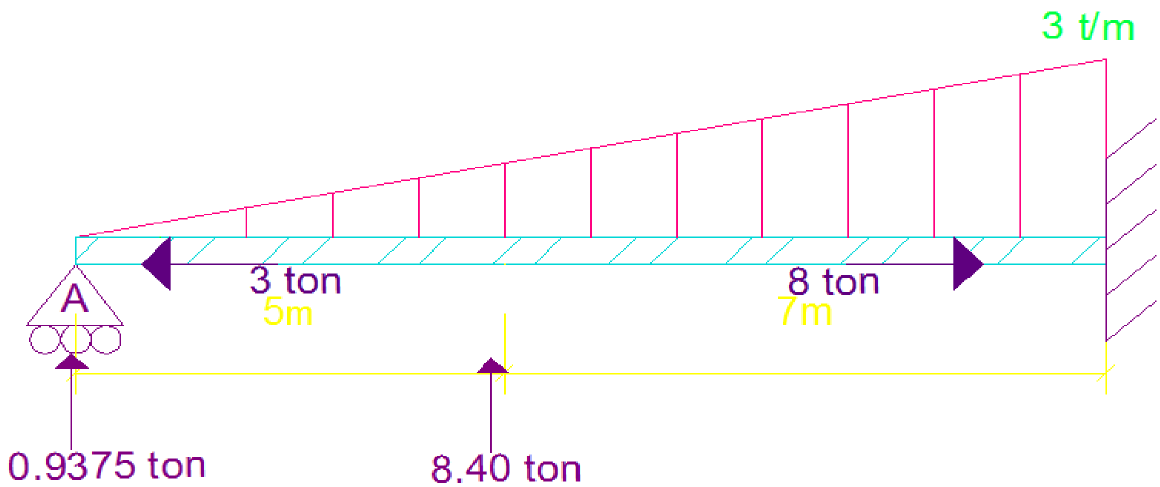
$$-7 + 7VAx + 7VBx = 0$$

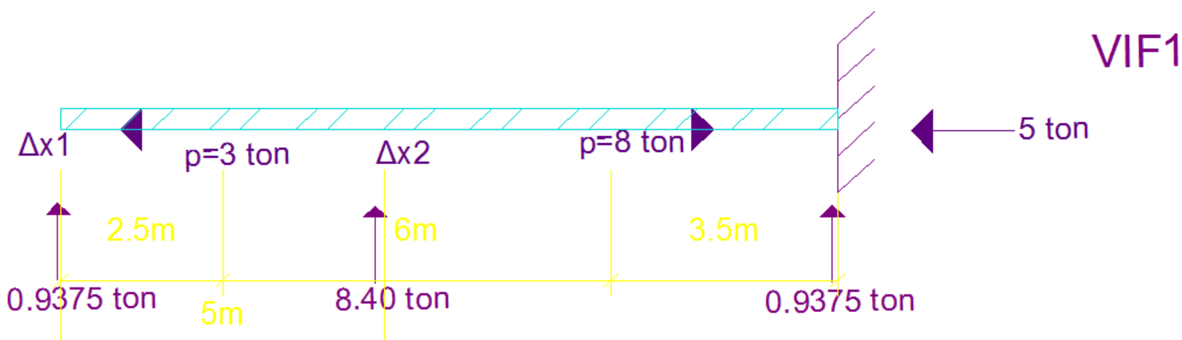
$$\begin{bmatrix} 12 & 7 & -\frac{1}{2} \\ 7 & 7 & 7 \end{bmatrix} R1\left(\frac{1}{12}\right) \begin{bmatrix} 1 & \frac{7}{12} & -\frac{1}{24} \\ 7 & 7 & 7 \end{bmatrix} R1(-7) +$$
$$R2 \begin{bmatrix} 1 & \frac{7}{12} & -\frac{1}{24} \\ 0 & \frac{35}{12} & \frac{175}{24} \end{bmatrix} R2\left(\frac{12}{35}\right) \begin{bmatrix} 1 & \frac{7}{12} & -\frac{1}{24} \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} \end{bmatrix} R2\left(-\frac{7}{12}\right) + R1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

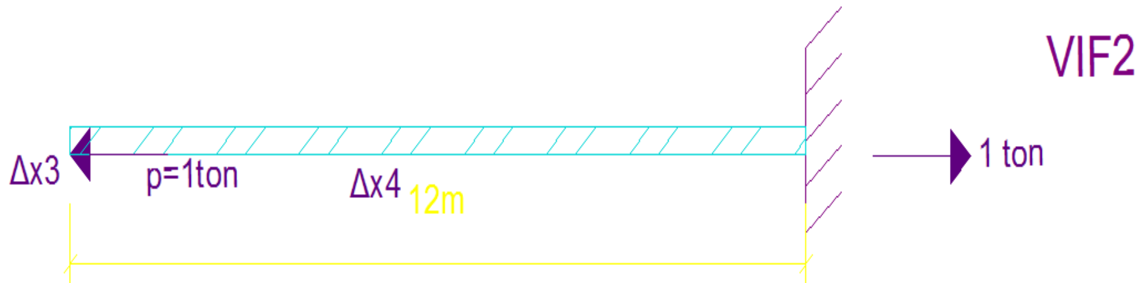
RESOLVIENDO EL SISTEMA MEDIANTE GAUSS:

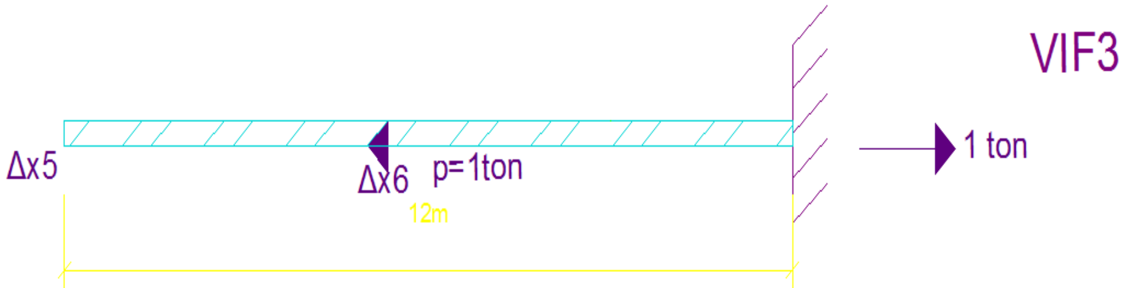
$$VAx = -\frac{3}{2} ton$$

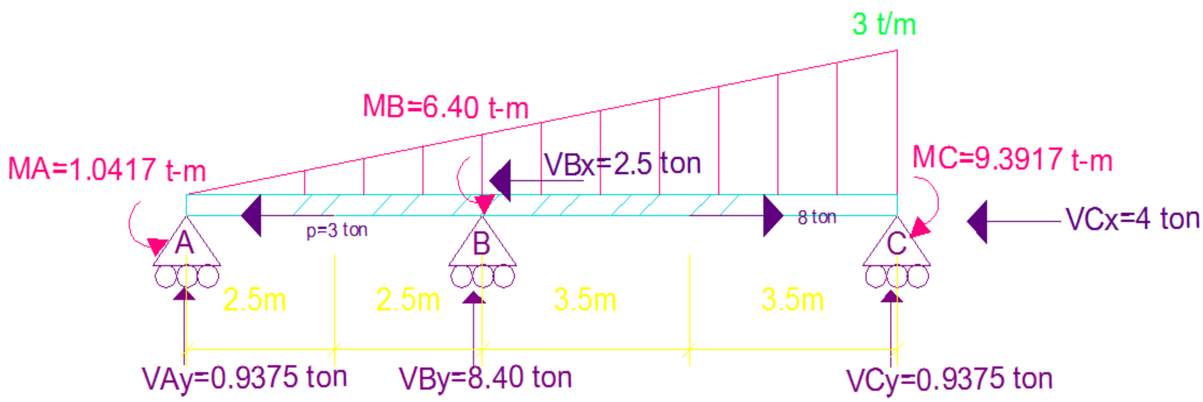
$$VBx = \frac{5}{2}\ ton$$


3 t/m
A
3 ton
5m
8 ton
7m
0.9375 ton
8.40 ton


VIF1
Δx1
p=3 ton
Δx2
p=8 ton
5 ton
2.5m
6m
3.5m
0.9375 ton
5m
8.40 ton
0.9375 ton

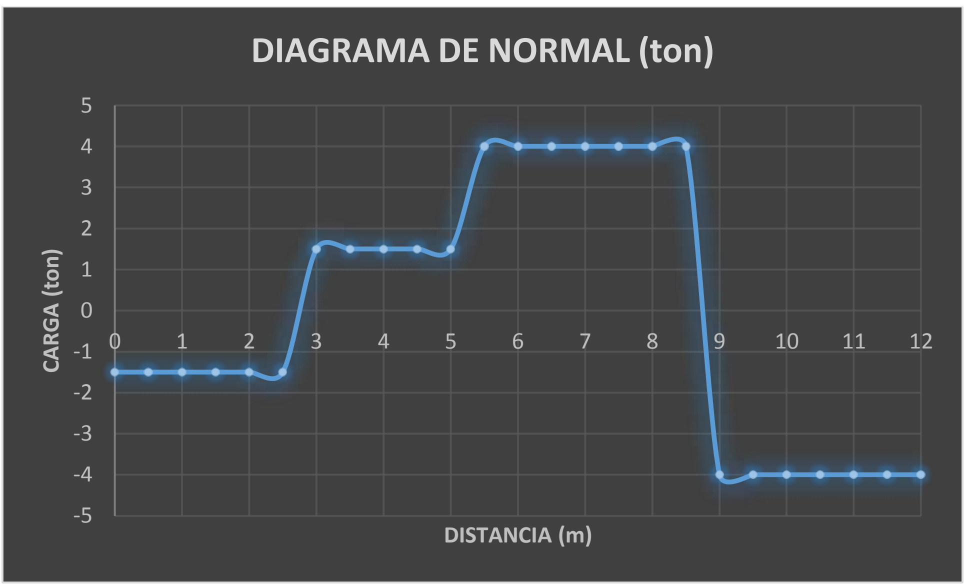

VIF2
Δx3
p=1ton
Δx4
12m
1 ton





DISTANCIA (m)	CARGA (ton)
0	-1.5
0.5	-1.5
1	-1.5
1.5	-1.5
2	-1.5
2.5	-1.5
3	1.5
3.5	1.5
4	1.5
4.5	1.5
5	1.5
5.5	4
6	4
6.5	4
7	4
7.5	4
8	4

8.5	4
9	-4
9.5	-4
10	-4
10.5	-4
11	-4
11.5	-4
12	-4



6.-De la siguiente estructura figura No. 10, calcular las reacciones de los apoyos, obtener la ecuación de la fuerza cortante, momento y fuerza axial y trazar los diagramas correspondientes.

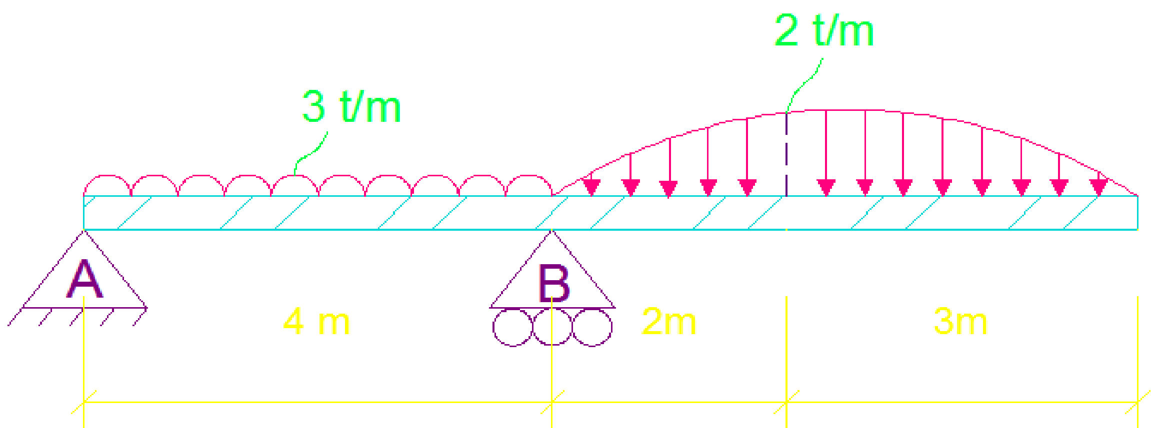


Figura No.6

Tomando en cuenta las cargas en T/m a las distancias correspondientes:

$x = 4 \quad y = 0\,T/m$

$x = 6 \quad y = 2\,T/m$

$x = 9 \quad y = 0\,T/m$

La ecuación de la curva está definida por la siguiente ecuación:

$y = ax^2 + bx + c$

Sustituyendo las distancias x en la ecuación anterior, e igualarlas con las cargas:

$a(4)^2 + b(4) + 1 = 0$

$a(6)^2 + b(6) + 1 = 2$

$a(9)^2 + b(9) + 1 = 0$

Resolviendo mediante el método de Gauss Jordán:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 16 & 4 & 1 & 0 \\ 36 & 6 & 1 & 2 \\ 81 & 9 & 1 & 0 \end{array}\right] R1\left(\frac{1}{16}\right) \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{16} & 0 \\ 36 & 6 & 1 & 2 \\ 81 & 9 & 1 & 0 \end{array}\right] R1(-36) + R2 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{16} & 0 \\ 0 & -3 & -\frac{5}{4} & 2 \\ 81 & 9 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$R1(-81)+R3\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{16} & 0 \\ 0 & -3 & -\frac{5}{4} & 2 \\ 0 & -\frac{45}{4} & -\frac{65}{16} & 0 \end{array}\right] R2\left(-\frac{1}{3}\right)\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{16} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{12} & -\frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{45}{4} & -\frac{65}{16} & 0 \end{array}\right] R2\left(\frac{45}{4}\right)+$$

$$R3\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{16} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{12} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{5}{8} & -\frac{15}{2} \end{array}\right] R2\left(-\frac{1}{4}\right)+\ R3\left(\frac{8}{5}\right)\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{24} & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & \frac{5}{12} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -12 \end{array}\right] R3\left(\frac{1}{24}\right)+$$

$$R1\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{5}{12} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -12 \end{array}\right] R3\left(-\frac{5}{12}\right)+R2\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{13}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -12 \end{array}\right]$$

$$a=-\frac{1}{3}$$

$$b=\frac{13}{3}$$

$$c=-12$$

Haciendo uso de la fórmula de centroide:

$$\bar{x}=\frac{\int_{L1}^{L2} x\,dA}{\int_{L1}^{L2} dA}=\frac{\int_4^9 x(-\frac{1}{3}x^2+\frac{13}{3}x-12)dx}{\int_4^9(-\frac{1}{3}x^2+\frac{13}{3}x-12)dx}=\frac{13}{2}$$

$$\Sigma MA=0$$

$$3(4)\left(\frac{1}{2}(4)\right)-4\,RBY+\frac{125}{18}\left(\frac{13}{2}\right)=0$$

$$RBY=\frac{2489}{144}ton$$

$$\Sigma FY=0$$

$$RAY-3(4)+\frac{2489}{144}-\frac{125}{8}=0$$

$$RAY=\frac{239}{144}ton$$

$$0m\leq x\ \geq 4m$$

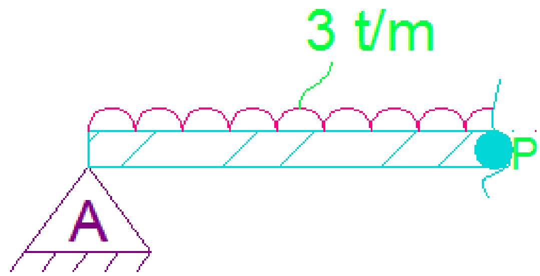


Figura No.6.1

$\Sigma Fp = 0$

$$M1 = \frac{239}{144}x - 3(x)\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$M1 = \frac{239}{144}x - \frac{3}{2}x^2$$

$$V1 = \frac{239}{144} - 3x$$

$4m \leq x \ \geq 6m$

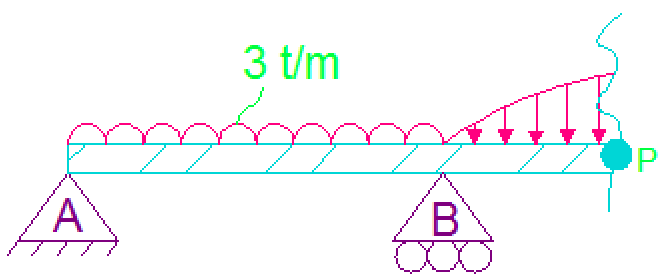


Figura No.6.2

$\Sigma Fp = 0$

$$M_2 = \frac{239}{144}x - 3(4)\left(\frac{4}{2} + x - 4\right) + \frac{2489}{144}(x-4) - \left[\int_4^x \left(-\frac{1}{3}x^2 + \frac{13}{3}x - 12\right)dx\right]\left[x - \frac{\int_4^x(-\frac{1}{3}x^2+\frac{13}{3}x-12)x\,dx}{\int_4^x(-\frac{1}{3}x^2+\frac{13}{3}x-12)dx}\right]$$

$$M_2 = \frac{125}{18}x - \frac{1625}{36} - \left[-\frac{1}{9}x^3 + \frac{13}{6}x^2 - 12x\Big|_4^x\right]\left[x - \frac{-\frac{1}{12}x^4 + \frac{13}{9}x^3 - 6x^2\Big|_4^x}{-\frac{1}{9}x^3 + \frac{13}{6}x^2 - 12x\Big|_4^x}\right]$$

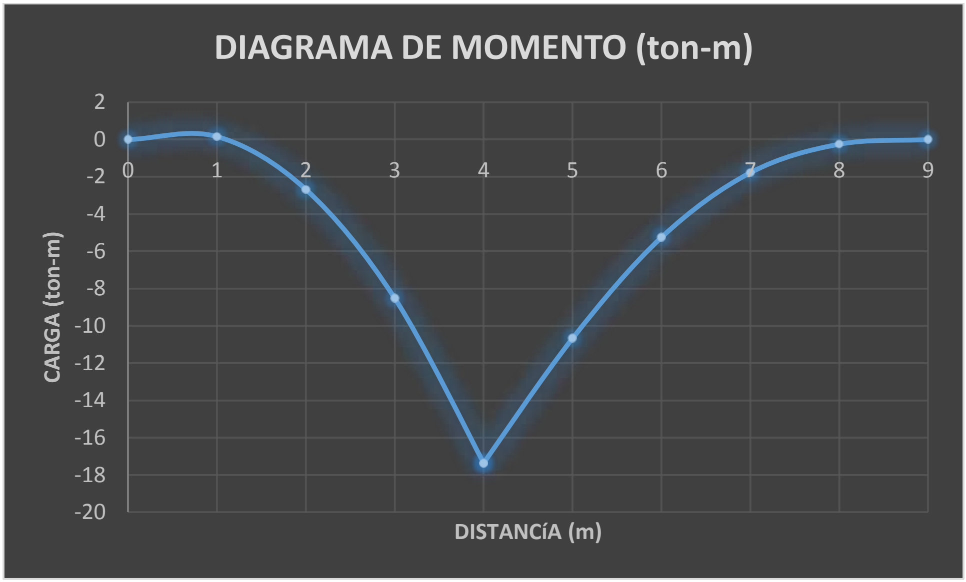
$$M_2 = \frac{125}{18}x - \frac{1625}{36} - \left[-\frac{1}{9}(x^3 - 4^3) + \frac{13}{6}(x^2 - 4^2) - 12(x-4)\right]\left[x - \frac{-\frac{1}{12}(x^4 - 4^4) + \frac{13}{9}(x^3 - 4^3) - 6(x^2 - 4^2)}{-\frac{1}{9}(x^3 - 4^3) + \frac{13}{6}(x^2 - 4^2) - 12(x-4)}\right]$$

$$M_2 = \frac{125}{18}x - \frac{1625}{36} - \left[-\frac{1}{9}x^4 + \frac{64}{9}x + \frac{13}{6}x^3 - \frac{104}{3}x - 12x^2 + 48x + \frac{1}{12}x^4 - \frac{64}{3} - \frac{13}{9}x^3 + \frac{832}{9} + 6x^2 - 96\right]$$

$$M_2 = \frac{1}{36}x^4 - \frac{13}{18}x^3 + 6x^2 - \frac{27}{2}x - \frac{81}{2}$$

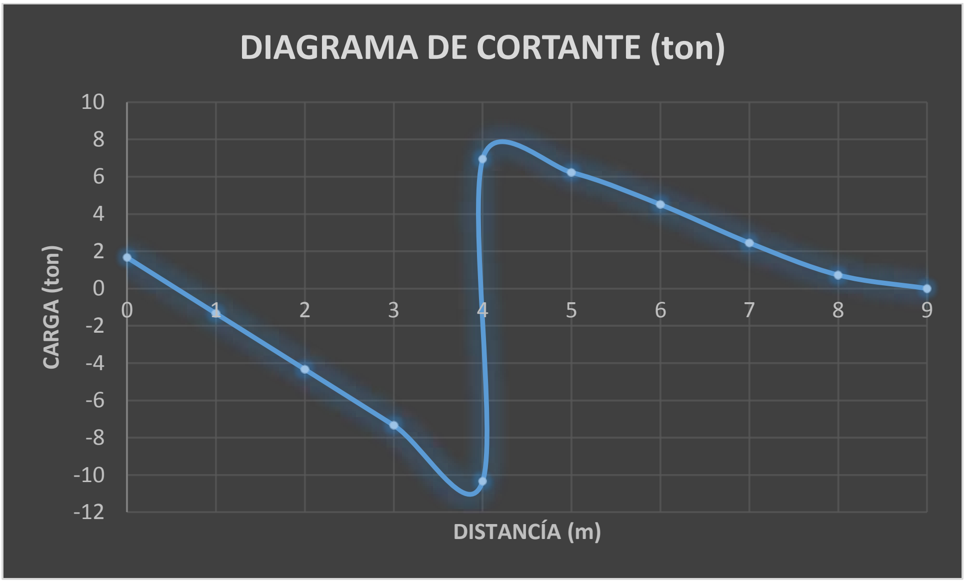
Con la formula anterior podemos conocer el comportamiento de la viga bajo dichas cargas a cualquier distancia x:

DISTANCIA (m)	CARGA (ton-m)
0	0
1	0.159722222
2	-2.680555556
3	-8.520833333
4	-17.36111111
4	-17.36111111
5	-10.66666667
6	-5.25
7	-1.777777778
8	-0.25
9	0



$$V_2 = \frac{4}{36}x^3 - \frac{39}{18}x^2 + 12x - \frac{27}{2}$$

DISTANCIA (m)	CARGA (ton)
0	1.659722222
1	-1.340277778
2	-4.340277778
3	-7.340277778
4	-10.34027778
4	6.944444444
5	6.222222222
6	4.5
7	2.444444444
8	0.722222222
9	0



No tenemos fuerzas axiales, es decir son cero la sumatoria de fuerzas en el eje x:

DISTANCIA (m)	CARGA (ton)
0	0
1	0
2	0
3	0
4	0
4	0
5	0
6	0
7	0
8	0
9	0

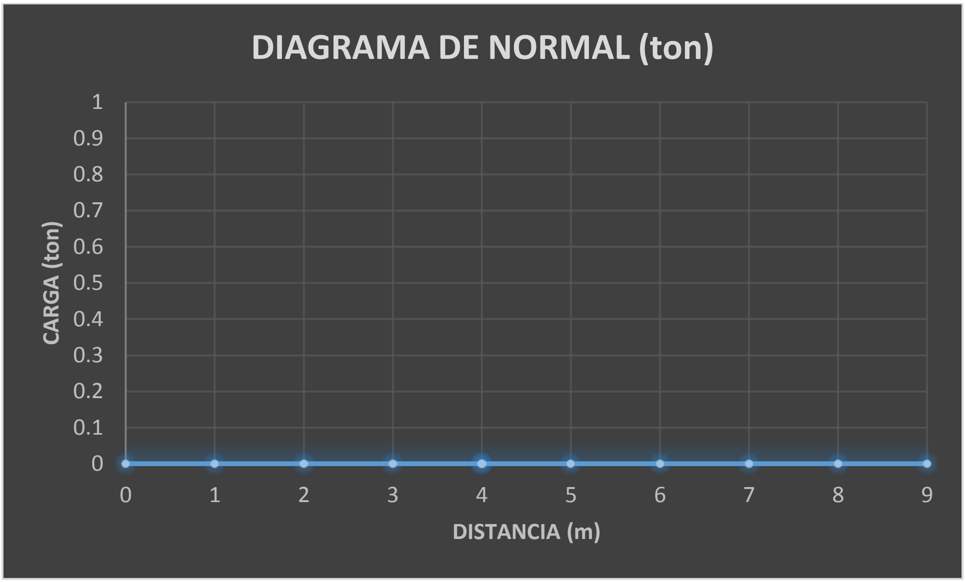


DIAGRAMA DE NORMAL (ton)
CARGA (ton)
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
DISTANCIA (m)

4. ANÁLISIS ESTRUCTURAL DE VIGAS CON CARGAS ARMÓNICAS

7.-De la siguiente estructura figura No. 3, calcular las reacciones de los apoyos, obtener la ecuación de la fuerza cortante, momento y fuerza axial y trazar los diagramas correspondientes.

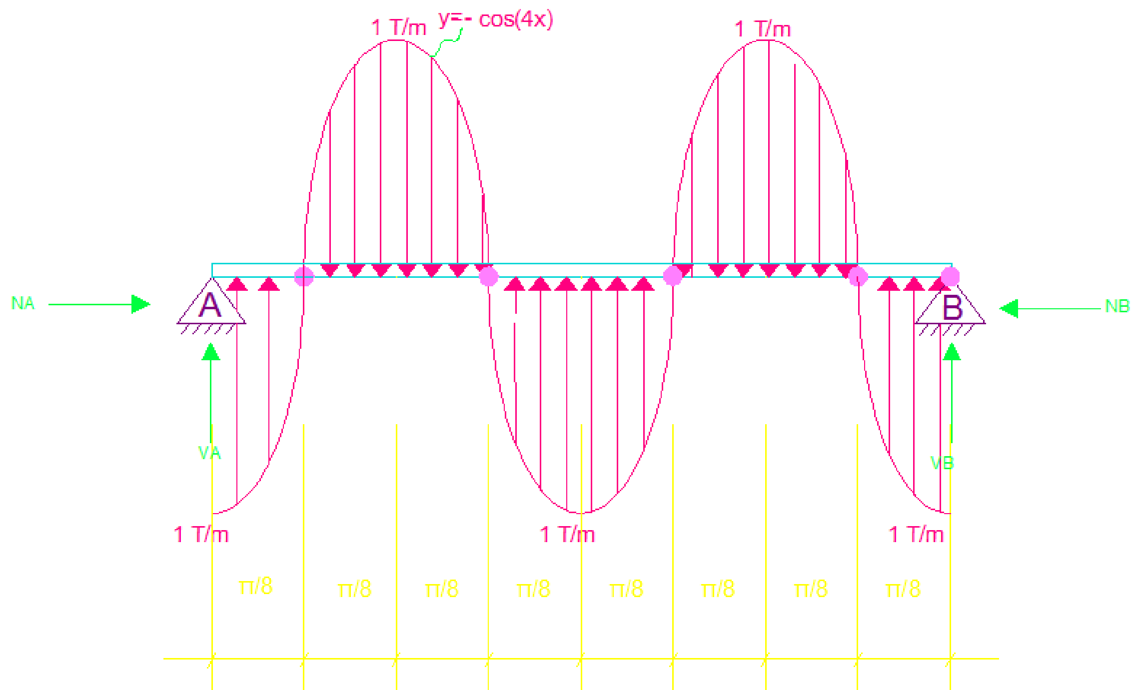


Figura No.7

Calculando la función de la curva:

$$\cos(a+b) = cosa\, cosb - sen(a)sen(b) = \cos(4x)\, cos\pi - sen(4x)sen(\pi)$$
$$= \cos(4x+\pi) = -\cos(4x)$$

Iniciamos calculando la fuerza de la carga cosenoidal.

$$A_1 = \int_0^{\frac{\pi}{8}} -\cos(4x)dx = -\frac{1}{4}sen(4x)\Big|_0^{\frac{\pi}{8}} = -\frac{1}{4}\, sen\left(4\left(\frac{\pi}{8}\right)\right) = -\frac{1}{4}\, sen\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{4}\, ton$$

$$A_2 = \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{3\pi}{8}} -\cos(4x)dx = -\frac{1}{4}sen\,(4x)\Big|_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{3\pi}{8}} = -\frac{1}{4}[sen(\frac{3\pi}{2}) - sen\,\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{4}[-1-1]$$

$$= \frac{1}{2}ton$$

$$A_3 = \int_{\frac{3\pi}{8}}^{\frac{5\pi}{8}} -\cos(4x)dx = -\frac{1}{4}sen\,(4x)\Big|_{\frac{3\pi}{8}}^{\frac{5\pi}{8}} = -\frac{1}{4}\left[sen\,\left(\frac{5\pi}{2}\right) - sen\,\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right] = -\frac{1}{4}[1+1]$$

$$= -\frac{1}{2}ton$$

$$A_4 = \int_{\frac{5\pi}{8}}^{\frac{7\pi}{8}} -\cos(4x)\,dx = -\frac{1}{4}sen\,(4x)\Big|_{\frac{5\pi}{8}}^{\frac{7\pi}{8}} = -\frac{1}{4}[\,sen\,\left(\frac{7\pi}{8}\right) - sen\frac{5\pi}{2}] = -\frac{1}{4}[1-1]$$

$$= \frac{1}{2}\;ton$$

$$A_4 = \int_{\frac{5\pi}{8}}^{\frac{7\pi}{8}} -\cos(4X)dx = -\frac{1}{4}\;sen\,(4x\,)\Big|_{\frac{5\pi}{8}}^{\frac{7\pi}{8}} = -\frac{1}{4}\left[sen\,\left(\frac{7\pi}{2}\right) - sen\,\left(\frac{5\pi}{2}\right)\right]$$

$$= -\frac{1}{4}[-1-1] = \frac{1}{2}ton$$

$$A_5 = \int_{\frac{7\pi}{8}}^{\pi} -\cos(4\,x)dx = -\frac{1}{4}\;sen\,(4x)\Big|_{\frac{7\pi}{8}}^{\pi} = -\frac{1}{4}\left[sen\,(4\,\pi) - sen\,\left(\frac{7\pi}{2}\right)\right]$$

$$= -\frac{1}{4}\;[1+1] = -\frac{1}{4}\;ton$$

$\Sigma Fy = 0$

$VA + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + VB = 0$

$VA + VB = 0 \ldots 1$

$\Sigma MA = 0$

$$[\int_{0}^{\frac{\pi}{8}} -\cos(4x)dx]\left[\frac{\int_{0}^{\frac{\pi}{8}} -x\cos(4x)dx}{\int_{0}^{\frac{\pi}{8}} -\cos(4x)dx}\right] + [\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{3\pi}{8}} -\cos(4x)dx]\left[\frac{\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{3\pi}{8}} -x\cos(4x)dx}{\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{3\pi}{8}} -\cos(4x)dx}\right]$$

$$+ [\int_{\frac{3\pi}{8}}^{\frac{5\pi}{8}} -\cos(4x)dx]\left[\frac{\int_{\frac{3\pi}{8}}^{\frac{5\pi}{8}} -x\cos(4x)dx}{\int_{\frac{3\pi}{8}}^{\frac{5\pi}{8}} -\cos(4x)dx}\right]$$

$$+ [\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{7\pi}{8}} -\cos(4x)dx]\left[\frac{\int_{\frac{5\pi}{8}}^{\frac{7\pi}{8}} -x\cos(4x)dx}{\int_{\frac{5\pi}{8}}^{\frac{7\pi}{8}} -\cos(4x)dx}\right]$$

$$+ [\int_{\frac{7\pi}{8}}^{\pi} -\cos(4x)dx]\left[\frac{\int_{\frac{7\pi}{8}}^{\pi} -x\cos(4x)dx}{\int_{\frac{7\pi}{8}}^{\pi} -\cos(4x)dx}\right] - VB\pi = 0$$

$$\left(\frac{2-\pi}{32}\right) + \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{8} - \left(\frac{7\pi-2}{32}\right) - \pi VB = 0$$

$$-\frac{8\pi}{32} + \frac{2\pi}{8} - \pi VB = 0$$

$$-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} - \pi V = 0$$

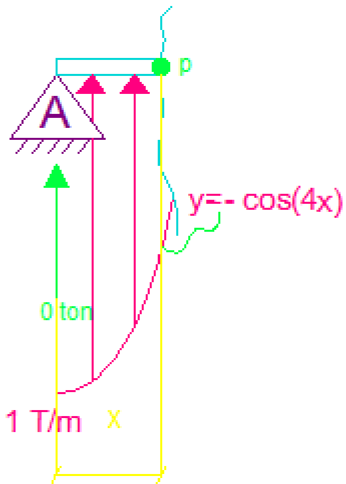
$VB = 0\ ton$

Sustituimos VB en la ecuación no. 1

$VA + 0 = 0$

$VA = 0\ ton$

$0\,m \ \leq x \geq \frac{\pi}{8}\,m$



$\Sigma Mp = 0$

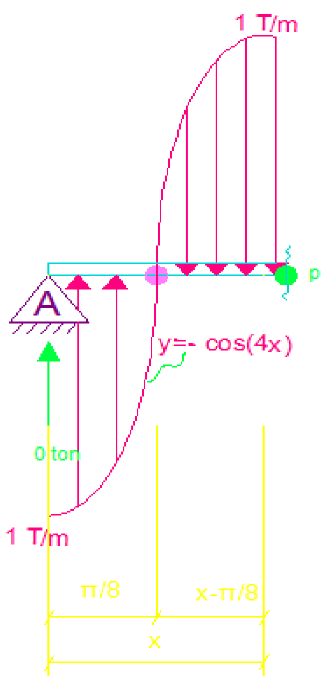
$$M_1 = -\left[\int_0^x - cos(4x)dx\right][x - \frac{\int_0^x -x\cos(4x)\,dx}{\int_0^x \cos(4x)dx}]$$

$$M_1 = -\left[-\frac{1}{4}\,sen\,(4x)\right][\,x - \frac{-\frac{1}{16}\cos(4x) - \frac{x}{4}\,sen\,(4x) + \frac{1}{16}}{-\frac{1}{4}sen\,(4x)}$$

$$M_1 = -\frac{1}{16}\cos(4x) + \frac{1}{16}$$

$$V_1 = \frac{1}{4}sen(4x)$$

$\frac{\pi}{8}\,m \;\leq x\; \geq \frac{3\pi}{8}m$



$$M_2 = -\,[\int_0^{\frac{\pi}{8}} -\cos(4x)dx]\left[\frac{\int_0^{\frac{\pi}{8}} -x\cos(4x)dx}{\int -\cos(4x)dx}\right] - \left[\int_{\frac{\pi}{8}}^{x} -\cos(4x)\,dx\right]$$

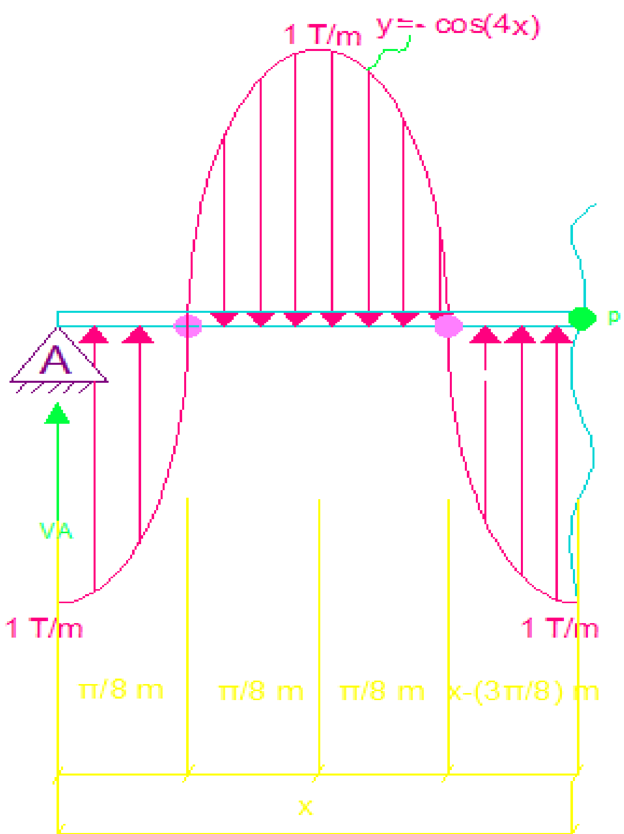
$$M_2 = -\left[-\frac{1}{4}\right]\left[x - \frac{\frac{2-\pi}{32}}{-\frac{1}{4}}\right] - \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{4}sen\,(4x)\right]\left[x - \frac{-\frac{1}{16}\cos(4x) - \frac{1}{4}x\,sen\,(4x)}{\frac{1}{4} - \frac{1}{4}sen\,(4x)} + \frac{\pi}{32}\right]$$

$$M_2 = \frac{1}{4}x + \frac{2-\pi}{32} - \frac{1}{4}x - \frac{1}{16}\cos(4x) + \frac{\pi}{32}$$

$$M_2 = -\frac{1}{16}\cos(4x) + \frac{1}{16}$$

$$V_2 = \frac{1}{4}sen\,(4x)$$

$$\frac{3\pi}{8}m \ \leq x \ \geq \frac{5\pi}{8}m$$



$$\Sigma Mp = 0$$

$$M_3 = -[\int_0^{\frac{\pi}{8}} - \cos(4x)dx]\ [x - \frac{\int_0^{\frac{\pi}{8}} -x\cos(4x)dx}{\int_0^{\frac{\pi}{8}} - \cos(4x)dx} - \left[\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{3\pi}{8}} - \cos(4x)\,dx\ \right]\ [x - \frac{\int_{\frac{\pi}{8v}}^{\frac{3\pi}{8}} -x\cos(4x)dx}{\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{3\pi}{8}} - \cos(4x)dx}\right] -$$

$$[\int_{\frac{3\pi}{8}}^{x} - \cos(4x)dx\ ]\ \left[x - \frac{\int_{\frac{3\pi}{8}}^{x} -x\cos(4x)dx}{\int_{\frac{3\pi}{8}}^{x} - \cos(4x)dx}\right] - \frac{1}{4}[\ sen\ (4x) - (-1)]$$

$$M_3 = \ -\left[-\frac{1}{4}\right]\left[x - \frac{\frac{2-\pi}{32}}{-\frac{1}{4}}\right] - \left[\frac{1}{2}\right]\left[x - \frac{\frac{\pi}{8}}{\frac{1}{2}}\right]$$

$$-\left[-\frac{1}{4} - \frac{1}{4}sen(4x)\right]\left[x - \frac{-\frac{1}{4}x\ sen(4x) - \frac{1}{16}\cos(4x) - \frac{3\pi}{32}}{-\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\ sen\ (4x)}\right]$$

$$M_3 = \frac{1}{4}x + \frac{2-\pi}{32} + \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}x - \frac{1}{16}\cos(4x) - \frac{3\pi}{32} - \frac{1}{2}x\ \frac{2-\pi+4\pi-3\pi}{32}$$

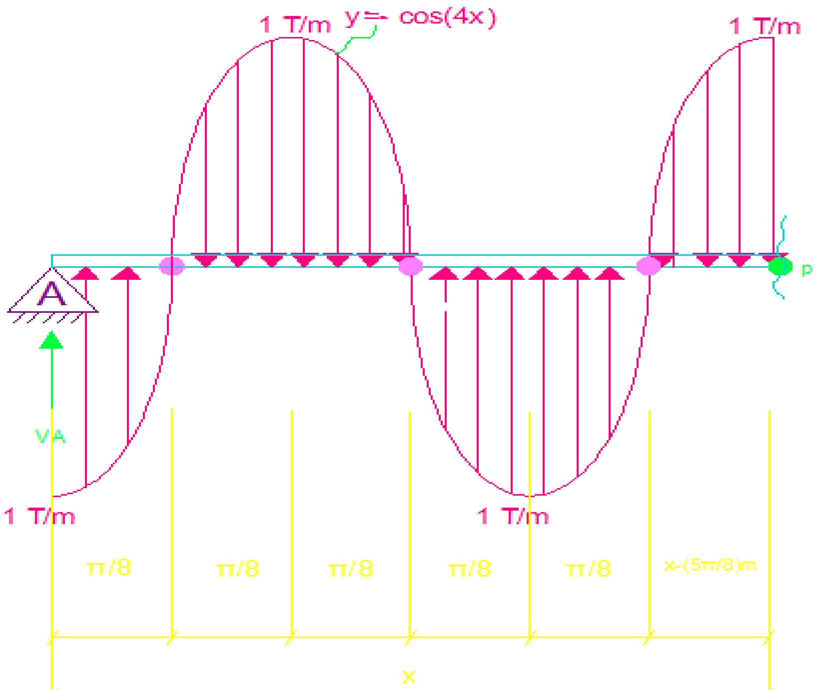
$$M_3 = -\frac{1}{16}\cos(4x) + \frac{1}{16}$$

$$V_3 = \frac{1}{4}sen\,(4x)$$

NOTA:

$$\int_{\frac{3\pi}{8}}^{X} -cos(4X)dx = -sen(4x)|_{\frac{3\pi}{8}}^{x} = -\frac{1}{4}\left[sen(4x) - sen\left(\frac{3\pi\pi}{2}\right)\right] = -\frac{1}{4}[sen(4x)+1]$$

$$\frac{5\pi}{8}m \le x \ge \frac{7\pi}{8}m$$



$\Sigma Mp = 0$

$$M_4 = -\left(\int_0^{\frac{\pi}{8}} -\cos(4x)dx \right) \left(x - \frac{\int_0^{\frac{\pi}{8}} -x\cos(4x)dx}{\int_0^{\frac{\pi}{8}} -\cos(4x)dx} \right) - \left(\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{3\pi}{8}} -\cos(4x)dx \right) \left(x - \frac{\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{3\pi}{8}} -x\cos(4x)dx}{\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{3\pi}{8}} -\cos(4x)dx} \right) -$$

$$\left(\int_{\frac{3\pi}{8}}^{\frac{5\pi}{8}} -\cos(4x)dx \right) \left(x - \frac{\int_{\frac{3\pi}{8}}^{\frac{5\pi}{8}} -x\cos(4x)dx}{\int_{\frac{3\pi}{8}}^{\frac{5\pi}{8}} -\cos(4x)dx} \right) - \left(\int_{\frac{5\pi}{8}}^{x} -\cos(4x)dx \right) \left(x - \frac{\int_{\frac{5\pi}{8}}^{x} -x\cos(4x)dx}{\int_{\frac{5\pi}{8}}^{x} -\cos(4x)dx} \right)$$

$$M_4 = -\left(-\frac{1}{4}\right)\left(x - \frac{\frac{2-\pi}{32}}{-\frac{1}{4}}\right) - \left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{\frac{\pi}{8}}{\frac{1}{2}}\right) - \left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{-\frac{\pi}{4}}{\frac{1}{2}}\right)$$

$$- \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{4} sen(4x)\right]\left[x - \frac{-\frac{1}{4}x\ sen(4x) - \frac{1}{16}\cos(4x) + \frac{5\pi}{32}}{\frac{1}{4} - \frac{1}{4} sen\ (4x)}\right]$$

$$M_4 = \frac{2-\pi}{32} + \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{16}\cos(4x) + \frac{5\pi}{32}$$

$$M_4 = -\frac{1}{16}\cos(4x) + \frac{1}{16}$$

$$V_4 = \frac{1}{4} sen\ (4x)$$

NOTA:

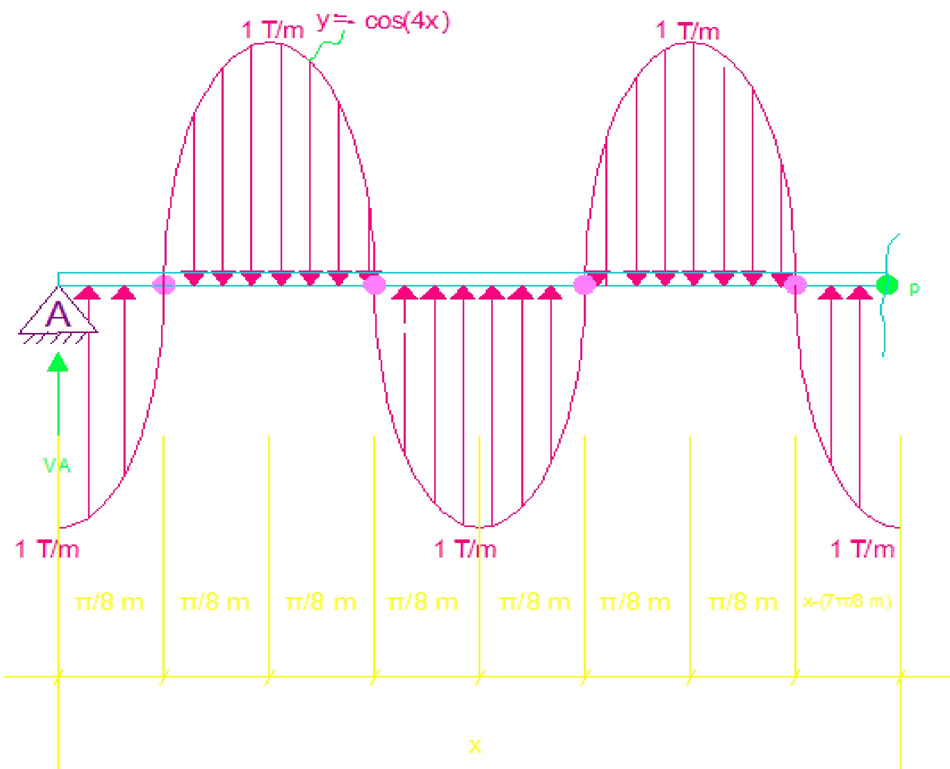
$$-\int_{\frac{3\pi}{8}}^{x} x\cos(4x)dx = -\left[\frac{x}{4}\ sen\ (4x) + \frac{1}{16}\cos(4x)\right] \Bigg|_{\frac{3\pi}{8}}^{x}$$

Donde:

$u = x \qquad du = 1\ dx$

$dv = \cos(4x) \qquad v = \frac{1}{4} sen\ (4x)$

$$\frac{7\pi}{8}m \ \le x \ge \ \pi \, m$$



$$\Sigma Mp = 0$$

$$M_5 = -\left(\int_0^{\frac{\pi}{8}} -\cos(4x)dx\right) \left(x - \frac{\int_0^{\frac{\pi}{8}} -x\cos(4x)dx}{\int_0^{\frac{\pi}{8}} -\cos(4x)dx} \right) - \left(\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{3\pi}{8}} -\cos 4x)\, dx \right) \left[x - \frac{\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{3\pi}{8}} -x\cos\,(4x)dx}{\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{3\pi}{8}} -\cos(4x)dx} \right] -$$

$$\left(\int_{\frac{3\pi}{8}}^{\frac{5\pi}{8}} -\cos(4x)dx \right) \left(x - \frac{\int_{\frac{3\pi}{8}}^{\frac{5\pi}{8}} -x\cos(4x)dx}{\int_{\frac{3\pi}{8v}}^{\frac{5\pi}{8}} -\cos(4x)dx} \right) - \left(\int_{\frac{5\pi}{8}}^{\frac{7\pi}{8}} -\cos(4x)\ \ dx\right) \left(x - \frac{\int_{\frac{5\pi}{8}}^{\frac{7\pi}{8}} -x\cos(4x)dx}{\int_{\frac{5\pi}{8}}^{\frac{7\pi}{8}} -\cos(4x)dx}\right) -$$

$$\left(\int_{\frac{7\pi}{8}}^{x} -\cos(4x)dx \right) \left(x - \frac{\int_{\frac{7\pi}{8}}^{x} -x\cos(4x)dx}{\int_{\frac{7\pi}{8v}}^{x} -\cos(4x)dx} \right)$$

$$M_5 = -\left(-\frac{1}{4}\right)\left(x-\frac{\frac{2-\pi}{32}}{-\frac{1}{4}}\right)-\left(\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{\frac{\pi}{8}}{\frac{1}{2}}\right)-\left(-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{-\frac{\pi}{4}}{-\frac{1}{2}}\right)-\left(\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{\frac{3\pi}{8}}{\frac{1}{2}}\right)$$
$$-\left(-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\,sen\,(4x)\right)\left(x-\frac{-\frac{1}{4}x\,sen\,(4x)-\frac{1}{16}\cos(4x)-\frac{7\pi}{32}}{\frac{1}{4}-\frac{1}{4}sen\,(4x)}\right)$$

$$M_5 = \frac{2-\pi}{32}+\frac{\pi}{8}-\frac{\pi}{4}+\frac{3\pi}{8}-\frac{7\pi}{32}-\frac{1}{16}\cos(4x)-\frac{1}{2}x$$

$$M_5 = \frac{2-\pi}{32}+\frac{\pi}{4}-\frac{7\pi}{32}-\frac{1}{16}\cos(4x)-\frac{1}{2}x$$

$$M_5 = \frac{2-\pi+8\pi-7\pi}{32}-\frac{1}{16}\cos(4x)$$

$$M_5 = \frac{1}{16}-\frac{1}{16}\cos(4x)$$

$$V_5 = \frac{1}{16}-\frac{1}{16}cos\,(4x)$$

$$V_5 = \frac{1}{4}sen\,(4x)$$

NOTA:

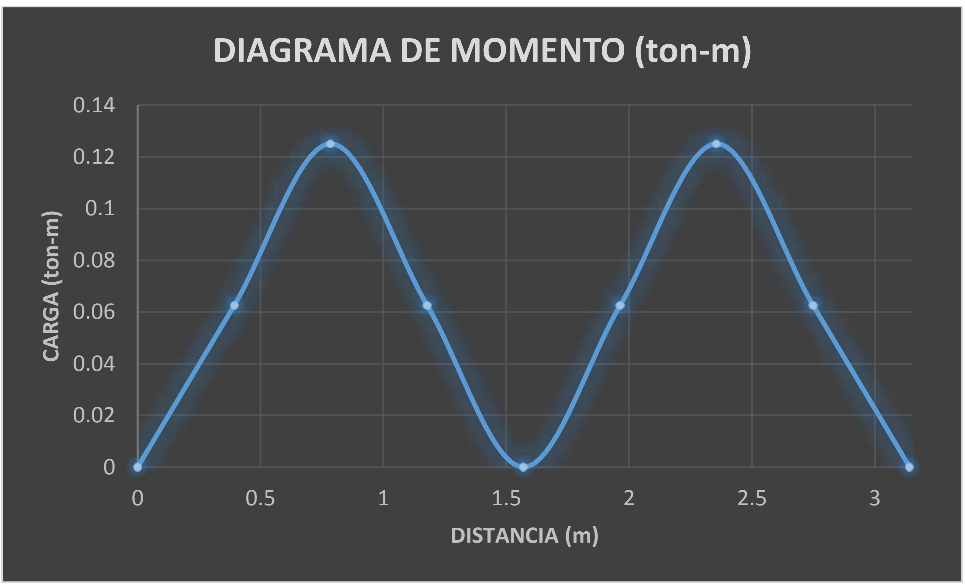
$$\int_{\frac{7\pi}{8}}^{x} -\cos(4x)\,dx = -\frac{1}{4}sen\,(4x)\Big|_{\frac{7\pi}{8}}^{x} = -\frac{1}{4}\left[sen\,(4x)-sen\,\left(\frac{7\pi}{2}\right)\right]$$

$$= -\frac{1}{4}[sen\,(4x)+1]$$

Graficamos la ecuación de momento y cortante para revisar su comportamiento, así como el diagrama de normal que en este caso sería cero en toda la viga:

$$M_5 = -\frac{1}{16}\cos(4x)+\frac{1}{16}$$

DISTANCÍA (m)	DISTANCÍA (m)	CARGA (ton-m)
0	0	0
$\pi/8$	0.392699082	0.0625
$2\pi/8$	0.785398163	0.125
$3\pi/8$	1.178097245	0.0625
$4\pi/8$	1.570796327	0
$5\pi/8$	1.963495408	0.0625
$6\pi/8$	2.35619449	0.125
$7\pi/8$	2.748893572	0.0625
π	3.141592654	0



$$V_5 = \frac{1}{4} sen\,(4x)$$

DISTANCÍA (m)	CARGA (ton)	CARGA (ton)
0	0	0
$\pi/8$	0.392699082	0.25
$2\pi/8$	0.785398163	3.06287E-17
$3\pi/8$	1.178097245	-0.25
$4\pi/8$	1.570796327	-6.12574E-17
$5\pi/8$	1.963495408	0.25
$6\pi/8$	2.35619449	9.18861E-17
$7\pi/8$	2.748893572	-0.25
π	3.141592654	-1.22515E-16

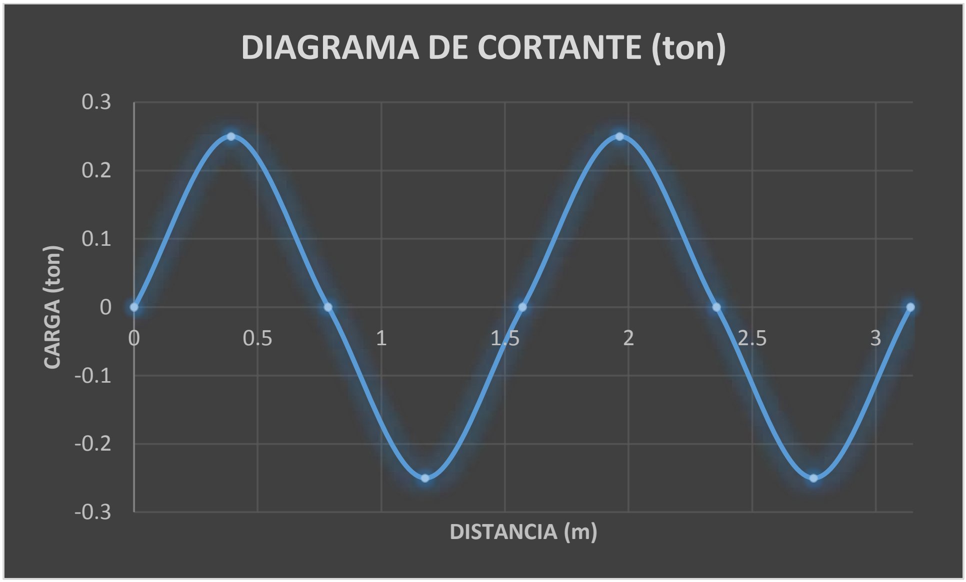


DIAGRAMA DE CORTANTE (ton)
CARGA (ton)
DISTANCIA (m)
0.3
0.2
0.1
0
-0.1
-0.2
-0.3
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3

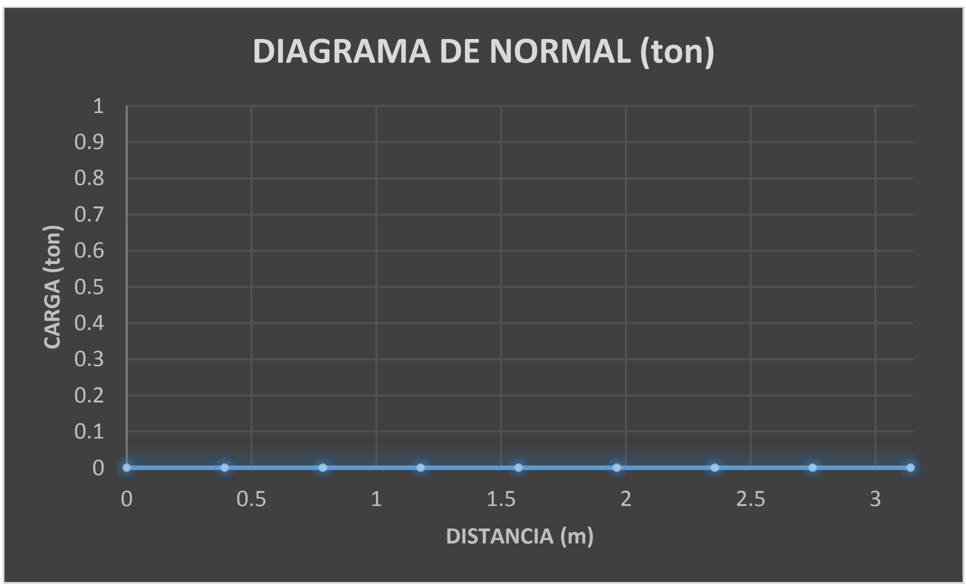


DIAGRAMA DE NORMAL (ton)
CARGA (ton)
DISTANCIA (m)
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3

5. ANÁLISIS ESTRUCTURAL DE VIGAS CON CARGAS LOGARÍTMICAS

8.-De la siguiente estructura figura No. 6, calcular las reacciones de los apoyos, obtener la ecuación de la fuerza cortante, momento y fuerza axial y trazar los diagramas correspondientes.

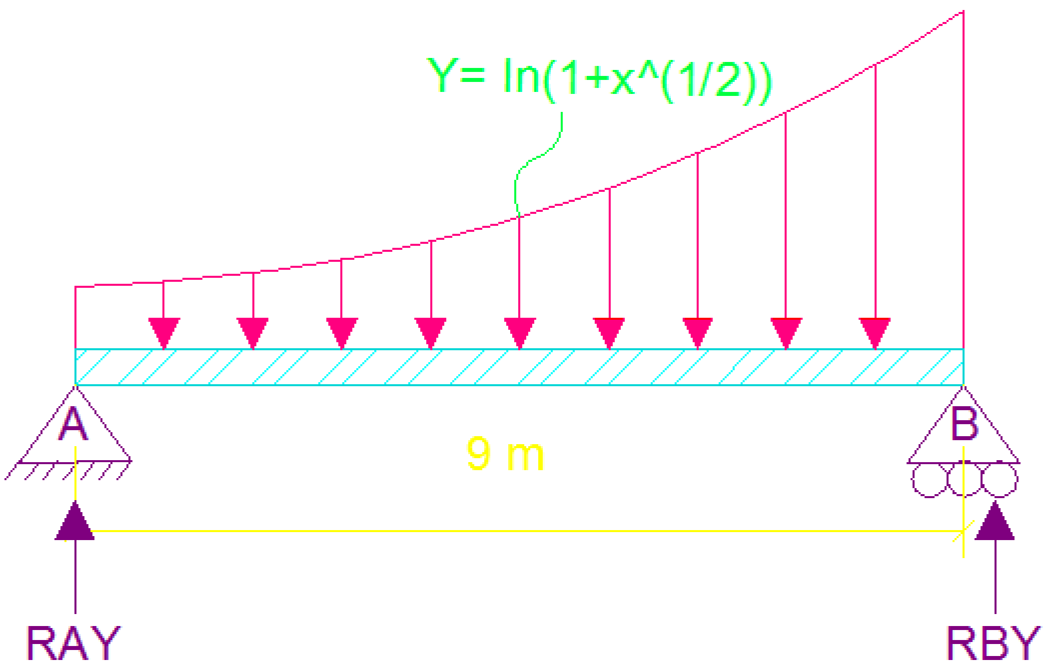


Figura No.8

Iniciamos calculando sumatoria de momentos en el apoyo A:

$\Sigma MA = 0$

Para lo cual necesitamos conocer el área te la curva que forma la función dada, es decir $Y = ln\ (1+\sqrt{x})dx$:

$$\left[\int_0^9 \ln\left(1+\sqrt{x}\right) dx\right]\left[\frac{\int_0^9 x\ln\left(1+\sqrt{x}\right) dx}{\int_0^9 \ln\left(1+\sqrt{x}\right) dx}\right] - 9RBY = 0$$

Despejando RBY para conocer la reacción actuante en ese apoyo:

$RBY = 5.452974938\ ton$

$\Sigma FY = 0$

$$RAY - \int_0^9 \ln(1+\sqrt{x})dx + 5.452974938 = 0$$

$$RAY = 4.137379951\ ton \uparrow$$

Posteriormente procedemos a hacer el primer y único corte de esta viga porque como podemos observar en la viga original, esta misma solo contiene una sola carga que cambia con respecto a la longitud de la misma.

$0m \leq x \leq 9m$

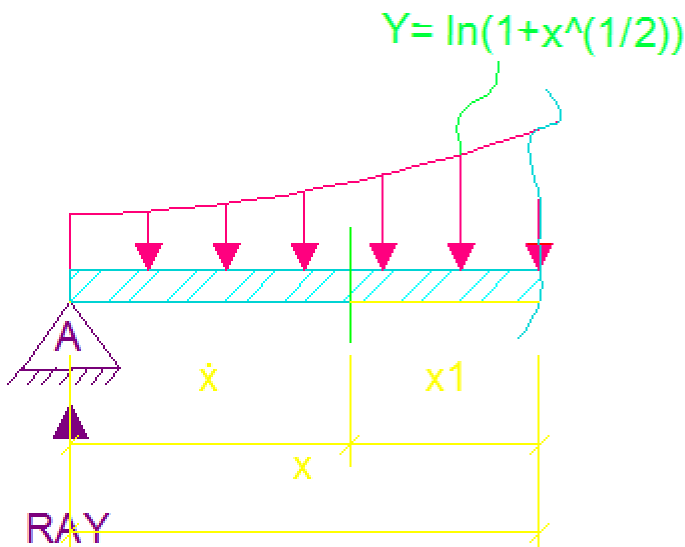


Figura No.8.1

Calculamos sumatoria de momentos en el punto p:

$\Sigma Mp = 0$

$x_1 = x - \bar{x}$

$$M(x) = 4.137379951\, x - [\int_0^x \ln|1+\sqrt{x}|dx] \left[x - \frac{\int_0^x x \ln|1+\sqrt{x}|dx}{\int_0^x \ln|1+\sqrt{x}|\, dx} \right]$$

Procedemos a resolver por partes la primera integral:

$$\int_0^x \ln|1+\sqrt{x}|dx$$

$$u = 1+\sqrt{x} = 1+x^{\frac{1}{2}}$$

$$du = u' = 0+\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)dx$$

$$\int 2\sqrt{x}\ln|u|\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)dx$$

$\int 2\sqrt{x}\ln|u|du \longrightarrow$ $u = 1+\sqrt{x}$

$\sqrt{x} = u-1$

$$2\sqrt{x} = 2(u-1)$$

$$2\int (u-1)\ln|u|du$$

$$2\,[\int (u-1)\ln|u|du - \int \ln u\, du]$$

Integración por partes

$$-[\int \ln|u|du]$$

Haciendo uso de la siguiente formula:

$$\int wv' = wv - \int dw\,.\,v$$

$w = \ln|u|$ $\quad dw = \frac{1}{u}du$

$v' = du$ $\quad v = \int v' = \int du = u$

$$= u\,ln|u| - \int \left(\frac{1}{u}\right)udu = u\ln|u| - \int 1\,du = u\ln|u| - u$$

$$\int u\ln|u|du$$

$$\int wdv = wv - \int dw.v$$

$w = u \qquad dw = 1\,du$

$v' = ln|u|du \qquad v = \int \ln|u|du = u\,ln|u| - u$

$$= u^2 \ln|u| - u^2 - \int (1\,du)(u \ln|u| - u)$$

$$= u^2 \ln|u| - u^2 - \int u \ln|u|du + \int u\,du = \int u \ln|u|du$$

$$u^2 \ln|u| - u^2 + \left(\frac{u^2}{2}\right) = \int u \ln|u|du + \int u \ln|u|du$$

$$2\int u \ln|u|du = u^2 \ln|u| - \left(\frac{u^2}{2}\right)$$

$$\int u \ln|u|du = \frac{(u^2 \ln|u|)}{2} - \frac{u^2}{4}$$

$$2\int (u-1) \ln|u|\,du$$

$$= 2[\frac{(u^2 \ln|u|)}{2} - \frac{u^2}{4} - u \ln|u| + u]$$

$$= u^2 \ln|u| - \frac{u^2}{2} - 2u \ln|u| + 2u$$

$u = 1 + \sqrt{x}$

$$\int \ln\left|1+\sqrt{x}\right|dx = \left(1+\sqrt{x}\right)^2 \ln\left|1+\sqrt{x}\right| - \frac{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}{2} - 2\left(1+\sqrt{x}\right)\ln\left|1+\sqrt{x}\right| + 2\left(1+\sqrt{x}\right)$$

$$\int_0^x \ln\left|1+\sqrt{x}\right|dx = \left(1+\sqrt{x}\right)^2 ln\left|1+\sqrt{x}\right|\Big|_0^x - \frac{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}{2}\Bigg|_0^x + 2\left(1+\sqrt{x}\right)\ln\left|1+\sqrt{x}\right|\Big|_0^x$$

$$+2\left(1+\sqrt{x}\right)\Big|_0^x$$

$$= \left(1+\sqrt{x}\right)^2 ln\left|1+\sqrt{x}\right| - \left(\frac{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}{2}\right) + \frac{1}{2} - 2\left(1+\sqrt{x}\right) ln\left|1+\sqrt{x}\right| + 2\left(1+\sqrt{x}\right) - 2$$

$$\int_0^x x \ln\left|1+\sqrt{x}\right|dx$$

Resolvemos la integral anterior por partes:

$$\int uv' = uv - \int du.v$$

$u = 1 + \sqrt{x} \quad du = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)dx$

Si:

$u - 1 = \sqrt{x}$ Despejando la variable x:

$(u-1)^2 = x$

$$\int x.\left(2\sqrt{x}\right)\ln|u|.\frac{1}{2\sqrt{x}}dx = 2\int (u-1)^2(u-1)\ln|u|du = 2\int (u-1)^3\ln|u|du$$

$$2\int (u-1)^3\ln|u|\,du$$

$(u-1)^3 = u^3 - 3u^2 + 3u - 1$

$$2\int (u^3 - 3u^2 + 3u - 1)\ln|u|\,du$$

Haciendo uso de la formula siguiente formula nos es posible obtener la integran de la variable u con exponente x o sea cualquiera:

$$\int u^n\ln|u|du = \int wv' = wv - \int dw.v$$

$w = \ln|u| \quad dw = \frac{1}{u}du$

$v' = u^n du \quad v = \left(\frac{u^{n+1}}{n+1}\right)$

$$= \frac{(u^{n+1}\ln|u|)}{n+1} - \int\left(\frac{1}{u}\right)\left(\frac{u^{n+1}}{n+1}\right)du$$

$$= \frac{u^{n+1}\ln|u|}{n+1} - \frac{1}{n+1}\int u^n du$$

$$\therefore \int u^n\ln|u|du = \frac{u^{n+1}.\ln|u|}{(n+1)} - \frac{u^{n+1}}{(n+1)(n+1)}\frac{1}{n+1}\left[u^{(n+1)}.\frac{1}{u} + \ln|u|(n+1)u^n\right]$$

$$-\frac{n+1}{(n+1)(n+2)}u^{n+1}\frac{u^n}{n+1} + u^n\ln|u| - \left(\frac{u^n}{n+1}\right)$$

$$= \frac{2u^4 \ln|u|}{4} - \frac{2u^4}{15} - \frac{6u^3 \ln|u|}{3} + \frac{6u^3}{9} + \frac{6u^2 \ln|u|}{2} - \frac{6u^2}{4} - 2u \ln|u| + 2u$$

$$u = 1 + \sqrt{x}$$

$$\int_0^x x \ln\left|1+\sqrt{x}\right| dx = \frac{\left(1+\sqrt{x}\right)^4 \ln\left|1+\sqrt{x}\right|}{2}\Bigg|_0^x - \frac{\left(1+\sqrt{x}\right)^4}{8} - 2\left(1+\sqrt{x}\right)^3 \ln\left(1+\sqrt{x}\right)\Big|_0^x + \frac{2\left(1+\sqrt{x}\right)^3}{3}\Bigg|_0^x + 3\left(1+\sqrt{x}\right)^2 \ln\left(1+\sqrt{x}\right)\Big|_0^x - \frac{3\left(1+\sqrt{x}\right)^2}{2}\Bigg|_0^x - 2\left(1+\sqrt{x}\right)\ln\left(1+\sqrt{x}\right)\Big|_0^x + 2\left(1+\sqrt{x}\right)\Big|_0^x$$

$$= \frac{\left(1+\sqrt{x}\right)^4 \ln\left|1+\sqrt{x}\right|}{2} - \frac{\left(1+\sqrt{x}\right)^4}{8} + \frac{1}{8} - 2\left(1+\sqrt{x}\right)^3 \ln\left|1+\sqrt{x}\right| + \frac{2\left(1+\sqrt{x}\right)^3}{3} - \frac{2}{3} + 3\left(1+\sqrt{x}\right)^2 \ln\left|1+\sqrt{x}\right| = \frac{3\left(1+\sqrt{x}\right)^2}{2} + \frac{3}{2} - 2\left(1+\sqrt{x}\right)\ln\left|1+\sqrt{x}\right| + 2\left(1+\sqrt{x}\right) - 2$$

Calculando el momento:

$$M(x) = 4.137379951x - \left[\left(1+\sqrt{x}\right)^2 \ln\left(1+\sqrt{x}\right) - \frac{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}{2} + \frac{1}{2} - 2\left(1+\sqrt{x}\right)\ln\left|1+\sqrt{x}\right| + 2\left(1+\sqrt{x}\right) - 2\right]$$

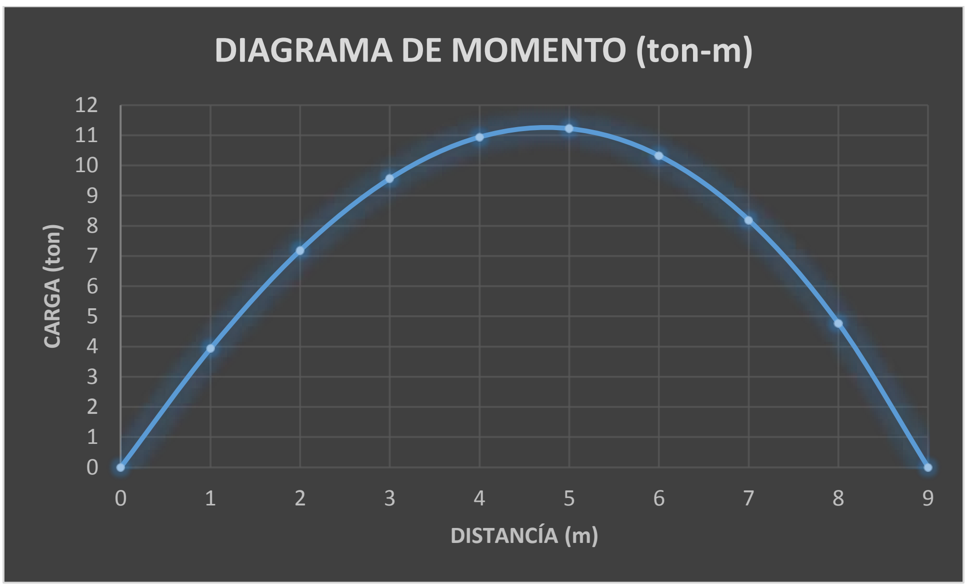
$$\cdot\left[\frac{x - \frac{\left(1+\sqrt{x}\right)^4 \ln\left(1+\sqrt{x}\right)}{2} - \frac{\left(1+\sqrt{x}\right)^4}{8} + \frac{1}{8} - 2\left(1+\sqrt{x}\right)^3 \ln\left(1+\sqrt{x}\right) + \frac{2\left(1+\sqrt{x}\right)^3}{3} - \frac{2}{3} + 3\left(1+\sqrt{x}\right)^2 \ln\left(1+\sqrt{x}\right) - \frac{3\left(1+\sqrt{x}\right)^2}{2} + \frac{3}{2} - 2\left(1+\sqrt{x}\right)\ln\left(1+\sqrt{x}\right) + 2\left(1+\sqrt{x}\right) - 2}{\left(\left(1+\sqrt{x}\right)^2 \ln\left|1+\sqrt{x}\right| - \frac{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}{2} + \frac{1}{2} - 2\left(1+\sqrt{x}\right)\ln\left|1+\sqrt{x}\right| + 2\left(1+\sqrt{x}\right) - 2\right)}\right]$$

Realizando las operaciones correspondientes y a su vez reduciendo términos:

$$M(x) = 4.137379951x - x\left(1+\sqrt{x}\right)^2 ln\left|1+\sqrt{x}\right| + \frac{x\left(1+\sqrt{x}\right)^2}{2} - \frac{x}{2} + 2x\left(1+\sqrt{x}\right) ln\left|1+\sqrt{x}\right| - 2x\left(1+\sqrt{x}\right) + 2x + \frac{\left(1+\sqrt{x}\right)^4 \ln\left|1+\sqrt{x}\right|}{2} - \frac{\left(1+\sqrt{x}\right)^4}{8} + \frac{1}{8} - 2\left(1+\sqrt{x}\right)^3 \ln\left|1+\sqrt{x}\right| + \frac{2\left(1+\sqrt{x}\right)^3}{3} - \frac{2}{3} + 3\left(1+\sqrt{x}\right)^2 + \frac{3}{2} - 2\left(1+\sqrt{x}\right)\ln\left|1+\sqrt{x}\right| + 2\left(1+\sqrt{x}\right) - 2$$

$$M(x) = 5.637379951x - \frac{25}{24} - x\left(1+\sqrt{x}\right)^2 \ln\left|1+\sqrt{x}\right| + \frac{x\left(1+\sqrt{x}\right)^2}{2} + 2x\left(1+\sqrt{x}\right)\ln\left(1+\sqrt{x}\right) - 2x\left(1+\sqrt{x}\right) + \frac{\left(1+\sqrt{x}\right)^4 \ln\left(1+\sqrt{x}\right)}{2} - \frac{\left(1+\sqrt{x}\right)^4}{8} - 2\left(1+\sqrt{x}\right)^3 \ln\left(1+\sqrt{x}\right) + \frac{2\left(1+\sqrt{x}\right)^3}{3} + 3\left(1+\sqrt{x}\right)^2 \ln\left|1+\sqrt{x}\right| - \frac{3\left(1+\sqrt{x}\right)^2}{2} - 2\left(1+\sqrt{x}\right)\ln\left|1+\sqrt{x}\right| + 2\left(1+\sqrt{x}\right)$$

DISTANCIA (m)	CARGA (ton-m)
0	0
1	3.929046618
2	7.184157286
3	9.56293316
4	10.93909784
5	11.21811179
6	10.32374687
7	8.191861624
8	4.766948201
9	0



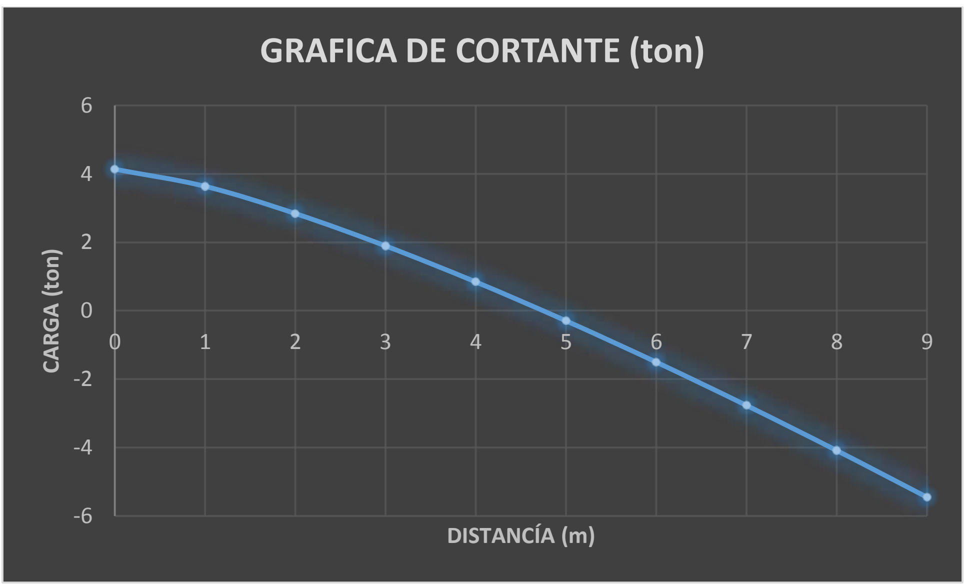
Ahora obtenemos la sumatoria de fuerzas en dirección y que nos permitirá conocer la ecuación de cortante y a su vez poder graficar con dicha ecuación los diagramas correspondientes:

$$\Sigma Fy = 0$$

$$V(x) = 4.137379951 - \left(1+\sqrt{x}\right)^2 \ln\left|1+\sqrt{x}\right| + \frac{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}{2} + \frac{3}{2} + 2\left(1+\sqrt{x}\right)\ln\left|1+\sqrt{x}\right| - 2\left(1+\sqrt{x}\right)$$

Evaluamos la ecuación anterior a la distancia 0 metros y distancia de 9 metros para verificar que sea correcto el análisis:

DISTANCIA (m)	CARGA (ton)
0	4.137379951
1	3.637379951
2	2.841792802
3	1.895224066
4	0.841543085
5	-0.296124049
6	-1.503241389
7	-2.769746151
8	-4.088225499
9	-5.452974938



DISTANCIA (m)	CARGA (ton)
0	0
1	0
2	0
3	0
4	0
5	0
6	0
7	0

8	0
9	0

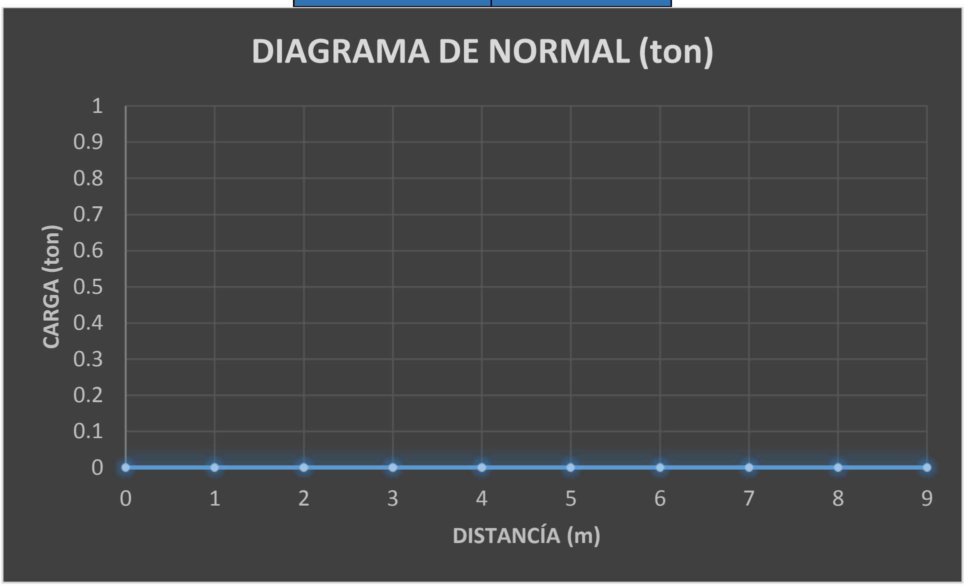


DIAGRAMA DE NORMAL (ton)
CARGA (ton)
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
DISTANCÍA (m)

6. ANÁLISIS ESTRUCTURAL DE VIGAS CON CARGAS EXPONENCIALES

9.-De la siguiente estructura figura No. 9, calcular las reacciones de los apoyos, obtener la ecuación de la fuerza cortante, momento y fuerza axial y trazar los diagramas correspondientes.

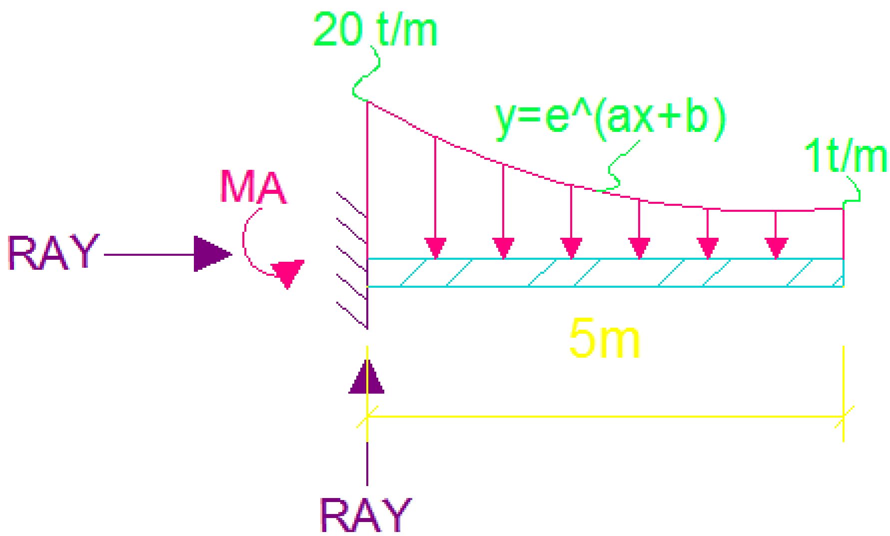


Figura No.9

$x = 0\,m \qquad y = 20t/m$

$x = 5\,m \qquad y = 1t/m$

$e^{a(0)+b} = 20 \ldots 1$

$e^{a(5)+b} = 1 \ldots 2$

$e^{b} = 20$

$\ln|e^{b}| = \ln|20|$

$b = ln|20|$

$e^{5a+ln|20|} = 1$

$e^{5a}.e^{ln|20|} = 1$

$e^{5a} = \dfrac{1}{20}$

$$5a = ln\left|\frac{1}{20}\right|$$

$$a = \frac{1}{5}\ln\left|\frac{1}{20}\right|$$

$$Y = e^{\frac{1}{5}ln\left|\frac{1}{20}\right|x+ln|20|}$$

$$Y = 20e^{\frac{1}{5}ln\left|\frac{1}{20}\right|x}$$

$$\Sigma Fy = 0$$

$$RAy - \int_0^5 20e^{\frac{1}{5}\ln\left|\frac{1}{20}\right|}dx = 0$$

$$RAy - \left(\frac{20}{\frac{1}{5}\ln\left|\frac{1}{20}\right|}\right)\left(e^{\frac{1}{5}\ln\left|\frac{1}{20}\right|x}\right)\Big|_0^5 = 0$$

$$RAy = \frac{20}{\frac{1}{5}\ln\left|\frac{1}{20}\right|}\left[\frac{1}{20} - 1\right]$$

$$RAy = \frac{20}{\frac{1}{5}ln\left|\frac{1}{20}\right|}\left[-\frac{19}{20}\right]\ ton \uparrow$$

NOTA: $\frac{20}{\frac{1}{5}\ln\left|\frac{1}{20}\right|}$ es un número negativo ya que aproximadamente equivale a -33.30082007 por lo tanto el cortante para "RAy" es positivo.

$$RAy = \frac{(-1)20}{(-1)\left(\frac{1}{5}ln\left|\frac{1}{20}\right|\right)}\left(-\frac{19}{20}\right) = \frac{19}{-\frac{1}{5}ln\left|\frac{1}{20}\right|}$$

$$RAy = 19[\ln\left|\left(\frac{1}{20}\right)^{-\frac{1}{5}}\right|^{-1} = \frac{19}{\ln\left|\frac{1}{\left(\frac{1}{20}\right)^{\frac{1}{5}}}\right|}\, ton \approx 31.71177907\, ton$$

$$\Sigma MA = 0$$

$$-MA + \left[\int_0^5 20e^{\frac{1}{5}\ln\left|\frac{1}{20}\right|x}\, dx\right]\left[\frac{\int_0^5 20xe^{\frac{1}{5}\ln\left|\frac{11}{20}\right|x} dx}{\int_0^5 20e^{\frac{1}{5}\ln\left|\frac{1}{20}\right|x}\, dx}\right] = 0$$

$$20\int_0^5 xe^{\frac{1}{5}\ln\left|\frac{1}{20}\right|x}\, dx \approx 44.58305454$$

$$u = x \qquad du = 1\, dx$$

$$dv = e^{\frac{1}{5}\ln\left|\frac{1}{20}\right|x} dx \qquad v = \frac{1}{\frac{1}{5}\ln\left|\frac{1}{20}\right|}\, e^{\frac{1}{5}ln\left|\frac{1}{20}\right|x}$$

$$= 20\left[\frac{xe^{\frac{1}{5}\ln\left|\frac{1}{20}\right|x}}{\frac{1}{5}\ln\left|\frac{1}{20}\right|}\middle|\begin{matrix}5\\0\end{matrix} - \frac{e^{\frac{1}{5}\ln\left|\frac{1}{20}\right|x}dx}{\left(\frac{1}{5}\ln\left|\frac{1}{20}\right|\right)^2}\middle|\begin{matrix}5\\0\end{matrix}\right] = \frac{25}{\ln\left|\frac{1}{20}\right|} - \frac{1}{\left(\frac{1}{5}\ln\left|\frac{1}{20}\right|\right)^2} + \frac{20}{\left(\frac{1}{5}\ln\left|\frac{1}{20}\right|^2\right.} = \frac{25}{\ln\left|\frac{1}{20}\right|}$$

$$= \frac{25}{\ln\left|\frac{1}{20}\right|} + \frac{19}{\left(\frac{1}{5}\ln\left|\frac{1}{20}\right|\right)^2} \approx 44.58305454\, ton$$

$$-MA + \frac{25}{\ln\left|\frac{1}{20}\right|} + \frac{19}{\left(\frac{1}{5}\ln\left|\frac{1}{20}\right|\right)^2} = 0$$

$$MA = \left(\frac{25}{\ln\left|\frac{1}{20}\right|} + \frac{19}{\left(\frac{1}{5}\ln\left|\frac{1}{20}\right|\right)^2}\right)t.m$$

$0m \leq x \geq 5m$

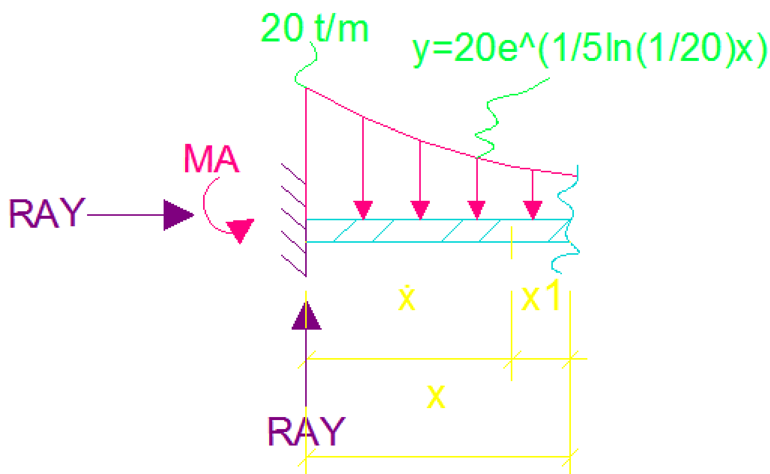


Figura No.9.1

$x_1 = x - \bar{x}$

$\Sigma Mp = 0m$

$$M(x) = -MA + RAy(x) - [\int_0^x f(x)dx]\left[x - \frac{\int_0^x x\, f(x)dx}{\int_0^x f(x)dx}\right]$$

Sustituyendo valores:

$$\int_0^x 20\, e^{\frac{1}{5}ln\left|\frac{1}{20}\right|x} \; dx = \left.\frac{20\, e^{\frac{1}{5}\ln\left|\frac{1}{20}\right|x}}{\frac{1}{5}\ln\left|\frac{1}{20}\right|}\right|_0^x = \frac{20\, e^{\frac{1}{5}\ln\left|\frac{1}{20}\right|x}}{\frac{1}{5}\ln\left|\frac{1}{20}\right|} - \frac{20}{\frac{1}{5}\ln\left|\frac{1}{20}\right|}$$

$$20\int_0^x xe^{\frac{1}{5}ln\left|\frac{1}{20}\right|x} \; dx = 20\left[\left.\frac{xe^{\frac{1}{5}\ln\left|\frac{1}{20}\right|x}}{\frac{1}{5}\ln\left|\frac{1}{20}\right|}\right|_0^x - \left.\frac{e^{\frac{1}{5}\ln\left|\frac{1}{20}\right|x}}{(\frac{1}{5}\ln\left|\frac{1}{20}\right|)^2}\right|_0^x\right]$$

Aplicando los límites:

$$\frac{20xe^{\frac{1}{5}\ln\left|\frac{1}{20}\right|x}}{\frac{1}{5}\ln\left|\frac{1}{20}\right|}-\frac{20e^{\frac{1}{5}\ln\left|\frac{1}{20}\right|x}}{\frac{1}{5}\ln\left|\frac{1}{20}\right|^{2}}+\frac{20}{\frac{1}{5}\ln\left|\frac{1}{20}\right|^{2}}$$

$$M_{(x)}=-\frac{25}{\ln\left|\frac{1}{20}\right|}-\frac{19}{\left(\frac{1}{5}\ln\left(\frac{1}{20}\right)\right)^{2}}+\frac{19}{\ln\left|\frac{1}{\left(\frac{1}{20}\right)^{\frac{1}{5}}}\right|}x-\left[\frac{20\,e^{\frac{1}{5}\ln\left|\frac{1}{20}\right|x}}{\frac{1}{5}\ln\left|\frac{1}{20}\right|}-\frac{20}{\frac{1}{5}\ln\left|\frac{1}{20}\right|}\right]\left[x\,\frac{-\frac{20\,xe^{\frac{1}{5}\ln\left|\frac{1}{20}\right|x}}{\frac{1}{5}\ln\left|\frac{1}{20}\right|}-\frac{20\,e^{\frac{1}{5}\ln\left|\frac{1}{20}\right|x}}{\left(\frac{1}{5}\ln\left|\frac{1}{20}\right|\right)^{2}}+\frac{20}{\left(\frac{1}{5}\ln\left|\frac{1}{20}\right|\right)^{2}}}{\frac{20\,e^{\frac{1}{5}\ln\left|\frac{1}{20}\right|x}}{\frac{1}{5}\ln\left|\frac{1}{20}\right|}-\frac{20}{\frac{1}{5}\ln\left|\frac{1}{20}\right|}}\right]$$

$$M_{(x)}=-\frac{25}{\ln\left|\frac{1}{20}\right|}-\frac{19}{\left(\frac{1}{5}\ln\left|\frac{1}{20}\right|\right)^{2}}+\frac{19x}{\ln\left|\frac{1}{\left(\frac{1}{20}\right)^{\frac{1}{5}}}\right|}+\frac{20x}{\frac{1}{5}\ln\left|\frac{1}{20}\right|}-\frac{20\,e^{\left(\frac{1}{5}\ln\left|\frac{1}{20}x\right)\right|}}{\left(\frac{1}{5}\ln\left|\frac{1}{20}\right|\right)^{2}}+\frac{20x}{\left(\frac{1}{5}\ln\left|\frac{1}{20}\right|\right)^{2}}$$

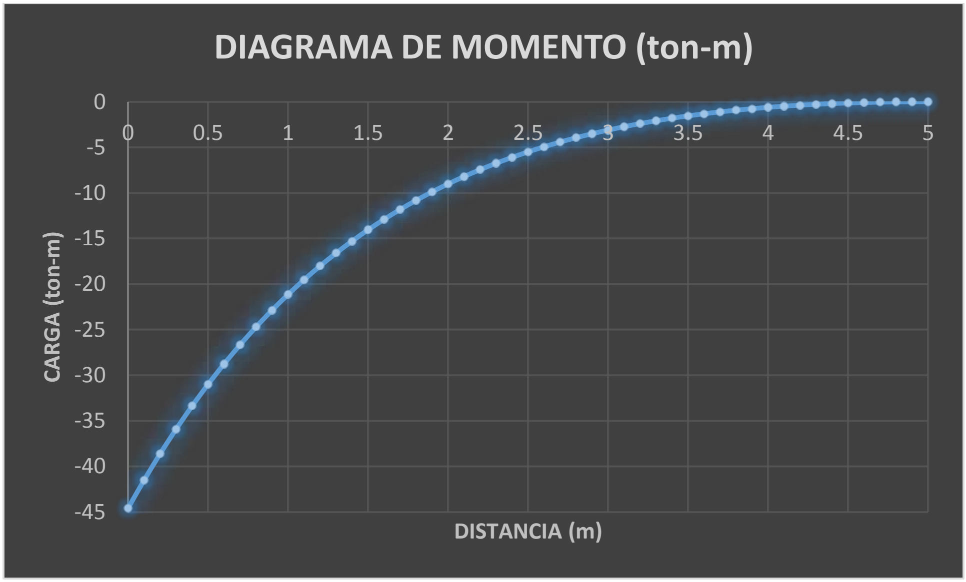
Asociando términos:

$$\frac{20}{\frac{1}{5}\ln\left|\frac{1}{20}\right|}\left(-\frac{19}{20}\right)x=-\frac{475}{\ln\left|\frac{1}{20}\right|}+\frac{560}{\ln\left|\frac{1}{20}\right|}-\frac{25}{\ln\left|\frac{1}{20}\right|}=0$$

Hacemos uso de la ecuación de momento para graficar el comportamiento de la viga número 8, a una distancia de 0.1 en 0.1 ya que se trata de una carga logarítmica:

DISTANCIA (m)	CARGA (ton-m)
0	-44.58305454
0.1	-41.50990904
0.2	-38.62518887
0.3	-35.91793616
0.4	-33.37783027
0.5	-30.99515076
0.6	-28.76074248
0.7	-26.66598272
0.8	-24.70275019
0.9	-22.86339593
1	-21.14071578
1.1	-19.52792456
1.2	-18.01863166
1.3	-16.60681812

1.4	-15.28681504
1.5	-14.05328316
1.6	-12.90119374
1.7	-11.8258105
1.8	-10.82267258
1.9	-9.887578542
2	-9.016571294
2.1	-8.205923862
2.2	-7.452126018
2.3	-6.751871667
2.4	-6.102046985
2.5	-5.49971923
2.6	-4.942126214
2.7	-4.426666386
2.8	-3.950889485
2.9	-3.512487749
3	-3.109287622
3.1	-2.739241952
3.2	-2.400422637
3.3	-2.091013708
3.4	-1.809304801
3.5	-1.553685019
3.6	-1.322637147
3.7	-1.114732203
3.8	-0.928624309
3.9	-0.763045855
4	-0.61680295
4.1	-0.488771134
4.2	-0.37789134
4.3	-0.28316609
4.4	-0.203655916
4.5	-0.138475984
4.6	-0.086792916
4.7	-0.047821803
4.8	-0.020823379
4.9	-0.005101372
5	0



Procedemos a hacer un análisis de las fuerzas en la dirección y para obtener el cortante de dicha viga y de igual manera graficamos para verificar el comportamiento de la misma:

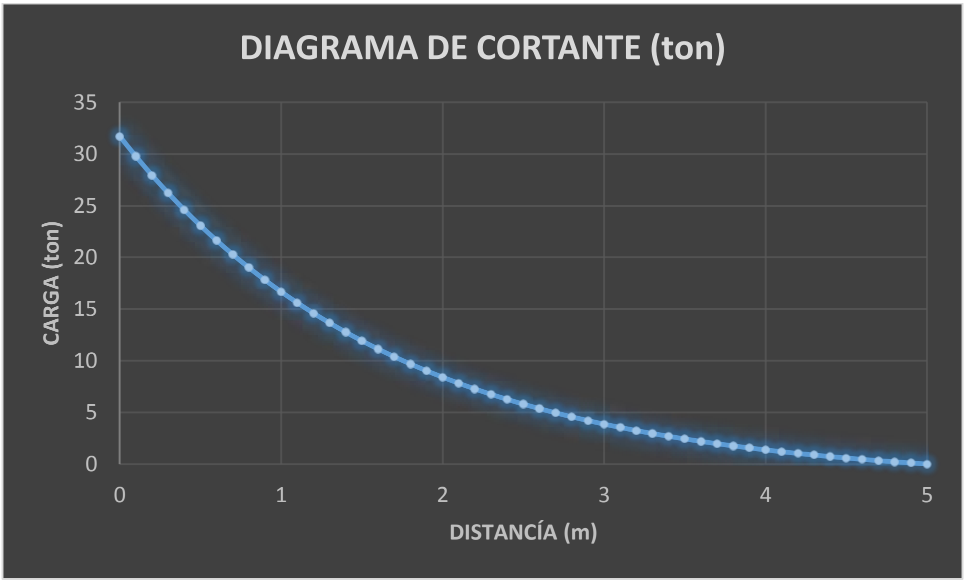
$\Sigma Fy = 0$

$$V_{(x)} = \frac{19}{\ln\left|\frac{1}{\left(\frac{1}{20}\right)^{\frac{1}{5}}}\right|} - \frac{20\, e^{\left(\frac{1}{5}\ln\left|\frac{1}{20}\right| x\right)}}{\frac{1}{5}\ln\left|\frac{1}{20}\right|} + \frac{20}{\frac{1}{5}\ln\left|\frac{1}{20}\right|}$$

DISTANCIA (m)	CARGA (ton)
0	31.71177907
0.1	29.77051483
0.2	27.94214498
0.3	26.22010411
0.4	24.59820867
0.5	23.07063469
0.6	21.63189689
0.7	20.27682901
0.8	19.0005652
0.9	17.79852261
1	16.66638491
1.1	15.60008677

1.2	14.59579928
1.3	13.6499162
1.4	12.75904103
1.5	11.91997478
1.6	11.12970449
1.7	10.38539244
1.8	9.684365906
1.9	9.024107629
2	8.402246724
2.1	7.81655019
2.2	7.264914883
2.3	6.745359972
2.4	6.256019818
2.5	5.795137279
2.6	5.3610574
2.7	4.952221471
2.8	4.567161428
2.9	4.204494582
3	3.862918656
3.1	3.541207104
3.2	3.238204713
3.3	2.95282345
3.4	2.684038557
3.5	2.430884871
3.6	2.192453357
3.7	1.967887847
3.8	1.756381962
3.9	1.557176219
4	1.369555301
4.1	1.192845492
4.2	1.026412257
4.3	0.869657959
4.4	0.72201972
4.5	0.582967395
4.6	0.452001668
4.7	0.328652264
4.8	0.212476254
4.9	0.103056469

5	0



Sumatoria de fuerzas axiales:

DISTANCIA (m)	CARGA (ton)
0	0
0.1	0
0.2	0
0.3	0
0.4	0
0.5	0
0.6	0
0.7	0
0.8	0
0.9	0
1	0
1.1	0
1.2	0
1.3	0
1.4	0
1.5	0
1.6	0
1.7	0
1.8	0

1.9	0
2	0
2.1	0
2.2	0
2.3	0
2.4	0
2.5	0
2.6	0
2.7	0
2.8	0
2.9	0
3	0
3.1	0
3.2	0
3.3	0
3.4	0
3.5	0
3.6	0
3.7	0
3.8	0
3.9	0
4	0
4.1	0
4.2	0
4.3	0
4.4	0
4.5	0
4.6	0
4.7	0
4.8	0
4.9	0
5	0

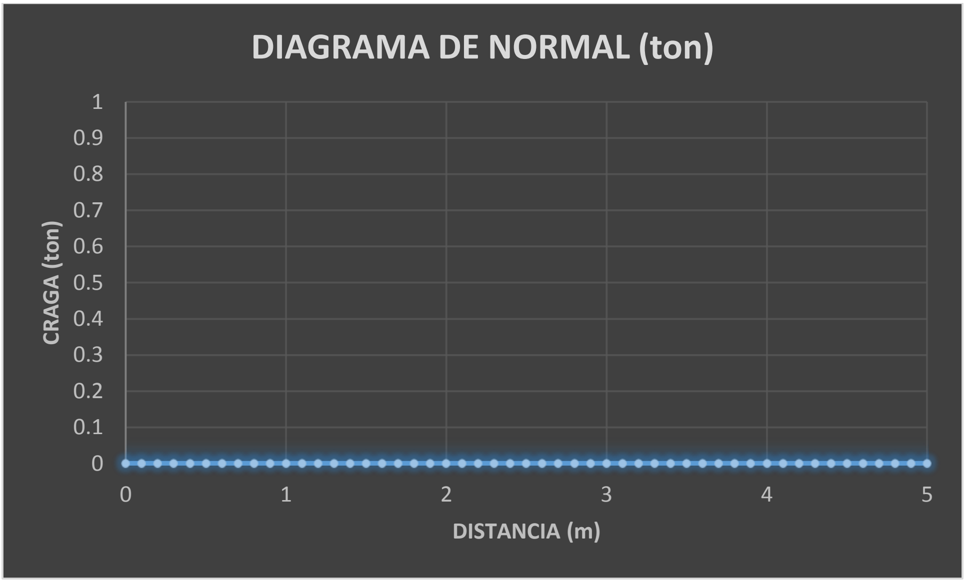


DIAGRAMA DE NORMAL (ton)
CRAGA (ton)
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0
1
2
3
4
5
DISTANCIA (m)

CONCLUSIONES

El análisis de vigas puntuales, curvas y con cargas uniformemente repartidas son las más comunes en el ámbito de la ingeniería civil, sin embargo el análisis de cargas polinómicas, armónicas, exponenciales y logarítmicas incluidas en esta tesis hace más sencilla la comprensión de las cargas comunes que se pueden encontrar en el diseño arquitectónico de una estructura simple ,sin embargo no lo es para el diseño de un proyecto realizado por un arquitecto, con ideas nuevas, raras y contemporáneas que incluyen formas más complicadas y difíciles de calcular, así como conocer el comportamiento de las mismas, es por eso que decidí realizar este trabajo, con la idea de facilitar la comprensión de las formas raras a los alumnos y próximos ingenieros civiles.

BIBLIOGRAFÍA

Fuetes Lipez Felix, “Análisis estructural I un enfoque práctico parte I”,2011.

Molina Elvira Marcos, Apuntes de la Asignatura de Mecánica de Materiales, 2011.

Molina Elvira Marcos, Apuntes de la Asignatura de Estructuras Isostáticas, 2011.

Ortiz David y Molina Marcos, Problemario de Análisis de Estructuras EN 2D y 3D, 2014.