



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
**MAESTRÍA EN CIENCIAS (FÍSICA)**

POTENCIALES DE KÄHLER EN COMPACTIFICACIONES DE TEORÍA DE CUERDAS Y  
SUS CUALIDADES COSMOLÓGICAS

TESIS  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
MAESTRÍA EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA:  
YESSENIA OLGUÍN TREJO

TUTOR PRINCIPAL  
DR. SAÚL NOÉ RAMOS SÁNCHEZ  
INSTITUTO DE FÍSICA

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR  
DR. AXEL DE LA MACORRA PETTERSSON MORIEL  
INSTITUTO DE FÍSICA

DR. LUKAS NELLEN FILLA  
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES

MÉXICO, D. F., ENERO 2015



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



**Potenciales de Kähler en compactificaciones de teoría de  
cuerdas y sus cualidades cosmológicas**

Yessenia Olgún Trejo

# Dedicatoria

*A mis padres y hermanos, quienes me han dado todo su apoyo y confianza siempre*

*Esta investigación fue realizada con el apoyo del Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) de la UNAM IB101012 “Fenomenología de Cuerdas: física de partículas y cosmología”. Este trabajo ha sido parcialmente apoyado también por el proyecto CONACyT 151234.*

### *Resumen*

El presente trabajo está dedicado al cálculo y estudio de los potenciales de Kähler a segundo orden para los módulos geométricos que surgen tras compactificar en orbifolds toroidales abelianos las teorías de cuerdas heteróticas. Para lograr esto, primeramente se determina el número y estructura de los campos modulares presentes en este tipo de compactificaciones, lo cual permite entonces determinar los potenciales de Kähler empleando cálculos de funciones de correlación en la teoría conforme de campos asociada a la teoría de cuerdas y una comparación con las amplitudes de dispersión en SUGRA obtenidas previamente en la literatura. Por último, usando los resultados obtenidos, analizamos la viabilidad cosmológica de nuestros hallazgos estudiando un potencial sencillo con cualidades cosmológicas para inflación.

### *Abstract*

This work is devoted to the computation and study of Kähler potentials up to second order in the geometric moduli that appear after compactifying the heterotic string theories on abelian toroidal orbifolds. To achieve this goal, we first determine the number and structure of the modular fields appearing in these constructions, which allows one then to determine the Kähler potentials by using standard correlator function computations in the conformal field theory associated with string theory and a comparison with the scattering amplitudes in SUGRA found in the literature. Finally, using these results, we analyze the cosmological viability of our findings in studying a simple potential with cosmological inflationary properties.

# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>VI</b>
<b>1 Supersimetría y Supergravedad</b>	<b>1</b>
1.1 Supersimetría . . . . .	1
1.1.1 Supercampos y Superespacio . . . . .	2
1.2 Supergravedad en $d=4$ . . . . .	5
1.3 Supergravedad extendida . . . . .	7
<b>2 La Teoría de Cuerdas Heterótica y sus compactificaciones</b>	<b>8</b>
2.1 Teoría de cuerdas . . . . .	9
2.1.1 Cuerdas Bosónicas . . . . .	10
2.1.2 Supercuerdas . . . . .	12
2.2 Cuerdas heteróticas . . . . .	13
2.2.1 Modos Derechos . . . . .	13
2.2.2 Modos Izquierdos . . . . .	14
2.3 Compactificaciones de la Cuerda Heterótica . . . . .	15
2.3.1 Orbifolios Toroidales . . . . .	16
2.4 Módulos . . . . .	20
<b>3 Obtención de Módulos de Kähler en Orbifolds</b>	<b>23</b>
3.1 Ejemplo en 2 dimensiones . . . . .	23
3.2 Módulos geométricos del Orbifolio $\frac{T^6}{\mathbb{Z}_7}$ . . . . .	24
3.3 Módulos geométricos para algunos otros Orbifolios . . . . .	27
3.3.1 $T^6/\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ . . . . .	27
<b>4 Potenciales de Kähler a partir de amplitudes en cuerdas</b>	<b>29</b>
4.1 Interacciones y operadores de vértice . . . . .	29
4.2 El potencial de Kähler para los módulos a partir de amplitudes . . . . .	32
4.2.1 Amplitudes de dispersión de 4 módulos . . . . .	32
4.3 Amplitudes de dispersión entre módulos y campos de materia . . . . .	38
4.3.1 Sector no-torcido . . . . .	38
4.3.2 Sector torcido . . . . .	41

4.4	Potencial de Kähler a segundo orden para orbifolios abelianos . . . . .	45
<b>5</b>	<b>Potenciales modulares en cosmología</b>	<b>47</b>
<b>6</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>52</b>
<b>A</b>	<b>MSSM con <math>\mathbb{Z}_7</math></b>	<b>56</b>
<b>B</b>	<b>Detalles de los orbifolios <math>\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3</math></b>	<b>61</b>
<b>C</b>	<b>Algunas funciones de correlación</b>	<b>66</b>
	<b>Bibliografía</b>	<b>67</b>

# Introducción

Uno de los mayores deseos de los físicos teóricos es formular una teoría unificada capaz de describir las 4 interacciones conocidas en la naturaleza simultáneamente. En este sentido, uno de los grandes éxitos de la física teórica ha sido el Modelo Estándar, el cual, si bien tiene varios problemas que deben ser resueltos, ha logrado unificar tres de las cuatro fuerzas fundamentales (la fuerza nuclear fuerte, la fuerza nuclear débil y el electromagnetismo) mediante teorías de campo cuánticas con simetrías en un grupo de norma  $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_y$ . Entre los problemas que aún faltan por resolver en el Modelo Estándar se encuentra la explicación de la materia y energía oscura, la inclusión de la gravedad, las masas de los neutrinos, además de las inexplicables diferencias entre las escalas energéticas de las fuerzas fundamentales. Este último problema, llamado el problema de jerarquías tiene una particular forma de explicación si se agrega una simetría entre bosones y fermiones llamada supersimetría.

A pesar de los éxitos del modelo estándar, todas las inconsistencias llevan a pensar que existe una teoría fundamental detrás de éste y que además contendría a la gravedad, dejando la descripción de todas las fuerzas conocidas de la naturaleza a todas las escalas energéticas a partir de esta.

Un intento de unificar a la gravedad con otra de las fuerzas fundamentales, el electromagnetismo data del año 1919 [1] cuando Kaluza mostró que una teoría de la relatividad en 5 dimensiones contiene a ambas, relatividad general de Einstein en 4 dimensiones y la teoría de Maxwell del electromagnetismo. En la teoría de Kaluza, él justificaba el por qué la física sería 4 dimensional con una condición sobre las derivadas con respecto a la dimensión extra  $X_4$ , con esto Kaluza obtuvo las ecuaciones de campo de Einstein en presencia de un campo electromagnético; además, obtuvo una ecuación de Klein-Gordon para un campo escalar sin masa que fue suprimida por Kaluza.

Klein mostró en 1926 [2], que la condición de Kaluza podría surgir naturalmente si la quinta dimensión tenía una topología circular, de tal modo que los campos tendrían condiciones periódicas en esa dimensión y si la escala de compactificación era lo suficientemente baja como para tener modos con energías muy altas e inobservables para nosotros. La física sería entonces independiente de la quinta dimensión como Kaluza decía.

En la búsqueda de teorías unificadas es donde aparece la teoría de cuerdas, que, si bien es una teoría aún en construcción, ha mostrado tener ciertas características que debería cumplir una teoría unificada. Teoría de cuerdas fue construida originalmente como solución a ciertos problemas que aparecían en la descripción de la fuerza fuerte. Fue en 1974 cuando nace la teoría de cuerdas bosónica, cuando se encontró que uno de los modos de vibración tenía propiedades que encajaban con el “gravitón”, la partícula mensajera de la fuerza gravitacional. Esta teoría no sólo contiene un gravitón entre sus modos de oscilación, también, se reduce a la gravitación de Einstein a bajas energías. Sin embargo, pronto fue descartada pues sólo contiene modos de vibración asociados a estados bosónicos y tiene además otro problema: un taquión, un signo de la inestabilidad de la teoría. La teoría fue formulada partiendo de la acción de Polyakov y el requerimiento de la cancelación de la anomalía conforme indica que las vibraciones de la cuerda bosónica habitan en 26 dimensiones.

La materia que observamos está compuesta de fermiones, de modo que para que la teoría de cuerdas explicara el origen de éstos, fue necesario agregar grados de libertad fermiónicos a la acción de la cuerda. De esta forma, aunque no es obvio el por qué, se obtienen modos de vibración fermiónicos en el espacio-tiempo, que ahora es de 10 dimensiones como resultado de la consistencia matemática de la teoría. En un principio, existen 5 maneras distintas de formular teorías de supercuerdas en 10 dimensiones, incluyendo cuerdas cerradas y en ocasiones cuerdas abiertas. La teoría de cuerdas tipo IIA incluye tanto cuerdas cerradas como cuerdas abiertas; ésta se diferencia de la tipo IIB en que no posee un espectro quirral. La teoría tipo I es una teoría que incluye cuerdas abiertas y cerradas no orientadas. Finalmente las teorías de cuerdas heteróticas son dos: heterótica  $SO(32)$  y heterótica  $E_8 \times E_8$ . Estas dos últimas son teorías de cuerdas cerradas cargadas bajo el grupo de norma correspondiente. El único parámetro con dimensiones de una teoría de cuerdas es la longitud de la cuerda:  $l_s$ , la cual no debería ser mayor que la longitud de Planck  $l_p$ . Con base en estas teorías, para fines fenomenológicos, se estudian los límites a bajas energías  $E \ll l_s^{-1}$ , en donde solamente las vibraciones o modos no masivos de las teorías pueden ser observables. En este límite, es preciso el empleo de supergravedad.

Durante los años noventa fueron descubiertas todo un conjunto de dualidades <sup>1</sup> que conectan a las teorías entre ellas. En particular los límites de bajas energías de las teorías IIA y heterótica  $E_8 \times E_8$  se presentan como un caso de compactificación de una teoría de supergravedad en 11 dimensiones. Los hechos anteriores, han conducido a la conjetura de la existencia de una teoría en 11 dimensiones cuyo límite es supergravedad en 11 dimensiones. A esta teoría se la ha dado el nombre de “Teoría M”, y se sugiere que su principal componente ya no son cuerdas, sino otro tipo de objetos.

---

<sup>1</sup>Llamadas dualidades S y T. Las dualidades son cierto tipo de transformaciones en los parámetros de la teoría que llevan de una teoría a otra, ver por ejemplo [3] en el capítulo 8

Como se mencionó antes, las cinco teorías de (súper) cuerdas son consistentes matemáticamente sólo en 10 dimensiones. Por lo tanto, si se quiere hacer contacto con el universo 4 dimensional que observamos, una de las primeras tareas de los físicos teóricos dedicados a cuerdas es formular una teoría efectiva en 4 dimensiones. Siguiendo la idea de Klein, compactificar las 6 dimensiones extras y postular que estas son muy pequeñas es uno de los caminos más usados. En términos fenomenológicos, las teorías heteróticas son quizá las más prometedoras debido a que ya tienen incluido un grupo de norma, aspecto que en las otras teorías no es fácil de conseguir pues requiere la inclusión de efectos no perturbativos, tales como las llamadas D-branas, que no siempre están bajo control. Por esta razón, en esta tesis analizamos un tipo de compactificaciones en teorías heteróticas: compactificaciones en orbifolios.

Un orbifolio heterótico surge al compactificar alguna de las dos teorías heteróticas en un objeto llamado orbifolio (en inglés orbifold). Existen varios tipos de orbifolios, entre los cuales se incluyen orbifolios abelianos y no abelianos, en esta tesis solo nos enfocaremos en orbifolios abelianos. A estas construcciones también se les puede agregar líneas de Wilson (ver e.g.[4] para mas detalles de orbifolios heteróticos). Son éstas y las características del orbifolio las que determinan la teoría efectiva 4-dimensional.

La compactificación en estos objetos permite definir otro tipos de estados que no se tienen en las otras teorías de cuerdas. Estos provienen de una cuerda abierta, la cual al aplicar la condición del orbifolio se cierra, estos son los llamados estados en el sector torcido. Aparte de los estados en el sector no torcido y en el sector torcido, una característica de cualquier compactificación es la aparición de módulos, es decir, parámetros que pueden tomar cualquier valor y que en la teoría 4-dimensional se consideran como campos. La aparición de estos módulos está relacionado con los modos cero de la reducción dimensional de los campos de la teoría. Relacionados con la métrica existen dos tipos de módulos: los módulos de estructura compleja y los módulos de Kähler, en los cuales nos enfocaremos. Además, de los módulos geométricos mencionados anteriormente en orbifolios toroidales suelen aparecer más módulos que provienen de los puntos y toros fijos que cualquier orbifolio posee, a estos se les llama módulos “torcidos” (en inglés twisted).

En este trabajo buscamos caracterizar los potenciales escalares de los campos modulares que aparecen en las compactificaciones en orbifolios toroidales, para lo cual es fundamental primeramente tener conocimiento del potencial de Kähler asociado en su límite de supergravedad. Además de aportar información sobre la energía cinética de los (súper)campos considerados en el límite de supergravedad, el potencial de Kähler es determinante en la estructura del potencial efectivo de la dinámica de todos los campos resultantes de las vibraciones de las cuerdas no masivas en una teoría de cuerdas compactificada. Aunque ha habido varios esfuerzos por obtener a partir de la teoría de cuerdas todos los posibles potenciales de Kähler que emergen en compactificaciones heteróticas (ver e.g. [5, 6, 7, 8, 9]), aún

no se tiene una clasificación completa de ellos. Incluso en los casos en los que se tiene información sobre éstos, no se han logrado describir más que a primer orden en una expansión en la que se considera que el volumen del espacio compacto es grande. Uno de los puntos medulares del presente trabajo es precisamente contribuir a un mejor entendimiento de los potenciales de Kähler emergentes de la cuerda heterótica compactificada en orbifolios heteróticos.

Tras un análisis del potencial de Kähler, el siguiente paso es conocer los acoplamientos entre (súper)campos que conducen a la construcción del llamado superpotencial en una teoría de supergravedad. El superpotencial es una función holomorfa de los campos que contiene los acoplamientos de Yukawa de los campos. En este sentido se ha dado un gran progreso en los últimos años (ver e.g. [10, 11, 12]). En este trabajo, nosotros no calcularemos las propiedades del superpotencial; cuando sea necesario, propondremos la existencia de un superpotencial típico, basado en los trabajos existentes.

Con estas dos herramientas, el potencial de Kähler y el superpotencial, es posible calcular el potencial escalar de los problemáticos módulos de las compactificaciones heteróticas de nuestro interés. El problema obvio a resolver ahora es lo que se conoce como estabilización de módulos, un problema que, aunque ha sido explorado desde los orígenes de la teoría de cuerdas y es la fuente del llamado *String Landscape*, aún no es resuelto en teorías heteróticas debido a la dificultad del mismo (ver e.g. [13, 14, 15]). En esta tesis abordaremos este problema sólo tangencialmente, con la finalidad de conocer el potencial de los campos modulares caracterizados en la resolución de urgentes interrogantes cosmológicos, como el origen de inflación<sup>2</sup>.

Como es bien sabido, a la etapa temprana en la que el universo se expande casi exponencialmente se le denomina inflación y fue propuesta para resolver la falta de *naturalidad* en las condiciones del universo en sus inicios en el modelo cosmológico de Friedmann-Robertson-Walker. Un ejemplo de la poca naturalidad es denominado el problema de la “planitud”. Dado que el universo actual es (casi) plano, de acuerdo a las ecuaciones de Einstein, el universo debió haber sido plano desde un inicio, lo cual es un escenario que es muy improbable ante la multitud de posibles condiciones iniciales [16]. Otro problema de este tipo es el problema del horizonte: surge de la observación de que la temperatura de la radiación de fondo cósmica es isotrópica, lo cual resulta difícil de imaginar si partes del universo que hoy observamos no estuvieron en contacto térmico en el momento de la última dispersión. La solución más sencilla a este problema corresponde a postular una época en la cual el parámetro de Hubble<sup>3</sup> fue casi constante,  $H \approx cte.$ .

<sup>2</sup>En esta sección se dará una muy breve introducción a algunos conceptos importantes en cosmología y en especial del escenario inflacionario, los cuales serán utilizados en el capítulo 5. Para una introducción mas detallada se sugiere consultar [16, 17, 18]

<sup>3</sup>El parámetro de Hubble se define como  $H = \dot{a}/a$ , en donde  $a(t)$  es el llamado factor de escala, el cual tiene unidades de longitud y se puede interpretar como el “radio” del universo al tiempo  $t$ .

En un universo inflacionario, el factor de escala  $a(t)$  del universo crece exponencialmente, i.e.

$$a(t) = a_i e^{H(t-t_i)} = a_i e^N. \quad (1)$$

Es sabido que, para resolver estos problemas, es necesario que el llamado *número de e-folds*  $N$  tenga el valor aproximado  $N \gtrsim 60$ . Una expansión acelerada del universo puede explicarse mediante una fuente de presión  $p$  negativa o una densidad de energía  $\rho$  casi constante dominando la dinámica del universo. El modelo más simple para generar inflación es el que introduce un campo escalar  $\varphi(t)$  homogéneo (llamado inflatón) que dominaba en el universo en sus inicios. La presión y densidad de energía de este campo esta dada por

$$p = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 - V(\varphi), \quad (2)$$

$$\rho = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + V(\varphi). \quad (3)$$

El potencial  $V(\varphi)$  de este campo tiene que ser lo suficientemente plano durante un periodo en cual se puedan conseguir los  $e$ -folds necesarios. La aceleración del universo ocurre entonces cuando la energía cinética de este campo es despreciable con respecto a la energía potencial del mismo. Cuando ambas energías son comparables, inflación termina. Las cualidades que debe tener un campo escalar para producir inflación de la manera en la que se ha descrito se pueden codificar en dos parámetros: los parámetros de *slow roll* o *rodamiento lento*  $\eta$  y  $\epsilon$ , dados en términos de las derivadas de  $V$ . Inflación ocurre entonces cuando estos parámetros son lo suficientemente pequeños y termina cuando éstos se aproximan o llegan a 1.

La generación de perturbaciones escalares y tensoriales es otra cualidad del modelo inflacionario. Con este se puede explicar la formación de estructura a gran escala pues las fluctuaciones del inflatón proporcionan las semillas necesarias para el crecimiento y la formación de las estructuras que vemos hoy en día. Si se generan o no perturbaciones tensoriales (de la métrica) en un modelo inflacionario se puede saber calculando  $r$  o el cociente entre las perturbaciones escalares y tensoriales<sup>4</sup>. Los últimos avances hacia la medición de este parámetro [20] indican que su valor debe ser pequeño.

Esta tesis está organizada como se describe a continuación. En el primer capítulo se presenta una breve introducción a supersimetría, para después introducir los conceptos básicos de supergravedad poniendo énfasis en las herramientas necesarias para construir el potencial de los campos escalares en la teoría. El capítulo 2 es una breve introducción a las ideas de cuerdas y supercuerdas, presentando la idea principal detrás de las cuerdas heteróticas. En ese capítulo también se muestra la definición de un orbifoldo toroidal con un ejemplo fácil. Se muestra la aparición de módulos como consecuencia de la reducción

<sup>4</sup>Para un estudio detallado consultar [17, 19, 18]

---

dimensional y la forma de contarlos. El capítulo 3 presenta la forma explícita de calcularlos en términos de las longitudes y ángulos de los vectores que forman la red del toro sobre el cual se construye el orbifolio. En el cuarto capítulo se procede a comparar amplitudes de dispersión entre módulos de orbifolios y campos en los sectores torcidos y no-torcidos de la teoría para obtener la forma del potencial a segundo orden válida para cualquier orbifolio. En el quinto capítulo se analiza un potencial muy sencillo, en el que el potencial de Kähler puede ser obtenido bajo algunas consideraciones de un orbifolio heterótico, y las consecuencias si éste fuera utilizado como inflatón.

# Capítulo 1

## Supersimetría y Supergravedad

El límite de bajas energías de una teoría de supercuerdas es una teoría de supergravedad en 10 dimensiones con  $\mathcal{N} = 1$  o  $\mathcal{N} = 2$  supersimetrías, en donde el valor de  $\mathcal{N}$  depende de cada una de las 5 teorías de cuerdas a las que nos podemos referir: I, IIA, IIB, heterótica  $SO(32)$  y heterótica  $E_8 \times E_8$ . Este trabajo estará enfocado en las teorías heteróticas. Si se realiza una compactificación de las dimensiones extras se tiene una teoría de supergravedad en 4 dimensiones, la cual puede tener un número de supersimetrías menor si las características de la variedad compacta son especiales.

El estudio de supergravedad es entonces crucial en teoría de cuerdas; ésta es la conexión entre una posible teoría final unificada y la teoría efectiva a bajas energías que puede ser comprobada experimentalmente. En este capítulo revisaremos los conceptos claves en supersimetría (SUSY) y supergravedad (SUGRA) que son importantes para el análisis de las teorías efectivas a bajas energías de supercuerdas.

### 1.1 Supersimetría

El teorema de Coleman-Mandula [21] establece que es imposible combinar una simetría interna con una simetría en el espacio-tiempo (Simetría de Poincaré) con generadores que obedezcan un álgebra de Lie. Sin embargo, poco después [22] se encontró que se puede generalizar la noción de un álgebra de Lie a la de un álgebra gradada de Lie, o más específicamente a una súper álgebra de Lie y evadir el teorema. De manera simple, un álgebra gradada de Lie es un álgebra en donde los generadores satisfacen leyes de conmutación y de anticonmutación. La forma esquemática de estas relaciones es:

$$\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\} = 2\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu P_\mu \quad (1.1)$$

$$\{Q, Q\} = \{\bar{Q}, \bar{Q}\} = 0 \quad (1.2)$$

$$[P^\mu, Q] = [P^\mu, \bar{Q}] = 0, \quad (1.3)$$

en donde se está usando la notación de espinores de Weyl. En esta representación, un espinor de Dirac de cuatro componentes es escrito en términos de dos componentes, complejos y anticonmutantes con dos tipos distintos de índices espinoriales  $\alpha = 1, 2$  y  $\dot{\alpha} = 1, 2$ ,

$$\Psi_D = \begin{pmatrix} \eta_\alpha \\ \chi_{\dot{\alpha}}^\dagger \end{pmatrix}. \quad (1.4)$$

Debido a la naturaleza fermiónica de  $Q$ , la cual se puede observar en las relaciones anteriores, al actuar  $Q$  sobre un campo bosónico se debe obtener un campo fermiónico y actuando sobre un campo fermiónico se debe obtener un campo bosónico. De esta forma, una transformación supersimétrica, es una transformación que convierte estados bosónicos en estados fermiónicos, y viceversa. Es, por tanto, una transformación que une partículas de espín entero y semi-entero en un supermultiplete común:

$$Q|Bosón\rangle = |Fermión\rangle, \quad Q|Fermión\rangle = |Bosón\rangle. \quad (1.5)$$

Cada supermultiplete contiene un número igual de grados de libertad bosónicos y fermiónicos. La teoría más simple invariante bajo SUSY es una teoría libre con un espinor de Weyl  $\psi_\alpha$  (2 grados de libertad) y un campo escalar complejo  $\varphi$  (2 grados de libertad). Su acción está dada por<sup>1</sup>

$$S = \int d^4x (-\partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi^* - i\psi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi), \quad (1.6)$$

la cual tiene una corriente conservada en la capa de masa y es invariante ante las siguientes transformaciones

$$\delta\phi = \epsilon\psi \quad (1.7)$$

$$\delta\psi_\alpha = -i(\sigma^\mu \epsilon^*)_\alpha \partial_\mu \phi. \quad (1.8)$$

Para describir teorías más generales, es necesario que la simetría se cumpla fuera de la capa de masa. Esto se logra agregando grados de libertad extra que desaparecen en la capa de masa, es decir, utilizando las ecuaciones de movimiento de los campos. Al supermultiplete anterior se le suele agregar un campo escalar usualmente llamado  $F$ .

### 1.1.1 Supercampos y Superespacio

La construcción de Lagrangianas supersimétricas se puede realizar introduciendo la noción de superespacio y supercampos. El superespacio se obtiene al extender el espacio-tiempo utilizando coordenadas anticonmutantes (espinoriales o grassmanianas)  $\theta_\alpha, \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}$  (ver e.g. [24, sección 1.5]). La construcción se hace a través de supercampos, los cuales dependen de las coordenadas del superespacio  $(x^\mu, \theta_\alpha, \bar{\theta}_{\dot{\alpha}})$  y unen a las diferentes componentes de un supermultiplete.

<sup>1</sup>Para una primera y útil introducción a SUSY, se recomienda por ejemplo [23].

Los dos supercampos necesarios para construir Lagrangianas son el supercampo quiral y el supercampo vectorial

$$\Phi(x, \theta, \bar{\theta}) \quad y \quad V(x, \theta, \bar{\theta}).$$

Debido a las características de los números de Grassmann las expansiones de cualquier supercampo general  $S$  siempre terminan, i.e. son series formadas de unos cuantos términos fácilmente calculables.

### Supercampo Quiral

En teorías supersimétricas el supermultiplete más simple es el quiral, el cual contiene un campo escalar complejo  $\Phi$ , un espinor de Weyl  $\psi$  y un campo auxiliar  $F$ .

Un supercampo escalar puede expresarse como un polinomio a segundo orden en las variables  $\theta$  y  $\bar{\theta}$ . Esta forma general de expresarlo es reducible con respecto a las transformaciones de SUSY; es por eso que es necesario imponer condiciones extras. De esta forma, un supercampo quiral se caracteriza por  $\bar{D}_{\dot{\alpha}}\Phi = 0$  ( $D_{\alpha}\Phi^* = 0$  para su correspondiente anti-quiral), en donde las derivadas covariantes quirales se definen de la siguiente manera:

$$D_{\alpha} = \frac{\partial}{\partial\theta} + i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^{\mu}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\partial_{\mu} \quad (1.9)$$

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}} = -\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}} - i\theta^{\alpha}\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^{\mu}\partial_{\mu}. \quad (1.10)$$

En la expresión anterior es importante notar que la integración con respecto a variables de Grassmann de una derivada covariante quiral de cualquier expresión es siempre una derivada total con respecto a  $x^{\mu}$ , dado que la integral de la derivada con respecto a variables de Grassmann se anula. La estructura de un supercampo quiral es con esta restricción impuesta:

$$\Phi(x, \theta, \bar{\theta}) = \phi(y) + \sqrt{2}\theta\psi(y) + \theta\theta F, \quad (1.11)$$

con  $y^{\mu} = x^{\mu} + i\theta\sigma^{\mu}\bar{\theta}$  un cambio de variable hecho por conveniencia,  $\sqrt{2}$  es agregado por convención.

Para construir Lagrangianas de un supercampo quiral, basta notar que el término  $F$  transforma como una derivada total en el espacio tiempo [25, 23], de tal forma que al integrar sobre las componentes fermiónicas del superespacio se obtiene un término invariante bajo las transformaciones SUSY. Por lo tanto, la integral en el espacio-tiempo del término  $F$  de cualquier polinomio de supercampos quirales es invariante bajo SUSY. La forma mas general de obtener acoplamientos renormalizables de supercampos quirales es

$$\begin{aligned} \int d^2\theta W(\Phi_i) + h.c. &= \int d^2\theta \left( \frac{1}{3} h^{ijk} \Phi_i \Phi_j \Phi_k + \frac{1}{2} m^{ij} \Phi_i \Phi_j + \lambda^i \Phi_i \right) + h.c. \\ &\equiv [W(\Phi_i)]_F + h.c., \end{aligned} \quad (1.12)$$

en donde se ha introducido una función holomórfica  $W(\Phi_i)$  a la que se le llama el *superpotencial*.

Para obtener una Lagrangiana completa sólo falta considerar los términos libres de los campos, los cuales ya conocemos y se obtienen de considerar

$$\int d^2\theta d^2\bar{\theta} \Phi^{*i} \Phi_i \equiv [\Phi^{*i} \Phi_i]_D. \quad (1.13)$$

La densidad Lagrangiana completa es entonces

$$\mathcal{L} = [\Phi^{*i} \Phi_i]_D + [W(\Phi_i)]_F + h.c. \quad (1.14)$$

Las ecuaciones de movimiento de los campos auxiliares  $F_i$  permiten eliminar estos explícitamente induciendo una contribución al potencial de los campos escalares. A esta contribución se le llama término  $F$  del potencial

$$V_{F_i}(\Phi_i) = \sum \left| \frac{\partial W}{\partial \Phi_i} \right|. \quad (1.15)$$

### Supercampos vectoriales

Al imponer la *condición de realidad*  $V = V^*$ , se obtiene un supercampo vectorial. El contenido de un supermultiplete vectorial es: un bosón de norma  $A_\mu$ , un espinor de Weyl en la representación adjunta llamado normino (gaugino)  $\lambda_\alpha$  y un campo auxiliar escalar real  $D$ . Utilizando la llamada norma de Wess-Zumino [23] la expansión de un campo vectorial es

$$V(x, \theta, \bar{\theta}) = -\theta \sigma^\mu \bar{\theta} A_\mu(x) + i \bar{\theta} \bar{\theta} \theta \lambda(x) + \frac{1}{2} \theta \theta \bar{\theta} \bar{\theta} D(x). \quad (1.16)$$

Para construir Lagrangianas de teorías de norma (abelianas o no abelianas) es necesario definir un supercampo quiral  $\mathcal{W}_\alpha$  (y su correspondiente anti-quiral) que es invariante de norma y contiene el tensor de intensidad de campo usual ( $F_{\mu\nu}$ ). Si la teoría es abeliana, éste se define como

$$\mathcal{W}_\alpha = -\frac{1}{4} \bar{D} \bar{D} D_\alpha V \quad (1.17)$$

y se generaliza para teorías no abelianas de la siguiente forma

$$\mathcal{W}_\alpha = -\frac{1}{4} \bar{D} \bar{D} e^{-V} D_\alpha e^V, \quad (1.18)$$

en donde ahora se tiene una matriz  $V_j^i = T_{ja}^i V^a$  con  $T_a$  los generadores correspondientes de la simetría no abeliana.

Los términos cinéticos para bosones de norma, gauginos y sus interacciones se obtienen de

$$\frac{1}{4} Tr \int d\theta^2 \mathcal{W}_\alpha \mathcal{W}^\alpha + h.c. = Tr \left( \frac{1}{2} D^2 - i \lambda \sigma^\mu D_\mu \bar{\lambda} - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right). \quad (1.19)$$

Y los acoplamientos de un supercampo vectorial  $V$  con un supercampo quiral  $\Phi$  se obtienen al considerar el siguiente término:

$$\int d^2\theta d^2\bar{\theta} \Phi^* e^V \Phi. \quad (1.20)$$

En resumen, una Lagrangiana de manera general se escribe como

$$\mathcal{L} = Tr [\mathcal{W}_\alpha \mathcal{W}^\alpha]_F + h.c. + [\Phi^{*i} (e^V)_i^j \Phi_j]_D + ([W(\Phi_i)]_F + h.c.). \quad (1.21)$$

Es posible también agregar términos no renormalizables a las Lagrangianas anteriores (1.14)-(1.21):

$$\int d^2\theta d^2\bar{\theta} K(\Phi, \Phi^*), \quad (1.22)$$

en donde  $K$  es una función que, a diferencia del superpotencial  $W$ , es función tanto de supercampos quirales como de anti-quirales. Este último término puede contener términos cinéticos no canónicos de la forma  $K_{i\bar{j}} \partial_\mu \Phi^i \partial^\mu \bar{\Phi}^{\bar{j}}$  con

$$K_{i\bar{j}} = \frac{\partial^2 K}{\partial \Phi^i \partial \bar{\Phi}^{\bar{j}}}. \quad (1.23)$$

Otro término admisible en una Lagrangiana supersimétrica y que contiene términos cinéticos es

$$\int d^2\theta f(\Phi) Tr(\mathcal{W}_\alpha \mathcal{W}^\alpha), \quad (1.24)$$

en donde a  $f(\Phi)$  se le llama la función cinética de norma y es una función holomórfica de los supercampos quirales tratados como variables complejas.

## 1.2 Supergravedad en d=4

Si en una teoría supersimétrica se quiere tener en cuenta a la gravedad, supersimetría debe ser promovida a una simetría local, la teoría resultante es llamada *Supergravedad* (SUGRA). La versión local de SUSY involucra transformaciones generales de coordenadas en el espacio-tiempo ya que SUSY global contiene al generador de traslaciones en el espacio-tiempo  $P^\mu$ . Por lo tanto, SUSY local es la versión supersimétrica de la gravedad. Esto puede ser visto explícitamente al tratar de construir una teoría invariante bajo transformaciones supersimétricas locales en donde la necesidad de introducir campos de espín 3/2 y 2 es clara (para ver la construcción completa de una Lagrangiana supersimétrica, se recomienda ver ([26],[27],[25],[28])). La partícula que se acopla a la corriente conservada, tal como en una teoría de norma, es el gravitino  $\psi_\mu^\alpha$  de espín 3/2 y que pertenece al supermultiplete de gravedad junto con el gravitón  $g_{\mu\nu}$ .

Los acoplamientos de los supercampos quirales  $\Phi$  están determinados por una función

$G(\Phi_i, \Phi_i)$  la cual es una combinación de una función real, el potencial de Kähler  $K$  y de una función analítica, el superpotencial  $W$ . En unidades en donde la masa de Plank es 1 esta función se escribe

$$G(\Phi_i, \Phi_i^\dagger) = K(\Phi_i, \Phi_i^*) + \ln |W(\Phi_i)|^2. \quad (1.25)$$

Una propiedad importante de  $G$  (y por lo tanto de la Lagrangiana) es que resulta invariante ante transformaciones de Kähler, que están definidas como sigue,

$$\begin{aligned} K &\rightarrow K + H(\Phi) + H^*(\Phi^*) \\ W &\rightarrow e^{-H(\Phi)} W. \end{aligned} \quad (1.26)$$

Esto expresa el hecho de que el espacio de los campos escalares en supergravedad es una variedad de Kähler. Los campos escalares deben ser pensados como coordenadas y la métrica de Kähler está dada por la ec. (1.23)).

En supergravedad, el término  $F$  del potencial escalar es

$$V_F = e^K (K^{i\bar{j}} D_i W D_{\bar{j}} W^* - 3|W|^2), \quad (1.27)$$

en donde  $D_i = \partial_i + \partial_i K$  es la derivada de Kähler y  $K^{i\bar{j}}$  es la inversa de la métrica de Kähler. Al igual que en supersimetría global, surge cuando los campos auxiliares  $F$  que aparecen en los supermultipletes quirales son eliminados mediante el uso de sus ecuaciones de movimiento.

Los términos cinéticos de norma se escriben en términos de funciones holomorfas  $f_{ab}(\Phi_i)$  (función cinética de norma) y el término  $D$  del potencial es

$$V_D = \frac{1}{2} [Re f^{-1}]^{ab} [K_i (T_a)_k^i \Phi^k] [K_j (T_b)_k^j \Phi^k]^*. \quad (1.28)$$

Esta contribución al potencial escalar surge al eliminar los campos auxiliares  $D$  de los supermultipletes vectoriales con ayuda de sus ecuaciones de movimiento.  $T_a$  son los generadores del grupo de norma en la representación adecuada.

La parte de la densidad Lagrangiana que contiene exclusivamente campos bosónicos es

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_B &= e(e^K (K^{i\bar{j}} D_i W D_{\bar{j}} W^* - 3|W|^2) - \frac{1}{2} [Re f^{-1}]^{ab} [K_i (T_a)_k^i \Phi^k] [K_j (T_b)_k^j \Phi^k]^* \\ &+ \frac{1}{4} i Im(f_{ab} F_{\mu\nu}^a \tilde{F}^{\mu\nu b}) - \frac{1}{4} Re(f_{ab} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu b}) \\ &+ K_j^i D_\mu \Phi_i D^\mu \Phi^j - \frac{1}{2} R) \end{aligned} \quad (1.29)$$

con  $e$  el determinante de  $e_\mu^a$ .

### 1.3 Supergravedad extendida

En una teoría de campos es posible tener más supersimetrías, es decir, tener más súper cargas  $Q$  que permitan transformaciones entre bosones y fermiones y viceversa respetando la invariancia. De este modo, las teorías de supergravedad extendida son definidas en términos del número de súper cargas  $Q_I, \bar{Q}_J$  con  $I = 1, \dots, \mathcal{N}$  que satisfacen un álgebra generalizada

$$\{Q_\alpha^I, Q_{J\dot{\alpha}}\} = 2\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu P_\mu \delta_J^I \quad (1.30)$$

las cuales contienen tantas simetrías entre bosones y fermiones como gravitinos, ya que

$$Q_I |\lambda = 2\rangle = |\lambda = 3/2\rangle \quad \forall I, \quad (1.31)$$

en donde  $\lambda$  es la helicidad. Las teorías de SUGRA extendida son solo viables para  $1 \leq \mathcal{N} \leq 8$ ,

$$Q_1 Q_2 \dots Q_{\mathcal{N}} |\lambda = 2\rangle = |\lambda = 2 - \mathcal{N}/2\rangle, \quad (1.32)$$

pues para  $\mathcal{N}$  mayor se tendrían campos con espín  $5/2$  e incluso mayores y más campos con espín  $2$  serían necesarios; aunque, recientemente el interés en teorías con espines mayores ha resurgido y más en teorías de cuerdas en donde se tienen estados de la cuerda asociados a partículas con todo tipo de espines.

La extensión más simple es  $\mathcal{N} = 2$  supersimetrías, en donde:

$$\begin{aligned} Q_I |\lambda = 2\rangle &= |\lambda = 3/2\rangle \quad I = 1, 2 \\ Q_1 Q_2 |\lambda = 2\rangle &= |\lambda = 1\rangle, \end{aligned} \quad (1.33)$$

dando lugar a un solo supermultiplete de gravedad con un gravitón, dos gravitinos y un fotón. Aunque esta teoría parece convincente al unificar la gravedad con el electromagnetismo, es no finita (la teoría es no renormalizable). El caso  $\mathcal{N} = 8$  es interesante también, pues toda la materia pertenecería al mismo súper multiplete. Pero, otra vez las divergencias están presentes.

## Capítulo 2

# La Teoría de Cuerdas Heterótica y sus compactificaciones

La teoría de cuerdas surge como candidata a una teoría de unificación y por lo tanto a una teoría de gravedad cuántica, sin embargo, la consistencia matemática de la teoría (ver por ejemplo [29], [30],[3]) requiere que el número de dimensiones aumente. La primera teoría de cuerdas que surgió fue la teoría de cuerdas bosónica, la cual solo contiene estados bosónicos en su espectro y vive en 26 dimensiones. Cualquiera de las teorías de supercuerdas vive en 10 dimensiones. Las teorías de supercuerdas se convirtieron en teorías más realistas al contener en su espectro estados fermiónicos.

Históricamente la idea de compactificar dimensiones extras, como se ha mencionado en la introducción vino de Oskar Klein [2], quien propuso unificar la gravedad con la teoría electromagnética de Maxwell ampliando el espacio-tiempo a 5 dimensiones. Algunas conclusiones importantes pueden aprenderse de la compactificación “a la Kaluza-Klein” (ver por ejemplo [29, cap. 8], ahí se trabaja en el contexto de teoría de cuerdas):

- La compactificación de una dimensión produce una cuantización del momento en la dirección compactificada.
- El espectro de masas se ve modificado.
- El radio de compactificación puede ser totalmente arbitrario.

En el contexto de teoría de cuerdas se busca compactificar las 6 dimensiones extra, principalmente porque no se han observado indicios experimentales que nos conduzcan a considerar más allá que de forma teórica una teoría de dimensiones extras y para reducir el número de supersimetrías y de esta forma tener un acercamiento con el modelo estándar o alguna de sus extensiones supersimétricas.

En este capítulo revisaremos primero, brevemente la teoría de cuerdas y específicamente

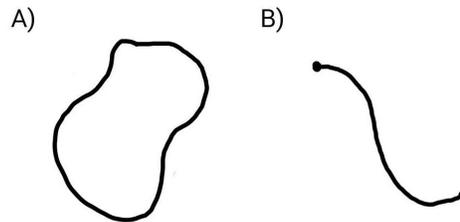


Figura 2.1: A) Cuerda cerrada, B) cuerda abierta

las teorías heteróticas, así como las compactificaciones de las dimensiones extras y sus consecuencias en la teoría efectiva 4-dimensional (Para profundizar se recomienda [29], [30],[3] y en el último tema [4])

## 2.1 Teoría de cuerdas

La teoría de cuerdas postula la existencia de objetos unidimensionales, similares a una cuerda (ver imagen 2.1), que conforman toda la materia que conocemos. Estas cuerdas pueden ser abiertas o cerradas y su longitud característica es del tamaño de la longitud de Planck  $l_p$ . Las cuerdas pueden oscilar y moverse libremente por el espacio-tiempo y son estas características las que determinan las propiedades de partícula que observamos a distancias mucho mayores a la longitud de Planck. Es decir, cada modo de oscilación de una cuerda se traduce al cuantizar en el espacio-tiempo como un estado con las propiedades conocidas para una partícula fundamental: masa, espín, etc. De esta forma, de una sola cuerda se pueden obtener infinitos estados de partícula.

Al moverse la cuerda en el espacio-tiempo, ésta va trazando una superficie dos dimensional llamada hoja de mundo (Ver imagen 2.2). Para describir el movimiento y oscilaciones en el espacio-tiempo es necesario parametrizar las coordenadas de la cuerda  $x^\mu$  en el espacio-tiempo, para esto, se usan dos parámetros  $\sigma$  que identifica la posición en la cuerda y  $\tau$  el tiempo. Cada coordenada ahora depende de estos dos parámetros y las funciones que parametrizan usualmente se denotan por:  $X^\mu(\tau, \sigma)$ . Al espacio que forman  $\vec{\sigma} = (\tau, \sigma)$  también se le llama hoja de mundo. Toda la descripción de la teoría se hace en el espacio de Minkowski, sin embargo se tiene la aparición de un modo de oscilación no masivo con espín 2 que representa un gravitón, una fluctuación del propio espacio tiempo. Esta y algunas otras características hacen que esta teoría sea considerada por muchos como un candidato prometedor para una teoría cuántica de la gravedad.

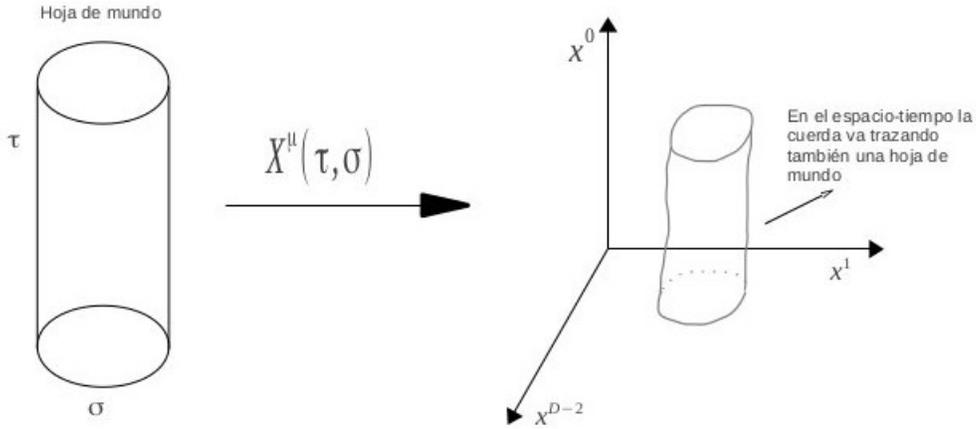


Figura 2.2: Hoja de mundo para una cuerda cerrada

### 2.1.1 Cuerdas Bosónicas

La cuerda bosónica es una cuerda de la cuál solo se pueden obtener estados de partícula bosónicas, su acción es la acción de Polyakov

$$S_{pol} = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \sqrt{-g} g^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X_\mu, \quad (2.1)$$

en donde  $g_{ab}$  es la métrica en la hoja de mundo y  $a, b = 0, 1$ . Las simetrías que esta acción posee son :

- Reparametrizaciones en 2-dimensiones, es decir en las coordenadas de la hoja de mundo.
- Transformaciones de Weyl. Éstas son transformaciones a la métrica del tipo:  
 $g_{ab} \longrightarrow g'_{ab} = \Omega(\sigma)g_{ab}$ , con  $\Omega(\sigma)$  una función arbitraria
- Reparametrizaciones en el espacio-tiempo.

Las simetrías anteriores nos permiten trabajar en la norma plana ( $g_{ab} = \eta_{ab}$  o  $\delta_{ab}$ ). Cabe mencionar que para que las simetrías anteriores se preserven a nivel cuántico se necesita que la dimensión del espacio tiempo sea  $D = 26$ , a ésta se le llama dimensión crítica.

La variación de la acción de Polyakov nos conduce a la ecuación de movimiento para

las variables  $X^\mu$ , que es la ecuación de Klein-Gordon sin masa:

$$\partial^a \partial_a X_\mu = 0. \quad (2.2)$$

La solución a esta ecuación para una cuerda cerrada, en donde las condiciones de frontera son  $X^\mu(\tau, \sigma) = X^\mu(\tau, \sigma + 2\pi)$ , es

$$X^\mu = x^\mu + \alpha' p^\mu \tau + i \left( \frac{\alpha'}{2} \right)^{1/2} \left( \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \tilde{\alpha}_n^\mu e^{-in(\tau-\sigma)} + \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^\mu e^{-in(\tau+\sigma)} \right) \quad (2.3)$$

$$= X_R^\mu(\tau - \sigma) + X_L^\mu(\tau + \sigma), \quad (2.4)$$

en donde la parte derecha (R) es la asociada con  $\tilde{\alpha}_n$  y la parte izquierda (L) la asociada a  $\alpha_n$ .

Además de la ecuación de movimiento para  $X^\mu$  la variación con respecto a  $g^{ab}$  proporciona su ecuación de movimiento,

$$T_{ab} = 0, \quad (2.5)$$

con  $T_{ab}$  el tensor de "energía-momento" en la hoja de mundo.

Al cuantizar canónicamente  $\alpha$ ,  $p$  y  $x$  se convierten en operadores asociados a un espacio de Hilbert, con reglas de conmutación usuales, en donde se construyen los estados actuando con los operadores de creación y aniquilación  $\alpha$  y  $\tilde{\alpha}$  en  $|0, 0, \dots, p\rangle$ . Este espacio de Hilbert de estados de oscilación cuánticos en dos dimensiones constituye el espectro de partículas en el espacio-tiempo de la teoría de cuerdas.

Se tiene entonces una teoría de campos en  $1 + 1$  dimensiones para cada una de las  $X^\mu$ . Es común pasarse a un espacio complejo para expresar la forma de los modos de oscilación de las coordenadas y trabajar con la teoría conforme de campos que se tiene en dos dimensiones. El espectro no masivo de esta teoría consiste en un gravitón  $G_{MN}$ , un tensor antisimétrico  $B_{MN}$  y un escalar conocido como dilatón  $\Phi$ . La teoría también contiene un taquión.

Las cuerdas abiertas pueden tener dos tipos de condiciones de frontera: condiciones de frontera de Neumann y condiciones de frontera de Dirichlet, estas últimas están asociadas con la aparición de las D-branas en la teoría [31], ya que una cuerda abierta con condiciones de Dirichlet tiene adheridos sus extremos a esta. Una D-brana es un objeto extendido con dimensión y aparecen naturalmente en las teorías que contienen cuerdas abiertas. Haciendo cumplir estas condiciones en la ecuación de movimiento (2.2) se obtiene la expansión en modos para estos dos casos. Para condiciones de frontera de Neumann la expansión en modos es la misma que para la cuerda cerrada, con la condición de que  $\tilde{\alpha} = \alpha$ . El espectro de cuerdas abierta además contiene un campo vectorial  $A^D$  que vive en una D-brana, lo cual puede ser útil si se quiere describir una teoría de norma.

### 2.1.2 Supercuerdas

La teoría de cuerdas bosónicas como fue presentada en la sección anterior es incapaz de describir la naturaleza pues carece de fermiones y sufre de una inestabilidad taquiónica. Lo anterior propició la aparición de una nueva teoría de cuerdas capaz de contener fermiones en su espectro.

A la acción de Polyakov se le puede agregar una parte correspondiente a espinores  $\Psi$  de Majorana en dos dimensiones

$$\Psi^\mu = \begin{pmatrix} \Psi_R^\mu \\ \Psi_L^\mu \end{pmatrix}, \quad (2.6)$$

y hacer a la teoría en la hoja de mundo supersimétrica. Tener SUSY en la hoja de mundo no asegura SUSY en el espacio tiempo, sin embargo, más adelante se verá que con esto se obtienen fermiones en el espacio tiempo. Agregando la acción correspondiente a estos fermiones se tiene

$$S_p = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \sqrt{-g} g^{ab} (\partial_a X^\mu \partial_b X_\mu - i \bar{\Psi}^\mu \Gamma_a \partial_b \Psi_\mu). \quad (2.7)$$

En la hoja de mundo, aprovechando las simetrías de la acción anterior se puede fijar la métrica  $g^{ab}$  a una métrica plana o de tipo Minkowski. Las matrices  $\Gamma_a$  dos dimensionales son

$$\Gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \Gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

y cumplen  $\{\Gamma^a, \Gamma^b\} = 2g^{ab}\mathbf{1}_2$  y  $\bar{\Psi}$  se define de la manera usual. La dimensión crítica de esta teoría es  $D = 10$ .

Las ecuaciones de movimiento son

$$\partial^a \partial_a X_\mu = 0 \quad (2.9)$$

$$\gamma^a \partial_a \Psi^\mu = 0, \quad (2.10)$$

y los espinores pueden satisfacer condiciones de frontera periódicas o antiperiódicas

$$\Psi(\tau, \sigma + 2\pi) = \Psi(\tau, \sigma) \quad \text{Neveu - Schwarz} \quad (2.11)$$

$$\Psi(\tau, \sigma + 2\pi) = -\Psi(\tau, \sigma) \quad \text{Ramond}. \quad (2.12)$$

Las soluciones clásicas a las ecuaciones de movimiento para las dos distintas condiciones de frontera son

$$\Psi_R^\mu = \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_n^\mu e^{-in(\tau-\sigma)} \quad R \quad (2.13)$$

$$\Psi_R^\mu = \sum_{r \in \mathbb{Z} + 1/2} b_r^\mu e^{-ir(\tau-\sigma)} \quad NS. \quad (2.14)$$

Las soluciones  $\Psi^\mu$  combinan los diferentes sectores R y L con los dos tipos de condiciones de frontera, existen entonces 4 sectores para las supercuerdas etiquetadas por las condiciones de frontera que cumplen sus modos derechos e izquierdos: R-R, R-NS, NS-R, NS-NS. Campos bosónicos surgen de los sectores R-R y NS-NS, mientras que campos fermiónicos surgen de los sectores R-NS y NS-R (para ver explícitamente los estados que aparecen en cada sector se recomienda [30]).

Para construir una teoría consistente, sin estados taquiónicos es necesario realizar una proyección, la llamada proyección GSO [32](Gliozzi-Scherk-Olive). El modo en que se hace esta proyección en los dos sectores da lugar a las dos primeras teorías de cuerdas IIA y IIB.

## 2.2 Cuerdas heteróticas

La cuerda heterótica es una cuerda cerrada con la característica inusual de tratar las compactificaciones en el sector derecho e izquierdo separadamente. El sector derecho o modos de oscilación derechos, son supersimétricos y viven en 10 dimensiones. El sector izquierdo o modos de oscilación izquierdos son puramente bosónicos y por lo tanto viven en 26 dimensiones, razón por la cual 16 de estas dimensiones se compactifican en un toro 16-dimensional  $T^{16}$ . La dimensión de estas teorías es por lo tanto 10.

### 2.2.1 Modos Derechos

Los grados de libertad derechos fermiónicos y bosónicos son denotados como  $\psi_R^i(\tau - \sigma)$  y  $X_R^i(\tau - \sigma)$  respectivamente, en donde  $i$  toma valores  $i = 0, \dots, 9$ . De estas 10 coordenadas solo  $n - 2 = 8$  son independientes y para fijar 2 de esos grados de libertad se puede utilizar la norma del cono de luz. Los modos bosónicos satisfacen condiciones periódicas de frontera  $X_R^i(\sigma, \tau) = X_R^i(\sigma + \pi, \tau)$  y tienen expansiones

$$X_R^i(\tau - \sigma) = \frac{x^i}{2} + \frac{p^i}{2}(\tau - \sigma) + \frac{i}{2} \sum_{n \neq 0} \frac{\alpha_n^i}{n} e^{-2in(\tau - \sigma)}, \quad (2.15)$$

en donde  $x^i$  denota la coordenada del centro de masa y  $p^i$  su momento; los coeficientes  $\alpha_n^i$  son llamados osciladores derechos y después de cuantizar satisfacen reglas de conmutación características de operadores de creación y aniquilación. Los modos fermiónicos pueden satisfacer dos condiciones de frontera distintas, ec. (2.11); y sus expansiones en modos están dados por

$$\psi_R^i(\sigma - \tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_n^i e^{-2in(\tau - \sigma)} \quad \text{RAMOND} \quad (2.16)$$

$$\psi_R^i(\sigma - \tau) = \sum_{r \in \mathbb{Z} + 1/2} b_n^i e^{-2ir(\tau - \sigma)} \quad \text{NEVEU-SCHWARZ}, \quad (2.17)$$

en donde  $d^i$  y  $b^i$  después de cuantizar obedecen las reglas de anticonmutación usuales [30, 33]. De esta forma, se definen estados al actuar estos operadores en el estado del vacío  $|0\rangle_R$ , el cual es aniquilado por los operadores con  $r, n > 0$ . La ecuación para la masa de estos estados es

$$\frac{1}{4}M = \tilde{N} - 2\nu(1 - \nu), \quad (2.18)$$

con  $\nu = 1/2$  para el sector NS, y  $\nu = 0$  para el sector R. Los respectivos operadores de número son

$$\tilde{N} = \begin{cases} \sum_{n>0}^{\infty} (\alpha_{-n}^i \alpha_{in} + d_{-n}^i d_{in}) & \text{R} \\ \sum_{n>0}^{\infty} \alpha_{-n}^i \alpha_{in} + \sum_{r=1/2} r b_{-n}^i b_{in} & \text{NS} \end{cases} \quad (2.19)$$

### 2.2.2 Modos Izquierdos

En el sector izquierdo solo existen grados de libertad bosónicos  $X_L^i, X_L^I$  con  $i = 0, \dots, 9$  y  $I = 1, \dots, 16$ , su descomposición en modos esta dada por

$$X_L^i = \frac{1}{2}x^i + \frac{1}{2}p^i(\tau + \sigma) + \frac{i}{2} \sum_{n \neq 0} \frac{\bar{\alpha}_n^i}{n} e^{-2in(\tau - \sigma)} \quad (2.20)$$

$$X_L^I = \frac{1}{2}x^I + \frac{1}{2}P^I(\tau + \sigma) + \frac{i}{2} \sum_{n \neq 0} \frac{\bar{\alpha}_n^I}{n} e^{-2in(\tau - \sigma)}, \quad (2.21)$$

en donde  $\bar{\alpha}^i$  son osciladores izquierdos. Los estados izquierdos también se forman al perturbar el estado de vacío izquierdo  $|0\rangle_L$ . La masa de estos estados es

$$\frac{1}{4}M_L = \frac{1}{2}P^2 + N - 1 \quad (2.22)$$

en donde  $P^2 = P^I P_I$ ; el operador de número en este caso esta dado por

$$N = \sum_{n>0}^{\infty} (\alpha_{-n}^i \alpha_{in} + \alpha_{-n}^I \alpha_{In}). \quad (2.23)$$

$P^I$  pertenece a la retícula 16 dimensional con la cual se define  $T^{16}$ . La invariancia modular de la función de partición a un lazo de la teoría requiere que la retícula que define  $T^{16}$  sea par, auto-dual y euclidiana (ver por ejemplo [30] capítulo 11). De manera usual una retícula se puede definir utilizando una base de vectores  $e_I^n$  de dimensión igual a ella. En 16 dimensiones existen solo dos retículas que cumplen con las condiciones anteriores. Estas retículas están definidas en términos de las raíces de los grupos  $SO(32)$  y  $E_8 \times E_8$  de manera que la teoría heterótica puede tener a uno de estos grupos como grupos de norma.

El espectro de la teoría se construye tomando el producto tensorial de excitaciones derechas e izquierdas. Como siempre en cuerdas cerradas se debe satisfacer la condición de “empatamiento” de niveles  $M_L = M_R$ .

## 2.3 Compactificaciones de la Cuerda Heterótica

Los campos 10 dimensionales de la teoría son

$$\begin{aligned} \text{Súper multiplete de gravedad :} & \quad (G_{MN}, B_{MN}, \phi, \psi_{M\alpha}, \chi_{\dot{\beta}}) \\ \text{Súper multiplete de Norma :} & \quad (A_M, \lambda_{\alpha}), \end{aligned} \quad (2.24)$$

en donde  $G_{MN}$  es la métrica,  $B_{MN}$  un tensor anti-simétrico,  $\phi$ ,  $\psi_{M\alpha}$ , y  $\chi_{\dot{\beta}}$  son el dilatón, gravitino y dilatino. En el multiplete de norma se encuentran los bosones de norma  $A_M$  y sus correspondientes norminos  $\lambda_{\alpha}$  (gauginos).

Las simetrías de la teoría son demasiados grandes: super Poincaré en 10 dimensiones y de norma  $SO(32)$  o  $E_8 \times E_8$ . Si queremos tener teorías mas realistas necesitamos Poincaré en 4 dimensiones y un grupo de norma más pequeño.

Para tener una teoría en 4 dimensiones una de las propuestas más concurridas es la de compactificar las dimensiones extras

$$M_{1,3} \times X_6, \quad (2.25)$$

$M_{1,3}$  es el espacio de Minkowski en cuatro dimensiones al que estamos acostumbrados y  $X_6$  es una variedad compacta de tamaño arbitrario pero que convenientemente se supone muy pequeña. De esta forma, a escalas grandes comparadas con el radio de compactificación efectivamente se tiene una teoría 4-dimensional.

La primera opción que se puede probar es  $X_6 = T^6$  un toro 6-dimensional, sin embargo, está lejos de ser fenomenológicamente aceptable. La razón es que de una teoría con  $\mathcal{N} = 1$  supersimetrías en diez dimensiones al compactificar se finaliza con una teoría con  $\mathcal{N} = 4$  en cuatro dimensiones que además no es quirral, por lo que no puede contener al Modelo Estándar. Para obtener teorías que compitan por describir el universo que parece tenemos se busca que la teoría efectiva en  $d=4$  solo tenga una supersimetría. Usando el ansatz (2.25) y la condición de  $\mathcal{N} = 1$  SUSY se encuentran una serie de requerimientos ([34], para revisión rápida ver capítulo 9 de [3]) que debe cumplir la variedad compacta  $X_6$ , en donde se puede compactificar y obtener algo aceptable en 4 dimensiones, éstos son:

- $X_6$  admite un grupo de holonomía  $SU(3)$ .
- $X_6$  es una variedad de Kähler con Ricci plano ( $R_{mn} = 0$ ).

Al tipo de variedades compactas que cumplen con los enunciados anteriores se les llama Calabi-Yau. Otro tipo de espacio en donde es posible compactificar reduciendo el número de supersimetría son los orbifolios.

### Variedades de Kähler

Una variedad compleja n-dimensional (para entender bien variedades complejas se recomienda ver [24], [35]) es un caso especial de una variedad real 2n-dimensional en donde se pueden definir coordenadas complejas  $z^a$  y sus complejas conjugadas  $\bar{z}^{\bar{a}}$  (con  $a = 1, \dots, n$ ) de manera local.

En una variedad compleja se pueden definir (p,q)-formas con p índices holomorfos y q índices anti-holomorfos

$$w_{p,q} = \frac{1}{p!q!} w_{a_1 \dots a_p, \bar{a}_1 \dots \bar{a}_q} dz^{a_1} \wedge \dots \wedge dz^{a_p} \wedge d\bar{z}^{\bar{a}_1} \wedge d\bar{z}^{\bar{a}_q}. \quad (2.26)$$

La derivada exterior, ahora se compone de una parte holomorfa y una anti-holomorfa

$$d = \partial + \bar{\partial} \quad (2.27)$$

con

$$\partial = dz^a \frac{d}{dz^a} \quad \bar{\partial} = d\bar{z}^{\bar{a}} \frac{d}{d\bar{z}^{\bar{a}}}. \quad (2.28)$$

Por definición una variedad de Kähler es una variedad compleja, con una métrica Hermitiana ( $g_{mn} = g_{\bar{m}\bar{n}} = 0$ ) y con forma de Kähler cerrada, es decir  $dJ = 0$ . La forma de Kähler se define como

$$J = g_{m\bar{n}} dz^m \wedge d\bar{z}^{\bar{n}}. \quad (2.29)$$

La métrica de una variedad que cumple con los requerimientos anteriores puede ser escrita en términos de una función  $\mathcal{K}$

$$g_{m\bar{n}} = \frac{\partial}{\partial z^a} \frac{\partial}{\partial \bar{z}^{\bar{b}}} \mathcal{K}, \quad (2.30)$$

a  $\mathcal{K}$  se le llama potencial de Kähler.

#### 2.3.1 Orbifolios Toroidales

De manera general, un orbifolio se define como el cociente entre una variedad suave y un grupo discreto de isometrías  $\Gamma \equiv X/H$ . En  $X$  existen puntos que no se transforman bajo la acción de  $H$ ; estos puntos fijos se convierten en singularidades de  $\Gamma$ , de forma que  $\Gamma$  no es en general una variedad. Debido al enfoque en teoría de cuerdas de esta tesis nos concentraremos solo en los orbifolios toroidales.

Existen dos maneras de construir un orbifolio toroidal: 1) se puede comenzar con el espacio n-dimensional  $\mathbb{R}^n$  y dividirlo por un grupo discreto  $S$ . 2) Como otra opción, se puede iniciar con una retícula n-dimensional  $\Lambda$ , que define un toro  $T^n$  y dividir entre un grupo discreto de simetría.

$$\mathbb{O} = \mathbb{R}/S = T^n/G. \quad (2.31)$$

Las geometrías resultantes son localmente planas excepto en un conjunto de puntos singulares. Estos puntos son singulares desde el punto de vista geométrico, sin embargo, las

teorías de cuerdas están bien definidas ahí.

El grupo  $S$  es llamado comúnmente el “grupo espacial”. Estos grupos aparecen en cristalografía como los grupos de simetría de las estructuras cristalográficas. Cada elemento  $g$  del grupo puede ser escrito como la composición de un mapeo  $\theta$  (puede ser pensado como una rotación) que deja al menos un punto invariante y una traslación por  $v$ :

$$g = (\theta, v). \quad (2.32)$$

La acción de  $g$  sobre un vector  $V \in \mathbb{R}$  es

$$V \mapsto \theta V + v. \quad (2.33)$$

Si  $h = (\omega, \tau)$  es otro elemento de  $S$  la composición esta dada por

$$h \circ g = (\omega\theta, \omega v + \tau). \quad (2.34)$$

Para un grupo  $S$  con elementos de la forma (2.32), el conjunto  $P$  formado por todos los  $\theta$  forman un grupo finito, el llamado grupo de punto. Este grupo no es necesariamente igual a  $G$  utilizado en la definición (2.31) debido a la presencia de roto-traslaciones (ver [36]). A los elementos de este grupo se les llama “twist” o rotaciones.

El subgrupo  $\Lambda$  que consta de todas las traslaciones se le llama retícula de  $S$ . Cada retícula es descrita por un conjunto de  $n$  vectores  $\Lambda = \{e_i^n\}$  independientes, de tal forma que podemos escribir  $v = n_i e^i$ .

Si el grupo de punto es un subgrupo de  $S$ , entonces se puede escribir

$$\mathbb{O} = T^n / P. \quad (2.35)$$

Considerando solo grupos abelianos, como grupos de punto válidos se tiene a los grupos cíclicos  $\mathbb{Z}_n$  y  $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$ ,

$$\mathbb{Z}_n = \{\theta = \vartheta^k \mid 0 \leq k < n\} \quad (2.36)$$

$$\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m = \{\theta = \vartheta^k \omega^l \mid 0 \leq k < n; 0 \leq l < m\}. \quad (2.37)$$

En las coordenadas complejas del toro el “twist” actúa como

$$\theta : (z_1, z_2, z_3) \longrightarrow (z_1 e^{2\pi\nu_1}, z_2 e^{2\pi\nu_2}, z_3 e^{2\pi\nu_3}), \quad 0 \leq |\nu| < 1. \quad (2.38)$$

Para que el grupo de holonomía sea  $SU(3)$  (y en consecuencia se preserve SUSY  $N = 1$ ) se necesita que la (3,0)-forma  $\Omega$  del toro sea invariante, lo cual se cumple si

$$\pm\nu_1 \pm \nu_2 \pm \nu_3 = 0. \quad (2.39)$$

$\mathbb{Z}_n$	$\nu = \frac{1}{n}(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$
$\mathbb{Z}_3$	$\frac{1}{3}(1, 1, -2)$
$\mathbb{Z}_4$	$\frac{1}{4}(1, 1, -2)$
$\mathbb{Z}_{6-I}$	$\frac{1}{6}(1, 1, -2)$
$\mathbb{Z}_{6-II}$	$\frac{1}{6}(1, 2, -3)$
$\mathbb{Z}_7$	$\frac{1}{7}(1, 2, -3)$
$\mathbb{Z}_{8-I}$	$\frac{1}{8}(1, 2, -3)$
$\mathbb{Z}_{8-II}$	$\frac{1}{8}(1, 3, -4)$
$\mathbb{Z}_{12-I}$	$\frac{1}{12}(1, 4, -5)$
$\mathbb{Z}_{12-II}$	$\frac{1}{12}(1, 5, -6)$

Tabla 2.1: Generadores de los grupos de punto  $\mathbb{Z}_n$  que satisfacen  $\mathcal{N} = 1$

$\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$	$\nu_n = \frac{1}{n}(\nu_{n1}, \nu_{n2}, \nu_{n3})$	$\nu_m = \frac{1}{m}(\nu_{m1}, \nu_{m2}, \nu_{m3})$
$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	$\frac{1}{2}(1, 0, -1)$	$\frac{1}{2}(0, 1, -1)$
$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$	$\frac{1}{2}(1, 0, -1)$	$\frac{1}{4}(0, 1, -1)$
$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{6-I}$	$\frac{1}{2}(1, 0, -1)$	$\frac{1}{6}(0, 1, -1)$
$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{6-II}$	$\frac{1}{2}(1, 0, -1)$	$\frac{1}{6}(1, 1, -2)$
$\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$	$\frac{1}{3}(1, 0, -1)$	$\frac{1}{3}(1, 0, -1)$
$\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_6$	$\frac{1}{3}(1, 0, -1)$	$\frac{1}{6}(0, 1, -1)$
$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$	$\frac{1}{4}(1, 0, -1)$	$\frac{1}{4}(1, 0, -1)$
$\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_6$	$\frac{1}{6}(1, 0, -1)$	$\frac{1}{6}(1, 0, -1)$

Tabla 2.2: Generadores de los grupos de punto  $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$  que satisfacen  $\mathcal{N} = 1$

En las tablas 2.1 y 2.2 se muestran los vectores  $\nu_n$  y  $\nu_m$  que cumplen (2.39) para cada uno de los grupos de punto  $\mathbb{Z}_n$  y  $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$

La acción de los elementos del grupo también puede ser expresada mediante una matriz  $Q$  que actúa en los vectores de la base como

$$\theta e_\alpha = e_\beta Q_{\beta\alpha}, \quad (2.40)$$

esta matriz  $Q$  tiene que ser invertible y debe tener entradas enteras. Algunas veces los vectores de la base pertenecen a una retícula de un grupo de Lie, en este caso a  $Q$  se le conoce como Matriz de Coxeter. La métrica del orbifoldo debe ser invariante bajo la acción de esta matriz, es decir

$$Q^T g Q = g. \quad (2.41)$$

### Sectores torcido y no-torcido

En el orbifoldo existen dos tipos de estados no masivos importantes en la teoría efectiva:

- Estados no torcidos, son los estados que existen en  $T^6$  correspondientes a cuerdas cerradas y son invariantes ante la acción del grupo de punto.
- Estados torcidos, son estados que aparecen después de la aplicación del grupo de punto, ya que algún elemento del grupo podría identificar puntos (cerrar una cuerda) y cumplir la condición de frontera matemáticamente

$$X^\mu(\sigma + \pi) = gX^\mu(\sigma). \quad (2.42)$$

### Ejemplo

A continuación se presenta un ejemplo sencillo de un orbifolio en dos dimensiones:  $T^2/Z_4$  (Fig. 2.3).

Para formar la retícula 2-dimensional del toro tomamos como vectores base de ésta a  $e_1 = (1, 0)$  y  $e_2 = (0, 1)$ , ésta retícula tiene simetría bajo la acción del grupo  $Z_4$ . El orbifolio consta de todos los puntos identificados por

$$x^i \sim \theta x^i + n^i e_i \quad (2.43)$$

con  $\theta = e^{2i\pi/4}$  y  $n$  entero. La matriz  $Q$  es

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.44)$$

Los puntos fijos de orbifolio están dados por todos los  $V$  que cumplen

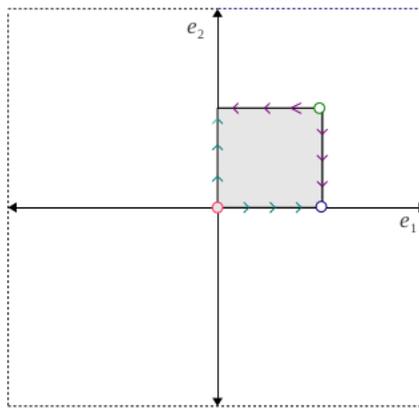


Figura 2.3: Se muestra en gris la reducción del dominio fundamental del toro y los puntos fijos bajo la acción de los elementos del grupo

$$V\theta^n = V + l \quad l \in \Lambda \quad (2.45)$$

Las representaciones matriciales de  $\theta^n$  están dadas por  $Q^n$ . Resolviendo las ecuaciones que surgen de (2.45) se tienen los puntos fijos mostrados en la tabla 2.3.

Twist	Puntos fijos
$\theta^1, \theta^3$	$\bar{0}$
$\theta^2$	$\bar{0}, \frac{1}{2}(e_1 + e_2), \frac{1}{2}(e_1)$

Tabla 2.3: Puntos fijos del orbifold  $\frac{T^2}{\mathbb{Z}_4}$

## 2.4 Módulos

Cuando se realiza la reducción dimensional de los campos de la teoría 10 dimensional, que en general son formas diferenciales, éstos deben expandirse en una serie que contenga otras formas de menor dimensión y luego substituirse en las ecuaciones de movimiento. De las nuevas ecuaciones que se obtienen para estos nuevos campos que surgen al descomponer la forma principal en 10 dimensiones se pueden extraer los modos zero, es decir los campos sin masa que son importantes fenomenológicamente, estos campos corresponden a módulos de la teoría 4-dimensional ya que no tienen un valor definido.

Usualmente el operador que aparece en las ecuaciones de movimiento es el operador Laplaciano  $\Delta$  en el espacio compacto. El número de campos escalares d-dimensionales sin masa por lo tanto corresponde al número de Betti, (Ver por ejemplo [24], [35])  $b_p$ , pues éste determina el número de formas armónicas independientes en una variedad dada o la dimensión del grupo de cohomología. En variedades complejas, como las de Kähler, existe una generalización de los números de Betti que cuenta el número de (p,q)-formas armónicas independientes a estos números se les conoce como números de Hodge  $h^{(p,q)}$ .

Por ejemplo, el tensor antisimétrico  $B_{mn}$  se descompone como

$$B_{MN} \longrightarrow B_{\mu\nu} \oplus B_{\mu m} \oplus B_{mn}, \quad (2.46)$$

en donde los índices griegos son usados para referirse al espacio tiempo en  $d = 4$  y los índices m,n a las coordenadas en el espacio compacto. Entonces de  $B_{\mu\nu}$  se obtienen  $b_0$  modos cero, de  $B_{\mu m}$   $b_1$  modos que son vectores en 4 dimensiones y de  $B_{mn}$  se obtienen  $b_2$  campos escalares. En lo anterior debe notarse que dado que la descomposición de la ec. (2.46) corresponde a los campos en 4-dimensiones y que los correspondientes coeficientes deben ser la forma diferencial tal que en 10 dimensiones se tenga una 2-forma (en este caso), es por eso que para  $B_{\mu\nu}$  el coeficiente es una constante o una 0-forma y para

$B_{mn}$  una 2-forma. En variedades de Calabi-Yau  $b_1 = 0$ , así que del tensor anti-simétrico  $B_{MN}$  solo se obtienen campos escalares como módulos.

Por otro lado, la métrica se descompone como

$$g_{MN} \longrightarrow g_{\mu\nu} \oplus g_{\mu m} \oplus g_{mn}, \quad (2.47)$$

en donde solo se tiene un modo  $g_{\mu\nu}$ , que corresponde al gravitón en 4 dimensiones. Se obtienen campos similares a bosones de norma si  $b_1$  es diferente cero y de  $g_{mn}$  se obtienen modos que corresponden a campos escalares en 4 dimensiones. Para poder estudiar mas a detalle los campos escalares que surgen de  $g_{mn}$  es necesario estudiar sus fluctuaciones. Las fluctuaciones de la métrica son estudiadas realizando una pequeña variación

$$g_{mn} \longrightarrow g_{mn} + \delta g_{mn}, \quad (2.48)$$

tal que se siga cumpliendo las condiciones mencionadas anteriormente

$$R_{mn}(g + \delta g) = 0. \quad (2.49)$$

Esta ultima expresión conduce a ecuaciones diferenciales para  $\delta g$  y el número de soluciones cuenta las formas posibles en las que se puede deformar la métrica preservando la topología y SUSY  $N = 1$ . Los coeficientes independientes de esas soluciones son los módulos y son valores de expectación de los campos escalares sin masa.

Como se explica en ([3]) una variedad de Calabi-Yau puede ser deformada de dos formas: variando su estructura compleja (esencialmente su forma) o variando su estructura de Kähler (tamaño). Al resolver la ecuación (2.49) se encuentra que las ecuaciones para variaciones mixtas  $\delta g_{m\bar{n}}$  y puras  $\delta g_{mn}$  se desacoplan. A las variaciones mixtas se les puede asociar la siguiente (1,1)-forma

$$i\delta g_{m\bar{n}} dz^m \wedge dz^{\bar{n}}, \quad (2.50)$$

y a variaciones puras de la métrica  $\delta g_{mn}$  y  $\delta g_{\bar{m}\bar{n}}$ , se les asocia una (2,1)-forma

$$i\Omega_{lmn} g^{n\bar{p}} \delta g_{\bar{p}\bar{q}} dz^l \wedge dz^m \wedge d\bar{z}^{\bar{q}}, \quad (2.51)$$

$\Omega_{lmn}$  es la 3-forma holomórfica. Debido a la correspondencia anterior el número de módulos de Kähler y de estructura compleja están dados por  $h^{(1,1)}$  y  $h^{(2,1)}$  respectivamente.

Los módulos provenientes de la métrica, en varias compactificaciones de teorías de cuerdas en donde existe el tensor anti-simétrico  $B_{MN}$ , suelen juntarse con los módulos provenientes de éste ultimo y forman módulos complexificados

$$T_j = \tau_j + ib_j. \quad (2.52)$$

Los módulos de estructura compleja ya son números complejos.

---

En compactificaciones en orbifolios además de los módulos que provienen de las variaciones a la métrica, existen los módulos "twisted" o torcidos que están en correspondencia con los puntos fijos del orbifolio, de manera que se tienen un número grande de módulos totales si el orbifolio tiene muchos puntos fijos.

El espacio de módulos de estructura compleja y de Kähler forman una variedad de Kähler; es por eso que se les puede asociar un potencial de Kähler  $\mathcal{K}$  el cual resulta ser la primera contribución al potencial de Kähler necesario para describir la teoría en supergravedad.

## Capítulo 3

# Obtención de Módulos de Kähler en Orbifolds

### 3.1 Ejemplo en 2 dimensiones

Para ejemplificar en su forma más sencilla el cálculo de módulos en un orbifoldo, se comienza con un ejemplo 2-dimensional, el cual se empezó a trabajar en el capítulo anterior:  $T^2/\mathbb{Z}_4$ .

En un toro 2-dimensional se pueden definir las siguientes formas complejas:

$$dz \wedge d\bar{z}, dz, d\bar{z};$$

de modo que  $h^{(1,1)} = h^{(1,0)} = h^{(0,1)} = 1$ . En el orbifoldo definido por  $T^2/\mathbb{Z}_4$ , se tiene que  $h^{(1,1)} = 1$ , sin embargo,  $h^{(1,0)} = h^{(0,1)} = 0$ . Se tiene entonces un solo módulo y es de Kähler. Para encontrar la forma en que se parametriza éste con respecto a los radios y ángulos que definen la base de vectores del toro primero es necesario encontrar la métrica. Esta métrica tiene que satisfacer la ecuación (2.41). Las restricciones puestas por el grupo  $\mathbb{Z}_4$  en el toro para formar el orbifoldo permiten que esta métrica sea muy sencilla

$$g = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

Las coordenadas complejas también pueden ser halladas fácilmente

$$z = x^1 + ix^2, \quad (3.2)$$

y la métrica hermitiana es  $g_{z\bar{z}} = R^2$ . Es esta única componente de la métrica de Kähler el módulo de Kähler del orbifoldo.

$\mathbb{Z}_n$	$h^{(1,1)}$	$h^{(2,1)}$
$\mathbb{Z}_3$	9	0
$\mathbb{Z}_4$	5	1
$\mathbb{Z}_{6-I}$	5	0
$\mathbb{Z}_{6-II}$	3	1
$\mathbb{Z}_7$	3	0
$\mathbb{Z}_{8-I}$	3	0
$\mathbb{Z}_{8-II}$	3	1
$\mathbb{Z}_{12-I}$	3	0
$\mathbb{Z}_{12-II}$	3	0

Tabla 3.1: Números de Hodge en el sector no-torcido para los orbifolios formados con  $\mathbb{Z}_n$

$\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$	$h^{(1,1)}$	$h^{(2,1)}$
$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	3	3
$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$	3	1
$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{6-I}$	3	1
$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{6-II}$	3	0
$\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$	3	0
$\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_6$	3	0
$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$	3	0
$\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_6$	3	0

Tabla 3.2: Números de Hodge en el sector no-torcido para los orbifolios formados con  $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$

### 3.2 Módulos geométricos del Orbifolio $\frac{T^6}{\mathbb{Z}_7}$

Para definir la acción que  $\mathbb{Z}_7$  tendrá sobre las coordenadas complejas con las que se define la red del toro, se requiere encontrar el vector que cumple con la ec. (2.39). En  $\mathbb{Z}_7$  hay un solo vector que cumple (tabla 2.1) y es  $\nu = (1/7, 2/7, -3/2)$ .

Para saber el número de módulos de Kähler presentes, basta contar el número de (1,1)-formas invariantes definidas en  $T^6$  bajo las transformaciones del grupo  $\mathbb{Z}_7$ . En un toro 6-dimensional se pueden definir 9 (1,1)-formas, sin embargo al formar el orbifolio solo 3 continúan siendo invariantes,

$$dz^1 \wedge d\bar{z}^{\bar{1}}, dz^2 \wedge d\bar{z}^{\bar{2}}, dz^3 \wedge d\bar{z}^{\bar{3}}; \tag{3.3}$$

se tienen entonces 3 módulos de Kähler. Para saber si existen módulos de estructura compleja se necesita contar las (2,1)-formas invariantes bajo la acción de los elementos del

grupo, en este caso no existen (2,1)-formas invariantes por lo que la estructura compleja está totalmente determinada.

La matriz que define la transformación de los vectores (los vectores fueron tomados del programa *Orbifolder* [37]) de la base que forman la retícula del toro es

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

Para encontrar la métrica del orbifoldo, recurrimos a la ec. (2.41) y resolvemos. De la ecuación ec. (2.41) se obtienen 21 ecuaciones las cuales no son todas independientes y las que nos dicen como se relacionan las componentes de la métrica. Para este orbifoldo la métrica debe ser escrita en términos de tres componentes:

$$g = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & -y & -y & g_{13} \\ g_{12} & g_{11} & g_{12} & g_{13} & -y & -y \\ g_{13} & g_{12} & g_{11} & g_{12} & g_{13} & -y \\ -y & g_{13} & g_{12} & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ -y & g_{12} & g_{13} & g_{12} & g_{11} & g_{12} \\ g_{13} & -y & -y & g_{13} & g_{12} & g_{11} \end{pmatrix}, \quad (3.5)$$

con  $y = \frac{1}{2}(g_{11} + 2g_{12} + 2g_{13})$ . Parametrizando la métrica en términos de las longitudes de los vectores base y los ángulos entre ellos

$$g_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle = R_i R_j \cos \theta_{ij}. \quad (3.6)$$

La métrica es entonces:

$$g = R_1^2 \begin{pmatrix} 1 & \cos \theta_{12} & \cos \theta_{13} & x & x & \cos \theta_{13} \\ \cos \theta_{12} & 1 & \cos \theta_{12} & \cos \theta_{13} & x & x \\ \cos \theta_{13} & \cos \theta_{12} & 1 & \cos \theta_{12} & \cos \theta_{13} & x \\ x & \cos \theta_{13} & \cos \theta_{12} & 1 & \cos \theta_{12} & \cos \theta_{13} \\ x & \cos \theta_{12} & \cos \theta_{13} & \cos \theta_{12} & 1 & \cos \theta_{12} \\ \cos \theta_{13} & x & x & \cos \theta_{13} & \cos \theta_{12} & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.7)$$

con  $x = -1/2(1 + 2 \cos \theta_{12} + 2 \cos \theta_{13})$ . Para encontrar la forma en la que los módulos de Kähler dependen de los radios y los ángulos entre los vectores de la red del orbifoldo se deben encontrar las coordenadas complejas en las cuales el “twist” actúa diagonal y después encontrar la métrica compleja. Utilizando

$$Q^T z_j = z_j e^{2\pi i \nu_j} \quad (3.8)$$

y suponiendo una forma general

$$z_j = a_{j_1}x_1 + a_{j_2}x_2 + a_{j_3}x_3 + a_{j_4}x_4 + a_{j_5}x_5 + a_{j_6}x_6 \quad (3.9)$$

se pueden encontrar las coordenadas complejas. En este caso se tiene que:

$$z_1 = a(x_1 + e^{2\pi i/7}x_2 + e^{4\pi i/7}x_3 + e^{6\pi i/7}x_4 - e^{\pi i/7}x_5 - e^{3\pi i/7}x_6) \quad (3.10)$$

$$z_2 = b(x_1 + e^{4\pi i/7}x_2 - e^{\pi i/7}x_3 - e^{5\pi i/7}x_4 + e^{2\pi i/7}x_5 + e^{6\pi i/7}x_6) \quad (3.11)$$

$$z_3 = c(x_1 - e^{\pi i/7}x_2 + e^{2\pi i/7}x_3 - e^{3\pi i/7}x_4 + e^{4\pi i/7}x_5 - e^{5\pi i/7}x_6). \quad (3.12)$$

Haciendo las constantes  $a = b = c = \frac{1}{6^{1/6}7^{5/12}}$  por cuestiones de normalización, las coordenadas complejas que describen el orbifoldo son las siguientes

$$z_1 = \frac{1}{6^{1/6}7^{5/12}}(x_1 + e^{2\pi i/7}x_2 + e^{4\pi i/7}x_3 + e^{6\pi i/7}x_4 - e^{\pi i/7}x_5 - e^{3\pi i/7}x_6) \quad (3.13)$$

$$z_2 = \frac{1}{6^{1/6}7^{5/12}}(x_1 + e^{4\pi i/7}x_2 - e^{\pi i/7}x_3 - e^{5\pi i/7}x_4 + e^{2\pi i/7}x_5 + e^{6\pi i/7}x_6) \quad (3.14)$$

$$z_3 = \frac{1}{6^{1/6}7^{5/12}}(x_1 - e^{\pi i/7}x_2 + e^{2\pi i/7}x_3 - e^{3\pi i/7}x_4 + e^{4\pi i/7}x_5 - e^{5\pi i/7}x_6). \quad (3.15)$$

Ahora para determinar la métrica compleja, sabemos que

$$g_{ij}dx^i \otimes dx^j = g_{i\bar{j}}dz^i \otimes d\bar{z}^{\bar{j}}$$

Resolviendo las ecuaciones que se siguen de la igualdad anterior usando la métrica real y las coordenadas complejas, se encuentra que las componentes de ésta métrica son

$$\begin{aligned} g_{1\bar{1}} &= \frac{R_1^2}{(7 - 7e^{2\pi i/7})} [(-4 + 6e^{\pi i/7} - 8e^{2\pi i/7} + 5e^{3\pi i/7} - 6e^{4\pi i/7} + 6e^{5\pi i/7} - 7e^{6\pi i/7}) \\ &+ (4 - 6e^{\pi i/7} + 8e^{2\pi i/7} - 8e^{3\pi i/7} + 4e^{4\pi i/7} - 8e^{5\pi i/7} + 4e^{6\pi i/7}) \cos \theta_{12} \\ &+ 2e^{3\pi i/7}(-2 + e^{\pi i/7} + e^{2\pi i/7} - 2e^{3\pi i/7}) \cos \theta_{13}] \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} g_{2\bar{2}} &= \frac{R_1^2}{(7 - 7e^{2\pi i/7})} [(9 - 6e^{\pi i/7} + 3e^{2\pi i/7} - 6e^{3\pi i/7} + 7e^{4\pi i/7} - 5e^{5\pi i/7} + 6e^{6\pi i/7}) \\ &- 2(2 - 3e^{\pi i/7} + 4e^{2\pi i/7} - 2e^{3\pi i/7} + e^{4\pi i/7} - 5e^{5\pi i/7} + 4e^{6\pi i/7}) \cos \theta_{12} \\ &+ 2(1 - e^{2\pi i/7} + e^{3\pi i/7} + e^{4\pi i/7} + e^{5\pi i/7} + e^{6\pi i/7}) \cos \theta_{13}] \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} g_{3\bar{3}} &= \frac{R_1^2}{(-6 + 5e^{\pi i/7} - 4e^{2\pi i/7} + 3e^{3\pi i/7} - 2e^{4\pi i/7} + e^{5\pi i/7})} [(-3 + 3e^{\pi i/7} - 3e^{2\pi i/7} + 2e^{3\pi i/7} \\ &- e^{4\pi i/7} + e^{5\pi i/7} - e^{6\pi i/7}) + 2(1 - e^{3\pi i/7} + 2e^{4\pi i/7} - 2e^{5\pi i/7} + e^{6\pi i/7}) \cos \theta_{12} \\ &+ 2e^{2\pi i/7}(-1 + e^{2\pi i/7}) \cos \theta_{13}]. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Los módulos de Kähler se leen directamente de escribir la ec. (2.29)

$$iJ = \sum_i^{h(1,1)} \tau^i w_i, \quad (3.19)$$

se necesita entonces una base real  $w_i$  de 2-formas, si escogemos la base real que forman directamente las (1,1)-formas invariantes de la eq. (3.3)

$$w^1 = idz_1 \wedge d\bar{z}_1 \quad (3.20)$$

$$w^2 = idz_2 \wedge d\bar{z}_2 \quad (3.21)$$

$$w^3 = idz_3 \wedge d\bar{z}_3, \quad (3.22)$$

los módulos serán directamente las componentes de la métrica compleja:

$$\tau_1 = g_{1\bar{1}} \quad (3.23)$$

$$\tau_2 = g_{2\bar{2}} \quad (3.24)$$

$$\tau_3 = g_{3\bar{3}}. \quad (3.25)$$

Los módulos en su forma complexificada se obtienen al agregar una parte correspondiente a la 2-forma  $B$  que tiene el mismo número de parámetros libres  $h_{(1,2)}$  que  $G_{AB}$ , como se escribió en ec. (2.52). Otra forma usual de definirlos es

$$T_i = \tau_i + \bar{\tau}_i. \quad (3.26)$$

Es importante mencionar que existe un modelo de la teoría heterótica  $E_8 \times E_8$  compactificada en este orbifolio ( $T^6/\mathbb{Z}_7$ ) que al agregar una línea de Wilson y un vector de “shift” estándar rompe el grupo de norma original, y dentro de los grupos en los que se rompe se encuentran los del Modelo Estándar de partículas  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)_y$ , los detalles del espectro se encuentran en el apéndice A.

### 3.3 Módulos geométricos para algunos otros Orbifolios

#### 3.3.1 $T^6/\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$

El orbifolio formado con  $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$  tiene 3 módulos de Kähler y no tiene módulos de estructura compleja.

$A$	$\tau_1$	$\tau_2$	$\tau_3$
1	$2^{1/3} \cdot 3^{5/6} R_1^2$	$2^{1/3} \cdot 3^{5/6} R_3^2$	$2^{1/3} \cdot 3^{5/6} R_5^2$
2	$-3^{1/6} \cdot 2^{4/3} (-R_1^2 + R_1^2 \cos \theta_{24})$	$3^{7/6} \cdot 2^{1/3} R_5^2$	$3^{1/6} \cdot 2^{1/3} (R_1^2 + 2R_1^2 \cos \theta_{24})$
3	$2^{1/3} \cdot 3^{5/6} \frac{(12R_6^2 \cos \theta_{15})}{1+2 \cos \theta_{12}}$	$-2^{1/3} \cdot 3^{5/6} \frac{24R_6^2 \cos^2 \theta_{15} (-1+\cos \theta_{12})}{1+2 \cos \theta_{12}}$	$2^{1/3} \cdot 3^{5/6} \left( R_6^2 - \frac{(12R_6^2 \cos \theta_{15})}{1+2 \cos \theta_{12}} \right)$
4	$2^{1/3} \cdot 3^{5/6} R_5^2$	$2^{1/3} \cdot 3^{5/6} (3R_1^2 - R_3^2 - R_5^2)$	$2^{1/3} \cdot 3^{5/6} R_3^2$
5	$2^{1/3} \cdot 3^{5/6} (R_1^2 + 2R_1^2 \cos \theta_{12})$	$2^{1/3} \cdot 3^{5/6} (R_1^2 + 2R_1^2 \cos \theta_{14})$	$2^{1/3} \cdot 3^{5/6} (R_1^2 - 2R_1^2 \cos \theta_{12} - 2R_1^2 \cos \theta_{14})$

Tabla 3.3: Módulos de Kähler  $\tau_i$  en  $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$

Todas las retículas con las cuales se puede hacer un orbifoldo  $\frac{T^6}{\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3}$ , sin roto-traslaciones se encuentran en [36] y en total son 5. Los vectores de la base que forman estas retículas se pueden encontrar en los archivos de geometría del programa *Orbifolder* [37].

El número de módulos de Kähler en estos orbifoldos es 3, no se tienen módulos de estructura compleja de tal forma que se tienen sólo 3 parámetros libres. En la tabla 3.3 se observan las parametrizaciones de los módulos en términos de los radios y ángulos de los vectores que conforman la red de cada orbifoldo para las cinco retículas con las que es posible formar el orbifoldo. En la primera columna se encuentra el número de retícula tal como se encuentran enumeradas en los archivos de geometría del programa *orbifolder*. Se observa también, que el único orbifoldo factorizable es el correspondiente a la retícula 1.

En el apéndice B se pueden ver los detalles de cada orbifoldo.

## Capítulo 4

# Potenciales de Kähler a partir de amplitudes en cuerdas

### 4.1 Interacciones y operadores de vértice

Hasta ahora hemos descrito solamente cuerdas libres; sin embargo, las cuerdas también pueden interactuar para dar lugar a estados finales de cuerda que podrían ser diferentes a los iniciales. Al utilizarse el formalismo de primera cuantización en teoría de cuerdas las interacciones tienen que meterse a mano, es decir, se tiene que decidir que es lo que se le permite hacer a la cuerda y después describirlo. Una cuerda por ejemplo podría partirse en dos o viceversa, dos cuerdas unirse y formar una sola. Ya que la teoría heterótica es de cuerdas cerradas y orientadas el proceso descrito anteriormente es el único que puede llevarse a cabo y por tanto las interacciones de la cuerda heterótica son determinadas en su totalidad por la amplitud de probabilidad de una cuerda de “partirse en dos”.

Para calcular la probabilidad de que cierto proceso ocurra, al igual que en teoría de campos es necesario conocer la amplitud de dispersión de éste. Esto también nos permite construir una acción efectiva a nivel de teorías de campos.

La amplitud de probabilidad de que una cuerda en una configuración dada  $X_{inicial}^i(\tau_i, \sigma)$  se propague a otra con configuración  $X_{final}^i(\tau_f, \sigma)$  en  $\tau = \tau_f$ , es simplemente (como en cualquier teoría cuántica)

$$\langle X_{final}^i(\sigma) | e^{-i\mathcal{H}(\tau_f - \tau_i)} | X_{inicial}^i(\sigma) \rangle \quad (4.1)$$

en donde  $\mathcal{H}$  es el operador de traslaciones en  $\tau$ . El propagador anterior puede ser calculado de otra forma: como una integral funcional sobre todas las configuraciones posibles  $X^i(\tau, \sigma)$  pesadas por la acción de la cuerda. Por ejemplo, para calcular la amplitud de que una cuerda se rompa en dos estados de cuerda solo se necesitaría calcular la integral funcional sobre la superficie con la topología que ejemplifica el proceso (ver [29, 30, 38, 33]).

A nivel “árbol” entonces, la dispersión de cuerdas estará dada por la integral sobre todas las hojas de mundo en donde los cilindros de cuerdas al final se reducen a puntos sobre una esfera (ver 4.2) . La manera en la que se distingue un proceso de otro es a través de

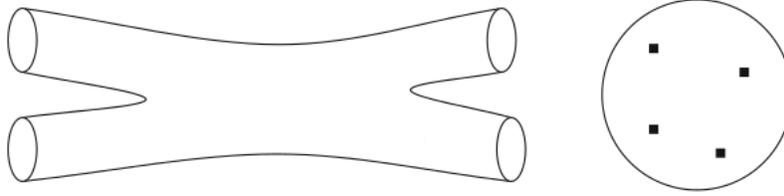


Figura 4.1: Dispersión de estados asintóticos de cuerdas, la hoja de mundo es equivalente a una esfera con cuatro inserciones en diferentes puntos (Imagen tomada de [39])

la topología de la hoja de mundo. En un proceso que en una teoría de campos usual sería a nivel árbol, en cuerdas la topología de la hoja de mundo puede reducirse a una esfera, mientras que un proceso a un lazo la topología de la hoja de mundo que describiría este proceso sería la de un toro. Para incorporar todas las posibles interacciones es por tanto necesario sumar sobre todas las posibles topologías de la hoja de mundo que puedan tener estos procesos.

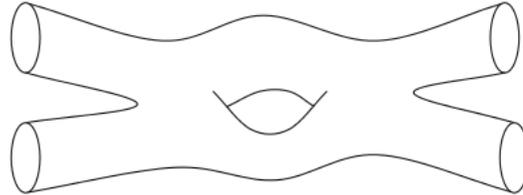


Figura 4.2: Diagrama equivalente en cuerdas a un diagrama de Feynman a un lazo (Imagen tomada de [39])

Antes de explicar como se calculan explícitamente las interacciones en cuerdas, es necesario hacer una serie de cambios de coordenadas para obtener una descripción en coordenadas complejas ( $z, \bar{z}$ ) y así trabajar más fácilmente en la teoría de campos conforme en la hoja de mundo. Primero es necesario hacer una rotación de Wick en la coordenada  $\tau$ ,  $i\tau \rightarrow \sigma^2$ , de manera que en la hoja de mundo se tienen coordenadas  $(\sigma^1, \sigma^2)$ . Después, es usual cambiar a coordenadas  $w$  y  $\bar{w}$  definidas como:

$$w = \sigma^2 + i\sigma^1 = i(\tau - \sigma) \quad (4.2)$$

$$\bar{w} = \sigma^2 - i\sigma^1 = i(\tau + \sigma). \quad (4.3)$$

Conviene de hecho, hacer una transformación más de coordenadas que en caso de la cuerda cerrada mapea el cilindro (hoja de mundo de la cuerda cerrada) en el plano complejo; esta transformación es

$$z = e^w. \quad (4.4)$$

En términos de la coordenada  $z$  el tiempo corre radialmente, de modo que el orden temporal ahora está dado por la norma de  $z$ ,  $|z|$ , siendo el origen el pasado remoto ( $-\infty$ ). Bajo estos cambios de coordenadas los modos izquierdos pasan a ser funciones holomórfas (por ejemplo  $X_L = X_L(z)$ ), y los modos derechos funciones anti-holomorfas.

Aunque, en principio uno podría calcular cualquier amplitud de dispersión en cuerdas mediante el uso de técnicas del cálculo funcional, el método con operadores es más usado. La teoría de campos en la hoja de mundo, en dos dimensiones, tiene una simetría que no es usual en todas las teorías de campos, esta simetría es la simetría conforme (invariancia ante el grupo conforme de transformaciones). Una de las características más importantes de estas teorías de campos es la existencia de un mapeo entre estados cuánticos y operadores. El mapeo estado-operador [40, cap. 5 y 6] es un isomorfismo y se trabaja fácilmente en teorías libres como la teoría en la hoja de mundo de la cuerda, éste nos dice que cada estado cuántico  $|\Xi\rangle$  tiene asignado un operador  $\mathbb{O}$  que lo representa.

Para definir una integral de camino es necesario especificar el estado inicial (en el pasado remoto) de los campos, en las nuevas coordenadas  $z$  esto equivaldría a especificar el valor de los campos en el origen. Esto define un operador local conocido como operador de vértice asociado con el estado. Los operadores de vértice  $V_\Xi$  son operadores definidos en la hoja de mundo, que representan la emisión o absorción de un estado de la cuerda  $|\Xi\rangle$  en un punto de la hoja de mundo. En cuerdas cerradas se definen en el interior de la hoja de mundo y en la integral funcional entran de la forma  $\int d^2z V_\Xi(z, \bar{z})$  ya que no se tiene un punto específico de inserción.

Para la cuerda bosónica se tiene por ejemplo, la correspondencia entre el siguiente estado y operador:

$$|0; k\rangle =: e^{ik \cdot X(0,0)} :, \quad (4.5)$$

:: significa operadores en orden normal conforme [29]. En la cuerda heterótica, los operadores de vértice están dados por productos de vértices de la supercuerda derecha y vértices de la cuerda bosónica izquierda.

Un elemento de matriz de la matriz S, es dado entonces por

$$S_{j_1, \dots, j_n} = \sum_{\text{Topologías}} \int \frac{[dGdX]}{\text{diff} \times \text{Weyl}} e^{-S[G, X]} \prod_{i=1}^n \int d^2z V_{j_i}(k_i, z, \bar{z}), \quad (4.6)$$

en donde  $dG$  significa que se debe sumar sobre todas las posibles métricas (sobre la hoja de mundo), sin embargo, debido a la simetría ante transformaciones de Weyl y difeomorfismos se debe tener presente que solo se deben tomar métricas no relacionadas mediante las transformaciones antes mencionadas y es por eso que hay que dividir entre el volumen de estos grupos.

## 4.2 El potencial de Kähler para los módulos a partir de amplitudes

El potencial de Kähler para los campos modulares es a segundo orden

$$K = \mathcal{K}(M, \bar{M}) + G_{\alpha, \bar{\beta}}(M, \bar{M}) \Phi^{\alpha} \bar{\Phi}^{\beta} + \dots, \quad (4.7)$$

en donde  $M$  y  $\bar{M}$  denotan los módulos de Kähler y de estructura compleja y sus respectivos conjugados. Los campos  $\Phi^{\alpha}$  son campos de materia del orbifoldo.

La parte solo dependiente de los módulos geométricos  $\mathcal{K}$  ha sido obtenida de varias formas. La forma más simple es utilizando argumentos geométricos aprovechando el hecho de que los espacios de módulos de Kähler y de estructura compleja forman cada uno una variedad de Kähler con una métrica de Kähler definida y al que por lo tanto se le puede asignar un potencial de Kähler que coincide con el potencial de éstos como campos escalares. Otra forma es calculando las amplitudes de dispersión de 4 módulos y comparando con las amplitudes en SUGRA. Para calcular la métrica  $G_{\alpha, \bar{\beta}}(M, \bar{M})$  también se requiere de conocer las amplitudes de dispersión y de compararlas con SUGRA, solo que ahora se necesita la amplitud de dispersión de 2 módulos y 2 campos de materia de los diferentes campos que se pueden definir en un orbifoldo. En general, para orbifoldos con solo tres módulos de Kähler esta forma se conoce y se comprueba mostrando la invarianza modular de  $K$ . Entonces, trataremos de ver la forma que se obtendría para orbifoldos de manera general y no solo con 3 módulos pues existen estos casos. Si se quiere saber el  $K$  a mas ordenes es necesario calcular a más órdenes amplitudes de dispersión.

### 4.2.1 Amplitudes de dispersión de 4 módulos

Primero se calcularan las amplitudes de dispersión de 4 módulos, para esto es necesario conocer los operadores de vértice que corresponden a éstos.

En toda compactificación de la teoría heterótica de cuerdas en un orbifoldo toroidal, como se vio en el capítulo anterior, siempre aparecen 3 módulos de Kähler correspondientes a la diagonal de la métrica  $g_{i\bar{j}}$  de la variedad en donde se compactifica, los estados correspondientes son de la forma

$$|M_r\rangle = b_{-1/2}^r |0\rangle_R \alpha_{-1}^{\bar{r}} |0\rangle_L, \quad (4.8)$$

con  $r = 1, \dots, 3$  que etiqueta al módulo con respecto a  $g_{i\bar{i}}$  ( $g_{1,\bar{1}}, \dots, g_{2,\bar{2}}$ ), de igual manera  $r$  etiqueta el plano al que corresponde, por simplicidad  $r = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_i - ix_{i+1})$  con  $i$  en la dimensión compacta (Si el orbifolio no es factorizable se pueden reetiquetar los planos invariantes de manera que se tenga esa forma).

Para un estado como ec. (4.8) el operador de vértice correspondiente es

$$V_0(M_e, k, z, \bar{z}) = (\partial_z X_R^r + \psi_R^r \frac{1}{2} k \cdot \psi_R) e^{ik \cdot X_R} \partial_{\bar{z}} X_L^{\bar{r}} e^{ik \cdot X_L}. \quad (4.9)$$

La amplitud de dispersión de 4 campos modulares en el formalismo Hamiltoniano y a nivel árbol <sup>1</sup> está dada por

$$A(M_a, M_b, M_c^\dagger, M_d^\dagger) = \frac{1}{4\pi} \int d^2 z \langle M_c, -k_3 | V_0(M_d^\dagger, k_4, w, \bar{w}) V_0(M_a, k_1, z, \bar{z}) | M_b, k_2 \rangle, \quad (4.10)$$

que sustituyendo los operadores de vértice y sus conjugados

$$A(M_a, M_b, M_c^\dagger, M_d^\dagger) = \frac{1}{4\pi} \int d^2 z \langle M_c, -k_3 | V_0(M_d^\dagger, k_4, w, \bar{w}) V_0(M_a, k_1, z, \bar{z}) | M_b, k_2 \rangle. \quad (4.11)$$

Una parte que es común para todas las amplitudes de dispersión a nivel árbol es la parte que corresponde a las exponenciales, que se puede separar ya que solo contienen elementos en las direcciones del espacio-tiempo. De esta forma, es correcto calcular aparte la función de correlación de las exponenciales [41]:

$$\langle e^{ik_1 \cdot X(z_1, \bar{z}_1)} e^{ik_2 \cdot X(z_2, \bar{z}_2)} \dots \rangle = \prod_{i < j} |z_i - z_j|^{\alpha' k_i \cdot k_j}, \quad (4.12)$$

además, se sabe que es posible fijar 3 operadores de vértices en cualquier punto [29] (es equivalente a dividir el volumen de los grupos de simetría que aparecen dividiendo en la ec. (4.6)<sup>2</sup> [29]), si elegimos  $z_3 \rightarrow 0$ ,  $z_2 \rightarrow \infty$  y  $w \rightarrow 1$  (se mantendrá  $w$  hasta realizar las integrales) tenemos,

$$|w - z|^{\alpha' k_1 \cdot k_4} |w|^{\alpha' k_4 \cdot k_3} |z|^{\alpha' k_1 \cdot k_3}. \quad (4.13)$$

Esto puede ser escrito en términos de las variables de Mandelstam usuales en teoría de campos:

$$s = -(k_1 + k_2)^2 = -2k_1 \cdot k_2 = -2k_3 \cdot k_4 \quad (4.14)$$

$$t = -(k_1 + k_4)^2 = -2k_1 \cdot k_4 = -2k_2 \cdot k_3 \quad (4.15)$$

$$u = -(k_1 + k_3)^2 = -2k_1 \cdot k_3 = -2k_2 \cdot k_4. \quad (4.16)$$

$$(4.17)$$

<sup>1</sup>Se emplea este método porque es más sencillo, a nivel de integral funcional este cálculo sería equivalente a calcular solo sobre la esfera

<sup>2</sup>Además es necesario considerar el jacobiano de la transformación que llevo a esos puntos.

De esta forma se tiene, con  $\alpha' = 1/2$  que

$$A(M_a, M_b, M_c^\dagger, M_d^\dagger) = \frac{1}{4\pi} \int d^2 z w^{-s/8} z^{-u/8} (z-w)^{-t/8} \bar{w}^{-s/8} \bar{z}^{-u/8} (\bar{z}-\bar{w})^{-t/8} \langle M_c | \partial_{\bar{w}} X_L^r \partial_{\bar{z}} X_L^{\bar{s}} | M_b \rangle \times \left( \langle M_c | \partial_w X_R^{\bar{r}} \partial_z X_R^s | M_b \rangle - \frac{1}{4} \langle M_c | \Psi_R^{\bar{r}} \Psi_R^s | M_b \rangle k^\alpha k^\beta \langle M_c | \Psi_{R\alpha} \Psi_{R\beta} | M_b \rangle \right) \quad (4.18)$$

Para que la amplitud anterior sea distinta de cero, se requiere que  $a = d$  y  $b = c$ , o  $a = b = c = d$ , es decir, que dos módulos estén en el mismo plano o los cuatro en el mismo. Para el primer caso, el cálculo es más sencillo.

Si  $a = d$  (que tomaremos como plano  $r$ ) y  $b = c$ , los valores de los correladores de la ec. (4.18) son

$$\langle M_b | \partial_{\bar{w}} X_L^r \partial_{\bar{z}} X_L^{\bar{r}} | M_b \rangle = \frac{1}{(\bar{z}-\bar{w})^2}, \quad (4.19)$$

$$\langle M_b | \partial_w X_R^{\bar{r}} \partial_z X_R^r | M_b \rangle = \frac{1}{(z-w)^2}, \quad (4.20)$$

$$\langle M_b | \Psi_R^{\bar{r}} \Psi_R^r | M_b \rangle = -\frac{1}{(z-w)}, \quad (4.21)$$

$$\langle M_b | \Psi_{R\alpha} \Psi_{R\beta} | M_b \rangle = \frac{\eta_{\alpha\beta}}{(w-z)}. \quad (4.22)$$

Para conocer entonces el resultado es necesario calcular:

$$A(M_a, M_b, M_b^\dagger, M_a^\dagger) = \frac{1}{4\pi} \int d^2 z w^{-s/8} z^{-u/8} (z-w)^{-t/8} \bar{w}^{-s/8} \bar{z}^{-u/8} (\bar{z}-\bar{w})^{-t/8} \times \frac{1}{(\bar{z}-\bar{w})^2} \left( \frac{1}{(z-w)^2} + \frac{t}{8} \frac{1}{(z-w)^2} \right). \quad (4.23)$$

La integral anterior es fácilmente llevada a una forma bien conocida (ver apéndice) en términos de funciones gammas, esta integral es :

$$\frac{1}{\pi} \int d^2 z |z|^{-\alpha} |1-z|^{-\beta} z^n (1-z)^m = (-1)^{n+m} \frac{\Gamma(1+n+\alpha/2)\Gamma(1+m+\beta/2)\Gamma(-1-n-m-\frac{1}{2}(\alpha+\beta))}{\Gamma(-\alpha/2)\Gamma(-\beta/2)\Gamma(2+\frac{1}{2}(\alpha+\beta))}. \quad (4.24)$$

Ahora, recordando que  $w = 1$  el resultado final es

$$A(M_a, M_b, M_b^\dagger, M_a^\dagger) = \frac{us}{32t} \frac{\Gamma(1-u/8)\Gamma(1-s/8)\Gamma(1-t/8)}{\Gamma(1+u/8)\Gamma(2+t/8)\Gamma(1+s/8)} \quad (4.25)$$

Si los 2 módulos están en el mismo plano  $r$ , es decir si  $a = b = c = d$ , la amplitud tiene un valor diferente, pues ahora existen operadores que pueden actuar en los estados externos,

cambiando los correladores por:

$$\langle M_a | \partial_{\bar{w}} X_L^r \partial_{\bar{z}} X_L^{\bar{r}} | M_a \rangle = \frac{\bar{w}^2 + 2\bar{z}(\bar{z} - \bar{w})}{\bar{z}^2(\bar{z} - \bar{w})^2}, \quad (4.26)$$

$$\langle M_a | \partial_w X_R^{\bar{r}} \partial_z X_R^r | M_a \rangle = \frac{1}{(z - w)^2}, \quad (4.27)$$

$$\langle M_a | \Psi_R^{\bar{r}} \Psi_R^r | M_a \rangle = -\frac{w}{z} \frac{1}{(z - w)}, \quad (4.28)$$

$$\langle M_a | \Psi_{R\alpha} \Psi_{R\beta} | M_a \rangle = \frac{\eta_{\alpha\beta}}{(w - z)}. \quad (4.29)$$

Sustituyendo los correladores anteriores,

$$\begin{aligned} A(M_a, M_a, M_a^\dagger, M_a^\dagger) &= \frac{1}{4\pi} \int d^2 z w^{-s/8} z^{-u/8} (z - w)^{-t/8} \bar{w}^{-s/8} \bar{z}^{-u/8} (\bar{z} - \bar{w})^{-t/8} \\ &\times \frac{\bar{w}^2 + 2\bar{z}(\bar{z} - \bar{w})}{\bar{z}^2(\bar{w} - \bar{z})^2} \left( \frac{1}{(z - w)^2} + \frac{t}{8} \frac{w}{z} \frac{1}{(z - w)^2} \right). \end{aligned} \quad (4.30)$$

Para conocer  $A$  es necesario entonces realizar dos integrales:

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{4\pi} \int d^2 z w^{-s/8} z^{-u/8} (z - w)^{-t/8-2} \bar{w}^{-s/8} \bar{z}^{-u/8-2} (\bar{z} - \bar{w})^{-t/8-2} (\bar{w}^2 + 2\bar{z}(\bar{z} - \bar{w})), \\ A_2 &= \frac{t}{8 \cdot 4\pi} \int d^2 z w^{-s/8+1} z^{-u/8-1} (z - w)^{-t/8-2} \bar{w}^{-s/8} \bar{z}^{-u/8-2} (\bar{z} - \bar{w})^{-t/8-2} (\bar{w} - 2\bar{w}\bar{z}). \end{aligned} \quad (4.31)$$

Las integral anteriores nuevamente se pueden llevar a la forma de la ec. (4.24); para esto es necesario igualar algunos exponentes, lo cual se logra expresando los términos como derivadas totales y el término extra en la derivada total. La derivada total no contribuye a la integral y el resultado es

$$A(M_a, M_a, M_a^\dagger, M_a^\dagger) = \frac{-s^2(u^2 + t^2 - 8s)}{256ut} \frac{\Gamma(1 - u/8)\Gamma(1 - s/8)\Gamma(1 - t/8)}{\Gamma(2 + u/8)\Gamma(2 + t/8)\Gamma(1 + s/8)} \quad (4.32)$$

En un orbifolio con más de 3 módulos de Kähler, de manera general se puede escribir una matriz de módulos, que en la base adecuada coincide con  $g_{i\bar{j}}$ ,

$$M = \begin{pmatrix} M_{1\bar{1}} & M_{1\bar{2}} & M_{1\bar{3}} \\ M_{2\bar{1}} & M_{2\bar{2}} & M_{2\bar{3}} \\ M_{3\bar{1}} & M_{3\bar{2}} & M_{3\bar{3}} \end{pmatrix} \quad (4.33)$$

Los estados correspondientes a estos módulos son de la forma

$$|M_{a\bar{d}}\rangle = b_{-1/2}^a |0\rangle_R \alpha_{-1}^{\bar{d}} |0\rangle_L, \quad (4.34)$$

en donde  $a$  y  $\bar{d}$  etiquetan uno de los tres planos  $a = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_j - ix_{j+1})$  y su conjugado  $\bar{d} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_j + ix_{j+1})$ . Sus operadores de vértice son

$$V_0(M_{a\bar{e}}, k, z, \bar{z}) = (\partial_z X_R^a + \frac{1}{2} \Psi_R^a k \cdot \Psi_R) e^{ik \cdot X_R} \partial_{\bar{z}} X_L^{\bar{e}} e^{ik \cdot X_L}. \quad (4.35)$$

Las amplitudes entre los módulos no pertenecientes a la diagonal de la métrica de Kähler son diferentes a las que se han mostrado anteriormente. La amplitud por ejemplo

$$\begin{aligned} A(M_{a\bar{a}}, M_{b\bar{a}}, (M_{b\bar{a}})^\dagger, (M_{a\bar{a}})^\dagger) &= \frac{1}{4\pi} \int d^2 z w^{-s/8} z^{-u/8} (z-w)^{-t/8} \bar{w}^{-s/8} \bar{z}^{-u/8} (\bar{z}-\bar{w})^{-t/8} \\ &\times \frac{\bar{w}^2 + 2\bar{z}(\bar{z}-\bar{w})}{\bar{z}^2(\bar{w}-\bar{z})^2} \left( \frac{1}{(z-w)^2} + \frac{t}{8} \frac{1}{(z-w)^2} \right) \end{aligned} \quad (4.36)$$

es igual a

$$A(M_{a\bar{a}}, M_{b\bar{a}}, (M_{b\bar{a}})^\dagger, (M_{a\bar{a}})^\dagger) = \left( \frac{s(8+t)}{32(u+8)} + \frac{su}{32t} \right) \frac{\Gamma(1-u/8)\Gamma(1-s/8)\Gamma(1-t/8)}{\Gamma(1+u/8)\Gamma(2+t/8)\Gamma(1+s/8)}, \quad (4.37)$$

mientras que

$$A(M_{a\bar{a}}, M_{a\bar{b}}, (M_{a\bar{b}})^\dagger, (M_{a\bar{a}})^\dagger) = -\frac{s^2 \Gamma(1-u/8)\Gamma(1-s/8)\Gamma(1-t/8)}{32t \Gamma(1+u/8)\Gamma(2+t/8)\Gamma(1+s/8)}. \quad (4.38)$$

Además, también se tiene que el valor de las amplitudes para el caso de tres módulos se obtiene ahora en más casos

$$A(M_{a\bar{a}}, M_{a\bar{a}}, (M_{a\bar{a}})^\dagger, (M_{a\bar{a}})^\dagger) = -\frac{-s^2(u^2+t^2-8s)}{32tu(u+8)} \frac{\Gamma(1-u/8)\Gamma(1-s/8)\Gamma(1-t/8)}{\Gamma(1+u/8)\Gamma(2+t/8)\Gamma(1+s/8)} \quad (4.39)$$

$$A(M_{a\bar{d}}, M_{b\bar{e}}, (M_{b\bar{e}})^\dagger, (M_{a\bar{d}})^\dagger) = \frac{32us}{t} \frac{\Gamma(1-u/8)\Gamma(1-s/8)\Gamma(1-t/8)}{\Gamma(1+u/8)\Gamma(2+t/8)\Gamma(1+s/8)}. \quad (4.40)$$

Juntando todas las amplitudes diferentes de cero en una fórmula general,

$$\begin{aligned} A(M_{a\bar{e}}, M_{b\bar{f}}, (M_{c\bar{g}})^\dagger, (M_{d\bar{h}})^\dagger) &= \frac{1}{32} \frac{\Gamma(1-u/8)\Gamma(1-s/8)\Gamma(1-t/8)}{\Gamma(1+u/8)\Gamma(2+t/8)\Gamma(1+s/8)} (\delta_{\bar{e}\bar{h}} \delta_{\bar{f}\bar{g}} \delta_{ad} \delta_{bc} \frac{us}{t} \\ &+ s \delta_{ac} \delta_{bd} \delta_{\bar{e}\bar{h}} \delta_{\bar{f}\bar{g}} + \delta_{\bar{f}\bar{h}} \delta_{\bar{e}\bar{g}} \frac{(8+t)}{(8+u)} (s \delta_{bc} \delta_{ad} \delta_{\bar{f}\bar{g}} [\delta_{\bar{e}\bar{h}} \delta_{\bar{f}\bar{g}}] + \frac{st}{u} \delta_{ac} \delta_{bd})). \end{aligned} \quad (4.41)$$

El término con  $\delta$  entre corchetes significa que también se tiene que cumplir esa condición.

Para poder comparar con Supergravedad, es necesario tomar el límite de bajas energías de cuerdas (el cual debe coincidir con SUGRA si es cierto que es el límite de la teoría), es decir, se debe tomar  $|s| \ll 1$ ,  $|t| \ll 1$  y  $|u| \ll 1$  y orden cuadrático en los momentos. El límite de las funciones gamma  $\Gamma$  es sencillo en este caso, y calculándolo

$$\lim_{|s|, |t|, |u| \ll 1} \frac{\Gamma(1-u/8)\Gamma(1-s/8)\Gamma(1-t/8)}{\Gamma(1+u/8)\Gamma(2+t/8)\Gamma(1+s/8)} = 1. \quad (4.42)$$

A bajas energías entonces se tiene

$$A(M_{a\bar{e}}, M_{b\bar{f}}, (M_{c\bar{g}})^\dagger, (M_{d\bar{h}})^\dagger) = \frac{1}{32} (\delta_{\bar{e}\bar{h}} \delta_{\bar{f}\bar{g}} \delta_{ad} \delta_{bc} \frac{us}{t} + s \delta_{ac} \delta_{bd} \delta_{\bar{e}\bar{h}} \delta_{\bar{f}\bar{g}} + \delta_{\bar{f}\bar{h}} \delta_{\bar{e}\bar{g}} (s \delta_{bc} \delta_{ad} [\delta_{\bar{e}\bar{h}} \delta_{\bar{f}\bar{g}}] + \frac{st}{u} \delta_{ac} \delta_{bd})). \quad (4.43)$$

### Comparación con las amplitudes en SUGRA

Para conocer la forma general del potencial de Kähler es necesario comparar con las amplitudes de SUGRA. En SUGRA las amplitudes de dispersión para un orbifolio con una matriz de módulos de Kähler  $M_{a\bar{d}}$  es [9, 7]

$$A(M_{a\bar{e}}, M_{b\bar{f}}, (M_{c\bar{g}})^\dagger, (M_{d\bar{h}})^\dagger) = \frac{1}{32} \left( \frac{us}{t} \delta_{ad} \delta_{bc} \delta_{\bar{e}\bar{h}} \delta_{\bar{f}\bar{g}} + \frac{st}{u} \delta_{ac} \delta_{bd} \delta_{\bar{e}\bar{g}} \delta_{\bar{f}\bar{h}} + s g_{b\bar{f}, c\bar{g}; a\bar{e}, d\bar{h}}(0, 0) \right). \quad (4.44)$$

La métrica de Kähler para las módulos a segundo orden se puede aproximar como

$$g_{b\bar{f}, c\bar{g}}(M, M^\dagger) = \delta_{bc} \delta_{\bar{f}\bar{g}} + g_{b\bar{f}, c\bar{g}; j\bar{k}, l\bar{m}} M^{j\bar{k}} M^{l\bar{m}\dagger} + \dots \quad (4.45)$$

De comparar las amplitudes en SUGRA y en cuerdas se tiene

$$g_{b\bar{f}, c\bar{g}}(M, M^\dagger) = \delta_{bc} \delta_{\bar{f}\bar{g}} + M_{c\bar{m}} M_{b\bar{m}}^\dagger \delta_{\bar{f}\bar{g}} + M_{l\bar{g}} M_{l\bar{f}}^\dagger \delta_{bc}, \quad (4.46)$$

en donde se ha usado la convención de la suma de Einstein. La forma de  $\mathcal{K}$  se obtiene recordando que  $g_{b\bar{f}, c\bar{g}} = \frac{\partial^2 \mathcal{K}}{\partial M_{b\bar{f}}^\dagger \partial M_{c\bar{g}}}$ .

### Forma final del $\mathcal{K}$

Si se realiza la siguiente redefinición holomorfa en los módulos de Kähler, el potencial se podrá expresar de una forma en la que se ve como un potencial modificado por una transformación de Kähler. Esta redefinición es

$$M_a \rightarrow \frac{1 + T_a}{1 - T_a}. \quad (4.47)$$

Para orbifolios que solo contienen los tres módulos correspondientes a la diagonal, es muy fácil ver que el potencial está dado por

$$\mathcal{K} = -\ln(T_1 + \bar{T}_1)(T_2 + \bar{T}_2)(T_3 + \bar{T}_3). \quad (4.48)$$

Para orbifolios con un número mayor de módulos, siguiendo la lógica de la referencia [6], no es difícil suponer que esta expresión puede ser simplificada a

$$\mathcal{K} = -\ln \det(T_{ij} + \bar{T}_{ij}), \quad (4.49)$$

en donde  $T_{ij}$  es la matriz de módulos.

## 4.3 Amplitudes de dispersión entre módulos y campos de materia

### 4.3.1 Sector no-torcido

En el sector no-torcido, las cuerdas asociadas a los campos de la teoría efectiva no están localizadas, por lo que tienen menos restricciones para interactuar entre ellos. Sin embargo, las simetrías de la teoría (locales y globales) determinan si las interacciones entre los campos elegidos están permitidas o no, es decir, si las correspondientes amplitudes son diferentes de cero o no. De particular relevancia para la teoría de supergravedad (SUGRA) resultante son las interacciones entre los campos modulares  $M$  y los campos de materia  $\Phi$ , ya que estas determinan el potencial de Kähler, es decir, la normalización de los términos cinéticos de los campos de la teoría efectiva.

La amplitud de dispersión de dos campos de materia  $\Phi$  en el sector no torcido y dos módulos  $M$  está dada por:

$$A(M_a, \Phi_\beta, (\Phi_\gamma)^\dagger, M_d^\dagger) = \frac{1}{4\pi} \int d^2z \langle \Phi_\gamma, k_3 | V_0(M_d^\dagger, k_4, w, \bar{w}) V_0(M_a, k_1, z, \bar{z}) | \Phi_\beta, k_2 \rangle. \quad (4.50)$$

La forma de los estados asociados con estos campos en el sector no-torcido son

$$|\Phi_\gamma\rangle \propto b_{-1/2}^\gamma |0\rangle_R, \quad (4.51)$$

en donde se escribió proporcional debido a que en el sector izquierdo que no se escribe están osciladores que crean los números cuánticos del grupo de norma para el estado. La amplitud de dispersión esta dada por

$$\begin{aligned} A(M_a, \Phi_\beta, (\Phi_\gamma)^\dagger, M_d^\dagger) &= \frac{1}{4\pi} \int d^2z w^{-s/8} z^{-u/8} (z-w)^{-t/8} \bar{w}^{-s/8} \bar{z}^{-u/8} (\bar{z}-\bar{w})^{-t/8} \\ \langle \Phi_\gamma | \partial_{\bar{w}} X_L^r \partial_{\bar{z}} X_L^{\bar{s}} | \Phi_\beta \rangle &\times \left( \langle \Phi_\gamma | \partial_{\bar{w}} X_R^{\bar{r}} \partial_{\bar{z}} X_R^s | \Phi_\beta \rangle - \frac{1}{4} \langle \Phi_\gamma | \Psi_R^{\bar{r}} \Psi_R^s | \Phi_\beta \rangle k^\alpha k^\beta \langle \Phi_\gamma | \Psi_{R\alpha} \Psi_{R\beta} | \Phi_\beta \rangle \right) \end{aligned} \quad (4.52)$$

Para que  $A$  sea diferente de cero, claramente  $a = d$ , lo que significa que un módulo no puede convertirse en otro módulo durante el proceso, de la misma forma  $\gamma = \beta$ . Si sucede lo anterior la amplitud de dispersión arroja el mismo resultado que ec. (4.25) Se obtiene otro resultado si por ejemplo,  $a = d = \gamma = \beta$ ; esto significa que el campo de materia esta en el mismo plano que el módulo.

Ya que los campos en el sector no-torcido cumplen las condiciones de frontera usuales, los correladores anteriores se calculan utilizando las expresiones para  $X$  y  $\Psi$  que son soluciones a las ecuaciones de supercuerdas con condiciones a la frontera de cuerda cerrada.

Los modos para el sector derecho e izquierdo están dados entonces de forma usual

$$\partial_{\bar{z}} X_L^{\bar{r}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n^{\bar{r}} \bar{z}^{-1-n}, \quad (4.53)$$

$$\partial_{\bar{z}} X_L^r = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha_{-m}^r \bar{z}^{-1+m}, \quad (4.54)$$

$$\Psi_R^s = \sum_{Z+1/2} \alpha_{-r}^s z^{-1/2-r}, \quad (4.55)$$

$$\Psi_R^{\bar{s}} = \sum_{Z+1/2} \alpha_{-p}^{\bar{s}} z^{-1/2+p}, \quad (4.56)$$

y calculando con estos los valores esperados en la ec. (4.52), se tiene:

$$\langle \Phi_\gamma | \partial_{\bar{w}} X_L^r \partial_{\bar{z}} X_L^{\bar{r}} | \Phi_\gamma \rangle = \frac{1}{(\bar{z} - \bar{w})^2}, \quad (4.57a)$$

$$\langle \Phi_\gamma | \partial_w X_R^r \partial_z X_R^{\bar{r}} | \Phi_\gamma \rangle = \frac{1}{(z - w)^2}, \quad (4.57b)$$

$$\langle \Phi_\gamma | \Psi_R^{\bar{r}} \Psi_R^r | \Phi_\gamma \rangle = -\frac{w}{z} \frac{1}{(z - w)}, \quad (4.57c)$$

$$\langle \Phi_\gamma | \Psi_{R\alpha} \Psi_{R\beta} | \Phi_\gamma \rangle = \frac{\eta_{\alpha\beta}}{(w - z)}. \quad (4.57d)$$

Sustituyendo en la amplitud (4.18), se obtiene

$$A(M_a, \Phi_a, \Phi_a^\dagger, M_a^\dagger) = \int d^2 z w^{-s/8} z^{-u/8} (z - w)^{-t/8} \bar{w}^{-s/8} \bar{z}^{-u/8} (\bar{z} - \bar{w})^{-t/8} \frac{1}{(\bar{z} - \bar{w})^2} \times \left( \frac{1}{(z - w)^2} + \frac{t}{8} \frac{w}{z} \frac{1}{(z - w)^2} \right). \quad (4.58)$$

Realizando las integrales, la amplitud queda finalmente como:

$$A(M_a, \Phi_a, \Phi_a^\dagger, M_a^\dagger) = \frac{1}{4} s \left( \frac{u}{t(t+8)} - \frac{(s-8)}{8(t+8)} \right) \frac{\Gamma(1-u/8)\Gamma(1-s/8)\Gamma(1-t/8)}{\Gamma(1+u/8)\Gamma(2+t/8)\Gamma(1+s/8)}$$

$$A(M_a, \Phi_a, \Phi_a^\dagger, M_a^\dagger) = \frac{-s^2}{32t} \frac{\Gamma(1-u/8)\Gamma(1-s/8)\Gamma(1-t/8)}{\Gamma(1+u/8)\Gamma(2+t/8)\Gamma(1+s/8)}. \quad (4.59)$$

Ahora, si se tienen más de 3 módulos  $|M_{a\bar{e}}\rangle$  en el orbifolio, sólo basta observar la forma de estos para concluir que amplitudes serán cero y cuales no, ya que en las amplitudes anteriores se han calculado todos los correladores necesarios. Las diferentes de cero darán resultados como los anteriores.

$$A(M_{a\bar{e}}, \Phi_\gamma, (\Phi_\beta)^\dagger, (M_{b\bar{f}})^\dagger) = \delta_{\beta b} \delta_{\gamma a} \delta_{\bar{e}\bar{f}} \frac{-s^2}{32t} \frac{\Gamma(1-u/8)\Gamma(1-s/8)\Gamma(1-t/8)}{\Gamma(1+u/8)\Gamma(2+t/8)\Gamma(1+s/8)},$$

$$A(M_{a\bar{e}}, \Phi_\gamma, (\Phi_{\bar{\beta}})^\dagger, (M_{b\bar{f}})^\dagger) = \delta_{\beta\gamma} \delta_{ab} \delta_{\bar{e}\bar{f}} \frac{us}{32t} \frac{\Gamma(1-u/8)\Gamma(1-s/8)\Gamma(1-t/8)}{\Gamma(1+u/8)\Gamma(2+t/8)\Gamma(1+s/8)}. \quad (4.60)$$

Escribiendo los resultados anteriores en una fórmula general,

$$A(M_{a\bar{e}}, \Phi_\gamma, (\Phi_\beta)^\dagger, (M_{b\bar{f}})^\dagger) = \frac{1}{32} \delta_{\bar{e}\bar{f}} \left( \delta_{\beta\gamma} \delta_{ab} \frac{us}{t} + s \delta_{\gamma a} \delta_{\beta b} [\delta_{\gamma\beta}] \right) \frac{\Gamma(1-u/8)\Gamma(1-s/8)\Gamma(1-t/8)}{\Gamma(1+u/8)\Gamma(2+t/8)\Gamma(1+s/8)}. \quad (4.61)$$

Para poder comparar posteriormente con SUGRA es necesario obtener el límite de bajas energías, es decir  $|s| \ll 1$ ,  $|t| \ll 1$  y  $|u| \ll 1$  y orden cuadrático en los momentos. El límite del término que contiene las funciones Gamma es

$$\frac{\Gamma(1-u/8)\Gamma(1-s/8)\Gamma(1-t/8)}{\Gamma(1+u/8)\Gamma(2+t/8)\Gamma(1+s/8)} \longrightarrow 1, \quad (4.62)$$

de tal forma que a bajas energías en teoría de cuerdas

$$A(M_{a\bar{e}}, \Phi_\gamma, (\Phi_\beta)^\dagger, (M_{b\bar{f}})^\dagger) = \frac{1}{32} \delta_{\bar{e}\bar{f}} \left( \delta_{\beta\gamma} \delta_{ab} \frac{us}{t} + s \delta_{\gamma a} \delta_{\beta b} [\delta_{\gamma\beta}] \right). \quad (4.63)$$

#### Comparación de amplitudes con SUGRA y la métrica de Kähler

En teorías de supergravedad han sido calculadas ya las amplitudes de dispersión entre 2 campos de materia ordinarios y 2 módulos de Kähler (lo mismo vale para módulos de estructura compleja), es decir módulos que por si solos forman una variedad de Kähler, y es precisamente apoyándose en este hecho la forma en que se calculan. De este modo, en SUGRA [42, 7]

$$A(M_{a\bar{e}}, \Phi_\gamma, (\Phi_\beta)^\dagger, (M_{b\bar{f}})^\dagger) = \frac{1}{32} \left( \frac{us}{t} \delta_{ab} \delta_{\bar{e}\bar{f}} \delta_{\gamma\beta} + s G_{\gamma\bar{\beta}; a\bar{e}, b\bar{f}}(0, 0) \right). \quad (4.64)$$

Ahora, si se expande la métrica de Kähler

$$G_{\gamma\bar{\beta}}(M, \bar{M}) = \delta_{\gamma\bar{\beta}} + G_{\gamma\bar{\beta}; a\bar{e}, b\bar{f}} M^{a\bar{e}} (M^{b\bar{f}})^\dagger. \quad (4.65)$$

De comparar la amplitud en cuerdas y en SUGRA se puede concluir

$$\delta_{\bar{e}\bar{f}} \delta_{\gamma a} \delta_{\bar{\beta} b} = G_{\gamma\bar{\beta}; a\bar{e}, b\bar{f}}(0, 0). \quad (4.66)$$

La métrica de Kähler para los campos en el sector no-torcido es entonces

$$G_{\gamma\bar{\beta}} = \delta_{\gamma\bar{\beta}} + \delta_{\bar{e}\bar{f}} \delta_{\gamma a} \delta_{\beta b} M^{a\bar{e}} (M^{b\bar{f}})^\dagger. \quad (4.67)$$

En general, si se tiene un orbifolio con 9 módulos de Kähler,

$$G_{1\bar{1}} = 1 + M_{1\bar{1}} \bar{M}_{1L} \delta_{\bar{1}\bar{L}} = 1 + M_{1\bar{1}} \bar{M}_{1\bar{1}} + M_{1\bar{2}} \bar{M}_{1\bar{2}} + M_{1\bar{3}} \bar{M}_{1\bar{3}} \quad (4.68)$$

$$G_{2\bar{2}} = 1 + M_{2\bar{2}} \bar{M}_{2\bar{2}} + M_{2\bar{1}} \bar{M}_{2\bar{1}} + M_{2\bar{3}} \bar{M}_{2\bar{3}} \quad (4.69)$$

$$G_{3\bar{3}} = 1 + M_{3\bar{3}} \bar{M}_{3\bar{3}} + M_{3\bar{1}} \bar{M}_{3\bar{1}} + M_{3\bar{2}} \bar{M}_{3\bar{2}}. \quad (4.70)$$

En la ecuación anterior se ha quitado el símbolo  $\dagger$  y se ha puesto una barra para indicar a los campos conjugados. Las amplitudes anteriores son tomadas a segundo orden, de manera que recordando que esto debe ser una aproximación, podemos inferir la forma general para  $G_{\gamma\bar{\beta}}$  teniendo en cuenta que debemos recobrar la métrica anterior si mantenemos solo términos de segundo orden, de esta forma

$$G_{1\bar{1}} = (1 - M_{1\bar{1}}\bar{M}_{1\bar{1}})^{-1}(1 - M_{1\bar{2}}\bar{M}_{1\bar{2}})^{-1}(1 - M_{1\bar{3}}\bar{M}_{1\bar{3}})^{-1} \quad (4.71)$$

$$G_{2\bar{2}} = (1 - M_{2\bar{1}}\bar{M}_{2\bar{1}})^{-1}(1 - M_{2\bar{2}}\bar{M}_{2\bar{2}})^{-1}(1 - M_{2\bar{3}}\bar{M}_{2\bar{3}})^{-1} \quad (4.72)$$

$$G_{3\bar{3}} = (1 - M_{3\bar{1}}\bar{M}_{3\bar{1}})^{-1}(1 - M_{3\bar{2}}\bar{M}_{3\bar{2}})^{-1}(1 - M_{3\bar{3}}\bar{M}_{3\bar{3}})^{-1}. \quad (4.73)$$

El término final que aparecerá en el potencial de Kähler será

$$\begin{aligned} & \sum \delta_{nm}(1 - M_{1\bar{1}}\bar{M}_{1\bar{1}})^{-1}(1 - M_{1\bar{2}}\bar{M}_{1\bar{2}})^{-1}(1 - M_{1\bar{3}}\bar{M}_{1\bar{3}})^{-1}\Phi_1^m\Phi_1^{\dagger n} + \\ & \sum \delta_{nm}(1 - M_{2\bar{1}}\bar{M}_{2\bar{1}})^{-1}(1 - M_{2\bar{2}}\bar{M}_{2\bar{2}})^{-1}(1 - M_{2\bar{3}}\bar{M}_{2\bar{3}})^{-1}\Phi_2^m\Phi_2^{\dagger n} + \\ & \sum \delta_{nm}(1 - M_{3\bar{1}}\bar{M}_{3\bar{1}})^{-1}(1 - M_{3\bar{2}}\bar{M}_{3\bar{2}})^{-1}(1 - M_{3\bar{3}}\bar{M}_{3\bar{3}})^{-1}\Phi_3^m\Phi_3^{\dagger n}. \end{aligned} \quad (4.74)$$

Realizando la redefinición holomorfa de campos llevada a cabo para transformar  $\mathcal{K}$  en la sección anterior y una redefinición en los campos del sector no torcido dada por

$$\Phi_a^m \longrightarrow \Phi_a^m \frac{1}{(M_{a\bar{1}} + \bar{M}_{a\bar{1}})(M_{a\bar{2}} + \bar{M}_{a\bar{2}})(M_{a\bar{3}} + \bar{M}_{a\bar{3}})} \quad (4.75)$$

$$\Phi_a^{m\dagger} \longrightarrow \Phi_a^{m\dagger} \frac{1}{(M_{a\bar{1}} + \bar{M}_{a\bar{1}})(M_{a\bar{2}} + \bar{M}_{a\bar{2}})(M_{a\bar{3}} + \bar{M}_{a\bar{3}})}, \quad (4.76)$$

la ecuación (4.74) se escribe

$$\begin{aligned} & \sum \delta_{nm}(M_{1\bar{1}} + \bar{M}_{1\bar{1}})^{-1}(M_{1\bar{2}} + \bar{M}_{1\bar{2}})^{-1}(M_{1\bar{3}} + \bar{M}_{1\bar{3}})^{-1}\Phi_1^m\Phi_1^{\dagger n} + \\ & \sum \delta_{nm}(M_{2\bar{1}} + \bar{M}_{2\bar{1}})^{-1}(M_{2\bar{2}} + \bar{M}_{2\bar{2}})^{-1}(M_{2\bar{3}} + \bar{M}_{2\bar{3}})^{-1}\Phi_2^m\Phi_2^{\dagger n} + \\ & \sum \delta_{nm}(M_{3\bar{1}} + \bar{M}_{3\bar{1}})^{-1}(M_{3\bar{2}} + \bar{M}_{3\bar{2}})^{-1}(M_{3\bar{3}} + \bar{M}_{3\bar{3}})^{-1}\Phi_3^m\Phi_3^{\dagger n}, \end{aligned} \quad (4.77)$$

en donde  $m$  y  $n$  cuentan el número de campos no torcidos en ese plano.

### 4.3.2 Sector torcido

La amplitud entre dos campos en el sector torcido y dos módulos nos proporciona información sobre el potencial de Kähler a segundo orden en estos campos. Un campo en el sector torcido está representado por el estado:

$$|\Phi\rangle \propto |0\rangle_R, \quad (4.78)$$

en donde hacen falta los osciladores izquierdos que crean los números cuánticos del grupo de norma correspondiente a la compactificación.

La amplitud se calcula de la misma forma que las anteriores solo que ahora calculando los correladores con estados en el sector torcido, y utilizando las expansiones en modos para  $X$  y  $\Psi$  con las condiciones de frontera apropiadas

$$\begin{aligned}\partial_z X_L^{\bar{r}} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_{\eta+n}^{\bar{r}} \bar{z}^{-1-m-\eta}, \\ \partial_z X_L^r &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_{-n-\eta}^r \bar{z}^{1+n+\eta}, \\ \Psi_R^s &= \sum b_{p+\eta}^s z^{-1/2-r-\eta}, \\ \Psi_R^{\bar{s}} &= \sum b_{-p-\eta}^s z^{-1/2+r+\eta}.\end{aligned}\tag{4.79}$$

en donde  $\eta = \theta$  si  $\theta > 0$  y  $\eta = 1 - \theta$  si  $\theta < 0$  ( $\theta$  es el elemento del grupo de punto con el cual se tiene el estado torcido correspondiente). Para uno de los 3 módulos correspondientes a la diagonal de la métrica de Kähler, la amplitud es

$$A(U_a, \Phi_\beta, \Phi_\gamma^\dagger, U_d^\dagger) = \frac{1}{4\pi} \int d^2 z \langle \Phi_\gamma, k_3 | V_0^\theta(U_d^\dagger, k_4, w, \bar{w}) V_0^\theta(U_a, k_1, z, \bar{z}) | \Phi_\beta, k_2 \rangle.\tag{4.80}$$

Los operadores de vértice tienen la misma expresión que la ec. (4.35) con las expresiones de los modos dados por las ec. (4.79)., de esta forma la amplitud es

$$\begin{aligned}A(M_a, \Phi_\beta, \Phi_\gamma^\dagger, M_d^\dagger) &= \frac{1}{4\pi} \int d^2 z w^{-s/8} z^{-u/8} (z-w)^{-t/8} \bar{w}^{-s/8} \bar{z}^{-u/8} (\bar{z}-\bar{w})^{-t/8} \times \\ &\langle \Phi_\gamma | \partial_{\bar{w}} X_L^r \partial_{\bar{z}} X_L^{\bar{s}} | \Phi_\beta \rangle \times \left( \langle \Phi_\gamma | \partial_{\bar{w}} X_R^{\bar{r}} \partial_{\bar{z}} X_R^s | \Phi_\beta \rangle - \frac{1}{4} \langle \Phi_\gamma | \Psi_R^{\bar{r}} \Psi_R^s | \Phi_\beta \rangle k^\alpha k^\beta \langle \Phi_\gamma | \Psi_{R\alpha} \Psi_{R\beta} | \Phi_\beta \rangle \right).\end{aligned}\tag{4.81}$$

La amplitud anterior es distinta de cero solo si  $\gamma = \beta$  y  $a = d$ , esto se puede deducir tan solo de observar la forma de los estados en el sector torcido. Los correladores en este caso son

$$\langle \Phi_\gamma | \partial_{\bar{w}} X_L^r \partial_{\bar{z}} X_L^{\bar{r}} | \Phi_\gamma \rangle = \left( \frac{\bar{w}}{\bar{z}} \right)^\eta \frac{1}{\bar{w}(\bar{z}-\bar{w})^2} (\bar{w}(1-\eta) + \eta\bar{z}),\tag{4.82a}$$

$$\langle \Phi_\gamma | \partial_w X_R^r \partial_z X_R^{\bar{r}} | \Phi_\gamma \rangle = \left( \frac{w}{z} \right)^\eta \frac{1}{w(z-w)^2} (w(1-\eta) + \eta z),\tag{4.82b}$$

$$\langle \Phi_\gamma | \Psi_R^{\bar{r}} \Psi_R^r | \Phi_\gamma \rangle = - \left( \frac{w}{z} \right)^\eta \frac{1}{(z-w)},\tag{4.82c}$$

$$\langle \Phi_\gamma | \Psi_{R\alpha} \Psi_{R\beta} | \Phi_\gamma \rangle = \frac{\eta_{\alpha\beta}}{(w-z)}.\tag{4.82d}$$

La integral que hay que calcular para conocer la amplitud es entonces

$$\begin{aligned}A(M_a, \Phi_\beta, \Phi_\gamma^\dagger, M_d^\dagger) &= \frac{1}{4\pi} \int d^2 z w^{-s/8} z^{-u/8} (z-w)^{-t/8} \bar{w}^{-s/8} \bar{z}^{-u/8} (\bar{z}-\bar{w})^{-t/8} \left( \frac{\bar{w}}{\bar{z}} \right)^\eta \frac{1}{\bar{w}(\bar{z}-\bar{w})^2} \times \\ &(\bar{w}(1-\eta) + \eta\bar{z}) \times \left( \left( \frac{w}{z} \right)^\eta \frac{1}{w(z-w)^2} (w(1-\eta) + \eta z) + \frac{t}{8} \left( \frac{w}{z} \right)^\eta \frac{1}{(z-w)^2} \right).\end{aligned}\tag{4.83}$$

La integral anterior también se puede expresar en términos de funciones gamma, que son mucho más fáciles de manejar y que en el límite a bajas energías tienen un valor finito bien definido. Para esto hay que llevarla a la forma de la identidad utilizada anteriormente, el resultado final es

$$A = \frac{s}{32t}(u + t(1 - \eta)) \frac{\Gamma(1 - \eta_1 - u/8)\Gamma(\eta_1 - s/8)\Gamma(1 - t/8)}{\Gamma(\eta_3 + u/8)\Gamma(2 + t/8)\Gamma(1 + s/8 - \eta_3)}. \quad (4.84)$$

Cuando se tienen mas de tres módulos, las amplitudes correspondientes a los módulos fuera de la diagonal y 2 campos de materia también contribuyen en la métrica de los módulos de materia en el sector torcido. Una amplitud de este tipo se ve como

$$A(M_{a\bar{d}}, \Phi_\beta, \Phi_\gamma^\dagger, (M_{b\bar{e}})^\dagger) = \frac{1}{4\pi} \int d^2z w^{-s/8} z^{-u/8} (z-w)^{-t/8} \bar{w}^{-s/8} \bar{z}^{-u/8} (\bar{z}-\bar{w})^{-t/8} \times \\ \langle \Phi_\gamma | \partial_{\bar{w}} X_L^e \partial_{\bar{z}} X_L^{\bar{d}} | \Phi_\beta \rangle \times \left( \langle \Phi_\gamma | \partial_{\bar{w}} X_R^{\bar{b}} \partial_{\bar{z}} X_R^a | \Phi_\beta \rangle - \frac{1}{4} \langle \Phi_\gamma | \Psi_R^{\bar{b}} \Psi_R^a | \Phi_\beta \rangle k^\alpha k^\beta \langle \Phi_\gamma | \Psi_{R\alpha} \Psi_{R\beta} | \Phi_\beta \rangle \right) \quad (4.85)$$

la cual es distinta de cero si  $\gamma = \beta$ ,  $a = b$  y  $\bar{d} = \bar{e}$ , los correladores son entonces:

$$\langle \Phi_\gamma | \partial_{\bar{w}} X_L^r \partial_{\bar{z}} X_L^{\bar{r}} | \Phi_\gamma \rangle = \left( \frac{\bar{w}}{\bar{z}} \right)^{\eta_{\bar{e}}} \frac{1}{\bar{w}(\bar{z}-\bar{w})^2} (\bar{w}(1-\eta_{\bar{e}}) + \eta_{\bar{e}}\bar{z}) \quad (4.86)$$

$$\langle \Phi_\gamma | \partial_w X_R^{\bar{r}} \partial_z X_R^r | \Phi_\gamma \rangle = \left( \frac{w}{z} \right)^{\eta_a} \frac{1}{w(z-w)^2} (w(1-\eta_a) + \eta_a z) \quad (4.87)$$

$$\langle \Phi_\gamma | \Psi_R^{\bar{r}} \Psi_R^r | \Phi_\gamma \rangle = - \left( \frac{w}{z} \right)^{\eta_a} \frac{1}{(z-w)} \quad (4.88)$$

$$\langle \Phi_\gamma | \Psi_{R\alpha} \Psi_{R\beta} | \Phi_\gamma \rangle = \frac{\eta_{\alpha\beta}}{(w-z)}. \quad (4.89)$$

en donde  $\eta_a$  y  $\eta_{\bar{e}}$  corresponden al “twist” del sector (nótese que al ser un módulo no correspondiente a la diagonal de la métrica de Khähler no necesariamente se tiene el mismo “twist” en el sector izquierdo y derecho).

$$A(M_{a\bar{d}}, \Phi_\beta, \Phi_\gamma^\dagger, (M_{b\bar{e}})^\dagger) = \delta_{\gamma\beta} \delta_{ab} \delta_{\bar{d}\bar{e}} (A_1 + A_2), \quad (4.90)$$

con las integrales dadas por

$$A_1 = \frac{1}{4\pi} \int d^2z w^{-s/8+\eta_{\bar{e}}-1} z^{-u/8-\eta_a} (z-w)^{-t/8-1} \bar{w}^{-s/8+\eta_{\bar{e}}-1} \bar{z}^{-u/8-\eta_{\bar{e}}} (\bar{z}-\bar{w})^{-t/8-1} \\ \times \frac{(s+\eta_a t)(s+\eta_{\bar{e}})}{(t+8)(t+8)} \\ A_2 = \frac{1}{4\pi} \int d^2z w^{-s/8+\eta_a-1} z^{-u/8-\eta_a} (z-w)^{-t/8-1} \bar{w}^{-s/8-\eta_{\bar{e}}-1} \bar{z}^{-u/8-\eta_3} (\bar{z}-\bar{w})^{-t/8-1} \\ \times \frac{(s+\eta_{\bar{e}} t)(s-8\eta_a)}{(t+8)(t+8)}. \quad (4.91)$$

Sumando las dos integrales anteriores

$$A(M_{a\bar{d}}, \Phi_\beta, \Phi_\gamma^\dagger, (M_{b\bar{e}})^\dagger) = \delta_{\gamma\beta} \delta_{ab} \delta_{\bar{d}\bar{e}} \frac{s}{32t} (u + t(1 - \eta_{\bar{e}})) \frac{\Gamma(1 - \eta_a - u/8) \Gamma(\eta_a - s/8) \Gamma(1 - t/8)}{\Gamma(\eta_{\bar{e}} + u/8) \Gamma(2 + t/8) \Gamma(1 + s/8 - \eta_{\bar{e}})}. \quad (4.92)$$

Para poder comparar posteriormente con SUGRA es necesario obtener el límite de bajas energías, es decir  $|s| \ll 1$ ,  $|t| \ll 1$  y  $|u| \ll 1$ . El límite del término que contiene las funciones gamma es

$$\frac{\Gamma(1 - \eta_a - u/8) \Gamma(\eta_a - s/8) \Gamma(1 - t/8)}{\Gamma(\eta_{\bar{e}} + u/8) \Gamma(2 + t/8) \Gamma(1 + s/8 - \eta_{\bar{e}})} \longrightarrow \frac{\sin \pi \eta_a}{\sin \pi \eta_{\bar{e}}} \quad (4.93)$$

que tiende a 1 si  $\eta_a = \eta_{\bar{e}}$ . En el límite de bajas energías la amplitud es entonces

$$A(M_{a\bar{d}}, \Phi_\beta, \Phi_\gamma^\dagger, (M_{b\bar{e}})^\dagger) = \delta_{\gamma\beta} \delta_{ab} \delta_{\bar{d}\bar{e}} \frac{s}{32t} (u + t(1 - \eta_{\bar{e}})). \quad (4.94)$$

### Comparación con SUGRA

Para el sector torcido la amplitud reportada en SUGRA [9] es

$$A(M_{a\bar{d}}, \Phi_\beta, \Phi_\gamma^\dagger, M_{b\bar{e}}^\dagger) = \frac{1}{32} \left( \frac{us}{t} \delta_{ab} \delta_{\bar{e}\bar{f}} \delta_{\beta\gamma} + s G_{\beta\bar{\gamma}; a\bar{d}, b\bar{e}}(0, 0) \right). \quad (4.95)$$

Ahora se expande la métrica de Kähler de igual manera que en los casos anteriores

$$G_{\beta\bar{\gamma}}(M, \bar{M}) = \delta_{\beta\bar{\gamma}} + G_{\beta\bar{\gamma}; a\bar{d}, b\bar{e}} M^{a\bar{d}} \bar{M}^{b\bar{e}}. \quad (4.96)$$

De comparar la amplitud en cuerdas ec. (4.94) y en SUGRA ec. (4.95) se puede concluir

$$G_{\beta\bar{\gamma}; a\bar{d}, b\bar{e}}(0, 0) = (1 - \eta_{\bar{e}}) \delta_{\gamma\beta} \delta_{ab} \delta_{\bar{d}\bar{e}} = \eta'_{\bar{e}} \delta_{\gamma\beta} \delta_{ab} \delta_{\bar{d}\bar{e}}. \quad (4.97)$$

De esta forma se tiene que a segundo orden,

$$G_{\alpha\bar{\beta}} = \delta_{\alpha\bar{\beta}} \left( 1 + \sum_{a, \bar{e}}^3 \eta'_{\bar{e}} M_{a\bar{e}} M_{a\bar{e}}^\dagger \right), \quad (4.98)$$

en donde la suma es hasta tres solo en el caso de  $Z_3$  ya que es el único orbifoldo abeliano con este número de módulos de Kähler. Si este no es el caso habrá términos iguales a cero en la suma.

Nuevamente se debe recordar que las amplitudes anteriores son tomadas a segundo orden, podemos inferir entonces  $G_{\gamma\bar{\beta}}$  teniendo en cuenta que debemos recobrar la métrica anterior si mantenemos solo esos términos, de esta forma

$$\begin{aligned} G_{\alpha\bar{\beta}} &= \delta_{\alpha\bar{\beta}} (1 - M_{1\bar{1}} \bar{M}_{1\bar{1}})^{-n_{11}} (1 - M_{1\bar{2}} \bar{M}_{1\bar{2}})^{-n_{12}} (1 - M_{1\bar{3}} \bar{M}_{1\bar{3}})^{-n_{13}} \\ &\times (1 - M_{2\bar{1}} \bar{M}_{2\bar{1}})^{-n_{21}} (1 - M_{2\bar{2}} \bar{M}_{2\bar{2}})^{-n_{22}} (1 - M_{2\bar{3}} \bar{M}_{2\bar{3}})^{-n_{23}} \\ &\times (1 - M_{3\bar{1}} \bar{M}_{3\bar{1}})^{-n_{31}} (1 - M_{3\bar{2}} \bar{M}_{3\bar{2}})^{-n_{32}} (1 - M_{3\bar{3}} \bar{M}_{3\bar{3}})^{-n_{33}}, \end{aligned} \quad (4.99)$$

en donde en la ecuación anterior se ha escrito

$$n_{ij} = \eta'_j = 1 - \eta_j \quad (4.100)$$

para cada módulo  $M_{i\bar{j}}$ . Como se ha encontrado en los renglones anteriores esos valores para  $n_{ij}$  coinciden en algunos módulos. También es importante notar que el valor de  $n_{ij}$  depende del sector en donde sea definido el campo de materia torcido, pues de este sector depende el valor de  $\eta_i$ , así que para identificar cada sector deberíamos escribir  $n_{ij}^\theta$ . Estos exponentes usualmente se definen con el signo negativo y son llamados pesos modulares del campo en cuestión, los cuales se especifican en un vector para indicar el módulo al que afectan. El nombre proviene de la invariancia modular del potencial de Kähler y si el módulo es no-torcido como se ve en ec. (4.77) el peso modular es 1 o 0.

El término final que aparecerá en el potencial de Kähler será

$$\begin{aligned} \sum \delta_{\alpha\bar{\beta}} & (1 - M_{1\bar{1}}\bar{M}_{1\bar{1}})^{-n_{11}^\theta} (1 - M_{1\bar{2}}\bar{M}_{1\bar{2}})^{-n_{12}^\theta} (1 - M_{1\bar{3}}\bar{M}_{1\bar{3}})^{-n_{13}^\theta} \\ & (1 - M_{2\bar{1}}\bar{M}_{2\bar{1}})^{-n_{21}^\theta} (1 - M_{2\bar{2}}\bar{M}_{2\bar{2}})^{-n_{22}^\theta} (1 - M_{2\bar{3}}\bar{M}_{2\bar{3}})^{-n_{23}^\theta} \\ & (1 - M_{3\bar{1}}\bar{M}_{3\bar{1}})^{-n_{31}^\theta} (1 - M_{3\bar{2}}\bar{M}_{3\bar{2}})^{-n_{32}^\theta} (1 - M_{3\bar{3}}\bar{M}_{3\bar{3}})^{-n_{33}^\theta} \Phi_\alpha^\theta \bar{\Phi}_\beta^\theta. \end{aligned} \quad (4.101)$$

El potencial de Kähler lo podemos escribir realizando la misma redefinición holomórfica que se hizo para el sector no torcido,

$$\Phi_a^\theta \longrightarrow \Phi_a^\theta \frac{1}{\prod_{a\bar{e}}^3 (M_{a\bar{e}} + \bar{M}_{a\bar{e}})^{n_{ab}^\theta}} \quad (4.102)$$

$$\bar{\Phi}_a^\theta \longrightarrow \bar{\Phi}_a^\theta \frac{1}{\prod_{a\bar{e}}^3 (M_{a\bar{e}} + \bar{M}_{a\bar{e}})^{n_{ab}^\theta}}, \quad (4.103)$$

la parte correspondiente a los campos de materia en el sector torcido se escribe entonces

$$\begin{aligned} \sum \delta_{\alpha\bar{\beta}} & (M_{1\bar{1}} + \bar{M}_{1\bar{1}})^{-n_{11}^\theta} (M_{1\bar{2}} + \bar{M}_{1\bar{2}})^{-n_{12}^\theta} (M_{1\bar{3}} + \bar{M}_{1\bar{3}})^{-n_{13}^\theta} \\ & (M_{2\bar{1}} + \bar{M}_{2\bar{1}})^{-n_{21}^\theta} (M_{2\bar{2}} + \bar{M}_{2\bar{2}})^{-n_{22}^\theta} (M_{2\bar{3}} + \bar{M}_{2\bar{3}})^{-n_{23}^\theta} \\ & (M_{3\bar{1}} + \bar{M}_{3\bar{1}})^{-n_{31}^\theta} (M_{3\bar{2}} + \bar{M}_{3\bar{2}})^{-n_{32}^\theta} (M_{3\bar{3}} + \bar{M}_{3\bar{3}})^{-n_{33}^\theta} \Phi_\alpha^\theta \bar{\Phi}_\beta^\theta. \end{aligned} \quad (4.104)$$

## 4.4 Potencial de Kähler a segundo orden para orbifolios abelianos

Es importante notar que aunque el cálculo se hace para módulos de Kähler, los resultados son válidos para módulos de estructura compleja.

La manera general de escribir el potencial de Kähler para cualquier orbifolio es:

$$\begin{aligned}
 K &= -\ln \det(T_{ij} + \bar{T}_{ij}) \\
 &+ \sum_{i=1}^3 \sum_{m_i}^N (U_i + \bar{U}_i)^{-1} \prod_{j=1}^3 (T_{ij} + \bar{T}_{ij})^{-1} \Phi_{m_i} \bar{\Phi}_{m_i} \\
 &+ \sum_t \prod_{l=1}^{h(2,1)} \prod_{i,j=1}^3 (U_l + \bar{U}_l)^{m_l^\theta} (T_{ij} + \bar{T}_{ij})^{-n_{ij}^\theta} \Phi_{t_\theta} \bar{\Phi}_{t_\theta}, \tag{4.105}
 \end{aligned}$$

en donde los términos que contienen módulos de estructura compleja desaparecen si el orbifolio en cuestión no tiene ninguno de estos módulos, como es el caso de varios orbifolios, y en donde se ha puesto  $T_{ij}$  en lugar de  $M_{i\bar{j}}$  a la matriz de módulos de Kähler.

$$T_{ij} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix}. \tag{4.106}$$

## Capítulo 5

# Potenciales modulares en cosmología

En este último capítulo nos interesa mostrar que, incluso de los resultados más modestos obtenidos en los capítulos anteriores (que aparecen genéricamente en otras teorías de cuerdas), surgen propiedades cosmológicas que podrían ser consideradas prometedoras. Consideremos el potencial de Kähler más simple encontrado en compactificaciones de la cuerda heterótica dado por la ec. (4.48) y supongamos que alguna simetría (por ejemplo, la simetría modular de orbifolios tipo  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_7$ ) impone que  $T_1 = T_2 = T_3$ . Bajo estos supuestos, y agregando un campo de materia, el potencial de Kähler propuesto es:

$$K = -3 \ln(T + \bar{T}) + \Phi \bar{\Phi} (T + \bar{T})^{-1}. \quad (5.1)$$

Debido a la simetría indicada, naturalmente los campos de materia no torcidos  $\Phi$  aparecen con multiplicidad triple (un campo asociado a cada  $T_i$ ), por lo que la estructura de Kähler para dicho campo es la supuesta, salvo por la redefinición  $\Phi \rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}}\Phi$ . Otro aspecto importante que hay que notar, es que en este modelo nunca se incorpora al dilatón  $S^1$ , el cuál de alguna manera tendría que haber sido estabilizado al igual que los otros campos que aparecen en la teoría a energías mas altas que los campos considerados aquí.

El segundo aspecto de un modelo supersimétrico de módulos que debemos considerar es el superpotencial. En este capítulo, dado que el objetivo es sólo mostrar las cualidades generales de nuestras construcciones, proponemos el superpotencial más simple posible, el cual incluye un término cúbico para el campo de materia y la posible aparición de un término con coeficiente  $e^{-aT}$  asociado a la interacción de  $\Phi$  con otros campos a nivel del superpotencial (no del potencial de Kähler) que no son relevantes para la dinámica cosmológica del modelo:

$$W = A\Phi e^{-aT} + B\Phi^3. \quad (5.2)$$

---

<sup>1</sup>Este campo aparece en el potencial de Kähler como  $\ln(S + \bar{S})$

Las constantes  $A$ ,  $a$  y  $B$  son números reales. Es importante mencionar que éste se ha propuesto con base en otros ejemplos en donde se tiene estabilización; sin embargo, para proponer un modelo realista es preciso calcular todos los acoplamientos permitidos siguiendo, por ejemplo, el tratamiento de [10, 11]. Las constantes  $A$ ,  $B$  y  $a$  pueden ser obtenidas de forma aproximada siguiendo también dicho tratamiento.

Con ejemplos como los encontrados en [13], se puede inferir que en el superpotencial están contenidos términos como  $e^{-f(T_i)} \langle \psi_i \rangle^n \varphi_j \varphi_k \varphi_l$  en donde los campos  $\psi_i$  son aquellos que obtuvieron un valor de expectación previamente. Los campos  $\varphi_j$  son aquellos que en esa etapa del universo aún no han sido estabilizados. De manera que  $A$ ,  $a$ ,  $B$  y constantes similares en el superpotencial dependen usualmente de los valores de expectación de los campos  $\langle \psi_i \rangle$  de la teoría estabilizados en una etapa previa.

En compactificaciones arbitrarias de teorías heteróticas el término  $D$  del potencial de los campos escalares (ver ec. (1.28)) sufre una pequeña modificación debido a la presencia de un grupo  $U(1)$  anómalo, dando lugar al comúnmente llamado término  $D$  de Fayet-Iliopoulos  $\xi$  [43, 13]. Para un grupo  $U(1)_{\text{anom}}$  con esta contribución el término  $D$  del potencial escalar es:

$$V_{DA} \propto \left( \xi + \sum_i q_i^{\text{anom}} |\psi_i|^2 \right)^2. \quad (5.3)$$

Si suponemos que el término  $D$  del potencial de los campos escalares es cero (suponiendo que los campos  $\psi_i$  se estabilizaron supersimétricamente en una etapa previa), entonces, de acuerdo a ec. (5.3) los valores de los campos estarán restringidos y en general son números complejos. En nuestro ejemplo, la constante  $B$  que acompaña al término  $\Phi^3$  puede ser negativa y muy grande si se tienen muchos campos  $\psi_i$  como en el caso de orbifolios heteróticos. De esta forma en este ejemplo, supondremos que la gran mayoría de los campos se estabilizaron primero de manera supersimétrica y cuando entran en el juego  $\Phi$  y  $T$  supersimetría se rompe como se observa al obtener un valor distinto de cero para el potencial de estos campos.

Con los elementos anteriores, estamos listos para calcular el potencial escalar  $V_F$  empleando la ec. (1.27). Por simplicidad, consideramos que las partes imaginarias de los campos  $T$  y  $\Phi$  se anulan y buscamos mínimos adecuados para sus componentes reales.

En el potencial obtenido, se encontró que para valores positivos de  $A$  y  $a$  y valores negativos de  $B$  se tienen dos mínimos simétricos con respecto al origen en  $\Phi$ , pero, tomaremos el positivo como el valor en el que se encuentra el campo (ver figura 5.1). Estos mínimos son positivos, es decir  $dS$  y los mínimos que se pueden obtener son usualmente muy pequeños. Las masas que se obtienen varían mucho dependiendo de los valores que se tomen para  $A$ ,  $B$  y  $a$ .

Como ejemplo, tomemos  $A = 1/10$ ,  $B = -10000$  y  $a = 1/10$ . Con los valores anteriores el mínimo se obtiene en

$$\begin{aligned} (Re T)_{\text{mínimo}} &\approx 1.43, \\ (Re \Phi)_{\text{mínimo}} &\approx 0.0017. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Para saber si el potencial para alguno de los campos tiene las cualidades para ser usado cómo inflatón (en inflación del tipo rodamiento lento y con un solo campo) es necesario saber cómo evolucionan los parámetros  $\eta$  y  $\epsilon$  en los alrededores del mínimo. Estos parámetros son [18]

$$\begin{aligned} \epsilon_\nu &= \frac{1}{2} \left( \frac{V'}{V} \right)^2 \\ \eta_\nu &= \frac{V''}{V}, \end{aligned} \quad (5.5)$$

en donde las primas denotan derivadas con respecto al campo.

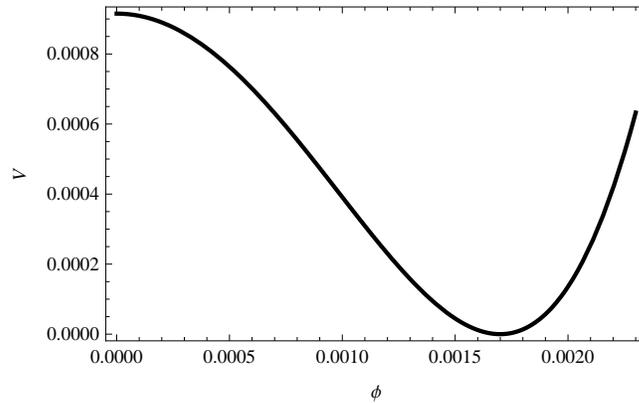


Figura 5.1: Corte a  $Re T = (Re T)_{\text{mínimo}}$  del potencial

Debido a que las fórmulas típicas para describir el comportamiento cosmológico de un modelo de campos se encuentran dadas en términos de campos canónicamente normalizados, es importante realizar las transformaciones de campos necesarias para que los términos cinéticos de los campos dinámicos de nuestro modelo tengan un coeficiente canónico. Este cambio requiere definir los campos canónicamente normalizados  $\chi$  y  $\lambda$  a partir de la identificación

$$\frac{1}{2}(\partial_\mu \chi \partial^\mu \chi + \partial_\mu \lambda \partial^\mu \lambda) \equiv \sum_{i,j} K_{ij} \partial_\mu \Psi_i \partial^\mu \Psi_j, \quad (5.6)$$

en donde  $\Psi_i$  se refiere a los campos  $T$  y  $\Phi$ .

Los valores de las masas de los dos campos son

$$M_T \approx 3.8 \times 10^{-5} M_{pl}, \quad (5.7)$$

$$M_\Phi \approx 50.35 M_{pl}. \quad (5.8)$$

El campo  $Re \Phi$  tiene una masa mucho mayor a  $Re T$  por lo que consideraremos que se estabilizó primero. De esta forma, podemos fijarnos ya solo en el potencial para el campo  $Re T$  y normalizarlo canónicamente para usar de la manera definida en (5.5) los parámetros de rodamiento lento. El campo  $\chi$  normalizado canónicamente está dado entonces por

$$\chi = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( 3 \ln (Re T) + 2 \frac{(Re \Phi)_{\text{mínimo}}^2}{(Re T)^{1/2}} \right) \approx \frac{3}{\sqrt{2}} \ln (Re T) \quad (5.9)$$

Así, encontramos que se obtienen condiciones de rodamiento lento (*slow roll*) para el campo  $\chi$ , i.e. se cumple que

$$|\eta_\nu| \ll 1 \quad \text{y} \quad |\epsilon_\nu| \ll 1 \quad (5.10)$$

en una determinada región en el espacio de campos cercana al mínimo. Además, se satisface que

$$|\epsilon_\nu| \approx 1$$

para un valor antes de llegar al mínimo  $\chi_{\text{mínimo}}$ , al cual llamamos  $\chi_{\text{final}}$  y lo identificamos con el valor del campo para que inflación termine. Este valor, así como la estructura del potencial inflacionario resultante, se muestra en la Fig. 5.2. Ahí mismo, también se muestra el valor  $\chi_{\text{inicial}}$  correspondiendo a una posible condición inicial de  $\chi$  que permite la correcta duración de la época inflacionaria de nuestro universo (que resuelva los típicos problemas de planitud, entropía y homogeneidad del universo observable). El número  $N$  de  $e$ -folds asociado a esta duración puede ser calculado como [16]

$$N = \int_{\chi_{\text{final}}}^{\chi_{\text{inicial}}} \left( \frac{V}{V'} \right) d\chi, \quad (5.11)$$

donde  $\chi$  denota el campo usado como inflatón.

En nuestro caso, es suficiente tener un trayecto relativamente corto para tener suficientes  $e$ -folds de inflación; al iniciar por ejemplo en  $\chi_{\text{inicial}}$  se obtienen aproximadamente 80  $e$ -folds de inflación. Otra cantidad de valor en cosmología es  $r$  la razón entre perturbaciones escalares y tensoriales. El valor de  $r$  por tanto es una medida de la generación de perturbaciones tensoriales en un modelo de inflación. En la aproximación de rodamiento lento se tiene que [18]:

$$r \approx 16\epsilon. \quad (5.12)$$

El valor que se obtiene si se inicia en  $\chi_{inicial}$  es casi cero  $r \approx 2 \times 10^{-8}$  de forma que no se tiene generación de perturbaciones tensoriales. El valor del mínimo es

$$V \approx 3.78 \times 10^{-10},$$

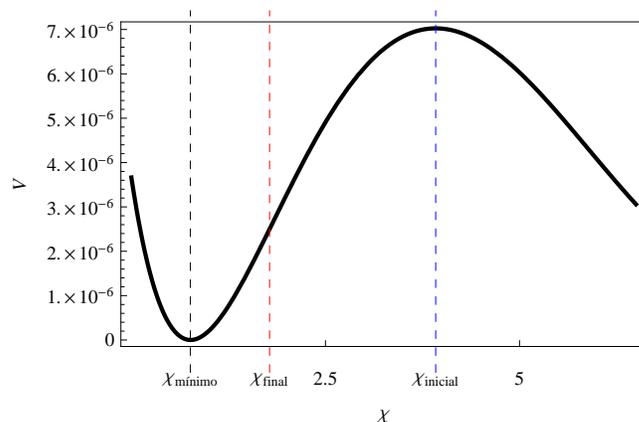


Figura 5.2: Corte a  $Re \Phi = (Re \Phi)_{mínimo}$  del potencial del campo canónicamente normalizado  $\chi$ . La región entre líneas punteadas cumple las condiciones de rodamiento suave con un número suficiente de e-folds

Con un ejemplo simple como el anterior, se muestra un posible uso de los campos modulares que aparecen en teorías de cuerdas, en donde además se encuentra estabilización. Pero para poder considerar una teoría de cuerdas como la descripción del universo que observamos es necesario tener control sobre todos los módulos. La estabilización de los potenciales completos en valores adecuados se deja como tarea futura. También es importante idear nuevas formas de estabilizar en estas construcciones como se hace en otras teorías de cuerdas.

## Capítulo 6

# Conclusiones

El objeto de interés en este trabajo han sido las compactificaciones de la cuerda heterótica en espacios llamados orbifolios abelianos. En esta teoría, al igual en otras teorías semejantes, al compactificar las dimensiones extra en un orbifolio toroidal se obtienen varios parámetros geométricos libres que se pueden interpretar como campos escalares en la teoría 4-dimensional. Estos campos deben ser tomados en cuenta físicamente en la teoría efectiva. Uno de los principales problemas a los que se enfrentan estos modelos, es al problema de estabilización de módulos, según el cual todos los módulos deben tener un mínimo estable en su potencial asociado y, por lo tanto, una masa. Si los campos de materia son pequeños (como se supone habitualmente), el potencial de Kähler a segundo orden constituye una buena aproximación de sus contribuciones al potencial escalar, por lo que puede ser utilizado como punto de partida para analizar la física emergente a bajas energías.

En nuestra búsqueda por una mejor comprensión de la fenomenología supersimétrica emergente en 4 dimensiones en estas construcciones, notamos que, mientras que se calculan algunos acoplamientos del superpotencial explícitamente, frecuentemente se hacen suposiciones serias sobre la estructura del potencial de Kähler, el cual puede incidir crucialmente en la dinámica efectiva de los campos de la teoría resultante. Asimismo, no todos los orbifolios abelianos han sido completamente caracterizados en su estructura modular. Por estas razones, estudiamos con sumo detalle la forma de determinar los campos modulares que surgen en estas construcciones para posteriormente concentrarnos en el cálculo explícito del potencial de Kähler, el cual requiere de técnicas avanzadas en teoría conforme de campos y cierta comprensión de las interacciones gravitacionales entre cuerdas.

Aunque en principio pueden existir muchos modelos de teorías de cuerdas heteróticas en orbifolios abelianos, a nivel de los módulos provenientes de la métrica los potenciales de Kähler son muy similares. La principal diferencia reside en el número total de campos en los sectores torcido y no-torcido que aparecen en la teoría y en los llamados pesos mod-

ulares de los campos en el sector torcido que aparecen como exponentes en (4.100), ya que estos dependen del sector en donde está definido el campo de materia de cada orbifolio. Otra diferencia se encuentra en los orbifolios con más de 3 módulos de Kähler porque los módulos que provienen de términos no diagonales en la métrica de Kähler asociada también contribuyen (ec. (4.92) y ec. (4.60)) en procesos de dispersión tanto con módulos en el sector no-torcido como en el torcido.

En esencia, encontramos que existen 5 formas de potenciales de Kähler a segundo orden, las cuales se enumeran a continuación, indicando mediante los grupos de punto para qué orbifolio abeliano son útiles:

- *Orbifolios con 3 módulos de Kähler  $T_i$  y 0 módulos de estructura compleja*

Grupos de punto:  $\mathbb{Z}_7, \mathbb{Z}_{8-I}, \mathbb{Z}_{12-I}$

$$K = -\ln(T_1 + \bar{T}_1)(T_2 + \bar{T}_2)(T_3 + \bar{T}_3) + \sum_{i=1}^3 \sum_{m_i}^N (T_i + \bar{T}_i)^{-1} \Phi_{m_i} \bar{\Phi}_{m_i} + \sum_t^N \prod_{i=1}^3 (T_i + \bar{T}_i)^{-n_i^{t\theta}} \Phi_{t\theta} \bar{\Phi}_{t\theta},$$

donde  $\Phi_{m_i}$  denotan campos de materia *no torcidos*,  $\Phi_{t\theta}$ , campos de materia *torcidos*, y  $n_i^{t\theta}$  son sus pesos modulares.

- *Orbifolios con 3 módulos de Kähler y 3 módulos de estructura compleja  $U_i$*

Grupo de punto:  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

$$K = -\ln(T_1 + \bar{T}_1)(T_2 + \bar{T}_2)(T_3 + \bar{T}_3) + \sum_{i=1}^3 \sum_{m_i}^N (U_i + \bar{U}_i)^{-1} (T_i + \bar{T}_i)^{-1} \Phi_{m_i} \bar{\Phi}_{m_i} \\ + \sum_t^N \prod_{i=1}^3 (U_i + \bar{U}_i)^{m_i^\theta} (T_i + \bar{T}_i)^{-n_i^\theta} \Phi_{t\theta} \bar{\Phi}_{t\theta}.$$

- *Orbifolios con 3 módulos de Kähler y 1 módulo de estructura compleja*

Grupos de punto:  $\mathbb{Z}_{6-II}, \mathbb{Z}_{8-II}, \mathbb{Z}_{12-II}$

$$K = -\ln(T_1 + \bar{T}_1)(T_2 + \bar{T}_2)(T_3 + \bar{T}_3) + \sum_{i=1}^3 \sum_{m_i}^N (U_l + \bar{U}_l)^{-\delta_{li}} (T_i + \bar{T}_i)^{-1} \Phi_{m_i} \bar{\Phi}_{m_i} \\ + \sum_{t\theta}^N \prod_{i=1}^3 (U_l + \bar{U}_l)^{m_i^\theta} (T_i + \bar{T}_i)^{-n_i^\theta} \Phi_{t\theta} \bar{\Phi}_{t\theta}.$$

El término  $\delta_{l,i}$  se añade para indicar que ese término es no nulo sólo cuando el módulo de estructura compleja  $U_l$  está definido en el plano en donde el campo  $\Phi_{m_i}$  se define. Puesto que sólo existe un  $U_l$  para cada orbifolio, el término  $(U_l + \bar{U}_l)^{-1}$  sólo aparece para campos de materia tales que  $m_i = m_l$ .

- *Orbifolios con 5 módulos de Kähler y 0 módulos de estructura compleja*

Grupo de punto:  $\mathbb{Z}_{6-I}$

$$\begin{aligned}
K &= -\ln[(T_{33} + \bar{T}_{33})((T_{22} + \bar{T}_{22})(T_{11} + \bar{T}_{11}) - (T_{12} + \bar{T}_{12})(T_{21} + \bar{T}_{21}))] \\
&+ \sum_{j=1}^2 \sum_{m_j}^N \prod_{i=1}^2 (T_{ji} + \bar{T}_{ji})^{-1} \Phi_{m_j} \bar{\Phi}_{m_j} + \sum_{m_3}^N (T_{33} + \bar{T}_{33})^{-1} \Phi_{m_3} \bar{\Phi}_{m_3} \\
&+ \sum_{t_\theta}^N \prod_{i=1}^2 (T_{1i} + \bar{T}_{1i})^{-n_{1i}^\theta} (T_{i1} + \bar{T}_{i1})^{-n_{i1}^\theta} (T_{33} + \bar{T}_{33})^{-n_{33}^\theta} \Phi_{t_\theta} \bar{\Phi}_{t_\theta}.
\end{aligned}$$

- *Orbifolios con 5 módulos de Kähler y 1 módulo de estructura compleja  $U_l$*

Grupo de punto:  $\mathbb{Z}_4$

$$\begin{aligned}
K &= -\ln[(T_{33} + \bar{T}_{33})((T_{22} + \bar{T}_{22})(T_{11} + \bar{T}_{11}) - (T_{12} + \bar{T}_{12})(T_{21} + \bar{T}_{21}))] \\
&+ \sum_{j=1}^2 \sum_{m_j}^N \prod_{i=1}^2 (U_l + \bar{U}_l)^{-\delta_{jl}} (T_{ji} + \bar{T}_{ji})^{-1} \Phi_{m_j} \bar{\Phi}_{m_j} + \sum_{m_3}^N (U_l + \bar{U}_l)^{-\delta_{l3}} (T_{33} + \bar{T}_{33})^{-1} \Phi_{m_3} \bar{\Phi}_{m_3} \\
&+ \sum_{t_\theta}^N \prod_{i=1}^2 (U_l + \bar{U}_l)^{-n_i^\theta} (T_{1i} + \bar{T}_{1i})^{-n_{1i}^\theta} (T_{i1} + \bar{T}_{i1})^{-n_{i1}^\theta} (T_{33} + \bar{T}_{33})^{-n_{33}^\theta} \Phi_{t_\theta} \bar{\Phi}_{t_\theta},
\end{aligned}$$

- *Orbifolios con 9 módulos de Kähler y 0 módulos de estructura compleja*

Grupo de punto:  $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$

$$K = -\ln \det(T_{ij} + \bar{T}_{ij}) + \sum_{i=1}^3 \sum_{m_i}^N \prod_{j=1}^3 (T_{ij} + \bar{T}_{ij})^{-1} \Phi_{m_i} \bar{\Phi}_{m_i} + \sum_{t_\theta}^N \prod_{i,j=1}^3 (T_{ij} + \bar{T}_{ij})^{-n_{ij}^\theta} \Phi_{t_\theta} \bar{\Phi}_{t_\theta}.$$

Como parte final de esta tesis se analizó un potencial modular que podría ser encontrado en construcciones de cuerdas heteróticas en orbifolios toroidales, sin embargo para poder estabilizarlo se dejaron de lado los muchos campos de materia que aparecen, que se suponen poseedores de una masa superior a las escalas de interés. En el potencial propuesto se encontró toda una serie de parámetros para los cuales se obtiene un mínimo  $dS$  (con constante cosmológica positiva) y además condiciones favorables para inflación del tipo *slow roll* o rodamiento lento, suficientes  $e$ -folds y  $r$  pequeño.

Para saber si los potenciales provenientes de cuerdas podrían tener cualidades cosmológicas reales, sería necesario primeramente extender el trabajo presente para considerar correcciones al potencial de Kähler provenientes de acoplamientos entre campos de materia  $\Phi$  y campos modulares. Las correcciones esperadas serían del tipo  $|\Phi|^n$  con  $n > 2$ . Posteriormente, se deberían calcular acoplamientos de campos de materia en el superpotencial,

para lo cual avances recientes [11, 10] podrían ser de enorme utilidad. La tarea final consistiría en estabilizar y analizar el potencial considerando todos los campos que aparecen en cada teoría. Ese trabajo ya se encuentra bajo análisis y será producto de alguna(s) publicación(es).

# Apéndice A

## MSSM con $\mathbb{Z}_7$

El grupo espacial con el que se construye un orbifoldo, en la teoría de cuerdas heterótica puede ser “incrustado” en los 16 grados de libertad compactificados en términos de un vector de desplazamiento y líneas de Wilson (Ver e.g. [4, secciones 5.2 y 8.3]):

$$X^I \mapsto X^I + kV + n_\alpha A^\alpha \quad I = 1, \dots, 16 \quad (\text{A.1})$$

En este apéndice se muestran las características y el espectro del modelo mencionado en el capítulo 3, con el cual al agregar una línea de Wilson y usar “standard embedding” se rompe el grupo de simetrías original de la teoría heterótica  $E_8 \times E_8$  y se obtiene el grupo del modelo estándar.

El vector de Shift es:

$$V = \left(-\frac{2}{7}, -\frac{2}{7}, -\frac{1}{7}, -\frac{1}{7}, -\frac{1}{7}, -\frac{1}{7}, -\frac{1}{7}, -\frac{1}{7}\right) (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$$

La única línea de Wilson es

$$W = \left(\frac{1}{7}, -\frac{5}{7}, \frac{5}{7}, 0, 0, -\frac{3}{7}, -\frac{3}{7}, -\frac{5}{7}\right) (0, 0, -\frac{2}{7}, -\frac{2}{7}, -\frac{2}{7}, -\frac{2}{7}, -\frac{3}{7}, -1)$$

El grupo de norma es:  $SU(2) \times SU(3) \times SU(8) \times U(1)^6$

Los grupos  $\mathbf{U(1)}$ :

$$\begin{aligned} U(1)_{\text{anom}} &= \left(\frac{3}{14}, -\frac{11}{14}, \frac{5}{14}, -\frac{9}{14}, -\frac{9}{14}, \frac{5}{14}, \frac{5}{14}, \frac{19}{14}\right) (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) \\ U(1)_Y &= \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, 0, 0, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right) (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) \\ U(1)_2 &= \left(\frac{17521}{2}, \frac{8799}{2}, -\frac{3073}{2}, \frac{945}{2}, \frac{945}{2}, -\frac{3073}{2}, -\frac{3073}{2}, \frac{5649}{2}\right) (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) \\ U(1)_3 &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) \left(0, 0, -\frac{7}{2}, -\frac{7}{2}, -\frac{7}{2}, -\frac{7}{2}, 7, 0\right) \\ U(1)_4 &= \left(0, -\frac{2709}{2}, \frac{1197}{2}, 3388, 3388, \frac{1197}{2}, \frac{1197}{2}, 1953\right) (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) \\ U(1)_5 &= \left(0, \frac{119}{2}, \frac{105}{2}, 0, 0, \frac{105}{2}, \frac{105}{2}, -7\right) (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) \end{aligned}$$

La notación que se usa en las tablas es:

- $U_i$  denota el sector no-torcido en el  $i$ -ésimo plano complejo.
- El  $k$ -ésimo sector torcido es  $T_{k(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6)}$ , en donde los tres pares de índices  $(n_1, n_2)$ ,  $(n_3, n_4)$  y  $(n_5, n_6)$ , especifican los puntos fijos en el primero, segundo y tercer plano complejo, respectivamente.
- $U(1)_{\text{anom}}$  denota el generador de el grupo  $U(1)$  anómalo y  $q_{\text{anom}}$  su correspondiente carga.
- $U(1)_Y$  es el generador de la hiper-carga. La carga es denotada por  $q_Y$ .

Sectors	Repr.	$q_{\text{anom}}$	$q_Y$	$q_2$	$q_3$	$q_4$	$q_5$	$m_1$	$m_2$	$m_3$	Labels
$U_1$	(1, 1, 1)	$-\frac{15}{7}$	0	1575	0	$-\frac{6615}{2}$	$\frac{133}{2}$	1	0	0	$N_2$
	(2, 1, 1)	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	8288	0	-3388	0	1	0	0	$\bar{L}_1$
$U_2$	(1, 1, 1)	$-\frac{9}{6}$	0	945	0	6776	0	0	1	0	$N_1$
	(1, $\bar{3}$ , 1)	$\frac{12}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1288	0	$\frac{5103}{2}$	$\frac{91}{2}$	0	1	0	$D_1$
$U_3$	(1, $\bar{3}$ , 1)	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	-2863	0	756	-112	0	0	1	$\bar{D}_1$
	(2, 1, 1)	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-9233	0	-3388	0	0	0	1	$L_1$
$T_{3(0,0,0,0,0,0)}$	(1, 1, 1)	$-\frac{6}{7}$	1	1176	0	$-\frac{1435}{2}$	$-\frac{7}{2}$	$\frac{3}{7}$	6	5	$E_1$
	(2, 1, 1)	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	5537	0	637	-63				$L_2$
	(1, 1, 1)	$-\frac{1}{6}$	0	-4760	0	$\frac{2471}{2}$	$-\frac{21}{2}$	$\frac{10}{7}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{5}{7}$	$N_3$
	(1, 1, 1)	$-\frac{1}{6}$	0	-4760	0	$\frac{2471}{2}$	$-\frac{21}{2}$	$\frac{10}{7}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{5}{7}$	$N_4$
	(1, 1, 1)	$-\frac{1}{6}$	0	2240	0	-4704	-56	$\frac{10}{7}$	$\frac{13}{7}$	$\frac{13}{7}$	$N_5$
	(1, 1, 1)	$-\frac{1}{6}$	0	8400	0	-119	49	$\frac{10}{7}$	$\frac{20}{7}$	$\frac{20}{7}$	$N_6$
	(1, 1, 1)	$-\frac{1}{6}$	0	-4760	0	$\frac{2471}{2}$	$-\frac{21}{2}$	$\frac{10}{7}$	$\frac{34}{7}$	$\frac{34}{7}$	$N_7$
	(1, 1, 1)	$-\frac{1}{6}$	0	-4760	0	$\frac{2471}{2}$	$-\frac{21}{2}$	$\frac{10}{7}$	$\frac{20}{7}$	$\frac{12}{7}$	$N_8$
	(1, 1, 1)	$-\frac{1}{6}$	0	8400	0	-119	49	$\frac{10}{7}$	$\frac{20}{7}$	$\frac{12}{7}$	$N_9$
	(1, 1, 1)	$-\frac{1}{6}$	0	-4760	0	$\frac{2471}{2}$	$-\frac{21}{2}$	$\frac{10}{7}$	$\frac{20}{7}$	$\frac{19}{7}$	$N_{10}$
	(1, $\bar{3}$ , 1)	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{3}$	-833	0	-3507	49				$\bar{D}_2$
	(2, $\bar{3}$ , 1)	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{3}$	1176	0	$-\frac{1435}{2}$	$-\frac{7}{2}$				$Q_1$
	(1, 1, 1)	$-\frac{13}{7}$	0	-3185	0	-2072	56				$N_{11}$
	(2, 1, 1)	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	3528	0	$-\frac{4305}{2}$	$-\frac{21}{2}$				$\bar{L}_2$
	(1, $\bar{3}$ , 1)	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	5537	0	637	-63				$\bar{D}_3$
	(2, 1, 1)	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-833	0	-3507	49				$L_3$
	(1, 1, 1)	$-\frac{13}{7}$	0	3185	0	2072	-56				$N_{12}$
	(1, $\bar{3}$ , 1)	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{3}$	3528	0	$-\frac{4305}{2}$	$-\frac{21}{2}$				$D_2$
	(1, $\bar{3}$ , 1)	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{3}$	1176	0	$-\frac{1435}{2}$	$-\frac{7}{2}$				$\bar{U}_1$
	$T_{3(0,0,0,0,0,1)}$	(1, 1, 1)	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{3}$	-2513	8	$-\frac{2461}{2}$	$-\frac{97}{2}$			
(2, 1, 1)		$-\frac{1}{14}$	$\frac{5}{14}$	-1225	8	1321	-3				$X_{11}$
(1, 1, 1)		$-\frac{1}{14}$	$\frac{1}{14}$	2702	8	$-\frac{6843}{2}$	$\frac{113}{2}$				$S_{12}$
$T_{3(0,0,0,0,1,1)}$	(1, 1, $\bar{8}$ )	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{3}$	-2051	$-\frac{3}{2}$	52	64				$\bar{S}_{21}$
	$T_{3(0,0,0,1,1,1)}$	(1, $\bar{3}$ , 1)	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	-5740	-4	-461	19			
(1, 1, 1)		$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{3}$	-1379	-4	$\frac{1787}{2}$	$-\frac{81}{2}$				$\bar{S}_{31}$
(1, 1, 1)		$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{3}$	-3388	-4	-1896	12				$S_{41}$
(1, 1, 1)		$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{3}$	-1379	-4	$\frac{1787}{2}$	$-\frac{81}{2}$				$\bar{S}_{32}$
(1, 1, 1)		$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{3}$	-1379	-4	$\frac{1787}{2}$	$-\frac{81}{2}$				$\bar{S}_{33}$
(1, 1, 1)		$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{3}$	-2443	-4	4880	12				$S_{42}$
(1, $\bar{3}$ , 1)		0	$-\frac{2}{3}$	2548	-4	-3849	19				$X_{31}$
(1, $\bar{3}$ , 1)		$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	5845	-4	1492	12				$X_{22}$

Sectors	Repr.	$q_{anom}$	$q_Y$	$q_2$	$q_3$	$q_4$	$q_5$	$m_1$	$m_2$	$m_3$	Labels
$T_3(0,0,1,1,1,1)$	(1, 1, 1)	-1	$\frac{4}{7}$	4557	-4	$-\frac{2119}{2}$	$-\frac{67}{2}$	$\frac{13}{7}$	$\frac{13}{7}$	$\frac{5}{7}$	$S4_3$
	(2, 1, 1)	-	$\frac{1}{14}$	1484	-4	$\frac{275}{2}$	$\frac{143}{2}$	$\frac{13}{7}$	$\frac{13}{7}$	$\frac{5}{7}$	$X4_1$
	(1, 1, 1)	-	$-\frac{4}{7}$	-7077	4	-2409	-33	$\frac{13}{7}$	$\frac{13}{7}$	$\frac{5}{7}$	$\bar{S}4_1$
	(1, 1, 1)	-	$-\frac{1}{7}$	-8141	4	$\frac{3155}{2}$	$\frac{39}{2}$	$\frac{13}{7}$	$\frac{13}{7}$	$\frac{5}{7}$	$S3_1$
	(2, 1, 1)	-	$-\frac{1}{14}$	2156	4	979	-33	$\frac{13}{7}$	$\frac{13}{7}$	$\frac{5}{7}$	$X5_1$
	(2, 1, 1)	-	$-\frac{1}{14}$	2156	4	979	-33	$\frac{13}{7}$	$\frac{13}{7}$	$\frac{5}{7}$	$X5_2$
	(1, 1, 1)	$-\frac{1}{7}$	$-\frac{2}{7}$	-196	4	2414	-26	$\frac{13}{7}$	$\frac{13}{7}$	$\frac{5}{7}$	$S3_2$
	(1, 3, 1)	-	$\frac{2}{21}$	147	4	$-\frac{3621}{2}$	$\frac{39}{2}$	$\frac{13}{7}$	$\frac{13}{7}$	$\frac{5}{7}$	$X6_1$
	(1, 1, 1)	1	$-\frac{4}{7}$	-917	4	2176	72	$\frac{13}{7}$	$\frac{13}{7}$	$\frac{5}{7}$	$\bar{S}4_2$
	(1, 1, 1)	-	$-\frac{4}{7}$	6083	4	$-\frac{7527}{2}$	$\frac{53}{2}$	$\frac{13}{7}$	$\frac{13}{7}$	$\frac{5}{7}$	$\bar{S}4_3$
	(1, 1, 1)	-	$-\frac{5}{21}$	-1141	4	-4362	-26	$\frac{13}{7}$	$\frac{13}{7}$	$\frac{5}{7}$	$S3_3$
	(1, 3, 1)	-	$-\frac{5}{21}$	-2205	4	$-\frac{751}{2}$	$\frac{53}{2}$	$\frac{13}{7}$	$\frac{13}{7}$	$\frac{5}{7}$	$X7_1$
$T_3(0,1,1,1,1,1)$	(1, 1, 1)	-	$\frac{3}{7}$	5019	4	223	79	$\frac{13}{7}$	$\frac{13}{7}$	$\frac{5}{7}$	$S3_4$
	(1, 1, 8)	-	$\frac{3}{2}$	5691	$\frac{3}{2}$	$\frac{2129}{2}$	$-\frac{51}{2}$	$\frac{13}{7}$	$\frac{13}{7}$	$\frac{5}{7}$	$S5_1$
$T_3(1,1,1,1,1,1)$	(1, 1, 8)	1	$-\frac{5}{7}$	-7	$\frac{5}{2}$	-2238	-18	$\frac{13}{7}$	$\frac{13}{7}$	$\frac{5}{7}$	$S6_1$
	(1, 1, 1)	1	$-\frac{7}{7}$	-7	-8	-2238	-18	$\frac{13}{7}$	$\frac{13}{7}$	$\frac{5}{7}$	$S1_1$
(1, 1, 1)	-2	$-\frac{1}{7}$	938	-8	4538	-18	$\frac{13}{7}$	$\frac{13}{7}$	$\frac{5}{7}$	$S1_2$	
$T_5(0,0,0,0,0,0)$	(1, 1, 1)	-	1	56	0	$\frac{3269}{2}$	$\frac{49}{2}$	$\frac{13}{7}$	$\frac{13}{7}$	$\frac{5}{7}$	$E_2$
	(2, 1, 1)	-	$-\frac{1}{2}$	4417	0	2989	-35	$\frac{13}{7}$	$\frac{13}{7}$	$\frac{5}{7}$	$L_4$
	(1, 1, 1)	-	0	-5880	0	$\frac{7175}{2}$	$\frac{35}{2}$	$\frac{13}{7}$	$\frac{13}{7}$	$\frac{5}{7}$	$N_{13}$
	(1, 1, 1)	-	0	1120	0	-2352	-28	$\frac{13}{7}$	$\frac{13}{7}$	$\frac{5}{7}$	$N_{14}$
	(1, 1, 1)	-	0	1120	0	-2352	-28	$\frac{13}{7}$	$\frac{13}{7}$	$\frac{5}{7}$	$N_{15}$
	(1, 1, 1)	-	0	1120	0	-2352	-28	$\frac{13}{7}$	$\frac{13}{7}$	$\frac{5}{7}$	$N_{16}$
	(1, 1, 1)	-	0	1120	0	-2352	-28	$\frac{13}{7}$	$\frac{13}{7}$	$\frac{5}{7}$	$N_{17}$
	(1, 1, 1)	0	0	7280	0	2233	77	$\frac{13}{7}$	$\frac{13}{7}$	$\frac{5}{7}$	$N_{18}$
	(1, 1, 1)	-	0	-5880	0	$\frac{7175}{2}$	$\frac{35}{2}$	$\frac{13}{7}$	$\frac{13}{7}$	$\frac{5}{7}$	$N_{19}$
	(1, 1, 1)	-	0	1120	0	-2352	-28	$\frac{13}{7}$	$\frac{13}{7}$	$\frac{5}{7}$	$N_{20}$
	(1, 3, 1)	-	1	-1953	0	-1155	77	$\frac{13}{7}$	$\frac{13}{7}$	$\frac{5}{7}$	$\bar{D}_4$
	(2, 3, 1)	-	$\frac{6}{6}$	56	0	$\frac{3269}{2}$	$\frac{49}{2}$	$\frac{13}{7}$	$\frac{13}{7}$	$\frac{5}{7}$	$Q_2$
	(1, 1, 1)	$-\frac{11}{7}$	0	-4305	0	280	84	$\frac{13}{7}$	$\frac{13}{7}$	$\frac{5}{7}$	$N_{21}$
	(2, 1, 1)	$-\frac{10}{7}$	1	2408	0	$\frac{399}{2}$	$\frac{35}{2}$	$\frac{13}{7}$	$\frac{13}{7}$	$\frac{5}{7}$	$\bar{L}_3$
	(1, 3, 1)	$-\frac{3}{7}$	0	4417	0	2989	-35	$\frac{13}{7}$	$\frac{13}{7}$	$\frac{5}{7}$	$\bar{D}_5$
	(2, 1, 1)	$-\frac{1}{2}$	0	-1953	0	-1155	77	$\frac{13}{7}$	$\frac{13}{7}$	$\frac{5}{7}$	$L_5$
	(1, 1, 1)	$-\frac{1}{7}$	0	2065	0	4424	-28	$\frac{13}{7}$	$\frac{13}{7}$	$\frac{5}{7}$	$N_{22}$
	(1, 3, 1)	$-\frac{10}{7}$	1	2408	0	$\frac{399}{2}$	$\frac{35}{2}$	$\frac{13}{7}$	$\frac{13}{7}$	$\frac{5}{7}$	$D_3$
	(1, 3, 1)	-4	0	56	0	$\frac{3269}{2}$	$\frac{49}{2}$	$\frac{13}{7}$	$\frac{13}{7}$	$\frac{5}{7}$	$\bar{U}_2$
	$T_5(0,0,0,-1,0,0)$	(1, 1, 8)	-	$-\frac{5}{7}$	-1127	$\frac{5}{2}$	114	10	$\frac{13}{7}$	$\frac{13}{7}$	$\frac{5}{7}$
(1, 1, 1)		-	$-\frac{4}{7}$	-1127	-8	114	10	$\frac{13}{7}$	$\frac{13}{7}$	$\frac{5}{7}$	$S1_3$
(1, 1, 1)		-	$-\frac{1}{7}$	6818	-8	$\frac{1901}{2}$	$-\frac{71}{2}$	$\frac{13}{7}$	$\frac{13}{7}$	$\frac{5}{7}$	$S1_4$
$T_5(0,-1,-1,-1,0,0)$	(1, 1, 1)	1	$-\frac{4}{7}$	-8197	4	-57	-5	$\frac{13}{7}$	$\frac{13}{7}$	$\frac{5}{7}$	$\bar{S}4_4$
	(1, 1, 1)	-	$-\frac{1}{7}$	-2261	4	-2010	2	$\frac{13}{7}$	$\frac{13}{7}$	$\frac{5}{7}$	$S3_5$
	(1, 1, 1)	-	$-\frac{1}{7}$	-2261	4	-2010	2	$\frac{13}{7}$	$\frac{13}{7}$	$\frac{5}{7}$	$S3_6$
	(1, 1, 1)	-	$-\frac{4}{7}$	-252	4	$\frac{1559}{2}$	$-\frac{101}{2}$	$\frac{13}{7}$	$\frac{13}{7}$	$\frac{5}{7}$	$\bar{S}4_5$
	(1, 1, 1)	-	$-\frac{7}{7}$	-2261	4	-2010	2	$\frac{13}{7}$	$\frac{13}{7}$	$\frac{5}{7}$	$S3_7$
	(1, 3, 1)	-	$-\frac{5}{21}$	-3325	4	$\frac{3953}{2}$	$\frac{109}{2}$	$\frac{13}{7}$	$\frac{13}{7}$	$\frac{5}{7}$	$X7_2$
	(1, 3, 1)	-	$-\frac{21}{21}$	2100	4	$-\frac{1311}{2}$	$-\frac{115}{2}$	$\frac{13}{7}$	$\frac{13}{7}$	$\frac{5}{7}$	$X7_3$
	(1, 3, 1)	-	$-\frac{21}{21}$	6972	4	1378	2	$\frac{13}{7}$	$\frac{13}{7}$	$\frac{5}{7}$	$X6_2$
	(2, 1, 1)	-	$-\frac{1}{14}$	1036	4	3331	-5	$\frac{13}{7}$	$\frac{13}{7}$	$\frac{5}{7}$	$X5_3$
	(1, 1, 1)	-	$-\frac{4}{7}$	4963	4	$-\frac{2823}{2}$	$\frac{109}{2}$	$\frac{13}{7}$	$\frac{13}{7}$	$\frac{5}{7}$	$\bar{S}4_6$
$T_5(-1,-1,-1,-1,0,0)$	(1, 3, 1)	$-\frac{5}{21}$	-1435	-4	-741	-65	$\frac{13}{7}$	$\frac{13}{7}$	$\frac{5}{7}$	$X2_3$	

Sectors	Repr.	$q_{anom}$	$q_Y$	$q_2$	$q_3$	$q_4$	$q_5$	$m_1$	$m_2$	$m_3$	Labels	
$T_5(0,0,0,0,1,1)$ $T_5(0,0,0,0,1,0)$	(1, 1, 1)	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$	-2499	-4	$\frac{6491}{2}$	$-\frac{25}{2}$	$\frac{12}{7}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{6}{6}$	$\bar{S}3_4$	
	(2, 1, 1)	$-\frac{1}{14}$	$\frac{1}{14}$	-5796	-4	$-\frac{4191}{2}$	$-\frac{11}{2}$	$\frac{15}{7}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{13}{6}$	$X4_2$	
	(1, 1, 1)	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$	-2499	-4	$\frac{6491}{2}$	$-\frac{25}{2}$	$\frac{12}{7}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{20}{6}$	$\bar{S}3_5$	
	(1, 1, 1)	$-\frac{10}{7}$	$-\frac{10}{7}$	-4508	-4	456	40	$\frac{12}{7}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{6}{6}$	$S4_4$	
	(1, 1, 1)	$-\frac{12}{7}$	$-\frac{12}{7}$	-924	-4	-62	54	$\frac{12}{7}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{6}{6}$	$\bar{S}3_6$	
	(2, 1, 1)	$-\frac{1}{14}$	$\frac{1}{14}$	5789	-4	$-\frac{285}{2}$	$-\frac{25}{2}$	$\frac{15}{7}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{13}{6}$	$X4_3$	
	(1, 1, 1)	$-\frac{2}{21}$	$\frac{2}{21}$	3437	-4	$\frac{2585}{2}$	$-\frac{11}{2}$	$\frac{12}{7}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{6}{6}$	$S4_5$	
	(1, $\bar{3}$ , 1)	$-\frac{2}{21}$	$-\frac{2}{21}$	1428	-4	-1497	47	$\frac{12}{7}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{13}{6}$	$X3_2$	
	(1, 1, 1)	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$	4501	-4	-2694	-58	$\frac{12}{7}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{13}{6}$	$\bar{S}3_7$	
	(1, 1, 1)	$-\frac{1}{14}$	$\frac{1}{14}$	3437	-4	$\frac{2585}{2}$	$-\frac{11}{2}$	$\frac{15}{7}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{20}{6}$	$S4_6$	
	(1, 1, $\bar{8}$ )	$-\frac{1}{14}$	$-\frac{1}{14}$	2254	-3	-228	-20	$\frac{12}{7}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{6}{6}$	$\bar{S}2_2$	
	(1, 1, $\bar{8}$ )	-1	-1	-3633	$-\frac{5}{2}$	$\frac{2243}{2}$	$-\frac{41}{2}$	$\frac{12}{7}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{6}{6}$	$\bar{S}7_1$	
	(1, 1, 1)	-1	-1	-3633	8	$\frac{2243}{2}$	$-\frac{41}{2}$	$\frac{12}{7}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{13}{6}$	$\bar{S}1_3$	
	(1, 1, 1)	$-\frac{4}{7}$	$-\frac{4}{7}$	1582	8	$-\frac{2139}{2}$	$\frac{169}{2}$	$\frac{12}{7}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{6}{6}$	$\bar{S}1_4$	
$T_6(0,0,0,0,0,0)$	(1, 1, 1)	$-\frac{1}{2}$	1	-3584	0	518	-14	$\frac{13}{7}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{6}{6}$	$E_3$	
	(2, 1, 1)	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	777	0	$\frac{3745}{2}$	$-\frac{147}{2}$	$\frac{13}{7}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{6}{6}$	$L_6$	
	(1, 1, 1)	0	0	-9520	0	2471	-21	$\frac{13}{7}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{6}{6}$	$N_{23}$	
	(1, 1, 1)	$-\frac{2}{7}$	0	-2520	0	$-\frac{6937}{2}$	$-\frac{133}{2}$	$\frac{20}{7}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{6}{6}$	$N_{24}$	
	(1, 1, 1)	0	0	3640	0	$\frac{2233}{2}$	$\frac{77}{2}$	$\frac{34}{7}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{6}{6}$	$N_{25}$	
	(1, 1, 1)	0	0	3640	0	$\frac{2233}{2}$	$\frac{77}{2}$	$\frac{20}{7}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{6}{6}$	$N_{26}$	
	(1, 1, 1)	0	0	3640	0	$\frac{2233}{2}$	$\frac{77}{2}$	$\frac{13}{7}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{6}{6}$	$N_{27}$	
	(1, 1, 1)	$-\frac{2}{7}$	0	-2520	0	$-\frac{6937}{2}$	$-\frac{133}{2}$	$\frac{13}{7}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{6}{6}$	$N_{28}$	
	(1, 1, 1)	0	0	3640	0	$\frac{2233}{2}$	$\frac{77}{2}$	$\frac{13}{7}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{6}{6}$	$N_{29}$	
	(1, 1, 1)	0	0	3640	0	$\frac{2233}{2}$	$\frac{77}{2}$	$\frac{10}{7}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{6}{6}$	$N_{30}$	
	(1, $\bar{3}$ , 1)	$-\frac{3}{6}$	$\frac{1}{3}$	-5593	0	$-\frac{4543}{2}$	$\frac{77}{2}$	$\frac{10}{7}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{6}{6}$	$\bar{D}_6$	
	(2, $\bar{3}$ , 1)	$-\frac{11}{14}$	$-\frac{11}{14}$	-3584	0	518	-14	$\frac{13}{7}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{6}{6}$	$Q_3$	
	(1, 1, 1)	$-\frac{11}{14}$	0	-7945	0	$-\frac{1673}{2}$	$\frac{91}{2}$	$\frac{13}{7}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{6}{6}$	$N_{31}$	
	(2, 1, 1)	$-\frac{10}{7}$	$\frac{1}{2}$	-1232	0	-917	-21	$\frac{13}{7}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{6}{6}$	$\bar{L}_4$	
	(1, $\bar{3}$ , 1)	$-\frac{3}{6}$	$\frac{1}{3}$	777	0	$\frac{3745}{2}$	$-\frac{147}{2}$	$\frac{13}{7}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{6}{6}$	$\bar{D}_7$	
	(2, 1, 1)	$-\frac{11}{14}$	$-\frac{11}{14}$	-5593	0	$-\frac{4543}{2}$	$\frac{77}{2}$	$\frac{10}{7}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{6}{6}$	$L_7$	
	(1, 1, 1)	$-\frac{11}{14}$	0	-1575	0	$\frac{6615}{2}$	$-\frac{133}{2}$	$\frac{13}{7}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{6}{6}$	$N_{32}$	
	(1, $\bar{3}$ , 1)	$-\frac{10}{7}$	$-\frac{1}{2}$	-1232	0	-917	-21	$\frac{13}{7}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{6}{6}$	$D_4$	
	(1, $\bar{3}$ , 1)	$-\frac{1}{14}$	$-\frac{1}{14}$	-3584	0	518	-14	$\frac{13}{7}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{6}{6}$	$\bar{U}_3$	
	(1, 1, 1)	$-\frac{1}{14}$	$-\frac{1}{14}$	-4767	-8	$-\frac{2005}{2}$	$-\frac{57}{2}$	$\frac{13}{7}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{6}{6}$	$S1_5$	
	(1, 1, 1)	$-\frac{1}{14}$	$-\frac{1}{14}$	3178	-8	-166	-74	$\frac{13}{7}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{6}{6}$	$S1_6$	
	(2, 1, 1)	$-\frac{1}{14}$	$-\frac{1}{14}$	105	-8	1031	31	$\frac{13}{7}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{6}{6}$	$X8_1$	
	$T_6(0,0,0,-1,-1,0)$	(1, 1, $\bar{8}$ )	$-\frac{5}{21}$	$\frac{5}{21}$	931	$\frac{3}{2}$	2300	-36	$\frac{13}{7}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{6}{6}$	$S5_2$
		(1, $\bar{3}$ , 1)	$-\frac{5}{21}$	$-\frac{5}{21}$	-6965	4	860	16	$\frac{13}{7}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{6}{6}$	$X7_4$
	$T_6(0,0,-1,-1,-1,0)$	(1, 1, 1)	$-\frac{1}{14}$	$-\frac{1}{14}$	-5901	4	$-\frac{6253}{2}$	$-\frac{73}{2}$	$\frac{20}{7}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{6}{6}$	$S3_8$
		(1, 1, 1)	$-\frac{1}{14}$	$-\frac{1}{14}$	259	4	$\frac{2917}{2}$	$\frac{137}{2}$	$\frac{20}{7}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{6}{6}$	$S3_9$
		(1, 1, 1)	$-\frac{1}{14}$	$-\frac{1}{14}$	259	4	$\frac{2917}{2}$	$\frac{137}{2}$	$\frac{20}{7}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{6}{6}$	$S3_{10}$
		(2, 1, 1)	$-\frac{11}{14}$	$-\frac{11}{14}$	-1029	4	-1093	23	$\frac{13}{7}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{6}{6}$	$X5_4$
		(1, 1, 1)	$-\frac{4}{7}$	$-\frac{4}{7}$	5684	4	$-\frac{2347}{2}$	$-\frac{87}{2}$	$\frac{13}{7}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{6}{6}$	$S3_{11}$
		(1, 1, 1)	$-\frac{1}{14}$	$-\frac{1}{14}$	2268	4	4248	16	$\frac{13}{7}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{6}{6}$	$\bar{S}4_7$
		(2, 1, 1)	$-\frac{1}{14}$	$-\frac{1}{14}$	-2604	4	$\frac{4429}{2}$	$-\frac{87}{2}$	$\frac{13}{7}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{6}{6}$	$X5_5$
		(1, $\bar{3}$ , 1)	$-\frac{2}{21}$	$\frac{2}{21}$	3332	4	$\frac{523}{2}$	$-\frac{73}{2}$	$\frac{13}{7}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{6}{6}$	$X6_3$
		(1, 1, 1)	$-\frac{4}{7}$	$-\frac{4}{7}$	1323	4	-2528	16	$\frac{20}{7}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{6}{6}$	$\bar{S}4_8$
(1, 1, 1)		$-\frac{4}{7}$	$-\frac{4}{7}$	1323	4	-2528	16	$\frac{20}{7}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{6}{6}$	$\bar{S}4_9$	
$T_6(0,-1,-1,-1,-1,0)$	(1, 1, 1)	$-\frac{12}{7}$	$-\frac{12}{7}$	-4564	-4	$-\frac{2357}{2}$	$\frac{31}{2}$	$\frac{13}{7}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{6}{6}$	$\bar{S}3_8$	
	(2, 1, 1)	$-\frac{1}{14}$	$\frac{1}{14}$	2149	-4	-1259	-51	$\frac{13}{7}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{6}{6}$	$X4_4$	

Sectors	Repr.	$q_{\text{anom}}$	$q_Y$	$q_2$	$q_3$	$q_4$	$q_5$	$m_1$	$m_2$	$m_3$	Labels
$T_{6(0,0,0,0,0,1)}$	$(\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1})$	$\frac{3}{7}$	$-\frac{3}{7}$	-6139	-4	2129	-51	$\frac{13}{7}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\bar{S}3_9$
	$(\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1})$	$-\frac{10}{7}$	$\frac{4}{7}$	-203	-4	176	-44	$\frac{20}{7}$	$\frac{15}{7}$	$\frac{3}{7}$	$S4_7$
	$(\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1})$	$-\frac{10}{7}$	$\frac{4}{7}$	-203	-4	176	-44	$\frac{10}{7}$	$\frac{12}{7}$	$\frac{3}{7}$	$S4_8$
	$(\mathbf{1}, \mathbf{3}, \mathbf{1})$	1	$\frac{21}{7}$	1085	-4	$\frac{5455}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{3}{7}$	$X2_4$
	$(\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1})$	$\frac{6}{7}$	$\frac{4}{7}$	5012	-4	-2015	61	$\frac{6}{7}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{3}{7}$	$S4_9$
	$(\mathbf{1}, \bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1})$	$\frac{2}{7}$	$-\frac{2}{21}$	-2212	-4	$-\frac{5227}{2}$	$\frac{17}{2}$	$\frac{13}{7}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{3}{7}$	$X3_3$
	$(\mathbf{2}, \mathbf{1}, \mathbf{1})$	0	$\frac{1}{14}$	-3276	-4	1373	61	$\frac{13}{7}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{3}{7}$	$X4_5$
	$(\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1})$	$-\frac{1}{7}$	$-\frac{3}{7}$	7021	-4	$\frac{1549}{2}$	$\frac{17}{2}$	$\frac{20}{7}$	$\frac{15}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\bar{S}3_{10}$
	$(\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1})$	$-\frac{1}{7}$	$-\frac{3}{7}$	7021	-4	$\frac{1549}{2}$	$\frac{17}{2}$	$\frac{7}{7}$	$\frac{12}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\bar{S}3_{11}$
	$(\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{8})$	$\frac{4}{7}$	$-\frac{1}{7}$	-2058	$-\frac{5}{2}$	-2186	46	$\frac{7}{7}$	$\frac{15}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\bar{S}7_2$
	$(\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1})$	$\frac{4}{7}$	$-\frac{1}{7}$	4312	8	1958	-66	$\frac{6}{7}$	$\frac{15}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\bar{S}1_5$
	$(\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1})$	$\frac{4}{7}$	$-\frac{1}{7}$	-2058	8	-2186	46	$\frac{13}{7}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\bar{S}1_6$

## Apéndice B

# Detalles de los orbifolios $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$

En este apéndice se muestran las métricas, matrices de transformación y coordenadas complejas de los orbifolios formados con  $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$  en las 5 diferentes redes disponibles sin roto-traslaciones. Los orbifolios están enumerados como en la tabla 3.3.

Los elementos mostrados son suficientes para el cálculo de los módulos de Kähler.

### Retícula 1

Las dos matrices que definen las transformaciones de los vectores de la retícula son:

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.1})$$

De resolver las ecuaciones  $Q_i^T g Q_i$  la métrica que se obtiene es

$$g = \begin{pmatrix} R_1^2 & -R_1^2/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -R_1^2/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_3^2 & -R_3^2/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -R_3^2/2 & R_3^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_5^2 & -R_5^2/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -R_5^2/2 & R_5^2/2 \end{pmatrix} \quad (\text{B.2})$$

y, de resolver las ecuaciones (3.8) y (3.9) se encuentran las siguientes coordenadas complejas:

$$z_1 = \left( \frac{1}{18\sqrt{3}} \right)^{1/6} (x_1 + e^{2\pi i/3} x_2) \quad (\text{B.3})$$

$$z_2 = \left( \frac{1}{18\sqrt{3}} \right)^{1/6} (x_3 + e^{2\pi i/3} x_4) \quad (\text{B.4})$$

$$z_3 = \left( \frac{1}{18\sqrt{3}} \right)^{1/6} (x_5 + e^{2\pi i/3} x_6). \quad (\text{B.5})$$

## Retícula 2

En la retícula correspondiente las matrices que codifican las transformaciones son:

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad Q_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.6})$$

La invariancia ante las dos matrices anteriores da como resultado la siguiente métrica:

$$g = \begin{pmatrix} R_1^2 & \frac{1}{2}R_1^2(1-2\cos\theta_{24}) & \frac{1}{2}R_1^2(1-2\cos\theta_{24}) & -\frac{R_1^2}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}R_1^2(1-2\cos\theta_{24}) & R_1^2 & \frac{1}{2}R_1^2(1-2\cos\theta_{24}) & R_1^2\cos\theta_{24} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}R_1^2(1-2\cos\theta_{24}) & \frac{1}{2}R_1^2(1-2\cos\theta_{24}) & R_1^2 & -\frac{R_1^2}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{R_1^2}{2} & R_1^2\cos\theta_{24} & -\frac{R_1^2}{2} & R_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_5^2 & -R_5^2/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -R_5^2/2 & R_5^2/2 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.7})$$

y resolviendo (3.8) y (3.9) se obtienen las siguientes coordenadas complejas:

$$z_1 = \left( \frac{1}{54\sqrt{3}} \right)^{1/6} (x_1 + x_2 + x_3 + e^{2\pi i/3} x_4) \quad (\text{B.8})$$

$$z_2 = \left( \frac{1}{54\sqrt{3}} \right)^{1/6} (x_5 + e^{2\pi i/3} x_6) \quad (\text{B.9})$$

$$z_3 = \left( \frac{1}{54\sqrt{3}} \right)^{1/6} (x_1 - e^{\pi i/3} x_2 + 2\pi i/3 x_3 - e^{\pi i/3} x_4). \quad (\text{B.10})$$

### Retícula 3

Las matrices  $Q_i$  son:

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad Q_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.11})$$

La métrica es:

$$g = \begin{pmatrix} x & \frac{6x \cos \theta_{12}}{1+2 \cos \theta_{12}} & \frac{6x \cos \theta_{12}}{1+2 \cos \theta_{12}} & \frac{3x(1-2 \cos \theta_{12})}{1+2 \cos \theta_{12}} & x & x \\ \frac{6x \cos \theta_{12}}{1+2 \cos \theta_{12}} & \frac{6x}{1+2 \cos \theta_{12}} & \frac{6x \cos \theta_{12}}{1+2 \cos \theta_{12}} & -\frac{3x}{1+2 \cos \theta_{12}} & x & x \\ \frac{6x \cos \theta_{12}}{1+2 \cos \theta_{12}} & \frac{6x \cos \theta_{12}}{1+2 \cos \theta_{12}} & \frac{6x}{1+2 \cos \theta_{12}} & -\frac{3x}{1+2 \cos \theta_{12}} & x & x \\ \frac{3x(1-2 \cos \theta_{12})}{1+2 \cos \theta_{12}} & -\frac{3x}{1+2 \cos \theta_{12}} & -\frac{3x}{1+2 \cos \theta_{12}} & \frac{6x}{1+2 \cos \theta_{12}} & x & x \\ x & x & x & x & R_6^2 & \frac{1}{2}(-R_6^2 - 6x) \\ x & x & x & x & \frac{1}{2}(-R_6^2 - 6x) & R_6^2 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.12})$$

con  $x = (6R_6^2 \cos^2 \theta_{15}) / (1+2 \cos \theta_{12})$ . Las coordenadas complejas que describen el orbifold son

$$z_1 = \left( \frac{1}{54\sqrt{3}} \right)^{1/6} (x_1 + x_2 + x_3 + e^{2\pi i/3} x_4 + (1 + e^{2\pi i/3})x_5 + (1 + e^{2\pi i/3})x_6) \quad (\text{B.13})$$

$$z_2 = \left( \frac{1}{54\sqrt{3}} \right)^{1/6} (x_1 + e^{2\pi i/3} x_2 - e^{\pi i/3} x_3 + x_4) \quad (\text{B.14})$$

$$z_3 = \left( \frac{1}{54\sqrt{3}} \right)^{1/6} (x_5 - e^{\pi i/3} x_6). \quad (\text{B.15})$$

### Retícula 4

Las matrices que definen las transformaciones de los vectores de la retícula son:

$$Q_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.16})$$

La métrica es:

$$g = \begin{pmatrix} R_1^2 & 0 & \frac{R_3^2}{2} & \frac{1}{2}(-R_1^2 + R_5^2) & -\frac{R_5^2}{2} & 0 \\ 0 & R_3^2 & -\frac{R_3^2}{2} & \frac{R_3^2}{2} & 0 & 0 \\ \frac{R_3^2}{2} & -\frac{R_3^2}{2} & R_3^2 & -\frac{R_3^2}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}(-R_1^2 + R_5^2) & \frac{R_3^2}{2} & -\frac{R_3^2}{2} & R_1^2 & -\frac{R_5^2}{2} & 0 \\ -\frac{R_5^2}{2} & 0 & 0 & -\frac{R_5^2}{2} & R_5^2 & -\frac{R_5^2}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{R_5^2}{2} & R_5^2 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.17})$$

y las coordenadas complejas que describen el orbifoldio son

$$z_1 = \left( \frac{1}{162\sqrt{3}} \right)^{1/6} (x_1 + x_4 + (-2 - e^{2\pi i/3})x_5 + i\sqrt{3}x_6) \quad (\text{B.18})$$

$$z_2 = \left( \frac{1}{162\sqrt{3}} \right)^{1/6} (x_1 - e^{\pi i/3}x_4) \quad (\text{B.19})$$

$$z_3 = \left( \frac{1}{162\sqrt{3}} \right)^{1/6} (x_1 + i\sqrt{3}x_2 + (2 - e^{\pi i/3})x_3 + e^{2\pi i/3}x_4). \quad (\text{B.20})$$

## Retícula 5

Las transformaciones de los grupos de punto en los vectores de la retícula están dadas por:

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.21})$$

La métrica es:

$$g = \begin{pmatrix} R_1^2 & R_1^2 \cos \theta_{12} & R_1^2 \cos \theta_{12} & R_1^2 \cos \theta_{14} & -\frac{R_1^2}{2} & x \\ R_1^2 \cos \theta_{12} & R_1^2 & R_1^2 \cos \theta_{12} & x & R_1^2 \cos \theta_{14} & -\frac{R_1^2}{2} \\ R_1^2 \cos \theta_{12} & R_1^2 \cos \theta_{12} & R_1^2 & -\frac{R_1^2}{2} & x & R_1^2 \cos \theta_{14} \\ R_1^2 \cos \theta_{14} & x & -\frac{R_1^2}{2} & R_1^2 & R_1^2 \cos \theta_{12} & R_1^2 \cos \theta_{12} \\ -R_1^2/2 & R_1^2 \cos \theta_{14} & x & R_1^2 \cos \theta_{12} & R_1^2 & R_1^2 \cos \theta_{12} \\ x & -\frac{R_1^2}{2} & R_1^2 \cos \theta_{14} & R_1^2 \cos \theta_{12} & R_1^2 \cos \theta_{12} & R_1^2 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.22})$$

con  $x = -R_1^2(\cos \theta_{12} + \cos \theta_{14})$ . Las coordenadas complejas que describen el orbifoldio son las siguientes

$$z_1 = \left( \frac{1}{486\sqrt{3}} \right)^{1/6} (x_1 + x_2 + x_3 + e^{2\pi i/3}x_4 + e^{2\pi i/3}x_5 + e^{2\pi i/3}x_6) \quad (\text{B.23})$$

$$z_2 = \left( \frac{1}{486\sqrt{3}} \right)^{1/6} (x_1 + e^{2\pi i/3}x_2 - e^{\pi i/3}x_3 + x_4 + e^{2\pi i/3}x_5 - e^{\pi i/3}x_6) \quad (\text{B.24})$$

$$z_3 = \left( \frac{1}{486\sqrt{3}} \right)^{1/6} (x_1 - e^{\pi i/3}x_2 + e^{2\pi i/3}x_3 - e^{\pi i/3}x_4 + e^{2\pi i/3}x_5 + x_6). \quad (\text{B.25})$$



## Apéndice C

# Algunas funciones de correlación

Para el cálculo de los correladores usados, se hará uso de las relaciones de conmutación y anticonmutación entre los operadores de creación y aniquilación correspondientes. Y se procederá a calcular paso a paso, teniendo cuidado de la forma de los estados y de los operadores que podría actuar en ellos. Además, se utiliza el hecho de que los estados están normalizados.

Para modos bosónicos izquierdos,

$$\begin{aligned}
 \partial_{\bar{w}} X_L^r \partial_{\bar{z}} X_L^{\bar{r}} &= \left[ \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_{-m-\eta}^r \bar{w}^{-1+m+\eta} + \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{m-\eta}^r \bar{w}^{-1-m+\eta} \right] \cdot \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{n+\eta}^{\bar{r}} \bar{z}^{-1-n-\eta} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n+\eta}^{\bar{r}} \bar{z}^{-1+n-\eta} \right] \\
 \partial_{\bar{w}} X_L^r \partial_{\bar{z}} X_L^{\bar{r}} &= \sum_{m,n=0} \alpha_{-m-\eta}^r \alpha_{n+\eta}^{\bar{r}} \bar{w}^{-1+m+\eta} \bar{z}^{-1-n-\eta} + \sum_{m=0,n=1} \alpha_{-m-\eta}^r \alpha_{-n+\eta}^{\bar{r}} \bar{w}^{-1+m+\eta} \bar{z}^{-1+n-\eta} \\
 &\quad + \sum_{m=1,n=0} \alpha_{-m-\eta}^r \alpha_{n+\eta}^{\bar{r}} \bar{w}^{-1-m+\eta} \bar{z}^{-1-n-\eta} + \sum_{m,n=1} [(n-\eta)\delta_{mn} + \alpha_{-n+\eta}^{\bar{r}} \alpha_{m-\eta}^r] \bar{w}^{-1+m+\eta} \bar{z}^{-1-n-\eta}.
 \end{aligned} \tag{C.1}$$

En donde se ha usado la relación de conmutación

$$[\alpha_{n+\eta}^{\bar{r}}, \alpha_{-m-\eta}^r] = (n+\eta)\delta_{mn}. \tag{C.2}$$

El término que contiene la delta es una serie finita

$$\sum_{m,n=1} (n-\eta)\delta_{mn} \bar{w}^{-1+m+\eta} \bar{z}^{-1-n-\eta} = \frac{1}{\bar{z}\bar{w}} \left( \frac{\bar{w}}{\bar{z}} \right)^\eta \left( \sum_{n=1} n \left( \frac{\bar{w}}{\bar{z}} \right)^\eta - \sum_{n=1} \eta \left( \frac{\bar{z}}{\bar{w}} \right)^n \right). \tag{C.3}$$

Haciendo las sumas

$$\sum_{m,n=1} (n-\eta)\delta_{mn} \bar{w}^{-1+m+\eta} \bar{z}^{-1-n-\eta} = \left( \frac{\bar{w}}{\bar{z}} \right)^\eta \frac{1}{(\bar{w}-\bar{z})^2} + \eta \frac{\bar{w}^{\eta-1}}{\bar{z}\eta} \frac{1}{(\bar{z}-\bar{w})}. \tag{C.4}$$

Ahora, si hacemos el correlador con campos de materia en el sector torcido con  $\gamma \neq r$ , dada la forma de estos estados  $|\Phi\rangle \propto |0\rangle_R$  y el orden normal los otros términos producirán

valores nulos, de modo que

$$\langle \Phi_\gamma | \partial_{\bar{w}} X_L^r \partial_{\bar{z}} X_L^{\bar{r}} | \Phi_\gamma \rangle = \left( \frac{\bar{w}}{\bar{z}} \right)^\eta \frac{1}{\bar{w}(\bar{z} - \bar{w})^2} (\bar{w}(1 - \eta) + \eta \bar{z}) \quad (\text{C.5})$$

Para los modos derechos se tiene el complejo conjugado del resultado anterior.

Si  $\eta = 0$  las expresiones (4.79) igualan a las expresiones (4.53), que son las utilizadas para calcular si se tienen estados no-torcidos o los módulos mismos. Entonces, si  $r \neq s$

$$\langle M_s | \partial_{\bar{w}} X_L^r \partial_{\bar{z}} X_L^{\bar{r}} | M_s \rangle = \frac{1}{(\bar{w} - \bar{z})^2},$$

si  $r = s$  existirá un término de operadores de creación y aniquilación que actuara en la forma de los estados  $|M\rangle$  y se obtendrá el resultado mostrado en el capítulo 4.

Ahora, pasando a los modos fermiónicos, el ordenamiento normal de los modos fermiónicos es:

$$\begin{aligned} \Psi_R^{\bar{s}} \Psi_R^s &= \sum_{p,r>0} \Psi_{-p-\eta}^{\bar{s}} \Psi_{r+\eta}^s w^{-1/2+p+\eta} z^{-1/2-r-\eta} + \sum_{p,r>0} \Psi_{-p-\eta}^{\bar{s}} \Psi_{-r+\eta}^s w^{-1/2+p+\eta} z^{-1/2+r-\eta} \\ &+ \sum_{p,r>0} \Psi_{p-\eta}^{\bar{s}} \Psi_{r+\eta}^s w^{-1/2-p+\eta} z^{-1/2-r-\eta} + \sum_{p,r>0} \Psi_{p-\eta}^{\bar{s}} \Psi_{-r+\eta}^s w^{-1/2-p+\eta} z^{-1/2+r-\eta} \quad (\text{C.6}) \end{aligned}$$

ordenando el cuarto término

$$\sum_{p,r>0} \Psi_{p-\eta}^{\bar{s}} \Psi_{-r+\eta}^s w^{-1/2-p+\eta} z^{-1/2+r-\eta} = \sum_{r,p} w^{-1/2-p+\eta} z^{-1/2+r-\eta} (\delta_{rp} - \Psi_{r+\eta}^s \Psi_{p-\eta}^{\bar{s}}) \quad (\text{C.7})$$

en donde se usó

$$\{\Psi_{r+\eta}^s, \Psi_{-p-\eta}^{\bar{s}}\} = \delta_{rp}. \quad (\text{C.8})$$

El primer término es una suma finita

$$\sum_{r,p} w^{-1/2-p+\eta} z^{-1/2+r-\eta} \delta_{rp} = \left( \frac{w}{z} \right)^\eta \frac{1}{w - z}. \quad (\text{C.9})$$

Si hacemos el correlador con estos estados en el sector torcido  $\Phi$  la ec. (C.6) los otros términos serán cero, de modo que

$$\langle \Phi_\gamma | \Psi_R^{\bar{s}} \Psi_R^s | \Phi_\gamma \rangle = \left( \frac{w}{z} \right)^\eta \frac{1}{w - z}. \quad (\text{C.10})$$

Ahora con  $\eta = 0$  y actuando sobre estados no-torcidos  $|\Phi_\gamma\rangle \propto b_{-1/2}^\gamma |0\rangle_R$  con  $\gamma = s$ , también existirá un par de osciladores de creación y aniquilación que actuaran, por lo que el resultado es ahora

$$\langle \Phi_s | \Psi_R^{\bar{s}} \Psi_R^s | \Phi_s \rangle = \left( \frac{w}{z} \right) \frac{1}{w - z}. \quad (\text{C.11})$$

# Bibliografía

- [1] Kaluza, T.: *Zum unitätsproblem der physik.* Sitz. Preuss. Akad. Wiss. Phys. Math., K1:966, 1921.
- [2] Klein, O.: *Quantentheorie und fünfdimensionale relativitätstheorie.* Zeits. Phys., 37:895, 1921.
- [3] K. Becker, M. Becker y J. Schwarz: *String Theory and M-Theory: A Modern Introduction.* Cambridge University Press, 2007.
- [4] Ibáñez, L. E. and A. M. Uranga: *Introduction to string theory and particle physics: an introduction to string phenomenology.* Cambridge University Press, 2012.
- [5] Cvetič, Mirjam, Jan Louis, and Burt A. Ovrut: *A string calculation of the kahler potentials for moduli of  $z(n)$  orbifolds.* Phys.Lett., B206:227, 1988.
- [6] M. Cvetič, J. Molera y B.A. Ovrut: *Kahler potentials for matter scalars and moduli of  $z_n$  orbifolds.* Physical Review D, 40:1140–1145, 1989.
- [7] L. J. Dixon, V. Kaplunovsky y J. Louis: *On effective field theories describing  $(2,2)$  vacua of the heterotic string.* Nucl.Phys., B329:27–82, 1990.
- [8] Bailin, David and A. Love: *Kahler potentials for twisted sectors of  $z_n$  orbifolds.* Phys.Lett.B, 288:263–268, 1992.
- [9] David Bailin, K. Sunil Gandhi y Alex. Love: *Kahler potentials for orbifold theories from string amplitudes.* Phys.Lett.B, 275:55–62, 1992.
- [10] Choi, Kang Sin and Tatsuo Kobayashi: *Higher order couplings from heterotic orbifold theory.* Nucl.Phys., B797:295–321, 2008.
- [11] T. Kobayashi, Susha Parameswaran, S. Ramos Sánchez e Ivonne Zavala: *Revisiting coupling selection rules in heterotic orbifold models.* JHEP, 1205:008, 2012.
- [12] H. P. Nilles, S. Ramos-Sánchez, M. Ratz y P. Vaudrevange: *From strings to the mssm.* Eur.Phys.J., C59:249–267, 2009.

- 
- [13] S. L. Parameswaran, S. Ramos Sánchez e Ivonne Zavala: *On moduli stabilisation and de sitter vacua in mssm heterotic orbifolds*. JHEP, 1101:071, 2011.
- [14] Ben Dundee, Stuart Raby y Alexander Westphal: *Moduli stabilization and susy breaking in heterotic orbifold string models*. Phys.Rev., D82:126002, 2010.
- [15] M. Cicoli, S. de Alwis y A. Westphal: *Heterotic moduli stabilisation*. JHEP, 1310:199, 2013.
- [16] Kolb, Edward and Michael Turner: *The early Universe*. Westview Press, 1994.
- [17] Weinberg, Steven: *Cosmology*. Frontiers in physics, 2008.
- [18] Baumann, Daniel: *Tasi lectures on inflation*. 2009.
- [19] Dodelson, Scott: *Modern cosmology*. Academic Press, 2003.
- [20] Ade, P.A.R. *et al.*: *Planck 2013 results. xxii. constraints on inflation*. Astron.Astrophys., 571:A22, 2014.
- [21] Coleman, S. and J. Mandula: *All possible symmetries of the s matrix*. Physical Review, 159:1251–1256, 1967.
- [22] R. Haag, J. Łopuszański, y M. Sohnius: *All possible generators of supersymmetries of the s-matrix*. Nuclear Physics B, 88:257–274, 1975.
- [23] Martin, Stephen P.: *A supersymmetry primer*. Adv. Ser. Direct. High Energy Phys., 21, 2010.
- [24] Nakahara, Mikio: *Geometry, Topology and Physics*. Institute of physics publisher, 2003.
- [25] Wess, Julius and Jonathan Wagger: *Supersymmetry y supergravity*. Princeton University Press, 1992.
- [26] Nilles, H. P.: *Supersymmetry, supergravity and particle physics*. Physics Reports, 110, 1-162.
- [27] Nieuwenhuizen, P. Van: *Supergravity*. Phys.Rept., 68:189–398, 1981.
- [28] Daniel Z., Freedman and Antoine Van Proeyen: *Supergravity*. Cambridge University Press, 2012.
- [29] Polchinski, J.: *String theory vol. 1*. Cambridge University Press, 1998.
- [30] Polchinski, J.: *String theory vol. 2*. Cambridge University Press, 1998.
- [31] Jin Dai, R.G. Leigh y J. Polchinski: *New connections between string theories*. Mod.Phys.Lett., A4:2073–2083, 1989.

- 
- [32] F. Gliozzi, Joel Scherk y David I. Olive: *Supersymmetry, supergravity theories and the dual spinor model*. Nucl.Phys., B122:253–290, 1977.
- [33] Michael B. Green, John Schwarz y Edward Witten: *Superstring theory 2*. Cambridge University Press, 2007.
- [34] Candelas, Philip and Xenia C. de la Ossa: *Moduli space of calabi-yaun manifolds*. Nuclear Physics B., 355:455–481, 1991.
- [35] Frankel, Theodore: *The geometry of physics*. Cambridge University Press, 1997.
- [36] M. Fischer, M. Ratz, J. Torrado y P.K.S. Vaudrevange: *Classification of symmetric toroidal orbifolds*. JHEP, 1301:084, 2013.
- [37] H. P. Nilles, S. Ramos-Sánchez, P. K.S. Vaudrevange y Akin Wingerter: *The orbifold: A tool to study the low energy effective theory of heterotic orbifolds*. Comput.Phys.Commun., 183:1363–1380, 2012.
- [38] Michael B. Green, John Schwarz y Edward Witten: *Superstring theory 1*. Cambridge University Press, 2007.
- [39] R. Blumenhagen, D. Lüst y S. Theisen: *Basic Concepts of String Theory*. Springer, 2012.
- [40] Philippe Francesco, Pierre Mathieu y David Senechal: *Conformal Field Theory*. Springer, 1999.
- [41] Hamidi, Shahram and Cumrun Vafa: *Interactions on orbifolds*. Nucl.Phys., B279:465, 1987.
- [42] Kaplunovsky, Vadi and Jan Louis: *On gauge couplings in string theory*. Nucl.Phys., B444:191–244, 1995.
- [43] Ramos-Sánchez, Saúl. PhD thesis.