



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y  
DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA.

ÁRBOLES ALEATORIOS Y PROPIEDADES FRACTALES DE LOS  
ÁRBOLES CÍCLICOS ESTABLES

TESIS  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA:  
Mat. Daniel Antonio Márquez Vázquez

DIRECTOR DE LA TESIS  
Dr. Juan Carlos Pardo Millán

PROGRAMA DE MAESTRÍA EN CIENCIAS MATEMÁTICAS  
CON ESPECIALIDAD EN PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

MÉXICO, D. F.  
Febrero 2015



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# Árboles Aleatorios y Propiedades Fractales de los Árboles Cíclicos Estables

Daniel Antonio Márquez Vázquez

2015

*A todos los que me brindaron  
su apoyo, consejo y compañía  
durante la realización de este trabajo,  
mis más sinceros agradecimientos.*

# Índice general

<b>1. Procesos de Lévy</b>	<b>1</b>
1.1. Descomposición de Lévy -Itô . . . . .	2
1.2. Propiedad de Markov . . . . .	12
<b>2. Tiempo Local y Teoría de Excursiones</b>	<b>17</b>
2.1. Algunos preliminares . . . . .	17
2.2. El Tiempo Local . . . . .	19
2.3. Inverso del Tiempo Local . . . . .	29
2.4. Teoría de Excursiones . . . . .	33
<b>3. Procesos reflejados y la excursión estable</b>	<b>37</b>
3.1. Dualidad y el proceso reflejado . . . . .	37
3.2. El Proceso Escalera . . . . .	39
3.3. Proceso espectralmente positivo . . . . .	40
3.4. La Excursión Normalizada de un Proceso de Lévy Estable $X^{exc}$ . . . . .	42
3.5. Relación de continuidad absoluta para $X^{exc}$ . . . . .	44
<b>4. Árboles de Galton Watson</b>	<b>46</b>
4.1. Árbol Plano . . . . .	46
4.2. Árboles de Bienaymé-Galton-Watson . . . . .	48
<b>5. Árboles de Lévy</b>	<b>52</b>
5.1. Árbol Real . . . . .	53
5.1.1. Codificando un Árbol Real . . . . .	55
5.2. El Proceso de Altura . . . . .	56
5.3. El Árbol de Lévy $\alpha$ -estable . . . . .	63
5.3.1. Genealogía de $\mathcal{T}_\alpha$ y $X^{exc}$ . . . . .	64

<b>6. Árboles Cíclicos</b>	<b>65</b>
6.1. Árbol Cíclico Discreto . . . . .	65
6.2. Árboles Cíclicos Estables como Límites de Árboles Cíclicos Discretos . . . . .	67
6.3. Construcción de los Árboles Cíclicos Estables . . . . .	68
6.3.1. Ciclos Métricos . . . . .	69
6.3.2. Ensamblando los Ciclos Métricos . . . . .	69
<b>7. Propiedades de los Árboles Cíclicos Estables</b>	<b>73</b>
7.1. Más de Procesos Estables . . . . .	73
7.1.1. Descensos . . . . .	73
7.1.2. Comportamiento de $X^{exc, \alpha}$ cuando $\alpha \downarrow 1$ y $\alpha \uparrow 2$ . . . . .	77
7.2. Casos Límite de $\mathcal{L}_\alpha$ conforme $\alpha \downarrow 1$ y $\alpha \uparrow 2$ . . . . .	83
7.3. Dimensión de Hausdorff de $\mathcal{L}_\alpha$ . . . . .	87

# Resumen

Un árbol plano es un objeto cuya estructura consta de dos partes: una colección finita de vértices etiquetados y una colección de lados que unen los vértices de acuerdo a su etiqueta sin tocarse ni formar ciclos. La raíz es simplemente un vértice distinguido. Con toda formalidad, es posible interpretar a un árbol plano como el árbol genealógico de una familia de individuos del mismo tipo. Comencemos por ejemplo con un individuo que será la raíz del árbol y posteriormente nos interesa la población conformada por sus hijos, seguido de la de sus nietos, sus bisnietos, . . . por lo que será natural considerar un proceso que estudia este tipo de evolución. Para esto utilizamos el proceso de Bienaymé-Galton-Watson (BGW) con distribución de hijos que garantice la extinción de la población con probabilidad positiva, permitiendo con esto definir un árbol plano c.s. Entonces, será posible definir al *proceso de altura*, el cual es un proceso de exploración que permite codificar la información genealógica del árbol en una función de tipo excursión. En otras palabras, los árboles planos son gráficas que pueden construirse a partir de ciertas funciones de tipo excursión de entre las cuales destaca el proceso de altura del árbol.

Una función de tipo excursión es aquella que comienza en el origen al tiempo 0, se mantiene positiva durante cierta longitud de tiempo y finalmente toma el valor 0 de nueva cuenta al tiempo  $\zeta$ , por lo tanto se encontrará definida en general en un compacto  $[0, \zeta]$  de  $\mathbb{R}$ . Entonces, si la función de altura es discreta, i.e. tiene dominio en un subconjunto discreto de  $[0, \zeta]$ , decimos que el árbol es discreto, si su dominio es todo el intervalo  $[0, \zeta]$ , el objeto que describe continuamente se le conoce como árbol real. Todo árbol discreto es posible considerarlo un árbol real a través de la interpolación de sus vértices de acuerdo al orden de sus “etiquetas” es entonces cuando le llamamos árbol plano.

Los objetos de estudio principal, son los árboles aleatorios cíclicos  $\alpha$ -estables, los cuales son una clase de espacios métricos compactos que denotamos  $\mathcal{L}_\alpha$ , para  $\alpha \in (1, 2)$ , además son objetos fractales. Estos árboles cíclicos están constituidos por cierta colección de “aros” aleatorios pegados a lo largo de la estructura de un árbol. De manera gráfica es posible visualizarlos como objetos duales a los árboles de Levy  $\alpha$ -estables, los cuales son árboles reales aleatorios codificados por un proceso de altura continuo. La forma de codificar cada tipo de árbol se hace explícita a través de relaciones de equivalencia.

Finalmente damos la dimensión fractal de los árboles cíclicos y su límite como objeto al interpolar el índice de estabilidad  $\alpha$ , i.e. consideraremos el límite cuando  $\alpha \uparrow 2$  y cuando  $\alpha \downarrow 1$ .

En el presente trabajo se establecen las herramientas básicas para interpretar la genealogía de un árbol de Lévy estable a partir de las trayectorias de un proceso de Lévy con distribución estable de índice  $\alpha \in (1, 2)$ , interpretación que posteriormente es utilizada para una mejor comprensión de la construcción de los árboles cíclicos estables y su estructura.

A grandes rasgos, en el capítulo 1 se introduce la definición de un proceso de Lévy  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  y se explica como es que su distribución queda caracterizada por la conocida fórmula de Lévy-Khintchine, que a su vez permite inferir cuando la distribución del proceso  $X$  es estable de índice  $\alpha \in (1, 2)$ . También se muestra que un proceso de Lévy  $X$  posee la propiedad de Markov fuerte, lo cual, dado un tiempo fijo (posiblemente un tiempo de paro) nos permite hablar de la evolución del proceso a partir de un evento determinado (como lo es cuando  $X$  toma el valor 0) sin preocuparnos por lo ocurrido anteriormente al tiempo fijo y a la vez preservando propiedades del proceso original.

En el capítulo 2 se introduce y se prueban propiedades de la funcional aditiva de un proceso de Markov conocido como tiempo local, cuya función inversa generalizada es un proceso estocástico que permite generar un marco de tiempo adecuado para definir al proceso de excursiones y así establecer la existencia de una medida  $\sigma$ -finita sobre el espacio de excursiones (visto como subespacio del espacio de Skorohod de funciones cádlág) conocida como la medida de excursiones de Itô.

En el capítulo 3 se muestra que los procesos reflejados en el ínfimo o supremo más inmediato de un proceso de Lévy estable espectralmente positivo son de Markov, y por ende, es posible considerar el espacio de medida que consta del espacio de excursiones que parten del 0 con duración unitaria conjuntamente con la medida de excursiones de Itô. La restricción de la medida de Itô a dicho espacio coincide con la distribución de lo que llamamos la excursión normalizada de un proceso de Lévy estable. Finalmente se muestra una relación de continuidad absoluta de la excursión normalizada con el puente de un proceso de Lévy estable.

En el capítulo 4 y 5 se establecen resultados generales de la estructura de los árboles planos y reales para finalmente definir a los árboles de Lévy estables con la herramienta desarrollada en los capítulos anteriores. Por último los capítulos 6 y 7 son devotos a la construcción de los árboles cíclicos estables y sus propiedades fractales a partir de la excursión normalizada estable de un proceso de Lévy, utilizando inicialmente la dualidad existente con los árboles de Lévy estables para dar una idea intuitiva de su estructura.



# Capítulo 1

## Procesos de Lévy

Sea  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espacio de probabilidad donde  $\mathcal{F}$  denota la  $\sigma$ -álgebra de Borel generada por los abiertos en  $\Omega$  definidos por su topología. Para cada  $\omega \in \Omega$ , la trayectoria de un proceso estocástico  $X = (X_t, t \in I)$  correspondiente a un posible resultado  $\omega$  es la aplicación definida por  $t \mapsto X_t(\omega)$ .

### Definición 1. (Proceso de Lévy)

Un proceso  $X = (X_t, t \geq 0)$  definido sobre un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  que toma valores en  $\mathbb{R}$  es un proceso de Lévy si:

1.  $X$  tiene trayectorias càdlàg  $\mathbb{P}$ -casi seguramente.
2.  $\mathbb{P}(X_0 = 0) = 1$ .
3.  $X$  tiene incrementos estacionarios, i.e. para  $0 \leq s \leq t$ ,

$$X_t - X_s \text{ tiene la misma distribución que } X_{t-s}.$$

4.  $X$  tiene incrementos independientes, i.e. para  $0 \leq s \leq t$ ,

$$X_t - X_s \text{ es independiente de } (X_u, 0 \leq u \leq s).$$

Por la propiedad 1 podemos considerar a un proceso de Lévy  $X$  como una función aleatoria en el espacio de Skorohod de funciones càdlàg c.s., por lo que consideramos  $\Omega = \mathbb{D}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R} \cup \{\partial\})$  donde  $\partial$  es un punto aislado que denominamos “cementerio” y para el cual se debe considerar a  $\mathbb{R} \cup \{\partial\}$  con su respectiva  $\sigma$ -álgebra de Borel. Específicamente, el espacio de funciones  $\Omega$  es el conjunto de trayectorias

$$\omega : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty) \cup \{\partial\},$$

continuas por la derecha sobre  $[0, +\infty)$  con límites por la izquierda sobre  $(0, \infty)$  y dotado de la topología de Skorohod o de la convergencia uniforme. En particular  $\Omega$  es un espacio Polaco, esto es, separable, métrico y completo.

De la definición de trayectoria y considerando a  $\Omega$  como un espacio de funciones, es posible ver al proceso de Lévy  $X := (X_t, t \geq 0)$  como un proceso de coordenadas, donde para cada  $\omega \in \Omega$ ,  $X_t := X_t(\omega) = \omega(t)$ . Así también, denotamos el límite por la izquierda y el salto al tiempo  $t > 0$  respectivamente por

$$X_{t-} := X_{t-}(\omega) = \omega(t^-) \quad \text{y} \quad \Delta X_t := X_t - X_{t-},$$

donde omitimos la dependencia de  $\omega$  en las expresiones anteriores señalando que siempre que se discuta alguna propiedad de un proceso de Lévy, se considera el evento cuyos elementos son funciones en  $\Omega$  cuya coordenada al tiempo  $t$  satisfaga la propiedad en cuestión.

## 1.1. Descomposición de Lévy -Itô

En esta sección mostramos que las distribución de los procesos de Lévy en tiempos fijos, coinciden con leyes infinitamente divisibles y utilizamos la fórmula de Lévy-Khintchine para caracterizar éstas leyes.

Consideremos el espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . Cuando decimos que una variable aleatoria  $Y$  con valores  $x \in \mathbb{R}$  tiene ley de probabilidad  $\mu$ , nos referimos a que se tiene la siguiente igualdad,

$$\mu(A) := \mathbb{P}(Y^{-1}(A)) = \mathbb{P}_Y(A), \quad A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}.$$

Para dos variables aleatorias reales independientes  $Y_1, Y_2$ , con leyes de probabilidad  $\mu_1, \mu_2$ , su suma tiene por ley de probabilidad la convolución  $\mu_1 * \mu_2$  definida por

$$\mu_1 * \mu_2(A) = \int \mathbb{1}_A(x+y) \mu_1(dx) \mu_2(dy), \quad A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}.$$

### Definición 2. (Infinitamente Divisible)

Una v.a.  $Y$  con ley de probabilidad  $\mu$ , es infinitamente divisible, si para cada  $n \geq 1$  existe una sucesión de v.a.i.i.d.  $(Y_k^{(n)})_{1 \leq k \leq n}$  con distribución común  $\mu_n$ , tal que:

$$\sum_{k=1}^n Y_k^{(n)} \stackrel{(d)}{=} Y.$$

En otras palabras, la ley  $\mu$  es la  $n$ -convolución de la ley  $\mu_n$ , esto es,  $\mu = \mu_n^{*(n)}$ .

La transformada de Fourier de una medida de probabilidad  $\mu$  sobre  $\mathbb{R}$  es la función

$$\hat{\mu}(\lambda) := \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda x} \mu(dx), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

**Definición 3. (Función Característica)**

La función característica de una v.a.  $Y$  real valuada con ley de probabilidad  $\mu$ , se define como la transformada de Fourier de dicha medida, esto es, podemos escribir

$$\mathbb{E} [e^{i\lambda Y}] := \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda x} \mathbb{P}_Y(dx).$$

La transformada de Fourier siempre existe, es uniformemente continua y acotada, además de caracterizar la distribución de la variable aleatoria  $Y$ .

Es posible probar que si  $Y$  es una v.a. infinitamente divisible, entonces

- Existe una función  $\Psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , dada por

$$\Psi(\lambda) = -\log \mathbb{E} [e^{i\lambda Y}] < +\infty$$

conocida como el *exponente característico de la variable aleatoria  $Y$* .

- La función característica de  $Y$  tiene raíz  $n$ -ésima, que en sí misma es la función característica de otra variable aleatoria, para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Dicho de otra manera

$$\Psi(\lambda) = n \Psi^{(n)}(\lambda)$$

donde  $\Psi^{(n)}$  es función característica de una ley de probabilidad cuya  $n$ -convolución coincide con la distribución de  $Y$ .

Más aún, tendremos la célebre fórmula de Lévy-Khintchine, que determina la clase de funciones características que corresponden a leyes infinitamente divisibles, i.e. una variable aleatoria es infinitamente divisible, si y sólo si, su exponente característico  $\Psi$  puede reescribirse utilizando dos constantes,  $a \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma \geq 0$  y una medida  $\Pi$ , donde

$$\Psi(\lambda) = i a \lambda + \frac{1}{2} \sigma^2 \lambda^2 + \int_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} (1 - e^{i\lambda x} + i \lambda x \mathbf{1}_{\{|x| < 1\}}) \Pi(dx).$$

Los parámetros de la tripleta  $(a, \sigma, \Pi)$ , también llamados *características*, quedan entonces determinados por  $\Psi$  y viceversa. El parámetro  $\sigma \geq 0$  de la parte cuadrática se llama *coeficiente gaussiano* y a la medida  $\Pi$  se le conoce como *medida de Lévy*.

**Definición 4. (Medida de Lévy)**

Una medida  $\Pi$  con soporte en  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  es una medida de Lévy si satisface la condición

$$\int_{\mathbb{R}} (1 \wedge |x|^2) \Pi(dx) < \infty. \quad (1.1)$$

En particular, se cumple que  $\Pi(\mathbb{R} \setminus (-1, 1)) < +\infty$ .

La desigualdad  $(\epsilon \wedge |x|^2) \leq (1 \wedge |x|^2)$ , implica que toda medida de Lévy satisface que  $\Pi(\mathbb{R} \setminus (-\epsilon, \epsilon)) < +\infty$ , para  $\epsilon \in (0, 1)$ , con lo que podemos concluir que es una medida  $\sigma$ -finita. Cuando se asocia formalmente con un proceso de Lévy, a la medida de Lévy se le conoce también como la *medida de saltos* del proceso, en cuyo caso coincidirá con la *medida característica* del proceso Poisson puntual asociado.

Mostramos ahora que un proceso de Lévy tiene coordenadas con ley infinitamente divisible. Escribimos  $\Psi_t$  para denotar el exponente característico de la v.a.  $X_t$  del proceso de Lévy  $X = (X_t, t \geq 0)$ . Gracias a la propiedad de incrementos independientes y estacionarios de un proceso de Lévy, observamos que

$$X_1 \stackrel{(d)}{=} X_{\frac{1}{n}} + \left(X_{\frac{2}{n}} - X_{\frac{1}{n}}\right) + \cdots + \left(X_{\frac{n}{n}} - X_{\frac{(n-1)}{n}}\right) \quad \forall n \geq 1,$$

donde los incrementos en la suma tienen la misma ley que la variable aleatoria  $X_{\frac{1}{n}}$ . Es inmediato que  $X_1$  es infinitamente divisible. Por otro lado, es clara la igualdad

$$X_m \stackrel{(d)}{=} X_1 + (X_2 - X_1) + \cdots + (X_m - X_{m-1}) \quad \forall m \geq 1.$$

Concluimos de lo anterior que

$$\begin{aligned} \Psi_{1/n}(\lambda) &:= -\log \mathbb{E} \left[ e^{i\lambda X_{1/n}} \right] = 1/n \Psi(\lambda), \\ \Psi_m(\lambda) &:= -\log \mathbb{E} \left[ e^{i\lambda X_m} \right] = m \Psi(\lambda). \end{aligned}$$

De esta forma es posible escribir los exponentes característicos de las coordenadas de  $X$  en tiempos racionales, en términos del exponente característico de  $X_1$ , esto es

$$\Psi_{m/n}(\lambda) := -\log \mathbb{E} \left[ e^{i\lambda X_{m/n}} \right] = m/n \Psi(\lambda), \quad \text{con } m \in \mathbb{Z} \text{ y } n \in \mathbb{N}.$$

De la continuidad derecha de  $X$  y aproximando por valores racionales, obtenemos

$$\Psi_t(\lambda) := -\log \mathbb{E} \left[ e^{i\lambda X_t} \right] = t \Psi(\lambda), \quad t \geq 0.$$

Así, el *exponente característico de un proceso de Lévy*  $X$ , se define por

$$\Psi(\lambda) = -\log \mathbb{E} \left[ e^{i\lambda X_1} \right].$$

**Teorema 5.** (Descomposición de Lévy-Itô)

Consideremos  $a \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma \geq 0$  y una medida de Lévy  $\Pi$ . Definimos para cada  $\lambda \in \mathbb{R}$ :

$$\Psi(\lambda) = i a \lambda + \frac{1}{2} \sigma^2 \lambda^2 + \int_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} (1 - e^{i \lambda x} + i \lambda x \mathbf{1}_{\{|x| < 1\}}) \Pi(dx).$$

Existe una única medida de probabilidad  $\mathbb{P}$  sobre  $(\Omega, \mathcal{F})$ , bajo la cual el proceso de coordenadas  $X$  es un proceso de Lévy con exponente característico  $\Psi$ , cuyo proceso de saltos  $\Delta X = (\Delta X_t, t \geq 0)$  es un proceso Poisson puntual con medida característica  $\Pi$ . Específicamente, existe un espacio de probabilidad bajo el cual existen tres procesos de Lévy independientes, a decir:

- $X^{(1)}$  un proceso Gaussiano,
- $X^{(2)}$  un proceso de Poisson compuesto,
- $X^{(3)}$  una martingala cuadrado integrable con una cantidad numerable de saltos de amplitud menor que 1 sobre intervalos de tiempo finito,

donde  $X = X^{(1)} + X^{(2)} + X^{(3)}$  es un proceso de Lévy con exponente característico  $\Psi$ .

*Demostración.* Sea  $B$  un movimiento Browniano estándar. Dado  $a \in \mathbb{R}$ , definimos

$$X_t^{(1)} = \sigma B_t - at,$$

el cual es un movimiento browniano con deriva de exponente característico

$$\Psi^{(1)} = i a \lambda + \frac{1}{2} \sigma^2 \lambda^2.$$

Consideremos un proceso Poisson puntual  $\Delta = (\Delta_t, t \geq 0)$ , independiente de  $B$  con medida de Lévy  $\Pi$ , el cual utilizamos para definir dos procesos. Primero, consideramos los valores mayores o igual a la unidad del proceso  $\Delta$ , es decir, introducimos el proceso de Poisson puntual  $\Delta^{(2)} := \Delta \cdot \mathbf{1}_{\{|\Delta| \geq 1\}}$ , con medida característica  $\Pi^{(2)}(dx) = \mathbf{1}_{\{|x| \geq 1\}} \Pi(dx)$ , la cual es finita por (1.1). Consideramos entonces el proceso definido por la suma parcial

$$X_t^{(2)} = \sum_{s \leq t} \Delta_s^{(2)}, \quad t \geq 0,$$

el cual es un proceso de Lévy; de hecho, es un proceso Poisson compuesto, ya que sus saltos son contabilizados por una v.a. Poisson no-degenerada. De la fórmula exponencial obtenemos su exponente característico dado por

$$\Psi^{(2)}(\lambda) = \int_{\{|x| \geq 1\}} (1 - e^{i \lambda x}) \Pi(dx).$$

Lidiamos ahora con los valores del proceso  $\Delta$  con amplitud menor que la unidad e introducimos el proceso de Poisson puntual  $\Delta^{(3)} := \Delta \cdot \mathbf{1}_{\{|\Delta| < 1\}}$ , con medida característica  $\Pi^{(3)}(dx) = \mathbf{1}_{\{|x| < 1\}} \Pi(dx)$ . Notamos que  $\Delta^{(2)}$  y  $\Delta^{(3)}$  son procesos de Poisson puntual respecto a la misma filtración que nunca saltan simultáneamente, y por ende, son independientes. Finalmente, para definir al proceso  $X^{(3)}$ , se utiliza una aproximación por martingalas. Consideremos el proceso de valores de  $\Delta^{(3)}$  estrictamente mayores que  $\epsilon > 0$  para cada  $\epsilon \in (0, 1)$ , i.e.  $\Delta^{(3, \epsilon)} := \Delta^{(3)} \cdot \mathbf{1}_{\{\epsilon < |\Delta^{(3)}|\}}$ . Naturalmente, el proceso  $\Delta^{(3, \epsilon)}$  es de Poisson puntual con medida característica  $\Pi^{(3, \epsilon)}(dx) = \mathbf{1}_{\{\epsilon < |x| < 1\}} \Pi(dx)$  de masa finita y en consecuencia discreto. Así las cosas, para cada  $\epsilon > 0$ , los valores de  $\Delta^{(3, \epsilon)}$  son contabilizados por una v.a. Poisson no-degenerada. Concluimos que el proceso definido por la suma

$$\sum_{s \leq t} \Delta_s^{(3, \epsilon)}, \quad t \geq 0,$$

es un proceso de Poisson compuesto y por lo tanto un proceso de Lévy. Debido a la estacionariedad e independencia de los incrementos de este proceso de sumas, es posible compensarlas, esto es, consideramos para cada  $\epsilon > 0$  la martingala

$$\begin{aligned} X_t^{(3, \epsilon)} &= \sum_{s \leq t} \Delta_s^{(3)} \mathbf{1}_{\{\epsilon < |\Delta_s|\}} - \mathbb{E} \left[ \sum_{s \leq t} \Delta_s^{(3)} \mathbf{1}_{\{\epsilon < |\Delta_s|\}} \right] \\ &= \sum_{s \leq t} \Delta_s^{(3)} \mathbf{1}_{\{\epsilon < |\Delta_s|\}} - t \int_{\mathbb{R}} x \mathbf{1}_{\{\epsilon < |x| < 1\}} \Pi(dx), \quad (t \geq 0), \end{aligned}$$

donde la última igualdad es consecuencia de la fórmula de compensación. Por un lado, el proceso de Lévy  $X^{(3, \epsilon)}$ , es un proceso de Poisson compuesto con un término lineal que por la fórmula exponencial tiene exponente característico

$$\Psi^{(3, \epsilon)}(\lambda) = \int_{\{\epsilon < |x| < 1\}} (1 - e^{i\lambda x} + i\lambda x) \Pi(dx).$$

Por otro lado, por la hipótesis de integrabilidad (1.1), para cada  $\epsilon \in (0, 1)$ , la martingala  $X^{(3, \epsilon)}$  es cuadrado integrable. Más aún, la desigualdad maximal para sumas compensadas da como resultado que para toda  $t > 0$  y  $v \in (0, \epsilon)$

$$\mathbb{E} \left[ \sup_{0 \leq s \leq t} |X_s^{(3, \epsilon)} - X_s^{(3, v)}|^2 \right] \leq 4t \int_{\{v < |x| < \epsilon\}} |x|^2 \Pi(dx) < +\infty.$$

Como  $\Pi$  es  $\sigma$ -finita, tendremos que  $\int_{\{v < |x| < \epsilon\}} |x|^2 \Pi(dx) < \epsilon^2 \nu(\mathbb{R} \setminus (-v, v)) < +\infty$ . Tomando el límite cuando  $\epsilon \downarrow 0^+$  obtenemos que

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0^+} \mathbb{E} \left[ \sup_{0 \leq s \leq t} |X_s^{(3, \epsilon)} - X_s^{(3, v)}|^2 \right] = 0.$$

Hemos probado que para cada  $t > 0$ , la familia  $(X^{(3,\epsilon)}, \epsilon > 0)$  es de Cauchy en el espacio de martingalas cuadrado integrables dotado de la norma:

$$\|Y\| := \left( \mathbb{E} \left[ \sup_{0 \leq s \leq t} |Y_s|^2 \right] \right)^{1/2}.$$

Por completez y debido a la continuidad de la función restricción en el espacio de Skorohod  $\mathbb{D}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ , tenemos la convergencia  $\lim_{\epsilon \downarrow 0} X^{(3,\epsilon)} = X^{(3)}$ , donde  $X^{(3)}$  es un proceso de Lévy con exponente característico

$$\Psi^{(3)} = \int_{\{|x| < 1\}} (1 - e^{i\lambda x} + i\lambda x) \Pi(dx).$$

Más aún, el proceso  $X^{(3)}$  es medible con respecto a la  $\sigma$ -álgebra generada por  $\Delta^{(3)}$  y en consecuencia es independiente de  $X^{(2)}$ .

Por último, el proceso  $X := X^{(1)} + X^{(2)} + X^{(3)}$  es un proceso de Lévy con exponente característico  $\Psi := \Psi^{(1)} + \Psi^{(2)} + \Psi^{(3)}$ ; esto último se debe a la independencia de los procesos  $X^{(k)}$ ,  $k = 1, 2, 3$ . De nuestra construcción concluimos que su proceso de saltos coincide con el proceso Poisson puntual  $(\Delta_t, t \geq 0)$  y que la ley  $\mathbb{P}$  de  $X$  sobre  $\Omega$  satisface así las condiciones necesarias del teorema.  $\square$

Es posible clasificar a los procesos de Lévy por la variación de sus trayectorias y el comportamiento de sus saltos. Recordemos que un proceso de Lévy  $X$  es càdlàg c.s. por lo que tendrá a lo más una cantidad numerable de discontinuidades de tipo salto  $\Delta X$  c.s.

**Definición 6.** (Variación de un proceso de Lévy)

La variación de una trayectoria  $\omega$  de un proceso de Lévy  $X$  sobre  $[0, t]$ , se define por

$$V_t^X(\omega) =: \sup \sum_{k=1}^n |X_{t_k}(\omega) - X_{t_{k-1}}(\omega)|,$$

donde el supremo es sobre las particiones finitas de  $[0, t]$ . Entonces,  $X$  es de variación acotada si  $V_t^X < +\infty \forall t > 0$  c.s., en caso contrario es de variación no acotada.

Un movimiento browniano tiene trayectorias que no son de variación acotada c.s. Por otro lado, un proceso Poisson compuesto  $X$  con distribución común de salto  $\nu(dx)$ , es de variación acotada si y sólo si

$$\sum_{n=1}^{N_t} |\xi_n| = \sum_{s \leq t} |\Delta X_s| = V_t^X < +\infty, \quad \forall t > 0 \quad c.s.$$

Recurriendo a la fórmula exponencial, es posible deducir fácilmente que  $V_t^X < +\infty$ , puesto que al ser  $\nu(dx)$  una medida de probabilidad tendremos que

$$\int (1 \wedge |x|) \Pi(dx) = \int (1 \wedge |x|) c\nu(dx) \leq c < +\infty ,$$

donde  $c > 0$  es la intensidad del proceso Poisson  $N$ . Bajo ésta última condición, la fórmula exponencial implica que  $X$  es de variación acotada.

Es posible identificar la presencia de un movimiento browniano en un proceso de Lévy  $X$  a través del coeficiente gaussiano  $\sigma$ , por lo que una condición necesaria para que  $X$  sea de variación acotada, es que el coeficiente gaussiano sea nulo, i.e.  $\sigma = 0$ . Aún dado el caso  $\sigma = 0$ , las trayectorias de  $X$ , pueden o no, ser de variación acotada.

Deducimos de la descomposición de Lévy-Itô y lo anterior, que el entender si un proceso de Lévy es o no de variación acotada dado que  $\sigma = 0$ , se reduce a determinar si la suma de los saltos de amplitud menor que la unidad del proceso de Lévy son finitos c.s. Utilizamos de nueva cuenta el criterio que nos otorga la fórmula exponencial. En resumen se tiene lo siguiente:

**Lema 7.** *Un proceso de Lévy con características  $(a, \sigma, \Pi)$ , es de variación acotada si y sólo si*

$$\sigma = 0 \quad , \quad \int (1 \wedge |x|) \Pi(dx) < +\infty .$$

*En particular,  $(a, \sigma, \Pi)$  son las características de un proceso Poisson compuesto con deriva si y sólo si  $\sigma = 0$  y  $\Pi(\mathbb{R}) < +\infty$ .*

Este lema sugiere que el exponente característico  $\Psi$  de un proceso de variación acotada con características  $(a, 0, \Pi)$ , se puede escribir de la siguiente manera:

$$\Psi(\lambda) := -bi\lambda + \int_{\mathbb{R}} (1 - e^{i\lambda x}) \Pi(dx),$$

donde el *coeficiente de deriva*  $b$  se relaciona con  $a$  y  $\Pi$  por la relación:

$$b = - \left( a + \int_{|x|<1} x \Pi(dx) \right) < +\infty .$$

Con esta representación, lo que tendremos ahora es una *pareja característica*  $(b, \Pi)$ . Además, por la descomposición de Lévy-Itô, un proceso de Lévy de variación acotada  $X$  se puede escribir como:

$$X_t = -bt + \sum_{s \leq t} \Delta_s . \tag{1.2}$$



Otra manera de clasificar los procesos de Lévy es a través de sus saltos que pueden ser positivos o negativos. Éstos saltos son codificados por una medida aleatoria de Poisson  $dt \otimes \Pi(dx)$  de intensidad la medida característica  $\Pi$  del proceso.

**Definición 8. (Subordinador)**

Un subordinador es un proceso de Lévy con valores en  $[0, +\infty)$ , lo cual implica que tiene trayectorias monótonas crecientes c.s.

Toda función real valuada es de variación acotada sobre  $[0, t]$ , si y sólo si, se descompone como diferencia de dos funciones monótonas crecientes sobre  $[0, t]$ ; es por esto que todo subordinador  $X$  es de variación acotada y admite la representación (1.2) con pareja característica  $(b, \Pi)$  con  $b \leq 0$  y  $\Pi(-\infty, 0) = 0$ . En particular diremos que un subordinador es de salto puro ó estricto si  $b = 0$ .

**Definición 9. (Proceso de Lévy Espectralmente Positivo)**

Un proceso de Lévy es espectralmente positivo si  $\Pi(-\infty, 0) = 0$  y no es subordinador.

Similarmente, un proceso de Lévy  $X$  es espectralmente negativo si  $-X$  es espectralmente positivo y diremos que es *simétrico*, si  $X$  y  $-X$  tienen la misma ley.

Un proceso espectralmente positivo, puede o no, ser de variación acotada. En el primer caso el proceso puede escribirse como la suma de un subordinador estricto y una deriva negativa, i.e. tendrá la representación (1.2) con  $b > 0$ .

**Ejemplo 1. (Procesos gaussianos y el movimiento browniano)**

Una v.a.  $X$  es *normal* o *Gaussiana* si existe  $m, \sigma \in \mathbb{R}$  con  $\sigma > 0$ , tal que  $X$  tiene una función de distribución absolutamente continua de la forma

$$\mathbb{P}(X \leq x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

En este caso escribimos  $X \stackrel{(d)}{\sim} N(m, \sigma^2)$ , donde  $m$  y  $\sigma^2$  son la media y la varianza de  $X$ , respectivamente. A  $\sigma$  también se le conoce como *coeficiente Gaussiano*.

Un *movimiento Browniano estándar*  $B = (B_t, t \geq 0)$ , es un proceso de Lévy con trayectorias continuas c.s. y coordenadas con distribución normal  $N(0, t\sigma^2)$ . En general, un *movimiento browniano con deriva*  $X = (B_t - mt, t \geq 0)$ , es un proceso de Lévy con exponente característico el de una v.a. normal  $N(-m, \sigma^2)$ , a decir:

$$\Psi(\lambda) := \frac{\lambda^2 \sigma^2}{2} - im\lambda. \tag{1.3}$$

Es inmediato ver que un movimiento browniano con deriva tiene ley infinitamente divisible, considerando para cada  $n \geq 1$  la suma de  $n$  copias independientes de  $N(\frac{m}{n}, \frac{1}{n}\sigma^2)$ . Un dato importante, es que todo proceso de Lévy tiene trayectorias continuas c.s. si y sólo si es un movimiento browniano posiblemente con deriva.

### Ejemplo 2. (Proceso Poisson)

Una v.a.  $X$  es *Poisson* con tasa  $c > 0$ , si toma valores en los enteros no negativos  $\mathbb{N} \cup \{0\}$  y su distribución de masa es de la forma

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{c^k}{k!} e^{-c}.$$

En este caso escribimos  $X \stackrel{(d)}{\sim} \text{Poisson}(c)$  donde  $c$  es la media y la varianza de  $X$ .

Un *proceso Poisson*  $N = (N_t, t \geq 0)$  de intensidad  $c > 0$ , es un proceso de Lévy con valores en  $\mathbb{N} \cup \{0\}$ , con exponente característico el de una v.a.  $\text{Poisson}(c)$ , i.e.

$$\Psi(\lambda) := c(1 - e^{i\lambda}).$$

Deducimos que  $N$  tiene distribución infinitamente divisible considerando para cada  $n \in \mathbb{N}$ , la suma de  $n$  copias independientes de una v.a.  $\text{Poisson}(\frac{c}{n})$ .

### Ejemplo 3. Proceso Poisson compuesto

Sea  $(\xi_n, n \in \mathbb{N})$  una sucesión de v.a.i.i.d. con distribución común  $\nu(dx)$  y  $N$  una variable aleatoria  $\text{Poisson}(c)$  independiente de  $(\xi_n, n \in \mathbb{N})$ .

Una v.a.  $X$  es *Poisson compuesto* si es suma aleatoria de v.a.i.i.d. contabilizadas por una v.a.  $\text{Poisson}$  independiente, i.e. si  $X := \xi_1 + \dots + \xi_N$ . Más aún, tendremos

$$\mathbb{E}[e^{i\lambda X}] = \mathbb{E}[e^{i\lambda(\xi_1 + \dots + \xi_N)}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[e^{i\lambda\xi_1}]^N] = e^{c(\hat{\nu}(\lambda) - 1)},$$

donde  $\hat{\nu}$  es la transformada de Fourier de la medida de probabilidad  $\nu(dx)$ ,

$$\text{i.e. } \hat{\nu}(\lambda) := \mathbb{E}[e^{i\lambda\xi_1}] = \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda x} \nu(dx).$$

Así, el exponente característico de una v.a.  $\text{Poisson}$  compuesto toma la forma:

$$c \left( 1 - \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda x} \nu(dx) \right) = c \left( \int_{\mathbb{R}} (1 - e^{i\lambda x}) \nu(dx) \right). \quad (1.4)$$

Considerando  $n$  copias independientes de una v.a.  $\text{Poisson}$  compuesto con distribución de salto  $\nu(dx)$  y saltos contabilizados por una variable aleatoria  $\text{Poisson}(\frac{c}{n})$ , vemos que  $X$  tiene ley infinitamente divisible.

Un *proceso Poisson compuesto* es un proceso de Lévy  $X$  donde cada coordenada del proceso es una v.a.  $\text{Poisson}$  compuesto, esto es, se definen para  $t > 0$  por:

$$X_t = \sum_{k=1}^{N_t} \xi_k,$$

donde  $N = (N_t, t \geq 0)$  es un proceso  $\text{Poisson}$  con intensidad  $c > 0$ . Naturalmente, el proceso  $X$  tiene entonces exponente característico dado por (1.4).

#### Ejemplo 4. Proceso $\alpha$ -estable

Una v.a.  $X$  es *estable* si para cada  $n \geq 1$ , se tiene que,

$$i.e. Y^{(1)} + Y^{(2)} + \dots + Y^{(n)} \stackrel{(d)}{=} n^{1/\alpha} X. \quad (1.5)$$

donde las variables aleatorias  $Y^{(k)}$  son i.i.d. con la misma ley que  $X$  para cada  $1 \leq k \leq n$ . El número  $\alpha$  es conocido como el *índice de estabilidad*.

Un *proceso  $\alpha$ -estable* con  $\alpha \in (0, 1) \cup (1, 2)$ , es un proceso de Lévy con exponente característico el de una v.a. estable. Notemos que (1.5) es equivalente a

$$(\mathbb{E} [e^{i\lambda X}])^n = \mathbb{E} [e^{i\lambda n^{1/\alpha} X}].$$

Los procesos  $\alpha$ -estables son de nuestro interés, por presentar la propiedad de *auto-similitud* o *escalamiento* que caracteriza su distribución.

#### Definición 10. (Propiedad de Escalamiento)

Un proceso estocástico  $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_t, t \geq 0)$  que toma valores en  $\mathbb{R}$ , tiene la propiedad de *escalamiento de índice  $\alpha > 0$* , si para  $k > 0$ ,

$$\left( \frac{1}{k^{1/\alpha}} \mathbf{X}_{kt}, t \geq 0 \right) \stackrel{(d)}{=} (\mathbf{X}_t, t \geq 0).$$

Debido a la propiedad de escalamiento, para  $\alpha \in (0, 2)$ , un proceso de Lévy  $X$  con exponente característico  $\Psi$  es  $\alpha$ -estable, si y sólo si,

$$\Psi(k\lambda) = k^\alpha \Psi(\lambda), \quad \forall k > 0, \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Un proceso  $\alpha$ -estable tiene coeficiente gaussiano y medida característica de la forma:

$$\sigma = 0 \quad \text{y} \quad \Pi(dx) := \mathbf{1}_{(0, +\infty)} \frac{c_+}{x^{1+\alpha}} dx + \mathbf{1}_{(-\infty, 0)} \frac{c_-}{|x|^{1+\alpha}} dx, \quad (1.6)$$

donde  $c_+, c_-$  son valores no-negativos con  $c_+ + c_- > 0$ .

Claramente un proceso 2-estable es un movimiento browniano. Por otro lado, si  $\alpha \neq 2$ , el exponente característico se escribe como

$$\Psi(\lambda) := c|\lambda|^\alpha \left( 1 - \beta i \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \text{sgn}(\lambda) \right) \quad (1.7)$$

con  $\beta \in [-1, 1]$ ,  $c > 0$  y  $\text{sgn}(\lambda) = \mathbf{1}_{\{\lambda > 0\}} - \mathbf{1}_{\{\lambda < 0\}}$ . La constante  $\beta$  tiene la forma

$$\beta = \frac{c_+ - c_-}{c_+ + c_-}.$$

El parámetro  $\beta$  da información sobre la asimetría de la medida de Lévy. Decimos que un proceso  $\alpha$ -estable:

1. no tiene saltos positivos  $\Leftrightarrow \Pi(0, +\infty) = 0 \Leftrightarrow c_+ = 0 \Leftrightarrow \beta = -1$ .
2. no tiene saltos negativos  $\Leftrightarrow \Pi(-\infty, 0) = 0 \Leftrightarrow c_- = 0 \Leftrightarrow \beta = 1$ .
3. simétrica  $\Leftrightarrow c_+ = c_- \Leftrightarrow \beta = 0$ .

Por ejemplo, una distribución estable simétrica y centrada da como resultado un exponente característico que toma la forma

$$\Psi(\lambda) := c|\lambda|^\alpha, \quad \forall \alpha \in (0, 2].$$

Un subordinador  $\alpha$ -estable o un proceso  $\alpha$ -estable espectralmente positivo, son ejemplos de procesos  $\alpha$ -estables sin saltos negativos. Particularmente nos interesa considerar un proceso  $\alpha$ -estable para  $\alpha \in (1, 2)$ , con función característica definida por:

$$\mathbb{E} [e^{i\lambda X_t}] = \exp \left\{ t \int_{(0, +\infty)} (e^{i\lambda x} - 1 - i\lambda x) \Pi(dx) \right\} = e^{t(-i\lambda)^\alpha}, \quad t \geq 0.$$

Se sigue que su transformada de Laplace satisface

$$\mathbb{E} [e^{-\lambda X_t}] = e^{t\lambda^\alpha}, \quad \text{para } t \geq 0.$$

Así, por poseer la propiedad de escalamiento,  $X$  es un proceso  $\alpha$ -estable espectralmente positivo, de variación no acotada y similarmente al movimiento browniano, oscila de  $-\infty$  a  $+\infty$ . Además tendrá medida de Lévy dada por:

$$\Pi(dx) = \frac{\alpha(\alpha - 1)}{\Gamma(2 - \alpha)} x^{-\alpha-1} \mathbf{1}_{(0, \infty)} dx. \quad (1.8)$$

## 1.2. Propiedad de Markov

Denotamos por  $\mathcal{N}(\mathbb{P})$  la colección de subconjuntos  $\mathbb{P}$ -nulos de  $\Omega$ ,

$$\text{i.e. } \mathcal{N}(\mathbb{P}) := \{A \in \mathcal{F} : \mathbb{P}(A) = 0\}.$$

Comenzamos por considerar la  $\mathbb{P}$ -compleción del espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ; esto consiste en obtener una  $\sigma$ -álgebra *completa*  $\mathcal{F}_\infty$  generada por la unión de elementos de  $\mathcal{F}$  y  $\mathcal{N}(\mathbb{P})$ , lo cual denotamos por  $\mathcal{F}_\infty := \mathcal{F} \vee \mathcal{N}(\mathbb{P})$ . También se considera la extensión de  $\mathbb{P}$  a esta nueva  $\sigma$ -álgebra, la cual, seguimos denotando por  $\mathbb{P}$ .

Nuestro objetivo ahora es dar algunos resultados relacionados con la *propiedad de Markov* de los procesos de Lévy. Iniciamos definiendo un espacio de probabilidad filtrado adecuado que cumpla las *condiciones habituales* para posteriormente mostrar que los procesos de Lévy satisfacen la *propiedad de Markov Fuerte*.

Intuitivamente, la propiedad de Markov más simple dice que el comportamiento futuro del proceso posterior a un tiempo fijo, depende del pasado, únicamente por el valor del proceso al tiempo presente. El pasado se interpreta como la información del proceso conocida hasta el tiempo fijo y el presente como el valor del proceso en el tiempo fijo. Para dar una definición rigurosa del pasado de un proceso de Lévy  $X$ , consideraremos un espacio de probabilidad filtrado  $(\Omega, \mathcal{F}_\infty, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ , donde  $\mathcal{F}_t$  denota la  $\mathbb{P}$ -compleción de la  $\sigma$ -álgebra generada por  $X$  hasta el tiempo  $t$ ,

$$i.e. \quad \mathcal{F}_t = \sigma(X_s, s \leq t) \vee \mathcal{N}(\mathbb{P}), \quad t \geq 0.$$

**Proposición 11.** (Propiedad de Markov)

Para cada  $t \geq 0$ , el proceso

$$(X_{t+s} - X_t, s \geq 0),$$

es independiente de  $\mathcal{F}_t$  y tiene la misma ley que  $X$ .

*Demostración.* Por definición, el proceso  $X' := (X_{t+s} - X_t, s \geq 0)$  es independiente de  $\mathcal{F}_t$  y con las mismas distribuciones finito-dimensionales que  $X$ ; como la ley de un proceso queda determinada por sus distribuciones finito-dimensionales, y ya que  $X'$  tiene trayectorias càdlàg,  $X'$  tiene nuevamente ley  $\mathbb{P}$ .  $\square$

Observemos que la filtración  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  satisface las condiciones habituales; esto supone que aunado a la completez, se cumple una condición de continuidad por la derecha para aproximar a cada  $\mathcal{F}_t$ .

**Proposición 12.** La filtración  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  es continua por la derecha, i.e.

$$\mathcal{F}_t = \bigcap_{s > t} \mathcal{F}_s, \quad \forall t \geq 0.$$

*Demostración.* Cuando  $t = 0$ , introducimos para cada  $k \geq 0$  los procesos

$$\xi_k := \left( X_{t+\frac{1}{2^k}} - X_{\frac{1}{2^k}}, 0 \leq t \leq \frac{1}{2^k} \right).$$

Como  $X$  satisface la propiedad de Markov,  $(\xi_k, k \geq 0)$  es una colección de v.a. independientes. Consideremos la  $\sigma$ -álgebra completa  $\mathcal{G}_n = \sigma(\xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \dots) \vee \mathcal{N}(\mathbb{P})$  y notamos que es posible recuperar al proceso  $(X_t, 0 \leq t \leq \frac{1}{2^n})$  a partir de la colección  $\{\xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \dots\}$ . Concluimos que la  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{G}_n$  coincide con  $\mathcal{F}_{2^{-n}}$ . Por la ley 0-1 de Kolmogorov, la  $\sigma$ -álgebra

$$\mathcal{G}_\infty = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{G}_n = \bigcap_{s > 0} \mathcal{F}_s$$

es  $\mathbb{P}$ -trivial, probando así la propiedad para  $t = 0$ .

Supongamos ahora que  $t > 0$  y observemos que para todo  $\epsilon > 0$ ,  $\mathcal{F}_{t+\epsilon} = \mathcal{F}_t \vee \mathcal{F}'_\epsilon$ , donde  $(\mathcal{F}'_\epsilon)$  es la filtración de las  $\sigma$ -álgebras  $\mathbb{P}$ -completas generadas por

$$X' = (X_{s+t} - X_t, 0 \leq s \leq \epsilon).$$

De la propiedad de Markov claramente  $\mathcal{F}_t$  y  $\mathcal{F}'_\epsilon$  son independientes y del caso anterior  $\bigcap_{\epsilon>0} \mathcal{F}'_\epsilon$  es  $\mathbb{P}$ -trivial. Así, aplicamos la ley 0-1 de Kolmogorov bajo la probabilidad condicional  $\mathbb{P}(\cdot | \mathcal{F}_t)$  lo cual nos permite afirmar que

$$\bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s = \bigcap_{\epsilon>0} \mathcal{F}_t \vee \mathcal{F}'_\epsilon = \mathcal{F}_t.$$

La independencia de  $\mathcal{F}_t$  y  $\mathcal{F}'_\epsilon$  es esencial en esto último. □

Recordemos que  $T : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ , es tiempo de paro, si es una variable aleatoria que satisface:  $\{T < t\} \in \mathcal{F}_t$  para toda  $t \geq 0$ , donde la igualdad en el evento puede ser omitida gracias a la continuidad por la derecha de la filtración.

Para un tiempo de paro  $T$ , consideramos la  $\mathbb{P}$ -compleción de la  $\sigma$ -álgebra detenida en  $T$ , la cual es generada por el proceso  $X$  matado al tiempo  $T$  y la denotamos por

$$\mathcal{F}_T := \sigma(X_T \mathbf{1}_{\{T < \infty\}}, (X_{s \wedge T})_{s \geq 0}) \vee \mathcal{N}(\mathbb{P}) := \{A : \{T < t\} \cap A \in \mathcal{F}_t, \forall t \geq 0\}.$$

**Proposición 13. (Propiedad de Markov Fuerte)**

*Si  $T$  es un tiempo de paro con  $\mathbb{P}(T < \infty) > 0$ , entonces bajo el evento  $\{T < \infty\}$  tendremos que el proceso  $(X_{T+s} - X_T, s \geq 0)$ , es independiente de  $\mathcal{F}_T$  y tiene la misma ley que  $X$  bajo  $\mathbb{P}$ . De manera equivalente, bajo el evento  $\{T < \infty\}$  y la ley condicional  $\mathbb{P}(\cdot | X_T = 0)$ , el proceso  $(X_{T+t}, t \geq 0)$ , es independiente de  $\mathcal{F}_T$  y tiene la misma ley que  $X$  bajo  $\mathbb{P}$ .*

*Demostración.* Basta probar la propiedad cuando  $T < \infty$ , c.s. Si  $T$  es determinista, se reduce a la propiedad de Markov, si  $T$  es una v.a. discreta basta aplicar la propiedad de Markov en el evento  $\{T = t_k\}$ , para cada posible valor  $t_k$  de  $T$ .

En general para un tiempo de paro  $T$ , consideramos a la sucesión decreciente de tiempos de paro discretos  $T_n = 2^{-n}[2^n T + 1]$ , para los cuales la propiedad de Markov fuerte se satisface. Así pues

$$|2^{-n} [2^n T_n + 1] - 2^{-n} (2^n T_n + 1)| \leq 2^{-n} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

de donde concluimos que  $2^{-n} [2^n T_n + 1] \rightarrow T$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . Por la continuidad por la derecha de los procesos de Lévy, tenemos que  $X_{T_n} \rightarrow X_T$ . Por otro lado,

$$(X_{T_n-s} - X_{T_n}, s \geq 0) \text{ es independiente de } \mathcal{F}_{T_n} \text{ para cada } n \in \mathbb{N},$$

de donde al ser el límite una función medible sobre la colección  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , se tiene que

$$(X_{T+s} - X_T, s \geq 0) \text{ es independiente de } \mathcal{F}_{T_n}, \forall n,$$

en particular  $(X_{T+s} - X_T, s \geq 0)$  es independiente de  $\cap_{n \geq 1} \mathcal{F}_{T_n} := \mathcal{F}_T$ , donde ésta última igualdad se debe a que la filtración es continua por la derecha.  $\square$

En este punto es conveniente hacer notar que podemos admitir una definición más amplia de procesos de Lévy, permitiendo ahora que un proceso comience en un punto arbitrario  $x$  en  $\mathbb{R}$ . Así, a partir de un proceso de Lévy  $X$  con ley  $\mathbb{P}$ , es posible recuperar una colección de procesos de Lévy  $X + x$  que bajo  $\mathbb{P}$  tienen una ley que denotamos por  $\mathbb{P}_x$  y a la cual nos referimos como la ley del proceso que empieza en  $x$ . Es fácil ver que las propiedades markovianas siguen siendo válidas para esta nueva variedad de procesos con sus respectivas leyes.

Consideramos una familia de operadores de convolución sobre el espacio de funciones acotadas  $L^\infty(\mathbb{R})$ , i.e. el espacio de funciones  $\mathbb{P}$ -integrables con la norma del supremo esencial. Dicha familia indexada por  $t \geq 0$ , se define para  $f \in L^\infty(\mathbb{R})$  por

$$P_t f(x) = \mathbb{E}_x[f(X_t)] = \mathbb{E}[f(X_t + x)] = \int f(y + x) \mathbb{P}(X_t \in dy).$$

La colección de operadores  $(P_t, t \geq 0)$  posee las siguientes propiedades:

- $P_0 \equiv Id$ .
- Es un semigrupo, i.e.  $P_{t+s} = P_t \circ P_s = P_s \circ P_t \quad \forall t, s \geq 0$ .
- Es de contracción, i.e.  $\forall t \geq 0, 0 \leq \|P_t\| \leq 1$  con  $\|P_t\| = \sup_{\|f\|_\infty \leq 1} \frac{\|P_t f\|_\infty}{\|f\|_\infty}$ .

Es común referirse a esta colección como un *semigrupo de Markov*. Consideramos ahora el subespacio  $C_0$  de  $L^\infty(\mathbb{R})$ , integrado por funciones continuas que se anulan en el infinito dotado con la norma supremo, bajo la cual, la convergencia de funciones es uniforme.

**Proposición 14.** (Propiedad de Feller)

*Un semigrupo de Markov  $(P_t, t \geq 0)$  posee la propiedad de Feller, si para toda  $f \in C_0$ , satisface que*

- (i)  $P_t f \in C_0$ .
- (ii)  $\lim_{t \downarrow 0} P_t f = f$  (continuidad por la derecha).

*Demostración.* (i) Debido a que las funciones en  $C_0$  son acotadas y  $f(x) \rightarrow 0$  cuando  $|x| \rightarrow \infty$  es posible utilizar el teorema de convergencia dominada para concluir el resultado. (ii) De la propiedad de contracción y la linealidad de los operadores  $P_t$  concluimos su continuidad, así pues, de la continuidad de las funciones en  $C_0$  y la continuidad por la derecha del proceso de Lévy  $X$ , concluimos fácilmente el límite.  $\square$

Finalmente la propiedad de Feller de los operadores del semigrupo de un proceso de Lévy  $X$  nos permite probar una propiedad de continuidad por la izquierda para dichos procesos.

**Proposición 15. (Cuasi-Continuidad por la Izquierda)**

Sea  $(T_n)_{n \geq 0}$  una sucesión de tiempos de paro creciente tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = T$  c.s. Entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} X_{T_n} = X_T$  c.s. en el evento  $\{T < \infty\}$ . En particular si  $T_n < T$  c.s., entonces  $X$  es continua al tiempo  $T$  c.s. sobre  $\{T < \infty\}$ .

*Demostración.* Sin pérdida de generalidad asumimos que  $T < \infty$  y  $T_n < T$  para toda  $n \in \mathbb{N}$  c.s. Por un lado recordemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_{T_n} = X_{T^-}, \text{ c.s.}$$

Sean  $h, g \in C_0$  y consideramos la sucesión creciente hacia  $T + t$  c.s.  $(T_n + t)_{n \geq 0}$ , entonces

$$\lim_{t \downarrow 0^+} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} [h(X_{T_n}) g(X_{T_n+t})] = \lim_{t \downarrow 0^+} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} [h(X_{T_n}) P_t g(X_{T_n})],$$

donde la igualdad se debe a una aplicación de la propiedad de Markov al tiempo  $T_n$ . Así pues,

$$\lim_{t \downarrow 0^+} \mathbb{E} [h(X_{T^-}) g(X_{(T+t)^-})] = \lim_{t \downarrow 0^+} \mathbb{E} [h(X_{T^-}) P_t g(X_{T^-})].$$

Finalmente concluimos por la continuidad derecha de  $X$  que

$$\mathbb{E} [h(X_{T^-}) g(X_T)] = \mathbb{E} [h(X_{T^-}) g(X_{T^-})].$$

En otras palabras,  $X_T = X_{T^-}$  c.s. Esto último aunado a la continuidad derecha de  $X$  implica su continuidad al tiempo  $T$ , finalizando así la prueba.  $\square$



# Capítulo 2

## Tiempo Local y Teoría de Excursiones

Estamos interesados en la estructura de las sucesivas longitudes de los intervalos de excursión para un proceso de Markov  $X$  lejos de algún punto. Específicamente, construiremos un proceso creciente  $L$  llamado el tiempo local, el cual permanece constante sobre los intervalos de excursión. Posteriormente probamos que el inverso del tiempo local  $L^{-1}$  es un subordinador (posiblemente matado) con saltos que corresponden a las longitudes de los intervalos de excursión. Damos la descripción del proceso de excursiones de  $X$  en términos de un proceso de Poisson puntual.

### 2.1. Algunos preliminares

Recordemos que la familia de medidas de probabilidad  $(\mathbb{P}_x, x \in \mathbb{R})$  la pensamos como la familia de leyes de un proceso estocástico  $X$  en el espacio de funciones càdlàg que empieza desde un punto arbitrario  $x$ , donde cada  $\mathbb{P}_x$ , satisface la respectiva propiedad de Markov fuerte, i.e. para todo tiempo de paro  $T$  finito c.s. introducimos un operador de traslación sobre el conjunto de funciones càdlàg, denotado por  $\theta_T$ , y definido por

$$X \circ \theta_T =: (X_{T+t}, t \geq 0),$$

de manera que bajo la ley condicionada  $\mathbb{P}(\cdot | X_T = x)$ , este proceso trasladado en  $T$  es independiente de  $\mathcal{F}_T$  y tiene la misma ley que  $X$  bajo  $\mathbb{P}_x$ .

Sea  $B$  un boreliano y nos enfocamos únicamente en el caso en que es un conjunto abierto o cerrado. Consideremos los “tiempos de entrada” al conjunto  $B$

$$T_B := \inf\{t \geq 0 : X_t \in B\} \quad \text{y} \quad T'_B := \inf\{t > 0 : X_t \in B\}.$$

Los tiempos aleatorios  $T_B$  y  $T'_B$  son tiempos de paro sobre  $\{T_B < \infty\}$  y  $\{T'_B < \infty\}$  respectivamente (Véase [1] Corolario I.8). Además, tendremos por la continuidad derecha de las trayectorias de  $X$  que  $\mathbb{P}_x(T_B = T'_B) = 1$ ,  $\forall x \in (\mathbb{R} \setminus B) \cup \text{int}(B)$ . Esta última igualdad puede fallar en algunos puntos de la frontera de  $B$  en caso de que  $B$  sea cerrado, es decir podría ocurrir que para algún  $x \in \text{Fr}(B)$ ,

$$\mathbb{P}_x(T'_B = T_B) < 1 \Leftrightarrow \mathbb{P}_x(T'_B = 0) < 1,$$

y entonces  $x$  es llamado *irregular* para  $B$ . En particular notemos que si  $B = \{0\}$ ,

$$\mathbb{P}_x(T_0 = T'_0) = 1, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

donde para  $x = 0$  esta igualdad puede o no ocurrir. De acuerdo a la ley 0-1 de Blumenthal, el evento  $\{T'_0 = 0\}$  es trivial bajo  $\mathbb{P} = \mathbb{P}_0$ , de donde obtenemos la siguiente clasificación del punto 0.

**Definición 16. (Regularidad del 0)**

*El 0 es un punto regular si  $\mathbb{P}(T'_0 = 0) = 1$  e irregular si  $\mathbb{P}(T'_0 = 0) = 0$ .*

Si 0 es regular, tiene sentido introducir el primer “tiempo de salida” del 0 para  $X$

$$S := \inf\{t \geq 0 : X_t \neq 0\}.$$

Entonces,  $S$  es un tiempo de paro y nuevamente el evento  $\{S = 0\}$  es trivial bajo  $\mathbb{P}$ .

**Definición 17. (Punto Instantáneo y de Espera)**

*Si 0 es regular, es un punto instantáneo si  $\mathbb{P}(S = 0) = 1$  y de espera si  $\mathbb{P}(S = 0) = 0$ .*

La regularidad del 0 se refiere intuitivamente a la certeza con la que el proceso  $X$  bajo  $\mathbb{P}$  retorna al origen en intervalos de tiempo arbitrariamente pequeños. Por la propiedad de Markov, será de gran importancia el estudio del proceso  $X$  cerca de los tiempos donde se anula, es decir, el estudio del conjunto de ceros del proceso:

$$\mathfrak{L} := \{t \geq 0 : X_t = 0\}.$$

Para el estudio del conjunto  $\mathfrak{L}$  y sus cardinalidad, introducimos el primer tiempo de retorno al origen posterior al tiempo  $T$ , dado por  $R_T := \inf\{t > T : X_t = 0\}$  y definido para todo  $T$  tiempo de paro. Parafraseando,  $R_T$  denota el primer tiempo de retorno al origen del proceso trasladado  $X \circ \theta_T$ , esto es

$$R_T = \theta_T \circ R_0 := \inf\{t > 0 : \theta_T \circ X = 0\}$$

Además, se tiene la igualdad de eventos  $\{T'_0 = 0\} = \{R_0 = 0\}$ , con lo que podemos observar que hemos extendido de manera natural el estudio de la regularidad del 0 hacia los tiempos en que  $X$  se anula.

## 2.2. El Tiempo Local

Consideramos durante el siguiente desarrollo el caso en que el 0 es regular e instantáneo. Cabe destacar que la principal diferencia con las otras clasificaciones reside en la cardinalidad del conjunto  $\mathfrak{L}$ ; en el caso irregular resulta ser discreto, mientras que para el caso en que 0 es regular y un punto de espera es una unión ajena de intervalos.

**Proposición 18.** ( $\overline{\mathfrak{L}}$  es un conjunto de Cantor)

*El conjunto  $\overline{\mathfrak{L}}$  es perfecto y denso en ninguna parte, esto es, es un cerrado que coincide con sus puntos de acumulación y no tiene interior.*

*Demostración.* Consideremos la colección de tiempos de paro  $(R_r, r \in \mathbb{Q}^+)$ . Por ser el 0 instantáneo, tenemos que  $S = 0$  c.s. Aplicando la propiedad de Markov fuerte se obtiene que en el evento  $\{R_r < +\infty\}$ , ocurre que  $\theta_{R_r} \circ S \equiv 0$  c.s. lo cual a su vez implica que  $X_{R_r} = 0$  c.s. esto es,  $R_r \in \mathfrak{L}$ . Por otro lado, existe una sucesión decreciente  $(t_n)_{n \geq 1}$  tal que  $t_n \downarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , de manera que  $R_r + t_n \in \mathfrak{L}^c$  para toda  $n \geq 1$ , esto último nuevamente debido a que 0 es instantáneo y existirá un intervalo a la derecha de  $R_r$  donde  $X$  no se anula, todo esto en el evento  $\{R_r < +\infty\}$ . Así las cosas, por continuidad por la derecha de  $X$  obtenemos la convergencia

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_{R_r + t_n} = X_{R_r} := 0,$$

con lo que se concluye que la colección  $(R_r, r \in \mathbb{Q}^+)$  está conformada por puntos de acumulación de  $\mathfrak{L}^c$ , en particular  $R_r \in \overline{\mathfrak{L}^c}$ .

Lo anterior implica que  $R_r \in \overline{\mathfrak{L}} \cap \overline{\mathfrak{L}^c} := \text{Fr}(\mathfrak{L})$ , donde  $\text{Fr}(\mathfrak{L})$  denota la frontera de  $\mathfrak{L}$ . Recordemos que  $\overline{\mathfrak{L}} = \text{Fr}(\mathfrak{L}) \cup \text{int}(\mathfrak{L})$  y que la frontera e interior de un conjunto son ajenos. Por densidad de  $(R_r, r \in \mathbb{Q}_+)$  en  $\mathfrak{L}$  y lo anterior, necesariamente  $\text{int}(\mathfrak{L}) = \emptyset$ . Finalmente, los puntos frontera siempre son puntos de acumulación ó puntos aislados, sin embargo por la densidad de la colección  $(R_r, r \in \mathbb{Q}^+)$ , el conjunto  $\mathfrak{L}$  no contiene puntos aislados, en particular  $\overline{\mathfrak{L}}$  es perfecto.  $\square$

**Definición 19.** (Intervalo de Excursión)

*Decimos que  $(g, d)$  es un intervalo de excursión si es un intervalo abierto y conexo maximal en el conjunto  $[0, \infty) \setminus \overline{\mathfrak{L}}$ . En otras palabras, debe satisfacer que*

$$X_t \neq 0, \quad \forall t \in (g, d) \quad \text{con} \quad g \in \overline{\mathfrak{L}} \quad \text{y} \quad d \in \overline{\mathfrak{L}} \cup \{+\infty\},$$

*y denotamos su longitud por  $\ell := d - g$ .*

Elegimos y fijamos una constante  $c > 0$ . La elección de esta constante es arbitraria y cambiarla afectará la mayoría de los resultados por un factor determinista de una manera no tan relevante.

**Proposición 20.** Para  $c > 0$  fijo, tenemos que  $\mathbb{P}(\exists (g, d) \text{ tal que } \ell > c) = 1$ .

*Demostración.* Para todo  $t \geq 0$  consideremos el evento

$$\Lambda_t = \{ \forall (g, d) \text{ intervalo de excursión con } d < t \text{ se tiene que } \ell \leq c \},$$

y notemos que  $\Lambda_t \subset \Lambda_s$  para  $s \leq t$ . Se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\exists (g, d) \text{ tal que } \ell > c) &= 1 - \mathbb{P}(\forall (g, d) \text{ se tiene que } \ell \leq c) \\ &= 1 - \lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(\Lambda_t). \end{aligned}$$

Para probar el enunciado basta probar que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(\Lambda_t) = 0$ . Para esto, elegimos  $t > 0$  suficientemente grande tal que  $\mathbb{P}(\Lambda_t) < 1$ . El regreso a 0 posterior al tiempo  $t$ , es un tiempo de paro, posiblemente infinito. En el último caso, existe una excursión infinita y por ende de longitud  $\ell > c$ . Si el tiempo de paro es finito, es posible aplicar la propiedad de Markov. La desigualdad  $\mathbb{P}(\Lambda_{3t}) < \mathbb{P}(\Lambda_t)^2$  se sigue, y por iteración  $\mathbb{P}(\Lambda_{3^n t}) < \mathbb{P}(\Lambda_t)^{2^n}$  para toda  $n$ .  $\square$

Para cada  $a > 0$  será conveniente denotar por  $\ell_n(a)$ ,  $g_n(a)$ ,  $d_n(a)$ , la longitud, el extremo izquierdo y el extremo derecho del  $n$ -ésimo intervalo de excursión respectivamente, con longitud mayor que  $a$ . Cabe destacar que el orden  $n$ -ésimo es de acuerdo a un orden total ( $\leq$ ) con respecto al cual el conjunto de intervalos de excursión es totalmente ordenado, más específicamente, tendremos que

$$(g, d) < (g', d') \Leftrightarrow g < d < g' < d'.$$

En caso de que no exista una  $n$ -ésima excursión diremos que  $\ell_n(a) = 0$  y que  $g_n(a) = d_n(a) = +\infty$ , además en general tendremos que  $d_n(a)$  es un tiempo de paro.

**Lema 21.** Para toda  $a \in (0, c)$ , tenemos que  $\mathbb{P}(\ell_1(a) > c) > 0$ .

*Demostración.* Si  $\mathbb{P}(\ell_1(a) > c) = 0$  entonces  $\ell_1(a) \leq c$ , c.s. de manera que  $d_1(a) < g_1(c)$  c.s. Iterando la propiedad de Markov al tiempo  $d_n(a)$ , se deduce que  $d_n(a) < g_1(c)$  c.s. para toda  $n \geq 1$ . Esto implica que  $g_1(c) = +\infty$  c.s. lo cual no es posible.  $\square$

El lema anterior nos permite definir una función  $\bar{\Pi} : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ , que describe la distribución de las longitudes de los intervalos de excursión, dada por:

$$\bar{\Pi}(a) = \begin{cases} 1/\mathbb{P}(\ell_1(a) > c) & \text{si } a \leq c, \\ \mathbb{P}(\ell_1(c) > a) & \text{si } a > c, \end{cases}$$

la cual cumple ser continua por la derecha, decreciente, además de que  $\bar{\Pi}(c) = 1$ . Nótese que intuitivamente  $\bar{\Pi}(\infty)$  indica la probabilidad de una posible excursión de longitud infinita, siendo en caso de su existencia, la última excursión que daría el proceso. En otras palabras este comportamiento permite saber si habrá una cantidad finita o infinita de excursiones.

**Lema 22.** *El conjunto  $\mathfrak{L}$  es o no acotado acorde a si  $\overline{\Pi}(\infty)$  es positivo o nulo.*

*Demostración.* Debido a la propiedad de Markov, la sucesión de longitudes de los intervalos de excursión con longitud mayor que  $c$  son i.i.d. Notemos que el conjunto

$$B := \bigcup_{n \geq 1} \left\{ \ell_k(c) < \infty, \text{ para } k \in \{1, 2, \dots, n-1\} \right\} \cap \left\{ \ell_n(c) = \infty \right\},$$

denota el evento “existe un intervalo de excursión con longitud infinita”. Por la idéntica distribución hacemos  $p = \mathbb{P}(\ell_1(c) = \infty) := \overline{\Pi}(\infty)$  y entonces

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{n \geq 1} p(1-p)^{n-1} = \begin{cases} 0 & \text{si } \overline{\Pi}(\infty) = 0, \\ 1 & \text{si } \overline{\Pi}(\infty) > 0. \end{cases} \quad \square$$

**Definición 23.** (Recurrencia - Transitoriedad)

*Decimos que el 0 es un estado recurrente si  $\overline{\Pi}(\infty) = 0$  y transitorio si  $\overline{\Pi}(\infty) > 0$ .*

**Lema 24.** *La función  $\overline{\Pi}$  satisface que  $\lim_{a \rightarrow 0^+} \overline{\Pi}(a) = \infty$ , esto es, la primera excursión positiva tiene longitud menor o igual que  $c$  casi seguramente.*

*Demostración.* Si fallara el enunciado, tendríamos que no habría excursiones en el intervalo  $[0, g_1(c))$  con probabilidad positiva. Más aún, por ser el 0 regular y las trayectorias càd, el proceso  $X$  se quedaría en cero en alguna vecindad del origen con probabilidad positiva contradiciendo con esto que 0 sea instantáneo.  $\square$

**Lema 25.**  $\forall a \in (0, \infty)$  y  $b \leq a$  tal que  $\overline{\Pi}(b) > 0$  se tiene que  $\mathbb{P}(\ell_1(b) > a) = \frac{\overline{\Pi}(a)}{\overline{\Pi}(b)}$ .

*Demostración.* Si  $b = c$  ó  $a = c$ , entonces  $\overline{\Pi}(a) < 1$  ó  $\overline{\Pi}(b) > 1$ , por lo que,

$$\mathbb{P}(\ell_1(c) > a) = \overline{\Pi}(a) \quad \text{ó} \quad \mathbb{P}(\ell_1(a) > c) = \frac{1}{\overline{\Pi}(b)},$$

respectivamente. Ahora si  $b \neq c \neq a$ , entonces como  $b \leq a$  hay tres casos diferentes.

**Caso  $b < c < a$ .** Se tiene que  $\overline{\Pi}(a) < 1 < \overline{\Pi}(b)$ , de donde

$$\begin{aligned} \frac{\overline{\Pi}(a)}{\overline{\Pi}(b)} &= \mathbb{P}(\ell_1(c) > a) \mathbb{P}(\ell_1(b) > c) \\ &= \mathbb{P}(\ell_1(c) > a) [1 - \mathbb{P}(\ell_1(b) \leq c)] \\ &= \mathbb{P}(\ell_1(c) > a) - \mathbb{P}(\ell_1(c) > a) \mathbb{P}(\ell_1(b) \leq c) \\ &= \mathbb{P}(\ell_1(c) > a) - \mathbb{P}(\ell_1(c) > a, \ell_1(b) \leq c) \\ &= \mathbb{P}(\ell_1(c) > a, \ell_1(b) > c) = \mathbb{P}(\ell_1(b) > a), \end{aligned}$$

donde en la penúltima igualdad se utilizó la independencia de los eventos  $\{\ell_1(c) > a\}$  y  $\{\ell_1(b) \leq c\}$ , aplicando la propiedad de Markov fuerte en el extremo  $d_1(b)$ .

**Caso**  $b < a < c$ . Se tiene que  $1 < \bar{\Pi}(a) < \bar{\Pi}(b)$ , de donde

$$\begin{aligned}
\frac{\bar{\Pi}(a)}{\bar{\Pi}(b)} &= \frac{\mathbb{P}(\ell_1(b) > c)}{\mathbb{P}(\ell_1(a) > c)} = \frac{\mathbb{P}(\ell_1(b) > a, \ell_1(a) > c)}{\mathbb{P}(\ell_1(a) > c)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(\ell_1(a) > c) - \mathbb{P}(\ell_1(b) \leq a, \ell_1(a) > c)}{\mathbb{P}(\ell_1(a) > c)} \\
&= 1 - \frac{\mathbb{P}(\ell_1(b) \leq a, \ell_1(a) > c)}{\mathbb{P}(\ell_1(a) > c)} \\
&= 1 - \mathbb{P}(\ell_1(b) \leq a \mid \ell_1(a) > c) \\
&= 1 - \mathbb{P}(\ell_1(b) \leq a) = \mathbb{P}(\ell_1(b) > a).
\end{aligned}$$

donde en la penúltima igualdad hemos utilizado de nueva cuenta la independencia debido a la propiedad de Markov fuerte en el extremo  $d_1(b)$ .

**Caso**  $c < b < a$ . Se tiene que  $\bar{\Pi}(a) < \bar{\Pi}(b) < 1$ , de donde

$$\begin{aligned}
\frac{\bar{\Pi}(a)}{\bar{\Pi}(b)} &= \frac{\mathbb{P}(\ell_1(c) > a)}{\mathbb{P}(\ell_1(c) > b)} = \frac{\mathbb{P}(\ell_1(c) > b, \ell_1(b) > a)}{\mathbb{P}(\ell_1(c) > b)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(\ell_1(b) > a) - \mathbb{P}(\ell_1(b) > a, \ell_1(c) \leq b)}{\mathbb{P}(\ell_1(c) > b)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(\ell_1(b) > a) - \mathbb{P}(\ell_1(b) > a \mid \ell_1(c) \leq b) \mathbb{P}(\ell_1(c) \leq b)}{\mathbb{P}(\ell_1(c) > b)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(\ell_1(b) > a) - \mathbb{P}(\ell_1(b) > a) \mathbb{P}(\ell_1(c) \leq b)}{\mathbb{P}(\ell_1(c) > b)} \\
&= \mathbb{P}(\ell_1(b) > a) \left[ \frac{1 - \mathbb{P}(\ell_1(c) \leq b)}{\mathbb{P}(\ell_1(c) > b)} \right] = \mathbb{P}(\ell_1(b) > a).
\end{aligned}$$

En la cuarta igualdad se utilizó la definición de probabilidad condicional y la independencia debido a la propiedad de Markov fuerte en el extremo  $d_1(c)$ .  $\square$

Introducimos ahora, para cada  $t \geq 0$  y  $a > 0$ , una variable que nos indica la cantidad de intervalos de excursión de longitud  $\ell > a$  que comenzaron estrictamente antes del tiempo  $t$ , incluyendo las excursiones que posiblemente queden con el extremo izquierdo antes de  $t$  y el derecho después de  $t$ , siempre y cuando su longitud sea mayor que  $a$ ; así pues, esta cantidad la denotamos por

$$N_a(t) := \sup\{n : g_n(a) < t\}.$$

Si una excursión con longitud  $\ell > a$  tiene extremo izquierdo en  $t$ , esta se omite.

**Proposición 26.**

Sea  $a \in (0, \infty]$  y  $b < a$  tal que  $\bar{\Pi}(b) > 0$ , entonces,

(a)  $N_b(g_1(a))$  es independiente de  $X \circ \theta_{g_1(a)}$ .

(b)  $N_b(g_1(a))$  tiene distribución geométrica de parámetro  $1 - \frac{\bar{\Pi}(a)}{\bar{\Pi}(b)}$ .

*Demostración.* (a) Consideramos una funcional medible  $F \geq 0$  y notamos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ F(X \circ \theta_{d_n(b)}) \mathbb{1}_{\{N_b(d_n(a)) > n\}} \right] &= \mathbb{E} \left[ F(X \circ \theta_{d_n(b)}) \mathbb{1}_{\{d_n(b) < g_1(a)\}} \right] \\ &= \mathbb{P} \left( d_n(b) < g_1(a) \right) \mathbb{E} \left[ F(X) \right], \end{aligned}$$

donde hemos aplicado la propiedad de Markov fuerte al tiempo  $d_n(b)$ , esto es, se utiliza la independencia del proceso  $X \circ \theta_{d_n(b)}$  con respecto a  $\mathcal{F}_{d_n(b)}$  y su distribución idéntica a la de  $X$ . Es posible en el evento  $\{d_n(b) < g_1(a)\}$  recuperar al proceso  $X \circ \theta_{g_1(a)}$ , para esto, trasladamos el origen del tiempo de  $X \circ \theta_{d_n(b)}$  hacia  $g_1^{(n)}(a)$ ; este último denota el extremo izquierdo de la primera excursión posterior al tiempo  $d_n(b)$  con longitud  $\ell > a$ . Como dicha traslación puede ser vista como la función restricción  $R_{[g_1^{(n)}(a), +\infty)}(X \circ \theta_{d_n(b)})$ , utilizamos las igualdades anteriores para  $F = R_{[g_1^{(n)}(a), +\infty)}$ .

Se obtiene que  $X \circ \theta_{g_1^{(n)}(a)}$  tiene la misma ley que  $X \circ \theta_{g_1(a)}$ , y como consecuencia  $N_b(g_1(a))$  y  $X \circ \theta_{g_1(a)}$  son independientes.

(b) Ahora bien, aplicando la propiedad de Markov nuevamente notamos que

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left( N_b(g_1(a)) \geq n \mid N_b(g_1(a)) \geq n-1 \right) &= \mathbb{P} \left( d_n(b) < g_1(a) \mid d_{n-1}(b) < g_1(a) \right) \\ &= \mathbb{P} \left( d_1(b) < g_1(a) \right) = \mathbb{P} \left( N_b(g_1(a)) \geq 1 \right), \end{aligned}$$

de donde por ser  $N_b(g_1(a))$  discreta no-negativa y desmemoriada concluimos que tiene distribución geométrica. Más aún, tiene parámetro

$$\mathbb{P} \left( N_b(g_1(a)) \geq 1 \right) = \mathbb{P} \left( d_1(b) < g_1(a) \right) = \mathbb{P} \left( \ell_1(b) \leq a \right) = 1 - \frac{\bar{\Pi}(a)}{\bar{\Pi}(b)}.$$

□

**Proposición 27.**

Para toda  $u \in (0, +\infty]$  tal que  $\bar{\Pi}(u) > 0$ , el proceso

$$\left( \frac{N_a(d_1(u))}{\bar{\Pi}(a)}, a \in (0, u) \right),$$

es un proceso continuo por la izquierda, que satisface ser una martingala en reversa uniformemente integrable. Mas aún, converge c.s. y en  $L^1(\mathbb{P})$  cuando  $a \downarrow 0^+$  hacia una variable exponencial de parámetro  $\bar{\Pi}(u)$  independiente de  $\ell_1(u)$ .

*Demostración.* Consideramos  $a < c$  y definimos la  $\sigma$ -álgebra generada por la longitud de los intervalos con  $\ell > a$  que comienzan antes del tiempo  $d_1(u)$ ,

$$i.e. \quad \mathcal{L}_a := \sigma(\ell_k(a), k = 1, 2, \dots, N_a(d_1(u))) .$$

Es claro de la definición de  $N_a(d_1(u))$  que es  $\mathcal{L}_a$ -medible y que  $\mathcal{L}_a \subseteq \mathcal{L}_b$  para  $b < a$ , lo cual significa que  $(\mathcal{L}_a)_{0 < a < u}$  es una filtración en reversa.

Descomponemos las trayectorias de  $X$  en los extremos derechos de los intervalos con longitud  $\ell > a$ . Por un lado, la propiedad de Markov en los tiempos  $d_k(a)$ , muestra que condicionando con  $N_a(d_1(u)) = n$  y  $\ell_k(a) = \lambda_k$ , los procesos dados por  $Y^{(k)} := (X_{d_{k-1}(a)+t}, 0 \leq t \leq d_k(a) - d_{k-1}(a))$  con  $k = 1, 2, \dots, n$ , son independientes y con la misma ley que  $Y^{(1)}$  cuando se condiciona a que  $\ell_1(a) = \lambda_k$  para  $k = 1, \dots, n$ . Por convención  $d_0(a) = 0$ . Por otro lado, como  $b < a$  tendremos que  $N_b(d_1(a)) = N_b(g_1(a)) + 1$ , (ya que debe considerarse el intervalo de excursión  $(g_1(a), d_1(a))$  con longitud  $\ell_1(a) > a > b$ ). Articulando lo anterior concluimos que

$$\mathbb{E}[N_b(d_1(u)) | \mathcal{L}_a] = N_a(d_1(u)) \mathbb{E}[N_b(g_1(a)) + 1] = N_a(d_1(u)) \frac{\bar{\Pi}(b)}{\bar{\Pi}(a)} .$$

donde  $N_b(g_1(a))$  es independiente de  $\ell_1(a)$  y por la proposición anterior tiene distribución geométrica de parámetro  $1 - \frac{\bar{\Pi}(a)}{\bar{\Pi}(b)}$ . Lo anterior implica que

$$\mathbb{E} \left[ \frac{N_b(d_1(u))}{\bar{\Pi}(b)} \mid \mathcal{L}_a \right] = \frac{N_a(d_1(u))}{\bar{\Pi}(a)} ,$$

lo cual indica que efectivamente el proceso es una martingala en reversa. Por construcción las trayectorias del proceso en cuestión son continuas por la izquierda.

Como la martingala es positiva converge casi seguramente cuando  $a \downarrow 0^+$ . Por otro lado, debido a la proposición anterior sabemos que la v.a.  $N_a(d_1(u)) = N_a(g_1(u)) + 1$  es independiente de  $X \circ \theta_{g_1(u)}$  y por ende de  $\ell_1(u)$ , por lo que el límite anterior es igualmente independiente de  $\ell_1(u)$ . Finalmente, como  $N_a(g_1(u))$  tiene distribución geométrica de parámetro  $1 - \frac{\bar{\Pi}(u)}{\bar{\Pi}(a)}$ , tendremos para todo  $\lambda > 0$ :

$$\mathbb{E} \left[ \exp \left\{ -\lambda \frac{N_a(d_1(u)) - 1}{\bar{\Pi}(a)} \right\} \right] = \frac{\bar{\Pi}(u)/\bar{\Pi}(a)}{1 - e^{-\lambda/\bar{\Pi}(a)} (1 - \bar{\Pi}(u)/\bar{\Pi}(a))} \xrightarrow{a \downarrow 0^+} \frac{\bar{\Pi}(u)}{\lambda + \bar{\Pi}(u)} .$$

En particular,  $\lim_{a \downarrow 0^+} \frac{N_a(d_1(u))}{\bar{\Pi}(a)}$  tiene distribución exponencial de parámetro  $\bar{\Pi}(u)$ ,

$$i.e. \quad \mathbb{E} \left[ \lim_{a \downarrow 0^+} \frac{N_a(d_1(u))}{\bar{\Pi}(a)} \right] = \frac{1}{\bar{\Pi}(u)} ,$$

lo cual implica la convergencia en  $L^1(\mathbb{P})$  (Por el Lema de Scheffé's) y por tanto que la martingala es uniformemente integrable.  $\square$



**Teorema 28.** (El tiempo local) *Los siguientes enunciados se cumplen c.s.*

(i) *Para todo  $t \geq 0$ , el siguiente límite existe,*

$$\lim_{a \downarrow 0} N_a(t) / \bar{\Pi}(a) := L(t).$$

(ii)  *$L := (L(t), t \geq 0)$  es un proceso creciente y continuo.  
 $L$  es llamado el tiempo local de  $X$  en 0.*

(iii) *La medida de Lebesgue-Stieltjes  $dL$  tiene soporte en  $\bar{\mathcal{L}}$ .*

*Demostración.* (i) ] De la proposición anterior  $N_a(t) / \bar{\Pi}(a)$  converge en  $t = d_1(u)$ , de donde aplicando la propiedad de Markov fuerte en cada  $d_k(u)$  para  $k \geq 1$  y haciendo que  $u \downarrow 0^+$ , observamos que la convergencia es válida para todo  $t \in \mathcal{D}$  donde  $\mathcal{D} := \{d_k(u) : u > 0 \text{ y } k \in \mathbb{N}\}$ , esto es,  $\mathcal{D}$  denota el conjunto de extremos derechos de los intervalos de excursión. Así las cosas, la función  $L : \mathcal{D} \rightarrow [0, +\infty)$  definida de manera puntual por  $\lim_{a \downarrow 0} N_a(t) / \bar{\Pi}(a) := L(t) \quad \forall t \in \mathcal{D}$ , es creciente y probaremos que existe una única extensión creciente en  $[0, +\infty)$ . Así pues, sea  $\epsilon > 0$  y consideramos el evento

$$\Lambda := \{L(d_k(a)) - L(d_{k-1}(a)) \leq \epsilon, \quad \forall k \leq N_a(d_1(c))\}.$$

Por un lado, la distribución de  $N_a(d_1(c)) - 1$  es geométrica de parámetro  $1 - \frac{\bar{\Pi}(c)}{\bar{\Pi}(a)}$ . Por otro lado, de la proposición anterior y la propiedad de Markov se sigue que condicionalmente en el evento  $\{N_a(d_1(c)) = n\}$ , las variables  $L(d_k(a)) - L(d_{k-1}(a))$  con  $k = 1, 2, \dots, n$  son independientes e idénticamente distribuidas con distribución exponencial de parámetro  $\bar{\Pi}(a)$ . Por lo tanto tendremos que,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\Lambda) &= \mathbb{E} \left[ \prod_{k=1}^{N_a(d_1(c))} \mathbf{1}_{\{L(d_k(a)) - L(d_{k-1}(a)) \leq \epsilon\}} \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \left( \prod_{k=1}^{N_a(d_1(c))} \mathbf{1}_{\{L(d_k(a)) - L(d_{k-1}(a)) \leq \epsilon\}} \mathbf{1}_{\{N_a(d_1(c)) = n\}} \right) \right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( \prod_{k=1}^n \mathbb{P}(L(d_k(a)) - L(d_{k-1}(a)) \leq \epsilon) \right) \mathbb{P}(N_a(d_1(c)) - 1 = n - 1) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( 1 - e^{-\epsilon \bar{\Pi}(a)} \right)^{n+1} \left( 1 - \frac{\bar{\Pi}(c)}{\bar{\Pi}(a)} \right)^n \frac{\bar{\Pi}(c)}{\bar{\Pi}(a)} \\ &= \frac{\bar{\Pi}(c)}{\bar{\Pi}(a)} \left( 1 - e^{-\epsilon \bar{\Pi}(a)} \right) \left[ 1 - \left( 1 - e^{-\epsilon \bar{\Pi}(a)} \right) \left( 1 - \frac{\bar{\Pi}(c)}{\bar{\Pi}(a)} \right) \right]^{-1}. \end{aligned}$$

Como  $\bar{\Pi}(a) \rightarrow +\infty$  cuando  $a \downarrow 0^+$ , observamos que  $\mathbb{P}(\Lambda) = 1$  cuando  $a \downarrow 0^+$ . Esto muestra que no hay espacios más grandes que  $\epsilon$  en el rango de  $L$  sobre el conjunto  $\mathcal{D} \cap [0, d_1(c)]$ , c.s. Dejando que  $\epsilon \downarrow 0$  y aplicando la propiedad de Markov en  $d_k(c)$  para cada  $k \geq 1$ , lo anterior implica que el rango de  $L$  sobre el conjunto  $\mathcal{D}$  es denso c.s. Así las cosas, tenemos c.s. que

$$L(s) := \inf_{t \in \mathcal{D} \cap (s, \infty]} L(t) = \sup_{t \in \mathcal{D} \cap [0, s)} L(t), \quad \forall s \in [0, +\infty),$$

donde el valor  $L(s)$  permite definir una extensión única  $L : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ , la cual es una extensión continua y creciente de  $L : \mathcal{D} \rightarrow [0, +\infty)$ .

(ii)] Por monotonía:  $\sup_{t \in \mathcal{D} \cap [0, s)} N_a(t) \leq N_a(s) \leq \inf_{t \in \mathcal{D} \cap (s, \infty]} N_a(t)$ , por lo que de la continuidad de  $L$  y la proposición anterior, se tiene

$$\lim_{a \downarrow 0^+} \frac{N_a(s)}{\bar{\Pi}(a)} = L(s), \quad \forall s \in [0, +\infty), \quad \text{c.s.}$$

(iii)] De la parte (i) es claro que  $\text{supp } dL \subset \bar{\mathfrak{L}}$ . Aún debemos verificar que c.s. para todo  $s < t$ ,  $L(s) < L(t)$ , siempre que  $X_r = 0$  para algún  $r \in (s, t)$ . Sin pérdida de generalidad, para  $s, t \in \mathbb{Q}^+$  basta probar que

$$\mathbb{P}\left(L(s) = L(t) \text{ y } X_r = 0 \text{ para algún } r \in (s, t)\right) = 0.$$

Gracias a la propiedad de Markov fuerte en  $R_s = \inf\{t > s : X_t = 0\}$ , lo único que necesitamos verificar es que  $\mathbb{P}(L(r) = 0) = 0$  para todo  $r > 0$ . Ahora, ya que 0 es instantáneo, para cualquier  $\epsilon > 0$  existe  $a > 0$  tal que  $\mathbb{P}(d_1(a) < r) > 1 - \epsilon$  y de la proposición anterior  $\mathbb{P}(L(d_1(a)) = 0) = 0$ , estos argumentos aunados a que  $L$  es creciente y no negativo nos permite concluir que  $\mathbb{P}(L(r) = 0) < \epsilon$ .  $\square$

Es importante notar que la construcción del tiempo local depende de la constante  $c > 0$  que fijamos en un inicio y que el cambiar dicha constante afecta al proceso  $L$  por un factor multiplicativo. La construcción del tiempo local de  $X$  comenzando desde el 0 puede ser extendido al caso en que el proceso de Markov  $X$  comienza desde un punto arbitrario  $x$ , esto último aplicando la propiedad de Markov al primer tiempo de retorno al origen. Para todo tiempo de paro  $T < +\infty$ , denotamos por

$$L' := (L'(t), t \geq 0) \text{ al tiempo local en 0 del proceso trasladado } X \circ \theta_T,$$

Del Teorema (28) (i) es posible deducir que  $L(t+T) = L(T) + L'(t) \forall t \geq 0$  c.s., lo cual permite referirnos al proceso  $L$  como una funcional aditiva.

Finalmente, el proceso  $L$  es adaptado con respecto a la filtración  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  y particularmente cuando  $X_T = 0$  c.s. en el evento  $\{T < +\infty\}$ , por la propiedad de Markov fuerte tenemos que bajo la probabilidad condicional  $\mathbb{P}(\cdot | T < +\infty)$

$$(X \circ \theta_T, L') := (X_{t+T}, L(t+T) - L(T), t \geq 0) \stackrel{(d)}{=} (X, L),$$

además de que  $(X \circ \theta_T, L')$  es independiente de  $\mathcal{F}_T$ .

Concluimos esta sección mostrando que el proceso de tiempo local construido anteriormente es “esencialmente” el único proceso adaptado, continuo que crece únicamente sobre la cerradura del conjunto de ceros de  $X$ , con la propiedad de ser una funcional aditiva.

**Proposición 29.** (Unicidad del tiempo local)

Sea  $A := (A_t, t \geq 0)$  un proceso continuo, creciente y adaptado a la filtración  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  de manera que satisface las siguientes condiciones:

- (i) El soporte de la medida de Stieltjes  $dA$  se encuentra contenido en  $\bar{\mathfrak{L}}$ , c.s.
- (ii) Para todo tiempo de paro tal que  $X_T = 0$  c.s. sobre  $\{T < +\infty\}$ , se tiene que bajo la probabilidad condicionada  $\mathbb{P}(\cdot | T < +\infty)$ , el proceso trasladado

$$(X_{t+T}, A_{t+T} - A_T, t \geq 0) \text{ es independiente de } \mathcal{F}_T,$$

además de tener la misma distribución que el proceso  $(X, A)$  bajo  $\mathbb{P}$ .

Entonces, existe una constante  $k \geq 0$  tal que  $A \equiv kL$  c.s.

*Demostración.* Sea  $b > 0$ , probaremos que  $A_{d_1(b)}$  tiene distribución exponencial. Fijemos  $s, t > 0$  y definimos  $T = \inf\{u \geq 0 : A_u > t\}$ . Para todo  $u \geq 0$  y debido a que  $A$  es creciente, adaptado y continuo, tenemos que  $\{T < u\} = \{A_u > t\} \in \mathcal{F}_t$ , lo cual, por ser la filtración continua por la derecha, implica que  $T$  es tiempo de paro.

Ahora, consideramos el evento  $\{T < +\infty\}$  y condicionalmente en este, tendremos lo siguiente: como  $A$  es continuo y crece únicamente sobre  $\mathfrak{L}$ , tenemos que  $A_T = t$  y  $X_T = 0$ . Por la hipótesis (ii), el proceso  $(X_{r+T}, A_{r+T} - r, r \geq 0)$  tiene la misma ley que  $(X, A)$  bajo  $\mathbb{P}$ . Denotamos  $A' := (A_{r+T} - r, r \geq 0)$ . Notamos entonces que

$$\{A_{d_1(b)} > r + s\} = \left\{ A_{d_1(b)} > r, A'_{d_1^T(b)} > s \right\},$$

donde  $d_1^T(b)$  denota el extremo derecho del primer intervalo de excursión con  $\ell > b$  del proceso  $X \circ \theta_T$ . Así las cosas, por la hipótesis (ii) y la independencia inherente a la propiedad de Markov, tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_{d_1(b)} > r + s) &= \mathbb{P}(A_{d_1(b)} > r) \mathbb{P}\left(A'_{d_1^T(b)} > s \mid T < d_1(b)\right) \\ &= \mathbb{P}(A_{d_1(b)} > r) \mathbb{P}(A_{d_1(b)} > s), \end{aligned}$$

lo cual muestra que  $A_{d_1(b)}$  es una v.a. desmemoriada continua y no-negativa y por ende con distribución exponencial. Denotamos su parámetro por  $\lambda(b)$  y notamos que para toda  $b \in (0, c]$  este debe ser finito, puesto que de otra manera  $A$  sería idénticamente 0 y no habría nada que probar.

Finalmente probaremos que  $\lambda$  y  $\bar{\Pi}$  son proporcionales. Fijamos  $a > b$  y aplicamos la hipótesis (ii) a los extremos derechos de los  $N_a(g_1(a))$  intervalos de excursión con  $\ell > a$  que hayan sido completados antes del tiempo  $g_1(a)$ , así deducimos que

$$A_{d_1(b)} = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n, \quad n = N_b(g_1(a)) + 1,$$

donde las  $\xi_k$ 's son v.a.i.i.d. con distribución exponencial de parámetro  $\lambda(b)$  los cuales son independientes de  $N_b(g_1(a))$ . Tomando la esperanza de  $A_{d_1(b)}$ , deducimos que

$$\frac{1}{\lambda(a)} = \mathbb{E}[A_{d_1(a)}] = \mathbb{E}[\xi_1 + \cdots + \xi_{N_b(g_1(a))+1}] = \frac{1}{\lambda(b)} \mathbb{E}[N_b(g_1(a)) + 1] = \frac{\bar{\Pi}(b)}{\lambda(b) \bar{\Pi}(a)},$$

de donde concluimos que  $\lambda = k \bar{\Pi}$  para alguna  $k > 0$ . Ahora, notamos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ \left| A_{d_1(a)} - \frac{N_b(d_1(a))}{\lambda(b)} \right|^2 \right] &= \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E} [ |(\xi_1 + \cdots + \xi_n)\lambda(b) - n|^2 ] \mathbb{P}(N_b(d_1(a)) = n)}{\lambda^2(b)} \\ &= \frac{\sum_{n=1}^{\infty} n \mathbb{E} [ (\xi_1 \lambda(b) - 1)^2 ] \mathbb{P}(N_b(d_1(a)) = n)}{\lambda^2(b)} \\ &= \frac{\bar{\Pi}(b)}{\lambda^2(b) \bar{\Pi}(a)} \xrightarrow{b \downarrow 0^+} 0. \end{aligned}$$

Del Teorema 28 (i) deducimos que  $\frac{N_b(d_1(a))}{\lambda(b)}$  converge en media cuadrática y por lo tanto en  $L^1(\mathbb{P})$ , de donde  $A_{d_1(a)} = k L(d_1(a))$ . De manera similar a la prueba del Teorema 28 se utiliza para la propiedad de Markov se prueba que  $A_t = k L_t$  para toda  $t \in \mathcal{D}$ . Puesto que  $A$  y  $L$  únicamente crecen en  $\mathfrak{L}$ , la identidad anterior se extiende a  $\mathfrak{L}^c$ . Por instantaneidad del 0 este último conjunto es denso, de donde por continuidad de ambos procesos  $A$  y  $L$ , tenemos que  $A \equiv k L$ , para toda  $t \geq 0$ .  $\square$

**Corolario 30.** *Existe una constante  $\delta > 0$  tal que c.s.*

$$\int_0^t \mathbf{1}_{\{X_s=0\}} ds = \int_0^t \mathbf{1}_{\{s \in \bar{\mathfrak{L}}\}} ds = \delta L_t, \quad \forall t \geq 0.$$

*Demostración.* La integral derecha difiere en  $\bar{\mathfrak{L}} \setminus \mathfrak{L}$  de la integral izquierda, y este conjunto es a lo más numerable y por ende su medida de Lebesgue es cero. La condición (i) de la Proposición 29 claramente se satisface, mientras que la condición (ii) se sigue directamente de la propiedad de Markov de  $X$  y la aditividad de la integral.  $\square$

## 2.3. Inverso del Tiempo Local

Introducimos al inverso del tiempo local como una función inversa generalizada. Observaremos que este proceso es un subordinador (posiblemente matado) cuyos saltos corresponden a las longitudes de los intervalos de excursión. Esto naturalmente nos lleva a una descripción del proceso en términos de un proceso de Poisson puntual.

### Definición 31. (Inverso del tiempo local)

Dado el tiempo local  $L$  de un proceso  $X$  definimos su proceso inverso como

$$L^{-1}(t) := \inf\{s \geq 0 : L(s) > t\}, \quad t \geq 0,$$

el cual es continuo por la derecha. Así también, será útil considerar

$$L^{-1}(t^-) := \inf\{s \geq 0 : L(s) \geq t\} = \lim_{s \rightarrow t^-} L^{-1}(s), \quad t \geq 0.$$

Comenzamos el estudio del proceso  $L^{-1}$  con las siguientes propiedades elementales.

### Proposición 32. (Propiedades del inverso del tiempo local)

El proceso  $L^{-1}$  satisface lo siguiente:

- (i)  $L^{-1}(t)$  y  $L^{-1}(t^-)$  son tiempos de paro para toda  $t \geq 0$ .
- (ii) Es creciente, continuo por la derecha y adaptado a la filtración  $(\mathcal{F}_{L^{-1}(t)})$ .
- (iii) Las siguientes igualdades se cumplen c.s. para toda  $t > 0$ ,

$$\begin{aligned} L^{-1}(L(t)) &= \inf\{L^{-1}(u) \geq 0 : L^{-1}(u) > t\} = \inf\{s > t : X_s = 0\}, \\ & \text{y} \\ L^{-1}(L(t)^-) &= \sup\{L^{-1}(u) \geq 0 : L^{-1}(u) < t\} = \sup\{s < t : X_s = 0\}. \end{aligned}$$

En particular  $L^{-1}(t) \in \mathfrak{L}$  en el evento  $\{L^{-1}(t) < +\infty\}$ .

*Demostración.* (i)  $\forall s, t > 0$  y por la continuidad de  $L$  se tiene que  $\{L^{-1}(t) < s\} = \{L(s) > t\}$ , lo cual implica que efectivamente  $L^{-1}(t)$  es un tiempo de paro puesto que  $L$  es un proceso adaptado a la filtración continua por la derecha  $(\mathcal{F}_t)$ . Ya que  $L^{-1}(t^-)$  es límite de tiempos de paro y  $(\mathcal{F}_t)$  es cád concluimos que  $L^{-1}(t^-)$  es tiempo de paro.

(ii) De la definición de  $L^{-1}$ , claramente es creciente y cád. El hecho de que sea adaptado a la filtración  $(\mathcal{F}_{L^{-1}(t)})$  se sigue directamente de (i).

(iii) De la definición de  $L^{-1}$ , es claro que

$$\begin{aligned} L^{-1}(L(t)) &= \inf \{s \geq 0 : L(s) > L(t)\} \\ &= \inf \{L^{-1}(u) \geq 0 : u > L(t)\} \\ &= \inf \{L^{-1}(u) \geq 0 : L^1(u) > t\}. \end{aligned}$$

Ahora, definimos  $D_t = \inf\{s > t : X_s = 0\}$  y suponemos s.p.g. que  $D_t > t$  (de manera que  $t$  no sea un cero de  $X$ ). Por el Teorema 28,  $L$  es constante en el intervalo  $[t, D_t)$  por lo que necesariamente  $D_t \leq L^{-1}(L(t))$ . Podemos ahora asumir que  $D_t < \infty$  ya que de otra manera no hay nada que probar. Así las cosas,  $D_t$  pertenece al soporte de la medida  $dL$  y es un punto aislado por la izquierda. Por otro lado, debido a que  $L$  es continuo,  $D_t$  no puede ser aislado por la derecha. Así pues,  $L(s) > L(t)$ , para todo  $s > t$ , y entonces  $t \geq L^{-1}(L(t))$  para todo  $s > D_t$ ; por tanto,  $D_t \geq L^{-1}(L(t))$ .

Supongamos ahora que  $D_t = t$ , por lo que  $t \in \text{supp } dL$  y no es aislado por la derecha. Entonces  $L(s) > L(t)$ , para todo  $s > t$  de manera que  $t \geq L^{-1}(L(t))$ . La desigualdad  $t \leq L^{-1}(L(t))$  es inmediata de la definición del proceso inverso. Concluimos de todo lo anterior que  $D_t \equiv L^{-1}(L(t))$ .

Finalmente, la segunda identidad en (iii) se sigue de argumentos similares. Además sobre el evento  $\{L^{-1}(t) < \infty\}$ , existe una  $s > 0$  tal que  $L(s) = t$  y la primera identidad muestra que  $L^{-1}(t)$  es una cero de  $X$ , i.e.  $L^{-1}(t) \in \mathfrak{L}$ .  $\square$

Recordemos la constante  $\delta > 0$  introducida en el último corolario de la subsección anterior y considérese la medida  $\Pi$  sobre  $(0, +\infty)$  dada por

$$\Pi(s, t] = \bar{\Pi}(s) - \bar{\Pi}(t), \quad 0 < s < t < +\infty.$$

**Teorema 33.** ( $L^{-1}$  es Subordinador)

*El inverso del tiempo local es un subordinador con medida de Lévy  $\Pi$ , coeficiente de deriva  $\delta \geq 0$  y con tasa de muerte  $\bar{\Pi}(+\infty)$ . Más aún, para todo  $t, \lambda > 0$*

$$\mathbb{E} \left[ e^{-\lambda L^{-1}(t)} \right] = \exp \left\{ -t \lambda \left( \delta + \int_0^\infty e^{-\lambda r} \bar{\Pi}(r) dr \right) \right\}.$$

*Demostración.* Consideramos los casos  $\bar{\Pi}(+\infty) = 0$  y  $\bar{\Pi}(+\infty) > 0$  que representan los casos en que el 0 es recurrente y transitorio respectivamente.

**Caso  $\bar{\Pi}(+\infty) = 0$ .** En este caso la recurrencia nos indica que no existe una excursión de longitud infinita c.s. En particular,  $d_1(c) < \infty$  c.s. e iterando la propiedad de Markov, de igual manera vemos que  $d_k(c) < \infty$  c.s. para todo  $k \geq 2$ . De la Proposición 27, la propiedad fuerte de Markov y la aditividad del tiempo local, sabemos que

es posible descomponer la v.a.  $L(d_n(c))$  en una suma de  $n$  v.a.i.i.d. con distribución exponencial de parámetro  $\bar{\Pi}(c) = 1$ . Así pues, de manera inductiva concluimos que

$$L(\infty) := \lim_n L(d_n(c)) = \infty \quad c.s.$$

De la Proposición 32 (i), es posible aplicar la propiedad de Markov fuerte al tiempo  $L^{-1}(t)$ , para que el proceso  $X \circ \theta_{L^{-1}(t)}$  tenga la misma ley que  $X$  y sea independiente de  $\mathcal{F}_{L^{-1}(t)}$ . Por aditividad de  $L$ , el tiempo local  $\tilde{L}$  de  $X \circ \theta_{L^{-1}(t)}$ , se define como  $\tilde{L}(s) := L(L^{-1}(t) + s) - t$ , y el inverso del tiempo local de  $X \circ \theta_{L^{-1}(t)}$  toma la forma

$$\begin{aligned} \tilde{L}^{-1}(s) &= \inf \left\{ u \geq 0 : \tilde{L}(u) > s \right\} \\ &= \inf \left\{ u \geq 0 : L(L^{-1}(t) + u) > s + t \right\} \\ &= \inf \left\{ u \geq L^{-1}(t) : L(u) > s + t \right\} = L^{-1}(s + t) - L^{-1}(t), \end{aligned}$$

lo cual prueba que  $L^{-1}$  tiene incrementos independientes y estacionarios, y ya que las trayectorias son crecientes y cád, concluimos que  $L^{-1}$  es un subordinador.

Ahora bien, la medida de Lévy  $\Pi$  del subordinador  $L^{-1}$ , es la medida característica del tamaño de los saltos  $\Delta L^{-1}$ , que conforman un proceso de Poisson puntual. Para cada  $a > 0$  escribimos  $T_a := \inf \{ t \geq 0 : \Delta L^{-1}(t) > a \}$ , el cual denota el tiempo del primer salto con longitud  $\ell > a$ . De la Proposición 32(iii) notamos que  $T_a$  coincide con el tiempo local evaluado en el extremo derecho del primer intervalo de excursión con  $\ell > a$ . Luego, de la Proposición 27,  $T_a$  tiene distribución exponencial de parámetro  $\bar{\Pi}(a)$ . Finalmente recordando la distribución de la ley de entrada de un proceso Poisson puntual concluimos que  $\bar{\Pi}(a) = \Pi(a, \infty)$ .

Recordemos que los intervalos de excursión son los intervalos  $(L^{-1}(s^-), L^{-1}(s))$  si  $\Delta L^{-1}(s) > 0$ , que a su vez son conexos maximales del conjunto abierto  $[0, +\infty) \setminus \bar{\mathcal{L}}$ . Nuevamente considerando la correspondencia entre los saltos de  $L^{-1}$  y la longitud de los intervalos de excursión de  $X$ , tenemos que

$$L^{-1}(t) = \int_0^{L^{-1}(t)} \mathbf{1}_{\{s \in \bar{\mathcal{L}}\}} ds + \sum_{s \leq t} \Delta L^{-1}(s),$$

lo cual debido al Corolario 30, sabemos que existe  $\delta > 0$  tal que  $\delta L(L^{-1}(t)) = \delta t$ , lo cual coincide con la integral dada. Esto es

$$L^{-1}(t) = \delta t + \sum_{s \leq t} \Delta L^{-1}(s),$$

lo cual muestra que el coeficiente de deriva de  $L^{-1}$  es  $\delta$ .

**Caso**  $\bar{\Pi}(+\infty) > 0$ . Por argumentos similares, notamos que  $\forall 0 < t < t'$ , la ley de  $(L^{-1}(s), 0 \leq s \leq t)$ , es la misma condicionalmente en el evento  $\{L^{-1}(t) < \infty\}$  a condicionalmente en  $\{L^{-1}(t') < \infty\}$  y coincide con la ley de un subordinador  $\sigma$  restringido al intervalo  $[0, t]$ ; por la igualdad  $\{L^{-1}(t) < \infty\} = \{L(\infty) > t\}$ , es posible parafrasear lo anterior afirmando que  $(L^{-1}(s), 0 \leq s < L(\infty))$  tiene la misma ley que  $(\sigma_t, t < \tau)$ , donde  $\tau$  es independiente de  $\sigma$  y con distribución exponencial de parámetro  $\bar{\Pi}(\infty)$ .

Denotamos la medida de Lévy de  $\sigma$  por  $\Pi$ . Sea  $T_a$  el t.d.p. definido al inicio de la prueba y notemos que  $T_a = L(d_1(a))$ . Así tenemos para todo  $a > 0$

$$\begin{aligned} 1 - e^{-t\Pi(a,\infty)} &= \mathbb{P}(\exists s < t : \Delta\sigma_s > a) \\ &= \mathbb{P}(T_a < t \mid L(\infty) > t) \\ &= e^{t\bar{\Pi}(\infty)} \mathbb{P}(L(d_1(a)) < t, L(\infty) > t). \end{aligned}$$

Ahora bien, por un lado, el Lema 25 implica que

$$\mathbb{P}(d_1(a) < \infty) = \mathbb{P}(\ell_1(a) < \infty) = 1 - \frac{\bar{\Pi}(\infty)}{\bar{\Pi}(a)}.$$

Por otro lado, de la Proposición 27, la ley de  $L(d_1(a))$  condicionalmente sobre  $\{d_1(a) < \infty\}$  es exponencial de parámetro  $\bar{\Pi}(a)$ , de manera que aplicando la propiedad de Markov al tiempo  $d_1(a)$  y considerando el tiempo local  $\tilde{L}(t)$  del proceso  $X \circ \theta_{d_1(a)}$ , observamos que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(L(d_1(a)) < t, L(\infty) > t) &= \mathbb{P}(L(d_1(a)) < t, L(\infty) > t, d_1(a) < +\infty) \\ &= \mathbb{P}(L(d_1(a)) < t, \tilde{L}(\infty) + L(d_1(a)) > t, d_1(a) < +\infty) \\ &= \mathbb{P}(d_1(a) < +\infty) \mathbb{E} \left[ \mathbf{1}_{\{L(d_1(a)) < t\}} e^{-(t-L(d_1(a)))\bar{\Pi}(\infty)} \right] \\ &= \left(1 - \frac{\bar{\Pi}(\infty)}{\bar{\Pi}(a)}\right) \int_0^t \bar{\Pi}(a) e^{-s\bar{\Pi}(a)} e^{-(t-s)\bar{\Pi}(\infty)} ds \\ &= e^{-t\bar{\Pi}(\infty)} \int_0^t (\bar{\Pi}(a) - \bar{\Pi}(\infty)) e^{-s(\bar{\Pi}(a)-\bar{\Pi}(\infty))} ds \\ &= e^{-t\bar{\Pi}(\infty)} \left(1 - e^{-t(\bar{\Pi}(a)-\bar{\Pi}(\infty))}\right). \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $\Pi(a, \infty) = \bar{\Pi}(a) - \bar{\Pi}(\infty)$ , y finalmente checamos como en el caso  $\bar{\Pi}(\infty) = 0$  que la deriva de  $\sigma$  es  $\delta$ . La identidad para el exponente de Laplace se sigue de la fórmula de Lévy-Khintchine por integración por partes.  $\square$



## 2.4. Teoría de Excursiones

Son de interés las excursiones de  $X$  lejos del 0, éstas son los pedazos de trayectoria  $(X_{g+t}, 0 \leq t \leq d - g)$  correspondiente a cada intervalo de excursión  $(g, d)$ . En particular, las longitudes de los intervalos de excursión denotan los tiempos de vida de las excursiones. En esta subsección se introduce una medida  $\sigma$ -finita, cuyo objetivo es describir la distribución de las excursiones de  $X$  de la misma manera que  $\bar{\Pi}$  describe la de las longitudes de los intervalos de excursión.

Consideramos el espacio de Skorohod de trayectorias càdlàg que denotamos por

$$\mathbf{D} = \mathbb{D}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+ \cup \{\delta\}).$$

Específicamente, tomamos un punto aislado que denotamos  $\partial$  al cual nos referimos como punto cementerio y consideramos el espacio medible  $(\mathbb{R}_+ \cup \{\partial\}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}_+ \cup \{\partial\}})$ . El conjunto  $\mathbf{D}$  está conformado por las trayectorias  $\omega : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty) \cup \{\partial\}$ , continuas por la derecha en  $[0, \infty)$ , con límites por la izquierda en  $(0, \infty)$  y tal que  $\omega(t) = \partial$  para  $t \geq \zeta(\omega) := \zeta = \inf\{t \geq 0 : \omega(t) = \partial\}$ . A  $\zeta$  le llamamos el tiempo de vida. Cabe mencionar que el espacio  $\mathbf{D}$  es un espacio Polaco dotado con la topología de Skorohod que permite utilizar resultados fundamentales de la teoría de probabilidad.

Introducimos a continuación el espacio de excursiones para comenzar con la descripción del proceso de excursiones; para  $a > 0$  consideramos el conjunto de excursiones con tiempo de vida  $\zeta > a$ , i.e. el subconjunto de  $\mathbf{D}$  dado por

$$\mathcal{E}^a := \{\omega \in \mathbf{D} : \zeta > a, \omega(t) \neq 0 \text{ para todo } t \in (0, \zeta)\},$$

de donde es posible escribir al espacio de excursiones en  $\mathbf{D}$  como  $\mathcal{E} := \bigcup_{a>0} \mathcal{E}^a$ . Los espacios anteriores se consideran con la topología relativa, esto es, la que heredan del espacio de Skorohod  $\mathbf{D}$ .

Consideramos la traslación de  $X$  al extremo izquierdo  $g_1(a)$  para algún  $a > 0$  con  $\bar{\Pi}(a) > 0$  y detenido al tiempo  $d_1(a)$ . Nótese que  $\bar{\Pi}(a) > 0 \Rightarrow g_1(a) < +\infty$  c.s., y escribimos  $\eta(\cdot | \zeta > a)$  para la medida de probabilidad sobre  $\mathcal{E}^a$ , que corresponde a la ley del proceso  $X$  en su primer intervalo de excursión con longitud  $\ell > a$ ; en otras palabras, corresponde a la ley del proceso de excursión

$$e_1(a) := (X_{g_1(a)+t}, 0 \leq t \leq \ell_1(a)) = (X_{(g_1(a)+t) \wedge d_1(a)}, t \geq 0), \text{ bajo } \mathbb{P}.$$

La medida  $\eta(\cdot | \zeta > a)$  es conocida como la *ley de excursiones de  $X$  con  $\zeta > a$* . Con base en esta relación, cabe destacar que los tiempos de vida  $\zeta$  coinciden con las longitudes de los intervalos de excursión, esto es,  $\zeta(e_1(a)) = \ell_1(a)$ .

**Proposición 34.** Sea  $a > 0$  con  $\bar{\Pi}(a) > 0$ .  $\forall b \in (0, a)$  y evento medible  $\Lambda \subseteq \mathcal{E}^a$ ,

$$\bar{\Pi}(a) \eta(\Lambda | \zeta > a) = \bar{\Pi}(b) \eta(\Lambda | \zeta > b).$$

*Demostración.* De la Proposición 25, sabemos que

$$\frac{\bar{\Pi}(a)}{\bar{\Pi}(b)} = \mathbb{P}(\ell_1(b) > a) = \mathbb{P}(N_b(g_1(a)) = 0).$$

Así, la ley de la primera excursión con  $\ell > a$  condicionada sobre  $\{N_b(g_1(a)) = 0\}$  es

$$\begin{aligned} \eta(\Lambda, \zeta > a | \zeta > b) &= \mathbb{P}(e_1(a) \in \Lambda, \ell_1(b) > a) \\ &= \mathbb{P}(e_1(a) \in \Lambda, N_b(g_1(a)) = 0) \\ &= \mathbb{P}(e_1(a) \in \Lambda | N_b(g_1(a)) = 0) \mathbb{P}(N_b(g_1(a)) = 0) \\ &= \mathbb{P}(e_1(a) \in \Lambda) \frac{\bar{\Pi}(a)}{\bar{\Pi}(b)} = \eta(\Lambda | \zeta > a) \frac{\bar{\Pi}(a)}{\bar{\Pi}(b)}, \end{aligned}$$

donde hemos utilizado en la cuarta igualdad la independencia del proceso  $e_1(a)$  con respecto a  $N_b(g_1(a))$  de acuerdo al Lema 26, probando así el resultado.  $\square$

Este resultado nos permite establecer la existencia e unicidad de una medida  $\sigma$ -finita sobre el espacio de excursiones  $\mathcal{E}$ .

**Definición 35.** (Medida de Excursiones  $\eta$ )

La única medida sobre  $\mathcal{E} = \bigcup_{a>0} \mathcal{E}^a$  que satisface

$$\eta(\Lambda) := \bar{\Pi}(a) \eta(\Lambda | \zeta > a), \quad \text{para todo } \Lambda \subseteq \mathcal{E}^a,$$

es llamada la “medida de excursiones” de  $X$ . En particular  $\eta(\zeta > a) = \bar{\Pi}(a)$ .

Tendremos que la medida de excursión  $\eta$  posee la propiedad de Markov. De manera más precisa, sea  $a > 0$  y observamos que el siguiente es un tiempo de paro,

$$g_1(a) + a = \inf\{t \geq a : X_s \neq 0 \forall s \in [t - a, t]\}.$$

De la propiedad de Markov fuerte y la definición de medida de excursión, implican que bajo  $\eta$  y condicionalmente en el evento  $\{e_a := x\} \cap \{a < \zeta(e)\}$ , (con  $e$  una excursión genérica de  $X$ ) el proceso trasladado  $(e_{t+a}, 0 \leq t < \zeta - a)$  es independiente de  $(e_t, 0 \leq t < a)$  y con la misma distribución que  $(X_t, 0 \leq t \leq R_0)$  bajo  $\mathbb{P}_x$ , donde recordemos que  $R_0$  denota el tiempo del primer retorno al origen del proceso  $X$ .

De nueva cuenta, la definición de medida de excursión puede variar por un factor multiplicativo de acuerdo a la elección de la constante  $c > 0$  fijada en un inicio para definir a  $\bar{\Pi}$  y al tiempo local.

Introducimos formalmente el proceso de excursiones de  $X$ , el cual denotamos por  $e := (e_t, t \geq 0)$ , donde cada  $e_t$  denota una excursión de  $X$  que se desarrolla en el intervalo  $(L^{-1}(t^-), L^{-1}(t))$  para  $L^{-1}(t^-) < L^{-1}(t)$ , lo cual sugiere la posibilidad de utilizar el inverso del tiempo local como nueva escala de tiempo para el análisis de las de excursiones de  $X$ . Consideramos ahora al espacio de excursiones  $\mathcal{E} \cup \{\Upsilon\}$  con un punto adicional aislado  $\Upsilon$  y la respectiva  $\sigma$ -álgebra de Borel que genera.

**Definición 36.** (Proceso de Excursiones  $e$ )

El proceso  $e := (e_t, t \geq 0)$  que toma valores en  $\mathcal{E} \cup \{\Upsilon\}$  y que se encuentra dado por

$$e_t := \left( X_{s+L^{-1}(t^-)}, 0 \leq s < L^{-1}(t) - L^{-1}(t^-) \right) \text{ si } L^{-1}(t^-) < L^{-1}(t),$$

o bien  $e_t = \Upsilon$  en otro caso, es llamado el proceso de excursiones de  $X$ .

Antes de establecer el siguiente resultado, definimos lo siguiente:

**Definición 37.** (Proceso de Poisson Puntual Detenido)

Sea  $\Delta := (\Delta_t, t \geq 0)$  un proceso de Poisson puntual y  $T_B := \inf\{t \geq 0 : \Delta_t \in B\}$  para  $B$  conjunto medible. El proceso de Poisson puntual detenido en el primer punto de  $B$ , se define como:

$$\Delta := (\Delta_t, 0 \leq t \leq T_B).$$

**Teorema 38.** (Itô - 1970)

(i) Si 0 es recurrente, entonces  $e$  es un proceso de Poisson puntual con medida característica  $\eta$ .

(ii) Si 0 es transitorio, entonces  $e = (e_t, 0 \leq t \leq L(\infty))$  es un proceso de Poisson puntual con medida característica  $\eta$ , detenido en el primer punto de  $\mathcal{E}^\infty$ , el espacio de excursiones con tiempo de vida infinito.

*Demostración.* (i) De la Proposición 32 sabemos que  $L^{-1}(t)$  es un tiempo de paro para todo  $t \geq 0$ , de manera que es posible considerar la filtración  $(\mathcal{F}_{L^{-1}(t)})_{t \geq 0}$ . Verificamos que para todo  $a > 0$  y conjunto medible  $B \subset \mathcal{E}^a$  el proceso de conteo

$$N_t^B := \#\{s \in (0, t) : e_s \in B\} \quad t \geq 0,$$

es un  $(\mathcal{F}_{L^{-1}(t)})_{t \geq 0}$  proceso Poisson de intensidad  $\eta(B)$ . Efectivamente, consideremos  $B_1, B_2, \dots, B_k$  conjuntos medibles ajenos por pares, entonces sus procesos de conteo respectivos nunca saltan simultáneamente y por lo tanto son independientes.

Para todo  $s, t \geq 0$ ,  $N_{t+s}^B - N_t^B$  es el número de excursiones de  $X$  en  $B$  completadas durante el intervalo de tiempo  $(L^{-1}(t), L^{-1}(t+s)]$ . Así, consideramos el proceso trasladado  $\theta_{L^{-1}(t)} \circ X$ , el cual de la propiedad de Markov fuerte y el hecho de que

$L^{-1}(t)$  sea un cero de  $X$  se tiene que es independiente de  $\mathcal{F}_{L^{-1}(t)}$  y con la misma ley que  $X$ . Sean entonces  $\tilde{L}$  el tiempo local y  $\tilde{L}^{-1}$  su inverso correspondientes al proceso  $X \circ \theta_{L^{-1}(t)}$ . La aditividad del tiempo local implica que para todo  $u \geq 0$ ,

$$L^{-1}(t+u) = L^{-1}(t) + \inf\{s \geq 0 : \tilde{L}_s \geq u\} = L^{-1}(t) + \tilde{L}^{-1}(u),$$

lo cual indica que  $N_{t+s}^B - N_t^B = \tilde{N}_s^B$  es el número de excursiones de  $\tilde{X}$  en el intervalo  $(0, \tilde{L}^{-1}(s)]$ . Concluimos que  $N_{t+s}^B - N_t^B$  tiene la misma ley que  $\tilde{N}_s^B$  y es independiente de  $\mathcal{F}_{L^{-1}(t)}$ . Esto muestra que el proceso  $(N_t^B, t \geq 0)$  es un subordinador que crece solo por saltos de tamaño 1 c.s., por lo que es un proceso de Poisson con respecto a  $(\mathcal{F}_{L^{-1}(t)})_{t \geq 0}$  y por ende, el proceso  $(e_t, t \geq 0)$  es un proceso Poisson puntual.

Sea  $\nu$  la medida característica de  $e$ . Para todo  $a > 0$  la ley condicional  $\nu(\cdot | \mathcal{E}^a)$  no es mas que la ley de excursiones con tiempo de vida  $\zeta > a$ , esto es

$$\frac{\nu(\cdot, \mathcal{E}^a)}{\nu(\mathcal{E}^a)} := \nu(\cdot | \mathcal{E}^a) = \eta(\cdot | \zeta > a) := \frac{\eta(\cdot, \zeta > a)}{\eta(\zeta > a)}.$$

Por otro lado, el tiempo local evaluado en  $d_1(a)$ , es el primer tiempo en que el proceso  $e$  toca un punto en  $\mathcal{E}^a$ . De la Proposición 27 sabemos que  $L(d_1(a))$  tiene distribución exponencial de parámetro  $\bar{\Pi}(a)$ ; deducimos que  $\nu(\zeta > a) = \bar{\Pi}(a)$  y que la medida  $\nu$  coincide con  $\eta$  sobre  $\mathcal{E}^a$ . Como  $\mathcal{E} = \bigcup_{a>0} \mathcal{E}^a$ , se concluye el resultado.

(ii) Hacemos  $T_{\mathcal{E}^\infty} = T_\infty$ . Ocupando los argumentos de la parte (i), basta notar que el proceso Poisson puntual detenido

$$e'_t = \begin{cases} \Upsilon & \text{si } e_t \in \mathcal{E}^\infty, \\ e_t & \text{si } e_t \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}^\infty. \end{cases}$$

tiene medida característica  $\eta(\cdot, \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}^\infty)$  e independiente de  $(T_\infty, e_{T_\infty})$ .  $\square$

# Capítulo 3

## Procesos reflejados y la excursión estable

Mostramos que los procesos reflejados en el *ínfimo y/o supremo* de un proceso de Lévy son de Markov. Se exponen resultados que permiten deducir la regularidad del 0 para un proceso espectralmente positivo lo que permite utilizar la teoría de tiempos locales expuesta en el capítulo anterior. Finalmente damos algunas relaciones entre la excursión y el puente de un proceso de Lévy estable espectralmente positivo, que utilizaremos más adelante.

### 3.1. Dualidad y el proceso reflejado

Para un proceso de Lévy  $X$ , llamamos  $\widehat{X} = -X$  al proceso *dual* de  $X$ , el cual es también un proceso de Lévy para  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . Como es natural, para toda  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\widehat{\mathbb{P}}_x$  denota la ley de  $x + X$  bajo  $\widehat{\mathbb{P}}$ , i.e. la ley de  $\widehat{X}$  bajo  $\mathbb{P}_{-x}$ . Comenzamos dando una conocida característica de los procesos de Lévy, consecuencia directa de su propiedad de incrementos independientes.

**Lema 39.** (Lema de Dualidad)

Para cada  $t > 0$ , el proceso retornado en  $t$  dado por  $X^{(t)} = (X_{(t-s)^-} - X_t, 0 \leq s \leq t)$ , y el proceso dual  $\widehat{X} = (\widehat{X}_s, 0 \leq s \leq t)$ , tienen la misma ley bajo  $\mathbb{P}$ .

*Demostración.* Hacemos  $Y := (Y_s, 0 \leq s \leq t)$ , con  $Y_s = X_{(t-s)^-} - X_t$ . Bajo  $\mathbb{P}$ ,  $Y$  es un proceso que empieza en 0, con trayectorias càdlàg sobre  $[0, t]$  e incrementos claramente independientes y homogéneos debido a que así también lo satisface  $X$ . Finalmente,  $\forall s \in [0, t]$ ,  $Y_s = \lim_{r_n \downarrow s^+} X_{t-r_n} - X_t \stackrel{(d)}{=} \lim_{r_n \downarrow s^+} -X_{r_n} = -X_s$  bajo  $\mathbb{P}$  y por tanto la ley de  $Y$  bajo  $\mathbb{P}$  coincide con la de  $(X_s, 0 \leq s \leq t)$  bajo  $\widehat{\mathbb{P}}$ .  $\square$

El reflejar un proceso de Lévy  $X$  real valuado en el nivel de su valor máximo inmediato, permite obtener un proceso de Markov sobre el cual podemos trabajar con la teoría desarrollada hasta el momento. Denotamos los procesos de supremo e ínfimo de  $X$  bajo  $\mathbb{P} = \mathbb{P}_0$ , respectivamente por  $\bar{X}_t := \sup_{s \in [0, t]} X_s$  y  $\underline{X}_t := \inf_{s \in [0, t]} X_s$  para  $t \geq 0$ , y a los procesos *reflejados* en el supremo e ínfimo por  $\bar{X} - X$  y  $X - \underline{X}$ . Los procesos  $\bar{X}$  y  $-\underline{X}$  son crecientes, càd y adaptados a la filtración  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ . También tendremos la siguiente consecuencia del lema de dualidad.

**Proposición 40.**

Para cada  $t > 0$  fijo, se tiene la siguiente igualdad en ley bajo  $\mathbb{P}$ ,

$$(\bar{X}_t, \bar{X}_t - X_t) = (X_t - \underline{X}_t, -\underline{X}_t).$$

*Demostración.* Sea  $t > 0$ . Basta ver las identidades:

$$\sup_{s \in [0, t]} -\widehat{X}_s \stackrel{(d)}{=} X_t - \inf_{s \in [0, t]} X_{(t-s)} \text{ y } \sup_{s \in [0, t]} \widehat{X}_s \stackrel{(d)}{=} \sup_{s \in [0, t]} X_{(t-s)} - X_t. \quad \square$$

El proceso reflejado  $X - \underline{X}$  puede verse como el proceso reflejado  $\bar{X} - X$  del proceso dual  $\widehat{X}$ , por esta razón basta observar lo que ocurra con  $\bar{X} - X$ .

**Proposición 41.** *El proceso reflejado  $\bar{X} - X$  :*

- (i) *Es un proceso de Markov con respecto a la filtración  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ .*
- (ii) *Su semigrupo satisface la propiedad de Feller.*

*Demostración.* (i) Sea  $T < +\infty$  c.s. Para  $s \geq 0$ , notemos la identidad

$$\bar{X}_{T+s} = \bar{X}_T \vee \left( \sup_{u \in [0, s]} X_{T+u} \right) = X_T + \left[ (\bar{X}_T - X_T) \vee \left( \sup_{u \in [0, s]} X_{T+u} - X_T \right) \right],$$

de donde es posible escribir a  $\bar{X}_{T+s} - X_{T+s}$  como

$$\bar{X}_{T+s} - X_{T+s} = \left[ (\bar{X}_T - X_T) \vee \left( \sup_{u \in [0, s]} X_{T+u} - X_T \right) \right] - (X_{T+s} - X_T).$$

Gracias a lo anterior y por independencia y homogeneidad de los incrementos de  $X$ , la ley de  $\bar{X}_{T+s} - X_{T+s}$  condicionalmente sobre  $\mathcal{F}_T$  es la misma que la de  $(x \vee \bar{X}_s) - X_s$  bajo  $\mathbb{P}_0$  con  $x := \bar{X}_T - X_T$ , y esta a su vez coincide con la ley de  $\bar{X}_s - X_s$  bajo  $\mathbb{P}_x$ .

(ii) Finalmente, si  $f(y)$  es una función continua sobre  $(-\infty, 0]$  que se anula cuando  $y \rightarrow \infty$ , i.e.  $f \in C_0$ , entonces para toda  $t > 0$  fija,

$$P_t f(x) := \mathbb{E}_x [f(\bar{X}_t - X_t)] = \mathbb{E}_0 [f((x \vee \bar{X}_t) - X_t)].$$

Del Teorema de convergencia dominada se sigue que esta cantidad varía continuamente respecto a  $x \geq 0$  y además  $\lim_{x \rightarrow +\infty} P_t f(x) = 0$ . □

## 3.2. El Proceso Escalera

Comenzamos enunciando una propiedad trayectorial que nos será útil. Afirmamos que para  $s > 0$  fijo, si consideramos para cualquier  $\epsilon > 0$  el tiempo de paro

$$T_\epsilon := \inf\{s \in (0, t] : X_s > \bar{X}_s - \epsilon\},$$

entonces condicionando con respecto al evento  $\{T = \lim_{\epsilon \downarrow 0} T_\epsilon < +\infty\}$ , se satisface  $\bar{X}_s \leq X_T$  c.s. con  $s > 0$  fijo. Esta propiedad se sigue de la cuasi-continuidad por la izquierda de  $X$ . En palabras, se afirma que c.s. un proceso de Lévy no dará un salto negativo al momento en que esta por alcanzar el nivel de su supremo más inmediato.

Denotemos ahora por  $L = (L(t), t \geq 0)$  al tiempo local del proceso reflejado  $\bar{X} - X$  en el 0 y por  $L^{-1}$  al proceso inverso del tiempo local. Al tiempo local inverso en nuestro contexto le llamaremos el proceso de *tiempos de ascenso de la escalera*. Recordemos que su rango coincide con la cerradura del conjunto de ceros de proceso reflejado, i.e. la cerradura de  $\mathfrak{L} := \{t \geq 0 : \bar{X}_t = X_t\}$ , también conocido como el conjunto de tiempos de ascenso de la escalera.

Introducimos al proceso de *altura de la escalera*, el cual utiliza los inversos del tiempo local para realizar un cambio de tiempo al proceso supremo de  $X$ . Específicamente, hacemos para toda  $t \geq 0$ ,  $H(t) = \bar{X}_{L^{-1}(t)}$  si  $L^{-1}(t) < +\infty$ , o bien,  $H(t) = +\infty$  en otro caso. Sin embargo,  $L^{-1}(t) \in \mathfrak{L}$  en el evento  $\{L^{-1}(t) < +\infty\}$ , por lo que

$$H(t) = X_{L^{-1}(t)} = \bar{X}_{L^{-1}(t)} \text{ siempre que } L^{-1}(t) < +\infty.$$

A la pareja  $(L^{-1}, H)$  se le conoce como el proceso *Escalera*.

### Lema 42.

*Asumimos que 0 es recurrente o transitorio para el proceso reflejado  $\bar{X} - X$ .*

- (i) *Si 0 es recurrente, entonces el proceso escalera  $(L^{-1}, H)$  es un subordinador.*
- (ii) *Si 0 es transitorio, entonces  $L(\infty)$  tiene ley exponencial de parámetro  $q$  y el proceso escalera  $(L^{-1}(t), H_t, t \leq L(\infty))$  es un subordinador matado a tasa  $q$ .*

*Demostración.* (i) Del Teorema 33 el proceso de tiempo de ascenso de la escalera  $L^{-1}$  es un subordinador. De acuerdo a la Proposición 32 también sabemos que es un tiempo de paro finito para toda  $t \geq 0$ . De la propiedad de Markov fuerte, el proceso trasladado  $\mathbf{X}_s := X_{L^{-1}(t)+s} - X_{L^{-1}(t)}$ ,  $s \geq 0$ , es independiente de  $\mathcal{F}_{L^{-1}(t)}$  con ley  $\mathbb{P}$ . Así también, bajo esta notación,  $\bar{\mathbf{X}}_s = \bar{X}_{L^{-1}(t)+s} - X_{L^{-1}(t)} = \bar{X}_{L^{-1}(t)+s} - \bar{X}_{L^{-1}(t)}$ , donde hemos utilizado la igualdad  $X_{L^{-1}(t)} = \bar{X}_{L^{-1}(t)}$ . Con esto hemos mostrado que el proceso trasladado  $(\mathbf{L}^{-1}, \mathbf{H})$  es independiente de  $\mathcal{F}_{L^{-1}(t)}$  y tiene la misma ley que  $(L^{-1}, H)$ , de manera que el proceso escalera tiene incrementos independientes y crecientes y por lo tanto es un subordinador. (ii) La prueba se omite ya que los argumentos son similares a la segunda parte del Teorema 33.  $\square$

### 3.3. Proceso espectralmente positivo

Un proceso de Lévy  $X$  sin saltos negativos que no es un subordinador es llamado espectralmente positivo. Principalmente estaremos interesados cuando dicho proceso tiene una distribución estable. Seguiremos ocupando la notación  $\bar{X}$ ,  $\underline{X}$  para denotar al proceso de supremo e ínfimo respectivamente del proceso de Lévy espectralmente positivo  $X$ . Las coordenadas  $X_t$  del proceso toman valores tanto negativos como positivos, lo cual no impide que su transformada de Laplace sea finita, i.e.

$$\mathbb{E}[\exp(-\lambda X_t)] < +\infty, \quad \forall \lambda > 0. \quad (3.1)$$

Para mostrar esta afirmación, notemos primero que por ausencia de saltos negativos,  $\forall x \geq 0$  el proceso ínfimo  $\underline{X}_t = \inf_{[0,t]} X$  para  $t \geq 0$ , tiene trayectorias continuas y decrecientes c.s. Entonces  $X_{T(-\infty, -x]} = -x$ ,  $\mathbb{P}$ -c.s. sobre  $\{T(-\infty, -x] < +\infty\}$ , donde  $T(-\infty, -x]$  es el primer tiempo de pasada de  $X$  por debajo de  $-x$ , esto es

$$T(x) := T(-\infty, -x] = \inf \{t \geq 0 : X_t < -x\}. \quad (3.2)$$

Sea entonces  $\tau(q)$  un tiempo exponencial independiente de parámetro  $q > 0$ . De la pérdida de memoria de la ley exponencial de  $\tau(q)$  y la propiedad de Markov fuerte al tiempo  $T(x)$ , se deduce que  $\forall a, b > 0$

$$\mathbb{P}(T(a+b) < \tau(q)) = \mathbb{P}(T(a) < \tau(q)) \cdot \mathbb{P}(T(b) < \tau(q)),$$

de manera que  $-\underline{X}_{\tau(q)}$  tiene distribución exponencial de parámetro  $\Phi(q) > 0$ , i.e.

$$\mathbb{P}(-\underline{X}_{\tau(q)} > x) = \mathbb{P}(T(x) < \tau(q)) = \mathbb{E}[e^{-qT(x)}] = e^{-x\Phi(q)} \quad \forall x > 0. \quad (3.3)$$

De esta manera  $-\underline{X}_{\tau(q)}$  converge en probabilidad a 0 cuando  $q \rightarrow +\infty$ , deduciendo que  $\Phi(q) > \lambda$  dado que  $q$  sea elegido suficientemente grande. Esto implica (3.1).

De (3.1) es posible pensar en la transformada de Laplace como extensión analítica al semiplano superior complejo  $\{\lambda \in \mathbb{C} : \text{Im}(\lambda) \geq 0\}$  de la función característica  $\lambda \rightarrow \mathbb{E}[e^{i\lambda X_t}]$ . Por la fórmula de Lévy-Khintchine, si escribimos

$$\psi(\lambda) := -\Psi(i\lambda) = a\lambda + \frac{\sigma^2 \lambda^2}{2} + \int_{(0, +\infty)} (e^{-\lambda x} - 1 + \lambda x \mathbf{1}_{\{x < 1\}}) \Pi(dx)$$

vemos entonces la identidad  $-\log \mathbb{E}[e^{-\lambda X_t}] = -t\Psi(i\lambda) = t\psi(\lambda)$ ,  $\forall \lambda \geq 0$ .

Por otro lado,  $T(x)$  en (3.2) denota igualmente el tiempo de pasada por encima de  $x$  del proceso  $-\underline{X}$  y su distribución queda caracterizada por el siguiente resultado:



**Proposición 43.** Sea  $\psi : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  el exponente de Laplace de  $X$ .

- (i)  $\psi$  es estrictamente convexa y  $\psi(+\infty) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \psi(\lambda) = +\infty$ .
- (ii) La función  $\Phi : [0, +\infty) \rightarrow [\Phi(0), +\infty)$ , definida por (3.3) es la función inversa de  $\psi$ , con  $\Phi(0) \geq 0$  la solución más grande de la ecuación  $\psi(\lambda) = 0$ .
- (iii) El punto 0 es regular para  $(-\infty, 0)$  y el proceso creciente  $-\underline{X}$  es un tiempo local en 0 para el proceso reflejado  $X - \underline{X}$ . Su inverso continuo por la derecha  $(T(x), x \geq 0)$  es un subordinador con exponente de Laplace  $\Phi$ .

Como corolario es posible especificar el comportamiento asintótico de  $X$  en términos de su exponente de Laplace  $\psi$  en el origen. Notemos que la recurrencia de los puntos se da cuando  $X$  oscila, ya que  $X$  no puede cruzar niveles por saltos negativos.

**Corolario 44.** Sea  $\psi$  el exponente de Laplace de  $X$ , entonces :

$$\begin{aligned} \psi'(0^+) < 0 &\Rightarrow \lim X_t = +\infty, \\ \psi'(0^+) = 0 &\Rightarrow \overline{\lim} X = -\underline{\lim} X = +\infty, \quad t \rightarrow +\infty \\ \psi'(0^+) > 0 &\Rightarrow \lim X_t = -\infty. \end{aligned}$$

Hacemos referencia a [1] Capítulo VII, Teorema 1 y Corolario 2 para una prueba de la Proposición anterior y su Corolario. Finalmente, damos la siguiente proposición.

**Proposición 45.** Para un proceso espectralmente positivo  $X$ , son equivalentes:

- 0 es irregular para  $\{0\}$ ,
- 0 es irregular para  $(0, +\infty)$ ,
- $X$  tiene variación acotada.

Véase [1] Capítulo VII, Corolario 5 para su demostración.

En el presente trabajo únicamente será de interés el caso en que  $X$  es un proceso de Lévy con distribución  $\alpha$ -estable espectralmente positivo con exponente de Laplace  $\psi(\lambda) = \lambda^\alpha$  para  $\alpha \in (1, 2)$ , en cuyo caso, al exponente de Laplace  $\psi$  le corresponde la elección de características  $a = \sigma = 0$  (no tiene parte gaussiana) y medida de Lévy

$$\Pi(dx) = \frac{\alpha(\alpha - 1)}{\Gamma(2 - \alpha)} x^{-\alpha-1} dx.$$

Así, el exponente de Laplace de un proceso  $\alpha$ -estable satisface  $\psi'(0^+) = 0$ , lo cual implica que el proceso oscila. Por otro lado, la condición  $\int_{(0,1)} x \Pi(dx) = +\infty$  equivale a que las trayectorias de  $X$  sean de variación no acotada.

De las mencionadas propiedades de un proceso estable y la Proposición 45 sabemos que el 0 es regular para  $(0, +\infty)$ . Como consecuencia, 0 es regular con respecto a los procesos de Markov fuerte  $\bar{X} - X$  y  $X - \underline{X}$ ; con esto es posible considerar el tiempo local en 0 para  $\bar{X} - X$  que denotamos por  $(L_t, t \geq 0)$ . Recordemos que este proceso queda únicamente determinado salvo constantes multiplicativas.

Denotamos por  $(g_i, d_i)$  con  $i \in \mathcal{I}$ , los intervalos de excursión de  $\bar{X} - X$  lejos del 0. La medida puntual

$$\sum_{i \in \mathcal{I}, d_i < +\infty} \delta_{(L_{d_i}, \Delta \bar{X}_{d_i}, \Delta X_{d_i})}(\mathrm{d}\ell, \mathrm{d}x, \mathrm{d}y),$$

se distribuye como  $\mathbf{1}_{\{\ell < +\infty\}} \mathcal{M}(\mathrm{d}\ell, \mathrm{d}x, \mathrm{d}y)$ , donde  $\mathcal{M}$  es una medida aleatoria de Poisson sobre  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^2$  de intensidad  $\mathrm{d}\ell \otimes \mathbf{n}(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y)$ . Es posible normalizar el factor multiplicativo en la definición de  $L$  de manera que  $\mathbf{n}(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y) = \mathbf{1}_{[0, y]}(x) \mathrm{d}x \Pi(\mathrm{d}y)$ . Véase [2] Corolario 1 para una prueba de éstas afirmaciones.

Ahora bien, definimos  $j_\epsilon = \mathbf{n}(\mathbb{R}_+ \times [\epsilon, +\infty)) = \int_{[\epsilon, +\infty)} x \Pi(\mathrm{d}x)$ , donde  $j_\epsilon \uparrow +\infty$  cuando  $\epsilon \downarrow 0$ . De argumentos estándar para medidas Poisson, tendremos que c.s.

$$\begin{aligned} L_\infty \wedge u &= \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{1}{j_\epsilon} \# \{i \in \mathcal{I} : L_{d_i} \leq u, \Delta_{g_i} \geq \epsilon\}. \quad \forall u \geq 0 \\ &= \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{1}{j_\epsilon} \# \{s \in [0, +\infty) : L_s \leq u, X_s > \bar{X}_{s-}, \Delta_s \geq \epsilon\}. \end{aligned}$$

Se sigue que c.s. para todo  $t \geq 0$ ,  $L_t = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{1}{j_\epsilon} \# \{s \in [0, t] : X_s > \bar{X}_{s-}, \Delta_s \geq \epsilon\}$ . Es posible mostrar otra aproximación del tiempo local haciendo uso del resultado

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} \mathbb{E} \left[ \left( \frac{1}{\epsilon} \int_0^{L^{-1}(t)} \mathbf{1}_{\{\bar{X}_s - X_s < \epsilon\}} \mathrm{d}s - (t \wedge L_\infty) \right)^2 \right] = 0. \quad (3.4)$$

lo cual es posible probar con base en la teoría de excursiones para  $\bar{X} - X$  eligiendo una normalización apropiada del tiempo local  $L$ .

### 3.4. La Excursión Normalizada de un Proceso de Lévy Estable $X^{exc}$

Comenzamos dando la definición precisa del proceso que utilizaremos para definir la excursión normalizada de un proceso de Lévy estable.

**Definición 46.** (Proceso de Lévy  $\alpha$ -estable)

Por un proceso de Lévy  $\alpha$ -estable  $X$  nos referimos a un proceso de Lévy estable espectralmente positivo de índice  $\alpha \in (1, 2)$  con transformada de Laplace dada por:

$$\mathbb{E} [e^{-\lambda X_t}] = e^{t\lambda^\alpha}, \quad \forall \lambda > 0.$$

El proceso  $X$  toma valores en el espacio de Skorohod  $\mathbb{D}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$  de trayectorias càdlàg dotado de la topología de Skorohod.

Como se mencionó en la sección anterior, un proceso de ésta índole es de variación no acotada y oscila (es recurrente). Durante las secciones restantes del capítulo la dependencia de  $\alpha$  queda implícita y no se menciona para simplificar la notación.

Sean

$$g_1 = \sup\{s \leq 1 : X_s = \inf_{[0,s]} X\} \quad \text{y} \quad d_1 = \inf\{s > 1 : X_s = \inf_{[0,s]} X\}.$$

La excursión normalizada del proceso  $X$  reflejado en su ínfimo es una re-normalización de  $X$  por  $g_1$  y  $d_1$  tocando por ambos lados del tiempo 1. Notamos que  $X_{g_1} = X_{d_1}$ , ya que c.s.  $X$  no da un salto al tiempo  $g_1$  y  $X$  no tiene saltos negativos.

**Definición 47.** (Excursión Normalizada)

La excursión normalizada de  $X$  por encima de su ínfimo se define como

$$X_s^{exc} = \frac{1}{(d_1 - g_1)^{1/\alpha}} (X_{g_1+s(d_1-g_1)} - X_{g_1}) \quad \text{para todo } s \in [0, 1].$$

Notemos que  $X^{exc}$  es una función càdlàg c.s. sobre  $[0, 1]$  tal que:

$$X_0^{exc} = X_1^{exc} = 0 \quad \text{y} \quad X_s^{exc} > 0, \quad \text{para toda } s \in (0, 1).$$

Es posible entonces considerar el tamaño de los saltos  $\Delta X^{exc}$ . Hacemos  $\Delta_0 = 0$  y

$$\Delta_t = \Delta X_t^{exc} := X_t^{exc} - X_{t^-}^{exc}, \quad \text{para } t \in (0, 1].$$

Hasta el momento hemos introducido al proceso  $X^{exc}$  como una normalización de un proceso Lévy estable  $X$  reflejado en su ínfimo tocando en ambos lados del tiempo 1. Presentamos a continuación una descripción del proceso  $X^{exc}$  utilizando la teoría de excursiones de Itô.

Sea  $X$  un proceso de Lévy  $\alpha$ -estable espectralmente positivo y denotamos por  $\underline{X} := (\underline{X}_t, t \geq 0)$  su proceso del ínfimo. Recordemos que  $\underline{X}$  es continuo ya que  $X$  no da saltos negativos y que el proceso  $X - \underline{X}$  es un proceso de Markov fuerte para el cual 0 es regular, permitiendo así el uso de la teoría de excursiones de Itô.

Sean  $(g_i, d_i)$  con  $i \in \mathcal{I}$  los intervalos de excursión de  $\mathbf{X} - \underline{\mathbf{X}}$  lejos del 0. Para toda  $i \in \mathcal{I}$  y  $s \geq 0$ , hacemos  $\omega^i := (\omega_s^i, s \geq 0) = (\mathbf{X}_{(g_i+s) \wedge d_i} - \mathbf{X}_{g_i}, s \geq 0)$ , donde  $\omega^i$  es un elemento del espacio de excursiones  $\mathcal{E}$ , definido por:

$$\mathcal{E} := \{\omega \in \mathbb{D}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) : \omega(0) = 0 \text{ y } \zeta(\omega) := \sup \{s > 0 : \omega > 0\} \in (0, +\infty)\}.$$

Si  $\omega \in \mathcal{E}$ , recordemos que  $\zeta(\omega)$  denota el “tiempo de vida” de la excursión. De la teoría de excursiones de Itô, la medida puntual  $\mathcal{N}(dt, d\omega) = \sum_{i \in \mathcal{I}} \delta_{(-\underline{\mathbf{X}}_{g_i}, \omega^i)}$ , es una medida de Poisson de intensidad  $dt \otimes \eta(d\omega)$ , donde  $\eta(d\omega)$  es la medida de excursiones de Itô. Esta medida admite la siguiente propiedad de escalamiento:

$$\begin{aligned} S^\lambda &: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E} \\ S^\lambda(\omega) &= (\lambda^{1/\alpha} \omega(s/\lambda), 0 \leq s < \lambda \zeta) \end{aligned}$$

Esta característica fundamental permite normalizar una excursión genérica por su longitud. Específicamente, se asocia a cada trayectoria  $\omega \in \Omega$  con  $\zeta(\omega) < +\infty$  la trayectoria  $S^{1/\zeta}(\omega)$  con tiempo de vida unitaria ( $\zeta = 1$ ). Tomando en cuenta que la imagen de  $\eta(\cdot | \zeta > a)$  bajo esta transformación no depende de  $a > 0$ , se verifica que (Ver [1] Capítulo VIII.4) existe una única colección de medidas de probabilidad  $(\eta_a, a \geq 0)$  sobre el conjunto de excursiones tales que satisfacen :

- (i) Para toda  $a > 0$ , se tiene que  $\eta_a(\zeta = a) = 1$ .
- (ii) Para toda  $\lambda > 0$  y  $a > 0$ , tenemos que  $S^\lambda(\eta_a) = \eta_{\lambda a}$ .
- (iii) Para todo subconjunto medible  $A \subset \mathcal{E}$ :  $\eta(A) = \int_0^\infty \frac{\eta_a(A)}{\alpha \Gamma(1-1/\alpha) a^{1/1+\alpha}} da$ .

La imagen de  $\eta(\cdot | \zeta > a)$  bajo  $S^{1/\zeta}(\omega)$  es una medida de probabilidad sobre el subespacio de  $\mathcal{E}$  de trayectorias con tiempo de vida 1. Ésta es la llamada ley de la excursión normalizada estable que hemos denotado por  $\eta_1$ . En particular, la medida de probabilidad  $\eta_1$ , con soporte en la funciones càdlàg con tiempo de vida unitario, coincide con la distribución de  $\mathbf{X}^{exc}$  como se definió anteriormente y también es posible denotarle como  $\eta_1(\cdot) := \eta(\cdot | \zeta = 1)$ .

### 3.5. Relación de continuidad absoluta para $\mathbf{X}^{exc}$

Introducimos al proceso conocido como puente estable, el cual es un proceso sobre el intervalo  $[0, 1]$  que puede pensarse como un proceso de Lévy estable  $\mathbf{X}$  condicionado a tomar el valor 0 al tiempo  $t = 1$ . Es conocido que para todo  $t > 0$ , la ley de  $\mathbf{X}_t$  es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue y a su vez existe una

versión continua positiva en todas partes de su densidad  $\mathbf{p}_t$ . En particular la ley de  $\mathbf{X}_t$  es equivalente a la medida de Lebesgue, lo cual permite utilizar la expresión c.s. sin ambigüedad. En este contexto, el semigrupo y la propiedad de escalamiento se escriben como:

$$\int_{\mathbb{R}} \mathbf{p}_{t-s}(y) \mathbf{p}_s(x-y) dy \quad , \quad \mathbf{p}_t(x) = t^{-1/\alpha} \mathbf{p}_1(t^{-1/\alpha}x) \quad , \quad 0 < s < t \quad , \quad x \in \mathbb{R}.$$

Consideremos ahora el espacio  $\mathbb{D}([0, 1], \mathbb{R})$  dotado de la topología de Skorohod y el cual puede ser visto como la restricción al intervalo de tiempo  $[0, 1]$  de las trayectorias  $\omega \in \mathbb{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R} \cup \{\delta\})$  con tiempo de vida  $\zeta(\omega) > 1$ .

**Definición 48. (Puente Estable)**

*La medida de probabilidad sobre  $\mathbb{D}([0, 1], \mathbb{R})$  dada por*

$$\mathbb{Q}_t(\cdot) = \frac{1}{\mathbf{p}_1(0)} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{P}(\cdot \mid \mathbf{X}_t = x, \mathbf{X}_1 = 0) \mathbf{p}_t(x) \mathbf{p}_{1-t}(-x) dx$$

*no depende de  $t \in (0, 1)$  y es llamada la ley del puente estable que denotamos por  $\mathbb{P}^{br}$  y que para  $\Lambda \subset \mathcal{F}_t$ ,  $\mathbb{P}^{br}(\Lambda) = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \mathbb{P}(\Lambda \mid |\mathbf{X}_1| < \epsilon)$ .*

Se utiliza una transformación trayectorial debido a Chaumont [4] que relaciona al puente de un proceso de Lévy estable con la excursión normalizada, lo cual generaliza la transformación de Vervaat en el caso Browniano. Si  $\mathbf{U}$  es una v.a. uniforme sobre  $[0, 1]$  independiente de  $\mathbf{X}^{exc}$ , entonces el proceso definido por

$$\mathbf{X}_t^{br} = \begin{cases} \mathbf{X}_{\mathbf{U}+t}^{exc} & \text{si } \mathbf{U} + t \leq 1, \\ \mathbf{X}_{\mathbf{U}+t-1}^{exc} & \text{si } \mathbf{U} + t > 1, \end{cases} \quad t \in [0, 1]$$

se distribuye de acuerdo al puente de un proceso estable  $\mathbf{X}$ . En dirección opuesta, esto es, para poder obtener ahora  $\mathbf{X}^{exc}$  a partir de  $\mathbf{X}^{br}$  solo reenraizamos  $\mathbf{X}^{br}$  realizando un cambio cíclico al tiempo  $u_*(\mathbf{X}^{br})$  donde alcanza su mínimo y el cual es único salvo un conjunto de medida cero.

Finalmente se establece una propiedad de continuidad absoluta entre  $\mathbf{X}^{br}$  y  $\mathbf{X}^{exc}$ . Fijemos  $h \in (0, 1)$  y sea  $F : \mathbb{D}([0, h], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua y acotada. Tenemos (Ver [1] Capítulo VIII.3)

$$\mathbb{E} \left[ F \left( \mathbf{X}_t^{br}, 0 \leq t \leq a \right) \right] = \mathbb{E} \left[ F \left( \mathbf{X}_t, 0 \leq t \leq a \right) \frac{\mathbf{p}_{1-a}(-\mathbf{X}_a)}{\mathbf{p}_1(0)} \right],$$

donde  $\mathbf{p}_t$  es la densidad de  $\mathbf{X}_t$ . Por último notamos por inversión de tiempo que  $(\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_{(1-t)^-})_{0 \leq t \leq 1}$  satisface la misma propiedad.

Ambas propiedades serán de utilidad para reducir la prueba de un resultado concerniente a  $\mathbf{X}^{exc}$  a uno que involucre a  $\mathbf{X}$  que en general es más fácil de obtener. De manera más específica, una propiedad de  $\mathbf{X}$  será transferida a  $\mathbf{X}^{br}$  por continuidad absoluta y posteriormente a  $\mathbf{X}^{exc}$  por la transformación de Vervaat.

# Capítulo 4

## Árboles de Galton Watson

### 4.1. Árbol Plano

Un arco es un espacio el cual es imagen del intervalo  $[0, 1]$  bajo una función  $f$  continua e inyectiva. Dado un arco  $f$ , los puntos que no desconectan al arco o sus “puntos de no corte” son  $f(0)$  y  $f(1)$ , también llamados puntos extremos del arco.

**Definición 49.** (Grafo Plano)

*Un grafo plano es un espacio isométrico a una unión finita de arcos, donde la colección de arcos que toman parte en la unión, satisfacen que cualesquiera dos de ellos, o son ajenos, o bien, se intersectan en uno de sus puntos extremos.*

Los grafos constan de dos partes: el conjunto de vértices que provienen de los extremos de los arcos y el conjunto de arcos sin sus puntos extremos. De manera informal un árbol plano es un grafo plano que no contiene “ciclos”, i.e. no es posible encontrar un subconjunto del grafo homeomorfo a un círculo; y habremos de considerar a sus vértices etiquetados. Damos a continuación el conjunto de etiquetas:

$$\mathcal{U} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathbb{N}^n,$$

donde  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$  y por convención  $\mathbb{N}^0 = \{\emptyset\}$ . Un elemento  $u \in \mathcal{U}$  es un elemento  $u = (u^1, u^2, \dots, u^m) \in \mathbb{N}^m$  para algún  $m$  natural y escribimos  $|u| = m$  para denotar esta pertenencia; es común referirse a  $|u|$  como la “generación” del elemento  $u$ . Si  $u, v \in \mathcal{U}$ , escribimos por simplicidad  $uv = (u^1, u^2, \dots, u^m, v^1, v^2, \dots, v^n)$  para la concatenación de  $u = (u^1, \dots, u^m)$  con  $v = (v^1, \dots, v^n)$ . En particular,

$$u\emptyset = \emptyset u = u \quad \text{y} \quad u = (u^1, u^2, \dots, u^m) = u^1 u^2 \cdots u^m.$$

Si  $k \leq m$ , la proyección sobre las primeras  $k$ -coordenadas se define como:

$$[u]_k = [u^1 u^2 \cdots u^m]_k = u^1 u^2 \cdots u^k \quad \text{y} \quad [u]_0 = \emptyset,$$

donde  $[u]_k$  denota el “ancestro en la  $k$ -ésima generación” de  $u$ . Establecemos una aplicación  $\varphi : \mathcal{U} \setminus \{\emptyset\} \rightarrow \mathcal{U}$  definida por  $\varphi(u^1 u^2 \cdots u^m) = u^1 u^2 \cdots u^{m-1}$ , y decimos que  $\varphi(u)$  es el “padre” de  $u$ . Para  $u, v \in \mathcal{U}$  escribimos  $u \preceq v$  si  $u$  es un “ancestro” de  $v$ , lo cual es equivalente a pedir que

$$\exists w \in \mathcal{U} \text{ tal que } uw = v \quad \Leftrightarrow \quad u = \varphi(v), \text{ o bien, } u = [v]_k \text{ para alguna } k.$$

El conjunto  $(\mathcal{U}, \preceq)$  es parcialmente ordenado. Sean  $u, v \in \mathcal{U}$ , denotamos por  $u \wedge v$  al “ancestro común” más inmediato de  $u$  y  $v$ , i.e. podemos escribir  $u \wedge v = [u]_\ell = [v]_\ell$  donde  $\ell = \sup \{k \geq 0 : [u]_k = [v]_k\}$ . Finalmente, consideramos al conjunto  $\mathcal{U}$  con el orden lexicográfico  $(\leq)$  para el cual

$$u \leq v \quad \Leftrightarrow \quad u \preceq v, \text{ o bien, si } u \wedge v \neq u, v \text{ entonces } u^{|u \wedge v|+1} < v^{|u \wedge v|+1}.$$

El conjunto  $(\mathcal{U}, \leq)$  es totalmente ordenado. La noción de *hijo*, *hermano* y *descendiente* son inducidas por la de *padre* y *ancestro* tal como en la vida cotidiana.

**Definición 50.** (Árbol Finito Ordenado con Raíz)

Un árbol finito ordenado con raíz, es un subconjunto finito  $\mathbf{t} \subset \mathcal{U}$  tal que:

- (i)  $\emptyset \in \mathbf{t}$
- (ii) Si  $u \in \mathbf{t} \setminus \{\emptyset\}$  entonces también  $\varphi(u) \in \mathbf{t}$
- (iii) Para todo  $u \in \mathbf{t}$  existe un entero  $k_u(\mathbf{t}) \geq 0$ , tal que  $\forall i \in \mathbb{N}$ :

$$ui \in \mathbf{t} \text{ si y solo si } 1 \leq i \leq k_u(\mathbf{t}).$$

Denotamos por  $\mathcal{A}$  al conjunto de árboles finitos ordenados con raíz. Si  $\mathbf{t} \in \mathcal{A}$ , los elementos de  $\mathbf{t}$  son llamados *vértices*. Interpretamos al número real  $k_u(\mathbf{t})$  como el *número de hijos* de  $u$  en  $\mathbf{t}$ ; debido a esta última interpretación, es posible denotar

$$k_u(\mathbf{t}) = \sup \{i \geq 1 : ui \in \mathbf{t}\}.$$

La generación  $|u|$  es igualmente conocida como la *altura* de  $u$  sobre el árbol. Los vértices sin hijos son llamados *hojas*. En lo subsecuente, se considera a los elementos de un árbol  $\mathbf{t} \in \mathcal{A}$ , como individuos de una población para la cual  $\mathbf{t}$  es el “árbol genealógico”. La cardinalidad  $\#(\mathbf{t})$  de  $\mathbf{t}$ , es el número de vértices en el árbol.

Un árbol finito ordenado con raíz es un árbol discreto por estar conformado por una cantidad finita de vértices, sin embargo, es común su representación como un grafo plano etiquetado, de donde es posible otorgarle el nombre alternativo de árbol plano, sobre el cual los vértices están conectados por un segmento de recta con cada uno de sus hijos y ordenados de izquierda a derecha en orden lexicográfico.

## 4.2. Árboles de Bienaymé-Galton-Watson

En esta sección damos resultados que caracterizan a cierta colección de árboles planos cuando el número de hijos de cada vértice viene dado por una distribución discreta asociada a un proceso de Bienaymé-Galton-Watson. Las demostraciones e afirmaciones aquí expuestas concernientes a éstos objetos y sus procesos asociados pueden verse desarrollados de manera más detallada en [10].

La familia de árboles Bienaymé-Galton-Watson se define de la siguiente manera: Dada una medida de probabilidad  $\mu$  con distribución  $\{\mu(k)\}_{k=0}^{\infty}$  sobre  $\mathbb{Z}_+$ , o equivalentemente, dada una variable aleatoria  $\xi$  con distribución  $\{\mu(k)\}_{k=0}^{\infty}$ , construimos recursivamente un árbol  $\theta$ , comenzando con la raíz y dotando a cada vértice de un número de hijos dado por una copia independiente de  $\xi$ . Es común referirse a la medida de probabilidad  $\mu$  como la distribución de hijos o progenie.

Sea  $\mu$  una distribución de hijos crítica o subcrítica, i.e. que satisface

$$\sum_{k=0}^{\infty} k\mu(k) \leq 1.$$

Haremos uso de la siguiente construcción explícita de árboles de Galton-Watson: Sea  $(K_u, u \in \mathcal{U})$  una colección de variables aleatorias independientes con distribución  $\mu$ , indexadas por el conjunto de etiquetas  $\mathcal{U}$ . Denotemos por  $\theta$  al subconjunto aleatorio de  $\mathcal{U}$  definido por:

$$\theta = \{u = u^1 \cdots u^n \in \mathcal{U} : u^i \leq K_{u^1 \dots u^{i-1}} \text{ para toda } 1 \leq i \leq n\} \cup \{\emptyset\}.$$

### Proposición 51.

$\theta$  es un árbol c.s. Más aún, si  $Z_n = \#\{u \in \theta : |u| = n\}$ , entonces  $(Z_n, n \geq 0)$  es un proceso de Bienaymé-Galton-Watson con distribución de hijos  $\mu$  y  $Z_0 = 1$ .

Cualquier árbol plano aleatorio que satisfaga esta proposición se le conoce como un árbol de Bienaymé-Galton-Watson con distribución de hijos  $\mu$ , o en corto,  $\mu$ -BGW.

Con base en la definición de árbol finito ordenado con raíz, es posible admitir en  $\mathcal{A}$  cualquier árbol finito ordenado con una raíz distinta a  $\emptyset$ . En efecto, basta con realizar un cambio de raíz a través de una traslación. Con esto en mente definimos lo siguiente.

### Definición 52. (Árbol Traslado)

Sea  $\mathbf{t} \in \mathcal{A}$ . El árbol trasladado en  $u \in \mathbf{t}$ , es un subconjunto de  $\mathcal{U}$  definido por

$$T_u(\mathbf{t}) := \{v \in \mathcal{U} : uv \in \mathbf{t}\}.$$

Además, por un cambio de raíz se tiene que  $T_u(\mathbf{t}) \in \mathcal{A}$ .



**Definición 53.** (Distribución de un Árbol  $\mu$ -BGW)

La ley del árbol  $\mu$ -Bienaymé-Galton-Watson es la única medida de probabilidad  $\mathbb{P}_\mu$  sobre  $\mathcal{A}$  tal que:

1.  $\mathbb{P}_\mu(\{\mathbf{t} \in \mathcal{A} : k_\emptyset = \ell\}) = \mu(\ell)$ ,  $\ell \geq 1$ .
2.  $\forall \ell \geq 1$  con  $\mu(\ell) > 0$  y bajo la medida de probabilidad  $\mathbb{P}_\mu(\cdot | k_\emptyset = \ell)$ , los árboles aleatorios  $T_1(\mathbf{t}), T_2(\mathbf{t}), \dots, T_\ell(\mathbf{t})$  son independientes con distribución común  $\mathbb{P}_\mu$ .

Finalmente definimos un proceso que nos permite explorar la genealogía del árbol. Sea  $\mathbf{t} \in \mathcal{A}$  un árbol con  $\#(\mathbf{t})$  vértices (individuos), escribimos

$$\mathbf{t} = \{u_0 := \emptyset < u_1 < \dots < u_{\#(\mathbf{t})-1}\},$$

para denotar al árbol con sus elementos ordenados de acuerdo al orden lexicográfico. En este orden, el proceso de exploración visita a la raíz  $\emptyset$  al tiempo 0 y sucesivamente nos indica la generación del individuo visitado al tiempo  $n \in \{1, \dots, \#(\mathbf{t}) - 1\}$ . Interpretando la generación como la altura sobre árbol a la cual se encuentra el individuo, el proceso de exploración también recibe el nombre de proceso de altura.

**Definición 54.** (Proceso de Altura)

Sea  $\mathbf{t} \in \mathcal{A}$ . La función  $(H_n(\mathbf{t}), n \geq 0)$  definida por

$$H_n(\mathbf{t}) = \begin{cases} |u_n| & \text{si } 0 \leq n \leq \#(\mathbf{t}) - 1 \\ \partial & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

se le conoce como la función de altura del árbol  $\mathbf{t}$ . Más aún, si  $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \dots$  es una sucesión de árboles en  $\mathcal{A}$ , el proceso  $H = (H_n, n \geq 0)$  definido como la concatenación

$$H_n = H_n(\mathbf{t}_k) \text{ si } \#(\mathbf{t}_{k-1}) \leq n \leq \#(\mathbf{t}_k) - 1,$$

se le conoce como el proceso de altura de la sucesión.

En general este proceso no es Markoviano bajo  $\mathbb{P}_\mu$  y no es claro como obtener su distribución. Sin embargo, es posible definir un proceso de Markov relacionado.

De nuestras definiciones, el elemento  $v \in \mathbf{t}$  es un “hermano más joven” para  $u \in \mathbf{t}$ , si ocurre que  $u < v$  y tienen el mismo padre, i.e.  $\varphi(u) = \varphi(v)$ . Considerando esto,  $\forall n \in \{0, 1, \dots, \#(\mathbf{t}) - 1\}$ , establecemos para cada  $j \in \{1, \dots, H_n\}$  a

$$B_j^n = \#\{v \in \mathbf{t} : |v| = j, [u_n]_{j-1} = \varphi(v), u_n < v\},$$

como el número de hermanos más jóvenes del ancestro de  $u_n$  que habita en la  $j$ -ésima generación de  $\mathbf{t}$ ; denotamos por  $(B_1^n, B_2^n, \dots, B_{H_n}^n)$  al vector que tiene por entradas la cantidad de hermanos más jóvenes de cada ancestro de  $u_n$  en cada generación, inclusive los hermanos más jóvenes de  $u_n$  que vive en el nivel  $H_n$ .

**Proposición 55.**

Sea  $(\rho_n, n \geq 0)$  el proceso definido por

$$\rho_n = \begin{cases} (B_1^n, B_2^n, \dots, B_{H_n}^n) & \text{si } 0 \leq n \leq \#(\mathbf{t}) - 1 \\ \partial & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Entonces, bajo  $\mathbb{P}_\mu$  es una cadena de Markov con valores en  $\mathcal{U} \cup \{\delta\}$ . Más aún, el kernel de transición de esta cadena de Markov se describe de la siguiente manera:

Sea  $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_h) \in \mathcal{U}$  y  $\tilde{\mathbf{b}} = (b_1, \dots, b_{m-1}, b_m - 1)$  donde

$$m := \sup \{ j \in \{1, 2, \dots, h\} : b_j > 0 \} > 0,$$

y se establece que  $\partial = \tilde{\mathbf{b}}$  si  $b_1 = \dots = b_h = 0$ , entonces para  $k \geq 0$

$$Q(\mathbf{b}, (\mathbf{b}, k)) = \mu(k + 1), \quad Q(\mathbf{b}, (\mathbf{b}, \tilde{\mathbf{b}})) = \mu(0), \quad Q(\partial, \partial) = 1.$$

El enunciado es intuitivamente claro. Heurísticamente, al tiempo  $n$  se visita al individuo  $u_n \in \mathbf{t}$  y no se sabe si el individuo tiene o no hijos. Así para todo  $\ell \geq 1$ , el individuo  $u_n$  tendrá  $\ell$  hijos con probabilidad  $\mu(\ell)$ , siendo en dado caso  $u_{n+1} = u_n 1$  el primer hijo de  $u_n$  que contará con  $\ell - 1$  hermanos más jóvenes y por definición obtenemos que  $\rho_{n+1} = (\rho_n, \ell - 1)$ . En otro caso,  $u_n$  no tiene hijos con probabilidad  $\mu(0)$ , por lo que  $u_{n+1}$  será el primer hermano más joven del ancestro más inmediato de  $u_n$  con al menos un hermano más joven o en otro caso lo consideramos la raíz, concluyendo que  $\rho_{n+1} = \tilde{\rho}_n$ . Ver [8] Capítulo VIII.1 Proposición 1, para una prueba.

Como corolario definimos la caminata aleatoria relacionada con el árbol  $\mu$ -BGW que denotamos por  $\theta$ , conocida también como la trayectoria de Luckasiewicz de  $\theta$ .

Para simplificar el enunciado, sea  $u_n$  el elemento del árbol  $\mu$ -BGW visitado al tiempo  $n$  y recordemos que  $u_0 = [u_n]_0 = \emptyset$ . Notamos entonces que

$$\sum_{j=1}^{H_n} B_j^n \stackrel{(d)}{=} \sum_{j=1}^n (K_{u_{j-1}} - 1). \quad (4.1)$$

Probaremos ésta igualdad por inducción sobre  $n$ . Al tiempo  $n = 1$ , el individuo  $u_1$  es el primer elemento del árbol con altura  $H_1 = 1$ , en otras palabras, es el primer hijo de la raíz, de donde el número de hermanos más jóvenes de  $u_1$  coincide con los hijos restantes de la raíz. Supongamos ahora que la igualdad es válida para  $n$  y probémosla para  $n + 1$ . Debido a que el orden de exploración es de acuerdo al orden lexicográfico, al ir del individuo  $u_n$  al  $u_{n+1}$ , existen únicamente tres casos en el siguiente orden : (i)  $H_n < H_{n+1}$ , (ii)  $H_n = H_{n+1}$ , o bien, (iii)  $H_n > H_{n+1}$ .

(i) En este caso  $u_{n+1}$  es el primogénito de  $u_n$ , de donde por un argumento análogo al caso base  $n = 1$ , claramente  $B_{H_{n+1}}^{n+1} = (K_{u_n} - 1)$ . Por otro lado comparten la línea ancestral de  $u_n$  y en consecuencia  $B_j^n = B_j^{n+1}$  para toda  $j \in \{1, 2, \dots, H_n\}$ .

(ii) Aquí  $u_{n+1}$  es hermano de  $u_n$ , por lo que comparten la línea ancestral de su padre, i.e.  $B_j^n = B_j^{n+1}$  para toda  $j \in \{1, 2, \dots, H_n - 1\}$ . Luego, al ser  $u_{n+1}$  el primer hermano más joven de  $u_n$ , se tendrá que  $B_{H_{n+1}}^{n+1} = B_{H_n}^n - 1 = B_{H_n}^n + (K_{u_n} - 1)$ .

(iii) Si al tiempo  $n + 1$  se visita un individuo posicionado a menor altura, necesariamente  $u_{n+1}$  es el primer hermano más joven de  $[u_n]_{H_\ell} = u_\ell$  para algún  $H_\ell \in \{0, 1, \dots, H_n - 1\}$  con  $\ell < n$  y tal que  $H_{n+1} = H_\ell$ . Notemos que al ser hermanos, las líneas ancestrales de  $u_{n+1}$  y  $u_\ell$  coinciden, esto es,  $B_j^{n+1} = B_j^\ell$  para  $j \in \{0, 1, \dots, H_\ell - 1\}$ . Finalmente  $B_{H_{n+1}}^{n+1} = B_{H_\ell}^\ell - 1 = B_{H_\ell}^\ell + (K_{u_n} - 1)$ .

Una vez argumentadas tales igualdades en los casos (i), (ii), (iii) y sumando los términos correspondientes, por hipótesis de inducción se obtiene el resultado.

**Corolario 56.**

Sea  $\theta$  un árbol  $\mu$ -BGW y  $(H_n, n \geq 0)$  su proceso de altura, entonces el proceso

$$S_n = \begin{cases} \sum_{j=1}^n (K_{[u_n]_{j-1}} - 1) & \text{si } 0 \leq n \leq \#(\mathbf{t}) - 1 \\ \partial & \text{si } n \geq \#(\mathbf{t}) \end{cases}$$

es bajo  $\mathbb{P}_\mu$  una caminata aleatoria sobre los enteros comenzada en 0, con distribución de salto  $\nu(k) := \mu(k + 1)$ , para  $k = -1, 0, 1, \dots$ , y el proceso muere la primera vez que toca el nivel  $(-1)$ . Más aún, para  $n \leq \#(\theta) - 1$ ,

$$H_n = \# \left\{ j \in \{0, 1, \dots, n - 1\} : S_j = \inf_{j \leq \ell \leq n} S_\ell \right\}.$$

*Demostración.*

La primera parte es inmediata de la forma del kernel  $Q$  en la Proposición 55. Luego, la forma de  $H_n$  surge de notar que la condición  $S_j = \inf_{j \leq \ell \leq n} S_\ell$  ocurre si y sólo si  $n$  es menor que el mínimo entero mayor que  $j$  tal que la caminata cae por debajo del nivel  $S_j$ . Como ya hemos podido apreciar, esto último ocurre la primera vez que se visita a alguien que no desciende de  $u_j$ . Por lo tanto, se están contando exactamente el número de ancestros de  $u_n$  y en consecuencia  $H_n = |u_n|$ .  $\square$

# Capítulo 5

## Árboles de Lévy

Nuestro objetivo ahora es definir al árbol de Lévy  $\alpha$ -estable  $\mathcal{T}_\alpha$  con  $\alpha \in (1, 2)$ , donde el índice  $\alpha$  es el mismo que el del proceso  $\alpha$ -estable sin saltos negativos con el cual se construye. El objetivo principal es asociar al árbol con un proceso de altura, que análogamente al caso discreto, codifica toda la información acerca de la estructura genealógica de un árbol de Lévy. A partir de este proceso, será posible definir al árbol de Lévy.

La intención de introducir a los árboles de Lévy de manera previa a los árboles cíclicos  $\alpha$ -estables que definiremos más adelante, se debe a que es posible definir al árbol cíclico como un objeto dual del árbol de Lévy.

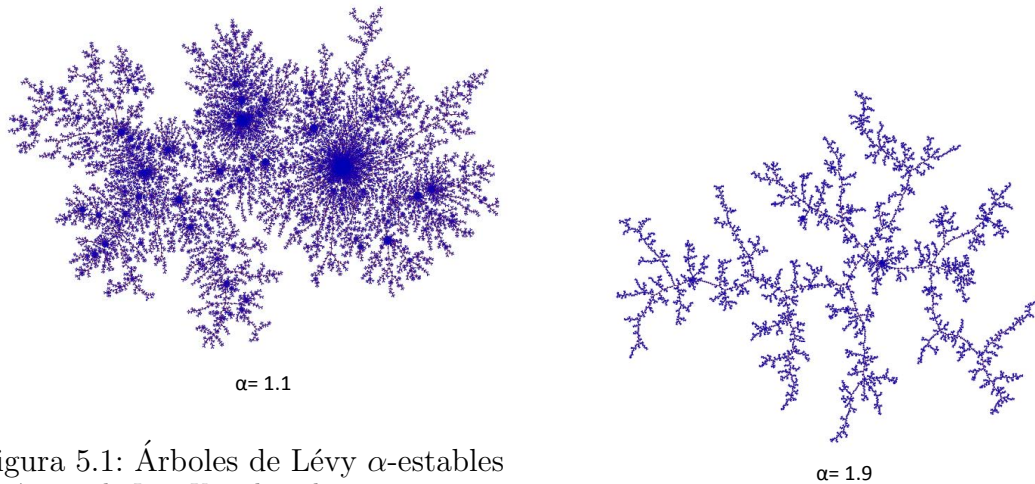


Figura 5.1: Árboles de Lévy  $\alpha$ -estables  
*Imágenes de Igor Kortchemski*

En el contexto discreto, los árboles de Bienaymé-Galton-Watson (BGW) describen la genealogía de una población descrita por un proceso de BGW. Si para cada  $k \geq 1$

consideramos un proceso de BGW  $Z^{(k)}$  con distribución de hijos  $\mu$  que satisfaga

$$\mu([k, +\infty)) \sim |\Gamma(1 - \alpha)|^{-1} k^{-\alpha}, \quad \text{cuando } k \rightarrow \infty,$$

entonces las leyes de los procesos  $Z^{(k)}$  debidamente reescalados convergen a un proceso a tiempo continuo que describe la evolución de una población con genealogía descrita a partir de un proceso de Lévy  $\alpha$ -estable, esto es, con exponente de Laplace  $\psi(\lambda) = \lambda^\alpha$  para algún  $\alpha \in (1, 2]$ . Véase el artículo de Caballero, Lambert & Uribe [3] para ahondar en éste resultado.

Antes de interpretar la genealogía a partir del proceso de Lévy  $\alpha$ -estable y generar su árbol genealógico, es necesario entender el formalismo de un árbol real, el como se definen, el espacio en el que viven y el sentido de la convergencia en distribución.

## 5.1. Árbol Real

**Definición 57.** (Árbol Real). *Un espacio métrico compacto  $(\mathcal{T}, d)$  es un árbol real si para cualesquiera dos elementos  $a, b \in \mathcal{T}$  se tiene que:*

1. *Existe una única isometría  $f_{a,b} : [0, d(a, b)] \rightarrow \mathcal{T}$  tal que*

$$f_{a,b}(0) = a \quad \text{y} \quad f_{a,b}(d(a, b)) = b.$$

2. *Si  $q : [0, 1] \rightarrow \mathcal{T}$  es un arco con extremos  $q(0) = a$  y  $q(1) = b$ , tendremos que*

$$q([0, 1]) = f_{a,b}([0, d(a, b)]).$$

*Un árbol real  $(\mathcal{T}, d)$  con un vértice distinguido  $\rho = \rho(\mathcal{T})$ , se le conoce como un árbol real con raíz. Los árboles reales que consideramos tendrán siempre raíz.*

La definición da ciertas propiedades intrínsecas de la estructura de un árbol real  $(\mathcal{T}, d)$ . Para cualesquiera dos elementos  $a, b \in \mathcal{T}$  y  $\rho$  su raíz tendremos que el rango de la isometría  $f_{a,b}$  denotado por  $[[a, b]]$ , es el único arco con extremos  $a, b$  sobre el árbol. En particular,  $[[\rho, a]]$  denotará la *línea ancestral* de  $a$ . Es posible definir un orden parcial sobre las líneas ancestrales del árbol escribiendo  $a \preceq b$  para denotar que  $a$  es un ancestro de  $b$ , si y solo si,  $a \in [[\rho, b]]$ . Además, tendremos que:

- Para  $a, b \in \mathcal{T}$ ,  $\exists!$   $c \in \mathcal{T}$  tal que  $[[\rho, a]] \cap [[\rho, b]] = [[\rho, c]]$ . En dicho caso, escribimos  $c = a \wedge b$  para el *ancestro común más reciente* de  $a$  y  $b$ .
- La *multiplicidad* del vértice  $b$ , es el número de componente conexas de  $\mathcal{T} \setminus \{b\}$ .

Un árbol real  $\mathcal{T}$  es arcoconexo, puesto que puede verse como la unión de todas las líneas ancestrales, es decir,

$$\mathcal{T} = \bigcup_{a \in \mathcal{T}} [[\rho, a]].$$

Sea  $(E, d)$  un espacio métrico. Entonces, el hiperespacio  $2^E$  definido por

$$2^E = \{K \subset E : K \text{ es cerrado}\},$$

es un espacio métrico con métrica de Hausdorff definida para  $K_1, K_2 \in 2^E$  por

$$d_H(K_1, K_2) = \inf\{\epsilon > 0 : K_2 \subset N_\epsilon(K_1), K_1 \subset N_\epsilon(K_2)\},$$

donde para  $K \in 2^E$ ,  $N_\epsilon(K) = \bigcup_{x \in K} B_\epsilon(x)$  denota la *nube* de radio  $\epsilon > 0$  alrededor de  $K$ . La métrica de Hausdorff nos da una medida del parecido geométrico de dos objetos, ya que considera tanto la distancia entre ellos, como su forma.

**Definición 58.** (Distancia de Gromov-Hausdorff)

Sean  $\mathcal{T}$  y  $\mathcal{T}'$  dos espacios métricos compactos con raíces  $\rho$  y  $\rho'$  respectivamente, definimos su distancia de Gromov-Hausdorff como

$$d_{GH}(\mathcal{T}, \mathcal{T}') = \inf\{d_H(\varphi(\mathcal{T}), \varphi'(\mathcal{T}')) \vee d(\varphi(\rho), \varphi'(\rho'))\},$$

donde el ínfimo es tomado sobre todas la posibles elecciones de un espacio métrico  $(E, d)$  y todos los encajes isométricos,  $\varphi : \mathcal{T} \rightarrow E$  y  $\varphi' : \mathcal{T}' \rightarrow E$  en  $(E, d)$ .

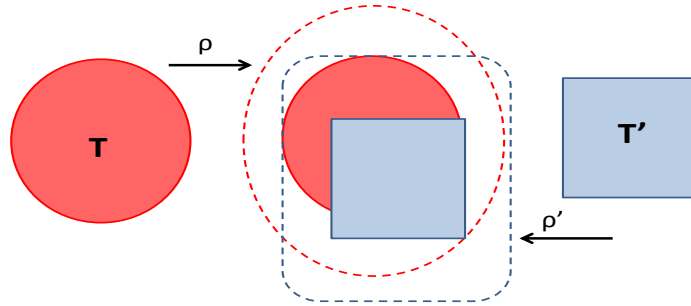


Figura 5.2:  $\rho : (T, d) \rightarrow (E, d)$ ,  $\rho' : (T', d) \rightarrow (E, d)$  denotan encajes isométricos.

La métrica Gromov-Hausdorff a diferencia de la métrica de Hausdorff clásica, permite medir el parecido geométrico de dos espacios métricos compactos considerando todas las posibles distorsiones entre ellos, al intentar empalmarlos, acomodarlos lado a lado, o realizar cualquier tipo de *correspondencia* para intentar reducir la distorsión y posteriormente compararlos al optimizar su parecido geométrico.

Definimos una relación de equivalencia ( $\overset{iso}{\sim}$ ) entre la colección de los espacios métricos compactos con raíz, dada por:

$$\mathcal{T}_1 \overset{iso}{\sim} \mathcal{T}_2 \text{ si existe una isometría de } \mathcal{T}_1 \text{ sobre } \mathcal{T}_2 \text{ que preserva la raíz.}$$

Entonces  $d_{GH}$  define una métrica sobre la colección de clases de equivalencia:

$$\mathbb{T} = \left\{ [\mathcal{T}]_{\overset{iso}{\sim}} : \mathcal{T} \text{ es un árbol real (compacto)} \right\}.$$

**Teorema 59.** *El espacio métrico  $(\mathbb{T}, d_{GH})$  es completo y separable.*

Este último resultado, provee de un entorno adecuado para definir un espacio de probabilidad y utilizar las herramientas básicas de convergencia débil. Por otro lado, el significado de convergencia en distribución de árboles reales se refiere a la convergencia bajo la métrica de Gromov-Hausdorff. Puede consultarse [10] para más detalles y referencias sobre los resultados expuestos en ésta sección.

### 5.1.1. Codificando un Árbol Real

Sea  $g : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  una función continua, con soporte compacto y  $g(0) = 0$ . Escribimos al mínimo valor de  $g$  entre los tiempos  $s, t \geq 0$  como:

$$m_g(s, t) = \inf_{r \in [s \wedge t, s \vee t]} g(r),$$

y definimos una función  $d_g : [0, \infty) \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  por:

$$d_g(s, t) = g(s) + g(t) - 2m_g(s, t).$$

Introducimos la siguiente relación de equivalencia ( $\sim_g$ ):

$$s \sim_g t \text{ si y solo si } d_g(s, t) = 0 \text{ si y solo si } g(s) = g(t) = m_g(s, t).$$

Es ilustrativo notar la equivalencia de lo anterior:

$$\begin{aligned} d_g(s, t) = 0 &\Leftrightarrow g(s) + g(t) - 2m_g(s, t) = 0 \\ &\Leftrightarrow 0 \leq g(t) - m_g(s, t) = m_g(s, t) - g(s) \leq 0 \\ &\Leftrightarrow g(s) = g(t) = m_g(s, t). \end{aligned}$$

La relación  $\sim_g$  define entonces al espacio cociente  $\mathcal{T}_g = [0, \infty) / \sim_g$ , que tiene por elementos las clases de equivalencia  $[s]_g = \{t \in [0, \infty) : t \sim_g s\}$ .

A la aplicación  $p_g : s \mapsto [s]_g$  se le conoce como la *proyección canónica*. Ahora bien, si  $\zeta := \sup\{s \geq 0 : g(s) \neq 0\} > 0$  es el tiempo de vida de  $g$ , entonces  $p_g([0, \zeta]) = \rho$ , donde  $\rho = p_g(0) = [0]_g$ . En particular, el espacio cociente

$$\mathcal{T}_g = p_g([0, \zeta]) = [0, \zeta] / \sim,$$

es compacto y arcoconexo.

**Proposición 60.** *La función proyección  $p_g$  es una función cociente, i.e. el espacio métrico  $(\mathcal{T}_g, d_g)$  está dotado con la topología fuerte inducida por  $p_g$ , esto es,*

$$U \subseteq \mathcal{T}_g \text{ es abierto si y solo si } p_g^{-1}(U) \subseteq [0, \zeta] \text{ es abierto.}$$

**Teorema 61.** *El espacio métrico  $(\mathcal{T}_g, d_g)$  es un árbol real con raíz  $\rho = p_g(0)$ .*

La relación de equivalencia  $\sim_g$  tiene por propósito otorgar un orden de exploración a la estructura del árbol real, donde la función que codifica al árbol es el equivalente a un “etiquetado continuo” del árbol. Si ahora tenemos dos funciones no negativas  $g, g'$  de soporte compacto en el espacio de funciones continuas con la norma uniforme  $\|\cdot\|_\infty$ , es posible observar que la aplicación  $g \mapsto \mathcal{T}_g$  es Lipschitz continua, i.e. tendremos el siguiente resultado.

**Lema 62.** *Sean  $g, g' : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  dos funciones de soporte compacto tales que  $g(0) = g'(0) = 0$ . Entonces,*

$$d_{GH}(\mathcal{T}_g, \mathcal{T}_{g'}) \leq 2 \|g - g'\|_\infty.$$

Para una prueba se puede consultar [10].

## 5.2. El Proceso de Altura

Generalizamos la interpretación del proceso de altura dado en el contexto discreto. Ésta interpretación de la genealogía está basada en el análisis de un proceso de Lévy espectralmente positivo debido a un trabajo de Le Gall & Le Jan [9]. Al igual que en esta obra, para el análisis consideraremos primero el caso de variación acotada que naturalmente extiende las interpretaciones del caso discreto, para posteriormente tener una intuición de la extensión natural en el caso de variación no acotada.

Haremos uso particularmente de los resultados de la sección 3.3. con lo que el proceso de altura de un árbol de Lévy podrá definirse como el tiempo local en 0 de un proceso dual, retornado en el tiempo y reflejado en su supremo; esto sugiere interpretarlo como el número de clientes en una fila al tiempo  $t$ , o mejor aún, como una densidad



poblacional al tiempo  $t$ , donde la incorporación de los individuos a la población es descrita por un proceso de Lévy espectralmente positivo.

Consideremos una caminata aleatoria  $(S_n, n \geq 0)$  definida como la trayectoria de Luckasiewicz de un árbol de BGW. Si ahora deseamos considerar un proceso a tiempo continuo que lo sustituya, es natural que nos preguntemos como preservar la información genealógica bajo la misma dinámica de exploración. Con este fin, extendemos el dominio de  $S$  haciendo  $S_t := S_{[t]}$  para  $t \geq 0$  y agregamos una deriva negativa  $-\beta < 0$  de manera que no oculte los saltos, entonces el proceso definido por  $X_t = -\beta t + S_t$  es sin saltos negativos. Inmediatamente notamos que la condición  $S_k = \inf_{k \leq r \leq n} S_r$ , que indica que el individuo  $u_n$  debe ser descendiente de  $u_k$ , deberá ser sustituida por  $X_{s^-} \leq \inf_{[s,t]} X$  cuando  $[t] = n$  y  $s = k$ .

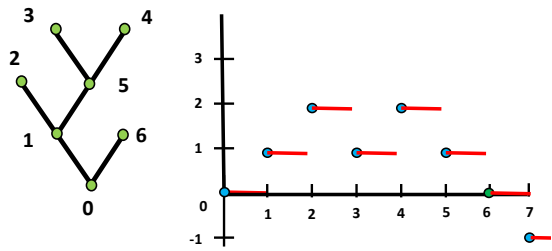


Figura 5.3:  $S_t := S_{[t]}$  para  $t \geq 0$ .

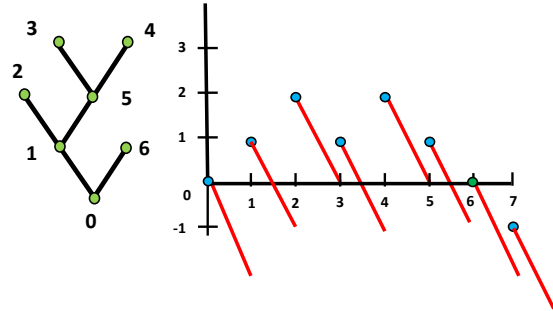


Figura 5.4:  $X_t := -\beta t + S_t$ .

Este acercamiento es similar a lo que tendremos al considerar un proceso de Lévy espectralmente positivo de variación acotada. La diferencia radica en que la aparición de los saltos ocurrirá con frecuencia exponencial

## Variación acotada

Un proceso de Lévy  $X := (X_t, t \geq 0)$  espectralmente positivo de variación acotada comenzado en el origen, puede descomponerse como la suma de un subordinador de saltos puros y una deriva estrictamente negativa (Véase [1] Cap. VII), i.e.

$$X_t := \sum_{0 \leq s \leq t} \Delta_s - \beta t, \quad \text{con } \Delta_s := \Delta X_s \text{ y } \beta > 0.$$

Es posible interpretar al proceso  $X$  como aquel que describe la evolución en el tiempo de una “cola de clientes” siendo atendidos por un “servidor” con tasa de atención al cliente  $\beta > 0$ . Tendremos la siguiente interpretación:

- Un tiempo de salto de  $X$  corresponde al tiempo de llegada de un cliente nuevo.
- El tamaño del salto  $\Delta_t > 0$  corresponde entonces al tamaño del servicio que requiere el cliente.

El primer caso en que la medida de Lévy  $\Pi$  de  $X$  es finita ( $\Pi(\mathbb{R}_+) < \infty$ ), el proceso  $\sum_{s \leq t} \Delta_s$  es un proceso Poisson compuesto: Los saltos de  $X$  ocurren en una cantidad discreta de tiempos con distribución  $\Pi(dx)/\Pi(\mathbb{R}_+)$ . Más aún, ya que la posición de los saltos de  $X$  en el tiempo se encuentra caracterizada por una medida aleatoria de Poisson, los intervalos de tiempo entre saltos consecutivos tienen distribución exponencial de parámetro  $\Pi(\mathbb{R}_+)$ .

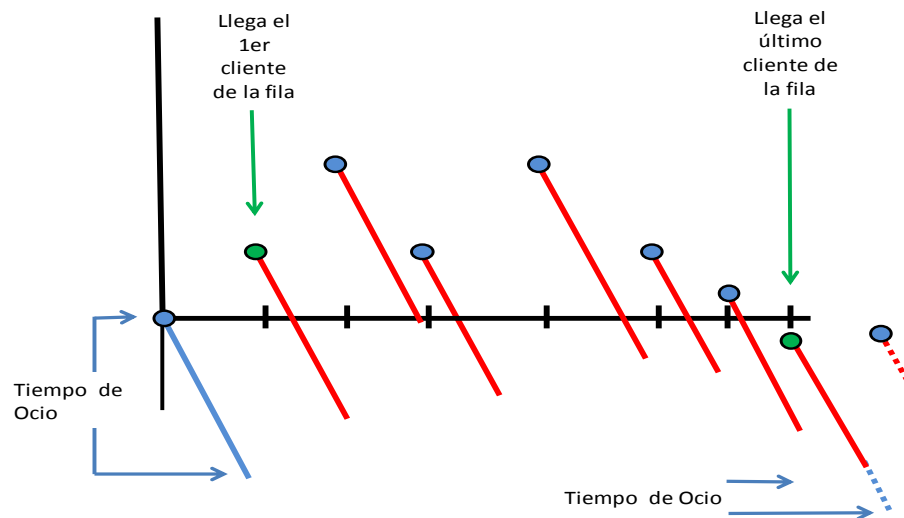


Figura 5.5: Interpretación de una trayectoria del proceso  $X$ .

Así las cosas, un salto de  $X$  al tiempo  $t$  corresponde a la llegada de un cliente nuevo que requerirá un servicio igual a  $\Delta_t$ . El servidor atiende de inmediato a este nuevo cliente cuyo servicio será completado al tiempo  $t + \frac{\Delta_t}{\alpha}$ , salvo que el servicio sea interrumpido por un nuevo arribo, y así sucesivamente. Cuando el servidor ha completado el servicio de un cliente, regresa con el cliente más inmediato cuyo

servicio no haya sido completado –si es que aún hay uno–, de otro modo la fila a terminado y se considera que el servidor se encuentra en un tiempo de ocio.

Es de importancia poder determinar cuando un cliente sigue o no en una fila existente posterior al tiempo de su arribo. El cliente que llega al tiempo  $r$  se encontrará en la fila al tiempo  $t > r$ , si y sólo si,  $X_{r-} < \inf_{[r,t]} X$ , donde la cantidad

$$\rho_t(r) = \inf_{[r,t]} X - X_{r-} \geq 0,$$

representa el “servicio faltante” del cliente  $r$  al tiempo  $t$ . Denotamos por  $H_t$  al número de clientes en fila al tiempo  $t$  que son aquellos que aún no han sido servidos

$$i.e. \quad H_t = \# \left\{ s \in [0, t] : X_{s-} < \inf_{[s,t]} X \right\},$$

y denotamos por  $\mathcal{S}_t := \{s_t^1 \leq \dots \leq s_t^{H_t}\}$  al conjunto de tiempos de arribo de los clientes en la fila al tiempo  $t$ . Considerando la norma  $\|\cdot\|_1$  del vector  $(\rho(s_t^1), \dots, \rho(s_t^{H_t}))$ , con los servicios faltantes de los clientes en la fila al tiempo  $t$ , obtenemos la igualdad:

$$\sum_{s \in \mathcal{S}_t} \rho_t(s) = X_t - \underline{X}_t, \quad \text{con} \quad \underline{X}_t = \inf_{[0,t]} X,$$

donde  $X_t - \underline{X}_t$  corresponde a la carga total del servidor al tiempo  $t$ . Razón de esto es que al tiempo  $s_t^1$  llega el primer cliente de la fila existente al tiempo  $t$ , i.e.  $X_{(s_t^1)-} = \underline{X}_t$ , por lo que los servicios faltantes se acumulan por encima de este valor y a la vez implica que el servidor ya ha concluido en atender las filas anteriores.

En general, cuando se admite que la medida de Lévy sea infinita ( $\Pi(\mathbb{R}_+) \leq +\infty$ ), la interpretación anterior sigue siendo válida. Recordemos que podemos escribir

$$X_t := \sum_{s \leq t} \Delta_s - \beta t, \quad (\beta > 0),$$

y denotar por  $\mathcal{S}_t$  al conjunto de tiempos de arribo de los clientes en fila al tiempo  $t$ , los cuales son aquellos que no han sido atendidos en su totalidad por el servidor,

$$i.e. \quad \mathcal{S}_t := \left\{ s \in [0, t] : \rho_t(s) := \inf_{[s,t]} X - X_{s-} > 0 \right\}.$$

También escribimos  $H_t$  para la cardinalidad de  $\mathcal{S}_t$ , que bien puede ser ahora infinito. Para el caso  $\Pi(\mathbb{R}_+) = \infty$ , se utiliza un argumento de truncación. Para  $\epsilon > 0$ , establecemos

$$X_t^\epsilon := \sum_{s \leq t} \Delta_s \mathbf{1}_{\{|\Delta_s| > \epsilon\}} - \beta t,$$

donde  $X_t^\epsilon$  describe una fila, donde los servicios requeridos por los clientes son mayores que  $\epsilon > 0$ . Cuando  $\epsilon \downarrow 0$ , esto implica agregar clientes que requieran servicios más pequeños. Nuevamente  $X_t^\epsilon$  denota un proceso de Poisson compuesto a causa de la finitud de su medida de Lévy definida por  $\Pi_\epsilon \equiv \Pi \cdot \mathbf{1}_{\{|x|>\epsilon\}}$ . Más aún,  $(X_t^\epsilon, t \geq 0) \rightarrow (X_t, t \geq 0)$  cuando  $\epsilon \downarrow 0$  uniformemente sobre compactos. Con la notación que el proceso  $X^\epsilon$  induce, también tendremos que  $\mathcal{S}_t^\epsilon \rightarrow \mathcal{S}_t$  y entonces  $H_t^\epsilon \rightarrow H_t$  cuando  $\epsilon \downarrow 0$ . Así también,  $\rho_t^\epsilon(s) \rightarrow \rho_t(s)$  para toda  $s \in \mathcal{S}_t$ . Finalmente, el límite

$$X_t - \underline{X}_t = \lim_{\epsilon \downarrow 0} (X_t^\epsilon - \underline{X}_t^\epsilon), \quad (5.1)$$

representa la carga total del servidor al tiempo  $t$ .

Notemos que cuando  $t$  es un tiempo de salto de  $X$ , será deseable interpretar a  $H_t$  como la generación o altura del individuo al tiempo  $t$ . Utilizamos ahora la estructura probabilista de  $X$  para obtener un poco más de información. Recordemos al proceso dual retornado en el tiempo  $\widehat{X}_s^{(t)} = X_t - X_{(t-s)-}$  para  $0 \leq s \leq t$ , y denotemos su respectivo proceso de supremos por

$$\widehat{S}_s^{(t)} = \sup_{[0,s]} \widehat{X}_s^{(t)}.$$

**Lema 63.** *Para todo  $t > 0$ ,  $\mathbb{P}(H_t < \infty) = 1$ . Más aún,  $\mathbb{P}$ -c.s., para todo  $t > 0$ , los elementos de  $\mathcal{S}_t$  pueden ser ordenados en sucesión estrictamente creciente  $s_1^t < s_2^t < \dots$ , la cual es finita si  $t$  es un tiempo de salto de  $X$ .*

*Demostración.* Observemos que cuando  $u \in (0, t]$ , se tiene que  $t - u \in \mathcal{S}_t$  siempre que  $\widehat{S}_u^{(t)} > \widehat{S}_{u-}^{(t)}$ . Tenemos la igualdad  $(\widehat{S}_r^{(t)}, 0 \leq r \leq t) \stackrel{(d)}{=} (S_r, 0 \leq r \leq t)$  y sabemos que el conjunto  $\{r > 0 : S_r > S_{r-}\}$  es discreto y así  $\{r \in (0, t] : S_r > S_{r-}\}$  es finito c.s. para toda  $t > 0$ . Luego, de la primera observación  $H_t < \infty$  c.s. ya que  $\widehat{S}_r^{(t)} > \widehat{S}_{r-}^{(t)}$  ocurre si y sólo si  $X_{(t-s)-} \leq \inf_{[t-s,t]} X$ . En particular,  $H_r < \infty \forall r \in \mathbb{Q}_+$ .

Para  $s, s' \in \mathcal{S}_t$  claramente  $s < s'$  si y solo si  $X_s < X_{s'}$ . La segunda afirmación se sigue entonces si podemos checar que c.s.  $\forall t > 0, \forall \epsilon > 0, \{s \in \mathcal{S}_t : X_{s-} < X_t - \epsilon\}$  es finito. Para este fin, observamos que por la continuidad derecha de las trayectorias este último conjunto se encuentra contenido en  $\mathcal{S}_q$  para algún racional  $q > t$ . Si  $t$  es un tiempo de salto, es claro por definición de ínfimo que  $\mathcal{S}_t := \{s \in \mathcal{S}_t : \epsilon < X_t - X_{s-}\}$  para algún  $\epsilon > 0$ , completando la prueba.  $\square$

Para finalizar, describimos la genealogía del árbol que representa una excursion de  $X - \underline{X}$ , la cual puede ser descrita vía la interpretación de una fila de clientes. Como hemos podido observar, podemos restringirnos al caso  $\Pi(\mathbb{R}_+) < +\infty$ .

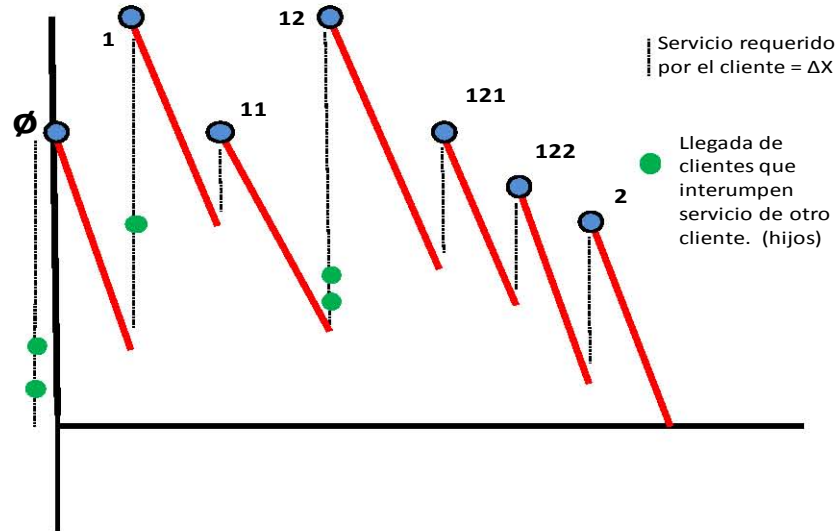


Figura 5.6: Genealogía y árbol asociado a una excursión de  $X - \underline{X}$ .

Cada cliente (tiempo de salto) de  $X$ , incluyendo el cliente al tiempo 0 representa un vértice del árbol. El cliente inicial corresponde a la raíz del árbol. Los hijos de cualquier cliente son aquellos que interrumpen su servicio. Finalmente cada vértice queda “marcado” por dos cantidades positivas:

1. El servicio que requiere el cliente (tamaño del salto).
2. El servicio realizado para su padre hasta el momento en que interrumpe.

La segunda marca se encuentra definida para todo vértice excepto la raíz. Así las cosas, pensamos en la primera marca como un segmento de recta vertical de longitud el tamaño del salto, el cual se divide en subintervalos correspondientes a los periodos de servicio ininterrumpido. Cada punto de la subdivisión corresponde entonces a exactamente un hijo del cliente dado (la segunda marca de uno de estos hijos es la distancia entre el punto de subdivisión y el extremo superior del segmento). El número de hijos es el número de puntos de la subdivisión.

Es posible reconstruir así al árbol asociado con una trayectoria de  $(X_t, 0 \leq t \leq T_0)$  bajo la medida de excursiones. Observemos que las longitudes de los distintos segmentos son i.i.d. con distribución común  $\Pi(dx)/\Pi(\mathbb{R}_+)$ , y que dado un segmento los puntos que lo subdividen se distribuyen de acuerdo a un proceso de Poisson puntual de intensidad  $\frac{\Pi(\mathbb{R}_+)}{-\beta} dx$ .

## Variación no acotada

En el caso más general consideramos un proceso de Lévy  $X$  espectralmente positivo sin parte gaussiana cuyo exponente de Laplace define un mecanismo de ramificación  $\psi$  de la forma:

$$\psi(\lambda) = \beta \lambda + \int_{(0,+\infty)} (e^{-\lambda x} - 1 + \lambda x) \Pi(dx),$$

con  $\beta \geq 0$  y medida de Lévy  $\Pi$  que satisface  $\int (x \wedge x^2) \Pi(dx) < +\infty$ .

Las interpretaciones permanecen válidas. Cada  $s \in \mathcal{S} = \{s > 0 : \Delta X_s > 0\}$  lo podemos interpretar como la llegada de un cliente que requiere un servicio  $\Delta X_s$ . La diferencia es que ahora los servicios reclamados al servidor en intervalos de tiempo finito son infinitos c.s. por lo que la tasa de servicio debería ser infinita.

Introducimos el análogo del proceso de altura aplicando las consideraciones de la sección 3.3. Para  $t > 0$ , recordemos nuevamente el proceso retornado en el tiempo

$$\widehat{X}_s^{(t)} = X_t - X_{(t-s)-} \quad \text{para } 0 \leq s \leq t.$$

Entonces  $\widehat{X}^{(t)}$  tiene la misma ley que  $X$  hasta el tiempo  $t$ . Hacemos  $\widehat{S}_s^{(t)} = \sup_{[0,s]} \widehat{X}_s^{(t)}$ . Observamos que bajo la inversión de tiempo  $s \mapsto (t-s)$ , los conjuntos

$$\{s \leq t : \widehat{S}_s^{(t)} = \widehat{X}_s^{(t)}\} \quad , \quad \{s \leq t : X_{s-} \leq \inf_{[s,t]} X\}.$$

corresponden y recordando que el proceso  $\bar{X} - X$  es de Markov fuerte para el cual 0 es regular, es posible considerar su tiempo local en 0,  $\Gamma(X) = (\Gamma_t(X), t \geq 0)$ . Así, para todo  $t \geq 0$ , el proceso de tiempo local en 0,  $H = (H_t, t \geq 0)$  definido por  $H_t := \Gamma(\widehat{X}^{(t)})$  es llamado el proceso de altura.

Una condición necesaria y suficiente para la continuidad del proceso del altura  $H := (H_t, t \geq 0)$ , es que el exponente de Laplace  $\psi$  satisfaga

$$\int_1^{+\infty} \frac{du}{\psi(u)} < +\infty,$$

o equivalentemente  $\psi(+\infty) = +\infty$  y  $\psi'(0^+) \geq 0$ . De esta manera será posible codificar con ella un árbol real compacto. En particular el exponente de Laplace de un proceso estable dado por  $\psi(\lambda) = \lambda^\alpha$  para  $\alpha \in (1, 2)$ , satisface la condición.

### 5.3. El Árbol de Lévy $\alpha$ -estable

De lo anterior concluimos que la excursión  $X^{exc}$  codifica la genealogía de un proceso estable, lo cual genera un árbol real aleatorio  $\mathcal{T}_\alpha$  conocido como el árbol de Lévy  $\alpha$ -estable. Para definir  $\mathcal{T}_\alpha$  a partir de la codificación dada por  $X^{exc}$ , se introduce el *proceso de altura* asociado a la excursión. Sea

$$I_s^t = \inf_{r \in [s, t]} X_r^{exc} \quad \text{para } 0 \leq s \leq t \leq 1.$$

Utilizando el resultado de aproximación (3.4) definimos lo siguiente.

**Definición 64.** (Proceso de Altura  $H^{exc}$ )

El proceso de altura asociado a la excursión  $X^{exc}$  se define por:

$$H_t^{exc} = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \int_0^t ds \mathbf{1}_{\{X_s^{exc} < I_s^t + \epsilon\}}, \quad t \in [0, 1],$$

donde el límite existe en probabilidad.

El proceso  $H^{exc} = (H_t^{exc})_{0 \leq t \leq 1}$  es una función continua del tipo excursión, esto es

$$H_0^{exc} = H_1^{exc} = 0, \quad \text{y} \quad H_t^{exc} > 0, \quad \text{para toda } t \in (0, 1).$$

Definimos un árbol real codificado a partir de esta función aleatoria como se vió anteriormente, a partir de la pseudo-métrica  $d_{H^{exc}} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$  dada por:

$$d_{H^{exc}}(s, t) = H_s^{exc} + H_t^{exc} - 2 \inf_{r \in [s, t]} H_r^{exc}, \quad 0 \leq s \leq t \leq 1,$$

definimos una relación de equivalencia sobre  $[0, 1]$  donde  $s \sim t \Leftrightarrow d_{H^{exc}}(s, t) = 0$ .

Recordemos que  $\alpha$  está implícito en la medida de Lévy de  $X^{exc}$ .

**Definición 65.** (Árbol de Lévy  $\alpha$ -Estable)

Si  $p_{H^{exc}, \alpha}$  es la proyección inducida por la relación de equivalencia  $\sim$ , entonces

$$\mathcal{T}_\alpha = p_{H^{exc}, \alpha}([0, 1]) = [0, 1] / \sim,$$

es el Árbol de Lévy  $\alpha$ -estable.

### 5.3.1. Genealogía de $\mathcal{T}_\alpha$ y $X^{exc}$

Si  $a, b \in \mathcal{T}_\alpha$ , recordemos el orden parcial  $a \preceq b$  si  $a \in [[\rho, b]]$ , i.e. si  $a$  es antecesor de  $b$ . Gracias a la interpretación de la genealogía a partir de  $X^{exc}$ , es posible definir un orden parcial análogo sobre sus preimágenes en  $[0, 1]$ .

Definimos un orden  $\preceq$  sobre  $[0, 1]$ , donde para  $s, t \in [0, 1]$  se tiene que

$$s \preceq t \iff s \leq t \text{ y } X_{s^-}^{exc} \leq I_s^t, \quad (X_{0^-}^{exc} = 0),$$

Así, la pareja  $([0, 1], \preceq)$  es un Conjunto Parcialmente Ordenado.

**Definición 66.** (Caracterización del Orden Genealógico en  $[0, 1]$ )

El conjunto ordenado  $([0, 1], \preceq)$  es invariante bajo la proyección canónica  $p_{H^{exc}}$ ,

i.e. para  $a, b \in \mathcal{T}_\alpha$ ,  $a \preceq b \iff \exists s \preceq t \in [0, 1]$  con  $a = p_{H^{exc}}(s)$  y  $b = p_{H^{exc}}(t)$ ,

así el ancestro común inmediato de  $s$  y  $t$  en  $([0, 1], \preceq)$ , denotado  $s \wedge t$ , satisface

$$p_{H^{exc}}(s \wedge t) = a \wedge b \iff s \wedge t = \sup \{r \in ([0, 1], \preceq) : r \preceq s, r \preceq t\}.$$

La “multiplicidad” de un vértice sobre  $\mathcal{T}_\alpha$ , es el número de componentes conexas en las que se separa  $\mathcal{T}_\alpha$  al retirar dicho vértice. Debido a [5, Teorema 4.6] se sabe que la multiplicidad  $\mathbf{m}(u)$  de cada vértice  $u \in \mathcal{T}_\alpha$  pertenece a  $\{1, 2, 3, \dots, +\infty\}$ , así las cosas nos referimos a  $u$  como

- *Raíz*: si  $u = \rho$ .
- *Hoja*: si  $\mathbf{m}(u) = 1$  y  $u \neq \rho$ .
- *Punto de Corte*: si  $\mathbf{m}(u) = 2$ .
- *Punto de Ramificación*: si  $\mathbf{m}(u) \geq 3$ .

Más aún, existe una correspondencia biyectiva entre los puntos de ramificación de  $\mathcal{T}_\alpha$  y los saltos  $\Delta$  del proceso  $X^{exc}$ . De manera más precisa,

$$u \text{ es punto de ramificación} \iff \exists! s_0 \in [0, 1] \text{ tal que } p_{H^{exc}}(s_0) = u \text{ y } \Delta_{s_0} > 0.$$

Intuitivamente el salto  $\Delta_{s_0}$  de un punto de ramificación, corresponde al número de hijos o “ancho” de  $p_{H^{exc}}(s_0)$ . Si  $s, t \in [0, 1]$  y  $s \preceq t$ , establecemos

$$x_s^t = I_s^t - X_{s^-}^{exc} \in [0, \Delta_s].$$

Así,  $x_s^t$  denota la posición del ancestro de  $p_{H^{exc}}(t)$  de entre los  $\Delta_s$  “hijos” de  $p_{H^{exc}}(s)$ .

**Notación  $\pi$ .** En lo que resta de esta obra, escribiremos  $\pi(t) = p_{H^{exc}}(t)$  para  $t \in [0, 1]$ , cuando hablemos sobre la proyección que origina un árbol de Lévy.



# Capítulo 6

## Árboles Cíclicos

La familia de árboles cíclicos estables  $(\mathcal{L}_\alpha)_{1 < \alpha < 2}$ , al igual que los árboles de Lévy  $(\mathcal{T}_\alpha)_{1 < \alpha < 2}$ , son espacios métricos, compactos y conexos (*continuos*), de entre los cuáles los árboles de Lévy poseen estructura de árbol real. La construcción de un árbol cíclico puede realizarse reemplazando cada punto de ramificación del árbol real por un ciclo u aro de perímetro proporcional al “ancho” del punto ramificante, donde el “ancho” del ciclo depende del número de vértices vecinos al punto de ramificación.

Se define lo que es un árbol cíclico discreto y su relación con los árboles finitos ordenados con raíz. Posteriormente definimos al árbol cíclico estable como límite de gráficas aleatorias discretas y a partir de la excursión normalizada estable.

### 6.1. Árbol Cíclico Discreto

Recordemos la definición de arco dada al inicio del capítulo 4. Denotamos por  $\mathbb{S}_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_2 = 1/\pi\}$  al círculo de perímetro unitario sobre  $\mathbb{R}^2$ . Un ciclo es cualquier espacio homeomorfo a  $\mathbb{S}^1$  o alternativamente, es la unión de dos arcos que únicamente se intersectan en sus puntos extremos; esta última caracterización indica que los ciclos son continuos que solo se desconectan al retirar mínimo dos puntos, lo cual permite definir a los ciclos como espacios cociente ya que  $\mathbb{S}^1$  es homeomorfo a un espacio cociente generado por una relación de equivalencia sobre  $[0, 1]$ , i.e.

$$\mathbb{S}^1 \cong [0, 1] / \sim$$

donde para  $s, t \in [0, 1]$  tendremos que  $s \sim t$  si y sólo si  $s = t$  ó  $s \neq t$  con  $s, t \in \{0, 1\}$ .

Daremos la construcción de un árbol cíclico discreto orientado a partir del conjunto de etiquetas  $\mathcal{U}$  con el que se definió a los árboles finitos ordenados con raíz. Utilizaremos la misma notación que en el capítulo 4 para denotar las relaciones genealógicas.

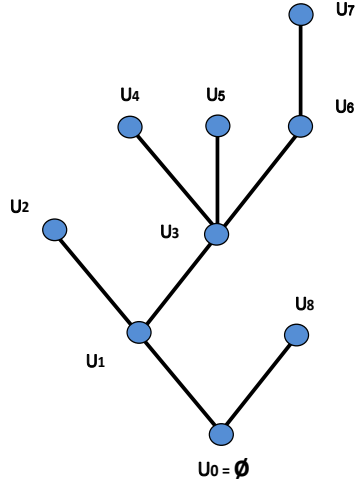


Figura 6.1: Árbol plano  $\mathbf{t}$ .

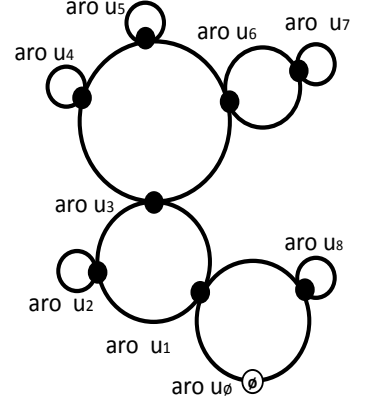


Figura 6.2: Árbol cíclico  $\text{aro}(\mathbf{t})$ .

Considérese un árbol plano  $\mathbf{t}$ . A cada vértice  $u \in \mathbf{t}$  le corresponde una cantidad  $u^\circ$  que llamaremos el “grado” de  $u$  en  $\mathbf{t}$  y tal que

$$u^\circ = \# \text{vértices adyacentes a } u \text{ en } \mathbf{t} = k_u(\mathbf{t}) + 1 .$$

No es difícil convencerse de que el conjunto de grados de los vértices de un árbol plano con el orden léxicográfico, caracterizan al árbol.

Un ciclo es de grado  $n \geq 1$ , si es isométrico a  $n \mathbb{S}^1$  i.e. si tiene perímetro  $n$ . En particular un ciclo discreto es de grado  $n$  si está conformado por  $n - 1$  vértices.

A cada vértice  $u \in \mathbf{t}$  le asociamos un ciclo discreto denotado por  $\text{aro}(u)$  de grado  $u^\circ$

$$\text{i.e. } u^\circ = \text{long}(\text{aro}(u)) = \pi \text{diam}(\text{aro}(u)) .$$

Esto último ocurre si y solo si siempre que posicionamos sobre  $\text{aro}(u)$  de manera equidistante  $u^\circ$  puntos, la porción de arco entre vértices adyacentes es unitaria.

Sean  $u_0 = \emptyset, u_1, \dots, u_{\#(\mathbf{t})-1}$  las etiquetas de los elementos de  $\mathbf{t} \subset \mathcal{U}$  en orden lexicográfico. Para cada  $i = 0, 1, 2, \dots, \#(\mathbf{t}) - 1$ , hacemos  $\text{aro}_i = \text{aro}(u_i)$  y orientamos el ciclo discreto estableciendo que  $\text{aro}_i = \{u \in \mathbf{t} : u_i = \varphi(u)\} \cup \{u_i\}$ . En otras palabras, hemos etiquetado los  $u_i^\circ$  vértices de  $\text{aro}_i$  con la etiqueta  $u_i$  y la de sus hijos sobre el árbol  $\mathbf{t}$ , de manera que el ciclo explorado conforme a las manecillas del reloj a partir de  $u_i \in \text{aro}_i$  visita a sus hijos de menor a mayor con respecto a

( $\leq$ ) y entonces podemos escribir

$$aro(\mathbf{t}) = \bigcup_{i=1}^{\#(\mathbf{t})-1} aro_i, \quad aro_i \cap aro_j \neq \emptyset \text{ si } u_i = \varphi(u_j) \text{ ó } u_j = \varphi(u_i). \quad (6.1)$$

La aplicación  $\mathbf{t} \mapsto aro(\mathbf{t})$  es tal que como conjunto de etiquetas,  $\mathbf{t}$  y  $aro(\mathbf{t})$  son la misma colección, de manera que esta transformación no modifica la interpretación de la genealogía; sin embargo, difieren en que los ciclos contenidos en  $aro(\mathbf{t})$  permiten la visita entre hermanos adyacentes en una unidad de tiempo considerando la distancia de gráfica. El árbol cíclico discreto  $aro(\mathbf{t})$  queda entonces caracterizado por la siguiente definición equivalente a (6.1).

**Definición 67.** (Árbol Cíclico Discreto)

Un árbol cíclico discreto es un subconjunto finito  $aro(\mathbf{t}) \subset \mathcal{U}$ , tal que:

- (i)  $aro(\emptyset) \subset aro(\mathbf{t})$ .
- (ii) Si  $aro(u) \subset aro(\mathbf{t}) \setminus \{\emptyset\}$  entonces también  $aro(\varphi(u)) \subset aro(\mathbf{t})$ .
- (iii) Para todo  $u \in aro(\mathbf{t})$  el grado  $u^\circ$  del ciclo  $aro(u)$  es tal que  $\forall i \in \mathbb{N}$ 

$$aro(u^i) \subset aro(\mathbf{t}) \text{ si y solo si } 1 \leq i \leq u^\circ - 1.$$

De la misma manera que con los árboles finitos con raíz, consideramos visualmente al árbol cíclico discreto con sus ciclos completos de manera análoga a como se considera al árbol plano; esto formalmente define un árbol cíclico continuo.

La definición de árbol ciclo discreto es dual a la de un árbol finito ordenado con raíz puesto que es posible traducir conceptos, teoremas y estructuras utilizando las relaciones de orden lexicográfico ( $\leq$ ) y genealogía ( $\preceq$ ) sobre la colección de ciclos orientados. También dualizamos el uso del número de hijos de un vértice con el del grado del ciclo que define. Con esto podemos establecer los mismos resultados tanto para árboles cíclicos como para árboles planos, concernientes a las estructuras y procesos generados a partir de estos órdenes. Específicamente tendremos que  $aro(u) \leq aro(v)$  si y solo si  $u \leq v$  y  $aro(u) \preceq aro(v)$  si y solo si  $u \preceq v$ .

## 6.2. Árboles Cíclicos Estables como Límites de Árboles Cíclicos Discretos

Fijamos  $\alpha \in (1, 2)$  y denotamos por  $\theta_n$  para cada  $n \in \mathbb{N}$  al árbol  $\mu$ -Galton-Watson condicionado a tener  $n$  vértices, cuya distribución de hijos  $\mu$  es crítica y satisface:

$$\mu([k, \infty)) \sim \frac{1}{k^\alpha} \cdot \frac{1}{|\Gamma(1 - \alpha)|}, \text{ cuando } k \rightarrow \infty.$$

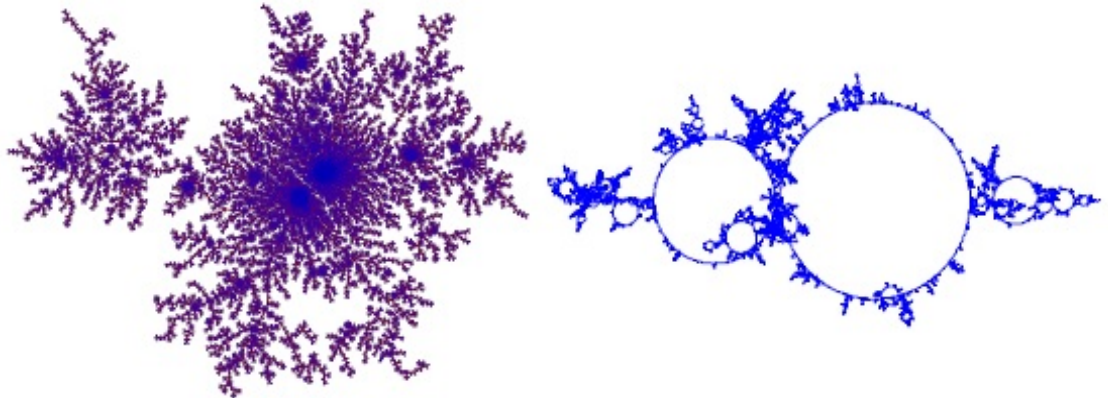


Figura 6.3: Árbol de Lévy estable  $\mathcal{T}_{1,1}$  y su árbol cíclico estable asociado  $\mathcal{L}_{1,1}$ . [6]

El subconjunto aleatorio de  $\mathcal{U}$  definido por  $aro(\theta_n) = \bigcup_{u \in \theta_n} aro(u)$ , es el árbol cíclico asociado a  $\theta_n$ . Entonces, el árbol cíclico  $\alpha$ -estable  $\mathcal{L}_\alpha$ , es límite en distribución, bajo la topología de Gromov-Hausdorff, de los árboles cíclicos  $aro(\theta_n)$  reescalados,

$$i.e. \quad n^{-\frac{1}{\alpha}} \cdot aro(\theta_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathfrak{D}} \mathcal{L}_\alpha,$$

donde el producto  $n^{-\frac{1}{\alpha}} \cdot aro(\theta_n)$  se refiere al espacio métrico obtenido al multiplicar las distancias del árbol cíclico con la distancia de gráfica por la constante  $n^{-\frac{1}{\alpha}} > 0$ .

Parece natural tratar de definir  $\mathcal{L}_\alpha$  directamente de  $\mathcal{T}_\alpha$  llevando a cabo un proceso parecido al del contexto discreto. Sin embargo, esta construcción no es directa ya que la colección numerable de aros del árbol cíclico  $\mathcal{L}_\alpha$  no forma un espacio métrico compacto: es necesario tomar su cerradura. Más aún, dos ciclos distintos de  $\mathcal{L}_\alpha$  nunca comparten un punto en común.

Para sobreponernos a éstas dificultades, se define  $\mathcal{L}_\alpha$  utilizando el *proceso de excursión normalizado*  $X^{exc,(\alpha)}$  de un proceso de Lévy  $\alpha$ -estable espectralmente positivo  $X$ . Esto no es de extrañarse, ya que sabemos que este proceso de excursión, de igual manera codifica al árbol de Lévy  $\mathcal{T}_\alpha$ .

### 6.3. Construcción de los Árboles Cíclicos Estables

Este capítulo será devoto a la construcción de los árboles cíclicos  $\alpha$ -estables utilizando la excursión normalizada de un proceso de Lévy  $\alpha$ -estable y sus propiedades.

Como mencionabamos, es posible pensar que un árbol cíclico  $\mathcal{L}_\alpha$  se obtiene a partir de un árbol real  $\mathcal{T}_\alpha$ , reemplazando cada *punto de ramificación* de anchura  $\Delta$ , por un ciclo de perímetro  $\Delta$  con orientación que preserva la genealogía. Posteriormente pegamos los ciclos a lo largo de la estructura de  $\mathcal{T}_\alpha$  de manera similar al caso discreto. Nuevamente elegimos  $\alpha \in (1, 2)$  fijo y éste queda implícito en el proceso  $\mathbf{X}^{exc}$ .

### 6.3.1. Ciclos Métricos

Para  $t \in [0, 1]$  definimos la pseudo-métrica  $\delta_t : [0, \Delta_t] \rightarrow [0, \infty)$ , dada por:

$$\delta_t(a, b) = \min\{|a - b|, \Delta_t - |a - b|\}, \quad \text{para } a, b \in [0, \Delta_t].$$

Notamos que si  $\Delta_t > 0$ ,  $([0, \Delta_t], \delta_t)$  es un espacio pseudométrico. Consideramos un espacio cociente a partir de  $[0, \Delta_t]$  en el cual identificamos los puntos extremos del intervalo y los pegamos, obteniendo un ciclo orientado naturalmente por el intervalo.

Formalmente, si definimos una relación de equivalencia ( $\sim$ ) tal que para  $a, b \in [0, \Delta_t]$ :

$$a \sim b \iff [0, \Delta_t] \setminus \{a, b\} \text{ es conexo } \text{ ó } a = b,$$

entonces la proyección canónica definida por:

$$q : ([0, \Delta_t], d_2) \rightarrow ([0, \Delta_t], d_2) / \sim,$$

donde  $d_2$  es la métrica usual de  $\mathbb{R}$ , es una función continua, cerrada y sobreyectiva. Por simplicidad denotamos al espacio cociente anterior como

$$([0, \Delta_t], d_2) / \sim := (aro(t), \delta_t),$$

sobre el cual se satisface que:  $\delta_t$  es una métrica y que  $aro(t)$  es isométrico a un ciclo de longitud  $\Delta_t$ . Intuitivamente, es posible asociar el ciclo de longitud  $\Delta_t$  con el punto de ramificación  $t$  y con el elemento que determina sobre el árbol  $\pi(t)$ .

### 6.3.2. Ensamblando los Ciclos Métricos

Nuestro objetivo es definir al árbol cíclico  $\mathcal{L}_\alpha$  como un espacio cociente sobre  $[0, 1]$  de manera análoga a la de un árbol de Lévy, definiendo a partir de los ciclos métricos una pseudométrica que involucra la totalidad del árbol cíclico con genealogía descrita por el proceso de excursión  $\mathbf{X}^{exc}$ .

Definimos un suborden “ $\prec$ ” para  $s, t \in [0, 1]$  dado por:  $s \prec t \iff s \preceq t$  y  $s \neq t$ , el cual *no corresponde al orden genealógico estricto* ya que puede ocurrir  $\pi(s) = \pi(t)$ . Sea  $s \preceq t$ . Recordamos que  $x_s^t := I_s^t - X_s^{exc} \geq 0$  se interpreta como la “posición” del ancestro de  $\pi(t)$  de entre los  $\Delta_s$  hijos de  $\pi(s)$ , o bien, llanamente  $x_s^t \in aro(s)$ . Establecemos lo siguiente:

- Para  $r$  con  $s \prec r \preceq t$ , tenemos que para  $\mathbf{x}_r^t \in [0, \Delta_r]$

$$\delta_r(0, \mathbf{x}_s^t) = \begin{array}{l} \text{“ Longitud de la porción de arco que} \\ \text{va de } s \text{ a } t \text{ sobre el ciclo } \textit{aro}(r) \text{”} \end{array} = \min \{ \mathbf{x}_r^t, \Delta_r - \mathbf{x}_r^t \}.$$

- Para  $s \leq t$ , denotamos por  $d_0(s, t)$  a la suma de las porciones de arco sobre los ciclos  $\textit{aro}(r)$  tal que  $\pi(s) \prec \pi(r) \prec \pi(t)$ , esto es

$$\mathbf{d}_0(s, t) = \sum_{s \prec r \preceq t} \delta_r(0, \mathbf{x}_r^t),$$

siendo los puntos de salto los únicos en aportar positivamente a  $\mathbf{d}_0$ . Así pues,  $\delta_r(0, \mathbf{x}_r^t) = 0$  si  $\Delta_r = 0$ ; más aún,  $\delta_t(0, \mathbf{x}_t^t) = 0$  para toda  $t \geq 0$ , de manera que la suma la podríamos haber tomado sobre  $s \prec r \prec t$ . Finalmente, si ocurre que  $s \not\prec r$  y  $r \not\preceq t$  (p. ej.  $s = t$ ), entonces  $\mathbf{d}_0(s, t) = 0$ .

Finalmente establecemos para todo  $s, t \in [0, 1]$ ,

$$\mathbf{d}(s, t) = \delta_{s \wedge t}(\mathbf{x}_{s \wedge t}^s, \mathbf{x}_{s \wedge t}^t) + \mathbf{d}_0(s \wedge t, s) + \mathbf{d}_0(s \wedge t, t). \quad (6.2)$$

Esta distancia representa respectivamente: la porción de arco sobre el ciclo  $\textit{aro}(s \wedge t)$  de la trayectoria que va hacia  $s$  y  $t$  partiendo de su ancestro común  $s \wedge t$ ; si  $\pi(s \wedge t)$  no es punto de ramificación, la aportación de éste sumando es 0. Los últimos dos sumandos son las distancias que aportan los puntos de ramificación sobre los arcos  $[[\pi(s \wedge t), \pi(s)]]$  y  $[[\pi(s \wedge t), \pi(t)]]$ . En particular tendremos para  $s \preceq t$ ,

$$\mathbf{d}(s, t) = \delta_s(0, \mathbf{x}_s^t) + d_0(s, t) = \sum_{s \preceq r \preceq t} \delta_r(0, \mathbf{x}_r^t). \quad (6.3)$$

**Lema 68.** Sea  $r, s, t \in [0, 1]$ , entonces

(i) *Cota Inferior.* Si  $s \preceq r \preceq t$ , tenemos que  $\mathbf{d}(s, t) \geq \min \{ \mathbf{x}_s^t, \Delta_t - \mathbf{x}_s^t \}$

(ii) *Cota Superior.* Si  $s < t$  tenemos que  $\mathbf{d}(s, t) \leq \mathbf{X}_s^{\text{exc}} + \mathbf{X}_{t^-}^{\text{exc}} - 2I_s^t$ .

*Demostración.* (i) La cota inferior se tiene de la definición de  $\mathbf{d}$ .

(ii) Probamos primero que si  $s \prec t$  entonces  $\mathbf{d}(s, t) \leq \mathbf{X}_t^{\text{exc}} - I_s^t$ . Sean  $r, r' \in [0, 1]$  tal que  $s \preceq r \preceq t$  y  $s \preceq r' \preceq t$ . entonces  $r \preceq r'$  o  $r' \preceq r$ . Se sigue que si ordenamos los saltos de la excursión  $\mathbf{X}^{\text{exc}}$ , digamos,  $s \prec r_0 \prec r_1 \prec \dots \prec r_n = t$ , y utilizando el hecho de que  $I_{r_k}^{r_n} = I_{r_k}^{r_{k+1}}$  para  $0 \leq k \leq n-1$ , tenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \delta_{r_k}(0, \mathbf{x}_{r_k}^{r_n}) &\leq \left( \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{x}_{r_k}^{r_n} \right) + \delta_{r_n}(0, \mathbf{x}_{r_n}^{r_n}) = \sum_{k=0}^{n-1} \left( I_{r_k}^{r_{k+1}} - \mathbf{X}_{r_k^-}^{\text{exc}} \right) + 0 \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left( \mathbf{X}_{r_{k+1}}^{\text{exc}} - \mathbf{X}_{r_k^-}^{\text{exc}} \right) = \mathbf{X}_{r_n}^{\text{exc}} - \mathbf{X}_{r_0^-}^{\text{exc}} \leq \mathbf{X}_{t^-}^{\text{exc}} - I_s^t. \end{aligned}$$

Retomemos la prueba de (ii) y consideremos  $s < t$ . Si  $s \prec t$ , por (6.3) y tomando al salto en  $s$  por separado tendremos que

$$\begin{aligned}
\mathbf{d}(s, t) &= \delta_s(0, \mathbf{x}_s^t) + d_0(s, t) \\
&\leq (\Delta_s - \mathbf{x}_s^t) + (\mathbf{X}_{t^-}^{exc} - I_s^t) \\
&= (\mathbf{X}_{s^-}^{exc} + \Delta_s - I_s^t) + (\mathbf{X}_{t^-}^{exc} - I_s^t) \\
&= \mathbf{X}_s^{exc} + \mathbf{X}_{t^-}^{exc} - 2I_s^t.
\end{aligned}$$

Si  $s \not\prec t$ , entonces para  $s \wedge t < s$  no es difícil verificar que  $I_s^t = I_{s \wedge t}^t$ . Por otro lado,

$$\delta_{s \wedge t}(\mathbf{x}_{s \wedge t}^s, \mathbf{x}_{s \wedge t}^t) \leq \mathbf{x}_{s \wedge t}^s - \mathbf{x}_{s \wedge t}^t = I_{s \wedge t}^s - I_{s \wedge t}^t = I_{s \wedge t}^s - I_s^t.$$

Luego, por la ecuación (6.2) y lo mostrado al inicio de la prueba se obtiene que

$$\mathbf{d}(s, t) \leq I_{s \wedge t}^s - I_s^t + (\mathbf{X}_{t^-}^{exc} - I_{s \wedge t}^t) + (\mathbf{X}_{s^-}^{exc} - I_{s \wedge t}^s) = \mathbf{X}_s^{exc} + \mathbf{X}_{t^-}^{exc} - 2I_s^t.$$

Con esto finalizamos la prueba.  $\square$

Finalmente definimos a  $\mathbf{d}$  como una métrica sobre la totalidad del árbol cíclico.

**Proposición 69.**

*Casi seguramente, la función  $\mathbf{d} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+$  es una pseudo-métrica.*

*Demostración.* Para todo  $s, t \in [0, 1]$ , tenemos que por la cota superior de  $\mathbf{d}$ ,

$$\mathbf{d}(s, t) \leq 2 \sup_{[0,1]} \mathbf{X}^{exc} < \infty.$$

Por su definición como la distancia mínima entre dos individuos sobre el árbol, obtenida de la suma de arcos que minimizan la distancia sobre cada ciclo, tendremos que la función  $\mathbf{d}$  satisface la desigualdad triangular. Sean  $r, s, t \in [0, 1]$  y excluimos el caso en que  $\pi(r), \pi(s), \pi(t)$  se encuentren en el mismo arco. Consideremos el caso cuando tienen ancestro común, i.e.  $r \wedge s = r \wedge t = s \wedge t = r \wedge s \wedge t$ , en cuyo caso

$$\begin{aligned}
\mathbf{d}(s, t) &= \mathbf{d}(s, t \wedge s) + \mathbf{d}(t \wedge s, t) \\
&\leq \mathbf{d}(s, t \wedge s \wedge r) + \mathbf{d}(t \wedge s \wedge r, t) \\
&< \mathbf{d}(s, t \wedge s \wedge r) + \mathbf{d}(t \wedge s \wedge r, t) + 2\mathbf{d}(t \wedge s \wedge r, r) \\
&= \mathbf{d}(s, r) + \mathbf{d}(r, t).
\end{aligned}$$

o bien, que exactamente uno sea un descendiente estricto del ancestro común a los tres. Hagamos explícito esto último, digamos que  $r \wedge s$  es el descendiente estricto del ancestro común a los tres, esto es,  $r \wedge s \wedge t = r \wedge t = s \wedge t \prec r \wedge s$ . Así las cosas,

$$\begin{aligned}
\mathbf{d}(s, t) &= \mathbf{d}(s, r \wedge s) + \mathbf{d}(r \wedge s, t) \\
&< \mathbf{d}(s, r \wedge s) + \mathbf{d}(r \wedge s, t) + 2\mathbf{d}(r \wedge s, r) \\
&= \mathbf{d}(s, r) + \mathbf{d}(r, t).
\end{aligned}$$

Ahora mostramos que la función  $\mathbf{d}$  es continua. Para este fin, sea  $(s, t) \in [0, 1]^2$  y sean  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  y  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sucesiones de reales en  $[0, 1]$  tales que  $(s_n, t_n) \rightarrow (s, t)$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . Así las cosas por la desigualdad triangular, tenemos que

$$|\mathbf{d}(s, t) - \mathbf{d}(s_n, t_n)| \leq \mathbf{d}(s, s_n) + \mathbf{d}(t, t_n).$$

Por simetría de  $\mathbf{d}$ , es suficiente mostrar que  $\mathbf{d}(s, s_n) \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . Sea  $s_n \uparrow s$  con  $s_n < s$ , entonces por la cota del Lema anterior

$$\mathbf{d}(s_n, s) \leq \mathbf{X}_{s_n}^{exc} + \mathbf{X}_s^{exc} - 2I_{s_n}^s \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbf{X}_{s^-}^{exc} + \mathbf{X}_s^{exc} - 2\mathbf{X}_{s^-}^{exc} = 0.$$

El caso para una sucesión decreciente se prueba de manera similar.  $\square$

Finalmente definimos el árbol cíclico codificado por  $\mathbf{X}^{exc}$ ; consideramos la siguiente relación de equivalencia  $\sim$  para  $s, t \in [0, 1]$ :  $s \sim t \Leftrightarrow \mathbf{d}(s, t) = 0$ .

**Definición 70.** (Árbol Cíclico  $\alpha$ -Estable)

Si  $p_\alpha$  es la proyección inducida por la relación de equivalencia  $\sim$ , entonces

$$\mathcal{L}_\alpha := p_\alpha([0, 1]) = [0, 1]/\sim,$$

es el árbol cíclico aleatorio  $\alpha$ -Estable.

Tendremos que la proyección canónica  $p_\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathcal{L}_\alpha$ , es un cociente natural c.s., por lo que el espacio métrico cociente  $\mathcal{L}_\alpha$  está integrado con topología más fina que hace a  $p_\alpha$  continua c.s. y por ende  $(\mathcal{L}_\alpha, \mathbf{d})$  es un espacio métrico conexo y compacto casi seguramente.

Puede que aún no sea del todo claro por que  $\mathcal{L}_\alpha$  contiene aros. Demos una descripción explícita de uno de ellos. Para  $s \in [0, 1]$  fijo con  $\Delta_s > 0$ , hacemos

$$s_u = \inf\{t \geq s : \mathbf{X}_t^{exc} = \mathbf{X}_s^{exc} - u\}, \quad u \in [0, \Delta_s].$$

Así pues  $s_u$  es el tiempo en el que la excursión, posterior a su salto en  $s$ , visita el valor de la excursión que codifica al “ $u$ ”-ésimo hijo de  $s$ , de manera que la colección

$$p_\alpha(s_u)_{u \in [0, \Delta_s]} \stackrel{iso}{\cong} (aro(s), \delta_s),$$

es decir, la imagen de dicha colección de tiempos es isométrica a un ciclo métrico de longitud  $\Delta_s$  correspondiente al ciclo anclado al punto ramificante  $\pi(s) \in \mathcal{T}_\alpha$ .



# Capítulo 7

## Propiedades de los Árboles Cíclicos Estables

Nuestro objetivo ahora es probar dos resultados que enuncian propiedades de los árboles cíclicos estables. Para esto, daremos previamente algunos resultados concernientes a la excursión normalizada  $X^{exc}$ , los cuales serán nuestra caja de herramientas para estudiar propiedades finas de los árboles cíclicos estables.

Se mostrará que la familia de árboles cíclicos con  $\alpha \in (1, 2)$  definen una “interpolación” entre el círculo de perímetro unitario  $\mathbb{S}_1$  y el árbol 2-estable  $\mathcal{T}_2$  –salvo factor multiplicativo– mejor conocido como Continuum Random Tree ó Árbol Browniano. La interpolación fractal puede entenderse en términos de la compresión fractal, que es similar a cuando comprimimos una fotografía digital, en la que dependiendo de la compresión, la calidad de información que nos transmite la imagen varía.

También mostraremos que los árboles cíclicos  $\alpha$ -estables poseen una estructura fractal con dimensión de Hausdorff  $\alpha$ .

### 7.1. Más de Procesos Estables

#### 7.1.1. Descensos

Sea  $Y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función càdlàg. Para  $s, t \in \mathbb{R}$ , escribimos

$$s \preceq_Y t \Leftrightarrow s \leq t, \text{ y } Y_{s-} \leq \inf_{[s,t]} Y, \quad s \prec_Y t \Leftrightarrow s \preceq_Y t, \text{ y } s \neq t.$$

Con lo anterior, es posible establecer

$$x_s^t(Y) := \inf_{[s,t]} Y - Y_{s-} \in [0, \Delta_s], \quad \text{y} \quad u_s^t(Y) = \frac{x_s^t(Y)}{\Delta_s} \in [0, 1].$$

**Definición 71. (Descenso)**

Para  $t \in \mathbb{R}$ , el subconjunto de  $[0, \infty) \times [0, 1]$  conformado por la colección

$$\{ (x_s^t(\mathbf{Y}), u_s^t(\mathbf{Y})) : s \preceq t \},$$

es llamado el descenso de  $t$  en  $\mathbf{Y}$ .

El concepto de descenso es sumamente importante en la definición de distancia sobre el árbol cíclico como pudimos apreciar durante la construcción de los ciclos métricos. Podemos pensar en el descenso como la formalización de la visita entre hermanos indicando tanto la posición como la porción recorrida del ciclo orientado.

Por simplicidad escribimos  $x_s^t, u_s^t$  para denotar a  $x_s^t(\mathbf{Y})$  y  $u_s^t(\mathbf{Y})$  respectivamente cuando no haya ambigüedad en la función que se utiliza. Describimos a continuación la ley de descensos de un proceso de Lévy  $\alpha$ -estable utilizando la teoría de excursiones.

Denotamos por  $\bar{X}_t = \sup_{[0,t]} X$  al proceso de supremos de  $X$ . El proceso  $\bar{X} - X$  es de Markov fuerte para el cual 0 es regular. Sea  $(L_t, t \geq 0)$  el tiempo local de  $\bar{X} - X$  en 0, donde  $\bar{X}$  tiene exponente característico  $\mathbb{E} [\exp(-\lambda \bar{X}_{L^{-1}(t)})] = \exp(-t \lambda^{\alpha-1})$ . Notemos que por [1] Capítulo VIII, Lema 1, el inverso del tiempo local  $L^{-1}$  es un subordinador estable de índice  $1 - 1/\alpha$ . Para simplificar la notación definimos

$$x_s = \bar{X}_s - \bar{X}_{s-}, \quad u_s = \frac{\bar{X}_s - \bar{X}_{s-}}{\bar{X}_s - X_{s-}}, \quad \forall s \geq 0 \text{ tal que } \bar{X}_s > \bar{X}_{s-}.$$

Ahora bien, para describir la ley de descensos desde un punto fijo en un proceso  $\alpha$ -estable, es necesario introducir un proceso estable a *doble-cara*, esto es, definido sobre  $\mathbb{R}$ . Sean  $X^1$  y  $X^2$  dos procesos estables independientes sobre  $\mathbb{R}_+$ , definimos el proceso estable a *doble-cara*  $X$  como:

$$X_t = X_t^1 \cdot \mathbf{1}_{\{t \geq 0\}} - X_{(-t)-}^2 \cdot \mathbf{1}_{\{t < 0\}}.$$

**Proposición 72.**

Sea  $X := (X_t, t \in \mathbb{R})$  un proceso  $\alpha$ -estable espectralmente positivo a *doble-cara*.

(i) Se tiene la siguiente igualdad en distribución,

$$\{ (-s, x_s^0(X), u_s^0(X)) : s \preceq 0 \} \stackrel{(d)}{=} \{ (s, x_s, u_s) : s \geq 0 \text{ con } \bar{X}_s > \bar{X}_{s-} \}.$$

(ii) La medida puntual

$$\sum_{\bar{X}_s > \bar{X}_{s-}} \delta_{(L_s, \frac{x_s}{u_s}, u_s)},$$

es una medida de Poisson puntual de intensidad  $dl \cdot x \Pi(dx) \cdot \mathbf{1}_{[0,1]}(r) dr$ .

*Demostración.* (i) Es conocido que el proceso dual  $\hat{\mathbf{X}}$  definido por  $\hat{\mathbf{X}}_s = -\mathbf{X}_{(-s)-}$  para  $s \geq 0$ , tiene la misma distribución que  $\mathbf{X}$  y que

$$(\mathbf{x}_{-s}^0(\mathbf{X}), \mathbf{u}_{-s}^0(\mathbf{X})) = \left( \bar{\hat{\mathbf{X}}}_s - \bar{\hat{\mathbf{X}}}_s, \frac{\bar{\hat{\mathbf{X}}}_s - \bar{\hat{\mathbf{X}}}_{s-}}{\bar{\hat{\mathbf{X}}}_s - \bar{\hat{\mathbf{X}}}_{s-}} \right), \quad \forall s \geq 0 \text{ con } -s \leq 0,$$

o de manera equivalente la igualdad es válida si  $\bar{\hat{\mathbf{X}}}_s > \bar{\hat{\mathbf{X}}}_{s-}$ .

(ii) Enumeramos los intervalos de excursión  $(g_j, d_j)_{j \in J}$  del proceso  $\bar{\mathbf{X}} - \mathbf{X}$  por arriba del 0. De [2] Corolario 1, es conocido que la medida puntual

$$\sum_{j \in J} \delta_{(L_{g_j}, \Delta \mathbf{X}_{d_j}, \Delta \bar{\mathbf{X}}_{d_j})},$$

es de Poisson de intensidad  $dl \cdot \mathbf{x} \Pi(d\mathbf{x}) \cdot \mathbf{1}_{[0, \mathbf{x}]}(r) dr$ . Se concluye el resultado.  $\square$

**Corolario 73.**

Sea  $\mathbf{a} > 0$  fijo y  $(\mathbf{X}_t)_{t \in \mathbb{R}}$  un proceso  $\alpha$ -estable a doble-cara. Para  $\epsilon > 0$  hacemos

$$\mathbf{A}_\epsilon := \bigcup_{s \in [-\epsilon, 0], s \leq 0} \left\{ \mathbf{x}_s(\mathbf{X}) \geq \epsilon^{\frac{1}{\alpha+\mathbf{a}}} \text{ y } \Delta \mathbf{X}_s - \mathbf{x}_s^0(\mathbf{X}) \geq \epsilon^{\frac{1}{\alpha+\mathbf{a}}} \right\}.$$

Entonces existen constantes  $\mathbf{C}, \gamma > 0$  que dependen de  $\alpha$  y  $\mathbf{a}$  tal que  $\mathbb{P}(\mathbf{A}_\epsilon) \leq \mathbf{C} \epsilon^\gamma$ .

*Demostración.* Sea  $\epsilon > 0$  y consideramos el evento

$$\mathbf{B}_\epsilon := \bigcup_{s \in [0, \epsilon]} \left\{ \mathbf{X}_s \geq \epsilon^{\frac{1}{\alpha+\mathbf{a}}} \text{ y } \Delta \mathbf{X}_s - \mathbf{x}_s \geq \epsilon^{\frac{1}{\alpha+\mathbf{a}}} \right\}.$$

En particular, será necesario observar que

$$\mathbf{B}_\epsilon^c := \mathbb{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \setminus \mathbf{B}_\epsilon := \bigcap_{s \in [0, \epsilon]} \left\{ \mathbf{X}_s < \epsilon^{\frac{1}{\alpha+\mathbf{a}}} \right\} \cup \left\{ \Delta \mathbf{X}_s - \mathbf{x}_s < \epsilon^{\frac{1}{\alpha+\mathbf{a}}} \right\}.$$

De la igualdad en distribución dada en la Proposición 72 (i), es suficiente probar la existencia de dos constantes  $\mathbf{C}, \gamma > 0$  tal que  $\mathbb{P}(\mathbb{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \setminus \mathbf{B}_\epsilon) \leq \mathbf{C} \epsilon^\gamma$ . Por un lado,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\mathbf{B}_\epsilon^c) &\leq \mathbb{P}\left(\mathbf{B}_\epsilon^c, L_\epsilon > \epsilon^{\frac{\mathbf{a}(\alpha-1)}{2}} \epsilon^{\frac{(\alpha-1)}{\alpha}}\right) + \mathbb{P}\left(\mathbf{B}_\epsilon^c, L_\epsilon < \epsilon^{\frac{\mathbf{a}(\alpha-1)}{2}} \epsilon^{\frac{(\alpha-1)}{\alpha}}\right) \\ &\leq \mathbb{P}\left(L_\epsilon \geq \epsilon^{\frac{\mathbf{a}(\alpha-1)}{2}} \epsilon^{\frac{(\alpha-1)}{\alpha}} \mid \mathbf{B}_\epsilon^c\right) + \mathbb{P}\left(L_\epsilon < \epsilon^{\frac{\mathbf{a}(\alpha-1)}{2}} \epsilon^{\frac{(\alpha-1)}{\alpha}}\right). \end{aligned}$$

Por otro lado, de la Proposición 72 (ii) la igualdad  $\{L(t) \geq s\} = \{L^{-1}(s) \leq t\}$  y la ley de  $L^{-1}$ , tenemos que

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \left( L_\epsilon \geq \epsilon^{\frac{a(\alpha-1)}{2}} \epsilon^{\frac{(\alpha-1)}{\alpha}} \mid \mathbf{B}_\epsilon^c \right) \\ &= \exp \left\{ -\epsilon^{\frac{a(\alpha-1)}{2}} \epsilon^{1-\frac{1}{\alpha}} \int_0^1 dr \int_{-\infty}^{+\infty} x \Pi(dx) \mathbf{1}_{\left\{ r x \geq \epsilon^{\frac{1}{\alpha+a}}, x(1-r) \geq \epsilon^{\frac{1}{\alpha+a}} \right\}} \right\} \\ &= \exp \left\{ -\epsilon^{\frac{a(\alpha-1)}{2}} \epsilon^{1-\frac{1}{\alpha}} \cdot C \epsilon^{-a(\alpha-1)} \right\}, \end{aligned}$$

para alguna  $C > 0$ . Además

$$\mathbb{P} \left( L_\epsilon < \epsilon^{\frac{a(\alpha-1)}{2}} \right) \leq \mathbb{P} \left( L_1^{-1} > \frac{\epsilon}{\left( \epsilon^{\frac{a(\alpha-1)}{2}} \epsilon^{1-\frac{1}{\alpha}} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}} \right) \leq \mathbb{P} \left( L_1^{-1} > \epsilon^{-a \frac{\alpha}{2}} \right).$$

La conclusión se sigue ya que  $\mathbb{P}(L_1^{-1} > u) = \mathcal{O} \left( u^{-(1-\frac{1}{\alpha})} \right)$  cuando  $u \rightarrow \infty$ .  $\square$

Concluimos con un lema que será de gran utilidad y nos da información sobre el linaje de un punto fijo sobre el árbol.

**Lema 74.** *Casi seguramente, para toda  $t \geq 0$  tenemos*

$$X_t - \inf_{[0,t]} X = \sum_{s \preceq t, s \geq 0} x_s^t(X).$$

*Demostración.* Claramente ambos términos son funciones càdlàg. Basta probar que la igualdad es válida para toda  $t \geq 0$  fija. Recordemos que en la interpretación por un proceso de colas esta cantidad es la carga total del sistema al tiempo  $t$ , lo cual es la suma de servicios faltantes de los clientes en la cola al tiempo  $t$ . En el contexto de un árbol cíclico la carga total es la suma de las geodésicas que pasan por el ciclo asociado a un cliente desde el primero al último que exista, lo cual ocurre en cada salto del proceso  $X$ . Finalmente el supremo de  $X$  al tiempo  $t > 0$ , se distribuye como la carga total y puede verse como suma de sus saltos debido a que el proceso de escalera en ascenso asociado es un subordinador sin deriva.  $\square$

Análogamente tendremos el siguiente resultado para la excursión normalizada.

**Corolario 75.** *Casi seguramente, para toda  $t \in [0, 1]$  tenemos*

$$X_t^{exc} = \sum_{s \preceq t, s \geq 0} x_s^t(X^{exc}).$$

*Demostración.* Esto se sigue del lema y la construcción de  $X^{exc}$  como la excursión normalizada por arriba del ínfimo de  $X$  tocando por ambos lados de 1.  $\square$

Particularmente este último Corolario implica que c.s. para todo  $t \in [0, 1]$ ,

$$X_t^{exc} = \sum_{s \preceq t, s \geq 0} \Delta X_s^{exc} \cdot u_s^t(X^{exc}).$$

De manera similar, por (6.3), es posible escribir una igualdad similar válida c.s. para todo  $t \in [0, 1]$ :

$$d(0, t) = \sum_{0 \preceq s \preceq t} \Delta X_s^{exc} \cdot \min\{u_s^t(X^{exc}), 1 - u_s^t(X^{exc})\}.$$

### 7.1.2. Comportamiento de $X^{exc, \alpha}$ cuando $\alpha \downarrow 1$ y $\alpha \uparrow 2$

Estudiamos ahora el comportamiento de  $X^{exc}$  conforme  $\alpha \downarrow 1$  y  $\alpha \uparrow 2$ . Utilizamos el superfijo  $(\alpha)$  y escribimos  $X^{(\alpha)}$ ,  $X^{br, (\alpha)}$ ,  $X^{exc, (\alpha)}$ , para denotar al proceso  $\alpha$ -estable espectralmente positivo, su puente y su excursión normalizada respectivamente. Así también  $\Pi^{(\alpha)}$  y  $\eta^{(\alpha)}$  denotan respectivamente la medida de Lévy y la medida de excursión por arriba del ínfimo de  $X^{(\alpha)}$ .

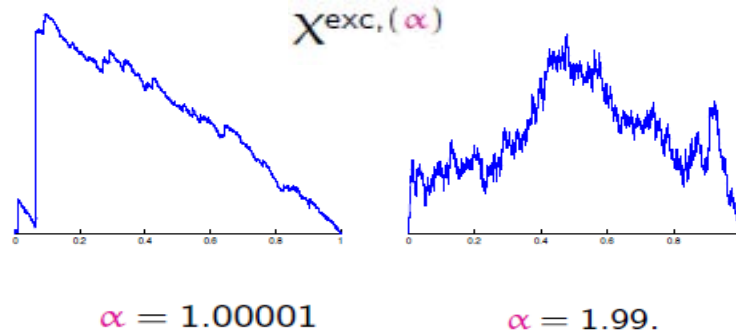


Figura 7.1: Simulación de una trayectoria de acuerdo al índice de estabilidad. [6]

**Caso límite  $\alpha \uparrow 2$ .** Mostraremos que efectivamente  $X^{exc, (\alpha)}$  converge, conforme  $\alpha \uparrow 2$ , hacia un múltiplo de la excursión Browniana normalizada, el cual denotamos por  $\mathbf{e}$ . Este resultado es estándar y no es de sorprendernos, ya que el proceso de Lévy  $\alpha = 2$  estable es simplemente  $\sqrt{2}$  el movimiento Browniano.

**Proposición 76.**

Tenemos la siguiente convergencia en distribución

$$\mathbf{X}^{exc,(\alpha)} \xrightarrow[\alpha \uparrow 2]{\mathfrak{D}} \sqrt{2} \mathbf{e},$$

para la topología de la convergencia uniforme sobre compactos de  $\mathbb{R}_+$ .

*Demostración.* Establecemos primero una versión sin el condicionamiento a tener longitud unitaria, i.e.

$$\mathbf{X}^{(\alpha)} \xrightarrow[\alpha \uparrow 2]{\mathfrak{D}} \sqrt{2} B, \quad (7.1)$$

donde  $B = (B_t, t \geq 0)$  es un movimiento Browniano estándar y la convergencia se satisface en el espacio de Skorohod  $\mathbb{D}([0, 1], \mathbb{R})$  con la topología de la convergencia uniforme. Finalmente debido a las trayectorias c.s. continuas de  $B$ , basta checar que las siguientes condiciones se satisfacen conforme  $\alpha \uparrow 2$ :

(a) Se tiene la convergencia  $\mathbf{X}_0^{(\alpha)} \xrightarrow[\alpha \uparrow 2]{\mathfrak{D}} \sqrt{2} B_0$ .

(b) Para todo  $s \in (0, t)$ , se tiene la convergencia  $\mathbf{X}_t^{(\alpha)} - \mathbf{X}_s^{(\alpha)} \xrightarrow[\alpha \uparrow 2]{\mathfrak{D}} \sqrt{2} B_t - B_s$ .

(c) Para todo  $\delta > 0$ , existen  $\kappa, \epsilon > 0$  tal que para  $0 \leq s \leq t \leq 1$ :

$$2 - \alpha < \kappa, \quad t - s < \kappa \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P} \left( |\mathbf{X}_t^{(\alpha)} - \mathbf{X}_s^{(\alpha)}| \leq \frac{\delta}{2} \right) \geq \epsilon.$$

La condición (a) claramente se satisface. De la propiedad de escalamiento de  $\mathbf{X}^{(\alpha)}$  se tiene la igualdad en distribución

$$\mathbf{X}_t^{(\alpha)} - \mathbf{X}_s^{(\alpha)} \stackrel{(d)}{=} (t - s)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \mathbf{X}_1^{(\alpha)}.$$

Por otro lado, para toda  $\lambda \in \mathbb{R}$ , tenemos que

$$\mathbb{E} \left[ e^{i \lambda \mathbf{X}_1^{(\alpha)}} \right] := e^{(-i \lambda)^\alpha} \xrightarrow[\alpha \uparrow 2]{\mathfrak{D}} e^{-\lambda^2} = \mathbb{E} \left[ e^{i \lambda \sqrt{2} B_1} \right].$$

Con esto hemos probado que la condición (b) se satisface. Este mismo argumento implica la condición (c), estableciendo finalmente la convergencia (7.1).

Así las cosas, el enunciado de la proposición es consecuencia de la construcción de  $\mathbf{X}^{exc,(\alpha)}$  a partir de la excursión de  $\mathbf{X}^{(\alpha)}$  por arriba de su ínfimo tocando ambos lados del tiempo  $t = 1$ . Efectivamente, por el teorema de representación de Skorohod,

podemos suponer que la convergencia (7.1) se satisface c.s. sobre un espacio de probabilidad adecuado. Entonces establecemos

$$g_1^{(\alpha)} = \sup \left\{ s \leq 1 : \mathbf{X}^{(\alpha)} = \inf_{[0,s]} \mathbf{X}^{(\alpha)} \right\} \quad \text{y} \quad d_1^{(\alpha)} = \sup \left\{ s > 1 : \mathbf{X}^{(\alpha)} = \inf_{[0,s]} \mathbf{X}^{(\alpha)} \right\}.$$

De manera similar definimos  $g_1^{(2)}$ ,  $d_1^{(2)}$  cuando sustituimos el proceso  $\mathbf{X}^{(\alpha)}$  por  $\sqrt{2} B$ . Ahora bien, ya que los mínimos locales del movimiento Browniano son diferentes casi seguramente, tendremos que  $g_1^{(\alpha)} \rightarrow g_1^{(2)}$  cuando  $\alpha \uparrow 2$ . Por otro lado, por la propiedad de Markov fuerte aplicado al tiempo de paro  $d_1^{(2)}$ , obtenemos que para toda  $\alpha \in (1, 2]$ ,  $d_1^{(\alpha)}$  no es un mínimo local de  $B$ , de manera que se tiene la convergencia  $d_1^{(\alpha)} \rightarrow d_1^{(2)}$  cuando  $\alpha \uparrow 2$ . Finalmente la convergencia del enunciado se sigue de la normalización del proceso  $\mathbf{X}^{(\alpha)}$  en  $\mathbf{X}^{exc,(\alpha)}$  como se definió anteriormente.  $\square$

**Caso límite  $\alpha \downarrow 1$ .** El comportamiento de la excursión normalizada  $\mathbf{X}^{exc,(\alpha)}$  conforme  $\alpha \downarrow 1$ , es completamente diferente al caso  $\alpha \uparrow 2$ . Heurísticamente veremos la convergencia del proceso  $\mathbf{X}^{exc,(\alpha)}$  hacia una función determinista afín sobre el  $[0, 1]$ , la cual es igual a 1 al tiempo  $t = 0$  e igual a 0 al tiempo  $t = 1$ . Se requiere cierta cautela al formular este enunciado, ya que la función

$$x \mapsto \mathbf{1}_{(0,1]}(x) (1 - x),$$

no es càdlàg, por lo que será necesario un argumento de retorno de tiempo:

**Proposición 77.**

*Tenemos la siguiente convergencia en distribución*

$$\left( \mathbf{X}_{(1-t)^-}^{exc,(\alpha)}, t \in [0, 1] \right) \xrightarrow[\alpha \downarrow 1]{\mathcal{D}} (t \mathbf{1}_{\{t \neq 1\}}, t \in [0, 1]),$$

*en el espacio de Skorohod  $\mathbb{D}([0, 1], \mathbb{R}_+)$ .*

Para probar esta proposición se prueba primero la convergencia de  $\mathbf{X}^{exc,(\alpha)}$  sobre todo intervalo fijo de la forma  $[\epsilon, 1]$  con  $\epsilon \in (0, 1)$  y se estudia el comportamiento cerca del 0, i.e. consideremos el siguiente resultado.

**Lema 78.** *Para todo  $\epsilon \in (0, 1)$ ,*

$$\left( \mathbf{X}_t^{exc,(\alpha)}, t \in [\epsilon, 1] \right) \xrightarrow[\alpha \downarrow 1]{\mathbb{P}} (1 - t, t \in [\epsilon, 1]),$$

*donde la convergencia en probabilidad es bajo la norma uniforme.*

*Demostración del Lema 78.* Siguiendo el espíritu de la prueba de la Proposición 76, establecemos un resultado análogo del proceso  $\alpha$ -estable  $\mathbf{X}^{(\alpha)}$  sin ningún condicionamiento, probando que

$$\mathbf{X}^{(\alpha)} \xrightarrow[\alpha \downarrow 1]{\mathfrak{D}} (-t, t \geq 0) \quad (7.2)$$

donde la convergencia es en distribución bajo la norma uniforme sobre todo subconjunto compacto de  $\mathbb{R}_+$ . Para establecer (7.2) nuevamente utilizamos el criterio de convergencia en [11, Teorema V.19, V.23] y checamos que las condiciones (a), (b), (c) dadas en la Proposición 76 se satisfacen para  $\mathbf{X}^{(\alpha)}$  dando como resultado (7.2). Fijamos  $\varepsilon \in (0, 1/10)$ . Por simplicidad utilizamos la notación de bola cerrada centrada en un punto para denotar al intervalo alrededor de un punto, i.e.  $\bar{B}_b(a) := [a-b, a+b]$  para  $a \in \mathbb{R}$  y  $b > 0$ . También introducimos las funciones  $\ell(s) = 1-s$  y  $\ell_\varepsilon(s) = \ell(s) - \varepsilon$  para  $s \in [0, 1]$ . Para probar este lema, mostramos que para todo  $\varepsilon > 0$  tendremos que

$$\eta^{(\alpha)}(\{\omega_t \in \bar{B}_\varepsilon(\ell(t)), \forall t \in [\varepsilon, 1]\} \mid \zeta = 1) \xrightarrow[\alpha \downarrow 1]{} 1.$$

Por la propiedad de escalamiento de la medida  $\eta^{(\alpha)}$ , basta mostrar que

$$\eta^{(\alpha)}\left(\sup_{t \in [\varepsilon, \zeta]} |\omega_t - \ell(t)| \leq 10\varepsilon \mid \zeta \in \bar{B}_\varepsilon(1)\right) \xrightarrow[\alpha \downarrow 1]{} 1.$$

Para  $t \geq 0$ , denotemos por  $q_t^{(\alpha)}(dx)$  la ley de entrada al tiempo  $t$  bajo  $\eta^{(\alpha)}$ , definida por la relación

$$\eta^{(\alpha)}(f(\omega_t) \mathbb{1}_{(\zeta > t)}) = \int_0^\infty f(x) q_t^{(\alpha)}(dx)$$

para toda función medible  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ . Entonces, usando el hecho que para toda  $t > 0$ , bajo la medida de probabilidad condicional  $\eta^{(\alpha)}(\cdot \mid \zeta > t)$ , el proceso  $(\omega_{t+s})_{s \geq 0}$  es Markoviano con ley de entrada  $q_t^{(\alpha)}(dx)$  y probabilidades de transición de  $\mathbf{X}^{(\alpha)}$  detenidos cuando toca el 0, obtenemos que

$$\begin{aligned} & \eta^{(\alpha)}\left(\sup_{t \in [\varepsilon, \zeta]} |\omega_t - \ell(t)| \leq 10\varepsilon \mid \zeta \in \bar{B}_\varepsilon(1)\right) \\ &= \frac{1}{\eta^{(\alpha)}(\zeta \in \bar{B}_\varepsilon(1))} \int_0^\infty q_\varepsilon^{(\alpha)}(dx) p_x^{(\alpha)}\left(\sup_{t \in [0, \tau]} |\mathbf{X}^{(\alpha)} - \ell_\varepsilon(t)| \leq 10\varepsilon \text{ y } \tau \in \bar{B}_\varepsilon(1 - \varepsilon)\right), \end{aligned} \quad (7.3)$$

donde  $p_x^{(\alpha)}$  denota la distribución del proceso  $\alpha$ -estable  $\mathbf{X}^{(\alpha)}$  que empieza en  $x$  y matado al primer tiempo en que toca el 0 denotado por  $\tau$ . De la convergencia (7.2)



se sigue que para  $\delta \in (0, \epsilon)$  la convergencia

$$p_x^{(\alpha)} \left( \sup_{[0, \tau]} |\mathbf{X}^{(\alpha)} - \ell_\epsilon| \leq 10\epsilon \text{ y } \tau \in \bar{B}_\epsilon(1 - \epsilon) \right) \xrightarrow{\alpha \downarrow 1} 1$$

se da uniformemente en  $x \in \bar{B}_{\epsilon - \delta}(1 - \epsilon)$ . En consecuencia,

$$\liminf_{\alpha \downarrow 1} \frac{\int_0^{+\infty} q_\epsilon^{(\alpha)}(dx) p_x^{(\alpha)} \left( \sup_{[0, \tau]} \|\mathbf{X}^{(\alpha)} - \ell_\epsilon\| \leq 10\epsilon \text{ y } \tau \in \bar{B}_\epsilon(1 - \epsilon) \right)}{\int_0^\infty q_\epsilon^{(\alpha)}(dx) \mathbf{1}_{\bar{B}_{\epsilon - \delta}(1 - \epsilon)}(x)} \geq 1 \quad (7.4)$$

Por otro lado, podemos escribir dado que  $2\delta < \epsilon$

$$\eta^{(\alpha)}(\zeta \in B_{\epsilon - 2\delta}(1)) = \int_0^{+\infty} q_\epsilon^{(\alpha)}(dx) p_x^{(\alpha)}(\tau \in B_{\epsilon - 2\delta}(1 - \epsilon)).$$

La convergencia (7.2) implica entonces que  $g(x, \alpha) := p_x^{(\alpha)}(\tau \in \bar{B}_{\epsilon - 2\delta})$  también se va a 0 conforme  $\alpha \downarrow 1$ , uniformemente para  $x \in \mathbb{R}_+ \setminus \bar{B}(1 - \epsilon)$ . Ya que la masa total  $\int_0^{+\infty} q_\epsilon^{(\alpha)}(dx) = \eta^{(\alpha)}(\zeta > \epsilon)$  es finita, el teorema de convergencia dominada implica que

$$\int_{\mathbb{R}_+ \setminus \bar{B}_{\epsilon - \delta}(1 - \epsilon)} q_\epsilon^{(\alpha)}(dx) g(x, \alpha) \xrightarrow{\alpha \downarrow 1} 0.$$

Finalmente, cuando  $g(x, \alpha)$  está acotado por 1, obtenemos por convergencia dominada y lo anterior que

$$\liminf_{\alpha \downarrow 1} \frac{\int_0^\infty q_x^{(\alpha)}(dx) \mathbf{1}_{\bar{B}_{\epsilon - \delta}(1 - \epsilon)}(x)}{\eta^{(\alpha)}(\zeta \in \bar{B}_{\epsilon - 2\delta}(1))} = \liminf_{\alpha \downarrow 1} \frac{\int_0^\infty q_x^{(\alpha)}(dx) \mathbf{1}_{\bar{B}_{\epsilon - \delta}(1 - \epsilon)}(x)}{\int_0^\infty q_x^{(\alpha)}(dx) g(x, \alpha)} \geq 1. \quad (7.5)$$

Combinando (7.4) y (7.5) con (7.3) es posible deducir

$$\liminf_{\alpha \downarrow 1} \int_0^\infty \eta^{(\alpha)} \left( \sup_{t \in [\epsilon, \zeta]} |\omega_t - \ell(t)| \leq 10\epsilon \mid \zeta \in \bar{B}_\epsilon(1) \right) \geq \frac{\eta^{(\alpha)}(\zeta \in \bar{B}_{\epsilon - 2\delta}(1))}{\eta^{(\alpha)}(\zeta \in \bar{B}_\epsilon(1))}$$

Ya que  $\eta^{(\alpha)}(\zeta > t) = t^{-1/\alpha} / \Gamma(1 - \frac{1}{\alpha})$  por propiedad (iii) en la sección 3.1.1, se sigue que el lado derecho de la desigualdad anterior, converge hacia 1 cuando  $\delta \rightarrow 0$ . Esto completa la prueba.  $\square$

*Demostración de la Proposición 77.* Del Lema anterior observamos que  $\mathbf{X}_t^{exc, (\alpha)}$  converge a una función determinista,  $x \mapsto 1 - x$ , sobre cualquier intervalo finito  $[\epsilon, 1]$  para toda  $\epsilon > 0$ . Aún con esto, la Proposición 77 aún no ha sido probada, ya que,

conforme  $\alpha \downarrow 1$ , la amplitud del tamaño cercana a 1 entre los tiempos 0 y  $\epsilon$  podría bien ser causada por la acumulación de varios saltos pequeños de suma total de orden 1. Mostraremos que este no es el caso utilizando el Puente de Lévy  $\mathbf{X}^{br,(\alpha)}$ . Para  $\epsilon > 0$  y  $Y : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , definimos el evento

$$J(Y, \epsilon) = \left\{ \exists u \in [0, 1] : \begin{array}{ll} |Y_t + t| \leq \epsilon & \forall t \in [0, u], \\ |Y_t - (1 - t)| \leq \epsilon & \forall t \in [u + \epsilon, 1] \cap [0, 1], \end{array} \right\}.$$

Aplicando la transformación de Vervaat a  $\mathbf{X}^{exc,(\alpha)}$ , deducimos del Lema que para todo  $\epsilon > 0$  tendremos

$$\mathbb{P} (J(\mathbf{X}^{br,(\alpha)}, \epsilon)) \xrightarrow{\alpha \downarrow 1} 1. \quad (7.6)$$

Introducimos ahora la siguiente operación sobre  $\mathbf{X}^{br,(\alpha)}$ :

1. Para  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , cortamos el puente  $\mathbf{X}^{br,(\alpha)}$  en  $n$  piezas entre los tiempos

$$\left[ \frac{i}{n}, \frac{(i+1)}{n} \right], \quad \text{para } i \in \{0, 1, \dots, n-1\}.$$

2. Observar que para todo  $n \geq 1$ , c.s. ningún tiempo  $i/n$  es un tiempo de salto del proceso  $\mathbf{X}^{br,(\alpha)}$ .
3. “Intercambiamos” estas  $n$  piezas, esto es, se concatenan después de intercambiar el orden usando una permutación uniforme independiente de  $\{1, 2, \dots, n\}$ , y nos referimos a este procedimiento como una  $n$ -permutación.

Llanamente,

$$\forall \alpha \in (1, 2) \forall n \geq 1, \text{ la ley de } \mathbf{X}^{br,(\alpha)} \text{ es invariante bajo } n\text{-permutaciones.} \quad (7.7)$$

Afirmamos que si la convergencia (7.6) y el enunciado (7.7) se satisfacen simultáneamente, necesariamente ocurrirá que, conforme  $\alpha \downarrow 1$ , el tamaño de la amplitud cercano a 1 de  $\mathbf{X}^{br,(\alpha)}$  viene de un único salto de tamaño cercano a 1. Específicamente, afirmamos la convergencia

$$\mathbf{X}^{br,(\alpha)} \xrightarrow[\alpha \downarrow 1]{\mathfrak{D}} (\mathbf{1}_{\{\mathfrak{U} \leq t\}} - t, t \in [0, 1]). \quad (7.8)$$

es válida en distribución para la topología de Skorohod sobre  $\mathbb{D}([0, 1], \mathbb{R})$ , donde  $\mathfrak{U}$  es una v.a. independiente, uniforme sobre  $[0, 1]$ . Fácilmente se puede observar que esta última convergencia implica el enunciado de la proposición utilizando la transformación de Vervaat y propiedades estándar de la topología de Skorohod.

Demos una idea de ésta última prueba sin ahondar en detalles. Primero mostramos que para todo  $\delta > 0$ , la probabilidad de que haya dos saltos en  $\mathbf{X}^{br,(\alpha)}$  mayores que  $\delta$  se va a 0 conforme  $\alpha \downarrow 1$ . Para esto, argumentamos por contradicción y asumimos que existe una constante  $\kappa > 0$  tal que la probabilidad mencionada sea mayor que  $\kappa$  a lo largo de la sucesión  $\alpha_k \downarrow 1$ . Elegimos  $\epsilon \in (0, \delta \wedge 1/4)$ . Por (7.6), si  $\mathbf{X}^{br,(\alpha_k)}$  contiene dos saltos mayores que  $\delta$ , deben localizarse en la región  $[u, u + \epsilon]$  con probabilidad convergiendo a 1 conforme  $k \rightarrow \infty$ . Ahora, para cada  $k \geq 1$  existe algún  $n_k \geq 0$  tal que si  $\mathbf{X}^{br,(\alpha)}$  contiene dos saltos mayores que  $\delta$  entonces estos saltos en su  $n_k$ -permutación están distanciadas al menos  $1/3$  uno del otro con probabilidad al menos  $1/10$ . Esto contradice (7.6), ya que estos saltos no pueden estar ambos localizados en la brecha de anchura  $\epsilon$ .

Ahora, si todos los saltos de  $\mathbf{X}^{br,(\alpha_k)}$  son menores que  $\delta > 0$  con probabilidad positiva a lo largo de la sucesión  $\alpha_k \downarrow 1$ , entonces la norma uniforme de la  $n_k$ -permutación de  $\mathbf{X}^{br,(\alpha_k)}$  (para  $n_k$  adecuada) estaría cercana a 0, digamos, menos que  $100\delta$  con probabilidad acotada lejos del cero. Esto contradice (7.6). Entonces, la amplitud de tamaño apenas 1 en  $\mathbf{X}^{br,(\alpha)}$  es causado por un único salto de tamaño macroscópico cuando  $\alpha \downarrow 1$ . Argumentos similares a aquellos dados en el párrafo anterior, dan como resultado que el tamaño del salto converge en probabilidad a 1 conforme  $\alpha \downarrow 1$  dando como resultado (7.8).  $\square$

## 7.2. Casos Límite de $\mathcal{L}_\alpha$ conforme $\alpha \downarrow 1$ y $\alpha \uparrow 2$

Mantenemos la notación utilizada anteriormente con el superíndice  $(\alpha)$  para denotar los respectivos procesos asociados al proceso de Lévy espectralmente positivo  $\alpha$ -estable  $\mathbf{X}^{(\alpha)}$ . Probamos a continuación el teorema concerniente al comportamiento en el límite de  $\mathcal{L}_\alpha$  conforme  $\alpha \downarrow 1$  y  $\alpha \uparrow 2$ . Debido a la codificación del árbol cíclico  $\mathcal{L}_\alpha$  por  $\mathbf{X}^{(\alpha)}$ , no es de extrañarse que estos resultados sean consecuencia de las proposiciones probadas en la sección anterior.

**Teorema 79.** (Interpolación de Árboles Cíclicos)

*Se satisfacen las convergencias en distribución,*

$$(i) \quad \mathcal{L}_\alpha \xrightarrow[\alpha \downarrow 1]{\mathfrak{D}} \mathbb{S}_1, \quad (ii) \quad \mathcal{L}_\alpha \xrightarrow[\alpha \uparrow 2]{\mathfrak{D}} \frac{1}{2} \cdot \mathcal{T}_2,$$

*bajo la topología de Gromov-Hausdorff, hacia el círculo de perímetro unitario sobre el plano  $\mathbb{S}_1$  y el Continuum Random Tree ó árbol 2-estable  $\mathcal{T}_2$  respectivamente.*

*Demostración.* Probemos primero que  $\mathcal{L}_\alpha \downarrow \mathbb{S}_1$ , donde el objeto límite es el círculo unitario. Efectivamente, esto es consecuencia de la Proposición 77, puesto que la

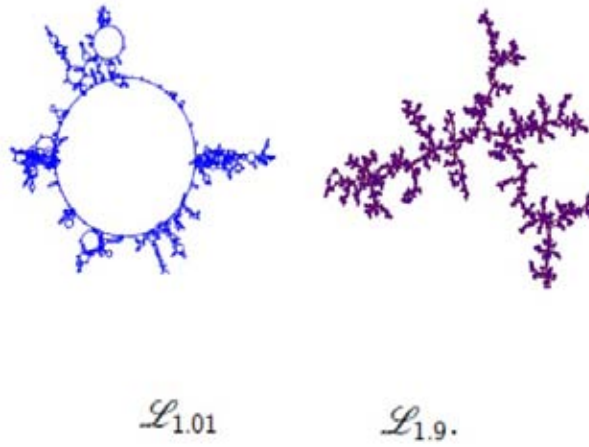


Figura 7.2: A la izquierda,  $\mathcal{L}_{1.01}$  se aproxima a un círculo de perímetro unitario. A la derecha,  $\mathcal{L}_{1.9}$  se encuentra próximo al árbol browniano. [6]

sucesión de funciones  $(s, t) \mapsto \delta_{s \wedge t}(\mathbf{x}_{s \wedge t}^s, \mathbf{x}_{s \wedge t}^t)$  converge en probabilidad hacia la función  $(s, t) \mapsto |s - t|$ , uniformemente sobre  $[0, 1]^2$ , probando así el resultado.

Probamos ahora que  $\mathcal{L}_\alpha \uparrow \frac{1}{2} \cdot \mathcal{T}_2$ , donde el objeto límite es ahora el tan conocido Continuum Random Tree, el cual formalmente es el árbol de Lévy 2-estable. Recordemos la pseudo-distancia  $d_h$  definida sobre árbol codificado por una función  $h$  de tipo excusión. Probaremos la siguiente convergencia en distribución,

$$d^{(\alpha)}(\cdot, \cdot) \xrightarrow[\alpha \uparrow 2]{\mathfrak{D}} \frac{\sqrt{2}}{2} d_{\mathbf{e}}(\cdot, \cdot),$$

para la norma uniforme sobre  $[0, 1]^2$ , lo cual a su vez implica el resultado. Checamos que la sucesión de pseudo-distancia aleatorias  $(d^\alpha)_{\alpha \in (1, 2)}$  es tensa conforme  $\alpha \rightarrow 2$  para la topología uniforme sobre  $[0, 1]^2$ . Fijamos  $\epsilon > 0$ . Es suficiente ver que existe un  $\kappa > 0$  tal que para  $\alpha$  suficientemente cercano a 2 tendremos que

$$\mathbb{P} \left( \sup_{|x-y| < \kappa} d^{(\alpha)}(x, y) > \epsilon \right) < \epsilon.$$

Sin embargo, se probó que una cota superior para las pseudo-distancias  $d_{\mathcal{X}^{\text{exc}, (\alpha)}}$  está dada por

$$d_{\mathcal{X}^{\text{exc}, (\alpha)}}(x, y) \geq d^{(\alpha)}(x, y),$$

de donde se sigue la desigualdad anterior observando que por la Proposición 76 las pseudo-distancias  $d_{\mathcal{X}^{\text{exc}, (\alpha)}}$  convergen en distribución para la norma uniforme sobre

$[0, 1]^2$  hacia  $\sqrt{2} \cdot d_e$  conforme  $\alpha \rightarrow 2$ . Se sigue que existe un real  $\kappa > 0$  tal que para  $\alpha$  suficientemente cercano a 2

$$\mathbb{P} \left( \sup_{|x-y|<\kappa} d_{\mathcal{X}^{exc,(\alpha)}}(x, y) > \epsilon \right) < \epsilon.$$

Ya que hemos probado que  $(d^\alpha)_{\alpha \in (1,2)}$  es tensa conforme  $\alpha \rightarrow 2$  y sabemos que  $d_{\mathcal{X}^{exc,(\alpha)}}$  convergen en distribución hacia  $\sqrt{2} \cdot d_e$ , tendremos por un argumento de densidad y continuidad que en orden para identificar el límite de cualquier subsucesión convergente de  $(d^\alpha)_\alpha$ , es suficiente verificar que

$$\frac{d^\alpha(\mathfrak{U}, \mathfrak{V})}{d_{\mathcal{X}^{exc,(\alpha)}}(\mathfrak{U}, \mathfrak{V})} \xrightarrow[\alpha \uparrow 2]{\mathbb{P}} \frac{1}{2},$$

donde  $\mathfrak{U}$  y  $\mathfrak{V}$  son v.a.i.i.d. con ley uniforme sobre  $[0, 1]$ . Para esto, afirmamos que basta probar que

$$\frac{d^\alpha(0, \mathfrak{U})}{\mathcal{X}^{exc,(\alpha)}(\mathfrak{U})} \xrightarrow[\alpha \uparrow 2]{\mathbb{P}} \frac{1}{2}.$$

Para una función càdlàg  $Y : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  recordemos la notación  $\mathbf{x}_s^t(Y)$ ,  $\mathbf{u}_s^t(Y)$  utilizado para el proceso de descenso. Para  $0 \leq u \leq t \leq 1$  establecemos

$$\mathbf{Q}_u^t = \frac{\sum_{y \leq s, s \leq t} \Delta Y_s \min(\mathbf{u}_s^t(Y), 1 - \mathbf{u}_s^t(Y))}{\sum_{y \leq s, s \leq t} \Delta Y_s \mathbf{u}_s^t(Y)}$$

de donde tendremos que

$$\frac{d^\alpha(0, \mathfrak{U})}{\mathcal{X}^{exc,(\alpha)}(\mathfrak{U})} = \mathbf{Q}_0^1(\mathcal{X}^{exc,(\alpha)}).$$

Utilizando la transformación de Vervaat, obtenemos que

$$\frac{d^\alpha(0, \mathfrak{U})}{\mathcal{X}^{exc,(\alpha)}(\mathfrak{U})} = \mathbf{Q}_0^1(\mathcal{X}^{br,(\alpha)}).$$

Es suficiente mostrar entonces que esta última cantidad converge en probabilidad a  $1/2$  conforme  $\alpha \uparrow 2$ . Como es natural, reemplazamos  $\mathcal{X}^{br,(\alpha)}$  por el proceso  $\alpha$ -estable  $\mathcal{X}^{(\alpha)}$  y probamos primero que

$$\mathbf{Q}_0^1(\mathcal{X}^{(\alpha)}) \xrightarrow[\alpha \uparrow 2]{\mathbb{P}} \frac{1}{2}. \quad (7.9)$$

Con este fin, notamos que la colección

$$\{\mathbf{u}_s^t(\mathcal{X}^{(\alpha)}) : s \in [0, 1], s \leq t\}$$

está conformada por v.a.i.i.d. con ley uniforme e independientes de la colección

$$\{u_s^t(\mathbf{X}^{(\alpha)}) : s \in [0, 1], s \preceq 1\}.$$

Tendremos que

$$\sum_{0 \leq s, s \preceq 1} \Delta \mathbf{X}_s^{(\alpha)} \geq \mathbf{X}_1^{(\alpha)} - \inf_{[0,1]} \mathbf{X}^{(\alpha)} \xrightarrow[\alpha \uparrow 2]{\mathfrak{D}} \sqrt{2} (B_1 - \inf_{[0,1]} B).$$

Por otro lado, para  $\epsilon > 0$

$$\mathbb{P} \left( \sup_{s \in [0,1]} \Delta \mathbf{X}_s^{(\alpha)} \geq \epsilon \right) = 1 - e^{\Pi^{(\alpha)}([\epsilon, +\infty))}$$

lo cual converge a 0 conforme  $\alpha \rightarrow 2$  por la forma de la medida de Lévy. Hagamos ahora,

$$\mathcal{S} = \{\Delta_s(\mathbf{X}^{(\alpha)}) : 0 \leq s, s \preceq 1\},$$

y notamos que  $\sup \mathcal{S}$  converge en probabilidad hacia 0 cuando  $\alpha \uparrow 2$ . Finalmente es posible aplicar la clásica ley débil de los grandes números obteniendo que

$$\frac{\sum_{0 \leq s, s \preceq 1} \Delta \mathbf{X}_s^{(\alpha)} \cdot u_s^1(\mathbf{X}_s^{(\alpha)})}{\sum_{0 \leq s, s \preceq 1} \Delta \mathbf{X}_s^{(\alpha)}} \xrightarrow[\alpha \uparrow 2]{\mathbb{P}} \mathbb{E}[\mathfrak{U}] = 1/2,$$

$$\frac{\sum_{0 \leq s, s \preceq 1} \Delta \mathbf{X}_s^{(\alpha)} \cdot \min \{u_s^1(\mathbf{X}_s^{(\alpha)}), 1 - u_s^1(\mathbf{X}_s^{(\alpha)})\}}{\sum_{0 \leq s, s \preceq 1} \Delta \mathbf{X}_s^{(\alpha)}} \xrightarrow[\alpha \uparrow 2]{\mathbb{P}} \mathbb{E}[\min(\mathfrak{U}, 1 - \mathfrak{U})] = 1/4.$$

Con esto hemos probado (7.9).

Finalmente completaremos la prueba si mostramos que

$$\mathbf{Q}_0^1(\mathbf{X}^{br,(\alpha)}) \xrightarrow[\alpha \uparrow 2]{\mathbb{P}} \frac{1}{2}, \quad (7.10)$$

a través de un argumento de continuidad absoluta. Obtenemos así, que para  $\alpha$  suficientemente cercano al 2 tendremos

$$\mathbb{P} \left( \left| \mathbf{Q}_0^1(\mathbf{X}^{br,(\alpha)}) - 1/2 \right| \right) \leq \mathbb{P} \left( \left| \mathbf{Q}_0^1(\mathbf{X}^{br,(\alpha)}) \neq \mathbf{Q}_u^1(\mathbf{X}^{br,(\alpha)}) \right| \right) + C \mathbb{P} \left( \left| \mathbf{Q}_0^1(\mathbf{X}^{(\alpha)}) - 1/2 \right| \right),$$

de donde se sigue el resultado.  $\square$

### 7.3. Dimensión de Hausdorff de $\mathcal{L}_\alpha$

Consideraremos al espacio métrico  $(\mathcal{L}_\alpha, \mathbf{d})$  con la métrica descrita como en el capítulo anterior; recordemos que la distancia entre dos individuos sobre el árbol cíclico es suma de varias porciones de ciclos que en conjunto conforman la trayectoria mínima entre los individuos. En particular, únicamente los tiempos de salto del proceso aportan positivamente al ser los que tienen un ciclo asociado.

Utilizaremos las nociones de diámetro de un cerrado y amplitud de una función  $f$  sobre un intervalo compacto, los cual denotamos por:

$$\text{diam}(A) = \sup\{\mathbf{d}(u, v) : u, v \in A\} \quad , \quad \text{amp}_{[s,t]}(f) = \sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in [s, t]\}.$$

**Teorema 80.** (Dimensión de Hausdorff) *Para cada  $\alpha \in (1, 2)$ , casi seguramente  $\mathcal{L}_\alpha$  es un espacio métrico compacto con dimensión de Hausdorff  $\alpha$ , i.e.  $\dim_H(\mathcal{L}_\alpha) = \alpha$ .*

*Demostración.*

**Cota Superior** Construiremos una cubierta adecuada de  $\mathcal{L}_\alpha$  de la siguiente manera. Fijamos  $\epsilon > 0$  y denotamos por  $(t_i^{(\epsilon)}, 1 \leq i \leq N_\epsilon)$  a una enumeración de la colección finita de saltos  $\{t \in [0, 1] : \Delta_t > \epsilon^{1/\alpha}\}$  contabilizada por una v.a. Poisson  $N_\epsilon$ ; también hacemos  $t_0^{(\epsilon)} = 0$  y  $t_{N_\epsilon+1}^{(\epsilon)} = 1$ . Consideremos ahora la proyección canónica  $p_\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathcal{L}_\alpha$ . Claramente podemos utilizar la anterior colección de saltos para generar una cubierta cerrada de  $\mathcal{L}_\alpha$  dada por

$$\bigcup_{i=0}^{N_\epsilon} p_\alpha([t_i^{(\epsilon)}, t_{i+1}^{(\epsilon)}]).$$

Del Lema 68 (ii) sabemos que si  $s < t$  entonces  $\mathbf{d}(s, t) \leq \mathbf{X}_s^{exc} + \mathbf{X}_t^{exc} - 2I_s^t$ , por lo que tomando el supremo sobre el intervalo  $p_\alpha([t_i^{(\epsilon)}, t_{i+1}^{(\epsilon)}])$ , tendremos que

$$\text{diam}(p_\alpha([t_i^{(\epsilon)}, t_{i+1}^{(\epsilon)}])) \leq 2 \text{amp}_{[t_i^{(\epsilon)}, t_{i+1}^{(\epsilon)}]}(\mathbf{X}^{exc}) \quad , \quad 1 \leq i \leq N_\epsilon.$$

Probamos ahora que para todo  $a \in (0, 1/\alpha)$ ,

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} \mathbb{P} \left( N_\epsilon \leq \epsilon^{-(1+a)} \quad \text{y} \quad \text{amp}_{[t_i^{(\epsilon)}, t_{i+1}^{(\epsilon)}]}(\mathbf{X}^{exc}) \leq \epsilon^{\frac{1}{\alpha}-a}, \quad \forall i \leq N_\epsilon \right) = 1. \quad (7.11)$$

Esto dará como resultado que c.s.  $\dim_H(\mathcal{L}_\alpha) < \frac{\alpha(1+a)}{(1-a)}$ , lo cual implica c.s. la cota superior  $\dim_H(\mathcal{L}_\alpha) \leq \alpha$  ya que la selección de  $a \in (0, 1/\alpha)$  es arbitraria.

En vez de probar (7.11) directamente, probaremos un resultado similar utilizando el proceso  $\alpha$ -estable original  $\mathbf{X}$ . Sea  $(t_i^{(\epsilon)\nearrow})_{i \geq 1}$  una enumeración creciente de los tiempos de salto de  $\mathbf{X}$  de tamaño mayor que  $\epsilon^{1/\alpha}$ , haciendo  $t_0^{(\epsilon)\nearrow} := 0$  y estableciendo

$$N_\epsilon^{\nearrow} = \#\{i \geq 1 : t_i^{(\epsilon)\nearrow} \leq 1\}.$$

Debido a argumentos de continuidad absoluta entre  $\mathbf{X}$  y el puente de Lévy  $\mathbf{X}^{br}$ , así como también la transformación de Vervaat entre  $\mathbf{X}^{exc}$  y  $\mathbf{X}^{br}$  (Ver sección 3.4.), es posible deducir (7.11) si probamos primero que

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} \mathbb{P} \left( N_\epsilon^{\nearrow} \leq \epsilon^{-(1+a)} \quad \text{y} \quad \mathit{amp}_{[t_i^{(\epsilon)\nearrow}, t_{i+1}^{(\epsilon)\nearrow}]}(\mathbf{X}^{exc}) \leq \epsilon^{\frac{1}{\alpha}-a}, \quad \forall i \leq N_\epsilon^{\nearrow} \right) = 1. \quad (7.12)$$

La ventaja de lidiar con el proceso no condicionado  $\mathbf{X}$  es que podemos decir con precisión que la v.a. Poisson  $N_\epsilon^{\nearrow}$ , es de parámetro  $\Pi([\epsilon^{1/\alpha}, +\infty))$ , donde  $\Pi(dx)$  es la medida de Lévy de un proceso  $\alpha$ -estable como en la sección 5.1., por lo que

$$N_\epsilon^{\nearrow} \stackrel{(d)}{=} \text{Poisson} \left( \frac{1}{\epsilon} \frac{\alpha - 1}{\Gamma(\alpha - 2)} \right).$$

Más aún, por la propiedad de Markov fuerte del proceso  $\mathbf{X}$ , las variables aleatorias

$$\mathit{amp}_{[t_i^{(\epsilon)\nearrow}, t_{i+1}^{(\epsilon)\nearrow}]}(\mathbf{X}), \quad i \geq 0$$

son independiente e idénticamente distribuidas con distribución común  $\epsilon^{1/\alpha} \mathcal{A}$ , donde

$$\mathcal{A} \stackrel{(d)}{=} \mathit{amp}_{[0, e]} \tilde{\mathbf{X}},$$

donde  $\tilde{\mathbf{X}}$  es el proceso de Lévy  $\mathbf{X}$  condicionado a no dar saltos mayores que 1, o en términos de la medida de Lévy de  $\mathbf{X}$  la de  $\tilde{\mathbf{X}}$  coincide con la restricción  $\Pi(dx) \mathbf{1}_{(0,1)}(x)$  y  $e$  una v.a. exponencial independiente de parámetro  $\frac{(\alpha-1)}{\Gamma(\alpha-2)}$ .

Afirmamos que  $\mathbb{E}[\exp(\lambda \mathcal{A})] < +\infty$  para cierta  $\lambda > 0$ . Para este fin, será suficiente checar que para algún  $\lambda > 0$  tenemos que se satisfacen las siguientes condiciones:

$$\mathbb{E} \left[ \exp \left( -\lambda \cdot \inf_{[0, e]} \tilde{\mathbf{X}} \right) \right] < \infty \quad \text{y} \quad \mathbb{E} \left[ \exp \left( -\lambda \cdot \sup_{[0, e]} \tilde{\mathbf{X}} \right) \right].$$

La primera es consecuencia de los argumentos dados al inicio de [1, pág 188] aplicado al proceso espectralmente negativo  $\mathbf{X}$ . Para el segundo, recurrimos a una adaptación



de éstos argumentos como se hizo en la sección 3.3. donde se obtiene que la v.a.  $\sup_{[0, \mathfrak{e}]} \tilde{X}$  tendrá distribución exponencial, lo cual implica que

$$\mathbb{P} \left( \sup_{[0, \mathfrak{e}]} \tilde{X} > a + 2 \right) \leq \mathbb{P} \left( \sup_{[0, \mathfrak{e}]} \tilde{X} > 1 \right) \mathbb{P} \left( \sup_{[0, \mathfrak{e}]} \tilde{X} > a \right),$$

que a su vez da como resultado la desigualdad

$$\mathbb{P} \left( \sup_{[0, \mathfrak{e}]} \tilde{X} > 2n \right) \leq \mathbb{P} \left( \sup_{[0, \mathfrak{e}]} \tilde{X} > 1 \right)^n, \quad \forall n \geq 1.$$

Se sigue que  $\mathbb{E}[\exp(-\lambda \mathcal{A})] < +\infty$  para todo  $0 < \lambda < \frac{1}{2} \log \mathbb{P} \left( \sup_{[0, \mathfrak{e}]} \tilde{X} > 1 \right)$ .

Para concluir (7.12), escribimos

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N_\epsilon^{\nearrow} \geq \epsilon^{-(1+a)} \text{ ó } \exists i \leq N_\epsilon^{\nearrow} \text{ t.q. } \mathit{amp}_{[t_i^{(\epsilon)\nearrow}, t_{i+1}^{(\epsilon)\nearrow}]}(\mathbf{X}) \geq \epsilon^{\frac{1}{\alpha}-a}) \\ \leq \mathbb{P}(N_\epsilon \geq \epsilon^{-(1+a)}) + \epsilon^{-(1+a)} \mathbb{P}(\mathcal{A} \geq \epsilon^{-a}). \end{aligned}$$

Ya que  $\mathcal{A}$  tiene momentos exponenciales y por tener  $N_\epsilon^{\nearrow}$  ley Poisson, la parte derecha de la desigualdad se anula cuando  $\epsilon \downarrow 0$ . Esto implica (7.11) y completa la prueba.

**Cota Inferior** Denotamos ahora por  $\nu$  la medida de probabilidad sobre  $\mathcal{L}_\alpha$  obtenida de la imagen de la medida de Lebesgue sobre  $[0, 1]$  bajo el cociente  $p_\alpha$ . Mostraremos que para todo  $\delta \in (0, \alpha)$ , c.s. para  $\nu$ -casi todo  $u \in \mathcal{L}_\alpha$  tendremos que

$$\limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\nu(B_r(u))}{r^{\alpha-\delta}} = 0, \quad (7.13)$$

donde  $B_r(u)$  es la bola centrada en  $u$  de radio  $r > 0$  en el espacio métrico  $\mathcal{L}_\alpha$ . Por teoremas estándar de medidas de Hausdorff esto implica que  $\dim_H(\mathcal{L}_\alpha) \geq \alpha - \delta$ , c.s. La cota inferior se sigue inmediatamente.

Fijemos  $\delta \in (0, \alpha)$ . Sea  $\mathfrak{U}$  una v.a. uniforme sobre  $[0, 1]$  independiente de  $\mathcal{L}_\alpha$ . Probaremos que c.s. para toda  $r > 0$  suficientemente pequeña tendremos que

$$\nu \left( B_r(p_\alpha(\mathfrak{U})) \right) \leq 2r^{\alpha-\delta}.$$

Por Fubini, esto efectivamente implica (7.13). Utilizaremos el siguiente resultado:

**Lema 81.** *Fijemos  $a > 0$ . Casi seguramente, cuando  $\epsilon \downarrow 0$ , existe un tiempo de salto  $T_\epsilon$  de  $X^{\text{exc}}$  tal que las siguientes tres condiciones se cumplen:*

- (i)  $T_\epsilon \in (\mathfrak{U} - \epsilon, \mathfrak{U})$ ,
- (ii)  $\min\{x_{T_\epsilon}^{\mathfrak{U}}, \Delta_{T_\epsilon} - x_{T_\epsilon}^{\mathfrak{U}}\} > \epsilon^{\frac{1}{\alpha+a}}$ ,
- (iii)  $\inf_{[\mathfrak{U}, \mathfrak{U} + \epsilon^{1-a}]} X^{exc} < X_{T_\epsilon}^{exc}$ .

Suponiendo (i), (ii) y (iii) del lema anterior, permitámonos demostrar que

$$\nu(B_r(p_\alpha(\mathfrak{U}))) \leq 2\epsilon^{1-a},$$

lo cual, aunado al enunciado del lema, implica nuestro objetivo final. En efecto, basta checar que siempre que  $s \in [\mathfrak{U} - \epsilon, \mathfrak{U} + \epsilon^{1-a}]$  tendremos que  $d(s, \mathfrak{U}) \geq \epsilon^{\frac{1}{\alpha+a}}$ . Para esto notemos que si  $s \in [\mathfrak{U} - \epsilon, \mathfrak{U} + \epsilon^{1-a}]$ , entonces (iii) y (i) muestran que  $s \wedge \mathfrak{U} < T_\epsilon$  y entonces  $s \wedge \mathfrak{U} \prec T_\epsilon \prec \mathfrak{U}$ . Por definición de  $d$  y el Lema 81 (i) obtenemos

$$d(s, \mathfrak{U}) \geq \min(x_{T_\epsilon}^{\mathfrak{U}}, \Delta_{T_\epsilon} - x_{T_\epsilon}^{\mathfrak{U}}) \geq \epsilon^{\frac{1}{\alpha+a}},$$

como deseabamos.

Para finalizar basta mostrar el Lema 81. Ya que el enunciado que deseamos probar es en referencia a un comportamiento local alrededor de  $\mathfrak{U}$  en  $X^{exc}$ , por argumentos de continuidad absoluta entre  $X$  y  $X^{br}$  así como la transformación de Vervaat entre  $X^{br}$  y  $X^{exc}$  basta probar el Lema 81 cuando  $X^{exc}$  es reemplazado por un proceso  $\alpha$ -estable a doble-cara  $(X_t)_{t \in \mathbb{R}}$  y el punto  $\mathfrak{U}$  por el punto 0. Recordemos del Corolario 73 la definición del evento

$$A_\epsilon := \bigcup_{s \in [-\epsilon, 0], s \leq 0} \left\{ x_s(X) \geq \epsilon^{\frac{1}{\alpha+a}} \text{ y } \Delta X_s - x_s^0(X) \geq \epsilon^{\frac{1}{\alpha+a}} \right\}.$$

Por el Corolario 73, existen constantes  $C, \gamma > 0$  tal que  $\mathbb{P}(A_\epsilon) < C\epsilon^\gamma$ . El lema de Borel Cantelli implica que c.s.  $A_{2^{-k}}$  es válido para toda  $k$  suficientemente grande. Esto prueba (i) y (ii). Ahora, por [1, Capítulo VIII, Teorema 6 (i)], c.s. existe un  $c > 0$  tal que  $\forall \epsilon$  suficientemente pequeña,

$$\sup_{[0, \epsilon^{1-a}]} (-X) \leq c\epsilon^{\frac{(1-a)}{2}/\alpha},$$

y por la última línea de la prueba de Teorema 5 en [1, Capítulo VIII], c.s. existe  $C > 0$  tal que para toda  $\epsilon$  suficientemente pequeña,

$$\sup_{s \in [0, \epsilon^{1-a}]} (-X_s) \leq C\epsilon^{\frac{(1-a)}{3}/\alpha},$$

Se sigue que c.s. para toda  $\epsilon$  suficientemente pequeña tendremos

$$\inf_{s \in [0, \epsilon^{1-a}]} X_s < \inf_{s \in [-\epsilon, 0]} X_s.$$

Combinado con (i), esto implica (iii) y completa la prueba.  $\square$

# Bibliografía

- [1] Bertoin J., “*Lévy processes*”, Cambridge University Press, 1996.
- [2] Bertoin J., “*An extension of Pitman’s theorem for spectrally positive Lévy processes*”, Ann. Probab., 20 1992, págs. 1464-1483.
- [3] Caballero M.E., Lambert A., Uribe Bravo G., “*Proof(s) of the Lamperti Representation of continuous-state branching processes*”, Probability Surveys, 2009.
- [4] Chaumont L., “*Excursion Normalisée, Meándre et Pont pour le processus de Lévy Stables*”, Bull. Sci. Math., 121, págs. 377-403, 1997.
- [5] Duquesne T. & Le Gall J. F., “*Probabilistic and Fractal Aspects of Levy Trees*”, Probability Th. Rel. Fields **131** págs. 553-603, 2005.
- [6] Kortchemski I. & Curien N., “*Random Stable Looptrees*”, 2013. .
- [7] Kyprianou A., “*Introductory Lectures on Fluctuations of Lévy Processes with Applications*”, Springer, 2nd Edition 2014.
- [8] Le Gall J.F., “*Spatial Branching Processes Random Snakes and Partial Differential Equations*”, Lectures in Mathematics. ETH Zürich, Birkhäuser, 1999.
- [9] Le Gall & Le Jan , “*Branching Processes in Levy Processes: the exploration process*”, Ann Probab., 26, 1998, págs. 213-252.
- [10] Márquez D., “*Árboles Aleatorios y Propiedades Fractales del Continuum Random Tree*”, Tesis de Licenciatura, UNAM, 2013.
- [11] Pollard D., “*Convergence of stochastic processes*” Springer Series in Statistics, Springer-Verlag, New York, 1984.
- [12] Wheeden L. Richard, Zygmund Antoni, “*Measure and Integral: An Introduction to Real Analysis*”, Monographs and Text Books in pure applied mathematics, 43, 1998, págs. 98-108.