UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ESTABILIDAD DE SISTEMAS DINÁMICOS HIPERBÓLICOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A :

MARCO IVAN ZEPEDA DÁVALOS

DIRECTOR DE TESIS:
DR. AUBIN ARROYO CAMACHO

2014

Ciudad Universitaria, D. F.

Estabilidad de Sistemas Dinámicos Hiperbólicos

Marco Ivan Zepeda Dávalos

21 de enero de 2015

Índice general

Introducción

La realidad se encuentra en cambio permanente. Para comprender y predecir la evolución de los fenómenos reales, construimos modelos matemáticos que relacionan causas con efectos.

Todo modelo matemático se obtiene mediante la abstracción de un fenómeno real, toma en cuenta los factores relevantes para comprenderlo, y descarta los que resultan menos significativos. Para garantizar que las predicciones teóricas obtenidas a partir del modelo matemático corresponden con el comportamiento del fenómeno real, es necesario garantizar que las pequeñas perturbaciones generadas por los factores poco significativos no afectan sustancialmente el comportamiento del modelo. La propiedad que garantiza lo anterior se conoce como *estabilidad estructural*, y su caracterización es el propósito de este trabajo.

El modelo dinámico de un determinado fenómeno consiste en un conjunto M, denominado *espacio de estados* o *espacio fase*, en el que cada uno de sus elementos representa uno de los estados posibles del fenómeno, y donde la evolución del sistema conforme avanza el tiempo se obtiene mediante la acción de un grupo de transformaciones sobre el espacio fase. En el presente trabajo analizaremos acciones del grupo $(\mathbb{Z}, +)$ sobre una variedad diferenciable compacta M, generadas mediante la aplicación de un difeomorfismo $f : M \to M$. Estos sistemas son algunas veces llamados sistemas dinámicos con *tiempo discreto*, en contraposición con los de *tiempo continuo*, que son sistemas dinámicos dados por flujos de ecuaciones diferenciales, y que corresponden con acciones del grupo $(\mathbb{R}, +)$, para los que haremos también algunos comentarios.

Considerando diferentes estructuras en el espacio fase podemos identificar propiedades interesantes respecto a la evolución del sistema; para M una variedad diferenciable compacta obtendremos, entre otras cosas, una noción de cercanía entre sistemas dinámicos.

La estabilidad estructural de un sistema dinámico consiste en que todos los sistemas que son suficientemente cercanos a éste tienen cualitativamente el mismo comportamiento. Para precisar cuándo dos sistemas poseen el mismo comportamiento cualitativo usaremos la noción de conjugación topológica: dos difeomorfismos $f, g : M \to M$ son topológicamente conjugados, si existe un homeomorfismo $h : M \to M$, que cumple $g \circ h = h \circ f$.

En términos precisos, denotaremos por $\mathrm{Diff}(M)$ al espacio de difeomorfismos de clase $\mathscr{C}^1$ en M, y $\mathscr{X}(M)$ el espacio de flujos de clase $\mathscr{C}^1$ en M, en ambos casos con la topología $\mathscr{C}^1$ (ver 1.5). Diremos que un difeomorfismo $f \in \mathrm{Diff}(M)$ es *estructuralmente estable*, si cualquier difeomorfismo suficientemente $\mathscr{C}^1$-cercano a f es topológicamente conjugado a f.

De forma similar, un flujo $X \in \mathscr{X}(M)$ es *estructuralmente estable*, si cualquier flujo Y suficientemente $\mathscr{C}^1$-cercano a X es equivalente a X, esto significa que existe un homeomorfismo que manda las órbitas de Y en las órbitas de X, y además, preserva su orientación.

Estabilidad Estructural de Flujos en Superficies

La noción de estabilidad estructural fue introducida por Andronov y Pontryagin en [AP37], en el contexto de flujos asociados a sistemas de ecuaciones diferenciales, para caracterizar a los sistemas con una estructura global de órbitas persistente bajo pequeñas perturbaciones. En ese mismo trabajo, Andronov y Pontryagin establecieron un criterio necesario y suficiente para garantizar la estabilidad estructural de flujos en regiones acotadas del plano. Este criterio afirma que un flujo en el plano es estructuralmente estable si y sólo si tiene solamente una cantidad finita de puntos fijos y periódicos, todos ellos elementales (ahora llamados hiperbólicos); además cumpliendo que ninguna órbita conecta a puntos tipo silla (ver figura 1).

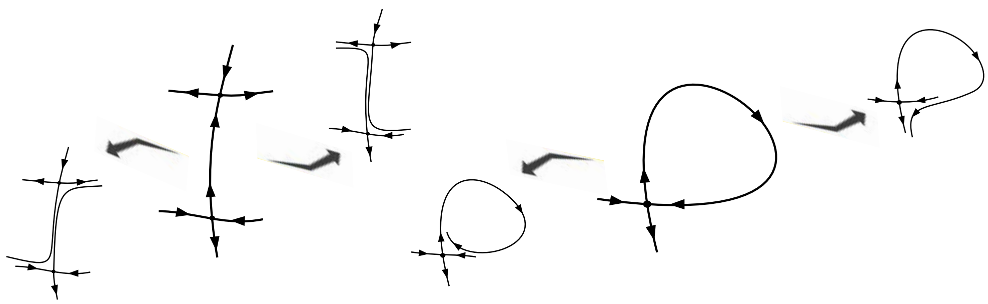

Figura 1: En presencia de órbitas que conectan puntos tipo silla, es posible hacer pequeñas perturbaciones que destruyan el comportamiento global de las órbitas.

A partir de estas tres condiciones, el Teorema de Poincaré-Bendixson garantiza que los flujos estructuralmente estables en el plano cumplen una condición adicional: los conjuntos ω-límite y α-límite de cualquier órbita sólo pueden ser órbitas periódicas o puntos fijos.

Con esta condición adicional, Peixoto [Pei59] extendió el resultado de Andronov y Pontriagyn a cualquier superficie compacta M^2, y mostró que el conjunto $\mathcal{SS}$ de flujos estructuralmente estables en M^2 es denso en $\mathscr{X}(M^2)$ y tiene a lo más una cantidad numerable de componentes conexas; donde cualesquiera flujos en la misma componente son equivalentes (ver figura 2). En el mismo año, Markus mostró [Mar61] que, en variedades compactas de cualquier dimensión, un sistema estructuralmente estable con una cantidad finita de órbitas periódicas cumple las condiciones del Teorema de Peixoto, lo que motivó a Smale a conjeturar [Sma60] que en cualquier dimensión, un sistema es estructuralmente estable si cumple las siguientes condiciones, que ahora son llamadas condiciones de *Morse-Smale*:

(1) Tiene una cantidad finita de puntos fijos y órbitas periódicas, todos hiperbólicos.

(2) Su conjunto no-errante es la unión de puntos fijos y órbitas periódicas.

(3) Las intersecciones entre las variedades estable e inestable de puntos fijos y órbitas periódicas son transversales.

En estos términos, el Teorema de Peixoto afirma:

Teorema (Peixoto [Pei62]). *Para cualquier superficie compacta M^2, los sistemas estructuralmente estables conforman un conjunto abierto y denso en $\mathscr{X}(M^2)$. Además, coinciden con los sistemas Morse-Smale ($\mathcal{MS}$).*

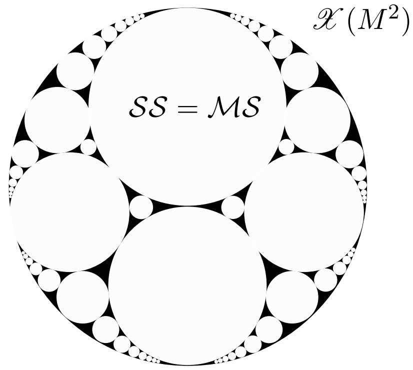

Figura 2: Para cualquier superficie compacta M^2, el Teorema de Peixoto describe la dinámica de los sistemas estructuralmente estables y clasifica en un conjunto abierto y denso en $\mathscr{X}(M^2)$ a todos los sistemas posibles salvo equivalencia topológica.

La caracterización de los sistemas estructuralmente estables en el Teorema de Peixoto no es válida para variedades de dimensión mayor que dos, aunque esa limitación puede superarse sustituyendo los puntos fijos y órbitas periódicas hiperbólicos por el concepto más general de conjunto hiperbólico.

Conjuntos Hiperbólicos y Estabilidad Local

Desde los trabajos de Littlewood y Cartwright en torno al oscilador no-lineal con forzamiento de Van der Pol, ya se había encontrado que en dimensión tres, una cantidad infinita de órbitas periódicas pueden ser persistentes bajo pequeñas perturbaciones, y por lo tanto, que los sistemas Morse-Smale no forman un conjunto denso en cualquier dimensión.

Para simplificar el comportamiento del oscilador forzado de Van der Pol, Smale construyó un modelo geométrico utilizando un difeomorfismo en dimensión dos, que ahora recibe el nombre de la *Herradura de Smale*, y fue el primer ejemplo de un comportamiento estable bajo perturbaciones, con una estructura de órbitas bastante más complicada que los sistemas Morse-Smale.

El mecanismo detrás del comportamiento de la Herradura ya había sido estudiado desde finales del siglo XIX por Poincaré [Poi87] en el problema de la estabilidad de las órbitas planetarias. Poincaré encontró que las variedades estable e inestable de un punto periódico de tipo silla pueden intersectarse transversalmente, en un punto al que ahora llamamos *intersección homoclínica transversal* (ver figura 3), y en torno al cual, el sistema presenta un comportamiento complicado, ahora llamado *caótico*.

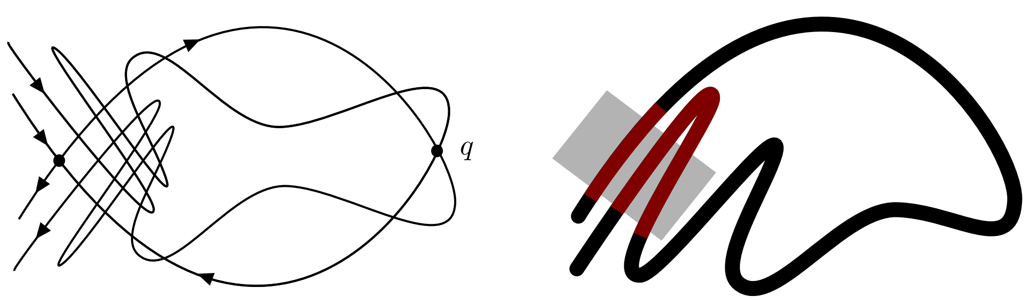

Figura 3: Una intersección homoclínica transversal q y la creación de una Herradura.

Birkhoff continuó con el estudio de estas intersecciones [Bir27], y mostró que alrededor de un punto de intersección homoclínica transversal en el plano, siempre hay una cantidad infinita de puntos periódicos, y finalmente, Smale mostró que en una vecindad de cualquier intersección homoclínica transversal, el comportamiento del sistema es topológicamente conjugado al de la Herradura.

Teorema (Birkhoff-Smale [Sma63]). *Sean M una superficie y $f : M \to M$ un difeomorfismo. Si f tiene un punto de intersección homoclínica transversal, entonces existe un conjunto de Cantor, invariante para una cierta iterada de f, donde hay una cantidad infinita de puntos periódicos.*

Esto tuvo implicaciones sorprendentes: se obtuvo que en cualquier variedad de dimensión mayor o igual a dos, es posible construir un difeomorfismo con un conjunto de Cantor invariante, que tiene infinitos puntos periódicos y una cantidad infinita de intersecciones homoclínicas transversales. Este conjunto invariante es un ejemplo de lo que ahora conocemos como *conjunto hiperbólico*, para los que en todo punto y cualquier dirección, el difeomorfismo se comporta localmente como una contracción o expansión. De forma precisa:

Definición. *Sea M una variedad diferenciable compacta y $f \in \mathrm{Diff}(M)$. Un conjunto $\Lambda \subset M$ invariante es hiperbólico, si existen una métrica riemanniana y una descomposición Df-invariante del haz tangente de M restringido a Λ, como $T_\Lambda M = \mathbb{E}^s \oplus \mathbb{E}^u$, en subespacios donde Df actúa como una contracción en $\mathbb{E}^s$ y como una expansión en $\mathbb{E}^u$.*

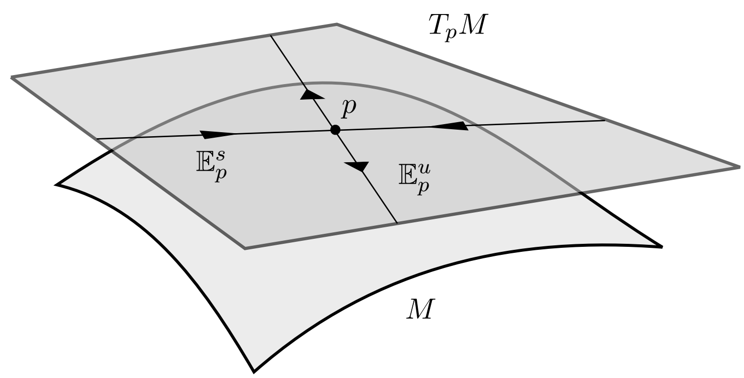

Figura 4: Subespacios invariantes de una descomposición hiperbólica en un punto $p \in \Lambda$.

Cuando un conjunto hiperbólico es el mayor conjunto invariante contenido en alguna de sus vecindades, se dice que el conjunto es aislado. En el segundo capítulo mostraremos que en presencia de esta propiedad, es posible garantizar que el comportamiento del difeomorfismo dentro del conjunto hiperbólico es localmente estable, en el siguiente sentido:

Teorema (Estabilidad de Conjuntos Hiperbólicos). *Sea $\Lambda \subset M$ un conjunto hiperbólico aislado para $f \in \mathrm{Diff}(M)$. Cualquier difeomorfismo $g \in \mathrm{Diff}(M)$ suficientemente $\mathscr{C}^1$-cercano a f tiene un conjunto hiperbólico Λ_g cercano a Λ, de forma que $f|_\Lambda$ y $g|_{\Lambda_g}$ son topológicamente conjugados.*

La estabilidad de un conjunto hiperbólico está estrechamente vinculada con la propiedad del sombreado, que analizaremos en el segundo capítulo. Esta propiedad consiste en que cualquier pseudo-órbita del sistema (una sucesión de puntos suficientemente parecida a una órbita real) corresponde con una órbita del sistema, con lo que se puede garantizar que la dinámica dentro del conjunto hiperbólico no cambia bajo pequeñas perturbaciones en el difeomorfismo.

Difeomorfismos de Anosov y Estabilidad Estructural

Cuando toda la variedad es un conjunto hiperbólico, es posible garantizar la estabilidad global de las órbitas del sistema. Los primeros ejemplos con este comportamiento fueron introducidos por Thom: los difeomorfismos en el n-toro inducidos por transformaciones lineales en $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$, para los cuales existe un punto fijo que tiene una intersección homoclínica transversal, y además, una cantidad infinita de puntos periódicos distribuidos de forma densa en el toro (ver figura 5).

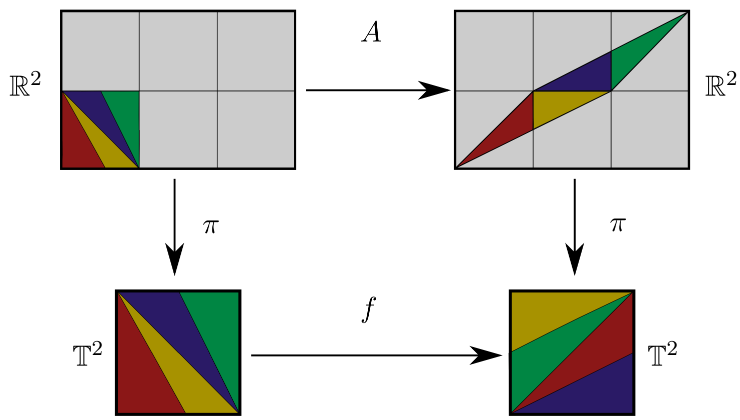

Figura 5: Cualquier matriz $A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ sin valores propios de módulo uno induce un difeomorfismo f en el 2-toro, que tiene un punto fijo hiperbólico con intersecciones homoclínicas transversales.

Anosov mostró en [Ano62] y [Ano63], que los sistemas que poseen una estructura hiperbólica en toda la variedad son estructuralmente estables, por lo que en particular, conforman un conjunto abierto en el espacio de sistemas. Estos sistemas ahora se conocen como sistemas *Anosov*. En el segundo capítulo del trabajo mostraremos el resultado mencionado:

Teorema. *Si $f \in \mathrm{Diff}(M)$ es un difeomorfismo Anosov, f es estructuralmente estable.*

Difeomorfismos Axioma A y Ω-Estabilidad

El comportamiento complicado de un sistema dinámico suele encontrarse en las regiones de la variedad que presentan propiedades de recurrencia, así que resulta fundamental identificar bajo qué condiciones un sistema es estable localmente en estas regiones.

El conjunto *no-errante* Ω_f está formado por los puntos $x \in M$ tales que para cualquier vecindad U que contiene a x se satisface $f^n(U) \cap U \neq \emptyset$ para alguna $n \in \mathbb{N}$. El conjunto no-errante es cerrado, no vacío, y contiene a todos los puntos fijos, periódicos, α-límite, ω-límite y recurrentes; y tiene la propiedad de que cualquier órbita del sistema eventualmente queda atrapada en una vecindad del conjunto, así que resulta fundamental para comprender la evolución del sistema.

Diremos que un difeomorfismo $f \in \mathrm{Diff}(M)$ es Ω-*estable*, si para cualquier $g \in \mathrm{Diff}(M)$ suficientemente $\mathscr{C}^1$-cercano a f se cumple que $f|_{\Omega_f}$ y $g|_{\Omega_g}$ son topológicamente conjugados.

Por otro lado, un difeomorfismo es *Axioma A*, si cumple las siguientes propiedades:

(1) Ω_f es un conjunto hiperbólico.

(2) Ω_f coincide con la cerradura del conjunto de puntos periódicos.

Si $f \in \mathrm{Diff}(M)$ es Axioma A y $g \in \mathrm{Diff}(M)$ es suficientemente $\mathscr{C}^1$-cercano a f, la estabilidad de conjuntos hiperbólicos garantiza que $f|_{\Omega_f}$ y $g|_{\Lambda_g}$ son topológicamente conjugados, con Λ_g un conjunto hiperbólico cercano a Ω_f. Los conjuntos Ω_g y Λ_g no necesariamente coinciden, ya que pequeñas perturbaciones en un difeomorfismo pueden hacer aparecer puntos no-errantes lejanos del conjunto no-errante original. En términos precisos, diremos que $f \in \mathrm{Diff}(M)$ tiene Ω-explosiones, si existe una vecindad U de Ω_f, de forma que en cualquier vecindad de f en $\mathrm{Diff}(M)$ existe un difeomorfismo g con puntos no-errantes fuera de U. En estos términos, y por la argumentación anterior, tenemos la siguiente dicotomía para la Ω-estabilidad:

Si $f \in \mathrm{Diff}(M)$ es Axioma A, cumple una y sólo una de las siguientes propiedades:

(1) f es Ω-estable.

(2) f tiene Ω-explosiones.

En el tercer capítulo del trabajo veremos que el conjunto no-errante de un difeomorfismo Axioma A se puede expresar como la unión disjunta de cerrados invariantes dinámicamente indescomponibles, llamada la *descomposición espectral* del sistema en piezas básicas. Si adicionalmente se satisface que las variedades estables e inestables de las piezas básicas no se encuentran enlazadas formando ciclos cerrados, se puede garantizar la Ω-estabilidad de un difeomorfismo Axioma A. Para controlar el fenómeno de Ω-explosión se usará el concepto de filtración, que consiste en realizar una descomposición de la variedad en regiones que aislan y caracterizan asintóticamente a los conjuntos invariantes, y por tanto, a las piezas básicas del conjunto no-errante. Mostraremos que, en ausencia de ciclos entre piezas básicas del sistema, existe una filtración adaptada al difeomorfismo, llegando al resultado principal del trabajo:

Teorema (Teorema de Ω-estabilidad [Sma70]). *Sea $f \in \mathrm{Diff}(M)$ un difeomorfismo Axioma A sin ciclos. Entonces f es Ω-estable.*

En [PS70], Palis y Smale plantearon adicionalmente, que la propiedad Axioma A sin ciclos era necesaria para garantizar la Ω-estabilidad, y con esto la siguiente conjetura:

Conjetura de Estabilidad. *Sea $f \in \mathrm{Diff}(M)$ Axioma A. Entonces se cumple:*

(1) Las piezas básicas de Ω_f no tienen ciclos $\iff$ f es Ω-estable.

(2) f cumple la condición de transversalidad fuerte $\iff$ f es estructuralmente estable.

En [Sma70], Smale mostró que los difeomorfismos Axioma A sin ciclos son Ω-estables, y posteriormente, Robbin [Rob71] y Robinson [Rob76] mostraron que los difeomorfismos Axioma A que cumplen la condición de transversalidad fuerte son estructuralmente estables. A finales de la década de 1980, Mañé mostró [Mañ88] que un difeomorfismo estructuralmente estable es Axioma A y cumple la condición fuerte de transversalidad, y a partir de este trabajo, Palis obtuvo [Pal88] que un difeomorfismo Ω-estable es Axioma A sin ciclos.

La solución de la conjetura de Palis y Smale se obtuvo como producto de varias décadas de trabajo, y actualmente, la conjetura permanece abierta si se considera la topología $\mathscr{C}^r$ en $\mathrm{Diff}^r(M)$ para cualquier $r > 1$.

En el presente trabajo, se exponen los principales resultados de la teoría de sistemas hiperbólicos, la dinámica de los difeomorfismos Axioma A y su relación con la Ω-estabilidad.

En el primer capítulo se introducen los conceptos básicos: la noción de recurrencia, conjugación topológica, estabildad estructural, y algunas propiedades dinámicas que serán utilizadas a lo largo del trabajo.

En el segundo capítulo se desarrollan los conceptos básicos de la dinámica hiperbólica. Para introducir el caso general de difeomorfismos en variedades, se parte de la noción de hiperbolicidad para transformaciones lineales de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, en donde mostraremos su persistencia y densidad, así como su estabilidad estructural. Lo desarrollado para el caso lineal permitirá demostrar enunciados fundamentales para la descripción del comportamiento de los puntos fijos hiperbólicos de difeomorfismos, como el Teorema de persistencia de puntos periódicos hiperbólicos, el Teorema de estabilidad de puntos fijos hiperbólicos y el Teorema de Hartman-Grobman. En este mismo capítulo se exponen los conceptos generales de los conjuntos hiperbólicos, pasando por la existencia de una métrica adaptada, el criterio de hiperbolicidad usando conos y la persistencia de la hiperbolicidad bajo perturbaciones en el difeomorfismo. Además se presentan los conceptos necesarios en la demostración del Teorema de estabilidad de conjuntos hiperbólicos: las variedades estable e inestable, la estructura de producto local y el sombreamiento de órbitas aproximadas. Por último, se muestra que los difeomorfismos de Anosov conforman un conjunto abierto en $\mathrm{Diff}(M)$ y son estructuralmente estables.

En el tercer y último capítulo, se describe la dinámica de los difeomorfismos Axioma A usando las herramientas desarrolladas en el segundo capítulo, se muestra el Teorema de descomposicicón espectral y se obtiene su estructura de producto local. Finalmente, usando filtraciones se demuestra el Teorema de Ω-estabilidad.

Capítulo 1

Clasificación de Sistemas Dinámicos

Definición. *Un* sistema dinámico topológico *consiste en la acción de un grupo, o semigrupo topológico de de transformaciones G sobre un espacio topológico M (el espacio fase), es decir, una función continua $\Phi : G \times M \to M$, para la que se cumple:*

(1) $\Phi(\mathrm{Id}_G, \cdot) = \mathrm{Id}_M$,

(2) $\Phi(g, \Phi(h, x)) = \Phi(gh, x), \ \forall \ x \in M, g, h \in G.$

En el presente trabajo, analizaremos sistemas dinámicos que se obtienen mediante la acción del grupo $(\mathbb{Z}, +)$, es decir, una función continua $\Phi : \mathbb{Z} \times M \to M$, que cumple las propiedades anteriores. Para cualquier $n \in \mathbb{Z}$, sea $F_n : M \to M$ la función definida por $F_n(x) := \Phi(n, x)$, para cualquier $x \in M$. De las propiedades anteriores, se sigue que $F_n \circ F_m = F_{n+m}$. Además, $F_1 := f$ es continua, y su inversa es la función continua $F_{-1} := f^{-1}$, ya que para cualquier $x \in M$, se tiene:

$$F_1(F_{-1}(x)) = F_0(x) = \Phi(0, x) = x.$$

Para cualquier $j \in \mathbb{Z}$, denotaremos como f^j, a la j-ésima iterada de f si $n \geq 0$, y la j-ésima iterada de f^{-1} si $n < 0$. Entonces se cumple $F_j = f^j$, y con esto, cualquier sistema dinámico en M, dado por la acción de $\mathbb{Z}$, se obtiene mediante la aplicación de un homeomorfismo $f : M \to M$.

1.1. Órbitas y Conjuntos Invariantes

Sean M un espacio topológico y $f : M \to M$ un homeomorfismo. Para cualquier estado inicial del sistema $x \in M$, nos interesa conocer los estados que pueden obtenerse mediante la iteración del homeomorfismo f, así que analizaremos su *órbita futura*:

$$\mathcal{O}_f^+(x) = \{f^n(x) \,|\, n \geq 0\}.$$

Debido a que f es invertible, puede considerarse también también su *órbita pasada* $\mathcal{O}_f^-(x) = \{f^n(x) \,|\, n \leq 0\}$, que desde luego, coincide con el conjunto $\mathcal{O}_{f^{-1}}^+(x)$.

La unión de ambos conjuntos conforma la *órbita completa* del punto, que contiene a todos los estados del sistema que en algún momento pasaron o pasarán por x:

$$\mathcal{O}_f(x) = \{f^n(x) \,|\, n \in \mathbb{Z}\}.$$

Las órbitas conforman unidades básicas para entender la evolución del sistema, así que será de fundamental importancia determinar cuándo un subconjunto de M está compuesto por órbitas completas.

Definición. *Diremos que $A \subset M$ es invariante, si $f(A) = A$.*

Todo conjunto invariante es una unión de órbitas, pues contiene a la órbita completa de cualquiera de sus puntos.

Mediante la aplicación del homeomorfismo, estados iniciales contenidos en un conjunto invariante no pueden salir de ahí, así que conjuntos invariantes disjuntos nos permiten identificar regiones en el espacio de estados que son dinámicamente inaccesibles entre ellas.

Resulta sencillo verificar que la unión, intersección, complemento, interior y cerradura de conjuntos invariantes son también invariantes.

En la siguiente sección clasificaremos los diferentes tipos de órbitas y conjuntos invariantes posibles a partir de sus propiedades asintóticas.

1.2. Conjuntos Límite y Recurrencia

La estructura de espacio topológico en M nos permite analizar diferentes comportamientos asintóticos que pueden presentar los estados de un sistema mediante la aplicación de un homeomorfismo $f : M \to M$. Los resultados expuestos requieren fuertemente la compacidad de M, por lo que nos restringiremos a la clase de las variedades topológicas compactas.

Los comportamientos más simples que se pueden presentar en un sistema corresponden con los estados estacionarios o cíclicos. Diremos que un punto $x \in M$ es *fijo* si $\mathcal{O}_f(x) = \{x\}$, y *periódico*, si para algún $k \geq 1$ se cumple $\mathcal{O}_{f^k}(x) = \{x\}$, en cuyo caso diremos que el periodo de x es el menor número natural k para el que se cumple lo anterior; y le llamaremos *órbita periódica* a su órbita. Denotaremos a los conjuntos de puntos fijos y periódicos, como:

$$\mathrm{Fix}(f) = \{x \in M \mid x \text{ es un punto fijo}\} \text{ y } \mathrm{Per}(f) = \{x \in M \mid x \text{ es un punto periódico}\}.$$

Resulta inmediato de la definición que ambos conjuntos son invariantes, y también, que $\mathrm{Fix}(f) \subset \mathrm{Per}(f)$, mientras que por ser f biyectiva, se cumple que:

$$\mathrm{Per}(f) = \{x \in M \mid \mathcal{O}_f(x) \text{ es un conjunto finito}\}.$$

El comportamiento de los puntos periódicos es muy sencillo de analizar, ya que sus iteraciones no pueden acumularse afuera de su órbita, y sus únicas subsucesiones convergentes son constantes. En general, puede suceder que las iteraciones de un punto se acumulen afuera de su órbita, así que para cualquier $x \in M$, definimos los puntos *ω-límite* y *α-límite* de x, como los puntos que pueden ser aproximados por una subsucesión de la órbita de x hacia el futuro o hacia el pasado respectivamente.

$$\omega_f(x) = \omega(x) = \left\{ y \in M \;\middle|\; \exists \; \{n_j\} \to \infty, \text{ tal que } f^{n_j}(x) \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} y \right\},$$

$$\alpha_f(x) = \alpha(x) = \left\{ y \in M \;\middle|\; \exists \; \{n_j\} \to \infty, \text{ tal que } f^{-n_j}(x) \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} y \right\}.$$

Consideraremos además, los puntos de acumulación de todas las órbitas del sistema:

$$\alpha_f = \bigcup_{x \in M} \alpha(x), \quad \omega_f = \bigcup_{x \in M} \omega(x).$$

Sólo en situaciones muy particulares los límites $\lim_{n\to\pm\infty} f^n(x)$ existen (en cuyo caso, dicho límite es un punto fijo), pero de la compacidad de M se sigue que cualquier órbita cuenta con una subsucesión convergente, y entonces para cualquier $x \in M$, los conjuntos $\omega(x)$ y $\alpha(x)$ resultan no vacíos. Además, ambos son invariantes, ya que por ser f un homeomorfismo, se tiene que $f(\omega(x)) = \omega(f(x)) = \omega(x)$, y lo mismo para $\alpha(x)$.

Tarde o temprano, la órbita de cualquier punto queda encerrada dentro de una vecindad de su conjunto ω-límite, y regresando lo suficiente, vemos que la órbita proviene de una vecindad de su conjunto α-límite.

Definición. *Diremos que un punto $x \in M$ es* recurrente *si $x \in \omega(x)$, o de manera equivalente, para cualquier vecindad U de x, existe $k \geq 1$ tal que $f^k(x) \in U$.*

Las imágenes y preimágenes de un punto recurrente también son recurrentes, ya que para cualquier $x \in \omega(x)$ y $k \in \mathbb{Z}$ se cumple:

$$f^k(x) \in f^k(\omega(x)) = \omega(f^k(x)).$$

Con lo anterior, y por las propiedades básicas de los conjuntos invariantes, podemos garantizar que el *conjunto recurrente*, definido por:

$$\mathrm{Rec}^+(f) = \overline{\{x \in M \mid x \in \omega(x)\}},$$

es cerrado e invariante.

El conjunto recurrente está formado por los estados del sistema que a lo largo del tiempo regresan arbitrariamente cerca de sí mismos.

Es importante señalar que los conjuntos $\mathrm{Rec}^+(f)$ y $\mathrm{Rec}(f) := \overline{\{x \in M \mid x \in \alpha(x) \cap \omega(x)\}}$ no necesariamente coinciden, ya que en general, ω_f puede ser diferente de $\alpha_f = \omega_{f^{-1}}$.

Usando las propiedades de los conjuntos α y ω-límite, tenemos que el *conjunto límite* de f, definido por $L(f) = \overline{\omega_f \cup \alpha_f}$, es no vacío, cerrado e invariante. Resulta inmediato que $\mathrm{Rec}^+(f) \subset L(f)$, ya que cualquier $x \in \omega(x)$ pertenece a ω_f, así que obtenemos las siguientes contenciones:

$$\mathrm{Fix}(f) \subset \overline{\mathrm{Per}(f)} \subset \mathrm{Rec}^+(f) \subset \mathrm{Rec}(f) \subset L(f) \neq \emptyset.$$

Para describir la dinámica de cualquier sistema, resulta fundamental conocer la estructura de su conjunto límite. La siguiente Proposición afirma que los estados avanzados del sistema, obtenidos mediante la iteración de f, se encuentran contenidos en una vecindad de $L(f)$. Lo mismo es válido para los estados primitivos del sistema, obtenidos mediante la iteración de f^{-1}.

Proposición 1.1. *Sea f un homeomorfismo en una variedad compacta M y U una vecindad abierta de $L(f)$. Entonces para todo $x \in M$ existe $N > 0$ tal que $f^n(x) \in U$ si $n \geq N$.*

Demostración. Sean $x \in M$, $L(f) \subset U$ abierto, por contradicción supongamos que para cualquier $n > 0$ existe $m_n > n$ tal que $f^{m_n}(x) \notin U$. Entonces $\{f^{m_n}(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en U^c cerrado, así que podemos extraer una subsucesión convergente a un punto en U^c y con esto un punto límite de una órbita afuera de $L(f)$, que es una contradicción. $\square$

Existe un concepto más general que el de recurrencia, que no considera únicamente el comportamiento asintótico puntual (como sucede cuando $x \in \omega(x)$), sino que considera la asintoticidad de todos los puntos dentro de una vecindad en torno al punto. Esta noción será fundamental para el desarrollo del trabajo y se define a continuación:

Definición. *Un punto $x \in M$ es no-errante si para cualquier vecindad abierta U de x existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U) \cap U \neq \emptyset$. Denotaremos por Ω_f al conjunto de puntos no-errantes de f.*

Resulta inmediato que el *conjunto no-errante* Ω_f es cerrado, ya que su complemento, el *conjunto errante*, es un conjunto abierto.

Proposición 1.2. *Sea f un homeomorfismo en una variedad compacta M. El conjunto Ω_f es invariante y además $\Omega_f = \Omega_{f^{-1}}$.*

Demostración. Sean $x \in \Omega_f$ y V una vecindad en torno a $f(x)$. Desde luego $f^{-1}(V)$ es una vecindad de x, así que existe $k \in \mathbb{N}$, tal que:

$$f^k\left(f^{-1}(V)\right) \cap f^{-1}(V) \neq \emptyset.$$

La imagen de la intersección anterior está contenida en $f^k(V) \cap V$, así que $f^k(V) \cap V \neq \emptyset$, y entonces $f(x) \in \Omega_f$, por lo que $f(\Omega_f) \subset \Omega_f$. Ahora, dada U una vecindad de x, sabemos existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(U) \cap U \neq \emptyset$, así que $f^{-n}\left(f^n(U) \cap U\right)$ es no vacío y está contenido en $U \cap f^{-n}(U)$, por lo que $\Omega_f \subset \Omega_{f^{-1}}$. Usando un argumento idéntico para f^{-1} obtenemos $\Omega_f = \Omega_{f^{-1}}$. Todo lo anterior garantiza:

$$\Omega_f = f\left(f^{-1}(\Omega_f)\right) = f\left(f^{-1}(\Omega_{f^{-1}})\right) \subset f\left(\Omega_{f^{-1}}\right) = f\left(\Omega_f\right),$$

por lo que concluimos $\Omega_f = f(\Omega_f)$. □

Una observación interesante respecto a la propiedad $\Omega_f = \Omega_{f^{-1}}$, es que el mismo resultado no es válido para el conjunto recurrente, en donde recurrencia al futuro no necesariamente implica recurrencia al pasado ($\mathrm{Rec}^+(f) \neq \mathrm{Rec}^+(f^{-1})$).

Ahora mostraremos que todos los conjuntos asintóticos invariantes, mencionados anteriormente, se encuentran contenidos en el conjunto no-errante, que por tanto es no vacío.

Proposición 1.3. *Si f es un homeomorfismo en una variedad compacta M, entonces se cumple que $L(f) \subset \Omega_f$.*

Demostración. Sean $x \in \omega(f)$ y U una vecindad de x. Entonces existe $y \in M$ que cumple $x \in \overline{\mathcal{O}^+(y)}$ y naturales $m > n$, para los que $f^n(y) \in U$ y $f^m(y) \in U$. De lo anterior se sigue $f^{m-n}(U) \cap U \neq \emptyset$ y entonces $x \in \Omega_f$. Hemos obtenido que $\omega(f) \subset \Omega_f$, y por un argumento simétrico $\alpha(f) \subset \Omega_f$. Usando que Ω_f es cerrado concluimos $L(f) \subset \Omega_f$. □

Con esto llegamos a que todos los comportamientos asintóticos anteriores, son casos particulares de la recurrencia local que ocurre en torno a un punto no-errante. Los puntos fijos y periódicos serán llamados formas de recurrencia *triviales*, y todos los demás tipos de recurrencia, *no-triviales*.

$$\overline{\mathrm{Per}(f)} \subset \mathrm{Rec}^+(f) \subset \mathrm{Rec}(f) \subset L(f) \subset \Omega_f. \tag{1.1}$$

Verificar que un punto cumple la condición de no-errante suele ser mucho más complicado que verificar cualquiera de los tipos de recurrencia anteriores, ya que no basta con conocer la órbita completa de un solo punto, sino que se requiere entender el comportamiento bajo iteraciones de todos sus puntos cercanos.

Se pueden dar ejemplos sencillos para los cuales las contenciones en (1.1) son propias. Sin embargo, para diferentes casos especiales hay una gran cantidad de resultados que afirman que algunas de ellas son generalmente igualdades. Por ejemplo: si M es $\mathbb{S}^1$ o el intervalo, se cumple que $\overline{\mathrm{Per}(f)} = \mathrm{Rec}(f)$ [CH80], [JS87]; además, genéricamente con la topología $\mathscr{C}^r$ (ver 1.5) en el espacio de mapeos de clase $\mathscr{C}^r$ en el intervalo (para cualquier $r > 1$), se cumple $\overline{\mathrm{Per}(f)} = \Omega_f$ [You79]; y el resultado más importante de todos en este sentido, es el Teorema de densidad general, que afirma que genéricamente con la topología $\mathscr{C}^1$ en el espacio de difeomorfismos de cualquier variedad compacta, se cumple que $\overline{\mathrm{Per}(f)} = \Omega_f$ [Pug67]. Más adelante, en la Sección 2.29, mostraremos que en presencia de una estructura hiperbólica en toda la variedad, todos los conjuntos invariantes en (1.1) coinciden.

1.3. Propiedades dinámicas de homeomorfismos

Definición. *Sea f un homeomorfismo en una variedad compacta M. Diremos que f es topológicamente transitivo, si existe $x \in M$, tal que $\overline{\mathcal{O}^+(x)} = M$.*

Proposición 1.4. *Sean f un homeomorfismo en una variedad compacta M. Si para cualesquiera abiertos no-vacíos $U, V \subset M$, existe $N > 0$, tal que $f^N(U) \cap V \neq \emptyset$, entonces f es topológicamente transitivo.*

Demostración. Sea $\{V_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una base numerable de M. Bajo las hipótesis anteriores, cada conjunto:

$$\mathcal{V}_i := \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-n}(V_i)},$$

es denso en M, así que $V = \cap_{i\in\mathbb{N}}\mathcal{V}_i$ es no vacío. Sea $y \in V$, para cualquier $i \in \mathbb{N}$ se cumple $\mathcal{O}^+(y) \cap V_i \neq \emptyset$, y entonces, f es topológicamente transitivo. □

Definición. *Sea f un homeomorfismo en una variedad compacta M. Diremos que f es topológicamente mezclante, si para cualesquiera abiertos no-vacíos $U, V \subset M$, existe $N > 0$, tal que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$ para cualquier $n \geq N$.*

Es fácil obtener homeomorfismos topológicamente transitivos que no son topológicamente mezclantes, un ejemplo sencillo de esto es cualquier rotación irracional $R_\alpha : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$. Por el contrario, cualquier homeomorfismo topológicamente mezclante es topológicamente transitivo, y más aún, de la Proposición 1.4, se sigue:

Corolario 1.5. *Sea f un homeomorfismo en una variedad compacta M. Si existe $N > 0$, tal que f^N es topológicamente mezclante, entonces f es topológicamente transitivo.*

1.4. Equivalencia y Conjugación Topológica

Usando los diferentes tipos de comportamientos recurrentes definidos en la sección anterior podemos hacer una descripción precisa de la dinámica de homeomorfismos, con lo que identificaremos diferencias y similitudes entre sistemas.

Por semejanzas entre sistemas entenderemos las propiedades que son invariantes bajo homeomorfismos que preservan la estructura de las órbitas. Consideraremos la siguiente relación entre sistemas:

Definición. *Los homeomorfismos $f : M \to M$ y $g : N \to N$ son topológicamente conjugados, si existe un homeomorfismo $h : M \to N$ para el que $h \circ f = g \circ h$, es decir, que hace conmutar el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & M \arrow[d, "h"] \\ N \arrow[r, "g"'] & N \end{tikzcd}$$

El homeomorfismo h, llamado *conjugación topológica* o simplemente *conjugación*, se puede pensar como un cambio de coordenadas continuo con el cual las funciones resultan idénticas. En caso de que h sea solamente continua y sobreyectiva, diremos que es una *semiconjugación* y que g es un *factor topológico* de f.

En el conjunto $\mathrm{Homeo}(M) = \{f : M \to M \mid f \text{ es un homeomorfismo}\}$, la conjugación topológica define una relación de equivalencia, ya que la función identidad, las inversas y las composiciones de conjugaciones, son también conjugaciones. Las clases de equivalencia en $\mathrm{Homeo}(M)$ con la relación de conjugación, a las que llamaremos *clases de conjugación*, particionan a $\mathrm{Homeo}(M)$ en subconjuntos de sistemas que diremos poseen la misma dinámica topológica. Las conjugaciones topológicas inducen una biyección entre el conjunto de órbitas de los homeomorfismos conjugados, ya que las iteraciones de funciones conjugadas son también conjugadas, es decir, que para cualesquiera f y g conjugadas, y $k \in \mathbb{Z}$, se cumple:

$$h \circ f^k = g^k \circ h,$$

por lo que los puntos periódicos constituyen un invariante bajo conjugación topológica.

Proposición 1.6. *Sean $f : M \to M$ y $g : N \to N$ dos homeomorfismos topológicamente conjugados por h. Entonces $\mathrm{Per}(g) = h(\mathrm{Per}(f))$, y más aún, si x es un punto periódico de f, su imagen bajo h es un punto periódico de g con el mismo periodo.*

Demostración. Sea $x \in \mathrm{Per}(f)$ con periodo j, entonces cumple $g^j(h(x)) = h(f^j(x)) = h(x)$, lo que significa que $h(x)$ es un punto periódico de g con periodo menor o igual que j. Esto garantiza que $h(\mathrm{Per}(f)) \subset \mathrm{Per}(g)$. Ahora, sea $y \in \mathrm{Per}(g)$ con periodo k, con la argumentación anterior para h^{-1} obtenemos que $h^{-1}(y)$ es un punto periódico de f con periodo menor o igual que k. Esto garantiza que $h^{-1}(\mathrm{Per}(g)) \subset \mathrm{Per}(f)$, y entonces $\mathrm{Per}(g) \subset h(\mathrm{Per}(f))$, así que los periodos de los puntos periódicos coinciden y $\mathrm{Per}(g) = h(\mathrm{Per}(f))$. □

Para demostrar lo anterior únicamente usamos que las conjugaciones son biyectivas y preservan las órbitas, sin embargo, tomando en cuenta su continuidad, mostraremos que la clase de homeomorfismo de cada uno de los conjuntos invariantes vistos en la sección anterior es un invariante bajo conjugación topológica.

Proposición 1.7. *Sean $f : M \to M$ y $g : N \to N$ dos homeomorfismos topológicamente conjugados por h. Entonces se cumple que:*

(1) $h(\omega_f) = \omega_g$ *y* $h(\alpha_f) = \alpha_g$*, en particular,* $h(\omega(x)) = \omega(h(x))$ *y* $h(\alpha(x)) = \alpha(h(x))$,

(2) $h(L(f)) = L(g)$,

(3) $h\left(\mathrm{Rec}^+(f)\right) = \mathrm{Rec}^+(g)$,

(4) $h(\Omega_f) = \Omega_g$.

Demostración. Todos estos resultados se siguen de que h es una conjugación, junto con propiedades básicas de continuidad. Sólo mostraremos el inciso (*4*), ya que los demás se obtienen de una forma casi idéntica.

Sean $x \in \Omega_f$ y U una vecindad de $h(x)$. Debido a que $h^{-1}(U)$ es una vecindad de x, existe $n \in \mathbb{N}$ de forma que $f^n\left(h^{-1}(U)\right) \cap h^{-1}(U) \neq \emptyset$, así que por ser h^{-1} una conjugación, $h^{-1}\left(g^n(U)\right) \cap h^{-1}(U)$ también es no vacío, y ya que su imagen bajo h se encuentra en $(g^n(U)) \cap U$, obtenemos que $h(x) \in \Omega_g$. El regreso es idéntico, y se concluye $h(\Omega_f) = \Omega_g$. □

La Proposición anterior muestra que las conjugaciones topológicas preservan las propiedades asintóticas de las órbitas, por lo que resulta natural clasificar a los diferentes sistemas mediante esta noción de equivalencia.

En algunos casos, resulta que dos sistemas comparten estructura de órbitas en una pequeña región del espacio, no cumpliendo ser topológicamente conjugados, es por esto que usaremos también, la noción de *conjugación local*.

Definición. *Los homeomorfismos $f : M \to M$ y $g : N \to N$ son localmente conjugados en torno a $p \in M$ y $q \in N$, si existen vecindades U de p, V de q y una conjugación topológica h entre $f|_U$ y $g|_V$.*

1.5. Topologías en Espacios de Difeomorfismos y Estabilidad

En esta sección introduciremos una topología en el espacio de sistemas para definir la estabilidad estructural de sistemas dinámicos diferenciables. La estabilidad caracteriza a los sistemas que bajo pequeñas perturbaciones no cambian su estructura global de órbitas, es decir, son los sistemas que son topológicamente conjugados a cualquier otro sistema que se encuentre suficientemente cercano.

Un sistema es estable, si está en el interior topológico de su clase de conjugación.

Usando diferentes topologías en el espacio de sistemas pueden obtenerse nociones no equivalentes de estabilidad. Primero veremos que con la topología de la convergencia uniforme en el conjunto de homeomorfismos de una variedad compacta, la noción de estabilidad es vacía; y posteriormente, introduciremos la distancia $\mathscr{C}^r$, con $r \geq 1$, en el espacio de difeomorfismos de clase $\mathscr{C}^r$ de una variedad riemanniana compacta, llegando al concepto de estabilidad estructural.

La topología de la convergencia uniforme ($\mathscr{C}^0$)

Cualquier variedad compacta es metrizable, así que podemos tomar una función distancia $d : M \times M \to \mathbb{R}$, y definir la distancia $\mathscr{C}^0$ en $\mathrm{Homeo}(M)$, como:

$$d_0(f, g) := \sup_{x \in M} d(f(x), g(x)) = \max_{x \in M} d(f(x), g(x)).$$

Esta distancia induce la topología de la convergencia uniforme en $\mathrm{Homeo}(M)$, equivalente a la topología compacto-abierta, ya que M es compacta (ver [Kel75] §7 Teo. 11). La *topología compacto-abierta* tiene como subbase a la colección de subconjuntos de $\mathrm{Homeo}(M)$, que para algún $K \subset M$ compacto y $U \subset M$ abierto, cumplen:

$$\mathscr{N}(K, U) = \{f \in \mathrm{Homeo}(M) \mid f(K) \subset U\}.$$

Así que tomando intersecciones finitas de subconjuntos de esta forma, podemos obtener cualquier elemento de la base.

Veremos que la topología $\mathscr{C}^0$ genera una noción vacía de estabilidad, debido a que con perturbaciones $\mathscr{C}^0$ arbitrariamente pequeñas siempre puede alterarse la estructura global de las órbitas. La Proposición 1.6 de la sección anterior garantiza que una condición necesaria para garantizar la estabilidad de $f \in \text{Homeo}(M)$ es que exista una vecindad $\mathscr{U}$ de f, donde la cardinalidad de $\text{Per}(g)$ sea la misma para cualquier $g \in \mathscr{U}$.

Cualquier punto periódico p de $f \in \text{Homeo}(M)$ con periodo m corresponde con un punto de intersección entre la gráfica de f^m y la diagonal en $M \times M$, así que para cualquier $\varepsilon > 0$, podemos tomar dos abiertos $V \subset W$ que contengan a $f^{-1}(p)$, y construir una función g que coincida con f afuera de W y que adentro de V esté definida por $\varphi \circ f$, donde φ es un homeomorfismo que coincide con f^{-1} en V, y afuera de W es la identidad (Ver figura 1.1).

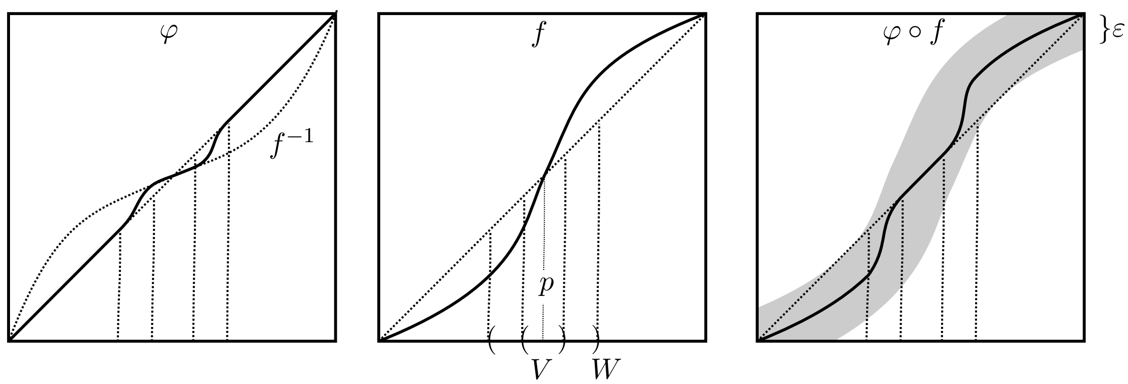

Figura 1.1: A partir de un homeomorfismo f con un punto fijo p y para cualquier $\varepsilon > 0$, siempre es posible, usando una función de pegado continuo φ, obtener un homeomorfismo $g = \varphi \circ f$ que coincida con f afuera de W y que sea ε-cercano a f con la distancia $\mathscr{C}^0$, teniendo una cantidad no numerable de puntos fijos en V.

En la Sección 1.2 vimos que debido a la compacidad de M, cualquier homeomorfismo f cumple $\Omega_f \neq \emptyset$. Por lo anterior podemos tomar $x \in \Omega_f$, y para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un punto en $B_{\varepsilon/2}(x)$ que en algún momento posterior regresa a la vecindad. De la misma forma que en el caso anterior, usando una función de pegado continuo, podemos construir un homeomorfismo ε-cercano a f con un punto periódico. Con los dos resultados anteriores, y por la condición necesaria para estabilidad que se desprende de la Proposición 1.6, concluimos que usando la distancia $\mathscr{C}^0$, ningún homeomorfismo es estable.

Lo anterior nos motiva a introducir una distancia entre sistemas más fina que la distancia $\mathscr{C}^0$, que además de considerar la cercanía entre las imágenes, considera la cercanía entre las derivadas para sistemas diferenciables.

Las topologías $\mathscr{C}^k$, $k \geq 1$

Sean M una variedad riemanniana compacta de clase $\mathscr{C}^\infty$, y $\text{Diff}^{\,r}(M)$ su espacio de difeomorfismos de clase $\mathscr{C}^r$, $r \geq 1$. Denotaremos por $\text{Diff}^{\,\infty}(M)$, al conjunto de difeomorfismos en M que son de clase $\mathscr{C}^r$ para todo $r \geq 1$; y por $\text{Diff}(M)$ a los de clase $\mathscr{C}^1$. Desde luego, se cumple que:

$$\text{Diff}^{\,\infty}(M) \subset \ldots \subset \text{Diff}^{\,r}(M) \subset \ldots \subset \text{Diff}(M).$$

Sea $k \leq r$. Definiremos una estructura de espacio topológico en $\text{Diff}^r(M)$ usando la topología $\mathscr{C}^k$, también llamada topología de Whitney. Las vecindades de dicha topología se expresan de la siguiente forma:

Sean $f \in \text{Diff}^r(M)$ y (ϕ, U), (ψ, V) dos cartas en la variedad. Sean $K \subset U$ un compacto tal que $f(K) \subset V$, y $0 < \varepsilon \leq \infty$. Definimos una vecindad subbásica de f en la topología $\mathscr{C}^k$

$$\mathscr{N}^k(f, (\phi, U), (\psi, V), K, \varepsilon),$$

como el conjunto de difeomorfismos g en $\text{Diff}^r(M)$, tales que $g(K) \subset V$, y además:

$$\|D^i(\psi \circ f \circ \phi^{-1})(x) - D^i(\psi \circ g \circ \phi^{-1})(x)\| < \varepsilon,$$

para todo $x \in \phi(K)$ y $i = 1, \ldots, k$. Así, cualquier vecindad de la topología $\mathscr{C}^k$ se obtiene como la intersección finita de conjuntos con esta forma.

Usando la topología $\mathscr{C}^r$, con $r \geq 1$, el espacio $\text{Diff}^r(M)$ es localmente conexo [Ban97], tiene una base numerable [GG73], y es completamente metrizable [Hir76]. La distancia que induce a la topología $\mathscr{C}^r$ es llamada la distancia $\mathscr{C}^r$, y satisface que dos difeomorfismos son cercanos, si sus imágenes y sus derivadas hasta orden r, están uniformemente cerca.

Lema 1.8. *Cualquier vecindad de $f \in \text{Diff}^r(M)$ en la topología $\mathscr{C}^j$ contiene a una vecindad de f en la topología $\mathscr{C}^k$, si $j \leq k \leq r$.*

Demostración. Basta verificar que la afirmación es válida para vecindades subbásicas. Sea $\mathscr{N}^j(f, (\phi, U), (\psi, V), K, \varepsilon)$ una vecindad subbásica de $f \in \text{Diff}^r(M)$ en la topología $\mathscr{C}^j$. Sea $g \in \mathscr{N}^k(f, (\phi, U), (\psi, V), K, \varepsilon)$, entonces para cualquier $i = 1, \ldots, j, \ldots, k$, $x \in \phi(K)$, se cumple:

$$\|D^i(\psi \circ f \circ \phi^{-1})(x) - D^i(\psi \circ g \circ \phi^{-1})(x)\| < \varepsilon,$$

así que en particular $g \in \mathscr{N}^j(f, (\phi, U), (\psi, V), K, \varepsilon)$, y entonces:

$$\mathscr{N}^k(f, (\phi, U), (\psi, V), K, \varepsilon) \subset \mathscr{N}^j(f, (\phi, U), (\psi, V), K, \varepsilon).$$

□

Estabilidad Estructural

Con la topología $\mathscr{C}^k$ en $\text{Diff}^r(M)$, definimos la $\mathscr{C}^k$-estabilidad estructural, con $r \geq k \geq 1$.

Definición. *Un difeomorfismo $f \in \text{Diff}^r(M)$ es $\mathscr{C}^k$-estructuralmente estable ($k \leq r$), si existe una vecindad $\mathscr{U}$ de f en la topología $\mathscr{C}^k$, de forma que cualquier $g \in \mathscr{U}$ es topológicamente conjugado a f.*

Diremos que $f \in \text{Diff}^r(M)$ posee una propiedad *estable bajo pequeñas perturbaciones* con la topología $\mathscr{C}^k$ ($k \leq r$), si existe una vecindad $\mathscr{U}$ de f en la topología $\mathscr{C}^k$, de forma que cualquier $g \in \mathscr{U}$ posee esa misma propiedad. En este sentido, los sistemas estructuralmente estables son precisamente los sistemas para los que todas sus propiedades invariantes bajo conjugación, son también estables bajo pequeñas perturbaciones.

Cuando discutimos la topología de la convergencia uniforme, mostramos que para cuaquier homeomorfismo, la cardinalidad del conjunto de puntos periódicos no es estable bajo pequeñas perturbaciones con la topología $\mathscr{C}^0$, lo que resultó ser un obstáculo para la estabilidad en ese contexto. Para cualquier topología $\mathscr{C}^r$, con $r \geq 1$, esto ya no sucede, pues a diferencia del caso $r = 0$, en general no es posible obtener puntos periódicos adicionales sólo perturbando en una vecindad de un punto periódico.

Explicaremos por qué en el caso de la distancia $\mathscr{C}^r$ con $r > 0$ no puede emplearse el mismo procedimiento usado en la creación de puntos periódicos que se empleó para $r = 0$. Consideremos $f \in \operatorname{Diff}^r(M)$ y $p \in \operatorname{Per}(f)$ de periodo m. Entonces se cumple que la gráfica de f^m en $M \times M$ intersecta a la diagonal, en el punto $(p, p) \in M \times M$. En caso de que dicha intersección sea transversal, para obtener puntos periódicos en un una vecindad de p, se necesita usar funciones de pegado suave que conforme disminuye el radio de la vecindad, la norma de la derivada aumenta, así que en este caso no es posible obtener puntos periódicos adicionales mediante la composición con una función de pegado suave que sea tan cercana como se quiera a la identidad, con la topología $\mathscr{C}^r$, para cualquier $r \geq 1$.

Los puntos periódicos para los que la gráfica intersecta transversalmente a la diagonal coinciden con los llamados puntos periódicos hiperbólicos, que estudiaremos en la Sección 2.2 del siguiente capítulo. En la Proposición 2.12 mostraremos que para perturbaciones suficientemente pequeñas, no es posible obtener puntos periódicos adicionales en la vecindad de un punto periódico hiperbólico.

Podria parecer natural hacer más rígida la noción de equivalencia para el caso de difeomorfismos, empleando conjugaciones diferenciables del siguiente modo:

Definición. *Dos difeomorfismos $f, g \in \operatorname{Diff}^r(M)$ son $\mathscr{C}^j-$conjugados (con $j \leq r$) si existe un difeomorfismo $h : M \to N$ de clase $\mathscr{C}^j$, tal que $h \circ f = g \circ h$.*

A continuación veremos que los valores propios de la diferencial en un punto periódico son invariantes bajo conjugación, por lo que la clasificación por conjugaciones suaves es demasiado fina, y difeomorfismos con dinámica muy parecida pertenecen a clases de conjugación distintas. Si $f, g \in \operatorname{Diff}^r(M)$ son topológicamente conjugados, entonces para cualquier $n \in \mathbb{Z}$ se cumple que $f^n = h^{-1} \circ g^n \circ h$, y si h es una conjugación suave, con la regla de la cadena obtenemos que para cualquier punto $p \in M$:

$$Df_p^n = Dh^{-1}_{g^n h(p)} \circ Dg^n_{h(p)} \circ Dh_p,$$

así que, para $p \in \operatorname{Per}(f)$ con periodo n, necesariamente $h(p) \in \operatorname{Per}(g)$ tiene periodo n, y cumple $(Dh_p)^{-1} = (Dh^{-1})_{h(p)}$, entonces:

$$Df_p^n = (Dh_p)^{-1} Dg^n_{h(p)} Dh_p. \tag{1.2}$$

Esta relación indica que las transformaciones lineales Df_p^n y $Dg^n_{h(p)}$ son similares, y en particular, poseen los mismos valores propios.

Esto hace que la clasificación mediante conjugaciones suaves sea muy restrictiva. Usando perturbaciones $\mathscr{C}^j$ arbitrariamente pequeñas, siempre es posible modificar los valores propios de la diferencial en un punto periódico, así que ningún difeomorfismo con puntos periódicos resulta estable si empleamos conjugaciones suaves.

Tomando en cuenta la discusión anterior, resulta natural emplear la noción de equivalencia por conjugación topológica para analizar la estabilidad de difeomorfismos.

El Lema 1.8 afirma que si $j \leq k \leq r$, cualquier vecindad de $f \in \operatorname{Diff}^r(M)$ en la topología $\mathscr{C}^j$, contiene a una vecindad de f en la topología $\mathscr{C}^k$. De lo que se sigue el siguiente Corolario.

Corolario 1.9. *Si $f \in \operatorname{Diff}^r(M)$ es $\mathscr{C}^j$-estructuralmente estable, entonces también es $\mathscr{C}^k$-estructuralmente estable para cualquier $j \leq k \leq r$.*

A partir de ahora consideraremos exclusivamente la estabilidad en la topología $\mathscr{C}^1$, ya que por el Corolario anterior, al obtener condiciones suficientes para garantizar $\mathscr{C}^1$-estabilidad, obtendremos así mismo condiciones suficientes para $\mathscr{C}^k$-estabilidad para cualquier $k \geq 1$.

Capítulo 2

Hiperbolicidad y Estabilidad Estructural

En este capítulo se introduce el concepto de hiperbolicidad, con el que se estudiará a los difeomorfismos estructuralmente estables sobre variedades compactas. Esta noción, a través de condiciones sobre la derivada de la transformación, permite garantizar que la estructura de órbitas del sistema se preserva bajo pequeñas perturbaciones.

Como una aproximación a la dinámica local en torno a puntos fijos de difeomorfismos, analizaremos la estabilidad en $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, el grupo de las transformaciones lineales invertibles, que corresponden con los sistemas dinámicos lineales sobre $\mathbb{R}^n$.

2.1. Hiperbolicidad y Estabilidad Lineal

En esta sección abordaremos la hiperbolicidad en el caso de transformaciones lineales invertibles, y mostraremos que las transformaciones hiperbólicas coinciden con las estructuralmente estables en $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, obteniendo además que el conjunto de transformaciones hiperbólicas es abierto y denso.

Podemos obtener una noción de cercanía para las transformaciones en $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, si para cualquier $T \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, consideramos la norma usual en $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, inducida por $\|\cdot\|$, la norma estándar en $\mathbb{R}^n$.

$$\|T\| := \max_{\|v\|=1} \|Tv\|.$$

Con lo que la distancia d_0 entre dos transformaciones lineales $T_1, T_2 \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, es precisamente la norma de su diferencia:

$$d_0(T_1, T_2) = \|T_1 - T_2\|.$$

Sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ todos los valores propios distintos de T, al más grande valor absoluto de ellos le llamaremos el *radio espectral* de la transformación y lo denotaremos $r(T)$. Con métodos básicos de Análisis es posible obtener que el radio espectral de una transformación lineal satisface la fórmula de Gelfand, que lo caracteriza a través del comportamiento de las iteraciones de la transformación:

$$r(T) = \lim_{k\to\infty} \|T^k\|^{1/k}.$$

Si consideramos los subespacios propios generalizados asociados a los valores propios de la transformación:

$$E_\lambda = \{v \in \mathbb{R}^n \mid (T - \lambda I)^m v = 0, \text{ para algún } m \geq 1\},$$

siempre es posible expresar a $\mathbb{R}^n$ como la suma directa:

$$\mathbb{R}^n = E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_k},$$

y agrupando dichos subespacios en la forma:

$$\mathbb{E}^s = \bigoplus_{|\lambda_i|<1} E_{\lambda_i}, \quad \mathbb{E}^u = \bigoplus_{|\lambda_i|>1} E_{\lambda_i} \quad y \quad \mathbb{E}^c = \bigoplus_{|\lambda_i|=1} E_{\lambda_i},$$

obtenemos una descomposición de $\mathbb{R}^n$ como la suma directa de subespacios T-invariantes,

$$\mathbb{E}^s \oplus \mathbb{E}^u \oplus \mathbb{E}^c = \mathbb{R}^n,$$

que llamaremos *subespacios estable, inestable y central* respectivamente.

Los subespacios de esta descomposición cumplen que mediante la aplicación iterada de la transformación T, cada uno posee una dinámica cualitativamente distinta. La siguiente proposición afirma que para los subespacios estable e inestable es posible dar estimaciones precisas de dicho comportamiento bajo iteraciones.

Proposición 2.1. *Sea $T \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Existen $\lambda \in (0,1)$, $c > 0$, tal que $\forall\ n \geq 0$, se cumple:*

$$\|T^n v\| \leq c\lambda^n \|v\|, \text{ si } v \in \mathbb{E}^s \quad y \quad \|T^{-n} v\| \leq c\lambda^n \|v\|, \text{ si } v \in \mathbb{E}^u.$$

Demostración. La fórmula de Gelfand afirma que $r(T) = \lim_{k\to\infty} \|T^k\|^{1/k}$, y por la construcción de $\mathbb{E}^s$ resulta inmediato que $r(T|_{\mathbb{E}^s}) < 1$, así que:

$$\lim_{k\to\infty} \|(T|_{\mathbb{E}^s})^k\| = \lim_{k\to\infty} r(T|_{\mathbb{E}^s})^k = 0,$$

por lo que podemos tomar n_0 suficientemente grande de forma que:

$$\|(T|_{\mathbb{E}^s})^{n_0}\| < \mu < 1.$$

Ahora, sean $K = \max\{\|T^i\| : 0 \leq i \leq n_0\}$ y $\lambda = \mu^{1/n_0}$, entonces dado $n \geq 0$ podemos hacer $n = mn_0 + r$, con $0 \leq r \leq n_0$, y por último:

$$\|(T|_{\mathbb{E}^s})^n\| \leq \|(T|_{\mathbb{E}^s})^{mn_0}\| \cdot \|(T|_{\mathbb{E}^s})^r\| \leq \mu^m K \leq \frac{K}{\mu}\lambda^n = c\lambda^n.$$

Llegamos a que para cualquier $v \in \mathbb{E}^s$, se cumple $\|T^n v\| \leq c\lambda^n \|v\|$. La demostración para el caso $v \in \mathbb{E}^u$ es análoga y se omite. □

Esta Proposición garantiza que cualquier vector en $\mathbb{E}^s$ converge al origen mediante la aplicación de T, y del mismo modo, cualquier vector en $\mathbb{E}^u$ converge al origen cuando se aplica T^{-1}; sin embargo, puede ser que sólo se observe contracción en la norma después de iterar varias veces la transformación, ya que la constante c puede ser grande. En caso de que $\mathbb{E}^c = \{0\}$, de la linealidad de la transformación se sigue que cualquier elemento de $\mathbb{R}^n$ converge a alguno de los subespacios invariantes conforme se le aplica la transformación o su inversa. A la existencia de una descomposicion de $\mathbb{R}^n$ como suma directa de subespacios estable e inestable le llamaremos *hiperbolicidad*.

Definición. *$T \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ es hiperbólica si existen $\lambda \in (0,1)$, $c > 0$ y subespacios invariantes $\mathbb{E}^s$ y $\mathbb{E}^u$, de forma que para cualquier $k \geq 0$ se cumple:*

(1) $\mathbb{R}^n = \mathbb{E}^s \oplus \mathbb{E}^u$,

(2) $\|T^k v\| \leq c\lambda^k \|v\|$, *si* $v \in \mathbb{E}^s$ *y* $\|T^{-k} v\| \leq c\lambda^k \|v\|$, *si* $v \in \mathbb{E}^u$.

La definición de hiperbolicidad no depende de la norma empleada, ya que si las desigualdades son válidas para alguna norma, como cualquier otra norma $\| \ \|^*$ en $\mathbb{R}^n$ es equivalente, existen constantes c_1 y c_2 para las que:

$$c_1 \| \ \|^* \leq \| \ \| \leq c_2 \| \ \|^*,$$

así que cuando T es hiperbólica, se cumple $\|T^n v\| \leq c\lambda^n \|v\|$ para cualquier $v \in \mathbb{E}^s$, y por tanto:

$$c_1 \|T^n v\|^* \leq \|T^n v\| \leq c\lambda^n \|v\| \leq c_2 c \lambda^n \|v\|^*,$$

así que:

$$\|T^n v\|^* \leq (c \cdot c_2 / c_1) \lambda^n \|v\|^*.$$

Así que para la norma $\| \ \|^*$, la desigualdad de la definición de hiperbolicidad también es válida. Haciendo un razonamiento idéntico para $\mathbb{E}^u$ llegamos a que la definición de hiperbolicidad no depende de la norma con la que se verifiquen sus condiciones.

De la Proposición 2.1, se sigue que es posible garantizar la hiperbolicidad de una transformación lineal con una propiedad muy sencilla de verificar:

Corolario 2.2. *Una transformación $T \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ es hiperbólica si no posee valores propios con módulo unitario.*

Siempre es posible escoger una norma para la que la constante c en la definición de hiperbolicidad sea igual a 1. Dicha norma es llamada *adaptada* a la transformación.

Proposición 2.3 (Existencia de Norma Adaptada). *Sea $T \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ una transformación hiperbólica. Existe una norma $\| \ \|'$ y $\lambda' \in (0,1)$ de forma que:*

$$\|Tv\|' \leq \lambda' \|v\|', \ \textit{si } v \in \mathbb{E}^s \quad \textit{y} \quad \|T^{-1} v\|' \leq \lambda' \|v\|', \ \textit{si } v \in \mathbb{E}^u.$$

Demostración. Sean $c > 0$ y $\lambda \in (0,1)$ que cumplan las desigualdades de la Proposición 2.1 para una cierta norma $\| \ \|$. Sean $\lambda' \in (\lambda, 1)$ y $n_0 > 0$ suficientemente grande de forma que $c\lambda^{n_0} < (\lambda')^{n_0}$. Definiendo normas $\| \ \|_s$ y $\| \ \|_u$ en $\mathbb{E}^s$ y $\mathbb{E}^u$ respectivamente, dadas por:

$$\| \cdot \|_s = \sum_{j=0}^{n_0 - 1} (\lambda')^{-j} \|T^j(\cdot)\| \ , \ \| \cdot \|_u = \sum_{j=0}^{n_0 - 1} (\lambda')^{-j} \|T^{-j}(\cdot)\|,$$

podemos definir una norma en $\mathbb{R}^n$ mediante $\|v\|' = \max\{\|v_s\|_s, \|v_u\|_u\}$, donde $v = v_s + v_u$ es la descomposición única de cualquier vector obtenida gracias a que el espacio es la suma directa de $\mathbb{E}^s$ y $\mathbb{E}^u$. Además, para $v \in \mathbb{E}^s$ se cumple que:

$$\|Tv\|_s = \sum_{j=0}^{n_0 - 1} (\lambda')^{-j} \|T^{j+1} v\| = \sum_{j=0}^{n_0 - 2} (\lambda')^{-j} \|T^{j+1} v\| + (\lambda')^{-n_0 + 1} \|T^{n_0} v\| \leq$$

$$\leq \lambda' \left(\sum_{j=1}^{n_0 - 1} (\lambda')^{-j} \|T^j v\| \right) + (\lambda')^{-n_0 + 1} c\lambda^{n_0} \|v\| <$$

$$< \lambda'\|v\|_s - \|v\| + (\lambda')^{-n_0+1}(\lambda')^{n_0}\|v\| = \lambda'\|v\|_s + (\lambda'-1)\|v\| < \lambda'\|v\|_s.$$

Así que:

$$\|Tv\|' = \|Tv\|_s \leq \lambda'\|v\|_s \leq \lambda'\|v\|'.$$

Análogmente, para $v \in \mathbb{E}^u$, se cumple que $\|T^{-1}v\|' \leq \lambda'\|v\|'$. □

Resulta inmediato, que usando la distancia inducida por la norma adaptada, las transformaciones $T|_{\mathbb{E}^s}$ y $T^{-1}|_{\mathbb{E}^u}$ son contracciones, así que la constante λ', obtenida en la Proposición 2.3, será llamada *constante de contracción* de T.

Estabilidad Estructural en $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$

En el contexto de sistemas dinámicos lineales es posible obtener un panorama bastante completo de los diferentes comportamientos posibles. En esta parte mostraremos que la hiperbolicidad y la estabilidad estructural son propiedades equivalentes, y además, que el conjunto de transformaciones hiperbólicas $\mathscr{H}(\mathbb{R}^n)$ es abierto y denso en $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

El hecho de que $\mathscr{H}(\mathbb{R}^n)$ sea abierto es una consecuencia inmediata de la variación continua de los valores propios. Si tomamos $T \in \mathscr{H}(\mathbb{R}^n)$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ de módulo uno, el polinomio característico $\mathcal{P}_T$ de T no puede anularse en λ, y como esto mismo es válido para cualquier $F \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ suficientemente cercana a T, se obtiene que el conjunto $\mathscr{H}(\mathbb{R}^n)$ es abierto en $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. (Una demostración detallada de esto puede encontrarse en [PM82]).

Ahora mostraremos que arbitrariamente cerca de cualquier transformación en $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, existe otra que es hiperbólica.

Teorema 2.4. *$\mathscr{H}(\mathbb{R}^n)$ es denso en $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.*

Demostración. Sean $T \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ y $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sus valores propios, mostraremos que arbitrariamente cerca de T existe una transformación lineal hiperbólica, para lo cual consideraremos una transformación perturbada de la forma $S = T + \mu\,\mathrm{Id}$, con $\mu \in \mathbb{R}$. Si $\mathcal{P}_T$ es el polinomio característico de T, entonces $\mathcal{P}_T(\lambda_i) = 0$ para cualquier $i = 1, \ldots, n$, y además:

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_T(\lambda_i) &= \det(T - \lambda_i\mathrm{Id}) = \det(T + \mu\,\mathrm{Id} - \mu\,\mathrm{Id} - \lambda_i\mathrm{Id})\\ &= \det([T + \mu\,\mathrm{Id}] - [\lambda_i + \mu]\mathrm{Id}) = \mathcal{P}_S(\lambda_i + \mu) = 0.\end{aligned}$$

Así que $\lambda_1 + \mu, \ldots, \lambda_n + \mu$ son los valores propios de $T + \mu\,\mathrm{Id}$. Sean $\lambda_{i_1}, \ldots, \lambda_{i_r}$ los valores propios de T que no se encuentran en $\mathbb{S}^1$, definimos:

$$\delta_1 = \min\{|\lambda_1|, \ldots, |\lambda_n|\}, \quad \delta_2 = \min\{|1 - \lambda_{i_1}|, \ldots, |1 - \lambda_{i_r}|\},$$

$$\delta_3 = \min\{|\alpha| : \alpha + i\beta \text{ es un valor propio de } T, \text{ con } \alpha^2 + \beta^2 = 1 \text{ y } \alpha \neq 0\}.$$

Claramente $\delta_1, \delta_2, \delta_3 > 0$, así que para cualquier $\varepsilon > 0$ podemos tomar $\mu < \min\{\varepsilon, \delta_1, \delta_2, \delta_3\}$, y la transformación $S = T + \mu\,\mathrm{Id}$ cumplirá que:

$$\|S - T\| = \|\mu\,\mathrm{Id}\| < \varepsilon.$$

Los valores propios de S se encuentran fuera de $\mathbb{S}^1$, y por tanto, S es una transformación lineal hiperbólica. Encontramos una transformación lineal hiperbólica arbitrariamente cercana a $T \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, por tanto concluimos que $\mathscr{H}(\mathbb{R}^n)$ es denso en $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. □

El conjunto $\mathscr{H}(\mathbb{R}^n)$ coincide con el conjunto de transformaciones estructuralmente estables en $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, el siguiente teorema afirma que toda transformación hiperbólica es estructuralmente estable.

Teorema 2.5 (Estabilidad de Transformaciones Lineales Hiperbólicas). *Sea T una transformación lineal hiperbólica, existe $\varepsilon > 0$, de forma que si $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ cumple $\|S - T\| < \varepsilon$, entonces S y T son topológicamente conjugadas.*

Encontrar conjugaciones topológicas entre transformaciones suele ser un problema bastante complicado. En este caso, para obtener la conjugación buscada usaremos el Teorema del punto fijo de Banach (ver [Pal07]) para un cierto operador de contracción construido en el espacio de funciones continuas y acotadas en $\mathbb{R}^n$. El punto fijo de este operador resulta ser precisamente una función que satisface la relación de conjugación. Es importante recalcar que la contracción de este operador se obtiene a partir de la contracción de la transformación hiperbólica presente en el subespacio estable.

Lema 2.6. *Sean E un espacio de Banach, $L : E \to E$ una transformación lineal y $G : E \to E$ un isomorfismo, que cumplen $\|L\| \leq a < 1$ y $\|G^{-1}\| \leq a < 1$, entonces:*

(a) $\mathrm{Id} + L$ *es un isomorfismo y* $\left\|(\mathrm{Id} + L)^{-1}\right\| \leq 1/(1-a)$,

(b) $\mathrm{Id} + G$ *es un isomorfismo y* $\left\|(\mathrm{Id} + G)^{-1}\right\| \leq a/(1-a)$.

Demostración. (a) Para $y \in E$ arbitrario, consideraremos la función $u : E \to E$ dada por $u(x) = y - L(x)$. Esta función es una contracción, ya que para cualesquiera $x_1, x_2 \in E$, se cumple que $u(x_1) - u(x_2) = L(x_1 - x_2)$. Entonces se cumple:

$$\|u(x_1) - u(x_2)\| \leq \|L\| \|x_1 - x_2\| \leq a\|x_1 - x_2\|.$$

El Teorema del punto fijo de Banach, garantiza que existe un único $x \in E$, para el que

$$x = u(x) = y - L(x),$$

y por tanto, un único $x \in E$ para el que $(L + \mathrm{Id})(x) = y$. Esto es válido para cualquier $y \in E$, así que $L + \mathrm{Id}$ es biyectiva, y por tanto, un isomorfismo. Además,

$$\left\|(L + \mathrm{Id})^{-1}\right\| = \sup_{\|y\|=1} \left\|(L + \mathrm{Id})^{-1}(y)\right\|,$$

así que tomando $x \in E$, de forma que $(L + \mathrm{Id})(x) = L(x) + x = y$, con $\|y\| = 1$, resulta:

$$\left\|(L + \mathrm{Id})^{-1}(y)\right\| = \|x\| = \|y - L(x)\| \leq \|y\| + \|L(x)\| \leq 1 + a\|x\|, \tag{2.1}$$

y entonces,

$$\|x\| - a\|x\| \leq 1, \text{ y por tanto, } \|x\| \leq \frac{1}{1-a}. \tag{2.2}$$

Las desigualdades (2.1) y (2.2), garantizan:

$$\left\|(\mathrm{Id} + L)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{1-a}.$$

(b) El inciso anterior, junto con la condición $\|G^{-1}\| \leq a < 1$, garantiza que $\mathrm{Id} + G^{-1}$ es un isomorfismo, así que $\mathrm{Id} + G = G(\mathrm{Id} + G^{-1})$ también es un isomorfismo, y su inversa cumple:

$$\begin{aligned}\left\|(\mathrm{Id} + G)^{-1}\right\| &= \left\|(\mathrm{Id} + G^{-1})^{-1}G^{-1}\right\| \leq \left\|(\mathrm{Id} + G^{-1})^{-1}\right\| \cdot \left\|G^{-1}\right\| \\ &\leq \frac{1}{1-a} \cdot a = \frac{a}{1-a}.\end{aligned}$$

□

Denotaremos por $\mathrm{C}_b(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ al espacio de funciones continuas y acotadas de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$, y simplemente por $\mathrm{C}_b(\mathbb{R}^n)$, cuando $n = m$. El espacio $\mathrm{C}_b(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ es un espacio de Banach con la norma $\mathscr{C}^0$. Esta norma se define para cualquier $f \in \mathrm{C}_b(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, como:

$$\|f\| = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \|f(x)\|.$$

Cualquier transformación lineal hiperbólica $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ determina una descomposición en suma directa $\mathbb{R}^n = \mathbb{E}^s \oplus \mathbb{E}^u$, y a su vez, permite descomponer a $\mathrm{C}_b(\mathbb{R}^n)$ como la suma directa:

$$\mathrm{C}_b(\mathbb{R}^n) = \mathrm{C}_b(\mathbb{R}^n, \mathbb{E}^s) \oplus \mathrm{C}_b(\mathbb{R}^n, \mathbb{E}^u),$$

ya que, usando las proyecciones canónicas $\pi_s : \mathbb{E}^s \oplus \mathbb{E}^u \to \mathbb{E}^s$ y $\pi_u : \mathbb{E}^s \oplus \mathbb{E}^u \to \mathbb{E}^u$, cualquier función $u \in \mathrm{C}_b(\mathbb{R}^n)$ puede escribirse de forma única como $u = u_s + u_u$, donde $u_s = \pi_s \circ u \in \mathrm{C}_b(\mathbb{R}^n, \mathbb{E}^s)$ y $u_u = \pi_u \circ u \in \mathrm{C}_b(\mathbb{R}^n, \mathbb{E}^u)$.

Lema 2.7. *Sea $A \in \mathscr{H}(\mathbb{R}^n)$, existe $\varepsilon > 0$ de forma que si $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathrm{C}_b(\mathbb{R}^n)$ tienen constantes de Lipschitz menores o iguales que ε, entonces $A + \varphi_1$ y $A + \varphi_2$ son topológicamente conjugadas.*

Demostración. Mostraremos la existencia de un homeomorfismo $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, para el que:

$$h \circ (A + \varphi_1) = (A + \varphi_2) \circ h. \tag{2.3}$$

Si en la ecuación anterior consideramos una conjugación de la forma $h = \mathrm{Id} + u$, con $u \in \mathrm{C}_b(\mathbb{R}^n)$, resulta que:

$$Au - u(A + \varphi_1) = \varphi_1 - \varphi_2(\mathrm{Id} + u). \tag{2.4}$$

Si encontramos una función $u \in \mathrm{C}_b(\mathbb{R}^n)$ que satisface la ecuación anterior, obtendremos a su vez una conjugación topológica entre $A + \varphi_1$ y $A + \varphi_2$. Considérense los siguientes tres operadores:

$$\mathscr{L}, \mathscr{F}, \mathscr{A} : \mathrm{C}_b(\mathbb{R}^n) \to \mathrm{C}_b(\mathbb{R}^n),$$

que para $u \in \mathrm{C}_b(\mathbb{R}^n)$, están definidos por:

$$\mathscr{L}(u) = Au - u(A + \varphi_1),$$

$$\mathscr{F}(u) = u - A^{-1}u(A + \varphi_1),$$

$$\mathscr{A}(u) = Au.$$

Claramente $\mathscr{A}$ es invertible y $\mathscr{L} = \mathscr{A} \circ \mathscr{F}$, así que $\mathscr{L}$ será invertible si y sólo si $\mathscr{F}$ lo es. Los subespacios $\mathbb{E}^s$ y $\mathbb{E}^u$ son invariantes bajo A^{-1}, y también, $\mathrm{C}_b(\mathbb{R}^n, \mathbb{E}^s)$ y $\mathrm{C}_b(\mathbb{R}^n, \mathbb{E}^u)$ son invariantes bajo $\mathscr{F}$, así que podemos hacer:

$$\mathscr{F} = \mathscr{F}^s \oplus \mathscr{F}^u, \text{ donde } \mathscr{F}^s = \mathscr{F}|_{\mathrm{C}_b(\mathbb{R}^n, \mathbb{E}^s)} \text{ y } \mathscr{F}^u = \mathscr{F}|_{\mathrm{C}_b(\mathbb{R}^n, \mathbb{E}^u)}.$$

Para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño, el Teorema de la función inversa [Lan02] garantiza que $A + \varphi_1$ es un homeomorfismo, así que el operador definido por:

$$u_s \mapsto A^{-1}\left[u_s(A + \varphi_1)\right],$$

es invertible, y su operador inverso:

$$u_s \mapsto A|_{\mathbb{E}^s}\left[u_s(A + \varphi_1)^{-1}\right],$$

es una contracción con norma menor que un cierto valor $a < 1$. Ahora, el inciso (b) del Lema 2.6, garantiza que $\mathscr{F}^s$ es invertible y su inversa cumple $\left\|(\mathscr{F}^s)^{-1}\right\| \le \frac{a}{1-a}$, mientras que el inciso (a) afirma que $\mathscr{F}^u$ es invertible, y que su inversa cumple $\left\|(\mathscr{F}^u)^{-1}\right\| \le \frac{1}{1-a}$. Con lo que llegamos a que $\mathscr{F} = \mathscr{F}^s \oplus \mathscr{F}^u$ es invertible, y por tanto, también $\mathscr{L}$ lo es, y su inversa satisface:

$$\|\mathscr{L}^{-1}\| = \|\mathscr{F}^{-1}\mathscr{A}^{-1}\| \le \frac{\|A^{-1}\|}{1-a}.$$

La existencia de $\mathscr{L}^{-1}$ garantiza que el operador $\mu : \mathrm{C}_b(\mathbb{R}^n) \to \mathrm{C}_b(\mathbb{R}^n)$, dado por:

$$\mu(u) = \mathscr{L}^{-1}[\varphi_1 - \varphi_2(\mathrm{Id} + u)],$$

está bien definido. Para cualesquiera $u_1, u_2 \in \mathrm{C}_b(\mathbb{R}^n)$, se cumple:

$$\begin{aligned}\|\mu(u_1) - \mu(u_2)\| &= \left\|\mathscr{L}^{-1}[\varphi_2(\mathrm{Id} + u_2) - \varphi_2(\mathrm{Id} + u_1)]\right\| \\ &\le \left\|\mathscr{L}^{-1}\right\| \cdot \|\varphi_2(\mathrm{Id} + u_2) - \varphi_2(\mathrm{Id} + u_1)\| \le \frac{\left\|A^{-1}\right\|}{1-a}\varepsilon\|u_2 - u_1\|,\end{aligned}$$

ya que la constante de Lipschitz de φ_2 es menor que ε.

Haciendo $\varepsilon < \frac{1-a}{\|A^{-1}\|}$, resulta que μ es una contracción, y el Teorema del punto fijo de Banach garantiza que existe un único punto fijo de μ en $\mathrm{C}_b(\mathbb{R}^n)$, es decir, una única función u para la que $u = \mu(u)$. Dicha función satistace por tanto la siguiente igualdad:

$$u = \mathscr{L}^{-1}[\varphi_1 - \varphi_2(\mathrm{Id} + u)], \text{ que es equivalente a } \mathscr{L}(u) = \varphi_1 - \varphi_2(\mathrm{Id} + u),$$

$$\text{así que cumple, } Au - u(A + \varphi_1) = \varphi_1 - \varphi_2(\mathrm{Id} + u).$$

Hemos demostrado que existe una única función $u \in \mathrm{C}_b(\mathbb{R}^n)$ que satisface la ecuación (2.4), y por lo tanto, que $h = \mathrm{Id} + u$ satisface la relación de conjugación (2.3):

$$(\mathrm{Id} + u)(A + \varphi_1) = (A + \varphi_2)(\mathrm{Id} + u).$$

Concluiremos la demostración viendo que h es efectivamente un homeomorfismo. Un argumento simétrico al anterior, garantiza que la ecuación:

$$(A + \varphi_1)(\mathrm{Id} + v) = (\mathrm{Id} + v)(A + \varphi_2), \tag{2.5}$$

se satisface para una única función $v \in \mathrm{C}_b(\mathbb{R}^n)$. De las dos ecuaciones anteriores, se obtiene:

$$(\mathrm{Id} + u)(\mathrm{Id} + v)(A + \varphi_2) = (\mathrm{Id} + u)(A + \varphi_1)(\mathrm{Id} + v) = (A + \varphi_2)(\mathrm{Id} + u)(\mathrm{Id} + v). \tag{2.6}$$

Tomando $w \in \mathrm{C}_b(\mathbb{R}^n)$, dada por $w = v + u[\mathrm{Id} + v] \in \mathrm{C}_b(\mathbb{R}^n)$, obtenemos:

$$(\mathrm{Id} + u)(\mathrm{Id} + v) = \mathrm{Id} + v + u[\mathrm{Id} + v] = \mathrm{Id} + w.$$

La ecuación (2.6) garantiza entonces que $(\mathrm{Id} + w)(A + \varphi_2) = (A + \varphi_2)(\mathrm{Id} + w)$, mientras que por (2.1), existe una única $w \in \mathrm{C}_b(\mathbb{R}^n)$ que satisface dicha relación. Desarrollando lo anterior, obtenemos $w(A + \varphi_2) = (A + \varphi_2)(w)$, pero esto sólo es posible si $\mathrm{Id} + w = w$.

Con todo lo anterior obtenemos $(\mathrm{Id} + u)(\mathrm{Id} + v) = \mathrm{Id} + w = \mathrm{Id}$, y por un argumento simétrico, $(\mathrm{Id} + v)(\mathrm{Id} + u) = \mathrm{Id}$. Esto garantiza que $(\mathrm{Id} + v)$ y $(\mathrm{Id} + u)$ son inversas entre sí, y por lo tanto, h es un homeomorfismo. □

Usando el Lema anterior, mostraremos una versión local del Teorema 2.5, y posteriormente verificaremos que la conjugación local obtenida, puede extenderse a una global.

Proposición 2.8 (Estabilidad Local de Transformaciones Hiperbólicas). *Sea A una transformación lineal hiperbólica, existe $\delta > 0$ tal que si $B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ cumple $\|B - A\| < \delta$, entonces B y A son localmente conjugadas en torno al origen.*

Demostración. Sean $A \in \mathscr{H}(\mathbb{R}^n)$, $B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ y $\alpha : \mathbb{R} \to [0, 1]$ de clase $\mathscr{C}^\infty$, con derivada acotada y $0 \leq \alpha(t) \leq 1$ para $1 < |t| < 2$, que cumpla las siguientes propiedades:

$$\alpha(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } |t| \leq 1, \\ 0 & \text{si } |t| \geq 2, \end{cases}$$

Además, sea $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función dada por:

$$\varphi(x) = \alpha(\|x\|) \cdot (B - A)(x).$$

Claramente, esta función cumple:

$$\begin{cases} \varphi(x) = (B - A)(x) & \text{si } \|x\| \leq 1, \\ \varphi(x) = 0 & \text{si } \|x\| \geq 2. \end{cases}$$

Así que para cualquier $x \in \mathbb{R}^n$, es posible garantizar que su derivada cumple:

$$\begin{aligned} \|D\varphi(x)\| &\leq \|\alpha'(\|x\|)\| \cdot \|(B - A)(x)\| + \|\alpha(\|x\|)\| \cdot \|(B - A)(x)\| \\ &\leq K \cdot \|(B - A)(x)\| + \|(B - A)(x)\|, \end{aligned}$$

donde $K = \sup\{\alpha'(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$. Por lo anterior sabemos que:

$$\|D\varphi\| \leq K \cdot \|B - A\| + \|B - A\|,$$

así que para $\varepsilon > 0$ arbitrario, podemos tomar $\|B - A\| < \delta < \varepsilon/2K$, y garantizar que

$$\|D\varphi\| \leq K \cdot \|B - A\| + \|B - A\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2K} < \varepsilon.$$

Lo anterior garantiza que tomando B suficientemente cerca de A, la constante de Lipschitz de φ se puede hacer tan pequeña como se quiera, con lo que el Lema 2.7 garantiza la existencia de un homeomorfismo h que conjuga A y $A + \varphi$. Por último, como $(A + \varphi)(x) = B(x)$ si $\|x\| \leq 1$, tenemos que h conjuga localmente en torno al origen, a B con A. □

Es importante mencionar que el Teorema del punto fijo de Banach garantiza que la conjugación h, construida en la demostración, es única entre los homeomorfismos de la forma $\mathrm{Id} + u$, con $u \in \mathrm{C}_b(\mathbb{R}^n)$, es decir, es el único homeomorfismo a distancia finita de la identidad que conjuga $A + \varphi_1$ y $A + \varphi_2$; sin embargo, en general no se puede garantizar que el homeomorfismo que las conjuga sea único.

Usando la Proposición anterior, demostraremos el resultado principal de esta sección, que afirma la estabilidad global de las transformaciones hiperbólicas.

Demostración. (Teorema 2.5 Estabilidad de Transformaciones Hiperbólicas)
Sean $A \in \mathscr{H}(R^n)$ y $\delta > 0$ como en el Teorema 2.1, que además garantice que cualquier $B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, que cumpla $\|B - A\| < \delta$, es hiperbólica. Entonces sabemos que existen

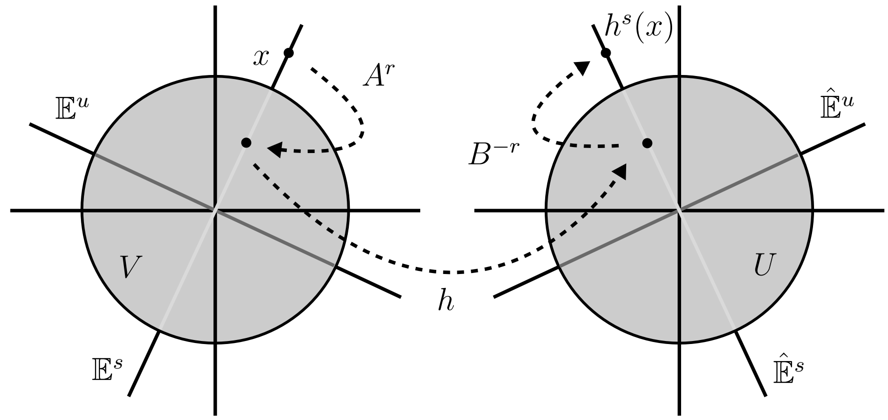

Figura 2.1: Construcción de una conjugación topológica global entre transformaciones lineales hiperbólicas localmente conjugadas.

vecindades U y V en torno al origen, junto con un homeomorfismo $h : V \to U$ que cumple $h \circ A = B \circ h$. Mostraremos que este homeomorfismo puede ser extendido a una conjugación entre A y B en todo $\mathbb{R}^n$.

La transformación A tiene asociados subespacios estable e inestable $\mathbb{E}^s$ y $\mathbb{E}^u$, y del mismo modo, cualquier $B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ que cumpla $\|B - A\| < \delta$ tiene asociados subespacios estable e inestable, a los que llamaremos $\hat{\mathbb{E}}^s$ y $\hat{\mathbb{E}}^u$ respectivamente. Sean:

$$V^s = V \cap \mathbb{E}^s, \quad V^u = V \cap \mathbb{E}^u, \quad U^s = U \cap \hat{\mathbb{E}}^s, \quad U^u = U \cap \hat{\mathbb{E}}^u.$$

La continuidad de h garantiza que $h(V^s) = U^s$ y $h(V^u) = U^u$. Para cualquier $x \in \mathbb{E}^s$ existe $r \in \mathbb{N}$ para el que $A^r(x) \in V^s$, así que podemos construir, como se ve en la figura 2.1, un homeomorfismo $h^s : \mathbb{E}^s \to \hat{\mathbb{E}}^s$ que conjuga a las transformaciones $A_s = A|_{\mathbb{E}^s}$ y $B_s = B|_{\hat{\mathbb{E}}^s}$, de la siguiente forma:

$$h^s(x) = \begin{cases} h(x) & \text{si } x \in V^s, \\ B^{-r} h A^r(x) & \text{si } x \in \mathbb{E}^s - V^s. \end{cases}$$

La definición de h^s es independiente de la elección de r, ya que $h : V \to U$ es una conjugación entre A y B.

Como h^s coincide con h en V^s, necesariamente conjuga a A_s con B_s en V^s, mientras que afuera de V^s el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{E}^s \arrow[r, "A^r"] \arrow[d, "A|_{\mathbb{E}^s}"'] & V^s \arrow[r, "h"] \arrow[d, "A|_{V^s}"'] & U^s \arrow[r, "B^{-r}"] \arrow[d, "B|_{U^s}"] & \hat{\mathbb{E}}^s \arrow[d, "B|_{\hat{\mathbb{E}}^s}"] \\
\mathbb{E}^s \arrow[r, "A^r"'] & V^s \arrow[r, "h"'] & U^s \arrow[r, "B^{-r}"'] & \hat{\mathbb{E}}^s
\end{tikzcd}$$

es una superposición de diagramas conmutativos, y por tanto, es conmutativo. De esto que:

$$(B^{-r} h A^r) A_s = B_s (B^{-r} h A^r).$$

Con lo anterior se sigue que h^s es, efectivamente, una conjugación en todo $\mathbb{E}^s$:

$$h^s \circ A_s = B_s \circ h^s.$$

De forma simétrica, podemos obtener un homeomorfismo $h^u : \mathbb{E}^u \to \hat{\mathbb{E}}^u$, que sirva de conjugación entre $A|_{\mathbb{E}^u}$ y $B|_{\hat{\mathbb{E}}^u}$, con lo que definiendo $\tilde{h} : \mathbb{E}^s \oplus \mathbb{E}^u \to \mathbb{E}^s \oplus \mathbb{E}^u$, dada por $\tilde{h}(x_s + x_u) = h^s(x_s) + h^u(x_u)$, obtenemos un homeomorfismo que conjuga a A con B en todo $\mathbb{R}^n$. $\square$

Con todo lo anterior, hemos obtenido que los sistemas lineales hiperbólicos en $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, son estructuralmente estables y abundantes, ya que $\mathscr{H}(R^n)$ es abierto y denso en $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

2.2. Hiperbolicidad Puntual

En esta sección introduciremos la hiperbolicidad para puntos periódicos de difeomorfismos en variedades riemannianas compactas, y utilizando las herramientas desarrolladas para el caso lineal, describiremos el comportamiento local en torno a los puntos fijos hiperbólicos, mostrando que la dinámica del sistema es localmente conjugada a la de su parte lineal.

Sean M una variedad riemanniana compacta y $f \in \mathrm{Diff}(M)$. Para cualquier $p \in M$, la diferencial de f en p es un isomorfismo entre espacios vectoriales:

$$(Df)_p : T_pM \to T_{f(p)}M.$$

Así que para cualquier $p \in \mathrm{Per}(f)$ de periodo m, $(Df^m)_p$ es un isomorfismo de T_pM, por lo que resulta natural definir la *hiperbolicidad* de un punto periódico, de la siguiente forma:

Definición. *Un punto $p \in \mathrm{Per}(f)$ de periodo m es hiperbólico, si $(Df^m)_p : T_pM \to T_pM$ es una transformación lineal hiperbólica.*

Desde luego, un punto periódico de periódo m es hiperbólico de f, si y sólo si es un punto fijo hiperbólico de f^m.

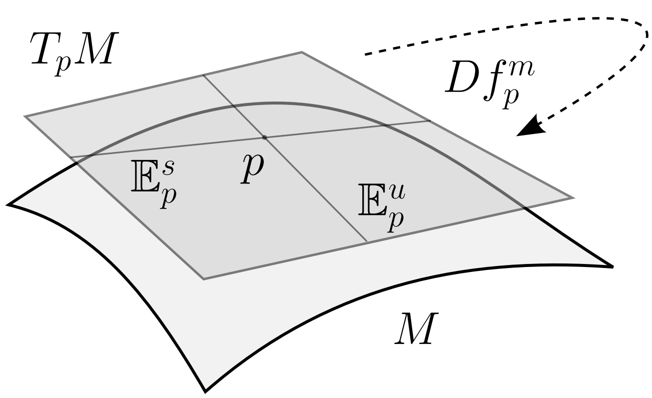

Figura 2.2: Descomposición en subespacios estable e inestable del espacio tangente en un punto periódico hiperbólico.

Para que un punto $p \in \mathrm{Per}(f)$ de periodo m sea hiperbólico, es necesario que el espacio tangente de M en p, tenga una descomposición $T_pM = \mathbb{E}_p^s \oplus \mathbb{E}_p^u$ en subespacios $(Df^m)_p$-invariantes, donde se satisfagan las desigualdades que definen a la hiperbolicidad lineal usando la norma inducida por la métrica riemanniana, es decir, deben existir $\lambda \in (0,1)$ y $C > 0$, de forma que para cualquier $n \geq 0$, se cumple:

$$\|(Df_p^m)^n v\| \leq C\lambda^n \|v\|, \text{ si } v \in \mathbb{E}_p^s,$$

y
$$\|(Df_p^m)^n v\| \leq C\lambda^n \|v\|, \text{ si } v \in \mathbb{E}_p^u.$$

Como vimos en la sección anterior, una manera equivalente de determinar que una transformación lineal es hiperbólica es verificar que sus valores propios tienen módulo diferente de uno, así que para garantizar la hiperbolicidad de un punto $p \in \operatorname{Per}(f)$ de periodo m, también es posible verificar que $(Df^m)_p$ cumple esa misma propiedad.

A continuación mostraremos un resultado bastante conocido, y utilizado, en el contexto de dinámica no-lineal. Este resultado garantiza que el comportamiento dinámico de un difeomorfismo en torno a cualquier punto fijo hiperbólico es localmente conjugado al de su parte lineal.

Teorema 2.9 (Hartman-Grobman). *Sean $f \in \operatorname{Diff}(M)$ y $p \in M$ un punto fijo hiperbólico. Entonces f y Df_p son localmente topológicamente conjugadas, es decir, existen vecindades V de p, U del origen en T_pM y un homeomorfismo $h : U \to V$, tal que:*
$$h \circ Df_p = f \circ h.$$

Supongamos que $\dim(M) = k$. Debido al caracter local del problema, podemos escoger una carta de la variedad $\varphi : W \subset M \to X \subset \mathbb{R}^k$, que cumpla $\varphi(p) = 0$, y suponer sin pérdida de generalidad, que f es un difeomorfismo en $\mathbb{R}^k$ que tiene al punto fijo hiperbólico en el origen.

La demostración del Teorema se hará usando el Lema 2.7, que garantiza la existencia de una conjugación entre una transformación lineal hiperbólica, y la función que se obtiene al sumarle una función en $\mathrm{C}_b(\mathbb{R}^k)$ con constante de Lipschitz suficientemente pequeña. El siguiente Lema muestra que en una vecindad suficientemente pequeña en torno a un punto fijo, cualquier difeomorfismo difiere de su parte lineal por una función de esta forma.

Lema 2.10. *Sea $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ un difeomorfismo de clase $\mathscr{C}^1$, que cumple $f(0) = 0$. Para cualquier $\varepsilon > 0$, existen una vecindad U del origen, y una extensión de $f|_U$ a $\mathbb{R}^k$ de la forma $Df_0 + \varphi$, donde $\varphi \in \mathrm{C}_b(\mathbb{R}^k)$ tiene constante de Lipschitz menor o igual que ε.*

Demostración. Sea $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clase $\mathscr{C}^\infty$, que cumple $0 \leq \alpha(t) \leq 1$ para $0 < t < \frac{1}{2}$ y que está definida por:
$$\alpha(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \leq \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{si } t \geq 1. \end{cases}$$
Dada $K > 2$, podemos construir la función de forma que $\|\alpha'(t)\| < K$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

La función $\psi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$, definida por $\psi = f - Df_0$, es continua y cumple $\psi(0) = 0$ y $D\psi(0) = 0$. Entonces, para cualquier $\varepsilon > 0$, existe $r > 0$ tal que si x se encuentra en $B_r(0)$, entonces $\|D\psi(x)\| < \varepsilon/2K$. Usando las dos funciones anteriores, definimos $\varphi \in \mathrm{C}_b(\mathbb{R}^k)$ como $\varphi(x) = \alpha(\|x\|/r)\psi(x)$.

Las funciones φ y ψ coinciden en $B_{r/2}(0)$, así que, $Df_0 + \varphi$ es una extensión de $f|_{B_{r/2}(0)}$. Para concluir la demostración sólo falta verificar que la constante de Lipschitz de φ es menor o igual que ε. Para cualesquiera $x_1, x_2 \in B_r$, se cumple que:
$$\begin{aligned} \|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)\| &= \|\alpha(\|x_1\|/r)\psi(x_1) - \alpha(\|x_2\|/r)\psi(x_2)\| \\ &= \|[\alpha(\|x_1\|/r) - \alpha(\|x_2\|/r)]\psi(x_1) + \alpha(\|x_2\|/r)[\psi(x_1) - \psi(x_2)]\| \\ &\leq (K\|x_1 - x_2\|/r)(\varepsilon/2K)\|x_1\| + (\varepsilon/2K)\|x_1 - x_2\| \\ &\leq \varepsilon\|x_1 - x_2\|, \end{aligned}$$

mientras que para $x_1 \in B_r$ y $x_2 \notin B_r$, resulta que:

$$\begin{aligned}\|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)\| &= \|\alpha(\|x_1\|/r)\psi(x_1) - \alpha(\|x_2\|/r)\psi(x_2)\| \\ &= \|[\alpha(\|x_1\|/r) - \alpha(\|x_2\|/r)]\psi(x_1) + \alpha(\|x_2\|/r)[\psi(x_1) - \psi(x_2)]\| \\ &\leq (K\|x_1 - x_2\|/r)(\varepsilon/2K)\|x_1\| + 0 \leq \frac{\varepsilon}{2}\|x_1 - x_2\|,\end{aligned}$$

y por último, tomando $x_1, x_2 \notin B_r$, tenemos que:

$$\|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)\| = 0 \leq \varepsilon\|x_1 - x_2\|.$$

Por lo tanto, φ posee una constante de Lipschitz menor o igual que ε. □

Usando el Lema anterior, pasamos a la demostración del Teorema 2.9.

Demostración. (Teorema 2.9 Hartman-Grobman). Sea $\varepsilon > 0$ como en el Lema 2.7. El Lema 2.10 afirma que existen una vecindad U del origen, y $\varphi \in \mathrm{C}_b(\mathbb{R}^k)$ con una constante de Lipschitz menor o igual que ε, de forma que $Df_0 + \varphi$ es una extensión de $f|_U$ a todo $\mathbb{R}^k$. El Lema 2.7 garantiza la existencia de un homeomorfismo que conjuga a Df_0 y $Df_0 + \varphi$, pero $Df_0 + \varphi$ coincide con f en U, así que que f y Df_0 son localmente conjugados en U. □

En el contexto del Lema 2.7, argumentamos que la conjugación obtenida es única solamente si nos restringimos a los homeomorfismos que se encuentran a distancia finita de la identidad. Incluso con esta restricción, en general la conjugación obtenida con el Teorema de Hartman-Grobman (2.9) no es única, ya que depende de la función φ utilizada para extender $f|_U$ a $\mathbb{R}^k$.

Resulta natural preguntar para qué situaciones es posible garantizar que f y Df_0 son localmente $\mathscr{C}^1$-conjugadas, ya que considerando únicamente conjugaciones topológicas, no es posible hacer una clasificación total de los comportamientos lineales posibles. Por ejemplo, dos transformaciones lineales hiperbólicas de tipo espiral y nodo, poseen la misma estructura de órbitas y son topológicamente conjugadas, sin embargo, no pueden tener los mismos valores propios,[1] y por la argumentación que se dió al final del primer capítulo, tampoco pueden ser $\mathscr{C}^1$-conjugadas.

Desde sus trabajos iniciales, Hartman [Har60] mostró que existen sistemas que no son $\mathscr{C}^1$-linealizables, y recientemente, van Strien [VS90] obtuvo que para difeomorfismos de clase $\mathscr{C}^2$, siempre es posible encontrar una linealización Hölder continua, que es diferenciable en el punto fijo.

El Teorema 2.9 tiene fuertes implicaciones que ayudan a describir las propiedades de los puntos fijos hiperbólicos. Sabemos que cualquier punto fijo hiperbólico posee una vecindad en donde el difeomorfismo es topológicamente conjugado a una transformación lineal hiperbólica, así que en particular, es el único punto fijo en esa vecindad; mientras que por la compacidad de M, se sigue que sólo hay una cantidad finita de puntos fijos hiperbólicos en M. Más adelante, combinando Hartman-Grobman con la estabilidad de transformaciones hiperbólicas, obtendremos la estabilidad local de los puntos fijo hiperbólicos (Teorema 2.12). Primero mostraremos que los puntos periódicos hiperbólicos no desaparecen bajo pequeñas perturbaciones en el difeomorfismo, para lo que usaremos el Teorema del punto fijo de Banach, ahora para una contracción que se puede definir en una vecindad de cualquier punto periódico hiperbólico.

[1] Para una espiral los valores propios son números complejos con partes real eimaginaria no triviales, mientras que para un nodo, los valores propios son estrictamente reales.

Teorema 2.11 (Persistencia de Puntos Periódicos Hiperbólicos). *Sea* $f \in \mathrm{Diff}(M)$ *con un punto periódico hiperbólico* p. *Entonces cualquier* $g \in \mathrm{Diff}(M)$ *suficientemente* $\mathscr{C}^1$-*cercano a* f *tiene un punto periódico hiperbólico cercano a* p.

Demostración. Nuevamente, por ser una afirmación local, podemos usar una carta de la variedad $\varphi : V \subset M \to U \subset \mathbb{R}^k$, que cumpla $\varphi(p) = 0$ y suponer sin pérdida de generalidad que f es un difeomorfismo local en U, que tiene un punto periódico hiperbólico el origen.

Sean m el periodo de p, y $F : U \to U$ una función definida por $F = f^m - \mathrm{Id}$. Por ser el origen un punto periódico hiperbólico, $(Df^m)_0$ no tiene valores propios de módulo uno, así que $(DF)_0$ no tiene valores propios nulos y por el Teorema de la función inversa, es invertible. Sea $\varepsilon > 0$, para cualquier difeomorfismo g que sea suficientemente $\mathscr{C}^1$-cercano a f, se cumple que:

$$f^m = g^m + H,$$

con H una función ε-cercana a la función nula en la topología $\mathscr{C}^1$, es decir,

$$\text{máx}\{\|H\|, \|DH\|\} \leq \varepsilon,$$

donde $\|\cdot\|$ denota la norma usual del supremo.

Cualquier punto en $\mathrm{Per}(g)$ de periodo menor o igual a m, corresponde con una solución de la ecuación:

$$x = g^m(x) = (f^m - H)(x) = (F + \mathrm{Id} - H)(x),$$

que podemos reescribir como $(F - H)(x) = 0$, y también, como $x = F^{-1}H(x)$; así que los puntos fijos de $F^{-1}H$ en U, corresponden con puntos periódicos de g de periodo menor o igual a m.

Mostraremos que $F^{-1}H$ es una contracción. Sea $\left\|DF^{-1}\right\| = L$, entonces para $x, y \in U$:

$$\|F^{-1}H(x) - F^{-1}H(y)\| \leq \left\|D(F^{-1}H)\right\| \|x - y\| \leq \varepsilon L\|x - y\|, \tag{2.7}$$

y además,

$$\|F^{-1}H(0)\| \leq \left\|DF^{-1}\right\| \cdot \|H(0)\| = L\|H(0)\| \leq \varepsilon L. \tag{2.8}$$

Usando las desigualdades (2.7) y (2.8), obtenemos:

$$\|F^{-1}H(x)\| \leq \|F^{-1}H(x) - F^{-1}H(0)\| + \|F^{-1}H(0)\| \leq \varepsilon L\|x\| + \varepsilon L,$$

así que tomando $\varepsilon \leq \frac{R}{L(1+R)}$, es posible garantizar que para cualquier $x \in U$ con $\|x\| \leq R$:

$$\|F^{-1}H(x)\| \leq \frac{R\|x\|}{1+R} + \frac{R}{1+R} \leq R,$$

y por tanto el disco $B_R(0) = \{x \in U : \|x\| \leq R\}$ es mapeado en si mismo por $F^{-1}H$, que además resulta ser una contracción, ya que:

$$\|F^{-1}H(x) - F^{-1}H(y)\| \leq \frac{R}{1+R}\|x - y\|.$$

Finalmente, el Teorema de punto fijo de Banach garantiza que $F^{-1}H$ posee un único punto fijo en $B_R(0)$, o lo que es lo mismo, $x = g^m(x)$, y por lo tanto, g tiene un punto periódico de periodo menor o igual a m cercano al origen. El punto periódico obtenido siempre puede tomarse hiperbólico, ya que si f y g son suficientemente $\mathscr{C}^1$-cercanos, podemos hacer $\|Df^m - Dg^m\|$ tan pequeño como se quiera, así que el Teorema 2.5 garantiza en particular, que Dg^m es una transformación hiperbólica. $\square$

Teorema 2.12 (Estabilidad Local de Puntos Fijos Hiperbólicos). *Sea $f \in \mathrm{Diff}(M)$ con un punto fijo hiperbólico p. Existe $\varepsilon > 0$ de forma que cualquier $g \in \mathrm{Diff}(M)$ a distancia $\mathscr{C}^1$ menor que ε de f, tiene un punto fijo hiperbólico q cercano a p, y existen vecindades en torno a los respectivos puntos fijos, donde f y g son localmente conjugadas.*

Demostración. El Teorema 2.11 garantiza que cualquier $g \in \mathrm{Diff}(M)$, suficientemente cercano a f con la distancia $\mathscr{C}^1$, posee un punto fijo hiperbólico q cercano a p. Además, Df_p y Dg_q son transformaciones lineales hiperbólicas cercanas en norma, por lo que el Teorema 2.5 garantiza la existencia de una conjugación topológica entre Df_p y Dg_q. Por último, el Teorema de Hartman-Grobman (2.9) garantiza que Df_p y Dg_q son localmente conjugadas a f y g en los respectivos puntos fijos, así que la conclusión se sigue de que la composición de conjugaciones es una conjugación. $\square$

Las herramientas desarrolladas en esta sección son insuficientes para caracerizar la estabilidad en regiones de la variedad más generales que puntos fijos o periódicos. En el capítulo siguente, extenderemos la noción de hiperbolicidad a conjuntos invariantes, y obtendremos condiciones suficientes para garantizar la estabilidad global de todas las órbitas del sistema.

2.3. Conjuntos Hiperbólicos

Para un punto $x \in M$ que se encuentra dentro de una región invariante, en general la transformación Df_x está definida entre espacios distintos, así que no se puede establecer un criterio de hiperbolicidad en términos de subespacios Df_x-invariantes, ni de valores propios. Caracterizaremos la *hiperbolicidad* en un subconjunto invariante $\Lambda \subset M$, mediante una descomposición de T_xM en subespacios con contracción y expansión uniforme, para cada $x \in \Lambda$.

Definición. *Sea $f \in \mathrm{Diff}(M)$. Un conjunto compacto e invariante $\Lambda \subset M$ es hiperbólico, si para cada $x \in \Lambda$ existen una descomposición del espacio tangente de M en dos subespacios:*

$$T_xM = \mathbb{E}_x^s \oplus \mathbb{E}_x^u,$$

y constantes $\lambda \in (0,1)$, $c > 0$, tales que para cualquier $x \in \Lambda$, se cumple:

(1) $Df_x(\mathbb{E}_x^s) = \mathbb{E}_{f(x)}^s$ y $Df_x(\mathbb{E}_x^u) = \mathbb{E}_{f(x)}^u$.

(2) $\|Df_x^n v_s\| \leq c\lambda^n \|v_s\|$ para cualquier $v_s \in \mathbb{E}_x^s$ y $n \geq 0$.

(3) $\|Df_x^{-n} v_u\| \leq c\lambda^n \|v_u\|$ para cualquier $v_u \in \mathbb{E}_x^u$ y $n \geq 0$.

Las constantes λ, c de la definición, serán llamadas *constantes de hiperbolicidad* de f en Λ.

De la misma forma que en la sección anterior, $\mathbb{E}_x^s$ y $\mathbb{E}_x^u$ serán llamados *subespacios estable e inestable en x*, Si bien estos subespacios no son en general Df_x-invariantes (salvo que x sea punto fijo), las *distribuciones estable e inestable*:

$$\mathbb{E}^s = \bigsqcup_{x \in \Lambda} \mathbb{E}_x^s \quad \text{y} \quad \mathbb{E}^u = \bigsqcup_{x \in \Lambda} \mathbb{E}_x^u,$$

sí son Df-invariantes en $T_\Lambda M$. A continuación se muestra que siempre son de clase $\mathscr{C}^0$.

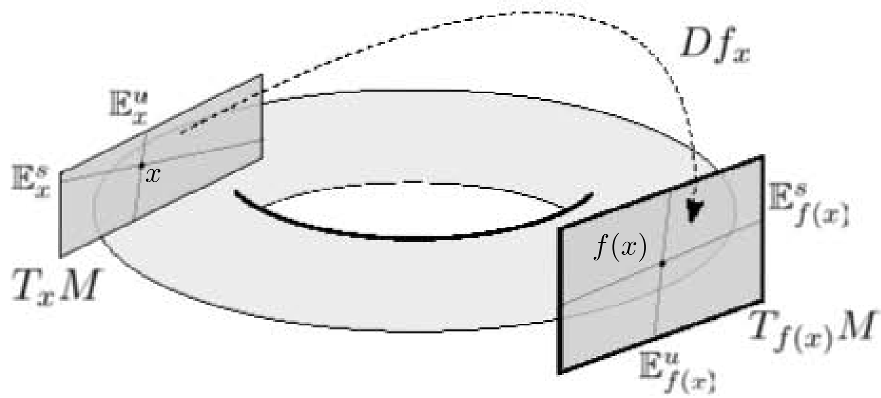

Figura 2.3: Descomposición de T_xM en subespacios estable $\mathbb{E}^s_x$ e inestable $\mathbb{E}^u_x$, que presentan respectivamente contracción y expansión uniforme.

Proposición 2.13. *Sea Λ un conjunto hiperbólico para $f \in \mathrm{Diff}(M)$. Entonces $\mathbb{E}^s$ y $\mathbb{E}^u$ son distribuciones $\mathscr{C}^0$ en $T_\Lambda M$, es decir, $\mathbb{E}^s_x$ y $\mathbb{E}^u_x$ varian continuamente respecto a $x \in \Lambda$. En particular, la dimensión de los subespacios es localmente constante en M.*

Demostración. Sea $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}} \to x$ una sucesión de puntos en Λ, llamaremos $\mathbb{E}^s_{x_i}$ y $\mathbb{E}^u_{x_i}$ a los respectivos espacios estables e inestables en $T_{x_i}M$. Por compacidad tenemos que $x \in \Lambda$, así que mostraremos que los subespacios $\mathbb{E}^s_{x_i}$ y $\mathbb{E}^u_{x_i}$ convergen a subespacios que conforman una descomposición hiperbólica en T_xM. Las sucesiones $\{\dim(\mathbb{E}^s_{x_i})\}_{i\in\mathbb{N}}$ y $\{\dim(\mathbb{E}^u_{x_i})\}_{i\in\mathbb{N}}$ estan acotadas por $\dim(M)$, así que sólo pueden tomar una cantidad finita de valores. Esto nos permite extraer una subsucesión constante (que seguiremos llamando $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$) con $\dim(\mathbb{E}^s_{x_i}) = k$ y $\dim(\mathbb{E}^u_{x_i}) = l$, con $k + l = \dim(M)$.

Sean $\{e^i_1, \ldots, e^i_k\}$ y $\{e^i_{k+1}, \ldots, e^i_{k+l}\}$ bases ortonormales de $\mathbb{E}^s_{x_i}$ y $\mathbb{E}^u_{x_i}$ respectivamente. El haz tangente unitario de Λ es compacto, así que podemos tomar una subsucesión convergente $\{e^i_j\}_{i\in\mathbb{N}}$ a un cierto $e_j \in T_xM$ para todo $j = 1, \ldots, k$, y además, el conjunto $\{e_1, \ldots, e_k\}$ es ortonormal. Al generado de dicho conjunto le llamaremos $E^s_x = \langle e_1, \ldots, e_k\rangle$, y de la misma forma, obtenemos $E^u_x = \langle e_{k+1}, \ldots, e_{k+l}\rangle$.

Ahora probaremos que $E^s_x = \mathbb{E}^s_x$ y que $E^u_x = \mathbb{E}^u_x$. Para cualquier $v \in E^s_x$ existe una sucesión de elementos $v_i \to v$, con $v_i \in T_{x_i}M$, así que de la continuidad de Df_x, se sigue que para cualquier $n \in \mathbb{N}$:

$$\|Df^n_x v\| = \lim_{i\to\infty} \|Df^n_{x_i} v_i\| \leq \lim_{i\to\infty} c\lambda^n \|v_i\| = c\lambda^n\|v\|.$$

Lo anterior implica que $E^s_x \subset \mathbb{E}^s_x$, y por un argumento idéntico $E^u_x \subset \mathbb{E}^u_x$. En particular se cumple que $E^s_x \cap E^u_x \subset \mathbb{E}^s_x \cap \mathbb{E}^u_x = \{0\}$, con lo que llegamos a que $E^s_x = \mathbb{E}^s_x$ y $E^u_x = \mathbb{E}^u_x$. □

Las distribuciones estable e inestable no necesariamente son de clase $\mathscr{C}^1$, aunque en general, son Hölder continuas (ver [HS95], 19.1.d).

Dado un espacio vectorial V con un producto interno, denotaremos por $\angle(u, v)$, al ángulo entre los vectores u y v en V.

Corolario 2.14. *Sea Λ un conjunto hiperbólico para $f \in \mathrm{Diff}(M)$. Entonces $\mathbb{E}^s$ y $\mathbb{E}^u$ son uniformemente transversales en Λ, es decir, existe $\alpha_0 > 0$ de forma que para cualesquiera $x \in \Lambda$, $v_s \in \mathbb{E}^s_x$, y $v_u \in \mathbb{E}^u_x$, se cumple que $\angle(v_s, v_u) \geq \alpha_0$.*

Demostración. Para cualquier $x \in \Lambda$, se cumple $\mathbb{E}_x^s \oplus \mathbb{E}_x^u = T_xM$. Entonces existe $\alpha(x) > 0$, tal que para cualesquiera $v_s \in \mathbb{E}_x^s$ y $v_u \in \mathbb{E}_x^u$, se tiene $\angle(v_s, v_u) \geq \alpha(x)$. La Proposición 2.13 garantiza que la función $x \in \Lambda \mapsto \alpha(x) \in \mathbb{R}$ es continua, así que alcanza su mínimo $\alpha_0 > 0$ en Λ. □

A continuación veremos que la hiperbolicidad de un conjunto invariante no depende de la métrica riemanniana empleada. Supongamos que Λ es un conjunto hiperbólico con la norma $\|\cdot\|$, inducida por la métrica riemanniana de la variedad. Cualesquiera métricas riemannianas son equivalentes sobre conjuntos compactos, así que considerando otra métrica riemanniana que induzca una norma $\|\cdot\|^*$, siempre existen constantes c_1 y c_2 para las que $c_1\| \ \|^* \leq \| \ \| \leq c_2\| \ \|^*$ resulta válido globalmente en todo Λ. De la independencia de la hiperbolicidad lineal respecto a la norma usada, se sigue que la hiperbolicidad de un conjunto invariante tampoco depende de la métrica riemanniana en M.

Del mismo modo, la Proposición 2.3 tiene una contraparte para conjuntos hiperbólicos, que afirma la existencia de una *métrica adaptada, o métrica de Lyapunov*, en todo Λ.

Teorema 2.15 (Existencia de Métrica Adaptada). *Sea Λ un conjunto hiperbólico para $f \in \mathrm{Diff}(M)$, con constantes de hiperbolicidad $c > 0$ y $\lambda \in (0,1)$. Para cualquier $\varepsilon > 0$ existe una métrica riemanniana en Λ, para la que las constantes de hiperbolicidad de f en Λ son $c' = 1$ y $\lambda' = \lambda + \varepsilon$.*

Demostración. Sea $p \in \Lambda$, usando las normas $\| \ \|_s$ y $\| \ \|_u$ en $\mathbb{E}_p^s$ y $\mathbb{E}_p^u$ respectivamente, dadas por:

$$\|\cdot\|_s = \sum_{j=0}^{n_0-1} (\lambda')^{-j} \|(Df^j)_p(\cdot)\| \quad \text{y} \quad \|\cdot\|_u = \sum_{j=0}^{n_0-1} (\lambda')^{-j} \|(Df^{-j})_p(\cdot)\|.$$

Entonces podemos definir una norma en T_pM con $\|v\|' = \sqrt{(\|v_s\|_s)^2 + (\|v_u\|_u)^2}$, donde $v = v_s + v_u$ es la descomposición única obtenida gracias a que $T_pM = \mathbb{E}_p^s \oplus \mathbb{E}_p^u$.

La misma argumentación que se realizó en la demostración de la Proposición 2.3, garantiza que para $v \in \mathbb{E}_p^s$ y $u \in \mathbb{E}_p^u$, se cumple que:

$$\|Df_p v\|' \leq \lambda' \|v\|' \quad \text{y} \quad \|Df_p^{-1} u\|' \leq \lambda' \|u\|'.$$

Así que usando la norma $\|\cdot\|$, las constantes de hiperbolicidad de Λ son $c' = 1$ y $\lambda' = \lambda + \varepsilon$. □

Las proposiciones 2.13 y 2.15 garantizan que la hiperbolicidad puede ser verificada de forma equivalente con las siguientes propiedades:

Corolario 2.16. *Sea $\Lambda \subset M$ un conjunto invariante para $f \in \mathrm{Diff}(M)$. Entonces Λ es hiperbólico, si el haz tangente sobre Λ admite una descomposición continua y Df-invariante:*

$$T_\Lambda M = \mathbb{E}^s \oplus \mathbb{E}^u,$$

de forma que para $\lambda \in (0,1)$ y alguna métrica riemanniana, se satisface:

$$\left\| Df^{-1}|_{\mathbb{E}^u} \right\| < \lambda \quad y \quad \|Df|_{\mathbb{E}^s}\| < \lambda.$$

Es decir, $Df^{-1}|_{\mathbb{E}^u}$ y $Df|_{\mathbb{E}^s}$ son contracciones.

A la constante de hiperbolicidad λ, la llamaremos *constante de contracción* de f en Λ.

2.3.1. Condiciones Equivalentes a Hiperbolicidad

Verificar la hiperbolicidad de un conjunto invariante Λ suele ser bastante laborioso, ya que requiere garantizar la Df-invariancia de una familia de subespacios en $T_\Lambda M$. En esta sección, desarrollaremos un criterio equivalente a la hiperbolicidad, que en general resulta más sencillo de verificar, utilizando familias de conos invariantes.

Sea x dentro de un conjunto hiperbólico Λ. Cualquier $v \in T_xM$ puede expresarse de forma única como $v = v_s + v_u$, con $v_s \in \mathbb{E}^s_x$ y $v_u \in \mathbb{E}^u_x$. Usando esta descomposición, definimos los *conos estable e inestable* de tamaño α, para cualquier $x \in \Lambda$, como:

$$C^s_x = \{v \in T_xM \mid \|v_u\| \leq \alpha\|v_s\|\} \quad \text{y} \quad C^u_x = \{v \in T_xM \mid \|v_s\| \leq \alpha\|v_u\|\}.$$

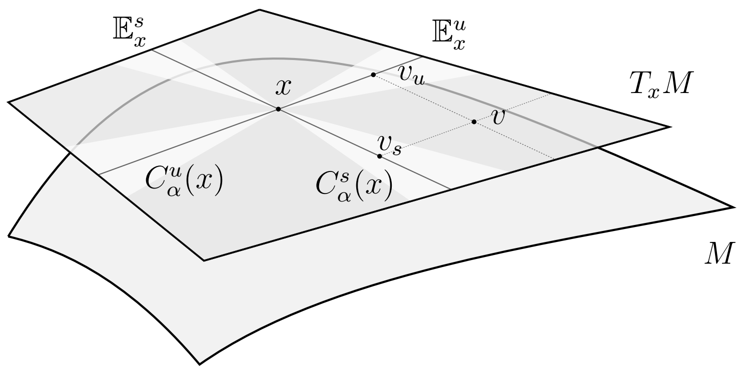

Figura 2.4: Conos estable e inestable asociados a los subespacios estable e inestable.

Una *pareja de conos* en un espacio vectorial con producto interno W consiste en dos conjuntos C y C^*, junto con una forma cuadrática no degenerada $B : W \to \mathbb{R}$, para la que:

$$C = \{v \in W|B(v) \leq 0\} \quad \text{y} \quad C^* = \{v \in W|B(v) \geq 0\}.$$

En presencia de una descomposición hiperbólica, con la forma cuadrática $B : T_xM \to \mathbb{R}$ definida por $B(v) = -\alpha^2\|v_s\|^2 + \|v_u\|^2$, obtenemos un cono estable C y otro inestable C^*.

Diremos que la *dimensión de un cono* C es la máxima dimensión entre todos los subespacios de W contenidos en C; y del mismo modo, por la *dimensión de una forma cuadrática*, entenderemos la máxima dimensión de los subespacios de W contenidos en la región donde B es no positiva.

Por una *familia de conos* en el conjunto Λ entenderemos una asignación de conos C_x en T_xM para cada $x \in \Lambda$; y a la asignación de una forma cuadrática $B_x : T_xM \to \mathbb{R}$ en cada $x \in \Lambda$, le llamaremos *forma cuadrática* en Λ.

Ahora obtendremos dos criterios equivalentes a la hiperbolicidad de un conjunto compacto e invariante Λ. El primero es geométrico, y consiste en mostrar una familia Df-invariante de conos. El segundo es dinámico, y consiste en mostrar la existencia de una forma cuadrática en Λ, que sea no decreciente sobre las órbitas de f. Para precisar lo anterior, definimos el *pull-back* bajo f de una forma cuadrática B, como:

$$f^{\#}(B)_x(v) := B_{f(x)}(Df_xv).$$

Lema 2.17. *Sea $\Lambda \subset M$ un conjunto compacto e invariante para $f \in \mathrm{Diff}(M)$. Entonces son equivalentes:*

(1) *Λ es hiperbólico.*

(2) *Existe B una forma cuadrática continua, no degenerada en Λ, con dimensión constante en las órbitas de f y de forma que $f^{\#}B - B$ es definida positiva.*

(3) *Existen familias de conos C^s, C^u en Λ con dimensiones complementarias y de dimensión constante en las órbitas de f, de forma que para cualquier $x \in \Lambda$, se cumpla:*

(a) *$Df_x C_x^u \subset C_{f(x)}^u$ y $Df_x^{-1} C_x^s \subset C_{f^{-1}(x)}^s$.*

(b) *Existen $c > 1$, $m > 0$ tales que $\|Df_x^m\| \geq c$ en C_x^u y $\|Df_x^{-m}\| \geq c$ en C_x^s.*

Demostración. $(1 \Rightarrow 2)$ Sean $f \in \mathrm{Diff}(M)$ y Λ un conjunto hiperbólico con constantes $\lambda \in (0,1)$, $C > 0$. Para cualquier $x \in \Lambda$, tomando $m \in \mathbb{N}$ tal que $C\lambda^m < 1/5$, podemos garantizar $\|Df_x^{-m} v\| \geq 5\|v\|$ si $v \in \mathbb{E}_x^s$, y $\|Df_x^m v\| \geq 5\|v\|$ si $v \in \mathbb{E}_x^u$.

Mostraremos que para cualquier v no nulo, se cumple que:

$$\|Df_x^{-m} v\|^2 - 2\|v\|^2 + \|Df_x^m v\|^2 > 0. \tag{2.9}$$

Por ser Λ hiperbólico, cualquier $v \in T_x M$ puede ser expresado de forma única como $v = v_s + v_u$, con $v_s \in E_x^s$, y $v_u \in E_x^u$. Supongamos que $\|v_s\| \geq \|v_u\|$, entonces:

$$\|Df_x^{-m}(v_s + v_u)\| \geq \|Df_x^{-m} v_s\| - \|Df_x^{-m} v_u\| \geq (5 - 1/5)\|v_s\| \geq 4\|v_s\| \geq 2\|v\|.$$

El mismo resultado puede ser obtenido cuando $\|v_u\| \geq \|v_s\|$, por lo que queda probada la desigualdad (2.9). Ahora, definimos una forma cuadrática en Λ mediante:

$$\begin{aligned} B_x(v) &= \sum_{j=0}^{m-1} \|Df_x^j v\|^2 - \sum_{j=-m}^{j=-1} \|Df_x^j v\|^2 \\ &= \sum_{j=1}^{m} \left(\|Df_{f^{-j}(x)}^m Df_x^{-j} v\|^2 - \|Df_x^{-j} v\|^2 \right). \end{aligned} \tag{2.10}$$

Esta forma cuadrática cumple:

$$(f^{\#}B - B)_x(v) = B_{f(x)}(Df_x)(v) - B_x(v) = \|Df_x^{-m}\|^2 - 2\|v\|^2 + \|Df_x^m v\|^2,$$

así que por (2.9), $f^{\#}B - B$ resulta ser definida positiva. Además, de la igualdad (2.10) se sigue que para cualesquiera vectores no nulos $v_s \in \mathbb{E}_x^s$, $v_u \in \mathbb{E}_x^u$ se cumple $B(v_s) < 0$ y $B(v_u) > 0$; y debido a que los subespacios $\mathbb{E}_x^s$ y $\mathbb{E}_x^u$ son complementarios e invariantes, la dimensión de B es constante en las órbitas.

Por último, veremos que B es no degenerada. Sea $B_b(\cdot,\cdot)$ la forma bilineal simétrica asociada a B. Si para $x \in \Lambda$ existe v, tal que $B_b(v, w) = 0$ para cualquier $w \in T_x M$, expresando a v como $v_s + v_u$, obtenemos que $B_b(v_s, v_s) = B_b(v_u, v_u)$, y entonces $B(v_s) = B(v_u)$, pero eso sólo sucede cuando v_s y v_u son nulos. Así que B_b y B son no degeneradas.

$(2 \Rightarrow 3)$ Para $x \in \Lambda$, definimos una familia de conos por $C_x^s = \{v \in T_x M | B_x(v) \leq 0\}$ y $C_x^u = \{v \in T_x M | B_x(v) \geq 0\}$. Estos conos tienen dimensión complementaria ya que B es no degenerada. Además, la dimensión constante de B a lo largo de las órbitas de f garantiza la dimensión constante de los conos a lo largo de las órbitas. Usando que $f^{\#}B - B$ es definida positiva, obtenemos que para cualquier $v \in C_x^u$, se cumple $B_{f(x)}(Df_x v) \geq B_x(v) \geq 0$. Por lo que $Df_x v \in C^u_{f(x)}$, y entonces $Df_x C^u_x \subset C^u_{f(x)}$. Con un razonamiento simétrico para $v \in C^s_x$, obtenemos que $Df_x^{-1} C^u_x \subset C^u_{f^{-1}(x)}$, y concluimos el enunciado en (a).

Para mostrar el inciso (b) basta verificar la desigualdad correspondiente al cono inestable C^u_x, ya que el caso de C^s_x completamente análogo. Por la compacidad de Λ y la continuidad de B, resulta que dado $a > 0$ existe $\delta > 0$ de forma que $B_x(w) > a$ implica $\|w\|^2 > \delta$. Mientras que por ser $f^{\#}B - B$ definida positiva, existen a, b tales que:

$$b\|w\|^2 \geq (f^{\#}B - B)_z(w) \geq a\|w\|^2, \text{ para cualesquiera } z \in \Lambda, w \in T_z M. \tag{2.11}$$

Sea $\delta = \delta(a)$ dada por la desigualdad anterior, y $m \in \mathbb{N}$ que cumpla $\sigma^2 = ma\delta b^{-1} > 1$. Entonces, para cualesquiera $x \in \Lambda$ y $v \in C^u_x$ con $\|v\| = 1$, se cumple:

$$B_{f^j(x)}(Df^j_x v) \geq B_{f(x)}(Df_x v) \geq B_{f(x)}(Df_x v) - B_x(v) \geq a\|v\|^2 = a,$$

para cualquier $j \geq 1$. De lo anterior se sigue que $\|Df^j_x v\|^2 \geq \delta$ para $j \geq 1$, con lo que la ecuación (2.11) garantiza:

$$\begin{aligned} b\|Df^m_x v\|^2 \geq &(f^{\#}B - B)_{f^m(x)}(Df^m_x v) = B_{f^{m+1}(x)}(Df^{m+1}_x v) - B_{f^m(x)}(Df^m_x v) \\ =&\sum_{j=0}^{m} \left(B_{f^{j+1}(x)}(Df^{j+1}_x v) - B_{f^j(x)}(Df^j_x v) \right) + B_x(v) \\ \geq &\sum_{j=0}^{m} (f^{\#}B - B)_{f^j(x)}(Df^j_x v) \\ \geq &\sum_{j=0}^{m} a \left\| Df^j_x v \right\|^2 > ma\delta, \end{aligned}$$

y se concluye $\|Df^m_x v\|^2 > \sigma^2$.

$(3 \Rightarrow 1)$ Sea $x \in \Lambda$, mostraremos que los subconjuntos de $T_x M$ definidos por:

$$\mathbb{E}^s_x = \bigcap_{n \geq 0} Df^{-n}_{f^n(x)} \left(C^s_{f^n(x)} \right) \quad \text{y} \quad \mathbb{E}^u_x = \bigcap_{n \geq 0} Df^n_{f^{-n}(x)} \left(C^u_{f^{-n}(x)} \right),$$

conforman una descomposición hiperbólica. Usando la propiedad (a), obtenemos:

$$\begin{aligned} Df_x(\mathbb{E}^u_x) &= \bigcap_{n \geq 0} Df_x \left(Df^n_{f^{-n}(x)} \left(C^u_{f^{-n}(x)} \right) \right) \\ &= \bigcap_{n \geq 0} Df^n_{f^{-n+1}(x)} \left(Df_{f^{-n}(x)} \left(C^u_{f^{-n}(x)} \right) \right) \\ &= \bigcap_{n \geq 0} Df^n_{f^{-n}(f(x))} \left(C^u_{f^{-n}(f(x))} \right) \\ &= \mathbb{E}^u_{f(x)}. \end{aligned}$$

De manera análoga se obtiene $Df_x(\mathbb{E}^s_x) = \mathbb{E}^s_{f(x)}$. Afirmamos que existen $C > 0$ y $\lambda \in (0, 1)$, de forma que para cualesquiera $n \geq 0$ y $v \in \mathbb{E}^s_x$, se cumple $\|Df^n_x v\| \leq C\lambda^n$.

Usando el valor de m obtenido anteriormente, cualquier $n \geq 0$ puede escribirse como $n = km + r$, con $0 \leq r < m$ y para algún $k \in \mathbb{N}_0$. Tomando $w = Df^n_x v \in C^s_{f^n(x)}$, podemos garantizar que:

$$\|v\| = \left\| Df^{-n}_{f^n(x)} w \right\| = \left\| Df^{-r}_{f^{n-km}(x)} \left(Df^{-km}_{f^n(x)} w \right) \right\|$$

Así que para $C_1 := \inf_{x\in M}\{\min \|Df_x^{-r}\| \,|\, 0 \le r < m\}$, obtenemos:

$$\|v\| \ge C_1 \left\| Df_{f^n(x)}^{-km} w \right\| \ge C_1 \sigma^k \|w\|,$$

para $\sigma > 1$ como en el inciso anterior. Hemos obtenido que $\|Df_x^n v\| \le \frac{\sigma}{C_1}\sigma^{-k-1}\|v\|$, así que usando $n = km + r < km + m$, llegamos a que:

$$\|Df_x^n v\| \le \frac{\sigma}{C_1}\left(\sigma^{-1/m}\right)^n \|v\| = C\lambda^n \|v\|.$$

La desigualdad correspondiente a $\mathbb{E}_x^u$ se obtiene de una forma idéntica. Por último:

$$\mathbb{E}_x^s \cap \mathbb{E}_x^u \subset C_x^s \cap C_x^u = \{0\},$$

así que por ser los subespacios de dimensión máxima en C_x^s y C_x^u respectivamente, resulta que $T_xM = \mathbb{E}_x^s \oplus \mathbb{E}_x^u$, con lo que se concluye que Λ es un conjunto hiperbólico. $\square$

Usando el lema anterior podemos mostrar que los conjuntos hiperbólicos no desaparecen bajo pequeñas perturbaciones en el difeomorfismo. Este resultado es fundamental para demostrar la estabilidad de los conjuntos hiperbólicos.

Teorema 2.18 (Persistencia de Conjuntos Hiperbólicos). *Sea Λ un conjunto hiperbólico para $f \in \mathrm{Diff}(M)$. Existe una vecindad compacta U de Λ, una vecindad $\mathscr{U}$ de f en $\mathrm{Diff}(M)$ con la topología $\mathscr{C}^1$, y una forma cuadrática continua y no degenerada B, en U, de forma que $g^{\#}B - B$ es definida positiva en $g^{-1}(U) \cap U$ para cualquier $g \in \mathscr{U}$. Además, el conjunto maximal invariante de g en U, definido por $\Lambda_g = \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} g^n(U)$ es hiperbólico.*

Demostración. Sea Λ hiperbólico para f. La Proposición anterior garantiza que existe una forma cuadrática continua y no degenerada B en Λ, con $f^{\#}B - B$ definida positiva. Podemos extender B a una vecindad U_1 de Λ suficientemente pequeña, de forma que B siga siendo no degenerada y $f^{\#}B - B$ siga siendo definida positiva. Del mismo modo que en la Proposición anterior, existe $a > 0$ tal que $(f^{\#}B - B)_x v \ge a\|v\|^2$ para cualesquiera $x \in U_1$ y $v \in T_xM$. Tomando $\mathscr{U}_1$ una vecindad suficientemente pequeña de la identidad en $\mathrm{Diff}(M)$, podemos garantizar que cualquier $h \in \mathscr{U}_1$ cumple:

$$(h^{\#}B - B)_x v = B_{h(x)}(Dh_x v) - B_x v \le \frac{a}{4}\|v\|^2,$$

donde $x \in U_1$ y $v \in T_xM$, además cumpliendo que $\|Dh_x v\| \ge \frac{1}{\sqrt{2}}\|v\|$. Consideremos el conjunto:

$$\mathscr{U} = \{f \circ h \in \mathrm{Diff}(M) \,|\, h \in \mathscr{U}_1\},$$

debido a que $\mathscr{U}_1$ es una vecindad de la identidad, $\mathscr{U}$ es una vecindad de f. Ahora tomaremos una vecindad compacta $U \subset U_1$ de Λ tal que si $g \in \mathscr{U}$ entonces $g(U) \subset U_1$. Por lo que para $x \in U$ y $g \in \mathscr{U}$ que se exprese como $g = f \circ h$, con $h \in V_1$, y entonces:

$$\begin{aligned}
(g^{\#}B - B)_x v &= B_{g(x)}\left(Dg_x v\right) - B_x v \\
&= B_{(f\circ h)(x)}\left(D(f\circ h)_x v\right) - B_x v \\
&= B_{(f\circ h)(x)}\left(Df_{h(x)}\left(Dh_x v\right)\right) - B_x v + \left[B_{h(x)}(Dh_x v) - B_{h(x)}(Dh_x v)\right] \\
&= (f^{\#}B - B)_{h(x)}\left(Dh_x v\right) + (h^{\#}B - B)_x v \\
&\ge a\left\|Dh_x v\right\|^2 - \frac{a}{4}\left\|v\right\|^2 \ge \frac{a}{2}\left\|v\right\|^2.
\end{aligned}$$

Por lo que $g^{\#}B - B$ es definida positiva. Debido a que Λ_g es compacto e invariante, la Proposición anterior garantiza que también es hiperbólico. $\square$

2.4. Dinámica de Conjuntos Hiperbólicos

En la Sección 2.3 se obtuvieron las principales propiedades en torno a la estructura de los conjuntos hiperbólicos, en esta sección haremos una descripción de su dinámica y mostraremos que son estables bajo perturbaciones.

La separación de órbitas obtenida debido a la expansión local del sistema, en conjunto con las propiedades de recurrencia, producen un comportamiento global de órbitas complicado. A continuación analizaremos de qué forma se distribuyen las órbitas dentro de un conjunto hiperbólico.

2.4.1. Variedades Estable e Inestable

En esta sección veremos que en cualquier punto x de un conjunto hiperbólico $\Lambda \subset M$, existen dos subvariedades encajadas que tienen propiedades análogas a las de los subespacios estable e inestable en T_xM.

Definimos los *conjuntos estable e inestable globales* de un punto $x \in M$, como:

$$\mathcal{W}^s(x) := \Big\{ y \in M \,\Big|\, d(f^n(x), f^n(y)) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \Big\},$$

$$\mathcal{W}^u(x) := \Big\{ y \in M \,\Big|\, d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \Big\}.$$

Estos conjuntos corresponden con las clases de equivalencia obtenidas con la relación:

$$p \underset{\pm}{\sim} q \iff d(f^n(p), f^n(q)) \underset{n\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0,$$

y consisten en los puntos cuyas órbitas se acompañan hacia adelante o hacia atrás.

En general se cumple que $f(\mathcal{W}^s(x)) = \mathcal{W}^s(f(x))$ y $f(\mathcal{W}^u(x)) = \mathcal{W}^u(f(x))$, así que para puntos periódicos de periodo m ambos conjuntos son f^m-invariantes; y en particular para puntos fijos, $\mathcal{W}^s(x)$ y $\mathcal{W}^u(x)$ son invariantes.

Localmente, los conjuntos estable e inestable de un punto fijo hiperbólico son homeomorfos a discos de la misma dimensión que los subespacios estable e inestable respectivamente (ver Figura 2.5). Esto se puede obtener con el Teorema de Hartman-Grobman (2.9), de la siguiente forma: Sean $V \subset M$ y $U \subset T_xM$ vecindades de x y del origen respectivamente, en donde f y Df_x son conjugadas por $h : U \to V$. Cualquier $y \in \mathbb{E}^s_x$ cumple que $\lim_{n\to\infty} Df^n_x(y) = 0$, así que la continuidad de h garantiza que $\lim_{n\to\infty} h[Df^n_x(y)] = h(0) = x$. Como h es una conjugación, sabemos que para cualesquiera $y \in U$ y $n \in \mathbb{Z}$, se cumple que $f^n[h(y)] = h[Df^n_x(y)]$, y por lo tanto, $f^n[h(y)] \to x$ para cualquier $y \in \mathbb{E}^s_x \cap U$; es decir, $h(y)$ está contenido en $\mathcal{W}^s(x)$. Así que por ser h un homeomorfismo, resulta que $h(\mathbb{E}^s_x \cap U) = \mathcal{W}^s(x) \cap V$, y del mismo modo, $h(\mathbb{E}^u_x \cap U) = \mathcal{W}^u(x) \cap V$, con lo que concluimos que $\mathcal{W}^s(x)$ y $\mathcal{W}^u(x)$ son localmente homeomorfos, en torno a x, a discos con la misma dimensión que $\mathbb{E}^s_x$ y $\mathbb{E}^u_x$ respectivamente.

La misma descripción local es válida para las variedades estable e inestable de cualquier punto dentro de un conjunto hiperbólico, más aún, localmente los conjuntos estable e inestable son discos encajados en M. Definimos los *conjuntos estable e inestable locales* de un punto $x \in M$, como:

$$\mathcal{W}^s_\varepsilon(x) := \{ y \in M \,|\, d(f^n(x), f^n(y)) < \varepsilon, \forall\ n \geq 0 \},$$

$$\mathcal{W}^u_\varepsilon(x) := \big\{ y \in M \,\big|\, d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) < \varepsilon, \forall\ n \geq 0 \big\}.$$

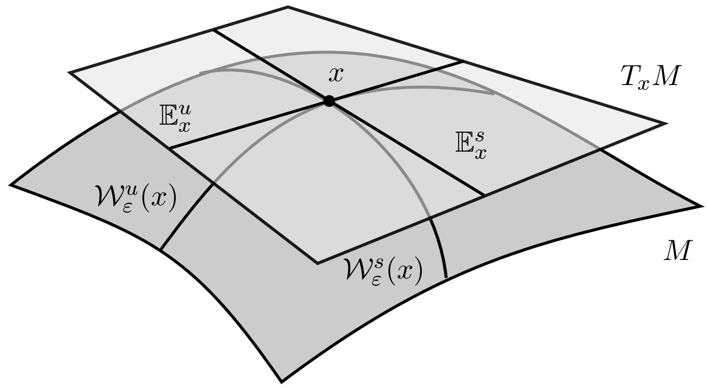

Figura 2.5: Conjuntos estable $\mathcal{W}^s(x)$ e inestable $\mathcal{W}^u(x)$, de un punto fijo hiperbólico x.

Cualquier $y \in \mathcal{W}_\varepsilon^s(x) \cup \mathcal{W}_\varepsilon^u(x)$ en particular cumple $d(x,y) < \varepsilon$, así que $\mathcal{W}_\varepsilon^s(x)$ y $\mathcal{W}_\varepsilon^u(x)$ son subconjuntos de la bola de radio ε en x. Además cumplen que:

$$f(\mathcal{W}_\varepsilon^s(x)) \subset \mathcal{W}_\varepsilon^s(f(x)) \text{ y } f^{-1}(\mathcal{W}_\varepsilon^u(x)) \subset \mathcal{W}_\varepsilon^u(f^{-1}(x)),$$

así que cuando x es un punto fijo, $\mathcal{W}_\varepsilon^s(x)$ es invariante hacia adelante y $\mathcal{W}_\varepsilon^u(x)$ es invariante hacia atrás.

A continuación se enuncia un teorema que afirma que los conjuntos estable e inestable locales siempre son subvariedades encajadas en M, y además, son tangentes a los respectivos subespacios estable e inestable. La demostración de este teorema es delicada, y puede encontrarse en [Shu87].

Teorema 2.19 (Teorema de la Variedad Estable). *Sea Λ un conjunto hiperbólico para $f \in \operatorname{Diff}^r(M)$, supongamos que Λ cuenta con la métrica adaptada, y tiene constante de contracción λ. Etonces existe $\varepsilon > 0$, de forma que para todo $x \in \Lambda$, el conjunto estable local $\mathcal{W}_\varepsilon^s(x)$ es la imagen de un disco D^p, mediante un encaje $\mathscr{C}^r$, con $p := \dim \mathbb{E}_x^s$. Además:*

(1) $T_x(\mathcal{W}_\varepsilon^s(x)) = \mathbb{E}_x^s$.

(2) Para cualquier $y \in \mathcal{W}_\varepsilon^s(x)$, se cumple $d(f(x), f(y)) < \lambda d(x,y)$.

(3) El encaje del disco D^p a $\mathcal{W}_\varepsilon^s(x)$ varía continuamente respecto a x, es decir, existen una vecindad V_x de x, y una función continua:

$$\mathscr{G}_x^s : V_x \to \operatorname{Enc}^r(D^p, M),$$

que para cualquier $y \in V_x$ cumple:

$$\mathscr{G}_x^s(y)(0) = y \quad y \quad \mathscr{G}_x^s(y)(D^p) = \mathcal{W}_\varepsilon^s(y).$$

$\operatorname{Enc}^r(N, M)$ denota al conjunto de encajes de N en M con la topología $\mathscr{C}^r$.

(4) $\mathcal{W}_\varepsilon^s(x)$ es una variedad de clase $\mathscr{C}^r$.

Para cualquier punto de M, la variedad inestable coincide con la variedad estable de la inversa del difeomorfismo, con lo que tenemos una descripción análoga para la variedad inestable.

Los conjuntos estable e inestable globales pueden enredarse de forma complicada en la variedad, y no necesariamente son subvariedades encajadas en M, sin embargo, usando el Teorema 2.19 de la variedad estable probaremos que son subvariedades inmersas en M.

Corolario 2.20. *Sea Λ un conjunto hiperbólico para $f \in \operatorname{Diff}^r(M)$. Entonces los conjuntos estable e inestable globales son subvariedades $\mathscr{C}^r$ inmersas en M. Además, $\mathcal{W}^s(x)$ y $\mathcal{W}^u(x)$ son copias inmersas de $\mathbb{E}^s_x$ y $\mathbb{E}^u_x$ respectivamente.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$ dado por el Teorema 2.19 de la variedad estable. Primero mostraremos la siguiente relación entre el conjunto estable global de cualquier $x \in M$, y los conjuntos estables locales en toda su órbita:

$$\mathcal{W}^s(x) = \bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(\mathcal{W}^s_\varepsilon(f^n(x))). \tag{2.12}$$

Sea $y \in \mathcal{W}^s(x)$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$, tal que si $n \geq N$, se cumple $d(f^n(y), f^n(x)) \leq \varepsilon$. Esto garantiza que $f^N(y) \in \mathcal{W}^s(f^N(x))$, y así, $y \in f^{-N}(\mathcal{W}^s(f^N(x)))$.

Ahora, si $y \in \bigcup_{n\geq 0} f^{-n}(\mathcal{W}^s_\varepsilon(f^n(x)))$, existe $N \in \mathbb{N}$, tal que $y \in f^{-N}(\mathcal{W}^s_\varepsilon(f^N(x)))$, y por lo tanto, $f^N(y) \in \mathcal{W}^s_\varepsilon(f^N(x))$. Así que, el Teorema 2.19 de la variedad estable garantiza:

$$d(f^n(f^N(y)), f^n(f^N((x))) < \lambda^n d(f^n(y), f^n(x)),$$

por lo que $d(f^n(y), f^n(x)) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, y entonces $y \in \mathcal{W}^s(x)$. Lo anterior muestra (2.12), y de la misma forma, se puede obtener que:

$$\mathcal{W}^u(x) = \bigcup_{n \geq 0} f^{n}(\mathcal{W}^s_\varepsilon(f^{-n}(x))). \tag{2.13}$$

Además, el Teorema de la variedad estable garantiza que para cualquier $j \geq 0$, existe $\Theta : D^p \to \mathcal{W}^s_\varepsilon(f^j(x))$, un encaje de clase $\mathscr{C}^r$.

Utilizando la composición $f^j \circ \Theta : D^p \to f^{-j}(\mathcal{W}^s_\varepsilon(f^j(x)))$, podemos garantizar que $f^{-j}(\mathcal{W}^s_\varepsilon(f^j(x)))$ es la imagen encajada de D^p. Por último, (2.12) garantiza que $\mathcal{W}^s(x)$ es la unión anidada de discos encajados contenidos en $\mathbb{E}^s_x$, así que la unión de dichos discos encajados en M, es la imagen de $\mathbb{E}^s_x$ bajo una inmersión $\mathscr{C}^r$. A partir de (2.13), y mediante un encaje para $\mathcal{W}^u_\varepsilon(f^j(x))$, se puede obtener el resultado correspondiente para $\mathcal{W}^u(x)$. $\square$

Tomando en cuenta el Teorema 2.19 de la variedad estable y el Corolario 2.20, llamaremos *variedades estable e inestable*, a los conjuntos estable e inestable de cualquier punto dentro de un conjunto hiperbólico.

Podemos además, definir los *conjuntos (variedades) estable e inestable globales* de un conjunto invariante Λ, como:

$$\mathcal{W}^s(\Lambda) := \left\{ y \in M \,\middle|\, d(\Lambda, f^n(y)) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \right\},$$

$$\mathcal{W}^u(\Lambda) := \left\{ y \in M \,\middle|\, d(\Lambda, f^{-n}(y)) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \right\}.$$

Resulta inmediato de la definición que ambos conjuntos son invariantes.

2.4.2. Estructura de Producto Local

Cuando las intersecciones entre las variedades estable e inestable locales de puntos cercanos son *transversales*, es posible obtener una buena descripción geométrica de un conjunto hiperbólico, ya que resulta ser localmente homeomorfo a un espacio producto.

Definición. *Diremos que N_1 y N_2 subvariedades encajadas en M, son transversales en $x \in M$, si $x \notin N_1 \cap N_2$ o $T_xN_1 + T_xN_2 = T_xM$. Si en cualquier $x \in M$ se cumple que N_1 y N_2 son transversales, diremos que son transversales.*

Definición. *Un conjunto hiperbólico Λ posee estructura de producto local si existen $\varepsilon, \delta > 0$, tales que para cualesquiera $x, y \in \Lambda$, se cumple:*

(1) El conjunto $\mathcal{W}^s_\varepsilon(x) \cap \mathcal{W}^u_\varepsilon(y)$ contiene a lo más un punto, que está en Λ.

(2) Si además $d(x, y) < \delta$, entonces $\mathcal{W}^s_\varepsilon(x) \cap \mathcal{W}^u_\varepsilon(y)$ es no vacía y $\mathcal{W}^s_\varepsilon(x)$ y $\mathcal{W}^u_\varepsilon(y)$ son transversales.

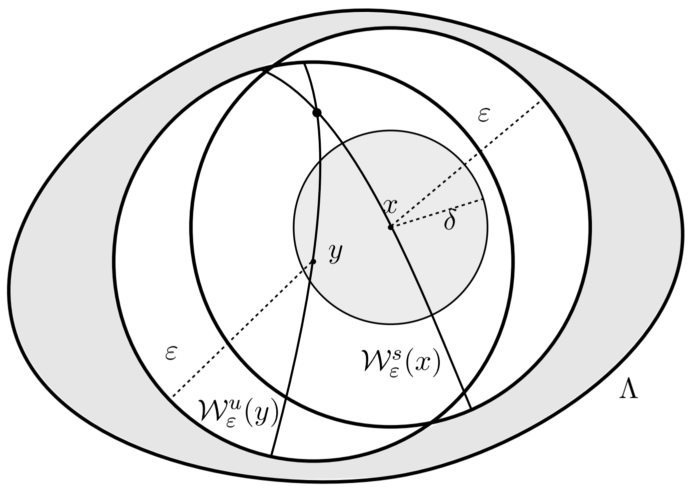

Figura 2.6: Estructura de producto local para un conjunto hiperbólico Λ.

Usando el Teorema 2.19 de la variedad estable mostraremos que el único impedimento para que un conjunto hiperbólico Λ tenga estructura de producto local, reside en que el punto de intersección entre $\mathcal{W}^s_\varepsilon(x)$ y $\mathcal{W}^u_\varepsilon(y)$ esté fuera de Λ. Para mostrar esto usaremos el Teorema de transversalidad para subvariedades, que enunciamos a continuación. (Para una demostración ver [HS95]).

Definición. *Diremos que N_1 y N_2 subvariedades encajadas en M, son $\mathscr{C}^r$-cercanas, si existen una variedad diferenciable N y encajes $f_i \in \mathrm{Enc}^r(N, M)$, $\mathscr{C}^r$-cercanos, con $f_i(N) = N_i$.*

Proposición 2.21 (Transversalidad para subvariedades). *Sean N_1 y N_2 subvariedades transversales encajadas en M. Si $\bar{N}_1$ y $\bar{N}_2$ son $\mathscr{C}^1$-cercanas a N_1 y N_2 respectivamente, entonces $\bar{N}_1$ y $\bar{N}_2$ también son transversales.*

Lema 2.22. *Sea $\Lambda \subset M$ un conjunto hiperbólico para $f \in \mathrm{Diff}(M)$. Existen $\varepsilon, \delta > 0$ de forma que si $x, y \in \Lambda$ cumplen $d(x, y) < \delta$, entonces $\mathcal{W}^s_\varepsilon(x)$ y $\mathcal{W}^u_\varepsilon(y)$ se intersectan transversalmente en un único punto. Además, la función definida por $(x, y) \mapsto z \in \mathcal{W}^s_\varepsilon(x) \cap \mathcal{W}^u_\varepsilon(y)$, es continua.*

Demostración. Sea $\varepsilon' > 0$ como en el Teorema 2.19 de la variedad estable. Para cualquier $x \in \Lambda$, $\mathcal{W}^s_{\varepsilon'}(x)$ y $\mathcal{W}^u_{\varepsilon'}(x)$ son subvariedades encajadas en M, que además se intersectan transversalmente en x, ya que:

$$T_x(\mathcal{W}^s_{\varepsilon'}(x)) \oplus T_x(\mathcal{W}^u_{\varepsilon'}(x)) = \mathbb{E}^s_x \oplus \mathbb{E}^u_x = T_xM.$$

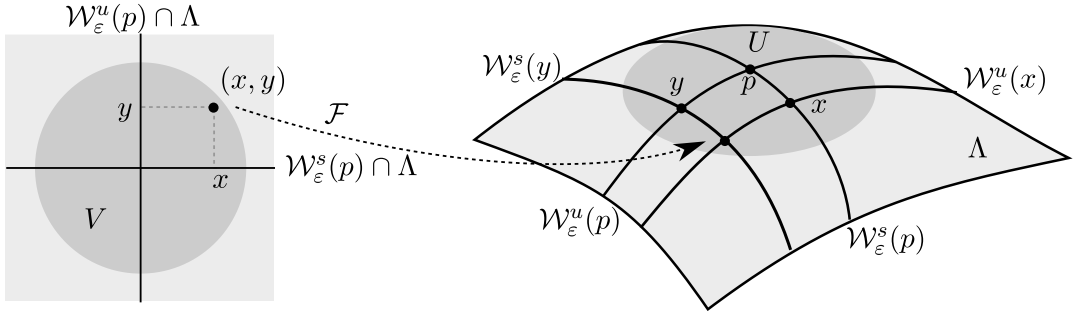

Figura 2.7: En presencia de estructura de producto local, cualquier conjunto hiperbólico es localmente homeomorfo a un espacio producto.

Esto garantiza que para cierto $\varepsilon < \varepsilon'$, x es el único punto de intersección dentro de $B_\varepsilon(x)$, y entonces, $\mathcal{W}^s_\varepsilon(x)\cap\mathcal{W}^u_\varepsilon(x)=\{x\}$, ya que, $\mathcal{W}^s_\varepsilon(x)\cap\mathcal{W}^u_\varepsilon(x)\subset B_\varepsilon(x)$.

El Teorema 2.19 de la variedad estable afirma que $\mathcal{W}^u_\varepsilon(x)$ varía continuamente respecto a $x\in\Lambda$, así que por la Proposición 2.21 obtenemos que existe $\delta>0$ tal que cuando $d(x,y)<\delta$, entonces $\mathcal{W}^u_\varepsilon(y)$ y $\mathcal{W}^s_\varepsilon(x)$ son transversales, y además, se intersectan en un único punto $z\in M$, pues $\mathcal{W}^s_\varepsilon(x)\cap\mathcal{W}^u_\varepsilon(y)$ es homeomorfo a $\mathcal{W}^s_\varepsilon(x)\cap\mathcal{W}^u_\varepsilon(x)=\{x\}$.

Por último, las variedades estable e inestable varían continuamente en Λ, así que la función definida por $(x,y)\mapsto z\in\mathcal{W}^s_\varepsilon(x)\cap\mathcal{W}^u_\varepsilon(y)$, es continua en ambas entradas. □

Observe que para ε y δ como en la demostración anterior, la función

$$[\,\cdot\,,\,\cdot\,]_{\varepsilon,\delta}:\{(x,y)\in\Lambda\times\Lambda\,|\,d(x,y)<\delta\}\to M,$$

que a cada pareja de puntos x,y le asigna el único punto en la intersección $\mathcal{W}^s_\varepsilon(x)\cap\mathcal{W}^u_\varepsilon(y)$, está bien definida y es continua en ambas entradas. Con el Lema anterior, obtenemos la siguiente caracterización de los conjuntos hiperbólicos con estructura de producto local.

Corolario 2.23. *Un conjunto hiperbólico Λ posee estructura de producto local, si y sólo si, existen $\varepsilon,\delta>0$ de forma que si $x,y\in\Lambda$ cumplen $d(x,y)<\delta$ entonces $[x,y]_{\varepsilon,\delta}\in\Lambda$.*

Ahora veremos que si un conjunto hiperbólico Λ tiene estructura de producto local entonces cualquier punto dentro de Λ tiene una vecindad que es homeomorfa a un espacio producto. Sean $p\in\Lambda$, y (p,p) el espacio producto $(\mathcal{W}^s_\varepsilon(p)\cap\Lambda)\times(\mathcal{W}^u_\varepsilon(p)\cap\Lambda)$. Por el Corolario 2.23 existe una vecindad V suficientemente pequeña de (p,p), donde la función $\mathcal{F}(x,y)=[y,x]\in\Lambda$ está bien definida. El Lema 2.22 garantiza que $\mathcal{F}$ es continua, y además, su inversa en $\mathcal{F}(V):=V$ está dada por $\mathcal{G}(z)=([p,z],[z,p])$, que también es una función continua. Así que $\mathcal{F}$ es un homeomorfismo (ver Figura 2.7).

Una consecuencia importante del Lema 2.22, es que dentro de un conjunto hiperbólico, cualesquiera dos órbitas distintas no pueden permanecer siempre juntas. Esto significa que la distancia entre condiciones iniciales arbitrariamente cercanas en algún momento debe aumentar. Esta propiedad es fundamental dentro del comportamiento llamado *caótico.*

Definición. *Diremos que $f\in\mathrm{Diff}(M)$ es expansiva en $\Lambda\subset M$, si existe $\varepsilon>0$ de forma que si $x,y\in\Lambda$ cumplen $d(f^n(x),f^n(y))<\varepsilon$ para todo $n\in\mathbb{Z}$, entonces $x=y$.*

Si $\varepsilon>0$ satisface lo anterior, le llamaremos *constante de expansividad de f en Λ*. Además, una función es expansiva si es expansiva en todo su dominio.

Proposición 2.24. *Si Λ es un conjunto hiperbólico para f, entonces $f|_\Lambda$ es expansiva.*

Demostración. Sea $x \in \Lambda$. Con el Lema 2.22 podemos obtener $\varepsilon > 0$, de forma que $\mathcal{W}^s_\varepsilon(x) \cap \mathcal{W}^u_\varepsilon(x) = \{x\}$. Si $y \in M$ satisface $d(f^n(x), f^n(y)) < \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, entonces $y \in \mathcal{W}^s_\varepsilon(x) \cap \mathcal{W}^u_\varepsilon(x) = \{x\}$, y por tanto $x = y$. □

El resultado anterior garantiza que si dentro de un conjunto hiperbólico conocemos dos órbitas únicamente con una precisión finita ε, podemos determinar si las órbitas coinciden o son diferentes.

Definición. *Diremos que $f \in \mathrm{Diff}(M)$ presenta sensibilidad respecto a condiciones iniciales en $A \subset M$, si existe $\varepsilon > 0$ de forma que para cualquier $x \in A$, y $\delta > 0$, existe $y \in A$ con $d(x, y) < \delta$, de forma que $d(f^n(x), f^n(y)) > \varepsilon$ para alguna $n \in \mathbb{N}$.*

Esta propiedad es uno de los ingredientes fundamentales del comportamiento *caótico*, y garantiza que por más preciso que se registre el estado inicial de un fenómeno, después de un cierto tiempo el error de predicción será mayor que el valor de ε, independientemente del estado inicial considerado.

Resulta inmediato que cualquier difeomorfismo expansivo es sensible respecto a condiciones iniciales, así que dentro de un conjunto hiperbólico siempre se presenta sensibilidad respecto a condiciones iniciales.

2.4.3. Lema del Sombreado y ε-órbitas

Si los difeomorfismos f y $g \in \mathrm{Diff}(M)$ se encuentran a distancia $\mathscr{C}^0$ menor que $\varepsilon > 0$, las órbitas de g pueden considerarse como sucesiones de puntos que aproximan con un cierto error ε a las órbitas de f; y visto desde esta óptica, la estabilidad de los conjuntos hiperbólicos radica en que toda sucesión de puntos que aproxime suficientemente bien a una órbita hiperbólica puede ser identificada uniformemente (*sombreada*) con una órbita del sistema.

Una *ε-pseudo órbita* de f (o simplemente *ε-órbita*) es un conjunto $\{x_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ en M, para el que:

$$d(f(x_j), x_{j+1}) < \varepsilon, \ \forall \ j \in \mathbb{Z}.$$

Le llamaremos *ε-órbita periódica* a una ε-órbita definida por una sucesión periódica y *ε-órbita finita* a un segmento finito de una ε-órbita.

Ahora, diremos que una ε-órbita es *δ-sombreada* por la órbita de un punto $x \in M$, si:

$$d(f^j(x), x_j) < \delta, \ \forall \ j \in \mathbb{Z}.$$

Debido a la expansividad que se presenta en los conjuntos hiperbólicos, resulta imposible que una pseudo órbita sea sombreada de manera precisa por más de un punto dentro de un conjunto hiperbólico.

Proposición 2.25. *Sea $\Lambda \subset M$ un conjunto hiperbólico para $f \in \mathrm{Diff}(M)$. Existe $\delta > 0$ tal que si $\{x_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ es una ε-órbita que es δ-sombreada por $x \in M$, entonces x es el único punto en M que sombrea a dicha ε-órbita.*

Demostración. Sea $\{x_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ una ε-órbita que es δ-sombreada por dos puntos $x, x' \in M$, entonces se cumple:

$$d(f^n(x), f^n(x')) \leq d(f^n(x), x_n) + d(x_n, f^n(x')) < 2\delta, \ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Así que para δ menor que la mitad de la constante de expansividad de f en Λ, resulta que $x = x'$, y por tanto el sombreamiento es único. □

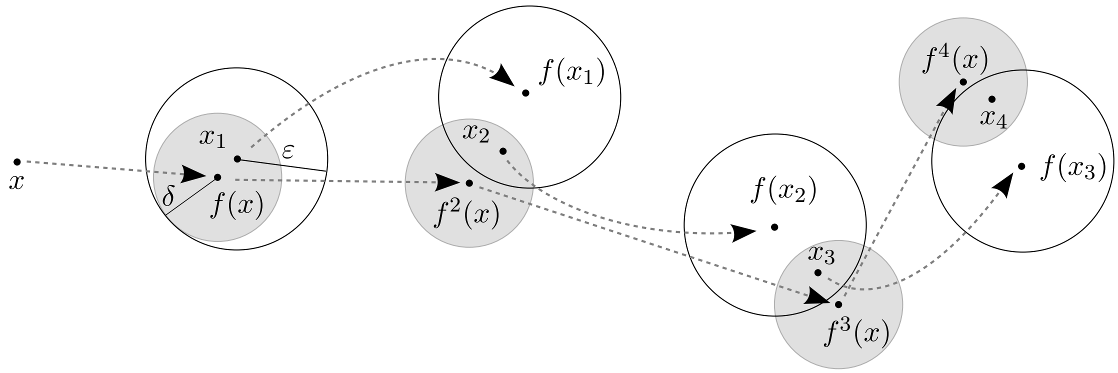

Figura 2.8: Una ε-órbita $\{x_i\}$ siendo δ-sombreada por la órbita de x.

A continuación mostraremos que las pseudo órbitas contenidas en un conjunto hiperbólico Λ se pueden sombrear de manera uniforme, y además, que en presencia de un estructura de producto local en Λ, es posible garantizar que la órbita con la que se sombrea está contenida en Λ.

Lema 2.26 (Lema del Sombreado). *Sea Λ un conjunto hiperbólico para $f \in \mathrm{Diff}(M)$. Para cualquier $\beta > 0$ existe $\alpha > 0$, de forma que toda α-órbita de f contenida en Λ, es β-sombreada por la órbita de algún punto $x \in M$. Adicionalmente,*

(1) Si Λ posee estructura de producto local, entonces $x \in \Lambda$.

(2) Si la α-órbita es periódica, entonces $x \in \mathrm{Per}(f)$.

Demostración. Sea λ la constante de contracción de f en el conjunto hiperbólico Λ. Por el Lema 2.22, existen constantes positivas $\varepsilon > \delta$, tales que si $x, y \in \Lambda$ cumplen $d(x,y) < \delta$, entonces $\mathcal{W}^s_\varepsilon(x)$ y $\mathcal{W}^u_\varepsilon(y)$ se intersectan en un único punto en M.

Para cualquier $\beta > 0$, podemos tomar $\varepsilon > \delta$ suficientemente pequeños, que cumplan:

$$\frac{\varepsilon\lambda}{1-\lambda} + \varepsilon + \frac{\delta}{2} < \beta.$$

Sea $N > 0$ suficientemente grande, tal que $\lambda^N \varepsilon < \delta/2$. Sea $\alpha > 0$ de forma que cualquier α-órbita finita $\{y_i\}_{1=0}^N$ en Λ, cumpla $d(f^j y_0, y_j) < \delta/2$ si $0 \le j \le N$.

Sean $r > 0$ y $\{x_i\}_{i=0}^{rN}$ una α-órbita finita. Definimos recursivamente una sucesión finita de puntos x'_{kN}, con $k \in \{0, \ldots, r\}$, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} x'_0 &= x_0, \\ x'_N &\in \mathcal{W}^u_\varepsilon(f^N x'_0) \cap \mathcal{W}^s_\varepsilon(x_N) \neq \emptyset, \\ &\vdots \\ x'_{kN} &\in \mathcal{W}^u_\varepsilon(f^N x'_{(k-1)N}) \cap \mathcal{W}^s_\varepsilon(x_{kN}) \neq \emptyset, \\ &\vdots \\ x'_{rN} &\in \mathcal{W}^u_\varepsilon(f^N x'_{(r-1)N}) \cap \mathcal{W}^s_\varepsilon(x_{rN}) \neq \emptyset. \end{aligned}$$

Para garantizar que la sucesión $\{x'_i\}_{i=0}^{rN}$ está bien definida, mostraremos que para cualquier $k \in [0, r]$, se cumple que $d(f^N x'_{(k-1)N}, x_{kN}) < \delta$.

Ya que $x'_{(k-1)N} \in \mathcal{W}^s_\varepsilon(x_{(k-1)N})$, el Teorema 2.19 de la variedad estable garantiza que:

$$d(f^N x'_{(k-1)N}, f^N x_{(k-1)N}) < \lambda^N d(x'_{(k-1)N}, x_{(k-1)N}) < \lambda^N \varepsilon < \delta/2,$$

donde la segunda desigualdad es valida ya que: $x'_{(k-1)N} \in \mathcal{W}^s_\varepsilon(x_{(k-1)N})$ y en particular se encuentra en la bola de radio ε alrededor de $x_{(k-1)N}$. Además, $\{x_i\}_{i=0}^{rN}$ es una α-órbita finita, así que cumple:

$$d(f^N x_{(k-1)N}, x_{kN}) < \delta/2,$$

y entonces:

$$d(f^N x'_{(k-1)N}, x_{kN}) < d(f^N x'_{(k-1)N}, f^N x_{(k-1)N}) + d(f^N x_{(k-1)N}, x_{kN}) < \delta$$

así que por el Lema 2.22 la intersección que define a x'_{kN} es un único punto. Sean $i \in [0, rN]$ y s de forma que $sN \leq i < (s+1)N$, entonces para $x := f^{-rN} x'_{rN}$ se cumple:

$$d(f^i x, f^{i-sN} x'_{sN}) = d(f^{i-rN} x'_{rN}, f^{i-sN} x'_{sN}) \leq \sum_{t=s+1}^{r} d(f^{i-tN} x'_{tN}, f^{i-(t-1)N} x_{(t-1)N})$$

$$= \sum_{t=s+1}^{r} d(f^{i-tN} x'_{tN}, f^{i-tN} f^N x_{(t-1)N})$$

y ya que $x'_{tN} \in \mathcal{W}^u_\varepsilon(f^N x'_{(t-1)N})$, por el Teorema 2.19 de la variedad estable, se obtiene:

$$d(f^i x, f^{i-sN} x'_{s_N}) \leq \sum_{t=s+1}^{r} \varepsilon \lambda^{-(i-t_N)} = \varepsilon \lambda \sum_{t=s+1}^{r} \lambda^{tN-i-1}$$

$$\leq \varepsilon \lambda \sum_{t=0}^{\infty} \lambda^t \leq \frac{\varepsilon \lambda}{1-\lambda},$$

Y debido a que $x'_{sN} \in \mathcal{W}^s_\varepsilon(x_{sN})$, se cumple:

$$d(f^{i-sN} x'_{s_N}, f^{i-sN} x_{s_N}) \leq \varepsilon.$$

Y por la elección de α, resulta que:

$$d(f^{i-sN} x_{s_N}, x_i) < \delta/2.$$

Así que con la desigualdad del triángulo se obtiene

$$\begin{aligned} d(f^i x, x_i) &\leq d(f^i x, f^{i-sN} x'_{sN}) + d(f^{i-sN} x'_{s_N}, f^{i-sN} x_{s_N}) + d(f^{i-sN} x_{s_N}, x_i) \\ &\leq \frac{\varepsilon \lambda}{1-\lambda} + \varepsilon + \frac{\delta}{2} < \beta. \end{aligned}$$

Con lo anterior obtuvimos que dado cualquier $\beta > 0$ existe $\alpha > 0$ de forma que cualquier α-órbita finita $\{x_i\}_{i=0}^{rN}$ es β-sombreada por la órbita de un punto x en M.

Para el caso de una α-órbita finita $\{x_i\}_{i=0}^n$, con $n \leq rN$, podemos definir $x_i = f^{i-n}x_n$ para $i \in (n, rN]$ y cualquier órbita que sombree a $\{x_i\}_{i=0}^{rN}$ sombreará así mismo a $\{x_i\}_{i=0}^n$, y como r puede tomarse arbitrariamente grande, la Proposición se vale para cualquier α-órbita finita $\{x_i\}_{i=0}^n$.

Ahora, si $\{x_i\}_{i=a}^b$ es una α-órbita finita con $a, b \in \mathbb{Z}$, $\{x_{j+a}\}_{i=0}^{b-a}$ también es una α-órbita finita que resultará β-sombreada por un cierto punto x, así que $\{x_i\}_{i=a}^b$ será β-sombreada por $f^{-a}x$.

Por último, si tomamos una α-órbita infinita $\{x_i\}_{i=-\infty}^{\infty}$, para cualquier $m \in \mathbb{N}$ podemos encontrar un punto $x^{(m)} \in \Lambda$ que β-sombrea la ε-órbita finita $\{x_i\}_{i=-m}^m$, y utilizando un punto límite de la sucesión $\{x^{(m)}\}_{m\in\mathbb{N}}$, podemos β-sombrear a la α-órbita infinita $\{x_i\}_{i=-\infty}^{\infty}$. Con lo anterior se concluye la demostración de la afirmación principal del teorema.

Ahora, usando la hipótesis adicional de que Λ posee estructura de producto local, por el Lema 2.22 podemos garantizar que el punto de intersección entre variedades estable e inestable que define a x'_{rN} se encuentra contenido en Λ, que por ser un conjunto invariante implica que $x := f^{-rN}x'_{rN} \in \Lambda$.

Para el segundo inciso, supongamos que la α-órbita es periódica de periodo k, las órbitas de x y $f^k(x)$ β-sombrean a la α-órbita, así que para $\beta < 2\gamma$ la constante de expansividad de f en Λ, el sombreamiento es único y por tanto $f^k(x) = x$ y así, $x \in \mathrm{Per}(f)$. □

El Lema del Sombreado resulta fundamental para garantizar la estabilidad bajo perturbaciones dentro de los conjuntos hiperbólicos. Antes de abordar la demostración de este resultado, discutiremos algunas propiedades de la dinámica en conjuntos hiperbólicos.

Definición. *Sea Λ un conjunto invariante. Diremos que U es una vecindad aislante de Λ, si $\Lambda \subset \mathrm{int}(U)$ y cumple que:*

$$\Lambda = \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} f^n(U).$$

Si un conjunto invariante tiene una vecindad aislante, diremos que es un conjunto aislado.

Cualquier conjunto invariante Δ, contenido en la vecindad aislante de un conjunto invariante Λ, también se encuentra dentro de Λ, así que un conjunto aislado es el conjunto maximal invariante contenido en su vecindad aislante. Esto motiva la siguiente definición:

Definición. *Sea Λ un conjunto invariante. Diremos que Λ es localmente maximal, si existe una vecindad U de Λ, de forma que si $\Delta \subset U$ es invariante, entonces $\Delta \subset \Lambda$.*

Proposición 2.27. *Sea Λ un conjunto hiperbólico para $f \in \mathrm{Diff}(M)$. Son equivalentes:*

(1) Λ posee estructura de producto local,

(2) Λ es aislado,

(3) Λ es localmente maximal.

Demostración. ($1 \Rightarrow 2$) Sea Λ un conjunto hiperbólico con estructura de producto local. Sea λ la constante de expansividad de f en Λ. Por el Lema del Sombreado, existe $\alpha > 0$, de forma que cualquier α-órbita puede ser $\gamma/2$-sombreada por una única órbita en Λ. Para cualquier $x \in M$, sea $\{x_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ una sucesión en Λ, donde x_i sea el elemento de Λ, que se encuentra a distancia mínima de $f^i(x)$. Si $\mathcal{O}(x)$ se encuentra dentro de una vecindad U de radio $r < \gamma/2$ suficientemente pequeño, por la continuidad de f se sigue que la sucesión $\{x_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ es una α-órbita, así que puede ser $\gamma/2$-sombreada por la órbita de un único punto $z \in \Lambda$. Debido a que $\mathcal{O}(x) \subset U$, resulta que $d(f^i(x), x_i) < r < \gamma/2$, así que la órbita de x también sombrea a $\{x_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$. Esto sólo es posible si $x = z$, ya que de la expansividad de f en Λ, se sigue que los $\gamma/2$-sombreamientos son únicos. Se concluye entonces que $x \in \Lambda$, y por tanto, Λ es aislado.

(2 $\Rightarrow$ 1) Sean U vecindad aislante de Λ y ε, $\delta > 0$ como en el Teorema 2.22. La continuidad de $[\cdot,\cdot]_{\varepsilon,\delta}$ permite garantizar que si $x, y \in \Lambda$ cumplen $d(x, y) < \delta$, entonces $z := [x, y]_{\varepsilon,\delta}$ se encuentra en U. Debido a que $z \in \mathcal{W}^s_\varepsilon(x) \cap \mathcal{W}^u_\varepsilon(y)$, el Teorema 2.19de la variedad estable garantiza que para cualquier $n \in \mathbb{N}$, se cumple:

$$d(f^n(z), f^n(x)) < \lambda^n d(z, x) \text{ y } d(f^{-n}(z), f^{-n}(y)) < \lambda^n d(z, y),$$

donde $\lambda \in (0, 1)$ es la constante de hiperbolicidad de Λ. Esto garantiza que $\mathcal{O}(z) \subset U$, y entonces $z \in \Lambda$, ya que U es una vecindad aislante de Λ. Concluimos que $z = [x, y]_{\varepsilon,\delta} \in \Lambda$, y por lo tanto, Λ posee estructura de producto local.

(2 $\Leftrightarrow$ 3) Es inmediata. □

2.4.4. Estabilidad de Conjuntos Hiperbólicos

Sea Λ un conjunto hiperbólico para $f \in \text{Diff}(M)$. El Corolario 2.18 garantiza que para cualquier $g \in \text{Diff}(M)$ suficientemente $\mathscr{C}^1$-cercano a f, el conjunto maximal invariante Λ_g contenido en una vecindad U de Λ, es hiperbólico. Mostraremos que con la propiedad del sombreado es posible construir una conjugación topológica entre $f|_\Lambda$ y $g|_{\Lambda_g}$.

Teorema 2.28 (Estabilidad de Conjuntos Hiperbólicos). *Sea $\Lambda \subset M$ un conjunto hiperbólico aislado para $f \in \text{Diff}(M)$, con vecindad aislante U. Existe una vecindad $\mathcal{U}$ de f en la topología $\mathscr{C}^1$, de forma que para cualquier $g \in \mathcal{U}$ existe una conjugación topológica $h : \Lambda_g \to \Lambda$, donde $\Lambda_g = \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} g^n(U)$.*

Demostración. Sea Λ un conjunto hiperbólico aislado para f con vecindad aislante U. La proposición 2.18 garantiza la existencia de $\mathcal{U}$, una $\mathscr{C}^1$-vecindad de f, tal que Λ_g es un conjunto hiperbólico para g. Podemos tomar $\mathcal{U}$ cumpliendo las siguientes propiedades:

(1) Cualquier $g \in \mathcal{U}$ es γ-expansiva en Λ_g.

(2) Por el Lema del Sombreado existe $\alpha > 0$, de forma que toda α-órbita de f en Λ puede ser $\gamma/4$-sombreada por alguna órbita de f en Λ.

(3) Cualquier $g \in \mathcal{U}$ es uniformemente continua en M, así que existe $\delta > 0$ de forma que $d(g(x), g(y)) < \alpha/3$ para cualesquiera $x, y \in M$ con $d(x, y) < \delta$, adicionalmente, podemos tomar $\delta < \text{mín}\{\alpha/3, \gamma/4\}$.

(4) Podemos hacer $\mathcal{U}$ suficientemente pequeña, de forma que para cualquier $g \in \mathcal{U}$, Λ_g esté contenido en la vecindad de radio δ alrededor de Λ.

(5) Para cualesquiera $g \in \mathcal{U}$ y $x \in M$, se cumple $d(g(x), f(x)) < \alpha/3$.

Sea $g \in \mathcal{U}$. Usando las propiedades anteriores construiremos una conjugación topológica $h : \Lambda_g \to \Lambda$ entre g y f. Sea $x \in \Lambda_g$, por la propiedad (4) y debido a la invariancia de Λ_g, es posible construir $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ una sucesión en Λ para la que $d(x_n, g^n(x)) < \delta$, $\forall\ n \in \mathbb{Z}$. Esta sucesión es una α-órbita de f pues para cualquier $n \in \mathbb{Z}$, se cumple:

$$\begin{aligned} d(f(x_n), x_{n+1}) &\leq d(f(x_n), g(x_n)) + d(g(x_n), g(g^n(x))) + d(g^{n+1}(x), x_{n+1}) \\ &\leq \alpha/3 + \alpha/3 + \delta < \alpha. \end{aligned}$$

Por la propiedad (2), existe $y \in \Lambda$ de forma que:

$$d(f^n(y), x_n) < \gamma/4,\ \forall\ n \in \mathbb{Z};$$

así que, para cualquier $x \in \Lambda_g$, existe $y \in \Lambda$, tal que si $n \in \mathbb{Z}$, entonces:

$$d(f^n(y), g^n(x)) \leq d(f^n(y), x_n) + d(x_n, g^n(x)) \leq \gamma/4 + \delta < \gamma/2.$$

Además, y es el único punto que satisface $d(f^n(y), g^n(x)) < \gamma/2$ para cualquier $n \in \mathbb{Z}$, ya que si algún otro punto y' lo cumpliera, tendríamos que para cualquier $n \in \mathbb{Z}$, se cumple:

$$d(f^n(y), f^n(y')) \leq d(f^n(y), g^n(x)) + d(g^n(x), f^n(y')) < \gamma/2 + \gamma/2 = \gamma,$$

pero como γ es la constante de expansividad de f, entonces $y = y'$. Lo anterior nos permite definir una función $h : \Lambda_g \to \Lambda$, que a $x \in \Lambda_g$ le asigna el único punto $h(x)$ para el que:

$$d(f^n(h(x)), g^n(x)) < \gamma/2,\ \forall\ n \in \mathbb{Z}.$$

Mostraremos a continuación que h cumple las propiedades buscadas.

(1) h es una conjugación entre g en Λ_g y f en Λ.

Sea $x \in \Lambda_g$, entonces $z := h(g(x))$ es el único punto que para todo $n \in \mathbb{Z}$ cumple $d(f^n(z), g^n(g(x)) < \gamma/2$, así que:

$$\begin{aligned} d(f^n(f(h(x))), f^n(z)) &\leq d(f^{n+1}(h(x)), g^{n+1}(x)) + d(g^n(g(x)), f^n(z)) \\ &< \gamma/2 + \gamma/2 = \gamma. \end{aligned}$$

Pero f es γ-expansiva, así que $d(f(h(x)), z) = 0$, y para cualquier $x \in \Lambda_g$, se cumple:

$$f(h(x)) = z = h(g(x)).$$

Se concluye entonces que $f \circ h = h \circ g$ en Λ_g.

(2) h es continua en Λ_g.

Sea $\{x_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ una sucesión en Λ_g, convergente a x. La sucesión $\{h(x_i)\}_{i\in\mathbb{Z}}$, es una sucesión en Λ, así que por la compacidad de Λ posee algún punto límite y. Para cualesquiera $i, n \in \mathbb{Z}$ se cumple que:

$$d(f^n(h(x_i)), g^n(x_i)) < \gamma/2.$$

Sea $m \in \mathbb{Z}$. Podemos escoger k suficientemente grande, de forma que:

$$d(f^m(h(x_k)), g^m(x_k)) < \mu < \gamma/2,$$

y

$$d(f^m(y)), f^m(h(x_k))) + d(g^m(y)), g^m(h(x_k))) < \gamma/2 - \mu.$$

Por lo anterior, resulta que:

$$\begin{aligned} d(f^m(y)), g^m(x)) &\leq d(f^m(y)), f^m(h(x_k))) + d(f^m(h(x_k)), g^m(x_k)) + d(g^m(x_k), g^n(x)) \\ &< \mu + \gamma/2 - \mu = \gamma/2. \end{aligned}$$

Pero $h(x) = y$ es el único punto que satisface esta desigualdad para todo $m \in \mathbb{Z}$, y por tanto, es el único punto límite de la sucesión $\{h(x_i)\}_{i\in\mathbb{Z}}$. Entonces se cumple:

$$\lim_{i\to\infty} h(x_i) = y = h(x) = h(\lim_{i\to\infty} x_i),$$

de lo que se concluye que h es continua en Λ_g.

(3) $h : \Lambda_g \to \Lambda$ es inyectiva.

Sean $x_1, x_2 \in \Lambda_g$, tales que $h(x_1) = h(x_2)$. Para cualquier $n \in \mathbb{Z}$ se cumple:

$$d(f^n(h(x_i)), g^n(x_i)) < \gamma/2, \text{con } i = 1, 2.$$

Debido a que $h(x_1) = h(x_2)$, resulta $d(f^n(h(x_2)), g^n(x_1)) < \gamma/2$, entonces:

$$d(g^n(x_1), g^n(x_2)) \leq d(g^n(x_1), f^n(h(x_2))) + d(f^n(h(x_2)), g^n(x_2)) < \gamma.$$

Así que la γ-expansividad de g en Λ_g implica $x_1 = x_2$, y por tanto, h es inyectiva.

(4) h es un homeomorfismo entre Λ_g y Λ.

Sabemos que Λ_g es hiperbólico para cualquier $g \in \mathcal{U}$, así que de la misma forma que en la construcción de h, podemos definir $k : \Lambda \to \Lambda_g$ la función que a un punto $y \in \Lambda$ le asigna el único punto $k(y)$ para el que se satisface:

$$d(g^n(k(y)), f^n(y)) < \gamma/2, \ \forall\, n \in \mathbb{Z},$$

pero por la definición de h, el punto $h(k(y))$ es el único para el que:

$$d(f^n(h(k(y))), g^n(k(y))) < \gamma/2, \ \forall\, n \in \mathbb{Z}.$$

Entonces, la desigualdad del triángulo garantiza:

$$d(f^n(h(k(y))), f^n(y)) < \gamma,$$

para cualquier $n \in \mathbb{Z}$. Mientras que la γ-expansividad de f garantiza $h(k(y)) = y$, y entonces, h es un homeomorfismo y su inversa es precisamente k.

□

2.5. Difeomorfismos Anosov

Con la herramienta desarrollada en las secciones anteriores, analizaremos la siguiente clase de difeomorfismos sobre M.

Definición. *Un difeomorfismo $f \in \mathrm{Diff}(M)$ es Anosov, si M es un conjunto hiperbólico.*

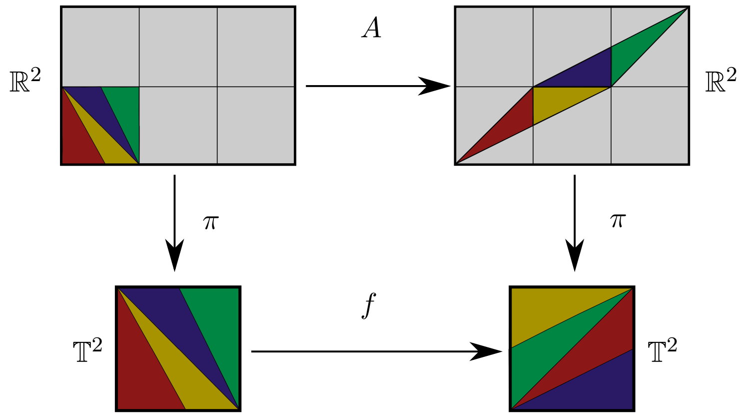

Figura 2.9: Una matriz $A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ sin valores propios de módulo uno induce un difeomorfismo f en el toro con un punto fijo hiperbólico que tiene intersecciones homoclínicas transversales, y además, una cantidad infinita de puntos periódicos distribuidos de forma densa en el toro.

La construcción más sencilla para obtener un difeomorfismo Anosov es en el toro de dimensión n. Cualquier transformación lineal hiperbólica $A \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ actúa sobre $\mathbb{R}^n$ preservando la retícula de los enteros, por lo que es posible inducir un automorfismo f en el cociente $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$. Debido a que A tiene un punto fijo en el origen de $\mathbb{R}^n$, f tiene un punto fijo p en $\mathbb{T}^n$, que resulta ser hiperbólico debido a la hiperbolicidad de A. La proyección en el toro de los subespacios estable e inestable de A son precisamente las variedades estable e inestable globales de f en p.

Por ser toda la variedad un conjunto hiperbólico, cualquier difeomorfismo Anosov posee estructura de producto local, además, el Corolario 2.24 garantiza que cualquier difeomorfismo Anosov es expansivo, mientras que del Teorema 2.28 (Estabilidad de conjuntos hiperbólicos) se concluye el siguiente teorema.

Teorema 2.29. *Los difeomorfismos Anosov forman un conjunto abierto en* $\mathrm{Diff}(M)$ *con la topología* $\mathscr{C}^1$*, y son estructuralmente estables.*

Cuando la variedad completa posee una estructura hiperbólica, todos los conjuntos recurrentes vistos en la Sección 1.2 coinciden con el conjunto no-errante Ω_f.

Proposición 2.30. *Sea* $f \in \mathrm{Diff}(M)$ *Anosov. Entonces* $\overline{\mathrm{Per}(f)} = \Omega_f$.

Demostración. Sea $y \in \Omega_f$, mostraremos que arbitrariamente cerca de y existe algún elemento de $\mathrm{Per}(f)$. Sea $\beta > 0$, el Lema del sombreado garantiza que para cualquier $\beta_0 < \beta$ existe $\alpha > 0$, tal que cualquier α-órbita es β_0-sombreada por una única órbita en M. Podemos tomar α y β_0 suficientemente pequeños, que cumplan $\alpha + \beta_o < \beta$. Debido a que $y \in \Omega_f$, existe $z \in M$ tal que $d(y, z) < \alpha$, y además, $d(f^n(z), z) < \alpha$, así que la sucesión $\{z, f(z), \ldots, f^n(z), z\}$ es una α-órbita periódica, y el Lema del sombreado garantiza que puede ser β_0-sombreada por un único punto $x \in \mathrm{Per}(f)$, es decir, cumple $d(f^j(z), f^j(x)) < \beta_0$ para $j = 0, \ldots, n$. En particular, cumple $d(z, x) < \beta_0$, así que:

$$d(y, x) \leq d(y, z) + d(z, x) < \alpha + \beta_0 < \beta,$$

y se concluye que arbitrariamente cerca de cualquier punto en Ω_f, existe otro en $\mathrm{Per}(f)$. $\square$

Es un problema abierto determinar si para cualquier difeomorfismo Anosov se cumple que $\Omega_f = M$ (aunque en el caso de los automorfismos toroidales la respuesta es afirmativa), y además, preguntas muy básicas sobre difeomorfismos Anosov continuan abiertas hasta la fecha, entre ellas: ¿todo difeomorfismo Anosov posee un punto fijo? ¿Qué espacios admiten un difeomorfismo Anosov?

Capítulo 3

Ω-Estabilidad

3.1. Difeomorfismos Axioma A

En la sección anterior mostramos que la estabilidad estructural se puede garantizar con la condición exclusiva de que toda la variedad cuente con una estructura hiperbólica. En este capítulo estableceremos además, condiciones para la estabilidad del sistema restringido al conjunto no-errante. Para garantizar lo anterior no es necesario que toda la variedad sea un conjunto hiperbólico, pero se requieren condiciones adicionales sobre la forma en que los conjuntos recurrentes se encuentran distribuidos. Introduciremos además, una nueva clase de difeomorfismos.

Definición. *Un difeomorfismo $f \in \mathrm{Diff}(M)$ es Axioma A si cumple que Ω_f es hiperbólico y además $\overline{\mathrm{Per}(f)} = \Omega_f$.*

En general, estas condiciones son independientes [Kur78], aunque para superficies, la hiperbolicidad de Ω_f garantiza que los puntos periódicos son densos en Ω_f [New73].

Proposición 3.1. *Si para $f \in \mathrm{Diff}(M)$ se cumple que $\overline{\mathrm{Per}(f)}$ es hiperbólico, entonces $\overline{\mathrm{Per}(f)}$ posee estructura de producto local.*

Demostración. Por el Corolario 2.23, basta mostrar que existe $\delta > 0$, de forma que si $x, y \in \overline{\mathrm{Per}(f)}$ cumplen $d(x, y) < \delta$, entonces $[x, y] \in \overline{\mathrm{Per}(f)}$. Por la continuidad de la función $[\cdot,\cdot]$, basta considerar $x, y \in \mathrm{Per}(f)$ (con periodos n, m respectivamente). Para cualquier U vecindad abierta de $\overline{\mathrm{Per}(f)}$ podemos tomar $\varepsilon > 0$ tal que que $\mathcal{W}^s_\varepsilon(x) \cup \mathcal{W}^u_\varepsilon(x)$ se encuentra contenido en U. Ahora, para cualquier $j \geq 0$, las intersecciones entre las variedades estable e inestable $w = [x, y]$ y $z = [y, x]$, cumplen las siguientes propiedades:

- $f^j(w) \in \mathcal{W}^s_\varepsilon(f^j(x))$, y también, $\lim_{k\to\infty} f^{nk}(w) = x$,
- $f^j(z) \in \mathcal{W}^s_\varepsilon(f^j(y))$, y también, $\lim_{k\to\infty} f^{mk}(z) = y$,
- $f^{-j}(z) \in \mathcal{W}^u_\varepsilon(f^{-j}(x))$, y también, $\lim_{k\to-\infty} f^{nk}(z) = y$,
- $f^{-j}(w) \in \mathcal{W}^u_\varepsilon(f^{-j}(y))$, y también, $\lim_{k\to-\infty} f^{mk}(w) = x$.

Lo anterior garantiza que para cualquier $\alpha > 0$ existe $k \in \mathbb{N}$ de forma que:

$$\max\{d(f^{kn}(w), x), d(f^{-kn}(z), x), d(f^{km}(z), y), d(f^{-km}(w), y)\} < \alpha/2,$$

con lo que la sucesión:

$$\{w, f(w), \ldots, f^{kn}(w), f^{-kn}(z), \ldots, f^{-1}(z), z, f(z), \ldots, f^{km}(z), f^{-km}(w), \ldots, f^{-1}(w), w\},$$

es una α-órbita periódica.

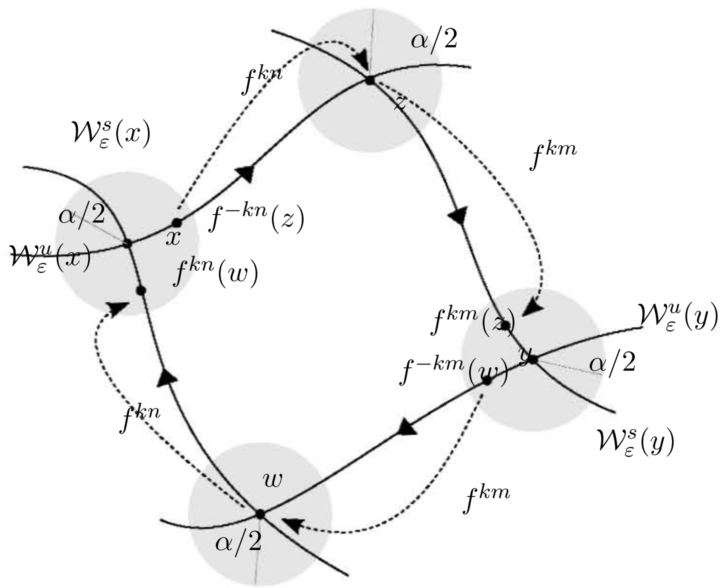

Figura 3.1: Construcción de una α-órbita mediante intersecciones entre variedades estables e inestables.

Hemos llegado a que para cualquier $\alpha > 0$ siempre es posible construir una α-órbita periódica que empieza y termina en w, así que gracias al sombreado único de ε-órbitas periódicas podemos garantizar que existe $w' \in \mathrm{Per}(f)$ arbitrariamente cercano a w, entonces $w = w'$ y así, $\overline{\mathrm{Per}(f)}$ posee estructura de producto local. □

Corolario 3.2. *Si $f \in \mathrm{Diff}(M)$ es Axioma A, entonces Ω_f posee estructura de producto local.*

Debido a la condición $\overline{\mathrm{Per}(f)} = \Omega_f$, resulta que el conjunto Ω_f de cualquier difeomorfismo Axioma A, se descompone en una cantidad finita de componentes dinámicamente independientes.

Teorema 3.3 (Descomposición Espectral). *Si $f \in \mathrm{Diff}(M)$ es Axioma A, entonces Ω_f se puede descomponer en una unión finita de conjuntos cerrados, invariantes y disjuntos por parejas:*

$$\Omega_f = \Omega_1 \cup \ldots \cup \Omega_s,$$

de forma que para cualquier $1 \leq i \leq s$:

(1) $f|_{\Omega_i}$ es topológicamente transitiva,

(2) Ω_i se puede expresar como una unión finita $X_{1,i} \cup \ldots \cup X_{n_i,i}$ de cerrados disjuntos por parejas, permutados ciclicamente por f, y donde $f^{n_i}|_{X_{j,i}}$ es topológicamente mezclante.

Demostración. Por el Corolario 3.2 podemos tomar $\delta > 0$, de forma que la intersección entre las variedades estable e inestable de puntos δ-cercanos sea única. Sea $p \in \mathrm{Per}(f)$

de periodo l, definimos $X_p = \overline{\mathcal{W}^u(p) \cap \Omega_f}$. Claramente X_p es cerrado. Mostraremos que también es abierto relativo a Ω_f al garantizar que coincide con su vecindad abierta:

$$B_\delta(X_p) = \{y \in \Omega_f | d(y, X_p) < \delta\}.$$

Desde luego $X_p \subset B_\delta(X_p)$, así que basta mostrar $B_\delta(X_p) \subset X_p$. Sean $y \in B_\delta(X_p) \cap \mathrm{Per}(f)$ de periodo k, y $x \in \mathcal{W}^u(p) \cap \Omega_f$ que cumpla $d(x, y) < \delta$. Debido a que $x \in \mathcal{W}^u(p)$, necesariamente $\mathcal{W}^u(x) = \mathcal{W}^u(p)$. Además, $[y, x] = z$ está bien definido en Ω_f (ver Figura 3.2).

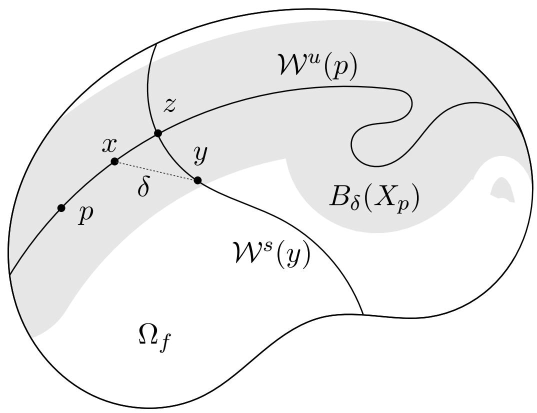

Figura 3.2: La construcción de una descomposición para Ω_f.

Ahora, debido a que $z \in \mathcal{W}^s(y)$, tenemos que $f^{kn}(z) \to y$ si $n \to \infty$, y además, como $z \in \mathcal{W}^s(x) = \mathcal{W}^s(p)$, necesariamente $f^{ln}(z) \in \mathcal{W}^u(p) \cap \Omega_f$. Cualquier subsucesión de $\{f^{kn}(z)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a y, así que la subsucesión $\{f^{kln}(z)\}_{n\in\mathbb{N}}$ resulta convergente a y, y se encuentra contenida en $\mathcal{W}^u(p) \cap \Omega_f$. Por lo anterior, obtenemos que $y \in \overline{\mathcal{W}^u(p) \cap \Omega_f} = X_p$, y con esto, que cualquier punto periódico contenido en $B_\delta(X_p)$ se encuentra también en X_p. Para concluir el argumento, basta considerar que $B_\delta(X_p) \cap \mathrm{Per}(f)$ es denso en $B_\delta(X_p)$, así que $B_\delta(X_p) \subset X_p$, y por lo tanto, X_p es cerrado y abierto relativo a Ω_f. Ahora, veremos que X_p y X_q son iguales o disjuntos para cualesquiera $p, q \in \mathrm{Per}(f)$. Supongamos que p, q tienen periodos l, m respectivamente, y que $q \in X_p$. Por ser X_p abierto relativo a Ω_f, podemos tomar ε suficientemente pequeño, de forma que:

$$\mathcal{W}^u_\varepsilon(q) \cap \Omega_f \subset B_\varepsilon(q) \cap \Omega_f \subset X_p,$$

y entonces:

$$X_q = \overline{\bigcup_{n\geq 0} f^{lmn}(\mathcal{W}^u_\varepsilon(q) \cap \Omega_f)} \subset X_p. \tag{3.1}$$

Ahora, por ser X_p una vecindad abierta de q en Ω_f, necesariamente existe un elemento $y \in \mathcal{W}^u(p) \cap \Omega_f \cap X_p$, que por la igualdad (3.1), debe cumplir:

$$p = \lim_{n\to-\infty} f^{lmn}(y) \in X_q,$$

por lo que $X_p \subset X_q$, y con esto, $X_p = X_q$. Así que X_p y X_q resultan siempre iguales o dijuntos para $p, q \in \mathrm{Per}(f)$. Ahora, sean $p, q \in \Omega_f$ tales que $X_p \cap X_q \neq \emptyset$. Por tratarse de conjuntos abiertos en Ω_f, existe $r \in X_p \cap X_q \cap \mathrm{Per}(f)$, y entonces, $X_p = X_q = X_r$. Concluimos entonces que X_p y X_q son iguales o disjuntos para cualesquiera $p, q \in \Omega_f$.

Ahora, debido a que $\{X_p\}_{p\in\Omega_f}$ es una cubierta abierta de Ω_f, y Ω_f es compacto, podemos extraerle una subcubierta finita, y tomando en cuenta que $X_{f(p)} = f(X_p)$, obtenemos que existe un cierto número s de ciclos disjuntos que son permutados por f:

$$\Omega_1 = X_{1,1}\cup \ldots \cup X_{n_1,1}$$
$$\vdots$$
$$\Omega_s = X_{1,s}\cup \ldots \cup X_{n_s,s}.$$

Por construcción de los ciclos podemos garantizar que $f(\Omega_i) = \Omega_i$ para cualquier $i = 1,\ldots,s$. Sean U, V abiertos contenidos en X_p y $p' \in V \cap \mathrm{Per}(f)$. Para cualquier $q \in X_p$, necesariamente $X_p = \overline{\mathcal{W}^u(q)\cap\Omega_f}$, así que podemos afirmar que la variedad inestable en Ω_f de cualquier punto en X_p debe intersectar al abierto U. Por lo anterior, existe $z \in \mathcal{W}^u(p')\cap\Omega_f$, que además, pertenece a U. Debido a que X_p se encuentra en un ciclo permutado por f, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $f^N(X_p) = X_p$, y como $p' \in \mathrm{Per}(f)$, existe $k \in \mathbb{N}$, de forma que $f^{kN}(p') = p' \in V$. Nuevamente, usando que $f^{iN}(p') \in X_p = \overline{\mathcal{W}^u(f^{iN}(p'))\cap\Omega_f}$ para cualquier $i \in \mathbb{N}$, podemos encontrar $z_i \in U \cap \mathcal{W}^u(f^{iN}(p'))$, para $0 \le i < k$ (ver Figura 3.3). Con lo anterior podemos garantizar que $f^{kNt}(z_i) \to f^{iN}(p') \in f^{iN}(V)$ cuando $t \to -\infty$, así que existen enteros T_i con $0 \le i < k$, de forma que para cualquier $t \ge T_i$, se cumple:

$$f^{-kNt}(z_i) \in f^{iN}(V), \text{ o de forma equivalente, } f^{-kNt-iN}(z_i) \in V. \tag{3.2}$$

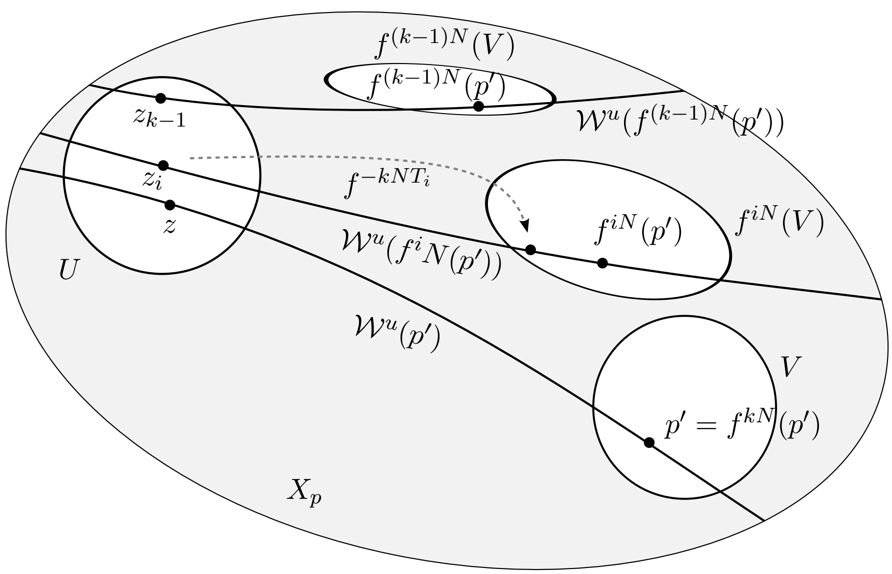

Figura 3.3: Procedimiento para garantizar que $f^N\big|_{X_p}$ es topológicamente mezclante.

Sea $T = \max\{T_i\}$. Para $t > kT$ podemos hacer $t = ks + i$, con $0 \le i < k$, con lo que llegamos a que $f^{tN}(z_i) = f^{-kNs-iN}(z_i)$, que por la ecuación (3.2) resulta contenido en V. Por lo anterior y debido a que $z_i \in U$, queda garantizado que para cualquier $t \ge kT$, se cumple:

$$f^{-tN}(U) \cap V \neq \emptyset,$$

y por lo tanto:

$$U \cap f^{tN}(V) \neq \emptyset.$$

Así que podemos concluir que f^N es mezclante en X_p, donde N es la longitud del ciclo al que pertenece X_p. Para cualquier $p \in \Omega_f$, $f^N : X_p \to X_p$ es topológicamente mezclante, así que del Corolario 1.5, se sigue que para cualquier $1 \leq j \leq s$, $f : \Omega_j \to \Omega_j$ es topológicamente transitivo. $\square$

A la descomposición anterior de Ω_f le llamaremos *descomposición espectral*, y a los cerrados invariantes $\Omega_1, \ldots, \Omega_s$ en que se descompone, les llamaremos *piezas básicas* de Ω_f.

La descomposición espectral de un conjunto hiperbólico es única salvo cambio de índices. Suponiendo que existe $\Pi_1, \ldots, \Pi_r$ otra descomposición de Ω_f en conjuntos cerrados, disjuntos e invariantes en donde f es topológicamente transitiva, llegamos a que $\Omega_i \cap \Pi_1, \ldots, \Omega_i \cap \Pi_r$ conforma una descomposición de Ω_i en subconjuntos disjuntos, cerrados e invariantes. Por ser f topológicamente transitiva en Ω_i, todas menos una de las piezas Π_j son vacias, y entonces $\Omega_i \subset \Pi_j$. Con el mismo argumento obtenemos que $\Pi_j \subset \Omega_i$, y entonces, la descomposición espectral es única.

Obtener la descomposición espectral de un sistema resulta fundamental para comprender su dinámica, y debido a que en cada una de las piezas básicas, el sistema es topológicamente transitivo, estas piezas resultan ser indivisibles dinámicamente; y por ser invariantes, resultan dinámicamente inaccesibles entre ellas.

Además, la descomposición espectral nos permite obtener información adicional sobre la estructura global de las órbitas en todo M. Cualquier órbita afuera del conjunto no-errante, simplemente transita de una pieza básica hacia otra.

Proposición 3.4. *Sea $f \in \mathrm{Diff}(M)$ Axioma A, con piezas básicas $\Omega_1, \ldots, \Omega_k$. Entonces:*

$$M = \bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{W}^s(\Omega_i) = \bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{W}^u(\Omega_i).$$

Demostración. Las piezas básicas son disjuntas por parejas, cerradas e invariantes; así que podemos tomar abiertos $U_1, \ldots, U_k$ que las contengan, tales que:

$$\overline{U_i} \cap \overline{U_j} = \emptyset \text{ y } f(\overline{U_i}) \cap \overline{U_j} = \emptyset, \text{ si } i \neq j.$$

Sea $x \in M$. La Proposición 1.3 garantiza que $\omega(f) \subset \Omega_f = \bigcup_{i=1}^{k} \Omega_i$, así que por la Proposición 1.1, existe $N \in \mathbb{N}$, tal que, $f^n(x) \in \bigcup_{i=1}^{k} U_i$ para $n \geq N$. Supongamos sin pérdida de generalidad, que $f^N(x)$ se encuentra en U_l, entonces, para cualquier $n \geq N$ y $i \neq j$, se cumple $f^n(x) \in U_l$, ya que $f(\overline{U_i}) \cap \overline{U_j} = \emptyset$. Por lo anterior, los puntos ω-límite de x se encuentran en $\overline{U_l}$, así que $\omega(x) \subset \overline{U_l} \cap \Omega_f = \Omega_l$, y se concluye que $z \in \mathcal{W}^s(\Omega_l)$. La segunda igualdad se obtiene con el mismo prodecidimiento pero con $\alpha(x)$. $\square$

Definición. *Sea $f \in \mathrm{Diff}^r(M)$ Axioma A, diremos que f cumple la condicion fuerte de transversalidad, si para cualesquiera $x, y \in \Omega_f$, sus variedades estable $\mathcal{W}^s(x)$ e inestable $\mathcal{W}^u(y)$ globales, se intersectan transversalmente.*

Se enuncia sin demostración, un resultado fundamental en la teoría de la estabilidad estructural, demostrado por Robbin (para $r \geq 2$) [Rob71], y por Robinson (para $r = 1$) [Rob76].

Teorema 3.5 (Estabilidad Estructural). *Sea $f \in \mathrm{Diff}^r(M)$ Axioma A y que cumple la condición fuerte de transversalidad. Entonces f es $\mathscr{C}^r$-estructuralmente estable $(r \geq 1)$.*

El recíproco del teorema anterior es un problema abierto. Ha sido llamada Conjetura de Estabilidad, y fue planteada por Palis y Smale [PS70]. Permanece sin solución 40 años después.

Conjetura (Estabilidad). $f \in \operatorname{Diff}^r(M)$ es Axioma A y cumple la condición fuerte de transversalidad, si y sólo si, es $\mathscr{C}^r$-estructuralmente estable ($r \geq 1$).

El resultado parcial más importante en este sentido se debe a Ricardo Mañé [Mañ88], que para $r = 1$, mostró que la Conjetura es cierta.

Teorema 3.6 ($\mathscr{C}^1$-Estabilidad Estructural). *$f \in \operatorname{Diff}(M)$ es Axioma A y cumple la propiedad fuerte de transversalidad, si y sólo si, es $\mathscr{C}^1$-estructuralmente estable.*

La Conjetura de Estabilidad tiene una contraparte para estabilidad restringida al conjunto no errante del sistema, que discutiremos en la sección 3.4.

3.2. Ω-Estabilidad y Ω-Explosiones

En las últimas secciones, obtendremos condiciones suficientes para garantizar que cualquier difeomorfismo suficientemente cercano a uno Axioma A posee la misma dinámica dentro del conjunto no-errante, para lo que usaremos la siguiente noción de equivalencia.

Definición. *Diremos que $f, g \in \operatorname{Diff}(M)$ son Ω-conjugados, si existe un homeomorfismo $h : \Omega_f \to \Omega_g$, que conjuga a $f|_{\Omega_f}$ con $g|_{\Omega_g}$.*

La Proposición 1.7 garantiza que las conjugaciones topológicas son una biyección entre los respectivos conjuntos no-errantes, así que dos difeomorfismos conjugados, son también Ω-conjugados. Además, por tratarse de una restricción de la relación de conjugación topológica a un subconjunto del espacio, es claro que la Ω-conjugación es también una relación de equivalencia.

Definición. *Diremos que $f \in \operatorname{Diff}(M)$ es Ω-estable, si existe una vecindad $\mathscr{U}$ de f en $\operatorname{Diff}(M)$, tal que si $g \in \mathscr{U}$, entonces f y g son Ω-conjugados.*

El Lema 1.8 garantiza que cualquier $f \in \operatorname{Diff}^r(M)$ que sea Ω-estable con la topología $\mathscr{C}^1$, es también Ω-estable con la topología $\mathscr{C}^k$, para cualquier $1 \leq k \leq r$.

El Corolario 3.2 garantiza que el conjunto no-errante de un difeomorfismo Axioma A posee estructura de producto local, así que por la Proposición 2.27, también es aislado. Esto nos permite usar el Teorema de estabilidad para conjuntos hiperbólicos 2.28, y garantizar que si $f \in \operatorname{Diff}(M)$ es Axioma A, existe una vecindad $\mathscr{U}$ de f, donde cualquier difeomorfismo g es conjugado a f dentro de un conjunto hiperbólico cercano a Ω_f.

Debido a esto, podria parecer inmediato afirmar que cualquier difeomorfismo Axioma A es Ω-estable, sin embargo, el Teorema de estabilidad para conjuntos hiperbólicos 2.28, únicamente garantiza la existencia de una conjugación dentro de un conjunto hiperbólico contenido en la vecindad aislante de Ω_f, que no necesariamente coincide con Ω_g. Lo anterior sucede, debido a que pequeñas perturbaciones en un difeomorfismo, pueden hacer aparecer puntos no-errantes lejanos del conjunto no-errante original.

Definición. *Diremos que $f \in \operatorname{Diff}(M)$ tiene Ω-explosiones, si existe una vecindad U de Ω_f, de forma que para cualquier vecindad $\mathscr{U}$ de f, existe $g \in \mathscr{U}$, con puntos no-errantes fuera de U.*

Con lo argumentado previamente, hemos demostrado la siguiente dicotomía:

Proposición 3.7. *Si $f \in \operatorname{Diff}^r(M)$ es Axioma A, cumple una y sólo una de las siguientes propiedades:*

(1) f es Ω-estable,

(2) f tiene Ω-explosiones.

3.3. Filtraciones y Ciclos

Con el propósito de comprender y controlar el fenómeno de Ω-explosión desarrollaremos el concepto de filtración. Una filtración consiste en una descomposición de la variedad en regiones que aislan y caracterizan asintóticamente a los conjuntos invariantes, y por tanto, a las piezas básicas del conjunto no-errante.

Definición. *Una filtración adaptada a $f \in \operatorname{Diff}(M)$ es una sucesión anidada de subvariedades compactas con frontera:*

$$\emptyset = M_0 \subset \ldots \subset M_k = M,$$

que para cualquier $0 < i < k$, cumplen $f(M_i) \subset \operatorname{int}(M_i)$.

A la diferencia $M_i \backslash M_{i-1}$, le llamaremos la i-ésima capa de la filtración, y al conjunto maximal invariante que contiene, lo denotaremos como:

$$K_i^f := \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(M_i \backslash M_{i-1}).$$

Cuando no sea necesario explicitar f, lo omitiremos de la notación, y escribiremos $K_i = K_i^f$. La siguiente proposición garantiza que las capas de la filtración aislan a los conjuntos maximales invariantes y que además contienen al conjunto no-errante.

Proposición 3.8. *Sea $\{M_i\}_{i=0}^k$ una filtración adaptada a $f \in \operatorname{Diff}(M)$, entonces:*

(1) $K_1, \ldots, K_k$ son aislados invariantes disjuntos por parejas, y $M_i \backslash M_{i-1}$ es una vecindad aislante de K_i.

(2) $\Omega_f \subset \bigcup_{i=1}^k K_i$.

Demostración. Debido a que $\{M_i\}_{i=1}^k$ es una filtración adaptada a f, para cualquier $0 < i < k$ se cumple que $f(M_i) \subset \operatorname{int}(M_i)$, y por lo tanto, $f^{n+1}(M_i) \subset f^n(\operatorname{int}(M_i))$. Usando lo anterior, mostraremos:

$$\bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(M_i) = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(\operatorname{int}(M_i)). \tag{3.3}$$

Sea $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(M_i)$. Para cualquier $n \in \mathbb{Z}$ se cumple $x \in f^n(M_i)$, y por lo tanto, $x \in f^{n-1}(\operatorname{int}(M_i))$, entonces $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(\operatorname{int}(M_i))$. Ahora, si $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(\operatorname{int}(M_i))$, para cualquier $n \in \mathbb{Z}$ se cumple $x \in f^n(\operatorname{int}(M_i))$, y por lo tanto, $x \in f^n(M_i)$, entonces

$x \in \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} f^n(M_i)$. Con lo que se demuestra la igualdad (3.3), y de la biyectividad de f, se sigue:

$$K_i := \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} f^n(M_i \backslash M_{i-1}) = \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} f^n(M_i \backslash \mathrm{int}(M_{i-1})) \tag{3.4}$$

$$= \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} f^n(\mathrm{int}(M_i) \backslash M_{i-1}). \tag{3.5}$$

La ecuación (3.4) garantiza que K_i es compacto, ya que cada $f^n(M_i \backslash \mathrm{int}(M_{i-1}))$ es compacto. Además, de la ecuación (3.5) obtenemos que $M_i \backslash M_{i-1}$ es una vecindad aislante de K_i, ya que $K_i \subset \mathrm{int}(M_i) \backslash M_{i-1} \subset \mathrm{int}(M_i \backslash M_{i-1})$. Resulta inmediato que los conjuntos maximales invariantes por capa son disjuntos, ya que se encuentran contenidos en abiertos ajenos.

Para mostrar (*2*) usaremos la siguiente descomposición de M como unión disjunta:

$$M = M_1 \cup (M_2 \backslash M_1) \cup \ldots \cup (M_k \backslash M_{k-1}).$$

Para cualquier $j = 1, \ldots, k$ definimos $\Omega_f^j := (M_j \backslash M_{j-1}) \cap \Omega_f$, y entonces:

$$\Omega_f = \bigcup_{i=1}^{k} \Omega_f^i.$$

Por último, usando que $\Omega_f^j \subset K_j$ para cualquier $j = 1, \ldots, k$, concluimos $\Omega_f \subset \bigcup_{i=1}^{k} K_i$. $\square$

Las filtraciones son estables bajo pequeñas perturbaciones con la topología $\mathscr{C}^0$. Es decir, si $f \in \mathrm{Diff}(M)$ tiene una filtración adaptada, existe una vecindad $\mathscr{U}$ de f en la topología $\mathscr{C}^0$, de forma que la filtración también es adaptada a cualquier $g \in \mathscr{U}$. Además, los conjuntos maximales invariantes en cada capa para g, se encuentran cercanos a los de f.

Lema 3.9. *Sean $\mathscr{F} = \{M_i\}_{i=0}^k$ una filtración adaptada a $f \in \mathrm{Diff}(M)$, y $\{U_i\}_{i=0}^k$ vecindades respectivas de $\{K_i^f\}_{i=0}^k$. Existe una vecindad $\mathscr{U}$ de f en $\mathrm{Diff}(M)$ en la topología $\mathscr{C}^0$, de forma que para cualquier $g \in \mathscr{U}$, $\mathscr{F}$ es una filtración adaptada a g, que cumple $K_i^g \subset U_i$, para $i = 1, \ldots, k$.*

Demostración. Sea $\mathscr{F} = \{M_i\}_{i=0}^k$ una filtración adaptada a $f \in \mathrm{Diff}(M)$. Para $1 < j < k$, podemos tomar el siguiente abierto de la topología $\mathscr{C}^0$ en $\mathrm{Diff}(M)$:

$$\mathscr{N}(M_j, \mathrm{int}(M_j)) = \{g \in \mathrm{Diff}(M) \mid g(M_j) \subset \mathrm{int}(M_j)\}.$$

Debido a que $\mathscr{F}$ es una filtración adaptada a f, se cumple que:

$$\mathscr{V} := \bigcap_{1<j<k} \mathscr{N}(M_j, \mathrm{int}(M_j))$$

es una vecindad de f en la topología $\mathscr{C}^0$. Además, la filtración $\mathscr{F}$ es adaptada a cualquier $g \in \mathscr{V}$. Sean $\{U_i\}_{i=0}^k$ vecindades respectivas de $\{K_i^f\}_{i=0}^k$. Existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para cualquier $0 < j < k$ se cumple:

$$\bigcap_{|n|\leq N} f^n(M_j \backslash M_{j-1}) \subset U_j.$$

Como U_j es abierto, podemos tomar una vecindad $\mathscr{W}$ de f en la topología $\mathscr{C}^0$, tal que para cualquier $g \in \mathscr{W}$, se cumple:

$$\bigcap_{|n|\leq N} g^n(M_j \backslash M_{j-1}) \subset U_j,$$

y por lo tanto:

$$K_i^g = \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} g^n(M_i \backslash M_{i-1}) \subset \bigcap_{|n|\leq n_0} g^n(M_i \backslash M_{i-1}) \subset U_j,$$

así que cualquier $g \in \mathscr{W}$ cumple $K_i^g \subset U_j$, y la vecindad $\mathscr{U} = \mathscr{V} \cap \mathscr{W}$ de f en la topología $\mathscr{C}^0$, cumple la afirmación de la Proposición. $\square$

Si existe $\mathscr{F}$ una filtración adaptada a $f \in \mathrm{Diff}(M)$ Axioma A, de forma que los conjuntos $\{K_i^f\}$ son precisamente las piezas básicas de la descomposición espectral, entonces f no puede tener Ω-explosiones. Esto se obtiene inmediatamente de los lemas anteriores, ya que para cualquier vecindad U de Ω_f, si g es suficientemente cercano a f, se cumple que $\Omega_g \subset U$.

Sin embargo, no siempre es posible obtener una filtración donde las piezas básicas de la descomposición espectral coincidan con los conjuntos maximales invariantes por capa, y es necesaria una hipótesis adicional sobre la estructura de órbitas del difeomorfismo, que consiste en que las variedades estables e inestables de las piezas básicas del conjunto no-errante, no se encuentren enlazadas formando un ciclo cerrado.

Para precisar esta noción, definimos una relación binaria $\gg$ sobre el conjunto $\{\Omega_j\}_{j=1}^s$ de piezas básicas de un difeomorfismo Axioma A, mediante:

$$\Omega_i \gg \Omega_k \text{ si y sólo si } [\mathcal{W}^u(\Omega_i) \cap \mathcal{W}^s(\Omega_k)] \backslash \Omega_f \neq \emptyset.$$

Esta relación binaria no es reflexiva, simétrica ni transitiva.

Definición. *Diremos que $f \in \mathrm{Diff}(M)$ Axioma A posee un ciclo, si existen piezas básicas de su descomposición espectral $\Omega_{i_1}, \ldots, \Omega_{i_n}, \Omega_{i_{n+1}} = \Omega_{i_1}$, para las que:*

$$\Omega_{i_j} \gg \Omega_{i_{j+1}}, \ \textit{con } 1 \leq j \leq n.$$

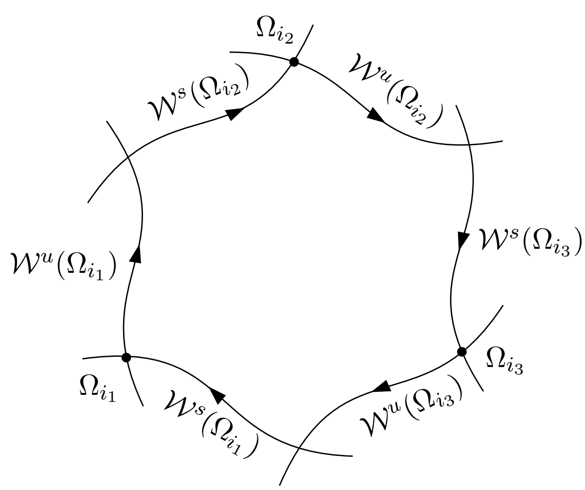

Figura 3.4: Ciclo $\Omega_{i_1} \gg \Omega_{i_2} \gg \Omega_{i_3}$ entre las piezas básicas de la descomposición espectral.

En ausencia de ciclos, siempre es posible hacer un cambio de índices en las piezas básicas, de forma que $\Omega_i \gg \Omega_j$ sólo suceda cuando $i > j$. A dicho ordenamiento le llamaremos *orden de filtración*.

Supongamos que las piezas básicas $\{\Omega_j\}_{j=1}^{s}$ de la descomposición espectral de un difeomorfismo Axioma A no tienen ciclos, entonces se puede construir un orden de filtración de la siguiente forma: Diremos que Ω_i es un elemento extremo para la relación binaria $\gg$, si no existe Ω_k, tal que $\Omega_i \gg \Omega_k$. Debido a que las piezas básicas no tienen ciclos, debe haber un cierto número de elementos extremos, supongamos que son N_1. Si reordenamos a dichos elementos extremos como $\Omega_1, \ldots, \Omega_{N_1}$, nos quedaremos con $s - N_1$ piezas básicas, que nuevamente, deben tener un cierto número de elementos extremos, digamos N_2, que reordenamos como $\Omega_{N_1+1}, \ldots, \Omega_{N_1+N_2}$. Podemos seguir este procedimiento y obtener un orden de filtración para $\{\Omega_j\}_{j=1}^{s}$.

La siguiente proposición garantiza la existencia de una filtración para la que los conjuntos maximales invariantes por rebanada, y las piezas básicas de la descomposición espectral, coinciden.

Proposición 3.10. *Sean $f \in \mathrm{Diff}(M)$ Axioma A sin ciclos, y $\Omega_1, \ldots, \Omega_k$ sus piezas básicas indexadas con un orden de filtración. Existe $\{M_i\}_{i=1}^{k}$ una filtración adaptada a f, con $K_i = \Omega_i$, para $i = 1, \ldots, k$.*

Para demostrar la Proposición, usaremos los siguientes cinco lemas.

Lema 3.11. *Sea $f \in \mathrm{Diff}(M)$ Axioma A. Existen vecindades $U_1, \ldots, U_k$ de sus piezas básicas $\Omega_1, \ldots, \Omega_k$, de forma que para cualquier $i = 1, \ldots, k$, se cumple:*

$$\mathcal{O}^+(z) \subset \overline{U_i} \implies z \in \mathcal{W}^s(\Omega_i).$$

Demostración. Del mismo modo que en la demostración de la Proposición 3.4, tomaremos vecindades $U_1, \ldots, U_k$ de sus piezas básicas $\Omega_1, \ldots, \Omega_k$, que para $i = 1, \ldots, k$, cumplan:

$$\overline{U_i} \cap \overline{U_j} = \emptyset \text{ y } f(\overline{U_i}) \cap \overline{U_j} = \emptyset, \text{ si } i \neq j.$$

Supongamos que $\mathcal{O}^+(z) \subset \overline{U_i}$, entonces se cumple $\omega(z) \subset \overline{U_i}$. La Proposición 1.3 garantiza que $\omega(z) \subset \Omega_f$, así que $\omega(z) \subset \overline{U_i} \cap \Omega_f = \Omega_i$, así que se concluye $z \in \mathcal{W}^s(\Omega_i)$. □

Lema 3.12. *Sea $f \in \mathrm{Diff}(M)$ Axioma A, con piezas básicas $\Omega_1, \ldots, \Omega_k$. Para cualesquiera $i, j = 1, \ldots, k$, se cumple:*

$$\overline{\mathcal{W}^u(\Omega_i)} \cap \mathcal{W}^u(\Omega_j) \neq \emptyset \Longrightarrow \overline{\mathcal{W}^u(\Omega_i)} \cap \Omega_j \neq \emptyset.$$

Demostración. Sea $x \in \overline{\mathcal{W}^u(\Omega_i)} \cap \mathcal{W}^u(\Omega_j)$. Debido a que $\overline{\mathcal{W}^u(\Omega_i)}$ es cerrado e invariante, se cumple $\alpha(x) \subset \overline{\mathcal{W}^u(\Omega_i)}$, mientras que $x \in \mathcal{W}^u(\Omega_j)$ garantiza que $\alpha(x) \subset \Omega_j$, y entonces $\alpha(x) \subset \overline{\mathcal{W}^u(\Omega_i)} \cap \Omega_j$. Como $\alpha(x)$ es no vacío, se concluye que $\overline{\mathcal{W}^u(\Omega_i)} \cap \Omega_j \neq \emptyset$. □

Lema 3.13. *Sea $f \in \mathrm{Diff}(M)$ Axioma A, con piezas básicas $\Omega_1, \ldots, \Omega_k$. Para cualesquiera $i, j = 1, \ldots, k$, se cumple:*

$$\overline{\mathcal{W}^u(\Omega_i)} \cap \Omega_j \neq \emptyset \Longrightarrow \overline{\mathcal{W}^u(\Omega_i)} \cap (\mathcal{W}^s(\Omega_j) \backslash \Omega_j) \neq \emptyset.$$

Demostración. Consideremos nuevamente las vecindades $U_1, \ldots, U_k$ de las piezas básicas de f como en el Lema 3.11. Ya que $\overline{\mathcal{W}^u(\Omega_i)} \cap \Omega_j \neq \emptyset$, podemos tomar $x \in \overline{\mathcal{W}^u(\Omega_i)} \cap \Omega_j$, y construir una sucesión de elementos en $\mathcal{W}^u(\Omega_i) \cap U_j$, para la que $\{x_k\} \to x$. Para cualquier $k \in \mathbb{N}$, $x_k \in \mathcal{W}^u(\Omega_i)$, así que existe $N \in \mathbb{N}$, tal que $f^{-N}(x_k) \notin U_j$. Definimos n_k como el menor natural que cumple dicha propiedad. Desde luego para $n < n_k$ resulta que $f^{-n}(x_k) \in U_j$, y entonces:

$$z_k := f^{-n_k}(x_k) \in f^{-1}(U_j) \backslash U_j \subset f^{-1}(\overline{U_j}) \backslash U_j.$$

Necesariamente $n_k \to \infty$, ya que si existiera $C \in \mathbb{N}$, cumpliendo $n_k < C$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$, obtendríamos $\Omega_j \ni \lim_{k \to \infty} f^{-n_k}(x_k) \notin \operatorname{int}(U_j)$, una clara contradicción. Sea z un punto límite de $\{z_k\}$. La sucesión se encuentra contenida en $f^{-1}(\overline{U_j}) \backslash U_j$, que es compacto, así que z también se encuentra ahí, es decir, $z \in f^{-1}(\overline{U_j})$ y $z \notin U_j$; y entonces $f(z) \in \overline{U_j}$ y $z \notin \Omega_j$. Sabemos que para $j \neq l$, se cumple que $f(\overline{U_j}) \cap U_l = \emptyset$ y $\overline{U_j} \cap U_l = \emptyset$, así que para cualquier $n > 1$ y $j \neq l$, resulta que $f^n(z) \notin U_l$. Por lo anterior, y por la Proposición 1.1, resulta que $\omega(z) \subset U_j$, y entonces $z \in \mathcal{W}^s(\Omega_j)$. Considerando que $z \notin \Omega_j$, llegamos a que $z \in \mathcal{W}^s(\Omega_j) \backslash \Omega_j$. Solo falta verificar que $z \in \overline{\mathcal{W}^u(\Omega_i)}$. Debido a que $x_k \in \mathcal{W}^u(\Omega_i)$, entonces $f^{-n_k}(x_k) = z_k \in \mathcal{W}^u(\Omega_i)$, y también $z \in \overline{\mathcal{W}^u(\Omega_i)}$. Por lo que se concluye $z \in \overline{\mathcal{W}^u(\Omega_i)} \cap (\mathcal{W}^s(\Omega_j) \backslash \Omega_j)$. □

Lema 3.14. *Sean $f \in \operatorname{Diff}(M)$ Axioma A sin ciclos, y $\Omega_1, \ldots, \Omega_k$ sus piezas básicas indexadas con un orden de filtración. Para cualquier $i = 1, \ldots, k$, se cumple:*

(1) $\bigcup_{l \leq i} \mathcal{W}^u(\Omega_l)$ *es compacto e invariante,*

(2) $\bigcup_{l \leq i} \mathcal{W}^s(\Omega_l)$ *es una vecindad de* $\bigcup_{l \leq i} \mathcal{W}^u(\Omega_l)$*,*

(3) Si $Q_i \subset M$ es compacto, y cumple:

$$\bigcup_{l \leq i} \mathcal{W}^u(\Omega_l) \subset Q_i \subset \bigcup_{l \leq i} \mathcal{W}^s(\Omega_l),$$

entonces $\bigcap_{n \geq 0} f^n(Q_i) = \bigcup_{l \leq i} \mathcal{W}^u(\Omega_l)$.

Demostración. (*1*) La invariancia se sigue de la invariancia de las variedades estables, y la compacidad se garantizará, mostrando que $\bigcup_{l \leq i} \overline{\mathcal{W}^u(\Omega_l)} = \bigcup_{l \leq i} \mathcal{W}^u(\Omega_l)$.

Supongamos por contradicción, que para algún $m \leq i$, se cumple $\overline{\mathcal{W}^u(\Omega_m)} \not\subset \bigcup_{l \leq i} \mathcal{W}^u(\Omega_l)$. La Proposición 3.4 afirma que $M = \bigcup_{l=1}^k \mathcal{W}^u(\Omega_l)$, así que para algún $j > i$, se debe cumplir $\overline{\mathcal{W}^u(\Omega_m)} \cap \mathcal{W}^u(\Omega_j) \neq \emptyset$. Como hay un número finito de piezas básicas, podemos tomar j, el mayor índice para el que sucede lo anterior. Los dos lemas anteriores garantizan que existe $z \in \overline{\mathcal{W}^u(\Omega_m)} \cap (\mathcal{W}^s(\Omega_j) \backslash \Omega_j) \neq \emptyset$, que por la Proposición 3.4 pertenece a $\mathcal{W}^u(\Omega_r)$, para algún $r = 1, \ldots, k$. Más aún, z no puede estar en Ω_r, ya que por estar en $\mathcal{W}^s(\Omega_j)$, y por la invariancia de Ω_r, tendría que cumplirse $i = j$, pero $z \notin \Omega_j$. Lo anterior garantiza:

$$(\mathcal{W}^u(\Omega_r) \backslash \Omega_r) \cap (\mathcal{W}^s(\Omega_j) \backslash \Omega_j) \neq \emptyset,$$

es decir, $\Omega_r \gg \Omega_j$. El orden de filtración en las piezas básicas implica $r > j$, lo que contradice que j es el mayor índice para el que $\overline{\mathcal{W}^u(\Omega_m)} \cap \mathcal{W}^u(\Omega_j) \neq \emptyset$, así que los conjuntos $\bigcup_{l \leq i} \overline{\mathcal{W}^u(\Omega_l)}$ y $\bigcup_{l \leq i} \mathcal{W}^u(\Omega_l)$ coinciden, y entonces, $\bigcup_{l \leq i} \mathcal{W}^u(\Omega_l)$ resulta ser compacto.

(2) Por la Proposición 3.4 podemos garantizar que para cualquier $m \leq i$, se cumple:

$$\mathcal{W}^u(\Omega_m) \subset \bigcup_{l=1}^{k} \mathcal{W}^s(\Omega_l) = M.$$

El orden de filtración, garantiza que $\mathcal{W}^u(\Omega_m) \cap \bigcup_{l>i} \mathcal{W}^s(\Omega_l) = \emptyset$, así que para cualquier $m \leq i$, se cumple $\mathcal{W}^u(\Omega_m) \subset \bigcup_{l\leq i} \mathcal{W}^s(\Omega_l)$, y entonces:

$$\bigcup_{l\leq i} \mathcal{W}^u(\Omega_l) \subset \bigcup_{l\leq i} \mathcal{W}^s(\Omega_l).$$

Usando el primer inciso para f^{-1}, obtenemos que $\bigcup_{l>i} \mathcal{W}^s(\Omega_l)$ es compacto, así que su complemento $\bigcup_{l\leq i} \mathcal{W}^s(\Omega_l)$ es abierto, y una vecindad de $\bigcup_{l\leq i} \mathcal{W}^u(\Omega_l)$.

(3) Sea $Q_i \subset M$ compacto, que cumpla:

$$\bigcup_{l\leq i} \mathcal{W}^u(\Omega_l) \subset Q_i \subset \bigcup_{l\leq i} \mathcal{W}^s(\Omega_l),$$

mostraremos que:

$$\bigcap_{n\geq 0} f^n(Q_i) = \bigcup_{l\leq i} \mathcal{W}^u(\Omega_l).$$

Como $\bigcup_{l\leq i} \mathcal{W}^u(\Omega_l) \subset Q_i$, para cualquier $n \geq 0$ se cumple

$$\bigcup_{l\leq i} \mathcal{W}^u(\Omega_l) \subset f^n\left(\bigcup_{l\leq i} \mathcal{W}^u(\Omega_l)\right) \subset f^n(Q_i),$$

de lo que se sigue $\bigcup_{l\leq i} \mathcal{W}^u(\Omega_l) \subset \bigcap_{n\geq 0} f^n(Q_i)$.

Sea $x \in \bigcap_{n\geq 0} f^n(Q_i)$, en particular $x \in Q_i$ compacto disjunto de $\bigcup_{l>i} \mathcal{W}^s(\Omega_l)$, que por el segundo inciso sabemos está contenido en $\bigcup_{l>i} \mathcal{W}^u(\Omega_l)$. De la Proposición 3.4 se sigue $x \in \bigcup_{l\leq i} \mathcal{W}^u(\Omega_l)$. □

Lema 3.15. *Sea $f \in \mathrm{Diff}(M)$. Sea $P \subset M$ compacto e invariante, si una vecindad Q de P cumple $\bigcap_{n\geq 0} f^n(Q) = P$, entonces existe una vecindad compacta V de P, tal que $V \subset \mathrm{int}(Q)$, y además $f(V) \subset \mathrm{int}(V)$.*

Demostración. Sean P compacto e invariante, y Q una vecindad de P tal que:

$$\bigcap_{n\geq 0} f^n(Q) = P.$$

Sean $I_r := \bigcap_{n=0}^{r} f^n(Q)$, y $U \subset M$, tal que $P \subset \mathrm{int}(U) \subset U \subset Q$, y también $f(U) \subset Q$. Para r suficientemente grande, $I_r \subset \mathrm{int}(U)$, así que $f(I_r) \subset f(U) \subset Q$. Debido a que $P = \bigcap_{n\geq 0} f^n(Q) \subset \bigcap_{n=0}^{r} f^n(Q) = I_r$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $f^N(I_r) \subset \mathrm{int}(I_r)$. Si $N = 1$, se concluye el resultado buscado; y si $N > 1$, podemos tomar W una vecindad compacta de I_r, que cumpla $I_r \subset \mathrm{int}(W) \subset U$, y también $f^N(W) \subset \mathrm{int}(I_r)$. Ahora definimos una vecindad compacta de P, mediante:

$$E_1 := f^{N-1}(W) \cup I_r,$$

para la que se cumple:

$$f^{N-1}(I_r) \subset \text{int}(f^{N-1}(W)) \subset \text{int}(E_1), \tag{3.6}$$

y además:

$$f^{N-1}(f^{N-1}(W)) \subset f^{N-2}(f^N(W)) \subset f^{N-2}(\text{int}(I_r)) \subset \text{int}(I_r) \subset \text{int}(E_1). \tag{3.7}$$

Las contenciones (3.6) y (3.7) garantizan que:

$$f^{N-1}(E_1) \subset f^{N-1}(f^{N-1}(W)) \cup f^{N-1}(I_r) \subset \text{int}(E_1).$$

Con el mismo procedimiento para $E_2 := f^{N-1}(E_1) \cup I_r$, obtenemos $f^{N-2}(E_2) \subset \text{int}(E_2)$, y recursivamente, podemos definir $E_N := f^{N-1}(E_{N-1}) \cup I_r$, una vecindad compacta de P, que cumple $f(E_N) \subset \text{int}(E_N)$. □

Usando los cinco Lemas anteriores, demostraremos la Proposición 3.10, que para un difeomorfismo Axioma A sin ciclos, afirma la existencia de una filtración adaptada en la que los conjuntos maximales invariantes por capa, coinciden con las piezas básicas de la descomposición espectral.

Demostración Proposición 3.10. Para cualquier $i = 1, \ldots, k$, el Lema 3.14 garantiza que $\bigcup_{l \le i} \mathcal{W}^s(\Omega_l)$ es una vecindad compacta de $\bigcup_{l \le i} \mathcal{W}^u(\Omega_l)$ compacto e invariante, así que podemos tomar un compacto Q_i, que cumpla:

$$\bigcup_{l \le i} \mathcal{W}^u(\Omega_l) \subset \text{int}(Q_i) \subset Q_i \subset \bigcup_{l \le i} \mathcal{W}^s(\Omega_l),$$

y entonces:

$$\bigcap_{n \ge 0} f^n(Q_i) = \bigcup_{l \le i} \mathcal{W}^u(\Omega_l).$$

Por lo anterior, el Lema 3.15 garantiza que existe V_i. una vecindad compacta de $\bigcup_{l \le i} \mathcal{W}^u(\Omega_l)$, que cumple $V_i \subset \text{int}(Q_i)$, y además, $f(V_i) \subset \text{int}(V_i)$. Resulta inmediato que la colección $\{M_i\}_{i=1}^k$ definida por $M_i := \bigcup_{l \le i} V_l$, define una filtración adaptada a f.

Mostraremos que para dicha filtración, se cumple que $\Omega_i = K_i$.

Sabemos que Ω_i está contenido en M_i, y además, es ajeno a $\bigcup_{l < i} \mathcal{W}^s(\Omega_l) \supset M_{i-1}$, así que Ω_i es un subconjunto invariante de $M_i \backslash M_{i-1}$, y entonces $\Omega_i \subset K_i$.

Sea $x \in K_i$. La Proposición 3.4 garantiza que existen j y $j' \in (1, \ldots, k)$ tales que $x \in \mathcal{W}^u(\Omega_j) \cap \mathcal{W}^s(\Omega_{j'})$, pero por la contención anterior sabemos que $\Omega_j \cap K_i = \emptyset$ si $i \neq j$, así que de la invariancia de K_i se sigue $\mathcal{O}(x) \subset K_i$, y entonces $\Omega_j = \Omega_i = \Omega_{j'}$. Esto garantiza que $x \in \mathcal{W}^u(\Omega_i) \cap \mathcal{W}^s(\Omega_i)$, así que por la ausencia de ciclos en las piezas básicas, concluimos $x \in \Omega_i$. □

Con lo desarrollado en esta sección, hemos obtenido que en ausencia de ciclos en las piezas básicas de su descomposición espectral, un difeomorfismo Axioma A no puede tener Ω-explosiones. En la última sección, mostraremos que usando esta condición se puede garantizar la Ω-estabilidad de los difeomorfimos Axioma A.

3.4. El Teorema de Ω-Estabilidad

Teorema 3.16 (Ω-estabilidad). *Si $f \in \mathrm{Diff}(M)$ es Axioma A sin ciclos entonces es Ω-estable.*

Demostración. Sea f Axioma A sin ciclos. El Teorema de descomposición espectral (3.3) garantiza que Ω_f se puede expresar como la unión de cerrados invariantes $\Omega_1, \ldots, \Omega_k$ disjuntos por parejas. Debido a la ausencia de ciclos, la Proposición 3.10 garantiza que existe una filtración $\mathscr{F} = \{M_i\}_{i=1}^k$ para la que los conjuntos maximales invariantes en cada capa coinciden con las piezas básicas de la descomposición espectral, es decir:

$$K_i^f = \Omega_i \text{ para } i = 1, 2, \ldots, k.$$

Por la Proposición 3.9, existe una vecindad $\mathscr{V}$ de f en $\mathrm{Diff}(M)$ en la topología $\mathscr{C}^0$, tal que $\mathscr{F}$ es adaptada a g, para cualquier $g \in \mathscr{V}$. El Teorema de estabilidad de conjuntos hiperbólicos (2.28), garantiza que existe vecindad $\mathscr{U}$ de f en $\mathrm{Diff}(M)$ en la topología $\mathscr{C}^1$, tal que si $g \in \mathscr{U}$, entonces existe una colección de funciones $h_i : K_i^f \to K_i^g$, que conjugan a $f|_{K_i^f}$ con $g|_{K_i^g}$, es decir, que para cualquier $x \in K_i^f$, con $i = 1, \ldots, k$, se cumple:

$$(h_i \circ f)(x) = (g \circ h_i)(x).$$

Por el Lema 1.8, podemos tomar $\mathscr{U} \subset \mathscr{V}$, y para cualquier $g \in \mathscr{U}$, podemos definir una función:

$$h : \bigcup_{i=1}^k K_i^f \longrightarrow \bigcup_{i=1}^k K_i^g, \text{ dada por } h(x) = h_i(x), \text{ si } x \in K_i^f.$$

Resulta entonces,

$$\Omega_f = \bigcup_{i=1}^k \Omega_i = \bigcup_{i=1}^k K_i^f,$$

así que h es una conjugación entre $f|_{\Omega_f}$ y $g|_{K^g}$, donde $K^g = \bigcup_{i=1}^k K_i^g$. Para concluir la demostración es necesario garantizar $\Omega_g = \bigcup_{i=1}^k K_i^g$, con lo que la conjugación entre f y g dentro de Ω_f y Ω_g, quedaría construida.

La filtración $\mathscr{F}$ es adaptada a cualquier $g \in \mathscr{U} \subset \mathscr{V}$, así que el Teorema 3.8 garantiza $\Omega_g \subset \bigcup_{i=1}^k K_i^g$. De hecho, los conjuntos coinciden, ya que:

$$\bigcup_{i=1}^k K_i^g = h(\Omega_f) = h(\overline{\mathrm{Per}(f)}) = \overline{h(\mathrm{Per}(f))} \subset \overline{\mathrm{Per}(g)} \subset \Omega_g.$$

La primera igualdad es válida debido a que $f|_{\Omega_f}$ es conjugada a $g|_{K^g}$, la segunda se sigue de que f es Axioma A, la tercera ya que h es un homeomorfismo, la primera contención se debe a que h es una conjugación, y por tanto manda puntos periódicos de f en puntos periódicos de g, la última contención se sigue de la Proposición 1.3. Esto garantiza que cualquier $g \in \mathscr{U}$ cumple $K^g = \Omega_g$, por lo que $f|_{\Omega_f}$ y $g|_{\Omega_g}$ son conjugadas, y se concluye que f es Ω-estable. $\square$

La equivalencia de la Ω-estabilidad y la propiedad Axioma A sin ciclos fue probada por Palis [Pal88], y del mismo modo que la Conjetura de Estabilidad, el resultado análogo para Ω-estabilidad en $\mathrm{Diff}^r(M)$, con $r \geq 2$, sigue siendo un problema abierto.

Bibliografía

[AP37] A. Andronov, L. Pontryagin. Systèmes grossieres. *Doklady Acad. Sci. URSS*, 14:247–251, 1937.

[Ano62] D. Anosov. Roughness of geodesic flows on compact Riemannian manifolds of negative curvature. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 145:707–709, 1962.

[Ano63] D. Anosov. Ergodic properties of geodesic flows on closed Riemannian manifolds of negative curvature. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 151:1250–1252, 1963.

[Ban97] A. Banyaga. *The structure of classical diffeomorphism groups*, volume 400 of *Mathematics and its Applications*. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1997.

[Bir27] G. Birkhoff. On the periodic motions of dynamical systems. *Acta Math.*, 50(1):359–379, 1927.

[Bow75] R. Bowen *Equilibrium States and the Ergodic Theory of Anosov Diffeomorphisms*. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1975. Lecture Notes in Mathematics, No. 47.

[BS02] M. Brin, G. Stuck. *Introduction to Dynamical Systems*. Cambridge University Press, United Kingdom 2002.

[CH80] E. Coven, G. Hedlund. $\bar{P} = \bar{R}$ for maps of the interval. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 79(2):316–318, 1980.

[GG73] M. Golubitsky, V. Guillemin. *Stable mappings and their singularities*. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1973. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 14.

[Har60] P. Hartman. On local homeomorphisms of Euclidean spaces. *Bol. Soc. Mat. Mexicana (2)*, 5:220–241, 1960.

[HS95] B. Hasselblatt, A. Katok. *Introduction to the modern theory of dynamical systems*, volume 54 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[Hir76] M. Hirsch. *Differential topology*. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1976. Graduate Texts in Mathematics, No. 33.

[JS87] Jong Sook Bae, Seung Kab Yang. $\overline{P} = \overline{R}$ for maps of the circle. *Bull. Korean Math. Soc.*, 24(2):151–157, 1987.

[Kel75] J. Kelley. *General topology*. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1975. Reprint of the 1955 edition [Van Nostrand, Toronto, Ont.], Graduate Texts in Mathematics, No. 27.

[Kur78] M. Kurata. Hyperbolic nonwandering sets without dense periodic points. *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.*, 54(7):206–211, 1978.

[Lan02] S. Lang. *Introduction to differentiable manifolds*. Universitext. Springer-Verlag, New York, second edition, 2002.

[Mañ88] R. Mañé. A proof of the C^1 stability conjecture. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (66):161–210, 1988.

[Mar61] L. Markus. Structurally stable differential systems. *Ann. of Math. (2)*, 73:1–19, 1961.

[Merr12] W. Merry. *Hyperbolic Dynamical Systems and Stability* Lecture Notes ETH Zûrich, 2012.

[New73] S. Newhouse, J. Palis. Hyperbolic nonwandering sets on two-dimensional manifolds. In *Dynamical systems (Proc. Sympos., Univ. Bahia, Salvador, 1971)*, pages 293–301. Academic Press, New York, 1973.

[Pal07] R. Palais. A simple proof of the Banach contraction principle. *J. Fixed Point Theory Appl.*, 2(2):221–223, 2007.

[Pal88] J. Palis. On the C^1 Ω-stability conjecture. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (66):211–215, 1988.

[PM82] J. Palis; W. Melo. *Geometric theory of dynamical systems*. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982.

[PS70] J. Palis, S. Smale. Structural stability theorems. In *Global Analysis (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XIV, Berkeley, Calif., 1968)*, pages 223–231. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1970.

[Pei59] M. Peixoto. On structural stability. *Ann. of Math. (2)*, 69:199–222, 1959.

[Pei62] M. Peixoto. Structural stability on two-dimensional manifolds. *Topology*, 1:101–120, 1962.

[Poi87] H. Poincaré. *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste.* Les Grands Classiques Gauthier-Villars. Reprint of the 1899 original, Bibliothèque Scientifique Albert Blanchard, Paris, 1987.

[Pug67] C. Pugh. An improved closing lemma and a general density theorem. *Amer. J. Math.*, 89:1010–1021, 1967.

[Rob71] J. Robbin. A structural stability theorem. *Ann. of Math. (2)*, 94:447–493, 1971.

[Rob76] C. Robinson. Structural stability of C^1 diffeomorphisms. *J. Differential Equations*, 22(1):28–73, 1976.

[Sam09] M. Sambarino. *Hiperbolicidad y Estabilidad.* XXII Escuela Venezolana de Matemáticas, 2009.

[Shu87] M. Shub. *Global stability of dynamical systems*. Springer-Verlag, New York, 1987. With the collaboration of Albert Fathi and Rémi Langevin, Translated from the French by Joseph Christy.

[Sma60] S. Smale. Morse inequalities for a dynamical system. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 66:43–49, 1960.

[Sma63] S. Smale. Dynamical systems and the topological conjugacy problem for diffeomorphisms. In *Proc. Internat. Congr. Mathematicians (Stockholm, 1962)*, pages 49–496. Inst. Mittag-Leffler, Djursholm, 1963.

[Sma67] S. Smale. Differentiable dynamical systems. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 73:747–817, 1967.

[Sma70] S. Smale. The Ω-stability theorem. In *Global Analysis (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XIV, Berkeley, Calif., 1968)*, pages 289–297. Amer. Math. Soc., Providence, r.I., 1970.

[VS90] S. van Strien. Smooth linearization of hyperbolic fixed points without resonance conditions. *J. Differential Equations*, 85(1):66–90, 1990.

[You79] Lai-Sang Young. A closing lemma on the interval. *Invent. Math.*, 54(2):179–187, 1979.

[Wen02] L. Wen. *A Short Course on Differentiable Dynamical Systems.* City University of Hong Kong, 2002. Liu Bie Ju Centre for Mathematical Sciences, Lecture Notes in Mathematics, No. 5.

[Yoc91] J. Yoccoz. *Hyperbolic Dynamics.* Summer School on Dynamical Systems, ICTP, 1991.

Índice alfabético