



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y  
DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA.

EL PROBLEMA DEL NÚMERO DE CRUCES EN POLIGONIZACIONES DE  
PUNTOS EN EL PLANO

TESIS  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA:  
JOSÉ LUIS ÁLVAREZ REBOLLAR

DIRECTOR DE LA TESIS  
DR. JORGE URRUTIA GALICIA  
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS

MÉXICO, D. F. ENERO DE 2015.



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# Agradecimientos

Primeramente, agradezco al Dr. Jorge Urrutia por proponer el tema de la tesis y orientarme durante todo el desarrollo de la misma, además de aportar ideas, críticas y comentarios de gran utilidad. Quiero agradecer igualmente a mi compañero Jorge Cravioto por todas las ideas que aportó ya que su participación fue muy importante para obtener algunos de los resultados expuestos en esta tesis.

Agradezco a mis sinodales por las correcciones, críticas y valiosos comentarios respecto a esta tesis. Agradezco primeramente a Carlos Velarde y a David Flores, quienes estuvieron al tanto de esta tesis desde el principio de su realización. También agradezco a Mucuy-kak Guevara y a Juan José Montellano por la revisión cuidadosa que hicieron de las versiones finales del trabajo.

Agradezco también a mis compañeros, que son también estudiantes del Dr. Jorge Urrutia, por las observaciones, comentarios y algunas ideas aportadas durante la realización de la tesis.

Agradezco a la UNAM por permitirme ser parte de su comunidad. En especial, agradezco al Posgrado en Ciencias Matemáticas por toda la formación recibida.

Agradezco al CONACyT por darme el apoyo económico a través de su programa de Becas Nacionales. Sin el cual, sin duda hubiera sido mucho más difícil estudiar mi maestría.

Finalmente, quiero agradecer a mis papás y a mi hermano, por todo su cariño y apoyo emocional necesario para realizar esta tesis.



# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Preliminares</b>	<b>9</b>
2.1. Posición convexa . . . . .	9
2.2. Permutaciones . . . . .	14
2.3. Sándwich de jamón . . . . .	17
<b>3. Familias de cruce</b>	<b>21</b>
3.1. Rectas bisectoras . . . . .	21
3.2. Condiciones de rango . . . . .	24
3.3. Conjuntos mutuamente excluyentes . . . . .	28
3.4. Cota superior para las familias de cruce . . . . .	32
<b>4. Cotas básicas</b>	<b>35</b>
4.1. Cota superior cuadrática . . . . .	35
4.2. Cotas inferiores subcuadráticas . . . . .	40
<b>5. Cotas inferiores cuadráticas</b>	<b>47</b>
5.1. Cota usando 2-apareamientos . . . . .	48
5.2. Cota usando 3-apareamientos . . . . .	53
<b>6. Conclusiones</b>	<b>57</b>



# Capítulo 1

## Introducción

Un problema de gran interés en geometría computacional consiste en encontrar poligonizaciones de conjuntos de puntos en el plano que cumplan cierta propiedad. En la mayoría de los casos se pide que la poligonal a construir sea un polígono simple, es decir, que divida al plano en dos regiones: adentro y afuera del polígono. Así, la poligonal buscada no puede tener intersecciones con ella misma. Un problema interesante y no estudiado a la fecha consiste en encontrar poligonales que tengan la mayor cantidad posible de intersecciones consigo mismas. Este problema es el tema principal de este trabajo y se discutirá ampliamente a lo largo del mismo.

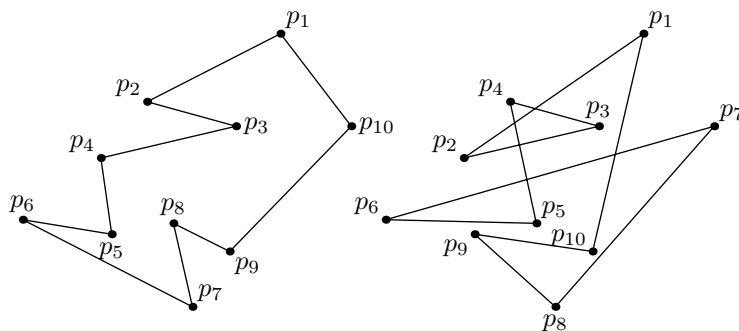


Figura 1.1. Dos poligonizaciones del mismo conjunto de puntos en el plano: a la izquierda, un polígono simple y a la derecha, una poligonización con 5 cruces.

Empecemos por precisar lo que queremos resolver. Sea  $S$  un conjunto de  $n$  puntos en el plano. Una *trayectoria* o *camino* de longitud  $k$  es una sucesión  $p_1, p_2, \dots, p_k, p_{k+1}$  de puntos de  $S$  en la que ningún elemento aparece más de una vez. Análogamente, un *ciclo* de longitud  $k$  es una sucesión  $p_1, p_2, \dots, p_k, p_{k+1} = p_1$  de puntos de  $S$  en la que ningún elemento aparece más de una

vez, excepto  $p_1$  que aparece al principio y al final. Dada una trayectoria o un ciclo de longitud  $k$ , a los segmentos de recta  $p_i p_{i+1}$  donde  $1 \leq i \leq k$  los llamaremos *aristas* de la trayectoria o del ciclo. Aquí no vamos a considerar que dos aristas consecutivas de una trayectoria o ciclo se cruzan, así que diremos que dos aristas se *cruzan* o *intersectan* si existe un punto que es interior a ambas y a dicho punto lo llamaremos un *cruce*. A la cantidad de cruces formados por aristas de una trayectoria o ciclo la llamaremos el *número de cruces* de la trayectoria o ciclo. Así, para nuestros fines, una *poligonización* de un conjunto  $S$  de  $n$  puntos será simplemente un ciclo en el que aparecen todos los puntos de  $S$ , es decir, un ciclo de longitud  $n$ , al que también llamamos *ciclo hamiltoniano*. Decimos que una poligonización es *simple* si no tiene ningún par de aristas que se cruzan.

Antes de seguir adelante, conviene señalar que aquí, todos los conjuntos de puntos que consideremos, salvo que se indique explícitamente lo contrario, van a ser conjuntos de puntos en el plano en *posición general*, es decir, en donde no hay tres puntos del conjunto que estén sobre la misma recta. Dado que para fines computacionales conviene pensar a los puntos expresados en términos de coordenadas cartesianas, también vamos a considerar, salvo que se indique lo contrario, que no hay dos puntos que tengan la misma coordenada  $x$  o  $y$ . Esto facilita los cálculos computacionales y siempre se puede obtener esta condición eligiendo adecuadamente los ejes de coordenadas.

Con estas definiciones, el problema que abordaremos en este trabajo puede establecerse en los siguientes términos: ¿Cuál es el máximo número de cruces de una poligonización que se puede asegurar para cualquier conjunto de  $n$  puntos en el plano que están en posición general?

Es conveniente que, antes de establecer cotas para nuestro problema, comentemos un poco acerca del trabajo que ya se ha hecho y que está relacionado con lo que queremos resolver. En lo que sigue, describimos la relación de nuestro problema con algunos problemas que ya han sido estudiados.

Una primera pregunta para empezar a entender el problema consiste en determinar cuántas poligonizaciones existen en un conjunto de  $n$  puntos. Observemos que cualquier permutación del conjunto de puntos determina exactamente una poligonización; sin embargo, puede pasar que varias permutaciones determinen la misma poligonización. Aquí, vamos a considerar que dos poligonizaciones son la misma si los conjuntos de sus aristas coinciden. Así, dada una poligonización  $P = p_1, \dots, p_n, p_1$ , las poligonizaciones iguales a ella son las que inician en algún  $p_i$  y siguen el orden de  $P$ , ya sea al derecho o al revés. Como hay  $n!$  permutaciones, tenemos que hay  $n!/(2n) = (n-1)!/2$  poligonizaciones. Una pregunta natural aquí y que es más difícil de responder es ¿cuántas de esas poligonizaciones son simples?

Observemos que en todo conjunto  $S$  de  $n$  puntos siempre existe al menos



una poligonización simple. Una forma de construir dicha poligonización es la siguiente: tomamos el punto  $p$  más a la izquierda de  $S$  y ordenamos los puntos restantes de  $S$  en orden creciente respecto a la pendiente que forman con  $p$ . Digamos que obtuvimos los puntos en el orden  $q_1, q_2, \dots, q_{n-1}$ . Así, podemos trazar la poligonización  $p, q_1, q_2, \dots, q_{n-1}, p$ . Esta poligonización la realizamos en tiempo computacional  $O(n \log n)$  debido a la ordenación ya que encontrar el punto de más a la izquierda y unir los puntos se realiza en tiempo lineal.

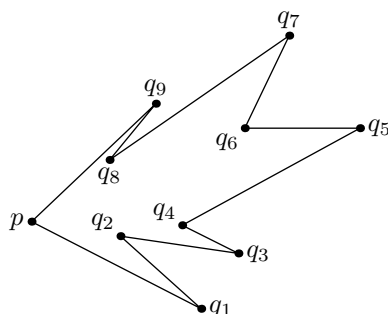


Figura 1.2. Poligonización simple en tiempo  $O(n \log n)$ .

Es importante comentar que la cota inferior para el tiempo que toma encontrar una poligonización simple es  $\Omega(n \log n)$ . Esto lo podemos ver mediante una reducción del problema de ordenación. Supongamos que tenemos un conjunto de números  $a_1, \dots, a_n$  que queremos ordenar. Entonces, para tal fin, podemos encontrar una poligonización sin cruces del conjunto de puntos  $(a_1, a_1^2), \dots, (a_n, a_n^2)$ . Como los puntos están en posición convexa, su única poligonización simple es el polígono que define su cierre convexo, el cual contiene a los números  $a_i$  en orden. De esta forma, una vez hecha la poligonización, podemos ordenar los números en tiempo lineal. Por lo tanto, como la cota inferior para ordenar  $n$  números es  $\Omega(n \log n)$ , tenemos que encontrar la poligonización sin cruces toma al menos tiempo  $\Omega(n \log n)$ .

Respecto a la pregunta de cuántas poligonizaciones simples hay en todo conjunto de  $n$  puntos, se puede consultar la página de Erik Demaine <http://erikdemaine.org/polygonization/>, en la que se dan algunas cotas asintóticas tanto superiores como inferiores. A la fecha, la mejor cota inferior es  $4.642^n$  y la mejor cota superior,  $56^n$ , las cuales se prueban en [15] y [29], respectivamente. Estas cotas confirman que, como es de esperar, la mayoría de las poligonizaciones tienen cruces. Otra pregunta natural consiste en contar el número de poligonizaciones que tengan cierto número de cruces, no necesariamente cero. Sin embargo, lo que vamos a intentar responder aquí no consiste en contar poligonizaciones sino en encontrar el máximo número tal

que siempre podemos asegurar que existe al menos una poligonización con esa cantidad de cruces.

Ahora, vamos a ver la relación que tiene nuestro problema con la teoría de gráficas, dando las definiciones necesarias para ver la relación de nuestro problema con los de dicha teoría. En especial nos interesarán las gráficas geométricas. Un tratamiento más detallado de estos temas se puede consultar en un buen libro de teoría de gráficas, como [6].

Una *gráfica (simple)*  $G$  es un par de conjuntos  $(V, E)$ , donde los elementos de  $V$  se llaman *vértices* y a cada elemento de  $E$ , al que llamamos *arista*, le asignamos un par de elementos distintos de  $V$  de forma que no existan dos aristas que se correspondan con el mismo par de vértices. Una *gráfica geométrica* es una gráfica cuyos vértices forman un conjunto de puntos en el plano y cuyas aristas son segmentos de recta que unen pares de vértices. La *gráfica geométrica completa* de un conjunto de puntos  $S$  es la gráfica geométrica cuyos vértices son los puntos del conjunto y que tiene como aristas a todos los segmentos de recta que unen pares de puntos del conjunto. Un *ciclo* en una gráfica  $G$  es una sucesión  $v_1, v_2, \dots, v_k, v_{k+1} = v_1$  de vértices de  $G$  tal que cada vértice aparece exactamente una vez excepto  $v_1$  y para  $1 \leq i \leq k$ , existe una arista en  $G$  que une a  $v_i$  con  $v_{i+1}$ . Un *ciclo hamiltoniano* en una gráfica  $G$  es un ciclo que contiene a todos los vértices de  $G$ . De esta forma, una poligonización en un conjunto de puntos  $S$  es un ciclo hamiltoniano en su gráfica geométrica completa.

Un *dibujo* de una gráfica  $G$  en el plano es una representación de  $G$  en el plano donde a cada vértice lo representamos por un punto y a cada arista por una línea continua que une a los vértices a los que es incidente. De forma análoga al caso de las aristas de una poligonización, decimos que dos aristas en un dibujo de  $G$  *se cruzan* si existe un punto común interior a ambas y a cada uno de esos puntos lo llamamos un *cruce* del dibujo de  $G$ .

El problema del número de cruces en gráficas consiste en, dada una gráfica  $G$ , encontrar el mínimo número de cruces, denotado por  $cr(G)$ , que puede tener cualquier dibujo de  $G$  en el plano. Sin embargo, para nosotros es de mayor interés el problema del número de cruces rectilíneo en gráficas, en donde además pedimos que en los dibujos, las aristas se representen por segmentos de recta, es decir, que sean gráficas geométricas.

El problema del número de cruces de una gráfica ha sido estudiado para diversas familias de gráficas. Por ejemplo, es un hecho conocido que  $cr(K_n) = \Theta(n^4)$ , donde  $K_n$  es la gráfica completa de  $n$  vértices, y que sucede tanto para el caso general como para el caso rectilíneo, como se establece en [9] y en [28], respectivamente. En [26], se introducen varios problemas relacionados con el mínimo número de cruces en los dibujos de una gráfica. En el caso rectilíneo para gráficas completas y para los valores de  $n$  menores o iguales a 100, se pue-

de consultar la página de Oswin Aichholzer <http://www.ist.tugraz.at/staff/aichholzer/research/rp/triangulations/crossing/>, donde se dan los valores de  $cr(K_n)$  con sus respectivos ejemplos, así como los dibujos no isomorfos para cada  $K_n$  con  $n \leq 20$ .

Notemos que el problema del número de cruces rectilíneo no es interesante para el caso de ciclos hamiltonianos, ya que como vimos es cero; es más, sin importar cómo se coloquen los puntos, siempre hay una forma de asignar los vértices del ciclo a esos puntos de forma que no haya cruces. En este trabajo queremos determinar justo lo contrario, cuál es el máximo número de cruces del ciclo sin importar el conjunto de puntos al que van a corresponder los vértices. De aquí, podemos pensar en una posible generalización de nuestro problema, que consiste en encontrar ese máximo número de cruces para otras familias de gráficas, no necesariamente ciclos hamiltonianos, sin importar el conjunto de puntos que se va a corresponder con el de vértices.

Otras gráficas que vamos a estudiar aquí y que queremos que tengan muchos cruces van a ser los *apareamientos*, es decir, gráficas que consisten de un conjunto de aristas de forma que no haya dos aristas que compartan un vértice. En particular, vamos a estudiar las familias de cruce. Una familia de cruce es un apareamiento cuyas aristas se intersectan dos a dos. El problema que estudiaremos consiste en encontrar la máxima cardinalidad de una familia de cruce contenida en cualquier conjunto de puntos. La mejor cota inferior que se tiene a la fecha es de  $\Omega(\sqrt{n})$  y la mejor cota superior es de  $O(n)$  para un conjunto de  $n$  puntos, véase [3]. Además de esto, se tienen varias caracterizaciones para las familias de cruce, así como situaciones que implican que exista una familia de cruce de determinado tamaño, véanse [3] y [25]. Todo esto lo vamos a ver en detalle en el Capítulo 3.

Observemos que dos segmentos se intersectan sólo si sus extremos están en *posición convexa*, es decir, si forman un cuadrilátero tal que si dos puntos están dentro del cuadrilátero, entonces el segmento que los une también está contenido en el cuadrilátero. Si los cuatro puntos están en posición convexa, sólo una de las tres posibles formas de unir los puntos mediante dos segmentos forma un cruce, mientras que si no están en posición convexa, no se pueden unir para que formen un cruce. De esta forma, cada cuarteta de puntos que está en posición convexa representa la oportunidad de hacer un cruce si unimos los puntos con cuidado. Cuando tenemos la gráfica geométrica completa, entonces su número de cruces coincide con el número de cuartetos convexos del conjunto de puntos. Sin embargo, lo que nos interesa es encontrar un ciclo hamiltoniano del conjunto de puntos que tenga muchos cruces, es decir, muchas cuartetos de puntos en las que hemos unido los puntos de la forma adecuada. Planteada de esta manera, la condición de que la estructura a buscar sea un ciclo hamiltoniano parece ser muy restrictiva.

Una observación adicional en este orden de ideas es que, dados cuatro puntos en posición convexa unidos por un par de segmentos, la suma de las longitudes de dichos segmentos es mayor si se cruzan que si son paralelos, es decir, si no se cruzan. De esta manera, una manera de intentar resolver el problema consistiría en trazar un polígono simple y, cada vez que se encuentre un par de aristas paralelas, intercambiarlas por sus respectivas aristas cruzadas. Como en cada paso la longitud total del polígono aumenta y sólo hay una cantidad finita de poligonizaciones, se tiene que el procedimiento termina en algún momento dando como resultado un polígono de longitud grande. Sin embargo, puede pasar que en cada paso perdamos cruces o que haya un polígono simple que no tenga ningún par de aristas paralelas, como veremos en la Sección 4.2.

Intuitivamente, una poligonización con muchos cruces es un recorrido largo que pasa por todos los puntos de un conjunto. Cuando pensamos en aplicaciones, muchas veces se pretende encontrar una trayectoria corta con el fin de ahorrar combustible, tiempo o algún otro recurso. Sin embargo, a veces puede ser más conveniente realizar una trayectoria más larga si al recorrer más distancia obtenemos un mayor beneficio. Por ejemplo, desde la perspectiva de un taxista que cobra lo que marca el taxímetro y que tiene un pasajero que le pide ir a varios lugares sin importar en qué orden se visiten y al final regresarlo a su casa, al taxista le conviene hacer el recorrido más largo posible. Para otra posible aplicación, podemos imaginar a un turista que va a visitar varios lugares turísticos en la ciudad y regresar al lugar de partida. Al turista no le importa el orden en que va a visitarlos y querrá recorrer la distancia más larga posible sin repetir destinos con el fin de conocer todo lo que se pueda de la ciudad.

En las dos situaciones anteriores, se requiere el ciclo más largo posible que pase por todos los destinos, es decir, un ciclo hamiltoniano lo más largo posible. Sin embargo, se conjetura que encontrar el ciclo hamiltoniano más largo de cualquier conjunto de puntos es un problema NP-completo, véase [2]. Es por ello que una poligonización con muchos cruces puede ser una buena alternativa para las dos situaciones anteriores en vez del ciclo hamiltoniano más largo si la podemos construir en tiempo polinomial.

Una pregunta natural y que relaciona estas ideas de longitud y cruces es determinar el número de cruces del ciclo hamiltoniano de longitud máxima. El problema está abierto. En la Sección 4.1 veremos que el ciclo hamiltoniano más largo cuando se tiene una cantidad impar de puntos en posición convexa tiene un número cuadrático de cruces.

En el Capítulo 2 vamos a dar las herramientas que se utilizaron para resolver el problema. Estas herramientas se refieren básicamente a las ideas de posición convexa, permutaciones y cortes tipo sándwich de jamón.

En el Capítulo 3 vamos a estudiar en detalle el problema de las familias de cruce que comentamos anteriormente. Vamos a ver dos caracterizaciones de una familia de cruce, la cota inferior de  $\Omega(\sqrt{n})$  usando conjuntos mutuamente excluyentes y una cota superior lineal. El material de dicho capítulo, al igual que el anterior, será una revisión de trabajo ya hecho y no trabajo propio.

En el Capítulo 4 revisaremos las primeras cotas obtenidas para el problema del número de cruces aplicando de una forma relativamente directa las herramientas de los capítulos anteriores. Primero, veremos una cota superior cuadrática que a veces se alcanza con el ciclo hamiltoniano más largo de ese conjunto de puntos, después, veremos una poligonización sin cruces y sin ningún par de aristas que se puedan cruzar y al final, veremos tres cotas inferiores subcuadráticas.

En el Capítulo 5 veremos los resultados principales obtenidos durante la elaboración de esta tesis, los cuales son las cotas inferiores cuadráticas para el número de cruces. Primero se definirán los  $k$ -apareamientos y después se darán las cotas encontradas usando 2-apareamientos y 3-apareamientos. Usando 2-apareamientos, se dará la cota de  $n^2/108$  y usando 3-apareamientos, la cota de  $n^2/18$ .

Finalmente, en el Capítulo 6, que es de conclusiones, se darán algunas rutas posibles de futuro trabajo.



# Capítulo 2

## Preliminares

En este capítulo expondremos las herramientas utilizadas para encontrar cotas para el problema del número de cruces. Vamos a hacer una revisión del trabajo ya hecho sobre estas herramientas, que son la posición convexa, las permutaciones y los cortes tipo sándwich de jamón.

### 2.1. Posición convexa

Empecemos con algunas definiciones para precisar lo que entenderemos por posición convexa. Sea  $S$  un subconjunto de  $\mathbb{R}^2$ . Decimos que  $S$  es *convexo* si para cualesquiera  $p, q \in S$  el segmento de recta  $pq$  está contenido completamente en  $S$ . El *cierre convexo* de  $S$  es la intersección de todos los conjuntos convexos que lo contienen. Un *polígono convexo* es un polígono simple cuya región interior es convexa. Así, si  $S$  es un conjunto finito, el cierre convexo de  $S$  es un polígono convexo que lo contiene y cuyos vértices son elementos de  $S$ . Usualmente, cuando decimos que un punto del conjunto finito de puntos  $S$  está en el cierre convexo de  $S$  nos referimos a que está en la frontera del cierre convexo de  $S$ . Así, decimos que los puntos de  $S$  están en *posición convexa* si todos sus puntos están en su cierre convexo.

En esta sección abordamos el problema de encontrar el máximo número de puntos en posición convexa que podemos garantizar en cualquier conjunto de puntos, lo cual, como vimos en la introducción, nos da oportunidades para hacer muchos cruces. Primeramente, veamos que con cinco puntos siempre hay cuatro en posición convexa y presentemos la prueba dada por Esther Klein en [13].

**Teorema 1.** *Dados cinco puntos en el plano en posición general, siempre existen cuatro de ellos que están en posición convexa.*

*Demostración.* Si la frontera del cierre convexo de los cinco puntos contiene al menos a cuatro de los puntos, el resultado es inmediato. Entonces, supongamos que la frontera del cierre convexo sólo contiene a tres de los puntos, digamos  $p$ ,  $q$  y  $r$ , y los puntos restantes,  $s$  y  $t$ , están en el interior del triángulo  $pqr$ . La recta  $st$  deja a dos de los puntos del triángulo, digamos a  $q$  y a  $r$ , en uno de los semiplanos que determina y al otro punto en el otro semiplano. De esta manera, los puntos  $q$ ,  $r$ ,  $s$  y  $t$  están en posición convexa.  $\square$

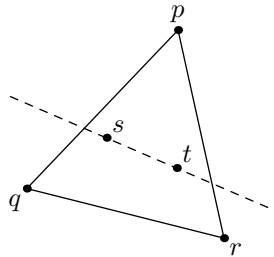


Figura 2.1. Demostración de Klein.

Esther Klein preguntaba si dado un número  $m$  siempre existe un  $N$  suficientemente grande tal que para cualquier conjunto de  $N$  puntos siempre existen  $m$  de ellos que están en posición convexa. Este problema se conoce como el Problema del Final Feliz. Erdős y Szekeres respondieron afirmativamente a esta pregunta en [13].

Erdős y Szekeres usaron los conceptos de sucesión convexa y sucesión cóncava que damos a continuación. Una sucesión  $p_1, \dots, p_k$  de puntos de un conjunto  $S$  es una *sucesión convexa* de tamaño  $k$  si está ordenada respecto a su coordenada  $x$  y la pendiente de  $p_i p_{i+1}$  es menor que la de  $p_j p_{j+1}$  si  $1 \leq i < j < k$ . Análogamente, la sucesión es *cóncava* si está ordenada respecto a su coordenada  $x$  y la pendiente de  $p_i p_{i+1}$  es mayor que la de  $p_j p_{j+1}$  si  $1 \leq i < j < k$ .

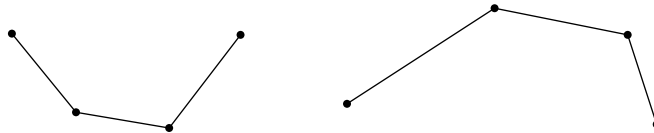


Figura 2.2. A la izquierda, una sucesión convexa y a la derecha, una sucesión cóncava. Ambas son de tamaño 4.

**Teorema 2** (Erdős-Szekeres). *Para todo  $m$  existe un número  $N(m)$  tal que en cualquier conjunto de  $N(m)$  puntos existen  $m$  de ellos que están en posición convexa.*



*Demostración.* Definimos la función  $f(k, l)$  como el menor número  $N$  tal que en todo conjunto de  $N$  puntos en posición general se puede encontrar, o bien una sucesión convexa de  $k$  puntos, o bien una sucesión cóncava de  $l$  puntos. Vamos a probar que si  $k, l \geq 3$ , entonces

$$f(k, l) \leq f(k - 1, l) + f(k, l - 1) - 1.$$

Sea  $S$  un conjunto de  $f(k - 1, l) + f(k, l - 1) - 1$  puntos en el plano y supongamos que están ordenados respecto a su coordenada  $x$ . Como dijimos en la introducción, siempre vamos a suponer que no existen dos puntos con la misma abscisa. Consideremos los primeros  $f(k - 1, l)$  puntos de  $S$ . Si en estos puntos existe una sucesión cóncava de tamaño  $l$ , ya terminamos; si no, entonces existe una sucesión convexa de tamaño  $k - 1$ . Ahora, reemplazamos el último punto de esta sucesión por el  $f(k - 1, l) + 1$ -ésimo punto de  $S$ . Nuevamente, o bien existe una sucesión cóncava de tamaño  $l$ , o bien existe una sucesión convexa de tamaño  $k - 1$ . Supongamos de nuevo que existe una sucesión convexa de tamaño  $k - 1$ , pues en el otro caso, ya terminamos. Seguimos este procedimiento hasta llegar al último punto de  $S$ . Así, obtenemos  $f(k, l - 1)$  puntos tales que cada uno de ellos es el último punto de una sucesión convexa de tamaño  $k - 1$ , pues si en cualquiera de los pasos realizados se hubiera dado el otro caso ya hubiéramos terminado.

En el conjunto encontrado, que tiene  $f(k, l - 1)$  puntos, o bien existe una sucesión convexa de tamaño  $k$ , o bien existe una sucesión cóncava de tamaño  $l - 1$ . Si se cumple el primer caso, ya terminamos; así que supongamos que sucede el segundo. Sea  $q_1, \dots, q_{l-1}$  la sucesión cóncava determinada por los puntos finales de las sucesiones convexas consideradas y sea  $p_1, \dots, p_{k-1} = q_1$  la sucesión convexa de tamaño  $k - 1$  que termina en  $q_1$ . Entonces, o bien la pendiente de  $p_{k-2}q_1$  es menor que la de  $q_1q_2$ , o bien es mayor. En el primer caso, la sucesión  $p_1, \dots, p_{k-2}, p_{k-1} = q_1, q_2$  es una sucesión convexa de tamaño  $k$  y en el segundo caso, la sucesión  $p_{k-2}, p_{k-1} = q_1, \dots, q_{l-1}$  es una sucesión cóncava de tamaño  $l$ .

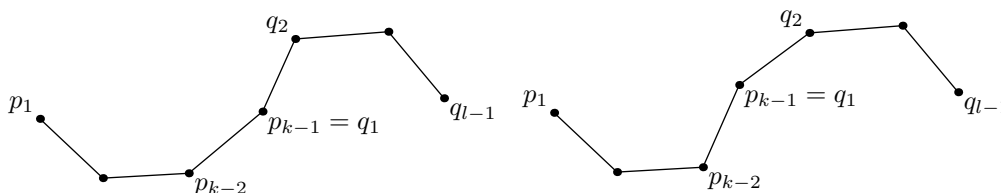


Figura 2.3. Los dos casos posibles para las pendientes de  $p_{k-2}q_1$  y  $q_1q_2$ . A la izquierda, la pendiente de  $p_{k-2}q_1$  es menor a la de  $q_1q_2$  y a la derecha, es mayor.

Ahora, vamos a probar que

$$f(k, l) \leq \binom{k+l-4}{k-2} + 1.$$

Es inmediato comprobar, de la definición, que  $f(3, r) = f(r, 3) = r$ , para todo  $r$ , de donde se sigue que la fórmula para  $f(k, l)$  es cierta cuando  $k = 3$  y  $l = r$  o cuando  $k = r$  y  $l = 3$ . Si  $k, l \geq 4$ , entonces, por hipótesis de inducción y usando la fórmula de Pascal, obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} f(k, l) &\leq f(k-1, l) + f(k, l-1) - 1 \leq \binom{k+l-5}{k-2} + \binom{k+l-5}{k-3} + 1 = \\ &= \binom{k+l-4}{k-2} + 1. \end{aligned}$$

Como los puntos de una sucesión convexa o cóncava están en posición convexa, entonces en todo conjunto de  $\binom{2m-4}{m-2}$  puntos siempre existe un subconjunto de  $m$  puntos que están en posición convexa.  $\square$

Dado que  $\binom{2m-4}{m-2} = O\left(\frac{4^{m-2}}{\sqrt{m-2}}\right)$  (véase [7]), tenemos que todo conjunto de  $n$  puntos contiene  $\Omega(\log n)$  puntos en posición convexa.

Ahora, vamos a ver que la cota de la demostración del Teorema 2 para sucesiones cóncavas y convexas es justa, no sólo asintóticamente sino exactamente. Presentamos esta demostración como aparece en [21].

**Teorema 3.** *Para todo  $k$  y  $l$  mayores o iguales que 3, existe un conjunto de puntos  $S_{k,l}$  de tamaño  $\binom{k+l-4}{k-2}$  que no tiene sucesiones convexas de tamaño  $k$  ni sucesiones cóncavas de tamaño  $l$ .*

*Demostración.* Si  $k = 3$ , basta tomar un conjunto de  $l-1$  puntos que formen una sucesión cóncava de tamaño  $l-1$ . Análogamente, si  $l = 3$ , basta tomar un conjunto de  $k-1$  puntos que formen una sucesión convexa de tamaño  $k-1$ . Supongamos que tenemos dos conjuntos  $S_{k-1,l}$  y  $S_{k,l-1}$  que cumplen lo pedido. Entonces, formamos el conjunto  $S_{k,l}$  trasladando el conjunto  $S_{k-1,l}$  a la izquierda y abajo del conjunto  $S_{k,l-1}$  de tal manera que  $S_{k,l-1}$  esté arriba de todas las rectas determinadas por pares de puntos de  $S_{k-1,l}$  y que  $S_{k-1,l}$  esté por debajo de todas las rectas formadas por pares de puntos de  $S_{k,l-1}$ . Consideremos una sucesión convexa  $C$  en  $S_{k,l}$ . Si  $C \cap S_{k-1,l} = \emptyset$ , entonces  $C$  tiene a lo más  $k-1$  puntos, por la propiedad de  $S_{k,l-1}$ . Si  $C \cap S_{k-1,l} \neq \emptyset$ , entonces, por construcción,  $C$  tiene a lo más un punto en  $S_{k,l-1}$ . Como  $C$  tiene a lo más  $k-2$  puntos en  $S_{k-1,l}$ , se tiene que  $C$  no puede tener más de  $k-1$  puntos. El argumento para sucesiones cóncavas es completamente análogo. Por lo tanto,  $S_{k,l}$  cumple con las propiedades buscadas.

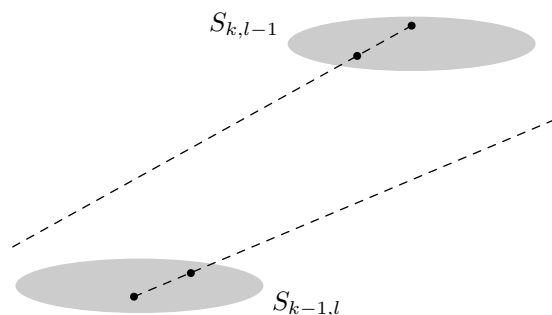


Figura 2.4. Construcción de  $S_{k,l}$  a partir de los conjuntos  $S_{k,l-1}$  y  $S_{k-1,l}$ .

Como  $|S_{k,l}| = |S_{k-1,l}| + |S_{k,l-1}|$ , se prueba de la misma forma que en la demostración del Teorema 2 que  $|S_{k,l}| = \binom{k+l-4}{k-2}$ .  $\square$

Ahora, usando el teorema anterior, vamos a probar una cota inferior para el problema de la mínima cantidad de puntos en los que siempre hay  $m$  de ellos en posición convexa. Esto se prueba en [14], pero lo expondremos como en [24], que a su vez se basa en la exposición de [19].

**Teorema 4.** *Para todo  $m$ , existe un conjunto de  $2^{m-2}$  puntos que no tiene  $m$  puntos en posición convexa.*

*Demostración.* Aplicando el Teorema 3, para cada  $0 \leq i \leq m - 2$ , tomamos un conjunto  $S_i$  que tiene  $\binom{m-2}{i}$  puntos y que no contiene ninguna sucesión cóncava de tamaño  $i + 2$  ni ninguna sucesión convexa de tamaño  $m - i$ . A cada  $S_i$  lo escalamos en el eje  $x$  de forma que ningún segmento que una a un par de puntos de  $S_i$  tenga pendiente con valor absoluto mayor a 1. Observemos que las propiedades de convexidad se conservan al aplicar la escala.

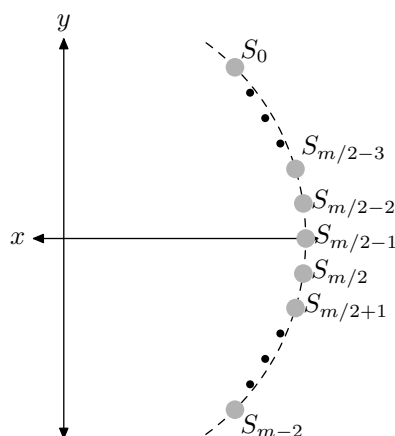


Figura 2.5. Construcción de  $S$  cuando  $m$  es par.

Ahora, a cada conjunto  $S_i$  le aplicamos una escala para que quede dentro de un círculo de radio  $\varepsilon$  y colocamos cada conjunto sobre la circunferencia de radio unitario en la posición que forma un ángulo de  $\frac{\pi}{4} - \frac{i\pi}{2(m-2)}$  con el eje  $x$  positivo. Escogemos el  $\varepsilon$  lo suficientemente pequeño para que el segmento de recta que una cualquier pareja de puntos que estén en distintos conjuntos tenga pendiente de valor absoluto mayor que 1, véase Figura 2.5.

Sea  $S = \cup_{i=0}^{m-2} S_i$ . Entonces

$$|S| = \sum_{i=0}^{m-2} \binom{m-2}{i} = 2^{m-2}.$$

Sea  $T$  un subconjunto de  $S$  en posición convexa. Sean  $k$  y  $l$  el  $i$  más pequeño y el más grande tales que  $T \cap S_i \neq \emptyset$ . Si  $k = l$ , entonces  $T$  no contiene ninguna sucesión cóncava de tamaño  $k + 2$  ni ninguna sucesión convexa de tamaño  $m - k$ , por lo que no contiene a  $m - k + k + 2 - 2 = m$  puntos en posición convexa. Si  $k \neq l$ , entonces, por construcción,  $T \cap S_k$  es una sucesión cóncava de tamaño a lo más  $k + 1$ ,  $T \cap S_l$  es una sucesión convexa de tamaño a lo más  $m - l - 1$  y  $T \cap S_i$  tiene a lo más un punto para cada  $k + 1 \leq i \leq l - 1$ . Por lo tanto,  $T$  no puede contener más de  $k + 1 + l - k - 1 + m - l - 1 = m - 1$  puntos.  $\square$

De esta forma, existen conjuntos de  $2^{m-2}$  puntos que no contienen  $m$  puntos en posición convexa, o lo que es lo mismo, existen conjuntos de  $n$  puntos que no tienen más de  $O(\log n)$  puntos en posición convexa.

Ha sido un problema de gran interés el encontrar mejores cotas para  $N(m)$ . A la fecha, las mejores cotas que se tienen son las que se muestran a continuación. La cota inferior que dimos y es la que aparece en [14] no se ha podido mejorar y se conjetura que es justa. La cota superior representa una pequeña mejora a la dada por Erdős y Szekeres en [13] y está descrita en [31].

$$2^{m-2} + 1 \leq N(m) \leq \binom{2m-5}{m-2} + 2.$$

## 2.2. Permutaciones

Una *permutación* es una función biyectiva  $\sigma$  del conjunto  $[n] = \{1, \dots, n\}$  en sí mismo. Podemos considerar permutaciones de  $n$  elementos distintos que estén en un conjunto totalmente ordenado, identificando el menor de ellos con el número 1, el segundo menor con el 2, etcétera. Así que todo lo que diremos aquí vale para permutaciones cuyos elementos sean distintos y estén en un conjunto totalmente ordenado aunque, por simplicidad, sólo

consideraremos permutaciones en  $[n]$ . A  $\sigma(i)$  usualmente lo representamos como  $\sigma_i$  y a  $\sigma([n])$  como una sucesión  $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ . Una *subsucesión* de tamaño  $k$  de la permutación  $\sigma$  es una sucesión de números  $\sigma_{i_1}, \dots, \sigma_{i_k}$ , donde  $i_1 < i_2 < \dots < i_k$  y decimos que es *creciente* si  $\sigma_{i_1} < \sigma_{i_2} < \dots < \sigma_{i_k}$  o *decreciente* si  $\sigma_{i_1} > \sigma_{i_2} > \dots > \sigma_{i_k}$ .

Presentamos el siguiente teorema, conocido como el Teorema de Dilworth, el cual es muy utilizado en matemáticas discretas y que nos será de utilidad en lo que sigue para asegurar que existe una cierta cantidad de puntos con determinadas características. Este teorema también se demostró en [13], pero aquí presentamos otra posible demostración usando una función que manda cada elemento de la permutación a un punto del plano de coordenadas enteras.

**Teorema 5.** *Dada una permutación de  $n$  números, siempre existe una subsucesión creciente o decreciente de tamaño  $\sqrt{n}$ .*

*Demostración.* Definimos una función  $f$  de  $\sigma([n])$  a  $\mathbb{N}^2$  de la siguiente forma. A  $\sigma_i$  le asignamos como coordenada  $x$  el tamaño de la subsucesión creciente más larga de  $\sigma$  cuyo último elemento es  $\sigma_i$  y como coordenada  $y$  el tamaño de la subsucesión decreciente más larga cuyo primer elemento es  $\sigma_i$ . Veamos que  $f$  es inyectiva.

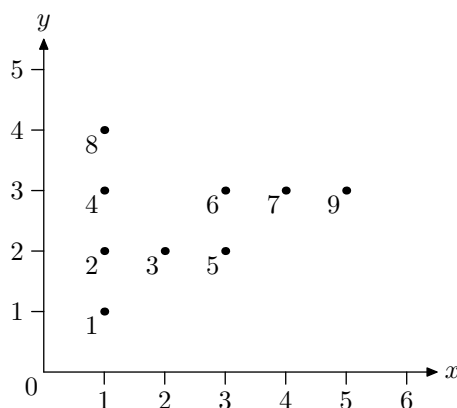


Figura 2.6. Imagen de la función  $f$  de la demostración del Teorema 5 aplicado a la permutación 8, 4, 2, 3, 6, 7, 9, 5, 1.

Consideremos dos números  $\sigma_i$  y  $\sigma_j$  tales que  $i < j$ . Entonces, o  $\sigma_i > \sigma_j$  o  $\sigma_i < \sigma_j$ . En el primer caso, cualquier subsucesión decreciente que empiece en  $\sigma_j$  la podemos incluir en una subsucesión decreciente que empiece en  $\sigma_i$  y tenga al menos un elemento más. Así, la coordenada  $y$  de  $f(\sigma_i)$  es mayor que la de  $f(\sigma_j)$ . En el segundo caso, cualquier subsucesión creciente que termine en  $\sigma_i$  la podemos completar hasta una subsucesión creciente que termine en

$\sigma_j$  y tenga al menos un elemento más. Así, la coordenada  $x$  de  $f(\sigma_j)$  es mayor que la de  $f(\sigma_i)$ . Por lo tanto,  $f$  es inyectiva.

Si existe un  $\sigma_i$  cuya coordenada  $x$  de la imagen sea mayor o igual que  $\sqrt{n}$ , ya terminamos pues nos da una subsucesión creciente de tamaño  $\sqrt{n}$ . Si no, entonces a lo más puede haber  $\sqrt{n} - 1$  puntos que tengan la misma coordenada  $y$ , para cada  $y \in \mathbb{N}$ . Como  $f$  es inyectiva, entonces  $f(\sigma([n]))$  tiene  $n$  puntos en  $\mathbb{N}^2$ . Así que si pasa lo anterior, entonces debe haber al menos  $\sqrt{n}$  coordenadas  $y$  distintas en la imagen de  $\sigma([n])$  y, por lo tanto, alguna de ellas es mayor o igual que  $\sqrt{n}$ , dándonos una subsucesión decreciente de tamaño  $\sqrt{n}$ .  $\square$

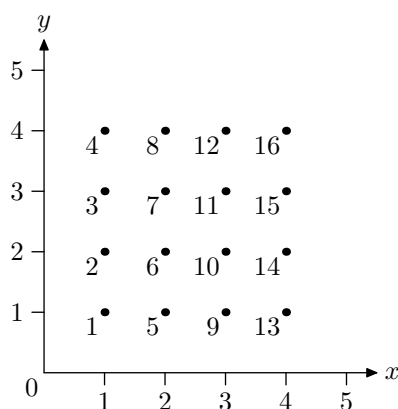


Figura 2.7. En la permutación 4, 3, 2, 1, 8, 7, 6, 5, 12, 11, 10, 9, 16, 15, 14, 13, no existen puntos cuya coordenada  $x$  o  $y$  sea mayor que  $\sqrt{16} = 4$ .

Es importante notar que existen permutaciones de  $n$  puntos que no tienen subsucesiones crecientes o decrecientes de tamaño mayor a  $\sqrt{n}$ . Por ejemplo, si  $n = a^2$ , entonces la permutación  $a, a - 1, \dots, 1, 2a, 2a - 1, \dots, a + 1, \dots, a^2, a^2 - 1, \dots, a(a - 1) + 1$ , no tiene una subsucesión creciente o decreciente de tamaño mayor a  $a = \sqrt{n}$ .

Es un problema interesante caracterizar los conjuntos de puntos con coordenadas enteras que pueden provenir de una permutación con la función  $f$  que se definió en la demostración del Teorema 5. Sin embargo, no lo haremos aquí pues no es el tema de este trabajo.

Otra razón por la que son importantes las permutaciones en nuestro problema radica en el siguiente hecho. Supongamos que tenemos dos rectas paralelas horizontales con  $n$  puntos numerados cada una, en la primera de ellas los puntos están numerados del 1 al  $n$  y en la otra recta están numerados de acuerdo a una permutación  $\sigma$  y en el mismo sentido que la primera recta. Así, si unimos con un segmento de recta a los puntos que tengan como etiqueta al mismo número, cada transposición va a formar un cruce. Más aún,

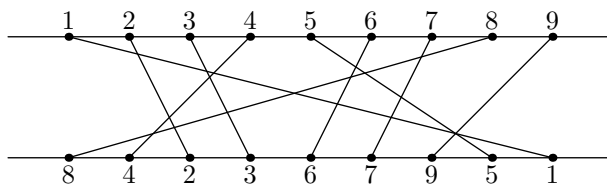


Figura 2.8. Cruces formados con la permutación 8, 4, 2, 3, 6, 7, 9, 5, 1. Aquí, los segmentos que unen a 8, 4, 2, 1 se cruzan dos a dos, mientras que los que unen a 2, 3, 6, 7, 9 son paralelos entre sí.

cada subsucesión decreciente va a determinar un conjunto de segmentos que se cruzan dos a dos y cada subsucesión creciente, un conjunto de segmentos que son paralelos entre sí, es decir, que no se cruzan.

## 2.3. Sándwich de jamón

Dado un conjunto  $A \subset \mathbb{R}^d$  que tiene cierto volumen  $V(A)$  finito, decimos que un hiperplano  $h$  lo *bisecta* si el volumen de  $A$  restringido a cada uno de los semiespacios definidos por  $h$  es menor o igual a  $V(A)/2$ . Así, el Teorema del sándwich de jamón dice que si se tienen  $d$  conjuntos en  $\mathbb{R}^d$ , entonces existe un hiperplano que bisecta a los  $d$  conjuntos. A dicho hiperplano se le conoce como un *corte tipo sándwich de jamón*.

El teorema tiene ese nombre debido a que si en  $\mathbb{R}^3$  tenemos un sándwich de jamón, es decir, dos rebanadas de pan y una de jamón, entonces establece que podemos partir los tres objetos exactamente a la mitad con un cuchillo haciendo un único corte recto sin importar que el pan y el jamón estén desperdigados por la cocina.

En el caso discreto del Teorema del sándwich de jamón se tienen  $d$  conjuntos finitos de puntos  $A_1, \dots, A_d$  en  $\mathbb{R}^d$  donde el volumen de un subconjunto de  $\mathbb{R}^d$  se mide como la cantidad de puntos de  $\cup_{i=1}^d A_i$  que contiene. Así, un hiperplano  $h$  bisecta a uno de los conjuntos  $A_i$  si el volumen de  $A_i$  restringido a cada uno de los semiespacios definidos por  $h$  es menor o igual que la mitad del volumen de  $A_i$ , es decir,  $h$  bisecta a  $A_i$  si deja a lo más a  $|A_i|/2$  puntos de  $A_i$  en cada uno de sus semiespacios. Así, el teorema establece que existe un semiespacio que bisecta a los  $d$  conjuntos finitos de puntos.

El caso que nos interesa es el caso discreto de dos conjuntos en  $\mathbb{R}^2$ , es decir, que dados dos conjuntos finitos de puntos en el plano,  $A$  y  $B$ , siempre se puede trazar una recta que deja a lo más la mitad de los puntos de  $A$  y de  $B$  en cada uno de sus semiplanos.

El Teorema del sándwich de jamón en el caso continuo se prueba usando

el Teorema de Borsuk-Ulam. No lo demostraremos aquí por estar fuera del objetivo de este trabajo. En el caso discreto en  $\mathbb{R}^d$ , se usan distribuciones de masa para aproximar al caso continuo, se aplica el teorema en el caso continuo y se argumenta que la solución obtenida en el caso continuo también sirve para el caso discreto. La demostración detallada del caso discreto se puede consultar en [11].

Aquí, sólo probaremos el Teorema del sándwich de jamón en el caso discreto en  $\mathbb{R}^2$  sin profundizar en los detalles y enfocándonos en las ideas. Antes de ello, necesitamos el siguiente lema.

**Lema 6.** *Sean  $S$  un conjunto de  $n$  puntos en el plano,  $k$  un entero entre  $0$  y  $n$  y  $u$  un vector unitario de dirección  $\theta \in [0, 2\pi)$ . Entonces, siempre existe una recta  $l$  perpendicular a  $u$  que tiene a su izquierda a  $k$  puntos de  $S$ .*

*Demostración.* Proyectamos todos los puntos de  $S$  sobre la recta que contiene a  $u$  y los ordenamos respecto a su posición en la recta. Así, elegimos una posición  $\lambda$  que esté entre los puntos  $k$ -ésimo y  $k + 1$ -ésimo de izquierda a derecha en la recta y trazamos la perpendicular  $l$  en ese punto. Entonces, la recta  $l$  tendrá  $k$  puntos a su izquierda y será perpendicular a  $u$ .  $\square$

Del lema anterior se deduce el Teorema del sándwich de jamón para  $\mathbb{R}^2$ .

**Teorema 7** (Sándwich de jamón). *Dados dos conjuntos de puntos  $A$  y  $B$  en el plano, entonces podemos trazar una recta que bisecta a ambos conjuntos.*

*Demostración.* Para cada  $\theta \in [0, \pi]$ , usando el teorema anterior, consideramos la recta  $l_\theta$  perpendicular al vector unitario de dirección  $\theta$  que deja  $\lfloor |A|/2 \rfloor$  puntos de  $A$  a su izquierda. Para cada  $\theta$ , contamos la cantidad de puntos de  $B$  a la izquierda de  $l$ , la cual para una variación de  $\theta$  suficientemente pequeña no puede cambiar en más de uno, por estar los puntos en posición general.

Si cuando  $\theta = 0$  hay  $k$  puntos de  $B$  a la izquierda de  $l$ , entonces cuando  $\theta = \pi$  hay  $|B| - k$  puntos de  $B$  a la izquierda de  $l$ . Así, si  $k \neq \lfloor |B|/2 \rfloor$ , entonces en alguno de los dos casos hay más de la mitad y en el otro necesariamente menos de la mitad de los puntos de  $B$  a la izquierda de  $l$ . Como dijimos que nunca variaba en más de uno dicha cantidad, entonces en algún momento hay  $\lfloor |B|/2 \rfloor$  puntos de  $B$  a la izquierda de  $l$ .  $\square$

Ahora presentamos el siguiente teorema, que es una variante del Teorema del sándwich de jamón para el plano en el que se supone que los conjuntos  $A$  y  $B$  son *separables*, es decir, que existe una recta que deja en un semiplano a  $A$  y en el otro a  $B$ . A la recta que tiene las características descritas en el problema se le llama un *corte generalizado tipo sándwich de jamón*. La



idea de la prueba es exactamente la misma que para probar el Teorema del sándwich de jamón.

**Teorema 8.** *Sean dos conjuntos de puntos  $A$  y  $B$  en posición general en el plano que se pueden separar por una recta  $\mathcal{L}$  y sean dos números  $\alpha \leq |A|$  y  $\beta \leq |B|$ , entonces existe una recta  $m$  que deja a su izquierda  $\alpha$  puntos de  $A$  y  $\beta$  puntos de  $B$ .*

*Demostración.* Sin pérdida de generalidad supongamos que  $\mathcal{L}$  coincide con el eje  $x$ , que  $A$  está arriba de  $\mathcal{L}$  y  $B$  debajo de ella. Ahora, para cada  $\theta \in [\pi/2, 3\pi/2]$  aplicamos el Lema 6 para encontrar una recta  $m$  perpendicular al vector unitario de dirección  $\theta$  y que tenga  $\alpha$  puntos de  $A$  a su izquierda. Así, ya que los puntos están en posición general, para una variación suficientemente pequeña de  $\theta$  la cantidad de puntos de  $B$  a la izquierda de  $m$  no va a cambiar en más de uno.

Cuando  $\theta = \pi/2$  tenemos que la cantidad de puntos de  $B$  a la izquierda de  $m$  es  $|B|$  y cuando  $\theta = 3\pi/2$  dicha cantidad es cero. Así, para algún valor de  $\theta$  hay exactamente  $\beta$  puntos de  $B$  a la izquierda de  $m$ . □

Se sabe que encontrar el corte generalizado tipo sándwich de jamón del teorema anterior toma tiempo lineal, véase [22]. El teorema anterior también se generaliza para el caso general en  $d$  dimensiones, véase [30], y también se puede calcular en tiempo lineal si la dimensión  $d$  se tiene como fija, véase [5].

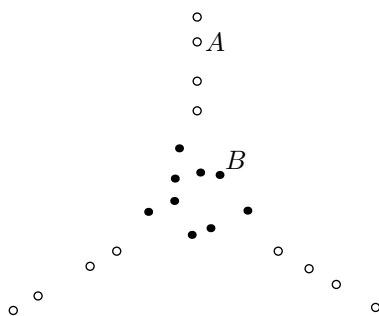


Figura 2.9. Ejemplo donde no se cumple la hipótesis de separabilidad del Teorema 8 ni la conclusión del mismo. El conjunto  $A$  está formado por los puntos blancos, donde cada fila tiene  $1/3|A|$  puntos y el conjunto  $B$  está formado por los puntos negros.

Por último, vamos a comentar que si los conjuntos  $A$  y  $B$  no se pueden separar por una recta, entonces no necesariamente se cumple la conclusión del teorema anterior.

Si  $A$  y  $B$  son los puntos de la Figura 2.9 y queremos trazar una recta tal que en uno de sus lados tenga  $1/4|A|$  puntos de  $A$  y  $1/2|B|$  puntos de  $B$ , entonces no podremos porque dicha recta no existe. Como  $B$  está completamente adentro del triángulo formado por los tres puntos más centrales de  $A$ , se tiene que toda recta que bisecta a  $B$  tiene que intersectar forzosamente dicho triángulo. Si una recta intersecta el triángulo central, entonces dicha recta tiene en cada semiplano al menos  $1/3|A|$  puntos de  $A$ . En [30] se prueba que para  $d$  dimensiones, la condición de que los conjuntos de puntos sean separables en  $\mathbb{R}^d$  es necesaria.

# Capítulo 3

## Familias de cruce

Un problema relacionado con el problema principal de esta tesis es el de encontrar familias de cruce grandes en cualquier conjunto de puntos en el plano. Aquí vamos a estudiar en detalle este problema. Primero, vamos a dar las definiciones pertinentes para entender qué es una familia de cruce. Después, vamos a establecer caracterizaciones para que exista una familia de cruce máxima y, por último a establecer cotas para la familia de cruce más grande.

Un *apareamiento* de tamaño  $k$  en un conjunto  $S$  de  $n$  puntos es un conjunto de  $k$  parejas de puntos de  $S$  ajenas dos a dos. En este trabajo, cuando hablemos de apareamientos siempre sobreentenderemos que en cada pareja sus puntos están unidos mediante un segmento de recta y nos referiremos al apareamiento indistintamente como el conjunto de parejas o el conjunto de segmentos. Así, una *familia de cruce* de tamaño  $k$  en  $S$  es un apareamiento de tamaño  $k$  en el que cada par de segmentos se intersecta. En estos términos, lo que queremos es encontrar la familia de cruce más grande posible para cualquier conjunto de puntos  $S$ . Si  $S$  tiene una familia de cruce de tamaño  $\lfloor n/2 \rfloor$ , entonces decimos que  $S$  *se puede cruzar*.

### 3.1. Rectas bisectoras

En esta sección vamos a dar una caracterización de cuándo un conjunto de puntos  $S$  se puede cruzar usando el concepto de rectas bisectoras. Para esto nos basaremos en [25].

Por simplicidad, vamos a considerar sólo conjuntos de puntos con una cantidad par de puntos. Dado un conjunto  $S = \{p_1, p_2, \dots, p_{2n}\}$  de puntos, una *recta bisectora* es una recta que une un par de puntos  $p_i$  y  $p_j$  del conjunto que deja exactamente  $n - 1$  puntos de  $S$  en cada uno de sus semiplanos. A

la cantidad de rectas bisectoras de  $S$  la denotamos por  $h(S)$ . Así mismo, denotamos a la cardinalidad de la máxima familia de cruce de  $S$  como  $c(S)$ .

Observemos que si fijamos un punto  $p_i$ , trazamos una recta  $l$  por él y la giramos a lo más  $180^\circ$ , entonces encontraremos un punto en el que  $l$  se vuelve una recta bisectora. Por lo tanto, siempre hay al menos  $n$  rectas bisectoras, es decir,  $h(S) \geq n$ . También tenemos que  $c(S) \leq n$ .

Es un problema abierto encontrar el valor de  $h(n)$  definido como el mayor de los  $h(S)$  para todo conjunto  $S$  de  $2n$  puntos. Actualmente, se sabe que  $c_1 n \log n \leq h(n) \leq c_2 n^{4/3}$ , para algunas constantes  $c_1, c_2 > 0$ , (véanse [10], [12] y [18]).

También es un problema abierto encontrar el valor de  $c(n)$  definido como el menor de los  $c(S)$  para todo conjunto  $S$  de  $2n$  puntos. Como veremos más adelante en este capítulo, sabemos a la fecha que  $c_3 \sqrt{n} \leq c(n) \leq c_4 n$  (véase [3]).

**Teorema 9.** *Un conjunto  $S$  de  $2n$  puntos se puede cruzar si y sólo si tiene exactamente  $n$  rectas bisectoras.*

*Demostración.* Supongamos que  $S = \{p_1, \dots, p_{2n}\}$  se puede cruzar. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que los segmentos que se interesectan dos a dos son de la forma  $p_{2i-1}p_{2i}$ , para  $1 \leq i \leq n$ . Como cada uno de esos segmentos tiene que separar a los extremos de cada uno de los otros segmentos para poderlos cruzar, tenemos que las rectas que contienen a cada uno de esos segmentos son rectas bisectoras. Así, vamos a probar que  $S$  no tiene otras rectas bisectoras.

Supongamos que existe otra recta bisectora. Podemos suponer, renumerando si es necesario, que dicha recta pasa por los puntos  $p_1$  y  $p_3$ . Además, supongamos que la recta  $p_1p_2$  es horizontal con  $p_2$  a la derecha de  $p_1$  y que los puntos de la forma  $p_{2i-1}$  están arriba de la horizontal, mientras que los puntos de la forma  $p_{2i}$  están abajo de ella.

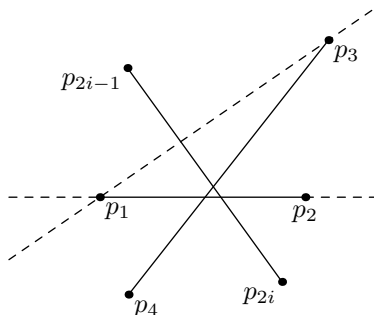


Figura 3.1. Ilustración de la situación cuando  $p_1p_3$  es recta bisectora.

Si uno de los puntos  $p_{2i-1}, p_{2i}$  está a la izquierda de  $p_1p_3$ , entonces, como el segmento que forman tiene que cruzar a  $p_1p_2$ , que está a la derecha de  $p_1p_3$ , tenemos que el otro punto del segmento está a la derecha de  $p_1p_3$ . Además, tenemos que tanto  $p_2$  como  $p_4$  están a la derecha de  $p_1p_3$  pues el segmento  $p_1p_2$  está a su derecha también. Así, como las parejas de  $p_1$  y  $p_2$  están sobre  $p_1p_3$ , entonces a la derecha de  $p_1p_3$  hay al menos dos puntos más que a su izquierda, por lo que no es una recta bisectora.

Ahora, supongamos que  $S$  tiene exactamente  $n$  rectas bisectoras. Como cada punto de  $S$  pertenece al menos a una recta bisectora, se tiene que cada uno de ellos pertenece exactamente a una recta bisectora. Así, podemos suponer sin pérdida de generalidad que las rectas bisectoras unen a los pares de puntos  $p_{2i-1}, p_{2i}$ , donde  $1 \leq i \leq n$ . Vamos a probar que los segmentos  $p_{2i-1}p_{2i}$  se cruzan dos a dos.

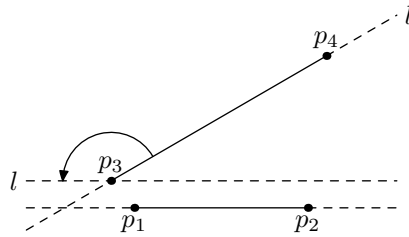


Figura 3.2. Si los segmentos  $p_1p_2$  y  $p_3p_4$  no se intersectaran, entonces existiría una recta bisectora  $p_3p_k$  no considerada.

Supongamos, para llegar a una contradicción, que los segmentos  $p_1p_2$  y  $p_3p_4$  no se intersectan. Además, supongamos, renumerando los puntos si fuera necesario, que la recta  $p_1p_2$  es horizontal con  $p_2$  a la derecha de  $p_1$  y que el segmento  $p_3p_4$  está completamente arriba de la recta  $p_1p_2$ , siendo el punto  $p_3$  el punto de ese segmento que está más cerca de la recta  $p_1p_2$ . Notemos que si giramos un poco la recta  $l = p_3p_4$  alrededor de  $p_3$  en sentido contrario al de las manecillas del reloj, entonces habrá  $n$  puntos a la derecha de la recta. Si continuamos girando hasta que  $l$  sea horizontal, entonces habrá a lo más  $n - 2$  puntos a su derecha en ese momento, pues la región a la derecha de  $l$  estará contenida en uno de los semiplanos de  $p_1p_2$  y no contendrá a  $p_3$ . Como al girar la recta un ángulo suficientemente pequeño no se agrega o quita más de un punto a la derecha de  $l$ , tenemos que en algún momento durante el giro habría exactamente  $n - 1$  puntos a la derecha de  $l$ , es decir, existiría un  $k \neq 4$  tal que  $p_3p_k$  es una recta bisectora. Dicha recta bisectora que suponíamos estaba completa, lo cual es una contradicción.  $\square$

## 3.2. Condiciones de rango

Ahora vamos a dar otra caracterización para establecer cuándo un conjunto  $S$  de puntos se puede cruzar, separando primeramente a  $S$  en dos conjuntos  $A$  y  $B$  por una línea recta. Nos basaremos en [3].

Decimos que dos conjuntos de puntos  $A$  y  $B$  separados por una recta *se pueden cruzar* si existe una familia de cruce que usa a todos los puntos de ambos conjuntos de tal manera que cada uno de sus segmentos une a un punto de  $A$  con uno de  $B$ .

Decimos que el conjunto  $A$  *excluye* al conjunto  $B$  si todas las rectas determinadas por dos puntos de  $A$  no intersectan al cierre convexo de  $B$ . Si el conjunto  $A$  excluye al conjunto  $B$  y  $B$  excluye a  $A$ , entonces decimos que los conjuntos  $A$  y  $B$  son *mutuamente excluyentes*.

Sean  $X$  e  $Y$  dos conjuntos de puntos separados por una línea recta. Decimos que un punto  $x \in X$  ve a un punto  $y \in Y$  *en el rango  $i$*  si  $y$  es el  $i$ -ésimo punto de  $Y$  que es visto por  $x$  al recorrer su rayo de visión en sentido contrario al de las manecillas del reloj. De forma análoga se define cuándo un punto  $y$  ve a un punto  $x$  en el rango  $i$ . A partir de aquí, definimos la condición de rango, la condición fuerte de rango y la condición débil de rango. Decimos que  $X$  e  $Y$  cumplen la *condición de rango* si podemos numerar los elementos de  $X$  como  $x_1, \dots, x_s$  y a los puntos de  $Y$  como  $y_1, \dots, y_s$  de tal manera que para todo  $i$  el punto  $x_i$  ve al punto  $y_i$  en el rango  $i$ , y viceversa.  $X$  e  $Y$  cumplen la condición *fuerte* de rango si podemos numerar sus elementos de tal manera que para todo  $i$  y  $j$ , el punto  $x_i$  ve al punto  $y_j$  en el rango  $j$  y  $y_j$  ve al  $x_i$  en el rango  $i$ . La condición *débil* de rango sólo establece que la numeración debe cumplir que el punto  $x_i$  vea al punto  $y_i$  en el mismo rango que el punto  $y_i$  ve al punto  $x_i$ .

El siguiente teorema expone cómo se relacionan las condiciones de rango en dos conjuntos  $A$  y  $B$  separados por una recta  $\mathcal{L}$  con el hecho de que se puedan cruzar o que sean mutuamente excluyentes.

**Teorema 10.** *Sean  $X$  e  $Y$  dos conjuntos de  $s$  puntos en el plano en posición general y separados por una recta  $\mathcal{L}$ . Entonces:*

1. *La condición de rango es equivalente a la condición débil de rango.*
2.  *$X$  e  $Y$  se pueden cruzar si y sólo si cumplen la condición de rango.*
3.  *$X$  e  $Y$  son mutuamente excluyentes si y sólo si cumplen la condición fuerte de rango.*

*Demostración.* Sin perder generalidad, supongamos que  $\mathcal{L}$  es vertical y que deja a  $X$  en el semiplano izquierdo y a  $Y$  en el derecho.

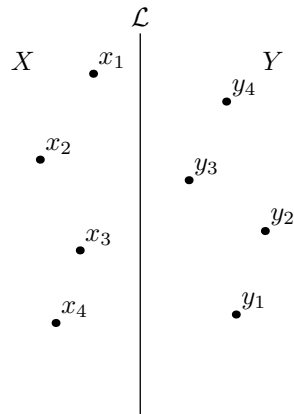


Figura 3.3. Dos conjuntos de puntos que cumplen la condición de rango con la numeración dada, pero no cumplen la condición fuerte de rango pues  $x_1$  y  $x_2$  ven a  $y_2$  y a  $y_3$  en distinto orden.

1. Es inmediato que la condición de rango implica la condición débil de rango. Entonces, supongamos que  $X$  e  $Y$  cumplen la condición débil de rango. Consideremos dos números  $i$  y  $j$  de la numeración. Sean  $a_i$  el rango en el cual  $x_i$  ve a  $y_i$  y  $a_j$  el rango en el que  $x_j$  ve a  $y_j$ . Vamos a probar que  $a_i \neq a_j$ . Sean  $l_i$  la recta que une a  $x_i$  con  $y_i$  y  $l_j$  la recta que une a  $x_j$  con  $y_j$ . Sin pérdida de generalidad, supongamos que  $l_i$  y  $l_j$  se intersectan a la izquierda de  $\mathcal{L}$  y que  $l_i$  tiene pendiente mayor que la de  $l_j$ . Así,  $l_i$  tiene  $a_i - 1$  puntos de  $Y$  por debajo de ella y uno de esos puntos es  $y_j$ . Como las rectas se intersectan a la izquierda de  $\mathcal{L}$ , se tiene que los puntos de  $Y$  que están por debajo de  $l_j$  también están por debajo de  $l_i$ . Por lo tanto,  $a_j \leq a_i - 1$ . De esta manera, se concluye que todos los  $a_i$  son distintos y entonces, podemos numerar los puntos cambiando la etiqueta  $i$  por la  $a_i$  haciendo que esta numeración cumpla la condición de rango.

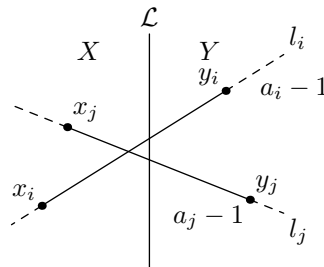


Figura 3.4. La condición débil de rango implica la condición de rango.

2. Supongamos que  $X$  e  $Y$  se pueden cruzar. Sean  $l_1 = x_1y_1, \dots, l_s = x_sy_s$ ,

los segmentos que unen puntos de  $X$  e  $Y$  que se cruzan dos a dos y ordenados por sus pendientes de menor a mayor. Consideremos un  $i$  y un  $j$ . Si  $j < i$ , como  $l_j$  intersecta a  $l_i$  y tiene pendiente menor, el punto  $y_j$  queda debajo de la recta  $l_i$ , por lo que  $x_i$  ve a  $y_j$  antes que a  $y_i$ . Si  $j > i$ , se observa de forma análoga que  $x_i$  ve a  $y_i$  antes que a  $y_j$ . De esta manera, el punto  $x_i$  ve al punto  $y_i$  después que a  $y_1, \dots, y_{i-1}$  y antes que a  $y_{i+1}, \dots, y_s$ . Por lo tanto,  $x_i$  ve a  $y_i$  en el rango  $i$ . De forma análoga, se prueba que  $y_i$  ve a  $x_i$  en el rango  $i$ . Como esto pasa para todo  $i$ , se tiene que  $X$  e  $Y$  cumplen la condición de rango.

Ahora supongamos que  $X$  e  $Y$  cumplen la condición de rango. Vamos a probar por inducción sobre  $s$  que los segmentos  $x_i y_i$  para  $1 \leq i \leq s$  forman una familia de cruce. Si  $s = 1$ , es claro que el segmento  $x_1 y_1$  forma una familia de cruce. Supongamos que  $s > 1$ . Si consideremos la recta  $l_s = x_s y_s$ , entonces los puntos de  $X \setminus \{x_s\}$  están arriba de  $l_s$  y los puntos de  $Y \setminus \{y_s\}$  están abajo de  $l_s$ . De aquí se deduce que si  $i < s$ , entonces la recta  $x_i y_i$  tiene pendiente menor que la de  $x_s y_s$ . También tenemos que se cumple lo establecido en la siguiente observación.

El segmento  $x_s y_s$  intersecta al segmento  $x_i y_i$  si y sólo si el segmento  $x_s y_s$  intersecta a la recta  $x_i y_i$ .

Supongamos que el segmento  $x_s y_s$  no intersecta a todos los demás segmentos de la familia. Sea  $A$  el conjunto de todos los segmentos de la familia que no cruzan al  $x_s y_s$ . Supongamos que  $A$  tiene un segmento cuya intersección con  $\mathcal{L}$  está arriba de la intersección de  $l_s$  con  $\mathcal{L}$ . Sea  $a$  tal que  $x_a y_a \in A$  es el segmento cuya intersección con  $\mathcal{L}$  es la que está más arriba de todas. Por la observación, la recta  $l_a = x_a y_a$  no intersecta a  $x_s y_s$ , pues de lo contrario  $x_a y_a \notin A$ . Así, hay exactamente  $a - 1$  puntos de  $X$  arriba de  $l_a$  y  $a - 1$  puntos de  $Y$  abajo de  $l_a$ . Tenemos que  $x_s$  no pertenece a estos puntos mientras que  $y_s$  sí. Por lo tanto, existe un  $b$  tal que  $x_b$  e  $y_b$  están ambos arriba de  $l_a$ . De esta manera, como el segmento  $x_s y_s$  está abajo de  $l_a$ , tenemos que  $x_b y_b$  no intersecta a  $x_s y_s$  y su punto de intersección con  $\mathcal{L}$  está arriba del de  $x_a y_a$ , lo cual es una contradicción. De forma análoga, se llega a contradicción suponiendo que  $A$  tiene un segmento cuyo punto de intersección con  $\mathcal{L}$  está abajo del de  $x_s y_s$ . Por lo tanto,  $x_s y_s$  intersecta a todos los otros segmentos.

Como la pendiente de cualquier segmento  $x_i y_i$  con  $i < s$  es menor que la de  $x_s y_s$ , tenemos que el punto  $x_i$  ve al punto  $y_i$  en un rango menor que al  $y_s$  y viceversa. Así, si eliminamos a  $x_s y_s$  los demás segmentos preservan la condición de rango. Por hipótesis de inducción, todas las parejas de segmentos  $x_i y_i$  y  $x_j y_j$  con  $1 \leq i < j \leq s - 1$  se intersectan.



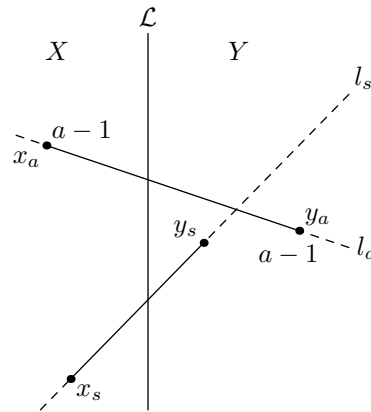


Figura 3.5. Ilustración de lo que pasaría si hubiera un  $l_a$  que interseca a  $\mathcal{L}$  por encima de  $l_s$ .

Por lo tanto, los segmentos  $x_i, y_i$  para  $1 \leq i \leq s$  es una familia de cruce.

- Supongamos que  $X$  e  $Y$  son mutuamente excluyentes. Sean  $x \in X$  e  $y_1, \dots, y_s$  los puntos de  $Y$  como son vistos desde  $x$ . Vamos a probar que los puntos de  $Y$  se ven de la misma manera desde cualquier otro punto de  $X$ . Sea  $x'$  otro punto de  $X$ . Si  $x'$  ve de manera diferente que  $x$  a los puntos de  $Y$ , entonces existen dos puntos  $y_i$  e  $y_j$  con  $i < j$  tales que  $x'$  ve primero a  $y_j$  y después a  $y_i$ . Si sucede esto, quiere decir que  $x$  está a un lado de  $y_i y_j$  y  $x'$  está del otro lado. Si esto pasa, entonces la recta  $y_i y_j$  interseca el cierre convexo de  $X$ , contradiciendo la hipótesis de que  $X$  e  $Y$  son mutuamente excluyentes. De forma análoga, se prueba que los puntos de  $X$  se ven de la misma manera desde cualquier punto de  $Y$ .

Supongamos que  $X$  e  $Y$  no son mutuamente excluyentes. Supongamos que  $X$  no excluye a  $Y$ . Entonces, existen dos puntos  $x_i, x_j$  de  $X$  tales que la recta  $x_i x_j$  interseca al cierre convexo de  $Y$ . Así,  $x_i x_j$  deja a algunos puntos de  $Y$  en un semiplano y a los demás en el otro. De esta manera, existen dos puntos  $y_k, y_l$  en  $Y$  tales que la recta  $x_i x_j$  interseca al segmento  $y_k y_l$ . Por lo tanto,  $y_k$  ve a los puntos  $x_i, x_j$  en un orden distinto a como los ve  $y_l$ . Así que  $x$  e  $Y$  no cumplen la condición fuerte de rango.

□

Del teorema anterior y el hecho que la condición fuerte de rango implica a la condición de rango se desprende el siguiente corolario, el cual vamos a utilizar para encontrar familias de cruce.

**Corolario 11.** *Si  $X$  e  $Y$  son dos conjuntos de puntos mutuamente excluyentes, entonces  $X$  e  $Y$  se pueden cruzar.*

### 3.3. Conjuntos mutuamente excluyentes

En esta sección, vamos a usar a los conjuntos mutuamente excluyentes para establecer una cota inferior para el tamaño de la máxima familia de cruce en cualquier conjunto de  $n$  puntos. El siguiente teorema nos asegura que siempre hay una familia de cruce de tamaño  $\Omega(\sqrt{n})$ . Este teorema aparece en [3].

**Teorema 12.** *En todo conjunto de  $n$  puntos en el plano en posición general existe una familia de cruce de tamaño  $\sqrt{n/12}$ .*

*Demostración.* Hacemos una partición del plano en regiones tal que haya una cantidad lineal de puntos en algunas de ellas, a la que llamamos  $H$ -partición. Primero, trazamos una recta horizontal  $\mathcal{L}$  que deja  $n/2$  puntos debajo de ella y  $n/2$  arriba. Después usamos el Teorema 8 y partimos ambos semiplanos con una recta  $\mathcal{M}$  que deje  $n/12$  puntos a la izquierda de ella en cada semiplano determinado por  $\mathcal{L}$ , véase la Figura 3.6. Ahora, trazamos una recta  $\mathcal{N}$ , paralela a  $\mathcal{M}$  y la recorremos hacia la izquierda desde  $+\infty$  hasta que haya a la derecha de la recta, arriba o abajo de  $\mathcal{L}$ ,  $n/12$  puntos. Sin pérdida de generalidad, supongamos que quedan  $n/12$  puntos a la derecha de  $\mathcal{N}$  y abajo de  $\mathcal{L}$  y, por lo tanto, quedan menos de  $n/12$  a la derecha de  $\mathcal{N}$  y arriba de  $\mathcal{L}$ . Observemos que en la región entre  $\mathcal{M}$  y  $\mathcal{N}$  y que está arriba de  $\mathcal{L}$ , a la que llamaremos  $R$ , hay al menos  $n/3$  puntos.

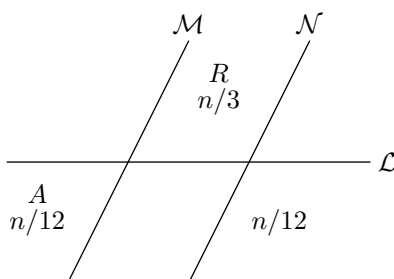


Figura 3.6. La  $H$ -partición, usada en la prueba del Teorema 12.

Ahora, para simplificar, apliquemos una transformación afín al plano, de tal manera que la recta  $\mathcal{L}$  sea perpendicular a  $\mathcal{M}$  y a  $\mathcal{N}$ . Notemos que esta transformación manda convexos en convexos y, por lo tanto, si dos segmentos entre puntos del conjunto original se intersectaban, también lo van a hacer

después de aplicar la transformación, y viceversa. Después, ordenemos los puntos de  $R$  de acuerdo a su coordenada  $x$ . Por el Teorema 5, tenemos que existe una subsucesión  $R'$ , que es creciente o decreciente respecto a la coordenada  $y$  y de tamaño  $\sqrt{n/3}$ . Si la subsucesión es decreciente, entonces excluye a la región a la izquierda de  $\mathcal{M}$  y abajo de  $\mathcal{L}$  y, si es creciente, entonces excluye a la región a la derecha de  $\mathcal{N}$  y abajo de  $\mathcal{L}$ . Supongamos, sin pérdida de generalidad, que se da el primer caso y llamamos  $A$  a la región excluida por  $R'$ .

Sea  $p$  el punto medio de la sucesión  $R'$ , de manera que  $p$  divide a  $R'$  en dos subsucesiones  $R'_1$  y  $R'_2$ , de tamaño  $\sqrt{n/12}$  cada una, véase la Figura 3.7. Así, si a  $p$  lo tomamos como origen, entonces  $R'_1$  está en el segundo cuadrante,  $R'_2$  en el cuarto cuadrante y  $A$  en el tercer cuadrante. Ahora, consideremos los puntos de  $A$  con sus coordenadas polares tomando como origen a  $p$  y ordenémoslas en orden decreciente respecto a su distancia a  $p$ . Por el Teorema 5, existe una subsucesión  $A'$  creciente o decreciente de tamaño  $\sqrt{n/12}$  en  $A$  respecto a su ángulo medido en sentido contrario al de las manecillas del reloj. Supongamos que  $A'$  es creciente. Veamos que  $A'$  excluye a  $R'_1$ . Sea  $i < j$  y  $a_i, a_j \in A'$ , entonces  $a_j$  está abajo de la recta  $xa_i$  y a la derecha de  $a_i$ , por lo que  $a_i a_j$  no intersecta al segundo cuadrante y, por lo tanto,  $A'$  excluye a  $R'_1$ . Análogamente, se prueba que si  $A'$  es decreciente, entonces excluye a  $R'_2$ . Con lo cual tenemos que existen dos conjuntos con  $\sqrt{n/12}$  puntos que son mutuamente excluyentes y por el Corolario 11, estos conjuntos forman una familia de cruce de tamaño  $\sqrt{n/12}$ .

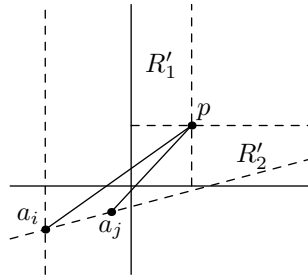


Figura 3.7.  $p$  divide  $R'$  a la mitad y los puntos  $a_i$  y  $a_j$  excluyen a  $R'_1$ .

□

Una pregunta natural sería si es posible encontrar conjuntos mutuamente excluyentes con más elementos en cualquier conjunto. Lamentablemente, asintóticamente no es así, como vamos a demostrar enseguida, basándonos en [33].

Sea  $S$  un conjunto de puntos en el plano. A la razón entre la distancia más larga y la más corta entre dos puntos de  $S$  la denotamos por  $q(S)$ .

Así, por ejemplo, si  $S$  es la cuadrícula de dimensiones  $\sqrt{n} \times \sqrt{n}$ , entonces  $q(S) = \sqrt{2}(\sqrt{n} - 1)$ .

**Teorema 13.** *Sea  $c > 0$  una constante. Entonces, cualquier conjunto  $S$  de  $n$  puntos en el plano que satisfagan  $q(S) < c\sqrt{n}$  no contiene ningún par de conjuntos mutuamente excluyentes con más de  $2(\sqrt{17} + 1)c\sqrt{n}$  puntos cada uno.*

*Demostración.* Sea  $S$  un conjunto de  $n$  puntos en el plano que satisfaga  $q(S) < c\sqrt{n}$ . Supongamos, sin pérdida de generalidad, que la mínima distancia entre dos puntos de  $S$  es 1. Sean  $A$  y  $B$  dos conjuntos de puntos mutuamente excluyentes en  $S$ . Definimos un sistema de ecuaciones cartesianas en el plano de tal manera que los puntos de  $A \cup B$  estén entre las rectas  $k$  con ecuación  $x = -d$  y  $l$  con ecuación  $x = d$ , donde  $d \in (0, 1/2c\sqrt{n})$ . Esto lo hacemos de manera que uno de los dos conjuntos, digamos  $A$ , tenga un punto en  $k$  y un punto en  $l$ . Hacemos que el punto  $b_0$  con mayor ordenada de  $B$  esté sobre el eje  $x$  y que el conjunto  $A$  esté arriba de  $B$ , es decir, que todos los puntos de  $A$  estén arriba de cualquier recta trazada entre dos puntos de  $B$ . Sean  $u$  la recta con ecuación  $y = c\sqrt{n}$  y  $v$  la recta con ecuación  $y = -c\sqrt{n}$ . Como  $b_0$  está en el eje  $x$ , todos los puntos de  $A \cup B$  están entre las rectas  $u$  y  $v$ . Sean  $p, q$  y  $r$  los puntos donde la recta  $u$  intersecciona a la recta  $k$ , al eje  $y$  y a la recta  $l$ , respectivamente.

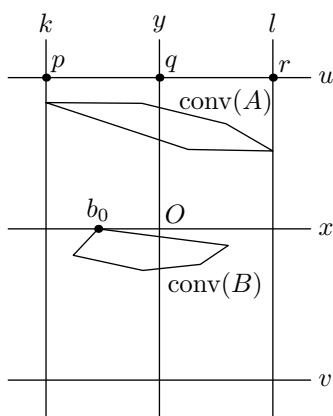


Figura 3.8. Rectas y puntos auxiliares en la prueba del Teorema 13.

Para cada punto  $b \in B$ , definimos  $f(b)$  como el punto de intersección de la recta  $bq$  con el eje  $x$ . Vamos a probar que para cualquier par de puntos  $b, b' \in B$  la distancia entre  $f(b)$  y  $f(b')$  es mayor que  $\frac{d}{(\sqrt{17}+1)c\sqrt{n}}$ .

Si la recta  $bb'$  es horizontal, entonces  $|f(b)f(b')| \geq \frac{1}{2}|bb'| \geq \frac{1}{2} \geq \frac{d}{(\sqrt{17}+1)c\sqrt{n}}$ , pues  $d \leq \frac{1}{2}c\sqrt{n}$ . Si  $bb'$  no es horizontal, entonces, por ser  $A$  y  $B$  mutuamente

excluyentes,  $bb'$  intersecta a  $u$  en un punto  $g$  fuera de  $pr$ . Así,  $|gq| > d$ . Sin pérdida de generalidad, supongamos que  $b$  está más cerca a  $u$  que  $b'$ . Sea  $z$  el punto de  $b'q$  tal que  $bz$  es horizontal. Así, calculamos lo siguiente:

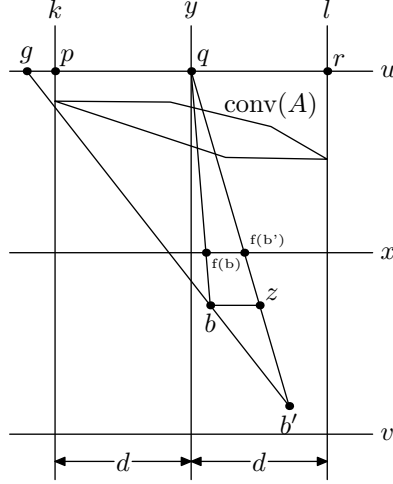


Figura 3.9. Función  $f$  en la demostración del Teorema 13.

$$|bz| = \frac{|bb'|}{|gb'|} \cdot |gq| > |bb'| \cdot \frac{|gq|}{|gq| + |qb'|} > 1 \cdot \frac{|gq|}{|gq| + \sqrt{(2c\sqrt{n})^2 + d^2}} >$$

$$\frac{d}{d + \sqrt{(2c\sqrt{n})^2 + d^2}} \geq \frac{d}{\frac{1}{2}c\sqrt{n} + \sqrt{(2c\sqrt{n})^2 + (\frac{1}{2}c\sqrt{n})^2}} = \frac{d}{(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{17}{4}})c\sqrt{n}}$$

y tenemos que

$$|f(b)f(b')| \geq \frac{1}{2}|bz| > \frac{d}{(\sqrt{17} + 1)c\sqrt{n}}.$$

Como los puntos  $f(b)$  para cada  $b \in B$  están en un segmento de longitud  $2d$ , tenemos que  $B$  no puede tener más de  $\left\lceil 2d / \frac{d}{(\sqrt{17}+1)c\sqrt{n}} \right\rceil = \lceil 2(\sqrt{17} + 1)c\sqrt{n} \rceil$  puntos.  $\square$

Podemos aplicar el teorema anterior a la cuadrícula que describimos antes y obtendremos una cota superior para el máximo tamaño de un par de conjuntos mutuamente excluyentes de  $O(\sqrt{n})$ . Sin embargo, Pavel Valtr sugiere en [33] otro conjunto cuya constante es menor. Consideremos el arreglo triangular  $S$  de  $n$  puntos y adentro de un círculo de tamaño adecuado. De esta manera, como cada punto pertenece a lo más a 6 triángulos de lado 1 y cada triángulo tiene exactamente tres puntos, el arreglo

consta de a lo más  $2n$  triángulos de área  $\sqrt{3}/2$  cada uno. Sea  $r$  el radio del círculo, entonces el círculo de radio  $r - 1$  está contenido en los triángulos del conjunto, por lo que  $\pi(r - 1)^2 \leq \sqrt{3}/2n$ . Por lo tanto,  $r \leq \sqrt{\sqrt{3}/(2\pi)\sqrt{n} + 1}$  y  $q(S) = 2r = \sqrt{2\sqrt{3}/\pi\sqrt{n} + 2}$ . Por el teorema anterior, en  $S$  no existen pares de conjuntos mutuamente excluyentes de tamaño mayor a  $\left\lceil 2(\sqrt{17} + 1)\sqrt{2\sqrt{3}/\pi\sqrt{n}} \right\rceil \approx 10.76\sqrt{n} < 11\sqrt{n}$ .

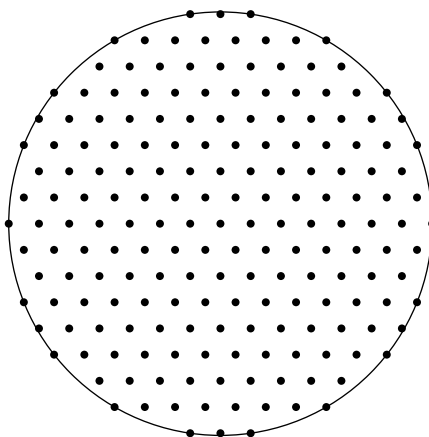


Figura 3.10. Conjunto de puntos que no tiene un par de conjuntos mutuamente excluyentes con más de  $11\sqrt{n}$  puntos.

### 3.4. Cota superior para las familias de cruce

Las mejores cotas superiores encontradas a la fecha para el problema de la máxima familia de cruce son lineales, es decir, sólo se han encontrado conjuntos de puntos en los cuales la mayor cantidad de puntos usados en una familia de cruce es una fracción lineal del total de puntos. A la razón entre la mayor cantidad de puntos usados en una familia de cruce y la cantidad total de puntos la llamaremos *razón de cruce*. La mejor razón de cruce que ha sido encontrada a la fecha es  $1/2$ , la cual se expone en [3].

**Teorema 14.** *Existen conjuntos de puntos arbitrariamente grandes tales que la razón entre la cantidad de puntos usados en una familia de cruce y la cantidad total es  $1/2$ .*

*Demostración.* Vamos a hacer una construcción recursiva. Como ejemplo base, consideramos el conjunto  $S_1$  formado por cuatro puntos que no estén en posición convexa. La máxima familia de cruce en ese conjunto está formada por dos de sus puntos, así que su razón de cruce es  $1/2$ .

Ahora, hacemos el paso recursivo de la siguiente forma. Si tenemos un conjunto  $S_n$  de puntos con la propiedad deseada, entonces a cada punto  $p \in S_n$  lo reemplazamos por dos puntos muy cercanos  $p_1$  y  $p_2$  de forma que su posición sea casi vertical. Esto lo hacemos de tal forma que  $pq$  intersecta a  $rs$  si y sólo si  $p_iq_j$  intersecta a  $r_k s_l$  para cualesquiera  $i, j, k$  y  $l$ . Así, obtenemos un nuevo conjunto de puntos  $S_{n+1}$ , el cual, como probaremos enseguida, tiene la misma razón de cruce que  $S_n$ .

Si tenemos una familia de cruce  $F$  en  $S_n$ , entonces en  $S_{n+1}$ , a cada segmento de  $F$  lo podemos reemplazar por dos segmentos de recta que unen a los puntos correspondientes de  $S_{n+1}$  para formar una familia de cruce. Por lo tanto, la razón de cruce en  $S_{n+1}$  es mayor o igual que la de  $S_n$ .

Consideremos una familia de cruce  $F$  en  $S_{n+1}$ . Sea  $G$  la gráfica cuyo conjunto de vértices es  $S_n$  y dos vértices,  $p$  y  $q$ , son adyacentes si y sólo si  $p_iq_j \in F$  para algunos  $i$  y  $j$ . Entonces,  $G$  tiene grado máximo 2. En cada par  $p_1$  y  $p_2$  de  $S_{n+1}$  que corresponden al mismo punto  $p$  de  $S_n$  tenemos que los segmentos de  $F$  que parten de ellos no pueden ir uno a la izquierda y el otro a la derecha pues en ese caso no se cruzarían. Así, podemos separar los vértices de  $G$  en dos conjuntos en los que no hay aristas entre dos vértices del mismo conjunto, es decir,  $G$  es *bipartita*. Uno de ellos es el formado por los puntos cuyos segmentos de  $F$  van hacia la derecha y el otro, el formado por los puntos cuyos segmentos de  $F$  van hacia la izquierda. Como  $G$  tiene grado máximo 2, tenemos que  $G$  tiene un apareamiento con al menos  $|F|/2$  vértices, pero dicho apareamiento representa una familia de cruce en  $S_n$ , por lo que la razón de cruce de  $S_n$  es mayor o igual a la de  $S_{n+1}$ .  $\square$

A la fecha sigue siendo un problema abierto encontrar mejores cotas para la máxima familia de cruce de conjunto de puntos, en concreto, encontrar o una cota superior sublineal o una cota inferior mayor a  $\sqrt{n}$ . Se conjetura que siempre existe una familia de cruce de cardinalidad lineal para todo conjunto de puntos.





# Capítulo 4

## Cotas básicas

En este capítulo vamos a presentar la obtención de las primeras cotas encontradas para el problema del número de cruces en poligonizaciones de puntos en el plano mediante una aplicación relativamente directa de los resultados vistos en los capítulos anteriores.

### 4.1. Cota superior cuadrática

Primero, veamos una cota superior para el problema, la cual se obtiene directamente de aplicar las definiciones.

**Teorema 15.** *Para cualquier conjunto  $S$  de  $n$  puntos y cualquier poligonización  $P$  de  $S$ , el número de cruces de  $P$  no puede ser mayor a  $n(n-3)/2$ .*

*Demostración.* Sea  $P = p_1, p_2, \dots, p_n, p_1$ , una poligonización de  $S$  y denotemos por  $a_i$  a la arista  $p_i p_{i+1}$  para  $1 \leq i \leq n-1$  y por  $a_0$  a  $p_n p_1$ . Entonces, cada  $a_i$  no puede intersectarse con ella misma ni con  $a_{(i-1) \bmod n}$  ni con  $a_{(i+1) \bmod n}$ , es decir, no puede intersectarse con ella misma ni con sus aristas anterior y posterior. Así que cada arista puede intersectarse con a lo más  $n-3$  aristas. Por lo tanto, a lo más hay  $n(n-3)/2$  cruces.  $\square$

Ahora, veamos que la cota dada anteriormente a veces se alcanza. Esto nos dice que esa cota es la mejor cota superior que podemos dar.

**Teorema 16.** *Sea  $S$  un conjunto de  $n$  puntos en el plano en posición convexa con  $n$  impar. Entonces, existe una poligonización de  $S$  que tiene  $n(n-3)/2$  cruces.*

*Demostración.* Sea  $n = 2k+1$  y sea  $P = p_0, p_1, \dots, p_{n-1}, p_0$ , el polígono convexo determinado por los puntos de  $S$ . De esta manera, afirmamos que la poligonal  $p_0, p_k, p_{2k}, \dots, p_{ik \bmod n}, \dots, p_{k+1}, p_0$  tiene  $n(n-3)/2$  cruces. En efecto,

sabemos por construcción que la arista  $p_{ik} \pmod n p_{(i+1)k} \pmod n$  deja a los puntos  $p_{(i+1)k+1} \pmod n, p_{(i+1)k+2} \pmod n, \dots, p_{((i+1)k-1)} \pmod n$  en un semiplano y a los puntos  $p_{((i+1)k+1)} \pmod n, p_{((i+1)k+2)} \pmod n, \dots, p_{(ik-1)} \pmod n$  en el otro semiplano definido por la arista. Así, si  $j \not\equiv ((i+1)k+1) \pmod n$ , entonces  $(j+1)k \pmod n$  está en el otro semiplano definido por la arista  $p_{ik} \pmod n p_{(i+1)k} \pmod n$ . Por lo tanto, como  $p_{ik} \pmod n, p_{(i+1)k} \pmod n, p_{jk} \pmod n, p_{(j+1)k} \pmod n$  están en posición convexa, entonces las aristas  $p_{ik} \pmod n p_{(i+1)k} \pmod n$  y  $p_{jk} \pmod n, p_{(j+1)k} \pmod n$  forman un cruce. Como esto pasa para todo  $j$  no congruente a  $ik, (i+1)k$  e  $(i+1)k+1$  módulo  $n$ , tenemos que la arista  $p_{ik} \pmod n p_{(i+1)k} \pmod n$  se interseca con otras  $n-3$  aristas. Lo mismo pasa para todas las aristas de la poligonización pues la arista tratada se tomó de forma arbitraria. Por lo tanto, el número de cruces de esta poligonización es  $n(n-3)/2$ .  $\square$

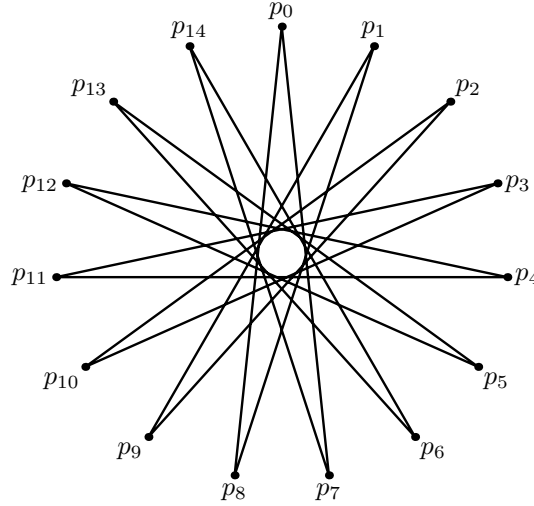


Figura 4.1. Poligonización de la prueba del Teorema 16 para  $n = 15$ .

La poligonización de la prueba del teorema anterior resulta ser también la de mayor longitud para puntos en posición convexa. La prueba de esto se da en [16] y la vamos a exponer enseguida.

Sea  $S$  un conjunto de  $n = 2k + 1$  puntos en posición convexa,  $P = p_0, \dots, p_{2k}$  el polígono convexo formado por el cierre convexo de  $S$ . Vamos a probar que la poligonización de la prueba del Teorema 16, es decir,  $p_0, p_k, p_{2k}, \dots, p_{ik} \pmod n, \dots, p_{k+1}, p_0$ , es la de mayor longitud.

Si los puntos forman un polígono regular como en la Figura 4.1, entonces cada vértice es adyacente a los dos puntos que están más alejados de él y, por lo tanto, la poligonización es la de mayor longitud. Esto no es inmediato cuando los puntos no forman un polígono regular porque puede ser que algún vértice no esté unido con los dos que están más alejados de él.

Para probar que dicha poligonización es la de mayor longitud, vamos a usar permutaciones en  $\{0, 1, \dots, n\}$ , para cualquier  $n$ , no necesariamente impar. Sean  $1 \leq i, j \leq n$ . Representamos como  $N[i, j]$  al conjunto  $\{i, i+1, \dots, j\}$  si  $i \leq j$  y al conjunto  $\{i, i+1, \dots, n-1, 0, 1, \dots, j\}$  si  $i > j$ . Usamos los siguientes convenios de notación:  $N[i, j] = N[i, j] - \{j\}$ ,  $N(i, j) = N[i, j] - \{i\}$  y  $N(i, j) = N[i, j] - \{i, j\}$ . Identificamos al número  $i$  con el punto correspondiente  $p_i$ . Así, decimos que  $i$  y  $j$  son *de cruce* si  $p_i p_{\sigma(i)}$  y  $p_j p_{\sigma(j)}$  se cruzan, es decir, si  $j \in N(i, \sigma(i))$  y  $\sigma(j) \in N(\sigma(i), i)$ . Análogamente, decimos que  $i$  y  $j$  son *separados* si  $p_i p_{\sigma(i)}$  y  $p_j p_{\sigma(j)}$  no se cruzan, es decir, si  $j, \sigma(j) \in N(i, \sigma(i))$ .

De esta manera, a las poligonizaciones de  $S$  les vamos a dar un sentido arbitrario, es decir, vamos a pensarlas como ciclos dirigidos. Así, a una poligonización  $P$  de  $S$  la vamos a pensar como una permutación  $\sigma$ , donde el siguiente punto del  $p_i$  en  $P$  es  $p_{\sigma(i)}$ .

A la distancia entre el punto  $p_i$  y el punto  $p_j$  la representaremos por  $d(i, j)$ . La longitud de una permutación  $\sigma$  será entonces  $S(\sigma) = \sum_{i=0}^{n-1} d(i, \sigma(i))$ . Así, la longitud de la poligonización será igual a la longitud de la permutación que le corresponde. Primero veamos el siguiente lema, que se obtiene directamente de aplicar la desigualdad del triángulo. Notemos que la desigualdad siempre es estricta porque estamos suponiendo que los puntos están posición general.

**Lema 17.** *Si  $p_h, p_i, p_j$  y  $p_k$  son cuatro puntos del polígono convexo que están en ese orden en sentido contrario al de las manecillas del reloj, entonces  $d(h, j) + d(i, k) > d(i, j) + d(k, h)$ .*

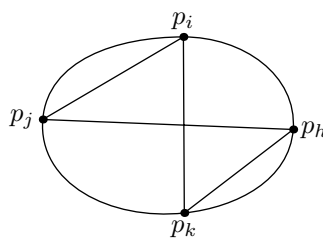


Figura 4.2. Desigualdad del Lema 17.

Ahora, probamos el siguiente lema.

**Lema 18.** *Todas las permutaciones de longitud máxima en un conjunto de puntos en posición convexa no tienen pares separados.*

*Demostración.* Sea  $\sigma$  una permutación más larga en  $S$ . Supongamos que existe un par separado  $i, j$ , en  $\sigma$  y sin pérdida de generalidad supongamos que  $j, \sigma(j) \in N(i, \sigma(i))$ , ver Figura 4.3. Así,  $\sigma(j) \in N[j, \sigma(i)]$  o  $\sigma(j) \in N(i, j)$ .

Supongamos primero que  $\sigma(j) \in N[j, \sigma(i)]$ . Consideramos una permutación  $\sigma'$  tal que  $\sigma'(i) = \sigma(j)$ ,  $\sigma'(j) = \sigma(i)$  y  $\sigma'(k) = \sigma(k)$  para cualquier otro  $k \neq i, j$ . Por el Lema 17,  $S(\sigma') > S(\sigma)$ . En la nueva permutación, los únicos segmentos que se cambian son  $p_i p_{\sigma(i)}$  y  $p_j p_{\sigma(j)}$ . Así, si otro segmento intersecta a alguno de estos segmentos o a los dos en  $\sigma$ , entonces intersecta a uno de los segmentos o a los dos por los que son reemplazados en  $\sigma'$ , como se puede comprobar en los distintos casos, ver Figura 4.3. De esta manera, se observa que no se forman nuevos pares separados al hacer el cambio, pero se elimina el par separado  $i, j$ . Por lo tanto, encontramos una permutación más larga que  $\sigma$  y que tiene al menos un par separado menos, contradicción.

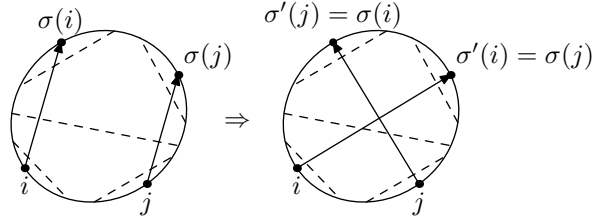


Figura 4.3. Caso  $\sigma(j) \in N[j, \sigma(i)]$ .

Ahora supongamos que  $\sigma(j) \in N(i, j)$ . Consideremos una sucesión de números  $Q = \{\sigma(j) = j_0, j_1, \dots, j_{k-1} = j\}$  tal que  $j_p = \sigma(j_{p-1})$  para  $1 \leq p \leq k-1$ . Supongamos primero que  $i$  no está en  $Q$ . En este caso consideremos una permutación  $\sigma'$  tal que  $\sigma'(i) = j$ ,  $\sigma'(\sigma(j)) = \sigma(i)$ ,  $\sigma'(j_q) = j_{q-1}$  para  $1 \leq q \leq k-1$  y  $\sigma'(q) = \sigma(q)$  para cualquier otro  $q \notin Q \cup \{i\}$ . Por el Lema 17,  $S(\sigma') > S(\sigma)$  y  $\sigma'$  tiene al menos un par separado menos que  $\sigma$  por las mismas razones que en el caso anterior, lo cual es una contradicción.

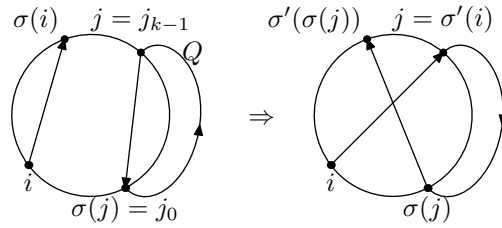


Figura 4.4. Caso  $\sigma(j) \in N(i, j)$  e  $i \notin Q$ .

Entonces supongamos que  $i$  está en  $Q$ . Así,  $Q = \{\sigma(j) = j_0, j_1, \dots, j_{h-1} = i, j_h = \sigma(i), j_{h+1}, \dots, j_{k-1} = j\}$  y definamos a  $Q'$  como la parte de  $Q$  entre  $\sigma(j)$  e  $i$ , es decir,  $\{\sigma(j) = j_0, j_1, \dots, j_{h-1} = i\}$ . Ahora, consideramos una nueva permutación  $\sigma'$  tal que  $\sigma'(j) = i$ ,  $\sigma'(\sigma(j)) = \sigma(i)$ ,  $\sigma'(j_q) = j_{q-1}$  para  $1 \leq q \leq h-1$  y  $\sigma'(q) = \sigma(q)$  para cualquier  $q \notin Q' \cup \{j\}$ . Por el Lema 17,

se cumple que  $S(\sigma') > S(\sigma)$  y  $\sigma'$  tiene menos pares separados que  $\sigma$  al igual que en el primer caso, lo cual es también una contradicción. El caso cuando  $j, \sigma(j) \in N(\sigma(i), i)$  es análogo y no lo discutiremos aquí. Por lo tanto,  $\sigma$  es una permutación sin pares separados.

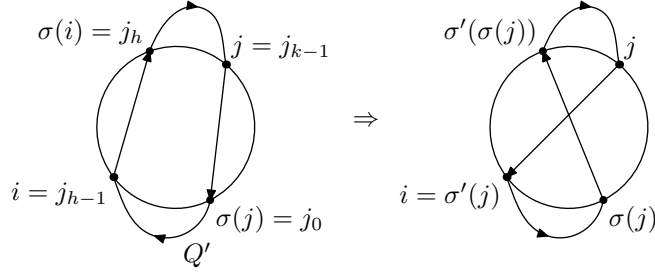


Figura 4.5. Caso  $\sigma(j) \in N(i, j)$  e  $i \in Q$ .

□

También necesitamos el siguiente lema. Definimos como  $\sigma_j$  a la permutación que para cada  $0 \leq i \leq n-1$  cumple que  $\sigma_j(i) = i + j \pmod n$ . Como  $S(\sigma_j) = S(\sigma_{n-j})$ , vamos a considerar siempre que  $0 \leq j \leq \lfloor n/2 \rfloor$ . Notemos que si  $j$  y  $n$  son primos relativos, entonces  $\sigma$  se corresponde con una poligonización. Además, observemos que si  $n$  es impar, entonces  $\sigma_{\lfloor n/2 \rfloor} = \sigma_{\lfloor n/2 \rfloor}^{-1}$  y si es par, entonces  $\sigma_{\lfloor n/2 \rfloor} = \sigma_{\lfloor n/2 \rfloor}$ .

**Lema 19.** *Si una permutación  $\sigma$  no contiene ningún par separado, entonces  $\sigma$  es igual a  $\sigma_{\lfloor n/2 \rfloor}$  o  $\sigma_{\lceil n/2 \rceil}$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $\sigma$  no es  $\sigma_{\lfloor n/2 \rfloor}$  ni  $\sigma_{\lceil n/2 \rceil}$ . Entonces, existe un  $i$  tal que  $0 \leq i \leq n-1$  tal que  $|N(i, \sigma(i))| < \lfloor n/2 \rfloor$  o  $|N(i, \sigma(i))| > \lceil n/2 \rceil$ . Supongamos que  $|N(i, \sigma(i))| < \lfloor n/2 \rfloor$  y, sin pérdida de generalidad, supongamos que es el 0 el que cumple eso, es decir,  $\sigma(0) = k < \lfloor n/2 \rfloor$ . Como  $\sigma$  no tiene un par separado, entonces para todo  $j \in N[k+1, n-1]$  tenemos que  $\sigma(j) \in N[0, k-1]$ . Sin embargo, dado que  $|N[0, k-1]| < \lfloor n/2 \rfloor \leq n - k + 1 = |N[k+1, n-1]|$ , tenemos que dicha situación es imposible pues  $\sigma$  es biyectiva. Con lo cual llegamos a una contradicción. El caso cuando  $k > \lceil n/2 \rceil$  se trata de manera análoga. □

Ahora obtenemos el siguiente teorema.

**Teorema 20.** *Las permutaciones  $\sigma_{\lfloor n/2 \rfloor}$  y  $\sigma_{\lceil n/2 \rceil}$  son las más largas para cualquier polígono convexo.*

*Demostración.* Inmediato de los Lemas 18 y 19. □

Como corolario al teorema anterior tenemos lo que queríamos probar, es decir, que la poligonización de la prueba del Teorema 16 es la más larga cuando tenemos una cantidad impar de puntos en posición convexa.

**Corolario 21.** *Para cualquier polígono convexo,  $\sigma_{\lfloor n/2 \rfloor}$  es el ciclo hamiltoniano más largo si  $n$  es impar.*

Así, vemos que si los puntos están en posición convexa y es una cantidad impar, el ciclo hamiltoniano más largo tiene un número cuadrático de cruces, de hecho, la máxima cantidad de cruces que puede tener un ciclo hamiltoniano en cualquier conjunto de puntos.

## 4.2. Cotas inferiores subcuadráticas

En esta sección vamos a discutir las primeras cotas inferiores para el problema. Empecemos con una de las ideas más intuitivas para establecer cotas inferiores para nuestro problema, la cual comentábamos en la introducción. Dicha idea consiste en considerar una poligonización sin cruces en el conjunto  $S$  y después cruzar los pares de aristas paralelas. Dos aristas  $p_i p_{i+1}$  y  $p_j p_{j+1}$  de una poligonización  $P$  son *paralelas* si  $i + 1 < j$  y  $p_i p_{i+1} p_j p_{j+1}$  es un cuadrilátero convexo. Cruzar este par de aristas paralelas  $p_i p_{i+1}$  y  $p_j p_{j+1}$  quiere decir sustituir la poligonización  $P = p_1, p_2, \dots, p_n, p_1$  por  $P' = p_1, \dots, p_i, p_j, p_{j-1}, \dots, p_{i+1}, p_{j+1}, \dots, p_n, p_1$ , véase la Figura 4.5. Es fácil ver que este procedimiento termina pues, por la desigualdad del triángulo, en cada ocasión se aumenta la longitud de la poligonización y sólo hay una cantidad finita de poligonizaciones. Sin embargo, determinar con cuántos cruces termina el procedimiento puede ser muy difícil y puede depender del polígono inicial y del par de aristas que se escojan en cada momento.

Aquí, vamos a presentar un ejemplo de una poligonización sin cruces sobre un conjunto de puntos especial de forma que no tiene ningún par de aristas paralelas. Esto implica que se tiene que escoger el polígono inicial con cuidado y hacer la elección de las aristas paralelas también con cuidado. El ejemplo se basa en la construcción dada en [8], misma que exponemos enseguida.

El ejemplo responde negativamente a una conjetura presentada en [1] y que dice lo siguiente: Para cada conjunto  $F$  de  $n$  segmentos ajenos en el plano, existe un segmento  $a$  que puede separarse de cerca de  $n/2$  segmentos de  $F$ , donde por separar nos referimos a que se puede trazar una recta que deja en uno de sus semiplanos al segmento  $a$  y en el otro a  $n/2$  segmentos de  $F$ . Entonces, se presenta una familia  $J_m$  de  $3m$  segmentos tal que ninguno de sus elementos puede separarse de más de  $m$  elementos de  $J_m$ .

Usamos una configuración debida a K. P. Villanger, que se expone en [32]. Dicha configuración consiste en construir un conjunto de  $m$  segmentos  $L_1, \dots, L_m$  tal que para cada  $i \geq 3$ ,  $L_i$  intersecta el cierre convexo formado por cualesquiera dos segmentos anteriores, véase Figura 4.6.

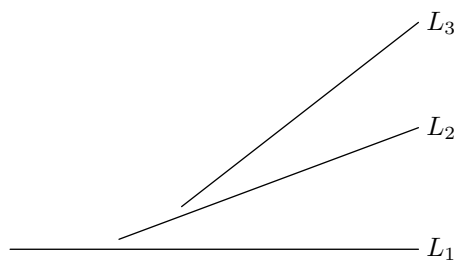


Figura 4.6. Configuración de Villanger.

Podemos hacer esta configuración de modo que si  $P(L_i)$  es la pendiente del segmento  $L_i$  para  $1 \leq i \leq m$ , las pendientes cumplan que  $0 = P(L_1) < P(L_2) < \dots < P(L_m) = \delta < \pi/2$  y que el punto de la izquierda de cada segmento  $L_i$  esté a distancia menor que  $\varepsilon$  del punto de la izquierda de  $L_1$ , véase Figura 4.7.

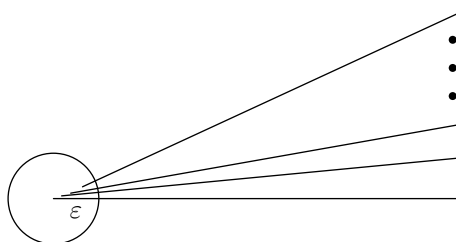
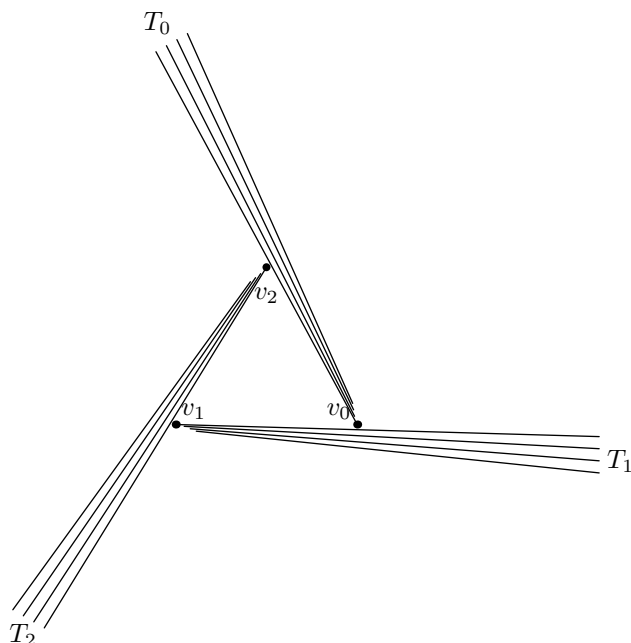


Figura 4.7. Configuración de Villanger con parámetros  $\varepsilon$  y  $\delta$ .

El ejemplo consiste en tomar tres copias del arreglo anterior,  $T_0 = \{L_{1,0}, \dots, L_{m,0}\}$ ,  $T_1 = \{L_{1,1}, \dots, L_{m,1}\}$ ,  $T_2 = \{L_{1,2}, \dots, L_{m,2}\}$ , y ponerlos alrededor de un triángulo con vértices  $v_0, v_1$  y  $v_2$ . Tomamos  $\varepsilon$  y  $\delta$  de forma que la recta que contiene a cualquier segmento de  $T_i$  intersecta a todos los elementos de  $T_{i+1}$ , donde la suma es módulo 3. De esta forma, a cualquier segmento  $L_{h,i}$  de  $T_i$  no lo podemos separar de ninguno de los segmentos de  $T_{i+1}$  y cualquier recta que deja a  $L_{h,i}$  en uno de sus semiplanos va a dejar a lo más a todos los elementos de  $T_{i-1}$  o a todos los demás segmentos de  $T_i$  en el otro semiplano. Por lo tanto, en  $J_m$  no existe un segmento que se pueda separar de más de  $m = n/3$  segmentos.

Para encontrar la poligonización que anunciábamos al principio de la sección y en la introducción, a la construcción de Villanger  $L_1, L_2, \dots, L_n$

Figura 4.8. Configuración  $J_m$ .

le alargamos el segmento  $L_n$  hacia su derecha y agregamos un punto extra  $p$  que esté a la derecha y abajo de todos los demás puntos. Unimos el punto de la derecha de  $L_i$  con el de la izquierda de  $L_{i+1}$ , para  $1 \leq i \leq n$  y al punto extra  $p$  con el punto a la izquierda de  $L_1$  y el punto a la derecha de  $L_n$  (Ver Figura 4.9). Así obtenemos una poligonización de este conjunto de puntos en el que no hay dos aristas paralelas y no tiene ningún cruce. Con esto en mente, conviene buscar otro tipo de ideas para encontrar cotas inferiores para el problema.

El resto de la tesis se tratará de encontrar cotas inferiores para el número de cruces. Para establecer una cota inferior  $f(n)$  para el problema, se dará un procedimiento para trazar una poligonización que se pueda utilizar en cualquier conjunto de  $n$  puntos y se probará que esa poligonización tiene al menos  $f(n)$  cruces.

Para llevar a cabo el esquema de demostración del párrafo anterior con las cotas inferiores que vamos a presentar, vamos a hacer uso del siguiente lema. Dicho lema nos asegura que si podemos trazar varias trayectorias de manera que se crucen mucho, entonces podemos completarlas a una poligonización que tenga al menos ese número de cruces. Para una trayectoria o ciclo  $P$ , vamos a denotar como  $A(P)$  al conjunto de aristas de  $P$ .

**Lema 22.** Sean  $P_1 = \{p_{1,1}, \dots, p_{1,k_1}\}, \dots, P_l = \{p_{l,1}, \dots, p_{l,k_l}\}$  trayectorias en  $S$  que no tienen vértices en común. Supongamos que  $\cup_{i=1}^l A(P_i)$  tiene  $m$



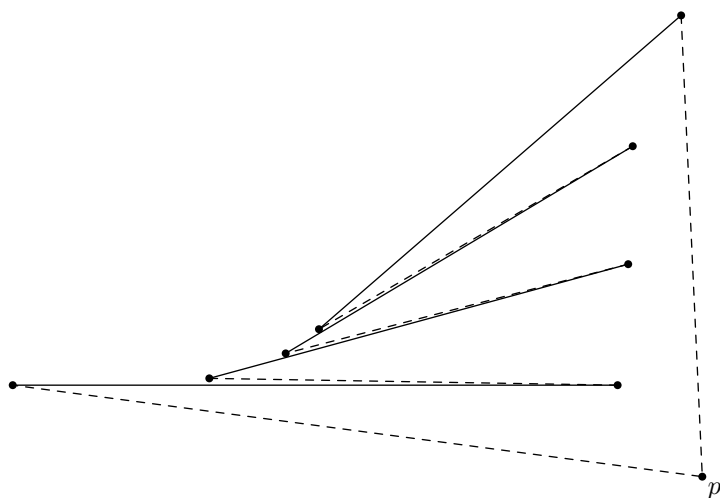


Figura 4.9. Poligonización sin cruces y sin aristas paralelas.

*pares de aristas que se cruzan. Entonces, existe una poligonal  $P$  que contiene a todas estas trayectorias y a los puntos de  $S$  que no están en ninguna de ellas, cuyo número de cruces es mayor o igual a  $m$ .*

*Demostración.* Numeremos los elementos de  $S$  que no están en ninguna trayectoria como  $q_1, \dots, q_{n-k_1-\dots-k_l}$ . Así, la poligonización buscada es  $P = p_{1,1}, \dots, p_{1,k_1}, \dots, p_{l,1}, \dots, p_{l,k_l}, q_1, \dots, q_{n-k_1-\dots-k_l}, p_{1,1}$ . Como  $\cup_{i=1}^l A(P_i) \subseteq A(P)$ , entonces el número de cruces de  $P$  es mayor o igual que  $m$ .  $\square$

Como se dijo en la introducción, cada cuarteta de puntos en posición convexa presenta la oportunidad de formar un cruce. Tomando esto en cuenta y usando el Teorema 1, podemos trazar una poligonización que tenga un número lineal de cruces, como se establece en el siguiente teorema.

**Teorema 23.** *Sea  $S$  un conjunto de  $n$  puntos en el plano. Entonces, existe una poligonización de  $S$  que tiene al menos  $\lfloor n/5 \rfloor$  cruces.*

*Demostración.* Numeramos los puntos de  $S$ , obteniendo las etiquetas  $p_1, \dots, p_n$ . Así, para cada  $0 \leq k < \lfloor n/5 \rfloor$  los puntos  $p_{5k+1}, \dots, p_{5k+5}$  contienen cuatro de ellos que están en posición convexa, por el Teorema 1. Entonces, podemos trazar dos segmentos  $q_k r_k$  y  $s_k t_k$  que se cruzan para cada  $k$ . Si tomamos cada uno de estos segmentos como una trayectoria de longitud uno, tenemos por el Lema 22 que podemos completarlos a una poligonización que tiene al menos  $\lfloor n/5 \rfloor$  cruces.  $\square$

En la demostración del teorema anterior encontramos cuartetos de puntos en posición convexa que no comparten ningún punto entre ellas. Como a lo

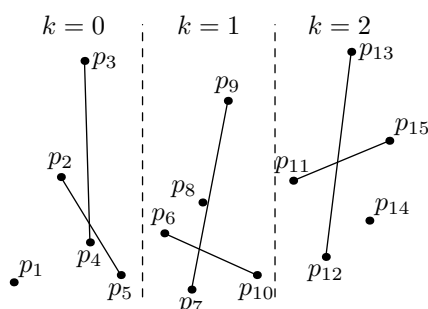


Figura 4.10. Ilustración de la prueba del Teorema 23 antes de aplicar el Lema 22 para  $n = 15$  y numerando los puntos respecto a su coordenada  $x$ .

más puede haber una cantidad lineal de cuartetos de puntos en posición convexa, esta técnica no nos va a proporcionar una cota mayor que lineal.

Un problema interesante relacionado con esto es encontrar la máxima cantidad posible de cuartetos en posición convexa, el cual está relacionado con el problema del número de cruces rectilíneo de  $K_n$ , véanse [20] y [4]. También es un problema interesante encontrar la mayor cantidad posible de cuartetos de puntos en posición convexa que tienen cierres convexos ajenos, véase [17]. Otra variante del problema consiste en pedir que los cuadriláteros además no contengan a otro punto del conjunto en su interior, a los cuales los llamamos *4-hoyos*, véase [27].

Otra forma de encontrar cotas para el problema consiste en encontrar subconjuntos grandes de  $S$  cuyos puntos estén en posición convexa y hacer la poligonización de la prueba del Teorema 16. El Teorema 2 nos proporciona una cota para la cantidad de puntos en posición convexa en cualquier conjunto de puntos. Utilizaremos dicho teorema para encontrar una cota  $\Theta(n \log n)$ .

**Teorema 24.** *En todo conjunto de  $n$  puntos existe una poligonización que tiene  $\Theta(n \log n)$  cruces.*

*Demostración.* Sea  $S$  un conjunto de  $n$  puntos en el plano en posición general. Usando el Teorema 2, podemos encontrar un subconjunto  $S_1$  de  $\Theta(\log n)$  puntos en posición convexa. Por el Teorema 16, en  $S_1$  podemos trazar una poligonización que tiene  $\Theta(\log^2 n)$  cruces. Podemos quitarle una arista a esta poligonización y seguirá teniendo  $\Theta(\log^2 n)$  cruces, ya que una arista tiene solamente  $\Theta(\log n)$  de esos cruces. Al conjunto  $S \setminus S_1$  le aplicamos nuevamente el Teorema 2 y encontramos un conjunto  $S_2$  de tamaño  $\Theta(\log(n - \log n)) = \Theta(\log n)$ , trazamos la poligonal dada por el Teorema 16 y le quitamos una arista. Con esto obtenemos otros  $\Theta(\log^2 n)$  cruces. Hacemos esto hasta que queden  $n/2$  puntos en el conjunto. De esta manera, habremos hecho esto  $\Theta(n/\log n)$  veces y en cada caso habremos encontrado

$\Theta(\log^2 n)$  cruces. Ahora, aplicamos el Lema 22 y habremos encontrado una poligonización que tiene  $\Theta(n \log n)$  cruces.  $\square$

Por el Teorema 4, hay conjuntos en los que hay a lo más  $O(\log n)$  puntos en posición convexa. Para ese tipo de conjuntos no podemos asegurar una cantidad de cruces mayor que  $\Theta(n \log n)$  con este método.

Observemos que para trazar la poligonización  $P$  del Teorema 16, que tenga  $n(n-3)/2$  cruces, no es necesario que los puntos estén en posición convexa, a veces se puede hacer aunque no lo estén. Así, otra opción para atacar el problema consistiría en encontrar la máxima cantidad de puntos en los que se puede trazar la poligonización del Teorema 16 y que tenga  $n(n-3)/2$  cruces.

Observemos que si sólo consideramos las aristas  $a_2, a_4, \dots, a_{n-1}$  de  $P$  en la poligonización del Teorema 16, se tiene que se intersectan dos a dos, formando  $k(k-1)/2$  cruces, donde  $n = 2k + 1$ . Estas aristas se pueden completar, por el Lema 22, a una poligonización con al menos  $k(k-1)/2 = \Theta(n^2)$  cruces. Así, una forma viable de atacar el problema consiste en encontrar la mayor cantidad de segmentos que se intersecten dos a dos, es decir, encontrar una familia de cruce lo más grande posible.

La mejor cota para familias de cruce que se tiene a la fecha es  $\Omega(\sqrt{n})$ , es la dada en [3] y se discutió en el Capítulo 3. Ahora, vamos a dar un procedimiento muy similar al de la demostración del Teorema 24 y, basándonos en lo que podemos decir a la fecha sobre las familias de cruce, encontraremos una cota inferior  $\Theta(n\sqrt{n})$  que podría mejorarse si se mejora la cota para las familias de cruce.

**Teorema 25.** *Todo conjunto de  $n$  puntos tiene una poligonización con  $\Theta(n\sqrt{n})$  cruces.*

*Demostración.* Sea  $S$  un conjunto de  $n$  puntos. Por el Teorema 12, existe una familia de cruce  $F_1$  de tamaño  $\Theta(\sqrt{n})$ . Vamos a considerar a las familias de cruce como el conjunto de segmentos o como el conjunto de vértices de los segmentos, indistintamente. Ahora, en  $S \setminus F_1$ , existe una familia de cruce  $F_2$  de tamaño  $\Theta(\sqrt{n - \sqrt{n}}) = \Theta(\sqrt{n})$ . Repetimos este procedimiento  $k$  veces, donde  $k$  es el menor natural tal que la familia de cruce  $F_k$  que encontramos cumple que  $|S \setminus (\cup_{i=1}^k F_i)| < n/2$ . Como en cada ocasión la familia de cruce  $F_i$  tiene  $\Theta(\sqrt{n})$  puntos, entonces  $k = \Theta(\sqrt{n})$ . Así que el número total de cruces es  $\Theta(n\sqrt{n})$  ya que cada familia de cruce tiene  $\Theta(n)$  cruces. Ahora, sólo aplicamos el Lema 22 a  $\cup_{i=1}^k F_k$  y obtenemos una poligonización de  $S$  que tiene  $\Theta(n\sqrt{n})$  cruces.  $\square$

En el capítulo siguiente tratamos cotas inferiores cuadráticas para el problema del número de cruces de las poligonizaciones sin suponer que existen familias de cruce de tamaño lineal.

# Capítulo 5

## Cotas inferiores cuadráticas

En la demostración del Teorema 25 se usaron familias de cruce, que son apareamientos de puntos en el que sus segmentos se intersectan dos a dos, y para cada familia se obtuvo una cantidad cuadrática de cruces respecto al tamaño de la misma. Como los segmentos son trayectorias de longitud 1, una manera natural de intentar resolver el problema consiste en usar trayectorias ajenas permitiendo que sean de longitud mayor que 1. Veamos algunas definiciones para precisar mejor lo que acabamos de decir.

A una trayectoria de longitud  $k$  la vamos a llamar también un  $k$ -camino, es decir, vamos a tratar los términos *camino* y *trayectoria* como sinónimos. Decimos que dos trayectorias  $P = p_1, \dots, p_k, p_{k+1}$  y  $Q = q_1, \dots, q_l, q_{l+1}$ , de longitudes  $k$  y  $l$ , respectivamente, se *intersectan* si existen dos números  $1 \leq i \leq k$  y  $1 \leq j \leq l$  tales que los segmentos  $p_i p_{i+1}$  y  $q_j q_{j+1}$  se intersectan. Así, si tenemos  $m$  trayectorias que se intersectan dos a dos, entonces tenemos al menos  $m(m-1)/2$  cruces.

Resulta conveniente imponer, para analizar mejor la situación, que todas las trayectorias a considerar sean de la misma longitud. Así, definimos un  $k$ -apareamiento en un conjunto de puntos  $S$  como un conjunto de  $k$ -caminos ajenos dos a dos en  $S$ . Como queremos encontrar  $\Omega(n)$  trayectorias, entonces debemos tomar a  $k$  como constante.

De estas consideraciones se desprende una variante del problema de las familias de cruce, que consiste que en vez de encontrar un conjunto de segmentos que se intersecten dos a dos vamos a encontrar un conjunto de  $k$ -caminos ajenos que se intersecten dos a dos, al cual vamos a llamar  $k$ -familia de cruce. En este capítulo vamos a probar que para todo conjunto de puntos siempre existe una 3-familia de cruce de tamaño  $n/4$ . El problema de encontrar una 2-familia de cruce de tamaño lineal sigue abierto; sin embargo, en la siguiente sección demostramos que siempre existe un 2-apareamiento que tiene un número cuadrático de cruces.

## 5.1. Cota usando 2-apareamientos

En esta sección vamos a establecer la primera cota inferior cuadrática para nuestro problema, usando 2-apareamientos. Además, vamos a ver aquí que si tenemos una 2-familia de cruce de tamaño lineal, eso no necesariamente implica que tengamos una 1-familia de cruce de tamaño lineal.

Para establecer la cota vamos a usar el siguiente lema.

**Lema 26.** *Sea  $c$  una curva en el plano tal que lo divide en dos partes. Entonces, si tenemos cuatro puntos  $p$ ,  $q$ ,  $r$  y  $s$  en ese orden sobre  $c$ , al unir  $p$  con  $r$  y  $q$  con  $s$  por medio de curvas que están completamente contenidas en la misma región determinada por  $c$ , estas curvas se intersectan.*

Esta afirmación es consecuencia directa del Teorema de la curva de Jordan. Para un tratamiento más detallado sobre este teorema y otros resultados de topología útiles en teoría de gráficas se puede consultar [23].

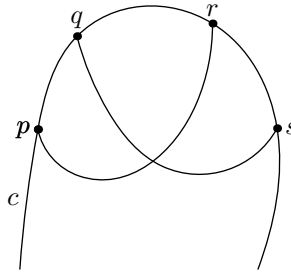


Figura 5.1. Las curvas que unen a  $p$  con  $r$  y a  $q$  con  $s$  se cruzan si ambas están del mismo lado de  $c$ .

**Teorema 27.** *Sea  $S$  un conjunto de  $n$  puntos en el plano. Entonces,  $S$  contiene dos familias de  $n/12$  2-caminos,  $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{Q}$ , tales que si  $P \in \mathcal{P}$  y  $Q \in \mathcal{Q}$ , entonces  $P$  y  $Q$  se intersectan.*

*Demostración.* Vamos a dividir el plano en varias regiones de forma que los 2-caminos de  $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{Q}$  se construirán uniendo puntos de algunas de estas regiones.

Primero, hacemos la  $H$ -partición, que ya se utilizó en la prueba del Teorema 12 pero que volvemos a explicar enseguida. Tracemos una recta  $\mathcal{L}$  horizontal que divida exactamente a la mitad a los puntos de  $S$ . Después, usamos el Teorema 8 y encontramos una recta  $\mathcal{M}$  que deja  $n/12$  puntos a la izquierda de ella en cada semiplano determinado por  $\mathcal{L}$ . Por último, trazamos una recta  $\mathcal{N}$  paralela a  $\mathcal{M}$  y le recorreremos desde  $x = +\infty$  hacia la izquierda hasta que en una de las regiones a la derecha de  $\mathcal{N}$  haya exactamente  $n/12$  puntos y,

por tanto, en la otra haya a lo más  $n/12$ . Sin pérdida de generalidad, suponemos que es en la región de abajo y la llamaremos  $\mathcal{B}$ . A la región de abajo de  $\mathcal{L}$  a la izquierda de  $\mathcal{M}$  la llamaremos  $\mathcal{A}$ , véase la Figura 5.2.

Así, tenemos que en la región  $\mathcal{R}$ , que es la delimitada por  $\mathcal{M}$  y  $\mathcal{N}$  y que está arriba de  $\mathcal{L}$ , hay al menos  $n/3$  puntos de  $S$ . Ahora, tracemos una recta horizontal que divida exactamente a la mitad los puntos de  $\mathcal{R}$  y llamemos  $t$  y  $w$  a sus puntos de intersección con  $\mathcal{M}$  y  $\mathcal{N}$ , respectivamente. Usamos nuevamente el Teorema 8 para trazar una recta  $\mathcal{M}'$  que junto con  $tw$  divida a la región  $\mathcal{R}$  en cuatro regiones con la misma cantidad de puntos. Así, cada una de esas cuatro regiones tiene al menos  $n/12$  puntos. Llamamos  $z$  al punto de intersección de  $\mathcal{M}'$  y  $tw$ .

Una vez hecha la partición, para obtener cada 2-camino de  $\mathcal{P}$  unimos a un punto  $c$  de la región arriba de  $tz$  con un punto  $d$  de la región de abajo de  $tz$ , ambos a la izquierda de  $\mathcal{M}'$  y dentro de  $\mathcal{R}$ . A  $d$  lo unimos, a su vez, con un punto  $b \in \mathcal{B}$ , ver Figura 5.2. De esta forma, cada 2-camino de  $\mathcal{P}$  interseca a  $tz$  en un punto  $p_1$  y a  $\mathcal{N}$  en un punto  $p_2$ . Análogamente, para construir cada 2-camino de  $\mathcal{Q}$ , unimos un punto  $e$  de la región arriba de  $zw$  con un punto  $f$  de la región abajo de  $zw$ , ambos a la derecha de  $\mathcal{M}'$  y dentro de  $\mathcal{R}$ . A  $f$  lo unimos, a su vez, con un punto  $a \in \mathcal{A}$ . Entonces, cada 2-camino de  $\mathcal{Q}$  interseca a  $zw$  en un punto  $q_1$  y a  $\mathcal{M}$  en un punto  $q_2$ .

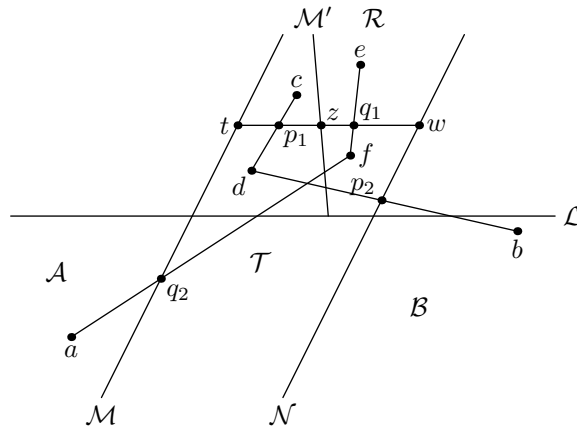


Figura 5.2. Un 2-camino de  $\mathcal{P}$  y uno de  $\mathcal{Q}$  se cruzan.

Notemos que por el paralelismo entre  $tw$  y  $\mathcal{L}$  el punto  $p_2$  de cada 2-camino de  $\mathcal{P}$  está abajo de  $w$  y el punto  $q_2$  de cada 2-camino de  $\mathcal{Q}$  está abajo de  $t$ . Además, por el paralelismo entre  $\mathcal{M}$  y  $\mathcal{N}$  tenemos que cada 2-camino de  $\mathcal{P}$  está a la derecha de  $\mathcal{M}$  y cada 2-camino de  $\mathcal{Q}$  está a la izquierda de  $\mathcal{N}$ . Por lo tanto, la porción entre  $p_1$  y  $p_2$  de cada 2-camino de  $\mathcal{P}$  y la porción entre  $q_1$  y  $q_2$  de cada 2-camino de  $\mathcal{Q}$  están en la región  $\mathcal{T}$ , que es la que está entre

$\mathcal{M}$  y  $\mathcal{N}$  y abajo de  $tw$ . Así, si consideramos a la frontera de  $\mathcal{T}$ , el Lema 26 establece que la porción de  $P$  entre  $p_1$  y  $p_2$  se intersecta con la porción de  $Q$  entre  $q_1$  y  $q_2$ . □

Ahora, aplicamos el teorema anterior para establecer la primera cota cuadrática encontrada para el número de cruces de las poligonizaciones. Esto es lo que establece el siguiente corolario.

**Corolario 28.** *Sea  $S$  un conjunto de  $n$  puntos en el plano. Entonces,  $S$  tiene una poligonización cuyo número de cruces tiende a  $n^2/108$  conforme  $n$  tiende a infinito.*

*Demostración.* Notemos que para hacer el 2-apareamiento del teorema anterior, utilizamos la mitad de los puntos de  $S$ . Así, podemos repetir el procedimiento con el conjunto de puntos restantes hasta terminar con todos los puntos. De la primera iteración obtenemos  $(n/12)^2$  cruces, de la segunda,  $((n/2)/12)^2$ , y así sucesivamente. Con lo cual, obtenemos un 2-apareamiento con la siguiente cantidad de cruces:

$$\sum_{i=0}^{\log n} \left( \frac{n}{2^i \cdot 12} \right)^2 = \sum_{i=0}^{\log n} \frac{1}{4^i} \left( \frac{n}{12} \right)^2 = \left( \frac{n}{12} \right)^2 \sum_{i=0}^{\log n} \left( \frac{1}{4} \right)^i.$$

Así, tenemos que cuando  $n$  se hace grande, el número de cruces del apareamiento tiende a lo siguiente:

$$\left( \frac{n}{12} \right)^2 \sum_{i=0}^{\infty} \left( \frac{1}{4} \right)^i = \left( \frac{n}{12} \right)^2 \cdot \frac{4}{3} = \frac{n^2}{108}.$$

Ahora, aplicamos el Lema 22 al 2-apareamiento, para obtener una poligonización en  $S$  que tiende a tener  $n^2/108$  cruces. □

Notemos que en la demostración del Teorema 27, la  $H$ -partición se puede hacer en tiempo lineal. En efecto, encontrar  $\mathcal{L}$  toma tiempo lineal, encontrar  $\mathcal{M}$  también toma tiempo lineal por el resultado de [22], que se comentó en la Sección 2.3, y encontrar la recta  $\mathcal{N}$  también toma tiempo lineal proyectando los puntos a  $\mathcal{L}$  y encontrando el  $n/12$ -ésimo punto más a la derecha, véase [7]. De la misma forma, encontrar la partición dentro de  $\mathcal{R}$  también toma tiempo lineal por el resultado de [22]. Determinar en qué región está un punto toma tiempo constante. Así, hacer el apareamiento toma tiempo lineal.

Hacer cada iteración en el Corolario 28 toma tiempo lineal respecto a la cantidad de puntos que quedan, el cual se va reduciendo a la mitad cada vez. Por último, aplicar el Lema 22 también toma tiempo lineal. Por lo



tanto, encontrar una poligonización cuyo número de cruces tiende a  $n^2/108$  toma tiempo lineal. Este tiempo es mejor que el necesario para construir una poligonización sin cruces, como comentábamos en la introducción.

Ahora, veremos que una 2-familia de cruce de tamaño lineal no implica necesariamente que existe una 1-familia de cruce de tamaño lineal. Aquí vamos a proporcionar un ejemplo de una 2-familia de cruce lineal que sólo tiene 1-familias de cruce de tamaño  $\sqrt{n}$  y posteriormente, vamos a presentar un ejemplo donde esas 1-familias de cruce son incluso de tamaño 2.

Para el primer ejemplo vamos a usar el siguiente lema, el cual también es consecuencia directa del Teorema de la Curva de Jordan. El lema se va a utilizar también en la siguiente sección para dar mejores cotas para el número de cruces de las poligonizaciones.

**Lema 29.** *Sean  $\mathcal{M}$  y  $\mathcal{N}$  dos rectas paralelas en el plano,  $p$  y  $q$  dos puntos en  $\mathcal{M}$  y  $r$  y  $s$  dos puntos en  $\mathcal{N}$ , donde los rayos  $pq$  y  $rs$  apuntan en la misma dirección. Entonces, si se unen los puntos  $p$  con  $s$  y  $q$  con  $r$  por medio de curvas completamente contenidas entre  $\mathcal{M}$  y  $\mathcal{N}$ , dichas curvas se intersectan.*

Supongamos que tenemos dos rectas paralelas y tenemos  $n$  puntos numerados en ellas, en la primera recta como  $1, \dots, n$  y en la segunda como una permutación  $\sigma$ . Así, por el Lema 29, por cada transposición que tengamos en  $\sigma$ , vamos a tener un cruce entre el par de curvas que unen a los puntos de la transposición.

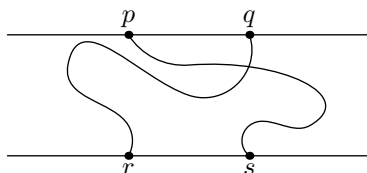


Figura 5.3. Una transposición siempre genera un cruce cuando los puntos se unen con líneas continuas.

Consideremos tres rectas paralelas horizontales  $u$ ,  $v$  y  $w$ , con  $a^2$  puntos cada una y numeremos los puntos de 1 a  $a^2$  en cada una de ellas de forma que vamos a unir con segmentos de recta a los puntos etiquetados con el mismo número. Numeramos los puntos de izquierda a derecha en cada recta como sigue: en la recta  $u$  numeramos los puntos como  $1, 2, \dots, a^2$ , en la recta  $v$  como  $a, a-1, \dots, 1, 2a, 2a-1, \dots, a+1, \dots, a^2, a^2-1, \dots, a(a-1)+1$ , y en la recta  $w$  como  $a^2, a^2-1, \dots, 1$ . De esta manera, por el Lema 5.3, los 2-caminos se van a cruzar dos a dos pues en  $w$  los números están en el orden inverso a como están en  $u$ . Sin embargo, entre  $u$  y  $v$ , como en la permutación que está representada en  $v$ , la mayor subsucesión decreciente tiene sólo  $a$

elementos, entonces la máxima 1-familia de cruce tiene tamaño  $a$ . Así mismo, como la mayor subsucesión creciente de la permutación representada en  $v$  tiene  $a$  elementos, entonces la mayor 1-familia de cruce entre  $v$  y  $w$  es de tamaño  $a$ . Por lo tanto, estos 2-caminos forman una 2-familia de cruce de tamaño  $a^2$  pero no hay entre sus segmentos una 1-familia de cruce de tamaño mayor a  $a$ .

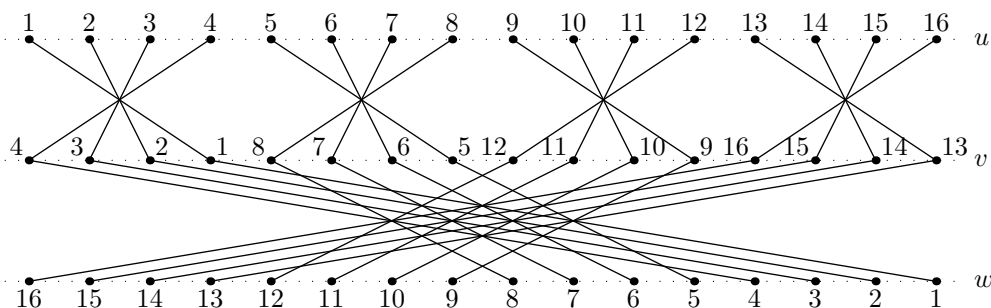


Figura 5.4. Ejemplo de una 2-familia de cruce de tamaño  $n = 16$  que sólo contiene 1-familias de cruce de tamaño  $\sqrt{n}$ .

Ahora vamos a ver que incluso puede pasar que una 2-familia de cruce de tamaño lineal contenga 1-familias de cruce de tamaño a lo más 2. Para esto, vamos a suponer que tenemos dos segmentos ajenos,  $u$  y  $w$ , que pertenecen a la misma recta y otro segmento  $v$  que pertenece a otra recta paralela a la primera. En cada uno de estos segmentos vamos a numerar los puntos del 1 al  $n$  en el mismo orden y hacia la misma dirección. Unimos con segmentos de recta los puntos que tienen el mismo número entre  $u$  y  $v$  y luego, entre  $v$  y  $w$ . Así cada 2-camino va a unir un punto de  $u$  con uno de  $v$  y luego a ese mismo punto de  $v$  con uno de  $w$ , a su segmento de  $u$  a  $v$  lo llamaremos primer segmento y al de  $v$  con  $w$  su segundo segmento. Así, el 2-camino que une los puntos numerados con  $i$  va a intersectar con su primer segmento a los 2-caminos que unen los puntos con número menor que  $i$  y va a intersectar con su segundo segmento a los 2-caminos que unen los puntos con número mayor que  $i$ .

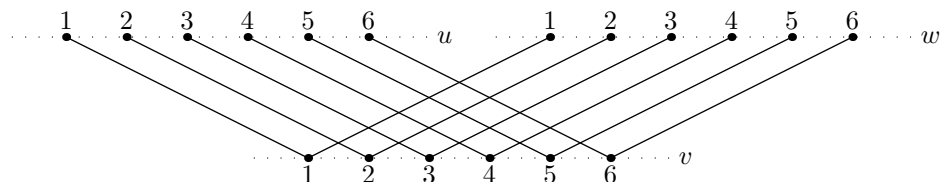


Figura 5.5. Ejemplo de una 2-familia de cruce de tamaño  $n = 9$  que sólo contiene 1-familias de cruce de tamaño 2.

Como dos segmentos que unen a un punto de  $u$  con uno de  $v$  no se pueden intersectar entre ellos y lo mismo pasa con dos segmentos que unen a un punto  $v$  con uno de  $w$ , entonces la máxima 1-familia de cruce que podemos tener es de dos, es decir, de un segmento que una a un punto de  $u$  con uno de  $v$  y uno que una a un punto de  $v$  con uno de  $w$ .

## 5.2. Cota usando 3-apareamientos

En esta sección vamos a mejorar la cota cuadrática encontrada en la sección anterior, pero ahora usando 3-apareamientos. Lo primero que demostraremos será que en todo conjunto de puntos siempre existe una 3-familia de cruce de tamaño lineal.

**Teorema 30.** *Sea  $S$  un conjunto de  $n$  puntos en el plano. Entonces, en  $S$  existe una 3-familia de cruce de tamaño  $n/4$ .*

*Demostración.* Sean  $\mathcal{L}$  y  $\mathcal{M}$  dos rectas verticales tales que  $\mathcal{L}$  deja exactamente  $n/4$  puntos a su izquierda y  $\mathcal{M}$  deja exactamente  $n/4$  puntos a su derecha. Ahora, hacemos un 1-apareamiento  $\mathcal{P}$  entre los puntos a la izquierda de  $\mathcal{L}$  y  $n/4$  puntos de los que están entre las rectas  $\mathcal{L}$  y  $\mathcal{M}$  y otro 1-apareamiento  $\mathcal{Q}$  entre los puntos a la derecha de  $\mathcal{M}$  y los  $n/4$  puntos restantes que están entre  $\mathcal{L}$  y  $\mathcal{M}$ .

Después, numeramos los segmentos de  $\mathcal{P}$  como  $P_1, \dots, P_{n/4}$ , con respecto a su intersección con  $\mathcal{L}$  de arriba hacia abajo. De forma similar, numeramos los segmentos de  $\mathcal{Q}$  como  $Q_1, \dots, Q_{n/4}$ , respecto a su intersección con  $\mathcal{M}$ , pero de abajo hacia arriba. Finalmente, para cada  $i$ , unimos los extremos de los segmentos  $P_i$  y  $Q_i$  que están entre  $\mathcal{L}$  y  $\mathcal{M}$  mediante un segmento de recta, formando un 3-camino  $T_i$ , véase la Figura 5.6.

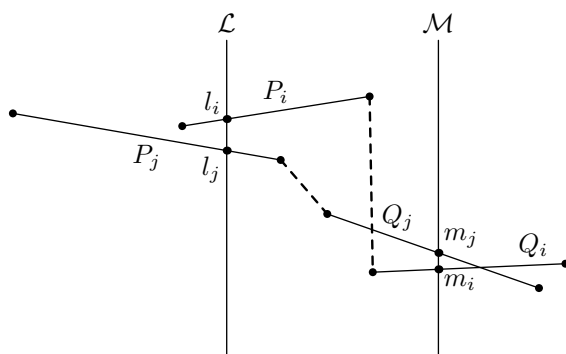


Figura 5.6. Forma de unir los segmentos de los apareamientos  $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{Q}$ .

Sean, para cada  $i$ ,  $l_i$  el punto de intersección de  $T_i$  con  $\mathcal{L}$  y  $m_i$  el punto de intersección de  $T_i$  con  $\mathcal{M}$ , de forma que la porción de  $T_i$  entre  $l_i$  y  $m_i$  está contenida en la región entre  $\mathcal{L}$  y  $\mathcal{M}$ . Así, si  $i < j$ ,  $l_i$  está arriba de  $l_j$  en  $\mathcal{L}$  y  $m_i$  está abajo de  $m_j$  en  $\mathcal{M}$ . Entonces, por el Lema 29, la porción de  $T_i$  entre  $l_i$  y  $m_i$  interseca a la porción de  $T_j$  entre  $l_j$  y  $m_j$ . De esta forma, tenemos que cualesquiera dos 3-caminos  $T_i$  y  $T_j$  se cruzan.  $\square$

De aquí, se desprende como corolario una cota cuadrática para el número de cruces de las poligonizaciones que es mejor que la obtenida con el 2-apareamiento.

**Corolario 31.** *Sea  $S$  un conjunto de  $n$  puntos en el plano. Entonces, existe una poligonización en  $S$  que tiene  $n^2/32 - n/8$  cruces.*

*Demostración.* Por el teorema anterior tenemos que existen  $n/4$  3-caminos que se intersectan dos a dos. Aplicamos el Lema 22 para obtener una poligonización que tiene al menos la misma cantidad de cruces que el 3-apareamiento, es decir,  $(n/4)(n/4 - 1)/2 = n^2/32 - n/8$  cruces.  $\square$

En el siguiente teorema, establecemos la mejor cota para el problema del número de cruces encontrada en el periodo de realización de este trabajo de tesis. La prueba usa la misma idea que la del Teorema 30 pero se hace énfasis en el hecho de que lo que se busca es una poligonización y no solamente un apareamiento.

**Teorema 32.** *Sea  $S$  un conjunto de  $n$  puntos en el plano. Entonces, en  $S$  se puede trazar una poligonización que tiene  $n^2/18 - n/3$  cruces.*

*Demostración.* Trazamos dos rectas verticales, la  $\mathcal{L}$  que deja exactamente a  $n/6$  puntos a su izquierda y la  $\mathcal{M}$  que deja exactamente a  $n/6$  puntos a su derecha, dejando entre ellas una región con  $2n/3$  puntos de  $S$ . Ahora, a cada punto a la izquierda de  $\mathcal{L}$  lo unimos a dos puntos de los que están entre  $\mathcal{L}$  y  $\mathcal{M}$  mediante segmentos de recta. Análogamente, a cada punto a la derecha de  $\mathcal{M}$  lo unimos a dos puntos de los restantes entre  $\mathcal{L}$  y  $\mathcal{M}$  mediante segmentos de recta.

Ahora, ordenamos los segmentos que intersectan a la recta  $\mathcal{L}$  de arriba hacia abajo respecto a su intersección con  $\mathcal{L}$  y los etiquetamos como  $L_1, \dots, L_{n/3}$ . De forma análoga, ordenamos los segmentos que intersectan a  $\mathcal{M}$  de abajo hacia arriba respecto a su intersección con  $\mathcal{M}$  y los etiquetamos como  $M_1, \dots, M_{n/3}$ . Etiquetamos a los puntos entre  $\mathcal{L}$  y  $\mathcal{M}$  como  $l_i$  si el punto está en  $L_i$  y como  $m_i$  si está en  $M_i$ . Para cada  $i$ , unimos por un segmento

de recta a  $l_i$  con  $m_i$  y al 3-camino formado por los segmentos  $L_i$ ,  $l_i m_i$  y  $M_i$  lo llamamos  $T_i$ . Así, por el Lema 29, tenemos que para cada par  $i, j$ , los caminos  $T_i$  y  $T_j$  se intersectan entre  $\mathcal{L}$  y  $\mathcal{M}$ .

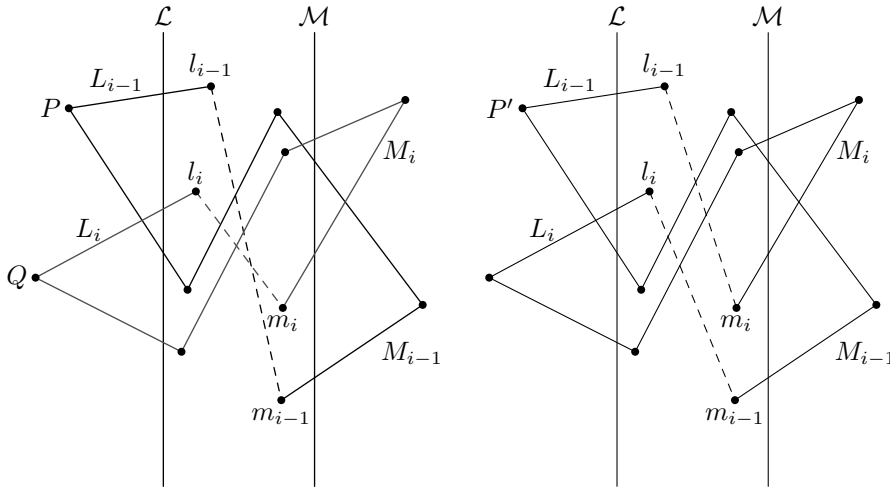


Figura 5.7. Forma de combinar ciclos para formar la poligonización.

Como a cada vértice de  $S$  llegan exactamente dos segmentos, tenemos un conjunto de ciclos en  $S$ . Si tenemos un sólo ciclo, ya tenemos la poligonización. Si no, sean  $P = p_1, p_2 = l_{i-1}, p_3 = m_{i-1}, \dots, p_h, p_1$ , el ciclo que contiene al segmento  $L_1$  y  $Q = q_1, q_2 = l_i, q_3 = m_i, \dots, q_k, q_1$ , el ciclo que contiene al segmento  $L_i$  donde  $i$  es el menor tal que  $L_i$  no está contenido en  $P$ . De esta forma, tenemos que el segmento  $L_{i-1}$  está en  $P$  pero  $L_i$  no lo está y no hay ningún segmento que interseccione a  $\mathcal{L}$  entre sus puntos de intersección con  $L_i$  y  $L_{i-1}$ . Esto es análogo a lo que pasa en  $\mathcal{M}$ . Ahora, cambiamos los segmentos  $l_i m_i$  y  $l_j m_j$  por  $l_i m_j$  y  $l_j m_i$ , véase la Figura 5.7. Así, obtenemos el nuevo ciclo  $P' = p_1, l_{i-1}, m_i, q_4, \dots, q_k, q_1, l_i, m_{i-1}, p_4, \dots, p_h, p_1$ , el cual contiene a todos los puntos que están en  $P \cup Q$ . Ahora llamamos,  $T_{i-1}$  al 3-camino formado por los segmentos  $L_{i-1}, l_{i-1} m_i, M_i$  y  $T_i$  al formado por los segmentos  $L_i, l_i m_{i-1}, M_{i-1}$ . Sea  $j \neq i-1, i$ . Entonces, como no hay segmentos que intersecten a  $\mathcal{L}$  entre  $L_{i-1}$  y  $L_i$  y a  $\mathcal{M}$  entre  $M_{i-1}$  y  $M_i$ , por el Lema 29 tenemos que  $T_{i-1}$  y  $T_i$  seguirán intersectando a  $T_j$ .  $T_{i-1}$  y  $T_i$  podrían ahora no cruzarse, sin embargo, sólo sería este cruce el que pudimos perder.

Repetimos el procedimiento anterior hasta tener una poligonización que contenga a todos los puntos de  $S$ . De esta manera eliminamos a lo más  $n/6$  cruces, ya que al principio teníamos a lo más a  $n/6$  ciclos, uno por cada vértice a la izquierda de  $\mathcal{L}$ . Por lo tanto, la cantidad de cruces de esta poligonización

es al menos

$$\frac{\frac{n}{3}(\frac{n}{3} - 1)}{2} - \frac{n}{6} = \frac{\frac{n^2}{9} - \frac{n}{3}}{2} - \frac{n}{6} = \frac{n^2}{18} - \frac{n}{3}.$$

□

Así como están establecidos, este procedimiento y el del Corolario 5.2 se pueden realizar en tiempo  $O(n \log n)$ , debido a la ordenación de los segmentos, ya que el resto de ambos procedimientos se pueden realizar en tiempo lineal. No sabemos si se pueden realizar más rápido de alguna otra forma, sin embargo, como comentábamos en la sección anterior, sí podemos encontrar una poligonización con un número cuadrático de cruces en tiempo lineal aunque sólo se puede garantizar una cantidad menor de cruces.

Esta es la mejor cota encontrada durante el desarrollo de este trabajo de tesis. Sigue abierto el problema de encontrar la cota inferior óptima, es decir, encontrar una cota tal que cualquier conjunto de puntos tenga una poligonización con esa cantidad de cruces pero pueda demostrarse la existencia de conjuntos de puntos donde no se puede trazar una poligonización que tenga más de esa cantidad de cruces.

# Capítulo 6

## Conclusiones

En este trabajo de tesis se discutieron cotas tanto superiores como inferiores para el número de cruces de poligonizaciones de puntos en el plano. Se encontró que tanto la cota superior como la inferior son cuadráticas. La cota superior a veces se alcanza, con lo que es la mejor cota superior que se puede dar, mientras que la cota inferior dada podría no ser la mejor. Es uno de los problemas abiertos para futuro trabajo ya sea el mejorar la cota inferior de  $n^2/18$  encontrando formas de hacer poligonizaciones con más cruces o encontrando conjuntos de puntos en los que no se pueden hacer poligonizaciones que tengan más cruces que un número prefijado, por ejemplo  $n/4$ .

Se encontró que construir una poligonización con un número cuadrático de cruces, en concreto  $n^2/108$ , se puede hacer en tiempo lineal, lo cual es incluso más rápido que encontrar una poligonización sin cruces. Sin embargo, las poligonizaciones que dan las otras cotas de momento toman tiempo  $O(n \log n)$  y sería un problema interesante determinar si es posible construir las en tiempo lineal o en qué casos se puede hacer eso.

Otra futura línea de investigación es encontrar el número de cruces del ciclo hamiltoniano más largo. Conjeturamos que es cuadrático, pero podría encontrarse una familia de conjuntos de puntos en los que no pasa esto.

Otro problema interesante a tratar es el de mejorar las cotas para las familias de cruce, que sigue abierto y se conjetura que siempre hay una familia de cruce de tamaño lineal en cualquier conjunto de puntos. Aquí se resolvió el problema de encontrar una 3-familia de cruce de tamaño lineal que, de hecho, es la mejor cota que se puede dar para las 3-familias de cruce, es decir,  $n/4$ . El problema de encontrar una 2-familia de cruce de tamaño mayor a  $\sqrt{n}$  en cualquier conjunto de puntos sigue abierto y puede ser un problema de investigación futura. Sin embargo, puede que la solución de dicho problema no proporcione idea alguna sobre el problema de la 1-familia de cruce, tal como la solución del problema de la 3-familia de cruce no parece sugerir

nada para el problema de la 2-familia de cruce y por los ejemplos dados en la Sección 5.1.

Otra línea de investigación que tal vez no está tan ligada con nuestro problema es la de entender mejor la función que mapea permutaciones en conjuntos de puntos en el plano con coordenadas enteras que se explicó en la Sección 2.2. En concreto, es un buen problema caracterizar los conjuntos de puntos de coordenadas enteras que provienen de alguna permutación. Después de eso se podría estudiar qué conjuntos de puntos provienen de más permutaciones y cómo se comportan las permutaciones cuando se hace algún cambio en el conjunto de puntos.



# Bibliografía

- [1] N. Alon, M. Katchalski, W. R. Pulleyblank. *Cutting disjoint disks by straight lines*. Discrete Comput. Geom. 4, (1989).
- [2] N. Alon, S. Rajagopalan, S. Suri. *Long non-crossing configurations in the plane*. Fundamenta Informaticae 22, (1995).
- [3] B. Aronov, P. Erdős, W. Goddard, D. J. Kleitman, M. Klugerman, J. Pach, L. J. Schulman. *Crossing Families* Combinatorica 14, (1994).
- [4] J. Balogh, G. Salazar. *On  $k$ -sets, convex quadrilaterals, and the rectilinear crossing number of  $K_n$* . Discrete and Computational Geometry 35, (2006).
- [5] S. Bereg. *Computing generalized ham-sandwich cuts*. Information Processing Letters, (2012).
- [6] J. A. Bondy, U. S. R. Murty. *Graph Theory*. Graduate Texts in Mathematics, Springer, (2008).
- [7] T. H. Cormen, C. E. Leiserson, R. L. Rivest, C. Stein. *Introduction to Algorithms Third Edition*. The MIT Press, (2009).
- [8] J. Czyzowicz, E. Rivera-Campo, J. Urrutia, J. Zaks. *Separating Convex Sets in the Plane*. Discrete Comput. Geom. 7, (1992).
- [9] E. de Klerk, J. Maharry, D. V. Pasechnik, B. Richter, G. Salazar. *Improved bounds for the crossing numbers of  $K_{m,n}$  and  $K_n$* . SIAM Journal on Discrete Mathematics, (2006).
- [10] T. Dey. *Improved bounds for  $k$ -sets*. Discrete and computational geometry, (1998).
- [11] H. Edelsbrunner. *Algorithms in Combinatorial Geometry*. Springer-Verlac, (1987).

- [12] P. Erdős, L. Lovász, A. Simmons, E. Straus. *Dissection graphs of planar point sets*. A Survey of Combinatorial Theory, (1973).
- [13] P. Erdős, G. Szekeres. *A Combinatorial Problem in Geometry*. Compositio Math. 2, (1935).
- [14] P. Erdős, G. Szekeres. *On Some Extremum Problems in Elementary Geometry*. Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math. 3–4 (1960/61).
- [15] A. García, M. Noy, A. Tejel. *Lower bounds on the number of crossing-free subgraphs of  $K_n$* . Proceedings of the 7th Canadian Conference on Computational Geometry, (1995).
- [16] I. Hiro, U. Hideyuki, Y. Mitsuo. *Lengths of tours and permutations on a vertex set of a convex polygon*. Discrete Applied Mathematics 115, (2001).
- [17] K. Hosono, M. Urabe. *On the number of disjoint convex quadrilaterals for a planar point set*. Computational Geometry 20, (2001).
- [18] L. Lovász. *On the number of halving lines*. Annales Universitatis Scientiarum Budapest, Eötvös, Sectio Mathematica 14, (1971).
- [19] L. Lovász. *Combinatorial Problems and Exercises*. North-Holland, Amsterdam, (1979).
- [20] L. Lovász, K. Vesztergombi, U. Wagner, E. Welzl. *Convex Quadrilaterals and  $k$ -Sets*. Technical Report, (2003).
- [21] J. Matoušek. *Lectures on Discrete Geometry*. Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, (2002).
- [22] N. Megiddo. *Partitioning with two lines in the plane*. J. Algorithms 6 (1985).
- [23] B. Mohar, C. Thomassen. *Graphs on Surfaces*. The Johns Hopkins University Press, (2001).
- [24] W. Morris, V. Soltan. *The Erdős-Szekeres problem on points in convex position - A survey*. Bulletin of the American Mathematical Society Vol. 37, No. 4, (2000).
- [25] J. Pach, J. Solymosi. *Halving lines and perfect cross-matchings*. Contemporary Mathematics, (1999).
- [26] J. Pach, G. Tóth. *Thirteen Problems on Crossing Numbers*. Geombinatorics 9, (2000).

- [27] T. Sakai, J. Urrutia. *Covering the Convex Quadrilaterals of Point Sets*. Graphs and Combinatorics, (2007).
- [28] E. R. Scheinerman, H. S. Wilf. *The rectilinear crossing number of a complete graph and Sylvester's "four point problem" of geometric probability*. American Mathematical Monthly, (1994).
- [29] M. Sharir, A. Sheffer, E. Welzl. *Counting plane graphs: perfect matchings, spanning cycles, and Kasteleyn's technique*. arXiv:1109.5596, (2011).
- [30] W. Steiger, J. Zhao. *Generalized ham-sandwich cuts*. Discrete Comput. Geom. 44, (2010).
- [31] G. Tóth, P. Valtr. *Note on the Erdős-Szekeres theorem*.
- [32] H. Tverberg. *A separation property of plane convex sets*. Math. Scand. 45, (1979).
- [33] P. Valtr. *On Mutually Avoiding Sets*. The Mathematics of Paul Erdős (R. L. Graham and J. Nešetřil, eds.), Springer, (1997).