



# UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

PROGRAMA DE POSGRADO EN CIENCIAS DE LA TIERRA

INSTITUTO DE GEOFÍSICA

## CÁLCULO E INVERSIÓN DEL COCIENTE $H/V$ A PARTIR DE RUIDO AMBIENTAL

TESIS

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

MAESTRO EN CIENCIAS DE LA TIERRA

PRESENTA:

JOSÉ PIÑA FLORES

TUTOR

DR. FRANCISCO JOSÉ SÁNCHEZ SESMA

INSTITUTO DE INGENIERÍA, UNAM

DR. ANTONIO GARCÍA JEREZ

PROGRAMA DE POSGRADO EN CIENCIAS DE LA TIERRA

JURADO

DR. ERNESTO RUBIO ACOSTA, IIMAS, UNAM

PRESIDENTE

DR. ARTURO IGLESIAS MENDOZA, INSTITUTO DE GEOFÍSICA, UNAM

VOCAL

DR. JOSÉ FRANCISCO SÁNCHEZ SESMA, INSTITUTO DE INGENIERÍA, UNAM

SECRETARIO

DR. ALLEN HUSKER, INSTITUTO DE GEOFÍSICA, UNAM

SUPLENTE

DR. ANTONIO GARCÍA JEREZ, PROGRAMA DE POSGRADO EN CIENCIAS DE LA TIERRA

SUPLENTE

MÉXICO D.F., ENERO 2015



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## **Agradecimientos**

Agradezco a la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM) por darme la gran oportunidad de realizar mi Posgrado, en particular, a los institutos de Geofísica y de Ingeniería por otorgarme todas las facilidades durante el desarrollo de este trabajo.

A las instituciones que me apoyaron económicamente: CONACYT y al Instituto de Ingeniería.

Agradezco infinitamente a mi asesor, el Dr. Francisco José Sánchez Sesma por haberme ayudado en todo momento, por sus enseñanzas, orientación y paciencia.

Al Dr. Antonio García Jerez, Dr. Francisco Luzón y al Dr. Enrique Carmona de Research Group on Applied Geophysics de la Universidad de Almería, por permitirme realizar la estancia en la Universidad de Almería y por todas sus enseñanzas. De igual manera, por otorgarme sus códigos y datos para la realización de esta tesis.

Al Dr. Mathiu Perton por sus enseñanzas durante mi estancia en el instituto de Ingeniería y el tiempo dedicado a la revisión de mi tesis.

A mis sinodales: Dr. Ernesto Rubio Acosta, Dr. Arturo Iglesias Mendoza, Dr. Allen Husker, y desde luego, al Dr. Antonio García Jerez y al Dr. Francisco José Sánchez Sesma. Muchas gracias por el tiempo dedicado a la revisión y comentarios de este trabajo.

Agradezco al Sr. Antonio Sánchez Picón por su hospitalidad que me brindo durante mi estancia en la Universidad de Almería, España.

Finalmente, agradezco los momentos y detalles a mis compañeros de cubículo, Mtra. Marcela Baena; Ing. Nayeli Chávez; Mtro. Juan Camilo Molina; Ing. Rodrigo De Negri y al Mtro. Marcial Contreras.

## Dedicatoria

A mi esposa Cintia por todo ese amor y comprensión durante la realización de este trabajo.

A mis Padres por su apoyo incondicional durante mi vida, a mi hermana y sobrina que tanto las quiero y amo.

## INDICE

Resumen	
Abstract	
INDICE .....	1
Introducción .....	1
1.- Estado del Arte ( $H/V$ ) .....	3
1.1.- Presencia de ondas superficiales.....	3
1.2.- Presencia de ondas de cuerpo .....	5
1.3.- Teoría del campo de onda difuso.....	6
1.3.1.- Equipartición .....	7
1.3.2.- Relación entre la Función de Green y las densidades de energía .....	7
2.- Cálculo del cociente $H/V$ a partir de la Función de Green 3D .....	10
2.1.- Funciones de Green .....	10
2.2.- Evaluación de la Función de Green mediante integrales de contorno.....	12
3.- Problema directo: análisis paramétrico del cociente $H/V$ .....	17
4.- Métodos de Inversión .....	30
4.1.- Cristalización simulada (Simulated Annealing).....	30
4.2.- Método de Cristalización simulada modificada .....	37
4.3.- Método de inversión conjunta .....	39
5.- Aplicaciones: Estructura somera para la zona de Almería, España .....	47
6.- Conclusiones.....	54
Bibliografía .....	56
Anexo I.....	I
Anexo II .....	XII
Anexo III.....	XIII
Anexo IV.....	XIV

## Resumen

La teoría de campos difusos relaciona las densidades de energía promedio con la Función de Green en 3D. El cociente  $H/V$  (donde  $H^2$  y  $V^2$  son proporcionales a las energías sísmicas en las componentes horizontal y vertical, respectivamente) resulta entonces ser una propiedad intrínseca del medio y se relaciona con el cociente de componentes del tensor de Green para fuente y receptor coincidentes. Para un medio estratificado homogéneo e isótropo, el cociente  $H/V$  se calcula de manera formal y eficiente en el plano complejo del número de onda horizontal. Este cálculo utiliza la información de las curvas de dispersión. A partir del cálculo directo del cociente  $H/V$  se realiza un análisis paramétrico con el objetivo de observar la influencia de cada uno de los parámetros elásticos; especialmente en los valores de la amplitud y la frecuencia dominante.

La inversión de cocientes  $H/V$  se realiza mediante la implantación del algoritmo de inversión global denominado *Simulated Annealing*. Este método heurístico permite invertir el cociente  $H/V$  utilizando poco conocimiento previo sobre la solución y sin usar linealización. Considerando que se puede tener información del cociente  $H/V$  y la curva de dispersión con mediciones de ruido ambiental con diferentes técnicas, se explora una modificación al método de inversión para considerar de manera conjunta estos datos. La inversión simultánea de estos observables tiene grandes ventajas. Una de ellas es el reducir significativamente las zonas de mínimos locales (cuando la función de costo es mínimo) en el espacio de los modelos, aumentando la probabilidad de que el algoritmo presente una convergencia a soluciones óptimas en poco tiempo. El método de inversión conjunta se validó para datos sintéticos de cociente  $H/V$  y curvas de dispersión, estudiando el comportamiento de las superficies de costo individualmente y en su conjunto. Utilizando datos del cociente  $H/V$  y curvas de dispersión de ondas de Rayleigh del modo fundamental obtenidas mediante mediciones de ruido ambiental, se aplica con éxito la inversión conjunta para la obtención de la estructura superficial para la zona de la desembocadura del río Andarax (Almería, España).

## Abstract

The theory of diffuse fields relates the average energy densities to the Green's function in 3D. Then, the  $H/V$  ratio (where  $H$  and  $V$  are the seismic energies, in the horizontal and vertical components, respectively) becomes an intrinsic property of the medium because it is related to the ratio of components of the Green tensor for coinciding source and receiver. For a stratified homogeneous and isotropic medium, the ratio  $H/V$  is formally and efficiently calculated in the complex horizontal wavenumber plane. This calculation uses the information of the dispersion curves. A parametric analysis of the  $H/V$  ratio has been carried out in order to assess the influence of each elastic parameter in the amplitudes and resonance frequency, mainly.

The inversion of the  $H/V$  ratio is performed by the algorithm of global inversion called Simulated Annealing. This method makes possible to invert the  $H/V$  ratio using little prior knowledge about the solution without using linearization. Since information on both the  $H/V$  ratio and the dispersion curve can be retrieved from measurements of ambient noise, a modification method for joint inversion of these data is implemented. The joint inversion shows great advantages, one of which is the significant reduction of local minimum-misfit areas in the model space, increasing the probability of quick convergence to optimal solutions. The joint inversion method has been validated for synthetic  $H/V$  curves, studying the behavior of dispersion surfaces cost individually and collectively. The method has been successfully applied to  $H/V$  data and fundamental-mode dispersion curves of Rayleigh waves obtained from ambient noise measurements in order to obtain the shallow structure in the vicinity of the of Andarax river mouth (Almería, Spain).

## Introducción

Las características de la geología superficial tienen efectos locales significativos en la amplitud y duración de los movimientos sísmicos. En las zonas que presentan efectos de sitio desfavorables, los movimientos resultantes de eventos sísmicos pueden inducir daños estructurales severos en obras civiles; por ello, el conocimiento de los efectos de sitio es útil para establecer medidas de prevención para mitigar el impacto sísmico. En muchas ocasiones la amplificación local puede estimarse usando modelos de propagación de ondas en medios estratificados con variaciones de las propiedades unidimensional (1-D) (p. ej. Haskell). No obstante, para obtener estos modelos, se requiere conocer las propiedades mecánicas de la estratigrafía y este conocimiento puede ser costoso. Los métodos geofísicos pueden constituir una opción económica para estimar los efectos de sitio, dentro de estos métodos destaca el cociente espectral  $H/V$  (donde  $H^2$  y  $V^2$  son proporcionales a los componentes horizontal y vertical de la energía sísmica) que es una técnica sencilla para evaluar el efecto de sitio (en particular la frecuencia dominante del sitio) a partir de la medición de microtremores (ruido ambiental).

En el capítulo 1 se describen tres diferentes puntos de vista para interpretar el cociente  $H/V$  en diversas circunstancias. La primera está vinculada con la elipticidad de las ondas de Rayleigh. La segunda está relacionada con la función de transferencia de las ondas de cuerpo SH, y finalmente, la tercera enlaza el cociente  $H/V$  con el campo completo de ondas, es decir, que la contribución de ondas de cuerpo y ondas superficiales están determinadas por la teoría de campos difusos.

El último punto se presenta en más detalle en el capítulo 2, particularmente los fundamentos físicos y matemáticos necesarios para establecer el cálculo teórico del cociente  $H/V$ . Principalmente se basa sobre la teoría de campos difusos, la cual liga el cociente  $H/V$  con las partes imaginarias del tensor de Green, cuando fuente y receptor coinciden (Sánchez-Sesma *et al.*, 2011). En este trabajo se calculan las Funciones de Green (FG) a partir de una generalización del trabajo de Harkrider (1964) para medios estratificados (García-Jerez *et al.*, 2013).

En el capítulo 3 se presenta, desde un punto de vista teórico, el análisis de la respuesta de la FG y del cociente  $H/V$  de dos perfiles de velocidades. Además, se realiza un análisis paramétrico con el objetivo de observar la influencia de cada uno de los parámetros elásticos en la amplitud y la frecuencia fundamental del cociente  $H/V$ .

A partir del cociente  $H/V$  obtenido de microtemores, es posible extraer información acerca de la estructura geológica del sitio por medio de un proceso de inversión. La inversión del cociente  $H/V$  es un problema fuertemente no lineal y multi-paramétrico, en el cual la solución no es única: existen diversas estructuras geológicas cuyos cocientes  $H/V$  tienen un buen ajuste con el cociente  $H/V$  objetivo.

En el capítulo 4 se describe el método de inversión denominado cristalización simulada o *Simulated Annealing* (SA por sus siglas en inglés) (Kirkpatrick *et al.*, 1983). En la mayoría de las aplicaciones sismológicas, se realiza el proceso de inversión a partir de varios tipos de datos simultáneamente (p.e. Lin *et al.*, 2012). Eso permite tener mayor confianza en los resultados y reduce el número de soluciones equivalentes. En este trabajo se modifica el método de inversión SA para realizar la inversión conjunta con datos del cociente  $H/V$  y curvas de dispersión del modo fundamental de ondas de Rayleigh y/o de Love simultáneamente.

En el capítulo 5 se presentan ejemplos de aplicación de inversión conjunta con el objetivo de determinar las propiedades mecánicas del suelo en la desembocadura del río Andarax (Almería, España).

## 1.- Estado del Arte ( $H/V$ )

En los últimos años se han propuesto tres interpretaciones físicas del cociente  $H/V$  desde distintos puntos de vista. En la primera interpretación, algunos autores interpretan el pico predominante con base en la elipticidad de las ondas de Rayleigh alrededor de la frecuencia fundamental del suelo (Nogoshi e Igarashi, 1971; Horike, 1996; Tokimatsu *et al.*, 1996; Konno y Ohmachi, 1998; Lachet y Bard, 1994; Field y Jacob, 1995), siempre que exista un contraste de impedancia considerable entre el material en superficie y el basamento rocoso (Bard, 1999). La segunda interpretación se debe a Nakamura (1989; 2000), quien sugiere que el cociente  $H/V$  tiene relación con la función de transferencia de modelos estratificados con múltiples refracciones de ondas SH con incidencia vertical. Finalmente, Sánchez-Sesma *et al.* (2010; 2011a) han propuesto que los microtremores forman un campo difuso conteniendo todos los tipos de ondas elásticas en proporciones energéticas fijas (ondas de cuerpo y superficiales). En la siguiente sección se explican con más detalle estas teorías.

### 1.1.- Presencia de ondas superficiales

La presencia de las ondas superficiales en el cociente  $H/V$  está basado en que las ondas superficiales de Rayleigh predominan en los microtremores. Bajo dicho supuesto, diversos autores (por ejemplo, Nogoshi e Igarashi, 1971; Horike, 1996; Tokimatsu *et al.*, 1996; Konno y Ohmachi, 1998) están de acuerdo en los siguientes argumentos:

- El cociente  $H/V$  está básicamente relacionado con la elipticidad debido al predominio de las ondas de Rayleigh en el componente vertical.
- A causa de un alto contraste de impedancia entre los materiales superficiales y profundos, la elipticidad presenta un pico agudo alrededor de la frecuencia fundamental del sitio. Este pico se relaciona con un mínimo espectral del componente vertical y, en algunos casos, con una inversión del sentido de rotación del modo fundamental de Rayleigh a baja frecuencia.

Algunos autores creen que estos resultados son válidos sólo para estructuras simples (Horike, 1996); Konno y Ohmachi (1998) explican que la existencia de las ondas de Love en los microtremores no altera esta interpretación, ya que estas ondas no están presentes en el componente vertical. De hecho, las ondas de Love refuerzan el pico del cociente  $H/V$  debido a que la fase de Airy se produce a una frecuencia muy cerca de la frecuencia fundamental de las ondas S. Por el contrario, la componente vertical es sensible a

las ondas de cuerpo (P o SV), de modo que la explicación en términos de ondas superficiales no está justificada si los microtemores incluyen una parte significativa de las ondas de cuerpo.

Las consideraciones antes mencionadas sugieren que el comportamiento del cociente espectral  $H/V$  no cuenta con una explicación completamente satisfactoria; por ello, Bard (1999) formuló dos preguntas para esclarecer la situación:

- ¿Cuál es el umbral de contraste de impedancia que se espera para que los picos sean visibles?
- Dado que existen diferentes modos de Rayleigh y que la elipticidad presenta picos y valles para cada uno de estos modos, ¿por qué la mayoría de los cocientes  $H/V$  experimentales muestran sólo un pico?

La respuesta a la primera cuestión varía de un escrito a otro. Nogoshi e Igarashi (1971) sitúan el valor del umbral para el contraste de impedancias de una capa sobre un semi-espacio en un rango entre 2.5 y 3. Ansary *et al.*, (1995) proponen valores entre 3.3 y 5.5 para una capa sobre un semi-espacio y por encima de 2.5 entre las capas sobre un semi-espacio para estructuras más complejas. También se ha demostrado por los mismos autores que cuando el contraste de impedancia alcanza estos valores, el acuerdo entre la frecuencia de máxima amplitud de cociente  $H/V$  y del modo fundamental de resonancia de las ondas S es menor del 10% de diferencia entre ambas frecuencias. Estrictamente hablando, no puede haber ninguna relación entre el cociente  $H/V$  y la elipticidad debido a que la máxima amplitud de la elipticidad es infinita. Konno y Ohmachi (1998) sostienen que al suavizar adecuadamente el espectro de las componentes horizontales y verticales (antes de calcular el cociente  $H/V$ ), los valores resultantes para el pico del cociente  $H/V$  están correlacionados con la amplificación de la onda S. Esta afirmación está basada en los cálculos numéricos para 100 diferentes perfiles de velocidad, lo cual parece bastante convincente para estructuras simples (una capa sobre un semi-espacio), pero es menos convincente para los perfiles complejos (Bard, 1999).

En respuesta a la segunda cuestión, Bard (1999) consideró que el n-ésimo pico de la elipticidad corresponde con el n-ésimo modo de las ondas de Rayleigh. En la frecuencia pico de los modos superiores existen otros modos de ondas de Rayleigh que no presentan ningún pico en la elipticidad fuerte. Como no hay razón física para que los microtemores se compongan de un modo particular de las ondas de Rayleigh, excepto el fundamental, podemos suponer que coexisten varios modos a tales frecuencias, resultando que este n-ésimo pico no aparezca en la relación espectral  $H/V$ .

## 1.2.- Presencia de ondas de cuerpo

La interpretación de Nakamura (1989) vincula el cociente  $H/V$  con las ondas de cuerpo. Su interpretación se basa en la hipótesis de que el efecto de las ondas superficiales es despreciable, es decir, este cociente  $H/V$  tiene relación directa con las funciones de transferencia para las ondas S. Su primera explicación (Nakamura, 1989) se basa en tres hipótesis que fueron muy criticadas por varios científicos (e.g., Kudo, 1995). Eso llevó al autor a una segunda explicación ligeramente modificada (Nakamura, 1996). Según esta, los microtemores se pueden separar en ondas de cuerpo (subíndice b) y en ondas superficiales (subíndice s), de modo que sus espectros en las componentes horizontal y vertical son:

$$S^{NH}(\omega) = S_b^H(\omega) + S_s^H(\omega) = H_T(\omega)R_b^H(\omega) + S_s^H(\omega) \quad (1.1)$$

$$S^{NV}(\omega) = S_b^V(\omega) + S_s^V(\omega) = H_V(\omega)R_b^V(\omega) + S_s^V(\omega) \quad (1.2)$$

donde  $R_b^H(\omega)$  y  $R_b^V(\omega)$  son los espectros de Fourier del componente horizontal y del componente vertical, respectivamente, para las ondas de cuerpo en un sitio de referencia,  $H_T(\omega)$  es la “verdadera” función de transferencia del suelo para la componente horizontal (resp.,  $V_T(\omega)$  componente vertical), y  $S_s^V(\omega)$  corresponde al espectro de Fourier para ondas superficiales en la componente vertical (resp.,  $S_s^H(\omega)$  componente horizontal).

Entonces, después de un poco de álgebra y dejando de escribir la dependencia de la frecuencia, el cociente  $H/V$  entre  $S_s^H$  y  $S_s^V$  se puede escribir como:

$$H/V = \frac{H_T A_r^{HV} + \beta A_s}{V_T + \beta} \quad (1.3)$$

Donde  $A_r^{HV}$  es el cociente espectral  $H/V$  en roca,  $\beta = S_s^V/R_b^V$  es el cociente espectral entre las ondas superficiales en superficie y las ondas de cuerpo en el sitio de referencia, ambas en componente vertical y  $A_s$  es el cociente de la componente horizontal y vertical en la superficie, debido a las ondas superficiales, es decir  $A_s = S_s^H/S_s^V$ .

Por lo tanto, la relación implementada por Nakamura requiere de los siguientes supuestos:

- I. La componente vertical  $V_T(\omega)$  no se amplifica en la frecuencia dominante.
- II.  $A_r^{HV}$  es igual a 1.
- III.  $\beta$  es mucho menor que 1.
- IV.  $\beta A_s$  es también mucho menor que la  $H_T$ .

Mientras que los incisos I) y II) puede ser aceptados con bastante facilidad con base en la experiencia, los incisos III) y IV) son más controvertidos e implican dominancia de las ondas de cuerpo sobre las superficiales a la frecuencia de resonancia en el sitio de cálculo y en todas las componentes (Bard, 1999).

Con lo anterior, Nakamura (2000) concluyó que el cociente espectral entre las componentes horizontal y vertical del movimiento en un mismo sitio puede ser utilizado como un estimador de los efectos de sitio para ondas de cuerpo.

### 1.3.- Teoría del campo de onda difuso

Si bien el concepto de campo difuso es de gran utilidad en la arquitectura acústica, recientemente se ha comenzado en aplicar a las ondas elásticas en sólidos. El concepto de un campo difuso corresponde a una descripción estadística de la respuesta elástica de los cuerpos finitos (Weaver, 1985).

Un ejemplo del concepto del campo difuso es evidente al considerar la luz visible, la cual sufre dispersión múltiple cuando atraviesa un cuerpo translucido y en consecuencia, casi no genera sombra. Cuando hay varias fuentes de iluminación se generan varias sombras. Por tanto, cuando la luz llega de varias fuentes con ubicaciones aleatorias la iluminación es difusa. Extendiendo este concepto a los sólidos, tenemos que la litosfera terrestre con múltiples heterogeneidades provoca que los desplazamientos inducidos por un sismo o por fuentes antropogénicas no sean sencillos, producto de la existencia de ondas reflejadas, refractadas y difractadas en diversas direcciones.

El campo difuso es una aproximación estadística para ondas acústicas (Murray, 1996) y elásticas dentro de un cuarto acústico con base en tres hipótesis básicas:

1. El campo de ondas es un campo de ruido, es decir, que las fases de las ondas son aleatorias.
2. Las ondas inciden de todas direcciones con igual intensidad, en otras palabras, el campo es acimutalmente isótropo.

3. En un espacio abierto, la amplitud de las ondas es la misma en cualquier punto del dominio espacial, es decir, el campo es espacialmente homogéneo en escala local.

Weaver (1982) estableció dos definiciones de campo difuso. La primera señala que el estado mecánico de un medio en vibración es descrito en función de sus modos normales. En el caso de un campo difuso, se acepta que la energía está equitativamente distribuido en todos los modos y estados (diferentes tipos de ondas elásticas) es decir, que cumplen el principio de equipartición de la energía. La segunda definición establece que en cada punto del medio en vibración, el campo difuso puede ser representado como una superposición isótropa con distribución espacial aleatoria de ondas planas.

### 1.3.1.- Equipartición

El concepto de equipartición es un principio de mecánica estadística. Esto significa que la energía se distribuye en proporciones fijas entre todos los “estados” posibles (modos y/o tipos de ondas elásticas) en el campo de ondas. Una proporción constante implica que la contribución relativa de ondas P y S se estabilice a un valor aproximado al cociente de energías ( $E_p/E_s$ ) independiente de los detalles particulares de la difracción (Ryzhik *et al.*, 1996).

La equipartición es una condición necesaria para recuperar la Función de Green exacta mediante correlaciones del campo elástico. Si no existe un régimen equiparticionado, la Función de Green no se recupera, pero las correlaciones pueden proporcionar resultados valiosos de significado físico, así como permitir la reconstrucción de arribos específicos. La definición de un campo difuso se basa en la equipartición de la energía, la cual se describe usualmente en términos de la polarización y dirección de las ondas. Sin embargo, existe otro punto de vista alternativo, el cual asocia igualdad de energías con los modos o estados de vibración. Estas dos descripciones son equivalentes y representan dos maneras de expresar la equipartición (Pertou *et al.* 2009).

### 1.3.2.- Relación entre la Función de Green y las densidades de energía

La reconstrucción de la Función de Green (FG) se basa en dos diferentes descripciones. La primera consiste en promediar las correlaciones de señales generadas por un gran número de fuentes, las cuales son independientes entre sí, pero las fuentes deben estar distribuidas de manera homogénea a lo largo de un contorno cerrado. En este caso no se requiere que exista difracción; sin embargo, la existencia de

difracción no le quita al campo de ondas su carácter difusivo. En la segunda, la reconstrucción se realiza a partir de señales representativas de un campo difuso, donde aparece la difracción múltiple. Bajo esta hipótesis se supone que el campo de ondas resultante es equiparticionado, condición necesaria para la recuperación de la FG.

La relación existente entre las correlaciones de registros en campos difusos y la FG (respuesta del sistema al aplicar una fuerza externa) fue formulada originalmente para el ruido térmico. Derode *et al.* (2003) y Larose *et al.* (2004) mostraron la importancia de la difracción múltiple en la mejora de la reconstrucción de la FG con un número limitado de fuentes y registros de duración finita, en condiciones parecidas a las sismológicas. Sánchez-Sesma *et al.* (2011) proponen que los microtemores se producen por múltiples fuentes aleatorias cerca de la superficie de la Tierra y que pueden incluir efectos de difracción múltiple. Esto sugiere que sus intensidades podrían ser bien descritas por las ecuaciones de difusión. Dentro de este marco teórico, el promedio de las correlaciones de los desplazamientos en un receptor (en el dominio de la frecuencia) mide la densidad media de la energía y ésta es proporcional a la parte imaginaria de la FG cuando la fuente y el receptor coinciden. Las densidades de energía promedio con la FG en 3D, consideran que el cociente  $H/V$  resulta ser una propiedad intrínseca del medio que se relaciona con el cociente de los componentes del tensor de Green considerando el campo de ondas completo. Sánchez-Sesma *et al.* (2011) formulan la hipótesis de que los microtemores son un campo de ondas difuso y contiene todos los tipos de ondas elásticas. Esto puede proporcionar una visión física del fenómeno y explicar el éxito de las técnicas más utilizadas (SPAC, Correlación Cruzada). Bajo esta hipótesis se demuestra la proporcionalidad entre las densidades de energía promedio y la parte imaginaria de la FG en la fuente (Sánchez-Sesma *et al.*, 2008; Perton *et al.*, 2009), esto es:

$$\langle u_i(\vec{x}_A, \omega) u_j^*(\vec{x}_B, \omega) \rangle = -2\pi E s k_\beta^{-3} \text{Im}[G_{ij}(\vec{x}_A, \vec{x}_B; \omega)] \quad (1.4)$$

donde  $G_{ij}(\vec{x}_A, \vec{x}_B; \omega)$  es el desplazamiento en  $\vec{x}_A$  con dirección  $i$  producido por una fuerza unitaria puntual armónica  $\delta_{ij} \delta(|\vec{x} - \vec{x}_B|) e^{i\omega t}$  actuando en  $\vec{x}_B$  en dirección  $j$ .  $E s = \rho \omega^2 S^2$  es la densidad espectral de energía asociado a la onda S.  $S^2$  es la densidad espectral de la onda S y  $k_\beta = \omega/\beta$  el número de onda radial.

La densidad de energía en el punto  $\bar{x}_A$  se puede obtener de la ecuación (1.4) en el caso  $\bar{x}_A = \bar{x}_B$

$$E(\bar{x}_A) = \rho\omega^2 \langle u_m(\bar{x}_A, \omega) u_m^*(\bar{x}_A, \omega) \rangle = -2\pi\mu E s k^{-1} \text{Im}[G_{mm}(\bar{x}_A, \bar{x}_A; \omega)] \quad (1.5)$$

La ecuación (1.5) relaciona la densidad de energía total con la parte imaginaria de la traza del tensor de Green cuando fuente y receptor coinciden; así mismo, la parte imaginaria de la FG representa la potencia inyectada por la unidad de carga armónica.

La ecuación (1.5) es válida incluso si no se suma sobre  $m$  (Perton *et al.*, 2009); en ese caso,  $E_m(\bar{x}_A)$  es la densidad de energía direccional (DED) en la dirección  $m$ . A partir de lo anterior, se puede expresar el cociente  $H/V$  como la raíz cuadrada de la relación de las densidades de energía direccional (Sánchez-Sesma *et al.*, 2011).

$$\frac{H(\omega)}{V(\omega)} = \sqrt{\frac{E_1(\bar{x}, \omega) + E_2(\bar{x}, \omega)}{E_3(\bar{x}, \omega)}} \quad (1.6)$$

Donde  $E_1, E_2$  y  $E_3$  son las DED's, los subíndices 1 y 2 refieren a las componentes horizontales y el subíndice 3 a la vertical. Siguiendo las ecuaciones (1.5) y (1.6), la expresión del cociente  $H/V$  se puede escribir en función de las componentes diagonales del tensor de Green.

$$\frac{H(\omega)}{V(\omega)} = \sqrt{\frac{\text{Im}[G_{11}(\bar{x}, \bar{x}; \omega)] + \text{Im}[G_{22}(\bar{x}, \bar{x}; \omega)]}{\text{Im}[G_{33}(\bar{x}, \bar{x}; \omega)]}} \quad (1.7)$$

La ecuación (1.7) que es consecuencia directa de la teoría de campos difusos, permite obtener el cociente  $H/V$  de modo directo para un modelo de estructura dado.

## 2.- Cálculo del cociente $H/V$ a partir de la Función de Green 3D

En este trabajo se describen algunos conceptos fundamentales de elastodinámica con el fin de calcular el cociente  $H/V$  para modelos estratificados en un medio elástico homogéneo e isótropo (Ver Anexo I). El lector interesado puede profundizar con el texto de Aki y Richards (1980).

Para el cálculo del cociente  $H/V$  a partir de la ecuación (1.7) del capítulo 1, se necesitan calcular las tres componentes imaginarias de la diagonal del tensor de Green para fuente  $(\vec{x}_A(r, \theta, z))$  y receptor  $(\vec{x}_B(r, \theta, z))$  coincidentes en la superficie, es decir,  $(\vec{x}_A = \vec{x}_B = 0)$ .

- El desplazamiento debido a una fuerza vertical  $Im[G_{zz}(0,0; \omega)]$ .
- El desplazamiento generado por una fuerza horizontal en dirección del desplazamiento  $Im[G_{rr}(0,0; \omega)] = Im[G_{\theta\theta}(0,0; \omega)]$ .

En este capítulo se presenta el cálculo de las FG implementando el desarrollo de García-Jerez *et al.* (2013) a partir de una generalización de la formulación de Harkrider (1964) para modelos estratificados. En este método, los integrandos de la FG definidos en el plano complejo del número de onda horizontal ( $k$ ) presentan polos simples en el eje real que son evaluados mediante el teorema del residuo de Cauchy. Además de los polos, los integrandos contienen puntos de ramificación, consecuencia de que incluyen funciones multivaluadas que son tratados con un contorno de integración adecuado.

### 2.1.- Funciones de Green

Con el objetivo de determinar la FG del campo de desplazamiento en un medio estratificado, se utiliza el método implementado por Harkrider (1964) el cual se fundamenta en la aplicación de la matriz propagadora de Haskell (1953).

Las expresiones de los desplazamientos en la superficie producidos por una fuerza puntual superficial a distancia  $r$ , se pueden escribir usando la nomenclatura de Harkrider (1964) (ver anexo I):

1. para una fuente Horizontal

$$w_0(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \left\{ - \frac{[RN - SL]}{[NK - LM]} \right\} J_1(kr) dk \quad (2.1)$$

$$q_0(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \left\{ \left( -i \frac{[RM - SK]}{[NK - LM]} + i \frac{(J_L)_{12} - (J_L)_{22}}{(J_L)_{21} - (J_L)_{11}} \right) \frac{J_1(kr)}{kr} \right\} dk + \frac{i}{2\pi} \int_0^\infty \left\{ \left( \frac{[RM - SK]}{[NK - LM]} \right) J_0(kr) \right\} dk \quad (2.2)$$

$$v_0(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \left\{ -i \left( \frac{[RM - SK]}{[NK - LM]} - \frac{(J_L)_{12} - (J_L)_{22}}{(J_L)_{21} - (J_L)_{11}} \right) \frac{J_1(kr)}{kr} \right\} dk - \frac{i}{2\pi} \int_0^\infty \left\{ \frac{(J_L)_{12} - (J_L)_{22}}{(J_L)_{21} - (J_L)_{11}} J_0(kr) \right\} dk \quad (2.3)$$

2. para una fuente vertical

$$w_0(r) = -\frac{i}{2\pi} \int_0^\infty \left\{ \frac{[GN - LH]}{[NK - LM]} \right\} J_0(kr) dk \quad (2.4)$$

$$q_0(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \left\{ \frac{[RN - SL]}{[NK - LM]} \right\} J_1(kr) dk \quad (2.5)$$

Las expresiones  $G$ ,  $H$ ,  $J_L$ ,  $K$ ,  $L$ ,  $M$ ,  $N$ ,  $R$ ,  $S$  son definidas por Harkrider (1964). Por tanto, los desplazamientos en un receptor producidos por una fuerza puntual en el origen (evaluados ambos en la superficie a distancia  $r$ ), pueden ser expresados por medio de integrales en el número de onda horizontal  $k$  de funciones de Bessel  $J_n(kr)$  con los Kernels:

$$f_{P-SV}^V(k) = -\frac{[GN - LH]}{[NK - LM]}; f_{P-SV}^H(k) = \frac{[RM - SK]}{[NK - LM]}; f_{SH}(k) = \frac{(J_L)_{12} - (J_L)_{22}}{(J_L)_{21} - (J_L)_{11}} \quad (2.6)$$

Considerando que el medio presenta simetría axial, no hay ningún acimut en particular, por ello, se tiene la hipótesis de que dicho receptor está en  $\theta = 0$  y las FG pueden escribirse como (García-Jerez *et al.*, 2013):

$$Im[G_{33}(r,0;\omega)] = Im \left[ \frac{i}{2\pi} \int_0^\infty f_{P-SV}^V(k) J_0(kr) dk \right] \quad (2.7)$$

$$Im[G_{11}(r,0;\omega)] = Im \left[ \frac{i}{4\pi} \int_0^\infty f_{SH}(k) [J_0(kr) + J_2(kr)] dk + \frac{i}{4\pi} \int_0^\infty f_{P-SV}^H(k) [J_0(kr) - J_2(kr)] dk \right] \quad (2.8)$$

$$Im[G_{22}(r,0;\omega)] = Im \left[ \frac{i}{4\pi} \int_0^\infty f_{SH}(k) [J_0(kr) + J_2(kr)] dk + \frac{i}{4\pi} \int_0^\infty f_{P-SV}^H(k) [J_0(kr) - J_2(kr)] dk \right] \quad (2.9)$$

## 2.2.- Evaluación de la Función de Green mediante integrales de contorno

Los integrandos de las ecuaciones (2.1)-(2.5) pueden extenderse al plano complejo de  $k$  presentando polos simples en el eje real  $k$  asociados a las ondas superficiales. Los cuales se obtienen resolviendo, para cada frecuencia, las curvas de dispersión de velocidad de fase ( $k = \omega/c$ ), tanto del modo fundamental como los modos superiores. Las contribuciones de estos polos a las integrales son evaluadas mediante el teorema del residuo de Cauchy, usando seguidamente la regla de L'Hopital. En la figura 2.1 se muestra la relación entre los polos simples del integrando de la FG con las curvas de dispersión de velocidad de fase. El contorno de integración toma en consideración las ramificaciones existentes en el intervalo  $[-\omega/\beta_N; +\omega/\beta_N]$   $[-\omega/\beta_N; +\omega/\beta_N]$ , donde  $\beta_N$  es la velocidad de las ondas S en el semiespacio, y a lo largo de todo el eje imaginario debido a la dependencia en las raíces cuadradas  $v_{\alpha_N} = \sqrt{k^2 - k_{\alpha_N}^2}$  y  $v_{\beta_N} = \sqrt{k^2 - k_{\beta_N}^2}$ , tal como se muestra en la figura 2.2.

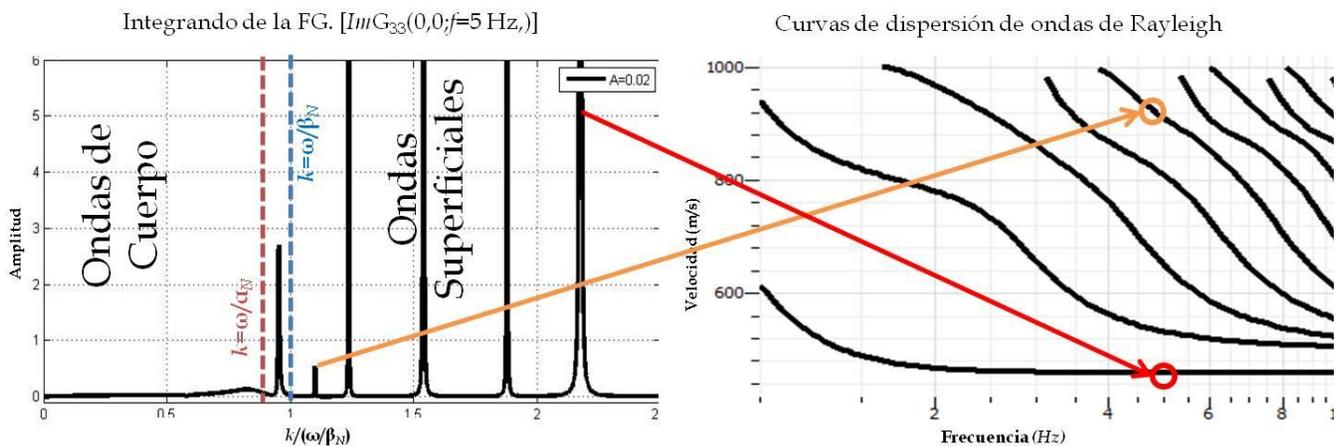


Figura 2.1.- Posiciones de los polos simples del integrando de la FG sobre las curvas de dispersión de fase de ondas de Rayleigh para un modelo de una capa sobre un semi-espacio. El panel izquierdo muestra el comportamiento del integrando de  $\text{Im}G_{33}(0,0,f=5)$  a una frecuencia de 5 Hz con respecto al número de onda adimensional  $[k/(\omega/\beta_N)]$ . Donde  $\omega/\beta_N$  y  $\omega/\alpha_N$  son los números de onda horizontal asociados a la velocidad de la onda S y velocidad de la onda P ambos del semiespacio, respectivamente. El panel derecho muestra las curvas de dispersión de fase de ondas de Rayleigh con respecto a la frecuencia. El integrando de la FG se evaluó utilizando el método del Número de Onda Discreto (DWN por sus siglas en inglés) con una frecuencia compleja (A) con el fin de resaltar los polos del integrando. Las curvas de dispersión de velocidad de fase son calculadas a partir del plugin "gpdc.exe" (Wathelet 2005).

Para calcular las integrales de la parte imaginaria de la FG (2.7)-(2.9) y aplicar el teorema del residuo, extenderemos el dominio de integración a todo el eje real, definiendo el integrando en todo el plano complejo  $k$ . Los propagadores de Haskell, las variables  $G, H, K, L, M, N, R, S$  y la matriz  $J_L$  contienen las cantidades  $r_{\alpha_j}$  y/o  $r_{\beta_j}$ , que son soluciones reales positivas o imaginarias puras con parte imaginaria negativa de:

$$\begin{aligned} r_{\alpha_j}^2 &= k_{\alpha_j}^2 / k^2 - 1 \\ r_{\beta_j}^2 &= k_{\beta_j}^2 / k^2 - 1 \end{aligned} \tag{2.10}$$

Las variables  $k_{\alpha_j}$  y  $k_{\beta_j}$  son los números de onda asociados a las respectivas velocidades de propagación de las ondas longitudinales y transversales (P y S respectivamente). Con objeto de ampliar la definición al plano complejo, redefinimos para las magnitudes  $r_{\alpha_j}$  y  $r_{\beta_j}$  como:

$$\begin{aligned} r_{\alpha_j} &= -i v_{\alpha_j} / k \\ r_{\beta_j} &= -i v_{\beta_j} / k \\ v_{\alpha_j} &= \sqrt{k^2 - k_{\alpha_j}^2} \\ v_{\beta_j} &= \sqrt{k^2 - k_{\beta_j}^2} \end{aligned} \tag{2.11}$$

El símbolo  $\sqrt{\phantom{x}}$  es la raíz cuadrada usual definida en todo el plano complejo, discontinua en los reales negativos, el cual se puede comprobar que si nos acercamos al semi-eje real positivo por el primer cuadrante (esto es que en  $k > 0$  suponemos una parte imaginaria infinitesimal positiva). Nótese que  $v_{\alpha_j}$  y  $v_{\beta_j}$  son funciones pares de  $k$ .

Al definir el integrando de la FG para todo el plano complejo, hay que tener en cuenta que las raíces cuadradas que definen  $v_{\alpha_N}$  y  $v_{\beta_N}$  (es decir,  $\sqrt{k^2 - k_{\alpha_N}^2}$  y  $\sqrt{k^2 - k_{\beta_N}^2}$ ) son funciones multivaluadas o discontinuas. Nótese, que el integrando sólo conserva las discontinuidades ligadas a  $v_{\alpha_N}$  y  $v_{\beta_N}$  (los correspondientes al semi-espacio. La paridad en  $k$  implica que  $v_{\alpha_N}$  y  $v_{\beta_N}$  no son discontinuas al pasar por  $k = 0$  entre cuadrantes “opuestos” (del 1º al 3º ó del 2º al 4º). Como se menciona anteriormente, las

discontinuidades de los integrandos del campo de ondas P-SV en el plano complejo están marcadas en la figura 2.2. En los integrandos del campo de ondas SH no aparece el corte de rama ligado a  $v_{\alpha_N}$  y la ubicación de los polos es distinta.

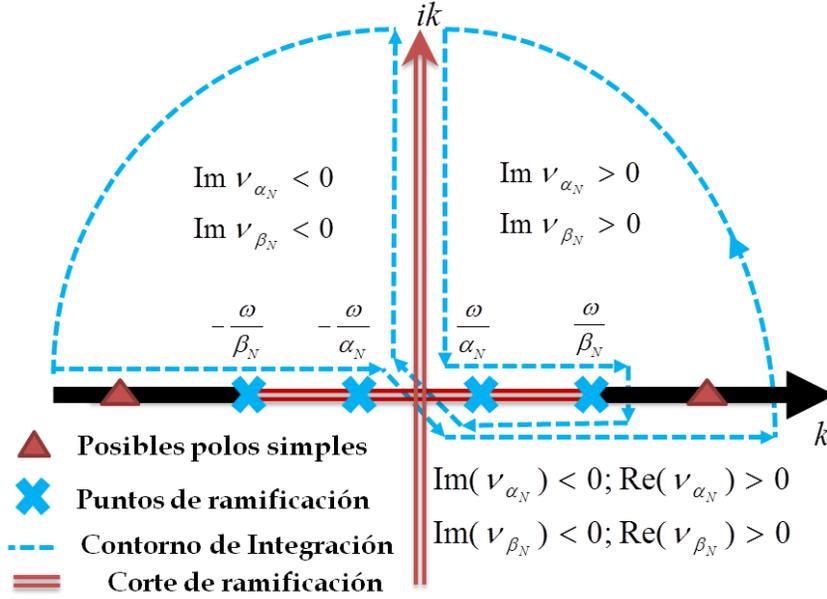


Figura 2.2- Contorno de integración en el plano del número de onda complejo.

Finalmente, al aplicar el teorema de los residuos al camino de integración marcado en la figura 2.2, las integrales de las componentes del tensor de Green son evaluadas con la suma de residuos (Polos correspondientes a las ondas de Love y Rayleigh) e integrales sobre los cortes de rama en los límites de integración  $[0, \omega/\beta_N]$  y  $[0, +i\infty)$  (correspondiente a las ondas de cuerpo). Debido a la conjugación de  $f_{P-SV}^V(k)$ ,  $f_{P-SV}^H(k)$  y  $f_{SH}(k)$  entre ambos lados del eje imaginario, la integración en este último intervalo contribuirá solo a la parte real de los componentes del tensor de Green.

Para una función  $f(k)$  genérica cumpliendo las propiedades antes mencionadas (ver anexo II y III), las integrales se pueden reescribir como:

$$\int_0^{\infty} f(k) J_0(kr) dk = i\pi \sum \text{Res}[f(k)]_{k=k_m} H_0^{(1)}(k_m r) + \int_0^{k/\beta_N} \text{Re}[f(k)]_{4^{\text{th}}} H_0^{(1)}(kr) dk - i \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \text{Im}[f(ik)]_{2^{\text{do}}} K_0(kr) dk \quad (2.12)$$

donde  $m$  son todos los polos posibles de  $f(k)$  y los subíndices 4<sup>th</sup> y 2<sup>nd</sup> están especificando el cuadrante utilizado para la evaluación de  $v_{\alpha_N}$  y  $v_{\beta_N}$ . La ecuación (2.12) puede ser utilizada en las ecuaciones (2.7), (2.8) y (2.9), considerando que la fuente es coincidente con el receptor, es decir, tomando el límite  $r \rightarrow 0$ , obtenemos las componentes imaginarias del tensor de Green para el campo completo de ondas como (García-Jerez *et al.*, 2013):

$$Im[G_{11}(0,0;\omega)] = Im[G_{11}^{P-SV}(0,0;\omega)] + Im[G_{11}^{SH}(0,0;\omega)], \quad (2.13)$$

el cual:

$$Im[G_{11}^{P-SV}(0,0;\omega)] = -\frac{1}{4} \sum_{m \in \text{Rayleigh}} \chi_m^2 A_{Rm} + \frac{1}{4\pi} \int_0^{\omega/\beta_N} Re[f_{P-SV}^H(k)]_{4^{th}} dk, \quad (2.14)$$

$$Im[G_{11}^{SH}(0,0;\omega)] = -\frac{1}{4} \sum_{m \in \text{Love}} A_{Lm} + \frac{1}{4\pi} \int_0^{\omega/\beta_N} Re[f_{SH}(k)]_{4^{th}} dk, \quad (2.15)$$

sustituyendo las ecuaciones (2.14) y (2.15) en (2.13)

$$Im[G_{11}(0,0;\omega)] = \underbrace{-\frac{1}{4} \left[ \sum_{m \in \text{Rayleigh}} \chi_m^2 A_{Rm} + \sum_{m \in \text{Love}} A_{Lm} \right]}_{\text{Ondas Superficiales}} + \underbrace{\frac{1}{4\pi} \int_0^{\omega/\beta_N} Re([f_{P-SV}^V(k)]_{4^{th}} + [f_{SH}(k)]_{4^{th}}) dk}_{\text{Ondas de Cuerpo}} \quad (2.16)$$

Tomando en cuenta que la fuente presenta un ángulo colineal respecto a la dirección de los desplazamientos, se tiene la siguiente igualdad

$$Im[G_{22}(0,0;\omega)] = Im[G_{11}(0,0;\omega)], \quad (2.17)$$

y finalmente

$$Im[G_{33}(0,0;\omega)] = \underbrace{-\frac{1}{2} \sum_{m \in \text{Rayleigh}} A_{Rm}}_{\text{Ondas Superficiales}} + \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_0^{\omega/\beta_N} Re[f_{P-SV}^V(k)]_{4^{th}} dk}_{\text{Ondas de Cuerpo}} \quad (2.18)$$

Las variables  $A_{Rm}$  y  $A_{Lm}$  son las respuesta del medio para el  $m_{th}$  modos de Rayleigh y Love respectivamente (Harkrider, 1964) y  $\chi_m$  es la elipticidad para el  $m_{th}$  modos de Rayleigh. Considerando que la integración numérica está limitada en un rango  $[0, \omega/\beta_N]$ , es posible observar el cálculo de las componentes del tensor Green con la contribución de ondas de superficie y de las ondas de cuerpo se puede realizar por separado.

### 3.- Problema directo: análisis paramétrico del cociente $H/V$

A partir del desarrollo anterior, el cálculo de la FG para un medio estratificado permite obtener el cociente  $H/V$ . Desde el punto de vista teórico, estudiamos la respuesta de la FG y del cociente  $H/V$  de dos perfiles de velocidades que son relativamente simples.

El perfil de velocidades A consta de una capa sobre un semi-espacio mientras que el perfil de velocidades B contiene dos capas sobre un semi-espacio (figura 3.1). En la tabla 3.1 se muestran los valores de los parámetros elásticos para ambos perfiles.

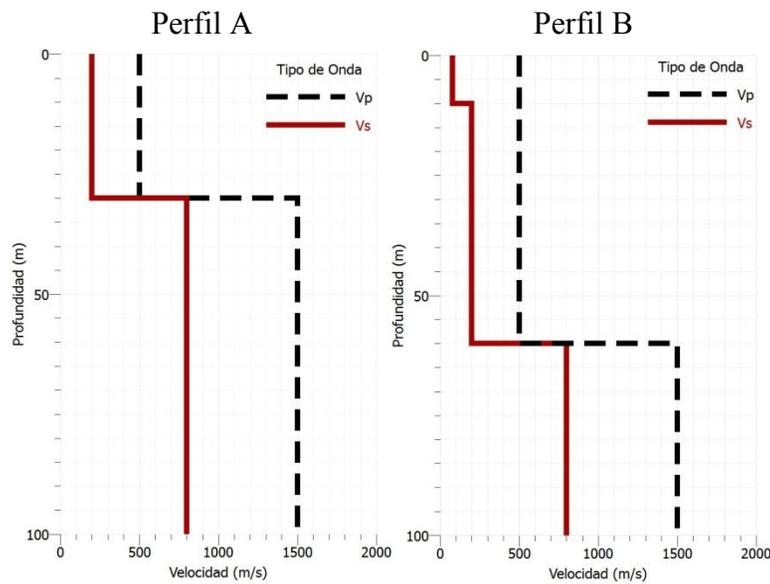


Figura 3.1.- Esquema de los perfiles de velocidades A (panel izquierdo) y B (Panel derecho)

Tabla 3.1.- Descripción de Modelos

Modelo A				Modelo B			
Espesor	$V_p$ (m/s)	$V_s$ (m/s)	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	Espesor	$V_p$ (m/s)	$V_s$ (m/s)	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )
30	500	200	2000	10	500	80	2000
$\infty$	1500	800	2000	50	500	200	2000
				$\infty$	1500	800	2000

En la figura 3.2 se presentan las partes imaginarias de la FG (resp. horizontal y vertical) para el perfil A en función de la frecuencia. El panel izquierdo muestra ambas respuestas, teniendo en cuenta que estas FG exhiben un aumento suave a partir de la frecuencia cero. Esto sugiere que no hay ninguna radiación a baja frecuencia. Cuando la frecuencia va en aumento, la respuesta vertical llega a rebasar la respuesta horizontal en una banda de frecuencias. Posteriormente surge una tendencia creciente lineal dependiente de la frecuencia.

La respuesta horizontal muestra saltos en las frecuencias resonantes de la capa (1.9, 3.6, 5.5 Hz). Este comportamiento puede ser explicado por el hecho de que más de 2/3 de la energía inyectada en el medio por una carga horizontal se realiza mediante ondas de corte; por lo tanto, las resonancias consiguientes muestran un aumento en su amplitud en función de la frecuencia resonante. La respuesta vertical del primer pico no tiene un significado claro mostrando una dependencia con velocidad de onda P en el estrato; sin embargo, cuando la frecuencia aumenta,  $\text{Im}[G_{33}(0,0;\omega)]$  se comporta como función lineal dependiente de la frecuencia en la misma forma que la solución para un semi-espacio con las propiedades de la capa superior. Estos son los resultados deterministas para las particiones de energía en un semi-espacio debido a fuerzas aplicadas en la superficie (Sánchez-Sesma *et al.*, 2011b).

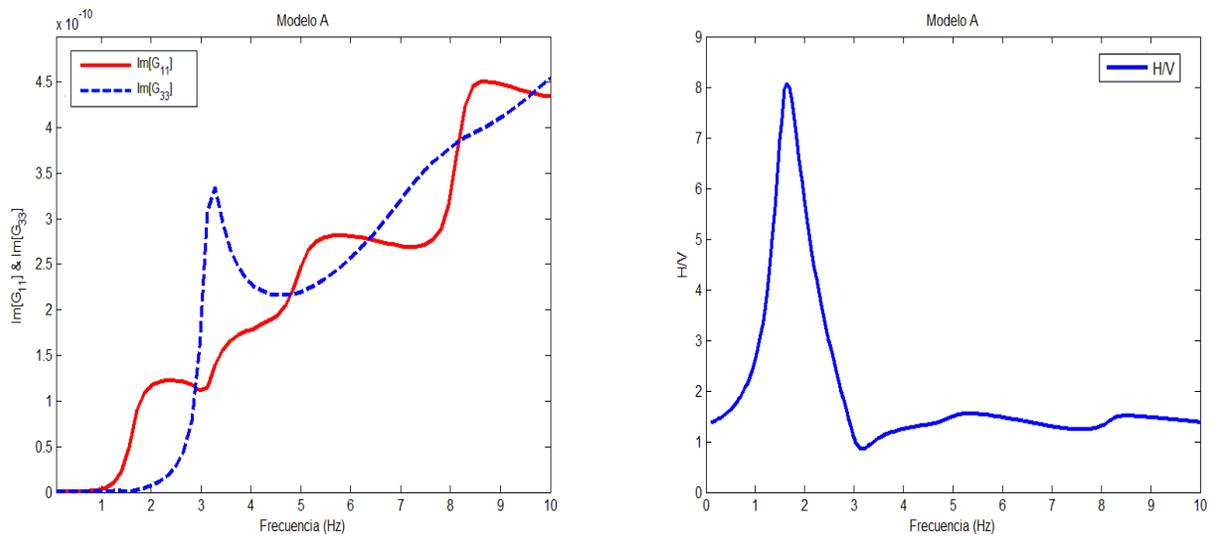


Figura 3.2.- En el panel izquierdo se muestran las partes imaginarias de las FG de la respuesta vertical y horizontal en función de la frecuencia. La línea continua corresponde a la respuesta horizontal y la línea punteada corresponde a la respuesta vertical para el perfil A. El panel derecho muestra el cociente  $H/V$  en función de la frecuencia.

El cociente  $H/V$  se presenta en el panel derecho de la figura 3.2. Claramente se ve un pico en torno a la frecuencia de resonancia de la capa superficial con respecto al semi-espacio  $f_0 \approx (V_s/4h)=1.66\text{Hz}$ . Puesto que el pico proviene del cociente de dos funciones crecientes, las manifestaciones de modos superiores son minimizadas.

En la figura 3.3, las partes imaginarias de las FG para el perfil B se representan en función de la frecuencia. En el panel izquierdo, ambas respuestas muestran en general un comportamiento similar al del modelo A. La respuesta horizontal muestra dos saltos en las frecuencias de 2.5 y 6.0 Hz. Por otro lado, la respuesta vertical muestra dos picos; el primero se presenta en la frecuencia de 1.6 Hz y el segundo en 3.8 Hz. Estos picos se corresponden con los mínimos del cociente  $H/V$ .

El cociente  $H/V$  se presenta en función de la frecuencia en el panel derecho de la figura 3.3. Este cociente exhibe claramente un pico en la frecuencia de resonancia  $f_0 \approx (V_m/4(h_1 + h_2))=0.67\text{Hz}$ , que es consecuencia de la resonancia conjunta de las dos capas sobre el semiespacio (calculada a partir del tiempo de viaje de la onda S vertical a lo largo de las dos capas, donde  $V_m = (h_1 + h_2)/(h_1/V_{s1} + h_2/V_{s2})$ ). El segundo pico muestra la frecuencia de resonancia  $f_0 \approx (V_s/4h)=2\text{Hz}$  (donde  $V_s$  y  $h$  son las propiedades elásticas de la capa superficial), que es consecuencia de la resonancia de la capa superficial respecto a la capa subsecuente. Al igual que el caso anterior, tomando en cuenta que el pico proviene del cociente de dos funciones crecientes, las manifestaciones de los modos superiores son minimizadas.

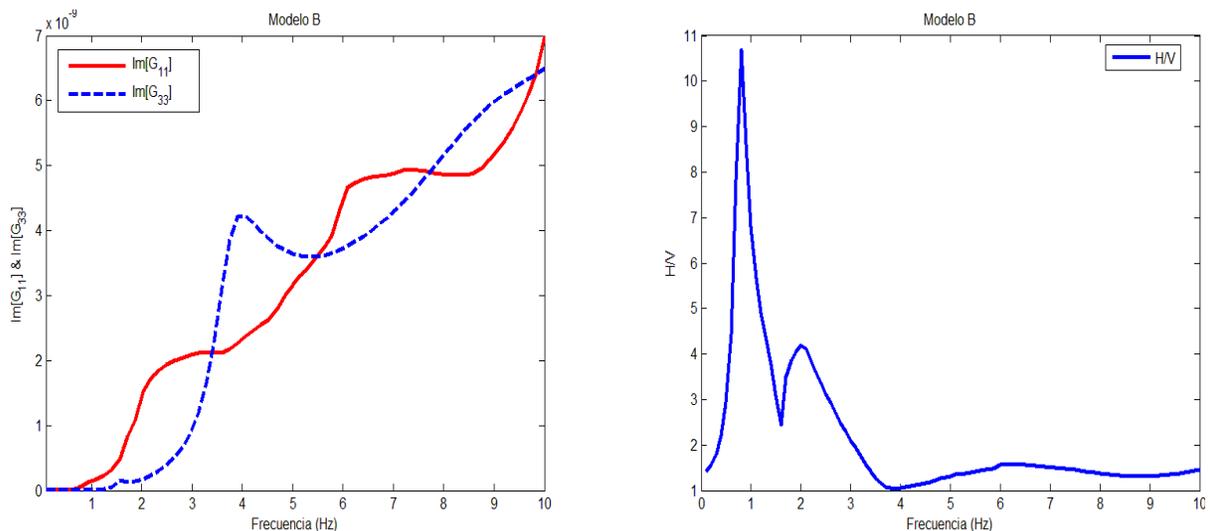


Figura 3.3.- En el panel izquierdo se muestran las partes imaginarias de las Funciones de Green en función de la frecuencia, la línea continua corresponde a la respuesta horizontal y la línea punteada corresponde a la respuesta vertical para el perfil B. El panel derecho muestra el cociente  $H/V$  en función de la frecuencia.

Con el objetivo de caracterizar la influencia de cada uno de los parámetros elásticos de un medio estratificado sobre el cociente  $H/V$ , se realiza un análisis paramétrico considerando un modelo de una capa sobre un semi-espacio (figura 3.4). Este análisis paramétrico consiste en la variación de todos y cada uno de los parámetros elásticos individualmente considerando los demás constantes. Este análisis se centra en observar principalmente el comportamiento del valor de la amplificación del máximo pico del cociente  $H/V$ , la frecuencia de máxima amplitud  $F_s$  y el valor de la frecuencia de mínima amplitud  $F_p$ .

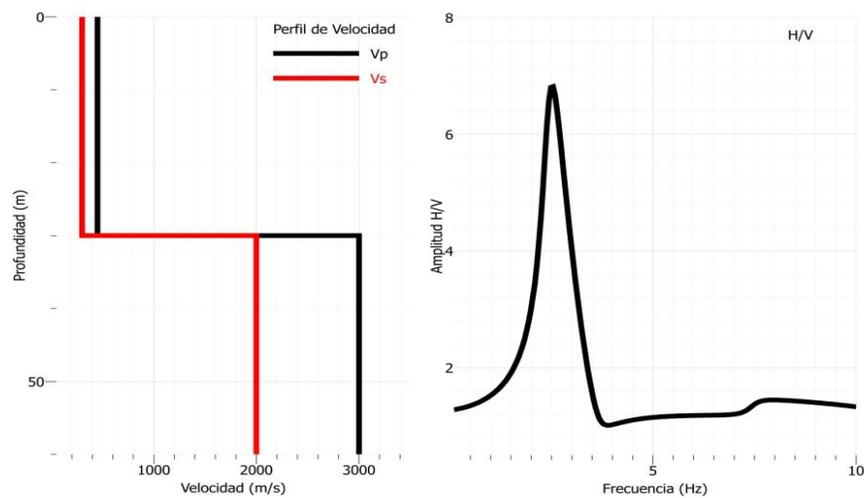


Figura 3.4.- Esquema del perfil de velocidades (panel izquierdo) y el cociente  $H/V$  correspondiente al perfil de velocidades en función de la frecuencia (Panel derecho).

Los parámetros de variación para el análisis son los siguientes:

- a) velocidad  $V_p$  del semi-espacio.
- b) velocidad  $V_s$  del semi-espacio.
- c) densidad  $\rho$  del semi-espacio.
- d) velocidad  $V_p$  de la capa superficial.
- e) velocidad  $V_s$  de la capa superficial.
- f) densidad  $\rho$  de la capa superficial.
- g) espesor  $h$  de la capa superficial.

La variación de los parámetros de velocidad  $V_p$  y  $V_s$  de la capa superficial y del semi-espacio (figura 3.4) se realizó mediante la relación del coeficiente de Poisson ( $\nu$ ), el cual relaciona las velocidades  $V_p$  y  $V_s$ . Los valores de las velocidades  $V_p$  y  $V_s$  se obtuvieron al variar  $\nu$  dentro del rango de valores de (0.05-0.49) manteniendo  $V_p$  y  $V_s$  constante (según sea el caso) a partir de las siguientes ecuaciones:

$$V_s = V_p \sqrt{\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}} \quad (3.2)$$

$$V_p = V_s \sqrt{\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}} \quad (3.1)$$

A continuación se realiza el análisis de los puntos anteriores.

*a) Variación del parámetro de velocidad  $V_p$  del semi-espacio.*

En la figura 3.5 se observan los cocientes  $H/V$  para diferentes valores de velocidad  $V_p$  del semi-espacio. Los cocientes  $H/V$  muestran un aumento en la amplitud del máximo pico localizado en la frecuencia de 2.5 Hz cuando aumenta la velocidad  $V_p$  del semi-espacio. Para frecuencias superiores a 4 Hz, el comportamiento de la curva del cociente  $H/V$  es independiente de  $V_p$ . En el panel derecho superior de la figura 3.5 se observa que la variación de la amplitud del cociente  $H/V$  es cuasi lineal con respecto a  $\nu$  y en consecuencia con  $V_p$ . Por otro lado, las frecuencias  $F_s$  y  $F_p$  son independientes de  $V_p$  (panel inferior derecho).

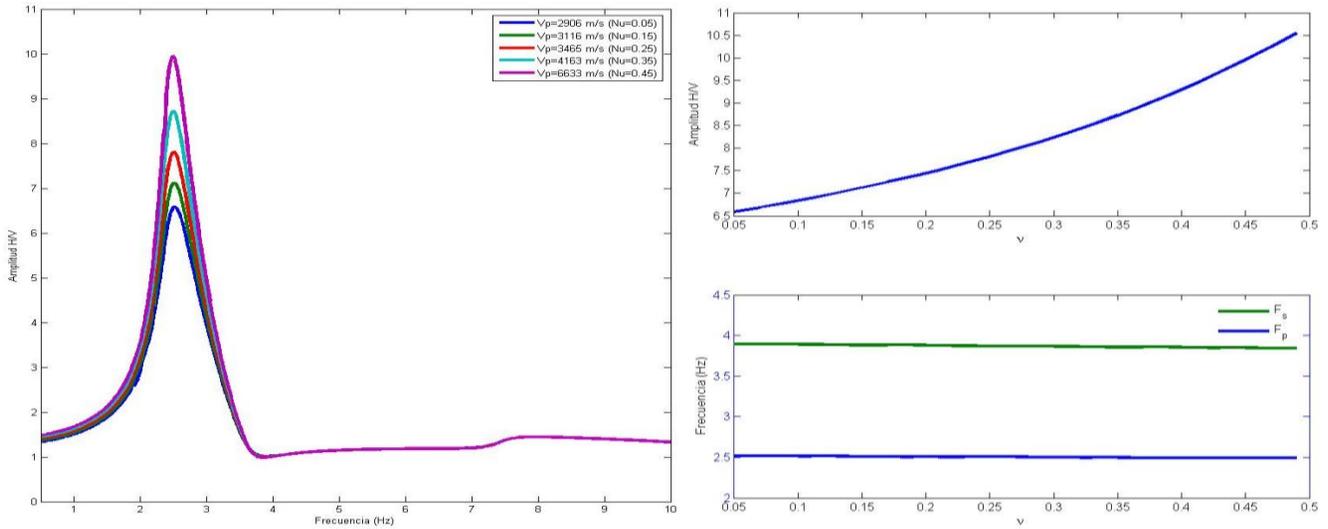


Figura 3.5.- En el panel izquierdo se presentan los cocientes  $H/V$  en función de la frecuencia para diferentes valores del parámetro  $V_p$  exhibiendo un aumento considerable en la amplitud. En el panel derecho superior se muestra el comportamiento de la amplitud del cociente  $H/V$  en función de  $\nu$ . En el panel derecho inferior se muestra el comportamiento de las frecuencias  $F_s$  y  $F_p$  del cociente  $H/V$  en función de  $\nu$ .

*b) Variación del parámetro de velocidad  $V_s$  del semi-espacio.*

En la figura 3.6 se observan los cocientes  $H/V$  para diferentes valores de velocidad  $V_s$  del semi-espacio. Estos cocientes  $H/V$  muestran un aumento en la amplitud del máximo pico en la frecuencia de 2.5 Hz cuando la velocidad  $V_s$  del semi-espacio crece. Para frecuencias superiores a 5 Hz, el comportamiento de la curva del cociente  $H/V$  es independiente de  $V_s$ . En el panel derecho superior de la figura 3.6 se observa que la amplitud decrece con respecto a  $\nu$ . Sin embargo, en términos de  $V_s$ , la amplitud del cociente  $H/V$  se comporta de manera creciente. Por otro lado, las frecuencias  $F_s$  y  $F_p$  son independientes de  $V_s$  de semi-espacio (vea panel derecho inferior de la figura 3.6).

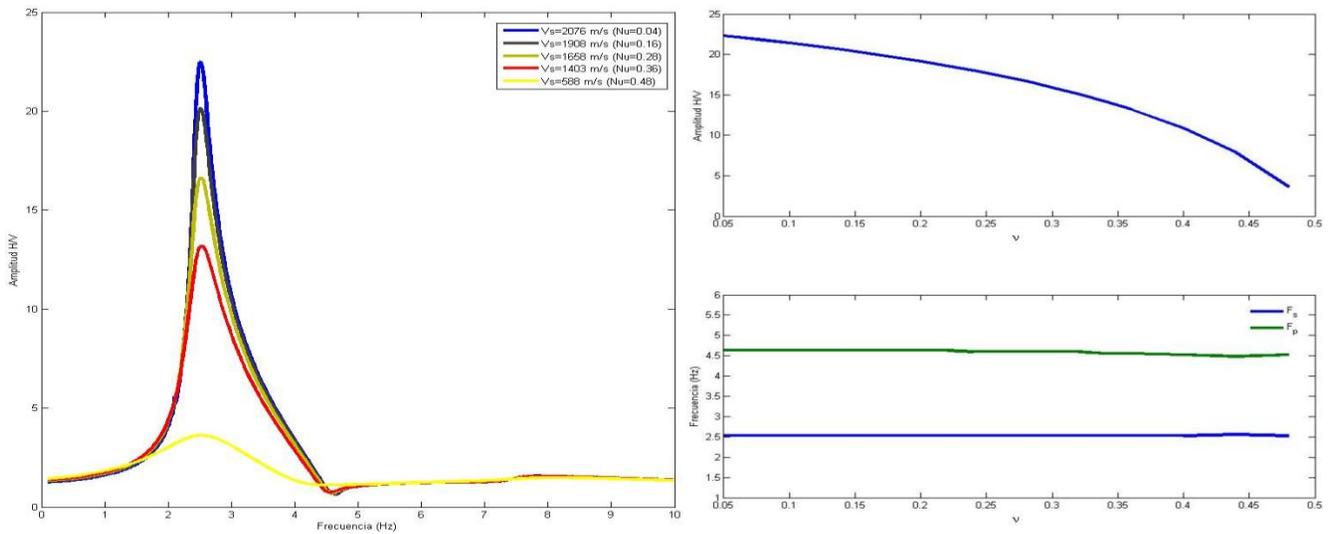


Figura 3.6.- En el panel Izquierdo se presentan los cocientes  $H/V$  en función de la frecuencia para diferentes valores del parámetro  $V_s$  exhibiendo un aumento en la amplitud cuando la velocidad crece. En el panel derecho superior se muestra el comportamiento de la amplitud del cociente  $H/V$  en función de  $\nu$ . En el panel derecho inferior se muestra el comportamiento de las frecuencias de  $F_s$  y  $F_p$  del cociente  $H/V$  en función de  $\nu$ .

*c) Variación del parámetro de densidad  $\rho$  del semi-espacio.*

La variación del parámetro de densidad  $\rho$  del semi-espacio (figura 3.4) se realizó dentro del rango de valores de (1100-3600 kg/m<sup>3</sup>). En la figura 3.7 se observan los cocientes  $H/V$  para diferentes valores de  $\rho$  del semi-espacio, los cuales muestran un aumento en la amplitud del máximo pico en la frecuencia de 2.5 Hz cuando la densidad del semi-espacio crece. El comportamiento de la curva del cociente  $H/V$  es independiente de  $\rho$  para frecuencias superiores a 4 Hz. Por otro lado, las frecuencias  $F_s$  y  $F_p$  son dependientes de  $\rho$  del semi-espacio modificando estos valores de manera suave (panel inferior derecho de la figura 3.7).

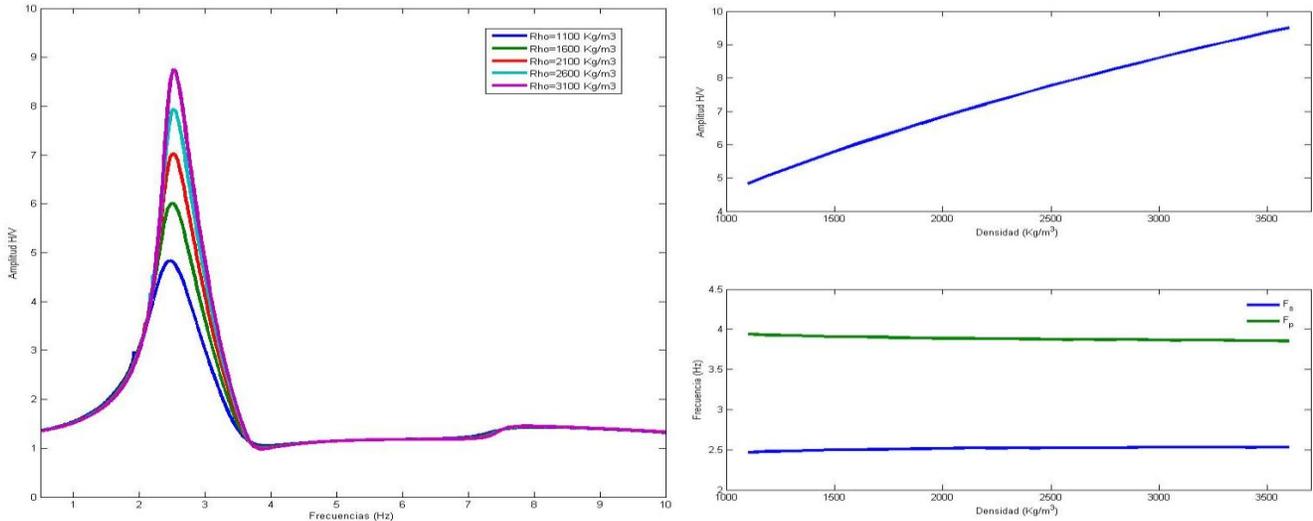


Figura 3.7.- En el panel Izquierdo se presentan los cocientes  $H/V$  en función de la frecuencia para diferentes valores del parámetro densidad  $\rho$  del semi-espacio exhibiendo un aumento en la amplitud cuando está crece. En el panel derecho superior se muestra el comportamiento de la amplitud del cociente  $H/V$  en función de  $\rho$ . En el panel derecho inferior se muestra el comportamiento de las frecuencias  $F_s$  y  $F_p$  del cociente  $H/V$  en función de  $\rho$ .

*d) Variación del parámetro de velocidad  $V_p$  de la capa superficial.*

En la figura 3.8 se observan los cocientes  $H/V$  para diferentes valores de velocidad  $V_p$ . Estos cocientes muestran un aumento considerable en la amplitud del máximo pico cuando la velocidad  $V_p$  de la capa superficial aumenta y modifica las frecuencias  $F_s$  y  $F_p$ . Para todo el espectro de frecuencias, el comportamiento de la curva del cociente  $H/V$  es dependiente de  $\nu$  y en consecuencia, dependiente de  $V_p$ . En el panel derecho superior de la figura 3.8 se observa que la amplitud del cociente  $H/V$  es creciente para  $\nu$  inferior a 0.38, presentando el valor de máxima amplitud en este valor. Para  $\nu$  superior a 0.38, la amplitud decrece de manera suave, lo cual demuestra que el comportamiento de la amplitud no es lineal con respecto a  $\nu$ . Por otra parte,  $V_p$  modifica considerable las frecuencias  $F_s$  y  $F_p$ . La frecuencia  $F_p$  presenta una variación creciente con  $\nu$  para todo el intervalo. Por otro lado, el comportamiento de la frecuencia  $F_s$  es suavemente creciente para  $\nu$  inferior a 0.25 y suavemente decreciente para  $\nu$  superior a 0.25 (panel inferior derecho).

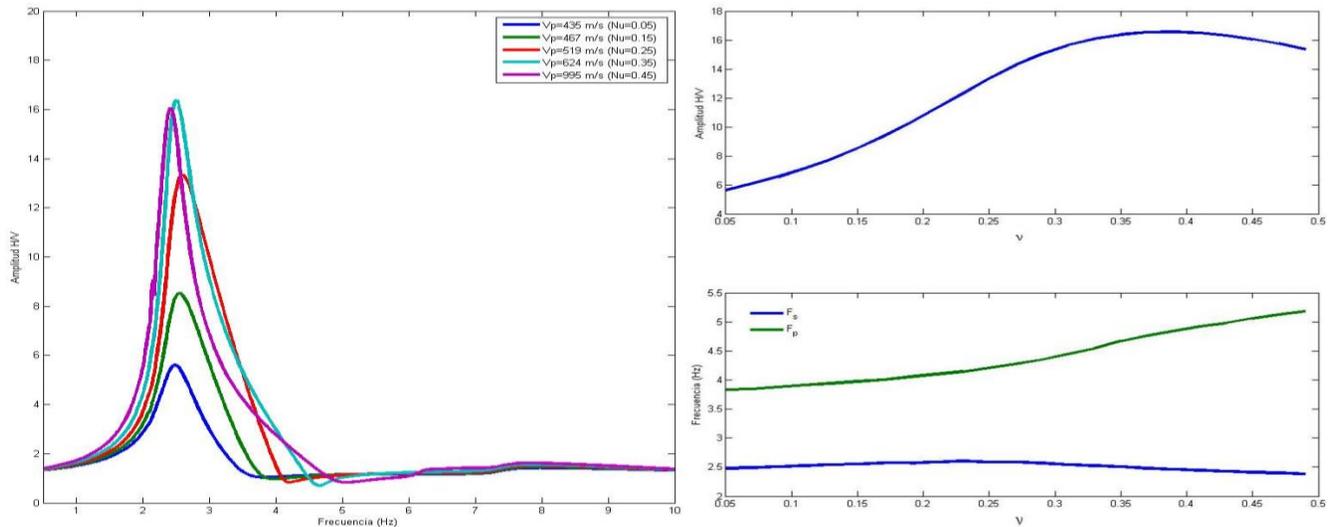


Figura 3.8.- En el panel Izquierdo se presentan los cocientes  $H/V$  en función de la frecuencia para diferentes valores del parámetro  $V_p$  de la capa superficial. Estos cocientes exhiben un aumento considerable en la amplitud cuando la velocidad crece y diferentes valores de las frecuencias  $F_s$  y  $F_p$ . En el panel derecho superior se muestra el comportamiento de la amplitud del cociente  $H/V$  en función de  $\nu$ . En el panel derecho inferior se muestra el comportamiento de las frecuencias  $F_s$  y  $F_p$  del cociente  $H/V$  en función de  $\nu$ .

e) *Variación del parámetro de velocidad  $V_s$  de la capa superficial.*

En la figura 3.9 se observan los cocientes  $H/V$  para diferentes valores de velocidad  $V_s$ . Estos cocientes  $H/V$  muestran un aumento considerable en la amplitud del máximo pico y en las frecuencias  $F_s$  y  $F_p$ . En el panel derecho superior de la figura 3.9 se observa que la amplitud es creciente con respecto a  $\nu$  y en consecuencia, es decreciente con respecto a  $V_s$ . El cociente  $H/V$  depende de  $V_s$  en todo el espectro. Por otro lado, la frecuencia  $F_p$  decrece de forma lineal en función de  $\nu$  para valores inferiores a 0.35 mientras que para valores de  $\nu$  superiores a 0.35, la frecuencia  $F_p$  decrece de forma no lineal. Por otra parte, la frecuencia  $F_s$  decrece siempre de manera suave en función de  $\nu$  (vea panel derecho inferior de la figura 3.9).

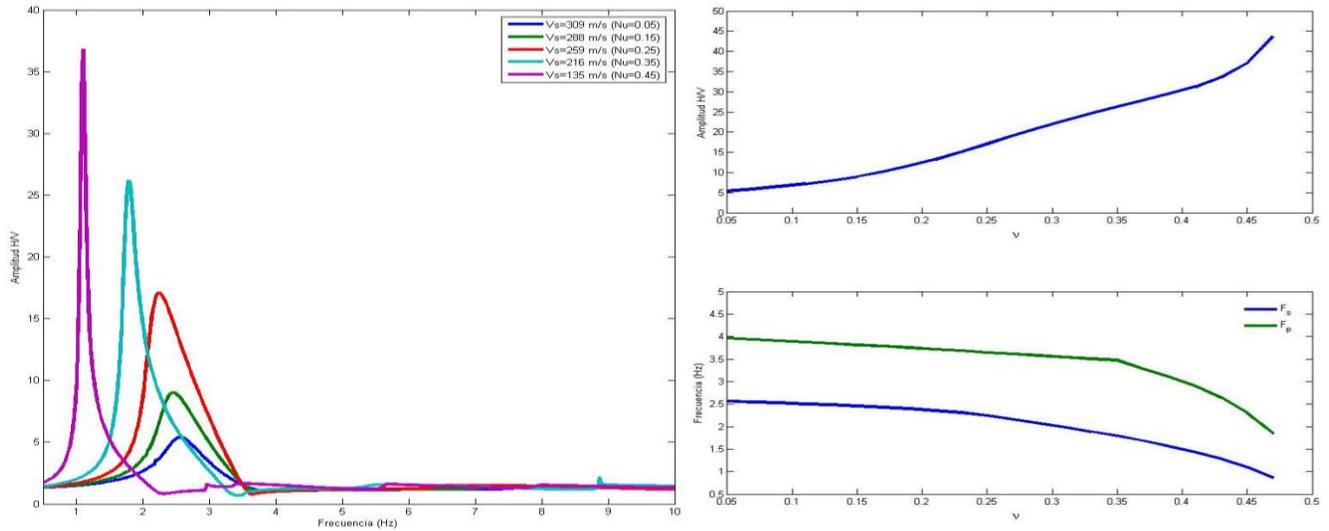


Figura 3.9.- En el panel izquierdo se presentan los cocientes  $H/V$  en función de la frecuencia para diferentes valores del parámetro  $V_s$  de la capa superficial, estos cocientes exhiben un aumento considerable en la amplitud al bajar la velocidad y diferentes valores de la frecuencia  $F_s$  y  $F_p$ . En el panel derecho superior se muestra el comportamiento de la amplitud del cociente  $H/V$  en función de  $\nu$ . En el panel derecho inferior se muestra el comportamiento de las frecuencias  $F_s$  y  $F_p$  del cociente  $H/V$  en función de  $\nu$ .

*f) Variación del parámetro de densidad  $\rho$  de la capa superficial.*

La variación del parámetro de densidad  $\rho$  de la capa superficial (figura 3.4) se realizó dentro del rango de valores de  $(1100-3600 \text{ kg/m}^3)$ . En el panel izquierdo de la figura 3.10 se observan los cocientes  $H/V$  en función de  $\rho$  de la capa superficial. Estos cocientes  $H/V$  muestran un decrecimiento en la amplitud del máximo pico en la frecuencia de 2.5 Hz conforme a la densidad crece. Para frecuencias superiores a 4 Hz, el comportamiento de la curva del cociente  $H/V$  es independiente de  $\rho$ . Por otro lado, las frecuencias  $F_s$  y  $F_p$  son independientes de  $\rho$  (vea panel derecho inferior de la figura 3.10).

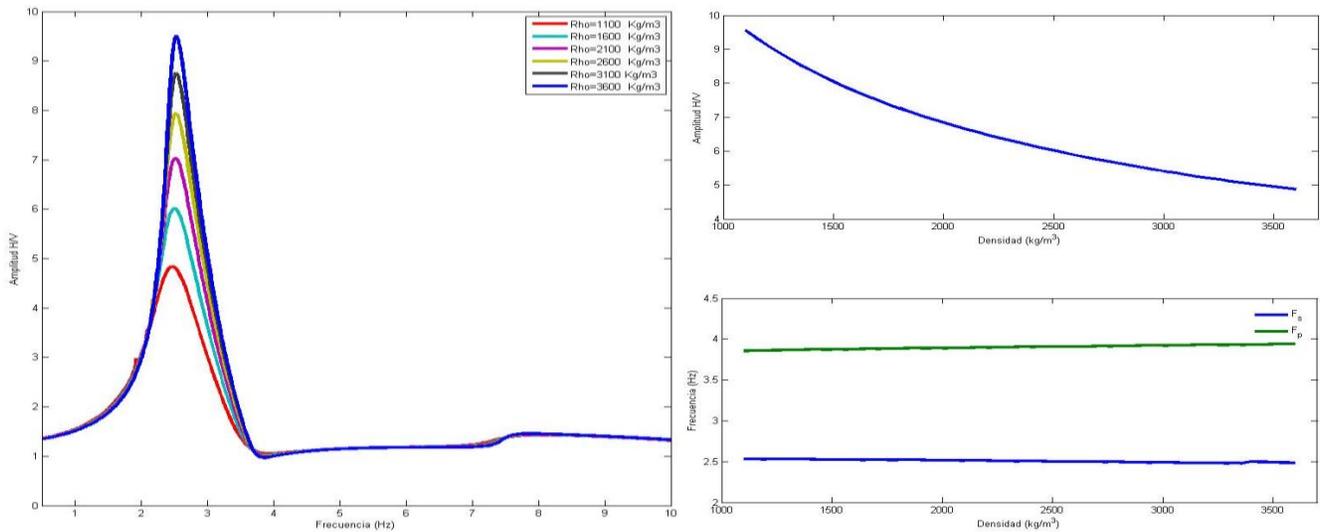


Figura 3.10.- En el panel izquierdo se presentan los cocientes  $H/V$  en función de la frecuencia para diferentes valores del parámetro densidad  $\rho$  superficial exhibiendo un decrecimiento en la amplitud cuando aumenta la densidad. En el panel derecho superior se muestra el comportamiento de la amplitud del cociente  $H/V$  en función de  $\rho$ . En el panel derecho inferior se muestra el comportamiento de las frecuencias  $F_s$  y  $F_p$  del cociente  $H/V$  en función de  $\rho$ .

*g) Variación del parámetro de espesor  $h$  de la capa superficial.*

La variación del parámetro de espesor  $h$  de la capa superficial (figura 3.4) se realizó dentro del rango de valores de (20-90 m). En el panel izquierdo de la figura 3.11 se observa que la amplitud del máximo pico es independiente de  $h$ . Sin embargo, este parámetro  $h$  presenta considerable dependencia en las frecuencias  $F_s$  y  $F_p$  presentando un comportamiento decreciente (vea panel derecho inferior de la figura 3.11). Para todo el espectro de frecuencias, el cociente  $H/V$  es dependiente de  $h$ .

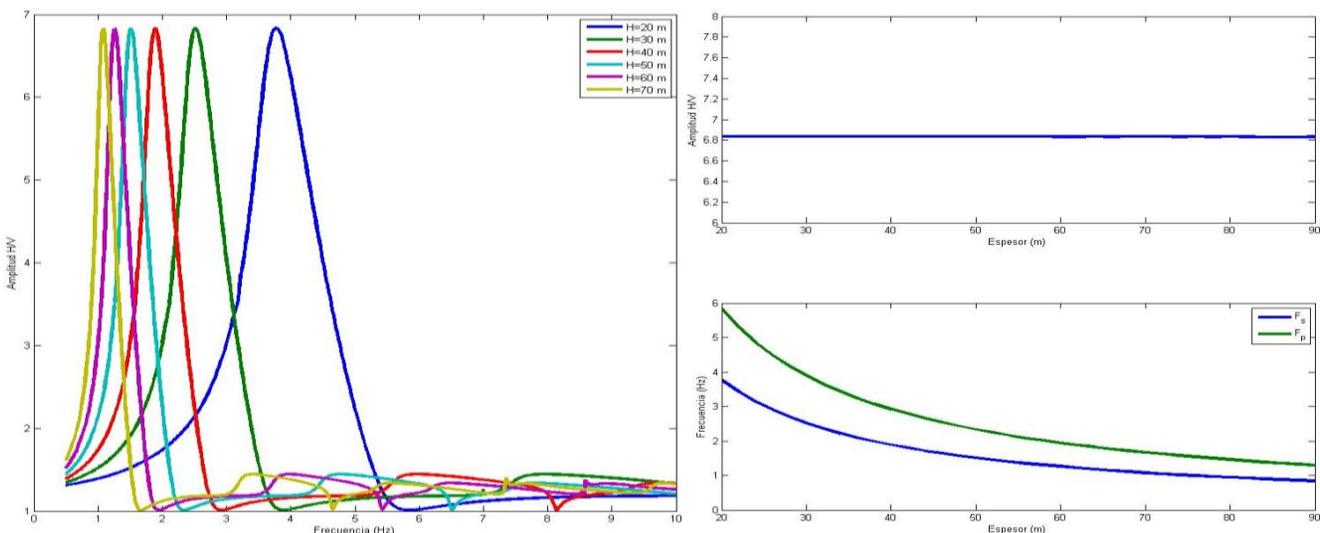


Figura 3.11.- En el panel izquierdo se presentan los cocientes  $H/V$  en función de la frecuencia para diferentes valores de  $h$  de la capa superficial, estos cocientes no exhiben un cambio en la amplificación del máximo pico, sin embargo, modifica considerablemente los valores de la frecuencia  $F_s$  y  $F_p$ . En el panel derecho superior se muestra el comportamiento de la amplitud del cociente  $H/V$  en función de  $h$ . En el panel derecho inferior se muestra el comportamiento de las frecuencias  $F_s$  y  $F_p$  del cociente  $H/V$  en función de  $h$ .

En resumen, los parámetros estudiados tienen diferente grado de influencia sobre el cociente  $H/V$ . Especialmente, el valor de amplitud del pico máximo tiene un comportamiento creciente dependiente de los parámetros del semi-espacio ( $V_p$ ,  $V_s$  y  $\rho$ ), mientras que las frecuencias  $F_s$  y  $F_p$  son poco dependientes de estos parámetros.

Con respecto a los parámetros de la capa superficial, la amplitud del pico máximo del cociente  $H/V$  es dependiente de  $V_p$  y  $\rho$  modificando la amplitud de forma no monótonamente creciente en el primer caso y decreciente en el segundo. La amplitud del máximo pico también es dependiente  $V_s$ , sin embargo, este parámetro modifica la amplitud de forma decreciente mientras que el parámetro  $h$  es el único que no modifica la amplitud del cociente  $H/V$ .

Con respecto a la variación de los valores de la frecuencia  $F_s$  y  $F_p$ , sólo los parámetros  $V_s$ ,  $V_p$  y  $h$  de la capa superficial tiene influencia considerable en las frecuencias de máxima y mínima amplitud del cociente  $H/V$ . En una primera aproximación, la frecuencia  $F_s$  de la máxima amplitud del cociente  $H/V$  se puede calcular a partir de la relación:

$$F_s \approx \frac{V_s}{4h} \quad (3.3)$$

El parámetro  $V_p$  de la capa superficial tiene una mayor influencia en el valor de la frecuencia  $F_p$  con respecto al parámetro  $V_s$ . En una primera aproximación, la frecuencia  $F_p$  de la mínima amplitud del cociente  $H/V$  se puede calcular a partir de la siguiente ecuación:

$$F_p \approx \frac{V_p}{4h} \quad (3.4)$$

Cabe señalar que la aproximación de la frecuencia  $F_p$  es aceptable para coeficientes de Poisson ( $\nu$ ) menores a 0.35, esto se debe a que la frecuencia  $F_p$  tiene dependencia no lineal con los parámetros  $V_s$ ,  $V_p$  y  $h$  de la capa superficial.

A partir de este análisis paramétrico se establece que el cociente espectral  $H/V$  es un problema no lineal y considerarse un problema multiparamétrico.

## 4.- Métodos de Inversión

El cociente  $H/V$  posee información del medio donde se propagan las ondas elásticas. Esta información es posible extraerla a través de un proceso de inversión del cociente  $H/V$  para medios estratificados. Como se presentó en el capítulo 3, el cálculo del cociente  $H/V$  es un problema fuertemente no lineal y multi-paramétrico, por lo que la solución inversa del cociente  $H/V$  a partir de un método lineal implica una fuerte dependencia del modelo inicial escogido (Iglesias, 2000). Con los métodos de inversión global es posible resolver el problema sin usar ninguna linealización. Utilizando poco conocimiento previo sobre la solución, estos métodos poseen la capacidad de buscar entre una gran cantidad de combinaciones de los parámetros el modelo que mejor ajuste a la función objetivo (García-Jerez, 2010).

El método de inversión aplicado en este trabajo es denominado *Simulated Annealing* (SA por sus siglas en inglés). Este método está inspirado en un proceso termodinámico de la materia: la cristalización; el cual utiliza conceptos originalmente descritos por la mecánica estadística (Kirkpatrick *et al.*, 1983). En analogía, si un fluido mineral decrece su temperatura lentamente, este alcanzará un estado de energía óptimo que dará lugar a la formación de cristales bien definidos; por el contrario, si el fluido mineral se enfría abruptamente, el proceso dará lugar a formación de cristales irregulares o vidrios.

### 4.1.- Cristalización simulada (Simulated Annealing)

El algoritmo de cristalización simulada (*SA*) consiste en una búsqueda de combinaciones de parámetros por entornos donde se seleccionan aleatoriamente modelos candidatos que sustituyen a la solución actual siempre cuando la mejoren (disminuye el valor de la función de costo). De lo contrario, el nuevo modelo estará condicionado a sustituir la solución actual en función de una probabilidad  $P$ . Esta probabilidad  $P$  decrece según aumenta la diferencia (positiva en este caso) entre las funciones objetivo de la solución candidata y la actual (Iglesias 2000). Aceptando que los diferentes modelos (“estados de sistema”) en el espacio de soluciones (sistema) tienen una distribución de probabilidad de Boltzmann:

$$Z = \sum_j e^{\left(\frac{-\Delta E(j)}{T}\right)}, \quad (4.1)$$

la probabilidad de que el sistema se encuentre en el estado  $j$  es dada por:

$$P(j) = \frac{1}{Z(j)} e^{\left(\frac{-\Delta E(j)}{T}\right)}, \quad (4.2)$$

donde  $T$  es la temperatura del sistema y  $\Delta E(j)$  es la diferencia entre las funciones de costo para la solución  $j$ .

Para un conjunto  $S$  de soluciones posibles del sistema y una función de costo  $E$  (“energía del sistema”) sobre los elementos de  $S$ , se quiere encontrar un elemento en  $S$  que minimice la función de costo (análogamente, un estado en el cual la energía del sistema sea mínima). Como ya hemos señalado anteriormente, el método de inversión SA ha sido elegido en este trabajo por su simplicidad y porque resuelve el problema sin usar ninguna linealización.

La descripción del método SA requiere las definiciones de 9 elementos básicos:

- a) *Población inicial.*
- b) *Radio de búsqueda.*
- c) *Perturbación de parámetros.*
- d) *Cadenas de Márkov.*
- e) *Función de costo.*
- f) *Criterio de aceptación.*
- g) *Parámetro de temperatura  $T$ .*
- h) *Parámetro de enfriamiento  $R$ .*
- i) *Información a priori.*

A continuación se explican los puntos anteriores:

- a) *Población Inicial*

El concepto de Población inicial surge de los algoritmos genéticos (GA por sus siglas en ingles) que

son considerados como una herramienta muy robusta para la exploración del espacio de los modelos (Holland, 1975; Goldberg, 1989; Whitley, 1994). El funcionamiento de éstos pretende mimetizar el proceso de evolución biológica natural (ver p. e. Sambridge y Mosegaard, 2002; Tarantola, 2005).

La generación de una población inicial en todo el espacio de parámetros (modelos) tiene el objetivo de realizar una exploración preliminar y localizar la(s) zona(s) más prometedoras. A partir de una generación de modelos (población inicial) con probabilidad uniforme en los intervalos previamente definidos, se selecciona el elemento con un desajuste menor. Este será el modelo inicial o punto de partida para el método SA.

b) *Radio de búsqueda  $V_{RB}$ .*

El vector de radio de búsqueda  $V_{RB}$  controla la zona en torno al modelo actual en la que se buscará el siguiente modelo. Este vector contiene las distancias máximas de búsqueda y permite controlar el tamaño de las perturbaciones de los parámetros durante el proceso de iteración en las cadenas de Márkov (Yepes, 2009). Este vector se calcula a partir de los límites inferior y superior definidos para cada parámetro como:

$$V_{RB} = \begin{bmatrix} m_{1\max} - m_{1\min} \\ m_{2\max} - m_{2\min} \\ \cdot \\ \cdot \\ m_{n\max} - m_{n\min} \end{bmatrix} * R/100, \quad (4.3)$$

donde  $m_{n\min}$  es el valor límite inferior de cada parámetro;  $m_{n\max}$  es el valor límite superior de cada parámetro y  $R$  es el porcentaje proporcional de perturbación.

c) *Perturbación de Parámetros.*

El conjunto de parámetros perturbados  $\bar{m}_{trial}$  viene dado por la adición del conjunto de parámetros actual y del producto de un número aleatorio entre -1 y 1 por el vector de radio de búsqueda:

$$\vec{m}_{trial} = \begin{bmatrix} m_1 + (V_{RB}(1) * rand) \\ m_2 + (V_{RB}(2) * rand) \\ m_3 + (V_{RB}(3) * rand) \\ \vdots \\ m_n + (V_{RB}(n) * rand) \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

donde  $m_n$  es cada parámetro individual del modelo y  $rand$  es un número aleatorio entre -1 y 1.

Si algún parámetro  $m_n$  tiene distancias a  $m_{nmin}$  o  $m_{nmax}$  menores que el radio de búsqueda, se redefine el intervalo de generación de números aleatorios para evitar que  $\vec{m}_{trial}$  se salga de los intervalos establecidos.

d) *Cadenas de Márkov.*

Un proceso o cadena de Márkov se describe como un fenómeno aleatorio dependiente del tiempo. En un proceso estocástico con la propiedad de Márkov (sin memoria) el futuro y pasado del sistema son independientes, es decir, tienen la característica general de que las observaciones futuras solo dependen del presente y no del pasado (Palafox, 2009).

Por tanto, un proceso estocástico  $Pr\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una cadena de Márkov si satisface la condición:

$$Pr\{X_{n+1} = j | X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i\} = Pr\{X_{n+1} = j | X_n = i\} \quad (4.5)$$

Es por consiguiente una sucesión de variables aleatorias tal que para cualquier  $n \in N$  (donde  $N$  es el conjunto de números naturales), la distribución de  $X_{n+1}$  es condicionalmente independiente de  $X_0, \dots, X_{n-1}$  dado  $X_n$ . Adquiriendo la suposición de que la propiedad de Márkov es válida para construir modelos sucesivos en nuestro proceso de inversión.

e) *Función de Costo.*

La función de costo  $\Gamma$  mide la bondad de una solución. Dicha función es una medida asociada a todos los parámetros de una determinada solución. Uno de los objetivos que deben guiar el desarrollo de la función de costo es que esta describa los cambios de costo entre una solución y un modelo vecino. Si la función objetivo presenta una topografía muy plana, al generar nuevas soluciones, la función de costo

no variará para muchos de ellos, impidiendo diferenciarlas. Guo y Zheng (2005) definen la función de costo como:

$$\Gamma = f(d_{obs}, d_{teorico}) = \frac{1}{n} \sum \frac{(d_{obs} - d_{teorico})^2}{\sigma^2}, \quad (4.6)$$

donde  $d_{obs}$  es el vector de datos observados;  $d_{Teorico}$  es el vector de respuesta teórica (cálculo directo);  $\sigma$  es la desviación típica de los datos observados y  $n$  es el número de datos observados.

f) *Criterio de Aceptación.*

Cuando la evaluación de la función de costo del modelo perturbado  $\Gamma_{mo}$  mejora con respecto a la función de costo del modelo actual  $\Gamma_{act}$ , esto es  $(\Gamma_{mo} - \Gamma_{act}) < 0$ , el modelo modificado es aceptado incondicionalmente. De lo contrario el modelo es sometido al criterio de aceptación en función del parámetro de temperatura del proceso. Mientras más joven sea el proceso, mayor será este parámetro de temperatura y mayor será la probabilidad de que el modelo modificado sea aceptado. Cuando el proceso de inversión avance, el parámetro de temperatura será menor. En consecuencia, la probabilidad de aceptación de dicho modelo modificado de mayor costo disminuye. A partir del muestreo de la distribución de la ecuación (4.1), el criterio de aceptación se puede evaluar a partir de modelos sucesivos escogidos mediante el algoritmo de Metropolis-Hastings (Metropolis *et al.*, 1953; Hastings, 1970), donde este criterio de aceptación viene dado por:

$$P_{\Gamma}\{aceptar\} = \begin{cases} 1 & si \ \Delta E \leq 0 \\ e^{\left(\frac{-\Delta E}{T}\right)} & si \ \Delta E > 0 \end{cases}, \quad (4.7)$$

donde  $P_{\Gamma}\{aceptar\}$  es la probabilidad de aceptación;  $\Delta E = \Gamma_{mo} - \Gamma_{act}$  es el cambio de energía o costo y  $T$  es el parámetro de temperatura del proceso de inversión.

g) *Parámetro de temperatura T*

El parámetro de temperatura  $T$  afecta directamente en la probabilidad de aceptación de un modelo. La temperatura se mantiene constante para un número definido de movimientos en la *cadena de Márkov*.

Tras un grupo de iteraciones, se produce una reducción gradual de la temperatura, continuando la búsqueda de un modelo con ajuste. Una heurística de búsqueda no debería depender de la solución de partida (Yepes, 2009). Con lo anterior, sí el parámetro de temperatura es elevado, la probabilidad en la elección de soluciones peores es significativa. Cuando la temperatura es demasiado pequeña, la probabilidad de aceptación de soluciones también lo es. Por tanto se debería adoptar una temperatura inicial adecuada a cada problema. En este trabajo se propone que el parámetro de temperatura sea dependiente de la función de costo del modelo inicial. Con esta propuesta, se tiene un mayor control y manejo de la probabilidad de aceptación ( $P_\Gamma$ ) en relación de una constante relativa ( $\hat{k}$ ). A partir de la ecuación de probabilidad (4.2), el parámetro de temperatura  $T$  es dependiente de la probabilidad y de la función de costo:

$$T = \frac{-\Delta E}{\text{Ln}(P_\Gamma)} = \frac{-(\Gamma_{mo} - \Gamma_{act})}{\text{Ln}(P_\Gamma)} = \frac{(\Gamma_{act} - \Gamma_{mo})}{\text{Ln}(P_\Gamma)}, \quad (4.9)$$

donde se ha asumido:

$$\Gamma_{mo} > \Gamma_{act}, \quad (4.10)$$

definiendo la relación  $k$  entre las funciones de costo

$$\frac{\Gamma_{act}}{\Gamma_{mo}} = k \text{ donde } k \in (0,1), \quad (4.11)$$

y sustituyendo (4.11) en (4.9), finalmente se obtiene

$$T = \frac{(1 - (1/k))\Gamma_{act}}{\text{Ln}(P_\Gamma)} = -\frac{\hat{k}\Gamma_{act}}{\text{Ln}(P_\Gamma)}, \quad (4.12)$$

donde  $\Gamma_{act}$  es la función de costo del modelo inicial;  $P_\Gamma$  es la probabilidad de aceptación inicial de un modelo;  $P_\Gamma \in (0,1)$ ;  $\hat{k} > 0$  es el incremento relativo de la función de costo respecto a  $\Gamma_{act}$  que vamos

aceptar con probabilidad  $P_T$ .

Para fijar la temperatura inicial, es más intuitivo que el usuario introduzca los parámetros  $k$  y  $P_T$  y se calcule  $T$  mediante (4.12).

*h) Parámetro de enfriamiento.*

El parámetro de enfriamiento ( $RT$ ) controla el descenso paulatino de la temperatura, que disminuye progresivamente la probabilidad de aceptación de modelos con menor ajuste. Se ha considerado una velocidad de decaimiento geométrico (Pei, 2007; Iglesias, 2000; Yepes, 2009). Para cada parámetro de temperatura  $T$ , se ensaya una serie de variaciones del modelo que constituye una cadena de Márkov. Si las cadenas son largas y la reducción del parámetro de temperatura lenta, el resultado tiende a perder la dependencia en el modelo inicial, mejorando la exploración del espacio de modelos. Sin embargo, el tiempo de cálculo resulta considerablemente prolongado. Por ello, una elección conveniente en la longitud de la cadena de Márkov y del parámetro de enfriamiento es crucial en la obtención de una buena solución en tiempo razonable (debido a que el parámetro de temperatura es determinante en el criterio de Metropolis). El comportamiento del parámetro de temperatura  $T$  es dependiente al número de Cadenas de Márkov y del parámetro de enfriamiento  $RT$ , la cual se describe como:

$$T_{ic+1} = T_{ic} * RT, \quad (4.13)$$

donde  $T_{ic+1}$  es el parámetro de temperatura  $i$ -ésimo mas uno y  $T_{ic}$  es el parámetro de temperatura  $i$ -ésimo.

En analogía con la cristalización, la disminución lenta de la temperatura de un fluido mineral permite encontrar estados ordenados de baja energía, de tal manera que al final del proceso se tiene un cristal bien definido. Por el contrario, si sólo se aceptaran modelos cuya función de costo siempre es mejor que la del anterior, se tendría un alto riesgo de establecerse en un mínimo local. Esto sería equivalente a disminuir a cero la temperatura abruptamente y, por analogía con la cristalización, obtendríamos un estado de alta energía que podría corresponder a un vidrio con una estructura pobremente ordenada en sus moléculas.

i) *Información a priori.*

A partir de la información a priori sobre los parámetros en el espacio de soluciones, el conocimiento que se tiene del modelo tras el proceso de inversión, se puede cuantificar el grado de ajuste mediante la densidad de probabilidad  $\sigma_M(m)$ , que se expresa, en virtud del teorema de Bayes como la integral (ver Tarantola, 2005. Ec. 1.89; García-Jerez 2010, capítulo 4) como la integral:

$$\sigma_M(m) = cte \rho_M(m) \int_D fd \frac{P_\Gamma \Xi(d|m)}{\mu_D(d)} \quad (4.14)$$

La ecuación (4.14) proviene de una formulación muy general del problema inverso, donde  $\int_D fd$  es la integración en todo el espacio de los datos;  $P_\Gamma$  es la densidad de probabilidad (criterio de Metrópolis). La información a priori (probabilidad de que  $m$  sea el modelo verdadero, conocida por otros medios) viene descrita por la distribución  $\rho_M(m)$ , y con esta información, se puede acotar el problema asignando los valores máximos y mínimos de cada parámetro. La distribución de probabilidad condicional  $\Xi(d|m)$  es simplemente  $\delta(d_{obs} - d_{teorico})$  siempre y cuando, cada modelo  $m$  le correspondan unos valores teóricos unívocos  $d_{teorico}$  de las magnitudes medidas y  $\mu_D(d)$  es la densidad de probabilidad homogénea en el espacio de los datos (Tarantola, 2005).

En la figura IV.1 del anexo IV se muestra el diagrama de flujo que describe el método de SA.

## 4.2.- Método de Cristalización simulada modificada

Con el fin de aprovechar recursos computacionales (programación en paralelo), en este trabajo se implementan algunas modificaciones al algoritmo de SA. Las modificaciones importantes se centran en el criterio del *parámetro de enfriamiento* (ecuación (4.13)), así como la implementación de un nuevo parámetro llamado *parámetro de ajuste de temperatura* y el elemento de *Población inicial*.

En el algoritmo de inversión modificado se implementa un elemento descrito en el método de Algoritmos Genéticos: la población inicial (descrito en la sección 4.1 inciso a). Para cada modelo en la cadena de Márkov se genera una población de modelos locales aleatorios y se selecciona el de mayor

ajuste. A este modelo se le aplica a continuación el criterio de aceptación del algoritmo de inversión. El número de modelos locales generados es proporcional al de procesadores. Por tanto, cuanto mayor sea el número de procesadores, mayor probabilidad se tiene de encontrar un modelo de mejor ajuste al anterior, permitiendo la reducción del número de iteraciones en el proceso de inversión y en consecuencia, el tiempo de convergencia.

a) *Parámetro de ajuste de temperatura  $T_a$*

Cuando un número determinado de iteraciones no existe una mejora de la solución, el algoritmo de inversión considera que ha llegado a un óptimo relativo, lo cual el parámetro de temperatura  $T$  es relativamente bajo y la probabilidad de aceptación es muy reducida (ecuación (4.7)). Por ello, algunos autores (Dowsland, 1993; Yepes, 2002.) sugieren un parámetro de ajuste para diversificar la búsqueda, que permita reiniciar nuevas exploraciones incrementando nuevamente el parámetro de temperatura  $T$ . Yepes (2009) define el parámetro de temperatura  $T$ , que es igual a  $T_0$  cuando se inicia el procedimiento, cuando se ha alcanzado un óptimo local, el sistema ajusta a un parámetro de temperatura  $T_a$ .

$$T_a = \max\left(\frac{T_a}{2}; T_b\right), \quad (4.15)$$

donde  $T_a$  es el parámetro de temperatura y  $T_b$  es el parámetro de temperatura a la cual se ha encontrado la solución actual.

b) *Parámetro de enfriamiento modificado.*

El parámetro de enfriamiento (descrito en la sección 4.1 inciso i) tiene relación directa con parámetro de temperatura provocando un decaimiento geométrico, esto sucede cuando el método de inversión encuentra un modelo con mejor ajuste respecto al anterior, es decir, cuando  $\Delta E \leq 0$ ; sin embargo, para compensar el decaimiento de la temperatura, para unas ciertas iteraciones, se aplica el parámetro de ajuste de temperatura  $T_a$  (ecuación (4.15)) garantizando que el sistema permita nuevas exploraciones en el campo de parámetros.

En la figura IV.2 del anexo IV se muestra el diagrama de flujo que describe el método de cristalización simulada modificado (S.A.M).

### 4.3.- Método de inversión conjunta

El cálculo directo del cociente  $H/V$  es un problema no lineal y multi-paramétrico. Distintas configuraciones de los parámetros elásticos pueden presentar la misma respuesta del cociente  $H/V$  (presentando casos de no unicidad). En la inversión de datos de cociente  $H/V$  (a pesar de incluir información a priori) diversas configuraciones de parámetros pueden hacer que los cocientes  $H/V$  ajusten con el cociente  $H/V$  objetivo con un valor mínimo en la función de costo, es decir, existe la presencia de diversos mínimos locales y/o globales en el espacio de soluciones. Un ejemplo de lo antes mencionado, se presenta en la figura 4.1. Dos curvas de cocientes  $H/V$  muy similares a partir de dos perfiles de velocidades diferentes.

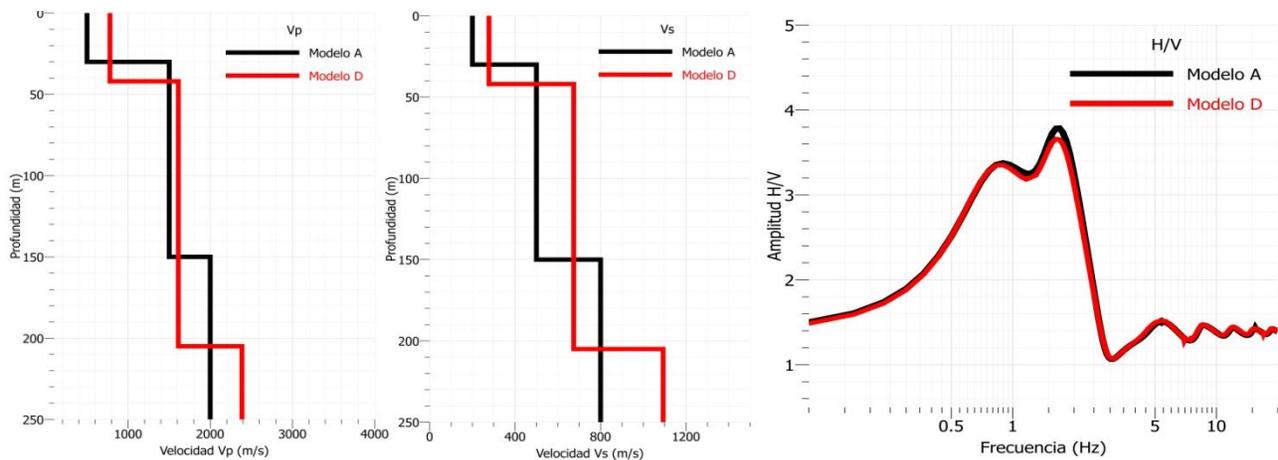


Figura 4.1.- Para un perfil de velocidades de dos capas sobre un semi-espacio con diferentes configuraciones de parámetros (modelo A y modelo D). Los cocientes  $H/V$  son similares para ambas configuraciones.

Con el propósito de reducir la probabilidad de converger a mínimos locales en el espacio de soluciones del cociente  $H/V$  en el método de inversión y reducir drásticamente el problema de la no-unicidad, se puede considerar otro tipo de información. Aprovechando el cálculo de las curvas de dispersión para evaluar el cociente  $H/V$ , estas curvas de dispersión se pueden incluir en el método de inversión SA para realizar inversión conjunta de datos simultáneamente.

La ventaja que se tiene al incluir información de diferentes tipos de curvas, es que no comparten respuestas similares para una configuración de parámetros determinado, es decir, para una configuración de parámetros que presentan un cociente  $H/V$  similar al cociente  $H/V$  objetivo, las curvas de dispersión de Rayleigh y de Love son diferentes a las curvas de dispersión objetivo (figura 4.2). Así mismo, para

una configuración de parámetros que proporcionan curvas de dispersión similares a las curvas de dispersión de Rayleigh o Love objetivo, el cociente  $H/V$  es diferente a la curva  $H/V$  objetivo (figura 4.3 y 4.4).

Para aplicar la inversión conjunta de distintos tipos de datos simultáneamente, se reformula ligeramente la definición de función costo, y consecuentemente el parámetro de aceptación (ecuación (4.7)), de modo que se incluya una “ecualización” que dé el mismo “peso” a los datos que se están invirtiendo. Supongamos, por simplicidad, que tenemos dos tipos de datos con diferentes muestreos  $(n^{(D_1)}; n^{(D_2)})$ , donde la función de costo global es la suma de las funciones de costo (ecuación (4.7)) de cada tipo de datos. Al incluir un factor de peso dependiente del número de datos se tiene (García-Jerez, 2010):

$$\Gamma_{Global} = \frac{(2 - \mathcal{G})}{2n^{(D_1)}} \sum \frac{(d_{obs}^{(D_1)} - d_{obs}^{(D_1)})^2}{\sigma_{(D_1)}^2} + \frac{\mathcal{G}}{2n^{(D_2)}} \sum \frac{(d_{obs}^{(D_2)} - d_{obs}^{(D_2)})^2}{\sigma_{(D_2)}^2}, \quad (4.16)$$

donde:

$$\mathcal{G} = \frac{2n^{(D_1)}}{n^{(D_1)} + n^{(D_2)}} \quad (4.17)$$

Si se midió el mismo número de datos para ambos observables, i. e.  $n^{(D_1)} = n^{(D_2)}$ ;  $\mathcal{G} = 1$  no se altera la función de costo. Tomando la terminología de Pei (2007), la ecuación 4.16 podría denominarse *función costo ecualizada*.

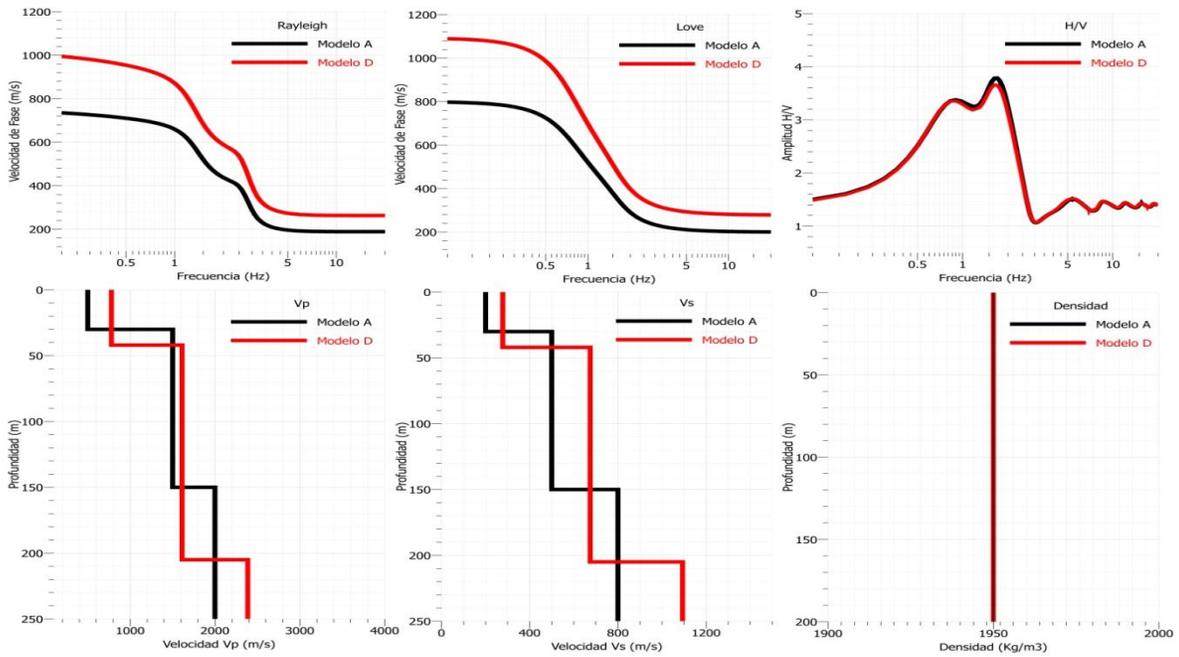


Figura 4.2.- Para un perfil de velocidades de dos capas sobre un semi-espacio con diferentes configuraciones de parámetros (modelo A y modelo D). Los cocientes  $H/V$  son similares para ambas configuraciones. Para las curvas de dispersión de ondas de Rayleigh y de Love las respuestas son diferentes en ambas configuraciones.

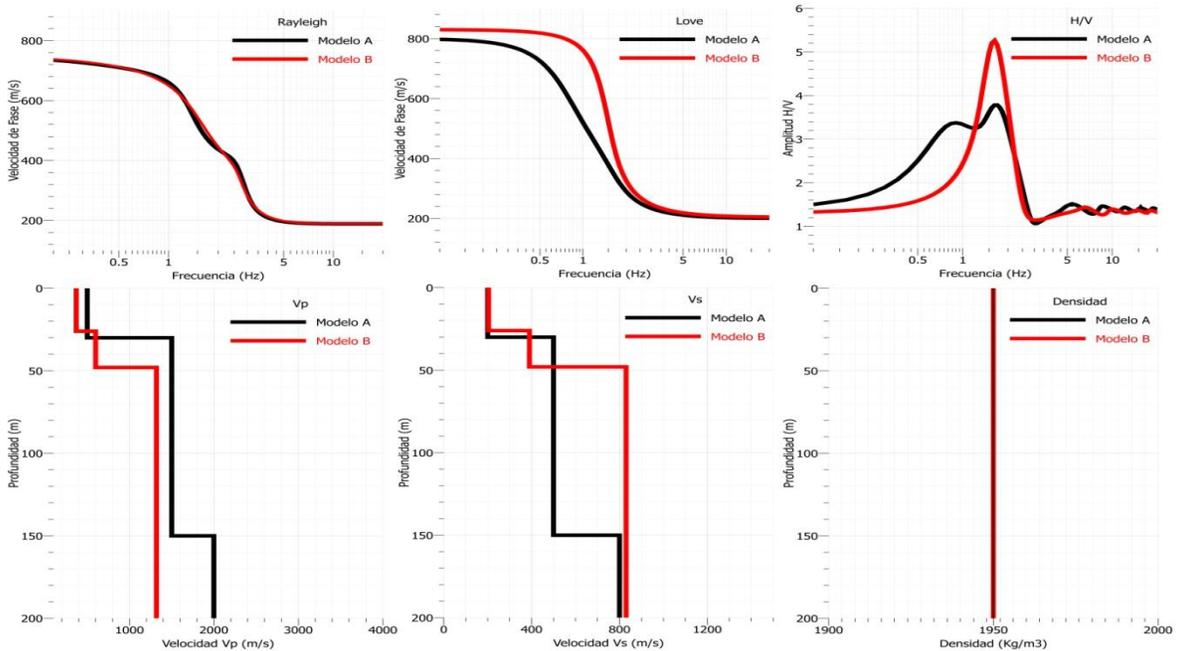


Figura 4.3.- Para un perfil de velocidades de dos capas sobre un semi-espacio con diferentes configuraciones de parámetros (modelo A y modelo B), las curvas de dispersión de ondas de Rayleigh son similares para ambas configuraciones. Para las curvas de dispersión de ondas de Love y del cociente  $H/V$  las respuestas son diferentes para ambas configuraciones.

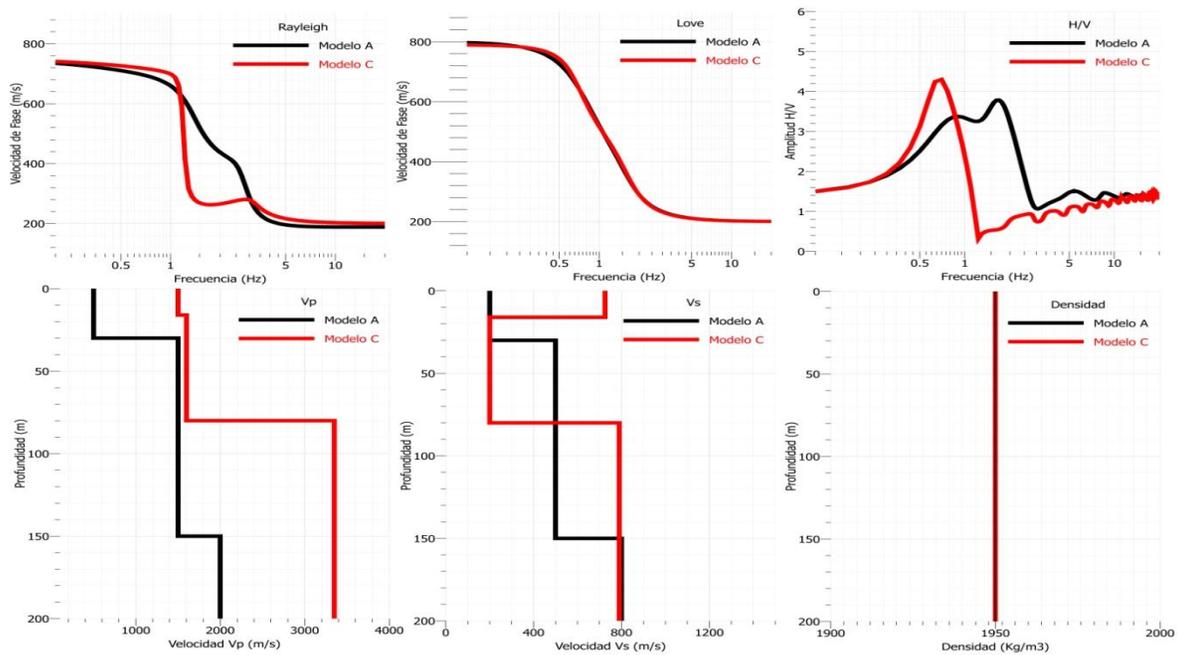


Figura 4.4.- Para un perfil de velocidades de dos capas sobre un semi-espacio con diferentes configuraciones de parámetros (modelo A y modelo C), las curvas de dispersión de ondas de Love son similares para ambas configuraciones. Para las curvas de dispersión de ondas de Rayleigh y del cociente  $H/V$  las respuestas son diferentes para ambas configuraciones.

Con el fin de explorar más a detalle la implementación de la inversión conjunta utilizando la función de costo ecualizada, se realiza el análisis de la superficie de costo (variación de la función de costo con respecto a los parámetros) para un medio estratificado de dos capas sobre un semi-espacio. Para la obtención de la superficie de costo del cociente  $H/V$ , de la curva de dispersión y en su conjunto, se realizó un barrido variando los parámetros de velocidad de cortante de la capa superficial ( $V_{S1}$ ) y de la capa subsecuente ( $V_{S2}$ ), dejando constante los demás parámetros. En la tabla (4.1) se muestran los valores del modelo objetivo y en la figura 4.5 se muestra un esquema del modelo objetivo y sus correspondientes respuestas en términos del cociente  $H/V$  y de curva de dispersión del modo fundamental de Rayleigh.

Los parámetros  $V_{S1}$  y  $V_{S2}$  se hicieron variar en un rango de valores entre 50 m/s hasta 3500 m/s con paso de 10 m/s. El coeficiente de Poisson para la primera capa se fijó con un valor de 0.45 y para la segunda capa con un valor de 0.1. Los parámetros del semi-espacio se mantienen constantes.

Tabla (4.1) Parámetros del modelo Objetivo

Modelo Objetivo				
Espesor	$V_p$ (m/s)	$V_s$ (m/s)	$\rho$ (Kg/m <sup>3</sup> )	Poisson
50	866	500	2000	0.25
150	2078	1200	2000	0.25
$\infty$	7794	4500	2000	0.25

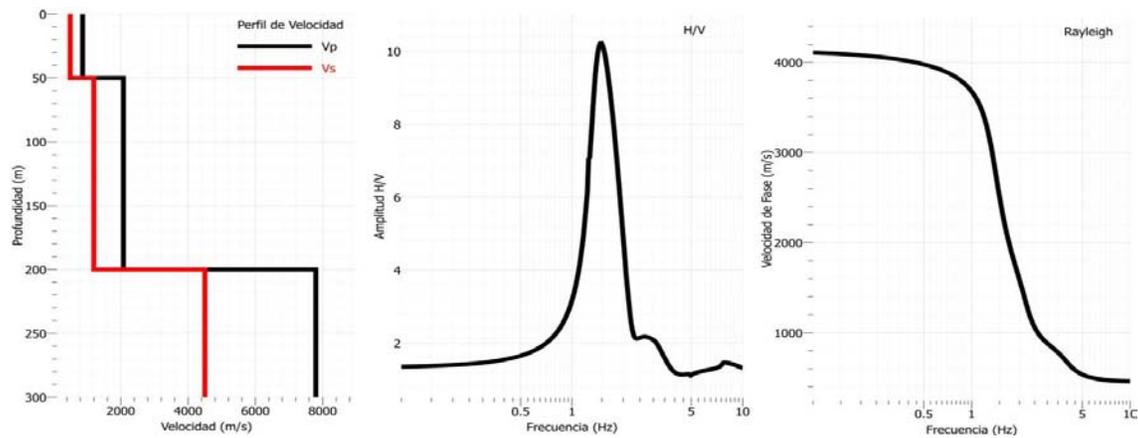


Figura 4.5.- Perfil de velocidades objetivo (panel izquierdo). Cociente  $H/V$  objetivo (panel central). Curva de dispersión de ondas de Rayleigh del modo fundamental objetivo (Panel derecho).

Para cada combinación de parámetros  $V_{s1}$  y  $V_{s2}$ , la función de costo para cada curva del cociente  $H/V$  es estimada mediante la ecuación 4.7. La superficie de costo del cociente  $H/V$  (figura 4.6) muestra la existencia de tres mínimos locales y un mínimo global dentro de los límites del campo de soluciones. El mínimo local señalado en la superficie de costo representa la ubicación de los parámetros utilizados para obtener la curva  $H/V$  objetivo (círculo rojo). Por otra parte, los parámetros que se representan como el mínimo global en la superficie de costo ( $V_{s1}=1350$  m/s;  $V_{s2}=1400$  m/s) se encuentra alejado de los parámetros de la curva  $H/V$  objetivo. Para fines de representación gráfica, los valores de la función de costo se presentan en todos los caso en forma logarítmica en las figuras 4.6-4.8.

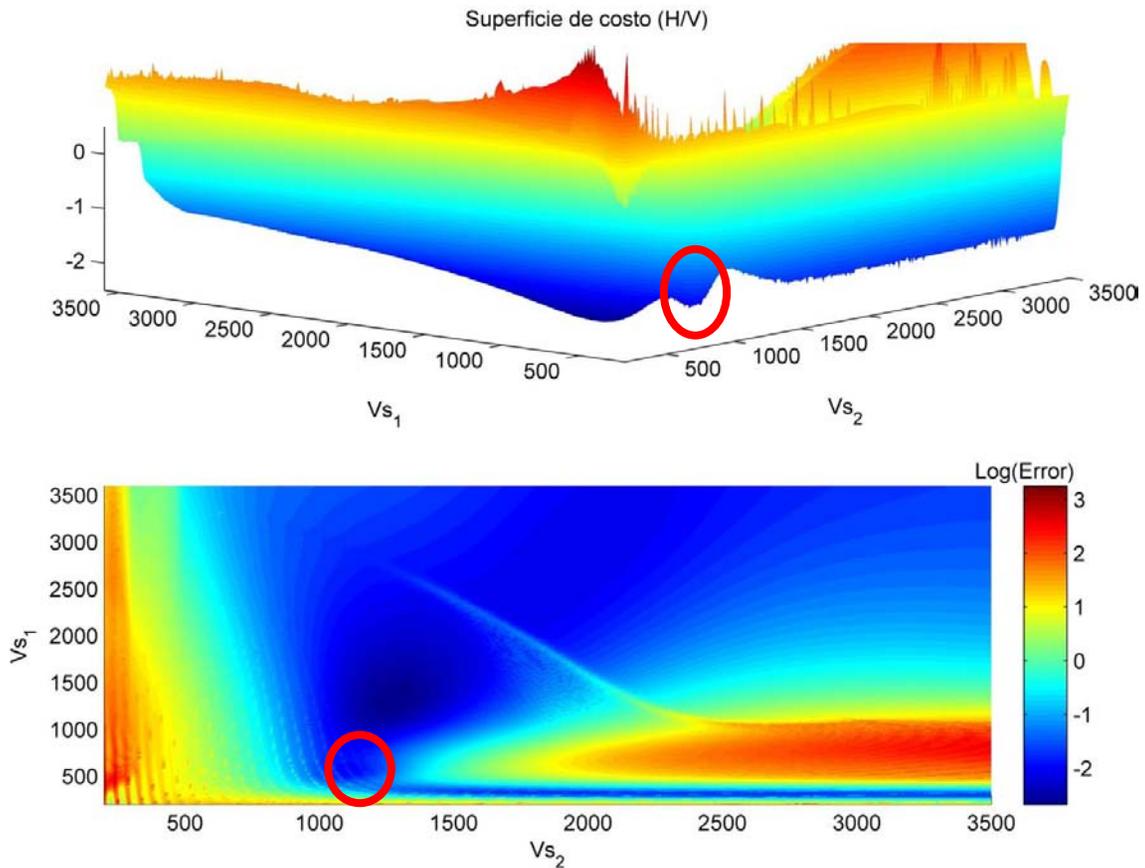


Figura 4.6.- Superficie de costo para el cociente  $H/V$ . En el panel superior se muestra la superficie de costo en proyección ortogonal, donde los valores del eje vertical corresponden al valor de la función de costo de orden logarítmico y los ejes horizontales corresponden a los valores de los parámetros  $V_{s1}$  y  $V_{s2}$  respectivamente. En el panel inferior se muestra la superficie de costo en proyección de planta, donde el eje horizontal representa los valores de variación del parámetro  $V_{s2}$ , el eje vertical representa la variación del parámetro  $V_{s1}$ . El mínimo local señalado en la superficie de costo representa la ubicación de los parámetros utilizados para obtener la curva  $H/V$  objetivo (círculo rojo).

Al igual que la superficie de costo para la curva del cociente  $H/V$ , el valor de la función de costo para cada curva de dispersión de las ondas de Rayleigh del modo fundamental se calculó mediante la ecuación 4.6. La superficie de costo (figura 4.7) muestra la existencia de dos mínimos locales y un mínimo global. El mínimo local señalado en la superficie de costo representa la ubicación de los parámetros utilizados para obtener la curva de dispersión objetivo. Por otra parte, los parámetros que representan el mínimo global en la superficie de costo se encuentra muy cercano a los parámetros de la curva de dispersión objetivo.

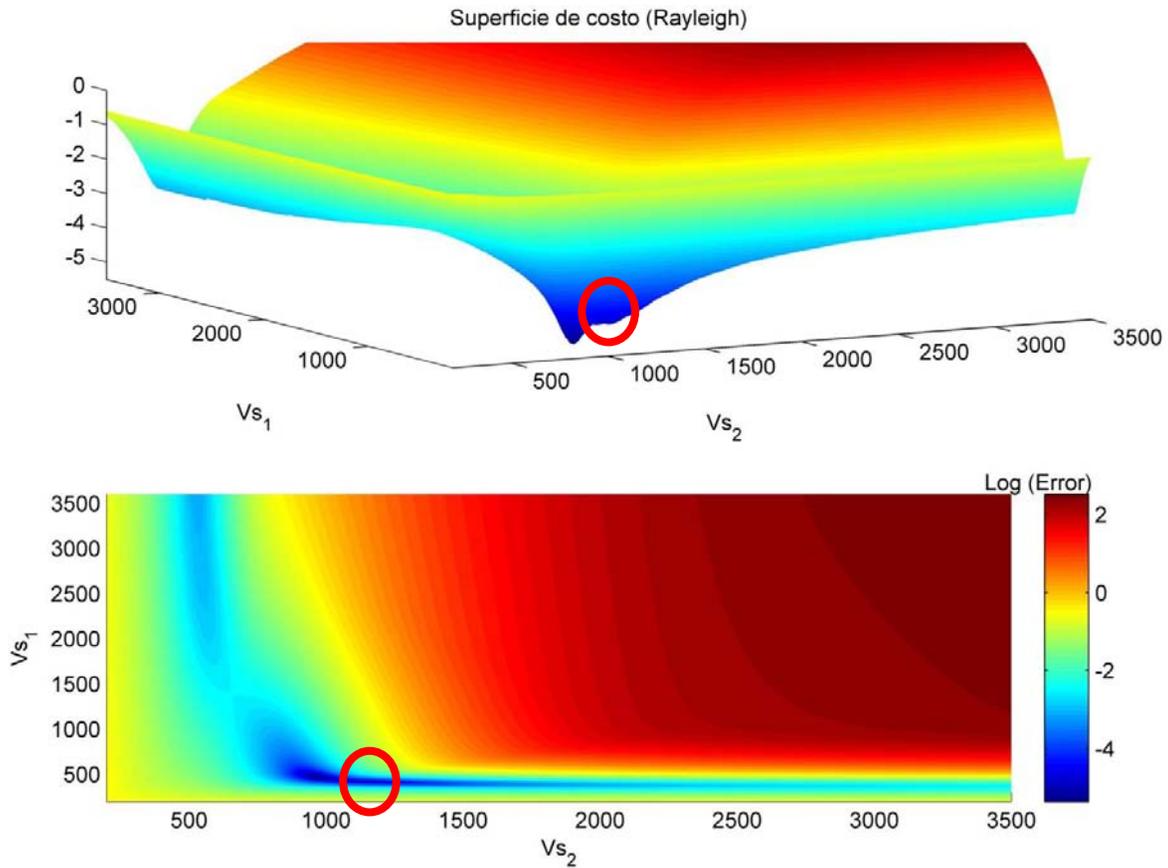


Figura 4.7.- Superficie de costo para la curva de dispersión del modo fundamental de las ondas de Rayleigh. En el panel superior se muestra la superficie de costo en proyección ortogonal, donde los valores del eje vertical corresponden al valor de la función de costo de orden logarítmico y los ejes horizontales corresponden a los valores de los parámetros  $V_{s1}$  y  $V_{s2}$  respectivamente. En el panel inferior se muestra la superficie de costo en proyección de planta, donde el eje horizontal representa los valores de variación del parámetro  $V_{s2}$  y el eje vertical representa la variación del parámetro  $V_{s1}$ . El mínimo local señalado en la superficie de costo representa la ubicación de los parámetros utilizados para obtener la curva de dispersión objetivo (círculo rojo).

En la figura 4.8 se muestra la superficie de costo para ambas curvas (cociente  $H/V$  y curva de dispersión). Utilizando la función de costo ecualizada (ecuación 4.16), la superficie de costo muestra la existencia de dos zonas de mínimo local y una zona de mínimo global. El mínimo global corresponde a la combinación de parámetros  $V_{s1}$  y  $V_{s2}$  de las curvas objetivo.

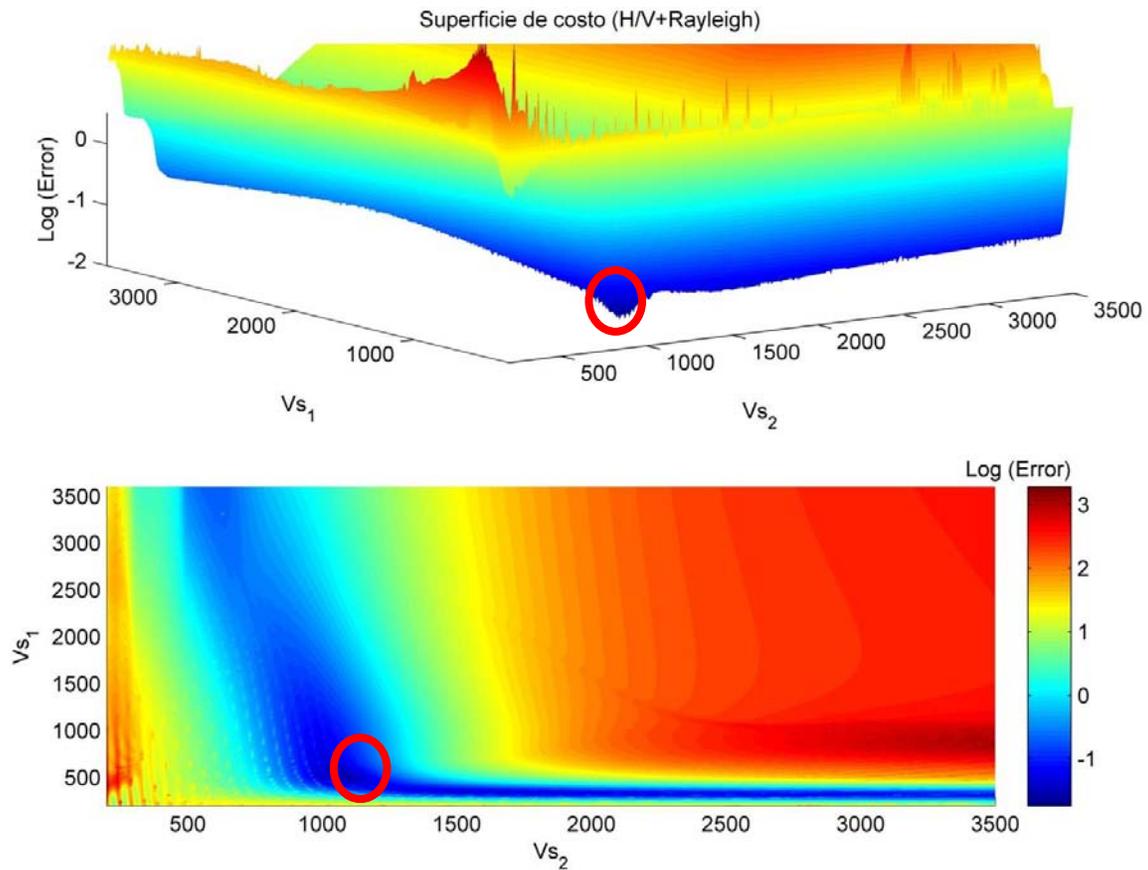


Figura 4.8.- Superficie de costo conjunta para las curvas de dispersión del modo fundamental de las ondas de Rayleigh y el cociente  $H/V$  utilizando la función de costo ecualizada. En el panel superior se muestra la superficie de costo en proyección ortogonal, donde los valores del eje vertical corresponden al valor de la función de costo de orden logarítmico y los ejes horizontales corresponden a los valores de los parámetros  $V_{S1}$  y  $V_{S2}$  respectivamente. En el panel inferior se muestra la superficie de costo en proyección de planta, donde el eje horizontal representa los valores de variación del parámetro  $V_{S2}$  y el eje vertical representa la variación del parámetro  $V_{S1}$ . El mínimo global señalado en la superficie de costo representa la ubicación de los parámetros utilizados para obtener la curva  $H/V$  y de dispersión objetivo (círculo rojo).

Con lo anterior, la inversión individual de cada tipo de datos, puede llevarnos a una solución alejada a la solución objetivo. Sin embargo, la inversión conjunta puede reducir significativamente los mínimos locales en el espacio de soluciones para cada tipo de datos, resaltando la solución objetivo como mínimo global permitiendo al algoritmo de inversión su convergencia a una solución aproximada a la solución objetivo.

## 5.- Aplicaciones: Estructura somera para la zona de Almería, España

La zona de la desembocadura del río Bajo Andarax (Almería, España), se compone principalmente de materiales sedimentarios que presentan efectos de sitio aumentando el riesgo sísmico debido a la amplificación de las ondas sísmicas.

En la estratigrafía de esta área aparecen, hasta unos 20-25m, depósitos aluviales holocenos consistentes en limos, arenas y algunas gravas. Bajo estos aparece un paquete de gravas gruesas y arenas. Los materiales del Plioceno aparecen en torno a los 60m de profundidad, como estratos alternantes de lutitas y areniscas, con intercalaciones de gravas y arenas pliocenas y finalmente, un grueso estrato de margas del Mioceno. Las rocas triásicas (dolomitas y filitas) aparecen a profundidades no completamente determinadas que previsiblemente deben superar los 400-450m a que ya se encuentran unos 5km río arriba, según el perfil I en su extremo oriental (figura. 5.1).

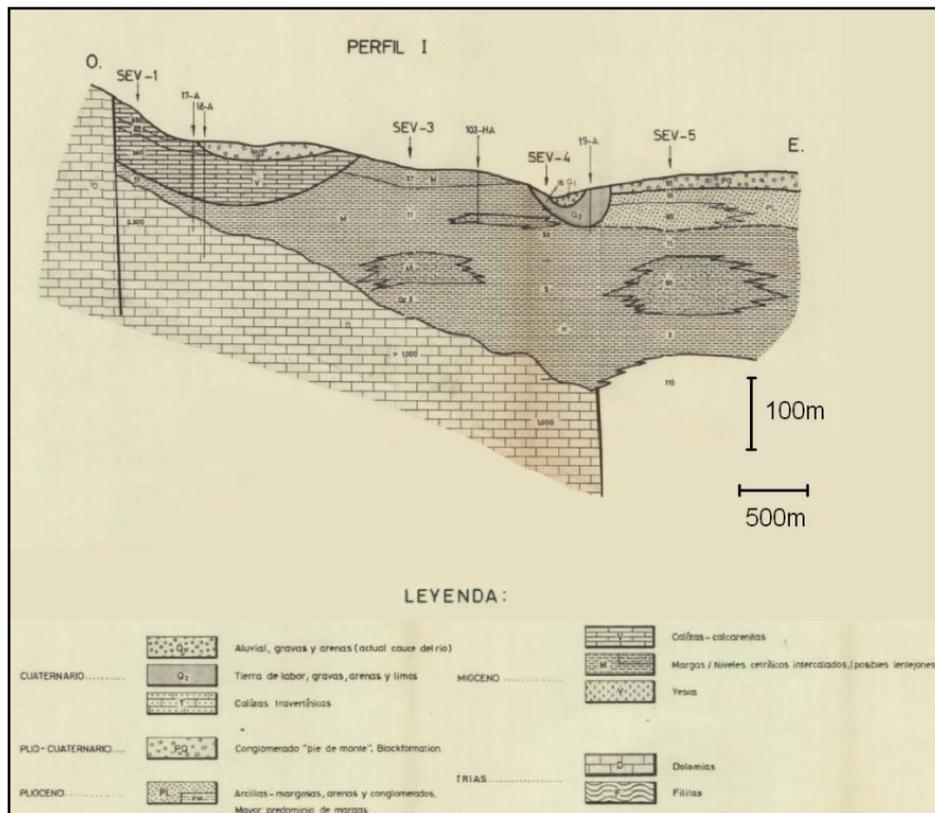


Figura 5.1.- Perfiles eléctricos interpretados en el delta del río Andarax realizados por el IGME-IRYDA (1977). El extremo oriental del perfil I está situado unos 5 km aguas arriba del sitio de estudio.

Con el objetivo de caracterizar los efectos de sitios y determinar la estructura superficial promedio en la desembocadura del río Bajo Andarax, se realizó el cálculo del cociente  $H/V$  mediante registros de microtemores. Así mismo, se adquiere la curva de dispersión de ondas de Rayleigh del trabajo previo de García-Jerez (2010). El objetivo de incluir información de la curva de dispersión al proceso de inversión es el de realizar inversión conjunta de la curva de dispersión y el cociente  $H/V$  simultáneamente.

Para la obtención de la curva de dispersión se utilizó la técnica de SPAC con cinco arreglos pentagonales, sin estación central, con radios de 12, 18, 25, 50, 94, y 420m. En la figura 5.3 se muestra la localización de 374 mediciones donde solo una estación (ER20) fue usada para determinar el cociente  $H/V$  y el arreglo para la obtención de la curva de dispersión.

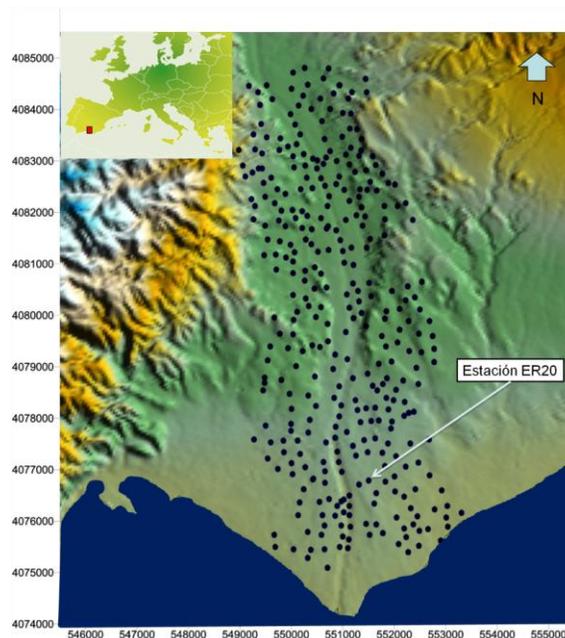


Figura 5.2.- Localización de las 374 mediciones de microtemores indicando la posición de la estación ER20 que fue utilizada para obtener el cociente  $H/V$  (Cortesía del Dr. Enrique Carmona).

El procedimiento para calcular la curva del cociente  $H/V$  se basa en el apilamiento separado de las densidades espectrales de potencia de las componentes horizontales y verticales después de igualación de la energía total en las ventanas de tiempo (Sánchez-Sesma *et al.*, 2011). Se seleccionó una longitud de ventana de 40 segundos. Para obtener curvas fiables hasta 0,25 Hz, cabe señalar que no se utilizó ningún suavizado. Con el fin de comprobar la estabilidad de los resultados, se calculó la curva del cociente  $H/V$  para cada ventana de largo de la duración del registro y se obtuvo un espectrograma para el

sitio (figura 5.3). La presencia de una frecuencia dominante estable se caracteriza por una estructura en forma de borde horizontal en el espectrograma. Con el fin de obtener el cociente  $H/V$  representativo del sitio, se seleccionaron todas las ventanas de tiempo que presentan frecuencias dominantes y amplitudes estables durante el tiempo de registro. En la figura 5.4 se muestra la curva de dispersión y el cociente  $H/V$  representativos para la zona en estudio.

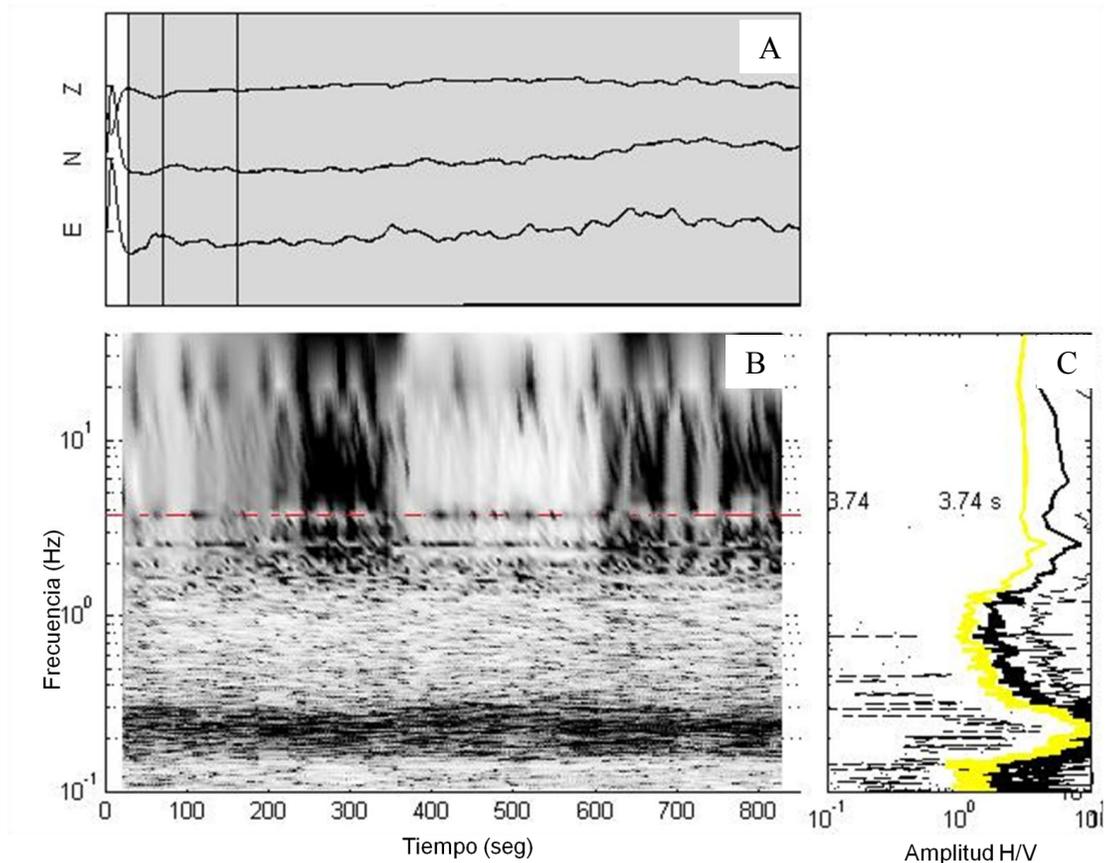


Figura 5.3.- Cálculo del cociente espectral  $H/V$  para la estación ER20. En el panel (A) se presentan los tres componentes de microtemores en función del tiempo. En el panel (B) se obtiene la relación espectral en función del tiempo con el objetivo de observar su estabilidad de la frecuencia de máxima amplitud. En el panel (C) se muestra el promedio de la relación espectral  $H/V$  (línea gruesa negro) y su desviación estándar (líneas discontinuas). La línea gris representa la relación espectral a partir del cociente de los promedios de las autocorrelaciones (Sánchez-Sesma et al., 2011). En el cociente  $H/V$  se identificaron dos frecuencias máximas significativas que oscilan entre los 0,4 Hz y 3 Hz (Cortesía del Dr. Enrique Carmona).

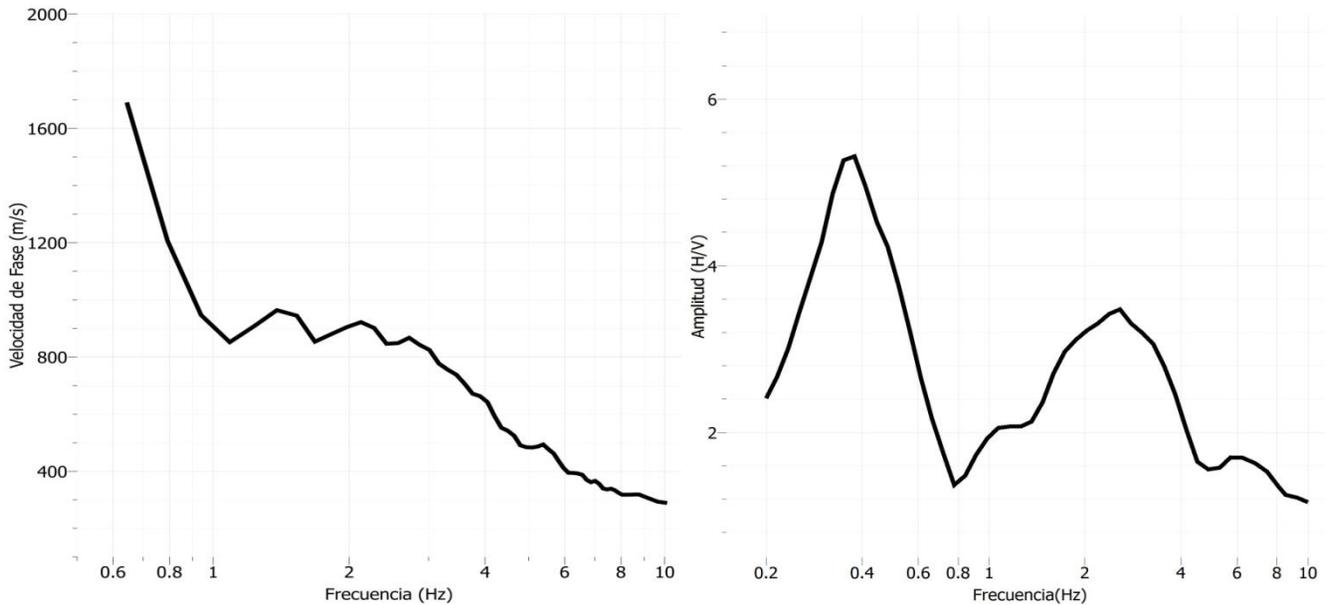


Figura 5.4.- Curva de dispersión de ondas de Rayleigh y cociente  $H/V$  representativos para la zona de la desembocadura del río Bajo Andarax. En el panel izquierdo se muestra la curva de dispersión promedio obtenida de García-Jerez (2010) y en el panel derecho se muestra la curva del cociente  $H/V$  observada con los registros de microtremores en la estación ER20.

Los resultados de la convergencia de la inversión conjunta, tanto para la curva  $H/V$  como para la curva de dispersión se muestran en la figura 5.5. Visualmente y tomando en consideración que las curvas obtenidas son un promedio de las observaciones, la curva de dispersión teórica producto de la inversión presenta un buen ajuste con respecto a la curva de dispersión observada para bajas frecuencias (0.5 a 1 Hz) y altas frecuencias (de 4 a 11 Hz); sin embargo, para el rango de frecuencias de 1 a 4 Hz, el ajuste de la curva teórica con la curva observada es relativamente aceptable. La curva del cociente  $H/V$  teórico presenta una convergencia relativamente aceptable con respecto al cociente  $H/V$  observado para todo el rango de frecuencias con respecto a la curva objetivo (0.25 a 11 Hz).

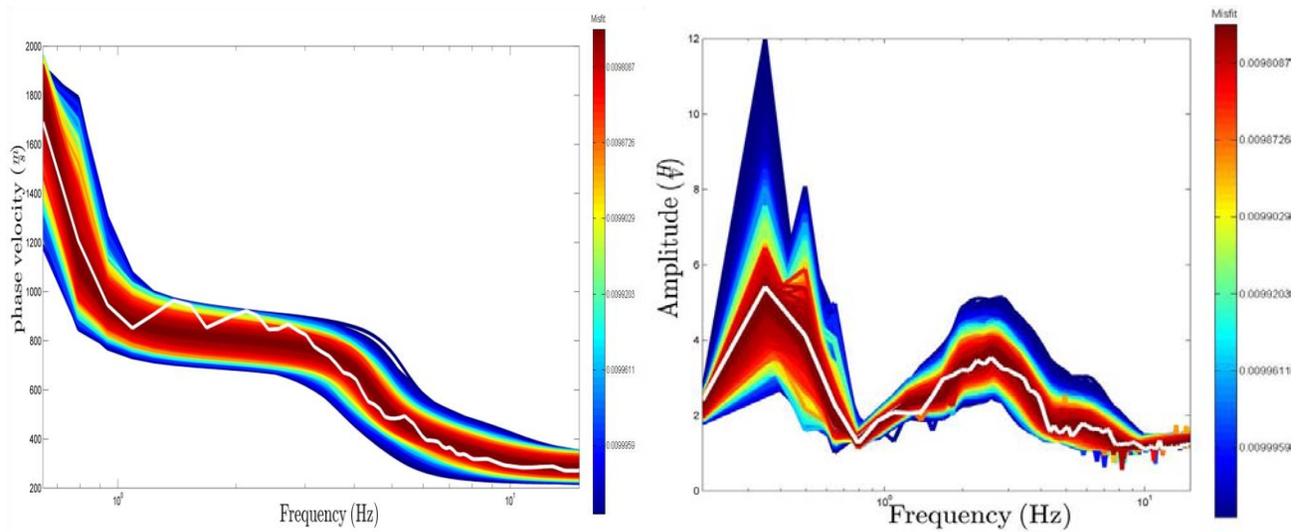


Figura 5.5.- Resultado de la inversión de datos para la zona de la desembocadura del río Bajo Andarax. En el panel izquierdo se muestra el ajuste de la curva de dispersión promedio obtenida de García-Jerez (2010) (línea blanca) y en el panel derecho se muestra el ajuste de la curva del cociente  $H/V$  observada (línea blanca) para la estación ER20.

Los resultados de la inversión de la curva de dispersión y del cociente  $H/V$  permitieron estimar la estructura de velocidades para el sitio de la desembocadura del río Bajo Andarax con un modelo de tres capas sobre un semi-espacio, los cuales se definen en dos estructuras de velocidades, una para las velocidades de onda S y otra para las velocidades de onda P. En la tabla 5.1 se listan los parámetros del modelo promedio resultado de la inversión.

Tabla 5.1

Capa	Espesor (m)	Velocidad de ondas S (m/s)	Velocidad de ondas P (m/s)
1	15	270	510
2	40	550	1900
3	535	870	2700
Semi-espacio	$\infty$	2420	3800

En el mejor modelo resultado de la inversión de la curva de dispersión en conjunto con el cociente  $H/V$  para zona de estudio (figura 5.6), la capa de aluviales holocenos tomó un espesor de 15m, dejando paso a las gravas y arenas pleistocenas hasta los 55m de profundidad (40m de espesor para el modelo medio). Al paquete de margas miocenas se le estiman 535m de espesor. Visualmente, el grado de ajuste

de la velocidad de onda Rayleigh es muy bueno. Los extremos relativos del cociente H/V también quedaron bien ajustados.

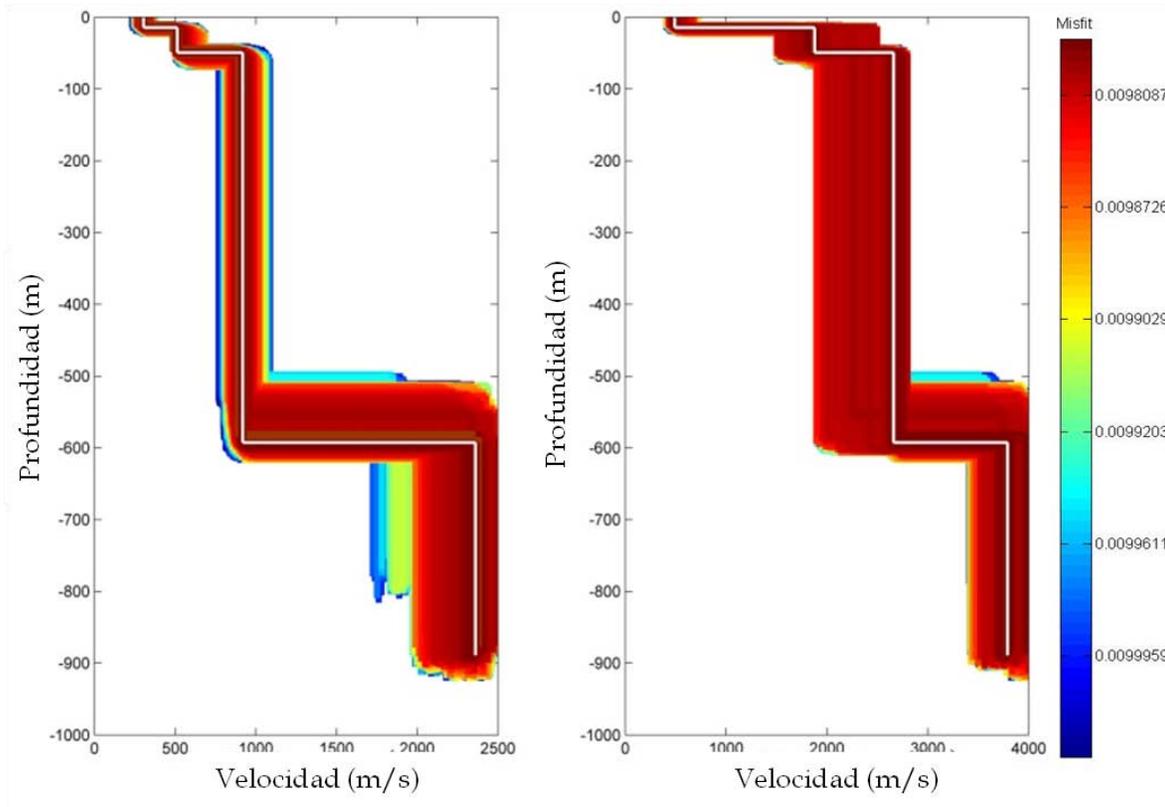


Figura 5.6.- Perfil de velocidades promedio para la zona de la desembocadura del río Bajo Andarax. En el panel izquierdo se muestra el perfil de velocidades promedio de la onda S (línea blanca) y en el panel derecho se muestra el perfil de velocidades promedio de la onda P (línea blanca) para la estación ER20.

García-Jerez (2010) estimó el perfil de velocidades de ondas S para la zona de la desembocadura del río Bajo Andarax. En la figura 5.7 se muestra una comparación del perfil de velocidades promedio resultado de la inversión conjunta del cociente H/V y la curva de dispersión con el perfil de las ondas S obtenido por García Jerez (2010).

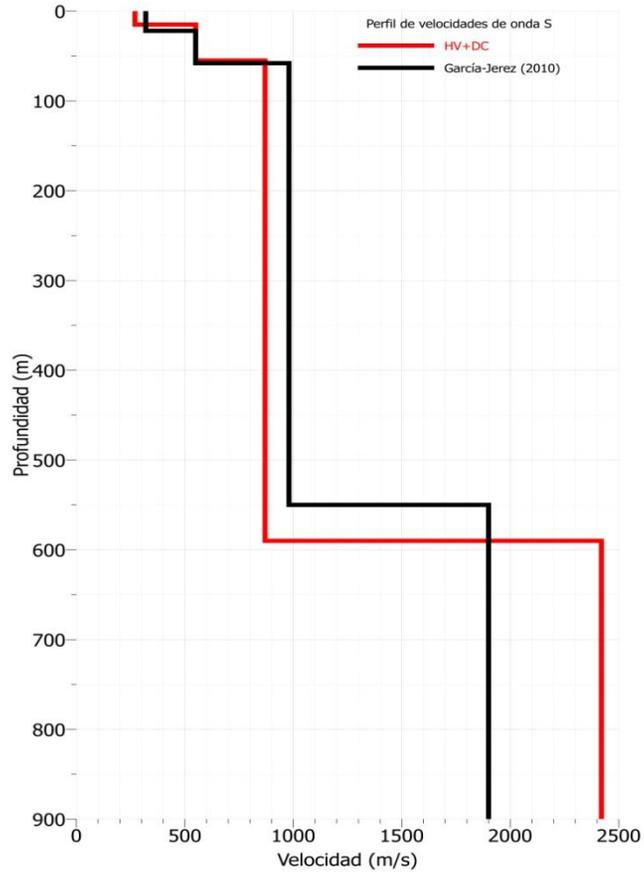


Figura 5.7.- Comparación del perfil de velocidades de onda S resultado de la inversión conjunta con la curva de dispersión y del cociente H/V para el campo completo de ondas (línea roja) y el perfil de velocidades de onda S obtenido por García-Jerez (2010) (línea negra).

## 6.- Conclusiones

Se presentó en el capítulo 1 tres puntos de vista sobre la interpretación del cociente  $H/V$  (donde  $H$  y  $V$  son respectivamente las componentes horizontal y vertical de la energía sísmica). En particular, la teoría de campos difusos permite expresar el cociente  $H/V$  como la raíz cuadrada de la relación de las densidades de energía direccional, el cual se puede escribir en función de las componentes diagonales del tensor de Green, donde la parte imaginaria de la Función de Green (FG) es proporcional a la densidad de energía direccional.

En el capítulo 2 se presenta el cálculo de las FG a partir de una generalización del trabajo de Harkrider (1964) para modelos estratificados. En este cálculo, los integrandos de la FG se definen en el plano complejo del número de onda horizontal  $k$ , los cuales presentan polos simples en el eje real (asociados a las ondas superficiales) que son evaluados con el teorema del residuo de Cauchy, permitiendo que el cálculo se realice de manera eficiente. Además, el cálculo del cociente  $H/V$  se puede realizar con la contribución de ondas de superficie y/o con la contribución de las ondas de cuerpo.

En el capítulo 3 se presenta un estudio de la respuesta de la FG y del cociente  $H/V$ . Con el objetivo de observar la influencia de cada uno de los parámetros elásticos en el cociente  $H/V$ , se realiza un análisis paramétrico del cociente espectral  $H/V$ . Estos parámetros elásticos tienen diferente grado de influencia que modifica la forma del cociente  $H/V$ . Especialmente, los parámetros de densidad ( $\rho$ ) y de las velocidades de propagación de las ondas P y S (resp.  $V_p$  y  $V_s$ ) del semi-espacio, solo modifican de forma proporcional la amplitud del pico máximo del cociente  $H/V$ , dejando invariante el valor de la frecuencia del máximo pico y del mínimo pico ( $F_s$  y  $F_p$  respectivamente). Los parámetros de la capa superficial  $V_p$  y  $\rho$  modifican el valor de la amplitud del máximo pico de forma proporcional, mientras que el parámetro  $V_s$  de la capa superficial es el único parámetro que modifica la amplitud del máximo pico de forma inversa. Sin embargo, el parámetro de espesor de la capa superficial  $h$  no modifica la amplitud. Este análisis paramétrico permitió establecer que el cociente  $H/V$  es un problema fuertemente no lineal y multiparamétrico.

En el capítulo 4 se ha tratado de la implementación del algoritmo de inversión Simulated Annealing complementándose con modificaciones para la aplicación de inversión conjunta para realizar la inversión con datos del cociente  $H/V$  y curvas de dispersión del modo fundamental de ondas de Rayleigh y/o de Love simultáneamente. La implementación de la inversión conjunta tiene la ventaja de reducir significativamente el número de modelos con carácter de mínimo local ayudando a encontrar el modelo

con ajuste óptimo a los datos observados. La capacidad de la inversión conjunta ha sido comprobada con un ejemplo sintético.

Un ejemplo completo de la aplicación del algoritmo de inversión conjunta en un caso real es mostrado en el capítulo 5.

## Bibliografía

- Aki, K. and Richards, P.G. (1980): "*Quantitative Seismology. Theory and Methods*". W. H. Freeman, San Francisco, U.S.
- Aki, K. and Richards P. G. (2002): *Quantitative Seismology*. Second Edition, University Science Books, Sausalito, CA. p.298
- Ansary, M., Yamazaki, F. and Katayama, T. (1995): *Statistical Analysis of Peaks and Directivity of Earthquake ground Motion*. Earthquake Engineering and Structural Dynamics 24, 1527-1539.
- Bard, P. (1999): *Microtremor measurements: A tool for site effect estimation?*. The Effects of Surface Geology on Seismic Motion. Edited by Irikura, Kudo, Okada & Sasatani, 1999 Balkema, Rotterdam, ISBN 90 5809 030 2, Pag1252-1279.
- Derode, A., Larose, E., Tanter, M., de Rosny, J., Tourin, A., Campillo, M. and Fink, M. (2003): *Recovering the green's function from field-field correlations in an open scattering medium (L)*. J. Acoust. Soc. Am., 113(6):2973-2976, 2003.
- Dowland, K.A (1993): *Simulated Annealing*. In *Modern Heuristic Techniques for Combinatorial Problems*. C.R.Reeves (ed), Blackwell, Oxford, U.S.
- Ewing, J., Jardetzky, W. and Press, F. (1957): *Elastic waves in layer media*. McGraw-Hill Book Company, New York, U.S.
- Field, E.H. y Jacob, K.H. (1995): *A comparison and test of various site-response estimation techniques, including three that are not reference-site dependent*. BSSA, 85, 1127-1143.
- García-Jerez, A., Luzón, F., Navarro, M., Santoyo, M. A. (2010): *Assessing the Reliability of the Single Circular Array Method for Love-Wave Ambient-Noise Surveying*. Bull. Seismol. Soc. Am. 100(5).

García Jeréz, A., Luzón, F., Sánchez-Sesma, F.J., Lunedei, E., Albarello, D., Santoyo, M., Almendros, A.,(2013): *Diffuse elastic wavefield within a simple crustal model. Some consequences for low and high frequencies*. Journal of Geophysical Research vol. 118, 1–19.

García-Jeréz, A. (2010): *Desarrollo y evaluación de métodos avanzados de exploración sísmica pasiva. Aplicación a estructuras geológicas locales del sur de España*. PhD thesis, Universidad de Almería, España.

Goldberg, D. E. (1989): *Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning*. (ed) Addison-Wesley, Reading, Mass. ISBN-13: 978-0201157673.

Guo, J.Q. and Zheng, L. (2005): *A modified simulated annealing algorithm for estimating solute transport parameters in streams from tracer experiment data*. In Proceedings of Environmental Modelling and Software. pp 811-815.

Harkrider, D. G. (1964): *Surface waves in multilayered elastic media. Part I*. Bull. Seismol. Soc. Am., 54, 627-679.

Haskell N.A. (1953): *The dispersion of surface waves on multilayered media*. Bull. Seismol. Soc. Am.,, 43(1):17–34, 1953.

Hastings, W. K., (1970): Monte Carlo sampling methods using Markov Chain and their applications. *Biometrika* 57, 97–109.

Holland, J. H. (1975): *Adaptation in Natural and Artificial Systems*. Univ. of Mich. Press, Ann Arbor, Mich. U.S.

Horike, M. (1996): “*Geophysical exploration using microtremor measurements*”. Proc. 11th World Conf. Earthq. Eng., Paper No. 2033.

Iglesias A. (2000): *Aplicación de algoritmos genéticos y Simulated Annealing para invertir la dispersión*

*de ondas superficiales: modelos promedio de la corteza terrestre en el sur de México.* Tesis de licenciatura, Universidad Nacional Autónoma de México. México

IGME-IRYDA (1977). Estudio hidrogeológico de la cuenca sur Almería, Instituto Geológico y Minero de España, Madrid, VI.12-VI.14.

Kirkpatrick, S., C. D. Jr. and Vecchi, M. P. (1983): *Optimization by simulated annealing*, Science 220, 671-680.

Konno, K. and Ohmachi, T. (1998): *Ground-Motion Characteristics Estimated from Spectral Ratio between Horizontal and Vertical Components of Microtremor*. Bull. Seism. Soc. Am., 88, 228-241.

Kudo, K. (1995). *Practical estimates of site response, State-of-the-Art report*. Proceedings of the Fifth International Conference on Seismic Zonation, October 17-19, Nice, France, Ouest Editions Nantes, 3, 1878-1907.

Lachet, C. y Bard, P.-Y. (1994): *Numerical and theoretical investigations on the possibilities and limitations of Nakamura's technique*. J. Phys. Earth, 42, 377-397.

Larose E., Derode, A., Campillo, M. and Fink, M. (2004): *Imaging from one-bit correlations of wideband diffuse wave fields*. Journal of Applied Physics, 95(12):8393–8399, 2004.

Lin, F.-C., Schmandt, B., and Tsai, V.C., (2012): *Joint inversion of Rayleigh wave phase velocity and ellipticity using USArray: Constraining velocity and density structure in the upper crust*. Geophys. Res. Lett., 39, L12303, doi:10.1029/2012GL052196.

Wathelet, M. (2005): *Array recordings of ambient vibrations: surface-wave inversion*. PhD. thesis, University of Liège, Belgium.

Metropolis, N., Rosenbluth, A., Rosenbluth, M., Teller, A. and Teller, E. (1953): *Equation of state calculations by fast computing machines*. Journal of Chemical Physics 21, 1087-1092.

- Murray, H. *When is diffuse-field theory applicable?* Applied Acoustics, 49(3):197–207, 1996.
- Nogoshi, M. and Igarashi, T. (1971): *On the amplitude characteristics of microtremor (part 2)*. Jour. Seism. Soc. Japan, 24, 26-40
- Nakamura, Y. (1989): *A method for dynamic characteristics estimation of subsurface using microtremor on the ground surface*. QR of RTRI 30, no. 1, February, 25-33pp.
- Nakamura Y., (1996): *Real-time information systems for hazards mitigation*. Proceedings of the 11th World Conference on Earthquake Engineering. Acapulco, México.
- Nakamura, Y. (2000): *Clear Identification Of Fundamental Idea Of Nakamura's Technique And Its Applications*. Procc. 12WCEE. New Zeland.
- Palafox M.C. (2009): *Inferencia Estadística para Cadenas de Márkov*, Tesis de Maestría, Universidad de Sonora. Sonora, México.
- Pekeris, C.L. (1955): “*The seismic Buried Pulse*”. Proc. Nat. Acad. Sci., U.S., 41, 629-639
- Perton, M., Sánchez-Sesma, F.J., Rodríguez-Castellanos, A., Campillo, M. and Weaver, R.L. (2009): *Two Perspectives on Equipartition in Diffuse Elastic Fields in Three Dimensions*. J. Acoust. Soc. Am., Vol. 126, pp. 1125-1130.
- Pei. D. (2007): *Modeling and inversion of dispersion curves of surface waves in shallow site investigations*. PhD thesis, University of Nevada, Reno.
- Ryzhik, L., Papanicolaou, G. C. and Keller J. B. (1996): *Transport equations for elastic and other waves*. Wave Motion, 24 327-370.
- Sambridge, M., Mosegaard, K. (2002): *Monte Carlo Methods in Geophysical Inverse Problems*. Reviews of Geophysics 40, 3.1 -3.29.

Sánchez-Sesma, F.J., Pérez-Ruiz, J.A., Luzón, F., Campillo, M. and Rodríguez-Castellanos, A. (2008): “*Diffuse Fields in Dynamic Elasticity*”, *Wave Motion*, Vol. 45, pp. 641–654.;

Sánchez-Sesma, F.J., Rodríguez, M., Iturrarán-Viveros, U., Rodríguez-Castellanos, A., Suarez, M., Santoyo, M.A., García-Jerez, A. and Luzón, F. (2010). “*Site Effects Assessment Using Seismic Noise*”. In Proc. 9th International Workshop on Seismic Microzoning and Risk Reduction, 21st - 24th February, Cuernavaca, México.

Sánchez-Sesma, F.J., Rodríguez, M., Iturrarán-Viveros, U., Luzón, F., Campillo, M., Margerin, L., García-Jerez, A., Suárez, M., Santoyo, M. A. and Rodríguez-Castellanos, A. (2011a). “*A Theory for microtremor H/V Spectral ratio: Application for a layered médium*”. *Geophysical Journal International*, Vol. 186, pp 221-225.

Sánchez-Sesma, F.J., Weaver, R. L., Kawase, H., Matsushima, S., Luzón, F. and Campillo M. (2011b). “*Energy Partitions Among Elastic Waves for Dynamic Surface Loads in a Semi-Infinite Solid*”. *Bull. Seism. Soc. Am.*, Vol. 101, In press, doi:10.1785/0120100196.

Sheen, D.H., Tuncay, K., Baag, C. E. and Ortoleva, P.J. (2006): *Parallel implementation of a velocity-stress staggered-grid finite-difference method for 2D poroelastic wave propagation*. *Computers and Geosciences*, 32, 1182-1191.

Tokimatsu, K. (1997): *Geotechnical site characterization using surface waves*. In Ishihara (Ed.), *Earthquake Geotechnical Engineering*. Balkema, Róterdam, pp. 1333-1368.

Tarantola, A. (2005): *Inverse Problem Theory and Methods for Model Parameter estimation*. Society of Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, available online at <http://www.ipgp.jussieu.fr/~tarantola/Files/Professional/Books/index.html>

Weaver, R.L. (1982): “*On Diffuse Waves in Solid Media*”, *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 71, pp. 1608-1609.

Weaver, R.L. (1985): “*Diffuse Elastic Waves at a Free Surface*”. *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 78, pp. 131–

136.

Whiteley, R.J. (1994): *Seismic refraction testing*. In Woods, R.C. (Ed.), *Geophysical Characterization of Sites*. Balkema, Róterdam, pp. 45-47.

Yepes V. (2009): *Optimización heurística mediante cristalización simulada*. Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, recurso web Polimedia (<http://hdl.handle.net/10251/5292>)

## Anexo I

### *Ecuación de Movimiento*

Partiendo de la simetría del tensor de esfuerzo y deformaciones, estos se pueden expresar en función de sus coordenadas cartesianas.

$$\sigma_{ij}(\bar{x}) = \sigma_{ji}(\bar{x}) \quad (\text{I.1})$$

$$e_{ij}(\bar{x}) = e_{ji}(\bar{x}) \quad (\text{I.2})$$

donde  $\sigma_{ij}(\bar{x})$  y  $e_{ij}(\bar{x})$  son los tensores de esfuerzo y deformación respectivamente y  $\bar{x}$  es la componente cartesiana  $(x, y, z)$ . La ecuación del equilibrio que relaciona los esfuerzos y desplazamientos es la segunda ley de Newton por unidad de volumen

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \rho \ddot{u}_i \quad \text{válida para } i=1,2,3 \quad (\text{I.3})$$

donde  $u_i$  es el campo de desplazamientos en sus tres componentes respectivamente,  $\rho$  es la densidad de masa y  $\ddot{u}_i = \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}$  ( $i=1,2,3$ ) que representa la segunda derivada parcial respecto al tiempo, esto es, la componente  $i$ -ésima de aceleración en coordenadas cartesianas. En la ecuación (I.3) y en lo sucesivo se emplea la convención de suma de la notación indicial en la que los índices repetidos indican suma, por ello se puede reescribir como

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \frac{\partial \sigma_{i1}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{i2}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{i3}}{\partial x_3} = \rho \ddot{u}_i \quad \text{válida para } i=1,2,3 \quad (\text{I.4})$$

Por otro lado, la relación entre el tensor de esfuerzos y de deformaciones están dados por la ley de Hooke

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} e_{kl} \quad (I.5)$$

donde  $c_{ijkl}$  son las componentes del tensor elástico. Este tensor en general tiene 81 términos y debido a que satisface la relación de simetría, el tensor se reduce a 21 componentes o constantes elásticas (módulos elásticos).

En un medio elástico homogéneo e isótropo las componentes del tensor  $c_{ijkl}$  se pueden expresar mediante dos constantes independientes denominadas constantes de Lamé ( $\mu$  y  $\lambda$ ) (Aki y Richard, 1980).

$$c_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (I.6)$$

donde  $\delta_{ij}$  es la delta de Kronecker y toma los siguientes valores bajo las siguientes circunstancias.

$\delta_{ij} = 1$  cuando  $i = j$  y  $\delta_{ij} = 0$  cuando  $i \neq j$ .

Para un medio homogéneo e isótropo la relación de Hooke se simplifica como

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \theta + 2\mu e_{ij} \quad (I.7)$$

el cual

$$\theta = e_{kk} = u_{kk} = \nabla \cdot \bar{u} \quad (I.8)$$

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (I.9)$$

La  $\theta$  representa la dilatación cubica del material y  $e_{ij}$  es el tensor de deformaciones.

Sustituyendo la ecuación (I.5) en (I.3) obtendremos otra forma de la ecuación de Newton

$$(c_{ijkl} u_{i,j})_{,j} = \rho \ddot{u}_i \quad i=1,2,3 \quad (I.10)$$

que representa la ecuación de movimiento para un medio elástico, homogéneo e isótropo, es un sistema de ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden en sus componentes cartesianas y el campo de

desplazamiento esta dado por  $u_i(x_j, t)$ .

La ecuación (I.10) se puede escribir en términos de las dos constantes de Lamé para dar paso a la ecuación de Navier (I.11).

$$(\lambda u_{j,j})_i + \mu(u_{i,j} + u_{j,i})_j = \rho \ddot{u}_i \quad i=1,2,3 \quad (\text{I.11})$$

En notación vectorial puede ser expresada para un caso general en que los módulos elásticos sean dependientes de la posición

$$(\lambda + \mu)\nabla\nabla \cdot \bar{u} + \mu\nabla^2 \bar{u} + \nabla\lambda\nabla \cdot \bar{u} + \nabla\mu \times \nabla \times \bar{u} + 2(\nabla\mu \cdot \nabla)\bar{u} = \rho \ddot{\bar{u}}_i \quad (\text{I.12})$$

Es claro que si las constantes elásticas no dependen de las coordenadas de espacio los gradientes aplicados sobre ellas serán nulos, entonces la ecuación (I.12) se simplifica a la ecuación (I.13).

$$(\lambda + \mu)\nabla\nabla \cdot \bar{u} + \mu\nabla^2 \bar{u} = \rho \ddot{\bar{u}}_i \quad (\text{I.13})$$

Para resolver la ecuación de movimiento (I.13) para un medio elástico, homogéneo e isótropo, se define en el sistema de coordenadas cilíndricas  $(r, \theta, z)$ , donde el origen del sistema está ubicado en la superficie libre. Las interfaces de cada capa son definidas por  $z$  constante (figura I.1) y cualquier capa definida por  $m$  es limitado por  $z_{m-1}$  y  $z_m$  con  $z_m > z_{m-1}$

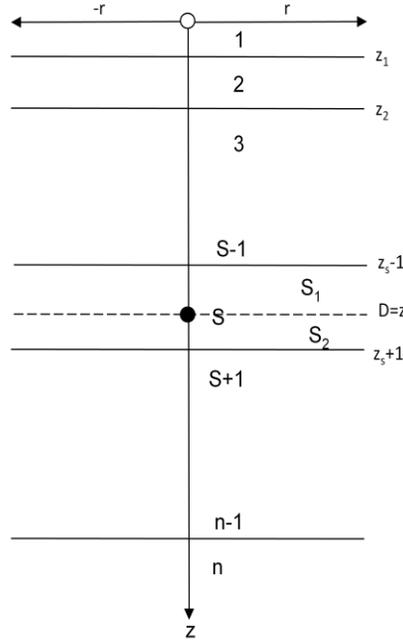


Figura I.1- Dirección de los ejes, numeración de capas ( $n$ ), profundidad de las interfaces ( $z_n$ ) y fuentes ( $S_n$ ).

Aplicando la transformada de Fourier en el tiempo, la ecuación (I.13) para un sólido elástico isótropo  $m$

$$(\lambda_m + \mu_m)\nabla\nabla \cdot \bar{u}_m + \mu_m\nabla^2\bar{u}_m = -\omega^2\rho_m\bar{u}_m \quad (\text{I.14})$$

Donde  $u_m = (q_m, v_m, w_m)$  es el vector de desplazamientos con componentes en función de  $(\omega, r, \phi, z)$ ,  $\omega$  es la frecuencia angular,  $(\lambda_m + \mu_m)$  son las constantes de Lamé y  $\rho_m$  es la densidad. En el sistema de coordenadas cilíndricas,  $u_m$  viene representado por la componente radial  $q_m(\omega, r, \phi, z)$  tangencial  $v_m(\omega, r, \phi, z)$  y vertical  $w_m(\omega, r, \phi, z)$ ; donde el campo de desplazamientos se define como  $u_m = \hat{r}q_m^r + \hat{\phi}v_m^\phi + \hat{z}w_m^z$ . Los desplazamientos en la capa  $n$ -ésima se pueden escribir en función de los potenciales  $\bar{\varphi}_m, \bar{\psi}_m, \bar{\chi}_m$  que son relacionados con las ondas P, SV y SH respectivamente (Aki and Richards, 2002, p.298).

$$\begin{aligned}
q_m(\omega, r, \phi, z) &= \frac{\partial \bar{\varphi}_m}{\partial r} + \frac{\partial^2 \bar{\psi}_m}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{\chi}_m}{\partial \phi} \\
v_m(\omega, r, \phi, z) &= \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{\varphi}_m}{\partial \phi} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \bar{\psi}_m}{\partial z \partial \phi} - \frac{\partial \bar{\chi}_m}{\partial r} \\
w_m(\omega, r, \phi, z) &= \frac{\partial \bar{\varphi}_m}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \bar{\psi}_m}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \bar{\psi}_m}{\partial \phi^2}
\end{aligned} \tag{I.15}$$

Sustituyendo (I.15) en la ecuación (I.14), vemos que

$$\nabla \cdot \bar{u}_m = \nabla^2 \bar{\varphi}_m \tag{I.16}$$

La ecuación (I.13) se satisface si  $\bar{\varphi}_m, \bar{\psi}_m, \bar{\chi}_m$  son soluciones de

$$\begin{aligned}
\nabla^2 \bar{\varphi}_m &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \bar{\varphi}_m}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \bar{\varphi}_m}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \bar{\varphi}_m}{\partial z^2} = -k_{\alpha_m}^2 \bar{\varphi}_m \\
\nabla^2 \bar{\psi}_m &= -k_{\alpha_m}^2 \bar{\psi}_m \\
\nabla^2 \bar{\chi}_m &= -k_{\alpha_m}^2 \bar{\chi}_m
\end{aligned} \tag{I.17}$$

Sustituyendo (I.17) en (I.15) se obtiene

$$\begin{aligned}
q_m(\omega, r, \phi, z) &= \frac{\partial \bar{\varphi}_m}{\partial r} + \frac{\partial^2 \bar{\psi}_m}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{\chi}_m}{\partial \phi} \\
v_m(\omega, r, \phi, z) &= \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{\varphi}_m}{\partial \phi} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \bar{\psi}_m}{\partial z \partial \phi} - \frac{\partial \bar{\chi}_m}{\partial r} \\
w_m(\omega, r, \phi, z) &= \frac{\partial \bar{\varphi}_m}{\partial z} + \frac{\partial^2 \bar{\psi}_m}{\partial z^2} + k_{\beta_m}^2 \bar{\psi}_m
\end{aligned} \tag{I.18}$$

Notamos que si  $\bar{\chi}_m$  es independiente de  $r$  y si  $\bar{\varphi}_m, \bar{\psi}_m, \bar{\chi}_m$  son independientes de  $\phi$ , las ecuaciones (I.18) se reducen en potenciales de desplazamiento involucrando una simetría acimutal (Ewing, Jardetzky y Press, 1957). Definimos ahora

$$\begin{aligned}
q_m(r, z) &= \int_0^{\infty} q_m(r, z; k) dk; & \bar{\varphi}_m(r, z) &= \int_0^{\infty} \varphi_m(r, z; k) dk \\
v_m(r, z) &= \int_0^{\infty} v_m(r, z; k) dk; & \bar{\psi}_m(r, z) &= \int_0^{\infty} \psi_m(r, z; k) dk \\
w_m(r, z) &= \int_0^{\infty} w_m(r, z; k) dk; & \bar{\chi}_m(r, z) &= \int_0^{\infty} \chi_m(r, z; k) dk
\end{aligned} \tag{I.19}$$

asumiendo la siguiente separación radial e independencia acimutal para los integrandos de los potenciales

$$\begin{aligned}
\varphi_m(r, z; k) &= \varphi_m(z) J_1(kr) \\
\psi_m(r, z; k) &= \psi_m(z) J_1(kr) \\
\chi_m(r, z; k) &= \chi_m(z) J_1(kr)
\end{aligned} \tag{I.20}$$

Sustituyendo las ecuaciones (I.19) y (I.20) en (I.18) e igualando los integrandos se obtiene

$$\begin{aligned}
q_m(r, z; k) &= \left\{ \frac{1}{k} \frac{\dot{u}_{P-SV_m}(z)}{c} \frac{dJ_1(kr)}{dkr} - \frac{i}{k} \frac{\dot{v}_{SH_m}(z)}{c} \frac{J_1(kr)}{kr} \right\} \\
v_m(r, z; k) &= \left\{ -\frac{1}{k} \frac{\dot{u}_{P-SV_m}(z)}{c} \frac{J_1(kr)}{kr} + \frac{i}{k} \frac{\dot{v}_{SH_m}(z)}{c} \frac{dJ_1(kr)}{dkr} \right\} \\
w_m(r, z; k) &= -\frac{i}{k} \frac{\dot{w}_{P-SV_m}(z)}{c} J_1(kr)
\end{aligned} \tag{I.21}$$

donde se han utilizado las siguientes relaciones

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \varphi_m(z)}{\partial z^2} &= -k^2 r_{\alpha_m}^2 \varphi_m(z) \\
\frac{\partial^2 \psi_m(z)}{\partial z^2} &= -k^2 r_{\beta_m}^2 \psi_m(z) \\
\frac{\partial^2 \chi_m(z)}{\partial z^2} &= -k^2 r_{\beta_m}^2 \chi_m(z) \\
c &= \frac{\omega}{k}
\end{aligned} \tag{I.22}$$

las tres primeras relaciones (I.22) son consecuencia de sustituir las ecuaciones (I.19) y (I.20) en (I.17).

En la interface entre dos capas se emplean las condiciones de frontera de continuidad de desplazamientos y de esfuerzos. Desde que  $J_1(kr)/kr$  y  $dJ_1(kr)/dkr$  son linealmente independientes, podemos imponer la continuidad de desplazamientos y esfuerzos en las expresiones (I.21) que deben satisfacer a toda  $r$ . A partir de las ecuaciones (I.21), la continuidad de desplazamientos y esfuerzos en la interface  $z = z_{m-1}$  entre la capa  $m$  y  $m-1$  pueden ser expresados en forma vectorial como:

$$\begin{bmatrix} \frac{\dot{u}_{P-SV_m}(z_{m-1})}{c} \\ \frac{\dot{w}_{P-SV_m}(z_{m-1})}{c} \\ \frac{\sigma_{P-SV_m}(z_{m-1})}{c} \\ \frac{\tau_{P-SV_m}(z_{m-1})}{c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\dot{u}_{P-SV_{m-1}}(z_{m-1})}{c} \\ \frac{\dot{w}_{P-SV_{m-1}}(z_{m-1})}{c} \\ \frac{\sigma_{P-SV_{m-1}}(z_{m-1})}{c} \\ \frac{\tau_{P-SV_{m-1}}(z_{m-1})}{c} \end{bmatrix} \quad (\text{I.23})$$

y

$$\begin{bmatrix} \frac{v_{SH_m}(z_{m-1})}{c} \\ \frac{\tau_{SH_m}(z_{m-1})}{c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{v_{SH_{m-1}}(z_{m-1})}{c} \\ \frac{\tau_{SH_{m-1}}(z_{m-1})}{c} \end{bmatrix} \quad (\text{I.24})$$

Podemos observar que en las ecuaciones (I.21),  $z$  es dependiente de los desplazamientos y esfuerzos para la capa  $m$  dados por las siguientes relaciones

$$\begin{aligned}
\frac{\dot{u}_{P-SV_m}(z)}{c} &= k^2 \left[ \bar{\varphi}_m(z) + \frac{\partial \psi_m(z)}{\partial z} \right] \\
\frac{\dot{w}_{P-SV_m}(z)}{c} &= ik \left[ \frac{\partial \varphi_m(z)}{\partial z} + \frac{\partial^2 \psi_m(z)}{\partial z^2} + k_{\beta_m}^2 \psi_m(z) \right] \\
\sigma_{P-SV_m}(z) &= 2\mu_m \left[ \frac{\partial^2 \varphi_m(z)}{\partial z^2} + \frac{\partial^3 \psi_m(z)}{\partial z^3} + k_{\beta_m}^2 \frac{\partial^2 \psi_m(z)}{\partial z^2} \right] - \lambda_m k_{\alpha_m}^2 \varphi_m(z) \\
\tau_{P-SV_m}(z) &= -ik\mu_m \left[ 2 \frac{\partial \varphi_m(z)}{\partial z} + 2 \frac{\partial^2 \psi_m(z)}{\partial z^2} + k_{\beta_m}^2 \psi_m(z) \right] \\
\frac{\dot{v}_{SH_m}(z)}{c} &= ik^2 \chi_m(z) \\
\tau_{SH_m}(z) &= k\mu_m \frac{\partial \chi_m(z)}{\partial z}
\end{aligned} \tag{I.25}$$

Para las capas que no contienen la fuente, se utiliza para los potenciales  $\bar{\varphi}_m(z)$ ,  $\bar{\psi}_m(z)$ ,  $\bar{\chi}_m(z)$  la solución general de las ecuaciones (I.22) con coeficientes arbitrarios

$$\begin{aligned}
\varphi_m(z) &= P_m' e^{-ikr_{\alpha_m} z} + P_m'' e^{ikr_{\alpha_m} z} \\
\psi_m(z) &= Q_m' e^{-ikr_{\beta_m} z} + Q_m'' e^{ikr_{\beta_m} z} \\
\chi_m(z) &= R_m' e^{-ikr_{\beta_m} z} + R_m'' e^{ikr_{\beta_m} z}
\end{aligned} \tag{I.26}$$

los exponentiales de (I.26) están definidos como

$$\begin{aligned}
(kr_{\alpha_m})^2 &= k_{\alpha_m}^2 - k^2 = k^2 \left[ \frac{c^2}{\alpha_m^2} - 1 \right] \\
(kr_{\beta_m})^2 &= k_{\beta_m}^2 - k^2 = k^2 \left[ \frac{c^2}{\beta_m^2} - 1 \right]
\end{aligned} \tag{I.27}$$

donde  $k_{\beta_m} = \omega/\beta_m$ ;  $k_{\alpha_m} = \omega/\alpha_m$ ;  $\alpha_m$  y  $\beta_m$  es la velocidad de compresión y de cortante respectivamente para la capa  $m$ .

Considerando una fuente puntual, la transformada de Fourier en el tiempo de la fuente  $L(\omega)$  positiva en dirección al eje  $z$ , es definido (Pekeris, 1955) en términos de la transformación normal del esfuerzo cuando  $z = D$  como

$$\left[ P_{z z_s}(r, \theta, D^+) - P_{z z_s}(r, \theta, D^-) \right] = -\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty J_0(kr) k dk \quad (I.28)$$

Como la fuente vertical puntual es acimutalmente simétrico con respecto al eje z, las componentes de la fuente vertical se puede escribir como

$$\begin{aligned} \delta \left( \frac{\dot{u}_{P-SV_s}}{c} \right) &= 0 & \delta \sigma_{P-SV_s} &= -\frac{k}{2\pi} \\ \delta \left( \frac{\dot{w}_{P-SV_s}}{c} \right) &= 0 & \delta \tau_{P-SV_s} &= 0 \\ \delta \left( \frac{\dot{v}_{SH_s}}{c} \right) &= 0 & \delta \tau_{SH_s} &= 0 \end{aligned} \quad (I.29)$$

de este modo, las condiciones de continuidad y de equilibrio entre las capas  $z_{m-1}$  y  $z_m$  con una fuente puntual vertical se escriben como

$$\begin{bmatrix} \frac{\dot{u}_{P-SV_{s2}}(D)}{c} \\ \frac{\dot{w}_{P-SV_{s2}}(D)}{c} \\ \frac{\sigma_{P-SV_{s2}}(D)}{c} \\ \frac{\tau_{P-SV_{s2}}(D)}{c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\dot{u}_{P-SV_{s1}}(D)}{c} \\ \frac{\dot{w}_{P-SV_{s1}}(D)}{c} \\ \frac{\sigma_{P-SV_{s1}}(D)}{c} \\ \frac{\tau_{P-SV_{s1}}(D)}{c} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \delta \sigma_{P-SV_s} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (I.30)$$

Las componentes de una fuente puntual horizontal se escriben como

$$\begin{aligned} \delta \left( \frac{\dot{u}_{P-SV_s}}{c} \right) &= 0 & \delta \sigma_{P-SV_s} &= 0 \\ \delta \left( \frac{\dot{w}_{P-SV_s}}{c} \right) &= 0 & \delta \tau_{P-SV_s} &= i \frac{k}{2\pi} \\ \delta \left( \frac{\dot{v}_{SH_s}}{c} \right) &= 0 & \delta \tau_{SH_s} &= -\frac{k}{2\pi} \end{aligned} \quad (I.31)$$

Las condiciones de continuidad y de equilibrio entre las capas  $z_{m-1}$  y  $z_m$  con una fuente puntual horizontal se escriben como

$$\begin{bmatrix} \frac{\dot{u}_{P-SV_{s2}}(D)}{c} \\ \frac{\dot{w}_{P-SV_{s2}}(D)}{c} \\ \frac{\sigma_{P-SV_{s2}}(D)}{c} \\ \frac{\tau_{P-SV_{s2}}(D)}{c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\dot{u}_{P-SV_{s1}}(D)}{c} \\ \frac{\dot{w}_{P-SV_{s1}}(D)}{c} \\ \frac{\sigma_{P-SV_{s1}}(D)}{c} \\ \frac{\tau_{P-SV_{s1}}(D)}{c} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \delta\tau_{P-SV_s} \end{bmatrix} \quad (I.32)$$

y

$$\begin{bmatrix} \frac{v_{SH_{s2}}(D)}{c} \\ \frac{\tau_{SH_{s2}}(D)}{c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{v_{SH_{s1}}(D)}{c} \\ \frac{\tau_{SH_{s1}}(D)}{c} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \delta\tau_{SH_s} \end{bmatrix} \quad (I.33)$$

Para resolver las ecuaciones (I.26) y obtener los coeficientes indeterminados considerando la inclusión de fuentes puntuales en las condiciones de frontera, se resuelve el sistema de ecuaciones (del mismo modo que Haskell (1953) obtuvo su matriz resultante). De esta manera, se obtienen las cantidades  $G, H, J_L, K, L, M, N, R, S$ , los cuales son definidos en Harkrider (1964). Las ecuaciones de los desplazamientos (I.15) se pueden definir para una fuente vertical en la superficie como

$$w_0(r) = -\frac{i}{2\pi} \int_0^\infty \left\{ \frac{[GN - LH]}{[NK - LM]} \right\} J_0(kr) dk \quad (I.34)$$

$$q_0(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \left\{ \frac{[RN - SL]}{[NK - LM]} \right\} J_1(kr) dk \quad (I.35)$$

y para una fuente horizontal en la superficie, las ecuaciones de desplazamiento (I.15) se definen

$$w_0(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \left\{ -\frac{[RN - SL]}{[NK - LM]} \right\} J_1(kr) dk \quad (I.36)$$

$$q_0(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \left\{ \left( -i \frac{[RM - SK]}{[NK - LM]} + i \frac{(J_L)_{12} - (J_L)_{22}}{(J_L)_{21} - (J_L)_{11}} \right) \frac{J_1(kr)}{kr} \right\} dk + \frac{i}{2\pi} \int_0^\infty \left\{ \frac{[RM - SK]}{[NK - LM]} \right\} J_0(kr) dk \quad (I.37)$$

$$v_0(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \left\{ -i \left( \frac{[RM - SK]}{[NK - LM]} - \frac{(J_L)_{12} - (J_L)_{22}}{(J_L)_{21} - (J_L)_{11}} \right) \frac{J_1(kr)}{kr} \right\} dk - \frac{i}{2\pi} \int_0^\infty \left\{ \frac{(J_L)_{12} - (J_L)_{22}}{(J_L)_{21} - (J_L)_{11}} \right\} J_0(kr) dk \quad (\text{I.38})$$

## Anexo II

### Propiedades de los propagadores de Haskell

Los elementos de los propagadores de Haskell, definidos en el plano complejo son del tipo:

$$a_{P-SV_m} = \begin{pmatrix} P & I & P & I \\ I & P & I & P \\ P & I & P & I \\ I & P & I & P \end{pmatrix} \quad (II.1)$$

$$a_{SH_m} = \begin{pmatrix} P & I \\ I & P \end{pmatrix}$$

Donde  $P$  identifica elementos que cumplen las siguientes características:

- i) Pares en  $k$ ,
- ii) Se conjugan al atravesar el eje real. Por ejemplo:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (a_{P-SV_m}(\pm |k| + i\varepsilon))_{11} = \left[ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (a_{P-SV_m}(\pm |k| - i\varepsilon))_{11} \right]^*$$

- iii) Se conjugan al atravesar el semieje imaginario positivo. Por ejemplo,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (a_{P-SV_m}(i|k| + \varepsilon))_{11} = \left[ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (a_{P-SV_m}(i|k| - \varepsilon))_{11} \right]^*$$

Mientras que los elementos  $I$  se caracterizan por:

- i) Impares en  $k$ ,
- ii) Se conjugan y cambian de signo (o sea, cambia de signo la parte real) al atravesar el eje real. Por ejemplo:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (a_{P-SV_m}(\pm |k| + i\varepsilon))_{12} = - \left[ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (a_{P-SV_m}(\pm |k| - i\varepsilon))_{12} \right]^*$$

- iii) Se conjugan al atravesar el semieje imaginario positivo. Por ejemplo:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (a_{P-SV_m}(i|k| + \varepsilon))_{12} = \left[ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (a_{P-SV_m}(i|k| - \varepsilon))_{12} \right]^*$$

## Anexo III

### *Propiedades de funciones especiales*

Aprovechando que las funciones de Bessel  $J_n(kr)$  tienen relación con las funciones de Hankel

$$J_n(kr) = \frac{1}{2} [H_n^{(1)}(kr) + H_n^{(2)}(kr)] \quad (\text{III.1})$$

Estas funciones de Hankel cumplen las propiedades:

$$\begin{aligned} H_0^{(1)}(-|kr|) &= -H_0^{(2)}(|kr|) \\ H_1^{(1)}(-|kr|) &= H_1^{(2)}(|kr|) \\ H_2^{(1)}(-|kr|) &= -H_2^{(2)}(|kr|) \end{aligned} \quad (\text{III.2})$$

Con las anteriores relaciones, podemos convertir las integrales sobre  $k$  real positivos en integrales sobre todo  $k$  real utilizando la igualdad:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} f_n(k) J_n(kr) dk &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} f_n(k) [H_n^{(1)}(kr) + H_n^{(2)}(kr)] dk \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} f_n(k) H_n^{(1)}(kr) dk + (-1)^{n+1} \frac{1}{2} \int_0^{\infty} f_n(k) H_n^{(1)}(-kr) dk \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} f_n(k) H_n^{(1)}(kr) dk + (-1)^{n+1} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 f_n(-k) H_n^{(1)}(kr) dk \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(k) H_n^{(1)}(kr) dk, \quad \text{para } n = 0, 1, 3. \end{aligned} \quad (\text{III.3})$$

en el último paso se ha considerado que

$$f_n(-k) = (-1)^{n+1} f_n(k) \quad (\text{III.4})$$

# Anexo IV

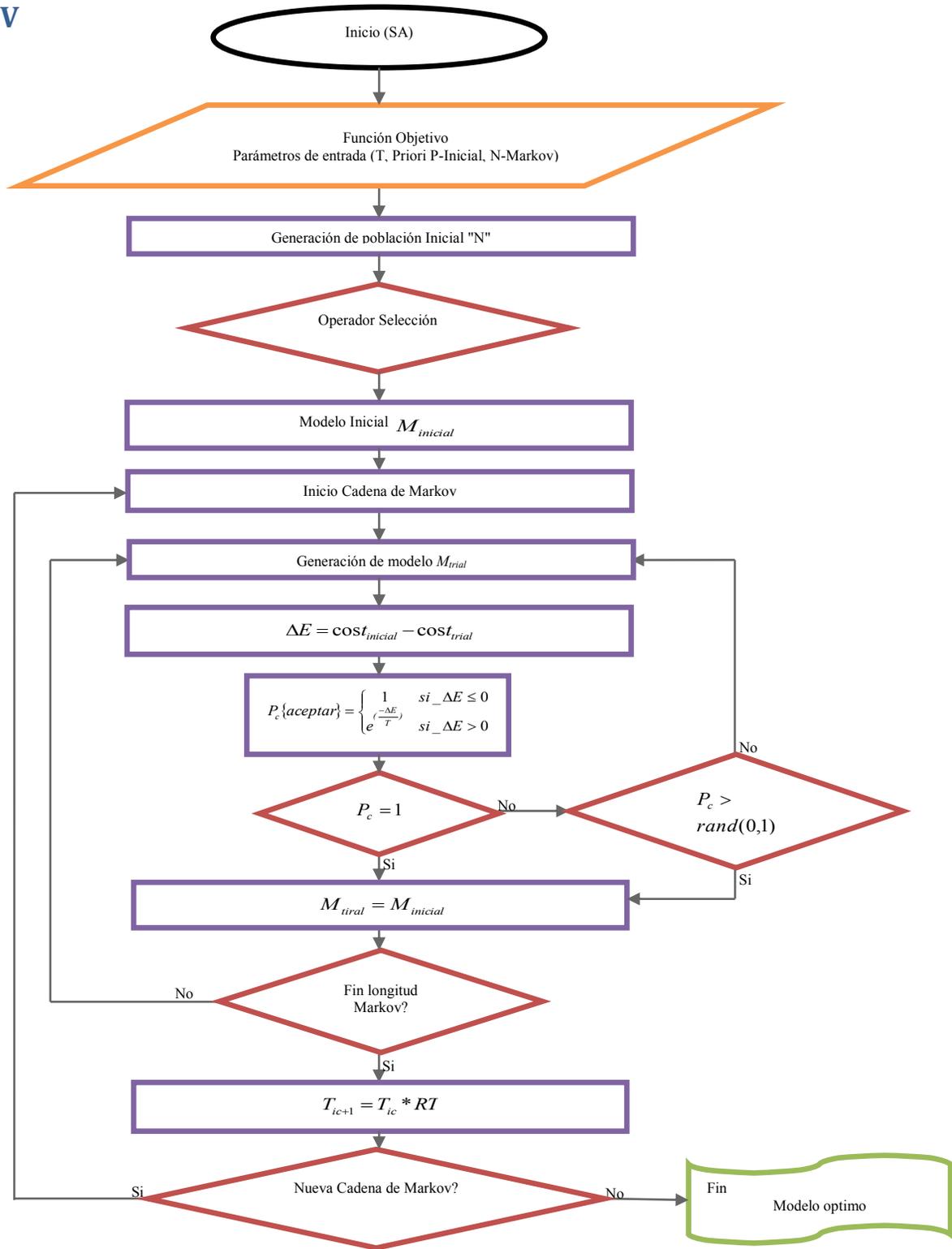


Figura IV.1.- Diagrama de flujo que describe el método de cristalización simulada (S.A.).

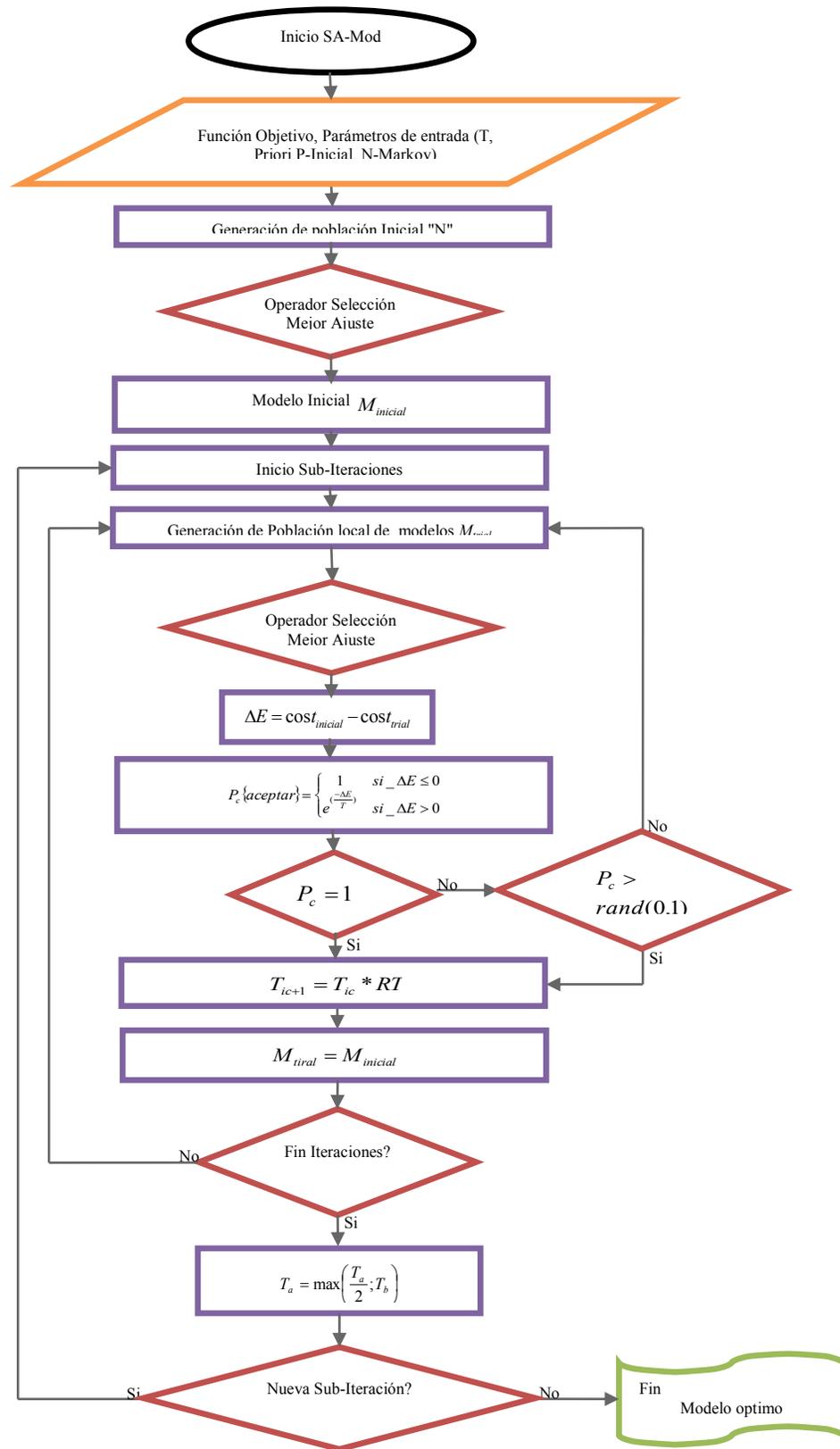


Figura IV.2.- Diagrama de flujo que describe el método de cristalización simulada modificado (S.A.M.).