**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

**FACULTAD DE CIENCIAS**

# CUANTIZACIÓN DE UNA TEORÍA DE NORMA: D-PARTÍCULAS, UN EJEMPLO ILUSTRATIVO.

**T E S I S**

**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:**

**FÍSICO**

**P R E S E N T A:**

**DIEGO VIDAL CRUZ PRIETO**

**DIRECTOR DE TESIS:**
**DR. JOSÉ DAVID VERGARA OLIVER**

**Cd. Universitaria, D. F. 2015**

# *Cuantización de una teoría de norma: D-partículas, un ejemplo ilustrativo*

una tesis presentada
por
Diego Vidal Cruz Prieto
para
La Facultad de Ciencias, Departmento de Física

en cumplimiento parcial de los requisitos
para obtener el grado de
Licenciado en Física

Universidad Nacional Autónoma de México
Ciudad de México, Distrito Federal
Month 2014

Tutor de tesis: Dr. José David Vergara Oliver Diego Vidal Cruz Prieto

# *Cuantización de una teoría de norma: D-partículas, un ejemplo ilustrativo*

## Resumen

En este trabajo se presenta y desarrolla todo el marco necesario para cuantizar una teoría de norma, en particular una teoría mecánica de Yang-Mills cuyas soluciones nos brindan la dinámica de las D-partículas, estás partículas son entidades que orginalmente eran campos pero pasamos su dependencia en el espacio a un índice que transforma bajo un grupo de Lie. El nombre es una herencia de uan Dp-brana con $p = 0$, y se podría entender nuestro caso como el que carece de supersimetría ya que sólo tenemos variables bosónicas.

La motivación inicial fué el de tener constricciones de Yang-Mills que pudieran cumplir el álgebra de constricciones de la gravitación pero con un sistema mucho más sencillo, de éste modo al cuantizar se puede tener un modelo de juguete del cual aprender varias lecciones. Finalmente nos percatamos que éste enfoque resultaba en una tarea gigantesca ya que todas las condiciones de norma que intentamos resultaban en un álgebra abierta, cambiamos el rumbo a entender la teoría como una cromodinámica con potencial electroestático y de éste modo es tratada.

Dado que la teoría resultante es singular y de primera clase, el primer enfoque para su cuantización es el método de Dirac, principalmente el formalismo Hamiltoniano, dicho enfoque es presentado en el capítulo 1 donde también se introducen las nociones necesarias sobre transformaciones de norma.

Posteriormente, en el capítulo 2 tratamos el formalismo Hamiltoniano del electromagnetismo, esto se hace con un propósito didáctico ya que posteriormente será necesario hacer el mismo tratamiento con una teoría de Yang-Mills, donde hay bastantes similitudes pero sus diferencias pueden incidir en comportamientos dramáticamente distintos.
En el capítulo 3 hacemos el formalismo Hamiltoniano de una teoría de Yang-Mills, para tratar la teoría cuántica tmabién presentamos el formalismo de integral funcional en conjunción con el método de Fadeev-Popov.
Finalmente, en el capítulo 4 introducimos las D-partículas, desarrollamos su formalismo Hamiltoniano y nos percatamos que su cuantización es complicada ya que las condiciones de norma no son evidentes y hasta el momento no se han podido encontrar, por lo cual se debe invocar a la integral funcional para hacer la cuantización de la teoría completa para ver con que tipo de sistema estamos lidiando. Posteriormente analizamos varias teorías reducidas con menos constricciones, en éstos casos encontramos paralelismos con teorías de Chern-Simmons e incluso se puede calcular la energía del estado base de uno de éstos casos.
Varias características notables emergieron en el estudio del sistema, como no-conmutatividad y mucha sensibilidad a la dimensión del espacio-tiempo $D$ en las que están inmersas las partículas, cabe destacar que se optó por que el grupo de Lie siempre fuera $SU(n)$, ya que si se elige uno que no sea semisimple el álgebra no cierra.
Finalmente se concluye que la teoría a pesar de ser una teoría mecánica, mantiene

las propieadades de la teoría de campo completa; también notamos tiene varias aplicaciones, tales como el estudio de cromodinámica cuántica en el régimen donde el potencial electrostático domina. También se demuestra que la teoría es invariante ante transformaciones conformes, por lo cual se plantea a futuro usar la dualidad norma/gravedad para ver que gravitación definiría en un espacio-tiempo $AdS_2$.

# Contenido

A mis padres, Elsa y Paco.

A Alberto, el otro gen recesivo de la familia.

# Agradecimientos

QUIERO AGRADECER a mis padres, Elsa y Paco, por el amoroso e incondicional apoyo que me han brindado a lo largo de mi vida, sin él no podría haber llegado a donde estoy.

También quiero dar mis mas profundos agradecimientos al Dr. David Vergara por haberme formado con tanto entusiasmo y paciencia, sus enseñanzas han sido verdaderamente profundas e influyentes en mi formación como físico. Asimismo quiero agradecer al Dr. Eduardo Nahmad por haberme mostrado el camino cuando estaba a punto de perderlo.

*Si eres receptivo y humilde, las matemáticas te llevarán de la mano.*

P. A. M. Dirac

# 1

# El tratamiento de Dirac para sistemas con constricciones

¿Existe algún procedimiento sistemático para cuantizar una teoría? La respuesta a esta pregunta es afirmativa, y fué en gran parte el trabajo de Dirac hacer posible dicho procedimiento, él afirmaba que si uno podía poner la teoría clásica en su forma Hamiltoniana, entonces se podrían aplicar un conjunto de reglas para obtener la primera aproximación a una teoría cuántica[1, 2]. Mostrar este conjunto de reglas será nuestro objetivo en este capítulo

## 1.1 La acción, nuestro punto de partida

La acción se define de la siguiente forma:

$$S(q,\dot{q}) = \int dt\ \mathcal{L} \tag{1.1}$$

$$q(t_1) = q_1 \tag{1.2}$$

$$q(t_2) = q_2 \tag{1.3}$$

En la introducción de este capítulo se mencionó que se busca llegar a la forma Hamiltoniana de la teoría, por lo cual el lector podría preguntarse porque empezamos con una formulación Lagrangiana en vez de simplemente plantear el Hamiltoniano; la razón de comenzar de esta manera es que ciertas dificultades aparecen cuando queremos que la formulación Hamiltoniana de una teoría sea relativista, en cambio, si se parte de la acción esto es bastante sencillo.
Sean $(q^1 \dots q^n)$ nuestras coordenadas generalizadas, al variar la acción obtenemos las ecuaciones de *Euler-Lagrange*:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i} = 0 \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^k}\ddot{q}^i + \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k \partial q^i}\dot{q}^i + \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k \partial t} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^k} = 0 \tag{1.5}$$

Nuestra primera conexión con la formulación Hamiltoniana es definir los momentos canónicamente conjugados

$$p_i \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} \tag{1.6}$$

En los casos más sencillos los momentos serán funciones independientes de las velocidades, pero podemos no limitarnos a este hecho y considerar que pueden existir relaciones entre las coordendas y los momentos denominadas *constricciones primarias*.

**Definición 1.1.1 (Constricciones primarias)** *Son aquellas constricciones que* *aparecen de las definiciones de los momentos y son relaciones entre éllos y las coordenadas que indican que no todas estas son independientes*

$$\mathcal{G}_{A_1}(q^i, p_i) \approx 0 \tag{1.7}$$

*Donde* $A_1 = 1, \ldots, r$*; dichas constricciones son débilmente cero, es decir, sólo podemos considerar que son cero después de haber realizado los paréntesis de Poisson necesarios para obtener las ecuaciones de movimiento.*

Cabe destacar que una teoría con constricciones es aquella donde las constricciones (1.7) se originan a partir de que en (1.5):

$$det\left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i \dot{q}^j}\right) = 0 \tag{1.8}$$

Esto implica que no todas las ecuaciones de Euler-Lagrange son independientes. El Hamiltoniano canónico es considerado una función de las coordenadas y de los momentos, esto se deduce de su definición (la transformada de Legendre del Lagrangiano) y su variación

$$H_0 \equiv \dot{q}^i p_i - \mathcal{L} \tag{1.9}$$

$$\delta H_0 = \delta \dot{q}^i p_i + \dot{q}^i \delta p_i - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i}\delta \dot{q}^i - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i}\delta q^i \tag{1.10}$$

$$= \dot{q}^i \delta p_i - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i}\delta q^i \tag{1.11}$$

Al ser independiente de la variación de las velocidades y al depender tanto de la variación coordenadas como de los momentos deducimos que el Hamiltoniano es una función de sólo las coordenadas y los momentos. Éstas variaciones no son del todo independientes ya que existen las relaciones (1.7), las cuales definen una hipersuperficie en el espacio fase sobre la cual está restringida la dinámica, es en esta superficie donde son idénticamente cero y es donde el Hamiltoniano está definido; si deseamos extender la teoría fuera de la superficie se introduce una arbitrariedad ya que no hay un modo único para hacer esto. Es decir, se producen las mismas ecuaciones de movimiento al variar la siguiente acción [3] :

$$H_T = H_0 + \lambda^{A^1}\mathcal{G}_{A_1} \tag{1.12}$$

$$S(q,p,\lambda) = \int dt\ \dot{q}^i p_i - H_T \tag{1.13}$$

## 1.2 Algoritmo de Dirac-Bergmann

Queremos que la hipersuperficie de constricción se conserve a lo largo del tiempo con el fin de que el método sea consistente, por lo que debemos pedir lo siguiente [1, 2, 4]:

$$\dot{\mathcal{G}}_{A_1} = \{\mathcal{G}_{A_1}, H_T\} = V_{A_1}^{B_1}\mathcal{G}_{B_1} + V_{A_1}^{A_2}\varphi_{A_2} \approx 0 \tag{1.14}$$

Donde pueden llegar a aparecer *constricciones secundarias* $\varphi_{A_2}$ ($A_2 = r+1, \ldots, s$), para las cuales también se debe de requerir que $\dot{\varphi}_{A_2} \approx 0$. Una vez que ya no emerjan nuevas constricciones es pertiente hacer las siguientes definiciones

**Definición 1.2.1 (Cantidad de primera clase)** *R es una cantidad de primera clase si se tiene:*

$$\{R, \mathcal{G}_A\} = V_A^B(p,q)\mathcal{G}_B \tag{1.15}$$

*Donde $A = 1, \ldots, r, r+1, \ldots, s$ donde s es el total de constricciones originadas a causa del procedimiento anterior. Por consistencia de la teoría debe pedirse que el Hamiltoniano total $H_T$ sea una cantidad de primera clase, es decir*

$$\{H_T, \mathcal{G}_A\} = V_A^B(p,q)\mathcal{G}_B \tag{1.16}$$

*Si esto no se cumpliera habría constricciones adicionales.*

**Definición 1.2.2 (Cantidad de segunda clase)** *Las que no satisfacen* (1.16).

Otro modo de escribir (1.14) considerando el conjunto de todas las constricciones, tanto primarias como secundarias $\mathcal{C}_A = (\mathcal{G}_1, \ldots, \mathcal{G}_r, \varphi_1, \ldots, \varphi_s)$

es el siguiente

$$0 \approx \{\mathcal{C}_A, H_T\} = V_A^B(p,q)\mathcal{C}_B + \lambda^{A_1}\{\mathcal{C}_A, \mathcal{G}_{A_1}\} \tag{1.17}$$

**Definición 1.2.3 (Constricciones de primera clase)** *Son aquellas constricciones $\mathcal{F}_a$ que cumplen con lo siguiente:*

$$\{\mathcal{F}_a, \mathcal{G}_B\} = f_{aB}^C(p,q)\mathcal{G}_C \tag{1.18}$$

*Es decir, son aquéllas cuyo paréntesis de Poisson es débilmente cero. El índice $a = 1, \ldots, m$ las rotula y las cantidades $f_{aB}^C$ pueden ser funciones del espacio fase, pero si son constantes, corresponden a las de estructura de un álgebra de Lie.*

**Definición 1.2.4 (Constricción de segunda clase)** *Son las constricciones $\chi_\beta$ que cumplen con:*

$$\{\chi_\beta, \chi_\gamma\} = C_{\beta\gamma} \tag{1.19}$$

*Donde* $\det C_{B\gamma} \neq 0$*,* $C_{B\gamma} = -C_{\gamma B}$ *, con* $\gamma = 1, \ldots, l$*.*

La razón por la que distinguimos las constricciones de primera clase $(\mathcal{F}_a)$ de las de segunda $(\chi_\gamma)$ es la siguiente: si tenemos $a = 1, \ldots, m$ constricciones de primera clase y $\gamma = 1, \ldots, l$ de segunda clase, nuestro Hamiltoniano será

$$H_T = H_0 + \lambda^a \mathcal{F}_a + \mu^\gamma \chi_\gamma \tag{1.20}$$

Determinar el multiplicador de Lagrange $\mu^\gamma$ es sencillo, simplemente hacemos evolucionar temporalmente $\chi_\delta$

$$0 \approx \dot{\chi}_\delta = \{\chi_\delta, H_T\} = \{\chi_\delta, H_0\} + \lambda^a\{\chi_\delta, \mathcal{F}_a\} + \mu^\gamma\{\chi_\delta, \chi_\gamma\} \tag{1.21}$$

$$0 \approx \{\chi_\delta, H_0\} + \lambda^a f_{\delta a}^B \mathcal{G}_B + \mu^\gamma C_{\delta\gamma} \tag{1.22}$$

Definamos $\{\chi_\delta, H_\circ\} = N_\delta$, al ya haber sido evaluados los paréntesis de Poissson podemos hacer fuertes tanto las constricciones como el cero

$$\mu^\gamma = -C^{-1}_{\delta\gamma} N_\delta \tag{1.23}$$

Con $C^{-1}_{\delta\gamma}$ siendo el inverso de $C_{\delta\gamma}$, si tratamos de hacer esto mismo para las constricciones de primera clase, vemos que

$$0 \approx \dot{\mathcal{F}}_b = \{\mathcal{F}_b, H_\circ\} + \lambda^a\{\mathcal{F}_b, \mathcal{F}_a\} + \mu^\gamma\{\mathcal{F}_b, \chi_\gamma\} \tag{1.24}$$

$$0 \approx \{\mathcal{F}_b, H_\circ\} + \lambda^a f^C_{ba}\mathcal{G}_C + \mu^\gamma f^C_{b\gamma}\mathcal{G}_C \tag{1.25}$$

Por lo cual, una vez que hagamos fuertes las constricciones nos quedamos sin la posibilidad de despejar el aún indeterminado multiplicador de Lagrange; esto implica que la ambiguedad en nuestras ecuaciones de movimiento no es removible a menos de que modifiquemos el álgebra de constricciones. Es por esto que se imponen *condiciones de norma* para convertir las constricciones de primera clase en unas de segunda.

**Definición 1.2.5 (Condición de norma)** *Sea un conjunto de constricciones de primera clase $\mathcal{F}_a$, $a = 1, \ldots, m$, se añaden nuevas constricciones $\varphi_a$ de modo tal que ahora tengamos $2m$ constricciones que cumplan lo siguiente*

$$\{\mathcal{F}_a, \varphi_b\} = C_{ab} \tag{1.26}$$

Una vez impuestas las condiciones de norma, todas nuestras cosntricciones se vuelven de segunda clase, y podemos redefinir el paréntesis de Poisson en el de Dirac, dicho paréntesis evoluciona cualqueir cantidad de interés quitando la arbitrariedad del multiplicador de Lagrange.

**Definición 1.2.6** *Sean $A$ y $B$ funciones en el espacio fase, $\chi_a$ y $\chi_b$ constricciones de segunda clase y $C_{ab}$ un elemento de su álgebra, se define el* **paréntesis de Dirac** *como*

$$\{A, B\}^* \equiv \{A, B\} - \{A, \chi_a\}C^{ab}\{\chi_b, B\} \tag{1.27}$$

*Donde $C^{ab}$ es la matriz inversa asociada a (1.19) ó (1.26).*

El paréntesis de Dirac es de suma importancia ya que nos da la siguiente regla de cuantización canónica

$$\{A, \chi_c\}^* \mapsto \frac{1}{i}[\hat{A}, \hat{\chi}_c]^* \tag{1.28}$$

Y además cumple con las propiedades usuales de los paréntesis de Poisson, es decir [1]

**Antisimetría** $\{f, g\}^* = -\{g, f\}^*$

**Linealidad** $\{c_1 f_1 + c_2 f_2, g\}^* = c_1\{f_1, g\}^* + c_2\{f_2, g\}^*$

**Regla de Leibnitz** $\{f_1 f_2, g\}^* = f_1\{f_2, g\}^* + f_2\{f_1, g\}^*$

**Identidad de Jacobi** $\{f, \{g, h\}^*\}^* + \{h, \{f, g\}^*\}^* + \{g, \{h, f\}^*\}^* = 0$

Desde el enfoque Lagrangiano diremos que una teoría es de norma si satisface la condición (1.8) y si además tiene simetría local, es decir es invariante ante transformaciones de simetría que dependen del punto de la variedad donde esté definida la teoría. En el enfoque Hamiltoniano diremos que una teoría de norma es tal que al menos tiene una constricción de primera clase, las cuales generan las transformaciones de simetría vistas en el caso Lagrangiano.

**Ejemplo 1.2.1** *La acción clásica para una partícula en n-dimensiones es*

$$S = \int dt \left( \frac{1}{2} m \delta_{ab} \frac{dq^a}{dt} \frac{dq^b}{dt} - V(q^a) \right) \tag{1.29}$$

*Elegimos hacer una parametrización en t, es decir $t \mapsto \tau(t)$, esto es el modo de decir que t deja de ser un parámetro y pasa a ser una coordenada, el papel de parámetro lo toma $\tau$. Nótese que*

$$dt = \frac{dt}{d\tau} d\tau \qquad \text{se define } \dot{\sigma} \equiv \frac{d\sigma}{d\tau} \tag{1.30a}$$

$$dt = \dot{t} d\tau \tag{1.30b}$$

*Análogamente para $\dot{q}^a$*

$$\frac{dq^a}{dt} = \frac{dq^a}{d\tau}\frac{d\tau}{dt} = \frac{\dot{q}^a}{\dot{t}} \tag{1.31}$$

*Con estas consideraciones y notando que $q^a$ es un escalar bajo la parametrización(i.e. $q^a(t) = q^a(\tau)$)*

$$S = \int d\tau \left(\frac{1}{2}m\delta_{ab}\frac{1}{\dot{t}}\dot{q}^a\dot{q}^b - \dot{t}V(q^a)\right) \tag{1.32}$$

*Podemos notar que la acción ha cambiado por la añadidura de t como coordenada, esto nos lleva a la siguiente pregunta: ¿Qué pasa si volvemos a parametrizar?*
*Hagamos una reparametrización $\tau \mapsto f(\tau)$, emulando el procedimiento anterior se tiene*

$$\sigma' \equiv \frac{d\sigma}{df} \tag{1.33a}$$

$$d\tau = \tau' df \qquad \dot{q}^a = \frac{q'^a}{\tau'} \qquad \dot{t} = \frac{t'}{\tau'} \tag{1.33b}$$

*Bajo la reparametrización la acción se vuelve*

$$S = \int df \left(\frac{1}{2}m\delta_{ab}\frac{1}{t'}q'^a q'^b - t'V(q^a)\right) \tag{1.34}$$

*Vemos que (1.34) tiene la misma forma que (1.32), es decir después de parametrizar la acción se vuelve invariante ante subsecuentes reparametrizaciones.*
*Retomemos la acción (1.32), obtengamos sus ecuaciones de movimiento*

$$L = \frac{1}{2}m\delta_{ab}\frac{1}{\dot{t}}\dot{q}^a\dot{q}^b - \dot{t}V(q^a) \tag{1.35a}$$

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^a} = 0 \qquad \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{t}}\right) - \frac{\partial L}{\partial t} = 0 \tag{1.35b}$$

$$\frac{d}{d\tau}\left(m\frac{1}{\dot{t}}\dot{q}_a\right) + \dot{t}\frac{\partial V}{\partial q^a} = 0 \qquad \frac{d}{d\tau}\left(-\frac{1}{2}m\delta_{ab}\frac{1}{\dot{t}^2}\dot{q}^a\dot{q}^b - V(q^a)\right) = 0 \tag{1.35c}$$

$$p_a = m\frac{\dot{q}_a}{\dot{t}} \qquad p_t = -\frac{1}{2}m\delta_{ab}\frac{1}{\dot{t}^2}\dot{q}^a\dot{q}^b - V(q^a) \tag{1.35d}$$

*Aquí es explícito el hecho de que los momentos no son independientes, es decir, agregar una coordenada ha afectado dramáticamente la dinámica del sistema. Otro hecho bastante notable surge cuando tomamos las últimas 2 ecuaciones y al hacer un poco de álgebra se llega a la célebre ecuación de Schrödinger-Jacobi-Dirac.*

$$p_t + \frac{p_a p^a}{2m} + V = 0 \tag{1.36}$$

*Esto nos indica que los momentos espaciales no son independientes de los temporales, por lo cual podemos considerar esto nuestra constricción $\varphi$, es decir*

$$\varphi(q, p, p_t) = p_t + \frac{p_a p^a}{2m} + V \approx 0 \tag{1.37}$$

$$\begin{aligned} H &= p_t \dot{t} + p_a \dot{q}^a - \mathcal{L} \\ &= p_t \dot{t} + p_a \dot{q}^a - \left( \frac{1}{2} m \frac{\dot{q}^a \dot{q}_a}{\dot{t}} - \dot{t} V \right) \\ &= p_t \dot{t} + p_a \dot{q}^a - \left( \dot{t} \frac{p_a p^a}{2m} - \dot{t} V \right) \\ &= \dot{t} \left( p_t - \frac{p_a p^a}{2m} + V \right) + p_a \dot{q}^a \\ &= p_a \left( \dot{q}^a - \frac{p^a \dot{t}}{m} \right) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{1.38}$$

*En este caso $H_T = \lambda\varphi$, usemos el formalismo hamiltoniano desarrollado anteriormente*

$$H_T = \lambda\varphi = \lambda(p_t + \frac{p_a p^a}{2m} + V) \tag{1.39a}$$

$$\dot{q}^a = \{q^a, H_T\} = \{q^a, \lambda\varphi\} \qquad \dot{t} = \{t, \lambda\varphi\} \tag{1.39b}$$

$$\dot{p}_a = \{p_a, \lambda\varphi\} \qquad \dot{p}_t = \{p_t, \lambda\varphi\} \tag{1.39c}$$

$$\dot{q}^a = \{q^a, \lambda\frac{p_a p^a}{2m}\} \qquad \dot{t} = \{t, \lambda p_t\} \tag{1.39d}$$

$$\dot{p}_a = \{p_a, \lambda V\} \qquad \dot{p}_t = 0 \tag{1.39e}$$

$$\dot{q}^a = \lambda\frac{p^a}{m} \qquad \dot{t} = \lambda \tag{1.39f}$$

$$\dot{p}_a = -\lambda\frac{\partial V}{\partial q^a} \qquad \dot{p}_t = 0 \tag{1.39g}$$

*Es hora de probar nuestro formalismo, las ecuaciones de movimiento que acabamos de calcular deberían de ser equivalentes a las ecuaciones de movimiento para el modelo normal sin agregar el tiempo como coordenada, esto es muy fácil de demostrar ya que si regresamos a t y eliminamos el multiplicador de Lagrange, obtenemos*

$$\frac{dq^a}{dt} = \frac{\dot{q}^a}{\dot{t}} = \frac{p^a}{m} \tag{1.40a}$$

$$\frac{dp_a}{dt} = \frac{\dot{p}_a}{\dot{t}} = -\frac{\partial V}{\partial q^a} \tag{1.40b}$$

*El formalismo es consistente, recuperamos las ecuaciones de movimiento.*

## 1.3 El espacio fase extendido

La acción (1.13) está definida en el espacio fase extendido ya que los $\lambda^A$ son multiplicadores de Lagrange arbitrarios. Si se parte de un punto inicial, hay una multitud de trayectorias (una por cada multiplicador) que llegarán a distintos puntos finales, sin embargo, si se define el espacio fase real como la clase de equivalencia de las diversas trayectorias el punto final es único, esto origina una nueva *simetría* que media entre las distintas trayectorias dejando las ecuaciones de movimiento invariantes, dicha simetría está contenida en una transformación de norma [1, 5] y fué originada por agregar una nueva coordenada y extender el espacio, esta coordenada nueva es el multiplicador de Lagrange; es por este que nuestro sistema constreñido puede verse como un sistema Hamiltoniano con menos grados de libertad, de hecho con $(n - s)$ grados. Analicemos con mas cuidado éstas transformaciones de norma que como se mencionó anteriormente, son simetrías "internas" de la teoría y están asociadas a las contricciones de primera clase, Dirac conjeturó que las constricciones de primera clase deben de ser los generadores infinitesimales de las transformaciones de norma [2, 5], es decir:

**Definición 1.3.1 (Conjetura de Dirac)** *Todas las constricciones de primera clase generan transformaciones de norma*

$$\delta_\varepsilon T = \varepsilon^a \{T, \mathcal{F}_a\} \tag{1.41}$$

Como vimos anteriormente determinar el multipliador de Lagrange en constricciones de segunda clase es sencillo, por lo cual el problema de evolucionar una variable con el Hamiltoniano total, se reduce a evolucionarla con el Hamiltoniano principal

**Definición 1.3.2 (Hamiltoniano principal)** *Sean $\mathcal{F}_a$ todas las constricciones de primera clase, tanto las originales como las que emerjen a partir del algoritmo de Dirac-Bergmann, el Hamiltoniano principal es*

$$H_p = H_\circ + \lambda^a \mathcal{F}_a \tag{1.42}$$

Al ser simetrías internas, deben dejar invariante la acción, ya que el estado físico es independiente del multiplicador de Lagrange. Al ser generadas por constricciones de primera clase, sólo es relevante el hamiltoniano principal.

Pidiendo esto notamos que bajo una variación virtual

$$0 = \delta_\varepsilon S = \int dt \left(\delta_\varepsilon(p_i\dot{q}^i) - \delta_\varepsilon H_p)\right) \tag{1.43}$$

$$\delta_\varepsilon(p_i\dot{q}^i) = \frac{d}{dt}(p_i\delta_\varepsilon q^i) - \dot{p}_i\delta_\varepsilon q^i + \dot{q}^i\delta_\varepsilon p_i \tag{1.44}$$

$$\delta_\varepsilon H_p = \delta_\varepsilon H_0 + \delta_\varepsilon(\lambda^a\mathcal{F}_a) \tag{1.45}$$

Al ser transformaciones de coordenadas en el espacio fase, su conducta puede ser estudiada mediante el uso de transformaciones canónicas infinitesimales [1, 3, 5]:

$$\delta_\varepsilon q^i = \varepsilon^a\{q^i, \mathcal{F}_a\} = \varepsilon^a\frac{\partial\mathcal{F}_a}{\partial p_i} \tag{1.46}$$

$$\delta_\varepsilon p_i = \varepsilon^a\{p_i, \mathcal{F}_a\} = -\varepsilon^a\frac{\partial\mathcal{F}_a}{\partial q^i} \tag{1.47}$$

$$\delta_\varepsilon\mathcal{F}_a = \varepsilon^b\{\mathcal{F}_a, \mathcal{F}_b\} = \varepsilon^b f_{abc}\mathcal{F}_c \tag{1.48}$$

$$\delta_\varepsilon H_0 = \varepsilon^a V_a^b\mathcal{F}_b \tag{1.49}$$

Entonces

$$\delta_\varepsilon(p_i\dot{q}^i) = \frac{d}{dt}(p_i\delta_\varepsilon q^i) - \dot{p}_i\varepsilon^a\frac{\partial\mathcal{F}_a}{\partial p_i} - \dot{q}^i\varepsilon^a\frac{\partial\mathcal{F}_a}{\partial q^i} \tag{1.50}$$

$$= \frac{d}{dt}(p_i\varepsilon^a\frac{\partial\mathcal{F}_a}{\partial p_i}) - \varepsilon^a\dot{\mathcal{F}}_a \tag{1.51}$$

$$= \frac{d}{dt}(p_i\varepsilon^a\frac{\partial\mathcal{F}_a}{\partial p_i}) - \frac{d}{dt}(\varepsilon^a\mathcal{F}_a) + \dot{\varepsilon}^a\mathcal{F}_a \tag{1.52}$$

$$= \frac{d}{dt}(\varepsilon^a\left(p_i\frac{\partial\mathcal{F}_a}{\partial p_i} - \mathcal{F}_a\right)) + \dot{\varepsilon}^a\mathcal{F}_a \tag{1.53}$$

$$\delta_\varepsilon H_p = \varepsilon^a V_a^b\mathcal{F}_b + \mathcal{F}_a\delta_\varepsilon\lambda^a + \lambda^a\varepsilon^b f_{abc}\mathcal{F}_c \tag{1.54}$$

Reuniendo todo

$$0 = \int dt \left( \frac{d}{dt} (\varepsilon^a \left( p_i \frac{\partial \mathcal{F}_a}{\partial p_i} - \mathcal{F}_a \right)) + \dot{\varepsilon}^a \mathcal{F}_a - \varepsilon^a V_a^b \mathcal{F}_b + \mathcal{F}_a \delta_\varepsilon \lambda^a + \lambda^a \varepsilon^b f_{abc} \mathcal{F}_c \right) \tag{1.55}$$

$$= \int dt \left( \dot{\varepsilon}^a \mathcal{F}_a - \varepsilon^a V_a^b \mathcal{F}_b + \mathcal{F}_a \delta_\varepsilon \lambda^a + \lambda^a \varepsilon^b f_{abc} \mathcal{F}_c \right) \tag{1.56}$$

Concluimos entonces la regla de transformación del multiplicador de Lagrange

$$\delta_\varepsilon \lambda^a = \dot{\varepsilon}^a - \varepsilon^b V_b^a + \lambda^b \varepsilon^c f_{abc} \tag{1.57}$$

De aquí vemos que si imponemos que nuestra variación sea cero, existen dos posibilidades:

1. Que los parámetros $\varepsilon^a$ se anulen en los bordes, i.e.: $\varepsilon^a(t_1) = \varepsilon^a(t_2) = 0$.
2. Que la cantidades $p_i \frac{\partial \mathcal{F}_a}{\partial p_i} - \mathcal{F}_a$ se anule; esto implica que las constricciones $\mathcal{F}_a \approx 0$ deben de ser funciones homogéneas de primer orden en los momentos, esto se cumple en todas las teorías de tipo de Yang-Mills incluido el electromagnetismo. Sin embargo, en el caso de la gravitación esto no se cumple.

Hemos delineado un método que nos permite elegir los grados de libertad físicos para posteriormente cuantizar la teoría exitosamente, obtenemos los conmutadores y por ende hemos resuelto el problema de la cuantización siempre y cuando se puedan encontrar condiciones de norma.

*Desde una perspectiva a largo plazo de la historia de la humanidad — vista en, digamos, diez mil años a partir de ahora — no cabrá duda de que el evento mas significativo del siglo XIX fué el descubrimiento de Maxwell de las leyes de la electrodinámica. La guerra civil estadounidense se opacará en la insignificancia provincial al ser comparada con este importante evento científico de la misma época.*

Richard. P. Feynman

# 2 Formalismo Hamiltoniano del electromagnetismo

El electromagnetismo es la teoría de Yang-Mills en campos mas sencilla que conocemos, por eso es importante analizarla con el formalismo desarrollado en el capítulo anterior con el fin de fijar ideas. Lo que nos interesa es entenderla como una teoría clásica de campos que posteriormente será cuantizada, también nos gustaría resaltar su naturaleza geométrica. Cabe resltar que el electromagnetismo es la piedra angular de la física teórica en el sentido de que su cuantización es satisfactoria y además se puede unificar a la gravitación en un espacio-tiempo pentadimensional. A lo largo de nuestro desarrollo usaremos un tensor métrico $\eta_{\mu\nu} = diag(-1, 1, 1, 1)$ y las siguientes definiciones:

$$A^{\mu} \equiv (\varphi, \vec{A}) \tag{2.1a}$$

$$\Rightarrow A_{\mu} = (-\varphi, \vec{A}) \tag{2.1b}$$

$$F_{\mu\nu} \equiv \partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu} \tag{2.1c}$$

Donde a (2.1c) se le conoce como *tensor de Faraday*, el cual es antisimétrico y de hecho constituye las componentes de una *2-forma* $F = F_{\mu\nu} dx^{\mu} \wedge dx^{\nu}$. Además notamos que el 4-vector $A^{\mu}$ coincide con los potenciales electrostático y vectorial del electromagnetismo, los cuáles al ser derivados resultan en el campo electromagnético.

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \tag{2.2a}$$

$$\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla \varphi \tag{2.2b}$$

O bien, usando el tensor de Faraday.

$$F_{0i} = -E_i \tag{2.3a}$$

$$F_{ij} = \varepsilon_{ijk} B^k \tag{2.3b}$$

**Ejemplo 2.0.1** *El campo magnético se puede escribir en términos del tensor de Faraday de la siguiente manera:*

$$F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i \tag{2.4a}$$

$$\varepsilon^{lij} F_{ij} = \varepsilon^{lij} (\partial_i A_j - \partial_j A_i) \tag{2.4b}$$

$$= B^l - (-\varepsilon^{lji} \partial_j A_i) \tag{2.4c}$$

$$= 2B^l \tag{2.4d}$$

$$B^l = \frac{1}{2} \varepsilon^{lij} F_{ij} \tag{2.4e}$$

Nos gustaría postular una acción invariante de Poincaré, eso nos deja con 2 opciones [6]

$$S = \int d^4x \left( -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right) \tag{2.5a}$$

$$S = \int d^4x \left( -\frac{1}{4} \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu} F^{\alpha\beta} F^{\mu\nu} \right) \tag{2.5b}$$

Sin embargo la elección de (2.5b) no es la más conveniente ya que es una derivada total, esto se muestra a continuación

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu} F^{\alpha\beta} F^{\mu\nu} &= \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu} (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)(\partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha) && (2.6a) \\ &= 4\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu} (\partial^\mu A^\nu \partial^\alpha A^\beta) && (2.6b) \\ &= 4\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu} \partial^\mu (A^\nu \partial^\alpha A^\beta) && (2.6c) \end{aligned}$$

Al ser una derivada total, carece de significado físico clásico, aún así se puede integrar para obtener una teoría en $1+2$ dimensiones, dicha teoría se usa para los *anyones*[7], los cuáles son partículas que generalizan los conceptos de bosón y fermión, ya que el intercambio de dos partículas induce un cambio de fase global. En vista de lo anterior, la acción para el campo electromagnético con fuentes es

$$S = \int d^4x \left( -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{J^\mu}{c} A_\mu \right) \tag{2.7}$$

Además de ser invariante de Poincaré, pedimos que sea invariante ante la siguiente transformación de norma [8, 9]

$$A_\mu \mapsto A_\mu + \partial_\mu \Lambda \tag{2.8}$$

El término $-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ ya es invariante ante (2.8), por lo que

$$
\begin{aligned}
S \mapsto & S + \delta S && (2.9a) \\
\mapsto & S + \int d^4x \frac{J^\mu}{c}\partial_\mu \Lambda && (2.9b) \\
\mapsto & S + \int d^4x \left(\partial_\mu(J^\mu \Lambda) - \partial_\mu J^\mu \Lambda\right) && (2.9c) \\
\mapsto & S + \int d^4x \left(-\partial_\mu J^\mu \Lambda\right) && (2.9d)
\end{aligned}
$$

Si queremos que la acción sea invariante (i.e. $\delta S = 0$), tenemos que pedir $\partial_\mu J^\mu = 0$, lo cual es la ecuación de continuidad.
Recapitulando, hicimos una transformación de norma, para que la acción fuera invariante de norma tuvimos que imponer un requisito que resulta ser una ecuación de conservación; esto es un ejemplo del *modus operandi* en las teorías de norma, uno postula la transformación y para cumplir la invarianza de la acción se impone una condición que coincide con una ley de conservación, esto hace que las teorías de norma sean herramientas muy poderosas.

## 2.1 Formalismo Hamiltoniano del electromagnetismo

Bajo la acción (2.7), las ecuaciones de Euler-Lagrange resultan en

$$
\partial_\alpha \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\alpha A_\beta)}\right) - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial A_\beta} = 0 \qquad (2.10)
$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\alpha A_\beta)} = -\frac{1}{2}F_{\mu\nu}\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial(\partial_\alpha A_\beta)} \tag{2.11a}$$

$$= -\frac{1}{2}F_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial(\partial_\alpha A_\beta)}\left(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu\right) \tag{2.11b}$$

$$= -\frac{1}{2}F_{\mu\nu}\left(\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta} - \eta^{\nu\alpha}\eta^{\mu\beta}\right) \tag{2.11c}$$

$$= -\frac{1}{2}\left(F^{\alpha\beta} - F^{\beta\alpha}\right) \tag{2.11d}$$

$$= -F^{\alpha\beta} \tag{2.11e}$$

$$\partial_\alpha\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\alpha A_\beta)}\right) = -\partial_\alpha F^{\alpha\beta} \tag{2.11f}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial A_\beta} = \frac{J^\beta}{c} \tag{2.12}$$

Usando (2.11f) y (2.13) para conformar (2.10) obtenemos

$$\partial_\alpha F^{\beta\alpha} = \frac{J^\beta}{c} \tag{2.13}$$

Para desarrollar el formalismo Hamiltoniano tenemos que construir los momentos generalizados

$$\Pi^\beta = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_0 A_\beta)} \tag{2.14a}$$

$$\text{N.B.} \quad \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_0 A_\beta)} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{A}_\beta} \tag{2.14b}$$

$$\Pi^\beta = -F^{0\beta} \tag{2.14c}$$

Notamos que de los momentos emerge una **constricción primaria de primera clase** [5]

$$\varphi \equiv \Pi^0 = 0 \tag{2.14d}$$

Los otros momentos son

$$\Pi^i = -E^i = \partial^\circ A^i - \partial^i A^\circ \tag{2.14e}$$

Destacamos la relación

$$\dot{A}^i = \Pi^i + \partial^i A^\circ \tag{2.14f}$$

La densidad Hamiltoniana canónica es

$$\begin{aligned}
\mathscr{H}_c &= \Pi^i \dot{A}_i + \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{J^\mu}{c} A_\mu && (2.15a)\\
&= \Pi^i \left(\Pi_i + \partial_i A_\circ\right) - \frac{1}{2} \Pi^i \Pi_i + \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} - \frac{J^\mu}{c} A_\mu && (2.15b)\\
&= \frac{1}{2} \Pi^i \Pi_i + \Pi^i \partial_i A_\circ + \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} - \frac{J^\mu}{c} A_\mu && (2.15c)
\end{aligned}$$

Integramos la densidad para obtener el Hamiltoniano canónico

$$\begin{aligned}
H_c &= \int d^3x \left(\frac{1}{2} \Pi^i \Pi_i + \Pi^i \partial_i A_\circ + \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} - \frac{J^\mu}{c} A_\mu\right) && (2.15d)\\
&= \int d^3x \left(\frac{1}{2} \Pi^i \Pi_i - A_\circ \partial_i \Pi^i + \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} - \frac{J^\mu}{c} A_\mu\right) && (2.15e)
\end{aligned}$$

Para efectuar la integración parcial, consideramos que los términos de superficie no contribuyen en el infinito. Veamos la evolución temporal de la constricción $\varphi$

$$\begin{aligned}
\dot{\varphi} \equiv \dot{\Pi}^\circ(\vec{x}, t) &= \int d^3y \{\Pi^\circ(\vec{x}, t), \mathscr{H}_c(\vec{y}, t)\} && (2.16a)\\
&= \int d^3y \left(\partial_i \Pi^i(\vec{x}, t) - \frac{J^\circ}{c}(\vec{x}, t)\right) \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) && (2.16b)
\end{aligned}$$

$$\dot{\Pi}^\circ(\vec{x}, t) = \partial_i \Pi^i(\vec{x}, t) + \frac{J_\circ}{c}(\vec{x}, t) \tag{2.17}$$

Como el lector podrá notar (2.17) es la *Ley de Gauss* en forma diferencial, la cual también es una **constricción de primera clase**

$$\chi \equiv \partial_i \Pi^i + \frac{J_0}{c} \tag{2.18a}$$

$$\dot{\chi} = \frac{1}{c}\frac{\partial J_0}{\partial t} + \{\partial_i \Pi^i, H_c\} \tag{2.18b}$$

$$= \frac{1}{c}\frac{\partial J_0}{\partial t} - \frac{1}{c}\partial_i J^i \tag{2.18c}$$

$$= \frac{1}{c}\partial_\mu J^\mu \tag{2.18d}$$

Si por alguna razón hubiéramos procedido con la acción propuesta al inicio, pero sin verificar que fuera invariante de norma, las constricciones nos hubieran obligado de cualquier modo a satisfacer la ecuación de continuidad. Como $J^\mu$ no es una variable propia del formalismo canónico sino una fuente externa, damos por terminado el algoritmo de Dirac-Bergmann. La demostración de que efectivamente las constricciones $\chi$ son de primera clase es inmediata ya que los paréntesis de Poisson son nulos.

Ahora que ya hemos identificado las constricciones podemos construir la Hamiltoniana extendida

$$H_E = \int d^3x \left( \frac{1}{2}\Pi^i\Pi_i - A_0\partial_i\Pi^i + \frac{1}{4}F_{ij}F^{ij} - \frac{J^\mu}{c}A_\mu + \lambda_1\Pi^0 + \lambda_2(\partial_i\Pi^i + \frac{J_0}{c}) \right) \tag{2.19}$$

Las ecuaciones de movimiento para los momentos son las siguientes

$$
\begin{aligned}
\Pi^n &= \{\Pi^n(\vec{x},t), H\} = \{\Pi^n(\vec{x},t), \int d^3y \mathscr{H}(\vec{y},t)\} && (2.20a) \\
&= \int d^3y \left( \frac{1}{2} F^{ik} \{\Pi^n(\vec{x},t), F_{ik}(\vec{y},t)\} + \delta^3(\vec{x}-\vec{y}) \frac{J^n}{c}(\vec{x},t) \right) && (2.20b) \\
&= \frac{J^n}{c}(\vec{x},t) + \int d^3y \left( \frac{1}{2} F^{ik}(\vec{y},t) \{\Pi^n(\vec{x},t), F_{ik}(\vec{y},t)\} \right) && (2.20c) \\
&= \frac{J^n}{c}(\vec{x},t) + \int d^3y \left( \frac{1}{2} F^{ik}(\vec{y},t) \{\Pi^n(\vec{x},t), \partial_i A_k(\vec{y},t) - \partial_k A_i(\vec{y},t)\} \right) && (2.20d) \\
&= \frac{J^n}{c}(\vec{x},t) + \int d^3y \frac{1}{2} F^{ik}(\vec{y},t) \left( - \frac{\delta \Pi^n(\vec{x},t)}{\delta \Pi^a(\vec{y},t)} \frac{\delta(\partial_i A_k(\vec{x},t))}{\delta A_a(\vec{y},t)} \right. \\
&\left. + \frac{\delta \Pi^n(\vec{x},t)}{\delta \Pi^a(\vec{y},t)} \frac{\delta(\partial_k A_i(\vec{x},t))}{\delta A_a(\vec{y},t)} \right) && (2.20e) \\
&= \frac{J^n}{c}(\vec{x},t) + \int d^3y \frac{1}{2} \delta^3(\vec{x}-\vec{y}) \delta^n_a \left( \partial_i F^{ik}(\vec{y},t) \delta^a_k - \partial_k F^{ik}(\vec{y},t) \delta^a_i \right) && (2.20f) \\
&= \frac{J^n}{c}(\vec{x},t) + \int d^3y \delta^3(\vec{x}-\vec{y}) \delta^n_k \partial_i F^{ik}(\vec{y},t) && (2.20g) \\
&= \partial_i F^{in}(\vec{x},t) + \frac{J^n}{c}(\vec{x},t) && (2.20h)
\end{aligned}
$$

Las ecuaciones de movimiento para el potencial son:

$$
\begin{aligned}
\dot{A}^\nu &= \delta^\nu_n(\Pi^n - \partial^n(\lambda_2 - A_0) + \delta^\nu_0 \lambda_1) && (2.21a) \\
\dot{A}^0 &= \lambda_1 && (2.21b) \\
\dot{A}^n &= \Pi^n - \partial^n(\lambda_2 - A_0) && (2.21c)
\end{aligned}
$$

Al ser una función de los multiplicadores de Lagrange el potencial muestra explícitamente su naturaleza de variable de norma, adelante veremos como lidiar con esta situación. Hacemos énfasis en el hecho de que el formalismo hamiltoniano es poderoso; nos dió las ecuaciones de movimiento, la ley de conservación y además exhibió que el potencial es una variable de norma.

## 2.2 El electromagnetismo como teoría de norma

Al comienzo del capítulo el lector podrá haber notado que se supuso la transformación de norma del electromagnetismo, es decir, a priori ya se sabía como debía ser esta transformación. Por motivos históricos esto puede ser obvio, ya que mucho antes del desarrollo de las teorías con constricciones se sabía que la ecuaciones de Maxwell eran invariantes ante dicha transformación. Pero nuestro objetivo es desarrollar un marco de trabajo general, el cual tiene que prever que las ecuaciones no siempre van a ser tan transparentes y nos van a decir cuál es la transformación de norma.

### 2.2.1 Electromagnetismo como una teoría con constricciones

Tomemos la conjetura de Dirac (c.f. (1.41)) observando que nuestras constricciones de primera clase son el conjunto $\mathcal{G} = (\varphi, \chi)$

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_1 &\equiv \varphi = \Pi^0 \\ \mathcal{G}_2 &\equiv \chi = \partial_i \Pi^i + \frac{J_0}{c} \end{aligned}$$

Con esto, la transformación de norma que debe satisfacer $A^\nu$ es

$$\delta A^\nu(t,\vec{x}) = \{A^\nu, \varepsilon^1 \Pi^0 + \varepsilon^2(\partial_i \Pi^i + \frac{J_0}{c})\} \tag{2.22a}$$

$$= \int d^3y \varepsilon^1(t,\vec{y}) \{A^\nu(t,\vec{x}), \Pi^0(t,\vec{y})\} \tag{2.22b}$$

$$+ \int d^3y \varepsilon^2(t,\vec{y}) \{A^\nu(t,\vec{x}), (\partial_i \Pi^i(t,\vec{y}) + \frac{J_0(t,\vec{y})}{c})\} \tag{2.22c}$$

$$= \delta^\nu_0 \varepsilon^1(t,\vec{x}) - \delta^\nu_i \partial_i \varepsilon^2(t,\vec{x}) \tag{2.22d}$$

$$\delta A_0 = \varepsilon^1 \tag{2.22e}$$

$$\delta A_i = -\partial_i \varepsilon^2(t,\vec{x}) \tag{2.22f}$$

Como la primera constricción sólamente afecta a $A_0$ es razonable hacer la siguiente suposición. Sea $\Lambda$ tal que

$$\varepsilon^1 = \partial_0 \Lambda \tag{2.22g}$$

También pedimos que

$$\partial_i \varepsilon^2 = -\partial_i \Lambda \tag{2.22h}$$

Si se satisfacen estas condiciones, es claro que

$$\begin{aligned} \delta A_\mu &= \partial_\mu \Lambda \\ A'_\mu &= A_\mu + \partial_\mu \Lambda \end{aligned} \tag{2.22i}$$

De este modo se deduce como transforma $A_\mu$ no es necesario que esta propiedad sea una hipótesis adicional como tan comúnmente es tratada. Considerando el caso sin fuentes, es decir $J^\mu = 0$, imponemos las siguientes condiciones de norma

$$\Omega_1 = A_0 \approx 0 \tag{2.23a}$$

$$\Omega_2 = \partial_i A^i \approx 0 \tag{2.23b}$$

Las cuáles son la *norma de Weyl* y la *norma de Coulomb* [5, 10] respectivamente; subrayamos que estamos en el caso sin fuentes, ya que de lo contrario cuando $J^m u \neq 0$ la norma $A_0 = 0$ no es consistente. Éstas condiciones de norma cumplen con

$$\det(\{\mathcal{G}^a, \Omega_a\}) \neq 0 \tag{2.23c}$$

$$\{\mathcal{G}^1, \Omega_1\} = \{\Pi^0, A_0\} = -\delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \tag{2.23d}$$

$$\{\mathcal{G}^2, \Omega_1\} = \{\partial_i \Pi^i + \frac{J_0}{c}, A_0\} = 0 \tag{2.23e}$$

$$\{\mathcal{G}^1, \Omega_2\} = \{\Pi^0, \partial_i A^i\} = 0 \tag{2.23f}$$

$$\{\mathcal{G}^2, \Omega_2\} = \{\partial_i \Pi^i + \frac{J_0}{c}, \partial_i A^i\} = \nabla^2 \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \tag{2.23g}$$

Una lectura rápida podría resultar en pensar que una matriz de $2 \times 2$ es la apropiada para definir el paréntesis de Dirac, le pedimos al lector que recuerde que las condiciones de norma también son constricciones, por lo cual al agregarlas en vez de ncesitar una matriz $2 \times 2$ de necesitamos una de $4 \times 4$ dada por

$$G = \begin{pmatrix} 0 & \{\mathcal{G}^a, \chi_a\} \\ \{\mathcal{G}^a, \chi_a\}^{\intercal} & 0 \end{pmatrix} \tag{2.23h}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \nabla^2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\nabla^2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \tag{2.23i}$$

$$G^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\delta^3(\vec{x} - \vec{y}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4\pi|\vec{x}-\vec{y}|} \\ \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4\pi|\vec{x}-\vec{y}|} & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.23j}$$

El paréntesis de Dirac correspondiente es

$$\{A(t, \vec{x}), B(t, \vec{y})\}^* = \{A(t, \vec{x}), B(t, \vec{y})\} \tag{2.23k}$$

$$- \int \int d^3z \, d^3w \{A(t, \vec{x}), \mathcal{G}_a(t, \vec{z})\} (G^{-1}(\vec{z}, \vec{w}))^{ab} \{\mathcal{G}_b(t, \vec{w}), B(t, \vec{y})\} \tag{2.23l}$$

$$\tag{2.23m}$$

Con esto hemos resuelto el problema y podemos verificar que las paréntesis canónicos son

$$\{A_i(t, \vec{x}), A_j(t, \vec{y})\}^* = 0 \tag{2.23n}$$

$$\{\Pi^i(t, \vec{x}), \Pi^j(t, \vec{y})\}^* = 0 \tag{2.23o}$$

$$\{A_i(t, \vec{x}), \Pi^j(t, \vec{y})\}^* = \delta_i^j \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) - \partial_i \partial^j \frac{1}{4\pi \mid \vec{x} - \vec{y} \mid} \tag{2.23p}$$

Ya que $\Pi^0 = 0 = A_0$, usualmente se define a el lado derecho como la *delta transversa*.

$$(\delta_i^j)^{tr}(\vec{x} - \vec{y}) \equiv \delta_i^j \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) - \partial_i \partial^j \frac{1}{4\pi \mid \vec{x} - \vec{y} \mid}$$
$$= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{y})} \left( \delta_i^j - \frac{k^j k_i}{k^2} \right)$$

Es importante subrayar que esta delta **nos permite imponer la ley de Gauss cuántica** ya que su divergencia es nula

$$\partial_i (\delta_i^j)^{tr}(\vec{x} - \vec{y}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \partial_i \left( e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{y})} \left( \delta_i^j - \frac{k^j k_i}{k^2} \right) \right) \tag{2.24}$$
$$= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} i k_j e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{y})} \left( \delta_i^j - \frac{k^j k_i}{k^2} \right) \tag{2.25}$$
$$= i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{y})} \left( k_i - \frac{k^2 k_i}{k^2} \right) \tag{2.26}$$
$$= 0 \tag{2.27}$$

Donde desde luego, las derivadas han sido efectuadas en $\vec{x}$.
Procedamos a cuantizar la teoría promoviendo los paréntesis de Dirac a conmutadores bajo la regla de cuantización canónica

$$[A_i(t, \vec{x}), A_j(t, \vec{y})]^* = 0 \tag{2.28a}$$
$$\left[\Pi^i(t, \vec{x}), \Pi^j(t, \vec{y})\right]^* = 0 \tag{2.28b}$$
$$[A_i(t, \vec{x}), \Pi^j(t, \vec{y})]^* = i\hbar (\delta_i^j)^{tr}(\vec{x} - \vec{y}) \tag{2.28c}$$
$$= i\hbar \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{y})} \left( \delta_i^j - \frac{k^j k_i}{k^2} \right) \tag{2.28d}$$

Se recalca que se tuvo que definir la delta transversa a causa de dos motivos: su divergencia es nula y por ende nos dá el conmutador apropiado y refuerza el hecho de que no existen fotones longitudinales.

### 2.2.2 Geometría de norma

La invarianza de la dinámica ante una fase global resultaba en la conservación de carga [6], si pedimos invarianza local de fase también se va a conservar la carga pero además se tiene que introducir un campo vectorial para que la dinámica sea covariante, este campo va a ser el 4-potencial vectorial. La invarianza local de fase implica que un campo escalar transforma de la siguiente manera

$$\psi \mapsto \psi' = e^{i\alpha(x)}\psi \tag{2.29}$$

Es bien sabido que la derivada direccional de un campo escalar en la dirección $\zeta^\mu$ es

$$\zeta^\mu \partial_\mu \psi = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\psi(x + \varepsilon\zeta) - \psi(x)}{\varepsilon} \tag{2.30}$$

Vemos que la derivada está definida en dos puntos de la variedad, esto implica que debemos usar un mapeo para comparar una función en ambos puntos; para ir del punto $x$ al punto $y$ usamos un mapeo $U(y, x)$ denominado conector que obedece la regla de transformación del campo escalar [9], en cada uno de sus puntos

$$U(y, x) \mapsto e^{\alpha(y)} U(y, x) e^{-i\alpha(x)} \tag{2.31}$$

Además, notamos que por construcción

$$U(y, y) = \mathbb{I} \tag{2.32}$$

En nuestro caso $\mathbb{I} = 1$ Queremos que conectar el campo escalar de un punto a otro sea invariante, es decir, queremos que $\psi(y)U(y, x)\psi(x)$ transforme invariantemente, por lo cual se propone

$$U(w, z) = e^{-ie\int_w^z dx^\mu A_\mu(x)} \tag{2.33}$$

**Definición 2.2.1 (Derivada covariante)** *Por medio del conector valuamos la* *derivada direccional* (2.30) *en un mismo punto de la variedad de la siguiente manera*

$$\zeta^\mu D_\mu \psi = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\psi(x+\varepsilon\zeta) - U(x+\varepsilon\zeta, x)\psi(x)}{\varepsilon} \tag{2.34}$$

Dessarrollando el conector a primer orden y usando la regla del trapecio para evaluar la integral, se obtiene

$$\begin{aligned} U(x+\varepsilon\zeta, x) &\approx \mathbb{I} - ie \int_x^{x+\varepsilon\zeta} dx^\mu A_\mu(x) & \text{(2.35a)} \\ &\approx \mathbb{I} - i\frac{e\varepsilon\zeta^\mu}{2}[A_\mu(x+\varepsilon\zeta) + A_\mu(x)] & \text{(2.35b)} \\ &\approx \mathbb{I} - ie\varepsilon\zeta^\mu A_\mu(x) & \text{(2.35c)} \end{aligned}$$

Reconocemos que el término $A_\mu(x) = -e\partial_\mu\varphi$ es la conexión de nuestra variedad. De este modo, la derivada covariante resulta ser

$$\begin{aligned} \zeta^\mu D_\mu \psi &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\psi(x+\varepsilon\zeta) - \psi(x) + ie\varepsilon\zeta^\mu A_\mu(x)\psi(x)}{\varepsilon} \\ &= \zeta^\mu \partial_\mu \psi + ie\zeta^\mu A_\mu(x)\psi \end{aligned} \tag{2.36}$$

Y nos damos cuenta que nuestra elección de dirección es irrelevante

$$D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu \tag{2.37}$$

Como se mencionó al principio el campo vectorial $A_\mu$ fue introducido para que la dinámica fuera invariante, veamos como transforma notando que por (2.35c)

$$\bar{U} \approx \mathbb{I} - ie\varepsilon\zeta^\mu \bar{A}_\mu \tag{2.38a}$$

Entonces

$$\bar{U} = e^{i\alpha(x+\varepsilon\zeta)} U(x+\varepsilon\zeta, x) e^{-i\alpha(x)} \tag{2.38b}$$

$$\approx e^{i\alpha(x+\varepsilon\zeta)} \left(\mathbb{I} - ie\varepsilon\zeta^{\mu} A_{\mu}\right) e^{-i\alpha(x)} \tag{2.38c}$$

$$= e^{i(\alpha(x+\varepsilon\zeta)-\alpha(x))} \left(\mathbb{I} - ie\varepsilon\zeta^{\mu} A_{\mu}\right) \tag{2.38d}$$

$$= \left(\mathbb{I} + i\varepsilon\zeta^{\mu}\partial_{\mu}\alpha(x)\right) \left(\mathbb{I} - ie\varepsilon\zeta^{\mu} A_{\mu}\right) \tag{2.38e}$$

$$\approx \mathbb{I} - ie\varepsilon\zeta^{\mu} A_{\mu} + i\varepsilon\zeta^{\mu}\partial_{\mu}\alpha(x) \tag{2.38f}$$

$$= \mathbb{I} - ie\varepsilon\zeta^{\mu} \left(-\frac{\partial_{\mu}\alpha}{e} + A_{\mu}\right) \tag{2.38g}$$

$$\mathbb{I} - ie\varepsilon\zeta^{\mu}\bar{A}_{\mu} = \mathbb{I} - ie\varepsilon\zeta^{\mu} \left(-\frac{\partial_{\mu}\alpha + A_{\mu}}{e}\right) \tag{2.38h}$$

$$\therefore \bar{A}_{\mu} = A_{\mu} - \frac{\partial_{\mu}\alpha}{e} \tag{2.38i}$$

Recordando el *modus operandi* de relatividad general, en donde construimos la derivada covariante de modo tal que la métrica sea constante para ella (i.e. que el modo de medir no cambie en el espacio-tiempo) ésta nueva derivada covariante hace que el grupo unitario sea constante bajo la derivación.

**Lema 2.2.2**

$$\bar{D}_{\mu}\bar{\psi} = e^{i\alpha} D_{\mu}\psi \tag{2.39}$$

*Prueba*

$$\bar{D}_{\mu}\bar{\psi} = \left(\partial_{\mu} + ie\bar{A}_{\mu}\right)\bar{\psi} \tag{2.40a}$$

$$= \left(\partial_{\mu} + ie\left(A_{\mu} - \frac{\partial_{\mu}\alpha}{e}\right)\right) e^{i\alpha}\psi \tag{2.40b}$$

$$= e^{i\alpha}\left(\partial_{\mu}\psi + i\partial_{\mu}(\alpha)\psi\right) + ie\, e^{i\alpha}\left(A_{\mu}\psi - \frac{\partial_{\mu}\alpha}{e}\psi\right) \tag{2.40c}$$

$$= e^{i\alpha}\partial_{\mu}\psi + ie\, e^{i\alpha} A_{\mu}\psi \tag{2.40d}$$

$$= e^{i\alpha(x)} D_{\mu}\psi \tag{2.40e}$$

La creación de la derivada covariante nos permite ver que podemos formular el electromagnetismo geométricamente, recordando que en relatividad general el conmutador de derivadas covariantes es el *tensor de Riemann*, podemos ver que aquí el conmutador de derivada covariantes resulta en el tensor de Faraday.

**Lema 2.2.3**

$$[D_\mu, D_\nu] = -ieF_{\mu\nu} \tag{2.41}$$

*Prueba*

$$\begin{aligned}
[D_\mu, D_\nu]\psi &= [\partial_\mu + ieA_\mu, \partial_\nu + ieA_\nu]\psi && (2.42a)\\
&= \psi,_{\mu\nu} + ie(A_\nu\psi),_\mu + ieA_\mu\psi_\nu - e^2 A_\mu A_\nu \psi && (2.42b)\\
&- \psi,_{\nu\mu} - ie(A_\mu\psi),_\nu - iea_\nu\psi,_\mu + e^2 A_\nu A_\mu && (2.42c)\\
&= ie\left(A_\nu,_\mu \psi + A_\nu\psi,_\mu\right) + ieA_\mu\psi,_\nu && (2.42d)\\
&- ie\left(A_\mu,_\nu \psi + A_\mu\psi,_\nu\right) - ieA_\nu\psi,_\mu && (2.42e)\\
&= ie\left(A_\nu,_\mu - A_\mu,_\nu\right)\psi && (2.42f)\\
\therefore [D_\mu, D_\nu] &= -ieF_{\mu\nu} && (2.42g)
\end{aligned}$$

¿Qué nos dice esto? Si analizamos que hemos hecho, podemos notar que nuestra variedad es un fibrado $\mathscr{M} = \mathbb{M}^4 \times U(1)$, lo cual indica que el espacio base es el espacio-tiempo y la fibra es el grupo unitario. Por lo cual si tomamos un espacio pseudo-Riemanniano de este tipo, su curvatura contendrá la dinámica de una partícula bajo $U(1)$, y de hecho si calculamos las geodésicas en éste espacio nos darán trayectorias para una partícula bajo la fuerza de Lorentz. Por otra parte vemos que el *tensor de Faraday* transforma covariantemente.

**Lema 2.2.4**

$$[\bar{D}_\mu, \bar{D}_\nu]\bar{\psi} = -e^{i\alpha(x)} F_{\mu\nu}\bar{\psi} \tag{2.43}$$

*Prueba*

$$
\begin{aligned}
[\bar{D}_\mu, \bar{D}_\nu]\bar{\psi} &= [\partial_\mu + ie\bar{A}_\mu, \partial_\nu + ie\bar{A}_\nu]\bar{\psi} && (2.44a)\\
&= \bar{\psi}_{,\mu\nu} + ie(\bar{A}_\nu\bar{\psi})_{,\mu} + ie\bar{A}_\mu\bar{\psi}_{,\nu} - e^2\bar{A}_\mu\bar{A}_\nu\bar{\psi} && (2.44b)\\
&- \bar{\psi}_{,\nu\mu} - ie(\bar{A}_\mu\bar{\psi})_{,\nu} - ie\bar{A}_\nu\bar{\psi}_{,\mu} + e^2\bar{A}_\nu\bar{A}_\mu\bar{\psi} && (2.44c)\\
&= ie\bar{A}_{\nu,\mu}\,\bar{\psi} + \bar{A}_\nu\bar{\psi}_{,\mu} + \bar{A}_\mu\bar{\psi}_{,\nu} && (2.44d)\\
&- \bar{A}_{\mu,\nu}\,\bar{\psi} - \bar{A}_\mu\bar{\psi}_{,\nu} - \bar{A}_\nu\bar{\psi}_{,\mu} && (2.44e)\\
&= ie\, e^{i\alpha}\left(\partial_\mu\left(A_\nu - \frac{\partial_\nu\alpha}{e}\right) - \partial_\nu\left(A_\mu - \frac{\partial_\mu\alpha}{e}\right)\right)\psi && (2.44f)\\
&= ie\, e^{i\alpha}\left(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\right)\psi && (2.44g)\\
&= -ie\, e^{i\alpha(x)}F_{\mu\nu}\psi && (2.44h)
\end{aligned}
$$

Cabe destacar que, en todo este contexto cuando nos referimos a la covarianza, no nos referimos a la de relatividad sino a la de norma, en este caso la asociada a $U(1)$. El conector nos lleva de un lado a otro de la fibra, por lo cual si nos movemos en un circuito cerrado habría que esperar que estuviera relacionado con la curvatura. Una dirección de movimiento en dicho circuito será la dirección $a^\mu$ la otra será $b^\mu$, el conector es

$$
\begin{aligned}
U(x^\mu, x^\mu) \equiv U(x^\mu) =& U(x^\mu, x^\mu + \varepsilon b^\mu)U(x^\mu + \varepsilon b^\mu, x^\mu + \varepsilon a^\mu + \varepsilon b^\mu) \\
& U(x^\mu + \varepsilon a^\mu + \varepsilon b^\mu, x^\mu + \varepsilon a^\mu)U(x^\mu + \varepsilon a^\mu, x^\mu)
\end{aligned} \tag{2.45}
$$

Notamos que

$$
U(x^\mu + \varepsilon\eta^\mu, x^\mu) = \mathbb{I} - ie\varepsilon\eta^\nu A_\nu(x^\mu) = e^{-ie\varepsilon\eta^\nu A_\nu(x)} \tag{2.46}
$$

$$
\begin{aligned}
U(x^{\mu}) &= e^{-ie(x^{\nu}-x^{\nu}-\varepsilon b^{\nu})A_{\nu}[\frac{x^{\mu}+x^{\mu}+\varepsilon b^{\mu}}{2}]} && (2.47a)\\
&\quad e^{ie(x^{\nu}+\varepsilon b^{\nu}-x^{\nu}-\varepsilon a^{\nu}-\varepsilon b^{\nu})A_{\nu}[\frac{x^{\mu}+\varepsilon b^{\mu}+x^{\mu}+\varepsilon a^{\mu}+\varepsilon b^{\mu}}{2}]}\\
&\quad e^{-ie(x^{\nu}+\varepsilon a^{\nu}+\varepsilon b^{\nu}-x^{\nu}-\varepsilon a^{\nu})A_{\nu}[\frac{x^{\mu}+\varepsilon a^{\mu}+\varepsilon b^{\mu}+x^{\mu}+\varepsilon a^{\mu}}{2}]}\\
&\quad e^{ie(x^{\nu}+\varepsilon a^{\nu}-x^{\nu})A_{\nu}[\frac{x^{\mu}+\varepsilon a^{\mu}+x^{\mu}}{2}]}\\
&= e^{ie\varepsilon b^{\nu}A_{\nu}[x^{\mu}+\frac{\varepsilon b^{\mu}}{2}]}e^{-ie\varepsilon a^{\nu}A_{\nu}[x^{\mu}+\varepsilon b^{\mu}+\frac{\varepsilon a^{\mu}}{2}]} && (2.47b)\\
&\quad e^{-ie\varepsilon b^{\nu}A_{\nu}[x^{\mu}+\varepsilon a^{\mu}\frac{\varepsilon b^{\mu}}{2}]}e^{ie\varepsilon a^{\nu}A_{\nu}[x^{\mu}+\frac{\varepsilon a^{\mu}}{2}]}\\
&\approx e^{ie\varepsilon b^{\nu}(A_{\nu}+\frac{\varepsilon}{2}\partial_{\nu}(b^{\mu}A_{\mu}))}e^{-ie\varepsilon(a^{\mu}A_{\mu}+\varepsilon b^{\nu}\partial_{\nu}(a^{\mu}A_{\mu})+\frac{\varepsilon}{2}a^{\nu}\partial_{\nu}(b^{\mu}A_{\mu}))} && (2.47c)\\
&\quad e^{-ie\varepsilon(b^{\nu}A_{\nu}+\varepsilon a^{\nu}\partial_{\nu}(b^{\mu}A_{\mu})+\frac{\varepsilon}{2}b^{\nu}\partial_{\nu}(b^{\mu}A_{\mu}))}e^{ie\varepsilon(a^{\nu}A_{\nu}+\frac{\varepsilon}{2}a^{\nu}\partial_{\nu}(a^{\mu}A_{\mu}))}\\
&= e^{ie\varepsilon^{2}(b^{\nu}\partial_{\nu}(a^{\mu}A_{\mu})-a^{\mu}\partial_{\mu}(b^{\nu}A_{\nu}))} && (2.47d)\\
&= e^{ie\varepsilon^{2}(a^{\mu}b^{\nu}\partial_{\nu}(A_{\mu})-a^{\mu}b^{\nu}\partial_{\mu}A_{\nu})} && (2.47e)\\
&= e^{ie\varepsilon^{2}F_{\nu\mu}a^{\mu}b^{\nu}} && (2.47f)
\end{aligned}
$$

De este modo queda mas que claro que la geodésica en este fibrado corresponde a una partícula experimentando la fuerza de Lorentz. Habiendo construido la derivada covariante, podemos notar que si en una teoría queremos incorporar el campo electromagnético basta con sustituir las derivadas por derivadas covariantes, a esto se le conoce como el principio de acoplamiento mínimo.

## 2.3 Electromagnetismo en espacio-tiempo curvo

Para hacer electromagnetismo en espacio tiempo curvo, sustituimos las derivadas parciales por las derivadas covariantes en un sentido relativista, donde la conexión es el símbolo de Christoffel, i.e.

$$
\begin{aligned}
\partial_{\mu}J^{\mu} &\mapsto \nabla_{\mu}J^{\mu} && (2.48a)\\
\partial_{\mu}F^{\mu\nu} &\mapsto \nabla_{\mu}F^{\mu\nu} && (2.48b)\\
\nabla_{\mu}v^{\nu} &= \partial_{\mu}v^{\nu}+\Gamma^{\nu}_{\mu\delta}v^{\delta} && (2.48c)
\end{aligned}
$$

Tomemos el campo electromagnético sin fuentes, su lagrangiana es

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4} g^{\gamma\beta} g^{\mu\nu} F_{\gamma\mu} F_{\beta\nu}$$

El tensor de energía momento canónico es el que está dado por el teorema de Noether

$$(T_C)^{\mu}_{\nu} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu A_\gamma)} \partial_\nu A_\gamma + \frac{1}{4} \delta^{\mu}_{\nu} F^{\gamma\delta} F_{\gamma\delta} \tag{2.49a}$$

$$= -\frac{1}{2} F_{\rho\sigma} \frac{\partial F^{\rho\sigma}}{\partial(\partial_\mu A_\gamma)} \partial_\nu A_\gamma + \frac{1}{4} \delta^{\mu}_{\nu} F^{\gamma\delta} F_{\gamma\delta} \tag{2.49b}$$

$$= -F^{\mu\gamma} \partial_\nu A_\gamma + \frac{1}{4} \delta^{\mu}_{\nu} F^{\gamma\delta} F_{\gamma\delta} \tag{2.49c}$$

El problema del tensor canónico es que no es simétrico y que además no es invariante de norma, para simetrizarlo se le debe sumar otro tensor; se tendrá un tensor simétrico e invariante de norma denominado *tensor de Belinfante*.

$$T^{\mu\nu}_B = (T_C)^{\mu}_{\nu} + \partial_\rho B^{\rho\mu\nu} \tag{2.50}$$

Los tensores de energía-momento tienen divergencia nula, agregamos la divergencia del tensor $B^{\rho\mu\nu}$ el cuál es antisimétrico en $\rho$ y $\mu$, de modo tal que

$$\partial_\mu T^{\mu\nu}_B = 0 \tag{2.51}$$

Ya que la contracción de un tensor simétrico con uno antisimétrico es nula. El tensor antisimétrico mas sencillo que podemos construir en este caso es

$$B^{\rho\mu\nu} = F^{\rho\mu} A^{\nu} \tag{2.52}$$

De este modo

$$T_B^{\mu\nu} = -F^{\mu\beta}\partial^\nu A_\beta + \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}F^{\beta\gamma}F_{\beta\gamma} + \partial_\beta(F^{\beta\mu}A^\nu) \tag{2.53a}$$

$$= -F^{\mu\beta}\partial^\nu A_\beta + \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}F^{\beta\gamma}F_{\beta\gamma} + (\partial_\beta F^{\beta\mu})A^\nu + F^{\beta\mu}\partial_\beta A^\nu \tag{2.53b}$$

$$= F^\mu_\beta F^{\beta\nu} + \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}F^{\beta\gamma}F_{\beta\gamma} \tag{2.53c}$$

El cual es simétrico e invariante norma, además

$$T_B^{00} = -\frac{1}{2}(E^2 + B^2) \tag{2.54a}$$

$$T_B^{0i} = S^i \tag{2.54b}$$

Es decir nos da la densidad de energía, el vector de Poynting y las entradas $T_B^{ij}$ corresponden al tensor de esfuerzos del campo electromagnético. El tensor de energía momento en gravitación tiene una definición disinta que emerge a partir del Teorema de Noether, si $\omega^a$ es un parámetros de la simetría y $j_a^\mu$ la corriente asociada al parámetro, podemos expresar $J_\omega^\mu = d_a^\mu\omega^a$. Si las coordenadas en el espacio-tiempo curvo transforman de la siguiente manera

$$x'^\mu = x^\mu + \omega^\mu(x) \tag{2.55}$$

Sabemos por teorema de Noether [11] que

$$\delta S = \int d^4x\ (\partial_\mu j_a^\mu)\omega^a \tag{2.56a}$$

$$= -\int d^4x\ j_a^\mu\partial_\mu\omega_a \tag{2.56b}$$

$$= -\int d^4x\ \frac{1}{2}T^{\mu\nu}\left(\partial_\mu\omega_\nu + \partial_\nu\omega_\mu\right) \tag{2.56c}$$

Por invarianza del intervalo, sabemos que

$$g'_{\gamma\beta}(x')dx'^\gamma dx'^\beta = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu \tag{2.57}$$

A su vez

$$g_{\mu\nu}(x)dx^{\mu}dx^{\nu} = g_{\mu\nu}(x)\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\gamma}}dx'^{\gamma}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\beta}}dx'^{\beta} \tag{2.58a}$$

$$\therefore g'_{\gamma\beta}(x') = g_{\mu\nu}(x)\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\gamma}}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\beta}} \tag{2.58b}$$

Además

$$\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\gamma}} = \frac{\partial}{\partial x'^{\gamma}}\left(x'^{\mu} - \omega^{\mu}(x)\right) \tag{2.59a}$$

$$\approx \delta^{\mu}_{\gamma} - \partial_{\gamma}\omega^{\mu}(x) \tag{2.59b}$$

$$g'_{\gamma\beta}(x') = \left(\delta^{\mu}_{\gamma} - \partial_{\gamma}\omega^{\mu}(x)\right)\left(\delta^{\nu}_{\beta} - \partial_{\beta}\omega^{\nu}(x)\right)g_{\mu\nu} \tag{2.59c}$$

$$\approx g_{\gamma\beta}(x) - \partial_{\beta}\omega^{\nu}g_{\gamma\nu} - \partial_{\gamma}\omega^{\mu}g_{\beta\mu} \tag{2.59d}$$

$$\delta g_{\gamma\beta} = -\left(\partial_{\gamma}\omega_{\beta} + \partial_{\beta}\omega_{\gamma}\right) \tag{2.59e}$$

Con esto último y con (2.56c), llegamos a

$$\delta S = -\frac{1}{2}\int d^4x\; T^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} \tag{2.60}$$

Con lo que concluimos que para gravitación, el tensor de energía momento se define como

$$T^{\mu\nu} \equiv -2\frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}} \tag{2.61}$$

**Ejemplo 2.3.1 (Campo escalar)** *La acción para el campo escalar en un espacio-tiempo curvo es*

$$S = \int d^4x\sqrt{g}\frac{1}{2}\left(g^{\mu\nu}\partial_{\mu}\varphi\partial_{\nu}\varphi - m^2\varphi^2\right) \tag{2.62}$$

*Notamos lo siguiente*

$$\delta\sqrt{g} = \frac{1}{2\sqrt{g}}\delta g \tag{2.63a}$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{g}}\delta(e^{Tr\ln g_{\mu\nu}}) \tag{2.63b}$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{g}}\delta(Tr\ln g_{\mu\nu})g \tag{2.63c}$$
$$= \frac{\sqrt{g}}{2}Tr(g^{\nu\alpha}\delta g_{\mu\nu}) \tag{2.63d}$$
$$= \frac{\sqrt{g}}{2}g^{\nu\mu}\delta g_{\mu\nu} \tag{2.63e}$$
$$= \frac{\sqrt{g}}{2}g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} \tag{2.63f}$$

*Además*

$$g^{\mu\nu}g_{\nu\gamma} = \delta^{\mu}_{\gamma} \tag{2.64a}$$
$$\Rightarrow \delta(g^{\mu\nu}g_{\nu\gamma}) = 0 \tag{2.64b}$$
$$\delta g^{\mu\nu}g_{\nu\gamma} + g^{\mu\nu}\delta g_{\nu\gamma} = 0 \tag{2.64c}$$
$$(\delta g^{\mu\nu}g_{\nu\gamma} + g^{\mu\nu}\delta g_{\nu\gamma})g^{\rho\gamma} = 0 \tag{2.64d}$$
$$\therefore\ \delta g^{\mu\rho} = -g^{\rho\gamma}g^{\mu\beta}\delta g_{\gamma\beta} \tag{2.64e}$$

*Con lo que*

$$\delta S = \int d^4x\frac{1}{2}\left(\delta\sqrt{g}\mathscr{L} + \sqrt{g}\,\partial_\nu\varphi\partial_\mu\varphi\,\delta g^{\mu\nu}\right) \tag{2.65a}$$
$$= \int d^4x\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{g}}{2}g^{\gamma\beta}\delta g_{\gamma\beta}\mathscr{L} - \sqrt{g}g^{\mu\gamma}g^{\nu\beta}\delta g_{\gamma\beta}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi\right) \tag{2.65b}$$
$$\therefore\ T^{\mu\nu} = \partial^\mu\varphi\partial^\nu\varphi - \mathscr{L}g^{\mu\nu} \tag{2.65c}$$

Procediendo del mismo modo que el ejemplo anterior, obtenemos el tensor de energía momento para el campo electromagnético [6]

$$T^{\mu\nu} = F^{\mu}{}_{\gamma}F^{\gamma\nu} + \frac{1}{4}g^{\mu\nu}\mathscr{L} \tag{2.66}$$

*Bueno, hoy en día las teorías de norma son fundamentales para nuestra comprensión de la fuerzas físicas. Pero también son parte de una idea matemática que ha estado presente por mas tiempo que las teorías de norma mismas.*

Roger Penrose

# 3

# Formalismo Hamiltoniano de Yang-Mills en el caso no abeliano

El caso no abeliano es mucho más rico en contenido que el abeliano ya que es no-lineal y permite otro tipo de vértices en los diagramas de Feynman, haremos el tratamiento anterior, con el algoritmo de Dirac-Bergmann y destacaremos el álgebra que deben obedecer las constricciones; finalmente obtendremos las ecuaciones de movimiento.

## 3.1 Lagrangiana de Yang-Mills

Las teorías de Yang-Mills son generalizaciones del electromagnetismo donde en vez de usar un grupo de norma abeliano se usa $SU(n)$ el cual es no-abeliano, los potenciales están dados por [12]

$$\mathbb{A} \equiv \mathbb{A}_\mu dx^\mu \tag{3.1a}$$

$$\mathbb{A}_\mu \equiv A^a_\mu T^a \tag{3.1b}$$

$$T^a \in \mathfrak{su}(n) \tag{3.1c}$$

$$[T^a, T^b] = i f^{abc} T^c \tag{3.1d}$$

$$Tr(T^a T^b) = \frac{1}{2}\delta^{ab} \tag{3.1e}$$

El análogo al tensor de campo o tensor de Maxwell es

$$\mathbb{F} \equiv \frac{1}{2} F^a_{\mu\nu} T^a dx^\mu \wedge dx^\nu \tag{3.2a}$$

$$\mathbb{F}_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu \mathbb{A}_\nu - \partial_\nu \mathbb{A}_\mu - ig[\mathbb{A}_\mu, \mathbb{A}_\nu] \tag{3.2b}$$

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + g f_{abc} A^b_\mu A^c_\nu \tag{3.2c}$$

$$\tag{3.2d}$$

La Lagrangiana debe de ser invariante de norma, los escalares más sencillos que podemos formular para una teoría con fibra $SU(n)$ son [9]

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{2g^2} Tr[\mathbb{F}_{\mu\nu}\mathbb{F}^{\mu\nu}] \tag{3.3a}$$

$$\mathscr{L}' = -\frac{1}{2g^2} Tr[\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\mathbb{F}_{\mu\nu}\mathbb{F}^{\alpha\beta}] \tag{3.3b}$$

La segunda opción queda descartada como nuestra teoría ya que es una derivada total, esto se demuestra a continuación

$$\mathbb{F} = d\mathbb{A} + \mathbb{A} \wedge \mathbb{A} \tag{3.4a}$$

$$Tr\mathbb{F}^2 = Tr[(d\mathbb{A} + \mathbb{A} \wedge \mathbb{A})(d\mathbb{A} + \mathbb{A} \wedge \mathbb{A})] \tag{3.4b}$$

$$= Tr[d\mathbb{A} \wedge d\mathbb{A} + d\mathbb{A} \wedge \mathbb{A} \wedge \mathbb{A} + \mathbb{A} \wedge \mathbb{A} \wedge d\mathbb{A} + \mathbb{A} \wedge \mathbb{A} \wedge \mathbb{A} \wedge \mathbb{A}] \tag{3.4c}$$

$$\text{N.B. 1} \quad Tr[d\mathbb{A} \wedge \mathbb{A} \wedge \mathbb{A}] = Tr[\mathbb{A} \wedge \mathbb{A} \wedge d\mathbb{A}] \tag{3.4d}$$

$$Tr\mathbb{F}^2 = Tr[d\mathbb{A} \wedge d\mathbb{A} + 2d\mathbb{A} \wedge \mathbb{A} \wedge \mathbb{A}] \tag{3.4e}$$

$$\text{N.B. 2} \quad Tr[d\mathbb{A} \wedge \mathbb{A} \wedge \mathbb{A}] = \frac{1}{3} d[Tr(\mathbb{A} \wedge \mathbb{A} \wedge \mathbb{A})] \tag{3.4f}$$

$$\text{N.B. 3} \quad d\mathbb{A} \wedge d\mathbb{A} = d(\mathbb{A} \wedge d\mathbb{A}) \tag{3.4g}$$

$$\text{N.B. 4} \quad Tr[\mathbb{A} \wedge \mathbb{A} \wedge \mathbb{A} \wedge \mathbb{A}] = 0 \quad \text{c.f. A.1.1} \tag{3.4h}$$

$$\therefore Tr\mathbb{F}^2 = d[Tr(\mathbb{A} \wedge d\mathbb{A} + \frac{2}{3}\mathbb{A} \wedge \mathbb{A} \wedge \mathbb{A})] \tag{3.4i}$$

Lo cual prueba que el lagrangiano es una derivada total; el primer lagrangiano es similar al que se usó en electromagnetismo, para ver esto basta estudiar sus componentes

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{2g^2} Tr[\mathbb{F}_{\mu\nu}\mathbb{F}^{\mu\nu}]$$

$$= -\frac{1}{2g^2} Tr[F^a_{\mu\nu}\frac{T^a}{2}F^{\mu\nu b}\frac{T^b}{2}] \tag{3.5a}$$

$$= -\frac{1}{8g^2} F^a_{\mu\nu}F^{\mu\nu b} Tr[T^a T^b] \tag{3.5b}$$

$$= -\frac{1}{8g^2} F^a_{\mu\nu}F^{\mu\nu b} Tr[\mathbb{I}\delta^{ab} + if^{abc}T^a] \tag{3.5c}$$

$$= -\frac{1}{4g^2} F^a_{\mu\nu}F^{\mu\nu a} \tag{3.5d}$$

Obtendremos las ecuaciones de movimiento a partir de ésta lagrangiana, para tenemos que ver cómo es la derivada covariante para el tensor de campo, ya que aparte de que sus componentes sean elementos del álgebra éstas deben transformar covariantemente como tensor; para explorar este caso hagamos lo siguiente

$$\eta^a \partial_a \mathbb{F}_{\mu\nu} = \lim_{f \to 0} \frac{\mathbb{F}_{\mu\nu}(x + f\eta) - \mathbb{F}_{\mu\nu}(x)}{f} \tag{3.6a}$$

Como la derivada no transforma adecuadamente se introduce la holonomía $U(x, y)$ que transforma de la siguiente manera

$$U(y, x) \mapsto V(y)U(y, x)V^\dagger(x) \tag{3.6b}$$

Y que cumple con

$$U(y,y) = \mathbb{I} \tag{3.6c}$$

Para un desplazamiento infinitesimal tenemos

$$U(x+f\eta, x) = \mathbb{I} + igf\eta^{\mu}\mathbb{A}^{\mu} \tag{3.6d}$$

Lo cual nos dice que $\mathbb{A}^{\mu}$ es la conexión del fibrado. Con éstas consideraciones, la derivada covariante es

$$\eta^{\alpha}D_{\alpha}\mathbb{F}_{\mu\nu} = \lim_{f\to 0}\frac{\mathbb{F}_{\mu\nu}(x+f\eta) - U(x+f\eta,x)\mathbb{F}_{\mu\nu}(x)U(x,x+f\eta)}{f} \tag{3.6e}$$

$$= \lim_{f\to 0}\frac{\mathbb{F}_{\mu\nu}(x+f\eta) - (\mathbb{I} + igf\eta^{\alpha}\mathbb{A}_{\alpha})\,\mathbb{F}_{\mu\nu}(x)\left(\mathbb{I} + igf\eta^{\beta}\mathbb{A}_{\beta}\right)}{f} \tag{3.6f}$$

$$\approx \lim_{f\to 0}\frac{\mathbb{F}_{\mu\nu}(x+f\eta) - \mathbb{F}_{\mu\nu}(x)}{f} - ig\eta^{\alpha}\mathbb{A}_{\alpha}\mathbb{F}_{\mu\nu}(x) + ig\eta^{\alpha}\mathbb{F}_{\mu\nu}(x)\mathbb{A}_{\alpha} \tag{3.6g}$$

$$= \eta^{\alpha}\partial_{\alpha}\mathbb{F}_{\mu\nu} - ig\eta^{\alpha}[\mathbb{A}_{\alpha}, \mathbb{F}_{\mu\nu}] \tag{3.6h}$$

$$\therefore D_{\alpha}\mathbb{F}_{\mu\nu} = \partial_{\alpha}\mathbb{F}_{\mu\nu} - ig[\mathbb{A}_{\alpha}, \mathbb{F}_{\mu\nu}] \tag{3.6i}$$

Al ser el análogo del caso abeliano, es de esperar que este tensor contenga la información dinámica del campo, por lo cual su divergencia covariante debería de darnos las ecuaciones de campo. Usemos el princpio variacional para confirmar esta hipótesis

$$
\begin{aligned}
S &= \int d^4x \left( -\frac{1}{2g^2} Tr(\mathbb{F}_{\mu\nu}\mathbb{F}^{\mu\nu}) \right) && (3.7a)\\
\delta S &= -\frac{1}{g^2} \int d^4x \, Tr\left(\mathbb{F}^{\mu\nu}\delta\mathbb{F}_{\mu\nu}\right) && (3.7b)\\
\delta\mathbb{F}_{\mu\nu} &= \partial_\mu(\delta\mathbb{A}_\nu) - \partial_\nu(\delta\mathbb{A}_\mu) + ig[\delta\mathbb{A}_\mu, \mathbb{A}_\nu] + ig[\mathbb{A}_\mu, \delta\mathbb{A}_\nu] && (3.7c)\\
&= \big(\partial_\mu(\delta\mathbb{A}_\nu) + [\mathbb{A}_\mu, \delta\mathbb{A}_\nu]\big) - \big(\partial_\nu(\delta\mathbb{A}_\mu) + [\mathbb{A}_\nu, \delta\mathbb{A}_\mu]\big) && (3.7d)\\
&= D_\mu(\delta\mathbb{A}_\nu) - D_\nu(\delta\mathbb{A}_\mu) && (3.7e)\\
\delta S &= -\frac{1}{g^2} \int d^4x \, Tr\left(\mathbb{F}^{\mu\nu}\left(D_\mu(\delta\mathbb{A}_\nu) - D_\nu(\delta\mathbb{A}_\mu)\right)\right) && (3.7f)\\
&= -\frac{2}{g^2} \int d^4x \, Tr\left(\mathbb{F}^{\mu\nu}D_\mu(\delta\mathbb{A}_\nu)\right) && (3.7g)
\end{aligned}
$$

Destacamos que la derivada covariante de norma obedece la *regla de Leibnitz* y que bajo trazas se convierte en parcial

$$
\begin{aligned}
D_\mu(\mathbb{F}^{\mu\nu}\delta\mathbb{A}_\nu) &= \partial_\mu(\mathbb{F}^{\mu\nu}\delta\mathbb{A}_\nu) + ig[\mathbb{F}^{\mu\nu}\delta\mathbb{A}_\nu, \mathbb{A}_\mu] && (3.7h)\\
&= \partial_\mu(\mathbb{F}^{\mu\nu})\delta\mathbb{A}_\nu + \mathbb{F}^{\mu\nu}\partial_\mu(\delta\mathbb{A}_\nu) && (3.7i)\\
&+ ig[\mathbb{F}^{\mu\nu}, \mathbb{A}_\mu]\delta\mathbb{A}_\nu + ig\mathbb{F}^{\mu\nu}[\delta\mathbb{A}_\nu, \mathbb{A}_\mu] &&\\
&= \left(\partial_\mu(\mathbb{F}^{\mu\nu}) + ig[\mathbb{F}^{\mu\nu}, \mathbb{A}_\mu]\right)\delta\mathbb{A}_\nu && (3.7j)\\
&+ \mathbb{F}^{\mu\nu}\left(\partial_\mu(\delta\mathbb{A}_\nu) + ig[\delta\mathbb{A}_\nu, \mathbb{A}_\mu]\right) &&\\
&= \left(D_\mu\mathbb{F}^{\mu\nu}\right)\delta\mathbb{A}_\nu + \mathbb{F}^{\mu\nu}\left(D_\mu\delta\mathbb{A}_\nu\right) && (3.7k)
\end{aligned}
$$

Bajo la traza sucede lo siguiente

$$
\begin{aligned}
Tr(D_\mu(\mathbb{F}^{\mu\nu}\delta\mathbb{A}_\nu)) &= Tr(\partial_\mu(\mathbb{F}^{\mu\nu}\delta\mathbb{A}_\nu) + ig[\mathbb{F}^{\mu\nu}\delta\mathbb{A}_\nu, \mathbb{A}_\mu]) && (3.7l) \\
&= \partial_\mu Tr(\mathbb{F}^{\mu\nu}\delta\mathbb{A}_\nu) + ig\, Tr([\mathbb{F}^{\mu\nu}\delta\mathbb{A}_\nu, \mathbb{A}_\mu]) && (3.7m) \\
&= \partial_\mu Tr(\mathbb{F}^{\mu\nu}\delta\mathbb{A}_\nu) && (3.7n) \\
&+ ig\, Tr(\mathbb{F}^{\mu\nu}[\delta\mathbb{A}_\nu, \mathbb{A}_\mu] + [\mathbb{F}^{\mu\nu}, \mathbb{A}_\mu]\delta\mathbb{A}_\nu) \\
&= \partial_\mu Tr(\mathbb{F}^{\mu\nu}\delta\mathbb{A}_\nu) && (3.7o) \\
&+ ig\, Tr(F^{\mu\nu d}\frac{T^d}{2}\delta A^a_\nu A^b_\mu 2if^{abc}\frac{T^c}{2}) \\
&+ ig\, Tr(F^{\mu\nu a}A^b_\mu 2if^{abc}\frac{T^c}{2}\delta A^d_\nu\frac{T^d}{2}) \\
&= \partial_\mu Tr(\mathbb{F}^{\mu\nu}\delta\mathbb{A}_\nu) && (3.7p) \\
&- \frac{g}{2}f^{lmk}F^{\mu\nu k}A^m_\mu\delta A^l_\nu \\
&- \frac{g}{2}f^{imk}F^{\mu\nu i}A^m_\mu\delta A^c_\nu \\
Tr\left(D_\mu(\mathbb{F}^{\mu\nu}\delta\mathbb{A}_\nu)\right) &= \partial_\mu Tr(\mathbb{F}^{\mu\nu}\delta\mathbb{A}_\nu) && (3.7q)
\end{aligned}
$$

Finalmente, la acción resulta en

$$
\begin{aligned}
\delta S &= -\frac{2}{g^2}\int d^4x\, Tr\left(D_\mu(\mathbb{F}^{\mu\nu}\delta\mathbb{A}_\nu) - D_\mu(\mathbb{F}^{\mu\nu})\delta\mathbb{A}_\nu\right) && (3.7r) \\
&= -\frac{2}{g^2}\int d^4x\, \partial_\mu Tr\left(\mathbb{F}^{\mu\nu}\delta\mathbb{A}_\nu\right) - Tr\left(D_\mu(\mathbb{F}^{\mu\nu})\delta\mathbb{A}_\nu\right) && (3.7s) \\
&= \frac{2}{g^2}\int d^4x\, Tr\left(D_\mu(\mathbb{F}^{\mu\nu})\delta\mathbb{A}_\nu\right) && (3.7t) \\
& && (3.7u)
\end{aligned}
$$

Como es respecto a una variación arbitraria del campo $\mathbb{A}_\mu$, concluimos que

$$
D_\mu\mathbb{F}^{\mu\nu} = 0 \qquad (3.7v)
$$

Éstas son las ecuaciones para un campo bosónico de Yang-Mills sin fuentes [5, 9].

## 3.2 Algoritmo de Dirac-Bergmann

Procederemos a construir el formalismo Hamiltoniano de Yang Mills, para esto la primera entidad que debemos identificar son los momentos canónicos, los índices griegos son para el espacio-tiempo, $(a, \ldots, h, p, \ldots, z)$ son de grupo y $(i, \ldots, o)$ para espacio únicamente.

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu A^c_\nu)} = -\frac{F^{\mu\nu}_c}{g^2} \tag{3.8a}$$

$$\Pi^\nu_c \equiv \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_0 A^c_\nu)} \tag{3.8b}$$

$$= -\frac{F^{0\nu}_c}{g^2} \tag{3.8c}$$

$$\Pi^c_\nu = \frac{F^c_{0\nu}}{g^2} \tag{3.8d}$$

Recordemos que los generadores infinitesimales del grupo obedecen el álgebra $\mathfrak{su}(n)$, i.e.

$$[T_a, T_b] = if_{abc}T_c \tag{3.8e}$$

Por lo que el tensor de campo tiene la siguiente expresión

$$\mathbb{F}^{\mu\nu} = \partial^\mu \mathbb{A}^\nu - \partial^\nu \mathbb{A}^\mu - ig[\mathbb{A}^\mu, \mathbb{A}^\nu] \tag{3.8f}$$

$$F^{\mu\nu}_a = \partial^\mu A^\nu_a - \partial^\nu A^\mu_a + gf_{abc}A^\mu_b A^\nu_c \tag{3.8g}$$

Y la derivada covariante para un campo arbitrario $\Omega^\nu_a$ resulta en

$$D_\mu \Omega^\nu_a = \partial_\mu \Omega^\nu_a - gf_{abc}\Omega^\nu_c A^c_\mu \tag{3.8h}$$

Con esto expresión podemos notar que dada la antisimetría del tensor de campo **el momento canónico $\Pi^0_a$ es una constricción primaria y de primera clase.**

Además nos permite ver claramente la forma de los momentos restantes

$$\chi_a \equiv \Pi_a^0 \approx 0 \tag{3.8i}$$

$$\Pi_a^i = -\frac{1}{g^2}\left(\dot{A}_a^i - \partial^i A_a^0 + g f_{abc} A_b^0 A_c^i\right) \tag{3.8j}$$

$$\dot{A}_i^a = g^2 \Pi_i^a + \partial_i A_0^a - g f_{abc} A_0^b A_i^c \tag{3.8k}$$

Construimos el *Hamiltoniano canónico* de la teoría

$$\mathscr{H}_c = \Pi_a^i \dot{A}_i^a + \frac{F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu}}{4g^2} \tag{3.9a}$$

$$= \frac{g^2}{2}\Pi_i^a \Pi_a^i + \frac{F_{ij}^a F_a^{ij}}{4g^2} + \Pi_a^i \partial_i A_0^a - g f_{abc} \Pi_a^i A_0^b A_i^c \tag{3.9b}$$

$$H_c = \int d^3x \left(\frac{g^2}{2}\Pi_i^a \Pi_a^i + \frac{F_{ij}^a F_a^{ij}}{4g^2} + \Pi_a^i \partial_i A_0^a - g f_{abc} \Pi_a^i A_0^b A_i^c\right) \tag{3.9c}$$

$$= \int d^3x \left(\frac{g^2}{2}\Pi_i^a \Pi_a^i + \frac{F_{ij}^a F_a^{ij}}{4g^2} - A_0^a \partial_i \Pi_a^i - g f_{abc} \Pi_a^i A_0^b A_i^c\right) \tag{3.9d}$$

Y de paso construimos el *Hamiltoniano total* para poder aplicar el formalismo de constricciones

$$H_T = H_c + \int d^3x \, \lambda^a(x) \chi_a(x) \tag{3.9e}$$

De la evolución temporal de la constricción emerge otra constricción

$$\dot{\Pi}_d^0 = \partial_i \Pi_d^i - g f_{dac} \Pi_a^i A_i^c \tag{3.10a}$$

$$= D_i \Pi_d^i \tag{3.10b}$$

$$\mathcal{G}_a \equiv D_i \Pi_a^i \tag{3.10c}$$

Con el fin de ver si es de primera o segunda clase, veámos su álgebra. Dado que el cálculo de la misma puede resultar laborioso si se procede como es usual, debemos definir las constricciones del siguiente modo

$$\mathcal{G}[N^a] \equiv \int d^3\nu \; N^a(\nu) D_i \Pi^i_a \tag{3.10d}$$

Donde $N^a$ es una función de prueba con soporte compacto la cual va a servir como una distribución que hará fuerte la constricción en el espacio fase restringido.

$$\begin{aligned}\{\mathcal{G}[N^a], \mathcal{G}[M^b]\} &= g f_{bef} \int d^3\nu d^3\mu \; N^a(\nu) M^b(\mu) \delta_{af} \Pi^a_e(\mu) \partial_i(\delta^3(\nu-\mu)) \\ &\quad - g f_{acd} \int d^3\nu d^3\mu \; N^a(\nu) M^b(\mu) \delta_{db} \Pi^i_c(\nu) \partial_i(\delta^3(\nu-\mu)) \\ &\quad + g^2 \left(f_{ace} f_{bed} - f_{aed} f_{bce}\right) \int d^3\nu \; N^a(\nu) M^b(\mu) \Pi^i_c A^a_d \end{aligned} \tag{3.10e}$$

En este punto es pertinente hacer las siguientes observaciones: la derivada en el primer sumando es con respecto a $\nu$ mientras que en el segundo es repecto a $\mu$; además, en el tercer sumando la integración sobre $\mu$ ha sido realizada. Evidentemente, en los tres sumandos ya se ha realizado el paréntesis de Poisson correspondiente.

**Lema 3.2.1 (Delta de Dirac)** *La representación integral de la delta de Dirac está dada por*

$$\delta(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}} d^d k \; e^{ik\cdot(x-y)} \tag{3.10f}$$

*Destacamos el siguiente hecho*

$$\frac{\partial}{\partial x}\delta(x-y) = -\frac{\partial}{\partial y}\delta(x-y) \tag{3.10g}$$

Cambiando la derivada por $\mu$ en el primer término y por $\nu$ en el segundo para posteriormente integrar por partes deja invariante los signos; también efectuamos la integración sobre $\mu$ lo cual nos libra de la delta de Dirac, con esto nuestro desarrollo llega a

$$
\begin{aligned}
\{\mathcal{G}[N^a], \mathcal{G}[M^b]\} = g f_{bca} \int d^3v\ N^a \Pi^i_c \partial_i M^b + N^a M^b \partial_i \Pi^i_c \\
- g f_{acb} \int d^3v\ M^b N^a \partial_i \Pi^i_c + M^b \Pi^i_c \partial_i N^a \\
- g^2 \left(f_{cae} f_{bed} + f_{aed} f_{bce}\right) \int d^3v\ N^a M^b \Pi^i_c A^a_d
\end{aligned} \tag{3.10h}
$$

Para simplificar el tercer término hacemos uso de la *identidad de Jacobi* y reacomodamos los primeros dos sumandos

$$
\begin{aligned}
\{\mathcal{G}[N^a], \mathcal{G}[M^b]\} = g \int d^3v\ N^a M^b \left(f_{bca} - f_{acb}\right) \partial_i \Pi^i_c \\
+ g \int d^3v\ \Pi^i_c \left(N^a f_{bca} \partial_i M^b - f_{acb} M^b \partial_i N^a\right) \\
+ g^2 f_{abe} f_{ced} \int d^3v\ N^a M^b \Pi^i_c A^a_d
\end{aligned} \tag{3.10i}
$$

Integramos por partes en el primer término del segundo sumando

$$
\begin{aligned}
= -g f_{cba} \int d^3v\ \left(N^a M^b + N^b M^a\right) \partial_i \Pi^i_c \\
- g \int d^3v\ \left(f_{bca} M^b (\partial_i (\Pi^i_c N^a)) + f_{acb} M^b \partial_i N^a \Pi^i_c\right) \\
+ g^2 f_{abe} f_{ced} \int d^3v\ N^a M^b \Pi^i_c A^a_d
\end{aligned} \tag{3.10j}
$$

Expandiendo la derivada del producto y usando la antisimetría de las constantes de estructura, nos deshacemos del término $f_{acb} M^b \partial_i N^a \Pi^i_c$

$$
\begin{aligned}
= -g f_{cba} \int d^3v\ \left(N^a M^b + N^b M^a\right) \partial_i \Pi^i_c \\
- g \int d^3v\ f_{bca} N^a M^b \partial_i \Pi^i_c \\
+ g^2 f_{abe} f_{ced} \int d^3v\ N^a M^b \Pi^i_c A^a_d
\end{aligned} \tag{3.10k}
$$

Usando de nuevo la antisimetría nos deshacemos del término $N^a M^b \partial_i \Pi^i_c$

$$
\begin{aligned}
&= -g \int d^3v\, f_{cba} N^b M^a \partial_i \Pi^i_c \\
&+ g^2 f_{abe} f_{ced} \int d^3v\; N^a M^b \Pi^i_c A^a_d && (3.10l) \\
&= g \int d^3v\, f_{cab} N^a M^b \partial_i \Pi^i_c \\
&+ g^2 f_{cab} f_{ecd} \int d^3v\; N^a M^b \Pi^i_e A^a_d && (3.10m) \\
&= g \int d^3v\; \left(\partial_i \Pi^i_c + g f_{ecd} \Pi^i_e A^a_d\right) [N, M]^c && (3.10n) \\
&= g \int d^3v\; \left(\partial_i \Pi^i_c - g f_{ced} \Pi^i_e A^a_d\right) [N, M]^c && (3.10o) \\
&= g \int d^3v\; D_i \Pi^i_c [N, M]^c && (3.10p)
\end{aligned}
$$

$$
\therefore \{\mathcal{G}[N^a], \mathcal{G}[M^b]\} = g f^{abc} \mathcal{G}[[N, M]^c] \tag{3.10q}
$$

Con lo cual concluimos que también son constricciones de primera clase, por lo cual debemos hallar las condiciones de norma apropiadas para esta teoría con el fin de volverlas de segunda clase y poder construir los paréntesis de Dirac., sin embargo, con el fin de ilustrar otro método de cuantización, procederemos de manera distinta.

## 3.3 Cuantización de la teoría de Yang-Mills

Si se busca cuantizar una teoría de campo $(\Psi_{A_1, A_2, \ldots, A_s})$, una de las formas más populares es a través de la *integral de Feynman*, la cual nos da todas las interacciones que podemos tener a través de la siguiente integral funcional [2, 12, 13]

$$
Z[J] = \int \prod_{(t,\vec{x})} \prod_{A_1, A_2, \ldots, A_s} \mathcal{D}\Psi_{A_1, A_2, \ldots, A_s} e^{\frac{i}{\hbar} S + \frac{i}{\hbar} \int d^4x J^{A_1, A_2, \ldots, A_s} \Psi_{A_1, A_2, \ldots, A_s}} \tag{3.11}
$$

Dicha integral resume las interacciones, las cuales pueden ser obtenidas a través de derivadas funcionales, es decir, efectuar las derivadas resultará en obtener las *funciones de Green* de la teoría.

$$G_n(x_{1A_1}, \ldots, x_{nA_n}) = \langle 0 | \, T(\hat{\Psi}_{A_1}(x_1) \cdots \hat{\Psi}_{A_n}(x_n)) \, | 0 \rangle \tag{3.12}$$

$$= \frac{1}{i^n} \frac{1}{Z[0]} \frac{\delta^n Z[J]}{\delta J_{A_1}(x_1) \cdots \delta J_{A_n}(x_n)} \tag{3.13}$$

Donde

$$Z[0] = \int \prod_{(t,\vec{x})} \prod_{A_1, A_2, \ldots, A_s} \mathcal{D}\Psi_{A_1, A_2, \ldots, A_s} e^{\frac{i}{\hbar} S} \tag{3.14}$$

Es el caso donde no tenemos fuentes de interacciones.

## 3.4 Fantasmas

Dada la ambigüedad inherente a una teoría de norma, cuantizar la teoría por medio de una integral funcional es un método que usualmente falla si se procede como se describe arriba [13], hay que introducir unos campos suplementarios denominados *fantasmas*; dichos campos violan el *teorema de espín-estadística* ya que anticonmutan pero tienen espín entero. La herramienta matemática que nos permitirá introducir dichos campos son los números de Grassman, los cuáles también son usados para representar *campos fermiónicos*.

### 3.4.1 Números de Grassman

**Definición 3.4.1 (Números de Grassman)** *Sean $\beta_i, \beta_j \in \mathfrak{G}$ donde $\mathfrak{G}$ es el conjunto de los números de Grassman tales que*

$$\beta_i \beta_j + \beta_j \beta_i = 0 \qquad\qquad i, j = 1, \ldots, n \tag{3.15}$$

$$\Rightarrow \beta_i^2 = 0 \tag{3.16}$$

*Es decir, son generadores de un álgebra graduada. Si $x \in \mathbb{C}$ tenemos*

$$x\beta_i = \beta_i x \tag{3.17}$$

**Definición 3.4.2 (Función de una variable de Grassman)**

$$f : \mathfrak{G} \to \mathfrak{G}$$

*Toda función bien comportada admite una representación en términos de generadores*

$$f(\beta) = f_0 + f_i\beta_i + \frac{1}{2!}f_{ij}\beta_i\beta_j + \cdots + \frac{1}{n!}f_{i_1,\ldots,i_n}\beta_{i_1}\cdots\beta_{i_n} \tag{3.18}$$

$$f_{i_1,\ldots,i_n} \in \mathbb{C}$$

$$f_{i_1,\ldots,i_n} = f_{[i_1,\ldots,i_n]}$$

**Definición 3.4.3 (Derivadas)** *Sean la* **derivada izquierda** *y* **derivada derecha** *los siguientes operadores respectivamente*

$$\frac{\vec{\partial}}{\partial\beta_k} : C^1(\mathfrak{G}) \to \{f(\beta) \,|\, \beta \in \mathfrak{G}\}$$

$$\frac{\vec{\partial}}{\partial\beta_k}\left(\beta_1\beta_2\cdots\beta_{k-1}\beta_k\beta_{k+1}\cdots\beta_j\right) = (-1)^{k-1}\beta_1\beta_2\cdots\beta_{k-1}\beta_{k+1}\cdots\beta_j \tag{3.19}$$

$$\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\beta_k} : C^1(\mathfrak{G}) \to \{f(\beta) \,|\, \beta \in \mathfrak{G}\}$$

$$\left(\beta_1\beta_2\cdots\beta_{k-1}\beta_k\beta_{k+1}\cdots\beta_j\right)\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\beta_k} = (-1)^{j-k}\beta_1\beta_2\cdots\beta_{k-1}\beta_{k+1}\cdots\beta_j \tag{3.20}$$

**Ejemplo 3.4.1**

$$\frac{\vec{\partial}}{\partial\beta_1}\left(\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4\right) = \left(\beta_2\beta_3\beta_4\right) \tag{3.21}$$

$$\left(\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4\right)\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\beta_1} = -\left(\beta_2\beta_3\beta_4\right) \tag{3.22}$$

**Definición 3.4.4 (Integral de variables de Grassman)** *Si tomamos* 1-formas *definidas sobre las variables de Grassman y derivamos la expresión 4.65 tenemos*

$$d\beta_i d\beta_j + d\beta_j d\beta_i = 0 \tag{3.23}$$

$$d(\beta_i\beta_j + d\beta_j\beta_i) = d\beta_i\beta_j + \beta_j d\beta_i = 0 \tag{3.24}$$

*Se definen las siguientes dos integrales pidiendo que sean invariantes ante traslaciones*

$$\int d\beta_i \equiv 0 \tag{3.25}$$

$$\int d\beta_i\ \beta_i \equiv 1 \tag{3.26}$$

**Ejemplo 3.4.2**

$$\int d\beta_1\ d\beta_2\beta_1\beta_2 = -\int d\beta_1\ \beta_1 d\beta_2\ \beta_2 = -1 \tag{3.27}$$

**Lema 3.4.5 (Cambio de variable)** *El cambio de variable en este caso es muy conveniente, sean $\beta, \gamma \in \mathfrak{G}$ con $a \in \mathbb{C}$ donde*

$$\beta = a\gamma \tag{3.28}$$

*Sabemos que*

$$\int d\beta\ \beta = 1$$

$$\int d\gamma\ \gamma = 1$$

$$\Rightarrow d\beta = \frac{d\gamma}{a} \tag{3.29}$$

*Generalizando el caso anterior donde $A_{ij}$ es una matriz*

$$\beta_i = A_{ij}\gamma_j \tag{3.30}$$

$$d\beta_i = (A^{-1})_{ij} d\gamma_j \tag{3.31}$$

$$\int d\beta_1 \cdots d\beta_n f(\beta) = \int (\det A)^{-1} d\gamma_1 \cdots d\gamma_n f(\beta(\gamma)) \tag{3.32}$$

Como mencionamos anteriormente, las variables de Grassman nos ayudan a incluir los denominados *fantasmas* en la teoría, esto va a resultar ser de mucha utilidad para representar determinantes de operadores como integrales funcionales.

Sea $M$ una matriz antisimétrica con eigenvalores $\lambda_i$ y $\beta$ un vector cuyas componentes $\beta_i \in \mathfrak{G}$, como es usual definimos la siguiente integral

$$I(M) = \int d\beta_1 \cdots d\beta_n \, e^{-\beta^T M \beta} \tag{3.33}$$

Un resultado conocido del álgebra lineal nos dice que podemos hacer la siguiente transformación de similitud y desarrollo

$$M' = OMO^T = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\lambda_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{\frac{n}{2}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda_{\frac{n}{2}} & 0 \end{pmatrix} \tag{3.34}$$

$$O \in O(n) \tag{3.35}$$

$$
\begin{aligned}
\beta^T M \beta &= \beta^T O^T O M O^T O \beta && (3.36)\\
&= \beta^T O^T M' O \beta && (3.37)\\
\beta &\equiv O\beta && (3.38)\\
\beta^T &= \beta^T O^T && (3.39)\\
\beta^T M \beta &= \beta^T && (3.40)\\
\therefore I(M) &= \int d\beta_1 \cdots d\beta_n \, e^{-\beta^T M' \beta} && (3.41)
\end{aligned}
$$

**Ejemplo 3.4.3** *Desarrollaremos la expresión anterior para el caso $n = 4$*

$$
\begin{aligned}
(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4) &\begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ -\lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \\ 0 & 0 & -\lambda_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{pmatrix} \\
&= (-\lambda_1\beta_2, \lambda_1\beta_1, -\lambda_2\beta_4, \lambda_2\beta_3) \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{pmatrix} && (3.42)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= -\lambda_1\beta_2\beta_1 + \lambda_1\beta_1\beta_2 - \lambda_2\beta_4\beta_3 + \lambda_2\beta_3\beta_4 && (3.43)\\
&= 2(\lambda_1\beta_1\beta_2 + \lambda_2\beta_3\beta_4) && (3.44)
\end{aligned}
$$

*Por lo que la integral resulta en*

$$
\begin{aligned}
&\int d\beta_1 d\beta_2 d\beta_3 d\beta_4 \; e^{-2(\lambda_1\beta_1\beta_2+\lambda_2\beta_3\beta_4)} \\
&= \int d\beta_1 d\beta_2 d\beta_3 d\beta_4 \left(1 - 2(\lambda_1\beta_1\beta_2 + \lambda_2\beta_3\beta_4) + \frac{2^2}{2!}(\lambda_1\beta_1\beta_2 + \lambda_2\beta_3\beta_4)^2\right) \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (3.45) \\
&= \int d\beta_1 d\beta_2 d\beta_3 d\beta_4 \; \frac{2^2}{2!} 2\lambda_1\lambda_2\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4 && (3.46) \\
&= 2\lambda_1\lambda_2 && (3.47)
\end{aligned}
$$

Regresando al caso general

$$
\begin{aligned}
\int d\beta_1 \cdots d\beta_n \; e^{-2(\lambda_1\beta_1\beta_2+\lambda_2\beta_3\beta_4+\cdots+\lambda_{\frac{n}{2}}\beta_{n-1}\beta_n)} &= 2^{\frac{n}{2}}\lambda_1 \cdots \lambda_{\frac{n}{2}} && (3.48) \\
&= 2^{\frac{n}{2}} \left(\det M\right)^{-1} && (3.49)
\end{aligned}
$$

Si queremos que la integral no se anule la cantidad $\frac{n}{2}$ tiene que ser par, ya que de otro modo $\det M = 0$. En nuestro caso necesitaremos representar operadores hermitianos como integrales funcionales, esto hace que tengamos que incorporar una estructura compleja a los fantasmas para para crear los *superfantamas*, en cuyo caso seguiremos teniendo el álgebra graduada definida anteriormente pero ahora con $2n$ generadores.

**Definición 3.4.6 (Supernúmeros de Grassman)** *Sean $\beta_i, \beta_j^* \in \mathfrak{SG}$ donde $\mathfrak{SG}$ es el conjunto de los supernúmeros de Grassman donde se sigue cumpliendo* (4.65) *y* (3.16) *y se incorpora una estructura compleja de la siguiente manera*

$$
\begin{aligned}
(\beta_i^*)^* &= \beta_i && (3.50) \\
(\beta_i\beta_j)^* &= \beta_j^*\beta_i^* = -\beta_i^*\beta_j^* && (3.51) \\
\Rightarrow (f_{i_1,\ldots,i_n}\beta_{i_1} \cdots \beta_{i_n})^* &= f^*_{i_1,\ldots,i_n}\beta^*_{i_n} \cdots \beta^*_{i_1} && (3.52)
\end{aligned}
$$

Dada la independencia lineal de los generadores, podemos extender la integración de la siguiente manera

$$\int d\beta_i = 0 \qquad\qquad \int d\beta_j^* = 0 \tag{3.53}$$

$$\int d\beta_i\ \beta_i = 1 \qquad\qquad \int d\beta_j^*\ \beta_j^* = 1 \tag{3.54}$$

Por lo cual, podemos generalizar a

$$J(M) = \int \prod_{i=1}^{n} \left( d\beta_i d\beta_i^* \right) e^{i\beta_j^\dagger M_{jk}\beta_k} \tag{3.55}$$

Pedimos al lector que note que $M$ no es necesariamente simétrica o antisimétrica, el único requisito es que sea **hermitiana**; a continuación haremos uso de un resultado para este tipo de operadores

$$M' = UMU^\dagger = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \tag{3.56}$$

$$\lambda_i \in \mathbb{R} \qquad U \in U(n)$$

$$\beta^\dagger M\beta = \beta^\dagger U^\dagger UMU^\dagger U\beta \tag{3.57}$$

$$= \beta^\dagger M'\beta \tag{3.58}$$

$$= \lambda_1\beta_1^*\beta_1 + \cdots + \lambda_n\beta_n^*\beta_n \tag{3.59}$$

$$J(M) = \int \prod_{i=1}^{n} \left( d\beta_i d\beta_i^* \right)\ e^{i\lambda_1\beta_1\beta_1^*} e^{i\lambda_2\beta_2\beta_2^*} \dots e^{i\lambda_n\beta_n\beta_n^*} \tag{3.60}$$

$$= i^n \det M \tag{3.61}$$

**Ejemplo 3.4.4 (Completar el cuadrado)** *A menudo es necesario completar el* *cuadrado para integrales gaussianas, en este caso*

$$\int \prod_{i=1}^{n} \left(d\beta_i d\beta_i^*\right) e^{i(\beta^\dagger M\beta+\beta^\dagger\beta+\beta^\dagger\beta)}$$

$$= \int \prod_{i=1}^{n} \left(d\beta_i d\beta_i^*\right) e^{i(\beta^\dagger M\beta+\beta^\dagger\beta+\beta^\dagger\beta+\beta^\dagger M^{-1}\beta)} e^{-i\beta^\dagger M^{-1}\beta} \tag{3.62}$$

$$= \int \prod_{i=1}^{n} \left(d\beta_i d\beta_i^*\right) e^{i(\beta+M^{-1}\beta)^\dagger M(\beta+M^{-1}\beta)} e^{-i\beta^\dagger M^{-1}\beta} \tag{3.63}$$

$$\beta' \equiv \beta + M^{-1}\beta \tag{3.64}$$

$$= e^{-i\beta^\dagger M^{-1}\beta} \int \prod_{i=1}^{n} \left(d\beta_i d\beta_i^*\right) e^{i(\beta'^\dagger M\beta')} \tag{3.65}$$

$$= e^{-i\beta^\dagger M^{-1}\beta} J(M) \tag{3.66}$$

### 3.4.2 El método de Faddeev-Popov

Al tener la integral funcional de una teoría de norma la medida cuenta con más grados de libertad de los que hay realmente dada la libertad de elegir la norma que tenemos, el introducir un campo fantasma soluciona esto y nos permite cuantizar apropiadamente [14].
La acción para una teoría de norma es

$$S[A] = \int d^4x \left(-\frac{1}{4g^2} F_i^{\mu\nu} F_{\mu\nu i}\right) \tag{3.67}$$

La cual es invariante ante la siguiente transformación de norma

$$A_a'^{\mu} = A_a^{\mu} + \frac{1}{g}\partial^\mu \beta_a + f_{abc} A_b^\mu \beta_c \tag{3.68}$$

La integral funcional es

$$Z'[0] = \int \prod_{(t,\vec{x})} \prod_{\mu,a} \mathcal{D}A_a^\mu(t,\vec{x}) e^{\frac{i}{\hbar}S[A]} \tag{3.69}$$

Se ha primado la integral ya que como se ha mencionado la integral cuenta de sobra, esto es debido a que nuestro espacio-tiempo actúa como espacio base para la fibra que contiene a toda la clase de equivalencia $A_a'^{\mu}$ para lidiar con esto se tienen que defini una condición de norma $g(A)$ la cual es una sección transversal en el haz fibrado, en el caso lagrangiano sólo tenemos una constricción, por lo que basta con imponer una condición. Elegimos la *norma de Lorentz*

$$g(A) = \partial_\mu A_a^\mu = 0 \tag{3.70}$$

Se define la siguiente función de la norma

$$\Delta_g^{-1}[A] = \int \mathcal{D}\beta(x)\delta[g(A')] \tag{3.71}$$

Si el campo y la función son bien comportados, podemos escribir 1 de un modo algo elaborado

$$1 = \Delta_g^{-1}[A]\Delta_g[A] = \Delta_g[A]\int \mathcal{D}\beta(x)\delta[g(A')] \tag{3.72}$$

Podemos multiplicar $Z'[0]$ por 1 y obtener

$$Z'[0] = \int \prod_{(t,\vec{x})}\prod_{\mu,a} \mathcal{D}A_a^\mu(t,\vec{x})e^{\frac{i}{\hbar}S[A]}\Delta_g^{-1}[A]\Delta_g[A] \tag{3.73}$$

$$= \int \prod_{(t,\vec{x})}\prod_{\mu,a} \mathcal{D}A_a^\mu(t,\vec{x})e^{\frac{i}{\hbar}S[A]}\Delta_g[A]\int \mathcal{D}\beta(x)\delta[g(A')] \tag{3.74}$$

$\mathcal{D}A_a^\mu$ está definida sobre la fibra, las transformaciones de norma son traslaciones sobre la fibra, esto implica que $\mathcal{D}A_a^\mu = \mathcal{D}A_a'^\mu$, nos percatamos que

$$\mathcal{D}A_a^\mu = \mathcal{D}A_a'^\mu \tag{3.75a}$$

$$S[A'] = S[A] \tag{3.75b}$$

$$\Delta g[A'] = \Delta g[A] \tag{3.75c}$$

La última ecuación se demostrará en particular tanto para el caso abeliano como el no abeliano. Retomando el cálculo anterior (y ahorrando un poco de notación entendiendo a $\prod_{(t,\vec{x})}\prod_{\mu,a}\mathcal{D}A_a^\mu(t,\vec{x}) = \mathcal{D}A_a^\mu(t,\vec{x})$)

$$Z'[0] = \int \mathcal{D}\beta(x)\int \mathcal{D}A'_\mu(t,\vec{x})e^{\frac{i}{\hbar}S[A']}\Delta_g[A']\delta[g(A')] \tag{3.76}$$

$$\gamma \equiv \int \mathcal{D}\beta(x) \text{ es el volumen del grupo, al ser } SU(n) \text{ está acotado} \tag{3.77}$$

$$Z'[0] = \gamma\int \mathcal{D}A_\mu(t,\vec{x})e^{\frac{i}{\hbar}S[A]}\Delta_g[A]\delta[g(A)] \tag{3.78}$$

Por lo cual ahora el problema se reduce a calcular $\Delta_g[A]$. Procedemos de la siguiente manera: para una $A$ fija podemos invertir $\beta$ en términos de $g$, i.e.

$$\tilde{g} \equiv g(A') \tag{3.79}$$

$$\mathcal{D}\beta = J\mathcal{D}\tilde{g} \tag{3.80}$$

$$J = \det\left|\frac{\delta\beta}{\delta\tilde{g}}\right| \tag{3.81}$$

$$\Rightarrow \int \mathcal{D}\tilde{g}\det\left|\frac{\delta\beta}{\delta\tilde{g}}\right|\delta(\tilde{g}) = \det\left|\frac{\delta\beta}{\delta\tilde{g}}\right|_{\tilde{g}=g=0} \tag{3.82}$$

$$\therefore\ \Delta_g[A] = \det\left|\frac{\delta\tilde{g}}{\delta\beta}\right|_{\tilde{g}=g=0} \tag{3.83}$$

$$= \det\left|\frac{\delta g(A')}{\delta\beta}\right|_{\tilde{g}=g=0} \tag{3.84}$$

El lector podrá notar que siempre y cuando $g(A)$ sea lineal en A, la derivada funcional es independiente de $\beta$, lo cual es benéfico para nuestros fines ya que queremos que los resultados sean independientes de la norma.
Con todas éstas observaciones, llegamos a

$$Z'[0] = \int \mathcal{D}A_\mu(t,\vec{x})e^{\frac{i}{\hbar}S[A]}\delta[\partial_\mu A_a^\mu(x)]\det\left|\frac{\delta g(A')}{\delta\beta}\right|_{\tilde{g}=g=0} \tag{3.85}$$

Para proceder de un modo mas sencillo desarrollaremos este método en el caso abeliano y en el no-abeliano.

### 3.4.3 Caso abeliano

Retomando el hecho de que $g(A)$ es una sección transversal sabemos que se cumple $g(A) = g(A')$, lo cual implica

$$\partial_\mu A^\mu = \partial_\mu A^\mu + \Box\beta \tag{3.86a}$$

$$0 = \Box\beta \tag{3.86b}$$

En este caso $\Box$ se trata de un operador hiperbólico y no elíptico, no nos podemos apoyar de los teoremas de existencia y unicidad de soluciones; para garantizar una solución única pedimos que en los bordes temporales $\nabla^2\beta = 0$ para . La ecuación (3.71) pasa a ser

$$\Delta_g^{-1}[A] = \int \mathcal{D}\beta(x)\ \delta[g(A + \partial\beta)] \tag{3.87}$$

Notamos que es invariante ante transformaciones de norma

$$\Delta_g^{-1}[A + \partial\beta'] = \int \mathcal{D}\beta(x)\delta[g(A + \partial\beta + \partial\beta')] \tag{3.88}$$

$$\beta'' \equiv \beta' + \beta \tag{3.89}$$

$$\Delta_g^{-1}[A + \partial\beta'] = \int \mathcal{D}\beta(x)\delta[g(A + \partial\beta'')] \tag{3.90}$$

Puesto que es una medida, $\mathcal{D}\beta$ además es invariante ante traslaciones entonces $\mathcal{D}\beta = \mathcal{D}\beta''$

$$\Delta_g^{-1}[A + \partial\beta'] = \int \mathcal{D}\beta''(x)\delta[g(A + \partial\beta'')] = \int \mathcal{D}\beta(x)\delta[g(A + \partial\beta)] = \Delta_g^{-1}[A] \tag{3.91}$$

La invarianza de norma de $\Delta_g^{-1}$ implica la misma de $\Delta_g$, por lo que el método hasta el momento esta libre de ambigüedad; calculamos $\Delta_g$

$$\Delta_g[A] = \det \left| \frac{\delta g(A + \partial\beta)}{\delta\beta} \right|_{\tilde{g}=g=0} \tag{3.92}$$

$$= \det \left| \frac{\delta(\partial_\mu A^\mu + \Box\beta)}{\delta\beta} \right|_{\tilde{g}=g=0} \tag{3.93}$$

$$= \det \left| \Box\delta^4(x - y) \right|_{\tilde{g}=g=0} \tag{3.94}$$

$$\therefore \Delta_g[A] = cte \quad \text{es independiente de } A \tag{3.95}$$

$$Z'[0] = \gamma\Delta_g[A] \int \mathcal{D}A_\mu(t, \vec{x}) e^{\frac{i}{\hbar}S[A]} \delta[g(A)] \tag{3.96}$$

Generalizamos la condición de norma de la siguiente manera, donde sigue siendo débilmente cero; hacemos esto con el fin de trasladar la libertad de norma a las condiciones de frontera de $\beta$

$$g[A] = \partial_\mu A^\mu(x) - \omega(x) \tag{3.97}$$

Lo cual nos conduce a

$$\int \mathcal{D}A_\mu(t, \vec{x}) e^{\frac{i}{\hbar}S[A]} \delta[\partial_\mu A^\mu(x) - \omega(x)] \tag{3.98}$$

Bajo una transformación de norma tenemos

$$\int \mathcal{D}A'_\mu(t, \vec{x}) e^{\frac{i}{\hbar}S[A']} \delta[\partial_\mu A'^\mu(x) - \Box\beta(x) - \omega'(x)] \tag{3.99}$$

$$\omega(x) \equiv \omega'(x) - \Box\beta \tag{3.100}$$

La integral funcional no depende de $\omega(x)$ por lo cuál es completamente válido introducirlo, sin embargo tiene que ser una buena condición de norma, i.e.:

$$\partial_\mu A^\mu(x) = \omega(x) \Rightarrow \partial_\mu A'^\mu(x) = \omega(x) \tag{3.101}$$

$$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \beta \tag{3.102}$$

$$\partial^\mu A_\mu = \Box A_\mu = \omega(x) \tag{3.103}$$

$$\therefore \Box \beta = 0 \tag{3.104}$$

Con esto tenemos

$$\int \mathcal{D}A_\mu(t,\vec{x}) e^{\frac{i}{\hbar}S[A]} \delta[\partial_\mu A^\mu(x) - \omega(x)] \tag{3.105}$$

Multiplicando (3.105) por

$$\int \mathcal{D}c(\vec{x}) e^{i\frac{\lambda}{2\hbar}\int d^4x c^2(x)} \tag{3.106}$$

Donde $\lambda$ está asociado a las condiciones de frontera de $\Box\beta = 0$.
La funcional para la teoría libre es

$$Z[0] = \mathcal{N} \int \mathcal{D}A_\mu e^{\frac{i}{2\hbar}\int d^4x\, A_\mu(\eta^{\mu\nu}\Box - (1-\lambda)\partial^\mu\partial^\nu)A_\nu} \tag{3.107}$$

A nosotros nos interesan las interacciones, por lo cual hay que ver el caso con fuentes, i.e.:

$$Z[J_\mu] = \mathcal{N} \int \mathcal{D}A_\mu e^{\frac{i}{\hbar}\int d^4x\left(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{\lambda}{2}(\partial_\mu A^\mu)^2 + J_\mu A^\mu\right)} \tag{3.108}$$

Para poder integrar necesitamos llevar la integral al caso gaussiano, por lo que hay que completar el cuadrado; por cuestiones de espacio trabajaremos con el exponente de la integral

$$\frac{i}{2}\int d^4x\left(A_\mu M^{\mu\nu}A_\nu + 2J_\mu A^\mu\right) = \frac{i}{2}\int d^4x d^4y\left(\delta^4(x-y)A_\mu(y)M^{\mu\nu}(x)A_\nu(x)\right.$$
$$\left. +\delta^4(x-y)J_\mu(x)A^\mu(y) + \delta^4(x-y)J_\mu(y)A^\mu(x)\right) \tag{3.109}$$

Si deducimos la forma de $M^{\mu\nu}$ e invertimos podemos saber cómo es el propagador de la teoría

$$\begin{aligned} S &= -\frac{1}{4}\int d^4x\ F_{\mu\nu}F^\mu\nu \\ &= -\frac{1}{2}\int d^4x\ \partial_\mu A_\nu\left(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu\right) \\ &= -\frac{1}{2}\int d^4x\left(\partial_\mu A_\nu\partial^\mu A^\nu - \partial_\mu A_\nu\partial^\nu A^\mu\right) \\ &= \frac{1}{2}\int d^4x\ A_\nu\Box A^\nu - A_\mu\partial^\mu\partial^\nu A_\nu \\ &= \frac{1}{2}\int d^4x\ A_\mu\left(\eta^{\mu\nu}\Box - \partial^\mu\partial^\nu\right)A_\nu \end{aligned} \tag{3.110}$$

La otra parte de la integral se puede tratar del mismo modo

$$\begin{aligned} &-\frac{\lambda}{2}\int d^4x\left(\partial_\mu A^\mu\right)^2 = -\frac{\lambda}{2}\int d^4x\left(\partial_\mu A^\mu\right)\left(\partial_\nu A^\nu\right) \\ &\frac{\lambda}{2}\int d^4x\ A_\mu\partial^\mu\partial^\nu A_\nu \end{aligned} \tag{3.111}$$

Con esto concluimos que el operador es

$$M^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\eta^{\mu\nu}\Box - (1-\lambda)\partial^\mu\partial^\nu\right) \tag{3.112}$$

$M^{\mu\nu}$ es un operador diferencial, integrando por partes podemos hacer que actúe a la izquierda, es decir sobre la delta de Dirac; usando este hecho y la representación integral de dicha distribución llegamos a

$$M^{\mu\nu}(x)\delta^4(x-y) \equiv M^{\mu\nu}(x,y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} A_\mu(y)\left(-\eta^{\mu\nu}k^2 + (1-\lambda)k^\mu k^\nu\right) e^{ik\cdot(x-y)} A_\nu(x) \tag{3.113}$$

$$M^{\mu\nu}(k) = -\eta^{\mu\nu}k^2 + (1-\lambda)k^\mu k^\nu \tag{3.114}$$

Recordando que para llevar a cabo la integración debemos invertir el operador, buscamos encontrar $(M)^{-1}_{\mu\nu}$, la cual debe de ser de la forma

$$(M^{-1})_{\mu\nu} = A(k)\eta_{\mu\nu} + B(k)k_\mu k_\nu \tag{3.115}$$

Por ser el inverso debe cumplir con

$$M^{\mu\nu}(M^{-1})_{\nu\beta} = \delta^\mu_\beta \tag{3.116}$$

Concluimos que

$$(M^{-1})_{\nu\beta} = -\frac{\eta_{\nu\beta}}{k^2} - \frac{1-\lambda}{\lambda}\frac{k_\nu k_\beta}{(k^2)^2} \tag{3.117}$$

Finalmente, recordando que hay que manejar los polos apropiadamente encontramos el propagador del fotón, la entidad que lleva las interacciones en la electrodinámica cuántica

$$(M^{-1})_{\nu\beta}(x,y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik\cdot(x-y)}\left(-\frac{\eta_{\nu\beta}}{k^2+i\varepsilon} - \frac{1-\lambda}{\lambda}\frac{k_\nu k_\beta}{(k^2+i\varepsilon)^2}\right) \tag{3.118}$$

$$\equiv D_F^{\mu\nu}(x-y) = -iG_2(x,y) \tag{3.119}$$

La solución formal al problema es

$$Z[J] = Z[0]e^{\frac{i}{2\hbar}\int d^4x d^4y\, J_\mu(x)(M^{-1})^{\mu\nu}(x,y)J_\nu(y)} \tag{3.120}$$

Notemos que no hemos especificado la norma por completo, faltan las condiciones de frontera para $\Box\varphi = 0$ las cuales como mencionamos anteriormente son determinadas por $\lambda$, generalmente se procede de dos modos

**Norma de Feynman** $\lambda = 1$ implica que las condiciones de frontera son $\Box\varphi = 0$

$$D_F^{\mu\nu}(x-y) = -\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik\cdot(x-y)} \frac{\eta^{\mu\nu}}{k^2 + i\varepsilon} \tag{3.121}$$

**Norma de Landau** $\lambda = \infty$ implica que $\Box\varphi = 0$ tiene que converger a 0 más rápido que en el caso anterior.

$$D_F^{\mu\nu}(x-y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik\cdot(x-y)}}{k^2 + i\varepsilon} \left( \frac{k^\mu k^\nu}{k^2 + i\varepsilon} - \eta^{\mu\nu} \right) \tag{3.122}$$

Queremos que el propagador obedezca la norma de Lorentz, la *la norma de Feynman* no lo cumple pero la de *Landau* si lo hace[12].

### 3.4.4 Caso no-abeliano

Las condiciones de frontera para el campo de norma son ligeramente más complicadas que en el caso abeliano pero mantienen la característica de que la existencia y unicidad no están garantizadas a menos de que pidamos que dicho campo sea armónico en los bordes temporales. como en el caso anterior, pedimos que la condición de norma cumpla con

$$g(A_a^\mu) = g(A_a'^\mu) \tag{3.123}$$

$$D_\mu A_a^\mu = D_\mu A_a'^\mu \tag{3.124}$$

Tenemos que ver si en este caso $\Delta_g$ es invariante de norma

$$\Delta_g^{-1}[A] = \int \mathcal{D}\beta\ \delta[g(A + \partial\beta + [A, \beta])] \tag{3.125}$$

$$\Delta_g^{-1}[A + \partial\beta' + [A, \beta']] = \int \mathcal{D}\beta\ \delta[g(A + \partial\beta'' + [A, \beta''])] \tag{3.126}$$

$$\beta'' = \beta + \beta' \tag{3.127}$$

$$\Delta_g^{-1}[A + \partial\beta' + [A, \beta']] = \int \mathcal{D}\beta''\ \delta[g(A + \partial\beta'' + [A, \beta''])] \tag{3.128}$$

$$= \Delta_g^{-1}[A] \tag{3.129}$$

Todo hasta el momento ha sido bastante similar al caso abeliano, una fuerte diferencia se encuentra en el siguiente resultado

$$\Delta_g[A] = \det \left| \frac{\delta g(A + \partial\beta + [A, \beta])}{\delta\beta} \right|_{\tilde{g}=g=0} \tag{3.130}$$

$$= \det \left| \frac{\delta}{\delta\beta}(\partial A + \Box\beta + \partial[A, \beta]) \right|_{\tilde{g}=g=0} \tag{3.131}$$

$$= \det \left| \Box\delta^4(x - y) + \partial[A,\ ]\delta^4(x - y) \right|_{\tilde{g}=g=0} \tag{3.132}$$

$$= \det \left| \partial(\partial + [A,\ ])\delta^4(x - y) \right. \tag{3.133}$$

$$= \det \left| \frac{1}{g}\partial^\mu D_\mu \delta^4(x - y) \right|_{\tilde{g}=g=0} \tag{3.134}$$

En la teoría no-abeliana $\Delta[A]$ ya no es constante y no puede salir de la integral funcional, para lidiar con esta situación introducimos los *campos fantasmas de Faddeev y Popov* recordando que si consideramos los superfantamas un determinante puede ser escrito del siguiente modo

$$\det\left|\frac{1}{g}\partial^\mu D_\mu \delta^4(x-y)\right|_{\tilde{g}=g=0} = \int \mathcal{D}b\mathcal{D}b^*\ e^{i\int d^4x\ b^*\partial^\mu D_\mu b} \tag{3.135}$$

$$= \int \mathcal{D}b_a\mathcal{D}b_a^*\ e^{i\int d^4x\ \partial^\mu b_a^*(x)(D_\mu b(x))_a} \tag{3.136}$$

Donde $b_a, b_a^*$ son un fantasma y antifantasma respectivamente. Procediendo análogamente al caso abeliano, generalizamos la condición de norma

$$g(A) = \partial_\mu A_a^\mu(x) - c_a(x) \tag{3.137}$$

Con lo cual tenemos

$$Z[0] = \int \mathcal{D}A_a^\mu(t,\vec{x})\mathcal{D}b_c\mathcal{D}b_c^*\ e^{\frac{i}{\hbar}\int d^4x\ \partial^\mu b_c^*(x)(D_\mu b(x))_c} e^{iS[A]}\delta(\partial_\mu A_a^\mu(x) - c_a(x)) \tag{3.138}$$

Esto debe ser invariante bajo la siguiente transformación de norma, ese requisito se impone sobre $c_a$

$$Z[0] = \int \mathcal{D}A_a'^\mu(t,\vec{x})e^{\frac{i}{\hbar}S[A']}\delta(\partial_\mu A_a'^\mu(x) - \partial_\mu\partial^\mu\beta_a(x) - \partial_\mu(f_{abc}\beta_b A_c^\mu) - c_a'(x)) \tag{3.139}$$

$$c_a \equiv c_a' + \partial_\mu D^\mu \beta_a \tag{3.140}$$

De este modo, para incorporar las condiciones de frontera sobre $\beta$, es necesario multiplicar (3.141) por

$$\int \mathcal{D}c_a\mathcal{D}c_a e^{i\frac{\sigma}{2\hbar}\int d^4x\ c_a^* c_a} \tag{3.141}$$

Llegamos a

$$\mathcal{D}\mu \equiv \mathcal{D}A^{\mu}_{a}(t,\vec{x})\mathcal{D}b_c\mathcal{D}b^*_c\mathcal{D}c_d\mathcal{D}c^*_d \tag{3.142}$$

$$Z[0] = \int \mathcal{D}\mu\ e^{i\frac{\sigma}{2\hbar}\int d^4x\ c^*_a c_a} e^{i\int d^4x\ \partial^{\mu}b^*_a(x)(D_{\mu}b(x))_a} e^{iS[A]}\delta(\partial_{\mu}A^{\mu}_a(x) - c_a(x)) \tag{3.143}$$

$$= \int \mathcal{D}\mu\ e^{i\frac{\sigma}{2\hbar}\int d^4x\ (\partial_{\mu}A^{\mu}_a(x))^2} e^{i\int d^4x\ \partial^{\mu}b^*_a(x)(D_{\mu}b(x))_a} e^{iS[A]} \tag{3.144}$$

$$= \int \mathcal{D}\mu\ e^{\frac{i}{\hbar}\int d^4x\left(\frac{\sigma}{2}(\partial_{\mu}A^{\mu}_a(x))^2 + \partial^{\mu}b^*_a(x)(D_{\mu}b(x))_a - \frac{1}{2}F_{\mu\nu a}F^{\mu\nu}_a\right)} \tag{3.145}$$

$$= \int \mathcal{D}\mu\ e^{\frac{i}{\hbar}\int d^4x\left(\frac{\sigma}{2}(\partial_{\mu}A^{\mu}_a(x))^2 + \partial^{\mu}b^*_a(x)(D_{\mu}b(x))_a - \frac{1}{4}F_{\mu\nu a}F^{\mu\nu}_a\right)} \tag{3.146}$$

$$= \int \mathcal{D}\mu\ e^{\frac{i}{\hbar}\int d^4x\left(\partial^{\mu}b^*_a(x)(D_{\mu}b(x))_a - A_{\mu a}M^{\mu\nu}_{ab}A_{\nu b}\right)} \tag{3.147}$$

Donde

$$M^{\mu\nu}_{ab} = \frac{\delta_{ab}}{2}\left(\eta^{\mu\nu}\Box - (1-\sigma)\partial^{\mu}\partial^{\nu}\right) \tag{3.148}$$

*La simetría, tan amplia o tan estrecha como se quiera definir, es una idea por la que el hombre a través de las eras ha tratado de comprender para crear orden, belleza y perfección.*

Hermann Weyl

# 4
# D-Partículas

Nuestra principal intención es crear una teoría mecánica que tenga constricciones de Yang-Mills, es decir con cumplan con el álgebra 3.10q, con este fin la dependencia del campo en el espacio tiempo de la siguiente manera

$$\Psi^{\mu}(x_1, x_2, \ldots, x_N, \tau) \mapsto X^{\mu}_{a}(\tau) \tag{4.1}$$

Donde $\mu$ es un índice espacio-temporal y $a$ un índice interno que introducimos para que poder hacer el álgebra de constricciones. A diferencia de otros trabajos [15], nuestro acercamiento a dicha teoría será geométrico: extenderemos una simetría global a una simetría local, esto originará las constricciones que deseamos; el tratamiento que damos a un sistema con constricciones de Yang-Mills es distinto de otros trabajos como el de Balachandran [? ] ya que no planteamos una teoría relativista. Podría decirse que el símil mas cercano que se puede establecer a nuestra teoría es un modelo matricial.

## 4.1 Origen de las constricciones

Comencemos con la acción de una partícula libre clásica

$$S = \int d\tau \ \frac{m}{2} \dot{X}^{\mu} \dot{X}_{\mu} \tag{4.2}$$

Si queremos que el sistema sea invariante ante rotaciones internas tenemos

$$\begin{aligned}
X'^{\mu}_{a} &= M_{ab} X^{\mu}_{b} && (4.3)\\
S &= \int d\tau \ \frac{m}{2} \dot{X}'^{\mu}_{a} \dot{X}'_{\mu a} && (4.4)\\
&= \int d\tau \ \frac{m}{2} M_{ab} \dot{X}^{\mu}_{b} M_{ac} \dot{X}_{\mu c} && (4.5)\\
&= \int d\tau \ \frac{m}{2} M_{ac} M_{ab} \dot{X}^{\mu}_{b} \dot{X}_{\mu c} && (4.6)\\
&= \int d\tau \ \frac{m}{2} \delta_{cb} \dot{X}^{\mu}_{b} \dot{X}_{\mu c} && (4.7)\\
&= \int d\tau \ \frac{m}{2} \dot{X}^{\mu}_{a} \dot{X}_{\mu a} && (4.8)
\end{aligned}$$

Donde se usó el hecho de que $M_{ab}$ es un elemento de matriz de $\mathbb{M} \in SO(n)$, si se quiere trabajar en $SU(n)$ se debe cambiar a $(\dot{X}^{\mu}_{a})^{*} X_{\mu a}$ . Ahora pidamos que $M_{ab}$ dependa del tiempo, i.e.: $M_{ab} = M_{ab}(\tau)$ y volvamos a pedir invarianza

$$\begin{aligned}
X'^{\mu}_{a} &= M_{ab}(\tau) X^{\mu}_{b} && (4.9)\\
\dot{X}'^{\mu}_{a} &= M_{ab} \dot{X}^{\mu}_{b} + \dot{M}_{ab} X^{\mu}_{b} && (4.10)
\end{aligned}$$

Es conveniente introducir una holonomía en el tiempo para estudiar la dinámica

$$U(\tau', \tau) = e^{g \int_{\tau}^{\tau'} d\tau'' \lambda^a(\tau'') T_a} \tag{4.11}$$

$$U(\tau + \varepsilon, \tau) \approx \mathbb{I} + g\varepsilon\lambda^a(\tau)T_a \tag{4.12}$$

Donde $T_a \in \mathfrak{so}(n)$, con esto podemos identificar a $\lambda^a(\tau)$ como la componente $A_0^a(\tau)$ de una conexión que sólo depende de $\tau$. Con dicha holonomía, podemos averiguar como transforma $X_a^\mu$. Encontramos que $\lambda^a(\tau)$ transforma de la siguiente manera

$$\bar{U} = O(\tau + \varepsilon)UO^T(\tau) \tag{4.13}$$

$$U \approx \mathbb{I} + g\varepsilon\lambda^a T_a \tag{4.14}$$

$$\bar{U} \approx \mathbb{I} + g\varepsilon\bar{\lambda}^a T_a \tag{4.15}$$

$$\bar{U} = \mathbb{I} + g\varepsilon\bar{\lambda}^a T_a = O(\tau + \varepsilon)O^T(\tau) + g\varepsilon O(\tau + \varepsilon)\lambda^a T_a O^T(\tau) \tag{4.16}$$

$$\approx \left( O(\tau) + \varepsilon \frac{d}{d\tau} O(\tau) \right) O^T(\tau) + g\varepsilon O(\tau)\lambda^a T_a O^T(\tau) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \tag{4.17}$$

$$\text{N.B. 1} \quad OO^T = \mathbb{I} \Rightarrow \frac{d}{d\tau} OO^T = 0 \tag{4.18}$$

$$\text{N.B. 2} \quad \dot{O}O^T = -O(\dot{O^T}) \tag{4.19}$$

$$g\varepsilon\bar{\lambda}^a T_a = -\varepsilon O(\dot{O^T}) + g\varepsilon O(\tau)\lambda^a T_a O^T(\tau) \tag{4.20}$$

$$\text{N.B. 3} \quad \frac{d}{d\tau} O \approx T^a \frac{d}{d\tau} \lambda_a \tag{4.21}$$

Para las coordenadas tenemos

$$\bar{X}^\mu_a T_a = -g^{-1} O(\dot{O^T}) + O(\tau) X^\mu_a T_a O^T(\tau) \tag{4.22}$$

$$\approx -g^{-1}\left(\mathbb{I} + \lambda^b T_b\right)\left(-\dot{\lambda}^b T_b\right) + \left(\mathbb{I} + \lambda^b T_b\right) X^\mu_a T_a \left(\mathbb{I} - \lambda^b T_b\right) \tag{4.23}$$

$$= g^{-1}\dot{\lambda}^a T_a + X^\mu_a T_a - X^\mu_a T_a \lambda^b T_b + \lambda^b T_b X^\mu_a T_a \tag{4.24}$$

$$\bar{X}^\mu_a T_a = X^\mu_a T_a + X^\mu_a \lambda^b \left[T_b, T_a\right] + g^{-1}\dot{\lambda}^a T_a \tag{4.25}$$

$$\bar{X}^\mu_a = X^\mu_a + X^\mu_a \lambda^b f_{abc} + g^{-1}\dot{\lambda}_a \tag{4.26}$$

Mas adelante encontraremos que $\lambda^a(\tau)$ es un multiplicador de Lagrange, por lo que sólo basta recordar (1.57) para establecer como transforma

$$\bar{\lambda}^a = \lambda^a + \dot{\varepsilon}^a + f_{abc}\lambda^b\varepsilon_c \tag{4.27}$$

$$\bar{\boldsymbol{\lambda}} = \boldsymbol{\lambda} + \dot{\varepsilon} + [\boldsymbol{\lambda}, \varepsilon] \tag{4.28}$$

$$= \boldsymbol{\lambda} + D_t\varepsilon \tag{4.29}$$

Por lo que podemos leer la derivada covariante y reconocerla como

$$\therefore (D_t)_{bf} \equiv \frac{d}{d\tau}\delta_{bf} - \lambda^c f_{bfc} \tag{4.30}$$

Notamos que sustituyendo la derivada temporal por la covariante, la ecuación (4.10) satisface las condiciones de invariancia

$$(D_\tau X^\mu)'_a = M_{ab}\left(\dot{X}^\mu_b - \lambda^c f_{bfc} X^\mu_f\right) + \left(\dot{M}_{ab} - \lambda^c f_{bfc} M_{af}\right) X^\mu_b \tag{4.31}$$

$$= M_{ab}\dot{X}^\mu_b - \lambda^c f_{bfc}\left(M_{ab}X^\mu_f + M_{af}X^\mu_b\right) \tag{4.32}$$

$$= M_{ab} D_\tau X^\mu_b \tag{4.33}$$

Como $X^\mu_a$ transforma igual que $\lambda_a$, esto implica que no puede transformar igual que un campo de Yang-Mills; además si notamos que no hay modo alguno de construir un $\mathbb{F}_{\mu\nu}$ no trivial nos percatamos que la naturaleza de esta teoría es distinta. Si sustituimos (4.30) en la acción

$$
\begin{aligned}
S &= \int d\tau\ \frac{m}{2}\left(\dot{X}^{\mu}_{a} - \lambda^{c} f_{afc} X^{\mu}_{f}\right)\left(\dot{X}_{\mu a} - \lambda^{c} f_{afc} X_{\mu f}\right) && (4.34)\\
&= \int d\tau\ \left(\frac{m}{2}\dot{X}^{\mu}_{a}\dot{X}_{\mu a} - m\lambda^{c} f_{afc}\dot{X}^{\mu}_{a} X_{\mu f} + \frac{m}{2}\lambda^{c} f_{afc} X^{\mu}_{f}\lambda^{d} f_{aed} X_{\mu e}\right) && (4.35)
\end{aligned}
$$

Cuyos momentos canónicamente conjugados son los siguientes

$$
\begin{aligned}
P_{\mu g} &\equiv \frac{\delta S}{\delta \dot{X}^{\mu}_{g}} && (4.36)\\
&= m\left(\dot{X}_{\mu g} - \lambda^{c} f_{gfc} X_{\mu f}\right) && (4.37)
\end{aligned}
$$

Las ecuaciones de movimiento son

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{d\tau}\left(\dot{X}_{\mu g} - \lambda^{c} f_{gfc} X_{\mu f}\right) - \lambda^{c} f_{agc}\dot{X}^{\mu}_{a} - \frac{1}{2}\lambda^{c}\lambda^{d} f_{afc} f_{aed}\left(\delta_{gf} X_{\mu e} + \delta_{ge} X_{\mu f}\right) &= 0 && (4.38)\\
\ddot{X}_{\mu g} - f_{gfc}\dot{\lambda}^{c} X_{\mu f} - \frac{1}{2}\lambda^{c}\lambda^{d}\left(f_{agc} f_{aed} X_{\mu e} + f_{afc} f_{agd} X_{\mu f}\right) &= 0 && (4.39)\\
\ddot{X}_{\mu g} - f_{gfc}\dot{\lambda}^{c} X_{\mu f} - \frac{1}{2}\lambda^{c}\lambda^{d}\left(f_{agc} f_{aed} + f_{aec} f_{agd}\right) X_{\mu e} &= 0 && (4.40)\\
\ddot{X}_{\mu g} - f_{gfc}\dot{\lambda}^{c} X_{\mu f} - \lambda^{c}\lambda^{d} f_{agc} f_{aed} X_{\mu e} &= 0 && (4.41)\\
& && (4.42)
\end{aligned}
$$

O bien, en términos de la derivada covariante

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{d\tau}\left(\dot{X}_{\mu g} - \lambda^{c} f_{gfc} X_{\mu f}\right) - \lambda^{c} f_{agc}\dot{X}^{\mu}_{a} - \lambda^{c}\lambda^{d} f_{agc} f_{aed} X_{\mu e} &= 0 && (4.43)\\
\frac{d}{d\tau} D_{t} X_{\mu g} - \lambda^{c} f_{agc} D_{t} X^{\mu}_{a} &= 0 && (4.44)\\
D_{t} D_{t} X_{\mu g} &= 0 && (4.45)
\end{aligned}
$$

El Hamiltoniano es

$$
H_{T} = \int d\tau\ \left(\dot{X}^{\mu}_{a} P_{\mu a} - \mathcal{L}\right) \qquad (4.46)
$$

Es de utilidad calcular el siguiente término usando (4.37)

$$\frac{m}{2}\dot{X}^{\mu}_{a}\dot{X}_{\mu a} = \frac{1}{2}\left(\dot{X}^{\mu}_{a}P_{\mu a} + m\lambda^{c}f_{abc}X_{\mu b}\dot{X}^{\mu}_{a}\right) \tag{4.47}$$

Con lo que el Hamiltoniano pasa a ser

$$H_T = \frac{1}{2}\dot{X}^{\mu}_{a}P_{\mu a} - \frac{m}{2}\lambda^{c}f_{abc}X_{\mu b}\dot{X}^{\mu}_{a} + m\lambda^{c}f_{afc}\dot{X}^{\mu}_{a}X_{\mu f} - \frac{m}{2}\lambda^{c}f_{afc}X^{\mu}_{f}\lambda^{d}f_{aed}X_{\mu e} \tag{4.48}$$

Usando de nuevo (4.37) calculamos

$$\frac{1}{2}\dot{X}^{\mu}_{a}P_{\mu a} = \frac{P^{\mu}_{a}P_{\mu a}}{2m} + \frac{1}{2}\lambda^{c}f_{abc}X_{\mu b}P^{\mu}_{a} \tag{4.49}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
H_T = {} & \frac{P^{\mu}_{a}P_{\mu a}}{2m} + \frac{1}{2}\lambda^{c}f_{abc}X_{\mu b}P^{\mu}_{a} - \frac{m}{2}\lambda^{c}f_{abc}X_{\mu b}\dot{X}^{\mu}_{a} + m\lambda^{c}f_{afc}\dot{X}^{\mu}_{a}X_{\mu f} \\
& - \frac{m}{2}\lambda^{c}f_{afc}X^{\mu}_{f}\lambda^{d}f_{aed}X_{\mu e} && (4.50) \\
H_T = {} & \frac{P^{\mu}_{a}P_{\mu a}}{2m} + \frac{1}{2}\lambda^{c}f_{abc}X_{\mu b}P^{\mu}_{a} + \frac{m}{2}\lambda^{c}f_{abc}X_{\mu b}\dot{X}^{\mu}_{a} \\
& \frac{m}{2}\lambda^{c}f_{afc}X^{\mu}_{f}\lambda^{d}f_{aed}X_{\mu e} && (4.51) \\
& && (4.52)
\end{aligned}$$

Invocamos otra vez a (4.37)

$$\frac{m}{2}\lambda^{c}f_{abc}X_{\mu b}\dot{X}^{\mu}_{a} = \frac{m}{2}\lambda^{c}f_{abc}\left(\frac{X^{\mu}_{b}P_{\mu a}}{m} + \lambda^{d}f_{aed}X^{\mu}_{b}X_{\mu e}\right) \tag{4.53}$$

Llegando finalmente a

$$\begin{aligned}
H_T = {} & \frac{P^{\mu}_{a}P_{\mu a}}{2m} + \frac{1}{2}\lambda^{c}f_{abc}X_{\mu b}P^{\mu}_{a} + \frac{m}{2}\lambda^{c}f_{abc}\left(\frac{X^{\mu}_{b}P_{\mu a}}{m} + \lambda^{d}f_{aed}X^{\mu}_{b}X_{\mu e}\right) \\
& - \frac{m}{2}\lambda^{c}f_{afc}X^{\mu}_{f}\lambda^{d}f_{aed}X_{\mu e} && (4.54) \\
= {} & \frac{P^{\mu}_{a}P_{\mu a}}{2m} + \lambda^{c}f_{abc}X_{\mu b}P^{\mu}_{a} && (4.55)
\end{aligned}$$

Con esto reconocemos que $\lambda^c$, además de ser $A_0^c$, juega un papel de un *multiplicador de Lagrange* dentro del Hamiltoniano total, el cual es

$$H_T = \frac{P_a^\mu P_{\mu a}}{2m} + \lambda^a f_{abc} X_b^\mu P_{\mu c} \tag{4.56}$$

Reconocemos la siguiente constricción primaria

$$\mathcal{G}_a = f_{abc} X_b^\mu P_{\mu c} \tag{4.57}$$

## 4.2 Álgebra de constricciones

Analicemos el álgebra de las constricciones

$$\begin{aligned}
\{\mathcal{G}_a, \mathcal{G}_b\} &= \{f_{acd} X_i^c P_i^d, f_{bef} X_j^e P_j^f\} &(4.58)\\
&= f_{acd} f_{bef} \{X_i^c P_i^d, X_j^e P_j^f\}\\
&= f_{acd} f_{bef} \left(-X_i^c \delta_{ij} \delta^{de} P_j^f + P_i^d \delta_{ij} \delta^{cf} X_j^e\right)\\
&= f_{acd} f_{bef} \left(-X_i^c \delta^{de} P_i^f + P_i^d \delta^{cf} X_i^e\right)\\
&= -f_{acd} f_{bdf} X_i^c P_i^f + f_{afd} f_{bef} X_i^e P_i^d\\
&= \left(-f_{acf} f_{bfd} + f_{afd} f_{bcf}\right) X_i^c P_i^d\\
&= \left(f_{caf} f_{bfd} + f_{afd} f_{bcf}\right) X_i^c P_i^d &(4.59)
\end{aligned}$$

La identidad de Jacobi indica lo siguiente

$$f_{caf} f_{bfd} + f_{bcf} f_{afd} + f_{abf} f_{cfd} = 0 \tag{4.60}$$

Usándola en (4.59) llegamos a

$$\begin{aligned}
\{\mathcal{G}_a, \mathcal{G}_b\} &= -f_{abf} f_{cfd} X_i^c P_i^d &(4.61)\\
&= f_{abf} \mathcal{G}_f &(4.62)
\end{aligned}$$

Cabe destacar que para pasar de (4.61) a (4.69) no se tuvo que suponer antisimetría en los últimos dos índices de la constante de estructura, por lo cual esta álgebra es válida aunque el grupo no sea semisimple. Por otra parte, al ver (4.69) concluimos que las constricciones son de primera clase y son del tipo de Yang-Mills.

## 4.3 Formalismo Hamiltoniano

Se busca que el Hamiltoniano sea una *cantidad de primera clase*, i.e.,

$$\{H_c, \mathcal{G}^a\} = V^a_b \mathcal{G}^b \tag{4.63}$$

$$\{\delta^{ab} g^{\mu\nu} P_{\mu a} P_{\nu b} + V(X,P), \mathcal{G}^d\} = V^d_e \mathcal{G}^e \tag{4.64}$$

$$\{\delta^{ab} g^{\mu\nu} P_{\mu a} P_{\nu b}, \mathcal{G}^d\} + \{V(X,P), \mathcal{G}^d\} = V^d_e \mathcal{G}^e \tag{4.65}$$

Analicemos independientemente los dos sumandos del lado izquierdo de (4.65), para el primer sumando tenemos

$$\delta^{ab} f_{def} \left( \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial X^\alpha_c} P_{\mu a} P_{\nu b} X^\gamma_e \delta^\alpha_\gamma \delta_{cf} - 2 g^{\alpha\nu} \delta_{ae} P_{\nu b} P_{\alpha f} \right) \tag{4.66}$$

El segundo término de la expresión anterior se anula si suponemos que el grupo de Lie es semisimple, ya que tendríamos un tensor simétrico contrayendo con uno antisimétrico. Para el segundo sumando de (4.65) tenemos

$$f_{def}\{V, X^\gamma_e P_{\gamma f}\} = V^d_a f_{abc} X^\mu_b P_{\mu c} \tag{4.67}$$

$$f_{def} \left( \frac{\partial V}{\partial X^\alpha_f} X^\alpha_e - \frac{\partial V}{\partial P_{\alpha e}} P_{\alpha f} \right) = V^d_a f_{abc} X^\mu_b P_{\mu c} \tag{4.68}$$

$$\therefore f_{def} \left( \frac{\partial V}{\partial X^\alpha_f} X^\alpha_e - \frac{\partial V}{\partial P_{\alpha e}} P_{\alpha f} \right) = V^d_a \mathcal{G}^a \tag{4.69}$$

Donde queda claro que la última expresión es idénticamente cero si es potencial es nulo o es cuadrático en las coordenadas, por citar algunos ejemplos. La evolución temporal de la constricción está dada por

$$\dot{\mathcal{G}}_a = \{\mathcal{G}^a, H_c + \lambda_b \mathcal{G}^b\} = V^a_c \mathcal{G}^c + \lambda_b f_{abc} \mathcal{G}^c \tag{4.70}$$

$$V^a_c \mathcal{G}^c = \lambda_b f_{bac} \mathcal{G}^c \tag{4.71}$$

$$\therefore f_{aef} \left( \frac{\partial V}{\partial X^a_f} X^a_e - \frac{\partial V}{\partial P_{ae}} P_{af} \right) = \lambda_b f_{bac} \mathcal{G}^c \tag{4.72}$$

Finalmente obtenemos las ecuaciones de movimiento del sistema

$$S = \int dt \, \left( \dot{X}^\mu_a P_{\mu a} - \frac{1}{2m} P_{\mu a} P^\mu_a - V - \lambda^a \mathcal{G}_a \right) \tag{4.73}$$

$$\delta S = \int dt \, \left( \delta(\dot{X}^\mu_a P_{\mu a}) - \frac{1}{m} P^\mu_a \delta P_{\mu a} - \frac{\partial V}{\partial X^\mu_b} \delta X^\mu_b - \frac{\partial V}{\partial P_{\mu c}} \delta P_{\mu c} - \delta \lambda^a \mathcal{G}_a - \lambda^a \delta \mathcal{G}_a \right) \tag{4.74}$$

$$= \int dt \, \left( P_{\mu a} \delta \dot{X}^\mu_a + \dot{X}^\mu_a \delta P_{\mu a} - \frac{1}{m} P^\mu_a \delta P_{\mu a} - \frac{\partial V}{\partial X^\mu_b} \delta X^\mu_b - \frac{\partial V}{\partial P_{\mu c}} \delta P_{\mu c} \right. \tag{4.75}$$

$$\left. - \delta \lambda^a f_{abc} X^\mu_b P_{\mu c} - \lambda^a \delta (f_{abc} X^\mu_b P_{\mu c}) \right)$$

$$= \int dt \, \left( (-\dot{P}_{\mu b} - \lambda^a f_{abc} P_{\mu c}) \delta X^\mu_b - \frac{\partial V}{\partial X^\mu_b} \delta X^\mu_b - \frac{\partial V}{\partial P_{\mu c}} \delta P_{\mu c} \right. \tag{4.76}$$

$$\left. + (\dot{X}^\mu_c - \frac{1}{m} P^\mu_c - \lambda^a f_{abc} X^\mu_b) \delta P_{\mu c} - (f_{abc} X^\mu_b P_{\mu c}) \delta \lambda^a \right)$$

Dado que $X^\mu_b, P_{\mu c}, \lambda^a$ son linealmente independientes y la variación debe de anularse, concluimos que

$$\dot{P}_{\mu b} + \lambda^a f_{abc} P_{\mu c} + \frac{\partial V}{\partial X^\mu_b} = 0 \tag{4.77}$$

$$\dot{X}^\mu_c - \frac{1}{m} P^\mu_c - \frac{\partial V}{\partial P_{\mu c}} - \lambda^a f_{abc} X^\mu_b = 0 \tag{4.78}$$

$$f_{abc} X^\mu_b P_{\mu c} = 0 \tag{4.79}$$

O en términos de la derivada covariante

$$D_t P_{\mu b} = -\frac{\partial V}{\partial X^\mu_b} \tag{4.80}$$

$$D_t X^\mu_c = \frac{P^\mu_c}{m} + \frac{\partial V}{\partial P_{\mu c}} \tag{4.81}$$

Notamos dos complicaciones: bajo la norma $\lambda^a = 0$ la teoría clásica se vuelve trivial; por otra parte, encontrar condiciones de norma ha sido una tarea complicada, por lo cual vamos a tomar varias rutas: la primera es simplificar el sistema a una constricción y la otra es tratar de entender la teoría como una generalización de la teoría de Chern-Simons 4.4. Con el fin de facilitar la cuantización, ésta será efectuada con el método de Faddeev-Popov.

### 4.3.1 Teoría cuántica de las D-partículas

Con el fin de hacer mas claro el procedimiento, escribiremos la acción de la siguiente manera

$$S = \frac{m}{2}\int d\tau Tr\left((\dot{\mathbb{X}}^\mu + [\boldsymbol{\lambda}, \mathbb{X}^\mu])(\dot{\mathbb{X}}_\mu + [\boldsymbol{\lambda}, \mathbb{X}_\mu])\right) \tag{4.82}$$

$$\mathbb{X}^\mu = X^\mu_a \mathcal{G}_a \tag{4.83}$$

$$\boldsymbol{\lambda} = \lambda^a \mathcal{G}_a \tag{4.84}$$

Además, como ya se demostró en (1.57) sabemos que bajo la siguiente transformación de norma sobre el multiplicador de lagrange, (4.82) es invariante.

$$\lambda'^a = \lambda^a + \dot{\varepsilon}^a + \lambda^b \varepsilon^c f_{abc} \tag{4.85}$$

$$= \lambda^a + D_t \varepsilon^a \tag{4.86}$$

Es decir, el análogo a la norma de Coulomb en este caso es

$$g(\lambda) = \dot{\lambda}^a \tag{4.87}$$

Siguiendo el método de Fadeev-Popov (3.85) llegamos a

$$Z[0] = \int \mathcal{D}X_a^\mu(\tau)\mathcal{D}\lambda^a(\tau)e^{\frac{i}{\hbar}S}\delta(\dot{\lambda}^a)\det\left|\frac{\delta g(\lambda')}{\delta\varepsilon}\right|_{\tilde{g}=g=0} \tag{4.88}$$

Donde

$$\det\left|\frac{\delta g(\lambda'^a(\tau))}{\delta\varepsilon^d(\tau')}\right|_{\tilde{g}=g=0} = \det\left|\frac{\delta}{\delta\varepsilon^d(\tau')}(\dot{\lambda}^a(\tau) + \frac{d}{d\tau}D_\tau\varepsilon^a(\tau))\right|_{\tilde{g}=g=0} \tag{4.89}$$

$$= \det\left|\delta_{ad}\frac{d}{d\tau}D_\tau\delta(\tau-\tau')\right|_{\tilde{g}=g=0} \tag{4.90}$$

$$= \int \mathcal{D}b_a^*(\tau)\mathcal{D}b_a(\tau)e^{\frac{i}{\hbar}\int d\tau\, \dot{b}_a^* D_\tau b_a} \tag{4.91}$$

Donde desde luego $b_a^*, b_a$ son superfantasmas. Incorporando esto a la integral funcional tenemos

$$Z = \int \mathcal{D}X_a^\mu(\tau)\mathcal{D}\lambda^a(\tau)\mathcal{D}b_d^*(\tau)\mathcal{D}b_d(\tau)e^{\frac{i}{\hbar}S+\frac{i}{\hbar}\int d\tau\, \dot{b}_a^* D_\tau b_a}\delta(\dot{\lambda}^a) \tag{4.92}$$

Al pedir que la integral anterior sea invariante de norma, las condiciones de frontera para $\varepsilon_a$ son incorporadas si redefinimos la condición de norma de la siguiente manera

$$g(\lambda) = \dot{\lambda}^a - c^a \tag{4.93}$$

Donde sigue siendo débilmente cero, también multiplicamos multiplicamos (4.92) por la siguiente integral

$$\int \mathcal{D}c_a(\tau)e^{i\frac{\sigma}{2\hbar}\int d\tau\, c^2} \tag{4.94}$$

Con lo que, la integral funcional es

$$Z = \int \mathcal{D}X_a^\mu(\tau)\mathcal{D}\lambda^a(\tau)\mathcal{D}b_d^*(\tau)\mathcal{D}b_d(\tau)\mathcal{D}c_e(\tau)e^{\frac{i}{\hbar}S+\frac{i}{\hbar}\int d\tau\, \dot{b}_a^* D_\tau b_a + i\frac{\sigma}{2}\int d\tau\, c^2}\delta(\dot{\lambda}^a - c^a) \tag{4.95}$$

$$= \int \mathcal{D}X_a^\mu(\tau)\mathcal{D}\lambda^a(\tau)\mathcal{D}b_d^*(\tau)\mathcal{D}b_d(\tau)\mathcal{D}c_e(\tau)e^{\frac{i}{\hbar}S+\frac{i}{\hbar}\int d\tau\, \dot{b}_a^* D_\tau b_a + i\frac{\sigma}{2}\int d\tau\, \dot{\lambda}^2} \tag{4.96}$$

El exponente es

$$\frac{i}{\hbar}S + \frac{i}{\hbar}\int d\tau\, \dot{b}_a^* D_\tau b_a + i\frac{\sigma}{2}\int d\tau\, \dot{\lambda}^2 \tag{4.97}$$

$$= \frac{i}{\hbar}\int d\tau\, \left(\frac{m}{2}\left(\dot{X}_a^\mu \dot{X}_{\mu a} - 2\lambda^c f_{afc}\dot{X}_a^\mu X_{\mu f} + \lambda^c f_{afc} X_f^\mu \lambda^d f_{aed} X_{\mu e}\right) + \frac{\sigma}{2}\dot{\lambda}^a\dot{\lambda}_a + \dot{b}_a^* D_\tau b_a\right) \tag{4.98}$$

Incorporamos un término de potencial tipo oscilador armónico

$$\frac{i}{\hbar}\int d\tau\, \left(\frac{m}{2}\dot{X}_a^\mu \dot{X}_{\mu a} - \frac{b}{2}X_a^\mu X_{\mu a} + \left(-2\lambda^c f_{afc}\dot{X}_a^\mu X_{\mu f} + \lambda^c f_{afc} X_f^\mu \lambda^d f_{aed} X_{\mu e}\right)\right.$$
$$\left. + \frac{\sigma}{2}\dot{\lambda}^a\dot{\lambda}_a + \dot{b}_a^* D_\tau b_a\right) \tag{4.99}$$

$$\frac{i}{\hbar}\int d\tau\, \left(X_a^\mu\left(-\frac{m}{2}\frac{d^2}{d\tau^2} - \frac{b}{2}\right)\delta_{ab}X_{\mu b} + \left(-2\lambda^c f_{afc}\dot{X}_a^\mu X_{\mu f} + \lambda^c f_{afc} X_f^\mu \lambda^d f_{aed} X_{\mu e}\right)\right.$$
$$\left. + \frac{\sigma}{2}\dot{\lambda}^a\dot{\lambda}_a + \dot{b}_a^* D_\tau b_a\right) \tag{4.100}$$

Abreviamos la medida por practicidad

$$\mathcal{D}\mu \equiv \mathcal{D}X_a^\mu(\tau)\mathcal{D}\lambda^a(\tau)\mathcal{D}b_d^*(\tau)\mathcal{D}b_d(\tau)\mathcal{D}c_e(\tau) \tag{4.101}$$

$$Z = \int \mathcal{D}\mu\; e^{\frac{i}{\hbar}\int d\tau\, \left(X_a^\mu\left(-\frac{m}{2}\frac{d^2}{d\tau^2} - \frac{b}{2}\right)\delta_{ab}X_{\mu b} + \left(-2\lambda^c f_{afc}\dot{X}_a^\mu X_{\mu f} + \lambda^c f_{afc} X_f^\mu \lambda^d f_{aed} X_{\mu e}\right) + \frac{\sigma}{2}\dot{\lambda}^a\dot{\lambda}_a + \dot{b}_a^* D_\tau b_a\right)} \tag{4.102}$$

Es decir, nuestro lagrangiano se puede ver como

$$L = L_X + L_{norma} + L_{fantasmas} + L_{int} \tag{4.103}$$

$$L_X = \frac{m}{2}\dot{X}^\mu_a \dot{X}_{\mu a} - \frac{b}{2} X^\mu_a X_{\mu a} \tag{4.104}$$

$$L_{norma} = \frac{\sigma}{2}\dot{\lambda}^a \dot{\lambda}_a \tag{4.105}$$

$$L_{fantasmas} = \dot{b}^*_a \dot{b}_a \tag{4.106}$$

$$L_{int} = \lambda^c f_{afc} X^\mu_f \lambda^d f_{aed} X_{\mu e} - 2\lambda^c f_{afc} \dot{X}^\mu_a X_{\mu f} + f_{abc} \dot{b}^*_a \lambda_b b_c \tag{4.107}$$

Es importante destacar que la teoría es invariante ante dilataciones temporales

$$S = \int d\tau \ \left(\frac{m}{2}\left(\dot{X}^\mu_a \dot{X}_{\mu a} - 2\lambda^c f_{afc} \dot{X}^\mu_a X_{\mu f} + \lambda^c f_{afc} X^\mu_f \lambda^d f_{aed} X_{\mu e}\right) + \frac{\sigma}{2}\dot{\lambda}^a \dot{\lambda}_a + \dot{b}^*_a D_\tau b_a\right) \tag{4.108}$$

Efectuando la variación en $\lambda_a$ llegamos a

$$-m f_{afc} \dot{X}^\mu_a X_{\mu f} + m \lambda^d f_{afc} f_{aed} X_{\mu e} X^\mu_f - \frac{\sigma}{2}\ddot{\lambda}_c + \dot{b}^*_a f_{acb} b_b = 0 \tag{4.109}$$

Contrayendo con $\lambda_c$ y sustituyendo en obtenemos

$$S = \int d\tau \ \left(\frac{m}{2}\dot{X}^\mu_a \dot{X}_{\mu a} - \frac{\sigma}{2}\dot{\lambda}^c \dot{\lambda}_c - \lambda_c \dot{b}^*_a f_{acb} b_b + \frac{\sigma}{2}\dot{\lambda}^a \dot{\lambda}_a + \dot{b}^*_a D_\tau b_a\right) \tag{4.110}$$

$$= \int d\tau \ \left(\frac{m}{2}\dot{X}^\mu_a \dot{X}_{\mu a} + \dot{b}^*_a \dot{b}_a\right) \tag{4.111}$$

La cual es invariante ante $\tau \mapsto \kappa^\beta \tau$, $X^\mu_a \mapsto \kappa^\gamma X^\mu_a$, $b_a \mapsto \kappa^\gamma b_a$

$$S = \int \kappa^\beta d\tau \ \kappa^{2(\gamma-\beta)} \left(\frac{m}{2}\dot{X}^\mu_a \dot{X}_{\mu a} + \dot{b}^*_a \dot{b}_a\right) \tag{4.112}$$

$$= \kappa^{2\gamma-\beta} \int d\tau \ \left(\frac{m}{2}\dot{X}^\mu_a \dot{X}_{\mu a} + \dot{b}^*_a \dot{b}_a\right) \tag{4.113}$$

Por lo tanto $\gamma = \frac{\beta}{2}$, lo cual es de esperarse ya que es un sistema no relativista. Además, notamos que bajo transformaciones conformes infinitesimales la acción también es invariante, es decir

$$
\begin{aligned}
t \mapsto t' &= t + 2\sigma t^2 && (4.114)\\
X_a^\mu \mapsto X_a'^\mu &= X_a^\mu + 2\sigma t X_a^\mu && (4.115)\\
dt' &= (1 + 4\sigma t)dt && (4.116)\\
dX_a^\mu &= (1 + 2\sigma t)dX_a^\mu && (4.117)\\
\frac{dX_a'^\mu}{dt'} &= \frac{1 + 2\sigma t}{1 + 4\sigma t}\dot{X}_a^\mu && (4.118)\\
S &= \int \frac{dt'}{(1 + 4\sigma t)} \left(\frac{1 + 4\sigma t}{1 + 2\sigma t}\right)^2 \left(\frac{m}{2}\frac{dX_a'^\mu}{dt'}\frac{dX_{\mu a}'}{dt'} + \frac{db_a^*}{dt'}\frac{db_a}{dt'}\right) && (4.119)\\
&= \int dt' \frac{(1 + 4\sigma t)}{(1 + 4\sigma t + \mathcal{O}(\sigma^2))} \left(\frac{m}{2}\frac{dX_a'^\mu}{dt'}\frac{dX_{\mu a}'}{dt'} + \frac{db_a^*}{dt'}\frac{db_a}{dt'}\right) && (4.120)\\
&\approx \int dt' \left(\frac{m}{2}\frac{dX_a'^\mu}{dt'}\frac{dX_{\mu a}'}{dt'} + \frac{db_a^*}{dt'}\frac{db_a}{dt'}\right) && (4.121)
\end{aligned}
$$

Las ecuaciones de movimiento son

$$
\left(-\frac{m}{2}\frac{d^2}{d\tau^2} - \frac{b}{2}\right)\delta_{ab}X_{\mu b} = J_{\mu a} \qquad (4.122)
$$

Para lo que se tienen soluciones homogéneas ${}_H X_{\mu a}$ e inhomogéneas ${}_I X_{\mu a}$

$$
\begin{aligned}
X_a^\mu &= {}_H X_{\mu a} + {}_I X_{\mu a} && (4.123)\\
{}_H X_{\mu a} &= A_{\mu a} e^{i\omega\tau} + B_{\mu a} e^{-i\omega\tau} && (4.124)\\
\omega &\equiv \sqrt{\frac{b}{m}} && (4.125)\\
{}_I X_{\mu b}(\tau) &= -\frac{1}{m}\int d\tau'\, G(\tau - \tau') J_{\mu b}(\tau') && (4.126)
\end{aligned}
$$

Donde $G$ es la función de Green del operador diferencial

$$\left(\frac{d^2}{d\tau^2}+\omega^2\right)G(\tau-\tau')=-\delta(\tau-\tau') \tag{4.127}$$

$$G(\tau-\tau')=\int\frac{dk}{\sqrt{2\pi}}e^{-ik(\tau-\tau')}G(k) \tag{4.128}$$

$$\left(\frac{d^2}{d\tau^2}+\omega^2\right)\int\frac{dk}{\sqrt{2\pi}}e^{-ik(\tau-\tau')}G(k)=-\int\frac{dk}{\sqrt{2\pi}}e^{-ik(\tau-\tau')} \tag{4.129}$$

$$\int\frac{dk}{\sqrt{2\pi}}\left(-k^2+\omega^2\right)G(k)=-\int\frac{dk}{\sqrt{2\pi}}e^{-ik(\tau-\tau')} \tag{4.130}$$

$$\left(k^2-\omega^2\right)G(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \tag{4.131}$$

$$G(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{k^2-\omega^2} \tag{4.132}$$

Notamos que la siguiente integral tiene polos en $k=\pm\omega$

$$G(\tau-\tau')=\int\frac{dk}{\sqrt{2\pi}}e^{-ik(\tau-\tau')}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{k^2-\omega^2} \tag{4.133}$$

Para integrar modificamos el contorno de la siguiente manera

$$G(\tau-\tau')=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int\frac{dk}{2\pi}e^{-ik(\tau-\tau')}\frac{1}{k^2-\omega^2+i\varepsilon} \tag{4.134}$$

Es decir, el propagador de las coordenadas es

$$D_{ab}(\tau-\tau')=\int\frac{dk}{\sqrt{2\pi}}e^{-ik(\tau-\tau')}D_{ab}(k) \tag{4.135}$$

$$D_{ab}(k)=\frac{\delta_{ab}}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{k^2-\omega^2+i\varepsilon} \tag{4.136}$$

Para los multiplicadores de Lagrange el propagador en el espacio de momentos es similar pero sin el término $\omega^2$

$$D_\lambda^{ab}(k)=2\frac{\delta_{ab}}{\sigma\sqrt{2\pi}}\frac{1}{k^2+i\varepsilon} \tag{4.137}$$

Para los fantasmas es idéntico

$$D^{ab}_{\lambda}(k) = \frac{\delta_{ab}}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{k^2 + i\varepsilon} \tag{4.138}$$

Las interacciones nos dan vértices de dos multiplicadores con dos coordenadas, multiplicador con dos coordenadas y dos fantasmas con multiplicador.

### 4.3.2 Reduciendo las constricciones

La propuesta es reducir a una constricción haciendo lo siguiente

$$f_{abc} X^{\mu}_{b} P_{\mu c} \mapsto \varepsilon_{ab} X^{\mu}_{a} P_{\mu b} \tag{4.139}$$

$$a, b = 1, \ldots, N \mapsto a, b = 1, 2 \tag{4.140}$$

La constricción automáticamente genera un álgebra de primera calse ya que sólo hay una. En este caso podemos tomar el análogo a la norma de Weyl

$$\Omega = X^{0}_{1} \tag{4.141}$$

La evolución temporal de $\Omega$ debe ser débilmente cero, con ese requisito podemos despejar el multiplicador de Lagrange

$$0 \approx \dot{\Omega} = \{\frac{1}{2m} P^{\mu}_{a} P_{\mu a} + \lambda \varepsilon_{ab} X^{\mu}_{a} P_{\mu b}, \Omega\} \tag{4.142}$$

$$= \frac{P^{0}_{1}}{m} - \lambda X^{0}_{2} \tag{4.143}$$

$$\lambda = \frac{P^{0}_{1}}{m X^{0}_{2}} \tag{4.144}$$

Con esto, el Hamiltoniano adquiere la forma

$$H_T = \frac{1}{2m} P^{\mu}_{a} P_{\mu a} \tag{4.145}$$

Es decir, como ya tenemos constricciones de segunda clase las hicimos fuertes, este hecho nos permite escribir $P_1^0$ en términos de

$$P_1^0 = \frac{\varepsilon_{ab}}{X_{02}} X_a^i P_{ib} = \eta_{00} \frac{\varepsilon_{ab}}{X_2^0} X_a^i P_{ib} \tag{4.146}$$

Además, tenemos los siguientes paréntesis de Dirac

$$\{\hat{X}_a^\mu, \hat{X}_b^\nu\}^* = 0 \tag{4.147}$$

$$\{\hat{P}_a^\mu, \hat{P}_b^\nu\}^* = \frac{1}{X_2^0} (\varepsilon_{bc} \delta_{1a} \eta^{0\mu} \delta_\sigma^\nu - \varepsilon_{ac} \delta_{1b} \eta^{0\nu} \delta_\sigma^\mu) P_c^\sigma \tag{4.148}$$

$$\{\hat{X}_a^\mu, \hat{P}_b^\nu\}^* = \eta^{\mu\nu} \delta_{ab} - \frac{\varepsilon_{ac} \eta^{\nu 0} \delta_{1b}}{X_2^0} X_c^\mu \tag{4.149}$$

Éstos elementos nos permiten calcular las ecuaciones de movimiento

$$\dot{X}_a^\mu = \frac{1}{m} P_a^\mu - \frac{\varepsilon_{ab} \varepsilon_{cd} X_c^i P_{id}}{m (X_{02})^2} X_b^\mu \tag{4.150}$$

$$\dot{P}_a^\mu = - \frac{\varepsilon_{ab} \varepsilon_{cd} X_c^i P_{id}}{m (X_{02})^2} P_b^\mu \tag{4.151}$$

De donde es inmediato ver

$$m \dot{X}_2^0 = P_2^0 \tag{4.152}$$

Calculemos la ecuación de movimiento para $P_1^0$

$$\dot{P}_1^0 = - \frac{\varepsilon_{cd} X_c^i P_{id}}{m (X_{02})^2} P_2^0 \tag{4.153}$$

$$= - \frac{\varepsilon_{cd} X_c^i P_{id}}{(X_{02})^2} \dot{X}_2^0 \tag{4.154}$$

Donde se usó (4.152). Además, derivando explícitamente $P_1^0$ tenemos

$$\dot{P}_1^0 = \frac{d}{d\tau}P_1^0 = \frac{d}{d\tau}\left(\varepsilon_{ab}\frac{X_a^i P_{ib}}{X_{02}}\right) \tag{4.155}$$

$$= -\frac{\dot{X}_{02}}{(X_{02})^2}\varepsilon_{ab}X_a^i P_{ib} + \varepsilon_{ab}\frac{1}{X_{02}}\frac{d}{d\tau}\left(X_a^i P_{ib}\right) \tag{4.156}$$

Igualando (4.154) y (4.156) llegamos a

$$\frac{d}{d\tau}\left(\varepsilon_{ab}X_a^i P_{ib}\right) = 0 \tag{4.157}$$

$$\Rightarrow \varepsilon_{ab}X_a^i P_{ib} = L \tag{4.158}$$

Donde $L$ es una constante. Con esto el Hamiltoniano pasa a ser

$$H_T = \frac{1}{2m}P_2^0 P_{02} + \frac{1}{2m}P_a^i P_{ia} + \frac{\eta_{00}}{2m(X_{02})^2}L^2 \tag{4.159}$$

Consideraremos que $\eta_{00} = 1$ para mantener la energía como una cantidad positivo definida; con esto vemos que las ecuaciones de movimiento restantes son

$$\dot{X}_a^i = \frac{P_a^i}{m} - \frac{L}{m}\frac{\varepsilon_{ab}}{(X_{02})^2}X_b^i \tag{4.160}$$

$$\dot{P}_2^0 = -\frac{L^2}{m}\frac{1}{(X_{02})^3} \tag{4.161}$$

$$\dot{P}_a^i = -\frac{L}{m}\frac{\varepsilon_{ab}}{(X_{02})^2}P_b^i \tag{4.162}$$

Usando (4.152) y (4.161) tenemos

$$\ddot{X}_2^0 = -\frac{L^2}{m^2}\frac{1}{(X_{02})^3} \tag{4.163}$$

$$\Rightarrow X_2^0(\tau) = \pm\sqrt{k_1\tau^2 + 2k_1k_2\tau + k_1k_2^2 - \frac{L^2}{k_1m^2}} \tag{4.164}$$

$$= \pm\sqrt{k_1(\tau + k_2)^2 - \frac{L^2}{k_1m^2}} \tag{4.165}$$

$$k_1 \equiv \dot{X}_2^0(\tau = \tau_0) \tag{4.166}$$

$$k_2 \equiv X_2^0(\tau = \tau_0) \tag{4.167}$$

Es decir, la forma final de nuestras ecuaciones de movimiento

$$\dot{X}_a^i = \frac{P_a^i}{m} - \frac{L}{m}\frac{\varepsilon_{ab}}{k_1(\tau + k_2)^2 - L^2/k_1m^2}X_b^i \tag{4.168}$$

$$\dot{P}_a^i = -\frac{L}{m}\frac{\varepsilon_{ab}}{k_1(\tau + k_2)^2 - L^2/k_1m^2}P_b^i \tag{4.169}$$

De las cuales se puede leer inmediatamente que si $\tau \to \infty$ entonces el sistema se comportará como una partícula libre.
La teoría cuántica tiene asociados los siguientes conmutadores a consecuencia de los paréntesis de Dirac

$$[\hat{X}_a^\mu, \hat{X}_b^\nu]^* = 0 \tag{4.170}$$

$$[\hat{P}_a^\mu, \hat{P}_b^\nu]^* = \frac{i\hbar}{\hat{X}_2^0}(\varepsilon_{bc}\delta_{1a}\eta^{0\mu}\delta_\sigma^\nu - \varepsilon_{ac}\delta_{1b}\eta^{0\nu}\delta_\sigma^\mu)\hat{P}_c^\sigma \tag{4.171}$$

$$[\hat{X}_a^\mu, \hat{P}_b^\nu]^* = i\hbar\eta^{\mu\nu}\delta_{ab} - i\hbar\frac{\varepsilon_{ac}\eta^{\nu 0}\delta_{1b}}{\hat{X}_2^0}\hat{X}_c^\mu \tag{4.172}$$

Cuya realización en operadores está dada por

$$\hat{X}^{\mu}_{a} = X^{\mu}_{a} \tag{4.173}$$

$$\hat{P}^{i}_{a} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial X_{ia}} \tag{4.174}$$

$$\hat{P}^{0}_{1} = \frac{\varepsilon_{ab}}{X_{02}}X^{i}_{a}P_{ib} = \eta_{00}\frac{\varepsilon_{ab}}{X^{0}_{2}}X^{i}_{a}P_{ib} \tag{4.175}$$

$$\hat{P}^{0}_{2} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial X_{02}} = -i\hbar\eta_{00}\frac{\partial}{\partial X^{0}_{2}} \tag{4.176}$$

En el apéndice [A.20,A.21] se muestra que el Hamiltoniano conmuta con las constricciones bajo el álgebra definida por los operadores, por lo cual podemos igualar su acción en un estado $|\psi\rangle$ a la energía, es decir

$$E\,|\psi\rangle = \hat{H}\,|\psi\rangle \tag{4.177}$$

$$E\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial(X^{i}_{a})^2} + \eta_{00}\frac{\partial^2}{\partial(X^{0}_{2})^2} + \frac{\eta_{00}}{(X^{0}_{2})^2}\varepsilon_{ab}\varepsilon_{cd}X^{i}_{a}\frac{\partial}{\partial X^{i}_{b}}X^{j}_{c}\frac{\partial}{\partial X^{j}_{d}}\right)\psi \tag{4.178}$$

Si definimos operadores tipo momento angular llegamos a

$$\hat{L}^{1} \equiv \varepsilon_{ab}X^{1}_{a}\frac{\partial}{\partial X^{1}_{b}} \tag{4.179}$$

$$\hat{L}^{2} \equiv \varepsilon_{ab}X^{2}_{a}\frac{\partial}{\partial X^{2}_{b}} \tag{4.180}$$

$$\vdots \tag{4.181}$$

$$\hat{L}^{D-1} \equiv \varepsilon_{ab}X^{D-1}_{a}\frac{\partial}{\partial X^{D-1}_{b}} \tag{4.182}$$

$$E\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\sum_{i=1}^{D-1}\frac{\partial^2}{\partial(X^{i}_{a})^2} + \eta_{00}\frac{\partial^2}{\partial(X^{0}_{2})^2} + \frac{\eta_{00}}{(X^{0}_{2})^2}\sum_{i=1}^{D-1}(\hat{L}^{i})^2\right)\psi \tag{4.183}$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\sum_{i=1}^{D-1}\frac{\partial^2}{\partial(X^{i}_{a})^2} + \eta_{00}\frac{\partial^2}{\partial(X^{0}_{2})^2} + \frac{\eta_{00}}{(X^{0}_{2})^2}\hat{L}^{2}\right)\psi \tag{4.184}$$

Haciendo un cambio en las coordenadas $X_a^i$ (ver apéndice A.23) para el caso donde $\eta_{00} = 1$ obtenemos

$$-\frac{2mE}{\hbar^2}\psi = \frac{1}{r^{2D-3}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{2D-3}\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2\psi}{\partial(X_2^0)^2} + \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{(X_2^0)^2}\right)\hat{L}^2\psi \quad (4.185)$$

Hacemos el siguiente *ansatz*

$$\psi = \mathcal{N}\psi_{02}(X_2^0)\psi_r(r)Y_{\ell_1,\ell_2,\ldots,\ell_{2D-4},\ell_{2D-3}}(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_{2D-4},\theta_{2D-3}) \qquad (4.186)$$

Donde $\mathcal{N}$ es una constante de normalización, esto nos lleva a

$$\begin{aligned}-\frac{2mE}{\hbar^2} &= \frac{1}{r^{2D-3}\psi_r}\frac{d}{dr}\left(r^{2D-3}\frac{d\psi_r}{dr}\right) + \frac{1}{\psi_{02}}\frac{d^2\psi_{02}}{d(X_2^0)^2}\\ &\quad - \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{(X_2^0)^2}\right)\ell_{2D-3}(\ell_{2D-3} + 2(D-2)) \qquad (4.187)\end{aligned}$$

Se introduce la constante de separación $\tilde{\kappa}^2$, obtenemos dos ecuaciones

$$r^2\frac{d^2\psi_r}{dr^2} + (2D-3)r\frac{d\psi_r}{dr} - (\ell_{2D-3}(\ell_{2D-3} + 2(D-2)) + \tilde{\kappa}^2 r^2)\psi_r = 0 \quad (4.188)$$

$$\frac{d^2\psi_{02}}{d(X_2^0)^2} + (\frac{2mE}{\hbar^2} - \tilde{\kappa}^2 - \frac{\ell_{2D-3}(\ell_{2D-3} + 2(D-2))}{(X_2^0)^2})\psi_{02} = 0 \quad (4.189)$$

Cuya solución radial es [16]

$$\begin{aligned}\psi_r(r) &= A_1 e^{-\frac{1}{4}r^2(\Sigma+(2D-3))}H_{(-(\Sigma+2\ell_{2D-3}(\ell_{2D-3}+2(D-2))+(2D-3))/2\Sigma)}\left(r\sqrt{\frac{\Sigma}{2}}\right)\\ &\quad + A_2 e^{-\frac{1}{4}r^2(\Sigma+(2D-3))}\,{}_1F_1\left(\frac{(2D-3) + 2\ell_{2D-3}(\ell_{2D-3} + 2(D-2)) + \Sigma}{4\Sigma};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\Sigma r^2\right)\end{aligned} \quad (4.190)$$

donde

$$\Sigma \equiv \sqrt{(2D-3)^2 + 4\tilde{\kappa}^2} \qquad (4.191)$$

Al pedir que sea cuadrado integrable llegamos a que $A_2 = 0$ ya que ${}_1F_1$ es la función hipergeométrica confluente de primer tipo. Con el fin de evitar la solución trivial en las exponenciales pedimos que $\tilde{\kappa}^2 \neq 0$

$$\psi_r(r) = e^{-\frac{1}{4}r^2(\Sigma+(2D-3))} H_{(-(\Sigma+2\ell_{2D-3}(\ell_{2D-3}+2(D-2))+(2D-3))/2\Sigma)}\left(r\sqrt{\frac{\Sigma}{2}}\right) \tag{4.192}$$

La solución para $\psi_{02}$ es

$$\psi_{02}(X_2^0) = B_1\sqrt{X_2^0}J_{\Delta/2}\left(\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2} - \tilde{\kappa}^2 X_2^0}\right) + B_2\sqrt{X_2^0}Y_{\Delta/2}\left(\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2} - \tilde{\kappa}^2 X_2^0}\right) \tag{4.193}$$

$$\Delta \equiv \sqrt{4\ell_{2D-3}^2 + 8\ell_{2D-3}(D-2) + 1} \tag{4.194}$$

Claramente $B_2 = 0$ y llegamos a

$$\psi_{02}(X_2^0) = \sqrt{X_2^0}J_{\Delta/2}\left(\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2} - \tilde{\kappa}^2 X_2^0}\right) \tag{4.195}$$

Donde también es necesario pedir que $2mE/\hbar^2 - \tilde{\kappa}^2 \geq 0$. Es decir, obtenemos que la función de onda es

$$\psi = r^{2-D}\sqrt{X_2^0} \sum_{\ell_1,\ldots,\ell_{2D-3}=0}^{\infty} c_{\ell,\ldots,\ell_{2D-3}} J_{D-2+\ell_{2D-3}}(\tilde{\kappa}r) J_{\Delta/2}\left(\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2} - \tilde{\kappa}^2 X_2^0}\right) Y_{\ell_1,\ldots,\ell_{2D-3}} \tag{4.196}$$

Donde

$$\sum_{\ell_1,\ldots,\ell_{2D-3}=0}^{\infty} \left|c_{\ell,\ldots,\ell_{2D-3}}\right|^2 = 1 \tag{4.197}$$

Una situación bastante interesante es cuando $D = 1 + 1$, donde tenemos (con

$\ell_1 \equiv \ell)$

$$\psi_r(r) = e^{-\frac{1}{4}r^2(\sqrt{1+4\tilde{\kappa}^2}+1)} H_{(-(\sqrt{1+4\tilde{\kappa}^2}+2\ell^2+1)/2\sqrt{1+4\tilde{\kappa}^2})}\left(r\sqrt[4]{\frac{1+4\tilde{\kappa}^2}{4}}\right) \tag{4.198}$$

$$\psi_{02}(X_2^\circ) = \sqrt{X_2^\circ} J_{\sqrt{4\ell^2+1}/2}\left(\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2} - \tilde{\kappa}^2 X_2^\circ}\right) \tag{4.199}$$

Varias observaciones son pertinenetes, $\psi_{02} \notin L^2(-\infty, \infty)$, lo cual se argumenta en A.2.3 concluyendo que siempre se tendrá un comportamiento ondulatorio que nunca se atenuará; esto motiva a estudiar dicha función en un período de oscilación $a$ con el fin de que $\psi_{02} \in L^2[-a, a]$, la función de onda se deberá anular en la frontera de dicho período, pidiendo esto llegamos a la condición débil de cuantización de la energía

$$E_{n,\ell}(\tilde{\kappa}) = \frac{\hbar^2}{a^2} \frac{\beta^2_{n,\sqrt{4\ell^2+1}/2} + a^2\tilde{\kappa}^2}{2m} \tag{4.200}$$

Donde $\beta_{n,\sqrt{4\ell^2+1}/2}$ es el *n-ésimo* cero de la función de Bessel de orden $\sqrt{4\ell^2+1}/2$. Como deseamos evaluar un período entero podemos promediar sobre $\ell$ para obtener un valor aceptable para $a$ además, apoyándonos en el hecho de que los ceros de las funciones Bessel son asintóticamente simétricos A.2.3, se hace un cálculo del período en A.2.4, donde se concluye

$$a = 2\pi \tag{4.201}$$

Tenemos otra condición de frontera: el índice en las funciones de Hermite de la funcion de onda radial (4.198) debe ser un entero, más aún, debe ser un entero par ya que al ser una variable radial, no tiene sentido que su dominio en la integración se considere de $-\infty$ a $\infty$, esta condición implica lo siguiente

$$-\frac{\sqrt{1+4\tilde{\kappa}^2}+2\ell^2+1}{2\sqrt{1+4\tilde{\kappa}^2}} = 2k \tag{4.202}$$

$$\frac{(2\ell^2+1)^2}{4(1+4\tilde{\kappa}^2)} = \left(2k+\frac{1}{2}\right)^2 \tag{4.203}$$

$$\frac{1}{4}\sqrt{\left(\frac{2\ell^2+1}{2k+1/2}\right)^2-4} = \tilde{\kappa} \tag{4.204}$$

$$\frac{\sqrt{\ell^2(\ell^2+1)-2k(2k+1)}}{2(2k+1/2)} = \tilde{\kappa}_{\ell,k} \tag{4.205}$$

Donde $k \in \mathbb{Z}$, con éstas consideraciones la energía adquiere su forma final

$$E_{k,n,\ell} = \frac{\hbar^2}{8m\pi^2}\left(\beta^2_{n,\sqrt{4\ell^2+1}/2} + \frac{\pi^2[\ell^2(\ell^2+1)-2k(2k+1)]}{(2k+1/2)^2}\right) \tag{4.206}$$

Con el fin de hacerla positiva definida, pedimos que

$$\ell^2(\ell^2+1) \geq 2k(2k+1) \tag{4.207}$$

$$\Rightarrow \ell^2 \geq 2k \tag{4.208}$$

Notamos que la energía (4.206) es creciente tanto en $n$ y $\ell$ como lo es en $\tilde{\kappa}$, por lo que la energía del estado base está dada por

$$E_{0,1,0} = \frac{\hbar^2}{8m\pi^2}\beta^2_{1,1/2} \tag{4.209}$$

$$= \frac{\hbar^2}{8m\pi^2}\pi^2 \tag{4.210}$$

$$= \frac{\hbar^2}{8m} \tag{4.211}$$

## 4.4 Generalización de la teoría de Chern-Simons

La teoría de Chern-Simons es

$$L = \frac{m}{2}\dot{q}^2 + \frac{B}{2}\varepsilon_{ij}q^i\dot{q}^j - \frac{k}{2}q_iq^i \tag{4.212}$$

Por lo que vemos que nuestro Lagrangiano es una generalización de esta misma a dimensión arbitraria, lo cual se logró introduciendo el multiplicador de Lagrange $\lambda^a$ que actúa como el campo externo y modificando las constantes de modo tal que tengamos

$$L_{DCS} = \frac{m}{2}\dot{X}^\mu_a\dot{X}_{\mu a} + \frac{a}{2}\lambda^c f_{cfa}X_{\mu f}\dot{X}^\mu_a + \frac{b}{2}X^\mu_f X_{\mu e} \tag{4.213}$$

Los momentos canónicos del lagrangiano son

$$P_{\mu a} = m\dot{X}_{\mu a} - \frac{a}{2}\lambda^c f_{cab}X_{\mu b} \tag{4.214}$$

En Chern-Simons es usual pedir que el término cinético sea el que otorgue la menor contribución, es decir

$$\frac{m}{2}\dot{X}^\mu_a\dot{X}_{\mu a} << \frac{a}{2}\lambda^c f_{cfa}X_{\mu f}\dot{X}^\mu_a \tag{4.215}$$

$$\frac{m}{2}\dot{X}^\mu_a\dot{X}_{\mu a} << \frac{b}{2}X^\mu_f X_{\mu e} \tag{4.216}$$

Lo cual define las siguientes constricciones

$$\mathcal{C}_{\mu a} = P_{\mu a} + \frac{a}{2}\lambda^c f_{cab}X_{\mu b} \tag{4.217}$$

Las cuales son de segunda clase ya que su álgebra es

$$\{\mathcal{C}_{\mu a}, \mathcal{C}_{\nu b}\} = -2\eta_{\mu\nu}\lambda^c f_{cab} \tag{4.218}$$

El hamiltoniano total ahora es

$$H_{DCS} = \frac{b}{2} X^{\mu}_{a} X_{\mu a} + \Lambda^{\mu a} \left( P_{\mu a} + \frac{a}{2} \lambda^{c} f_{cba} X_{\mu b} \right) \tag{4.219}$$

Notemos que el término $(\lambda^c f_{cba})^{-1}$ es necesario para poder invertir (4.218) y poder definir los paréntesis de Dirac de la teoría, sin embargo es bastante problemático conseguirlo; en el caso más sencillo que es $SU(2)$ no es invertible ya que se trata de una matriz antisimétrica de $3 \times 3$, en el siguiente caso $SU(3)$ tenemos una matriz de $8 \times 8$ con 8 variables. Por ésta dificultad planteamos un Lagrangiano que definiría una generalización de Chern-Simons con índices internos y otro con la añadidura de un potencial tipo electromagnético que modifica las constricciones de un modo que invertirlas en SU(2) es mucho más sencillo.

### 4.4.1 Chern-Simons con simetría interna

El Lagrangiano que nos da la constricción de Chern-Simons es el siguiente

$$L_{ICS} = \frac{a}{2} \varepsilon_{ij} X_{\mu i} \dot{X}^{\mu}_{j} + \frac{b}{2} X^{\mu}_{i} X_{\mu i} \tag{4.220}$$

Su momento canónico asociado define la constricción

$$P_{\mu k} = \frac{a}{2} \varepsilon_{ik} X_{\mu i} \tag{4.221}$$

$$\mathcal{D}_{\mu k} \equiv P_{\mu k} + \frac{a}{2} \varepsilon_{ki} X_{\mu i} \tag{4.222}$$

La cual es de segunda clase, ya que álgebra es

$$\{\mathcal{D}_{\mu i}, \mathcal{D}_{\nu j}\} = a \eta_{\mu\nu} \varepsilon_{ij} \tag{4.223}$$

El Hamiltoniano es

$$H_{ICS} = \frac{b}{2} X^{\mu}_{i} X_{\mu i} + \Lambda^{\mu k} \left( P_{\mu k} + \frac{a}{2} \varepsilon_{ki} X_{\mu i} \right) \tag{4.224}$$

La evolución temporal de (4.222) es

$$\dot{\mathcal{D}}_{\mu k} = \{H_{ICS}, \mathcal{D}_{\mu k}\} = a\Lambda_{\mu i}\varepsilon_{ik} + bX_{\mu k} \tag{4.225}$$

Usando el hecho de que es débilmente cero, despejamos el multiplicador de Lagrange

$$\Lambda_{\mu j} = \frac{b}{a}\varepsilon_{kj}X_{\mu k} \tag{4.226}$$

El conjunto de constricciones consite sólamente de las constricciones de segunda clase $\mathcal{D}_{\mu i}$, el paréntesis de Dirac en este caso es

$$\{A, B\}^* = \{A, B\} + \{A, \mathcal{D}_{\rho k}\}\frac{1}{a}\eta^{\rho\sigma}\varepsilon_{kl}\{\mathcal{D}_{\sigma l}, B\} \tag{4.227}$$

Como hemos despejado el multiplicador de Lagrange, podemos hacer fuerte la constricción y escribir los momentos en términos de las coordenadas

$$P_{\mu k} = \frac{a}{2}\varepsilon_{ik}X_{\mu i} \tag{4.228}$$

El paréntesis entre las variables canónicas para la teoría es

$$\{X_i^\mu, X_j^\nu\}^* = -\frac{1}{a}\eta^{\mu\nu}\varepsilon_{ij} \tag{4.229}$$

Las ecuaciones de movimiento son

$$\dot{X}_i^\mu = \{H_{ICS}, X_i^\mu\}^* = \frac{\varepsilon_{ij}}{a}X_j^\mu \tag{4.230}$$

La solución de (4.230) es

$$X_1^\mu = i(B^\mu e^{-\frac{i\tau}{a}} - A^\mu e^{\frac{i\tau}{a}}) \tag{4.231}$$

$$X_2^\mu = A^\mu e^{\frac{i\tau}{a}} + B^\mu e^{-\frac{i\tau}{a}} \tag{4.232}$$

$$\Rightarrow X_k^\mu = (-i)^{k-1}A^\mu e^{\frac{i\tau}{a}} + (i)^{k-1}B^\mu e^{-\frac{i\tau}{a}} \tag{4.233}$$

Mientras que la de los momentos es es

$$P_1^\mu = i\frac{ab}{2}(-A^\mu e^{\frac{i\tau}{a}} + B^\mu e^{-\frac{i\tau}{a}}) \tag{4.234}$$

$$P_2^\mu = -\frac{ab}{2}(A^\mu e^{\frac{i\tau}{a}} + B^\mu e^{-\frac{i\tau}{a}}) \tag{4.235}$$

$$P_k^\mu = -i^{k-1}\frac{ab}{2}((-1)^k A^\mu e^{\frac{i\tau}{a}} + B^\mu e^{-\frac{i\tau}{a}}) \tag{4.236}$$

Las soluciones adquieren la siguiente forma en presencia de las condiciones iniciales que solo dependen del primer índice interno: $(X_1^\mu)_0 \equiv X_1^\mu(\tau = 0)$ y $(\dot{X}_1^\mu)_0 \equiv \dot{X}_1^\mu(\tau = 0)$

$$A^\mu = \frac{i}{2}\left[a(\dot{X}_1^\mu)_0 + (X_1^\mu)_0\right] \tag{4.237}$$

$$B^\mu = \frac{i}{2}\left[a(\dot{X}_1^\mu)_0 - (X_1^\mu)_0\right] \tag{4.238}$$

$$X_1^\mu = ia(\dot{X}_1^\mu)_0 \sin\left(\frac{\tau}{a}\right) + (X_1^\mu)_0 \cos\left(\frac{\tau}{a}\right) \tag{4.239}$$

$$X_2^\mu = ia(\dot{X}_1^\mu)_0 \cos\left(\frac{\tau}{a}\right) - (X_1^\mu)_0 \sin\left(\frac{\tau}{a}\right) \tag{4.240}$$

$$P_1^\mu = \frac{ab}{2}\left[a(\dot{X}_1^\mu)_0 \sin\left(\frac{\tau}{a}\right) + (X_1^\mu)_0 \cos\left(\frac{\tau}{a}\right)\right] \tag{4.241}$$

$$P_2^\mu = -i\frac{ab}{2}\left[a(\dot{X}_1^\mu)_0 \cos\left(\frac{\tau}{a}\right) - i(X_1^\mu)_0 \sin\left(\frac{\tau}{a}\right)\right] \tag{4.242}$$

Por otra parte, ahora el hamiltoniano de la teoría es

$$H_{ICS} = \frac{b}{2}X_i^\mu X_{\mu i} = \frac{b}{2}\left(X_i^\mu X_{\mu i} + X_i^\mu X_{\mu i}\right) \tag{4.243}$$

Promovemos las funciones de operadores y al ver el conmutador de las coordenadas nos percatamos que $\hat{X}_1^\mu$ toma el papel de coordenada mientras que

$X_2^\mu$ toma el de momento, lo cual es válido para toda métrica

$$[X_1^\mu, X_2^\nu]^* = -\frac{i\hbar}{a} g^{\mu\nu} \tag{4.244}$$

$$\hat{X}_1^\mu = X_1^\mu \tag{4.245}$$

$$X_2^\mu = -i\hbar \frac{\partial}{\partial X_{\mu 1}} \tag{4.246}$$

Es decir, hemos restituido los términos cinéticos gracias a que nuestras coordenadas tienen una estructura no-conmutativa. En el caso donde la métrica sea euclideána ($g^{\mu\nu} = diag(1, \ldots, 1)$) la cuantización es bastante sencilla

$$\hat{H}\psi = \sum_{n=1}^{D} \frac{b}{2} \left( (X_1^n)^2 - \hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial (X_1^n)^2} \right) \psi \tag{4.247}$$

Cuyas soluciones son polinomios de Hermite

$$\psi = \prod_{j=1}^{D} \psi_{n^j} \tag{4.248}$$

$$\psi_{n^j} = \frac{1}{\sqrt{2^{n^j}\, n^j!}} \cdot \left( \frac{1}{b\pi\hbar} \right)^{1/4} \cdot e^{-\frac{(X_1^j)^2}{2b\hbar}} \cdot H_n \left( \sqrt{\frac{1}{b\hbar}} X_1^j \right) \tag{4.249}$$

En términos de estados y operadores tenemos

$$\hat{H} \left| n^1, \ldots, n^D \right\rangle = \hbar (\sum_{j=1}^{D} n^j + 1) \left| n^1, \ldots, n^D \right\rangle \tag{4.250}$$

$$\hat{a}_j^\dagger = \sqrt{\frac{b}{2\hbar}} (\frac{\hat{X}_1^j}{b} + i\hat{X}_2^j) \tag{4.251}$$

$$\hat{a}_j = \sqrt{\frac{b}{2\hbar}} (\frac{\hat{X}_1^j}{b} - i\hat{X}_2^j) \tag{4.252}$$

$$\left| n^1, \ldots, n^D \right\rangle = \prod_{j=1}^{D} \frac{(\hat{a}_j^\dagger)^{n^j}}{\sqrt{n^j!}} \left| 0, \ldots, 0 \right\rangle \tag{4.253}$$

Este caso es bastante interesante, ya que empezamos con un Hamiltoniano que distaba del oscilador armónico pero acabamos con uno, esto muestra que las constricciones pueden llegar a influir de un modo drástico en la dinámica del sistema.

### 4.4.2 Caso en SU(2) con potencial dependiente de la velocidad

Tomemos bajo consideración el siguiente Lagrangiano

$$L = \frac{1}{2}\varepsilon_{abc}\lambda_a X^\mu_b \dot{X}_{\mu c} - \frac{b}{2} X^\mu_a X_{\mu a} - \frac{c}{2} X^\mu_a \dot{X}_{\mu a} \tag{4.254}$$

Sus momentos canónicos definen la constricción $\varepsilon E_{\mu a}$

$$\mathcal{E}_{\mu a} = P_{\mu a} - \frac{X_{\mu b}}{2}(\varepsilon_{cab}\lambda_c - c\delta_{ab}) \tag{4.255}$$

Que generan el siguiente álgebra

$$\{\mathcal{E}_{\mu a}, \mathcal{E}_{\nu b}\} = \eta_{\mu\nu}(\varepsilon_{cab}\lambda_c - c\delta_{ab}) \tag{4.256}$$

El Lagrangiano (4.254) da como Hamiltoniano el siguiente

$$H = \frac{b}{2} X^\mu_a X_{\mu a} + \Lambda^\mu_a \mathcal{E}_{\mu a} \tag{4.257}$$

Donde, como es usual, $\Lambda^\mu_a$ es el multiplicador de Lagrange y puede ser despejado de la evolución temporal de la constricción

$$0 \approx \dot{\mathcal{E}}_{\mu a} = \{\mathcal{E}_{\mu a}, \frac{b}{2} X^\nu_b X_{\nu b} + \Lambda^\nu_a \mathcal{E}_{\nu b}\} \tag{4.258}$$

$$0 = bX_{\mu a} + \Lambda^\nu_a \eta_{\mu\nu}(\varepsilon_{cab}\lambda_c - c\delta_{ab}) \tag{4.259}$$

Es útil invertir la matriz que aparece en (4.256) y (4.259), ya que además nos permite escribir las ecuaciones de movimiento en términos de los paréntesis de

Dirac

$$\{\mathcal{E}_{\mu a}, \mathcal{E}_{\nu b}\} \equiv C_{ab\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}(\varepsilon_{dab}\lambda_d - c\delta_{ab}) \tag{4.260}$$

$$(C^{\nu\rho}_{bc})^{-1} = -\frac{\eta^{\nu\rho}}{c(\lambda^2 + c^2)}(\lambda_b\lambda_c + c\lambda^e\varepsilon_{ebc} + c^2\delta_{bc}) \tag{4.261}$$

Usando la constricción podemos escribir las coordenadas en términos de los momentos

$$P_{\mu a} = \eta_{\mu\nu}(\lambda^d\varepsilon_{dab} - c\delta_{ab})X^\nu_b \tag{4.262}$$

$$= C_{ab\mu\nu}X^\nu_b \tag{4.263}$$

$$\Rightarrow X^\rho_c = (C^{\mu\rho}_{ca})^{-1}P_{\mu a} \tag{4.264}$$

$$= -\frac{\eta^{\mu\rho}}{c(\lambda^2 + c^2)}(\lambda_c\lambda_a + c\lambda^e\varepsilon_{eca} + c^2\delta_{ca})P_{\mu a} \tag{4.265}$$

Por la razón anterior, sólo es necesario cálcular los paréntesis de Dirac mas sencillos, en nuestro caso son los de los momentos

$$\{P^\mu_a, P^\nu_b\}^* = -\frac{\eta^{\mu\nu}}{4}(c\delta_{ab} + \lambda^c\varepsilon_{cab}) \tag{4.266}$$

La ecuación de movimiento de los momentos es

$$\dot{P}^\mu_a = bX_{\nu b}\{P^\mu_a, X^\nu_b\}^* \tag{4.267}$$

$$= -b\frac{\eta_{\nu\rho}}{c(\lambda^2 + c^2)}(\lambda_b\lambda_c + c\lambda^e\varepsilon_{ebc} + c^2\delta_{bc})P^\rho_c(-1)\frac{\eta^{\nu\sigma}}{c(\lambda^2 + c^2)} \tag{4.268}$$

$$(\lambda_b\lambda_d + c\lambda^f\varepsilon_{fbd} + c^2\delta_{bd})\{P^\mu_a, P_{\sigma d}\}^* \tag{4.269}$$

Sustitutimos el valor del paréntesis canónico (4.266)

$$\dot{P}^\mu_a = \frac{-bP^\mu_c}{4c^2(\lambda^2+c^2)^2}(\lambda_b\lambda_c + c\lambda^e\varepsilon_{ebc} + c^2\delta_{bc})(\lambda_b\lambda_d + c\lambda^f\varepsilon_{fbd} + c^2\delta_{bd})(c\delta_{ad} + \lambda^g\varepsilon_{gad}) \tag{4.270}$$

$$= \frac{-bP^\mu_c}{4c^2(\lambda^2+c^2)^2}(\lambda_b\lambda_c + c\lambda^e\varepsilon_{ebc} + c^2\delta_{bc})(c\lambda_a\lambda_b + c^2\lambda^f\varepsilon_{fba} + c^3\delta_{ba} + \tag{4.271}$$

$$c\lambda^f\lambda^g(\delta_{gf}\delta_{ab} - \delta_{gb}\delta_{af}) + c^2\lambda^g\varepsilon_{gab}) \tag{4.272}$$

$$= \frac{-bP^\mu_c}{4c^2(\lambda^2+c^2)^2}\left(c\lambda_a\lambda_c(\lambda^2+c^2) + c^2\lambda^e\varepsilon_{eac}(\lambda^2+c^2) + c^3\delta_{ac}(c^2+\lambda^2)\right) \tag{4.273}$$

$$\dot{P}^\mu_a = -\frac{b}{4c(\lambda^2+c^2)}(\lambda_a\lambda_c + c\lambda^b\varepsilon_{bac} + c^2\delta_{ac})P^\mu_c \tag{4.274}$$

Para resolver esta ecuación diferencial planteamos el problema de eigenvalores y resolvemos, dicho procedimiento está en el anexo

*A veces pienso que si no fuera por la oscuridad y las extrañas noches que descienden sobre nosotros, el cielo se incendiaría.*

Paul Auster

# 5 Conclusiones

A lo largo de esta tesis nos hemos enfocado en el problema de cuantizar una teoría Yang-Mills de campo, comenzamos haciendo una revisión del formalismo Hamiltoniano con constricciones, dónde vemos como iniciando en la acción, identificando constricciones y estableciendo un Hamiltoniano, podemos suprimir la arbitrariedad en una teoría implementando condciones de norma para volver a nuestras constrcciones de segunda clase, una vez hecho esto la cuantización es inmediata empleando la sustitución de paréntesis de Poisson y funciones en el espacio fase por conmutadores y operadores en un espacio de Hilbert. Posteriormente desarrollamos el electromagnetismo clásico dentro de un contexto geométrico, lo cual nos llevó a reconocer el 4-potencial electromagnético como la conexión en un haz fibrado, además se reconocieron las constricciones que tiene dicha teoría y posteriormente fueron utilizadas para

cuantizarla implementado condiciones de norma usuales tales como las de Coulomb y la Weyl. El último ejemplo que quisimos destacar, fué el de una teoría de Yang-Mills cuyo análisis clásico emula al que hicimos con el elextromagnetismo, pero para su cuantización empleamos otro método: el de Fadeev-Popov, en el cual se implementa una integral funcional en la cual se busca ”factorizar” los grados de libertad que no sean físicos con el fin de que no contribuyan en la medida de la integración.
Todo esto fué exhibido para hacer un marco apropiado para la teoría de las D-partículas, la cual, al no tener condiciones de norma obvias, tuvo que ser cuantizada por el método de Fadeev-Popov y descompuesta en diversos casos para ser analizada, entre ésos casos podemos encontrar una generalización de la mecánica cuántica topológica de Chern-Simons cuyos términos cinéticos son restituidos gracias a la no conmutatividad impuesta por las constricciones.
Una aplicación inmediata que se puede apreciar a través de la reglas de Feynman para la teoría es que define mecánica cuántica para procesos de cromodinámica donde el potencial electroestático sea el término dominante, sus reglas de Feynman son familiares y de hecho coinciden con las de la electrodinámica cuántica escalar.
Por otra parte otra aplicación que resulta particularmente interesante es usar la dualidad norma/gravedad para ver a que tipo de gravitación es dual esta teoría, la idea sería ver la teoría Super Yang-Mills de la D-partículas (la cual se puede encontrar en [15]) en la frontera de un espacio-tiempo $AdS_2$ y ver que tipo de gravitación define en él; para esto se necesita que la teoría sea conforme, lo cual se demuestra en (4.121).

# A
# Apéndice

## A.1 Formalismo Hamiltoniano de Yang-Mills

### A.1.1 Traza de la 4-forma es nula

Destacamos la siguiente relación entre los conmutadores y los anticonmutadores entre los elemento del álgebra $\mathfrak{su}(n)$

$$[T^a, [T^b, T^c]] = \{T^c, \{T^a, T^b\}\} - \{T^b, \{T^c, T^a\}\} \tag{A.1}$$

Donde

$$\{T^a, T^b\} = T^a T^b + T^b T^a \tag{A.2}$$

$$= \frac{\delta_{ab}}{n}\mathbb{I} + d_{abc} T^c \tag{A.3}$$

Podemos escribir las constantes de estructura $f_{abc}$ y las constantes *completamente simétricas* $d_{abc}$ en términos de trazas

$$f_{abc} = 2i \; Tr\left([T^a, T^b] T^c\right) \tag{A.4}$$

$$d_{abc} = 2 \; Tr\left(\{T^a, T^b\} T^c\right) \tag{A.5}$$

La ecuación A.1 en términos de $f_{abc}$ y $d_{abc}$ es

$$[T^a,[T^b,T^c]] = \{T^c,\{T^a,T^b\}\} - \{T^b,\{T^c,T^a\}\} \tag{A.6}$$

$$-f_{ade}f_{bcd}T^e = \{T^c, \left(\frac{\delta_{ab}}{n}\mathbb{I} + d_{abd}\right) T^d\} - \{T^b, \left(\frac{\delta_{ca}}{n}\mathbb{I} + d_{cad}\right) T^d\} \tag{A.7}$$

$$= \frac{2}{n}\left(\delta_{ab}T^c - \delta_{ca}T^b\right) + d_{abd}d_{cde}T^e - d_{cad}d_{bde}T^e \tag{A.8}$$

$$f_{ade}f_{bcd} = \frac{2}{n}\left(\delta_{ca}\delta_{be} - \delta_{ab}\delta_{ce}\right) - d_{abd}d_{cde} + d_{cad}d_{bde} \tag{A.9}$$

Para la 4-forma tenemos

$$\mathbb{A}^4 = \mathbb{A}\wedge\mathbb{A}\wedge\mathbb{A}\wedge\mathbb{A} = A^a_\mu A^b_\nu A^c_\rho A^d_\sigma dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\rho \wedge dx^\sigma T^a T^b T^c T^d \tag{A.10}$$

$$Tr\mathbb{A}^4 = A^a_\mu A^b_\nu A^c_\rho A^d_\sigma dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\rho \wedge dx^\sigma Tr\left(T^a T^b T^c T^d\right) \tag{A.11}$$

$$\begin{aligned} Tr\left(T^a T^b T^c T^d\right) &= Tr\left(\left(\frac{\delta_{ab}}{2n}\mathbb{I} + \frac{1}{2}(if_{abe} + d_{abe})T^e\right)\right. \\ &\quad \left.\times\left(\frac{\delta_{cd}}{2n}\mathbb{I} + \frac{1}{2}(if_{cdf} + d_{cdf})T^e\right)\right) \end{aligned} \tag{A.12}$$

$$\begin{aligned} &= Tr\left(\frac{\delta_{ab}\delta_{cd}}{4n^2}\mathbb{I} + \frac{\delta_{ab}}{4n}(if_{cdf} + d_{cdf})T^f\right. \\ &\quad \left.+\frac{\delta_{cd}}{4n}(if_{abe} + d_{abe})T^e + \frac{1}{4}(if_{abe} + d_{abe})(if_{cdf} + d_{cdf})T^e T^f\right) \end{aligned} \tag{A.13}$$

$$= \left(\frac{\delta_{ab}\delta_{cd}}{4n} + \frac{1}{8}(if_{abe} + d_{abe})(if_{cde} + d_{cde})\right) \tag{A.14}$$

Donde se ha usado el hecho de que los generadores del álgebra tienen traza nula y que la traza del producto de dos de éllos es la mitad de la delta de Kronecker

$$\begin{aligned} \Rightarrow Tr\mathbb{A}^4 &= A^a_\mu A^b_\nu A^c_\rho A^d_\sigma dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\rho \wedge dx^\sigma \\ &\quad \times\left(\frac{\delta_{ab}\delta_{cd}}{4n} + \frac{1}{8}(if_{abe} + d_{abe})(if_{cde} + d_{cde})\right) \end{aligned} \tag{A.15}$$

$$= -\frac{A^a_\mu A^b_\nu A^c_\rho A^d_\sigma dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\rho \wedge dx^\sigma}{8} f_{abe}f_{cde} \tag{A.16}$$

Usando A.9 y reorganizando índices tenemos

$$
\begin{aligned}
Tr\mathbb{A}^4 &= -\frac{A^a_\mu A^b_\nu A^c_\rho A^d_\sigma dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\rho \wedge dx^\sigma}{8}\left(\frac{2}{n}(\delta_{ca}\delta_{bd} - \delta_{ad}\delta_{cb})\right. \\
&\left. +d_{cae}d_{deb} - d_{ade}d_{ceb}\right) && \text{(A.17)} \\
&= 0 && \text{(A.18)}
\end{aligned}
$$

## A.2 D-Partículas

### A.2.1 Hamiltoniano de la teoría reducida conmuta con las constricciones

Una vez impuesta la condición de norma, el Hamiltoniano total (4.145) es

$$
H_T = \frac{1}{2m}\hat{P}^\mu_a \hat{P}_{\mu a} \tag{A.19}
$$

Al hacerlo conmutar con la condición de norma tenemos

$$
\begin{aligned}
[H_T, \Omega]^* &= \frac{1}{2m}[\hat{P}^\mu_a \hat{P}_{\mu a}, \hat{X}^\circ_1]^* \\
&= \frac{1}{m}\hat{P}_{\mu a}[\hat{P}^\mu_a, \hat{X}^\circ_1]^* \\
&= \frac{-i\hbar}{m}\hat{P}_{\mu a}\left(\eta^{\circ\mu}\delta_{1a} - \frac{\eta^{\circ\mu}\delta_{1a}\hat{X}^\circ_2}{\hat{X}^\circ_2}\right) \\
&= 0 && \text{(A.20)}
\end{aligned}
$$

Y al hacerlo conmutar con la constricción llegamos a

$$
\begin{aligned}
[H_T, \mathcal{G}]^* &= \frac{\varepsilon_{bc}}{m}\hat{P}_{\mu a}[\hat{P}^{\mu}_{a}, \hat{X}^{\nu}_{b}\hat{P}_{\nu c}]^* \\
&= \frac{\varepsilon_{bc}}{m}\hat{P}_{\mu a}\left([\hat{P}^{\mu}_{a}, \hat{X}^{\nu}_{b}]^*\hat{P}_{\nu c} + \hat{X}^{\nu}_{b}[\hat{P}^{\mu}_{a}, \hat{P}_{\nu c}]^*\right) \\
&= \frac{i\hbar\varepsilon_{bc}}{m}\hat{P}_{\mu a}\left(-\left(\eta^{\nu\mu}\delta_{ba} - \frac{\eta^{\mu 0}\delta_{a1}\varepsilon_{bd}}{\hat{X}^{0}_{2}}\hat{X}^{\nu}_{d}\right)\hat{P}_{\nu c}\right. \\
&\left.\frac{1}{\hat{X}^{0}_{2}}\hat{X}^{\nu}_{b}\left(\varepsilon_{cd}\delta_{1a}\eta^{\mu 0}\eta_{\nu\sigma} - \varepsilon_{ad}\delta_{1c}\delta^{0}_{\nu}\delta^{\mu}_{\sigma}\right)\hat{P}^{\sigma}_{d}\right) \\
&= \frac{i\hbar}{m}\left(\hat{P}^{0}_{1}\frac{1}{\hat{X}^{0}_{2}}\hat{X}^{\nu}_{d}\hat{P}_{\nu d} - \hat{P}^{0}_{1}\frac{1}{\hat{X}^{0}_{2}}\hat{X}^{\nu}_{b}\hat{P}_{\nu b} + \hat{P}_{\mu a}\frac{\varepsilon_{ad}}{\hat{X}^{0}_{2}}\hat{X}^{0}_{2}\hat{P}^{\mu}_{d}\right) \\
&= 0
\end{aligned}
\tag{A.21}
$$

### A.2.2 Cambio de coordenadas

Notando que $a = 1, 2$ y que $i = 1, \ldots, D-1$, para el caso donde $\eta_{00} = 1$ elegimos coordenadas esféricas en la esfera de radio $r$ inmersa en el espacio cartesiano $2(D-1)$ dimensional, donde los ángulos que la parametrizan son $\{\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{2D-5}, \theta_{2D-4}, \theta_{2D-3}\}$, en este caso, el laplaciano es

$$
\sum_{i=1}^{D-1}\frac{\partial^2}{\partial(X^i_a)^2} = \frac{1}{r^{2D-3}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{2D-3}\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\hat{L}^2 \tag{A.22}
$$

$$
\therefore -\frac{2mE}{\hbar^2}\psi = \frac{1}{r^{2D-3}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{2D-3}\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2\psi}{\partial(X^0_2)^2} + \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{(X^0_2)^2}\right)\hat{L}^2\psi \tag{A.23}
$$

$$
\hat{L}^2 = \frac{1}{\sin^{2D-4}(\theta_1)}\frac{\partial}{\partial\theta_1}\left(\sin^{2D-4}(\theta_1)\frac{\partial}{\partial\theta_1}\right) + \frac{1}{\sin^2(\theta_1)}\hat{L}^2_{2(D-2)} \tag{A.24}
$$

Las eigenfunciones de $\hat{L}^2$ son $Y_{\ell_1,\ell_2,\ldots,\ell_{2D-4},\ell_{2D-3}}(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{2D-4}, \theta_{2D-3})$, conocidos como armónicos esféricos de dimensión $2(D-1)$, cuya forma es la siguiente

$$Y_{\ell_1,\ell_2,\ldots,\ell_{2D-4},\ell_{2D-3}}(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_{2D-4},\theta_{2D-3}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{i\ell_1\theta_1}\prod_{k=2}^{2D-3}{}_j\bar{P}_{\ell_k}^{\ell_{2D-4}}(\theta_k) \tag{A.25}$$

$${}_k\bar{P}_{\ell_k}^{\ell_{2D-4}}(\theta_k) = \sqrt{\frac{2\ell_k+k-1}{2}\frac{(\ell_k+\ell_{2D-4}+k-2)!}{(\ell_k-\ell_{2D-4})!}}\sin^{(2-k)/2}(\theta_k)P_{\ell_k+\frac{k-2}{2}}^{-(\ell_{2D-4}+\frac{k-2}{2})}(\cos(\theta_k)) \tag{A.26}$$

Si designamos a $\theta_1$ como ángulo polar, la acción de los operadores angulares en los armónicos esféricos es

$$\hat{L}^2 Y_{\ell_1,\ell_2,\ldots,\ell_{2D-4},\ell_{2D-3}} = -\ell_{2D-3}(\ell_{2D-3}+2(D-2)) \tag{A.27}$$

$$\hat{L}_z Y_{\ell_1,\ell_2,\ldots,\ell_{2D-4},\ell_{2D-3}} \equiv -i\frac{\partial}{\partial\theta_1}Y_{\ell_1,\ell_2,\ldots,\ell_{2D-4},\ell_{2D-3}} = \ell_1 Y_{\ell_1,\ell_2,\ldots,\ell_{2D-4},\ell_{2D-3}} \tag{A.28}$$

### A.2.3 Acerca de $\psi_{02}$

La función $\psi_{02}$ en el caso $D = 1+1$ está definida como

$$\psi_{02}(X_2^0) = \sqrt{X_2^0}J_{\sqrt{4\ell+1}/2}\left(\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}+\kappa^2 X_2^0}\right) \tag{A.29}$$

En términos de la serie de Taylor de la función de Bessel tenemos

$$\tilde{X}_2^0 \equiv \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}+\kappa^2 X_2^0}\psi_{02}(X_2^0) \quad = \sqrt{X_2^0}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(\tilde{X}_2^0/2)^{\sqrt{4\ell+1}/2+2k}}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\sqrt{4\ell+1}/2+1)} \tag{A.30}$$

Para $X_2^\circ$ grande, la función de Bessel tendrá el siguiente comportamiento asintótico [16]

$$\begin{aligned}
\psi_{02}(X_2^\circ) = \sqrt{X_2^\circ}\Bigg(&\sqrt{\frac{2}{\pi\tilde{X}_2^\circ}}\cos(\tilde{X}_2^\circ - \pi\sqrt{4\ell+1}/8 - \pi/4)\\
&\times\left[\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(\sqrt{4\ell+1}/2, 2k)(2\tilde{X}_2^\circ)^{-2k} + \mathcal{O}((\tilde{X}_2^\circ)^{-2(n+1)})\right]\\
&-\sqrt{\frac{2}{\pi\tilde{X}_2^\circ}}\sin(\tilde{X}_2^\circ - \pi\sqrt{4\ell+1}/8 - \pi/4)\\
&\left[\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(\sqrt{4\ell+1}/2, 2k+1)(2\tilde{X}_2^\circ)^{-2k-1} + \mathcal{O}((\tilde{X}_2^\circ)^{-2n-3})\right]\Bigg)
\end{aligned} \tag{A.31}$$

$$\begin{aligned}
= \hbar\sqrt{\frac{1}{mE\pi}}\Bigg(&\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(\tilde{X}_2^\circ - \pi\sqrt{4\ell+1}/8 - \pi/4)\\
&\times\left[\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(\sqrt{4\ell+1}/2, 2k)(2\tilde{X}_2^\circ)^{-2k} + \mathcal{O}((\tilde{X}_2^\circ)^{-2(n+1)})\right]\\
&-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(\tilde{X}_2^\circ - \pi\sqrt{4\ell+1}/8 - \pi/4)\\
&\left[\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(\sqrt{4\ell+1}/2, 2k+1)(2\tilde{X}_2^\circ)^{-2k-1} + \mathcal{O}((\tilde{X}_2^\circ)^{-2n-3})\right]\Bigg)
\end{aligned} \tag{A.32}$$

Con lo que queda claro que asintóticamente tendrá un comportamiento sinoidal que no se atenuar; además, vemos que asintóticamente los ceros de las funciones de Bessel adquieren la siguiente forma

$$\beta_{n,\sqrt{4\ell^2+1}/2} = \pi\left(n + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{4\ell^2+1}+1}{4}\right) \tag{A.33}$$

### A.2.4 Cálculo del período

Sea $\alpha_n$ el promedio sobre $\ell$ de $\beta_{n,\sqrt{4\ell^2+1}/2}$

$$\alpha_n = \frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N} \beta_{n,\sqrt{4\ell^2+1}/2} \tag{A.34}$$

$$= \frac{\pi}{N}\sum_{l=0}^{N}\left(n + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{4\ell^2+1}+1}{4}\right) \tag{A.35}$$

$$= \pi\left(n+\frac{3}{4}\right) + \frac{\pi}{4N}\sum_{l=0}^{N}\sqrt{4\ell^2+1} \tag{A.36}$$

A partir de $\ell = 3$ se tiene que $4\ell^2$ excede en un orden de magnitud a 1, por lo que el término dentro de la raíz se comporta como $\sqrt{4\ell+1} \sim 2\ell$, entonces

$$\alpha_n = \pi\left(n+\frac{3}{4}\right) + \frac{\pi}{2N}\sum_{l=0}^{N}\ell \tag{A.37}$$

$$= \pi\left(n+\frac{3}{4}\right) + \frac{\pi}{4N}N(N+1) \tag{A.38}$$

$$= \pi(n + \frac{N}{4} + 1) \tag{A.39}$$

Para $N$ arbitraria, la cual no influirá en ningún aspecto de el período $a$ ya que este será el doble de la distancia entre dos ceros del promedio

$$a \equiv 2(\alpha_{n+1} - \alpha_n) \tag{A.40}$$

$$= 2\pi \tag{A.41}$$

### A.2.5 Problema de eigenvalores

El problema de eigenvalores a resolver es obtener el determinante de la siguiente matriz e igualarlo a cero

$$A_{ab} = -\frac{b}{4c(\lambda^2+c^2)}(\lambda_a\lambda_b + c\lambda^c\varepsilon_{cab} + (c^2 - \frac{b}{4c(\lambda+c^2)}\mu)\delta_{ab}) \tag{A.42}$$

Para facilitar la notación, hacemos la siguiente definición

$$\lambda^2 \equiv \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \tag{A.43}$$

Entonces

$$det(A_{ab}) = \varepsilon_{abc} A_{1a} A_{2b} A_{3c} \tag{A.44}$$

$$= -\frac{b^3}{4c(\lambda^2 + c^2)^3} \varepsilon_{abc} \left( \lambda_a \lambda_1 + c\lambda^d \varepsilon_{da1} + (c^2 - \frac{b}{4c(\lambda^2 + c^2)} \mu) \delta_{a1} \right)$$
$$\left( \lambda_b \lambda_2 + c\lambda^e \varepsilon_{eb2} + (c^2 - \frac{b}{4c(\lambda^2 + c^2)} \mu) \delta_{b2} \right)$$
$$\left( \lambda_c \lambda_3 + c\lambda^f \varepsilon_{fc3} + (c^2 - \frac{b}{4c(\lambda^2 + c^2)} \mu) \delta_{c3} \right) \tag{A.45}$$

$$= -\frac{b^3}{4c(\lambda^2 + c^2)^3} \left( \lambda_1 \lambda^a \varepsilon_{abc} + c(\lambda^b \delta_{c1} - \lambda^c \delta_{b1}) + \varepsilon_{1bc}(c^2 - \frac{b}{4c(\lambda^2 + c^2)} \mu) \right)$$
$$\Bigg( \lambda_2 \lambda_3 \lambda^b \lambda^c + c\lambda_2 \lambda^b \lambda^f \varepsilon_{f3c} + (c^2 - \frac{b}{4c(\lambda^2 + c^2)} \mu) \lambda_2 \lambda^b \delta_{3c}$$
$$+ c\lambda_3 \lambda^e \lambda^c \varepsilon_{e2b} + c^2 \lambda^e \lambda \varepsilon_{e2b} \varepsilon_{f3c} + c(c^2 - \frac{b}{4c(\lambda^2 + c^2)} \mu) \lambda^e \varepsilon_{e2b} \delta_{3c}$$
$$+ (c^2 - \frac{b}{4c(\lambda^2 + c^2)} \mu) \lambda_3 \lambda^c \delta_{2b} + c(c^2 - \frac{b}{4c(\lambda^2 + c^2)} \mu) \lambda^f \varepsilon_{f3c} \delta_{2b}$$
$$+ (c^2 - \frac{b}{4c(\lambda^2 + c^2)} \mu)^2 \delta_{2b} \delta_{3c} \Bigg) \tag{A.46}$$

Ignorando el factor común $-\frac{b^3}{4c(\lambda^2+c^2)^3}$ hacemos la multiplicación del primer factor por todo el segundo paréntesis nos da

$$\lambda_1^2 (\lambda^2 c^2 + (c^2 - \frac{b}{4c(\lambda^2 + c^2)} \mu)^2) + c^2 \tag{A.47}$$

Hacemos lo mismo para el segundo factor obteniendo

$$c^2 (\lambda^2 + c^2 - \frac{b}{4c(\lambda^2 + c^2)} \mu)(\lambda_2^2 + \lambda_3^2) \tag{A.48}$$

Finalmente para el tercero

$$(c^2 - \frac{b}{4c(\lambda^2 + c^2)}\mu)\left((c^2 - \frac{b}{4c(\lambda^2 + c^2)}\mu)(\lambda_2^2 + \lambda_3^2) + c^2\lambda_1^2 + (c^2 - \frac{b}{4c(\lambda^2 + c^2)}\mu)^2\right) \tag{A.49}$$

Haciendo la suma obtenemos el siguiente polinomio característico para $\mu$

$$p(\mu) = \left(\lambda^2 + c^2 - \frac{b}{4c(\lambda^2 + c^2)}\mu\right)\left(\lambda^2 c^2 + (c^2 - \frac{b}{4c(\lambda^2 + c^2)}\mu)^2\right) \tag{A.50}$$

Lo cual nos da los tres eigenvalores

$$\mu_0 = \frac{4c}{b}(\lambda^2 + c^2)^2 \tag{A.51}$$

$$\mu_\pm = \frac{4c}{b}(\lambda^2 + c^2)(c^2 \pm ic\lambda) \tag{A.52}$$

# Bibliografía


[1] P. A. M. Dirac. *Lectures on Quantum Mechanics*. Dover.

[2] M. Henneaux and C. Teitelboim. *Quantization of Gauge Systems*. Princeton University Press.

[3] E.S. Fradkin and G.A. Vilkovisky. *Quantization of relativistic systems with constraints: equivalence of canonical and covariant formalisms in quantum theory of graviational field*. CERN.

[4] Antonio García Zenteno, Luis F. Urrutia, J. David Vergara, and Rodolfo P. Martínez. Introducción a la cuantización de teorías de norma empleando el método BRST-BFV. *Revista Mexicana de Física*, 40(3):476–498, 1994.

[5] K. Sundermeyer. *Constrained Dynamics*. Springer-Verlag.

[6] L. D. Landau and E. M. Lifshitz. *Course of Theoretical Physics: The Classical Theory of Fields*, volume 2. Elsevier.

[7] G. V. Dunne, R. Jackiw, and C. A. Trugenberger. 'Topological' (Chern-Simons) quantum mechanics. *Phys. Rev. D*, 41:661–666.

[8] I.J.R. Aitchison and A.J.G. Hey. *Gauge Theories in Particle Physics*, volume 1. Taylor and Francis.

[9] M. Peskin and D. Schroeder. *An Introduction to Quantum Field Theory*. Addison-Wesley.

[10] J. D. Jackson. *Classical Electrodynamics*. Wiley.

[11] W. Greiner and J. Reinhardt. *Field Quantization*. Springer.

[12] C. Schomblond. *Theorie Quantique des Champs*. Université de Bruxelles.

[13] A. Das. *Field Theory: A Path Integral Approach*. World Scientific.

[14] L.D. Faddeev and V.N. Popov. Feynman diagrams for the yang-mills field. *Phys. Lett.*, B25(3):29–30, 1967.

[15] U. H. Danielsson, G. Ferreti, and B. Sundborg. D-particle dynamics and bound states. *Int. J. Mod. Phys.*, A(11):5463–5478, 1996.

[16] S. Borchardt A. P. Balachandran and A. Stern. Lagrangian And Hamiltonian Descriptions of Yang-Mills Particles. 17:3247–3256.

[17] N. N. Lebedev. *Special Functions and Their Applications*. Dover.

# Colofón

Esta tesis fué realizada usando LaTeX, originalmente hecho por Leslie Lamport basándose en el TeXde Donald Knuth. La fuente del texto principal es *Arno Pro* de 11 puntos diseñada por Robert Slimbach. La plantilla que se usó para este documento está protegida bajo una licencia MIT (X11) y puede ser descargada de github.com/suchow/ o del autor mismo suchow@post.harvard.edu.