



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE POSGRADO EN ASTROFÍSICA

Instituto de Astronomía

EFFECTO DEL ARRASTRE DEL GAS SOBRE LA DINÁMICA DE
PLANETÉSIMOS EN UN DISCO PROTOPLANETARIO EN
TRANSICIÓN

TESIS

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE
MAESTRO EN ASTROFÍSICA

PRESENTA
SAMUEL AMADEUS JOSSHUA RAMÓN NAVARRO MEZA

TUTOR
DR. MAURICIO REYES RUIZ, INSTITUTO DE ASTRONOMÍA

ENSENADA, B. C. ENERO 2015



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Índice

1. Introducción	5
1.1. Discos protoplanetarios	6
1.1.1. Radios	10
1.1.2. Masas	10
1.1.3. Perfil de densidad	12
1.1.4. Composición	12
1.1.5. Evolución	13
1.2. Discos en Transición	17
1.2.1. Introducción	17
1.2.2. Modelado de la distribución espectral de energía	17
1.3. Captura en resonancias	21
2. Objetivo	25
3. Metodología	26
3.1. Truncamiento del disco	26
3.2. Modelo del disco gaseoso	27
3.2.1. Disco de acreción viscosa	27
3.2.2. Nebulosa de masa mínima	29
3.2.3. Estructura del disco y velocidades	31
3.3. Condiciones iniciales de cuerpos sólidos	32
3.4. Arrastre gaseoso sobre los planetésimos	33
3.5. Ecuaciones de movimiento	35
3.6. Solución numérica	36
4. Estimaciones aerodinámicas	37
5. Trabajo previo	42
5.1. Simulaciones con el código Mercury	42
5.2. Validación de nuestro código	48
5.3. Simulaciones preliminares	53
6. Resultados	62
6.1. Evolución del radio de las partículas	64
6.2. Evolución de las partículas en torno al radio de truncamiento	71
6.3. Posición en el plano X-Y a diferentes tiempos de la simulación.	78
7. Discusión	96
7.1. Comportamiento general	96
7.2. Efecto del tamaño del planetésimo	97
7.3. Efecto del modelo de gas	100
7.4. Relación con las simulaciones con el código Mercury	100
7.5. Implicaciones en el sistema solar	101

7.6. Acerca de las suposiciones consideradas	101
7.7. Trabajo a futuro	102
8. Conclusiones	103
9. Apéndice	105

A mi abuela y a mi madre.

Agradecimientos

Aún cuando esta tesis es sólo un pequeño peldaño, puedo aprovechar para agradecer a quienes han contribuido para traerme hasta aquí. Sin embargo nombrarlos individualmente convertiría esto en una gran lista, por lo tanto, agradezco a todos los profesores que han sido realmente buenos, a mi familia y a mis amigos cercanos. Y aún si me abstengo de nombrar a cada uno, el agradecimiento y afecto viven. Por otro lado, hay ciertas personas que es imprescindible mencionar dada su contribución a este trabajo en particular:

Primeramente a los miembros de mi comité sinodal, que sin sus valiosos comentarios y soporte, ésta tesis no hubiera sido terminada en la forma y tiempo en que se ha logrado, entre ellos, mi tutor, el Dr. Mauricio Reyes quien me ha brindado conocimiento, apoyo y experiencia a lo largo de toda la maestría y el Dr. Héctor Aceves que ha respondido paciente y enriquecedoramente a mis preguntas a lo largo de este trabajo. Así como a CONACYT por haberme otorgado una beca para facilitar mis estudios de maestría.

También es necesario agradecer a mi madre quien siempre ha estado presente bajo toda circunstancia y sobre todo, es a quien debo gran parte de mi formación humana y académica; a mi padre que siempre se adelantó a los profesores, sembrando en mi la curiosidad científica y un gran interés en las matemáticas desde muy temprana edad y por tanto, creo que le debo haber elegido estudiar ciencias, lo cuál es algo de gran importancia para mi; a Hiram por la etiqueta del CD que contiene la versión digital de este trabajo y a Paula a quien quiero y debo tanto como solo ella sabe.

1. Introducción

La astronomía planetaria es de las áreas de estudio con más antigüedad en la historia de la humanidad, no obstante estamos muy lejos de entender por completo los procesos de formación y evolución de los sistemas planetarios. El motivo de esta disparidad es justificable, ya que para el hombre, objetos como el Sol, la Luna y la mayoría de los planetas de nuestro sistema solar han sido observables a simple vista desde siempre, sin embargo, las herramientas científicas y tecnológicas para analizarlos han tardado un poco más en desarrollarse: Numerosas culturas de la antigüedad prestaron atención al movimiento de los astros mencionados. Seguramente, la curiosidad por observar estos puntos móviles en el cielo comenzó en la prehistoria; al respecto, Marshack (1972) sugiere que la observación sistemática de los astros por el hombre es tan vieja como él mismo, pues propone que el hombre del Paleolítico ¹ llevaba un seguimiento de las fases de la Luna e incluso creó un calendario basándose en tales observaciones. De ser cierto lo estipulado por Marshack (1972), tales sucesos ocurrieron mucho antes de la fundación de cualquier civilización. Independientemente de las discusiones que pueda implicar la aseveración de estos hechos, es bien sabido que en Mesoamérica las culturas prehispánicas tuvieron un prolífico interés en los cielos, muestra de ello son sus calendarios que continúan en uso en algunas regiones (Ávila Jimenez et al. 2007); la predicción de eclipses y cálculo de movimientos planetarios (especialmente de Venus), etc. Todas éstas observaciones fueron realizadas con gran exactitud y además aplicadas, ya que como en otras culturas fueron usadas para actividades cotidianas como la agricultura.

Así como en la antigua América, diversas civilizaciones desarrollaron sus propios intereses y descubrimientos en el cielo, yendo desde la astrometría hasta la especulación en la composición de los astros. Leverington (2013) ofrece un reciente y completo texto que incorpora la historia de la astronomía desde sus orígenes hasta la actualidad.

Posteriormente, gracias al desarrollo de los telescopios y la teoría de gravitación universal (ambos en el siglo XVII), fue posible descubrir a Urano, Neptuno y Plutón; satélites de los demás planetas, así como el Cinturón de asteroides localizado entre Marte y Júpiter, completando lo que es (o era) comúnmente conocido como el sistema solar, es decir, el Sol, 9 planetas, sus correspondientes satélites, y un cinturón de asteroides. Esta noción del sistema solar era completa hasta el último lustro del siglo pasado, cuando se dio otro notable avance en el área. Debido a los avances en la astronomía observacional, la tecnología de cómputo y un creciente interés en el tema, fue posible desarrollar observaciones y modelos que muestran que hay más objetos en las regiones externas del sistema solar. En 1992 se descubrió un objeto situado a 43.8 Unidades Astronómicas (AU ²) del Sol ³. Hoy se sabe que más allá de Neptuno hay una gran cantidad de objetos de diferentes tamaños y características, lo cuál ha llevado a la necesidad de redefinir qué es un planeta y a crear la definición de *planeta enano*,

¹Periodo que abarcó de 2.5Ma a 10ka a.C.

²1 unidad astronómica es la distancia media entre el Sol y la Tierra. A lo largo de éste trabajo, las siglas que se utilicen serán respecto al nombre en inglés correspondiente, ésto para tener consistencia con las referencias utilizadas.

³Nótese que Plutón se encuentra a 39.5 AU de nuestra estrella.

que según la Unión Astronómica Internacional es un cuerpo celeste que gira alrededor del Sol, tiene suficiente masa para ser aproximadamente redondo, no ha limpiado por completo el material de su órbita y no es un satélite. Plutón ha quedado en esta última categoría. El Cinturón de asteroides también ha perdido protagonismo, pues ahora se sabe que hay un segundo cinturón localizado entre 39 y 50 AU aproximadamente, denominado Cinturón de Kuiper, que está formado principalmente por cometas y algunos asteroides. Aún más allá de este segundo cinturón, se teoriza la existencia de la Nube de Oort, la cuál está constituida en su gran mayoría por cometas y envuelve al resto del sistema solar en un cascarón esférico que va de 5000 a 100000AU aproximadamente, siendo la fuente de algunos de los cometas que nos visitan.

A grandes rasgos las líneas anteriores describen lo que se ha descubierto en las últimas décadas acerca a nuestro sistema solar. Además, hace sólo 20 años el Sol era la única estrella que podía afirmarse con certeza que contiene planetas girando a su alrededor. Sin embargo en 1994 se descubrió el primer sistema planetario extrasolar conformado por 3 cuerpos orbitando una estrella de neutrones (Wolszczan 1994). Este hecho cambió sin lugar a dudas el curso de la astronomía moderna, abriendo una puerta anteriormente sólo contemplada por un par de ambiciosos proyectos, el ensayo de ciencia ficción y un gran número de hipótesis infundadas, es decir, a la Astrobiología. Al día de hoy se conocen más de 1700 planetas (NASA 2014) y casi 4200 candidatos (estrellas que presentan anomalía en el flujo observado, tentativamente provocado por uno o más planetas orbitando alrededor de ésta), cifras que continúan creciendo. Además, existe un gran número de proyectos observacionales y teóricos con una enorme variedad de enfoques, todos relacionados con sistemas planetarios. En la Fig.1 se muestran los planetas confirmados hasta hoy, graficando la masa contra el periodo orbital de cada uno de ellos.

En éste trabajo nos proponemos estudiar cómo afecta el gas en la dinámica de los planetesimos que rodean un sistema planetario en una etapa temprana de su evolución. A continuación, describimos los antecedentes sobre los cuáles construimos nuestro modelo.

1.1. Discos protoplanetarios

La formación de discos en un proceso natural en el universo, encontrándose en las galaxias espirales y en múltiples procesos de acreción de material, tal como en estrellas binarias, agujeros negros y en diferentes etapas de estrellas jóvenes. La evolución del material a esta geometría es provocada por la conservación de momento angular. Como ejemplo podemos considerar una nube molecular con momento angular $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$, donde \mathbf{r} es el vector de distancia entre una parcela de gas y el centro de la nube, m la masa correspondiente a dicha parcela de gas y \mathbf{v} su velocidad.

Después de crearse una inestabilidad en la nube molecular, el material en la nube se contrae en torno a un punto, acretando gran cantidad del material y formando la estrella. Durante la contracción, la distancia de cada parcela de gas al punto de contracción disminuye como función del tiempo; a consecuencia de ésto, para conservar la cantidad \mathbf{L} es

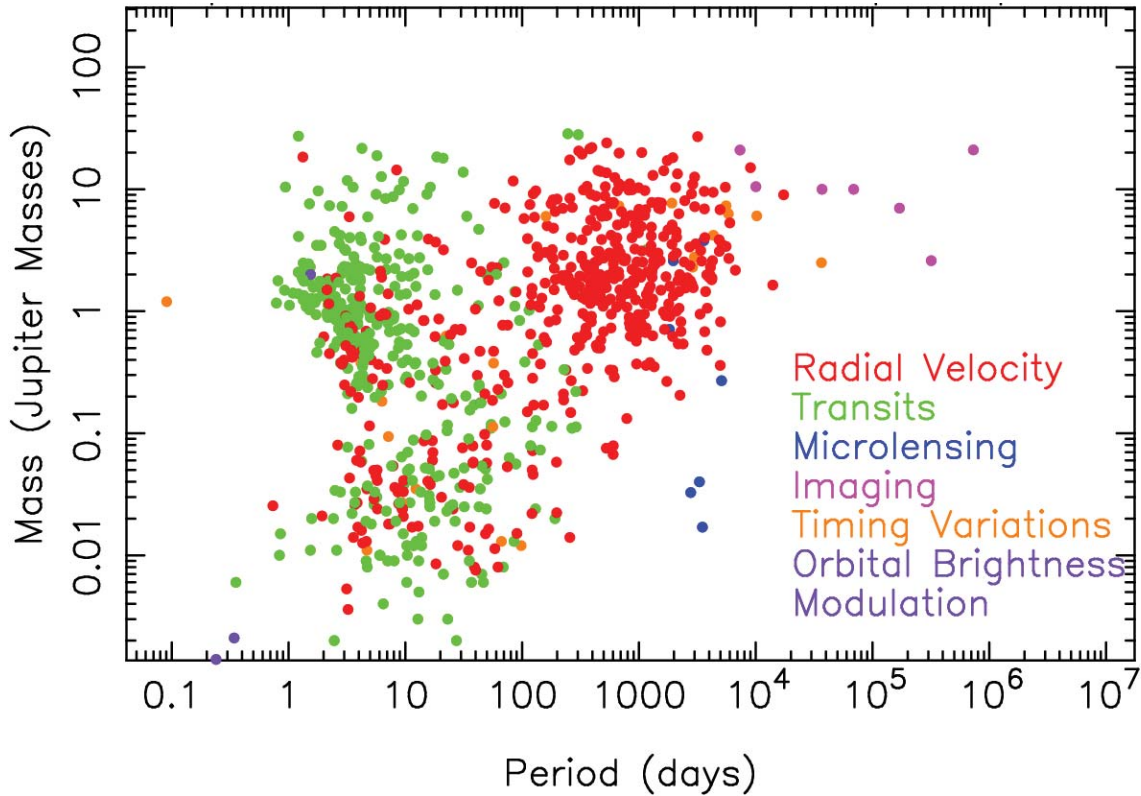


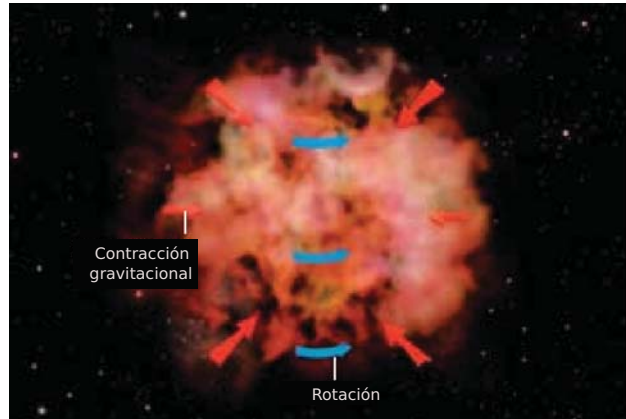
Figura 1: Planetas confirmados hasta el momento. En el eje Y la masa expresada en masas de Júpiter, en X el periodo en días. El índice de color indica el método de descubrimiento, en el orden de las etiquetas: Velocidad radial, tránsitos, micro lentes gravitacionales, imagen directa, variación temporal, y modulación del brillo orbital. El lector interesado puede consultar Wright y Gaudi (2013) para una descripción y comparación de éstos métodos a excepción del último, el cuál es descrito en Charpinet et al. (2011). Figura de: NASA (2014)

necesario que la velocidad del gas aumente. La aceleración centrífuga provoca que la tasa de contracción sea menor en la dirección perpendicular al eje de rotación, por lo tanto el gas que está en la dirección del eje cae más rápido; como existe una simetría en la nube, el gas que cae en direcciones opuestas choca en el plano geométrico que es perpendicular al eje de rotación e intersecta a la estrella. El gas que choca en esta región es el que comienza a formar el disco (Terebey et al. 1984). En adición al proceso gravitacional que se ha descrito, la viscosidad intrínseca del disco produce esfuerzos que contribuyen a transportar momento angular. Estos dos fenómenos provocan que el material en decaimiento que no es acretado por la estrella forme un disco en el plano mencionado, por lo tanto el gas en esta región gana parte del ímpetu y como consecuencia se extiende bidimensionalmente hasta ser frenado por equilibrio dinámico, una estrella secundaria o ser removido por fotoevaporación (Dullemond et al. 2007 y las referencias ahí citadas). El proceso anteriormente descrito se ilustra de manera general en la Fig.2 y se basa en un esquema de formación de una estrella a partir de una nube molecular; sistemas multiestelares con diferentes morfologías pueden ser formados, para la consulta de éstos sistemas, ver por ejemplo Matsumoto y Hanawa (2003).

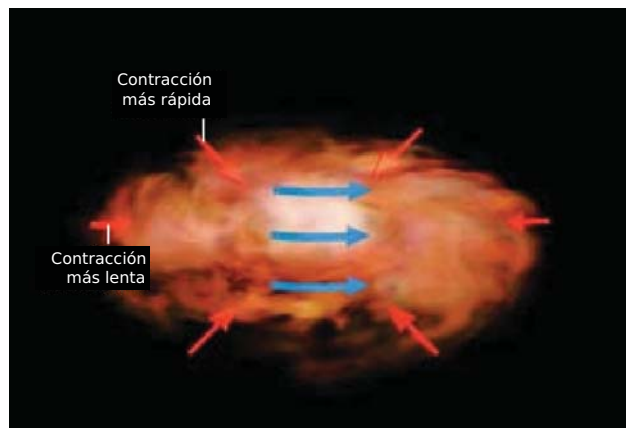
Basándose en el análisis de la distribución espectral de energía (SED) observada, los sistemas formados por estrellas jóvenes y los discos asociados a ellas suelen clasificarse en 4 etapas. Cada etapa es interpretada como un estado evolutivo del sistema y a continuación se mencionan sus principales características:

- Clase 0: Inmediatamente después del colapso gravitacional. La masa del disco es muy pequeña comparada con la estelar y más aún comparada con la envolvente.
- Clase I: La masa del disco es comparable con la de la envolvente y la estrella tiene la mayor cantidad de materia.
- Clase II: Ésta fase comienza alrededor de 0.5Ma después de que la estrella se ha formado. La envolvente se ha dispersado y comienza la formación de planetas. Aquí se hace la distinción entre un disco protoestelar y uno protoplanetario. Los procesos físicos que dominan la evolución del disco son la acreción de material hacia la estrella, fotoevaporación, aglomeración de material e interacciones dinámicas con compañeros estelares o subestelares (Williams y Cieza 2011 - W&C11 de aquí en adelante-). La masa del disco es aproximadamente el 1% de la estelar, mientras que la masa de la envolvente es casi nula. Las estrellas tipo T Tauri clásica suelen ubicarse en esta etapa.
- Clase III: La acreción hacia la estrella es muy baja o nula. Para ésta etapa, la masa del disco es mucho menor al 1% de la masa estelar. Fase caracterizada por las nombradas T-Tauri de baja emisión de línea.

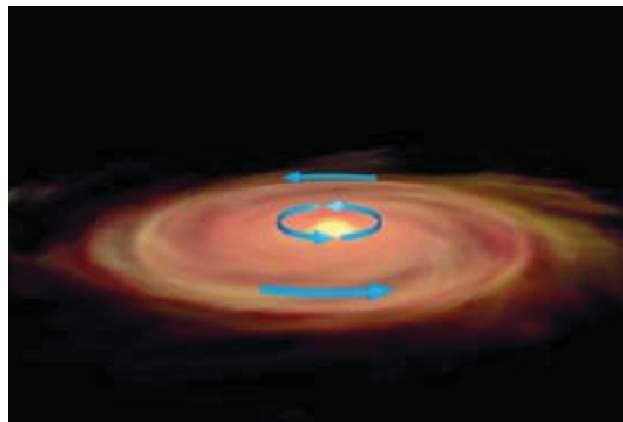
Particularmente, este trabajo se enfoca en los recientemente definidos Discos en Transición (TD), una clase de objetos que ofrece nuevos panoramas en el entendimiento de la formación de sistemas planetarios, tanto del nuestro como de los extrasolares. En la Sec.1.2 se dará una introducción a los TD.



(a)



(b)



(c)

Figura 2: (a) Nube de gas interestelar rotando lentamente en torno a su eje y contrayéndose a causa de su propia gravedad. La velocidad de rotación incrementa al contraerse la nube. (b) El gas en el plano ecuatorial se mueve hacia dentro más lentamente pues la rotación comienza a equilibrar a la gravedad. El gas por encima y por debajo del disco cae hacia dentro mucho más rápido. Figura modificada de Blaes (2004).

1.1.1. Radios

Teóricamente, la escala de tamaño de un disco está dada por el radio centrífugo (Terebey et al. 1984):

$$R_c \propto \Omega^2 t^3, \quad (1)$$

donde Ω es la velocidad angular del núcleo de la nube molecular durante el colapso y t el tiempo de caída del material. Basu (1998) sugiere que ésta relación difiere para nubes suficientemente magnetizadas y debe ser sustituida por: $R_c \simeq \left(\frac{\Omega_b}{B_{\text{ref}}}\right)^2 m$, donde Ω_b y B_{ref} son la frecuencia angular y el campo magnético que caracterizan el entorno de estudio respectivamente, mientras que m es la masa encapsulada por la nube.

Las estimaciones observacionales de R_c se encuentran entre 14 y 200 AU (ver Hughes et al. 2008; Andrews et al. 2009, 2010; Isella et al. 2009). La variación en éste radio característico es amplia, sin embargo, es de suponerse que las condiciones físicas difieran de una nube a otra, argumento que es respaldado en el estudio de Goodman et al. (1993), donde analizan un total de 43 núcleos nebulares, reportando una extensa variación en las tasas de rotación y en los tiempos de caída del gas. Por lo tanto, al haber una gran variedad en los parámetros de las nubes, podemos esperar que haya discos con variedad en sus características, siendo el radio una de ellas, ésto tomando en cuenta sólo la nube que les dio origen, ya que los procesos evolutivos en el disco pueden generar otras variaciones. Aunado a ésto, la observación directa de los PDs no es tarea sencilla debido a la baja emisión que presentan. En algunos casos es posible detectarlos por el contraste que presentan respecto a la emisión HII de su entorno o por la fotoevaporación por parte de la estrella en sus superficies (W&C11). En los últimos años, las observaciones interferométricas y la capacidad de producir imágenes directas de PDs han impulsado el análisis de la estructura del disco. Eisner (2014) ofrece una breve revisión de interferometría infraroja, destacando el potencial actual del método. Por otro lado, utilizando interferometría submilimétrica e imágenes en el cercano infrarojo (además de datos en otras longitudes de onda) Carmona et al. (2014) presentan un innovador estudio que explica simultáneamente las observaciones de gas y polvo de un TD.

1.1.2. Masas

No es factible hacer mediciones directas de la masa de un disco, ya que la mayor parte está contenida en forma de hidrógeno molecular, el cuál emite en los rangos ultravioleta e infrarojo. El primer rango sólo provee información de la región interna del disco, mientras que las emisiones en el infrarojo están asociadas solo a determinadas regiones externas y son muy tenues (Najita et al. 2007; Williams y Cieza 2011). Por lo anterior las observaciones de H_2 no brindan información del disco en su totalidad, no obstante, es posible realizar estimaciones de la masa total a partir de observaciones del polvo en el milimétrico y el submilimétrico, ya que a excepción de las regiones más cercanas a la estrella, el material suele ser ópticamente delgado, entonces puede emplearse la Ec. (2), sin embargo hay indicadores de que ésta

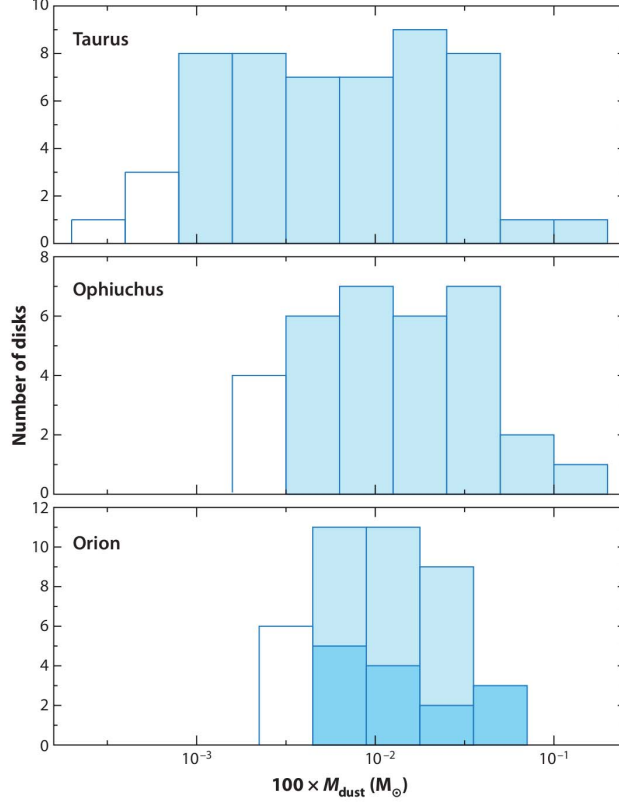


Figura 3: Frecuencia de masas observada en discos protoplanetarios en las regiones de formación estelar Tauro, Ofiucos y Orión. Se supone un tamaño máximo de las partículas de 1mm, temperatura de 20K y razón de gas a polvo de 100. Las barras coloreadas indican completitud en la medición milimétrica, las más oscuras representan los discos en Orión con distancias proyectadas mayores a 0.3 pc desde la estrella θ^1 Ori C en el cúmulo del Trapecio. Imagen obtenida de W&C11.

cantidad se encuentra subestimada (W&C11):

$$M(\text{gas} + \text{polvo}) = \frac{F_\nu d^2}{k_\nu B_\nu(T)}, \quad (2)$$

donde ν es la frecuencia de observación, F_ν es el flujo observado, d la distancia a la fuente, B_ν es la función de Planck dependiente de la temperatura y k_ν es la opacidad:

$$k_\nu = 0.1 \left(\frac{\nu}{10^{12} \text{Hz}} \right)^\beta \text{ cm}^2 \text{ g}^{-1}. \quad (3)$$

El exponente β (≈ 1) de la ley de potencias contiene información acerca de la distribución y la composición de los granos de polvo. La ecuación anterior es dependiente de la razón gas a polvo aceptada, en éste caso se considera una razón de 100:1 como es comúnmente asumido. La Fig. 3 muestra la distribución de masas de PDs observada en las regiones de formación estelar Tauro, Ofiucos y Orión, que han sido las más estudiadas a la fecha.

1.1.3. Perfil de densidad

Una imagen con buena resolución en el submilimétrico también es útil para encontrar la distribución de la masa a lo largo del disco. Existen diferentes modelos para esta cantidad, algunos siguen un perfil dado por una ley de potencias simple: $\Sigma \propto R^{-m}$, donde R es la distancia radial a la estrella en AU y m suele variar entre 0 y 1. Estas leyes de potencia suelen ser válidas dentro del radio determinado por la Ec.(1). Otro tipo de modelos proponen una estructura “cónica”, donde la dependencia en el radio es exponencial:

$$\Sigma(R) = (2 - \gamma) \frac{M_d}{2\pi R_c^2} \left(\frac{R}{R_c} \right)^{-\gamma} e^{-\left(\frac{R}{R_c}\right)^{2-\gamma}}. \quad (4)$$

Aquí, γ es un parámetro asociado a la viscosidad en el disco (W&C11).

Ambas clases de modelos ajustan a diferentes observaciones, coincidiendo en algunas de ellas, ya que la Ec.(4) se reduce a una ley de potencias simple para $R \ll R_c$. Un caso interesante es el tratado por Hughes et al. (2008), donde explican la divergencia observada previamente entre el tamaño de discos calculados a partir de datos en el submilimétrico del polvo y del gas respectivamente, divergencia que desaparece al utilizar un perfil cónico.

Hasta ahora no se ha encontrado un valor característico de la densidad superficial en un disco protoplanetario. Los valores obtenidos a partir de las observaciones son dependientes del modelo utilizado, como ejemplo puede tomarse el trabajo de Andrews et al. (2009) donde obtienen valores para Σ entre 0.05 y 300gcm⁻², mientras que en Isella et al. (2009) obtienen valores entre 0.01 y 1000gcm⁻².

Un factor que es necesario tomar en cuenta es la dificultad de caracterizar un disco en regiones cerca de la estrella huésped, debido a la resolución de los telescopios (c.f. 0".3 \approx 40AU en Andrews et al. 2009).

Uno de los modelos de gas más aceptados es el de la nebulosa de masa mínima, generado por Weidenschilling (1977) y Hayashi (1981), sin embargo es importante notar que es un modelo heurístico. Por otro lado, los modelos de acreción viscosa, tal como el de Hartmann et al. (1998) que da origen a Ec.(4) son modelos sustentados con procesos físicos y además ajustan observaciones. Ambos casos se retomarán en el Cap.3.

La incógnita respecto a las densidades incrementa al considerar aspectos como la gran cantidad de material necesaria para formar sistemas de planetas gigantes, como por ejemplo el sistema de GJ676A (Anglada-Escudé y Tuomi 2012), éstos casos requerirían densidades mucho mayores que las típicamente aceptadas.

1.1.4. Composición

Como fue mencionado previamente, el mayor componente de un disco protoplanetario es H₂, se cree que el siguiente componente en abundancia es el CO (Bergin 2011). Además de éstos dos gases moleculares, las observaciones muestran distintas líneas de emisión, como

OH, H₂O, Ne II, etc (W&C11).

Comúnmente se asume que en un disco protoplanetario la razón de gas a polvo es la misma que en el medio interestelar, i.e. 100:1. Es posible que en éstos objetos las concentraciones de polvo sean mayores, sin embargo algunas observaciones sugieren para algunos casos concentraciones incluso menores a 200:1 (e.g. Parkin et al. 2012). Ahondar la composición de discos circunestelares está más allá del alcance de este trabajo, para una mayor referencia se sugiere la revisión de las referencias mencionadas.

1.1.5. Evolución

Diferentes procesos físicos influyen en la evolución de un disco circunestelar, de ellos, la acreción por transporte viscoso es de los mejor estudiados, sin embargo los modelos de evolución basados exclusivamente en viscosidad son consistentes pero no suficientes para reproducir las observaciones (W&C11). Son distintos los caminos que un disco puede seguir, aún así es posible bosquejar la evolución de un disco típico, tal como se resume de W&C11: Durante la fase de disco protoplanetario existe una notable acreción del disco a la estrella, lo cuál provoca pérdida de masa en el primero; los fotones del lejano ultravioleta evaporan la parte externa del disco, limitando la expansión viscosa y contribuyendo a establecer un límite espacial. En ésta misma etapa los granos de polvo crecen y se acumulan en el plano medio del disco, en donde pueden continuar creciendo para formar planetésimos y planetas. Debido al transporte de material, la masa del disco y por lo tanto la tasa de acreción disminuyen, entonces la tasa de fotoevaporación se vuelve mayor con respecto a la de acreción y el disco interno pierde más material a causa de la radiación estelar que el recibido por transporte viscoso del disco externo; como consecuencia se crea un agujero en torno a la estrella, aquí el disco entra en la fase de transición entre un objeto de clase II y clase III cuyos procesos no están bien comprendidos (ver la siguiente sección). Típicamente se cree que en este punto los procesos radiativos dominan la evolución del gas y las partículas de polvo, evaporando al primero y transportando/evaporando al segundo. El resultado de éste proceso se conoce como “disco de escombros” (“debris disk” en inglés), un objeto con una cantidad mínima o nula de gas y con partículas sólidas que pueden incluir desde el polvo hasta los planetas. Éste disco es de baja masa y no siempre es posible detectarlo.

La escala de tiempo para los procesos anteriores no está bien acotada ya que se observan casos en los que el gas se ha disipado por completo en tiempos que van aproximadamente desde cientos de miles hasta millones de años. Hay que notar que el desarrollo de los discos circunestelares no sólo depende de sus procesos internos, también parece tener dependencia en las propiedades de su estrella huésped (Calvet y D’Alessio 2011; Clark 2011) y de sistemas vecinos en caso de existir, los cuales acentúan la interacción dinámica y radiativa (Garcia et al. 2011).

Una vez que los planetas se han formado, diferentes procesos dinámicos pueden llevarse a cabo. Para el caso de nuestro sistema solar, se cree que durante sus últimas etapas de formación, es decir, cuando su arquitectura final fue establecida, hubo una reestructuración,

implicando la migración de Júpiter a una órbita con semi eje menor, y la migración a órbitas mayores de Saturno, Urano y Neptuno; procesos generados por la interacción con un disco masivo de planetésimos localizados originalmente más allá de la órbita de Neptuno y que eventualmente fueron dispersados por los planetas.

Malhotra (1993b) desarrolló la idea sugerida por Fernandez y Ip (1984) de que la interacción de los planetas gigantes con los planetésimos localizados en un disco externo, intercambiarían momento angular de manera eficiente, dispersando a los planetésimos a la nube de Oort o eyectándolos del sistema. Éste proceso conduce a una variación significativa en la configuración orbital del sistema solar externo. Simulaciones numéricas llevadas a cabo por diferentes autores (Hahn y Malhotra 1999; Gomes et al. 2004, etc.) indican que durante ésta fase, Júpiter migró hacia adentro una fracción de AU, mientras que Saturno, Urano y Neptuno migran hacia afuera cambiando su semi eje mayor en un $\sim 10, 50$ y 100% respectivamente.

Una variante al modelo anterior de migración fue presentada por Gomes et al. (2005) y Tsiganis et al. (2005) como parte del que ahora es conocido como modelo de Niza para la evolución temprana del sistema solar. En este escenario, la configuración inicial de los planetas es considerablemente inestable, con Saturno cruzando la resonancia 2:1 con Júpiter. Más recientemente se propuso una revisión de este modelo por las siguientes razones. En primer término, simulaciones numéricas indican que cuando los protoplanetas están inmersos en el disco gaseoso, la migración puede llevarlos a una interacción resonante (Masset y Snellgrove 2001); posteriormente se determinó que la configuración inicial de los planetas externos al momento que el gas es dispersado o eliminado, debe ser estable y multiresonante, como se muestra en el trabajo de Morbidelli et al. (2007). En segundo término, como resultado de la configuración multiresonante de los planetas, la dinámica entre éstos y los planetésimos debe ser nuevamente estudiada. Como último punto, esta revisión considera la interacción entre los planetésimos, aspecto ausente en el modelo original. A esta revisión del modelo se le conoce como modelo de Niza versión 2.

Independientemente del escenario de migración, existe una zona donde el campo gravitacional del planeta/embrión es lo suficientemente fuerte para acretar los cuerpos menores a su alrededor. Se estima que esta zona de acreción se extiende $3-4R_{\text{Hill}}$ al interior y exterior de la órbita del planeta (Lissauer 1987), medida desde el centro del mismo. En éste trabajo se empleará el valor $3.5R_{\text{Hill}}$ que es lo típicamente utilizado.

Los dos párrafos anteriores se refieren mayormente a la migración provocada por la interacción planeta-planetésimos, otro caso estudiado es la migración provocada por la interacción del planeta con la componente gaseosa del disco (e.g. Masset y Snellgrove 2001). Éste fenómeno también involucra intercambio de momento angular entre los cuerpos y el gas, lo que provoca la evolución de la órbita del planeta. Cuando éste es lo suficientemente masivo (aproximadamente $10^{-4}M_*$ para un disco típico), el momento angular del planeta domina localmente el flujo viscoso, como consecuencia se forma una abertura anular en la región del planeta. Una muestra de éste fenómeno se ilustra en la Fig.4. Las bases de los procesos men-

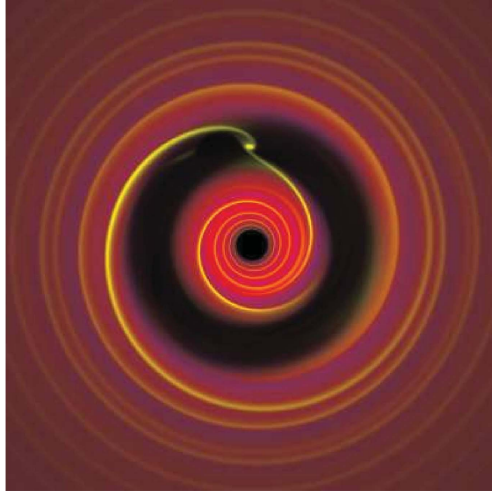


Figura 4: Simulación de la interacción planeta-disco gaseoso en el régimen de la migración tipo II, en donde el planeta es lo suficientemente masivo para abrir una brecha en el disco. Nótese la presencia de líneas de flujo de gas que inciden en la región de apertura. Figura tomada de Armitage (2007).

cionados pueden encontrarse en Armitage (2007), que ofrece un resumen sobre la formación y evolución temprana de sistemas planetarios.

Con respecto a discos protoplanetarios (PD), numerar la cantidad observada hasta ahora sería infructuoso e inexacto, sin embargo cabe destacar la importancia de equipos como *ISO*, *Spitzer*, el telescopio espacial *Hubble* y diversos telescopios (principalmente submilimétricos e infrarrojos) para la detección y caracterización de dichos discos. En el futuro próximo, la tecnología en desarrollo para la observación directa de planetas extrasolares y PDs, continuará con el acelerado desarrollo de la astrofísica planetaria. Existen múltiples proyectos diseñados para tales fines, quizás los más próximos a entrar en funcionamiento sean *ALMA* (en su potencial completo), *CCAT* y el Telescopio Espacial James Webb. En particular, el equipo de *ALMA* anuncia que tendrá la capacidad de observar en regiones ópticamente gruesas de discos protoplanetarios, disminuyendo la incertidumbre respecto a estructura, masa y evolución tratada en este capítulo (ESO/NAOJ/NRAO 2014, Testi 2010). Con relación a esto, *ALMA* ha comenzado a realizar observaciones que se destacan sobre las realizadas previamente, por ejemplo, en Dutrey et al. (2014) se reporta un sistema binario con dos discos y un flujo de gas yendo del externo hacia el interno. Esta observación es consistente con simulaciones numéricas y podría ser un gran paso en los modelos de formación planetaria y evolución de discos. Otro importante ejemplo está dado por la observación del sistema HL Tau, mostrada en un comunicado de prensa el pasado noviembre (ALMA NRAO/ESO/NAOJ), la imagen asociada se muestra y discute en la siguiente sección.

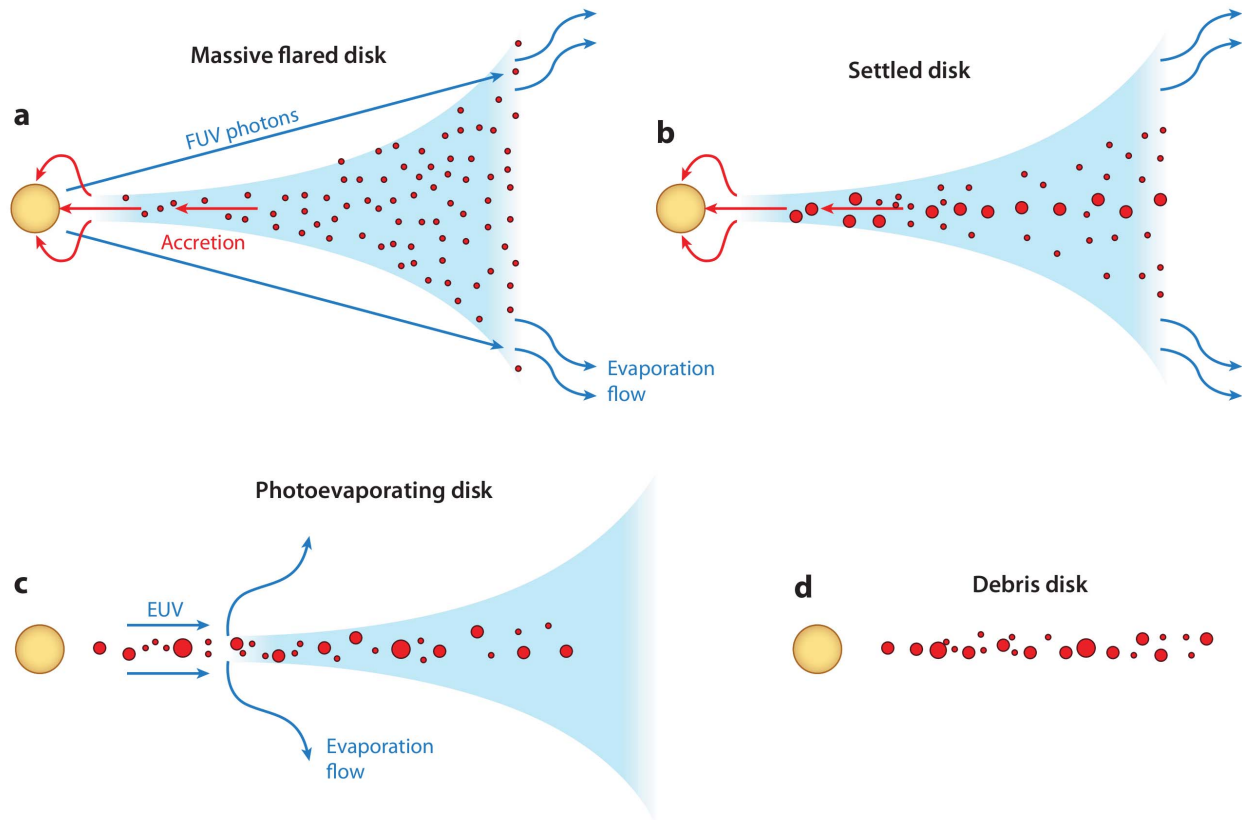


Figura 5: Evolución típica de un disco circunestelar. a) Pérdida de masa por acreción a la estrella; fotones en el ultravioleta lejano (FUV) evaporan la parte externa del disco. b) Al mismo tiempo los granos de polvo crecen y se asientan en el plano medio del disco. c) Una vez que la masa y la tasa de acreción disminuyen, la fotoevaporación inducida por el extremo ultravioleta (EUV) se vuelve importante, el disco externo no es capaz de realimentar el disco interno, por lo que éste se disipa, la acreción se detiene y el resto del disco se disipa de adentro hacia afuera. d) Los granos son removidos por presión de radiación y por arrastre de Poynting-Robertson; sólo prevalece polvo grande y partículas mayores. El resultado, un disco de “escombros”. Figura extraída de W&C11.

1.2. Discos en Transición

1.2.1. Introducción

En 1989, utilizando el telescopio IRAS, Strom et al. (1989) identificaron algunos discos circunestelares con un importante exceso de emisión en el infrarrojo medio y lejano, rango que corresponde a polvo frío y por tanto lejano a la estrella huésped. Éste resultado se interpretó como un agujero menor a 1AU en radio. En el artículo mencionado se usa por primera vez el término disco en *transición* y se especula que los espectros observados corresponden a una etapa evolutiva entre un disco masivo y ópticamente grueso a uno tenue de baja masa, y por tanto posterior a la formación planetaria. En 2004, durante una campaña de observación de discos en torno a estrellas del tipo T Tauri clásica (Forrest et al. 2004), se detectó una peculiaridad en uno de los objetos: el sistema CoKu Tau/4 carece de una región ópticamente gruesa en la región interna del disco y no muestra señales de acreción de material. Su SED corresponde a la de un objeto de clase II, sin embargo ésta estrella no es una estrella T Tauri clásica. Para explicar éstas discrepancias los autores contemplan la posibilidad de un crecimiento de los granos de polvo internos (hasta 10 AU de la estrella) a un tamaño que imposibilita detectarlos. Con éstas características, la estrella Coku Tau/4 (y su disco) podría ser un objeto en un estado evolutivo entre una T Tauri clásica y una T Tauri de línea débil.

Posteriormente, en Calvet et al. (2005) se presentan los casos de DM Tau y GM Aur, que cuentan con características similares a Coku Tau/4, sin embargo estos objetos sí muestran acreción de material. Por un lado el disco de DM Tau presenta un agujero a 3AU, por otro lado, proponen que el previamente estudiado GM Aur posee una abertura en el disco que va desde 5 hasta 24AU aproximadamente, brecha posiblemente creada por uno o más planetas.

El descubrimiento y estudio de éstos objetos se ha fortalecido en los últimos años (ver por ejemplo Muzerolle et al. (2010); Sicilia-Aguilar et al. (2010); Espaillat et al. (2012, 2013). En Kim et al. (2013) se presenta una muestra de 105 TDs y sus características físicas, que hasta ahora constituye la mayor muestra de TDs.

Los TDs son de peculiar interés, ya que ofrecen una posibilidad esencialmente descartada anteriormente: los planetas de un sistema pueden coexistir con el gas⁴. La existencia de este gas se infiere a partir de análisis como el de los modelos que se mencionan a continuación o el uso de la Ec.(2), ya que para este tipo de objetos se hace la suposición de que la presencia de polvo involucra la existencia de gas en una cantidad mayor.

1.2.2. Modelado de la distribución espectral de energía

Para dar una explicación a las peculiares características de éstos discos, se han analizado sus SEDs utilizando modelos de discos ópticamente gruesos iluminados por una estrella central (ver por ejemplo Espaillat et al. 2010, 2012). El uso de éstos modelos consiste en tomar la SED observada, constituida por la suma de la emisión de la fotosfera estelar más

⁴Ésta suposición era conveniente para los modelos numéricos pues resulta mucho más sencillo hacer estudios dinámicos libres de gas.

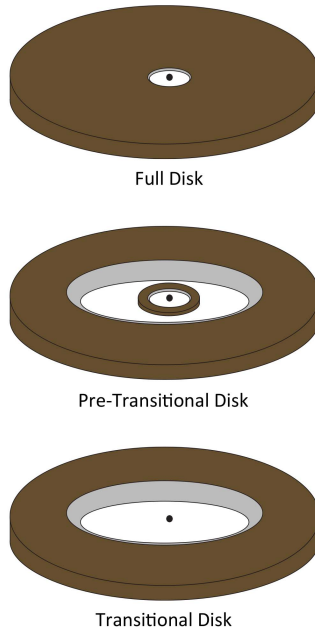


Figura 6: Representación esquemática de un disco protoplanetario completo, perteneciente a una estrella de clase II (superior), un disco en pretransición (medio) y uno en transición (inferior).

la emisión del disco, y por medio de diferentes parámetros físicos de éste, se modela una estructura que reproduzca la SED para el sistema en consideración. De esta manera ha sido posible explicar las características de los TD y puntualizar que esencialmente se pueden clasificar en 2 tipos⁵ (Kim et al. 2013):

- Discos en pretransición (PTD), tienen un exceso de emisión en torno a $5 - 8 \mu\text{m}$ aproximadamente, que es menor o similar a la emisión media del disco, además de un fuerte exceso a longitudes de onda mayor. El exceso moderado en el cercano infrarrojo es muestra de un disco interno, por lo que éstos objetos están constituidos por un disco con una abertura que divide el disco en dos secciones (ver Fig.7(a)).
- Los discos en transición clásicos (CTD), son aquellos que presentan un muy ligero exceso de emisión entre 1 y $2 \mu\text{m}$ y un fuerte exceso alrededor de $8-13 \mu\text{m}$, el cuál iguala o excede la media del espectro. Ésta emisión representa un disco con un agujero en torno a la estrella (ver Fig.7(b)).

En el desarrollo de nuestro modelo nos referiremos exclusivamente a los CTDs y llamaremos “radio de truncamiento” a la distancia respecto a la estrella en la cuál inicia el disco.

La estructura de los PTDs y TDs es algo que aún no está completamente definido, dado que existen limitaciones observacionales como las mencionadas en la Sec.1.1 y los modelos

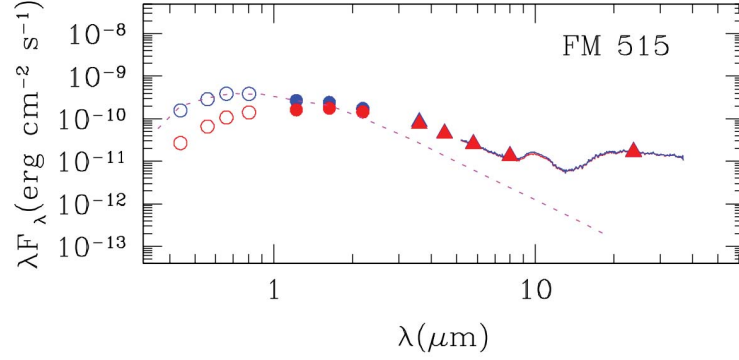
⁵Se recomienda prestar atención a la nomenclatura en la revisión bibliográfica, ya que debido al reciente descubrimiento de estos objetos aún no existe una nomenclatura generalizada.

teóricos son aún incipientes. Quizás la interrogante más fuerte desde el punto de vista observacional es que no se ha comprobado que los espacios vacíos observados estén realmente desprovistos de gas. Espaillat et al. (2012) menciona que simulaciones hidrodinámicas recientes muestran que las regiones internas son complejas, mientras que los modelos provenientes del análisis de la SEDs son muy simples, sin embargo éstos últimos están limitados por las capacidades observacionales actuales. Trabajos como el de Carmona et al. (2014) comienzan a proveer más información referente a la estructura del gas y polvo de manera conjunta. Cabe mencionar que los modelos observacionales referidos son adecuados para el presente trabajo, ya que ésta tesis representa la primera etapa de una investigación y es adecuado abordarla de una manera simplificada (ver Cap.3).

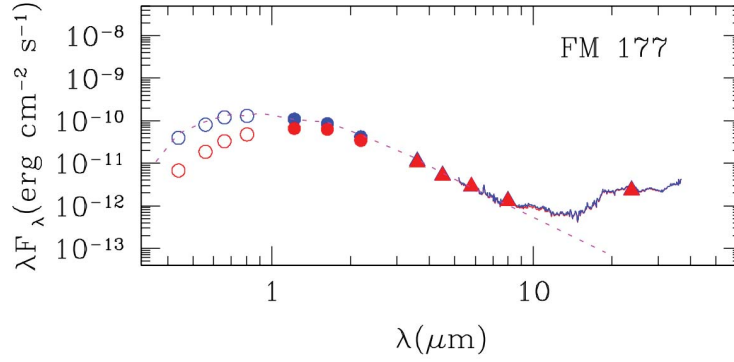
Desde su descubrimiento se especuló que los TD constituyen una fase de evolución entre un objeto de clase II y uno de clase III, ofreciendo como una posible explicación al hueco (o brecha en un PTD), la existencia de un objeto masivo además de la estrella que acreta el material del disco. Sea el objeto adicional un planeta(s) o un compañero subestelar, ésta opción ha sido objeto de múltiples estudios teóricos y se considera la explicación más factible al momento, ya que las características observadas pueden ser explicadas por los efectos dinámicos de la estrella con otro cuerpo (Kim et al. 2013; Crida et al. 2006; Artymowicz y Lubow 1994, etc.). En este contexto, uno de los trabajos más recientes es el estudio realizado por Dong et al. (2014), en el que utilizan simulaciones hidrodinámicas para explicar las observaciones del sistema HL Tau realizadas con *ALMA*, las cuales proveen una imagen directa que posiblemente sea una piedra angular en este ámbito, ya que muestra con gran definición un disco con múltiples anillos (PTD, mostrado en la Fig.8), consecuencia de un proceso de formación planetaria, ya que las simulaciones presentadas en Dong et al. (2014) reproducen la morfología observada por medio de la interacción entre planetas con masa inferior a la de Júpiter y un disco de gas con alta densidad superficial. Existen otras alternativas para explicar los TDs, como la fotoevaporación, la viscosidad variable del disco y el simple crecimiento de los granos de polvo; sin embargo, hasta ahora, individualmente cada uno de ellos es incapaz de explicar las observaciones (Kim et al. 2013).

Para mayor detalle sobre los discos en transición se sugiere consultar la revisión realizada por Espaillat et al. (2014).

En este trabajo analizamos los efectos de la componente gaseosa de un disco protoplanetario en la región del sistema solar externa a los planetas. Estudios previos hechos en presencia de un solo planeta sugieren que el gas puede incrementar la captura de los planetésimos en resonancias externas con el planeta. A continuación resumimos éstos resultados.



(a)



(b)

Figura 7: Distribución espectral de energía de los discos en FM 515 y FM 177. FM 155 es un disco en pretransición y FM 177 uno en transición. En rojo los flujos observados, en azul los desenrojecidos. La línea discontinua es la fotosfera. Los círculos huecos corresponden a espectrografía de mediciones terrestres en las bandas U-,B-,R-I- y L-; los círculos llenos provienen de fotometría en banda J-,H- y K- de 2MASS; los triángulos son fotometría de los instrumentos IRAC y MIPS del telescopio espacial *Spitzer*; las líneas continuas corresponden al instrumento IRS de *Spitzer*. En a) se observa que la emisión coincide con la de la fotosfera hasta $8\mu\text{m}$ aproximadamente, lo cuál indica que no hay nada interponiéndose entre el observador y la estrella (hueco), mientras que para longitudes de onda mayores, existe un emisor además de la fotosfera (disco). Puede observarse como en (b) existe una mayor emisión entre 2 y $8\mu\text{m}$ aprox. respecto a la fotosfera (disco interno), luego un decaimiento después del pico de silicatos en $10\mu\text{m}$ aprox. (abertura) y el exceso en el resto de la curva (disco externo). Figura modificada de Espaillat et al. (2012).

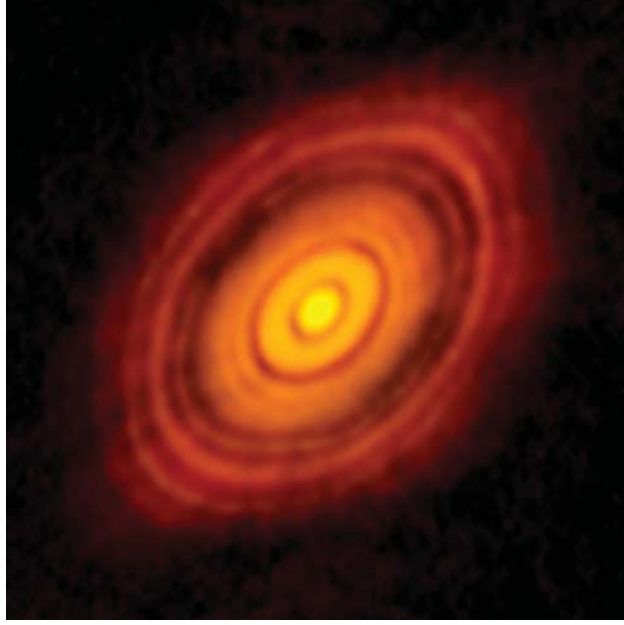


Figura 8: Imágen directa del disco protoplanetario HL TAU en la constelación de Tauro. La imágen fue observada con *ALMA* (ALMA NRAO/ESO/NAOJ) y constituye la imágen más detallada al momento de un proceso de formación planetaria.

1.3. Captura en resonancias

Cuando dos objetos α y β están ligados gravitacionalmente a un tercero y describen órbitas en torno a éste, se dice que α y β están en resonancia de movimiento medio (MMR) cuando sus periodos orbitales τ_α y τ_β mantienen la relación:

$$\frac{\tau_\alpha}{\tau_\beta} \approx \frac{j}{k}, \quad (5)$$

donde j y k son números enteros pequeños. Por medio de la tercera ley de Kepler, podemos transformar esta relación a una correspondiente al semi eje mayor de cada órbita:

$$\frac{a_\alpha}{a_\beta} \approx \left(\frac{j}{k}\right)^{2/3}, \quad (6)$$

donde a_α y a_β son el semi eje mayor del cuerpo α y β respectivamente. En función del valor que tomen j y k , pueden hacerse las siguientes clasificaciones:

- si $j < k \Rightarrow a_\alpha < a_\beta$ y se dice que α está en resonancia interna con β .
- si $j = k$ los objetos son coorbitales.
- si $j > k \Rightarrow a_\alpha > a_\beta$ y α está en resonancia externa con β .

La diferencia $|j - k|$ determina el orden de la resonancia, por ejemplo, si $\frac{a_\alpha}{a_\beta} \approx \left(\frac{2}{1}\right)^{2/3}$, α está en una resonancia externa de primer orden con β , y por cada 2 periodos orbitales de β , α realiza uno. En cuestión de notación, cuando un par de objetos están en resonancia de movimiento medio, es usual hacer referencia a la Ec.(6) diciendo que los objetos están en $j:k$ MMR.

Las resonancias son un fenómeno común en astronomía y particularmente en sistemas planetarios. Se sabe que en el sistema solar existen objetos resonantes con los diferentes planetas, tanto en regiones internas del sistema (e.g. el cinturón de asteroides) como en intermedias (e.g. el cinturón de Kuiper). Gallardo (2006) hace una compilación y estudio sistemático de las resonancias en nuestro sistema y evalúa la “fuerza” de cada una de ellas. Aunque existen diversos tipos de resonancias posibles en éstos sistemas, en éste trabajo nos concentramos exclusivamente en las resonancias de movimiento medio, por lo tanto cuando hablemos de resonancias, nos estaremos refiriendo a MMR.

La presencia de gas puede afectar en el comportamiento de las resonancias entre un planeta y un cuerpo menor, tal como apuntan Beauge y Ferraz-Mello (1993): “las partículas sólidas en la nebulosa solar siguen órbitas keplerianas, pero la presencia de gas causa que evolucionen. La excentricidad e inclinación son atenuadas, pero el efecto más importante es un decaimiento secular en el semi eje mayor. Debido a la presencia de un gradiente radial negativo de presión en el gas, la nube rota con una velocidad ligeramente menor a la velocidad kepleriana asociada, causando que las partículas experimenten una pérdida de energía y momento angular, incluso en una órbita circular. De cualquier modo, bajo ciertas condiciones iniciales, una resonancia entre un planetésimo y un planeta (o embrión) puede interceptar ésta órbita, entonces el planeta sede a la partícula la energía y momento absorbido por el arrastre.”

Weidenschilling y Davis (1985) (W&D85 de aquí en adelante) estudiaron el escenario en que un planeta continúa acreutando material: colocaron una partícula de prueba en órbita circular heliocéntrica exterior al planeta y resolvieron el problema de 3 cuerpos restringido utilizando un integrador Runge-Kutta de paso adaptivo; el gas es introducido asumiendo que ejerce una fuerza de arrastre proporcional al cuadrado de la velocidad relativa entre el gas y la partícula. Encontraron que durante el proceso el gas arrastra a los planetésimos a resonancias externas de bajo orden, hayando en diferentes casos que las partículas permanecen en una órbita estable, independientemente de la magnitud de la fuerza de arrastre. Puntualizan también que las resonancias son por mucho, más efectivas en presencia de gas, ya que éste lleva a las partículas a las órbitas de resonancia.

Malhotra (1993a) (M93a de aquí en adelante) realizó un estudio similar al mencionado anteriormente, considerando una dependencia lineal de la fuerza de arrastre en la velocidad relativa entre el gas y la partícula. Su trabajo establece diferentes límites para el proceso:

Para que una partícula sea capturada debe tener una excentricidad baja y un decaimiento adiabático, es decir, que la escala de tiempo en que su semi eje mayor decrece sea pequeña

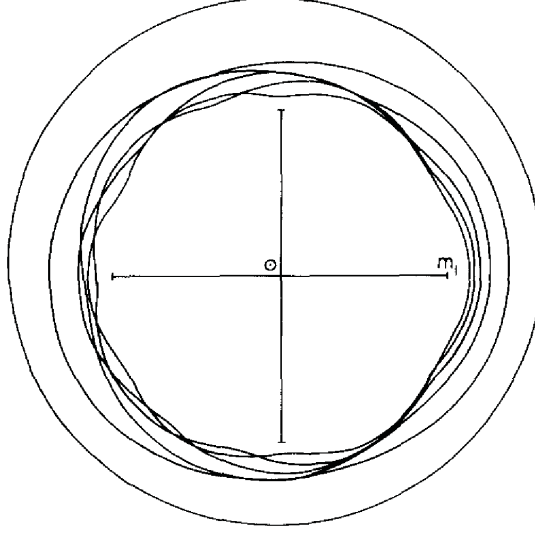


Figura 9: Órbitas de resonancias de primer orden con j desde 1 hasta 6. La distancia entre cada una disminuye al incrementar j , siendo la 2:1 la única que no se traslapa. En el marco de referencia que rota con el planeta, el Sol está en el centro, la posición del planeta está indicada con m_1 . Figura obtenida de W&D85.

comparada con su periodo orbital. M93a también coincide con W&D85 en que si a determinada distancia una partícula es demasiado pequeña para ser atrapada por una resonancia, la partícula seguirá siendo arrastrada hasta ser atrapada por una resonancia más fuerte (más cercana al planeta), sin embargo existe un límite, ya que conforme incrementa j en la Ec.(6), las resonancias se encuentran más cerca espacialmente una de la otra (ver Fig.9). Éste límite está definido por una resonancia crítica de primer orden:

$$jc \simeq 0.5\mu^{-2/7}, \quad (7)$$

donde μ es la masa reducida del planeta perturbador (M93a).

A partir de la resonancia $j_c + 1 : j_c$, cuyo valor depende sólo de la masa del sistema, la dinámica del planetésimo es caótica, por lo que M93a propone una definición de la zona de acreción de un planeta mediante j_c , de modo que una partícula que logre llegar a este punto podría ser acretada sin ser atrapada en resonancia. Ésta definición y el análisis de Lissauer (1987) previamente mencionado, conducen a tamaños diferentes de la zona de acreción, ambas dependientes de la masa del planeta perturbador.

Una vez que las partículas entran en resonancia pueden alcanzar un estado de equilibrio ($\dot{e} \approx \dot{a} \approx 0$), sin embargo también son vulnerables a ser expulsadas de la resonancia por la interacción con otras partículas. Estos efectos no son considerados en el presente estudio, por un lado no realizamos un análisis de los elementos orbitales de los objetos, por otro,

utilizamos partículas de prueba para representar a los planetésimos.

Como se mencionó, es necesario que el decaimiento de la partícula sea adiabático. Dado que el arrastre es inversamente proporcional al tamaño de la partícula, esta condición implica que existe un tamaño límite para que las partículas sean atrapadas. Para resonancias externas de orden 1, este tamaño está dado de acuerdo a las características físicas de la partícula, las condiciones de su entorno y la masa del planeta conforme a:

$$s_0 \simeq 7 \times 10^3 \text{cm} \left(\frac{a}{5AU} \right) \left(\frac{M_p}{M_\oplus} \right)^{-3/7} \left(\frac{\eta_M}{0.005} \right) \left(\frac{C_d}{0.5} \right) \left(\frac{\rho_{gas}}{10^{-10} \text{gcm}^{-3}} \right) \left(\frac{2 \text{gcm}^{-3}}{\rho} \right), \quad (8)$$

donde a es el semi eje mayor del planeta y M_p su masa; η_M establece la diferencia entre la velocidad del gas y la velocidad kepleriana a esa posición ⁶; C_d es el coeficiente de arrastre; ρ_{gas} la densidad local del gas y ρ la densidad de la partícula (M93a). En el Cap.4 se presenta una gráfica de la Ec.(8) para las condiciones de nuestro modelo.

⁶ $\mathbf{v}_{gas}(r) = (1 - \eta_M)\mathbf{v}_{kep}(r)$, el subíndice M indica que pertenece al análisis de M93a, dado que en éste trabajo se utilizará una definición diferente, la cuál se expresa en Ec.(27)

2. Objetivo

Una suposición importante de la mayoría de los estudios de migración planetaria inducida por planetésimos, tal como los descritos en la Sec.1.1.5, es la ausencia de una cantidad significativa de gas en el sistema para afectar la dinámica de los cuerpos sólidos, sin embargo creemos que ésto no es necesariamente el caso general. Por lo tanto, los objetivos de éste trabajo son:

- A través de simulaciones numéricas de la dinámica de planetésimos en la región externa del sistema solar, estudiar el efecto de un TD en esta población.
- Determinar las condiciones bajo las cuáles los planetésimos se atrapan en resonancia de movimiento medio como resultado del efecto del gas. Lo anterior explorando el tamaño del planetésimo y las propiedades del TD.

Desde el punto de vista teórico, trabajos como el de Weidenschilling y Davis (1985) y Malhotra (1993a) brindan un fuerte soporte a la idea aquí planteada. Por otro lado, las observaciones y análisis de los discos protoplanetarios en transición, sugieren la coexistencia de planetas y gas en un disco circunestelar (Espaillat et al. 2014). De modo que uniendo elementos observacionales y teóricos, la idea de que planetas, planetésimos y gas puedan coexistir e interactuar en una de las últimas fases evolutivas de un disco protoplanetario, parece una situación que vale la pena considerar a detalle.

Debido a que para representar a los planetésimos utilizamos partículas de prueba en nuestro análisis, no es posible establecer el efecto del proceso estudiado sobre los planetas, sin embargo, nuestros resultados sugieren que tal efecto sería importante y se discute en el Cap.7.

3. Metodología

El presente es un estudio numérico de la dinámica de planetésimos realizado en el contexto de un disco protoplanetario en transición clásico (CTD) en el sistema solar temprano. Para la elaboración de nuestro modelo hacemos dos suposiciones importantes acerca de los componentes sólido y gaseoso del disco:

- Asumimos que tanto el gas como los planetésimos solo existen a partir de un radio de truncamiento a determinada distancia de Sol (Sec.3.1).
- La evolución del componente gaseoso es independiente de la propia de las partículas.

En general, no se espera que el segundo punto se cumpla en la vecindad del planeta, donde la acreción de sólidos y la apertura de la brecha pueden tener un papel importante, sin embargo, como consecuencia de la primer suposición, podemos considerar la validez de la segunda.

Las suposiciones anteriores junto con las planteadas a lo largo de la presente sección brindan a nuestro modelo una simplicidad conveniente pero además necesaria para identificar correctamente cuáles son las variables a las que es sensible el sistema estudiado. Algunas de las suposiciones hechas podrían ser omitidas o tratadas con mayor rigor, sin embargo optamos por un modelo consistente, en el sentido de tratar con la misma rigidez a sus diferentes componentes.

En 3.2.1 y 3.2.2 se describen las condiciones del gas con el que trabajamos, mientras que en 3.3 se tratan las condiciones iniciales otorgadas a los cuerpos sólidos.

3.1. Truncamiento del disco

Como se mencionó en la Introducción, diferentes mecanismos pueden haber creado la región desprovista de material observada en los CTDs. Independientemente de cuál sea el proceso que origina el agujero, la característica principal de un CTD es que la distribución de material comienza (o reinicia en el caso de un PTD) a partir de un radio determinado. Entonces, para el propósito de nuestras simulaciones, nos parece razonable simplificar los resultados de estudios previos suponiendo que el gas tiene una densidad diferente de cero más allá de un radio de truncamiento, R_i . En cada una de las corridas, el valor utilizado de R_i es empleado tanto para la distribución de gas como la de sólidos. Para éste parámetro utilizamos 3 valores diferentes:

1. $R_N + 3.5R_{\text{Hill}} = 12.69 \text{ AU}$.
2. $R_N + 7.0R_{\text{Hill}} = 13.74 \text{ AU}$.
3. $R_N + 10.0R_{\text{Hill}} = 14.64 \text{ AU}$.

Donde R_N es la posición radial de Neptuno y $R_{\text{Hill}} = R_N \left(\frac{M_N}{3M_\odot} \right)^{1/3}$, con M_N la masa de Neptuno. De aquí en adelante, R_{Hill} , siempre será respecto a Neptuno, el planeta más externo.

$3.5R_{\text{Hill}}$ es la distancia de acreción típicamente utilizada para partículas sólidas, pero ya que nuestro modelo no contempla el mecanismo por el cuál se crea el agujero en el disco, es pertinente explorar otros valores (7 y $10R_{\text{Hill}}$). Es importante notar que las 3 cantidades están dentro de los tamaños de abertura en el disco de gas calculados por Crida et al. (2006), además de estar en el rango de valores de radio de truncamiento observados en los TD (Kim et al. 2013).

Una vez que se ha creado una brecha en la región planetaria (i.e. cuando existe un radio de truncamiento para la distribución de gas), una estimación que determina si la brecha se mantendrá abierta está dada por las ecuaciones (9) y (10),

$$t_{\text{cierre}} \sim \frac{(\Delta r)^2}{\nu}, \quad (9)$$

$$t_{\text{apertura}} \sim \frac{M_*^2}{\mathbf{m}^2 M_p^2 \Omega_p} \left(\frac{\Delta r}{R_p} \right)^2. \quad (10)$$

donde Δr es el ancho de la brecha, ν la viscosidad del disco, M_* es la masa estelar, M_p , Ω_p , R_p la masa, frecuencia angular y radio del planeta respectivamente; \mathbf{m} la resonancia de Lindblad de orden \mathbf{m} , tomada como $\mathbf{m} = R_p \Omega_p / C_s$, con C_s la velocidad del sonido. Se espera que para que un hueco en el disco permanezca abierto se cumpla $t_{\text{apertura}} \lesssim t_{\text{cierre}}$. Una exploración más detallada de este tipo de fenómenos puede hacerse con el uso de un hydrocódigo (e.g. Masset y Snellgrove (2001)). Según la estimación otorgada por las ecuaciones anteriores, el modelo de disco que se presenta a continuación posee demasiada viscosidad para mantenerse abierto, aspecto que se sugiere tener en consideración para estudios futuros, sin embargo, como se mencionó, en éste trabajo no consideramos el proceso de apertura (y en su defecto de cierre) de la brecha.

Externamente el disco sólido está acotado en 30AU , R_e , que es la cantidad utilizada en los estudios de Gomes et al. (2004). El disco de gas no tiene un límite externo, sin embargo decrece con la distancia y el tiempo (ver la siguiente sección). Cabe señalar que salvo para los planetésimos más pequeños que consideramos, no se espera que el efecto del gas en los cuerpos a mayor distancia sea muy significativo.

3.2. Modelo del disco gaseoso

3.2.1. Disco de acreción viscosa

Los modelos de discos protoplanetarios basados en el formalismo de discos de acreción viscosos fueron propuestos originalmente por Cameron (1978) y posteriormente desarrollados por diferentes autores (Ruden y Lin 1986 y Ruden y Pollack (1991), entre otros). Éste tipo

de modelos han sido usados en numerosos estudios de evolución de la nebulosa solar y cualitativamente reproducen muchas de las propiedades observadas de discos protoplanetarios, tal como la evolución de la tasa de acreción (Hartmann et al. 1998; Calvet et al. 2004), la existencia de fenómenos eruptivos (Kenyon 1999), etc.

En los modelos de acreción, la evolución del gas está determinada principalmente por la distribución de torcas viscosas y por la formulación de un coeficiente de viscosidad cinemática, ν , como función de las condiciones físicas del gas. En los modelos más sencillos, los cuáles están promediados verticalmente, son geoméricamente delgados y con simetría axial; la densidad superficial, Σ , está dada por la solución de la ecuación de difusión viscosa:

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} = \frac{3}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^{1/2} \frac{\partial}{\partial r} (r^{1/2} \nu \Sigma) \right], \quad (11)$$

donde t es tiempo y r la distancia en coordenadas cilíndricas centradas en el Sol.

Además de las condiciones iniciales y de frontera que deben ser especificadas para resolver ésta ecuación, se mencionó que debe contarse con una prescripción para la viscosidad. La elección más común es la relación de Shakura y Sunyaev (1973):

$$\nu = \alpha_{ss} C_s H, \quad (12)$$

donde C_s es la velocidad del sonido en el gas, H es el ancho medio del disco y α_{ss} es un parámetro adimensional que típicamente se le asignan valores alrededor de 10^{-2} , tal como es sugerido por restricciones observacionales de evolución de discos (Hartmann et al. 1998). Generalmente se considera que los discos están en equilibrio hidrostático, de modo que la escala de altura puede relacionarse con la velocidad del sonido y la velocidad angular orbital de la forma en que se describe en la Sec.3.2.3.

La temperatura se determina a partir del balance entre el calentamiento por disipación viscosa y la difusión vertical de radiación a cada radio y para cada prescripción de la opacidad media de Rosseland, tal como se hace en Reyes-Ruiz y Stepinski (1995) quienes a su vez siguen a Ruden y Pollack (1991).

Se determinó la solución numérica de la Ec.(11) usando un valor constante de $\alpha_{ss} = 0.01$, las condiciones iniciales de Reyes-Ruiz y Stepinski (1995), así como las citadas leyes de opacidad de Ruden y Pollack (1991). Hacemos notar que existen modelos de opacidad más recientes y complejos (e.g. Semenov et al. 2003), sin embargo, suelen involucrar la suposición de diferentes parámetros, tal como la forma de los granos de polvo y su composición. Siendo que los valores de las opacidades que ofrecen los modelos recientes están dentro del mismo orden de magnitud que los dados por el modelo de Ruden y Pollack (1991), decidimos emplear este último, el cuál sigue siendo utilizado para tratar la opacidad del polvo en investigaciones recientes (e.g. Puzat et al. 2013).

El resultado de la solución numérica de la Ec.(11) con las consideraciones descritas se muestra en la Fig.10 (modelo denotado como ADSN de ahora en adelante), donde se mues-

tran también las propiedades correspondientes del modelo de masa mínima para la nebulosa solar (MMSN, ver Sec.3.2.2).

Como puede verse en la figura, la masa total del disco disminuye en el tiempo, ésto debido a que el disco evoluciona transfiriendo masa a la estrella central, mientras que una cantidad pequeña se difunde radialmente hacia afuera extrayendo momento angular. La temperatura también se ve afectada por los procesos mencionados.

Por simplicidad en el uso y análisis de las simulaciones de los cuerpos sólidos, hemos ajustado leyes de potencia a la densidad superficial y a la temperatura como función del radio en la zona planetaria. El ajuste mencionado se muestra en recuadros negros en la Fig.10 y está descrito por:

$$\Sigma = \Sigma_0 r^{-m}, \quad (13)$$

con $\Sigma_0 = 5141.5\text{gcm}^{-2}$, $m= 1.34$ y r en AU. Mientras que para la temperatura:

$$T = T_0 r^{-n}, \quad (14)$$

con $T_0 = 135\text{K}$ y $n= 0.43$.

Estos ajustes corresponden al instante a 3Ma en la evolución del disco, de modo que en nuestra simulación, $t = 0$ es equivalente a un sistema en el que el gas ha evolucionado 3Ma. Esta cantidad es aproximadamente la mediana de la edad en un disco protoplanetario (W&C11).

Con la intención de representar un límite inferior para el efecto del arrastre gaseoso e incorporar en nuestro modelo una aproximación a la evolución del disco, disminuimos la densidad superficial con la sencilla modificación a la Ec.(13):

$$\Sigma = \Sigma_0 r^{-m} \cdot t^{-2}, \quad (15)$$

donde t es el tiempo en Ma. Esta disminución en Σ es sólo válida después de 1Ma de simulación. Modelos como el de Hartmann et al. (1998) consideran una dependencia temporal más compleja, por lo general involucrando una función exponencial decreciente.

3.2.2. Nebulosa de masa mínima

A pesar de que el llamado modelo de masa mínima para la nebulosa solar, originalmente propuesto por Weidenschilling (1977) y Hayashi (1981) es ampliamente utilizado en estudios del componente gaseoso de un disco protoplanetario, como se mencionó en el Cap.1 es cuando mucho un modelo heurístico y debido a que se construyó ajustando a la estructura actual del sistema solar, su validez disminuye al tener en cuenta la migración planetaria descrita en secciones anteriores.

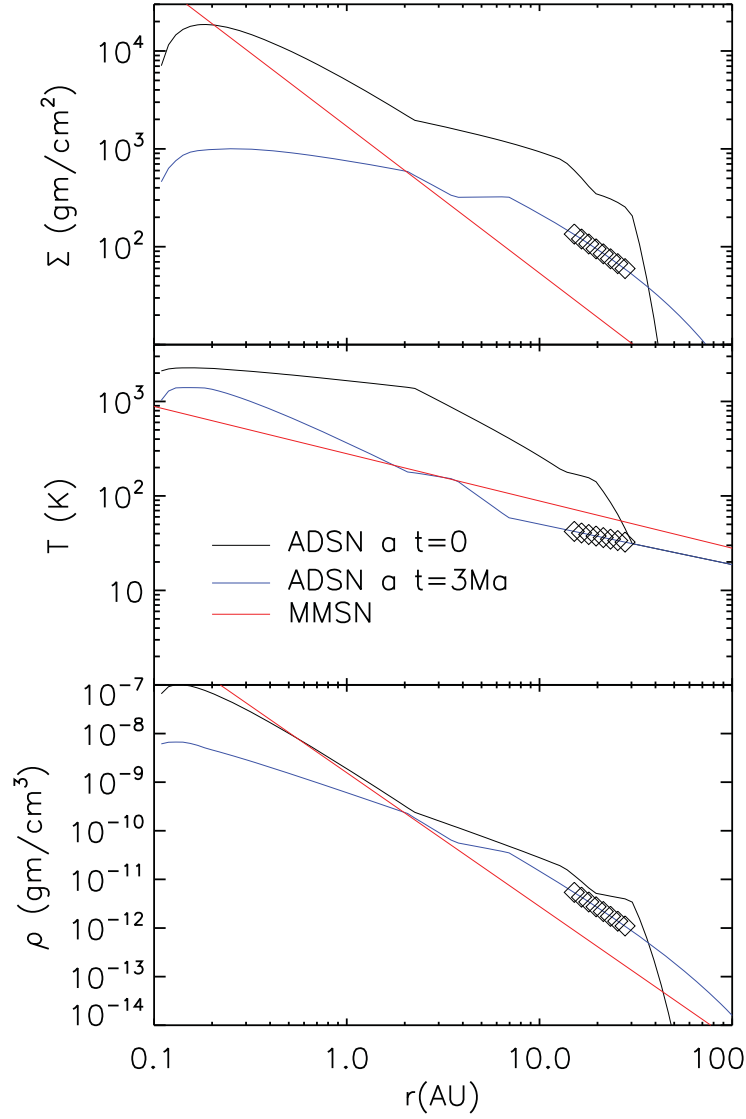


Figura 10: Propiedades físicas de los modelos de disco adoptados para nuestro estudio: ADSN indica nebulosa solar con disco de acreción, mientras que MMSN se refiere al modelo de masa mínima para la nebulosa solar. El panel superior muestra el perfil radial de la densidad superficial, el medio muestra la temperatura en el plano medio del disco, mientras que el inferior muestra la densidad de gas en el mismo plano. Los recuadros negros corresponden al ajuste dado por las Ecs.(13) y (14) con las condiciones prevalecientes a 3Ma.

El modelo MMSN se caracteriza por perfiles de densidad y temperatura radial como los de las Ecs.(13) y (14) respectivamente, con valores típicos de $\Sigma_0 = 1700\text{gcm}^{-2}$, $m = 3/2$ para la densidad y $T_0 = 280\text{K}$, $n = 1/2$ para la temperatura. Dado que la mayor parte del gas es H_2 , la velocidad del sonido en ambos modelos está dada por $C_s = \sqrt{k_B T / m_{\text{H}_2}}$, donde k_B es la constante de Boltzmann y m_{H_2} la masa de una molécula de hidrógeno.

La dependencia temporal determinada por la Ec.(15) también es utilizada en el modelo MMSN.

3.2.3. Estructura del disco y velocidades

Las ecuaciones para la estructura del disco son empleadas para calcular el resto de las propiedades físicas para ambos modelos considerados. Para tal fin, necesitamos una expresión para la escala de altura del disco de gas. La condición de equilibrio hidrostático en la dirección vertical del disco queda establecida por:

$$\frac{dP}{dz} = -g(z)\rho_g(z), \quad (16)$$

donde P es la presión, g la aceleración de la gravedad y ρ_g la densidad del gas. En coordenadas cilíndricas r y z , g está determinada por:

$$g(z) = -\Omega_k^2 z, \quad (17)$$

donde Ω_k es la velocidad de rotación kepleriana dada por $\Omega_k = \sqrt{GM_\odot/r^3}$, con G la constante de gravitación universal, M_\odot la masa del Sol y r la distancia solar. La Ec.(17) proviene de considerar un disco delgado ($z \ll r$). Como se mencionó anteriormente, ésta suposición suele ser hecha en los modelos de disco sencillos; en nuestro caso, se justifica además con el truncamiento del disco, ya que debido a ésto, no hay gas en la región cercana a la estrella. La presión del gas puede ser escrita en términos de la densidad y temperatura, suponiendo una ecuación de estado de gas ideal:

$$P = \frac{k_B \rho_g T}{m_{\text{H}_2}}. \quad (18)$$

Como el disco es delgado podemos suponer que no hay variación vertical en la temperatura y reescribir la presión del gas en términos de la velocidad del sonido que ya hemos definido:

$$P = \rho_g(z) C_s^2. \quad (19)$$

Utilizando las expresiones (17) y (19), podemos reescribir la Ec.(16) como:

$$\frac{dP}{dz} = C_s^2 \frac{d\rho_g(z)}{dz} = -\Omega_k^2 z \rho_g(z) \quad (20)$$

$$\Rightarrow \frac{d\rho_g(z)}{dz} = -\frac{1}{H^2} z \rho_g(z), \quad (21)$$

donde la expresión

$$H = \frac{C_s}{\Omega_k}, \quad (22)$$

es invariable a z y por lo tanto, la Ec.(21) tiene una solución exponencial de la forma:

$$\rho(z) = \rho_0 e^{\frac{1}{2}(\frac{z}{H})^2}. \quad (23)$$

Ésta última expresión, nos permite definir a H de la Ec.(22) como la escala de altura del disco. Teniendo definida H , la densidad del gas está dada por:

$$\rho_g = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\Sigma}{H}. \quad (24)$$

Sin embargo, es común aproximar la expresión anterior como (e.g. Reyes-Ruiz y Stepinski 1995, Perets y Murray-Clay 2011):

$$\rho_g = \frac{\Sigma}{2H}. \quad (25)$$

Para calcular la velocidad relativa entre el planetésimo y el gas en el disco necesitamos establecer una relación para la velocidad del segundo. Bajo la consideración de que el flujo gaseoso no es afectado por los planetésimos ni los planetas, el movimiento de una parcela de gas es usualmente aproximado con una órbita circular con la gravedad balanceada por una fuerza centrífuga y una pequeña contribución del gradiente de presión del gas. Ésta relación es escrita como:

$$\rho_g \frac{V_g^2}{r} = \rho_g \frac{V_k^2}{r} + \frac{\partial P}{\partial r}, \quad (26)$$

Sustituyendo las leyes de potencia para ρ_g y T de las Ecs.(13) y (14), junto con las definiciones anteriores, obtenemos la siguiente expresión para la velocidad del gas:

$$\begin{aligned} V_g &= \left[1 - \left(\frac{3+2m+n}{2} \right) \left(\frac{C_s}{V_k} \right)^2 \right]^{1/2} V_k \\ &\equiv (1 - \eta)^{1/2} V_k. \\ &\equiv \chi V_k. \end{aligned} \quad (27)$$

3.3. Condiciones iniciales de cuerpos sólidos

Para los planetas, nuestro arreglo inicial considera una configuración temprana multiresonante muy compacta, como la que se propone en el modelo de Niza versión 2. Se cree que en el sistema solar, esta configuración inicial de los planetas gigantes se debe a la interacción resonante entre estos cuerpos y la componente gaseosa del disco protoplanetario. El proceso ha sido previamente estudiado por Masset y Snellgrove (2001), quienes se enfocaron en Júpiter y Saturno, y por Morbidelli et al. (2007) que incluyeron también a Urano y Neptuno en sus simulaciones. Posteriormente, Batygin y Brown (2010) tomaron un amplio rango de

condiciones iniciales multiresonantes para los cuatro planetas exteriores y los evolucionaron dinámicamente junto con un disco de planetésimos, produciendo un conjunto de condiciones iniciales estables consistentes con el modelo de Niza 2. Hemos seleccionado una de estas configuraciones estables, aquella en la cuál Júpiter y Saturno se encuentran en resonancia de movimiento medio 3:2; Saturno y Urano en una MMR 4:3 junto con Urano y Neptuno en 4:3 MMR. En nuestras condiciones iniciales colocamos a los planetas en órbitas circulares, igualando en cada uno el radio inicial al semieje mayor correspondiente de la configuración previamente descrita. Justificamos ésta simplificación considerando las bajas excentricidades de los planetas gigantes (Saturno posee la más alta, con un valor de 0.0260594. Las excentricidades de los demás planetas pueden consultarse en la Tabla 2, que se introduce más adelante en la Sec.5.1). Posteriormente, en la Fig.30 se observará que el establecer órbitas circulares para los planetas no elimina las torcas multiresonantes de los mismos.

Suponemos que las partículas que representan a los planetésimos tienen una densidad cometaria (densidad promedio $\rho_c = 0.6\text{gcm}^{-3}$ (Brasser et al. 2007), considerando que la gran mayoría de los cometas son posiblemente objetos inalterados de éste primer depósito de cuerpos menores en la periferia del sistema solar. El número de planetésimos y partículas de polvo en un disco real es muy grande y pertenecen a una amplia distribución de tamaños, abarcando desde micras hasta cientos de metros. En virtud de que en esta etapa el propósito de nuestro estudio no es modelar consistentemente la evolución de los componentes sólidos y gaseosos, sino explorar los efectos del gas y los planetas sobre los planetésimos, aquí se utilizan sólo 100 planetésimos en cada corrida realizada para muestrear las diferentes posiciones de los planetésimos en la parte externa del sistema solar. Todas nuestras partículas cuentan con las mismas características físicas.

Para cada corrida, los 100 cometas se distribuyen en cinco fases equiespaciadas comenzando en 0° , y 20 radios equidistantes entre R_i y R_e , utilizando los 3 valores de R_i establecidos en la Sec.3.1. Son empleados 3 valores para el radio de los planetésimos, r_c , en corridas independientes: 100m, 1km y 10km. Con las variaciones en R_i , r_c y los dos modelos de gas utilizados, obtenemos un total de 18 casos a analizar. En las condiciones iniciales de todos los cuerpos sólidos se consideraron órbitas circulares.

La Tabla 1 reúne las condiciones iniciales globales empleadas para los tres componentes del modelo: planetas, planetésimos y gas, los cuales se representan en la Fig.11.

3.4. Arrastre gaseoso sobre los planetésimos

El efecto del arrastre gaseoso sobre la dinámica de planetésimos ha sido estudiado por diversos autores. En éste trabajo seguimos a Brasser et al. (2007), quien a su vez siguió a Adachi et al. (1976) en el tratamiento de la fuerza de arrastre.

Para cuerpos de radio r_c mayores que el camino libre medio molecular en el gas, λ , la aceleración ocasionada por el arrastre del gas, \mathbf{a}_D , es usualmente modelada de acuerdo a la

Planetas		
J:S	S:U	U:N
3:2	4:3	4:3
Radios correspondientes: J:5.85, S:7.83, U:9.67, N:11.64 AU		
Planetésimos		
5 fases equiespaciadas, 20 radios equiespaciados		
r_c :	$R_i = 3.5, 7, 10 R_{Hill}$	$R_e = 30AU$
ρ_c :	0.1, 1, 10 km $0.6gcm^{-3}$	
Gas		
R_i :	3.5, 7, 10 R_{Hill}	
ADSN :	$\Sigma = 5141.5r^{-1.34}$	$T = 135.0r^{-0.43}$
MMSN :	$\Sigma = 1700.0r^{-1.50}$	$T = 2800r^{-0.50}$

Tabla 1: Condiciones iniciales de los tres componentes del modelo para las diferentes simulaciones que se realizaron.

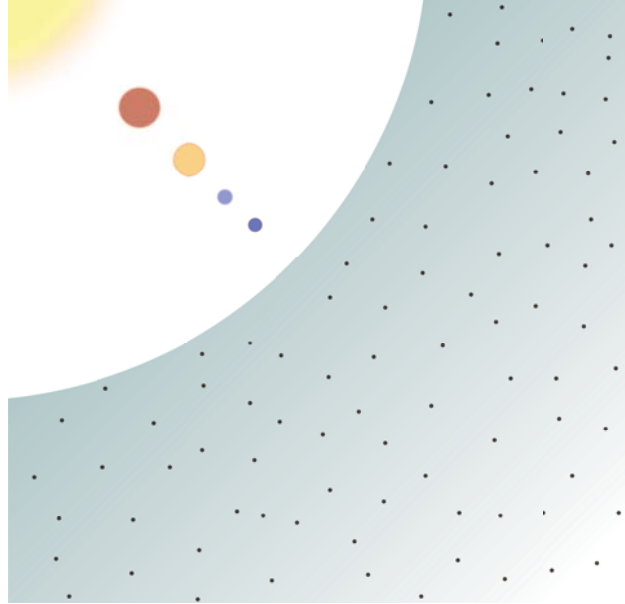


Figura 11: Representación esquemática de los componentes del modelo: el Sol en el centro del sistema, 4 planetas en una región libre de otros componentes y un conjunto de partículas inmersas en un disco de gas, la densidad de éste último decrece con la distancia radial. La imagen no está a escala ni representa ninguna cantidad física.

ley de arrastre de Stokes:

$$\mathbf{a}_D = -\frac{C_D A_c \rho_g}{2m_c} |\mathbf{V}_r| \mathbf{V}_r, \quad (28)$$

donde C_D es el coeficiente de arrastre adimensional, $\mathbf{V}_r = \mathbf{V} - \mathbf{V}_g$ es la velocidad relativa entre la velocidad de un planetésimo, \mathbf{V} , y la propia del gas \mathbf{V}_g . Las propiedades del planetésimo o cometa son incorporadas a través de su sección transversal recta, A_c , y su masa m_c . Asumimos cometas esféricos, de modo que la razón A_c/m_c de la Ec.(28) se convierte en $A_c/m_c = 3/(4r_c \rho_c)$ y entonces:

$$\mathbf{a}_D = -\frac{3C_D \rho_g}{8r_c \rho_c} |\mathbf{V}_r| \mathbf{V}_r. \quad (29)$$

La condición para que la ley de Stokes sea aplicable es comúnmente escrita en términos del número de Knudsen, K , como:

$$K = \lambda/r_c < 1, \quad (30)$$

donde la longitud de camino libre medio es calculada de acuerdo a $\lambda = m_{\text{H}_2}/\rho_g \sigma_{\text{H}_2}$, con σ_{H_2} la sección transversal recta efectiva para moléculas H_2 ($\sim 10^{-15}$ cm, Perets y Murray-Clay 2011). La condición dada por la Ec.(30) se mantiene durante la evolución de nuestro modelo.

Brasser et al. (2007) estima el número de Reynolds como:

$$\Re \simeq 4.44 \frac{M}{K}, \quad (31)$$

siendo M el número Mach dado por:

$$M = \frac{|\mathbf{V}_r|}{C_s}. \quad (32)$$

Calculamos el valor local de éstas variables a un tiempo y posición determinados para obtener el coeficiente de arrastre estimado por Brasser et al. (2007) como función de M y \Re :

$$C_D = \begin{cases} 2 & ; \quad \text{Si } M \geq 1, \\ 0.44 + 1.56M^2; & \text{Si } M < 1 \text{ \& } \Re \geq 10^3, \\ 2M^2 + (1 - M^2) [24(1 + 0.15\Re^{0.687})/\Re] & ; \\ & \text{Si } M < 1 \text{ \& } \Re < 10^3 \end{cases} \quad (33)$$

3.5. Ecuaciones de movimiento

El presente trabajo está realizado en el esquema de tres cuerpos restringido, es decir, se resuelven individualmente las ecuaciones de movimiento planeta-Sol, mientras que los

planetésimos son partículas de prueba: cuerpos que no ejercen fuerza gravitacional pero son sensibles a la atracción del planeta y la estrella. Las condiciones iniciales de los planetas son estables en la escala de tiempo utilizada, por ésta razón y con el fin de disminuir el tiempo de cómputo, consideramos que cada uno de los planetas sólo interactúa con la estrella. Para tomar en cuenta el efecto del gas se introduce el término de la Ec.(29) sobre los planetésimos. El Sol se considera inmóvil en el centro del sistema. Tomando en cuenta lo anterior, las ecuaciones de movimiento para los planetas están dadas por:

$$\ddot{x}_k^i = -\frac{GM_\odot x_k^i}{r_k^3}, \quad (34)$$

donde $k \in [1, 4]$ indica el planeta, $i \in [1, 3]$ representa cada una de las coordenadas cartesianas y r_k la distancia radial entre el Sol y el k -ésimo planeta.

Para los planetésimos, el movimiento se rige por:

$$\ddot{x}_j^i = -\frac{GM_\odot x_j^i}{r_j^3} - \sum_{k=1}^4 \frac{GM_k (x_j^i - x_k^i)}{r_{kj}^3} - \mathbf{a}_D, \quad (35)$$

donde $j \in [1, 100]$ representa cada uno de los planetésimos, r_j es la distancia radial del j -ésimo cometa al Sol y r_{kj} la distancia entre el j -ésimo cometa y el k -ésimo planeta. Al igual que en la Ec.(34), i representa la coordenada y k el planeta. En las ecuaciones anteriores puede verse como los planetas sólo están sujetos a la fuerza gravitacional del Sol, mientras que los planetésimos a la fuerza de atracción del Sol, de cada uno de los planetas y a la fuerza de arrastre del gas.

3.6. Solución numérica

Para resolver las ecuaciones anteriores se utilizó un código propio, el cuál se muestra en el Apéndice. El programa principal y las subrutinas fueron realizadas por el autor de esta tesis, se utilizó un integrador del tipo Runge-Kutta de orden 4 (RK4) con paso fijo. El integrador numérico RK4 tiende a incrementar el error en los cálculos a lo largo del tiempo y no suele ser la mejor opción para resolver el movimiento orbital en escalas de tiempo seculares y en ausencia de procesos disipativos. Vale la pena notar que nuestro problema es de tipo no conservativo debido al arrastre del gas, por lo cuál, muchas de las opciones usadas para resolver estas ecuaciones, como los integradores simplécticos, no se pueden utilizar confiablemente. Por lo anterior, dado el carácter exploratorio de este trabajo, consideramos importante adoptar un esquema numérico robusto y de fácil implementación. En la Sec. 5.2 se muestran las pruebas numéricas que determinan que con el paso de tiempo utilizado, 0.035 años, el integrador RK4 es adecuado para nuestro estudio.

Cada una de las simulaciones se corrió por 10Ma, pues en virtud del decrecimiento de la densidad superficial en el disco (Ec.(15)), después de 10Ma, la cantidad de gas en el disco es 1% de la inicial y no se espera que sea suficiente para alterar la dinámica de las partículas.

4. Estimaciones aerodinámicas

Es conveniente hacer una estimación de los resultados que se pueden obtener de una simulación. Aquí presentamos un análisis de la escala de tiempo en que una partícula ve afectada su órbita por el arrastre aerodinámico. El desarrollo se tomó de Armitage (2007), que a su vez utiliza las ecuaciones de Takeuchi y Lin (2002) para analizar la dinámica de la partícula sometida al gas.

Una manera sencilla de cuantificar el efecto del gas sobre las partículas es mediante una escala del tiempo de fricción, el cuál se define como:

$$t_{\text{fric}} = \frac{m_c V_r}{|F_D|}, \quad (36)$$

introduciendo la fuerza de arrastre, F_D , dada por (29) y expresando en términos de las densidades de la partícula ρ_c , y el gas ρ_g , la expresión anterior se convierte en:

$$t_{\text{fric}} = \frac{8}{3C_D} \frac{\rho_c r_c}{\rho_g V_r}, \quad (37)$$

que es la escala de tiempo en que el arrastre provoca un cambio del orden de una unidad en la velocidad relativa del gas y las partículas. Tanto esta ecuación como la Ec.(29) indican que el gas ejerce mayor efecto sobre las partículas de menor tamaño.

Por otro lado, la Ec.(27), representa la componente azimutal de la velocidad del gas, hecho que se hará explícito en esta sección denotando $V_{\phi,g} = V_g$. De modo que reescribimos tal ecuación como:

$$V_{\phi,g} = (1 - \eta)^{1/2} V_k. \quad (38)$$

Las componentes radial y azimutal del movimiento de una partícula sólida en órbitas cuasi keplerianas sujetas a arrastre gaseoso, sin perturbadores gravitacionales pueden escribirse como⁷:

$$\frac{dv_r}{dt} = \frac{v_\phi^2}{r} - \Omega_k^2 r - \frac{1}{t_{\text{fric}}}(v_r - V_{r,g}) \quad (39a)$$

$$\frac{d}{dt}(rv_\phi) = -\frac{r}{t_{\text{fric}}}(v_\phi - V_{\phi,g}). \quad (39b)$$

Debido a que el movimiento de las partículas se asume semejante al kepleriano, la aceleración azimutal de la partícula también puede escribirse como:

$$\frac{d}{dt}(rv_\phi) \simeq v_r \frac{d}{dr}(rV_k) = \frac{1}{2}v_r V_k. \quad (40)$$

⁷Nótese que en esta sección se utilizan diferentes tipos de velocidades, por lo tanto la notación en V mayúscula se ha reservado para las velocidades relacionadas con el gas y la kepleriana, mientras que las velocidades de las partículas se expresan en v minúscula. En éste respecto, vale la pena especificar que V_r representa la velocidad relativa partícula-gas, como se explicó anteriormente, mientras que v_r representa la velocidad radial de la partícula.

De modo que igualando las dos ecuaciones anteriores y despejando, tenemos que:

$$(v_\phi - V_{\phi,g}) \simeq -\frac{1}{2} \frac{t_{\text{fric}} v_r V_k}{r}. \quad (41)$$

Si se utiliza la expresión anterior en el primer término del lado derecho de Ec.(39a), dicha ecuación se convierte en:

$$\frac{dv_r}{dt} = \frac{V_{\phi,g}^2}{r} - \frac{t_{\text{fric}} v_r V_k}{r} V_{\phi,g} + \left(\frac{1}{2} \frac{t_{\text{fric}} 2v_r V_k}{r} \right)^2 - \frac{V_k^2}{r} - \frac{1}{t_{\text{fric}}} (v_r - V_{r,g}). \quad (42)$$

Usando de nuevo (41) para el segundo término derecho en la expresión anterior y empleando la relación de (38):

$$\frac{dv_r}{dt} = \frac{V_k^2}{r} (1 - \eta) + \frac{2}{r} (v_\phi - V_{\phi,g}) V_k (1 - \eta)^{1/2} + \left(\frac{1}{2} \frac{t_{\text{fric}} 2v_r V_k}{r} \right)^2 - \frac{V_k^2}{r} - \frac{1}{t_{\text{fric}}} (v_r - V_{r,g}), \quad (43)$$

desarrollando y despreciando términos de alto orden, se obtiene que la Ec.(43) puede escribirse como:

$$\frac{dv_r}{dt} = -\eta \frac{V_k^2}{r} + \frac{2V_k^2}{r} (v_\phi - V_{\phi,g}) - \frac{1}{t_{\text{fric}}} (v_r - V_{r,g}). \quad (44)$$

Se espera que el movimiento de la partícula sea adiabático, entonces $\frac{dv_r}{dt} \rightarrow 0$, sin embargo el gas, balanceado por el gradiente de presión, debe tener velocidad radial nula comparada con la partícula, entonces $v_r - V_{r,g} \simeq v_r$. Con estas consideraciones, la Ec.(44) se convierte en:

$$0 = -\eta \frac{V_k^2}{r} + \frac{2V_k^2}{r} (v_\phi - V_{\phi,g}) - \frac{1}{t_{\text{fric}}} v_r. \quad (45)$$

Igualando las expresiones de $(v_\phi - V_{\phi,g})$ en (45) y (41), podemos despejar para $\frac{v_r}{V_k}$ y obtener:

$$\frac{v_r}{V_k} = \frac{-\eta}{\frac{V_k}{r} t_{\text{fric}} + \frac{r}{V_k} t_{\text{fric}}^{-1}}. \quad (46)$$

Las expresiones en el denominador pueden interpretarse como una escala de tiempo adimensional para comparar el efecto del gas sobre las partículas a distintos radios, Armitage (2007) la define como:

$$\tau_{\text{fric}} = t_{\text{fric}} \Omega_k, \quad (47)$$

obteniendo entonces:

$$\frac{v_r}{V_k} = \frac{-\eta}{\tau_{\text{fric}} + \tau_{\text{fric}}^{-1}}. \quad (48)$$

Si se deriva ésta expresión respecto a τ_{fric} , puede verse fácilmente que tiene un máximo cuando $\tau_{\text{fric}} = 1$, es decir, cuando esto ocurre, las partículas son más susceptibles al arrastre

y alcanzan el máximo en velocidad radial. Sustituyendo $\tau_{\text{fric}} = 1$ en la Ec.(48), obtenemos la velocidad radial máxima alcanzada por un planetésimo:

$$v_r = -V_k \frac{\eta}{2}. \quad (49)$$

Recordamos que en nuestro modelo, η es función de las leyes de potencia utilizadas para el perfil de temperatura y densidad superficial del disco.

Para tener una estimación de los resultados de las simulaciones que realizamos, hemos calculado la Ec.(47) para cada uno de los casos considerados de nuestro modelo. τ_{fric} es dependiente de la densidad del disco, la velocidad relativa entre la partícula y el gas, así como de la velocidad kepleriana en la locación de la partícula, todas éstas cantidades son dependientes de la posición del cuerpo, por lo cuál, la Fig.12 muestra la escala de tiempo τ_{fric} en función de la posición inicial del planetésimo para los dos modelos de gas y los tres tamaños de partícula considerados. Hacemos notar que solo se tomó en cuenta una de las distribuciones de partículas, aquella con $R_i = 3.5R_{\text{Hill}}$ y $R_e = 30\text{AU}$, sin embargo las otras dos distribuciones tienen un R_i más externo y el mismo R_e , por lo que no cubren un dominio ajeno a la primer distribución, por lo tanto, los valores de τ_{fric} de todas las distribuciones están dentro de los mostrados en la Fig.12.

A partir de la estimación anterior, podemos esperar una notoria dependencia de las simulaciones en el tamaño del planetésimo, notando además que las partículas de 100m en el modelo de MMSN, muestran ser las más susceptibles al arrastre en nuestro modelo, ya que inicialmente, los valores de τ_{fric} de todas las partículas de tal caso son cercanos a 1.

Para concluir, se calculó la Ec.(8) para la condición inicial en ambos modelos de gas, la cuál es una estimación del tamaño límite para que las partículas puedan ser atrapadas en resonancia externa de primer orden con alguno de los planetas. El resultado se muestra en la Fig.13. Como puede verse, en ambos modelos de gas el límite es inferior a 100m, el menor de los tamaños considerados. Por lo tanto, según esta estimación, los planetas de nuestro modelo deben ser capaces de atrapar en resonancia a las partículas de todos los casos considerados en nuestras simulaciones.

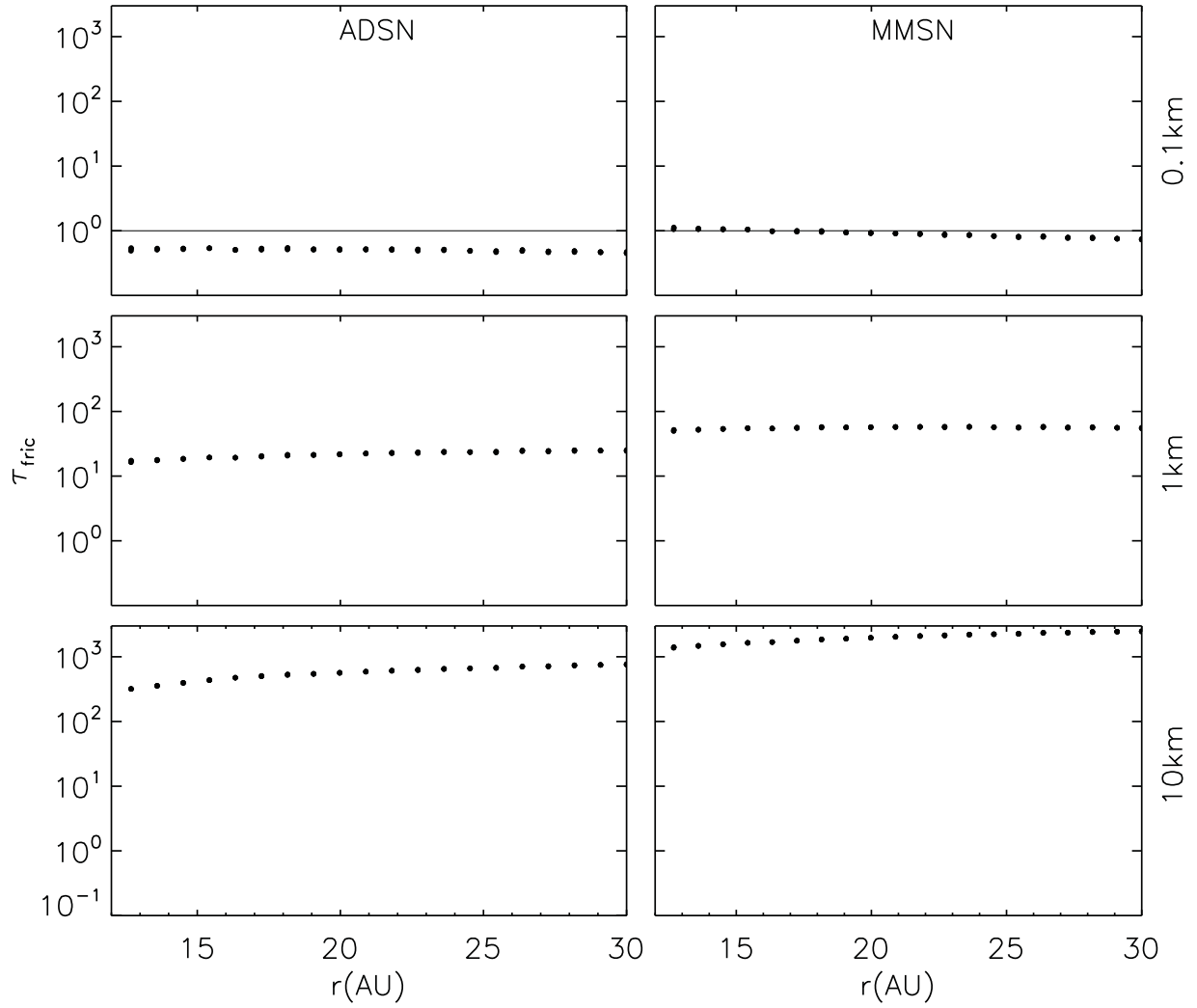


Figura 12: Escala temporal τ_{fric} de la Ec.(47) para los diferentes casos considerados en función de la posición inicial del planetésimo. Las dos columnas distinguen el modelo de gas, mientras que los renglones los tamaños del planetésimo. En los paneles superiores se muestra con una línea continua el valor $\tau_{\text{fric}} = 1$, que indica la mayor susceptibilidad de la partícula al gas (ver texto).

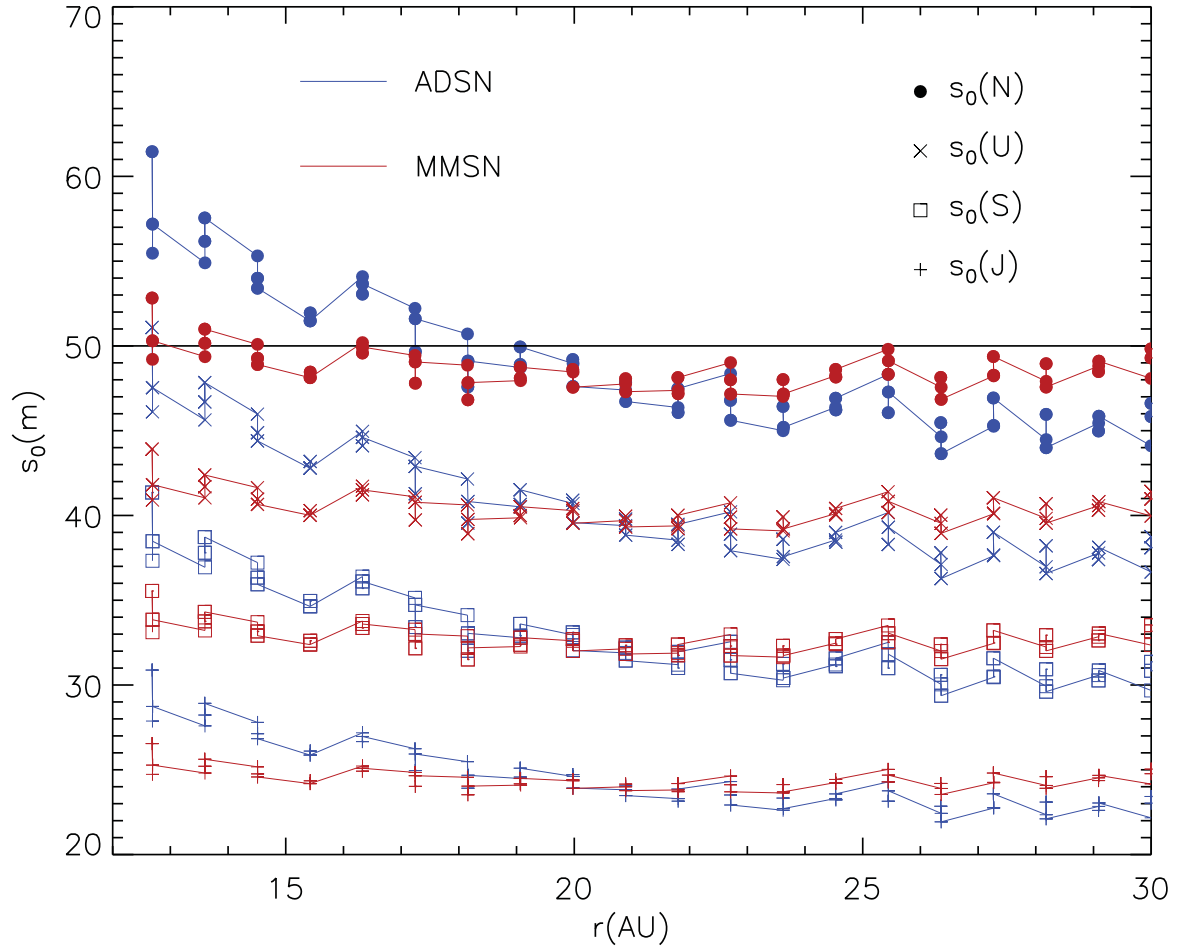


Figura 13: Tamaño límite, s_0 , de la Ec.(8) para ambos modelos de gas en función de la posición inicial del planetésimo. Se muestra el cálculo para cada uno de los planetas. Se indica $s_0 = 50\text{m}$ con una línea horizontal (para su uso en la Sec.5.3).

5. Trabajo previo

5.1. Simulaciones con el código Mercury

El código de N-cuerpos Mercury desarrollado por Chambers (1999), es ampliamente utilizado en las simulaciones de dinámica planetaria. El artículo donde el código se presenta cuenta actualmente con más de 600 citas. El estudio presentado en ésta tesis se inició originalmente utilizando Mercury. Debido a que tal programa no está diseñado para resolver ecuaciones hidrodinámicas, la interacción gas-partícula se introdujo de manera análoga a como es descrito en la Sec.3.5. El código mencionado permite realizar simultáneamente la solución numérica de la dinámica de partículas masivas, partículas de prueba y partículas semimasivas, es decir, partículas que interactúan gravitacionalmente con los planetas, pero carecen de interacción entre ellas. Gracias a éstas capacidades, se trabajó con 10^3 planetésimos semimasivos; se introdujo además el efecto de migración planetaria ocasionado por la interacción de los planetas con los planetésimos en el escenario del modelo de Niza versión 2 (siguiendo el esquema de migración planetaria de tipo II descrito en Armitage 2007). Para el modelado del gas se utilizaron los mismos modelos de disco gaseoso presentados en las secciones 3.2.1 y 3.2.2. Los planetas se consideraron como partículas masivas interactuantes con órbitas elípticas con la configuración compacta y multiresonante de Batygin y Brown (2010) descrita en la Sec.3.3.

La densidad y el tamaño de los planetésimos se tomaron como las presentadas en la Sec.3.3, sin embargo, la masa total del disco sólido, M_{disk} , constituida por la suma de todos los planetésimos, se tomó como una variable, por lo que la masa individual de los planetésimos en las interacciones gravitacionales variaba entre cada caso considerado: Por la dificultad computacional mencionada en secciones anteriores para simular un disco con un número realista de partículas, los cálculos gravitacionales se efectuaban sobre “grupos” de partículas, distribuyendo M_{disk} sobre el número total de planetésimos, mientras que la interacción gas-partícula se hacía considerando planetésimos individuales. Éste artificio numérico puede ser interpretado como cúmulos de partículas cuyos componentes están lo suficientemente cerca para ser gravitacionalmente considerados como unidad, pero suficientemente lejos para que el efecto de arrastre sea ejercido sobre cada uno de sus componentes. La distribución inicial de los planetésimos en el plano X-Y era aleatoria y las partículas contaban con una excentricidad e inclinación diferente de cero, tales parámetros orbitales estaban acotados y distribuidos aleatoriamente. La Tabla 2 reúne las condiciones iniciales globales empleadas para este conjunto de simulaciones.

En las figuras 14 - 18 se muestran algunos de los resultados de las simulaciones hechas con el código Mercury.

Como puede observarse en las figuras 14 y 15, las cuáles corresponden a la evolución de planetésimos y planetas respectivamente, después de 4.5Ma se produce una inestabilidad dinámica en el sistema, misma que es característica de condiciones iniciales compactas para los planetas externos, como lo dice el modelo de Niza. El tiempo al cuál ocurre la inestabi-

Planetas		
J:S	S:U	U:N
3:2	4:3	4:3
a	e	i
J: 5.84724	0.00690581	0.0
S: 7.83006	0.02605940	0.0
U: 9.67303	0.01631120	0.0
N: 11.6361	0.01797510	0.0
Planetésimos		
	$R_i = 13.5, 15, 16.5, \mathbf{18}$	$R_e = 30\text{AU}$
	$0 \leq e \leq 0.001$	
	$0 \leq i \leq 0.02865^\circ$	
$M_{\text{disk}} :$	5, 20, 35 , 50, 65, $80M_\oplus$	
$r_c :$	0.1, $\sqrt{\frac{1}{10}}$, 1 , $\sqrt{10}$, 10 km	
$\rho_c :$	0.6gcm^{-3}	
Gas		
$R_i :$	13.5, 15, 16.5, 18 AU	
ADSN :	$\Sigma = 5141.5r^{-1.34}$	$T = 135.0r^{-0.43}$
MMSN :	$\Sigma = 1700.0r^{-1.50}$	$T = 2800r^{-0.50}$

Tabla 2: Condiciones iniciales de los tres componentes del modelo para las diferentes simulaciones que se realizaron con el código Mercury. En aquellos parámetros que tienen más de una opción, las negritas representan las condiciones del caso utilizado como modelo de referencia, tal caso es el que se muestra en las figuras de la presente sección.

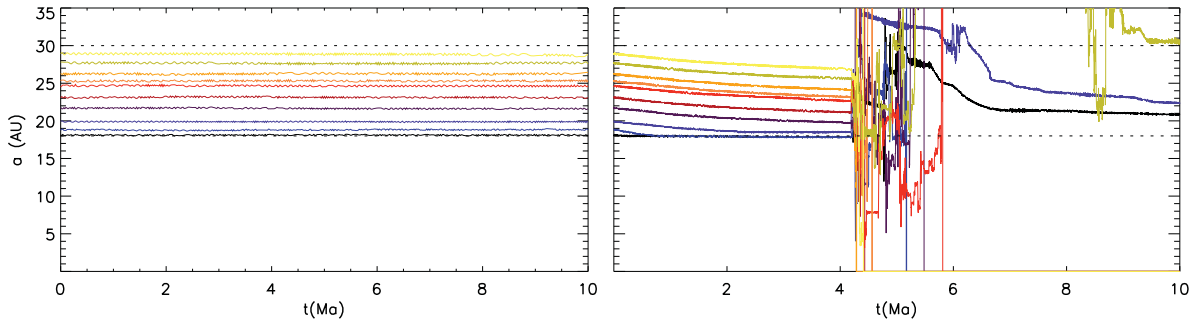


Figura 14: Evolución del semi eje mayor de los planetésimos en el caso de referencia (ver Tabla 2). Se muestran 10 partículas distribuidas a lo largo del límite radial. Del lado izquierdo el caso sin gas, del derecho se incluye el disco gaseoso. Las líneas discontinuas indican la posición del disco de planetésimos.

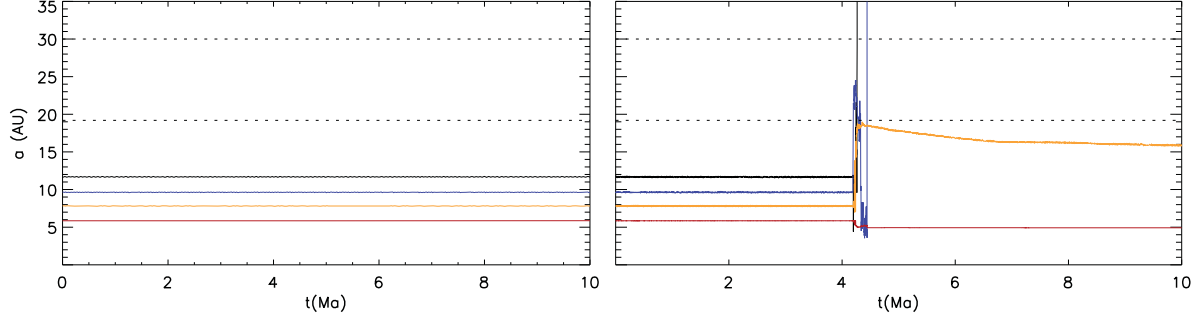


Figura 15: Evolución del semi eje mayor de los planetas en el caso de referencia, sin gas (izquierda) y con gas (derecha). Las líneas discontinuas indican la posición del disco de planetésimos.

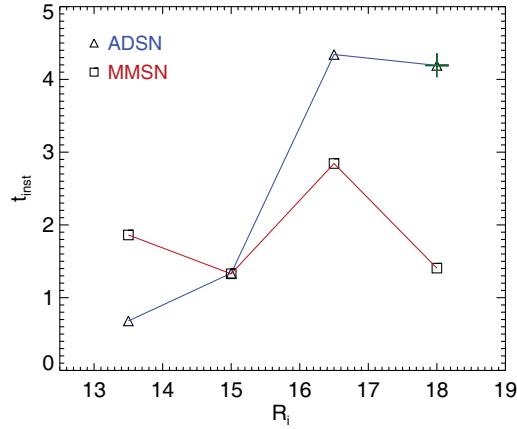


Figura 16: Variación de t_{inst} de la Ec.(50) al cambiar la posición del radio interno del disco. Se muestran ambos modelos de gas. La cruz verde denota el modelo de referencia.

lidad, t_{inst} es definido en este trabajo como el momento en que uno de los planetas cambia su órbita por mas de un 10% de un paso de tiempo a otro:

$$t_{\text{inst}} = t(i) \quad \text{tal que} \quad \frac{a_p^i - a_p^{i-1}}{a_p^{i-1}} > 0.1 \quad (50)$$

donde a_p indica el semi eje mayor de cualquiera de los 4 planetas, mientras que el subíndice i denota una iteración en el tiempo. Las figuras 16 - 18 muestran la dependencia de este tiempo de inestabilidad en función de las variables de nuestro modelo. En la Fig.18 puede verse cómo afecta la presencia de gas a la escala de tiempo de la inestabilidad, dado que para nuestras condiciones iniciales, la inestabilidad ocurre en 18Ma aproximadamente para un escenario libre de gas, mientras que ocurre en 4.2 y 1.4Ma en los escenarios de ADSN y MMSN respectivamente.

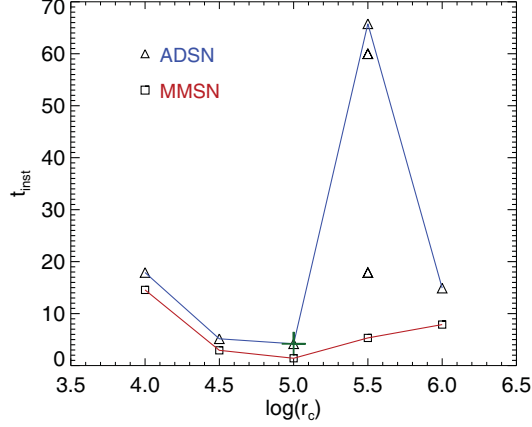


Figura 17: Variación de t_{inst} al cambiar el tamaño del planetésimo. Se muestran ambos modelos de gas. La cruz verde denota el modelo de referencia.

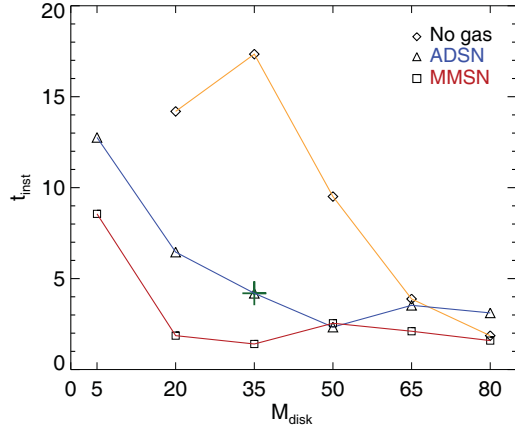


Figura 18: Variación de t_{inst} al cambiar la masa total del disco. Se muestran ambos modelos de gas, así como el caso libre de gas. La cruz verde denota el modelo de referencia.

Como se mencionó, los planetésimos fueron considerados partículas semimasivas, sin embargo, durante la etapa de análisis, después de haber corrido todas las simulaciones, se observó una anomalía en los resultados, la cuál se encontró en diferentes casos. Por motivos de visualización, se realizó una simulación simplificada para observar este comportamiento anómalo de manera clara, dicha simulación está constituida por 6 partículas colocadas a 28.6AU del Sol en órbitas circulares a 60° una de la otra; otras 6 partículas se colocan a 15AU con la misma configuración orbital. Se incluye un cuerpo de masa lunar, éste último con órbita circular a 500AU, de modo que no afecte la dinámica de las partículas. En ésta prueba no se incluye ningún tipo de gas.

La evolución temporal de las 12 partículas se muestra en la Fig.19. Del lado izquierdo se despliega el resultado de la prueba con partículas de prueba (sin masa), donde encontramos que después de algunos cientos de kilo años, las partículas permanecen “en formación”, a 60°

una de la otra. Cuando asignamos una masa a las partículas (columna derecha), la configuración orbital se pierde, el caso mostrado corresponde a una masa de $10^{-7}M_{\odot}$ (donde M_{\odot} es una masa solar), sin embargo el fenómeno ocurre aún cuando la masa sea tan pequeña como $10^{-14}M_{\odot}$.

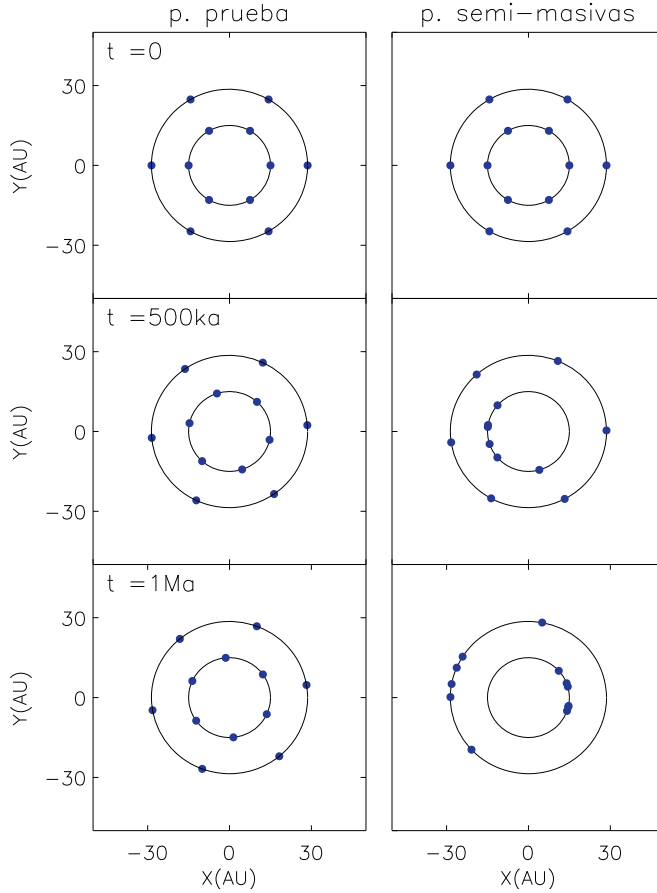


Figura 19: Evolución del comportamiento observado al otorgar una masa diferente de cero a los planetésimos. El sistema está libre de gas. En las corridas con 1000 partículas se encontraron casos en que aproximadamente el 90% de las partículas se concentraban en un sólo punto.

Haciendo un análisis dimensional, encontramos que la escala de tiempo en que las partículas masivas sienten el campo gravitacional de las demás en una órbita circular debe ser de la forma:

$$T \propto \frac{r^{3/2}}{m^{1/2}}, \quad (51)$$

donde r es la posición radial de la partícula y m su masa. Escalamos la relación anterior,

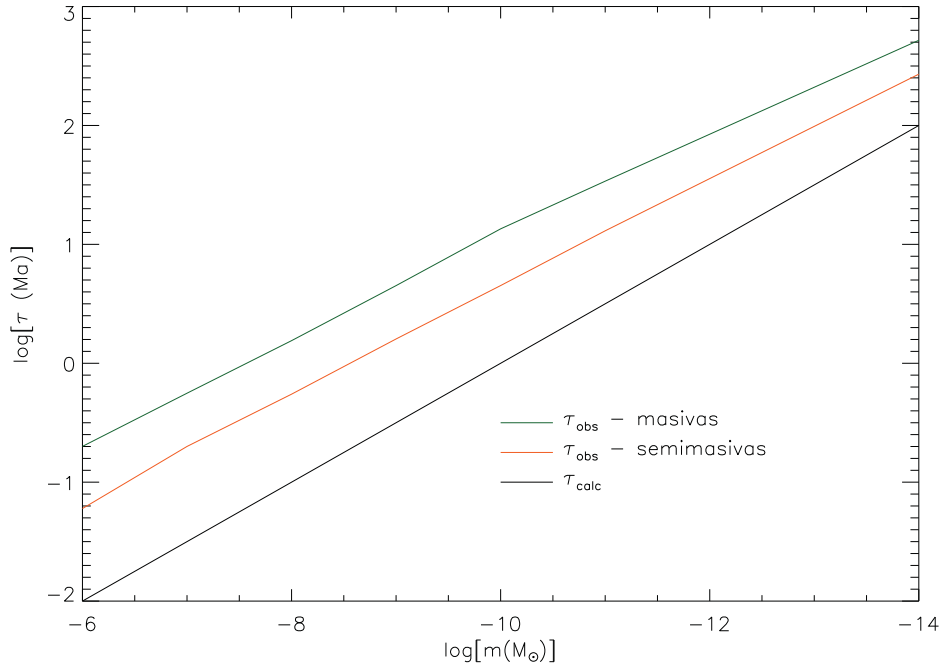


Figura 20: τ vs masa, $r = 15\text{AU}$.

denominándola τ_{calc} :

$$\tau_{\text{calc}} = \frac{\left(\frac{r}{15\text{AU}}\right)^{3/2}}{\left(\frac{m}{10^{-10}M_{\odot}}\right)^{1/2}}. \quad (52)$$

Se realizó la prueba descrita anteriormente para partículas con diferente masa a radio inicial constante y partículas con distinto radio inicial a masa constante. En cada una se registró el tiempo aproximado en que las partículas pierden la configuración angular, τ_{obs} . Los resultados se muestran en las Figs.20 y 21 en comparación con τ_{calc} de la Ec.(52). Puede observarse que las partículas masivas siguen la tendencia establecida por la Ec.(52), sin embargo las partículas semimasivas también lo hacen. Esto último no lo comprendemos dado que el potencial cuenta esencialmente con simetría axial y en principio las partículas semimasivas no interactúan gravitacionalmente entre ellas, por lo tanto esperamos que cada partícula se comporte como si fuera una corrida independiente. Este comportamiento es indistinto de las opciones de compilación dadas al código, tales como el integrador utilizado⁸, el paso de tiempo y del orden de exactitud indicado al integrador.

Debido a la existencia de esta anomalía se decidió abandonar el uso de Mercury para esta investigación hasta tener una explicación al comportamiento observado.

⁸Se usó el integrador Bulirsch-Stoer y el híbrido, el cuál utiliza el integrador simpléctico como base y el Bulirsch-Stoer cuando ocurre un encuentro cercano.

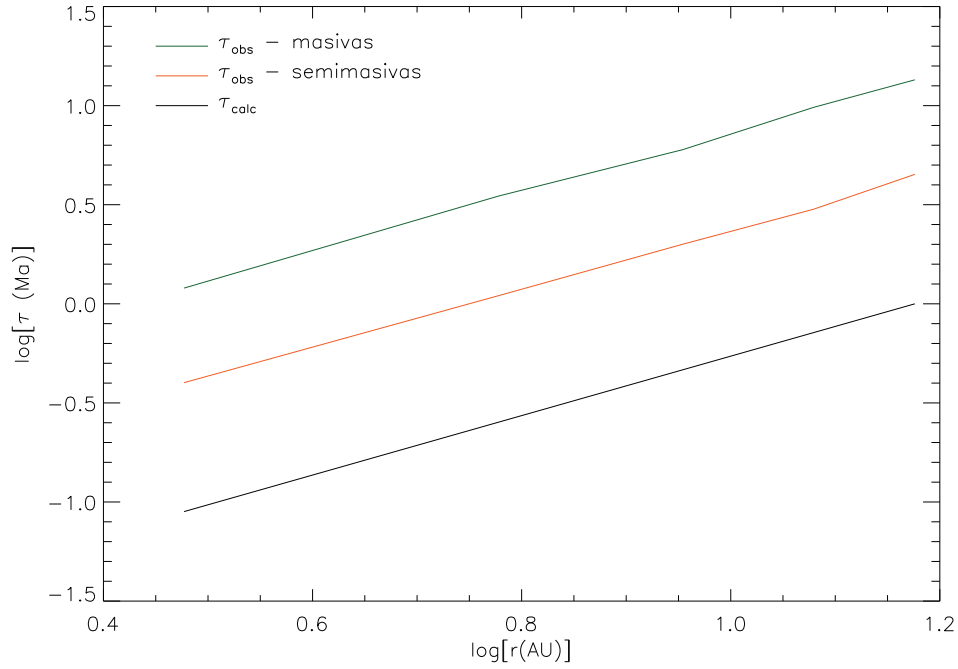


Figura 21: τ vs radio, $m = 10^{-10}M_{\odot}$.

5.2. Validación de nuestro código

Aquí se presentan las pruebas numéricas realizadas al código utilizado con la intención de valorar su capacidad para resolver el problema que nos interesa considerar. Inicialmente verificamos el integrador mediante la solución del problema del oscilador armónico amortiguado, ésta además de ser una prueba común, es apta para nuestro caso, debido a que en analogía con la Ec.(29), el movimiento de una partícula en un oscilador de éste tipo está sujeto a un término disipativo dependiente de la velocidad del cuerpo y un coeficiente de arrastre; siendo la ecuación de movimiento:

$$\ddot{x} = 2\gamma\dot{x} + \omega_0 x, \quad (53)$$

con $\gamma = \frac{b}{2m}; \omega_0^2 = \frac{k}{m},$

donde x es la posición de la partícula, b el coeficiente de arrastre, m la masa de la partícula y k la constante de oscilación. Asociando los valores de $k = 1$, $m = 1$ y $b = 0.2$ a la ecuación anterior, la solución analítica correspondiente es un oscilador armónico subamortiguado ($\gamma < \omega_0$):

$$x = \frac{1}{\omega} e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \pi/2), \quad (54)$$

donde $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$.

En el panel superior de la Fig.22 se muestra la comparación entre la solución numérica de la Ec.(53) y su solución analítica (Ec.(54)). Como puede verse, las soluciones coinciden, lo cuál implica que el integrador funciona correctamente.

El primer término del lado derecho de la Ec.(53) es el encargado de substraer energía a la partícula, lo cuál produce el decaimiento en la amplitud de oscilación. Naturalmente, éste es un fenómeno disipativo en que el sistema ejerce trabajo sobre el cuerpo, hecho que se muestra en el panel (b) de la Fig.22. La curva superior (Δ) representa la diferencia de energía específica de la partícula respecto a su cantidad inicial, la curva etiquetada como w es el trabajo específico ejercido por el sistema, calculado a cada paso de tiempo i como: $w_i = \dot{x}_i \cdot \ddot{x}_i \cdot dt + w_{i-1}$. Físicamente se espera que $\Delta = w$, sin embargo como vemos en la figura, $w/\Delta \rightarrow 4$, lo cuál indica que la partícula disipa 4 veces menos energía que la cantidad de trabajo que es ejercido sobre ella.

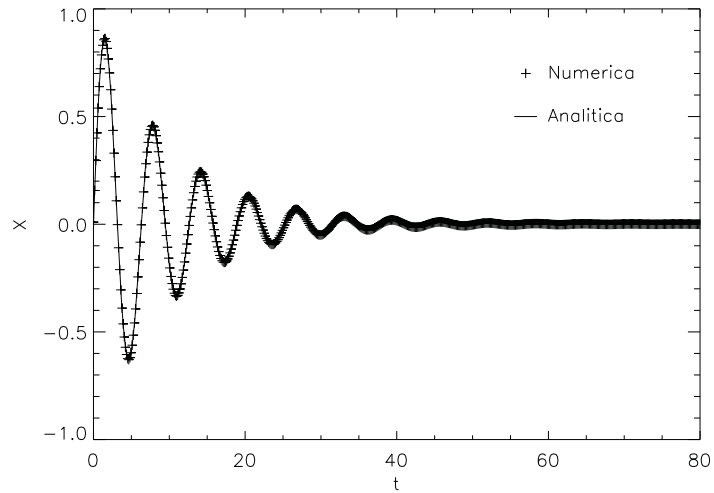
Quizás la evaluación más común en la solución numérica de un problema físico es revisar la capacidad del programa para preservar la energía del sistema. En un problema gravitacional, la energía total está dada por la suma de la energía cinética y la potencial de los cuerpos. En ausencia de gas, tomaremos como válida una conservación de energía dentro del 0.1 %, valor que es laxo comparado con algoritmos simplécticos donde el nivel de tolerancia es de 0.001 % (ver por ejemplo Duncan et al. 1998). En la Fig.23 se grafica la diferencia en energía específica porcentual de una partícula de prueba colocada a 30AU bajo el potencial del Sol con un paso de tiempo de 0.035 años, equivalente a $\sim \frac{1}{400}$ periodos orbitales de Júpiter, el planeta más interno en nuestro sistema, este paso de tiempo se utiliza en todas las gráficas mostradas en la presente sección. Vemos que la variación relativa en la energía de la partícula de prueba excede en un punto el 0.1 %, sin embargo, debido a que trabajaremos en el esquema de tres cuerpos restringido, la energía de la partícula no es la que más debe importarnos, ya que el sistema a simular no está conformado solo por ella. Si observamos la Fig.24 vemos que todos los planetas a excepción de Neptuno conservan bien la energía por debajo del límite aceptado, afortunadamente, por su masa y posición, Neptuno no es el planeta que domina la energía total del sistema, ya que si calculamos Δ para los 4 planetas (energía del sistema) se mantiene en su totalidad por debajo del 0.1 %, tal y como puede verse en la Fig.25.

Una prueba usual en un código destinado a resolver sistemas orbitales es evaluar el vector de excentricidad en un sistema de dos cuerpos, este vector, también llamado vector de Laplace-Runge-Lenz (LRL), es denotado por:

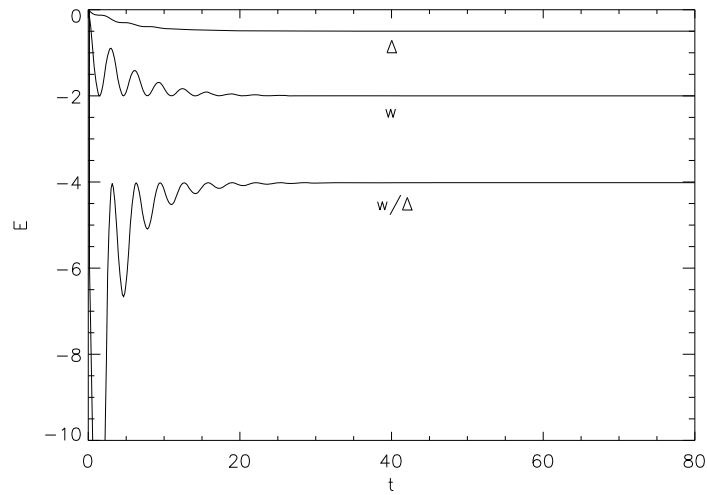
$$\mathbf{A} = \mathbf{p} \times \mathbf{L} - mk\hat{\mathbf{r}}, \quad (55)$$

donde \mathbf{p} es el vector de momento, \mathbf{L} el vector de momento angular orbital, m la masa de la partícula, $k = GM_{\odot}m$ y $\hat{\mathbf{r}}$ el vector unitario de posición. El vector \mathbf{A} es una cantidad que debe conservarse en problemas de fuerza central con potencial dependiente de r^{-2} ; su magnitud es proporcional a la excentricidad de la órbita, su dirección está sobre el plano de la misma y siempre apunta al pericentro, por lo cuál, la expresión:

$$\theta = \tan^{-1}(Ay/Ax), \quad (56)$$



(a)



(b)

Figura 22: (a) Solución numérica y analítica del oscilador armónico amortiguado con el integrador utilizado. (b) Disipación de la energía del oscilador contra el tiempo, ambos en unidades arbitrarias. De arriba hacia abajo, se indican la energía disipada por la partícula, el trabajo del sistema sobre la misma y la razón entre éstas dos cantidades.

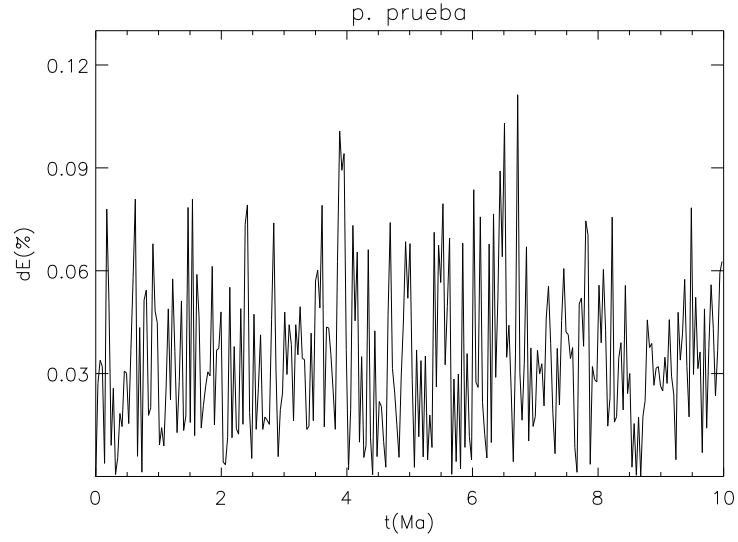


Figura 23: Diferencia porcentual relativa de la energía de una partícula ubicada a 30AU rotando en torno al Sol.

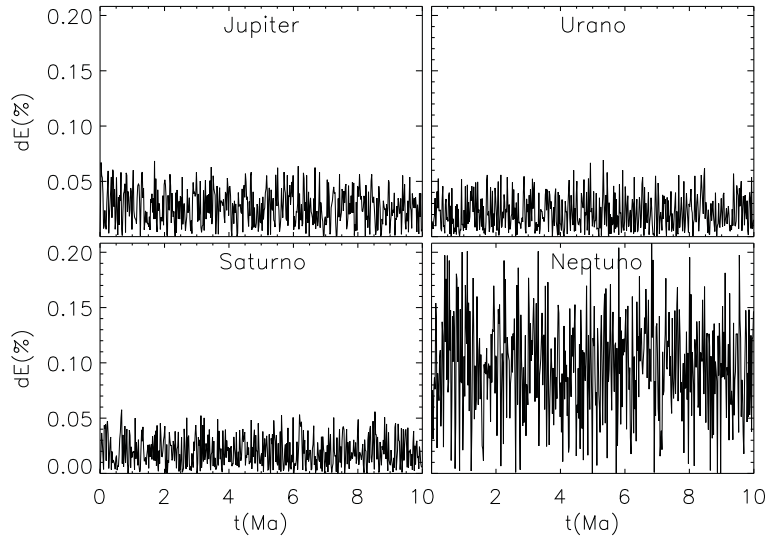


Figura 24: Diferencia porcentual de la energía de cada uno de los 4 planetas.

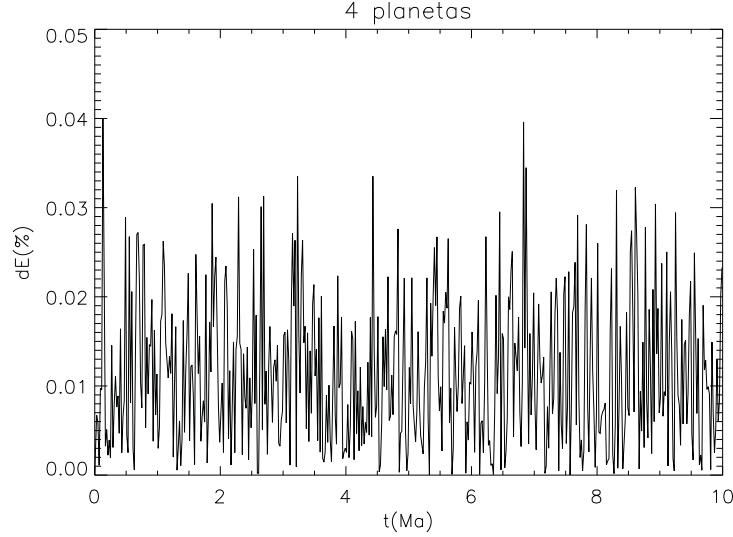


Figura 25: Diferencia porcentual de la energía del sistema (los 4 planetas externos).

debe ser constante.

A pesar de que trabajamos con órbitas circulares, para tener una noción de la conservación de las órbitas en este código se estima la cantidad θ para la órbita excéntrica de Saturno (el planeta más excéntrico con $e=0.02605940$) en la condición inicial mostrada en la Tabla 2. Este cálculo se presenta en la Fig.26, donde podemos ver que en 10Ma la oscilación que tiene el ángulo se mantiene dentro de los mismos límites que tiene en un periodo orbital y la variación máxima es menor a 2° .

Debido a que nuestro programa solo es capaz de considerar a los planetésimos como partículas de prueba, no es posible realizar un equivalente a la Fig.19, en la que también se emplean partículas semimasivas. Sin embargo verificamos que utilizando nuestro código en ausencia de planetas y gas, las partículas de prueba conservan su configuración angular, en analogía con la columna izquierda de la figura mencionada.

De las pruebas anteriores se concluye que en un lapso de 10Ma y con un paso de tiempo de 0.035 años, el código es capaz de conservar la energía total del sistema dentro del límite establecido, así como de mantener la estructura orbital a primera aproximación. Además se observó en la Fig.22 que el integrador utilizado disipa menos energía que el trabajo ejercido por el sistema sobre una partícula en el oscilador armónico amortiguado. Para nuestro caso, lo anterior implica que por cada 4 unidades de trabajo que el gas ejerza sobre una partícula, ésta solo pierde una unidad de energía, por lo cuál decrece su órbita más lento de lo que lo haría con una disipación numérica ideal. Ésto nos lleva a concluir que la energía disipada por arrastre aerodinámico en las simulaciones hechas con este código, representan un límite inferior en el efecto del gas.

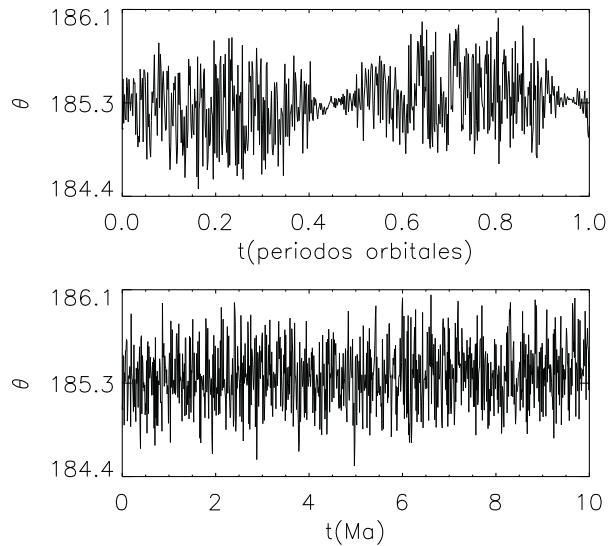


Figura 26: Oscilación del vector LRL, según la Ec.(56) para la órbita de Saturno. Arriba la variación en un periodo orbital. Abajo la variación en 10Ma.

5.3. Simulaciones preliminares

Habiendo realizado las pruebas numéricas en nuestro código, podemos comenzar a caracterizar nuestro modelo, para tal motivo, aquí se presentan los resultados de algunas simulaciones básicas que ayudan a comprender el efecto del gas sobre los planetésimos.

Al colocar una partícula en una órbita circular en un medio tal como el descrito en el Cap.3, se espera que la fricción del gas sobre la partícula disminuya su energía, provocando un decaimiento progresivo en su órbita. Para observar éste efecto se colocó un planetésimo en un disco completo (sin agujero) y uniforme con una densidad superficial del gas de $\Sigma = 53.0759\text{gcm}^{-2}$ y $T = 47.434\text{K}$ que corresponden aproximadamente las características de un disco MMSN a 10AU.

En la Fig.27 puede apreciarse cómo la disipación de energía produce una caída en espiral de la partícula. La condición inicial se denota con un punto de mayor tamaño a 15AU y 0° , los puntos son graficados con motivos de visualización y no están equiespaciados temporalmente. Entre el punto inicial y el final (con $r \sim 1.3\text{AU}$) transcurrieron 8.186Ma.

En la Fig.28 se presenta un caso equivalente, ahora colocando 5 planetésimos equiespaciados angularmente (i.e. cada uno a 72° del otro), cada cuerpo se representa con un color diferente. Puede verse cómo la caída de las partículas es simétrica respecto a la fase y en el tiempo final conservan su configuración inicial.

En la Fig.29 la configuración inicial la constituyen 3 planetésimos a diferentes radios,

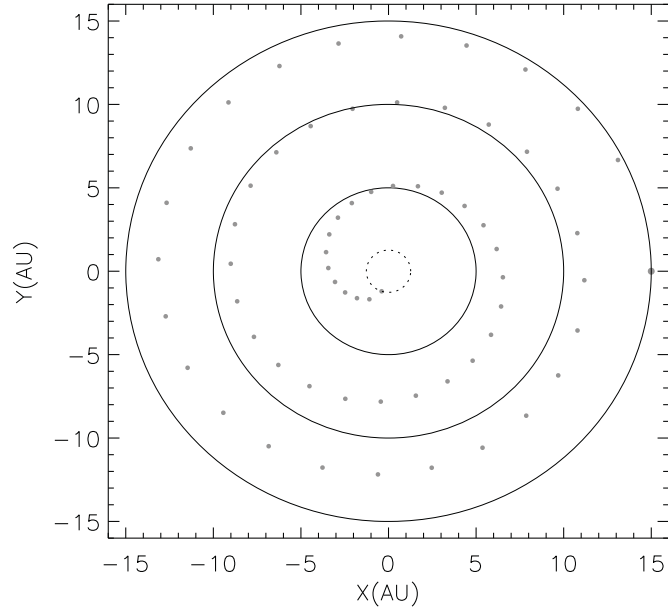


Figura 27: Decaimiento de un planetésimo en un disco uniforme. Con propósito de marcar una referencia, las líneas continuas indican los radios 5, 10 y 15AU respectivamente; la línea discontinua indica último radio alcanzado por la partícula: ~ 1.3 AU.

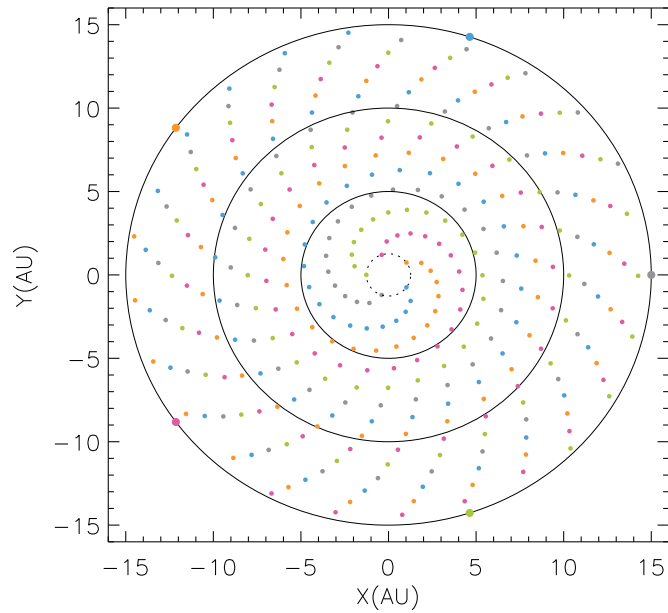


Figura 28: Decaimiento de 5 planetésimos colocados en fases equiespaciadas en un disco uniforme. Las líneas continuas indican los radios 5, 10 y 15AU respectivamente; la línea discontinua indica el último radio alcanzado por la partícula: ~ 1.3 AU.

todos ellos con la misma fase. Esta gráfica deja clara la dependencia de la fuerza de arrastre con la posición, ya que la partícula colocada inicialmente a 15AU cambió su órbita en un 91 % aproximadamente, mientras que la colocada a 35AU sólo la disminuyó en un 19% aprox. en el mismo tiempo de integración.

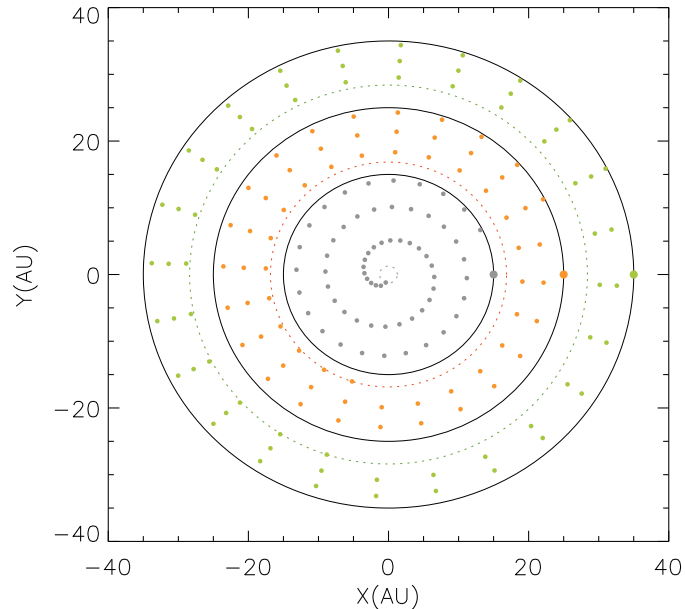


Figura 29: Decaimiento de 3 planetésimos colocados a diferentes radios en un disco uniforme. En éste caso, las líneas continuas indican los radios iniciales: 15, 25 y 35AU; las líneas discontinuas indican el último radio alcanzado por cada una de las partículas: aproximadamente 1.3AU, 16.9 y 28.4 respectivamente.

En las figuras anteriores se observa que el gas disipa energía de las partículas, produciéndoles un arrastre acelerado a radios más internos. La tasa de decaimiento es dependiente de la posición radial del cuerpo, sin embargo no depende de la fase de la misma. Se espera que ambas características se preserven independientemente del arreglo de configuración inicial que se utilice.

En el siguiente caso de ésta sección aún se considera un disco completo, sin embargo en vez de trabajar con un disco uniforme, se aplican los modelos de gas a considerar, i.e. ADSN y MMSN descritos en el Cap.3. En la Fig.30 se compara el comportamiento de una partícula de radio 1km en éstos modelos, considerando 3 casos diferentes: cuando no existe otro agente gravitacional además del Sol; cuando se incluye a Neptuno en el sistema; cuando se incluyen los 4 planetas. En los últimos 2 casos se utilizan las condiciones planetarias iniciales descritas en la Sec.3.3. Para los 3 casos la partícula está inicialmente a 15AU. Puede verse como en ambos modelos de gas, la partícula es afectada por la presencia de Neptuno, siendo atrapada en la resonancia 4:3 con este planeta, sin embargo el movimiento del planetésimo no está restringido a esa resonancia, ya que siente el efecto de las resonancias 17:12 y 5:4, que son las más próximas a la 4:3, hecho que se puede apreciar mejor si reescribimos a las

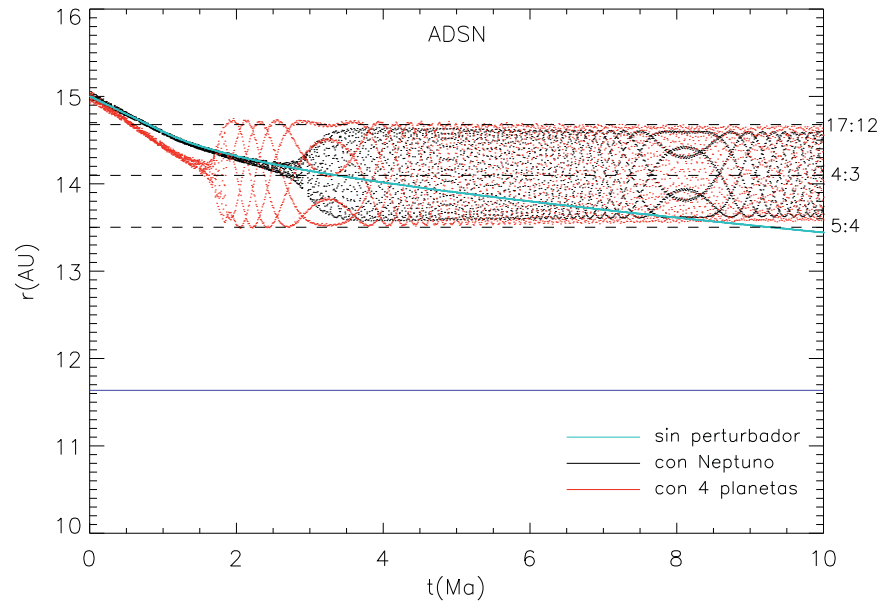
resonancias 4:3 y 5:4; de este modo, la partícula es atrapada en la 16:12 MMR y siente el efecto de las resonancias 17:12 y 15:12 respectivamente.

En la misma figura es fácil notar que el comportamiento de la partícula es sensible al número de planetas que conforman el sistema, esencialmente ésta dependencia afecta la escala de tiempo en que la partícula es atrapada en resonancia.

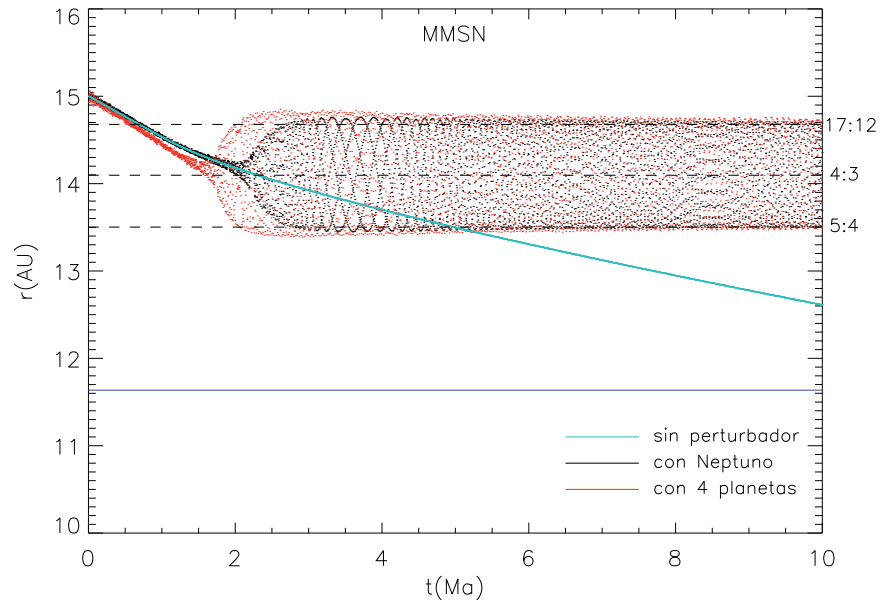
Una característica interesante que se aprecia claramente en el panel superior de la Fig.30 es un cambio en la frecuencia de oscilación de la partícula en torno a la resonancia, efecto que se observa alrededor de los 8Ma para el caso con Neptuno y de los 3Ma para el caso con los 4 planetas. Creemos que ésta alteración se debe a alguna configuración particular de los ángulos de libración de la partícula con Neptuno, sin embargo, el estudio de éste fenómeno está más allá del alcance del presente trabajo.

Para complementar la información de la Fig.30, en ésta sección se analiza una simulación completa en términos de los componentes del sistema. Se utilizan 100 planetésimos de 50m de radio, inmersos en un disco con modelo MMSN con agujero de gas a 1AU, que para fines prácticos es un disco completo en la región planetaria. Exclusivamente en éste caso, el borde del disco de gas no coincide con el de la distribución de partículas, por lo que en la Fig.31 se denomina $R_{i,g}$ al primero y $R_{i,p}$ al segundo. La figura mencionada muestra el resultado de la simulación en ambos casos, al considerar solo a Neptuno en el sistema y al considerar a los 4 planetas. La simulación representada en la Fig.31 se denomina “Caso 0”.

Las figuras del último par de casos considerados indican que existen múltiples diferencias en la evolución de los planetésimos en función del número de planetas considerado. En la Fig.31 vemos que la inestabilidad ocurre en un tiempo menor en presencia de los 4 planetas, como resultado de éste proceso, las partículas abandonan la resonancia donde estaban capturadas y pueden ser eyectadas fuera del sistema (si domina la fuerza de resonancia) o hacia la región planetaria (si domina la fuerza de arrastre). En el panel (a), una cantidad significativa de las partículas que decaen son atrapadas en las órbitas de cada uno de los planetas, sin embargo no han sido atrapados en resonancia 1:1 con los planetas: en el panel (b) no observamos que ninguna partícula permanezca en la órbita de Neptuno, sin embargo las condiciones orbitales de los planetas que utilizamos están basadas en la configuración inicial multiresonante de Batygin y Brown (2010), por lo cuál cada uno de los planetas está en resonancia con el contiguo y por propiedad transitiva, también lo está con los 2 restantes, ésto ocasiona que cada órbita planetaria sea blanco de los torques resonantes de los demás planetas, facilitando el atrapamiento de partículas que las cruzan. En una situación real, éstas partículas pueden ser acretadas por el planeta o permanecer en órbitas estables (un ejemplo puede verse en los troyanos de Júpiter). Si ahora observamos la Fig.32 puede notarse que las partículas de ambos paneles no están dominadas por la influencia de las mismas resonancias. En (a) los planetésimos están centrados en la resonancia 6:5, mientras que en (b) lo están en la 5:4; nótese que la 6:5 es una resonancia más interna y por lo tanto más fuerte. Al parecer, la fuerza gravitacional a esta distancia es comparable con la de arrastre, por lo que la presencia de 1 o 4 planetas determina la resonancia de captura. Posteriormente,

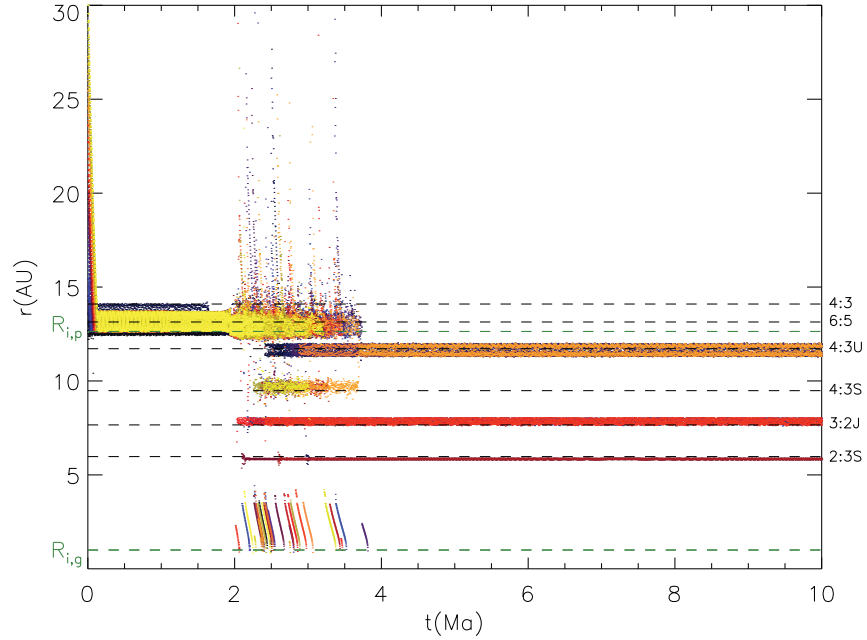


(a)

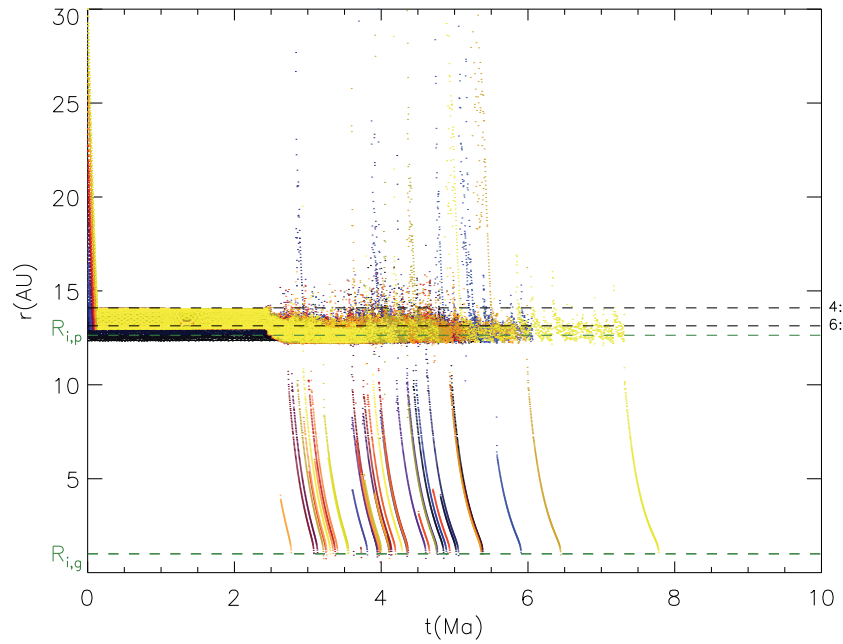


(b)

Figura 30: Arrastre de la partícula en 3 casos diferentes: sin perturbador gravitacional; incluyendo a Neptuno en el sistema; incluyendo a los 4 planetas. Las líneas discontinuas muestran las resonancias 5:4, 4:3 y 17:12. La línea morada indica el semi eje mayor de Neptuno. (a) Partícula inmersa en el disco con modelo de gas ADSN, (b) en el modelo MMSN.

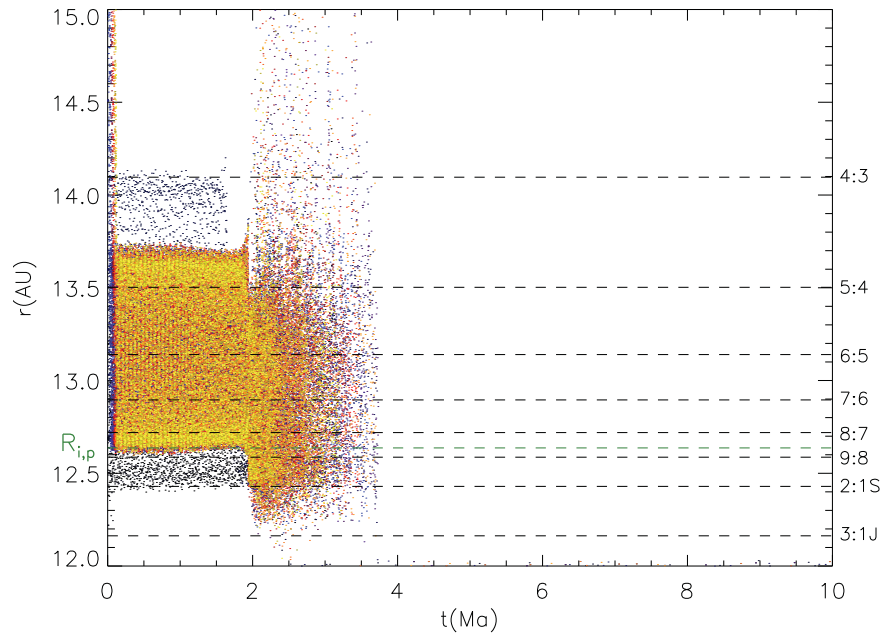


(a)

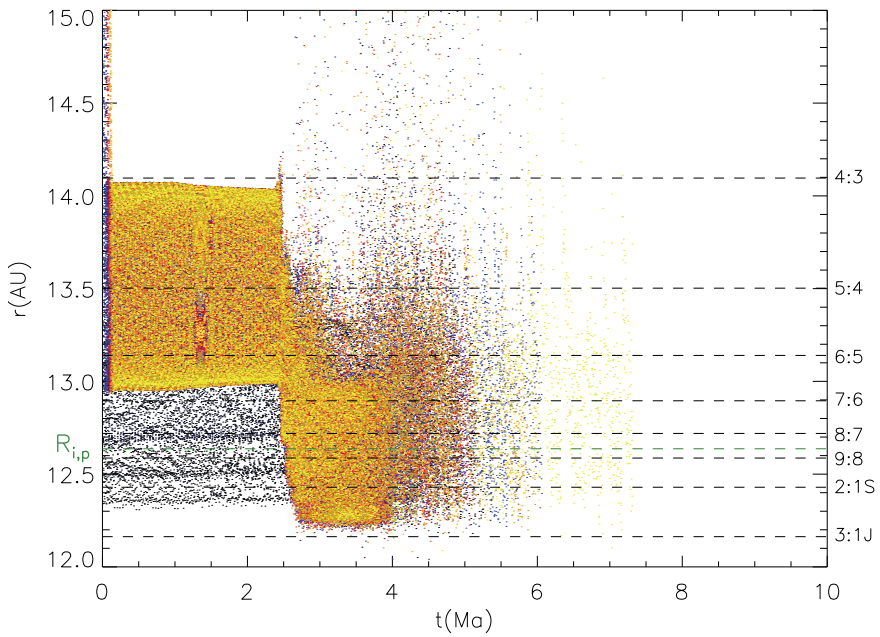


(b)

Figura 31: Evolución temporal de la posición de 100 planetésimos de 50m en un disco de gas “completo” con modelo MMSN. En (a) el sistema incluye a los cuatro planetas, en (b) sólo a Neptuno. El código de color hace referencia la posición inicial de cada partícula (c.f. Fig.35). El radio interno del disco de partículas $R_{i,p}$ a $3.5R_{Hill}$, y el correspondiente del disco de gas $R_{i,g}$ a 1AU se indican con una línea discontinua verde.

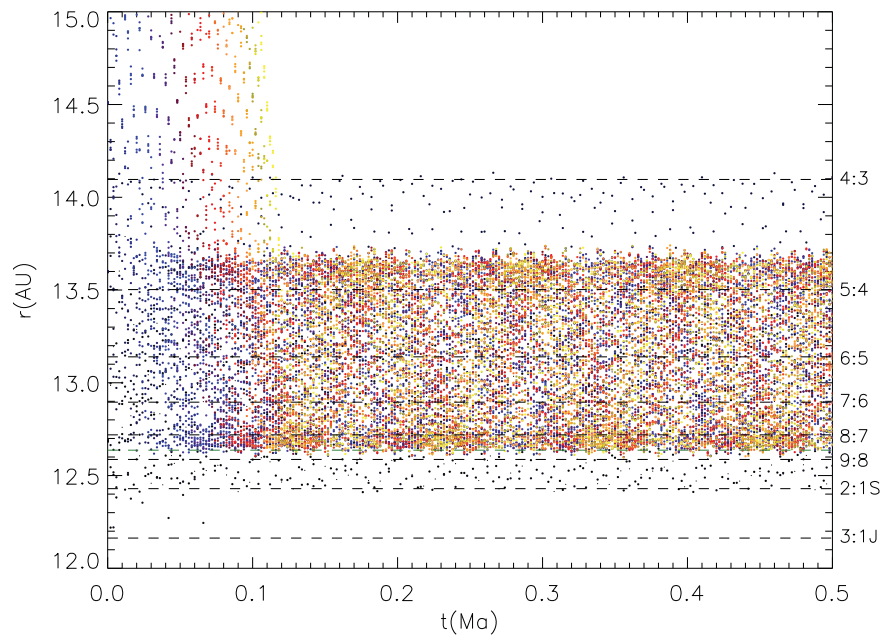


(a)

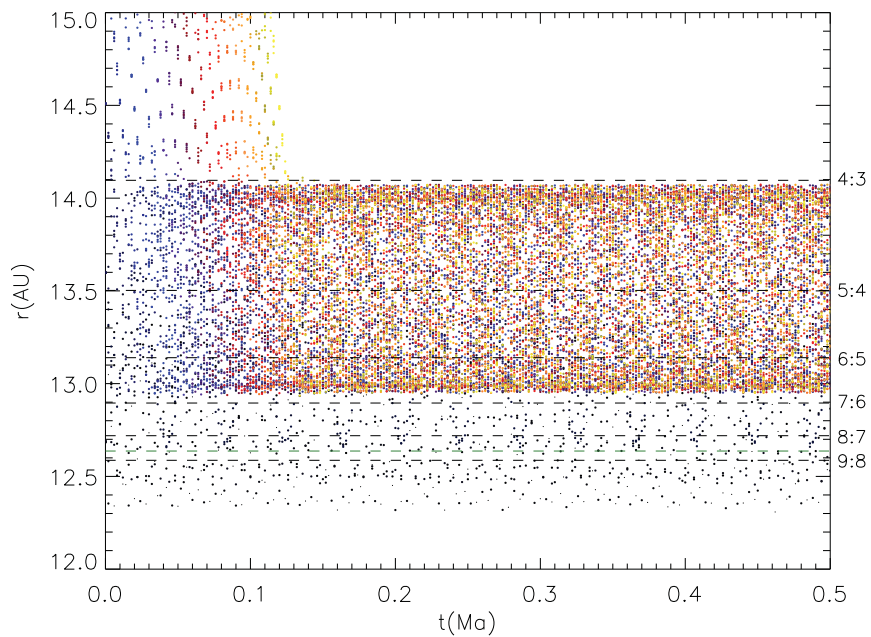


(b)

Figura 32: Equivalente a la Fig.31 con mayor detalle en la zona de atrapamiento en resonancias. En (a) el sistema incluye a los cuatro planetas, en (b) sólo a Neptuno. En (b) se marcan las resonancias con Saturno y Neptuno para referencia a pesar de no estar presentes en la simulación.



(a)



(b)

Figura 33: Equivalente a la Fig.31 con mayor detalle en la zona de atrapamiento en resonancias durante los primeros 0.5Ma. En (a) el sistema incluye a los cuatro planetas, en (b) sólo a Neptuno.

antes de alcanzarse la inestabilidad, ocurre un cambio de resonancia, en el panel (a) los planetésimos parecen haberse trasladado para centrarse en algún punto entre la 6:5 MMR y la 7:6 MMR, mientras que en (b) lo han hecho entre la 8:7 MMR y la 9:8 MMR. La explicación es la misma que la recién discutida referente al número de planetas. Por último, al observar la Fig.33 notamos que las partículas son atrapadas en las resonancias esencialmente en la misma escala de tiempo, siendo ligeramente menor en el panel (a), lo cuál es consistente con el caso ilustrado en la Fig.30.

Según la Fig.13, para que un planetésimo sea capturado en alguna resonancia $j + 1 : j$, el segmento de curva correspondiente al planeta y modelo de gas debe estar por encima de la línea horizontal, por lo cuál, una partícula de 50m de radio solo puede ser atrapada en resonancias externas de primer orden por Neptuno, característica que no se observa en la Fig.31, donde todos los planetas han atrapado partículas en MMR con esas características. A este respecto podemos comentar que el radio mínimo dado por la Ec.(8) que da origen a la Fig.13 es una aproximación y el valor límite es del mismo orden de magnitud que el radio de 50m. Por lo tanto, podemos decir que la simulación del Caso 0 no es consistente con la Ec.(8) solo dentro del orden de magnitud y no contamos con información suficiente para hacer una aseveración mayor.

Modelo de gas:	ADSN, MMSN
R_i:	3.5, 7, 10 R_{Hill}
r_c:	0.1, 1, 10 km

Tabla 3: Variables consideradas en el modelo.

6. Resultados

Para una distinción inmediata de los 18 casos analizados, se utilizará la siguiente notación para identificar el valor de las variables en cada uno los casos: [modelo de gas, R_i , r_c]. Por ejemplo, el caso en que se utiliza el modelo de masa mínima para la nebulosa solar con radio de truncamiento en $3.5R_{\text{Hill}}$ y partículas de 1km de radio, se denotará como: [MMSN, $3.5R_{\text{Hill}}$, 1km]; Un asterisco indicará que todos los casos posibles de la variable considerada son mostrados. Con relación a éste arreglo, la Tabla 3 representa un resumen de la Tabla 1 con las variables de los 18 casos analizados. Al igual que en la sección anterior, las resonancias con Neptuno son indicadas como $j : k$, mientras que las resonancias con otros planetas son denotadas como $j : kA$, con A la inicial del planeta en cuestión.

En la presente y subsecuentes secciones se hará amplio uso de las resonancias calculadas con la Ec.(6), de modo que en la Fig.34 se muestran todas las resonancias de primer orden con Neptuno desde $j = 1$ hasta $j = 8$, que según la Ec.(7) es la resonancia crítica para éste planeta; se incluyen las resonancias de bajo orden con los otros planetas comprendidas entre la posición de Neptuno y 20AU; se muestra también la 7:5 MMR y 17:12 MMR con Neptuno, la razón se discutirá en la Sec.7.3.

De los resultados presentados a continuación, el conjunto de gráficos mostrado en la Sec.6.1 presenta la evolución temporal de la posición de los planetésimos, indicando las posiciones de las resonancias de primer orden más externas con Neptuno, ya que al ser el planeta más externo esperamos que un número significativo de partículas entren en resonancia con él antes de hacerlo con otros planetas. Se hace hincapié en las resonancias de primer orden por que se sabe que las resonancias de bajo orden tienden a ejercer mayor fuerza sobre las partículas circundantes (ver por ejemplo Gallardo 2006).

Posteriormente en la Sec.6.2 se muestran gráficas equivalentes a las de la Sec.6.1 con un mayor detalle en la región en torno a R_i , con el fin de observar el efecto del radio de truncamiento. Debido a que en estas figuras se cuenta con mayor resolución espacial, se muestran resonancias de la Fig.34 que no se incluyen en las gráficas de la Sec.6.1. Por último, en la Sec.6.3 se muestra la distribución de las partículas en el plano X-Y a diferentes tiempos de la simulación, naturalmente tales gráficas son consistentes con las de secciones 6.1 y 6.2.

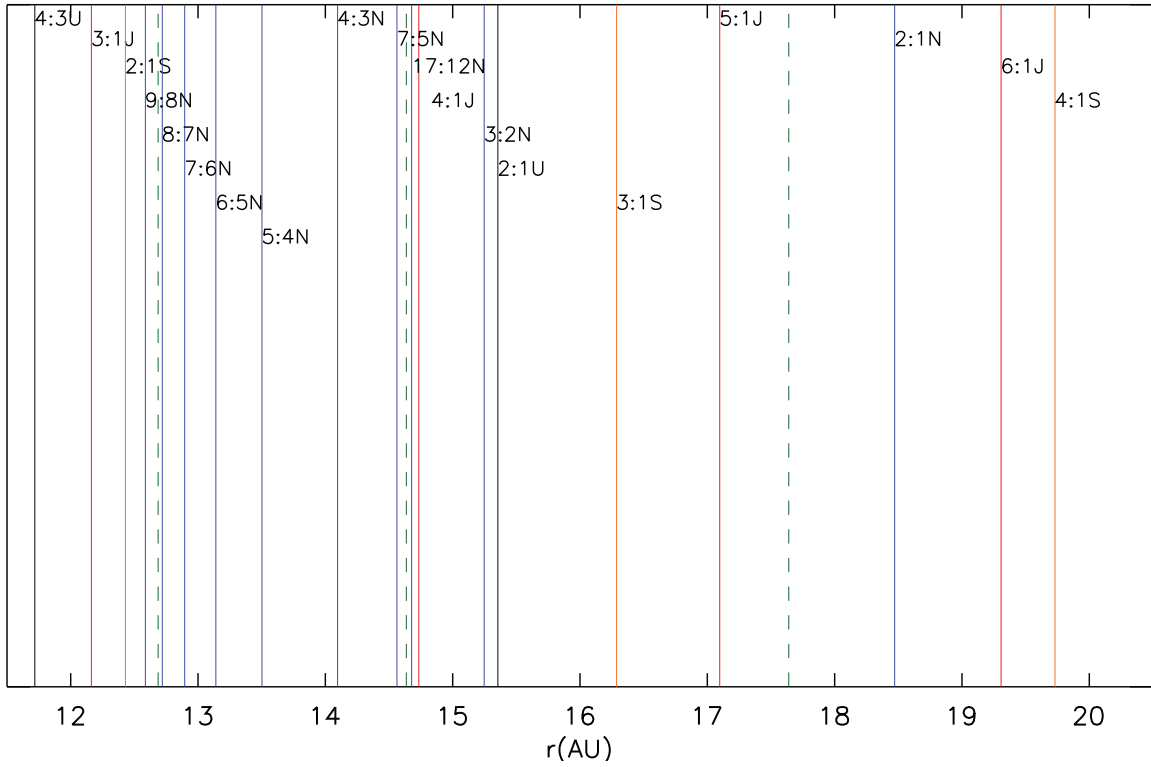


Figura 34: Resonancias localizadas entre Neptuno (11.64AU apróx.) y 20AU. Para una mejor identificación, todas las resonancias asociadas a un planeta son del mismo color; a la derecha de cada línea hay una etiqueta indicando la resonancia que representa. Se muestran también con líneas verdes discontinuas los 3 diferentes valores de R_j .

6.1. Evolución del radio de las partículas

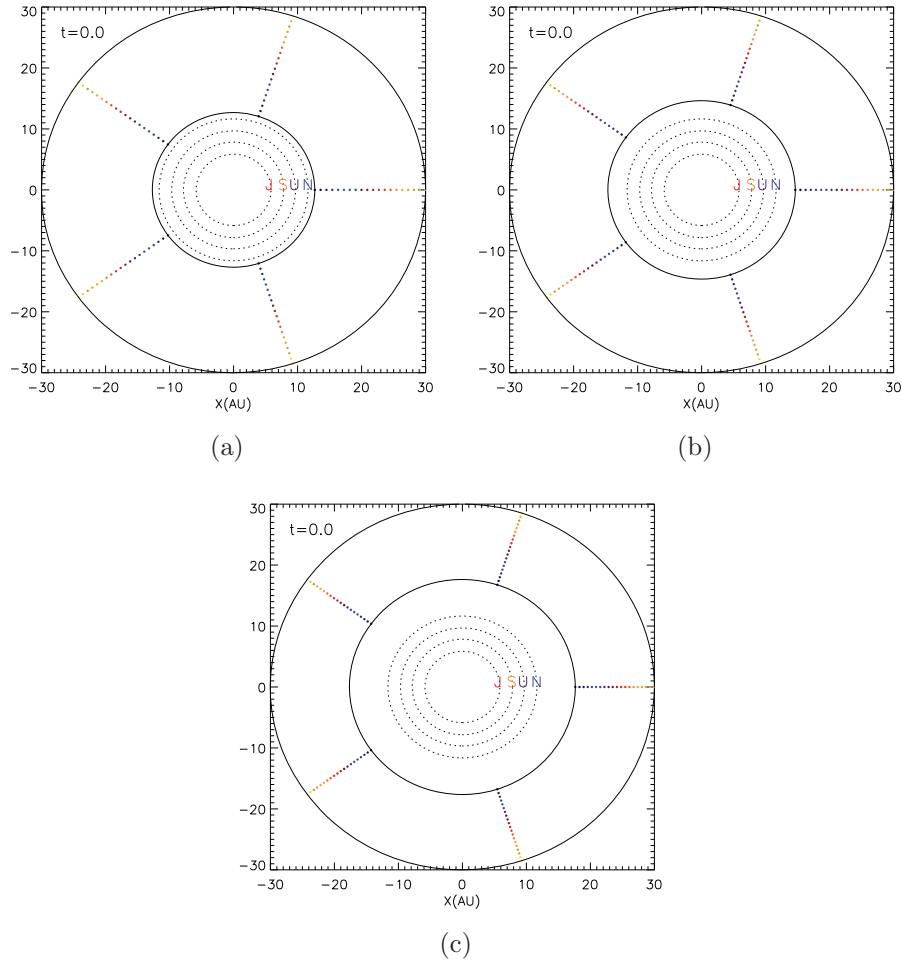


Figura 35: Condición inicial para los planetésimos en el plano X-Y. El código de color hace referencia a la posición inicial de cada planetésimo. Se indican con línea continua negra el radio interno y externo de la distribución; en líneas punteadas los radios de los planetas indicados con las iniciales de cada uno de ellos. Los paneles (a), (b) y (c) corresponden a la condición inicial con $R_i=3.5$, 7 y $10R_{Hill}$ respectivamente.

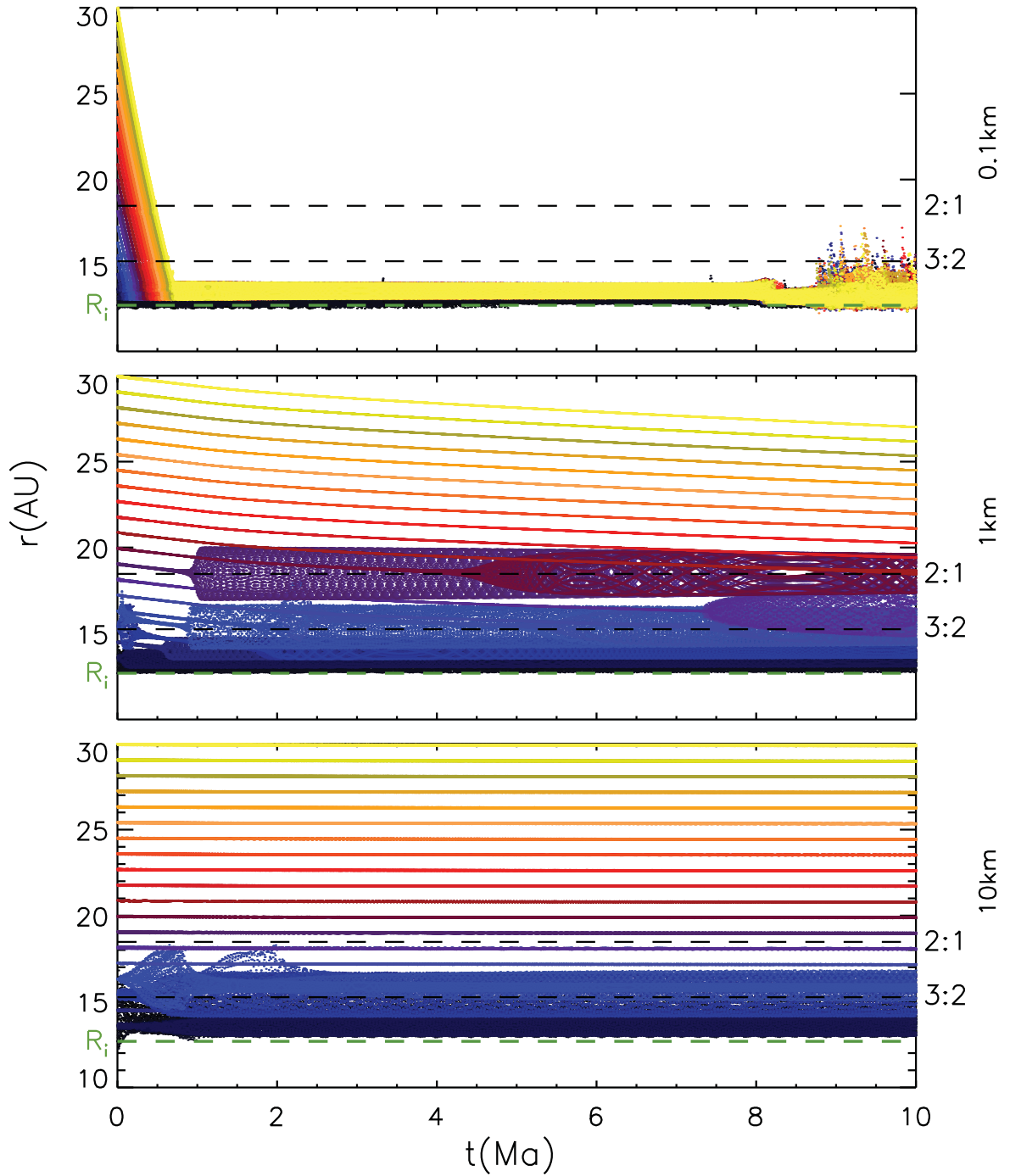


Figura 36: Evolución temporal de la posición de todos los planetésimos para el caso: [ADSN, $3.5R_{\text{Hill}}$, *]. El código de color hace referencia la posición inicial de cada partícula (c.f. Fig.35 (a)). Se muestran con líneas discontinuas negras las posiciones de las resonancias de primer orden 2:1 y 3:2 con Neptuno. R_i está representado por la línea discontinua verde. Del lado derecho se indica el tamaño de partícula considerado.

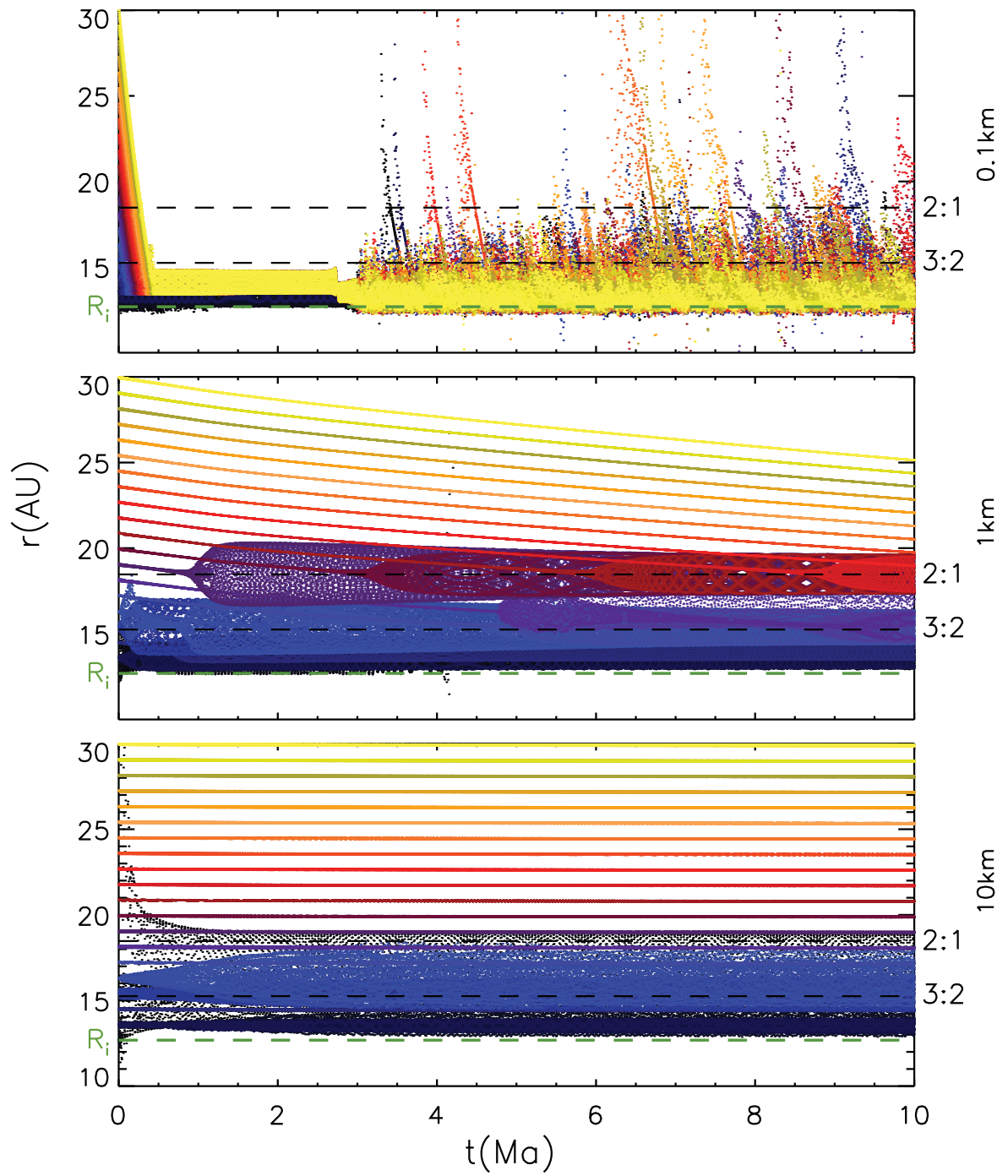


Figura 37: Equivalente a la Fig.36 pero para el caso: [MMSN, $3.5R_{\text{Hill}}$, *]

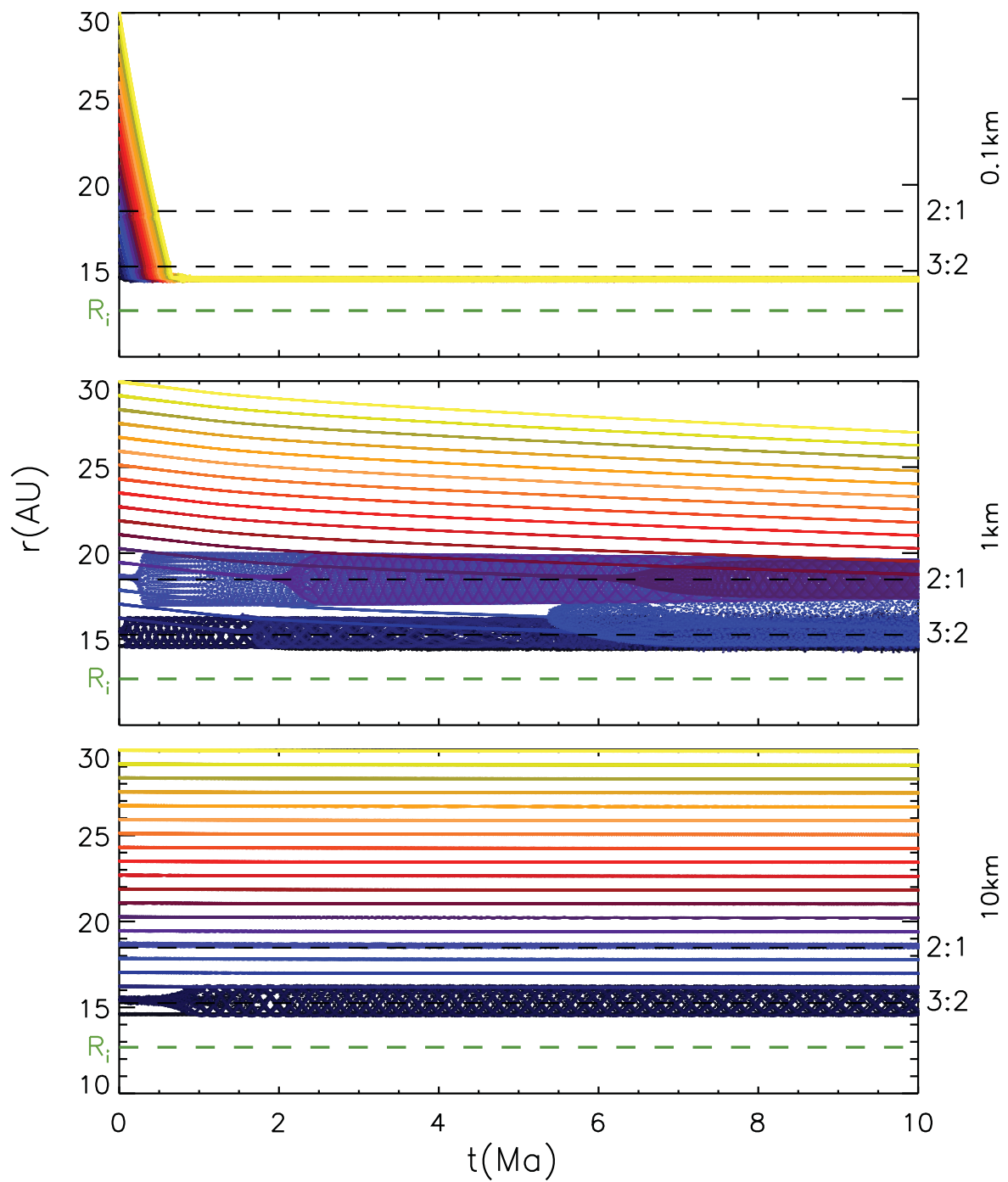


Figura 38: Equivalente a la Fig.36 pero para el caso: [ADSN, $7R_{\text{Hill}}$, *].

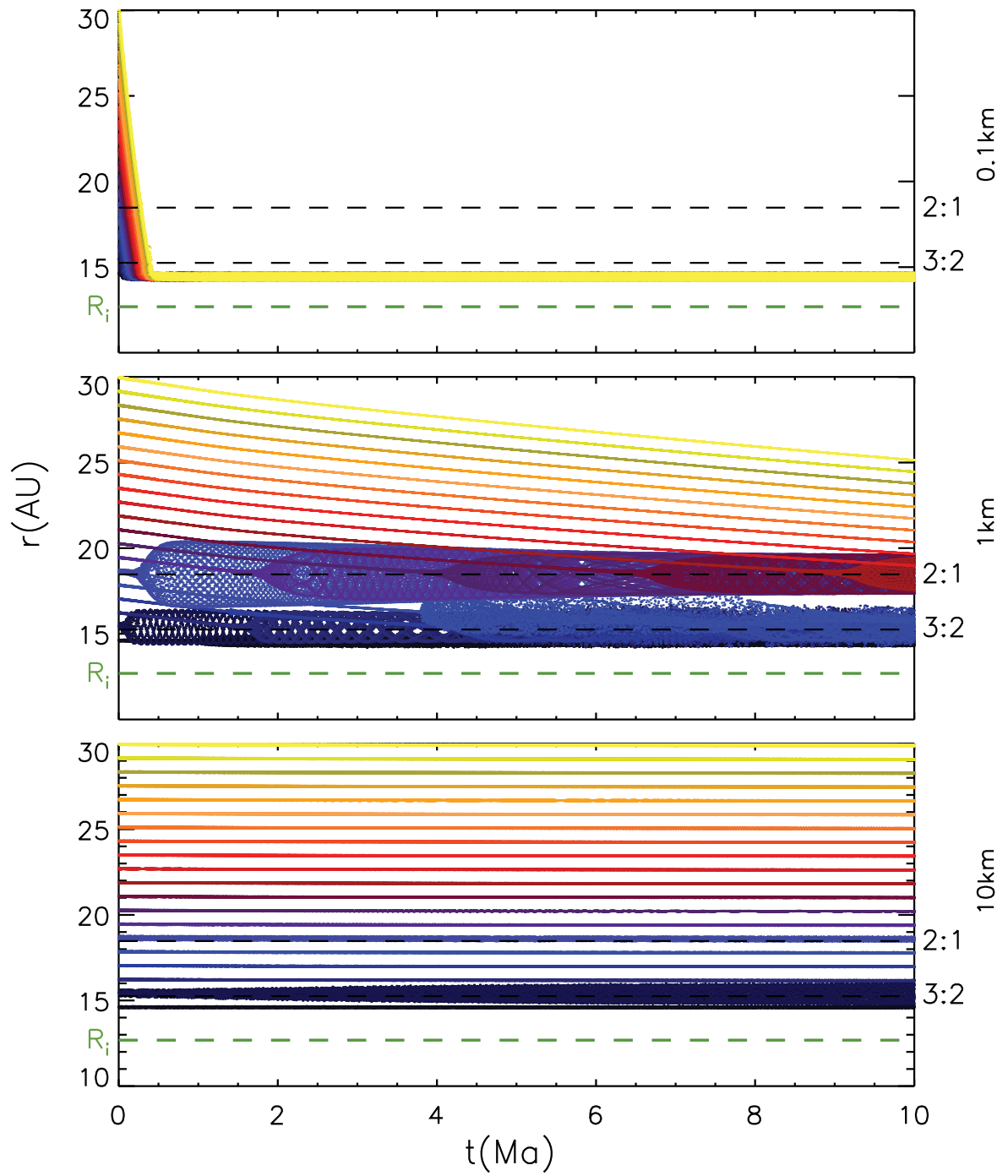


Figura 39: Equivalente a la Fig.36 pero para el caso: [MMSN, $7R_{\text{Hill}}$, *].

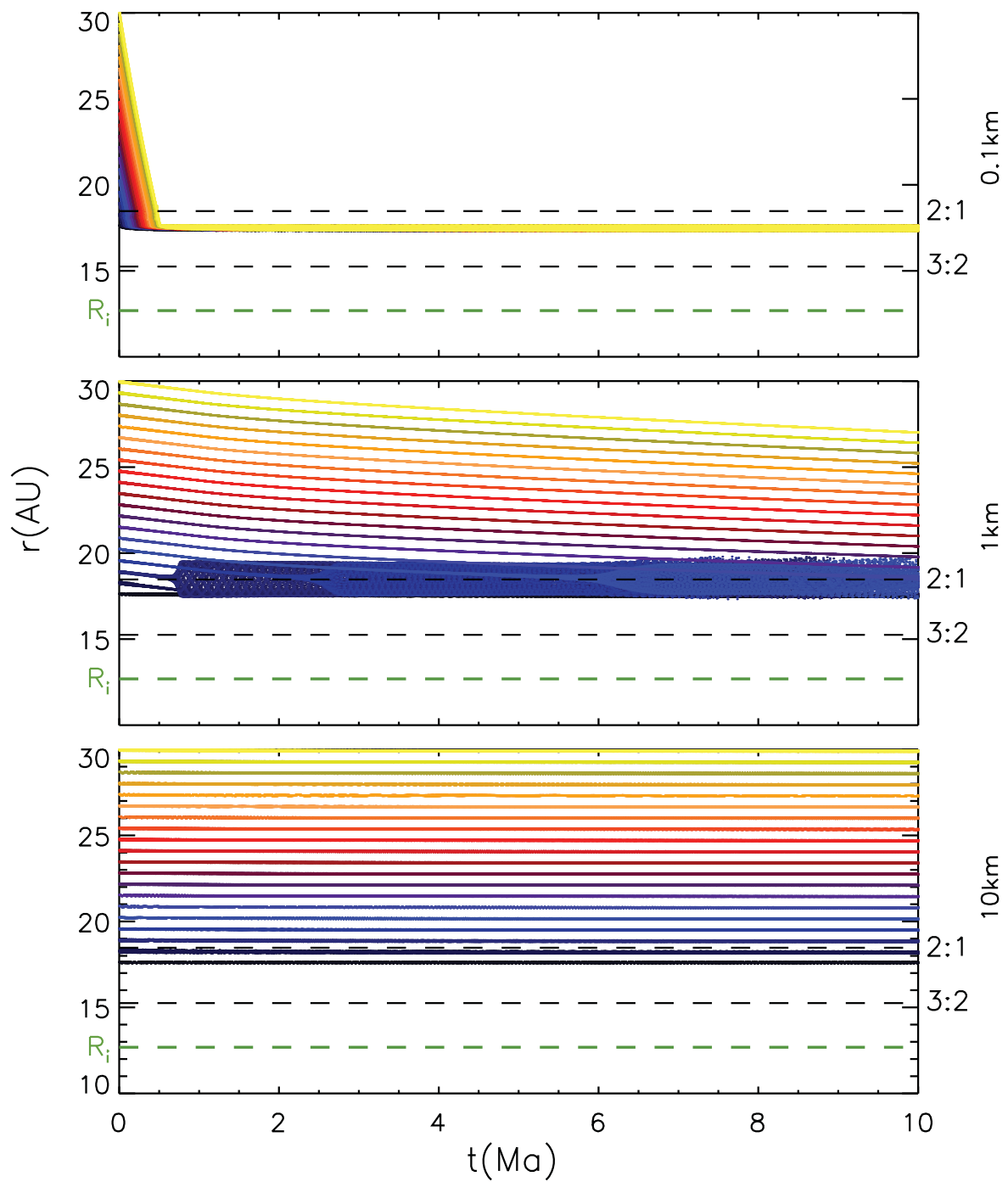


Figura 40: Equivalente a la Fig.36 pero para el caso: [ADSN, $10R_{\text{Hill}}$, *].

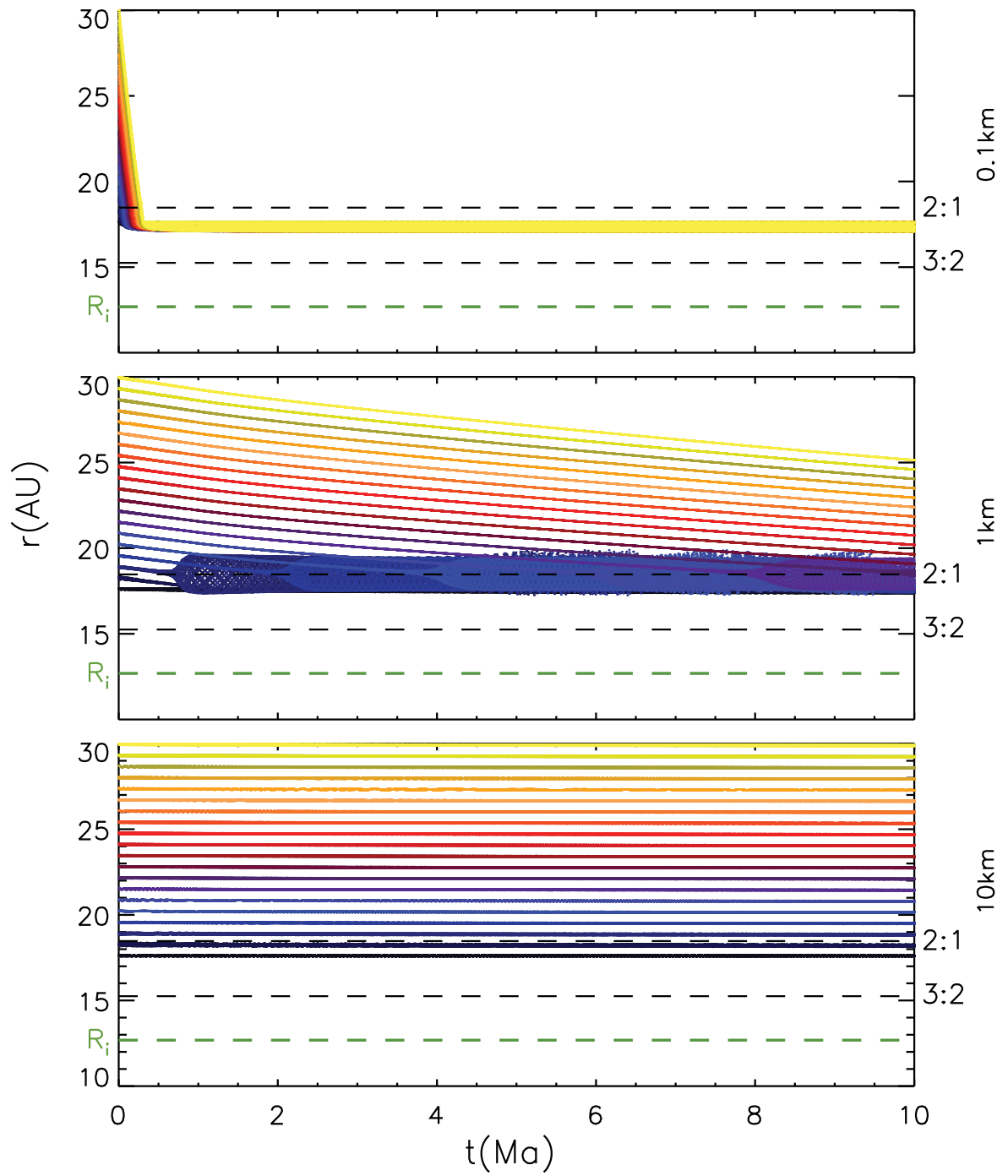


Figura 41: Equivalente a la Fig.36 pero para el caso: [MMSN, $10R_{\text{Hill}}$, *].

6.2. Evolución de las partículas en torno al radio de truncamiento

El conjunto de gráficas de éste apartado se obtuvo de los mismos datos que constituyen las 6 figuras anteriores, sin embargo aquí se hace un acercamiento a la zona cercana a R_i . Lo anterior con la finalidad de observar el comportamiento de los planetésimos en ésta zona y determinar el efecto del parámetro mencionado.

Nótese que en las gráficas correspondientes a $R_i=3.5R_{\text{Hill}}$, la resonancia 8:7 está justo por encima de R_i ; además, sin etiquetar, se encuentra la 9:8 MMR entre la 8:7 MMR y la 2:1S MMR. De manera similar, en las figuras correspondientes a $R_i=7R_{\text{Hill}}$, la 17:12 MMR se encuentra sin etiquetar entre las resonancias 4:1J y 7:5.

(Esta página ha sido dejada en blanco intencionalmente para permitir que, si el lector desea, colocar el visor de PDF en modo dual y desplegar al mismo tiempo las figuras de ambos modelos de gas para su comparación.)

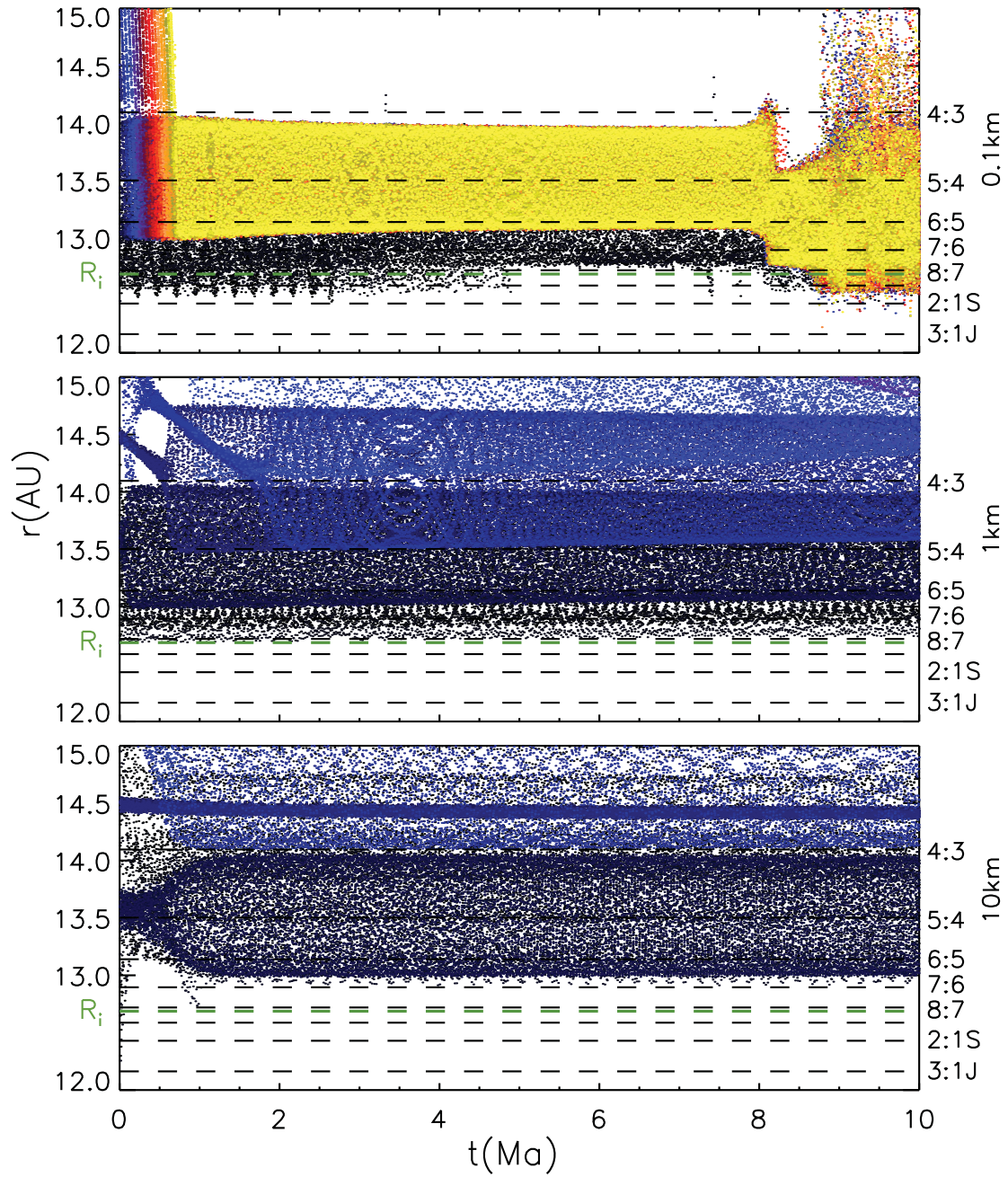


Figura 42: Evolución temporal de la posición de todos los planetésimos en la región cercana al radio de truncamiento para el caso: [ADSN, $3.5R_{\text{Hill}}$, *]. El código de color hace referencia a la posición inicial de cada partícula (c.f. Fig.35). Se muestran con líneas discontinuas negras las posiciones de las resonancias que se considera afectan la dinámica de las partículas. R_i está representado por la línea discontinua verde. Del lado derecho se indica el tamaño de partícula considerado.

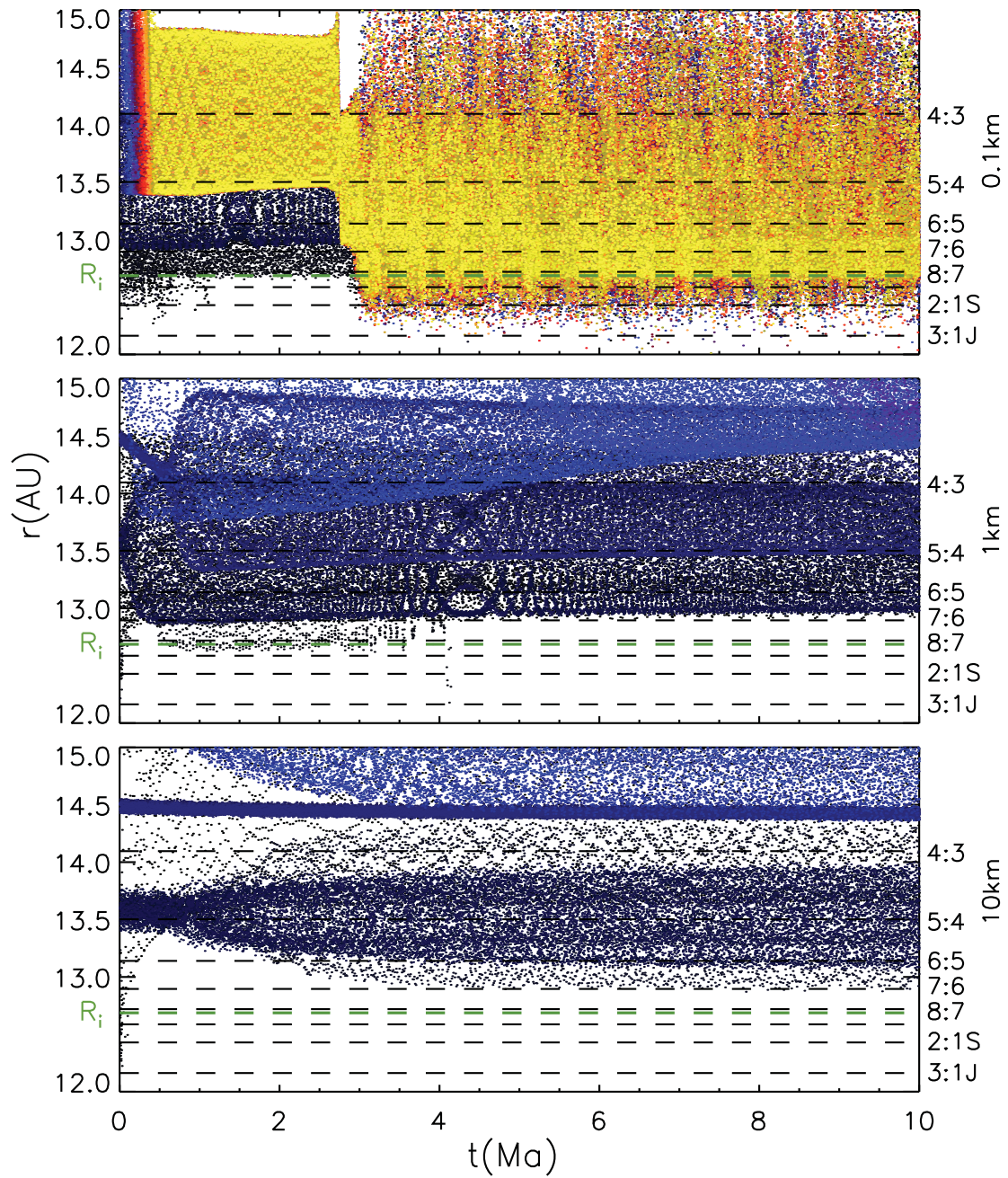


Figura 43: Equivalente a la Fig.42 pero para el caso: [MMSN, $3.5R_{\text{Hill}}$, *].

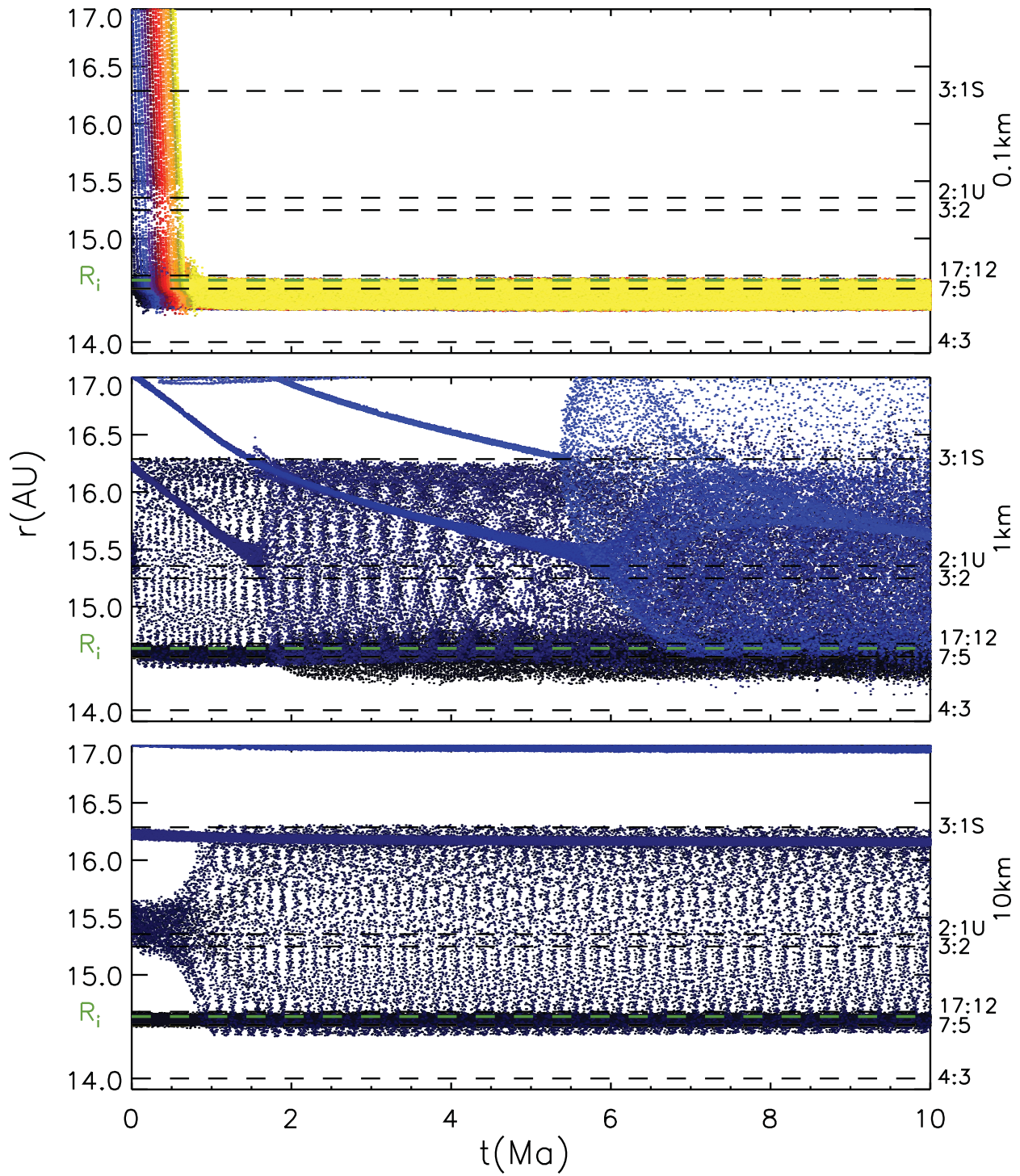


Figura 44: Equivalente a la Fig.42 pero para el caso: [ADSN, $7R_{\text{Hill}}$, *].

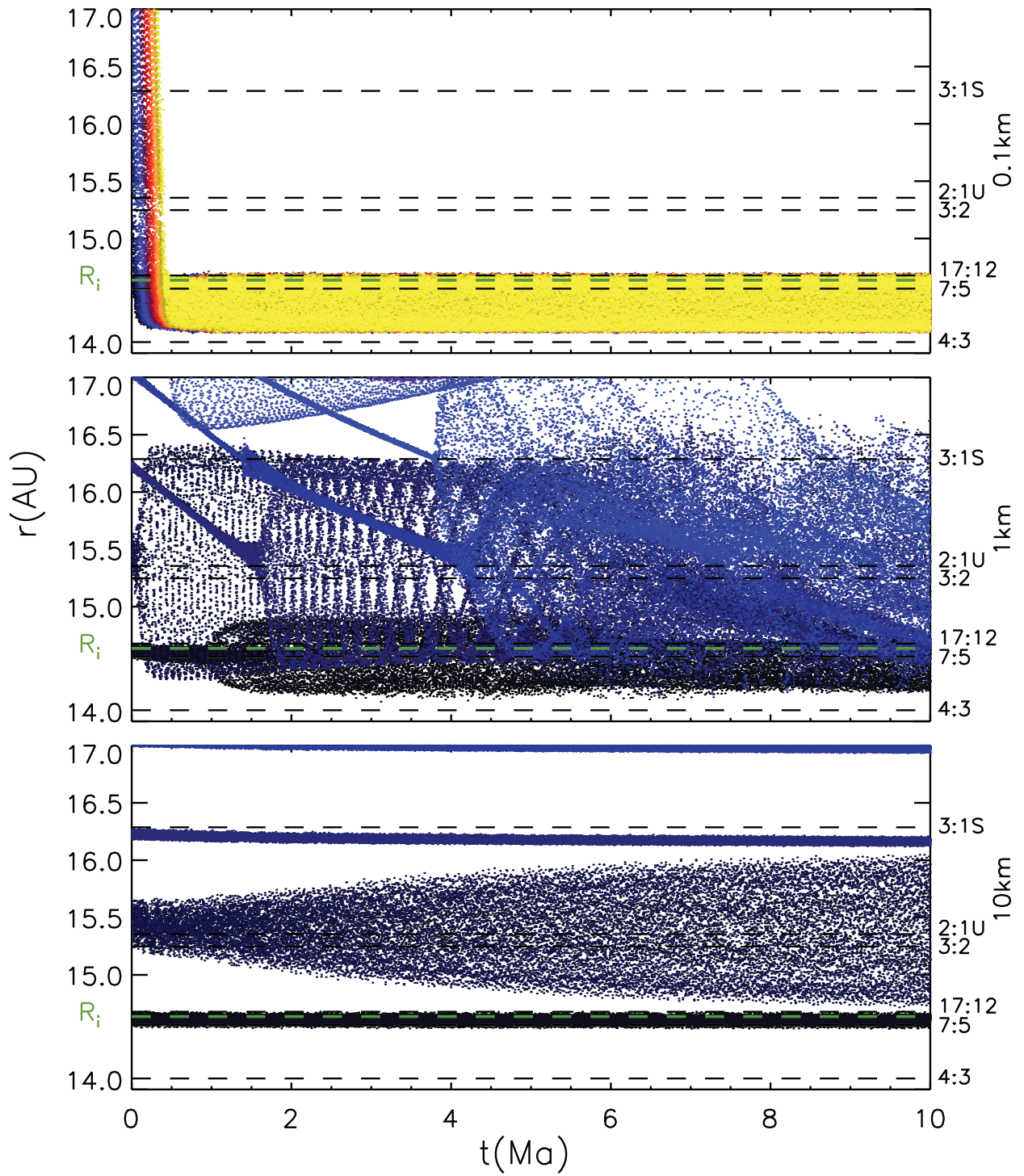


Figura 45: Equivalente a la Fig.42 pero para el caso: [MMSN, $7R_{\text{Hill}}$, *].

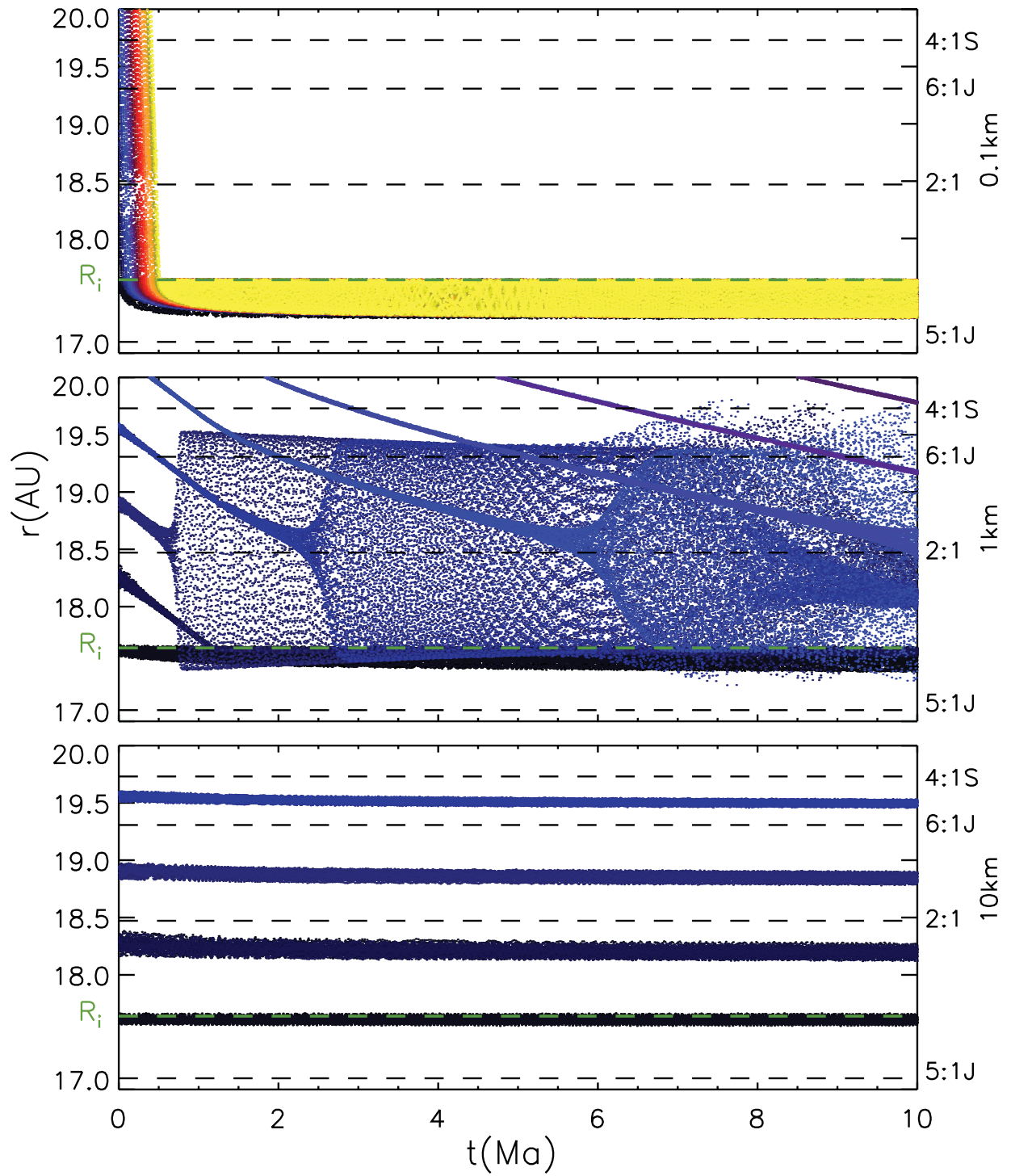


Figura 46: Equivalente a la Fig.42 pero para el caso: [ADSN, $10R_{\text{Hill}}$, *].

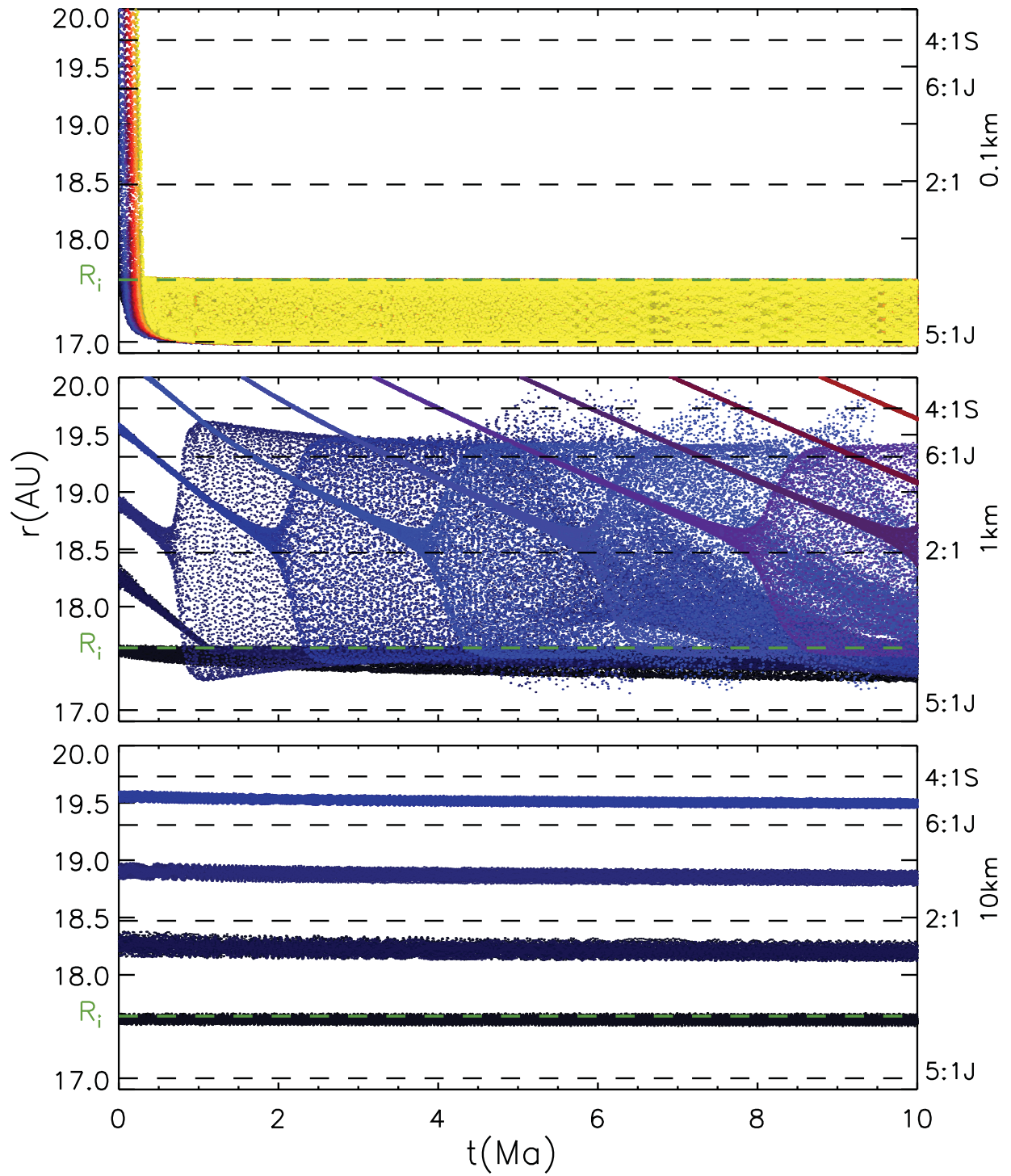


Figura 47: Equivalente a la Fig.42 pero para el caso: [MMSN, $10R_{\text{Hill}}$, *].

6.3. Posición en el plano X-Y a diferentes tiempos de la simulación.

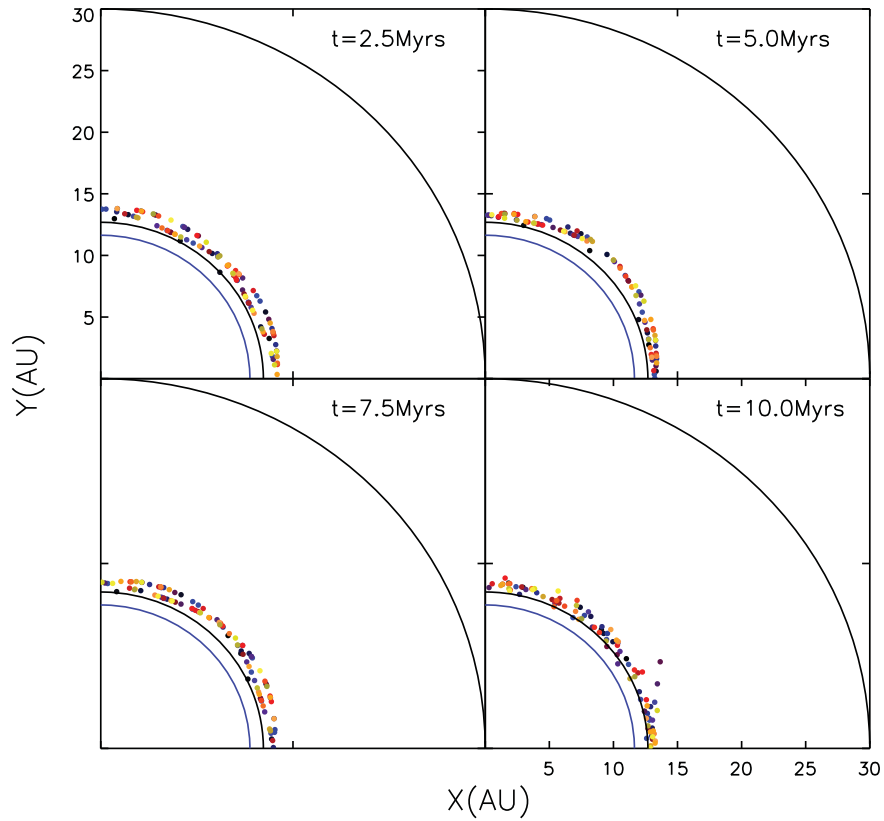


Figura 48: Distribución de las partículas en el plano X-Y en diferentes momentos de la simulación. Por motivos de ilustración se grafica el valor absoluto de las coordenadas de cada partícula, de modo que en el cuadrante mostrado se despliegan las 100 partículas. El código de color hace referencia a la posición inicial de cada planetésimo (c.f. Fig.35). Se indican con línea continua negra el radio interno y externo de la distribución, la línea continua morada indica la órbita de Neptuno.

Caso: [ADSN, $3.5R_{\text{Hill}}$, 0.1km].

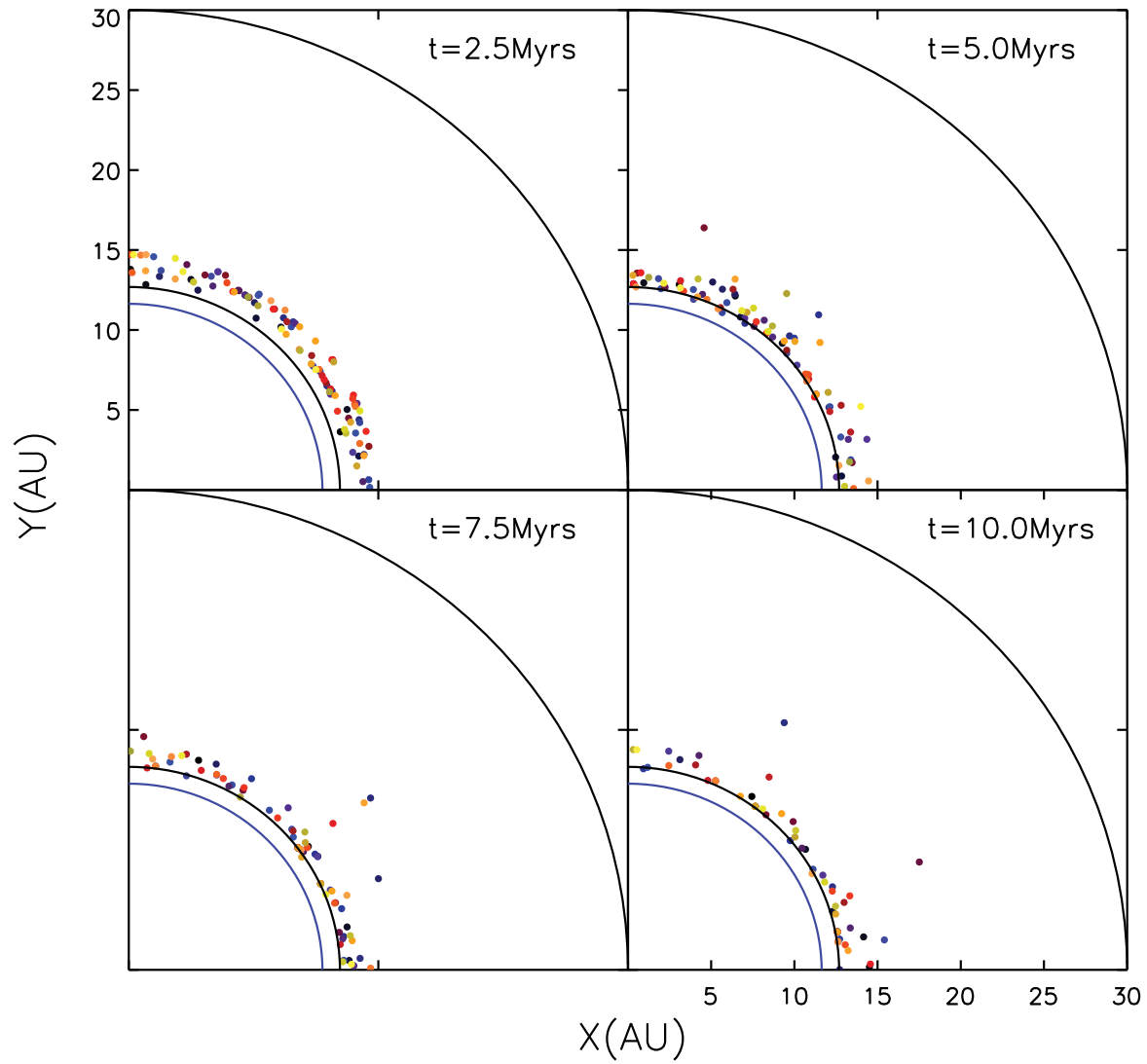


Figura 49: Equivalente a la Fig.48 para el caso: [MMSN, $3.5R_{\text{Hill}}$, 0.1km].

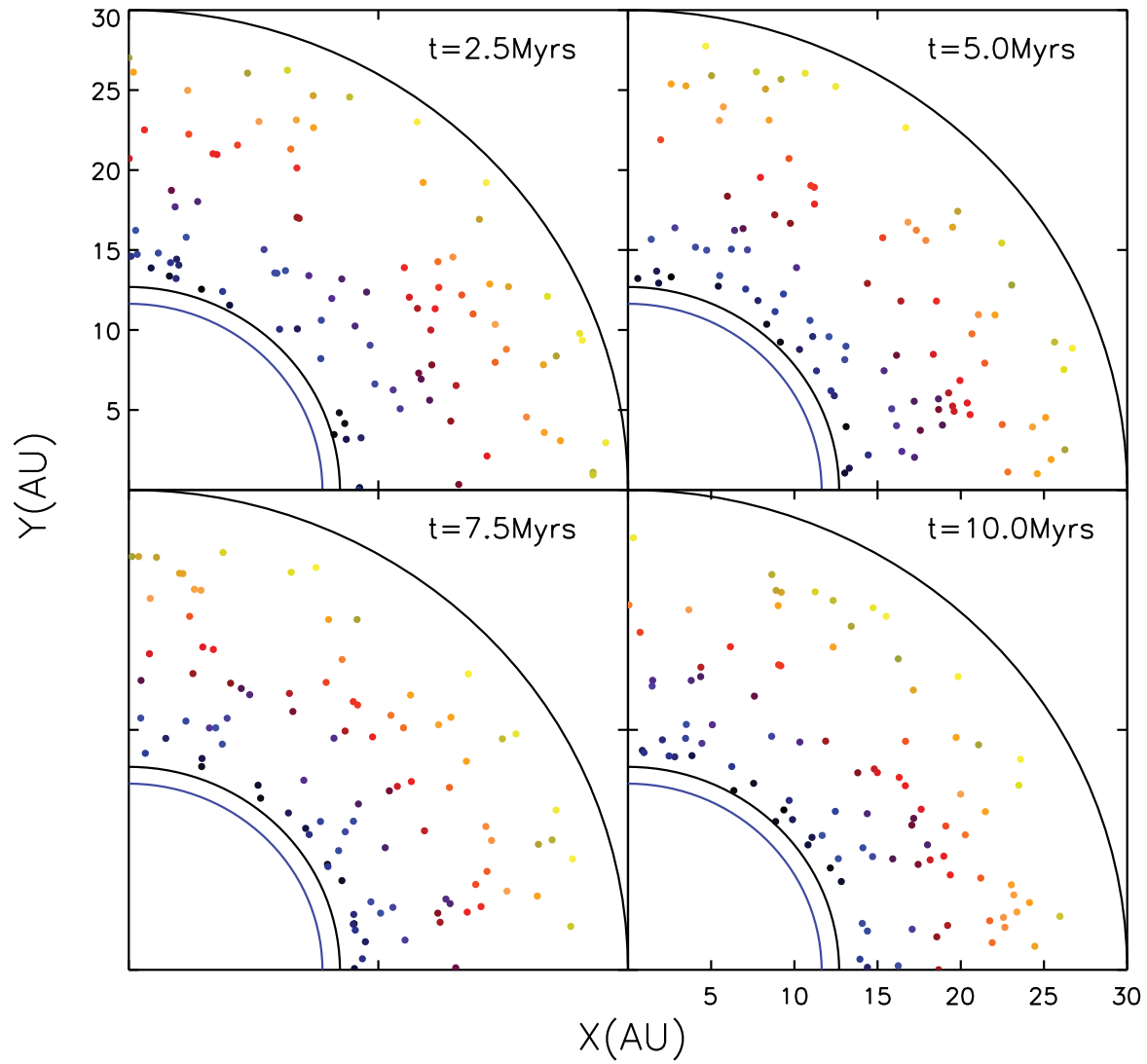


Figura 50: Equivalente a la Fig.48 para el caso: [ADSN, $3.5R_{\text{Hill}}$, 1km].

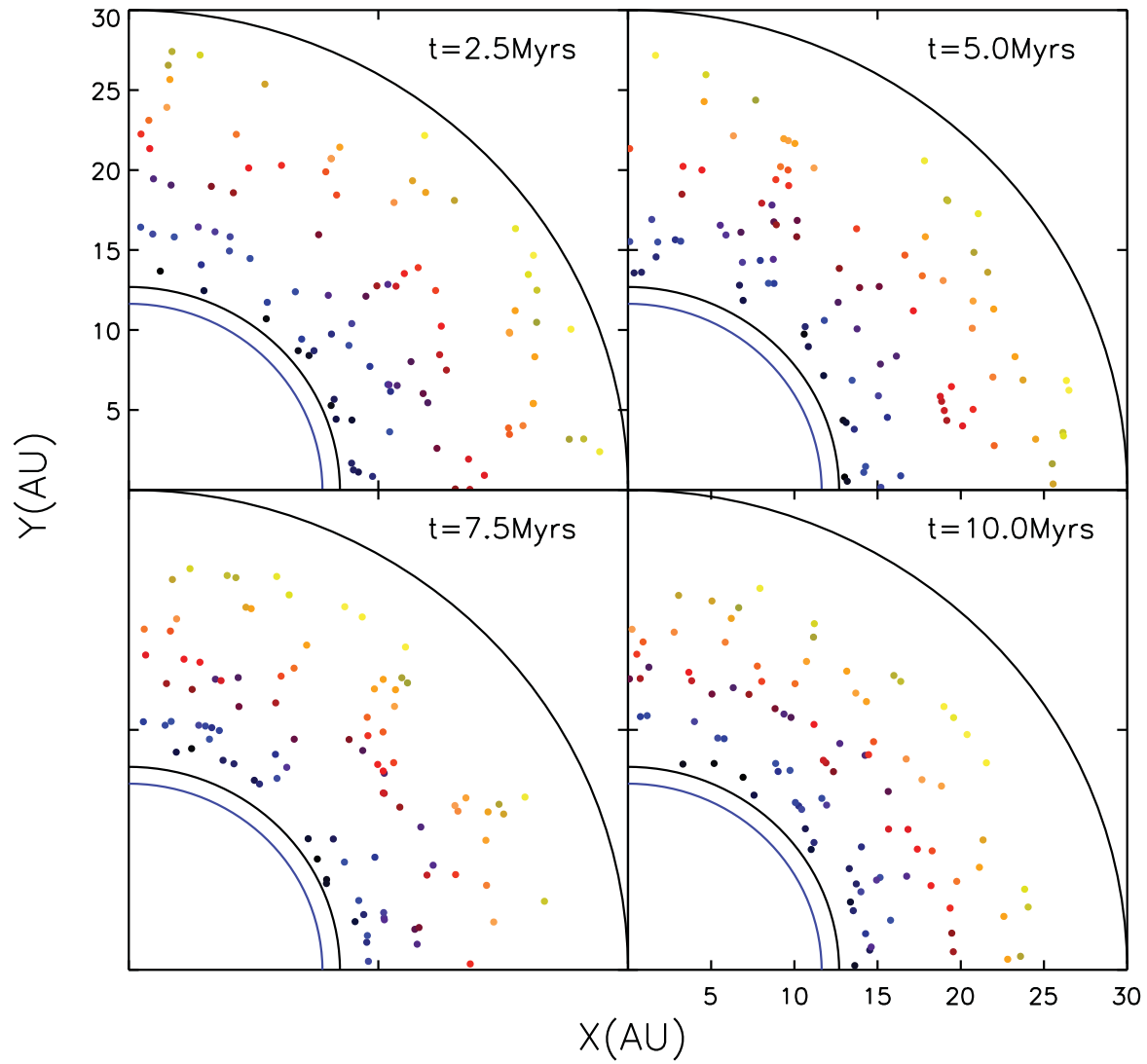


Figura 51: Equivalente a la Fig.48 para el caso: [MMSN, $3.5R_{\text{Hill}}$, 1km].

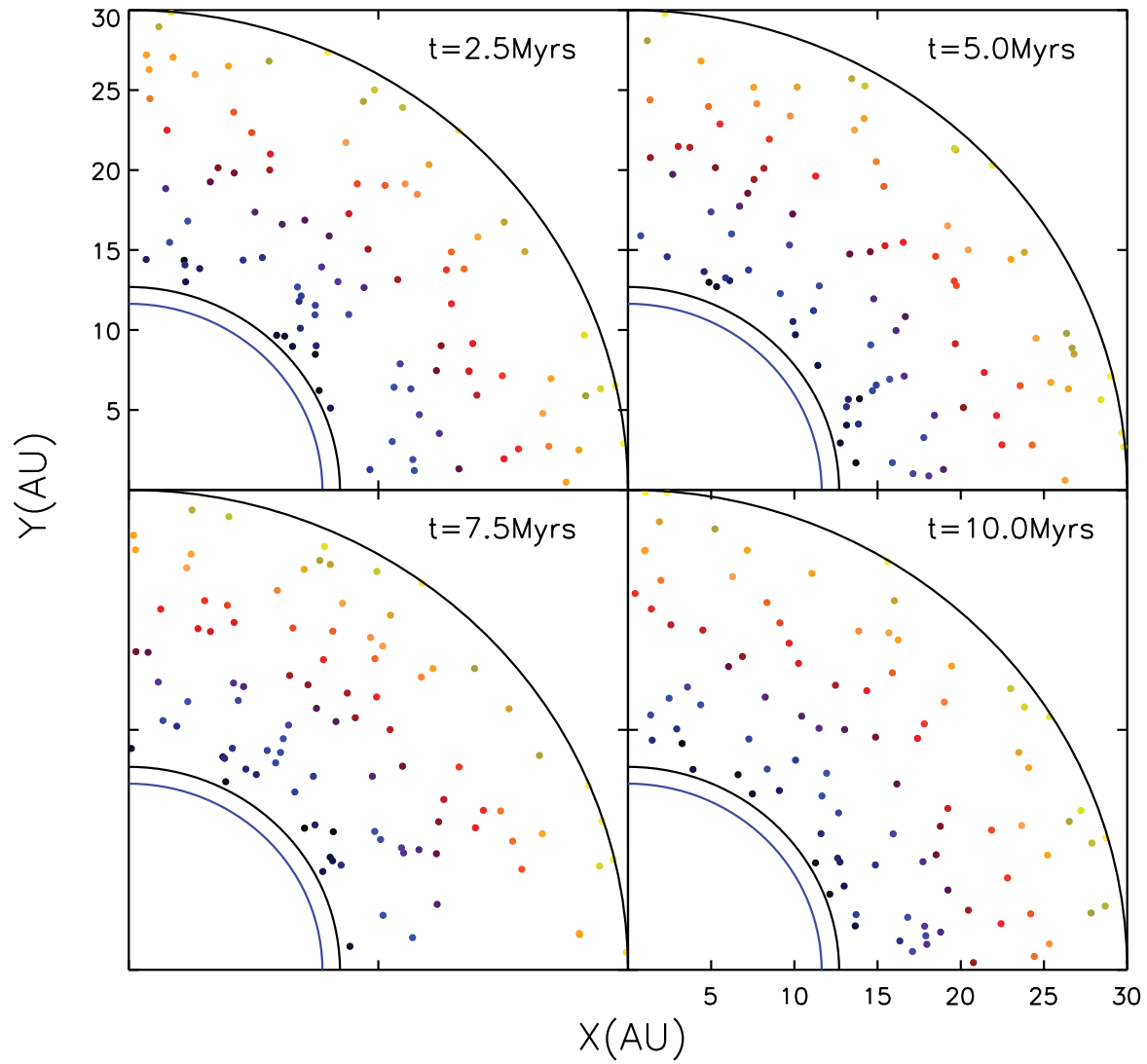


Figura 52: Equivalente a la Fig.48 para el caso: [ADSN, $3.5R_{\text{Hill}}$, 10km].

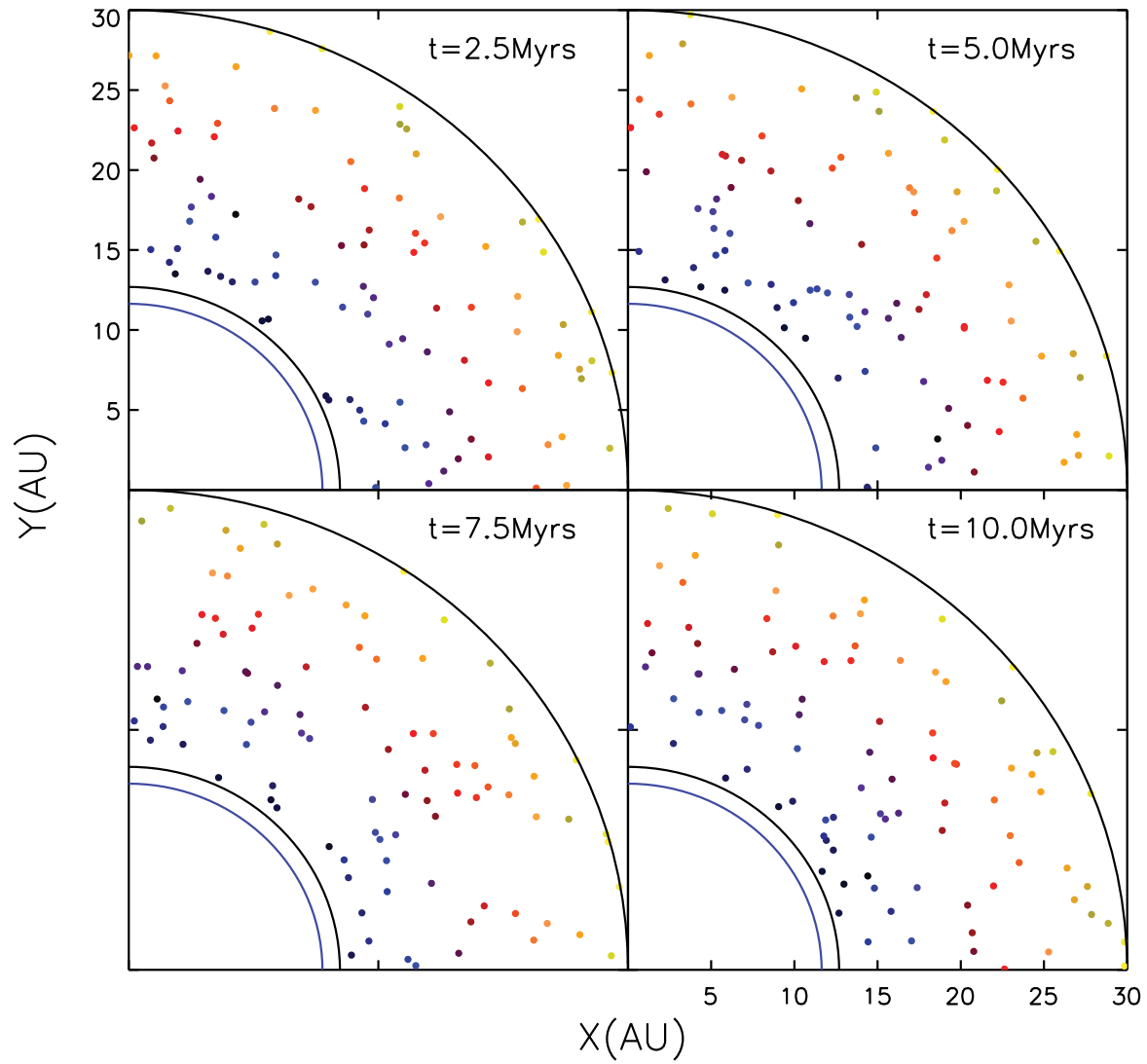


Figura 53: Equivalente a la Fig.48 para el caso: [MMSN, $3.5R_{\text{Hill}}$, 10km].

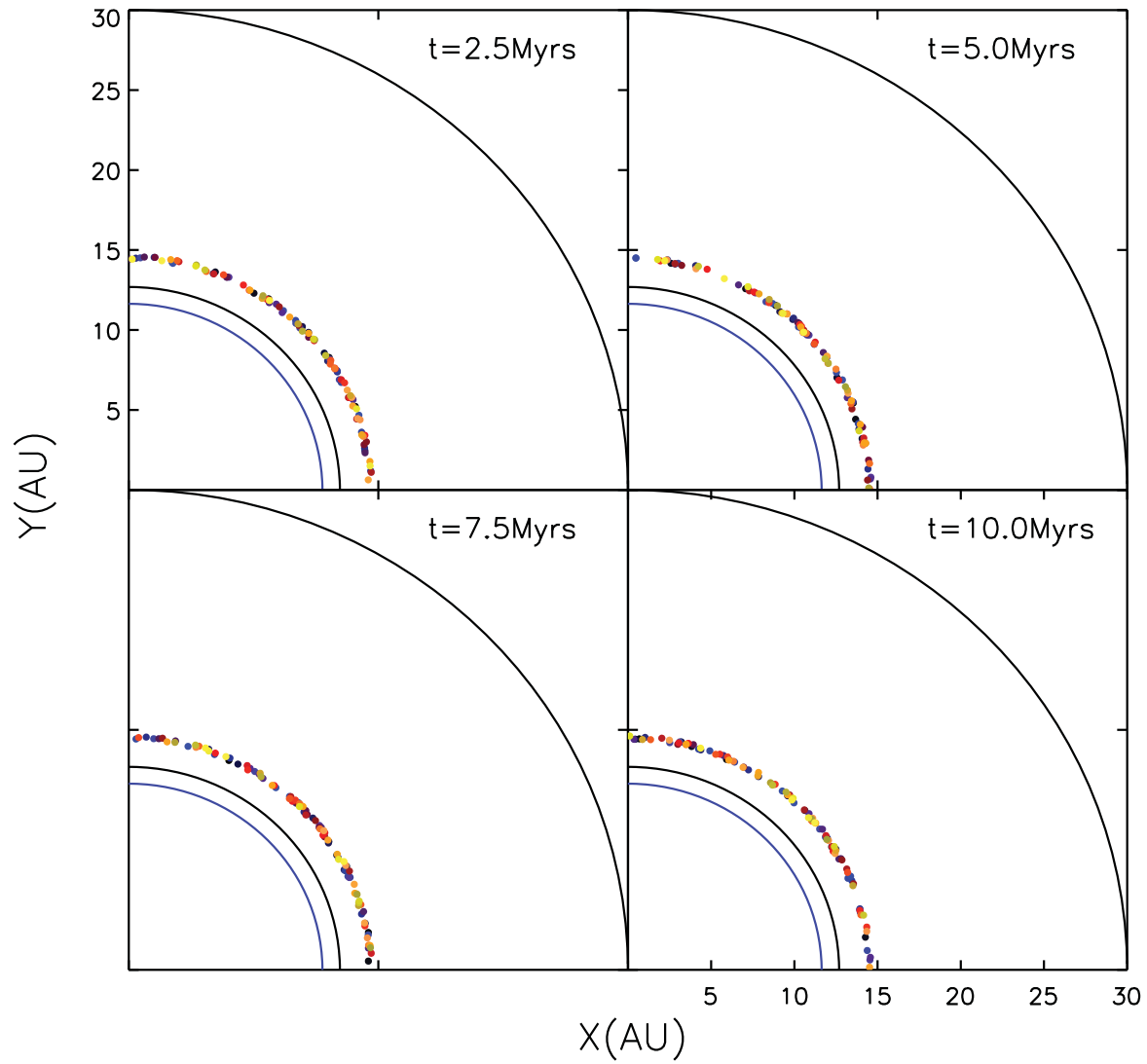


Figura 54: Equivalente a la Fig.48 para el caso: [ADSN, $7R_{\text{Hill}}$, 0.1km].

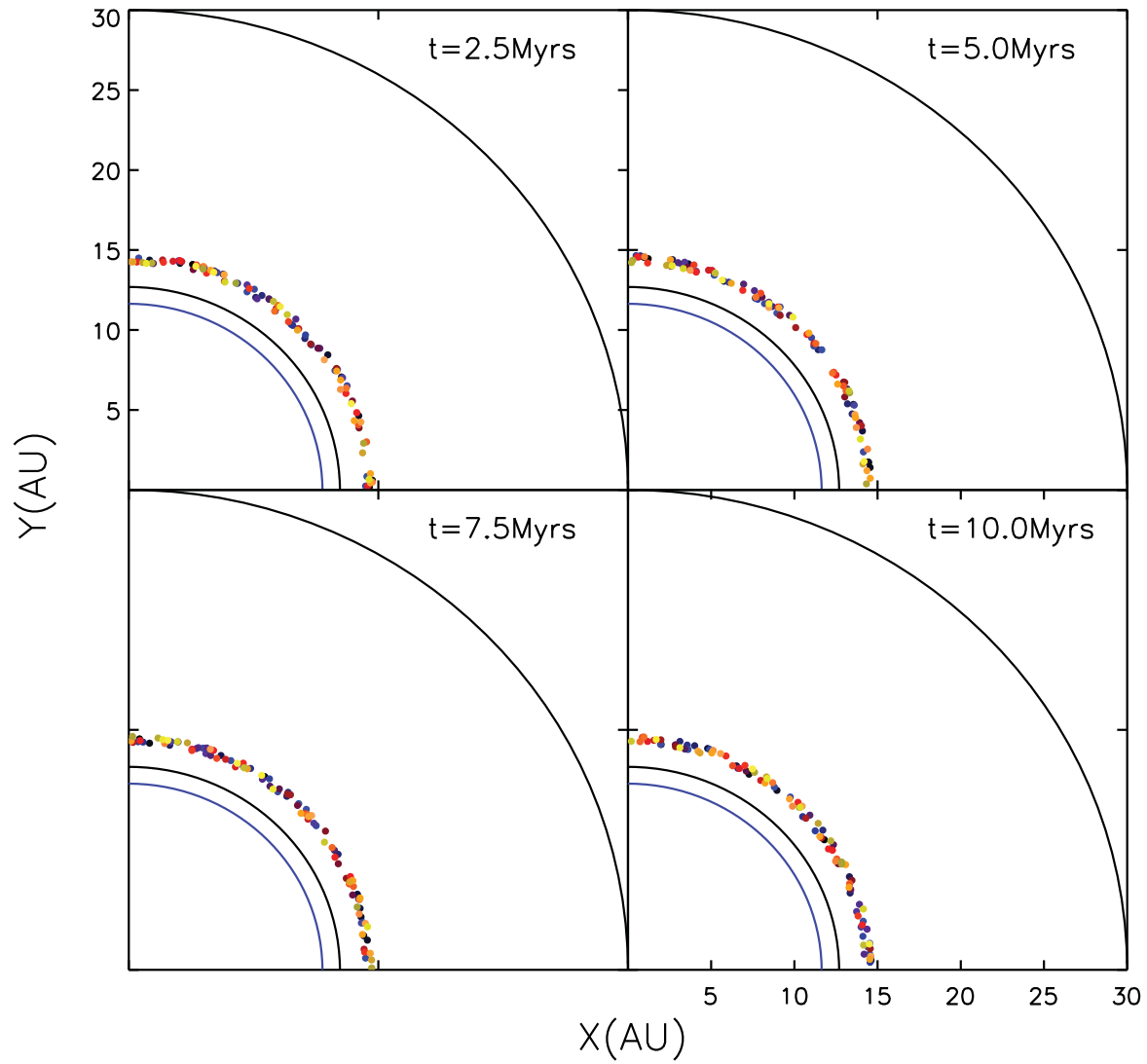


Figura 55: Equivalente a la Fig.48 para el caso: [MMSN, $7R_{\text{Hill}}$, 0.1km].

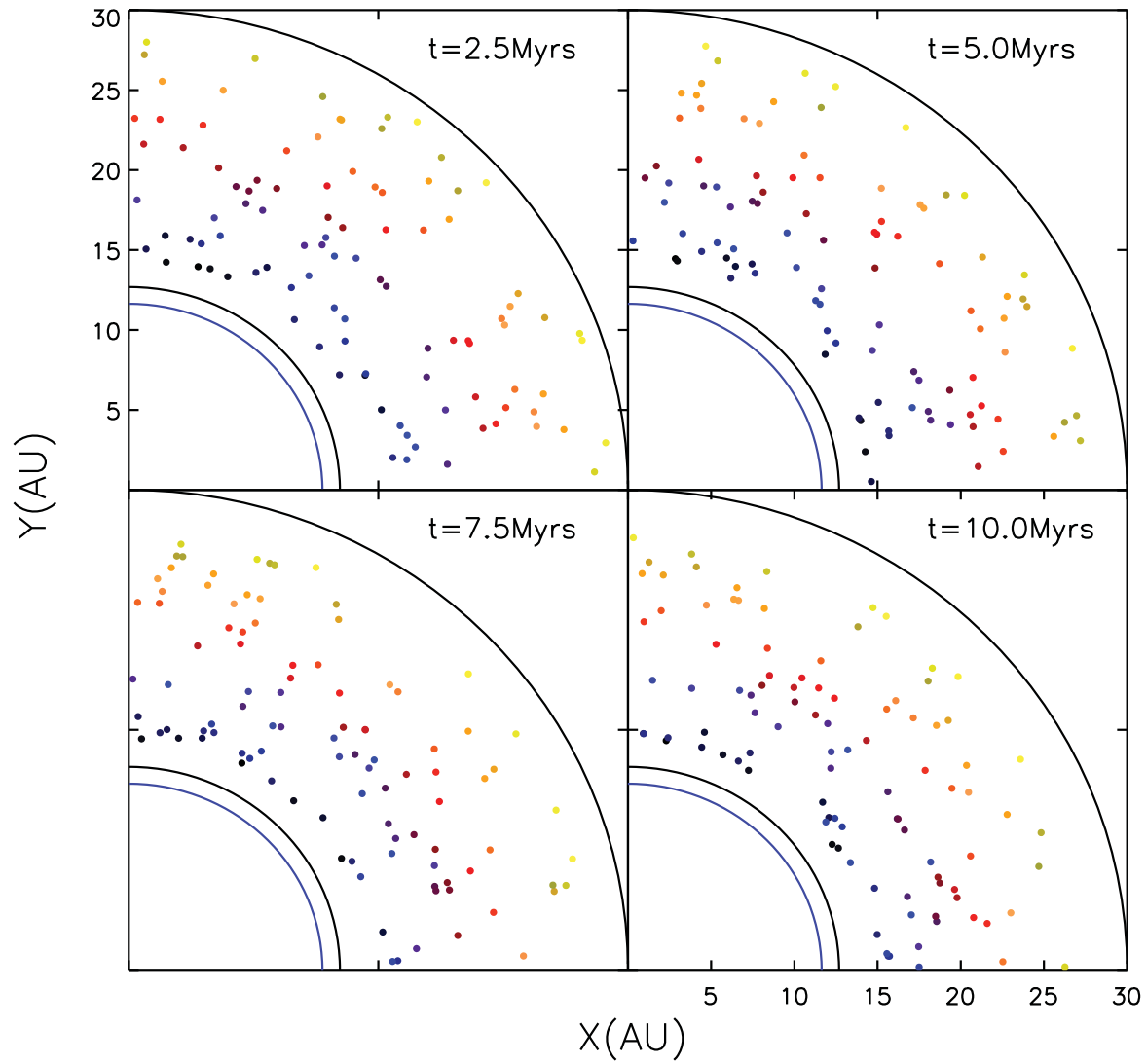


Figura 56: Equivalente a la Fig.48 para el caso: [ADSN, $7R_{\text{Hill}}$, 1km].

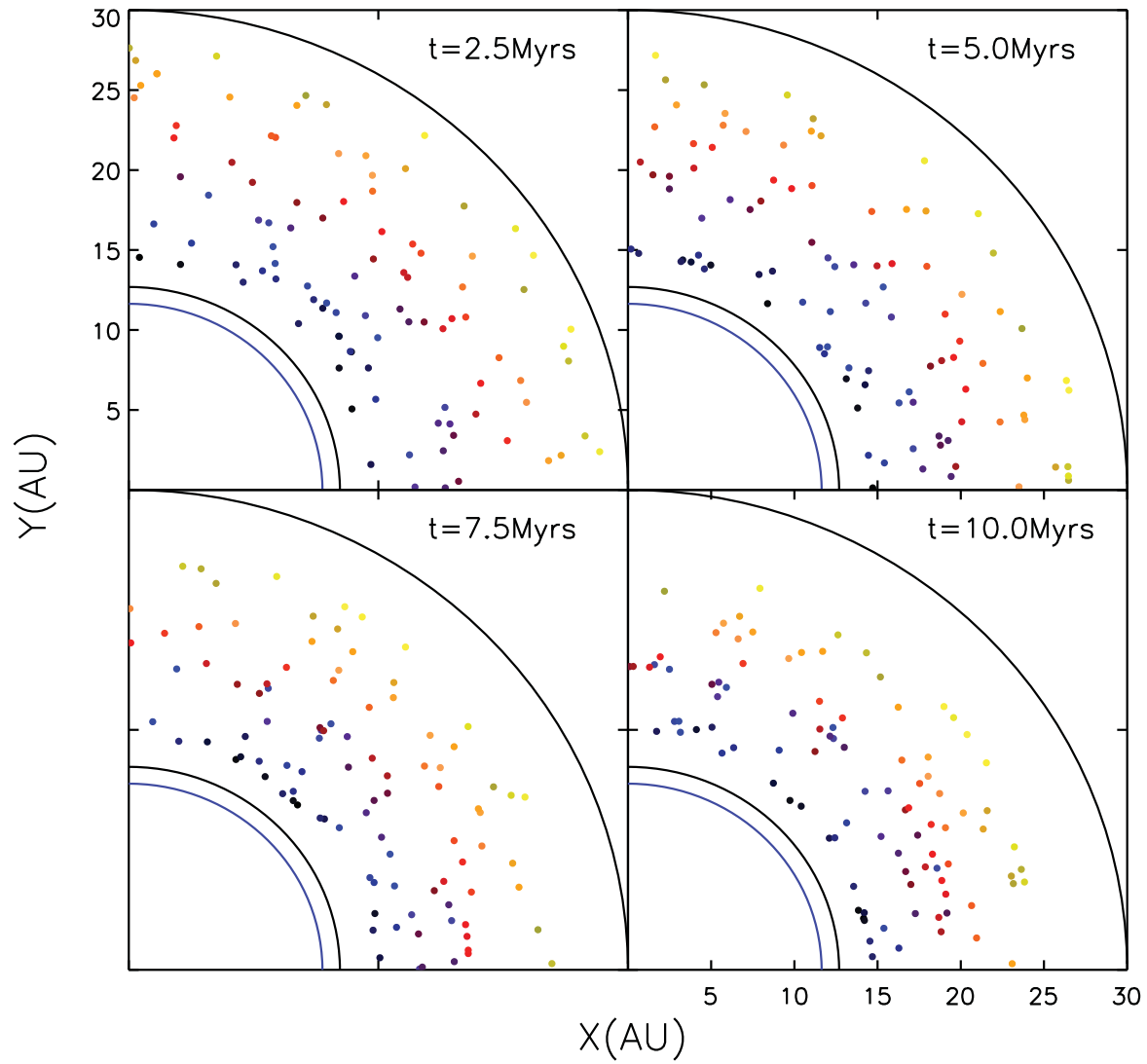


Figura 57: Equivalente a la Fig.48 para el caso: [MMSN, $7R_{\text{Hill}}$, 1km].

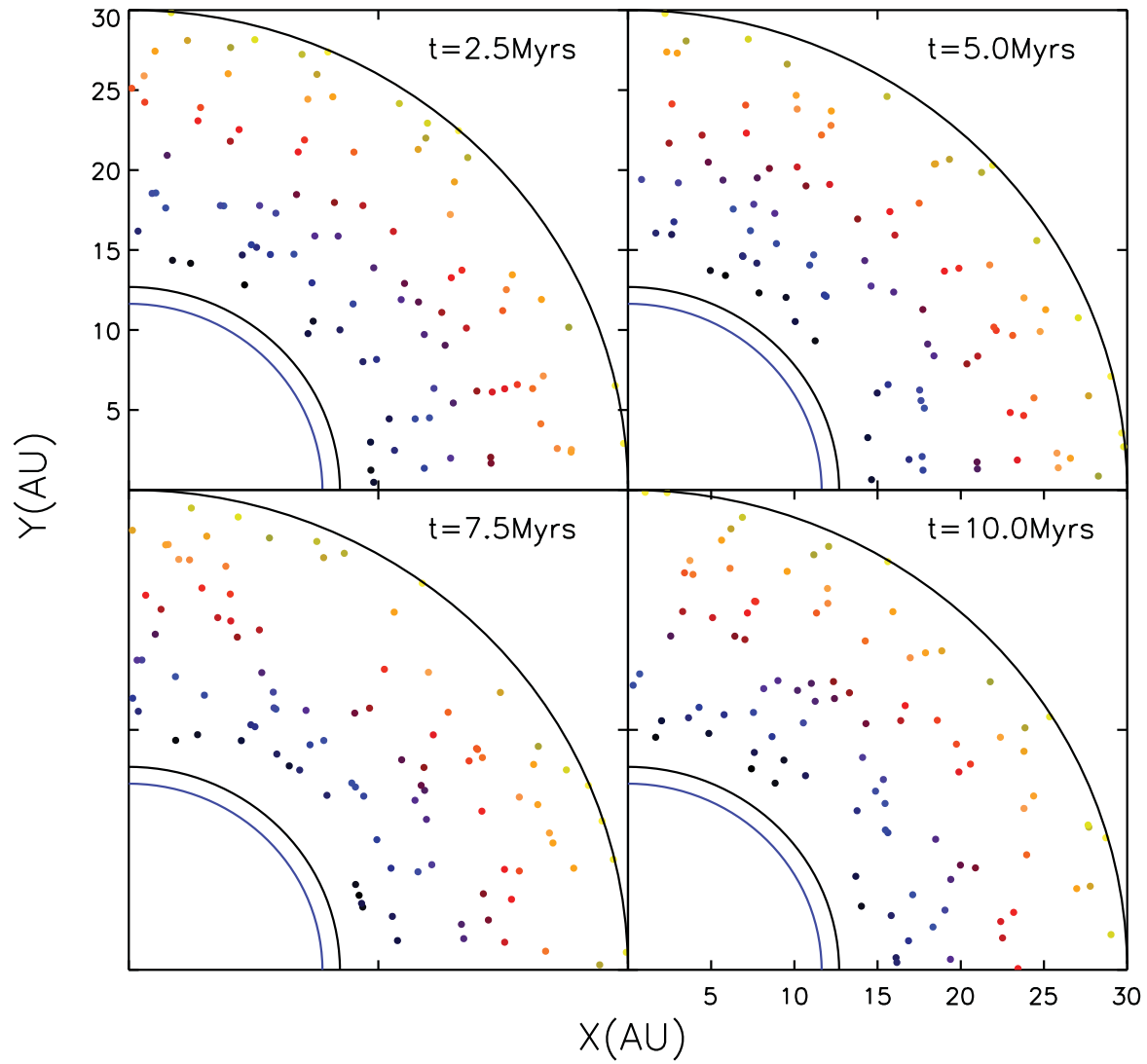


Figura 58: Equivalente a la Fig.48 para el caso: [ADSN, $7R_{\text{Hill}}$, 10km].

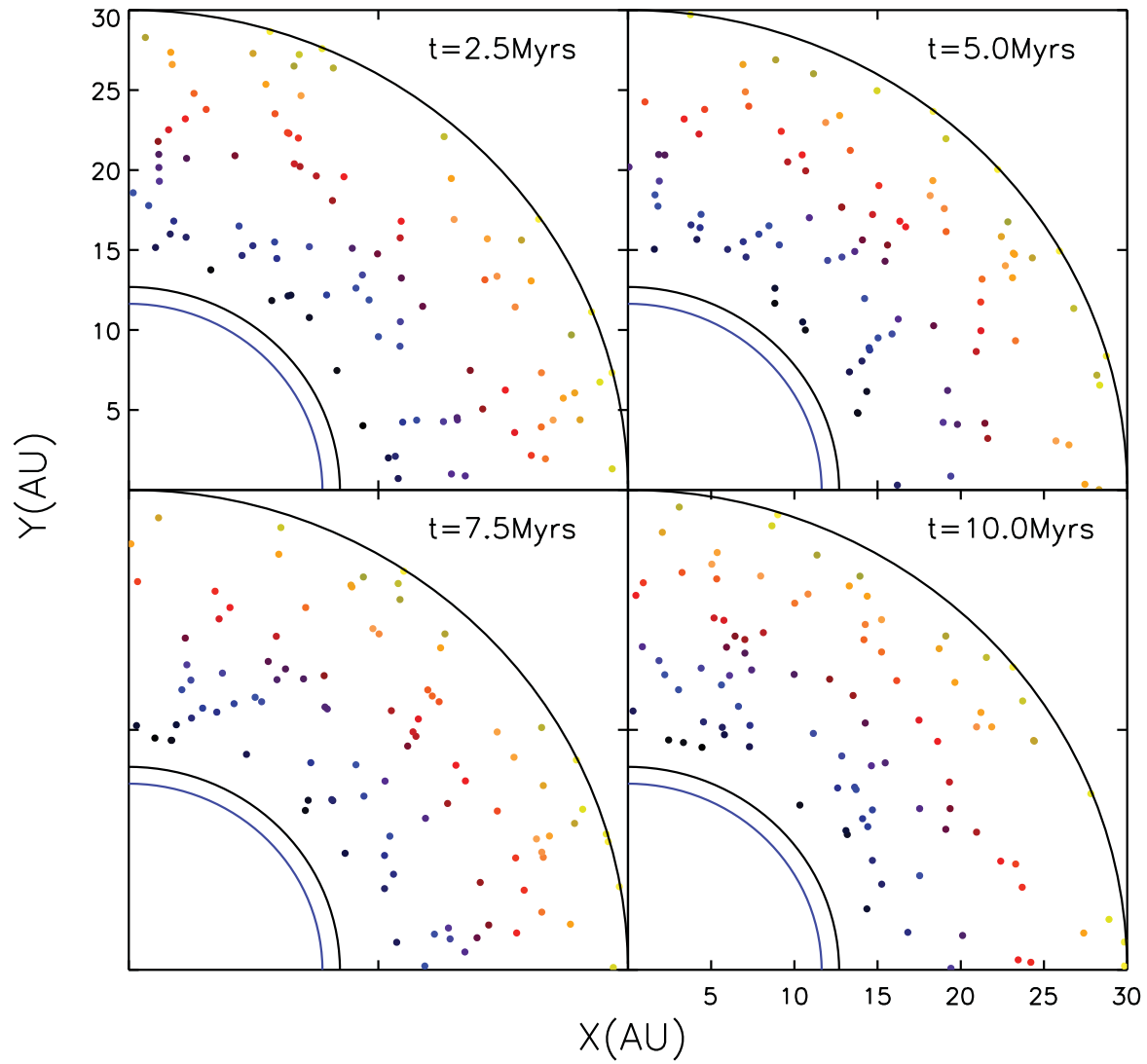


Figura 59: Equivalente a la Fig.48 para el caso: [MMSN, $7R_{\text{Hill}}$, 10km].

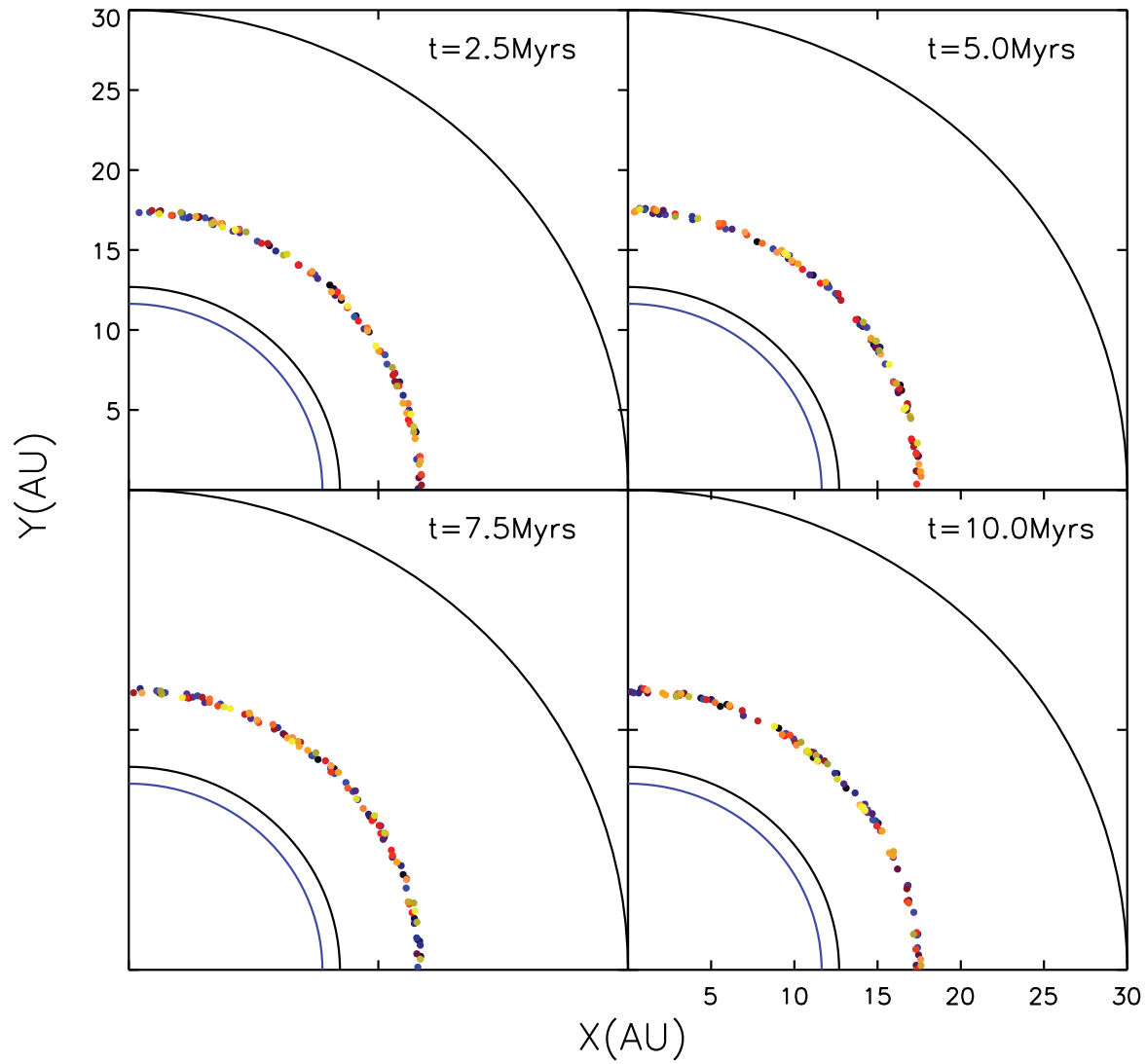


Figura 60: Equivalente a la Fig.48 para el caso: [ADSN, $10R_{\text{Hill}}$, 0.1km].

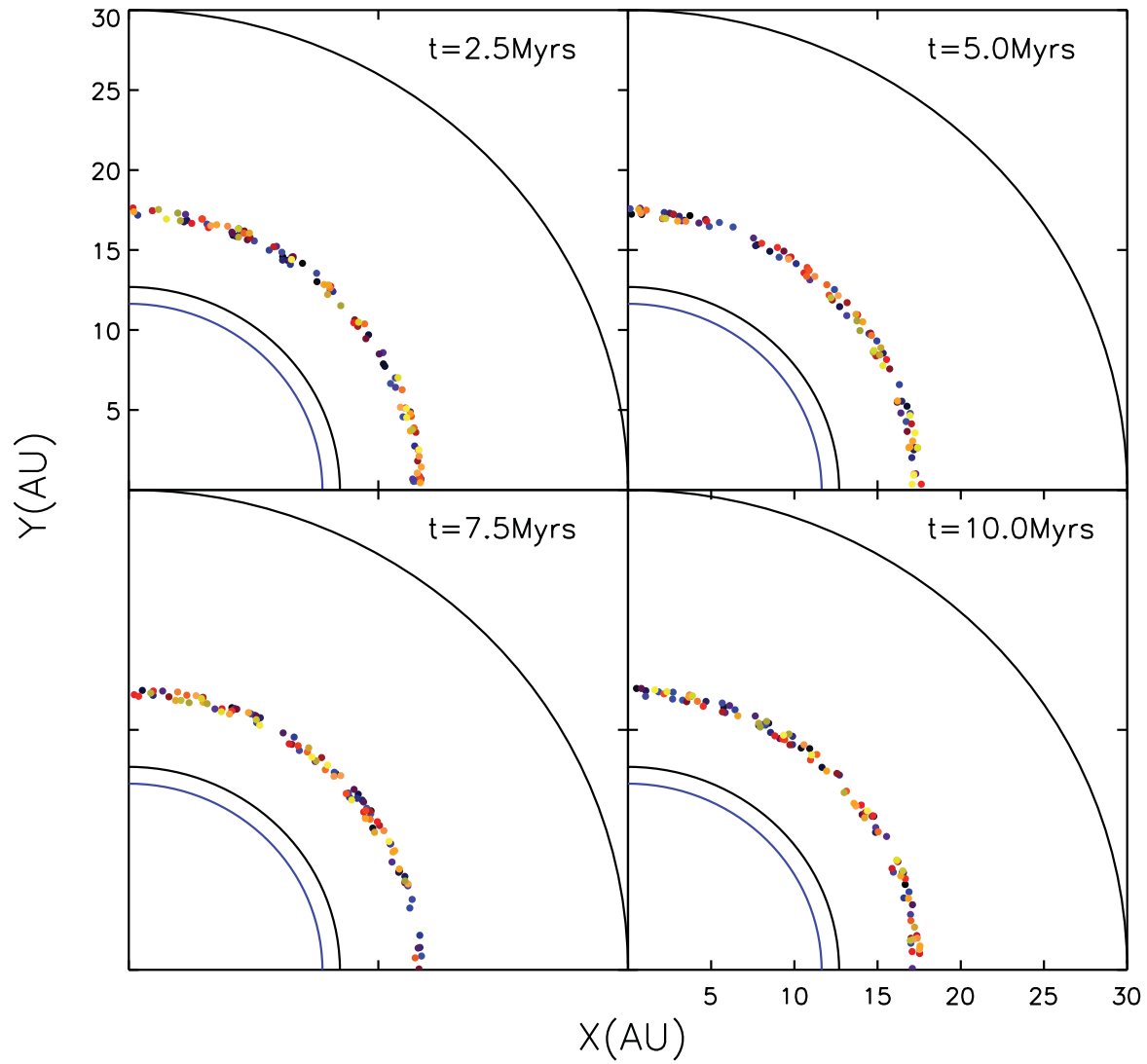


Figura 61: Equivalente a la Fig.48 para el caso: [MMSN, $10R_{\text{Hill}}$, 0.1km].

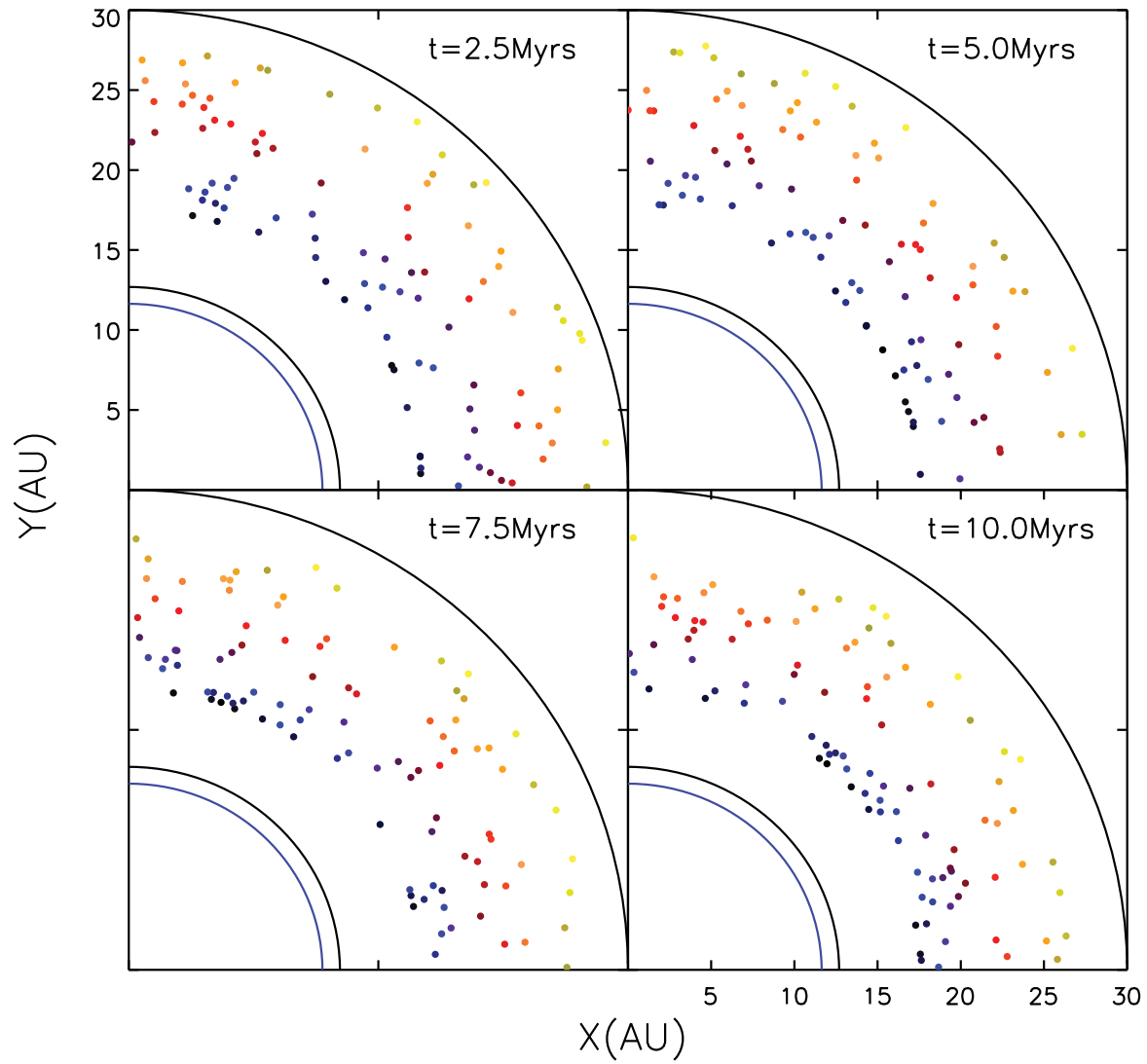


Figura 62: Equivalente a la Fig.48 para el caso: [ADSN, $10R_{\text{Hill}}$, 1km].

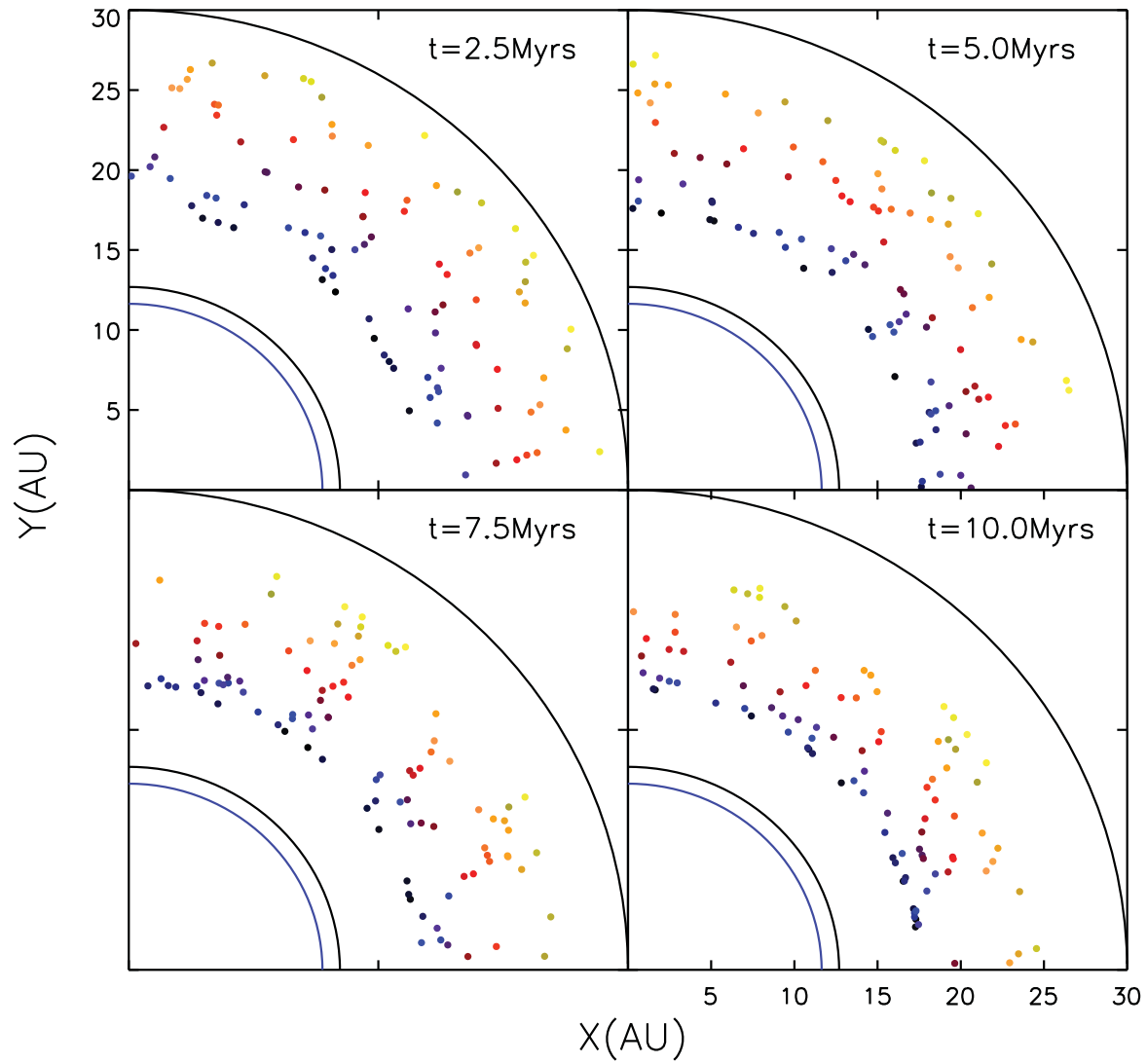


Figura 63: Equivalente a la Fig.48 para el caso: [MMSN, $10R_{\text{Hill}}$, 1km].

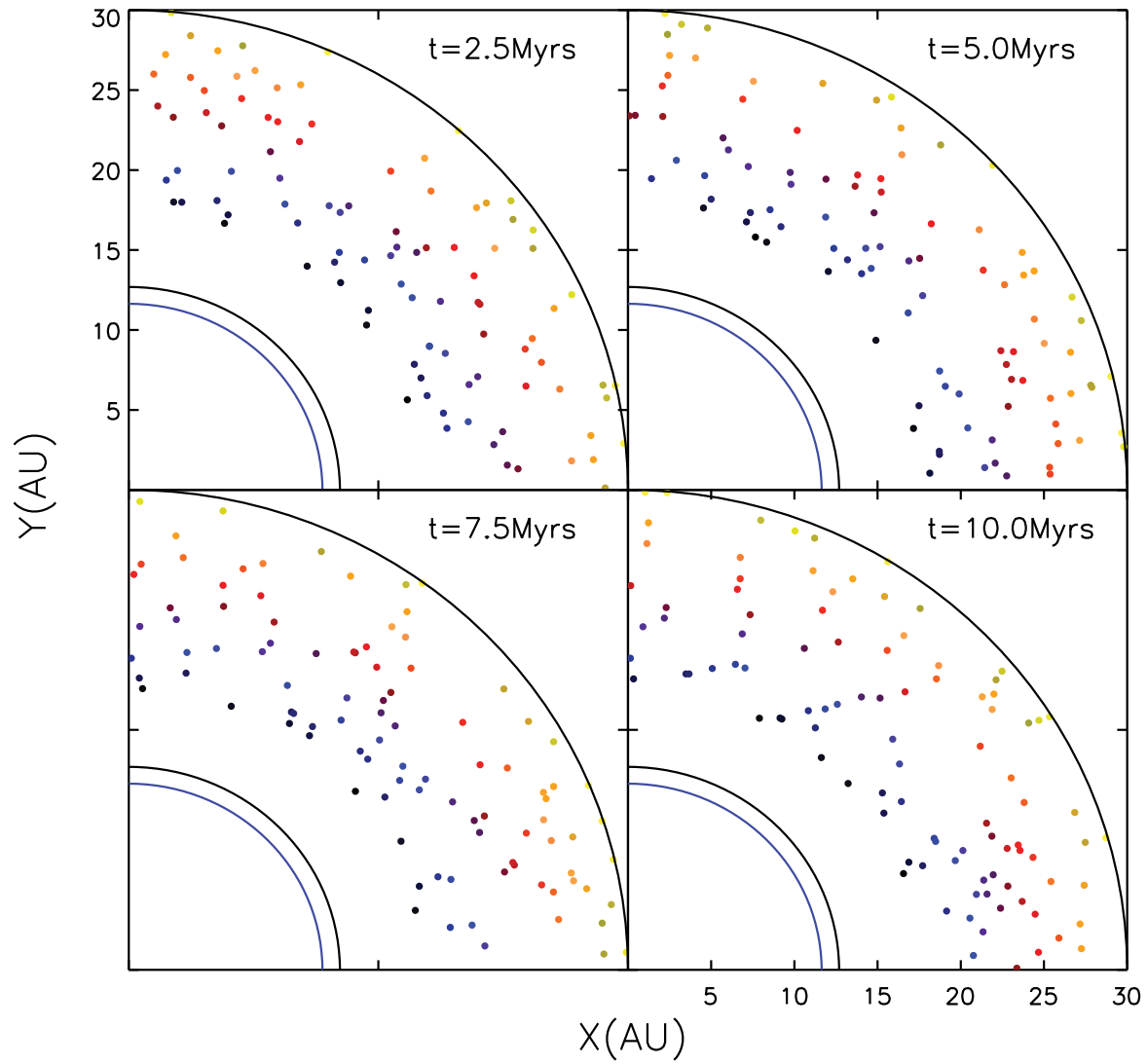


Figura 64: Equivalente a la Fig.48 para el caso: [ADSN, $10R_{\text{Hill}}$, 10km].

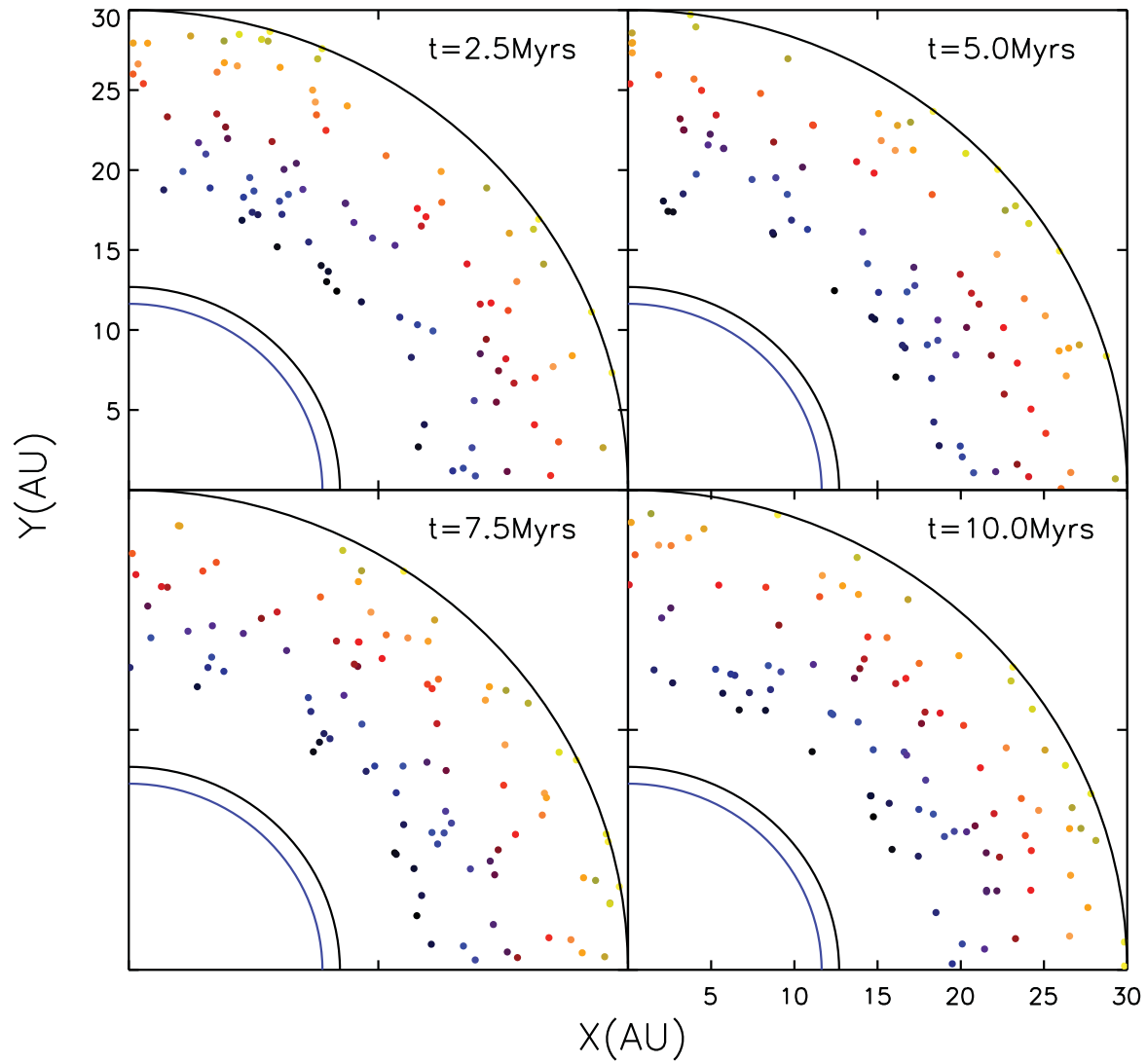


Figura 65: Equivalente a la Fig.48 para el caso: [MMSN, $10R_{\text{Hill}}$, 10km].

7. Discusión

7.1. Comportamiento general

En las figuras presentadas en la Sec.6.1 podemos observar que las partículas son arrastradas por el gas, lo cuál las conduce a ser capturadas en resonancia en una escala de miles hasta millones de años, dependiendo de las condiciones del gas en torno a ellas, la posición inicial de la partícula y el tamaño de la misma. Se observa que se atrapan principalmente en resonancia con Neptuno; creemos que este hecho no está determinado simplemente por ser éste el planeta más externo, sino por las propiedades y configuración de los planetas y planetésimos utilizados: las características físicas de los planetas y su posición determina el torque en cada resonancia, mientras que las características físicas y posición de los planetésimos afecta la susceptibilidad que tienen de ser atrapados por las resonancias. Por lo tanto, un planetésimo se atrapará en la primer resonancia que cruce que tenga una torca suficiente para frenar su arrastre. De modo que la captura en resonancia con el planeta más externo es un escenario común pero quizás no el único posible.

Nuestros resultados son mayormente consistentes con la estimación presentada en la Fig.12 : el modelo más afectado por el gas ha sido el correspondiente al disco de gas MMSN con planetésimos de 100m de radio, seguido por el modelo ADSN con partículas del mismo tamaño. Al comparar los paneles superior, medio e inferior de las figuras en la Sec.6.1 se observa que existe una fuerte dependencia en el radio del planetésimo, siendo las partículas pequeñas las más afectadas por el gas, ésto debido a que la fuerza de arrastre es inversamente proporcional al radio de la partícula (Ec.(29) y puede ser visto gráficamente en la Fig.12. Ésto se discute con mayor completés en la siguiente sección.

Como se aprecia en las figuras 36 y 37, un tiempo después de que las partículas de los casos [ADSN, $3.5R_{\text{Hill}}$, 0.1km] y [MMSN, $3.5R_{\text{Hill}}$, 0.1km] son atrapadas en resonancia, se inestabilizan, provocando un fuerte cambio de energía por unidad de tiempo, que en algunas partículas implica una diferencia relativa en el radio cercana a 6 en tan solo mil años⁹, posteriormente la posición de estas partículas se indefine. Por lo cuál es posible que el integrador utilizado sea incapaz de resolver el movimiento de la partícula de manera confiable una vez que se alcanza la inestabilidad.

Respecto a la condición adiabática para la captura en resonancia mencionada en la Sec.1.3, el caso en que las partículas caen más precipitadamente es el que se muestra en las Figs.31 - 33, donde la partícula inicialmente colocada a 30AU disminuye su radio aproximadamente 16.5AU en 0.1Ma, lo cuál equivale a un decaimiento orbital de 0.9% por periodo orbital respecto a su semi eje mayor inicial, por lo cuál la escala de tiempo del arrastre es 2 órdenes de magnitud mayor a la propia del movimiento orbital, lo que nos parece suficiente para considerarlo un decaimiento adiabático. Al cumplirse la condición adiabática para éste caso, podemos suponer que la condición se cumple para todos los casos analizados.

⁹1000 años es el intervalo de salida de datos en nuestro programa.

Siguiendo con la discusión del tiempo de fricción que se ilustra en la Fig.12, en los resultados se observa cierta dependencia en la posición inicial del planetésimo, notando que para las partículas más pequeñas ésta dependencia es prácticamente nula, siendo todas igualmente afectadas por el gas; para las partículas de 1km tampoco se observa una dependencia muy fuerte, caso contrario con las partículas más grandes, que en consistencia con las estimaciones de la Fig.12, muestran poco arrastre debido al gas, sin embargo, incluso dentro de éstas partículas de 10km, las que tienen una posición inicial más cercana al centro del sistema son más susceptibles al arrastre.

7.2. Efecto del tamaño del planetésimo

El radio de la partícula es el parámetro con influencia más notoria en la simulación. En las Figs.36 - 41 se observa consistentemente una dependencia en el tamaño de la partícula dado por la Ec.(29), haciendo completamente visible el arrastre en las partículas de 100m, mientras que en las de 10km de radio el decaimiento es difícil de percibir a simple vista, sin embargo es evidente en el comportamiento de las partículas cercanas a R_i , ya que no son colocadas inicialmente en resonancia con los planetas, pero basta una ligera disipación de energía para hacerlas susceptibles a la resonancia 3:2 con Neptuno.

Puede observarse también el efecto mencionado por W&D85 y M93a: debido a que las resonancias más cercanas al planeta son más fuertes, si una partícula sufre demasiado arrastre para ser atrapada por una resonancia, puede ser capturada por otra con j mayor. Lo anterior puede verse comparando las corridas para 0.1km y 1km en las Figs.36 - 41: las partículas de 1km entran en resonancia 2:1 y 3:2 con Neptuno dependiendo de su posición inicial, lo cuál no ocurre para ninguna de las simulaciones con partículas de 100m, que al tener un tamaño menor son más sensibles al gas y la fuerza de éstas resonancias no es suficiente para frenarlas, sin embargo, a pesar de que las resonancias 2:1 y 3:2 no sean lo suficientemente fuertes para detener el arrastre, puede notarse que no son invisibles a las partículas, ya que con excepción de [MMSN, $3.5R_{\text{Hill}}$, 0.1km], en todos los casos con $r_c=0.1\text{km}$ se aprecia cómo las partículas son ligeramente perturbadas cuando cruzan la 2:1 MMR.

En la Sec.6.2 podemos ver los diferentes destinos de un planetésimo después de entrar en resonancia con alguno de los planetas. En [ADSN, $3.5R_{\text{Hill}}$, 10km] las partículas localizadas a 13.5AU son atrapadas en torno a la 5:4 MMR y mantienen una órbita estable, limitadas aparentemente por las resonancias 4:3 y 7:6; por otro lado, las partículas inicialmente en la misma posición en el caso [MMSN, $3.5R_{\text{Hill}}$, 1km] entran en resonancia en un tiempo menor pues son más susceptibles al arrastre; tal susceptibilidad también ocasiona que una vez que éstas partículas son atrapadas en resonancia tengan una órbita más excéntrica, sobrepasando la 7:6 MMR, sin embargo, la órbita se va amortiguando con el tiempo.

El mismo efecto se observa en los demás casos presentados con partículas de 1km, siendo diferente la resonancia que se muestra. El efecto de amortiguamiento y excitación una vez que la partícula es capturada puede apreciarse también en las partículas de [MMSN, $3.5R_{\text{Hill}}$, 0.1km], donde inicialmente las órbitas se centran en la resonancia 4:3 y sobrepasan la 5:4, con

el tiempo se amortiguan, hasta que después de aproximadamente 2.5Ma son repentinamente forzadas a cambiar de resonancia, centrándose en la 5:4, entonces las partículas comienzan a excitarse, provocándose una inestabilidad. Un punto a remarcar en la inestabilidad observada es su origen. Según la Ec.(7), la respuesta de los planetésimos a la resonancia comienza a ser caótica en la 9:8 MMR con Neptuno. En las Figs.42 y 43 algunas partículas parecen perder estabilidad antes de hacer el cambio de resonancia, sin embargo la mayoría lo hace posterior al cambio. No obstante, no es totalmente claro si ocurre cuando las partículas cruzan la resonancia 8:7 o la 9:8. De un modo otro, parece evidente que el empalme de resonancias es lo que origina el fenómeno (ver Fig.9). Adicionalmente, la comparación entre los paneles de la Fig.30 puede asegurar que no ocurre debido a la 2:1 MMR con Saturno. Ésta discusión continuará en la Sec.7.2.

Las simulaciones correspondientes a las partículas más pequeñas son el conjunto que ofrece resultados más interesantes, no sólo en el caso en que existe la inestabilidad, pues como ya se mencionó, por su sensibilidad al arrastre, incluso en ocasiones indistintamente de su posición inicial, no son atrapadas por las primeras resonancias que encuentran en su camino, cayendo todas hasta formar un disco compacto en torno al planeta más externo, tal como se aprecia en las Figs. 48, 49, 54, 55, 60, 61. El grosor de éste anillo puede ir desde décimos hasta un par AU (ver los casos [$*,*,0.1\text{km}$] en la Sec.6.2). Nuestro código no considera la interacción gravitacional entre los planetésimos, sin embargo en una simulación que tome en cuenta ésta interacción, es predecible que en algunos de éstos casos los planetésimos se aglomeren en grupos, induciendo a interacciones más complejas y posiblemente a la formación de un nuevo planeta.

Por otro lado, los resultados de los planetésimos de 1km de radio no son consistentes con las estimaciones, las cuales indican que el modelo de ADSN ofrece una ligera pero mayor interacción gas-partícula para éste tamaño, cuando podemos ver, sea en la Sec.6.1 o 6.2 que contrario a lo esperado por las estimaciones, la captura en resonancia ocurre en una escala de tiempo menor para los casos [MMSN, *, 1km] que para los [ADSN, *, 1km]. También se observa cómo las amplitudes en el movimiento de las partículas en torno a la resonancia de captura son mayores en los modelos MMSN, ambos efectos son signos de un mayor arrastre.

La Ec.(29) indica que la fuerza de arrastre tiene dependencia en la densidad del planetésimo. Debido a que ρ_c es una cantidad constante en nuestro modelo, el cambiar el radio del planetésimo está asociado físicamente a un cambio en su masa, sin embargo, al usar partículas de prueba la masa del planetésimo no tiene efecto sobre nuestras simulaciones.

Como se mencionó anteriormente, en el caso [MMSN, $3.5R_{\text{Hill}}$, 0.1km] presentado en la Fig.43, no es muy claro el momento en que la inestabilidad es alcanzada. Si se observan las partículas cerca de la 4:3 MMR es aparente que se logra mientras aún están centradas en la 5:4 MMR, sin embargo, si observamos las que están cercanas a la 7:6 MMR parecen cambiar a una resonancia más interna antes de perder el equilibrio. Ésto es interesante, dado que las partículas no están restringidas a una resonancia u otra, sino orbitando entre ambas. En [ADSN, $3.5R_{\text{Hill}}$, 0.1km] la inestabilidad ocurre menos drásticamente y pareciera alcanzarse

cuando los planetésimos entran en la 9:8 MMR, sin embargo la asimetría entre la resonancia que acota “superior” e “inferiormente” la órbita es igualmente notoria, ya que las partículas que abandonan el sistema alejándose de los planetas lo hacen antes que aquellas arrastradas a la región planetaria. En uno de los primeros trabajos realizados en éste tema, Papaloizou y Lin (1984) apuntan que estando en una resonancia, el torque proveniente de ésta tiende a separar a la partícula del perturbador, por otro lado, la fuerza de arrastre actúa en la dirección contraria. Para ciertas condiciones, ambas fuerzas entran en equilibrio y la órbita permanece estable. En los casos mencionados, las partículas parecen estar siendo excitadas dinámicamente, provocando que se rompa el equilibrio y si ésto sucede de manera abrupta conlleva a una inestabilidad. Las resonancias más internas tienden a ser más fuertes, lo cuál puede explicar por qué las primeras partículas se desestabilizan cuando cruzan la resonancia en la cota superior. Alcanzada la inestabilidad, una partícula en presencia de gas en ambos lados de la resonancia puede ser eyectada en un sentido u otro, dependiendo de en qué punto estuviera “librando” en el momento del desequilibrio. Ésto puede observarse en la Fig.31, donde algunos cuerpos son eyectados del sistema y otros lanzados hacia la región planetaria. Sin embargo, al existir un radio de truncamiento en la distribución de gas, cuando la partícula lo atraviesa solo está sujeta a la fuerza de restauración proveniente de las resonancias y al ordinario potencial gravitacional, por lo que su movimiento pierde aceleración y es susceptible a ser regresada dentro del disco por los torques de las resonancias.

Una aspecto evidente pero suficientemente importante para mencionarlo, es que al existir un radio de truncamiento cerca de resonancias con algún(os) planeta(s) quedará establecido un límite entre dos zonas, la interna prácticamente libre de cuerpos menores y la externa con un número considerable de cuerpos en resonancia, claramente ésto ocurrirá bajo la condición de que las resonancias sean lo suficientemente fuertes para atrapar a las partículas.

Por otro lado, el caso [MMSN, $10R_{\text{Hill}}$, 0.1km] ha generado un anillo interno a R_i acotado por la 5:1J, mientras que en su análogo en ADSN con una situación similar, los planetésimos no parecen estar atrapados en ninguna resonancia evidente. Es posible que sea una resonancia de alto orden con fuerza suficiente para capturarlos. En caso de no existir tal resonancia, lo observado podría interpretarse de la siguiente manera: no existe ninguna resonancia contigua a R_i dentro del disco, por lo tanto, las partículas que son arrastradas fuera del gas no son reingresadas por ninguna fuerza. Respecto al definido acotamiento que presenta el anillo, el cuál no hace distinción a la posición original de la partícula, puede estar asociado con la Ec.(49), ya que las partículas en este caso inicialmente tenían un valor de $\tau_{\text{fric}} \approx 1$ (ver Fig.12) por lo que todas las partículas caen con una velocidad radial cercana la máxima y entonces sus parámetros orbitales finales son muy similares.

Los casos [*, $7R_{\text{Hill}}$, 0.1km] generan un anillo similar: en el lado interno del disco sólo se encuentra la resonancia 17:12 y 4:1J, que no son lo suficientemente fuertes para reingresar a las partículas, dado que cuando salen del disco lo hacen con una velocidad alta, a diferencia de los casos correspondientes con $3.5R_{\text{Hill}}$ que al salir del disco están atrapadas en una resonancia y su movimiento es menos abrupto. Aparentemente a pesar de que la resonancia 17:12 no tiene fuerza suficiente para reingresar las partículas, sí puede limitar su órbita, de

manera similar al Caso 0 presentado en la Fig.31. La resonancia 7:5 es la única resonancia de bajo orden en ésta región y no aparenta tener una influencia significativa en la órbita de éstas partículas, aunque podría estar contribuyendo a mantenerlas fuera del disco de gas.

7.3. Efecto del modelo de gas

A lo largo de esta sección se ha discutido indirectamente el efecto del modelo de gas, la tendencia observada en el comportamiento de las partículas es consistente con la estimación para las partículas de 0.1km y 10km, pero no para las de 1km.

La diferencia entre los dos modelos de gas que utilizamos son los valores de la densidad superficial y temperatura definidos por las Ecs. (13) y (14). La Ec.(29) establece que el arrastre de una partícula es proporcional a la densidad del gas, sin embargo, por la dependencia en la velocidad relativa entre el gas y las partículas dada por la Ec.(27), el efecto del modelo de gas es más complejo que una dependencia lineal con su densidad y temperatura.

Un análisis en la evolución del cociente, χ , entre la velocidad del gas y la velocidad kepleriana (Ec.(27)) a lo largo de la simulación, proveería información más clara acerca de la dependencia en el modelo de gas y posiblemente explicaría la discrepancia entre la expectativa y los resultados de las partículas de 1km mencionada en 7.2.

7.4. Relación con las simulaciones con el código Mercury

Independientemente de la eventualidad presentada en la Fig.19, no podemos realizar comparaciones directas con las figuras presentadas en la Sec.5.1 por que las gráficas ahí presentadas se basan en la inestabilidad generada por los planetésimos sobre los planetas, y debido a que los planetésimos del presente trabajo no tienen masa, no pueden generar dicho fenómeno, sin embargo en ambos conjuntos de simulaciones se observa el proceso de captura en resonancia en una escala de Ma dependiente de las características de la partícula y su entorno. Tanto las simulaciones como su análisis realizadas con el código Mercury y con el código Runge-Kutta han sido diferentes, no obstante, el realizar las primeras nos dio las bases para abordar el fenómeno en el segundo conjunto de simulaciones.

Cabe recalcar que la inestabilidad dinámica del modelo de Niza que se observa en la Sec.5.1 y la mostrada en algunas figuras las Sec.5.3 y el Cap.6, son completamente diferentes. Cuando una se refiere al desequilibrio en los cuerpos mayores que trae como consecuencia la migración planetaria, la otra se refiere al desequilibrio en los cuerpos menores que puede causar su eyección del sistema o un cambio radical de órbita.

7.5. Implicaciones en el sistema solar

Como se menciona en la Sec.7.2, existen casos en que los planetésimos se acumulan en un delgado anillo en torno a los planetas en una escala de tiempo menor que la necesaria para desatar la inestabilidad planetaria. Es interesante estudiar la consecuencia de éste proceso, dado que parece factible que afecte significativamente la formación planetaria, lo cuál traería nuevas opciones para la formación del sistema solar, ya que podría vincular la formación de los planetas en diferentes escalas de tiempo o involucrar la existencia de otros planetas que hayan sido eyectados por interacciones gravitacionales.

Este trabajo está directamente relacionado al modelo de Niza, ya que si se implementa nuestro modelo en un código que permita asociar una masa a los planetésimos, seríamos capaces de analizar los efectos del arrastre de éstos en la escala de tiempo de la migración planetaria, pues la concentración de cuerpos menores en una región más cercana a los planetas que entren en interacción resonante con ellos, hacen predecible una modificación en la escala de tiempo en que se alcanza la inestabilidad planetaria (similar al caso mostrado en la Fig.18). Al tener una medida de cómo se afecta esta escala de tiempo se tienen principalmente dos vertientes: (a) Descartar la posibilidad de un disco protoplanetario en transición en el sistema solar. O en su defecto restringir las propiedades físicas del gas de modo a que no haya afectado de manera significativa la evolución del sistema. (b) Sugerir una modificación al modelo de Niza para incluir la presencia de un disco en transición.

Es de gran interés realizar un seguimiento de las partículas que se eyectan cuando se crea la inestabilidad en los planetésimos. La Fig.31 muestra una cantidad representativa de partículas coorbitando con los planetas. En una situación real, un gran número de ellas serían acretadas, pero otras podrían entrar en órbitas estables, generando poblaciones como los troyanos de Júpiter. Por otro lado, los planetésimos que son eyectados en dirección contraria podrían contribuir a explicar las poblaciones del cinturón de Kuiper y la nube de Oort (ver por ejemplo Brasser et al. 2007).

7.6. Acerca de las suposiciones consideradas

Nuestras simulaciones indican que el fenómeno de captura en resonancia entre un planeta y un planetésimo en presencia de gas es cualitativamente el mismo al variar el modelo de disco de gas, el número de planetas en el sistema, así como el tamaño y la posición inicial del planetésimo. Sin embargo, observamos que cuantitativamente el sistema es sensible a todas éstas variables. Por lo anterior, creemos que el modelo aquí presentado ofrece una descripción general acertada del fenómeno en cuestión, sin embargo al considerar variaciones o utilizar suposiciones más estrictas, los resultados serían cuantitativamente diferentes. Entre los factores que pueden influir de ésta manera en los resultados está el resolver el problema en un sistema de coordenadas baricéntrico, considerar la masa de los planetésimos e incorporar la componente turbulenta de la velocidad del gas.

7.7. Trabajo a futuro

El proceso estudiado en éste trabajo ha mostrado ser muy sensible a sus variables y tener importantes implicaciones para el sistema solar y como consecuencia para otros sistemas planetarios, por lo tanto, es necesario estudiarlo con más profundidad. Para ésto hay una gran cantidad de factores que pueden añadirse o modificarse dentro del modelo. Consideramos prioritario el uso de un código que permita añadir masa a los planetésimos para incluir en nuestro estudio la inestabilidad dinámica del modelo de Niza y las interacciones entre los planetésimos. Es necesario también el uso de un mayor número de partículas para elaborar una estadística en los resultados, así como considerar el centro de masa del sistema. Es interesante incorporar la componente turbulenta en la velocidad del gas para explorar su influencia en la evolución del sistema estudiado.

En cuestión de análisis de los resultados, calcular la dispersión de velocidades arrojaría información interesante relacionada con la captura en resonancia y la inestabilidad de los planetésimos, con el mismo fin, sería muy útil realizar el cálculo de los elementos orbitales o realizar la simulación en términos de los mismos. Consideramos 5 fases diferentes para los planetésimos y se observó que existen variaciones respecto a ellas, como los diferentes valores de s_0 para un mismo radio en la Fig.13, sin embargo, no hicimos un análisis de la dependencia en la fase. Al tener un mayor número de partículas, dicho análisis cobraría más sentido, para lo cuál también sería necesario calcular los ángulos de libración y su evolución en el tiempo.

8. Conclusiones

Hemos llevado a cabo una serie de simulaciones numéricas de la dinámica de planetésimos en la zona externa del sistema solar, tomando en consideración la presencia de un disco protoplanetario en transición. Encontramos que las partículas son arrastradas por el gas y capturadas en resonancia en función de su tamaño y de las condiciones físicas locales de su entorno. Muestran preferencia por las resonancias de primer orden con Neptuno, el planeta más externo. La escala de tiempo de la captura en resonancia y la resonancia en que es atrapado el planetésimo es sensible a todas las variables utilizadas, i.e. posición inicial y radio de la partícula, radio de truncamiento, número de planetas en el sistema y modelo de gas. El parámetro con mayor influencia es el tamaño de la partícula. Nuestros resultados son mayormente consistentes con las estimaciones aerodinámicas y en general, muestran el comportamiento indicado por los estudios usados como referencia, a excepción de que algunos autores sugieren que las partículas de 1km no son susceptibles al arrastre, siendo que nosotros encontramos que en las condiciones de nuestro modelo de gas presentan una notable interacción con el mismo.

Una vez alcanzada la resonancia, las partículas son susceptibles a la atracción de otras resonancias cercanas de los diferentes planetas, provocando en algunos casos un cambio de órbita. A consecuencia de la alta interacción gas-partícula, en los casos con $r_c = 100\text{m}$, los planetésimos son concentrados en una región anular con un ancho que va de aproximadamente 0.3 a 2 AU. Si en ésta región los planetésimos alcanzan una resonancia cercana a la crítica, $j_c+1 : j_c$, su órbita se altera drásticamente, provocando posiblemente su eyección del sistema.

En algunos casos el resultado es sensible a las posiciones iniciales de los planetésimos, por ésto y para realizar una estadística de los resultados en general, es necesario estudiar el fenómeno con un mayor número de partículas.

Con base en lo anterior, podemos resumir lo encontrado en ésta tesis en los siguientes puntos:

- El gas arrastra a las partículas, llevándolas comunmente a una resonancia de movimiento medio externa con Neptuno.
- Estando en una resonancia las partículas son sensibles a las resonancias cercanas.
- Ambos modelos de gas muestran resultados similares. El efecto de éste componente es más complejo que una dependencia lineal en los perfiles de densidad y temperatura.
- La dinámica que involucra un disco en transición puede ser de gran utilidad para explicar las poblaciones del cinturón de Kuiper y la nube de Oort.
- En una simulación que permita incluir planetésimos masivos, es posible que en algunos casos, las partículas que están en resonancia se aglomeren en grupos, generando interacciones más complejas y posiblemente la formación de un nuevo planeta. Ésto aplica tanto para la configuración planetaria inicial utilizada en este trabajo como para

otros sistemas que posean una configuración orbital estable, mayormente aquellos con configuraciones multiresonantes. En este aspecto existen dos especulaciones particularmente interesantes no excluyentes que pueden ser estudiadas en nuestro sistema solar: a) Formación secuencial de los planetas externos. b) Formación de un 5to planeta externo el cuál debió ser eyectado del sistema y podría contribuir a explicar el dilema de la masa faltante del cinturón de Kuiper.

- Debido a la disipación numérica del integrador utilizado y bajo las condiciones de nuestro modelo, nuestras simulaciones representan un límite inferior de los efectos del gas sobre el sistema estudiado.
- Hemos cumplido con los objetivos planteados, sin embargo la naturaleza del problema exige una mayor cantidad de trabajo para una caracterización más completa del fenómeno de interés.

9. Apéndice

A continuación se muestra y describe el código utilizado para resolver las ecuaciones de movimiento presentadas en la Sec.3.5.

La manera en que está escrito el programa requiere la estructuración de la carpeta de trabajo de la siguiente forma: AAA_BBB/CCDD/*prog.f90*, donde *prog.f90* es el archivo que contiene el código utilizado.

- Los caracteres AAA son usados libremente para identificar el radio de truncamiento y modelo de gas utilizado en la carpeta.
- Los caracteres BBB son usados libremente para identificar el tamaño de la partícula.
- Los caracteres CC se usan para abreviar radio inicial (ri).
- Los caracteres DD son usados para determinar la posición inicial de las partículas (valores numéricos de 01 a 20), para esto se requiere crear 20 carpetas con diferentes nombres, cada una debe contener el archivo *prog.f90*. El programa trabaja con 5 partículas de prueba, para incluir las 100 partículas en la simulación, generan automáticamente 20 radios equidistantes entre los valores “ri” y “rout” provistos en el archivo *param.in*. Dependiendo del nombre de la carpeta el programa determina el radio a utilizar.

El código cuenta con los siguientes componentes:

- **paramodule:** Incluye la subrutina *Reading*, empleada para leer los parámetros que definen el caso a analizar. Estos parámetros se encuentran en *param.in*, archivo del cuál se incluye un ejemplo. El módulo también declara variables usadas en diferentes secciones del programa.
- **rkorbita:** Programa principal. Incluye comentarios que indican las acciones realizadas. Depende del número de partículas totales (planetésimos más planetas).
- **Energia:** Subrutina para calcular la energía en cada iteración.
- **Gcometa:** Subrutina que provee las derivadas del vector de estado, el cuál incluye 5 partículas de prueba y 4 planetas, por lo tanto esta subrutina depende del número de partículas utilizado.
- **RK4dos:** Integrador Runge-Kutta de cuarto orden con tamaño de paso fijo.

```

!*****
!*****
!:Código utilizado:
!*****
!*****
!
!Notas:
!   - Se consideran órbitas circulares para los planetas.
!
!Advertencias:
!   - ri se determina dependiendo del path, si se genera algún
!     error relacionado revisar artilugio.
!   - Modificaciones son necesarias si se desean correr más de
!     100 partículas (5X20 folders).
! ,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,
! ,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,
! ,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,
! ,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,
! %%%%%%%%%%
! %%%%%%%%%%

```

```

MODULE paramodule
  implicit none
  character(len=4)   :: gmod
  character(len=50)  :: charse
  integer            :: mody
  real               :: acm
  real               :: tau,tmin,tmax
  real               :: rdisk,down,up
  real               :: sig0,tem0,sigxp,temxp

```

contains

```

Subroutine Reading(acm,rdisk,down,up,tau,tmin,tmax,mody,gmod)
  character(len=4)   :: gmod
  integer            :: mody
  real               :: acm
  real               :: rdisk,down,up
  real               :: tau,tmin,tmax

```

```

open(1,file='../param.dat')

```

```

read(1,*) charse
read(1,*) charse,gmod
read(1,*) charse
read(1,*) charse,acm
read(1,*) charse
read(1,*) charse,rdisk
read(1,*) charse,down
read(1,*) charse,up
read(1,*) charse
read(1,*) charse,tau
read(1,*) charse,tmin
read(1,*) charse,tmax
read(1,*) charse,mody
read(1,*) charse

close(1)

if (gmod .eq. 'ADSN') then
  sig0 = 5141.49
  tem0 = 134.999
  sigxp = 1.33959
  temxp = 0.428567
endif
if (gmod .eq. 'MMSN') then
  sig0 = 1700.
  tem0 = 280.
  sigxp = 1.5
  temxp = 0.5
endif

mody = (tmax-tmin)/(tau*mody)
EndSubroutine Reading

!//////////////////////// param.in////////////////////////
! A continuación se muestra la estructura del
! archivo "param.dat" que contiene todos los
! parámetros necesitados por el modelo:
! -Modelo del disco gaseoso (ADSN/MMSN)
! -Tamaño de la partícula (acm)
! -Radio inicial del disco gaseoso (rdisk)
! -Radio inicial del disco de planetésimos(ri)
! -Radio final del disco de planetésimos (rout)

```

```

! -Parámetros temporales (en años):
! paso de tiempo      (tau)
! tiempo inicial de la simulación  (tmin)
! tiempo final de la simulación    (tmax)
! -Número de salidas de datos entre tmin y tmax (# of outs)

! Es imprescindible conservar la estructura de las carpetas
! mencionada anteriormente.
! Pueden descomentarse las siguientes líneas y guardarse
! con el nombre "param.dat" en la carpeta
! "AA_BB/CCDD"
!
!
! '-----GAS MODEL-----'
!
!       'ADSN/MMSN:'  ADSN
!
! '-----PARTICLE-----'
!
!       'acm(cm) = '   1.e5
!
! '-----DISK-----'
!
!       'rdisk(AU)= '  12.6867
!       'ri(AU)  = '   12.6867
!       'rout(AU) = '   30.0
!
! '-----TIME-----'
!       'tau(yrs)= '   0.035
!       'tmin(yrs)= '   0.
!       'tmax(yrs)= '  1.e7
!       '# of outs= '  5000
! '-----'
! //////////////////////////////////////

```

END MODULE paramodule

```

!%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

```

Program rk4orbita

```

use paramodule
implicit none
integer, parameter :: n=54,npart = 5,nr=20

```

```

integer          :: i,k,nsteps,mm,length
integer          :: mody2
character        :: stemp
character(len=4)  :: fold
character (len=200):: current
real, parameter  :: eps=1.e-5,  GM = 1.
real, dimension(n) :: x
real, dimension(npart):: xi,yi,vxi,vyi,thi
real,dimension(6)  :: x1,x5,x2,x3,x4
real,dimension(nr) :: rads
real              :: r0,ri,v0,t,pi
real              :: e0c,ec,e0p,ep,tfac,tfacyr
! real            :: rdisk,up,down,rstep
real              :: rstep
external Gcometa,Energia

!=====
pi=4.*atan(1.0)
write(6,60)
60 format(60('*'))
write(6,*)'Integrador de orbita kepleriana por Runge-Kutta 4to. orden'
write(6,*)'Se supone el movimiento en el plano-xy'
write(6,*)'Programa principal y subrutinas: S.Navarro'
write(6,60)

!-----
!-----Lectura de radio de truncamiento y modelo de gas-----

call Reading(acm,rdisk,down,up,tau,tmin,tmax,mody,gmod)

write(6,*)
write(6,*)
write(6,*) 'Corriendo modelo con          '
write(6,*) '                               Modelo de gas          : ',gmod
write(6,*) '                               tamaño de partícula : ',acm/(1.e5),'Km'
write(6,*) '                               radio de truncamiento:',rdisk,'AU'

rstep = (up - down)/real(nr-1)
do i=1,nr
  rads(i)= down+real((i-1)*rstep)
enddo

```

```

!.....Determina el radio inicial dependiendo del folder,.....
!
!                               (artilugio)
call getcwd(current)             !determina el path actual

length = len_trim(current)

do i = 1, length/2
  stemp = current(i:i)           !Invierte el path para
  current(i:i) = current(length+1-i:length+1-i) !obtener sólo la el nombre
  current(length+1-i:length+1-i) = stemp      !del folder
end do

fold=current(1:4)
length = len_trim(fold)

do i = 1, length/2
  stemp = fold(i:i)
  fold(i:i) = fold(length+1-i:length+1-i)
  fold(length+1-i:length+1-i) = stemp
end do

if (fold .eq. 'ri01') ri =rads(1)
if (fold .eq. 'ri02') ri =rads(2)
if (fold .eq. 'ri03') ri =rads(3)
if (fold .eq. 'ri04') ri =rads(4)
if (fold .eq. 'ri05') ri =rads(5)
if (fold .eq. 'ri06') ri =rads(6)
if (fold .eq. 'ri07') ri =rads(7)
if (fold .eq. 'ri08') ri =rads(8)
if (fold .eq. 'ri09') ri =rads(9)
if (fold .eq. 'ri10') ri =rads(10)
if (fold .eq. 'ri11') ri =rads(11)
if (fold .eq. 'ri12') ri =rads(12)
if (fold .eq. 'ri13') ri =rads(13)
if (fold .eq. 'ri14') ri =rads(14)
if (fold .eq. 'ri15') ri =rads(15)
if (fold .eq. 'ri16') ri =rads(16)
if (fold .eq. 'ri17') ri =rads(17)
if (fold .eq. 'ri18') ri =rads(18)

```

```

if (fold .eq. 'ri19') ri =rads(19)
if (fold .eq. 'ri20') ri =rads(20)

write(6,*) '                ri :',ri,'AU'
write(6,*)
write(6,*)
!.....-----
!-----

!-----
!-----
! Factores temporales:

! tfac = 1./(sqrt(6.67d-8*2.0d33/1.5d13)/1.5d13)
tfac = 0.5*(log10(6.67d-8) + log10(2.0d33)) - 1.5*log10(1.5d13)
tfac = 10.**tfac
tfac = 1./tfac
tfacyr=tfac/31557600.
tau = tau/tfacyr
tmax= tmax/tfacyr

t=tmin
nsteps = (tmax-tmin)/tau

!-----
!-----

!condiciones iniciales de la partícula
!      distribución angular:

thi = [0.,72.,144.,216.,288.]*pi/180.
!
do i = 1,npart
  xi(i) =cos(thi(i))*ri
  yi(i) =sin(thi(i))*ri
  vxi(i)=-sin(thi(i))/sqrt(ri)
  vyi(i)=cos(thi(i))/sqrt(ri)
enddo
!.....

```



```

!condiciones iniciales de la partícula
!   distribución radial:

!   xi = [15., 20., 25., 30., 35.]
!   yi = [0. , 0., 0., 0., 0.]
!   vxi= [0. , 0., 0., 0., 0.]
!   vyi= [1./sqrt(xi(1)),1./sqrt(xi(2)),1./sqrt(xi(3))&
!         ,1./sqrt(xi(4)),1./sqrt(xi(5))]

!.....
!   p1
x(1) = xi(1) ;    x(2)=yi(1) ;           x(3)=0.0
x(4) =vxi(1) ;    x(5)=vyi(1) ;         x(6)=0.0
!   p2
x(7) = xi(2) ;    x(8) =yi(2) ;         x(9)=0.0
x(10)=vxi(2) ;    x(11)=vyi(2) ;        x(12)=0.0
!   p3
x(13) = xi(3) ;    x(14) =yi(3) ;        x(15)=0.0
x(16) =vxi(3) ;    x(17)= vyi(3) ;       x(18)=0.0
!   p4
x(19) = xi(4) ;    x(20) =yi(4) ;        x(21)=0.0
x(22) =vxi(4) ;    x(23)= vyi(4) ;       x(24)=0.0
!   p5
x(25) = xi(5) ;    x(26) =yi(5) ;        x(27)=0.0
x(28) =vxi(5) ;    x(29)= vyi(5) ;       x(30)=0.0
!-----
!-----
! C.I planetas (circular):

!   jup
x(31) = 5.84724;  x(32) = 0.0 ;           x(33)=0.0
x(34)= 0.0 ;      x(35)= 1./sqrt(x(31)) ; x(36)=0.0
!   Sat
x(37) = 7.83006 ;    x(38) = 0.0 ;           x(39)=0.0
x(40)= 0.0 ;      x(41)= 1./sqrt(x(37)) ; x(42)=0.0
!   Ura
x(43) = 9.67303 ;    x(44) = 0.0 ;           x(45)=0.0
x(46)= 0.0 ;      x(47)= 1./sqrt(x(43)) ; x(48)=0.0
!   Nep
x(49) = 11.6361 ;    x(50) = 0.0 ;          x(51)=0.0
x(52)= 0.0 ;      x(53)= 1./sqrt(x(49)) ; x(54)=0.0

!-----
!-----

```

```

open(1,file='p1.dat')
open(2,file='p2.dat')
open(3,file='p3.dat')
open(4,file='p4.dat')
open(5,file='p5.dat')
open(11,file='jup.dat')
open(7,file='sat.dat')
open(8,file='ura.dat')
open(9,file='nep.dat')

write(1,10)tmin,(x(k),k=1,6)
write(2,10)tmin,(x(k),k=7,12)
write(3,10)tmin,(x(k),k=13,18)
write(4,10)tmin,(x(k),k=19,24)
write(5,10)tmin,(x(k),k=25,30)
write(11,10)tmin,(x(k),k=31,36)
write(7,10)tmin,(x(k),k=37,42)
write(8,10)tmin,(x(k),k=43,48)
write(9,10)tmin,(x(k),k=49,54)

do i=1,nsteps
x1 = [x(1),x(2),x(3),x(4),x(5),x(6)]
x2 = [x(7),x(8),x(9),x(10),x(11),x(12)]
x3 = [x(13),x(14),x(15),x(16),x(17),x(18)]
x4 = [x(19),x(20),x(21),x(22),x(23),x(24)]
x5 = [x(25),x(26),x(27),x(28),x(29),x(30)]

      if (mod(i,mody) .eq. 3) then
write(1,10)t*tfacyr,(x(k),k=1,6)
write(2,10)t*tfacyr,(x(k),k=7,12)
write(3,10)t*tfacyr,(x(k),k=13,18)
write(4,10)t*tfacyr,(x(k),k=19,24)
write(5,10)t*tfacyr,(x(k),k=25,30)
write(11,10)t*tfacyr,(x(k),k=31,36)
write(7,10)t*tfacyr,(x(k),k=37,42)
      write(8,10)t*tfacyr,(x(k),k=43,48)
      write(9,10)t*tfacyr,(x(k),k=49,54)
      endif

mody2=mody*10
if (mod(i,mody2) .eq. 1) then
write(6,*)'t=',t*tfacyr/1e6,'Myrs'

```

```

        endif

        call RK4dos    (n,t,tau,x,Gcometa)
t = t + tau

        enddo

close(1)
close(2)
close(3)
close(4)
close(5)
close(11)
close(7)
close(8)
close(9)

10 format(7(1pe10.3,1x))
20 format(8(1pe10.3,1x))

End Program rk4orbita
!%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
!%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Subroutine Energia (n,x,GM,e)

!calcula la energia por unidad de masa

implicit none
integer          :: n
real, parameter :: eps=1.e-5 !para evitar singularidades
real, dimension (n) :: x
real            :: GM,e

e = 0.5*( x(4)**2 + x(5)**2 + x(6)**2 ) &
    - GM/sqrt(x(1)**2 + x(2)**2 + x(3)**2 + eps**2)

EndSubroutine Energia
!%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
!%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

```

Subroutine Gcometa (n,t,x,derivs)

```
!subrutina que provee los valores de las derivadas para
!la orbita a calcular.
use paramodule
implicit none
integer,parameter    :: npart=5
integer              :: n,ff,i,cJ,cS,cU,cN
real, parameter     :: eps=1.e-5, densc=0.6
real, parameter     :: MpJ=0.0009545888, MpS=0.0002858119
real, parameter     :: MpU=0.0000436624,MpN=0.0000515051
real                :: t,GM
real                :: rad0,ome0,tfac,vel0,conve,tfacyr,facc
real, dimension (n) :: x,derivs
real                :: r1pJ,r2pJ,r3pJ,v1pJ,v2pJ,v3pJ,rpJ,acelxpJ,acelypJ,acelzpJ
real                :: r1pS,r2pS,r3pS,v1pS,v2pS,v3pS,rpS,acelxpS,acelypS,acelzpS
real                :: r1pU,r2pU,r3pU,v1pU,v2pU,v3pU,rpU,acelxpU,acelypU,acelzpU
real                :: r1pN,r2pN,r3pN,v1pN,v2pN,v3pN,rpN,acelxpN,acelypN,acelzpN
real,dimension(npart)::r1,r2,r3,v1,v2,v3,r,acelx,acely,acelz,adx,ady,adz
real,dimension(npart)::r1cpJ,r2cpJ,r3cpJ,rcpJ,acelxcpJ,acelycpJ,acelzcpJ
real,dimension(npart)::r1cpS,r2cpS,r3cpS,rcpS,acelxcpS,acelycpS,acelzcpS
real,dimension(npart)::r1cpU,r2cpU,r3cpU,rcpU,acelxcpU,acelycpU,acelzcpU
real,dimension(npart)::r1cpN,r2cpN,r3cpN,rcpN,acelxcpN,acelycpN,acelzcpN
real,dimension(npart)::radxy,radau,cdc,radcm,sgm,temp,adcof
real,dimension(npart)::csou,ome1,omek,velk,hsca,dens0,zoh2,dens
real,dimension(npart)::dpdr,vgas,vgx,vgy,vrel2,vrel,mach,lmfp,reyn,knud

!  GM = 4.*atan(1.)**2

rad0 = 1.5d13
!  ome0 = sqrt(6.67d-8*2.0d33/1.5d13)/1.5d13
ome0 = 0.5*(log10(6.67d-8)+log10(2.0d33)) - 1.5*log10(1.5d13)
ome0 = 10.**ome0
tfac = 1.d0/ome0 !TIME TO SECONDS
tfacyr=tfac/31557600.
vel0 = rad0 /tfac
conve = tfac**2/rad0
!  conve = 3./8.*conve/(acm*densc)
conve = alog10(3./8.)+alog10(conve) -alog10(acm) - alog10(densc)
conve = 10.**conve

r1pJ= x(31)
```

r2pJ= x(32)
 r3pJ= x(33)
 v1pJ= x(34)
 v2pJ= x(35)
 v3pJ= x(36)
 r1pS= x(37)
 r2pS= x(38)
 r3pS= x(39)
 v1pS= x(40)
 v2pS= x(41)
 v3pS= x(42)
 r1pU= x(43)
 r2pU= x(44)
 r3pU= x(45)
 v1pU= x(46)
 v2pU= x(47)
 v3pU= x(48)
 r1pN= x(49)
 r2pN= x(50)
 r3pN= x(51)
 v1pN= x(52)
 v2pN= x(53)
 v3pN= x(54)

rpJ = sqrt(r1pJ*r1pJ + r2pJ*r2pJ + r3pJ*r3pJ + eps*eps)
 rpS = sqrt(r1pS*r1pS + r2pS*r2pS + r3pS*r3pS + eps*eps)
 rpU = sqrt(r1pU*r1pU + r2pU*r2pU + r3pU*r3pU + eps*eps)
 rpN = sqrt(r1pN*r1pN + r2pN*r2pN + r3pN*r3pN + eps*eps)

acelxpJ= -r1pJ/rpJ**3
 acelypJ= -r2pJ/rpJ**3
 acelpJ= -r3pJ/rpJ**3

acelxpS= -r1pS/rpS**3
 acelypS= -r2pS/rpS**3
 acelpS= -r3pS/rpS**3

acelxpU= -r1pU/rpU**3
 acelypU= -r2pU/rpU**3
 acelpU= -r3pU/rpU**3

acelxpN= -r1pN/rpN**3
 acelypN= -r2pN/rpN**3
 acelpN= -r3pN/rpN**3

```

derivs(31) = v1pJ
derivs(32) = v2pJ
derivs(33) = v3pJ
derivs(34)= acelxpJ
derivs(35)= acelypJ
derivs(36)= acelpJ
derivs(37) = v1pS
derivs(38) = v2pS
derivs(39) = v3pS
derivs(40)= acelxpS
derivs(41)= acelypS
derivs(42)= acelpS
derivs(43) = v1pU
derivs(44) = v2pU
derivs(45) = v3pU
derivs(46)= acelxpU
derivs(47)= acelypU
derivs(48)= acelpU
derivs(49) = v1pN
derivs(50) = v2pN
derivs(51) = v3pN
derivs(52)= acelxpN
derivs(53)= acelypN
derivs(54)= acelpN

```

```

do i = 1, npart
  ff = 6*(i-1)
  r1(i) = x(1 + ff) !~x
  r2(i) = x(2 + ff) !~y
  r3(i) = x(3 + ff) !~z
  v1(i) = x(4 + ff) !~vx
  v2(i) = x(5 + ff) !~vy
  v3(i) = x(6 + ff) !~vz

  r1cpJ(i) = r1(i) - r1pJ
  r2cpJ(i) = r2(i) - r2pJ
  r3cpJ(i) = r3(i) - r3pJ
  r1cpS(i) = r1(i) - r1pS
  r2cpS(i) = r2(i) - r2pS
  r3cpS(i) = r3(i) - r3pS
  r1cpU(i) = r1(i) - r1pU

```

```

r2cpU(i) = r2(i) - r2pU
r3cpU(i) = r3(i) - r3pU
r1cpN(i) = r1(i) - r1pN
r2cpN(i) = r2(i) - r2pN
r3cpN(i) = r3(i) - r3pN
!-----
radau(i) = sqrt(r1(i)**2 + r2(i)**2)
radcm(i)=radau(i)*rad0

facc = 1.0
if (radau(i) .lt. rdisk) facc = 0.0

if (facc .ne. 0.0) then

sigm(i) = sig0/radau(i)**sigxp
temp(i) = tem0/radau(i)**temxp

if (t*tfacyr .gt. 1.0e6) sigm(i) = sigm(i)*(1.e6/(t*tfacyr))**2

csou(i)= 5.944e3*sqrt(temp(i)) ! sound speed
ome1(i)=1.0d0/(radau(i))**1.5d0
omek(i) = 1.155e13 / radcm(i)**1.5
velk(i) = omek(i)*radcm(i)
hsca(i) = csou(i)/omek(i)
dens0(i) = sigm(i) / (2.0*hsca(i))
zoh2(i) = r3(i)**2 / (2.0*hsca(i)/rad0)**2
dens(i) = dens0(i) / exp(zoh2(i))

dpdr(i) = -(3. + 2.*sigxp + temxp)/2.*(csou(i)/velk(i))**2
!
vgas(i) = velk(i) * sqrt(1.0+dpdr(i))
vgx(i) = -vgas(i)*r2(i)/radau(i)
vgy(i) = vgas(i)*r1(i)/radau(i)

vrel(i) = sqrt((vel0*v1(i)-vgx(i))**2 + (vel0*v2(i)-vgy(i))**2 &
+ (vel0*v3(i))**2)

mach(i) = vrel(i) / csou(i)
lmfp(i) = 1.67e-9 / dens(i)
knud(i) = lmfp(i) / acm
reyn(i) = 4.44*mach(i)/knud(i)

if (mach(i) .ge. 1.)then
cdc(i) = 2.0

```

```

else

    if (reyn(i) .ge. 1000.) then
        cdc(i) = 0.44 + 1.56*mach(i)**2
    else
        cdc(i) = 2.*mach(i)**2    &
+ (1. - mach(i)**2)*(24.*(1.+ 0.15*reyn(i)**0.687)/reyn(i))
    endif
!
endif

adcof(i) = conve*cdc(i)*dens(i)

adx(i) = -adcof(i)*vrel(i)*(vel0*v1(i) -vgx(i))
ady(i) = -adcof(i)*vrel(i)*(vel0*v2(i) -vgy(i))
adz(i) = -adcof(i)*vrel(i)*(vel0*v3(i))
!
else
!
    adx(i) = 0.
    ady(i) = 0.
    adz(i) = 0.

endif
!c////////////////////////////////////
r(i) = sqrt( r1(i)*r1(i) + r2(i)*r2(i) + r3(i)*r3(i) + eps*eps )

rcpJ(i) = sqrt( r1cpJ(i)*r1cpJ(i) + r2cpJ(i)*r2cpJ(i) + &
    r3cpJ(i)*r3cpJ(i) + eps*eps )
rcpS(i) = sqrt( r1cpS(i)*r1cpS(i) + r2cpS(i)*r2cpS(i) + &
    r3cpS(i)*r3cpS(i) + eps*eps )
rcpU(i) = sqrt( r1cpU(i)*r1cpU(i) + r2cpU(i)*r2cpU(i) + &
    r3cpU(i)*r3cpU(i) + eps*eps )
rcpN(i) = sqrt( r1cpN(i)*r1cpN(i) + r2cpN(i)*r2cpN(i) + &
    r3cpN(i)*r3cpN(i) + eps*eps )

acelx(i) = -r1(i)/r(i)**3
acely(i) = -r2(i)/r(i)**3
acelz(i) = -r3(i)/r(i)**3

cJ=1
cS=1

```



```

cU=1
cN=1

if(cJ .eq. 0) then
  acelxcpJ(i) = 0.
  acelycpJ(i) = 0.
  acelzcpJ(i) = 0.
else
  acelxcpJ(i)= -MpJ*r1cpJ(i)/rcpJ(i)**3
  acelycpJ(i)= -MpJ*r2cpJ(i)/rcpJ(i)**3
  acelzcpJ(i)= -MpJ*r3cpJ(i)/rcpJ(i)**3
endif
if(cS .eq. 0) then
  acelxcpS(i) = 0.
  acelycpS(i) = 0.
  acelzcpS(i) = 0.
else
  acelxcpS(i)= -MpS*r1cpS(i)/rcpS(i)**3
  acelycpS(i)= -MpS*r2cpS(i)/rcpS(i)**3
  acelzcpS(i)= -MpS*r3cpS(i)/rcpS(i)**3
endif
if(cU .eq. 0) then
  acelxcpU(i) = 0.
  acelycpU(i) = 0.
  acelzcpU(i) = 0.
else
  acelxcpU(i)= -MpU*r1cpU(i)/rcpU(i)**3
  acelycpU(i)= -MpU*r2cpU(i)/rcpU(i)**3
  acelzcpU(i)= -MpU*r3cpU(i)/rcpU(i)**3
endif
if(cN .eq. 0) then
  acelxcpN(i) = 0.
  acelycpN(i) = 0.
  acelzcpN(i) = 0.
else
  acelxcpN(i)= -MpN*r1cpN(i)/rcpN(i)**3
  acelycpN(i)= -MpN*r2cpN(i)/rcpN(i)**3
  acelzcpN(i)= -MpN*r3cpN(i)/rcpN(i)**3
endif

enddo

derivs(1) = v1(1)

```

```

derivs(2) = v2(1)
derivs(3) = v3(1)
derivs(4) = acelx(1) + acelxcpJ(1) + acelxcpS(1) + acelxcpU(1) + &
  acelxcpN(1) + adx(1)
derivs(5) = acely(1) + acelycpJ(1) + acelycpS(1) + acelycpU(1) + &
  acelycpN(1) + ady(1)
derivs(6) = acelz(1) + acelzcpJ(1) + acelzcpS(1) + acelzcpU(1) + &
  acelycpN(1) + ady(1)acelzcpN(1) + adz(1)
derivs(7) = v1(2)
derivs(8) = v2(2)
derivs(9) = v3(2)
derivs(10) = acelx(2) + acelxcpJ(2) + acelxcpS(2) + acelxcpU(2) + &
  acelycpN(1) + ady(1)acelxcpN(2) + adx(2)
derivs(11) = acely(2) + acelycpJ(2) + acelycpS(2) + acelycpU(2) + &
  acelycpN(1) + ady(1)acelycpN(2) + ady(2)
derivs(12) = acelz(2) + acelzcpJ(2) + acelzcpS(2) + acelzcpU(2) + &
  acelycpN(1) + ady(1)acelzcpN(2) + adz(2)
derivs(13) = v1(3)
derivs(14) = v2(3)
derivs(15) = v3(3)
derivs(16) = acelx(3) + acelxcpJ(3) + acelxcpS(3) + acelxcpU(3) + &
  acelycpN(1) + ady(1)acelxcpN(3) + adx(3)
derivs(17) = acely(3) + acelycpJ(3) + acelycpS(3) + acelycpU(3) + &
  acelycpN(1) + ady(1)acelycpN(3) + ady(3)
derivs(18) = acelz(3) + acelzcpJ(3) + acelzcpS(3) + acelzcpU(3) + &
  acelycpN(1) + ady(1)acelzcpN(3) + adz(3)
derivs(19) = v1(4)
derivs(20) = v2(4)
derivs(21) = v3(4)
derivs(22) = acelx(4) + acelxcpJ(4) + acelxcpS(4) + acelxcpU(4) + &
  acelycpN(1) + ady(1)acelxcpN(4) + adx(4)
derivs(23) = acely(4) + acelycpJ(4) + acelycpS(4) + acelycpU(4) + &
  acelycpN(1) + ady(1)acelycpN(4) + ady(4)
derivs(24) = acelz(4) + acelzcpJ(4) + acelzcpS(4) + acelzcpU(4) + &
  acelycpN(1) + ady(1)acelzcpN(4) + adz(4)
derivs(25) = v1(5)
derivs(26) = v2(5)
derivs(27) = v3(5)
derivs(28) = acelx(5) + acelxcpJ(5) + acelxcpS(5) + acelxcpU(5) + &
  acelycpN(1) + ady(1)acelxcpN(5) + adx(5)
derivs(29) = acely(5) + acelycpJ(5) + acelycpS(5) + acelycpU(5) + &
  acelycpN(1) + ady(1)acelycpN(5) + ady(5)
derivs(30) = acelz(5) + acelzcpJ(5) + acelzcpS(5) + acelzcpU(5) + &
  acelycpN(1) + ady(1)acelzcpN(5) + adz(5)

```

```

!
! write(6,*)'-----'
! write(6,*),'acelJ',acelxcpu(1),acelycpu(1),acelzcpu(1)
! write(6,*),'acels',acelxcpn(1),acelycpn(1),acelzcpn(1)

EndSubroutine Gcometa
!%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
Subroutine RK4dos (n,t,tau,x1,DerivsRK)

!Integrador Runge-Kutta de 4to. orden para el sistema: dx/dt=f(t,x)
!n      : numero de ecuaciones de 1er orden
!x      : vector de estado de la variable dependiente
!t      : variable independiente (e.g. tiempo)
!tau    : tamaño del paso
!DerivsRK : subrutina que regresa los valores de
!        las derivadas (n,t,x,derivs)

!En la salida, reescribe en la variable x su nuevo valor en t+tau

implicit none
integer      :: n,i
real, dimension(n) :: x1,f1,f2,f3,f4,xtemp
real        :: t,tau,tau12,thalf,ttau,tau6

call derivsRK (n,t,x1,f1)          !f1=f(t,x)

tau12 = 0.5*tau
thalf = t + tau12
xtemp = x1 + tau12*f1

call derivsRK (n,thalf,xtemp,f2)   !f2=f( t+tau/2 , x+tau*f1/2 )

xtemp = x1 + tau12*f2

call derivsRK (n,thalf,xtemp,f3)   !f3=f( t+tau/2 , x+tau*f2/2 )

ttau = t + tau
xtemp = x1 + tau*f3

```

```
call derivsRK (n,ttau,xtemp,f4)      !f4=f( t+tau   , x+tau*f3 )
```

```
tau6 = tau/6.0
```

```
x1 = x1 + tau6*( f1 + f4 + 2.0*(f2+f3) )
```

```
EndSubroutine RK4dos
```

```
!%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

Referencias

- Adachi, I.; Hayashi, C.; Nakazawa, K.
“The gas drag effect on the elliptical motion of a solid body in the primordial solar nebula.”
Progress of Theoretical Physics, tomo 56, págs. 1756–1771, 1976.
- ALMA (NRAO/ESO/NAOJ); C. Brogan, B. S. N.
“Comunicado de prensa ALMA: HL Tau.”
<http://public.nrao.edu/news/pressreleases/planet-formation-alma>, 2014.
- Andrews, S. M.; Williams, J. P.
“High-Resolution Submillimeter Constraints on Circumstellar Disk Structure.”
ApJ, tomo 659, págs. 705–728, 2007.
- Andrews, S. M.; Wilner, D. J.; Hughes, A. M.; Qi, C.; Dullemond, C. P.
“Protoplanetary Disk Structures in Ophiuchus.”
ApJ, tomo 700, págs. 1502–1523, 2009.
- .
“Protoplanetary Disk Structures in Ophiuchus. II. Extension to Fainter Sources.”
ApJ, tomo 723, págs. 1241–1254, 2010.
- Anglada-Escudé, G.; Tuomi, M.
“A planetary system with gas giants and super-Earths around the nearby M dwarf GJ 676A. Optimizing data analysis techniques for the detection of multi-planetary systems.”
A&A, tomo 548, A58, 2012.
- Armitage, P. J.
“Lecture notes on the formation and early evolution of planetary systems.”
ArXiv Astrophysics e-prints, 2007.
- Artymowicz, P.; Lubow, S. H.
“Dynamics of binary-disk interaction. 1: Resonances and disk gap sizes.”
ApJ, tomo 421, págs. 651–667, 1994.
- Basu, S.
“Constraints on the Formation and Evolution of Circumstellar Disks in Rotating Magnetized Cloud Cores.”
ApJ, tomo 509, págs. 229–237, 1998.
- Batygin, K.; Brown, M. E.
“Early Dynamical Evolution of the Solar System: Pinning Down the Initial Conditions of the Nice Model.”
ApJ, tomo 716, págs. 1323–1331, 2010.
- Beauge, C.; Ferraz-Mello, S.
“Resonance trapping in the primordial solar nebula - The case of a Stokes drag dissipation.”
Icarus, tomo 103, págs. 301–318, 1993.

Bergin, E. A.

Physical processes in circumstellar disks around young stars, capítulo Protoplanetary disk structure and evolution.

University of Chicago Press, 2011.

Blaes, O.

“A universe of disks.”

Scientific American, tomo 291(4), págs. 22–29, 2004.

Brasser, R.; Duncan, M. J.; Levison, H. F.

“Embedded star clusters and the formation of the Oort cloud. II. The effect of the primordial solar nebula.”

Icarus, tomo 191, págs. 413–433, 2007.

Calvet, N.; D’Alessio.

Physical processes in circumstellar disks around young stars, capítulo Protoplanetary disk structure and evolution.

University of Chicago Press, 2011.

Calvet, N.; D’Alessio, P.; Watson, D. M.; Franco-Hernández, R.; Furlan, E.; Green, J.; Sutter, P. M.; Forrest, W. J.; Hartmann, L.; Uchida, K. I.; Keller, L. D.; Sargent, B.; Najita, J.; Herter, T. L.; Barry, D. J.; Hall, P.

“Disks in Transition in the Taurus Population: Spitzer IRS Spectra of GM Aurigae and DM Tauri.”

ApJ, tomo 630, págs. L185–L188, 2005.

Calvet, N.; Muzerolle, J.; Briceño, C.; Hernández, J.; Hartmann, L.; Saucedo, J. L.; Gordon, K. D.

“The Mass Accretion Rates of Intermediate-Mass T Tauri Stars.”

AJ, tomo 128, págs. 1294–1318, 2004.

Cameron, A. G. W.

“Physics of the primitive solar accretion disk.”

Moon and Planets, tomo 18, págs. 5–40, 1978.

Carmona, A.; Pinte, C.; Thi, W. F.; Benisty, M.; Ménard, F.; Grady, C.; Kamp, I.; Woitke, P.; Olofsson, J.; Roberge, A.; Brittain, S.; Duchêne, G.; Meeus, G.; Martin-Zaïdi, C.; Dent, B.; Le Bouquin, J. B.; Berger, J. P.

“Constraining the structure of the transition disk HD 135344B (SAO 206462) by simultaneous modeling of multiwavelength gas and dust observations.”

A&A, tomo 567, A51, 2014.

Chambers, J. E.

“A hybrid symplectic integrator that permits close encounters between massive bodies.”

MNRAS, tomo 304, págs. 793–799, 1999.

- Charpinet, S.; Fontaine, G.; Brassard, P.; Green, E. M.; Van Grootel, V.; Randall, S. K.; Silvotti, R.; Baran, A. S.; Østensen, R. H.; Kawaler, S. D.; Telting, J. H.
 “A compact system of small planets around a former red-giant star.”
Nature, tomo 480, págs. 496–499, 2011.
- Clark, C.
Physical processes in circumstellar disks around young stars, capítulo The dispersal of gas around young stars.
 University of Chicago Press, 2011.
- Crida, A.; Morbidelli, A.; Masset, F.
 “On the width and shape of gaps in protoplanetary disks.”
Icarus, tomo 181, págs. 587–604, 2006.
- D’Alessio, P.; Calvet, N.; Hartmann, L.
 “Accretion Disks around Young Objects. III. Grain Growth.”
ApJ, tomo 553, págs. 321–334, 2001.
- D’Alessio, P.; Calvet, N.; Hartmann, L.; Franco-Hernández, R.; Servín, H.
 “Effects of Dust Growth and Settling in T Tauri Disks.”
ApJ, tomo 638, págs. 314–335, 2006.
- D’Alessio, P.; Calvet, N.; Hartmann, L.; Lizano, S.; Cantó, J.
 “Accretion Disks around Young Objects. II. Tests of Well-mixed Models with ISM Dust.”
ApJ, tomo 527, págs. 893–909, 1999.
- D’Alessio, P.; Cantó, J.; Calvet, N.; Lizano, S.
 “Accretion Disks around Young Objects. I. The Detailed Vertical Structure.”
ApJ, tomo 500, págs. 411–427, 1998.
- D’Alessio, P.; Hartmann, L.; Calvet, N.; Franco-Hernández, R.; Forrest, W. J.; Sargent, B.; Furlan, E.; Uchida, K.; Green, J. D.; Watson, D. M.; Chen, C. H.; Kemper, F.; Sloan, G. C.; Najita, J.
 “The Truncated Disk of CoKu Tau/4.”
ApJ, tomo 621, págs. 461–472, 2005.
- Dong, R.; Zhu, Z.; Whitney, B.
 “Observational Signatures of Planets in Protoplanetary Disks I: Gaps Opened by Single and Multiple Young Planets in Disks.”
ArXiv e-prints, 2014.
- Dullemond, C.; Hollenbach, D.; Kamp, I.; D’Alessio, P.
Protostars and Planets V, capítulo Models of the Structure and Evolution of Protoplanetary Disks.
 The University of Arizona Press, 2007.

Duncan, M. J.; Levison, H. F.; Lee, M. H.

“A Multiple Time Step Symplectic Algorithm for Integrating Close Encounters.”
AJ, tomo 116, págs. 2067–2077, 1998.

Dutrey, A.; di Folco, E.; Guilloteau, S.; Boehler, Y.; Bary, J.; Beck, T.; Beust, H.; Chapillon, E.; Gueth, F.; Huré, J.-M.; Pierens, A.; Piétu, V.; Simon, M.; Tang, Y.-W.

“Possible planet formation in the young, low-mass, multiple stellar system GG Tau A.”
Nature, tomo 514, págs. 600–602, 2014.

Eisner, J. A.

“The Inner AU of Protoplanetary Disks: From Visibilities to Spectra to Images.”
En Creech-Eakman, M. J.; Guzik, J. A.; Stencel, R. E., eds., *Resolving The Future Of Astronomy With Long-Baseline Interferometry*, *Astronomical Society of the Pacific Conference Series*, tomo 487, pág. 65, 2014.

ESO/NAOJ/NRAO.

“Ciencia con ALMA.”

<http://www.almaobservatory.org/es/sobre-alma/ciencia-con-alma>, 2014.

Espaillet, C.; D’Alessio, P.; Hernández, J.; Nagel, E.; Luhman, K. L.; Watson, D. M.; Calvet, N.; Muzerolle, J.; McClure, M.

“Unveiling the Structure of Pre-transitional Disks.”
ApJ, tomo 717, págs. 441–457, 2010.

Espaillet, C.; Ingleby, L.; Furlan, E.; McClure, M.; Spatzier, A.; Nieuwsma, J.; Calvet, N.; Bergin, E.; Hartmann, L.; Miller, J. M.; Muzerolle, J.

“Tracing High-energy Radiation from T Tauri Stars Using Mid-infrared Neon Emission from Disks.”
ApJ, tomo 762, 62, 2013.

Espaillet, C.; Ingleby, L.; Hernández, J.; Furlan, E.; D’Alessio, P.; Calvet, N.; Andrews, S.; Muzerolle, J.; Qi, C.; Wilner, D.

“On the Transitional Disk Class: Linking Observations of T Tauri Stars and Physical Disk Models.”
ApJ, tomo 747, 103, 2012.

Espaillet, C.; Muzerolle, J.; Najita, J.; Andrews, S.; Zhu, Z.; Calvet, N.; Kraus, S.; Hashimoto, J.; Kraus, A.; D’Alessio, P.

“An Observational Perspective of Transitional Disks.”
ArXiv e-prints, 2014.

Fernandez, J. A.; Ip, W.-H.

“Some dynamical aspects of the accretion of Uranus and Neptune - The exchange of orbital angular momentum with planetesimals.”
Icarus, tomo 58, págs. 109–120, 1984.

- Forrest, W. J.; Sargent, B.; Furlan, E.; D'Alessio, P.; Calvet, N.; Hartmann, L.; Uchida, K. I.; Green, J. D.; Watson, D. M.; Chen, C. H.; Kemper, F.; Keller, L. D.; Sloan, G. C.; Herter, T. L.; Brandl, B. R.; Houck, J. R.; Barry, D. J.; Hall, P.; Morris, P. W.; Najita, J.; Myers, P. C.
“Mid-infrared Spectroscopy of Disks around Classical T Tauri Stars.”
ApJS, tomo 154, págs. 443–447, 2004.
- Gallardo, T.
“Atlas of the mean motion resonances in the Solar System.”
Icarus, tomo 184, págs. 29–38, 2006.
- Garcia, P. J. V.; Nata, A.; Walmsley, M.
Physical processes in circumstellar disks around young stars, capítulo Circumstellar disk around young stars.
University of Chicago Press, 2011.
- Gomes, R.; Levison, H. F.; Tsiganis, K.; Morbidelli, A.
“Origin of the cataclysmic Late Heavy Bombardment period of the terrestrial planets.”
Nature, tomo 435, págs. 466–469, 2005.
- Gomes, R. S.; Morbidelli, A.; Levison, H. F.
“Planetary migration in a planetesimal disk: why did Neptune stop at 30 AU?”
Icarus, tomo 170, págs. 492–507, 2004.
- Goodman, A. A.; Benson, P. J.; Fuller, G. A.; Myers, P. C.
“Dense cores in dark clouds. VIII - Velocity gradients.”
ApJ, tomo 406, págs. 528–547, 1993.
- Greaves, J. S.; Rice, W. K. M.
“Have protoplanetary discs formed planets?”
MNRAS, tomo 407, págs. 1981–1988, 2010.
- Habart, E.; Walmsley, M.; Verstraete, L.; Cazaux, S.; Maiolino, R.; Cox, P.; Boulanger, F.; Pineau des Forêts, G.
“Molecular Hydrogen.”
Space Sci. Rev., tomo 119, págs. 71–91, 2005.
- Hahn, J. M.; Malhotra, R.
“Orbital Evolution of Planets Embedded in a Planetesimal Disk.”
AJ, tomo 117, págs. 3041–3053, 1999.
- Hansen, B. M. S.
“The circulation of dust in protoplanetary discs and the initial conditions of planet formation.”
MNRAS, tomo 440, págs. 3545–3556, 2014.

- Hartmann, L.; Calvet, N.; Gullbring, E.; D'Alessio, P.
“Accretion and the Evolution of T Tauri Disks.”
ApJ, tomo 495, págs. 385–400, 1998.
- Hayashi, C.
“Structure of the Solar Nebula, Growth and Decay of Magnetic Fields and Effects of Magnetic and Turbulent Viscosities on the Nebula.”
Prog. Theor. Phys. Supplement, tomo 70, 1981.
- Hughes, A. M.; Wilner, D. J.; Qi, C.; Hogerheijde, M. R.
“Gas and Dust Emission at the Outer Edge of Protoplanetary Disks.”
ApJ, tomo 678, págs. 1119–1126, 2008.
- Isella, A.; Carpenter, J. M.; Sargent, A. I.
“Structure and Evolution of Pre-main-sequence Circumstellar Disks.”
ApJ, tomo 701, págs. 260–282, 2009.
- Kenyon, S.
“Accretion Disks and Eruptive Phenomena.”
En Lada, C.; Kylafis, N., eds., *The Origin of Stars and Planetary Systems, NATO Science Series*, tomo 540, págs. 613–642. Springer Netherlands, 1999.
URL http://dx.doi.org/10.1007/978-94-011-4509-1_18
- Kim, K. H.; Watson, D. M.; Manoj, P.; Forrest, W. J.; Najita, J.; Furlan, E.; Sargent, B.; Espaillat, C.; Muzerolle, J.; Megeath, S. T.; Calvet, N.; Green, J. D.; Arnold, L.
“Transitional Disks and Their Origins: An Infrared Spectroscopic Survey of Orion A.”
ApJ, tomo 769, 149, 2013.
- Klahr, H. H.; Bodenheimer, P.
“Turbulence in Accretion Disks: Vorticity Generation and Angular Momentum Transport via the Global Baroclinic Instability.”
ApJ, tomo 582, págs. 869–892, 2003.
- Leverington, D.
Encyclopedia of the History of Astronomy and Astrophysics, 2013.
- Lissauer, J. J.
“Timescales for planetary accretion and the structure of the protoplanetary disk.”
Icarus, tomo 69, págs. 249–265, 1987.
- Malhotra, R.
“Orbital resonances in the solar nebula - Strengths and weaknesses.”
Icarus, tomo 106, pág. 264, 1993a.
- .
“The origin of Pluto’s peculiar orbit.”
Nature, tomo 365, págs. 819–821, 1993b.

Marshack.

The roots of civilization: The cognitive beginnings of man's first art, symbol and notation.
Weidenfeld and Nicolson, 1972.

Masset, F.; Snellgrove, M.

“Reversing type II migration: resonance trapping of a lighter giant protoplanet.”
MNRAS, tomo 320, págs. L55–L59, 2001.

Matsumoto, T.; Hanawa, T.

“Fragmentation of a Molecular Cloud Core versus Fragmentation of the Massive Protoplanetary Disk in the Main Accretion Phase.”
ApJ, tomo 595, págs. 913–934, 2003.

Miguel, Y.; Guilera, O. M.; Brunini, A.

“The diversity of planetary system architectures: contrasting theory with observations.”
MNRAS, tomo 417, págs. 314–332, 2011.

Morbidelli, A.; Tsiganis, K.; Crida, A.; Levison, H. F.; Gomes, R.

“Dynamics of the Giant Planets of the Solar System in the Gaseous Protoplanetary Disk and Their Relationship to the Current Orbital Architecture.”
AJ, tomo 134, págs. 1790–1798, 2007.

Muzerolle, J.; Allen, L. E.; Megeath, S. T.; Hernández, J.; Gutermuth, R. A.

“A Spitzer Census of Transitional Protoplanetary Disks with AU-scale Inner Holes.”
ApJ, tomo 708, págs. 1107–1118, 2010.

Najita, J. R.; Carr, J. S.; Glassgold, A. E.; Valenti, J. A.

“Gaseous Inner Disks.”
Protostars and Planets V, págs. 507–522, 2007.

NASA.

“NASA Exoplanet Archive.”
<http://exoplanetarchive.ipac.caltech.edu/index.html>, 2014.

Papaloizou, J.; Lin, D. N. C.

“On the tidal interaction between protoplanets and the primordial solar nebula. I - Linear calculation of the role of angular momentum exchange.”
ApJ, tomo 285, págs. 818–834, 1984.

Parkin, T. J.; Wilson, C. D.; Foyle, K.; Baes, M.; Bendo, G. J.; Boselli, A.; Boquien, M.; Cororay, A.; Cormier, D.; Davies, J. I.; Eales, S. A.; Galametz, M.; Gomez, H. L.; Leboutteiller, V.; Madden, S.; Mentuch, E.; Page, M. J.; Pohlen, M.; Remy, A.; Roussel, H.; Sauvage, M.; Smith, M. W. L.; Spinoglio, L.

“The gas-to-dust mass ratio of Centaurus A as seen by Herschel.”
MNRAS, tomo 422, págs. 2291–2301, 2012.

- Pauzat, F.; Ellinger, Y.; Mousis, O.; Ali-Dib, M.; Ozgurel, O.
“Gas-phase Sequestration of Noble Gases in the Protosolar Nebula: Possible Consequences on the Outer Solar System Composition.”
ApJ, tomo 777, 29, 2013.
- Perets, H. B.; Murray-Clay, R.
“Wind-shearing in gaseous protoplanetary disks.”
En Sozzetti, A.; Lattanzi, M. G.; Boss, A. P., eds., *IAU Symposium, IAU Symposium*, tomo 276, págs. 453–454, 2011.
- Reyes-Ruiz, M.; Stepinski, T. F.
“Evolution of magnetized protoplanetary disks.”
ApJ, tomo 438, págs. 750–762, 1995.
- Ruden, S. P.; Lin, D. N. C.
“The global evolution of the primordial solar nebula.”
ApJ, tomo 308, págs. 883–901, 1986.
- Ruden, S. P.; Pollack, J. B.
“The dynamical evolution of the protosolar nebula.”
ApJ, tomo 375, págs. 740–760, 1991.
- Semenov, D.; Henning, T.; Helling, C.; Ilgner, M.; Sedlmayr, E.
“Rosseland and Planck mean opacities for protoplanetary discs.”
A&A, tomo 410, págs. 611–621, 2003.
- Shakura, N. I.; Sunyaev, R. A.
“Black holes in binary systems. Observational appearance.”
A&A, tomo 24, págs. 337–355, 1973.
- Sicilia-Aguilar, A.; Henning, T.; Hartmann, L. W.
“Accretion in Evolved and Transitional Disks in CEP OB2: Looking for the Origin of the Inner Holes.”
ApJ, tomo 710, págs. 597–612, 2010.
- Strom, K. M.; Strom, S. E.; Edwards, S.; Cabrit, S.; Skrutskie, M. F.
“Circumstellar material associated with solar-type pre-main-sequence stars - A possible constraint on the timescale for planet building.”
AJ, tomo 97, págs. 1451–1470, 1989.
- Takeuchi, T.; Lin, D. N. C.
“Radial Flow of Dust Particles in Accretion Disks.”
ApJ, tomo 581, págs. 1344–1355, 2002.
- Terebey, S.; Shu, F. H.; Cassen, P.
“The collapse of the cores of slowly rotating isothermal clouds.”
ApJ, tomo 286, págs. 529–551, 1984.

- Testi, L.
“Science with ALMA.”
Memorie della Societa Astronomica Italiana Supplementi, tomo 14, pág. 90, 2010.
- Tsiganis, K.; Gomes, R.; Morbidelli, A.; Levison, H. F.
“Origin of the orbital architecture of the giant planets of the Solar System.”
Nature, tomo 435, págs. 459–461, 2005.
- Weidenschilling, S. J.
“Aerodynamics of solid bodies in the solar nebula.”
MNRAS, tomo 180, págs. 57–70, 1977.
- Weidenschilling, S. J.; Davis, D. R.
“Orbital resonances in the solar nebula - Implications for planetary accretion.”
Icarus, tomo 62, págs. 16–29, 1985.
- Werner, M. W.; Roellig, T. L.; Low, F. J.; Rieke, G. H.; Rieke, M.; Hoffmann, W. F.; Young, E.; Houck, J. R.; Brandl, B.; Fazio, G. G.; Hora, J. L.; Gehrz, R. D.; Helou, G.; Soifer, B. T.; Stauffer, J.; Keene, J.; Eisenhardt, P.; Gallagher, D.; Gautier, T. N.; Irace, W.; Lawrence, C. R.; Simmons, L.; Van Cleve, J. E.; Jura, M.; Wright, E. L.; Cruikshank, D. P.
“The Spitzer Space Telescope Mission.”
ApJS, tomo 154, págs. 1–9, 2004.
- Williams, J. P.; Cieza, L. A.
“Protoplanetary Disk and Their Evolution.”
Annu. Rev. Astron. Astrophys., 2011.
- Wolszczan, A.
“Confirmation of Earth-Mass Planets Orbiting the Millisecond Pulsar PSR B1257+12.”
Science, tomo 264, págs. 538–542, 1994.
- Wright, J. T.; Gaudi, B. S.
Exoplanet Detection Methods, pág. 489, 2013.
- Ávila Jimenez, N.; Jesús, G.; Moreno Corral, M. A.; Poveda Ricalde, A.
Breve historia de la astronomía en México.
Dirección gral de la divulgación de la ciencia, UNAM, 2007.