Posgrado Conjunto en Ciencias Matemáticas

Universidad Nacional Autónoma de México
Universidad Michoacana de San Nicolás Hidalgo

La aplicación de Petri para haces lineales sobre curvas algebraicas

Tesina que para optar por el grado de
Maestra en Ciencias Matemáticas

P R E S E N T A

Graciela Astrid Reyes Ahumada

DIRECTOR DE TESIS

Dr. Luis Abel Castorena Martínez
Centro de Ciencias Matemáticas
Universidad Nacional Autónoma de México

Morelia, Michoacán. 2014

Índice general

Introducción

Actualmente en el área de Geometría Algebraica el estudio de curvas especiales mediante la aplicación de Petri es muy importante para estudiar el espacio moduli M_g y sus divisores, así como familias de curvas dentro de superficies algebraicas.

Este trabajo de tesina empieza desde las definiciones básicas de gavillas y divisores hasta el análisis de cómo la aplicación de Petri nos da información sobre la geometría de las curvas.

En el primer capítulo se incluyen los preliminares necesarios y la notación utilizada para entender las construcciones dadas en las siguientes secciones, tales como haces lineales sobre variedades complejas, gavillas y cohomología de Čech.

En el segundo capítulo se hace un estudio de los divisores sobre variedades complejas y se estudia la relación entre ellos y los haces lineales; se define la clase de Chern de un haz lineal y se definen sistemas lineales, así como las gavillas $\mathcal{O}_D$ asociadas a un divisor D; la última parte se dedica a enunciar teoremas importantes para el caso de superficies de Riemann compactas como el teorema de dualidad de Serre, se demuestra el teorema de Riemann-Roch y se enuncia un teorema sobre la existencia de encajes al espacio proyectivo $\mathbb{P}^n$.

La tercer parte está dedicada al estudio de haces lineales sobre curvas, empezamos con las construcciones de las variedades que parametrizan sistemas lineales sobre curvas y se define la aplicación de Petri; también se dan algunos resultados que relacionan al número de Brill-Noether con las variedades de sistemas lineales; este trabajo termina con el desarrollo de un ejemplo de cómo la aplicación de Petri nos da información sobre la geometría de la curva en cuestión.

Quiero agradecer a CONACYT por el apoyo brindado para concluir este trabajo de tesina, mediante una beca en el marco del proyecto número 48668, “Geometría de curvas especiales y su Moduli” asignado al Dr. Luis Abel Castorena Martínez.

Capítulo 1

Preliminares

Empezamos este trabajo con un rápido repaso de haces vectoriales, gavillas y cohomología de Čech; para poder dar las definiciones que necesitaremos más adelante y establecer la notación utilizada en las siguientes secciones.

1.1. Haces vectoriales

Sea X una variedad compleja, un *Haz vectorial holomorfo* de rango r sobre X es una variedad compleja E junto con una función holomorfa $\pi : E \to X$ y una estructura de espacio vectorial complejo de dimensión r en cada una de las fibras $E_x := \pi^{-1}(x)$, tal que existe una cubierta abierta $X = \bigcup U_i$ y funciones biholomorfas $h_i : \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times \mathbb{C}^r$ que hacen conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\pi^{-1}(U_i) \arrow[rr, "h_i"] \arrow[dr, "\pi"'] & & U_i \times \mathbb{C} \arrow[dl, "p_i"] \\
& U_i &
\end{tikzcd}$$

donde p_i es la proyección a U_i y tales que el morfismo inducido en las fibras $\pi^{-1}(x) \to \mathbb{C}^r$ es $\mathbb{C}$-lineal. Un *haz lineal* holomorfo es un haz vectorial holomorfo de rango 1.

A las $\{h_i\}$ se les llama *trivializaciones* de E (respecto de la cubierta $\{U_i\}$); si $\pi : E \to X$ es un haz vectorial y $\{U_i, h_i\}$ es una trivialización, podemos definir los morfismos

$$h_{ij} := h_i \circ h_j^{-1} : U_{ij} \times \mathbb{C}^r \to U_{ij} \times \mathbb{C}^r$$

$$(x, v) \mapsto (x, \eta(x, v))$$

donde $U_{ij} := U_i \cap U_j$, fijando $x \in X$, tenemos que

$$h_{ij}(x, *) : \mathbb{C}^r \to \mathbb{C}^r, \ v \mapsto \eta(x, v)$$

es un isomorfismo lineal, por lo que debe existir una función holomorfa $g_{ij} : U_{ij} \to GL_r(\mathbb{C})$ tal que

$$h_i \circ h_j^{-1}(x, v) = (x, g_{ij}(x)v).$$

Notemos que en la triple intersección $U_{ijk} := U_i \cap U_j \cap U_k$ estas funciones satisfacen la condición:

$$g_{ij}(x) \cdot g_{jk}(x) = g_{ik}(x)$$

es por ello que las $\{g_{ij}\}$ son llamadas *funciones de transición* (o *cociclos*) correspondientes a la trivialización $\{h_i\}$.

Supongamos que tenemos otra trivialización $\{h_i'\}$ (sobre la misma cubierta) de $\pi : E \to X$, entonces la función $h_i' \circ h_i^{-1} : U_i \times \mathbb{C} \to U_i \times \mathbb{C}$ es de la forma $(x, v) \mapsto (x, \phi_i(x)v)$ donde $\phi_i : U_i \to GL_r(\mathbb{C})$ es holomorfa; por lo cual las funciones de transición correspondientes a $\{h_i'\}$ son $\{\frac{\phi_i}{\phi_j} \cdot g_{ij}\}$. Conversamente dada una familia de funciones holomorfas $g_{ij} : U_{ij} \to GL_r(\mathbb{C})$ que satisfacen la condición de cociclo

$$g_{ij} g_{jk} = g_{ik}, \textit{ en } U_{ijk},$$

podemos construir un haz de la manera siguiente: tomamos la unión disjunta $\widehat{E} = \bigsqcup_{i \in I}(U_i \times \mathbb{C}^r)$ y la proyección $\widehat{\pi} : \widehat{E} \to X$, $(x, v) \mapsto x$ y tomamos la relación $(x, v) \sim (y, w) \Leftrightarrow \{x = y \text{ y } v = g_{ij}(x)(w)\}$, debido a la condición de cociclo $\sim$ es una relación de equivalencia, es fácil probar que $E := \widehat{E}/\sim$ con el morfismo inducido $\pi : E \to X$ es un haz vectorial holomorfo, más aún, la proyección $\widehat{E} \to E$ induce una biyección $h_i^{-1} : U_i \times \mathbb{C}^r \to \pi^{-1}(U_i)$, y de hecho con esta trivialización los cociclos de este haz son precisamente las $\{g_{ij}\}$. De esta manera tenemos que todo haz está completamente determinado por sus funciones de transición.

Si $\pi_E : E \to X$ y $\pi_F : F \to X$ son haces vectoriales holomorfos , un *morfismo de haces* de E a F es una función holomorfa $u : E \to F$ con $\pi_E = \pi_F \circ u$ tal que la función inducida en las fibras $u_x : E_x \to F_x$ es lineal. Los haces $\pi_E : E \to X$ y $\pi_F : F \to X$ son *isomorfos* si existen morfismos $u : E \to F$ y $u' : F \to E$ tales que $u \circ u' = Id_F$ y $u' \circ u = Id_E$.

Nuestro primer ejemplo de haz es el llamado haz *trivial* $\pi_X : X \times \mathbb{C}^r \to X$, donde π es simplemente la proyección en la primer coordenada; en este caso, si $X = \bigcup U_i$ es cualquier cubierta abierta y tomamos las trivializaciones $h_i : U_i \times X \to U_i \times X$ como la identidad, es decir $h_i(x, v) = (x, v)$, entonces para todo i, j, tenemos que la función $h_{ij} = h_i \circ h_j^{-1} : U_{i,j} \times \mathbb{C}^r \to U_{i,j} \times \mathbb{C}^r$ es la identidad en $U_{ij} \times \mathbb{C}^r$ por lo que los cociclos de este haz deben ser las funciones constantes $g_{ij} : U_{ij} \to GL_r(\mathbb{C}),\ x \mapsto I$.

Una *sección holomorfa* de un haz vectorial holomorfo $\pi : E \to X$ es una función holomorfa $s : X \to E$ tal que $\pi \circ s = Id_X$; por ejemplo la función $s_0 : X \to E$ que manda cada $x \in X$ al cero de E_x es una sección holomorfa llamada la *sección cero*.

Sea $s : X \to E$ una sección holomorfa de E, considerando las trivializaciones $h_i : \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times \mathbb{C}^r$ para todo $x \in U_i$ tenemos que $h_i \circ s(x) = (x, f_i(x))$ donde $f_i : U_i \to \mathbb{C}^r$ es una función holomorfa, si $x \in U_{ij}$ entonces tenemos que

$$h_i \circ s(x) = h_i \circ h_j^{-1}(h_j s(x)) = h_i h_j^{-1}(x, f_j(x)) = (x, g_{ij}(x) f_j(x))$$

por lo anterior, una sección holomorfa de $\pi : E \to X$ puede identificarse con una familia de funciones holomorfas $\{f_i : U_i \to \mathbb{C}^r\}$ que satisfacen $f_i = g_{ij} f_j$ en U_{ij}.

1.1.1. Ejemplos

En los siguientes ejemplos suponemos $\pi_E : E \to X$ y $\pi_F : F \to X$ haces vectoriales holomorfos determinados por los cociclos $\{g_{ij} : U_{ij} \to GL_r(\mathbb{C})\}$ y $\{h_{ij} : U_{ij} \to GL_{r'}(\mathbb{C})\}$ respectivamente (con respecto a la misma cubierta $\{U_i\}$),donde E tiene rango r y F tiene rango r'.

1. Sea $\phi : E \to F$ un homomorfismo de haces entonces existen haces vectoriales holomorfos sobre X denotados $Ker(\phi)$ y $Coker(\phi)$ tales que las fibras para cada $x \in X$ son isomorfas a
$$(Ker(\phi))_x \simeq Ker(\phi(x) : E_x \to F_x)$$
$$(Coker(\phi))_x \simeq Coker(\phi(x) : E_x \to F_x)$$

2. Supongamos que para todo $x \in U_i \cap U_j$ la matriz $h_{i,j}$ tiene la forma
$$h_{ij} = \begin{pmatrix} g_{ij} & * \\ 0 & \gamma_{ij} \end{pmatrix}$$
entonces E es un subhaz holomorfo de F, es decir, existe un morfismo de haces inyectivo $E \hookrightarrow F$. Conversamente si $E \subset F$ es un subhaz holomorfo entonces podemos encontrar cociclos de F de la forma anterior; más aún, en este caso el haz cokernel del morfismo $u : E \hookrightarrow F$, $G = Coker(u)$ está determinado por los cociclos $\{\gamma_{ij}\}$.

3. La *suma directa* $E \oplus F$ es el haz sobre X definido por los cociclos $\{g_{ij} \oplus h_{ij} : U_{ij} \to GL_{r+r'}(\mathbb{C})\}$, donde
$$g_{ij} \oplus h_{ij}(x) = \begin{pmatrix} g_{ij}(x) & 0 \\ 0 & h_{ij}(x) \end{pmatrix}$$
debido a la construcción, la fibra$(E \oplus F)_x$ es isomorfa a $E_x \oplus F_x$ para cada $x \in X$.

4. De la misma forma construimos el *producto tensorial* $E \otimes F$ como el haz sobre X definido por los cociclos $\{g_{ij} \otimes h_{ij} : U_{ij} \to GL_{r \cdot r'}(\mathbb{C})\}$; la fibra de este haz es isomorfa a $E_x \otimes F_x$ en cada $x \in X$.

5. La i-ésima potencia exterior $\bigwedge^i(E)$ es el haz sobre X cuya fibra para toda $x \in X$ es isomorffa a $\bigwedge^i E_x$.

6. El *haz dual* a E es el haz vectorial holomorfo sobre X definido por los cociclos $\{({g_{ij}}^t)^{-1} : U_{ij} \to GL_r(\mathbb{C})\}$ y su fibra$(E^*)_x$ en cada $x \in X$ es isomorfa a $(E_x)^*$.

7. El *haz determinante* de E es el haz lineal holomorfo $det(E) := \bigwedge^r E$, y está determinado por los cociclos $\{det(g_{ij}) : U_{ij} \to \mathbb{C}\}$.

8. Definimos una *sucesión exacta corta de de haces vectoriales holomorfos* sobre el mismo espacio X, como una sucesión
$$0 \to E \to F \to G \to 0$$
donde $f : E \to F$ es un morfismo de haces vectoriales con $Ker(f) = 0$ y $Coker(f) = G$; entonces existe un isomorfismo entre los haces vectoriales:
$$det(F) \simeq det(E) \otimes det(G).$$

Sea $f : Y \to X$ una función holomorfa entre variedades complejas y sea E un haz vectorial holomorfo sobre X dado por los cociclos $\{U_i, g_{ij}\}$; definimos el *pullback* f^*E de E como el haz vectorial holomorfo sobre Y determinado por los cociclos $\{f^{-1}(U_i), g_{ij} \circ f\}$. En este caso para toda $y \in Y$ la fibra $(f^*E)_y$ es isomorfa $E_{f(y)}$. Si Y es una subvariedad compleja de X e $i : Y \hookrightarrow X$ es la inclusión entonces $E|_Y := i^*E$ es la restricción de E a Y.

PROPOSICIÓN 1.1.1 *El conjunto*

$$\mathcal{O}(-1) := \{(l, z) \in \mathbb{P}^n \times \mathbb{C}^{n+1} \mid z \in l\}$$

es un haz lineal holomorfo sobre $\mathbb{P}^n$.

Demostración. Veamos que con la proyección al primer factor $\pi : \mathcal{O}(-1) \to \mathbb{P}^n$ es un haz lineal. Tomemos $\{U_i\}_{i=0}^n$ la cubierta de $\mathbb{P}^n$ por abiertos afines de la forma

$$U_i = \{[z_0 : ... : z_n] \in \mathbb{P}^n \mid z_i \neq 0\},$$

entonces podemos definir una trivialización de $\mathcal{O}(-1)$ sobre U_i como $\phi_i : \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times \mathbb{C}$, $(l, z) \mapsto (l, z_i)$ donde $z = (z_0, ..., z_n)$. Las funciones de transición $\phi_{i,j}(l) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ están dadas por $w \mapsto \frac{l_i}{l_j} \cdot w$ donde $l = [l_0 : ... : l_n]$, de hecho las funciones ϕ_i al mismo tiempo son cartas holomorfas para $\mathcal{O}(-1)$. □

Definimos el *haz lineal tautológico* (denotado $\mathcal{O}(1)$) como el haz dual de $\mathcal{O}(-1)$. Si $k > 0$, denotamos como $\mathcal{O}(k)$ al haz $O(1) \otimes \mathcal{O}(1) \otimes ... \otimes \mathcal{O}(1)$ (k veces); de manera análoga, con $k < 0$ definimos el haz $\mathcal{O}(k) := \mathcal{O}(-k)^*$. De hecho si definimos $\mathcal{O}(0)$ como el haz lineal trivial $\mathbb{P}^n \times \mathbb{C} \to \mathbb{P}^n$, entonces el conjunto de haces lineales $\{\mathcal{O}(k) \mid k \in \mathbb{Z}\}$ bajo la operación del producto tensorial forman un un grupo isomorfo a $\mathbb{Z}$, más aún se puede probar que cualquier haz lineal holomorfo sobre $\mathbb{P}^n$ es isomorfo a uno de la forma $\mathcal{O}(k)$, es decir que el conjunto de haces lineales holomorfos sobre $\mathbb{P}^n$ es isomorfo al grupo $\mathbb{Z}$. Este resultado se puede generalizar a otras variedades de la siguiente manera:

PROPOSICIÓN 1.1.2 *El conjunto de todas las clases de isomorfismo de haces lineales sobre una variedad compleja X tiene una estructura de grupo abeliano, dada por el producto tensorial y el dual. Este grupo es llamado el* ***grupo de Picard*** *de X y se denota $Pic(X)$*

Demostración. Si $\pi_E : E \to X$ y $\pi_F : F \to X$ son haces lineales determinados por los cociclos $\{g_{ij} : U_{ij} \to \mathbb{C}\}$ y $\{h_{ij} : U_{ij} \to \mathbb{C}\}$ (como los haces son lineales, $g_{ij}(x) \in \mathbb{C}$ y $h_{ij}(x) \in \mathbb{C}$), por definición su producto es el producto tensorial $E \otimes F$ y el inverso de E es el dual E^*, que claramente satisfacen la asociatividad y la conmutatividad; notemos que al hacer el producto tensorial de E por el haz trivial, lo que obtenemos es el haz que está determinado por los cociclos $g_{ij}(x) \otimes 1(x) = g_{ij}(x)$, que es isomorfo a E, esto prueba que el haz trivial funciona como la identidad del grupo. Ahora lo único que necesitamos probar es que $E \otimes E^* \simeq X \times \mathbb{C}$; sabemos que $E \otimes E^*$ es el haz lineal determinado por los cociclos

$$\{g_{ij} \otimes (g_{ij}^t)^{-1}\};$$

si $x \in X$, entonces

$$g_{ij}(x) \otimes (g_{ij}(x)^t)^{-1} = g_{ij}(x) \otimes (g_{ij}(x))^{-1} = g_{ij}(x) \otimes \frac{1}{g_{ij}(x)} = 1$$

y esto termina la prueba. □

Si $X = \bigcup U_i$ es una cubierta abierta y tenemos las cartas $\psi_i : U_i \to \psi(U_i) \subset \mathbb{C}^n$ definimos la *matriz jacobiana* de las funciones de transición $\psi_{ij} := \psi_i \circ \psi_j^{-1} : \psi_j(U_{ij}) \to \psi_i(U_{ij})$ como la matriz

$$J(\psi_{ij})(\psi_j(z)) := \left(\ \frac{\partial \psi_{ij}^k}{\partial z_l}(\psi_j(z)) \ \right)_{(k,l)}$$

donde ψ_{ij}^k denota la k-ésima entrada del vector $\psi_{ij}(z)$.

Si X es una variedad compleja con $dim(X) = n$; notemos que por la regla de la cadena los elementos $\phi_{ij} := J(\psi_{ij})(\psi_j(z))$ satisfacen la condición de cociclo y deben definir un haz sobre X; definimos el *haz tangente holomorfo* sobre X denotado $\mathcal{T}_X$ como el haz holomorfo de rango n dado por éstos cociclos. También definimos el *haz cotangente holomorfo* Ω_X como el dual de $\mathcal{T}_X$. Por otro lado si $0 \leq p \leq n$ construimos el *haz holomorfo de las p-formas* $\Omega_X^p := \bigwedge^p \Omega_X$ y por último definimos $K_X := det(\Omega_X) = \Omega_X^n$ el *haz canónico* de X.

1.2. Gavillas

DEFINICIÓN 1.2.1 *Sea X un espacio topológico. Una* ***pregavilla*** *$\mathcal{F}$ de grupos abelianos sobre X asocia a cada conjunto abierto $U \subset X$ un grupo abeliano $\mathcal{F}(U)$ y a cada par de abiertos $V \subset U \subset X$ un morfismo de grupos abelianos $\rho_{UV} : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ de manera tal que satisfacen las siguientes condiciones:*

1. *$\mathcal{F}(\emptyset) = 0$, donde $\emptyset$ es el conjunto vacío y para cualquier abierto U la función ρ_{UU} es el morfismo identidad $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(U)$.*

2. *Si $W \subset V \subset U$ son abiertos de X, entonces $\rho_{UW} = \rho_{VW} \circ \rho_{UV}$.*

DEFINICIÓN 1.2.2 *Una pregavilla $\mathcal{F}$ sobre un espacio X es una* ***gavilla*** *si satisface las siguientes condiciones:*

1. *Sea $U \subset X$ cualquier abierto y $\{V_i\}_{i \in I}$ una cubierta abierta de U; si $s \in \mathcal{F}(U)$ es un elemento tal que $\rho_{UV_i}(s) = 0$ para toda i, entonces $s = 0$.*

2. *Sea U es un abierto y $\{V_i\}_{i \in I}$ una cubierta abierta de U; si tenemos elementos $\{s_i \in \mathcal{F}(V_i)\}_{i \in I}$ con la propiedad de que para toda $i, j \in I$ $\rho_{V_i V_i \cap V_j}(s_i) = \rho_{V_j V_i \cap V_j}(s_j)$, entonces existe un elemento $s \in \mathcal{F}(U)$ tal que $\rho_{UV_i}(s) = s_i$ para cada i (Notemos que la condición anterior implica la unicidad de esta s).*

A los grupos $\mathcal{F}(U)$ se les llama *secciones* de $\mathcal{F}$ sobre U y al morfismo ρ_{UV} se le llama *función restricción* de U en V.

Notación Si M es una variedad compleja, $V \subset M$ es una subvariedad analítica de M y $E \to M$ es un haz vectorial holomorfo, definimos las gavillas $\mathcal{O}$, $\mathcal{O}^*$, Ω^p, $\mathcal{J}_V$, $\mathcal{O}(E)$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *y* $\mathbb{C}$ como:

- $\mathcal{O}(U) = \{$funciones holomorfas sobre $U\}$
- $\mathcal{O}^*(U) = \{$grupo multiplicativo de funciones holomorfas no cero sobre $U\}$
- $\Omega^p = \{p$-formas holomorfas sobre $U\}$
- $\mathcal{J}_V = \{$funciones holomorfas sobre U que se anulan en $U \cap V\}$
- $\mathcal{O}(E)(U) = \{$secciones holomorfas de E sobre $U\}$
- $\mathbb{Z}(U)$, $\mathbb{Q}(U)$, $\mathbb{R}(U)$ y $\mathbb{C}(U)$ las gavillas definidas como $\mathbb{Z}(U) = \mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}(U) = \mathbb{Q}$, $\mathbb{R}(U) = \mathbb{R}$ *y* $\mathbb{C}(U) = \mathbb{C}$ respectivamente, para todo abierto $U \subset X$.

Si M es una variedad compleja una *función meromorfa* f sobre un abierto $U \subset M$ está dada localmente por el cociente de dos funciones holomorfas, es decir para alguna cubierta $\{U_i\}$ de U, $f|_{U_i} = \frac{g_i}{h_i}$ donde g_i y h_i son primos relativos en $\mathcal{O}(U_i)$ y $g_i \cdot h_j = g_j \cdot h_i$ en $U_{ij} = U_i \cap U_j$. La gavilla de funciones meromorfas sobre M se denota $\mathcal{M}$ y la gavilla multiplicativa de funciones meromorfas no idénticamente cero se denota $\mathcal{M}^*$.

Definición 1.2.3 *si $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ son pregavillas, un* ***morfismo*** *$\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ es una colección de morfimos de grupos abelianos $\{\phi(U) : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)\}_{U \subset M}$ tal que para cualquier inclusión $V \subset U$, el diagrama*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(U) \arrow[r, "\phi(U)"] \arrow[d, "\rho_{U,V}"'] & \mathcal{G}(U) \arrow[d, "\rho'_{U,V}"] \\ \mathcal{F}(V) \arrow[r, "\phi(V)"] & \mathcal{G}(V) \end{tikzcd}$$

es conmutativo, donde ρ y ρ' son las restricciones de $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ respectivamente. Si $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ son gavillas, usamos la misma definición para un ***morfismo de gavillas****. Definimos un isomorfismo como un morfismo que tiene una inversa por ambos lados.*

Si $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ es un morfismo de pregavillas. Definimos la *pregavilla kernel* de ϕ, la *pregavilla cokernel* de ϕ y la *pregavilla imagen* de ϕ, como las pregavillas dadas por $U \mapsto ker(\phi(U))$, $U \mapsto coker(\phi(U))$ *y* $U \mapsto im(\phi(U))$ respectivamente.

Una *subgavilla* de una gavilla $\mathcal{F}$, es una gavilla $\mathcal{F}'$ tal que para todo abierto $U \subset X$, $\mathcal{F}'(U)$ es un subgrupo de $\mathcal{F}(U)$ y tal que las restricciones de $\mathcal{F}'$ están inducidas por las restricciones de $\mathcal{F}$. Si $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ es un morfismo de gavillas, definimos el *kernel* de ϕ, denotado $ker(\phi)$ como la pregavilla kernel de ϕ (que también es una gavilla) y tenemos que $ker(\phi)$ es una subgavilla de $\mathcal{F}$. Decimos que un morfismo de gavillas $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ es *inyectivo* si $ker(\phi) = 0$; notemos que ϕ es inyectivo si y sólo si las funciones inducidas $\phi(U) : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ son inyectivas para todos los abiertos $U \subset X$.

Proposición 1.2.4 *Dada una pregavilla $\mathcal{F}$ existe una gavilla $\mathcal{F}^+$ y un morfismo $\theta : \mathcal{F} \to \mathcal{F}^+$ con la propiedad de que para cualquier gavilla $\mathcal{G}$ y cualquier morfismo $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ existe un único morfismo $\psi : \mathcal{F}^+ \to \mathcal{G}$ tal que $\psi = \phi \circ \theta$. Más aún el par $(\mathcal{F}^+, \theta)$ es único salvo isomorfismos. $\mathcal{F}^+$ es llamada la* ***gavilla asociada*** *a la pregavilla $\mathcal{F}$.*

Una prueba del resultado anterior se puede ver en pág. 64[4]. Si $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ es un morfismo de gavillas, definimos la *imagen* de ϕ, denotada $im(\phi)$, como la gavilla asociada a la pregavilla imagen de ϕ. Notemos que por la propiedad universal de la gavilla asociada a una pregavilla, existe una función natural $im(\phi) \to \mathcal{G}$ y se puede probar que esta función es inyectiva, debido a esto $im(\phi)$ puede identificarse con una subgavilla de $\mathcal{G}$. Decimos que un morfismo de gavillas $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ es *sobreyectivo* si $im(\phi) = \mathcal{G}$ (como gavillas).

Decimos que una sucesión

$$\ldots \to \mathcal{F}_{i-1} \xrightarrow{\phi_{i-1}} \mathcal{F}_i \xrightarrow{\phi_i} \mathcal{F}_{i+1} \to \ldots$$

de gavillas y morfismos es *exacta* si $ker(\phi_i) = im(\phi_{i-1})$ (como gavillas) para cada i. Si $\mathcal{F}'$ es una subgavilla de $\mathcal{F}$ definimos la *gavilla cociente* $\mathcal{F}/\mathcal{F}'$ como la gavilla asociada a la pregavilla $U \to \mathcal{F}(U)/\mathcal{F}'(U)$; y por último si $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ es un morfismo de gavilla definimos la gavilla *cokernel* de ϕ denotada $coker(\phi)$ como la gavilla asociada a la pregavilla cokernel de ϕ.

Ejemplo. Sobre cualquier variedad compleja, la sucesión

$$0 \to \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathcal{O} \xrightarrow{exp} \mathcal{O}^* \to 0$$

es exacta; esta sucesión es llamada la *sucesión exponencial de gavillas.*

1.3. Cohomología de Čech

Sea $\mathcal{F}$ una gavilla sobre una variedad compleja M y $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ una cubierta localmente finita, definimos:

$$\begin{aligned} C^0(\mathcal{U},\mathcal{F}) &= \prod_{\alpha} \mathcal{F}(U_\alpha) \\ C^1(\mathcal{U},\mathcal{F}) &= \prod_{\alpha\neq\beta} \mathcal{F}(U_\alpha \cap U_\beta) \\ &\vdots \\ C^p(\mathcal{U},\mathcal{F}) &= \prod_{\alpha_0\neq\alpha_1\neq\ldots\neq\alpha_p} \mathcal{F}(U_{\alpha_0}\cap U_{\alpha_1}\cap \ldots \cap U_{\alpha_p}). \end{aligned}$$

Un elemento $\sigma \in C^p(\mathcal{U},\mathcal{F})$ es llamado *p-cocadena* de $\mathcal{F}$. Definimos un *operador cofrontera*

$$\delta : C^p(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to C^{p+1}(\mathcal{U},\mathcal{F})$$

como

$$(\delta\sigma)_{i_0,\ldots,i_{p+1}} = \sum_{j=0}^{p+1}(-1)^j \sigma_{i_0,\ldots,\widehat{i_j},\ldots,i_{p+1}} |_{U_{i_0}\cap\ldots\cap U_{i_p}}$$

En particular si $\sigma = \{\sigma_V\} \in C^0(\mathcal{U},\mathcal{F})$ tenemos $(\delta\sigma)_{VW} = \sigma_W - \sigma_V$ y si $\sigma = \{\sigma_{VW}\} \in C^1(\mathcal{U},\mathcal{F})$ entonces $(\delta\sigma)_{VWT} = \sigma_{WT} - \sigma_{VT} + \sigma_{VW}$, con las restricciones adecuadas. Una p-cocadena $\sigma \in C^p(\mathcal{U},\mathcal{F})$ es llamado *cociclo* si está en el kernel de δ, es decir si $\delta\sigma = 0$. Notemos que los cociclos satisfacen la condición de antisimetría

$$\sigma_{i_0,\ldots,i_p} = -\sigma_{i_0,\ldots,i_{q-1},i_{q+1},i_q,i_{q+2},\ldots,i_p}.$$

Una p-cocadena σ es llamada *cofrontera* si está en la imagen de δ es decir si $\sigma = \delta\tau$ para algún $\tau \in C^{p-1}(\mathcal{U},\mathcal{F})$. Se puede probar que $\delta^2 = 0$ por lo que toda cofrontera es un cociclo. Denotamos $Z^p(\mathcal{U},\mathcal{F}) = Ker\delta \subset C^p(\mathcal{U},\mathcal{F})$ y definimos el *p-ésimo grupo de cohomología de $\mathcal{F}$ respecto de la cubierta $\mathcal{U}$* como

$$H^p(\mathcal{U},\mathcal{F}) = \frac{Z^p(\mathcal{U},\mathcal{F})}{\delta C^{p-1}(\mathcal{U},\mathcal{F})}.$$

Dadas dos cubiertas $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ y $\mathcal{U}' = \{U'_\beta\}_{\beta\in I'}$ de M, decimos que $\mathcal{U}'$ es un refinamiento de $\mathcal{U}$ si para cada $\beta \in I'$ existe $\alpha \in I$ tal que $U'_\beta \subset U_\alpha$, y lo denotamos $\mathcal{U}' < \mathcal{U}$. si $\mathcal{U}' < \mathcal{U}$ podemos elegir una función $\phi : I' \to I$ tal que $U'_\beta \subset U_{\phi(\beta)}$ para todo $\beta \in I$; tenemos entonces una función

$$\rho_\phi : C^p(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to C^p(\mathcal{U}',\mathcal{F})$$

dada por $(\rho_\phi\sigma)_{\beta_0,\ldots,\beta_p} = \sigma_{\phi\beta_0,\ldots,\phi\beta_p} |_{U_{\beta_0}\cap\ldots\cap U_{\beta_p}}$, es claro que $\delta\circ\rho_\phi = \rho_\phi\circ\delta$ por lo que ρ_ϕ induce un homomorfismo

$$\rho : H^p(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to H^p(\mathcal{U}',\mathcal{F})$$

que es independiente de la elección de ϕ. Por lo anterior tenemos que los $H^p(\mathcal{U},\mathcal{F})$ con los refinamientos de cubiertas forman un conjunto dirigido, y estamos listos para dar la siguiente:

DEFINICIÓN 1.3.1 *Definimos el* ***p-ésimo grupo de cohomología de Čech de la gavilla $\mathcal{F}$ sobre*** *M como el límite directo de las $H^p(\mathcal{U},\mathcal{F})$ conforme $\mathcal{U}$ se vuelve cada vez más fino.*

$$H^p(M,\mathcal{F}) := \varinjlim H^p(\mathcal{U},\mathcal{F}).$$

Observación 1.3.2

1. *Si $\mathcal{U}$ es cualquier cubierta, tenemos que $H^0(M,\mathcal{F}) = H^0(\mathcal{U},\mathcal{F}) = \mathcal{F}(M)$ donde $\mathcal{F}(M)$ son las secciones globales de la gavilla $\mathcal{F}$.*

2. *Si $M \subset N$ es un subespacio cerrado, entonces es cualquier gavilla $\mathcal{F}$ sobre M podemos extenderla a una gavilla sobre N (haciendo cero todo lo que está fuera de M) y tenemos que*
$$H^*(M,\mathcal{F}) = H^*(N,\mathcal{F}).$$

Proposición 1.3.3 *Sea $\mathcal{D}$ la gavilla de funciones diferenciables C^∞ entonces*
$$H^q(X,\mathcal{D}) = 0 \quad para \quad q \geq 1.$$

Demostración. Sea $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ una cubierta localmente finita de X, podemos encontrar una *partición de la unidad* determinada por $\mathcal{U}$ (ver [5]), es decir, un conjunto $\{\rho_i\}$ de funciones diferenciables C^∞ que satisfacen:

1. Para cada i existe un cerrado W_i contenido en U_i tal que $\rho(x) = 0$ para todo $x \notin W_i$ (es decir, $Supp(\rho_i) \subset U_i$).

2. $\sum \rho_i = 1$.

Si $\sigma \in Z^p(\mathcal{U},\mathcal{D})$ es un cociclo, notemos que $\rho_i\sigma_{i,j_0,\ldots,j_p-1}$ es una sección que está definida en $U_i \cap U_{j_0} \cap \ldots \cap U_{j_{p-1}}$ pero como $\rho_i(x) = 0$ fuera de U_i, entonces podemos extender esta sección al abierto $U_{j_0} \cap \ldots \cap U_{j_{p-1}}$ definiéndola como cero fuera de $U_i \cap U_{j_0} \cap \ldots \cap U_{j_{p-1}}$ de este modo podemos definir una $(p-1)$-cocadena $\tau \in C^{p-1}(\mathcal{U},\mathcal{D})$ como
$$\tau_{j_0,\ldots,j_{p-1}} = \sum_{i\in I} \rho_i\sigma_{i,j_0,\ldots,j_{p-1}},$$
y se puede probar que $\delta\tau = 0$. Hagamos la cuenta para el caso $p = 1$, tenemos entonces $\sigma \in Z^1(\mathcal{U},\mathcal{D})$, es decir $\sigma = \{\sigma_{U,V} \in \mathcal{D}(U \cap V)\}$ y satisface $\sigma_{VW} - \sigma_{UW} + \sigma_{UV} = 0$, que es equivalente a la igualdad $\sigma_{UV} = \sigma_{WV} - \sigma_{WU}$ en $U \cap V \cap W$. Tomemos
$$\tau_U = \sum_V \rho_V\sigma_{VU},$$
entonces
$$\begin{aligned}(\delta\tau)_{UV} &= \tau_V - \tau_U \\ &= \sum_W \rho_W\sigma_{WV} - \sum_W \rho_W\sigma_{WU} \\ &= \sum_W \rho_W(\sigma_{WV} - \sigma_{WU}) \\ &= \sum_W \rho_W\sigma_{UV} \\ &= (\sum_W \rho_W)\sigma_{UV} = \sigma_{UV}\end{aligned}$$
por lo cual $\delta\tau = \sigma$. □

En general las gavillas que admiten particiones de la unidad son llamadas **finas** y el mismo argumento muestra que $H^p(X,\mathcal{F}) = 0$ para $p \geq 1$ y $\mathcal{F}$ fina.

Capítulo 2

Divisores y Haces lineales

En este capítulo estudiaremos las relaciones entre los divisores, los haces lineales y las clases de Chern.

2.1. Divisores

Sea M una variedad compleja de dimensión n (no necesariamente compacta); cualquier subvariedad $V \subset M$ de dimensión $n-1$ es una hipersuperficie analítica, es decir, para todo punto $p \in V \subset M$ existe una vecindad de U de p tal que $U \cap V$ son los ceros de una función holomorfa f. Más aún cualquier función holomorfa g definida en p y que se anula en V es divisible por f en una vecindad de p. A tal f le llamaremos *función de definición local* para V cerca de p, y es única salvo multiplicación por una función no cero en p. Denotaremos V_s a los puntos singulares de V y denotamos $V^* = V - V_s$, si V_1^* es una componente conexa de V^* entonces $\overline{V_1^*}$ es una subvariedad analítica de M. Podemos expresar a V de manera única como unión de hipersuperficies analíticas irreducibles

$$V = V_1 \cup V_2 \cup ... \cup V_m$$

donde las V_i son las cerraduras de las componentes conexas de V^*. En particular, V es irreducible si y sólo si V^* es conexa.

DEFINICIÓN 2.1.1 . *Un* ***divisor*** *D sobre una variedad compleja M es una combinación lineal formal localmente finita de hipersuperficies analíticas irreducibles de M*

$$D = \sum a_i \cdot V_i$$

con $a_i \in \mathbb{Z}$.

Nota: En la definición anterior localmente finita significa que para todo $p \in M$ existe una vecindad de p que se intersecta solo con un número finito de las V_i que aparecen en D; claramente si M es compacta esto significa que la suma es finita. El conjunto de divisores en M es naturalmente un grupo aditivo, denotado $Div(M)$.

Un divisor $D = \sum a_i \cdot V_i$ es llamado *efectivo* si $a_i \geq 0$ para todo i; y escribimos $D \geq 0$ para denotar que D es efectivo. Una hipersuperficie V usualmente será identificada con el divisor $\sum V_i$ donde las V_i son las componentes irreducibles de V.

Sea $V \subset M$ una hipersuperficie analítica, $p \in V$ un punto cualquiera y f una función de definición local para V cerca de p. Para toda función holomorfa g definida cerca de p, definimos el orden de g a lo largo de V denotado $ord_{V,p}(g)$ como el entero más grande a tal que en el anillo local $\mathcal{O}_{M,p}$ se satisfaga

$$g = f^a \cdot h.$$

Se puede demostrar que el orden $ord_{V,p}(g)$ es independiente de p; por lo que tiene sentido definir el orden $ord_V(g)$. Notemos que si g, h son funciones holomorfas y V es cualquier hipersuperficie irreducible, entonces

$$ord_V(gh) = ord_V(g) + ord_V(h).$$

Sea f una función meromorfa sobre M escrita localmente como $f = g/h$ con g y h funciones holomorfas y primas relativas. Si V es una hipersuperficie irreducible, definimos

$$ord_V(f) = ord_V(g) - ord_V(h)$$

usualmente decimos que f tiene un *cero de orden* a a lo largo de V si $ord_V(f) = a > 0$ y que f tiene un *polo de orden* a a lo largo de V si $ord_V(f) = -a < 0$.

Definimos el **divisor** (f) **de la función meromorfa** f como

$$(f) = \sum_V ord_V(f) \cdot V,$$

y como f se escribe localmente como g/h, podemos definir también el **divisor de ceros de** f denotado $(f)_0$ como

$$(f)_0 = \sum_V ord_V(g) \cdot V$$

y el **divisor de polos de** f denotado $(f)_\infty$, como

$$(f)_\infty = \sum_V ord_V(h) \cdot V;$$

claramente estos divisores están bien definidos ya que pedimos que g y h fueran primos relativos y tenemos que

$$(f) = (f)_0 - (f)_\infty.$$

En el caso de $dimX = 1$, tenemos que (ver [7]):

TEOREMA 2.1.2 *Si X es una superficie de Riemann compacta conexa y f es una función meromorfa no constante en $\mathcal{M}^*(X)$ entonces*

$$\sum_V ord_V(f) = 0$$

2.1.1. Divisores y Gavillas

Ahora veremos que los divisores pueden ser descritos también en el lenguaje de gavillas. Sea $\mathcal{M}^*$ la gavilla (multiplicativa) de funciones meromorfas no idénticamente cero sobre M y $\mathcal{O}^*$ la subgavilla de funciones holomorfas no idénticamente cero. Definimos un divisor D sobre M como una sección global de la gavilla cociente $\mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*$. Veamos que esta definición es equivalente a la dada anteriormente. Una sección global f de la gavilla $\mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*$ está dada por una cubierta abierta $\{U_\alpha\}$ de M y funciones meromorfas $\{f_\alpha\}$ con f_α no idénticamente cero en U_α, tales que

$$\frac{f_\alpha}{f_\beta} \in \mathcal{O}^*(U_\alpha \cap U_\beta)$$

entonces dada una hipersuperficie $V \subset M$ tenemos que

$$ord_V(f_\alpha) = ord_V(f_\beta)$$

y así podemos asociarle a la sección f el divisor

$$D = \sum_V ord_V(f_\alpha) \cdot V$$

donde para cada V escogemos α tal que $V \cap U_\alpha \neq \emptyset$.

Por otro lado dado un divisor $D = \sum_{V_i} a_i \cdot V_i$; debido a que los V_i son localmente finitos (por definición), entonces podemos encontrar una cubierta abierta $\{U_\alpha\}$ de M tal que en cada U_α se satisface que todas las V_i que aparecen en D tienen una función de definición local $g_{i,\alpha} \in \mathcal{O}(U_\alpha)$. y podemos tomar

$$f_\alpha = \prod_i g_{i,\alpha}^{a_i} \in \mathcal{M}^*(U_\alpha)$$

para obtener una sección global de $\mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*$. Las f_α son llamadas funciones de definición local para D.

Dada una función holomorfa $\phi : M \to N$ de variedades complejas, definimos la función $\phi^* : Div(N) \to Div(M)$ que asocia a cada divisor sobre N dado por $D = (\{U_\alpha\}, \{f_\alpha\})$, el divisor pullback

$$\phi^* D = (\{\phi^{-1} U_\alpha\}, \{\phi^* f_\alpha\}).$$

Notemos que para un divisor sobre N dado por una hipersuperficie analítica $V \subset N$, el divisor pullback $\phi^* V$ sobre M está dentro de V pero no necesariamente coincide con la hipersuperficie analítica $\phi^{-1}(V) \subset M$ (ya que pueden ocurrir multiplicidades).

2.1.2. Divisores y Haces lineales

La descripción de haces lineales mediante funciones de transición nos permite interpretarlos en el lenguaje de gavillas, en el siguiente sentido: Observemos que las funciones de transición $g_{ij} : U_{ij} \to \mathbb{C}^*$ de un haz lineal $L \to M$ son holomorfas y no nulas, es decir $g_{ij} \in \mathcal{O}^*(U_i \cap U_j)$; notemos también que todas estas funciones de transición representan una 1-cocadena de Čech de la gavilla $\mathcal{O}^*$ sobre M; y recordemos que estos $\{g_{ij}\}$ satisfacen

$$g_{ij} \cdot g_{ji} = I \quad y \quad g_{ij} \cdot g_{jk} \cdot g_{ki} = I.$$

por lo que, si g es la 1-cocadena determinada por los $\{g_{ij}\}$ entonces

$$\delta(g)_{ijk} = g_{jk} \cdot {g_{ik}}^{-1} \cdot g_{ij} = g_{jk} \cdot g_{ki} \cdot g_{ij} = I$$

es decir g es un cociclo.

En el primer capítulo se demostró que una trivialización dada por funciones de transición $\{g_i'\}$ define el mismo haz vectorial que el determinado por las $\{g_{ij}\}$ si y sólo si existe alguna colección de funciones holomorfas no nulas $\{f_i : U_i \to \mathbb{C}\}$ de modo tal que las funciones de transición $\{g'_{ij}\}$ son de la forma $g'_{ij} = \frac{f_i}{f_j} \cdot g_{ij}$; notemos también que $f_i \in \mathcal{O}^*(U_i)$ por lo que las $\{f_i\}$ definen una 0-cocadena f, entonces tenemos que

$$g_{ij} \cdot (g'_{ij})^{-1} = g_{ij} \cdot (\frac{f_j}{f_i} \cdot g_{ji}) = \frac{f_j}{f_i} = \delta(f)_{ij}$$

es decir, dos cociclos $\{g_{ij}\}$ y $\{g'_{ij}\}$ determinan el mismo haz si y sólo si su diferencia $g_{ij} \cdot (g'_{ij})^{-1}$ es una cofrontera. Por lo anterior podemos identificar al conjunto de haces lineales sobre una variedad M con $H^1(M, \mathcal{O}^*)$. En el capítulo anterior demostramos que si L y L' son haces lineales dados por las funciones de transición $\{g_{ij}\}$ y $\{h_{ij}\}$ respectivamente, entonces $L \otimes L'$ y L^* están dados por $\{g_{ij} \cdot h_{ij}\}$ y $\{(g_{ij})^{-1}\}$ respectivamente, por lo que $H^1(M, \mathcal{O}^*)$ es isomorfo a $Pic(M)$.

Ahora describiremos la correspondencia entre divisores y haces lineales: Sea D un divisor sobre M con funciones de definición local $f_i \in \mathcal{M}(U_i)$ sobre una cubierta abierta $\mathcal{U} = \{U_i\}$ de M. Entonces las funciones $g_{ij} = \frac{f_i}{f_j}$ son holomorfas y no se anulan en las intersecciones U_{ij} y en la triple intersección U_{ijk} tenemos que

$$g_{ij} \cdot g_{jk} \cdot g_{ki} = \frac{f_i}{f_j} \cdot \frac{f_j}{f_k} \cdot \frac{f_k}{f_i} = 1$$

por lo que estas $\{g_{ij}\}$ definen un haz lineal, llamado **haz lineal asociado al divisor** D y denotado $[D]$; para ver que está bien definido supongamos que $\{f'_i\}$ son diferentes funciones de definición local del divisor D, entonces si $h_i = \frac{f_i}{f'_i} \in \mathcal{O}^*(U_i)$, tenemos que

$$\frac{h_j}{h_i} \cdot g_{ij} = \frac{f_j f'_i}{f_i f'_j} \cdot g_{ij} = g'_{ij}$$

entonces las $\{f_i\}$ y las $\{f'_i\}$ definen el mismo haz lineal.

Si D y D' son dos divisores sobre M dados localmente por $\{f_i\}$ y $\{f'_i\}$ respectivamente, entonces $D + D'$ está dado por $\{f_i \cdot f'_i\}$, esto implica que $[D + D'] = [D] \otimes [D']$ y que la función

$$[\ \ ] : Div(M) \to Pic(M)$$

es un homomorfismo de grupos.

Si D es el divisor definido por una función meromorfa f sobre M, podemos tomar como funciones de definición local para cualquier cubierta $\{U_i\}$ las restricciones $f_i = f|_{U_i}$; entonces $\frac{f_i}{f_j} = 1$ y tenemos que el haz $[D]$ es trivial. Conversamente si D está dado por funciones de definición local $\{f_i\}$ y el haz $[D]$ es trivial, por lo anterior existen funciones $h_i \in \mathcal{O}^*(U_i)$ para cada i, tales que

$$\frac{f_i}{f_j} = g_{ij} = \frac{h_i}{h_j} \cdot 1 = \frac{h_i}{h_j}$$

en $U_i \cap U_j$, por lo que $\frac{f_i}{h_i} = \frac{f_j}{h_j}$ en $U_i \cap U_j$, para cada i, j , entonces la función definida como $f = \frac{f_i}{h_i}$ en cada U_i es una función meromorfa global sobre M con divisor D. Hemos probado que *el haz lineal* $[D]$ *asociado a un divisor* D *es trivial si y sólo si* D *es el divisor de una función meromorfa.*

Decimos que dos divisores D y D' sobre M son **linealmente equivalentes** si existe una sección meromorfa $f \in \mathcal{M}^*(M)$ tal que $D = D' + (f)$ y lo denotaremos $D \sim D'$; por el párrafo anterior tenemos que $D \sim D'$ si y sólo si $[D] = [D']$. Denotamos por $|D| \subset Div(M)$ al conjunto de divisores efectivos que son linealmente equivalentes a D.

Sea $f : M \to N$ una función holomorfa de variedades complejas, si $D \in Div(N)$ entonces

$$f^*([D]) = [f^*(D)].$$

Intentemos interpretar a [ ] de manera cohomológica; Sea M una variedad compleja y consideremos la sucesión exacta de gavillas

$$0 \to \mathcal{O}^* \xrightarrow{i} \mathcal{M}^* \xrightarrow{j} \mathcal{M}^*/\mathcal{O}^* \to 0$$

la cual induce una sucesión exacta de grupos de cohomología

$$H^0(M, \mathcal{M}^*) \xrightarrow{j^*} H^0(M, \mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*) \xrightarrow{\delta} H^1(M, \mathcal{O}^*)$$

y bajo las identificaciones naturales discutidas antes podemos identificar a

$$Div(M) = H^0(M, \mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*)$$

y

$$Pic(M) = H^1(M, \mathcal{O}^*)$$

si f es una función meromorfa sobre M, tenemos que $j^*f = (f)$ y para cualquier divisor D sobre M, $\delta(D) = [D]$.

Ahora estudiaremos las secciones meromorfas y holomorfas de haces lineales. Sea $L \xrightarrow{\pi} M$ un haz lineal holomorfo, con trivializaciones $\phi_i : \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times \mathbb{C}$ sobre la cubierta $\{U_i\}$ de M y funciones de transición $\{g_{ij}\}$ relativas a las $\{\phi_i\}$. Las trivializaciones definen isomorfismos

$$\phi_i^* : \mathcal{O}(L)(U_i) \to \mathcal{O}(U_i)$$

y podemos ver que mediante la correspondencia

$$s \in \mathcal{O}(L)(U) \to \{s_i = \phi_i^*(s) \in \mathcal{O}(U \cap U_i)\}$$

una sección de L sobre $U \subset M$ está dada exactamente por una colección de funciones $s_i \in \mathcal{O}(U \cap U_i)$ que satisfacen

$$s_i = g_{ij} \cdot s_j$$

en $U \cap U_i \cap U_j$.

Del mismo modo, una *sección meromorfa* s de L sobre U está dada por una colección de funciones meromorfas $s_i \in \mathcal{M}(U \cap U_i)$ que satisfacen $s_i = g_{ij} \cdot s_j$ en $U \cap U_i \cap U_j$.

Si s es una sección meromorfa global de L, tenemos que $\frac{s_i}{s_j} \in \mathcal{O}^*(U_i \cap U_j)$ y entonces para cualquier hipersuperficie irreducible $V \subset M$ tenemos que

$$ord_V(s_i) = ord_V(s_j),$$

por lo que podemos definir el orden de s en V como

$$ord_V(s) := ord_V(s_i)$$

para cualquier i tal que $U_i \cap V \neq \emptyset$; definimos el divisor (s) de la sección meromorfa como

$$(s) = \sum_V ord_V(s) \cdot V.$$

Con esta convención tenemos que s es holomorfa si y sólo si (s) es efectivo.

Si $D \in Div(M)$ está dado por las funciones de definición local $f_i \in \mathcal{M}(U_i)$ entonces las funciones f_i dan una sección meromorfa s_f del haz $[D]$ con $(s_f) = D$. Conversamente si L

está dado por las funciones de transición $\{g_{i,j}\}$ y s es cualquier sección global meromorfa de L, tenemos que

$$\frac{s_i}{s_j} = g_{ij}$$

es decir, que $L = [(s)]$; si D es cualquier divisor tal que $[D] = L$ existe una sección meromorfa s de L con $(s) = D$ y para cualquier sección meroforma s de L, $L = [(s)]$. En particular L es el haz lineal asociado a algún divisor D sobre M si y sólo si L tiene alguna sección global meromorfa no idénticamente cero; y L es el haz lineal asociado a algún divisor efectivo si y sólo si tiene una sección holomorfa global no trivial. Si $L = [D]$ escribimos $|L|$ en lugar de $|D|$ para denotar a los divisores efectivos linealmente equivalentes con D.

Si $D = \sum a_i x_i$ es un divisor sobre una superficie de Riemann X, podemos ver la correspondencia anterior de manera siguiente: Denotemos por $D(p)$ al coeficiente asociado al punto p en el divisor D, definimos la gavilla $\mathcal{O}_D$ como la gavilla que al abierto $U \subset X$ le asocia el grupo

$$\mathcal{O}_D(U) = \{f \in \mathcal{M}(U) | ord_x(f) \geq -D(x) \quad \forall\ x \in U\}$$

junto con las restricciones naturales. Denotamos por $\mathcal{L}(D)$ a las secciones globales de la gavilla $\mathcal{O}_D$, es decir $\mathcal{L}(D) = \mathcal{O}_D(X) = H^0(X, \mathcal{O}_D)$.

Observemos que cuando $D = 0$ es el divisor cero sobre una superficie de Riemann compacta X entonces para todo $U \subset X$,

$$\mathcal{O}_D(U) = \{f \in \mathcal{M}(U) | (f) \geq 0\}$$

es decir es el conjunto de secciones meromorfas tales que su divisor asociado es efectivo, pero ya habíamos visto que una sección meromorfa es holomorfa si y sólo si su divisor (s) es efectivo. Por lo tanto $\mathcal{O}_D = \mathcal{O}$ si y sólo si $D = 0$.

Proposición 2.1.3 *Sean D y D' divisores linealmente equivalentes sobre una superficie de Riemann compacta X y sea $f \in \mathcal{M}^*(X)$ tal que $D - D' = (f)$ entonces el homomorfismo de gavillas inducido por la multiplicación*

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_D &= \mathcal{O}_{D'} \\ g &\mapsto fg \end{aligned}$$

es un isomorfismo.

Demostración. Sea $U \subset X$ y $f \in \mathcal{M}^*(X)$ con $(f) = D - D'$, si $s \in \mathcal{O}_D(U)$ luego la imagen de s bajo esta función es fs y como $(fs) = (f) + (s)$ tenemos que $(fs) + D' = (f) + (s) + D' = (s) + D \geq 0$ por lo tanto $fs \in \mathcal{O}_{D'}(U)$ y claramente conmuta con las restricciones, por lo que es un morfismo de gavillas. Si $s' \in \mathcal{O}_{D'}(U)$ entonces $s = \frac{s'}{f}$ satisface $(s) = (s') - (f)$ por lo que $(s) + D = (s') - (f) + D = (s') + D' \geq 0$ es decir $s \in \mathcal{O}_D$ y $fs = s'$ por lo que es sobreyectiva. De manera análoga se puede probar que

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{D'} &= \mathcal{O}_D \\ g &\mapsto \frac{g}{f} \end{aligned}$$

es un homomorfismo de gavillas y es fácil ver que es el inverso. □

Si D es un divisor y $D' \in |D|$ luego D y D' difieren en una $f \in \mathcal{M}^*(X)$, que satisface $D' = D + (f) \geq 0$ es decir $f \in \mathcal{L}(D)$ y conversamente cualesquiera dos f, f' que satisfagan

$D' = D + (f) = D + (f')$ difieren en una constante no cero, por lo que tenemos una correspondencia 1 a 1 de los elementos de $|D|$ con la proyectivización

$$\mathbb{P}(\mathcal{L}(D)) = \mathcal{L}(D) - \{0\}/\mathbb{C}^*$$

es decir

$$|D| \cong \mathbb{P}(\mathcal{L}(D)).$$

En general, la familia de divisores efectivos sobre X que se corresponden con un subespacio lineal de $\mathbb{P}(H^0(X, \mathcal{O}(L)))$ para algún haz $L \to X$ es llamada **sistema lineal de divisores**. Un sistema lineal es llamado *completo* si es de la forma $|D|$, es decir, si contiene a todos los divisores efectivos linealmente equivalentes a cualquiera de sus elementos. Definimos la *dimensión* de un sistema lineal como la dimensión del espacio proyectivo que lo parametriza; entonces si denotamos $dim(|D|)$ como la dimensión del sistema lineal completo asociado al divisor D, tenemos

$$dim(|D|) = dim\mathcal{L}(D) - 1.$$

Se puede probar que como estamos en una superficie de Riemann compacta, $\mathcal{L}(D)$ es finito dimensional (ver [8]). Un sistema lineal de dimensión 1 es llamado *pencil*, de dimensión 2 es llamado *net* y de dimensión 3 es llamado *web*. En las siguientes secciones denotamos $l(D) = dim\mathcal{L}(D) = dim(H^0(M, \mathcal{O}_D)$.

2.1.3. Clases de Chern de Haces lineales

Sea M una variedad compleja de dimensión n. De la sucesión exacta de gavillas

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathcal{O} \to \mathcal{O}^* \to 0$$

tenemos un morfismo cofrontera

$$H^1(M, \mathcal{O}^*) \xrightarrow{\delta} H^2(M, \mathbb{Z}).$$

Para un haz lineal $L \in Pic(M) = H^1(M, \mathcal{O}^*)$ definimos la **primer clase de Chern** de L (o simplemente la clase de Chern), denotada $c_1(L)$, como la imagen $\delta(L) \in H^2(M, \mathbb{Z})$; para un divisor D sobre M definimos la clase de Chern de D como $c_1([D])$.

Sean $\mathcal{D}$ y $\mathcal{D}^*$ las gavillas de funciones diferenciables C^∞ y funciones diferenciables C^∞ no cero respectivamente; las funciones de transición de un haz lineal diferenciable definen un cociclo de Čech

$$g_{ij} \in C^1(M, \mathcal{D}^*)$$

y de manera análoga al caso de haces holomorfos, tenemos que el haz L está determinado, salvo isomorfismos C^∞ por su clase de cohomología $[\{g_{ij}\}] \in H^1(M, \mathcal{D}^*)$. Por otro lado tenemos la sucesion exacta de gavillas

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathcal{D} \xrightarrow{exp} \mathcal{D}^* \to 0$$

que junto con las inclusiones $\mathcal{O} \hookrightarrow \mathcal{D}$ y $\mathcal{O}^* \hookrightarrow \mathcal{D}^*$ dan un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
H^1(M,\mathcal{D}) \arrow[r] & H^1(M,\mathcal{D}^*) \arrow[r, "\delta'"] & H^2(M,\mathbb{Z}) \arrow[d, equal] \\
H^1(M,\mathcal{O}) \arrow[r] \arrow[u] & H^1(M,\mathcal{O}^*) \arrow[r, "\delta"] \arrow[u] & H^2(M,\mathbb{Z})
\end{tikzcd}$$

en el cual los renglones son exactos. Entonces podemos definir la clase de Chern $c_1(L)$ de un haz lineal C^∞ como $\delta'(L)$ y esta definición coincide con la definición dada para haces holomorfos lineales. Hemos probado en 1.3.3 que $H^1(M, \mathcal{D}) = 0$ y $H^2(M, \mathcal{D}) = 0$, ya que $\mathcal{D}$ es fina, por lo que de la sucesión exacta de cohomología

$$... \to H^1(M, \mathcal{D}) \to H^1(M, \mathcal{D}^*) \xrightarrow{\delta'} H^2(M, \mathbb{Z}) \to H^2(M, \mathcal{D}) \to ...$$

se obtiene que δ' es un isomorfismo; de esto podemos concluir que un haz lineal complejo está completamente determinado bajo isomorfismos diferenciables C^∞ por su clase de Chern.

Observación 2.1.4
Veamos algunas propiedades de la clase de Chern:

- *Por la definición tenemos que para cuales quiera L y L' haces lineales sobre M se satisface*
$$c_1(L \otimes L') = c_1(L) + c_1(L')$$
y
$$c_1(L^*) = -c_1(L).$$
- *si $f : M \to N$ es una función holomorfa de variedades complejas entonces el siguiente diagrama conmuta*
$$\begin{tikzcd} H^1(M, \mathcal{O}^*) \arrow[r] & H^2(M, \mathbb{Z}) \\ H^1(N, \mathcal{O}^*) \arrow[r] \arrow[u, "f^*"] & H^2(N, \mathbb{Z}) \arrow[u, "f^*"'] \end{tikzcd}$$
por lo que, si $L \to N$ es cualquier haz lineal, tenemos que
$$c_1(f^*L) = f^*c_1(L).$$

2.2. Teoremas importantes

En esta sección enunciamos tres teoremas muy importantes que utilizaremos en el siguiente capítulo; debido a la complejidad y extensión de las demostraciones algunos teoremas se enuncian sin su prueba, estas demostraciones se pueden ver en [4] y [8].

Si M es una superficie de Riemann conexa y compacta, un divisor D sobre M está dado solo por una suma finita
$$D = \sum n_i p_i$$
donde $p_i \in M$ son puntos de la superficie, con multiplicidad n_i. El **grado** de D se define como
$$deg(D) = \sum n_i.$$

Si D' es un divisor en la misma clase de equivalencia lineal que D, es decir $D' \sim D$, tenemos que existe una función meromorfa $f \in \mathcal{M}^*(M)$ tal que $D = D' + (f)$ entonces
$$deg(D) = deg(D') + deg((f)) = deg(D');$$

ya que debido al resultado (2.1.2) $deg((f)) = \sum ord_q(f) = 0$; por lo anterior el grado de un divisor depende sólo de su clase de equivalencia lineal. Definimos el **grado de un haz lineal** L sobre M como $deg(L) = c_1(L)$. Usando las propiedades de la clase de Chern dadas en 2.1.4 se puede probar que para cualquier divisor sobre una superficie de Riemann compacta, entonces $deg(D) = deg([D])$ (ver pág. 31 [6]).

Consideremos a $\mathbb{P}^n$ con las coordenadas homogéneas $(x_0, ..., x_n)$; si $F = \{f_1, .., f_r\}$ es un conjunto de polinomios homogéneos en $\mathbb{C}[x_0, ..., x_n]$ podemos definir

$$M = \{(p_0, ..., p_n) \in \mathbb{P}^n | f(p_0, ..., p_n) = 0 \ \forall \ f \in F\};$$

cuando el rango de la matriz

$$\left\{ \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right\}_p$$

es máximo en todo punto $p \in M$, por el teorema de la función implícita M es una variedad compleja y por lo tanto es no singular. M es un ejemplo de variedad proyectiva no singular. Si la matriz no es de rango máximo en un punto p, decimos que p es punto singular de M. Una **curva proyectiva** es una variedad proyectiva conexa compacta $M \subset \mathbb{P}^n$ no singular de dimensión uno. Notemos que en particular una curva proyectiva M tiene estructura de superficie de Riemann compacta y definimos el género de M como $g = dim(H^1(M, \mathcal{O}))$.

Usaremos el término *divisor canónico* para denotar a cualquier divisor asociado a una sección holomorfa del haz canónico K_M. Enunciamos el siguiente resultado sin demostración (ver pág. 239 [4]):

Teorema 2.2.1 ***Dualidad de Serre.*** *Sea D un divisor sobre una superficie de Riemann compacta X y sea K un divisor canónico sobre X, entonces*

$$dimH^1(X, \mathcal{O}_D) = dimH^0(M, \mathcal{O}_{K-D}) = l(K - D)$$

Lema 2.2.2 *Sea D un divisor sobre una curva X. Si $dimH^0(M, \mathcal{O}_D) \neq 0$, entonces $deg(D) \geq 0$. Más aún, si $dimH^0(M, \mathcal{O}_D) \neq 0$ y $deg(D) = 0$ debe pasar que $D \sim 0$, es decir $\mathcal{O}_D \cong \mathcal{O}$ como gavillas.*

Demostración. Si $l(D) = dimH^0(M, \mathcal{O}_D) \neq 0$, entonces el sistema lineal completo asociado a $|D|$ es no vacío y D es linealmente equivalente a algún divisor efectivo. Como el grado de un divisor depende sólo de la clase de equivalencia lineal y el grado de un divisor efectivo es siempre no negativo, entonces $deg(D) \geq 0$. Si $deg(D) = 0$ entonces D es linealmente equivalente a un divisor efectivo de grado 0, es decir, al divisor cero. □

Observación 2.2.3

Sea X una superficie de Riemann compacta.

1. *Si $p \in X$ es un punto en X, definimos $k(p)$ la gavilla* rascacielos *en p como:*

$$k(p)(U) = 0, \ si \ p \notin U$$

ó

$$k(p)(U) = \mathbb{C}, \ si \ p \in U$$

donde las restricciones son las obvias; entonces $H^0(X, k(p)) = k(p)(X) = \mathbb{C}$. Por otro lado si tomamos un elemento en $[\sigma] \in H^1(X, k(p))$ representado por el cociclo

$\sigma \in Z^1(U, k(p))$ para alguna cubierta U de X, la cubierta U tiene un refinamiento $V = \{V_\beta\}$ tal que el punto p está contenido en un único abierto V_α, entonces todas las secciones en las intersecciones $V_\beta \cap V_\gamma$ son cero, es decir $C^1(V, k(P)) = 0$ por lo que $Z^1(V, k(P)) = 0$, luego $[\sigma] = 0$; esto prueba que $H^1(X, k(p)) = 0$.

2. *Sea D es un divisor sobre X y sea $p \in X$ y denotamos también por p al divisor que toma el valor 1 en el punto p y cero fuera de él. Entonces $D \leq D + p$ por lo que tenemos una inclusión natural en las gavillas $\mathcal{O}_D \hookrightarrow \mathcal{O}_{D+p}$; sea (V, z) una carta para X centrada en p, definimos un morfismo de gavillas*

$$\beta : \mathcal{O}_{D+p} \to k(p)$$

de manera siguiente: supongamos que $U \subset X$ es un abierto, si $p \notin U$ entonces $\beta(U) : \mathcal{O}_{D+p}(U) \to k(p)(U)$ es el homomorfismo cero; si $p \in U$ y sea $f \in \mathcal{O}_{D+p}(U)$ entonces f admite una expansión en series de Laurent alrededor de p con respecto de la carta z, es decir

$$f = \sum_{n=-r-1}^{\infty} c_n z^n$$

donde r es el coeficiente del punto p en el divisor D, definamos en este caso $\beta(U)(f) := c_{-r-1} \in \mathbb{C} = k(p)(U)$; β es un morfismo sobreyectivo de gavillas; y si $f \in \mathcal{O}_D(U)$ para algún abierto $U \subset X$ que contiene a p:

caso 1) *si $r < 0$ entonces tenemos que p es un cero de f de orden al menos $-r$, por lo que en su expansión en serie de Laurent en la carta (V, z) el coeficiente c_{-r-1} es cero, es decir $\beta(U)(f) = 0$*

caso 2) *Si $r > 0$ entonces tenemos que p es un polo de f de orden a lo más r por lo que el coeficiente c_{-r-1} en su expansión de serie de Laurent en la carta (V, z) es cero, es decir $\beta(U)(f) = 0$*

caso 3) *Si $r = 0$ (es decir si p no aparece en el divisor D) luego p no es polo de f por lo que coeficiente c_{-1} en su expansión de serie de Laurent en la carta (V, z) es cero, es decir $\beta(U)(f) = 0$*

esto prueba que la sucesión de gavillas

$$0 \to \mathcal{O}_D \to \mathcal{O}_{D+p} \to k(P) \to 0$$

es exacta. Tomemos la sucesión exacta inducida en los grupos de cohomología

$$\begin{aligned} 0 \to H^0(X, \mathcal{O}_D) \to H^0(X, \mathcal{O}_{D+p}) \to H^0(X, k(p)) \\ \to H^1(X, \mathcal{O}_D) \to H^1(X, \mathcal{O}_{D+p}) \to H^1(X, k(p)) \to ... \end{aligned}$$

entonces tenemos que

$$\begin{aligned} 0 \to H^0(X, \mathcal{O}_D) \to H^0(X, \mathcal{O}_{D+p}) \xrightarrow{\mu} \mathbb{C} \\ \to H^1(X, \mathcal{O}_D) \to H^1(X, \mathcal{O}_{D+p}) \to 0 \end{aligned}$$

es exacta.

TEOREMA 2.2.4 ***Riemann-Roch.*** *Sea D un divisor sobre una curva proyectiva X de género g. Entonces*

$$l(D) - l(K - D) = deg(D) + 1 - g$$

Demostración. El divisor $K - D$ se corresponde con la gavilla $\mathcal{O}_{K-D}$, podemos aplicar dualidad de Serre para concluir $l(K - D) = dimH^1(X, \mathcal{O}_D)$. Consideremos el caso $D = 0$, entonces en este caso $deg(D) = 0$, además como $H^0(X, \mathcal{O}_D)$ contiene a las funciones constantes, tenemos que $dimH^0(X, \mathcal{O}_D) \geq 1$; entonces por el lema anterior $\mathcal{O}_D = \mathcal{O}$ y en este caso la fórmula

$$dimH^0(X, \mathcal{O}) - dimH^1(X, \mathcal{O}) = 0 + 1 - g$$

se cumple. Ahora sea D cualquier divisor y p cualquier punto en la variedad; demostraremos que la fórmula es cierta para D si y sólo si es cierta para $D' = D + p$ (como cualquier divisor puede obtenerse en un número finito de pasos a partir del divisor cero, sumando o restando puntos, esto terminará la prueba); supongamos que el resultado se cumple para alguno de los divisores D ó D', entonces la sucesión exacta dada en 2.2.3 puede partirse en dos sucesiones exactas cortas de manera siguiente: tomemos los espacios vectoriales $V := Im(\mu)$ y $W := \mathbb{C}/V$, entonces las sucesiones

$$0 \to H^0(X, \mathcal{O}_D) \to H^0(X, \mathcal{O}_{D'}) \to V \to 0$$

$$0 \to W \to H^1(X, \mathcal{O}_D) \to H^1(X, \mathcal{O}_{D'}) \to 0$$

son exactas, además debido a la construcción de V y W tenemos que $dimV + dimW = 1 = deg(D') - deg(D)$, por lo que todos los espacios vectoriales en las sucesiones anteriores son de dimensión finita y podemos concluir que

$$dimH^0(X, \mathcal{O}_{D'}) = dimH^0(X, \mathcal{O}_D) + dimV$$

$$dimH^1(X, \mathcal{O}_D) = H^1(X, \mathcal{O}_{D'}) + dimW$$

sumando ambas ecuaciones tenemos que

$$\begin{aligned} dimH^0(X, \mathcal{O}_{D'}) + dimH^1(X, \mathcal{O}_D) = \\ dimH^0(X, \mathcal{O}_D) + dimH^1(X, \mathcal{O}_{D'}) + dimW + dimV \end{aligned}$$

y entonces

$$\begin{aligned} dimH^0(X, \mathcal{O}_{D'}) - dimH^1(X, \mathcal{O}_{D'}) - deg(D') = \\ dimH^0(X, \mathcal{O}_D) - dimH^1(X, \mathcal{O}_D) - deg(D) \end{aligned}$$

por lo cual la fórmula de Riemann-Roch se cumple para D si y sólo si se cumple para D'. □

A continuación describimos como se pueden ver a las superficies de Riemann compactas como curvas proyectivas: Sea $L \to X$ un haz lineal holomorfo sobre una superficie de Riemann compacta X con género g y sea $N = dimH^0(L) - 1$ y Sea $s_0, ...s_N$ una base de $H^0(X, \mathcal{O}(L))$, definimos la función holomorfa

$$\begin{aligned} \phi_L : X &\to \mathbb{A}^{N+1} \\ x &\mapsto (s_0(x), ..., s_N(x)) \end{aligned}$$

Decimos que un haz lineal $L \to X$ tiene un *punto base* $x \in X$ si para alguna base $\{s_i\}$ de $H^0(X, \mathcal{O}(L))$ se cumple que $s_0(x) = s_1(x) = ... = s_N(x) = 0$. Decimos que un haz lineal es *libre de puntos base* si no tiene puntos base. Entonces cuando tenemos un haz lineal $L \to X$ libre de puntos base, la función ϕ_L baja al proyectivo $\mathbb{P}^N$, es decir $\phi_L : X \to \mathbb{P}^N$. En este caso nos interesa saber cuando esta función es un encaje de la variedad X en el espacio proyectivo.

Decimos que un haz lineal holomorfo $L \to X$ es **amplio** si para alguna $n \in \mathbb{N}$ la n-ésima potencia tensorial $L^{\otimes n}$ de L encaja a X en algún espacio proyectivo, mediante $\phi_{L^{\otimes n}}$. Un haz $L \to X$ es **muy amplio** si L encaja a X en un espacio proyectivo mediante ϕ_L. Enunciamos el siguientes resultado sin su demostración (ver [8]).

TEOREMA 2.2.5 *Si $deg(L) > 2g$, entonces ϕ_L es un encaje de X en $\mathbb{P}^N$*

El teorema anterior nos dice que cuando $deg(L) > 2g$ el haz L es muy amplio; entonces si $deg(L) > 0$ como $deg(L^{\otimes n}) = ndeg(L)$, tenemos que L es amplio; conversamente si L es amplio, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que si $L' = L^{\otimes n}$, $\phi_{L'}$ es un encaje, por lo que existe al menos una sección holomorfa no cero $s' \in \mathcal{O}(L')$, entonces (por lo visto anteriormente) L' debe ser el haz lineal asociado a algún divisor efectivo D, es decir $L' = [D]$ con $D \geq 0$; más aún $D \neq 0$, ya que si $D = 0$ entonces L es un haz trivial y no puede definir un encaje de X; entonces $mdeg(L) = deg(L') = degD > 0$, esto prueba que:

PROPOSICIÓN 2.2.6 *Un haz lineal holomorfo es amplio si y sólo si su grado es positivo.*

Más aún si X es una superficie de Riemann compacta siempre podemos encontrarnos un haz lineal sobre X que lo encaja en un proyectivo mediante ϕ_L y debido al teorema de Chow (ver [3]) resulta ser que la imagen de ese encaje es una curva proyectiva (no singular). Por lo que toda superficie de Riemann compacta es una curva y viceversa (debido a la definición de curva proyectiva).

Capítulo 3

La aplicación de Petri

3.1. Las variedades de sistemas lineales sobre una curva

Sea C una curva algebraica proyectiva y denotemos como C_d al conjunto de divisores efectivos de grado d sobre la curva C; sea $X = C^d$ la variedad resultante de hacer el producto de C consigo misma d veces, notemos que el grupo simétrico S_d, actúa en X mediante permutaciones y se puede probar que el espacio de órbitas X/S_d es una variedad (ver [3]), podemos identificar naturalmente a nuestro conjunto C_d con la variedad X/S_d asociándole a cada divisor $D = \sum_{i=1}^{d} a_i p_i$ la órbita del punto $(p_1, ..., p_d) \in X$, por lo que C_d es una variedad compleja de dimensión d. Definimos el subconjunto $C_d^r \subset C_d$ como

$$C_d^r := \{D \in C_d | dim(|D|) \geq r\},$$

es decir, es el conjunto de divisores efectivos sobre C que tienen grado d tales que su sistema lineal (completo) asociado tiene dimensión mayor ó igual a r; este conjunto es una subvariedad de C_d (ver [1]).

Por otro lado, en la sección anterior se demostró que el grado de un divisor es un invariante de su clase de equivalencia lineal, por lo que tiene sentido hablar del grado de un sistema lineal completo; si $dim(\mathcal{L}(D)) = r + 1$ luego $dim|D| = r$ y decimos que la proyectivización $\mathbb{P}(\mathcal{L}(D))$ es un sistema lineal completo de dimensión r y grado d, a este tipo de sistemas lineales los denotamos g_d^r; definimos

$$G_d^r := \{g_d^r\text{'s sobre } C\},$$

el conjunto que nos parametriza a los sistemas lineales completos de dimensión r y grado d de una curva. Se puede probar también que G_d^r es variedad (ver [1]).

Puede dotarse al conjunto $Pic(C)$ con una estructura de variedad (ver [1]), denotemos como $Pic^d(C)$ a la subvariedad de $Pic(C)$ que parametriza al conjunto de haces lineales sobre C que tienen grado d; recordemos que si s es cualquier sección meromorfa de L y $D = (s)$ entonces $L = [D]$, por lo que tiene sentido escribir como $|L|$ para denotar al sistema lineal completo asociado al divisor D, usando esta notación definimos el subconjunto $W_d^r(C) \subset Pic^d(C)$ como el conjunto de haces lineales sobre C de grado d tales que su sistema lineal completo (asociado a D) satisface $dim|L| \geq r$, es decir

$$W_d^r(C) := \{L \in Pic^d(C) |\ deg(L) = d \ \ y \ \ dim|L| \geq r\}$$

se puede dotar a W_d^r con una estructura de subvariedad de $Pic^d(C)$; notemos que W_d^r es exactamente el subconjunto que consiste de haces lineales con al menos $r + 1$ secciones y claramente el morfismo $[\ \ ] : Div(C) \to Pic(C)$ al restringirlo al subconjunto $C_d^r \subset Div(C)$, tiene como imagen exactamente a W_d^r.

Como hemos visto en la sección anterior, podemos referirnos indistintamente a superficies de Riemann compactas de género g ó a curvas proyectivas (no singulares) de género g; definimos el espacio:

$\mathcal{M}_g :=$ {Clases de isomorfismo (analítico) de superficies de Riemann compactas de género g}

o bien, $\mathcal{M}_g =$ {Clases de isomorfismo (algebraico) de curvas proyectivas de género g}; al espacio $\mathcal{M}_g$ se le llama *Espacio Moduli de curvas de género* g y se puede probar que tiene estructura de variedad compleja (ver [4]). Si $C \in \mathcal{M}_g$, decimos que C es una **curva general** si no está contenida en alguna unión numerable de cerrados propios de $\mathcal{M}_g$, es decir si existe una sucesión $\{C_i\}$ de subvariedades cerradas propias de $\mathcal{M}_g$ tales que

$$C \in M_g - \{\cup C_i\};$$

decimos que una curva es **especial** si no es general.

3.2. La aplicación de Petri

Sea X una curva proyectiva de género g y sea L un haz lineal sobre X, con grado $deg(L) = d$, si s es una sección meromorfa de L con $(s) = D$ y denotemos la dimensión de $\mathcal{L}(D)$ como $r + 1$, es decir $dim|D| = r$; si K es un divisor canónico, definimos la función multiplicación de secciones:

$$\psi : H^0(C, \mathcal{O}_D) \times H^0(C, \mathcal{O}_{K-D}) \to H^0(C, \mathcal{O}_K)$$
$$(s, t) \mapsto st$$

esta función es bilineal, por lo que baja al producto tensorial, es decir existe una única función μ_L que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
H^0(C,\mathcal{O}_D) \times H^0(C,\mathcal{O}_{K-D}) \arrow[rr, "\pi"] \arrow[dr, "\psi"'] & & H^0(C,\mathcal{O}_D) \otimes H^0(C,\mathcal{O}_{K-D}) \arrow[dl, "\mu_L"] \\
& H^0(C,\mathcal{O}_K)) &
\end{tikzcd}$$

donde π es la proyección al producto tensorial, a esta función μ_L se le llama aplicación de Petri para el haz lineal L (sobre la curva X).

Usando la notación anterior $dimH^0(C, \mathcal{O}_D) = l(D) = r + 1$ y $dimH^0(C, \mathcal{O}_{K-D}) = l(K - D)$; por otro lado por el teorema de Riemann-Roch tenemos $l(K - D) = l(D) - deg(D) - 1 + g = r - d + g$; de nuevo usando dualidad de Serre y Riemann-Roch tenemos $g = dimH^1(C, \mathcal{O}) = dimH^1(X, \mathcal{O}_0) = dimH^0(C, \mathcal{O}_K)$, esto prueba que μ tiene kernel no trivial cuando $g - (r + 1)(g - d + r) < 0$. Definimos el **número de Brill-Noether** como

$$\rho(g, r, d) = g - (r + 1)(g - d + r);$$

luego cuando $\rho(g, r, d) < 0$, μ_L no es inyectiva.

La manera de darle estructura de subvariedad a $C_d^r \subset C_d$ tiene importantes implicaciones que nos relaciona al número de Brill-Noether $\rho(g, r, d)$ con las variedades C_d^r y W_d^r (ver [1]); para empezar, el espacio vectorial $H^0(C, \mathcal{O}_K) = H^0(C, K_C)$ se identifica con el dual del espacio tangente de la variedad $Pic(C)$; se puede probar que:

PROPOSICIÓN 3.2.1 *Si C es curva general y $\rho < 0$ entonces $G^r_d = \emptyset$ y $W^r_d = \emptyset$ Si $\rho \geq 0$ entonces $G^r_d(C) \neq \emptyset$ y $W^r_d(C) \neq \emptyset$ para toda curva C.*

De hecho existe un isomorfismo de espacios vectoriales entre el tangente a la variedad C_d en el punto D (es decir, $T_D(C_d)$) con $\mathcal{L}(D)$; también tenemos un isomorfismo entre el espacio tangente a la variedad W^r_d en el punto L y el espacio ortogonal a la imagen de la aplicación de Petri y si $r \geq d - g$ entonces toda componente irreducible de W^r_d tiene dimensión mayor o igual que $\rho(g, r, d)$, por lo que el número de Brill-Noether nos da la "dimensión esperada" de la variedad W^r_d y cuando la aplicación de Petri μ_L es inyectiva tenemos que la variedad W^r_d es no singular en el punto L. Del mismo modo se puede probar también que si μ_L es inyectiva entonces G^r_d es no singular en el punto L.

TEOREMA 3.2.2 *(Gieseker-Petri) Si C es una curva general, entonces la aplicación de Petri es inyectiva para cualquier haz lineal sobre C.*

Deseamos estudiar cuando la aplicación de Petri no es inyectiva y el haz L es libre de puntos base, más aún debido a un teorema de Clifford (ver [1]) basta estudiar el caso en el que el grado varía en el rango $2r \leq d \leq g - 1$.

3.3. Un ejemplo en género 4

En esta sección veremos como se relaciona la inyectividad de la aplicación de Petri con la geometría de la curva. En primer lugar debemos tener en cuenta el *Base point Free pencil Trick*, este resultado afirma que si L es un haz lineal de grado d sobre C tal que $dim H^0(C, L) \geq 2$ y $|L|$ es libre de puntos base, entonces para todo subespacio de $V \subseteq H^0(C, L)$ de dimensión 2, es decir para una g^1_d, el kernel de la aplicación de Petri

$$\mu_L : V \otimes H^0(C, K_C \otimes L^{-1}) \to H^0(C, K_C)$$

es isomorfo a $H^0(C, K_C \otimes L^{-2})$, es decir $\ker \mu_L \simeq H^0(C, K_C \otimes L^{-2})$. Este resultado se puede expresar también en términos de divisores como: si D es un divisor de grado d sobre C con $dim H^0(C, \mathcal{O}_D) \geq 2$ y $|D|$ es libre de puntos base, entonces para todo subespacio $V \subset H^0(C, \mathcal{O}_D)$ de dimensión 2, el kernel de la aplicación de Petri satisface

$$\ker \mu_{[D]} \simeq H^0(C, K_C \otimes)([D])^{-2}.$$

DEFINICIÓN 3.3.1 *Una curva se dice hiperelíptica si admite un haz lineal de grado 2 con al menos 2 secciones; es decir, una curva es hiperelíptica si admite una g^1_2.*

Se puede verificar que toda curva hiperelíptica de género g admite una $|L| = g^1_2$ libre de puntos base tal que $dim H^0(C, K_C \otimes L^{-2}) \neq 0$, es decir, toda curva hiperelíptica admite un haz lineal L para el cual la aplicación de Petri μ_L no es inyectiva.

Para $g = 2$ sólo existen curvas hiperelípticas, y si $g = 3$ sólo las curvas hiperelípticas no cumplen la inyectividad de la aplicación de Petri (Teorema de Gieseker-Petri).

Ahora consideremos C una curva proyectiva de género 4, entonces deseamos estudiar los casos en que $2r \leq d \leq 3$, por lo que podemos concluir que $r = 1$ y tenemos los casos:

d=2 Si C es hiperelíptica (es decir si tiene un sistema lineal g^1_2), entonces $\rho(4, 1, 2) = 4 - 2(4 - 2 + 1) = -2 < 0$ por lo que μ no es inyectiva; por lo que una curva hiperelíptica de género 4 no satisface la inyectividad de la aplicación de Petri.

d=3 Si C no es hiperelíptica, tiene un sistema lineal g_3^1, entonces $\rho(4,1,3) = 4-2(4-3+1) = 0$ lo que no nos dice nada al respecto de la inyectividad de μ

El primer ejemplo interesante es al considerar una curva no hiperelíptica C de género 4. Para nuestros propósitos no perdemos generalidad al considerar una $|L| = g_3^1$ completa y libre de puntos base sobre C. Por el *Base point Free pencil Trick* se tiene que

$$\ker\mu_L \simeq H^0(C, K_C \otimes L^{-2}),$$

por lo tanto queremos estudiar cuando dicho kernel es no vacío, es decir, cuando $H^0(C, K_C \otimes L^{-2}) \neq 0$; utilizaremos la geometría de la curva canónica para estudiar el kernel μ_L, en este caso se sabe que por medio del encaje canónico

$$\phi_{|K_C|} : C \to \mathbb{P}^3,$$

la curva canónica, es decir la imagen de C es no degenerada (no está contenida en ningún hiperplano $H \simeq \mathbb{P}^2 \subset \mathbb{P}^3$) y está encajada en $\mathbb{P}^3$ como una curva de grado deg $K_C = 2g-2 = 6$ y dicha curva es intersección completa, es decir, el ideal de C, $I(C)$ en $\mathbb{P}^3$ está generado por dos polinomios homogeneos irreducibles en 4 variables. Además se tiene que K_C es el haz de hiperplano en $\mathbb{P}^3$ restringidos a C, es decir

$$K_C \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)|_C;$$

como la curva es de grado 6, tenemos dos opciones para los grados de dichos polinomios. Si los polinomios tienen grados 1 y 6, entonces la curva C está contenida en el hiperplano determinado por los ceros del polinomio lineal, lo cual contradice el hecho que C es no degenerada; entonces se deduce que los polinomios son de grado 2 y 3, es decir $C = Q \cap G$, donde Q, G son hipersuperficies, Q es una cuádrica y G es una cúbica en $\mathbb{P}^3$. Aquí debemos distinguir dos casos:

i) Cuando la cuádrica es no singular (rango 4) podemos identificar a Q con la imagen de Segre $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \hookrightarrow \mathbb{P}^3$ dada por $Q = Z(xy - zw)$. Esta cuádrica admite dos familias de líneas $\{L_t\}, \{M_s\}$, que son las imágenes de las líneas $\mathbb{P}^1 \times \{t\}$ y $\{s\} \times \mathbb{P}^1$ respectivamente, por lo que las intersecciones son

$$L_t \cap M_s = \text{un solo punto}$$

y

$$L_t \cap L_v = \emptyset, M_r \cap M_s = \emptyset,$$

para todo t, s (ver [4]).Notemos que como las líneas son de dimensión 1 en $\mathbb{P}^3$ y la cúbica es de dimensión 2, al intersectar cada línea con la cúbica tenemos 3 puntos, al restringir esta intersección a la curva, obtenemos divisores de grado 3 , esto nos permite ver que cada familia de líneas $\{L_t\}, \{M_s\}$ induce dos g_3^1 distintas y libres de puntos base sobre C y éstas son todas, es decir la variedad $W_3^1(C)$ consiste de dos puntos, digamos L_1, L_2 y de las propiedades antes mencionadas de las líneas y del teorema de Riemann-Roch se tiene en este caso que K_C no es isomorfo a $L_j^2, j = 1, 2$, es decir $dimH^0(C, \otimes K_C \otimes L^{-2}) = 0$, es decir, $\ker\mu_{L_j}$ es inyectivo para estos haces lineales.

ii) Cuando la cuádrica Q es singular, entonces tiene rango ≤ 3, en este caso Q se llama cono cuádrico y sólo tiene una familia de líneas (ver [4]). Dicha familia induce sólo una g_3^1 sobre C libre de puntos base y es la única, es decir, en este caso $W_3^1(C)$ consta de un punto L' que satisface $K_C = (L')^2$ (Theta característica), es decir, $dimH^0(C, K_C \otimes (L')^{-2}) = 1$, por lo tanto $\mu_{L'}$ no es inyectiva.

De este modo vemos que tenemos dos tipos de curvas no hiperelípticas de género 4 y la geometría de la curva canónica nos hace ver que en el primer caso se satisface la inyectividad de la aplicación de Petri, mientras que en el segundo caso obtenemos la no inyectividad de la aplicación de Petri. Podemos decir entonces que *la curva general no hiperelíptica de género 4* es intersección completa en $\mathbb{P}^3$ de una cuádrica no singular con una cúbica.

Actualmente el estudio de curvas especiales mediante la aplicación de Petri es muy importante en el estudio del espacio moduli M_g y sus divisores, así como en el estudio de familias de curvas dentro de superficies algebraicas. Éste es un tema actual cuyo estudio sin duda es interesante y se tiene una gama muy amplia de problemas abiertos en esta dirección.

Bibliografía

[1] E. Arbarello, M. Cornalba, P. Griffiths, J. Harris: *Geometry of Algebraic Curves.* Vol. 1 SPRINGER-VERLAG (1985).

[2] O. Forster: *Lectures on Riemann Surfaces.* SPRINGER (1981).

[3] P. Griffiths, J. Harris: *Principles of Algebraic Geometry.* JOHN WILEY(1994).

[4] R. Hartshorne: *Algebraic Geometry.* SPRINGER (1977)

[5] K. Kodaira, J. Morrow: *Complex Manifolds.* HOLT (1971).

[6] Le Potier: *Lectures on Vector Bundles.*CAMBRIDGE (1997)

[7] R. Miranda: *Algebraic Curves and Riemann Surfaces.*AMS.(1995)

[8] R. Narashiman: *Compact Riemann Surfaces.* VERLAG (1992).