



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE
MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

NÚCLEO POR TRAYECTORIAS
DIRIGIDAS MONOCROMÁTICAS
EN LA CORONA GENERALIZADA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
MATEMÁTICO

PRESENTA:
JESÚS EMANUEL MOO VERGARA

DIRECTORA DE TESIS:
LAURA PASTRANA RAMÍREZ



2014



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno

Moo

Vergara

Jesús Emanuel

53030891

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Matemáticas

305197911

2. Datos del tutor

Mat.

Laura

Pastrana

Ramírez

3. Datos del sinodal 1

Dra.

Hortensia

Galeana

Sánchez

4. Datos del sinodal 2

Dra.

María del Rocío

Sánchez

López

5. Datos del sinodal 3

Dra.

Rita Esther

Zuazua

Vega

6. Datos del sinodal 4

Mat.

Gasde Agosto

Hunedy

López

7. Datos del trabajo escrito.

Núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas en la Corona Generalizada.

p.

2014

*A mis padres y por todos aquellos que luchan, sueñan
y transmiten su luz a los demás.*

Agradecimientos

Primeramente agradezco a la persona con quien trabaje todo este tiempo y la cual hizo posible la realización de este trabajo, maestra Laura Pastrana siempre te estaré agradecido por aceptarme como tesista, tenerme paciencia, aconsejarme en diversos temas y por tantas otras cosas, en verdad mil gracias. Igualmente a mis sinodales a los cuales agradezco infinitamente por otorgarme parte de su tiempo en leer y examinar mi trabajo.

Mi familia por estar siempre cuando se les necesita, pero en especial a mi mamá y a mi papá quienes me formaron, educaron y me han querido sin ninguna condición, los llevo siempre en mi corazón. De igual manera a mi hermano, mi compañero y amigo de toda la vida que siempre ha estado ahí para apoyarme y alegrarme cuando se necesita.

Sería injusto olvidarme de los que me acompañaron durante los cuatro años de la carrera, me ayudaron e hicieron mucho más ameno la estancia en Ciencias con sus distintivas personalidades. Gracias Gerardo, Jarquin, Lucero por estar a mi lado. De igual manera a Fer que desde el primer día hasta ahora me brinda su amistad y que de no ser por él no hubiera conocido a los tres anteriores.

A las personas con las que tuve el gusto de trabajar en la Facultad de Psicología, por mencionar algunas, a la Dr. Corina, Amy, Pam, Lau, Zara muchas gracias por su amistad. A Carolina, gracias por brindarme tu amistad desde que nos conocimos en el CELE (Eres la primera en ver mi tesis y de las últimas en verla por lo cual te convierte en mi madrina). Con los que he corrido, entrenado y convivido en el grupo de AFG pero en especial a Luz Ma por ser una gran maestra, me da gusto el haberte conocido y que seas parte de mi vida. A los que su presencia física ya no está pero su espíritu, enseñanzas y sobre todo cariño las llevo presentes.

Este conjunto es finito y no ordenado, pero me es difícil de mencionar a cada uno de sus elementos. Todos los que han pasado por mi vida, profesores, compañeros y amigos, por mucho o por poco han hecho lo que soy pero no encuentro propiedad para describirlos. Sin embargo lo más seguro es que si estás leyendo estas palabras, esta tesis, pertenezcas a este conjunto.

Índice general

Introducción	XI
1. Conceptos Básicos	1
2. Tipos de Corona	13
2.1. Historia de la corona.	13
2.2. Tipos de corona.	16
2.3. Diferencia entre operaciones.	21
2.4. Definición de la Corona Generalizada	37
3. Núcleos por trayectorias dirigidas monocromáticas (tdm) en la Corona Generalizada.	41
3.1. Independencia por tdm.	41
3.2. Absorbencia por tdm.	45
3.3. Núcleo por tdm en la corona.	48
3.4. Núcleo perfecta por tdm.	50
3.5. Número total de conjuntos:	51
3.5.1. Independientes por trayectorias dirigidas monocromáticas.	52
3.5.2. Absorbentes por trayectorias dirigidas monocromáticas.	53
3.5.3. Núcleos por trayectorias dirigidas monocromáticas.	55
3.6. Diferencia en el número de núcleos.	57
4. Seminúcleos y Cuasinúcleos por trayectorias dirigidas monocromáticas.	63
4.1. Seminúcleos por tdm.	63
4.2. Cuasinúcleos por tdm.	71
Conclusiones	85
Bibliografía	87

Introducción

Hacer matemáticas se reduce a dos palabras: imaginar y crear. Éstas han sido fuente de la existencia de las diversas ramas de esta disciplina. Ejemplo de lo anterior, es el problema de los puentes de Königsberg, el cual fue resuelto por Leonhard Euler [6] y dio origen a lo que él llamo la geometría de la posición, que en la actualidad conocemos como la Topología y la Teoría de las Gráficas.

Con relación a esta última, es de notar la gran diversidad de temas que podemos encontrar, contenidos que inclusive llegan a estar fuera de nuestra imaginación. Uno de ellos, son los núcleos por trayectorias dirigidas monocromáticas.

El concepto de núcleo fue introducido por Von Neumann y Morgenstern [21] en el contexto de Teoría de Juegos y llamado al principio solución de un juego y posteriormente núcleo de una digráfica por C. Berge [3]. El núcleo de una digráfica D fue definido como un subconjunto de vértices N de D tal que entre todo par de vértices de N no existe flecha alguna y para cada $x \in V(D) \setminus N$ existe $y \in N$ tal que hay una flecha de x hacia y en D .

El estudio de núcleos por trayectorias dirigidas monocromáticas se originó con el estudio de Sauer, Sands y Woodrow [17] y posteriormente varios autores trabajaron sobre el tema, en particular Hortensia Galeana Sánchez definió formalmente lo que es un núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas en [8]. El concepto de núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas generaliza la idea de núcleo de una digráfica D al pedir que no existan trayectorias dirigidas monocromáticas entre todo par de vértices del núcleo y que para cualquier vértice de D que no pertenezca al núcleo exista una trayectoria dirigida monocromática de él hacia algún vértice del núcleo.

El tema ha sido de gran interés para la gente del ámbito de Teoría de las Gráficas, puesto que no toda digráfica tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas. De igual manera, la búsqueda de las condiciones para que una digráfica resultante de alguna operación entre digráficas tenga núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas ha generado diversos resultados. Entre éstos podemos encontrar los artículos “*Kernels in edge coloured line digraphs*” de H. Galeana Sánchez y L. Pastrana Ramírez [10], “*Monochromatic paths on edge colored digraphs and state splittings*” de H. Galeana Sánchez y R. Gómez [9], “*On kernels by monochromatic paths in D -join*” de I. Włoch [19] y “*On kernels by monochromatic paths in the corona of digraphs*” de I. Włoch [20].

En este último se nos muestra un nuevo concepto, la definición de corona para digráficas m -coloredas. Los orígenes de ésta, se remontan a la corona para gráficas, cuyo objetivo es la gráfica generada a partir de dos gráficas G_1 y G_2 con n_1 y n_2 vértices respectivamente, tomando una copia de G_1 y n_1 copias de G_2 y haciendo adyacente el i – ésimo vértice de G_1 a todos los vértices de la i – ésima copia de G_2 . Esta operación fue dada por Roberto Frucht y Frank Harary en [7], donde además prueban que su nueva operación era en general isomorfa al producto corona de los grupos G_1 y G_2 .

Luego de la aparición de este concepto, Jerzy Topp en [18] vuelve a usar las ideas de esta operación, pero en vez de trabajar con dos gráficas, él toma una gráfica G_1 y una sucesión de gráficas arbitrarias \mathcal{H} de tal forma que la cantidad de gráficas que contiene \mathcal{H} sea igual a la cantidad de vértices de G_1 , y haciendo adyacente los vértices de $H_i \in \mathcal{H}$ hacia $v_i \in V(G)$. De esta manera, Topp daba una generalización de la definición dada por Frucht y Harary.

Esta definición, fue posteriormente la base para la construcción de la corona para digráficas, dada por I. Włoch en [20], donde opera sobre una digráfica D y una sucesión de digráficas \mathcal{H} . Su objetivo es dar las condiciones suficientes y necesarias para que en dicha digráfica existan núcleos por trayectorias dirigidas monocromáticas.

Sin embargo, los trabajos de Topp y Włoch no son los únicos en haber modificado el concepto de corona, tenemos por ejemplo los artículos “*The spectrum of edge corona of graphs*” de Y. Hou y W. Shiu [14] y “*The spectrum of neighborhood corona of graphs*” de I. Gopalapillat [12]. En éstos se define la corona por aristas y la corona por vecinos, respectivamente para gráficas.

En un principio, el propósito inicial de la tesis era definir para digráficas la corona por flechas y la corona por vecinos, posteriormente buscar las condiciones para que las digráficas resultantes tengan núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas. Sin embargo, nos dimos cuenta que las digráficas resultantes de estas operaciones tenían una misma estructura. Por tal motivo, pudimos construir una operación con la cual obtuvimos digráficas con la misma estructura a la corona para digráficas, la corona por flechas y la corona por vecinos. A esta operación le llamamos la Corona Generalizada.

Teniendo en mente estas ideas, la estructura de este trabajo esta dada de la siguiente manera:

En el primer capítulo mostramos los conceptos básicos usados a lo largo del trabajo. Con éstos el lector podrá tener una mejor comprensión y visualización de los temas a tratar a lo largo del texto.

En el segundo capítulo damos a conocer los distintos tipos de corona para digráficas, los cuales fueron el resultado de analizar los tipos de corona para gráficas. Observaremos las diferencias y similitudes que existen entre ellas y como punto final damos la construcción de la operación que engloba a las anteriores: la Corona Generalizada.

Demostraremos, en el tercer capítulo, las condiciones suficientes y necesarias para que esta última operación pueda tener núcleos por trayectorias dirigidas monocromáticas. Además, como los diferentes tipos de corona para digráficas son un caso especial de la Corona Generalizada, veremos que éstas también cumplen estos resultados.

Finalmente en nuestro último capítulo, trabajaremos con dos propiedades más de los vértices de D : el seminúcleo y el cuasinúcleo, ambas por trayectorias dirigidas monocromática. En éste, damos las condiciones para que nuestra operación pueda poseerlas.

Capítulo 1

Conceptos Básicos

En este capítulo daremos los conceptos básicos de la Teoría de Gráficas, los cuales usaremos en el siguiente trabajo. Con ellos el lector tendrá una mejor comprensión y visualización de los temas a tratar en esta tesis. De igual modo en cada definición se ponen ejemplos para esclarecer cualquier duda que pudiera existir.

Definición 1.1 Una **gráfica** G es una pareja ordenada $(V(G), A(G))$, donde $V(G)$ es un conjunto finito, no vacío, de objetos llamados **vértices** y $A(G)$ es el conjunto de pares no ordenados de elementos distintos de $V(G)$ llamados **aristas**.

De lo anterior y sabiendo que $\{x_i, x_j\} \subseteq V(G)$, diremos que x_i es **adyacente en G** a x_j si $(x_i, x_j) \in A(G)$. Además se dice que (x_i, x_j) **incide en un vértice x** si x es x_i o x_j . El **grado de un vértice x_i** de una gráfica G es el número de aristas que inciden en él y se denota como $\delta(x_i)$.

El siguiente ejemplo nos ayudará a entender el concepto. Sea G una gráfica con conjunto de vértices

$$V(G) = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}\}$$

y conjunto de aristas

$$A(G) = \{(x_1, x_2), (x_1, x_3), (x_1, x_5), (x_2, x_4), (x_2, x_6), (x_3, x_4), (x_3, x_9), (x_4, x_{10}), (x_5, x_6), (x_5, x_7), (x_5, x_{10}), (x_6, x_8), (x_6, x_9), (x_7, x_8), (x_7, x_9), (x_8, x_{10}), (x_9, x_{10})\}$$

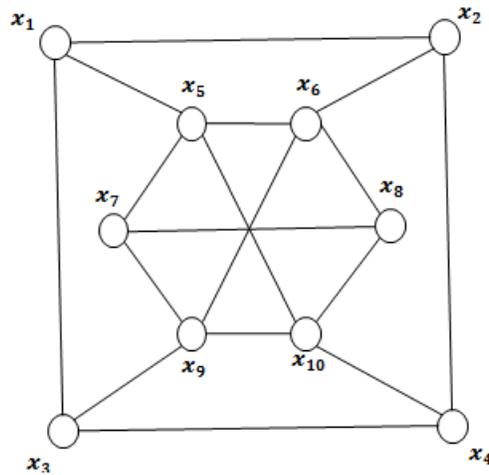


Figura 1.1: Ejemplo de una gráfica.

En la Figura 1.1 se muestra la representación geométrica de dicha gráfica, donde cada círculo representa un vértice y cada línea una arista. De igual forma, para ejemplificar el concepto de grado de un vértice, podemos ver que el grado del vértice x_4 es tres y el grado del vértice x_6 es cuatro.

Diremos que las gráficas G_1 y G_2 son **isomorfas** y lo denotaremos como $G_1 \cong G_2$ si existe una biyección $f : V(G_1) \rightarrow V(G_2)$ tal que $(x_1, x_2) \in A(G_1)$ si y sólo si $(f(x_1), f(x_2)) \in A(G_2)$.

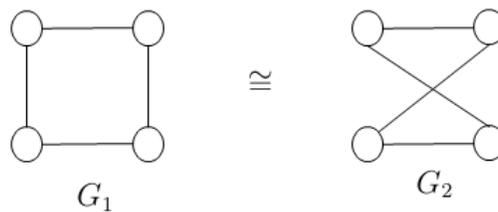


Figura 1.2: Ejemplo de gráficas isomorfas.

Ahora bien, si en la definición de gráfica nosotros pedimos que el conjunto de aristas de G sea un conjunto de pares ordenados de $V(G)$, nosotros obtenemos una nueva definición con la cual se da pie a un nuevo campo de estudio: la Teoría de Digráficas.

Definición 1.2 Una **digráfica** D es una pareja ordenada $(V(D), F(D))$, donde $V(D)$ es un conjunto finito, no vacío, de objetos llamados **vértices** y $F(D)$ es el conjunto de pares ordenados de elementos distintos de $V(D)$, al cual llamamos conjunto de **flechas** o **arcos** de D .

A partir de la definición de digráfica podemos observar que dados $\{x, y\} \subseteq V(D)$ se puede dar el caso en que (x, y) y (y, x) pertenezcan al conjunto de flechas. Por lo cual diremos que $(x, y) \in F(D)$ es **simétrica** si $(y, x) \in F(D)$ y diremos que $(x, y) \in F(D)$ es **asimétrica** si $(y, x) \notin F(D)$. Como última observación es posible el caso en que dos o más flechas en la misma dirección unan al mismo par de vértices. Ésto es conocido como **multiflechas** y a las digráficas que las contienen se les llaman **multidigráficas**.

A continuación presentamos el ejemplo de una digráfica, sea D una digráfica con conjunto de vértices

$$V(D) = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$$

y conjunto de flechas

$$F(D) = \{(x_1, x_2), (x_3, x_2), (x_4, x_2), (x_2, x_5), (x_3, x_1), (x_5, x_1), (x_4, x_5), (x_5, x_3)\}$$

En la Figura 1.3 se muestra la representación geométrica de la digráfica D , definida anteriormente, donde cada círculo representa un vértice (al igual que en la representación geométrica de una gráfica) y cada línea dirigida una flecha.

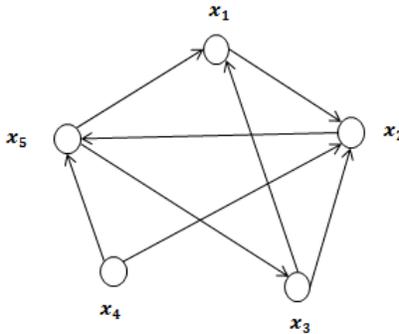


Figura 1.3: Ejemplo de una digráfica.

Definición 1.3 Si $\{x, y\} \subseteq V(D)$ son tales que $a = (x, y) \in F(D)$, entonces decimos que x es **adyacente hacia** y o y es **adyacente desde** x .

A diferencia de una gráfica, en digráficas encontramos tres tipos de grado de un vértice. Éstos son el **grado exterior** o **exgrado de un vértice x** , denotado por $\delta^+(x)$, el cual es el número de flechas que salen de x , el **grado interior** o **ingrado de un vértice x** , denotado por $\delta^-(x)$, siendo éste el número de flechas que entran a x y el **grado de x** , denotado por $\delta(x)$, definido como:

$$\delta(x) = \delta^+(x) + \delta^-(x)$$

En el transcurso de este trabajo también usaremos $\delta^+(D)$, $\delta^-(D)$ y $\delta(D)$ para referirnos al mínimo de todos los exgrados, ingrados y grados de D respectivamente. Para ejemplificar los tres tipos de grado veamos el vértice x_2 de la Figura 1.3, el cual $\delta^+(x_2) = 1$, $\delta^-(x_2) = 3$ y $\delta(x_2) = 4 = \delta^+(x_2) + \delta^-(x_2)$.

Dados $A \subseteq V(D)$ y $B \subseteq V(D)$ diremos que hay una **AB -flecha** si existe $x \in A$ y $y \in B$ tal que $(x, y) \in F(D)$.

Definición 1.4 Sea $S \subseteq V(D)$. Definimos a los **vecinos exteriores** de S como el conjunto:

$$\Gamma^+(S) = \{x \in V(D) \mid \text{existe una } Sx - \text{flecha}\}$$

Si $S = \{x\}$, podemos notar que $|\Gamma^+(x)|$ es igual a $\delta^+(x)$ para toda $x \in V(D)$.

Definición 1.5 Sea $S \subseteq V(D)$. Definimos a los **vecinos interiores** de S como el conjunto:

$$\Gamma^-(S) = \{x \in V(D) \mid \text{existe una } xS - \text{flecha}\}$$

Si $S = \{x\}$, podemos notar que $|\Gamma^-(x)|$ es igual a $\delta^-(x)$ para toda $x \in V(D)$.

Definición 1.6 Sea $S \subseteq V(D)$. Definimos a los **vecinos** de S como el conjunto:

$$\Gamma(S) = \Gamma^+(S) \cup \Gamma^-(S)$$

Si $S = \{x\}$, podemos notar que $|\Gamma(x)|$ es igual a $\delta(x)$ para toda $x \in V(D)$.

El conjunto $S = \{x_1, x_4\}$ de la Figura 1.3 tiene como vecinos exteriores a $\Gamma^+(S) = \{x_2, x_5\}$, como vecinos interiores a $\Gamma^-(S) = \{x_3, x_5\}$ y como vecinos a $\Gamma(S) = \{x_2, x_3, x_5\}$.

Definición 1.7 Diremos que las digráficas D_1 y D_2 son **isomorfas**, y lo denotaremos como $D_1 \cong D_2$, si existe una biyección $f : V(D_1) \rightarrow V(D_2)$ tal que $(x_1, x_2) \in F(D_1)$ si y sólo si $(f(x_1), f(x_2)) \in F(D_2)$.

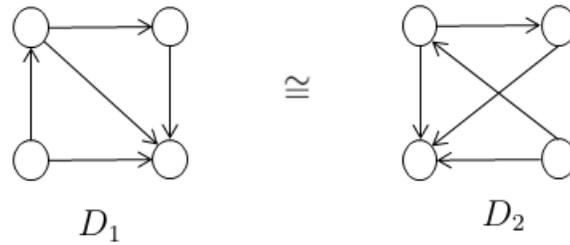


Figura 1.4: Ejemplo de digráficas isomorfas.

Otro concepto que sin duda es muy usado, tanto en gráficas como en digráficas, y es de suma importancia es el de **subdigráfica**. Se dice que una digráfica H es **subdigráfica** de la digráfica D si $V(H) \subseteq V(D)$ y $F(H) \subseteq F(D)$. A partir de lo anterior la **subdigráfica inducida por H** de la digráfica D , denotado por $D[H]$, es la digráfica tal que $V(H) \subseteq V(D)$ y para cualquier par de vértices distintos $\{x, y\} \subseteq V(H)$, $(x, y) \in F(D[H])$ si y sólo si $(x, y) \in F(D)$. Además una digráfica H es una **subdigráfica generadora de D** si $V(H) = V(D)$ y H es subdigráfica de D .

Definición 1.8 Un camino $C = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)$ en una digráfica D es una sucesión finita alternada de vértices y flechas tal que para cada $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ se tiene que

$$(x_i, x_{i+1}) \in F(D) \text{ o } (x_{i+1}, x_i) \in F(D)$$

En este caso decimos que x_0, x_n son los **extremos del camino**. Además su **longitud**, la cual es denotada por $l(C)$, se define como el número n .

Si en C se cumple, además de lo especificado, que $x_i \neq x_j$ donde $i \neq j$, obtenemos lo que se conoce como **trayectoria**, la cual es denotada con la letra T . Por otro lado si nuestro camino cumple que $x_0 = x_n$ tenemos lo que se llama un **camino cerrado**. Si en este último solamente se repiten los vértices inicial y final, y su longitud es al menos dos, recibe el nombre de **ciclo**, el cual se denota con la letra griega γ .

Aprovechando que en una digráfica sus flechas tienen dirección podemos encontrar de igual manera lo siguiente:

Definición 1.9 Un camino dirigido $C = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)$ en una digráfica es un camino tal que para cada $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ se tiene que $(x_i, x_{i+1}) \in F(D)$.

De entre los caminos dirigidos de una digráfica destacamos la trayectoria dirigida, el camino cerrado dirigido y el ciclo dirigido, siendo cada uno de éstos trayectoria, camino cerrado y ciclo respectivamente. Algunos ejemplos que podemos dar, con respecto a la Figura 1.3 son:

- Camino; $C = (x_2, x_3, x_5, x_4, x_2, x_1)$ y $l(C) = 5$
- Trayectoria; $T = (x_5, x_4, x_2, x_3)$ y $l(T) = 3$
- Camino cerrado; $C_1 = (x_2, x_1, x_3, x_2, x_5, x_4, x_2)$ y $l(C_1) = 6$
- Ciclo; $\gamma = (x_1, x_2, x_4, x_5, x_1)$ y $l(\gamma) = 4$
- Camino dirigido; $C_2 = (x_3, x_1, x_2, x_5, x_1)$ y $l(C_2) = 4$
- Trayectoria dirigida; $T_1 = (x_4, x_5, x_3, x_1, x_2)$ y $l(T_1) = 4$
- Camino dirigido cerrado, el cual también es ciclo dirigido;
 $C_3 = (x_5, x_1, x_2, x_5)$ y $l(C_3) = 3$
- Ciclo dirigido; $\gamma_1 = (x_5, x_3, x_2, x_5)$ y $l(\gamma_1) = 3$

Presentamos a continuación los diferentes tipos de digráficas que encontraremos a lo largo del trabajo.

Definición 1.10 Una digráfica D es ***r-regular*** cuando $\delta^+(x) = \delta^-(x) = r$, para todo $x \in V(D)$.

Definición 1.11 Una digráfica D es ***completa*** si para todo par de vértices distintos $\{x, y\} \subseteq V(D)$, se tiene que $(x, y) \in F(D)$ y $(y, x) \in F(D)$.

Definición 1.12 Una digráfica D es ***semicompleta*** si para todo par de vértices distintos $\{x, y\} \subseteq V(D)$, se tiene que $(x, y) \in F(D)$ o $(y, x) \in F(D)$.

En la Figura 1.5 se muestran ejemplos de las definiciones anteriores. La digráfica (b) se trata de una digráfica semicompleta, la digráfica (a) es una digráfica completa y la digráfica (c) es una digráfica 1-regular.

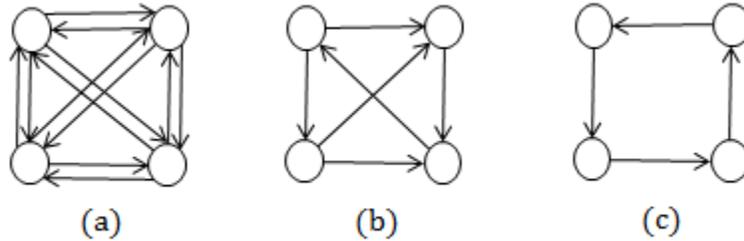


Figura 1.5: Tipos de digráficas.

Las siguientes dos definiciones son la base para poder definir lo que es el *núcleo* de una digráfica. Dicho concepto, llamado así por Berge en [3], fue introducido por Von Neumann y O. Morgenstern en [21] en el contexto de Teoría de Juegos y refiriéndose a él como solución de un juego. Sobre el tema se han hecho varios trabajos, al igual que se han obtenido distintas generalizaciones de dicho concepto, una de ellas es el de núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas de una digráfica m -coloreada por flechas como se podrá ver más adelante.

Definición 1.13 Un conjunto $S \subseteq V(D)$ es **independiente** si se cumple que para todo par de vértices $\{x, y\} \subseteq S$ se tiene que x no es adyacente a y , es decir, $(x, y) \notin F(D)$ y $(y, x) \notin F(D)$.

Definición 1.14 Un conjunto $S \subseteq V(D)$ es **absorbente** si se cumple que para todo $x \in V(D) \setminus S$ existe $y \in S$ tal que $(x, y) \in F(D)$.

Definición 1.15 Un conjunto $N \subseteq V(D)$ es **núcleo** si es independiente y absorbente.

Podemos ver en la Figura 1.6 que el conjunto $S = \{x_2, x_6\}$ de la digráfica (a) no es núcleo pues, aunque éste sea independiente, no existe la x_3S - flecha, por lo que no es absorbente. Sin embargo, podemos observar que el conjunto $N = \{x_1, x_3, x_5\}$ es independiente, ya que sus vértices cumplen con no ser adyacentes entre sí. Al mismo tiempo tenemos que para los vértices de $V(D) \setminus N$ existe una flecha hacia algún vértice de N , es decir, (x_2, x_3) , (x_4, x_5) y (x_6, x_1) pertenecen al conjunto de flechas de la digráfica (a). Por lo cual N cumple ser absorbente y por lo tanto es un núcleo.

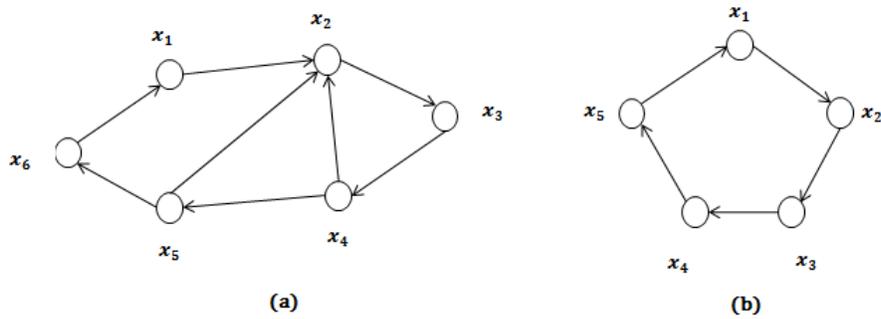


Figura 1.6

Sin embargo, hay que aclarar que no todas las digráficas tienen núcleo y como ejemplo tenemos a la digráfica (b) de la Figura 1.6. Tomemos, sin pérdida de generalidad, a x_1 . Como nuestro conjunto candidato a núcleo debe ser independiente se tiene que x_2 y x_5 quedan excluidos de éste, lo que implica que x_3 debe de estar incluido, ya que es el único vértice que puede absorber a x_2 . Nuevamente por la independencia el vértice x_4 queda fuera del conjunto, sin embargo, x_4 no es adyacente ni a x_1 ni a x_3 , es decir, nuestro conjunto no es absorbente por lo cual no puede ser núcleo.

Definición 1.16 *Se dice que una digráfica D es m -coloreada por flechas si sus flechas están coloreadas con m -colores.*

En la Figura 1.7 se muestran dos ejemplos de digráficas cuyas flechas están coloreadas con tres colores. Cabe señalar que en este trabajo sólo usaremos digráficas m -coloreadas por flechas por lo que cuando mencionemos digráficas m -coloreadas nos referiremos a digráficas m -coloreadas por flechas.

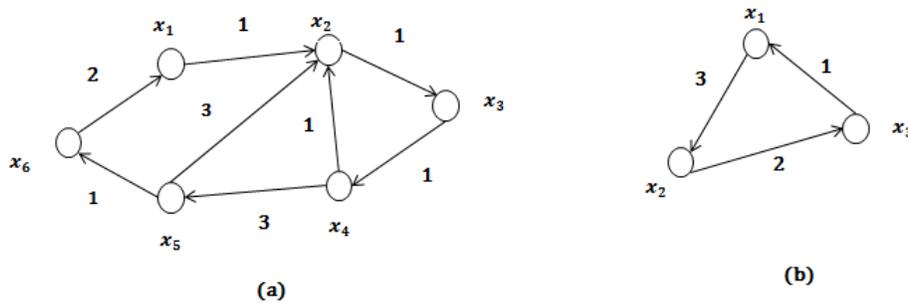


Figura 1.7: Ejemplos de digráficas 3-coloreadas.

Definición 1.17 Una trayectoria dirigida en una digráfica m -coloreada D , es llamada **trayectoria dirigida monocromática** si todas sus flechas tienen asignado el mismo color.

En el transcurso de este trabajo abreviaremos trayectoria(s) dirigida(s) monocromática(s) como **tdm**.

Sean $A \subset V(D)$ y $B \subset V(D)$, si existe una tdm entre algún vértice del conjunto A y algún vértice del conjunto B , lo denotaremos como una $AB - tdm$.

Al colorear las flechas de una digráfica D se obtienen distintas formas de estudiar y visualizar el comportamiento de los colores en la digráfica m -coloreada. Una de ellas nos lo da H. Galeana en [8] donde introduce el concepto de núcleo por tdm para digráficas m -coloreadas, el cual generaliza las ideas que se tenían de núcleo de una digráfica. A continuación enunciamos dos definiciones que nos ayudaran a comprender lo que es un núcleo por tdm.

Definición 1.18 Sea D una digráfica m -coloreada. $I \subseteq V(D)$ es un **conjunto independiente por trayectorias dirigidas monocromáticas** si para todo par de vértices de I no existen tdm entre ellos. Abreviaremos independiente por trayectorias dirigidas monocromáticas como **ITDM**.

Definición 1.19 Sea D una digráfica m -coloreada. $A \subseteq V(D)$ es **absorbente por trayectorias dirigidas monocromáticas** si para cada $x \in V(D) \setminus A$ existe $y \in A$ tal que hay una xy -tdm en D . Abreviaremos absorbente por trayectorias dirigidas monocromáticas como **ATDM**.

Definición 1.20 Sea D una digráfica m -coloreada. $N \subseteq V(D)$ es un **núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas de D** si N es independiente por tdm y absorbente por tdm. Abreviaremos núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas como **NTDM**.

En la Figura 1.7 observemos que entre los elementos del conjunto $N = \{x_2, x_6\}$ de la digráfica (a) existen únicamente las trayectorias dirigidas $(x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ y (x_6, x_1, x_2) no monocromáticas, es decir, N es independiente por tdm. Además para los elemento del conjunto $\{x_1, x_3, x_4, x_5\}$ hay una tdm hacia N , las cuales son $T_1 = (x_1, x_2)$ de color uno, $T_2 = (x_3, x_4, x_2)$ de color uno, $T_3 = (x_4, x_2)$ de color uno y $T_4 = (x_5, x_2)$ de color tres. Por lo cual N cumple con ser absorbente por tdm y por lo tanto es núcleo por tdm.

Aunque el ejemplo anterior tuvo núcleo por tdm, podemos encontrar también digráficas m -coloreadas que no tienen núcleo por tdm. Observemos que la digráfica (b) de la Figura 1.7 es una digráfica semicompleta entonces, sin pérdida de generalidad, tomemos $N = \{x_1\}$. Notemos que x_2 no es adyacente hacia x_1 , más aún no existe una tdm de x_2 hacia x_1 , por lo que N no es absorbente por tdm y por lo tanto no es núcleo por tdm.

Igualmente pueden haber digráficas con más de un núcleo por tdm. Nuevamente encontramos un ejemplo de lo anterior en la digráfica (a) de la Figura 1.7. Los núcleos por tdm de ésta son $N_1 = \{x_3, x_6\}$, $N_2 = \{x_2, x_6\}$ y $N_3 = \{x_4, x_6\}$.

Si comparamos las definiciones de núcleo y núcleo por tdm no es raro pensar en que éstas podrían relacionarse de cierta manera. Lo anterior se ve reflejado en la **cerradura transitiva por colores** de una digráfica m -coloreada, pues ésta preserva toda la información con respecto a todas las tdm que existen entre todo par de vértices y en donde se puede aplicar la teoría de núcleos que se ha desarrollado. La cerradura transitiva por colores $\mathfrak{C}(D)$ de una digráfica D m -coloreada fue dada por Hortensia Galeana en [8] y esta multidigráfica queda definida como sigue:

$$a) V(\mathfrak{C}(D)) = V(D)$$

y

$$b) F(\mathfrak{C}(D)) = \bigcup_{i=1}^n \{(x,y) \text{ con color } i \mid \text{ existe una tdm de color } i \text{ en } D\} \cup F(D)$$

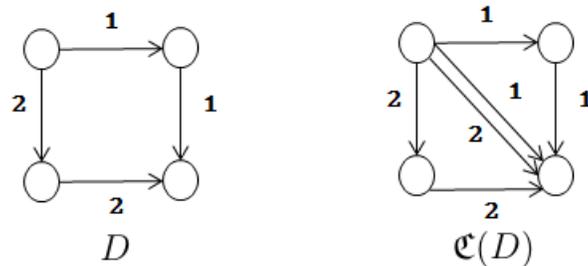


Figura 1.8: Cerradura de una digráfica D .

El siguiente teorema muestra la relación que mencionamos con anterioridad:

Teorema 1.1 *Sea D una digráfica m -coloreada, N es núcleo por tdm de D si y sólo si N es núcleo de $\mathfrak{C}(D)$.*

Demostración.

Demostraremos la suficiencia. Sea D una digráfica m -coloreada y N un núcleo por tdm de D , por definición sabemos que N es independiente por tdm, por lo cual en $\mathfrak{C}(D)$ no existen flechas entre cualquier par de vértices de N , es decir, éste último es independiente en $\mathfrak{C}(D)$. De igual manera por definición sabemos que N es absorbente por tdm, por lo que para cada $x \in V(D) \setminus N$ existe la xN -tdm. Por construcción de $\mathfrak{C}(D)$ existe entonces la xN -flecha para cualquier $x \in V(\mathfrak{C}(D)) \setminus N$. Por lo tanto N es núcleo en $\mathfrak{C}(D)$.

Ahora para la necesidad, sea N un núcleo de $\mathfrak{C}(D)$, por definición sabemos que N es independiente y por definición de la cerradura transitiva por colores sabemos que en D para cualquier par de vértices de N no existen tdm, por lo cual es independiente por tdm. De la misma manera como N es absorbente en $\mathfrak{C}(D)$, es decir, para cualquier $x \in V(\mathfrak{C}(D)) \setminus N$ existe la xN -flecha, entonces en D existe la xN -flecha o la xN -tdm, por lo que N es absorbente por tdm. Por lo tanto N es núcleo por tdm. ■

Del teorema anterior podemos decir que si D es una digráfica m -coloreada donde cada una de sus flechas tiene distinto color, entonces N es un núcleo por tdm de D si y sólo si N es un núcleo de D . Ésto debido a que en este caso $\mathfrak{C}(D) = D$.

Capítulo 2

Tipos de Corona

En el presente capítulo daremos a conocer el origen tanto en gráficas como en digráficas de la operación conocida como corona. Construiremos para digráficas, a partir de las variaciones que se han tenido de la corona en gráficas, la corona por flechas, por vecinos, por vecinos exteriores y por vecinos interiores. Al final damos el concepto de Corona Generalizada la cual engloba las coronas anteriores.

2.1. Historia de la corona.

La corona

El concepto de corona para gráficas fue dado por Roberto Frucht y Frank Harary en [7] (1970). Al principio fue llamada composición, pero más adelante sería conocida por el nombre de corona. Este último nombre fue propuesto por Roberto Frucht, de lo cual hace mención Frank Harary en [13], y una de las razones es porque la gráfica resultante a menudo se ve como una corona.

La corona $G_1 \circ G_2$ de dos gráficas G_1 y G_2 , con n_1 y n_2 vértices respectivamente, es la gráfica generada a partir de tomar una copia de G_1 y n_1 copias de G_2 y de hacer adyacente el i –ésimo vértice de G_1 a todos los vértices de la i –ésima copia de G_2 . Para las gráficas G_1 y G_2 de la Figura 2.1 su corona resultante es la que se muestra en la parte derecha.

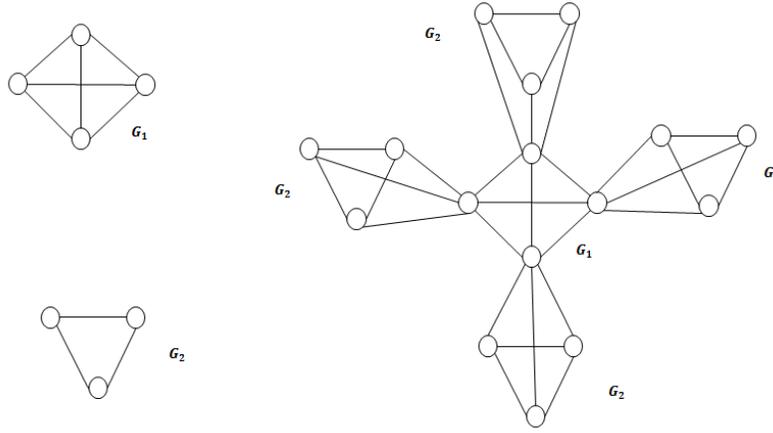


Figura 2.1: Corona de las gráficas G_1 y G_2 .

Tomando esta idea Jerzy Topp en su artículo *Domination independence and irredundance in graphs* [18] da una generalización de la operación al tomar una gráfica G y una sucesión de gráficas arbitrarias \mathcal{H} , de tal forma que la cantidad de gráficas que contiene \mathcal{H} es igual a la cantidad de vértices de G_1 y haciendo adyacente los vértices de $H_i \in \mathcal{H}$ con $x_i \in V(G)$. En esta definición si todas las gráficas de la sucesión son isomorfas, obtenemos la corona de dos gráficas tal y como fue definida por Roberto Frucht y Frank Harary.

Posteriormente esta forma de visualizar la operación sería retomada por Iwona Włoch [20] para definir por primera vez la corona en el campo de las digráficas. Ella en el artículo *On kernels by monochromatic paths in the corona of digraphs* da la siguiente definición:

Definición 2.1 Sean D una digráfica m -coloreada, con $V(D) = \{x_1, \dots, x_n\}$ donde $n \geq 2$, y $\mathcal{H} = (H_i)_{i \in I = \{1, \dots, n\}}$ una sucesión de digráficas m -coloreadas ajenas en vértices dos a dos, con $V(H_i) = \{y_1^i, \dots, y_{p_i}^i\}$ donde $p_i \geq 2$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$. Sea Ψ el conjunto de los m colores usados en la digráfica D . La Ψ -corona de la digráfica D y la sucesión \mathcal{H} , es la digráfica $D \circ \mathcal{H}$ tal que

$$V(D \circ \mathcal{H}) = V(D) \cup \bigcup_{i \in I} V(H_i)$$

y

$$F(D \circ \mathcal{H}) = F(D) \cup \bigcup_{i \in I} F(H_i) \cup \bigcup_{i \in I} \{(y_t^i, x_i) - \text{coloreada con } \psi_i\}$$

con $t = 1, \dots, p_i$ y ψ_i un color cualquiera de Ψ .

En la Figura 2.2 mostramos la corona de la digráfica D con la sucesión

$$\mathcal{H} = \{H_1, H_2, H_3\}.$$

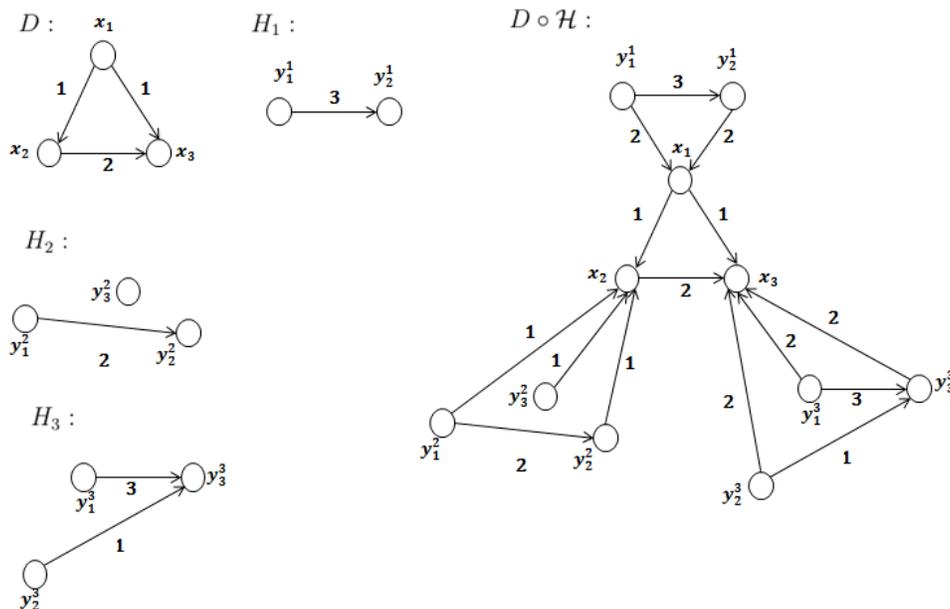


Figura 2.2: Ejemplo de una corona.

No obstante los resultados mencionados hasta el momento alrededor de la corona, los de Topp y Wołoch, no son los únicos. Desde la aparición de la corona en gráficas hasta fechas recientes se han realizado varios trabajos entorno a éste y los cuales no se limitan al campo de estudio de la Teoría de Gráficas, sino que también involucran a distintas ramas de las matemáticas. Ejemplo de lo anterior son *Graceful Labelings of Chain and Corona Graphs* de Christian Barrientos [2], *On the profile of the corona of two graphs* de Yung-Ling Lai y Gerard J. Changpero [15], *Domination in the Corona and Join of Graphs* de Carmelito E. Go y Sergio R. Canoy, Jr. [11], *The Spectrum of the Corona of Two Graphs* de S. Barik, S. Pati y B. K. Sarma [1], *Hosoya index of the corona of two graphs* de Hongyan Cheng y Jianguang Yang [4], *The spectrum of edge corona of graphs* de Yaoping Hou y Wai-Chee Shiu [14] y *The spectrum of neighborhood corona of graphs* de Indulal Gopalapillai [12]. En éstos dos últimos encontramos dos nuevas operaciones para gráficas, la corona por aristas y la corona por vecinos.

2.2. Tipos de corona.

Corona por aristas.

El concepto de corona por aristas fue dado por Yaoping Hou y Wai-Chee Shiu en [14], donde además dan resultados sobre el espectro del Laplaciano de su nueva operación, como lo hiciera S. Barik, S. Pati y B. K. Sarma en [1] con la corona. La definición que proponen nos dice que dadas dos gráficas G_1 y G_2 con n_1 y n_2 vértices respectivamente y m_1 y m_2 aristas respectivamente, la corona por aristas $G_1 \diamond G_2$ se define como la gráfica resultante de tomar una copia de G_1 y m_1 -copias de G_2 , y uniendo los dos vértices de la i -ésima arista de G_1 a cada vértice de la i -ésima copia de G_2 .

A partir de esta idea, junto con la generalización de la corona dada por Topp y la visualización de la corona para digráficas de Włoch, proponemos la corona por flechas la cual está definida para el campo de digráficas. Ésta nos dice:

Definición 2.2 Sean D una digráfica m -coloreada, $V(D) = \{x_1, \dots, x_n\}$ su conjunto de vértices, $F(D) = \{a_1, a_2, \dots, a_q\}$ su conjunto de flechas y $\mathcal{H} = (H_i)_{i \in I = \{1, \dots, q\}}$ una sucesión de digráficas m -coloreadas ajenas en vértices dos a dos; donde $V(H_i) = \{y_1^i, \dots, y_{p_i}^i\}$, $p_i \geq 2$ para cada $i \in \{1, \dots, q\}$, $n \geq 2$ y $q \geq 1$. Sea Ψ el conjunto de los m colores usados en la digráfica D . La Ψ – **corona por flechas** de la digráfica D y la sucesión \mathcal{H} es la digráfica $D \diamond \mathcal{H}$ tal que

$$V(D \diamond \mathcal{H}) = V(D) \cup \bigcup_{i \in I} V(H_i)$$

y

$$F(D \diamond \mathcal{H}) = F(D) \cup \bigcup_{i \in I} F(H_i) \cup \bigcup_{i \in I} \{(y_t^i, x_b^i) - \text{coloreada con } \psi_i\} \cup \bigcup_{i \in I} \{(y_t^i, x_e^i) - \text{coloreada con } \psi_i\}$$

con $a_i = (x_b^i, x_e^i)$, $t = 1, \dots, p_i$ y ψ_i un color cualquiera de Ψ .

Para ejemplificar el concepto anterior tomemos una digráfica D 2-coloreada con $V(D) = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ y $F(D) = \{(x_1, x_2), (x_4, x_3)\}$. Ya que nuestra digráfica tiene dos flechas, la sucesión \mathcal{H} deberá estar conformada de dos digráficas m -coloreadas. Sea H_1 el ciclo no dirigido de longitud cuatro coloreado con tres colores y H_2 el ciclo no dirigido de longitud 3 coloreado con dos colores. La siguiente figura muestra el resultado de operar estas digráficas.

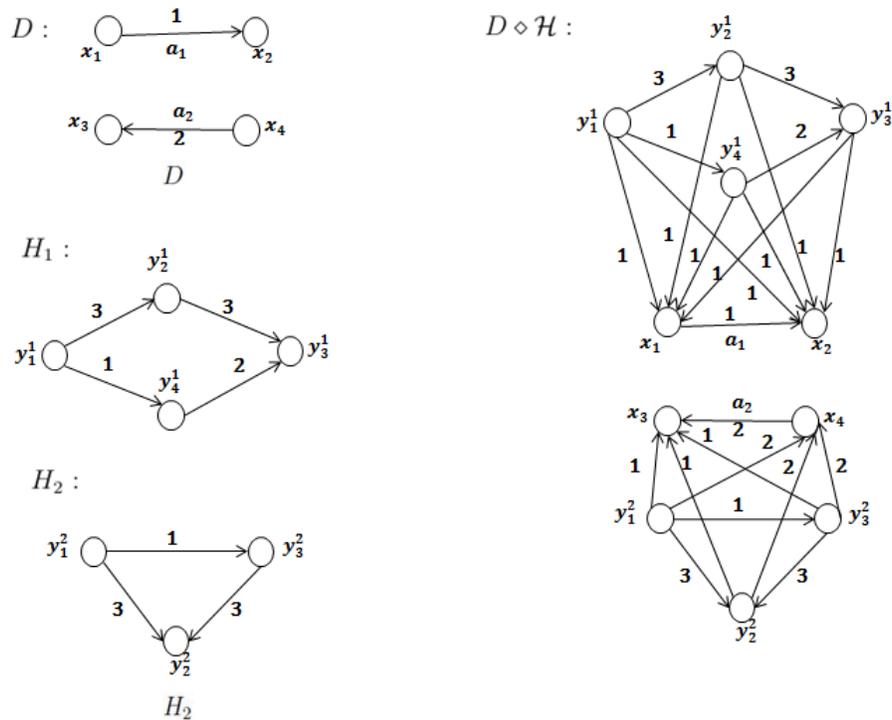


Figura 2.3: Ejemplo de una corona por flechas de una digráfica.

Corona por vecinos.

Luego de la aparición de la corona por aristas, Indulal Gopalapillai en [12] da la operación de corona por vecinos, ésto con la finalidad de continuar con el trabajo de Yaoping Hou y Wai-Chee Shiu. Se nos dice que dadas dos gráficas G_1 y G_2 con n_1 y n_2 vértices respectivamente, la corona por vecinos $G_1 \star G_2$ es la gráfica resultante de tomar n_1 copias de G_2 y hacer adyacentes todos los vértices de la i -ésima copia de G_2 a los vecinos de $v_i \in V(G_1)$ para cada $i \in \{1, 2, \dots, n_1\}$.

Al observar esta nueva variante de la corona, definimos la corona por vecinos para digráficas. Sin embargo, dado el hecho que en una digráfica D tenemos vecinos, vecinos exteriores y vecinos interiores podemos construir tres tipos de coronas. La primera de ellas es la corona por vecinos exteriores.

Corona por vecinos exteriores.

Definición 2.3 Sean D una digráfica m -coloreada, $V(D) = \{x_1, \dots, x_n\}$ su conjunto de vértices, $\delta^+(D) \geq 1$ y $\mathcal{H} = (H_i)_{i \in I = \{1, \dots, n\}}$ una sucesión de digráficas m -coloreadas ajenas en vértices dos a dos; donde $V(H_i) = \{y_1^i, \dots, y_{p_i}^i\}$, $p_i \geq 2$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ y $n \geq 2$. Sea Ψ el conjunto de los m colores usados en la digráfica D . La **Ψ -corona por vecinos exteriores** de la digráfica D y la sucesión \mathcal{H} es la digráfica $D \star^+ \mathcal{H}$ tal que

$$V(D \star^+ \mathcal{H}) = V(D) \cup \bigcup_{i \in I} V(H_i)$$

y

$$F(D \star^+ \mathcal{H}) = F(D) \cup \bigcup_{i \in I} F(H_i) \cup \bigcup_{i \in I} \{(y_t^i, x_j) - \text{coloreada con } \psi_i \mid x_j \in \Gamma^+(x_i)\}$$

con $t = 1, \dots, p_i$ y ψ_i un color cualquiera de Ψ .

En la Figura 2.4 mostramos la corona por vecinos exteriores de una digráfica m -coloreada D , en la cual se puede apreciar que todos sus vértices tienen al menos exgrado uno. De igual manera podemos ver que la cantidad de digráficas que contiene nuestra sucesión es igual a la cantidad de vértices que tiene D , como lo fue en el caso de la corona para digráficas.

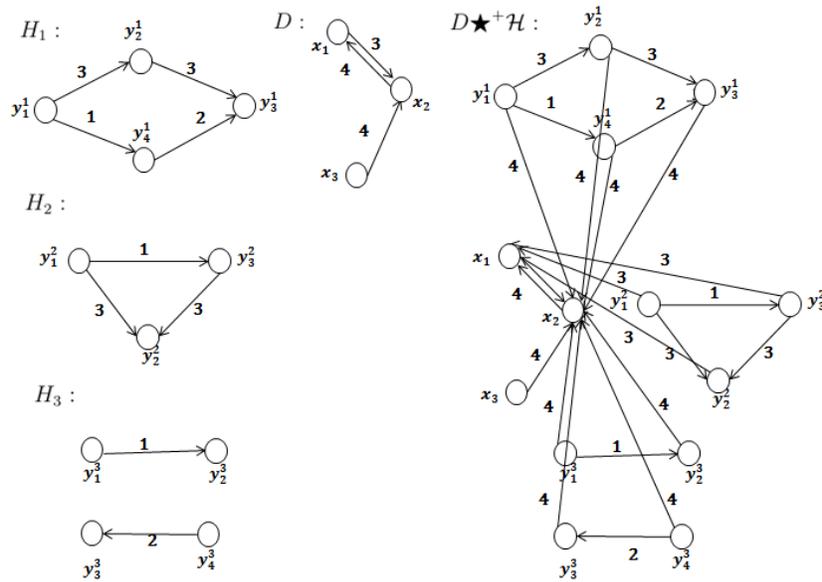


Figura 2.4: Ejemplo de la corona por vecinos exteriores de una digráfica.

Corona por vecinos interiores.

Damos a continuación la definición de corona por vecinos interiores.

Definición 2.4 Sean D una digráfica m -coloreada, $V(D) = \{x_1, \dots, x_n\}$ su conjunto de vértices, $\delta^-(D) \geq 1$ y $\mathcal{H} = (H_i)_{i \in I = \{1, \dots, n\}}$ una sucesión de digráficas m -coloreadas ajenas en vértices dos a dos; donde $V(H_i) = \{y_1^i, \dots, y_{p_i}^i\}$, $p_i \geq 2$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ y $n \geq 2$. Sea Ψ el conjunto de los m colores usados en la digráfica D . La **Ψ -corona por vecinos interiores** de la digráfica D y la sucesión \mathcal{H} es la digráfica $D \star^{-} \mathcal{H}$ tal que

$$V(D \star^{-} \mathcal{H}) = V(D) \cup \bigcup_{i \in I} V(H_i)$$

y

$$F(D \star^{-} \mathcal{H}) = F(D) \cup \bigcup_{i \in I} F(H_i) \cup \bigcup_{i \in I} \{(y_t^i, x_k)\} - \text{coloreada con } \psi_i \mid x_k \in \Gamma^-(x_i)\}$$

con $t = 1, \dots, p_i$ y ψ_i un color cualquiera de Ψ .

La Figura 2.5 muestra un ejemplo del concepto anterior.

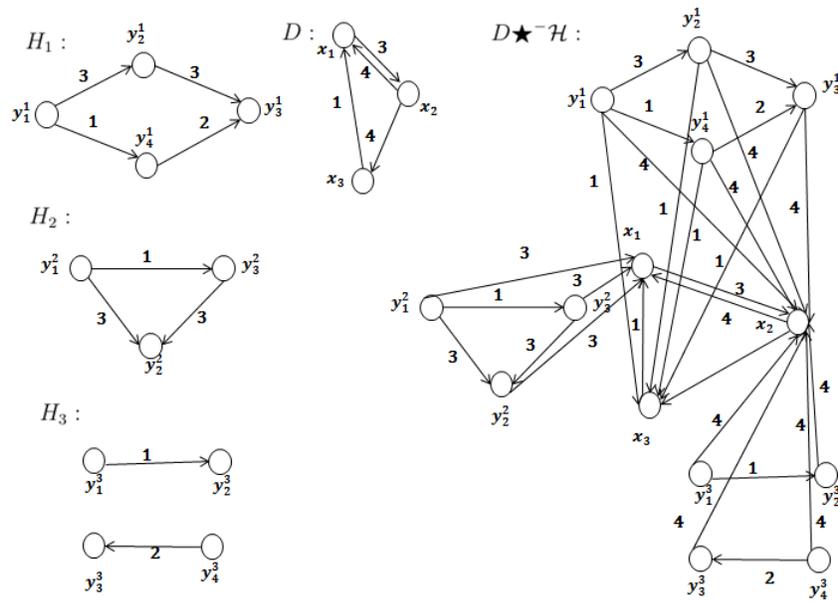


Figura 2.5: Ejemplo de la corona por vecinos interiores de una digráfica.

Podemos notar que en las dos definiciones anteriores nosotros solo trabajamos con digráficas en las cuales sus vértices tienen exgrado o ingrado mayor a uno, según sea el caso. El propósito de elegir esta condición es el de mantener la estructura que se tiene en la corona para digráficas, donde los vértices de cada H_i siempre tienen adyacencia con alguno de los vértices de D .

Corona por vecinos.

Por último tenemos a la corona por vecinos, siendo ésta la que mayor similitud tiene con la que definió Indulal Gopalapillai.

Definición 2.5 Sean D una digráfica m -coloreada, $V(D) = \{x_1, \dots, x_n\}$ su conjunto de vértices, $\delta(D) \geq 1$ y $\mathcal{H} = (H_i)_{i \in I = \{1, \dots, n\}}$ una sucesión de digráficas m -coloreadas ajenas en vértices dos a dos; donde $V(H_i) = \{y_1^i, \dots, y_{p_i}^i\}$, $p_i \geq 2$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ y $n \geq 2$. Sea Ψ el conjunto de los m colores usados en la digráfica D . La Ψ -corona por vecinos de la digráfica D y la sucesión \mathcal{H} es la digráfica $D \star \mathcal{H}$ tal que

$$V(D \star \mathcal{H}) = V(D) \cup \bigcup_{i \in I} V(H_i)$$

y

$$F(D \star \mathcal{H}) = F(D) \cup \bigcup_{i \in I} F(H_i) \cup \bigcup_{i \in I} \{(y_t^i, x_j)\} - \text{coloreada con } \psi_i \mid x_j \in \Gamma(x_i)\}$$

con $t = 1, \dots, p_i$ y ψ_i un color cualquiera de Ψ .

Al igual que en los anteriores casos, ilustramos esta operación en la Figura 2.6. En este caso tenemos que D es el ciclo dirigido de longitud cuatro coloreado con dos colores y la sucesión \mathcal{H} esta conformada por cuatro digráficas m -coloreadas, las cuales son dos flechas dirigidas y dos ciclos no dirigidos de longitud tres.

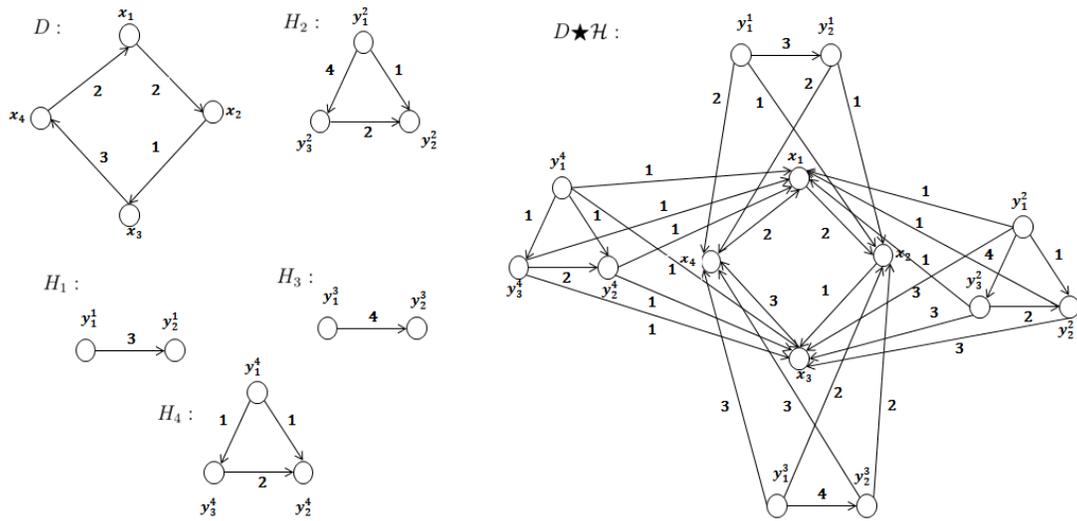


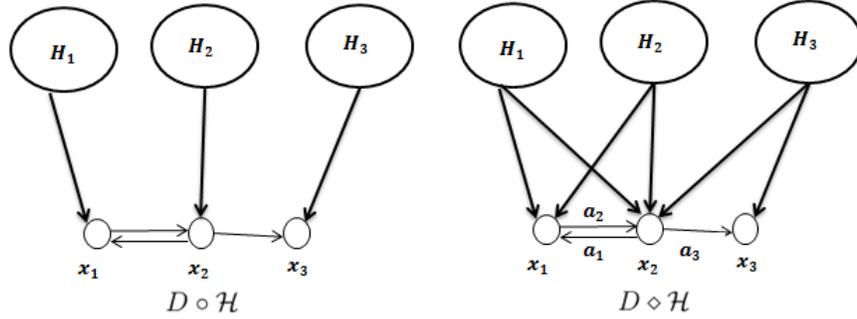
Figura 2.6: Ejemplo de corona por vecinos.

2.3. Diferencia entre operaciones.

En esta sección daremos ejemplos en donde los tipos de corona, comparadas dos a dos y usando una misma digráfica D y una misma sucesión de digráficas ajenas en vértices dos a dos \mathcal{H} , no sean isomorfas entre sí. De igual manera mostraremos las condiciones, si se da el caso, para que pudiera haber un isomorfismo entre las digráficas resultantes. La siguiente tabla nos recuerda la notación que hemos estado usando para cada operación.

Operación	Notación
Corona para digráficas	$D \circ \mathcal{H}$
Corona por flechas	$D \diamond \mathcal{H}$
Corona por vecinos	$D \star \mathcal{H}$
Corona por vecinos exteriores	$D \star^+ \mathcal{H}$
Corona por vecinos interiores	$D \star^- \mathcal{H}$

Comencemos por comparar la corona para digráficas con las cuatro restantes, siendo la primera la corona por flechas. De antemano, por definición de ambas operaciones, las digráficas resultantes son distintas entre sí cuando nuestra digráfica D no tiene la misma cantidad de vértices que de flechas. Ahora bien que pasaría si D tuviera la misma cantidad de vértices y de flechas, para ésto veamos la siguiente figura:



Con este ejemplo podemos ver que existen casos donde usando los mismos elementos las digráficas resultantes son distintas. En realidad siempre será así y para demostrarlo tenemos el siguiente resultado. Vale la pena señalar que en la demostración usaremos $|V(\mathcal{H})|$ y $|F(\mathcal{H})|$ para referirnos al número resultado de la suma de las cardinalidades de los vértices y las flechas de las digráficas de la sucesión \mathcal{H} , respectivamente. Además en la caracterización del conjunto de flechas de los tipos de corona que mencionemos en esta sección omitiremos el color.

Lema 2.1 *Para cualquier digráfica D , con $V(D) = \{x_1, \dots, x_n\}$, donde $n \geq 2$ y $|F(D)| = q \geq 1$, y para cualquier sucesión de digráficas ajenas en vértices dos a dos, $\mathcal{H} = (H_i)_{i \in I = \{1, \dots, n\}}$ con $V(H_i) = \{y_1^i, \dots, y_{p_i}^i\}$, donde $p_i \geq 2$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, se tiene que $D \circ \mathcal{H} \not\cong D \diamond \mathcal{H}$.*

Demostración.

Sean D una digráfica cualquiera, con $V(D) = \{x_1, \dots, x_n\}$, donde $n \geq 2$ y $|F(D)| = q \geq 1$, y $\mathcal{H} = (H_i)_{i \in I = \{1, \dots, n\}}$ una sucesión de digráficas ajenas en vértices dos a dos, con $V(H_i) = \{y_1^i, \dots, y_{p_i}^i\}$, donde $p_i \geq 2$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, por lo que $|V(\mathcal{H})| = \sum_{i=1}^n p_i = p \geq 2$. De la definición de corona sabemos que:

$$F(D \circ \mathcal{H}) = F(D) \cup \bigcup_{i \in I} F(H_i) \cup \bigcup_{i \in I} \{(y_t^i, x_i)\}$$

donde $t = 1, \dots, p_i$, por lo que

$$|F(D \circ \mathcal{H})| = |F(D)| + |F(\mathcal{H})| + p \quad (2.1)$$

De la definición de corona por flechas sabemos que:

$$F(D \diamond \mathcal{H}) = F(D) \cup \bigcup_{i \in I} F(H_i) \cup \bigcup_{i \in I} \{(y_t^i, x_b^i)\} \cup \bigcup_{i \in I} \{(y_t^i, x_e^i)\}$$

con $a_i = (x_b^i, x_c^i)$ y $t = 1, \dots, p_i$. Entonces tenemos que:

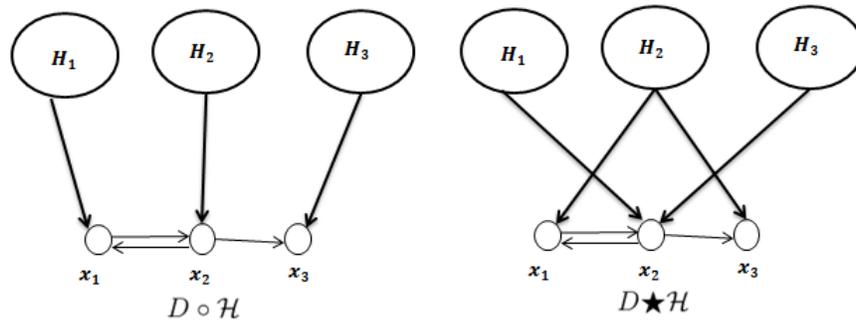
$$|F(D \circ \mathcal{H})| = |F(D)| + |F(\mathcal{H})| + 2p \tag{2.2}$$

Como $p \geq 2$, por (2.1) y (2.2) tenemos que:

$$|F(D \circ \mathcal{H})| < |F(D \diamond \mathcal{H})|$$

Por lo tanto $D \circ \mathcal{H} \not\cong D \diamond \mathcal{H}$. ■

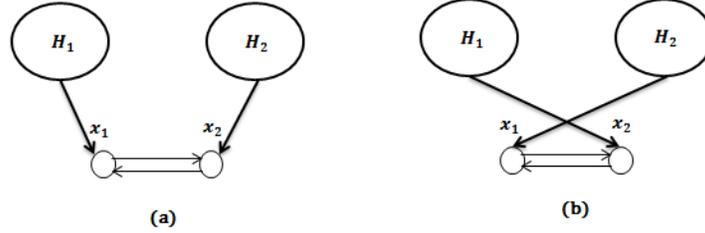
Veamos ahora lo que sucede al comparar la corona para digráficas y la corona por vecinos. En el siguiente ejemplo damos la construcción de ambas operaciones, para una digráfica D y una sucesión \mathcal{H} específicas.



Observemos que las digráficas resultantes no son isomorfas. Sin embargo, a diferencia del análisis anterior podemos encontrar casos donde el isomorfismo se puede dar, ésto es cuando tomamos o bien a K_2 , la digráfica completa de dos vértices, y a una sucesión de digráficas \mathcal{H} cualquiera o bien a S_2 , la digráfica tal que $V(D) = \{x_1, x_2\}$ y $F(D) = \{(x_1, x_2)\}$, y a una sucesión de digráficas \mathcal{H} tal que sus digráficas sean isomorfas. De igual manera podemos tomar a una digráfica disconexa D cuyos componentes sean únicamente K_2 o S_2 y a una sucesión de digráficas \mathcal{H} específica, pero se remite a los dos casos anteriores.

Lema 2.2 Sean D una digráfica conexas, con $V(D) = \{x_1, \dots, x_n\}$, donde $n \geq 2$ y $\delta(D) \geq 1$, y $\mathcal{H} = (H_i)_{i \in I = \{1, \dots, n\}}$ una sucesión de digráficas ajenas en vértices dos a dos, con $V(H_i) = \{y_1^i, \dots, y_{p_i}^i\}$, donde $p_i \geq 2$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$. Si $D \cong S_2$, con $H_i \cong H_j$ para toda $i, j \in I$, o $D \cong K_2$, entonces la corona para digráficas es isomorfa a la corona por vecinos, es decir, $D \circ \mathcal{H} \cong D \star \mathcal{H}$.

Demostración



Tenemos dos casos, supongamos primero que $D \cong K_2$, con $V(D) = \{x_1, x_2\}$, y $\mathcal{H} = (H_i)_{i \in I = \{1,2\}}$ una sucesión de digráficas ajenas en vértices dos a dos, con $V(H_i) = \{y_1^i, \dots, y_{p_i}^i\}$, donde $p_i \geq 2$ para cada $i \in \{1, 2\}$.

Sea $f : V(D \circ \mathcal{H}) \rightarrow V(D \star \mathcal{H})$ una función biyectiva tal que $f(x_1) = x_2$, $f(x_2) = x_1$ y $f(y_t^i) = y_t^i$ para toda $i \in I$ y con $t = 1, \dots, p_i$.

De la definición de corona sabemos que:

$$\begin{aligned} F(D \circ \mathcal{H}) &= F(D) \cup \bigcup_{i \in I} F(H_i) \cup \bigcup_{i \in I} \{(y_t^i, x_i)\} \\ &= \{(x_1, x_2), (x_2, x_1)\} \cup F(H_1) \cup F(H_2) \cup \{(y_t^1, x_1)\} \cup \{(y_t^2, x_2)\} \end{aligned}$$

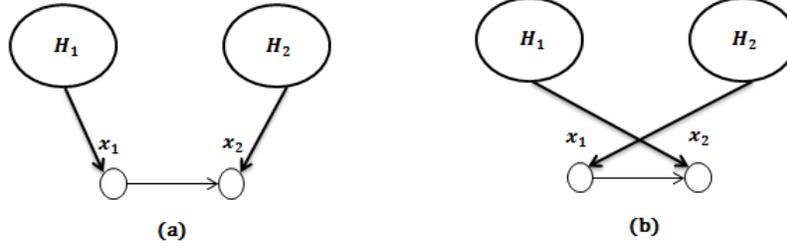
y por la definición de corona por vecinos:

$$\begin{aligned} F(D \star \mathcal{H}) &= F(D) \cup \bigcup_{i \in I} F(H_i) \cup \bigcup_{i \in I} \{(y_t^i, x_j) \mid x_j \in \Gamma(x_i)\} \\ &= \{(x_1, x_2), (x_2, x_1)\} \cup F(H_1) \cup F(H_2) \cup \{(y_t^1, \Gamma(x_1) = x_2)\} \cup \\ &\quad \{(y_t^2, \Gamma(x_2) = x_1)\} \\ &= \{(x_1, x_2), (x_2, x_1)\} \cup F(H_1) \cup F(H_2) \cup \{(y_t^1, x_2)\} \cup \{(y_t^2, x_1)\} \end{aligned}$$

Observemos que nuestra función preserva las adyacencias, ya que:

$$\begin{aligned} (y_t^1, y_s^1) \in F(D \circ \mathcal{H}) &\text{ si y sólo si } (f(y_t^1) = y_t^1, f(y_s^1) = y_s^1) \in F(D \star \mathcal{H}) \\ (y_t^2, y_s^2) \in F(D \circ \mathcal{H}) &\text{ si y sólo si } (f(y_t^2) = y_t^2, f(y_s^2) = y_s^2) \in F(D \star \mathcal{H}) \\ (x_1, x_2) \in F(D \circ \mathcal{H}) &\text{ si y sólo si } (f(x_1) = x_2, f(x_2) = x_1) \in F(D \star \mathcal{H}) \\ (x_2, x_1) \in F(D \circ \mathcal{H}) &\text{ si y sólo si } (f(x_2) = x_1, f(x_1) = x_2) \in F(D \star \mathcal{H}) \\ (y_t^1, x_1) \in F(D \circ \mathcal{H}) &\text{ si y sólo si } (f(y_t^1) = y_t^1, f(x_1) = x_2) \in F(D \star \mathcal{H}) \\ (y_t^2, x_2) \in F(D \circ \mathcal{H}) &\text{ si y sólo si } (f(y_t^2) = y_t^2, f(x_2) = x_1) \in F(D \star \mathcal{H}) \end{aligned}$$

Por lo tanto $D \circ \mathcal{H} \cong D \star \mathcal{H}$.



Ahora bien, supongamos que $D \cong S_2$, con $V(D) = \{x_1, x_2\}$, y $\mathcal{H} = (H_i)_{i \in I = \{1,2\}}$ una sucesión de digráficas ajenas en vértices dos a dos, con $V(H_i) = \{y_1^i, \dots, y_{p_i}^i\}$ y $p_i \geq 2$ para cada $i \in \{1, 2\}$ y $H_1 \cong H_2$. Sea $f : V(D \circ \mathcal{H}) \rightarrow V(D \star \mathcal{H})$ tal que $f(x_1) = x_1$, $f(x_2) = x_2$, $f(y_t^1) = y_t^2$ y $f(y_t^2) = y_t^1$ con $t = 1, \dots, p_i$.

De la definición de corona sabemos que:

$$F(D \circ \mathcal{H}) = \{(x_1, x_2)\} \cup F(H_1) \cup F(H_2) \cup \{(y_t^1, x_1)\} \cup \{(y_t^2, x_2)\}$$

y por la definición de corona por vecinos:

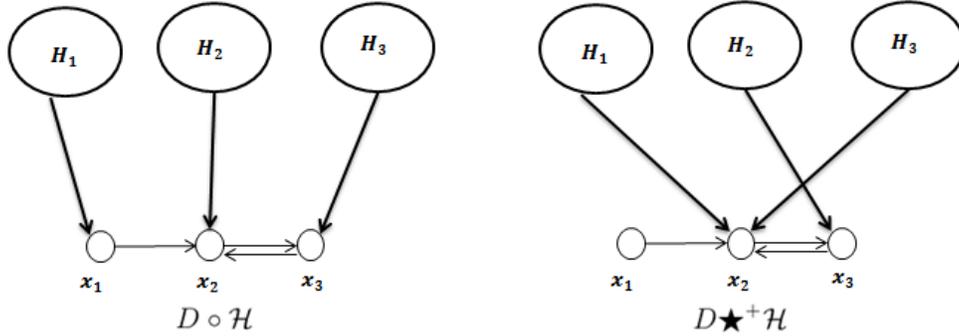
$$F(D \star \mathcal{H}) = \{(x_1, x_2)\} \cup F(H_1) \cup F(H_2) \cup \{(y_t^1, x_2)\} \cup \{(y_t^2, x_1)\}$$

Como $H_1 \cong H_2$ podemos ver que nuestra función preserva adyacencias ya que:

$$\begin{aligned} (y_t^1, y_s^1) \in F(D \circ \mathcal{H}) & \text{ si y sólo si } (f(y_t^1) = y_t^2, f(y_s^1) = y_s^2) \in F(D \star \mathcal{H}) \\ (y_t^2, y_s^2) \in F(D \circ \mathcal{H}) & \text{ si y sólo si } (f(y_t^2) = y_t^1, f(y_s^2) = y_s^1) \in F(D \star \mathcal{H}) \\ (x_1, x_2) \in F(D \circ \mathcal{H}) & \text{ si y sólo si } (f(x_1) = x_1, f(x_2) = x_2) \in F(D \star \mathcal{H}) \\ (y_t^1, x_1) \in F(D \circ \mathcal{H}) & \text{ si y sólo si } (f(y_t^1) = y_t^2, f(x_1) = x_1) \in F(D \star \mathcal{H}) \\ (y_t^2, x_2) \in F(D \circ \mathcal{H}) & \text{ si y sólo si } (f(y_t^2) = y_t^1, f(x_2) = x_2) \in F(D \star \mathcal{H}) \end{aligned}$$

Por lo tanto $D \circ \mathcal{H} \cong D \star \mathcal{H}$. ■

Analicemos ahora el caso de la corona para digráficas y la corona por vecinos exteriores. En el siguiente ejemplo podemos ver la construcción de ambas operaciones para una digráfica D y una sucesión de digráficas \mathcal{H} .



Podemos notar que las digráficas resultantes no son isomorfas, sin embargo, como paso en el anterior análisis, puede darse el caso de isomorfismo entre las digráficas resultantes.

Lema 2.3 Sean D una digráfica conexa, con $V(D) = \{x_1, \dots, x_n\}$ donde $n \geq 2$, y $\mathcal{H} = (H_i)_{i \in I = \{1, \dots, n\}}$ una sucesión de digráficas ajenas en vértices dos a dos, con $V(H_i) = \{y_1^i, \dots, y_{p_i}^i\}$, donde $p_i \geq 2$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$. Si D es un ciclo dirigido, entonces $D \circ \mathcal{H} \cong D \star^+ \mathcal{H}$.

Demostración

Sea D un ciclo dirigido, con $V(D) = \{x_1, \dots, x_n\}$, y $\mathcal{H} = (H_i)_{i \in I = \{1, \dots, n\}}$ una sucesión de digráficas ajenas en vértices dos a dos, con $V(H_i) = \{y_1^i, \dots, y_{p_i}^i\}$ y $p_i \geq 2$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$. Sea $f : V(D \circ \mathcal{H}) \rightarrow V(D \star^+ \mathcal{H})$ tal que $f(x_i) = x_{i+1} \pmod{n}$ y $f(y_t^i) = y_t^i$ para toda $i \in I \pmod{n}$ y con $t = 1, \dots, p_i$.

De la definición de corona sabemos que:

$$F(D \circ \mathcal{H}) = F(D) \cup \bigcup_{i \in I} F(H_i) \cup \bigcup_{i \in I} \{(y_t^i, x_i)\}$$

y de la definición de corona por vecinos exteriores se tiene que:

$$F(D \star^+ \mathcal{H}) = F(D) \cup \bigcup_{i \in I} F(H_i) \cup \bigcup_{i \in I} \{(y_t^i, x_j) \mid x_j \in \Gamma^+(x_i)\}$$

Sean $\{v, u\} \subseteq V(D \circ \mathcal{H})$ tal que $(v, u) \in F(D \circ \mathcal{H})$, veamos que $(f(v), f(u)) \in F(D \star^+ \mathcal{H})$. Tenemos los siguientes casos:

Caso 1. $\{v, u\} \subseteq V(D)$.

Como los vértices están en D podemos decir que $v = x_i$ y $u = x_{i+1}$ para cualquier $i \in I \pmod n$. Sabemos que $f(x_i) = x_{i+1}$ y $f(x_{i+1}) = x_{i+2}$ y como D es un ciclo dirigido tenemos que $(x_{i+1}, x_{i+2}) \in F(D)$ por lo que

$$(f(v) = f(x_i) = x_{i+1}, f(u) = f(x_{i+1}) = x_{i+2}) \in F(D\star^+\mathcal{H})$$

Caso 2. $\{v, u\} \subseteq V(H_i)$ para algún $i \in I$.

Como los vértices están en H_i podemos decir que $v = y_r^i$ y $u = y_s^i$ con $r, s = 1, \dots, p_i$ y $r \neq s$. Por nuestra función tenemos que $f(y_r^i) = y_r^i$ y $f(y_s^i) = y_s^i$ por lo que

$$(f(v) = f(y_r^i) = y_r^i, f(u) = f(y_s^i) = y_s^i) \in F(D\star^+\mathcal{H})$$

Caso 3. $u \in V(D)$ y $v \in V(H_i)$ para algún $i \in I$.

Como $u \in V(D)$ y $v \in V(H_i)$ podemos decir que $u = x_i$ y $v = y_t^i$ con $t = 1, \dots, p_i$. Por otro lado sabemos que $f(x_i) = x_{i+1}$ y $f(y_t^i) = y_t^i$, de igual manera también sabemos que

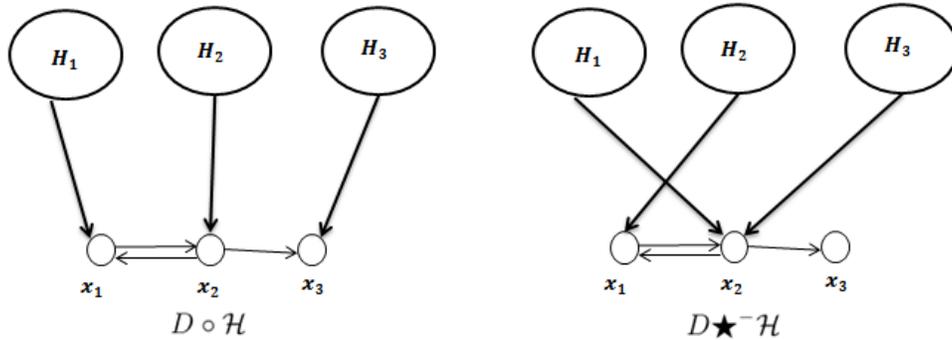
$$\bigcup_{i \in I} \{(y_t^i, x_j) \mid x_j \in \Gamma^+(x_i)\} \subset F(D\star^+\mathcal{H})$$

por lo que

$$(f(v) = f(y_t^i) = y_t^i, f(u) = f(x_i) = x_{i+1}) \in F(D\star^+\mathcal{H})$$

Por lo tanto de los tres casos anteriores tenemos que $D \circ \mathcal{H} \cong D\star^+\mathcal{H}$. ■

Toca el turno de analizar el caso de la corona para digráficas y la corona por vecinos interiores. En la siguiente figura mostramos las digráficas resultantes al realizar ambas operaciones a una digráfica D y una sucesión de digráficas \mathcal{H} .



Nuevamente podemos ver que ambas digráficas son distintas pero, al igual que en el caso de corona por vecinos exteriores, dada una digráfica D con ciertas características se puede dar un isomorfismo. El siguiente resultado muestra lo dicho.

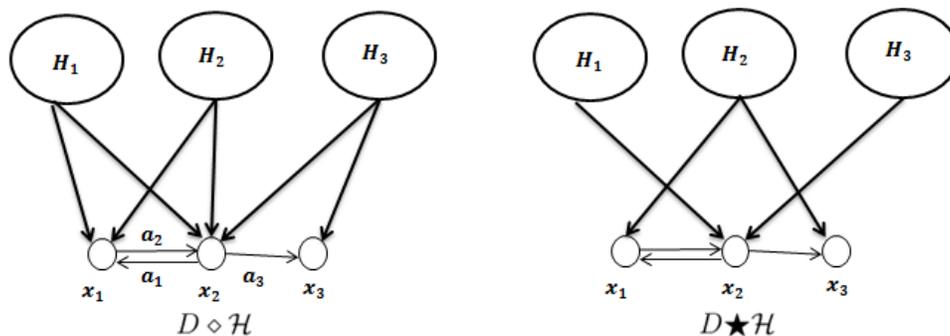
Lema 2.4 Sean D una digráfica conexa, con $V(D) = \{x_1, \dots, x_n\}$, donde $n \geq 2$, y $\mathcal{H} = (H_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$ una sucesión de digráficas ajenas en vértices dos a dos, con $V(H_i) = \{y_1^i, \dots, y_{p_i}^i\}$, donde $p_i \geq 2$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$. Si D es un ciclo dirigido, entonces $D \circ \mathcal{H} \cong D \star \mathcal{H}$.

Demostración.

Análogo al Lema 2.3. ■

Al citar ejemplos donde la digráfica resultante de la corona para digráficas y de cada uno de los tipos de corona no sean isomorfas y dar resultados sobre isomorfismo, veamos ahora los casos entre las cuatro coronas restantes. Comencemos por analizar la corona por flechas y la corona por vecinos.

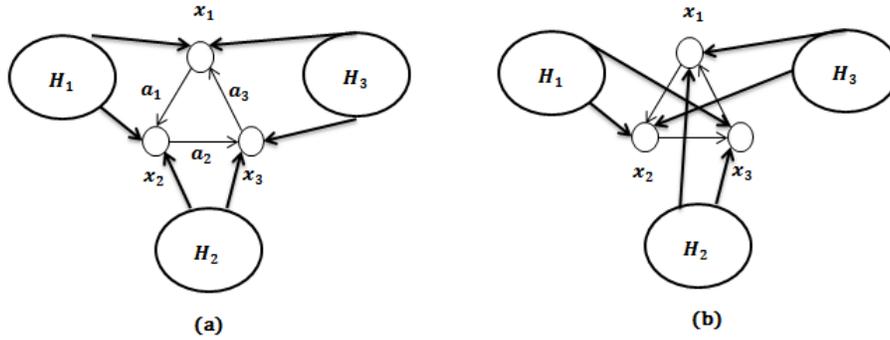
Es importante mencionar, al igual que el primer análisis que hicimos, que si bien podemos usar la misma digráfica D no siempre nos será posible usar la misma sucesión de digráficas \mathcal{H} . Las digráficas donde podemos hacer uso de la misma digráfica D y de la misma sucesión \mathcal{H} , para este caso y los dos siguientes, son aquéllas donde el número de vértices y de flechas son los mismos, por ejemplo, las digráficas que contengan solamente un ciclo.



El ejemplo anterior muestra la construcción de ambas coronas para una digráfica D y una misma sucesión de digráficas \mathcal{H} . Notemos que éstas no tienen semejanza alguna, no obstante podemos encontrar casos de isomorfismo.

Lema 2.5 Sean D una digráfica conexa, con $V(D) = \{x_1, \dots, x_n\}$, $n \geq 2$, $F(D) = \{a_1, \dots, a_q\}$, $q \geq 1$ y $a_i = (x_b^i, x_e^i)$ con $\{x_b^i, x_e^i\} \subseteq V(D)$ donde $i \in I = \{1, \dots, q\}$, y $\mathcal{H} = (H_i)_{i \in I = \{1, \dots, n\}}$ una sucesión de digráficas ajenas en vértices dos a dos, con $V(H_i) = \{y_1^i, \dots, y_{p_i}^i\}$ y $p_i \geq 2$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$. Si D es el ciclo dirigido de longitud tres o D es el ciclo no dirigido de longitud tres, con $H_i \cong H_j$ para toda i, j , entonces $D \diamond \mathcal{H} \cong D \star \mathcal{H}$.

Demostración.



En el primero de los dos casos, sean D el ciclo dirigido de longitud tres, con $V(D) = \{x_1, x_2, x_3\}$ y $F(D) = \{a_1 = (x_1, x_2), a_2 = (x_2, x_3), a_3 = (x_3, x_1)\}$, y $\mathcal{H} = (H_i)_{i \in I = \{1, 2, 3\}}$ una sucesión de digráficas ajenas en vértices dos a dos, con $V(H_i) = \{y_1^i, \dots, y_{p_i}^i\}$ y $p_i \geq 2$ para cada $i \in \{1, 2, 3\}$. Sea $f : V(D \diamond \mathcal{H}) \rightarrow V(D \star \mathcal{H})$ tal que $f(x_i) = x_{i+1} \pmod{n}$ y $f(y_t^i) = y_t^i$, para toda $i \in I$ y con $t = 1, \dots, p_i$.

De la definición de corona por flechas sabemos que:

$$F(D \diamond \mathcal{H}) = F(D) \cup \bigcup_{i \in I} F(H_i) \cup \bigcup_{i \in I} \{(y_t^i, x_b^i)\} \cup \bigcup_{i \in I} \{(y_t^i, x_e^i)\}$$

y por la definición de corona por vecinos también sabemos que:

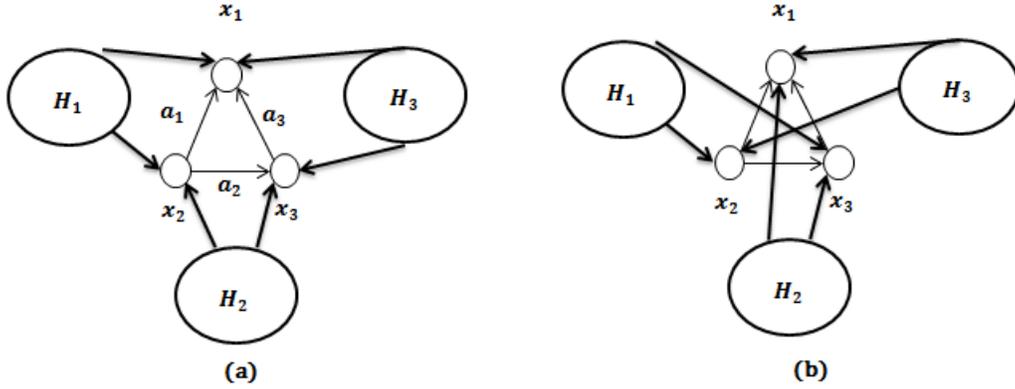
$$F(D \star \mathcal{H}) = F(D) \cup \bigcup_{i \in I} F(H_i) \cup \bigcup_{i \in I} \{(y_t^i, x_j)\} \mid x_j \in \Gamma(x_i)\}$$

Observemos que nuestra función preserva las adyacencias, ya que:

$$\begin{aligned} (y_t^1, y_s^1) \in F(D \diamond \mathcal{H}) & \text{ si y sólo si } (f(y_t^1) = y_t^1, f(y_s^1) = y_s^1) \in F(D \star \mathcal{H}) \\ (y_t^2, y_s^2) \in F(D \diamond \mathcal{H}) & \text{ si y sólo si } (f(y_t^2) = y_t^2, f(y_s^2) = y_s^2) \in F(D \star \mathcal{H}) \\ (y_t^3, y_s^3) \in F(D \diamond \mathcal{H}) & \text{ si y sólo si } (f(y_t^3) = y_t^3, f(y_s^3) = y_s^3) \in F(D \star \mathcal{H}) \end{aligned}$$

$(x_1, x_2) \in F(D \diamond \mathcal{H})$ si y sólo si $(f(x_1) = x_2, f(x_2) = x_3) \in F(D \star \mathcal{H})$
 $(x_2, x_3) \in F(D \diamond \mathcal{H})$ si y sólo si $(f(x_2) = x_3, f(x_3) = x_1) \in F(D \star \mathcal{H})$
 $(x_3, x_1) \in F(D \diamond \mathcal{H})$ si y sólo si $(f(x_3) = x_1, f(x_1) = x_2) \in F(D \star \mathcal{H})$
 $(y_t^1, x_1) \in F(D \diamond \mathcal{H})$ si y sólo si $(f(y_t^1) = y_t^1, f(x_1) = x_2) \in F(D \star \mathcal{H})$
 $(y_t^1, x_2) \in F(D \diamond \mathcal{H})$ si y sólo si $(f(y_t^1) = y_t^1, f(x_2) = x_3) \in F(D \star \mathcal{H})$
 $(y_t^2, x_2) \in F(D \diamond \mathcal{H})$ si y sólo si $(f(y_t^2) = y_t^2, f(x_2) = x_3) \in F(D \star \mathcal{H})$
 $(y_t^2, x_3) \in F(D \diamond \mathcal{H})$ si y sólo si $(f(y_t^2) = y_t^2, f(x_3) = x_1) \in F(D \star \mathcal{H})$
 $(y_t^3, x_3) \in F(D \diamond \mathcal{H})$ si y sólo si $(f(y_t^3) = y_t^3, f(x_3) = x_1) \in F(D \star \mathcal{H})$
 $(y_t^3, x_1) \in F(D \diamond \mathcal{H})$ si y sólo si $(f(y_t^3) = y_t^3, f(x_1) = x_2) \in F(D \star \mathcal{H})$

Por lo tanto $D \diamond \mathcal{H} \cong D \star \mathcal{H}$.



Ahora bien, sea D el ciclo no dirigido de longitud tres, $V(D) = \{x_1, x_2, x_3\}$ y $F(D) = \{a_1 = (x_2, x_1), a_2 = (x_2, x_3), a_3 = (x_3, x_1)\}$, $\mathcal{H} = (H_i)_{i \in I = \{1,2,3\}}$ una sucesión de digráficas ajenas en vértices dos a dos, con $V(H_i) = \{y_1^i, \dots, y_{p_i}^i\}$ con $p_i \geq 2$ para cada $i \in \{1, 2, 3\}$ y $H_1 \cong H_2 \cong H_3$. Sea $f : V(D \diamond \mathcal{H}) \rightarrow V(D \star \mathcal{H})$ tal que $f(x_i) = x_i$, $f(y_t^i) = y_t^{i-1}$ para toda $i \in I \pmod{n}$ y con $t = 1, \dots, p_i$.

De la definición de corona por flechas sabemos que:

$$F(D \diamond \mathcal{H}) = F(D) \cup \bigcup_{i \in I} F(H_i) \cup \bigcup_{i \in I} \{(y_t^i, x_b^i)\} \cup \bigcup_{i \in I} \{(y_t^i, x_c^i)\}$$

y por la definición de corona por vecinos también sabemos que:

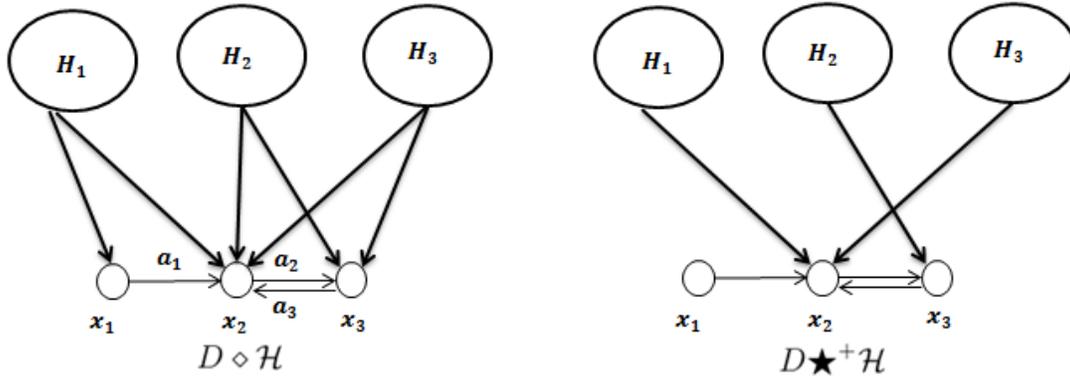
$$F(D \star \mathcal{H}) = F(D) \cup \bigcup_{i \in I} F(H_i) \cup \bigcup_{i \in I} \{(y_t^i, x_j)\} \mid x_j \in \Gamma(x_i)\}$$

Como $H_1 \cong H_2 \cong H_3$ podemos ver que nuestra función preserva adyacencias ya que:

- $(y_t^1, y_s^1) \in F(D \diamond \mathcal{H})$ si y sólo si $(f(y_t^1) = y_t^3, f(y_s^1) = y_s^3) \in F(D \star \mathcal{H})$
- $(y_t^2, y_s^2) \in F(D \diamond \mathcal{H})$ si y sólo si $(f(y_t^2) = y_t^1, f(y_s^2) = y_s^1) \in F(D \star \mathcal{H})$
- $(y_t^3, y_s^3) \in F(D \diamond \mathcal{H})$ si y sólo si $(f(y_t^3) = y_t^2, f(y_s^3) = y_s^2) \in F(D \star \mathcal{H})$
- $(x_2, x_1) \in F(D \diamond \mathcal{H})$ si y sólo si $(f(x_2) = x_2, f(x_1) = x_1) \in F(D \star \mathcal{H})$
- $(x_2, x_3) \in F(D \diamond \mathcal{H})$ si y sólo si $(f(x_2) = x_2, f(x_3) = x_3) \in F(D \star \mathcal{H})$
- $(x_3, x_1) \in F(D \diamond \mathcal{H})$ si y sólo si $(f(x_3) = x_3, f(x_1) = x_1) \in F(D \star \mathcal{H})$
- $(y_t^1, x_1) \in F(D \diamond \mathcal{H})$ si y sólo si $(f(y_t^1) = y_t^3, f(x_1) = x_1) \in F(D \star \mathcal{H})$
- $(y_t^1, x_2) \in F(D \diamond \mathcal{H})$ si y sólo si $(f(y_t^1) = y_t^3, f(x_2) = x_2) \in F(D \star \mathcal{H})$
- $(y_t^2, x_2) \in F(D \diamond \mathcal{H})$ si y sólo si $(f(y_t^2) = y_t^1, f(x_2) = x_2) \in F(D \star \mathcal{H})$
- $(y_t^2, x_3) \in F(D \diamond \mathcal{H})$ si y sólo si $(f(y_t^2) = y_t^1, f(x_3) = x_3) \in F(D \star \mathcal{H})$
- $(y_t^3, x_3) \in F(D \diamond \mathcal{H})$ si y sólo si $(f(y_t^3) = y_t^2, f(x_3) = x_3) \in F(D \star \mathcal{H})$
- $(y_t^3, x_1) \in F(D \diamond \mathcal{H})$ si y sólo si $(f(y_t^3) = y_t^2, f(x_1) = x_1) \in F(D \star \mathcal{H})$

Por lo tanto $D \diamond \mathcal{H} \cong D \star \mathcal{H}$. ■

Al igual que en el primer análisis de esta sección, el siguiente resultado muestra que en ningún caso las digráficas resultantes de la corona por flechas y la corona por vecinos exteriores pueden ser isomorfas. A continuación tenemos la construcción de ambas operaciones para una digráfica D y una sucesión de digráficas \mathcal{H} .



Lema 2.6 Para cualquier digráfica D , con $|V(D)| = |F(D)| = n$, donde $n \geq 2$ y $\delta^+(D) \geq 1$, y para cualquier sucesión $\mathcal{H} = (H_i)_{i \in I\{1, \dots, n\}}$ de digráficas ajenas en vértices dos a dos, con $V(H_i) = \{y_1^i, \dots, y_{p_i}^i\}$ y $p_i \geq 2$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, se tiene que $D \diamond \mathcal{H} \not\cong D \star \mathcal{H}$.

Demostración.

Sea D una digráfica con $|V(D)| = |F(D)| = n$, donde $n \geq 2$ y $\delta^+(D) \geq 1$, y $\mathcal{H} = (H_i)_{i \in I = \{1, \dots, n\}}$ una sucesión de digráficas ajenas en vértices dos a dos, con $V(H_i) = \{y_1^i, \dots, y_{p_i}^i\}$ y $p_i \geq 2$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$. Observemos que al pedir que $|F(D)| = n$ y $\delta^+(D) \geq 1$, se tiene que $\delta^+(x) = 1$ para toda $x \in V(D)$, además veamos que $|V(\mathcal{H})| = \sum_{i=1}^n p_i = p \geq 2$. De la definición de corona por flechas sabemos que:

$$F(D \diamond \mathcal{H}) = F(D) \cup \bigcup_{i \in I} F(H_i) \cup \bigcup_{i \in I} \{(y_t^i, x_b^i)\} \cup \bigcup_{i \in I} \{(y_t^i, x_e^i)\}$$

con $a_i = (x_b^i, x_e^i)$ y $t = 1, \dots, p_i$. Por lo que

$$|F(D \diamond \mathcal{H})| = n + |F(\mathcal{H})| + 2p \quad (2.3)$$

De la definición de corona por vecinos exteriores sabemos que:

$$F(D \star^+ \mathcal{H}) = F(D) \cup \bigcup_{i \in I} F(H_i) \cup \bigcup_{i \in I} \{(y_t^i, x_j) \mid x_j \in \Gamma^+(x_i)\}$$

con $t = 1, \dots, p_i$. Entonces por la observación tenemos que:

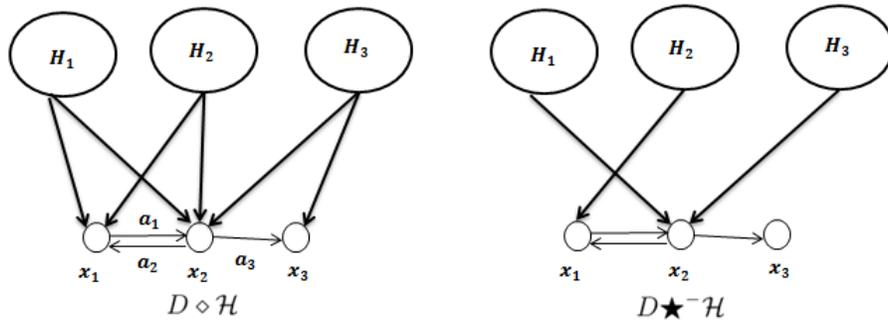
$$|F(D \star^+ \mathcal{H})| = n + |F(\mathcal{H})| + p \quad (2.4)$$

Como $p \geq 2$, por (2.3) y (2.4) tenemos que:

$$|F(D \star^+ \mathcal{H})| < |F(D \diamond \mathcal{H})|$$

Por lo tanto $D \diamond \mathcal{H} \not\cong D \star^+ \mathcal{H}$. ■

Continuamos con el caso de la corona por flechas y la corona por vecinos interiores. En la figura siguiente mostramos la construcción, para una digráfica D y una sucesión de digráficas \mathcal{H} , de ambas operaciones.



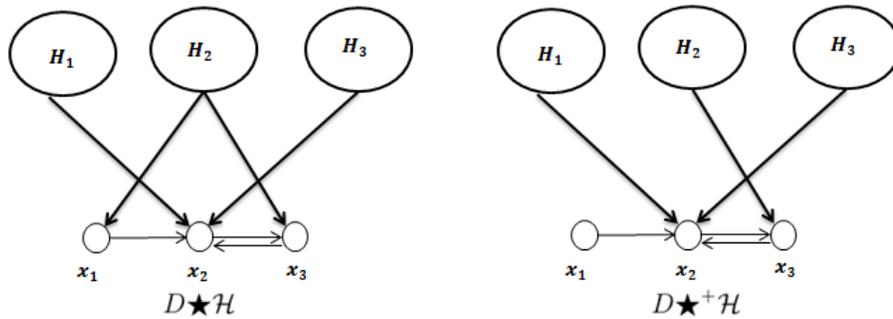
Notemos que las digráficas resultantes no son isomorfas entre sí. En realidad dada cualquier digráfica y cualquier sucesión de digráficas, nunca se podrá obtener un isomorfismo entre las digráficas que se formen al realizar ambas operaciones. El siguiente resultado confirma lo dicho.

Lema 2.7 *Para cualquier digráfica D , con $|V(D)| = |F(D)| = n$, donde $n \geq 2$ y $\delta^-(D) \geq 1$, y para cualquier sucesión $\mathcal{H} = (H_i)_{i \in I = \{1, \dots, n\}}$ de digráficas ajenas en vértices dos a dos, con $V(H_i) = \{y_1^i, \dots, y_{p_i}^i\}$ y $p_i \geq 2$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, se tiene que $D \diamond \mathcal{H} \not\cong D \star^- \mathcal{H}$.*

Demostración.

Análogo al Lema 2.6. ■

Ahora que hemos terminado el análisis de la corona por flechas y los tipos restantes de corona, el caso que se presenta a continuación trata sobre la relación que existe entre la corona por vecinos y la de vecinos exteriores. Presentamos un ejemplo de la construcción de ambas operaciones para una digráfica D y una sucesión de digráficas \mathcal{H} .



Nuevamente ambas digráficas no son isomorfas, no obstante, si le pedimos ciertas características a la digráfica D , podemos llegar a un isomorfismo entre las digráficas resultantes de ambas operaciones.

Lema 2.8 *Sean D una digráfica conexa, con $V(D) = \{x_1, \dots, x_n\}$, $n \geq 2$ y $\delta^+(D) \geq 1$, y $\mathcal{H} = (H_i)_{i \in I = \{1, \dots, n\}}$ una sucesión de digráficas ajenas en vértices dos a dos, con $V(H_i) = \{y_1^i, \dots, y_{p_i}^i\}$ y $p_i \geq 2$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$. Si D es una digráfica con todas sus flechas simétricas, entonces $D \star \mathcal{H} \cong D \star^+ \mathcal{H}$.*

Demostración.

Sean D una digráfica con todas sus flechas simétricas, con $V(D) = \{x_1, \dots, x_n\}$, donde $n \geq 2$, y $\mathcal{H} = (H_i)_{i \in I = \{1, \dots, n\}}$ una sucesión de digráficas ajenas en vértices dos a dos, con $V(H_i) = \{y_1^i, \dots, y_{p_i}^i\}$ y $p_i \geq 2$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$. Sea $f : V(D \star \mathcal{H}) \rightarrow V(D \star^+ \mathcal{H})$ tal que $f(x_i) = x_i$ y $f(y_t^i) = y_t^i$ para toda $i \in I$ y con $t = 1, \dots, p_i$.

Sabemos lo siguiente, de la definición de la corona por vecinos:

$$F(D \star \mathcal{H}) = F(D) \cup \bigcup_{i \in I} F(H_i) \cup \bigcup_{i \in I} \{(y_t^i, x_j) \mid x_j \in \Gamma(x_i)\}$$

De la corona por vecinos exteriores también se sabe que:

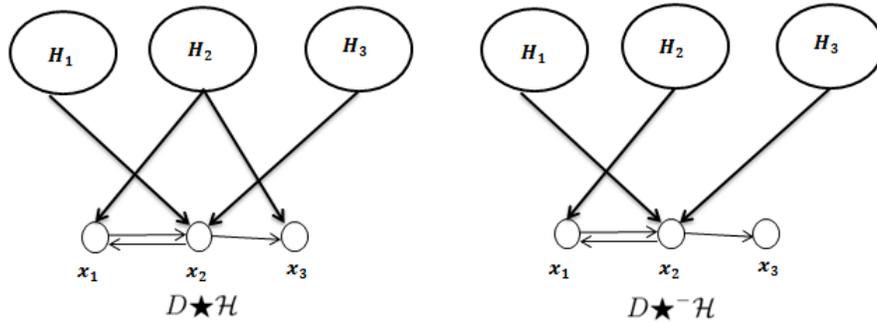
$$F(D \star^+ \mathcal{H}) = F(D) \cup \bigcup_{i \in I} F(H_i) \cup \bigcup_{i \in I} \{(y_t^i, x_j) \mid x_j \in \Gamma^+(x_i)\}$$

Notemos que estos conjuntos conservan las flechas de D y de \mathcal{H} , diferenciándose únicamente en las flechas que se forman de H_i hacia D para cualquier $i \in I$. Observemos que en una digráfica con todas sus flechas simétricas, para cualquier $x_i \in V(D)$ sabemos que $\Gamma^+(x_i) = \Gamma^-(x_i)$, por lo cual tenemos que:

$$\bigcup_{i \in I} \{(y_t^i, x_j) \mid x_j \in \Gamma(x_i)\} = \bigcup_{i \in I} \{(y_t^i, x_j) \mid x_j \in \Gamma^+(x_i)\}$$

Por lo tanto $D \star \mathcal{H} \cong D \star^+ \mathcal{H}$. ■

Presentamos ahora el caso entre la corona por vecinos y la de vecinos interiores. Dada que esta última presenta semejanzas con la definición de corona por vecinos exteriores el resultado para isomorfismo será el mismo que en el caso anterior.

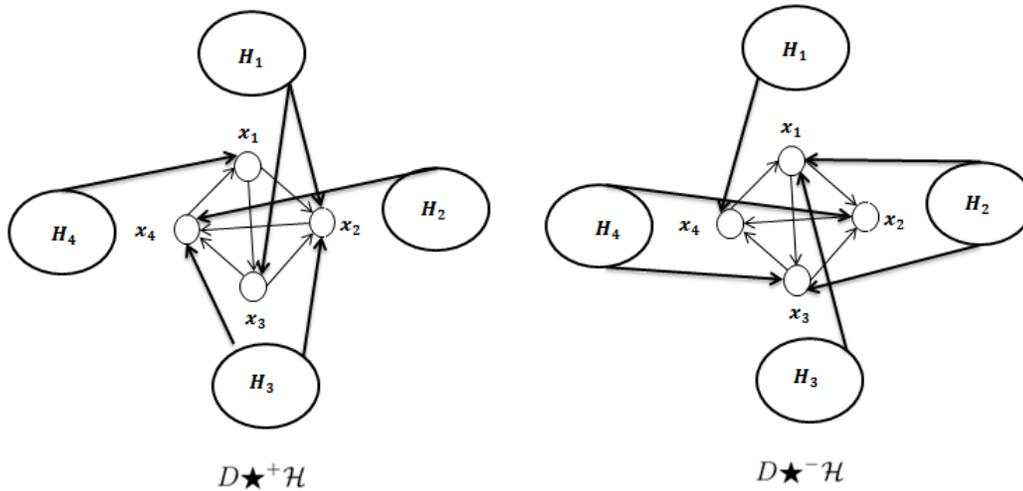


Lema 2.9 Sean D una digráfica conexa, con $V(D) = \{x_1, \dots, x_n\}$, donde $n \geq 2$ y $\delta^-(D) \geq 1$, y $\mathcal{H} = (H_i)_{i \in I = \{1, \dots, n\}}$ una sucesión de digráficas ajenas en vértices dos a dos, con $V(H_i) = \{y_1^i, \dots, y_{p_i}^i\}$ y $p_i \geq 2$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$. Si D es una digráfica con todas sus flechas simétricas, entonces $D \star^+ \mathcal{H} \cong D \star^- \mathcal{H}$.

Demostración.

Análogo al Lema 2.8. ■

Nuestro último caso es el de la corona por vecinos exteriores y la corona por vecinos interiores. Cabe señalar que la única manera para trabajar con la misma digráfica D es que ésta cumpla que $\delta^+(D) \geq 1$ y $\delta^-(D) \geq 1$. Como lo hemos hecho hasta el momento, mostramos en la siguiente figura un ejemplo donde las digráficas resultantes de ambas operaciones no son isomorfas.



Observemos que en $D \star^+ \mathcal{H}$ para los vértices x_1 y x_3 , los únicos vértices en D con exgrado dos, existe la $H_4 x_1 - flecha$ y la $H_1 x_3 - flecha$, sin embargo no ocurre lo mismo en $D \star^- \mathcal{H}$ ya que existe la $H_2 x_1 - flecha$, la $H_3 x_1 - flecha$, la $H_2 x_3 - flecha$ y la $H_4 x_3 - flecha$. Por tal motivo no son isomorfas.

Igual que en los análisis anteriores, encontramos casos donde puede darse un isomorfismo entre las digráficas resultantes. No obstante no tenemos la respuesta general para decir que propiedades debe de tener la digráfica D y la sucesión de digráficas \mathcal{H} para que se de el isomorfismo. Sin embargo, tenemos el siguiente:

Lema 2.10 Sean D una digráfica, con $V(D) = \{x_1, \dots, x_n\}$, donde $n \geq 2$, $\delta^+(D) \geq 1$ y $\delta^-(D) \geq 1$, y $\mathcal{H} = (H_i)_{i \in I = \{1, \dots, n\}}$ una sucesión de digráficas ajenas en vértices dos a dos, con $V(H_i) = \{y_1^i, \dots, y_{p_i}^i\}$ y $p_i \geq 2$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$. Si D es una digráfica con todas sus flechas simétricas, entonces $D\star^+\mathcal{H} \cong D\star^-\mathcal{H}$.

Demostración.

Sean D una digráfica con todas sus flechas simétricas, $V(D) = \{x_1, \dots, x_n\}$ su conjunto de vértices, donde $n \geq 2$, y $\mathcal{H} = (H_i)_{i \in I = \{1, \dots, n\}}$ una sucesión de digráficas ajenas en vértices dos a dos, con $V(H_i) = \{y_1^i, \dots, y_{p_i}^i\}$ y $p_i \geq 2$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$. Sea $f : V(D\star^+\mathcal{H}) \rightarrow V(D\star^-\mathcal{H})$ una función tal que $f(x_i) = x_i$ y $f(y_t^i) = y_t^i$ para toda $i \in I$ y $t = 1, \dots, p_i$.

De la definición de corona por vecinos exteriores sabemos que:

$$F(D\star^+\mathcal{H}) = F(D) \cup \bigcup_{i \in I} F(H_i) \cup \bigcup_{i \in I} \{(y_t^i, x_j) \mid x_j \in \Gamma^+(x_i)\}$$

Y de la definición de corona por vecinos interiores se sabe que:

$$F(D\star^-\mathcal{H}) = F(D) \cup \bigcup_{i \in I} F(H_i) \cup \bigcup_{i \in I} \{(y_t^i, x_j) \mid x_j \in \Gamma^-(x_i)\}$$

Notemos que ambas conservan las flechas de D y de \mathcal{H} , diferenciándose únicamente en las flechas que se forman de H_i hacia D para cualquier $i \in I$. Observemos que en una digráfica con todas sus flechas simétricas, para cualquier $x_i \in V(D)$ tenemos que $\Gamma^+(x_i) = \Gamma^-(x_i)$, por lo cual en esta digráfica ambas definiciones son idénticas. Por lo tanto $D\star^+\mathcal{H} \cong D\star^-\mathcal{H}$. ■

2.4. Definición de la Corona Generalizada

El propósito inicial al realizar esta tesis era trabajar núcleo por tdm en las definiciones de la sección anterior, pero al ver que los cinco tipos de corona conservan ciertas propiedades y que la digráfica resultante de cada una de éstas tienen una estructura semejante, encontramos una operación que englobara a éstas. En el siguiente capítulo trabajaremos núcleo por tdm en esta digráfica, la cual es:

Definición 2.6 Sean D una digráfica m -coloreada con $|V(D)| = n$, $|F(D)| = m$, donde $n \geq 2$ y $m \neq 0$, g un número entero cualquiera tal que $\min\{n, m\} \leq g \leq \max\{n, m\}$ y $\mathcal{H} = (H_i)_{i \in I = \{1, \dots, g\}}$ una sucesión de digráficas m -coloreadas ajenas en vértices dos a dos, con $V(H_i) = \{y_1^i, \dots, y_{p_i}^i\}$ y $p_i \geq 2$ para cada $i \in \{1, \dots, g\}$. Sea Ψ el conjunto de los m colores usados en la digráfica D . La **Ψ -corona generalizada** de la digráfica D y la sucesión \mathcal{H} es la digráfica $D\Delta\mathcal{H}$ tal que:

$$V(D\Delta\mathcal{H}) = V(D) \cup \bigcup_{i \in I} V(H_i)$$

y

$$F(D\Delta\mathcal{H}) = F(D) \cup \bigcup_{i \in I} F(H_i) \cup \bigcup_{i \in I} \{(y_t^i, x_c) - \text{coloreado con } \psi_i \text{ para al menos algún } x_c \in V(D)\}$$

con $t = 1, \dots, p_i$ y ψ_i un color cualquiera de Ψ .

En otras palabras la Corona Generalizada de una digráfica D y una sucesión de digráficas \mathcal{H} es la resultante de la unión del conjunto de vértices de D con el conjunto de vértices de la sucesión \mathcal{H} , de la unión del conjunto de flechas de D con el conjunto de flechas de la sucesión \mathcal{H} , conservando su color, y de hacer a todos los vértices de H_i adyacentes hacia por lo menos a un vértice de D y a este conjunto de flechas colorearlas con algún color de Ψ . Para ilustrar lo anterior, en la Figura 2.7 damos la construcción de la Corona Generalizada de la digráfica D cuyo conjunto de vértices es $V(D) = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ y la sucesión \mathcal{H} con $V(H_1) = \{y_1^1, y_2^1, y_3^1, y_4^1\}$, $V(H_2) = \{y_1^2, y_2^2, y_3^2\}$ y $V(H_3) = \{y_1^3, y_2^3, y_3^3\}$.

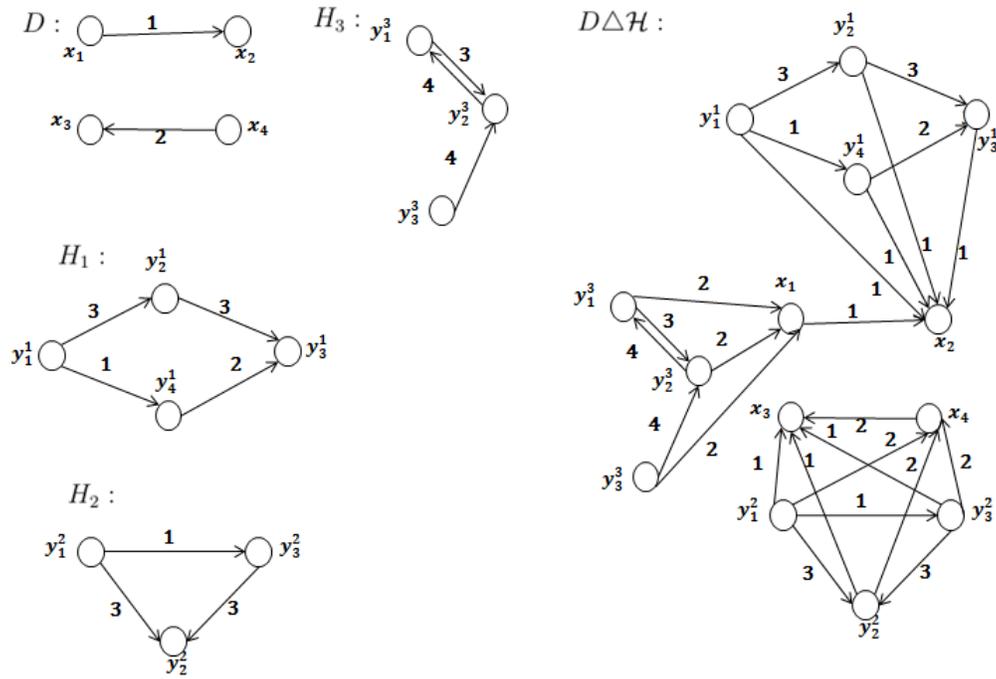


Figura 2.7: Ejemplo de una Corona Generalizada.

Observación 1 Notemos que por la construcción de $D\Delta H$ para cualquier $x \in V(D)$ no existe la xH_i - tdm en $D\Delta H$ con $i \in I$.

Observación 2 La corona para digráficas es una Corona Generalizada.

Demostración.

De la definición de corona para digráficas sabemos que $|V(D)| = n \geq 2$, $|F(D)| = m \neq 0$ (es fácil ver que el caso donde la corona es resultado de operar una digráfica m -coloreada D sin flechas y una sucesión cualquiera de digráficas m -coloreadas \mathcal{H} siempre tiene núcleo por tdm, por lo cual lo omitimos), $g = n$, $|V(H_i)| = p_i \geq 2$ con $i \in I = \{1, 2, \dots, n\}$ y los vértices de H_i son adyacentes a $x_i \in V(D)$ para toda $i \in I$, coloreando este conjunto de flechas con algún color de Ψ para toda $i \in I$. Por lo tanto la corona para digráficas es una Corona Generalizada. ■

Observación 3 La corona por flechas cumple con ser una Corona Generalizada.

Demostración.

De la definición de corona por flechas sabemos que $|V(D)| = n \geq 2$, $|F(D)| = q \neq 0$, $g = q$, $|V(H_i)| = p_i \geq 2$ con $i \in I = \{1, 2, \dots, q\}$ y los vértices de H_i son adyacentes a los vértices extremos de $a_i \in F(D)$ para toda $i \in I$, coloreando a este conjunto de flechas con algún color de Ψ . Por lo tanto cumple con las condiciones para ser una Corona Generalizada. ■

Observación 4 *La corona por vecinos exteriores cumple con ser una Corona Generalizada.*

Demostración.

De la definición de corona por vecinos exteriores sabemos que $|V(D)| = n \geq 2$, $|F(D)| = m \neq 0$ (ya que $\delta^+(x_i) \geq 1$ para toda $x_i \in V(D)$ con $i \in I = \{1, \dots, n\}$), $g = n$, $|V(H_i)| = p_i \geq 2$ con $i \in I = \{1, 2, \dots, n\}$ y los vértices de H_i son adyacentes a los vecinos exteriores de $x_i \in V(D)$ para toda $i \in I$, coloreando este conjunto de flechas con algún color de Ψ . Por lo tanto cumple con las condiciones para ser una Corona Generalizada. ■

Observación 5 *La corona por vecinos interiores cumple con ser una Corona Generalizada.*

Demostración.

De la definición de corona por vecinos interiores sabemos que $|V(D)| = n \geq 2$, $|F(D)| = m \neq 0$ (ya que $\delta^-(x_i) \geq 1$ para toda $x_i \in V(D)$ con $i \in I = \{1, \dots, n\}$), $g = n$, $|V(H_i)| = p_i \geq 2$ con $i \in I = \{1, 2, \dots, n\}$ y los vértices de H_i son adyacentes a los vecinos interiores de $x_i \in V(D)$ para toda $i \in I$, coloreando este conjunto de flechas con algún color de Ψ . Por lo tanto cumple con las condiciones para ser una Corona Generalizada. ■

Observación 6 *La corona por vecinos cumple con ser una Corona Generalizada.*

Demostración.

De la definición de corona por vecinos sabemos que $|V(D)| = n \geq 2$, $|F(D)| = m \neq 0$ (ya que $\delta(x_i) \geq 1$ para toda $x_i \in V(D)$ con $i \in I = \{1, \dots, n\}$), $g = n$, $|V(H_i)| = p_i \geq 2$ con $i \in I = \{1, 2, \dots, n\}$ y los vértices de H_i son adyacentes a los vecinos de $x_i \in V(D)$ para toda $i \in I$, coloreando este conjunto de flechas con algún color de Ψ . Por lo tanto cumple con las condiciones para ser una Corona Generalizada. ■

Capítulo 3

Núcleos por trayectorias dirigidas monocromáticas en la Ψ – corona generalizada.

En el artículo *On kernels by monochromatic paths in the corona of digraphs*[20], Iwona Włoch nos muestra las condiciones suficientes y necesarias para que la corona para digráficas tenga núcleo por tdm, no sin antes analizar los conjuntos independientes y absorbentes por tdm en dicha digráfica. Posteriormente da a conocer otras propiedades relacionadas con el resultado principal, como es la de ver si la corona es núcleo perfecta por tdm y calcula el número total de núcleos por tdm.

Tomando como base el trabajo de Włoch, en este capítulo veremos cuáles son las condiciones suficientes y necesarias para que en la Corona Generalizada, operación que definimos anteriormente, existan núcleos por tdm. A partir de este resultado probaremos cuándo dicha corona es núcleo perfecta por tdm y su cantidad total de núcleos por tdm. De igual manera veremos que tales resultados se cumplen para las diferentes coronas que definimos en el capítulo dos.

3.1. Independencia por tdm en la Ψ – corona generalizada.

Antes de dar las condiciones suficientes y necesarias para la existencia de núcleos por tdm en la corona generalizada primero veremos cual es la forma que tienen los conjuntos independientes por tdm y absorbentes por tdm. Por ser una definición nueva para el lector recordemos lo que es la Corona Generalizada.

Definición 2.6 Sean D una digráfica m -coloreada con $|V(D)| = n$, $|F(D)| = m$, donde $n \geq 2$ y $m \neq 0$, g un número entero cualquiera tal que $\min\{n, m\} \leq g \leq \max\{n, m\}$ y $\mathcal{H} = (H_i)_{i \in I = \{1, \dots, g\}}$ una sucesión de digráficas m -coloreadas ajenas en vértices dos a dos, con $V(H_i) = \{y_1^i, \dots, y_{p_i}^i\}$ y $p_i \geq 2$ para cada $i \in \{1, \dots, g\}$. Sea Ψ el conjunto de los m colores usados en la digráfica D . La **Ψ – corona generalizada** de la digráfica D y la sucesión \mathcal{H} es la digráfica $D\Delta\mathcal{H}$ tal que:

$$V(D\Delta\mathcal{H}) = V(D) \cup \bigcup_{i \in I} V(H_i)$$

y

$$F(D\Delta\mathcal{H}) = F(D) \cup \bigcup_{i \in I} F(H_i) \cup \bigcup_{i \in I} \{(y_t^i, x_c) - \text{coloreado con } \psi_i \text{ para al menos algún } x_c \in V(D)\}$$

con $t = 1, \dots, p_i$ y ψ_i un color cualquiera de Ψ .

Nota: En los siguientes resultados D , \mathcal{H} , I y $D\Delta\mathcal{H}$ tienen las condiciones dadas en la definición anterior. De igual manera recordamos que $V(H_i)V(D) - tdm$ (denotado por comodidad como $H_iD - tdm$ en los siguientes capítulos) hace referencia a que entre algún $y_t^i \in V(H_i)$ y algún $x \in V(D)$ existe una tdm .

Teorema 3.1 Un subconjunto $S^* \subset V(D\Delta\mathcal{H})$, tal que $S^* \cap V(D) \neq \emptyset$, es un conjunto independiente por tdm de $D\Delta\mathcal{H}$ si y sólo si

$$S^* = S \cup \bigcup_{i \in I_1} S_i$$

donde $S \subset V(D)$ es un conjunto independiente por tdm de D distinto del vacío, $I_1 = \{i \in I \mid \text{no existe } H_iS - tdm\}$ y S_i un conjunto independiente por tdm de H_i para toda $i \in I_1$.

Demostración.

Demostraremos la suficiencia. Sea $S^* \subset V(D\Delta\mathcal{H})$ un conjunto independiente por trayectorias dirigidas monocromáticas de $D\Delta\mathcal{H}$ tal que $S = S^* \cap V(D) \neq \emptyset$. Como $S \subset S^*$ entonces S es independiente por tdm .

Cualquier conjunto S^* puede ser de las siguientes dos maneras. Si $S^* = S$, entonces se cumple lo que queremos. Si $S^* \neq S$, entonces $V(H_i) \cap S^* \neq \emptyset$ para algún $i \in I$. Sea $S_i = V(H_i) \cap S^*$, como S^* es independiente por tdm, entonces cada S_i es independiente por tdm. Nuevamente por ser S^* independiente por tdm y por definición de la Corona Generalizada, no existen tdm de S_i hacia S , ni existen tdm de S hacia S_i , con $i \in I_1 = \{i \in I \mid \text{no existe } H_i S - \text{tdm}\}$. Por lo que el conjunto S^* lo podemos escribir de la siguiente manera:

$$S^* = S \cup \bigcup_{i \in I_1} S_i$$

donde $S \subset V(D)$ es un conjunto independiente por tdm de D distinto del vacío, $I_1 = \{i \in I \mid \text{no existe } H_i S - \text{tdm}\}$ y S_i un conjunto independiente por tdm de H_i para toda $i \in I_1$.

Ahora demostraremos la necesidad. Sea

$$S^* = S \cup \bigcup_{i \in I_1} S_i$$

donde $S \subset V(D)$ es un conjunto independiente por tdm de D distinto del vacío, $I_1 = \{i \in I \mid \text{no existe } H_i S - \text{tdm}\}$ y S_i un conjunto independiente por tdm de H_i para toda $i \in I_1$, por hipótesis sabemos que tanto S como S_i son independientes por tdm en $D\Delta\mathcal{H}$, falta ver que S^* es independiente por tdm en $D\Delta\mathcal{H}$. Tomemos dos vértices en S^* y veamos que no existen tdm entre ellos, por lo que tenemos los siguientes casos:

Caso 1. Si $x_p \in S$ y $y_t^i \in S_i$ con $i \in I_1$.

Por construcción de la Ψ – corona generalizada sabemos que solo existen flechas de H_i hacia D por lo que no existe la $x_p y_t^i - \text{tdm}$ con $i \in I_1$. Además por hipótesis sabemos que los S_i pertenecen a las H_i tales que no existe $H_i S - \text{tdm}$. Entonces no existe la $y_t^i x_p - \text{tdm}$ con $i \in I_1$.

Caso 2. Si $y_t^i \in S_i$ y $y_m^j \in S_j$ para toda $i, j \in I_1$ con $i \neq j$.

Por construcción de la Ψ – corona generalizada sabemos que no existen las $H_i H_j - \text{tdm}$ ni existen las $H_j H_i - \text{tdm}$. Entonces no puede existir la $y_t^i y_m^j - \text{tdm}$ para toda $i, j \in I_1$ con $i \neq j$.

Por lo tanto S^* es independiente por tdm en $D\Delta\mathcal{H}$. ■

Para el caso en que $S^* \cap V(D) = \emptyset$ tenemos el siguiente resultado:

Teorema 3.2 *Un subconjunto $S^* \subset V(D\Delta\mathcal{H})$ tal que $S^* \cap V(D) = \emptyset$, es un conjunto independiente por tdm de $D\Delta\mathcal{H}$ si y sólo si*

$$S^* = \bigcup_{i \in I_2} S_i$$

donde I_2 es un subconjunto cualquiera de I y S_i un conjunto independiente por tdm de H_i para toda $i \in I_2$.

Demostración.

Demostraremos la suficiencia. Sea $S^* \subset V(D\Delta\mathcal{H})$ un conjunto independiente por tdm en $D\Delta\mathcal{H}$ tal que $S^* \cap V(D) = \emptyset$, por lo tanto $S^* \subset \bigcup_{i \in I} V(H_i)$. Entonces S^* se puede ver de la siguiente manera:

$$S^* = \bigcup_{i \in I_2} S_i$$

donde I_2 es un subconjunto cualquiera de I y S_i un conjunto independiente por tdm de H_i para toda $i \in I_2$.

Ahora bien para demostrar la necesidad sea

$$S^* = \bigcup_{i \in I_2} S_i$$

donde I_2 es un subconjunto cualquiera de I y S_i un conjunto independiente por tdm de H_i para toda $i \in I_2$. Por la definición de la Ψ – corona generalizada, no existe una tdm de H_i a H_j para toda i, j con $i \neq j$, por lo que no existe la tdm de S_i a S_j para toda i, j con $i \neq j$. Por lo tanto S^* es un conjunto independiente por tdm. ■

Recordemos que en el capítulo anterior vimos que los cinco tipos de corona: por flechas $D \diamond \mathcal{H}$, por vecinos exteriores $D\star^+\mathcal{H}$, por vecinos interiores $D\star^-\mathcal{H}$, por vecinos $D\star\mathcal{H}$ y corona para digráficas $D \circ \mathcal{H}$, cumplen ser casos especiales de la Corona Generalizada, por lo que por los teoremas 3.1 y 3.2 los siguientes resultados son válidos:

Teorema 3.3 *Un subconjunto $S^* \subset V(D \circ \mathcal{H})((D \diamond \mathcal{H}), (D\star^+\mathcal{H}), (D\star^-\mathcal{H}), (D\star\mathcal{H}))$, tal que $S^* \cap V(D) \neq \emptyset$, es un conjunto independiente por tdm de $D \circ \mathcal{H}$ ($D \diamond \mathcal{H}, D\star^+\mathcal{H}, D\star^-\mathcal{H}, D\star\mathcal{H}$) si y sólo si*

$$S^* = S \cup \bigcup_{i \in I_1} S_i$$

donde $S \subset V(D)$ es un conjunto independiente por tdm de D y distinto del vacío, $I_1 = \{i \in I \mid \text{no existe } H_i S - \text{tdm}\}$ y S_i un conjunto independiente por tdm de H_i para toda $i \in I_1$.

Teorema 3.4 *Un subconjunto $S^* \subset V(D \circ \mathcal{H})((D \diamond \mathcal{H}), (D\star^+\mathcal{H}), (D\star^-\mathcal{H}), (D\star\mathcal{H}))$ tal que $S^* \cap V(D) = \emptyset$, es un conjunto independiente por tdm de $D \circ \mathcal{H}$ ($D \diamond \mathcal{H}, D\star^+\mathcal{H}, D\star^-\mathcal{H}, D\star\mathcal{H}$) si y sólo si*

$$S^* = \bigcup_{i \in I_2} S_i$$

donde I_2 es un subconjunto cualquiera de I y S_i un conjunto independiente por tdm de H_i para toda $i \in I_1$.

3.2. Absorbencia por tdm en la Ψ –corona generalizada.

Ahora que hemos visto como es cualquier conjunto independiente por tdm en la corona, proseguimos a describir en el siguiente teorema cómo es un conjunto absorbente por tdm en la corona generalizada. Pero antes daremos un resultado que nos ayudará a demostrar dicho teorema.

Proposición 3.1 *Si Q^* es un conjunto absorbente por tdm en $D\Delta\mathcal{H}$, entonces $Q = Q^* \cap V(D)$ es un conjunto absorbente por tdm en D .*

Demostración.

Sea Q^* un conjunto absorbente por tdm en $D\Delta\mathcal{H}$ y $Q = Q^* \cap V(D)$, supongamos que Q no es un conjunto absorbente por tdm en D , entonces existe $x \in V(D) \setminus Q$ tal que no existe una tdm de x a Q . Pero como Q^* es un conjunto absorbente de $D\Delta\mathcal{H}$ entonces x es absorbido por tdm por $Q^* \setminus Q \subseteq \bigcup_{i \in I} V(H_i)$, es decir, existe una xH_i –tdm para algún $i \in I$. Pero por definición de la Ψ –corona generalizada sabemos que no existen flechas de D hacia H_i para toda $i \in I$, lo cual contradice lo anterior. Por lo tanto $Q = Q^* \cap V(D)$ es un conjunto absorbente por tdm de D . ■

Proposición 3.2 *Si Q^* es un conjunto absorbente por tdm de $D\Delta\mathcal{H}$, entonces $Q^* \cap V(D) \neq \emptyset$*

Demostración.

Sea Q^* un conjunto absorbente por tdm de $D\Delta\mathcal{H}$, por el resultado anterior sabemos que $Q^* \cap V(D)$ es un conjunto absorbente por tdm en D implicando que éste debe ser distinto del vacío. ■

Teorema 3.5 *Un subconjunto $Q^* \subseteq V(D\Delta\mathcal{H})$, es un conjunto absorbente por tdm de $D\Delta\mathcal{H}$ si y sólo si*

$$Q^* = Q \cup \bigcup_{i \in I_1} Q_i \cup \bigcup_{j \in I \setminus I_1} Q_j$$

donde $Q \subseteq V(D)$ es un conjunto absorbente por tdm de D , $I_1 = \{i \in I \mid \text{no existe } H_i Q - \text{tdm}\}$, Q_i es un conjunto absorbente por tdm de H_i para cada $i \in I_1$ y Q_j un subconjunto cualquiera de $V(H_j)$ para cada $j \in (I \setminus I_1)$.

Demostración.

Demostraremos la suficiencia. Sea $Q^* \subseteq V(D\Delta\mathcal{H})$ un conjunto absorbente por tdm de $D\Delta\mathcal{H}$. Por la Proposición 3.1 sabemos que $Q^* \cap V(D)$ es un conjunto absorbente por tdm en D , llamemos Q a la intersección de estos conjuntos.

Notemos que $(Q^* \setminus Q) \subseteq \bigcup_{i \in I} V(H_i)$ para toda $i \in I$. Tomemos $I_1 = \{i \in I \mid \text{no existe } H_i Q - \text{tdm}\}$, es decir, para todo $y_t^i \in H_i$ con $i \in I_1$ y para toda $x \in Q$ no existe la $y_t^i x - \text{tdm}$. Como Q^* es un conjunto absorbente por tdm de $D\Delta\mathcal{H}$, entonces $Q_i = Q^* \cap V(H_i)$ debe ser un conjunto absorbente por tdm de H_i con $i \in I_1$. Por otro lado consideremos $j \in (I \setminus I_1)$, entonces por definición de la corona generalizada y de I_1 para todo $y_t^j \in H_j$ y para algún $x \in Q$ existe la $y_t^j x - \text{tdm}$, por lo cual $Q_j = Q^* \cap V(H_j)$ es un subconjunto cualquiera de $V(H_j)$. Entonces podemos ver a Q^* de la siguiente forma:

$$Q^* = Q \cup \bigcup_{i \in I_1} Q_i \cup \bigcup_{i \in I \setminus I_1} Q_j$$

donde $Q \subseteq V(D)$ es un conjunto absorbente por tdm de D , $I_1 = \{i \in I \mid \text{no existe } H_i Q - \text{tdm}\}$, Q_i es un conjunto absorbente por tdm de H_i para cada $i \in I_1$ y Q_j un subconjunto cualquiera de $V(H_j)$ para cada $j \in (I \setminus I_1)$.

Ahora demostraremos la necesidad. Sea

$$Q^* = Q \cup \bigcup_{i \in I_1} Q_i \cup \bigcup_{j \in I \setminus I_1} Q_j$$

donde $Q \subseteq V(D)$ es un conjunto absorbente por tdm de D , $I_1 = \{i \in I \mid \text{no existe } H_i Q - \text{tdm}\}$, Q_i es un conjunto absorbente por tdm de H_i para cada $i \in I_1$ y Q_j un subconjunto cualquiera de $V(H_j)$ para cada $j \in (I \setminus I_1)$. Mostraremos que Q^* es absorbente, es decir, para todo $x \in V(D \Delta \mathcal{H}) \setminus Q^*$ existe una $xy - \text{tdm}$ con $y \in Q^*$. Por definición de la Corona Generalizada tenemos los siguientes casos:

Caso 1. $x \in V(D) \setminus Q^*$. Sabemos que Q es un conjunto absorbente por tdm de D por lo que existe una tdm de x a Q . Por definición de Q^* sabemos que $Q \subseteq Q^*$, por lo tanto existe una tdm de x a Q^* .

Caso 2. $x \in V(H_i) \setminus Q^*$ para algún $i \in I_1$. Por definición de Q^* tenemos que Q_i es un conjunto absorbente por tdm de H_i con $i \in I_1$, por lo que existe una tdm de x a Q_i , es decir, existe una tdm de x a Q^* .

Caso 3. $x \in V(H_j) \setminus Q^*$ para algún $j \in I \setminus I_1$. Sabemos que $I \setminus I_1$ es el conjunto de las $j \in I$ tal que existe una tdm de H_j a Q . Por lo tanto por definición de la corona generalizada existe una tdm de x a Q^* .

Por lo tanto Q^* es un conjunto absorbente por tdm de $D \Delta \mathcal{H}$. ■

Al igual que en la sección anterior, el siguiente resultado es válido para los diferentes tipos de corona:

Teorema 3.6 *Un subconjunto $Q^* \subseteq V(D \circ \mathcal{H})((D \diamond \mathcal{H}), (D \star^+ \mathcal{H}), (D \star^- \mathcal{H}), (D \star \mathcal{H}))$ tal que $Q^* \cap V(D) \neq \emptyset$, es un conjunto absorbente por tdm de $D \circ \mathcal{H}$ ($D \diamond \mathcal{H}, D \star^+ \mathcal{H}, D \star^- \mathcal{H}, D \star \mathcal{H}$) si y sólo si*

$$Q^* = Q \cup \bigcup_{i \in I_1} Q_i \cup \bigcup_{j \in I \setminus I_1} Q_j$$

donde $Q \subseteq V(D)$ es un conjunto absorbente por tdm de D , $I_1 = \{i \in I \mid \text{no existe } H_i Q - \text{tdm}\}$, Q_i es un conjunto absorbente por tdm de H_i para toda $i \in I_1$ y Q_j un subconjunto cualquiera de $V(H_j)$ para cada $j \in (I \setminus I_1)$.

3.3. Núcleo por tdm en la Ψ – corona generalizada.

De una manera similar a como describimos los conjuntos independientes por tdm y los conjuntos absorbentes por tdm de la Corona Generalizada, haremos lo mismo con sus núcleos por tdm. El siguiente corolario, al igual que los teoremas anteriores, serán de ayuda para la demostración del resultado principal de esta sección, el Teorema 3.7.

Corolario 3.1 *Si N es un núcleo por tdm de $D\Delta\mathcal{H}$, entonces $N \cap V(D)$ es un núcleo por tdm de D .*

Demostración.

Sea N un núcleo por tdm de $D\Delta\mathcal{H}$. Como $N \cap V(D) \subset N$, entonces $N \cap V(D)$ cumple ser un conjunto independiente por tdm en D . Además por la Proposición 3.1 sabemos que $N \cap V(D)$ es un conjunto absorbente por tdm en D . Por lo tanto $N \cap V(D)$ es un núcleo por tdm en D . ■

Corolario 3.2 *Si N es un núcleo por tdm de $D\Delta\mathcal{H}$, entonces $N \cap V(D) \neq \emptyset$.*

Demostración.

Sea N un núcleo por tdm de $D\Delta\mathcal{H}$. Por definición N es un conjunto absorbente por tdm de $D\Delta\mathcal{H}$, entonces por la Proposición 3.2 $N \cap V(D) \neq \emptyset$. ■

Teorema 3.7 *Un subconjunto $N^* \subset V(D\Delta\mathcal{H})$, es un núcleo por tdm de $D\Delta\mathcal{H}$ si y sólo si existe un núcleo por tdm N en D tal que*

$$N^* = N \cup \bigcup_{i \in I_1} N_i$$

donde $I_1 = \{i \in I \mid \text{no existe } H_i N - \text{tdm}\}$, N_i es un núcleo por tdm de H_i para cada $i \in I_1$.

Demostración.

Demostraremos la suficiencia. Sea $N^* \subset V(D\Delta\mathcal{H})$ un núcleo por tdm de $D\Delta\mathcal{H}$, por el Corolario 3.1 sabemos que $N = N^* \cap V(D)$ es un núcleo por tdm de D .

Cualquier conjunto N^* puede ser de las siguientes dos maneras. Si $N^* = N$, entonces se cumple lo que queremos. Si $N^* \neq N$, entonces $V(H_i) \cap N^* \neq \emptyset$ para algún $i \in I$. Sea $N_i = V(H_i) \cap N^*$ con $N_i \neq \emptyset$, como N^* es núcleo por tdm en $D\Delta\mathcal{H}$, entonces cada N_i es independiente por tdm en H_i . Por definición de la Corona Generalizada y de que N^* es independiente por tdm en $D\Delta\mathcal{H}$, no existen tdm de N_i hacia N , ni existen tdm de N hacia N_i , es decir, $i \in I_1 = \{i \in I \mid \text{no existe } H_i N - \text{tdm}\}$. Como N^* es núcleo por tdm de $D\Delta\mathcal{H}$, N_i es absorbente por tdm en H_i y por lo tanto núcleo por tdm de H_i . Por lo que el conjunto N^* lo podemos escribir de la siguiente manera:

$$N^* = N \cup \bigcup_{i \in I_1} N_i$$

donde N es un núcleo por tdm de D , $I_1 = \{i \in I \mid \text{no existe } H_i N - \text{tdm}\}$, N_i es un núcleo por tdm de H_i para cada $i \in I_1$.

Ahora demostraremos la necesidad. Sea

$$N^* = N \cup \bigcup_{i \in I_1} N_i$$

donde $I_1 = \{i \in I \mid \text{no existe } H_i N - \text{tdm}\}$, N_i es un núcleo por tdm de H_i para cada $i \in I_1$. Por el Teorema 3.1 sabemos que N^* es un conjunto independiente por tdm y si tomamos a $N_j = \emptyset$ para toda $j \in (I \setminus I_1)$ entonces del Teorema 3.5 N^* es un conjunto absorbente por tdm, por lo tanto N^* es núcleo por tdm. ■

De la demostración del teorema anterior podemos ver que la existencia de núcleo por tdm de la corona depende mucho de que exista un núcleo por tdm en la digráfica D . De igual forma no podemos tener núcleo en la corona generalizada si las H_i no tiene núcleo por tdm, con $i \in I_1 = \{i \in I \mid \text{no existe } H_i N - \text{tdm}\}$ y N un núcleo por tdm de D .

Corolario 3.3 *Una digráfica $D\Delta\mathcal{H}$ tiene un núcleo por tdm si y sólo si H_i tiene un núcleo por tdm con $i \in I_1$, donde $I_1 = \{i \in I \mid \text{no existe } H_i N - \text{tdm}\}$ y N es un núcleo por tdm de D .*

Demostración.

Consecuencia inmediata del Teorema 3.4. ■

Como los diferentes tipos de corona son un caso especial de la Corona Generalizada, los siguientes resultados se cumplen:

Corolario 3.4 *Si N es un núcleo por tdm de $D \circ \mathcal{H}$ ($D \diamond \mathcal{H}, D \star^+ \mathcal{H}, D \star^- \mathcal{H}, D \star \mathcal{H}$), entonces $N \cap V(D)$ es un núcleo por tdm de D .*

Corolario 3.5 *Si N es un núcleo por tdm de $D \circ \mathcal{H}$ ($D \diamond \mathcal{H}, D \star^+ \mathcal{H}, D \star^- \mathcal{H}, D \star \mathcal{H}$), entonces $N \cap V(D) \neq \emptyset$.*

Teorema 3.8 *Un subconjunto $N^* \subset V(D \circ \mathcal{H})((D \diamond \mathcal{H}), (D \star^+ \mathcal{H}), (D \star^- \mathcal{H}), (D \star \mathcal{H}))$, es un núcleo por tdm de $D \circ \mathcal{H}$ ($D \diamond \mathcal{H}, D \star^+ \mathcal{H}, D \star^- \mathcal{H}, D \star \mathcal{H}$) si y sólo si existe un núcleo por tdm N en D tal que*

$$N^* = N \cup \bigcup_{i \in I_1} N_i$$

donde $I_1 = \{i \in I \mid \text{no existe } H_i N - \text{tdm}\}$, N_i es un núcleo por tdm de H_i para cada $i \in I_1$.

Corolario 3.6 *Una digráfica $D \circ \mathcal{H}$ ($D \diamond \mathcal{H}, D \star^+ \mathcal{H}, D \star^- \mathcal{H}, D \star \mathcal{H}$) tiene un núcleo por tdm si y sólo si H_i tiene núcleo por tdm con $i \in I_1$, donde $I_1 = \{i \in I \mid \text{no existe } H_i N - \text{tdm}\}$ y N es un núcleo por tdm de D .*

3.4. Núcleo perfecta por tdm.

En esta sección daremos las condiciones para que la corona generalizada sea núcleo perfecta por tdm, es decir, veremos cuándo toda subdigráfica inducida de la corona tiene un núcleo por tdm. La siguiente proposición, que es consecuencia inmediata de la definición de la Corona Generalizada, nos ayudará a demostrar ésto, ya que nos dice como es cualquier subdigráfica inducida de la corona.

Proposición 3.3 *Toda subdigráfica inducida de $D \Delta \mathcal{H}$ es:*

- Una subdigráfica inducida de H_i para algún $i \in I$.*
- Una subdigráfica inducida de D .*
- Una subdigráfica inducida de la forma $\tilde{D} \Delta \tilde{\mathcal{H}}$ donde \tilde{D} es una subdigráfica inducida de D tal que $V(\tilde{D}) = \{x_t \mid t \in \tilde{I}\}$, donde $\tilde{I} \subseteq I$ y $\tilde{\mathcal{H}} = (\tilde{H}_t)$ con $t \in \tilde{I}$, donde \tilde{H}_t es una subdigráfica inducida de H_t .*
- La unión de las digráficas a, b, c.*

Teorema 3.9 *Una digráfica $D \Delta \mathcal{H}$ es núcleo perfecta por tdm si y sólo si D y H_i son núcleo perfectas por tdm para toda $i \in I$*

Demostración.

Demostraremos la suficiencia. Sea $D\Delta\mathcal{H}$ una digráfica núcleo perfecta por tdm, entonces sus subdigráficas inducidas son núcleo perfectas por tdm, en particular, D y H_i para toda $i \in I$.

Ahora bien para la necesidad sean D y H_i núcleo perfectas por tdm para toda $i \in I$, por la Proposición 3.3 debemos demostrar que los cuatro tipos de subdigráficas inducidas tienen núcleo por tdm. Por hipótesis D y H_i son núcleo perfectas por tdm para toda $i \in I$ (inciso a y b). Para las subdigráficas del tipo c, sean N un núcleo por tdm de \tilde{D} una subdigráfica inducida de D e $I_1 = \{i \in I \mid \text{no existe } H_i N - \text{tdm}\}$. Como las H_i con $i \in I$, son núcleo perfectas por tdm, las H_j con $j \in I_1$, y cualquiera de sus subdigráficas inducidas \tilde{H}_j son núcleo perfectas por tdm, entonces por el Corolario 3.3 implica que $\tilde{D}\Delta\tilde{\mathcal{H}}$ tiene núcleo por tdm. Observemos que si tomamos $\tilde{D} = D$ y $\tilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H}$, entonces $D\Delta\mathcal{H}$ tiene núcleo por tdm. Por último puesto que los anteriores tipos de subdigráficas son núcleo perfectas por tdm y la unión de éstas sigue siendo núcleo perfecta por tdm, las subdigráficas inducidas del tipo d cumplen la propiedad. Por lo tanto $D\Delta\mathcal{H}$ es núcleo perfecta por tdm. ■

Como los cinco tipos de corona son un caso especial de la Corona Generalizada, el siguiente resultado se cumple:

Teorema 3.10 *Una digráfica $D \circ \mathcal{H}$ ($D \diamond \mathcal{H}, D\star^+\mathcal{H}, D\star^-\mathcal{H}, D\star\mathcal{H}$) es núcleo perfecta por tdm si y sólo si D y H_i son núcleo perfectas por tdm para toda $i \in I$*

3.5. Número total de conjuntos ITDM, conjuntos ATDM y NTDM de la Ψ -Corona Generalizada.

Sabemos por los teoremas de las secciones anteriores cuándo la Corona Generalizada tiene conjuntos independientes por tdm, conjuntos absorbentes por tdm y núcleos por tdm. No es raro preguntarse teniendo esta información cuántos hay. Usando el cálculo combinatorio en los tres teoremas siguientes llegaremos a fórmulas que nos permitirán saber cuántos tenemos.

Es importante señalar que calcularemos la cantidad de tales conjuntos a partir de la información de D y \mathcal{H} , sin embargo, no existe un método para saber el número total de conjuntos independientes por tdm, conjuntos absorbentes por tdm y núcleos por tdm de una digráfica m -coloreada D cualquiera.

Para una lectura más sencilla recordemos que abreviaremos independiente por tdm como $ITDM$, absorbente por tdm como $ATDM$ y núcleo por tdm como $NTDM$. A estas tres abreviaciones al agregarles al principio la letra \mathcal{N} nos referiremos al número de todos los conjuntos independientes, absorbentes y núcleos por tdm de una digráfica D , respectivamente.

3.5.1. Independientes por trayectorias dirigidas monocromáticas.

Teorema 3.11 *Sea $S = \{S_1, \dots, S_t\}$, $t \geq 1$ la familia de todos los conjuntos independientes por tdm distintos del vacío de D . Si $S_r \in S$ e $I_r = \{j \in I \mid \text{no existe } H_j S_r - \text{tdm}\}$, entonces:*

$$\mathcal{NITDM}(D\Delta\mathcal{H}) = \prod_{i \in I} \mathcal{NITDM}(H_i) + \sum_{r=1}^t f_1(I_r)$$

donde

$$f_1(I_r) = \begin{cases} \prod_{j \in I_r} \mathcal{NITDM}(H_j) & \text{si } I_r \neq \emptyset \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Demostración.

Sea S' la familia de todos los conjuntos independientes por tdm de $D\Delta\mathcal{H}$ los cuales cumplen que su intersección con los vértices de D es distinto del vacío. Sea S'' la familia de todos los conjuntos independientes por tdm de $D\Delta\mathcal{H}$ los cuales cumplen que su intersección con los vértices de D es vacía. Podemos ver que $\mathcal{NITDM}(D\Delta\mathcal{H}) = |S'| + |S''|$.

Por el Teorema 3.1 para formar un conjunto independiente por tdm de $D\Delta\mathcal{H}$ perteneciente a S' primero debemos escoger un conjunto independiente por tdm de D . Sea $S = \{S_1, \dots, S_t\}$ con $t \geq 1$ la familia de todos los conjuntos independientes por tdm D . Asumimos que $S_r \in S$ e $I_r = \{j \in I \mid \text{no existe } H_j S_r - \text{tdm}\}$, por lo cual tenemos los siguientes casos:

1. Si $I_r \neq \emptyset$, entonces en cada H_j con $j \in I_r$ nosotros escogemos un conjunto independiente por tdm arbitrario. La cantidad de conjuntos independientes por tdm que contengan a S_r va a ser igual a la cantidad de maneras en las que se puedan acomodar los conjuntos independientes por tdm de los H_j con $j \in I_r$, es decir:

$$\prod_{j \in I_r} \mathcal{NITDM}(H_j)$$

2. Si $I_r = \emptyset$, entonces S_r es un conjunto independiente por tdm de la familia S' . Por los dos casos anteriores podemos ver que:

$$|S'| = \sum_{r=1}^t f_1(I_r)$$

donde

$$f_1(I_r) = \begin{cases} \prod_{j \in I_r} \mathcal{NITDM}(H_j) & \text{si } I_r \neq \emptyset \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Por último, por como definimos a S'' , entonces en cada H_i con $i \in I$ podemos tomar cualquier conjunto independiente por tdm, esto por el Teorema 3.2. La cantidad de conjuntos independientes por tdm de este tipo es igual a la cantidad de maneras en que podamos seleccionar los conjuntos independientes por tdm de cada H_i con $i \in I$, es decir:

$$\prod_{i \in I} \mathcal{NITDM}(H_i)$$

Por lo tanto la cantidad de conjuntos independientes por tdm de $D\Delta\mathcal{H}$ es:

$$\mathcal{NITDM}(D\Delta\mathcal{H}) = |S'| + |S''| = \prod_{i \in I} \mathcal{NITDM}(H_i) + \sum_{r=1}^t f_1(I_r)$$

donde

$$f_1(I_r) = \begin{cases} \prod_{j \in I_r} \mathcal{NITDM}(H_j) & \text{si } I_r \neq \emptyset \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

■

3.5.2. Absorbentes por trayectorias dirigidas monocromáticas.

Teorema 3.12 *Sea $Q = \{Q_1, \dots, Q_t\}$, $t \geq 1$ la familia de todos los conjuntos absorbentes por tdm distintos del vacío de D . Si $Q_r \in Q$ e $I_r = \{j \in I \mid \text{no existe } H_j Q_r - \text{tdm}\}$, entonces:*

$$\mathcal{NATDM}(D\Delta\mathcal{H}) = \sum_{r=1}^t (f_2(I_r) \prod_{s \in I \setminus I_r} 2^{p_s})$$

donde

$$f_2(I_r) = \begin{cases} \prod_{j \in I_r} \mathcal{NATDM}(H_j) & \text{si } I_r \neq \emptyset \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Demostración.

Sea Q' la familia de todos los conjuntos absorbentes de $D\Delta\mathcal{H}$. Por la demostración del Teorema 3.5 todo conjunto absorbente por tdm de $D\Delta\mathcal{H}$ debe contener un conjunto absorbente por tdm de D , entonces podemos notar que $|Q'| = \mathcal{NATDM}(D\Delta\mathcal{H})$. Sea $Q = \{Q_1, \dots, Q_t\}$ con $t \geq 1$ la familia de todos los conjuntos absorbentes por tdm de D . Asumimos que $Q_r \in Q$ e $I_r = \{j \in I \mid \text{no existe } H_j Q_r - \text{tdm}\}$, por lo cual tenemos los siguientes casos:

1. Si $I_r \neq \emptyset$, entonces en cada H_j con $j \in I_r$ nosotros elegimos un conjunto cualquiera absorbente por tdm y en cada H_s con $s \in I \setminus I_r$ escogemos un subconjunto cualquiera de sus vértices, esto debido al Teorema 3.5. Por lo anterior la cantidad de conjuntos absorbentes por tdm que contengan a Q_r va a ser igual a la cantidad de formas en que podamos acomodar los conjuntos absorbentes de cada H_j con $j \in I_r$ y los subconjuntos de vértices de cada H_s , con $s \in I \setminus I_r$, es decir:

$$\prod_{j \in I_r} \mathcal{NATDM}(H_j) \prod_{s \in I \setminus I_r} 2^{p_s}$$

donde $p_s = |V(H_s)| \geq 1$ para cada $s \in I \setminus I_r$.

2. Si $I_r = \emptyset$, entonces por el Teorema 3.5 la cantidad de conjuntos absorbentes por tdm que contengan a Q_r va a ser igual a la cantidad de formas en que podamos acomodar los subconjuntos de vértices de cada H_s , con $s \in I \setminus I_r$, es decir:

$$\prod_{s \in I \setminus I_r} 2^{p_s}$$

De los dos casos anteriores podemos ver que la cantidad de conjuntos absorbentes por tdm de $D\Delta\mathcal{H}$ es:

$$\mathcal{NATDM}(D\Delta\mathcal{H}) = \sum_{r=1}^t (f_2(I_r) \prod_{s \in I \setminus I_r} 2^{p_s})$$

donde

$$f_2(I_r) = \begin{cases} \prod_{j \in I_r} \mathcal{NATDM}(H_j) & \text{si } I_r \neq \emptyset \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

■

3.5.3. Núcleos por trayectorias dirigidas monocromáticas.

Teorema 3.13 *Sea $N = \{N_1, \dots, N_t\}$, $t \geq 1$ la familia de todos los núcleos por tdm de D . Si $N_r \in N$ e $I_r = \{j \in I \mid \text{no existe } H_j N_r - \text{tdm}\}$, entonces:*

$$\mathcal{NNTDM}(D\Delta\mathcal{H}) = \sum_{r=1}^t (f_3(I_r))$$

donde

$$f_3(I_r) = \begin{cases} \prod_{j \in I_r} \mathcal{NNTDM}(H_j) & \text{si } I_r \neq \emptyset \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Demostración.

Sea N' la familia de todos los núcleos por tdm de $D\Delta\mathcal{H}$. Por el Corolario 3.2 sabemos que todo núcleo por tdm de $D\Delta\mathcal{H}$ contiene vértices de D , por lo que $|N'| = \mathcal{NNTDM}(D\Delta\mathcal{H})$. Sea $N = \{N_1, \dots, N_t\}$ con $t \geq 1$ la familia de todos los núcleos por tdm de D . Asumimos que $N_r \in N$ e $I_r = \{j \in I \mid \text{no existe } H_j N_r - \text{tdm}\}$, por lo cual tenemos los siguientes casos:

1. Si $I_r \neq \emptyset$, entonces por el Teorema 3.7 en cada H_j con $j \in I_r$ tomamos un núcleo por tdm. La cantidad de núcleos por tdm que contengan a N_r va a ser igual a la cantidad de formas en que podamos acomodar los núcleos por tdm de cada H_j , con $j \in I_r$, es decir:

$$\prod_{j \in I_r} \mathcal{NNTDM}(H_j)$$

2. Si $I_r = \emptyset$, entonces N_r es núcleo por tdm de $D\Delta\mathcal{H}$.

Por los anteriores casos podemos ver que la cantidad de núcleos por tdm de $D\Delta\mathcal{H}$ es igual a:

$$|N'| = \mathcal{NNTDM}(D\Delta\mathcal{H}) = \sum_{r=1}^t (f_3(I_r))$$

donde

$$f_3(I_r) = \begin{cases} \prod_{j \in I_r} \mathcal{NNTDM}(H_j) & \text{si } I_r \neq \emptyset \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

■

Al igual que en las anteriores secciones los siguientes teoremas se cumplen:

Teorema 3.14 Sea $S = \{S_1, \dots, S_t\}$, $t \geq 1$ la familia de todos los conjuntos independientes por tdm distintos del vacío de D . Si $S_r \in S$ e $I_r = \{j \in I \mid \text{no existe } H_j S_r - \text{tdm}\}$, entonces para $D \circ \mathcal{H}$ ($D \diamond \mathcal{H}, D\star^+\mathcal{H}, D\star^-\mathcal{H}, D\star\mathcal{H}$):

$$\mathcal{NITDM}(D \circ \mathcal{H}) = \prod_{i \in I} \mathcal{NITDM}(H_i) + \sum_{r=1}^t f_1(I_r)$$

donde

$$f_1(I_r) = \begin{cases} \prod_{j \in I_r} \mathcal{NITDM}(H_j) & \text{si } I_r \neq \emptyset \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Teorema 3.15 Sea $Q = \{Q_1, \dots, Q_t\}$, $t \geq 1$ la familia de todos los conjuntos absorbentes por tdm distintos del vacío de D . Si $Q_r \in Q$ e $I_r = \{j \in I \mid \text{no existe } H_j Q_r - \text{tdm}\}$, entonces para $D \circ \mathcal{H}$ ($D \diamond \mathcal{H}, D\star^+\mathcal{H}, D\star^-\mathcal{H}, D\star\mathcal{H}$):

$$\mathcal{NATDM}(D \circ \mathcal{H}) = \sum_{r=1}^t (f_2(I_r) \prod_{s \in I \setminus I_r} 2^{p_s})$$

donde

$$f_2(I_r) = \begin{cases} \prod_{j \in I_r} \mathcal{NATDM}(H_j) & \text{si } I_r \neq \emptyset \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Teorema 3.16 Sea $N = \{N_1, \dots, N_t\}$, $t \geq 1$ la familia de todos los núcleos por tdm de D . Si $N_r \in N$ e $I_r = \{j \in I \mid \text{no existe } H_j N_r - \text{tdm}\}$, entonces para $D \circ \mathcal{H}$ ($D \diamond \mathcal{H}, D\star^+\mathcal{H}, D\star^-\mathcal{H}, D\star\mathcal{H}$):

$$\mathcal{NNTDM}(D \circ \mathcal{H}) = \sum_{r=1}^t (f_3(I_r))$$

donde

$$f_3(I_r) = \begin{cases} \prod_{j \in I_r} \mathcal{NNTDM}(H_j) & \text{si } I_r \neq \emptyset \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

3.6. Diferencia en el número total de núcleos por tdm entre coronas.

Por ser casos especiales de la Corona Generalizada los resultados sobre la existencia de núcleos por tdm para los tipos de corona son los mismos, no obstante al calcular la cantidad de todos los núcleos por tdm de cada uno de ellos, éstos no siempre son iguales. Dependiendo de la digráfica D , de la sucesión de digráficas \mathcal{H} , de la coloración de las flechas de la digráfica resultante o de las adyacencias entre los vértices de H_i hacia D , con $H_i \in \mathcal{H}$, los cálculos pueden variar o no.

Para ejemplificar lo anterior, tomemos a D un ciclo dirigido de longitud cuatro 3 – *coloreado*, como se muestra en la figura 3.1, y una sucesión de digráficas m – *coloreadas* ajenas en vértices dos a dos y no vacías $\mathcal{H} = (H_1, H_2, H_3, H_4)$, donde $H_i \not\cong H_j$ para toda $\{i, j\} \subseteq I = \{1, 2, 3, 4\}$ y $\mathcal{NNTDM}(H_1) = 2$, $\mathcal{NNTDM}(H_2) = 3$, $\mathcal{NNTDM}(H_3) = 4$ y $\mathcal{NNTDM}(H_4) = 5$. Recordemos además que para calcular el número de todos los núcleos nosotros denotamos a N como la familia de todos los núcleos por tdm de D e $I_r = \{j \in I \mid \text{no existe } H_j N_r\text{-tdm con } N_r \in N\}$.

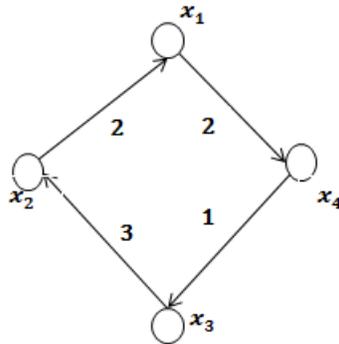
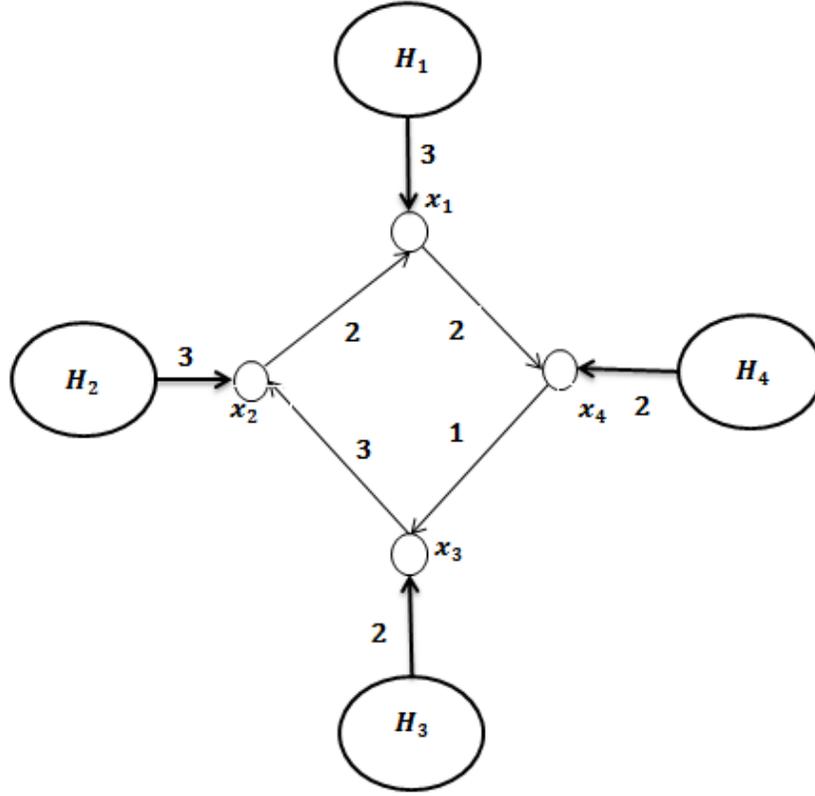


Figura 3.1:

Como existe una trayectoria dirigida monocromática (x_2, x_1, x_4) , pero no la x_3x_4 – *tdm*, el único núcleo por tdm de D es $N_1 = \{x_1, x_3\}$. Con estas hipótesis, construyamos los distintos tipos de corona y calculemos la cantidad total de núcleos por tdm de cada uno de ellos. Empecemos por la corona definida por Włoch, representada en la Figura 3.2.

Figura 3.2: $D \circ \mathcal{H}$

Notemos para este caso que los vértices de H_1 y de H_3 son adyacentes a los vértices x_1 y x_2 respectivamente, por lo cual existe la $H_1N_1 - tdm$ y la $H_3N_1 - tdm$. Por otro lado para los vértices de las digráficas H_2 y H_4 aunque existen trayectorias dirigidas hacia algún vértice de N_1 , éstas no son monocromáticas. De esta forma $I_1 = \{2, 4\}$ por lo que al calcular la cantidad de todos los núcleos por tdm ésta nos queda de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{NNTDM}(D \circ \mathcal{H}) &= \sum_{r=1}^t (f_3(I_r)) = \sum_{r=1}^1 (f_3(I_1)) = f_3(I_1) \\
 &= \prod_{j \in I_1} \mathcal{NNTDM}(H_j) = \mathcal{NNTDM}(H_2) \mathcal{NNTDM}(H_4) \\
 &= (3)(5) = 15
 \end{aligned}$$

En la corona por flechas, representada en la Figura 3.3, podemos observar que los vértices de H_1 y H_4 son adyacentes a x_1 y que los vértices de H_2 y H_3 son adyacentes a x_3 , por lo que existe la $H_1N_1 - tdm$, la $H_2N_1 - tdm$, la $H_3N_1 - tdm$ y la $H_4N_1 - tdm$. Por tal motivo $I_1 = \emptyset$ y el cálculo queda de la siguiente manera:

$$\mathcal{NNTDM}(D \diamond \mathcal{H}) = \sum_{r=1}^t (f_3(I_r)) = \sum_{r=1}^1 (f_3(I_1)) = f_3(I_1) = 1$$

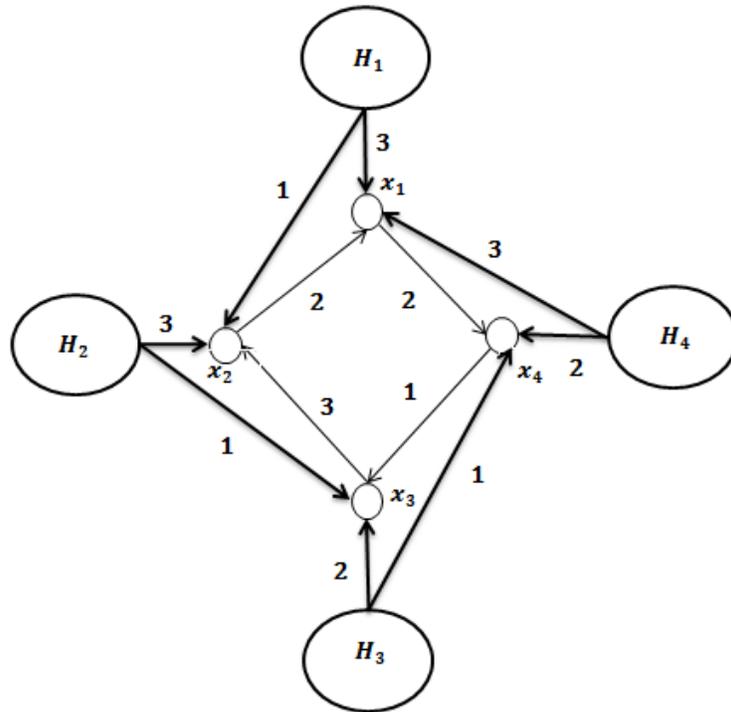
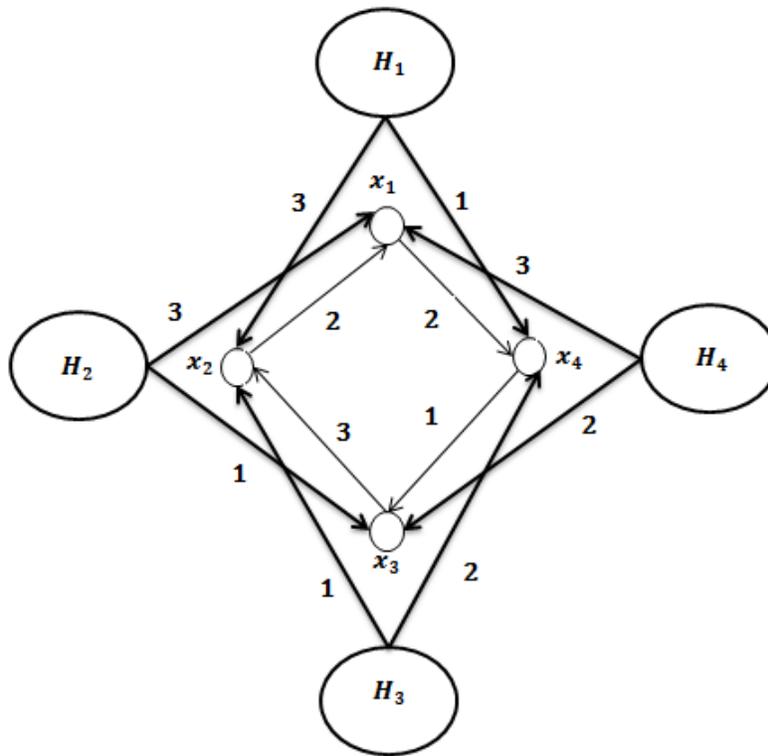


Figura 3.3: $D \diamond \mathcal{H}$

Para la corona por vecinos, representada en la Figura 3.4, podemos ver que los vértices de H_2 y de H_4 son adyacentes a x_1 y a x_3 , por lo cual existe la $H_2N_1 - tdm$ y la $H_4N_1 - tdm$. También observemos que aunque los vértices de H_1 no sea adyacente a alguno de los vértices de N_1 , existe la tdm (y_1, x_4, x_3) con $y_1 \in V(H_1)$, por lo cual existe la $H_1N_1 - tdm$. El único caso que no tiene tdm hacia N_1 es H_3 por lo cual $I_1 = \{3\}$, entonces:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{NNTDM}(D \star \mathcal{H}) &= \sum_{r=1}^t (f_3(I_r)) = \sum_{r=1}^1 (f_3(I_1)) = f_3(I_1) = \prod_{j \in I_1} \mathcal{NNTDM}(H_j) \\
 &= \mathcal{NNTDM}(H_3) = 4
 \end{aligned}$$

Figura 3.4: $D \star \mathcal{H}$

Ahora bien para la corona por vecinos exteriores, Figura 3.5, los vértices de H_2 y de H_4 son adyacentes a x_1 y a x_3 respectivamente, por lo cual existe la $H_2N_1 - tdm$ y la $H_4N_1 - tdm$. Los vértices de H_3 y de H_1 no son adyacentes a alguno de los vértices del núcleo por tdm de D , sin embargo para el primero de éstos existe la tdm (y_i, x_2, x_1) por lo que existe la $H_3N_1 - tdm$. Por lo tanto $I_1 = \{1\}$ y el cálculo queda de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{NNTDM}(D\star^+\mathcal{H}) &= \sum_{r=1}^t (f_3(I_r)) = \sum_{r=1}^1 (f_3(I_1)) = f_3(I_1) = \prod_{j \in I_1} \mathcal{NNTDM}(H_j) \\
 &= \mathcal{NNTDM}(H_1) = 2
 \end{aligned}$$

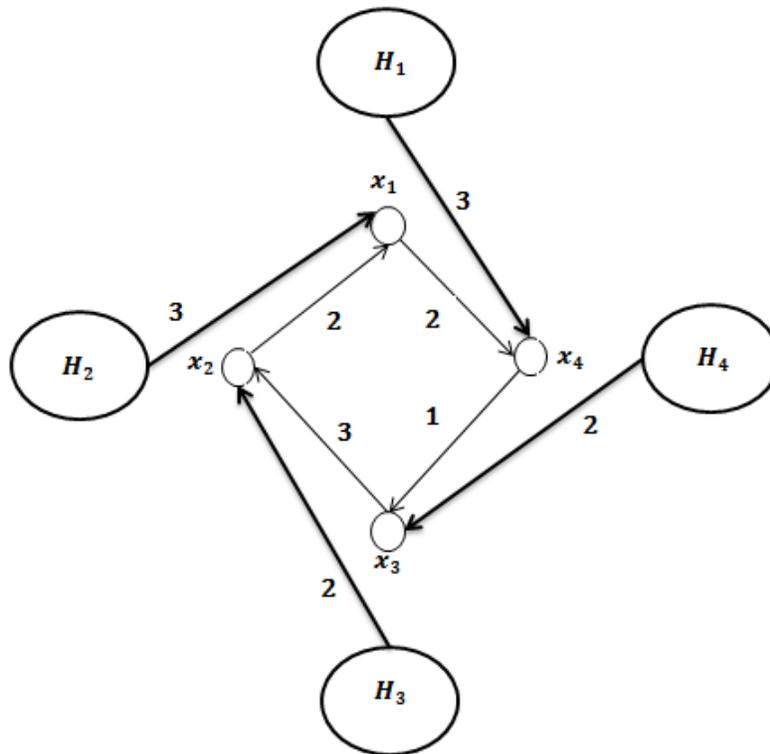
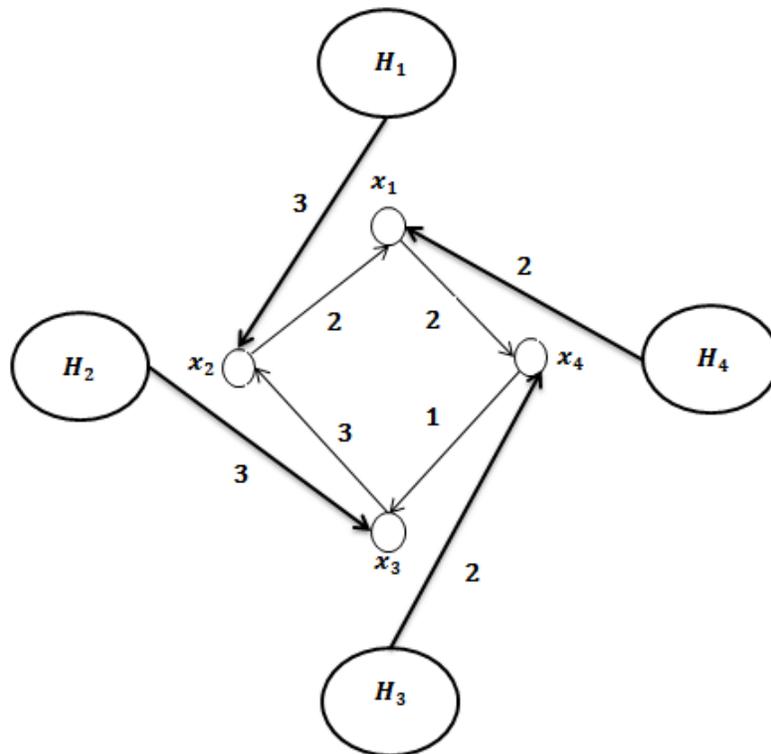


Figura 3.5: $D\star^+\mathcal{H}$

Por último en la corona por vecinos exteriores. Figura 3.6, los vértices de H_2 y de H_4 son adyacentes a x_3 y a x_1 respectivamente, por lo cual existe la $H_2N_1 - tdm$ y la $H_4N_1 - tdm$. Por el contrario, los vértices de H_3 y de H_1 no son adyacentes a los vértices del núcleo por tdm de D , ni existe una tdm a éste mismo. Por lo tanto $I_1 = \{1, 3\}$ y el cálculo queda de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\mathcal{NNTDM}(D\star^{-}\mathcal{H}) &= \sum_{r=1}^t (f_3(I_r)) = \sum_{r=1}^1 (f_3(I_1)) = f_3(I_1) \\
&= \prod_{j \in I_1} \mathcal{NNTDM}(H_j) = \mathcal{NNTDM}(H_1)\mathcal{NNTDM}(H_3) \\
&= (2)(4) = 8
\end{aligned}$$

Figura 3.6: $D\star^{-}\mathcal{H}$

De todos estos resultados obtenidos podemos darnos cuenta que ninguno es igual. Concluimos que la causa reside en que las H_i , con $i \in I$, que tienen tdm hacia N_1 varían dependiendo de que tipo de corona se haga. Además la coloración que se le da a las flechas que van de H_i , con $i \in I$ hacia D es también un factor importante a la hora del cálculo.

Capítulo 4

Seminúcleos y Cuasinúcleos por tdm en la Ψ – corona generalizada.

A lo largo de este trabajo hemos visto las operaciones, tanto en gráficas como en digráficas, que inspiraron y dieron lugar a la Corona Generalizada, así como resultados respecto a núcleos por trayectorias dirigidas monocromáticas, que en su mayoría generalizan los resultados dados por Włoch [20].

Continuando con este estudio en este capítulo daremos otros resultados relacionados con nuestra operación. Veremos cuáles son las condiciones para que la Corona Generalizada tenga seminúcleo por tdm y cuasinúcleo por tdm. Posteriormente veremos cuántos de cada uno podemos tener, haciendo un trabajo similar al que se hizo en el Capítulo 3.

Es importante que en el transcurso del capítulo se tenga presente los resultados vistos en el Capítulo 2, en especial la *Observación 1* puesto que gran parte de nuestras demostraciones la involucran. Ésta nos dice que para cualquier $x \in V(D)$ no existe la $xH_i - tdm$ en $D\Delta\mathcal{H}$ para cada $i \in I$.

Además D , \mathcal{H} , I y $D\Delta\mathcal{H}$ tienen las condiciones dadas en la Definición 2.6 de la Corona Generalizada.

4.1. Seminúcleos por tdm.

Tal y como mencionamos anteriormente veremos en esta sección las condiciones para que nuestra operación tenga seminúcleo por tdm. En digráficas sin colorear la

definición de seminúcleo apareció por primera vez en *Seminúcleos de una digráfica* de Victor Neumann Lara [16]. En el artículo se nos dice que para que una digráfica D tenga esta propiedad, ésta debe de tener un conjunto $\mathcal{S} \subseteq V(D)$ independiente y para cualquier $z \in V(D) \setminus \mathcal{S}$ para el cual exista la $\mathcal{S}z$ – flecha, entonces existe una $z\mathcal{S}$ – flecha.

Posteriormente en *Monochromatic paths on edge colored digraphs and state splittings* de H. Galeana y R. Gómez [9] encontramos una generalización de este concepto para digráficas m -coloreadas:

Definición 4.1 *Sea D una digráfica m -coloreada, $\mathcal{S} \subseteq V(D)$ es un **seminúcleo por tdm** si es independiente por tdm y para todo $z \in V(D) \setminus \mathcal{S}$ para el cual exista una $\mathcal{S}z$ – tdm entonces existe una $z\mathcal{S}$ – tdm.*

Teniendo presente este concepto y antes de comenzar con nuestra búsqueda de las propiedades que debe cumplir nuestra operación para que tenga un seminúcleo por tdm, veremos algunos resultados que nos ayudarán.

Lema 4.1 *Si \mathcal{S}^* es un seminúcleo por tdm de $D\Delta\mathcal{H}$, entonces $\mathcal{S} = \mathcal{S}^* \cap V(D)$ es un seminúcleo por tdm de D .*

Demostración.

Sea \mathcal{S}^* un seminúcleo por tdm de $D\Delta\mathcal{H}$ y $\mathcal{S} = \mathcal{S}^* \cap V(D)$. Como $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}^*$, \mathcal{S} es un conjunto independiente por tdm de D . Por demostrar que para todo $z \in V(D) \setminus \mathcal{S}$ para el cual existe una $\mathcal{S}z$ – tdm en D , entonces existe una $z\mathcal{S}$ – tdm en D .

Por contradicción, supongamos que existe un $z \in V(D) \setminus \mathcal{S}$ para el cual existe una $\mathcal{S}z$ – tdm en D pero no existe una $z\mathcal{S}$ – tdm en D . Como \mathcal{S}^* es un seminúcleo por tdm de $D\Delta\mathcal{H}$ y $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}^*$ entonces existe una $z(\mathcal{S}^* \setminus \mathcal{S})$ – tdm en $D\Delta\mathcal{H}$, donde $\mathcal{S}^* \setminus \mathcal{S} \subseteq \bigcup_{i \in I} V(H_i)$. Sin embargo, por la *Observación 1* sabemos que lo anterior no se puede dar, contradiciendo que \mathcal{S}^* es un seminúcleo de $D\Delta\mathcal{H}$.

Por lo tanto podemos ver que $\mathcal{S} = \mathcal{S}^* \cap V(D)$ es un seminúcleo por tdm de D . ■

Lema 4.2 *Sea $\mathcal{S}^* \subset V(D\Delta\mathcal{H})$ un seminúcleo por tdm de $D\Delta\mathcal{H}$, $\mathcal{S}^* \neq \emptyset$ si y sólo si $\mathcal{S}^* \cap V(D) \neq \emptyset$.*

Demostración.

Demostraremos la suficiencia. Sea $\mathcal{S}^* \subset V(D\Delta\mathcal{H})$ un seminúcleo por tdm de $D\Delta\mathcal{H}$ distinto del vacío, veamos que $\mathcal{S}^* \cap V(D) \neq \emptyset$. Por contradicción, supongamos que $\mathcal{S}^* \cap V(D) = \emptyset$, entonces $\mathcal{S}^* \subseteq \bigcup_{i \in I} V(H_i)$ por lo que existe $w \in V(H_j) \cap \mathcal{S}^*$ para algún $j \in I$. Por definición de $D\Delta\mathcal{H}$, existe $(w, x) \in F(D\Delta\mathcal{H})$ con $x \in \Gamma^+(V(H_j)) \cap V(D)$, es decir, existe $\mathcal{S}^*x - tdm$ y como \mathcal{S}^* es seminúcleo por tdm debe existir la $x\mathcal{S}^* - tdm$. Por la *Observación 1* sabemos que esto último no se puede dar, por lo cual llegamos a una contradicción. Por lo tanto $\mathcal{S}^* \cap V(D) \neq \emptyset$.

Ahora bien para la necesidad es claro que si $\mathcal{S}^* \cap V(D) \neq \emptyset$, entonces $\mathcal{S}^* \neq \emptyset$. Por lo que nuestro enunciado se cumple. ■

Los próximos resultados amplían la visión que tenemos hasta el momento sobre los seminúcleos por tdm en la Corona Generalizada. En el primero de éstos, suponiendo que la Corona Generalizada tiene un seminúcleo por tdm veremos cuál debe ser la estructura de éste, y en el segundo de nuestros teoremas, dado un subconjunto de los vértices de la Corona Generalizada, con ciertas especificaciones, veremos si cumple con ser un seminúcleo por tdm.

Teorema 4.1 *Si $\mathcal{S}^* \subset V(D\Delta\mathcal{H})$ es un seminúcleo no vacío por tdm de $D\Delta\mathcal{H}$, entonces*

$$\mathcal{S}^* = \mathcal{S} \cup \bigcup_{i \in I_1} \mathcal{S}_i$$

donde \mathcal{S} es un seminúcleo no vacío por tdm en D , $I_1 = \{i \in I \mid \text{no existe } H_i\mathcal{S} - tdm\}$, \mathcal{S}_i es un seminúcleo por tdm de H_i para cada $i \in I_1$.

Demostración.

Sea $\mathcal{S}^* \subset V(D\Delta\mathcal{H})$ un seminúcleo no vacío por tdm de $D\Delta\mathcal{H}$, como \mathcal{S}^* es un conjunto independiente por tdm y por el Lema 4.2 $\mathcal{S}^* \cap V(D) \neq \emptyset$, entonces por el Teorema 3.1 tenemos que:

$$\mathcal{S}^* = \mathcal{S} \cup \bigcup_{i \in I_1} \mathcal{S}_i$$

donde $\mathcal{S} \subset V(D)$ es un conjunto independiente por tdm de D y distinto del vacío, $I_1 = \{i \in I \mid \text{no existe } H_i\mathcal{S} - tdm\}$ y \mathcal{S}_i un conjunto independiente por tdm de H_i para cada $i \in I_1$.

Demostremos que $\mathcal{S} = \mathcal{S}^* \cap V(D)$ es un seminúcleo por tdm de D y \mathcal{S}_i un seminúcleo por tdm de H_i con $i \in I_1$.

Por el Lema 4.1 sabemos que $\mathcal{S} = \mathcal{S}^* \cap V(D)$ es un seminúcleo por tdm de D .

Sabemos que $\mathcal{S}_i \subset \mathcal{S}^*$ es un conjunto independiente por tdm de H_i con $i \in I_1$, demostremos que para cualquier $x \in V(H_i) \setminus \mathcal{S}^*$ para el cual exista una $\mathcal{S}_i x - tdm$ entonces existe una $x\mathcal{S}_i - tdm$. Sea $x \in V(H_i) \setminus \mathcal{S}^*$ con $i \in I_1$, tal que existe una $\mathcal{S}_i x - tdm$. Como $\mathcal{S}_i \subset \mathcal{S}^*$ y \mathcal{S}^* es un seminúcleo no vacío por tdm de $D\Delta\mathcal{H}$ entonces existe una $xw - tdm$ con $w \in \mathcal{S}^*$. Tenemos los siguientes casos:

Caso 1. $w \in \mathcal{S}$. Por lo tanto, por definición de la Corona Generalizada, existe la $H_i w - tdm$, es decir, existe la $H_i \mathcal{S} - tdm$, contradiciendo la independencia por tdm de \mathcal{S}^* . Este caso no es posible.

Caso 2. $w \in \mathcal{S}_j$ con $j \in I_1$. Podemos concluir por definición de la Corona Generalizada que $j = i$ por lo que existe una $x\mathcal{S}_i - tdm$.

Por todo lo dicho anteriormente tenemos que \mathcal{S}_i es un seminúcleo de H_i con $i \in I_1$.

De este modo podemos describir a \mathcal{S}^* de la siguiente manera:

$$\mathcal{S}^* = \mathcal{S} \cup \bigcup_{i \in I_1} \mathcal{S}_i$$

donde \mathcal{S} es un seminúcleo no vacío por tdm en D , $I_1 = \{i \in I \mid \text{no existe } H_i \mathcal{S} - tdm\}$, \mathcal{S}_i es un seminúcleo por tdm de H_i para cada $i \in I_1$. ■

Teorema 4.2 Sea $\mathcal{S}^* \subset V(D\Delta\mathcal{H})$, si

$$\mathcal{S}^* = \mathcal{S} \cup \bigcup_{i \in I_3} \mathcal{S}_i$$

entonces \mathcal{S}^* es un seminúcleo no vacío por tdm de $D\Delta\mathcal{H}$, donde \mathcal{S} es un seminúcleo no vacío por tdm en D , $I_3 = \{i \in I \mid \text{no existe } H_i \mathcal{S} - tdm, \text{ pero existe la } x\mathcal{S} - tdm \text{ para toda } x \in V(D) \setminus \mathcal{S} \text{ tal que existe la } H_i x - tdm\}$, \mathcal{S}_i es un seminúcleo por tdm de H_i para cada $i \in I_3$.

Demostración.

Sea

$$\mathcal{S}^* = \mathcal{S} \cup \bigcup_{i \in I_3} \mathcal{S}_i$$

donde \mathcal{S} un seminúcleo no vacío por tdm en D , $I_3 = \{i \in I \mid \text{no existe } H_i\mathcal{S} - \text{tdm}, \text{ pero existe la } x\mathcal{S} - \text{tdm} \text{ para toda } x \in V(D) \setminus \mathcal{S} \text{ tal que existe la } H_ix - \text{tdm}\}$, \mathcal{S}_i es un seminúcleo por tdm de H_i para cada $i \in I_3$.

Tenemos que $I_3 \subseteq I_1$ y además sabemos por definición de seminúcleo por tdm que \mathcal{S} y \mathcal{S}_i son conjuntos independientes por tdm, siendo el primero de éstos distinto del vacío. Entonces por el Teorema 3.1 sabemos que \mathcal{S}^* es un conjunto independiente por tdm.

Sea $z \in V(D\Delta\mathcal{H}) \setminus \mathcal{S}^*$ tal que existe $\mathcal{S}^*z - \text{tdm}$, veamos que existe la $z\mathcal{S}^* - \text{tdm}$.

Tenemos los siguientes casos:

Caso 1. $z \in V(D) \setminus \mathcal{S}^*$. Tenemos las siguientes dos opciones. En la primera podemos decir que existe la $\mathcal{S}z - \text{tdm}$ y como \mathcal{S} es un seminúcleo de D , entonces existe la $z\mathcal{S} - \text{tdm}$. Por otra parte puede pasar que exista la $\mathcal{S}_iz - \text{tdm}$ para algún $i \in I_3$, es decir, existe la $H_iz - \text{tdm}$ para algún $i \in I_3$. Por definición de I_3 sabemos que existe la $x\mathcal{S} - \text{tdm}$, en especial para z .

Caso 2. $z \in V(H_i \setminus \mathcal{S}^*)$ para algún $i \in I_3$. Por la *Observación 1* sabemos que no existe $\mathcal{S}z - \text{tdm}$, por lo que debe de existir la $\mathcal{S}_iz - \text{tdm}$ y como \mathcal{S}_i es un seminúcleo de H_i , entonces la $z\mathcal{S}_i - \text{tdm}$ existe.

Caso 3. $z \in V(H_j) \setminus \mathcal{S}^*$ para algún $j \in I \setminus I_3$. Por construcción de la corona sabemos que no existe la $H_iH_j - \text{tdm}$ ni la $H_jH_i - \text{tdm}$ para cualquier $i, j \in I$ y por la *Observación 1* sabemos que $\mathcal{S}z - \text{tdm}$ no se puede dar. Por lo tanto esta opción queda descartada.

Por todo lo dicho anteriormente podemos concluir que \mathcal{S}^* es un seminúcleo no vacío por tdm de $D\Delta\mathcal{H}$. ■

Luego de tener todos estos resultados, el siguiente corolario une cada uno de éstos.

Corolario 4.1 *Un subconjunto $\mathcal{S}^* \subset V(D\Delta\mathcal{H})$ es un seminúcleo no vacío por tdm de $D\Delta\mathcal{H}$ si y sólo si*

$$\mathcal{S}^* = \mathcal{S} \cup \bigcup_{i \in I_3} \mathcal{S}_i,$$

donde \mathcal{S} es un seminúcleo no vacío por tdm en D , $I_3 = \{i \in I \mid \text{no existe } H_i\mathcal{S} - \text{tdm}, \text{ pero existe la } x\mathcal{S} - \text{tdm para toda } x \in V(D) \setminus \mathcal{S} \text{ tal que existe la } H_i x - \text{tdm}\}$, \mathcal{S}_i es un seminúcleo por tdm de H_i para cada $i \in I_3$.

Demostración.

Teniendo en cuenta que $I_3 \subset I_1$ y por los teoremas 4.1 y 4.2, el resultado se cumple. ■

Corolario 4.2 *Una digráfica $D\Delta\mathcal{H}$ tiene un seminúcleo distinto del vacío por tdm si y sólo si H_i tiene un seminúcleo por tdm con $i \in I_3$, donde $I_3 = \{i \in I \mid \text{no existe } H_i\mathcal{S} - \text{tdm}, \text{ pero existe la } x\mathcal{S} - \text{tdm para toda } x \in V(D) \setminus \mathcal{S} \text{ tal que existe la } H_i x - \text{tdm}\}$ y \mathcal{S} es un seminúcleo por tdm de D distinto del vacío.*

Demostración.

Inmediato por el Corolario 4.1. ■

Daremos a continuación un teorema que nos habla acerca de la cantidad total de seminúcleos por tdm de $D\Delta\mathcal{H}$. Cabe mencionar que nos referiremos a el número de todos los seminúcleos por tdm como \mathcal{NSTDM} .

Teorema 4.3 *Sean $\mathcal{S} = \{\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_t\}$, $t \geq 1$ la familia de todos los seminúcleos no vacíos por tdm de la digráfica D , $\mathcal{S}_r \in \mathcal{S}$ e $I_r = \{i \in I \mid \text{no existe } H_i\mathcal{S}_r - \text{tdm y existe } x\mathcal{S}_r - \text{tdm para toda } x \in D \setminus \mathcal{S}_r \text{ tal que existe la } H_i x - \text{tdm}\}$ entonces:*

$$\mathcal{NSTDM}(D\Delta\mathcal{H}) = \sum_{r=1}^t f_1(I_r) + 1$$

donde

$$f_1(I_r) = \begin{cases} \prod_{j \in I_r} \mathcal{NSTDM}(H_j) & \text{si } I_r \neq \emptyset \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Demostración.

Sea \mathcal{S}' la familia de todos los seminúcleos por tdm de $D\Delta\mathcal{H}$ los cuales cumplen que su intersección con los vértices de D es distinto del vacío. Sea \mathcal{S}'' la familia

de todos los seminúcleos por tdm de $D\Delta\mathcal{H}$ los cuales cumplen que su intersección con los vértices de D es vacía. Por lo que $\mathcal{NSTDM}(D\Delta\mathcal{H}) = |\mathcal{S}'| + |\mathcal{S}''|$.

Por el Corolario 4.1 para obtener un seminúcleo por tdm de $D\Delta\mathcal{H}$ perteneciente a \mathcal{S}' primero debemos escoger un seminúcleo por tdm de D . Sean $\mathcal{S} = \{\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_t\}$ con $t \geq 1$ la familia de todos los seminúcleos por tdm en D e $I_r = \{i \in I \mid \text{no existe } H_i\mathcal{S}_r - \text{tdm pero existe } x\mathcal{S}_r - \text{tdm para toda } x \in D \setminus \mathcal{S}_r \text{ tal que existe la } H_ix - \text{tdm}\}$, tenemos los siguientes casos:

1. Si $I_r \neq \emptyset$ entonces en cada H_j con $j \in I_r$ nosotros escogemos un seminúcleo por tdm. La cantidad de seminúcleos por tdm que contengan a \mathcal{S}_r va a ser igual a la cantidad de maneras en las que se puedan acomodar los seminúcleos por tdm de los H_j con $j \in I_r$, es decir:

$$\prod_{j \in I_r} \mathcal{NSTDM}(H_j)$$

2. Si $I_r = \emptyset$ entonces \mathcal{S}_r es un seminúcleo por tdm de la familia \mathcal{S}' .

Por los dos casos anteriores podemos ver que:

$$|\mathcal{S}'| = \sum_{r=1}^t f_1(I_r)$$

donde

$$f_1(I_r) = \begin{cases} \prod_{j \in I_r} \mathcal{NSTDM}(H_j) & \text{si } I_r \neq \emptyset \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Por el Lema 4.2 sabemos que $\mathcal{S}'' = \{\emptyset\}$ por lo que

$$\mathcal{NSTDM}(D\Delta\mathcal{H}) = |\mathcal{S}'| + |\mathcal{S}''| = \sum_{r=1}^t f_1(I_r) + 1$$

donde

$$f_1(I_r) = \begin{cases} \prod_{j \in I_r} \mathcal{NSTDM}(H_j) & \text{si } I_r \neq \emptyset \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

■

Recordemos que los cinco tipos de corona: por flechas $D\diamond\mathcal{H}$, por vecinos exteriores $D\star^+\mathcal{H}$, por vecinos interiores $D\star^-\mathcal{H}$, por vecinos $D\star\mathcal{H}$ y corona para digráficas $D\circ\mathcal{H}$, cumplen ser casos especiales de la Corona Generalizada, por lo que por los teoremas 4.1 y 4.2 y el Corolario 4.1, los resultados siguientes son válidos:

Teorema 4.4 Si $\mathcal{S}^* \subset V(D \circ \mathcal{H}) ((D \diamond \mathcal{H}), (D\star^+\mathcal{H}), (D\star^-\mathcal{H}), (D\star\mathcal{H}))$ es un seminúcleo por tdm distinto del vacío de $D \circ \mathcal{H} (D \diamond \mathcal{H}, D\star^+\mathcal{H}, D\star^-\mathcal{H}, D\star\mathcal{H})$, entonces

$$\mathcal{S}^* = \mathcal{S} \cup \bigcup_{i \in I_1} \mathcal{S}_i$$

donde \mathcal{S} es un seminúcleo por tdm distinto del vacío en D , $I_1 = \{i \in I \mid \text{no existe } H_i\mathcal{S} - \text{tdm}\}$, \mathcal{S}_i es un seminúcleo por tdm de H_i para cada $i \in I_1$.

Teorema 4.5 Sea $\mathcal{S}^* \subset V(D \circ \mathcal{H}) ((D \diamond \mathcal{H}), (D\star^+\mathcal{H}), (D\star^-\mathcal{H}), (D\star\mathcal{H}))$, si

$$\mathcal{S}^* = \mathcal{S} \cup \bigcup_{i \in I_3} \mathcal{S}_i$$

donde \mathcal{S} es un seminúcleo por tdm distinto del vacío en D , $I_3 = \{i \in I \mid \text{no existe } H_i\mathcal{S} - \text{tdm}, \text{ pero existe la } x\mathcal{S} - \text{tdm} \text{ para toda } x \in V(D) \setminus \mathcal{S} \text{ tal que existe la } H_i x - \text{tdm}\}$, \mathcal{S}_i es un seminúcleo por tdm de H_i para cada $i \in I_3$, entonces \mathcal{S}^* es un seminúcleo por tdm distinto del vacío de $D \circ \mathcal{H} (D \diamond \mathcal{H}, D\star^+\mathcal{H}, D\star^-\mathcal{H}, D\star\mathcal{H})$.

Corolario 4.3 Un subconjunto $\mathcal{S}^* \subset V(D \circ \mathcal{H}) ((D \diamond \mathcal{H}), (D\star^+\mathcal{H}), (D\star^-\mathcal{H}), (D\star\mathcal{H}))$ es un seminúcleo por tdm distinto del vacío de $D \circ \mathcal{H} (D \diamond \mathcal{H}, D\star^+\mathcal{H}, D\star^-\mathcal{H}, D\star\mathcal{H})$ si y sólo si

$$\mathcal{S}^* = \mathcal{S} \cup \bigcup_{i \in I_3} \mathcal{S}_i$$

donde \mathcal{S} es un seminúcleo por tdm distinto del vacío en D , $I_3 = \{i \in I \mid \text{no existe } H_i\mathcal{S} - \text{tdm}, \text{ pero existe la } x\mathcal{S} - \text{tdm} \text{ para toda } x \in V(D) \setminus \mathcal{S} \text{ tal que existe la } H_i x - \text{tdm}\}$, \mathcal{S}_i es un seminúcleo por tdm de H_i para cada $i \in I_3$.

Teorema 4.6 Sean $\mathcal{S} = \{\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_t\}$, $t \geq 1$ la familia de todos los seminúcleos por tdm distintos del vacío de la digráfica D , $\mathcal{S}_r \in \mathcal{S}$ e $I_r = \{i \in I \mid \text{no existe } H_i\mathcal{S}_r - \text{tdm} \text{ pero existe } x\mathcal{S}_r - \text{tdm} \text{ para toda } x \in D \setminus \mathcal{S}_r \text{ tal que existe la } H_i x - \text{tdm}\}$, entonces para $D \circ \mathcal{H} (D \diamond \mathcal{H}, D\star^+\mathcal{H}, D\star^-\mathcal{H}, D\star\mathcal{H})$:

$$\mathcal{NSTDM}(D \circ \mathcal{H}) = \sum_{r=1}^t f_1(I_r) + 1$$

donde

$$f_1(I_r) = \begin{cases} \prod_{j \in I_r} \mathcal{NSTDM}(H_j) & \text{si } I_r \neq \emptyset \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

4.2. Cuasinúcleos por tdm.

En esta sección veremos otro conjunto de vértices que puede tener una digráfica m -coloreada, el cuasinúcleo por tdm. El cuasinúcleo para digráficas sin colorear fue definido por primera vez por V. Chvátal y L. Lovász en *Every Directed Graph has a Semikernel* [5], distinguiéndose del núcleo por ser más flexible con la propiedad de absorbencia, pues los vértices que no están contenidos en éste a diferencia del núcleo, están a distancia uno o a distancia dos de él (cuasiabsorbencia).

La propiedad antes referida queda generalizada para digráficas m -coloreadas de la siguiente manera:

Definición 4.2 *Sea D una digráfica m -coloreada, $\mathcal{C} \subseteq V(D)$ es un conjunto **cuasiabsorbente por tdm** si para todo $z \in V(D) \setminus \mathcal{C}$ existe una $z\mathcal{C} - \text{tdm}$ o existe $w \in V(D) \setminus \mathcal{C}$ tal que existe una $zw - \text{tdm}$ y una $w\mathcal{C} - \text{tdm}$.*

En el transcurso de esta sección diremos que $z \in V(D)$, con D una digráfica m -coloreada, es cuasiabsorbido por tdm por $A \subset V(D) \setminus z$ si existe una $zA - \text{tdm}$ o existe $w \in V(D) \setminus A$ tal que existe una $zw - \text{tdm}$ y una $wA - \text{tdm}$.

Al igual que en seminúcleos, la definición de cuasinúcleo para digráficas m -coloreadas la encontramos en el artículo de *Monochromatic paths on edge colored digraphs and state splittings* de H. Galeana y R. Gómez [9]. Esta nos dice lo siguiente:

Definición 4.3 *Sea D una digráfica m -coloreada, $\mathcal{Q} \subseteq V(D)$ es un **cuasinúcleo por tdm** si es independiente por tdm y cuasiabsorbente por tdm.*

Comencemos con un resultado el cual sera de ayuda tanto para familiarizarnos con las definiciones anteriores como para recordar las que teníamos:

Proposición 4.1 *Si N es un núcleo por tdm en D , entonces N es un cuasinúcleo por tdm de $D\Delta\mathcal{H}$.*

Demostración.

Sea N un núcleo por tdm de D , como $D \subseteq V(D\Delta\mathcal{H})$ entonces N es independiente por tdm en $D\Delta\mathcal{H}$. Veamos ahora que para cualquier $x \in V(D\Delta\mathcal{H}) \setminus N$ éste es cuasiabsorbido por N .

Caso 1. $x \in V(D) \setminus N$. Como N es un núcleo por tdm de D , entonces existe la tdm de x hacia N y por lo tanto éste es cuasiabsorbido por N .

Caso 2. $x \in V(H_i) \setminus N$ con $i \in I$. Por definición de la Corona Generalizada sabemos que existe $y \in V(D)$ tal que existe la $H_i y$ – flecha por lo tanto existe $(x, y) \in F(D\Delta\mathcal{H})$. Si $y \in N$, entonces tenemos lo que buscábamos, si no entonces existe una tdm de y a N , por ser este último núcleo por tdm de D , entonces existe $y \in V(D\Delta\mathcal{H}) \setminus N$ tal que existe una $xy - tdm$ y una $yN - tdm$.

Por lo anterior N es un conjunto cuasiabsorbente por tdm de $D\Delta\mathcal{H}$. Por lo tanto N es un cuasinúcleo de $D\Delta\mathcal{H}$ ■

Usando solamente la propiedad de cuasiabsorbencia por tdm, veremos las condiciones que nuestra operación debe de cumplir para que ésta pueda tener conjuntos cuasiabsorbentes por tdm. Posteriormente con ayuda de estos resultados y los de independencia por tdm presentados en el Capítulo 3 daremos la forma que un cuasinúcleo por tdm debe de tener en la Corona Generalizada.

Proposición 4.2 *Si $\mathcal{C}^* \subseteq V(D\Delta\mathcal{H})$ es un conjunto cuasiabsorbente por tdm de $D\Delta\mathcal{H}$, entonces $\mathcal{C} = \mathcal{C}^* \cap V(D)$ es un conjunto cuasiabsorbente por tdm de D .*

Demostración.

Sea \mathcal{C}^* un conjunto cuasiabsorbente por tdm de $D\Delta\mathcal{H}$. Probemos que $\mathcal{C} = \mathcal{C}^* \cap V(D)$ es un conjunto cuasiabsorbente por tdm de D , es decir, que para todo $x \in V(D) \setminus \mathcal{C}$ existe una $x\mathcal{C} - tdm$ o existe $w \in V(D) \setminus \mathcal{C}$ tal que existe una $xw - tdm$ y una $w\mathcal{C} - tdm$.

Por contradicción supongamos que existe $x \in V(D) \setminus \mathcal{C}$ tal que no existe una $x\mathcal{C} - tdm$ ni existe $w \in V(D) \setminus \mathcal{C}$ tal que existe una $xw - tdm$ y una $w\mathcal{C} - tdm$, entonces como \mathcal{C}^* es un conjunto cuasiabsorbente por tdm de $D\Delta\mathcal{H}$ puede pasar que exista una $x(\mathcal{C}^* \setminus \mathcal{C}) - tdm$ o bien que exista $w \in V(D\Delta\mathcal{H}) \setminus \mathcal{C}^*$ tal que existe una $xw - tdm$ y una $w(\mathcal{C}^* \setminus \mathcal{C}) - tdm$, donde $\mathcal{C}^* \setminus \mathcal{C} \subseteq \bigcup_{i \in I} V(H_i)$. En el primero de los casos por la *Observación 1* sabemos que éste no puede ser posible. Ahora bien si suponemos que existe $w \in V(D\Delta\mathcal{H}) \setminus \mathcal{C}^*$ tal que existe una $xw - tdm$ y una $w(\mathcal{C}^* \setminus \mathcal{C}) - tdm$ tenemos los siguientes casos:

Caso 1. $w \in (\bigcup_{i \in I} V(H_i) \setminus \mathcal{C}^*)$. Por la *Observación 1* este caso no es posible.

Caso 2. $w \in V(D)$. Nuevamente por la *Observación 1* sabemos que la $w(\mathcal{C}^* \setminus \mathcal{C}) - tdm$ no se puede dar.

Por todo lo dicho anteriormente podemos concluir que existe $x \in V(D\Delta\mathcal{H}) \setminus \mathcal{C}^*$ tal que no existe una $x\mathcal{C}^* - tdm$ ni existe $w \in V(D) \setminus \mathcal{C}$ tal que existe una $xw - tdm$ y una $w\mathcal{C} - tdm$, contradiciendo que \mathcal{C}^* es un conjunto cuasiabsorbente por tdm de $D\Delta\mathcal{H}$. Por lo tanto $\mathcal{C} = \mathcal{C}^* \cap V(D)$ es un conjunto cuasiabsorbente por tdm de D . ■

Proposición 4.3 *Si $\mathcal{C}^* \subseteq V(D\Delta\mathcal{H})$ es un conjunto cuasiabsorbente por tdm de $D\Delta\mathcal{H}$, entonces $\mathcal{C}^* \cap V(D) \neq \emptyset$.*

Demostración.

Sea \mathcal{C}^* un conjunto cuasiabsorbente por tdm de $D\Delta\mathcal{H}$, por la proposición anterior sabemos que $\mathcal{C}^* \cap V(D)$ es un conjunto cuasiabsorbente por tdm de D por lo cual es distinto del vacío. ■

Teorema 4.7 *$\mathcal{C}^* \subseteq V(D\Delta\mathcal{H})$ es un conjunto cuasiabsorbente por tdm de $D\Delta\mathcal{H}$ si y sólo si*

$$\mathcal{C}^* = \mathcal{C} \cup \bigcup_{i \in I_4} \mathcal{C}_i \cup \bigcup_{j \in I \setminus I_4} \mathcal{C}_j$$

donde \mathcal{C} es un conjunto cuasiabsorbente por tdm en D , $I_4 = \{i \in I \mid \text{no existe la } H_i\mathcal{C} - tdm \text{ y para toda } x \in V(D) \setminus \mathcal{C} \text{ tal que existe la } H_i x - tdm \text{ entonces no existe la } x\mathcal{C} - tdm\}$, \mathcal{C}_i es un conjunto cuasiabsorbente por tdm de H_i para cada $i \in I_4$ y \mathcal{C}_j un conjunto cualquiera de vértices de H_j para cada $j \in I \setminus I_4$.

Demostración.

Demostraremos la suficiencia. Sea $\mathcal{C}^* \subseteq V(D\Delta\mathcal{H})$ un conjunto cuasiabsorbente por tdm de $D\Delta\mathcal{H}$, por la Proposición 4.2 sabemos que $\mathcal{C} = \mathcal{C}^* \cap V(D)$ es un conjunto cuasiabsorbente por tdm de D .

Notemos que $(\mathcal{C}^* \setminus \mathcal{C}) \subseteq \bigcup_{i \in I} V(H_i)$ para toda $i \in I$. Sea $I_4 = \{i \in I \mid \text{no existe la } H_i\mathcal{C} - tdm \text{ y para toda } x \in V(D) \setminus \mathcal{C} \text{ tal que existe la } H_i x - tdm \text{ entonces no existe la } x\mathcal{C} - tdm\}$ y supongamos que existe $i \in I_4$, es decir, para todo $y_t^i \in H_i$ y para toda $z \in \mathcal{C}$ no existe la $y_t^i z - tdm$ y para toda $x \in V(D) \setminus \mathcal{C}$ tal que exista la $y_t^i x - tdm$ entonces no existe la $xz - tdm$. Como \mathcal{C}^* es un conjunto cuasiabsorbente por tdm, entonces $\mathcal{C}_i = \mathcal{C}^* \cap H_i$ debe ser un conjunto cuasiabsorbente por tdm.

Por otro lado, si tomamos $j \in (I \setminus I_4)$, entonces existe la $H_j\mathcal{C} - tdm$ o para todo $y_t^j \in H_j$ existe la $y_t^j x - tdm$ y la $xz - tdm$ con $x \in V(D) \setminus \mathcal{C}$ y $z \in \mathcal{C}$, por lo que para todo elemento de cualquier subconjunto \mathcal{C}_j de H_j es cuasiabsorbido por tdm por \mathcal{C} . Entonces podemos ver a \mathcal{C}^* de la siguiente forma:

$$\mathcal{C}^* = \mathcal{C} \cup \bigcup_{i \in I_4} \mathcal{C}_i \cup \bigcup_{j \in I \setminus I_4} \mathcal{C}_j$$

donde \mathcal{C} es un conjunto cuasiabsorbente por tdm en D , $I_4 = \{i \in I \mid \text{no existe la } H_i\mathcal{C} - tdm \text{ y para toda } x \in V(D) \setminus \mathcal{C} \text{ tal que existe la } H_i x - tdm \text{ entonces no existe la } x\mathcal{C} - tdm\}$, \mathcal{C}_i es un conjunto cuasiabsorbente por tdm de H_i para cada $i \in I_4$ y \mathcal{C}_j un conjunto cualquiera de vértices de H_j para cada $j \in I \setminus I_4$.

Ahora demostraremos la necesidad. Sea:

$$\mathcal{C}^* = \mathcal{C} \cup \bigcup_{i \in I_4} \mathcal{C}_i \cup \bigcup_{j \in I \setminus I_4} \mathcal{C}_j$$

donde \mathcal{C} es un conjunto cuasiabsorbente por tdm en D , $I_4 = \{i \in I \mid \text{no existe la } H_i\mathcal{C} - tdm \text{ y para toda } x \in V(D) \setminus \mathcal{C} \text{ tal que existe la } H_i x - tdm \text{ entonces no existe la } x\mathcal{C} - tdm\}$, \mathcal{C}_i es un conjunto cuasiabsorbente por tdm de H_i para cada $i \in I_4$ y \mathcal{C}_j un conjunto cualquiera de vértices de H_j para cada $j \in I \setminus I_4$. Demostraremos que \mathcal{C}^* es un conjunto cuasiabsorbente por tdm, es decir, que para todo $z \in V(D\Delta\mathcal{H}) \setminus \mathcal{C}^*$ existe una $z\mathcal{C}^* - tdm$ o existe $w \in V(D\Delta\mathcal{H}) \setminus \mathcal{C}^*$ tal que existe una $zw - tdm$ y una $w\mathcal{C}^* - tdm$.

Tenemos los siguientes casos:

Caso 1. $z \in V(D) \setminus \mathcal{C}^*$. Como \mathcal{C} es un conjunto cuasiabsorbente por tdm de D entonces existe la $z\mathcal{C} - tdm$ o existe $w \in V(D) \setminus \mathcal{C}$ tal que hay una $zw - tdm$ y una $w\mathcal{C} - tdm$. Por construcción de \mathcal{C}^* , sabemos que $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}^*$ por lo que tiene una $z\mathcal{C}^* - tdm$ o existe $w \in V(D\Delta\mathcal{H}) \setminus \mathcal{C}^*$ tal que existe una $zw - tdm$ y una $w\mathcal{C}^* - tdm$.

Caso 2. $z \in V(H_i) \setminus \mathcal{C}^*$ con $i \in I_4$. Como \mathcal{C}_i es un conjunto cuasiabsorbente por tdm de H_i entonces existe la $z\mathcal{C}_i - tdm$ o existe $w \in V(H_i) \setminus \mathcal{C}_i$ tal que hay una $zw - tdm$ y una $w\mathcal{C}_i - tdm$. Por construcción de \mathcal{C}^* , sabemos que $\mathcal{C}_i \subseteq \mathcal{C}^*$ por lo que tiene una $z\mathcal{C}^* - tdm$ o existe $w \in V(D\Delta\mathcal{H}) \setminus \mathcal{C}^*$ tal que existe una $zw - tdm$ y una $w\mathcal{C}^* - tdm$.

Caso 3. $z \in V(H_j) \setminus \mathcal{C}^*$ con $j \in I \setminus I_4$. Sabemos que el conjunto $I \setminus I_4$ es el conjunto de las $j \in I$ tal que existe la $H_j\mathcal{C} - tdm$ o que para alguna $x \in V(D) \setminus \mathcal{C}$

tal que existe la $H_i x - tdm$, existe la $x\mathcal{C} - tdm$. Por lo tanto existe $z\mathcal{C} - tdm$ o existe $x \in V(D\Delta\mathcal{H}) \setminus \mathcal{C}$ tal que existe una $zx - tdm$ y una $x\mathcal{C} - tdm$. Por construcción de \mathcal{C}^* , sabemos que $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}^*$ por lo que existe una $z\mathcal{C}^* - tdm$ o existe $w \in V(D\Delta\mathcal{H}) \setminus \mathcal{C}^*$ tal que existe una $zw - tdm$ y una $w\mathcal{C}^* - tdm$.

Por los tres casos anteriores podemos concluir que \mathcal{C}^* es un conjunto cuasiabsorbente por tdm de $D\Delta\mathcal{H}$. ■

Luego de obtener este último resultado podemos sentirnos preparados para saber las condiciones que un cuasinúcleo por tdm debe tener en $D\Delta\mathcal{H}$. No obstante antes de comenzar con el resultado principal de esta sección nos detendremos para dar dos resultados relacionados con esto último.

Proposición 4.4 *Si \mathcal{Q}^* es un cuasinúcleo por tdm de $D\Delta\mathcal{H}$, entonces $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}^* \cap V(D)$ es un cuasinúcleo por tdm de D .*

Demostración.

Sea \mathcal{Q}^* un cuasinúcleo por tdm de $D\Delta\mathcal{H}$, entonces \mathcal{Q}^* es un conjunto cuasiabsorbente por tdm. Por la Proposición 4.2 sabemos que el conjunto $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}^* \cap V(D)$ es cuasiabsorbente por tdm en D . De igual manera como $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{Q}^*$ entonces \mathcal{Q} es un conjunto independiente por tdm de D . Por lo que $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}^* \cap V(D)$ es un cuasinúcleo por tdm de D . ■

Proposición 4.5 *Si \mathcal{Q}^* es un cuasinúcleo por tdm de $D\Delta\mathcal{H}$, entonces*

$$\mathcal{Q}^* \cap V(D) \neq \emptyset.$$

Demostración.

Sea \mathcal{Q} un cuasinúcleo por tdm de $D\Delta\mathcal{H}$, por la proposición anterior sabemos que $\mathcal{Q} \cap V(D)$ es un cuasinúcleo por tdm de D por lo cual debe de ser distinto del vacío. ■

Teorema 4.8 *Si $\mathcal{Q}^* \subset V(D\Delta\mathcal{H})$ es un cuasinúcleo por tdm de $D\Delta\mathcal{H}$, entonces*

$$\mathcal{Q}^* = \mathcal{Q} \cup \bigcup_{i \in I_4} \mathcal{Q}_i \cup \bigcup_{j \in I \setminus I_4} S_j$$

donde \mathcal{Q} es un cuasinúcleo por tdm en la digráfica D , $I_4 = \{i \in I \mid \text{no existe la } H_i \mathcal{Q} - tdm \text{ y para toda } x \in V(D) \setminus \mathcal{Q} \text{ tal que existe la } H_i x - tdm \text{ entonces no existe la } x\mathcal{Q} - tdm\}$, \mathcal{Q}_i cuasinúcleo por tdm de H_i para cada $i \in I_4$, S_j es un conjunto independiente por tdm de H_j para cada $j \in I \setminus I_4$.

Demostración.

Sea $\mathcal{Q}^* \subset V(D\Delta\mathcal{H})$ un cuasinúcleo por tdm de $D\Delta\mathcal{H}$. Como \mathcal{Q}^* es un cuasinúcleo por tdm entonces cumple ser un conjunto cuasiabsorbente por tdm y por el Teorema 4.7 tenemos que:

$$\mathcal{Q}^* = \mathcal{Q} \cup \bigcup_{i \in I_4} \mathcal{Q}_i \cup \bigcup_{j \in I \setminus I_4} S_j$$

donde \mathcal{Q} es un conjunto cuasiabsorbente por tdm en D , $I_4 = \{i \in I \mid \text{no existe la } H_i\mathcal{Q} - \text{tdm y para toda } x \in V(D) \setminus \mathcal{Q} \text{ tal que existe la } H_i x - \text{tdm entonces no existe la } x\mathcal{Q} - \text{tdm}\}$, \mathcal{Q}_i es un conjunto cuasiabsorbente por tdm de H_i para cada $i \in I_4$ y S_j un conjunto cualquiera de vértices de H_j para cada $j \in I \setminus I_4$.

Puesto que \mathcal{Q}^* también cumple ser un conjunto independiente por tdm sus subconjuntos \mathcal{Q} , \mathcal{Q}_i y S_j , con $i \in I_4$ y $j \in I \setminus I_4$, son conjuntos independientes por tdm. Por lo tanto \mathcal{Q} y \mathcal{Q}_i son cuasinúcleos por tdm de D y H_i respectivamente, y S_j es un conjunto independiente por tdm de H_j con $j \in I \setminus I_4$.

De lo dicho anteriormente podemos describir a \mathcal{Q}^* de la siguiente manera:

$$\mathcal{Q}^* = \mathcal{Q} \cup \bigcup_{i \in I_4} \mathcal{Q}_i \cup \bigcup_{j \in I \setminus I_4} S_j$$

donde \mathcal{Q} es un cuasinúcleo por tdm en la digráfica D , $I_4 = \{i \in I \mid \text{no existe la } H_i\mathcal{Q} - \text{tdm y para toda } x \in V(D) \setminus \mathcal{Q} \text{ tal que existe la } H_i x - \text{tdm entonces no existe la } x\mathcal{Q} - \text{tdm}\}$, \mathcal{Q}_i cuasinúcleo por tdm de H_i para cada $i \in I_4$, S_j es un conjunto independiente por tdm de H_j para cada $j \in I \setminus I_4$. ■

Teorema 4.9 *Si*

$$\mathcal{Q}^* = \mathcal{Q} \cup \bigcup_{i \in I_4} \mathcal{Q}_i \cup \bigcup_{j \in I_5} S_j$$

entonces \mathcal{Q}^ es un cuasinúcleo por tdm de $D\Delta\mathcal{H}$, donde \mathcal{Q} es un cuasinúcleo por tdm en la digráfica D , $I_4 = \{i \in I \mid \text{no existe la } H_i\mathcal{Q} - \text{tdm y para toda } x \in V(D) \setminus \mathcal{Q} \text{ tal que existe la } H_i x - \text{tdm entonces no existe la } x\mathcal{Q} - \text{tdm}\}$, \mathcal{Q}_i cuasinúcleo por tdm de H_i para cada $i \in I_4$, $I_5 = \{i \in I \mid \text{no existe } H_i\mathcal{Q} - \text{tdm y para alguna } x \in V(D) \setminus \mathcal{Q} \text{ tal que existe la } H_i x - \text{tdm entonces existe la } x\mathcal{Q} - \text{tdm}\}$, S_j es un conjunto independiente por tdm de H_j para cada $j \in I_5$.*

Demostración.

Sea

$$\mathcal{Q}^* = \mathcal{Q} \cup \bigcup_{i \in I_4} \mathcal{Q}_i \cup \bigcup_{j \in I_5} S_j$$

donde \mathcal{Q} es un cuasinúcleo por tdm en la digráfica D , $I_4 = \{i \in I \mid \text{no existe la } H_i\mathcal{Q} - \text{tdm y para toda } x \in V(D) \setminus \mathcal{Q} \text{ tal que existe la } H_i x - \text{tdm entonces no existe la } x\mathcal{Q} - \text{tdm}\}$, \mathcal{Q}_i cuasinúcleo por tdm de H_i para cada $i \in I_4$, $I_5 = \{i \in I \mid \text{no existe } H_i\mathcal{Q} - \text{tdm y para alguna } x \in V(D) \setminus \mathcal{Q} \text{ tal que existe la } H_i x - \text{tdm entonces existe la } x\mathcal{Q} - \text{tdm}\}$, S_j es un conjunto independiente por tdm de H_j para cada $j \in I_5$. Por demostrar que \mathcal{Q}^* un cuasinúcleo por tdm en $D\Delta\mathcal{H}$.

Observemos que $I_5 \subseteq (I_1 \setminus I_4)$. Sabemos que para las $k \in (I \setminus I_4) \setminus I_5$ existe la $H_k\mathcal{Q} - \text{tdm}$ por lo cual H_k es cuasiabsorbido por \mathcal{Q} , entonces si tomamos a $\mathcal{Q}_j = S_j$, un conjunto independiente por tdm de H_j , si $j \in I_5$ y a $\mathcal{Q}_k = \emptyset$ si $k \in (I_1 \setminus I_4) \setminus I_5$, tenemos por el Teorema 4.7 que \mathcal{Q}^* es un conjunto cuasiabsorbente por tdm de $D\Delta\mathcal{H}$.

Por otro lado como $\mathcal{Q} \subset V(D)$ es cuasinúcleo por tdm de D tenemos que \mathcal{Q} es un conjunto independiente por tdm de D distinto del vacío. Sea $I_1 = \{i \in I \mid \text{no existe } H_i S - \text{tdm}\}$, como I_4 e I_5 son subconjuntos de I_1 , además \mathcal{Q}_i y S_j son conjuntos independientes por tdm de H_i y H_j para toda $i \in I_4$ y para toda $j \in I_5$ respectivamente, entonces por el Teorema 3.1 \mathcal{Q}^* es un conjunto independiente por tdm de $D\Delta\mathcal{H}$.

Por lo tanto \mathcal{Q}^* es un cuasinúcleo por tdm de $D\Delta\mathcal{H}$. ■

Corolario 4.4 $\mathcal{Q}^* \subset V(D\Delta\mathcal{H})$ es un cuasinúcleo por tdm de $D\Delta\mathcal{H}$ si y sólo si

$$\mathcal{Q}^* = \mathcal{Q} \cup \bigcup_{i \in I_4} \mathcal{Q}_i \cup \bigcup_{j \in I_5} S_j$$

donde \mathcal{Q} es un cuasinúcleo por tdm en la digráfica D , $I_4 = \{i \in I \mid \text{no existe la } H_i\mathcal{Q} - \text{tdm y para toda } x \in V(D) \setminus \mathcal{Q} \text{ tal que existe la } H_i x - \text{tdm entonces no existe la } x\mathcal{Q} - \text{tdm}\}$, \mathcal{Q}_i cuasinúcleo por tdm de H_i para cada $i \in I_4$, $I_5 = \{i \in I \mid \text{no existe } H_i\mathcal{Q} - \text{tdm y para alguna } x \in V(D) \setminus \mathcal{Q} \text{ tal que existe la } H_i x - \text{tdm entonces existe la } x\mathcal{Q} - \text{tdm}\}$, S_j es un conjunto independiente por tdm de H_j para cada $j \in I_5$.

Demostración.

Teniendo en cuenta que $I_5 \subseteq I \setminus I_4$ y por los teoremas 4.8 y 4.9, el resultado se cumple. ■

Corolario 4.5 *Una digráfica $D\Delta\mathcal{H}$ tiene un cuasinúcleo por tdm si y sólo si H_i tiene un cuasinúcleo por tdm con $i \in I_4$ y H_j tiene un conjunto independiente por tdm con $j \in I_5$, donde $I_4 = \{i \in I \mid \text{no existe la } H_i\mathcal{Q} - \text{tdm}\}$ y para toda $x \in V(D) \setminus \mathcal{Q}$ tal que existe la $H_i x - \text{tdm}$ entonces no existe la $x\mathcal{Q} - \text{tdm}\}$, $I_5 = \{i \in I \mid \text{no existe } H_i\mathcal{Q} - \text{tdm}\}$ y para alguna $x \in V(D) \setminus \mathcal{Q}$ tal que existe la $H_i x - \text{tdm}$ entonces existe la $x\mathcal{Q} - \text{tdm}\}$ y \mathcal{Q} es un cuasinúcleo por tdm de D .*

Demostración.

Inmediato por el Corolario 4.4. ■

Continuando con la estructura que hemos llevado en este trabajo, veamos ahora cuál es el número total no solo de los cuasinúcleos por tdm de $D\Delta\mathcal{H}$ sino también de los conjuntos cuasiabsorbentes de $D\Delta\mathcal{H}$. Para una mejor lectura abreviaremos al número total de conjuntos cuasiabsorbentes por tdm y al número total de cuasinúcleos por tdm como \mathcal{NCTDM} y $\mathcal{NQ TDM}$, respectivamente.

Teorema 4.10 *Sean $\mathcal{C} = \{\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_t\}$, $t \geq 1$ la familia de todos los conjuntos cuasiabsorbentes por tdm de D , $\mathcal{C}_r \in \mathcal{C}$ e $I_r = \{i \in I \mid \text{no existe la } H_i\mathcal{C}_r - \text{tdm}\}$ y para toda $x \in V(D) \setminus \mathcal{C}_r$ tal que existe la $H_i x - \text{tdm}$, entonces no existe la $x\mathcal{C}_r - \text{tdm}\}$, entonces:*

$$\mathcal{NCTDM}(D\Delta\mathcal{H}) = \sum_{r=1}^t (f_2(I_r) \prod_{s \in I \setminus I_r} 2^{p_s})$$

donde

$$f_2(I_r) = \begin{cases} \prod_{j \in I_r} \mathcal{NCTDM}(H_j) & \text{si } I_r \neq \emptyset \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Demostración.

Por la demostración del Teorema 4.7 todo conjunto cuasiabsorbente de $D\Delta\mathcal{H}$ debe contener un conjunto cuasiabsorbente de D . Sea $\mathcal{C} = \{\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_t\}$ con $t \geq 1$ la familia de todos los conjuntos absorbentes de D y sea $I_r = \{i \in I \mid \text{no existe la}$

$H_i\mathcal{C}_r - tdm$ y para toda $x \in V(D) \setminus \mathcal{C}_r$ tal que existe la $H_ix - tdm$ entonces no existe la $x\mathcal{C}_r - tdm$ con $\mathcal{C}_r \in \mathcal{C}$, tenemos los siguientes casos:

1. Si $I_r \neq \emptyset$, entonces en cada H_j con $j \in I_r$ nosotros escogemos cualquier conjunto cuasiabsorbente por tdm y en cada H_s con $s \in I \setminus I_r$ escogemos un subconjunto cualquiera de sus vértices, esto debido al Teorema 4.7. Por lo anterior la cantidad de conjuntos cuasiabsorbentes por tdm que contengan a \mathcal{C}_r va ser igual a la cantidad de formas en que podamos acomodar los conjuntos cuasiabsorbentes de cada H_j con $j \in I_r$ y los subconjuntos de vértices de cada H_s con $s \in I \setminus I_r$ es decir:

$$\prod_{j \in I_r} \mathcal{NCTDM}(H_j) \prod_{s \in I \setminus I_r} 2^{p_s}$$

donde $p_s = |V(H_s)| \geq 1$ para cada $s \in I \setminus I_r$.

2. Si $I_r = \emptyset$, entonces por el Teorema 4.7 la cantidad de conjuntos cuasiabsorbentes por tdm que contengan a \mathcal{C}_r va a ser igual a la cantidad de formas en que podamos acomodar los subconjuntos de vértices de cada H_s con $s \in I \setminus I_r$, es decir:

$$\prod_{s \in I \setminus I_r} 2^{p_s}$$

De los dos casos anteriores podemos ver que la cantidad de conjuntos cuasiabsorbentes por tdm de $D\Delta\mathcal{H}$ es:

$$\mathcal{NCTDM}(D\Delta\mathcal{H}) = \sum_{r=1}^t (f_2(I_r) \prod_{s \in I \setminus I_r} 2^{p_s})$$

donde

$$f_2(I_r) = \begin{cases} \prod_{j \in I_r} \mathcal{NCTDM}(H_j) & \text{si } I_r \neq \emptyset \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

■

Teorema 4.11 Sean $\mathcal{Q} = \{\mathcal{Q}_1, \dots, \mathcal{Q}_t\}$, $t \geq 1$ la familia de todos los cuasinúcleos por tdm de D , $\mathcal{Q}_r \in \mathcal{Q}$, $I_r^1 = \{i \in I \mid \text{no existe } H_i\mathcal{Q}_r - tdm \text{ y para alguna } x \in V(D) \setminus \mathcal{Q}_r \text{ tal que existe la } H_ix - tdm \text{ entonces existe la } x\mathcal{Q}_r - tdm\}$ e $I_r^2 = \{i \in I \mid \text{no existe la } H_i\mathcal{Q}_r - tdm \text{ y para toda } x \in V(D) \setminus \mathcal{Q}_r \text{ tal que existe la } H_ix - tdm \text{ entonces no existe la } x\mathcal{Q}_r - tdm\}$, entonces:

$$\mathcal{NQCTDM}(D\Delta\mathcal{H}) = \sum_{r=1}^t f_1(I_r^1 \cup I_r^2)$$

donde

$$f_1(I_r^1 \cup I_r^2) = \begin{cases} \prod_{i \in I_r^1} \mathcal{NITDM}(H_i) \prod_{j \in I_r^2} \mathcal{NQITDM}(H_j) & \text{si } I_r^1 \neq \emptyset \text{ e } I_r^2 \neq \emptyset \\ \prod_{i \in I_r^1} \mathcal{NITDM}(H_i) & \text{si } I_r^1 \neq \emptyset \text{ e } I_r^2 = \emptyset \\ \prod_{j \in I_r^2} \mathcal{NQITDM}(H_j) & \text{si } I_r^1 = \emptyset \text{ e } I_r^2 \neq \emptyset \\ 1 & \text{si } I_r^1 = \emptyset \text{ e } I_r^2 = \emptyset \end{cases}$$

Demostración.

Por el Corolario 4.4 sabemos que todo cuasinúcleo por tdm $D\Delta\mathcal{H}$ debe contener un cuasinúcleo por tdm de D . Sea $\mathcal{Q} = \{\mathcal{Q}_1, \dots, \mathcal{Q}_t\}$ con $t \geq 1$ la familia de todos los cuasinúcleos por tdm de D y sea $I_r^1 = \{i \in I \mid \text{no existe } H_i\mathcal{Q}_r - \text{tdm y para alguna } x \in V(D) \setminus \mathcal{Q}_r \text{ tal que existe la } H_i x - \text{tdm entonces existe la } x\mathcal{Q}_r - \text{tdm}\}$ e $I_r^2 = \{i \in I \mid \text{no existe la } H_i\mathcal{Q}_r - \text{tdm y para toda } x \in V(D) \setminus \mathcal{Q}_r \text{ tal que existe la } H_i x - \text{tdm entonces no existe la } x\mathcal{Q}_r - \text{tdm}\}$, tenemos los siguientes casos:

1. Si $I_r^1 \neq \emptyset$ e $I_r^2 \neq \emptyset$, entonces por el Corolario 4.4 en cada H_i con $i \in I_r^1$ nosotros escogemos un conjunto independiente por tdm y en cada H_j con $j \in I_r^2$ nosotros escogemos un cuasinúcleo por tdm. La cantidad de cuasinúcleos por tdm que contengan a \mathcal{Q}_r va a ser igual a la cantidad de maneras en las que se puedan acomodar los conjuntos independientes por tdm de los H_i con $i \in I_r^1$ y los cuasinúcleos por tdm de H_j con $j \in I_r^2$, es decir:

$$\prod_{i \in I_r^1} \mathcal{NITDM}(H_i) \prod_{j \in I_r^2} \mathcal{NQITDM}(H_j)$$

2. Si $I_r^1 \neq \emptyset$ e $I_r^2 = \emptyset$, entonces nuevamente por el Corolario 4.4 en cada H_i con $i \in I_r^1$ nosotros escogemos un conjunto independiente por tdm. La cantidad de cuasinúcleos por tdm que contengan a \mathcal{Q}_r va a ser igual a la cantidad de maneras en las que se puedan acomodar los conjuntos independientes por tdm de los H_i con $i \in I_r^1$, es decir:

$$\prod_{i \in I_r^1} \mathcal{NITDM}(H_i)$$

3. Si $I_r^1 = \emptyset$ e $I_r^2 \neq \emptyset$, entonces en cada H_j con $j \in I_r^2$ nosotros escogemos un cuasinúcleo por tdm, ésto por el Corolario 4.4. La cantidad de cuasinúcleos por

tdm que contengan a \mathcal{Q}_r va a ser igual a la cantidad de maneras en las que se puedan acomodar los cuasinúcleos por tdm de los H_j con $j \in I_r^2$, es decir:

$$\prod_{j \in I_r^2} \mathcal{NQTD}M(H_j)$$

4. Si $I_r^1 = \emptyset$ e $I_r^2 = \emptyset$, entonces por el Corolario 4.4 \mathcal{Q}_r es un cuasinúcleo por tdm de $D\Delta\mathcal{H}$.

Por los anteriores casos podemos ver que:

$$\mathcal{NQTD}M(D\Delta\mathcal{H}) = \sum_{r=1}^t f_1(I_r^1 \cup I_r^2)$$

donde

$$f_1(I_r^1 \cup I_r^2) = \begin{cases} \prod_{i \in I_r^1} \mathcal{NITD}M(H_i) \prod_{j \in I_r^2} \mathcal{NQTD}M(H_j) & \text{si } I_r^1 \neq \emptyset \text{ e } I_r^2 \neq \emptyset \\ \prod_{i \in I_r^1} \mathcal{NITD}M(H_i) & \text{si } I_r^1 \neq \emptyset \text{ e } I_r^2 = \emptyset \\ \prod_{j \in I_r^2} \mathcal{NQTD}M(H_j) & \text{si } I_r^1 = \emptyset \text{ e } I_r^2 \neq \emptyset \\ 1 & \text{si } I_r^1 = \emptyset \text{ e } I_r^2 = \emptyset \end{cases}$$

■

Recordemos que los cinco tipos de corona: por flechas $D\diamond\mathcal{H}$, por vecinos exteriores $D\star^+\mathcal{H}$, por vecinos interiores $D\star^-\mathcal{H}$, por vecinos $D\star\mathcal{H}$ y corona para digráficas $D\circ\mathcal{H}$, cumplen ser casos especiales de la Corona Generalizada, por lo que por los teoremas 4.8, 4.9, 4.10, 4.11 y el Corolario 4.4, los siguientes resultados son válidos. Téngase presente que el conjunto de vértices de cualquiera de las coronas es el mismo.

Teorema 4.12 *Un subconjunto $\mathcal{C}^* \subseteq V(D\circ\mathcal{H})$ es un conjunto cuasiabsorbente por tdm de $D\circ\mathcal{H}$ ($D\diamond\mathcal{H}, D\star^+\mathcal{H}, D\star^-\mathcal{H}, D\star\mathcal{H}$) si y sólo*

$$\mathcal{C}^* = \mathcal{C} \cup \bigcup_{i \in I_4} \mathcal{C}_i \cup \bigcup_{j \in I \setminus I_4} \mathcal{C}_j$$

donde \mathcal{C} es un conjunto cuasiabsorbente por tdm en D , $I_4 = \{i \in I \mid \text{no existe la } H_i\mathcal{C}\text{-tdm y para toda } x \in V(D) \setminus \mathcal{C} \text{ tal que existe la } H_i x\text{-tdm entonces no existe la } x\mathcal{C}\text{-tdm}\}$, \mathcal{C}_i es un conjunto cuasiabsorbente por tdm de H_i para cada $i \in I_4$ y \mathcal{C}_j un conjunto cualquiera de vértices de H_j para cada $j \in I \setminus I_4$.

Teorema 4.13 Si $\mathcal{Q}^* \subset V(D \circ \mathcal{H})$ es un cuasinúcleo por tdm de $D \circ \mathcal{H}$ ($D \diamond \mathcal{H}$, $D\star^+\mathcal{H}$, $D\star^-\mathcal{H}$, $D\star\mathcal{H}$), entonces

$$\mathcal{Q}^* = \mathcal{Q} \cup \bigcup_{i \in I_4} \mathcal{Q}_i \cup \bigcup_{j \in I \setminus I_4} S_j$$

donde \mathcal{Q} es un cuasinúcleo por tdm en la digráfica D , $I_4 = \{i \in I \mid \text{no existe la } H_i\mathcal{Q} - \text{tdm y para toda } x \in V(D) \setminus \mathcal{Q} \text{ tal que existe la } H_i x - \text{tdm entonces no existe la } x\mathcal{Q} - \text{tdm}\}$, \mathcal{Q}_i cuasinúcleo por tdm de H_i para cada $i \in I_4$, S_j es un conjunto independiente por tdm de H_j para cada $j \in I \setminus I_4$.

Teorema 4.14 Si

$$\mathcal{Q}^* = \mathcal{Q} \cup \bigcup_{i \in I_4} \mathcal{Q}_i \cup \bigcup_{j \in I_5} S_j$$

donde \mathcal{Q} es un cuasinúcleo por tdm en la digráfica D , $I_4 = \{i \in I \mid \text{no existe la } H_i\mathcal{Q} - \text{tdm y para toda } x \in V(D) \setminus \mathcal{Q} \text{ tal que existe la } H_i x - \text{tdm entonces no existe la } x\mathcal{Q} - \text{tdm}\}$, \mathcal{Q}_i cuasinúcleo por tdm de H_i para cada $i \in I_4$, $I_5 = \{i \in I \mid \text{no existe } H_i\mathcal{Q} - \text{tdm y para alguna } x \in V(D) \setminus \mathcal{Q} \text{ tal que existe la } H_i x - \text{tdm entonces existe la } x\mathcal{Q} - \text{tdm}\}$, S_j es un conjunto independiente por tdm de H_j para cada $j \in I_5$, entonces \mathcal{Q}^* es un cuasinúcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas de $D \circ \mathcal{H}$ ($D \diamond \mathcal{H}$, $D\star^+\mathcal{H}$, $D\star^-\mathcal{H}$, $D\star\mathcal{H}$).

Corolario 4.6 Un subconjunto $\mathcal{Q}^* \subset V(D \circ \mathcal{H})$ ($(D \diamond \mathcal{H})$, $(D\star^+\mathcal{H})$, $(D\star^-\mathcal{H})$, $(D\star\mathcal{H})$) es un cuasinúcleo por tdm de $D \circ \mathcal{H}$ ($D \diamond \mathcal{H}$, $D\star^+\mathcal{H}$, $D\star^-\mathcal{H}$, $D\star\mathcal{H}$) si y sólo si

$$\mathcal{Q}^* = \mathcal{Q} \cup \bigcup_{i \in I_4} \mathcal{Q}_i \cup \bigcup_{j \in I_5} S_j$$

donde \mathcal{Q} es un cuasinúcleo por tdm en la digráfica D , $I_4 = \{i \in I \mid \text{no existe la } H_i\mathcal{Q} - \text{tdm y para toda } x \in V(D) \setminus \mathcal{Q} \text{ tal que existe la } H_i x - \text{tdm entonces no existe la } x\mathcal{Q} - \text{tdm}\}$, \mathcal{Q}_i cuasinúcleo por tdm de H_i para cada $i \in I_4$, $I_5 = \{i \in I \mid \text{no existe } H_i\mathcal{Q} - \text{tdm y para alguna } x \in V(D) \setminus \mathcal{Q} \text{ tal que existe la } H_i x - \text{tdm entonces existe la } x\mathcal{Q} - \text{tdm}\}$, S_j es un conjunto independiente por tdm de H_j para cada $j \in I_5$.

Teorema 4.15 Sean $\mathcal{C} = \{\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_t\}$, $t \geq 1$ la familia de todos los conjuntos cuasiabsorbentes por tdm de D , $\mathcal{C}_r \in \mathcal{C}$ e $I_r = \{i \in I \mid \text{no existe la } H_i\mathcal{C}_r - \text{tdm y para toda } x \in V(D) \setminus \mathcal{C}_r \text{ tal que existe la } H_i x - \text{tdm entonces no existe la } x\mathcal{C}_r - \text{tdm}\}$, entonces para $D \circ \mathcal{H}$ ($D \diamond \mathcal{H}$, $D\star^+\mathcal{H}$, $D\star^-\mathcal{H}$, $D\star\mathcal{H}$):

$$NCTDM(D \circ \mathcal{H}) = \sum_{r=1}^t (f_2(I_r)) \prod_{s \in I \setminus I_r} 2^{p_s}$$

donde

$$f_2(I_r) = \begin{cases} \prod_{j \in I_r} \mathcal{NCTDM}(H_j) & \text{si } I_r \neq \emptyset \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Teorema 4.16 Sean $\mathcal{Q} = \{\mathcal{Q}_1, \dots, \mathcal{Q}_t\}$, $t \geq 1$ la familia de todos los cuasinúcleos por tdm de D , $\mathcal{Q}_r \in \mathcal{Q}$, $I_r^1 = \{i \in I \mid \text{no existe } H_i \mathcal{Q}_r - \text{tdm y para alguna } x \in V(D) \setminus \mathcal{Q}_r \text{ tal que existe la } H_i x - \text{tdm}\}$ e $I_r^2 = \{i \in I \mid \text{no existe la } H_i \mathcal{Q}_r - \text{tdm y para toda } x \in V(D) \setminus \mathcal{Q}_r \text{ tal que existe la } H_i x - \text{tdm}\}$, entonces para $D \circ \mathcal{H}$ ($D \diamond \mathcal{H}, D\star^+ \mathcal{H}, D\star^- \mathcal{H}, D\star \mathcal{H}$):

$$\mathcal{NQ TDM}(D \circ \mathcal{H}) = \sum_{r=1}^t f_1(I_r^1 \cup I_r^2)$$

donde

$$f_1(I_r^1 \cup I_r^2) = \begin{cases} \prod_{i \in I_r^1} \mathcal{NITDM}(H_i) \prod_{j \in I_r^2} \mathcal{NQ TDM}(H_j) & \text{si } I_r^1 \neq \emptyset \text{ e } I_r^2 \neq \emptyset \\ \prod_{i \in I_r^1} \mathcal{NITDM}(H_i) & \text{si } I_r^1 \neq \emptyset \text{ e } I_r^2 = \emptyset \\ \prod_{j \in I_r^2} \mathcal{NQ TDM}(H_j) & \text{si } I_r^1 = \emptyset \text{ e } I_r^2 \neq \emptyset \\ 1 & \text{si } I_r^1 = \emptyset \text{ e } I_r^2 = \emptyset \end{cases}$$

Conclusiones

En un principio nuestro propósito era definir la corona por flechas, por vecinos exteriores, por vecinos interiores y por vecinos para digráficas, posteriormente buscar las condiciones para que tuvieran núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas. Sin embargo nos dimos cuenta que las digráficas resultantes de estas operaciones tenían una misma estructura, por tal motivo construimos la Corona Generalizada.

En retrospectiva, analizamos los conjuntos independientes y absorbentes por trayectorias dirigidas monocromáticas de la Corona Generalizada y dimos las condiciones suficientes y necesarias para que ésta misma tenga núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas. Estudiamos el caso de seminúcleo y cuasinúcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas en esta operación, no sin antes trabajar con los conjuntos cuasiabsorbentes por trayectorias dirigidas monocromáticas. Contamos cuántos de estos conjuntos mencionados puede contener en total la digráfica resultante de la operación, al igual que dimos las condiciones para que ésta tenga la propiedad de ser núcleo perfecta por trayectorias dirigidas monocromáticas.

Estos fueron los resultados expuestos en la tesis, no obstante la pregunta persiste: ¿Qué otras digráficas tienen núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas? ¿Existirá alguna otra operación entre digráficas que nos genere una familia de digráficas, como el caso de la Corona Generalizada, que tenga núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas? Independientemente de las respuestas podemos ver que el trabajo sobre núcleos por trayectorias dirigidas monocromáticas no ha concluido.

Bibliografía

- [1] S. Barik, S. Pati, and B. K. Sarma, *The spectrum of the corona of two graphs*, SIAM. J. Discrete Math., 24 (2007), 47-56.
- [2] C. Barrientos, *Graceful Labelings of Chain and Corona Graphs*, Bulletin of the ICA, 34 (2002), 17-26.
- [3] C. Berge, *Theory of Graphs*, Dover Publications, 2001.
- [4] H. Cheng and J. Yang, *Hosoya index of the corona of two graphs*, South Asian Journal of Mathematics, 2(2) (2012), 144-147.
- [5] V. Chvátal and L. Lovász, *Every Directed Graph has a Semikernel*, Lecture Notes in Math Springer-Verlag, Berlin 411 (1974) 175.
- [6] L. Euler, *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*, Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae, 8 (1736) 128-140.
- [7] R. Frucht and F. Harary, *On the corona of two graphs*, Aequationes Math. 4 (1970), 322–324.
- [8] H. Galeana-Sánchez, *On monocromatic paths and monocromatic cycles in edge coloured tournaments*, Discrete Math. 156 (1996), 103-112.
- [9] H. Galeana-Sánchez and R. Gómez, *Monochromatic paths on edge colored digraphs and state splittings*, Advances and Applications in Discrete Mathematics 4(1) (2009), 33-51.
- [10] H. Galeana-Sánchez and L. Pastrana Ramírez, *Kernels in edge coloured line digraphs*, Discussiones Mathematicae, 18 (1998) 91-98.
- [11] C. E. Go and S. R. Canoy, *Domination in the Corona and Join of Graphs*, International Mathematical Forum, 6(16) (2011), 763 - 771.

-
- [12] I. Gopalapillat, *The spectrum of neighborhood corona of graphs*, Kragujevac Journal of Mathematics, 35(3) (2011), 493-500.
- [13] F. Harary, *Homage to Roberto Frucht*, Journal of Graph Theory, 6 (1982), 97-99.
- [14] Y. Hou and W. Shiu, *The spectrum of edge corona of graphs*, Electronic Journal of Linear Algebra, 20 (2010), 586-594.
- [15] Y. L. Lai and G. J. Changpero, *On the profile of the corona of two graphs*, Information Processing Letters, 89(6) (2004), 287-292.
- [16] V. Neumann Lara, *Seminúcleos de una digráfica*, An. Inst. Mat. Univ. Nac. Autónoma de México, 11 (1971), 55-62.
- [17] B. Sands, N Sauer and R Woodrow, *On monochromatic paths in Edge Coloured Digraphs*, J. Combin. Theory, Series B33, 1982, 271-275.
- [18] J. Topp, *Domination independence and irredundance in graphs*, Dissertationes Math., Warszawa, 342 (1995).
- [19] I. Włoch, *On kernels by monochromatic paths in D-join*, Ars Combinatoria, 98 (2011), 215-224.
- [20] I. Włoch, *On kernels by monochromatic paths in the corona of digraphs*, Cent. Eur. J. Math., 6(4) (2008), 537-542.
- [21] Von Neumann and O. Morgenstern, *Theory of Games and Economic Behaviour*, Princeton University Press, Princeton, 13-15, 1944.