UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

EL PRINCIPIO COMBINATORIO DE JENSEN

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A:

JOSÉ ADRIÁN GALLARDO QUIROZ

DIRECTOR DE TESIS:
Dr. Roberto Pichardo Mendoza

Cd. Universitaria, D. F. 2014

Hoja de datos del jurado

1. Datos del alumno
   Gallardo
   Quiroz
   José Adrián
   51208419
   Universidad Nacional Autónoma de México
   Facultad de Ciencias
   Matemáticas
   307174659

2. Datos del tutor
   Dr.
   Roberto
   Pichardo
   Mendoza

3. Datos del sinodal 1
   Dr.
   Iván
   Martínez
   Ruíz

4. Datos del sinodal 2
   Dra.
   Gabriela
   Campero
   Arena

5. Datos del sinodal 3
   M. en C.
   Rafael
   Rojas
   Barbachano

6. Datos del sinodal 4
   Dr.
   Osvaldo Alfonso
   Téllez
   Nieto

7. Datos del trabajo escrito
   El Principio Combinatorio de Jensen
   70 pp
   2014

ÍNDICE

RESUMEN

Durante el análisis del Universo Construible de Gödel, Jensen descubrió un principio combinatorio al cual llamó *diamante*, $\diamondsuit$. Jensen probó que $\diamondsuit$ es cierto en el Universo Construible de Gödel. Además, introdujo la primera construcción basada en $\diamondsuit$ de un objeto combinatorio complicado, un árbol de Suslin. Desde entonces este principio y sus generalizaciones se volvieron muy populares entre los interesados en la Teoría de Conjuntos, quienes lo utilizaron para resolver problemas abiertos en áreas como Topología, Teoría de la Medida y Teoría de Grupos.

En este trabajo abordaremos el Principio Combinatorio de Jensen, también llamado "diamante de Jensen". La tesis está dividida en tres partes. En la primera parte estableceremos las definiciones y resultados más importantes sobre conjuntos cerrados no acotados y conjuntos estacionarios para poder establecer el Diamante de Jensen.

En la segunda parte definiremos el Diamante de Jensen como el enunciado: "Existe una sucesión $\{A_\alpha\}_{\alpha<\omega_1}$ tal que $A_\alpha \subseteq \alpha$ para cada $\alpha < \omega_1$ y cumple que para cada $A \subseteq \omega_1$ el conjunto $\{\alpha < \omega_1 : A \cap \alpha = A_\alpha\}$ es estacionario en ω_1". Demostraremos que suponer válido el Diamante de Jensen implica la validez de la Hipótesis del Continuo. Probaremos la equivalencia del Diamante de Jensen con otros principios combinatorios, algunos dados en términos de funciones y otros que, en apariencia, son debilitamientos de $\diamondsuit$. Analizaremos la relación del Diamante de Jensen con el Principio de Ostaszewski, también llamado "trébol" ($\clubsuit$), y veremos algunas generalizaciones de Diamante. Habrá una sección en la que se comentará sobre algunas aplicaciones de $\diamondsuit$ a la Topología, el Álgebra y la Combinatoria de Conjuntos. Dicha sección incluirá referencias bibliográficas para el lector interesado en profundizar en estos temas.

En la tercera parte demostraremos que el Diamante de Jensen es independiente de los Axiomas de la Teoría de Conjuntos mediante el empleo de la técnica llamada "Forcing". En este mismo sentido, se incluirán resultados de preservación, por ejemplo: los conjuntos cerrados no acotados son preservados por cualquier noción de forcing, pero existen nociones de forcing que no preservan estacionarios; se prueba que hay al menos dos clases de nociones

de forcing que sí preservan estacionarios (los que tienen la condición de la cadena numerable y los σ-cerrados).

CAPÍTULO 1: PRELIMINARES

El propósito de esta sección es, en primer lugar, establecer la notación que se empleará en la tesis y enunciar algunos de los resultados sobre aritmética ordinal y cardinal que serán útiles posteriormente. Además, se desarrollará con detalle el material correspondiente a conjuntos cerrados no acotados y a conjuntos estacionarios.

Cualquier símbolo que no se encuentre definido explícitamente aquí, deberá ser entendido como en [4].

1.1 Notación

Dados X y Y dos conjuntos y una función $f : X \to Y$.

1. Si $A \subseteq X$, la *imagen directa* de A bajo f es $f[A] = \{f(a) : a \in A\}$.

2. Si $B \subseteq Y$, la *imagen inversa* de B bajo f es $f^{-1}[B] = \{x \in X : f(x) \in B\}$.

3. Si $b \in Y$, la *fibra* de b es $f^{-1}\{b\} = \{x \in X : f(x) = b\}$.

Dados dos conjuntos A y B, denotaremos por B^A a la colección de todas las funciones de A en B.

La letra $\mathfrak{c}$ representa $|\mathscr{P}(\omega)|$, es decir, $\mathfrak{c}$ representa la cardinalidad del conjunto potencia de ω. Para los fines de este escrito ω, será, utilizado como el primer ordinal infinito y el conjunto de todos los números naturales. Del mismo modo, ω_1 se rá, simultáneamente, el primer ordinal no numerable y el conjunto de todos los ordinales numerables.

El enunciado $\mathfrak{c} = \omega_1$ es conocido como la Hipótesis del Continuo y usaremos la abreviatura **CH** para referirnos a dicho enunciado.

Dado un cardinal κ, denotaremos como κ^+ al mínimo cardinal que es mayor a κ. Ahora, si X es un conjunto, entonces $[X]^{\leqslant \kappa}$ representará a la familia de subconjuntos de X cuya cardinalidad es a lo más κ, es decir, $[X]^{\leqslant \kappa} = \{A \subseteq X : |A| \leqslant \kappa\}$.

1.2 Ordinales y cardinales

Definición 1.1. Diremos que α es un *ordinal límite* si y sólo si $\alpha \neq 0$ y para cada $\beta < \alpha$ se tiene que $\beta + 1 < \alpha$.

Para este trabajo, si α es un ordinal infinito, $\lim(\alpha)$ denotará al conjunto de todos los ordinales límite que son elementos de α.

El lema siguiente nos será útil más adelante, cuando comencemos nuestra discusión sobre cerrados no acotados.

Lema 1.2. *Sean δ un ordinal límite y $\{\xi_\beta : \beta < \delta\}$ una sucesión de ordinales estrictamente creciente. Entonces $\sup\{\xi_\beta : \beta < \delta\}$ es un ordinal límite.*

Demostración. Definimos $\alpha = \sup\{\xi_\beta : \beta < \delta\}$. Sea $\eta < \alpha$, entonces $\eta < \xi_\beta$ para algún $\beta < \delta$ y así $\eta + 1 \leq \xi_\beta$. Como δ es un ordinal límite, $\beta + 1 < \delta$, además la sucesión es estrictamente creciente así que $\xi_\beta < \xi_{\beta+1}$. Por lo tanto, $\eta + 1 \leq \xi_\beta < \xi_{\beta+1} \leq \alpha$. Así tenemos que $\eta + 1 < \alpha$. □

Ahora estamos interesados en definir el tipo de orden de un buen orden. Para eso será conveniente recordar la definición de isomorfismo de orden.

Definición 1.3. Sean $\langle A, <_A \rangle$ y $\langle B, <_B \rangle$ dos órdenes parciales. Diremos que una función $f : A \to B$ es un isomorfismo de orden si y sólo si:

1. f es una función biyectiva,
2. para cualesquiera $x, y \in A$ que cumplen que $x <_A y$ se tiene que $f(x) <_B f(y)$ y
3. para cualesquiera $a, b \in B$ tales que $a <_B b$ se obtiene que $f^{-1}(a) < f^{-1}(b)$.

En el caso de que exista dicha función, diremos que A y B son isomorfos y lo denotaremos como $\langle A, <_A \rangle \cong \langle B, <_B \rangle$.

Definición 1.4. Si $\langle A, < \rangle$ es un buen orden, el tipo de orden de A (denotado $to(A)$) es el único ordinal α tal que $\langle A, < \rangle \cong \langle \alpha, \in \rangle$.

La existencia del ordinal mencionado en la definición anterior está garantizada por [4, I Teorema 7.6].

La inclusión del material siguiente en la tesis obedece a que será una herramienta muy útil en la construcción de conjuntos cerrados no acotados.

Definición 1.5. Sean A un conjunto y $n \in \omega$. Si $n > 0$, una función $f : A^n \to A$ será llamada función de aridad n sobre A. En general, una *función finitaria* sobre A es una función de aridad n sobre A, si $n > 0$, o un elemento de A, si $n = 0$.

Como ejemplo, si $\alpha > 0$ es un ordinal, para cada $\beta < \alpha$ tenemos que β es una función finitaria sobre α de aridad 0.

Otro ejemplo: si (G, μ) es un grupo algebraico, entonces $\mu : G \times G \to G$ es una función de aridad 2 y, por ende, es finitaria. En esta misma línea, si $i : G \to G$ es la función que a cada elemento de G le asocia su inverso con respecto a la operación μ, entonces i es una función de aridad 1. Ahora, si denotamos por e al elemento identidad del grupo G, entonces e es una función de aridad cero.

Definición 1.6. Sea f una función de aridad n sobre A. Diremos que $B \subseteq A$ es cerrado bajo f si $f[B^n] \subseteq B$ en el caso en que $n > 0$ o $f \in B$ cuando $n = 0$.

Regresando al ejemplo del grupo (G, μ): si H es un subgrupo de G, entonces H es cerrado bajo $\{\mu, i, e\}$. El recíproco también es cierto, todo subconjunto de G que sea cerrado bajo $\{\mu, i, e\}$ es un subgrupo de G. Así, los subgrupos de un grupo pueden caracterizarse como los subconjuntos de G que son cerrados bajo cierta familia de funciones finitarias.

Como es bien sabido, todo subconjunto de G está contenido en un mínimo subgrupo de G. Esto es un caso particular de lo que vamos a hacer a continuación.

Definición 1.7. Sean $\mathscr{L}$ un conjunto de funciones finitarias sobre A y $B \subseteq A$. Definimos la *cerradura* de B bajo $\mathscr{L}$ como el menor subconjunto, respecto a la contención, C de A tal que $B \subseteq C$ y C es cerrado bajo todas las funciones de $\mathscr{L}$.

Notemos que si $\mathscr{L}$ es un conjunto de funciones finitarias sobre A, y B es un subconjunto de A, entonces siempre existe la cerradura de B bajo $\mathscr{L}$. Consideremos

$$X = \{C \subseteq A : B \subseteq C \text{ y } C \text{ es cerrado bajo } \mathscr{L}\}.$$

Sea $f \in \mathscr{L}$. Si $n > 0$, como f es finitaria sobre A, se tiene que $f[A^n] \subseteq A$. Si $n = 0$, entonces $f \in A$. Por lo tanto, $A \in X$ y así tenemos que $X \neq \emptyset$. Afirmamos que $Y = \bigcap X$ es la cerradura de B bajo $\mathscr{L}$. Primero veamos que $B \subseteq Y$. Como $B \subseteq C$ para cada $C \in X$, tenemos que $B \subseteq Y$. En segundo lugar, probaremos que si $f \in \mathscr{L}$, entonces Y es cerrado bajo f. Sean $f \in \mathscr{L}$ y $C \in X$. Tenemos que $Y \subseteq C$. Supongamos que $n > 0$ lo que implica que $Y^n \subseteq C^n$. Por lo tanto, $f[Y^n] \subseteq f[C^n] \subseteq C$ y así $f[Y^n] \subseteq Y$, porque C fue un elemento arbitrario de X. En el caso $n = 0$, sabemos que $f \in C$ para cada $C \in X$, es decir, $f \in Y$. Para finalizar, si C es cerrado bajo $\mathscr{L}$ y $B \subseteq C$, entonces $C \in X$ y, por lo tanto, $Y \subseteq C$.

Teorema 1.8. *Sea κ un cardinal infinito. Sean $\mathscr{L}$ un conjunto de funciones finitarias sobre un conjunto A tal que $|\mathscr{L}| \leq \kappa$ y B un subconjunto de A tal que $|B| \leq \kappa$. Entonces la cerradura de B bajo $\mathscr{L}$ tiene cardinalidad menor o igual a κ.*

Demostración. Si $f \in \mathscr{L}$ y $D \subseteq A$, definimos:

$$f * D = \begin{cases} f[D^n] & \text{cuando } n > 0 \\ \{f\} & \text{cuando } n = 0 \end{cases}$$

donde n es la aridad de f.

Demostremos que si $|D| \leq \kappa$, entonces $|f * D| \leq \kappa$. Para el caso en que $n > 0$, tenemos que, $|D| \leq \kappa$, por lo cual, $|D^n| \leq \kappa^n = \kappa$. La restricción $f \restriction D^n : D^n \to f[D^n]$ es suprayectiva y, por lo tanto, $|f[D^n]| \leq |D^n| \leq \kappa$. Si $n = 0$, entonces $f * D = \{f\}$, y así tenemos que $|f * D| = |\{f\}| \leq \kappa$.

Definimos recursivamente una familia de subconjuntos de A de la siguiente manera: $C_0 = B$ y $C_{n+1} = C_n \cup \bigcup\{f * C_n : f \in \mathscr{L}\}$. Probaremos por inducción que $|C_n| \leq \kappa$ para cada $n < \omega$. Por hipótesis $|C_0| = |B| \leq \kappa$. Ahora supongamos que $|C_n| \leq \kappa$ para algún $n > 0$. Entonces para cada $f \in \mathscr{L}$ obtenemos que $|f * C_n| \leq \kappa$ y, como $|\mathscr{L}| \leqslant \kappa$, tenemos que $|\bigcup\{f * C_n : f \in \mathscr{L}\}| \leq \kappa$ (por [4, I Theorem 10.21]). Así concluimos que $|C_{n+1}| = |C_n \cup \bigcup\{f * C_n : f \in \mathscr{L}\}| \leq \kappa$.

Definimos $C_\omega = \bigcup_{n<\omega} C_n$. Entonces $|C_\omega| \leq \kappa$. Veamos que C_ω es cerrado bajo $\mathscr{L}$. Sean $f \in \mathscr{L}$ y n la aridad de f. Supongamos que $n > 0$. Sea $\vec{x} = (x_0, x_1, ..., x_{n-1}) \in C_\omega^n$. Entonces para cada $i < n$ existe $j_i < \omega$ de tal modo que $x_i \in C_{j_i}$. Llamamos $m = \max\{j_i : i < n\}$, lo que implica que $C_{j_i} \subseteq C_m$ para cada $i < n$. Como $f * C_m = f[C_m^n]$, tenemos que $f(\vec{x}) \in f * C_m \subseteq C_{m+1} \subseteq C_\omega$. Si $n = 0$, por definición, sabemos que $\{f\} = f * B \subseteq C_\omega$. Así, $f \in C_\omega$. Por lo tanto, C_ω es cerrado bajo $\mathscr{L}$ y contiene a B. Si X es la cerradura de B bajo $\mathscr{L}$, entonces $X \subseteq C_\omega$, ya que X es el menor subconjunto, respecto a la contención que cumple con ser cerrado bajo $\mathscr{L}$ y ser supraconjunto de B. Así que la cardinalidad de X debe ser menor o igual a κ. □

El resto de la sección está dedicada a una discusión breve sobre la cofinalidad de un ordinal y algunos lemas sobre aritmética ordinal y cardinal que tendrán aplicación en capítulos posteriores.

Definición 1.9. Sean α y β ordinales. Una función $f : \alpha \to \beta$ es *cofinal* en β si para cada $\delta < \beta$ existe un $\gamma < \alpha$ tal que $\delta < f(\gamma)$.

Definición 1.10. Definimos la *cofinalidad* de β (denotada $\mathrm{cf}(\beta)$) como el menor ordinal α para el cual existe una función de α en β, cofinal en β.

Intuitivamente, podemos decir que $\mathrm{cf}(\alpha)$ es el "mínimo número de pasos" que se requieren para ascender completamente por α. Este "mínimo número de pasos" es, en efecto, un cardinal.

Definición 1.11. Un cardinal infinito κ es *regular* si y sólo si $\mathrm{cf}(\kappa) = \kappa$. Un cardinal infinito que no es regular es *singular*.

Lema 1.12. *Sea κ un cardinal regular y límite. Entonces el conjunto $\{\lambda < \kappa : \mathrm{cf}(\lambda) = \lambda\}$ tiene cardinalidad κ.*

Demostración. Hagamos $X = \{\lambda < \kappa : \mathrm{cf}(\lambda) = \lambda\}$ y $\mu = \sup X$. Como κ es una cota superior de X, tenemos que $\mu \leqslant \kappa$. Supongamos que $\mu < \kappa$, entonces $\mu^+ < \kappa$ porque κ es límite. Además, $\mathrm{cf}(\mu^+) = \mu^+$, así que $\mu^+ \in X$. De ello obtenemos que $\mu^+ \leqslant \mu$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $\mu = \kappa$. De la regularidad de κ se deduce que $|X| = \kappa$. □

Lema 1.13. *Todo ordinal α se puede escribir como la suma de un ordinal no sucesor y un número natural.*

Demostración. La prueba es por inducción transfinita. Si $\alpha = 0$, $\alpha = 0 + 0$ y 0 es un ordinal no sucesor y un número natural. Supongamos que para cada $\xi < \alpha$, ξ se puede escribir como la suma de un ordinal no sucesor y un número natural. Si $\alpha = \gamma + 1$, para algún ordinal γ, entonces $\gamma < \alpha$. Por hipótesis de inducción, obtenemos que $\gamma = \eta + k$, donde η es un ordinal no sucesor y $k < \omega$. Así, tenemos que $\alpha = (\eta + k) + 1 = \eta + (k + 1)$. Si α es límite, α es un ordinal no sucesor y $\alpha = \alpha + 0$. $\square$

La definición siguiente es una definición por recursión transfinita.

Definición 1.14. (Multiplicación de ordinales)

1. $\alpha \cdot 0 = 0$,

2. $\alpha \cdot (\beta + 1) = \alpha \cdot \beta + \alpha$,

3. $\alpha \cdot \beta = \sup\{\alpha \cdot \gamma : \gamma < \beta\}$ para cada ordinal límite β.

Haremos uso de esta definición en los capítulos 2 y 3.

Lema 1.15. *Para todo cardinal infinito κ se cumple que $|[\kappa^+]^{\leqslant\kappa}| = 2^\kappa$.*

Demostración. Comencemos probando que:

$$[\kappa^+]^{\leqslant\kappa} = \bigcup_{\alpha<\kappa^+} [\alpha]^{\leqslant\kappa}.$$

Sea $X \subseteq \kappa^+$ tal que $|X| \leqslant \kappa$. Como κ^+ es regular, se tiene que $\sup X < \kappa^+$. Si hacemos $\alpha = \sup X + 1 < \kappa^+$, entonces $X \in [\alpha]^{\leqslant\kappa}$, y así tenemos que $[\kappa^+]^{\leqslant\kappa} \subseteq \bigcup_{\alpha<\kappa^+}[\alpha]^{\leqslant\kappa}$. Recíprocamente, si $X \in [\alpha]^{\leqslant\kappa}$, para algún $\alpha < \kappa^+$, obtenemos que X es un subconjunto de κ^+ cuya cardinalidad es a lo más κ. Esto prueba que $\bigcup_{\alpha<\kappa^+}[\alpha]^{\leqslant\kappa} \subseteq [\kappa^+]^{\leqslant\kappa}$, con lo cual tenemos la igualdad.

Por lo anterior, tenemos las siguientes desigualdades:

$$|[\kappa^+]^{\leqslant\kappa}| = \left|\bigcup_{\alpha<\kappa^+} [\alpha]^{\leqslant\kappa}\right| \leqslant \sup\{|[\alpha]^{\leqslant\kappa}| : \alpha < \kappa^+\} \cdot \kappa^+$$

Observemos que si $\alpha \in \kappa^+$, entonces $[\alpha]^{\leqslant\kappa} \subseteq \mathscr{P}(\alpha)$. Esto implica que $|[\alpha]^{\leqslant\kappa}| \leqslant 2^{|\alpha|} \leqslant 2^\kappa$. Por lo tanto, $\sup\{|[\alpha]^{\leqslant\kappa}| : \alpha < \kappa^+\} \leqslant 2^\kappa$. Así obtenemos que $|[\kappa^+]^{\leqslant\kappa}| \leqslant 2^\kappa \cdot \kappa^+ = 2^\kappa$.

Para probar la otra desigualdad, notemos que $\mathscr{P}(\kappa) \subseteq [\kappa^+]^{\leqslant\kappa}$, y por ende, $2^\kappa = |\mathscr{P}(\kappa)| \leqslant |[\kappa^+]^{\leqslant\kappa}|$. De este modo tenemos la igualdad deseada. $\square$

1.3 El filtro de conjuntos cerrados no acotados

Empecemos esta sección explicando qué es un filtro:

Definición 1.16. Sea κ un cardinal. Un *filtro* sobre κ es un conjunto $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{P}(\kappa)$ tal que:

1. $\kappa \in \mathscr{F}, \quad \emptyset \notin \mathscr{F}$.

2. $\mathscr{F}$ es cerrado bajo intersecciones finitas, es decir, si X y Y son elementos de $\mathscr{F}$, entonces $X \cap Y \in \mathscr{F}$.

3. $\mathscr{F}$ absorbe supraconjuntos: si $X \in \mathscr{F}$, y $Y \subseteq \kappa$ satisfacen $X \subseteq Y$, entonces $Y \in \mathscr{F}$.

Se puede pensar a los elementos de $\mathscr{F}$ como subconjuntos “grandes” de κ. Entonces la propiedad 1 dice que κ es grande, pero $\emptyset$ no lo es; 2 afirma que la intersección finita de conjuntos grandes sigue siendo grande y 3 dice que todo conjunto que contiene a un conjunto grande debe ser grande.

Definición 1.17. Sea κ un cardinal. Un *ideal* sobre κ es un conjunto $\mathscr{I} \subseteq \mathscr{P}(\kappa)$ tal que:

1. $\emptyset \in \mathscr{I}, \quad \kappa \notin \mathscr{I}$.

2. $\mathscr{I}$ es cerrado bajo uniones finitas, es decir, si X y Y son elementos de $\mathscr{I}$, entonces $X \cup Y \in \mathscr{I}$.

3. $\mathscr{I}$ absorbe subconjuntos: si $X \in \mathscr{I}$ y $Y \subseteq X$, entonces $Y \in \mathscr{F}$.

De manera dual, los elementos de $\mathscr{I}$ son subconjuntos “pequeños” de κ. Así, la propiedad 1 dice que $\emptyset$ es pequeño, pero κ no lo es; 2 afirma que la unión finita de conjuntos pequeños es pequeño y 3 dice que todo subconjunto de un conjunto pequeño es pequeño.

Definición 1.18. Para cada familia $S \subseteq \mathscr{P}(\kappa)$, definimos $S^* := \{X \subseteq \kappa : \kappa \setminus X \in S\}$.

La noción anterior puede ser empleada para expresar formalmente la dualidad entre filtros e ideales:

Lema 1.19. *Sean $\mathscr{F}$ un filtro e $\mathscr{I}$ un ideal sobre κ. Entonces:*

1. *$\mathscr{F}^*$es un ideal,*

2. *$\mathscr{I}^*$ es un filtro, y*

3. *$\mathscr{F}^{**} = \mathscr{F}, \quad \mathscr{I}^{**} = \mathscr{I}$.*

Demostración. Empezaremos por probar (1). Como $\kappa \setminus \emptyset = \kappa \in \mathscr{F}$, tenemos que $\emptyset \in \mathscr{F}^*$. Por otro lado, $\kappa \setminus \kappa = \emptyset \notin \mathscr{F}$, y así concluimos que $\kappa \notin \mathscr{F}^*$. Sean $X, Y \in \mathscr{F}^*$. Entonces $(\kappa \setminus X), (\kappa \setminus Y) \in \mathscr{F}$ y como $\mathscr{F}$ es un filtro, se tiene que $\kappa \setminus (X \cup Y) = (\kappa \setminus X) \cap (\kappa \setminus Y) \in \mathscr{F}$, por lo tanto $(X \cup Y) \in \mathscr{F}^*$. Sean $X \in \mathscr{F}^*$ y $Y \subseteq \kappa$ tales que $Y \subseteq X$. Entonces $\kappa \setminus X \in \mathscr{F}$ y $(\kappa \setminus X) \subseteq (\kappa \setminus Y)$; como $\mathscr{F}$ es un filtro, se tiene que $(\kappa \setminus Y) \in \mathscr{F}$ y, por lo tanto, $Y \in \mathscr{F}^*$.

La prueba de que $\mathscr{I}^*$ es un filtro es una modificación sencilla de la prueba correspondiente a (1), así que la omitimos.

Para probar que $\mathscr{F}^{**} = \mathscr{F}$, notemos que $X \in \mathscr{F}^{**}$ es equivalente a que $(\kappa \setminus X) \in \mathscr{F}^*$, es decir, $X = \kappa \setminus (\kappa \setminus X) \in \mathscr{F}$. La otra igualdad se verifica de manera análoga. □

A $\mathscr{I}^*$ se le llama el filtro dual del ideal $\mathscr{I}$ y a $\mathscr{F}^*$ se le llama el ideal dual del filtro $\mathscr{F}$.

Consideremos $\mathscr{I} = [\omega]^{<\omega}$, el conjunto de los subconjuntos finitos de ω, y veamos que $\mathscr{I}$ es un ideal sobre ω. Notemos que $\emptyset \in \mathscr{I}$ porque $\emptyset$ es finito, mientras que $\omega \notin \mathscr{I}$ porque ω es numerable. Dados X, Y subconjuntos finitos de ω, $X \cup Y$ también es un conjunto finito, por lo tanto, $(X \cup Y) \in \mathscr{I}$. Por último, si X es un subconjunto finito de ω y $Y \subseteq X$, entonces Y también debe ser finito, por lo tanto, $Y \in \mathscr{I}$.

Consideremos ahora $\mathscr{I}^*$. Por definición, $X \notin \mathscr{I}$ es equivalente a que $\omega \setminus X$ es infinito. Sea W el conjunto de números pares. Como W no es finito, no puede ser un elemento de $\mathscr{I}$, además, W tampoco es un elemento de $\mathscr{I}$, ya que $\omega \setminus W$ es el conjunto de números impares. Esto nos dice que si X no pertenece al filtro, no necesariamente pertenece al ideal, y recíprocamente. Con esta idea, los conjuntos no forzosamente son grandes o pequeños. Por ejemplo, W no es grande ni pequeño.

Definición 1.20. Sea λ un cardinal. Un ideal $\mathscr{I}$ es λ-*completo* si siempre que $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{I}$ satisface que $|\mathscr{A}| < \lambda$, entonces $\bigcup \mathscr{A} \in \mathscr{I}$.

De manera dual, un filtro $\mathscr{F}$ es λ-*completo* si siempre que $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{F}$ y $\mathscr{A} \neq \emptyset$ satisface que $|\mathscr{A}| < \lambda$, entonces $\bigcap \mathscr{A} \in \mathscr{F}$.

Como primer observación, tenemos que un ideal $\mathscr{I}$ es λ-completo si y sólo si $\mathscr{I}^*$ es λ-completo. Supongamos que $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{I}^*$ y $|\mathscr{A}| < \lambda$. Por la definición de filtro dual,

$$\{\lambda \setminus X : X \in \mathscr{A}\} \subseteq \mathscr{I}$$

y como $\mathscr{I}$ es un ideal λ-completo, tenemos que $\bigcup\{\lambda \setminus X : X \in \mathscr{A}\} \in \mathscr{I}$, es decir, $\lambda \setminus \bigcap\{X : X \in \mathscr{A}\} \in \mathscr{I}$. Por lo tanto, $\bigcap \mathscr{A} \in \mathscr{I}^*$. Luego, $\mathscr{I}^*$ es λ-completo.

Recíprocamente, sea $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{I}$ de tal modo que $|\mathscr{A}| < \lambda$. Consideremos primero el caso en que $\mathscr{A} \neq \emptyset$. Por definición de filtro dual, $\{\lambda \setminus X : X \in \mathscr{A}\} \subseteq \mathscr{I}^*$ y como $\mathscr{I}^*$ es un filtro λ-completo, se tiene que $\bigcap\{\lambda \setminus X : X \in \mathscr{A}\} \in \mathscr{I}^*$, es decir, $\lambda \setminus \bigcup\{X : X \in \mathscr{A}\} \in \mathscr{I}^*$. Por lo tanto, $\lambda \setminus (\lambda \setminus \bigcup \mathscr{A}) = \bigcup \mathscr{A} \in \mathscr{I}$. Luego, $\mathscr{I}$ es λ-completo.

Ahora supongamos que $\mathscr{A} = \emptyset$. Entonces $\bigcup \mathscr{A} = \emptyset$ y por la definición de ideal, se tiene que $\bigcup \mathscr{A} \in \mathscr{I}$.

De manera dual, si $\mathscr{F}$ es un filtro, entonces $\mathscr{F}$ es λ-completo si y sólo si $\mathscr{F}^*$ es λ-completo. Por el Lema 1.19, $\mathscr{F}^*$ es un ideal y por la observación anterior, $\mathscr{F}^*$ es un ideal λ-completo si y sólo si $\mathscr{F}^{**}$ es un filtro λ-completo. Finalmente, otra aplicación del Lema 1.19 da como resultado que $\mathscr{F}^{**} = \mathscr{F}$.

La segunda observación es que todo ideal es ω-completo. Si $\mathscr{I}$ es un ideal, por definición la unión de dos elementos de $\mathscr{I}$ es un elemento de $\mathscr{I}$ y por inducción se tiene que la unión finita de elementos de $\mathscr{I}$ es un elemento de $\mathscr{I}$. Ahora si $\mathscr{F}$ es un filtro, por el Lema 1.19 $\mathscr{F}^*$ es un ideal, el cual sabemos, es ω-completo. Por la primer observación tenemos que $\mathscr{F}$ es ω-completo.

La tercera observación es que si $\mathscr{I}$ es un ideal sobre κ que contiene a todos los unitarios, es decir, $\{\alpha\} \in \mathscr{I}$ para cada $\alpha < \kappa$, entonces $\mathscr{I}$ no es κ^+-completo. Si $\mathscr{I}$ es κ^+-completo, definimos $\mathscr{B} = \{\{a\} : a \in \kappa\}$; como $|\mathscr{B}| = |\mathscr{I}| < \kappa^+$, se tiene que $\bigcup \mathscr{B} \in \mathscr{I}$, es decir, $\kappa \in \mathscr{I}$, lo cual no es posible. Por lo tanto, $\mathscr{I}$ no es κ^+-completo.

Por último observemos que para todo ideal $\mathscr{I}$ sobre κ, $\mathscr{I} \cap \mathscr{I}^* = \emptyset$. Si $X \in \mathscr{I} \cap \mathscr{I}^*$ entonces $\kappa \setminus X \in \mathscr{I}^*$, así que $X \cup (\kappa \setminus X) \in \mathscr{I}$, es decir, $\kappa \in \mathscr{I}$, lo cual no es posible por la definición de ideal.

Definición 1.21. Sean α un ordinal límite y C un subconjunto de α.

1. Diremos que C es *acotado* en α si y sólo si existe $\beta < \alpha$ de tal modo que $\xi < \beta$, para cada $\xi \in C$. En caso contrario diremos que C es no acotado.

2. C es *cerrado* en α si y sólo si para todo ordinal límite $\delta < \alpha$, si $C \cap \delta$ es no acotado en δ entonces, $\delta \in C$.

Para facilitar la escritura, adoptaremos la siguiente convención. La frase "C es un club en α" significará que C es un un subconjunto cerrado y no acotado en α.

De la definición podemos deducir que $\emptyset$ es acotado en cualquier ordinal $\alpha > 0$. Si fijamos $\beta < \alpha$, entonces $\xi < \beta$ para cada $\xi \in \emptyset$ (por vacuidad). Por lo tanto, $\emptyset$ es acotado en α.

Notemos que C es no acotado en α si para cada $\beta < \alpha$ existe $\xi \in C$ con $\beta < \xi$.

Lema 1.22. *Si α es un ordinal y $S \subseteq \alpha$, los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. S es no acotado en α.

2. $\sup S = \alpha$.

Demostración. Como $S \subseteq \alpha$, se tiene que α es una cota superior de S y, por lo tanto, $\sup S \leqslant \alpha$. Si $\sup S < \alpha$, tendríamos que S es acotado en α. Recíprocamente, supongamos que $\sup S = \alpha$. Sea $\beta < \alpha = \sup S$, entonces existe $\delta \in S$ de tal modo que $\beta < \delta$, es decir, S es no acotado en α. □

Sean α un ordinal límite y $\beta < \alpha$. Afirmamos que $C = \alpha \setminus \beta$ es un club en α. Para ver que C es no acotado, sea $\delta < \alpha$. Consideremos el caso en que $\delta < \beta$. Como α es límite, tenemos que $\beta + 1 < \alpha$, por lo tanto, $(\beta + 1) \in C$ y así, C es no acotado en α. En el caso de que $\beta \leq \delta$, como α es límite, tenemos que $\delta + 1 < \alpha$, por lo tanto, $(\delta + 1) \in C$. Esto muestra que C es no acotado. Ahora veamos que C es cerrado. Sea $\delta < \alpha$ un ordinal límite de tal modo que $C \cap \delta$ es no acotado en δ. Si $\delta < \beta$, entonces $C \cap \delta = \emptyset$ que es acotado en δ. Así que $\beta \leqslant \delta < \alpha$ y, por lo tanto, $\delta \in C$.

Con argumentos semejantes se verifica lo siguiente:

Ejemplo 1.23. *Si α es un ordinal límite y $\gamma < \beta < \alpha$, entonces $\alpha \setminus \{\xi < \alpha : \gamma < \xi \leqslant \beta\}$ es un club en α.*

Definición 1.24. Si $\mathrm{cf}(\kappa) > \omega$, definimos el filtro de *cerrados no acotados sobre κ* como:

$$\mathrm{Cub}(\kappa) = \{X \subseteq \kappa : \exists C \subseteq X(C \text{ es un club en } \kappa)\}$$

Probemos que $\mathrm{Cub}(\kappa)$ en efecto es un filtro sobre κ.

Veamos que $\kappa \in \mathrm{Cub}(\kappa)$. Como κ es un ordinal límite, tenemos que para cada $\alpha < \kappa, \alpha + 1 < \kappa$, por lo tanto, κ es no acotado en κ. Ahora, si $\delta < \kappa$ es un ordinal límite tal que $\kappa \cap \delta$ es no acotado en δ, entonces $\delta \in \kappa$. Por lo tanto, κ es cerrado en κ. Para ver que $\emptyset \notin \mathrm{Cub}(\kappa)$ recordemos que el único subconjunto de $\emptyset$ es $\emptyset$, el cual es acotado en κ, ya que $\kappa > 0$. Sean $X \in \mathrm{Cub}(\kappa)$ y $Y \subseteq \kappa$ tales que $X \subseteq Y$. Entonces existe $C \subseteq X$ tal que C es un club en κ. Como $X \subseteq Y$, tenemos que $C \subseteq Y$, por lo tanto, $Y \in \mathrm{Cub}(\kappa)$.

Para mostrar que la intersección de dos elementos de $\mathrm{Cub}(\kappa)$ es un elemento de $\mathrm{Cub}(\kappa)$ se probará un lema más general.

Lema 1.25. *Si $\mathrm{cf}(\kappa) > \omega$, entonces:*

1. *Si $\beta < \mathrm{cf}(\kappa)$ y $\{C_\alpha\}_{\alpha<\beta}$, una familia de conjuntos club en κ, entonces $\bigcap_{\alpha<\beta} C_\alpha$ es un club en κ.*

2. $\mathrm{Cub}(\kappa)$ *es un filtro* $\mathrm{cf}(\kappa)$*-completo.*

Demostración. Para mostrar que $D = \bigcap_{\alpha<\beta} C_\alpha$ es cerrado en κ, sea $\delta < \kappa$ un ordinal límite de tal modo que $D \cap \delta$ es no acotado en δ. Sea $\alpha < \beta$. Veremos que $C_\alpha \cap \delta$ es no acotado en δ, para ello sea $\gamma < \delta$. Como $D \cap \delta$ es no acotado en δ, existe $\xi \in D \cap \delta$ tal que $\gamma < \xi$, es decir, $\xi \in C_\alpha \cap \delta$. Por hipótesis, C_α es cerrado en κ y así $\delta \in C_\alpha$. Por lo tanto, $\delta \in D$. Luego, D es cerrado.

Sólo queda probar que D es no acotado en κ. Vamos a definir una función $f_\alpha : \kappa \to \kappa$ para cada $\alpha < \beta$ dada por $f_\alpha(\delta) = \min\{\gamma \in C_\alpha : \delta < \gamma\}$. La definición es correcta ya que C_α es no acotado en κ. Notemos que si $\alpha < \beta$ y $\delta < \kappa$, entonces $\delta < f_\alpha(\delta) \in C_\alpha$.

Sea $g : \kappa \to \kappa$ la función definida por $g(\delta) = \sup\{f_\alpha(\delta) : \alpha < \beta\}$. Como $\beta < \mathrm{cf}(\kappa)$, tenemos que $\delta < g(\delta) < \kappa$. Ahora, dado $\delta < \kappa$ y $n \in \omega$, definamos recursivamente

$g^{n+1}(\delta) = g(g^n(\delta))$, donde $g^0(\delta) = \delta$. Notemos, que la desigualdad $\mathrm{cf}(\kappa) > \omega$ implica que $g^\omega(\delta) = \sup\{g^n(\delta) : n < \omega\} < \kappa$.

El hecho de que $\xi < g(\xi)$ para cada ordinal $\xi < \kappa$, implica que $g(\xi) < g(g(\xi))$ y en general que $g^n(\xi) < g^{n+1}(\xi)$, es decir, la sucesión de ordinales $\{g^n(\delta) : n < \omega\}$ es estrictamente creciente y, por el Lema 1.2, tenemos que $g^\omega(\delta)$ es un ordinal límite.

Ahora, sean $\alpha < \beta$ y $\delta < \kappa$. Vamos a mostrar que $C_\alpha \cap g^\omega(\delta)$ es no acotado en $g^\omega(\delta)$. Sea $\lambda < g^\omega(\delta)$. Recordemos que $\delta < f_\alpha(\delta) \in C_\alpha$ y, por lo tanto, obtenemos $\lambda < g^n(\delta) < f_\alpha(g^n(\delta)) \in C_\alpha$. Por definición de la función g, sabemos que $f_\alpha(g^n(\delta)) \leq g(g^n(\delta)) = g^{n+1}(\delta) < g^\omega(\delta)$, lo que implica que $f_\alpha(g^n(\delta)) \in C_\alpha \cap g^\omega(\delta)$. Luego $C_\alpha \cap g^\omega(\delta)$ es no acotado en $g^\omega(\delta)$ y $g^\omega(\delta) \in C_\alpha$. Como α fue arbitrario, concluimos que $g^\omega(\delta) \in D$ y así D es no acotado en κ.

Para mostrar que $\mathrm{Cub}(\kappa)$ es un filtro $\mathrm{cf}(\kappa)$-cerrado, sea $\{X_\alpha\}_{\alpha<\beta} \subseteq \mathrm{Cub}(\kappa)$ con $\beta < \mathrm{cf}(\kappa)$. Para cada $\alpha < \beta$ existe un club, en κ tal que $C_\alpha \subseteq X_\alpha$. Por el resultado anterior, $\bigcap_{\alpha<\beta} C_\alpha$ es un club en κ y con $\bigcap_{\alpha<\beta} C_\alpha \subseteq \bigcap_{\alpha<\beta} X_\alpha$ obtenemos que $\bigcap_{\alpha<\beta} X_\alpha \in \mathrm{Cub}(\kappa)$. $\square$

Veamos que para cada cardinal κ existe una familia de $\mathrm{cf}(\kappa)$ cerrados no acotados en κ cuya intersección es vacía (en particular, la hipótesis $\beta < \mathrm{cf}(\kappa)$ en el lema anterior no puede ser cambiada a $\beta \leqslant \mathrm{cf}(\kappa)$). Sea $f : \mathrm{cf}(\kappa) \to \kappa$ una función cofinal en κ. Para cada $\xi < \mathrm{cf}(\kappa)$, definimos $C_\xi = \kappa \setminus f(\xi)$, el cual, es un club en κ, por el Ejemplo 1.23. Probaremos que $\{C_\alpha : \alpha < \mathrm{cf}(\kappa)\}$ es una familia de clubs en κ cuya intersección es vacía. Supongamos lo contrario, es decir, que existe $\beta \in \bigcap_{\alpha<\mathrm{cf}(\kappa)} C_\alpha$. Esto implica que $\beta \in (\kappa \setminus f(\alpha))$ para cada $\alpha < \mathrm{cf}(\kappa)$. Por lo tanto, para todo $\alpha < \mathrm{cf}(\kappa)$ se tiene que $f(\alpha) \leq \beta$, lo cual contradice que f es cofinal en κ. Y así obtenemos que $\bigcap_{\alpha<\mathrm{cf}(\kappa)} C_\alpha = \emptyset$.

Tal y como lo anunciamos en la sección anterior, las familias de funciones finitarias pueden ser empleadas para producir clubes:

Lema 1.26. *Sea $\kappa > \omega$ un cardinal regular y $\mathscr{L}$ un conjunto de funciones finitarias sobre κ tal que $|\mathscr{L}| < \kappa$. Entonces $C = \{\gamma < \kappa : \gamma$ es cerrado bajo $\mathscr{L}\}$ es un club en κ.*

Demostración. Veamos que C es cerrado. Sea $\delta < \kappa$ un ordinal límite tal que $C \cap \delta$ es no acotado en δ. Sea $f \in \mathscr{L}$. Supongamos que la aridad de f es $n > 0$. Si $(\delta_0, \ldots, \delta_{n-1}) \in \delta^n$, entonces para cada $i < n$ tenemos que $\delta_i < \delta$ y, como $C \cap \delta$ es no acotado en δ, existe $\eta_i \in C \cap \delta$ tal que $\delta_i < \eta_i$. Si nombramos $\eta = \max\{\eta_i : i < n\}$, entonces $\eta \in C$ y por ende $f(\delta_0, \ldots, \delta_{n-1}) \in f[\eta^n] \subseteq \eta \subseteq \delta$. Supongamos ahora que $n = 0$. Notemos que $C \cap \delta \neq \emptyset$ ya que $\delta > 0$. Fijemos $\alpha \in C \cap \delta$. Como $\alpha \in C$, α es cerrado bajo f, es decir, $f \in \alpha$. En vista de que $\alpha < \delta$, tenemos que $f \in \delta$, es decir, δ es cerrado bajo f.

Para cada $\beta < \kappa$, $G(\beta)$ denotará a la cerradura de β bajo $\mathscr{L}$. Afirmamos que existe una función $g : \kappa \to \kappa$ de tal modo que $G(\xi) \subseteq g(\xi)$ y $\xi < g(\xi)$, para cada $\xi < \kappa$. Hagamos $\lambda = \max\{|\mathscr{L}|, |\xi|\}$, y observemos que $\lambda < \kappa$. Sabemos que ξ es un subconjunto de κ con $|\xi| \leq \lambda$ y $\mathscr{L}$ es una familia de a lo más λ funciones finitarias; luego $G(\xi)$, la cerradura de ξ bajo $\mathscr{L}$, tiene cardinalidad a lo más λ (Lema 1.8). En particular, $G(\xi) \subseteq \kappa$ y $|G(\xi)| < \kappa$. Como κ es regular, $\sup G(\xi) < \kappa$. Si tomamos $g(\xi) = \sup G(\xi) + 1$, entonces $G(\xi) \subseteq g(\xi) < \kappa$.

Ahora definimos inductivamente las iteraciones de g de la siguiente manera: g^0 es la identidad de κ en κ y $g^{n+1} = g \circ g^n$, para $n < \omega$. Como κ es regular y no numerable, para cada $\xi < \kappa$, tenemos que $g^\omega(\xi) = \sup\{g^n(\xi) : n < \omega\} < \kappa$. De este modo obtenemos una función $g^\omega : \kappa \to \kappa$.

En aras de ver que C es no acotado, sea $\alpha < \kappa$. Probaremos que $g^\omega(\alpha) \in C$. Notemos que la sucesión $\{g^n(\alpha) : n < \omega\}$ es estrictamente creciente ya que $\xi < g(\xi)$, para cada $\xi < \kappa$. Sean $f \in \mathscr{L}$, una función de aridad $n > 0$, y $\vec{x} = (\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}) \in (g^\omega(\alpha))^n$. Para cada $i < n$, existe $k_i < \omega$ tal que $\alpha_i < g^{k_i}(\alpha)$. Si llamamos $m = \max\{k_i : i < n\}$, tenemos que $\vec{x} \in (g^m(\alpha))^n \subseteq (G(g^m(\alpha)))^n$. Por ende, $f(\vec{x}) \in G(g^m(\alpha)) \subseteq g^{m+1}(\alpha) \leqslant g^\omega(\alpha)$. Así, tenemos que $f[(g^\omega(\alpha))^n] \subseteq g^\omega(\alpha)$. Por otro lado, si $f \in \mathscr{L}$ es una función de aridad 0, entonces $f \in G(\alpha) \subseteq g(\alpha) \leqslant g^\omega(\alpha)$; luego, $f \in g^\omega(\alpha)$. Esto prueba que C es no acotado y, por lo tanto, un club en κ. $\square$

Una aplicación natural de este resultado es el siguiente:

Ejemplo 1.27. *Sean κ un cardinal regular y la función $f : \kappa \to \kappa$ definida como $f(\alpha) = \alpha + 1$. Entonces α es cerrado bajo f si y sólo si α es límite. Y por el lema anterior tenemos que* $\lim(\kappa)$ *es un club en κ.*

Supongamos que α es cerrado bajo f. Entonces $f(\beta) < \alpha$, para cada $\beta < \alpha$, es decir,

$\beta + 1 < \alpha$. Por lo tanto, α es límite.

Recíprocamente, supongamos que α es límite. Sea $\beta < \alpha$, entonces $\beta + 1 < \alpha$, es decir, $f(\beta) < \alpha$. Por lo tanto, α es cerrado bajo f.

Naturalmente todo club es un subconjunto de un buen orden, y, por lo tanto, un buen orden, así que tiene sentido preguntarnos ¿cuál es el tipo de orden de los clubes?

Lema 1.28. *Sean δ un ordinal límite y C un club en δ. Si $\alpha := to(C)$ y $f : \alpha \to C$ es un isomorfismo de orden, entonces:*

1. *$\alpha \leqslant \delta$.*
2. *Si $\gamma < \alpha$ es un ordinal límite, entonces $f \restriction \gamma : \gamma \to f(\gamma)$ es cofinal en $f(\gamma)$.*
3. *Si $\gamma < \alpha$ es un ordinal límite, entonces $\mathrm{cf}(\gamma) = \mathrm{cf}(f(\gamma))$.*
4. *Si $\mathrm{cf}(\delta) = \delta$, entonces $\alpha = \delta$.*

Demostración. Supongamos que $\delta < \alpha$. Como $C \subseteq \delta$, se tiene que $\beta < \delta$ para cada $\beta \in C$, y, por ende, $f(\beta) < f(\delta) < \delta$. Así, $f(\delta)$ es una cota superior de C, lo cual no es posible, pues C es no acotado en δ. Por lo tanto, $\alpha \leq \delta$.

Sea $\gamma < \alpha$ un ordinal límite y notemos que si $\eta < \gamma$, entonces $\eta, \gamma < \alpha$ y, como f es un isomorfismo de orden, se tiene que $f(\eta) < f(\gamma)$, es decir, $(f \restriction \gamma)(\eta) < f(\gamma)$. Probemos que la función $f \restriction \gamma$ es cofinal en $f(\gamma)$. Como f es estrictamente creciente, la sucesión $\{f(\mu) : \mu < \gamma\}$ es estrictamente creciente, y así el Lema 1.2 nos dice que $\beta = \sup f[\gamma]$ es un ordinal límite. Probaremos que $C \cap \beta$ es no acotado en β: si $\eta < \beta$, entonces $\eta < f(\lambda_0) \in C$ para algún $\lambda_0 < \gamma$. Como C es cerrado, tenemos que $\beta \in C$. Dado que f es suprayectiva, existe $\lambda_1 < \alpha$ tal que $f(\lambda_1) = \beta$. Y así, obtenemos que $f(\lambda_1) = \beta \leq f(\gamma)$, lo que implica que $\lambda_1 \leq \gamma$. Si $\lambda_1 < \gamma$, entonces, por ser γ un ordinal límite, $\lambda_1 + 1 < \gamma$ y así $f(\lambda_1) = \sup f[\gamma] < f(\lambda_1 + 1)$, lo cual no es posible. Por lo tanto $f(\gamma) = \sup f[\gamma]$. Para ver que $f \restriction \gamma$ es cofinal en $f(\gamma)$, observemos que si $\lambda < f(\gamma) = \sup f[\gamma]$, entonces $\lambda < f(\gamma_0)$ para algún $\gamma_0 < \gamma$.

Ahora demostraremos el inciso (3), así que, sea $\gamma < \alpha$ un ordinal límite. Por la definición de $\mathrm{cf}(\gamma)$, existe una función $g : \mathrm{cf}(\gamma) \to \gamma$ cofinal en γ y, por el inciso anterior

$f \restriction \gamma : \gamma \to f(\gamma)$ es cofinal en $f(\gamma)$. Por lo tanto, $(f \restriction \gamma) \circ g : \mathrm{cf}(\gamma) \to \gamma$ es cofinal en $f(\gamma)$. Luego, $\mathrm{cf}(f(\gamma)) \leq \mathrm{cf}(\gamma)$.

Por la definición de $\mathrm{cf}(\gamma)$, existe una función $h : \mathrm{cf}(f(\gamma)) \to f(\gamma)$ que es cofinal en $f(\gamma)$. Definimos la función $r : \mathrm{cf}(f(\gamma)) \to \gamma$ como $r(\lambda) = \min\{\eta < \gamma : h(\lambda) < (f \restriction \gamma)(\eta)\}$ la cual está bien definida porque la función $f \restriction \gamma$ es cofinal en $f(\gamma)$. Veamos que r es cofinal en γ. Sea $\eta < \gamma$. Entonces $f(\eta) < f(\gamma)$ y, como h es cofinal en $f(\gamma)$, existe $\lambda < \mathrm{cf}(f(\gamma))$ tal que $f(\eta) < h(\lambda)$. Por la definición de r tenemos que $h(\lambda) < f(r(\lambda))$. Si pasara que $r(\lambda) \leq \eta$ entonces $f(r(\lambda)) \leq f(\eta) < h(\lambda)$, lo cual no es posible. Por lo tanto, $\eta < r(\lambda)$, es decir, r es cofinal en γ. Y así, obtenemos que $\mathrm{cf}(\gamma) \leq \mathrm{cf}(f(\gamma))$. Por lo tanto, $\mathrm{cf}(\gamma) = \mathrm{cf}(f(\gamma))$

Supongamos que δ es regular, es decir, $\mathrm{cf}(\delta) = \delta$. Si $\alpha < \delta$, entonces $|C| = |\alpha| < \delta$, con lo cual se tendría que $\sup C < \delta$, contradiciendo que C es no acotado en δ. $\square$

Una observación importante es que si κ es un cardinal regular y $X \subseteq \kappa$, entonces X es no acotado en κ si y sólo si $|X| = \kappa$. En efecto, como $X \subseteq \kappa$, tenemos que $|X| \leqslant \kappa$. Supongamos que $|X| < \kappa$, como κ es regular, se tiene que $\sup X < \kappa$, es decir, X es acotado en κ. Recíprocamente, si X es acotado en κ, tenemos que $\sup X < \kappa$ y, por lo tanto, $|X| < \kappa$.

1.4 Conjuntos estacionarios

En esta sección estamos interesados en los subconjuntos de κ que no son pequeños con respecto a $\mathrm{Cub}(\kappa)$.

Definición 1.29. Si $\mathrm{cf}(\kappa) > \omega$, $X \subseteq \kappa$ es un conjunto *estacionario* en κ si y sólo si $X \notin (\mathrm{Cub}(\kappa))^*$.

Probemos que $X \subseteq \kappa$ es estacionario en κ si y sólo sí, X tiene intersección no vacía con cada uno de los cerrados no acotados en κ. Sea C un club en κ y supongamos que X es estacionario en κ; por definición $X \notin (\mathrm{Cub}(\kappa))^*$. Entonces $(\kappa \setminus X) \notin \mathrm{Cub}(\kappa)$, es decir, no existe C', club en κ, tal que $C' \subseteq (\kappa \setminus X)$. En particular, para C tenemos que $C \nsubseteq (\kappa \setminus X)$, lo cual nos dice que hay un $\alpha \in C$ tal que $\alpha \notin (\kappa \setminus X)$; entonces $\alpha \in C$ y $\alpha \in X$. Por lo tanto, $X \cap C \neq \emptyset$.

Recíprocamente, supongamos que $X \in (\mathrm{Cub}(\kappa))^*$, es decir, que $(\kappa \setminus X) \in \mathrm{Cub}(\kappa)$.

Fijemos C, un club en κ, tal que $C \subseteq (\kappa \setminus X)$, lo que implica que $X \cap C = \emptyset$. Por lo tanto, el que X intersecte a todos los subconjuntos cerrados no acotados de κ implica que X es estacionario.

Ejemplo 1.30. *Si C es un club en κ, entonces C es estacionario en κ.*

Sea C' un club en κ. Por el Lema 1.25, tenemos que $C \cap C'$ es un club en κ, por lo tanto, $C \cap C' \neq \emptyset$, ya que $\emptyset$ es acotado en cualquier ordinal distinto de 0.

Hasta este momento nuestros únicos ejemplos de conjuntos estacionarios son los clubes. Otro ejemplo fundamental es el que está contenido en el resultado siguiente.

Lema 1.31. *Sean κ un ordinal límite tal que $\mathrm{cf}(\kappa) > \omega$ y λ un cardinal regular tal que $\lambda < \mathrm{cf}(\kappa)$. Entonces el conjunto $E^\kappa_\lambda = \{\gamma < \kappa : \mathrm{cf}(\gamma) = \lambda\}$ es estacionario en κ.*

Demostración. Sea C un club en κ. Por el inciso 1 del Lema 1.28, existe un isomorfismo de orden $f : \alpha \to C$. Veamos que f es cofinal en κ. Sea $\delta < \kappa$, como C es no acotado en κ, existe $\gamma \in C$ tal que $\delta < \gamma$. En particular f es suprayectiva y tenemos que existe $\xi < \alpha$ tal que $\gamma = f(\xi)$. Por lo anterior, tenemos que $\lambda < \mathrm{cf}(\kappa) \leq \alpha$ y entonces $\lambda < \alpha$. En particular, λ es límite, así que por el inciso 3 del Lema 1.28, tenemos que $\mathrm{cf}(\lambda) = \mathrm{cf}(f(\lambda))$.

Por lo tanto, $f(\lambda) \in C \cap E^\kappa_\lambda$, y así E^κ_λ es estacionario en κ. □

Probaremos algunas observaciones útiles acerca de conjuntos estacionarios:

Todo conjunto estacionario en κ es no acotado. Supongamos que S es acotado en κ, es decir, existe $\beta < \kappa$ tal que $\alpha \leq \beta$ para cada $\alpha \in S$. En el Ejemplo 1.23 se probó que $C = \kappa \setminus (\beta + 1)$ es un club en κ. Entonces tenemos que $S \cap C = \emptyset$. Por lo tanto, S no es estacionario.

Si S es estacionario en κ y C es un club en κ, entonces $S \cap C$ es estacionario en κ. Sea C' un club en κ. Tenemos que $(S \cap C) \cap C' = S \cap (C \cap C')$. Por el Lema 1.25, sabemos que $(C \cap C')$ es un club en κ y, como S es estacionario, concluimos que $S \cap (C \cap C') \neq \emptyset$.

Si S es estacionario en κ y $S \subseteq E$, entonces E también es estacionario en κ. Sea C un club en κ. Tenemos que $\emptyset \neq S \cap C \subseteq S \subseteq E$ y así, $E \cap C \neq \emptyset$.

De acuerdo al Lema 1.25, cualesquiera dos clubes tienen intersección no vacía. Una pregunta natural es: ¿se tiene lo mismo para estacionarios? La respuesta es no, pero para probar esto requeriremos de una serie de lemas.

Lema 1.32. *Sea κ un ordinal tal que* $\mathrm{cf}(\kappa) > \omega$. *Si* $\alpha < \mathrm{cf}(\kappa)$ *y* $\{X_\xi : \xi < \alpha\}$ *es una familia de subconjuntos no estacionarios en κ, entonces* $\bigcup_{\xi<\alpha} X_\xi$ *no es estacionario en κ.*

Demostración. Para cada $\xi < \alpha$ existe un club C_ξ en κ de tal modo que $C_\xi \cap X_\xi = \emptyset$. Por el Lema 1.25, $C = \bigcap_{\xi<\alpha} C_\xi$ es un club en κ. Si $\beta \in C \cap \bigcup_{\xi<\alpha} X_\xi$, entonces $\beta \in C_\xi$ para cada $\xi < \alpha$ y $\beta \in X_\delta$ para algún $\delta < \alpha$ y así tenemos que $\beta \in C_\delta \cap X_\delta$, lo cual no es posible. Por lo tanto, $C \cap \bigcup_{\xi<\alpha} X_\xi = \emptyset$, es decir, $\bigcup_{\xi<\alpha} X_\xi$ no es estacionario en κ. $\square$

La pieza clave en la demostración del siguiente teorema es la construcción de una matriz infinita de conjuntos a la que se le denomina matriz de Ulam, en honor al matemático polaco Ulam.

Teorema 1.33. *Sean κ un cardinal sucesor e $\mathscr{I}$ un ideal κ-completo sobre κ que contiene a todos los conjuntos unitarios. Entonces existe* $\{X_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq \mathscr{P}(\kappa) \setminus \mathscr{I}$ *de tal modo que* $X_\alpha \cap X_\beta = \emptyset$, *siempre que* $\alpha < \beta < \kappa$.

Demostración. Sea $\kappa = \lambda^+$. Probaremos que todo subconjunto de κ de cardinalidad menor o igual a λ pertenece a $\mathscr{I}$. Sea $X \subseteq \kappa$ tal que $|X| \leqslant \lambda$. Por hipótesis, $\{\gamma\} \in \mathscr{I}$ para cada $\gamma \in X$ e $\mathscr{I}$ es κ-completo. Por lo tanto, $X = \bigcup_{\gamma \in X} \{\gamma\} \in \mathscr{I}$.

Para cada $\rho < \kappa$, elegimos una función inyectiva $f_\rho : \rho \to \lambda$. Es posible ya que para cada $\rho < \kappa$ se tenemos que $|\rho| < \kappa$, por lo tanto, $|\rho| \leqslant \lambda$. Para cada $\alpha < \kappa$ y $\xi < \lambda$ definimos $X_\alpha^\xi = \{\rho < \kappa : \rho > \alpha \wedge f_\rho(\alpha) = \xi\}$. Afirmamos que para cada $\alpha < \kappa$ se satisface que $\bigcup_{\xi<\lambda} X_\alpha^\xi = \kappa \setminus (\alpha + 1)$. Comencemos la prueba notando que, por definición, $X_\alpha^\xi \subseteq \kappa \setminus (\alpha + 1)$, para cada $\xi < \lambda$; es decir, $\bigcup_{\xi<\lambda} X_\alpha^\xi$ está contenido en $\kappa \setminus (\alpha + 1)$. Sea $\beta \in \kappa \setminus (\alpha + 1)$. Hagamos $\eta := f_\beta(\alpha)$ y notemos que $\eta < \lambda$. Por lo tanto, $\beta \in X_\alpha^\eta$, y así, $\beta \in \bigcup_{\xi<\lambda} X_\alpha^\xi$.

Como κ es el sucesor de λ, tenemos que $|\alpha+1| \leq \lambda$ para cada $\alpha < \kappa$, es decir, $\alpha+1 \in \mathscr{I}$, con lo cual tenemos que $\kappa \setminus (\kappa \setminus \alpha + 1) \in \mathscr{I}$. Por lo tanto, $\bigcup_{\xi<\lambda} X_\alpha^\xi = \kappa \setminus (\alpha + 1) \in \mathscr{I}^*$.

Si ocurriera que $X_\alpha^\xi \in \mathscr{I}$ para cada $\xi < \lambda$, como $\mathscr{I}$ es κ-completo, tendríamos que $\bigcup_{\xi<\lambda} X_\alpha^\xi \in \mathscr{I}$, contradiciendo lo demostrado en el párrafo anterior. Entonces podemos definir una función $h : \kappa \to \lambda$ mediante $h(\alpha) := \min\{\xi < \lambda : X_\alpha^\xi \notin \mathscr{I}\}$. Afirmamos que una de las fibras de h tiene cardinalidad κ. Observemos que de lo contrario $|h^{-1}\{\xi\}| < \kappa$ para cada $\xi < \lambda$. Y como $\kappa = \bigcup_{\xi<\lambda} h^{-1}\{\xi\}$, tendríamos que $\kappa = |\bigcup_{\xi<\lambda} h^{-1}\{\xi\}| \leq \lambda \cdot \lambda = \lambda < \kappa$, lo cual no es posible. Por lo tanto, existe un $\eta < \lambda$ fijo tal que $|h^{-1}\{\eta\}| = \kappa$.

Demostraremos ahora que para cualesquiera $\alpha < \beta < \kappa$ se tiene que $X_\alpha^\eta \cap X_\beta^\eta = \emptyset$. Si $\rho \in X_\alpha^\eta \cap X_\beta^\eta$, entonces $f_\rho(\alpha) = \eta = f_\rho(\beta)$, lo que implica que f_ρ no es inyectiva, contradiciendo la elección de f_ρ. Por lo tanto, la familia $\{X_\alpha^\eta : \alpha \in h^{-1}\{\xi\}\}$ es disjunta por pares y $X_\alpha^\eta \notin \mathscr{I}$ para cada $\alpha < \kappa$. $\square$

Finalmente estamos listos para mostrar que existen estacionarios ajenos.

Corolario 1.34. *Para cada cardinal regular $\kappa > \omega$, existe una familia de κ subconjuntos estacionarios de κ ajenos por pares.*

Demostración. Veamos primero el caso en que κ es sucesor. Tomemos el ideal $(\mathrm{Cub}(\kappa))^*$. Notemos que los unitarios están en $\mathrm{Cub}^*(\kappa)$, ya que si $\alpha < \kappa$, entonces $\kappa \setminus (\alpha+1)$ es subconjunto de $\kappa \setminus \{\alpha\}$ y, por el Ejemplo 1.23, sabemos que $\kappa \setminus (\alpha+1)$ es un club en κ. Por lo tanto, $\kappa \setminus \{\alpha\} \in \mathrm{Cub}(\kappa)$, es decir, $\{\alpha\} \in \mathrm{Cub}^*(\kappa)$. Como κ es regular, por el Lema 1.25, tenemos que $\mathrm{Cub}(\kappa)$ es κ-completo, equivalentemente, $\mathrm{Cub}^*(\kappa)$ es κ-completo. Estamos en condiciones de aplicar el Teorema 1.33 y de este modo obtener una familia de κ subconjuntos estacionarios en κ ajenos por pares.

Si κ es límite, por el Lema 1.12, tenemos que $|\{\lambda < \kappa : \lambda \text{ es regular}\}| = \kappa$. Nombremos $X := \{\lambda < \kappa : \lambda \text{ es regular}\}$. Entonces para cada $\lambda \in X$ tenemos que $\{\gamma < \kappa : \mathrm{cf}(\gamma) = \lambda\}$ es estacionario en κ por el Lema 1.31. Y con esto obtemos la familia de conjuntos estacionarios disjuntos de cardinalidad κ. $\square$

Corolario 1.35. *Sean κ un cardinal sucesor y S un subconjunto estacionario de κ. Entonces existe una partición de S en κ subconjuntos estacionarios.*

Demostración. Veamos que $\mathscr{I} = \{X \subseteq \kappa : (X \cap S) \in \mathrm{Cub}^*(\kappa)\}$ es un ideal sobre κ. Por definición de ideal: $\emptyset \in \mathrm{Cub}^*(\kappa)$ y $\kappa \notin \mathrm{Cub}^*(\kappa)$, además $\emptyset \cap S = \emptyset$ y $\kappa \cap S = \kappa$. Por lo tanto, $\emptyset \in \mathscr{I}$ y $\kappa \notin \mathscr{I}$. Sean A y B elementos de $\mathscr{I}$, es decir, $(A \cap S) \in \mathrm{Cub}^*(\kappa)$ y $(B \cap S) \in \mathrm{Cub}^*(\kappa)$. Como $\mathrm{Cub}^*(\kappa)$ es un ideal, $(A \cap S) \cup (B \cap S) \in \mathrm{Cub}^*(\kappa)$, lo que implica que $(A \cup B) \cap S \in \mathrm{Cub}^*(\kappa)$. Luego, $(A \cup B) \in \mathscr{I}$. Finalmente, si $A \in \mathscr{I}$ y

$B \subseteq A$, $(A \cap S) \in \mathrm{Cub}^*(\kappa)$ y $(B \cap S) \subset (A \cap S)$. Como $\mathrm{Cub}^*(\kappa)$ es un ideal tenemos que $(B \cap S) \in \mathrm{Cub}^*(\kappa)$. Luego, $B \in \mathscr{I}$. Esto prueba que $\mathscr{I}$ es un ideal sobre κ.

Notemos que todos los conjuntos unitarios están en $\mathscr{I}$. Sea $\alpha < \kappa$. Si $\{\alpha\}$ es ajeno con S, tenemos que $\{\alpha\} \cap S = \emptyset \in \mathrm{Cub}^*(\kappa)$, es decir, $\{\alpha\} \in \mathscr{I}$. Si $\{\alpha\}$ no es ajeno con S, entonces $\{\alpha\} \cap S = \{\alpha\}$ el cual ya probamos que es un elemento de $\mathrm{Cub}^*(\kappa)$. Por lo tanto, $\{\alpha\} \in \mathscr{I}$, para cada $\alpha < \kappa$.

Probaremos que $\mathscr{I}$ es un ideal κ-completo. Sea $\mathscr{A}$ un subconjunto de $\mathscr{I}$ tal que $|\mathscr{A}| < \kappa$. Notemos que $(\bigcup \mathscr{A}) \cap S = \bigcup_{B \in \mathscr{A}}(B \cap S)$. Por otro lado, como $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{I}$, para cada $B \in \mathscr{A}$ tenemos que $(B \cap S) \in \mathrm{Cub}^*(\kappa)$. Por el inciso (2) del Lema 1.25, $\bigcup_{B \in \mathscr{A}}(B \cap S) \in \mathrm{Cub}^*(\kappa)$. Por lo tanto, $\bigcup \mathscr{A} \in \mathscr{I}$.

Ahora podemos aplicar el Teorema 1.33 al ideal $\mathscr{I}$. Entonces existe una familia ajena por pares $\{X_\alpha\}_{\alpha<\kappa}$ de subconjuntos de κ tales que $X_\alpha \notin \mathscr{I}$ para todo $\alpha < \kappa$. Con lo cual tenemos que $(X_\alpha \cap S) \notin \mathrm{Cub}^*(\kappa)$ para cada $\alpha < \kappa$. Por lo tanto, $\{X_\alpha \cap S\}_{\alpha<\kappa}$ es una familia ajena por pares de subconjuntos estacionarios de κ. □

Finalizaremos esta sección dando una caracterización de los conjuntos estacionarios en términos de una clase particular de funciones, pero para esto serán necesarios algunos resultados previos.

Definición 1.36. Sea κ un cardinal. Dada una familia $\{C_\alpha : \alpha < \kappa\}$ de conjuntos cerrados no acotados en κ, definimos la *intersección diagonal* de esta familia como

$$\Big\{\gamma < \kappa : \gamma \in \bigcap_{\alpha<\gamma} C_\alpha\Big\}.$$

Lema 1.37. *Sea $\kappa > \omega$ un cardinal regular. Entonces la intersección diagonal de una familia de clubs en κ es un club.*

Demostración. Sea D la intersección diagonal de una familia $\{C_\alpha : \alpha < \kappa\}$ de clubs en κ y veamos que D es cerrado en κ. Sea $\gamma < \kappa$ un ordinal límite tal que $D \cap \gamma$ es no acotado en γ, y $\alpha < \gamma$. Afirmamos que $C_\alpha \cap \gamma$ es no acotado en γ. En efecto, nuestra hipótesis implica que existe $\beta \in D \cap \gamma$ tal que $\alpha < \beta$. Como $\beta \in D$, tenemos que $\beta \in C_\alpha$, es decir, encontramos un $\beta \in C_\alpha \cap \gamma$ tal que $\alpha < \beta$. Por hipótesis, C_α es cerrado, luego $\gamma \in C_\alpha$. Lo cual prueba que $\gamma \in D$.

Como $\mathrm{cf}(\kappa) = \kappa$, por el Lema 1.25 tenemos que $\bigcap_{\alpha<\gamma} C_\alpha$ es un club en κ para cada $\gamma < \kappa$. Veamos que D es no acotado . Sea $\xi < \kappa$ y definimos inductivamente una sucesión de la siguiente manera: $\gamma_0 = \xi$ y si γ_n ha sido definido, entonces γ_{n+1} es un elemento de $\bigcap_{\alpha<\gamma_n} C_\alpha$ tal que $\gamma_n < \gamma_{n+1}$, el cual existe ya que, por el Lema 1.25, $\bigcap_{\alpha<\gamma_n} C_\alpha$ es no acotado en κ. Definimos $\delta = \sup\{\gamma_n : n < \omega\}$ y notamos que $\delta < \kappa$, ya que $\omega < \mathrm{cf}(\kappa)$. Como la sucesión $\{\gamma_n : n < \omega\}$ es estrictamente creciente, por el Lema 1.2, tenemos que δ es un ordinal límite. Sea $\eta < \delta$ arbitrario. Probaremos ahora que $C_\eta \cap \delta$ es no acotado en δ. En primer lugar $\eta < \gamma_n$ para algún $n < \omega$. Afirmamos que $\gamma_j \in C_\eta$ para cada $j > n$. Si $j > n$, entonces $j - 1 \geq n$ y, como la sucesión definida es estrictamente creciente, tenemos que $\gamma_{j-1} \geq \gamma_n > \eta$. Como $\gamma_j \in \bigcap_{\alpha<\gamma_{j-1}} C_\alpha$, $\gamma_j \in C_\eta$. Por lo tanto, $C_\eta \cap \delta$ es no acotado en δ. Por hipótesis $C_\eta \cap \delta$ es cerrado en δ y así $\delta \in D$. $\square$

Definición 1.38. Sean κ un cardinal y X un subconjunto de κ. Una función $f : X \to \kappa$ se llama *regresiva* si y sólo si $f(\alpha) < \alpha$ para cada $\alpha \in X \setminus \{0\}$.

Las funciones regresivas están ligadas íntimamente a los estacionarios, tal y como se puede ver en nuestro resultado siguiente.

Teorema 1.39. *Sean $\kappa > \omega$ un cardinal regular y $S \subseteq \kappa$. Entonces son equivalentes:*

1. *S es un conjunto estacionario en κ.*

2. *Toda función regresiva $f : S \to \kappa$ tiene una fibra no acotada.*

Más aún, si S es estacionario y f es regresiva, entonces f tiene una fibra estacionaria.

Demostración. Sea $f : S \to \kappa$ una función regresiva. Probaremos que existe un $\alpha < \kappa$ tal que $f^{-1}\{\alpha\}$ es estacionario en κ. Supongamos, buscando una contradicción, que para todo $\alpha < \kappa$, $f^{-1}\{\alpha\}$ es no estacionario en κ. Entonces para cada $\alpha < \kappa$ podemos elegir C_α, un club en κ, tal que $C_\alpha \cap f^{-1}\{\alpha\} = \emptyset$. Sea D la intersección diagonal de $\{C_\alpha : \alpha < \kappa\}$. Como S es estacionario en κ, por el Lema 1.37, tenemos que $D \cap S \neq \emptyset$. Por lo cual existe $\gamma \in D \cap S$, es decir, $\gamma \in S$ y $\gamma \in C_\alpha$ para cada $\alpha < \gamma$. Definamos $\beta = f(\gamma)$, lo cual nos dice que $\gamma \in f^{-1}\{\beta\}$. Como f es regresiva, tenemos que $\beta < \gamma$, lo que implica que $\gamma \in C_\beta$. De este modo $\gamma \in C_\beta \cap f^{-1}\{\beta\}$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, existe un $\alpha < \kappa$ tal que $f^{-1}\{\alpha\}$ es estacionario en κ, en particular no acotado.

Para probar el recíproco, supongamos que S es un subconjunto de κ y que C es un club en κ que es ajeno con S y veamos que hay una función regresiva sin fibras no acotadas. Definimos $f : S \to \kappa$ como $f(\alpha) = \sup(C \cap \alpha)$. Como α es una cota superior de $C \cap \alpha$ se tiene que $f(\alpha) \leq \alpha$. Afirmamos que f es regresiva. Supongamos, por el contrario, que $\alpha \in S$ satisface $\alpha = f(\alpha)$, es decir, $\alpha = \sup(C \cap \alpha)$. Dada $\beta < \alpha$, existe $\delta \in C \cap \alpha$ tal que $\beta < \delta$ y así $\beta + 1 \leqslant \delta < \alpha$, con lo cual se prueba que α es límite y que $C \cap \alpha$ es no acotado en α. Como C es cerrado,$\alpha \in C$, pero eso contradice que S y C son ajenos, por lo tanto, $f(\alpha) \neq \alpha$. Con lo cual obtenemos que para cada $\alpha \in S$, $f(\alpha) < \alpha$, es decir, f es regresiva.

Vamos a probar que para cada $\delta < \kappa$, $f^{-1}\{\delta\}$ es un subconjunto acotado de κ. Sea $\delta < \kappa$ y supongamos que $f^{-1}\{\delta\} \neq \emptyset$ y fijemos $\alpha \in f^{-1}\{\delta\}$. Como $\alpha < \kappa$ y C es no acotado, existe $\beta \in C$ tal que $\alpha < \beta$. Probaremos que $f^{-1}\{\delta\} \subseteq \beta$. Sea $\gamma \in S \setminus \beta$. Entonces $\gamma \in S$ y $\beta \leq \gamma$, pero no puede pasar que $\beta = \gamma$, de lo contrario tendríamos que S y C no son ajenos, que es una contradicción. Deducimos que $\delta = f(\alpha) < \alpha \leq \beta \leq \sup(C \cap \gamma) = f(\gamma)$. Por lo tanto, $\gamma \notin f^{-1}\{\delta\}$ y así $\gamma \in S \setminus f^{-1}\{\delta\}$. De este modo β es una cota superior de $f^{-1}\{\delta\}$. En el caso en que $f^{-1}\{\delta\} = \emptyset$, el conjunto vacío es acotado en todo ordinal distinto de 0.

□

Con el ejemplo siguiente, veamos que la conclusión del Teorema 1.39 es falsa, si κ es numerable.

Hagamos $\kappa = \omega$, el cual es numerable y regular. Definamos $S = \omega \setminus \{0\}$ que por el Ejemplo 1.23 es un club en ω y, por lo tanto, un conjunto estacionario. Definamos la función $f : S \to \omega$ como $f(n+1) = n$. Entonces f es regresiva, pero para cada $n < \kappa$ tenemos que $f^{-1}\{n\} = \{n+1\}$, el cual no es estacionario en ω, ya que $C = \omega \setminus (n+2)$ es un club y $C \cap \{n+1\} = \emptyset$.

CAPÍTULO 2: EQUIVALENCIAS Y VARIACIONES DE $\diamondsuit$

Gödel estableció y probó la consistencia de un axioma adicional a ZFC, el llamado Axioma de constructibilidad de Gödel. Tradicionalmente se usa el símbolo "$V = L$" para denotar al sistema axiomático $ZFC+$(Axioma de constructibilidad de Gödel). Para profundizar en el tema, invitamos al lector a leer los capítulos V y VI de [4].

Jensen demostró que el Axioma de Constructibilidad implica la existencia de un árbol de Souslin, pero se dio cuenta de que la construcción se basaba en una consecuencia de dicho axioma, la cual es más fácil de manejar que el axioma en sí. A dicha consecuencia la llamó *diamante* y es el primero, de una gran lista, de los llamados "principios combinatorios".

En este capítulo introduciremos dicho principio así como algunas de sus equivalencias y variaciones.

Definición 2.1. Una familia $\{A_\alpha\}_{\alpha<\omega_1}$ se llama sucesión $\diamondsuit$ si y sólo si cumple que:

1. $A_\alpha \subseteq \alpha$ para cada $\alpha < \omega_1$,

2. para cada $A \subseteq \omega_1$ el conjunto $\{\alpha < \omega_1 : A \cap \alpha = A_\alpha\}$ es estacionario en ω_1.

De manera informal, la definición anterior se puede describir del siguiente modo: dado cualquier subconjunto de ω_1, la sucesión $\diamondsuit$ *adivina* una cantidad estacionaria de veces los segmentos iniciales de dicho subconjunto.

Se le llama *diamante de Jensen* al enunciado: Existe una sucesión $\diamondsuit$. A dicho enunciado lo denotaremos como $\diamondsuit$.

Un resultado inmediato es que la existencia de una sucesión $\diamondsuit$ implica que $\mathfrak{c} = \omega_1$.

Teorema 2.2. *Si* $\diamondsuit$ *es cierto, entonces* **CH** *es cierta.*

Demostración. Sea $\{A_\alpha\}_{\alpha<\omega_1}$ una sucesión $\diamondsuit$. Si A es un subconjunto de ω, entonces el conjunto $X = \{\alpha < \omega_1 : A \cap \alpha = A_\alpha\}$ es estacionario en ω_1, en particular, X es no acotado en ω_1. Como X es no acotado y $\omega < \omega_1$, existe $\alpha \in X$ tal que $\omega < \alpha < \omega_1$ y α cumple que $A \cap \alpha = A_\alpha$. Luego $A \cap \alpha = A$.

Definimos la función $f : \mathscr{P}(\omega) \to \omega_1$ como $f(A) = \min\{\alpha < \omega_1 : A = A_\alpha\}$. Veamos que f es inyectiva. Supongamos que $A, B \subseteq \omega$ satisfacen $f(A) = f(B)$. Si hacemos $\beta = f(A)$, entonces $\beta = f(B)$ y así $A = A_\beta = B$, lo cual nos dice que f es inyectiva. Por lo tanto, $\mathfrak{c} \leq \omega_1$. La desigualdad $\omega_1 \leq \mathfrak{c}$ es una consecuencia de ZFC. $\square$

2.1 Equivalencias de $\diamondsuit$

Consideremos las siguientes sucesiones:

Definición 2.3. Una familia $\{A_\alpha\}_{\alpha<\omega_1}$ se llama sucesión $\diamondsuit_1$ si y sólo si cumple que :

1. $A_\alpha \subseteq \mathscr{P}(\alpha)$ y $|A_\alpha| \leqslant \omega$ para cada $\alpha < \omega_1$,

2. para cada $A \subseteq \omega_1$ el conjunto $\{\alpha < \omega_1 : A \cap \alpha \in A_\alpha\}$ es estacionario en ω_1.

Definición 2.4. Una familia $\{A_\alpha\}_{\alpha<\omega_1}$ se llama sucesión $\diamondsuit_2$ si y sólo si cumple que:

1. $A_\alpha \subseteq \alpha$, para cada $\alpha < \omega_1$,

2. para cada $A \subseteq \omega_1$ existe $\alpha \geqslant \omega$ tal que $A \cap \alpha = A_\alpha$.

Definición 2.5. Una familia $\{A_\alpha\}_{\alpha<\omega_1}$ se llama sucesión $\diamondsuit_3$ si y sólo si cumple que:

1. $A_\alpha \subseteq \mathscr{P}(\alpha)$ y $|A_\alpha| \leqslant \omega$ para cada $\alpha < \omega_1$,

2. para cada $A \subseteq \omega_1$ existe $\alpha \geqslant \omega$ tal que $A \cap \alpha \in A_\alpha$.

Definición 2.6. Una familia $\{A_\alpha\}_{\alpha<\omega_1}$ se llama sucesión $\diamondsuit_4$ si y sólo si cumple que:

1. $A_\alpha \subseteq \mathscr{P}(\alpha)$ y $|A_\alpha| \leqslant \omega$ para cada $\alpha < \omega_1$,

2. para cada $A \subseteq \omega_1$ existe un ordinal límite α tal que $A \cap \alpha \in A_\alpha$.

Consideremos los siguientes enunciados:

$\diamondsuit_1$: Existe una sucesión $\diamondsuit_1$.

$\diamondsuit_2$: Existe una sucesión $\diamondsuit_2$.

$\diamondsuit_3$: Existe una sucesión $\diamondsuit_3$.

$\diamondsuit_4$: Existe una sucesión $\diamondsuit_4$.

Argumentos rutinarios muestran que cada uno de estos enunciados es consecuencia de $\diamondsuit$ (en otros términos, cada uno de ellos es un debilitamiento de $\diamondsuit$). Lo que no resulta claro es si alguna de estas proposiciones implica $\diamondsuit$. El propósito de esta sección es demostrar que, de hecho, todos son equivalentes a $\diamondsuit$.

Vamos a probar las siguientes implicaciones: $\diamondsuit \to \diamondsuit_2$, $\diamondsuit_2 \to \diamondsuit_3$, $\diamondsuit_3 \to \diamondsuit_4$, $\diamondsuit_4 \to \diamondsuit_1$ y $\diamondsuit_1 \to \diamondsuit$.

Lema 2.7. *Si $\diamondsuit$, entonces $\diamondsuit_2$.*

Demostración. Sea $\{A_\alpha\}_{\alpha<\omega_1}$ una sucesión $\diamondsuit$. Afirmamos que $\{A_\alpha\}_{\alpha<\omega_1}$ es una sucesión $\diamondsuit_2$. Tenemos que para cada $\alpha < \omega_1$, $A_\alpha \subseteq \alpha$. Sea $A \subseteq \omega_1$. Por hipótesis,

$$\{\alpha < \omega_1 : A \cap \alpha = A_\alpha\}$$

es estacionario en ω_1, en particular, es no acotado. Como ω no es una cota superior para $\{\alpha < \omega_1 : A \cap \alpha = A_\alpha\}$, existe $\alpha > \omega$ tal que $A \cap \alpha = A_\alpha$. Por lo tanto, $\{A_\alpha\}_{\alpha<\omega_1}$ es una sucesión $\diamondsuit_2$. $\square$

Lema 2.8. *Si $\diamondsuit_2$, entonces $\diamondsuit_3$.*

Demostración. Sea $\{A_\alpha\}_{\alpha<\omega_1}$ una sucesión $\diamondsuit_2$. Veamos que $\{\{A_\alpha\} : \alpha < \omega_1\}$ es una sucesión $\diamondsuit_3$. Para cada $\alpha < \omega_1$, $\{A_\alpha\} \subseteq \mathscr{P}(\alpha)$ y $|\{A_\alpha\}| = 1 \leqslant \omega$ porque $A_\alpha \subseteq \alpha$. Sea $A \subseteq \omega_1$. Por hipótesis, existe $\alpha \geqslant \omega$ tal que $A \cap \alpha = A_\alpha$, es decir, $A \cap \alpha \in \{A_\alpha\}$. Por lo tanto, $\{\{A_\alpha\}\}_{\alpha<\omega_1}$ es una sucesión $\diamondsuit_3$. $\square$

Lema 2.9. *Si $\diamondsuit_3$, entonces $\diamondsuit_4$.*

Demostración. Sea $\{A_\alpha\}_{\alpha<\omega_1}$ una sucesión $\diamondsuit_3$. Para cada $\alpha < \omega_1$ definimos

$$B_\alpha = \{X \cap \alpha : X \in \bigcup_{n<\omega} A_{\alpha+n}\} \subseteq \mathscr{P}(\alpha).$$

Probaremos que $\{B_\alpha\}_{\alpha<\omega_1}$ es una sucesión $\diamondsuit_4$. Notemos que $|B_\alpha| \leqslant \omega$ ya que $|A_{\alpha+n}| \leqslant \omega$ para cada $n < \omega$. Ahora sea $A \subseteq \omega_1$ y veamos que existe un ordinal límite δ tal que $A \cap \delta \in B_\delta$. Por hipótesis, existe $\alpha \geqslant \omega$ tal que $A \cap \alpha \in A_\alpha$. Por el Lema 1.13, podemos escribir a α como $\delta+n$, para algún ordinal no sucesor δ y un número natural n. Observemos que $\delta \neq 0$, ya que $\alpha \geqslant \omega$ y, por lo tanto, δ es un ordinal límite (esto se debe a que 0 es el único ordinal no sucesor que no es ordinal límite). Como $A \cap \alpha \in A_{\delta+n}$, tenemos que $(A \cap \alpha) \cap \delta \in B_\delta$, es decir, $A \cap \delta \in B_\delta$. Por lo tanto, $\{B_\alpha\}_{\alpha<\omega_1}$ es una sucesión $\diamondsuit_4$. $\square$

Lema 2.10. *Si $\diamondsuit_4$, entonces $\diamondsuit_1$.*

Demostración. Sea $\{a_\alpha\}_{\alpha<\omega_1}$ una sucesión $\diamondsuit_4$. Para cada $\alpha < \omega_1$ definimos $A_\alpha = a_\alpha$, si $a_\alpha \neq \emptyset$, y $A_\alpha = \{\alpha\}$ en caso contrario. Afirmamos que $\{A_\alpha\}_{\alpha<\omega_1}$ es una sucesión $\diamondsuit_4$. Si $\alpha < \omega_1$, $A_\alpha \subseteq \mathscr{P}(\alpha)$, ya que $a_\alpha \subseteq \mathscr{P}(\alpha)$ y $\{\alpha\} \subseteq \mathscr{P}(\alpha)$. Además $|A_\alpha| \leqslant \omega$, debido a que $|a_\alpha| \leqslant \omega$ y $|\{\alpha\}| = 1 \leqslant \omega$. Sea $X \subseteq \omega_1$. Por hipótesis, existe un ordinal límite α tal que $X \cap \alpha \in a_\alpha$, es decir, $a_\alpha \neq \emptyset$. Por lo tanto, $X \cap \alpha \in A_\alpha$.

Definimos la función $f : \omega_1 \to \omega_1$ mediante $f(\beta) = \beta \cdot 2$ (multiplicación de ordinales). Por el Lema 1.13, todo ordinal β puede ser expresado como $\beta = \delta_\beta + n_\beta$, donde δ_β es un ordinal que no es sucesor y $n_\beta < \omega$; por lo tanto, $f(\beta) = \delta_\beta + 2n_\beta$, es decir, $f[\omega_1]$ es el conjunto de todos los ordinales pares en ω_1.

Definamos para cada $\alpha < \omega_1$, $B_\alpha := \{f^{-1}[X] : X \in A_\alpha\}$. Demostraremos que $\{B_\alpha\}_{\alpha<\omega_1}$ es una sucesión $\diamondsuit_1$.

Sea $\alpha < \omega_1$. Notemos que para cada $X \in A_\alpha$ y $\beta \in f^{-1}[X]$, tenemos que $\beta \leqslant \beta \cdot 2 = f(\beta) \in X \subseteq \alpha$, es decir, $\beta < \alpha$. Así, $B_\alpha \subseteq \mathscr{P}(\alpha)$. Como $|A_\alpha| \leqslant \omega$, obtenemos que $|B_\alpha| \leqslant \omega$.

Sea $A \subseteq \omega_1$. Probaremos que $\{\alpha < \omega_1 : A \cap \alpha \in B_\alpha\}$ es estacionario en ω_1. Para ello, sea C_0 un club en ω_1 y veamos que existe $\alpha \in C_0$ tal que $A \cap \alpha \in B_\alpha$.

Definimos $C_1 = \lim(\omega_1)$, que por el Ejemplo 1.27 es un club en ω_1.

De acuerdo con el Lema 1.25, $C = C_0 \cap C_1$ es un club en ω_1. Observemos que $C \cup \{0\}$ sigue siendo un club en ω_1, ya que $C \cup \{0\}$ sigue siendo no acotado en ω_1 (sólo agregamos una cota inferior), además es cerrado en ω_1 ya que si δ es un ordinal límite tal que $\sup((C \cup \{0\}) \cap \delta) = \delta$, es decir, tal que $\sup((C \cap \delta) \cup \{0\}) = \delta$, entonces $\sup(C \cap \delta) = \delta$ y, como C

es cerrado en ω_1, se deduce que $\delta \in C$; en particular $\delta \in C \cup \{0\}$. Por el Lema 1.28 (inciso (4)), existe un isomorfismo de orden $g : \omega_1 \to C \cup \{0\}$.

Para cada $\lambda < \omega_1$ definimos

$$X_\lambda = \{\tau < \omega_1 : g(\lambda) < \tau < g(\lambda + 1)\}.$$

Observemos que $X_\lambda \neq \emptyset$ ya que $g(\lambda) + 1 \in X_\lambda$ y así $\bigcup_{\tau \in X_\lambda} A_\tau$ es no vacío y a lo más numerable. Fijemos $\{X^\lambda_m\}_{m<\omega}$, una enumeración para dicho conjunto (probablemente con repeticiones). Vamos a definir al conjunto Z_0 de la siguiente forma: Z_0 tiene como elementos a todos los ordinales de la forma $(g(\lambda) + 2m + 1)$ que satisfacen $(g(\lambda) + 2m + 1) \notin X^\lambda_m$, donde $m < \omega$ y $\lambda < \omega_1$. Definimos $Z_1 = f[A]$ y $Z = Z_0 \cup Z_1$. Como $Z \subseteq \omega_1$, por lo probado en el primer párrafo de esta demostración, existe un ordinal límite α tal que $Z \cap \alpha \in A_\alpha$. Afirmamos que $\alpha \in C$. Vamos a suponer que $\alpha \notin C$ para llegar a una contradicción. Definimos $\gamma = \min\{\eta < \omega_1 : \alpha < g(\eta)\}$, el cual existe ya que $C \cup \{0\}$ es no acotado. Notemos que $\alpha < g(\gamma)$. Si $\gamma = 0$, entonces $\alpha < g(0) = 0$, lo cual no es posible ya que no hay ordinales menores a 0. Entonces $\gamma > 0$. Supongamos ahora que γ es límite. Por el Lema 1.28, tenemos que la función $g \restriction \gamma : \gamma \to g(\gamma)$ es cofinal en $g(\gamma)$, por lo cual existe $\delta < \gamma$ tal que $\alpha < g(\delta)$, contradiciendo que γ es el mínimo. Por lo tanto, este caso no es posible. Así, obtenemos que γ debe ser sucesor, es decir, $\gamma = \lambda + 1$, para algún $\lambda < \omega_1$. Luego, $g(\lambda) < \alpha < g(\lambda + 1)$, ya que la desigualdad $\alpha < g(\lambda)$ contradice la elección de γ, y así, $\alpha \in X_\lambda$. De este modo, $Z \cap \alpha \in A_\alpha \subseteq \bigcup_{\tau \in X_\lambda} A_\tau$ y por ende, existe $m < \omega$ de tal forma que $Z \cap \alpha = X^\lambda_m$.

Hagamos $\beta = g(\lambda) + 2m + 1$. Si $\beta \in Z$, entonces $\beta \in Z_0$ o $\beta \in Z_1$, pero $\beta \notin Z_1$ ya que no es un ordinal par, luego $\beta \in Z_0$. De esta forma, $\beta \in Z$ si y sólo si $\beta \in Z_0$. Ahora notemos que $\beta \in Z_0$ es equivalente, por definición, a que $\beta \notin X^\lambda_m = Z \cap \alpha$. Como α es límite y $g(\lambda) < \alpha$, se tiene que $\beta < \alpha$. Por lo anterior, tenemos que $\beta \notin X^\lambda_m$ siempre y cuando $\beta \notin Z$. El argumento anterior prueba que $\beta \in Z$ si $\beta \notin Z$, lo cual es absurdo. Entonces debe pasar que $\alpha \in C$.

Ahora, como los elementos de Z_0 son ordinales impares, entonces $f^{-1}[Z_0] = \emptyset$, y, por lo tanto,

$$f^{-1}[Z] = f^{-1}[Z_0] \cup f^{-1}[Z_1] = f^{-1}[Z_1],$$

además, como f es inyectiva tenemos que $f^{-1}[Z] = A$. Así, obtenemos que

$$A \cap \alpha = f^{-1}[Z_1] \cap \alpha = f^{-1}[Z] \cap \alpha.$$

Probaremos que $f^{-1}[\alpha] = \alpha$. Si $\beta \in f^{-1}[\alpha]$, entonces $\beta \leqslant \beta \cdot 2 < \alpha$. Por otro lado, si $\beta < \alpha$, se sigue que $\delta_\beta + n_\beta < \alpha$ y, por ser α un ordinal límite, tenemos que $f(\beta) = \delta_\beta + 2n_\beta < \alpha$. Así, obtenemos que $f^{-1}[\alpha] = \alpha$. Por lo tanto,

$$f^{-1}[Z] \cap \alpha = f^{-1}[Z] \cap f^{-1}[\alpha] = f^{-1}[Z \cap \alpha].$$

Como $Z \cap \alpha \in A_\alpha$, $A \cap \alpha = f^{-1}[Z \cap \alpha] \in B_\alpha$. Y esto concluye la prueba porque $\alpha \in C_0$.

□

Lema 2.11. *Si $\diamondsuit_1$, entonces $\diamondsuit$.*

Demostración. Como $\omega_1 = |\omega \times \omega_1|$, podemos elegir una función biyectiva $f : \omega_1 \to \omega \times \omega_1$.

Dados $\alpha, \beta < \omega_1$, hagamos:

$$g(\alpha, \beta) := \max\{\sup f^{-1}[\omega \times \alpha], \min\{\xi < \omega_1 : f[\beta] \subseteq \omega \times \xi\}\}$$

y comprobemos que esto define una función $g : \omega_1 \times \omega_1 \to \omega_1$. Sean $\alpha, \beta < \omega_1$. Como $|\omega \times \alpha| \leqslant \omega$ y f es inyectiva, tenemos que $|f^{-1}[\omega \times \alpha]| \leqslant \omega$ y, por lo tanto, $\sup f^{-1}[\omega \times \alpha] < \omega_1$. Notemos que para cada $\delta < \beta$, existen $n_\delta < \omega$ y $\eta_\delta < \omega_1$ de tal modo que $f(\delta) = (n_\delta, \eta_\delta)$. Entonces $f[\beta] \subseteq \omega \times (\sup\{\eta_\delta : \delta < \beta\} + 1)$. Como β es numerable, $\sup\{\eta_\delta : \delta < \beta\} + 1 < \omega_1$; así tenemos que $\{\xi < \omega_1 : f[\beta] \subseteq \omega \times \xi\} \neq \emptyset$ y, por lo tanto, $g(\alpha, \beta) < \omega_1$.

Denotemos por C al conjunto de todos los ordinales en ω_1 que son cerrados bajo $\{g\}$, que por el Lema 1.26 es un club en ω_1. Demostraremos que si $\alpha \in C$, entonces $f^{-1}[\omega \times \alpha] \subseteq \alpha$ y $f[\alpha] \subseteq \omega \times \alpha$. Sea $\xi < \alpha$, un elemento arbitrario. Tenemos que $(\xi, \xi) \in \alpha \times \alpha$ y, por lo tanto, $g(\xi, \xi) < \alpha$. Por la definición de g, tenemos que $\sup f^{-1}[\omega \times \xi] \leq g(\xi, \xi)$ y

$\eta := \min\{\delta < \omega_1 : f[\xi] \subseteq \omega \times \delta\} \leq g(\xi, \xi) < \alpha$. Por una parte, el que $\beta \in f^{-1}[\omega \times \xi]$ implica que $\beta \leq \sup f^{-1}[\omega \times \xi] < \alpha$ y de este modo $\beta < \alpha$, es decir, $f^{-1}[\omega \times \xi] \subseteq \alpha$. Por otra parte, $f[\xi] \subseteq \omega \times \eta$ y como $\eta < \alpha$, tenemos $\omega \times \eta \subseteq \omega \times \alpha$, es decir, $f[\xi] \subseteq \omega \times \alpha$. Como ξ fue arbitrario, se deduce que $\bigcup_{\xi<\alpha} f^{-1}[\omega \times \xi] \subseteq \alpha$ y $\bigcup_{\xi<\alpha} f[\xi] \subseteq \omega \times \alpha$, o equivalentemente, $f^{-1}[\bigcup_{\xi<\alpha} \omega \times \xi] \subseteq \alpha$ y $f[\bigcup_{\xi<\alpha} \xi] \subseteq \omega \times \alpha$. Por lo tanto, $f^{-1}[\omega \times \alpha] \subseteq \alpha$ y $f[\alpha] \subseteq \omega \times \alpha$.

Para simplificar la escritura del resto de la prueba adoptaremos la siguiente notación: dados $A \subseteq \omega_1$ y $B \subseteq \omega \times \omega_1$, denotaremos $A' = f[A]$ y $B^* = f^{-1}[B]$. Observemos que si $\alpha \in C$, $A \subseteq \alpha$ y $B \subseteq \omega \times \alpha$, entonces $A' \subseteq \omega \times \alpha$ y $B^* \subseteq \alpha$.

Sea $\{A_\alpha\}_{\alpha<\omega_1}$ una sucesión $\diamondsuit_1$. Para cada $\alpha < \omega_1$ definimos:

$$\mathscr{B}_\alpha = \begin{cases} \{A' : A \in A_\alpha\} & \text{cuando } \alpha \in C \\ \{\emptyset\} & \text{cuando } \alpha \notin C \end{cases}$$

Afirmación 1: si $B \subseteq \omega \times \omega_1$, entonces $E = \{\alpha < \omega_1 : B \cap (\omega \times \alpha) \in \mathscr{B}_\alpha\}$ es estacionario en ω_1.

Como $B^* \subseteq \omega_1$, $S = \{\alpha < \omega_1 : B^* \cap \alpha \in A_\alpha\}$ es estacionario en ω_1 y así $S \cap C$ también lo es (la prueba de esta afirmación está en los comentarios que le siguen a la definición 1.29). Si $\alpha \in S \cap C$, entonces $(B^* \cap \alpha)' \in \mathscr{B}_\alpha$, pero $(B^* \cap \alpha)' = (B^*)' \cap \alpha'$ (ya que f es inyectiva). Notemos que para todo $Z \subseteq \omega \times \omega_1$ se tiene que $(Z^*)' = Z$ debido a que f es biyectiva. Como $\alpha \in C$, tenemos que $\alpha' \subseteq \omega \times \alpha$ y $(\omega \times \alpha)^* \subseteq \alpha$, lo que implica que $((\omega \times \alpha)^*)' \subseteq \alpha'$; luego $(\omega \times \alpha) \subseteq \alpha'$. Y así obtenemos que $(B^*)' \cap \alpha' = B \cap (\omega \times \alpha)$. Por lo tanto, $S \cap C \subseteq E$ y por ende E también es estacionario en ω_1 (ver los comentarios que le siguen a la definición 1.29).

Si $\alpha < \omega_1$, $|\mathscr{B}_\alpha| \leq \omega$ y $\mathscr{B}_\alpha \neq \emptyset$, por lo cual, podemos escribir a $\mathscr{B}_\alpha$ como $\{B^k_\alpha : k < \omega\}$. Definimos

$$B^k_{\alpha,n} = \{\xi < \omega_1 : (n, \xi) \in B^k_\alpha\},$$

donde $n, k < \omega$. Probaremos que $\{B^n_{\alpha,n}\}_{\alpha<\omega_1}$ es una sucesión $\diamondsuit$ para algún $n < \omega$. Si no, entonces para cada $n < \omega$, existe $B_n \subseteq \omega_1$ tal que $X_n := \{\alpha < \omega_1 : B_n \cap \alpha = B^n_{\alpha,n}\}$ es no estacionario en ω_1. Hagamos

$$B = \bigcup_{n<\omega} (\{n\} \times B_n).$$

Afirmamos que para cada $n < \omega$, $Y_n := \{\alpha < \omega_1 : B \cap (\omega \times \alpha) = B^n_\alpha\}$ es no estacionario en ω_1. Para probarlo fijemos $k < \omega$ y veamos que $Y_k \subseteq X_k$. Sea $\alpha < \omega_1$ de tal modo que $B \cap (\omega \times \alpha) = B^k_\alpha$. Entonces tenemos

$$B^k_\alpha = (\bigcup_{n<\omega} (\{n\} \times B_n)) \cap (\omega \times \alpha) = (\bigcup_{n<\omega} (\{n\} \times B_n)) \cap \bigcup_{m<\omega} (\{m\} \times \alpha).$$

Notemos que si $n, m < \omega$ son tales que $n \neq m$, entonces $(\{n\} \times B_n) \cap (\{m\} \times \alpha) = \emptyset$, lo que implica que $B^k_\alpha = \bigcup_{n<\omega} (\{n\} \times (B_n \cap \alpha))$. Como consecuencia de la igualdad anterior, se tiene que $\xi \in B_k \cap \alpha$ es equivalente a que $(k, \xi) \in B^k_\alpha$, lo cual, por definición, pasa si y sólo si $\xi \in B^k_{\alpha,k}$. De este modo $B_k \cap \alpha = B^k_{\alpha,k}$. Por lo tanto, para cada $n < \omega$ se tiene que $Y_n \subseteq X_n$ y así tenemos que Y_n es no estacionario.

Por el Lema 1.32, tenemos que $\bigcup_{n<\omega} Y_n$ es no estacionario en ω_1. Para obtener la contradicción requerida probaremos que si E es como en la Afirmación 1, entonces $E \subseteq \bigcup_{n<\omega} Y_n$. Sea $\alpha < \omega_1$ tal que $B \cap (\omega \times \alpha) \in \mathscr{B}_\alpha$. Existe $k < \omega$ tal que $B \cap (\omega \times \alpha) = B^k_\alpha$, es decir, para todo $\alpha \in E$ existe $k < \omega$ de tal modo que $\alpha \in Y_k$; luego, $E \subseteq \bigcup_{n<\omega} Y_n$. Lo que contradice que E es estacionario en ω_1. Por lo tanto, existe $n < \omega$ tal que $\{B^n_{\alpha,n}\}_\alpha < \omega_1$ es una sucesión $\diamondsuit$. $\square$

Combinando los resultados anteriores tenemos que son equivalentes los siguientes enunciados: $\diamondsuit$, $\diamondsuit_1$, $\diamondsuit_2$, $\diamondsuit_3$ y $\diamondsuit_4$.

Veamos otra manera de formular $\diamondsuit$, ahora en términos de funciones.

Recordemos que, dado un ordinal α, α^α es la colección de todas las funciones del ordinal α en sí mismo.

Consideremos los siguientes enunciados:

Definición 2.12. Una familia de funciones $\{f_\alpha\}_{\alpha<\omega_1}$ se llama sucesión $\diamondsuit'$ si y sólo si cumple que:

1. $f_\alpha : \alpha \to \alpha$ para cada $\alpha < \omega_1$,

2. para cada función $f : \omega_1 \to \omega_1$ el conjunto $\{\alpha < \omega_1 : f \restriction \alpha = f_\alpha\}$ es estacionario en ω_1.

Definición 2.13. Una familia de funciones $\{F_\alpha\}_{\alpha<\omega_1}$ se llama sucesión $\diamondsuit'_1$ si y sólo si cumple que:

1. $F_\alpha \subseteq \alpha^\alpha$ y $|F_\alpha| \leqslant \omega$, para cada $\alpha < \omega_1$,
2. para cada función $f : \omega_1 \to \omega_1$ el conjunto $\{\alpha < \omega_1 : f \restriction \alpha \in F_\alpha\}$ es estacionario en ω_1.

Definición 2.14. Una familia de funciones $\{f_\alpha\}_{\alpha<\omega_1}$ se llama sucesión $\diamondsuit'_2$ si y sólo si cumple que:

1. $f_\alpha : \alpha \to \alpha$ para cada $\alpha < \omega_1$,
2. para cada $f : \omega_1 \to \omega_1$ existe $\alpha \geqslant \omega$ de tal forma que $f \restriction \alpha = f_\alpha$.

Definición 2.15. Una familia de funciones $\{F_\alpha\}_{\alpha<\omega_1}$ se llama sucesión $\diamondsuit'_3$ si y sólo si cumple que:

1. $F_\alpha \subseteq \alpha^\alpha$ y $|F_\alpha| \leqslant \omega$, para cada $\alpha < \omega_1$,
2. para cada función $f : \omega_1 \to \omega_1$ existe $\alpha \geqslant \omega$ de tal forma que $f \restriction \alpha \in F_\alpha$.

Consideremos los siguientes enunciados:

$\diamondsuit'$: Existe una sucesión $\diamondsuit'$.

$\diamondsuit'_1$: Existe una sucesión $\diamondsuit'_1$.

$\diamondsuit'_2$: Existe una sucesión $\diamondsuit'_2$.

$\diamondsuit'_3$: Existe una sucesión $\diamondsuit'_3$.

Vamos a probar las siguientes implicaciones: $\diamondsuit \to \diamondsuit'$, $\diamondsuit' \to \diamondsuit'_1$, $\diamondsuit' \to \diamondsuit'_2$, $\diamondsuit'_1 \to \diamondsuit'_3$, $\diamondsuit'_2 \to \diamondsuit'_3$ y $\diamondsuit'_3 \to \diamondsuit_3$. Y de este modo concluiremos que todos estos enunciados son equivalentes a $\diamondsuit$.

Lema 2.16. *Si $\diamondsuit$, entonces $\diamondsuit'$.*

Demostración. Sea $\{A_\alpha\}_{\alpha<\omega_1}$ una sucesión $\diamondsuit$ y sea $f : \omega_1 \times \omega_1 \to \omega_1$ una función biyectiva. Definimos las funciones $h_1 : \omega_1 \to \omega_1$ mediante $h_1(\beta) = \beta + 1$ y, $h_2 : \omega_1 \to \omega_1$ mediante $h_2(\beta) = \min\{\xi < \omega_1 : f^{-1}[\beta] \subseteq \xi \times \xi\}$. Veamos que esta última función está bien definida. Notemos que para cada $\gamma < \beta$, existen $\xi_\gamma, \eta_\gamma < \omega_1$ tales que $f^{-1}(\gamma) = (\xi_\gamma, \eta_\gamma)$; si hacemos

$$\delta = \max\{\sup\{\xi_\gamma : \gamma < \beta\}, \sup\{\eta_\gamma : \gamma < \beta\}\} + 1,$$

tenemos que $\delta < \omega_1$ porque β es numerable. Además, $f^{-1}[\beta] \subseteq \delta$ y esto prueba que $\{\xi < \omega_1 : f^{-1}[\beta] \subseteq \xi \times \xi\} \neq \emptyset$. Por el Lema 1.26, tenemos que C_0, el conjunto de ordinales que son cerrados bajo $\{f, h_1, h_2\}$, es un club en ω_1. Observemos que si $\alpha \in C_0$, entonces α es límite (por el Ejemplo 1.27) y $f[\alpha \times \alpha] \subseteq \alpha$. También, si $\beta < \alpha$, como α es cerrado bajo h_2, tenemos que $h_2(\beta) < \alpha$ y así $f^{-1}[\beta] \subseteq h_2(\beta) \times h_2(\beta) \subseteq \alpha \times \alpha$ lo que implica que $\bigcup_{\beta<\alpha} f^{-1}[\beta] \subseteq \alpha \times \alpha$. Por lo tanto, $f^{-1}[\alpha] \subseteq \alpha \times \alpha$. En otras palabras, $\alpha \in C_0$ implica que $f^{-1}[\alpha] = \alpha \times \alpha$.

Sea $\alpha \in C_0$. Si el conjunto $f^{-1}[A_\alpha] \subseteq \omega_1 \times \omega_1$ es función de α en α, entonces haremos $f_\alpha = f^{-1}[A_\alpha]$; en caso contrario, definimos $f_\alpha = \alpha \times \{0\}$, es decir, f_α será la función constante cero de α en α. Finalmente, $f_\alpha = \alpha \times \{0\}$ siempre que $\alpha \in \omega_1 \setminus C_0$.

Afirmamos que $\{f_\alpha\}_{\alpha<\omega_1}$ es una sucesión $\diamondsuit'$. Para demostrarlo, sea $g : \omega_1 \to \omega_1$ una función arbitraria y veamos que $S = \{\alpha < \omega_1 : g \restriction \alpha = f_\alpha\}$ es estacionario en ω_1. Sea C_1 un club en ω_1. Dado que g es un subconjunto de $\omega_1 \times \omega_1$, definimos $X = f[g]$. Observamos que C_2, el conjunto de todos los ordinales cerrados bajo $\{g\}$, es un club en ω_1 (Lema 1.26). Por la hipótesis, $E = \{\alpha < \omega_1 : X \cap \alpha = A_\alpha\}$ es estacionario en ω_1 y, por ende, existe $\alpha \in E \cap C_0 \cap C_1 \cap C_2$. Así, tenemos que $X \cap \alpha = A_\alpha$ y, por lo tanto,

$$f^{-1}[A_\alpha] = f^{-1}[X \cap \alpha] = f^{-1}[X] \cap f^{-1}[\alpha].$$

Como f es inyectiva, tenemos que $f^{-1}[X] = g$. Además, $f^{-1}[\alpha] = \alpha \times \alpha$. ya que $\alpha \in C_0$ y así, $f^{-1}[X] \cap f^{-1}[\alpha] = g \cap (\alpha \times \alpha)$. Probemos que $g \cap (\alpha \times \alpha) = g \restriction \alpha$. Sea $(\delta, \gamma) \in g \cap (\alpha \times \alpha)$, es decir, $\delta < \alpha$ y $\gamma = g(\delta)$ por lo cual tenemos que $(\delta, \gamma) \in g \restriction \alpha$. Si $(\delta, \gamma) \in g \restriction \alpha$, entonces

$\delta < \alpha$ y $\gamma = g(\delta)$; como $\alpha \in C_2$, tenemos que $\gamma = g(\delta) < \alpha$ y, por ende, $(\delta, g(\delta)) \in g \cap (\alpha \times \alpha)$, con lo cual obtenemos la igualdad. Por lo tanto, $g \restriction \alpha = f^{-1}[A_\alpha] \subseteq f^{-1}[\alpha] = \alpha \times \alpha$, es decir, $g \restriction \alpha$ es una función de α en α, con lo cual tenemos que $g \restriction \alpha = f_\alpha$. Y así, existe $\alpha \in C_1$ tal que $g \restriction \alpha = f_\alpha$, probando que S es estacionario en ω_1. $\square$

Lema 2.17. *Si* $\diamondsuit'$, *entonces* $\diamondsuit'_1$ *y* $\diamondsuit'_2$.

Demostración. Sea $\{f_\alpha\}_{\alpha<\omega_1}$ una sucesión $\diamondsuit'$. Análogamente a la prueba del Lema 2.8, $\{\{f_\alpha\} : \alpha < \omega_1\}$ es una sucesión $\diamondsuit'_1$. Una modificación mínima del argumento empleado en la demostración del Lema 2.7 prueba que $\{f_\alpha\}_{\alpha<\omega_1}$ es una sucesión $\diamondsuit'_2$. $\square$

Lema 2.18. *Si* $\diamondsuit'_1$, *entonces* $\diamondsuit'_3$.

Demostración. La prueba es análoga a la del Lema 2.7. $\square$

Lema 2.19. *Si* $\diamondsuit'_2$, *entonces* $\diamondsuit'_3$.

Demostración. La prueba es análoga a la del Lema 2.8. $\square$

Lema 2.20. *Si* $\diamondsuit'_3$, *entonces* $\diamondsuit_3$.

Demostración. Sea $\{G_\alpha\}_{\alpha<\omega_1}$ una sucesión $\diamondsuit'_3$. Para cada $\alpha < \omega_1$, definimos $F_\alpha = G_\alpha$, si $G_\alpha \neq \emptyset$, y $F_\alpha = \{\alpha \times \{0\}\}$ en caso contrario. Observemos que un argumento análogo al dado en la prueba del Lema 2.10 garantiza que $\{F_\alpha\}_{\alpha<\omega_1}$ es una sucesión $\diamondsuit'_3$.

Para cada $\alpha < \omega_1$, como $F_\alpha \neq \emptyset$, podemos escribir $F_\alpha = \{f_{\alpha,n} : n < \omega\}$ (esta enumeración podría tener repeticiones), y de esta manera definimos $A_\alpha = \{f^{-1}_{\alpha,n}\{0\} : n < \omega\}$. Afirmamos que $\{A_\alpha\}_{\alpha<\omega_1}$ es una sucesión $\diamondsuit_3$. En primer lugar, $A_\alpha \subseteq \mathscr{P}(\alpha)$ debido a que $f_{\alpha,n} : \alpha \to \alpha$ para cada $n < \omega$. En segundo lugar, $|A_\alpha| \leqslant \omega$. Por último, sea $X \subseteq \omega_1$. Definimos la función $f : \omega_1 \to \omega_1$ mediante:

$$f(\beta) = \begin{cases} 0 & \text{si } \beta \in X \\ 1 & \text{si } \beta \notin X \end{cases}$$

Como $\{F_\alpha\}_{\alpha<\omega_1}$ es una sucesión $\diamondsuit'_3$, existe $\alpha \geqslant \omega$ tal que $f \upharpoonright \alpha \in F_\alpha$, es decir, $f \upharpoonright \alpha = f_{\alpha,k}$, para algún $k < \omega$. Afirmamos que $(f \upharpoonright \alpha)^{-1}\{0\} = X \cap \alpha$. La condición $\beta \in (f \upharpoonright \alpha)^{-1}\{0\}$ es equivalente a que $(f \upharpoonright \alpha)(\beta) = 0$, lo cual pasa si y sólo si $\beta \in X \cap \alpha$. Así, tenemos que $f_{\alpha,k}^{-1}\{0\} = X \cap \alpha$ y, por lo tanto, $X \cap \alpha \in A_\alpha$. $\square$

Combinando todos estos resultados tenemos que son equivalentes los siguientes enunciados: $\diamondsuit$, $\diamondsuit'$, $\diamondsuit'_1$, $\diamondsuit'_2$ y $\diamondsuit'_3$.

2.2 Principio de Ostaszewski

El siguiente principio combinatorio fue ideado por A. J. Ostaszewski en [5] para responder a una pregunta relacionada con la normalidad perfecta (ver sección 2.5).

Definición 2.21. Una familia $\{S_\alpha\}_{\alpha\in\lim(\omega_1)}$ se llama sucesión $\clubsuit$ si y sólo si cumple que:

1. $S_\alpha \subseteq \alpha$, $to(S_\alpha) = \omega$, $\sup S_\alpha = \alpha$ para cada $\alpha \in \lim(\omega_1)$, y
2. para cada $X \subseteq \omega_1$ no acotado, existe $\alpha \in \lim(\omega_1)$ tal que $S_\alpha \subseteq X$.

Se le llama *principio de Ostaszewski* al enunciado: Existe una sucesión $\clubsuit$. A dicho enunciado lo denotaremos con $\clubsuit$ (trébol).

Por el Lema 1.22, tenemos que S_α es no acotado en α, para cada $\alpha < \omega_1$.

Ostaszewski probó que $\clubsuit$ es una consecuencia de $\diamondsuit$ (ver Lema 2.23) y, por otro lado, K. J. Devlin demostró que en presencia de **CH** estos principios combinatorios son equivalentes. En términos coloquiales, $\diamondsuit$ es lo mismo que $\clubsuit + \mathbf{CH}$. El resto de esta sección está dedicado a exponer la demostración de este hecho.

Lema 2.22. *Sea $\alpha \in \lim(\omega_1)$ y A un subconjunto no acotado de α. Entonces existe $S \subseteq A$ tal que $ot(S) = \omega$ y $\sup S = \alpha$.*

Demostración. Sean α un ordinal y $A \subseteq \alpha$ como en la hipótesis. Como $\mathrm{cf}(\alpha) = \omega$, por la definición, existe una función $g : \omega \to \alpha$ cofinal en α.

Vamos a definir una función $h : \omega \to A$ que satisfaga lo siguiente para cada $i < \omega$:

1. $g(i) < h(i) < h(i+1)$.

Como A es no acotado en α y $g(0) < \alpha$, definimos $h(0) = \min(A \setminus (g(0)+1))$; es decir, $h(0) \in A$ y $g(0)+1 \leqslant h(0)$, así tenemos que $g(0) < h(0)$. Ahora, si $h(n)$ ya fue definido de tal modo que (1) es cierta para todo $i < n$, entonces

$$h(n+1) = \min(A \setminus \max\{g(n+1)+1, h(n)+1\}).$$

Veamos que esta función satisface (1): por definición de $h(n+1)$, tenemos que $h(n+1) \in A$ y $\max\{g(n+1)+1, h(n)+1\} \leqslant h(n+1)$, de este modo

$$g(n) < h(n) < h(n)+1 \leqslant \max\{g(n+1)+1, h(n)+1\} \leqslant h(n+1).$$

Así obtenemos la desigualdad $g(n) < h(n) < h(n+1)$.

Por último vamos a probar que h es cofinal en α. Sea $\beta < \alpha$. Como g es cofinal en α, existe $k < \omega$ tal que $\beta < g(k)$. Como $g(k) < h(k)$ se sigue que $\beta < h(k)$. Esto prueba que h es cofinal en α.

Hagamos $S = h[\omega]$. Por la definición de h, tenemos que $S \subseteq A$. La función $h : \omega \to h[\omega]$ resulta ser un isomorfismo de orden. Como h es estrictamente creciente, para cualesquiera $n < m < \omega$ tenemos que $h(n) < h(m)$, es decir, h preserva el orden y en particular h es inyectiva; ahora, dados $\xi_1, \xi_2 \in h[\omega]$ tales que $\xi_1 < \xi_2$, existen $n, m \in \omega$ de tal forma que $h(n) = \xi_1$ y $h(m) = \xi_2$, si $m < n$ entonces $h(m) < h(n)$ lo cual contradice la elección de ξ_1 y ξ_2, luego, $n < m$; además h es suprayectiva ya que restringimos el codominio. Por lo tanto, $to(S) = \omega$. Además, como h es cofinal en α, tenemos que S es no acotado en α. $\square$

Como ya fue mencionado antes, el siguiente resultado es obra de Ostaszewski.

Lema 2.23. *Si $\diamondsuit$ es cierto, entonces $\clubsuit$ es cierto.*

Demostración. Sea $\{A_\alpha\}_{\alpha<\omega_1}$ una sucesión $\diamondsuit$. Para cada $\alpha \in \lim(\omega_1)$, si A_α es no acotado en α entonces existe $S_\alpha \subseteq \alpha$ de tal modo que $S_\alpha \subseteq A_\alpha$ (Lema 2.22). Para el caso en que A_α es acotado en α, observemos que α es no acotado en α, así que, por el Lema 2.22, existe $S_\alpha \subseteq \alpha$ de tal modo que $to(S_\alpha) = \omega$ y $\sup S_\alpha = \alpha$. Afirmamos que $\{S_\alpha\}_{\alpha \in \lim(\omega_1)}$ es una sucesión $\clubsuit$. Sea $X \subseteq \omega_1$ no acotado.

Definimos la función $f : \omega_1 \to \omega_1$ mediante $f(\beta) = \min(X \setminus (\beta + 1))$. Supongamos que α es cerrado bajo $\{f\}$. Si $\sup(X \cap \alpha) < \alpha$, como α es cerrado bajo $\{f\}$, tenemos que $f(\sup(X \cap \alpha)) < \alpha$, es decir, $\gamma = \min(X \setminus (\sup(X \cap \alpha) + 1)) < \alpha$. Así, $\gamma \in X$ y $\sup(X \cap \alpha) < \gamma$. Lo cual es una contradicción ya que $\gamma \in X \cap \alpha$ y debe pasar que $\gamma \leqslant \sup(X \cap \alpha)$. Esto prueba que la desigualdad $\sup(X \cap \alpha) < \alpha$ es falsa si α es cerrado bajo $\{f\}$. En otras palabras, si α es cerrado bajo $\{f\}$, tenemos que $\sup(X \cap \alpha) = \alpha$.

Denotemos por C al conjunto de ordinales límite que son cerrados bajo $\{f\}$, que por el Ejemplo 1.23 es un club en ω_1.

Por la hipótesis, $\{\alpha < \omega_1 : X \cap \alpha = A_\alpha\}$ es estacionario en ω_1. Y, por ende, existe $\alpha \in C$ tal que $X \cap \alpha = A_\alpha$. De esta forma, α es un ordinal límite con la propiedad de que $\alpha = \sup(X \cap \alpha) = \sup A_\alpha$, lo cual implica que A_α es no acotado en α. Por lo tanto, $S_\alpha \subseteq A_\alpha = X \cap \alpha \subseteq X$, de lo cual obtenemos que $S_\alpha \subseteq X$. $\square$

Para probar la implicación restante haremos uso del resultado siguiente.

Lema 2.24. *Sean $\{S_\alpha\}_{\alpha \in \lim(\omega_1)}$ una sucesión $\clubsuit$ y X un subconjunto no acotado de ω_1. Entonces $\{\alpha < \omega_1 : S_\alpha \subseteq X\}$ es estacionario en ω_1.*

Demostración. Sea C un club en ω_1. Demostraremos que existe $\alpha \in C$ tal que $S_\alpha \subseteq X$.

Definimos la función $f : \omega_1 \to X$ por recursión: $f(0) = \min X$; si $f(\beta)$ fue definido, entonces

$$f(\beta + 1) = \min\{\lambda \in X : \exists \alpha \in C(f(\beta) < \alpha < \lambda)\};$$

finalmente, si β es límite y $f \restriction \beta$ fue definida, $f(\beta) = \sup f[\beta]$. Argumentemos que $f(\beta + 1)$ está bien definido: en primer lugar, existe $\alpha \in C$ tal que $f(\beta) < \alpha$, ya que C es no acotado en ω_1. Como X es no acotado en ω_1, tenemos que existe $\lambda \in X$ de tal modo que $\alpha < \lambda$. Así probamos que $\{\xi \in X : \exists \gamma \in C(f(\beta) < \gamma < \xi)\} \neq \emptyset$.

Para demostrar que f es estrictamente creciente, probaremos, por inducción transfinita sobre δ, que para cualquier $\beta < \delta < \omega_1$ se cumple que $f(\beta) < f(\delta)$. Para el caso en que $\delta = 0$, el resultado se sigue por vacuidad. Supongamos ahora que para cada $\xi < \delta$, si $\beta < \xi$, entonces $f(\beta) < f(\xi)$. Si $\delta = \gamma + 1$ y $\beta < \delta$, entonces $\beta \leqslant \gamma < \delta$. Por hipótesis de inducción y nuestra definición de $f(\gamma + 1)$, tenemos que $f(\beta) \leqslant f(\gamma) < f(\gamma + 1) = f(\delta)$. En el caso en que δ es un ordinal límite y $\beta < \delta$, se deduce que $\beta + 1 < \delta$. Por hipótesis de inducción, $f(\beta) < f(\beta + 1) \leqslant \sup f[\delta] = f(\delta)$. Esto muestra que f es estrictamente creciente.

Definimos $Y = \{f(\beta + 1) : \beta < \omega_1\}$. Como f es estrictamente creciente y Y tiene cardinalidad ω_1, Y es no acotado en ω_1. Dado que $\{S_\alpha\}_{\alpha \in \lim(\omega_1)}$ es una sucesión $\clubsuit$, existe un ordinal límite α tal que $S_\alpha \subseteq Y \subseteq X$. De este modo tenemos que $S_\alpha \subseteq X$.

Probaremos que existe una sucesión, estrictamente creciente, de ordinales sucesores $\{\beta_n : n \in \omega\}$ de tal modo que $S_\alpha = \{f(\beta_n) : n \in \omega\}$. Como $to(S_\alpha) = \omega$, podemos numerar a $S_\alpha = \{\alpha_n : n < \omega\}$, de tal forma que $\{\alpha_n\}_{n<\omega}$ es una sucesión estrictamente creciente de ordinales. Ya que $S_\alpha \subseteq Y$, tenemos que para cada $n < \omega$ existe $\beta_n < \omega_1$ tal que $f(\beta_n) = \alpha_n$, donde β_n es sucesor. Observemos que la sucesión $\{\beta_n\}_{n<\omega}$ es estrictamente creciente, ya que si $n < m < \omega$ son tales que $\beta_m \leqslant \beta_n$, entonces $f(\beta_m) \leqslant f(\beta_n)$, lo que contradice que $\alpha_n < \alpha_m$.

Como consecuencia tenemos que $f(\beta_n) < f(\beta_n + 1) \leqslant f(\beta_{n+1})$, para cada $n < \omega$. Esta observación y la definición de $f(\beta_n + 1)$ garantizan la existencia de $\xi_n \in C$ tal que $f(\beta_n) < \xi_n < f(\beta_{n+1})$. Así, tenemos que

$$f(\beta_n) < \xi_n \leqslant \sup\{\xi_k : k < \omega\} \text{ y } \xi_n < f(\beta_{n+1}) \leqslant \sup\{f(\beta_k) : k < \omega\},$$

para cada $n < \omega$. Por lo tanto,

$$\sup\{\xi_k : k < \omega\} = \sup\{f(\beta_k) : k < \omega\} = \alpha.$$

Esto muestra que $C \cap \alpha$ es no acotado en α, porque $\{\xi_k : k < \omega\} \subseteq C \cap \alpha \subseteq \alpha$ junto con $\sup\{\xi_k : k < \omega\} = \alpha$, implican que $\sup(C \cap \alpha) = \alpha$ y, por el Lema 1.22, tenemos que $C \cap \alpha$ es no acotado en α. Como C es cerrado en ω_1, obtenemos que $\alpha \in C$. $\square$

De este modo, llegamos al resultado de Devlin:

Lema 2.25. *Si* **CH** *y* $\clubsuit$ *son ciertos, entonces* $\diamondsuit$ *es cierto.*

Demostración. El Lema 1.15, aplicado a $\kappa = \omega$, nos dice que $|[\omega_1]^{\leqslant\omega}| = \mathfrak{c}$. Por la hipótesis, $\mathfrak{c} = \omega_1$, así que podemos enumerar a $[\omega_1]^{\leqslant\omega}$ como $\{B_\alpha : \alpha < \omega_1\}$. Por el Corolario 1.34, existe una familia $\{E_\alpha\}_{\alpha<\omega_1}$ de subconjuntos estacionarios de ω_1 ajenos por pares.

Vamos a definir la familia $\{X_\beta\}_{\beta<\omega_1}$ de la siguiente forma: $X_\beta = B_\alpha$ si y sólo si $\beta \in E_\alpha$, para cualesquiera α,$\beta < \omega_1$. En otras palabras, $\{X_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ es un lista de todos los subconjuntos numerables de ω_1, en donde cada conjunto aparece listado ω_1 veces.

Sea $\{S_\alpha\}_{\alpha\in\lim(\omega_1)}$ una sucesión $\clubsuit$. Sea $C_0 = \lim(\omega_1)$. Para cada $\alpha < \omega_1$ definimos:

$$A_\alpha = \begin{cases} \bigcup\{X_\xi : \xi \in S_\alpha\} & \text{si } \alpha \in C_0 \text{ y } X_\xi \subseteq \alpha \text{ para cada } \xi \in S_\alpha \\ \emptyset & \text{en otro caso} \end{cases}$$

De esta forma, tenemos que $A_\alpha \subseteq \alpha$ para cada $\alpha < \omega_1$. Afirmamos que $\{A_\alpha\}_{\alpha<\omega_1}$ es una sucesión $\diamondsuit$. Sea $X \subseteq \omega_1$ y probaremos que $\{\alpha < \omega_1 : X \cap \alpha = A_\alpha\}$ es estacionario en ω_1. Sea C_1 un club en ω_1. Hagamos $C = C_0 \cap C_1$. Demostraremos que existe $\alpha \in C$ tal que $X \cap \alpha = A_\alpha$.

Definimos una función $f : \omega_1 \to \omega_1$ de manera recursiva: $f(0) = 0$; si $f(\beta)$ fue definido, entonces

$$f(\beta + 1) = \min\{\lambda < \omega_1 : [\exists\xi \in C(f(\beta) < \xi < \lambda)] \wedge [X \cap f(\beta) = X_\lambda]\};$$

finalmente, si $\beta \in C_0$ y $f \restriction \beta$ fue definida, $f(\beta) = \sup f[\beta]$. Probaremos que la función f está bien definida. Si $f(\beta)$ fue definido, como C es no acotado, existe $\xi \in C$ tal que $f(\beta) < \xi$. Observemos que $X \cap f(\beta)$ es numerable, ya que $X \cap f(\beta)$ está acotado por $f(\beta) < \omega_1$. Por lo tanto, $X \cap f(\beta) = B_\alpha$ para algún $\alpha < \omega_1$. Como E_α es estacionario, en particular es no acotado, por lo tanto, existe $\lambda \in E_\alpha$ tal que $\xi < \lambda$. Así, tenemos que $B_\alpha = X_\lambda = X \cap f(\beta)$.

Un argumento inductivo, como el del lema anterior, nos dice que f es estrictamente creciente.

Definimos $Y = \{f(\beta + 1) : \beta < \omega_1\}$. Notemos que Y es no acotado en ω_1, ya que $|Y| = \omega_1$. Como $\{S_\alpha\}_{\alpha\in\lim(\omega_1)}$ es una sucesión $\clubsuit$, existe $\alpha \in C_0$ tal que $S_\alpha \subseteq Y$.

Usando un argumento análogo al del lema anterior, tenemos que

$$S_\alpha = \{f(\beta_n) : n < \omega\},$$

donde $\{\beta_n\}_{n<\omega} \subseteq \omega_1$ es una sucesión estrictamente creciente de ordinales sucesores. Probemos que $C \cap \alpha$ es no acotado en α. Sea $\gamma < \alpha$. Como S_α es no acotado en α, existe un ordinal sucesor $\beta_n < \omega_1$ tal que $\gamma < f(\beta_n)$; por la definición de $f(\beta_n + 1)$, tenemos que

$$f(\beta_n) < \xi_n < f(\beta_n + 1) \leqslant f(\beta_{n+1}) < \alpha,$$

es decir, $\xi_n \in C \cap \alpha$.

Como C es cerrado, obtenemos que $\alpha \in C$. Solo resta probar que $X \cap \alpha = A_\alpha$.

La igualdad $\alpha = \sup S_\alpha = \bigcup_{n<\omega} f(\beta_n)$ implica que $X \cap \alpha = \bigcup_{n<\omega} X \cap f(\beta_n)$.

Dado $n < \omega$, existe $\gamma < \omega_1$ tal que $\beta_n = \gamma + 1$. De esta forma, $\gamma < \beta_n$ y así, $f(\gamma) < f(\beta_n) < \alpha$. Por ende,

$$X_{f(\beta_n)} = X_{f(\gamma+1)} = X \cap f(\gamma) \subseteq X \cap \alpha \subseteq \alpha.$$

Con lo cual, probamos que $A_\alpha = \bigcup_{n<\omega} X_{f(\beta_n)}$ y, por lo tanto, $A_\alpha \subseteq X \cap \alpha$.

Por último, si $n < \omega$, entonces $\beta_{n+1} = \gamma + 1$, para algún $\gamma < \omega_1$, y así, $\beta_n \leqslant \gamma$; de esta forma,

$$X \cap f(\beta_n) \subseteq X \cap f(\gamma) = X_{f(\gamma+1)} = X_{f(\beta_{n+1})}.$$

En el párrafo anterior demostramos que $X_{f(\beta_{n+1})} \subseteq A_\alpha$. Luego, $X \cap \alpha \subseteq A_\alpha$. $\square$

Combinando el Teorema 2.2, el Lema 2.23 y el Lema 2.25 se obtiene lo suguiente:

Lema 2.26. *Los siguientes enunciados son equivalentes.*

1. $\diamondsuit$ *es cierto.*

2. **CH** *y* $\clubsuit$ *son ciertos.*

2.3 Generalizaciones de $\diamondsuit$

Definición 2.27. Sean κ un cardinal infinito y E, un subconjunto estacionario de κ^+. Una familia $\{A_\alpha\}_{\alpha\in E}$ se llama sucesión $\diamondsuit(E)$ si y sólo si cumple que:

1. $|A_\alpha| \leqslant \kappa$ y $A_\alpha \subseteq \mathscr{P}(\alpha)$ para cada $\alpha \in E$, y

2. para todo $X \subseteq \kappa^+$, el conjunto $\{\alpha \in E : X \cap \alpha \in A_\alpha\}$ es estacionario en κ^+.

Dados κ un cardinal infinito y E, un subconjunto estacionario de κ^+, denotaremos con $\diamondsuit(E)$ al siguiente enunciado: Existe una sucesión $\diamondsuit(E)$.

Una modificación mínima a la prueba del Lema 2.11, muestra que esta versión de diamante es equivalente a la existencia de una sucesión $\{A_\alpha\}_{\alpha\in E}$ de tal modo que, para cada $\alpha \in E$, se satisface $A_\alpha \subseteq \alpha$ y, cumple que para cualquier $X \subseteq \kappa^+$, el conjunto $\{\beta \in E : X \cap \beta = A_\beta\}$ es estacionario en κ^+.

Como ω_1 es un subconjunto estacionario de ω_1, podemos ver que $\diamondsuit(\omega_1) = \diamondsuit_1$.

Jensen probó que, en $V = L$, $\diamondsuit(E)$ es válido para todo cardinal infinito κ y todo subconjunto estacionario E de κ^+.

Dado κ, un ordinal límite tal que $\mathrm{cf}(\kappa) > \omega$, y λ, un cardinal regular tal que $\lambda < \mathrm{cf}(\kappa)$, recordemos que $E^\kappa_\lambda := \{\alpha < \kappa : \mathrm{cf}(\alpha) = \lambda\}$ es estacionario en κ (Lema 1.31).

John Gregory probó en [3, Lemma 4.1] el siguiente resultado:

Teorema 2.28. *Si κ y λ son cardinales tales λ es regular, $\kappa^\lambda = \kappa$ y $2^\kappa = \kappa^+$ entonces $\diamondsuit(E^{\kappa^+}_\lambda)$ es válido.*

Demostración. Notemos que $\kappa^+ \neq \omega$ porque ω no es sucesor de algún cardinal; además, todo cardinal sucesor es regular. También, $\lambda < \kappa$, ya que si $\kappa \leqslant \lambda$, se tendría que $\kappa^\kappa \leqslant \kappa^\lambda = \kappa$; por otro lado, como $2 < \kappa$, tenemos que $2^\kappa \leqslant \kappa^\kappa$ y así, $2^\kappa \leqslant \kappa$, lo cual es una contradicción. De esta forma, $E^{\kappa^+}_\lambda$ es estacionario en κ^+ (Lema 1.31).

Por el Lema 1.15, κ^+ tiene 2^κ subconjuntos de cardinalidad a lo más κ. Luego, la hipótesis, $2^\kappa = \kappa^+$ implica que existe una enumeración fiel $\{X_\alpha : \alpha < \kappa^+\}$ de $[\kappa^+]^{\leqslant\kappa}$, es decir, $\alpha < \beta < \kappa^+$ implica que $X_\alpha \neq X_\beta$.

Para cada $\alpha < \kappa^+$ definimos $W_\alpha = \{\xi < \alpha : X_\xi \subseteq \alpha\}$. Ahora definiremos A_α de la siguiente forma: $Y \in A_\alpha$ si y sólo si existe $S \in [W_\alpha]^{\leqslant\lambda}$ tal que $Y = \bigcup\{X_\xi : \xi \in S\}$.

Veamos que $|A_\alpha| \leqslant \kappa$. Dado que $W_\alpha \subseteq \alpha$, deducimos que $|W_\alpha| \leqslant |\alpha|$. Como $\alpha < \kappa^+$, tenemos que $|\alpha| \leqslant \kappa$ y así, $|W_\alpha| \leqslant \kappa$. Definimos la función $f : [W_\alpha]^{\leqslant\lambda} \to A_\alpha$ mediante $f(S) := \bigcup\{X_\xi : \xi \in S\}$. Observemos que f es una función suprayectiva ya que, dado $Y \in A_\alpha$, por definición, $Y = \bigcup\{X_\xi : \xi \in S\} = f(S)$, para algún $S \in [W_\alpha]^{\leqslant\lambda}$. Por lo tanto $|A_\alpha| \leqslant |[W_\alpha]^{\leqslant\lambda}|$.

Recordemos que $(W_\alpha)^\lambda$ representa al conjunto de todas las funciones de λ en W_α. Definimos la función $g : (W_\alpha)^\lambda \to ([W_\alpha]^{\leqslant\lambda} \setminus \{\emptyset\})$ mediante $g(\varphi) := \varphi[\lambda]$. Afirmamos que g es suprayectiva. Sea S un subconjunto no vacío de W_α con $|S| \leqslant \lambda$. Fijemos una biyección $h : |S| \to S$ y definamos la función $\varphi : \lambda \to W_\alpha$ de la siguiente forma:

$$\varphi(\gamma) = \begin{cases} h(\gamma), & \gamma < |S| \\ h(0), & |S| \leqslant \gamma < \lambda \end{cases}$$

De esta forma, obtenemos que $g(\varphi) = \varphi[\lambda] = W_\alpha$, es decir, g es suprayectiva y, por lo tanto, $|[W_\alpha]^{\leqslant\lambda} \setminus \{\emptyset\}| \leqslant |(W_\alpha)^\lambda| \leqslant \kappa^\lambda$, que por hipótesis es igual a κ. En el caso en que $[W_\alpha]^{\leqslant\lambda}$ es infinito, tenemos que $|[W_\alpha]^{\leqslant\lambda}| = |[W_\alpha]^{\leqslant\lambda} \setminus \{\emptyset\}|$ y así, $|A_\alpha| \leqslant |[W_\alpha]^{\leqslant\lambda}| \leqslant \kappa$. Si $[W_\alpha]^{\leqslant\lambda}$ es finito, tenemos que $|A_\alpha| \leqslant |[W_\alpha]^{\leqslant\lambda}| \leqslant \kappa$, ya que κ es infinito.

Afirmamos que $\{A_\alpha\}_{\alpha \in E^{\kappa^+}_\lambda}$ es una sucesión $\diamondsuit(E^{\kappa^+}_\lambda)$. Para probarlo, sea $X \subseteq \kappa^+$ y veamos que $\{\alpha \in E^{\kappa^+}_\lambda : X \cap \alpha \in A_\alpha\}$ es estacionario en κ^+.

Sea C_0 un club en κ^+. Definamos la función $F : \kappa^+ \to \kappa^+$ de la siguiente forma: para cada $\eta < \kappa^+$ sea $F(\eta)$ el único ordinal que satisface $X \cap \eta = X_{F(\eta)}$. Observemos que F está bien definida ya que para cada $\eta < \kappa^+$, $X \cap \eta$ es un subconjunto de κ^+ con $|X \cap \eta| \leqslant |\eta| \leqslant \kappa$ y, por lo tanto, $X \cap \eta = X_\gamma$ para algún $\gamma < \kappa^+$; además la enumeración $\{X_\alpha : \alpha < \kappa^+\}$ es fiel. Denotemos con C_1 al conjunto de ordinales en κ^+ que son cerrados bajo F, el cual es club en κ^+ por el Lema 1.26. Notemos que si $\alpha \in C_1$, entonces para cada $\beta < \alpha$, tenemos que $F(\beta) < \alpha$. Como $\beta < \alpha$, deducimos que $X \cap \beta \subseteq \beta \subseteq \alpha$ y así, $X_{F(\beta)} \subseteq \alpha$, es decir, $F(\beta) \in W_\alpha$. En otras palabras, $F[\alpha] \subseteq W_\alpha$.

Hagamos $C = C_0 \cap C_1$. Como $E^{\kappa^+}_\lambda$ es estacionario en κ^+, existe $\alpha \in C \cap E^{\kappa^+}_\lambda$. Demostraremos que $X \cap \alpha \in A_\alpha$.

El que $\alpha \in E^{\kappa^+}_\lambda$ implica que $\mathrm{cf}(\alpha) = \lambda$. Por la definición de cofinalidad, existe una función $G : \lambda \to \alpha$, cofinal en α. Hagamos $Z = G[\lambda]$. Tenemos que $|Z| \leqslant \lambda$ y, como G es cofinal en α, obtenemos que Z es un subconjunto no acotado en α. Luego, por el Lema 1.22, $\alpha = \sup Z = \bigcup_{\beta \in Z} \beta$. Llamemos $S = F[Z] \subseteq W_\alpha$. Como $|Z| \leqslant \lambda$, entonces $|S| \leqslant \lambda$ y, por lo tanto, $S \in [W_\alpha]^{\leqslant\lambda}$. De esta manera obtenemos

$$X \cap \alpha = \bigcup_{\beta \in Z} (X \cap \beta) = \bigcup_{\beta \in Z} X_{F(\beta)} = \bigcup_{\xi \in S} X_\xi \in A_\alpha.$$

□

En el capítulo 3 de este trabajo, vamos a probar que $\diamondsuit$ es independiente de ZFC y esto hace que el resultado de Gregory sea sorprendente porque, a partir de dos condiciones aritméticas se puede deducir que una versión de diamante es cierta en ZFC.

Vamos a finalizar el capítulo mencionando dos aplicaciones del material visto. Una al álgebra y otra a la topología.

2.4 El problema de Whitehead

Primero abordaremos la aplicación algebraica. Para enunciar el problema necesitaremos de algunas definiciones.

Definición 2.29. Sean A y B dos grupos abelianos y $\pi : B \to A$ un epimorfismo. Diremos que π se escinde si y sólo si existe un homomorfismo $\rho : A \to B$ de tal modo que $\pi \circ \rho$ es la función identidad en A.

Definición 2.30. Un grupo abeliano A es llamado un W-grupo (grupo de Whitehead) si y sólo si satisface que todo epimorfismo $\pi : B \to A$, tal que el núcleo de π es isomorfo a $\mathbb{Z}$, se escinde.

Un resultado conocido de la Teoría de Grupos es el siguiente:

Lema 2.31. *Un grupo abeliano A es libre si y sólo si todo epimorfismo $\pi : B \to A$, donde B es un grupo abeliano, se escinde.*

Demostración. Supongamos que A es un grupo abeliano libre y sea B un grupo abeliano con la propiedad de que $\pi : B \to A$ es un epimorfismo. Llamemos X a la base de A. Como π es una función suprayectiva, tenemos que $\pi^{-1}\{x\} \neq \emptyset$, para cada $x \in X$. Fijemos $b_x \in B$ para cada $x \in X$, de tal modo que $\pi(b_x) = x$. Como X es una base para A, existe un homomorfismo $\rho : A \to B$ de tal modo que $\rho(x) = b_x$ para cada $x \in X$. Claramente $\pi \circ \rho$ es la función identidad en A y, por lo tanto, π se escinde.

Para probar el recíproco, hagamos $\kappa = |A|$ y fijemos una función biyectiva $g : A \to \kappa$. Consideremos el grupo abeliano libre F cuya base es κ, el cual existe por [6, II Teorema 2.1.1]. Como κ es un base para F, basta definir el homomorfismo $\pi : F \to A$ en κ mediante $\pi(\alpha) = g^{-1}(\alpha)$, para cada $\alpha \in \kappa$. Claramente π es suprayectiva así que, por hipótesis, existe un homomorfismo $\rho : A \to F$ de tal modo que $\pi \circ \rho$ es la función identidad en A. Observemos que ρ es inyectiva: sea $a \in A$ tal que $\rho(a) = 0$, entonces $\pi(\rho(a)) = \pi(0) = 0$ y, por ende, $a = 0$. Como ρ es inyectiva, A es isomorfo al subgrupo $\rho[A]$, el cual, de acuerdo a [8, X Teorema 10.18], es libre. □

Como corolario, obtenemos que todo grupo abeliano libre es un W-grupo.

En 1950, Henry Whitehead se preguntó si todo W-grupo es libre. A esta pregunta se le conoce como el Problema de Whitehead. Esto es, para decidir si un un grupo abeliano A es libre, ¿basta con verificar que todo epimorfismo de B en A, cuyo núcleo es isomorfo a $\mathbb{Z}$, se escinde, para cada B grupo abeliano?

En 1951, Karl Stein demostró que todo W-grupo numerable es libre. Sin embargo para grupos de cardinalidad no numerable sólo se han obtenido resultado parciales en ZFC.

En un resultado completamente inesperado, Saharon Shelah probó que el problema de Whitehead, restringido a grupos de cardinalidad ω_1, es independiente de los axiomas de ZFC. Shelah probó que si $\diamondsuit(E)$ es válido para cada E, subconjunto estacionario en ω_1, entonces todo W-grupo de cardinalidad ω_1 es libre. Por lo tanto, en $V = L$, todo W-grupo de cardinalidad ω_1 es libre.

El lector interesado en profundizar en el resultado de Shelah puede consultar [2, Teorema 4.1]

2.5 Espacios de Ostaszewski

Un antiguo problema de topología pregunta si todos los espacios que son numerablemente compactos y perfectamente normales (es decir, todos sus subespacios cerrados son de tipo G_δ) deben ser compactos. En relación a esta cuestión, A. J. Ostaszewski introdujo en [5] su principio combinatorio $\clubsuit$ y, a partir de éste, y suponiendo **CH**, logró construir una topología τ para el conjunto ω_1 de tal modo que el espacio $X = (\omega_1, \tau)$ responde negativamente a la pregunta, es decir, X es numerablemente compacto y perfectamente normal, pero no es compacto, de hecho, ni siquiera es Lindelöf. Además de lo anterior, X es primero numerable y hereditariamente separable.

Los detalles de la construcción de τ pueden ser consultados en la sección 5.3 de [7]

CAPÍTULO 3: $\diamondsuit$ ES INDEPENDIENTE DE ZFC

Tal y como el título lo indica, el propósito principal de este capítulo es demostrar que $\diamondsuit$ es independiente de ZFC. Como hemos mencionado anteriormente, $\diamondsuit$ es consecuencia del Axioma de Constructibilidad de Gödel, así que, en principio, esto da una prueba de que la consistencia de ZFC implica la consistencia de $ZFC + \diamondsuit$. Sin embargo, en este trabajo hemos optado por probar dicha implicación empleando la técnica inventada por el matemático estadounidense Paul Cohen en los sesentas: "Forcing".

3.1 Preliminares

El fin de esta sección es establecer la notación y los resultados fundamentales para las secciones siguientes. Conviene mencionar que la mayoría de los teoremas de esta sección se enuncian sin demostración. El lector interesado en las pruebas puede consultar el capítulo VII de [4].

Definición 3.1. Un orden parcial es un par $(\mathbb{P}, \leqslant)$ tal que $\mathbb{P} \neq \emptyset$ y $\leqslant$ es una relación sobre $\mathbb{P}$ que es transitiva y reflexiva.

Es importante mencionar que nuestra noción de orden parcial es lo que en otros textos es llamado pre-orden o casi-orden.

Los órdenes parciales que vamos a usar tienen elemento máximo y se denota por $1_{\mathbb{P}}$.

Convencionalmente los elementos de $\mathbb{P}$ son llamados condiciones y $p \leqslant q$ se lee "p extiende a q".

Las nociones siguientes son muy importantes para el desarrollo de este capítulo.

Definición 3.2. Sea $(\mathbb{P}, \leqslant)$ un orden parcial. $D \subseteq \mathbb{P}$ es denso en $\mathbb{P}$ si y sólo si para cada $p \in \mathbb{P}$, existe $q \in D$ tal que $q \leqslant p$.

Definición 3.3. Sea $(\mathbb{P}, \leqslant)$ un orden parcial. Si $p \in \mathbb{P}$, $D \subseteq \mathbb{P}$ es denso por debajo de p si y sólo si para cada $q \leqslant p$, existe $r \in D$ tal que $r \leqslant q$.

Definición 3.4. Sea $(\mathbb{P}, \leqslant)$ un orden parcial. $G \subseteq \mathbb{P}$ es un filtro en $\mathbb{P}$ si y sólo si:

1. Para cualesquiera $p, q \in G$ existe $r \in G$ tal que $r \leqslant p$ y $r \leqslant q$.

2. Para cada $p \in G$, si $p \leqslant q$ entonces $q \in G$.

Hay una clase de filtros que nos interesa particularmente:

Definición 3.5. Sean $(\mathbb{P}, \leqslant)$, un orden parcial y M un modelo transitivo numerable de ZFC, tales que $\mathbb{P}$ y su relación de orden $\leqslant$ son elementos de M. $G \subseteq \mathbb{P}$ es un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M si y sólo si G es un filtro en $\mathbb{P}$ y para cada $D \in M$, subconjunto denso en $\mathbb{P}$, se tiene que $G \cap D \neq \emptyset$.

Dado M, un modelo transitivo numerable de ZFC, el símbolo $\mathbb{P} \in M$ será una abreviatura de $\mathbb{P} \in M$ y $\leqslant \in M$, es decir, la relación de orden es un elemento de M.

Lo primero que vamos a hacer es definir $M[G]$ (la extensión genérica de M). Para ello vamos a definir los $\mathbb{P}$-nombres y sus valuaciones con respecto a un filtro. Informalmente, $M[G]$ será el conjunto de todos los conjuntos que pueden ser construidos a partir de G aplicando procedimientos conjuntistas definibles en M. Los elementos de $M[G]$ tendrán un "nombre" en M, que nos indica cómo fue construido a partir de G. Definimos por $\in$-recursión:

Definición 3.6. Dado $\mathbb{P}$, un orden parcial, $\dot{x}$ es un $\mathbb{P}$-nombre si y sólo si $\dot{x}$ es una relación y para cada $(\dot{y}, p) \in \dot{x}$, $\dot{y}$ es un $\mathbb{P}$-nombre y $p \in \mathbb{P}$.

Definición 3.7. Dado $\mathbb{P}$, un orden parcial, $V^{\mathbb{P}}$ es la clase de todos los $\mathbb{P}$-nombres.

Si M es un modelo transitivo numerable de ZFC y $\mathbb{P} \in M$, un orden parcial, $M^{\mathbb{P}} = V^{\mathbb{P}} \cap M$, es decir, $M^{\mathbb{P}} = \{\dot{x} \in M : (\dot{x} \text{ es un } \mathbb{P}\text{-nombre})^M\}$.

Definición 3.8. Sean $\mathbb{P}$, un orden parcial en M y G, un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M. Si $\dot{x} \in V^{\mathbb{P}}$, definimos por $\in$-recursión la valuación de $\dot{x}$ respecto a G como:

$$\mathrm{val}(\dot{x}, G) := \{\mathrm{val}(\dot{y}, G) : \exists p \in G((\dot{y}, p) \in \dot{x})\}.$$

En este trabajo vamos a usar la notación $\dot{x}_G$ en lugar de $\mathrm{val}(\dot{x}, G)$.

Definición 3.9. Si M es un modelo transitivo numerable de ZFC y $\mathbb{P} \in M$, un orden parcial. Definimos, por $\in$-recursión, el nombre canónico de $x \in M$ como:

$$\check{x} := \{(\check{y}, 1_{\mathbb{P}}) : y \in x\}.$$

La valuación de $\check{x}$ con respecto a cualquier filtro genérico G siempre es x. De este modo, $M \subseteq M[G]$.

Definición 3.10. Sea $\mathbb{P}$ un orden parcial. Definimos $\Gamma := \{(\check{p}, p) : p \in \mathbb{P}\}$.

Notemos que si G es un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M, entonces $\Gamma_G = G$.

En esta sección vamos a asumir que el lector está familiarizado con el lenguaje de las fórmulas lógicas.

En este trabajo, si $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ es un fórmula con todas sus variables libres exhibidas y M es un conjunto, entonces $\phi^M(x_1, \ldots, x_n)$ denotará la relativización de ϕ a M (cuando esta relativización tenga sentido) y, alternativamente, emplearemos la expresión $M \models \phi$ para denotar a ϕ^M.

Definición 3.11. Sean M, un modelo transitivo numerable de ZFC y $\mathbb{P}$, un orden parcial en M. Si $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ es una fórmula con todas sus variables libres exhibidas y $\dot{a}_1, \ldots, \dot{a}_n \in M^{\mathbb{P}}$ diremos que "p fuerza a $\phi(\dot{a}_1, \ldots, \dot{a}_n)$" (y lo representamos con $p \Vdash \phi(\dot{a}_1, \ldots, \dot{a}_n)$) si y sólo si para cada G, filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M tal que $p \in G$ se tiene que $M[G] \models \phi((\dot{a}_1)_G, \ldots, (\dot{a}_2)_G)$.

Nuestro siguiente resultado es un ejemplo de la definición anterior.

Lema 3.12. *Sean M, un modelo transitivo numerable de ZFC y $\mathbb{P}$, un orden parcial en M. Para cada $p \in \mathbb{P}$ se tiene que $p \Vdash \check{p} \in \Gamma$.*

Demostración. Sea G, un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M de tal forma que $p \in G$. Como $(\check{p})_G = p$ y $G = \Gamma_G$, se sigue $(\check{p})_G \in (\Gamma)_G$ y por lo tanto $p \Vdash \check{p} \in \Gamma$. $\square$

Los siguientes resultados son de suma importancia para nuestro trabajo. Las demostraciones de los Lemas 3.13 y 3.14 se encuentran en [4, VII Lema 2.3] y [4, VII Lema 2.20], respectivamente.

Lema 3.13. *Sean M, un modelo transitivo numerable de ZFC, $\mathbb{P}$, un orden parcial en M y $p \in \mathbb{P}$. Entonces existe un filtro G, que es $\mathbb{P}$-genérico sobre M tal que $p \in G$.*

Lema 3.14. *Sean M, un modelo transitivo numerable de ZFC, $\mathbb{P}$, un orden parcial en M, $D \subseteq \mathbb{P}$ y G, un filtro $\mathbb{P}$-genérico. Si $p \in G$ y $D \in M$ es denso por debajo de p, entonces $D \cap G \neq \emptyset$.*

La demostración del siguiente teorema puede ser consultada en [4, VII Teorema 3.6].

Teorema 3.15. *Sean M, un modelo transitivo numerable de ZFC y $\mathbb{P}$, un orden parcial en M. Si $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ es una fórmula con todas sus variables libres exhibidas y $\dot{a}_1, \ldots, \dot{a}_n \in M^{\mathbb{P}}$, entonces para todo filtro G, $\mathbb{P}$-genérico sobre M, se satisface que*

$$\phi^{M[G]}((\dot{a}_1)_G, \ldots, (\dot{a}_n)_G) \leftrightarrow \exists p \in G(p \Vdash \phi(\dot{a}_1, \ldots, \dot{a}_n)).$$

Este teorema nos dice que "algo" es cierto en la extensión genérica si y solamente si es forzado por alguna condición del filtro.

El siguiente lema será utilizado varias veces durante el capítulo, así que será conveniente recordarlo.

Lema 3.16. *Sean M, un modelo transitivo numerable de ZFC, $a \in M$ y $\mathbb{P}$, un orden parcial en M. Sean $\phi(x_1, \ldots, x_n)$, una fórmula con todas sus variables libres exhibidas, $\dot{b}_1, \ldots, \dot{b}_n \in M^{\mathbb{P}}$ y $p \in \mathbb{P}$. Si $p \Vdash \exists x(x \in \check{a} \wedge \phi(x, \dot{b}_1, \ldots, \dot{b}_n))$, entonces existen $q \leqslant p$ y $c \in a$ de tal modo que $q \Vdash \phi(\check{c}, \dot{b}_1, \ldots, \dot{b}_n)$.*

Demostración. Si $p \Vdash \exists x(x \in \check{a} \wedge \phi(x, \dot{b}_1, \ldots, \dot{b}_n))$, entonces existen $q \leqslant p$ y $\tau \in \mathrm{dom}(\check{a})$ tales que $q \Vdash \phi(\tau, \dot{b}_1, \ldots, \dot{b}_n)$ (este resultado puede ser consultado en [4, VII Corolario 3.7 (d)]). Como $\mathrm{dom}(\check{a}) = \{\check{c} : c \in a\}$, se deduce que $\tau = \check{c}$, para algún $c \in a$ y por lo tanto $q \Vdash \phi(\check{c}, \dot{b}_1, \ldots, \dot{b}_n)$. □

3.2 $ZFC + \neg\diamondsuit$ es consistente

Iniciaremos esta sección con una lista de conceptos necesarios para comprender qué significa que un orden parcial tenga la condición de la cadena contable.

Definición 3.17. Sea $(\mathbb{P}, \leqslant)$ un orden parcial. Dados $p, q \in \mathbb{P}$ diremos que p y q son incompatibles ($p \perp q$) si y sólo si no existe $r \in \mathbb{P}$ tal que $r \leqslant p$ y $r \leqslant q$.

Definición 3.18. Una anticadena en $\mathbb{P}$ es un subconjunto $A \subseteq \mathbb{P}$ tal que para cualesquiera $p, q \in A$, si $p \neq q$ entonces $p \perp q$.

Definición 3.19. Un orden parcial $(\mathbb{P}, \leqslant)$ tiene la condición de la cadena numerable (c.c.c) si y sólo si toda anticadena en $\mathbb{P}$ es numerable.

En esta sección definiremos un orden parcial y comprobaremos que éste satisface la condición de la cadena numerable, pero para esto último serán necesarios algunos resultados técnicos, como el siguiente.

Lema 3.20. *Sean A y B dos conjuntos tales que $|A| = \omega_1$ y $|B| \leqslant \omega$. Si $f : A \to B$ es una función, entonces existe $b \in B$ de tal modo que $|f^{-1}\{b\}| = \omega_1$.*

Demostración. Supongamos lo contrario, es decir, $|f^{-1}\{b\}| \leqslant \omega$ para cada $b \in B$. Observemos que $|\bigcup_{b \in B} f^{-1}\{b\}| \leqslant \omega$ ya que es unión numerable de conjuntos numerables. De esta forma, obtenemos que $|f^{-1}[B]| \leqslant \omega$. Así, tenemos que $|A| = |f^{-1}[B]| \leqslant \omega$, lo que contradice la no numerabilidad de A. $\square$

Otro de los resultados técnicos que necesitaremos es el "Lema del Δ-sistema", también conocido como el Lema de Šanin, pues fue el matemático ruso Šanin quien lo demostró en un artículo publicado en 1948.

Definición 3.21. Una familia $\mathscr{A}$ de conjuntos es llamada un Δ-sistema si y sólo si existe un conjunto r tal que para cualesquiera $a, b \in \mathscr{A}$ con $a \neq b$, se tiene que $a \cap b = r$. A r se le llama la raíz del Δ-sistema.

Lema 3.22. *Sea $\mathscr{A} = \{a_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ una familia de conjuntos finitos. Entonces existe $Y \subseteq \omega_1$ tal que $|Y| = \omega_1$ y $\{a_\alpha : \alpha \in Y\}$ es un Δ-sistema.*

Demostración. Si $|\mathscr{A}| \leqslant \omega$, definimos la función $f : \omega_1 \to \mathscr{A}$ como $f(\alpha) = a_\alpha$. Por el Lema 3.20, existe $b \in \mathscr{A}$ tal que $|f^{-1}\{b\}| = \omega_1$. Hagamos $Y := f^{-1}\{b\}$. Por definición, $\{a_\alpha : \alpha \in Y\} = \{b\}$, el cual es un Δ-sistema por vacuidad.

Ahora consideremos el caso en que $|\mathscr{A}| = \omega_1$:

Primero probaremos que si todos los elementos de $\mathscr{A}$ tienen la misma cardinalidad, la conclusión del lema es cierta. Supongamos que $|a| = n$ para cada $a \in \mathscr{A}$, donde $n \in \omega \setminus \{0\}$. Usaremos inducción sobre n para probar el lema. Si $n = 1$, hagamos $Y = \omega_1$ y demostraremos que $\{a_\alpha : \alpha \in Y\}$ es un Δ-sistema con raíz $\emptyset$. En efecto, dados $\alpha, \beta \in Y$ tales que $a_\alpha \neq a_\beta$ se sigue que $|a_\alpha| = |a_\beta| = 1$ y, por lo tanto, $a_\alpha \cap a_\beta = \emptyset$.

Enunciemos la hipótesis inductiva: supongamos que $k \in \omega \setminus \{0\}$ es tal que para toda familia $\{c_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ formada por ω_1 conjuntos de cardinalidad k, existe un $Y \subseteq \omega_1$ tal que $|Y| = \omega_1$ y $\{c_\alpha : \alpha \in Y\}$ es un Δ-sistema.

Ahora, sea $\mathscr{A} = \{a_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ una familia de ω_1 conjuntos de cardinalidad $k + 1$. Consideremos dos casos:

Caso 1. Existe $Z \subseteq \omega_1$ tal que $|Z| = \omega_1$ y $\bigcap_{\alpha \in Z} a_\alpha \neq \emptyset$. Fijemos $x \in \bigcap_{\alpha \in Z} a_\alpha$ y hagamos $B = \{a_\alpha \setminus \{x\} : \alpha \in Z\}$. Veamos que $|B| = \omega_1$. Sean $\alpha, \beta \in Z$ tales que $a_\alpha \neq a_\beta$; sin perder generalidad, supongamos que existe $z \in a_\alpha$ de tal forma que $z \notin a_\beta$. Luego, $z \neq x$ ya que $x \in a_\beta$. Así, obtenemos que $z \in a_\alpha \setminus \{x\}$ y $z \notin a_\beta \setminus \{x\}$. Por lo tanto, $|B| = |Z| = \omega_1$.

Por definición, cada elemento de B tiene cardinalidad k así que podemos usar la hipótesis de inducción, es decir, existe $W \subseteq Z$ tal que $|W| = \omega_1$ y $\{a_\alpha \setminus \{x\} : \alpha \in W\}$ es un Δ-sistema con raíz r. Tomemos $\mathscr{B} = \{a_\alpha : \alpha \in W\}$. Afirmamos que $\mathscr{B}$ es un Δ-sistema con raíz $r \cup \{x\}$. Si $\alpha, \beta \in W$ son tales que $a_\alpha \neq a_\beta$ entonces:

$$\begin{aligned} a_\alpha \cap a_\beta &= ((a_\alpha \setminus \{x\}) \cup \{x\}) \cap ((a_\beta \setminus \{x\}) \cup \{x\}) \\ &= ((a_\alpha \setminus \{x\}) \cap (a_\beta \setminus \{x\})) \cup ((a_\alpha \setminus \{x\}) \cap \{x\}) \cup ((a_\beta \setminus \{x\} \cap \{x\}) \cup \{x\} \\ &= ((a_\alpha \setminus \{x\}) \cap (a_\beta \setminus \{x\})) \cup \{x\}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $a_\alpha \cap a_\beta = r \cup \{x\}$. De esta forma, tenemos el resultado para este caso.

Caso 2. El Caso 1 falla. En otras palabras, todo subconjunto Z, de ω_1 tal que $\bigcap_{\alpha \in Z} a_\alpha \neq \emptyset$, es numerable. Denotemos por $\mathscr{F}$ a la colección de todos los subconjuntos W de ω_1 tales que $\{a_\alpha : \alpha \in W\}$ es ajeno por pares. La colección $\mathscr{F}$ estará ordenada por la contención. Notemos que $\mathscr{F} \neq \emptyset$ ya que $\emptyset \in \mathscr{F}$. Demostraremos que toda $\mathscr{F}$-cadena está acotada superiormente en $\mathscr{F}$ para poder usar el Lema de Zorn. Sea C una $\mathscr{F}$-cadena y veamos que $\bigcup C \in \mathscr{F}$. Sean $\alpha, \beta \in \bigcup C$ tales que $\alpha \neq \beta$. Existen $M, N \in C$ de tal forma que $\alpha \in M$ y $\beta \in N$. Como C es una cadena, deducimos que $\alpha, \beta \in M$ o $\alpha, \beta \in N$ y, por ende, $a_\alpha \cap a_\beta = \emptyset$. Luego, $\bigcup C \in \mathscr{F}$ y así C posee una cota superior en $\mathscr{F}$. Por el lema de Zorn, obtenemos que $\mathscr{F}$ tiene un elemento maximal, digamos Y. En particular, $\{a_\alpha : \alpha \in Y\}$ es un Δ-sistema con raíz $\emptyset$, pues $\{a_\alpha : \alpha \in Y\}$ es ajeno por pares.

Sólo resta probar que $|Y| = \omega_1$. Para ello, supongamos que $|Y| \leqslant \omega$. Hagamos $S = \bigcup_{\alpha \in Y} a_\alpha$ y observemos que $|S| \leqslant \omega$, ya que es unión numerable de conjuntos finitos. Para cada $x \in S$ definimos $B_x = \{\alpha < \omega_1 : x \in a_\alpha\}$. Como estamos suponiendo el caso 2, se tiene que $|B_x| \leqslant \omega$ para cada $x \in S$. Por lo tanto, $|\bigcup_{x \in S} B_x| \leqslant \omega$ y así, $\omega_1 \setminus \bigcup_{x \in S} B_x \neq \emptyset$. Fijemos $\beta \in \omega_1 \setminus \bigcup_{x \in S} B_x$; entonces $\beta \notin B_x$ para cada $x \in S$, es decir, $x \notin a_\beta$ para cada $x \in S$ y, de esta forma obtenemos que $a_\beta \cap S = \emptyset$. Afirmamos que $Y \cup \{\beta\} \in \mathscr{F}$. Como $\{a_\alpha : \alpha \in Y\}$ es ajeno por pares, basta ver que a_α es ajeno con a_β para cada $\alpha \in Y$. En efecto, si $\alpha \in Y$ entonces $a_\alpha \subseteq S$ y, por ende, $a_\alpha \cap a_\beta = \emptyset$. Hemos encontrado un elemento de $\mathscr{F}$ que contiene propiamente a Y, lo cual es una contradicción al hecho de que Y es maximal. Por lo tanto, $|Y| = \omega_1$. Esto concluye el caso 2.

Ahora consideremos el caso en que los elementos de $\mathscr{A} = \{a_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$ no necesariamente tienen la misma cardinalidad. Definimos la función $g : \omega_1 \to \omega$ mediante $g(\alpha) = |a_\alpha|$. Por el Lema 3.20, existe $n \in \omega$ para el cual $g^{-1}\{n\}$ es un subconjunto de ω_1 de cardinalidad ω_1. Por lo probado anteriormente, existe $Y \subseteq g^{-1}\{n\}$ tal que $|Y| = \omega_1$ y $\{a_\alpha : \alpha \in Y\}$ es un Δ-sistema. $\square$

Nuestro plan para probar la consistencia de $ZFC + \neg\diamondsuit$ es definir un orden parcial cuya extensión genérica modele $\neg\diamondsuit$.

Definición 3.23. Sean I y J un par de conjuntos.

1. Denotaremos por $\mathrm{Fn}(I, J)$ a la colección de todas las funciones finitas $p \subseteq I \times J$.

2. Dadas p, q diremos que $p \leqslant q$ si y sólo si $q \subseteq p$

El orden parcial $\mathrm{Fn}(I, J)$ siempre tendrá esta relación de orden y su elemento máximo es $\emptyset$.

Por razones que se verán después, necesitamos que nuestro orden parcial tenga la condición de la cadena numerable. Por este motivo, necesitamos saber cuándo dos condiciones en $\mathrm{Fn}(I, J)$ son compatibles:

Lema 3.24. *Sean I y J un par de conjuntos. Entonces $p, q \in \mathrm{Fn}(I, J)$ son compatibles si y sólo si $p \cup q$ es una función.*

Demostración. Sean $p, q \in \mathrm{Fn}(I, J)$ tales que p y q son compatibles. Entonces existe $r \in \mathrm{Fn}(I, J,)$ tal que $r \leqslant p$ y $r \leqslant q$, es decir, $p \subseteq r$ y $q \subseteq r$ y así $p \cup q \subseteq r$. Luego, $p \cup q$ es una función.

Sean $p, q \in \mathrm{Fn}(I, J)$ tales que $p \cup q$ es una función. Afirmamos que $p \cup q$ es una extensión común de p y q, porque $p \subseteq p \cup q$ y $q \subseteq p \cup q$ y, por la definición del orden en $\mathrm{Fn}(I, J)$, tenemos que $p \cup q \leqslant p, q$. $\square$

Lema 3.25. *Si J es un conjunto numerable e I es cualquier conjunto, entonces $\mathrm{Fn}(I, J)$ tiene la condición de la cadena numerable.*

Demostración. Sea $X := \{p_\alpha : \alpha < \omega_1\} \subseteq \mathrm{Fn}(I, J)$ tal que para cualesquiera $\alpha, \beta \in \omega_1$, con $\alpha \neq \beta$, se tiene que $p_\alpha \neq p_\beta$. Probaremos que X no puede ser anticadena. Hagamos $A = \{\mathrm{dom}(p_\alpha) : \alpha < \omega_1\}$. Por el Lema 3.22, existe $Y \subseteq \omega_1$ tal que $|Y| = \omega_1$ y $\mathscr{A} := \{\mathrm{dom}(p_\alpha) : \alpha \in Y\}$ es un Δ-sistema con raíz r. Veamos que $|\mathscr{A}| = \omega_1$. Supongamos, buscando una contradicción, que $|\mathscr{A}| \leqslant \omega$. Definimos la función $f : Y \to \mathscr{A}$ mediante $f(\alpha) = \mathrm{dom}(p_\alpha)$. Por el Lema 3.20, existe $a \in \mathscr{A}$ tal que $|f^{-1}\{a\}| = \omega_1$. Definamos ahora la función $g : f^{-1}\{a\} \to J^a$ (las funciones de a en J) como $g(\alpha) = p_\alpha$. Notemos que $|J^a| \leqslant \omega$, ya que $|J| \leqslant \omega$. Nuevamente, aplicando el Lema 3.20, existe $t \in J^a$ tal que $|g^{-1}\{t\}| = \omega_1$. De esta forma, existen $\alpha, \beta \in g^{-1}\{t\}$ con $\alpha \neq \beta$ tales que $p_\alpha = p_\beta = t$, contradiciendo la elección de X. Por lo tanto, $|\mathscr{A}| = \omega_1$.

Como $|J| \leqslant \omega$, tenemos que $|J^r| \leqslant \omega$. Para cada $a \in \mathscr{A}$ existe $\alpha_a \in Y$ tal que $\mathrm{dom}(p_{\alpha_a}) = a$. Hagamos $Z = \{\alpha_a : a \in \mathscr{A}\}$ y definamos la función $h : Z \to J^r$ como $h(\alpha) = p_\alpha \restriction r$. Por el Lema 3.20, existe $t \in J^r$ tal que $|h^{-1}\{t\}| = \omega_1$, y así, existen $\alpha, \beta \in Z$ tales que $\alpha \neq \beta$ y $p_\alpha \restriction r = p_\beta \restriction r$. Afirmamos que $p_\alpha \cup p_\beta$ es una función. Para ello, sea $x \in \mathrm{dom}(p_\alpha) \cap \mathrm{dom}(p_\beta) = r$; como $p_\alpha \restriction r = p_\beta \restriction r$, tenemos que $p_\alpha(x) = p_\beta(x)$ y, por ende,

$p_\alpha \cup p_\beta$ es función. Por el Lema 3.24, p_α y p_β son compatibles, es decir, X no puede ser una anticadena. $\square$

Probemos que dados M, un modelo transitivo numerable de ZFC, y un par de conjuntos $I, J \in M$, entonces $\mathrm{Fn}(I, J) \in M$. En primer lugar, por el Teorema [4, IV Teorema 3.11] si $I, J \in M$, también $I \times J \in M$. Además, "p es una función" y "p es finito" son abreviaturas de fórmulas absolutas para modelos transitivos, por los Teoremas [4, IV Theorem 3.11] y [4, IV Theorem 5.3], respectivamente. Por lo tanto, $\mathrm{Fn}(I, J) = \mathrm{Fn}(I, J)^M \in M$.

Lema 3.26. *Supongamos que M es un modelo transitivo numerable de ZFC y sean $I, J \in M$ tales que I es infinito y $J \neq \emptyset$. Si G es un filtro $\mathrm{Fn}(I, J)$-genérico sobre M, entonces $\bigcup G$ es una función de I en J.*

Demostración. Hagamos $g = \bigcup G$ y observemos que si $x \in \mathrm{dom}(g)$, existe $p \in G$ tal que $x \in \mathrm{dom}(p) \subseteq I$ y así, $x \in I$; por lo tanto, $g \subseteq I \times J$. Para probar que g es una función, sean $(i, j), (i, j') \in g$ y veamos que $j = j'$. Existen $p, q \in G$ tales que $(i, j) \in p$ y $(i, j') \in q$. Como G es un filtro, existe $r \in G$ tal que $r \leqslant p$ y $r \leqslant q$, es decir, $p \subseteq r$ y $q \subseteq r$. De esta forma, $(i, j), (i, j') \in r$, por lo cual $j = j'$, ya que r es una función.

Para terminar, probaremos que $\mathrm{dom}(g) = I$. Sea $x \in I$. Como $I \in M$ y M es transitivo, tenemos que $I \subseteq M$ y, por lo tanto, $x \in M$. Definimos $D_x = \{p \in \mathrm{Fn}(I, J) : x \in \mathrm{dom}(p)\}$. Notemos que $D_x \in M$ ya que las variables libres de la fórmula que define a D_x, a saber $\mathrm{Fn}(I, J)$ y x, son elementos de M. Afirmamos que D_x es denso en $\mathrm{Fn}(I, J)$. Sea $p \in \mathrm{Fn}(I, J)$. Si $x \in \mathrm{dom}(p)$, entonces $p \leqslant p$ y $p \in D_x$. Si $x \notin \mathrm{dom}(p)$, como $J \neq \emptyset$, existe $y \in J$. Por lo tanto, $q = p \cup \{(x, y)\}$ es un elemento de D_x con $q \leqslant p$.

Por hipótesis, G es un filtro $\mathrm{Fn}(I, J)$-genérico, así que $G \cap D_x \neq \emptyset$, es decir, existe $p \in G \cap D_x$. Como $p \in G$, tenemos que $p \subseteq g$, además, $x \in \mathrm{dom}(p)$ porque $p \in D_x$. En conclusión, tenemos que $x \in \mathrm{dom}(p) \subseteq \mathrm{dom}(g)$. Por lo tanto, $\mathrm{dom}(g) = I$. $\square$

Un punto importante en la prueba del teorema central de esta sección es determinar "el tamaño de $\mathfrak{c}$" en la extensión genérica.

Lema 3.27. *Sea M, un modelo transitivo numerable de ZFC. Sea $\kappa > 0$ un elemento de M tal que (κ es un cardinal)^M y G un filtro $\mathrm{Fn}(\kappa \times \omega, 2)$-genérico. Entonces $M[G] \models |\kappa| \leqslant \mathfrak{c}$.*

Demostración. Hagamos $g = \bigcup G$, la cual es función de $\kappa \times \omega$ en 2, por el Lema 3.26. Para cada $\alpha < \kappa$, definimos $g_\alpha : \omega \to 2$ como $g_\alpha(n) = g(\alpha, n)$ y así, $\{g_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq 2^\omega$. Demostraremos que $g_\alpha \neq g_\beta$ siempre que $\alpha \neq \beta$. Para $\alpha < \beta < \kappa$, sea:

$$D_{\alpha,\beta} := \{p \in \mathbb{P} : \exists n \in \omega((\alpha, n), (\beta, n) \in \mathrm{dom}(p) \wedge p(\alpha, n) \neq p(\beta, n))\}.$$

Afirmamos que $D_{\alpha,\beta} \in M$ y $D_{\alpha,\beta}$ es denso en $\mathbb{P}$. Observemos que las variables libres de la fórmula que define a $D_{\alpha,\beta}$ son elementos de M. En efecto, $\mathbb{P}, \omega \in M$ y $\alpha, \beta \in M$ ya que $\alpha, \beta < \kappa \in M$ y M es transitivo. Para probar que $D_{\alpha,\beta}$ es denso en $\mathbb{P}$, sea $p \in \mathbb{P}$. Definamos

$$m = \max\{i < \omega : \exists \gamma < \kappa((\gamma, i) \in \mathrm{dom}(p)\} + 1.$$

Notemos que $(\alpha, m), (\beta, m) \notin \mathrm{dom}(p)$. Hagamos $q := p \cup \{((\alpha, m), 0), ((\beta, m), 1)\}$ para obtener un elemento de $D_{\alpha,\beta}$ con $q \leqslant p$. Por lo tanto $D_{\alpha.\beta}$ es denso en $\mathbb{P}$.

Como G es un filto $\mathbb{P}$-genérico, tenemos que $G \cap D_{\alpha,\beta} \neq \emptyset$. Fijemos $p \in G \cap D_{\alpha,\beta}$. Dado que $p \in G$, se tiene que $p \subseteq g$. También, $p \in D_{\alpha,\beta}$, con lo cual existe $n \in \omega$ tal que $p(\alpha, n) \neq p(\beta, n)$ y así, $g(\alpha, n) \neq g(\beta, n)$, es decir, $g_\alpha(n) \neq g_\beta(n)$.

Hemos probado que la función $f : \kappa \to 2^\omega$ definida por $f(\alpha) := g_\alpha$ es inyectiva y, por ende, $|\kappa| \leqslant |2^\omega|$. □

Como se puede observar en el resultado anterior, hemos usado $|\kappa|$ en la conclusión del lema, en lugar de poner simplemente κ. Esto luce extraño a primera vista porque κ es un cardinal en M. La explicación es que no tenemos ninguna garantía de que κ siga siendo un cardinal en $M[G]$. En aras de proporcionar dicha garantía se requiere del siguiente resultado preliminar.

Lema 3.28. *Sea M un modelo transitivo numerable de ZFC. Sea $\mathbb{P} \in M$ un orden parcial tal que ($\mathbb{P}$ tiene la condición de la cadena numerable)^M y sean $A, B \in M$. Sea G un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M y sea $f \in M[G]$ una función de A en B. Entonces existe una función $F : A \to \mathscr{P}(B)$ tal que $F \in M$ y para cada $a \in A$ se tiene que $f(a) \in F(a)$ y $M \models |F(a)| \leqslant \omega$.*

Demostración. Dado que $f \in M[G]$, existe $\dot{f} \in M^{\mathbb{P}}$ tal que $\dot{f}_G = f$. Así, por el Teorema

3.15, existe $p \in G$ de tal forma que $p \Vdash \dot{f} : \check{A} \to \check{B}$. Formalmente estamos aplicando el Teorema 3.15 a una fórmula $\phi(x, y, z)$ la cual afirma que x es una función de y en z.

Definimos la función $F : A \to \mathscr{P}(B)$ como

$$F(a) = \{b \in B : \exists q \leqslant p(q \Vdash \dot{f}(\check{a}) = \check{b})\}.$$

En primer lugar, $F(a) \in M$ para cada $a \in A$ ya que las variables libres de la fórmula que define a $F(a)$, a saber B, q, p y a, son elementos de M. Por lo tanto, $F \in M$ debido al Axioma Esquemático de Reemplazamiento relativizado a M.

Ahora probaremos que $f(a) \in F(a)$ para cada $a \in A$. Hagamos $y := f(a)$. Como $f \in M[G]$, se tiene que $(\dot{f}_G(\check{a}_G) = \check{y}_G)^{M[G]}$ y por el Teorema 3.15, existe $q \in G$ tal que $q \Vdash \dot{f}(\check{a}) = \check{y}$. Como $p, q \in G$ y G es un filtro, existe $r \in G$ con $r \leqslant q$ y $r \leqslant p$; de esta forma tenemos que $r \Vdash (\dot{f}(\check{a}) = \check{y})$. Luego, $y \in F(a)$.

Veamos que para $a \in A$, $(|F(a)| \leqslant \omega)^M$. Para cada $b \in F(a)$, definimos

$$X_b = \{q \leqslant p : q \Vdash \dot{f}(\check{a}) = \check{b}\}$$

el cual es no vacío, ya que si $b \in F(a)$, entonces, por definición de $F(a)$, existe $q \leqslant p$ de tal modo que $q \Vdash f(a) = b$ y en particular, $q \in X_b$. Así, $X_b \neq \emptyset$ para cada $b \in F(a)$. Notemos que $X_b \in M$, ya que las variables libres de la fórmula que lo define ($\mathbb{P}$, $\dot{f}$, p, a y b) son elementos de M. Sea $\mathscr{F} = \{X_b : b \in F(a)\}$. Afirmamos que $\mathscr{F} \in M$. Esto se debe a que $F(a) \in M$ para cada $a \in A$ y $X_b \in M$ para cada $b \in F(a)$.

Como M modela el Axioma de Elección, existe una función de elección $e : F(a) \to \mathscr{F}$ tal que para cada $b \in F(a)$, $e(b) \in X_b$ y $e \in M$. En otras palabras, para cada $b \in F(a)$, $e(b) \leqslant p$ y $e(b) \Vdash \dot{f}(\check{a}) = \check{b}$. Afirmamos que $Y = \{e(b) : b \in F(a)\}$ es una anticadena en $\mathbb{P}$. Sean $b, b' \in F(a)$ de manera que existe $r \in \mathbb{P}$ tal que $r \leqslant e(b)$ y $r \leqslant e(b')$; por el Lema 3.13, existe un filtro H, $\mathbb{P}$-genérico sobre M, tal que $r \in H$. Así, tenemos que $r \Vdash \dot{f}(\check{a}) = \check{b}$ y $r \Vdash \dot{f}(\check{a}) = \check{b}'$, es decir, $\dot{f}_H(a) = b$ y $\dot{f}_H(a) = b'$. Por lo tanto debe de tenerse que $b = b'$; luego, $e(b) = e(b')$. Notemos que $Y \in M$ ya que $F(a), e \in M$, que son las variables libres de la fórmula que define a Y. Luego, Y es una anticadena en M y como

($\mathbb{P}$ tiene la condición de la cadena numerable)^M, tenemos que $(|F(a)| \leqslant |Y| \leqslant \omega)^M$. $\square$

Un corolario interesante y útil del lema previo es:

Lema 3.29. *Sean M, un modelo transitivo numerable de ZFC, $\mathbb{P} \in M$, un orden parcial tal que ($\mathbb{P}$ tiene la condición de la cadena numerable)^M y $\kappa \in M$ tal que (κ es un cardinal)^M. Si $(\mathrm{cf}(\kappa) = \kappa \wedge \kappa > \omega)^M$ entonces $(\mathrm{cf}(\kappa) = \kappa)^{M[G]}$.*

Demostración. Supongamos, buscando una contradicción, que existe G, un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M, de tal forma que (κ es singular)$^{M[G]}$, es decir, existen $\alpha < \kappa$ y una función $f \in M[G]$ tales que $f : \alpha \to \kappa$ es cofinal en κ. Por el Lema 3.28, existe una función $F : \alpha \to (\mathscr{P}(\kappa))^M$ tal que $F \in M$ y, para cada $\xi < \alpha$, $f(\xi) \in F(\xi)$ y $M \models |F(\xi)| \leqslant \omega$.

Hagamos $X = \bigcup_{\xi<\alpha} F(\xi)$. Observemos que $X \in M$. Esto se debe a que $F \in M$ y a que $\alpha \in M$ (de acuerdo a [4, VII Lema 2.15], M y $M[G]$ tienen los mismos ordinales), que son las variables libres de la fórmula que define a X. Ahora, X es no acotado en κ, ya que $f(\xi) \in F(\xi) \subseteq X$ para cada $\xi < \alpha$, pero $(|X| \leqslant |\alpha| \cdot \omega < \kappa)^M$, con lo cual hemos encontrado un subconjunto no acotado de κ cuya cardinalidad es menor a κ, lo cual es una contradicción a nuestra hipótesis. Por lo tanto, (κ es regular)$^{M[G]}$. $\square$

Para el siguiente lema, conviene recordar que ω_1 es el primer ordinal para el cual no existe una función suprayectiva de ω en dicho ordinal. Así mismo, ω_2 es el primer ordinal para el cual no existe una función suprayectiva de ω_1 en dicho ordinal.

Lema 3.30. *Sean M un modelo transitivo numerable de ZFC y $\mathbb{P} \in M$ un orden parcial tal que ($\mathbb{P}$ tiene la condición de la cadena numerable)^M. Si G es un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M, entonces $\omega_1^M = \omega_1^{M[G]}$ y $\omega_2^M = \omega_2^{M[G]}$.*

Demostración. Si $\alpha < \omega_1^M$, entonces $M \models$ "$\exists g : \omega \to \alpha$ suprayectiva". Como $M \subseteq M[G]$, entonces $g \in M[G]$. Así que $\alpha < \omega_1^{M[G]}$. Luego, $\omega_1^M \leqslant \omega_1^{M[G]}$.

Si ω_1^M y $\omega_1^{M[G]}$ son distintos, existe una función suprayectiva $f \in M[G]$ de tal forma que $f : \omega \to \omega_1^M$. Como $\omega < \omega_1^M$ y f es cofinal en ω_1^M se sigue que (ω_1^M no es regular)$^{M[G]}$, lo cual contradice el Lema 3.29. Por lo tanto, $\omega_1^M = \omega_1^{M[G]}$.

Ahora, si $\alpha < \omega_2^M$, entonces $M \models$ "$\exists h : \omega_1^M \to \alpha$ suprayectiva". Como $M \subseteq M[G]$, entonces $h \in M[G]$. Así que $\alpha < \omega_2^{M[G]}$. Luego, $\omega_2^M \leqslant \omega_2^{M[G]}$.

Si ω_2^M y $\omega_2^{M[G]}$ son distintos, existe una función suprayectiva $i \in M[G]$ de tal manera que $i : \omega_1^M \to \omega_2^M$. Como $\omega_1^M < \omega_2^M$ e i es cofinal en ω_2^M, se sigue que $(\omega_2^M \text{ no es regular})^{M[G]}$, lo cual contradice el Lema 3.29. Por lo tanto, $\omega_2^M = \omega_2^{M[G]}$. $\square$

Ya estamos listos para probar el resultado que le da nombre a la sección:

Dado M, un modelo transitivo numerable de ZFC, sean $\mathbb{P} = \mathrm{Fn}(\omega_2^M \times \omega, 2)$ y G, un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M; por el Lema 3.25, $\mathbb{P}$ tiene la condición de la cadena numerable en M y por lo tanto $\omega_2^M = \omega_2^{M[G]}$. Del Lema 3.27 deducimos que $M[G] \models (\mathfrak{c} \geqslant \omega_2)$. Este modelo es muy importante para esta sección, ya que no solamente es un modelo para $\neg$**CH** sino también para $\neg\diamondsuit$. En efecto, recordemos que el Teorema 2.2 nos dice que $\diamondsuit$ implica **CH** y por lo tanto, si $M[G] \models \neg$**CH** debe tenerse que $M[G] \models \neg\diamondsuit$.

3.3 $ZFC + \diamondsuit$ es consistente

Igual que en la sección previa, definiremos un orden parcial cuya extensión genérica modelará $\diamondsuit$. Esta vez nuestro orden parcial no tendrá la condición de la cadena numerable:

Definición 3.31. Un orden parcial $(\mathbb{P}, \leqslant)$ es σ-cerrado si y sólo si toda sucesión decreciente $\{p_n : n \in \omega\}$ en $\mathbb{P}$ tiene una cota inferior en $\mathbb{P}$.

Observe que si M un modelo transitivo numerable de ZFC y $j, k \in M$ son funciones, entonces $j \circ k = \{(x, z) : \exists y((x, y) \in k \wedge (y, z) \in j)\} \in M$ ya que las variables libres de la fórmula que define a $j \circ k$, j y k, son elementos de M.

Probemos ahora que hacer forcing con un orden σ-cerrado no añade sucesiones nuevas:

Teorema 3.32. *Sea M un modelo transitivo numerable de ZFC y sea $\mathbb{P} \in M$ un orden parcial tal que $(\mathbb{P}$ es σ-cerrado$)^M$. Sea G un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M. Sean $A, B \in M$ tales que $(|A| \leqslant \omega)^M$ y $f \in M[G]$ una función con $f : A \to B$. Entonces $f \in M$.*

Demostración. De acuerdo a [4, IV Teorema 3.11], si $A, B \in M$ entonces $X := A \times B \in M$, y por ende $[X]^{<\omega} \subseteq M$. Si $M \models |A| < \omega$, entonces $f \in [X]^{<\omega}$ y así $f \in M$.

Ahora, si $(|A| = \omega)^M$, existe $g \in M$, una función biyectiva de ω en A. Recordemos la definición de relación inversa: $g^{-1} = \{(y, x) : (x, y) \in g\}$. Como g es biyectiva, g^{-1} es una función; además, $g^{-1} \in M$ ya que las variables libres de la fórmula que define a g^{-1}

son elementos de M. Vamos a probar que $h := f \circ g : \omega \to B$ es un elemento de M y así, obtener que $f = (f \circ g) \circ g^{-1} \in M$, por la nota previa a este teorema.

Como $h \in M[G]$, por el teorema 3.15, existen $p \in G$ y $\dot{h} \in M^{\mathbb{P}}$ tales que $\dot{h}_G = f$ y

$$p \Vdash (\dot{h} \text{ es una función de } \check{\omega} \text{ en } \check{B}).$$

Sea $D := \{q \in \mathbb{P} : \exists \varphi (q \Vdash \dot{h} = \check{\varphi})\}^M$. Por la definición, $D \in M$. Veamos que D es denso por debajo de p. Sea $r \leqslant p$.

Trabajando en M definimos dos sucesiones $\{p_n\}_{n\in\omega} \subseteq \mathbb{P}$ y $\{z_n\}_{n\in\omega} \subseteq B$ con las siguientes características:

1. $p_0 = r$,

2. $p_n \leqslant p_m$ para todo $n \leqslant m$, y

3. $p_{n+1} \Vdash \dot{h}(\check{n}) = \check{z_n}$.

Supongamos que p_n ya ha sido construido y definamos p_{n+1} y z_n. Como $p_n \leqslant p$, tenemos que

$$p_n \Vdash (\dot{h} \text{ es una función de } \check{\omega} \text{ en } \check{B}),$$

así que

$$p_n \Vdash \exists x \in \check{B} (\dot{h}(\check{n}) = x).$$

Por el Lema 3.16, existen $z_n \in B$ y $p_{n+1} \leqslant p_n$ tales que $p_{n+1} \Vdash \dot{h}(\check{n}) = \check{z_n}$.

Hagamos $\varphi := \{(n, z_n) : n \in \omega\}$ y notemos que $\varphi \in M$ porque la construcción recursiva se realizó dentro de M. Más aún, φ es una función de ω en B.

Como la sucesión $\{p_n\}_{n\in\omega}$ es una sucesión decreciente en $\mathbb{P}$ y ($\mathbb{P}$ es σ-cerrado)^M, existe $q \in \mathbb{P}$, una cota inferior de $\{p_n\}_{n\in\omega}$. Como $p_{n+1} \Vdash \dot{h}(\check{n}) = \check{z_n}$ y $q \leqslant p_{n+1}$ para cada $n < \omega$, tenemos que $q \Vdash \dot{h}(\check{n}) = \check{z_n}$ para cada $n < \omega$, es decir, $q \Vdash \dot{h} = \varphi$ y, por ende, $q \in D$.

Esto implica, por el Lema 3.14, que $G \cap D \neq \emptyset$, es decir, existen $q \in G$ y $\varphi \in M$ tales que $q \Vdash \dot{h} = \check{\varphi}$ y así, obtenemos que $h = \dot{h}_G = \check{\varphi}_G = \varphi \in M$ y, por lo tanto, $f \in M$. $\square$

En el teorema anterior demostramos lo siguiente: Dados M, un modelo transitivo numerable de ZFC, $\mathbb{P} \in M$, un orden parcial tal que $(\mathbb{P}$ es σ-cerrado$)^M$, y $A, B \in M$ tales que $(|A| \leqslant \omega)^M$, si $\dot{f} \in M^{\mathbb{P}}$ y $p \Vdash \dot{f} : A \to B$, entonces $\{q \in \mathbb{P} : \exists \varphi \in M(q \Vdash \dot{f} = \check{\varphi})\}$ es denso por debajo de p.

Una consecuencia útil del resultado anterior es que las nociones de forcing σ-cerradas no añaden subconjuntos nuevos de ω al modelo base:

Lema 3.33. *Sean M, un modelo transitivo numerable de ZFC, $\mathbb{P} \in M$, un orden parcial tal que $(\mathbb{P}$ es σ-cerrado$)^M$, y G, un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M. Entonces $\mathscr{P}(\omega) \cap M = \mathscr{P}(\omega) \cap M[G]$.*

Demostración. Claramente tenemos que $\mathscr{P}(\omega) \cap M \subseteq \mathscr{P}(\omega) \cap M[G]$, esto debido a que $M \subseteq M[G]$ y a que si $M \models (A \subseteq \omega)$, entonces $M[G] \models (A \subseteq \omega)$. Para probar la otra contención, sea $A \in \mathscr{P}(\omega) \cap M[G]$. Como $A \in M[G]$, tenemos que la función característica $\chi_A : \omega \to 2$ es un elemento de $M[G]$. Por el Teorema 3.32, tenemos que $\chi_A \in M$. Por lo tanto, $A = \chi_A^{-1}\{1\} \in M$. $\square$

Dado I, un conjunto, definimos a $\mathrm{Fn}(I, 2, \omega_1)$ como el conjunto de funciones cuyo dominio es un subconjunto numerable de I que llegan a 2. Este conjunto se puede ordenar con la relación de orden $p \leqslant q$ si y sólo si $q \subseteq p$.

Lema 3.34. *Sea I un conjunto. Entonces $\mathbb{P} := \mathrm{Fn}(I, 2, \omega_1)$ es un orden parcial σ-cerrado.*

Demostración. Sea $\{p_n\}_{n\in\omega}$ una sucesión decreciente en $\mathbb{P}$ y veamos que dicha sucesión tiene una cota inferior en $\mathbb{P}$. Hagamos $q = \bigcup_{n\in\omega} p_n$. Como la familia $\{p_n : n \in \omega\}$ es un sistema de funciones compatibles, es decir, para cualesquiera $m, n \in \omega$ se tiene que $p_n \cup p_m$ es una función, entonces $q = \bigcup_{n\in\omega} p_n$ vuelve a ser una función y, claramente $|q| \leqslant \omega$.

Por último, basta ver que q es cota inferior de $\{p_n\}_{n\in\omega}$. En efecto, para cada $k \in \omega$ tenemos que $p_k \subseteq q$, es decir, $q \leqslant p_k$. $\square$

Nuestro siguiente resultado dice que las nociones de forcing σ-cerradas preservan ω_1. Note que el Lema 3.30 garantiza que las nociones de *forcing* c.c.c. preservan ω_1 y ω_2.

Lema 3.35. *Sean M, un modelo transitivo numerable de ZFC, $\mathbb{P} \in M$, un orden parcial tal que $(\mathbb{P}$ es σ-cerrado$)^M$, y G, un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M. Entonces $\omega_1^M = \omega_1^{M[G]}$.*

Demostración. La prueba de la desigualdad $\omega_1^M \leqslant \omega_1^{M[G]}$ es la misma que se dio en el Lema 3.30.

Si ω_1^M y $\omega_1^{M[G]}$ son distintos, existe una función suprayectiva $f \in M[G]$ de tal manera que $f : \omega \to \omega_1^M$. Por el Lema 3.32, tendríamos que $f \in M$, es decir, $M \models \omega_1 \leqslant \omega$, lo cual no es posible. Por lo tanto, $\omega_1^M = \omega_1^{M[G]}$. $\square$

Ahora estamos listos para demostrar el resultado que le da título a la sección:

Teorema 3.36. *Sea M un modelo transitivo numerable de ZFC y sea $\mathbb{P} = \mathrm{Fn}(I, 2, \omega_1)^M$, donde $I = \{(\alpha, \xi) : \xi < \alpha < \omega_1^M\}$. Si G un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M, entonces $M[G] \models \diamondsuit$.*

Demostración. Para facilitar la lectura de la prueba, hagamos $\kappa := \omega_1^M = \omega_1^{M[G]}$ (ahora que sabemos que $\mathbb{P}$ preserva a ω_1).

Como G es un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M, un argumento similar al del Lema 3.26 nos dice que $g = \bigcup G$ es una función de I en 2.

Para cada $\alpha < \kappa$ definimos la función $f_\alpha : \alpha \to 2$ como $f_\alpha(\xi) = g(\alpha, \xi)$ y el conjunto $A_\alpha := f_\alpha^{-1}\{1\}$. Como $G \in M[G]$, tenemos que $\{A_\alpha\}_{\alpha<\kappa} \in M[G]$. Fijemos una sucesión $\{\dot{f}_\alpha\}_{\alpha<\kappa}$, en $M^{\mathbb{P}}$, tal que $(\dot{f}_\alpha)_G = f_\alpha$ para cada $\alpha < \kappa$.

Probaremos que $\{A_\alpha\}_{\alpha<\kappa}$ es una sucesión $\diamondsuit$ en $M[G]$. Para ello, sean $X, C \in M[G]$ tales que $X \subseteq \kappa$ y $(C \text{ es un club en } \kappa)^{M[G]}$. Hagamos $E = \{\alpha < \kappa : X \cap \alpha = A_\alpha\}$. Observe que si $\chi_X : \kappa \to 2$ denota la función característica de X, entonces la igualdad $X \cap \alpha = A_\alpha$ equivale a que $\chi_X \restriction \alpha = f_\alpha$, así que $E = \{\alpha < \kappa : \chi_X \restriction \alpha = f_\alpha\}$.

Por el Teorema 3.15, existen $p \in G$ y $\dot{X}, \dot{C}, \dot{\chi}_X, \dot{E} \in M^{\mathbb{P}}$ tales que $\dot{X}_G = X$, $\dot{C}_G = C$, $(\dot{\chi}_X)_G = \chi_X$, $(\dot{E})_G = E$ y

$$p \Vdash \text{“}(\dot{X} \subseteq \check{\kappa}) \wedge (\dot{C} \text{ es un club en } \check{\kappa}) \wedge (\dot{\chi}_X \text{ es la función característica de } \dot{X})\text{”},$$

además,

$$p \Vdash \dot{E} = \{\alpha < \kappa : \dot{\chi}_X \restriction \alpha = \dot{f}_\alpha\}.$$

Afirmamos que $D := \{q \in \mathbb{P} : q \Vdash \dot{E} \cap \dot{C} \neq \emptyset\}$ es denso por debajo de p. Sea $q \leqslant p$.

A partir de aquí, trabajaremos en M. Para cada $r \in \mathbb{P}$, definimos el soporte de r como:

$$s(r) = \min\{\beta < \kappa : \mathrm{dom}(r) \subseteq \beta \times \beta\}.$$

Probaremos que existen sucesiones $\{p_n\}_{n\in\omega} \subseteq \mathbb{P}$, $\{\beta_n\}_{n\in\omega} \subseteq \kappa$, $\{\delta_n\}_{n\in\omega} \subseteq \kappa$ y $\{b_n\}_{n\in\omega}$ de tal modo que las siguientes propiedades se cumplen:

1. $p_0 = q$,

2. $\beta_n = s(p_n)$,

3. $\beta_{n+1} > \delta_n > \beta_n$,

4. $p_{n+1} \leqslant p_n$,

5. $p_{n+1} \Vdash \check{\delta_n} \in \dot{C}$ y

6. $b_n : \beta_n \to 2$ y $p_{n+1} \Vdash (\dot{\chi}_X \restriction \check{\beta_n} = \check{b_n})$.

Supongamos que p_n ha sido definido para algún $n < \omega$ y, a partir de esto, vamos a obtener a p_{n+1}, δ_n y b_n. Como $p_n \leqslant p$, tenemos que $p_n \Vdash (\dot{C}$ es un club en $\check{\kappa})$; en particular $p_n \Vdash \exists y \in \check{\kappa}(y > \check{\beta_n} \wedge y \in \dot{C})$. Por el Lema 3.16, existen $t \leqslant p_n$ y $\delta_n \in \kappa$ de tal modo que $\delta_n > \beta_n$ y $t \Vdash \check{\delta_n} \in \dot{C}$. Sea

$$t_0 = t \cup \{(a, 0) : a \in (\{\delta_n\} \times \delta_n) \setminus \mathrm{dom}(t)\}.$$

Claramente $t_0 \leqslant t$ y $s(t_0) > \delta_n$. Como $t_0 \leqslant t \leqslant p$, tenemos que

$$t_0 \Vdash (\dot{\chi}_X \text{ es la función característica de } \dot{X})$$

y de esta forma, $t_0 \Vdash \dot{\chi}_X \restriction \check{\beta_n} : \beta_n \to 2$. Dado que $\mathbb{P}$ es σ-cerrado, la nota posterior al Teorema 3.32 nos dice que existen $p_{n+1} \leqslant t_0$ y $b_n \in 2^{\beta_n} \cap M$ tales que $p_{n+1} \Vdash (\dot{\chi}_X \restriction \check{\beta_n} = \check{b_n})$. Esto concluye la inducción.

Notemos que el inciso 3 nos garantiza que $\gamma := \sup\{\beta_n : n < \omega\} = \sup\{\delta_n : n < \omega\}$. Hagamos $p_\omega := \bigcup_{n<\omega} p_n$. Notemos que, por el inciso 4, p_ω es una función cuyo dominio es el conjunto numerable $\bigcup_{n<\omega} \mathrm{dom}(p_n) \subseteq I$ y, por lo tanto, $p_\omega \in \mathbb{P}$. Afirmamos que $s(p_\omega) = \gamma$. Empecemos por probar que $\mathrm{dom}(p_\omega) \subseteq \gamma \times \gamma$. Si $(\alpha, \xi) \in \mathrm{dom}(p_\omega)$, entonces $(\alpha, \xi) \in \mathrm{dom}(p_k)$ para algún $k < \omega$ y así, obtenemos las desigualdades $\xi < \alpha < \beta_k \leqslant \gamma$, es decir, $(\alpha, \xi) \in \gamma \times \gamma$. Por lo tanto, $s(p_\omega) \leqslant \gamma$. Ahora, sea $\eta < \gamma$ y veamos que $\mathrm{dom}(p_\omega) \nsubseteq \eta \times \eta$. Tenemos que $\eta < \beta_k$ para algún $k < \omega$, así que, por la definición de β_k, deducimos que $\mathrm{dom}(p_k) \nsubseteq \eta \times \eta$; como $\mathrm{dom}(p_k) \subseteq \mathrm{dom}(p_\omega)$ tenemos que $\mathrm{dom}(p_\omega) \nsubseteq \eta \times \eta$. Por lo tanto, $s(p_\omega) = \gamma$.

Como $p_\omega \leqslant p_n$, para cada $n < \omega$, tenemos que $p_\omega \Vdash \dot{\chi}_X \upharpoonright \beta_n = b_n$, así que,

$$p_\omega \Vdash \dot{\chi}_X \upharpoonright \gamma = \bigcup_{k<\omega} b_k;$$

en particular, p_ω fuerza que $b_\omega := \bigcup_{k<\omega} b_k$ sea función y como $b_\omega \in M$, obtenemos que b_ω es una función de γ en 2 y $p_\omega \Vdash (\dot{\chi}_X \upharpoonright \check{\gamma} = \check{b_\omega})$.

La igualdad $s(p_\omega) = \gamma$ implica que $(\{\gamma\} \times \kappa) \cap \mathrm{dom}(p_\omega) = \emptyset$, así que podemos extender a p_ω a una función $s \in \mathbb{P}$ cuyo dominio es $\mathrm{dom}(p_\omega) \cup (\{\gamma\} \times \gamma)$, tal que $p_\omega \subseteq s$ y $s(\gamma, \xi) = b_\omega(\xi)$ para cada $\xi < \gamma$.

Por el Lema 3.12, tenemos que $s \Vdash \check{s} \in \Gamma$ y, por lo tanto, $s \Vdash \check{s} \subseteq \bigcup \Gamma$. Si $(\gamma, \xi) \in \mathrm{dom}(s)$, entonces $s \Vdash \check{s}(\gamma, \xi) = \bigcup \Gamma(\gamma, \xi)$. Por otro lado, la definición de f_γ (recordemos que $\Gamma_G = G$) y de s, implican que $s \Vdash \check{b}_\omega(\xi) = \dot{f}_\gamma(\xi)$, para cada $\xi < \kappa$, y como $\mathrm{dom}(b_\omega) = \gamma$ y $s \Vdash \mathrm{dom}(\dot{f}_\gamma) = \gamma$, obtenemos que $s \Vdash b_\omega = \dot{f}_\gamma$. Observemos que $s \Vdash (\dot{\chi}_X \upharpoonright \check{\gamma} = \check{b_\omega})$, ya que $s \leqslant p_\omega$; entonces $s \Vdash (\dot{f}_\gamma = b_\omega)$, así que $s \Vdash \dot{\chi}_X \upharpoonright \check{\gamma} = \dot{f}_\gamma$. Por otro lado, $s \Vdash \check{\gamma} \in \dot{C}$ ya que $s \Vdash (\dot{C}$ es cerrado en $\check{\kappa})$ y $s \Vdash \check{\delta_n} \in \dot{C}$ para cada $n < \omega$. De este modo, $s \Vdash \check{\gamma} \in \dot{C} \cap \dot{E}$. Esto prueba que D es denso por debajo de p.

Por el Lema 3.14, existe $r \in G$ de tal forma que $r \Vdash (\dot{E} \cap \dot{C} \neq \emptyset)$, es decir, $\emptyset \neq (\dot{E})_G \cap (\dot{C})_G = E \cap C$. Esto demuestra que E es estacionario en κ y, por lo tanto, $\{A_\alpha\}_{\alpha<\kappa}$ es una sucesión $\diamondsuit$ en $M[G]$. $\square$

3.4 Teoremas de Preservación

En la sección previa empleamos el término "preservar ω_1" para referirnos a la propiedades enunciadas en los lemas 3.30 y 3.35. Lo que vamos a hacer en esta sección es hablar de algunas propiedades más de preservación de órdenes parciales.

Comencemos esta sección suponiendo que M es un modelo transitivo de ZFC, $\mathbb{P} \in M$ es una noción de forcing y G es un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M.

Observemos que, si $\alpha \in M$ es un ordinal, entonces $M \models$ (α es límite) si y sólo si $M[G] \models$ (α es límite), de acuerdo a [4, IV Teorema 5.1].

Supongamos que $X, \alpha \in M$ y $X \subseteq \alpha$. Si $M \models X$ no es acotado en α, entonces $M \models \sup(X \cap \alpha) = \alpha$, es decir, $M \models \bigcup(X \cap \alpha) = \alpha$. Así, $M[G] \models$ (X no es acotado en α) debido a [4, IV Teorema 3.9].

Ahora, supongamos que $X, \alpha \in M$, $X \subseteq \alpha$ y $M \models X$ es cerrado en α. Supongamos que $M[G] \models$ (δ es límite) $\wedge$ (X no está acotado en δ). Como $M \models X$ es cerrado en α y por la observación anterior, $M \models \delta$ es límite, tenemos que $M \models \delta \in X$ y así, $M[G] \models \delta \in X$. Entonces $M[G] \models X$ es cerrado en α.

Por lo tanto todos los clubs en α del modelo base son clubs en la extensión genérica, sin importar cuál sea la noción de forcing que se esté empleando. Otra forma de decir esto es que todas las nociones de forcing preservan clubes.

El propósito de esta sección es presentar algunos teoremas de preservación. Comenzaremos demostrando que todas las nociones de forcing que tienen la condición de la cadena numerable o que son σ-cerradas en el modelo base preservan conjuntos estacionarios en ω_1, es decir, que todos los subconjuntos estacionarios de ω_1 del modelo base siguen siendo estacionarios en la extensión genérica. Para esto necesitaremos del resultado siguiente.

Lema 3.37. *Sea M un modelo transitivo numerable de ZFC. Sean $\mathbb{P} \in M$, un orden parcial tal que ($\mathbb{P}$ tiene la condición de la cadena numerable)^M, y G, un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M. Si $C \in M[G]$ satisface que $M[G] \models C$ es un club en κ, entonces existe $C' \in M$ de tal modo que $C' \subseteq C$ y $M \models C'$ es un club en κ.*

Demostración. El Lema 3.29 nos dice que $\mathbb{P}$ preserva a ω_1, así que, para facilitar la lectura de la prueba, hagamos $\kappa := \omega_1^M = \omega_1^{M[G]}$.

Como $M[G] \models C$ es no acotado en κ, existe una función $f : \kappa \to \kappa$ tal que $f \in M[G]$ y para cada $\alpha < \kappa$, $\alpha < f(\alpha) \in C$. Por el Lema 3.28, existe una función $F : \kappa \to \mathscr{P}(\kappa)$ tal que $F \in M$ y, para cada $\alpha < \kappa$ se tiene que $f(\alpha) \in F(\alpha)$ y $M \models |F(\alpha)| \leqslant \omega$.

Definimos $g\kappa \to \kappa$ mediante $g(\alpha) := \sup F(\alpha)$ para cada $\alpha < \kappa$. El dominio de g es, en efecto, κ porque $M \models |F(\alpha)| \leqslant \omega$ y, por lo tanto, $\sup F(\alpha) < \kappa$. Definimos recursivamente la n-ésima iteración de g, $g^n : \kappa \to \kappa$, de la siguiente forma: g^0 es la identidad de κ y $g^{n+1} := g \circ g^n$ para cualquier $n < \omega$. De este modo, $g^\omega : \kappa \to \kappa$ será la función dada por $g^\omega(\alpha) := \sup\{g^n(\alpha) : n < \omega\}$, para cada $\alpha < \kappa$.

Afirmamos que $\{g^n : n \leqslant \omega\} \subseteq M$. Probaremos esto por inducción sobre n. Si $n = 0$, $g^0 = \{(\alpha, \alpha) : \alpha < \kappa\}$ y, por lo tanto, la única variable libre de la fórmula que define a g^0 es κ, que es un elemento de M. Ahora, si $n = 1$ tenemos que $g^1 = g \circ g^0 = g$; notemos que para cada $\alpha < \kappa$, $g(\alpha) = \sup F(\alpha) = \bigcup F(\alpha)$ y, como $F(\alpha) \in M$, tenemos que $\bigcup F(\alpha) \in M$, de acuerdo a [4, IV Teorema 3.9]. Esto nos dice que $g^1 \in M$. Vamos a formular la hipótesis inductiva: supongamos que $g^n \in M$ para algún $n < \omega$. Por definición, $g^{n+1} = g \circ g^n$. Como $g, g^n \in M$, de acuerdo al párrafo que precede al Teorema 3.32, podemos concluir que $g \circ g^n \in M$. Por último, veamos que $g^\omega \in M$. Por definición, para cada $\alpha < \kappa$, $g^\omega(\alpha) = \sup\{g^n(\alpha) : n < \omega\}$. Nuevamente, por [4, IV Teorema 3.9], se deduce que para cada $\alpha < \kappa$, $g^\omega(\alpha) \in M$ y, por lo tanto, $g^\omega \in M$.

A continuación vamos a probar algunas propiedades sobre las funciones f y g. Para cualesquiera $\alpha < \kappa$ y $n < \omega$ los siguientes enunciados se satisfacen.

1. $f(\alpha) \leqslant g(\alpha)$,

2. $g^n(\alpha) < g^{n+1}(\alpha)$,

3. $\alpha < g^\omega(\alpha)$ y

4. $g^n(\alpha) < f(g^n(\alpha)) \leqslant g^{n+1}(\alpha)$.

Sea $\alpha < \kappa$ y $n \in \omega$. Para (1), tenemos que $f(\alpha) \in F(\alpha)$ y de esta forma $f(\alpha) \leqslant \sup F(\alpha) = g(\alpha)$. Para (2), por el inciso (1) tenemos que, para cualquier $\xi < \kappa$, $\xi < f(\xi) \leqslant g(\xi)$, así que, $\xi < g(\xi)$. En particular, si $\xi = g^n(\alpha)$, se sigue que $g^n(\alpha) < g(g^n(\alpha)) = g^{n+1}(\alpha)$. Para (3), por el inciso (2) y la definición de g^ω tenemos que $\alpha < g(\alpha) \leqslant g^\omega(\alpha)$. Por último, para (4), el hecho de que $\xi < f(\xi)$ para cualquier $\xi < \kappa$, nos dice que $g^n(\alpha) < f(g^n(\alpha))$; por otra parte, el inciso (1) garantiza que $f(g^n(\alpha)) \leqslant g(g^n(\alpha)) = g^{n+1}(\alpha)$ y así, obtenemos que $g^n(\alpha) < f(g^n(\alpha)) \leqslant g^{n+1}(\alpha)$.

Definimos $X = g^\omega[\kappa]$. Dado que $X = \{g^\omega(\alpha) : \alpha < \kappa\}$, se sigue que $X \in M$ porque las únicas variables libres de la fórmula que define a X (g^ω y κ) son elementos de M. Veamos que X no es acotado en κ y que $X \subseteq C$. Para probarlo, sea $\alpha < \kappa$. Por la propiedad (3), $\alpha < g^\omega(\alpha) \in X$ y, por lo tanto, X no está acotado en κ. Ahora, sea $\delta \in X$. Entonces $\delta = g^\omega(\alpha)$ para algún $\alpha < \kappa$. La propiedad (4) nos garantiza la siguiente igualdad:

$$\sup\{f(g^n(\alpha)) : n < \omega\} = \sup\{g^n(\alpha) : n < \omega\}.$$

Entonces $\delta = \sup\{f(g^n(\alpha)) : n < \omega\}$. Por el Lema 1.2, δ es un ordinal límite, así que para probar que $\delta \in C$, basta probar que $C \cap \delta$ es no acotado en δ. Si $\beta < \delta$, entonces $\beta < f(g^k(\alpha)) \in C$ para algún $k < \omega$. Por la propiedad (4), tenemos que

$$f(g^k(\alpha)) \leqslant g^{k+1}(\alpha) < f(g^{k+1}(\alpha)) \leqslant \delta,$$

así que, $f(g^k(\alpha)) \in C \cap \delta$ y $\beta < f(g^k(\alpha))$. Por lo tanto $C \cap \delta$ es no acotado en δ y, como $M[G] \models C$ es cerrado en κ, obtenemos que $\delta \in C$.

Sea

$$\mathscr{F} = \{Y \subseteq \kappa : (Y \text{ es cerrado en } \kappa) \wedge (X \subseteq Y)\}^M.$$

Notemos que $\mathscr{F} \neq \emptyset$ porque $\kappa \in \mathscr{F}$. Definimos $C' = \bigcap \mathscr{F}$. Veamos que $C' \subseteq C$. Dado $\beta \in C'$, vamos a considerar dos casos:

1. $X \cap \beta$ es no acotado en β. En este caso, la contención $X \subseteq C$ implica que $C \cap \beta$ no es acotado en β. Como $M[G] \models C$ es cerrado en κ, se sigue que $\beta \in C$.

2. $X \cap \beta$ es acotado en β. Buscando una contradicción, supongamos que $\beta \notin X$ y hagamos $\gamma = \sup(X \cap \beta)$. Definamos $Y = \kappa \setminus \{\xi < \kappa : \gamma < \xi \leqslant \beta\}$. Por [4, IV Teorema 3.9], tenemos que $Y \in M$, además, $X \subseteq Y$ y, por el Ejemplo 1.23, $M \models Y$ es cerrado en κ, es decir, $Y \in \mathscr{F}$ y, por lo tanto, $\beta \in Y$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $\beta \in X \subseteq C$.

Por último, vamos a probar que $M \models$ (C' es un club en κ). Para probar que $M \models$ (C' es un cerrado en κ), sea $\delta \in \lim(\kappa)$ de tal forma que $C' \cap \delta$ es no acotado en δ y sea

$Y \in \mathscr{F}$. Por la definición de C', $C' \subseteq Y$ y por ende $C' \cap \delta \subseteq Y \cap \delta$. Entonces $Y \cap \delta$ es no acotado en δ porque $C' \cap \delta$ es no acotado en δ. Como Y es cerrado en κ, obtenemos que $\delta \in Y$. Por lo tanto, $\delta \in C'$. Para probar que $M \models C'$ es no acotado en κ, basta observar que X no es acotado en κ y que $X \subseteq C'$. Concluimos entonces que $M \models (C'$ es un club en $\kappa)$.

□

Como corolario de lo anterior se obtiene que todas las nociones de forcing que son c.c.c. preservan estacionarios:

Teorema 3.38. *Sea M un modelo transitivo numerable de ZFC. Sean $\mathbb{P} \in M$, un orden parcial, y G, un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M. Si ($\mathbb{P}$ tiene la condición de la cadena numerable)^M o ($\mathbb{P}$ es σ-cerrado)^M y $E \in M$ satisface que $M \models E$ es estacionario en κ, entonces $M[G] \models E$ es estacionario en κ.*

Demostración. Para facilitar la lectura de la prueba, hagamos $\kappa := \omega_1^M = \omega_1^{M[G]}$.

Sea $C \in M[G]$ de tal forma que $M[G] \models (C$ es un club en $\kappa)$. Supongamos, en primer lugar, que ($\mathbb{P}$ tiene la condición de la cadena numerable)^M. Por el Lema 3.37, existe $C' \in M$ tal que $M \models (C'$ es un club en $\kappa)$ y $C' \subseteq C$. Como $M \models E$ es estacionario en κ, tenemos que $C' \cap E \neq \emptyset$. Por otra parte, $C' \cap E \subseteq C \cap E$, así que $C \cap E \neq \emptyset$. Por lo tanto, $M[G] \models E$ es estacionario en κ.

Ahora, supongamos que ($\mathbb{P}$ es σ-cerrado)^M. Por el Teorema 3.15, existen $p \in G$ y $\dot{C} \in M^{\mathbb{P}}$ tales que $(\dot{C})_G = C$ y $p \Vdash$ "$\dot{C}$ es un club en $\check{\kappa}$".

Definimos $D = \{q \in \mathbb{P} : q \Vdash \dot{C} \cap \check{E} \neq \emptyset\}$. Vamos a probar que D es denso por debajo de p, así que, fijemos $q \in \mathbb{P}$ de tal modo que $q \leqslant p$.

Trabajando en M, vamos a demostrar que existen sucesiones $\{p_\alpha\}_{\alpha<\kappa} \subseteq \mathbb{P}$ y $\{\gamma_\alpha\}_{\alpha<\kappa} \subseteq \kappa$ de tal forma que, para cada $\alpha < \kappa$, las siguientes propiedades se cumplen:

1. $p_0 \leqslant q$,

2. $p_\alpha \Vdash \check{\gamma}_\alpha \in \dot{C}$,

3. $p_{\alpha+1} \leqslant p_\alpha$, $\gamma_\alpha < \gamma_{\alpha+1}$ y

4. Si $\alpha \in \lim(\kappa)$, entonces p_α es una cota inferior de $\{p_\beta : \beta < \alpha\}$ y $\gamma_\alpha = \sup\{p_\beta : \beta < \alpha\}$.

Como $q \leqslant p$, tenemos que $q \Vdash$ "$\dot{C}$ es un club en $\check{\kappa}$", en particular,

$$q \Vdash \exists y \in \check{\kappa}(y > 0 \wedge y \in \dot{C}).$$

Por el Lema 3.16, existen $p_0 \leqslant q$ y $\gamma_0 < \kappa$ de tal modo que $\gamma_0 > 0$ y $p_0 \Vdash \check{\gamma}_0 \in \dot{C}$. Supongamos que p_α ha sido definido. Una variación mínima del argumento anterior nos garantiza la existencia de $p_{\alpha+1} \leqslant p_\alpha$ y de $\gamma_{\alpha+1} > \gamma_\alpha$ tales que $p_{\alpha+1} \Vdash \check{\gamma}_{\alpha+1} \in \dot{C}$. Para concluir la recursión, supongamos que $\{p_\beta : \beta < \alpha\}$ y $\{\gamma_\beta : \beta < \alpha\}$ han sido definidos para algún $\alpha \in \lim(\kappa)$. Notemos que $\mathrm{cf}(\alpha) = \omega$ porque $\alpha < \kappa$. Entonces existe una sucesión $\{\beta_n\}_{n\in\omega} \subseteq \alpha$ estricitamente creciente, tal que $\sup\{\beta_n : n \in \omega\} = \alpha$. Como $\{p_{\beta_n}\}_{n\in\omega} \in M$ y $(\mathbb{P}$ es σ-cerrado$)^M$, existe $p_\alpha \in \mathbb{P}$, una cota inferior de $\{p_{\beta_n}\}_{n\in\omega}$. Veamos que p_α es una cota inferior para $\{p_\beta\}_{\beta<\alpha}$. Si $\beta < \alpha$, entonces existe $k \in \omega$ de tal modo que $\beta < \beta_k$. Por las propiedades (3) y (4) tenemos que $p_{\beta_k} \leqslant p_\beta$. Por otro lado, $p_\alpha \leqslant p_{\beta_k}$, así que, $p_\alpha \leqslant p_\beta$ para cada $\beta < \alpha$. Por la propiedad (2) tenemos que $p_\alpha \Vdash \check{\gamma}_\beta \in \dot{C}$ para cada $\beta < \alpha$, es decir, $p_\alpha \Vdash \{\check{\gamma}_\beta\}_{\beta<\alpha} \subseteq \dot{C} \cap \check{\gamma}_\alpha$ (γ_α está definido como en la propiedad 4). Notemos que $\{\gamma_\beta\}_{\beta<\alpha}$ es no acotado en γ_α y, por lo tanto, $p_\alpha \Vdash \dot{C} \cap \check{\gamma}_\alpha$ es no acotado en γ_α, así, $p_\alpha \Vdash \gamma_\alpha \in \dot{C}$. Esto termina la recursión.

Definimos $C' = \{\gamma_\alpha : \alpha < \kappa\}$. Vamos a demostrar que $M \models (C'$ es un club en $\check{\kappa})$. Primero, para ver que C' es cerrado en κ, sea $\delta \in \lim(\kappa)$ tal que $C' \cap \delta$ es no acotado en δ. Hagamos $X = \{\xi < \kappa : \gamma_\xi < \delta\}$ y $\alpha = \sup X$. Notemos que la función $f : X \to \delta$, definida mediante $f(\xi) = \gamma_\xi$, es inyectiva, como consecuencia de las condiciones (3) y (4). Así que $|X| \leqslant |\delta| = \omega$ y, por ende, $\alpha < \kappa$. Afirmamos que $\delta = \gamma_\alpha$. Probemos que δ es cota superior de $\{\gamma_\beta : \beta < \alpha\}$. Si $\beta < \alpha$, existe $\xi < \kappa$ de tal modo que $\gamma_\xi < \delta$ y $\beta < \xi$; por ende, $\gamma_\beta < \gamma_\xi < \delta$. Luego, $\gamma_\alpha \leqslant \delta$. Demostraremos ahora que γ_α es cota superior de $C' \cap \delta$. Si $\eta \in C' \cap \delta$, existe $\xi < \kappa$ tal que $\eta = \gamma_\xi < \delta$, es decir, $\xi \leqslant \alpha$ y, por lo tanto, $\eta = \gamma_\xi \leqslant \gamma_\alpha$. De esto se deduce que $\delta = \sup(C \cap \delta) \leqslant \gamma_\alpha$ y, por ende, tenemos que $\delta = \gamma_\alpha$, es decir, $\delta \in C'$.

Veamos ahora que C' es no acotado en κ. Para ello primero demostraremos que la desigualdad $\alpha \leqslant \gamma_\alpha$ es válida para cada $\alpha < \kappa$. Claramente, $0 \leqslant \gamma_0$. Supongamos que $\beta \leqslant \gamma_\beta$ para algún $\beta < \kappa$. Como $\beta \leqslant \gamma_\beta < \gamma_{\beta+1}$, obtenemos que $\beta + 1 \leqslant \gamma_{\beta+1}$. Si

$\alpha \in \lim(\kappa)$ y $\beta \leqslant \gamma_\beta$ para cada $\beta < \alpha$, entonces

$$\sup\{\beta : \beta < \alpha\} \leqslant \sup\{\gamma_\beta : \beta < \alpha\},$$

y así, $\alpha \leqslant \gamma_\alpha$.

Ahora vamos a demostrar que C' es no acotado en κ. Sea $\eta < \kappa$. Por la propiedad anterior, tenemos que $\eta \leqslant \gamma_\eta$ y, por lo tanto, $\eta < \gamma_{\eta+1} \in C'$. Luego, C' es un club en κ.

Como $M \models E$ es estacionario en κ, entonces $M \models E \cap C' \neq \emptyset$, así que, fijamos $\alpha < \kappa$ de tal modo que $\gamma_\alpha \in E$. Entonces $p_\alpha \Vdash \check{\gamma}_\alpha \in \dot{C} \cap \check{E}$, es decir, $p_\alpha \Vdash \dot{C} \cap \check{E} \neq \emptyset$ y así, $p_\alpha \in D$. Esto demuestra que D es denso por debajo de p.

Por el Lema 3.14, existe $r \in G$ de tal forma que $r \Vdash \dot{C} \cap \check{E} \neq \emptyset$, es decir, $\emptyset \neq (\dot{C})_G \cap (\check{E})_G = C \cap E$. En conclusión, $M[G] \models E$ es estacionario en κ. □

Los conjuntos estacionarios pueden ser caracterizados en términos de extensiones genéricas, tal y como lo exhibe el resultado siguiente, cuya prueba puede encontrarse en [1, Teorema 1.2].

Teorema 3.39. *Sean M, un modelo transitivo numerable de ZFC, y $E \in M \cap \mathscr{P}(\omega_1)$. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *$M \models E$ es estacionario en ω_1.*
2. *Existe $\mathbb{P} \in M$, un orden parcial, de tal modo que:*
   (a) *$\mathbb{P}$ preserva a ω_1.*
   (b) *Si G es un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M, existe $C \in M[G]$ tal que $M[G] \models (C$ es un club en ω_1 y $C \subseteq E)$.*

En otros términos, los estacionarios son precisamente los subconjuntos de ω_1 que pueden ser forzados a contener un club.

Aunque no entraremos en los detalles de la demostración, nos conviene explicar un poco sobre la forma en que se demuestra que (2) es consecuencia de (1).

En la prueba, se fija $E \in M$ tal que (E es estacionario en $\omega_1)^M$ y se define

$$\mathbb{P}_E := \{p \subseteq E : (p \text{ es cerrado }) \wedge |p| \leqslant \omega\}^M$$

junto con la relación de orden $q \leqslant p$ si y sólo si $q \cap (\sup(p)+1) = p$.

Se puede verificar que si G es $\mathbb{P}_E$-genérico sobre M y definimos $C = \bigcup G$, entonces $M[G] \models$ (C es un club en ω_1) y $C \subseteq E$. En particular, si elegimos a E de tal modo que $M \models$ ($S = \omega_1 \backslash E$ es estacionario) (Corolario 1.34), entonces $M[G] \models$ (S no es estacionario).

De este modo, aunque todas las nociones de forcing preservan clubes (tal y como argumentamos al principio de esta sección), existen nociones de forcing que "destruyen" estacionarios (aún a pesar de preservar ω_1).

Concluimos esta sección con algunos comentarios en los que M representará un modelo transitivo de ZFC.

En primer lugar, suponga que M es un modelo transitivo de ZFC con $M \models \diamondsuit$ (por ejemplo, el modelo que se construyó en la sección 3.3). Si $\mathbb{P}$ es la noción de forcing que se empleó al final de la sección 3.2 para probar la consistencia de $\neg\diamondsuit$ y G es un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M, entonces $M[G] \models \neg\diamondsuit$.

De esta manera, hay nociones de forcing que tienen la condición de la cadena numerable que no preservan $\diamondsuit$. Sin embargo, las nociones de forcing que tienen la condición de la cadena numerable de cardinalidad pequeña no pueden destruir $\diamondsuit$; en otras palabras (ver [4, VII Ejercicio H8]), si $M \models \diamondsuit$ y $\mathbb{P} \in M$ es una noción de forcing tal que $M \models$ "$|\mathbb{P}| \leqslant \omega_1 \wedge$ $\mathbb{P}$ tiene la condición de la cadena numerable.", entonces para cualquier G, filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M, se satisface que $M[G] \models \diamondsuit$.

Ahora, supongamos que $\mathbb{Q}$ es la noción de forcing usada en el Teorema 3.36 para probar la consistencia de $\diamondsuit$. Para cada $\alpha < (\omega_1)^M$ definamos $p_\alpha : \alpha + 1 \to 2$ mediante $p_\alpha(\xi) = 0$ si $\xi < \alpha$ y $p_\alpha(\alpha) = 1$. Entonces $\alpha < \beta < (\omega_1)^M$ implica que $p_\beta(\alpha) = 0 \neq 1 = p_\alpha(\alpha)$, por lo cual, p_α y p_β son incompatibles. En otras palabras, $\{p_\alpha : \alpha < (\omega_1)^M\} \in M$ es una anticadena en $\mathbb{Q}$. Así $M \models$ "$\mathbb{Q}$ no tiene la condición de la cadena numerable". Una pregunta natural es ¿existe una noción de forcing que tenga la condición de la cadena numerable cuya extensión genérica modele $\diamondsuit$? De acuerdo a [4, VII Ejercicio H9], siempre que $\mathbb{P} \in M$ satisface $M \models$ "$\mathbb{P}$ tiene la condición de la cadena numerable" y G es un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M con $M[G] \models \diamondsuit$, obtenemos que $M \models \diamondsuit$. De esta forma, es imposible probar la consistencia de $\diamondsuit$ con una noción de forcing que tenga la condición de la cadena numerable.

[1] Keith J. Devlin, *Variations on $\diamondsuit$*, The Journal of Symbolic Logic, Vol. 44, No. 1 (1979), 52.

[2] P. C. Eklof, *Whitehead's problem is undecidable* Amer. Math. Monthly (1976). no 83, 780-788.

[3] J. Gregory, *Higher Souslin trees and the generalized continuum hypothesis* J. Symbolic Logic 41 (1976), no. 3, 663-671.

[4] K. Kunen, *Set theory. An introduction to independence proofs*, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, vol. 102, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1980.

[5] A. J. Ostaszewski, *On countably compact, perfectly normal spaces*, J. London Math. Soc. 14 (1976), 505-516.

[6] Derek J. S. Robinson, *A course in the Theory of Groups*, Graduate texts in Mathematics, vol. 80, Springer-Verlag, New York, second edition, 1996.

[7] Roitman, Judy, *Basic S and L*, Handbook of Set-Theoretic Topology, (K. Kunen and J.E. Vaughan, eds.), North-Holland, Amsterdam, 1984, pp. 295-326.

[8] J. J. Rotman, *An introduction to the theory of groups*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 148 Springer-Verlag, New York, fourth edition, 1995.