



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

---

FACULTAD DE CIENCIAS

Primeros resultados sobre la existencia  
de ciclos hamiltonianos en la suma  
generalizada de digráficas

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:  
MATEMÁTICA

PRESENTA:  
NARDA CORDERO MICHEL

DIRECTORES DE TESIS:  
HORTENSIA GALEANA SÁNCHEZ  
ILÁN ABRAHAM GOLDFEDER ORTIZ



CIUDAD UNIVERSITARIA, D.F.

2014



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



## Hoja de datos del jurado

1. Datos del alumno  
Cordero  
Michel  
Narda  
56890921  
Universidad Nacional Autónoma de México  
Facultad de Ciencias  
Matemáticas  
304684201
2. Datos del tutor  
Dra  
Hortensia  
Galeana  
Sánchez
3. Datos del co-tutor  
Mat  
Ilán Abraham  
Goldfeder  
Ortiz
4. Datos del sinodal 1  
Dr  
Bernardo  
Llano  
Pérez
5. Datos del sinodal 2  
Dra  
Eugenia  
O'Reilly  
Regueiro
6. Datos del sinodal 3  
Dra  
María del Rocío  
Sánchez  
López
7. Datos de la tesis  
Primeros resultados sobre la existencia de ciclos hamiltonianos  
en la suma generalizada de digráficas  
54 p.  
2014



*A mi madre*



## Agradecimientos

A la UNAM y a la Facultad de Ciencias les agradezco la doble formación que recibí y el haberme albergado en sus muros y pastos todos estos años.

A los miembros del jurado por su cuidadosa lectura.

A Memo Neuman por haber insistido tanto en que estudiara matemáticas, si no fuera por él quizá habría errado el tiro por más de una facultad de distancia.

A Edith Corina le doy las gracias por todos los semestres que me dio clase, porque me habría gustado hacer mi tesis con ella si no se hubieran acabado mis optativas de álgebra cuando me quedaba toda la carrera por delante.

A Lupe Lucio por haberme dado la oportunidad de aprender desde el otro lado del aula, dentro y fuera de clase, por enseñarme a trabajar en equipo y por su manera tan ecuánime de lidiar con los tropiezos.

A Mónica Clapp por arreglarme la vida con aquel curso de análisis. Cambié un depresión vitalicia por cuatro años extra de licenciatura.

A Hortensia por tener las puertas abiertas para que nosotros, sus alumnos, experimentemos lo que puede ser la investigación y por darme a mí, con su tranquilidad y su confianza, el espacio para tener mis propias ideas.

A Ilán, el gurú, que siempre tiene una respuesta para mis preguntas.

A mis tutores les agradezco infinitamente el trabajo de estos meses, su dedicación y su disposición, porque consiguieron que para mí hacer la tesis fuera un vaivén entre la emoción y el gozo.

A mi hermana.

A Triana por la sonrisa que me queda después de vernos.

A mis amigos, Patricio y Ambriz.

A Mariana por todo su amor y por el mío también.

A mi madre por darme el tiempo.





# Índice

<b>Resumen</b>	<b>vii</b>
<b>Introducción</b>	<b>ix</b>
<b>1 Preliminares</b>	<b>1</b>
<b>2 Resultados</b>	<b>5</b>
2.1 Resultados previos y auxiliares . . . . .	5
2.2 Resultados principales . . . . .	14
<b>3 Comentarios finales</b>	<b>51</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>53</b>



# Resumen

En el estudio de las digráficas ha sido de interés encontrar condiciones para asegurar la existencia de ciclos hamiltonianos. En esta tesis trabajaremos con sumas generalizadas de digráficas, que son aquellas que se obtienen a partir de una familia de digráficas mutuamente ajenas poniendo exactamente una flecha entre cualesquiera dos vértices de sumandos distintos, probaremos que si una suma es fuertemente conexa y tiene un factor de dos ciclos adecuados entonces es hamiltoniana.



# Introducción

En las últimas décadas se han estudiado algunas generalizaciones de torneos y digráficas semicompletas, que son las clases de digráficas mejor conocidas, con el objetivo de comprobar cuáles de los resultados conocidos se pueden extender a dichas generalizaciones. En [1] y [2], Bang-Jensen encontró condiciones para asegurar la existencia de ciclos hamiltonianos en digráficas localmente semicompletas y localmente semicompletas en flechas, donde las localmente semicompletas en flechas son aquellas en las que para cada vértice las digráfica inducidas por sus invecinos y por sus exvecinos son semicompletas y las localmente torneos en flechas son en las que para dos vértices adyacentes,  $x$  y  $y$ , todo invecino (exvecino) de  $x$  es adyacente a todo invecino (exvecino) de  $y$ . Para el caso de las digráficas localmente torneos en flechas probó que si son fuertemente conexas y tienen un factor de ciclos, es decir una subdigráfica generadora que consiste de ciclos mutuamente ajenos, entonces se tiene la hamiltonicidad. Estas dos condiciones son suficientes para asegurar la existencia de un ciclo hamiltoniano, no sólo en los localmente torneos en flechas sino en algunas otras digráficas que mencionaremos más tarde, en este trabajo veremos que no son suficientes para afirmar la hamiltonicidad en una suma generalizada, sin embargo buscaremos requisitos extra que nos la proporcionen.

En [6], Bang-Jensen, Gutin y Huang probaron un resultado similar para las digráficas multipartitas semicompletas, es decir, para las digráficas que se obtienen a partir de una gráfica  $k$ -partita donde  $k \geq 2$  sustituyendo cada arista por una flecha o por un par de flechas simétricas. La diferencia es que le pidieron una característica extra al factor para demostrar que si una digráfica multipartita semicompleta es fuertemente conexa y tiene un buen factor de ciclos entonces es hamiltoniana. Como consecuencia de este resultado se tienen el teorema de Gutin por un lado y Häggkvist y Manoussakis por otro, donde afirman que una digráfica bipartita semicompleta es hamiltoniana si

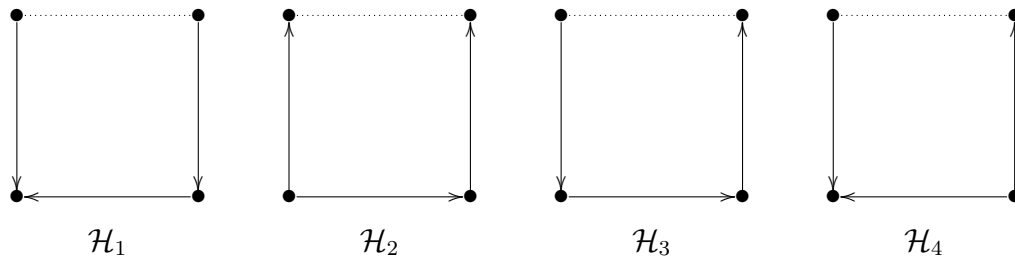


Figura 1: Las digráficas  $\mathcal{H}_i$  tienen las tres flechas marcadas y no tienen ninguna flecha en la línea punteada. Sin embargo cualquier otra flecha está permitida.

y sólo si es fuerte y tiene un factor de ciclos, y el teorema de Gutin donde dice que una digráfica multipartita semicompleta ordinaria es hamiltoniana si y sólo si es fuerte y tiene un factor.

Más tarde Bang-Jensen y Gutin en la compilación de generalizaciones de torneos [5], citan algunos resultados de hamiltonicidad para digráficas localmente in-semicompletas, digráficas localmente semicompletas extendidas y multipartitas semicompletas dirregulares, donde los factores de ciclos y los quasi factores, que son subdigráficas generadoras que consisten de ciclos y una trayectoria ajenos dos a dos, vuelven a tener un papel importante.

Luego en [3] Bang-Jensen hizo un estudio de las digráficas localmente semicompletas en flechas fuertemente conexas que son una generalización no muy amplia de las digráficas semicompletas y bipartitas semicompletas, concluyó que toda digráfica localmente semicompleta en flechas fuerte es una semicompleta, una bipartita semicompleta o una extensión de un ciclo. Sin embargo, Galeana y Goldfeder por un lado [9] y Wang y Wang por otro [13] probaron que esta clasificación no abarcaba todas las posibilidades y la completaron, finalmente en [9] Galeana y Goldfeder proporcionaron una clasificación completa de la digráficas localmente semicompletas en flechas.

Fue también en [3] que Bang-Jensen utilizó las digráficas  $\mathcal{H}_i$  para caracterizar algunas generalizaciones de las digráficas semicompletas y bipartitas semicompletas, donde  $i = 1, 2, 3, 4$ . Las  $\mathcal{H}_i$  son las cuatro orientaciones posibles de una semitrayectoria de longitud 3, en las que los vértices extremos son necesariamente no adyacentes. Véase la figura 1.

Bang-Jensen estudió las digráficas localmente semicompletas en flechas

que resultaron ser las  $\{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2\}$ -libres, además conjeturó que las digráficas  $\mathcal{H}_i$ -libres fuertemente conexas y que poseen un factor de ciclos son hamiltonianas para  $i = 1, 2, 3, 4$ . Las pruebas de dicha conjetura para  $i = 1, 2$  la hicieron Wang y Wang en [13] cuando estudiaron las digráficas localmente in-semicompletas en flechas y las localmente ex-semicompletas en flechas, que son las  $\mathcal{H}_1$ -libres y las  $\mathcal{H}_2$ -libres, respectivamente; la prueba para  $i = 3$  la hicieron Galeana, Goldfeder y Urrutia cuando estudiaron las digráficas 3-quasi-transitivas fuertes que son las  $\mathcal{H}_3$ -libres [11] y, finalmente, para  $i = 4$  lo demostraron Galeana y Goldfeder en su trabajo [10].

Para terminar, Galeana trabajó con la suma de digráficas núcleo perfectas para dar una nueva caracterización de las gráficas perfectas [8], dicha publicación es el único antecedente de sumas como las que estudiaremos en este trabajo.





# Capítulo 1

## Preliminares

**Definición 1.** Una **digráfica**  $D$  consiste de un conjunto finito y no vacío  $V(D)$  de objetos llamados vértices y un conjunto finito  $F(D)$  de parejas ordenadas de vértices distintos a las que llamaremos flechas. Llamaremos **conjunto de vértices** a  $V(D)$  y **conjunto de flechas** a  $F(D)$ . Llamamos **orden** de  $D$  al número de vértices de  $D$  y **tamaño** de  $D$  al número de flechas en  $D$ . Si el conjunto de flechas de  $D$  es vacío diremos que  $D$  es **vacía**.

Si  $f = (u, v) \in F(D)$  diremos que  $f$  **incide desde**  $u$  y que  $f$  **incide hacia**  $v$ . Además diremos que  $u$  es **invecino** de  $v$  y  $v$  es **exvecino** de  $u$ , o bien, que  $u$  y  $v$  son **adyacentes**. A  $u$  y  $v$  los llamaremos los **extremos** de  $f$ .

**Definición 2.** Sean  $D$  una digráfica y  $u \in V(D)$ . El **ingrado** de  $u$  en  $D$ , denotado por  $\delta_D^-(u)$ , es

$$\delta_D^-(u) = |\{w \in V(D) | w \text{ incide hacia } u\}|.$$

El **exgrado** de  $u$  en  $D$ , denotado por  $\delta_D^+(u)$ , es

$$\delta_D^+(u) = |\{w \in V(D) | w \text{ incide desde } u\}|.$$

El **grado** de  $u$  en  $D$ , es  $\delta_D(u) = \delta_D^-(u) + \delta_D^+(u)$ .

**Definición 3.** Diremos que  $H$  es **subdigráfica** de  $D$  si  $H$  y  $D$  son digráficas tales que  $V(H) \subseteq V(D)$  y  $F(H) \subseteq F(D)$ . Si  $V(H) = V(D)$ , diremos que  $H$  es **subdigráfica generadora** (o **factor**) de  $D$ .

**Definición 4.** Sea  $D$  una digráfica y  $S$  un subconjunto de  $V(D)$ , la **subdigráfica de  $D$  inducida por  $S$** , denotada por  $D[S]$ , está definida como:

$$V(D[S]) = S \text{ y } (u, v) \in F(D[S]) \text{ si y sólo si } u, v \in S \text{ y } (u, v) \in F(D).$$

**Definición 5.** Sea  $D$  una digráfica. Un  $xy$ -**semicamino** en  $D$  es una sucesión de vértices  $W = (x = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = y)$  tal que  $(x_i, x_{i+1}) \in F(D)$  o  $(x_{i+1}, x_i) \in F(D)$  donde  $0 \leq i \leq n - 1$ . La **longitud** de  $C$ , denotada por  $l(C)$ , es  $n$ , es decir  $l(C) = n$ . Un  $xy$ -**camino** en  $D$  es una sucesión de vértices  $W = (x = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = y)$  tal que  $(x_i, x_{i+1}) \in F(D)$  para cada  $i$ ,  $0 \leq i \leq n - 1$ . Una **semitrayectoria (trayectoria)** es un semicamino (camino) en el que no se repiten vértices. Un **semicamino cerrado (camino cerrado)** empieza y termina en el mismo vértice. Un **semiciclo** es un semicamino cerrado de longitud mayor o igual que 2, en el que no se repiten vértices, salvo el primer y el último vértice, y en el que no se repiten flechas. Un **ciclo** es un camino cerrado de longitud mayor o igual que 2, en el que no se repiten vértices salvo el primer y el último vértice.

**Definición 6.** Una trayectoria (ciclo)  $W$  en una digráfica  $D$  es **hamiltoniana (hamiltoniano)** si  $V(W) = V(D)$ . Una digráfica  $D$  es **hamiltoniana** si tiene un ciclo hamiltoniano.

**Definición 7.** Sean  $P = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)$  y  $Q = (y_0, y_1, y_2, \dots, y_m)$  dos caminos en una digráfica  $D$ . Diremos que  $P$  y  $Q$  son **ajenos** si  $V(P) \cap V(Q) = \emptyset$  y que son **ajenos en flechas** si  $F(P) \cap F(Q) = \emptyset$ .

En una trayectoria o un ciclo  $P = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)$  (donde  $x_0 = x_n$  si  $P$  es un ciclo), usaremos la notación siguiente:

$$(x_i, P, x_j) = (x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_j) \text{ para } 1 \leq i \leq j \leq n.$$

Notemos que si  $x_i \neq x_j$ ,  $(x_i, P, x_j)$  es una trayectoria, pues tendremos que  $x_s \neq x_r$  si  $s \neq r$  para  $i \leq s, r \leq j$ . En este caso diremos que  $(x_i, P, x_j)$  es **subtrayectoria** de  $P$ .

**Definición 8.** Sea  $D$  una digráfica con el conjunto de vértices  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ , y sean  $G_1, G_2, \dots, G_n$  digráficas cuyos conjuntos de vértices son ajenos dos a dos. La **composición**  $D[G_1, G_2, \dots, G_n]$  es la digráfica  $L$  con el conjunto de vértices  $V(G_1) \cup V(G_2) \cup \dots \cup V(G_n)$  y conjunto de flechas  $(\bigcup_{i=1}^n F(G_i)) \cup \{(g_i, g_j) \mid g_i \in V(G_i), g_j \in V(G_j) \text{ y } (v_i, v_j) \in F(D)\}$ .

**Definición 9.** Sea  $D$  una digráfica. Diremos que  $D$  tiene un **factor de ciclos** si existen ciclos  $C_1, C_2, \dots, C_k$  en  $D$  tales que  $V(D) = \bigcup_{i=1}^k V(C_i)$  y  $V(C_i) \cap V(C_j) = \emptyset$  si  $i \neq j$ ,  $1 \leq i, j \leq k$ .

**Definición 10.** Una digráfica  $D$  es **conexa** si y sólo si para cualesquiera dos vértices  $u$  y  $v$  en  $D$  existe algún  $uv$ -semicamino ( $uv$ -semitrayectoria).

Una digráfica  $D$  es **fuertemente conexa** si para cualesquiera  $u, v \in V(D)$  existe un  $uv$ -camino (trayectoria).

**Definición 11.** Sea  $D$  una digráfica, un conjunto  $I \subseteq V(D)$  es **independiente** si no hay flechas con ambos extremos en  $I$ .

**Definición 12.** Una digráfica  $D$  es **bipartita** si existe una partición de  $V(D)$  en dos conjuntos independientes  $V_1$  y  $V_2$ .

**Definición 13.** Una digráfica  $D$  es **semicompleta** si para cualesquiera  $u, v \in V(D)$  al menos una se cumple  $(u, v) \in F(D)$  o  $(v, u) \in F(D)$ .

**Definición 14.** Una digráfica  $D$  es **bipartita semicompleta** si existe una partición de  $V(D)$  en dos conjuntos independientes  $V_1$  y  $V_2$  tales que para todo  $u \in V_1$  y  $v \in V_2$  se tiene que  $u$  y  $v$  son adyacentes.

**Definición 15.** Sea  $D$  una digráfica. Si  $X$  y  $Y$  son subconjuntos ajenos del conjunto  $V(D)$ , diremos que  $X$  **domina a**  $Y$  y que  $Y$  **es dominado por**  $X$  si para cada  $u$  en  $X$  y  $v$  en  $Y$  se tiene que  $(u, v) \in F(D)$  y no existe ninguna flecha de  $Y$  a  $X$ . Si dos subdigráficas ajenas  $G$  y  $H$  de  $D$  son tales que  $V(G)$  domina a  $V(H)$  diremos que  $G$  **domina a**  $H$ .

**Definición 16.** Sea  $D$  una digráfica. La digráfica **recíproca** de  $D$ , denotada  $D^-$ , es aquella que tiene el conjunto de vértices  $V(D^-) = V(D)$  y el conjunto de flechas  $F(D^-) = \{(u, v) \mid \text{la flecha } (v, u) \text{ está en } F(D)\}$ .

**Definición 17.** Sea  $D$  una digráfica y sean  $C_1 = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_0)$  y  $C_2 = (y_0, y_1, \dots, y_{m-1}, y_0)$  dos ciclos ajenos en vértices de  $D$ . Diremos que existe un **par bueno** de flechas en  $D$ , si para algunos  $i$  y  $j$  se tiene que  $(x_i, y_j), (y_{j-1}, x_{i+1})$  son flechas de  $D$ , con  $0 \leq i \leq n-1$  y  $0 \leq j \leq m, i+1 \pmod n$  y  $j-1 \pmod m$ .

**Definición 18.** Sea  $P = (x_0, x_1, \dots, x_s)$  una trayectoria en una digráfica  $D$  y sea  $Q = (y_0, y_1, \dots, y_t)$  una trayectoria en  $D - V(P)$ . Diremos que  $P$  **se puede insertar en**  $Q$  si existe un subíndice  $i \in \{0, \dots, t-1\}$  tal que  $(y_i, x_0)$  y  $(x_s, y_{i+1})$  son elementos en  $F(D)$ . De hecho,  $Q$  se puede extender a una nueva  $y_0 y_t$ -trayectoria  $Q' = (y_0, Q, y_i) \cup (y_i, x_0) \cup (x_0, P, x_s) \cup (x_s, y_{i+1}) \cup (y_{i+1}, Q, y_t)$ .

Se puede hacer una **inserción múltiple** de  $P$  en  $Q$  si existen enteros  $i_1 = 1 < i_2 < \dots < i_m = s + 1$  tales que, para cada  $k = 2, 3, \dots, m$ , la trayectoria  $P_k = (x_{i_{k-1}}, P, x_{i_k})$  se puede insertar en  $Q$ . La sucesión de trayectorias  $P_k, k = 2, 3, \dots, m$ , es una **partición de inserción múltiple** de  $P$ . Se definen de manera similar la inserción y la inserción múltiple para los casos en que  $Q$  es un ciclo.

**Definición 19.** Sean  $D_1$  y  $D_2$  dos digráficas ajenas en vértices. Si una digráfica  $D$  es tal que:

- $V(D) = V(D_1) \cup V(D_2)$ ,
- las subdigráficas inducidas por los conjuntos  $V(D_1)$  y  $V(D_2)$  son  $D_1$  y  $D_2$  respectivamente y
- entre cualesquiera dos vértices, uno en  $V(D_1)$  y otro en  $V(D_2)$ , existe exactamente una flecha en  $D$

entonces diremos que  $D$  es una **suma generalizada** de  $D_1$  y  $D_2$ . Llamaremos **flechas interiores** a los elementos del conjunto  $F(D_1) \cup F(D_2)$  y **flechas exteriores** a los de  $F(D) \setminus (F(D_1) \cup F(D_2))$ .

Al conjunto de todas las digráficas que son una suma generalizada de  $D_1$  y  $D_2$  lo llamaremos la suma generalizada, o simplemente la suma, de  $D_1$  y  $D_2$  y lo denotaremos por  $D_1 \oplus D_2$ .

Observemos que la tercera condición de la definición nos dice que si  $D$  es una digráfica en  $D_1 \oplus D_2$ , entonces la subdigráfica generadora de  $D$  que tiene el conjunto de flechas  $F(D) \setminus (F(D_1) \cup F(D_2))$  es una orientación de una gráfica bipartita completa. Así, dadas dos digráficas puede haber más de una suma generalizada .

# Capítulo 2

## Resultados

### 2.1 Resultados previos y auxiliares

**Teorema 19.1.** *Sea  $D$  una digráfica y sean  $C_1 = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_0)$  y  $C_2 = (y_0, y_1, \dots, y_{m-1}, y_0)$  dos ciclos ajenos en vértices de  $D$  para los que existe un par bueno de flechas. Entonces  $D$  tiene un ciclo cuyo conjunto de vértices es  $V(C_1) \cup V(C_2)$ .*

*Demostración.* Como existe un par bueno de flechas en  $D$ , para algunos  $i$  y  $j$  en  $\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$  y  $\{0, 1, 2, \dots, m-1\}$ , respectivamente, se tiene que  $(x_i, y_j), (y_{j-1}, x_{i+1}) \in F(D)$  de donde el ciclo  $C = (x_i, y_j) \cup (y_j, C_2, y_{j-1}) \cup (y_{j-1}, x_{i+1}) \cup (x_{i+1}, C_1, x_i)$  es un ciclo en  $D$  tal que  $V(C) = V(C_1) \cup V(C_2)$ .  $\square$

**Proposición 20.** *Sea  $D$  una digráfica fuertemente conexa de orden mayor o igual que dos. Dada cualquier partición de  $V(D)$  en dos conjuntos,  $V_1$  y  $V_2$ , existen al menos una  $V_1V_2$ -flecha y al menos una  $V_2V_1$ -flecha en  $D$ .*

*Demostración.* Sea  $D$  una digráfica fuertemente conexa con al menos dos vértices y sean  $V_1$  y  $V_2$  dos subconjuntos de  $V(D)$  que formen una partición.

Tomemos  $u$  un vértice en  $V_1$  y  $v$  un vértice en  $V_2$ . Como  $D$  es fuertemente conexa sabemos que existe un  $uv$ -camino, llamémosle  $\gamma$ , de la forma  $\gamma = (u = x_0, x_1, \dots, x_n = v)$  donde  $x_0 \in V_1$  y  $x_n \in V_2$ .

Sea  $s = \min\{i \mid x_i \in V_2\}$ . Por la manera en que elegimos  $s$  se tiene que  $x_{i-1} \in V_1$  y  $x_i \in V_2$ , de donde  $(x_{i-1}, x_i)$  es una  $V_1V_2$ -flecha en  $D$ .

De manera análoga se prueba que existe una  $V_2V_1$ -flecha.  $\square$

**Proposición 21.** *Sean  $D_1$  y  $D_2$  dos digráficas fuertemente conexas y sean  $x_1, x_2$  y  $y_1, y_2$  dos parejas de vértices no necesariamente distintos en  $D_1$  y*

$D_2$ , respectivamente. La digráfica  $D$  con el conjunto de vértices  $V(D) = V(D_1) \cup V(D_2)$  y el conjunto de flechas  $F(D) = F(D_1) \cup F(D_2) \cup \{(x_1, y_1), (y_2, x_2)\}$  es fuertemente conexa.

*Demostración.* Sean  $u, v \in V(D)$ . Veamos que existen un  $uv$ -camino y un  $vu$ -camino en  $D$ .

*Caso 1.* Los vértices  $u$  y  $v$  están en  $V(D_1)$ .

Como  $D_1$  es fuertemente conexa, sabemos que en  $D_1$  existen un  $uv$ -camino, llamémosle  $P_1$ , y un  $vu$ -camino, llamémosle  $P_2$ . Como  $V(D_1) \subseteq V(D)$  y  $F(D_1) \subseteq F(D)$ , se sigue que  $P_1$  y  $P_2$  son caminos también en  $D$ .

*Caso 2.* Los vértices  $u$  y  $v$  están en  $V(D_2)$ .

Es similar al caso anterior.

*Caso 3.* El vértice  $u$  está en  $V(D_1)$  y el vértice  $v$  está en  $V(D_2)$ .

Como  $u, x_1 \in V(D_1)$  y  $D_1$  es fuerte, sabemos que existe algún  $ux_1$ -camino en  $D_1$ , llamémosle  $P_1$ , que es también un camino en  $D$  y como  $v, y_1 \in V(D_2)$  y  $D_2$  es fuerte, existe algún  $y_1v$ -camino, nombrémosle  $P_2$ , en  $D_2$  y por lo tanto en  $D$ .

Entonces  $P = P_1 \cup (x_1, y_1) \cup P_2$  es un  $uv$ -camino en  $D$ .

Similarmente, existen un  $x_2u$ -camino, nombrémosle  $P_3$ , y un  $vy_2$ -camino, llamémosle  $P_4$ , en  $D$ . De donde,  $P' = P_4 \cup (y_2, x_2) \cup P_3$  es un  $vu$ -camino en  $D$ .

De los tres casos podemos concluir que  $D$  es fuertemente conexa.  $\square$

**Proposición 22.** (Camion [7]) Si  $D$  es una digráfica semicompleta y fuertemente conexa entonces es hamiltoniana.

*Demostración.* Sea  $D$  una digráfica como en la hipótesis. Supongamos que el orden de  $D$  es un número  $p$  mayor o igual que 2, ya que si el orden de  $D$  es uno, la digráfica es trivial y por tanto no tiene ciclos hamiltonianos.

Notemos que en  $D$  hay al menos un ciclo, ya que para dos vértices distintos  $x$  y  $y$  en  $V(D)$  se tiene que, como  $D$  es fuertemente conexa, existen una  $xy$ -trayectoria  $T_1$  y una  $yx$ -trayectoria  $T_2$ . De donde, el camino cerrado  $W = T_1 \cup T_2$  contiene como subsucesión un ciclo de longitud mayor o igual que 2.

Ahora, sea  $t = \max\{l(\gamma) \mid \gamma \text{ es un ciclo en } D\}$  y sea  $C = (x_0, x_1, \dots, x_{t-1}, x_0)$  un ciclo en  $D$  tal que  $l(C) = t$ . Entonces  $t = p$ .

Supongamos por contradicción que  $t < p$ .

Como  $t < p$  hay al menos un vértice  $w$  en el conjunto  $V(D) \setminus V(C)$ . Además, como  $D$  es semicompleta,  $w$  es adyacente a todos los vértices de  $C$ .

*Caso 1.* Existen una  $wC$ -flecha y una  $Cw$ -flecha en  $F(D)$ .

Como hay una  $Cw$ -flecha se tiene que  $(x_r, w) \in F(D)$  para algún  $r$ ,  $0 \leq r \leq t-1$ . Tomemos  $s = \min\{i \mid (w, x_{r+i}) \in F(D), i > 0\}$  donde  $r+i$  módulo  $t$ , así tanto  $(x_{r+s-1}, w)$  como  $(w, x_{r+s})$  son flechas en  $D$  y  $C' = (x_{r+s-1}, w) \cup (w, x_{r+s}) \cup (x_{r+s}, C, x_{r+s-1})$  es un ciclo en  $D$  cuya longitud es  $l(C') = t+1$  que es estrictamente mayor que la de  $C$ , lo cual es una contradicción.

*Caso 2.* No existen  $wC$ -flechas.

Entonces  $(x_i, w) \in F(D)$  para todo  $i$ ,  $0 \leq i \leq t-1$  y como  $D$  es fuertemente conexa existe una  $wx_0$ -trayectoria  $T$ , donde  $T = (w = v_0, v_1, \dots, v_n = x_0)$ . Sea  $s = \min\{j \mid v_j \in V(C)\}$ , observemos que  $v_0, v_1, \dots, v_{s-1}$  son vértices en el conjunto  $V(D) \setminus V(C)$  y que  $v_s = x_r$  para algún  $r$ ,  $0 \leq r \leq t-1$ . Además, el par  $(x_{r-1}, w) = (x_{r-1}, v_0)$  y  $(v_{s-1}, v_s) = (v_{s-1}, x_r)$  son flechas de  $D$ .

Por lo tanto  $C' = (x_{r-1}, v_0) \cup (v_0, T, v_{s-1}) \cup (v_{s-1}, x_r) \cup (x_r, C, x_{r-1})$  es un ciclo en  $D$  cuya longitud es mayor que la de  $C$ , lo cual es imposible.

*Caso 3.* No existen  $Cw$ -flechas.

Análogamente, se tiene que  $(w, x_i) \in F(D)$  para todo  $i$ ,  $0 \leq i \leq t-1$  y como  $D$  es fuertemente conexa existe una  $u_0w$ -trayectoria  $T' = (x_0 = u_0, u_1, \dots, u_n = w)$ . Sea  $b = \max\{j \mid u_j \in V(C)\}$ , así se sigue que  $u_{b+1}, u_{b+2}, \dots, u_n$  son vértices en el conjunto  $V(D) \setminus V(C)$  y que  $u_b = x_a$  para algún  $a$ ,  $0 \leq a \leq t-1$ . Además, tenemos que  $(w, x_{a+1}) = (u_n, x_{a+1})$  y  $(u_b, u_{b+1}) = (x_a, u_{b+1})$  son flechas de  $D$ .

Por lo tanto  $C'' = (u_n, x_{a+1}) \cup (x_{a+1}, C, x_a) \cup (x_a, u_{b+1}) \cup (u_{b+1}, T', u_n)$  es un ciclo en  $D$  cuya longitud es mayor que la de  $C$ , lo cual es imposible.

De lo anterior tenemos que si un ciclo es de longitud máxima en  $D$  entonces es un ciclo hamiltoniano. Además dichos ciclos siempre existen pues la digráfica es finita y ya vimos que siempre tiene al menos un ciclo. Podemos concluir así que  $D$  es hamiltoniana. □

**Teorema 22.1.** (*Gutin [12], Häggkvist y Manoussakis [6]*) Si  $D$  es una digráfica bipartita semicompleta fuertemente conexa y que posee un factor de dos ciclos, entonces  $D$  es hamiltoniana.



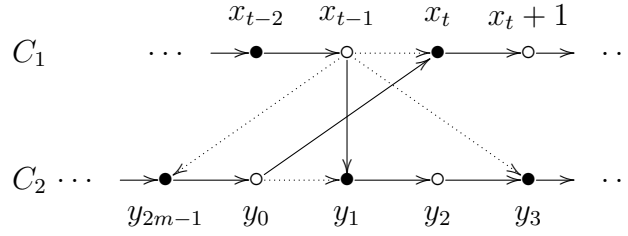


Figura 2.1: Un ciclo que recorre los vértices de  $C_1$  y  $C_2$ .

*Demostración.* Sea  $D$  una digráfica como en la hipótesis y sean  $C_1 = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_{2n-1}, x_0)$  y  $C_2 = (y_0, y_1, y_2, \dots, y_{2m-1}, y_0)$  los ciclos de un factor, estos tienen longitud par pues  $D$  es bipartita. Llamemos  $V_1$  y  $V_2$  a los conjuntos de la bipartición.

Notemos que como  $C_1$  y  $C_2$  forman un factor, se tiene que  $V(C_1) \cup V(C_2) = V(D)$ . Entonces para ver si  $D$  es hamiltoniana, buscamos un ciclo  $C$  tal que  $V(C) = V(C_1) \cup V(C_2)$  y recordemos que, al ser  $D$  fuertemente conexa, existen una  $C_1C_2$ -flecha y una  $C_2C_1$ -flecha.

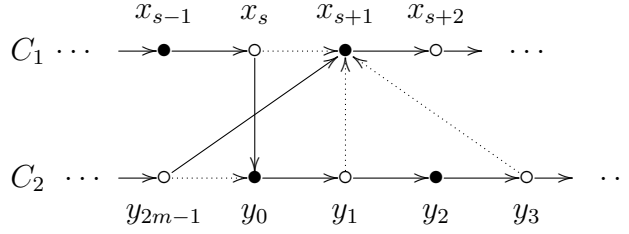
*Caso 1.* Existe  $x \in V(C_1)$  tal que para todo  $y \in V(C_2)$ ,  $(y, x) \notin F(D)$ .

Supongamos sin perder generalidad que  $x_0$  es un vértice al que no llegan flechas desde  $C_2$ . Dado que existe alguna  $C_2C_1$ -flecha, podemos encontrar un  $x_i \in V(C_1)$  tal que existe  $C_2x_i$ -flecha.

Sea  $t = \min\{i \mid \text{existe una } C_2x_i\text{-flecha en } F(D), 1 \leq i \leq 2n-1\}$ . Por ser  $D$  bipartita, cualesquiera dos vértices adyacentes pertenecen a distintos elementos de la partición. Supongamos sin perder generalidad que  $x_t \in V_1$ , por lo tanto  $x_{t-1} \in V_2$ . Además, por ser  $D$  bipartita semicompleta, cualesquiera dos vértices en distintos elementos de la partición son adyacentes, en particular  $x_{t-1}$  lo es a todos los vértices de  $C_2$  que están en  $V_1$ . Por la elección de  $t$ , sabemos que existe  $y \in V(C_2)$  tal que  $(y, x_t) \in F(D)$ , supongamos sin pérdida de generalidad que  $(y_0, x_t) \in F(D)$  y por lo tanto  $y_0 \in V_2$ . Dado que  $y_0$  y  $y_1$  son adyacentes,  $y_1 \in V_1$ , y como  $x_{t-1}$  es adyacente a todos los vértices de  $C_2$  que están en  $V_1$ , lo es a  $y_1$ . Pero, por la manera en que elegimos  $t$ , se tiene que  $(y_1, x_{t-1}) \notin F(D)$ , así  $(x_{t-1}, y_1) \in F(D)$ .

Por lo tanto  $C = (y_0, x_t) \cup (x_t, C_1, x_{t-1}) \cup (x_{t-1}, y_1) \cup (y_1, C_2, y_0)$ , es un ciclo tal que  $V(C) = V(C_1) \cup V(C_2)$ . Entonces  $V(C) = V(D)$ . Véase la figura 2.1.

*Caso 2.* Existe  $x \in V(C_1)$  tal que para todo  $y \in V(C_2)$  no existe  $(x, y) \in F(D)$ .

Figura 2.2: Un ciclo que recorre los vértices de  $C_1$  y  $C_2$ .

Supongamos sin perder generalidad que  $x_{2n-1}$  es un vértice del que no salen flechas hacia  $C_2$ . Dado que existe alguna  $C_1C_2$ -flecha, podemos encontrar un  $x_i \in V(C_1)$  tal que existe una  $x_iC_2$ -flecha.

Sea  $s = \text{máx}\{i \mid \text{existe una } x_iC_2\text{-flecha en } F(D), 0 \leq i \leq 2n - 2\}$ . Tenemos entonces que existe  $y \in V(C_2)$  tal que  $(x_s, y) \in F(D)$ . Supongamos sin perder generalidad que  $(x_s, y_0) \in F(D)$  y que  $x_s \in V_2$ . Como  $x_{s+1}$  y  $y_0$  son adyacentes a  $x_s$ , se sigue que  $x_{s+1}$  y  $y_0$  pertenecen a  $V_1$ . De donde,  $x_{s+1}$  es adyacente a todos los vértices de  $C_2$  que están en  $V_2$ , en particular, lo es a  $y_{2m-1}$ , pues éste pertenece a  $V_2$  al ser vecino de  $y_0$ . Pero, por la elección de  $s$ , tenemos que  $(x_{s+1}, y_{2m-1}) \notin F(D)$ , de donde  $(y_{2m-1}, x_{s+1}) \in F(D)$ .

Por lo tanto  $C = (x_s, y_0) \cup (y_0, C_2, y_{2m-1}) \cup (y_{2m-1}, x_{s+1}) \cup (x_{s+1}, C_1, x_s)$ , es un ciclo con  $V(C) = V(C_1) \cup V(C_2)$ . Entonces  $V(C) = V(D)$ . Véase la figura 2.2.

*Caso 3.* Para todo  $x \in V(C_1)$  existen una  $xC_2$ -flecha y una  $C_2x$ -flecha.

Si hubiera algún  $y \in V(C_2)$  tal que para todo  $x \in V(C_1)$  no existe  $(x, y) \in F(D)$  o bien, algún  $y \in V(C_2)$  tal que para todo  $x \in V(C_1)$  no existe  $(y, x) \in F(D)$  la construcción de un ciclo que incluya a todos los vértices de  $D$  es análoga a la que se hizo en los casos 1 y 2, respectivamente. Entonces podemos suponer que para todo  $y \in V(C_2)$  también existen una  $yC_1$ -flecha y una  $C_1y$ -flecha.

Supongamos sin perder generalidad que  $n \geq m$ .

*Caso 3.1.* Existe un par bueno de flechas.

Por lo tanto existen vértices  $x_i \in V(C_1)$  y  $y_j \in V(C_2)$  tales que  $(x_i, y_j) \in F(D)$  y  $(y_{j-1}, x_{i+1}) \in F(D)$ , así  $C = (x_i, y_j) \cup (y_j, C_2, y_{j-1}) \cup (y_{j-1}, x_{i+1}) \cup (x_{i+1}, C_1, x_i)$  es un ciclo en  $D$  tal que  $V(C) = V(C_1) \cup V(C_2)$ . Entonces  $V(C) = V(D)$ . Véase la figura 2.3.

*Caso 3.2.* No existen pares buenos de flechas.

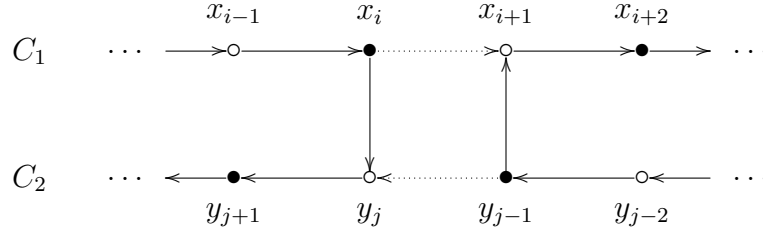


Figura 2.3: Un ciclo construido por medio de un par bueno de flechas.

*Observación 1.* Para cualquier número entero  $k$ , tenemos que existen alguna  $i \in \{0, 1, 2, \dots, 2n - 1\}$  y alguna  $j \in \{0, 1, 2, \dots, 2m - 1\}$  tales que  $k \equiv i \pmod{2n}$  y  $k \equiv j \pmod{2m}$ . Así que  $x_k = x_i$  y  $y_k = y_j$ .

*Observación 2.* Si  $(x_i, y_j) \in F(D)$  se tiene que  $x_{i+h}$  y  $y_{j-h}$  son adyacentes para cualquier  $h$  entera, con  $i+h$  módulo  $2n$  y  $j-h$  módulo  $2m$ . Supongamos sin perder generalidad que  $x_i \in V_1$ , de ahí que  $x_{i-1}, x_{i+1} \in V_2$ , como  $x_{i-2}$  es adyacente a  $x_{i-1}$  y  $x_{i+2}$  lo es a  $x_{i+1}$ , se sigue que  $x_{i-2}, x_{i+2} \in V_1$ . Siguiendo así obtendremos que  $x_{i+2k} \in V_1$  y  $x_{i+2k-1} \in V_2$  para cualquier  $k$  entera. Además  $y_j$  también es adyacente a  $x_i$ , entonces  $y_j \in V_2$ . De aquí que  $y_{j-1}, y_{j+1} \in V_1$ . Por ser  $y_{j-2}$  adyacente a  $y_{j-1}$  y  $y_{j+2}$  adyacente a  $y_{j+1}$  se tiene que  $y_{j-2}, y_{j+2} \in V_2$ . De manera recursiva se ve que  $y_{j-2k} \in V_2$  y  $y_{j-(2k-1)} \in V_1$  para todo entero  $k$ .

De lo anterior y del hecho de que  $D$  es bipartita semicompleta, podemos afirmar que, para cualquier  $k$  entera, se tiene que cada  $x_{i+2k}$  es adyacente a todo  $y_{j-2k}$  pues están en distintos elementos de la partición y que cada  $x_{i+2k-1}$  es adyacente a todo  $y_{j-(2k-1)}$  por la misma razón. Por lo tanto, para cualquier  $h$  entera, como  $h = 2k$  o  $h = 2k - 1$  para algún entero  $k$ , tenemos que  $x_{i+h}$  y  $y_{j-h}$  con adyacentes.

*Observación 3.* Nótese que  $i + \text{mcm}(2n, 2m) \equiv i \pmod{2n}$  y  $j + \text{mcm}(2n, 2m) \equiv j \pmod{2m}$ . Así que, cuando hablamos de las flechas  $(x_{i+h}, y_{j-h})$  y  $(y_{j+h}, x_{i-h})$ , consideramos que  $0 \leq h < \text{mcm}(2n, 2m)$ , pues para  $k$  un número entero tenemos, por el algoritmo de la división, que existen  $h \in \{0, 1, 2, \dots, \text{mcm}(2n, 2m) - 1\}$  y  $r$  un entero tales que  $k = r \text{mcm}(2n, 2m) + h$  de donde  $i+k \equiv i+r \text{mcm}(2n, 2m) + h \equiv i+h \pmod{2n}$  y  $j-k \equiv j-(r \text{mcm}(2n, 2m) + h) \equiv j-h \pmod{2m}$ .

*Observación 4.* Como no hay pares buenos de flechas, si  $(x_i, y_j) \in F(D)$  entonces  $(x_{i+h}, y_{j-h}) \in F(D)$  para cualquier  $1 \leq h < \text{mcm}(2n, 2m)$ , donde

$i + h$  módulo  $2n$  y  $j - h$  módulo  $2m$ .

Supongamos por contradicción que existe algún  $h \in \{1, 2, \dots, \text{mcm}(2n, 2m) - 1\}$  tal que  $(x_{i+h}, y_{j-h}) \notin F(D)$ , tomando  $t = \min\{h \mid (x_{i+h}, y_{j-h}) \notin F(D), 1 \leq h < \text{mcm}(2n, 2m)\}$  se tiene, por la elección de  $t$  que  $(x_{i+(t-1)}, y_{j-(t-1)}) \in F(D)$  y  $(x_{i+t}, y_{j-t}) \notin F(D)$  pero, por la observación 2, tenemos que  $(y_{j-t}, x_{i+t}) \in F(D)$  pues  $x_{i+t}$  y  $y_{j-t}$  son adyacentes. Entonces  $(x_{i+(t-1)}, y_{j-(t-1)})$  y  $(y_{j-t}, x_{i+t})$  es un par bueno de flechas, lo cual es una contradicción con nuestra hipótesis. Por lo tanto  $(x_{i+h}, y_{j-h}) \in F(D)$  para cualquier  $1 \leq h < \text{mcm}(2n, 2m)$ ,  $i + h$  módulo  $2n$  y  $j - h$  módulo  $2m$ . Véase la figura 2.4.

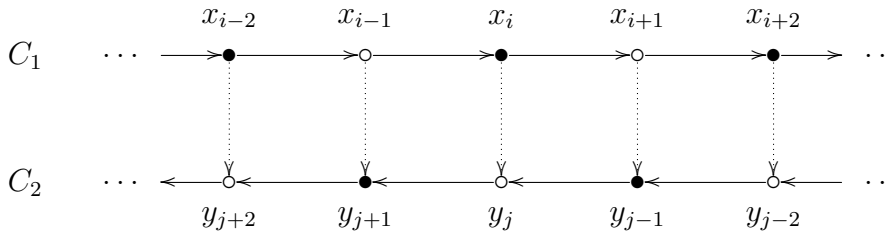


Figura 2.4: No hay pares buenos de flechas.

*Observación 5.* Como no hay pares buenos de flechas, si  $(y_j, x_i) \in F(D)$  entonces  $(y_{j+h}, x_{i-h}) \in F(D)$  para cualquier  $1 \leq h < \text{mcm}(2n, 2m)$ , donde  $i + h$  módulo  $2n$  y  $j - h$  módulo  $2m$ .

Supongamos por contradicción que existe algún  $h \in \{1, 2, \dots, \text{mcm}(2n, 2m) - 1\}$  tal que  $(y_{j+h}, x_{i-h}) \notin F(D)$  y sea  $s = \min\{h \mid (y_{j+h}, x_{i-h}) \notin F(D), 1 \leq h < \text{mcm}(2n, 2m)\}$  se tiene, por la elección de  $s$  que  $(y_{j+(s-1)}, x_{i-(s-1)}) \in F(D)$  y  $(y_{j+s}, x_{i-s}) \notin F(D)$  pero, por la observación 2, podemos asegurar que  $x_{i-s}$  y  $y_{j+s}$  son adyacentes, por lo tanto  $(x_{i-s}, y_{j+s}) \in F(D)$ . Entonces  $(y_{j+(s-1)}, x_{i-(s-1)})$  y  $(x_{i-s}, y_{j+s})$  es un par bueno de flechas, lo cual es una contradicción con nuestra hipótesis. Por lo tanto  $(y_{j+h}, x_{i-h}) \in F(D)$  para cualquier  $1 \leq h < \text{mcm}(2n, 2m)$ ,  $i + h$  módulo  $2n$  y  $j - h$  módulo  $2m$ .

Notemos que la observación 4 nos asegura la existencia de flechas a la derecha de  $(x_i, y_j)$ , mientras que la observación 5 lo hace para flechas a la izquierda de  $(y_j, x_i)$ , sin embargo es indiferente afirmar que hay flechas a la derecha de  $(y_j, x_i)$  por la siguiente propiedad: Si  $q = \text{mcm}(2n, 2m)$ , como  $j + q - h \equiv j - h \pmod{2n}$  e  $i - (q - h) \equiv i + h \pmod{2m}$ ,  $y_{j+q-h} = y_{j-h}$  y

$x_{i-(q-h)} = x_{i+h}$  para cualquier  $0 \leq h < \text{mcm}(2n, 2m)$ , entonces si  $(y_j, x_i) \in F(D)$  se tiene que  $(y_{j-h}, x_{i+h}) \in F(D)$  para cualquier  $1 \leq h \leq \text{mcm}(2n, 2m)$ . Véase la figura 2.5.

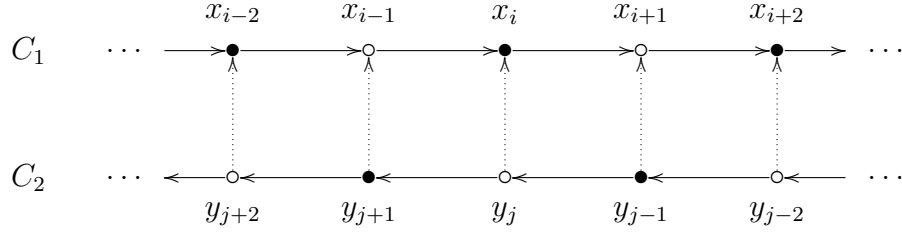


Figura 2.5: No hay pares buenos de flechas.

Continuemos con la prueba.

Por hipótesis tenemos que, para cualquier  $x \in V(C_1)$ , existen una  $xC_2$ -flecha y una  $C_2x$ -flecha. En particular esto ocurre para  $x_0$ , supongamos sin perder generalidad que  $(y_{2m-1}, x_0) \in F(D)$ , entonces  $x_0$  es adyacente a todos los vértices en  $C_2$  con subíndice impar y no lo es a los de subíndice par. Además, como hay alguna  $x_0C_2$ -flecha, existe un  $j$ ,  $1 \leq j \leq m-1$ , tal que  $(x_0, y_{2j-1}) \in F(D)$ .

Notemos que  $j$  no puede ser igual a  $m$ , porque si  $j = m$ , como  $(y_{2m-1}, x_0) \in F(D)$ , por la observación 5,  $(y_{2m-2}, x_1) \in F(D)$  y ésta con  $(x_0, y_{2j-1}) = (x_0, y_{2m-1})$  forman un par bueno de flechas, lo cual es imposible para este caso.

Sea  $t = \text{máx}\{j \mid (x_0, y_{2j-1}) \in F(D), 1 \leq j \leq m-1\}$  se tiene entonces que, por la elección de  $t$ ,  $(x_0, y_{2t-1}) \in F(D)$  y  $(x_0, y_{2(t+1)-1}) \notin F(D)$ , pero como  $x_0$  es adyacente a todos los vértices en  $C_2$  con subíndice impar, lo es a  $y_{2(t+1)-1}$ , de donde  $(y_{2(t+1)-1}, x_0) \in F(D)$ .

Dado que  $(x_0, y_{2t-1}) \in F(D)$ , por la observación 4, tenemos que  $(x_h, y_{2t-1-h}) \in F(D)$  para todo  $1 \leq h < \text{mcm}(2n, 2m)$  y, como  $(y_{2(t+1)-1}, x_0) \in F(D)$ , por la observación 5, se tiene que  $(y_{2(t+1)-1-h}, x_h) \in F(D)$  para todo  $1 \leq h < \text{mcm}(2n, 2m)$ , por comodidad escribamos  $(y_{2(t+1)-1-h}, x_h) = (y_{2t-(h-1)}, x_h)$ . Véase la figura 2.6.

Entonces  $C = (x_0, y_{2t-1}, y_{2t}, x_1, x_2, y_{2t-3}, y_{2t-2}, x_3, \dots, x_{2m-2}, y_{2t-2m+1}, y_{2t-2m+2}, x_{2m-1}) \cup (x_{2m-1}, C_1, x_0)$ .

Donde  $y_{2t-2m-h} = y_{2t-h}$  para cualquier  $h$  entera, pues  $2t - 2m - h \equiv 2t - h \pmod{2m}$ . De aquí que  $C = (x_0, y_{2t-1}, y_{2t}, x_1, x_2, y_{2t-3}, y_{2t-2}, x_3,$

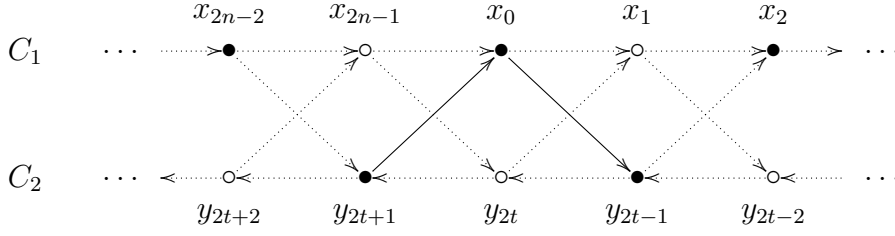


Figura 2.6: Las flechas obligatorias si  $(x_0, y_{2t-1})$  y  $(y_{2(t+1)-1}, x_0)$  son flechas en  $D$ .

$\dots, x_{2m-2}, y_{2t+1}, y_{2t+2}, x_{2m-1}) \cup (x_{2m-1}, C_1, x_0)$  es un ciclo en  $D$  tal que  $V(C) = V(C_1) \cup V(C_2)$ . Entonces  $V(C) = V(D)$ . Véase la figura 2.7.

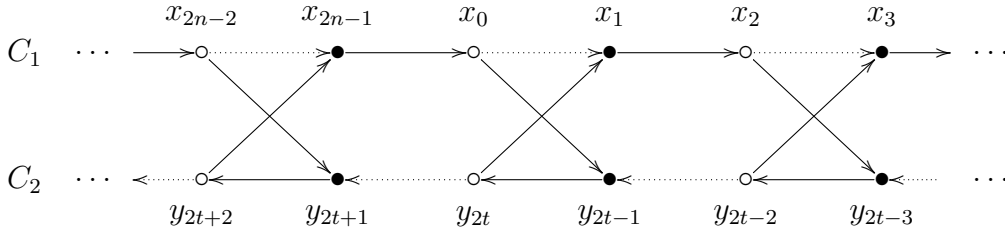


Figura 2.7: Un ciclo cuando no hay pares buenos de flechas.

De todos los casos podemos concluir que existe un ciclo hamiltoniano en  $D$ , como se quería demostrar.  $\square$

A continuación probaremos una propiedad de la digráfica recíproca de una suma que nos será de utilidad más adelante.

**Proposición 23.** Sean  $D_1$  y  $D_2$  dos digráficas. Si  $D \in D_1 \oplus D_2$  entonces  $D^- \in D_1^- \oplus D_2^-$ .

*Demostración.* Sea  $D$  un elemento en  $D_1 \oplus D_2$  y sea  $D^-$  la digráfica recíproca de  $D$ . Entonces tenemos por un lado que  $V(D) = V(D_1) \cup V(D_2)$  y por otro que  $V(D) = V(D^-)$ , de donde  $V(D^-) = V(D_1) \cup V(D_2)$ . Además se tiene que  $V(D_i^-) = V(D_i)$  para  $i = 1, 2$  y de aquí se sigue que  $V(D^-) = V(D_1^-) \cup V(D_2^-)$ .

Ahora consideremos la subdigráfica  $D^-[V(D_1^-)]$  y mostremos que es  $D_1^-$ . Ambas tienen el mismo conjunto de vértices, entonces basta ver que tienen

el mismo conjunto de flechas. Sea  $(u, v) \in D^-[V(D_1^-)]$  esto ocurre si y sólo si  $(u, v)$  es una flecha en  $D^-$  que tiene ambos extremos en  $V(D_1^-)$ , lo cual es cierto si y solamente si  $(v, u)$  es una flecha en  $D$  con ambos extremos en  $V(D_1)$  y esto último si y sólo si  $(u, v) \in F(D_1^-)$ . Por lo tanto  $D^-[V(D_1^-)] = D_1^-$ . De manera análoga se prueba que  $D^-[V(D_2^-)] = D_2^-$ .

Para terminar veamos que entre cualesquiera dos vértices uno en  $v$  y otro en  $V(D_2^-)$  existe exactamente una flecha. Sean  $u \in V(D_1^-)$  y  $v \in V(D_2^-)$ , estos vértices serán adyacentes en  $D^-$  si los son en  $D$  por la definición de  $D^-$ . Como sabemos que  $V(D_i^-) = V(D_i)$  para  $i = 1, 2$  se tiene que  $u \in V(D_1)$  y  $v \in V(D_2)$  y dado que  $D \in D_1 \oplus D_2$  se sigue que  $u$  y  $v$  son adyacentes y que entre ellos existe exactamente una flecha en  $D$ , así concluimos que entre  $u$  y  $v$  existe exactamente una flecha en  $D^-$ .

Por lo tanto  $D^- \in D_1^- \oplus D_2^-$ , como se quería demostrar.  $\square$

## 2.2 Resultados principales

**Proposición 24.** *Sea  $C$  un ciclo de longitud  $n$  y sean  $D_1, D_2, \dots, D_n$  digráficas que tienen una trayectoria hamiltoniana, entonces  $C[D_1, D_2, \dots, D_n]$  posee un ciclo hamiltoniano.*

*Demostración.* Como  $C$  es un ciclo de longitud  $n$  se puede ver como  $C = (y_1, y_2, \dots, y_n, y_1)$ . Consideremos la digráfica  $D = C[D_1, D_2, \dots, D_n]$  en la que asociamos  $y_i$  con  $D_i$  para cada  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Sean  $T_1 = (x_{0_1}, x_{1_1}, x_{2_1}, \dots, x_{k_1})$ ,  $T_2 = (x_{0_2}, x_{1_2}, x_{2_2}, \dots, x_{k_2})$ ,  $\dots$ ,  $T_n = (x_{0_n}, x_{1_n}, x_{2_n}, \dots, x_{k_n})$  las trayectorias hamiltonianas de  $D_1, D_2, \dots, D_n$ , respectivamente.

En  $D$  tenemos que desde cada vértice de  $D_i$  salen flechas a todos los vértices de  $D_{i+1}$  pues  $(y_i, y_{i+1}) \in F(C)$ , para  $i = 1, 2, \dots, n$ , donde  $D_{n+1} = D_1$ , de aquí que  $(x_{k_i}, x_{0_{i+1}}) \in F(D)$  para cada  $i = 1, 2, \dots, n$ . Entonces  $C' = (x_{0_1}, x_{1_1}, \dots, x_{k_1}, x_{0_2}, x_{1_2}, \dots, x_{k_2}, x_{0_3}, x_{1_3}, \dots, x_{k_{n-1}}, x_{0_n}, x_{1_n}, \dots, x_{k_n}, x_{0_1})$  es un ciclo en  $D$  tal que  $V(C') = V(D_1) \cup V(D_2) \cup \dots \cup V(D_n)$ .

Como  $V(D_1) \cup V(D_2) \cup \dots \cup V(D_n) = V(D)$  se tiene que  $V(C') = V(D)$ , por lo tanto  $C'$  es hamiltoniano.  $\square$

A continuación probaremos algunas propiedades de la suma generalizada de digráficas que nos permitirán definir una suma de más de dos digráficas.

**Lema 24.1.** *Sean  $D_1, D_2$  y  $D_3$  tres digráficas mutuamente ajenas. Si  $D' \in D_2 \oplus D_3$  y  $D \in D_1 \oplus D'$ , entonces  $D \in D_2 \oplus D''$  y  $D \in D_3 \oplus D'''$  para algunas digráficas  $D'' \in D_1 \oplus D_3$  y  $D''' \in D_1 \oplus D_2$ .*

*Demostración.* Sean  $D' \in D_2 \oplus D_3$  y  $D \in D_1 \oplus D'$ . Por definición, tenemos que  $V(D') = V(D_2) \cup V(D_3)$  y que  $V(D) = V(D_1) \cup V(D')$ , por lo tanto  $V(D) = V(D_1) \cup V(D_2) \cup V(D_3)$ .

Consideremos primero la subdigráfica de  $D$ ,  $D'' = D[V(D_1) \cup V(D_3)]$ , y veamos que es una suma generalizada de  $D_1$  y  $D_3$ . Sabemos que  $D_1$  y  $D_3$  son ajenas en vértices y que  $V(D'') = V(D_1) \cup V(D_3)$ . Veamos que las subdigráficas inducidas por los conjuntos  $V(D_1)$  y  $V(D_3)$  en  $D''$  son  $D_1$  y  $D_3$ , respectivamente. Sean  $D^1 = D''[V(D_1)]$  y  $D^3 = D''[V(D_3)]$ , así se tiene que  $V(D^1) = V(D_1)$  y que  $V(D^3) = V(D_3)$ , ahora veamos que sus conjuntos de flechas son iguales.

Puesto que  $D \in D_1 \oplus D'$  y que todas las flechas de  $D$  que tienen ambos extremos en el conjunto  $V(D_1)$  son flechas de  $D_1$ , tenemos que  $f \in F(D_1)$  si y sólo si  $f \in F(D)$  y  $f$  tiene ambos extremos en el conjunto  $V(D_1)$ , y esto ocurre si y solamente si  $f \in F(D^1)$ . De donde  $F(D^1) = F(D_1)$ . Por lo tanto  $D^1 = D_1$ .

Ahora, como  $D' \in D_2 \oplus D_3$  se tiene que  $f \in F(D_3)$  si y sólo si  $f \in F(D')$  y ambos extremos de  $f$  son vértices de  $D_3$ , dado que  $D \in D_1 \oplus D'$  se sigue que  $f \in F(D')$  si y solamente si  $f \in F(D)$  y los dos extremos de  $f$  son vértices de  $D'$ , de donde  $f \in F(D_3)$  si y solamente si  $f \in F(D)$  y  $f$  incide en dos vértices de  $D_3$ , lo último ocurre si y sólo si  $f \in F(D^3)$ . De aquí tenemos que  $F(D^3) = F(D_3)$ . Por lo tanto  $D^3 = D_3$ .

Tomemos un vértice en  $V(D_1)$  y uno en  $V(D_3)$  y probemos que entre ellos existe una única flecha en  $D''$ . Sean  $u \in V(D_1)$  y  $v \in V(D_3)$ , por definición de  $D''$  se tiene que  $u$  y  $v$  serán adyacentes en  $D''$  si lo son en  $D$ , como  $v \in V(D_3)$  y  $V(D_3) \subseteq V(D')$ , se sigue que  $v \in V(D')$ , y como  $D$  es una suma generalizada de  $D_1$  y  $D'$ , existe exactamente una flecha entre  $u$  y  $v$  en  $D$ , entonces en  $D''$  hay una única flecha entre  $u$  y  $v$ . De todo lo anterior tenemos que  $D'' \in D_1 \oplus D_3$ .

Falta ver que  $D$  es una suma generalizada de  $D_2$  y  $D''$ . Son ajenas en vértices pues  $D_1$ ,  $D_2$  y  $D_3$  lo son por pares y  $V(D'') = V(D_1) \cup V(D_3)$ . Como  $V(D) = V(D_1) \cup V(D_2) \cup V(D_3)$  se tiene que  $V(D) = V(D_2) \cup V(D'')$ . Sabemos que  $D''$  es la subdigráfica de  $D$  inducida por su conjunto de vértices, demostremos que la subdigráfica inducida por el conjunto  $V(D_2)$  en  $D$  es  $D_2$ . Sea  $D^2 = D[V(D_2)]$ , de donde  $V(D^2) = V(D_2)$ . Puesto que  $D' \in D_2 \oplus D_3$  se tiene que  $f \in F(D_2)$  si y sólo si  $f \in F(D')$  y ambos extremos de  $f$  pertenecen al conjunto  $V(D_2)$ , dado que  $D \in D_1 \oplus D'$  se tiene que  $f \in F(D')$  si y solamente si  $f \in F(D)$  y  $f$  incide en dos vértices de  $D'$ , entonces  $f \in F(D_2)$  si y solamente si  $f \in F(D)$  y los extremos de  $f$  son vértices de  $D_2$ , lo anterior



ocurre si y sólo si  $f \in F(D^2)$ . Así,  $F(D^2) = F(D_2)$  y por lo tanto  $D^2 = D_2$ .

Veamos que entre cualesquiera dos vértices, uno en  $V(D_2)$  y otro en  $V(D'')$  existe exactamente una flecha en  $D$ . Sean  $u \in V(D_2)$  y  $v \in V(D'')$ , dado que  $V(D'') = V(D_1) \cup V(D_3)$  se tienen dos casos, uno cuando  $v \in V(D_1)$  y otro cuando  $v \in V(D_3)$ .

*Caso 1.* El vértice  $v$  está en  $V(D_1)$ .

Como  $u \in V(D_2)$  y  $V(D_2) \subseteq V(D')$  tenemos que  $u \in V(D')$  y dado que  $D$  es una suma generalizada de  $D_1$  y  $D'$  se sigue que entre  $u$  y  $v$  hay exactamente una flecha en  $D$ .

*Caso 2.* El vértice  $v$  está en  $V(D_3)$ .

Como  $D$  es una suma generalizada de  $D_1$  y  $D'$ , tenemos que  $D'$  es la subdigráfica inducida por  $V(D')$  en  $D$ , lo cual nos asegura que todas las flechas de  $D$  entre dos vértices del conjunto  $V(D')$  son flechas de  $D'$ . Ahora, como  $D'$  es una suma generalizada de  $D_2$  y  $D_3$ ,  $u \in V(D_2)$  y  $v \in V(D_3)$  podemos afirmar que entre  $u$  y  $v$  existe una única flecha en  $D'$  y de aquí se sigue que entre  $u$  y  $v$  hay exactamente una flecha en  $D$ .

Lo anterior garantiza que entre cualesquiera dos vértices, uno en  $V(D_2)$  y otro en  $V(D'')$ , existe exactamente una flecha en  $D$ .

Por lo tanto  $D \in D_2 \oplus D''$ , como se quería demostrar.

Análogamente se puede demostrar que  $D$  es una suma generalizada de  $D_3$  y una digráfica  $D''' \in D_1 \oplus D_2$ , tomando la subdigráfica de  $D$ ,  $D''' = D[V(D_1) \cup V(D_2)]$ .  $\square$

El lema 24.1 nos proporciona condiciones para hablar de sumas generalizadas de más de dos digráficas, pues nos dice que podemos llegar a la misma digráfica sumando por pares tres digráficas. Si fuesen más de tres digráficas el análisis sería similar, lo cual nos conduce a la siguiente definición.

**Definición 25.** Sean  $D_1, D_2, \dots, D_n$  digráficas ajenas en vértices dos a dos. Si una digráfica  $D$  es tal que:

- $V(D) = V(D_1) \cup V(D_2) \cup \dots \cup V(D_n)$ ,
- la subdigráfica inducida por el conjunto  $V(D_i)$  en  $D$  es  $D_i$  para cada  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , y
- entre cualesquiera dos vértices, uno en  $V(D_i)$  y otro en  $V(D_j)$ , donde  $i \neq j$ , existe exactamente una flecha en  $D$

entonces diremos que  $D$  es una **suma generalizada** de  $D_1, D_2, \dots, D_n$ . Llamaremos **flechas interiores** a los elementos del conjunto  $F(D_1) \cup F(D_2) \cup \dots \cup F(D_n)$  y **flechas exteriores** a los de  $F(D) \setminus (F(D_1) \cup F(D_2) \cup \dots \cup F(D_n))$ .

Al conjunto de todas las digráficas que son una suma generalizada de  $D_1, D_2, \dots, D_n$  lo llamaremos la suma generalizada, o simplemente la suma, de  $D_1, D_2, \dots, D_n$  y lo denotaremos por  $D_1 \oplus D_2 \oplus \dots \oplus D_n$ .

A continuación veremos tres propiedades de la suma generalizada de digráficas que garantizan que está bien definida.

**Lema 25.1.** *Sean  $D_1, D_2, \dots, D_n$  digráficas mutuamente ajenas y sea  $D \in D_1 \oplus D_2 \oplus \dots \oplus D_n$ . Para cualquier subconjunto  $\{D_{i_1}, D_{i_2}, \dots, D_{i_k}\}$  del conjunto  $\{D_1, D_2, \dots, D_n\}$  que tenga al menos dos elementos, la subdigráfica de  $D$  inducida por el conjunto  $V(D_{i_1}) \cup V(D_{i_2}) \cup \dots \cup V(D_{i_k})$  pertenece a la suma  $D_{i_1} \oplus D_{i_2} \oplus \dots \oplus D_{i_k}$ .*

*Demostración.* Sea  $\{D_{i_1}, D_{i_2}, \dots, D_{i_k}\}$  un subconjunto de  $\{D_1, D_2, \dots, D_n\}$  donde  $k \geq 2$  y sea  $D' = D[V(D_{i_1}) \cup V(D_{i_2}) \cup \dots \cup V(D_{i_k})]$ . Veamos que  $D'$  está en  $D_{i_1} \oplus D_{i_2} \oplus \dots \oplus D_{i_k}$ .

Sabemos que  $D_{i_1}, D_{i_2}, \dots, D_{i_k}$  son ajenas en vértices dos a dos, ya que  $D_1, D_2, \dots, D_n$  lo son. Por la definición de  $D'$  se tiene que  $V(D') = V(D_{i_1}) \cup V(D_{i_2}) \cup \dots \cup V(D_{i_k})$ .

Probemos que la subdigráfica de  $D'$  inducida por el conjunto  $V(D_{i_j})$  es  $D_{i_j}$  para cada  $j$ , donde  $1 \leq j \leq k$ . Sea  $D^{i_j} = D'[V(D_{i_j})]$ , así tenemos que  $V(D^{i_j}) = V(D_{i_j})$ . Mostremos que sus conjuntos de flechas son iguales, como  $D \in D_1 \oplus D_2 \oplus \dots \oplus D_n$  dada una flecha  $f$  se tiene en particular que  $f \in F(D_{i_j})$  si y solamente si  $f \in F(D)$  y sus extremos son vértices de  $D_{i_j}$ , esto último ocurre si y sólo si  $f \in F(D^{i_j})$ , de aquí que  $F(D^{i_j}) = F(D_{i_j})$ . Entonces  $D^{i_j} = D_{i_j}$  para cada  $j$ ,  $1 \leq j \leq k$ .

Ahora, tomemos  $u \in V(D_{i_j})$  y  $v \in V(D_{i_h})$ , donde  $i_j \neq i_h$ , veamos que existe exactamente una flecha entre ellos en  $D'$ . Como  $D'$  es una subdigráfica inducida de  $D$ , todas las flechas de  $D$  entre los vértices del conjunto  $V(D')$  son flechas de  $D'$ , por ello basta demostrar que en  $D$  existe exactamente una flecha entre  $u$  y  $v$ . Puesto que  $D$  es una suma generalizada de  $D_1, D_2, \dots, D_n$ , tenemos que como  $u \in V(D_{i_j}), v \in V(D_{i_h})$  e  $i_j \neq i_h$ , entonces en  $D$  existe exactamente una flecha entre ellos.

De lo anterior se sigue que  $D'$  es una suma generalizada de  $D_{i_1}, D_{i_2}, \dots, D_{i_k}$ , es decir  $D' \in D_{i_1} \oplus D_{i_2} \oplus \dots \oplus D_{i_k}$ , como se quería demostrar.  $\square$

**Proposición 26.** Sean  $D_1, D_2, \dots, D_n$  digráficas mutuamente ajenas y sea  $D \in D_1 \oplus D_2 \oplus \dots \oplus D_n$ . Si los conjuntos  $B_1 = \{D_{i_1}, D_{i_2}, \dots, D_{i_k}\}$  y  $B_2 = \{D_{j_1}, D_{j_2}, \dots, D_{j_{(n-k)}}\}$  forman una partición del conjunto  $\{D_1, D_2, \dots, D_n\}$ , entonces  $D$  está en la suma  $D[V(D_{i_1}) \cup V(D_{i_2}) \cup \dots \cup V(D_{i_k})] \oplus D_{j_1} \oplus D_{j_2} \oplus \dots \oplus D_{j_{n-k}}$ .

*Demostración.* Sean  $B_1 = \{D_{i_1}, D_{i_2}, \dots, D_{i_k}\}$  y  $B_2 = \{D_{j_1}, D_{j_2}, \dots, D_{j_{(n-k)}}\}$  dos conjuntos que forman una partición del conjunto  $\{D_1, D_2, \dots, D_n\}$  y sea  $D' = D[V(D_{i_1}) \cup V(D_{i_2}) \cup \dots \cup V(D_{i_k})]$ . Dado que  $B_1$  y  $B_2$  forman una partición de  $\{D_1, D_2, \dots, D_n\}$ , se sigue que  $D', D_{j_1}, D_{j_2}, \dots, D_{j_{(n-k)}}$  son ajenas en vértices dos a dos.

Si la cardinalidad de  $B_1$  es uno, entonces  $B_1 = \{D_{j_1}\}$  y por tanto  $D' = D[V(D_{i_1})] = D_{i_1}$ , y si la cardinalidad de  $B_1$  es mayor o igual que dos, por el lema 25.1 se tiene que  $D'$  es un elemento en  $D_{i_1} \oplus D_{i_2} \oplus \dots \oplus D_{i_k}$ . En cualquier caso, se tiene que  $V(D') = V(D_{i_1}) \cup V(D_{i_2}) \cup \dots \cup V(D_{i_k})$  y que  $D'$  es la subdigráfica de  $D$  inducida por su conjunto de vértices. Además, como  $D \in D_1 \oplus D_2 \oplus \dots \oplus D_n$  se tiene que  $D[V(D_{j_h})] = D_{j_h}$  para cada  $h$ ,  $1 \leq h \leq n - k$ .

Sabemos que entre cualesquiera dos vértices, uno en  $V(D_{j_h})$  y otro en  $V(D_{j_l})$ , donde  $j_h \neq j_l$ , existe exactamente una flecha en  $D$ , entonces basta con ver que entre cualesquiera dos vértices, uno en  $V(D')$  y otro en  $V(D_{j_h})$ , existe exactamente una flecha en  $D$  para cada  $h$ ,  $1 \leq h \leq n - k$ . Sean  $u$  un vértice de  $D'$  y  $v$  un vértice de  $D_{j_h}$ , como  $V(D') = V(D_{i_1}) \cup V(D_{i_2}) \cup \dots \cup V(D_{i_k})$  tenemos que  $u \in V(D_{i_r})$  algún  $r$ , donde  $1 \leq r \leq k$ . Por lo tanto en  $D$  existe exactamente una flecha entre  $u$  y  $v$  puesto que pertenecen a distintos sumandos.

De lo anterior se tiene que  $D \in D' \oplus D_{j_1} \oplus D_{j_2} \oplus \dots \oplus D_{j_{n-k}}$ , como se quería demostrar.  $\square$

La proposición 26 nos da una generalización del lema 24.1.

**Corolario 26.1.** Sean  $D_1, D_2, \dots, D_n$  digráficas mutuamente ajenas y sea  $D \in D_1 \oplus D_2 \oplus \dots \oplus D_n$ . Si los conjuntos  $B_1 = \{D_{i_1}, D_{i_2}, \dots, D_{i_k}\}$  y  $B_2 = \{D_{j_1}, D_{j_2}, \dots, D_{j_{(n-k)}}\}$  forman una partición del conjunto  $\{D_1, D_2, \dots, D_n\}$ , entonces  $D$  está en la suma  $D[V(D_{i_1}) \cup V(D_{i_2}) \cup \dots \cup V(D_{i_k})] \oplus D[V(D_{j_1}) \cup V(D_{j_2}) \cup \dots \cup V(D_{j_{(n-k)}})]$ .

*Demostración.* Sean  $B_1 = \{D_{i_1}, D_{i_2}, \dots, D_{i_k}\}$  y  $B_2 = \{D_{j_1}, D_{j_2}, \dots, D_{j_{(n-k)}}\}$  dos conjuntos que forman una partición del conjunto  $\{D_1, D_2, \dots,$

$D_n\}$  y sea  $D' = D[V(D_{i_1}) \cup V(D_{i_2}) \cup \dots \cup V(D_{i_k})]$ , dado que  $B_1$  y  $B_2$  forman una partición de  $\{D_1, D_2, \dots, D_n\}$ , se sigue que  $D \in D' \oplus D_{j_1} \oplus D_{j_2} \oplus \dots \oplus D_{j_{n-k}}$  por la proposición 26.

Ahora, las digráficas  $D', D_{j_1}, D_{j_2}, \dots, D_{j_{(n-k)}}$  son ajenas en vértices dos a dos y los conjuntos  $B'_1 = \{D'\}$  y  $B''_2 = \{D_{j_1}, D_{j_2}, \dots, D_{j_{(n-k)}}\}$  forman una partición del conjunto  $\{D', D_{j_1}, D_{j_2}, \dots, D_{j_{(n-k)}}\}$ , de donde, por la proposición 26, se tiene que  $D \in D' \oplus D''$ , como se quería demostrar.  $\square$

**Teorema 26.1.** *Sean  $D_1$  y  $D_2$  dos digráficas hamiltonianas. Si  $D \in D_1 \oplus D_2$  y  $D$  es fuertemente conexa entonces  $D$  es hamiltoniana.*

*Demostración.* Sea  $D \in D_1 \oplus D_2$  tal que  $D$  es fuertemente conexa. Como  $D_1$  y  $D_2$  son dos digráficas hamiltonianas existen dos ciclos  $C_1 = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_0)$  y  $C_2 = (y_0, y_1, y_2, \dots, y_{m-1}, y_0)$  en  $D_1$  y  $D_2$ , respectivamente, tales que  $V(C_1) = V(D_1)$  y  $V(C_2) = V(D_2)$ .

Además, como  $D$  es fuertemente conexa existen alguna  $C_1C_2$ -flecha y alguna  $C_2C_1$ -flecha.

*Caso 1.* Existe algún  $x_i \in V(C_1)$  tal que no existe ninguna  $C_2x_i$ -flecha.

Supongamos sin perder generalidad que no existe ninguna  $C_2x_0$ -flecha, es decir,  $(y_j, x_0) \notin F(D)$  para todo  $0 \leq j \leq m-1$ . Como  $D$  es la suma generalizada de  $D_1$  y  $D_2$ , cualquier vértice de  $D_1$ , que son los mismos que los de  $C_1$ , es adyacente a todos los de  $D_2$ , que son los mismos que los de  $C_2$ , y viceversa. En particular se tiene que  $x_0$  es adyacente todos los vértices de  $D_2$  y como  $(y_j, x_0) \notin F(D)$  para todo  $0 \leq j \leq m-1$ , se sigue que  $(x_0, y_j) \in F(D)$  para todo  $0 \leq j \leq m-1$ .

Dado que existe alguna  $C_2C_1$ -flecha, podemos encontrar algún  $x_i \in V(C_1)$  tal que existe una  $C_2x_i$ -flecha.

Sea  $t = \min\{i \mid \text{existe una } C_2x_i\text{-flecha en } F(D), 1 \leq i \leq n-1\}$ . Supongamos sin perder generalidad que  $(y_0, x_t) \in F(D)$ . Por la elección de  $t$  se tiene que  $(x_{t-1}, y_1) \in F(D)$ , así el camino  $C = (y_0, x_t) \cup (x_t, C_1, x_{t-1}) \cup (x_{t-1}, y_1) \cup (y_1, C_2, y_0)$  es un ciclo en  $D$  tal que  $V(C) = V(D)$ . Véase la figura 2.8.

*Caso 2.* Existe algún  $x_i \in V(C_1)$  tal que no existe ninguna  $x_iC_2$ -flecha.

Supongamos sin perder generalidad que no existe ninguna  $x_{n-1}C_2$ -flecha, pero como habíamos señalado, cada vértice en  $C_1$  es adyacente a todos los vértices de  $C_2$ , de donde  $(y_j, x_{n-1}) \in F(D)$  para cada  $1 \leq j \leq m-1$ .

Dado que existe al menos una  $C_1C_2$ -flecha, podemos elegir  $s = \max\{i \mid \text{existe una } x_iC_2\text{-flecha}, 0 \leq i \leq n-2\}$ , supongamos sin pérdida de generalidad

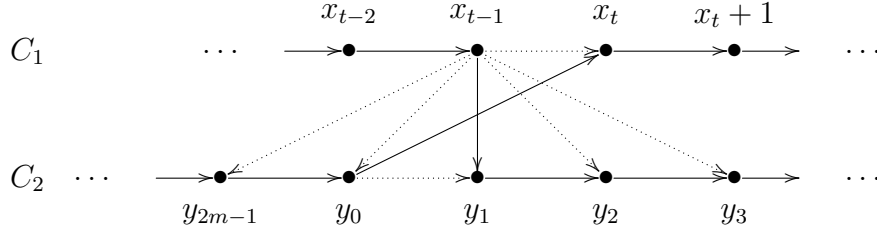


Figura 2.8: Un ciclo que recorre los vértices de  $C_1$  y  $C_2$ .

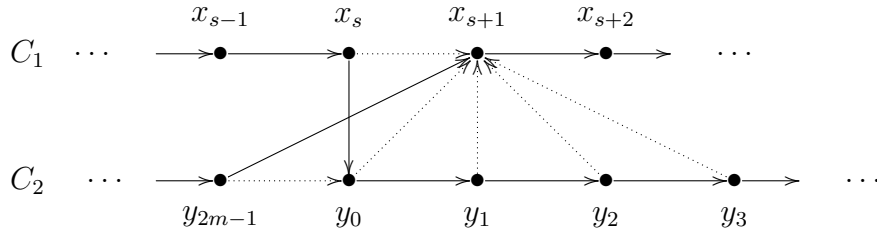


Figura 2.9: Un ciclo que recorre los vértices de  $C_1$  y  $C_2$ .

que  $(x_s, y_0) \in F(D)$ , por la elección de  $s$ , sabemos que  $(y_{m-1}, x_{s+1}) \in F(D)$  entonces el camino  $C = (x_s, y_0) \cup (y_0, C_2, y_{m-1}) \cup (y_{m-1}, x_{s+1}) \cup (x_{s+1}, C_1, x_s)$  es un ciclo en  $D$  tal que  $V(C) = V(D)$ . Véase la figura 2.9.

*Caso 3.* Para cada  $x_i \in V(C_1)$  existen una  $x_i C_2$ -flecha y una  $C_2 x_i$ -flecha.

*Caso 3.1.* Existe un  $y_j \in V(C_2)$  tal que no existe ninguna  $C_1 y_j$ -flecha. La prueba es análoga a la del caso 1.

*Caso 3.2.* Existe un  $y_j \in V(C_2)$  tal que no existe ninguna  $y_j C_1$ -flecha. La prueba es análoga a la del caso 2.

*Caso 3.3.* Para cada  $y_j \in V(C_2)$  existen una  $y_j C_1$ -flecha y una  $C_1 y_j$ -flecha.

*Caso 3.3.1.* Existe un par bueno de flechas.

Entonces existen un  $x_i \in V(C_1)$  y un  $y_j \in V(C_2)$  tales que  $(x_i, y_j)$  y  $(y_{j-1}, x_{i+1})$  son flechas de  $D$ . De donde  $C = (x_i, y_j) \cup (y_j, C_2, y_{j-1}) \cup (y_{j-1}, x_{i+1}) \cup (x_{i+1}, C_1, x_i)$  es un ciclo en  $D$  tal que  $V(C) = V(D)$ . Véase la figura 2.10.

*Caso 3.3.2.* No existe ningún par bueno de flechas.

*Observación 1.* Como no hay pares buenos de flechas, si  $(x_i, y_j) \in F(D)$

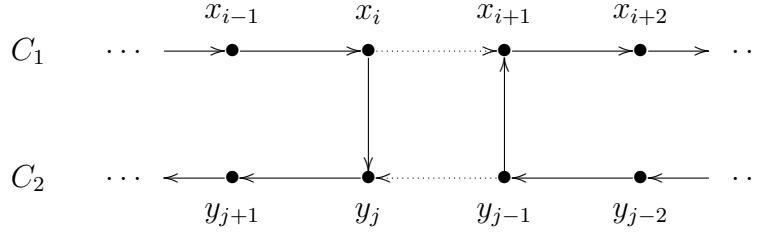


Figura 2.10: Un ciclo construido a partir de un par bueno de flechas.

entonces  $(x_{i+h}, y_{j-h}) \in F(D)$  para cualquier  $1 \leq h \leq \text{mcm}(n, m)$ , donde  $i + h$  módulo  $n$  y  $j - h$  módulo  $m$ .

Supongamos por contradicción que existe algún  $h \in \{1, 2, \dots, \text{mcm}(n, m)\}$  tal que  $(x_{i+h}, y_{j-h}) \notin F(D)$ , tomando  $t = \min\{h \mid (x_{i+h}, y_{j-h}) \notin F(D), 1 \leq h \leq \text{mcm}(n, m)\}$  se tiene, por la elección de  $t$  que  $(x_{i+(t-1)}, y_{j-(t-1)}) \in F(D)$  y que  $(x_{i+t}, y_{j-t}) \notin F(D)$ .

Ahora, como  $x_{i+t} \in V(C_1)$  y  $y_{j-t} \in V(C_2)$  sabemos que  $x_{i+t}$  y  $y_{j-t}$  son vecinos, entonces  $(y_{j-t}, x_{i+t}) \in F(D)$ . Sin embargo, las flechas  $(x_{i+(t-1)}, y_{j-(t-1)})$  y  $(y_{j-t}, x_{i+t})$  forman un par bueno, lo cual es imposible.

Por lo tanto  $(x_{i+h}, y_{j-h}) \in F(D)$  para cualquier  $1 \leq h \leq \text{mcm}(n, m)$ , donde  $i + h$  módulo  $n$  y  $j - h$  módulo  $m$ . Véase la figura 2.11.

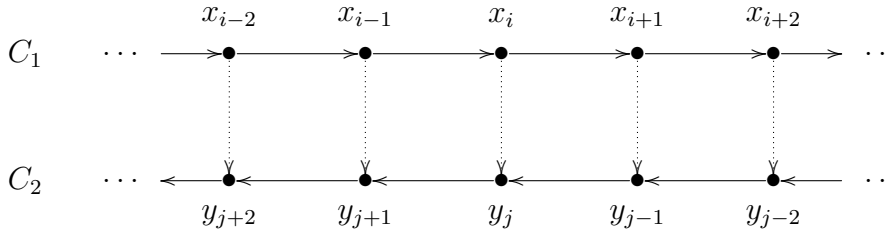


Figura 2.11: No hay pares buenos de flechas.

*Observación 2.* Como no hay pares buenos de flechas, si  $(y_j, x_i) \in F(D)$  se tiene que  $(y_{j+h}, x_{i-h}) \in F(D)$  para cualquier  $1 \leq h \leq \text{mcm}(n, m)$ , donde  $i - h$  módulo  $n$  y  $j + h$  módulo  $m$ .

Supongamos por contradicción que existe algún  $h \in \{1, 2, \dots, \text{mcm}(n, m)\}$  tal que  $(y_{j+h}, x_{i-h}) \notin F(D)$  y sea  $s = \min\{h \mid (y_{j+h}, x_{i-h}) \notin F(D), 1 \leq h \leq \text{mcm}(n, m)\}$  se tiene, por la elección de  $s$  que  $(y_{j+(s-1)}, x_{i-(s-1)}) \in F(D)$  y que  $(y_{j+s}, x_{i-s}) \notin F(D)$ .

Como  $x_{i-s} \in V(C_1)$  y  $y_{j+s} \in V(C_2)$  son vecinos, se sigue que  $(x_{i-s}, y_{j+s}) \in F(D)$ .

De donde, las flechas  $(x_{i-s}, y_{j+s})$  y  $(y_{j+(s-1)}, x_{i-(s-1)})$  forman un par bueno, lo cual es una contradicción.

Por lo tanto  $(y_{j+h}, x_{i-h}) \in F(D)$  para cualquier  $1 \leq h \leq \text{mcm}(n, m)$ , donde  $i-h$  módulo  $n$  y  $j+h$  módulo  $m$ .

Notemos que la observación 1 nos asegura la existencia de flechas a la derecha de  $(x_i, y_j)$ , mientras que la observación 2 nos asegura la existencia de flechas a la izquierda de  $(y_j, x_i)$ , sin embargo, por las propiedades de modularidad de los enteros es indiferente afirmar que hay flechas a la derecha de  $(y_j, x_i)$  como veremos ahora.

Si  $q = \text{mcm}(n, m)$ , se tiene que  $j+q-h \equiv j-h \pmod{m}$  e  $i-(q-h) \equiv i+h \pmod{n}$ , de donde  $y_{j+q-h} = y_{j-h}$  y  $x_{i-(q-h)} = x_{i+h}$  para cualquier  $1 \leq h \leq \text{mcm}(n, m)$ , entonces si  $(y_j, x_i) \in F(D)$  se tiene que  $(y_{j-h}, x_{i+h}) \in F(D)$  para cualquier  $1 \leq h \leq \text{mcm}(n, m)$ . Véase la figura 2.12.

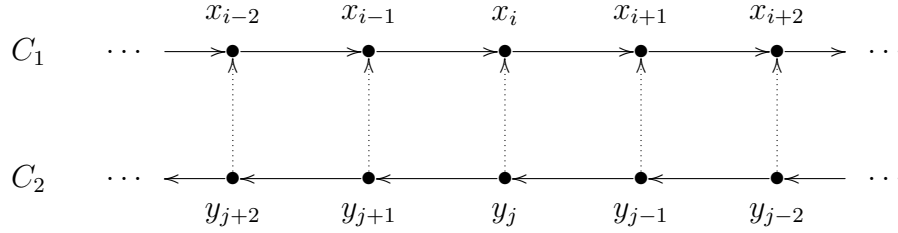


Figura 2.12: No hay pares buenos de flechas.

*Observación 3.* Si  $\text{mcm}(n, m) = nm$  entonces existen pares buenos de flechas.

Supongamos por contradicción que no existen pares buenos de flechas. Como existe al menos una  $C_1C_2$ -flecha,  $(x_t, y_s) \in F(D)$  para algunos  $1 \leq t \leq n-1$  y  $1 \leq s \leq m-1$ . Por la observación 1, tenemos que  $(x_{i+h}, y_{j-h}) \in F(D)$  para cualquier  $1 \leq h \leq \text{mcm}(n, m) = nm$ , donde  $i-h$  módulo  $n$  y  $j+h$  módulo  $m$ , lo cual nos da un total de  $nm$   $C_1C_2$ -flechas distintas. Además sabemos que entre cualquier par de vértices, uno de  $C_1$  y otro de  $C_2$ , existe una y sólo una flecha en  $D$ , por lo que el total de  $C_1C_2$ -flechas y  $C_2C_1$ -flechas es exactamente  $nm$ . Así, todas las flechas entre  $C_1$  y  $C_2$  son  $C_1C_2$ -flechas. Lo cual es una contradicción pues al ser  $D$  fuertemente conexa existe al menos una  $C_2C_1$ -flecha.

Por lo tanto, si  $\text{mcm}(n, m) = nm$  entonces existen pares buenos de flechas.

Continuemos con la prueba. Supongamos sin pérdida de generalidad que  $n \geq m$ . Por hipótesis, para cada  $x_i \in V(C_1)$  existen una  $x_i C_2$ -flecha y una  $C_2 x_i$ -flecha. En particular para  $x_0$  existen una  $x_0 C_2$ -flecha y una  $C_2 x_0$ -flecha, supongamos sin perder generalidad que  $(y_{m-1}, x_0) \in F(D)$  y sea  $t = \max\{j \mid (y_j, x_0) \notin F(D), 1 \leq j \leq m-2\}$ , así, por la elección de  $t$ , se sigue que  $(y_t, x_0) \notin F(D)$  y  $(y_{t+1}, x_0) \in F(D)$ . Pero como  $x_0$  y  $y_t$ , son vecinos, necesariamente  $(x_0, y_t) \in F(D)$ .

Por la observación 1 sabemos que  $(x_h, y_{t-h}) \in F(D)$  para cualquier  $1 \leq h \leq \text{mcm}(n, m)$ , por la observación 2 también sabemos que  $(y_{t+1-h}, x_h) \in F(D)$  para cualquier  $1 \leq h \leq \text{mcm}(n, m)$  y por la observación 3 se tiene que  $\text{mcm}(n, m) < nm$ . Véase la figura 2.13.

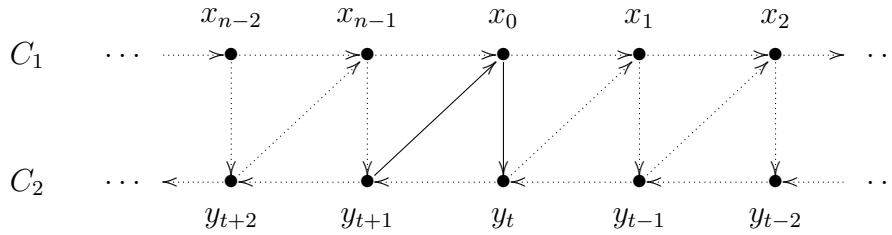


Figura 2.13: Flechas obligatorias si  $(x_0, y_t)$  y  $(y_{t+1}, x_0)$  son flechas en  $D$ .

Consideremos el ciclo  $C = (x_0, y_t, x_1, y_{t-1}, x_2, y_{t-2}, \dots, x_{m-2}, y_{t-m+2}, x_{m-1}, y_{t-m+1}, x_m) \cup (x_m, C_1, x_0)$ , donde  $y_{t-m+h} = y_{t+h}$  para cualquier  $h$  entera pues  $t - m + h \equiv t + h \pmod{m}$ , de aquí que  $C = (x_0, y_t, x_1, y_{t-1}, x_2, y_{t-2}, \dots, x_{m-2}, y_{t+2}, x_{m-1}, y_{t+1}, x_m) \cup (x_m, C_1, x_0)$  es un ciclo en  $D$  tal que  $V(C) = V(D)$ . Véase la figura 2.14.

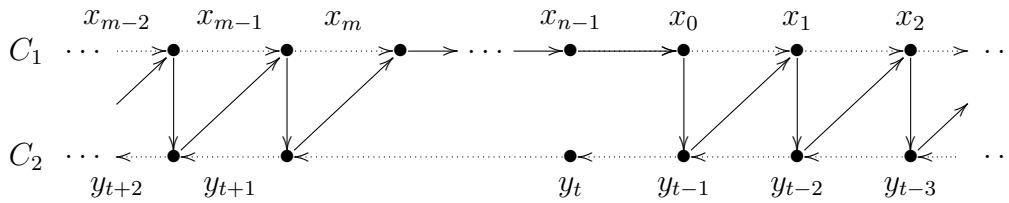


Figura 2.14: Ciclo cuando no hay pares buenos de flechas.

De todos los casos podemos concluir que existe un ciclo hamiltoniano en  $D$ , como se quería demostrar.  $\square$



En el teorema 26.1 se demostró que si la suma generalizada de dos digráficas hamiltonianas es fuertemente conexa, entonces dicha suma es hamiltoniana. Dicho teorema se puede generalizar para la suma de  $n$  digráficas hamiltonianas, como veremos a continuación.

**Teorema 26.2.** *Sean  $D_1, D_2, \dots, D_n$  digráficas hamiltonianas mutuamente ajenas. Si  $D \in D_1 \oplus D_2 \oplus \dots \oplus D_n$  y  $D$  es fuertemente conexa entonces  $D$  es hamiltoniana.*

*Demostración.* Probemos por inducción sobre  $n$ .

1) Caso base:

Si  $n = 2$  el teorema 26.1 nos asegura la hamiltonicidad. Pues lo que se tiene es una suma generalizada fuertemente conexa de dos digráficas hamiltonianas ajenas en vértices.

2) Hipótesis de inducción:

Supongamos que si  $D_1, D_2, \dots, D_k$  son digráficas hamiltonianas mutuamente ajenas entonces toda digráfica en la suma  $D_1 \oplus D_2 \oplus \dots \oplus D_k$  que sea fuertemente conexa será hamiltoniana, donde  $2 \leq k < n$ .

3) Paso inductivo:

Sean  $D_1, D_2, \dots, D_n$  digráficas hamiltonianas y sea  $D$  en  $D_1 \oplus D_2 \oplus \dots \oplus D_n$  tal que  $D$  es fuertemente conexa. Veamos que  $D$  es hamiltoniana.

Sean  $C^1 = (x_0^1, x_1^1, x_2^1, \dots, x_{k_1}^1, x_0^1)$ ,  $C^2 = (x_0^2, x_1^2, x_2^2, \dots, x_{k_2}^2, x_0^2)$ ,  $\dots$ ,  $C^n = (x_0^n, x_1^n, x_2^n, \dots, x_{k_n}^n, x_0^n)$  los ciclos hamiltonianos de  $D_1, D_2, \dots, D_n$ , respectivamente. Notemos que  $C^1, C^2, \dots, C^n$  son ciclos en  $D$  ajenos dos a dos.

*Caso 1.* Existen dos ciclos  $C^i$  y  $C^j$ , donde  $i \neq j$ , tales que en  $D$  hay alguna  $C^i C^j$ -flecha y alguna  $C^j C^i$ -flecha, que es lo mismo que tener una  $D_i D_j$ -flecha y alguna  $D_j D_i$ -flecha.

Supongamos sin perder generalidad que en  $D$  existen una  $D_{n-1} D_n$ -flecha y una  $D_n D_{n-1}$ -flecha y consideremos la subdigráfica inducida  $D' = D[V(D_{n-1}) \cup V(D_n)]$  que pertenece a  $D_{n-1} \oplus D_n$  por el lema 24.1, obsérvese que  $D_{n-1}$  y  $D_n$  son hamiltonianas y que  $D'$  es fuertemente conexa pues existen una  $D_{n-1} D_n$ -flecha y una  $D_n D_{n-1}$ -flecha, de donde  $D'$  es hamiltoniana.

Notemos que  $D \in D_1 \oplus D_2 \oplus \dots \oplus D_{n-2} \oplus D'$  por la proposición 26.1 y que  $D_1, D_2, \dots, D_{n-2}, D'$  son  $n - 1$  digráficas hamiltonianas, dado que  $D$  es fuertemente conexa, por la hipótesis de inducción, se tiene que  $D$  es hamiltoniana.

*Caso 2.* Para cualesquiera dos ciclos  $C^i$  y  $C^j$ , donde  $i \neq j$ ,  $C^i$  domina a  $C^j$  o  $C^j$  domina a  $C^i$ .

Notemos que si para algunos  $i$  y  $j$ , donde  $i \neq j$ , hay una  $C^i C^j$ -flecha, entonces para cualesquiera dos vértices  $u \in V(C^i)$  y  $v \in V(C^j)$  se tiene que  $(u, v) \in F(D)$  pues sabemos que estos dos vértices son adyacentes y que no hay ninguna  $C^j C^i$ -flecha.

Para este caso tomaremos la siguiente notación. Si  $C^i$  domina a  $C^j$  nombraremos  $f(i, j)$  a la flecha  $(x_{k_i}^i, x_0^j)$ . Además llamaremos  $T^i$  a la trayectoria  $(x_0^i, x_1^i, x_2^i, \dots, x_{k_i}^i)$  para cada  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ .

Definamos una nueva digráfica  $G$  con el conjunto de vértices  $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$  y cuyo conjunto de flechas cumple que  $(y_i, y_j) \in F(G)$  si  $C^i$  domina a  $C^j$ .

Observemos que  $G$  es semicompleta pues para cualesquiera dos vértices  $y_i$  y  $y_j$  sabemos que  $C^i$  domina a  $C^j$  o  $C^j$  domina a  $C^i$ .

Probemos que  $G$  es fuertemente conexa. Sean  $y_i$  y  $y_j$  dos vértices en  $V(G)$ , veamos que existe un  $y_i y_j$ -camino en  $G$ . Para ello tomemos  $u$  un vértice en  $C^i$  y  $v$  un vértice en  $C^j$ , como  $D$  es fuertemente conexa existe una  $uv$ -trayectoria  $T$  en  $D$ , donde  $T = (u = u_0, u_1, \dots, u_b = v)$  que es una sucesión de vértices en los ciclos  $C^1, C^2, \dots, C^n$ . Ahora, tomemos una sucesión de ciclos  $Q = (C^{h_0}, C^{h_1}, \dots, C^{h_b})$  donde  $u_l \in V(C^{h_l})$  para cada  $l$ ,  $0 \leq l \leq b$ , como  $u = u_0$  y  $u_b = v$  se tiene que  $C^{h_0} = C^i$  y  $C^{h_b} = C^j$ . En  $Q$  puede haber elementos consecutivos que sean iguales, pero si tomamos  $Q' = (C^{g_0}, C^{g_1}, \dots, C^{g_a})$  la subsucesión de  $Q$  en la que únicamente quitamos las repeticiones que son consecutivas en  $Q$ , lo que obtenemos es la sucesión de ciclos de  $D$  que visita la trayectoria  $T$  para llegar de  $u$  a  $v$ , que empieza en  $C^i$ , termina en  $C^j$  y tal que  $C^{g_l}$  domina a  $C^{g_{l+1}}$  para todo  $l$ ,  $0 \leq l \leq a - 1$ . De aquí que  $(y_{g_l}, y_{g_{l+1}}) \in F(G)$  para  $l$ ,  $0 \leq l \leq a - 1$ . Así,  $P = (y_{g_0}, y_{g_1}, \dots, y_{g_a})$  es un  $y_i y_j$ -camino en  $G$ . Intercambiando los papeles de  $y_i$  y  $y_j$  podemos encontrar un  $y_j y_i$ -camino en  $G$ . Por lo tanto  $G$  es fuertemente conexa.

Dado que  $G$  es semicompleta y fuertemente conexa, tenemos por la proposición 27 que  $G$  es hamiltoniana. Entonces existe un ciclo  $\gamma = (y_{j^0}, y_{j^1}, \dots, y_{j^{n-1}}, y_{j^0})$  en  $G$  tal que  $V(\gamma) = V(G)$ , este ciclo nos garantiza la existencia de las flechas  $f(j^i, j^{i+1})$  en  $D$ .

Por lo tanto  $C = T^{j^0} \cup f(j^0, j^1) \cup T^{j^1} \cup f(j^1, j^2) \cup T^{j^2} \cup \dots \cup T^{j^{n-1}} \cup f(j^{n-1}, j^0)$  es un ciclo en  $D$  tal que  $V(C) = \bigcup_{i=1}^n V(T^i) = \bigcup_{i=1}^n V(D_i) = V(D)$ . Es decir,  $C$  es hamiltoniano en  $D$ .

De ambos casos se sigue que  $D$  es hamiltoniana, como queríamos demostrar. □

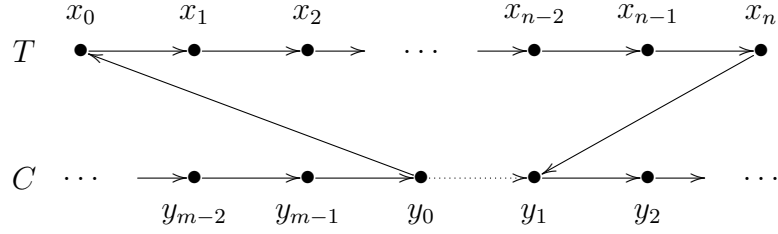


Figura 2.15: Un ciclo que recorre los vértices de  $T$  y  $C$ .

**Teorema 26.3.** Sean  $D_1$  una trayectoria dirigida y  $D_2$  una digráfica hamiltoniana. Si  $D \in D_1 \oplus D_2$  y  $D$  es fuertemente conexa entonces  $D$  es hamiltoniana.

*Demostración.* Como  $D_1$  es una trayectoria dirigida, es de la forma  $T = (x_0, x_1, \dots, x_n)$  y dado que  $D_2$  es hamiltoniana existe un ciclo  $C = (y_0, y_1, \dots, y_{m-1}, y_0)$  tal que  $V(C) = V(D_2)$ . Buscamos un ciclo  $\gamma$  en  $D$  tal que  $V(\gamma) = V(T) \cup V(C)$ .

Notemos que, al ser  $D$  fuertemente conexa, necesariamente existen alguna  $Cx_0$ -flecha y alguna  $x_nC$ -flecha. Supongamos sin perder generalidad que  $(y_0, x_0)$  y  $(x_n, y_b)$  son flechas en  $D$ , donde  $b \in \{0, 1, \dots, m-1\}$ .

Si  $b = 1$ ,  $\gamma = (y_0, x_0) \cup (x_0, T, x_n) \cup (x_n, y_1) \cup (y_1, C, y_0)$  es un ciclo en  $D$  tal que  $V(\gamma) = V(T) \cup V(C)$ . Véase la figura 2.15.

Supongamos entonces que  $b \neq 1$ .

*Observación 1.* Si existe un  $x_i \in V(T)$  tal que  $(x_i, y_r) \in F(D)$  para todo  $r \in \{0, 1, \dots, m-1\}$ , hay un ciclo  $\alpha$  en  $D$  tal que  $V(\alpha) = V(T') \cup V(C)$  donde  $T' = (x_0, T, x_i)$ . Es decir, la subtrayectoria  $T'$  se puede insertar en  $C$ .

Como  $(x_i, y_1)$  y  $(y_0, x_0)$  son flechas en  $D$ , se sigue que  $\alpha = (y_0, x_0) \cup (x_0, T', x_i) \cup (x_i, y_1) \cup (y_1, C, y_0)$  es un ciclo en  $D$  tal que  $V(\alpha) = V(T') \cup V(C)$ . Véase la figura 2.16.

*Observación 2.* Si existe un  $x_i \in V(T)$  tal que  $(y_r, x_i) \in F(D)$  para todo  $r \in \{0, 1, \dots, m-1\}$ , hay un ciclo  $\alpha$  en  $D$  tal que  $V(\alpha) = V(T'') \cup V(C)$  donde  $T'' = (x_i, T, x_n)$ . Es decir, la subtrayectoria  $T''$  se puede insertar en  $C$ .

Como  $(y_{t-1}, x_i)$  y  $(x_n, y_t)$  son flechas en  $D$ , se tiene que  $\alpha = (y_{t-1}, x_i) \cup (x_i, T'', x_n) \cup (x_n, y_t) \cup (y_t, C, y_{t-1})$  es un ciclo en  $D$  tal que  $V(\alpha) = V(T'') \cup V(C)$ . Véase la figura 2.17.

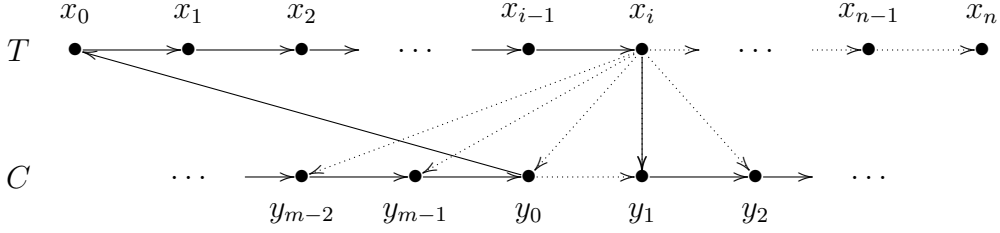


Figura 2.16: Un ciclo que recorre los vértices de  $T' = (x_0, T, x_i)$  y  $C$ .

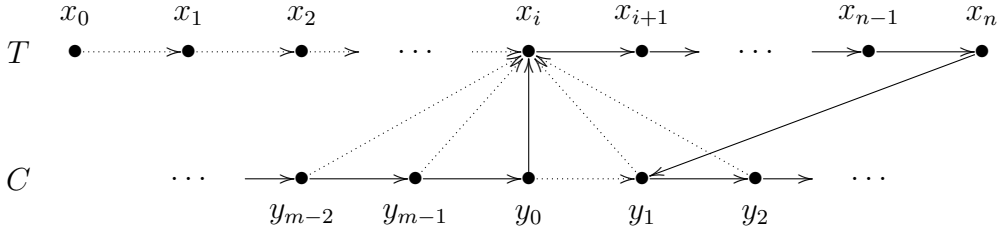


Figura 2.17: Un ciclo que recorre los vértices de  $T'' = (x_i, T, x_n)$  y  $C$ .

*Observación 3.* Si para cada  $x_i \in V(T)$  hay una  $Cx_i$ -flecha y una  $x_iC$ -flecha, entonces existe un ciclo  $\alpha_i$  en  $D$  tal que  $V(\alpha_i) = \{x_i\} \cup V(C)$ . Es decir, cada  $x_i$  se puede insertar en  $C$  donde  $i, 0 \leq i \leq n$ .

Como  $x_i$  es adyacente a todos los vértices de  $C$ , existe un  $r \in \{0, 1, \dots, m - 1\}$  tal que  $(y_r, x_i)$  y  $(x_i, y_{r+1})$  son flechas en  $D$  con  $r + 1$  módulo  $m$ . De donde  $\alpha = (y_r, x_i) \cup (x_i, y_{r+1}) \cup (y_{r+1}, C, y_r)$  es un ciclo en  $D$  tal que  $V(\alpha_i) = \{x_i\} \cup V(C)$ . Véase la figura 2.18.

Continuemos con la prueba.

*Caso 1.* Para cada  $x_i \in V(T)$  existen una  $x_iC$ -flecha y una  $Cx_i$ -flecha en  $D$ .

Por la observación 3, se tiene que para cada  $x_i \in V(T)$  existe un  $r_i \in \{0, 1, \dots, m - 1\}$  tal que  $(y_{r_i}, x_i)$  y  $(x_i, y_{r_i+1})$  son flechas en  $D$  y  $\alpha_i = (y_{r_i}, x_i) \cup (x_i, y_{r_i+1}) \cup (y_{r_i+1}, C, y_{r_i})$  es un ciclo en  $D$  tal que  $V(\alpha_i) = \{x_i\} \cup V(C)$  con  $i = 0, 1, \dots, n$ .

Ahora, buscamos construir un ciclo  $\gamma$  que incluya a los vértices de  $C$  y a cada  $x_i$  donde  $i = 0, 1, \dots, n$ . Lo haremos usando la misma técnica.

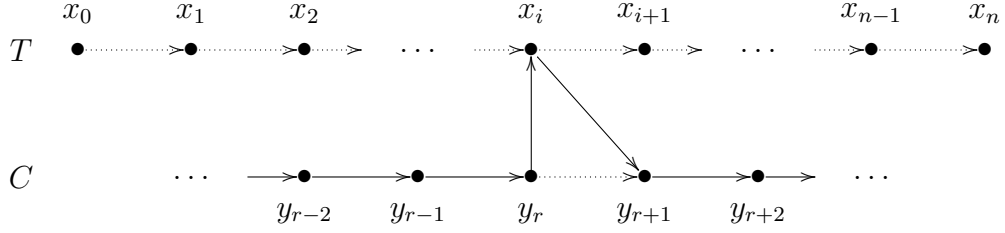


Figura 2.18: Un ciclo que recorre  $x_i$  y los vértices de  $C$ .

*Caso 1.1.*  $r_i \neq r_j$  para todo  $i \neq j$ .

En este caso podemos ordenar el conjunto  $\{r_0, r_1, \dots, r_n\}$  de manera estrictamente ascendente, digamos  $r_{i_0} < r_{i_1} < \dots < r_{i_n}$  y tendremos que  $\gamma = (y_{r_{i_0}}, x_{i_0}) \cup (x_{i_0}, y_{r_{i_0}+1}) \cup (y_{r_{i_0}+1}, C, y_{r_{i_1}}) \cup (y_{r_{i_1}}, x_{i_1}) \cup (x_{i_1}, y_{r_{i_1}+1}) \cup (y_{r_{i_1}+1}, C, y_{r_{i_2}}) \cup \dots \cup (y_{r_{i_n}}, x_{i_n}) \cup (x_{i_n}, y_{r_{i_n}+1}) \cup (y_{r_{i_n}+1}, C, y_{r_{i_0}})$  es un ciclo en  $D$  tal que  $V(\gamma) = V(T) \cup V(C)$ .

*Caso 1.2.* Existen algunos  $r_i$  y  $r_j$  tales que  $r_i = r_j$  e  $i \neq j$ .

Sean  $s_0 = \min\{i \mid r_i = r_j \text{ para algún } j \neq i, \text{ donde } 0 \leq i \leq n \text{ y } 0 \leq j \leq n\}$  y  $t_0 = \max\{j \mid r_j = r_{s_0}, \text{ donde } s_0 < j \leq n\}$  y definamos de manera recursiva  $s_k = \min\{i \mid r_i = r_j, \text{ donde } t_k + 1 \leq i \leq n \text{ y } t_k + 1 \leq j \leq n\}$  y  $t_k = \max\{j \mid r_j = r_{s_k}, \text{ donde } s_k \leq j \leq n\}$ .

Notemos que:

- $s_0$  y  $t_0$  son distintos por hipótesis.
- $s_k$  y  $t_k$  no necesariamente son distintos para  $k \neq 0$ .
- $s_k < s_{k+1}$  para cualquier  $k$ .
- Existe  $k_n$  tal que  $t_{k_n} = n$  pues la trayectoria es finita.
- $r_{s_g} \neq r_{s_h}$  si  $g \neq h$  por la manera en que los elegimos.
- Si  $0 \leq i < s_0$ , se tiene que  $r_i \neq r_j$  para todo  $j \neq i$  donde  $0 \leq j \leq n$ .
- Dado que  $(y_{r_i}, x_i)$  y  $(x_i, y_{r_i+1})$  son dos flechas en  $D$  para todo  $i$ ,  $0 \leq i \leq n$  y que  $r_{s_k} = r_{t_k}$  por definición, tenemos que  $(y_{r_{s_k}}, x_{s_k})$  y  $(x_{t_k}, y_{r_{s_k}+1})$  son dos flechas en  $D$  y, por otro lado,  $(x_{t_k}, x_{s_{k+1}})$  es una flecha en  $T$ , es decir  $x_{t_k}$  y  $x_{s_{k+1}}$  son vértices consecutivos en  $T$ .

Además, el conjunto  $\{r_0, r_1, \dots, r_{s_0-1}, r_{s_0}, r_{s_1}, \dots, r_{s_{k_n}}\}$  consiste de subíndices distintos, entonces se puede ordenar de manera estrictamente ascendente.

Así, las subtrayectorias  $P_0 = (x_0)$ ,  $P_1 = (x_1)$ ,  $\dots$ ,  $P_{s_0-1} = (x_{s_0-1})$ ,  $P_{s_0} = (x_{s_0}, T, x_{t_0})$ ,  $P_{s_1} = (x_{s_1}, T, x_{t_1})$ ,  $\dots$ ,  $P_{s_{k_n}} = (x_{s_{k_n}}, T, x_{t_{k_n}})$ , son una partición de inserción múltiple de  $T$  en  $C$  y por lo tanto existe un ciclo  $\gamma$  en  $D$  tal que  $V(\gamma) = V(T) \cup V(C)$ .

*Caso 2.* Hay algún  $x_i \in V(T)$  tal que no existe ninguna  $Cx_i$ -flecha en  $D$ .

Sea  $t = \max\{i \mid (y_j, x_i) \notin F(D) \text{ para todo } 0 \leq j \leq m-1, 0 \leq i \leq n\}$ , así,  $x_t$  es un vértice en  $T$  al que no llegan flechas desde  $C$ . Sin embargo,  $x_t$  es adyacente a todos los vértices de  $C$ , por lo que necesariamente  $(x_t, y_j) \in F(D)$  para todo  $j$ ,  $0 \leq j \leq m-1$ . Entonces, por la observación 1, tenemos que la subtrayectoria  $T_1 = (x_0, T, x_t)$  se puede insertar en  $C$  con las flechas  $(y_0, x_0)$  y  $(x_t, y_1)$ .

Analicemos los vértices de la subtrayectoria  $T_2 = (x_{t+1}, T, x_n)$ .

*Caso 2.1.* Para cada  $x_i \in V(T_2)$  existen una  $x_iC$ -flecha y una  $Cx_i$ -flecha en  $D$ .

Por la observación 3, para cada  $x_i \in V(T_2)$ , existe un  $r_i \in \{0, 1, \dots, m-1\}$  tal que  $(y_{r_i}, x_i)$  y  $(x_i, y_{r_i+1})$  son flechas en  $D$  para  $i$ ,  $t+1 \leq i \leq n$ . Es decir, el vértice  $x_i$  se puede insertar en  $C$  para todo  $i$ ,  $t+1 \leq i \leq n$ .

Definamos  $r_t = 0$  pues la manera de insertar  $x_t$  en  $C$  es a través de  $T_1$  con las flechas que ya habíamos mencionado. Es decir, con una flecha desde  $y_0$  hacia el vértice inicial de  $T_1$ .

*Caso 2.1.1.*  $r_i \neq r_j$  para todo  $i \neq j$  donde  $i, j \in \{t, t+1, \dots, n\}$ .

En este caso, podemos ordenar los  $r_i$  de manera estrictamente ascendente, y las subtrayectorias  $P_t = (x_0, T, x_t)$ ,  $P_{t+1} = (x_{t+1})$ ,  $\dots$ ,  $P_n = (x_n)$  son una partición de inserción múltiple de  $T$  en  $C$ . Entonces existe un ciclo  $\gamma$  en  $D$  tal que  $V(\gamma) = V(T) \cup V(C)$ .

*Caso 2.1.2.* Existen  $r_i = r_j$  con  $i \neq j$  para algunos  $i, j \in \{t, t+1, \dots, n\}$ .

Definamos como en el caso 1.2,  $s_0 = \min\{i \mid r_i = r_j \text{ para algún } j \neq i, \text{ donde } t \leq i \leq n \text{ y } t \leq j \leq n\}$  y  $t_0 = \max\{j \mid r_j = r_{s_0}, \text{ donde } s_0 < j \leq n\}$ , además definamos de manera recursiva  $s_k = \min\{i \mid r_i = r_j, \text{ donde } t_k + 1 \leq i \leq n \text{ y } t_k + 1 \leq j \leq n\}$  y  $t_k = \max\{j \mid r_j = r_{s_k}, \text{ donde } s_k \leq j \leq n\}$ .

Dichos números cumplen las mismas características que en el caso 1.2, en particular:

- Existe  $k_n$  tal que  $t_{k_n} = n$  pues la trayectoria es finita.
- $r_{s_g} \neq r_{s_h}$  si  $g \neq h$  por la manera en que los elegimos.
- Si  $0 \leq i < s_0$ , se tiene que  $r_i \neq r_j$  para todo  $j \neq i$ ,  $0 \leq j \leq n$ .
- Dado que  $(y_{r_i}, x_i)$  y  $(x_i, y_{r_{i+1}})$  son dos flechas de  $D$  para todo  $0 \leq i \leq n$  y que  $r_{s_k} = r_{t_k}$ , por definición tenemos que  $(y_{r_{s_k}}, x_{s_k})$  y  $(x_{t_k}, y_{r_{s_k}+1})$  son dos flechas en  $D$  y, por otro lado,  $(x_{t_k}, x_{s_{k+1}})$  es una flecha en  $T$ , es decir  $x_{t_k}$  y  $x_{s_{k+1}}$  son vértices consecutivos en  $T$ .

Entonces en el conjunto de subíndces  $\{r_t, r_{t+1}, \dots, r_{s_0-1}, r_{s_0}, \dots, r_{s_{k_n}}\}$  son todos distintos y por ello podemos ordenarlos de manera estrictamente ascendente.

De donde las subtrayectorias  $P_t = (x_0, T, x_t)$ ,  $P_{t+1} = (x_{t+1})$ ,  $\dots$ ,  $P_{s_0-1} = (x_{s_0-1})$ ,  $P_{s_0} = (x_{s_0}, T, x_{t_0})$ ,  $P_{s_1} = (x_{s_1}, T, x_{t_1})$ ,  $\dots$ ,  $P_{s_{k_n}} = (x_{s_{k_n}}, T, x_{t_{k_n}})$ , son una partición de inserción múltiple de  $T$  en  $C$ . Entonces existe un ciclo  $\gamma$  en  $D$  tal que  $V(\gamma) = V(T) \cup V(C)$ .

*Nota 1.* Si  $s_0 = t$ ,  $P_t = P_{s_0} = (x_0, T, x_{t_0})$ .

*Caso 2.2.* Hay algún  $x_i \in V(T_2)$  tal que no existe ninguna  $x_i C$ -flecha en  $D$ .

Sea  $f = \min\{i \mid (x_i, y_j) \notin F(D) \text{ para todo } j, 0 \leq j \leq m-1, t+1 \leq i \leq n\}$ , así  $x_f$  es un vértice en  $T$  del que no salen flechas hacia  $C$ . Como  $x_f$  es adyacente a todos los vértices de  $C$ , necesariamente  $(y_j, x_f) \in F(D)$  para todo  $j$ ,  $0 \leq j \leq m-1$ . Entonces, por la observación 2, tenemos que  $T_3 = (x_f, T, x_n)$  se puede insertar en  $C$  con las flechas  $(y_{b-1}, x_f)$  y  $(x_n, y_b)$ .

Ahora fijémonos en los vértices de  $T_4 = (x_{t+1}, T, x_{f-1})$ , por la elección de  $t$  y  $f$ , sabemos que para cada  $x \in V(T_4)$  existen una  $x C$ -flecha y una  $C x$ -flecha en  $D$ .

Entonces por la observación 3, para cada  $x_i \in V(T_4)$  existe un  $r_i \in \{0, 1, \dots, m-1\}$  tal que  $(y_{r_i}, x_i)$  y  $(x_i, y_{r_{i+1}})$  son flechas en  $D$  donde  $i, t+1 \leq i \leq f-1$ . Es decir,  $x_i$  se puede insertar en  $C$  para todo  $i$ ,  $t+1 \leq i \leq n$ .

Igual que antes, definamos  $r_t = 0$  y  $r_f = b-1$  por ser los subíndices de los elementos en  $\{y_0, y_1, \dots, y_{m-1}\}$  que son exvecinos de los vértices iniciales de  $T_1$  y  $T_3$ , respectivamente. Recordemos que  $T_1$  y  $T_3$  son las subtrayectorias que incluyen a  $x_t$  y  $x_f$ , respectivamente.

Con el conjunto de subíndices  $\{r_t, r_{t+1}, \dots, r_{f-1}, r_f\}$  podemos hacer el mismo análisis que en los casos 2.1.1 y 2.1.2 para encontrar una partición de

inserción múltiple de  $T$  en  $C$  y así garantizar la existencia de un ciclo  $\gamma$  cuyo conjunto de vértices sea igual a  $V(T) \cup V(C)$ .

*Caso 3.* Hay algún  $x_i \in V(T)$  tal que no existe ninguna  $x_i C$ -flecha en  $D$ .

En este caso el análisis es análogo al del caso 2.

Primero definiremos  $f = \min\{i \mid (x_i, y_j) \notin F(D) \text{ para todo } j, 0 \leq j \leq m-1, 0 \leq i \leq n\}$ . Para garantizar, por la observación 2, que  $(x_f, T, x_n)$  se puede insertar en  $C$  y hacer el análisis de los vértices en  $T_5 = (x_0, T, x_{f-1})$ , y si para todo  $x \in V(T_5)$  existen una  $x C$ -flecha y una  $C x$ -flecha o si hay algún vértice en  $V(T_5)$  al que no llegan flechas desde  $C$ , construiremos de manera similar una partición de inserción múltiple de  $T$  en  $C$ .

De todo lo anterior podemos concluir que  $D$  es hamiltoniana.  $\square$

**Afirmación 26.1.** *Si una suma generalizada de una digráfica hamiltoniana y otra que tiene un factor de dos ciclos es fuertemente conexa, dicha suma no necesariamente es hamiltoniana.*

**Afirmación 26.2.** *Si una suma generalizada de una digráfica hamiltoniana y otra que tiene una trayectoria hamiltoniana es fuertemente conexa, dicha suma no necesariamente es hamiltoniana.*

Para mostrar la veracidad de las dos afirmaciones anteriores, construyamos un ejemplo que ilustre ambas situaciones.

**Ejemplo 26.1.** *Tomemos  $D_1 = (x_0, x_1, x_2, x_3, x_0)$ ,  $C_1 = (y_0^1, y_1^1, y_2^1, y_3^1, y_0^1)$  y  $C_2 = (y_0^2, y_1^2, y_2^2, y_3^2, y_0^2)$  tres ciclos de longitud 4 mutuamente ajenos y sea  $D_2$  la digráfica con el conjunto de vértices  $V(D_2) = V(C_1) \cup V(C_2)$  y el conjunto de flechas  $F(D_2) = F(C_1) \cup F(C_2) \cup \{(y_2^1, y_1^2), (y_2^2, y_1^1)\}$ . Si  $D \in D_1 \oplus D_2$  y  $D$  es fuertemente conexa, no necesariamente es hamiltoniana.*

*Demostración.* Por la proposición 21 tenemos que  $D_2$  es fuerte. Además,  $D_2$  tiene un factor de cardinalidad mínima con dos ciclos,  $C_1$  y  $C_2$ , y tiene una trayectoria hamiltoniana  $T$ , donde  $T = (y_3^1, C_1, y_2^1) \cup (y_2^1, y_1^2) \cup (y_1^2, C_2, y_0^2)$ .

Construyamos una digráfica  $D$  que pertenezca a la suma  $D_1 \oplus D_2$  que resulte fuertemente conexa, pero no hamiltoniana.

Para que  $D$  sea una suma generalizada de  $D_1$  y  $D_2$ ,  $D$  debe tener el conjunto de vértices  $V(D) = V(D_1) \cup V(D_2)$ . Además, las digráficas inducidas por  $V(D_1)$  y  $V(D_2)$  deben ser  $D_1$  y  $D_2$ , respectivamente y entre cualesquiera dos vértices, uno de  $D_1$  y uno de  $D_2$ , debe haber una y sólo



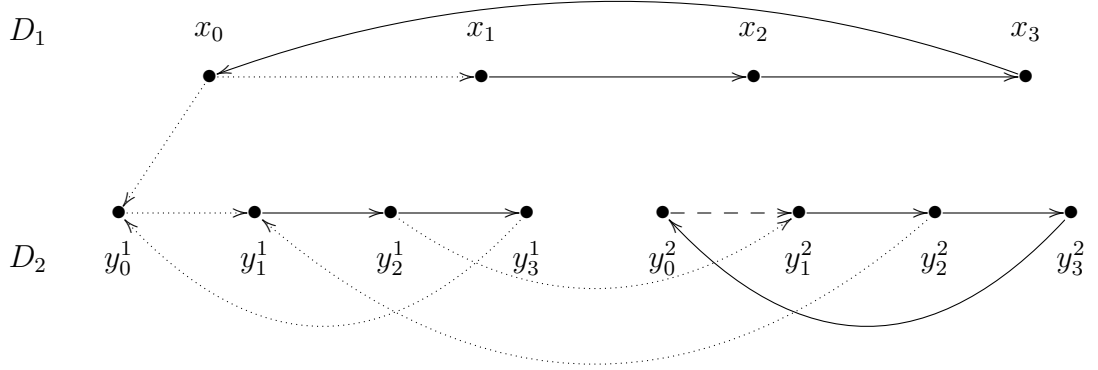


Figura 2.19: Las flechas obligadas en caso de existir un ciclo hamiltoniano.

una flecha. Definamos el conjunto de flechas de  $D$  como sigue:  $F(D) = F(D_1) \cup F(D_2) \cup \{(x_0, y_0^1)\} \cup \{(u, v) \mid u \in V(D_2) \text{ y } v \in V(D_1)\} \setminus \{(y_0^1, x_0)\}$ .

Con el conjunto de flechas de  $D$  así definido  $D$  cumple las condiciones para estar en  $D_1 \oplus D_2$ .

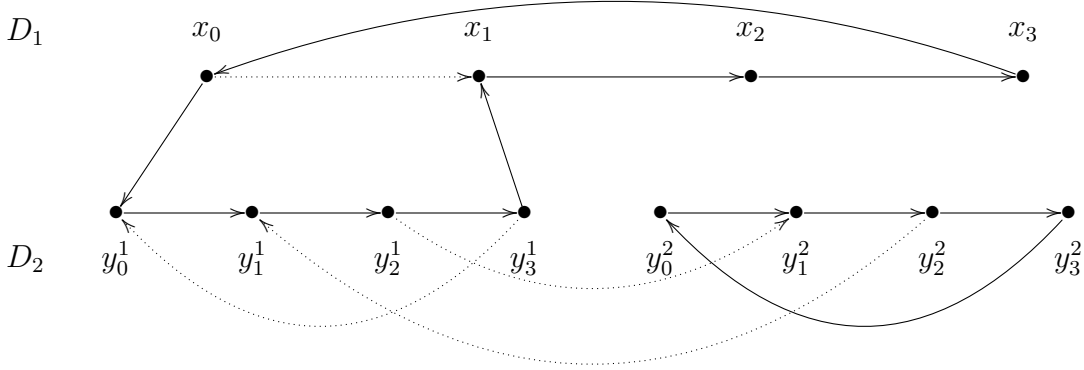
Supongamos por contradicción que existe  $C$  un ciclo hamiltoniano en  $D$ .

Por la manera como definimos las flechas de  $D$ , se sigue que  $\delta_D^+(x_i) = 1$  para  $i = 1, 2, 3$ , que  $\delta_D^-(y_j^1) = 1$  para  $j = 2, 3$  y que  $\delta_D^-(y_k^2) = 1$  para  $k = 0, 2, 3$ . De donde las flechas  $(x_1, x_2)$ ,  $(x_2, x_3)$ ,  $(x_3, x_0)$ ,  $(y_1^1, y_2^1)$ ,  $(y_2^1, y_3^1)$ ,  $(y_3^1, y_0^1)$ ,  $(y_2^2, y_3^2)$ ,  $(y_3^2, y_0^2)$  y  $(y_0^2, y_1^2)$  necesariamente son flechas de  $C$ .

Además, tenemos que  $\delta_D^-(y_1^2) = 2$ , de aquí que el predecesor de  $y_1^2$  en  $C$  debe ser alguno de sus dos vecinos  $y_2^2$  o  $y_0^2$ . Pero como  $(y_2^2, y_3^2)$  es una flecha obligatoria en  $C$ ,  $y_2^2$  no puede ser el predecesor de  $y_1^2$  en  $C$ , por lo tanto  $y_0^2$  debe serlo y  $(y_0^2, y_1^2)$  es una flecha en  $C$ , como en la figura 2.19, lo cual es una contradicción, pues  $C' = (y_0^2, y_1^2, y_2^2, y_3^2, y_0^2)$  es una subsucesión de vértices en  $C$  que forma un ciclo de longitud 4 y por tanto no abarca todos los vértices de  $D$ , pues  $|V(D)| = 12$ .  $\square$

Sin embargo,  $D$  sí tiene un factor de dos ciclos  $C' = (y_0^2, y_1^2, y_2^2, y_3^2, y_0^2)$  y  $C'' = (y_0^1, y_1^1, y_2^1, y_3^1, x_1, x_2, x_3, x_0, y_0^1)$  como se muestra en la figura 2.20.

**Teorema 26.4.** Sean  $D_1$  una digráfica hamiltoniana y  $D_2$  una digráfica con un factor de cardinalidad mínima de  $k$  ciclos, tales que  $D_1$  y  $D_2$  son ajenas en vértices. Si  $D \in D_1 \oplus D_2$  y  $D$  es fuertemente conexa entonces  $D$  posee un factor de ciclos de cardinalidad menor o igual que  $k$ .

Figura 2.20: Un factor de dos ciclos en  $D$ .

*Demostración.* Sea  $D \in D_1 \oplus D_2$  tal que  $D$  es fuertemente conexa y sean  $C = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_0)$  un ciclo hamiltoniano en  $D_1$  y  $C_2^1 = (y_0^1, y_1^1, \dots, y_{m_1-1}^1, y_0^1)$ ,  $C_2^2 = (y_0^2, y_1^2, \dots, y_{m_2-1}^2, y_0^2)$ ,  $\dots$ ,  $C_2^k = (y_0^k, y_1^k, \dots, y_{m_k-1}^k, y_0^k)$  los ciclos de un factor de  $D_2$  de cardinalidad  $k$ . Notemos que todos ellos son ciclos también en  $D$ .

Como  $D$  es fuertemente conexa, deben existir al menos una  $D_1 D_2$ -flecha y al menos una  $D_2 D_1$ -flecha.

*Caso 1.* Para alguna  $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ , existen una  $D_1 C_2^j$ -flecha y una  $C_2^j D_1$ -flecha en  $D$ .

En este caso la subdigráfica inducida por  $V(D_1) \cup V(C_2^j)$ ,  $D[V(D_1) \cup V(C_2^j)] \in D_1 \oplus C_2^j$ , donde  $D_1$  y  $C_2^j$  son hamiltonianas, y dicha suma generalizada es fuertemente conexa. Entonces por el teorema 26.1 tenemos que existe un ciclo  $C'$  en  $D[V(D_1) \cup V(C_2^j)]$  tal que  $V(C') = V(D_1) \cup V(C_2^j)$ ,  $C'$  es también un ciclo en  $D$  con el mismo conjunto de vértices, de donde  $\{C', C_2^1, \dots, C_2^{j-1}, C_2^{j+1}, \dots, C_2^k\}$  es un factor de  $k$  ciclos de  $D$ .

*Caso 2.* Para cada  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ , se tiene que  $D_1$  domina a  $C_2^j$  o que  $C_2^j$  domina a  $D_1$ .

Para este caso tomaremos la siguiente notación. Al vértice inicial de  $C_2^j$ ,  $y_0^j$ , lo denotaremos por  $i(j)$  y al vértice final de  $C_2^j$ ,  $y_{m_j-1}^j$ , lo denotaremos por  $f(j)$ .

*Nota 1.* Recordemos que entre cualesquiera dos vértices, uno de  $D_1$  y otro de  $C_2^j$ , existe exactamente una flecha, así si existe una  $D_1 C_2^j$ -flecha se sigue

que  $D_1$  domina a  $C_2^j$  o si por el contrario existe una  $C_2^j D_1$ -flecha tendremos que  $C_2^j$  domina a  $D_1$ .

Sabemos que en  $D$  hay al menos una  $D_1 D_2$ -flecha y al menos una  $D_2 D_1$ -flecha. Entonces para algunos  $s, t \in \{1, 2, \dots, k\}$  se tiene que  $D_1$  domina a  $C_2^s$  y  $C_2^t$  domina a  $D_1$ . Notemos que  $s$  y  $t$  son distintos.

Consideremos los vértices  $i(s)$  e  $i(t)$ , son distintos pues  $i(s) \in V(C_2^s)$  y  $i(t) \in V(C_2^t)$ . Por ser  $D$  fuertemente conexa, existe alguna  $i(s)i(t)$ -trayectoria, llamémosla  $T$ , donde  $T = (i(s) = u_0, u_1, u_2, \dots, u_l = i(t))$ .

Sea  $r = \min\{i \mid \text{existe } u_i D_1\text{-flecha}, 1 \leq i \leq l\}$ . Como  $u_l = i(t)$  y existe  $i(t)D_1$ -flecha en  $D$ , el conjunto  $\{i \mid \text{existe } u_i D_1\text{-flecha}, 1 \leq i \leq l\} \neq \emptyset$ .

*Nota 2.* Para cada  $j \in \{1, 2, \dots, r\}$ , el vértice  $u_j$  pertenece a  $V(C_2^{i_j})$  para algún  $i_j \in \{1, 2, \dots, k\}$  ya que, de no ser así,  $u_j \in V(D_1)$ , de donde  $T' = (i(s) = u_0, u_1, u_2, \dots, u_j)$  es una trayectoria que inicia en un vértice de  $D_2$  y termina en uno de  $D_1$ . Entonces hay alguna  $D_2 D_1$ -flecha en  $T'$ , es decir, para algún  $i \in \{0, 1, \dots, r-1\}$ ,  $u_i \in V(D_2)$  y  $u_{i+1} \in V(D_1)$ , por lo tanto en  $D$  hay una  $u_i D_1$ -flecha, lo cual es imposible por la elección de  $r$ .

Por la manera en que definimos  $r$ , sabemos que:

- Por la nota 2 tenemos que  $u_{r-1} \in V(C_2^{j_{r-1}})$  para algún  $j_{r-1} \in \{1, 2, \dots, k\}$  y como no existe una  $u_{r-1} D_1$ -flecha en  $D$ , debe existir alguna  $D_1 u_{r-1}$ -flecha, así se tiene que  $D_1$  domina a  $C_2^{j_{r-1}}$  por la nota 1.
- Como  $u_{r-1} \in V(C_2^{j_{r-1}})$ , supongamos sin perder generalidad que  $u_{r-1} = f(j_{r-1})$ .
- Existe una  $u_r D_1$ -flecha en  $D$  entonces, por la nota 2, tenemos que  $u_r \in V(C_2^{j_r})$  para algún  $j_r \in \{1, 2, \dots, k\}$  y por la nota 1 se sigue que  $C_2^{j_r}$  domina a  $D_1$ .
- Como  $u_r \in V(C_2^{j_r})$ , supongamos sin perder generalidad que  $u_r = i(j_r)$ .
- $j_{r-1} \neq j_r$ .
- $(u_{r-1}, u_r) = (f(j_{r-1}), i(j_r))$ .

De donde,  $C'' = (f(j_{r-1}), i(j_r)) \cup (i(j_r), C_2^{i_r}, f(j_r)) \cup (f(j_r), x_0) \cup (x_0, C, x_{n-1}) \cup (x_{n-1}, i(j_{r-1})) \cup (i(j_{r-1}), C_2^{i_{r-1}}, f(j_{r-1}))$  es un ciclo en  $D$  tal que  $V(C'') = V(C_2^{i_{r-1}}) \cup V(C_2^{i_r}) \cup V(C)$ .

Así, el conjunto  $\{C'', C_2^1, C_2^2, \dots, C_2^k\} \setminus \{C_2^{i_{r-1}}, C_2^{i_r}\}$  es un factor de  $k-1$  ciclos de  $D$ .

De ambos casos podemos concluir que  $D$  tiene un factor de ciclos  $F$  tal que  $|F| \leq k$ , como se quería demostrar.  $\square$

Es importante señalar que la cota no se puede mejorar. En el ejemplo 26.1  $D_1$  es hamiltoniana y  $D_2$  tiene un factor de cardinalidad mínima con dos ciclos y se probó, para un caso particular  $D \in D_1 \oplus D_2$ , que  $D$  tiene un factor de dos ciclos, pero no tiene un factor de un ciclo.

**Teorema 26.5.** *Sean  $D_1$  y  $D_2$  dos digráficas mutuamente ajenas, cada una con un factor de ciclos de cardinalidad mínima, de  $k_1$  y  $k_2$  ciclos, respectivamente. Si  $D \in D_1 \oplus D_2$  y  $D$  es fuertemente conexa entonces  $D$  posee un factor de ciclos de cardinalidad menor o igual que  $k_1 + k_2 - 1$ .*

Para hacer la prueba de este teorema estaremos tentados a utilizar los resultados anteriores, pero esto no será posible ya que no podemos garantizar que las subdigráficas inducidas por la unión de los conjuntos de vértices de varios ciclos sean fuertemente conexas, en particular tomando un ciclo del factor de  $D_1$  y todos los del factor de  $D_2$ , la subdigráfica inducida por los conjuntos de vértices de dichos ciclos, será una suma generalizada de un ciclo, que es una digráfica hamiltoniana, y otra con un factor de  $k_2$  ciclos, sin embargo dicha suma puede que no sea fuertemente conexa.

*Demostración.* Sea  $D \in D_1 \oplus D_2$  tal que  $D$  es fuertemente conexa y sean  $C_1^1 = (x_0^1, x_1^1, \dots, x_{n_1-1}^1, x_0^1)$ ,  $C_1^2 = (x_0^2, x_1^2, \dots, x_{n_2-1}^2, x_0^2)$ ,  $\dots$ ,  $C_1^{k_1} = (x_0^{k_1}, x_1^{k_1}, \dots, x_{n_{k_1}-1}^{k_1}, x_0^{k_1})$  los ciclos de un factor de cardinalidad mínima en  $D_1$  y  $C_2^1 = (y_0^1, y_1^1, \dots, y_{m_1-1}^1, y_0^1)$ ,  $C_2^2 = (y_0^2, y_1^2, \dots, y_{m_2-1}^2, y_0^2)$ ,  $\dots$ ,  $C_2^{k_2} = (y_0^{k_2}, y_1^{k_2}, \dots, y_{m_{k_2}-1}^{k_2}, y_0^{k_2})$  los ciclos de un factor de cardinalidad mínima en  $D_2$ .

*Caso 1.* Existe un par de ciclos,  $C_1^r$  y  $C_2^s$ , tales que hay al menos una  $C_1^r C_2^s$ -flecha y al menos una  $C_2^s C_1^r$ -flecha.

Consideremos la subdigráfica inducida por el conjunto  $V(C_1^r) \cup V(C_2^s)$ ,  $D[V(C_1^r) \cup V(C_2^s)] \in D[V(C_1^r)] \oplus D[V(C_2^s)]$ , esta digráfica es una suma generalizada de  $C_1^r$  y  $C_2^s$ . Además es fuertemente conexa, de donde, por el teorema 26.1, se tiene que  $D[V(C_1^r) \cup V(C_2^s)]$  es hamiltoniana, es decir, existe un ciclo  $C'$  en  $D[V(C_1^r) \cup V(C_2^s)]$  tal que  $V(C') = V(C_1^r) \cup V(C_2^s)$  que es también un ciclo en  $D$ . Por lo tanto  $F = \{C'\} \cup \{C_1^i \mid i = 1, 2, \dots, k_1\} \cup \{C_2^j \mid j = 1, 2, \dots, k_2\} \setminus \{C_1^r, C_2^s\}$  es un factor de ciclos en  $D$  de cardinalidad  $k_1 + k_2 - 1$ .

*Caso 2.* Dados dos ciclos distintos,  $C_1^r$  y  $C_2^s$ ,  $C_1^r$  domina a  $C_2^s$  o  $C_1^s$  domina a  $C_2^r$ .

*Caso 2.1.* Existe un ciclo  $C_2^j$  en  $D_2$  al que no le llegan flechas desde  $D_1$ .

Supongamos sin perder generalidad que  $C_2^1$  es un ciclo al que no llegan flechas desde  $D_1$ . Como  $D$  es la suma generalizada de  $D_1$  y  $D_2$ , se tiene que  $C_2^1$  domina a  $D_1$ . En particular, si  $\hat{x} \in V(D_1)$ , se tiene que  $T = (y_0^1, \hat{x})$  es una  $y_0^1\hat{x}$ -trayectoria y, dado que  $D$  es fuertemente conexa, hay una  $\hat{x}y_0^1$ -trayectoria.

Sea  $T' = (\hat{x} = u_0, u_1, u_2, \dots, u_l = y_0^1)$  una  $\hat{x}y_0^1$ -trayectoria, como  $T'$  es una  $D_1D_2$ -trayectoria alguna flecha en algún momento se llega a  $D_2$  desde  $D_1$ , entonces tomemos  $t = \text{máx}\{i \mid \text{existe } x \in V(D_1) \text{ tal que } x \text{ es invecino de } u_i \text{ en } D\}$ .

Por la manera en que elegimos  $t$ , se sigue que  $u_t$  y  $u_{t+1}$  son dos vértices de  $D_2$ .

Además, sabemos que  $u_t \in V(C_2^r)$  para algún  $r \in \{1, 2, \dots, k_2\}$  y como  $u_t$  tiene un invecino,  $x$ , en uno de los ciclos del factor de  $D_1$ , se tiene que  $x$  domina a  $C_2^r$  y por la definición de  $t$  sabemos que  $u_{t+1}$  no tiene invecinos en  $D_1$ , en particular  $x$  no lo es, pero como sí son adyacentes podemos afirmar que  $u_{t+1}$  domina a  $x$ . Por lo tanto  $u_{t+1} \notin V(C_2^r)$  y de aquí se sigue que existe un  $s$  distinto de  $r$  en  $\{1, 2, \dots, k_2\}$  tal que  $u_{t+1} \in V(C_2^s)$  y que  $C_2^s$  domina a  $x$ .

Supongamos sin perder generalidad que  $x \in V(C_1^1)$ . Entonces, por lo anterior, se tiene que  $C_1^1$  domina a  $C_2^r$  y que  $C_2^s$  domina a  $C_1^1$ .

Tomemos la siguiente notación para facilitar la comprensión, llamaremos  $i_1(j)$  y  $f_1(j)$  a los vértices  $x_0^j$  y  $x_{n_j-1}^j$ , respectivamente, del ciclo  $C_1^j$  en  $D_1$  e  $i_2(j)$  y  $f_2(j)$  a los vértices  $y_0^j$  y  $y_{m_j-1}^j$  del ciclo  $C_2^j$  en  $D_2$ .

Reetiquetemos los vértices de manera que  $u_t = f(r)$  y  $u_{t+1} = i(s)$  y construyamos el ciclo  $C' = (f(1), i(r)) \cup (i(r), C_2^r, f(r)) \cup (f(r), i(s)) \cup (i(s), C_2^s, f(s)) \cup (f(s), i(1)) \cup (i(1), C_1^1, f(1))$  que es un ciclo en  $D$  cuyo conjunto de vértices es  $V(C') = V(C_1^1) \cup V(C_2^r) \cup V(C_2^s)$ .

Así  $F = \{C', C_1^2, C_1^3, \dots, C_1^{k_1}\} \cup \{\{C_2^j \mid j = 1, 2, \dots, k_2\} - \{C_2^r, C_2^s\}\}$  es un factor de ciclos de  $D$  de cardinalidad  $k_1 + k_2 - 2$ .

*Caso 2.2.* Existe un ciclo  $C_2^j$  en  $D_2$  del que no salen flechas hacia  $D_1$ .

Para demostrar este caso, utilizaremos la propiedades de la digráfica recíproca.

Consideremos la digráfica  $D^-$ . Tenemos por la proposición 23 que  $D^- \in D_1^- \oplus D_2^-$  y notemos que el ciclo  $C_2^j$  de  $D_2$  del que no salen flechas hacia  $D_1$  en  $D$ , nos proporciona un ciclo  $C_2^{j-}$  en  $D_2^-$  al que no le llegan flechas desde  $D_1^-$  en  $D^-$ . Dicha situación es igual a la del caso 2.1 y por lo tanto podemos

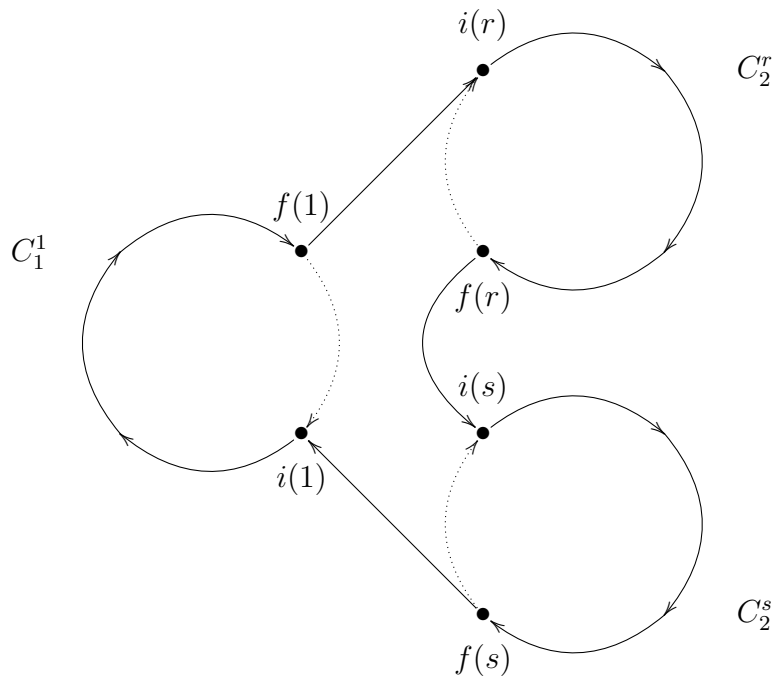


Figura 2.21: El ciclo  $C'$  construido a partir de los ciclos  $C_1^1$ ,  $C_2^r$  y  $C_2^s$ .

encontrar un factor de ciclos de  $D^-$  de cardinalidad  $k_1 + k_2 - 2$ , este último asegura la existencia de otro factor de ciclos en  $D$  de la misma cardinalidad.

*Caso 2.3.* Para cada ciclo  $C_2^j$  en  $D_2$  existen al menos una flecha que llega desde  $D_1$  y al menos una flecha que sale hacia  $D_1$ .

Los casos en que hay un ciclo  $C_1^i$  en  $D_1$  al que no entran flechas desde  $D_2$  o del que no salen flechas hacia  $D_2$ , se prueban de manera análoga a los casos 2.1 y 2.2, respectivamente, entonces supondremos que también para cada ciclo  $C_1^i$  en  $D_1$  hay al menos una flecha que llega desde  $D_2$  y hay al menos una flecha que sale hacia  $D_2$ .

Observemos que para cada ciclo  $C_1^i$  en  $D_1$  existen dos ciclos diferentes  $C_2^j$  y  $C_2^h$  en  $D_2$  tales que  $C_1^i$  domina a  $C_2^j$  y que  $C_2^h$  domina a  $C_1^i$  y para cada ciclo  $C_2^j$  en  $D_2$  existen dos ciclos  $C_1^i$  y  $C_1^h$  en  $D_1$  tales que  $C_2^j$  domina a  $C_1^i$  y que  $C_1^h$  domina a  $C_2^j$ .

Construyamos una nueva digráfica  $G$  con el conjunto de vértices  $\{u_1, u_2, \dots, u_{k_1}, v_1, v_2, \dots, v_{k_2}\}$  y tal que la flecha  $(u_i, v_j) \in F(G)$  si  $C_1^i$  domina a  $C_2^j$  o bien  $(v_j, u_i) \in F(G)$  si  $C_2^j$  domina a  $C_1^i$  donde  $1 \leq i \leq k_1$  y  $1 \leq j \leq k_2$ .

Por la manera en la que definimos a  $G$  sabemos que es una digráfica bipartita en la que cada vértice tiene ingrado al menos uno y exgrado al menos uno. Entonces podemos asegurar que existe un ciclo en  $G$ , llamémosle  $\gamma$ , que tiene longitud par de al menos 4 y que tiene alternadamente un vértice  $u_i$  y uno  $v_j$ , así tenemos que el ciclo  $\gamma$  se puede escribir como  $\gamma = (u_{h_1}, v_{h_2}, u_{h_3}, \dots, v_{h_l}, u_{h_1})$ .

Como cada vértice de  $\gamma$  tiene asociado un ciclo en  $D$  y sus flechas nos dan la relación de dominancia, tenemos que la sucesión  $(C_1^{h_1}, C_2^{h_2}, C_1^{h_3}, \dots, C_2^{h_l}, C_1^{h_1})$  cumple que cada ciclo domina a su sucesor. Llamemos  $R$  al conjunto  $\{C_1^{h_1}, C_2^{h_2}, C_1^{h_3}, \dots, C_2^{h_l}\}$  que tiene al menos cuatro elementos.

Volvamos a tomar la notación de antes en la que llamábamos  $i_1(j)$  y  $f_1(j)$  a los vértices  $x_0^j$  y  $x_{n_j-1}^j$ , respectivamente, del ciclo  $C_1^j$  en  $D_1$  e  $i_2(j)$  y  $f_2(j)$  a los vértices  $y_0^j$  y  $y_{m_j-1}^j$  del ciclo  $C_2^j$  en  $D_2$ .

Entonces el ciclo  $C' = (i_1(h_1), C_1^{h_1}, f_1(h_1)) \cup (f_1(h_1), i_2(h_2)) \cup (i_2(h_2), C_2^{h_2}, f_2(h_2)) \cup (f_2(h_2), i_1(h_3)) \cup \dots \cup (i_2(h_l), C_2^{h_l}, f_2(h_l)) \cup (f_2(h_l), i_1(h_1))$  tiene como conjunto de vértices al conjunto  $\cup_{C \in R} \{V(C)\}$ , así el conjunto  $F = \{C', C_1^1, C_1^2, \dots, C_1^{k_1}, C_2^1, C_2^2, \dots, C_2^{k_2}\} \setminus R$  es un factor de ciclos de  $D$  de cardinalidad  $k_1 + k_2 + 1 - |R|$ , donde  $|R| \geq 4$ , de aquí que  $F$  tiene a lo más  $k_1 + k_2 - 1$  elementos.

De todos los casos podemos concluir que  $D$  posee un factor de ciclos de cardinalidad menor o igual que  $k_1 + k_2 - 1$ , como se quería demostrar.  $\square$

El teorema 26.5 nos da una cota para la cardinalidad de un factor de ciclos de una suma generalizada que quizá no sea muy buena, pero si pedimos una condición adicional, dicha cota puede mejorar, como veremos en el siguiente corolario.

**Corolario 26.2.** *Sean  $D_1$  y  $D_2$  dos digráficas ajenas en vértices y sean  $F_1 = \{C_1^1, C_1^2, \dots, C_1^{k_1}\}$  y  $F_2 = \{C_2^1, C_2^2, \dots, C_2^{k_2}\}$  dos factores de ciclos de cardinalidad mínima de  $D_1$  y  $D_2$ , respectivamente, donde  $k_1 \leq k_2$ . Si  $D \in D_1 \oplus D_2$  y  $D$  cumple que:*

- *Para cada ciclo  $C_1^i$  en  $F_1$  existe un ciclo  $C_2^{j_i}$  en  $F_2$  tal que existen alguna  $C_1^i C_2^{j_i}$ -flecha y alguna  $C_2^{j_i} C_1^i$ -flecha.*
- *$C_2^{j_i} \neq C_2^{j_h}$  si  $i \neq h$ .*

*Entonces  $D$  tiene un factor de ciclos con  $k_2$  elementos.*

*Demostración.* Sea  $D \in D_1 \oplus D_2$  como en la hipótesis. Consideremos para cada  $i \in \{1, 2, \dots, k_1\}$  la subdigráfica inducida por el conjunto  $V(C_1^i) \cup V(C_2^{j_i})$ ,  $G_i = D[V(C_1^i) \cup V(C_2^{j_i})]$ .

Dado que en  $D$  cada vértice de  $C_1^i$  es adyacente a todos los vértices de  $C_2^{j_i}$  y viceversa, en  $G_i$  también tenemos que entre cualesquiera dos vértices, uno de  $C_1^i$  y uno de  $C_2^{j_i}$ , hay exactamente una flecha, de donde  $G_i$  es un caso particular de la suma generalizada de  $C_1^i$  y  $C_2^{j_i}$ . Además, los ciclos  $C_1^i$  y  $C_2^{j_i}$  son subdigráficas de  $D$  fuertemente conexas y por hipótesis sabemos que existen una  $C_1^i C_2^{j_i}$ -flecha y una  $C_2^{j_i} C_1^i$ -flecha en  $D$  y por ende en  $G_i$ . Así, por la proposición 21 tenemos que  $G_i$  es fuertemente conexa.

Resumiendo, tenemos que  $G_i$  es un caso particular de la suma generalizada de dos digráficas hamiltonianas  $C_1^i$  y  $C_2^{j_i}$  y  $G_i$  es fuertemente conexa. Entonces por el teorema 26.1 se sigue que  $G_i$  es hamiltoniana, es decir, existe un ciclo  $\gamma_i$  en  $G_i$  cuyo conjunto de vértices es  $V(G_i) = V(C_1^i) \cup V(C_2^{j_i})$ . Notemos que al ser  $G_i$  una subdigráfica de  $D$ , el ciclo  $\gamma_i$  es también un ciclo en  $D$ .

Por otro lado, como  $C_2^{j_i} \neq C_2^{j_h}$  si  $i \neq h$  y dado que  $F_1$  y  $F_2$  son factores, se tiene que  $V(C_1^i) \cap V(C_1^h) = \emptyset$  y que  $V(C_2^{j_i}) \cap V(C_2^{j_h}) = \emptyset$ , de aquí que  $V(\gamma_i) \cap V(\gamma_h) = \emptyset$  si  $i \neq h$ .



Por lo tanto el conjunto de ciclos  $F = F' \cup F''$ , donde  $F' = \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{k_1}\}$  y  $F'' = F_2 - \{C_2^{j_1}, C_2^{j_2}, \dots, C_2^{j_{k_1}}\}$ , es un factor de ciclos de  $D$  de cardinalidad  $k_1 + (k_2 - k_1) = k_2$ , como se quería demostrar.  $\square$

La cota propuesta en el teorema 26.5 es la mejor que se puede encontrar. Para mostrarlo construiremos un ejemplo en el que se alcanza dicha cota.

**Ejemplo 26.2.** Tomemos  $C_1^1 = (x_0^1, x_1^1, x_2^1, x_3^1, x_0^1)$ ,  $C_1^2 = (x_0^2, x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_0^2)$ ,  $C_2^1 = (y_0^1, y_1^1, y_2^1, y_3^1, y_0^1)$  y  $C_2^2 = (y_0^2, y_1^2, y_2^2, y_3^2, y_0^2)$  cuatro ciclos de longitud 4 mutuamente ajenos y sean  $D_1$  la digráfica con el conjunto de vértices  $V(D_1) = V(C_1^1) \cup V(C_1^2)$  y el conjunto de flechas  $F(D_1) = F(C_1^1) \cup F(C_1^2) \cup \{(x_0^1, x_3^2), (x_0^2, x_3^1)\}$  y  $D_2$  la digráfica con el conjunto de vértices  $V(D_2) = V(C_2^1) \cup V(C_2^2)$  y el conjunto de flechas  $F(D_2) = F(C_2^1) \cup F(C_2^2) \cup \{(y_2^1, y_1^2), (y_2^2, y_1^1)\}$ . Si  $D \in D_1 \oplus D_2$  y  $D$  es fuertemente conexa, no necesariamente es hamiltoniana.

*Demostración.* Por la proposición 21 tenemos que tanto  $D_1$  como  $D_2$  son fuertemente conexas y cada una tiene un factor de mínima cardinalidad de dos ciclos,  $C_1^1$  y  $C_1^2$  en  $D_1$  y  $C_2^1$  y  $C_2^2$  en  $D_2$ .

Construyamos una digráfica  $D$  que esté en  $D_1 \oplus D_2$ , que sea fuertemente conexa y tenga un factor de ciclos de cardinalidad  $2 + 2 - 1 = 3$ .

Definamos el conjunto de flechas de  $D$  como sigue:  $F(D) = F(D_1) \cup F(D_2) \cup \{(x_1^1, y_0^1)\} \cup \{(u, v) \mid u \in V(D_2) \text{ y } v \in V(D_1)\} \setminus \{(y_0^1, x_1^1)\}$ . Con  $F(D)$  así definido podemos asegurar que  $D \in D_1 \oplus D_2$ .

Supongamos por contradicción que podemos encontrar un factor de ciclos en  $D$  de cardinalidad estrictamente menor que tres.

Por la manera en que definimos las flechas de  $D$ , se sigue que  $\delta_D^+(x_i^1) = 1$  para  $i = 2, 3$ , que  $\delta_D^+(x_i^2) = 1$  para  $i = 1, 2, 3$ , que  $\delta_D^-(y_j^1) = 1$  para  $j = 2, 3$  y que  $\delta_D^-(y_k^2) = 1$  para  $k = 0, 2, 3$ .

De donde las flechas  $(x_2^1, x_3^1)$ ,  $(x_3^1, x_0^1)$ ,  $(x_1^2, x_2^2)$ ,  $(x_2^2, x_3^2)$ ,  $(x_3^2, x_0^2)$ ,  $(y_1^1, y_2^1)$ ,  $(y_2^1, y_3^1)$ ,  $(y_1^2, y_2^2)$ ,  $(y_2^2, y_3^2)$  y  $(y_3^2, y_0^2)$  necesariamente son flechas de los ciclos del factor de cardinalidad menor.

Además, tenemos que  $\delta_D^-(y_1^2) = 2$ , como  $y_1^2$  pertenece a uno de los ciclos del factor, su predecesor en dicho ciclo debe ser alguno de sus dos invecinos  $y_2^1$  o  $y_0^2$ . Pero como  $(y_2^1, y_3^1)$  es una flecha que debe usarse en la construcción de los ciclos del factor, a  $y_1^2$  no se puede llegar desde  $y_2^1$ , por lo tanto la flecha  $(y_0^2, y_1^2)$  debe estar en el ciclo que pasa por  $y_1^2$ . Así, el ciclo  $C_2^2$  resulta obligatorio en el nuevo factor pues todas sus flechas deben usarse.

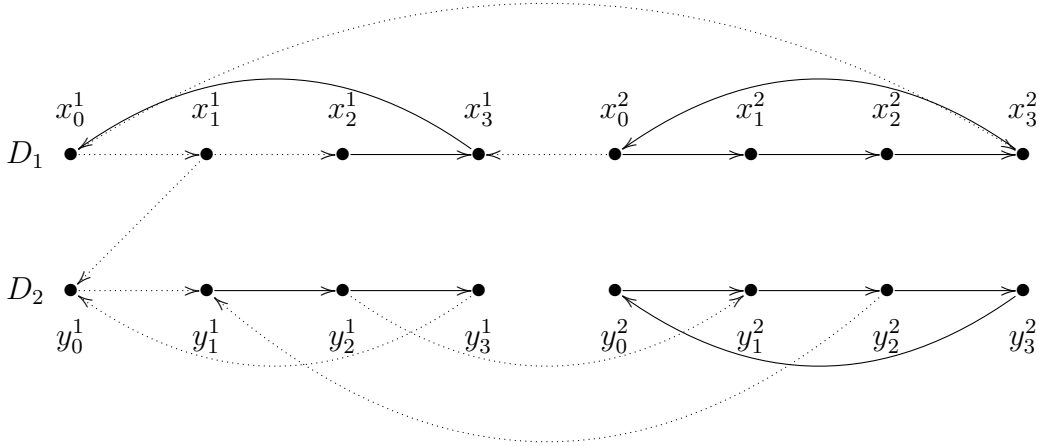


Figura 2.22: Las flechas obligadas en un factor de ciclos de cardinalidad mínima.

Por otro lado,  $\delta_D^+(x_0^2) = 2$  y como  $x_0^2$  también pertenece a uno de los ciclos del factor, su sucesor en el ciclo debe ser uno de sus dos exvecinos  $x_3^1$  o  $x_1^2$ . Sin embargo, la flecha  $(x_2^1, x_3^1)$  necesariamente pertenece a alguno de los ciclos del factor, entonces  $x_3^1$  no puede estar en el ciclo al que pertenece  $x_0^2$ , de aquí que la flecha  $(x_0^2, x_1^2)$  sea una de las del ciclo que pasa por  $x_0^2$ . Esto implica que el ciclo  $C_1^2$  es uno de los ciclos que componen el factor supuesto ya que todas sus flechas son necesarias en la construcción del mismo.

Como hay vértices de  $D$  que no están incluidos en  $C_1^2$  ni en  $C_2^2$ , el factor no puede ser de cardinalidad dos. Véase la figura 2.22.  $\square$

**Afirmación 26.3.** *Si la suma generalizada de dos digráficas es fuertemente conexa y tiene un factor de dos ciclos, dicha suma no necesariamente es hamiltoniana.*

La afirmación anterior tiene varios escenarios posibles. Ya sea que cada ciclo del factor esté totalmente contenido en una de las digráficas de la suma, que uno esté contenido en una de las digráficas y el otro tenga vértices en ambas, o bien, que ambos ciclos tengan vértices en las dos digráficas.

Si recordamos el teorema 26.1, podemos ver que el caso en el que cada uno de los ciclos del factor está contenido en una de las digráficas de la suma es exactamente la situación de dicho teorema. Pues éste afirma que si la suma generalizada de dos digráficas hamiltonianas es fuertemente conexa, entonces

la suma es hamiltoniana. Pero que cada uno de los ciclos esté contenido en una de las digráficas y que los ciclos formen un factor, significa que cada uno de ellos pasa por todos los vértices de la digráfica que los contiene, es decir, ambas digráficas son hamiltonianas y por ello podemos afirmar que en este caso la suma es hamiltoniana.

Recordemos también el teorema 22.1, en él se afirma que si una digráfica bipartita semicompleta es fuertemente conexa y posee un factor de dos ciclos, entonces es hamiltoniana. Notemos que la suma generalizada de dos digráficas vacías es bipartita semicompleta, si además la suma es fuertemente conexa y tiene un factor de dos ciclos, el teorema 22.1 nos asegura la existencia de un ciclo hamiltoniano.

Estos dos casos, que son en cierto sentido extremos, nos llevan a preguntarnos si en general una suma generalizada de dos digráficas que resulte fuertemente conexa y que posea un factor de dos ciclos deba ser hamiltoniana. Sin embargo, podemos encontrar ejemplos en los que no hay hamiltonicidad, de ahí la afirmación.

Recordemos el ejemplo 26.1, en él construimos una suma generalizada de dos digráficas fuertemente conexas que resultaba fuertemente conexa y que tenía un factor de dos ciclos pero que no era hamiltoniana, en ese ejemplo uno de los ciclos del factor estaba totalmente contenido en una de las digráficas y el otro tenía vértices en ambas digráficas. De donde, en el caso en el que uno de los ciclos del factor está contenido en una de las digráficas, aún cuando estas sean fuertemente conexas, no podemos asegurar la hamiltonicidad.

Lo anterior nos lleva a preguntarnos si teniendo dos ciclos del mismo tipo podría encontrarse un ciclo hamiltoniano, pues cuando uno de los ciclos está contenido en una digráfica y el otro viaja de una digráfica a otra, ya vimos que no necesariamente se tiene la suma hamiltoniana. Pero cuando ambos ciclos tienen vértices en las dos digráficas se podría pensar que sí se tiene la hamiltonicidad. Veremos que no siempre es así, pero daremos condiciones para poder encontrar un ciclo hamiltoniano.

**Proposición 27.** *Sean  $D_1$  y  $D_2$  dos digráficas ajenas en vértices. Si una suma generalizada  $D$  de  $D_1$  y  $D_2$  es fuertemente conexa y tiene un factor de dos ciclos  $C_1$  y  $C_2$  tales que sus conjuntos de flechas,  $F(C_1)$  y  $F(C_2)$ , consisten de flechas exteriores de  $D$  y cumplen alguna de las siguientes propiedades:*

1. *existen una  $C_1C_2$ -flecha y una  $C_2C_1$ -flecha en las flechas exteriores de  $D$  o*

2. todas las flechas exteriores de  $D$  son  $C_1C_2$ -flechas y existen una  $C_2C_1$ -flecha en  $F(D_1)$  y una  $C_2C_1$ -flecha en  $F(D_2)$

entonces  $D$  es hamiltoniana.

*Demostración.* Notemos que en cualquiera de las dos situaciones una suma generalizada,  $D \in D_1 \oplus D_2$ , es fuertemente conexa ya que los ciclos  $C_1$  y  $C_2$  son subdigráficas fuertemente conexas que abarcan todos los vértices de  $D$  pues forman un factor y como en ambos casos existen una  $C_1C_2$ -flecha y una  $C_2C_1$ -flecha, podemos afirmar por la proposición 21 que  $D$  es fuertemente conexa.

1. Supongamos que existen dos flechas exteriores de  $D$  que son una  $C_1C_2$ -flecha y una  $C_2C_1$ -flecha, respectivamente.

Consideremos la subdigráfica  $H$  de  $D$  que tiene el conjunto de vértices  $V(H) = V(D)$  y el conjunto de flechas  $F(H) = F(D) \setminus (F(D_1) \cup F(D_2))$ .

Observemos que podemos hacer una partición de los vértices de  $H$  en dos conjuntos independientes  $V(D_1)$  y  $V(D_2)$ , pues por la manera en que definimos las flechas de  $H$  no hay flechas con ambos extremos en  $V(D_1)$  o con ambos extremos en  $V(D_2)$ . Además, entre cualesquiera dos vértices, uno de  $V(D_1)$  y uno de  $V(D_2)$ , existe exactamente una flecha pues las flechas de  $H$  son las flechas exteriores de  $D$ . De lo anterior, se sigue que  $H$  es una digráfica bipartita semicompleta.

Ahora, por hipótesis sabemos que los conjuntos de flechas de  $C_1$  y  $C_2$ ,  $F(C_1)$  y  $F(C_2)$ , respectivamente, son dos subconjuntos de  $F(D) \setminus (F(D_1) \cup F(D_2)) = F(H)$ , de donde  $C_1$  y  $C_2$  son ciclos también en  $H$ . Además tenemos que existen una  $C_1C_2$ -flecha y una  $C_2C_1$ -flecha en las flechas exteriores de  $D$  y por lo tanto en las flechas de  $H$ , así, por la proposición 21 se tiene que  $H$  es fuertemente conexa.

Por lo tanto  $H$  es una digráfica bipartita semicompleta fuertemente conexa y que posee un factor de dos ciclos entonces, por el teorema 22.1, se tiene que  $H$  es hamiltoniana. Es decir, existe un ciclo  $C$  en  $H$  tal que  $V(C) = V(H)$ , pero  $V(H) = V(D)$  y como  $H$  es subdigráfica de  $D$ , tenemos que  $C$  es un ciclo en  $D$  que resulta hamiltoniano.

2. Supongamos que todas las flechas exteriores de  $D$  son  $C_1C_2$ -flechas y que existen una  $C_2C_1$ -flecha en  $F(D_1)$  y una  $C_2C_1$ -flecha en  $F(D_2)$ .

Sean  $C_1 = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_0)$  y  $C_2 = (y_0, y_1, \dots, y_{m-1}, y_0)$  los ciclos del factor. Dado que  $C_1$  y  $C_2$  no tienen flechas interiores de  $D$ , necesariamente sus vértices pertenecen alternadamente a  $V(D_1)$  y a  $V(D_2)$ , de aquí que  $C_1$  y  $C_2$  tengan longitud par, es decir tanto  $n$  como  $m$  son números pares y que tengan el mismo número de vértices en  $D_1$  que en  $D_2$ .

Supongamos sin perder generalidad que  $x_1$  y  $y_1$  son vértices de  $D_1$ , de donde  $\{x_1, x_3, \dots, x_{n-1}, y_1, y_3, \dots, y_{m-1}\} = V(D_1)$  y  $\{x_0, x_2, \dots, x_{n-2}, y_0, y_2, \dots, y_{m-2}\} = V(D_2)$ .

Como existen una  $C_2C_1$ -flecha en  $F(D_1)$  y una  $C_2C_1$ -flecha en  $F(D_2)$  se tiene que  $(y_{2a-1}, x_{2b-1})$  y  $(y_{2r}, x_{2s})$  son flechas en  $D$  para algunos  $y_{2a-1}$  y  $x_{2b-1}$  en  $V(D_1)$  y algunos  $y_{2r}$  y  $x_{2s}$  en  $V(D_2)$ .

Notemos que  $x_{2b-2}$  es un vértice de  $C_1$  que pertenece a  $V(D_2)$  y que  $x_{2s-1}$  es un vértice de  $C_1$  que pertenece a  $V(D_1)$ , mientras que  $y_{2a}$  es un vértice de  $C_2$  que pertenece a  $V(D_2)$  y  $y_{2r+1}$  es un vértice de  $C_2$  que pertenece a  $V(D_2)$ , de aquí que  $(x_{2b-2}, y_{2r+1})$  y  $(x_{2s-1}, y_{2a})$  sean flechas de  $D$ .

Por lo tanto  $C = (y_{2a-1}, x_{2b-1}) \cup (x_{2b-1}, C_1, x_{2s-1}) \cup (x_{2s-1}, y_{2a}) \cup (y_{2a}, C_2, y_{2r}) \cup (y_{2r}, x_{2s}) \cup (x_{2s}, C_1, x_{2b-2}) \cup (x_{2b-2}, y_{2r+1}) \cup (y_{2r+1}, C_2, y_{2a-1})$  es un ciclo que tiene el conjunto de vértices  $V(D_1) \cup V(D_2)$ , es decir,  $C$  es hamiltoniano.

Por lo tanto  $D \in D_1 \oplus D_2$  es hamiltoniana. □

*Nota 2.* En la proposición 27 si  $D_1$  y  $D_2$  son digráficas vacías cualquier elemento en  $D_1 \oplus D_2$  es un torneo bipartito, así si  $D$  es una digráfica en  $D_1 \oplus D_2$  que cumple las hipótesis de la proposición tenemos el resultado ya conocido en el que se afirma que si un torneo bipartito es fuertemente conexo y tiene un factor de ciclos entonces es hamiltoniano. Es decir, la proposición 27 es una pequeña generalización de dicho resultado.

En seguida construiremos un ejemplo en el que se ilustra la necesidad de alguna de las condiciones de la proposición 27.

**Ejemplo 27.1.** Sea  $D_1$  la digráfica con el conjunto de vértices  $V(D_1) = \{x_0, x_1, x_2, x_3\}$  y el conjunto de flechas  $F(D_1) = \{(x_2, x_1), (x_3, x_0)\}$  y sea  $D_2$  la digráfica con el conjunto de vértices  $V(D_2) = \{y_0, y_1, y_2, y_3\}$  y el conjunto

de flechas  $F(D_2) = \{(y_1, y_2)\}$ . Aunque una suma generalizada de  $D_1$  y  $D_2$  sea fuertemente conexa y tenga un factor de dos ciclos  $C_1$  y  $C_2$  tales que sus conjuntos de flechas,  $F(C_1)$  y  $F(C_2)$ , están contenidos en el conjunto de flechas exteriores de  $D$ , dicha suma no necesariamente es hamiltoniana.

*Demostración.* Construyamos una suma generalizada de  $D$  que sea fuertemente conexa y que tenga un factor de dos ciclos como en la hipótesis.

Si  $D$  es una suma generalizada de  $D_1$  y  $D_2$ , su conjunto de vértices es  $V(D) = V(D_1) \cup V(D_2)$  y las subdigráficas inducidas por  $V(D_1)$  y  $V(D_2)$  deben ser  $D_1$  y  $D_2$ , respectivamente, de donde los elementos en  $F(D_1)$  y  $F(D_2)$  son flechas de  $D$  y no existen más flechas con ambos extremos en  $V(D_1)$  ni con ambos extremos en  $V(D_2)$ . Además entre cualesquiera dos vértices uno de  $D_1$  y uno de  $D_2$  debe haber una y sólo una flecha. Definamos el conjunto de flechas de  $D$  como sigue:  $F(D) = F(D_1) \cup F(D_2) \cup \{(x_0, y_0), (x_0, y_2), (x_0, y_3), (x_1, y_1), (x_1, y_2), (x_1, y_3), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (y_0, x_1), (y_0, x_2), (y_0, x_3), (y_1, x_0), (y_1, x_2), (y_1, x_3), (y_2, x_3), (y_3, x_2)\}$ . Con  $D$  así definida sabemos que pertenece a  $D_1 \oplus D_2$ , que tiene dos ciclos,  $C_1 = (x_0, y_0, x_1, y_1, x_0)$  y  $C_2 = (x_2, y_2, x_3, y_3, x_2)$ , que forman un factor y cuyas flechas son flechas exteriores de  $D$ . Dado que existen una  $C_1C_2$ -flecha y una  $C_2C_1$ -flecha podemos afirmar que  $D$  es fuertemente conexa.

Supongamos por contradicción que existe un ciclo hamiltoniano  $C$  en  $D$ .

Por la forma en que definimos las flechas de  $D$ , se tiene que  $\delta^-(y_0) = 1$ , que  $\delta^-(y_1) = 1$ , que  $\delta^+(y_2) = 1$  y que  $\delta^+(y_3) = 1$ , entonces las flechas  $(x_0, y_0)$ ,  $(x_1, y_1)$ ,  $(y_2, x_3)$  y  $(y_3, x_2)$  necesariamente son flechas de  $C$ . Además, como  $\delta^+(y_0) = 3$  y sus tres exvecinos son  $x_1$ ,  $x_2$  y  $x_3$ , se tiene que  $(y_0, x_1)$  es una flecha de  $C$ , pues los antecesores de  $x_2$  y  $x_3$  en  $C$  son  $y_3$  y  $y_2$ , respectivamente. Ahora bien,  $\delta^+(x_2) = 2$  donde  $x_1$  y  $y_2$  son sus exvecinos, así,  $(x_2, y_2)$  es una flecha de  $C$  pues  $x_1$  es sucesor de  $y_0$  en  $C$ . Dado que  $\delta^+(y_1) = 3$  y que dos de sus exvecinos,  $y_2$  y  $y_3$ , ya tienen asignado un antecesor en  $C$ , se sigue que  $(y_1, x_0)$  debe ser una flecha en  $C$ , lo cual es una contradicción pues  $C' = (x_0, y_0, x_1, y_1, x_0)$  es un ciclo en  $D$  que está contenido en  $C$ . Véase la figura 2.24.  $\square$

De la proposición 27 se tiene el siguiente corolario.

**Corolario 27.1.** *Sean  $D_1$  y  $D_2$  dos digráficas fuertemente conexas. Si una suma generalizada de  $D_1$  y  $D_2$  es fuertemente conexa y tiene un factor de dos ciclos,  $C_1$  y  $C_2$ , tales que sus conjuntos de flechas,  $F(C_1)$  y  $F(C_2)$ , están*

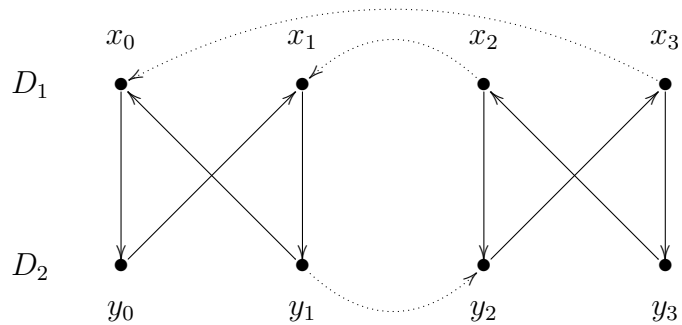


Figura 2.23: Los ciclos del factor en  $D$ .

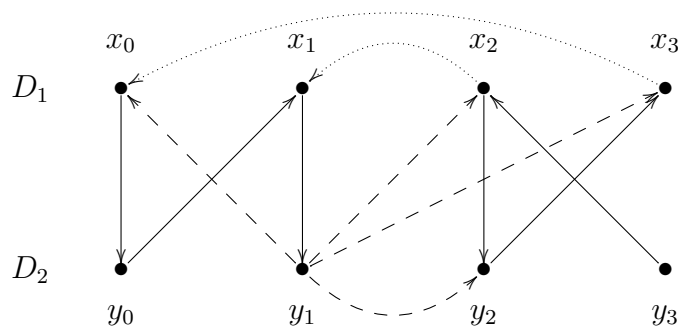


Figura 2.24: Las flechas obligadas en caso de existir un ciclo hamiltoniano en  $D$ .

*contenidos en el conjunto de flechas exteriores de  $D$ , entonces dicha suma es hamiltoniana.*

*Demostración.* Sea  $D \in D_1 \oplus D_2$  como en la hipótesis.

Como los ciclos  $C_1$  y  $C_2$  forman un factor y no tienen flechas en  $D_1$  ni en  $D_2$ , tanto  $C_1$  como  $C_2$  tienen al menos un vértice en  $V(D_1)$  y al menos un vértice en  $V(D_2)$ . Además, como  $D_1$  y  $D_2$  son fuertemente conexas, existen al menos una  $C_2C_1$ -flecha en  $F(D_1)$  y al menos una  $C_2C_1$ -flecha en  $F(D_2)$ .

Ahora, como  $D$  es fuertemente conexa también sabemos que existen una  $C_1C_2$ - flecha y una  $C_2C_1$ -flecha.

Así, si en el conjunto de flechas exteriores de  $D$  hay al menos una  $C_1C_2$ -flecha y al menos una  $C_2C_1$ - flecha, tenemos por la proposición 27 que  $D$  es hamiltoniana. Si no es así, podemos suponer sin perder generalidad que todas las flechas exteriores de  $D$  son  $C_1C_2$ -flechas y como ya sabemos que existen una  $C_2C_1$ -flecha en  $F(D_1)$  y una  $C_2C_1$ -flecha en  $F(D_2)$  se sigue, por la proposición 27, que  $D$  es hamiltoniana.

En cualquier caso  $D$  es hamiltoniana, como se quería demostrar.  $\square$

Los resultados anteriores se deben a la característica que cumplen los ciclos del factor, esto es, que ninguno de los ciclos tiene flechas de las digráficas de la suma. Sin embargo cuando los ciclos no cumplen esta condición, aún si los sumandos son fuertemente conexas, la suma puede que no sea hamiltoniana, de aquí la siguiente afirmación.

**Afirmación 27.1.** *Si una suma generalizada de dos digráficas fuertemente conexas es fuertemente conexa y tiene un factor de dos ciclos cuyos conjuntos de flechas tienen tanto flechas interiores como exteriores, dicha suma no necesariamente es hamiltoniana.*

En el ejemplo siguiente se ilustrará la afirmación anterior.

**Ejemplo 27.2.** *Sea  $D_1$  la digráfica con el conjunto de vértices  $V(D_1) = \{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$  y el conjunto de flechas  $F(D_1) = \{(x_0, x_1), (x_0, x_5), (x_1, x_2), (x_2, x_0), (x_3, x_2), (x_3, x_4), (x_4, x_5), (x_5, x_3)\}$  y sea  $D_2$  la digráfica con el conjunto de vértices  $V(D_2) = \{y_0, y_1, y_2\}$  y el conjunto de flechas  $F(D_2) = \{(y_0, y_1), (y_1, y_2), (y_2, y_0)\}$ , aunque la suma generalizada de  $D_1$  y  $D_2$  tenga un factor de dos ciclos que tienen alguna flecha en uno de los sumandos, no necesariamente es hamiltoniana.*



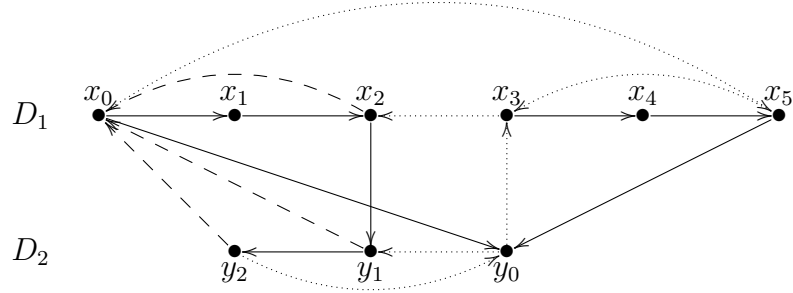


Figura 2.25: Las flechas obligadas en caso de existir un ciclo hamiltoniano en  $D$ .

*Demostración.* Construyamos una digráfica  $D \in D_1 \oplus D_2$  que sea fuertemente conexa y que tenga un factor de ciclos con al menos un flecha en las flechas interiores de  $D$ . Si  $D \in D_1 \oplus D_2$  tiene el conjunto de vértices  $V(D_1) \cup V(D_2)$  y las digráficas inducidas por  $V(D_1)$  y  $V(D_2)$  serán  $D_1$  y  $D_2$ , respectivamente, de donde las flechas en  $F(D_1)$  y en  $F(D_2)$  serán flechas también en  $D$  y cualquier otra flecha de  $D$  tendrá un extremo en  $V(D_1)$  y otro en  $V(D_2)$ . Además, entre cada par de vértices, uno de  $D_1$  y otro de  $D_2$  habrá exactamente una flecha, para ello definiremos el conjunto de flechas de  $D$  como sigue  $F(D) = F(D_1) \cup F(D_2) \cup \{(x_0, y_0), (x_2, y_1), (x_5, y_0)\} \cup \{(u, v) \mid u \in V(D_2) \text{ y } v \in V(D_1)\} \setminus \{(x_0, y_0), (x_2, y_1), (x_5, y_0)\}$ .

Los ciclos  $C_1 = (x_0, x_1, x_2, y_1, y_2, x_0)$  y  $C_2 = (x_3, x_4, x_5, y_0, x_3)$  forman un factor de  $D$  en el que ambos ciclos tienen flechas interiores de  $D$ , sin embargo  $D$  no es hamiltoniana.

Supongamos por contradicción que  $D$  tiene un ciclo hamiltoniano  $C$ . Como  $\delta^-(y_2) = 1$ ,  $\delta^+(x_1) = 1$  y  $\delta^+(x_4) = 1$ , las flechas  $(y_1, y_2)$ ,  $(x_1, x_2)$  y  $(x_4, x_5)$  deben ser flechas de  $C$ . Por otro lado  $\delta^+(x_3) = 2$ , entonces el sucesor de  $x_3$  en  $D$  debe ser uno de sus dos exvecinos,  $x_2$  o  $x_4$ , pero como  $x_2$  es sucesor de  $x_1$ , tendremos que  $x_4$  es el sucesor de  $x_3$  en  $C$ . Además  $\delta^+(x_5) = 2$  y sus exvecinos son  $x_3$  y  $y_0$ , por lo que  $(x_5, y_0)$  es una flecha de  $C$ , ya que de no ser así  $C$  tendría como subsucesión el ciclo  $(x_3, x_4, x_5, x_3)$  lo cual es imposible. Ahora,  $\delta^+(x_0) = 3$  y sus tres exvecinos son  $x_1$ ,  $x_5$  y  $y_0$ , por lo que su sucesor en  $C$  es alguno de ellos, sin embargo, los antecesores de  $x_5$  y  $y_0$  en  $C$  son  $x_4$  y  $x_3$ , respectivamente, de donde  $(x_0, x_1)$  es una flecha de  $C$ . Luego,  $\delta^+(x_2) = 2$  donde sus exvecinos son  $x_0$  y  $y_1$ , por lo que  $(x_2, y_1)$  debe ser una flecha de  $C$ , pues si  $(x_2, x_0)$  lo fuera,  $C$  contendría al ciclo  $(x_0, x_1, x_2, x_0)$  lo cual es imposible. Por último,  $\delta^-(x_0) = 3$  y sus invecinos son  $x_2$ ,  $y_1$  y  $y_2$ ,

pero si cualquiera de ellos fuese su antecesor en  $C$ , este último contendría un ciclo más pequeño, lo cual es una contradicción. Véase la figura 2.25.

Por lo tanto  $D$  no es hamiltoniana, como se quería demostrar.  $\square$



## Capítulo 3

### Comentarios finales

Este trabajo deja algunos problemas abiertos. En el ejemplo 27.2 vimos que si dos ciclos que tienen flechas interiores forman un factor en una suma generalizada de dos digráficas que sea fuertemente conexa, no necesariamente existe un ciclo hamiltoniano, sin embargo uno de los ciclos que utilizamos para ilustrar la situación no tiene flechas en uno de los sumandos, por lo que cabe preguntarse si en el caso en el que cada uno de los ciclos del factor tiene al menos una flecha en cada una de las digráficas de la suma necesariamente exista un ciclo hamiltoniano. Si fuese así nos preguntaremos si el resultado se puede extender para un factor con más ciclos o bien si se puede adaptar a una suma de más digráficas. Por otra parte en la proposición 27 se probó que si las flechas de los dos ciclos del factor son exteriores y existen dos flechas adecuadas entonces podemos hacer un nuevo ciclo por todos los vértices del factor, en este caso nos preguntamos si podríamos hacer lo mismo con un factor que tenga un mayor número de ciclos y obtener así la generalización completa para el resultado de torneos bipartitos que mencionamos antes. Dicho resultado no es inmediato ya que las flechas del ciclo nuevo no necesariamente están contenidas en las flechas exteriores de la suma.



# Bibliografía

- [1] J. Bang-Jensen, Arc-local tournament digraphs: a generalization of tournaments and bipartite tournaments. Technical Report Preprint no. 10, Department of Mathematics and Computer Science, University of Southern Denmark, 1993.
- [2] J. Bang-Jensen, Locally semicomplete digraphs: a generalization of tournaments. *J. Graph Theory*. **14(3)** (1990) 371-390.
- [3] J. Bang-Jensen, The structure of strong arc-locally semicomplete digraphs. *Discrete Math.* **283** (2004) 1-6.
- [4] J. Bang-Jensen and G. Gutin, Digraphs: theory, algorithms and applications. Monographs in mathematics. Springer, 2001.
- [5] J. Bang-Jensen and G. Gutin, Generalizations of tournaments: a survey. *J. Graph Theory*. **28** (1998) 171-202.
- [6] J. Bang-Jensen. G. Gutin and J. Huang, A sufficient condition for a semicomplete multipartite digraph to be hamiltonian. *Discrete Math.* **161** (1996) 1-12.
- [7] P. Camion, Chemins et circuits hamiltoniens des graphes complets. *C. R. Acad. Sci. Paris* **249** (1959) 2151-2152.
- [8] H. Galeana-Sánchez, A new characterization of perfect graphs. *Discrete Math.* **312** (2012) 2751-2755.
- [9] H. Galeana-Sánchez and I.A. Goldfeder, A classification of all arc-locally semicomplete digraphs. *Discrete Math.* **312** (2012) 1883-1891.

- [10] H. Galeana-Sánchez and I.A. Goldfeder, Hamiltonian cycles in a generalization of bipartite tournaments with a cycle factor. *Discrete Math.* **315-316** (2014) 135-143.
- [11] H. Galeana-Sánchez. I.A. Goldfeder and I. Urrutia, On the structure of strong 3-quasi-transitive digraphs. *Discrete Math.* **310** (2010) 2495-2498.
- [12] G. Gutin. A criterion for complete bipartite digraphs to be Hamiltonian. *Vestsī Acad. Navuk BSSR Ser.Fiz.-Mat. Navuk* **1** (1984) 109–110.
- [13] S. Wang and R. Wang. The structure of strong arc-locally in-semicomplete digraphs, *Discrete Math.* **309** (2009) 6555-6562.